$$\int_I f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi)$$

$$I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$$

<u>ОПР</u> $m_k = \inf\limits_{x\in I_k} f(x)$, $M_k = \sup\limits_{x\in I_k} f(x)$

Величина $s(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k |I_k|$ $S(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{N} M_k |I_k|$

Очевидно $s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le S(f,P)$

~~ОПР~~ - нижней и верхней интегральной суммой ф-ии $f: I \to \mathbb{R}$ на пр-ке I, отвечающей разбиению P этого пр-ка

обозн. $\underline{\int_I} f(x)\,dx \overset{\text{ОПР}}{=} \sup\limits_P s(f,P)$ - <u>нижний интеграл Дарбу</u>

$\overline{\int_I} f(x)\,dx \overset{\text{ОПР}}{=} \inf\limits_P S(f,P)$ - <u>верхний интеграл Дарбу</u>

Более развёрнутое обозначение интеграла таково $\int_I f(x_1, x_2, .., x_n)\,dx_1\,dx_2 .. dx_n$

<u>ОПР</u> Если для ф-ии $f: I \to \mathbb{R}$ число $\int_I f(x)\,dx$ ∃

~~определено и <∞, то ф-я f на~~

определено и $<\infty$, то ф-я f наз. интегрируемой по Риману на пр-ке I.

Мн-во всех таких ф-й обозн. $R(I)$

ОПР Говорят, что мн-во $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль или является мн-вом меры ~~нуль~~ нуль (в смысле Лебега), если $\forall \varepsilon > 0$ сущ-ет покрытие мн-ва A не более ~~чем~~ чем счётной системой $\{I_k\}$ n-мерных промежутков:

$$\sum_k \mu(I_k) \leq \varepsilon.$$

Лемма а) Точка и ~~сч.~~ кон. набор т.-мн-во меры нуль

б) Объединение кон. и счётн. числа мн-в меры нуль - мн-во меры нуль

?

в) Подмн-во меры нуль - счётн. если мн-во меры - нуль

Т (о графике) Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ непр, определённая на $(n-1)$-мерном пр-ке $I \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда её график в $\mathbb{R}^n$ есть мн-во меры нуль.

Д-во. Ф-я непр. на замкнутом мн-ве явл-ся равномерной непрерывной на I, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x_1, x_2 \in I$: $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, пусть $\varepsilon>0$ — произв.

Найдём $\varepsilon_0=\dfrac{\varepsilon}{2\mu(I)}$ соотв. δ_0. Возьм. разб P пр-ка I с параметром $\lambda(P)<\delta_0$. $\Rightarrow$

$$I\subseteq\bigcup_{k=1}^{N} I_k \quad \text{и} \quad \max_{k}\Big(\max_{x_1,x_2\in I_k}|x_1-x_2|\Big)<\varepsilon_0.$$

Возьмём ξ_k — произв. т. из I_k.

Тогда пр-к $I_k\times[f(\xi_k)-\varepsilon_0,\, f(\xi_k)+\varepsilon_0]$ — содержит в себе всю часть графика ф-ии f, лежащую над I_k. И весь график содержится в объединении

$$\bigcup_k I_k\times[f(\xi_k)-\varepsilon_0,\, f(\xi_k)+\varepsilon_0] \text{ и}$$

$$\mu\Big(\bigcup_k I_k\times[f(\xi_k)-\varepsilon_0,\, f(\xi_k)+\varepsilon_0]\Big)=$$

$$=2\varepsilon_0\sum_k \mu(I_k)\le 2\varepsilon_0\mu(I)=\varepsilon \quad \blacksquare$$

ОПР Будем говорить, что некот. св-во имеет место почти во всех точках мн-ва M или выполнено почти всюду на M, если подмн-во, где это св-во может нарушаться, имеет меру ~~нуль~~ нуль.

Т. (критерий Лебега) $f\in\mathcal{R}(I) \Leftrightarrow$ (f ограниченная ~~на~~ I на I) & (f непр. почти всюду на I)

<u>ОПР</u> Характеристической ф-ей мн-ва $E \subset \mathbb{R}$ наз-ся ф-я $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in E \\ 0, \text{ если } x \notin E \end{cases}$

<u>ОПР</u> Интеграл от ф-ии f по мн-ву $E \subset \mathbb{R}^n$ определяется так: $\int\limits_E f(x)\,dx \overset{\text{ОПР}}{=} \int\limits_{I \supset E} f\chi_E(x)\,dx$, где

I произв. пр-к, содержащий E

~~Мерой или объёмом~~

<u>ОПР</u> Мерой или объёмом ог. мн-ва $E \subset \mathbb{R}^n$ назовём величину $M(E) \overset{\text{ОПР}}{=} \int\limits_E 1\,dx$

Замечание, если $n=1$, мера-длина
мн-во $R(E)$ опр-ся аналогично
$n=2$, мера-площадь
$n=3$, мера-объём

Св-ва меры

1) $f, g \in R(E) \Rightarrow \lambda f(x) + \mu g(x) \in R(E)$

2) Пусть E_1 и E_2 - допустимые мн-ва, т. е. ∂E_1 и ∂E_2 имеют меру 0, $M(E_1 \wedge E_2) = 0$. Тогда $\int\limits_{E_1 \vee E_2} f(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx$

Д-во $\chi_{E_1 \cup E_2}(x) = \chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) - \chi_{E_1 \cap E_2}(x)$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x)\,dx = \int_{I \supset E_1 \cup E_2} f(x)\chi_{E_1 \cup E_2}(x)\,dx = \int_I f\chi_{E_1}\,dx + \int_I f\chi_{E_2}\,dx -$$

$$- \int_I f\cdot\underbrace{\chi_{E_1 \cap E_2}}_{=0}\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx \ \boxtimes$$

T Для ф-ции $f: E \to \mathbb{R}: \forall x \in E \ f(x) \geq 0$ & $f \in R(E)$ выполнено $\int f(x)\,dx \geq 0$

Д-во $f(x) \geq 0$ на $E \Rightarrow f(x)\chi_E(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}^n$

$\int_{I \supset E} f(x)\chi_E(x)\,dx$ — предел ~~неотр~~ неотр. интегр. сумма ≥ 0 $\boxtimes$

Сл-вие 1 Пусть $f, g \in R(E)$, $f \leq g$ на $E \Rightarrow$

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E g(x)\,dx$$

~~Сле~~

Сл-е 2. Пусть $f \in R(E)$. Если $\forall x \in E$. $m \leq f(x) \leq M$, то ~~то~~ $m\mu(E) \leq \int f(x)\,dx \leq M\mu(E)$)

Сл-е 3 Если $f \in R(E)$, $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$, то найдётся $\Theta \in [m, M]$, такое, что

$$\int_E f(x)\,dx = \Theta\mu(E)$$

Сл-е 4 Если E - связное допустимое мн-во и ф-я $f: E \to \mathbb{R}$ непр, то $\int_E f(x)dx = f(\xi)\mu(E)$ для некот. $\xi \in E$.

Т (о среднем). Если в дополнение к условиям следствия 2 имеется ф-ция $g \in R(E)$ и $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$, то $m\int_E g(x)dx \le$
$\le \int_E f g(x) dx \le M\int_E g(x) dx$

Д-во По критерию Лебега ~~fg~~ $mg, Mg, fg \in$
$\in R(I)$, $E \subset I$.

$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \Rightarrow \int_E mg(x)dx \le \int_E f(x)g(x) dx \le$
$\le \int_E Mg(x)dx$ ☒

§2 Теорема Фубини

Т. Пусть $X \times Y$ - пр-к в $\mathbb{R}^{m+n}$ и X - пр-к в $\mathbb{R}^m$, Y - пр-к в $\mathbb{R}^n$. Если $f \in R(X \times Y)$, то

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)dy\right)dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx\right)dy$$

Д-во: $F(x) \overset{\text{опр}}{=} \int_Y f(x,y)\,dy$

Любое разбиение P пр-па $X \times Y$ индуцирует соотв. разбиениями P_X, P_Y пр-ков X, Y. При этом каждый пр-к разб. P есть прямое произведение.

$X_i \times Y_j$ — некот. пр-ков X_i Y_j разбиением P_X, P_Y.

ФАКТ. Если $f \in R(I)$, то $\int_I f(x)\,dx = \overline{\int_I} f(x)\,dx$

$$s(f,P) \leq \sum \inf_{x \in X_i} F(x)|X_i| \leq \sigma(F, P_X, \xi) \leq \sum_i \sup_{x \in X_i} F(x)|X_i| \leq S(f,P)$$

$$S(f,P) = \sum_{i,j} \sup f(x,y)|X_i| \cdot |Y_j|$$

$$\geq \sum_i \sup_{x \in X_i} \left(\sum_j \sup_{y \in Y_j} f(x,y)|Y_j| \right) |X_i| \geq$$

$$\geq \sum_i \sup_{x \in X_i} \left(\overline{\int_Y} f(x,y)\,dy \right) |X_i| \geq \sum_i \sup_{x \in X_i} F(x)|X_i|$$

$\lambda(P) \to 0$