The size of Euler's totient function when $n \to \infty$

Elli Kiiski

2021

1 Summary

Viittaus [1] toinenkin [2]

2 Introduction

3 Notation and definitons

Notation 3.1. *Divisibility* $a|b$
Let $a \in \mathbb{Z}$ and $b \in \mathbb{Z}$ be such that b is divisible by a. This is denoted by $a|b$.

Definition 3.2. *Greatest common divisor,* $gcd(a, b)$
Let $a \neq 0$ and $b \neq 0$. There is a unique $d \in \mathbb{N}$ with following properties:

1. $d|a$ and $d|b$
2. if $d'|a$ and $d'|b$, then $d'|d$

The number d is called the greatest common divisor of a and b. It's denoted by $gcd(a, b) = d$.

Definition 3.3. *Prime number*
Integer $p \in \mathbb{N}$ is a prime, if $p \geq 2$ and for every $k \in \mathbb{N}$ holds that if $k|p$ then $k \in 1, p$. The set of prime numbers is denoted by $\mathbb{P}$.
In other words, all integers greater than than 1, which are only divisible by themself and 1, are primes.

Definition 3.4. *Co-primes*
If $gcd(a, b) = 1$, a and b are called co-primes or relative primes.

4 Euler's totient function

Definition 4.1. *Eulerin totient function* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
It's set that $\phi(1) = 1$. For all $n \geq 2$, $\phi(n)$ is the number of integers $a \in \{1, 2, ..., n\}$, for which $gcd(a, n) = 1$.
AIKA SURKEE SELITYS That is, the value of the totient function in $n \in \mathbb{N}$ is the number of natural numbers smaller than n, which are its co-primes.

Theorem 4.2. Euler's product formula

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$$

where $\prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$ means the product over *distinct* primes that divide n.

Proof. KIKKI

□

5 The bounds of Euler's totient function JÄIN TÄHÄN

Kuten pätee monille lukuteoreettisille funktioille, myös Eulerin ϕ-funktion arvo heittelehtii n:n kasvaessa OIKEI LUOVUTAN, VAIHDAN ENKKUUN

5.1 Eulerin ϕ-funktion yläraja

Theorem 5.2. *Eulerin ϕ-funktion yläraja*
Kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$ pätee $\phi(n) < n$.

Proof. Suoraan määritelmästä seuraa, että $\phi(n) \leq n$, koska joukossa $\{1, 2, ..., n\}$ on n alkiota ja siten niiden joukosta ei voi löytyä yli n kappaletta ehtoa täyttävää lukua. Lisäksi jokaisella n pätee $syt(n, n) = n$. Täten millään $n \geq 2$ ei voi olla $\phi(n) = n$.

Siis $\phi(n) < n$ jokaisella $n \geq 2$.

□

Theorem 5.3. *Alkuluvuilla* $\phi(p) = p - 1$
Jokaisella alkuluvulla $p \in \mathbb{P}$ pätee $\phi(p) = p - 1$.

Proof. Olkoon $p \in \mathbb{P}$. Tällöin jokaisella $k < p$, $k \in \mathbb{N}$ pätee $syt(k, p) = 1$, mistä seuraa suoraan $\phi(p) = p - 1$. PITÄISIKÖ TÄÄ TODISTAA PAREMMIN

□

Theorem 5.4. ϕ-funktion pienin yläraja
Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee $\phi(n) \leq n - 1$.

Proof. Tulos saadaan suoraan yhdistämällä lauseet ÄSKEINEN ja SITÄ EDELLINEN.

□

5.5 Eulerin ϕ-funktion alaraja

5.6 $\phi(n) < \sqrt{(}n)$?

Lähdetään tutkimaan ϕ-funktion alarajaa tarkastelemalla onko olemassa suuria luonnollisia lukuja, joilla $\phi(n) < \sqrt{n}$. Huomataan, että ainakin vielä luvulla $n = 6$ pätee $\phi(6) = 2 < \sqrt{(}6)$, mutta sen jälkeen arvot näyttäisivät järjestään ylittävän vastaavan neliöjuuren arvon.

Tarkastellaan tilannetta tarkemmin jos osataan ehehe

6 Eulerin ϕ-funktion keskiarvo

7 Asiaaa

8 Lähteet

[1] E. M. Wright G. H. Hardy. *An Introduction to the Theory of Numbers.* 2008.

[2] Eero Saksman. "Introduction to Number Theory". 2019.