Eulerin ϕ-funktion koko kun $n \to \infty$

Elli Kiiski

2020

1 Tiivistelmä

Viittaus [1] toinenkin [2]

2 Johdanto

3 Määritelmiä ja merkintätapoja

Merkintätapa 3.1. *Jaollisuus* $a|b$

Olkoot $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{Z}$ siten, että luku b on jaollinen luvulla a. Tällöin merkitään $a|b$.

Määritelmä 3.2. *Suurin yhteinen tekijä,* $syt(a,b)$

Olkoot $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Tällöin on olemassa yksiselitteinen $d \in \mathbb{N}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $d|a$ ja $d|b$
2. jos $d'|a$ ja $d'|b$, niin $d'|d$

Lukua d kutsutaan lukujen a ja b suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi, ja merkitään $syt(a,b) = d$.

Määritelmä 3.3. *Suhteellinen alkuluku*

Jos $syt(a,b) = 1$, kutsutaan lukuja a ja b suhteellisiksi alkuluvuiksi tai alkuluvuiksi toistensa suhteen.

Määritelmä 3.4. *Eulerin ϕ-funktio* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Määritetään $\phi(1) = 1$. Kaikilla $n \geq 2$, $\phi(n)$ on lukujen $a \in \{1, 2, ..., n\}$ määrä, joille pätee $syt(a,n) = 1$.

Toisin sanoen Eulerin ϕ-funktion arvo luonnollisella luvulla n on sitä pienempien luonnolisten lukujen määrä, jotka ovat alkulukuja sen suhteen.

4 Eulerin ϕ-funktion yläraja

Lause 4.1. *Eulerin ϕ-funktion yläraja*

Kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$ pätee $\phi(n) < n$.

Todistus. Suoraan määritelmästä seuraa, että $\phi(n) \leq n$, koska joukossa $\{1, 2, ..., n\}$ on n alkiota. Lisäksi jokaisella n pätee $syt(n,n) = n$. Täten millään $n \geq 2$ ei voi olla $\phi(n) = n$.

Siis $\phi(n) < n$ jokaisella $n \geq 2$.

$\square$

5 Asiaaa

6 Asiaaaa

7 Lähteet

[1] E. M. Wright G. H. Hardy. *An Introduction to the Theory of Numbers.* 2008.

[2] Eero Saksman. ”Introduction to Number Theory”. 2019.