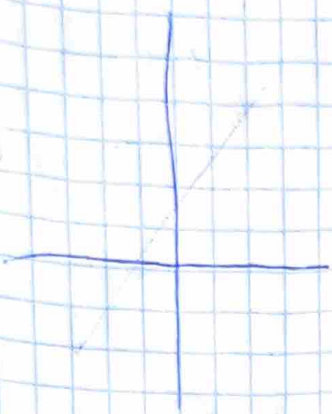


Следствие 1 И'') Касательная к эллипсу (гиперболы) явл. биссектрисой внешних (внутренних) углов, образованных фокальными радиусами т. касания

П4 Определение и св-ва параболы

Т. Для линии S точек т-ты следующие ут-я равносильны:

1) S – линия задаваемая в некот. ПСК ур-ем

$$y^2 = 2px$$

где $p > 0$

2) Найдётся т. F и прямая d такие, что ГМТ равноудалённых от d и F.

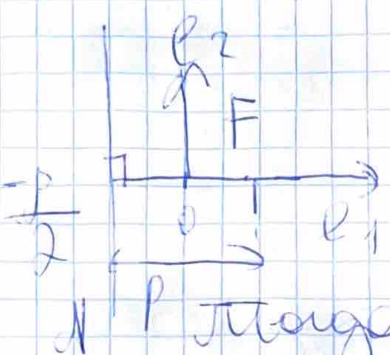
Д-во $\Rightarrow$ $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{p}{2}$ – ур-е прямой d.

Возьмём произв. т. $M(x, y)$ на S, т. е.

$y^2 = px$

$|MF| = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = \sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}} = |x+\frac{p}{2}|$ — расст. от M до d $\Leftarrow$

Поместим начало координат O в середину $\perp$, опущенного из F на d



Пусть e_1 — ед. в-р, сонапр. $\overline{OF}$, e_2 — такой ед. в-р $\perp e_1$, что (e_1, e_2) — правая.

Тогда в ПСК Oe_1e_2: $F(\frac{p}{2}, 0)$

$x = -\frac{p}{2}$ — ур-е прямой d

Возьмём на S произв. т. $M(x, y)$.

Имеем, что из $|MF|^2 = \rho^2(M, d)$ следует

$y^2 = 2px$

УТВ Линия, задаваемая ур-ем (1) имеет единственную ось симметрии

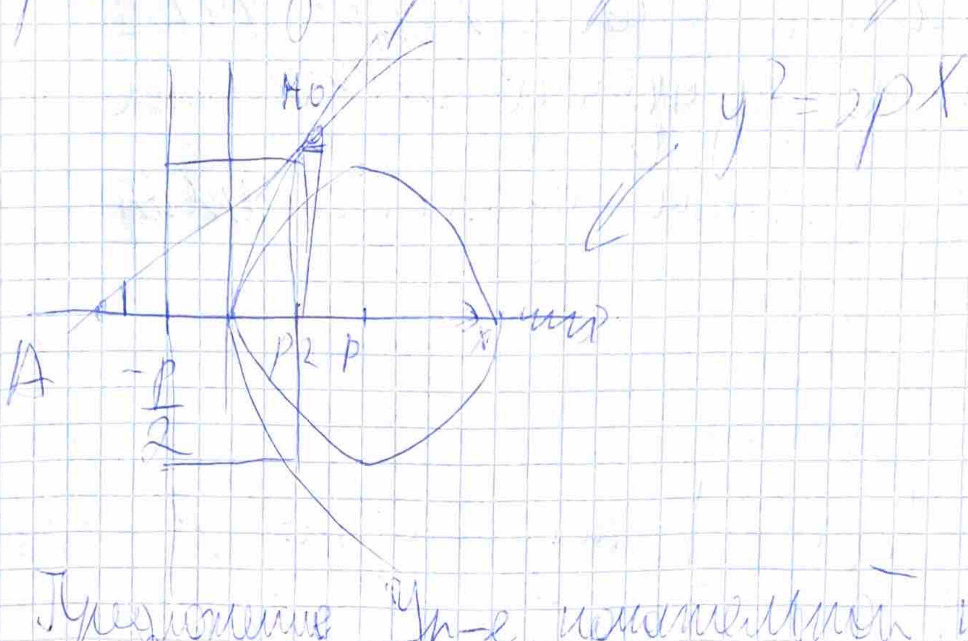
ОПР Линия на пл-ти наз. параболой, если она удовлетворяет одному из ур-й (1) или (2). Т. Ось симметрии параболы наз. осью параболы.

Ур-е (1) наз-ся каноническим ур-ем

параболы, а ПСК наз. канонической.

Точка F из ур-я 2) очевидно лежит на оси и потому определена однозначно. Точка F наз-ся фокусом параболы. Прямая $d \perp$ оси, и потому также определена однозначно (наход-ся на расст. $|OF|$ от вершины O). Прямая d наз. директрисой параболы.

Опр Расстояние от фокуса до директрисы наз. параметром параболы



Предложение Ур-е касательной к параболе $y^2 = 2px$ в т. (x_0, y_0) имеет вид
$yy_0 = p(x + x_0)$

Д-во

Пусть $x = ky + \tau$. Найдём т. пересечения её параболы $y^2 = 2p(ky + \tau)$

$D = 4p^2k^2 + 8p\tau = 0$

$\tau = -\frac{pk^2}{2}$. $y_1 = y_2 = y_0 = pk$

$2px_0 = y_0^2 \Rightarrow x_0 = \frac{p^2k^2}{2} \cdot -\tau$

$x = \frac{y_0}{p} y - x_0$ ▷

T (Оптическое св-во)

Касательная к параболе явл. бис-сой угла, образованного фокальным радиусом т. касания и $\perp$, опущенным из т. касания на директрису

Д-во

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – т. касания параболы (1) и прямой l, $l \cap OX = A$

Из предыдущ. $A(-x_0, 0)$, $|AF| = \frac{p}{2} + x_0 =$

$= \rho(M_0, d) = |M_0F| \Rightarrow$

$\triangle AFM_0$ — равнобедр., и $\widehat{M_0AF} = \widehat{AM_0F}$ ⊠

П5 Классификация линий II порядка

Пусть $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$

ОПР $\{(x,y) \mid a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0\}$ — наз. линией II-го порядка, а ур-е, которым она определяется наз. общим ур-ем линий II-ого порядка.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\xi^T A \xi + 2b^T \xi + c = 0 \quad (1)$

Лемма 1 Пусть $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

A — симм. Тогда собственные векторы м-цы A, отвечающие разл. собств. значениям, взаимно перпендикулярны

Д-во $Au = \lambda_1 u$, $Av = \lambda_2 v$ и $A^T = A$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\langle v, Au \rangle = \langle v, \lambda_1 u \rangle = \lambda_1 \langle v, u \rangle$

$\langle A^T v, u\rangle = \langle Av, u\rangle = \langle \lambda_2 v, u\rangle =$

$= \lambda_2 \langle v, u\rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\langle v, u\rangle = 0$ ☒

$= \text{ПР}(e_1)^{\perp}$ - ортогональное дополнение

Следствие У любой симм 2×2 - матрицы A сущ-ет ОНБ из собств. в-ров

УПР Если $Au = \lambda_1 u$, ~~$Av = \lambda$~~

Значит $\text{ПР}(u)^{\perp}$ - инвариант относительно A

$B = A - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - симметричная

~~$\forall v \quad \langle Bu, v\rangle$~~

$\text{ПР}(u)^{\perp} = \{v \mid \langle v, u\rangle = 0\}$

$\langle Bv, u\rangle = \langle v, Bu\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$

Пусть e_1, e_2 - ОНБ из с. в. м-цы A, тогда

$C(A)$

Полагаем $Q = (\boxed{e_1}\boxed{e_2})$, $\xi = Q\xi'$

$$\xi^T A \xi = (Q\xi')^T A \xi' = (\xi')^T Q^T A Q \xi'$$

$$AQ = (\lambda_1 \boxed{e_1}\ \lambda_2 \boxed{e_2}) \qquad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$Q^T A Q = \left(\boxed{\begin{matrix}e_1\\ e_2\end{matrix}}^T\right)(\lambda_1 \boxed{e_1}\ \lambda_2 \boxed{e_2}) =$$

$$= \begin{pmatrix} e_1^T \lambda_1 e_1 & e_1^T \lambda_2 e_2\\ e_2^T \lambda_1 e_1 & e_2^T \lambda_2 e_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 |x'|^2 + \lambda_2 |y'|^2$$

---

1) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$