# Раскраски графов. Реберные раскраски

Тахонов Иван Иванович

Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет

НГУ, 2019

# Реберная раскраска

## Вспомним...

Пусть $G = (V, E)$ – неор. граф и $p \in \mathbb{Z}$. Реберной раскраской $G$ в $p$ цветов называется функция $c : E \to \{1, 2, \ldots, p\}$ такая, что никакие два ребра, инцидентные одной вершине, не покрашены в один цвет:

$$c(e_i) \neq c(e_2), \;\; \forall e_1, e_2 \in E : \;\; e_1 \cap e_2 \neq \varnothing.$$

**Определение 1**

*Пусть $G = (V, E)$ – связный неорграф. Минимальное число цветов, необходимое для правильной раскраски ребер $G$, называется хроматическим индексом $G$ и обозначается $\chi'(G)$.*

Вопросы:

1. какое множество ребер д. б. покрашено в разные цвета?
2. какое множество ребер можно красить в один цвет?

**Замечание 1**

*Пусть* $G$ *– простой неорграф и* $L(G)$ *– его реберный граф. Тогда*

$$\chi'(G) = \chi(L(G)).$$

**Док.-во.** Очевидно. ∎

**Следствие 1**

*Пусть* $G$ *– простой неорграф,* $\Delta(G)$ *– максимальная степень вершины в* $G$*. Тогда*

$$\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant 2\Delta(G) - 1.$$

**Док.-во.** Первое неравенство очевидно. Посмотрим на второе.

$$\chi'(G) = \chi(L(G)) \leqslant \Delta(L(G)) + 1 \leqslant 2\Delta(G) - 1.$$

Несложно понять, что $\Delta(L(G)) \leqslant 2\Delta(G) - 2$. ∎

**Теорема 1 (Визинг, 1964)**

*Пусть* $G$ *– простой неорграф. Тогда* $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G)+1\}$.

**Доказательство.** Очевидно, $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$. Докажем, что $\chi'(G) \leqslant \Delta(G)+1$. Индукция по числу ребер.

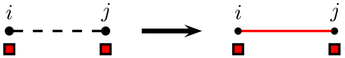
При $|E(G)| = 1$ все очевидно.
Пусть верно для графов с $|E(G)| \leqslant m-1$. Докажем для $= m$.

Для краткости:

- "существует раскраска (под)графа в $\leqslant \Delta(G)+1$ цветов" = существует раскраска (граф раскрашиваем);
- "вершине $v$ инцидентно ребро цвета $x$" = цвет $x$ есть (присутствует) в $v$;
- "вершине $v$ не инцидентны ребра цвета $y$" = цвет $y$ отсутствует в $v$.

Пусть $G$ – нераскрашиваемый граф с $m$ ребрами. По предп. индукции граф $G\backslash(i,j)$ раскрашиваем $\forall(i,j) \in E(G)$.

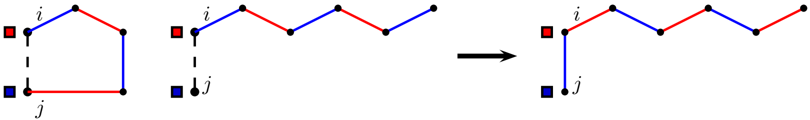
В раскраске $G\backslash(i,j)$ нет вершин, в которых присутствуют все $\Delta + 1$ цвета. Степени вершин не больше $\Delta$.




В раскраске $G\backslash(i,j)$ нет цвета $x$ такого, что $x$ отсутствует одновременно в $i$ и в $j$. Иначе красим $(i,j)$ в $x$ и получаем раскраску $G$.

Обозначения: неокрашенное (убранное) ребро – пунктир, отсутствующий цвет – в квадрате рядом с вершиной.

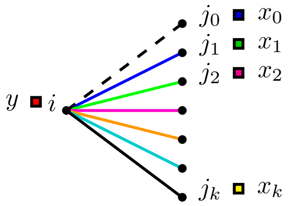
Пусть $x$ отсутствует в $i$ и $y$ отсутствует в $j$. Рассмотрим макс по включению чередующуюся $y - x$ цепь, выходящую из $i$ в $G\backslash(i,j)$. Она заканчивается в $j$. Иначе инвертируем цвета и красим $(i,j)$ в $y$. Получаем раскраску $G$.



Выбираем ребро $(i, j_0)$ и удаляем из графа. Красим $G \backslash (i, j_0)$. Удаленное ребро пока не окрашено.

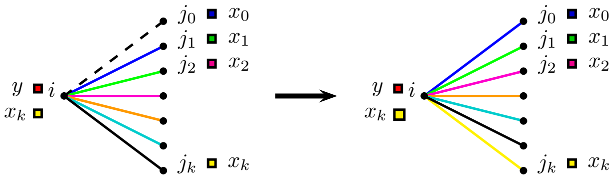
Пусть цвет $x_0$ отс. в $j_0 \Rightarrow$ у $i$ есть сосед $j_1$: $(i, j_1)$ окрашено $x_0$. Пусть $x_1$ отс. в $j_1 \Rightarrow$ у $i$ есть сосед $j_2$: $(i, j_2)$ окрашено в $x_1$ и т.д.

Построим макс послед. $j_0, j_1, \ldots, j_k$ соседей $i$ такую, что ребро $(i, j_{l+1})$ окрашено в цвет $x_l$, отсутствующий в $j_l$.

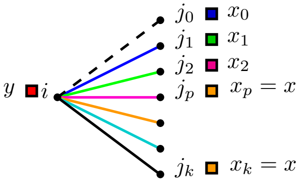



Назовем соответствующий набор ребер **веером**.

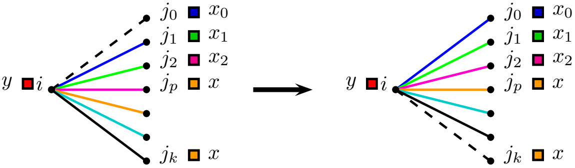
У вершины $i$ отсутствует цвет $y \neq x_0$. Вдруг отсутствует еще и $x_k$? Тогда перекрашиваем $(i, j_l)$ в $x_l$ (для всех $l = 0, \ldots, k$) и получаем раскраску для всего G.



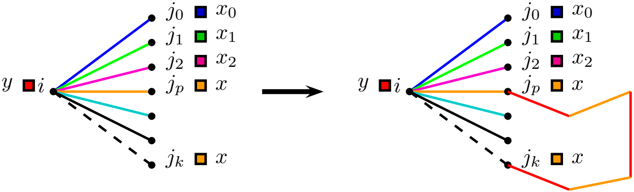

Таким образом, $x_k$ должен быть в $i$, т.е., существует $p \leqslant k-1$: $x_k = x_p = x$.



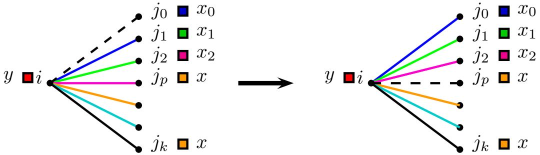
Перекрасим все $(i, j_l)$ в $x_l$, $l = \overline{0, k-1}$. Ребро $(i, j_k)$ теперь не окрашено.



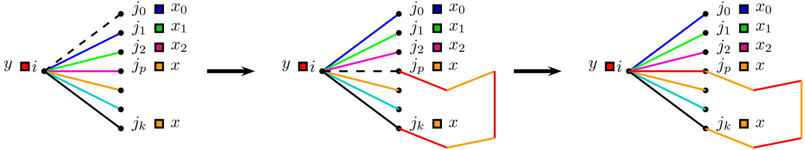

Выпустим из $j_k$ макс по включению чередующуюся $y - x$ цепь. По сделанному ранее замечанию, она должна заканчиваться в $i$ и, след.-но, проходить по $(i, j_p)$.



Вернемся к исходной раскраске и перекрасим граф иначе: все $(i, j_l)$ в $x_l$, $l = \overline{0, p-1}$. Ребро $(i, j_p)$ теперь не окрашено.




Снова выпускаем макс чередующуюся $y - x$ цепь, теперь из $j_p$. Она заканчивается в $j_k$ (не можем продолжить до $i$, т.к. $(i, j_{p+1})$ окрашено в $x = x_p$). Значит, перекрашиваем ее и красим $(i, j_p)$ в $y$. Получили раскраску для $G$. ↯ ■



### Замечание 2

*Теорема Визинга позволяет разбить все простые графы на два хроматических класса:*

- $\chi'(G) = \Delta(G) \rightarrow$ *граф класса 1,*
- $\chi'(G) = \Delta(G) + 1 \rightarrow$ *граф класса 2.*

Приведите пример:

1. графа класса 1,
2. графа класса 2.

### Замечание 3

*Теорему можно обобщить на мультиграфы.*

*Пусть* $G$ *– мультиграф без петель с* $\max$ *степенью вершины* $\Delta$ *и* $\max$ *кратностью ребра* $\mu$. *Тогда* $\chi'(G) \in [\Delta, \Delta + \mu]$.

Еще заметим: доказательство конструктивно, его можно превратить в алгоритм.

**Algorithm 1** (Схема алг. раскраски ребер графа в $\Delta + 1$ цвет)

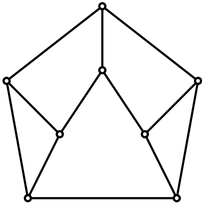
**Input:** Граф $G = (V, E)$ максимальной степени $\Delta$.
  Для каждой $v \in V$ создаем список свободных цветов. Вначале у всех вершин свободны $\{1, 2, \ldots, \Delta + 1\}$.
  **for all** $e = (u, v) \in E$ **do**
    **if** есть цвет $c$, свободный у $u$ и $v$ **then** красим $(u, v)$ в $c$
    **else**
      строим веер из вершины $u$,
      находим чередующуюся двуцветную цепь,
      перекрашиваем веер и путь, как в теореме Визинга,
      у $u$ появляется свободный цвет, общий с $v$,
      красим в него $(u, v)$.
**Output:** раскраска $G$ в $\Delta + 1$ цвет.

## Более формальные реализации

- Nishizeki T., Terada O., Leven D., "Algorithms for edge-coloring graphs" // Dept. Elec. Comm. Tohoku Univ., Tech. Rep. TRECIS 83001 (1983).
- Gabow H.N. et al., "Algorithms for edge-coloring graphs" // Tech. Report (1985) – три алгоритма с трудоемкостями $O(|E||V|)$, $O(|E|\Delta \log |V|)$ и $O(|E|\sqrt{|V| \log |V|})$
- J. Misra, David Gries, "A constructive proof of Vizing's theorem" // Inf. Proc. Letters, 41(3), pp. 131-133 (1992) – может быть реализован за $O(|E||V|)$

# Пример

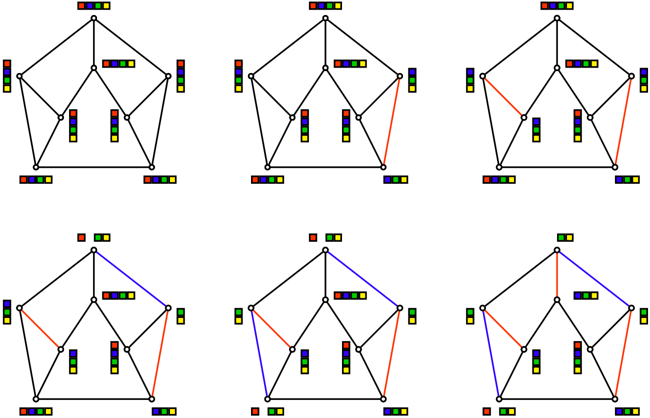
Построим раскраску указанного графа



Граф 3-регулярный, достаточно 4 цветов.

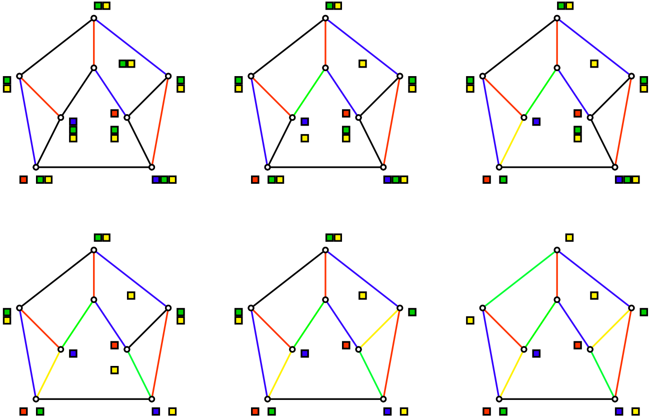
# Пример

Красим..



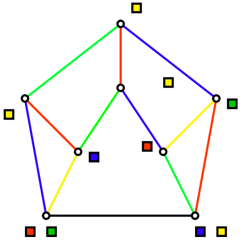
# Пример

..красим..



## Пример

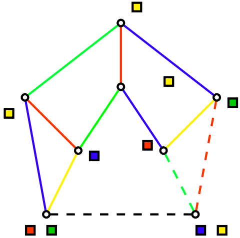
СТОП. Не можем покрасить нижнее ребро.



У концевых вершин нет общего свободного цвета

# Пример

Строим веер около правой нижней вершины

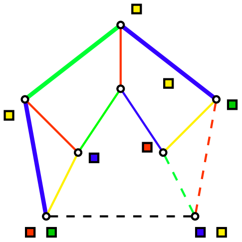


- Берем непокрашенное ребро, на конце свободен зеленый;
- берем зеленое ребро – на конце свободен красный;
- берем красное ребро – на конце свободен зеленый. Стоп.

Можем взять другой свободный цвет или другую вершину в кач. центра.

# Пример

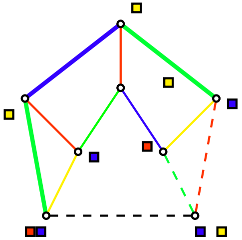
Ищем двуцветный путь (жирный на рисунке)



- Начинается во втором конце непокрашенного ребра;
- первое ребро – свободный цвет центра веера (синий);
- второе ребро – св. цвет второго конца некраш. ребра (зеленый);
- путь не доходит до центра веера.

# Пример

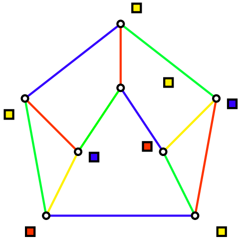
Перекрашиваем путь



У обеих нижних вершин теперь свободен синий цвет

# Пример

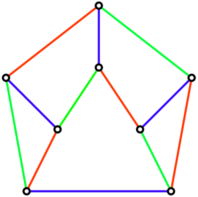
Красим ребро в синий



Раскраска в 4 цвета получена

# Пример

Граф на самом деле 3-раскрашиваемый..



Вопрос: что если воспользоваться жадным алгоритмом?

> *Перебираем ребра и красим каждое в минимальный доступный цвет.*

Сколько цветов используем и какова будет оценка точности?

### Теорема 2 (Holyer, 1981)

*Определить, является ли граф реберно 3-раскрашиваемым, – это $\mathcal{NP}$-полная задача.*

**Док.-во.** Не приводится, т.к. довольно сложное технически.

Идея: сводим задачу 3-Выполнимость к 3-Раскрашиваемости. По булевой функции в ДНФ (в каждой дизъюнкции 3 литерала)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i, \ |C_i| = 3 \ \forall i,$$

сказать, есть ли у нее набор истинности.

По ДНФ строим 3-регулярный граф (такие графы называют кубическими), 3-раскраска которого соотв. набору истинности.

I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring // SIAM Journal on Computing, 10 (4), 718–720 (1981) ∎

Следовательно, скорее всего, за полиномиальное время не сможем определить,

1. можно ли раскрасить ребра графа в $p \geqslant 3$ цветов;
2. принадлежит ли данный граф классу 1 или классу 2 (то есть, $\chi'(G) = \Delta(G)$ или $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$).

Вопросы: можно ли за полиномиальное время определить,

1. раскрашиваются ли ребра данного графа в 2 цвета?
2. принадлежит ли заданный граф с $\Delta = 2$ первому или второму классу?

# Полезное наблюдение

## Замечание 4

*Пусть* $G$ *– кубический 3-раскрашиваемый граф и* $V' \subseteq V(G)$. *Пусть* $E' \subseteq E(G)$ *– ребра, соединяющие* $V'$ *с остальным графом, а* $k_i$ *– число ребер из* $E'$ *цвета* $i$ *(*$i = 1, 2, 3$*). Тогда* $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 (\mathrm{mod}\ 2)$.

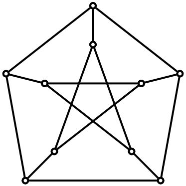
**Док.-во.** В самом деле, пусть $E_{12} \subseteq E(G)$ – ребра, крашенные в 1 или 2. Они образуют набор циклов в $G$ (2-рег. подграф). Очевидно,

$$k_1 + k_2 = |E_{12} \cap E'| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2) \Rightarrow k_1 \equiv k_2 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Аналогично для $k_2$ и $k_3$. ∎

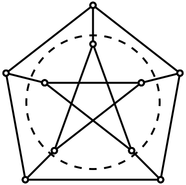
# Пример

Является ли указанный граф реберно 3-раскрашиваемым?



# Пример

Выберем подграф (внутренний 5-цикл).



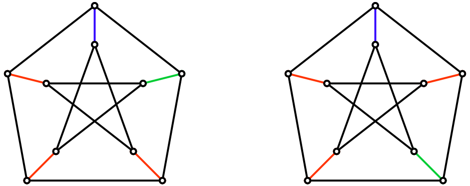
Он соединен с внешним 5-циклом пятью ребрами. Рассмотрим их.

Если граф 3-раскрашиваем, то на этих ребрах все цвета встречаются либо четное число раз (что невозможно), либо нечетное число раз.

Единственный вариант распределения цветов: $5=1+1+3$.

# Пример

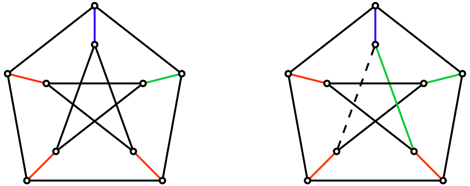
Раскрасим ребра



Есть всего два варианта (с точностью до поворотов и отражений).

# Пример

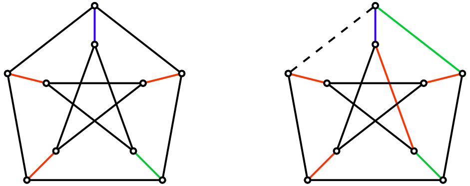
Рассмотрим первый вариант.



Есть два пути длины 3, в которых первое ребро синее, а последнее красное. Они пересекаются по синему ребру, так что раскрасить оба пути в 3 цвета не получится

# Пример

Рассмотрим второй вариант.



Снова есть два пути длины 3, начинающихся с общего синего ребра и заканчивающихся красным ребром. Можем раскрасить один из них, но не оба.

Вывод: граф не является реберно 3-раскрашиваемым.

# Раскраска двудольных графов

В случае двудольных графов у задачи есть элегантное решение.

**Теорема 3 (König, 1916)**

*Двудольный граф* $\max$ *степени* $\Delta$ *является* $\Delta$*-раскрашиваемым.*

**Док.-во.** Одноцветные подграфы – это паросочетания. Так что $\Delta$-раскраска эквивалентна разбиению графа на $\Delta$ паросочетаний.

Каждое из паросочетаний при этом должно покрывать все вершины $\max$ степени.

Случай 1: граф $\Delta$-регулярен. Найдем разбиение G на $\Delta$ совершенных паросочетаний. Мы знаем, что они в G есть (из теоремы Холла). Находим сов. паросочетание, красим его в цвет 1 и убираем. Получаем $(\Delta - 1)$-регулярный граф , снова ищем сов. паросочетание, красим в цвет 2 и убираем. Повторяем до тех пор, пока от графа ничего не останется.

Случай 2: $G$ не регулярен. Дополним до регулярного!

Создадим $G' = (V_1' \cup V_2', E')$ – копию графа $G = (V_1 \cup V_2, E)$:

- вершинам $v_i \in V_i$ соответствуют $v_i' \in V_i'$,
- $(v_1', v_2') \in E' \Leftrightarrow (v_1, v_2) \in E$.

Соединим каждую $v \in V(G)$ с ее копией $v' \in V(G')$ с помощью $(\Delta - deg(v))$ ребер, где $deg(v)$ – степень вершины $v$ в $G$.

Получили мультиграф $H$:

1. $H$ содержит $G$ и $G'$;
2. $H$ является $\Delta$-регулярным.

Разбиваем $H$ на $\Delta$ паросочетаний (красим ребра в $\Delta$ цветов). Потом сужаем раскраску до графа $G$. ■

**Algorithm 2** (König)

По данному $G$ построить $\Delta(G)$-регулярный надграф $H \supseteq G$.
**for** $c = 1 \to \Delta$ **do**
  Найти совершенное паросочетание $M \subseteq H$
  Покрасить $M$ в цвет $c$.
  Положить $H = H \backslash M$.

## Трудоемкость реберной раскраски двудольного графа

| | | |
|---|---|---|
| $O(\lvert V\rvert \cdot \lvert E\rvert)$ | : | König D. (1916) |
| $O(\lvert E\rvert \ln \lvert E\rvert)$ | : | Cole R., Hopcroft J. (1982) |
| $O(\lvert E\rvert \ln \Delta)$ | : | Cole R., Ost K., Schirra S. (2001) |

**Замечание 5**

*Теорема Кёнига верна и для двудольных мультиграфов.*

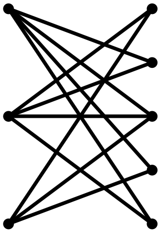
# Пример

Найти мин реберную раскраску двудольного графа с матрицей смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

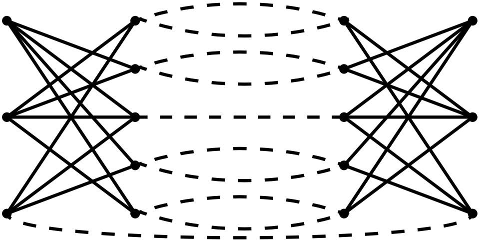
# Пример

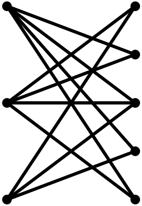
Восстанавливаем граф. $\Delta = 4$.



# Пример

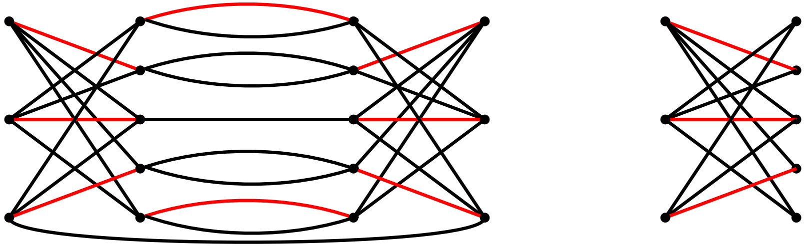
Строим копию графа и соединяем вершины с их копиями нужным числом ребер так, чтобы получить $\Delta$-регулярный граф.





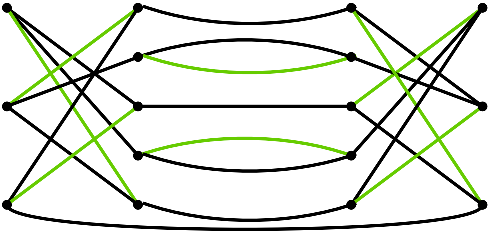
# Пример

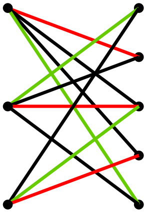
Ищем совершенное паросочетание и отмечаем его след в исходном графе.



# Пример

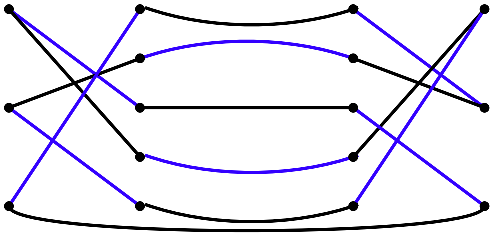
Убираем предыдущее паросочетание, ищем новое, отмечаем его след в исходном графе.

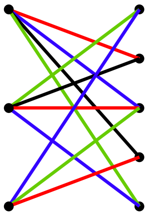




# Пример

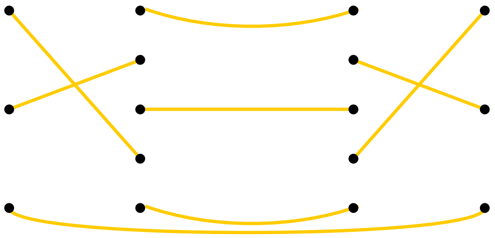
..еще раз

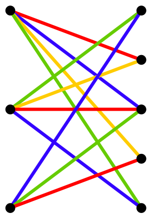




# Пример

От графа осталось одно паросочетание. Отмечаем его в исходном графе и заканчиваем.





# Реберные раскраски и расписания

# Class–Teacher Problem (CTP1)

Даны:

- $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ – классы,
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ – учителя,
- $r_{ij}$ – *требования:* число уроков класса $c_i$ с учителем $t_j$,
- $p$ – число доступных временных периодов в неделю.

Найти: *допустимое* расписание, в котором

- заняты не более $p$ периодов,
- выполнены все требования (в каждом классе проведены все занятия),
- у каждого класса одновременно не более одного занятия,
- у каждого учителя одновременно не более одного класса.

# Математическая постановка

Задача эквивалентна поиску допустимого решения системы равенств/неравенств:

$$
\begin{aligned}
\text{find} \quad & x_{ijk}, \\
\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} &= r_{ij}, \ \forall i \forall j, \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} &\leqslant 1, \ \forall i \forall k, \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} &\leqslant 1, \ \forall j \forall k, \\
x_{ijk} &\in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Обозначим:

$$\Delta = \max\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} r_{ij} \right\}$$

– $\max$ загруженность одного класса или учителя.

**Теорема 4**

*Допустимое решение CTP1 существует* $\Leftrightarrow \Delta \leqslant p$. *При выполнении этого условия решение может быть найдено с полиномиальной трудоемкостью.*

**Док.-во.** По входу задачи строим двудольный мультиграф $G = (C \cup T, E)$, в котором $c_i$ и $t_j$ соединены $r_{ij}$ параллельными ребрами (соотв. занятиям, которые $t_j$ должен провести у $c_i$).

Заметим:

- $\max$ степень вершины в G равна $\Delta$,
- все ребра-“занятия”, инцидентные одной вершине $v$, должны проходить в разное время.

Идея: сопоставим расписанию реберную раскраску G!

Ранее выяснили, что двудольный граф степени $\Delta$ допускает реберную раскраску в $\Delta$ цветов. Эта раскраска является мин. Она может быть построена за полиномиальное время.

Т.о., допустимое расписание $\exists \Leftrightarrow \Delta \leqslant p$:

- если $p < \Delta$, бесконфликтное расписание построить нельзя;
- если $\Delta \leqslant p$, то красим G в $\Delta$ цветов. Занятия одного цвета проводятся в одно время. ■

# CTP с ограниченным числом аудиторий (CTP2)

Даны:

- $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ – классы,
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ – учителя,
- $r_{ij}$ – требования,
- $p$ – временные периоды,
- $\rho$ – количество доступных аудиторий.

Найти: допустимое расписание, в котором

- заняты не более $p$ периодов,
- выполнены все требования (проведены все занятия у всех классов),
- у каждого класса одновременно не более одного занятия,
- у каждого учителя одновременно не более одного занятия.
- одновременно проводится не более $\rho$ занятий.

# Математическая постановка

Задача эквивалентна поиску допустимого решения системы равенств/неравенств:

$$
\begin{aligned}
\text{find} \quad & x_{ijk}, \\
\sum_{k=1}^{p} x_{ijk} &= r_{ij}, \ \forall i \forall j, \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} &\leqslant 1, \ \forall i \forall k, \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} &\leqslant 1, \ \forall j \forall k, \\
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} &\leqslant \rho, \ \forall k, \\
x_{ijk} &\in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$$

– общее число занятий в расписании.

**Теорема 5**

*Допустимое расписание CTP2 существует* $\Leftrightarrow \Delta \leqslant p$ *и* $\left\lceil \frac{\lambda}{p} \right\rceil \leqslant \rho$*. При выполнении этих условий расписание можно построить за полиномиальное время.*

**Док.-во.** Назначаем $\lambda$ занятий в $p$ периодов $\Rightarrow$ хотя бы в один период заняты $\geqslant \left\lceil \frac{\lambda}{p} \right\rceil$ аудиторий.

Покажем, что существует расписание, использующее $\leqslant \left\lceil \frac{\lambda}{p} \right\rceil$ауд.

### Лемма 1

*Дан граф* $G = (V, E)$ *и два паросочетания,* $M, N \subseteq G$*:* $|M| > |N|$*. Существуют паросочетания* $M', N' \subseteq G$ *такие, что:*

1. $|M'| = |M| - 1$, $|N'| = |N| + 1$,
2. $M \cup N = M' \cup N'$.

**Док.-во.** Рассм. граф $G[N \cup M]$. Его компоненты связности – чередующиеся пути и чередующиеся четные циклы. Так как $|M| > |N|$, найдется путь $P$, в котором оба концевых ребра лежат в $M$.
Положим $M' = (M \backslash P) \cup (P \cap N)$ и $N' = (N \backslash P) \cup (P \cap M)$. ■

Вернемся к Теореме. Построим граф задачи. Заметим, что если $p \geqslant |E| = \sum\limits_{i,j} r_{ij}$, утверждение тривиально: достаточно одной аудитории.

Если $p < \Delta$, допустимых расписаний нет.

Полагаем, что $\Delta \leqslant p < |E|$. Строим раскраску в ровно $p$ цветов. Ее легко получить из $\Delta$-раскраски: выбираем $p - \Delta$ ребер и красим в новые цвета. При этом ни один из старых цветов не должен полностью исчезнуть. Т.к. $p < |E|$, мы можем выбрать ребра так, чтобы осталось хотя бы одно каждого цвета.

Раскраска дает разбиение графа на $p$ паросочетаний. По Лемме выравниваем их мощности так, чтобы $\max$ не превышал $\left\lceil \frac{\lambda}{p} \right\rceil$. ■

## Замечание 6

*Пусть в CTP2 выполняется: $\Delta \leqslant \lambda/\rho$. Существует допустимое решение CTP2 с $\rho$ аудиториями на $p = \lceil \lambda/\rho \rceil$ временных периодов. Кроме того, указанное значение $p$ – минимально возможное при данном числе аудиторий.*

**Док.-во.** Действительно, пара $\rho$ и $p$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы:

$$\Delta \leqslant \lceil \lambda/\rho \rceil \text{ и } \left\lceil \frac{\lambda}{\lceil \lambda/\rho \rceil} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{\lambda}{\lambda/\rho} \right\rceil = \lceil \rho \rceil = \rho,$$

а пара $\rho$ и $(p-1)$ уже не удовлетворяет:

$$\left\lceil \frac{\lambda}{\lceil \lambda/\rho \rceil - 1} \right\rceil > \left\lceil \frac{\lambda}{\lambda/\rho + 1 - 1} \right\rceil = \lceil \rho \rceil = \rho.$$

■

# Пример

Рассмотрим следующий пример задачи CTP.

Найти мин число временных периодов ($p$), необходимое для $\exists$ допустимого расписания, и мин число аудиторий ($\rho$) в расп. на $p$ периодов. Построить кратчайшие расписания для $\rho$ и $\rho - 1$ аудиторий.

$$m = 5,\ n = 4,\ (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Пример

$$m = 5,\ n = 4,\ (r_{ij}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 8 & 8 & \end{array}\right).$$

Сначала найдем $p$ и $\rho$.

$$p = \Delta = \max\left\{\sum_i r_{ij}, \sum_j r_{ij}\right\} = \max\{5,5,8,8;5,5,5,7,5\} = 8.$$

$$\rho = \left\lceil \frac{\sum_{i,j} r_{ij}}{p} \right\rceil = \left\lceil \frac{26}{8} \right\rceil = 4.$$

# Пример

Затем построим расписание. Будем работать с матрицами вместо графов (граф слишком большой).

Нужно по $R$ построить регулярный мультиграф степени $\Delta$. Делали это следующим образом: строили по $R$ двудольный граф, копировали его и соединяли одноименные вершины нужным числом параллельных ребер, чтобы получить регулярный надграф.

Затем искали в полученном мультиграфе совершенное паросочетание, красили его, удаляли и повторяли до тех пор, пока граф не опустеет.

# Пример

На уровне матриц: по $R \in M_{m\times n}$ строим $R' \in M_{(m+n)\times(m+n)}$

$$R' = \begin{pmatrix} R & D_1 \\ D_2 & R^\tau \end{pmatrix},$$

где

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_m^1 \end{pmatrix},\ D_2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^2 \end{pmatrix},$$

$$d_i^1 = \Delta - \sum_j r_{ij},\ d_j^2 = \Delta - \sum_i r_{ij}.$$

# Пример

$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)$$

Совершенное паросочетание соответствует набору ненулевых элементов, стоящих по одному в каждой строке и в каждом столбце (назовем такой набор назначением).

# Пример

$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)$$

На каждом шаге ищем новое назначение и по нему строим расписание на новый период времени (ставим занятия, соотв. выбранным элементам верхней правой подматрицы). Затем уменьшаем выбранные элементы на 1 и повторяем процесс.

# Пример

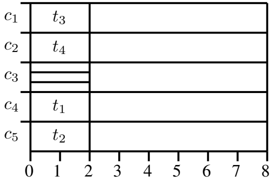
$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Замечание: пусть $r_{min}$ – мин элемент выбранного назначения. Можем использовать это назначение $r_{min}$ раз и построить (одно и то же) расписание на $r_{min}$ периодов. При этом нужно уменьшить выбранные элементы на $r_{min}$.

# Пример

$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)$$

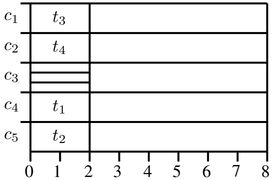
По этому назначению можно построить расписание на 2 периода..



## Пример

$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)$$

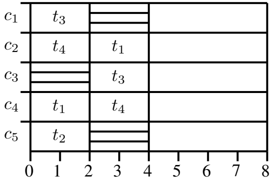
Уменьшаем выбранные элементы на 2..



# Пример

$$
R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)
$$

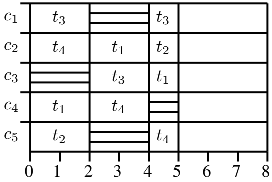
..ищем другое назначение и достраиваем расписание



# Пример

$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}\right)$$

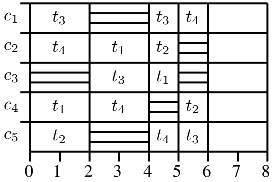
..снова..



# Пример

$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right)$$

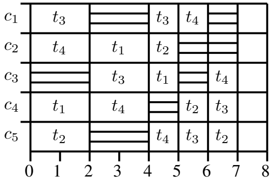
..и снова..



# Пример

$$R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

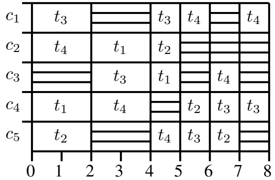
..и снова..



# Пример

$$
R' = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

..и еще один раз. STOP.



# Пример

Заметим: нам повезло! В каждый период заняты не более $\rho$ аудиторий (в данном случае иначе и не могло быть, так как $\rho = n = 4$).

Вообще говоря, могло бы оказаться, что в какие-то периоды занято больше $\rho$ аудиторий, тогда пришлось бы выравнивать нагрузку.

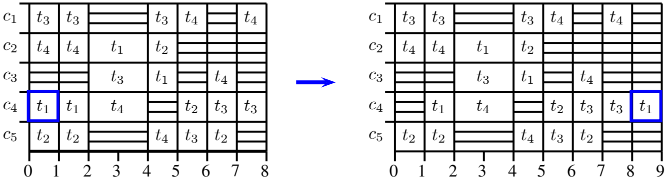
Построим кратчайшее расп. с $\rho' = \rho - 1 = 3$ аудиториями.

Нам потребуется $p' = \lceil \sum_{i,j} r_{ij}/\rho' \rceil = \lceil 26/3 \rceil = 9$ часов.

Попробуем переназначить что-нибудь в нашем расписании. Четыре аудитории заняты в периоды $t = 1, 2, 5$.

# Пример

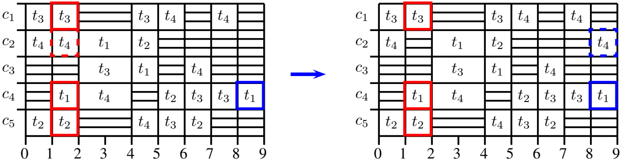
Открываем еще один час и переносим какое-нибудь занятие из “плохого” периода (например, первого).



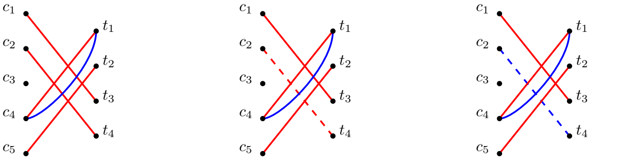

В первом периоде теперь допустимое количество занятий. Переходим к периоду 2.

# Пример

Выравняем нагрузку между 2 и 9 периодом.



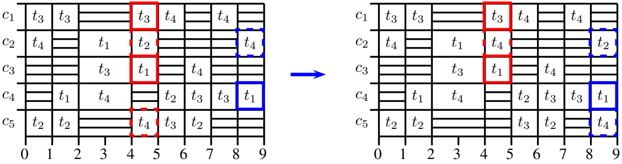
Для этого рассм. паросочетания, соотв. занятиям этих периодов, найдем путь, содержащий больше ребер 2 периода, и перекрасим его.



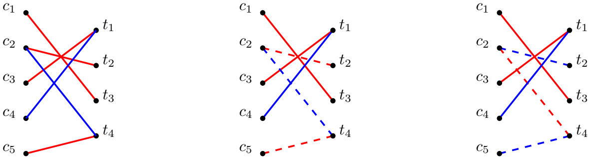
Во втором периоде нагрузка допустима. Переходим к пятому.

# Пример

Выравняем нагрузку между 5 и 9 периодом.




Для этого рассм. паросочетания, соотв. занятиям этих периодов, найдем путь, содержащий больше ребер 5 периода, и перекрасим его.




Нагрузка сбалансирована. Теперь каждый час не более 3 занятий.

В рассмотренную модель могу быть введены дополнительные ограничения.

Некоторые из них оставляют задачу полиномиально разрешимой:

- составление расписания на $p$ дней с учетом ограничений на нагрузку учителей и классов: у каждого класса $c_i$ проводится $\leqslant a_i$ занятий в день и каждый учитель $t_j$ проводит не более $b_j$ занятий в день;
- составление расписания на $p$ дней при условии, что нагрузка учителей и классов распределена равномерно между днями: количество занятий у каждого класса и у каждого учителя каждый день отличается не более чем на $1$;
- ...

В рассмотренную модель могу быть введены дополнительные ограничения.

А с некоторыми задача становится $\mathcal{NP}$-полной и за полиномиальное время решить её не удастся:

- есть занятия, проводимые одновременно у нескольких классов (лекции),
- учителя и/или классы доступны не во все периоды времени,
- есть занятия, требующие специализированных аудиторий,
- есть требования на отсутствие окон между занятиями,
- ...

Вообще же практически все сколько-нибудь реалистичные задачи составления расписаний являются сложнорешаемыми.

Для отражения специфических требований могут вводиться специфические раскраски: предписанная, интервальная и проч.

# Отсутствие окон в расписании

Раздел для любознательных

Рассмотрим теперь задачу CTP с дополнительным требованием: у классов и учителей не должно быть “окон”, т.е., занятия каждого класса и каждого учителя должны занимать последовательные временные интервалы.

Задача эквивалентна построению интервальной реберной раскраски некоторого двудольного мультиграфа.

**Определение 2**

*Пусть $G$ – неориентированный (мульти)граф. Реберная раскраска $G$ называется* интервальной, *если $\forall v \in V(G)$ ребра, инцидентные $v$, окрашены в $\deg(v)$ последовательных цветов.*

Асратян А.С., Камалян Р.Р. Интервальные раскраски ребер мультиграфа // Прикладная математика. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. Ун-та, 1987. С. 25–34.

## Верно ли, что...

1. ...любой граф допускает интервальную раскраску?

## Замечание 7

*Пусть* $G$ *– неор. (мульти)граф,* $\Delta$ *– макс степень вершины в* $G$*.* *Если* $G$ *допускает интервальную раскраску, то* $\chi'(G) = \Delta$*.*

**Док.-во.** Действительно, пусть $c$ – инт. раскраска. Выберем вершину $v$ степени $d \leqslant \Delta$ и рассмотрим ребра $e_1^v$, $e_2^v$, ..., $e_d^v$, инцидентные $v$. Ребро $e_l^v$ окрашено в цвет $c_l^v$, цвета $\{c_1^v, \ldots, c_d^v\}$ различны и образуют интервал. Рассм. $\bar{c} = c \mod \Delta + 1$. Эта функция является правильной реберной $\Delta$-раскраской $G$: исп. $\Delta$ цветов и для каждой $v$ величины $\{\bar{c}_1^v, \ldots, \bar{c}_d^v\}$ различны. ∎

## Следствие 2

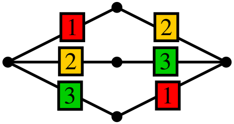
*Если* $\chi'(G) = \Delta + 1$*, то* $G$ *не допускает интервальной раскраски.*

## Верно ли, что...

1. ...любой граф допускает интервальную раскраску?
2. ...любая интервальная раскраска, если она существует, является минимальной (использует $\chi'(G)$ цветов)?
3. ...если существует интервальная раскраска, то существует и интервальная раскраска в $\chi'(G)$ цветов?

# Пример

Рассмотрим полный двудольный граф $K_{2,3}$.



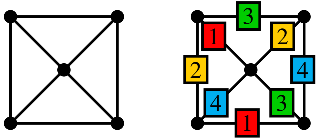

Он, очевидно, 3-раскрашиваем, но интервальной раскраски в 3 цвета нет, нужен четвертый.

## Верно ли, что...

1. ...любой граф допускает интервальную раскраску?
2. ...любая интервальная раскраска, если она существует, является минимальной (использует $\chi'(G)$ цветов)?
3. ...если существует интервальная раскраска, то существует и интервальная раскраска в $\chi'(G)$ цветов?
4. ... любой $\Delta$-раскрашиваемый граф допускает интервальную раскраску?

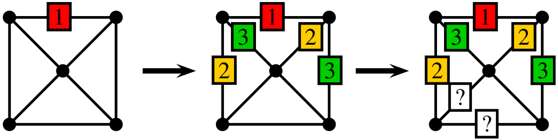
# Пример

Рассмотрим следующий граф. Его макс степень 4, он 4-раскрашиваем. Но интервальной раскраски не существует...



# Пример

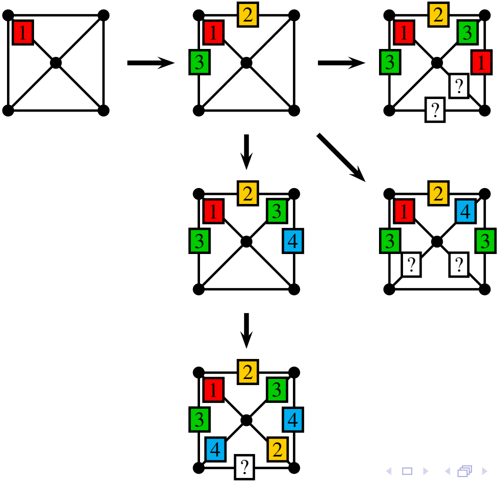
Какое из ребер окрашено в минимальный цвет?




Не достраивается. Попробуем другое..

# Пример

Все равно не получается.



С другой стороны, очевидно:

**Замечание 8**

*Пусть G – $\Delta$-регулярный граф с $\chi'(G) = \Delta$. Тогда G допускает интервальную раскраску.*

**Док.-во.** $\Delta$-раскр. для таких графов является интервальной. ∎

**Следствие 3**

*Определить, допускает ли $\Delta$-регулярный граф интервальную раскраску, – это $\mathcal{NP}$-полная задача.*

**Док.-во.** Знаем, что определить, является ли 3-регулярный граф 3-раскрашиваемым, – это $\mathcal{NP}$-полная задача. ∎

**Следствие 4**

*Определить, допускает ли граф интервальную раскраску, – это $\mathcal{NP}$-полная задача.*

# Простые свойства

## Замечание 9

*Пусть* $c$ *– интервальная раскраска* $G$ *в* $t$ *цветов. Тогда функция* $\bar{c} = t + 1 - c$ *также является интервальной раскраской* $G$.

## Замечание 10

*Пусть* $c$ *– интервальная раскраска* $G$ *в цвета* $\{1, \ldots, t\}$, *а* $k$ *– некоторая константа. Тогда функция* $\bar{c} = c + k$ *является интервальной раскраской* $G$ *в цвета* $\{k + 1, \ldots, k + t\}$ .

## Определение 3

*Пусть* $c$ *– инт. раскраска* $G$. *Говорим, что ребро* $(u, v) \in E(G)$ *имеет экстремальный цвет, если номер* $c(e)$ *больше (или меньше) номеров цветов смежных с* $e$ *ребер.*

# Простые свойства

**Замечание 11**

*Пусть графы $G_1$ и $G_2$ допускают инт. раскраску, а граф $G_3$ получен склейкой $G_1$ и $G_2$ по некоторой вершине (отождествлением $v_1 \in V(G_1)$ и $v_2 \in V(G_2)$). Тогда $G_3$ также допускает инт. раскраску.*

**Док.-во.** Рассмотрим инт. раскраски $G_1$ и $G_2$. Ребра, инцидентные $v_1 \in V(G_1)$, окрашены в цвета $\{c_1, c_1 + 1, \ldots, c_2\}$, а ребра, инц. $v_2 \in V(G_2)$, окрашены в цвета $\{f_1, f_1 + 1, \ldots, f_2\}$.

- Если $f_1 = c_2 + 1$, то объединим раскраски $G_1$ и $G_2$;
- если $f_1 < c_2 + 1$, то увеличим номера всех цветов в $G_2$ на $(c_2 + 1 - f_1)$, а затем объединим раскраски;
- если $f_1 > c_2 + 1$, то увеличим номера всех цветов в $G_1$ на $(c_2 - f_1 - 1)$, а затем объединим раскраски.

Объединение дает интервальную раскраску $G_3$. ■

# Простые свойства

**Замечание 12**

*Пусть графы $G_1$ и $G_2$ имеют инт. раскраски $c_1$, $c_2$, в которых ребра $e_1 = (u_1, v_1) \in E(G_1)$ и $e_2 = (u_2, v_2) \in E(G_2)$ имеют экстремальные цвета. $G_3$ получен склейкой $G_1$ и $G_2$ по ребру (отождествлением $u_1 \equiv u_2$, $v_1 \equiv v_2$). Тогда $G_3$ также допускает инт. раскраску.*

**Док.-во.** W.l.o.g. считаем, что цвет $c_1(e_1)$ в $G_1$ меньше цветов смежных с $e_1$ ребер, а цвет $c_2(e_2)$ в $G_2$ больше цветов смежных с $e_2$ ребер. Покрасим ребра $G_3$:

$$c'(e) = \begin{cases} c_1(e) - c_1(e_1), & e \in E(G_1), \\ c_2(e) - c_2(e_2), & e \in E(G_2). \end{cases}$$

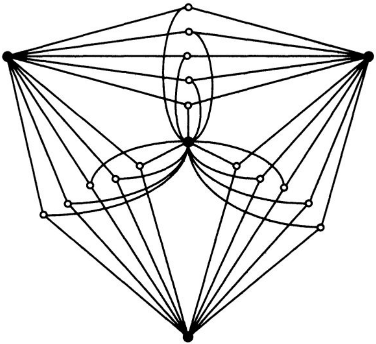
Получим инт. раскраску $G_3$. Отдельно на $G_1$ и $G_2$ раскр. $c'$ интерв. В $G_3$ у ребра, по кот. производилась склейка, цвет 0. Цвета смежных ребер из $G_1$ положительны, а из $G_2$ – отрицательны. ∎

## Верно ли, что...

1. ...любой граф допускает интервальную раскраску?
2. ...любая интервальная раскраска, если она существует, является минимальной (использует $\chi'(G)$ цветов)?
3. ...если существует интервальная раскраска, то существует и интервальная раскраска в $\chi'(G)$ цветов?
4. ... любой $\Delta$-раскрашиваемый граф допускает интервальную раскраску?
5. ... любой двудольный граф допускает интервальную раскраску?

# Пример

Рассмотрим следующий двудольный граф (Małafiejski's rosette).
У него нет интервальной раскраски.

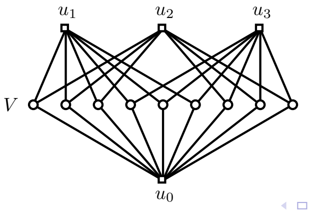


## Теорема 6

*Для любого $n \geqslant 5$ существует двудольный граф на $3n+4$ вершинах, не допускающий интервальной раскраски.*

**Док.-во.** Рассм. простой двудольный граф $G = (U \cup V, E)$:

- $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, $V = \{v_1, \ldots, v_{3n}\}$;
- $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$:
  - $E_0 = \{(u_0, v_i) | \ i = 1, \ldots, 3n\}$;
  - $E_1 = \{(u_1, v_i) | \ i = 1, \ldots, 2n\}$;
  - $E_2 = \{(u_2, v_i) | \ i = 1, \ldots, n$ или $i = 2n+1, \ldots, 3n\}$;
  - $E_3 = \{(u_3, v_i) | \ i = n+1, \ldots, 3n\}$.



Для этого графа $\Delta = 3n$. Пусть есть инт. раскраска в $t \geqslant 3n$ цветов. Вершине $u_0$ д.б. инцидентны ребра $3n$ послед. цветов:

$$k, k+1, \ldots, k+3n-1 \text{ для некот. } k.$$

Пусть $(u, v_1)$ покрашено в $k$, а $(u, v_2)$ покрашено в $k+3n-1$. Степени $v_1$ и $v_2$ равны 3 $\Rightarrow$

- цвета ребер, инц. $v_1$, не больше $k+2$;
- цвета ребер, инц. $v_2$, не меньше $k+3n-3$.

Вершина $u_1$ смежна с $v_1$ и $v_2$, ее степень $= 2n \Rightarrow$ разность м/у номерами цветов инцидентных ребер $\leqslant 2n-1$.
Оценим разность цветов ребер $(u_1, v_1)$ и $(u_1, v_2)$:

$$(k+3n-3) - (k+2) \leqslant c_2 - c_1 \leqslant 2n-1,$$

что невозможно при $n \geqslant 5$. ■

Граф неспроста такой большой!

**Теорема 7 (Giaro K., 1999)**

*Двудольные графы с $\leqslant 14$ вершинами допускают интервальную раскраску.*

Giaro K.: Compact Task Scheduling on Dedicated Processors with no Waiting Periods (in Polish), Ph.D. Thesis, Technical University of Gdansk, ETI Faculty, Gdansk (1999).

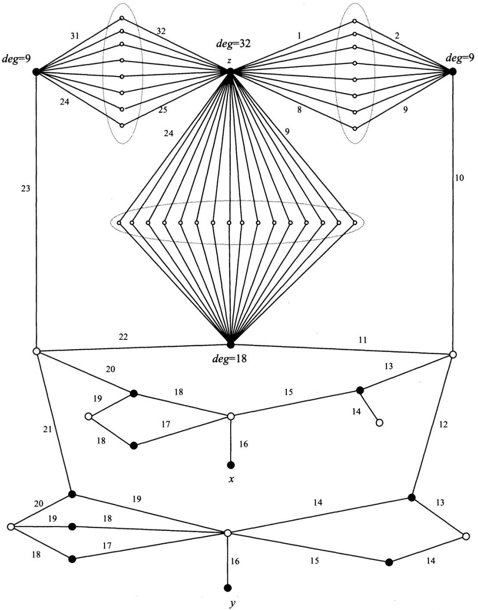
Для произвольных графов задача определения интервальной раскрашиваемости полна. Но с точки зрения расписаний нам интересны двудольные, что с ними?

**Теорема 8 (С.В. Севастьянов, 1990)**

*Определить, допускает ли двудольный граф интервальную раскраску, – это $\mathcal{NP}$-полная задача.*

**Док.-во.** Идея: сведем задачу для произвольного графа. Пусть $G = (V, E)$ – граф, инт. раскрашиваемость которого нужно определить, а $H = (\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2, \bar{E})$ – двудольный граф такой, что:

1. $H$ интервально раскрашиваем,
2. одна из долей $H$ содержит две вершины $(x, y)$ степени 1,
3. в любой интервальной раскраске $H$ ребра, инцидентные $x$ и $y$, окрашены одинаково.


deg=9
deg=32
z
deg=9
31
32
1
2
24
25
8
9
24
9
23
10
22
11
deg=18
20
13
19
18
15
14
17
21
12
18
16
x
20
19
14
13
19
18
17
18
16
15
14
y

По графу $G = (V, E)$ построим граф $\bar{G}$ следующим образом:

- $\forall (u, v) \in E$ создадим копию графа $H$ ($H_{(u,v)}$) с выделенными вершинами $x_u$ и $y_v$;
- заменим $(u, v)$ на $H_{(u,v)}$, отождествив $x_u$ ($y_v$), соотв. одноименным вершинам $G$.

Можно доказать:

- $\bar{G}$ – двудольный граф (очевидно),
- $\bar{G}$ интервально раскрашиваем тогда и только тогда, когда $G$ допускает интервальную раскраску.

Свели общий случай к задаче с двудольным графом. ■

Севастьянов С.В. Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа // Методы дискретного анализа. 1990. Т. 50. С. 61-72.

Тем не менее, некоторые классы двудольных графов имеют инт. раскраску, которую можно построить за полином.

### Замечание 13

*Пусть $G$ – регулярный двудольный граф степени $k$, полный двудольный граф $K_{n,m}$ или дерево. Тогда $G$ допускает интервальную раскраску.*

**Док.-во.** С регулярным графом все понятно. Рассмотрим $K_{n,m}$. Пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$ – вершина первой доли. Она смежна со всеми $j \in \{1, \ldots, m\}$ из второй доли. Покрасим ребро $(i, j)$ в цвет $(i + j - 1)$. Это интервальная раскраска в $n + m - 1$ цвет.

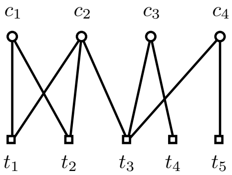
С деревьями – индукцией по числу ребер. Для одного ребра тривиально. Если все деревья с $(|E| - 1)$ ребром допускают инт. раскраску, то убираем из $G$ лист вместе с ребром, строим инт. раскраску полученного дерева, затем возвращаем лист и докрашиваем. ■

# Пример

Можно ли построить расписание без окон для задачи CTP со следующей матрицей?

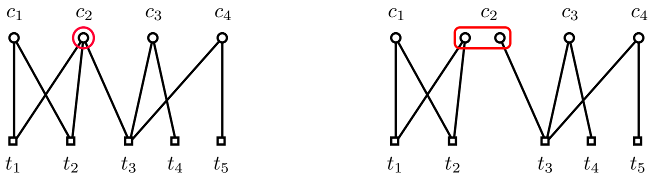
$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Построим граф задачи и попытаемся найти инт. раскраску.



# Пример

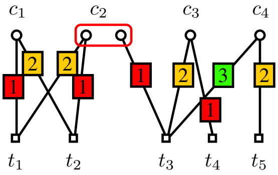
Заметим: граф является склейкой четного цикла и дерева.

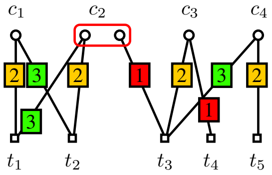



Оба подграфа интервально раскрашиваемы $\Rightarrow$ склейка тоже интервально раскрашиваема.

# Пример

Красим подграфы и пытаемся объединить раскраски.

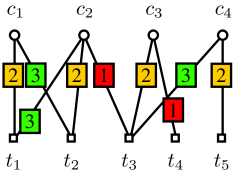



У $c_2$ конфликт цветов $\Rightarrow$ увеличиваем цвета в цикле на 1.

# Пример

Объединяем раскраски и восстанавливаем расписание.




| | | | |
|---|---|---|---|
| $c_1$ | | $t_1$ | $t_2$ |
| $c_2$ | $t_3$ | $t_2$ | $t_1$ |
| $c_3$ | $t_4$ | $t_3$ | |
| $c_4$ | | $t_5$ | $t_3$ |

Заметим, что получили расписание длины 3, что совпадает с макс степенью вершин в графе. Это кратчайшее возможное расписание.

# Интервальная раскраска мультиграфов

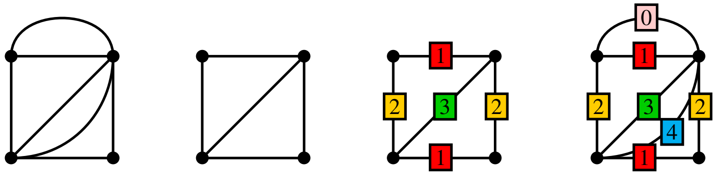
А что с интервальной раскраской мультиграфов?

Очевидно:

- задача не проще, чем для обыкновенных графов;
- можно трансформировать граф в обыкновенный, заменив кратные ребра на подграфы Севастьянова;
- интервально красятся только графы с $\chi'(G) = \Delta(G)$;
- если $\Delta$-регулярный мультиграф красится в $\Delta$ цветов, то полученная окраска является интервальной;
- $\Delta$-регулярный двудольный мультиграф без петель интервально красится в $\Delta$ цветов.

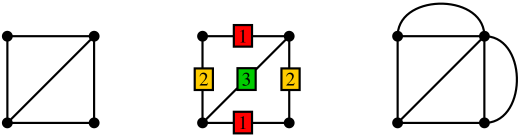
Что если просто избавиться от кратных ребер (оставить по одному), интервально раскрасить простой граф (если получится), а затем достроить раскраску до интервальной для исходного графа?

Верно ли, что простой граф будет интервально краситься $\Leftrightarrow$ есть инт. раскраска для мультиграфа?



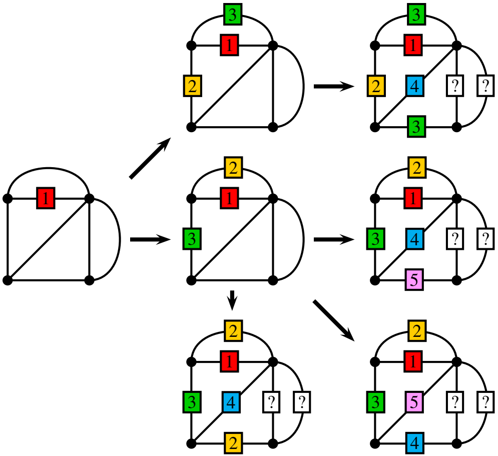
# Пример

Рассмотрим следующий граф, допускающий интервальную 3-раскраску. Удвоим два ребра.



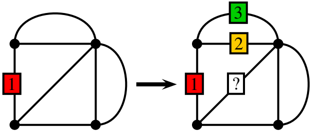
# Пример

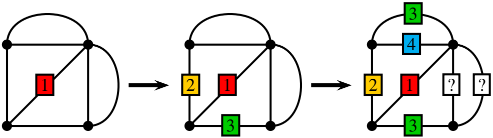
Рассмотрим варианты размещения минимального цвета.



# Пример

Рассмотрим варианты размещения минимального цвета.




Не удается достроить раскраску до интервальной.

# Выводы

- Интервальная реберная раскраска далеко не всегда существует;
- если она есть, то может требовать более $\chi'$ цветов;
- определить, существует она или нет, за полиномиальное время скорее всего не удастся (задача $\mathcal{NP}$–полна);
- все это верно даже для простых двудольных графов $\Rightarrow$ построить расписание без окон (или выяснить, существует ли оно) за полиномиальное время не сможем даже в случае, когда каждый учитель ведет у каждого класса не более одного урока;
- для некоторых специальных графов все же можем построить интервальную раскраску.

# Библиография

## Книги:


- J.A. Bondy, U.S.R. Murty – Graph Theory with Applications. University of Waterloo, Ontario, Canada (1982)
- A.S. Asratian – Bipartite graphs and their applications. Cambridge University Press (1998)
- Marek Kebale (ed.) – Graph Colorings. American Mathematical Society (2004)
- Jean-Claude Fournier, Graph Theory and Applications: With Exercises and Problems. Wiley (2010)

# Библиография

## Статьи:


- D. de Werra, Balanced Schedules // INFOR: Information Systems and Operational Research, 9:3, 230-237 (1971)
- S. Even, A. Itai, A. Shamir, On the Complexity of Timetable and Multicommodity Flow Problems // SIAM J. Comput., 5(4), 691–703 (1975)
- I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring // SIAM Journal on Computing, 10 (4), 718–720 (1981)
- J. Krarup, D. de Werra, COLORING: Chromatic Optimization: Limitations, Objectives, Uses, References // Euro. J. Oper. Res. 11, 1-19 (1982)
- D. de Werra, An introduction to timetabling // E.J. of OR, Vol. 19 (2), 151-162 (1985)

# Библиография

## Статьи:


- G.J. Woeginger, Exact Algorithms for NP-Hard Problems: A Survey // Chapter in "Combinatorial Optimization — Eureka, You Shrink!", pp 185-207 (2003)
- K. Giaro, Interval Edge-Coloring of Graphs // Chapter in M. Kubale, "Graph Colorings", American Mathematical Society (2004)
- I.H. van Staereling, School Timetabling in Theory and Practice // online (2012)
- T. Husfeldt, Graph colouring algorithms // Chapter in "Topics in Chromatic Graph Theory", 277-303 (2015)