

Aalto Yliopisto

SCI-C0200 - Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio

Tietokoneharjoitus 4: Differentiaaliyhtälöt

Elli Kiiski

Sisällys

1	Tehtävä A: Infektiomalli	3
1.1	SIR-mallin numeerinen ratkaisu	3
1.2	Differenssiyhtälö- ja numeerisen ratkaisun erot	4
2	Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen	5
2.1	Parametrin T_1 vaikutus hajoamiseen	6
2.2	Ratkaisut ajan t ja aikavakion T_1 funktiona	7
3	Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä	9
3.1	Toisen kertaluvun DY:n numeerinen ratkaisu	9
3.2	Asymptoottinen ratkaisu	11
3.3	Vaimennusvakion T_0 yhteys värähtelyn amplitudiin	11
3.4	Regressiomalli	12

1 Tehtävä A: Infektiomalli

Käsitellään jälleen jo kakkosviikolla tutuksi tullutta SIR-infektiomallia, jossa kolmen ihmisryhmän (alttiit (S), infektoituneet (I) ja toipuneet (R)) koot muuttuvat ajan suhteen seuraavien differentiaaliyhtälöiden mukaan:

$$\begin{cases} \Delta s(t) = -\alpha i(t)s(t) \\ \Delta i(t) = \alpha i(t)s(t) - \beta i(t) \\ \Delta r(t) = \beta i(t) \end{cases} \quad (1)$$

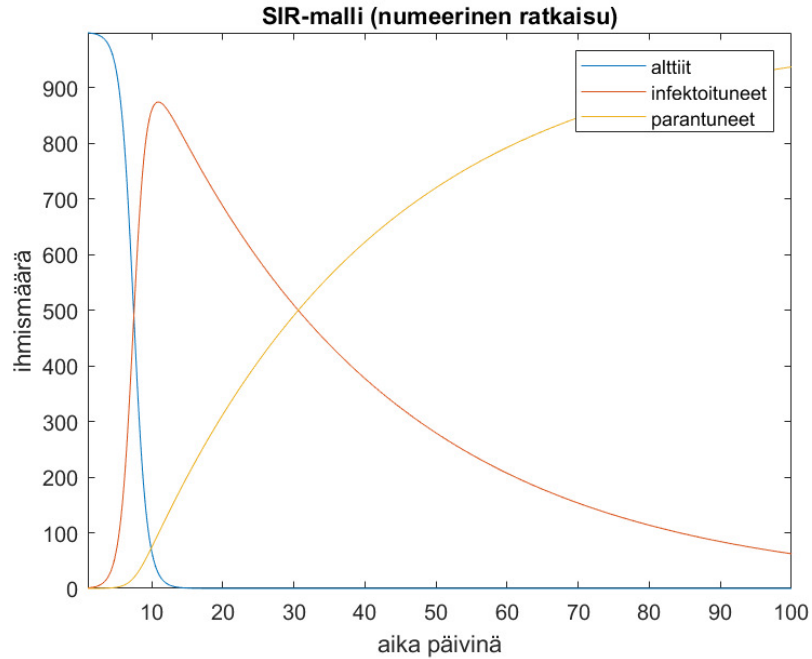
1.1 SIR-mallin numeerinen ratkaisu

Tällä kertaa ei hyödynnetä viimeksi käytettyjä differenssiyhtälöitä, vaan ratkaistaan differentiaaliyhtälöt numeerisesti MATLABin `ode45-DY`-ratkaisimen avulla. Luodaan ensin oma funktio `infektio`, joka kuvaa yhtälöryhmää 1.

```
function dsir = infektio(t, sir, alpha, beta)
% tallennetaan eri funktioita kuvaavat rivit omiin muuttujiin
s = sir(1);
i = sir(2);
r = sir(3);
% muodostetaan differentiaaliyhtälöt
ds = -alpha*i*s;
di = alpha*i*s-beta*i;
dr = beta*i;
% kootaan palautettava vektori
dsir = [ds; di; dr];
```

Ratkaistaan tämän jälkeen differentiaaliyhtälöryhmä aikavälillä $[1, 100]$ ja piirretään kuvaaja (kuva 1) saaduista yhtälöiden arvojen numeerisista ratkaisuista ajan suhteen.

```
% alustetaan aikaväli, parametrit ja alkuarvot
t = [1:0.1:100];
alpha = 0.0011;
beta = 0.03;
sir0 = [999; 1; 0];
% maaritetaan asetuksilla maksimivirheet
options=[];
options=odeset(options,'RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-7);
% ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä
[tout,SIRout]=ode45(@infektio,t,sir0,options,alpha,beta);
% plotataan saadut kayrat
figure
plot(tout, SIRout);
...
```



Kuva 1: Numeerisesti ratkaistu SIR-malli parametrien arvoilla $\alpha = 0.0011$ ja $\beta = 0.03$.

Kuvasta 1 huomataan, että numeerisesti ratkaistu malli antaa melkein täsmälleen samanlaisen tuloksen kuin aiemmin differenssiyhtälöiden avulla tuotettu malli. Ainoastaan infektoituneiden määrää kuvaavan käyrän huippu on sileämpi numeerisessa ratkaisussa.

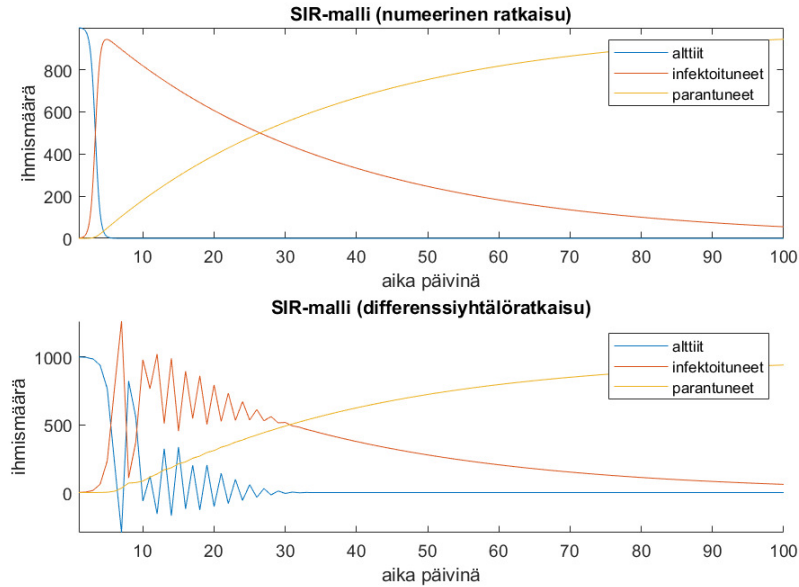
1.2 Differenssiyhtälö- ja numeerisen ratkaisun erot

Vertaillaan seuraavaksi SIR-mallin numeerista ratkaisua ja differenssiyhtälöiden tuottamaa ratkaisua parametreilla $\alpha = 0.003$ ja $\beta = 0.03$.

Kuvasta 2 huomataan oitis, että differenssiyhtälöratkaisussa on jokin pielessä. Numeerinen ratkaisu näyttäisi intuitiivisesti osuvan lähelle totuutta, joten ongelman selvittämiseksi on tarkasteltava lähemmin itse differenssiyhtälöitä, jotka ovat muodoltaan seuraavat:

$$\begin{cases} s(t+1) = s(t) + \Delta s(t) = s(t) \cdot (1 - \alpha i(t)) \\ i(t+1) = i(t) + \Delta i(t) = i(t) \cdot (1 + \alpha s(t) - \beta) \\ r(t+1) = r(t) + \Delta r(t) = r(t) + \beta i(t) \end{cases} \quad (2)$$

Huomataan, että parametrin α ollessa ”liian” iso suhteessa ihmismäärään ja parametriin β , yhtälöryhmän 2 termi $(1 + \alpha s(t) - \beta)$ ja sitä myötä arvo



Kuva 2: Ratkaisujen vertailua parametrien arvoilla $\alpha = 0.003$ ja $\beta = 0.03$.

$i(t)$ kasvavat alussa räjähdysmäisesti jopa yli populaation suuruuden, jolloin puolestaan termin $(1 - \alpha i(t))$ mukana arvo $s(t)$ laskee hurjaa vauhtia peräti miinuksien puolelle. Tämän jälkeen tilanne kääntyy pääläelle ja heitteledintää jatkuu kunnes se tasaantuu pikkuhiljaa.

2 Tehtävä B: Radioaktiivinen hajoaminen

Tarkastellaan isotoopin y hajoamista systeemissä, johon tuodaan ajanhetkellä t_z toista isotooppia z , joka puolestaan hajoaa isotoopiksi y eli omalta osaltaan lisää sen määrää systeemissä. Isotoopin y määrän muutosta systeemissä voidaan mallintaa differentiaaliyhtälöllä

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{T_0} + \frac{z(t)}{T_1}, \quad (3)$$

missä

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_z) \\ Z_0 e^{-\frac{t-t_z}{T_1}} & t \in [t_z, \infty) \end{cases} \quad (4)$$

sekä T_0 ja T_1 isotooppien hajoamisen aikavakioita ja Z_0 systeemiin tuotavan isotoopin z määrä.

2.1 Parametrin T_1 vaikutus hajoamiseen

Lähdetään jälleen ratkaisemaan differentiaaliyhtälöä numeerisesti MATLABilla. Aloitetaan luomalla yhtälöitä kuvaavat funktiot z ja dy .

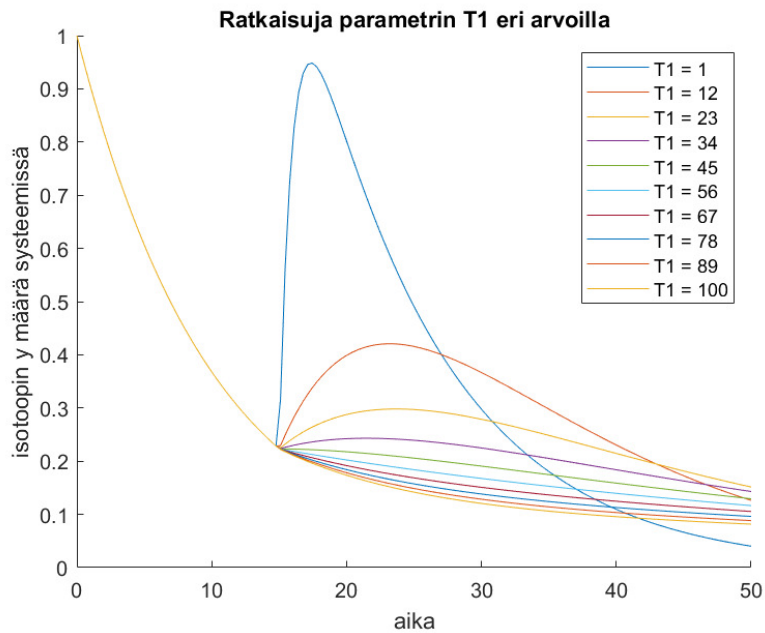
```
function zt = z(t, tz, T1, Z0)
if (t<tz)
    zt = 0;
else
    zt = Z0*exp(-(t-tz)/T1);
end
```

```
function dyt = dy(t, y, T0, T1, Z0, tz)
dyt = -y/T0 + (z(t, tz, T1, Z0))/T1;
```

Tutkitaan seuraavaksi hajoamista plottaamalla kuvaaja (kuva 3) muutamalla eri parametrin T_1 arvolla.

```
% alustetaan parametrit ja alkuarvot
Z0 = 1;
y0 = 1;
tz = 15;
T0 = 10;
T1 = linspace(1, 100, 10);
% alustetaan differentiaaliyhtälön numeerista ratkaisua varten
% aikavali ja virheasetukset
t = linspace(0,50,150);
options=[];
options=odeset(options,'RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-7);
% ratkaistaan dy kymmenellä eri T1 arvolla valilla [1,100]
% (ja kerataan samalla T1 arvot taulukkoon legendia varten)
y = [];
leg = [];
for i=1:length(T1)
    [tout,yout]=ode45(@dy,t,y0,options,T0,T1(i),Z0,tz);
    y(i,:) = youout;
    leg{i} = ('T1 = ' + string(T1(i)));
end
% plotataan kymmenen eri ratkaisukayraa
figure
hold on
for i=1:length(T1)
    plot(t, y(i,:))
end
...
```

Kuvan 3 mukaan isotooppia y näyttäisi olevan ajanhetkellä 50 jäljellä eniten kun parametri T_1 on lähellä arvoa 23.



Kuva 3: Isotoopin y hajoaminen systeemissä parametrin T_1 eri arvoilla.

Tutkitaan tilannetta vielä tarkemmin välillä $T_1 \in [1, 50]$ ja lasketaan ajanhetkellä 50 jäljellä olevan isotoopin y määrän maksimoiva arvo T_1 .

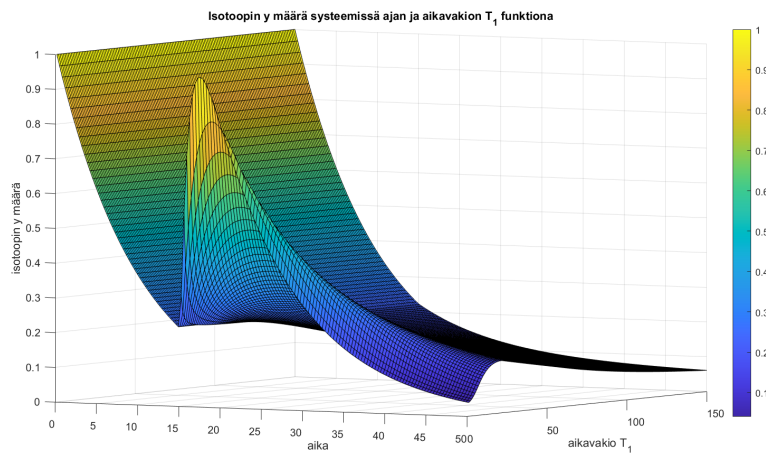
```
T1 = linspace(1, 50, 200);
...
% sama for-luuppi kuin aiemmin
...
maxT1 = T1(find(y(:,150)==max(y(:,150))))
```

Vastaukseksi kyseisellä jaolla saadaan $\text{maxT1} = 22.9146$, joka osuikin varsin lähelle aiemmin arveltua arvoa 23.

2.2 Ratkaisut ajan t ja aikavakion T_1 funktiona

Visualisoidaan vielä differentiaaliyhtlön ratkaisuja sekä ajan t että parametrin T_1 funktiona. Kuvassa 4 nähdään ns. surface plot, joka on saatu aikaan seuraavalla koodilla.

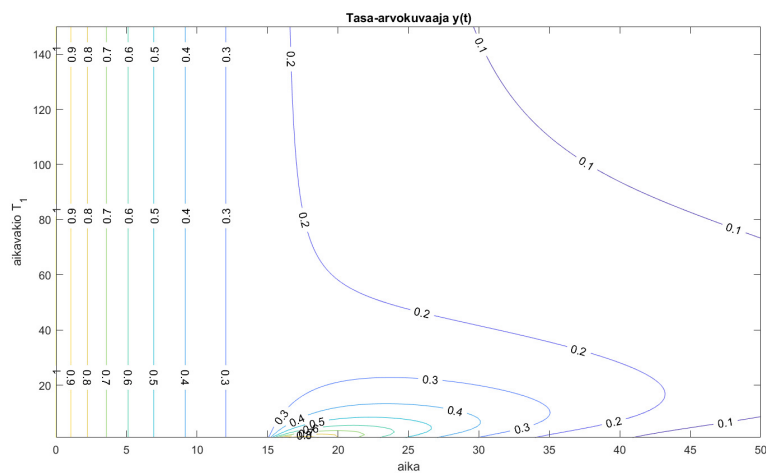
```
% plotataan ratkaisuja parametrien t ja T1 funktiona
figure
surf(t, T1, y)
colorbar
...
```



Kuva 4: Isotoopin y määrä systeemissä ajan ja aikavakion T_1 funktiona.

Tarkastellaan samaa asetelmaa myös plottaamalla tasa-arvokäyriä jäljellä olevan isotoopin y määrästä (kuva 5) seuraavalla koodilla.

```
% plotataan tasa-arvokäyrät
figure
[c,h] = contour(t, T1, y);
clabel(c, h);
...
```



Kuva 5: Tasa-arvokäyriä systeemissä olevan isotoopin y määrästä ajan ja aikavakion T_1 funktiona.

3 Kotitehtävä: Ajettu värähtelijä

Tutkitaan harmonista värähtelijää, johon vaikuttaa voima $F \cos \omega t$ sekä vastusvoimia. Tilannetta kuvaa yhtälö

$$y''(t) + \frac{y'(t)}{T_0} + \omega_0^2 y(t) = \frac{F}{M} \cos \omega t, \quad (5)$$

missä T_0 on vastusvoimien vaimennusvakio, ω_0 värähtelijän resonanssitaajuus, M värähtelijän massa, F vaikuttavan voiman amplitudi ja ω voiman taajuus.

3.1 Toisen kertaluvun DY:n numeerinen ratkaisu

Ratkaistaan ajetun värähtelijän värähtelyitä ajan suhteen kuvaava toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö numeerisesti MATLABilla. Ensin yhtälö on muutettava muotoon

$$\begin{cases} x_1(t) = y'(t) \\ x_2(t) = y(t), \end{cases} \quad (6)$$

ja edelleen

$$x_1'(t) = y''(t) = \frac{F}{M} \cos \omega t - \frac{y'(t)}{T_0} - \omega_0^2 y(t) \quad (7)$$

$$= \frac{F}{M} \cos \omega t - \frac{x_1(t)}{T_0} - \omega_0^2 x_2(t) \quad (8)$$

ja

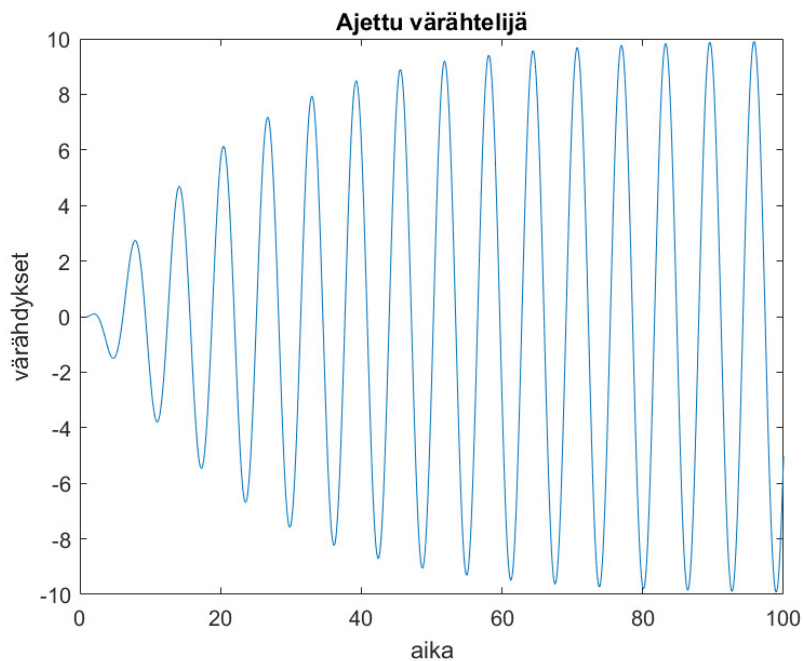
$$x_2'(t) = y'(t) = x_1(t) \quad (9)$$

Nyt alkuperäinen toisen kertaluvun DY on ilmaistu kahtena ensimmäisen kertaluvun DY:na, jolloin se voidaan ratkaista kuten vastaavanlainen yhtälöryhmä tehtävässä A. Luodaan yhtälöparia (yhtälöt 7 ja 9) kuvaava funktio.

```
function dx = drosc(t,x,T0,omega,M,F,omega0)
% otetaan talteen eri funktioita kuvaavat rivit
x1 = x(1);
x2 = x(2);
% muodostetaan differentiaaliyhtälöt
dx1 = F/M*cos(omega*t)-x1/T0-omega0^2*x2;
dx2 = x1;
% kootaan palautettava vektori
dx = [dx1; dx2];
```

Ratkaistaan sitten yhtälö arvoilla $T_0 = 10$, $\omega_0 = 1$, $M = 1$, $F = 1$, $\omega = 1$ ja $y(0) = y'(0) = 0$.

```
% alustetaan alkuarvot, parametrit ja aikavali
x0 = [0,0];
T0 = 10;
omega = 1;
M = 1;
F = 1;
omega0 = 1;
t = linspace(1,T0*10,1000);
% maaritetaan asetuksilla maksimivirheet
options=[];
options=odeset(options,'RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-7);
% ratkaistaan differentiaaliyhtaloryhma
[tout,xout]=ode45(@drosc,t,x0,options,T0,omega,M,F,omega0);
% plotataan haluttu kayra x2(t)=y(t)
figure
plot(tout, xout(:,2));
...
```



Kuva 6: Ajettu värähtelijä ajan funktiona.

Tulokseksi saadaan kuva 6, josta nähdään kuinka levosta lähtevään värähtelijään alkaa vaikuttaa voima, jolloin värähtelyn amplitudi kasvaa pikkuhiljaa, kunnes saavuttaa tasapainotilan.

3.2 Asymptoottinen ratkaisu

Ratkaistaan sama yhtälö vielä kahdessa toisessa tilanteessa: kun $\omega < \omega_0$ ja $\omega > \omega_0$. Plotataan ratkaisut parametrin ω arvoilla 0.1, 1.0 ja 1.1 allekkain vertailua varten ja lisätään kuvaajiin myös ajavan voiman $F \cos \omega t$ käyrä.

```
% muutetaan muuttuja omega vektoriksi
omega = [0.1,1.0,1.1];
% plotataan kuvaajat allekkain
figure
for i=1:length(omega)
    % ratkaistaan differentiaaliyhtalo
    [tout,xout]=ode45(@drosc,t,x0,options,T0,omega(i),M,F,omega0);
    % maaritellaan voiman funktio kyseisella omegan arvolla
    f = F*cos(omega(i)*t);
    % plotataan ratkaisu kyseisella omegan arvolla
    subplot(3,1,i)
    hold on
    plot(tout, xout(:,2))
    plot(t, f)
    ...
end
```

Kuvassa 8 allekkain olevia käyriä vertaillen huomataan ensimmäiseksi, että voiman taaajuuden (ω) ollessa merkittävästi pienempi kuin värähtelijän resonanssitaajuus (ω_0), värähtelijä käyttäytyy eri tavalla kuin kahdessa muussa tapauksessa. Voiman alkaessa vaikuttaa värähtelijään se alkaa aluksi värähtelemään nopeammin ja suuremmalla amplitudilla, kunnes tasaantuu ajan mittaan värähtelemään yhtenevästi ajavan voiman kanssa.

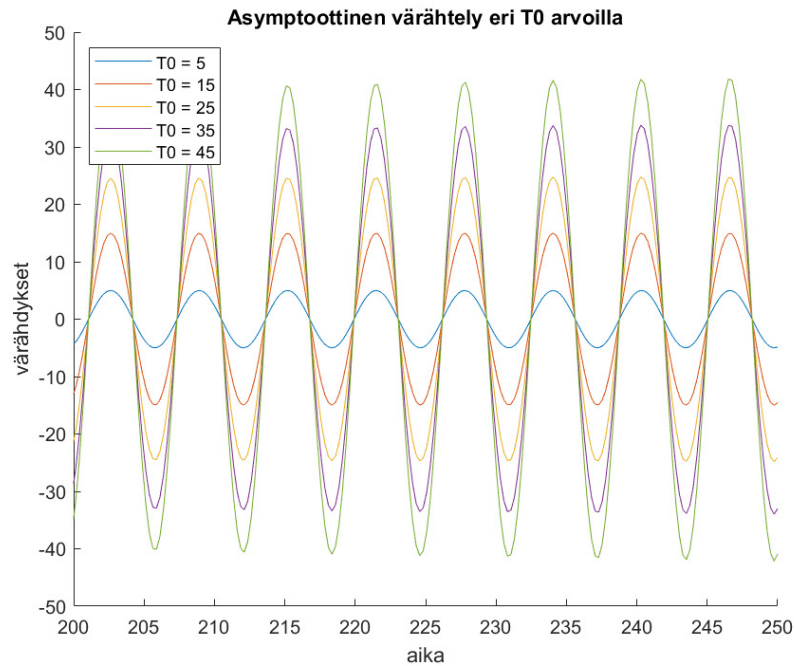
Tapauksessa $\omega = \omega_0$ voiman ja värähdysten vaihe-ero on kuvan mukaan likimain $\frac{\pi}{2}$, nimittäin voiman ollessa maksimissaan puolestaan värähtelijän nopeus on suurimmillaan. Värähtelijän tajuus ei muutu tilanteen kehittyessä, mutta amplitudi kasvaa tasaisesti kunnes saavuttaa lopullisen arvonsa.

Kun $\omega > \omega_0$, vaihe-ero näyttää lähestyvän arvoa π , mikä tarkoittaa voiman ja värähtelijän olevan vastakkaissuuntaisia kullakin ajanhetkellä. Myöskään tässä tapauksessa värähtelijän tajuus pysyy samana alusta asti, mutta amplitudi kasvaa alkuun tasaisesti yli lopullisen tasapainon, kunnes laskee sitten ”steady state”- tilanteeseen.

3.3 Vaimennusvakion T_0 yhteys värähtelyn amplitudiin

Halutaan selvittää, miten vaimennusvakio T_0 vaikuttaa värähtelijän amplitudiin. Tarkastellaan tilannetta ensin plottamalla muutama kuvaaja vakion T_0 eri arvoilla. Sehän hoituu samaan tapaan kuin osiossa 2.1 kuvan 3 luominen.

Tutkittaessa kuvasta 7 vakion T_0 vaikutusta amplitudiin, huomataan tasai-



Kuva 7: Värähtelijän käyriä muutamalla eri T_0 arvolla.

sesti jakautuneiden vakion T_0 arvojen tuottavan amplitudien arvoja tasaisin välein. Voisi siis hyvin olettaa amplitudin olevan lineaarisesti riippuvainen arvosta T_0 .

Kun otetaan kuvaajasta muutama piste tarkasteluun, voidaan tehdä amplitudin (A) ja vaimennusvakion (T_0) yhteydelle valistunut arvaus $A = T_0$.

3.4 Regressiomalli

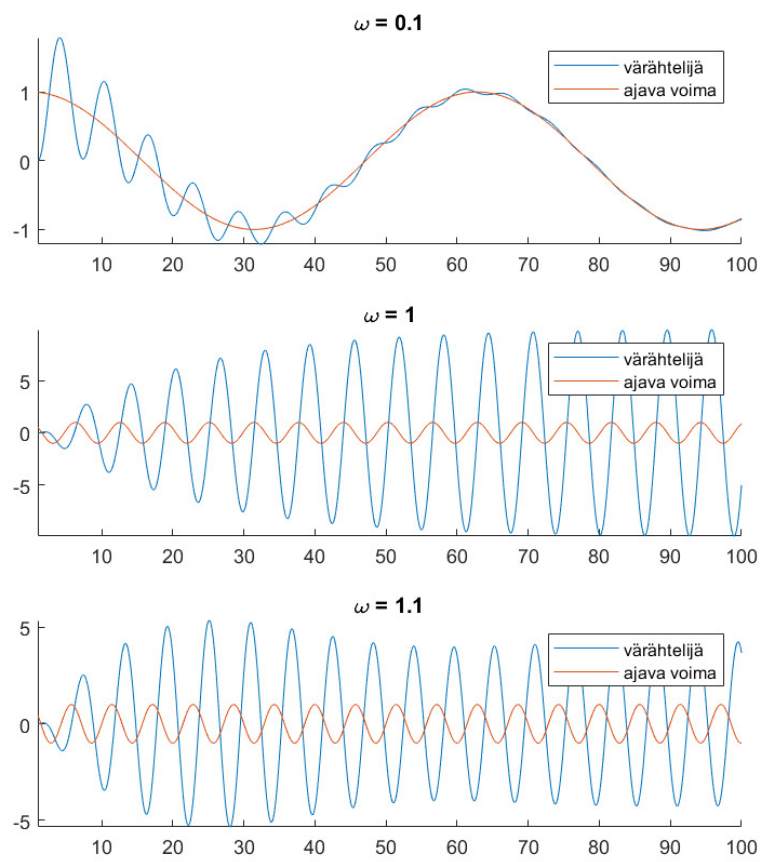
Kuvitellaan vielä lopuksi, että mallin tuottamat ratkaisut ovatkin datapisteitä mitatusta havaintodatasta ja sovitetaan niihin regressiomalli

$$F(t; A, \hat{\omega}, \varphi) = A \cos \hat{\omega} t + \varphi,$$

missä A , $\hat{\omega}$ ja φ ovat sovituspärametreja.

Totetutetaan ensin funktio `kosinimalli`, jonka mukaan pärametreja sitten sovitetaan.

```
function sovite = kosinimalli(beta,t)
% tallennetaan parametrien arvot kuvaaviin muuttujiin
A = beta(1); omega = beta(2); phi = beta(3);
% lasketaan arvot vektorin t ajanhetkillä
sovite = A*cos(omega*t+phi);
```



Kuva 8: Ajettu värähtelijä parametrin ω eri arvoilla.

Otetaan sitten riittävän kokoinen otos kullakin ajotaajuuden $\omega \in \{0.1, 1, 1.1\}$ arvolla saadun ratkaisun lopusta, koska halutaan mallintaa nimenomaan asympotoottista värähtelyä. Tutkitan hieman kuvaajia ja rajataan otokset silmämääräisesti siten, että kukin sisältää vähintään kolme värähtelyjaksoa.

```
% RAJATAAN OTOKSET LOPPUPAASTA REGRESSIOMALLIA VARTEN
% omega = 0.1
omg1t = tout(1600:end);
omg1y = y(1,1600:end)';
% omega = 1.0
omg2t = tout(4600:end);
omg2y = y(2,4600:end)';
% omega = 1.1
omg3t = tout(4600:end);
omg3y = y(3,4600:end)';
```

Estimoidaan seuraavaksi kussakin tapauksessa sovituspametrit `lsqcurvefit`-komennolla. Alkuarvot sovittelle saadaan suoraan ajotaajuuden ω arvosta sekä tarkastelemalla kuvasta 8 loppupään värähdysten amplitudeja.

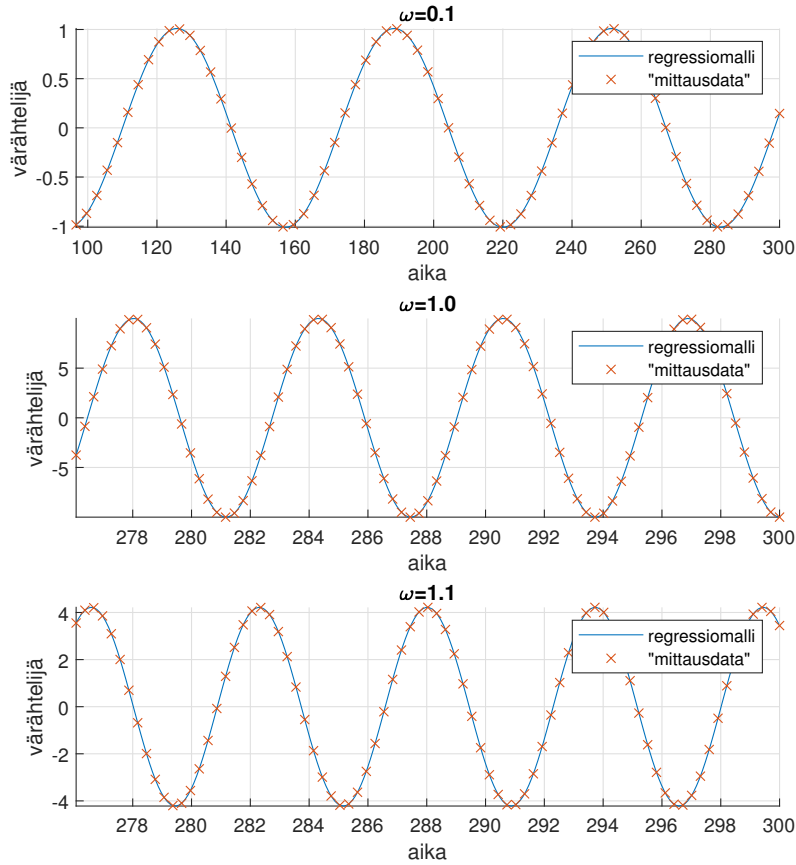
```
% estimaatit sovituspametreille kullakin omegan arvolla
est1 = lsqcurvefit(@(b,t) kosinimalli(b,t), [1, 0.1, 0], omg1t, omg1y);
est2 = lsqcurvefit(@(b,t) kosinimalli(b,t), [10, 1, 0], omg2t, omg2y);
est3 = lsqcurvefit(@(b,t) kosinimalli(b,t), [5, 1.1, 0], omg3t, omg3y);
```

Plotataan lopuksi ”mittausdata” (harvennettuna, koska datapisteet sijaitsevat muuten turhan lähekkäin) ja regressiomallista saatu käyrä samaan kuvaan kolmessa eri tarkastellussa tapauksessa. Alla esimerkkikoodi ensimmäisestä.

```
% OMEGA = 0.1
% harvennetaan "mittausdata"
fakeDataT1 = omg1t(1:50:end);
fakeDataY1 = omg1y(1:50:end);
% plotataan "mittausdata" ja saatu malli samaan kuvaan
...
t=[min(fakeDataT1):0.1:max(fakeDataT1)];
plot(t, kosinimalli(est1, t));
plot(fakeDataT1, fakeDataY1, 'x');
...
```

Tutkitaan lopuksi kussakin tapauksessa estimoituja sovituspametrien arvoja ja kuvaa sekä verrataan niitä osion 3.2 tuloksiin.

Tapauksessa $\omega = 0.1$ PNS-estimaatit sovituspametreille saadaan muuttujasta `est1 = [1.0100 0.1000 -0.0100]` eli ne ovat $A = 1.01$, $\hat{\omega} = 0.10$ ja $\varphi = -0.01$. Kuvasta 9 nähdään, että regressiomalli kuvaa ”mittausdataa” varsin mainiosti.



Kuva 9: "Mittaustulokset" ja niihin sovitettu regressiomalli eri parametrin ω arvolla (huom. erot kuvajien akselien skaalan välillä).

Sovitusparametrien estimaatit arvolla $\omega = 1.0$ (**est2**) ovat $A = 10.00$, $\hat{\omega} = 1.00$ ja $\varphi = -1.57$. Samoin tässä tapauksessa kuva ?? näyttää regressiokäyrän kulevan nätisti datapisteiden kautta.

Viimeisessä tapauksessa $\omega = 1.1$ estimaateiksi (**est3**) saadaan $A = -4.22$, $\hat{\omega} = 1.10$ ja $\varphi = 0.48$, jotka niin ikään kuvasta ?? päätellen tuottavat pätevän regressiokäyrän "mittaustuloksille".

Kaikki kuvaajat vastaavat myös hyvin kuvan 8 kuvaajien loppupäitä eli ajettujen värähtelijöiden asymptoottista värähtelyä. Täten voidaankin sanoa, että ajettua värähteliä voi mallintaa kosinifunktion avulla.