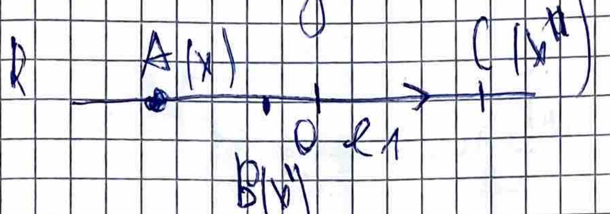
Коробов Алексей Александрович

Методы алгебры и анализа

Гл 1 Ф-ии нескольких переменных

§1 Основные понятия

п 1 Введение



Вместо A имеем x

Вместо B ~~...~~ — x'

Вместо C — x''

Расстояние $d(x, x')$ равно $|x - x'|$

Св-ва: а) $d(x, x') \geq 0$

б) $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$

в) $d(x, x') = d(x', x)$

г) $d(x, x'') = d(x, x') + d(x', x'')$

Пусть $m > 1$ $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m\}$

$x = (x_1, \ldots, x_m)$ – точка мн-ва $\mathbb{R}^m$

$\boxed{\text{ОПР}}$ Число $d(x, x')$ наз. расстоянием

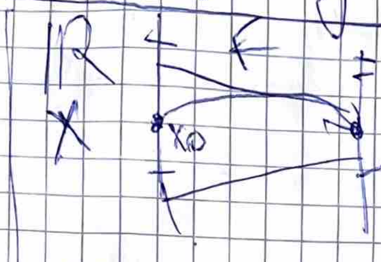
$$d(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x'_i)^2}$$ – расстояние

м/у точками $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $x' = (x'_1, \ldots, x'_m)$

УПР 1 Для введенного расст. ~~выполнены~~ выполнены св-ва а), б, в, г

№2 Опред. [illegible]

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Говорят, что им-ся ф-я, определенная на X со значениями в Y, если $\forall x \in X$ в силу некоторого закона f соответствует элементу $y \in Y$



$f(x_0)$ — значение

Мн-во X наз-ся областью определения ф-ции f и обозн. $Dom(f)$.
Мн-во $f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x)$ для некот. $x \in X\}$ наз-ся мн-вом значений ф-ции f

ОПР Для ф-ции приняты след. обозначения: $f: X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$, $x \to f(x)$, $y = f(x)$, также иногда одной буквой f

ОПР Если $A \subseteq X$, $f: X \to Y$, то через $f|_A$ обозн. ф-ю $\varphi: A \to Y$, совпадающую с f на мн-ве A. Ф-я φ наз. сужением ф-ции f на A.

Ф-я $f: X \to Y$ по отношению к $\varphi = f|_A : A \to Y$ наз. продолжением

ОПР Пусть $X' \subseteq X$, $f: X \to Y$. Мн-во A наз прообразом ф-ции f при X'

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, \; 0 < d(x, x_1) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon$

~~Определение через в~~ окрестности

обозн. $\lim f(x) = A$

$C \quad x \neq X$

~~Опр. $x_0 \in$~~

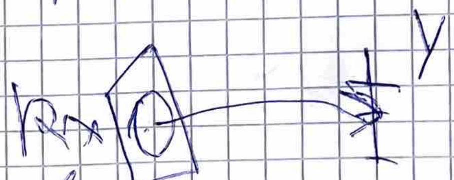
$\boxed{\text{ОПР}}$ Пусть $x_0 \in X$. Ф-я $f: X \to Y$ наз. непрерывной в т. x_0, если

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Сложение, умножение, деление двух ф-ий с одной и той же областью определения опред-ся поточечно, также как и линейная комбинация

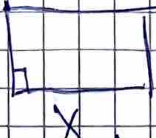
~~Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^k$~~



Св-ва предела ($n = 1$, $m = 1$). Выполнена теорема о пределе линейной комбинации, произведения, ~~частного~~ частного двух ф-й

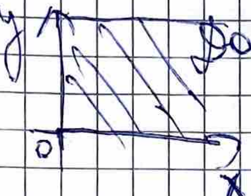
Св-ва непр. ф-ии ($m = 1$, $n = 1$).

Если две ф-ии с общей обл. определения непр. в т x_0, то таковы их лин. комб., произведение и частное

Пример 1 | y  $S = S(x,y) = xy$

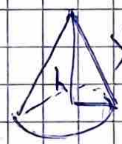
$(x,y) \in \mathbb{R} \longmapsto S(x,y)$

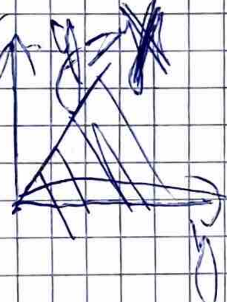
$\mathrm{Dom}\, S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$



Замечание $f(x_1,x_2)$, $f(x,y)$ или $z = f(x,y)$

Пример 2 | Указать область определения ф-ции, выражающей объем V ~~друговаго~~ ~~конуса~~ кругового конуса через образующую x и радиус y





$S = \pi y^2$, $V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2-y^2} = V(x,y)$

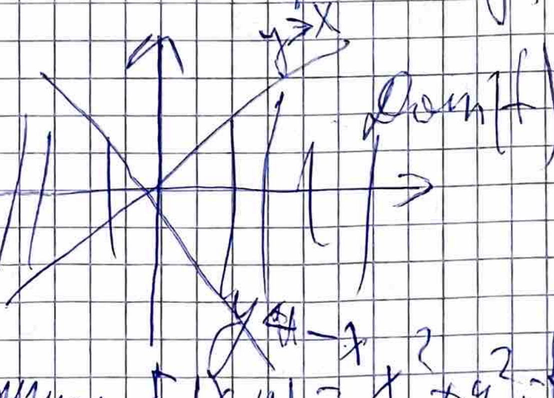
$h = \sqrt{x^2-y^2}$

$\mathrm{Dom}(V) = \{(x,y) \mid x>0,\ y>0,\ x>y\}$

Пример 3 | Найдем область опр. $f(x,y)$

$f(x,y) = \frac{\pi y^2}{3}\sqrt{x^2-y^2}$

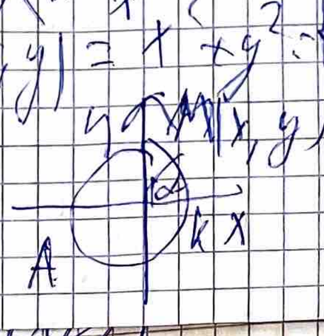
$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \mid x^2 \geq y^2\}$



Пример 4 | (Мн-во значений) Обозначим $F(x,y) = x^2+y^2-R^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$

$U_1(M) \overset{\text{опр}}{=} \alpha$



Мн-во значений $[0, 2\pi]$

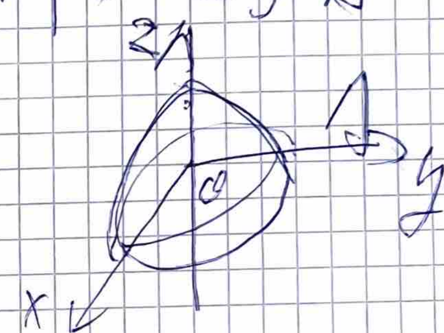
Пример 5 (Продолжение ф-ции)

Поставим каждой точке в соответствие числа

$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x, y, z) = 0\}$

$\boxed{\text{УПР 2}}$ $X \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \Delta$



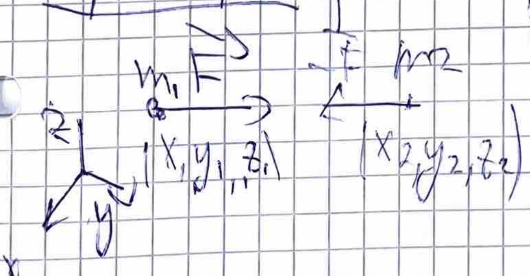
$f(M) \overset{\text{опр}}{=} \varphi(M)$

$f(N) \overset{\text{опр}}{=} f(M)$

$F: X \to \mathbb{R}$

$F/\Delta = \varphi \quad Dom(F) = X$

Пример 6 (ф-я от неск. переменных)



$|\vec{F}| = F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = k \dfrac{m_1 m_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

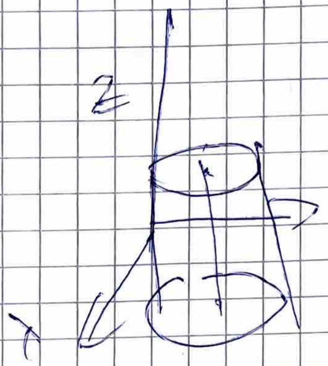
$Dom(F) = \{(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \mid x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2,\ z_1 \neq z_2\}$

П3 График и линии уровня от двух переменных $z = f(x, y)$

ОПР $\{M(x, y, F(x, y)) \mid (x, y) \in Dom(f)\}$

наз-ся графиком ф-ции $z = f(x, y)$

ОПР линией уровня ф-ии $f(x,y)$ наз. $\{(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_0,y_0) = C\}$, C – const



$f(x,y) = xy$

$f(x,y) = xy = 1$