

# 1. Определенный интеграл.

**Пример 1.** Вычислить  $\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

*Решение:*

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^{0.5} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

**Пример 2.** Вычислить  $\int_1^e \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$ .

*Решение:*

$$\int_1^e \frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^e \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = \left( 2\sqrt{x} + \ln x \right) \Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 1.$$

**Пример 3.** Вычислить  $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$ .

*Решение:*

$$\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx = \left( x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - \frac{1}{2} \cos 2\pi + \frac{1}{2} \cos 0 = \pi^2.$$

**Пример 4.** Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $y = x^2$  при  $x \in [1, 2]$ .

*Решение:*

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ кв. ед.}$$

Вычислить интеграл  $\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$ .

**Пример 5**

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1, \\ dx = 2t dt; \\ x \Big|_3^8 \rightarrow t \Big|_2^3 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{(t^2 - 4)2t}{t} dt = \\ &= 2 \int_2^3 (t^2 - 4) dt = \left( \frac{2}{3} t^3 - 8t \right) \Big|_2^3 = -6 + \frac{32}{3} = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$ .

**Пример 6**

*Решение:*

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}} = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \rightarrow dt = e^x dx, \\ e^{2x} + 1 = t^2 + 1, \\ x|_0^1 \rightarrow t|_1^e \end{array} \right\} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln \frac{e + \sqrt{e^2 + 1}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Вычислить  $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$ .

**Пример 7**

u

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx &= \left[ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

Вычислить  $\int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx$ .

**Пример 8**

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx &= \left[ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = (x^2 + 1) dx, \quad v = \frac{x^3}{3} + x \end{array} \right] = \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left( \frac{x^3}{3} + x \right) \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{e^3}{3} + e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \frac{e^3}{3} + e - \left( \frac{x^3}{9} + x \right) \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} + e - \frac{e^3}{9} - e + \frac{1}{9} + 1 = \frac{2e^2 + 10}{9}. \end{aligned}$$

### Задачи для самостоятельного решения.

#### 1. Вычислить интегралы по формуле Ньютона – Лейбница:

а)  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ , б)  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ , в)  $\int_1^2 3(x-1)^2 dx$ ,  
г)  $\int_0^{\pi/2} \sin 3x dx$ , д)  $\int_1^5 \frac{x dx}{1+x^2}$ , е)  $\int_0^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) dx$ ,  
ж)  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x}$ , и)  $\int_0^{2\pi} \cos x \cos 5x dx$ .

#### 2. Вычислить интегралы подстановкой:

а)  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$ , б)  $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$ , в)  $\int_1^3 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$ , г)  $\int_0^{\pi/2} \cos^3 3x \sin 6x$   
д)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx$ , е)  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ , ж)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}$ .

#### 3. Вычислить интегралы по частям:

а)  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ , б)  $\int_1^e (x+1) \ln x dx$ , в)  $\int_0^{\pi/6} x \cos 3x dx$ , г)  $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ ,  
д)  $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos x dx$ , е)  $\int_0^{\pi^2/4} \sin \sqrt{x} dx$ , ж)  $\int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x) dx$ .

#### Ответы:

1. а)  $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ , б)  $\frac{\pi}{4}$ , в) 1, г)  $\frac{1}{3}$ , д)  $\ln \sqrt{13}$ , е)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ , ж)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ , и) 0.

2. а)  $\frac{1}{3}$ , б)  $\frac{32}{3}$ , в)  $\frac{464\sqrt{2}}{15}$ , г)  $\frac{2}{15}$ , д)  $\frac{3\pi+8}{12}$ , е)  $\ln \frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}$ , ж)  $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

3. а)  $\frac{e-2}{e}$ , б)  $\frac{e^2+5}{4}$ , в)  $\frac{\pi-2}{18}$ , г)  $\pi^2-4$ , д)  $\frac{\pi}{2}$ , е) 2, ж)  $\frac{e^{\pi/2}-1}{2}$ .

## 2. Несобственный интеграл.

### 2.1 Несобственный интеграл первого рода

**Опр.**

*Определение 1.* Если существует конечный предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , то его называют *несобственным интегралом 1-го рода* от функции  $f(x)$  на интервале  $[a, +\infty)$  и обозначают  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Таким образом, по определению  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ .

При этом говорят, что несобственный интеграл существует или *сходится*. Если же не существует конечного предела, то несобственный интеграл не существует или *расходится*.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ .

*Решение:*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -e^{-x} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -e^{-b} + 1 \right) = 1.$$

**Пример 2.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_{-\infty}^2 (x^2 - 5) dx$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 \left( \frac{x}{2} + 3 \right) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \left( \frac{x}{2} + 3 \right) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{4} + 3x \right) \Big|_a^2 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{2^2}{4} + 6 - \frac{a^2}{4} - 6a \right) = -\infty. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Решение:*

При  $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty (\alpha < 1), \\ \frac{1}{\alpha - 1} (\alpha > 1). \end{cases}$$

При  $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |x| \Big|_1^b) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$

Следовательно,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

**Пример 4.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

*Решение:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 + \lim_{a \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

**Пример 5.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ .

*Решение:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{+\infty} \sin x dx.$$

Но  $\int_0^{+\infty} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x + \cos 0$ , и т. к.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$

не существует, то интеграл  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$  расходится. Аналогично расходится

и интеграл  $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$ . Значит, и данный в условии интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$  расходится.

*Признак сравнения.* Если на промежутке  $[a, \infty)$  определены две неотрицательные функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , интегрируемые на любом конечном отрезке  $[a, b]$ , причем  $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ , то из сходимости интеграла

$$\int_a^{\infty} g(x) dx \text{ следует сходимость интеграла } \int_a^{\infty} f(x) dx, \text{ а из расходимости ин-}$$

$$\text{теграла } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ следует расходимость интеграла } \int_a^{\infty} g(x) dx.$$

*Признак сравнения в предельной форме.* Если на промежутке  $[a, \infty)$  определены две положительные функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , интегрируемые на любом конечном отрезке  $[a, b]$ , и существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (0 < A < \infty), \text{ то несобственные интегралы } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ и}$$

$$\int_a^{\infty} g(x) dx \text{ сходятся или расходятся одновременно.}$$

**Пример 6** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ .

*Решение:*

Воспользуемся признаком сравнения.

Так как  $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \forall x \in [1; +\infty)$ , то из сходимости  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$

следует сходимость и данного интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ .

Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$ .

### Пример 7

*Решение:*

Воспользуемся предельным признаком сравнения. Данный интеграл сходится, т. к. сходится интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ , а

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x^2+1} \right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

### Пример 8. Исследовать на сходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{2x-7}{x^3+x^2+5x+12} dx.$$

*Решение:*

Воспользуемся предельным признаком сравнения. При  $x \rightarrow \infty$  подынтегральная функция эквивалентна  $\frac{2}{x^2}$ . Таким образом,  $\alpha = 2 > 1$ , и данный интеграл сходится.

Теорема. Если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ , то сходится и интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ .

### Пример 9

*Решение:*

Подынтегральная функция – знакопеременная, при этом  $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|$ ,

$$\text{но } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Следовательно, интеграл  $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$  сходится, а интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$  сходится абсолютно.

## 2.2 Несобственный интеграл второго рода

*Определение 1.* Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна при  $x \in [a; b)$  и имеет разрыв при  $x = b$ . Тогда  $\int_a^b f(x) dx$  определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

и называется *несобственным интегралом 2-го рода*. Если предел, стоящий справа, существует и конечен, интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  или установить его расходимость.

*Решение:*

При  $x = 0$  подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - 1 - 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

**Пример 2.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ .

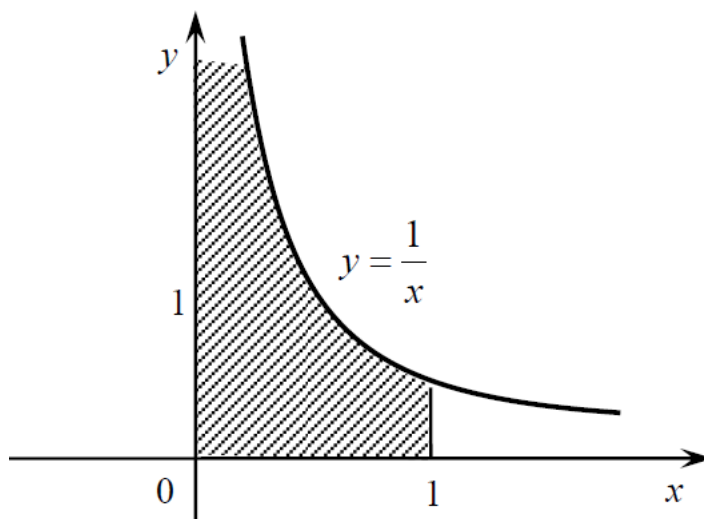
*Решение:*

При  $x=0$  подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, и тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln|x|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty.$$

Это означает, что несобственный интеграл расходится.

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, не ограничена.



**Пример 3.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Решение:*

При  $x=-1$  и при  $x=1$  подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon_1}^0 + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon_2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon_1)) + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (\arcsin(1-\varepsilon_2) - \arcsin 0) = 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad \alpha \in R.$

*Решение:*

Рассмотрим три случая:

1. Пусть  $\alpha = 1$ , тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln|b-x| \Big|_a^b = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|) = \infty,$$

т. е. при  $\alpha = 1$  интеграл расходится.

2. Пусть  $\alpha > 1$ . Обозначим  $\alpha = 1 + s$ , где  $s > 0$ , тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\int_a^b (b-x)^{-1-s} d(b-x) = \frac{1}{s(b-x)^s} \Big|_a^b = \infty,$$

т. е. при  $\alpha > 1$  интеграл расходится.

3. Пусть  $\alpha < 1$ , тогда  $s = 1 - \alpha > 0$ . Имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\int_a^b (b-x)^{-\alpha} d(b-x) = \frac{(b-x)^s}{s} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^s}{s},$$

т. е. при  $\alpha < 1$  интеграл сходится.

Таким образом,  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$  сходится при  $\alpha < 1$  и расходится при  $\alpha \geq 1$ .

**Признак сравнения.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны при  $a \leq x < b$  и имеют разрыв при  $x = b$ . Пусть, кроме того,  $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$  при  $x \in [a, b)$ . Тогда если интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится, то сходится и интеграл

$\int_a^b \varphi(x)dx$ ; если интеграл  $\int_a^b \varphi(x)dx$  расходится, то расходится и интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ .

**Предельный признак сравнения.** Пусть  $f(x) \geq 0$ ,  $\varphi(x) \geq 0$  на  $[a, \infty)$ ,  $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b)$  и имеют разрыв при  $x = b$ . Если существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ , то несобственные интегралы  $\int_a^b f(x)dx$  и  $\int_a^b \varphi(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно.

Пример

Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x^3}$ .

**Решение:**

При  $x = 0$  подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв.

Сравним подынтегральную функцию с  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Очевидно, что  $\frac{1}{\sqrt{x} + x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in (0;1)$ .

При этом  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2$ . Поэтому несобственный

интеграл от «большей» функции сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

**Теорема.** Если  $f(x)$  – знакопеременная функция, непрерывная на  $[a, b)$  и имеющая разрыв при  $x = b$ , и если  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходится, то

сходится и интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ .

Вычислить несобственный интеграл  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$

*Решение:*

Подынтегральная функция является бесконечно большой при  $x \rightarrow 1$ . Представим ее в виде

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}.$$

Найдем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}}{\frac{1}{(1-x)^{1/3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то по предельному признаку сравнения интегралы  $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$  и  $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$  ведут себя одинаково. Интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$  сходится, т. к.  $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ . Следовательно, и исходный интеграл тоже сходится.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов 1-го рода:

а)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2};$

б)  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2};$

в)  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$

г)  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$

д)  $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx;$

е)  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx.$

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов 2-го рода:

а)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$

б)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$

в)  $\int_0^1 x \ln x dx;$

г)  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-6x+8};$

д)  $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x};$

е)  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}};$

б)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)};$

в)  $\int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}};$

г)  $\int_1^{\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} dx;$

д)  $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1};$

е)  $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$