П6 Цилиндры

<u>ОПР</u> Пов-ть наз-ся

а) эллиптическим цилиндром

б) параболическим цилиндром

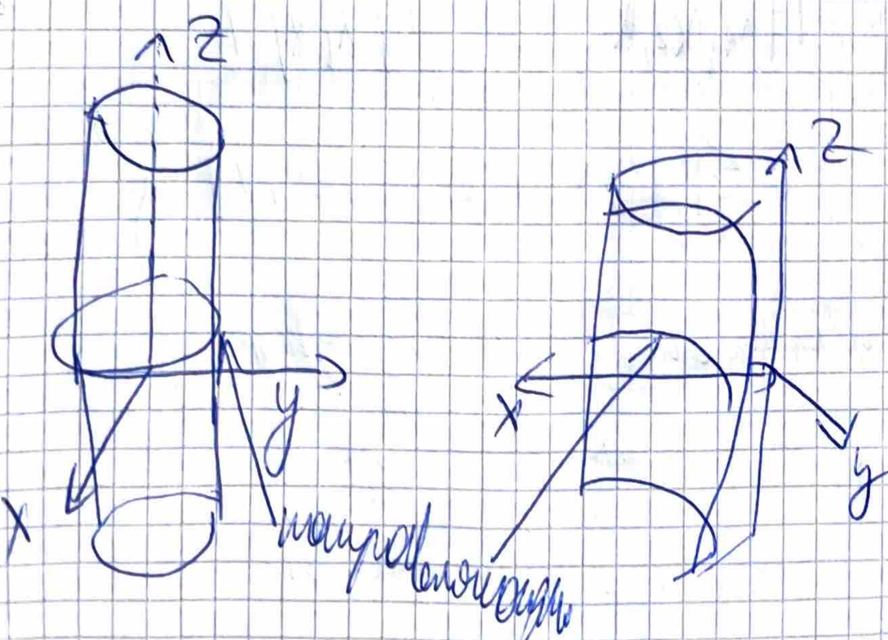
в) гиперболическим цилиндром

если в некот ПСК x, y, z (называемой канонической) она имеет следующее (каноническое) уравнение:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$

б) $y^2 = 2px, \quad p > 0$

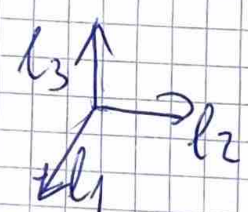
в) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0$



Предл 1 Каждый из цилиндров (1) явл-ся ~~линейной~~ линейчатой поверхностью, обладающей сем-вом прям. образующих параллельных ℓ ⇒

ОПР Линия лежащ на цилиндре, наз. направляющей, если любая обр-ая ц-ра пересекает её в единственной точке.

ПЗ Инварианты кривых и поверхностей II-го порядка



$$\{ M(x_1, x_2, x_3) \mid \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{3} b_i x_i + c = 0 \quad (1) \}$$

наз поверхностью II-го порядка, если $A = (a_{ij})$ — симм $\neq 0$. Ур-е (1) наз общим ур-ем пов-сти S.

В матричной форме ур-е (1) имеет вид

$$X^T A X + 2 b^T X + c = 0 \quad (2)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

<u>УПР 1</u> $(2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$

Запишем ур-я перехода к новой ПСК: $X = QX' + h \quad (4)$

<u>УПР 2</u> $(4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>ОПР</u> 3×3 – матрица, столбцы образуют ОНБ, наз-ся ортогональной.

<u>УПР 3</u> Показать, что в формуле (4) матрица Q ортогональная.

<u>УПР 4</u> При переходе к новой ПСК ур-е пов-ти принимает вид

$$(X')^T A' X' + 2 b'^T X' + c' = 0 \quad (5), \text{ где}$$

$$A' = Q^T A Q, \quad b' = Q^T A h + Q^T b, \quad c' = h^T A h + 2 b^T h + c \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^T & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 7$$

T1 Пусть $(x_0, y_0, z_0)^T$ – решение СЛУ с расш. матрицей $(A|-b)$. Тогда точка $O(x_0, y_0, z_0)$ – центр симм пов-ти S.

ОПР Будем говорить, что 4×4-матрица M' получена преобразованием подобия с помощью м-цы $\begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из M, если $M' = \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где Q-орт. 3×3 м-ца $h \in \mathbb{R}^3$, в этом случае будем также говорить, что M' подобна м-це M.

Л1. Определители подобных м-ц равны

Д-во $\det(M') = \det\left(\begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{vmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot |M| \cdot \begin{vmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |Q|^T |M| |Q| =$

$= |Q^T Q| \cdot |M| = |E| \, |M| = \det M$ $\square$

Тогда, что $I_1 = tr(A)$, $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$
$+ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $I_3 = \det(A)$

Т2 Числа I_1, I_2, I_3 не меняются при переходе к любой другой ПСК

Д-во: $\det|A-\lambda E| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$,

Пусть $x = Qx'$; $\det|A' - \lambda E| = |Q^T A Q - \lambda Q^T Q| =$

$= |Q^T|A-\lambda E|Q| = |Q^T||Q||A-\lambda E| =$

$= |A-\lambda E|$

При параллельном переносе $A' = A$ ☒

ОПР Многочлен $\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} =$

$= K_0(-\lambda^3) + K_1\lambda^2 - K_2\lambda + K_3$

наз. многочленом Моденова ур-я (1)

Т3 Мн-н $\Delta_1(\lambda)$ инвариантен отн-но поворотов

б) если ранг м-цы $|A\,|\,b| - (\operatorname{rang}|A|b|)$ равен g, то 3-g младших коэф-от мн-на $\Delta_1(\lambda)$ равны 0

в) K_g ~~инвари~~ инвариантен н-но переносов

$\underline{\text{Д-во}}$: а) $x = Qx'$, тогда $A' = Q^T A Q$,

$b' = Q^T b$, $c' = c$

$$\begin{vmatrix} A' - \Lambda E & b' \\ b'^T & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q^T A Q - \Lambda Q^T Q & Q^T b \\ (Q^T b)^T & c \end{vmatrix} \overset{\text{утв}}{=}$$

$$\overset{\text{утв}}{=} \begin{vmatrix} Q^T & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A - \Lambda E & b \\ b^T & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

б) $r = rg(A)$. Пусть $r = g = 3$

$A' = Q^T A Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, для некот. орт. Q. После замены $x = Qx'$ ур-е пов-ти примет вид.

$$\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \lambda_3 \eta_3^2 + 2b_1' \eta_1 + 2b_2' \eta_2 + 2b_3' y_3 = 0$$

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda & b_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' & c \end{vmatrix} \Rightarrow K_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & \lambda_3 & b' \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} \text{ - инвариант отн-но переносов}$$

Пусть $r = q = 2 \ / 1 \ C, 3. \ \Delta \ \lambda_1, \lambda_2, 0$

$X = Q \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$. После упрощения $\overset{\lambda_1}{}$ $\overset{0}{}$ ур-е

виду $\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + 2b_1' \eta_1 + 2b_2' y_2 + 0\eta_3 + C = 0$

$\lambda_1 \eta_1' + 2b_1 \eta_1 + c = 0$

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 & C \end{vmatrix} = \cancel{(-\lambda)}$$

$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 & C \end{vmatrix}, \quad k_3 = 0$$

$$k_2 = \frac{\Delta_1(\lambda)}{(-\lambda)}\Big|_{\lambda=0} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 & C \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ \dots & & & \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

$k_3 = k_2 = 0, \quad k_1 = \dfrac{\Delta_1(\lambda)}{(-\lambda)^2}$ – инвариант переноса

Пусть $r+1=g=3$ $c,z,\lambda_1,\lambda_2,0$

$\Rightarrow$ ур-е $|1|$ $r+1=g=2$ принимает вид $\lambda_1,D,0$

$$\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+2b_1\eta_1+2b_2\eta_2+2b_3'\eta_3+c=0$$

$$\Delta_1\ |\Lambda|=\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & -\lambda & b_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' & c \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow k_3=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 0 & b_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' & c \end{vmatrix}$$ - инв. отн. перен.

$$\lambda_1\eta_1^2++2b_1'\eta_1+2b_2'\eta_2+2b_3'\eta_3+c=0$$

$$M|\Lambda|=\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 & b_1'' \\ 0 & -\lambda & 0 & M' \\ 0 & 0 & -\lambda & 0' \\ b_1'' & M' & 0' & c \end{vmatrix}$$ $\cancel{\sigma}$ $-\lambda$

$|b_1'|^2+|b_2''|^2\neq 0$

Обозн. $\dfrac{b_2'}{\sqrt{(b_2')^2+(b_3')^2}}=\cos y$,

$\dfrac{b_3'}{\sqrt{(b_2')^2+(b_3')^2}}=\sin y$ Тогда, $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & -\sin y \\ 0 & \sin y & \cos y \end{pmatrix}$

$(0, \sin y, \cos y)\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix}=0 \Rightarrow b''=Qb'=\begin{pmatrix} b_1' \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$