

1. Определенный интеграл.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_0^{0.5} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$.

Решение:

$$\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = \left(2\sqrt{x} + \ln x \right) \Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 1.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx = \left(x^2 - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - \frac{1}{2} \cos 2\pi + \frac{1}{2} \cos 0 = \pi^2.$$

Пример 4. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = x^2$ при $x \in [1, 2]$.

Решение:

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ кв. ед.}$$

Вычислить интеграл $\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$.

Пример 5

Решение:

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx &= \left. \begin{aligned} t &= \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1, \\ dx &= 2tdt; \\ x \Big|_3^8 &\rightarrow t \Big|_2^3 \end{aligned} \right\} = \int_2^3 \frac{(t^2 - 4)2t}{t} dt = \\ &= 2 \int_2^3 (t^2 - 4)dt = \left. \left(\frac{2}{3}t^3 - 8t \right) \right|_2^3 = -6 + \frac{32}{3} = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$.

Пример 6

Решение:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 1}} = \left. \begin{array}{l} t = e^x \rightarrow dt = e^x dx, \\ e^{2x} + 1 = t^2 + 1, \\ x \Big|_0^1 \rightarrow t \Big|_1^e \end{array} \right\} = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln \frac{e + \sqrt{e^2 + 1}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Вычислить $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$.

Пример 7

Решение:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \end{aligned}$$

Вычислить $\int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx$.

Пример 8

Решение:

$$\begin{aligned} \int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x}, \\ dv = (x^2 + 1) dx, & v = \frac{x^3}{3} + x \end{array} \right] = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{e^3}{3} + e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \frac{e^3}{3} + e - \left(\frac{x^3}{9} + x \right) \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} + e - \frac{e^3}{9} - e + \frac{1}{9} + 1 = \frac{2e^2 + 10}{9}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить интегралы по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}, & \text{б)} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, & \text{в)} \int_1^2 3(x-1)^2 dx, \\
 \text{г)} \int_0^{\pi/2} \sin 3x dx, & \text{д)} \int_1^5 \frac{x dx}{1+x^2}, & \text{е)} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - x \right) dx, \\
 \text{ж)} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x}, & \text{и)} \int_0^{2\pi} \cos x \cos 5x dx.
 \end{array}$$

2. Вычислить интегралы подстановкой:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx, & \text{б)} \int_3^8 \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} dx, & \text{в)} \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx, \text{ г)} \int_0^{\pi/2} \cos^3 3x \sin 6x dx, \\
 \text{д)} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x dx, & \text{е)} \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}, & \text{ж)} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3}.
 \end{array}$$

3. Вычислить интегралы по частям:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int_0^1 x e^{-x} dx, & \text{б)} \int_1^e (x+1) \ln x dx, & \text{в)} \int_0^{\pi/6} x \cos 3x dx, \text{ г)} \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx, \\
 \text{д)} \int_{-1/2}^{1/2} \arccos x dx, & \text{е)} \int_0^{\pi^2/4} \sin \sqrt{x} dx, & \text{ж)} \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x) dx.
 \end{array}$$

Ответы:

1. а) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, б) $\frac{\pi}{4}$, в) 1, г) $\frac{1}{3}$, д) $\ln \sqrt{13}$, е) $\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$, ж) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, и) 0.

2. а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{32}{3}$, в) $\frac{464\sqrt{2}}{15}$, г) $\frac{2}{15}$, д) $\frac{3\pi+8}{12}$, е) $\ln \frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}$, ж) $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. а) $\frac{e-2}{e}$, б) $\frac{e^2+5}{4}$, в) $\frac{\pi-2}{18}$, г) $\pi^2 - 4$, д) $\frac{\pi}{2}$, е) 2, ж) $\frac{e^{\pi/2}-1}{2}$.

2. Несобственный интеграл.

2.1 Несобственный интеграл первого рода

Опр.

Определение 1. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, то его называют *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty)$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Таким образом, по определению $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

При этом говорят, что несобственный интеграл существует или *сходится*. Если же не существует конечного предела, то несобственный интеграл не существует или *расходится*.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Решение:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-b} + 1 \right) = 1.$$

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^2 (x^2 - 5) dx$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{4} + 3x \right) \Big|_a^2 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^2}{4} + 6 - \frac{a^2}{4} - 6a \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in R$.

Решение:

При $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty (\alpha < 1), \\ \frac{1}{\alpha-1} (\alpha > 1). \end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$

Следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$.

Решение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \int_{-\infty}^0 \sin x dx + \int_0^{+\infty} \sin x dx.$$

Но $\int_0^{+\infty} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x + \cos 0$, и т. к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ не существует, то интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ расходится. Аналогично расходится и интеграл $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$. Значит, и данный в условии интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ расходится.

Признак сравнения. Если на промежутке $[a, \infty)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a, b]$, причем $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$, то из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} g(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{\infty} f(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{\infty} g(x) dx$.

Признак сравнения в предельной форме. Если на промежутке $[a, \infty)$ определены две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на любом конечном отрезке $[a, b]$, и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (0 < A < \infty)$, то несобственные интегралы $\int_a^{\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Пример 6

Решение:

Воспользуемся признаком сравнения.

Так как $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ $\forall x \in [1; +\infty)$, то из сходимости $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$

следует сходимость и данного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty} \ln \frac{x^2+2}{x^2+1} dx$.

Пример 7

Решение:

Воспользуемся предельным признаком сравнения. Данный интеграл

сходится, т. к. сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, а

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Пример 8. Исследовать на сходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{2x-7}{x^3+x^2+5x+12} dx.$$

Решение:

Воспользуемся предельным признаком сравнения. При $x \rightarrow \infty$ подынтегральная функция эквивалентна $\frac{2}{x^2}$. Таким образом, $\alpha = 2 > 1$, и данный интеграл сходится.

Теорема. Если сходится интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Пример 9

Решение:

Подынтегральная функция – знакопеременная, при этом $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|$,

но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1$.

Следовательно, интеграл $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ сходится, а интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ сходится абсолютно.

2.2 Несобственный интеграл второго рода

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \in [a; b)$ и имеет разрыв при $x = b$. Тогда $\int_a^b f(x) dx$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

и называется *несобственным интегралом 2-го рода*. Если предел, стоящий справа, существует и конечен, интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

Решение:

При $x = 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 - 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

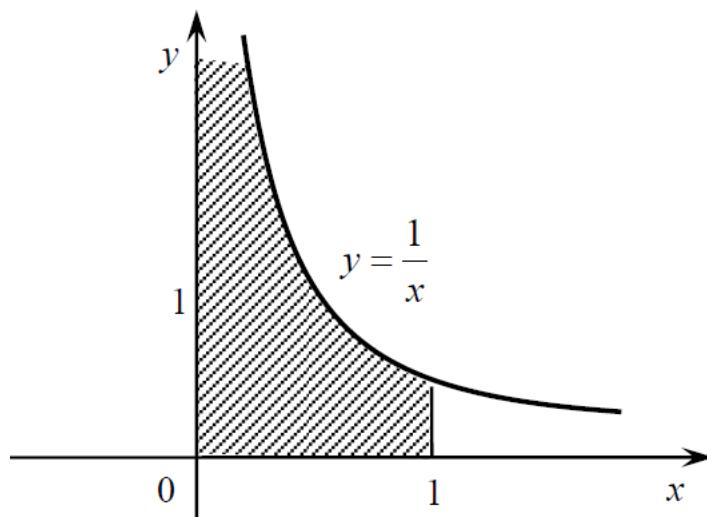
Решение:

При $x = 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, и тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln|x|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty.$$

Это означает, что несобственный интеграл расходится.

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, не ограничена.



Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение:

При $x = -1$ и при $x = 1$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon_1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon_1}^0 + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon_2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (\arcsin 0 - \arcsin(-1 + \varepsilon_1)) + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (\arcsin(1 - \varepsilon_2) - \arcsin 0) = 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ $\alpha \in R$.

Решение:

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $\alpha = 1$, тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln|b-x| \Big|_a^b = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|) = \infty,$$

т. е. при $\alpha = 1$ интеграл расходится.

2. Пусть $\alpha > 1$. Обозначим $\alpha = 1 + s$, где $s > 0$, тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\int_a^b (b-x)^{-1-s} d(b-x) = \frac{1}{s(b-x)^s} \Big|_a^b = \infty,$$

т. е. при $\alpha > 1$ интеграл расходится.

3. Пусть $\alpha < 1$, тогда $s = 1 - \alpha > 0$. Имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\int_a^b (b-x)^{-\alpha} d(b-x) = \frac{(b-x)^s}{s} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^s}{s},$$

т. е. при $\alpha < 1$ интеграл сходится.

Таким образом, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Признак сравнения. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $a \leq x < b$ и имеют разрыв при $x = b$. Пусть, кроме того, $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ при $x \in [a, b]$. Тогда если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл

$\int_a^b \varphi(x)dx$; если интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Пределочный признак сравнения. Пусть $f(x) \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$ на $[a, \infty)$, $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b)$ и имеют разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, то несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример

Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x^3}$.

Решение:

При $x = 0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв.

Сравним подынтегральную функцию с $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Очевидно, что $\frac{1}{\sqrt{x} + x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in (0; 1)$.

При этом $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_\varepsilon^1 = 2$. Поэтому несобственный

интеграл от «большей» функции сходится, значит, сходится и исследуемый интеграл.

Теорема. Если $f(x)$ – знакопеременная функция, непрерывная на $[a, b)$ и имеющая разрыв при $x = b$, и если $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$

Решение:

Подынтегральная функция является бесконечно большой при $x \rightarrow 1$. Представим ее в виде

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}.$$

Найдем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{1/3}}}{\frac{1}{(1-x)^{1/3}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, то по предельному признаку сравнения интегралы $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$ и $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$ ведут себя одинаково. Интеграл $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/3}} dx$ сходится, т. к. $\alpha = \frac{1}{3} < 1$. Следовательно, и исходный интеграл тоже сходится.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов 1-го рода:

$$\text{а)} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2};$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2};$$

$$\text{в)} \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$$

$$\text{г)} \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx;$$

$$\text{д)} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx;$$

$$\text{е)} \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx.$$

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов 2-го рода:

$$\text{а)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}};$$

$$\text{в)} \int_0^1 x \ln x dx;$$

$$\text{г)} \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 8};$$

$$\text{д)} \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$\text{е)} \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а)} \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}};$$

$$\text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)};$$

$$\text{в)} \int_0^1 \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$\text{г)} \int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{д)} \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1};$$

$$\text{е)} \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$$