

Eulerin ϕ -funktion koko kun $n \rightarrow \infty$

Elli Kiiski

2020

1 Tiivistelmä

Viittaus [1] toinenkin [2]

2 Johdanto

3 Määritelmiä ja merkintätapoja

Merkintätapa 3.1. *Jaollisuus* $a|b$

Olkoot $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{Z}$ siten, että luku b on jaollinen luvulla a . Tällöin merkitään $a|b$.

Määritelmä 3.2. *Suurin yhteinen tekijä*, $\text{syt}(a, b)$

Olkoot $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Tällöin on olemassa yksiselitteinen $d \in \mathbb{N}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $d|a$ ja $d|b$
2. jos $d'|a$ ja $d'|b$, niin $d'|d$

Lukua d kutsutaan lukujen a ja b suurimmaksi yhteiseksi tekijäksi, ja merkitään $\text{syt}(a, b) = d$.

Määritelmä 3.3. *Suhteellinen alkuluku*

Jos $\text{syt}(a, b) = 1$, kutsutaan lukuja a ja b suhteellisiksi alkuluvuiksi tai alkuluvuiksi toistensa suhteen.

4 Eulerin ϕ -funktio ja Möbiuksen μ -funktio

Määritellään seuraavaksi kaksi funktiota: itse ϕ -funktio sekä myöhemmin hyödylliseksi apufunktioksi osoittautuva μ -funktio.

4.1 Eulerin ϕ -funktio

Eulerin ϕ -funktio on lukuteoreettinen funktio, eli se kuvautuu luonnollisilta luvuilta luonnollisille luvuille. Nönnönnöö

Määritelmä 4.2. *Eulerin ϕ -funktio* $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Määritetään $\phi(1) = 1$. Kaikilla $n \geq 2$, $\phi(n)$ on lukujen $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ määrä, joille pätee $\text{syt}(a, n) = 1$.

Toisin sanoen Eulerin ϕ -funktion arvo luonnollisella luvulla n on sitä pienempien luonnollisten lukujen määrä, jotka ovat alkulukuja sen suhteen.

4.3 Möbiuksen μ -funktio

Möbiuksen μ -funktio puolestaan nönnönnöö

Määritelmä 4.4. *Möbiuksen μ -funktio* $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Määritelmä tähän

5 Eulerin ϕ -funktion rajat

Todistetaan funktion triviaali yläraja ja tutkitaan mutkikkaampaa alarajaa.

5.1 Eulerin ϕ -funktion yläraja

Lause 5.2. *Eulerin ϕ -funktion yläraja*

Kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$ pätee $\phi(n) < n$.

Todistus. Suoraan määritelmästä seuraa, että $\phi(n) \leq n$, koska joukossa $\{1, 2, \dots, n\}$ on n alkioita. Lisäksi jokaisella n pätee $\phi(n, n) = n$. Täten millään $n \geq 2$ ei voi olla $\phi(n) = n$.

Siis $\phi(n) < n$ jokaisella $n \geq 2$.

□

5.3 Eulerin ϕ -funktion alaraja

6 Asiaaa

7 Asiaaaa

8 Lähteet

- [1] E. M. Wright G. H. Hardy. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 2008.
- [2] Eero Saksman. "Introduction to Number Theory". 2019.