Введение в дискретную математику и математическую логику

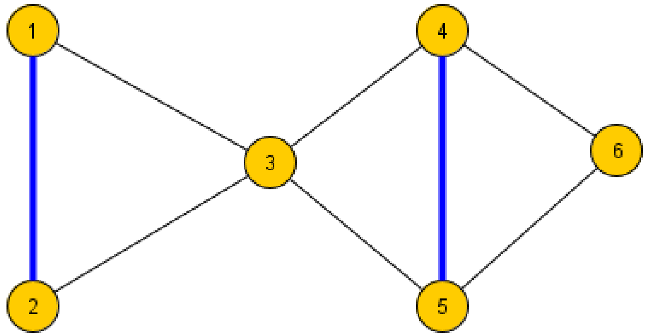
Лекция №12
Паросочетания

Апанович Зинаида Владимировна

Определения

Паросочетание M в графе G — это подмножество ребер $M \subseteq E$ такое, что каждая вершина инцидентна ≤ 1 ребру в M.

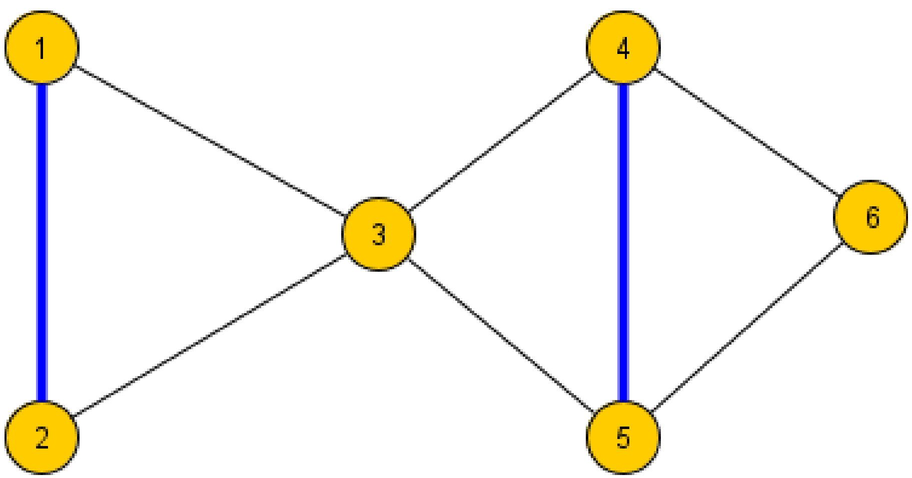
Если M — это паросочетание, говорят, что два конца каждого ребра M связаны паросочетением M, и каждая вершина, инцидентная ребру из M, называется покрытой паросочетанием M.



$$M = \{\{1, 2\}, \{4, 5\}\}.$$

Совершенное и наибольшее паросочетание

Совершенное *паросочетание* – это паросочетание, которое покрывает каждую вершину графа, *наибольшее паросочетание,* – это паросочетание, которое покрывает наибольшее возможное количество вершин.



Вершины 3 и 6 не покрыты паросочетанием M_1 .

Значит, M_1 не является совершенным паросочетанием.

Однако $M_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ является совершенным паросочетанием.

Совершенное и наибольшее паросочетание

Каждое совершенное паросочетание является наибольшим паросочетанием.

Однако обратное утверждение неверно.

Если G имеет совершенное паросочетание, то $|V|$ четно.

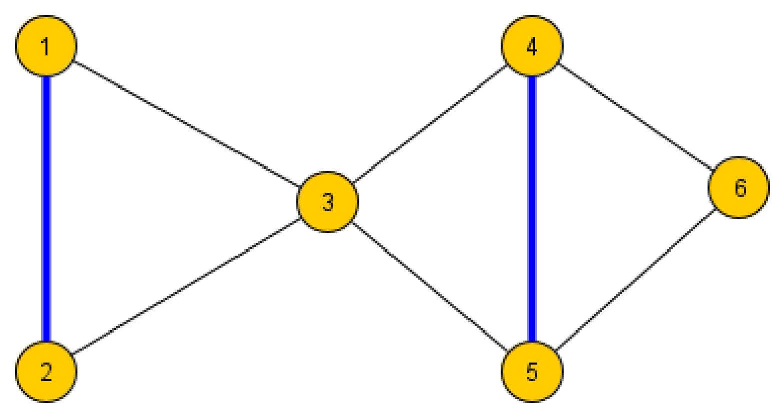
Однако обратное утверждение неверно: не всякий граф с четным количеством вершин имеет совершенное паросочетание.

Например, $K_{1,3}$ и $K_{2,4}$ не имеют совершенных паросочетаний.

Наибольшее и максимальное паросочетание

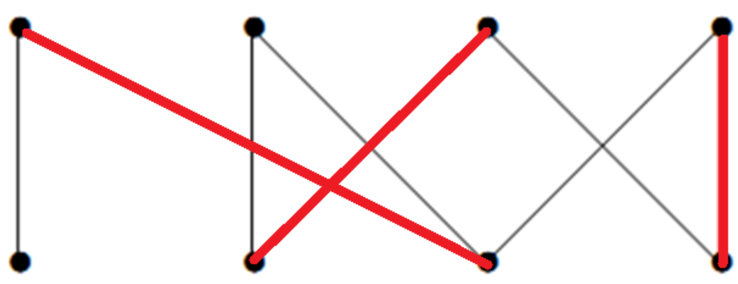
Максимальное *паросочетание* – это такое паросочетание, которое не может быть расширено до паросочетания большего размера.

Это то, что может быть получено путем жадного выбора ребер до тех пор, пока не останется ни одного ребра, которое можно было бы включить в это паросочетание.

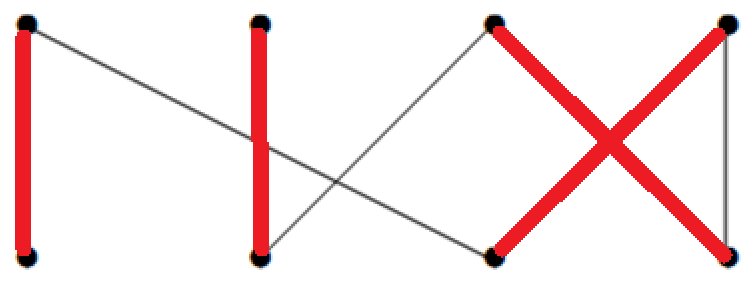


Максимальное и наибольшее паросочетание в двудольном графе .

Пример 2. Для двудольного графа легко найти максимальное паросочетание, то есть такое, которое нельзя увеличить простым добавлением ребер: просто выбирайте ребра, которые не имеют общих концевых вершин, пока это станет невозможным.



(а) максимальное паросочетание



(б) наибольшее и совершенное паросочетание

Задача о наибольшем паросочетании

Задача 1.

Дан *: граф G,*

Найти *: наибольшее паросочетание M* в G.*

Существует много вопросов, представляющих практический интерес, которые, будучи переведены на на язык теории графов, сводятся к поиску наибольшего паросочетания в графе.

Задача о назначении

Имеется множество вакансий. Требуется заполнить как можно больше вакансий, используя заданную группу претендентов, назначая кандидатов только на те должности, для которых они обладают квалификацией.

Эту ситуацию можно представить с помощью двудольного графа $G[X, Y]$ в где X представляет собой множество кандидатов, Y — множество вакансий, а ребро (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$ означает, что кандидат x имеет квалификацию для работы y .

Назначение претендентов на рабочие места, по одному человеку на рабочее место, соответствует паросочетанию в G, а Проблема заполнения как можно большего количества вакансий сводится к нахождению наибольшего паросочетания в G .

Задача о назначении

ПРИМЕР 3 В группе 4 сотрудника: Альварес, Берковиц, Чен и Дэвис;

и известно, что для завершения Проекта 1 необходимо выполнить 4 задания: техническое задание, архитектура, реализация и тестирование .

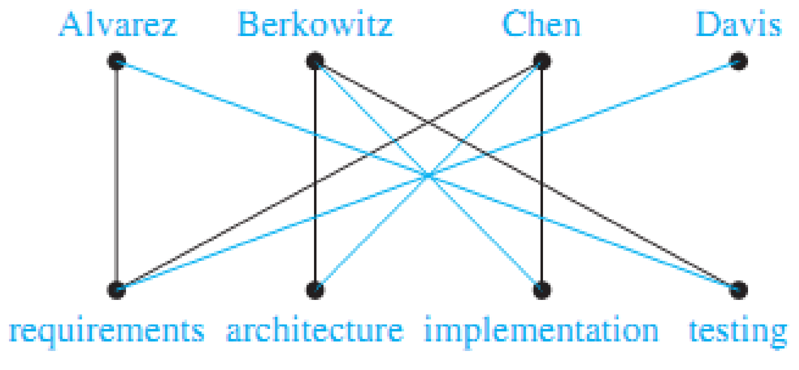
Предположим, что Альварес обучен разработке технических заданий и тестированию;

Берковиц прошел обучение по архитектуре, реализации и тестированию;

Чен прошел обучение по разработке технических заданий, архитектуры и реализации;

а Дэвис был обучен только разработке технических заданий.

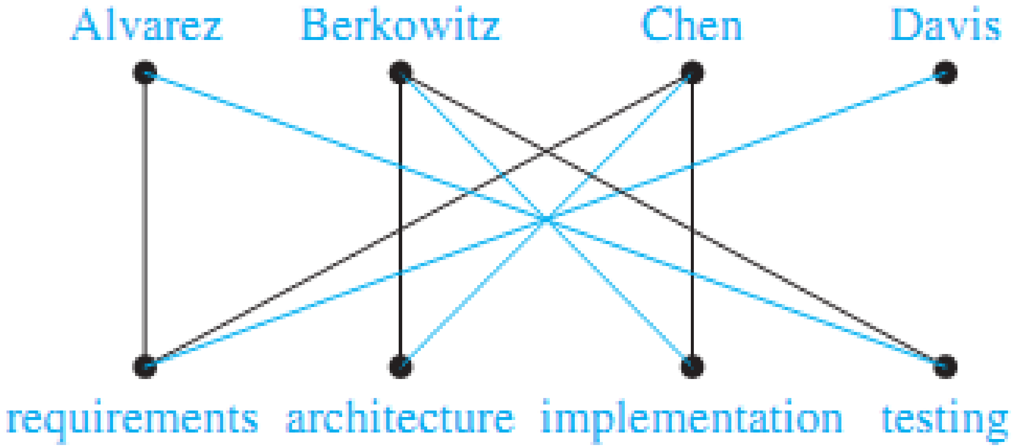
Мы моделируем эти возможности сотрудников с помощью двудольного графа, представленного ниже.



Задача о назначении

Для завершения проекта 1 нам необходимо назначить сотрудника на каждую работу так, чтобы на каждую работу был назначен сотрудник, и чтобы ни одному сотруднику не было назначено > 1 работы.

Мы можем сделать это, назначив Альвареса ответственным за тестирование, Берковица — за реализацию, Чена — за архитектуру, а Дэвиса — за разработку технического задания (синие линии показывают это распределение задач).



(a)

Полное паросочетание

Мы говорим, что паросочетание M в двудольном графе $G = (V, E)$ с разбиением вершин (X, Y) является полным паросочетанием из X в Y, если каждая вершина в X является конечной точкой ребра в паросочетании или, что эквивалентно, если $|M|=|X|$.

Полное паросочетание

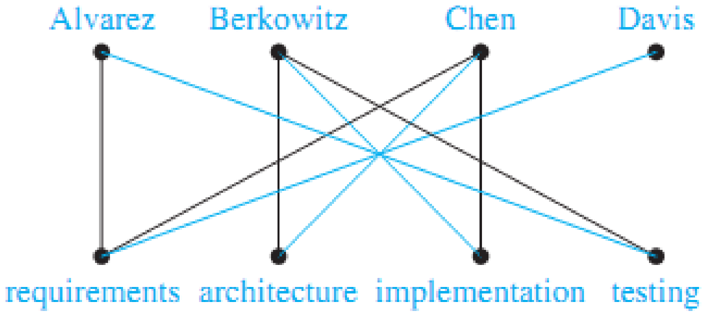
Например, чтобы распределить должности между сотрудниками таким образом, чтобы наибольшее количество должностей было назначено сотрудникам, мы ищем наибольшее паросочетание в графе, моделирующем компетенции сотрудников.

Для назначения сотрудников на все должности мы ищем полное паросочетание, где множество *X* равно множеству должностей.

В примере 3 мы нашли полное паросочетание из набора должностей набору сотрудников для проекта 1, и это паросочетание является наибольшим паросочетанием.

Теперь приведем пример того, как паросочетания можно использовать для моделирования браков.

X = {техническое задание, архитектура, реализация, тестирование}



(a)

Полное паросочетание

ПРИМЕР 4 Браки на острове. На острове находятся m мужчин и n *женщин.*

У каждого человека есть список лиц противоположного пола, приемлемых в качестве супруга.

Мы строим двудольный граф $G = (X, Y)$, где X — множество мужчин, а Y — множество женщин, так что между мужчиной и женщиной существует ребро, если они считают друг друга приемлемыми в качестве супругов.

Паросочетание в этом графе состоит из набора ребер, где каждая пара конечных точек ребра представляет собой пару муж-жена.

Наибольшее паросочетание— это наибольшее возможное множество супружеских пар, а полное паросочетание относительно X —это совокупность супружеских пар, где каждый мужчина женат, но, возможно, не все женщины.

Полное паросочетание

Теперь предположим, что в группе также есть 4 сотрудника: Вашингтон, Сюань, Ибарра и Зиглер; и предположим, что для завершения проекта 2 необходимо выполнить те же 4 задания .

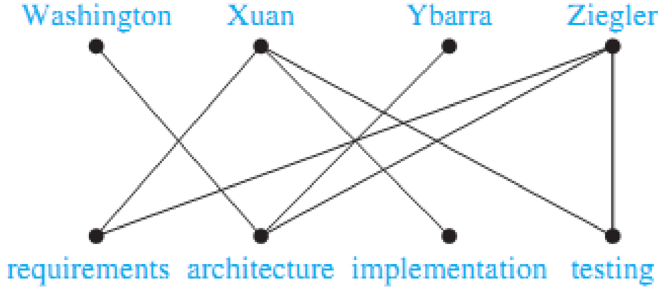
Предположим, что Вашингтон обучен заниматься архитектурой; Сюань обучен разрабатывать технические задания, реализовывать их и тестировать;

Ибарра получил образование в области архитектуры;

Зиглер прошел обучение по разработке технических заданий, архитектуре и тестированию.

Мы моделируем эти возможности сотрудников с помощью двудольного графа, представленного ниже.

X = {техническое задание, архитектура, реализация, тестирование}



(b)

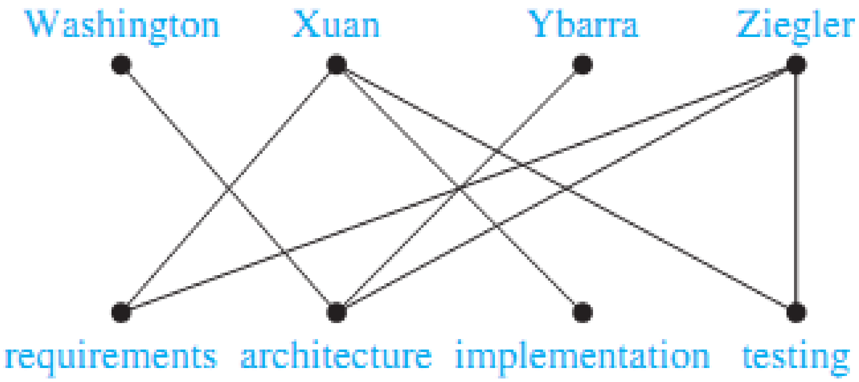
Полное паросочетание

Для завершения проекта 2 нам также необходимо назначить сотрудника на каждую работу так, чтобы на каждую работу был назначен сотрудник с нужной квалификацией, и ни одному сотруднику не было назначено более одной работы.

Однако это невозможно, поскольку только двое сотрудников, Сюань и Зиглер, прошли обучение по крайней мере для одной из трех работ: по разработке технических заданий, реализации и тестированию .

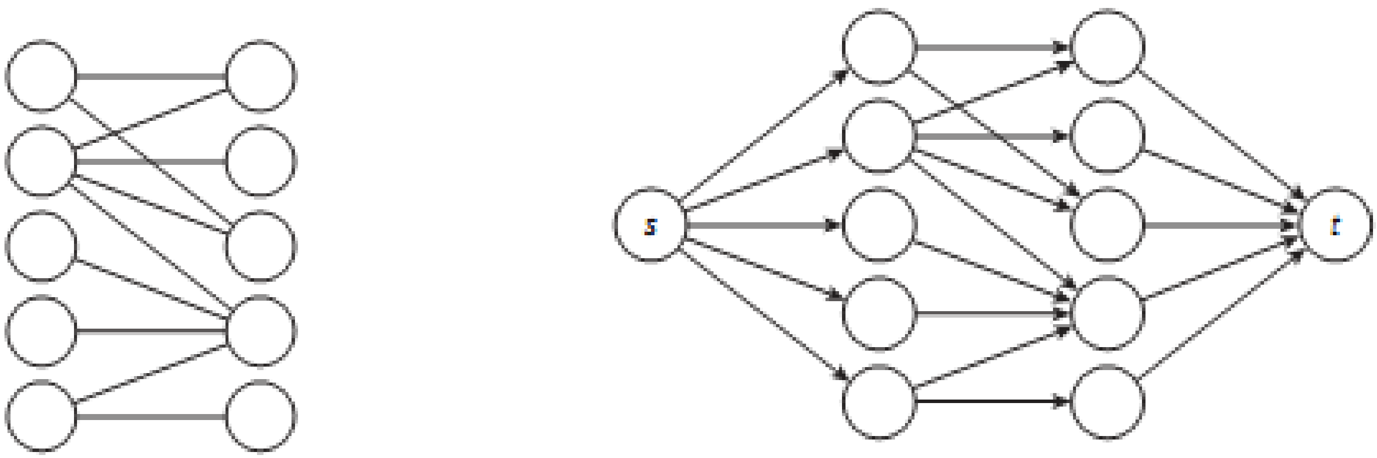
Следовательно, нет возможности назначить трех разных сотрудников на эти три должности так, чтобы на каждую должность был назначен сотрудник с соответствующей подготовкой.

X = {техническое задание, архитектура, реализация, тестирование}



Использование алгоритма поиска максимального потока для поиска наибольшего паросочетания.

Для данного графа *G* в примере задачи о паросочетании в двудольном графе, мы строим потоковую сеть *G'* как показано ниже.



(a) (b)

(a) Двудольный граф *G.* (b) Соответствующая потоковая сеть *G*', все пропускные способности ребер равны 1.

Использование алгоритма поиска максимального потока для поиска наибольшего паросочетания

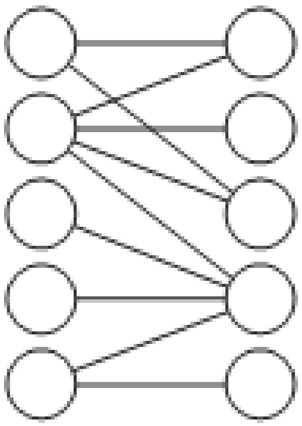
1) Сориентировать все ребра в *G’* из *X* в *Y.*

2) Добавить вершину *s* и ребро (*s*, *x*) из *s* в каждый вершину множества *X.*

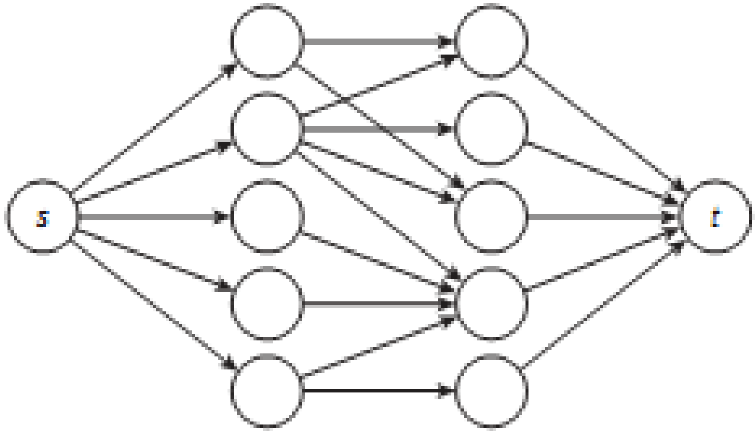
3) Добавить вершину *t* и ребро (*y*, *t*) из каждой вершины *Y* в *t* .

4) Присвоить каждому ребру в *G* пропускную способность 1 .

5) Вычислить наибольший *st*- поток в сети *G'* .



(a)



(b)

Анализ алгоритма

Мы покажем, что величина максимального потока в G' равна размеру наибольшего паросочетания в G.

Анализ основан на демонстрации того, что целочисленные потоки в G' кодируют паросочетания в G достаточно прозрачным образом.

Анализ алгоритма

Пусть в *G* имеется паросочетание *M*, состоящее из *k* ребер

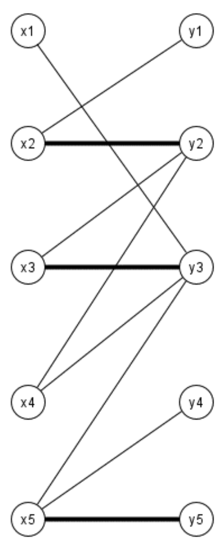
$(x_{i1}, y_{i1}), \ldots, (x_{ik}, y_{ik})$. $|M| = k$

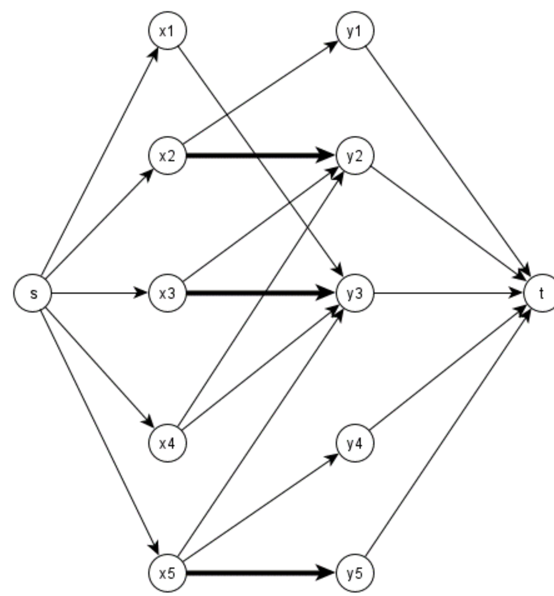
Рассмотрим поток *f*, который отправляет 1 единицу по каждому пути вида < $s \to x_{ij} \to y_{ij} \to t$ >.

То есть $f(e) = 1$ для каждого ребра на одном из этих путей.

Можно легко проверить, что условия пропускной способности и сохранения выполняются, и что *f* является *st*-потоком, имеющим значение *k* .

G





G'

Анализ алгоритма

Обратно, пусть в G' имеется поток f значения k .

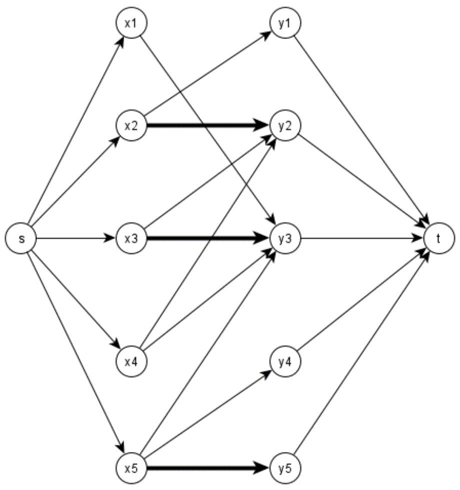
Мы знаем, что существует целочисленный поток f со значением k ;

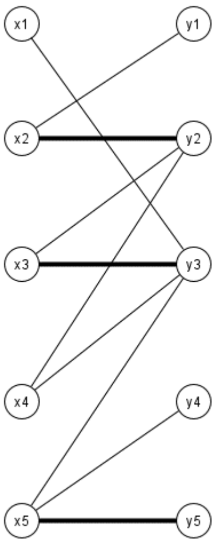
и поскольку все пропускные способности равны 1, это означает, что $f(e)$ равно либо 0, либо 1 для каждого ребра e .

Теперь рассмотрим множество M ребер вида (x, y), на которых значение потока равно 1.

Мы покажем, что M является паросочетанием

Докажем 3 простых факта о множестве *M.*





Анализ алгоритма

Лемма 1 *M* содержит *k* ребер.

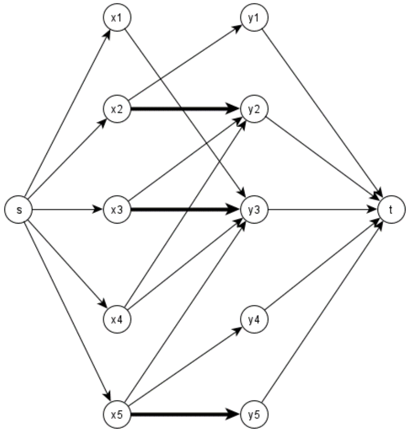
Доказательство. Чтобы доказать это, рассмотрим разрез (*A, B*) в *G* такой что $A = \{ s \} \cup X$.

Значение потока равно общему потоку, выходящему из A , за вычетом общего потока, входящего в *A.*

Первое из этих слагаемых равно $|M|$, поскольку это ребра, выходящие из *A* , по которым передается поток, и каждое ребро переносит ровно 1 единицу потока.

Второе из этих слагаемых равно 0, поскольку в *A не входит ни одного ребра*.

Таким образом, *M* содержит *k* ребер.



Анализ алгоритма

Лемма 2. Каждая вершина в *X* является хвостовой для ≤ 1 ребра в *M.*

Доказательство. Чтобы доказать это, предположим, что $x \in X$ была хвостом ≥ 2 ребер в *M.*

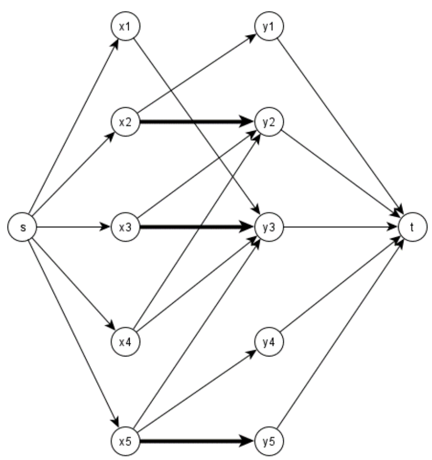
Поскольку наш поток является целочисленным, это означает, что из *x выходит* ≥ 2 единицы потока .

По закону сохранения потока, *в x должно было бы поступить* ≥ 2 единицы потока , но это невозможно, поскольку в *x входит только одно ребро пропускной способностью 1* .

Таким образом, вершина *x является* хвостом ≤ 1 ребра в *M.*

По тем же соображениям мы можем показать,

Лемма 3 Каждый узел в *Y* является головой ≤ 1 ребра в *M.*



Анализ алгоритма

Объединяя эти факты, мы видим, что если рассматривать M как множество ребер в исходном двудольном графе G , то мы получим паросочетание размера k .

Подводя итог, мы доказали следующий факт.

Лемма 4. Размер наибольшего паросочетания в G равен значению максимального потока в G' ;

рёбра в таком паросочетании в G — это рёбра, которые переносят поток из X в Y в G' .

Оценка времени выполнения алгоритма

Теперь давайте рассмотрим, как быстро мы можем вычислить наибольшее паросочетание в *G.*

Пусть $n = |X| = |Y|$, и пусть m — количество ребер графа *G.*

Предположим, что в исходной задаче имеется ≥ 1 ребра, инцидентного каждому узлу, и, следовательно, $m \geq n$.

Время вычисления наибольшего паросочетания определяется временем вычисления целочисленного максимального потока в *G* .

Для этой задачи известна оценка количества итераций:

$$C = \sum_{e \text{ out of } s} c_e = |X| = n$$

так как *s* связана ребром пропускной способности 1 с каждой вершиной *X.*

Оценка времени выполнения алгоритма

Таким образом, используя границу $O(mC)$ в Лемме 5 из Лекции 11 по потоковым сетям, мы получаем следующую Лемму:

Лемма 5. Алгоритм Форда-Фалкерсона можно использовать для поиска наибольшего паросочетания в двудольном графе за время $O(mn)$.

Смысл увеличивающих путей в потоковой сети G'.

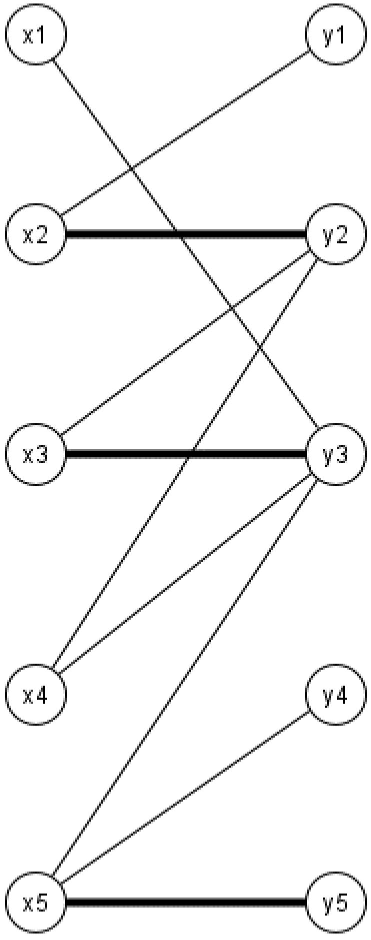
Рассмотрим, что означают увеличивающие пути в потоковой сети G'.

Рассмотрим паросочетание *M,* состоящее из ребер (x_2, y_2), (x_3, y_3) и (x_5, y_5) в двудольном графе на рисунке справа.

Пусть f — соответствующий поток в G'.

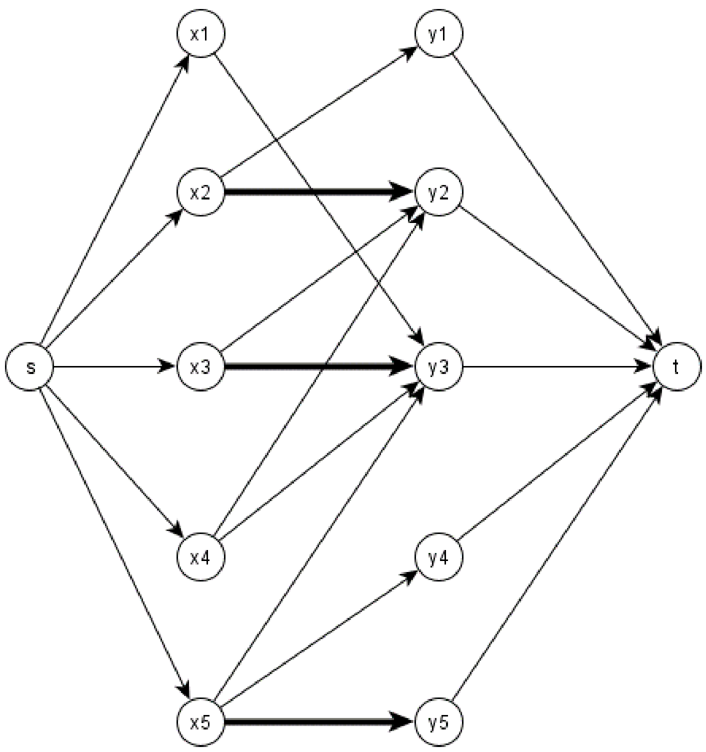
Это паросочетание не является наибольшим, поэтому f *не* является максимальным *st*-потоком, и, следовательно,

в остаточном графе G_f имеется увеличивающий путь.

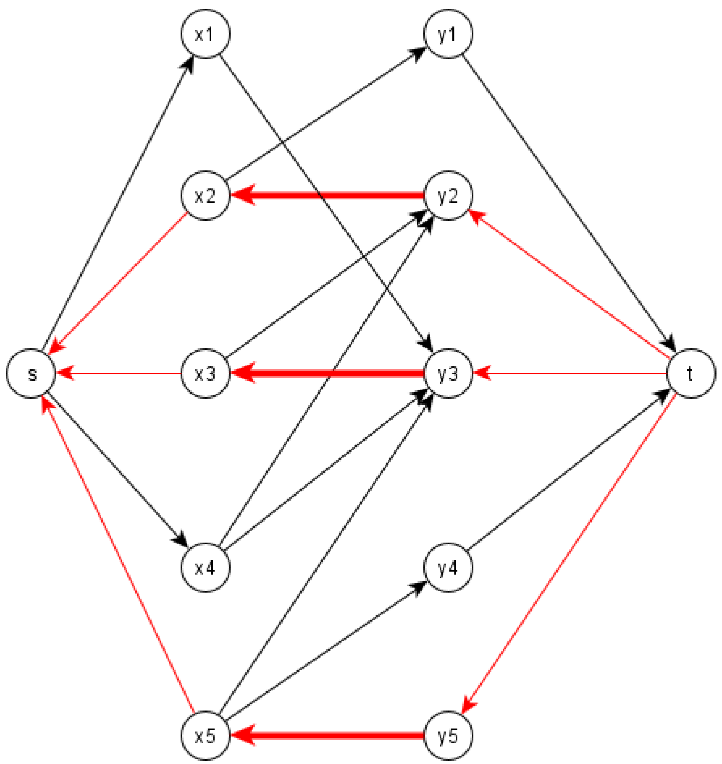


Смысл увеличивающих путей в потоковой сети *G'*

Потоковая сеть *G*' и остаточный граф G'_f для паросочетания на предыдущем слайде



G'



G'_f

Смысл увеличивающих путей в потоковой сети G'

Один из таких увеличивающих путей показан справа.

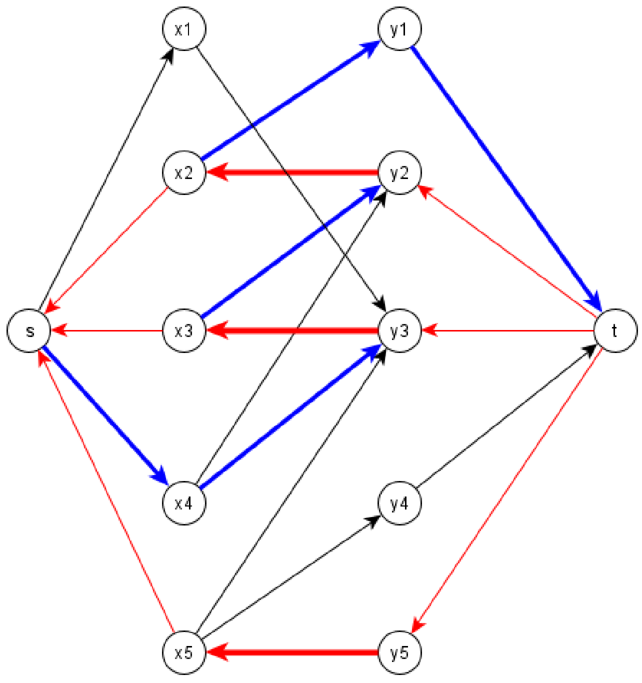
ребра (x_2, y_2) и (x_3, y_3) являются обратными , а все остальные ребра являются прямыми .

Все увеличивающие пути должны чередоваться между прямыми и обратными ребрами, поскольку все ребра графа G направлены от X к Y.

Поэтому дополняющие пути также называют альтернирующими путями (чередующиеся пути) в контексте поиска наибольшего паросочетания.

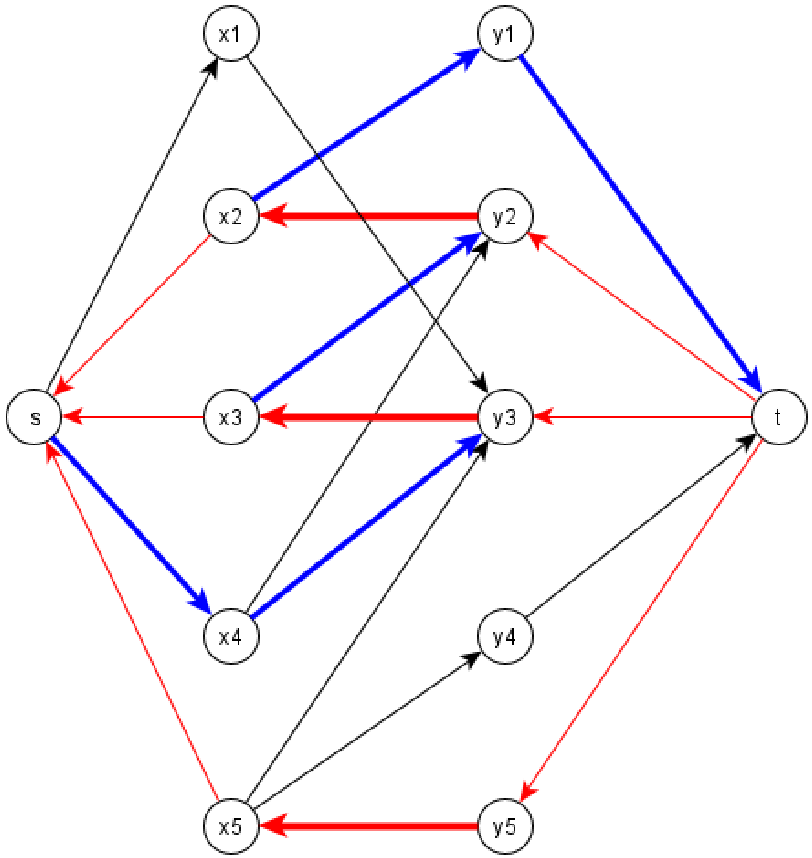
Эффект этого дополнения заключается в том, что ребра, идущие в обратном направлении, удаляются из паросочетания и заменяются ребрами, идущими в прямом направлении.

Поскольку увеличивающийся путь идет от s к t , прямых ребер на одно больше, чем обратных; таким образом, размер паросочетания увеличивается на единицу .

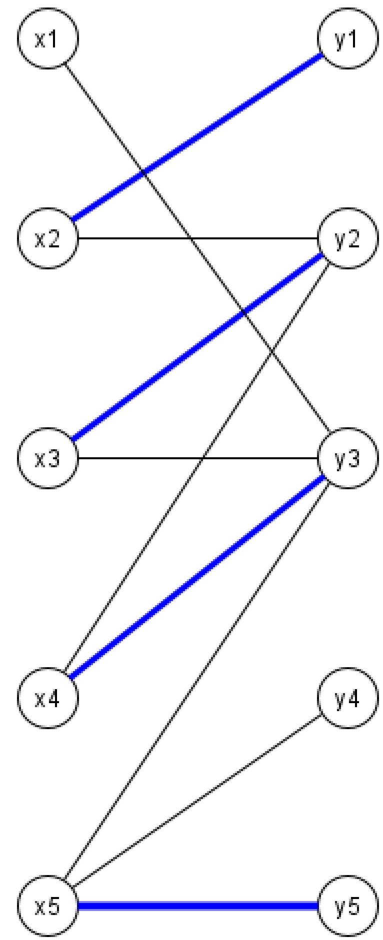


G'_f

Смысл увеличивающих путей в потоковой сети G'



G'_f



$G : |M| = 4$

M- увеличивающий путь, общий случай

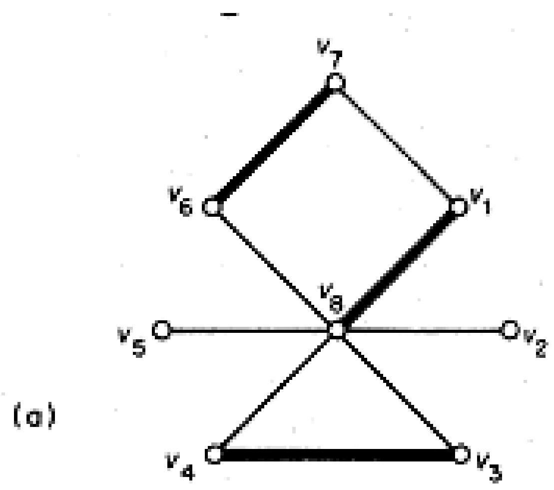
Пусть *M* — паросочетание в *G.*

M – альтернирующий путь в *G* — это путь, ребра которого попеременно находятся в $E \setminus M$ и *M* .

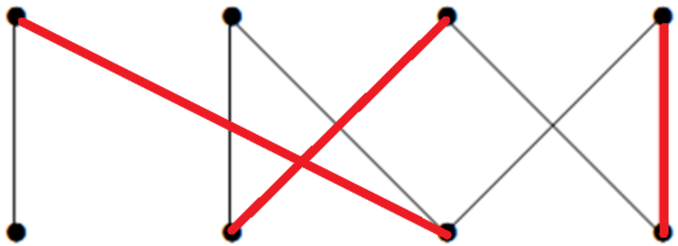
Например, путь < v_5 , v_8 , v_1 , v_7 , v_6 > в графе, показанном ниже,

является *M* -альтернирующим путем.

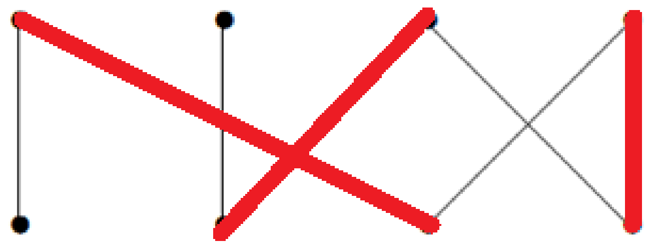
M -увеличивающий путь — это *M* -альтернирующий путь, чье начало и конец не покрыты паросочетанием *M.*



Пример *M* -увеличивающего пути в двудольном графе



(а) Паросочетание *M*



(б) *M* - увеличивающий путь

Наибольшее паросочетание и M-увеличивающий путь .

Теорема 6 (Берж, 1957) Паросочетание M в G является наибольшим паросочетанием $\Leftrightarrow$ G не содержит M -увеличивающего пути .

Доказательство

(=>) Пусть M — паросочетание в G, и предположим, что G содержит M -увеличивающий путь $< v_0 , v_1 , \ldots, v_{2m+1} >$·

Определим $M' \subseteq E$ как $M' = (M \setminus \{\{ v_1 , v_2 \}, \{ v_3 , v_4 \}, \ldots,$

$\{v_{2m-1} , v_{2m} \}\}) \cup \{\{ v_0 , v_1 \}, \{ v_2 , v_3 \}, \ldots, \{ v_{2m} , v_{2m+1} \}\}$

Тогда M' является паросочетанием в G, и $| M '| = | M | + 1$.

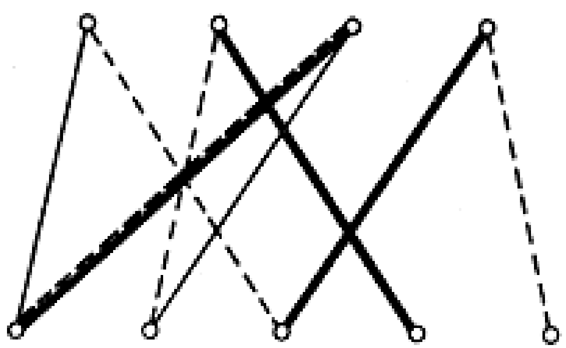
=> M *не* является наибольшим паросочетанием .

Наибольшее паросочетание и *M*-увеличивающий путь

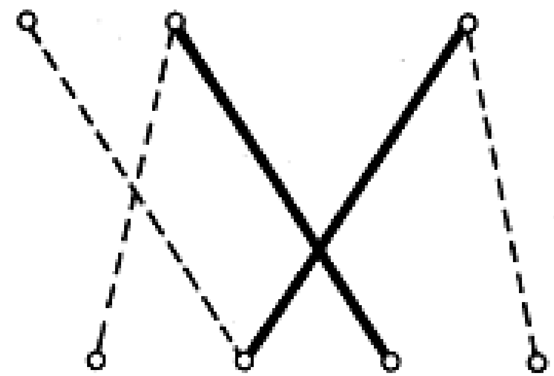
(<=) Предположим, что *M не* является наибольшим паросочетанием, и пусть *M*' будет наибольшим паросочетанием в *G* .

Тогда $|M'| > |M|$

Установим $H = G\,[M \Delta M']$), где $M \Delta M'$ обозначает симметрическую разность *M* и *M*'



(a)



(b)

(a) Граф *G: M* показано жирными линиями*, а M’* - пунктиром*;*

(b) *G*[*M*Δ *M*']

Наибольшее паросочетание и M-увеличивающий путь

Каждая вершина H имеет степень 1 или 2 в H , так как она может быть инцидентна ≤ 1 ребру M и ≤ 1 ребру M '.

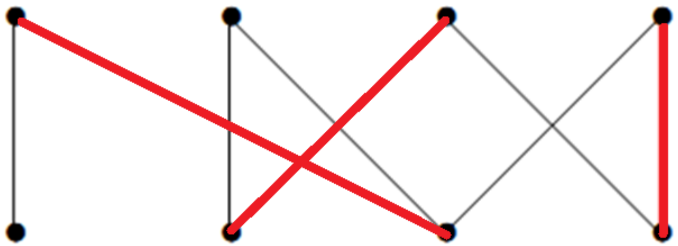
Таким образом, каждая компонента связности H представляет собой либо четный цикл с ребрами попеременно в M и M', либо путь с ребрами попеременно в M и M'.

Так как $|M'| > |M|$, H содержит больше ребер M', чем M, и поэтому некоторая компонента-путь P из H должна начинаться и заканчиваться ребрами M'.

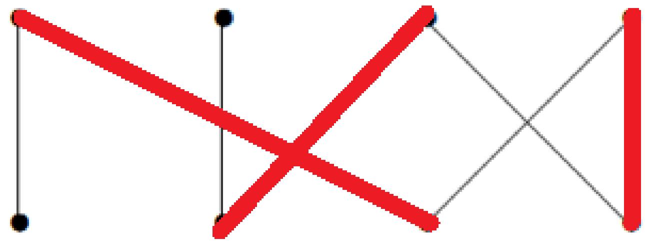
Начало и конец P, будучи покрыты M' *в* H, не покрыты M в G.

Таким образом, P является M-увеличивающим путем в G.

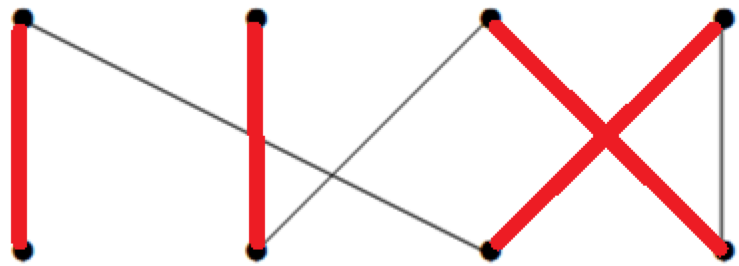
Пример использования увеличивающего пути



(a) $|M| = 3$



(б) M-увеличивающий путь



(c) $|M'| = 4$

Поиск наибольшего паросочетания в двудольном графе

Вышеизложенное обсуждение предлагает следующую общую схему разработки алгоритма поиска наибольшего паросочетания в двудольном графе.

Алгоритм 1. Итеративная схема для вычисления наибольшего паросочетания

1: Инициализация $M = \varnothing$;

2: **повторить**

3: Найти увеличивающий путь P относительно M.

4: $M' = M \Delta P$

, пока не прекратятся увеличения относительно M.

Модификация алгоритма поиска максимального потока

Дан двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ и паросочетание $M.$

Построим $G_M = (V_M , E_M)$ следующим образом :

$V_M = X \cup Y \cup \{ s , t \}$

$E_M = \{(x_i, y_j) : (x_i, y_j) \in E \backslash M, x_i \in X; y_j \in Y\} \cup$

$\{(y_j, x_i) : (y_j, x_i) \in M, y_j \in Y, x_i \in X\} \cup$

$\{(s, x_l) : x_l \in X' \} \cup$

$\{(y_m, t) : y_m \in Y'\}$

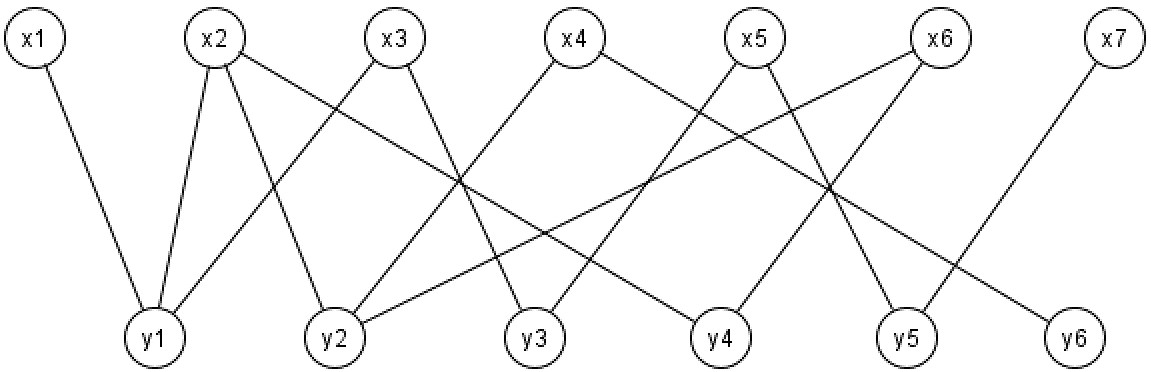
Где

$X' = \{ x \in X : x$ не покрыто $M \}$;

$Y' = \{ y \in Y : y$ не покрыто $M \}$:

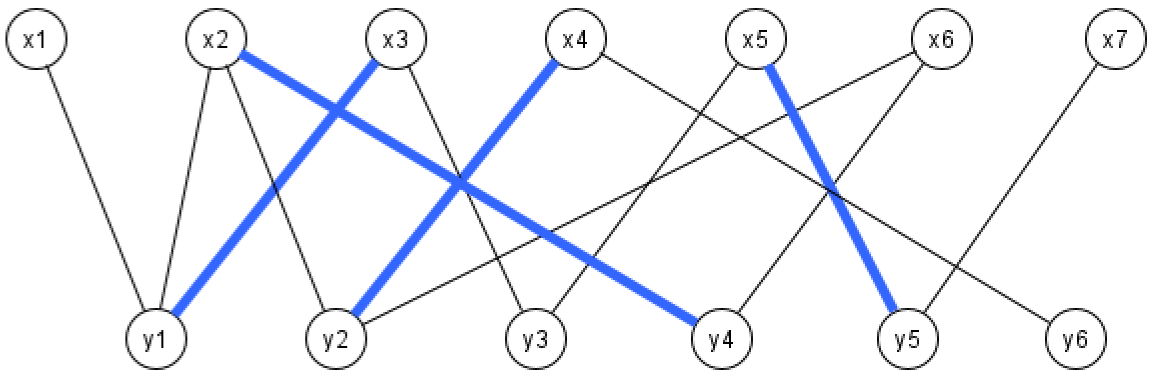
$s \sim > t$ пути в G_M соответствуют увеличивающим путям в $G.$

Пример нахождения наибольшего паросочетания в двудольном графе

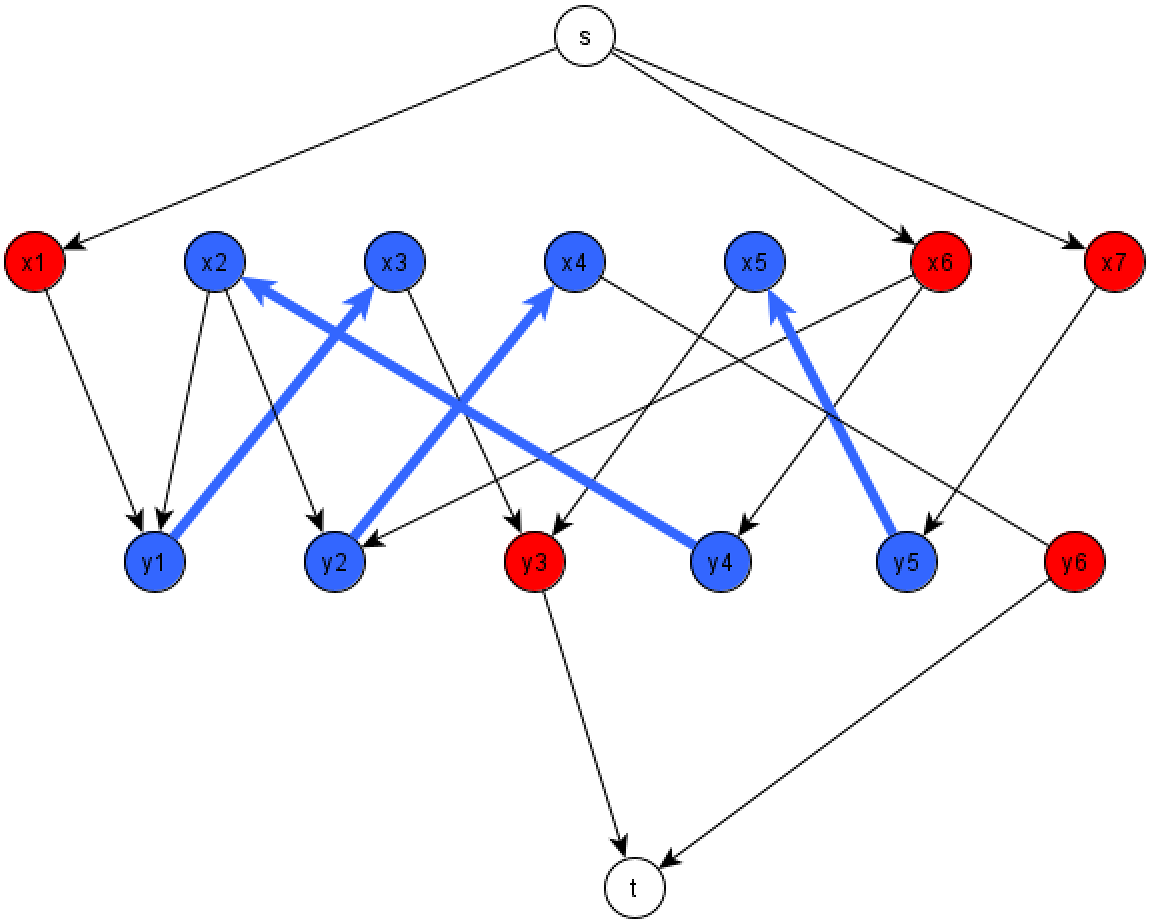


Этот пример описан в лекции Ивана Тахонова о сопоставлениях: https://classroom.google.com/w/MjgzNjg4OTMzMjRa/tc/MzY2NTQwNDI2NTNa

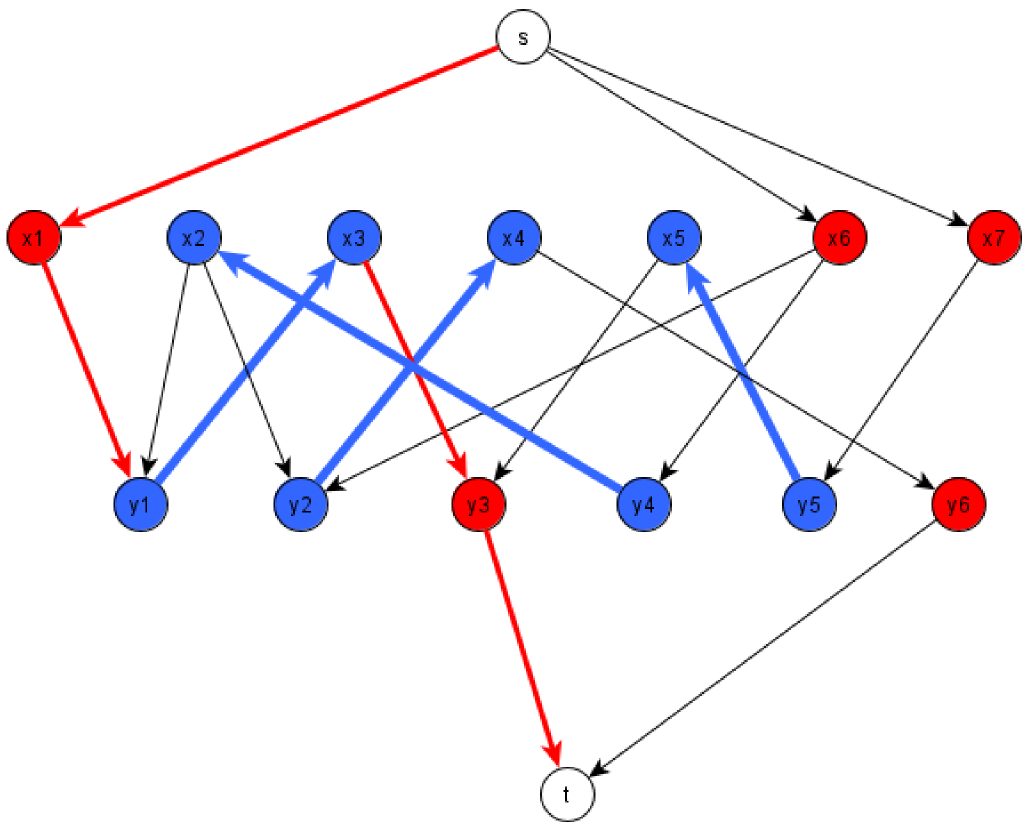
Построить некоторое паросочетание



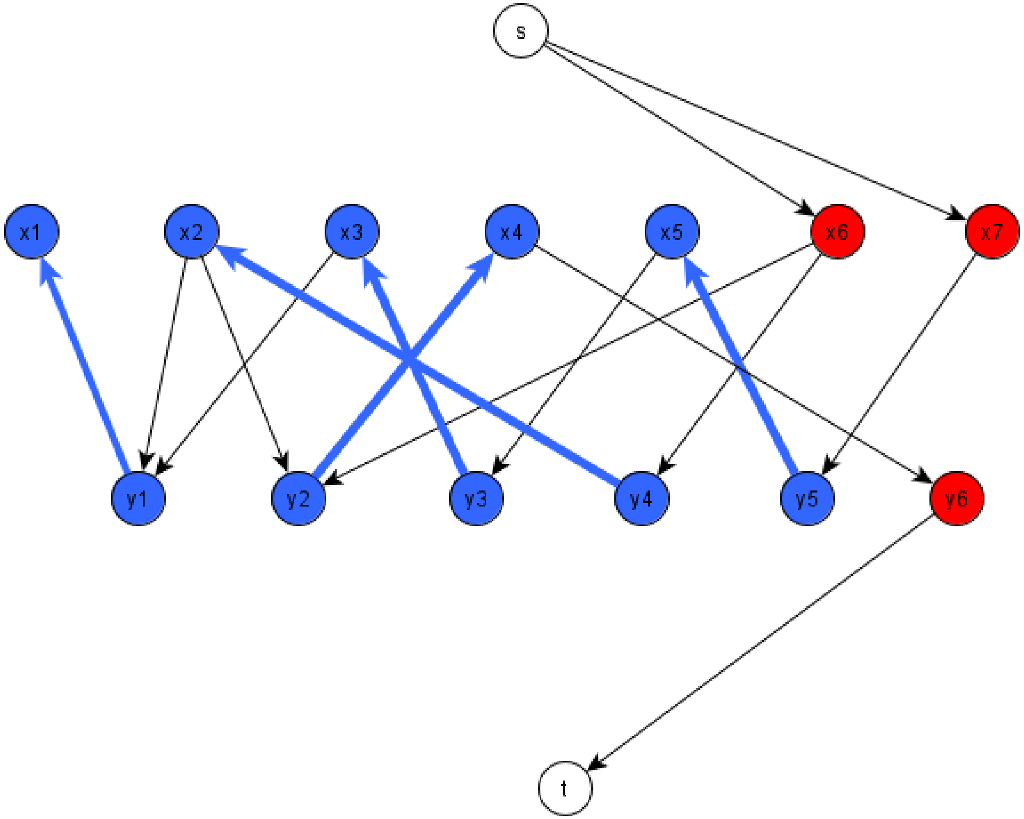
Построить остаточный граф



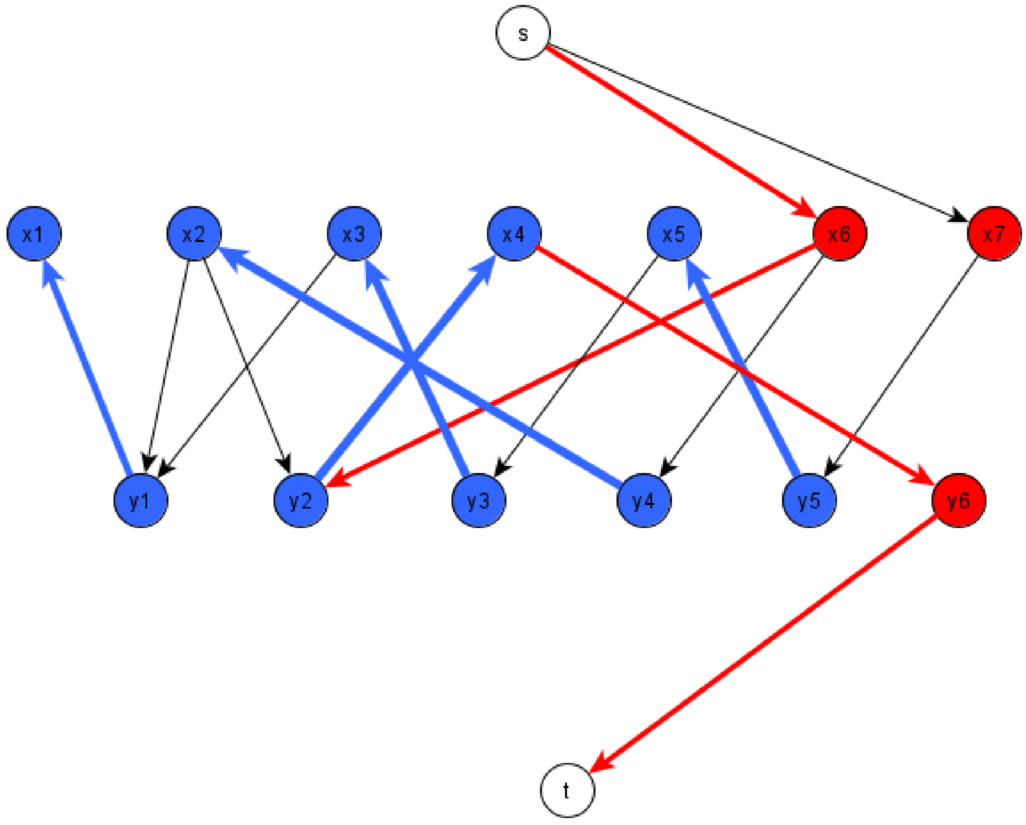
Найти увеличивающий путь в остаточном графе



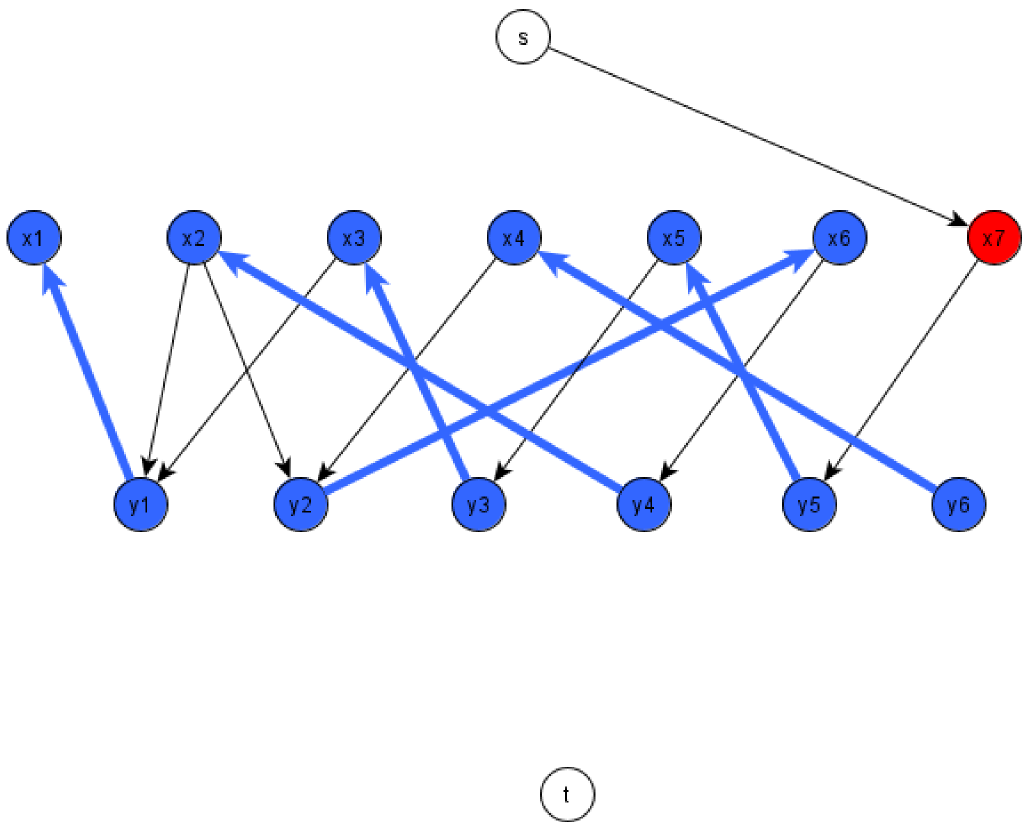
Построить новое паросочетание и новый остаточный граф



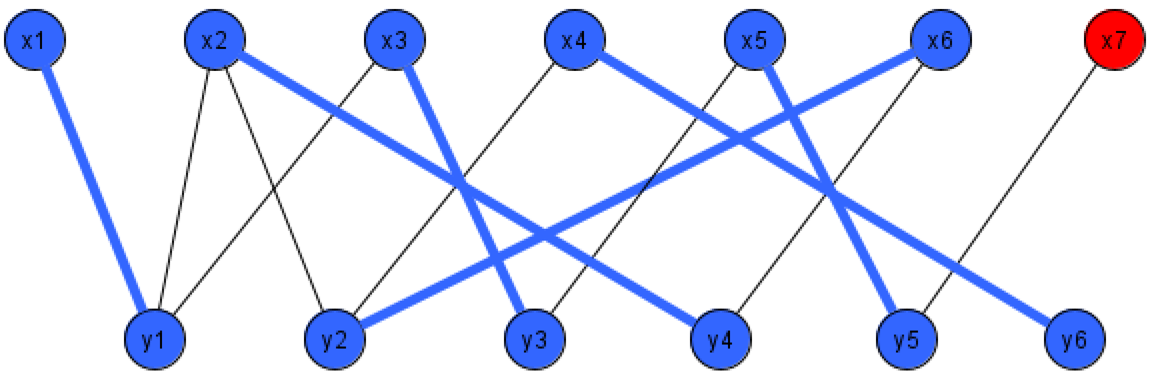
Найти следующий увеличивающий путь



Построить большее паросочетание, теперь вершина *t* недостижима



Найдено наибольшее паросочетание



Полные паросочетания в двудольных графах

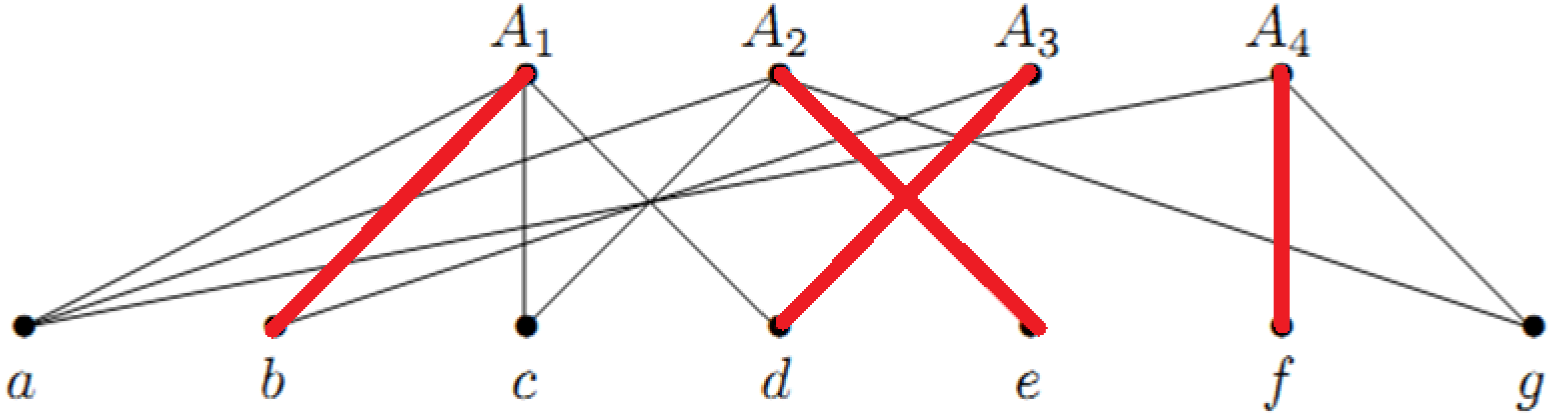
Предположим теперь, что G — двудольный граф с двумя долями (X, Y).

Во многих приложениях требуется найти *полное паросочетание* в графе G , то есть, покрывающее *каждую вершину множества* X.

Необходимые и достаточные условия существования полного паросочетания впервые были найдены Холлом (1935).

Полные паросочетания в двудольных графах

ПРИМЕР полного паросочетания. Это наибольшее возможное паросочетание, поскольку оно содержит ребра, инцидентные всем 4 верхним вершинам, и, таким образом, является полным паросочетанием.



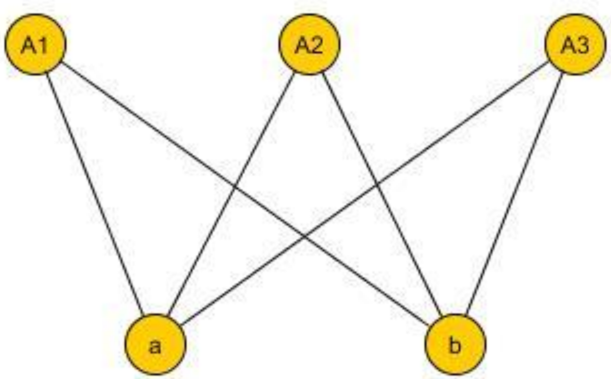
Необходимые и достаточные условия существования полного паросочения

Для любого множества вершин *S в G* мы определяем *окружение* *S* в *G* как множество всех вершин, смежных с вершинами в *S*; это множество обозначается *N*(*S*).

$N(A_1) = \{ a, b \}$, $N(A_2) = \{ a, b \}$, $N(A_3) = \{ a, b \}$.

$|N(X)| = 2$, тогда как $|X| = 3$.

поэтому полное паросочетания найти невозможно.



Необходимые и достаточные условия существования полного паросочения

Теорема 7 (Холл, 1935) Пусть G — двудольный граф с долями (X, Y). Тогда G содержит полное паросочетание, которое покрывает каждую вершину в $X \Leftrightarrow$

$$|N(S)| \geq |S| \text{ для всех } S \subseteq X \qquad (2)$$

Доказательство

(=>) Предположим, что G содержит полное паросочетание M, которое покрывает каждую вершину в X, и пусть S — подмножество X.

Так как вершины в S связаны паросочетанием M с различными вершинами в $N(S)$, мы, очевидно, имеем

$|N(S)| \geq |S|$.

Необходимые и достаточные условия существования полного паросочения

(<=) Предположим, что *G* — двудольный граф, удовлетворяющий условию (2): $|N(S)| \geq |S|$ для всех $S \subseteq X$), но *G не* содержит полного паросочетания, покрывающего все вершины в *X* .

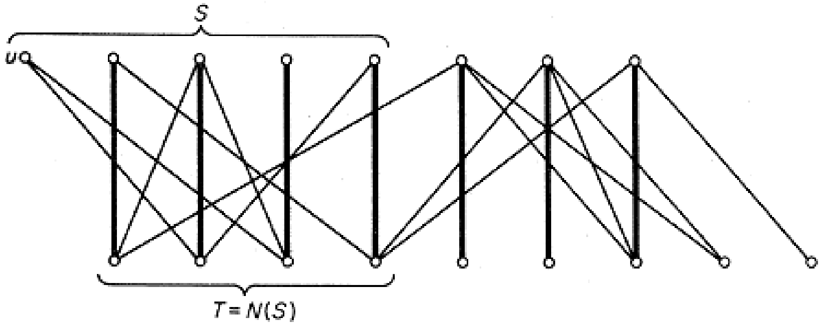
Получим противоречие.

Пусть *M** — наибольшее паросочетание в *G.*

По нашему предположению, *M** не покрывает все вершины в *X.*

Пусть *u* — вершина, не покрытая *M** в *X*, и пусть *Z* обозначает множество всех вершин, связанных с вершиной *u*

*M**-чередующимися путями.

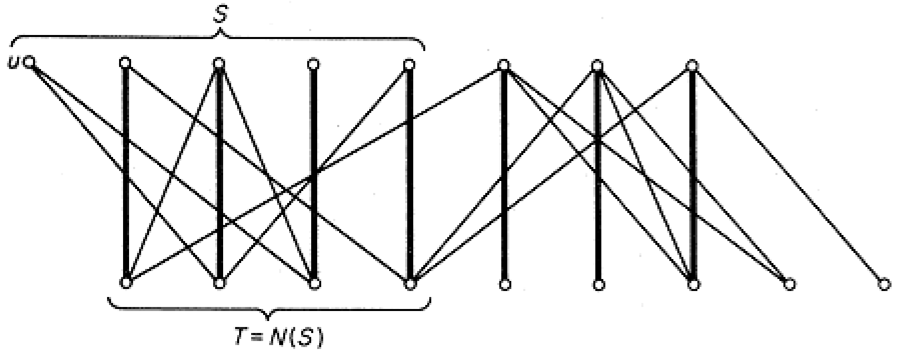


Необходимые и достаточные условия существования полного паросочения

Так как M^* является наибольшим паросочетанием, то из теоремы 6 следует, что u является единственной M^*-ненасыщенной вершиной в Z.

Установим $S = Z \cap X$ и $T = Z \cap Y$ (см. ниже).

Очевидно, вершины в $S \setminus \{ u \}$ сопоставляются паросочетанием M^* с вершинами в T .



Необходимые и достаточные условия существования полного паросочения

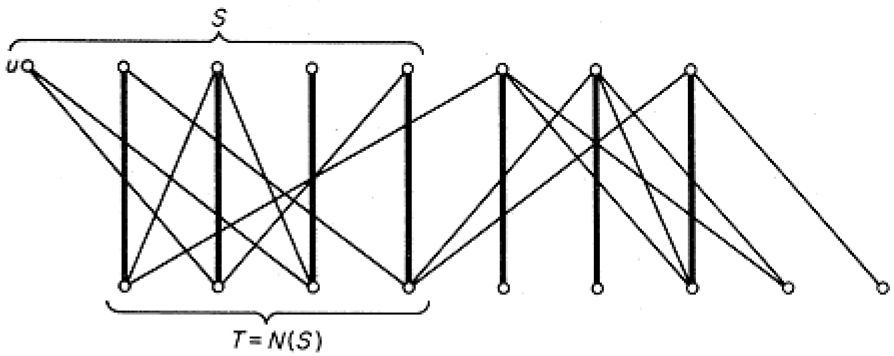
Поэтому $|T| = |S|-1$ (3)

и $N(S) \in T$.

На самом деле, $N(S) = T$ (4)

поскольку каждая вершина в $N(S)$ соединена с вершиной *и M*-чередующимся* путем.

Но (3) и (4) подразумевают, что $|N(S)| = |S| - 1 < |S|$, что противоречит предположению (2).

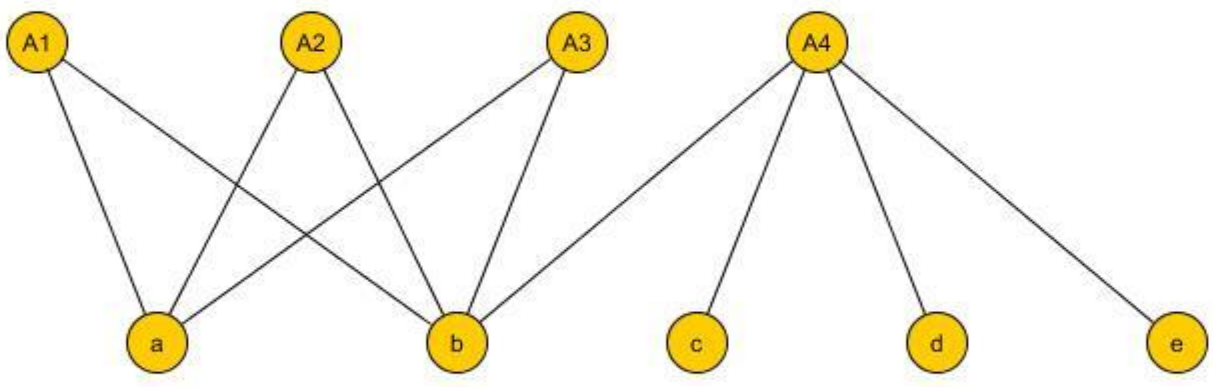


Необходимые и достаточные условия полного паросочения

ПРИМЕР. $N(A_1) = \{ a, b \}$, $N(A_2) = \{ a, b\}$, $N(A_3) = \{ a, b \}$, $N(A_4) =$
$\{ b, c, d, e \}$.

$|N(X)| = 5$, а нам нужно только 4.

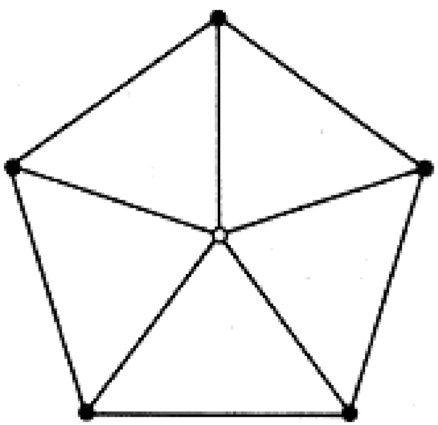
Тем не менее, полное паросочетание невозможно, так как первые 3 вершины имеют $|N(A_1, A_2, A_3)|= 2$.



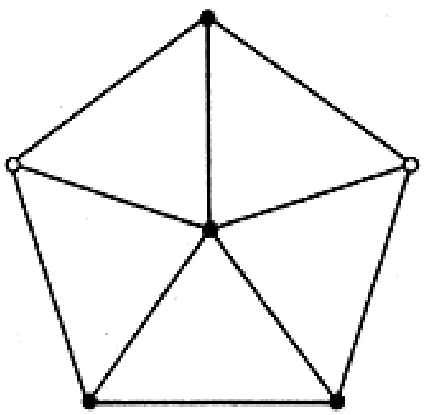
Паросочетания и вершинные покрытия

Покрытие, вершинное покрытие графа G — это подмножество $K \subset V$ графа G, такое что каждое ребро графа G имеет ≥ 1 концов в K.

Покрытие K^ является минимальным, если G не имеет покрытия K такого, что $|K'| < |K\hat{}|$.



(a)



(b)

Покрытие, $|K| = 5$ Минимальное покрытие $|K\hat{}| = 4$

Паросочетания и вершинные покрытия

Если K – это какое-то покрытие, а M - какое-то паросочетание в G, то K содержит ≥ 1 конца каждого ребра M.

Поэтому для любого паросочетания M и любого покрытия K, $|M| \le |K|$.

Значит, если M^* - наибольшее паросочетание, а K^ - наименьшее вершинное покрытие, то

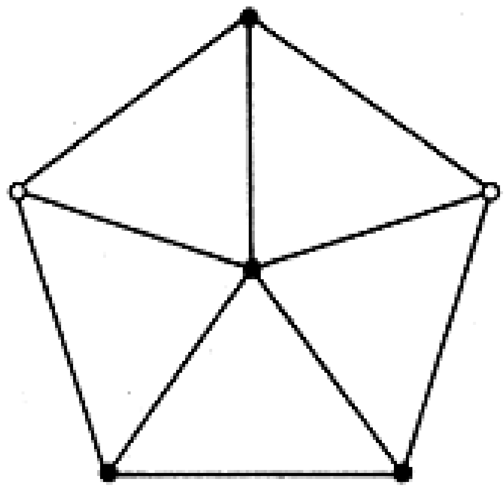
$|M^*| \le |K\hat{}|$ (5)

В общем случае, *равенство в* (5) не имеет места .

Например,

$|K\hat{}| = 4$,

$|M^*| = 3$



Паросочетания и вершинные покрытия

Если K — покрытие графа G, а M — паросочетание графа G, то для любого паросочетания M и любого покрытия K, $|M| \le |K|$.

Действительно, если M^* — максимальное паросочетание, а $K^\wedge$ — минимальное покрытие, то

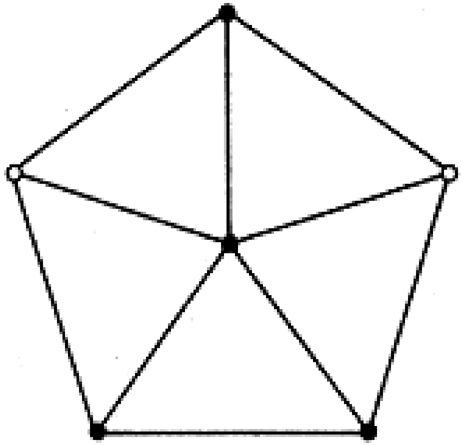
$$|M^*| \le |K^\wedge| \qquad (5)$$

В общем случае *равенство* в (5) не выполняется .

Например,

$|K^\wedge| = 4$,

$|M^*| = 3$



(b)

Паросочетания и вершинные покрытия в двудольных графах

Однако если *G* двудольный, то мы имеем $|M^*| = |K^\wedge|$.

Этот результат, полученный Кёнигом (1931), тесно связан с теоремой Холла.

Прежде чем представить доказательство, сделаем простое, но важное замечание.

Паросочетания и вершинные покрытия в двудольных графах

Лемма 8. Пусть M — паросочетание, а K — покрытие, такое что $|M| = |K|$.

Тогда M — наибольшее паросочетание, а K — наименьшее покрытие.

Доказательство. Если M^* —наибольшее паросочетание, а $K^\wedge$ — наименьшее покрытие, то, согласно (5),

$|M| \leq |M^*| \leq |K^\wedge| \leq |K|$

Так как $|M| = |K|$, то следует, что $|M| = |M^*|$

и $|K| = |K^\wedge|$

Паросочетания и вершинные покрытия в двудольных графах

Теорема 9 (Кёниг) В двудольном графе количество ребер в максимальном паросочетании равно количеству вершин в минимальном покрытии.

Доказательство. Пусть G — двудольный граф с биразбиением (X, Y), и пусть M^* — наибольшее паросочетание графа G.

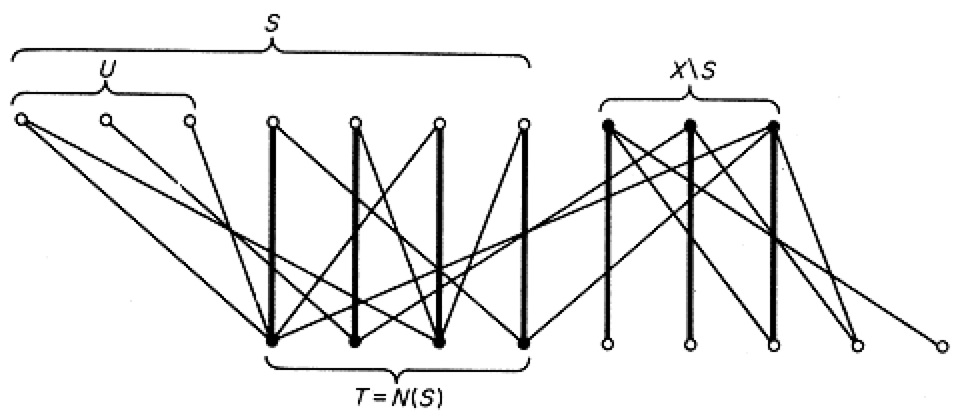
Обозначим через U множество вершин, которые не покрыты паросочетанием M^* в X, а через Z - множество всех вершин, связанных M^* - чередующимися путями с вершинами множества U.

Установим $S = Z \cap X$ и $T = Z \cap Y$.

Паросочетания и вершинные покрытия в двудольных графах

Тогда, как и в доказательстве теоремы 6, мы имеем, что каждая вершина в T покрывается M^* и $N(S) = T$.

Определим K^ = ($X \setminus S$) U T (см. ниже)



Паросочетания и вершинные покрытия в двудольных графах

Каждое ребро графа G должно иметь ≥ 1 из концов в K^.

В противном случае имелось бы ребро с одним концом в S и одним концом в $Y \setminus T$, что противоречило бы тому, что $N(S) = T$;

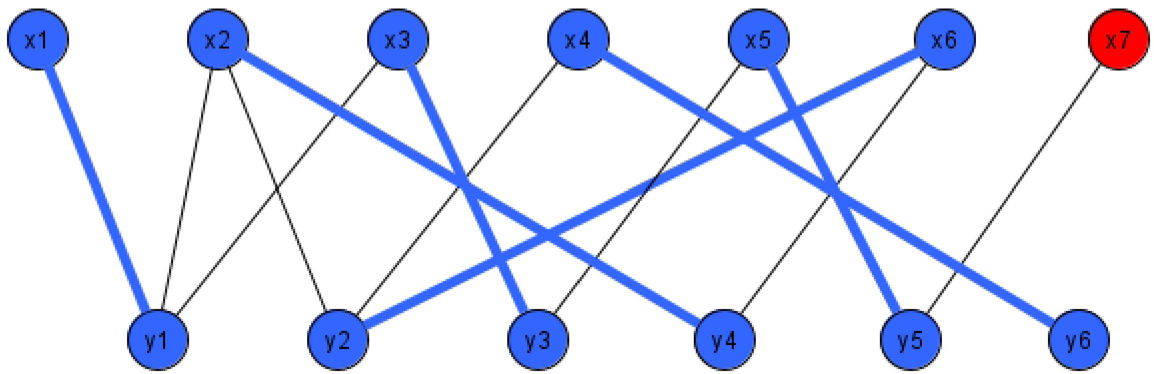
Таким образом, K^ является покрытием G и, очевидно,

$|M^*| = |K\hat{}|$

По лемме 8, K^ является наименьшим вершинным покрытием, и теорема доказана.

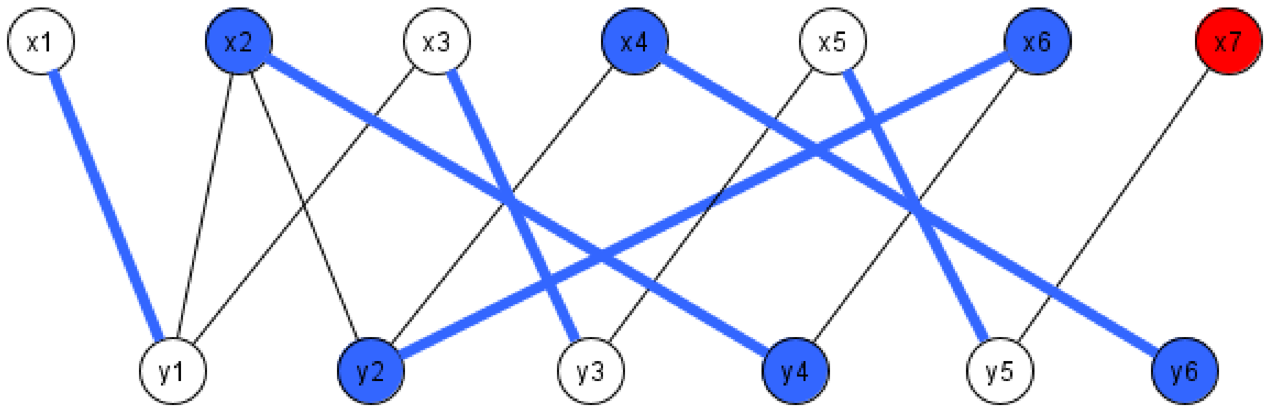
Пример нахождения наименьшего вершинного покрытия

Имеется наибольшее паросочетание



[Этот пример описан в лекции Ивана Тахонова о сопоставлениях https://classroom.google.com/w/MjgzNjg4OTMzMjRa/tc/MzY2NTQwNDI2NTNa](https://classroom.google.com/w/MjgzNjg4OTMzMjRa/tc/MzY2NTQwNDI2NTNa)

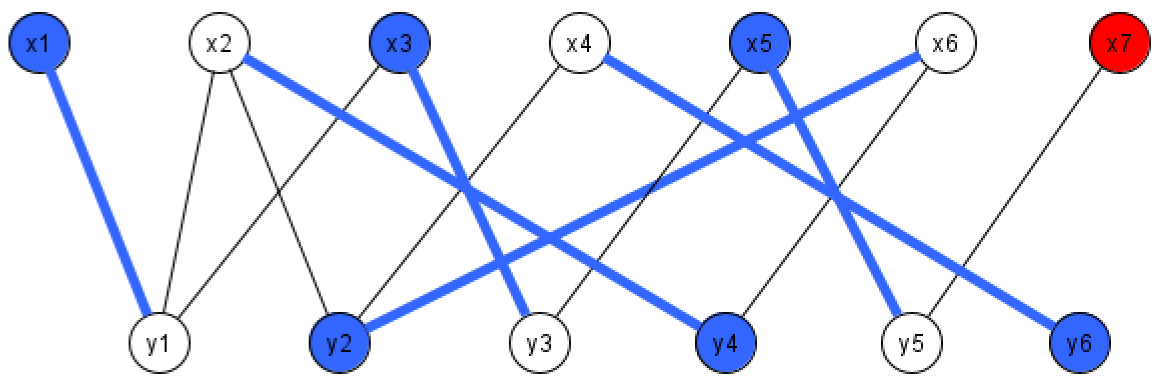
Найдем вершины, достижимые из непокрытой вершины x_7



$Z = \{x_7, y_5, x_5, y_3, x_3, y_1, x_1\}$
$S = \{x_7, x_5, x_3, x_1\}$, $T = \{y_5, y_3, y_1\}$

Тогда $K\ \hat{} = (X \setminus S) \cup T$

Найдено наименьшее вершинное покрытие



$K\^{} = \{ x_2 , x_4 , x_6 , y_1 , y_3 , y_5 \}$

- Ваши вопросы?
- Контакты лектора: apanovich_09@mail.ru