§1. Разложение в тригонометрический ряд Фурье периодической функции с периодом 2π

Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной на промежутке $[-\pi, \pi]$, называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Если ряд (1) является рядом Фурье функции $f(x)$, то употребляется следующая запись:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{3}$$

что означает, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье.

Замечание 1. Не для всякой функции можно построить ряд Фурье(невозможно, например, написать ряд Фурье функции, для которой интегралы в формулах (2) не существуют).

Замечание 2. Не всякая функция является суммой ее ряда Фурье, даже если он сходится.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной в промежутке $[a, b]$, если этот промежуток разбивается на конечное число промежутков $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_n, b]$, в каждом из которых функция $f(x)$ монотонна. Кусочно-монотонная функция может иметь в промежутке $[a, b]$ разрывы лишь первого рода.

Теорема Дирихле. *Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-монотонна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет в нем не более чем конечное число точек разрыва, то ее ряд Фурье сходится к сумме*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4}$$

в каждой точке непрерывности и к сумме

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \tag{5}$$

в каждой точке разрыва.

Высказанные условия называются *условиями Дирихле.*

Если функция рассматривается на открытом промежутке $(-\pi, \pi)$, то

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right]. \tag{5'}$$

Если $f(x)$ — четная функция (т.е. $f(-x) = f(x)$), то

$$\begin{gathered} b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \end{gathered} \tag{6}$$

и ряд Фурье для четной функции записывается так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \tag{7}$$

Если $f(x)$ — нечетная функция (т. е. $f(-x) = -f(x)$), то

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \tag{8}$$

и ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{9}$$

В случае разложения в ряд Фурье функции $f(x)$, удовлетворяющей тем же условиям, но заданной в произвольном промежутке $[a, a+2\pi]$ длиной 2π, в формулах (2) пределы интегрирования заменяются соответственно на a и $a + 2\pi$. Например, если $a = 0$, то промежуток $[a, a + 2\pi]$ имеет вид $[0, 2\pi]$, и коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{10}$$

П р и м е р 3. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x) = x + |x|$ (рис.29, a), заданную на интервале $(-\pi, \pi]$.

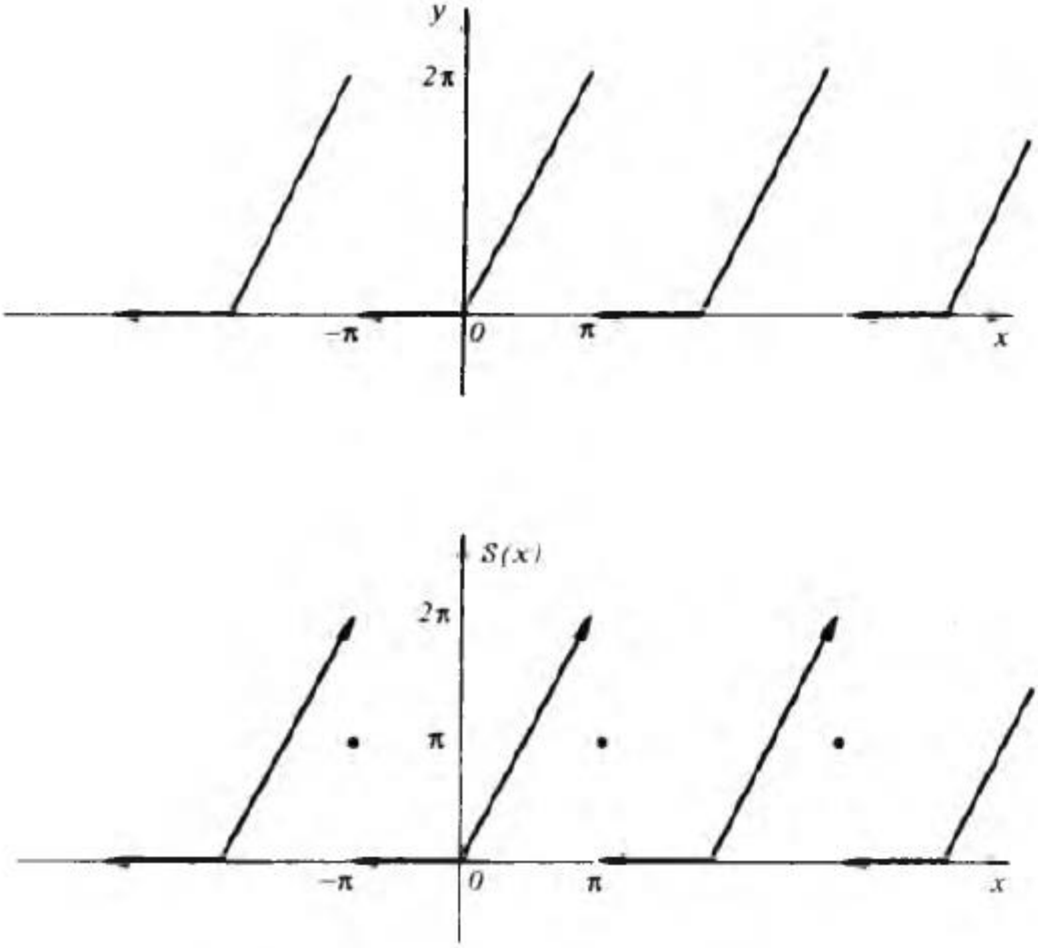

Рис. 29.

Р е ш е н и е. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости функции в ряд Фурье. При этом ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится при всех x и значения его суммы $S(x)$

совпадают со значениями функции $f(x)$ во всех точках, кроме точек ее разрыва $x = \pm(2k-1)\pi$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Значения функции $S(x)$ при $x = \pm\pi$ определяются формулой (5). В данном случае $f(-\pi+0)=0$, $f(\pi-0)=2\pi$. Поэтому $S(\pm\pi)=\pi$. Так как функция $S(x)$ 2π-периодична, то $S(\pm(2k-1)\pi)=\pi$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

График функции $S(x)$ — суммы ряда Фурье для данной функции $f(x)$ — изображен на рис.29,*б*.

Теперь построим ряд Фурье для рассматриваемой функции $f(x)$.

Вычисляя коэффициенты Фурье для функции $f(x)$ по формулам (2) и принимая во внимание, что

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 2x & \text{при } 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} 2x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\,2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Далее,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left[\cos k\pi - 1\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right],\quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(Для вычисления интеграла использована формула интегрирования по частям.)

Аналогично находим b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\,d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,dx = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).\right.$$

Подставляя найденные значения a_0, a_k и b_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ в ряд Фурье (1), получаем

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right]\cos kx + \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx\right\}.$$

Этот ряд сходится при всех x. А так как $S(x) = f(x)$, то для всех x из интервала $(-\pi, \pi]$ имеет место разложение

$$x + |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k - 1\right]\cos kx + \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx\right\}.$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\pi \le x < 0, \\ 1 \text{ при } 0 < x < b, \\ 0 \text{ при } b < x \le \pi, \\ \frac{1}{2} \text{ при } x = 0, x = b \end{cases}$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную равенством

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad -\pi < x < \pi$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную равенством

$$f(x) = x + |x|, \quad -\pi < x \le \pi$$

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную равенством

$f(x) = x^2 \quad -\pi \le x \le \pi$. При помощи полученного разложения вычислить суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

Пример 5. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную равенством

$$f(x) = \begin{cases} x/2 \text{ при } -\pi < x < \pi \\ 0 \quad \text{ при } x = \pi \end{cases}$$

Пример 6. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, определенную равенством

$f(x) = 2x$ при $-\pi < x < \pi$

ДЗ: №6, №8

- Разложить в ряд Фурье функции с периодом 2π:

1. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{при} \quad -\pi < x < 0, \\ 2 & \text{при} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} ax & \text{при} \quad 0 \le x < \pi, \\ bx & \text{при} \quad -\pi < x < 0, \end{cases}$ где a и b — числа.

а) Построить график исходной функции при $a > 0$, $b > 0$, $|a| > |b|$ и найти ее разложение;

б) Рассмотреть случаи $a = b = 1$ и $a = 1$, $b = -1$. Построить графики этих функций и, используя их разложения в тригонометрические ряды Фурье, найти суммы числовых рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$$

3. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

С помощью полученного разложения найти сумму числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \ldots$$

4. $f(x) = x(\pi - x)$ при $-\pi < x < \pi$.

5. $f(x) = \pi + x$ при $-\pi \le x \le \pi$.

6. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\pi}\right) & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ -1 & \text{при } 0 \le x < \pi. \end{cases}$

8. $f(x) = x^3$ при $-\pi < x < \pi$.

9. $f(x) = \cos ax$ при $-\pi \le x \le \pi$, $a \ne k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

10. $f(x) = |x|$ при $-\pi < x \le \pi$.

11. $f(x) = |\sin x|$.

12. $f(x) = x \cos x$ при $-\pi < x < \pi$.

13. $f(x) = x \sin x$ при $-\pi < x < \pi$.

14. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$. Построить график суммы ряда $S(x)$

15. $f(x) = e^x - 1$ при $0 < x < 2\pi$.