

Elli Kiiski

## 2021 Kandikaatopaikka

# 1 Hardy-Wrightin todistuksen perkaamista

*G. H. Hardy*n ja *E. M. Wrightin* kirjan *An Introduction to the theory of numbers* sivulla 469 olevan  $\phi$ -funktion alarajan todistuksen läpikäyntiä.

## 1.1 Määrittely: mitä todistetaan

Aloitetaan määrittelemällä kuvaus

$$f(n) = \frac{\phi(n)e^\gamma \log \log n}{n},$$

missä  $\gamma$  on Eulerin vakio.

Halutaan todistaa, että  $\liminf f(n) = 1$ , mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että  $\phi$ -funktion alaraja on  $\frac{n}{e^\gamma \log \log n}$ .

## 1.2 Määrittely: miten todistetaan

Riittää löytää funktiot  $F_1(t)$  ja  $F_2(t)$ , joille pätee

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = 1$  ja  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_2(t) = 1$
2.  $f(n) \geq F_1(\log n)$  kaikilla  $n \geq 3$
3.  $f(n_j) \leq \frac{1}{F_2(j)}$  äärettömällä kasvavalla jonolla  $n_2, n_3, \dots$

”Tämä tarkoittaa, että on löydetty funktio  $F_1(\log n)$ , jonka on sama limes infimum on yksi, mutta funktio on kaikkialla suurempi kuin  $f(n)$ . Tällöin funktion  $f(n)$  limes infimum on enintään yksi. Vastaavasti alapuolen kanssa.”

## 1.3 Todistus osa 1: $f(n) \geq F_1(\log n)$

Olko  $p_1, p_2, \dots, p_{r-\rho} \leq \log n$  ja  $p_{r-\rho+1}, \dots, p_r > \log n$  luvun  $n$  alkutekijöitä. Siis luvulla  $n$  on yhteensä  $r$  alkutekijää, joista  $\log n$ :ää suurempia on  $\rho$  kappaletta.

Nyt

$$(\log n)^\rho < p_{r-\rho+1} \cdot p_{r-\rho+2} \cdots p_r \leq n, \quad (1)$$

mistä seuraa

$$\rho < \frac{\log n}{\log \log n}. \quad (2)$$

Eli  $\log n$ :ää suurempia alkulukutekijöitä on alle  $\frac{\log n}{\log \log n}$  kappaletta. Nyt tulokaavaa käyttäen  $\phi$ -funktion suhde  $n$ :ään voidaan ilmaista seuraavasti

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad (3)$$

$$= \prod_{i=1}^{r-\rho} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \prod_{i=r-\rho+1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad (4)$$

$$\geq \left( \prod_{i=1}^{r-\rho} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^\rho \quad (5)$$

$$> \left( \prod_{i=1}^{r-\rho} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \right) \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log \log n}}. \quad (6)$$

Näin ollen voidaan valita

$$F_1(t) = e^\gamma \log t \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

jolloin

$$\begin{aligned} F_1(\log n) &= e^\gamma \log \log n \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log \log n}} \prod_{p \leq \log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= e^\gamma \log \log n \left(1 - \frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log \log n}} \prod_{i=1}^{r-\rho} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ &\leq \frac{\phi(n)}{n} e^\gamma \log \log n = f(n). \end{aligned}$$

Kuitenkin funktiolle  $F_1$  pätee Mertenin kolmannen lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^\gamma \log t \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}} \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^\gamma \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}} \left( \log t \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^\gamma \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}} e^{-\gamma} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Täten funktion  $f$  limes infium on korkeintaan 1.

### 1.4 Todistus osa 2: $f(n_j) \leq \frac{1}{F_2(j)}$

Olkoon  $n_j = \prod_{p \leq e^j} p^j$ , missä  $j \geq 2 \in \mathbb{N}$  (?), jolloin maailman hämmäyttävimmän lauseen (Hardy-Wright thm 414) mukaan (\*)

$$\log n_j = \log \prod_{p \leq e^j} p^j = j \log \prod_{p \leq e^j} p = j \vartheta(e^j) \stackrel{*}{\leq} A j e^j \quad (7)$$

ja edelleen

$$\log \log n_j = \log A j e^j = \log A + \log j + \log e^j = \log A + \log j + j \quad (8)$$

Jatketaan tästä pian

## 2 Tulokaavan todistus

Eulerin tulokaava arvon  $\phi(n)$  laskemiseksi on hyvinkin tärkeä palanen eli todistetaan se nyt suoraan englanniksi niin ei tarvitse erikseen kääntää.

### 2.1 Eulers's product formula

**Theorem 2.2.** *Euler's product formula*

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

where  $\prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$  means the product over *distinct* primes that divide  $n$ .

*Proof.* Assume first that  $n = p^k$ , where  $p \in \mathbb{P}$ . Now for every  $x$ , for which  $\gcd(p^k, x) > 1$ , holds  $x = mp^{k-1}$  for some  $m \in \{1, 2, \dots, p^{k-1}\}$ .

Hence

$$\phi(n) = \phi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k - \frac{p^k}{p} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^k = \left(1 - \frac{1}{p}\right) n.$$

Then, in the general case, assume  $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$ , where  $p_1, p_2, \dots, p_r$  are distinct primes that divide  $n$  and  $k_1, k_2, \dots, k_r$  their powers respectively.

Now, since  $\phi$  is a multiplicative function

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= \phi(p_1^{k_1} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}) \\
&= \phi(p_1^{k_1}) \phi(p_2^{k_2}) \cdots \phi(p_r^{k_r}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) p_2^{k_2} \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) p_r^{k_r} \\
&= \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) p_i^{k_i} \\
&= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).
\end{aligned}$$

□

### 3 Merten's (third) theorem

**Theorem 3.1.** *Merten's (third) theorem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log n \prod_{p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-\gamma}$$

where  $\gamma$  is the Euler's constant.

*Proof.* Oh, this seems like a työmaa

□