Факторы и реализация графа

Тахонов Иван Иванович

Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет

НГУ, 2019

Сегодня поговорим о двух родственных, но все же различных задачах:

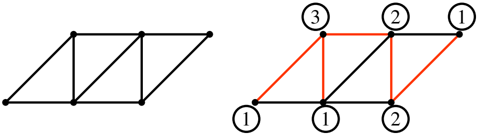
1. в известном графе найти подграф с заданными степенями вершин (или показать, что такого подграфа нет);
2. построить граф с заданными степенями вершин (или показать, что такого графа нет).

О факторах графов

Определения

Определение 1

Пусть $G = (V, E)$ *– неориентированный (мульти)граф,* $f : V \to \mathbb{N}$ *– некоторая функция (считаем, что* $f(v) \leqslant \deg_G(v)$ *для всех* $v \in V$*). Остовный подграф* $H = (V, E')$, $H \subseteq G$, *называется* f*-фактором* G, *если* $\deg_H(v) = f(v)$ *для всех* $v \in V$.

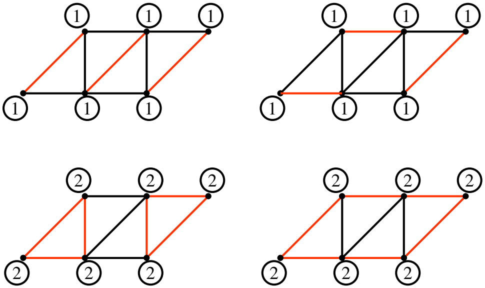


Определения

Определение 2

Если $f(v) = k$ *для всех* $v \in V$, *то* f*-фактор называется* k*-фактором.*

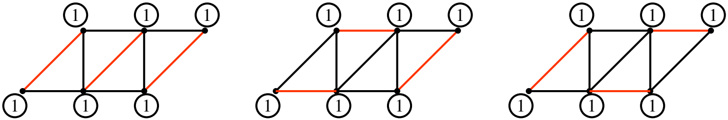
Например: 1-фактор, 2-фактор и т.д.



1-фактор

Ранее уже встречались с 1-факторами:

1-фактор – это не что иное, как совершенное паросочетание.



Т.о., чтобы найти 1-фактор, достаточно построить наибольшее паросочетание в графе. Если оно совершенно $\Rightarrow$ это 1-фактор.

Еще до этого говорили о подсчете совершенных паросочетаний $\Rightarrow$ можем посчитать и перечислить 1-факторы (но быстро это сделать не получится, задача $\#\mathcal{P}$-полна).

Также говорили о необходимых и достаточных условиях существования совершенного паросочетания (1-фактора).

Теорема (Tutte)

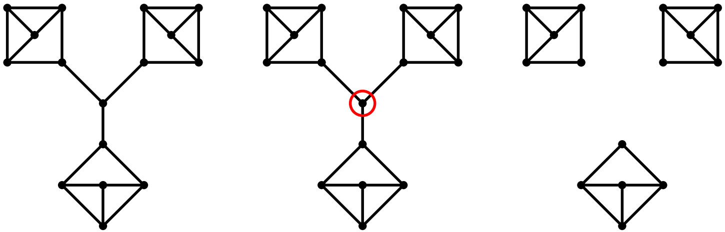
Пусть $G = (V, E)$ *– неорграф.* G *содержит 1-фактор* $\Leftrightarrow$

$$\forall X \subseteq V \text{ имеет место: } |X| \geqslant \mathrm{odd}(G \setminus X).$$

Следствие 1

Неорграф G *не содержит 1-фактора* $\Leftrightarrow$ *найдется* $X \subseteq V$ *такое, что* $|X| < \mathrm{odd}(G \setminus X)$.

Пример



Граф не содержит 1-фактора: после удаления выделенной вершины образуется 3 компоненты связности

$$1 = |X| < \mathrm{odd}(G \backslash X) = 3.$$

f-фактор

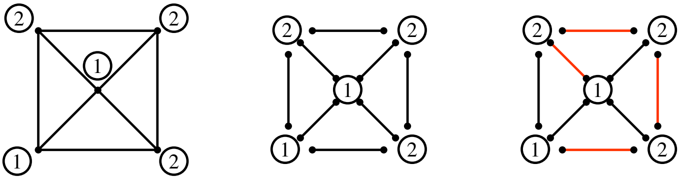
Отыскание f-фактора сводится к нахождению 1-фактора!

По графу $G = (V, E)$ и функции f построим граф H, соверш. паросочетание в котором соответствует f-фактору в G, но сначала заметим:

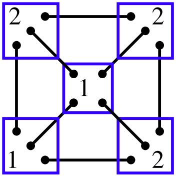
- если $f(v) > \deg_G(v)$ для какой-то $v \in V$, то f-фактора нет;
- если $f(v) = 0$ для какой-то $v \in V$, то $\exists$ f-фактор в $G \Leftrightarrow \exists$ f'-фактор в $G[V \setminus \{v\}]$, где $f'(u) = f(u)$ для всех $u \in V \setminus \{v\}$.
- если $f(v) = \deg_G(v)$ для какой-то $v \in V$, то $\exists$ f-фактор в G $\Leftrightarrow \exists$ f''-фактор в $G[V \setminus \{v\}]$, где $f''(u) = f(u) - \nu(u)$ ($\nu(u)$ – число ребер, соед. u и v в G) для всех $u \in V \setminus \{v\}$.

Таким образом, можно считать, что $f(v) \in \{1, \ldots, d(v) - 1\}$, где $d(v) = \deg_G(v)$, $v \in V$.

Идея: рассмотрим ребра графа.



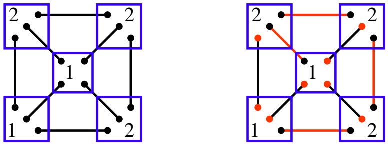
В каждой совокупности попарно смежных ребер нужно выбрать заданное количество.



Заменим вершины на подграфы, кот. помогут сделать выбор.

1-фактор в построенном графе должен подсказывать, какие ребра взять в f-фактор.

Вариант 1. Хотим, чтобы ребра f-фактора попали в 1-фактор.

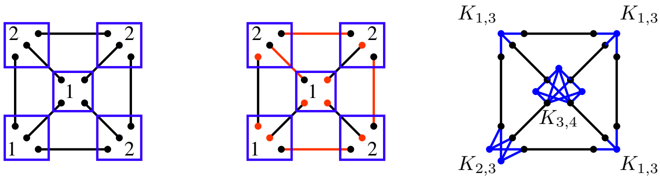


Вершину v заменили на подграф G_v. Заметим:

- у G_v должно быть по меньшей мере $d(v)$ общих вершин с остальным графом (назовем их "внешними");
- 1-фактор (если он есть), должен иметь $f(v)$ ребер в $E(G)$ и по крайней мере $(d(v) - f(v))$ ребер в $E(G_v)$.

1-фактор в построенном графе должен подсказывать, какие ребра взять в f-фактор.

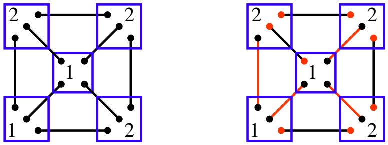
Что если положить $G_v = K_{d(v)-f(v),d(v)}$?



Если есть 1-фактор, он как раз должен покрыть $(d(v) - f(v))$ "внутренних" (и столько же "внешних") вершин ребрами из G_v; оставшиеся $f(v)$ "внешних" вершин должны быть покрыты ребрами исходного графа.

1-фактор в построенном графе должен подсказывать, какие ребра взять в f-фактор.

Вариант 2. Хотим, чтобы ребра f-факт. не попали в 1-фактор.

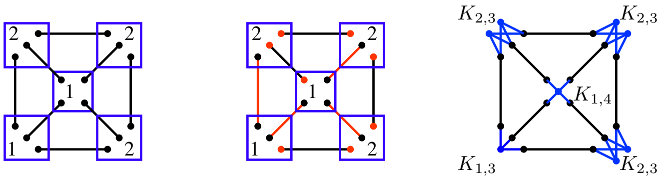


Вершину v заменили на подграф G_v. Заметим:

- у G_v должно быть по меньшей мере $d(v)$ общих вершин с остальным графом (назовем их "внешними");
- 1-фактор (если он есть), должен иметь $f(v)$ ребер в $E(G_v)$ и по крайней мере $(d(v) - f(v))$ ребер в $E(G)$.

1-фактор в построенном графе должен подсказывать, какие ребра взять в f-фактор.

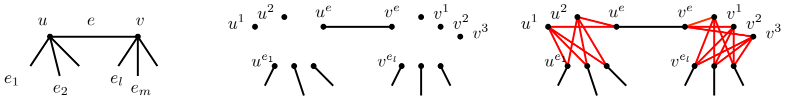
Что если положить $G_v = K_{f(v),d(v)}$?



Если есть 1-фактор, он как раз должен покрыть $f(v)$ "внутренних" (и столько же "внешних") вершин ребрами из G_v; оставшиеся $(d(v) - f(v))$ "внешних" вершин должны быть покрыты ребрами исходного графа.

По графу $G = (V, E)$ со степенями вершин $d(v)$ и величинам $f(v)$, $v \in V$, построим граф H_1 следующим образом:

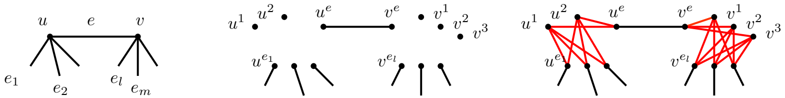
- $\forall v \in V$ граф H_1 содержит вершины $\{v^1, v^2, \ldots, v^{d(v)-f(v)}\}$;
- $\forall e = (u, v) \in E$ граф H_1 содержит вершины $\{u^e, v^e\}$;
- $\forall e = (u, v) \in E$ вершины $\{u^e, v^e\}$ смежны в H_1;
- $\forall v \in V$ и $\forall e \in E$ инц. v, вершины $\{v^1, v^2, \ldots, v^{d(v)-f(v)}\}$ смежны со всеми v^e, но не друг с другом.



Заметим: граф можно построить, если $0 \leqslant f(v) < d(v)$.

По графу $G = (V, E)$ со степенями вершин $d(v)$ и величинам $f(v)$, $v \in V$, построим граф H_2 следующим образом:

- $\forall v \in V$ граф H_2 содержит вершины $\{v^1, v^2, \ldots, v^{f(v)}\}$;
- $\forall e = (u, v) \in E$ граф H_2 содержит вершины $\{u^e, v^e\}$;
- $\forall e = (u, v) \in E$ вершины $\{u^e, v^e\}$ смежны в H_2;
- $\forall v \in V$ и $\forall e \in E$ инц. v, вершины $\{v^1, v^2, \ldots, v^{f(v)}\}$ смежны со всеми v^e, но не друг с другом.



Заметим: граф можно построить, если $0 < f(v) \leqslant d(v)$.

Теорема 1

Пусть $G = (V, E)$ *– неорграф со степенями вершин* $d(v)$, $v \in V$*;* $f : V \to \mathbb{N}$ *– функция, такая, что* $0 \leqslant f(v) < d(v)$, *и граф* H_1 *построен по* G *и* f *способом, описанным ранее. Тогда* G *содержит* f*-фактор* $\Leftrightarrow$ H_1 *содержит 1-фактор.*

Док.-во. Пусть H_1 содержит 1-фактор. Выберем $v \in V$. Копии $\{v^1, \ldots, v^{d(v)-f(v)}\}$ смежны только с $\{v^e : v$ инцидентна $e \in E\} \Rightarrow$ 1-ф. должен содержать $(d(v) - f(v))$ ребер между этими множествами. Эти ребра покрывают все v^i и $(d(v) - f(v))$ вершин типа $\{v^e\}$. Оставшиеся $f(v)$ вершин этого типа д.б. покрыты ребрами из E.

Пусть G содержит f-фактор F. Рассмотрим F' – аналоги ребер из F в H_1. Они не смежны в H_1 и $\forall v \in V$ покрывают $f(v)$ вершин типа $\{v^e\}$. Непокрыты $(d(v) - f(v))$ вершин типа $\{v^e\}$ и $\{v^1, \ldots, v^{d(v)-f(v)}\}$. Они образуют полный двудольный граф, в котором, как мы знаем, $\exists$ совершенное паросочетание (M_v). Объединяем все M_v и F' – получаем совершенное паросочетание в H_1. $\blacksquare$

Теорема 2

Пусть $G = (V, E)$ *– неорграф со степенями вершин* $d(v)$*,* $v \in V$*;* $f : V \to \mathbb{N}$ *– функция, такая, что* $0 < f(v) \leqslant d(v)$*, и граф* H_2 *построен по* G *и* f *способом, описанным ранее. Тогда* G *содержит* f*-фактор* $\Leftrightarrow$ H_2 *содержит 1-фактор.*

Док.-во. Аналогично предыдущей теореме. ■

Следствие 2

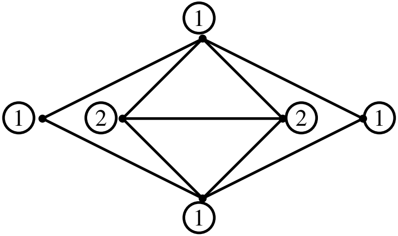
Задача поиска f*-фактора в графе полиномиально разрешима.*

Заметим: мы умеем считать 1-факторы в графе $\Rightarrow$ с помощью предложенного сведения можем найти число f-факторов!

Еще заметим: если умеем находить совершенное паросочетание $\min$ веса во взвешенном графе, то можем найти и f-фактор $\min$ веса!

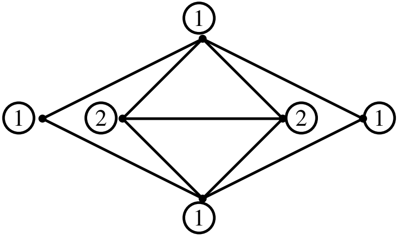
Пример

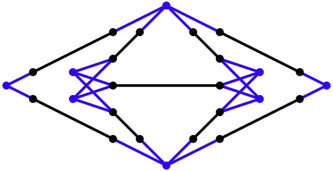
Найти в указанном графе f-фактор или доказать, что его не существует.



Пример

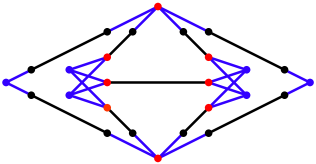
Строим H_2. Проверяем, есть ли 1-фактор.

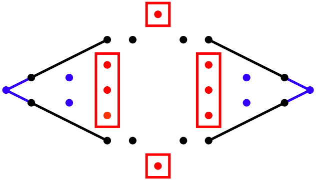




Пример

1-фактора нет! Нашли X: $|X| < \mathrm{odd}(H_2 \setminus X)$.





Требуемого f-фактора в G нет.

О реализации графа

Задача (Реализация графа)

Дан: *набор чисел* $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$.
Найти: *граф со степенями вершин, равными* d_i, *или доказать, что его не существует.*

Определение 3

Пусть $\bar{d} = \{d_1, \ldots, d_n\} \subset \mathbb{N}$ *– набор чисел и* $G = (V, E)$, $|V| = n$, *– неорграф (возможно с петлями и мультиребрами). Говорим, что* G реализует $\bar{d}$, *если* $\deg_G(v_i) = d_i$ *для всех* $i = \overline{1, n}$.

Можно налагать дополнительные условия:

- граф должен быть простым,
- ... связным,
- ... деревом,
- ...

Замечание 1 (Лемма о рукопожатиях)

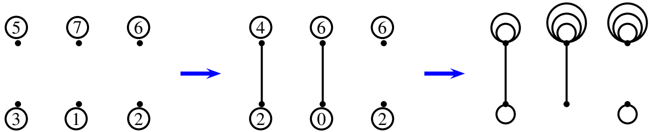
Если $\bar{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ *– набор степеней вершин некоторого графа* $G = (V, E)$*, то* $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2|E|$*, а значит, сумма степеней вершин графа четна и число вершин нечетной степени также четно. (Петли инцидентны вершине дважды.)*

Замечание 2

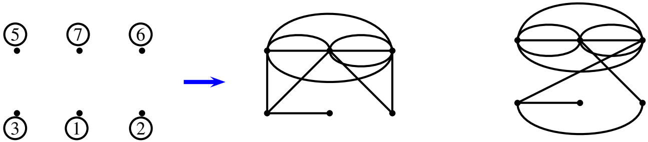
Пусть $\bar{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ *– набор целых чисел. Мультиграф, реализующий* $\bar{d}$*, существует* $\Leftrightarrow$ *сумма этих чисел – четное число.*

Док.-во. $\Rightarrow$ очевидно. Докажем $\Leftarrow$. Построим мультиграф G с верш. $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\deg_G(v_i) = d_i$. В $\bar{d}$ четное кол-во нечетных чисел – пусть это $\{d_1, \dots, d_{2l}\}$. Соединим соотв. вершины попарно: $v_1 - v_2$, $v_3 - v_4$, $\dots$, $v_{2l-1} - v_{2l}$. После этого осталось увеличить степень каждой вершины графа на четное число $\Rightarrow$ создаем нужное количество петель. ■

Например



Заметим, что тот же самый набор степеней можно реализовать мультиграфом без петель (причем, не единственным способом).



Вопрос: а можно ли реализовать этот набор простым графом (без петель и мультиребер)?

Теорема 3

Пусть $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \cdots \geqslant d_n \geqslant 0$ – *набор целых чисел с четной суммой. Мультиграф без петель, реализующий* $\bar{d}$, *существует* $\Leftrightarrow d_1 \leqslant d_2 + d_3 + \cdots + d_n$.

Док-во. $\Rightarrow$: пусть $G = (V, E)$ реализует $\bar{d}$. В графе без петель

$$d_1 \leqslant |E| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i \ \Rightarrow d_1 \leqslant \sum_{i=2}^{n} d_i.$$

$\Leftarrow$: рассмотрим набор $\bar{d}'$, полученный из $\bar{d}$ упорядочением по невозр. чисел $\{d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n\}$. Заметим: $\bar{d}'$ также удовлетворяет условиям теоремы.

Действительно, сумма чисел остается четной. Что с неравенством?

$d_1' = d_1 - 1 \Rightarrow d_1' = d_1 - 1 \leqslant (d_2 + \cdots + d_n) - 1 = d_2' + \cdots + d_n'$.

$d_1' = d_2 - 1 \Rightarrow d_1 = d_2$ и имеет место предыдущий случай.

$d_1' = d_3 > d_1 - 1$. Так как $d_3 \leqslant d_2 \leqslant d_1$, то такая ситуация возможна только если $d_3 = d_2 = d_1$. Предположим, неравенство нарушается:

$$d_3 > (d_1 - 1) + (d_2 - 1) + \sum_{i=4}^{n} d_i \Leftrightarrow d_1 < 2 - \sum_{i=4}^{n} d_i.$$

Такое возможно только если $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ и $d_i = 0$ при $i \geqslant 4$, что противоречит выбору $\bar{d}$ (сумма должна быть четной).

Это наводит нас на мысль об алгоритме.

Algorithm 1 (Реализация мультиграфа без петель)

Input: Набор $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, удовл. условиям теоремы.

Положить $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \varnothing$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$.

repeat

Соединить v_{i_1} и v_{i_2} ребром;

уменьшить d_{i_1} и d_{i_2} на единицу;

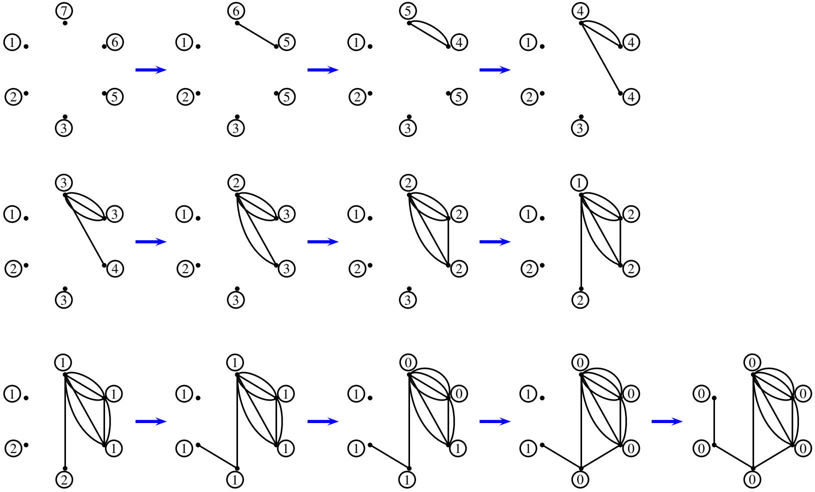
положить $i_1 = \arg\max\limits_{i} d_i$, $i_2 = \arg\max\limits_{i \neq i_1} d_i$.

until все $d_i = 0$.

Заметим: на каждой итерации

- d_{i_1} не превосх. суммы остальных d_i (только что доказали);
- $d_{i_1} \neq 0$ и $d_{i_2} \neq 0$, т.е., можно провести ребро (v_{i_1}, v_{i_2}). Действительно, если $d_{i_1} = 0$, то все $d_i = 0$ и мы закончили, а если $d_{i_1} > d_{i_2} = 0$, то все остальные числа также равны 0 и d_{i_1} строго больше их суммы;
- сумма d_i остается четной и уменьшается на 2 $\Rightarrow$ рано или поздно дойдем до всех $d_i = 0$.

Таким образом, алгоритм корректен, конечен и строит граф без петель. ■



Реализация простого графа

Определение 4

Последовательность $\bar{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *называется* графической, *если существует* простой *граф, реализующий ее.*

W.l.o.g. можно считать, что $d_1 \geqslant d_2 \cdots \geqslant d_n$.

Замечание 3

Реализация простого *графа с набором степеней* $\bar{d}$ *– частный случай задачи об* f*-факторе:* $G = K_n$ *и* $f(v_i) = d_i$*.*

Таким образом, реализовать граф можно за полиномиальное время, используя описанный ранее подход для f-фактора. Но можно поступить проще...

Теорема 4 (Havel 1955, Hakimi 1962)

Пусть $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, $d_1 \leqslant n-1$, *– набор неотр. целых чисел с четной суммой, а* $\bar{d}'$ *получен упорядочением по невозрастанию набора*

$$\{0, d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1}-1, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n\}.$$

Набор $\bar{d}$ *графический* $\Leftrightarrow$ $\bar{d}'$ *графический.*

Док-во. $\Leftarrow$. Пусть простой граф G' реализует $\bar{d}'$. G' содержит изолированную вершину v_n и вершины v_{k_i}: $\deg_{G'}(v_{k_i}) = d_i - 1$ $(i = \overline{2, d_1+1})$. Соединяем v_n со всеми v_{k_i}. Полученный граф G прост (мультиребер не возникает) и реализует $\bar{d}$.

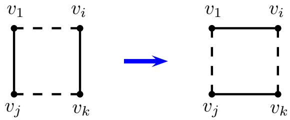
$\Rightarrow$. Пусть простой граф $G = (V, E)$ реализует $\bar{d}$: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $\deg_G(v_i) = d_i$.

Случай 1. v_1 смежна со всеми $\{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$. Тогда, убрав из G все соответствующие ребра, получим G', реализующий $\bar{d}'$.

Случай 2. v_1 не смежна с некоторой v_i, $i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\}$. Тогда v_1 д.б. смежна с некоторой v_j, $j \in \{d_1 + 2, \ldots, n\}$. Кроме того:

- так как $j > i$, то $d_j \leqslant d_i$;
- v_1 смежна с v_j, но не с v_i $\Rightarrow$ среди соседей v_i должна быть v_k, не смежная с v_j (иначе у v_j больше соседей, чем у v_i).

Заменим ребра (v_1, v_j) и (v_i, v_k) на (v_1, v_i) и (v_j, v_k).



Набор степеней вершин остался прежним, но v_1 теперь смежна с v_i. Продолжая в том же духе, приходим к случаю 1. ■

Теорема наводит на мысль об алгоритме.

Algorithm 2 (Реализация простого графа – Hakimi)

Input: Набор чисел $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ с четной суммой.

Положить $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \varnothing$.

while $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1} \neq 0$ (или просто: $d_{d_1+1} \neq 0$) **do**

Соединить v_1 ребром с каждой из $\{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$;

положить $d_1 = 0$ и уменьшить на 1 все d_i, $i = \overline{2, d_1 + 1}$;

упорядочить $\bar{d}$ по невозрастанию и перенумеровать верш.

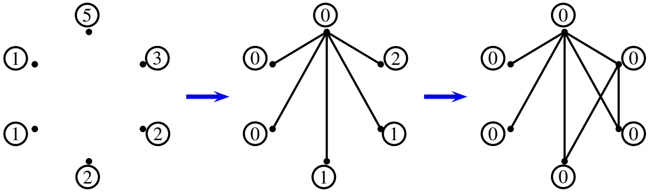
if $d_1 = 0$ (т.е., все $d_i = 0$) **then** построена реализация $\bar{d}$

else последовательность не графическая.

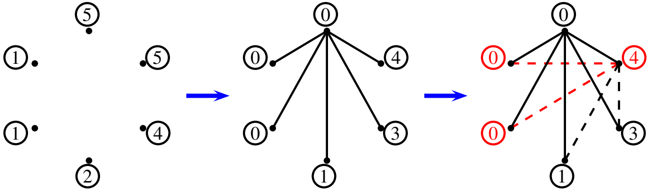
Несложно убедиться, что алгоритм корректен: в процессе не возникает мультиребер и сохраняется “графичность”. Если исходный набор графический, то удастся достроить граф. Если нет – в какой-то момент не получится провести ребра.

Пример

Графическая последовательность

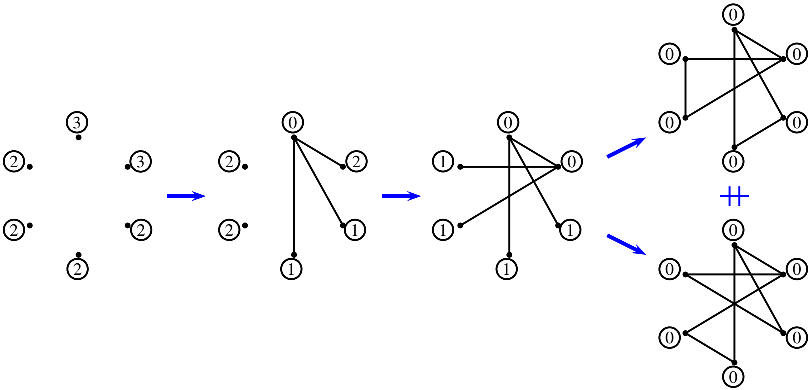


Неграфическая последовательность



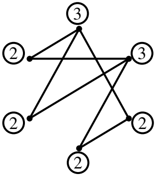
Замечания

1. В ходе работы алгоритма можно получить несколько реализаций (возможно, даже не изоморфных друг другу)



Замечания

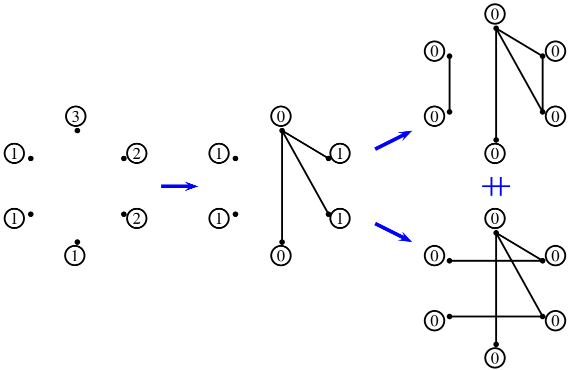
2. Некоторые реализации не могут быть получены



(Алгоритм обязательно соединит вершины степени 3)

Замечания

3. Алгоритм может построить несвязную реализацию (хотя есть связная)



Замечания

4. Теорему (и алгоритм) можно модифицировать

Теорема 5 (Kleitman, Wang – 1973)

Пусть $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ *– набор неотр. целых чисел с четной суммой,* $1 \leqslant d_k \leqslant n-1$ *для некот.* k, *и* $\bar{d}'$ *получен из* $\bar{d}$

- *вычитанием единицы из первых* d_k *членов посл.* $\bar{d} \backslash \{d_k\}$,
- *заменой* $d_k = 0$,
- *и последующим упорядочением всех чисел по невозр.*

Набор $\bar{d}$ *графический* $\Leftrightarrow$ $\bar{d}'$ *графический.*

Док.-во. По аналогии с теоремой Гавела-Хакими. ∎

Замечания

Algorithm 3 (Реализация простого графа – Kleitman, Wang)

Input: Набор чисел $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ с четной суммой.

Положить $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \varnothing$.

Выбрать $k : d_k > 0$.

while первые d_k элементов $\bar{d} \backslash \{d_k\}$ не равны нулю **do**

  Соединить v_k ребрами с первыми d_k вершинами $V \backslash \{v_k\}$;

  положить $d_k = 0$ и уменьшить на 1 первые d_k эл. $\bar{d} \backslash \{d_k\}$;

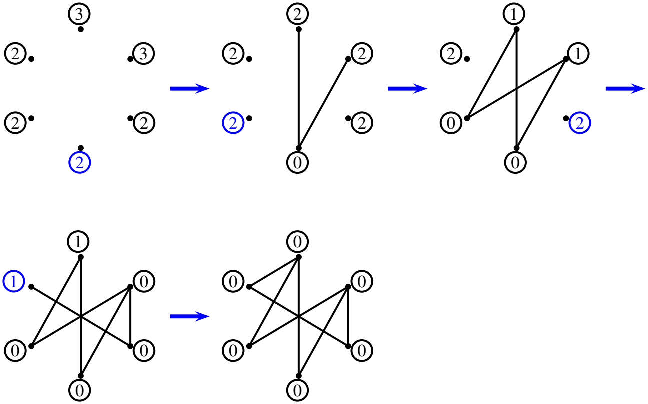
  упорядочить $\bar{d}$ по невозрастанию и перенумеровать верш.

  Снова выбрать $k : d_k > 0$.

if $d_1 = 0$ (т.е., все $d_i = 0$) **then** построена реализация $\bar{d}$

else последовательность не графическая.

Пример



Замечания

5. Модифицированный алгоритм позволяет гарантировано строить связные реализации (если они есть)!

Теорема 6

Пусть $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ – графический *набор целых чисел с четной суммой.* $\bar{d}$ *реализуем простым связным графом* $\Leftrightarrow$ $d_i \geqslant 1$ *для всех* i *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i \geqslant 2(n-1)$.

Док-во. $\Rightarrow$. Очевидно. Если граф связен, степени вершин не меньше 1, а число ребер не меньше $(n-1)$.

$\Leftarrow$. Применим алгоритм Клейтмана-Вонга. На каждом шаге выбираем вершину с наименьшим ненулевым значением d_k. Покажем, что обязательно построим связный граф.

Индукция по n. При $n = 2$ единственная графическая посл-сть, удовлетворяющая условиям, это $(1, 1)$. Алгоритм построит связный граф.

Пусть $n \geqslant 3$. Предположим, что алгоритм строит связные графы для всех удовлетворяющих условиям графических наборов меньшей размерности.

Заметим: если набор $\bar{d}$ длины n удовлетворяет условиям теоремы, то набор из $(n-1)$ числа

$$\bar{d}' = \{d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, \dots, d_{n-1}, \cancel{0}\}$$

также им удовлетворяет.

Действительно:

1. после преобразования набор остался графическим (Kl.-W.),
2. если появились $d_k = 0 \Rightarrow$ до преобразования $d_k = 1 \Rightarrow d_n = 1$ (не может быть больше, чем $d_k = 1$) $\Rightarrow k = 1$ (вычитаем только из первого), $d_1 = 1$ и, следовательно, все $d_i = 1$. Нарушается условие на сумму степеней (при $n \geqslant 3$).
3. в наборе $(n-1)$ число, сумма уменьшилась на $2d_n = 2\min\limits_i d_i \leqslant 2\left(\sum\limits_{i=1}^n d_i\right)/n \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i' = \sum_{i=1}^{n} d_i - 2d_n \geqslant \sum_{i=1}^{n} d_i \left(1 - \frac{2}{n}\right) \geqslant 2(n-2) - \frac{2(n-2)}{n}.$$

Если $\sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i' < 2(n-2)$, то, с учетом четности суммы, должно быть: $2(n-3) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i' \geqslant 2(n-2) - \frac{2(n-2)}{n}$, что невозможно.

Таким образом, при $n \geqslant 3$ построенный алгоритмом граф G представляет собой: граф G' на $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, реализующий послед-сть $\bar{d}'$, и вершину v_n, смежную с $\{v_1, \ldots, v_{d_n}\}$.

По индукции G' связен $\Rightarrow$ G также связен. ■

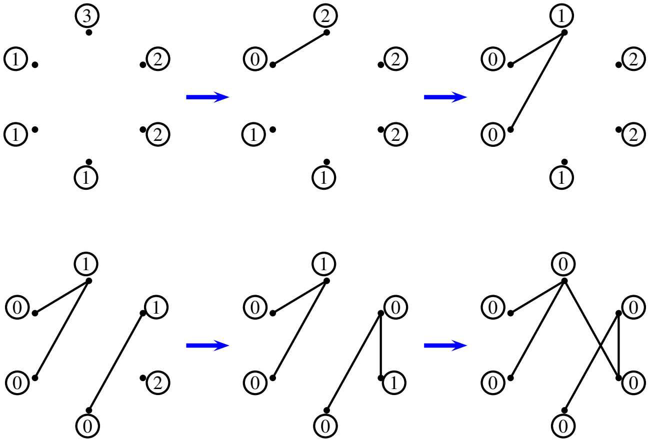
Замечание 4

Если $\bar{d}$ – графический набор, то его можно реализовать деревом $\Leftrightarrow$ $d_i \geqslant 1$ *для всех* i *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

Замечание 5

Если $\bar{d}$ – графический набор, то его можно реализовать реберно k*-связным графом* $\Leftrightarrow$ $d_i \geqslant k$ $\forall i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i \geqslant 2(n-1)$.

Пример



Альтернативный ответ на вопрос о графичности числовой последовательности.

Теорема 7 (Erdös, Gallai – 1960)

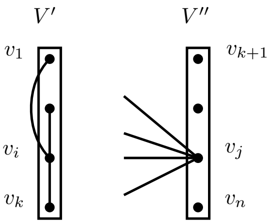
Набор $\bar{d} : d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ $(d_i \in \mathbb{N})$ *является графическим* $\Leftrightarrow$

1. *сумма всех* d_i *– четное число;*
2. *для всех* $k = \overline{1, n}$ *верно:* $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum\limits_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$.

Док-во. $\Rightarrow$. С первым условием все ясно. Рассм. нер-ва.

Существует $G = (V, E)$: $\deg_G(v_i) = d_i$ для всех $v_i \in V$. Выберем $k \leqslant n$ и положим $V' = \{v_1, \ldots, v_k\}$, $V'' = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.
Для $v_i \in V'$ обозначим:

- $\deg'(v_i)$ – число ребер $(v_i, v_j) \in E$ таких, что $v_j \in V'$;
- $\deg''(v_i)$ – число ребер $(v_i, v_j) \in E$ таких, что $v_j \in V''$.



1. Каждая $v_i \in V'$ смежна с не более чем $k-1$ верш. из V'.

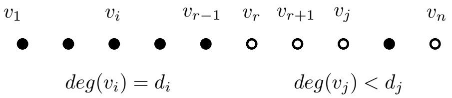
2. Каждая $v_j \in V''$ смежна с не более чем k и не более чем с d_j верш. из V'. То есть, не более чем с $\min\{k, d_j\}$ вершинами.

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = \sum_{i=1}^{k} \deg'(v_i) + \sum_{i=1}^{k} \deg''(v_i) \leqslant k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, d_j\}.$$

$\Leftarrow$. Строим граф $G = (V, E)$. $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Сначала $E = \varnothing$, затем на каждом шаге увеличиваем степень некоторых вершин, пока не получим $\deg_G(v_i) = d_i$ для всех i.

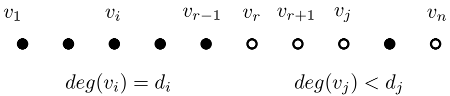
Рассмотрим некоторый шаг. Пусть r – первый индекс, для которого $\deg_G(v_i) < d_i$ (для $i = \overline{1, r-1}$ степени равны d_i). При этом может оказаться, что $\deg_G(v_j) = d_j$ для каких-то $j \in \overline{r+1, n}$.



Вершину v_j будем называть

- насыщенной, если $\deg_G(v_j) = d_j$ (на рисунке они черные);
- ненасыщенной, если $\deg_G(v_j) < d_j$ (на рисунке они белые).

Полагаем, что $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ не смежны друг с другом: в начале это так, а затем следим за тем, чтобы ребер м/у ними не возникало.



Следовательно, при $j > r$ вершина v_j может быть смежна только с кем-то из $\{v_1, \ldots, v_r\} \Rightarrow \deg_G(v_j) \leqslant r$. Кроме того, $\deg_G(v_j) \leqslant d_j$.

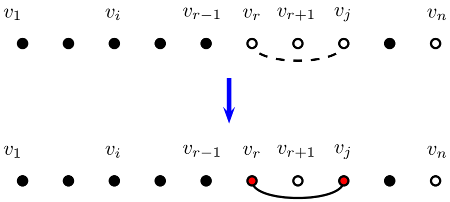
Значит, $\deg_G(v_j) \leqslant \min\{r, d_j\}$ для $j > r$.

Также следим за тем, чтобы степени $\{v_1, \ldots, v_{r-1}\}$ не менялись.

Итак, v_r – первая ненасыщенная вершина. Попытаемся увеличить ее степень. Последовательно рассматриваем случаи.

1. v_r не смежна с какой-то ненасыщенной вершиной v_j $(j > r)$

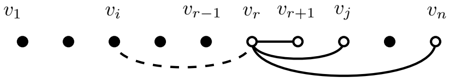
Соединяем v_r и v_j ребром.



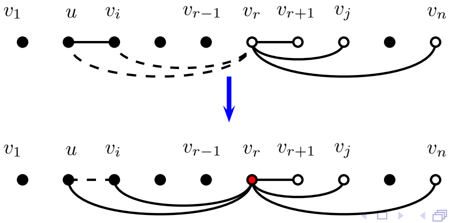
Делаем так, пока можем. В итоге либо $\deg(v_r)$ станет $= d_r$, либо v_r станет смежна со всеми ненасыщенными вершинами с бОльшими номерами.

В первом случае переходим к следующей ненасыщенной вершине, во втором – продолжаем работать с v_r и рассматриваем следующие случаи.

2. v_r смежна со всеми ненасыщенными. Она может быть смежна с некоторыми насыщенными с меньшими номерами, но не со всеми: найдется v_i, $i < r$, такая, что $(v_i, v_r) \notin E$.

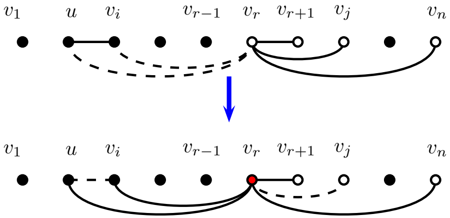


$\deg_G(v_i) = d_i \geqslant d_r > \deg_G(v_r) \Rightarrow$ у v_i должен быть сосед u, с которым v_r не смежна (не важно, $u \in \{v_1, \ldots, v_{r-1}\}$ или нет).
Если $d_r - \deg_G(v_r) \geqslant 2$, то убираем (u, v_i), добавл. (u, v_r) и (v_i, v_r).
Степени u и v_i не меняются, а степень v_r увеличивается на 2.



Если $d_r - \deg_G(v_r) = 1$, то с учетом четности суммы d_i и суммы $\deg_G(v_i)$ должна найтись v_j: $\deg_G(v_j) < d_j$.

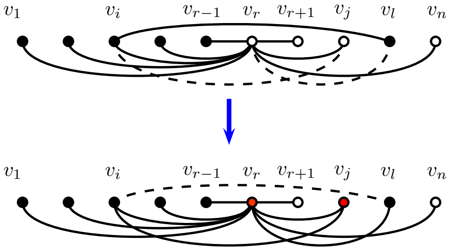
Считаем, что $(v_r, v_j) \in E$ (иначе случай 1). Убираем (u, v_i) и (v_r, v_j), добавляем (u, v_r) и (v_i, v_r). Степени u и v_i не меняются, степень v_r увеличилась на 1, степень v_j уменьшилась (но это не страшно).



3. v_r смежна со всеми ненасыщенными и со всеми насыщенными с меньшими номерами. Также есть v_j $(j > r)$ степени $\neq \min\{r, d_j\}$ (с учетом отмеченного ранее, $\deg_G(v_j) < \min\{r, d_j\}$).

Так как $\deg_G(v_j) < \min\{r, d_j\} \leqslant d_j$, то $\deg_G(v_j) < d_j$ и $(v_r, v_j) \in E$. Отсюда $\deg_G(v_r) \geqslant r$, $\deg_G(v_j) < r$ и, след.-но, у v_r есть сосед v_i $(i < r)$, не смежный с v_j (иначе v_j смежна с $v_1, \ldots, v_{r-1}$ и v_r).

В свою очередь, так как $\deg_G(v_i) = d_i \geqslant d_r > \deg_G(v_r)$, у v_i д.б. сосед v_l, которого нет у v_r. Это некоторая вершина v_l степени d_l с $l > r$. Заменим (v_i, v_l) на (v_i, v_j) и (v_r, v_l).

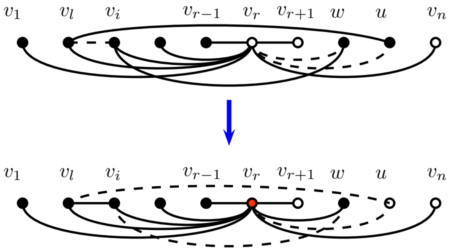


4. v_r смежна со всеми ненасыщенными и со всеми насыщенными с меньшими номерами. Также есть $i, l < r$: $(v_i, v_l) \notin E$.

$\deg_G(v_i) = d_i \geqslant d_r > \deg_G(v_r)$ и $\deg_G(v_l) = d_l \geqslant d_r > \deg_G(v_r) \Rightarrow$ у v_i и v_l должны быть соседи w и u (м.б. $w = u$), не смежные с v_r.

Это могут быть только насыщенные вершины с номерами $> r$.

Убираем (v_i, w) и (v_l, u), вводим (v_i, v_j) и (v_r, w).
Если $d_r - \deg_G(v_r) \geqslant 2$ и $u \neq w$, то можем еще провести (v_r, u).



5. Ни один из предыдущих случаев.

Тогда:

- для $i < r$: все v_i смежны между собой и $\deg_G(v_i) = d_i$;
- $i = r$: v_r смежна с $\{v_1, \ldots, v_{r-1}\}$ (т.е., первые r вершин – клика);
- для $i > r$: v_i не смежны и $\deg_G(v_i) = \min\{r, d_i\}$.

Для $i \leqslant r$ обозначим $\deg_G(v_i) = \deg^+(v_i) + \deg^-(v_i)$, где:

- $\deg^+(v_i)$ – число ребер (v_i, v_l), $l \leqslant r$,
- $\deg^-(v_i)$ – число ребер (v_i, v_l), $l > r$.

Получаем:

$$\sum_{i=1}^{r-1} d_i + \deg_G(v_r) = \sum_{i=1}^{r} \deg_G(v_i) = \sum_{i=1}^{r} \deg^+(v_i) + \sum_{i=1}^{r} \deg^-(v_i)$$

$$= r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \deg_G(v_i) = r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min\{r, d_i\}.$$

С другой стороны, по условию

$$\sum_{i=1}^{r} d_i = \sum_{i=1}^{r-1} d_i + d_r \leqslant r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min\{r, d_i\}.$$

Таким образом, если

$$\sum_{i=1}^{r-1} d_i + \deg_G(v_r) = r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min\{r, d_i\},$$

то $\deg_G(v_r) \geqslant d_r$, то противоречит выбору v_r.

То есть, либо выполняется один из случаев 1-4 (и мы можем увеличить степень v_r), либо $\deg_G(v_r) = d_r$ и нужно переходить к следующей вершине. Рано или поздно степени всех вершин станут равны d_i. ■

Замечания

1. Теорема известна с 1960 года, но описанное доказательство было предложено в 2010.

A. Tripathi, S. Venugopalan, D. B. West. A short constructive proof of the Erdös-Gallai characterization of graphic lists // Discrete Math. 310(4) (2010), 833–834.

2. Доказательство примечательно тем, что оно конструктивное.

Замечание 6

Существует алгоритм трудоемкости $O(n\sum d_i)$, *строящий граф со степенями* $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ *или устанавливающий, что такого графа не существует.*

Замечания

3. Теорема примечательна тем, позволяет решить вопрос о $\exists$ графа, не строя сам граф (а только проверяя неравенства).

Например, $n = 6$, $\bar{d} = (5, 3, 2, 2, 1, 1)$.

k	$\sum\limits_{i \leqslant k} d_i$	?	$k(k-1) + \sum\limits_{i>k} \min\{k, d_i\}$
1	5	$\leqslant$	$5 = 1 \cdot 0 + (1+1+1+1+1)$
2	$5+3=8$	$\leqslant$	$8 = 2 \cdot 1 + (2+2+1+1)$
3	$5+3+2=10$	$\leqslant$	$10 = 3 \cdot 2 + (2+1+1)$
4	$5+3+2+2=12$	$\leqslant$	$14 = 4 \cdot 3 + (1+1)$
5	$5+3+2+2+1=13$	$\leqslant$	$21 = 5 \cdot 4 + 1$
6	$5+3+2+2+1+1=14$	$\leqslant$	$30 = 6 \cdot 5 + 0$

Все неравенства выполняются $\Rightarrow$ графический набор.

Замечания

3. Теорема примечательна тем, позволяет решить вопрос о $\exists$ графа, не строя сам граф (а только проверяя неравенства).

Или: $n = 6$, $\bar{d} = (5, 5, 5, 3, 2, 2)$.

k	$\sum\limits_{i \leqslant k} d_i$	?	$k(k-1) + \sum\limits_{i > k} \min\{k, d_i\}$
1	5	$\leqslant$	$5 = 1 \cdot 0 + (1+1+1+1+1)$
2	$5+5 = 10$	$\leqslant$	$10 = 2 \cdot 1 + (2+2+2+2)$
3	$5+5+5 = 15$	$>$	$13 = 3 \cdot 2 + (3+2+2)$

Одно из неравенств нарушено $\Rightarrow$ набор не графический.

Упражнения

1. При каких x, y существует простой связный граф, реализующий последовательность
$$x \geqslant 4 \geqslant 4 \geqslant y \geqslant 2 \geqslant 1 \geqslant 1?$$
2. Алкан – это молекула, содержащая атомы углерода (C) и водорода (H), такая, что:
    1. каждый атом C связан с 4 другими атомами;
    2. каждый атом H связан с единственным другим атомом;
    3. молекула связна и не содержит циклов.

   Доказать, что:
    1. существуют алканы с любым числом атомов углерода;
    2. алканы и только они имеют формулу C_nH_{2n+2}.

Библиография

Книги:

- L. Lovász, M.D. Plummer – Matching Theory. Budapest, Akadémiai Kiadó (1986).
- J.A. Bondy, U.S.R. Murty – Graph Theory. (Graduate Texts in Mathematics, 244). Springer, New York (2008).
- Jean-Claude Fournier, Graph Theory and Applications: With Exercises and Problems. Wiley (2010)

Библиография

Онлайн-материалы:

- J. Akiyama, M. Kano. Factors and Factorizations of Graphs (online)
- Graph Theory (TDK) http://compalg.inf.elte.hu/t̃ony/Oktatas/TDK/FINAL/
- S.A. Choudum – Graph Theory. A NPTEL Course (online)

Библиография

Статьи:

- S.L. Hakimi. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph // J. of the Soc. for Ind. and Appl. Math., 10: 496–506 (1962)
- D.J. Kleitman, D.L. Wang. Algorithms for constructing graphs and digraphs with given valences and factors// Discrete Mathematics, 6: 79–88 (1973)
- A. Tripathi, S. Venugopalan, D. B. West. A short constructive proof of the Erdös-Gallai characterization of graphic lists // Discrete Math. 310(4) , 833–834 (2010)