

Планарность

# Планарность

**Определение 1.** Граф называется **планарным** или **укладываемым на плоскости**,

если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ее ребра пересекались только в вершинах.

Такое изображение называется **планарной укладкой** графа.

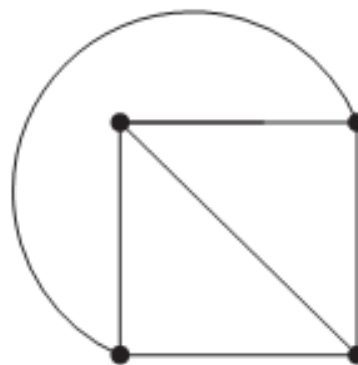
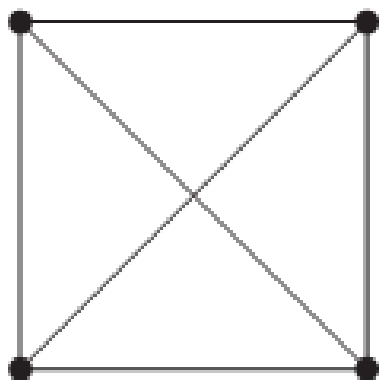
Граф может быть планарным, даже если он нарисован с пересечениями ребер, если его можно нарисовать по-другому, без пересечений.

# Планарность

**ПРИМЕР 1** Является ли граф  $K_4$  (показан ниже с двумя пересекающимися ребрами) планарным?

**Решение:**  $K_4$  является планарным, поскольку существует его изображение (укладка) без пересечений ребер, как показано ниже.

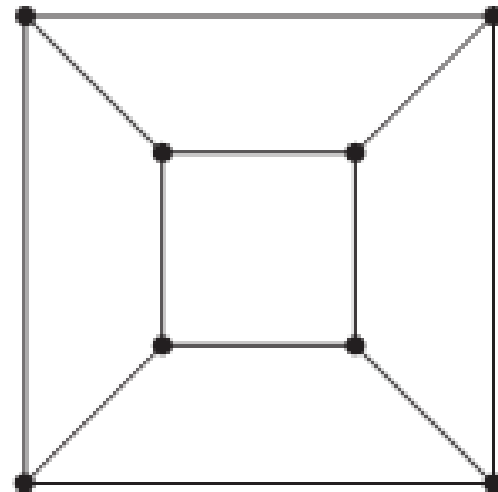
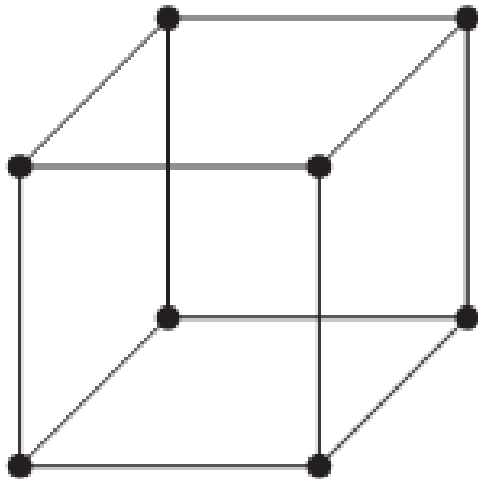
**Плоский граф** — это граф, нарисованный без пересечений ребер.



# Планарность

**ПРИМЕР 2** Является ли граф  $Q_3$  планарным?

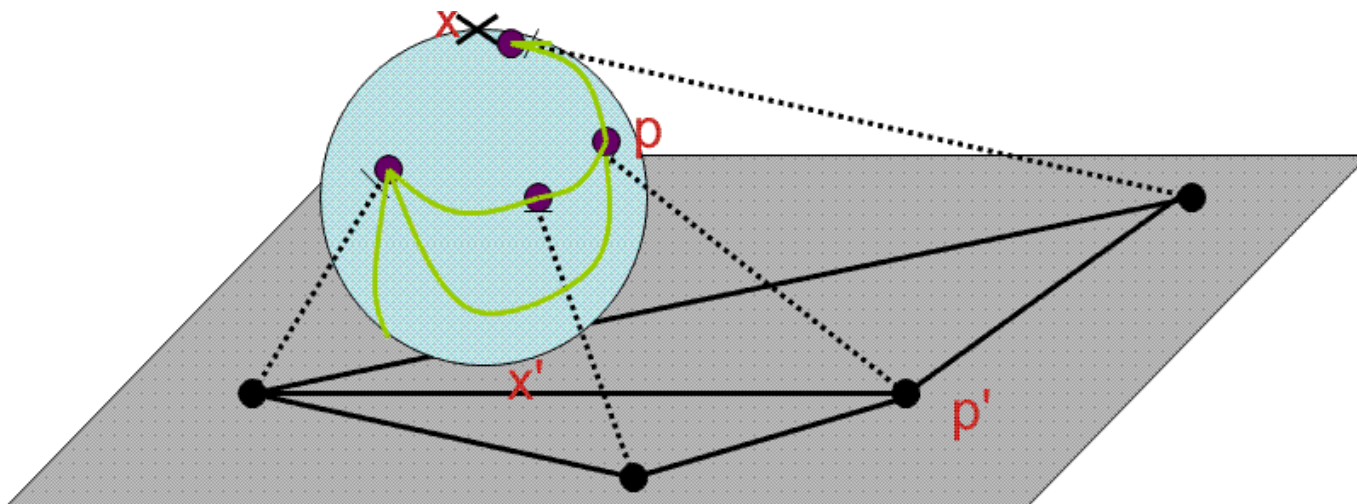
**Решение:**  $Q_3$  является планарным, поскольку существует плоское изображение (укладка), как показано на рисунке.



# Планарность

Можно рассмотреть укладки графов на поверхностях, отличных от плоскости.

**Теорема 1** Граф можно уложить на сфере  $\Leftrightarrow$  он имеет укладку на плоскости.



# Планарность

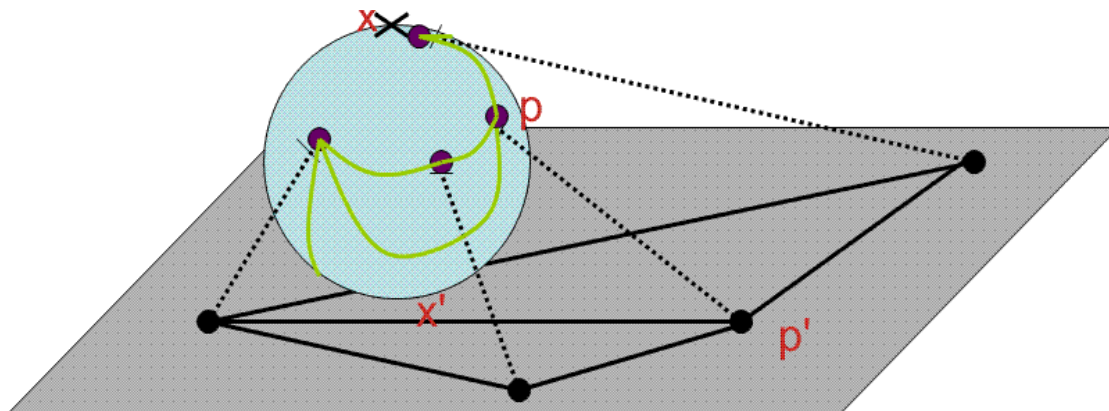
**Доказательство.** Мы показываем это, используя отображение, известное как **стереографическая проекция**.

Рассмотрим сферическую поверхность  $S$ , касающуюся плоскости  $P$  в точке  $x'$  (называемой **южным полюсом**).

Точка  $x$  (называемая точкой проекции или **северным полюсом**) находится на  $S$  и диаметрально противоположна  $x'$ .

Любую точку  $p'$  на плоскости  $P$  можно однозначно спроецировать на  $S$  в точку  $p$ , сделав  $x$ ,  $p'$  и  $p$  коллинеарными.

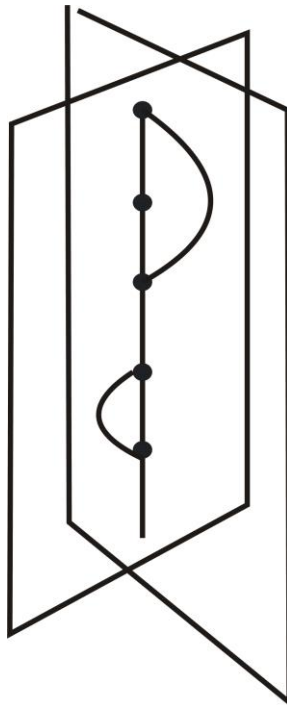
Таким образом, любой граф, уложенный на  $P$ , можно спроецировать на  $S$ . И наоборот, мы можем спроецировать любой граф, уложенный в  $S$ , на  $P$ .



# Планарность

Теорема 2 Каждый граф укладывается в пространстве  $R^3$

**Доказательство.** Смотрите рисунок ниже.



# Приложения планарных графов

Планарность графов играет важную роль при проектировании **электронных схем** .

Мы можем смоделировать схему с помощью графа, представив компоненты схемы вершинами, а соединения между ними — ребрами.

Мы можем напечатать схему на одной плате **без пересекающихся соединений**, если граф, представляющий схему, является **планарным** .

Если этот граф **не планарный**, то придется прибегнуть к более дорогим вариантам.

А ) мы можем разбить вершины в графе, представляющем схему, на **планарные подграфы**. Затем построим схему, используя несколько слоев.

В ) Мы можем построить схему, используя **изолированные провода, в месте пересечения соединений**. В этом случае важно нарисовать граф с **наименьшим количеством возможных пересечений**.



# Приложения планарных графов

Планарность графов также полезна при проектировании **дорожных сетей** .

Предположим, мы хотим соединить группу городов дорогами.

Мы можем смоделировать дорожную сеть, соединяющую эти города, используя простой граф с вершинами, представляющими города, и ребрами, представляющими соединяющие их автомагистрали.

Мы можем построить эту дорожную сеть без использования подземных и надземных переходов, если полученный граф будет планарным

# Грани (геометрическое определение)

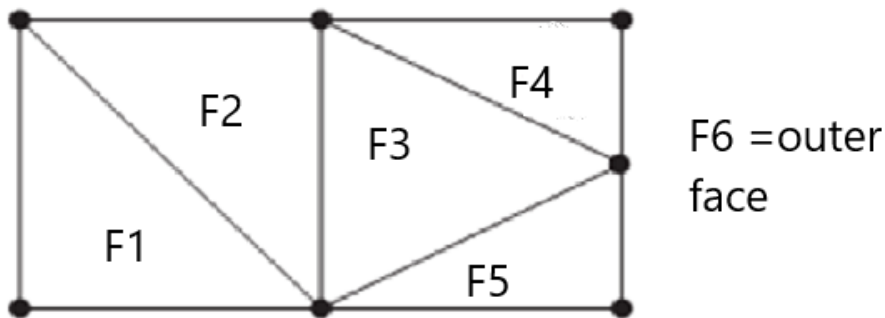
Изображение планарного графа разбивает плоскость на связанные области, называемые **гранями**. Каждая грань ограничена замкнутым путем, называемым **границей** грани. По соглашению мы также считаем неограниченную область за пределами всего графа одной гранью.

Неограниченную грань обычно называют **внешней гранью**.

Остальные грани называются **внутренними гранями**.

Определим **степень грани**  $\deg(f)$  как количество ребер, ограничивающих грань  $f$ .

Приведенный ниже граф имеет 5 внутренних граней  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  степени 3 и внешнюю грань  $F_6$  степени 7.

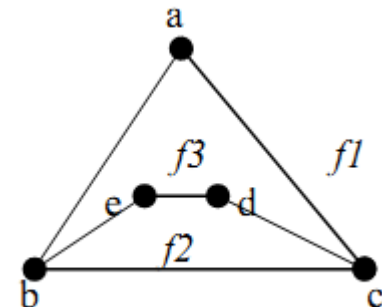
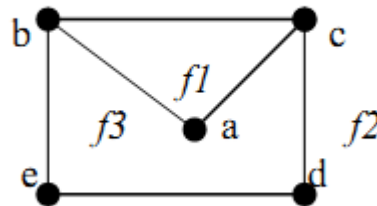
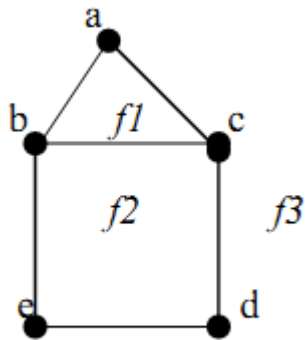


# Грани планарного графа

**Теорема 3.** Плоскую укладку  $G'$  графа  $G$  можно преобразовать в другую укладку таким образом, что любая заданная **грань**  $F$  станет **внешней гранью**.

**Доказательство N1 (геометрическое).** Отобразим изображение графа на сферу, а затем отобразим сферу обратно на плоскость таким образом, чтобы **точка внутри**  $F$  стала **бесконечностью**.

При этом отображении  $F$  станет внешней гранью.

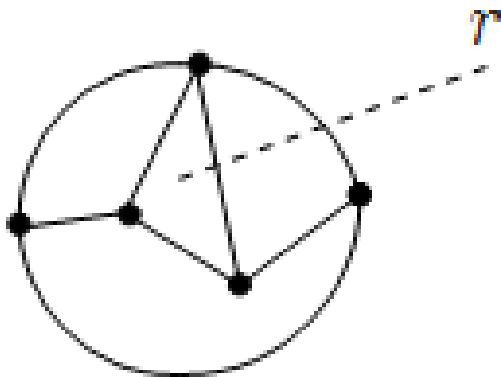


# Грани планарного графа

## Доказательство N2 (комбинаторное)

Пусть  $p$  — любая точка внутри грани  $F$ , а  $r$  — луч, исходящий из  $p$  и не пересекающий ни одной вершины.

(Поскольку вершин конечное количество, такой луч существует.)

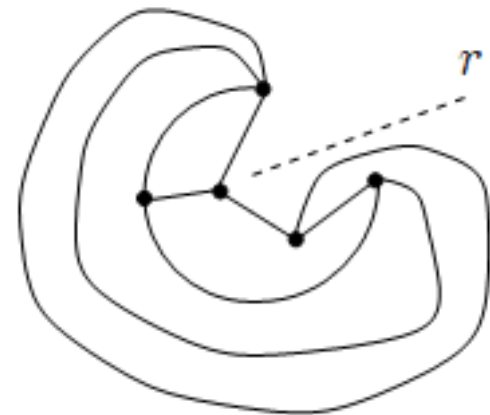
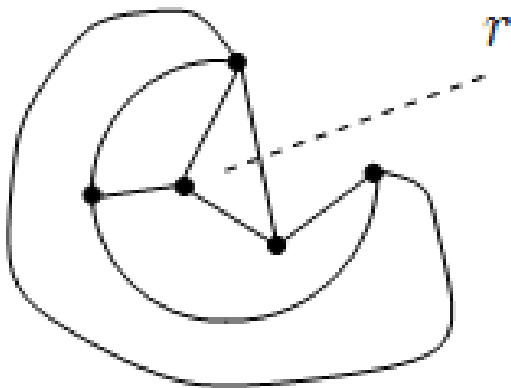


Теперь продолжим доказательство индукцией по количеству ребер, которые пересекает луч. Если луч не пересекает ни одного ребра, значит мы уже имеем неограниченную, то есть внешнюю грань.

Если же луч пересекает какие-то ребра, то он должен также пересекать какое-то ребро  $e = \{u, w\}$  на внешней грани текущего изображения.

# Грани планарного графа

Изменим изображение ребра  $\{u, w\}$  так, чтобы оно не пересекало луч  $r$ .  
Таким образом, мы получаем плоскую укладку, в которой луч  $r$  пересекает **меньшее количество** ребер, и продолжим этот процесс по индукции.



# Формула Эйлера

**Теорема 4** (формула Эйлера) Пусть  $G$  — связный, не обязательно простой, планарный граф.

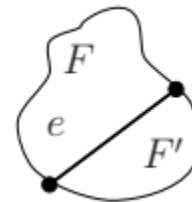
Тогда  $n - m + f = 2$ , где  $f$  — количество граней.

**Доказательство:** Начнем с **остовного дерева** графа  $G$ .

Дерево с  $n$  вершинами имеет ровно  $n - 1$  ребро, поэтому  $n - m + f = n - (n - 1) + 1 = 2$ .

Теперь будем добавлять ребра графа  $G$  одно за другим.

Каждое добавленное ребро  $e$  разбивает одну из граней графа на 2 грани.



# Формула Эйлера

Следовательно, в данном случае,

$$f = f + 1,$$

$$m = m + 1, \text{ и}$$

$$n = n.$$

Таким образом, правая и левая часть формулы, связывающей количество граней, ребер и вершин, увеличивается ровно на единицу, так что эта формула по-прежнему верна.

Другими словами,  $n - m + f = 2$

# Формула Эйлера

**Лемма 5** Пусть  $G$  — планарный граф.

Тогда **любое плоское изображение**  $G$  имеет одно и то же количество граней.

**Доказательство :**  $n - m + f = 2 \Rightarrow$

Число граней  $f = m - n + 2$  по формуле Эйлера.

Так как  $m$  и  $n$  не зависят от изображения графа, результат верен.



# Формула Эйлера

**ПРИМЕР 3** Предположим, что связный планарный простой граф имеет 20 вершин, каждая из которых имеет степень 3.

Сколько граней имеет изображение этого планарного графа на плоскости?

**Решение :** Этот граф имеет 20 вершин, каждая степени 3.

Поскольку сумма степеней вершин,

$$3n = 3 \cdot 20 = 60,$$

равна удвоенному числу ребер, имеем

$$2m = 60, \text{ или } m = 30.$$

Следовательно, по формуле Эйлера число граней равно

$$f = m - n + 2 = 30 - 20 + 2 = 12.$$

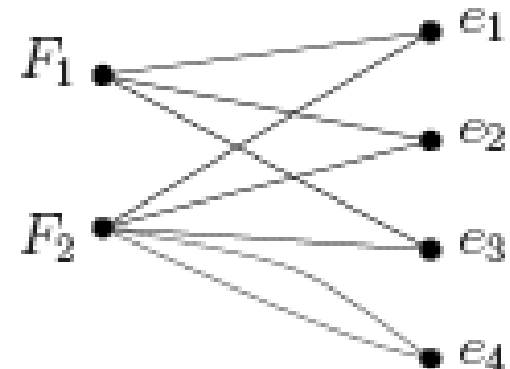
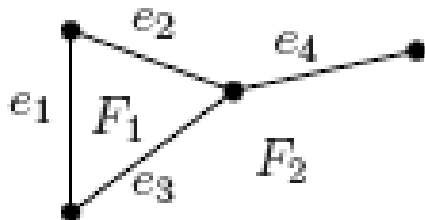
# Свойства планарных графов

**Лемма 6.** Каждый простой связный планарный граф, имеющий с  $n \geq 3$  вершин имеет  $m \leq 3n - 6$  ребер.

**Доказательство :** Мы докажем это утверждение, дважды подсчитав инцидентности ребер и граней в некоторой планарной укладке графа. Составим список граней графа в одном столбце и список ребер в другом столбце.

Затем мы проведем линию от ребра к грани, если они инцидентны.

Мы рисуем 2 линии между одной парой ребро-грань, если ребро инцидентно этой грани дважды.



# Свойства планарных графов

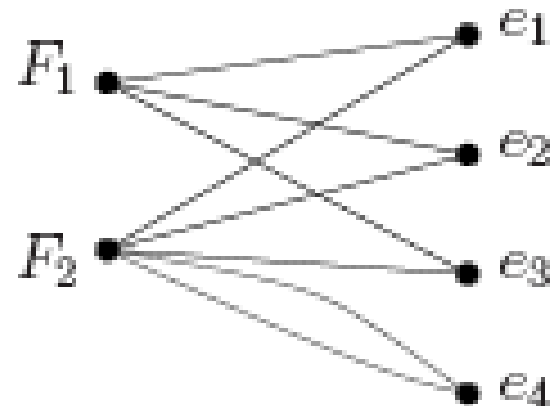
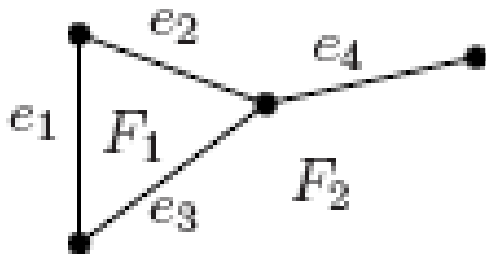
Теперь посчитаем количество линий  $L$  дважды.

Мы знаем, что каждое ребро инцидентно двум граням (не обязательно разным), и поэтому от каждой вершины, изображающей ребро, исходят две линии.

Следовательно,  $L = 2m$ .

Мы можем доказать, что каждая грань инцидентна  $\geq 3$  ребрам.

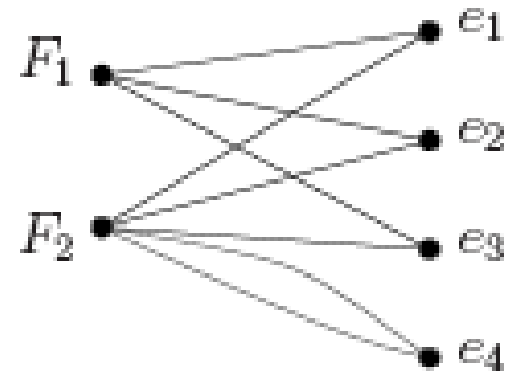
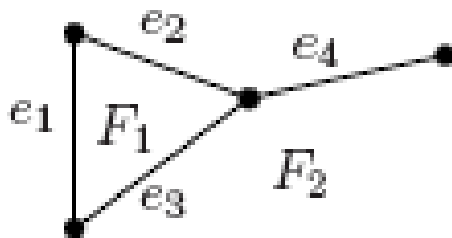
Если бы грань была инцидентна только одному ребру, то она была бы заключена в этом ребре, т.е. ребро было бы **петлей**, что противоречит простоте графа.



# Свойства планарных графов

Если бы грань была инцидентна только одному ребру дважды, то это ребро само по себе было бы компонентой связности, что противоречит тому, что граф имеет не менее 3 вершин и является связным.

Если бы грань была инцидентна ровно 2 разным ребрам, то эти ребра образовали бы цикл, т.е. они были бы кратными ребрами, что противоречит что граф простой.



# Свойства планарных графов

Итак, каждая грань инцидентна  $\geq 3$  ребрам, поэтому  $\geq 3$  линии выходят из каждой грани и  $L \geq 3f$ .

Мы подсчитали количество линий  $L$  дважды, и если мы сопоставим результаты, мы получаем  $3f \leq 2m$ .

Для завершения доказательства умножим формулу Эйлера на 3 и подставим неравенство  $3f \leq 2m$  в нее, чтобы получить

$$6 = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m.$$

Обратите внимание, что граница  $m \leq 3n - 6$  ребер не выполняется для графов с 1 или 2 вершинами.

# Свойства планарных графов

С другой стороны, граница  $m \leq 3n - 3$  ребра верна для любого простого плоского графа, даже если он не является связным, что можно легко показать индукцией по числу компонент связности.

Таким образом, каждый плоский **простой** граф имеет  $O(n)$  ребер.

С другой стороны, нет такой границы для плоских графов, которые не являются простыми: граф может иметь 2 вершины, и сколько угодно кратных ребер между ними.

# Свойства планарных графов

**Лемма 7.** Если  $G$  — связный планарный простой граф, то в  $G$  имеется вершина степени  $\leq 5$ .

**Доказательство :** Если  $G$  имеет 1 или 2 вершины, результат истинен.

Если  $G$  имеет  $\geq 3$  вершин, то по лемме 6 мы знаем, что

$$m \leq 3n - 6, \text{ поэтому } 2m \leq 6n - 12.$$

Если бы степень каждой вершины была  $\geq 6$ , то, поскольку

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

(Мы имели бы  $2m \geq 6n$ ).

Но это противоречит неравенству  $2m \leq 6n - 12$ .

Значит, должна существовать вершина степени  $\leq 5$ .

# Свойства планарных графов

**Лемма 8** Любой простой планарный двудольный граф, имеющий по крайней мере 3 вершины, имеет  $m \leq 2n - 4$  ребер.

**Доказательство** : Доказательство почти идентично доказательству леммы 6, за исключением следующего наблюдения:

Если граф  $G$  двудольный, то все циклы в  $G$  имеют четную длину, что означает, в частности, что  $G$  не имеет треугольников .

Поэтому каждая грань должна быть инцидентна  $\geq 4$  ребра.

Используя снова двойной подсчет, получаем  $4f \leq 2m$  , что в сочетании с формулой Эйлера дает результат.



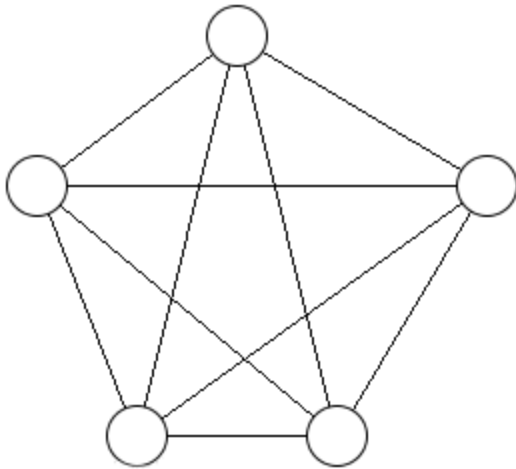
# Свойства планарных графов

**ПРИМЕР 4** Покажите, что  $K_5$  непланарен, используя **Лемму 6**.

**Решение:** Граф  $K_5$  имеет 5 вершин и 10 ребер.

Однако неравенство  $m \leq 3n - 6$  для этого графа не выполняется, поскольку  $m = 10$  и  $3n - 6 = 15 - 6 = 9$ .

Следовательно, граф  $K_5$  не является планарным.



# Свойства планарных графов

Пример 5: показать, что граф  $K_{3,3}$  не является планарным.  
Обратите внимание, что этот граф имеет 6 вершин и 9 ребер.  
Это означает, что неравенство  $m \leq 3n - 6$  выполняется :

$$m = 9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12.$$

НО: выполнение неравенства  $m \leq 3n - 6$  **не означает** , что граф является планарным.

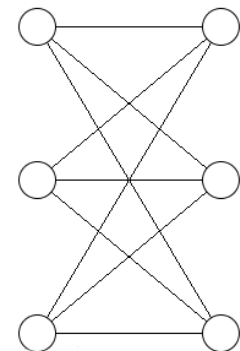
Однако можно использовать лемму 8 для доказательства того, что  $K_{3,3}$  не планарен.

Поскольку  $K_{3,3}$  двудольный, можно воспользоваться следствием 3.

$K_{3,3}$  имеет 6 вершин и 9 ребер.

Поскольку  $m = 9$  и  $2n - 4 = 8$  ,

Следствие 3 показывает, что  $K_{3,3}$  не планарен.



# Теорема Куратовского

Мы видели, что графы  $K_{3,3}$  и  $K_5$  не являются планарными.

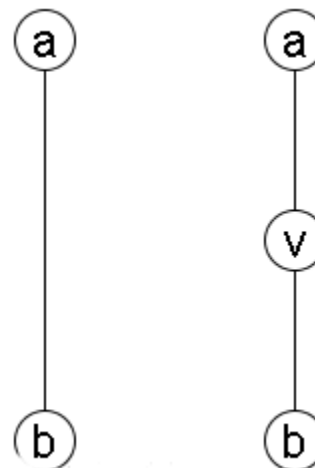
Очевидно, что граф не является планарным, если он содержит любой из этих двух графов в качестве подграфа.

Удивительно, но все непланарные графы должны содержать подграф, который может быть получен из  $K_{3,3}$  или  $K_5$  с использованием определенных разрешенных операций.

Если граф является планарным, то таким же будет и любой граф, полученный путем удаления ребра  $\{a, b\}$  и добавления новой вершины  $v$  вместе с ребрами  $\{a, v\}$  и  $\{v, b\}$ .

Такая операция называется **элементарным подразбиением**.

Графы  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называются **гомеоморфными**, если их можно получить из одного и того же графа с помощью последовательности **элементарных подразбиений**.



# Теорема Куратовского

Польский математик **Казимеж Куратовский** в 1930 году сформулировал **теорему 9**, которая характеризует планарные графы с помощью понятия гомеоморфизма графов.

**ТЕОРЕМА 9** Граф непланарен  $\Leftrightarrow$  он содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ .

Ясно, что граф, содержащий подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ , является непланарным.

Однако доказательство обратного утверждения, а именно, что каждый непланарный граф содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$  или  $K_5$ , является сложным и не будет здесь приведено.

Примеры 7 и 8 иллюстрируют применение теоремы Куратовского.

# Теорема Куратовского

**ПРИМЕР 6** Покажите, что графы  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ , показанные ниже, все гомеоморфны.

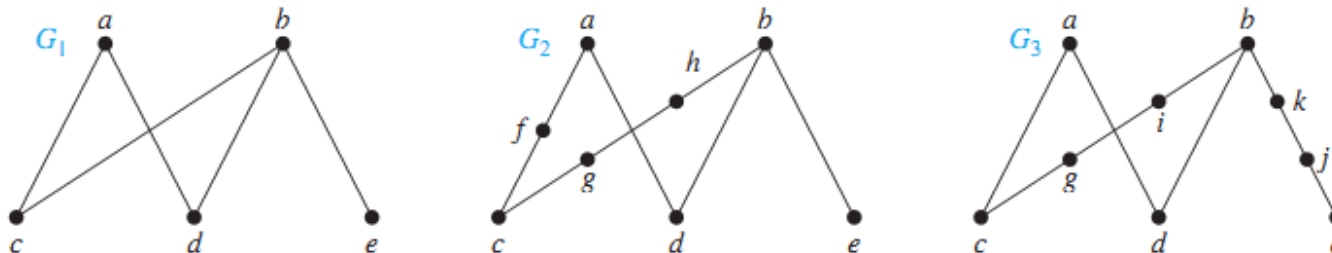
**Решение:** Эти 3 графа гомеоморфны, поскольку все 3 могут быть получены из  $G_1$  с помощью элементарных подразбиений.

$G_1$  может быть получен из самого себя **пустой** последовательностью элементарных подразбиений.

Для получения  $G_2$  из  $G_1$  можно использовать следующую последовательность элементарных подразбиений:

- (i) удалить ребро  $\{a, c\}$ , добавить вершину  $f$  и добавить ребра  $\{a, f\}$  и  $\{f, c\}$ ;
- (ii) удалить ребро  $\{b, c\}$ , добавить вершину  $g$  и добавить ребра  $\{b, g\}$  и  $\{g, c\}$ ;
- (iii) удалить ребро  $\{b, g\}$ , добавить вершину  $h$  и добавить ребра  $\{g, h\}$  и  $\{b, h\}$ .

Упражнение: определите последовательность элементарных подразбиений, необходимых для получения  $G_3$  из  $G_1$ .



# Теорема Куратовского

**ПРИМЕР 7** Определите, является ли показанный ниже граф  $G$  планарным.

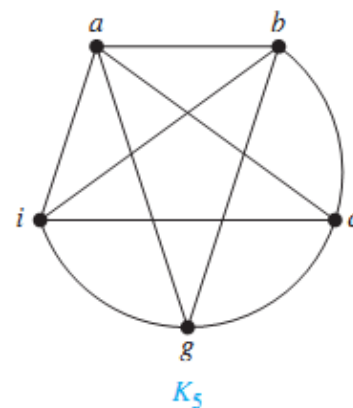
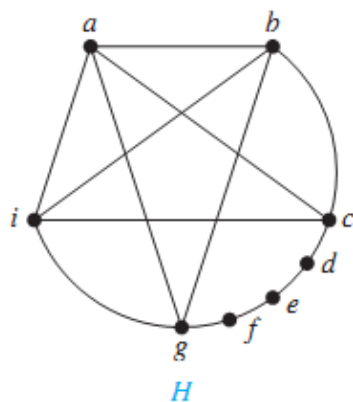
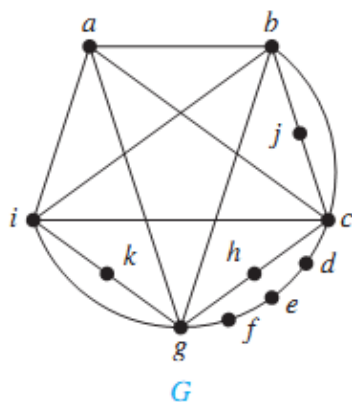
**Решение:**  $G$  имеет подграф  $H$ , гомеоморфный  $K_5$ .

$H$  получается путем удаления вершин  $h, j$  и  $k$ , а также всех ребер, инцидентных этим вершинам.

$H$  гомеоморфен  $K_5$ , поскольку его можно получить из  $K_5$  (с вершинами  $a, b, c, g$  и  $i$ ) последовательностью элементарных подразбиений, добавляя вершины  $d, e$  и  $f$ .

(Упражнение: Постройте последовательность элементарных подразбиений.)

Следовательно,  $G$  - не планарный.



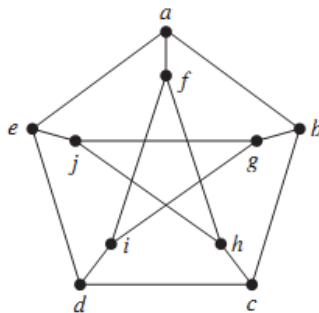
# Теорема Куратовского

**ПРИМЕР 8** Является ли граф Петерсена, показанный ниже, планарным?  
(Датский математик **Юлиус Петерсен** изучал этот граф в 1891 году; его часто используют для иллюстрации различных теоретических свойств графов.)

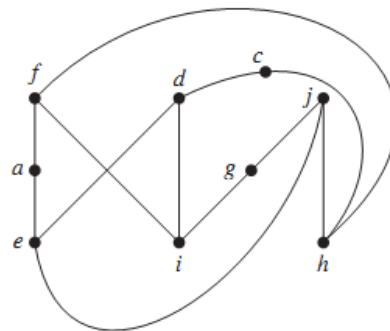
Решение: Подграф **H** графа Петерсена, полученный путем удаления вершины **b** и трех ребер, имеющих **b** в качестве конечной точки, показанный ниже (b), **гомеоморфен**  $K_{3,3}$  с множествами вершин  $\{f, d, j\}$  и  $\{e, i, h\}$ , поскольку он может быть получен путем последовательности элементарных подразбиений,

- удаление  $\{d, h\}$  и добавление  $\{c, h\}$  и  $\{c, d\}$ , удаление  $\{e, f\}$  и добавление  $\{a, e\}$  и  $\{a, f\}$ , и
- удаление  $\{i, j\}$  и добавление  $\{g, i\}$  и  $\{g, j\}$ .

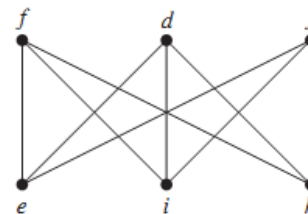
Следовательно, граф Петерсена **не является планарным**.



(a)



(b) **H**



(c)  $K_{3,3}$

# Проверка планарности графов

Непосредственное применение характеристики планарных графов Куратовского на основе подразбиений дало бы алгоритм с экспоненциальным временем выполнения .

Первые полиномиальные алгоритмы ( APG ) для проверки планарности принадлежат Ауслендеру (Auslander) и Партеру (Parter) [1961] , Голдштейну (Goldstein)[1963] и, независимо, Бадеру (Bader)[1964].

В 1974 году Хопкрофт (Hopcroft) и Тарьян (Tarjan) предложили первый алгоритм проверки планарности с линейным временем исполнения.

Однако алгоритм очень сложен и труден в реализации.



# Проверка планарности графов

Другой подход берет свое начало в алгоритме, представленном Лемпелем (Lempel), Эвеном (Even) и Седербаумом (Cederbaum) [LEC 67].

Этот алгоритм, также называемый «**алгоритмом добавления вершин**», основан на рассмотрении вершин по одной в порядке st-нумерации; было показано, что он реализуем за линейное время Бутом (Booth) и Люкером (Lueker) [BL76].

В этом случае также потребовался дополнительный вклад Чибы (Chiba), Нисидзеки (Nishizeki), Абэ (Abe) и Одзавы (Ozawa) [CNAO85], чтобы показать, как построить укладку графа, который оказывается планарным.

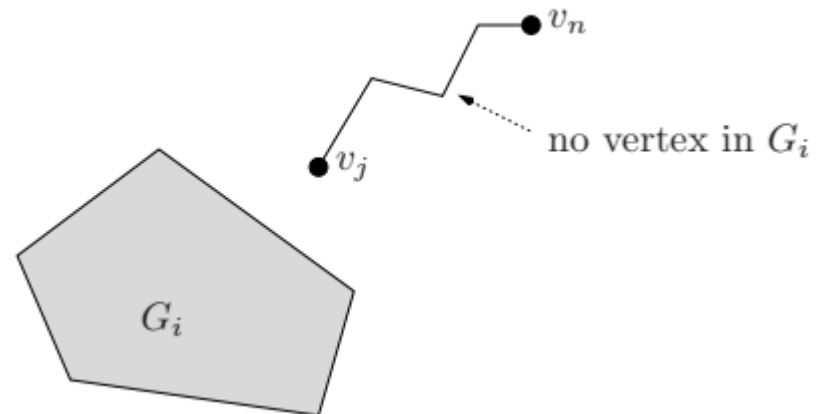
# Алгоритм проверки планарности

Теперь предположим, что  $G$  — планарный граф с st-упорядочением вершин  $v_1, \dots, v_n$ , и ребро  $(v_1, v_n)$  находится **на внешней грани**.

Это многое говорит нам о расположении других вершин.

Пусть  $G_i$  — это граф, индуцированный вершинами  $v_1, \dots, v_i$ , и использующий для  $G_i$  планарную укладку, индуцированную графом  $G$ .

*Каждая вершина  $v_j, j > i$  должна находиться во внешней грани  $G_i$ .*



# Алгоритм проверки планарности

Так как  $v_n$  находится **на** внешней грани, для каждого  $G_i, i < n$ , вершина  $v_n$  находится **внутри** внешней грани  $G_i$ .

Но можно сказать даже больше.

Для любого  $v_j, j > i$ , существует **путь** из  $v_j \leadsto v_n$ , который использует только вершины, **не входящие в  $G_i$**  (это справедливо, поскольку мы можем перейти из  $v_j$  к вершине с большим номером и так далее, пока мы наконец не остановимся на  $v_n$ .)

Следовательно, весь этот путь должен быть **снаружи  $G_i$** , и в частности, всех  $v_j, j > i$  должны находиться на внешней грани  $G_i$ .

## Кустовая форма $B_i$ .

Теперь предположим, что  $G$  — граф с st-упорядочением вершин  $v_1, \dots, v_n$ , и мы хотим проверить, является ли  $G$  планарным.

Идея состоит в том, чтобы построить плоские изображения графов  $G_i$  таким образом, что вершины  $v_{i+1}, \dots, v_n$  находились во внешней грани  $G_i$ . Чтобы сделать это, мы определяем слегка измененный граф, называемый *кустовой формой*  $B_i$ .

# Кустовая форма $B_k$ .

$G = (V, E)$  — двусвязный граф, вершины графа  $G$  имеют  $st$ -нумерацию.

$V_k = \{1, 2, \dots, k\}$ ,

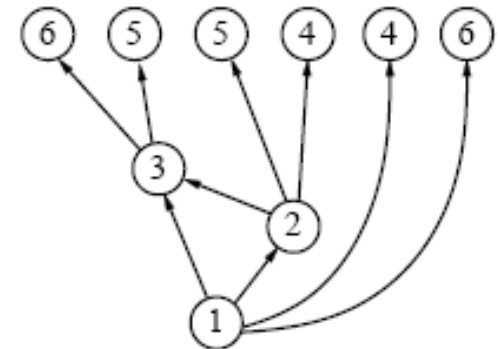
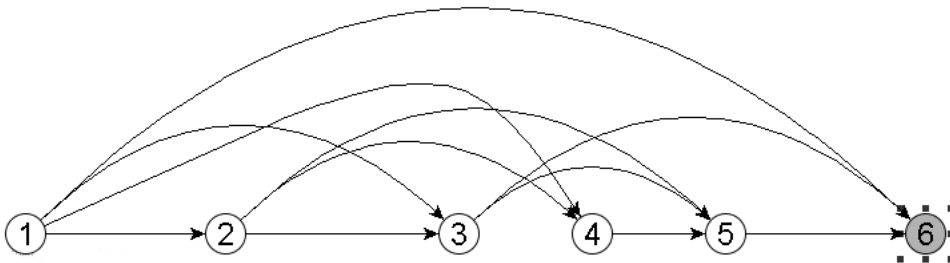
$G_k = (V_k, E_k)$ , граф, индуцированный множеством вершин  $V_k$ .

$B_k$  расширяет  $G_k$ : Для каждого  $(v, w) \in E$ :  $v \leq k$  и  $w \geq k$  есть вершина и ребро в  $B_k$ .

Они называются виртуальными вершинами и виртуальными ребрами соответственно.

Мы помечаем каждую виртуальную вершину номером ее реального аналога в  $G$ .

$G_3$  = индуцирован вершинами  $\{1, 2, 3\}$   
Кустовая форма  $B_3$  расширяет  $G_3$



# Кустовая форма $B_k$

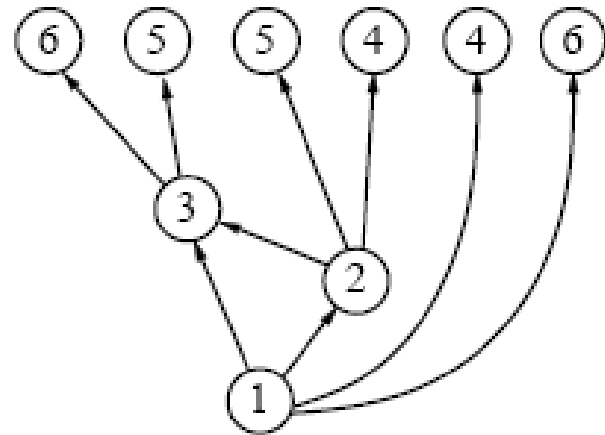
Если  $G$  планарный, то кустовую форму  $B_k$  можно нарисовать так, чтобы она напоминала куст:

Вершина  $v$ ,  $1 \leq v \leq k$  изображается на высоте  $v$

Все виртуальные вершины располагаются на горизонтальной линии на высоте  $k+1$ .

Все ребра изображаются как  $y$ -монотонные кривые

Мы называем горизонтальную линию на высоте  $k+1$  *горизонтом*.



# Кустовая форма $B_k$

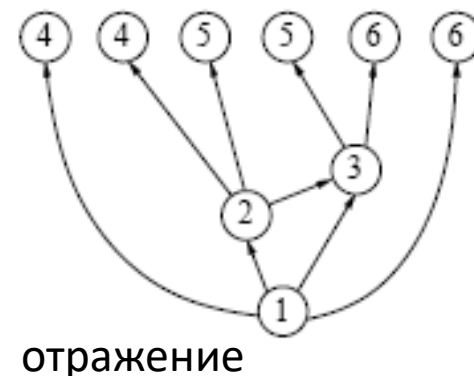
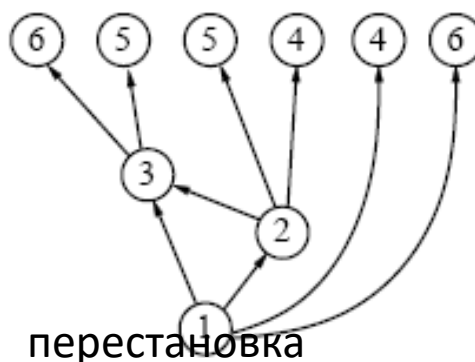
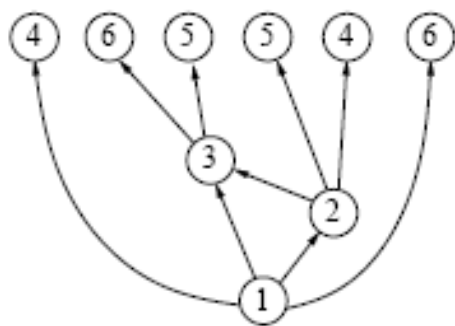
Пусть  $v$  будет точкой сочленения  $B_k$ ,  $k > 1$ .

**Корневая компонента  $v$**  = уникальная компонента, содержащая вершины с наименьшими номерами и все остальные компоненты (не существует, если  $v = 1$ )

Некорневые компоненты  $v$  = все остальные компоненты

Операция **перестановки** переставляет некорневые компоненты относительно точки сочленения  $B_k$ .

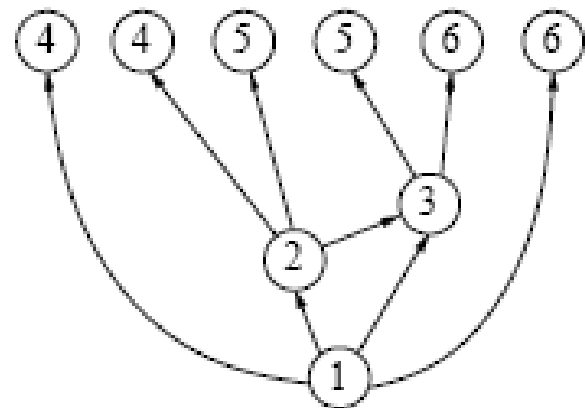
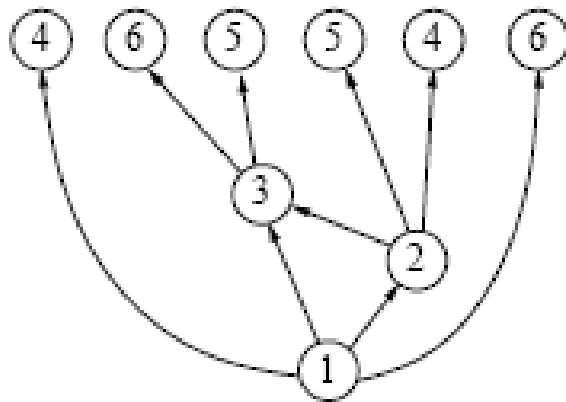
Операция **отражение** отражает подкуст относительно оси  $y$ .



# Операция отражения

Когда мы хотим нарисовать  $B_4$ , мы должны сначала преобразовать  $B_3$  так, чтобы все виртуальные вершины с меткой 4 образовали последовательность на уровне 4.

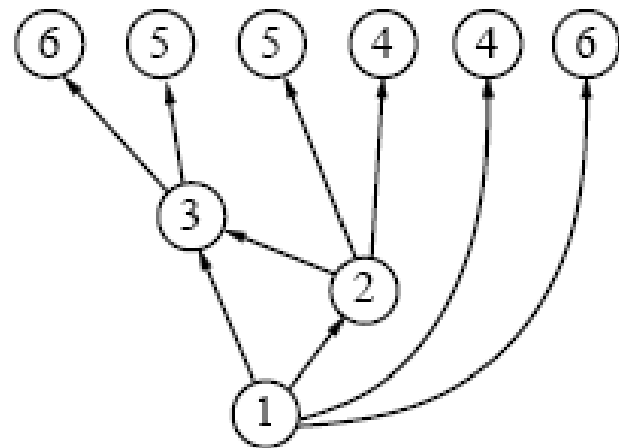
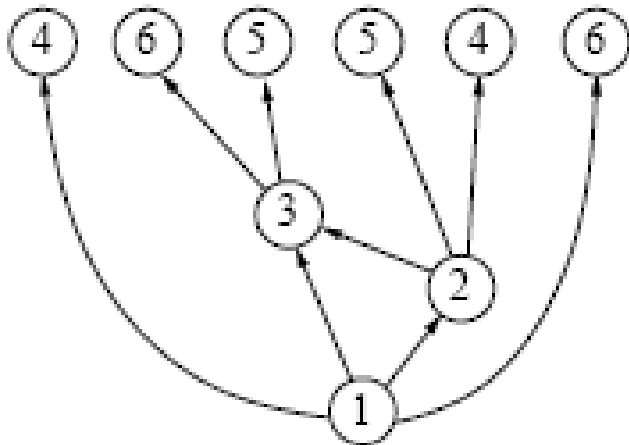
Это можно сделать, отразив вокруг вершины 1 компонент, включающий вершины 2 и 3, так что виртуальные вершины, обозначенные 5 и 4, поменяются местами.





# Операция перестановки

Мы также можем переставить самую левую виртуальную вершину с меткой 4 вправо и поместить ее рядом с другой виртуальной вершиной с меткой 4.



# Редукция кустовой формы

Целью этих преобразований является нахождение такого порядка вершин на линии горизонта, при котором все виртуальные вершины с одинаковой меткой размещаются последовательно друг за другом.

В этом случае все виртуальные вершины можно объединить в одну реальную вершину, не создавая пересечений ребер.

Этот вид преобразования называется редукцией.

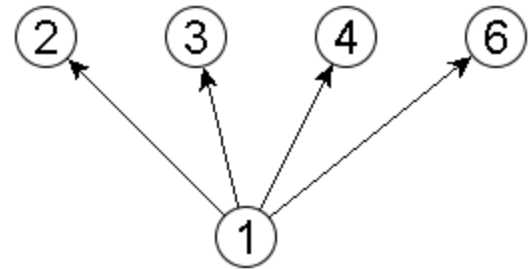
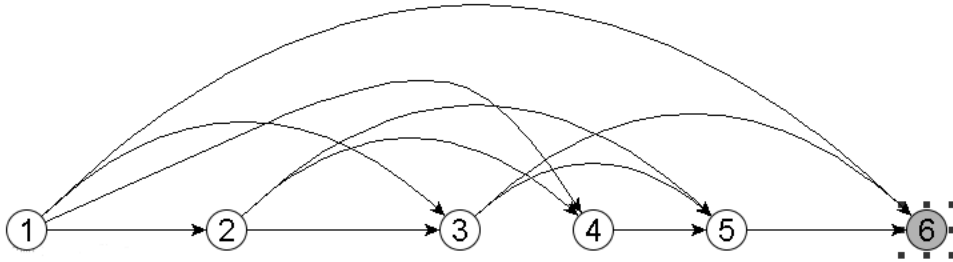
Если невозможно сделать последовательными вершины, помеченные  $k+1$ , мы знаем, что граф не является планарным .

В противном случае алгоритм создаст планарное изображение графа.

**Теорема 10** Граф  $G$  является планарным  
 $\Leftrightarrow$  для каждой вершины  $k$  он допускает  
кустовую форму  $B_k$

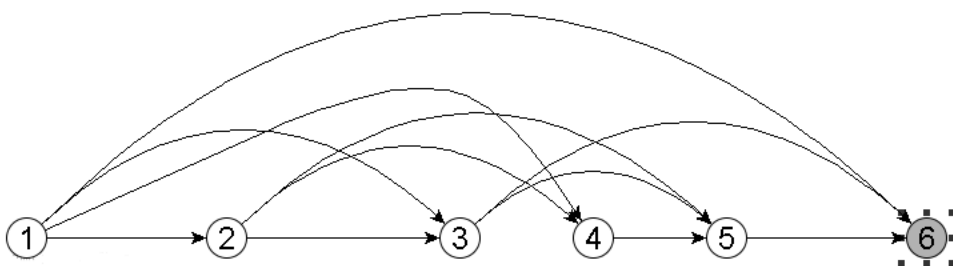
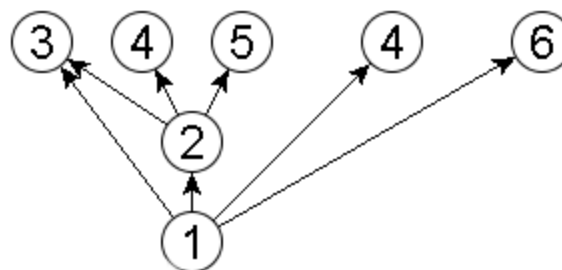
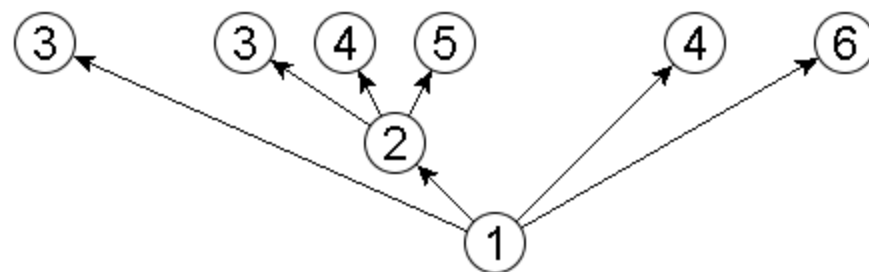
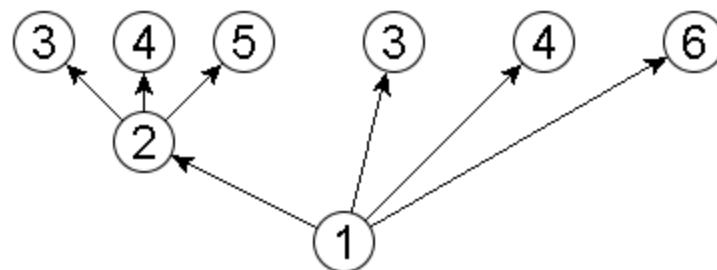
# Пример проверки планарности

Дан граф  $G$  с st – нумерацией вершин, строим кустовую форму  $B_1$



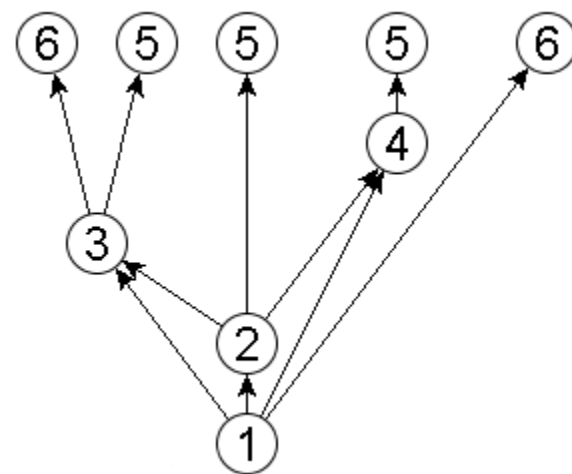
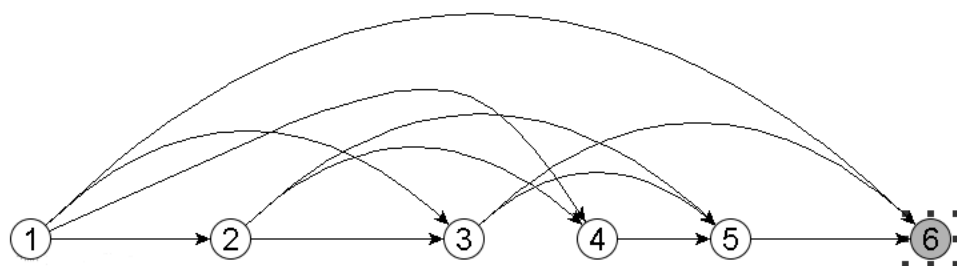
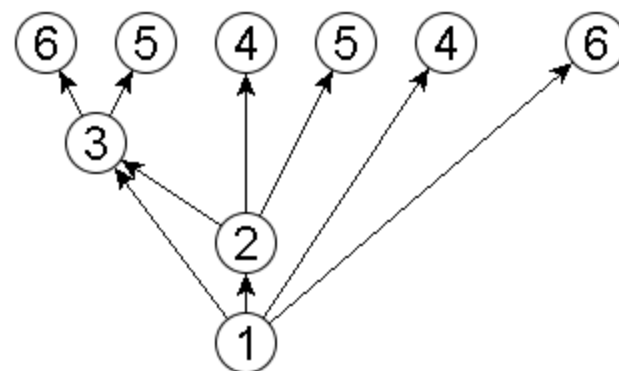
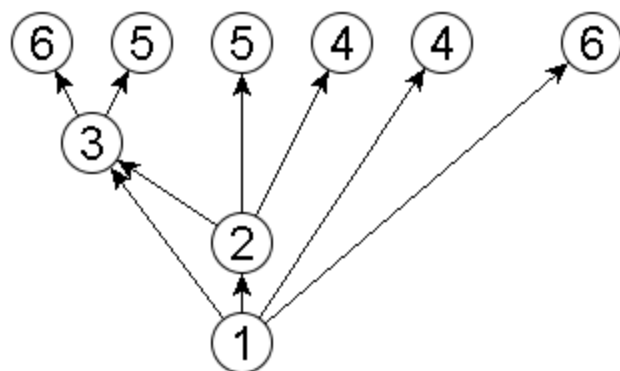
# Пример проверки планарности

Кустовая форма  $B_2$



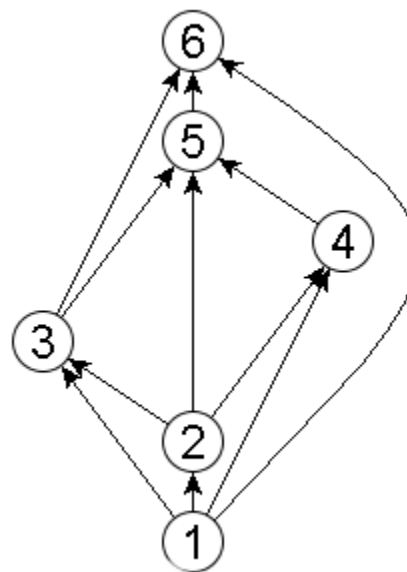
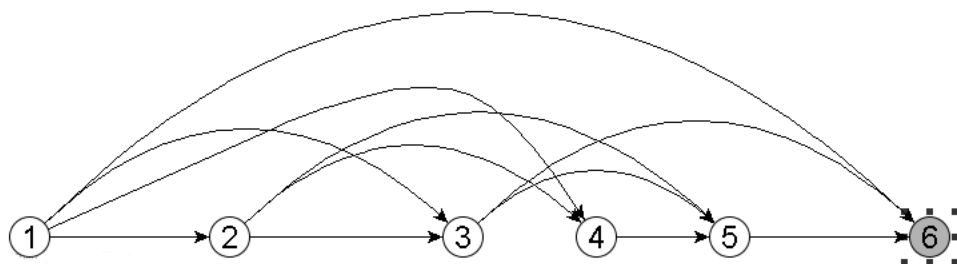
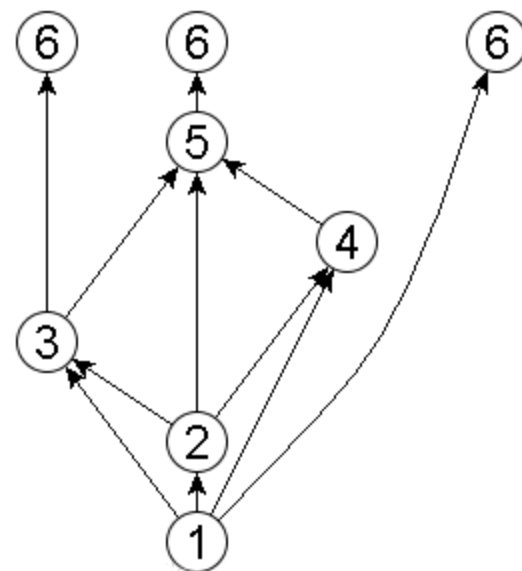
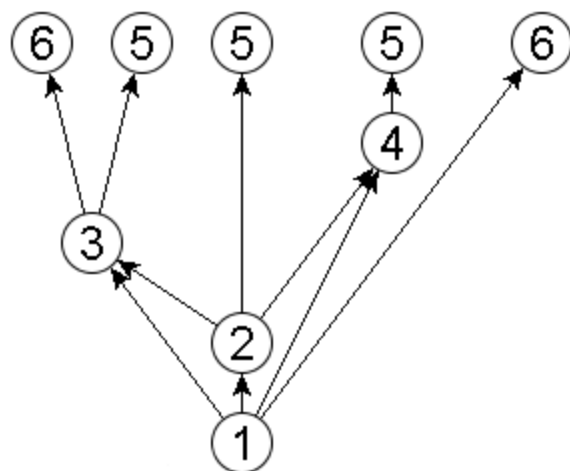
# Пример проверки планарности

Кустовая форма  $B_3$



# Пример проверки планарности

Кустовая форма  $B_4$

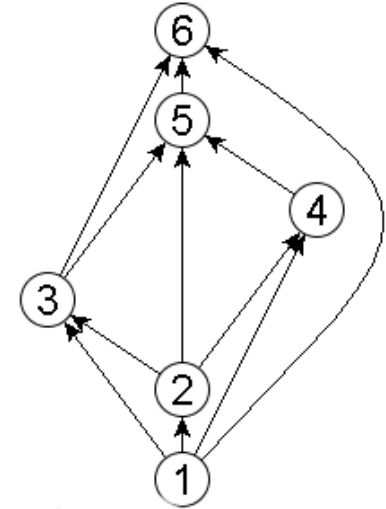


# Пример проверки планарности

Проверяем формулу Эйлера:

$$n = 6, m = 11, f = 7$$

$$n - m + f = 6 - 11 + 7 = 2. \text{ Ok.}$$



Что произойдет, если граф  $G$  не является планарным ???



# Листовые слова и расширяемая кустовая форма

Листовое слово — это последовательность символов

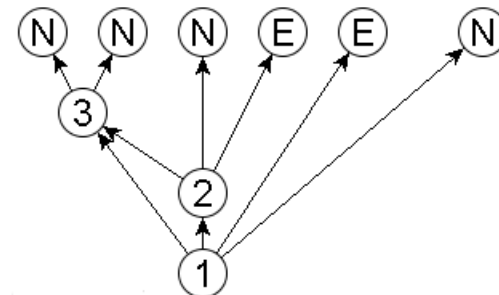
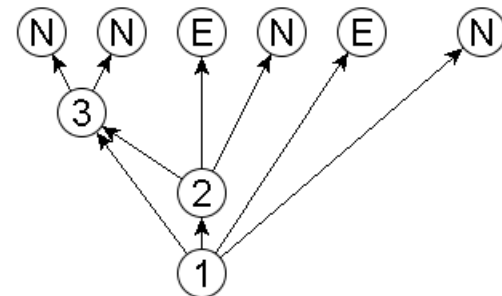
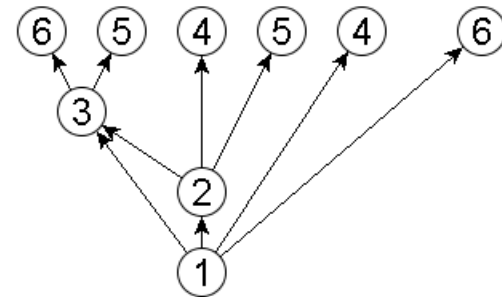
$\{N, E\}^*$ , где  $E$  представляет вершины с номером  $k+1$ ,

$N$  представляет вершины с номером  $\geq k+2$

NNENEN и NNNEEN

Расширяемая кустовая форма: листовое слово вида  $N^* E^* N^*$

Расширяемая кустовая форма  $B_k^{\wedge}$  легко расширяется до кустовой формы  $B_{k+1}$



# Листовые слова и расширяемая кустовая форма

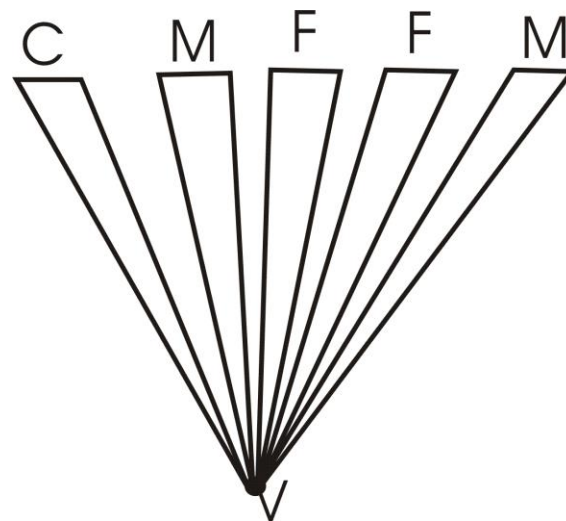
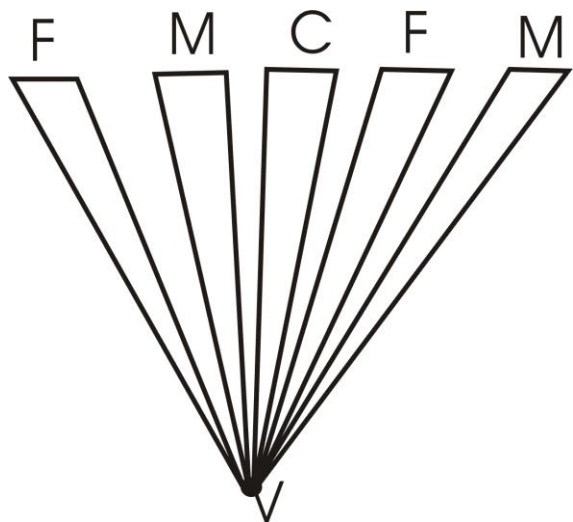
**Теорема 11** ( Расширяемость ) Если  $B_k$  не имеет никаких препятствий к расширению, то любая кустовая форма  $B_k$  может быть преобразована в расширяемую форму  $B_k^\wedge$  операциями перестановки и отражения.

# Листовые слова и расширяемая кустовая форма

Подграф  $B_k$  называется Clean (чистым), если ни одна из его виртуальных вершин не помечена  $k+1$ .

Подграф  $B_k$  называется Mixed (смешанным), если некоторые, но не все его виртуальные вершины помечены  $k+1$ .

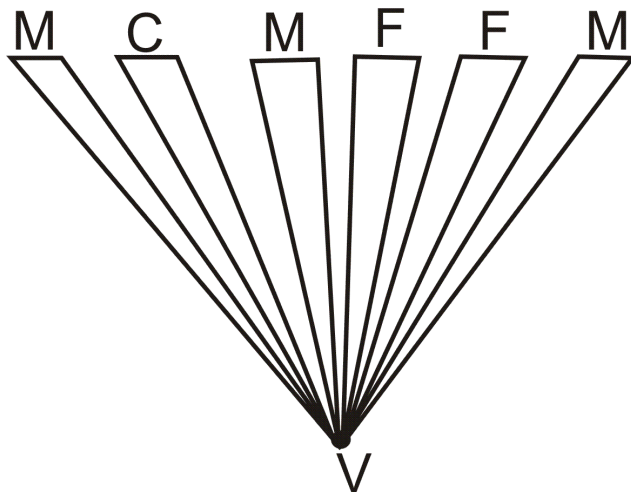
Подграф  $B_k$  называется Full (полным), если все его виртуальные вершины помечены  $k+1$ .



# Листовые слова и расширяемая кустовая форма

Точка сочленения  $v$  из  $B_k$  *препятствует расширению кустовой формы*, если есть  $\geq 3$  **Mixed (смешанных)** компонент  $B_k \setminus v$ .

Без препятствий к расширению мы можем собрать последовательно вхождения  $k+1$ .



# Резюме

Алгоритм проверки планарности LEC (Lempel, Even, Cederbaum) строит кустовые формы  $B_0, B_1, \dots, B_n$

На итерации  $k+1$  кустовая форма  $B_k$  сначала преобразуется в расширяемую кустовую форму  $B_k^\wedge$ , а затем расширяется до кустовой формы  $B_{k+1}$

Преобразование в расширяемую кустовую форму использует перестановки и отражения. Расширение возможно, если  $B_k$  не содержит препятствий к этому.

Время выполнения алгоритма Лемпеля-Эвена-Седербаума составляет  $O(n^2)$  в исходном виде

Booth и Lueker улучшили время выполнения до  $O(n+m)$  за счет введения структуры данных PQ-дерева.

# Комбинаторные укладки

Определение планарного графа, хотя и легко понять в теории, трудно описать **в алгоритмических целях**.

В текущем определении мы допускаем изображения с произвольными кривыми для изображения ребер.

Как бы мы **сохранили это изображение в компьютере**, т. е. представили бы это в дискретном виде?

Одна из идей заключается в том, чтобы хранить вершины как точки и изображать ребра прямыми линиями, но чтобы иметь возможность сделать это, нам сначала нужно доказать, что все планарные графы имеют такое **прямолинейное изображение**.

(Они имеют, но это совсем не простой результат).

Вместо этого мы представим планарные графы совершенно другим способом, с помощью так называемого **комбинаторной укладки**.

# Комбинаторные укладки

**Определение** Пусть  $G$  — граф.

**Комбинаторная укладка** графа  $G$  представляет собой **множество упорядочений**  $\pi_v$  для каждой вершины  $v \in V$ , где  $\pi_v$  определяет **циклический порядок ребер**, инцидентных  $v$ .

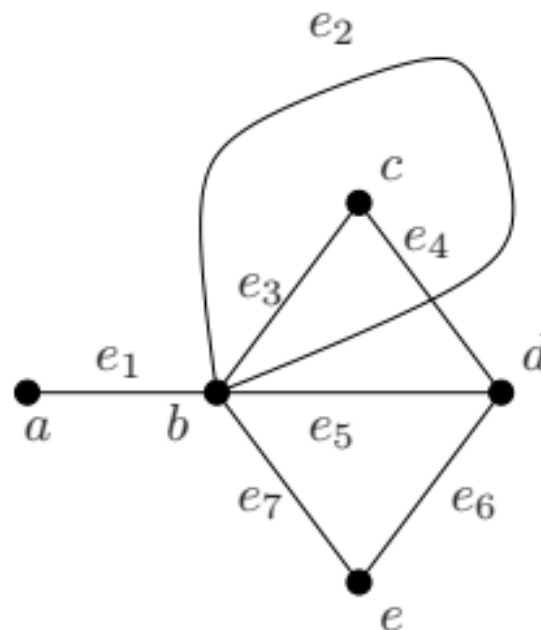
$$\pi_a: \{e_1\}$$

$$\pi_b: \{e_1, e_2, e_3, e_2, e_5, e_7\}$$

$$\pi_c: \{e_3, e_4\}$$

$$\pi_d: \{e_4, e_6, e_5\}$$

$$\pi_e: \{e_6, e_7\}$$



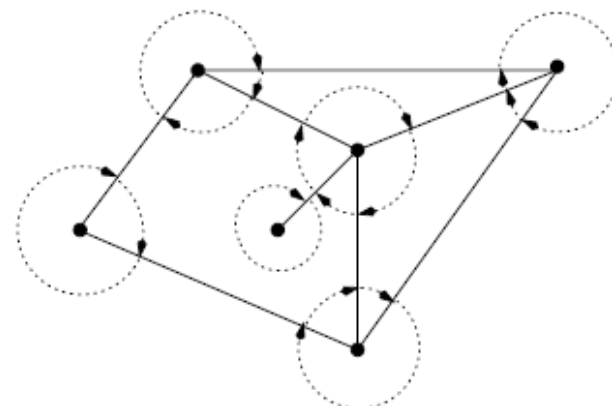
# Комбинаторные укладки планарных графов

Хотя приведенные выше определения справедливы для произвольных комбинаторных укладок, понятие комбинаторной укладки легче визуализировать с помощью плоского графа.

Предположим на мгновение, что кто-то дает нам рисунок плоского графа  $G$ , не имеющего пересечений.

Можно использовать комбинаторную укладку, индуцированную этим изображением, т.е. упорядочить ребра так, как они появляются в порядке по часовой стрелке вокруг каждой вершины.

Задача построения плоского изображения графа, которое соответствует данной комбинаторной укладке гораздо сложнее...



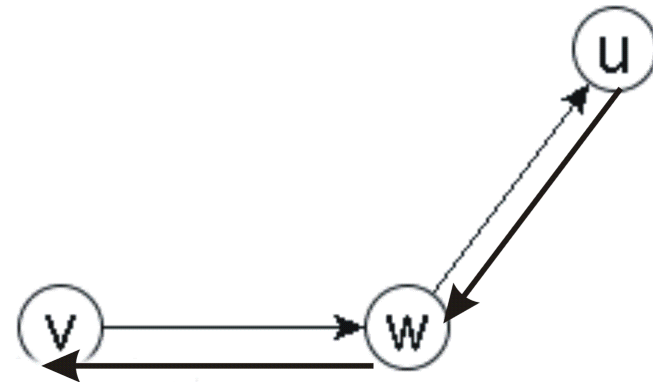


# Операция следующее ребро (next)

Имея комбинаторную укладку, мы можем определить для каждого ребра **следующее ребро**, следуя комбинаторной укладке.

Чтобы сделать это точнее, мы на некоторое время заменим каждое неориентированное ребро  $\{v, w\}$  двумя ориентированными ребрами  $(w, v)$ , а также заменим запись  $\{v, w\}$  в комбинаторной укладке  $v$  на  $(v, w), (w, v)$ .

Тогда для ребра  $v \rightarrow w$  следующим ребром после  $v \rightarrow w$  является ребро  $w \rightarrow u$ , которое следует непосредственно за  $v \rightarrow w$  в циклическом порядке ребер вокруг вершины  $w$ .



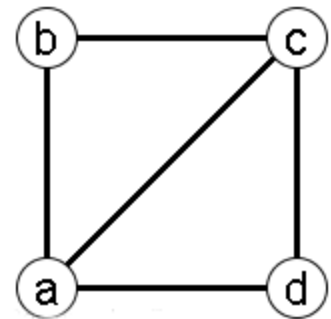
# Грань планарного графа, комбинаторное определение

$a : \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$

$b : \{\{b, c\}, \{b, a\}\}$

$c : \{\{c, b\}, \{c, a\}, \{c, d\}\}$

$d : \{\{d, c\}, \{d, a\}\}$

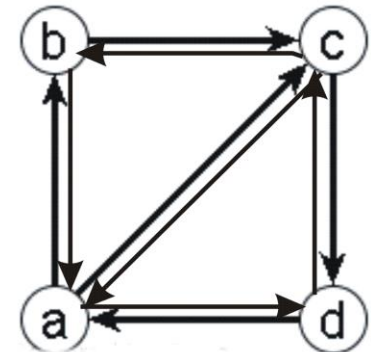


$a : \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a)\};$

$b : \{(b, c), (c, b), (b, a), (a, b)\};$

$c : \{(c, b), (b, c), (c, d), (d, c), (c, a), (a, c)\};$

$d : \{(d, c), (c, d), (d, a), (a, d)\};$



Используя понятие следующего ребра, мы можем определить **грань** как **классы эквивалентности ребер**, которые могут достичь друг друга посредством **следующей** операции.

# Грань планарного графа, комбинаторное определение

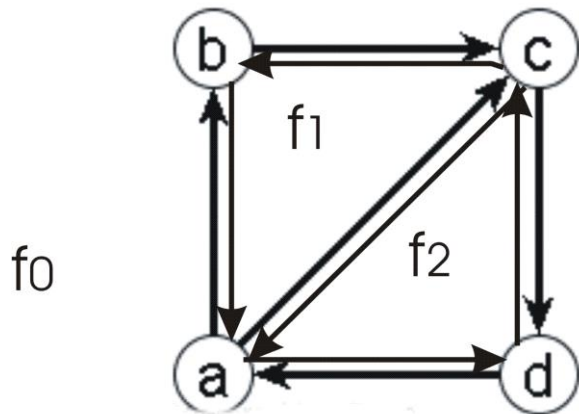
Используя понятие следующего ребра, можно определить грани как классы эквивалентности ребер, достижимых при помощи операции  $\text{next}$ .

Начнем с произвольного ребра  $(v_1, v_2)$ . Пусть  $(v_2, v_3)$  будет следующим после  $(v_1, v_2)$ .

Повторяем: то есть для  $i > 0$  ребро  $(v_i, v_{i+1})$  будет следующим после  $(v_{i-1}, v_i)$

Будем продолжать, до тех пор пока не встретится повторно некоторое ребро.

Это повторное ребро будет ребром  $(v_1, v_2)$  поскольку каждое ребро имеет только одно следующее ребро.



$$f_0 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$

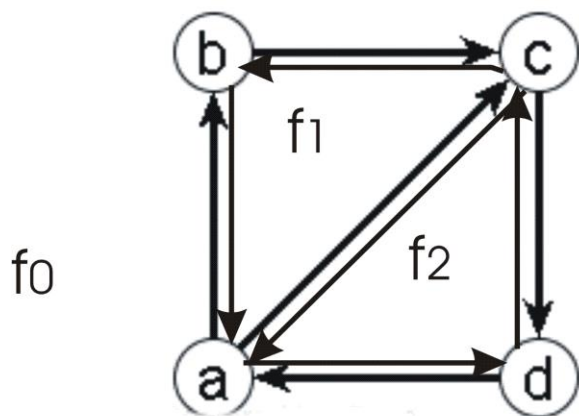
$$f_1 = \{(a, c), (c, b), (b, a)\};$$

$$f_2 = \{(a, d), (d, c), (c, a)\};$$

# Грань планарного графа, комбинаторное определение

Полученный цикл  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \rangle$  называется **граневым циклом** или **гранью**.

Число  $k$  — это **степень грани**, оно также обозначается  $\deg(F)$  для грани  $F$ .



$$f_0 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$$

$$f_1 = \{(a, c), (c, b), (b, a)\};$$

$$f_2 = \{(a, d), (d, c), (c, a)\};$$

# Грань планарного графа, комбинаторное определение

Плоский граф  $G$  — это планарный граф с **фиксированной комбинаторной укладкой**.

Граф с фиксированной комбинаторной укладкой естественным образом разбивается на множество граней.

Каждое направление каждого ребра принадлежит ровно одной грани.

Хотя эти два направления могут принадлежать одной и той же грани дважды.

В частности, поэтому,

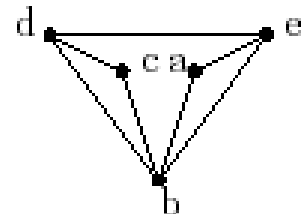
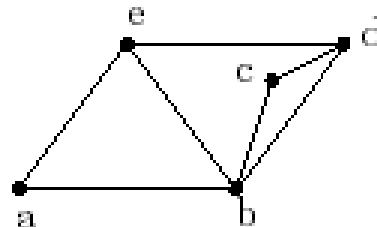
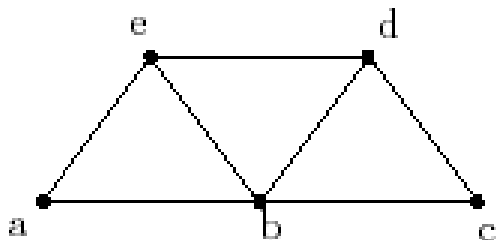
$$\sum_f \deg(F) = 2m.$$

# Различные изображения одного и того же планарного графа

На рисунке ниже представлен пример различных плоских изображений одного и того же графа.

Здесь, самое левое изображение действительно отличается от среднего: у самого левого изображения есть грань степени 5 (внешняя грань), тогда как на среднем изображении такая грань отсутствует.

Разница между этими двумя рисунками возникает из-за «поворота» подграфа относительно разделяющей пары  $\{b, d\}$ .



# Теорема ( Whitney )

Теорема 12 (Уитни) Если  $G$  — 3-связный планарный граф, то  $G$  имеет единственную комбинаторную укладку.

(Без доказательства)