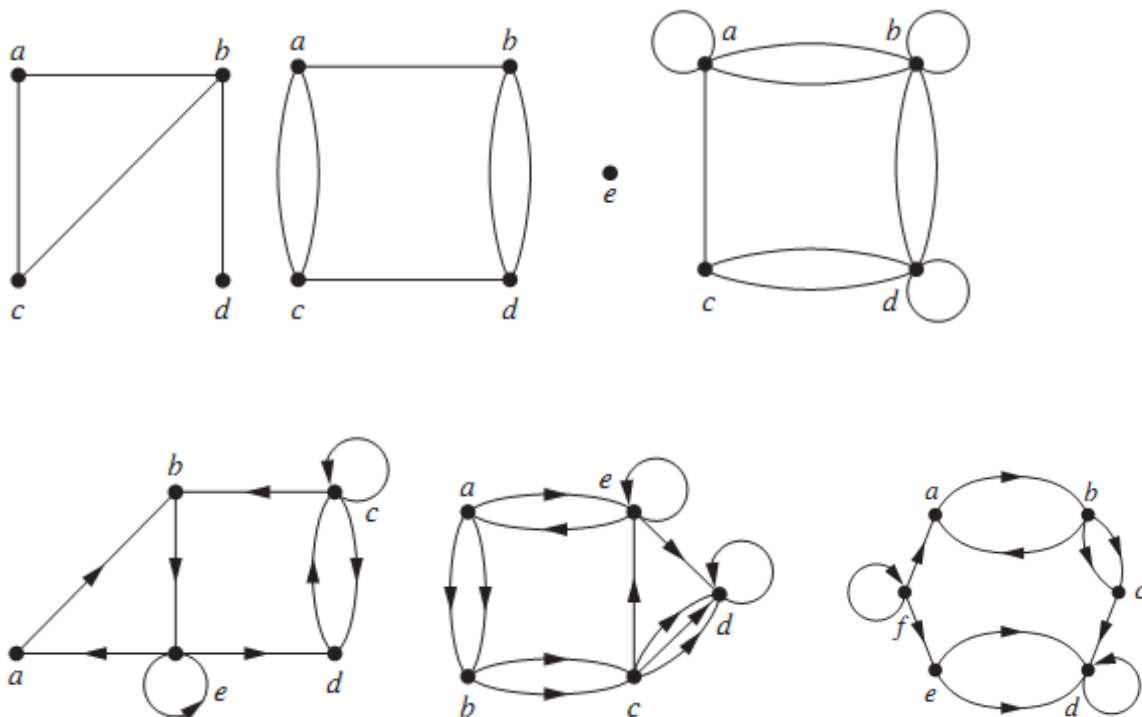


- 1) Для показанных ниже графов определите, имеет ли показанный граф
- ориентированные или неориентированные ребра,
 - имеет ли он кратные ребра,
 - и имеет ли он одну или несколько петель

Используйте свои ответы для того, чтобы определить какому типу графа в таблице 1 соответствует данный граф.



2. Для каждого неориентированного или ориентированного графа в упражнении 1, который не является **простым**, найдите множество ребер, которые надо удалить, чтобы сделать его простым.

3. **Граф пересечений** набора множеств A_1, A_2, \dots, A_n – это граф, в котором есть вершина для каждого из этих множеств, и имеется ребро, соединяющее вершины, представляющие два множества, если эти множества имеют непустое пересечение.

Сконструировать граф пересечений следующих наборов множеств.

- а) $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 $A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$

- б) $A_1 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$,
 $A_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
 $A_3 = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$,
 $A_4 = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$,
 $A_5 = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

4. Предположим, имеется два графа звонков за январь и февраль. Как можно использовать два эти графа, чтобы выяснить новые номера телефонов тех людей, которые поменяли номера телефонов?

5. Как можно использовать граф, который моделирует е-мэйлы, чтобы найти списки, по которым рассылается спам?
6. Для каждого курса в университете может быть один или несколько других курсов, которые являются его пререквизитами. Как можно использовать граф этих курсов и какие курсы являются пререквизитами для каких курсов? Должны ли ребра быть ориентированными или неориентированными?

Глядя на графовую модель, как мы можем найти курсы, которые не имеют никаких пререквизитов, и как можно находить курсы, которые не являются обязательными ни для какого другого курса?

7. Опишите модель графа, который представляет положительные рекомендации кинокритиков, используя вершины для представления этих критиков и всех фильмов, которые в настоящее время есть в прокате.

8. Построить граф предшествований для следующей программы:

$S_1: x := 0$

$S_2: x := x + 1$

$S_3: y := 2$

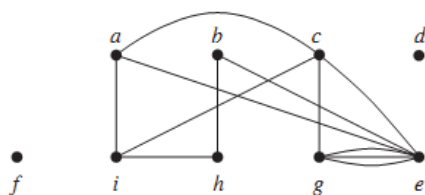
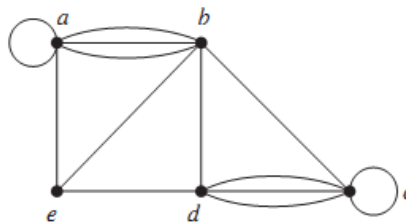
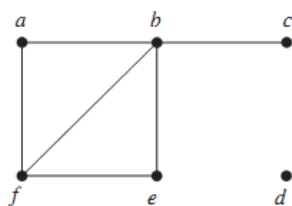
$S_4: z := y$

$S_5: x := x + 2$

$S_6: y := x + z$

$S_7: z := 4$

9. В показанных ниже графах найдите число вершин, число ребер и степень каждой вершины. Определите все изолированные и висячие вершины.



10. Найдите сумму степеней вершин каждого графа в упражнении 9 и убедитесь, что она равна удвоенному числу ребер в графе.

11. Может ли существовать простой граф с 15 вершинами каждая степени пять?

12. Найдите граф с 12 ребрами, в котором 6 вершин степени 3, а у остальных вершин степени меньше.

13. Приведите пример графа, в котором не менее 4 вершин, или докажите, что такого графа не существует, если

А) в графе нет ни одной вершины нечетной степени,

Б) в графе нет ни одной вершины четной степени,

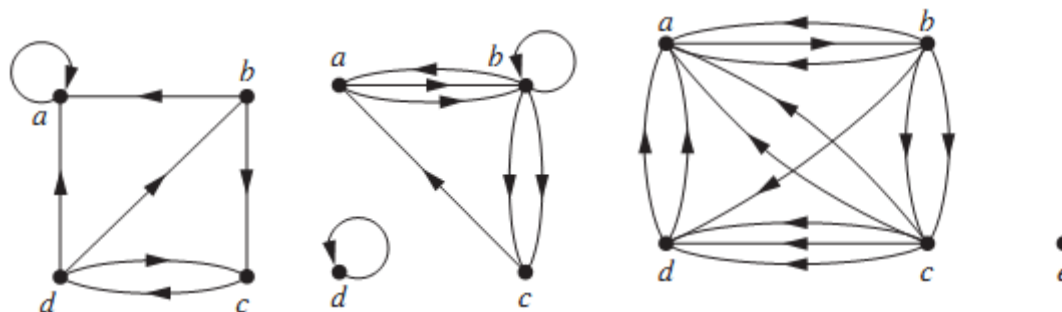
В) в графе ровно одна вершина нечетной степени,

Г) в графе ровно одна вершина четной степени,

Д) в графе ровно две вершины нечетной степени,

14. Покажите что в простом графе, имеющем не менее двух вершин, должно быть две вершины, которые имеют одинаковую степень.

15. Определите количество вершин и ребер и найдите полустепень исхода и полустепень захода для каждой вершины для данного ориентированного графа.



16 Нарисовать следующие графы.

a) K_7

b) $K_{1,8}$

c) $K_{4,4}$

d) C_7

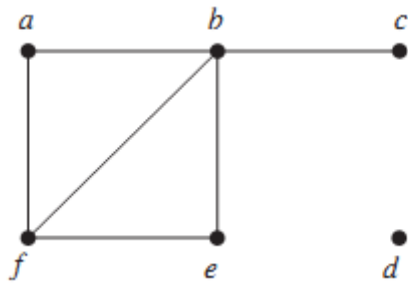
e) W_7

f) Q_4

17. Сколько вершин и сколько ребер имеют эти графы?

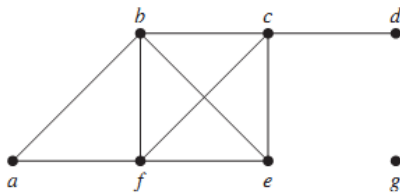
a) K_n b) C_n c) W_n d) $K_{m,n}$ e) Q_n

18. Для графа, показанного на рисунке, найти граф, индуцированный вершинами a, b, c, f.



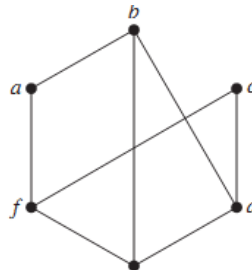
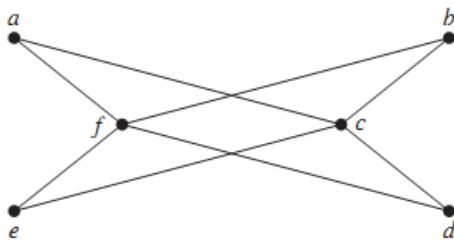
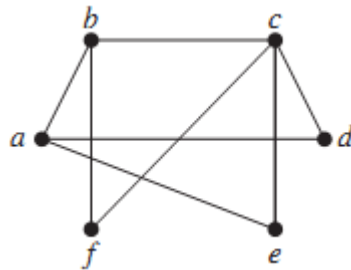
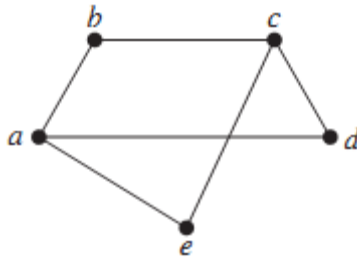
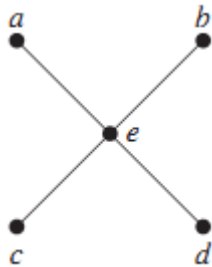
19. Пусть n - положительное целое число. Показать, что подграф, индуцированный непустым подмножеством множества вершин графа K_n является полным графом.

Степенная последовательность графа- это последовательность степеней вершин графа в невозрастающем порядке. Например, последовательность степеней графа G , показанного на рисунке, имеет вид 4, 4, 4, 3, 2, 1, 0.



G

20. Найти последовательности степеней для каждого из графов ниже



21. Найдите последовательность степеней каждого из следующих графов.

K_4 , $K_{2,3}$, C_4 , W_4 , Q_3

22. Какова последовательность степеней K_n , где n положительное целое число? Поясните свой ответ.

23. Какова последовательность степеней $K_{m,n}$, где m и n положительные целые числа??
Поясните свой ответ.

24. Сколько ребер имеет граф, если его последовательность степеней -это 4, 3, 3, 2, 2?
Нарисуйте такой граф.

25. Сколько ребер имеет граф, если его последовательность степеней 5, 2, 2, 2, 2, 1?
Нарисуйте такой граф.

26. Последовательность d_1, d_2, \dots, d_n называется **графической**, если это последовательность степеней **простого** графа.

Определите, является ли каждая из этих последовательностей графической.

Для тех последовательностей, которые являются графическими, нарисуйте граф, имеющий заданную последовательность степеней.

а) 5, 4, 3, 2, 1, 0

б) 6, 5, 4, 3, 2, 1

в) 2, 2, 2, 2, 2, 2

г) 3, 3, 3, 2, 2, 2

д) 3, 3, 2, 2, 2, 2

е) 1, 1, 1, 1, 1, 1

ж) 5, 3, 3, 3, 3, 3

з) 5, 5, 4, 3, 2, 1

и) 4, 4, 4, 4, 2

27. Сколько подграфов с хотя бы одной вершиной имеет граф K_3 ?

28. Пусть G - граф с v вершинами и e ребрами. Пусть M – это максимальная степень вершин графа G , и пусть m – это минимальная степень вершин графа G . Показать, что

а) $2e / v \geq m$.

б) $2e / v \leq M$.

29. Граф называется **регулярным**, если все вершины имеют одинаковые степени.

Вопрос: Сколько вершин имеет регулярный граф, в котором 10 ребер, в котором степени вершин равны 4?

30. Для каких значений n следующие графы являются регулярными?

a) K_n

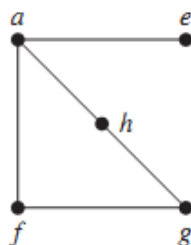
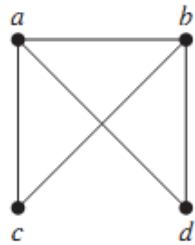
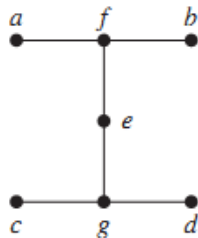
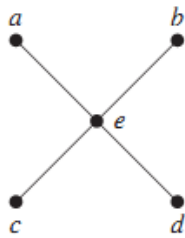
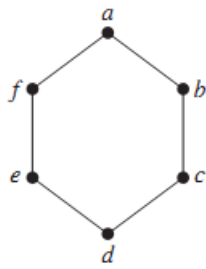
b) C_n

c) W_n

d) Q_n

Для каких значений m и n граф $K_{m,n}$ является регулярным?

31. Для нижеследующих графов найти их объединение. Считаем, что ребра, имеющие одни и те же концевые вершины, равны.



32. Опишите следующие графы: (сколько вершин, сколько ребер, какова последовательность степеней)

a) $\overline{K_n}$ b) $\overline{K_{m,n}}$ c) $\overline{C_n}$ d) $\overline{Q_n}$

33. Если G – э т о простой граф с 15 ребрами и дополнение G имеет 13 ребер, сколько вершин у графа G ?

34. Если простой граф G имеет v вершин и e ребер, то сколько ребер у G' ?

35. Если последовательность степеней простого графа G равна 4, 3, 3, 2, 2, какова последовательность степеней G' ?

36. Если последовательность степеней простого графа G равна d_1, d_2, \dots, d_n , какова последовательность степеней графа G' ?