Введение в дискретную математику и математическую логику

- Лекция №14
  Раскраски графов

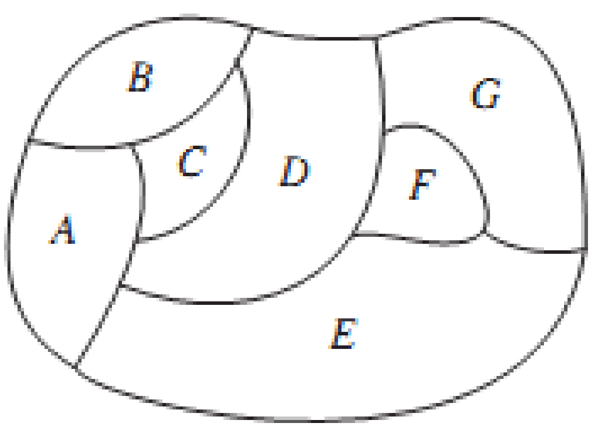
- Апанович Зинаида Владимировна

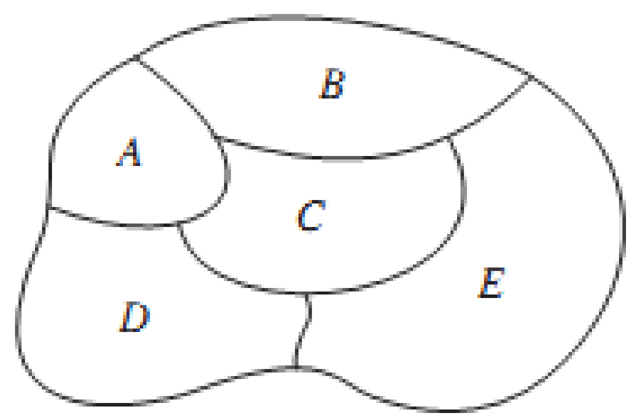
Раскраска карт

Проблемы, связанные с раскрашиванием карт регионов, таких как карты частей света, породили множество результатов в теории графов.

Когда раскрашивается карта, двум регионам с общей границей обычно присваиваются разные цвета.

Один из способов гарантировать, что два соседних региона никогда не будут иметь одинаковый цвет, — использовать разные цвета для каждого региона.





Раскраска карт

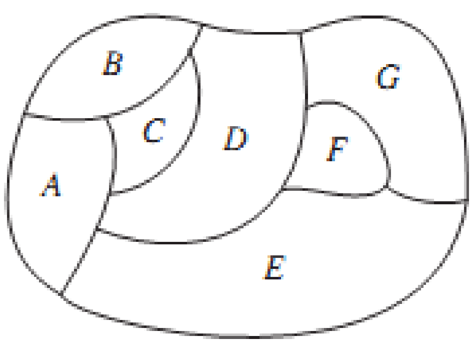
Однако это неэффективно, и на картах со многими регионами будет сложно различать похожие цвета.

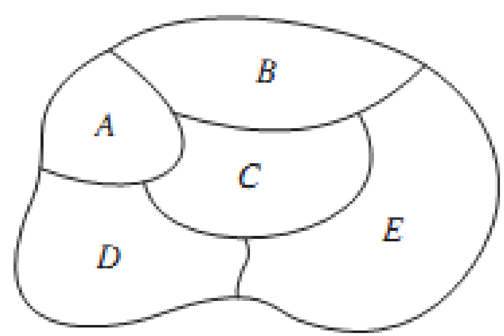
Вместо этого следует использовать небольшое количество цветов, когда это возможно.

Рассмотрим задачу определения наименьшего количества цветов, которые можно использовать для раскрашивания карты, чтобы соседние регионы никогда не имели одинаковый цвет.

Например, для карты, показанной ниже слева, достаточно 4 цветов, но 3 цветов не достаточно.

На карте ниже справа достаточно 3 цветов (но 2 — нет).





Карты и двойственные графы, соответствующие этим картам

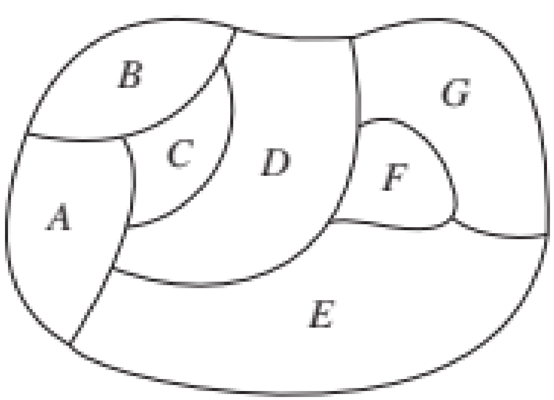
Каждая карта на плоскости может быть представлена графом.

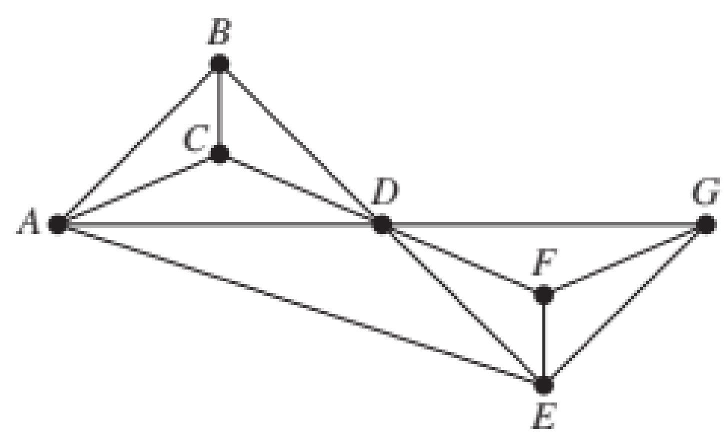
Чтобы установить это соответствие, каждая область карты представляется вершиной.

Ребра соединяют 2 вершины, если области, представленные этими вершинами, имеют общую границу.

Две области, которые соприкасаются только в одной точке, не считаются смежными.

Результирующий граф называется двойственным графом.

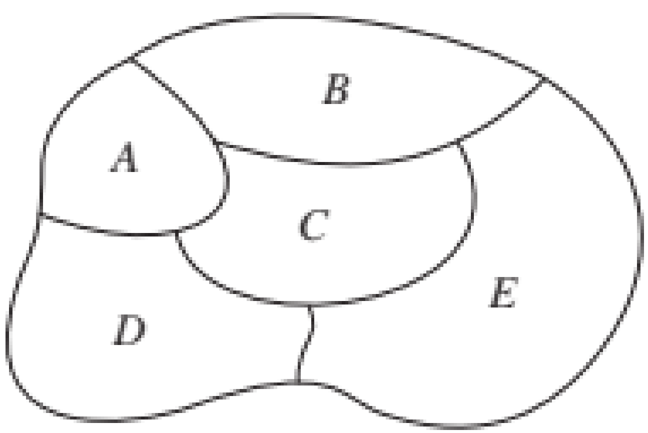


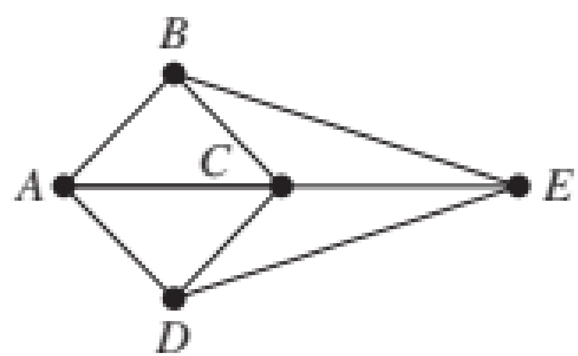


Карты и двойственные графы, соответствующие этим картам

По способу построения двойственных графов ясно, что любая карта на плоскости имеет плоский двойственный граф.

Задача раскрашивания областей карты эквивалентна задаче раскрашивания вершин двойственного графа таким образом, чтобы никакие две соседние вершины в этом графе не имели одинакового цвета.





Правильная вершинная раскраска

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Правильная раскраска вершин (правильная вершинная раскраска, раскраска) простого графа - это присвоение цвета каждой вершине графа таким образом, чтобы никаким двум смежным вершинам не был присвоен одинаковый цвет.

Правильная вершинная раскраска

Граф может быть раскрашен путем присваивания каждой вершине разных цветов.

Однако для большинства графов можно найти раскраску, в которой используется меньше цветов, чем количество вершин в графе.

Какое наименьшее количество цветов необходимо для правильной раскраски вершин графа?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 Хроматическое число графа – это наименьшее количество цветов, необходимое для правильной раскраски вершин этого графа.

Хроматическое число графа *G* обозначается через $\chi(G)$.

Правильная вершинная раскраска

Обратите внимание, что ответить на вопрос про хроматическое число планарного графа - это то же самое, что найти минимальное количество цветов, необходимое для раскрашивания плоской карты так, чтобы двум соседним областям не был присвоен одинаковый цвет.

Теорема о четырех красках

ТЕОРЕМА 1 О ЧЕТЫРЕХ КРАСКАХ

Хроматическое число планарного графа ≤ 4.

Почтовый штемпель Университета Иллинойса после того, как была доказана теорема о четырех красках.

Теорема о четырех красках

Теорема о четырех красках первоначально была сформулирована как гипотеза в 1850 - е годы.

Она была доказана американскими математиками Kenneth Appel и Wolfgang Haken в 1976 году.

До этого было опубликовано много неверных доказательств, часто с трудноуловимыми ошибками.

Кроме того, было сделано много тщетных попыток построения контрпримеров путем рисования карт, требующих более 4 цветов.

Возможно, самым печально известным ошибочным доказательством во всей математике является неверное доказательство теоремы о четырех красках, опубликованное в 1879 лондонским адвокатом и математиком - любителем, Альфредом Кемпе.

Математики принимали его доказательство как правильное до 1890 года, когда Перси Хиавуд обнаружил ошибку, которая делает доказательство Кемпе неполным.

Теорема о четырех красках

Однако ход рассуждений Кемпе оказалось основой успешного доказательства, приведенного Аппелем и Хакеном. Их доказательство основано на тщательном анализе каждого конкретного случая, проведенном компьютером.

Они показали, что если бы теорема о четырех красках была ложной, то должен был бы быть контрпример к одному из приблизительно 2000 разных случаев, а затем они показали, что ни один из этих случаев не существует.

При доказательстве они использовали более 1000 часов компьютерного времени.

Это доказательство вызвало большое количество споров, потому что компьютеры сыграли в этом весьма важную роль.

Например, может ли быть так, что ошибка в компьютерной программе привела к неверным результатам?

Теорема о четырех красках

С тех пор появились более простые доказательства, было найдено меньшее количество типов возможных контрпримеров, и было сделано доказательство с использованием автоматизированной системы доказательства.

Однако никаких доказательств, НЕ опирающихся на компьютер, все же НЕ было найдено.

Заметим, что теорема о четырех красках применима только к планарным графам.

Хроматическое число графа

Непланарные графы могут иметь произвольно большие хроматические числа, как будет показано далее.

Чтобы показать, что хроматическое число графа равно k, необходимы две вещи:

1) Надо показать, что граф может быть раскрашен в k цветов. Это может быть сделано путем построения такой раскраски.

2) Надо показать, что граф не может быть раскрашен с помощью меньшего количества цветов.

Хроматическое число графа

ПРИМЕР 1. Чему равно хроматическое число графа *G*?

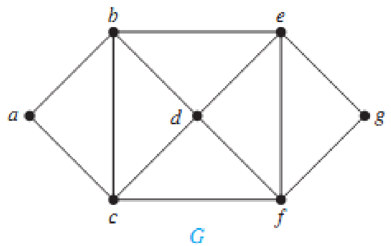
Решение: Хроматическое число $G \geq 3$, поскольку взаимно смежным вершинам *a*, *b*, и *c* должны быть присвоены разные цвета.

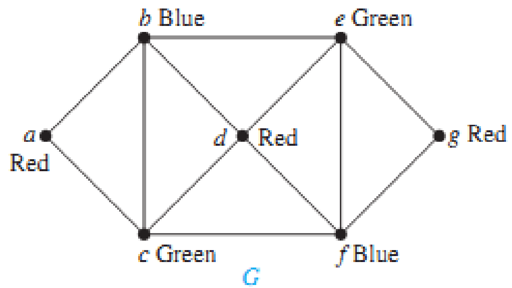
Чтобы увидеть, что *G* может быть окрашен в 3 цвета, присвоим красный цвет вершине *a*, синий вершине *b*, и зеленый вершине *c*. Затем, *d* может быть покрашена в красный, потому что она смежна с *b* и *c*.

Вершина *e* может (и должна) быть покрашена в зеленый, потому что она смежна только с красной и синей вершинами, а *f* может (и должна) быть покрашена в синий, потому что она смежна с красной и зеленой вершинами.

Наконец, *g* может (и должна) быть покрашена в красный цвет, потому что она смежна только с вершинами, окрашенными в синий и зеленый цвета.

Это приводит к раскраске *G,* использующей ровно 3 цвета.





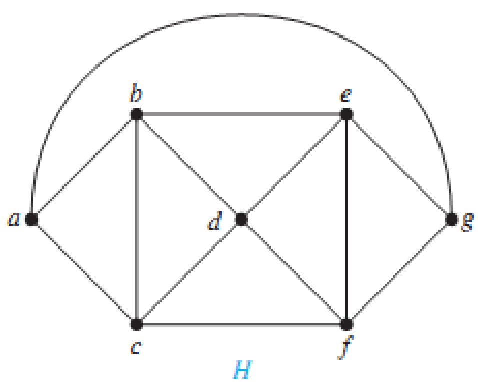
Хроматическое число графа

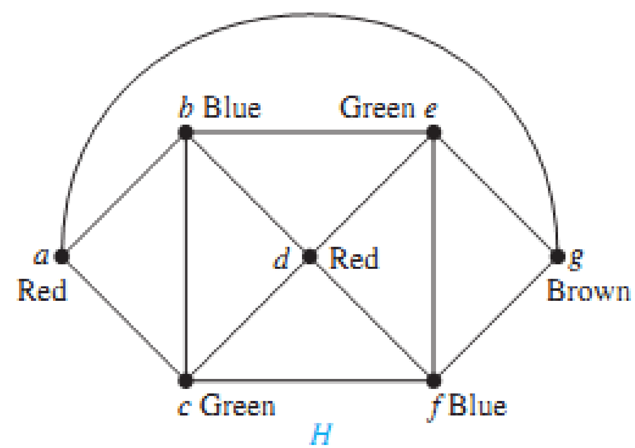
Граф *H* состоит из графа *G* с ребром, соединяющим *a* и *g*.

При попытке раскрасить *H* с использованием 3-х цветов необходимо руководствоваться теми же соображениями, что и при раскраске *G*, за исключением последнего этапа, когда все вершины, отличные от *g* уже раскрашены.

Тогда, поскольку вершина *g* является смежной (в *H*) с вершинами , окрашенным красный, синий, и зеленый цвета, , необходимо использовать четвертый цвет, скажем, коричневый.

Следовательно, *H* имеет хроматическое число, равное 4. Раскраска графа *H* показана ниже.





Хроматическое число графа

ПРИМЕР 2. Чему равно хроматическое число K_n?

Решение: Раcраска K_n может быть сконструирована с использованием n красок, присваивая каждой вершине отдельный цвет.

Существует ли раскраска с использованием меньшего количества цветов?

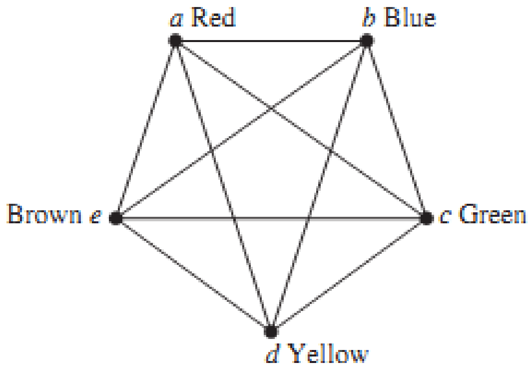
Ответ: НЕТ.

Никаким двум вершинам не может быть присвоен одинаковый цвет, потому что любые две вершины этого графа смежны.

Следовательно, хроматическое число K_n равно n. То есть, $\chi(K_n) = n$.

(Напомним , что K_n не является планарным, когда $n \geq 5$, так что этот результат не противоречит теореме о четырех красках.)

Раскраска графа K_5 , использующая 5 цветов, показана ниже.



Хроматическое число графа

ПРИМЕР 3. Чему равно хроматическое число полного двудольного графа $K_{m,n}$, где m и n являются целыми положительными числами?

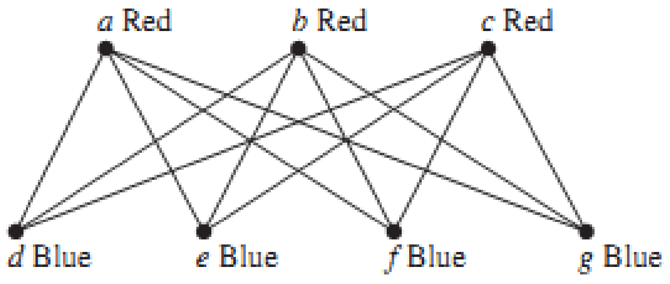
Решение: Может показаться, что количество необходимых цветов зависит от m и n.

Однако мы знаем, что необходимы только 2 цвета, потому что $K_{m,n}$ является двудольным графом.

Следовательно, $\chi(K_{m,n}) = 2$.

Это означает, что мы можем раскрасить множество m вершин одним цветом и множество n вершин- вторым цветом.

Поскольку ребра соединяют только вершину из множества m вершин и вершину из множества n вершин, никакие две смежные вершины не имеют одинакового цвета. Раскраска графа $K_{3,4}$ двумя цветами показана ниже.



Хроматическое число графа

ПРИМЕР 4 Чему равно хроматическое число графа C_n, где $n \geq 3$?

Решение: Сначала мы рассмотрим некоторые частные случаи.

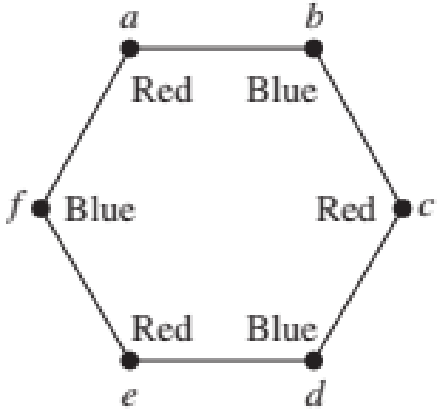
Для начала пусть $n = 6$. Выберем вершину и раскрасим ее в красный.

Продолжим движение по часовой стрелке на плоском изображени графа C_6 как показано ниже.

Необходимо присвоить второй цвет, скажем синий, следующей достигнутой вершины.

Продолжаем движение по часовой стрелке;

- 3-я вершина может быть окрашена в красный,
- 4-я вершина в синий,
- и 5-я вершина в красный.
- Наконец, 6-я вершина, которая смежна с первой, покрашена в синий.
- Следовательно, хроматическое число C_6 равно 2.



C_6

Хроматическое число графа

Далее, пусть $n = 5$ и рассмотрим цикл C_5.

Выберем вершину и раскрасим ее в красный.

Двигаясь по часовой стрелке, необходимо присвоить второй цвет, скажем синий, следующей достигнутой вершине.

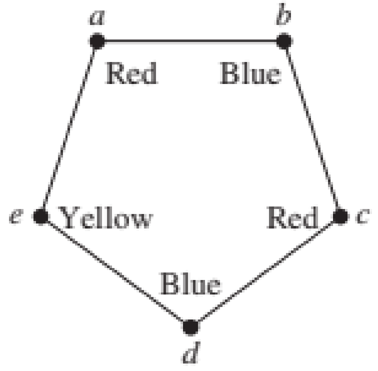
Продолжая движение по часовой стрелке, третья вершина может быть окрашена красный, а четвертая вершина может быть окрашена в синий.

Пятая вершина не может быть окрашена ни в красный ни в синий, потому что она смежна как с четвертой так и с первой вершиной.

Следовательно, для этой вершины требуется третий цвет.

Заметим, что нам также понадобилось бы 3 цвета, если бы мы красили вершины в направлении против часовой стрелки.

Таким образом, хроматическое число цикла C_5 равно 3.



C_5

Хроматическое число графа

В общем случае, для раскрашивания C_n необходимы 2 цвета, если n является четным.

Чтобы создать такую раскраску, просто выберите вершину и раскрасьте ее в красный.

Обойдите граф по часовой стрелке (используя плоское представление графа), раскрашивая вторую вершину в синий, третью вершину в красный, и так далее.

Вершина n может быть окрашена в синий, потому что две смежные с ней вершины, а именно

(n − 1)-ая и первая вершины, обе покрашены в красный.

Когда n нечетно, хроматическое число C_n равно 3.

Чтобы увидеть это, выберите начальную вершину.

Чтобы использовать только 2 цвета, необходимо чередовать цвета по мере обхода графа по часовой стрелке.

Однако, достигнутая вершина n смежна с двумя вершинами разного цвета, а именно с первой

и (n − 1)-ой.

Следовательно, необходимо использовать третий цвет.

Мы показали , что $\chi(C_n) = 2$ если n является четным положительным целым числом с $n \geq 4$ и

$\chi(C_n) = 3$ если n является нечетным положительным целым числом с $n \geq 3$.

Приложения раскраски графов

Проблемы с раскраской вершин возникают естественным образом во многих практических ситуациях, когда требуется разбить набор объектов на группы таким образом, чтобы члены каждой группы были взаимно совместимы по какому-либо критерию.

Приложения раскраски графов

Пример. Планирование выпускных экзаменов.

Как можно запланировать выпускные экзамены в университете так, чтобы ни один студент не сдавал 2 экзамена в одно и то же время?
Решение: Эта проблема планирования может быть решена с использованием графовой модели, вершины которой представляют курсы, а ребро между 2 вершинами возникает, если у курсов, которые они представляют, есть общий студент.

Каждый временной интервал для итогового экзамена обозначается другим цветом.

Расписание экзаменов соответствует раскраске соответствующего графа.

Приложения раскраски графов

Например, предположим, что запланировано проведение 7 экзаменов.

Курсы пронумерованы от 1 до 7.

Предположим, что на следующих парах курсов есть общие учащиеся:

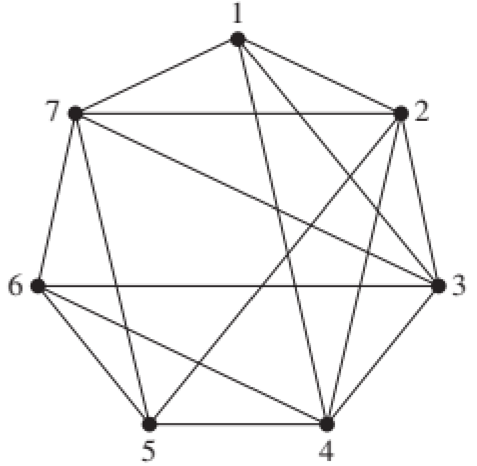
1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 7,

2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 2 и 7,

3 и 4, 3 и 6, 3 и 7,

4 и 5, 4 и 6,

5 и 6, 5 и 7, и 6 и 7.

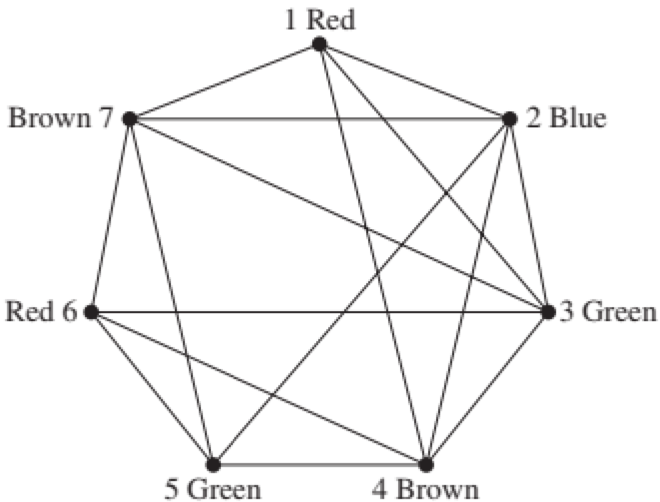


Граф, связанный с этим набором курсов

Приложения раскраски графов

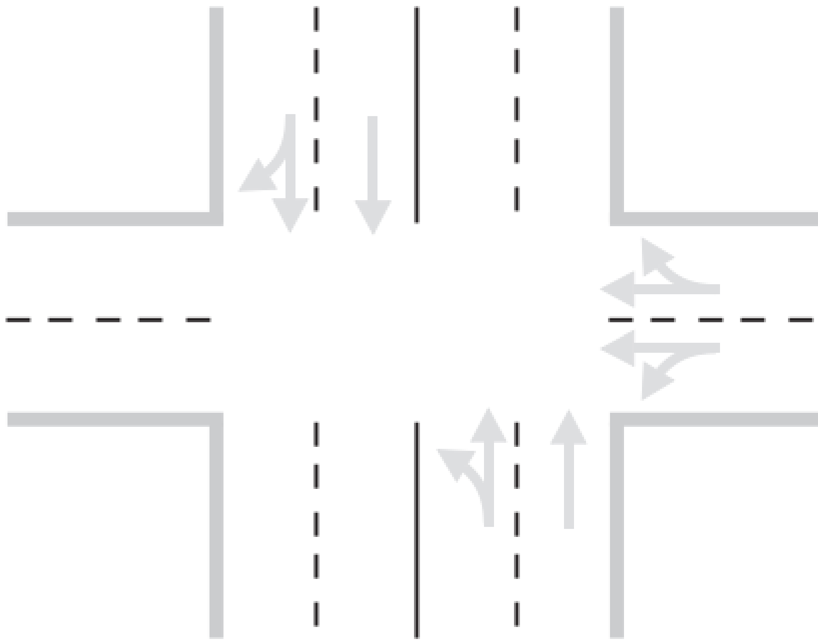
Планирование состоит из раскраски этого графа. Поскольку хроматическое число этого графа равно 4, необходимы 4 временных интервала.

Раскраска графа с использованием 4 цветов и связанный с ней график экзаменов показаны ниже.



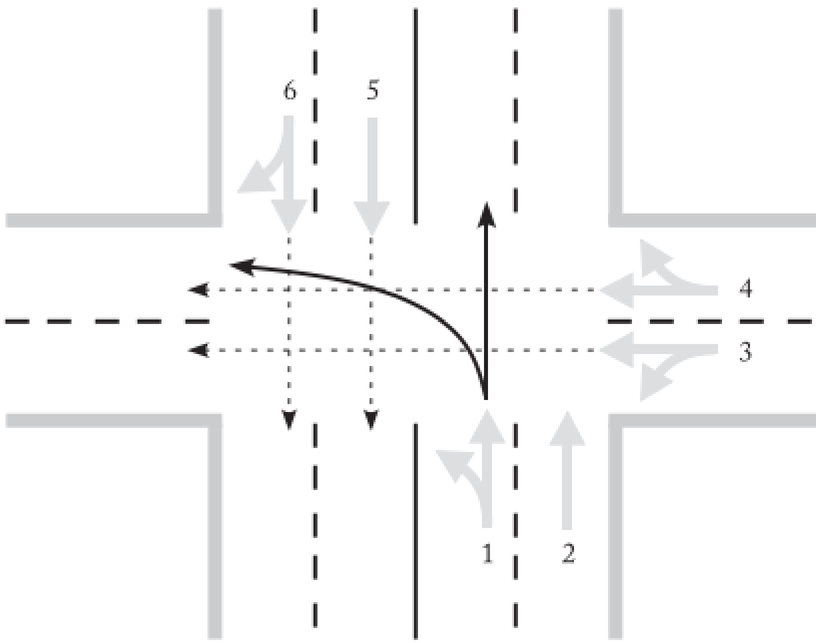
Time Period	Courses
I	1, 6
II	2
III	3, 5
IV	4, 7

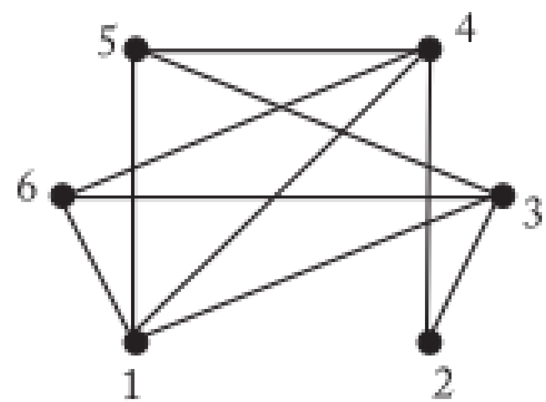
Приложения раскраски графов



ПРИМЕР. Цикл работы светофора **Проблема**: Найти способ обеспечить одновременный зеленый свет на как можно большем количестве полос движения, не допуская при этом столкновений водителей друг с другом.

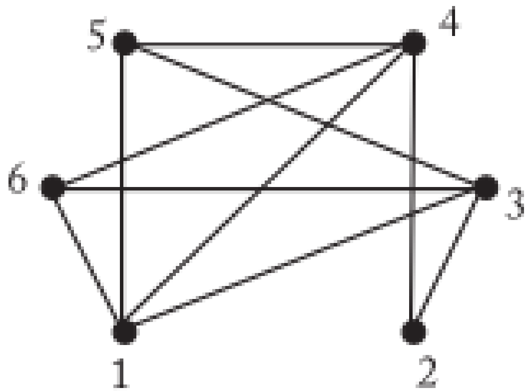
Приложения раскраски графов

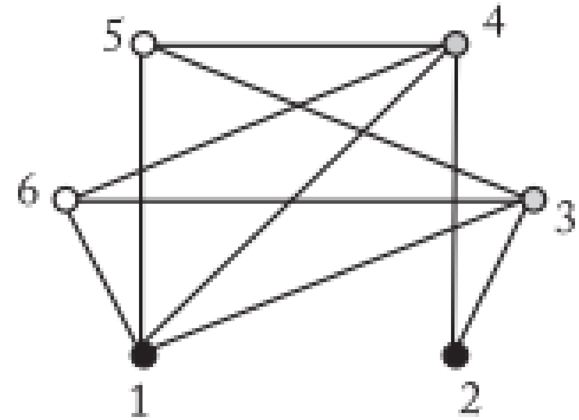




Цикл работы светофора. Решение: мы можем пронумеровать полосы движения и использовать эти числа в качестве меток вершин, и посмотреть, какие пути перемещения пересекаются, чтобы найти ребра в соответствующем графе.

Приложения раскраски графов. Цикл работы светофора





Приложения раскраски графов. Присваивания частот

Телевизионные каналы со 2 по 13 назначены станциям в Северной Америке, так что никакие две станции в радиусе 150 миль не могут работать на одном канале (частоте).

Как можно смоделировать присваивание каналов с помощью раскраски графа?
Решение: Построить граф, присвоив вершину каждой станции. Две вершины будут соединены ребром, если они расположены на расстоянии менее 150 миль друг от друга.

Присваивание каналов соответствует раскраске графа, где каждый цвет представляет отдельный канал.

Приложения раскраски графов. Индексные регистры

В эффективных компиляторах выполнение циклов ускоряется, когда часто используемые переменные временно хранятся в индексных регистрах центрального процессора (CPU), а не в обычной памяти.

Сколько индексных регистров необходимо для данного цикла?

Эта проблема может быть решена с помощью модели раскраски графа.

Приложения раскраски графов. Индексные регистры

Чтобы настроить модель, пусть каждая вершина графа соответствует одной переменной цикла.

Ребро между двумя вершинами возникает, если переменные, которые они представляют, должны храниться в индексных регистрах одновременно во время выполнения цикла.
Таким образом, хроматическое число графа дает необходимое количество индексных регистров, поскольку переменным должны быть назначены разные регистры, когда вершины, представляющие эти переменные, смежны графе.

Связь между хроматическими числами графа G и его подграфа

ТЕОРЕМА 2 Если граф H является подграфом графа G, $\chi(H) \le \chi(G)$.

Доказательство. Любая раскраска графа G обеспечивает правильную раскраску графа H, просто присваивая те же цвета вершинам H, что и в графе G.

Это означает , что H может быть раскрашен в $\chi(G)$ цветов, и, возможно, даже меньше, а это именно то, чего мы хотим.

Часто этот факт интересен “наоборот".

Например, если G имеет в качестве подграфа H полный граф K_m, тогда $\chi(H) = m$ и, значит, $\chi(G) \ge m$.

Полный граф, являющийся подграфом в G, называется кликой.

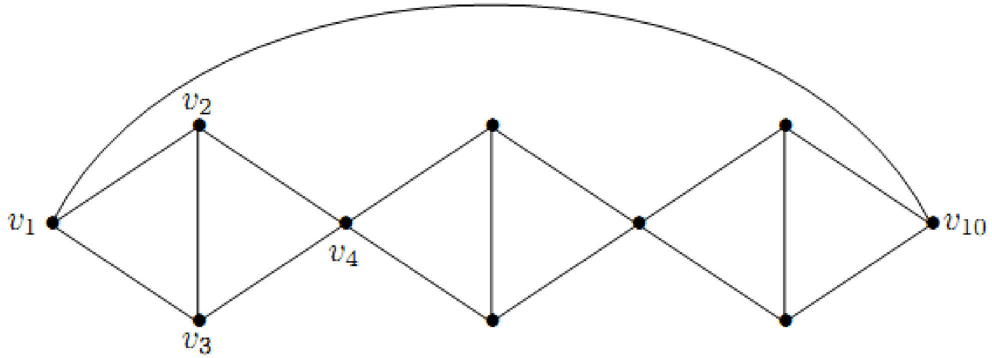
Кликовое число

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 Кликовое число графа *G* равно самому большому *m* такому, что K_m является подграфом *G*.

Заманчиво предположить, что единственный способ получить граф, требующий *m* цветов - это при наличии такого подграфа.

Это ложь; графы могут иметь высокое хроматическое число при низком кликовом числе; смотрите рисунок ниже.

Легко видеть, что этот граф имеет $\chi \geq 3$, потому что в нем много 3-клик.



Кликовое число

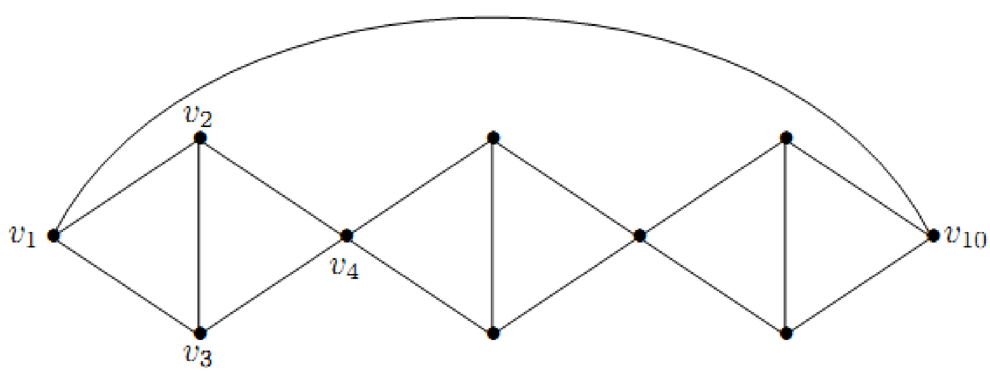
В общем, может быть трудно показать, что граф не может быть раскрашен заданным количеством цветов, но в данном случае легко увидеть, что на самом деле граф не может быть раскрашен тремя цветами.

Предположим, что граф может быть раскрашен в 3 цвета.

Начиная с самой левой вершины, пусть v_1 получает цвет 1, затем v_2 и v_3 должны быть окрашены в цвета 2 и 3, а вершина v_4 должен иметь цвет 1.

В конце, v_{10} должна иметь цвет 1, но это невозможно, поэтому $\chi \geq 3$.

С другой стороны, поскольку v_{10} может быть окрашена в четвертый цвет, мы видим, что $\chi = 4$.



Кликовое число

Пол Эрдеш показал в 1959 году, что существуют графы со сколь угодно большим хроматическим числом и сколь угодно большими обхватом (обхват - это размер наименьшего цикла графе).

Это намного сильнее, чем существование графов с высоким хроматическим числом и низким числом клик.

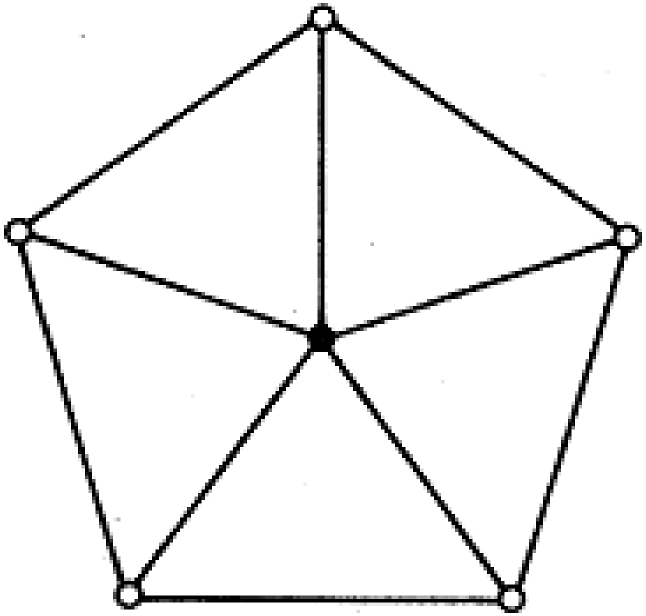
Независимое множество

Раскраска графа тесно связана с понятием независимого множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 Множество вершин *S* в графе является независимым, если в *S* никакие вершины не смежны.

Легко найти независимые множества: просто выберите вершины, которые не являются взаимно смежными.

Например множество одиночных вершин является независимым.

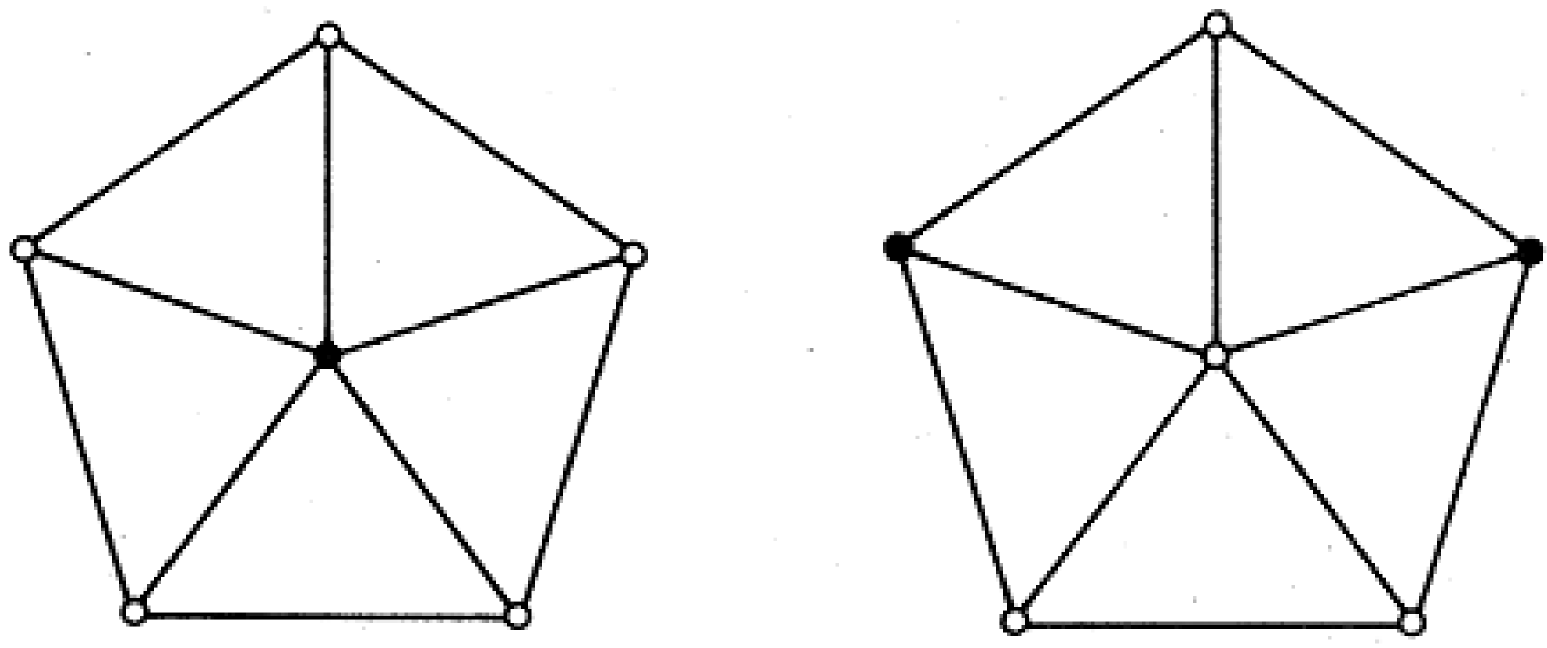


Число независимости

Если граф является правильно раскрашенным, вершины , которым присвоен один и тот же цвет , образуют независимое множество.

Интересной величиной является максимальный размер независимого множества.

Число независимости графа *G* равно размеру максимального независимого множества; оно обозначается *α(G).*



Хроматическое число и число независимости

Естественный вопрос об этих параметрах графа таков: насколько маленькими или большими они могут быть в графе *G*, имеющем *n* вершин?

Легко видеть , что

$1 \leq \chi(G) \leq n$

$1 \leq \alpha(G) \leq n$

и что все эти значения достижимы:

Граф без ребер имеет хроматическое число 1 и число независимости *n:*

$\chi(O_n)= 1, \alpha(O_n) = n.$

А полный граф имеет хроматическое число *n* и число независимости 1:

$\chi(K_n)= n, \alpha(K_n) = 1.$

Таким образом, эти неравенства не очень интересны.

Классы цветов (цветовые классы)

А цветной класс представляет собой множество всех вершин одного цвета.

Если граф правильно раскрашен, то каждый цветной класс является независимым множеством.

Классы цветов (цветовые классы)

ТЕОРЕМА 3 В любом графе *G, содержащем* *n* вершин,
$n/\alpha \le \chi$.

Доказательство. Предположим G раскрашен в χ цветов.
Поскольку каждый цветной класс является независимым множеством, размер любого цветового класса $\le \alpha$.
Пусть цветовые классы будут $V_1, V_2, \ldots, V_\chi$.
Тогда

$$n = \sum_{i=1}^{\chi} |V_i| \le \chi\alpha,$$

Связь хроматического числа со степенями вершин

Также мы можем улучшить верхнюю границу для $\chi(G)$.

Пусть $\Delta(G)$ обозначает максимальную степень вершин графа.

ТЕОРЕМА 4 В любом графе G, $\chi \leq \Delta + 1$.

Доказательство. Мы покажем, что всегда можем раскрасить граф G $\Delta + 1$ цветами с помощью простого жадного алгоритма:

Выберем произвольную вершину v_n, и перечислим вершины графа G в порядке $v_1, v_2, \ldots, v_n$ так что , если $i \leq j$, $d(v_i, v_n) \geq d(v_j, v_n)$,

то есть мы первыми перечисляем вершины, наиболее удаленные от v_n.

Будем использовать целые числа $1, 2, \ldots, \Delta + 1$ в качестве цветов. Раскрасим вершину v_1 в цвет 1.

Связь хроматического числа со степенями вершин

Затем для каждой v_i в порядке нумерации, раскрасим v_i наименьшим цветом, который не нарушает требования к правильной раскраске, то есть отличается от цветов, уже назначенных соседям v_i.

Для $i \le n$, мы утверждаем , что v_i окрашена одним из цветов $1, 2, \dots, \Delta$.

Это, безусловно, верно для v_1.

Для $1 \le i \le n$, вершина v_i имеет не менее 1 соседа, который еще не окрашен, а именно вершину, расположенную ближе к v_n по кратчайшему пути от v_n до v_i.

Таким образом, соседи v_i используют $n \le \Delta - 1$ цветов из множества цветов $1, 2, \dots, \Delta$, оставляя не менее 1 цвета из этого списка доступным для v_i.

Как только раскрашены $v_1, \dots, v_{n-1}$, все соседи v_n раскрашены с использованием цветов $1, 2, \dots, \Delta$, так что цвет $\Delta + 1$ может быть использован для раскрашивания v_n.

Связь хроматического числа со степенями вершин

Обратите внимание , что если $\deg(v_n) \leq \Delta$, даже v_n может быть окрашена в один из следующих цветов $1, 2, . . . , \Delta$.

Поскольку v_n была выбрана произвольно, мы можем выбрать v_n так что $\deg(v_n) \leq \Delta$, если только не все вершины имеют степень Δ, то есть, если G не является регулярным.

Таким образом, мы доказали несколько больше, чем было заявлено, а именно, что любой не регулярный граф G имеет

$\chi \leq \Delta$.

(Если вместо выбора определенного порядка $v_1, . . . , v_n$ который мы использовали, мы должны были перечислить их в произвольном порядке, даже вершины, отличные от v_n, могут потребовать использования цвета $\Delta+1$.

Это дает немного более простое доказательство указанной теоремы.)

Мы формулируем ее как следствие.

Связь хроматического числа со степенями вершин

СЛЕДСТВИЕ 5. Если G не является регулярным, то

$\chi \leq \Delta$.

Существуют графы, для которых $\chi = \Delta + 1$:

Любой цикл нечетной длины имеет $\Delta = 2$ и $\chi = 3$,

а K_n имеет $\Delta = n - 1$ и $\chi = n$.

Конечно, это регулярные графы.

Оказывается, что это все примеры, то есть, если G не является нечетным циклом или полным графом, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Связь хроматического числа со степенями вершин

ТЕОРЕМА 6 (Брукс, 1941 год)

Если G является графом, отличным от K_n или C_{2n+1},

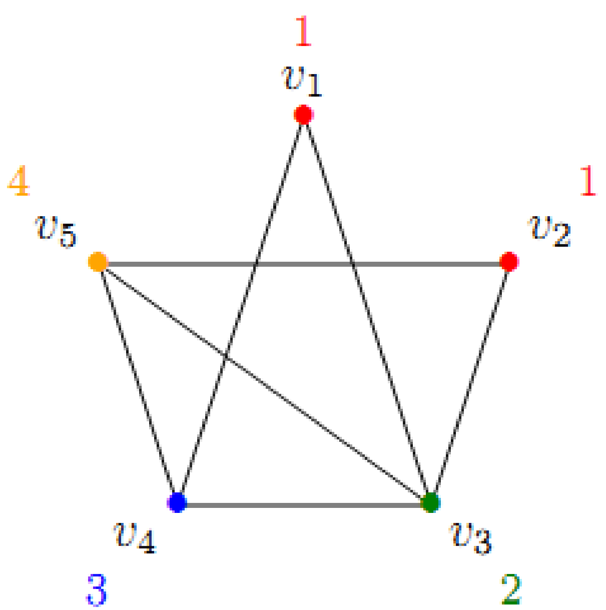
$\chi \leq \Delta$.

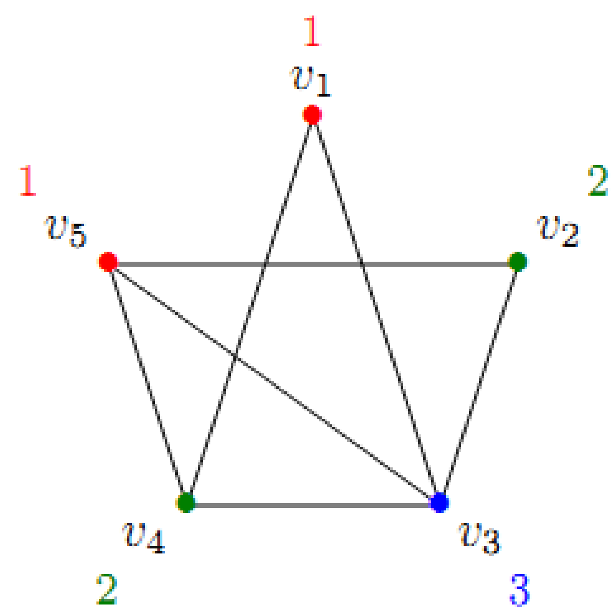
Замечание. Утверждение не сильно точное, т.к. двудольный граф может иметь произвольно большую степень, его $\chi \leq 2$.

Связь хроматического числа со степенями вершин

При использовании жадного алгоритма не всегда граф будет раскрашен минимально возможным количеством цветов.

На рисунке ниже показан граф с хроматическим числом, равным 3, но жадный алгоритм использует 4 цвета, если вершины упорядочены, как показано на рисунке.





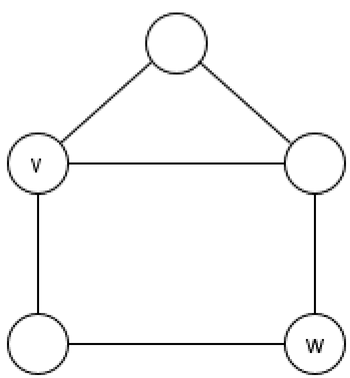
Алгоритм вычисления хроматического числа

В общем случае, вычислить $\chi(G)$ трудно, то есть, это требует большого объема вычислений, но существует простой алгоритм раскрашивания графа, который выполняется небыстро.

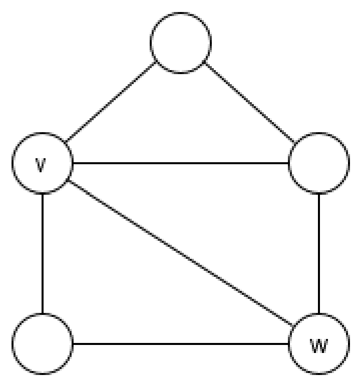
Предположим , что v и w являются несмежными вершинами в G.

Обозначим через $G + \{v, w\} = G + e$ граф, сформированный путем добавления ребра

$e = \{v, w\}$ к G.



G

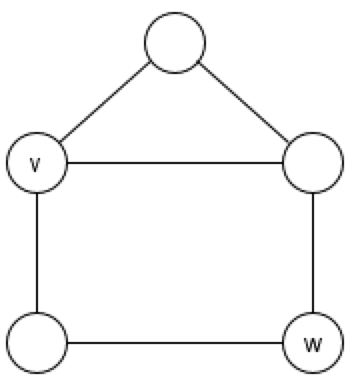


$G + e$

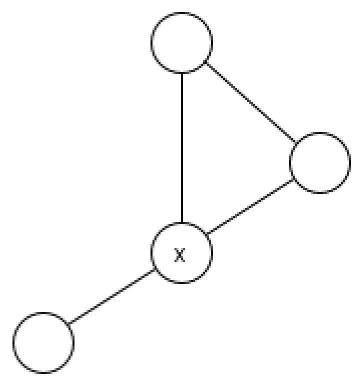
Алгоритм вычисления хроматического числа

Обозначим через *G/e* граф , в котором *v* и *w* являются “отождествленными”, то есть, *v* и *w* заменяются одной вершиной *x*, смежной со всеми соседями вершин *v* и *w*.

(Обратите внимание, что мы не вводим кратных ребер: если *u* смежна с вершинами *v* и *w* в *G*, в графе *G/e* будет единственное ребро {*x, u*}.)



G



G/e

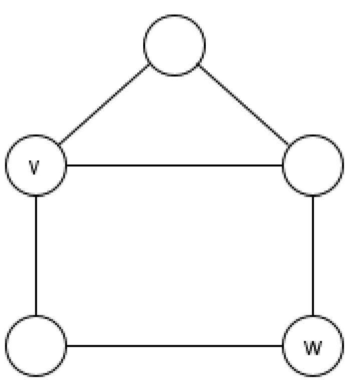
Алгоритм вычисления хроматического числа

Рассмотрим правильную раскраску *G,* в которой *v* и *w* окрашены разными цветами; тогда это также правильная раскраска графа *G +e*.

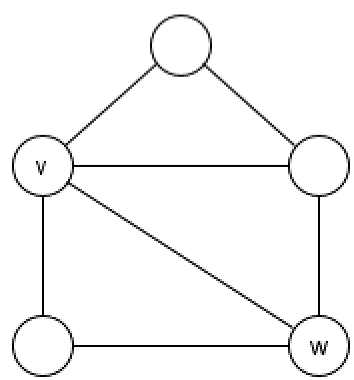
Кроме того, любая правильная окраска *G +e* является правильной окраской *G* в котором *v* и *w* имеют разные цвета.

Таким образом, раскраска *G+e* минимально возможным количеством цветов достигает наилучшей раскраски *G,* в которой *v* и *w* имеют разные цвета.

То есть, $\chi(G + e)$ - это наименьшее количество цветов, необходимое для раскрашивания *G,* так что *v* и *w* имеют разные цвета.



G



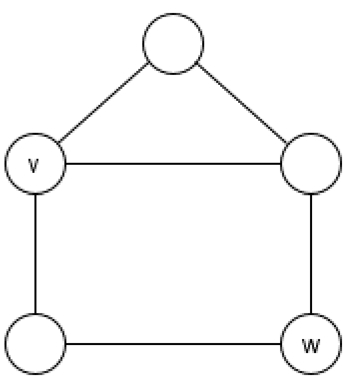
G +e

Алгоритм вычисления хроматического числа

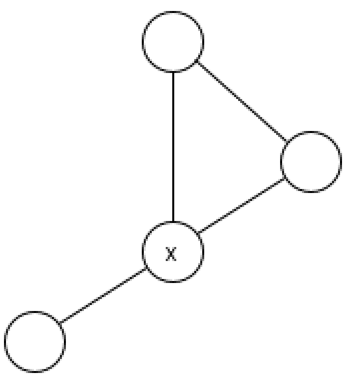
Если *G* правильно окрашен и *v* и *w* имеют один и тот же цвет, то это дает правильную окраску *G*/*e*, путем окрашивания *x* в *G*/*e* тем же цветом, который используется для *v* и *w* в *G*.

Кроме того, если *G/e* правильно раскрашен, это дает правильную раскраску *G*, в котором *v* и *w* имеют одинаковый цвет, а именно, цвет *x* в *G*/e.

Таким образом, *χ(G/e)* требует наименьшее количество цветов для правильного окрашивания *G*, так что *v* и *w* имеют одинаковый цвет.



G



G/e

Алгоритм вычисления хроматического числа

Результатом этих наблюдений является то , что
$\chi(G) = \min(\chi(G+e), \chi(G/e))$.

Этот алгоритм может быть применен рекурсивно,
то есть, если $G_1 = G+e$ и $G_2 = G/e$

тогда $\chi(G_1) = \min(\chi(G_1 + e), \chi(G_1/e))$ и

$\chi(G_2) = \min(\chi(G_2 + e), \chi(G_2/e))$,

где, конечно, ребро e отличается в каждом графе.

Алгоритм вычисления хроматического числа

Продолжая в том же духе, мы можем в конечном итоге вычислить $\chi(G)$, при условии, что в конце мы получим графы, которые "просто" раскрасить.

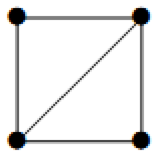
Грубо говоря, поскольку G/e имеет меньше вершин, а $G + e$ имеет больше ребер, чем G, мы должны в конечном итоге получить полный граф вдоль всех ветвей вычисления.

Всякий раз, когда мы сталкиваемся с полным графом K_m ,

он имеет хроматическое число m, таким образом, никаких дальнейших вычислений вдоль соответствующей ветви не требуется.

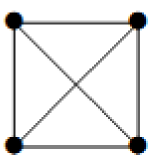
Алгоритм вычисления хроматического числа

ПРИМЕР 5. Мы проиллюстрируем это очень простым графом:



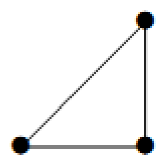
G

3



G + e

4



G/e

3

Хроматическое число графа вверху равно min(3, 4) = 3.
(Конечно, это довольно легко увидеть непосредственно.)

Алгоритм вычисления хроматического числа

ТЕОРЕМА 7. Приведенный выше алгоритм корректно вычисляет хроматическое число за конечный промежуток времени.

Доказательство. Предположим , что граф G имеет n вершин и m ребер.
Количество пар несмежных вершин равно
$na(G) = n(n-1)/2 - m$.

Доказательство производится индукцией по na.

а) Если $na(G) = 0$, то G является полным графом и алгоритм немедленно завершается.

б) Теперь мы отмечаем, что $na(G + e) < na(G)$ и
$na(G/e) < na(G)$:

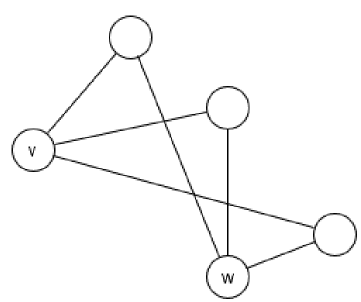
Алгоритм вычисления хроматического числа

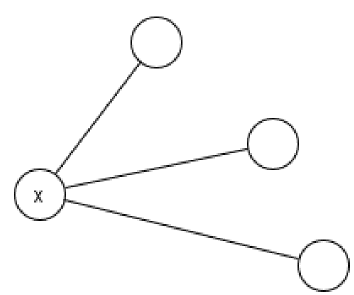
$$\mathrm{na}(G+e) = \binom{n}{2} - (m+1) = \mathrm{na}(G) - 1$$

$$\mathrm{na}(G/e) = \binom{n-1}{2} - (m-c),$$

где *c* - это количество общих соседей, которых имеют

вершины *v* и *w*.





Алгоритм вычисления хроматического числа

$$
\begin{aligned}
\mathrm{na}(G/e) &= \binom{n-1}{2} - m + c \\
&\le \binom{n-1}{2} - m + n - 2 \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - m + n - 2 \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2(n-1)}{2} - m + n - 2 \\
&= \binom{n}{2} - m - 1 \\
&= \mathrm{na}(G) - 1.
\end{aligned}
$$

Алгоритм вычисления хроматического числа

Теперь, если $na(G) > 0$, G является *не полным графом*, таким образом , существуют несмежные вершины v и w.

По индуктивному предполоению, алгоритм вычисляет

$\chi(G + e)$ и $\chi(G/e)$ правильно, и, наконец, он вычисляет $\chi(G)$ из них за один дополнительный шаг.

Хотя этот алгоритм очень неэффективен, он достаточно быстр для использования на небольших графах с помощью компьютера.

Хроматический полином

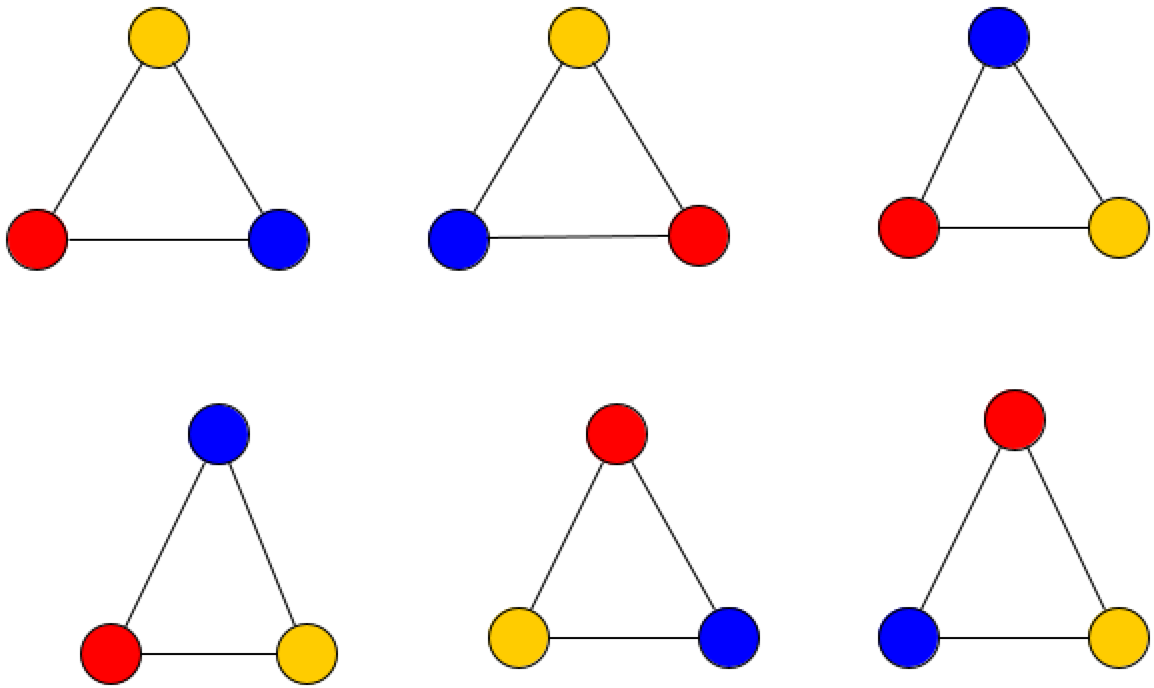
Теперь мы рассмотрим количество способов раскрасить граф G в k цветов.

Две раскраски следует рассматривать как различные, если какой-то вершине присвоены разные цвета в двух раскрасках;

другими словами, если есть две k-раскраски $\{V_1, V_2, . . . , V_k\}$ и $\{V'_1, V'_2, . . . , V'_k\}$,

то $\{V_1, V_2, . . . , V_k\} = \{V'_1, V'_2, . . . , V'_k\} \Leftrightarrow V_i = V'_i$ для $1 \leq i \leq k$.

Хроматический полином



Треугольник, например, имеет 6 различных способов раскраски в 3 цвета.

Хроматический полином

ПРИМЕР 6. (Полный граф K_n). Если G является K_n,

$P_G(k) = k(k - 1)(k - 2) \cdot\cdot\cdot (k - n + 1)$, $k \geq n$.

Вершина 1 может быть окрашена в любой из имеющихся цветов k цветов,

вершина 2 – в любой из оставшихся $k - 1$ цветов, и так далее.

Когда $k < n$, $P_G(k) = 0$.

Хроматический полином

ПРИМЕР 7 (Пустой граф O_n). Если G имеет n вершин и не имеет ребер,

$P_G(k) = k^n$.

Каждой вершине может быть независимо присвоен любой из доступных цветов.

Хроматический полином

Можно использовать простую механическую процедуру для вычисления $P_G(k)$, очень похожую на алгоритм , который был описан для вычисления $\chi(G).$

Предположим G имеет ребро $e = \{v, w\}$, и рассмотрим $P_{G-e}(k)$, количество способов раскрашивания графа $G - e$ в k цветов.

Теорема 8. Если G –простой граф, то

$P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k).$

Хроматический полином

Доказательство Пусть *u* и *v* – концы ребра *e.*

Каждой *k* – ракраске графа *G – e,* которая присваивает один и тот же цвет вершинам *u* и *v,* соответствует *k* -раскраска *G/e,* в которой вершина в графе *G/e* формируется путем отождествления вершин *u* и *v,* и ей присваивается общий цвет вершин *u* и *v.*

Следовательно $P_{G/e}(k)$ -это то количество *k*-раскрасок *G – e,* в которых вершинам *u* и *v* присваивается один и тот же цвет.

Кроме того, каждая *k*-раскраска *G-e,* которая присваивает разные цвета вершинам *u* и *v,* является *k* -раскраской *G*, и наоборот, $P_G(k)$ - это количество *k* -раскрасок *G – e,* в которых вершинам *u* и *v* присваиваются разные цвета.

Из этого следует, что $P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$

Хроматический полином

Таким образом,

$$P_{G\text{-}e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$

Формула также может быть переписана следующим образом

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k).$$

Хроматический полином

Теорема 8 дает способ расчета хроматического многочлена графа рекурсивно.

Она может быть использована в любом из 2 способов:
(1) путем многократного применения рекурсии

$$P_{G\text{-}e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$

выражая тем самым $P_{G\text{-}e}(k)$ в виде линейной комбинации хроматических полиномов полных графов.

Хроматический полином

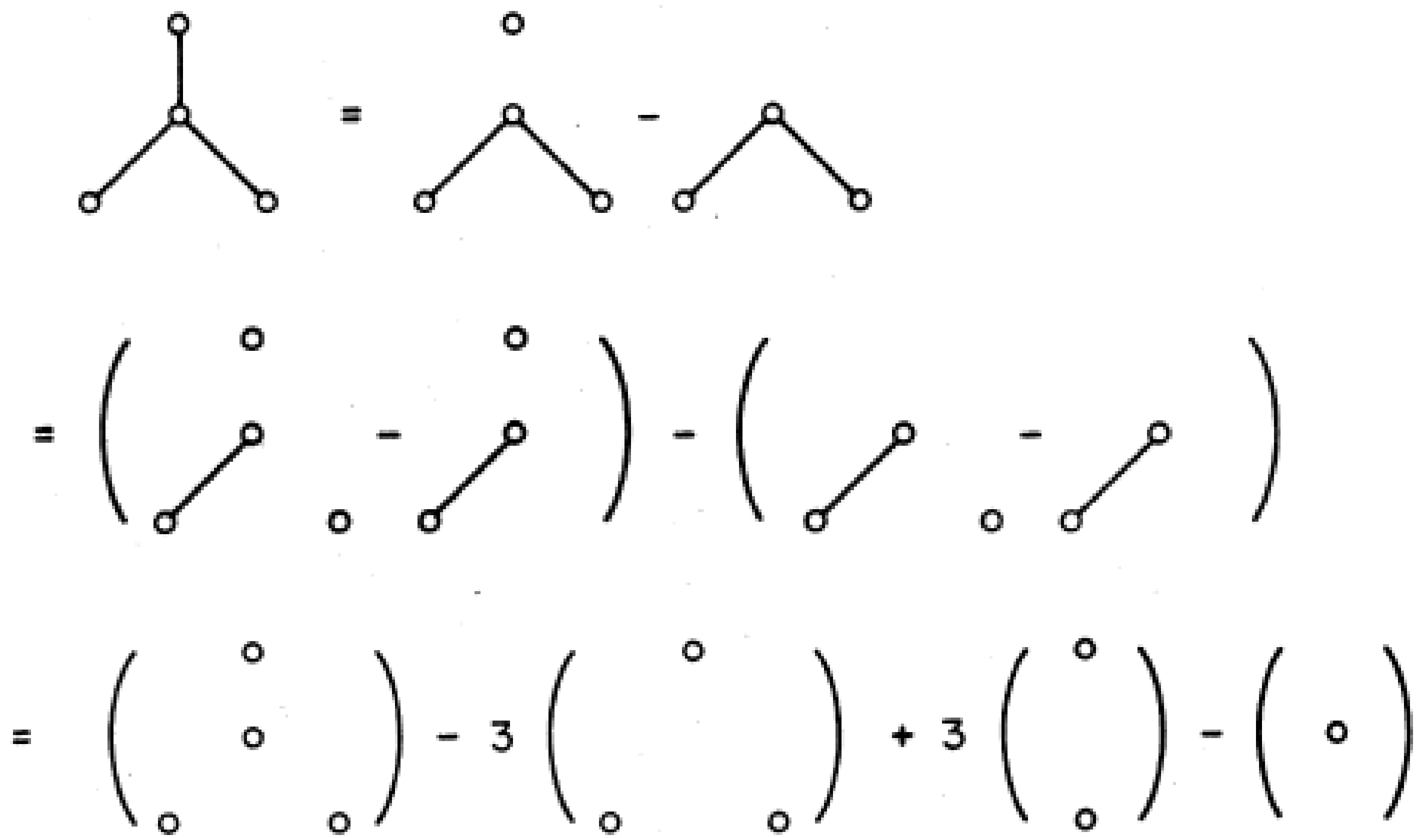
2) путем многократного применения рекурсии

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k).$$

выражая тем самым $P_G(k)$ в виде линейной комбинации хроматических полиномов пустых графов

Использование пустых графов:

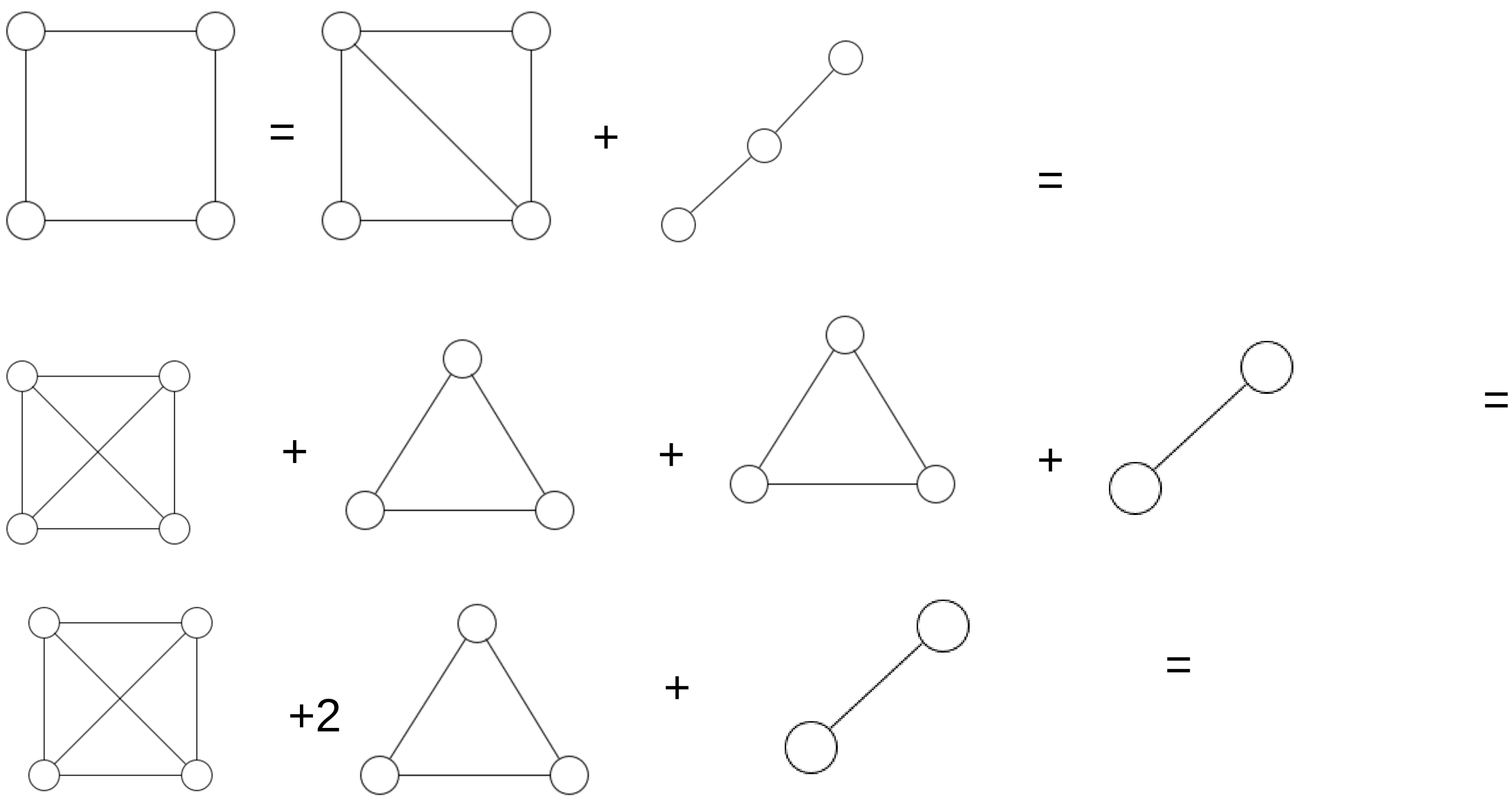
$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k).$$



$$= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = k(k-1)^3$$

Использование полных графов:

$$P_{G\text{-}e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$



$$= k(k\text{-}1)(k\text{-}2)(k\text{-}3) + 2(k(k\text{-}1)(k\text{-}2) + k(k\text{-}1) = k(k\text{-}1)(k^2\text{-}3k+3)$$

Реберная раскраска

k-реберная раскраска графа $G = (V, E)$ является отображением $c : E \to S$, где S представляет собой множество *k цветов*, другими словами, присваивание k цветов ребрам графа G.

Обычно множество цветов S принимается за $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Реберную k-раскраску можно рассматривать как разбиение $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ из E, где E_i обозначает (возможно, пустое) множество ребер, которым присвоен цвет i.
Реберная раскраска является *правильной,* если смежные *ребра* имеют разные цвета.

Таким образом, правильная k-раскраска ребер- это k-раскраска ребер $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$, в которой каждое
подмножество M_i является *паросочетанием.*

Реберная раскраска

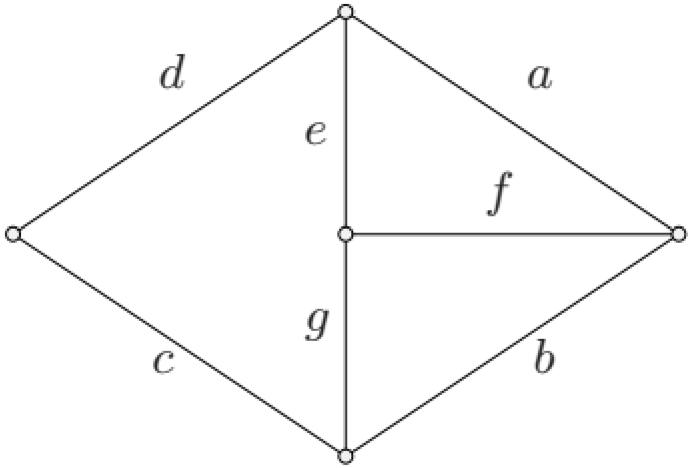
Граф *является k-реберно раскрашиваемым,* если у него есть *правильная k-реберная раскраска*.

Очевидно, что если *G* является *k-реберно раскрашиваемым*, то *G* также *l*-*реберно раскрашиваем* для каждого $l > k$.

Реберное хроматическое число, хроматический индекс $\chi'(G)$, графа *G* - *это* минимальное *k,* для которого *G* является *k*-реберно раскрашиваемым,

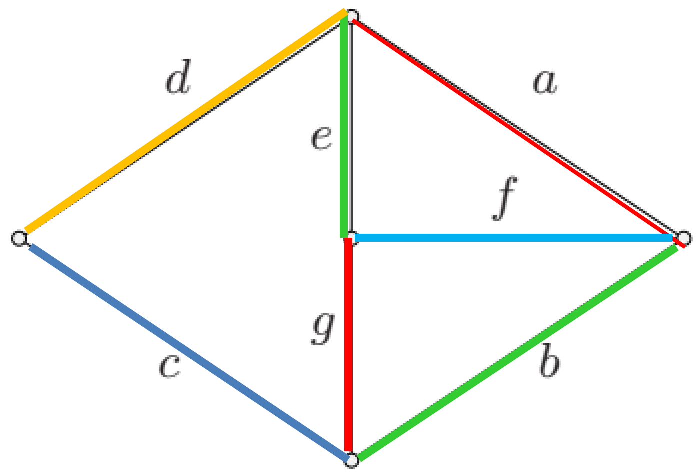
и *G* является *k-реберно-хроматическим,* если $\chi'(G) = k$.

Таким образом, показанный ниже граф является 4-реберно-хроматическим.



Реберная раскраска

Пример. Граф с хроматическим индексом 4.
Показанный ниже граф имеет раскраску в 4 цвета:
{{*a*, *g*}, {*b*, *e*}, {*c*, *f*}, {*d*}} .



Реберная раскраска

В реберной раскраске графа, ребрам, инцидентным одной вершине, должны быть присвоены разные цвета.

Это наблюдение дает нижнюю границу хроматического индекса:
$\chi' \geq \Delta.$

Проблемы раскраски ребер возникают на практике во многом так же, как и проблемы вершинной раскраски.

Теорема Теорема Визинга

Для любого простого графа G, $\chi' \leq \Delta + 1.$

- Ваши вопросы?
- Контакты лектора: apanovich_09@mail.ru