Eulerin ϕ-funktion koko kun $n \to \infty$

Elli Kiiski

2020

1 Tiivistelmä

Viittaus [1] toinenkin [2]

2 Johdanto

3 Määritelmiä ja merkintätapoja

Merkintätapa 3.1. *Jaollisuus* $a|b$

Olkoot $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{Z}$ siten, että luku b on jaollinen luvulla a. Tällöin merkitään $a|b$.

Määritelmä 3.2. *Suurin yhteinen tekijä,* $syt(a, b)$

Olkoot $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Tällöin on olemassa yksiselitteinen $d \in \mathbb{N}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $d|a$ ja $d|b$
2. jos $d'|a$ ja $d'|b$, niin $d'|d$

Lukua d kutsutaan lukujen a ja b suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi, ja merkitään $syt(a, b) = d$.

Määritelmä 3.3. *Alkuluku*

Luku $p \in \mathbb{N}$ on alkuluku, jos $p \geq 2$ ja jokaisella $k \in \mathbb{N}$ jaollisuudesta $k|p$ seuraa $k \in 1, p$. Tällöin merkitään $p \in \mathbb{P}$.

Toisin sanoen alkulukuja ovat kaikki lukua 1 suuremmat luonnolliset luvut, jotka ovat jaollisia vain itsellään ja luvulla 1.

Määritelmä 3.4. *Suhteellinen alkuluku*

Jos $syt(a, b) = 1$, kutsutaan lukuja a ja b suhteellisiksi alkuluvuiksi tai alkuluvuiksi toistensa suhteen.

4 Eulerin ϕ-funktio ja Möbiuksen μ-funktio

Määritellään seuraavaksi kaksi funktiota: itse ϕ-funktio sekä myöhemmin hyödylliseksi apufunktioksi osoittautuva μ-funktio.

4.1 Eulerin ϕ-funktio

Eulerin ϕ-funktio on lukuteoreettinen funktio, eli se kuvautuu luonnollisilta luvuilta luonnollisille luvuille. Nönnönnöö

Määritelmä 4.2. *Eulerin ϕ-funktio* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Määritetään $\phi(1) = 1$. Kaikilla $n \geq 2$, $\phi(n)$ on lukujen $a \in \{1, 2, ..., n\}$ määrä, joille pätee $syt(a, n) = 1$.

Toisin sanoen Eulerin ϕ-funktion arvo luonnollisella luvulla n on sitä pienempien luonnolisten lukujen määrä, jotka ovat alkulukuja sen suhteen.

4.3 Möbiuksen μ-funktio

Möbiuksen μ-funktio puolestaan nönnönöö

Määritelmä 4.4. *Möbiuksen μ-funktio* $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
Määritelmä tähän

5 Eulerin ϕ-funktion rajat

Todisteteaan funktion triviaali yläraja ja tutkitaan mutkikkaampaa alarajaa.

5.1 Eulerin ϕ-funktion yläraja

Lause 5.2. *Eulerin ϕ-funktion yläraja*
Kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$ pätee $\phi(n) < n$.

Todistus. Suoraan määritelmästä seuraa, että $\phi(n) \leq n$, koska joukossa $\{1, 2, ..., n\}$ on n alkiota ja siten niiden joukosta ei voi löytyä yli n kappaletta ehtoa täyttävää lukua. Lisäksi jokaisella n pätee $syt(n, n) = n$. Täten millään $n \geq 2$ ei voi olla $\phi(n) = n$.

Siis $\phi(n) < n$ jokaisella $n \geq 2$.

□

Lause 5.3. *Alkuluvuilla $\phi(p) = p - 1$*
Jokaisella alkuluvulla $p \in \mathbb{P}$ pätee $\phi(p) = p - 1$.

Todistus. Olkoon $p \in \mathbb{P}$. Tällöin jokaisella $k < p$, $k \in \mathbb{N}$ pätee $syt(k, p) = 1$, mistä seuraa suoraan $\phi(p) = p - 1$. PITÄISIKÖ TÄÄ TODISTAA PAREMMIN

□

Lause 5.4. ϕ-funktion pienin yläraja
Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $\phi(n) \leq n - 1$.

Todistus. Tulos saadaan suoraan yhdistämällä lauseet ÄSKEINEN ja SITÄ EDELLINEN.

□

5.5 Eulerin ϕ-funktion alaraja

5.6 $\phi(n) < \sqrt{(n)}$?

Lähdetään tutkimaan ϕ-funktion alarajaa tarkastelemalla onko olemassa suuria luonnollisia lukuja, joilla $\phi(n) < \sqrt{n}$. Huomataan, että ainakin vielä luvulla $n = 6$ pätee $\phi(6) = 2 < \sqrt{(6)}$, mutta sen jälkeen arvot näyttäisivät järjestään ylittävän vastaavan neliöjuuren arvon.

Tarkastellaan tilannetta tarkemmin jos osataan ehehe

6 Asiaaa

7 Asiaaaa

8 Lähteet

[1] E. M. Wright G. H. Hardy. *An Introduction to the Theory of Numbers.* 2008.

[2] Eero Saksman. "Introduction to Number Theory". 2019.