Aalto Yliopisto

SCI-C0200 - Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio

Tietokoneharjoitus 5: Symbolinen laskenta I

Elli Kiiski

Sisällys

1 Tehtävä A: Mathematica-pelleilyä

1.1 Komentoja

Komemto `Series[Sin[x],x,0,3]` antaa tulostuksen $x - \frac{x^3}{6} + O[x]^4$, eli sinifunktion kolmannen asteen Taylorin polynomin. Kun komento laitetaan `Normal[]`-komennon sisään, tulostuu $x - \frac{x^3}{6}$ eli jäännöstermi jää pois.

Piin likiarvo kahdenkymmenen merkitsevän numeron tarkkuudella saadaan komennolla `N[Pi,20]`. Ja sehän on $\pi \approx 3.1415926535897932385$.

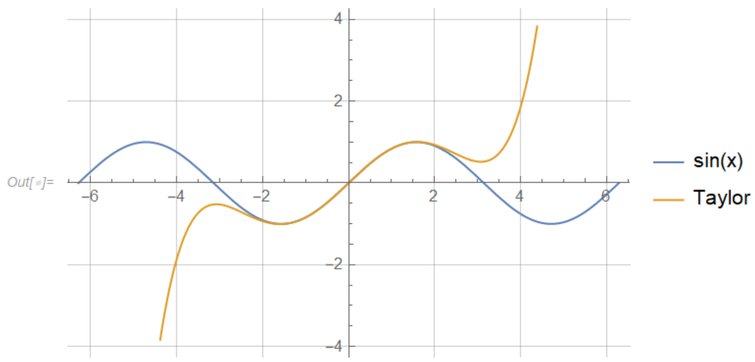
1.2 Funktion nollakohta

Halutaan laskea funktion $f(x) = x^2 + 3x - 5$ nollakohdat. Määritellään ensin kyseinen funktio koodirivillä `f[x_] = x^2 + 3*x - 5` ja tarkaistaan nollakohta komennolla `Solve[f[x] == 0, x]`. Näin saadaan näppärästi tulokseksi nollakohdat $x = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{29})$.

1.3 Kuvaajia

Piirretään kuvaajat sinifunktiosta ja sen viidennen asteen Taylorin polynomista välillä $[-2\pi, 2\pi]$ samaan kuvaan. Se on onnistuu kuvan 1 näyttämällä tavalla.

```
In[∘]:= Normal[Series[Sin[x], {x, 0, 5}]];
        Plot[{Sin[x], %}, {x, -2 * Pi, 2 * Pi},
         PlotLegends → {"sin(x)", "Taylor"},
         GridLines → Automatic]
```



Kuva 1: Sinifunktio ja sen viidennen asteen Taylorin polynomi nollassa.

2 Tehtävä B: EOQ-malli

Tutkitaan tuotteen varastointikustannuksia EOQ-mallilla. Mallissa D kuvaa tuotteen kysynytää vuodessa ja Q varastoon yhdessä tilauserässä tilattavien tuotteisen määrää. Lisäksi C_1 on varaston täydentämisestä koituva tilauskustannus ja C_2 varastointikustannus per varastoitava tuote per vuosi.

2.1 Kokonaiskustannukset

Tavoitteena on luonnollisesti minimoida tuotteen varastoinnin vuosittaiset kokonaiskustannukset, jotka voidaan ilmaista kaavalla

$$C_{total} = C_1 \frac{D}{Q} + C_2 \frac{Q}{2},$$

missä $\frac{D}{Q}$ kuvaa tilausten lukumäärää vuodessa ja $\frac{Q}{2}$ keskimääräistä varastotilannetta (olettaen, että kysyntä on tasaista vuoden mittaan).

2.2 Optimointi

Selvitetään sitten, miten kannattaisi valita tilauskoko Q ja tilauskertojen lukumäärä, jotta kokonaiskustannukset jäisivät mahdollisimman pieniksi.

Ratkaistaan siis funktion $C_{total}(Q)$ minimi Mathematican avulla. Määritellään ensin funktio rivillä `Ctot[q_] = c1*(d/q) + c2*(q/2);` ja derivoidaan funktio sitten muuttujan Q suhteen komennolla `D[Ctot[q], q]`. Ratkaistaan derivaattafunktion positiivinen nollakohta ja saadaan

$$0 = C'_{total}(Q) = \frac{C_2}{2} - \frac{C_1 D}{Q^2} \tag{1}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}, \tag{2}$$

eli optimaalisin tilauserän koko on $Q^* = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}$. Tilauskertojen lukumäärä on tällöin $\frac{D}{Q^*} = \sqrt{\frac{DC_2}{2C_1}}$.

Siis optimoidulla tilauskoolla kokonaiskustannusten suuruudeksi saadaan

$$C_{total} = C_1 \frac{D}{Q^*} + C_2 \frac{Q^*}{2} = C_1 \sqrt{\frac{DC_2}{2C_1}} + C_2 \frac{\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}}{2} = \sqrt{2DC_1C_2}. \tag{3}$$

3 Tehtävä C: Rosenbrockin banaanilaakso

Tarkastellaan erästä Rosenbrockin banaanilaksifunktioksikin kutsuttua optimoinnin testauksessa yleisesti käytettyä funktiota

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (a - x)^2, \tag{4}$$

missä a on vakio.

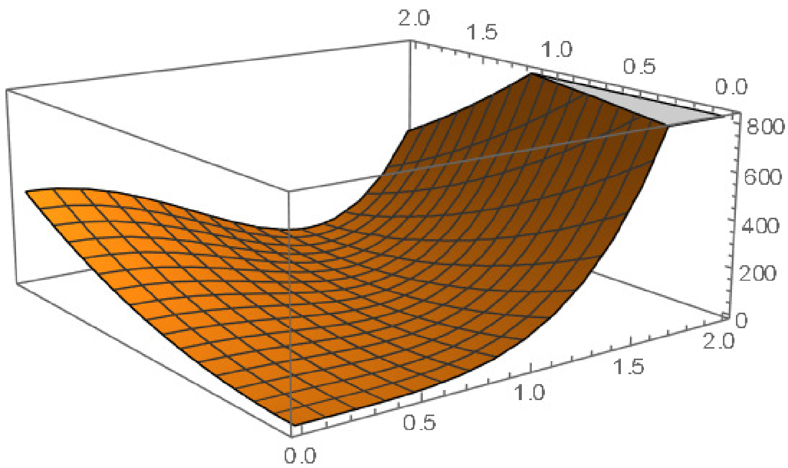
Funktion f minimi $f(a, a^2) = 0$ löydetään näppärästi Mathematicalla seuraavasti:

```
In[•]:= f[x_, y_] = 100 * (y - x^2) ^2 + (a - x) ^2;
        grad = D[f[x, y], {{x, y}}];
        min = Solve[grad == {0, 0}, {x, y}]
        f[x, y] /. {x → min[[1, 1, 2]], y → min[[1, 2, 2]]}

Out[•]= {{x → a, y → a^2}}

Out[•]= 0
```

Kuvassa 2 funktion f graafi vakion arvolla $a = 1$ minimipisteen $(1, 1)$ läheisyydessä.



Kuva 2: Banaanilaaksofunktion f graafi vakion arvolla $a = 1$.

4 Kotitehtävä: Kokonaisdifferentiaalin laskeminen

Fysikaalinen suure F, joka ei ole suoraan mitattavissa, voidaan määrittää mittaamalla siihen vaikuttavien suureiden $x_1, x_2, .., x_n$ arvot ja laskea sille arvo kaavalla $F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Virherajat saadulle suureen F arvolle saadaan puolestaan kokonaisdifferentiaalista

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + ... + \left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right| \Delta x_n \tag{5}$$

$$= |\nabla F| \cdot (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n), \tag{6}$$

missä Δx_i on mittauksen x_i keskivirhe.

4.1 Polttovälin virhearvio

Linssin polttoväli f saadaan kaavasta $f = \frac{ab}{a+b}$, missä a on esineen etäisyys ja b kuvan etäisyys linssistä. Kuvasta 3 löytyy Mathematica-koodi, jolla seuraavat tulokset on laskettu.

Polttovälin virhearvion lausekke on

$$\Delta f = \Delta a \left|\frac{b^2}{(a+b)^2}\right| + \Delta b \left|\frac{a^2}{(a+b)^2}\right|. \tag{7}$$

Olkoon nyt $a = 85 \pm 1$ ja $b = 196 \pm 2$. Tällöin polttoväliksi ja virherajoiksi saadaan

$$f = \frac{ab}{a+b} = \frac{16660}{281} \approx 59.29 \tag{8}$$

sekä

$$[f_{min}, f_{max}] = [f - \Delta f, f + \Delta f] = \left[\frac{4628594}{78961}, \frac{4734326}{78961}\right] \approx [58.62, 59.96]. \tag{9}$$

4.2 Ympyräsektoritontin pinta-ala

Halutaan mitata ympyräsektorin muotoisen tontin pinta-ala $0.5\,m^2$ tarkkuudella. Kulma pystytään mittaamaan luotettavasti sadasosa-asteen tarkkuudella, joten tehtävänä on selvittää, miten tarkasti säde on pystyttävä mittaamaan, jotta päästään toivottuun pinta-alan tarkkuuteen.

Pinta-ala saadaan lausekkeesta $A(r, \phi) = \frac{\phi}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}\phi r^2$, missä r on ympyrän säde ja ϕ sektorin keskuskulma.

Muodostetaan kokonaisdifferentiaali eli pinta-alan virhetermin lauseke ja ratkaistaan siitä analyyttinen lauseke virheelle Δr:

$$\Delta A = \Delta r |\phi r| + \frac{1}{2}\,\Delta\phi\, r^2 \tag{10}$$

$$\Delta r = \frac{2\,\Delta A - \Delta\phi\, r^2}{2|\phi r|}. \tag{11}$$

```
In[•]:= ClearAll["Global`*"]
        f[a_, b_] = (a * b) / (a + b);
        grad = D[f[a, b], {{a, b}}];
        agrad = Abs[grad];
        errorAB = {da, db};
        errorF = Simplify[agrad.errorAB]
        a = 85;
        da = 1;
        b = 196;
        db = 2;
        F = f[a, b]
        N[%]
        {F - errorF, F + errorF}
        N[%]
```

Out[•]= $\text{db Abs}\left[\frac{a^2}{(a+b)^2}\right] + \text{da Abs}\left[\frac{b^2}{(a+b)^2}\right]$

Out[•]= $\frac{16660}{281}$

Out[•]= 59.2883

Out[•]= $\left\{\frac{4628594}{78961}, \frac{4734326}{78961}\right\}$

Out[•]= {58.6187, 59.9578}

Kuva 3: Osion 4.1 Mathematica-koodi.

Sijoitetaan nyt tehtävänannon arvot $\Delta A \leq 0.5\,m^2 = \frac{1}{2}m^2$ ja $\Delta\phi = 0.01° = \frac{\pi}{18000}$, jolloin saadaan

$$\Delta r \leq \frac{18000 - \pi r^2}{36000|\phi r|}\,m. \tag{12}$$

Säteen mittaustarkkuus on riippuu siis itse säteestä, eli absoluuttisten virherajojen laskemiseksi tarvitaan tieto säteen pituudesta.

Tarkastellaan esimerkiksi tilannetta, jossa säde $r \approx 50\,m$ ja kulma $\phi \approx \frac{2\pi}{3}$ sekä pinta-alan ja kulman virheet edelleen $\Delta A \leq \frac{1}{2}\,m^2$ ja $\Delta\phi = \frac{\pi}{18000}$. Nyt voidaan laskea yläraja virheelle Δr:

$$\Delta r \leq \frac{3}{200\pi} - \frac{1}{480}\,m \approx 0.0027\,m = 2,7\,mm. \tag{13}$$

Siis 50 metrin matkalla mittaus ei saa heittää kolmea milliäkään, jos alle puolen neliömetrin pinta-alavirheessä halutaan pysyä.

Yllä olevissa laskuissa käytetty Mathematica-koodi löytyy kuvasta 4.

```
ClearAll["Global`*"]
A[r_, p_] = (1 / 2) * p * r^2;
grad = D[A[r, p], {{r, p}}];
agrad = Abs[grad];
errorRP = {dr, dp};
errorA = Simplify[agrad.errorRP]
deltaR = Solve[errorA == dA, dr]
deltaR /. {dA → (1 / 2), dp → (1 / 100) * (2 * Pi / 360)};
Expand[%];
Simplify[%]
deltaR /. {dA → (1 / 2), r → 50, p → 2 * Pi / 3,
   dp → (1 / 100) * (2 * Pi / 360)};
Simplify[%]
N[%]
```

Out[•]= $\frac{1}{2}\,\mathrm{dp}\,\mathrm{Abs}[r]^2 + \mathrm{dr}\,\mathrm{Abs}[p\,r]$

Out[•]= $\left\{\left\{\mathrm{dr} \to \frac{2\,\mathrm{dA} - \mathrm{dp}\,\mathrm{Abs}[r]^2}{2\,\mathrm{Abs}[p\,r]}\right\}\right\}$

Out[•]= $\left\{\left\{\mathrm{dr} \to \frac{18000 - \pi\,\mathrm{Abs}[r]^2}{36000\,\mathrm{Abs}[p\,r]}\right\}\right\}$

Out[•]= $\left\{\left\{\mathrm{dr} \to -\frac{1}{480} + \frac{3}{200\,\pi}\right\}\right\}$

Out[•]= $\{\{\mathrm{dr} \to 0.00269131\}\}$

Kuva 4: Osion 4.2 Mathematica-koodi.