Elli Kiiski

2021 Kandikaatopaikka

1 Hardy-Wrightin todistuksen perkaamista

G. H. Hardyn ja *E. M. Wrightin* kirjan *An Introduction to the theory of numbers* sivulla 469 olevan ϕ-funktion alarajan todistuksen läpikäyntiä.

1.1 Määrittely: mitä todistetaan

Aloitetaan määrittelemällä kuvaus

$$f(n) = \frac{\phi(n)e^{\gamma}\log\log n}{n},$$

missä γ on Eulerin vakio.

Halutaan todistaa, että $\liminf f(n) = 1$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että ϕ-funktion alaraja on $\frac{n}{e^{\gamma}\log\log n}$.

1.2 Määrittely: miten todistetaan

Riittää löytää funktiot $F_1(t)$ ja $F_2(t)$, joille pätee

1. $\lim_{t\to\infty} F_1(t) = 1$ ja $\lim_{t\to\infty} F_2(t) = 1$
2. $f(n) \geq F_1(\log n)$ kaikilla $n \geq 3$
3. $f(n_j) \leq \frac{1}{F_2(j)}$ äärettömällä kasvavalla jonolla $n_2, n_3, ...$

Kirjan todistuksessa todistetaan myös sigmafunktion $\sigma(n)$ yläraja ja käytetään sitä hyväksi funktion F_2 löytämiseksi. Kysymys kuuluu, että tarvitaanko sigmafunktio välttämättä, että saadaan ϕ-funktion alaraja todistetuksi. Se on kuitenkin vasta todistuksen toisen osan ongelma, joten jätetään se hetkeksi sikseen.

1.3 Itse todistus osa 1: $f(n) \geq F_1(\log n)$

Olkoot $p_1, p_2, ..., p_{r-\rho} \leq \log n$ ja $p_{r-\rho+1}, ..., p_r > \log n$ luvun n alkutekijöitä. Siis luvulla n on yhteensä r alkutekijää, joista $\log n$:ää suurempia on ρ kappaletta.

Nyt

$$(\log n)^{\rho} < p_{r-\rho+1} \cdot p_{r-\rho+2} \cdots p_r \leq n, \tag{1}$$

mistä seuraa

$$\rho < \frac{\log n}{\log\log n}. \tag{2}$$

Eli $\log n$:ää suurempia alkulukutekijöitä on alle $\frac{\log n}{\log\log n}$ kappaletta. Nyt tulokaavaa käyttäen ϕ-funktion suhde n:ään voidaan ilmaista seuraavasti

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i}) \tag{3}$$

$$= \prod_{i=1}^{r-\rho}(1-\frac{1}{p_i}) \prod_{i=r-\rho+1}^{r}(1-\frac{1}{p_i}) \tag{4}$$

$$\geq \left(\prod_{i=1}^{r-\rho}(1-\frac{1}{p_i})\right)(1-\frac{1}{\log n})^{\rho} \tag{5}$$

$$> \left(\prod_{i=1}^{r-\rho}(1-\frac{1}{p_i})\right)(1-\frac{1}{\log n})^{\frac{\log n}{\log\log n}}. \tag{6}$$

Näin ollen voidaan valita

$$F_1(t) = e^{\gamma}\log t\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}}\prod_{p\leq t}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

jolloin

$$\begin{aligned}
F_1(\log n) &= e^{\gamma}\log\log n\left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\log n}}\prod_{p\leq\log n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\\
&= e^{\gamma}\log\log n\left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\log n}}\prod_{i=1}^{r-\rho}\left(1-\frac{1}{p}\right)\\
&\leq \frac{\phi(n)}{n}e^{\gamma}\log\log n = f(n).
\end{aligned}$$

Kuitenkin funktiolle F_1 pätee

$$\lim_{t\to\infty}F_1(t) = \lim_{t\to\infty}e^{\gamma}\log t\left(1-\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\log t}}\prod_{p\leq t}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1$$

(tähän tarvitaan todistus!! kirjassa viitattu todistukseen nro. 429),

Täten ensimmäinen osa on toidstettu.

1.4 Itse todistus osa 2: $f(n_j) \leq \frac{1}{F_2(j)}$

Tämä ei lienekään ihan niin iisi keissi.