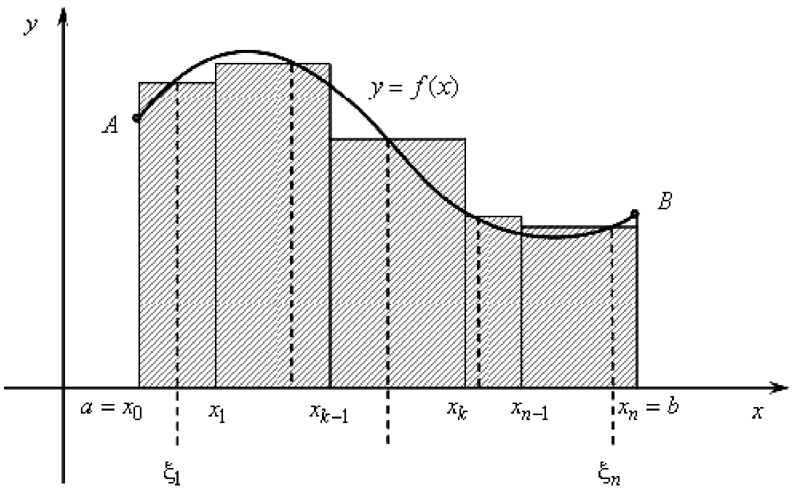
Лекция 2

1. Определенный интеграл и его свойства

1.1. Определение определенного интеграла

Рассмотрим некоторую функцию f(x), определенную на промежутке [a; b] (a<b).



1. Разобьем промежуток $[a;b]$ точками $x_0 = a;\ x_1;\ x_2;\ \ldots x_k;\ x_{k+1};\ \ldots x_n = b$ произвольным образом на n-частей. Введем следующие обозначения:

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина участка разбиения,

$\lambda = \sup\{\Delta x_k\}$ – диаметр разбиения (наибольшая из всех длин участков разбиения).

2. На каждом частичном участке $[x_k; x_{k+1}]$ возьмем произвольную точку ξ_k и вычислим в ней значение функции $f(\xi_k)$.

3. Составим произведение: $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$.

4. Составим сумму $\sigma_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$. Назовем эту сумму интегральной суммой или суммой Римана.

5. Измельчая дробление (за счет увеличения числа точек дробления n) и устремляя при этом диаметр разбиения к нулю $(\lambda \to 0)$, найдем предел последовательности интегральных сумм

$$J = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sigma_n .$$

Определение. Если этот предел существует, не зависит от способа дробления и выбора точек ξ_k, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ и обозначается так:

$$J = \int_a^b f(x)dx .$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

В случае когда для функции $f(x)$ существует определенный интеграл $J = \int_a^b f(x)dx$, функция $f(x)$ называется интегрируемой на промежутке $[a;b]$.

***Замечания*: 1.** В приведенном определении предполагается, что $a < b$. Понятие определенного интеграла можно обобщить и на случай, когда $a > b$ или $a = b$. Действительно, будем считать по определению, что

если $a > b$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

если $a = b$, то $\int_a^b f(x)dx = 0$.

2. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt .$$

3. Если $f(x) \equiv 1$, то $\int_a^b dx = b - a$.

1.2. Суммы Дарбу. Второе определение определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ – произвольное разбиение $[a,b]$. Обозначим через $\tau[a,b]$ семейство всех разбиений отрезка $[a,b]$.

Так как функция ограничена на всём отрезке $[a,b]$, то она ограничена на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, поэтому существуют точные верхняя и нижняя грани функции на этом отрезке:

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad ; \qquad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Второе определение интеграла Римана вводится с помощью величин:

$\overline{D}(f,T) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$ – верхняя интегральная сумма Дарбу;

$\underline{D}(f,T) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ – нижняя интегральная сумма Дарбу.

Эти суммы, в отличие от интегральных сумм Римана зависят только от разбиения.

Свойства сумм Дарбу

1) Для одной и той же функции и конкретного разбиения верхняя сумма Дарбу всегда не меньше, чем нижняя: $\overline{D}(f,T) \geq \underline{D}(f,T)$.

2) При измельчении разбиения, то есть при добавлении новых точек к исходному разбиению, верхние суммы Дарбу для одной и той функции не увеличиваются, а нижние суммы Дарбу не уменьшаются.

3) Для одной и той же функции и любых разбиений T_1 и T_2 верхняя сумма Дарбу, соответствующая разбиению T_1, не меньше, чем нижняя сумма Дарбу, соответствующая разбиению T_2:

$$\forall T_1, T_2 \in \tau[a,b] : \qquad \overline{D}(f,T_1) \geq \underline{D}(f,T_2).$$

Зафиксируем некоторое разбиение T_0. Рассмотрим семейство всех верхних сумм Дарбу $\{\overline{D}(f,T)\,|\,T\in\tau[a,b]\}$. В силу свойства 3) сумм Дарбу, $\forall T\in\tau[a,b]$: $\overline{D}(f,T)\geq \underline{D}(f,T_0)$, то есть множество всех верхних сумм Дарбу ограничено снизу, поэтому существует конечная точная нижняя грань у этого множества и эта величина называется верхним интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$: $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\limits_{T\in\tau[a,b]} \overline{D}(f,T)$.

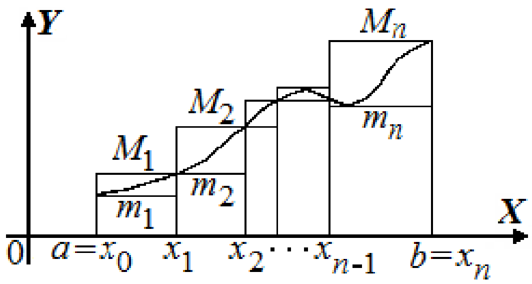
Аналогично существует конечная точная верхняя грань у множества всех нижних сумм Дарбу и эта величина называется нижним интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$: $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\limits_{T\in\tau[a,b]} \underline{D}(f,T)$.

Определение. Если верхний интеграл равен нижнему, то функция $f(x)$ является интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$ и интеграл Римана равен любому из этих значений. То есть из равенства

$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ следует, что $f(x)\in \mathbf{R}[a,b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Геометрический смысл сумм Дарбу



Верхняя интегральная сумма Дарбу $\overline{D}(f,T)=\sum\limits_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$ равна площади ступенчатой фигуры, внутри которой лежит криволинейная трапеция.
Нижняя интегральная сумма Дарбу $\underline{D}(f,T)=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$ задаёт площадь ступенчатой фигуры, которая содержится внутри криволинейной трапеции. Для непрерывной функции при измельчении разбиения площади обеих этих ступенчатых фигур стремятся к площади криволинейной трапеции.

Теорема (критерий интегрируемости Риману).
Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$, найдётся разбиение T_ε, такое, что разность $\overline{D}(f,T_\varepsilon)-\underline{D}(f,T_\varepsilon)<\varepsilon$.

1.3. Классы интегрируемых функций.

Необходимое условие интегрируемости – ограниченность функции. Суммы Дарбу можно составить только для ограниченных функций, так как величины m_k и M_k не определены в случае неограниченности функции.
Условие ограниченности функции не является достаточным для её интегрируемости. Есть функции ограниченные, но не интегрируемые.

Пример функции, не интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$.
Рассмотрим функцию Дирихле, которая в рациональных точках отрезка $[a,b]$ принимает значение 1, а в иррациональных точках отрезка $[a,b]$ принимает значение 0:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b]\cap\mathbf{Q}\\ 0, & x\in[a,b]\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Очевидно, что эта функция ограниченна. Покажем, что она не является интегрируемой.
Пусть $T: a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. В силу свойства всюду плотности множества рациональных чисел во множестве действительных чисел, в каждом частичном отрезке разбиения найдется рациональное число, поэтому верхние суммы Дарбу для любого разбиения равны

$$\overline{D}(f,T)=\sum_{k=1}^{n}1\cdot(x_k-x_{k-1})=b-a.$$

Отсюда верхний интеграл Римана равен $\overline{\int_a^b} f(x)dx=b-a$.

Поскольку иррациональные числа также обладают свойством всюду плотности во множестве действительных чисел, то для любого разбиения нижние суммы Дарбу равны $\underline{D}(f,T)=\sum_{k=1}^{n}0\cdot(x_k-x_{k-1})=0$

и, следовательно, нижний интеграл Римана $\underline{\int_a^b} f(x)dx=0$.

Поскольку для функции Дирихле верхний интеграл Римана не совпадает с нижним интегралом, то функция Дирихле не интегрируема по Риману.
Существует несколько теорем на достаточное условие интегрируемости:

Теорема 1 (достаточное условие интегрируемости).
Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости).
Если функция $f(x)$ определена на всем отрезке $[a,b]$ и возрастает на этом отрезке, то функция будет интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$.

Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва можно покрыть системой конечного или счётного числа интервалов, сумма длин которых меньше ε, где ε - сколь угодно малое число.

1.4. Геометрический смысл определенного интеграла Римана.

Допустим, что функция $f(x)$ непрерывна и положительна на промежутке $[a;b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию *ABCD*. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ дает нам сумму площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотами $f(\xi_k)$. Ее можно принять за приближенное значение площади криволинейной трапеции *ABCD*, т. е.

$$S_{ABCD} \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k ,$$

причем это равенство будет тем точнее, чем мельче дробление, и в пределе при $n \to +\infty$ и $\lambda \to 0$ мы получим

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)dx .$$

В этом и заключается геометрический смысл определенного интеграла.

1.5. Свойства определенного интеграла Римана.

Свойство 1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx .$$

Доказательство.

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} Af(\xi_k)\Delta x_k = A \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = A\int_a^b f(x)dx.$$

Свойство 2. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.

Доказательство.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} (f_1(\xi_k) + f_2(\xi_k))\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\xi_k)\Delta x_k \right) = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx .$$

Свойство 3. Для любых трех чисел *a*, *b*, *c* справедливо равенство

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, если все эти интегралы существуют.

Доказательство. Пусть $a < c < b$. Составим интегральную сумму так, чтобы точка c была точкой деления. Тогда

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим доказательство свойства 3.

Если $a < b < c$, то, по только что доказанному,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx ,$$

или

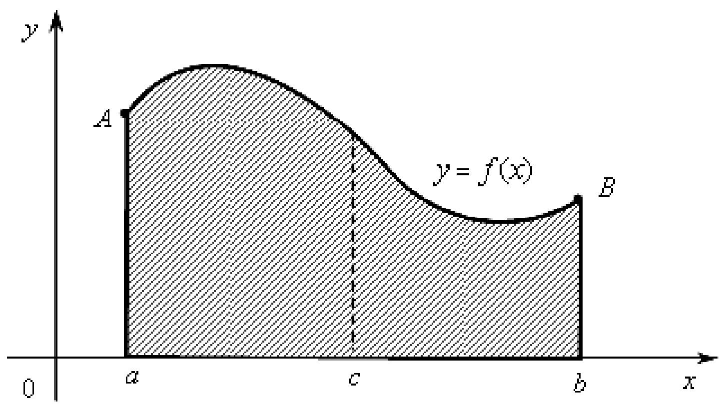
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx .$$

Но $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$, поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Аналогично доказывается это свойство и при любом другом расположении точек a, b и c.

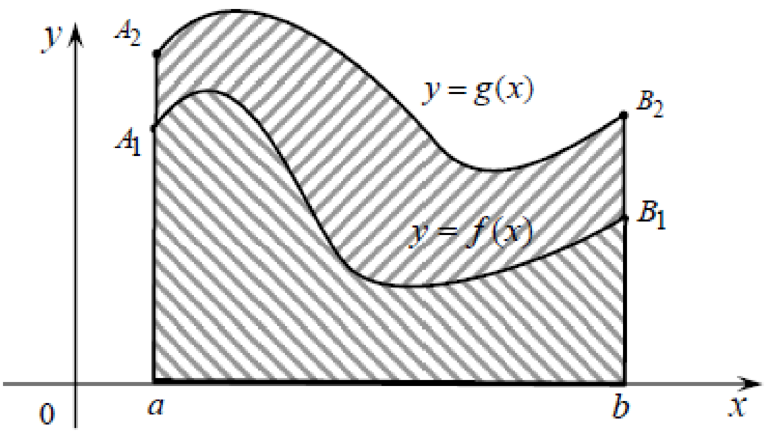
Геометрическая интерпретация: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$.



Свойство 4. Если на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

Геометрическая интерпретация: площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b.



Следствия:

a) если $a < b$ и $\forall x \in [a;b]$: $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$;

b) если $a < b$ и $\forall x \in [a;b]$: $f(x) \leq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0$.

Свойство 5 (теорема об оценке определенного интеграла).

Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $a \leq b$, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Свойство 6 (теорема о среднем).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

Доказательство. Пусть $a < b$, m и $\grave{I}$ – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a, b]$. По свойству 5 имеем

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq M.$$

Тогда

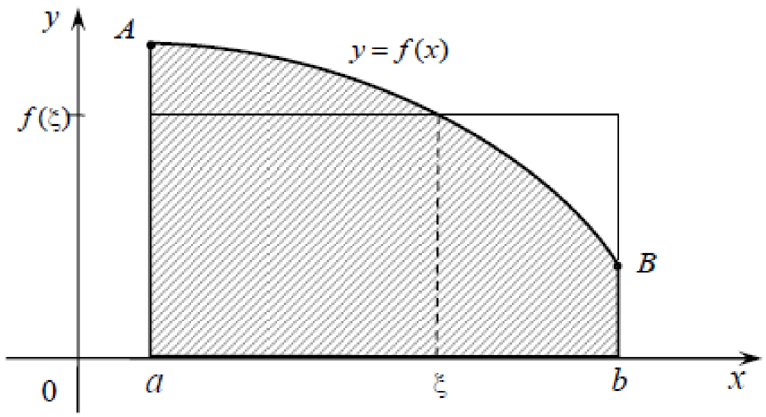
$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \mu,\ \ m \leq \mu \leq M.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, она принимает на нем все промежуточные значения между m и Ì , т. е. существует $\xi (a \le \xi \le b)$ такое, что $f(\xi) = \mu$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Геометрическая интерпретация дана на рисунке для $f(x) > 0$. Так как значение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$, то теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник, площадь которого равна площади криволинейной трапеции $aABb$.



2. Вычисление определенного интеграла.

2.1. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом (теорема Барроу).

Теорема. **Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, имеет производную, равную значению подынтегральной функции при верхнем пределе, т. е.**

$$\boldsymbol{\Phi'(x) = f(x)}.$$

Так как интеграл $\int_a^x f(t)dt$ существует для любого значения x, то данная теорема является одновременно и теоремой о существовании первообразной у каждой непрерывной функции $f(x)$. Этой первообразной может быть определенный интеграл с переменным верхним пределом:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

2.2. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Функция $F(x)$ – любая из первообразных функции $f(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(t)\Big|_a^b$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что интеграл с переменным верхним пределом является первообразной функции $f(x)$. Поскольку $F(x)$ также является первообразной и две различные первообразные отличаются только на константу, то

$$\int\limits_a^x f(t)dt - F(x) = C. \qquad (1)$$

Найдем костанту *C*. Положим в последнем равенстве $x = a$:

$\int\limits_a^a f(t)dt - F(a) = C$. Отсюда находим значение константы $C = -F(a)$. Подставив его в равенство (1), получаем

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) .$$

Полагая в этом равенстве $x = b$, получаем искомую формулу $\int\limits^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Теорема. **Если $F(x)$ является первообразной непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{0,5} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx.$

Решение:

$$\int\limits_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx = \int\limits_1^e\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)dx = \left(2\sqrt{x} + \ln x\right)\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 1.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^\pi (2x + \sin 2x)dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^\pi (2x + \sin 2x)dx = \left(x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^\pi = \pi^2 - \frac{1}{2}\cos 2\pi + \frac{1}{2}\cos 0 = \pi^2.$$

Пример 4. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = x^2$ при $x \in [1,2]$.

Решение:

$$S = \int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ кв. ед.}$$

2.3. Метод замены переменной.

Теорема. **Если:**

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$,

2) функция $x=\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$,

3) функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$.

Решение:

$$\int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx=\left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1, \\ dx=2tdt; \\ x\big|_3^8\rightarrow t\big|_2^3 \end{array}\right\}=\int_2^3\frac{(t^2-4)2t}{t}dt=$$

$$=2\int_2^3(t^2-4)dt=\left(\frac{2}{3}t^3-8t\right)\Bigg|_2^3=-6+\frac{32}{3}=\frac{14}{3}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^1\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

Решение:

$$\int_0^1\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}=\left\{\begin{array}{l} t=e^x\rightarrow dt=e^x dx, \\ e^{2x}+1=t^2+1, \\ x\big|_0^1\rightarrow t\big|_1^e \end{array}\right\}=\int_1^e\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}.$$

2.4. Формула интегрирования по частям.

Теорема. **Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a;b]$, то**

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^\pi x\cos x\,dx$.

Решение. Обозначим через

$u=x$; $du=dx$

$dv=\cos x\,dx$; $v=\sin x$.

Подставляя эти выражения в формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx=x\sin x\big|_0^\pi-\int_0^\pi\sin x\,dx=\cos x\big|_0^\pi=-2.$$

3. Несобственный интеграл
3.1 Несобственный интеграл первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \le x < +\infty$ и интегрируема на любом сегменте $a \le x \le A$, то есть существует определенный интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx.$$

Будем обозначать его $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и называть ***несобственным интегралом первого рода*** от функции f(x) по полу прямой $[a;\ +\infty)$.

Если предел существует, то несобственный интеграл первого рода называется ***сходящимся***. Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл первого рода называют ***расходящимся.***

Аналогично определяются несобственный интеграл по полупрямой $(-\infty; a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx$$

и несобственный интеграл по всей числовой прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}}\int_B^A f(x)dx.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость в зависимости от параметра p несобственный интеграл $I_p = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}$.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $p=1$.Тогда

$$I_1 = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$$

В этом случае интеграл расходится.

Пусть теперь $p \ne 1$. Тогда

$$I_p = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-p}-1}{1-p}\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1} & \text{при } p>1;\\ \infty & \text{при } p<1.\end{cases}$$

Итак, $\boxed{\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ сходится при } p > 1 \text{ и расходится при } p \le 1}$.

Пример 2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} (\operatorname{arctg} x|_0^A) = \lim\limits_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{A\to+\infty} (\sin x|_0^A) = \lim\limits_{A\to+\infty} \sin A.$ Так как этот предел не существует, то интеграл расходится.

3.2. Несобственный интеграл второго рода

Рассмотрим функцию f(x) заданную на полусегменте (a; b], где a<b, неограниченную на этом полусегменте, но ограниченную на любом сегменте $\left[a+\delta; b\right]$, где $0 < \delta < b - a$. Точку a назовем ***особой точкой*** функции f(x).

Рассмотрим предел $\lim\limits_{\delta\to+0} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$. Будем обозначать его $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и называть ***несобственным интегралом второго рода*** от функции f(x) по полусегменту $(a\,;b]$.

Если предел существует, то несобственный интеграл второго рода называется ***сходящимся***. Если указанный предел не существует, то несобственный интеграл второго рода называют ***расходящимся.***

Пример 1.

$\boxed{\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^p} \text{ сходится при } p < 1 \text{ и расходится при } p \ge 1}$.

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода от функции $f\left(x\right)$ по полусегменту $\left[a;b\right)$, где b – особая точка функции $f\left(x\right)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0} \int_a^{b-\delta} f\left(x\right)dx$$

и несобственный интеграл второго рода от функции $f\left(x\right)$ по интервалу $\left(a;b\right)$, где a и b – особые точки функции $f\left(x\right)$, а других особых точек у функции на интервале $\left(a;b\right)$ нет:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta_1\to+0\\ \delta_2\to+0}} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f\left(x\right)dx.$$

Если особой точкой функции $f\left(x\right)$ является внутренняя точка c сегмента $\left[a;b\right]$, то несобственный интеграл определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta_1\to+0} \int_a^{c-\delta_1} f\left(x\right)dx + \lim_{\delta_2\to+0} \int_{c+\delta_2}^{b} f\left(x\right)dx.$$

Если оба предела существуют, то интеграл называют сходящимся, если хотя бы один из пределов не существует, то его называют расходящимся.

Пример 2. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ - сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ - расходится. Доказать, что интеграл $\int_a^{+\infty} \left(f(x)+g(x)\right)dx$ - расходится.

Докажем от противного. Предположим, что $\int_a^{+\infty} \left(f(x)+g(x)\right)dx$ сходится. Для любого $A > a$ справедливо равенство:

$$\int_a^A \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_a^A g(x)dx,$$

из которого следует, что

$$\int_a^A g(x)dx = \int_a^A \left(f(x)+g(x)\right)dx - \int_a^A f(x)dx.$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $A\to+\infty$. Согласно условию задачи и сделанному предположению предел каждого слагаемого в правой части существует, поэтому по теореме о пределе разности существует предел в правой части равенства. Следовательно, должен существовать и предел левой части, что противоречит условию.

3.2. Формулы для вычисления несобственных интегралов

3.2.1 Для вычисления несобственных интегралов можно применять обобщение на эти интегралы формулы Ньютона-Лейбница.

Если существует первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ при $a \le x < \infty$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, то справедливо равенство (***формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов первого рода***):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \text{ где } F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Если у функции $f(x)$ с особой точкой $x = a$ существует первообразная $F(x)$ при $a < x \le b$ и существует $\lim\limits_{\delta\to+0} F(a+\delta)$, то справедливо равенство (***формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов второго рода***):

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b} = F(b) - F(a), \text{ где } F(a) = \lim_{\delta\to+0} F(a+\delta).$$

Задача. Докажите по определению, что интегралы сходятся, и вычислите их:

а) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{1+x^2}$.

3.2.2 Формула интегрирования по частям для несобственного интеграла первого рода имеет вид

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx,$$

где $f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a)$. При этом предполагается, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны вместе со своими производными на всей области интегрирования.

Формула интегрирования по частям для несобственного интеграла второго рода имеет вид

$$\int_a^{b} f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^{b} - \int_a^{b} f'(x)g(x)dx,$$

где $f(x)g(x)\Big|_a^{b} = f(b)g(b) - \lim\limits_{\delta\to+0} f(a+\delta)g(a+\delta)$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} (2x+1)e^{-x}dx$.

Применим формулу интегрирования по частям, положив $f(x) = 2x+1,\ \ g'(x) = e^{-x}$:

$$\int_0^{+\infty}(2x+1)e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}2e^{-x}dx = 1-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 3.$$

3.2.3 Замена переменной в несобственных интегралах.

Теорема Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $a \le x < +\infty$, а функция $x = g(t)$ строго монотонна и имеет непрерывную производную на полупрямой $\alpha \le t < +\infty$, где $a = g(\alpha)$ и $g(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt$ следует сходимость другого, и справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt.$$

Теорема Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полусегменте $(a;b]$, точка $x = a$ – особая точка этой функции. Пусть функция $x = g(t)$ строго монотонна и имеет непрерывную производную на полусегменте $(\alpha;\beta]$, где $b = g(\beta)$, и $g(t) \to a$ при $t \to \alpha$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$ следует сходимость другого, и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Пример Вычислить с помощью замены переменной несобственный интеграл первого рода $\int_1^{+\infty}\frac{e^x dx}{1-e^{2x}}$.

Знаменатель в подынтегральном выражении не обращается в нуль на полупрямой $1 \le x < +\infty$, и, следовательно, подынтегральная функция непрерывна на этой полупрямой.

В рассматриваемом примере удобно сделать замену пременной при помощи равенства $t = e^x$ (см. замечание к теоремам 3 и 4). Функция $t = e^x$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на полупрямой $1 \le x < +\infty$; $t(1) = e$, $t \to +\infty$ при $x \to +\infty$ и выполнены равенства $e^{2x} = t^2$, $e^x dx = dt$. Исходный интеграл преобразуется следующим образом:

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^x dx}{1-e^{2x}} = \int_e^{+\infty}\frac{dt}{1-t^2}.$$

Последний интеграл вычислим при помощи формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_e^{+\infty}\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Bigg|_e^{+\infty} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+e}{1-e}\right|.$$

3.3. Критерии сходимости неопределенного интеграла от положительной функции.

Теорема Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,\ f(x) \geq 0$ сходится тогда и только тогда, когда существует такое M, что $\int\limits_a^{A} f(x)dx \leq M,\ \forall A \geq a.$.

Замечание Если $f(x) \leq 0$ на промежутке $[a, +\infty)$, то исследование сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сводится к исследованию сходимости интеграла от положительной функции $\int\limits_a^{+\infty}(-f(x))dx.$

Теорема (признак сравнения) Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in [c, +\infty),\ c \geq a.$

а) Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx,$ (1), то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$ (2);
б) Если интеграл (2) расходится, то расходится интеграл (1).

Теорема (предельный признак сравнения)

Пусть $f(x) \geq 0,\ g(x) > 0\ \forall x \in [a, +\infty)$, и существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l,\ 0 \leq l \leq +\infty.$$

а) Если $0 < l < +\infty$, то оба интеграла сходятся или оба расходятся.

б) Если $l = 0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$

в) Если $l = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$

Выше мы рассматривали два эталонных интеграла:

$\int\limits_{b}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$

$\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$

Запомним их, далее будем использовать эти эталонные интегралы при исследовании на сходимость несобственных интегралов.

3.4. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов первого рода.

Определение. Несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^{\infty} |f(x)|dx.$$

Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а интеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

Решение.

Функция $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} \in C([0;+\infty))$ (f -- частное двух непрерывных на R функций). Следовательно $x = +\infty$ -- единственная особая точка. По определению сходимости несобственного интеграла имеем:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{0}^{t} \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \lim_{t\to+\infty} arctg\, e^x \Big|_0^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (arctg\, e^t - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in R.$$

Следовательно, исходный интеграл сходится по определению.

Пример 2. Исследовать на сходимость $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$.

Решение.

Функция $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\in C\left((0;\dfrac{\pi}{2}]\right)$, в точке $x=0$ $f(x)$ не определена, причем $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$. Следовательно, функция $f(x)$ не ограничена в правосторонней окрестности точки $x=0$, а потому точка $x=0$ -- единственная особая точка. По определению сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx=\lim_{t\to+0}\int_t^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx=\lim_{t\to+0}\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x)=\lim_{t\to+0}\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}}\Big|_t^{\pi/2}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}}t\right)=\frac{3}{2}\in R.$$

Следовательно, исходный интеграл сходится по определению.

Пример 3. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty}x\sin x\,dx$.
Решение.

Функция $f(x)=x\sin x\in C([0;+\infty))$, следовательно, $x=+\infty$ единственная особая точка. По определению сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty}x\sin x\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x\sin x\,dx=\left\|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin x\,dx & v=-\cos x\end{matrix}\right\|=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-x\cos x\Big|_0^t+\int_0^t\cos x\,dx\right)=\lim_{t\to+\infty}(-t\cos t+\sin t).$$

Здесь использовали теорему об интегрировании по частям несобственного интеграла. Так как последний предел не существует, то по определению несобственный интеграл расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ при $a>0$ и $b\neq 0$.
Решение.

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \left[u = e^{-ax}, du = -ae^{-ax}dx, dv = \cos bx dx, v = \frac{1}{b}\sin bx\right] =$$

$$= \frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{a}{b}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx =$$

$$= \left[u = e^{-ax}, du = -ae^{-ax}dx, dv = \sin bx dx, v = -\frac{1}{b}\cos bx\right] =$$

$$= -\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx,$$

то

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Аналогично,

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2},\ a > 0.$$

Пример 5. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 4x}{\sqrt[5]{x^6+x^3+1}}dx.$

Решение.

На промежутке $[1; +\infty)$ справедлива оценка $\frac{\sin^2 4x}{\sqrt[5]{x^6+x^3+1}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}.$ Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6/5}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

Пример 6. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+\cos^2 x}dx.$

Решение.

Подынтегральная функция положительна для x>1 и при достаточно больших x справедлива следующая оценка $\frac{\ln x}{x+\cos^2 x} \ge \frac{1}{x}$. Т.к. интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то и исходный интеграл по признаку сравнения расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+\sin^2 x}.$

Решение.

Представим исходный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+\sin^2 x} = \int_0^{1} \frac{x^2 dx}{x^4+\sin^2 x} + \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+\sin^2 x}.$$

Т.к. функция $\frac{x^2}{x^4+\sin^2 x}$ непрерывна на (0; 1] и $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^2}{x^4+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x^2+\frac{\sin^2 x}{x^2}}=1,$

То интеграл $\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{x^4+\sin^2 x}$ является интегралом Римана (т.е. сходящимся). Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+\sin^2 x}.$ Т.к. $\frac{x^2}{x^4+\sin^2 x}\le\frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то согласно признаку сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4+\sin^2 x}.$ тоже сходится. Следовательно, по свойству аддитивности сходится и исходный интеграл.

Пример 8. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$
Решение.

Для всех $x\ge 1$ справедлива оценка $\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2+1}}\le\frac{\ln x}{x^2}.$ Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$, то существует такое $a>1$, что $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\le 1$ для всех $x\ge a$. Поэтому для $x\ge a$ справедливо неравенство $\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2+1}}\le\frac{\ln x}{x^2}\le\frac{1}{x^{3/2}}.$ Интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, следовательно, согласно признаку сравнения, сходятся и интегралы $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

Пример 9. Исследовать на сходимость $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{\ln x}.$
Решение.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty.$ Т.к. интеграл $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится, то по предельному признаку сравнения исходный интеграл тоже расходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$
Решение.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=0.$ Т.к. интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то по предельному признаку сравнения исходный интеграл тоже сходится.

Пример 11. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.
Решение.

Обозначим $f\left(x\right)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$. Положим $g\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^4+x^2}{x^4+1}=1$ и $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится (эталонный интеграл),

то согласно предельному признаку сравнения интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ тоже сходится.

1. Бутузов В.Ф. Лекции по математическому анализу. Часть 1. М.: Физический факультет МГУ, 2012.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть II. М. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
3. В.А. Зорич. Математический анализ. Часть I. М. МЦНМО, 2002.
4. В.А. Зорич. Математический анализ. Часть II. М. МЦНМО, 2002.
5. Бутузов В.Ф. Лекции по математическому анализу. Часть III. М.: Физический факультет МГУ, 2015.
6. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М. «Наука», 1965.

1. Кудрявцев А.Д. // Курс математического анализа. –М.: «Высшая школа».-- Т.1.--1981.-- С. 511--544.