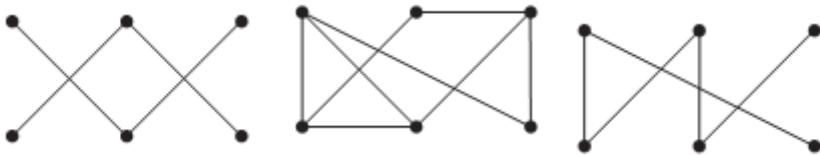


### Задачи про деревья

1) Какой из графов ниже является деревом?



2. Показать, что у любого дерева всегда есть не меньше двух висячих вершин.

3. а) Сколько существует неизоморфных деревьев с четырьмя вершинами (используя изоморфизм для неориентированных графов)?

б) Сколько существует неизоморфных корневых деревьев с четырьмя вершинами (используя изоморфизм для ориентированных графов)?

4. а) Сколько существует неизоморфных корневых деревьев с шестью вершинами? используя изоморфизм для неориентированных графов

б) Сколько существует неизоморфных корневых деревьев с шестью вершинами (используя изоморфизм для ориентированных графов)?

5. Предположим, что  $d_1, d_2, \dots, d_n$  - это  $n$  натуральных чисел с суммой  $2n - 2$ . Покажите, что существует дерево с  $n$  вершинами такое, что степени этих вершин равны  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

6. Покажите, что простой граф является деревом  $\Leftrightarrow$  когда он связен, но удаление любого из его ребер делает граф не связным.

7. Пусть  $G$  простой граф с  $n$  вершинами. Покажите, что

а)  $G$  является деревом  $\Leftrightarrow$  когда  $G$  связен и имеет  $n - 1$  ребер.

б)  $G$  является деревом  $\Leftrightarrow$  когда  $G$  ациклический и имеет  $n - 1$  ребер.

8. Пусть  $G$ - дерево, все степени вершин которого нечетны. Докажите, что в  $G$  – нечетное количество ребер. Покажите, что это свойство не выполняется, если  $G$  – не дерево.

9. Сколько ребер в лесу из  $t$  деревьев в сумме имеющих  $n$  вершин?

10. Покажите, что дерево является двудольным графом.

11. Какие полные двудольные графы  $K_{m,n}$ , где  $m$  и  $n$  целые положительные числа, являются деревьями?

12. Сколько ребер у дерева с 10 000 вершинами?

13. Сколько вершин имеет полное (full) 5-арное дерево со 100 внутренними вершинами?

14. Сколько ребер имеет полное (full) бинарное дерево с 1000 внутренних вершин?

15. Сколько листьев имеет полное (full) троичное дерево со 100 вершинами?

16. Либо нарисуйте полное (full)  $m$ -арное дерево с 76 листьями и высотой 3, где  $m$  - положительное целое число, или покажите, что такого дерева не существует.

17. Либо нарисуйте полное (full)  $m$ -арное дерево с 84 листьями и высотой 3, где  $m$  - положительное целое число, или покажите, что такого дерева не существует.

18. Complete  $m$ -арное дерево это полное (full) дерево, у которого все листья находятся на одном уровне.

Построить complete бинарное дерево высоты 4 и complete 3-арное дерево высоты 3

Сколько вершин и листьев имеет complete  $m$ -арное дерево высоты  $h$ ?

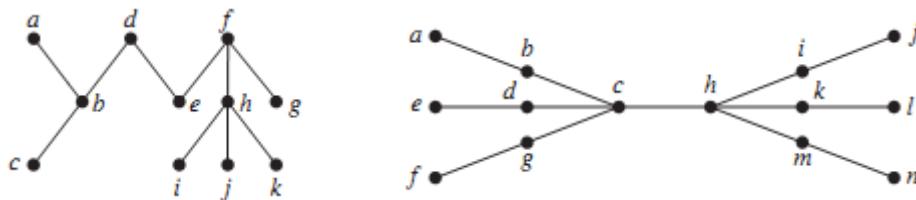
19. Полное (full)  $m$ -арное дерево  $T$  имеет 81 лист и высоту 4.

А ) Указать верхнюю и нижнюю оценку для  $m$

Б ) Чему равно  $m$  если  $T$  является сбалансированным?

**Эксцентризитет** вершины свободного дерева – это длина самого длинного простого пути, начинающегося в этой вершине. Вершина называется **центром**, если нет других вершин имеющих меньший эксцентризитет, чем данная.

20. Найти центры данных деревьев.



21. Как выбрать корень в неориентированном дереве, чтобы получить корневое дерево минимальной высоты?

22. Показать, что в дереве может быть либо один, либо 2 центра, смежных между собой.

### Задачи про взвешивание монет

23. Сколько взвешиваний необходимо, чтобы найти более легкую поддельную монету среди четырех монет? Опишите алгоритм нахождения более легкой монеты, используя это число взвешиваний.

24. Сколько взвешиваний весов необходимо для того, чтобы найти поддельную монету среди четырех монет, если фальшивая монета может быть тяжелее или легче других? Опишите алгоритм нахождения поддельной монеты, используя это количество взвешиваний.

25. Сколько взвешиваний весов необходимо для того, чтобы найти поддельную монету среди восьми монет, если фальшивая монета тяжелее или легче других?

Опишите алгоритм, нахождения поддельной монеты, используя это количество взвешиваний.

26. Одна из четырех монет может быть поддельной. Если это подделка, она может быть легче или тяжелее, чем другие. Сколько взвешиваний необходимо, чтобы при помощи весов, определить есть ли поддельная монета, и если есть, то она легче или тяжелее, чем другие? Опишите алгоритм, позволяющий найти поддельную монету и определить, легче она или тяжелее, используя это количество взвешиваний.

27. Показать, что  $\log_2(n!) \in \Omega(n \log_2 n)$

### Задачи про кодирование Хаффмана

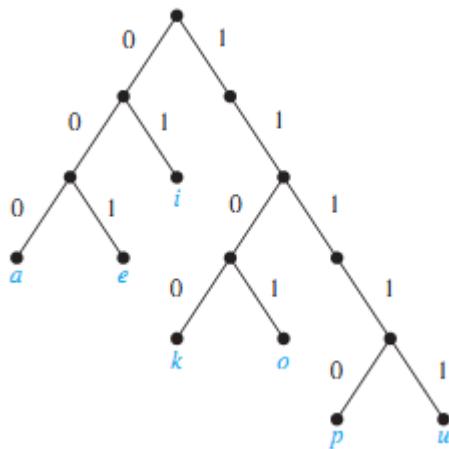
28 Какие из этих кодов являются префиксными кодами?

- a) a: 11, e: 00, t : 10, s:01
- b) a:0, e:1, t : 01, s: 001
- c) a: 101, e: 11, t : 001, s: 011, n: 010
- d) a: 010, e: 11, t : 011, s: 1011, n: 1001, i: 10101

29. Постройте двоичное дерево с префиксными кодами, представляющими данные схемы кодирования.

- a) a: 11, e:0, t : 101, s: 100
- b) a:1, e: 01, t : 001, s: 0001, n: 00001
- c) a: 1010, e:0, t : 11, s: 1011, n: 1001, i: 10001

30 Каковы коды для a, e, i, k,o,p, и u, если схема кодирования представлена деревом, показанным ниже?



31. Данна схема кодирования a: 001, b: 0001, e:1, r: 0000, s: 0100, t : 011, x: 01010, найти слово, представленное кодом:

- a) 01110100011. b) 0001110000.
- c) 0100101010. d) 01100101010.

32. Используйте кодирование Хаффмана для кодирования этих символов с заданными частотами

A: 0.10, B: 0.25, C: 0.05, D: 0.15, E: 0.30, F: 0.07, G: 0.08.

Какое среднее количество битов требуется для кодирования символа?

33. а) Используйте кодирование Хаффмана для кодирования символов со следующими частотами a: 0,4, b: 0,2, c: 0,2, d: 0,1, e: 0,1 двумя разными способами, по-разному разрешая конфликты в алгоритме.

1) среди деревьев минимального веса выбирайте для комбинирования два дерева с наибольшим количеством вершин на каждом этапе алгоритма.

2) среди деревьев минимального веса выбирайте для комбинирования два дерева с наименьшим количеством вершин на каждом этапе.

Б ) Посчитать среднее количество битов, необходимых для кодирования символа в каждом случае.

Предположим, что  $m$  - положительное целое число с  $m \geq 2$ .  $m$ -арный код Хаффмана для набора из  $N$  символов может быть построен аналогично построению двоичного кода Хаффмана. На начальном шаге,  $((N - 1) \bmod (m - 1)) + 1$  деревьев, состоящих из одной вершины с наименьшими весами, объединяется в корневое дерево с этими вершинами в виде листьев. На каждом последующем этапе  $m$  деревьев наименьшего веса объединяются в  $m$ -арное дерево.

34. Используя символы 0, 1 и 2, постройте троичное ( $m = 3$ ) кодирование Хаффмана для кодирования этих букв с учетом частоты: A: 0.25, E: 0.30, N: 0.10, R: 0.05, T: 0.12, Z: 0.18.