

Семинар 4

Пример 1.

Используя определение (вычислением $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$), исследовать на

сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3-k}{k(k+3)(k+1)}$.

Решение. Для преобразования частичных сумм используем разложение дроби на простейшие:

$$\frac{3-k}{k(k+3)(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+3}.$$

Методом неопределенных коэффициентов нашли значения: $A = 1$, $B = -2$ и $C = 1$. Следовательно, общий член ряда запишется в виде:

$$\frac{3-k}{k(k+3)(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+3}.$$

Тогда частичную сумму можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3-k}{k(k+3)(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+3} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+3}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Так как сумма ряда существует и равна конечному значению, то искомый ряд сходится. ■

Пример 2

Исследовать на сходимость числового ряд $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$

Решение. По виду членов ряда можно утверждать, что общий член ряда имеет вид: $a_n = \frac{n}{2n-1}$. То есть мы исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$. Проверим

необходимый признак сходимости ряда: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$. Т. к. он

нарушается, то данный ряд расходится (или говорим, расходится по достаточному признаку расходимости). ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}.$$

Пример 3 Исследовать на сходимость числовый ряд

Решение. Учитывая, что $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}} \sim b_n = \frac{1}{n^{5/2}}$ при $n \rightarrow +\infty$ (так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$), то по второму признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ ведут себя одинаково, в смысле сходимости. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ – обобщенный гармонический, и т.к. $p = \frac{5}{2} > 1$, то по (2.1) он является сходящимся.

Следовательно, искомый ряд также сходится. ■

$$\infty \sim 2 \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n-2}.$$

Пример 4 Исследовать на сходимость числового ряд

Решение. С помощью второго признака сравнения упростим исходный ряд, так как $a_n = \frac{2n^2+1}{3^n-2} \sim b_n = \frac{2n^2}{3^n}$ при $n \rightarrow +\infty$, то о сходимости искомого ряда можно судить по ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$. По виду общего члена последнего знакоположительного ряда можно сделать выбор достаточного признака, в данном случае признака Коши. По признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3} = \frac{1}{3}$$

(учли известный факт из матанализа: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Так как $q = \frac{1}{3} < 1$, то искомый ряд сходится. ■

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3(n)}.$$

Пример 5 Исследовать на сходимость числового ряд

Решение. Для того чтобы исследовать данный знакоположительный ряд на сходимость, удобно применить интегральный признак Коши, положив, что $f(x) = \frac{1}{x \ln^3(x)}$. Условия, допускающие применение этого признака, выполнены, ибо функция $f(x)$ непрерывна при $x \geq 2$, положительна при этих значениях x , монотонно убывает с ростом x и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; выполнение условия $f(n) = a_n$ очевидно. Исследуем соответствующий несобственный интеграл на сходимость:

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{2 \ln^2 2}.$$

Итак, несобственный интеграл сходится, следовательно, вместе с ним сходятся и искомый ряд. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{(n+4)!}$$

Пример 6 Исследовать на сходимость числового ряд

Решение. Так как общий член ряда $a_n = \frac{5n}{(n+4)!} \sim b_n = \frac{5^n}{n!}$, при $n \rightarrow +\infty$, то

исследуем по достаточному признаку Даламбера эквивалентный искомому ряд в

смысле сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{5^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1} n!}{5^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+1} = \left(\frac{c}{\infty} \right) = 0 < 1,$$

следовательно, исходный ряд сходится. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$$

Пример 7 Исследовать на сходимость числового ряд

Решение. Форма общего члена данного знакоположительного ряда наводит на мысль об использовании признака Коши. Действительно:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{-n-2} \right]^{\frac{n}{n+2}} = \left| \begin{array}{l} \text{второй замечательный} \\ \text{предел: } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^\alpha = e \end{array} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $e^{-1} = 1/e < 1$, то по признаку Коши исходный ряд сходится.

Решение возможно и с помощью признака Даламбера, но в этом случае его использование было бы нерационально. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)}.$$

Пример 8 Исследовать на сходимость числового ряд

Решение. Выпишем несколько первых слагаемых исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} = \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots$$

По форме общего члена данного ряда решаем использовать признак Даламбера.

Выпишем $(n+1)$ -ый член этого ряда:

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2) \cdot (3(n+1)-2)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1) \cdot (4(n+1)+1)} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2) \cdot (3n+1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1) \cdot (4n+5)}.$$

Тогда по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2) \cdot (3n+1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1) \cdot (4n+5)} \cdot \frac{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{4n+5} = \frac{3}{4} < 1,$$

и искомый ряд сходится. ■

Таблица эквивалентностей

$\sin(\alpha) \sim \alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha) \sim \alpha$	$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$
$\arcsin(\alpha) \sim \alpha$	$\operatorname{arctg}(\alpha) \sim \alpha$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$1 - \cos(\alpha) \sim \frac{\alpha^2}{2}$	$\operatorname{ctg}(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$	$\log_b(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln(b)}$
$\pi/2 - \arccos(\alpha) \sim \alpha$	$e^\alpha - 1 \sim \alpha$	$b^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln(b)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2 - n + 1}\right).$$

Пример 9 Исследовать на сходимость числовой ряд

Решение. По таблице эквивалентностей общий член искомого ряда $a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2 - n + 1}\right) \sim \frac{1}{n^2 - n + 1} \sim b_n = \frac{1}{n^2}$, $n \rightarrow +\infty$, так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1} = 0$.

Из сходимости (2.1) обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ следует сходимость данного ряда. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$$

Пример 10 Исследовать на сходимость числовой ряд

Решение. Так как общий член ряда $a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} \sim b_n = \frac{n!}{n^n}$ при $n \rightarrow +\infty$, то

по второму признаку сравнения исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Применим к нему достаточный признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + 1/n\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Так как $1/e < 1$, следовательно, полученный и исходный ряды сходятся. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}\right).$$

Пример 11 Исследовать на сходимость числовой ряд

Решение. Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1/3}}{n^{5/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{13/6}} = 0$, то к общему члену ряда можно применить эквивалентность: $\sin(\alpha) \sim \alpha$. Поэтому $a_n = \sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}\right) \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}} \sim b_n = \frac{1}{n^{13/6}}$, при $n \rightarrow +\infty$. Из сходимости (2.1) обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13/6}}$ ($p = 13/6 > 1$), следует сходимость искомого ряда. ■

Пример 12 Исследовать на сходимость числовый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} \right).$$

Решение. Упростим общий член ряда a_n , умножив и разделив его на сопряженное:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} = \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1})^2 - (\sqrt{n^2 + n - 1})^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 1}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 + n - 1}} \sim \frac{2}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \text{ при } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

То есть по второму признаку сравнения искомый ряд эквивалентен в смысле сходимости с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится (см.(2.1)), то из этого следует расходимость данного ряда. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

Пример 13 Исследовать на сходимость ряд

Решение. Составим ряд из абсолютных величин его членов: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

Применим к получившемуся знакоположительному ряду достаточный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} \quad (\text{в силу второго замечательного предела}).$$

Из расходимости данного ряда по признаку Коши (так как $\frac{e}{2} > 1$) следует расходимость исходного ряда. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right).$$

Пример 14 Исследовать на сходимость ряд

Решение. Искомый ряд является знакочередующимся, исследуем его на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$. К общему члену получившегося знакоположительного ряда можно применить эквивалентность $\sin \alpha \sim \alpha$, так как $\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Тогда $\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right) \sim \left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^3$ при $n \rightarrow +\infty$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^3}{8 n^{3/2}} = \frac{\pi^3}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ (см. (2.2) – сходимость обобщенного гармонического ряда, $q = \frac{3}{2} > 1$) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ■

Пример 15 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{2})^n}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}}$

Решение. Исследуем исходный ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}}$. Из оценки общего члена получившегося знакоположительного ряда $\frac{2^{n/2}}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}} < \frac{2^{n/2}}{3^n}$ и первого признака сравнения

следует сходимость ряда, составленного из абсолютных величин, т.к. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$ есть общий член сходящегося геометрического ряда со знаменателем $q = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$.

Поэтому исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{2})^n}{3^n + \sqrt{n^2 + 1}}$ сходится абсолютно. ■

Пример 16 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n+3}\right)^n$

Решение. Данный ряд – знакочередующийся, поэтому проверим его на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин. По виду общего члена полученного ряда делаем выбор достаточного признака сходимости.

Применим признак Коши с общим членом $a_n = \left(\frac{3n+2}{2n+3} \right)^n$. Очевидно, что

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{2n+3} \right)^n = \frac{3}{2} > 1$. Так как ряд, составленный из абсолютных величин, расходится по признаку Коши, то и искомый ряд расходится.

Можно было исследовать этот ряд с помощью необходимого признака сходимости. Так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{2n+3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty$, то исходный ряд расходится (не выполняется первое условие Лейбница). ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{5^n n!}$$

Пример 17. Исследовать на сходимость ряд

Решение. Данный ряд – знакочередующийся, поэтому проверим его на абсолютную сходимость. Ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, исследуем на сходимость по признаку Даламбера. Так как общий член $a_n = \frac{n^n}{5^n n!}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)!}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)!} : \frac{n^n}{5^n n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n (n+1)^{n+1} n!}{5^{n+1} n^n (n+1)!} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{5} < 1, \end{aligned}$$

и данный ряд сходится. Поэтому искомый ряд сходится абсолютно. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2)}{n^2}$$

Пример 18. Исследовать на сходимость ряд

Решение. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi n^2) = \infty \neq 0$, то нельзя применить эквивалентность: $\sin \alpha \sim \alpha$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\pi n^2)|}{n^2}$. Так как $|\sin(\pi n^2)| \leq 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\pi n^2)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Из сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ по первому признаку сравнения следует сходимость исходного ряда. ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$$

Пример 19. Исследовать на сходимость ряд

Решение. Данный знакочередующийся ряд исследуем на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$. Очевидно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$ по второму признаку сравнения одновременно расходится с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($p = 1/2 < 1$). Тогда, по первому признаку сравнения из расходимости «меньшего» ряда следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$. Следовательно, абсолютной сходимости исходного ряда нет. Проверим выполнение условий признака Лейбница на условную сходимость. Отметим, что вместо члена $\frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2(n)}$ можно рассматривать $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Условия 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ и 2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ выполняются, следовательно, исходный ряд условно сходящийся. ■

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right) = 0$$

Пример 20. Докажите, с помощью рядов, что

Решение. Составим числовой ряд, общий член которого задан по формуле: $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Полученный ряд – знакоположительный, поэтому применим к нему достаточный признак сходимости. По виду общего члена ряда останавливаем свой выбор на признаке Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + 1/n\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

(использовали второй замечательный предел). Следовательно, ряд сходится. По необходимому признаку сходимости (1.3): если числовой ряд сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \text{ следовательно } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right) = 0. \blacksquare$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти сумму ряда:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n - 5};$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4 - 5n}{n(n-1)(n-2)}.$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}.$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5};$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n - 5}{n(n^2 - 1)}.$

4. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5};$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n - 2}{n(n-1)(n+2)}.$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8};$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n - 4}{n(n-1)(n-2)}.$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 6}{n(n+1)(n+2)}.$

7. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3};$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}.$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 28n - 45};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n + 3}{n(n+1)(n+3)}.$

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 6}{n(n+2)(n+3)}.$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 7n - 12};$

б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 4)}.$

11. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 2}{n(n+1)(n+2)}.$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n - 2}{n(n-1)(n+2)}.$

2. Исследовать ряды на сходимость, используя признаки сравнения:

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n(n+1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n - \ln(n)}$.
2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{6^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$.
3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(3n)}{n\sqrt{n}}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \ln(n)}{n^3 - 5}$.
4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n)}{n^2 + 1}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + \cos(\pi n))}{2n^2 - 1}$.
5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2 + 1)}{n \cdot 5^n}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arcsin((n-1)/n)}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}}$.
6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin^4(n)}{(n+1) \cdot 3^n}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}}$.
7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4(\pi n/2)}{4^n + n^2}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cdot \ln(n)}{n^2 - 3}$.
8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3 \cdot (2 + \sin(\pi n/2))}$.
9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(3n)}{9^n + 3}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}n\right)$.
10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n^2\sqrt{n}}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{n^2 - 1}}{\pi \cdot \sqrt{n^2 - n}}$.
11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi n/2)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2 + (-1)^n)}{\ln(1+n)}$.
12. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n^7}}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2(6n)}$.

3. Применяя признак Коши исследовать на сходимость числовые ряды

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n (n+1)^3$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$
- ..

4. Применяя признак сравнения и интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln^2(2n)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(2n+1)}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(n+1)}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}$
6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}$
7. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5) \ln^2(4n-7)}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \ln^2(n+1)}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+7)}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(n\sqrt{5})}$
12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+1) \ln n}$

5. Исследовать на сходимость ряды по признаку Даламбера:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n(n-1)!}.$$

$$2. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{7}{(n-3)n!}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

$$4. \sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot (n-5)!}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} \cdot (n^3 + 2)}{(n-1)!}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! \cdot 5^{n+1}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(2n+1)!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2 + 2)}{(n+1)!}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{4n+5} \cdot \frac{1}{7^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)!}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{2}{5^n}.$$

$$12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

6. Исследовать на сходимость ряды, используя подходящие признаки сходимости:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt[3]{n \cdot 5^n}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 5n}{4n^2 - 6n} \right)^n.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)^n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^n.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^3}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(4n+3)^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^n - n^3}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - n}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1) \cdot \arctg(n)}.$$

7. Исследовать на сходимость с помощью признаков сравнения, применять таблицу эквивалентностей.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right).$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{1/\sqrt{n}} - 1 \right).$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2) \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2}\right).$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{(n+2)(\sqrt{n}+1)}\right).$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n+2}\right).$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\pi/(4n))}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n+3} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{n^2 + 2}\right).$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n+2}{(n^2+1)\sqrt{n}}\right).$$

$$5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}\right).$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(2\pi/n)).$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}\right).$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right).$$

8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$1. \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^4 + 4};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(5n)}{n^5}.$$

$$2. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arcsin(n/(n+1))}{\sqrt{n^2 + n}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n \sqrt{n^2 + 1}}{n^3}$$

$$3. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^n.$$

$$4. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \sin^3\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$5. \text{а) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln \ln n) \ln n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$6. \text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}.$$

$$7. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt[3]{2n+3}}.$$

$$8. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{3n+1}};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

$$9. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{6n}\right);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{3^n}.$$

$$10. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

$$11. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$$

$$12. \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n};$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}.$$