Aalto Yliopisto
SCI-C0200 - Fysiikan ja matematiikan menetelmien studio

Tietokoneharjoitus 2: Ohjelmointi (Matlab)

Elli Kiiski

Sisällys

1 Tehtävä A: Asiakasdatan käyttö

1.1 Asiakasdatan sarakkeet

Näyttäisi siltä, että asiakasdatan sarakkeet ovat seuraavassa jäjestyksessä:

`sukupuoli, syntymävuosi, gen1, gen2, gen3, viimeisin tarkastus`

1.2 Poiminta asiakasdatasta

Etsitään asiakasdatasta kaikki ennen 1970 syntyneet naiset, joiden geeneettiset riskitekijät ovat `(gen1 > 5, gen2 > 3)` ja viimeisin tarkastus tehty ennen vuotta 2010.

Koodinpätkällä

```
a = asiakasdata;
% Valitaan ennen 1970 syntyneet naiset
a = a(a(:,1)==1 & a(:,2)<1970, :);
% Valitaan halutut riskitekijat
a = a(a(:,3)>5 & a(:,4)>3 , :);
% Valitaan viimeksi ennen 2010 tarkastuksessa kayneet
a = a(a(:,6)<2010 , :);
size(a,1)
```

saadaan tulokseksi, että ehdot täyttäviä asiakkaita löytyy asiakasdatasta yhteensä `164` kpl.

2 Tehtävä B: Alkulukupalautin

Väsätään seuraavanlainen oma funktio uuteen tiedostoon `omafunktio.m`

```
function alkuluku = omafunktio(n)
while (~isprime(n))
    n = n+1;
end
alkuluku = n;
```

ja kokeillaan syötteellä `omafunktio(897970)`.

Vastaukseksi saadaan `897971`.

3 Tehtävä C: Infektiomalli

3.1 SIR-malli

Mallinnetaan infektion leviämistä SIR-mallilla, jossa populaatio on jaettu kolmeen ryhmään: alttiit (S), infektoituneet (I) ja toipuneet (R). Ryhmän koot muuttuvat ajan suhteen seuraavilla differentiaaliyhtälöillä:

$$\begin{cases} \Delta s(t) = -\alpha i(t)s(t) \\ \Delta i(t) = \alpha i(t)s(t) - \beta i(t) \\ \Delta r(t) = \beta i(t) \end{cases} \tag{1}$$

Mallinnetaan infektion leviämistä parametreillä $\alpha = 0.0011$ ja $\beta = 0.03$ tuhannen ihmisen populaatiossa, jolle pätee ajan hetkellä $t = 1$

$$\begin{cases} s(1) = 999 \\ i(1) = 1 \\ r(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

.

Kuvassa 1 näkyy ylempänä tartuntatilanteen kehitys SIR-mallin mukaan mainituilla alkuarvoilla. Annetuilla parametreilla α ja β tartuntavauhti näyttää olevan varsin hurja, ja infektoituneiden määrä saavuttaa huippunsa jo 13. päivänä, jolloin sairastuneita on yhteensä 918 kpl.

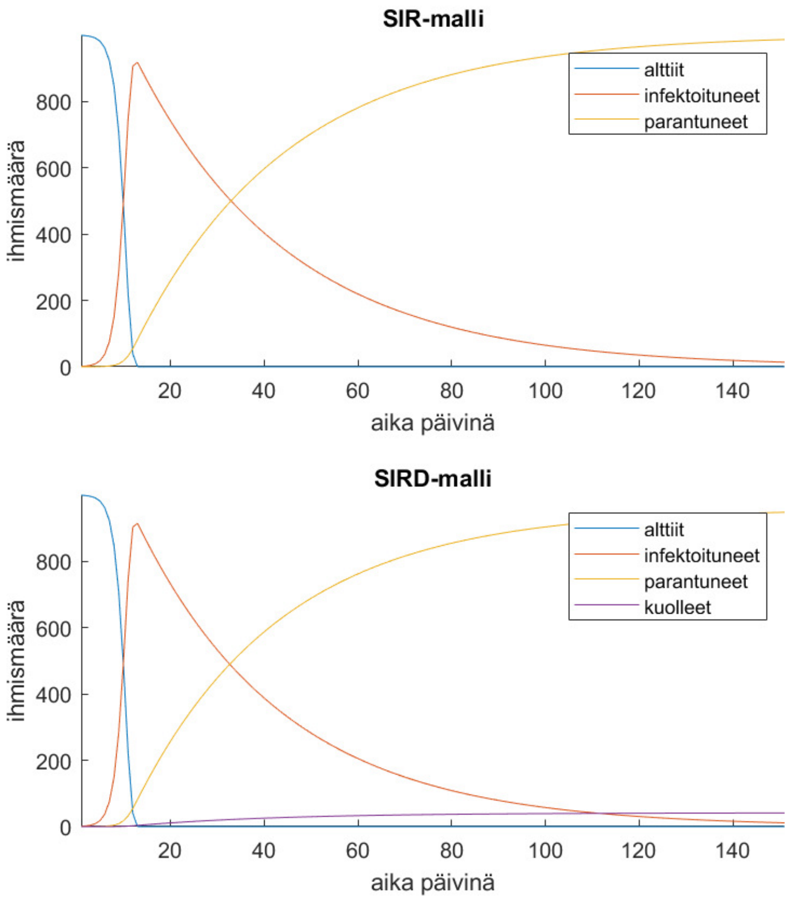
3.2 SIRD-malli

Lisätään malliin kuolleiden ryhmä (D), jonka koko muuttuu differentiaaliyhtälön $\Delta d(t) = \gamma i(t)$ mukaisesti. Tällöin mallin differentiaaliyhtälöiden joukko näytää seuraavalta

$$\begin{cases} \Delta s(t) = -\alpha i(t)s(t) \\ \Delta i(t) = \alpha i(t)s(t) - \beta i(t) - \gamma i(t) \\ \Delta r(t) = \beta i(t) \\ \Delta d(t) = \gamma i(t) \end{cases} \tag{3}$$

Mallinnetaan infektion leviämistä arvoilla $\gamma = 0.0013$ ja $d(1) = 0$ sekä muutoin samoilla alkuarvoilla kuin SIR-mallin tapauksessa.

Kuvassa 1 näkyy alempana kuvaaja, jossa ylempään SIR-malliin on lisätty kuolleiden ryhmä. Parametri γ, joka kuvaa kuolleisuutta on kuitenkin valittu sen verran pieneksi, ettei ero mallien välillä silmämääräisesti näytä järin suurelta.



Kuva 1: SIR- ja SIRD-mallit tuhannen ihmisen populaatiossa parametreilla $\alpha = 0.0011$, $\beta = 0.03$ ja $\gamma = 0.0013$.

SIRD-mallissa populaatiosta kuolee 41 ihmistä eli lopullinen kuolleisuus on 4.1% luokkaa. Huomataan, että kyseinen arvo vastaa hyvinkin tarkasti suhdetta $\frac{\gamma}{\beta+\gamma}$. Tulos myös kuulosta varsin järkevältä. Kuvaavathan parametrit β ja γ yhdessä vauhtia, jolla väestöä poistuu alttiiden ihmisten joukosta, jolloin γ:n osuus kyseisestä arvosta tarkoittaa intuitiivisesti kuolleisuutta.

4 Kotitehtävä: Kulutus-investointimalli

Kulutus-investointimallin mukaan BKT (Y), kulutus (C) ja investoinnit (I) riippuvat toisistaan ajan suhteen seuraavien yhtälöiden mukaan

$$\begin{cases} y(t) = c(t) + i(t) \\ c(t) = \alpha y(t-1) \\ i(t) = \beta(c(t) - c(t-1)) + \gamma \end{cases} \tag{4}$$

,

missä parametrit α, β ja γ oletetaan vakioiksi.

4.1 Mallin simulointi

Simuloidaan mallia kolmilla eri parametrien arvoilla seuraavin skenaarioin:

- `A`: $c(0) =$ `1M€`, $i(0) =$ `1M€`, $\alpha =$ `0.89`, $\beta =$ `0.89`, $\gamma =$ `0.5M€`
- `B`: $c(0) =$ `1M€`, $i(0) =$ `1M€`, $\alpha =$ `0.75`, $\beta =$ `1.4`, $\gamma =$ `0.5M€`
- `C`: $c(0) =$ `0.5M€`, $i(0) =$ `0.5M€`, $\alpha =$ `1.0`, $\beta =$ `1.1`, $\gamma =$ `0.3M€`

Aloitetaan määrittelemällä apufunktiot kulutuksen ja investointien kehitysen laskemiselle ajan hetkellä t.

```
function c = consumption(bkt, alpha, t)
% kulutus ajan hetkella t
c = alpha * bkt(t-1)
```

```
function i = investments(cons, beta, gamma, t)
% investoinnit ajan hetkella t
i = beta * (cons(t) - cons(t-1)) + gamma
```

Toteutetaan sitten itse mallinnus määrittelemällä sitä varten funktio `bktMalli`, joka ottaa parametreikseen alkuarvot $c(0)$ ja $i(0)$, kertoimet α, β ja γ sekä vuosimäärän, jonka ajan simulaatiota halutaan ajaa.

```
function M = bktMalli(c0, i0, alpha, beta, gamma, years)
% alustetaan vektorit alkuarvoilla
c = [c0]
i = [i0]
y = [c0+i0]
% ajetaan simulaatiota haluttu maara iteraatioita
for t=2:years+1
    c = [c consumption(y, alpha, t)]
    i = [i investments(c, beta, gamma, t)]
    y = [y (c(t)+i(t))]
end
```

```
% palautetaan kulutuksen, investointien ja BKT:n kehitys matriisina,
% jossa kutakin edustaa yksi rivi
M = [c; i; y]
```

Esimerkki funktion hyödyntämisestä skenaarion B tapauksessa:

```
% ajetaan simulaatio ja tallennetaan tulos matriisiin B
B = bktMalli(1, 1, 0.75, 1.4, 0.5, 50)
% piirretaan kuvaaja
t = [0:50]
figure
hold on
plot(t, B(1,:))
plot(t, B(2,:))
plot(t, B(3,:))
axis tight
title('Skenaario B (Elli Kiiski)')
legend('kulutus', 'investoinnit', 'BKT')
xlabel('aika vuosina')
ylabel('M(euro)')
```

Kuvasta 2 nähdään, että skenaariossa A käyrät heittelehtivät aluksi pari kertaa ylös alas kunnes ennen pitkää saavuttavat tasapainotilan, ja ovat siitä lähtien vakioita. Tämä skenaario näyttää sellaiselta, johon todellisessa maailmassa varmaan halutaan pyrkiä.

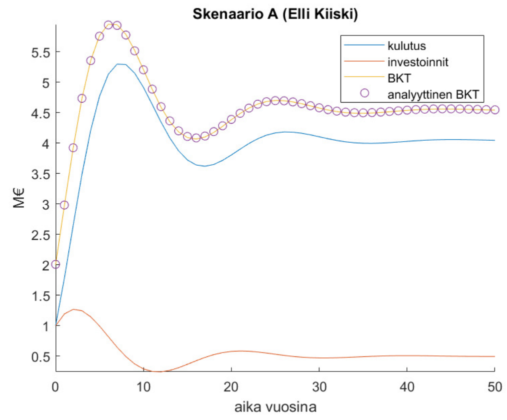
Skenaariossa B puolestaan kuvan 3 mukaan heittelehdintä sen kun vain kasvaa amplitudiltaan eli BKT sekä kulutus ja investoinnnit vaihelevat ajan kuluessa yhä rajummin ääripäästä toiseen. Todellisuudessa tällaisella skenaariolla tulisi kulutuksen ja investointien kanssa ylä- ja alarajat vastaan.

Kuten kuvasta 4 huomataan, skenaariossa C käyrät lähtevät eksponentiaaliseen kasvuun. B-skenaarion tapaan myös tässä tapauksessa kulutuksen yläraja tulisi pian vastaan.

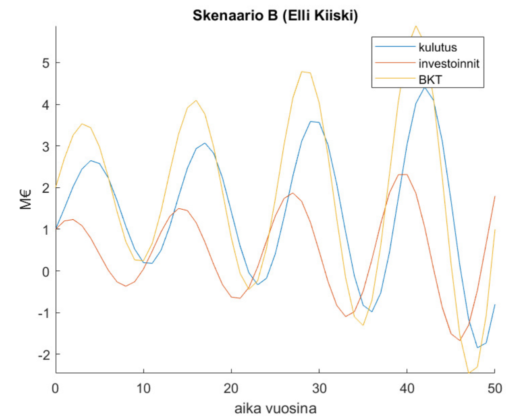
4.2 Analyyttinen ratkaisu

On väitetty, että skenaariolle A on olemassa analyyttinen ratkaisu ja se on muotoa $y_a(t) = k_1{r_1}^t + k_2{r_2}^t + c$, missä $k_1 = -1.27+0.98i$, $k_2 = -1.27-0.98i$, $r_1 = 0.84 - 0.29i$, $r_2 = 0.84 + 0.29i$ ja $c = 4.55$.

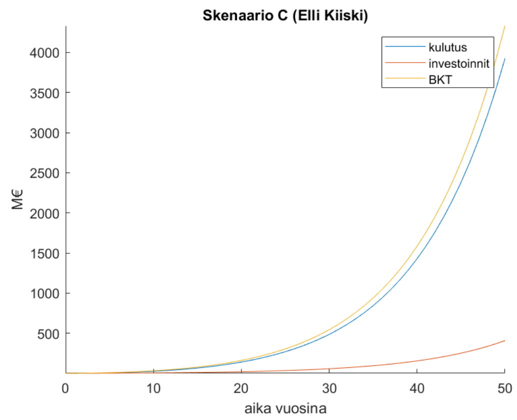
Tutkitaan väitteen paikkansapitävyyttä määrittelemällä ratkaisua vastaava funktio ja testaamalla sitä samaisella 50 vuoden ajanjaksolla, kuin aiemmin skenaarion A simuloinnissa.



Kuva 2: Skenaario A päätyy tasapainoon.



Kuva 3: Skenaario B jatkaa heittelehtimistä.



Kuva 4: Skenaario C kasvaa exponentiaalisesti.

Määritellään yhtälöä vastaava funktio.

```
function y = bkt(years)
% alkuarvot
k1 = -1.27 + 0.98i
k2 = -1.27 - 0.98i
r1 = 0.84 - 0.29i
r2 = 0.84 + 0.29i
c = 4.55
% itse ratkaisu
y = k1 * r1.^years + k2 * r2.^years + c
```

Kun piirretään funktion arvoja skenaarion A kuvaajan päälle (komennolla `scatter(t, bkt(t))`) huomataan, että pisteet asettuvat mitä siisteimmin BKT-käyrälle, kuten kuvassa 2 näkyy. Se tarkoittaa tietenkin sitä, että analyyttinen ratkaisu on aivan oikea, ainakin tarvittavalla tarkkuudella.