Elli Kiiski

2021 Kandikaatopaikka

1 Hardy-Wrightin todistuksen perkaamista

G. H. Hardyn ja *E. M. Wrightin* kirjan *An Introduction to the theory of numbers* sivulla 469 olevan ϕ-funktion alarajan todistuksen läpikäyntiä.

1.1 Määrittely: mitä todistetaan

Aloitetaan määrittelemällä kuvaus

$$f(n) = \frac{\phi(n)e^{\gamma}\log\log n}{n},$$

missä γ on Eulerin vakio.

Halutaan todistaa, että $\liminf f(n) = 1$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että ϕ-funktion alaraja on $\frac{n}{e^{\gamma}\log\log n}$.

1.2 Määrittely: miten todistetaan

Riittää löytää funktiot $F_1(t)$ ja $F_2(t)$, joille pätee

1. $\lim_{t\to\infty} F_1(t) = 1$ ja $\lim_{t\to\infty} F_2(t) = 1$
2. $f(n) \geq F_1(\log n)$ kaikilla $n \geq 3$
3. $f(n_j) \leq \frac{1}{F_2(j)}$ äärettömällä kasvavalla jonolla $n_2, n_3, ...$

Kirjan todistuksessa todistetaan myös sigmafunktion $\sigma(n)$ yläraja ja käytetään sitä hyväksi funktion F_2 löytämiseksi. Kysymys kuuluu, että tarvitaanko sigmafunktio välttämättä, että saadaan ϕ-funktion alaraja todistetuksi. Se on kuitenkin vasta todistuksen toisen osan ongelma, joten jätetään se hetkeksi sikseen.

1.3 Todistus osa 1: $f(n) \geq F_1(\log n)$

Olkoot $p_1, p_2, ..., p_{r-\rho} \leq \log n$ ja $p_{r-\rho+1}, ..., p_r > \log n$ luvun n alkutekijöitä. Siis luvulla n on yhteensä r alkutekijää, joista $\log n$:ää suurempia on ρ kappaletta.

Nyt

$$(\log n)^{\rho} < p_{r-\rho+1} \cdot p_{r-\rho+2} \cdots p_r \leq n, \tag{1}$$

mistä seuraa

$$\rho < \frac{\log n}{\log\log n}. \tag{2}$$

Eli $\log n$:ää suurempia alkulukutekijöitä on alle $\frac{\log n}{\log\log n}$ kappaletta. Nyt tulokaavaa käyttäen ϕ-funktion suhde n:ään voidaan ilmaista seuraavasti

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i}) \tag{3}$$

$$= \prod_{i=1}^{r-\rho}(1-\frac{1}{p_i})\prod_{i=r-\rho+1}^{r}(1-\frac{1}{p_i}) \tag{4}$$

$$\geq \left(\prod_{i=1}^{r-\rho}(1-\frac{1}{p_i})\right)(1-\frac{1}{\log n})^{\rho} \tag{5}$$

$$> \left(\prod_{i=1}^{r-\rho}(1-\frac{1}{p_i})\right)(1-\frac{1}{\log n})^{\frac{\log n}{\log\log n}}. \tag{6}$$

Näin ollen voidaan valita

$$F_1(t) = e^{\gamma}\log t\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}}\prod_{p\leq t}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

jolloin

$$\begin{aligned}
F_1(\log n) &= e^{\gamma}\log\log n\left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\log n}}\prod_{p\leq\log n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\\
&= e^{\gamma}\log\log n\left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\log n}}\prod_{i=1}^{r-\rho}\left(1-\frac{1}{p}\right)\\
&\leq \frac{\phi(n)}{n}e^{\gamma}\log\log n = f(n).
\end{aligned}$$

Kuitenkin funktiolle F_1 pätee Mertenin kolmannen lauseen nojalla

$$\lim_{t\to\infty}F_1(t) = \lim_{t\to\infty}e^{\gamma}\log t\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}}\prod_{p\leq t}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1$$

1.4 Todistus osa 2: $f(n_j) \leq \frac{1}{F_2(j)}$

Olkoon $n_j = \prod_{p\leq e^j}p^j$, missä $j\geq 2\in\mathbb{N}$ (?), jolloin maailman hämmentävimmän lauseen (Hardy-Wright thm 414) mukaan (*)

$$\log n_j = \log\prod_{p\leq e^j}p^j = j\log\prod_{p\leq e^j}p) = j\vartheta(e^j)\overset{*}{\leq} Aje^j \tag{7}$$

ja edelleen

$$\log\log n_j = \log Aje^j = \log A + \log j + \log e^j = \log A + \log j + j \tag{8}$$

Ruokatauko

2 Tulokaavan todistus

Eulerin tulokaava arvon $\phi(n)$ laskemiseksi on hyvinkin tärkeä palanen eli todistetaan se nyt suoraan englanniksi niin ei tarvitse erikseen kääntää.

2.1 Eulers's product formula

Theorem 2.2. *Euler's product formula*

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

where $\prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ means the product over *distinct* primes that divide n.

Proof. Assume first that $n = p^k$, where $p \in \mathbb{P}$. Now for every x, for which $gdc(p^k, x) > 1$, holds $x = mp^{k-1}$ for some $m \in \{1, 2, ..., p^{k-1}\}$.

Hence

$$\phi(n) = \phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k - \frac{p^k}{p} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^k = \left(1 - \frac{1}{p}\right) n.$$

Then, in the general case, assume $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}$, where $p_1, p_2, ..., p_r$ are distinct primes that divide n and $k_1, k_2, ..., k_r$ their powers respectively.

Now, since ϕ is a multiplicative function

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= \phi(p_1^{k_1} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}) \\
&= \phi(p_1^{k_1})\, \phi(p_2^{k_2}) \cdots \phi(p_r^{k_r}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) p_2^{k_2} \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) p_r^{k_r} \\
&= \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) p_i^{k_i} \\
&= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).
\end{aligned}$$

□

3 Mertenin kolmas lause

Mertenin kolmas lause

$$\lim_{n\to\infty} \log n \prod_{p \le n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-\gamma}$$

tarvitaan alarajan todistuksessa F_1-funktion raja-arvon näyttämiseksi.