

## Семинар 4

### Пример 1.

Используя определение (вычислением  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ), исследовать на

сходимость ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3-k}{k(k+3)(k+1)}$ .

**Решение.** Для преобразования частичных сумм используем разложение дроби на простейшие:

$$\frac{3-k}{k(k+3)(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+3}.$$

Методом неопределенных коэффициентов нашли значения:  $A=1$ ,  $B=-2$  и  $C=1$ . Следовательно, общий член ряда запишется в виде:

$$\frac{3-k}{k(k+3)(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+3}.$$

Тогда частичную сумму можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3-k}{k(k+3)(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \\ &+ \left( \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+3}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Так как сумма ряда существует и равна конечному значению, то искомый ряд сходится. ■

### Пример 2

Исследовать на сходимость числовой ряд  $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$

**Решение.** По виду членов ряда можно утверждать, что общий член ряда имеет вид:  $a_n = \frac{n}{2n-1}$ . То есть мы исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ . Проверим

необходимый признак сходимости ряда:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ . Т. к. он

нарушается, то данный ряд расходится (или говорим, расходится по достаточному признаку расходимости). ■

Пример 3 Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$ .

**Решение.** Учитывая, что  $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}} \sim b_n = \frac{1}{n^{5/2}}$  при  $n \rightarrow +\infty$  (так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ), то по второму признаку сравнения ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$  ведут себя одинаково, в смысле сходимости. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$  – обобщенный гармонический, и т.к.  $p = \frac{5}{2} > 1$ , то по (2.1) он является сходящимся. Следовательно, искомый ряд также сходится. ■

**Пример 4** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n-2}$ .

**Решение.** С помощью второго признака сравнения упростим исходный ряд, так как  $a_n = \frac{2n^2+1}{3^n-2} \sim b_n = \frac{2n^2}{3^n}$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то о сходимости искомого ряда можно судить по ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ . По виду общего члена последнего знакоположительного ряда можно сделать выбор достаточного признака, в данном случае признака Коши. По признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[n]{2n^2})^2}{3} = \frac{1}{3}$$

(учли известный факт из матанализа:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ). Так как  $q = \frac{1}{3} < 1$ , то искомый ряд сходится. ■

**Пример 5** Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3(n)}$ .

**Решение.** Для того чтобы исследовать данный знакоположительный ряд на сходимость, удобно применить интегральный признак Коши, положив, что  $f(x) = \frac{1}{x \ln^3(x)}$ . Условия, допускающие применение этого признака, выполнены, ибо функция  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq 2$ , положительна при этих значениях  $x$ , монотонно убывает с ростом  $x$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ; выполнение условия  $f(n) = a_n$  очевидно. Исследуем соответствующий несобственный интеграл на сходимость:

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)} = \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{matrix} \right| = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{2 \ln^2 2}.$$

Итак, несобственный интеграл сходится, следовательно, вместе с ним сходятся и искомый ряд. ■

Пример 6 Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{(n+4)!}$

**Решение.** Так как общий член ряда  $a_n = \frac{5n}{(n+4)!} \sim b_n = \frac{5^n}{n!}$ , при  $n \rightarrow +\infty$ , то исследуем по достаточному признаку Даламбера эквивалентный искомому ряд в смысле сходимости:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{5^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1} n!}{5^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+1} = \left( \frac{c}{\infty} \right) = 0 < 1,$$

следовательно, исходный ряд сходится. ■

Пример 7 Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$

**Решение.** Форма общего члена данного знакоположительного ряда наводит на мысль об использовании признака Коши. Действительно:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right)^{-(n+2)} \right]^{-\frac{n}{n+2}} = \left[ \begin{array}{l} \text{второй замечательный} \\ \text{предел: } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha} = e \end{array} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Так как  $e^{-1} = 1/e < 1$ , то по признаку Коши исходный ряд сходится.

Решение возможно и с помощью признака Даламбера, но в этом случае его использование было бы нерационально. ■

Пример 8 Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)}$ .

**Решение.** Выпишем несколько первых слагаемых исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)} = \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots:$$

По форме общего члена данного ряда решаем использовать признак Даламбера. Выпишем  $(n+1)$ -ый член этого ряда:

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3(n+1)-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1) \cdot (4(n+1)+1)} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1) \cdot (4n+5)}.$$

Тогда по признаку Даламбера:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2) \cdot (3n+1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1) \cdot (4n+5)} \cdot \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1,\end{aligned}$$

и искомый ряд сходится. ■

**Таблица эквивалентностей**

$\sin(\alpha) \sim \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha) \sim \alpha$	$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$
$\arcsin(\alpha) \sim \alpha$	$\operatorname{arctg}(\alpha) \sim \alpha$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$1 - \cos(\alpha) \sim \frac{\alpha^2}{2}$	$\operatorname{ctg}(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\log_b(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln(b)}$
$\pi/2 - \arccos(\alpha) \sim \alpha$	$e^\alpha - 1 \sim \alpha$	$b^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln(b)$

Пример 9 Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2 - n + 1}\right)$ .

**Решение.** По таблице эквивалентностей общий член искомого ряда  $a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2 - n + 1}\right) \sim \frac{1}{n^2 - n + 1} \sim b_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1} = 0$ .

Из сходимости (2.1) обобщенного гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  следует сходимость данного ряда. ■

Пример 10 Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

**Решение.** Так как общий член ряда  $a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} \sim b_n = \frac{n!}{n^n}$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то по второму признаку сравнения исследуем на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ .

Применим к нему достаточный признак Даламбера:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + 1/n\right)^n} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Так как  $1/e < 1$ , следовательно, полученный и исходный ряды сходятся. ■

Пример 11 Исследовать на сходимость числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}\right)$ .

**Решение.** Так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/3}}{n^{5/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{13/6}} = 0$ , то к общему члену ряда можно применить эквивалентность:  $\sin(\alpha) \sim \alpha$ . Поэтому  $a_n = \sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}\right) \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}} \sim b_n = \frac{1}{n^{13/6}}$ , при  $n \rightarrow +\infty$ . Из сходимости (2.1) обобщенного гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}}$  ( $p = 13/6 > 1$ ), следует сходимость искомого ряда. ■

**Пример 12** Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} \right).$$

**Решение.** Упростим общий член ряда  $a_n$ , умножив и разделив его на сопряженное:

$$a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} = \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1})^2 - (\sqrt{n^2 + n - 1})^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 1}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 1}} \sim \frac{2}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

То есть по второму признаку сравнения искомый ряд эквивалентен в смысле сходимости с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Так как гармонический ряд расходится (см.(2.1)), то из этого следует расходимость данного ряда. ■

**Пример 13** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ .

**Решение.** Составим ряд из абсолютных величин его членов:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ .

Применим к получившемуся знакоположительному ряду достаточный признак

Коши:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2}$  (в силу второго

замечательного предела). Из расходимости данного ряда по признаку Коши (так как  $\frac{e}{2} > 1$ ) следует расходимость исходного ряда. ■

**Пример 14** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$ .

**Решение.** Искомый ряд является знакочередующимся, исследуем его на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin^3 \left( \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \left( \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right)$ . К общему члену получившегося знакоположительного ряда можно применить эквивалентность  $\sin \alpha \sim \alpha$ , так как  $\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Тогда  $\sin^3 \left( \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right) \sim \left( \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right)^3$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^3}{8 n^{3/2}} = \frac{\pi^3}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  (см. (2.2) – сходимость обобщенного гармонического ряда,  $q = \frac{3}{2} > 1$ ) следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \left( \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \right)$ . Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 15 Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{2})^n}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}}$ .

**Решение.** Исследуем исходный ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}}$ . Из оценки общего члена получившегося знакоположительного ряда  $\frac{2^{n/2}}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}} < \frac{2^{n/2}}{3^n}$  и первого признака сравнения следует сходимость ряда, составленного из абсолютных величин, т.к.  $\left( \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^n$  есть общий член сходящегося геометрического ряда со знаменателем  $q = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ . Поэтому исходный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{2})^n}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}}$  сходится абсолютно. ■

Пример 16 Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{3n+2}{2n+3} \right)^n$

**Решение.** Данный ряд – знакочередующийся, поэтому проверим его на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин. По виду общего члена полученного ряда делаем выбор достаточного признака сходимости.

Применим признак Коши с общим членом  $a_n = \left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n$ . Очевидно, что

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{2n+3}\right) = \frac{3}{2} > 1$ . Так как ряд, составленный из абсолютных величин, расходится по признаку Коши, то и искомый ряд расходится.

Можно было исследовать этот ряд с помощью необходимого признака сходимости. Так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ , то исходный ряд расходится (не выполняется первое условие Лейбница). ■

Пример 17. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{5^n n!}$

**Решение.** Данный ряд – знакочередующийся, поэтому проверим его на абсолютную сходимость. Ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, исследуем на сходимость по признаку Даламбера. Так как общий

член  $a_n = \frac{n^n}{5^n n!}$ ;  $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)!}$ , то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)!} : \frac{n^n}{5^n n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n (n+1)^{n+1} n!}{5^{n+1} n^n (n+1)!} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{5} < 1, \end{aligned}$$

и данный ряд сходится. Поэтому искомый ряд сходится абсолютно. ■

Пример 18. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2)}{n^2}$

**Решение.** Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi n^2) = \infty \neq 0$ , то нельзя применить эквивалентность:  $\sin \alpha \sim \alpha$ . Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Составим

ряд из модулей членов исходного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\pi n^2)|}{n^2}$ . Так как  $|\sin(\pi n^2)| \leq 1$ , то

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\pi n^2)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Из сходимости обобщенного гармонического ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  по первому признаку сравнения следует сходимость исходного ряда. ■

Пример 19. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$

**Решение.** Данный знакочередующийся ряд исследуем на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин исходного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$ . Очевидно, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$  по второму признаку сравнения одновременно расходится с  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  ( $p = 1/2 < 1$ ). Тогда, по первому признаку сравнения из расходимости «меньшего» ряда следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$ . Следовательно, абсолютной сходимости исходного ряда нет. Проверим выполнение условий признака Лейбница на условную сходимость. Отметим, что вместо члена  $\frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$  можно рассматривать  $\frac{1}{\sqrt{n} + 1}$ . Условия 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1} = 0$  и 2)  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$  выполняются, следовательно, исходный ряд условно сходящийся. ■

Пример 20. Докажите, с помощью рядов, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n!}{n^n} \right) = 0$

**Решение.** Составим числовой ряд, общий член которого задан по формуле:  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ . Полученный ряд – знакположительный, поэтому применим к нему достаточный признак сходимости. По виду общего члена ряда останавливаем свой выбор на признаке Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

(использовали второй замечательный предел). Следовательно, ряд сходится. По необходимому признаку сходимости (1.3): *если числовой ряд сходится, то*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \text{ следовательно } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n!}{n^n} \right) = 0. \blacksquare$$

# ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти сумму ряда:

1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n - 5};$

б)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4 - 5n}{n(n-1)(n-2)}.$

2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}.$

3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5};$

б)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n - 5}{n(n^2 - 1)}.$

4. а)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5};$

б)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n - 2}{n(n-1)(n+2)}.$

5. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8};$

б)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n - 4}{n(n-1)(n-2)}.$

6. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 6}{n(n+1)(n+2)}.$

7. а)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3};$

б)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}.$

8. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + 3}{n(n+1)(n+3)}.$

9. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 6}{n(n+2)(n+3)}.$

10. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12};$

б)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 4)}.$

11. а)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 2}{n(n+1)(n+2)}.$

12. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n - 2}{n(n-1)(n+2)}.$

2. Исследовать ряды на сходимость, используя признаки сравнения:

1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n(n+1)}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n-\ln(n)}$ .

2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{6^n}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n} \ln(n+1)}$ .

3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(3n)}{n\sqrt{n}}$ ;

б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{n^3-5}$ .

4. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n)}{n^2+1}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+\cos(\pi n))}{2n^2-1}$ .

5. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n^2+1)}{n \cdot 5^n}$ ;

б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin((n-1)/n)}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$ .

6. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin^4(n)}{(n+1) \cdot 3^n}$ ;

б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$ .

7. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4(\pi n/2)}{4^n+n^2}$ ;

б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \ln(n)}{n^2-3}$ .

8. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3 \cdot (2+\sin(\pi n/2))}$ .

9. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(3n)}{9^n+3}$ ;

б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}n\right)$ .

10. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$ ;

б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot \arctg \sqrt{n^2-1}}{\pi \cdot \sqrt{n^2-n}}$ .

11. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n/2)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(2+(-1)^n)}{\ln(1+n)}$ .

12. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n^7}}$ ;

б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\cos^2(6n)}$ .

3. Применяя признак Коши исследовать на сходимость числовые ряды

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n (n+1)^3$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$

4. Применяя признак сравнения и интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(2n)}$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(n+1)}$
5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}$
6.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}$
7.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln^2(n+1)}$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+7)}$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5})}$
12.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n}$

5. Исследовать на сходимость ряды по признаку Даламбера:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n(n-1)!}.$$

$$2. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{7}{(n-3)n!}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

$$4. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot (n-5)!}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} \cdot (n^3 + 2)}{(n-1)!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! \cdot 5^{n+1}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(2n+1)!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2 + 2)}{(n+1)!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{4n+5} \cdot \frac{1}{7^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(n+2)!}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{2}{5^n}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

6. Исследовать на сходимость ряды, используя подходящие признаки сходимости:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt[3]{n} \cdot 5^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \ln \left( \frac{n+1}{n-1} \right).$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + 5n}{4n^2 - 6n} \right)^n.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)^n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^n.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^3}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(4n+3)^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n - n^3}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1) \cdot \arctg(n)}.$$

7. Исследовать на сходимость с помощью признаков сравнения, применять таблицу эквивалентностей.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right).$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+2) \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right).$
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n+2}\right).$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{n^2+2}\right).$
5.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}\right).$
6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}\right).$
7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{1/\sqrt{n}} - 1\right).$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{(n+2)(\sqrt{n}+1)}\right).$
9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\pi/(4n))}{\sqrt[5]{2n^5-1}}.$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n+2}{(n^2+1)\sqrt{n}}\right).$
11.  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(2\pi/n)).$
12.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right).$

8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4+4};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(5n)}{n^5}.$
2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arcsin(n/(n+1))}{\sqrt{n^2+n}};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n^2+1}}{n^3}$
3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n.$
4. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sin^3\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$
5. а)  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
6. а)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}.$
7. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{2n+3}}.$
8. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{3n+1}};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$
9. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{6n}\right);$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{3^n}.$
10. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$
11. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right);$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$
12. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n};$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$