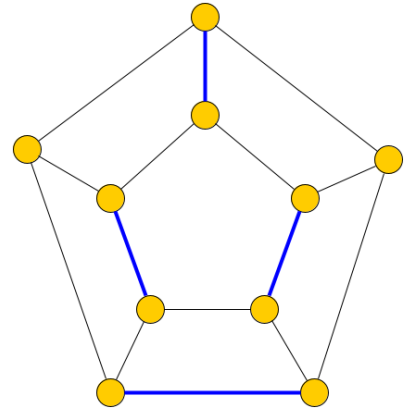
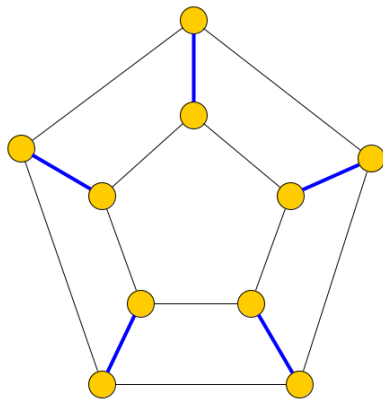
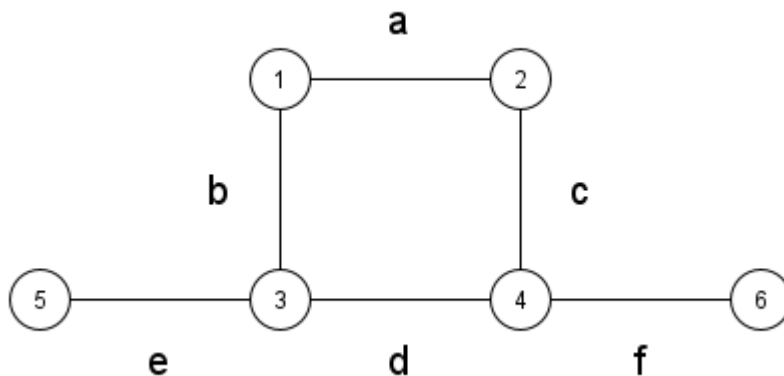


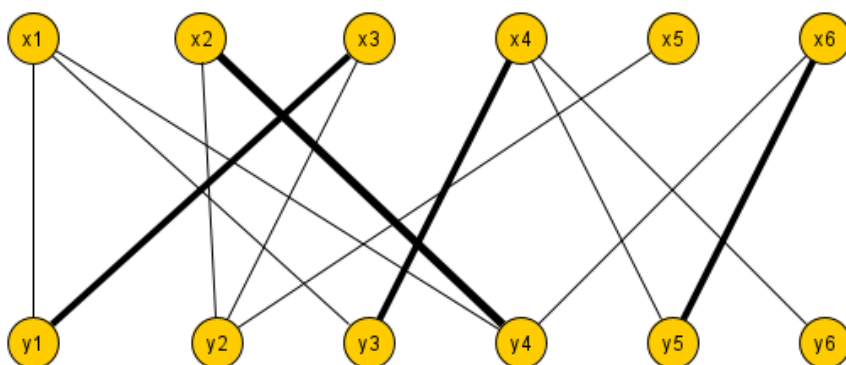
1. Показать, что невозможно, используя костяшки домино, замостить шахматную доску размера 8×8 , у которой в двух противоположных углах вырезаны два квадрата размера 1×1
2. Приведите пример графа ($m > 1$), в котором наибольшее паросочетание состоит из одного ребра.
3. Для каждого $k > 1$ найти пример k -регулярного простого графа, у которого нет совершенного паросочетания.
4. Показать, что каждый k -куб имеет совершенное паросочетание.
5. Найти $G[M \Delta M']$ для двух паросочетаний, показанных ниже.



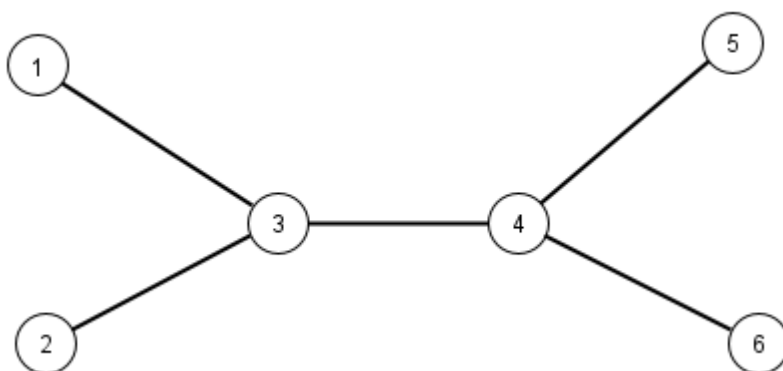
6. Доказать, что дерево может иметь не более одного совершенного паросочетания.
7. А) Найти наибольшее паросочетание для графа, показанного ниже.
Б) Найти наибольшее независимое множество
С) Найти наименьшее вершинное покрытие



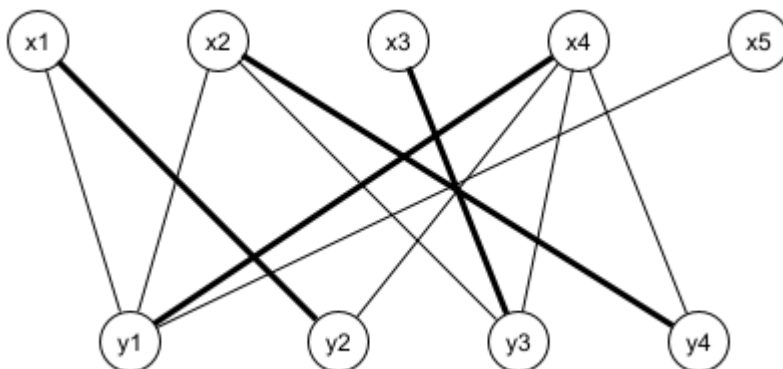
8. Найти наибольшее паросочетание для графа, показанного ниже.



9. А) Найти наименьшее вершинное покрытие для графа, показанного ниже.
 Б) Найти наибольшее независимое множество для графа, показанного ниже.

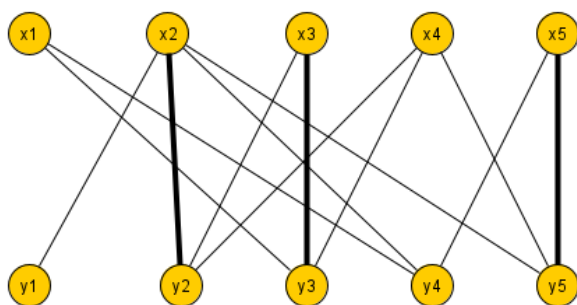


10. Найти наименьшее вершинное покрытие для графа, показанного ниже.

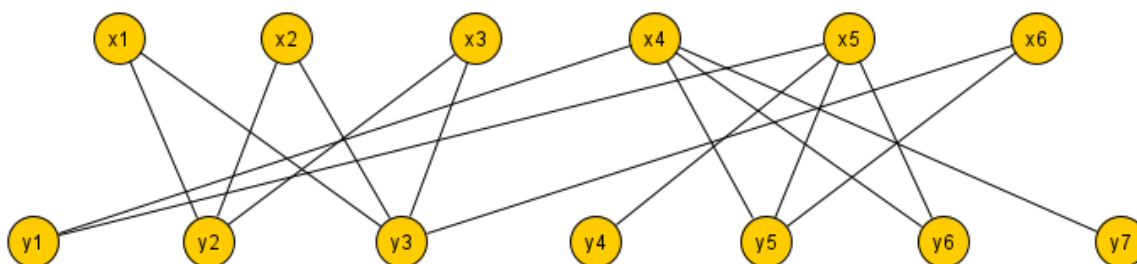


11. Найти наибольшее паросочетание и наименьшее вершинное покрытие для графов, показанных ниже.

(a)



(б)



12. В группе компьютерной поддержки Инженерной школы Университета 4 сотрудника. Каждый сотрудник будет назначен на поддержку одной из четырех областей: аппаратное обеспечение, программное обеспечение, сети и wi-fi.

- При этом Петр имеет квалификацию для поддержки аппаратного обеспечения, сетей и wi-fi;
- Клим может квалифицированно поддерживать программное обеспечение и сети;
- Родион имеет право на поддержку сетей и wi-fi,
- Станислав имеет право на поддержку аппаратного и программного обеспечения.

а) Используйте двудольный граф, чтобы промоделировать четырех сотрудников и их квалификации.

б) Используйте теорему Холла, чтобы определить, существует ли такое назначение сотрудников, чтобы каждый сотрудник отвечал за поддержку одной области.

с) Если существует такое назначение сотрудников, чтобы каждый сотрудник отвечал за поддержку одной области, найти его.

13. В новой компании пять сотрудников: Самора, Аграхарам, Смит, Чоу и Макинтайр. Каждый сотрудник возьмет на себя одну из шести обязанностей: планирование, реклама, продажи, маркетинг, развитие и промышленные отношения.

Каждый сотрудник способен выполнить одну или несколько из этих работ:

- Самора может заниматься планированием, продажами, маркетингом или промышленными отношениями;
- Аграхарам мог бы заниматься планированием или развитием;
- Смит мог бы заниматься рекламой, продажами или промышленными отношениями;
- Чоу мог бы заниматься планированием, продажами или промышленными отношениями;
- Макинтайр мог бы заниматься планированием, рекламой, продажами, или промышленными отношениями;

а) Смоделировать умения этих сотрудников, используя двудольный граф.

б) Найти распределение обязанностей так, чтобы на каждого сотрудника возлагалась одна ответственность.

в) Является ли распределение обязанностей, которые вы нашли в части (б) полным паросочетанием? Наибольшим паросочетанием?

14. На острове 5 молодых женщин и 5 молодых мужчин.

Каждый мужчина готов жениться на одной из женщин с острова, и каждая женщина готова выйти замуж за любого мужчину, который готов жениться на ней.

- Иван готов жениться на Марии и Ларисе;
- Михаил готов жениться на Марии, Клавдии и Наталье ;

- Александр готов жениться на Марии и Светлане ;
- Юрий готов жениться на Ларисе и Светлане;
- Николай готов жениться на Марии и Светлане.

Используйте теорему Холла, чтобы показать, что не существует такого паросочетания между юношами и девушками на острове, что каждый молодой человек будет связан с девушкой, на которой он готов жениться.

Системы различных представителей (system of distinct representatives , SDR)

Предположим, что S_1, S_2, \dots, S_n - совокупность подмножеств множества S , где n - натуральное число. Системой различных представителей (**system of distinct representatives , SDR**) для этого семейства является упорядоченный n -набор (a_1, a_2, \dots, a_n) , обладающий тем свойством, что $a_i \in S_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$ и $a_i \neq a_j$ для всех $i \neq j$.

15. Найти SDR для множеств $S_1 = \{a, c, m, e\}$, $S_2 = \{m, a, c, e\}$, $S_3 = \{a, p, e, x\}$, $S_4 = \{x, e, n, a\}$, $S_5 = \{n, a, m, e\}$, and $S_6 = \{e, x, a, m\}$.

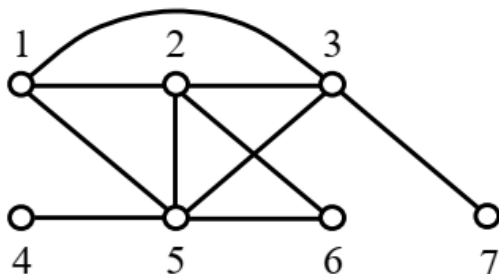
16. а) Используйте теорему Холла (Hall), чтобы показать, что набор множеств $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{b, c, d\}$, $S_3 = \{a, b, d\}$, $S_4 = \{b, c, d\}$ имеет SDR, не осуществляя в явном виде построение этого SDR

б) Найдите в явном виде SDR для набора из четырех множеств из части а).

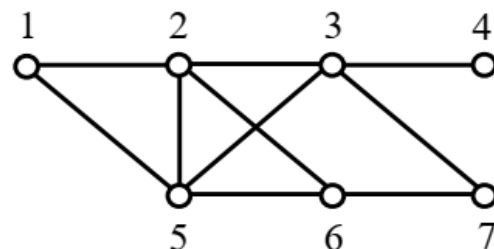
17. Используйте теорему Холла (Hall), чтобы показать, что набор множеств $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{a, c\}$, $S_3 = \{c, d, e\}$, $S_4 = \{b, c\}$, $S_5 = \{d, e, f\}$, $S_6 = \{a, c, e\}$, and $S_7 = \{a, b\}$ не имеет SDR.

18. Для графов, показанных ниже, найти:

- независимые множества вершин;
- максимальные независимые множества вершин;
- наибольшее независимое множество вершин;
- число независимости $\alpha_0(G)$;
- вершинные покрытия;
- минимальные вершинные покрытия;
- наименьшее вершинное покрытие;
- число вершинного покрытия $\beta_0(G)$;



(a)



(б)