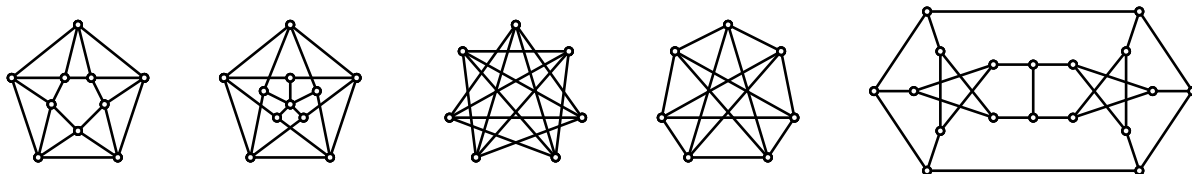


# ЗАДАЧИ ПО МАТЕРИАЛУ ЛЕКЦИИ «РЕБЕРНЫЕ РАСКРАСКИ»

1. Верно ли, что для любого графа  $G$  выполняется неравенство:  $\chi(G) \leq \chi'(G)$ ? Если нет, то для каких графов неравенство нарушается?
2. Построить  $\min$  реберную раскраску приведенных графов. Ответ обосновать.



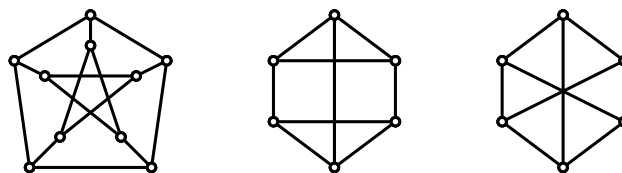
3. Найти минимальную реберную раскраску двудольного графа с матрицей смежности:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Применяя алгоритмический подход, построить минимальную реберную раскраску указанных двудольных графов.



5. Верно ли, что выбрав подходящий порядок просмотра ребер, можно добиться того, что алгоритм жадной реберной раскраски построит раскраску указанных графов в 3, 4, 5, 6 цветов? Каков хроматический индекс этих графов?



6. Рассмотрим “жадную” раскраску одного из графов из предыдущей задачи в 5 цветов (если таковая существует). Построить по ней раскраску в 4 цвета, используя подход, примененный в теореме Визинга. Ребра цвета 5 считаем неокрашенными.

7. Рассмотрим задачу Class–Teacher Problem:  $m$  учителей ведут занятия у  $n$  классов, количество занятий, проводимых у класса  $i$  учителем  $j$ , равно  $r_{ij}$ . В каждый момент времени каждый учитель ведет не более чем у одного класса и каждый класс занимается не более чем с одним учителем. Найти минимальное число временных периодов ( $p$ ), необходимое для построения допустимого расписания, а также минимальное число аудиторий ( $\rho$ ) в расписании для  $p$  периодов. Построить кратчайшие расписания для  $\rho$  и  $\rho - 1$  аудиторий.

$$\text{a) } n = 4, m = 4, (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ b) } n = 4, m = 5, (r_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. (Решить с помощью реберной раскраски.) Путин, Трамп, Мэй, Меркель и Макрон проводят ряд двусторонних переговоров: Мэй + Путин, Меркель + Путин, Макрон + Путин, Мэй + Трамп, Меркель + Трамп, Макрон + Трамп, Путин + Трамп. Каждая встреча продолжается 1 час, встречи с разным набором участников можно проводить одновременно. Какое минимальное количество времени потребуется для проведения всех переговоров? Можно ли их назначить таким образом, чтобы ни у одного из лидеров не было перерыва между встречами?