Введение в дискретную математику и математическую логику

Лекция №2

Представления графов и изоморфизм графов

- Апанович Зинаида Владимировна

Часть 1
Представления графов

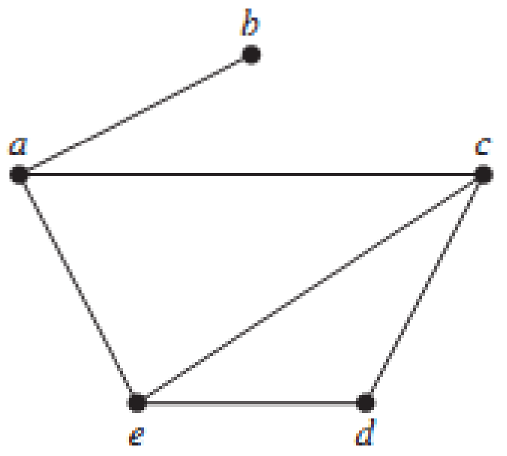
Списки смежностей

Один из способов представить простой граф G (без кратных ребер) — перечислить все ребра этого графа ($G = (V, E)$).

Другой способ представить граф без кратных ребер — использовать списки смежностей, в которых перечисляются вершины, смежные с каждой вершиной графа.

ПРИМЕР. Использовать списки смежностей для описания простого графа, показанного ниже.

Решение: В таблице 1 перечислены вершины, смежные с каждой вершиной графа.

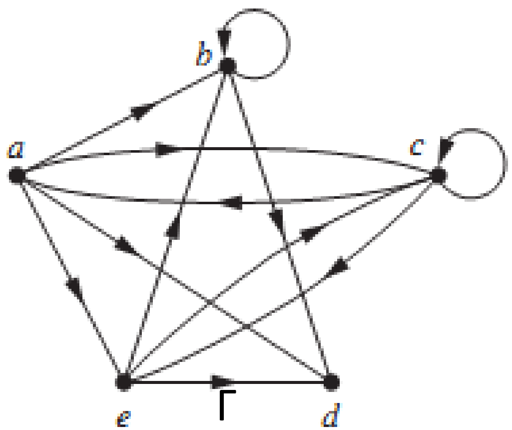


Вершина	Смежные вершины
a	*b, c, e*
b	*a*
c	*a, d, e*
d	*c, e*
e	*a, c, d*

Списки смежности для ориентированных графов

ПРИМЕР. Представить ориентированный граф *G*, перечислив все вершины, которые являются конечными вершинами ребер, начинающихся в каждой вершине графа.

Решение: Таблица 2 представляет собой ориентированный граф *G.*



Начальная вершина	Конечные вершины
a	*b, c, d, e*
b	*b, d*
c	*a, c, e*
d	
e	*b, c, d*

Матрицы для представления графов

Реализация графовых алгоритмов с использованием представления графов списками смежностей может быть громоздким, если в графе много ребер.

Для упрощения вычислений графы можно представить с помощью матриц.

Для представления графов обычно используются два типа матриц.

Один основан на смежности вершин, а другой — на инцидентности вершин и ребер.

Матрицы смежности

Дан простой граф $G = (V, E)$, где $|V| = n$.

Предположим, что вершины G перечислены в произвольном порядке $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

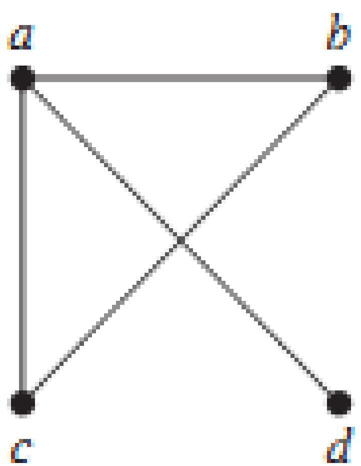
Матрица смежности A (или A_G) графа G относительно этого списка вершин,

— это бинарная матрица $A = [\, a_{ij} \,]$ размера n x n.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \text{ является ребром графа } G \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

ПРИМЕР. Используйте матрицу смежности для представления графа *G*.

Решение: Упорядочим вершины *a*, *b*, *c*, *d*.



Граф *G*

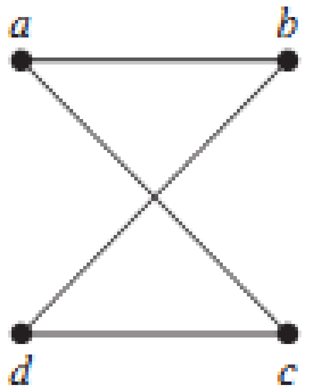
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица, представляющая граф *G*

ПРИМЕР Построить граф, соответствующий матрице смежности, показанной ниже, и с порядком вершин a, b, c, d .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Решение : граф, соответствующий матрице смежности.



Обратите внимание, что матрица смежности графа основана на порядке, выбранном для вершин.

Следовательно, может быть $n!$ разных матриц смежности для графа с n вершинами, потому что возможно $n!$ разных упорядочений для n вершин.

Матрица смежности простого графа симметрична, то есть

$a_{ij} = a_{ji}$,

потому что оба эти элемента равны 1, когда вершины v_i и v_j смежны ,

и оба элемента равны 0 в противном случае.

Более того, поскольку простой граф не имеет петель, каждый диагональный элемент матрицы смежности равен нулю

$a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Матрицы смежности также можно использовать для представления неориентированных графов с петлями и с кратными ребрами.

Петля в вершине v_i обозначается цифрой 1 в (i, i)-й позиции матрицы смежности.

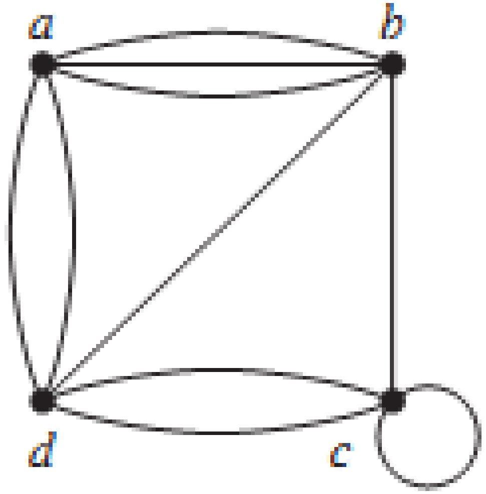
Когда несколько ребер соединяет одну и ту же пару вершин v_i и v_j или имеется несколько петель в одной и той же вершине, матрица смежности больше не является бинарной матрицей, поскольку элемент (i, j) этой матрицы равен количеству ребер между вершинами v_i и v_j .

Все неориентированные графы, включая мультиграфы и псевдографы, имеют симметричные матрицы смежности.

ПРИМЕР

Используйте матрицу смежности для представления псевдографа *G* .

Решение : Матрица смежности, использующая порядок вершин *a, b, c, d,* показана внизу справа



Граф *G*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица смежности для ориентированного графа

Матрица ориентированного графа $G = (V, E)$ имеет 1 в (i , j) -й позиции, если существует ребро между вершинами v_i и v_j,

где $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — произвольный список вершин ориентированного графа.

Другими словами, если $A = [a_{ij}]$ — матрица смежности ориентированного графа относительно этого списка вершины, то

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \text{ является ребром графа } G \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Матрица смежности для ориентированного графа не обязательно должна быть симметричной, поскольку может не *быть* ребра из вершины v_j в v_i, даже если имеется ребро из v_i *в* v_j.

Матрицы смежности также могут использоваться для представления ориентированных мультиграфов .

Опять же, такие матрицы не являются бинарными матрицами, если имеются кратные ориентированные ребра, соединяющие две вершины.

В матрице смежности ориентированного мультиграфа элемент a_{ij} равен количеству ребер, связывающих вершину v_i с v_j .

Выбор между списками смежности и матрицами смежности

Когда простой граф содержит относительно мало ребер, то есть когда в нем меньше половины возможных ребер (разреженный граф), для представления графа предпочтительнее использовать списки смежностей, а не матрицу смежности.

Например, если каждая вершина имеет степень, не превышающую c, где $c \ll n$,

тогда каждый список смежностей содержит не больше чем c вершин,

А во всех списках смежностей имеется не больше чем *cn элементов.*

С другой стороны, матрица смежности графа имеет n^2 элементов.

Однако матрица смежности разреженного графа является разреженной матрицей , то есть матрицей с небольшим количеством ненулевых элементов, и существуют специальные методы для представления и вычислений над разреженными матрицами.

Теперь предположим, что простой граф является плотным, то есть, он содержит больше половины возможных ребер.

В этом случае использование матрицы смежности для представления графа обычно предпочтительнее, чем использование списков смежности.

Чтобы понять почему так, сравним сложность определения наличия заданного ребра $\{v_i, v_j\}$ в графе G.

Используя матрицу смежности, мы можем определить, присутствует ли заданное ребро в графе, проверив (i, j) -й элемент в матрице смежности.

Этот элемент равен 1, если граф содержит ребро $\{v_i, v_j\}$, и равен 0 в противном случае.

Следовательно, нам нужно сделать всего ОДНО сравнение , а именно сравнение (i , j) -го элемента с нулем, чтобы определить, присутствует ли это ребро в графе.

С другой стороны, когда мы используем списки смежностей для представления графа, нам нужно найти список вершин, смежных с v_i или v_j, чтобы определить, присутствует ли это ребро.

Это может потребовать $\Theta(|V|)$ сравнений , когда в графе присутствует много ребер.

Матрицы инцидентности

Другой распространенный способ представления графов — использование матриц инцидентности .

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф.

Предположим, что v_1 , v_2 , ..., v_n — вершины, а e_1 , e_2 , ..., e_m – ребра графа G .

Тогда матрица инцидентности относительно некоторого порядка *вершин* и *ребер* представляет собой матрицу размера $n \times m$.

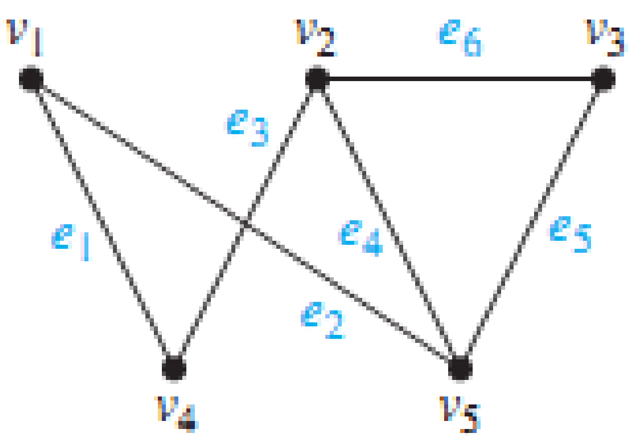
$M =[m_{ij}]$, где

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ребро } e \text{ инцидентно вершине } v_i \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

ПРИМЕР

Представить граф *G* при помощи матрицы инцидентности .

Решение : Матрица инцидентности показана справа



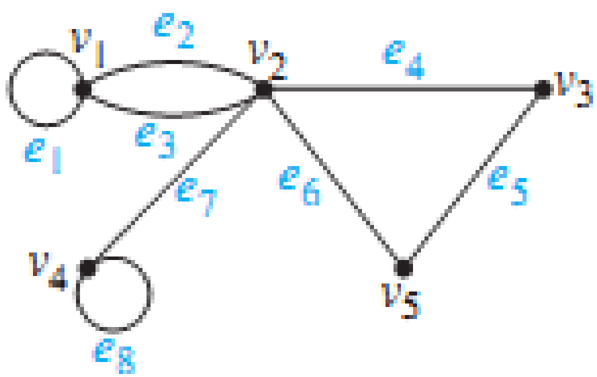
$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right].
\end{array}
$$

Г

ПРИМЕР

Представить псевдограф *G* с использованием матрицы инцидентности.

Решение Матрица инцидентности показана внизу справа



$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Г

Вопрос: Как представить ориентированный граф с помощью матрицы инцидентности?

Изоморфизм графов

Нам часто нужно знать, можно ли одинаково нарисовать 2 графа.

То есть, имеют ли графы одинаковую структуру, если мы игнорируем тождества их вершин?

Например, в химии графы используются для моделирования химических соединений.

Различные соединения могут иметь одну и ту же молекулярную формулу, но различаться по строению .

Такие соединения можно представить в виде графов, которые невозможно нарисовать одинаковым образом.

Графы, представляющие ранее известные соединения, можно использовать для определения того, изучалось ли ранее предположительно новое соединение.

Изоморфизм графов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Простые графы $G_1 = (V_1 , E_1)$ и $G_2 = (V_2 , E_2)$ изоморфны, если существует биекция f между V_1 и V_2 , обладающая свойством, что вершины a и b смежны в G_1 $\Leftrightarrow$ их образы $f(a)$ и $f(b)$ смежны в G_2 , для всех a и b в V_1 .

Такая биекция f называется изоморфизмом .

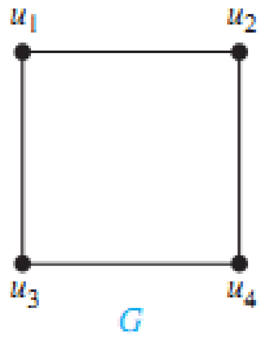
Два простых графа, не являющихся изоморфными, называются неизоморфными .

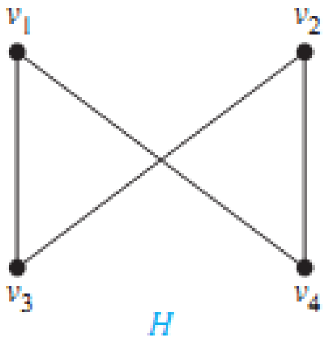
Другими словами, когда два простых графа изоморфны, существует биекция между вершинами двух графов, которая сохраняет отношения смежности .

Изоморфизм простых графов — это отношение эквивалентности.

ПРИМЕР

Показать, что графы $G = (V, E)$ и $H = (W, F)$ изоморфны.





Решение: Функция $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$ и $f(u_4) = v_2$ является биекцией между множествами вершин V и W.

Чтобы убедиться, что это соответствие сохраняет отношение смежности между вершинами, обратите внимание, что соседними вершинами в G являются u_1 и u_2, u_1 и u_3, u_2 и u_4, u_3 и u_4,

и каждая из пар $f(u_1) = v_1$ и $f(u_2) = v_4$,

$f(u_1) = v_1$ и $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ и $f(u_4) = v_2$,

и $f(u_3) = v_3$ и $f(u_4) = v_2$ состоит из 2 смежных вершин в H.

Выяснение того, являются ли 2 простых графа изоморфными

Часто бывает сложно определить, изоморфны ли два простых графа.

Есть n! возможных биекций между множествами вершин двух простых графов с n вершинами.

Проверка каждого такого соответствия на предмет сохранения смежности и несмежности нецелесообразна, если n велико.

Иногда нетрудно показать, что два графа не изоморфны .

В частности, мы можем показать, что два графа не изоморфны, если мы можем найти свойство, которым обладает только один из двух графов, но которое сохраняется изоморфизмом.

Инвариант графа

Свойство, сохраняемое изоморфизмом графов, называется инвариантом графа.

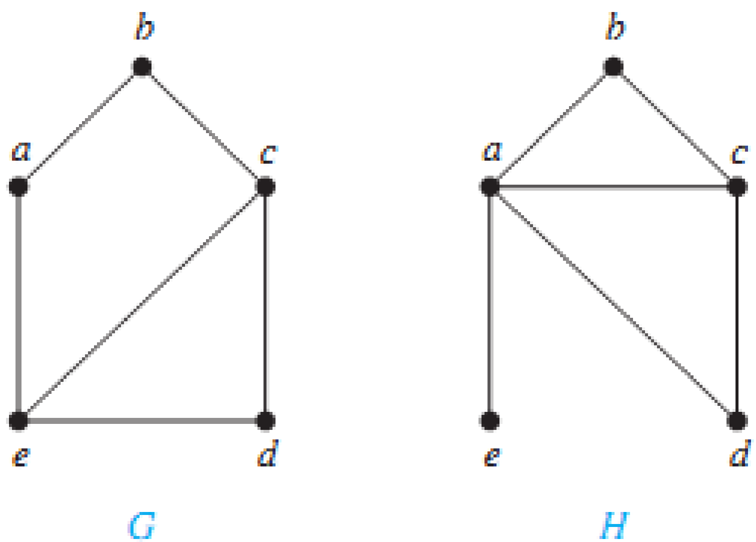
Например, изоморфные простые графы должны иметь одинаковое количество вершин, поскольку между множествами вершин графов существует биекция .

Изоморфные простые графы также должны иметь одинаковое количество ребер, поскольку биекция между вершинами устанавливает биекцию между ребрами.

Кроме того, степени вершин в изоморфных простых графах должны быть одинаковыми.

То есть вершина v степени d в G должна соответствовать вершине $f(v)$ степени d в H , поскольку вершина w в G смежна с вершиной $v \Leftrightarrow f(v)$ и $f(w)$ смежны в H .

ПРИМЕР



Докажите, что графы *G* и *H* не изоморфны .

Решение: Графы *G* и *H* имеют по 5 вершин и 6 ребер.

Однако *H* имеет вершину степени 1, а именно *e*, тогда как *G* *не* имеет вершин степени 1 .

Отсюда следует, что *G* и *H* не изоморфны .

Количество вершин,

количество ребер,

количество вершин каждой степени

все они являются инвариантами относительно изоморфизма.

Если какие-либо из этих величин различаются в двух простых графах, то эти графы не могут быть изоморфными.

Однако если эти инварианты одинаковы, это не обязательно означает, что два графа изоморфны.

Не известно полезных наборов инвариантов , которые можно было бы использовать для определения изоморфности простых графов.

ПРИМЕР

Изоморфны ли графы *G* и *H?*

Решение: Графы *G* и *H* имеют по 8 вершин и 10 ребер.

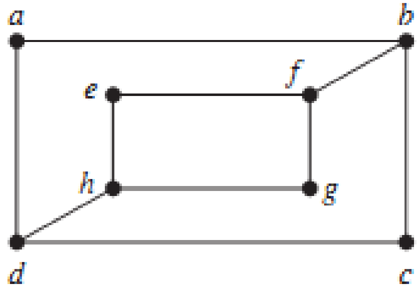
Также они оба имеют по 4 вершины степени 2 и 4 вершины степени 3.

Поскольку все эти инварианты согласуются, можно предположить, что эти графы изоморфны.

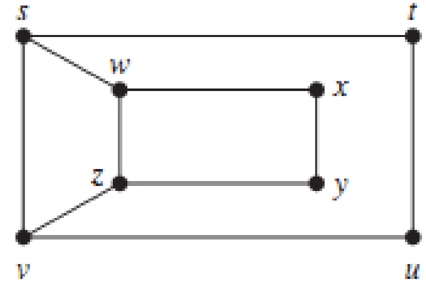
Однако *G* и *H* не изоморфны .

Чтобы убедиться в этом, обратите внимание, что поскольку deg $(a) = 2$ в *G*, вершина *a* должна соответствовать либо *t, u, x*, либо *y* в *H* , поскольку это вершины степени 2 в *H.*

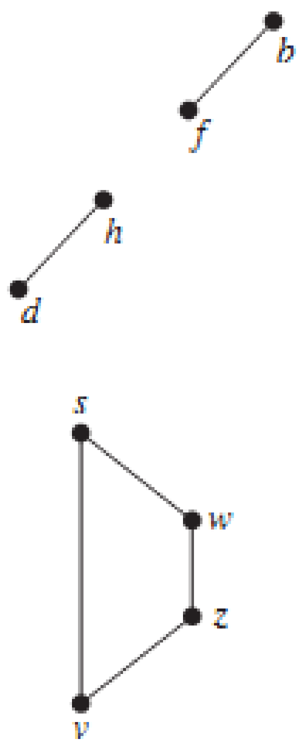
Однако каждая из этих вершин степени 2 в *H* смежна с другой вершиной степени 2 в *H* , что неверно для а в *G.*



G

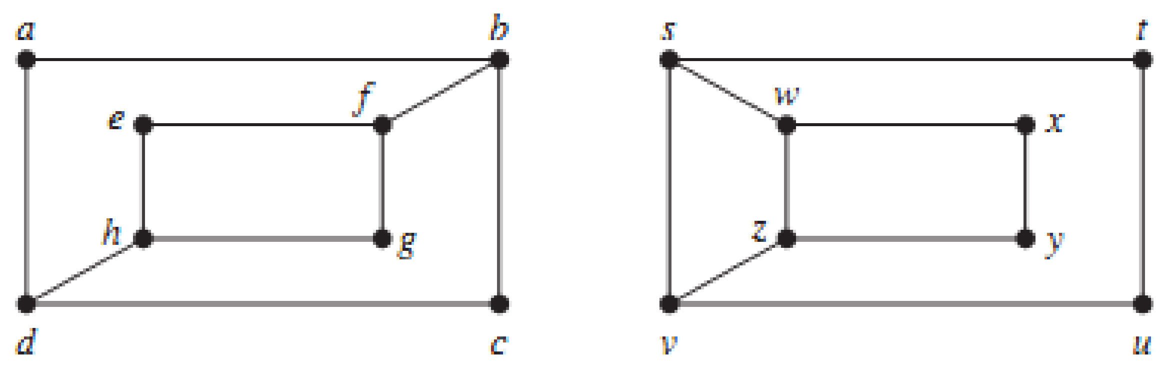


H



Другой способ убедиться в том, что *G* и *H* не изоморфны, — это заметить, что подграфы *G* и *H,* состоящие из вершин степени 3, и соединяющих их ребер, должны быть изоморфны, если изоморфны графы *G* и *H* (Почему?).

Однако эти подграфы не изоморфны .



G *H*

- Чтобы показать, что функция f из множества вершин графа G в множество вершин графа H является изоморфизмом, нам нужно показать, что f сохраняет наличие и отсутствие ребер.
- Один из полезных способов сделать это — использовать матрицы смежности.
- В частности, чтобы показать, что f является изоморфизмом, можно показать, что матрица смежности G совпадает с матрицей смежности H,
- когда строки и столбцы матрицы смежности графа H помечены так, чтобы соответствовать образам вершин в G при отображении f.

ПРИМЕР

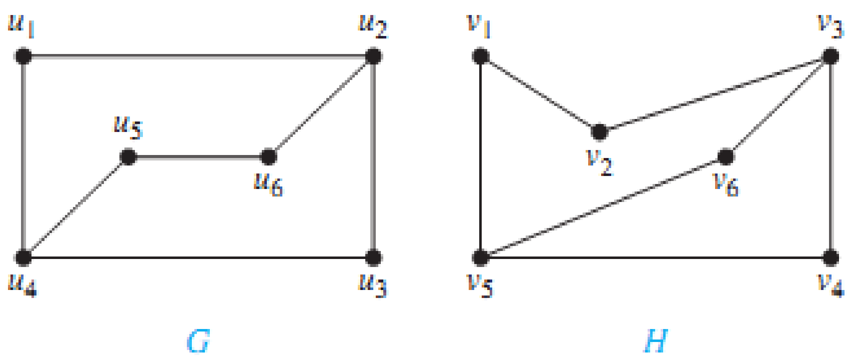
Изоморфны ли графы *G* и *H?*

Решение : Оба графа, *G* и *H* имеют по 6 вершин и 7 ребер.

Оба имеют 4 вершины степени 2 и 2 вершины степени 3.

Также легко видеть, что подграфы графов *G и H* , состоящие из всех вершин степени 2, и соединяющие их ребра изоморфны.

Поскольку *G* и *H* согласуются относительно этих инвариантов, разумно попытаться найти изоморфизм *f* .



Теперь определим функцию f, а затем выясним, является ли она изоморфизмом.

Поскольку deg $(u_1) = 2$ и поскольку u_1 не смежна ни с одной другой вершиной степени 2, образом u_1 должна быть либо v_4 или v_6, единственные вершины степени 2 в H, не смежные с вершиной степени 2.

Мы произвольно устанавливаем $f(u_1) = v_6$. [Если бы мы обнаружили, что этот выбор не привел к изоморфизму, мы бы попробовали $f(u_1) = v_4$.]

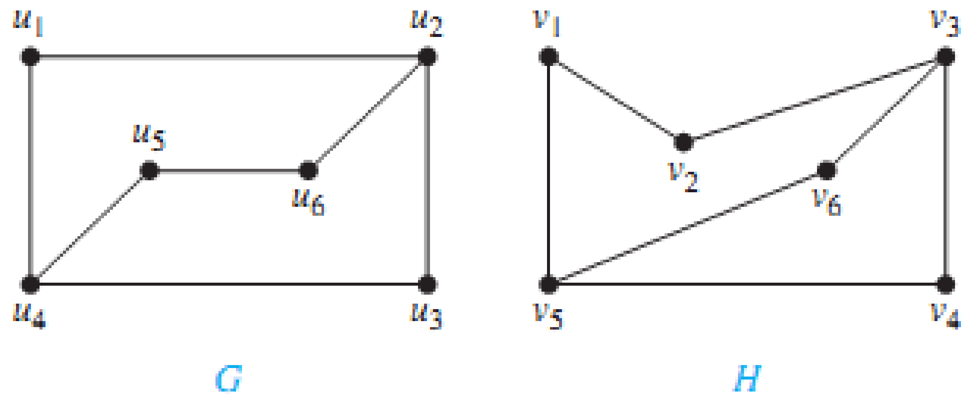
Поскольку u_2 смежна с u_1, возможными образами u_2 являются v_3 и v_5.

Мы произвольно устанавливаем $f(u_2) = v_3$.

Продолжая таким же образом, используя в качестве ориентира смежность вершин и степеней, мы полагаем $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ и $f(u_6) = v_2$.

Теперь у нас есть биекция между множеством вершин G и множеством вершин H, а именно:

$f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$.



Чтобы увидеть, сохраняет ли *f* ребра, мы исследуем матрицу смежности *G* и матрицу смежности *H* со строками и столбцами , помеченными образами соответствующих вершин в *G.*

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

АЛГОРИТМЫ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ

Лучшие алгоритмы, известные для определения изоморфности двух графов, имеют экспоненциальную временную сложность в худшем случае (по количеству вершин графов).

Однако известны алгоритмы линейной временной сложности в среднем случае, которые решают эту проблему, и есть некоторая надежда, но также и скептицизм, что может быть найден алгоритм с полиномиальной временной сложностью в худшем случае для определения того, являются ли два графа изоморфными.

Практические алгоритмы определения изоморфности двух графов существуют для графов, которые ограничены различными способами, например, когда максимальная степень вершин мала.

Проблема определения того, являются ли какие-либо два графа изоморфными, представляет особый интерес, поскольку это одна из немногих NP-задач, о которых не известно, что они разрешимы или NP-полны.

ПРИЛОЖЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМОВ ГРАФОВ

Изоморфизмы графов и функции, которые почти являются изоморфизмами графов , возникают в приложениях теории графов к химии и проектированию электронных схем, а также в других областях, включая биоинформатику и компьютерное зрение.

Химики используют мультиграфы , известные как молекулярные графы, для моделирования химических соединений.

В этих графах вершины представляют собой атомы, а ребра представляют собой химические связи между этими атомами.

Два структурных изомера — молекулы с одинаковой химической формулой, но с разными связями между атомами, имеют неизоморфные молекулярные графы .

Когда синтезируется потенциально новое химическое соединение, база данных молекулярных графов проверяется, чтобы увидеть, совпадает ли молекулярный граф нового соединения с уже известным.

ПРИЛОЖЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМОВ ГРАФОВ

Электронные схемы моделируются с помощью графов, в которых вершины представляют компоненты, а ребра представляют связи между ними.

Современные интегральные схемы, известные как микросхемы, представляют собой миниатюрные электронные схемы, часто содержащие миллионы транзисторов и соединений между ними.

Из-за сложности современных микросхем для их проектирования используются средства автоматизации.

Изоморфизм графов является основой проверки того , что конкретная топология микросхемы, созданная автоматизированным инструментом, соответствует исходной электрической схеме.

Изоморфизм графов также можно использовать, чтобы определить, содержит ли чип одного поставщика интеллектуальную собственность другого поставщика.

Это можно сделать путем поиска больших изоморфных подграфов в графах, моделирующих эти чипы.

Часть 2 Связность

Многие проблемы можно смоделировать с помощью путей, образованных перемещением по ребрам графов.

Например, проблему выяснения возможности отправки сообщения между двумя компьютерами, используя промежуточные каналы, можно исследовать с помощью графовой модели.

Задачи эффективного планирования маршрутов доставки почты, вывоза мусора, диагностики в компьютерных сетях и т. д. можно решить с помощью моделей, использующих пути в графах.

Пути в графах

Неформально путь — это последовательность ребер, которая начинается в некоторой вершине графа и переходит от вершины к вершине по ребрам графа.

В то время, как путь проходит по ребрам графа, он посещает вершины этого пути, то есть конечные точки этих ребер.

Путь в неориентированном графе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 Пусть n — целое неотрицательное число, а G — неориентированный граф .

Путь длины n из вершины u в вершину v в G - это последовательность n ребер $e_1,\ldots, e_n$ графа G, для которой существует последовательность вершин $x_0 = u$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $x_n = v$ такая, что ребро e_i имеет конечными точками вершины x_{i-1} и x_i для $i = 1, \ldots, n$.

Когда граф простой , мы обозначаем этот путь последовательностью его вершин $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (поскольку перечисление этих вершин однозначно определяет путь).

Путь — это цикл, если он начинается и заканчивается в одной и той же вершине, то есть если $u = v$, и имеет длину больше нуля .

Говорят, что путь или цикл проходит через вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ или проходит по ребрам $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Путь или цикл являются простыми (простой путь, простой цикл), если они не содержат одно и то же ребро более одного раза.

Путь в неориентированном графе

Когда нет необходимости различать кратные ребра, будем обозначать путь e_1, e_2,..., e_n, где e_i связано с парой вершин { x_{i-1}, x_i } для i = 1, 2,..., n последовательностью вершин этого пути

x_0, x_1, ..., x_n.

Это обозначение идентифицирует путь только в зависимости от вершин, через которые он проходит.

Следовательно, он не определяет уникальный путь, когда через эту последовательность вершин проходит больше одного пути, что и произойдет ⇔ между некоторыми последовательными вершинами в списке имеются кратные ребра .

Обратите внимание, что путь длиной ноль состоит из одной вершины .

Примечание. Существуют значительные различия в терминологии, касающейся понятий, определяемых в Определении 1.

Например, в некоторых книгах вместо пути используется термин маршрут,

где маршрут определяется как чередующаяся последовательность вершин и ребер графа,

$v_0 , e_1 , v_1 , e_2 ,..., v_{n-1} , e_n , v_n ,$ где вершины v_{i-1} и v_i — конечные точки ребра e_i для $i = 1, 2,.. ., n$.

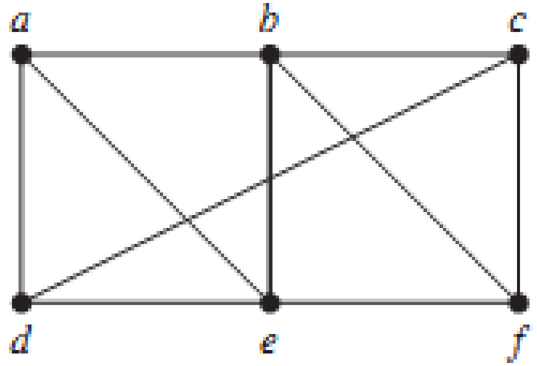
Когда используется эта терминология, вместо термина цикл используется замкнутый маршрут, чтобы указать маршрут, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине, а след и маршрут используется для обозначения маршрута, не имеющего повторяющихся ребер (заменяя термин простой путь).

ПРИМЕР 1. В простом графе, показанном ниже, *a, d, c, f, e* — это простой путь длины 4, поскольку { *a, d* }, { *d, c* }, { *c, f* } и { *f, e* } — это ребра.

Однако *d, e, c, a не* является путём , поскольку { *e, c* } не является ребром.

Обратите внимание, что *b, c, f, e, b* — цикл длины 4, потому что { *b, c* }, { *c, f* }, { *f, e* } и { *e, b* } — это ребра, и этот путь начинается и заканчивается в точке *b* .

Путь *a, b, e, d, a, b* , длина которого равна 5, не является простым , поскольку он дважды содержит ребро {*a, b*}



Путь в ориентированном графе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 Пусть n — целое неотрицательное число, а G — ориентированный граф.

Путь длины n из вершины u в вершину v в G — это последовательность ребер e_1, e_2, ..., e_n в графе G такая, что ребро e_1 соответствует упорядоченной паре вершин (x_0, x_1), e_2 соответствует (x_1, x_2) и так далее, где e_n связано с парой

(x_{n-1}, x_n), где $x_0 = u$ и $x_n = v$.

Когда в ориентированном графе нет кратных ребер, этот путь обозначается последовательностью его вершин.

x_0, x_1, x_2, ..., x_n.

Путь длиной больше нуля, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине, называется циклом.

Путь или цикл называется простым, если он не содержит одно и то же ребро более одного раза.

Примечание:Существует терминология, отличная от приведенной в Определении 2 .

В частности, альтернативная терминология, которая использует термины маршрут, замкнутый маршрут, след и путь для ориентированных графов.

Обратите внимание , что конечная вершина ребра пути является начальной вершиной следующего ребра пути.

Когда нет необходимости различать кратные ребра, будем обозначать путь e_1, e_2, ..., e_n, где e_i связано с парой ($x_{i-1,}$ $x_я$) для i = 1, 2,..., n последовательностью его вершин x_0, x_1,..., x_n .

Это обозначение идентифицирует путь только порядком вершин, через которые он проходит.

Через эту последовательность вершин может проходить более одного пути ⇔ между двумя последовательными вершинами имеются кратные ребра

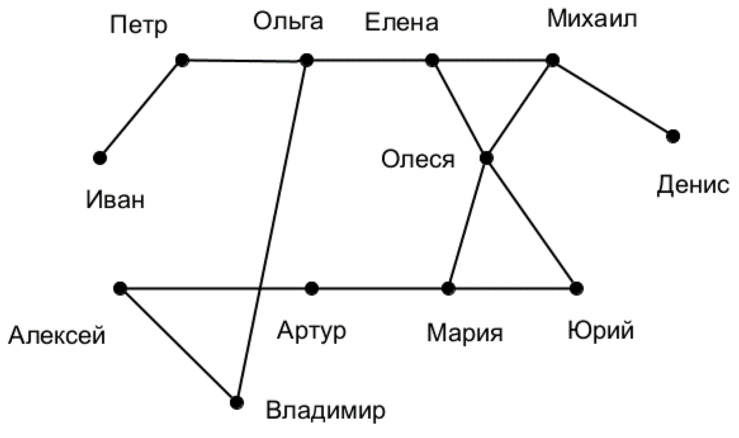
ПРИМЕР Пути в графах знакомств

В графе знакомств существует путь между 2 людьми, если существует цепочка людей, связывающая этих людей, где 2 человека, соседние в цепочке, знают друг друга .

Например, на рисунке ниже показано, что Ивана и Юрия соединяет цепочка из 6 человек .

Многие социологи предполагают, что почти каждая пара людей в мире связана небольшой цепочкой людей, состоящей, возможно, всего из 5 или меньше человек.

Это означало бы, что почти каждая пара вершин графа знакомств, содержащего всех людей в мире, связана путем длины, не превышающей 4 .



ПРИМЕР Пути в графах сотрудничест

В графе сотрудничества 2 человека *a* и *b* соединены путем, когда существует последовательность людей, начинающаяся с *a* и заканчивающаяся *b* , такая, что конечными точками каждого ребра пути являются люди, которые сотрудничали.

В графе академического сотрудничества людей, написавших работы по математике, число Эрдёша человека *m* представляет собой длину кратчайшего пути между *m* и чрезвычайно плодовитым математиком Полом Эрдёшем (умершим в 1996 году).

То есть число Эрдеша математика — это длина кратчайшего пути из математиков, который начинается с Пола Эрдеша и заканчивается этим математиком, где каждая соседняя пара математиков написала совместную работу. Численность математиков с каждым числом Эрдеша на начало 2006 г. по данным проекта «Число Эрдеша» приведена в таблице 1.

0	1
1	504
2	6593
3	33605
4	83642
5	87760
6	40014
7	11591
8	3146
9	819
10	244
11	68
12	23

П. Эрдос , Д.Г. Фон -Дер- Флаасс , А.В. Косточка , Зс. Туза . Малые трансверсали в однородных гиперграфах (неопр .) // Сибирские адв. Матем.. — 1992. — Т. 2. — С. 82
88

В голливудском графе два актера *a* и *b* связаны ребром, если существует цепочка актеров, соединяющая *a* и *b*, где каждые 2 актера, соседних в цепочке, играли в одном и том же фильме .

В голливудском графе *число Бэкона c* определяется как длина кратчайшего пути, соединяющего актера *и* с известным актером *Кевином Бэконом*.

По мере создания новых фильмов, в том числе с Кевином Бэконом, число Бэкона может меняться.

В таблице 2 показано количество актеров с каждым числом Бэкона на начало 2011 года.

Истоки числа Бэкона восходят к началу 1990-х годов, когда Кевин Бэкон заметил, что он работал со всеми в Голливуде или с кем-то, кто работал с ними.

Это побудило некоторых людей изобрести игру для вечеринок, в которой участникам предлагалось найти последовательность фильмов, начиная от каждого названного актера к Кевину Бэкону.

Мы можем найти число, подобное числу Бэкона, используя любого актера в качестве центра действующей вселенной.

Таблица 1 Количество актеров с заданным числом Бэкона

Число Бэкона	Колв-о людей
0	1
1	2367
2	242407
3	785389
4	200602
5	14048
6	1277
7	114
8	16

Связность в неориентированных графах

Когда компьютерная сеть обладает свойством, что каждая пара компьютеров может обмениваться информацией, если сообщения можно отправлять через один или несколько промежуточных компьютеров?

Когда для представления этой компьютерной сети используется граф, где вершины представляют компьютеры, а ребра представляют собой каналы связи, возникает следующий вопрос:

Всегда ли в графе существует путь между любыми двумя вершинами?

Связный граф

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 Неориентированный граф называется связным если между каждой парой различных вершин графа существует путь .

Неориентированный граф, который не является связным, называется несвязным.

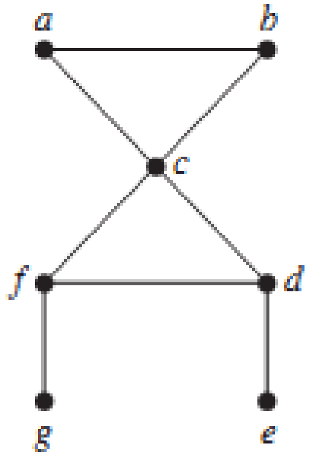
Мы говорим, что мы делаем граф несвязным, когда удаляем вершины или ребра, или и то, и другое, чтобы построить несвязный подграф .

Таким образом, любые 2 компьютера в сети могут взаимодействовать тогда и только тогда, когда граф этой сети связен.

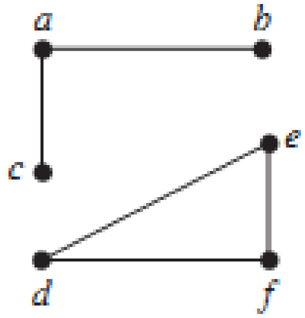
ПРИМЕР

Граф G_1 связен, так как для каждой пары различных вершин существует путь между ними

Однако граф G_2 несвязен, так как в графе G_2 нет пути между вершинами a и d .



G_1



G_2

Существование простых путей в связном графе

ТЕОРЕМА 1. Между каждой парой различных вершин связного неориентированного графа существует простой путь .

Доказательство: пусть *u* и *v* — две различные вершины связного неориентированного графа $G = (V, E)$.

Поскольку *G* связен, между *u* и *v* *существует* ≥ 1 пути .

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_0 = u$ и $x_n = v$ — последовательность вершин пути наименьшей длины .

Этот путь наименьшей длины является простым .

Чтобы увидеть это, предположим, что этот путь не простой.

Тогда $x_i = x_j$ для некоторых *i* и *j* с $0 \le i < j$.

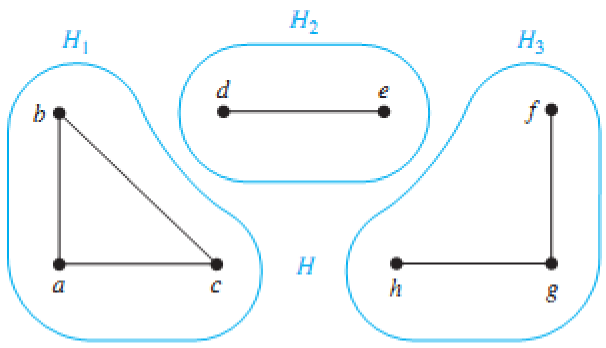
- Это означает, что существует путь от *u* до *v* меньшей длины с последовательностью вершин $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_n$ полученный удалением ребер, соответствующих последовательности вершин $x_i, \ldots, x_{j-1}$.

Компоненты связности графа

Компонента связности графа *G* — это связный подграф графа *G* , который не является собственным подграфом другого связного подграфа *G* .

То есть, связная компонента графа *G* является максимальным связным подграфом G .

Несвязный граф *G* имеет ≥ 2 компонент связности, которые не пересекаются и имеют *G* в качестве своего объединения.



ПРИМЕР. Чему равны компоненты связности графа *H* ?

Решение : Граф *H представляет* собой объединение трех непересекающихся связных подграфов H_1, H_2 и H_3 .

Эти три подграфа являются компонентами связности графа *H* .

ПРИМЕР Связные компоненты графа звонков

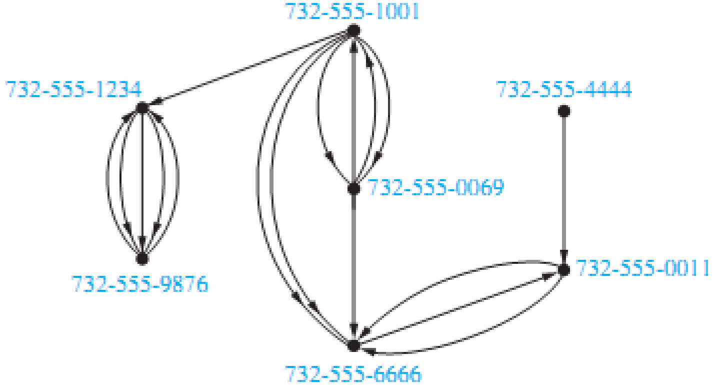
Две вершины *x* и *y* находятся в одной компоненте графа телефонных звонков, если существует последовательность телефонных звонков, начинающаяся в *x* и заканчивающаяся в *y* .

Когда был проанализирован граф телефонных звонков, сделанных в течение определенного дня в сети AT&T, было обнаружено, что этот граф имел 53 767 087 вершин, > 170 миллионов ребер и > 3,7 миллионов связных компонентов.

Большинство этих компонент были небольшими; примерно ¾ состояло из 2 вершин, представляющих собой пары телефонных номеров, которые звонили только друг другу.

Этот граф имел 1 огромную компоненту связности с 44 989 297 вершинами, что составляет > 80% от общего числа.

Более того, каждая вершина в этом компоненте была связана с любой другой вершиной цепочкой из ≤ 20 звонков .



(a)

Пути и изоморфизм

Существует несколько способов, с помощью которых пути и циклы могут помочь определить, изоморфны ли два графа.

Например, существование простого цикла определенной длины является полезным инвариантом, который можно использовать, чтобы показать, что 2 графа не изоморфны .

Кроме того, пути можно использовать для построения отображений, которые могут быть изоморфизмами .

Как мы уже упоминали, полезным инвариантом изоморфизма для простых графов является существование простого циклв длины k, где k — целое положительное число, большее 2.

ПРИМЕР

Выяснить, изоморфны ли графы *G* и *H.*

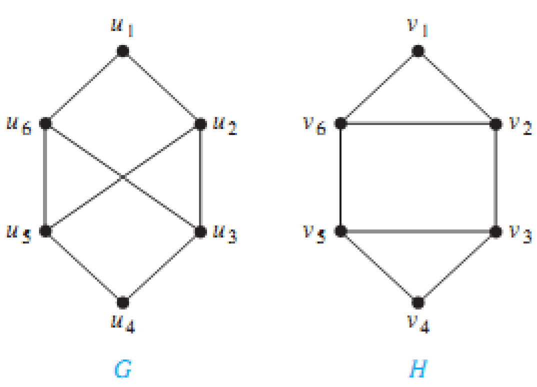
Решение: И *G* и *H* имеют по 6 вершин и 8 ребер.

Каждый из них имеет 4 вершины степени 3 и 2 вершины степени 2.

Итак, все три инварианта — количество вершин, количество ребер и степени вершин — совпадают для двух графов.

Однако *в H* имеется простой цикл длины 3, а именно v_1, v_2, v_6, v_1, тогда как *в G* нет простого цикла длины 3 , что можно определить путем проверки (все простые циклы в *G* имеют длину минимум 4).

Поскольку существование простого цикла длины 3 является инвариантом изоморфизма, *G* и *H* НЕ изоморфны .



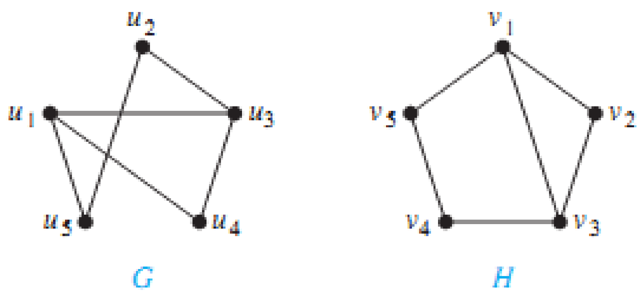
ПРИМЕР

Выяснить, изоморфны ли графы *G* и *H.*

Решение: И *G* и *H* имеют 5 вершин и 6 ребер, оба имеют 2 вершины степени 3 и 3 вершины степени 2, и оба имеют простой цикл длины 3, простой цикл длины 4 и простой цикл длины 5.

Поскольку все эти инварианты изоморфизма согласуются, *G* и *H* могут быть изоморфным.

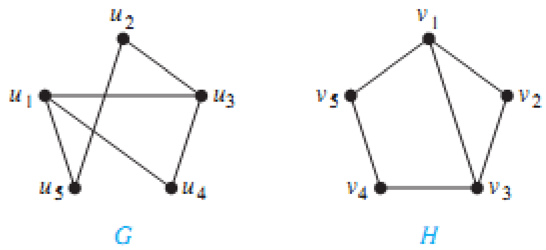
Чтобы найти возможный изоморфизм, мы можем пройти по путям, проходящим через все вершины, так, чтобы соответствующие вершины в двух графах имели одинаковую степень.



Например, пути u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 в G и v_3, v_2, v_1, v_5, v_4 в H оба проходят через каждую вершину графа; начинают с вершины степени 3; проходят через вершины степеней 2, 3 и 2 соответственно; и заканчиваются в вершине степени 2.

Следуя по этим путям в графах, *мы определяем отображение f такое, что* $f(u_1) = v_3$, $f(u_4) = v_2$, $f(u_3) = v_1$, $f(u_2) = v_5$, и $f(u_5) = v_4$.

Можно показать, что f является изоморфизмом, поэтому G и H изоморфны, либо показав, что f сохраняет ребра, либо показав, что при соответствующем порядке вершин матрицы смежности G и H одинаковы.



Часть 3
Двудольные графы

Двудольный граф, напоминание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 Простой граф G называется двудольным, если его множество вершин V можно разбить на 2 непересекающихся множества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро в графе соединяет вершины в V_1 и в V_2.

(так что ни одно ребро в G не соединяет ни 2 вершины в V_1, ни 2 вершины в V_2).

Когда это условие выполняется, мы называем пару (V_1, V_2) — биразбиением множества вершин V графа G.

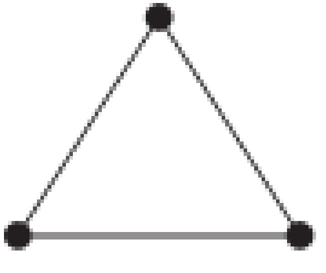
ПРИМЕР 1

Полный граф K_3 не является двудольным .

Если мы разделим множество вершин K_3 на два непересекающихся множества, одно из двух множеств должно содержать две вершины.

Если бы граф был двудольным, эти две вершины не могли быть соединены ребром.

Но в K_3 каждая вершина соединена с каждой другой вершиной ребром.



ПРИМЕР 2

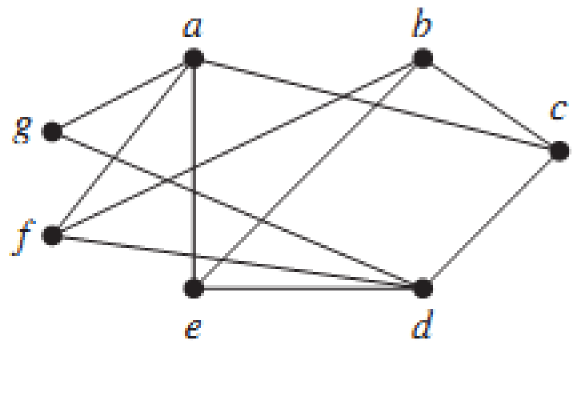
Являются ли графы *G* и *H* двудольными?

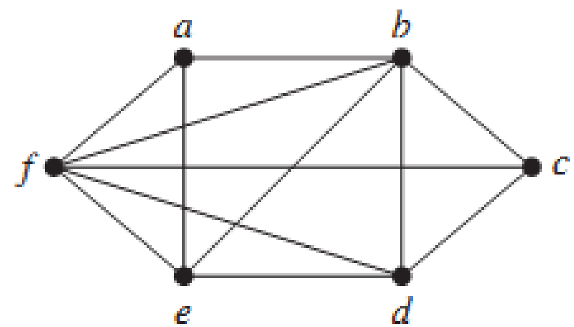
Решение : Граф *G* является двудольным, поскольку его множество вершин представляет собой объединение двух непересекающихся множеств,

{*a, b, d*} и {*c, e, f, g*}, и каждое ребро соединяет вершину в одном из этих подмножеств с вершиной в другом подмножестве.

(Обратите внимание, что для того, чтобы *граф G* был двудольным, не обязательно, чтобы каждая вершина из *{a, b, d* } была смежной с каждой вершиной из { *c, e, f, g* }. Например, *b* и g не являются смежными.)

Граф *H не* является двудольным, поскольку множество его вершин нельзя разбить на 2 подмножества так, чтобы ребра не соединяли 2 вершины из одного и того же подмножества. (Рассмотрим вершины *a, b* и *f .*)





G

Признаки двудольности графа

ТЕОРЕМА 1 Простой граф является двудольным ⇔ каждой вершине графа можно присвоить один из двух различных цветов так, что никаким двум смежным вершинам не будет присвоен один и тот же цвет.

Доказательство:

=> Предположим, что $G = (V, E)$ — двудольный простой граф.

Тогда $V = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 являются непересекающимися множествами, и каждое ребро в E соединяет вершину в V_1 и вершину в V_2 .

Если мы присвоим один цвет каждой вершине в V_1 , а второй цвет - каждой вершине в V_2 ,

тогда каждое ребро будет соединять вершины разного цвета.

Признаки двудольности графа

<= Теперь предположим, что можно присвоить вершинам графа всего 2 цвета так, чтобы никаким двум смежным вершинам не был присвоен один и тот же цвет.

Пусть V_1 — множество вершин одного цвета, а V_2 множество вершин другого цвета.

Тогда V_1 и V_2 не пересекаются и $V = V_1 \cup V_2$.

Более того, каждое ребро соединяет вершину в V_1 и вершину в V_2 , поскольку никакие две смежные вершины не находятся одновременно в V_1 или одновременно в V_2 .

Следовательно, граф G является двудольным.

ПРИМЕР 3

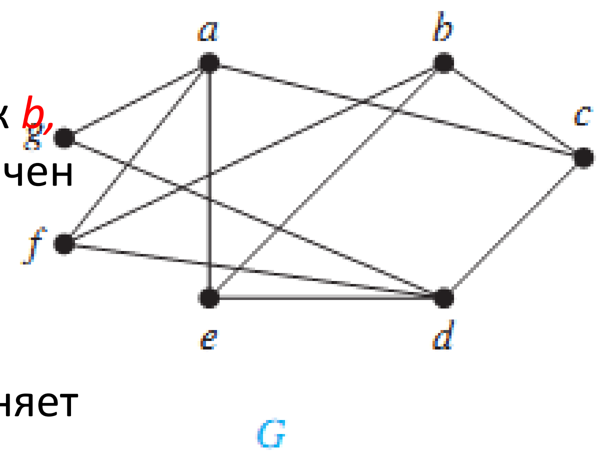
Используйте теорему 1 , чтобы выяснить, являются ли графы в примере 2 двудольными.

Решение: Сначала рассмотрим граф *G.* Попробуем присвоить один из двух цветов, скажем, красный и синий, каждой вершине в графе *G* так, чтобы ни одно ребро в графе *G* не соединяло красную вершину и синюю вершину.

Без потери общности, начнем с произвольного назначения красного цвета вершине *a* .

Затем мы должны назначить синий цвет вершинам *c, d, e, f* и *g* , поскольку каждая из этих вершин смежна с *a* .

После этого мы должны назначить красный цвет всем вершинам, смежным с *c, e, f* или *g* .



Это означает, что мы должны назначить красный цвет как *b*, так и *d* (и это означает, что вершине *a* должен быть назначен красный цвет , который у нее уже есть).
Теперь мы назначили цвета всем вершинам: *a* , *b* и *d* — красные, *c, e, f* и *g* синие .
Проверяя все ребра, мы видим, что каждое ребро соединяет красную вершину и синюю вершину.
Следовательно, по Теорема 1 граф *G* является двудольным.

Далее мы попытаемся назначить каждой вершине в *H либо* красный , либо синий цвет так, чтобы ни одно ребро в *H* соединяло красную вершину и синюю вершину.

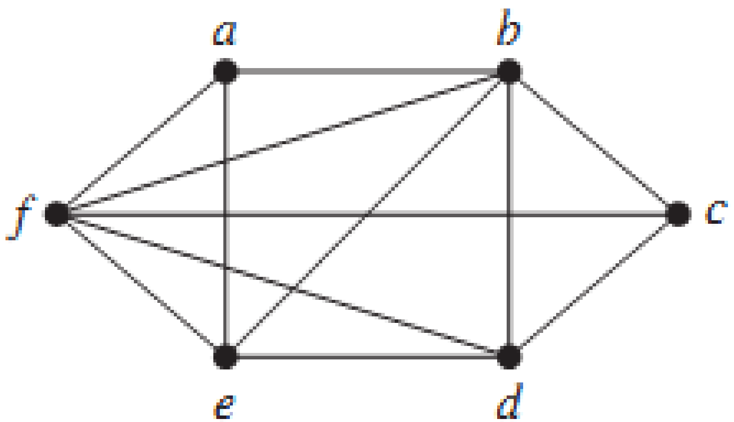
Без потери общности мы произвольно присваиваем красный цвет вершине *a* .

Затем мы должны присвоить синий цвет вершинам *b, e* и *f* , поскольку каждая из них смежна с *a* .

Но это невозможно, поскольку *e* и *f* являются смежными, то есть, они не могут быть обе сделаны синими.

Этот аргумент показывает, что мы не можем назначить один из двух цветов каждой вершине *H* так, чтобы не было смежных вершин раскрашенных в один и тот же цвет.

Из теоремы 1 следует, что *H* не является двудольным .



H

Признаки двудольности графа

Теорема 1 является примером результата из части теории графов, известной как раскраска графов .

Раскраска графов — важная часть теории графов, имеющая важные приложения.

Другой полезный критерий для определения того, является ли граф двудольным, основан на понятии пути .

Граф является двудольным ⇔ невозможно начать путь с некоторой вершины и вернуться в эту же вершину, пройдя нечетное количество различных ребер.

Признаки двудольности графа

Теорема 2 Простой граф *G* является двудольным $\Leftrightarrow$ в нем нет циклов с нечетным количеством ребер.

=> Если граф двудольный, скажем, с долями *A и B,* то вершины каждого пути должны попеременно находиться в *A* и *B.*

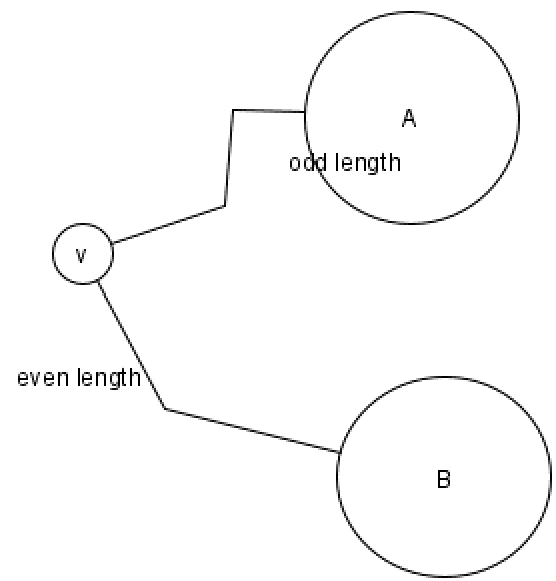
Поэтому путь, начинающийся, скажем, в *A*, закончится в *B* после нечетного числа шагов и в *A* после четного числа шагов.

Поскольку цикл заканчивается в той же вершине, где он начинается, длина пути должна быть четной .

< = Предположим, что все циклы имеют четную длину, и хотим показать, что граф является двудольным.

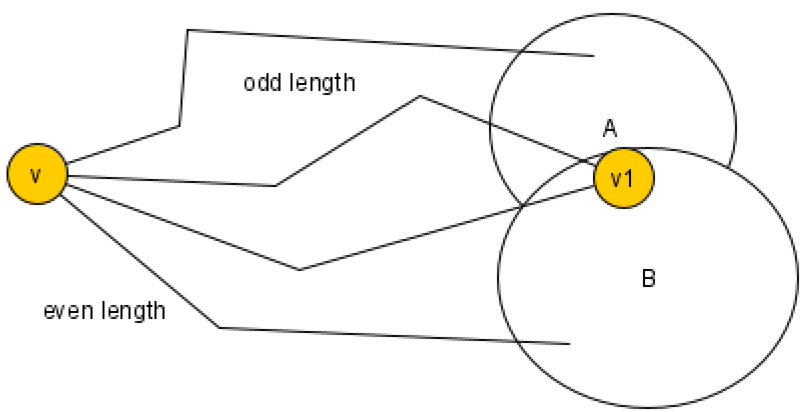
Мы можем предположить, что граф связен, поскольку если это не так, то мы можем работать только с одной компонентой связности за раз.

Пусть *v* — вершина графа, и пусть *A* — множество всех вершин, к которым ведет путь нечетной длины , начинающийся в *v*, и пусть *B* — множество всех вершин, к которым ведет путь четной длины,



Поскольку компонент связен, каждая вершина лежит либо в *A* или *B.*

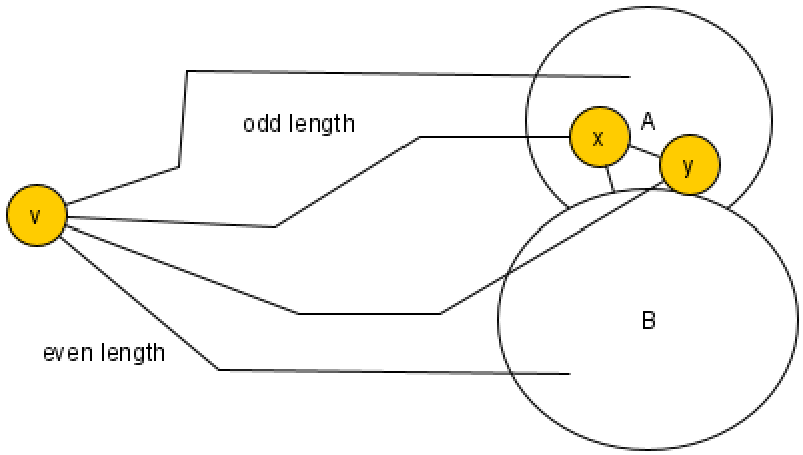
Ни одна вершина не может принадлежать *как A , так и B* , поскольку в этом случае следование по пути нечетной длины от *v* до этой вершины, а затем обратно по пути четной длины от этой вершины до *v* приведет к образованию нечетного цикла, что противоречит гипотезе.



Таким образом, множество вершин было разделено на два множества.

Теперь нам просто нужно показать, что каждое ребро имеет конечные точки в разных долях графа.

Если xy это ребро, где $x \in A$, затем путь нечетной длины от v до x, за которым следует xy создает путь четной длины от v до y, поэтому $y \in B$ (и аналогично, если $x \in B$).



- Ваши вопросы?

- Контакты лектора:
  apanovich_09@mail.ru