

## Плоские и планарные графы

Тахонов Иван Иванович

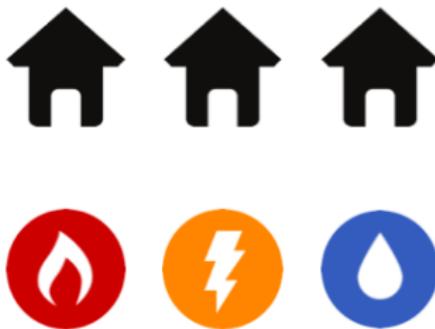
Новосибирский государственный университет  
Механико-математический факультет

НГУ, 2019

# Плоские и планарные графы

## Three utilities problem (~ 1913)

Suppose there are three cottages on a plane (or sphere) and each needs to be connected to the gas, water, and electricity companies. Without using a third dimension or sending any of the connections through another company or cottage, is there a way to make all nine connections without any of the lines crossing each other?



# Плоский граф

Плоский граф – это пара  $(V, E)$  такая, что:

- вершины графа – это точки плоскости:  $V \subset \mathbb{R}^2$ ,
- ребра графа – простые жордановы дуги на плоскости:  $E \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ , при этом:
  - концевые точки каждой дуги (ребра)  $e \in E$  лежат в  $V$ ,
  - разные ребра имеют разные множества концевых точек,
  - внутренность ребра не содержит ни концевых, ни внутренних точек никакого другого ребра.

Плоскому графу соответствует обычновенный граф  $G = (V, E)$ .

## Определение 1

Пусть  $G = (V, E)$  – простой неорграф. Говорим, что  $G$  **планарный**, если он **может быть изображен на плоскости без пересечения ребер**.

Что это значит: график  $G$  изоморфен некоторому плоскому графу.

**NB.** Свойством “быть плоским” обладает конкретное изображение графа на плоскости. Планарность – свойство графа как объекта. Оно сохраняется при изоморфизме.

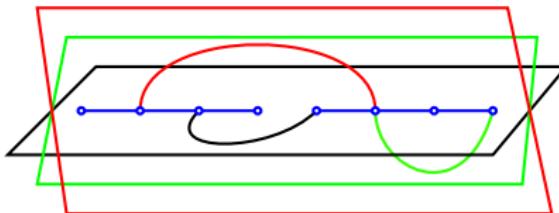
## Определение 2

Пусть  $G = (V, E)$  – простой неорграф, а  $\sigma \subset \mathbb{R}^3$  – некоторая поверхность. Говорим, что  $G$  **укладывается** на  $\sigma$ , если он может быть изображен на  $\sigma$  без пересечения ребер.

## Теорема 1

Пусть  $G = (V, E)$  – некоторый граф.  $G$  можно уложить в  $\mathbb{R}^3$ .

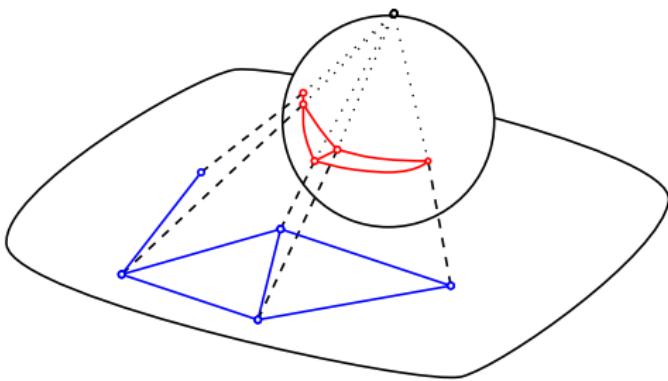
**Док.-во.** Перенумеруем вершины графа:  $v_1, v_2, \dots, v_n$  и изобразим их на точками прямой  $\ell$ . Ребра вида  $(v_i, v_{i+1})$  изобразим отрезками. Для каждого из ребер вида  $(v_i, v_j)$ ,  $j > i + 1$ , создаем отдельную плоскость, проходящую через  $\ell$ , и изображаем ребро дугой в этой плоскости. ■



## Теорема 2

*Граф  $G$  планарен  $\Leftrightarrow$  он укладывается на сфере.*

**Док.-во.** Используем стереографическую проекцию. Очевидно, если изображение на плоскости было без пересечения ребер, то и на сфере пересечений не будет. И наоборот, если на сфере изображение без пересечений ребер, на плоскости пересечений не появится. ■



## Замечание 1

*Любой граф можно уложить в  $\mathbb{R}^3$  так, что ребра будут представлены прямолинейными сегментами.*

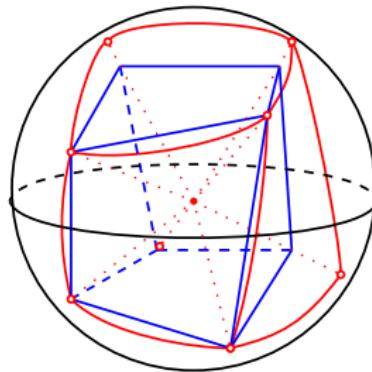
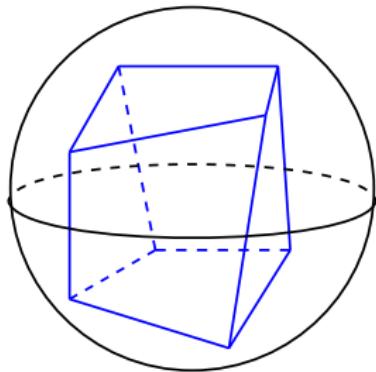
## Теорема 3 (Fáry – 1948)

*Пусть  $G$  – плоский граф. Существует укладка  $G$  на плоскость, в которой ребра представлены прямолинейными сегментами.*

## Следствие 1

*Графы выпуклых многогранников планарны.*

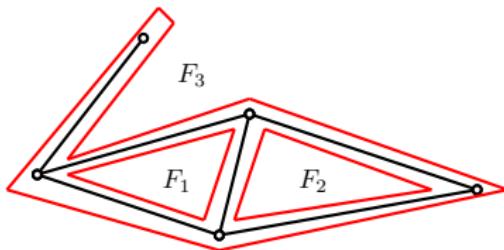
**Док.-во.** Граф выпуклого многогранника можно уложить на сферу (с помощью стереографической проекции). Значит, на плоскости он тоже может быть изображен. ■



**Заметим:** у многогранников есть вершины, ребра и грани. У плоских графов все это тоже есть.

**Гранью** плоского графа  $G$  называется максимальная по включению часть плоскости, в которой любые две точки можно соединить линией, не пересекающей ребра графа.

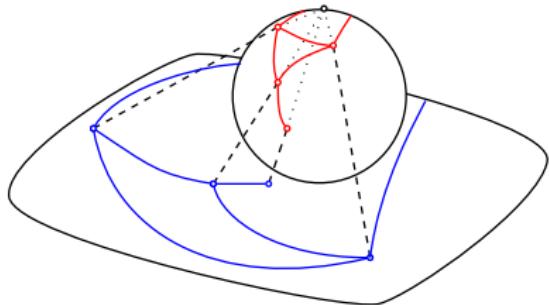
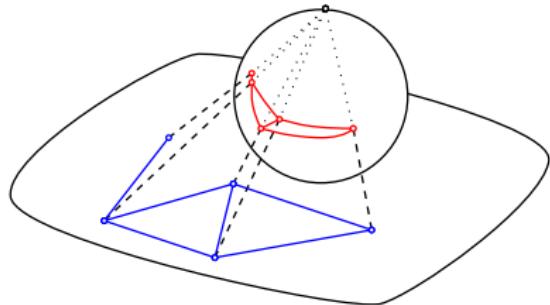
Выделяют конечные грани (внутренности циклов) и бесконечную внешнюю грань.



## Замечание 2

Пусть  $G$  – плоский граф и  $F$  – некоторая его грань. Существует изображение  $G$  на плоскости, в котором грань  $F$  является внешней.

**Док.-во.** Используя стереогр. проекцию, рисуем  $G$  на сфере. Затем поворачиваем сферу так, чтобы северный полюс находился внутри изображения  $F$ , и проецируем  $G$  обратно на плоскость. ■



## Теорема 4 (формула Эйлера для плоских графов)

Пусть плоский связный граф  $G$  имеет  $n$  вершин,  $m$  ребер и  $f$  граней. Тогда  $n - m + f = 2$ .

**Док.-во.** Индукцией по числу ребер. Начинаем с плоской укладки дерева:  $m = n - 1$ ,  $f = 1$  и соотношение верно.

Пусть оно верно для графов с  $\leq m - 1$  ребрами. Докажем для графа с  $m$  ребрами.

Если  $G$  не дерево, то из него можно удалить ребро без потери связности и планарности. Выберем такое ребро  $e$ . Рассмотрим граф  $G \setminus \{e\}$ . У него  $n$  вершин,  $m - 1$  ребро и  $f - 1$  грань (удаленное ребро входило в цикл). Формула для него верна  $\Rightarrow$

$$2 = n - (m - 1) + (f - 1) = n - m + f.$$

Значит, формула верна и для  $G$  тоже. ■

**Примечательно:** изоморфные плоские графы имеют одно и то же число граней!

## Следствие 2

Если  $G = (V, E)$  – планарный граф и  $|V| \geq 3$ , то  $|E| \leq 3|V| - 6$ .

**Док.-во.** Считаем, что  $G$  – не цепь длины 2 (для нее все верно).

Пусть  $\{F_1, \dots, F_f\}$  – грани  $G$ . Введем индикатор  $I_{e,i}$ , равный 1/0 в зависимости от того, лежит  $e \in E$  на границе  $F_i$  или нет.

Каждая грань содержит  $\geq 3$  ребер и каждое ребро принадлежит  $\leq 2$  граням  $\Rightarrow$  рассмотрим сумму  $S = \sum_{i=1}^f \sum_{e \in E} I_{e,i}$ .

С одной стороны,  $S = \sum_{i=1}^f \sum_{e \in E} I_{e,i} \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f$ .

С другой стороны,  $S = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^f I_{e,i} \leq \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$ . Значит,  $f \leq 2|E|/3$ .

Тогда по тождеству Эйлера

$$2|E|/3 \geq f = 2 - |V| + |E| \Rightarrow |V| - 2 \geq |E|/3 \Rightarrow |E| \leq 3|V| - 6. \blacksquare$$

### Следствие 3

$G = (V, E)$  – планарный граф без треугольников  $\Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$ .

**Док.-во.** Аналогично. В графе без треугольников грани содержат  $\geq 4$  ребер. Значит

$$S = \sum_{i=1}^f \sum_{e \in E} I_{e,i} \geq \sum_{i=1}^f 4 = 4f,$$

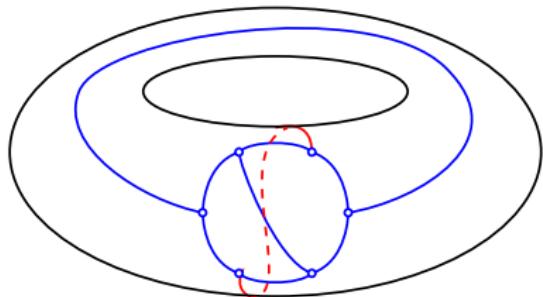
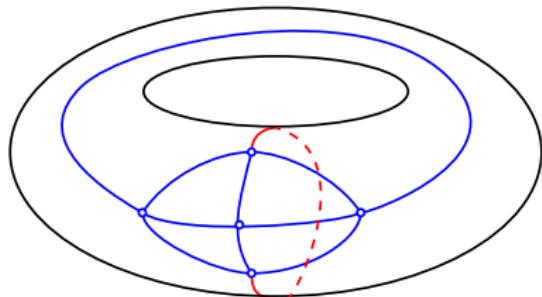
$$S = \sum_{e \in E} \sum_{i=1}^f I_{e,i} \leq \sum_{e \in E} 2 = 2|E|,$$

то есть,  $f \leq |E|/2$ . Подставив это в тождество Эйлера, получим  $|E|/2 \geq f = 2 - |V| + |E| \Rightarrow |V| - 2 \geq |E|/2 \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$ . ■

Из отмеченного выше следует:

- ①  $K_5$  не планарен – 5 вершин и 10 ребер (д.б.  $\leq 9$ );
- ②  $K_{3,3}$  не планарен – без треуг., 6 вершин и 9 ребер (д.б.  $\leq 8$ ).

Заметим, что оба графа можно уложить на торе (но не на сфере)!



# Какие операции над графиками сохраняют планарность?

Удаление вершины (вместе с инцидентными ребрами)



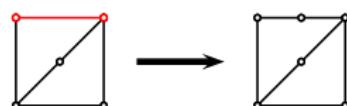
Удаление ребра



Стягивание ребра (объединение смежных вершин)



Подразбиение ребра (замена ребра на цепь)

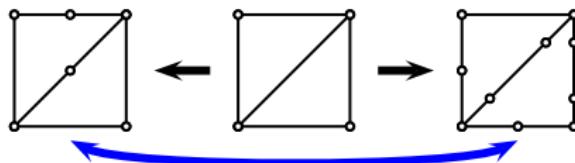


# Гомеоморфизм графов

## Определение 3

Говорим, что графы  $G_1$  и  $G_2$  **гомеоморфны**, если существует граф  $H$  и графы  $H_1$  и  $H_2$ , полученные из  $H$  подразбиением ребер, такие, что  $G_1 \sim H_1$  и  $G_2 \sim H_2$ .

Иными словами: график  $G_1$  можно перевести в  $G_2$ , подразбивая некоторые ребра и объединяя некоторые вершины степени 2.



**Заметим:** график, гомеоморфный непланарному, также не является планарным!

# Критерии планарности

Теорема 5 (Понtryгин, Kuratowski – 1930)

Пусть  $G$  – простой неорграф.  $G$  планарен  $\Leftrightarrow$  он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

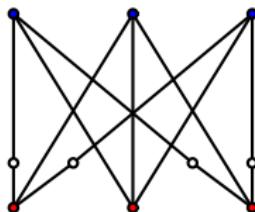
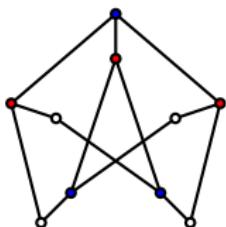
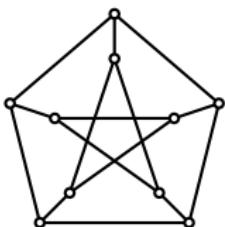
Док.-во.  $\Rightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Не приводится.

Идея: берем **минимальный** непланарный граф (при удалении любого ребра становится планарным). Можно показать, что:

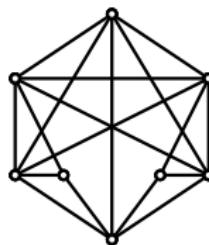
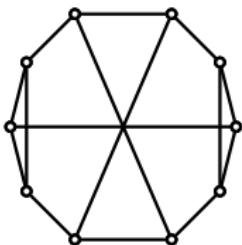
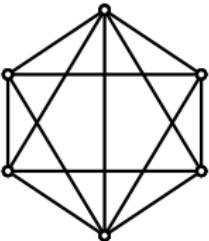
- минимальный граф без подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , должен быть 3-связным;
- любой 3-связный граф без подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , должен быть планарным.

Получаем противоречие. ■

**Пример:** граф Петерсена не планарен! Он содержит подграф, гомеоморфный  $K_{3,3}$ .



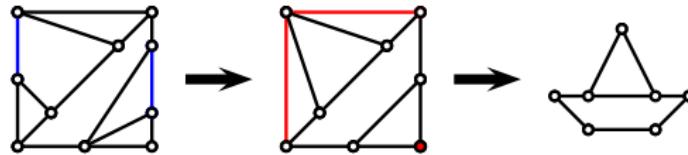
**Упражнение:** установить непланарность указанных графов.



# Миноры графов

## Определение 4

Говорим, что график  $H$  является **минором** графа  $G$ , если  $H$  может быть получен из  $G$  удалением некоторых вершин и ребер, а также стягиванием некоторых ребер.



**Заметим:** график, содержащий непланарный минор, не может быть планарным!

## Теорема 6 (Wagner – 1937)

Пусть  $G$  – простой неорграф.  $G$  планарен  $\Leftrightarrow$  он не содержит миноров, изоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

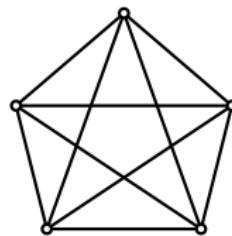
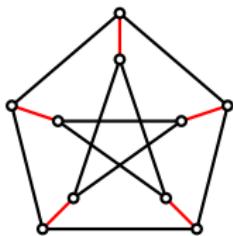
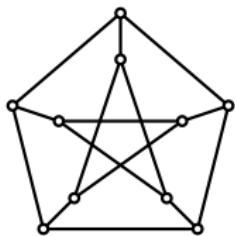
**Док.-во.**  $\Rightarrow$  Очевидно.  $\Leftarrow$  Не приводится.

**Идея:** можно показать, что

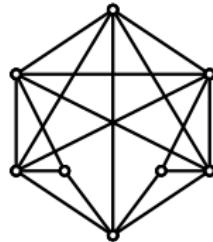
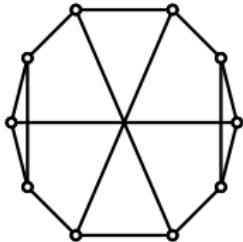
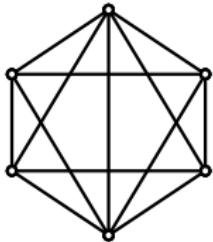
- если есть минор  $K_{3,3} \Rightarrow$  есть подграф, гомеом.  $K_{3,3}$ ;
- если есть минор  $K_5 \Rightarrow$  есть подграф, гомеом.  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

Далее применяем теорему Понtryгина-Куратовского. ■

**Пример:** граф Петерсена не планарен! Он содержит минор, изоморфный  $K_5$ .



**Упражнение:** установить непланарность указанных графов.



# Алгоритмы проверки планарности

## Segments Addition

L. Auslander and S. V. Parter. On imbedding graphs in the sphere // Journal of Mathematics and Mechanics, 10(3):517–523, 1961.

## Path addition

J. Hopcroft and R. E. Tarjan. Efficient planarity testing // J. ACM, 21(4):549–568, 1974

## Vertex addition

A. Lempel, S. Even, and I. Cederbaum. An algorithm for planarity testing of graphs // In Theory of Graphs: Internat. Symposium (Rome 1966), p. 215–232

## Edge addition

H. de Fraysseix, P. Ossona de Mendez, and P. Rosenstiehl. Trémaux trees and planarity // Int. J. of Foundations of Comp. Science, 17(5):1017–1029, 2006.

# Раскраска планарного графа

## Замечание 3

Пусть  $G = (V, E)$  – простой планарный график.  $\exists v \in V$  такая, что  $\deg(v) \leq 5$ .

**Док.-во.** Пусть у всех вершин степень  $\geq 6$ . Тогда

$$6|V| \leq \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \leq 6|V| - 12.$$

Противоречие. ■

## Теорема 7 (Six color theorem)

Пусть  $G = (V, E)$  – простой планарный граф. Тогда  $\chi(G) \leq 6$ .

**Док.-во.** Индукцией по числу вершин. Для  $|V| = 2$  очевидно.

Пусть утверждение верно для графов с  $< |V|$  вершинами. Докажем для  $= |V|$ .

Выберем в  $G$  вершину  $v$  степени  $\leq 5$ . Удалим ее вместе с инцидентными ребрами. Получим планарный граф с меньшим числом вершин, который красится в  $\leq 6$  цветов. Раскрасим его и добавим  $v$  обратно. У нее  $\leq 5$  соседей  $\Rightarrow$  есть свободный цвет. Докрашиваем, получаем раскраску всего графа в  $\leq 6$  цветов. ■

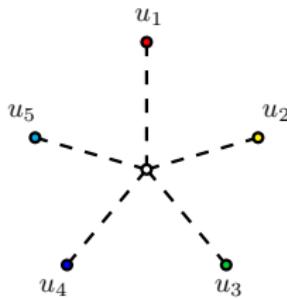
## Теорема 8 (Five color theorem)

Пусть  $G = (V, E)$  – простой планарный граф. Тогда  $\chi(G) \leq 5$ .

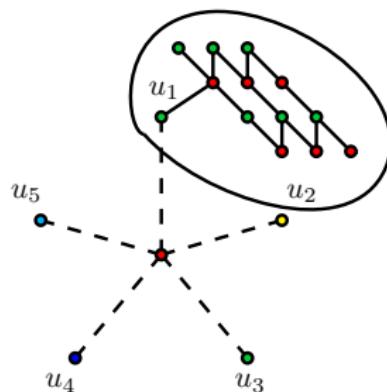
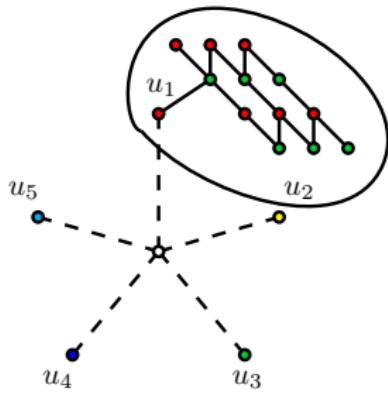
**Док.-во.** Снова берем вершину  $v$  степени  $\leq 5$  (считаем, что  $= 5$ ).

Убираем, красим оставшийся граф в 5 цветов. Если у  $v$  есть соседи одного цвета  $\Rightarrow$  докрашиваем ее в свободный цвет. Предположим, все соседи разноцветны (по порядку:  $u_i$  цвета  $i$ ).

Рассмотрим  $u_1$  и  $u_3$ . Начиная с  $u_1$ , построим макс по включению связный подграф  $H_{13} \subseteq G$ , содержащий вершины цветов 1 и 3.

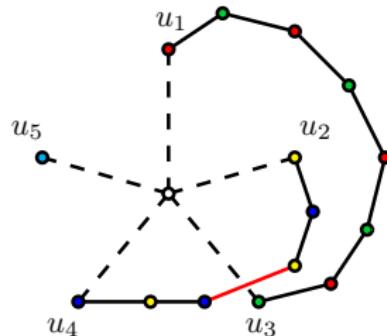
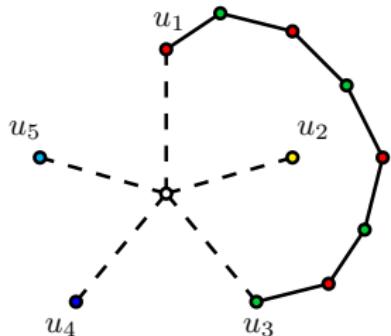


Случай 1:  $u_3 \notin H_{13}$ .



Тогда во всем  $H$  меняем цвета 1 и 3. В итоге освобождается цвет 1 для  $v$ .

Случай 2:  $u_3 \in H_{13}$ .



Тогда есть чередующийся 1–3 путь, соединяющий  $u_1$  и  $u_3$ .

Рассмотрим  $u_2$  и аналогично построим  $H_{24}$ . Если  $u_4 \in H_{24}$ , то в  $G$  есть 2–4 путь, соединяющий  $u_2$  и  $u_4$ . Но это невозможно: путь должен будет пересечь границу цикла  $(v - u_1 - u_3 - v)$ .

Т.о.,  $u_4 \notin H_{24}$ , можем перекрасить  $u_2$  в 4 освободить 2 для  $v$ . ■

## Замечание 4

*Существует алгоритм, строящий раскраску вершин планарного графа в  $\leq 5$  цветов.*

Robertson, Neil; Sanders, Daniel P.; Seymour, Paul; Thomas, Robin (1996),  
"Efficiently four-coloring planar graphs" // Proc. 28th ACM Symposium on  
Theory of Computing (STOC)

## Теорема 9 (Four color theorem)

*Пусть  $G = (V, E)$  – простой планарный граф. Тогда  $\chi(G) \leq 4$ .*

Appel, Kenneth; Haken, Wolfgang (1989), Every Planar Map is Four-Colorable  
// Contemporary Mathematics, 98

# Реберная раскраска

## Замечание 5

*Среди планарных графов с максимальной степенью вершин  $2 \leq \Delta \leq 5$  есть как  $\Delta$ -раскрашиваемые, так и  $(\Delta + 1)$ -раскрашиваемые.*

**Док.-во.** Можно придумать примеры для каждого  $\Delta \in \{2, 3, 4, 5\}$ . ■

**Оказывается:** планарные графы с  $\Delta \geq 7$  принадлежат 1 классу (т.е., являются реберно  $\Delta$ -раскрашиваемыми).

**Визинг – 1964/65:**  $G$  планарен,  $\Delta(G) \geq 8 \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ .

**Sanders, Zhao – 2001:**  $G$  планарен,  $\Delta(G) = 7 \Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$ .

## Задача

Пусть  $G$  – планарный граф,  $\Delta(G) = 6$ . Верно ли, что  $\chi'(G) = \Delta(G)$ ?

# Задача о картинной галерее

## Ross Honsberger, Mathematical Gems II, 1976

At a conference in Stanford in August, 1973, Victor Klee asked the gifted young Czech mathematician Vaclav Chvatal (University of Montreal) whether he had considered a certain problem of guarding the paintings in an art gallery. The way the rooms in museums and galleries snake around with all kinds of alcoves and corners, it is not an easy job to keep an eye on every bit of wall space. The question is to determine the minimum number of guards that are necessary to survey the entire building. The guards are to remain at fixed posts, but they are able to turn around on the spot. The walls of the gallery are assumed to be straight. In a short time, Chvatal had the whole matter figured out...

## Задача 1 (Задача о картинной галерее (Art Gallery Problem))

Дан простой многоугольник  $\mathcal{P}$ .

Найти  $\min$  число охранников, достаточное для наблюдения за всеми точками  $\mathcal{P}$ .

Многоугольник **простой**, если его граница – простая замкнутая цепь из линейных сегментов без самопересечений.

Точка **видима** (наблюдаема) охранником, если отрезок, соединяющий точку и охранника, целиком лежит в  $\mathcal{P}$ .

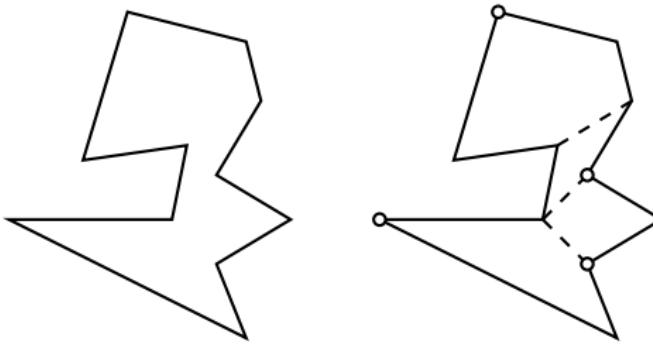
**Далее полагаем:** охранников можно размещать только в вершинах  $\mathcal{P}$ .

**Важно:** задача с вершинными охранниками сложнорешаема; скорее всего за полиномиальное время точное решение не построим!

Попробуем найти приближенное решение.

**Идея:**

- задача тривиальна для выпуклых фигур – они наблюдаемы из любой вершины  $\Rightarrow$  для них достаточно одного охранника;
- разобьем  $\mathcal{P}$  на выпуклые многоугольники и выберем в каждом из них по одной вершине;
- в процессе не должно появиться новых вершин  $\Rightarrow$  разбиваем по диагоналям.



Слишком много охранников!

- есть многоугольники с общими сторонами  $\Rightarrow$  в каких-то из них может оказаться больше одного охранника.

## Дополнительные требования:

- хотим только 1 охр. в каждой (ограниченной) грани графа;
- расположение охранников должно образовывать независимое множество;
- мощность этого множества должна быть небольшой.

## Используем раскраску:

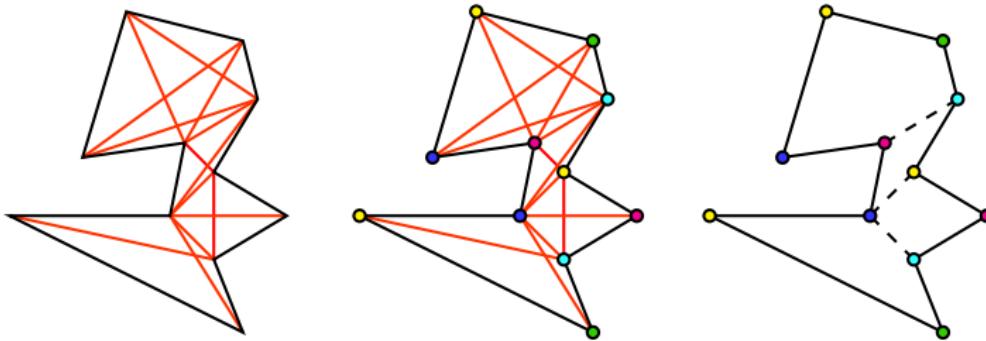
- соединим вершины каждой грани диагоналями → клика;
- покрасим полученный граф в минимальное число цветов;
- ищем раскраску, где есть цвета, присутств. в каждой клике;
- выбираем цвет мин мощности с указанным свойством;
- этот цвет образует независимое множество, имеющее в каждой грани по одной вершине, и его мощность “мала”..

## Algorithm 1 (Общая схема)

**Input:** Простой  $n$ -угольник  $\mathcal{P}$

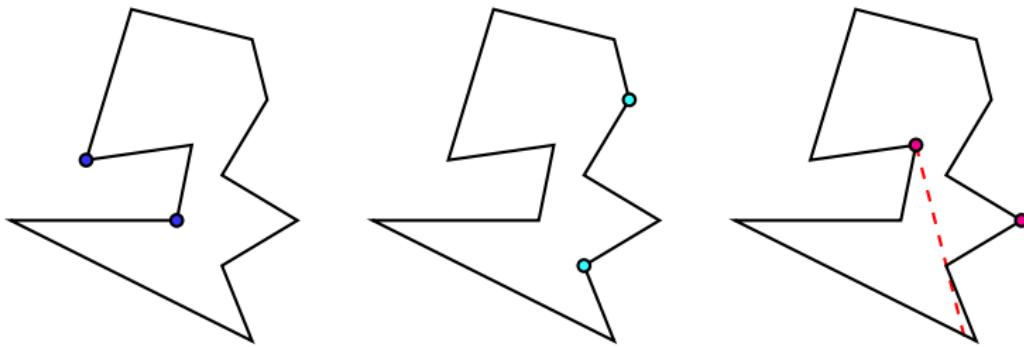
- 1: диагоналями разбить  $\mathcal{P}$  на выпуклые многоугольники;
- 2: превратить каждую из граней полученного графа в клику с помощью дополнительных диагоналей – граф  $G = (V, E)$ ;
- 3: раскрасить  $G$  в минимальное число цветов (так, чтобы были цвета, присутствующие в каждой клике);
- 4: среди всех цветов, присутствующих в каждой клике, найти цвет наименьшей мощности  $V' \subset V$ .

**Output:** места размещения охранников –  $V'$ .



Разбиваем многоугольник, проводим диагонали и красим график.

Есть два цвета размера 2, присутствующих в каждой грани.



Есть два цвета размера 2, присутствующих в каждой грани.  
Они дают два решения задачи.

Есть другие цвета размера 2, но они представлены не во всех под-многоугольниках. Если взять в качестве решения какой-то из них, то появятся необозреваемые области..

# Трудности с реализацией

Чтобы применять этот подход, необходимо:

- ① уметь за “разумное” время разбивать многоугольник на “хорошие” выпуклые многоугольники,
- ② уметь “быстро” красить получающийся график,
- ③ уметь красить график так, чтобы были цвета, присутствующие в каждом многоугольнике.

# Триангуляция

Попробуем триангуляцию!

---

## Algorithm 2

---

**Input:** Простой  $n$ -угольник  $\mathcal{P}$

Найти  $\mathcal{T}$  – триангуляцию  $\mathcal{P}$ ,

Построить граф триангуляции  $G_{\mathcal{T}} = (V, E)$ ;

Построить 3-раскраску  $G$ ;

Найти цвет минимальной мощности  $V' \subset V$ .

**Output:** места размещения охранников –  $V'$ .

---

В графе триангуляции  $G_{\mathcal{T}} = (V, E)$  вершинами являются вершины  $\mathcal{P}$ , а ребрами – стороны  $\mathcal{P}$  и проведенные диагонали.

# О триангуляции

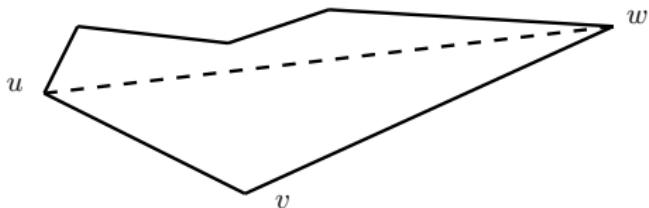
Чтобы показать корректность алгоритма, нужно знать:

- верно ли, что любой простой многоугольник можно разбить на треугольники только с помощью диагоналей, не вводя дополнительных вершин?
- верно ли, что граф триангуляции всегда 3-раскрашиваем?

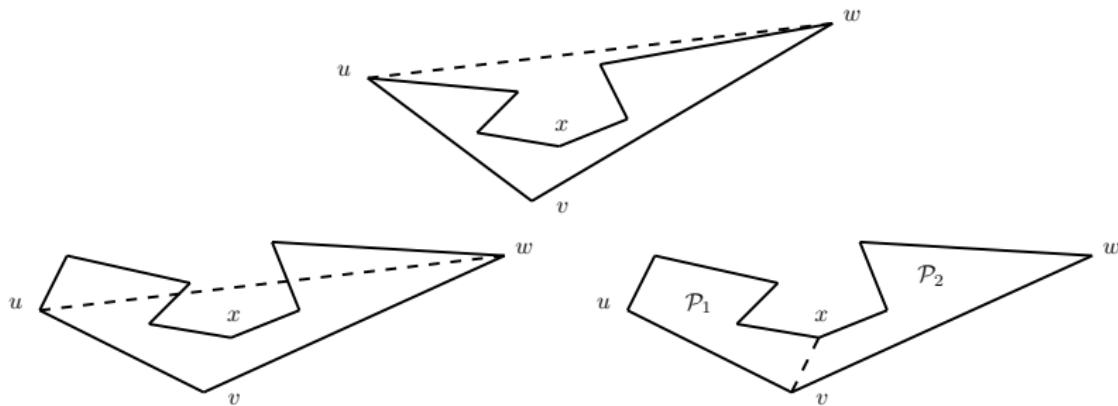
## Лемма 1

*Каждый простой  $n$ -угольник допускает триангуляцию. Число треугольников в любой триангуляции =  $n - 2$ .*

**Доказательство.** Индукцией по  $n$ . При  $n = 3$  все очевидно.



Пусть оно верно для  $< n$  углов и рассмотрим  $n$ -угольник  $\mathcal{P}$ . Пусть  $u, v, w$  – три последовательные вершины. Если сегмент  $(u, w)$  является диагональю ( $\subset \mathcal{P}$ ), рассматриваем  $\mathcal{P} \setminus \Delta uvw$ . В нем  $(n - 1)$  вершина и он разбивается на  $n - 3$  треугольника. Вместе с  $\Delta uvw$  это дает нам  $(n - 2)$ -триангуляцию  $\mathcal{P}$ .



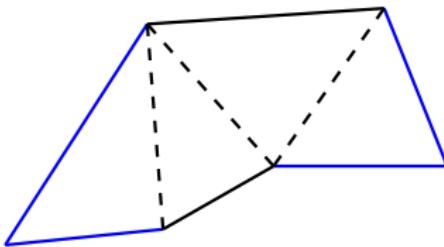
Если сегмент  $(u, w)$  не является диагональю, то часть  $\partial\mathcal{P}$  (без ребер  $(u, v)$  и  $(v, w)$ ) находится по одну сторону с  $v$  от  $(u, w)$ . Рассмотрим этот участок  $\partial\mathcal{P}$ . Он должен содержать вершину  $x$  такую, что  $(x, v)$  – диагональ.

Она разбивает  $\mathcal{P}$  на  $n_1$ -угольник  $\mathcal{P}_1$  и  $n_2$ -угольник  $\mathcal{P}_2$ ,  $n = n_1 + n_2 - 2$ . Каждая из частей  $(n_i - 2)$ -трианг., значит  $\mathcal{P}$  разбивается на  $n_1 - 2 + n_2 - 2 = n - 2$  треугольников. ■

## Следствие 4

Пусть  $\mathcal{P}$  – простой  $n$ -угольник,  $\mathcal{T}$  – некоторая его триангуляция. В  $\mathcal{T}$  есть **ухо**: треугольник, две стороны которого принадлежат границе  $\mathcal{P}$ .

**Док.-во.** В самом деле, у нас есть два типа треугольников:



- ① имеющих не более одной стороны на  $\partial\mathcal{P}$ ,
- ② имеющих две или три стороны на  $\partial\mathcal{P}$  (ухи).

Всего  $n - 2$  треугольника и  $n$  граничных сегментов. Если все треугольники первого типа, то покроем не более  $n - 2$  сторон. Так что должны быть еще и треугольники второго типа.

# Триангулируем алгоритмически

Простейший путь: отрезаем уши!

---

## Algorithm 3 (Ear clipping triangulation)

---

**Input:** Простой многоугольник  $\mathcal{P}$

repeat

repeat

    выбрать вершину  $v$  на  $\partial\mathcal{P}$  и рассмотреть ее соседей  $u, w$

until  $(u, w)$  полностью лежит в  $\mathcal{P}$

    проводить диагональ  $(u, w)$  и удалить треуг. (ухо) из  $\mathcal{P}$

until  $\mathcal{P}$  является треугольником

**Output:** Триангуляция  $\mathcal{P}$ .

---

## Другие алгоритмы

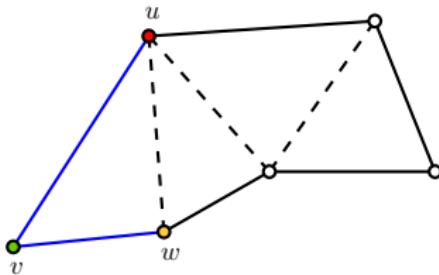
Есть более быстрые (и более сложные) алгоритмы:

- $O(n \ln n)$  – M. R. Garey, D. S. Johnson, F. P. Preparata, and R. E. Tarjan. Triangulating a simple polygon // Information Processing Letters, 7:175–179, 1978.
- $O(n)$  – B. Chazelle. Triangulating a Simple Polygon in Linear Time // Discrete & Computational Geometry T.6: 485–524, 1991.

## Лемма 2

Пусть  $\mathcal{P}$  – простой  $n$ -угольник,  $\mathcal{T}$  – некоторая его триангуляция, а  $G_{\mathcal{T}} = (V, E)$  – ее граф. Тогда  $\chi(G_{\mathcal{T}}) = 3$ .

**Док.-во.** Индукцией по  $n$ . Для  $n = 3$  график очевидно 3-раскр.



Пусть это так для многоугольников с  $< n$  вершинами. Рассм. триангуляцию  $\mathcal{P}$ . В ней есть ухо ( $\triangle uwv$ ): отрезаем его!

Получаем  $(n - 1)$ -угольник. Переносим на него триангуляцию  $\mathcal{P}$ , рассматриваем ее график и строим 3-раскраску. Далее дополняем ее до раскраски триангуляции всего  $\mathcal{P}$ : вершины  $u$  и  $w$  покрашены, красим  $v$  в третий цвет. ■

# Раскраска графа триангуляции

Лемма дает простой алгоритм построения 3-раскраски.

---

## Algorithm 4 (Ear clipping coloring)

---

**Input:** Простой многоугольник  $\mathcal{P}$

Ищем уши и отрезаем вершины  $\{v_n, v_{n-1}, \dots, v_4\}$ , пока не останется  $\Delta v_1 v_2 v_3$

Красим его в 3 цвета

**for**  $i = 4 \rightarrow n$  **do**

возвращаем  $v_i$  (восстанавливаем отрезанное ухо)

у  $v_i$  два крашеных соседа  $\Rightarrow$  красим ее в свободный цвет

**Output:** 3-раскраска графа триангуляции

---

## Теорема 10

Для данного  $n$ -угольника Алг 2 строит приближенное решение вершинной АГР с не более чем  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  охранниками.

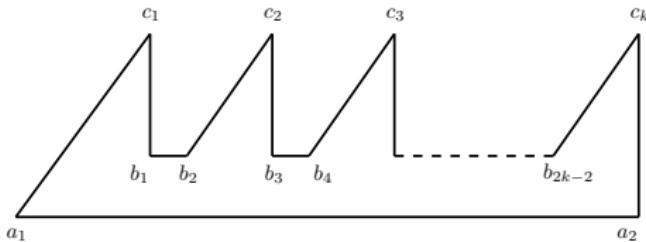
**Док.-во.** Алгоритм корректен, в качестве решения имеем цвет наименьшей мощности. В нем не более  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  вершин.

В каждом из треугольников есть этот “редкий” цвет  $\Rightarrow$  каждый треугольник просматривается одним охранником. ■

## Замечание 6

Есть  $n$ -угольники, требующие не менее  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  верш. охранников.

Док.-во. Рассмотрим **гребень**.



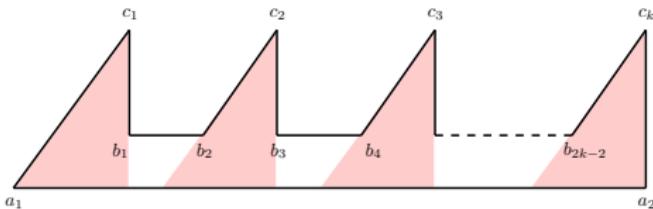
У него  $k$  “зубьев” и  $n = 3k$  вершин. Каждая вершина может наблюдать не более одного зубца, так что потребуется не менее  $k = \lfloor n/3 \rfloor$  вершин, чтобы наблюдать за всей областью.

Видим также, что  $k$  охранников будет достаточно: например, можно разместить их в  $b_1$  и  $c_2, c_3, \dots, c_k$ .

## Замечание 7

Есть  $n$ -угольники, требующие не менее  $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$  точечных охранников (таких, которых можно размещать в любой точке многоугольника).

Док.-во. Все тот же гребень.



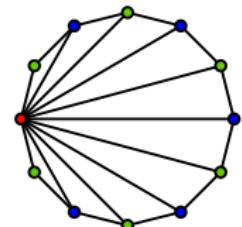
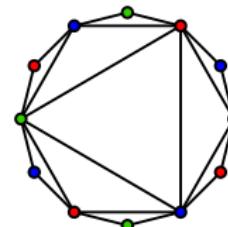
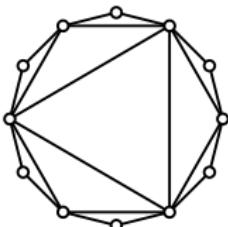
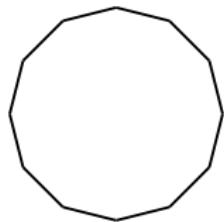
Множества точек, из которых видны внутренности зубцов, не пересекаются  $\Rightarrow$  на каждый зубец нужен свой точечный охранник. ■

## Замечание 8

Алгоритм имеет оценку точности  $\lceil n/3 \rceil$ .

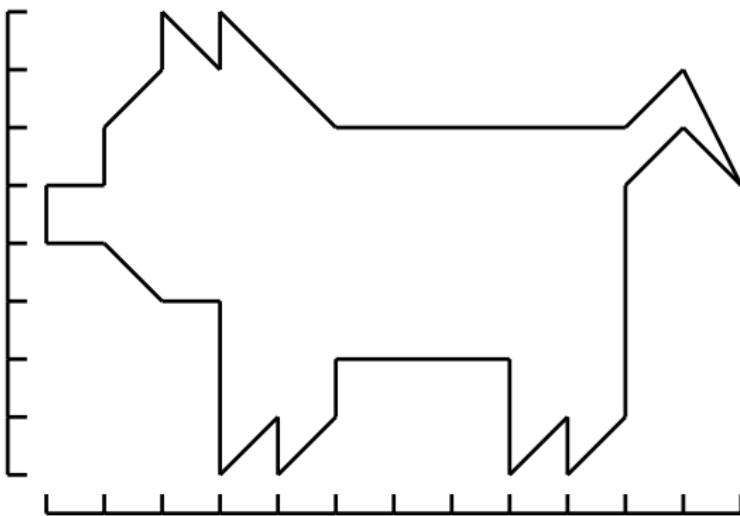
**Док.-во.** Точность существенно зависит от триангуляции!

Рассмотрим правильный  $n$ -угольник с  $n = 3 \cdot 2^k$ . Для него есть трианг., дающая цвета одинаковой мощности  $\Rightarrow n/3$  охр.!



Область выпукла, можно обойтись одним охранником. ■  
Заметим, что тут есть триангуляция, по которой можно построить решение с единственным охранником.

**Упражнение.** Найти приближенное решение задачи о картинной галерее. Проведите улучшение решения, убрав некоторое максимальное по включению множество “избыточных” охранников (или покажите, что ни одного убрать нельзя). Является ли полученное множество точным решением задачи?



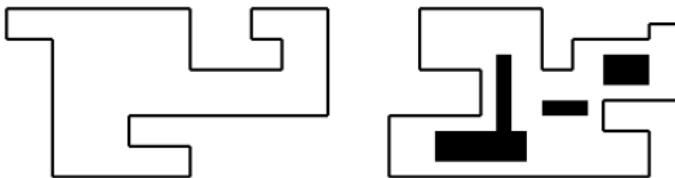
# Ортогональные галереи

Далее для любознательных

Обычно в зданиях

- стены пересекаются под прямым углом,
- могут быть непрозрачные препятствия.

⇒ Прямоугольная галерея, м.б. с препятствиями (дырами).



В прямоугольных галереях обычно нужно меньше охранников..

# Квадрангulation

Что если применить тот же подход, но разбивать на четырехугольники?

---

## Algorithm 5

---

**Input:** Простой  $n$ -угольник  $\mathcal{P}$

Построить  $\mathcal{Q}$  – выпуклую квадрангulationю  $\mathcal{P}$

проводить диагонали в каждом 4угольнике  $\rightarrow G_{\mathcal{Q}} = (V, E)$ ;

Раскрасить  $G_{\mathcal{Q}}$  в 4 цвета;

найти цвет наименьшей мощности  $V' \subset V$ .

**Output:** Разместить охранников в  $V'$ .

---

В графе квадрангulationии  $G_{\mathcal{Q}} = (V, E)$  вершинами являются вершины  $\mathcal{P}$ , а ребрами – стороны  $\mathcal{P}$  и проведенные диагонали.

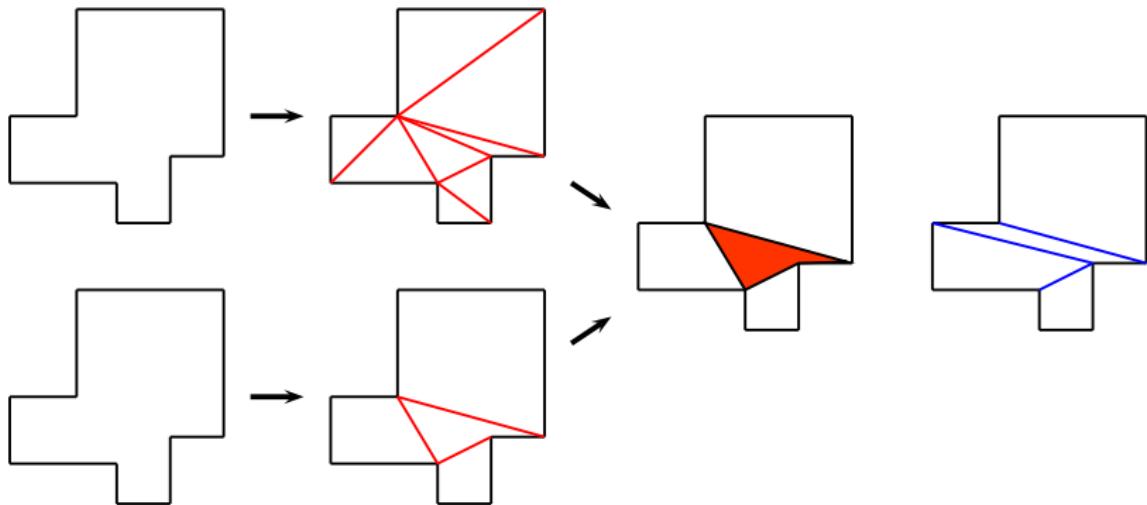
# О квадранголяции

Разбивать на выпуклые четырехугольники гораздо труднее, чем на треугольники!

Что если...

- ❶ триангулировать и объединить смежные треугольники?
- ❷ искать “четырехугольные уши” и отрезать их, как делали ранее?

Оба подхода могут нас подвести.



# Квадрангulation

Тем не менее, разбить на четырехугольники можно!

## Теорема 11

Для любого ортогонального многоугольника  $\mathcal{P}$  (как с дырами, так и без) существует выпуклая квадрангulation.

J. Kahn, M. Klawe, and D. Kleitman. Traditional galleries require fewer watchmen // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 4, pp. 194-206, (1983).

## Двойственный граф

Пусть  $\mathcal{P}$  – простой многоугольник и  $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k\}$  – его разбиение на выпуклые под-многоугольники.

Двойственным графом  $G'_{\mathcal{S}}$  назовем такой граф, что

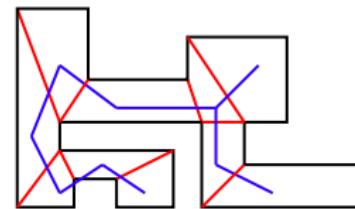
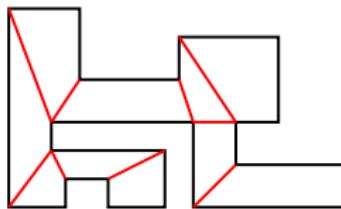
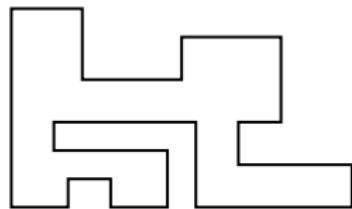
- $V(G'_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ ,
- для всех  $\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_m \in \mathcal{S}$  ребро  $(\mathcal{P}_l, \mathcal{P}_m) \in E(G_{\mathcal{S}}) \Leftrightarrow$  у  $\mathcal{P}_l$  и  $\mathcal{P}_m$  есть общая сторона.

### Замечание 9

Для простых многоугольников двойственные графы являются деревьями.

**Док.-во.** Если в  $G'_{\mathcal{S}}$  есть цикл, то в области должна быть дыра. ■

# Двойственный граф



## Граф квадрангуляции 4-раскрашиваем!

### Замечание 10

Пусть  $\mathcal{P}$  – простой квадрангулируемый многоугольник,  $\mathcal{Q}$  – его выпуклая квадрангуляция, а  $G_{\mathcal{Q}}$  – ее граф. Существует вершинная раскраска  $G_{\mathcal{Q}}$  в 4 цвета.

**Док.-во.** Индукцией по  $k$  – числу элементов квадрангуляции. При  $k = 1$  утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для всех многоугольников, разложимых на  $< k$  выпуклых четырехугольников.

Рассм.  $\mathcal{P}$  – многоугольник с квадрангеляцией  $\mathcal{Q}$  мощности  $k$ . Построим двойственный граф  $G'_{\mathcal{Q}}$ . Это дерево степени  $\leq 4$ . Выберем листовой многоугольник и удалим его из  $\mathcal{P}$ . Полученный многоугольник  $\mathcal{P}'$  разложим на  $k - 1$  четырехугольник  $\Rightarrow$  граф его квадрангуляции 4-раскрашиваем. Раскрасим и вернем удаленный лист на место. Получим неполную раскраску  $G_{\mathcal{Q}}$ , в которой осталось докрасить две вершины. ■

## Algorithm 6 (Dual graph coloring)

**Input:** Опт.  $n$ -угольник  $\mathcal{P}$ , квадрангуляция  $\mathcal{Q}$  и ее граф  $G_{\mathcal{Q}}$ .

Строим двойственный граф  $G'_{\mathcal{Q}}$ , полагаем  $i = 1$ .

**repeat**

Найти листовой четырехугольник  $\mathcal{P}'$  в  $G'_{\mathcal{Q}}$ ;

присвоить  $\mathcal{P}'$  номер  $i$ ;

удалить соотв. вершину из  $G'_{\mathcal{Q}}$  и положить  $i = i + 1$

**until**  $G'_{\mathcal{Q}} = \emptyset$

**repeat**

Рассматриваем четырехугольник с номером  $i$ ;

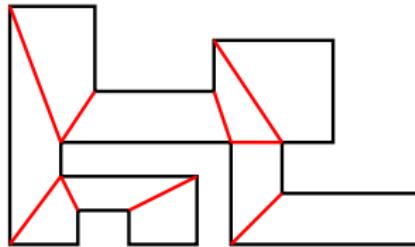
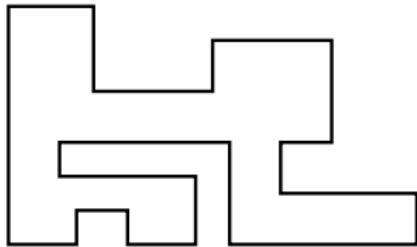
красим неокрашенные вершины  $\mathcal{P}'$  (хватит 4 цветов);

удаляем  $\mathcal{P}'$  из  $\mathcal{P}$  и полагаем  $i = i - 1$

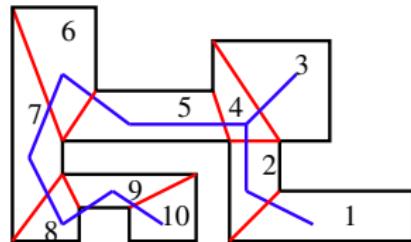
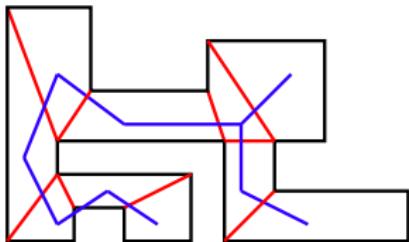
**until**  $\mathcal{P} = \emptyset$

**Output:** 4-раскраска графа квадрангуляции  $G_{\mathcal{Q}}$ .

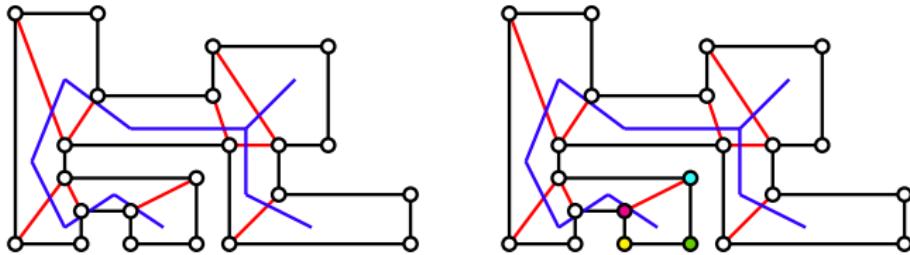
**NB.** Этот подход применим и к 3-раскрашиванию триангуляции.



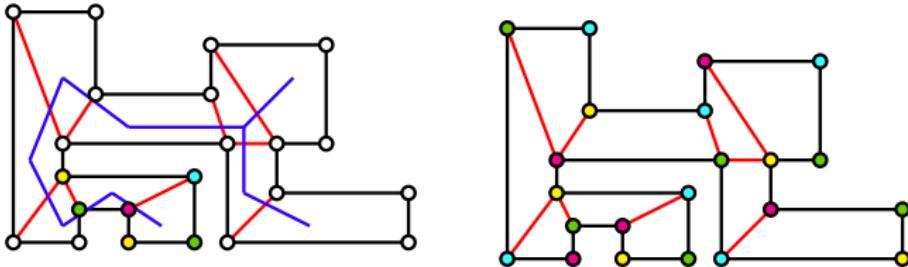
Начинаем с квадранголяции



Строим двойственный график и нумеруем четырехугольники



Строим  $G_Q$ , берем четырехугольник с макс номером и красим вершины (внутренние диагонали на рисунке убраны)



Берем следующий четырехугольник, красим (две вершины уже окрашены) и идем дальше..

## Теорема 12

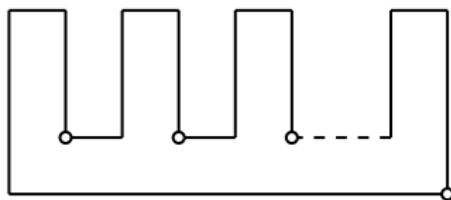
Для данного ортогонального  $n$ -угольника алгоритм 5 строит прибл. решение вершинной орт. AGP с  $\leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$  охранниками.

Док.-во. Как и ранее. ■

## Замечание 11

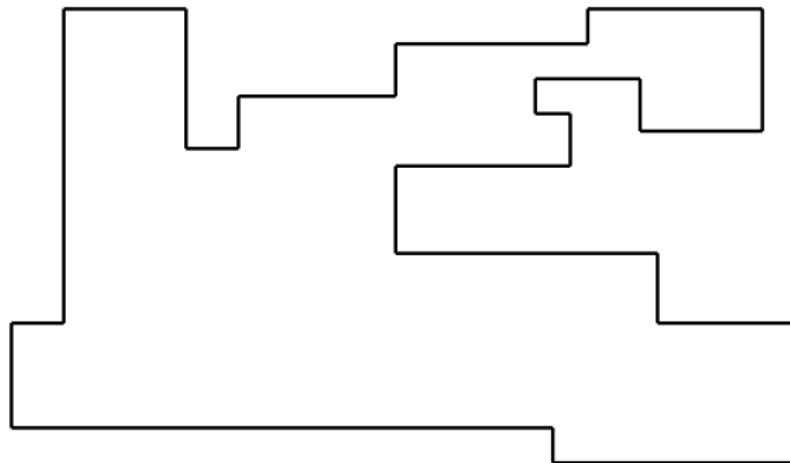
Есть ортогональные  $n$ -угольники, требующие не менее  $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$  вершинных или точечных охранников.

Док.-во. Как и ранее. Рассм. прямоугольный гребень. ■



## Пример

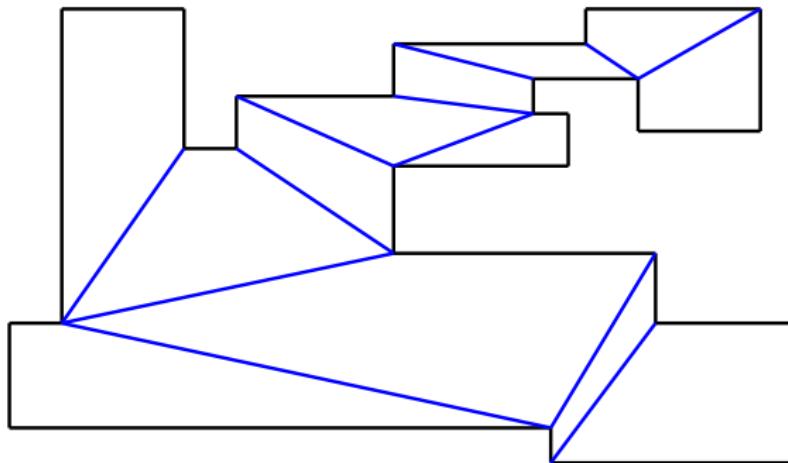
Построить приближенное решение ортогональной АГР.



28 вершин  $\Rightarrow$  не более 7 охранников.

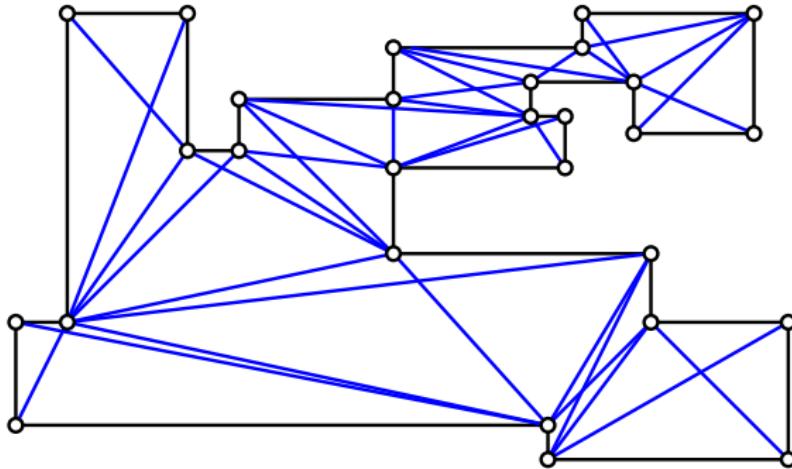
# Пример

Сначала строим выпуклую квадранголяцию...



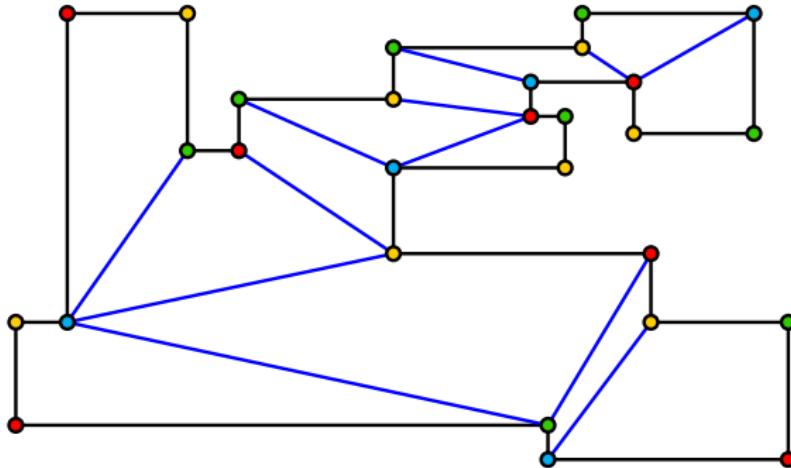
# Пример

...затем проводим диагонали в четырехугольниках...



## Пример

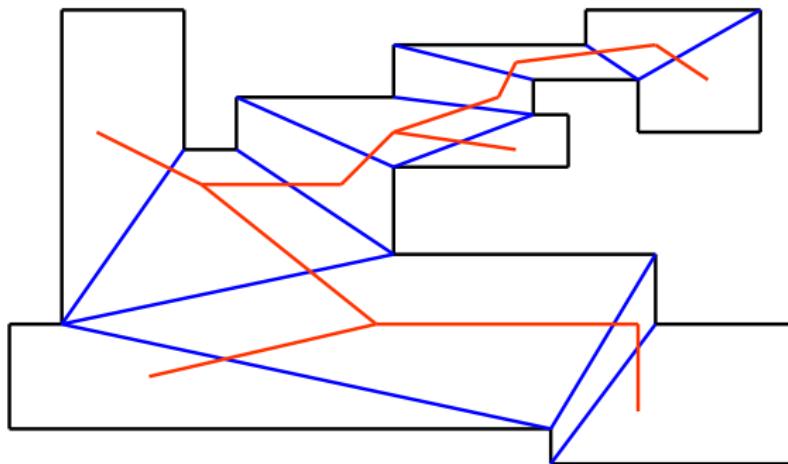
...красим граф в 4 цвета...



(внутренние диагонали убраны, чтобы не загромождать рисунок)

# Пример

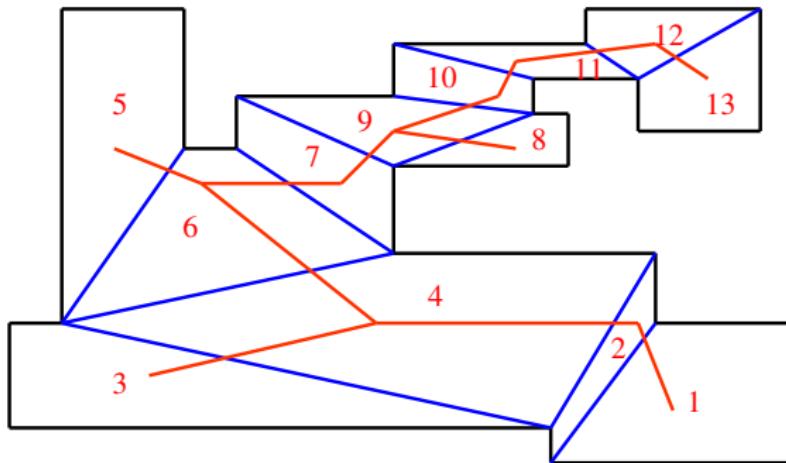
Как именно красим?



Начинаем с того, что строим двойственный граф

# Пример

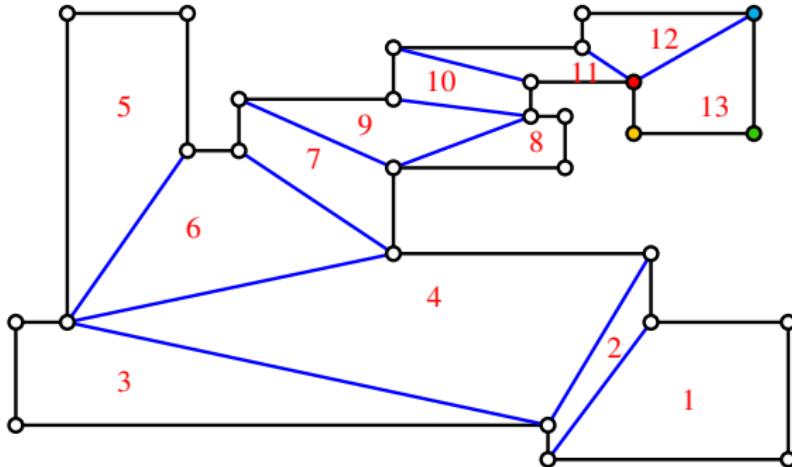
Как именно красим?



Затем нумеруем 4угольники. Выбираем листовой 4угольник, присваиваем номер 1 и убираем. В оставшемся многоугольнике снова берем листовой 4угольник, нумеруем 2 и убираем...

# Пример

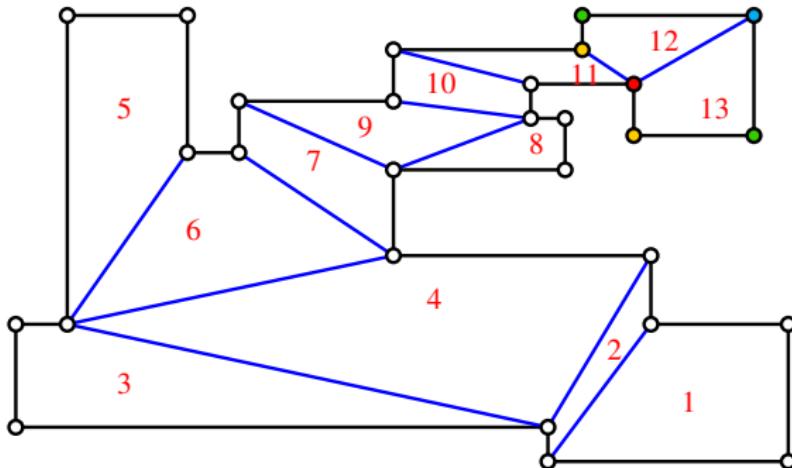
Как именно красим?



Возвращаемся к графу квадранголяции (диаг. ребра убраны).  
Выбираем клику с макс номером (13) и красим в 4 цвета.

# Пример

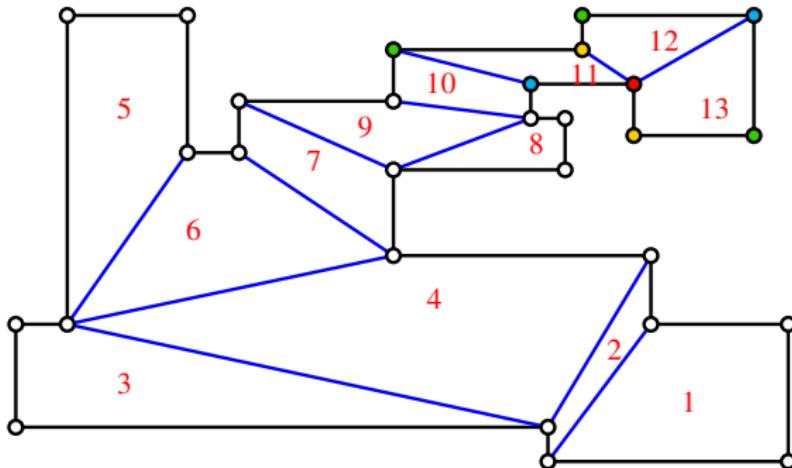
Как именно красим?



Переходим к клике 12. Две вершины у нее уже покрашены, красим оставшиеся.

# Пример

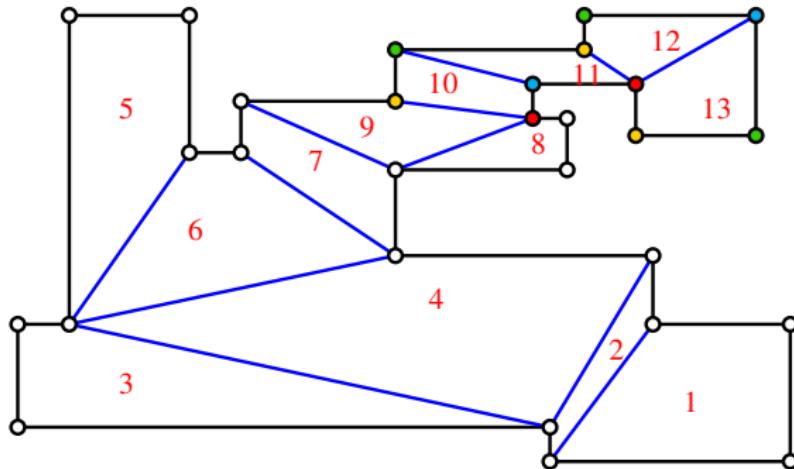
Как именно красим?



Затем клика 11...

# Пример

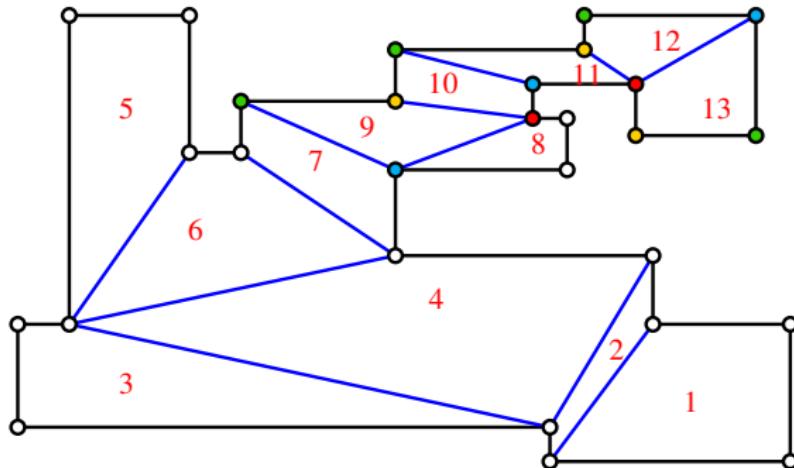
Как именно красим?



...клика 10...

# Пример

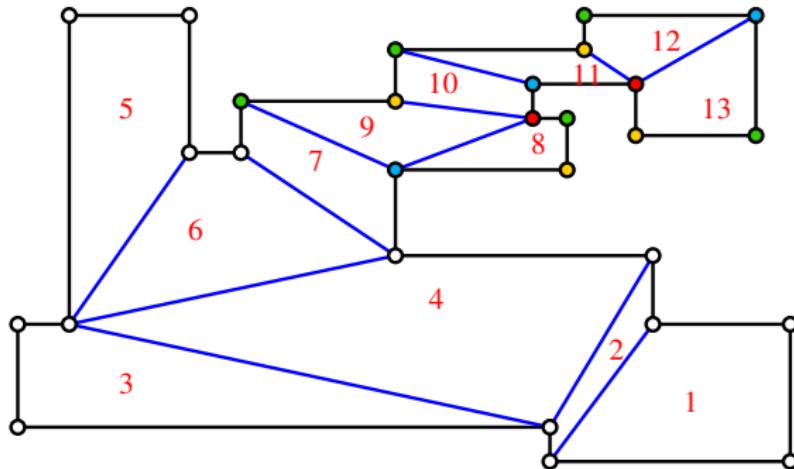
Как именно красим?



...клика 9...

# Пример

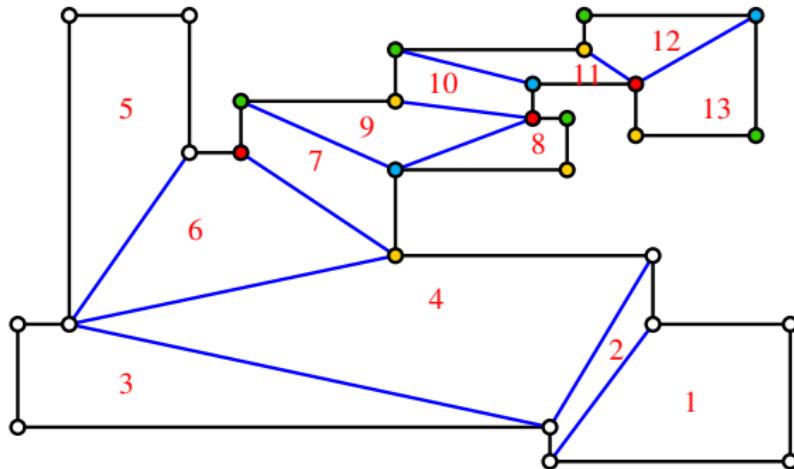
Как именно красим?



...клика 8...

# Пример

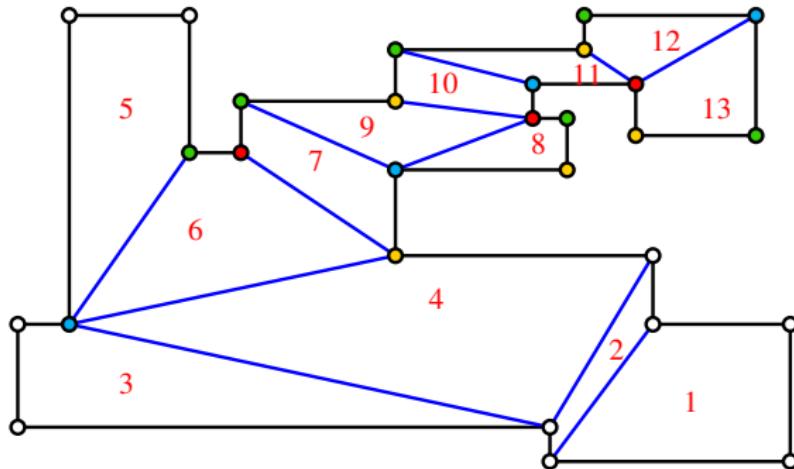
Как именно красим?



...клика 7...

# Пример

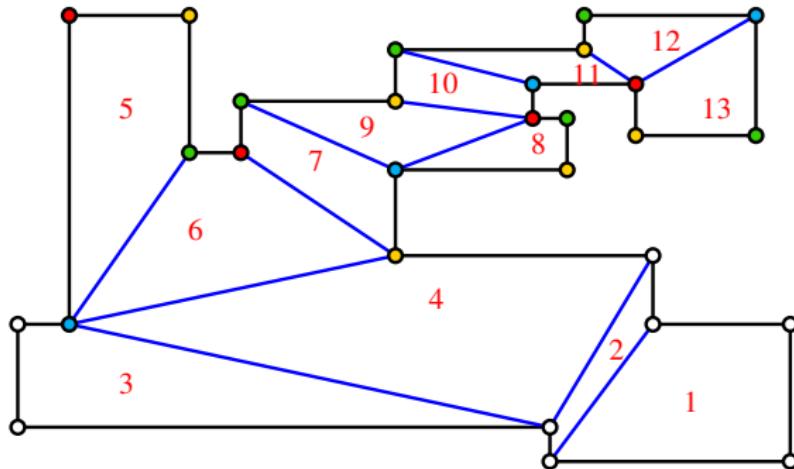
Как именно красим?



...клика 6...

# Пример

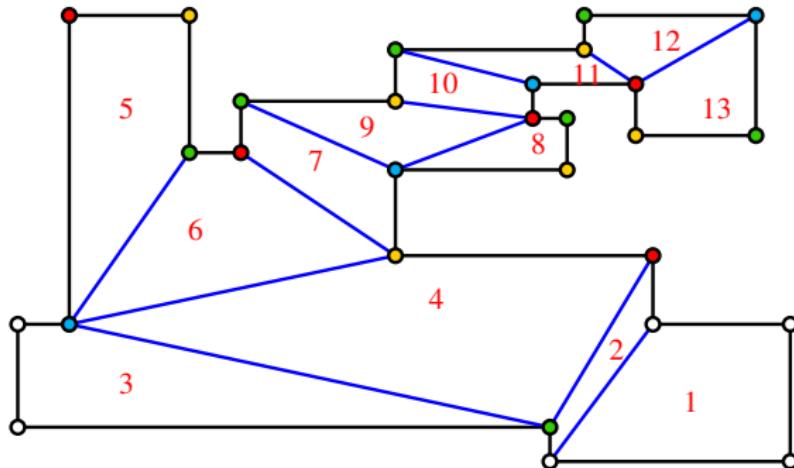
Как именно красим?



...клика 5...

# Пример

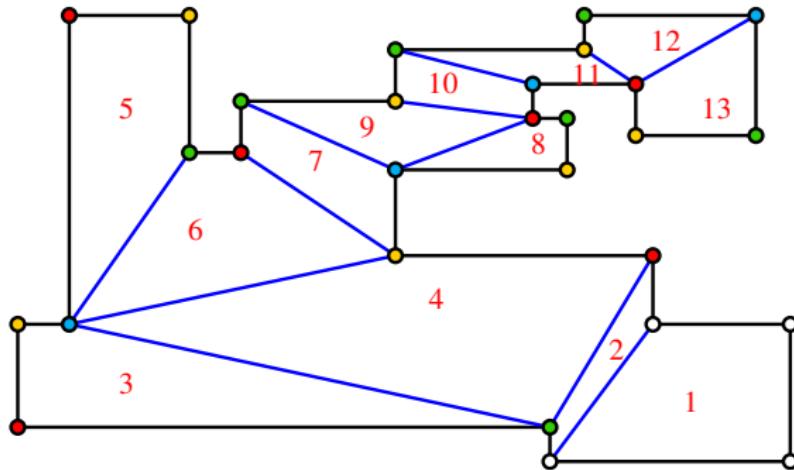
Как именно красим?



...клика 4...

# Пример

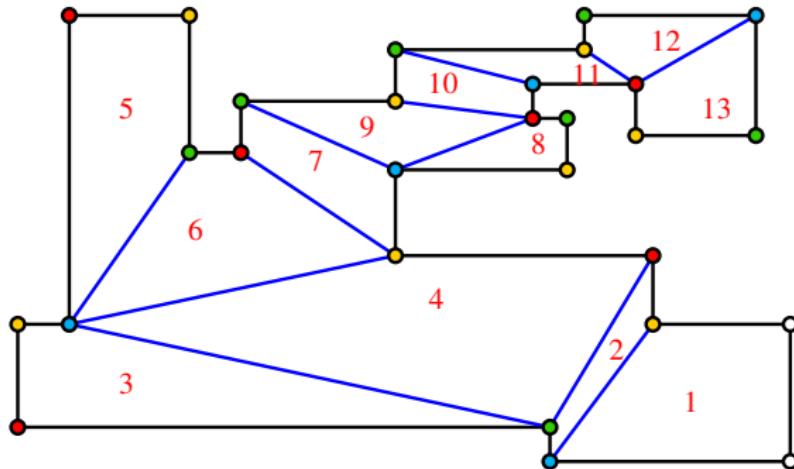
Как именно красим?



...клика 3...

# Пример

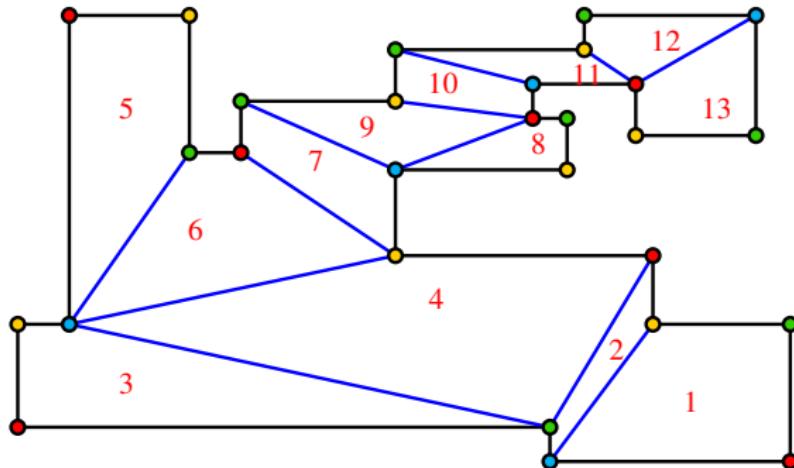
Как именно красим?



...клика 2...

# Пример

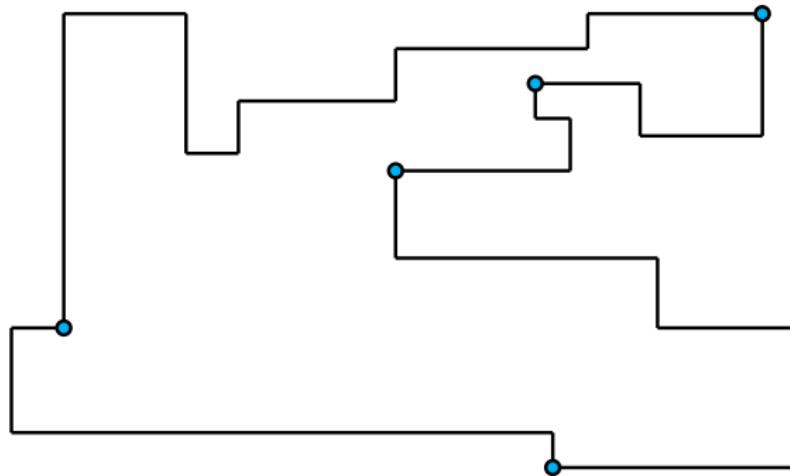
Как именно красим?



... и, наконец, клика 1. Все вершины покрашены.

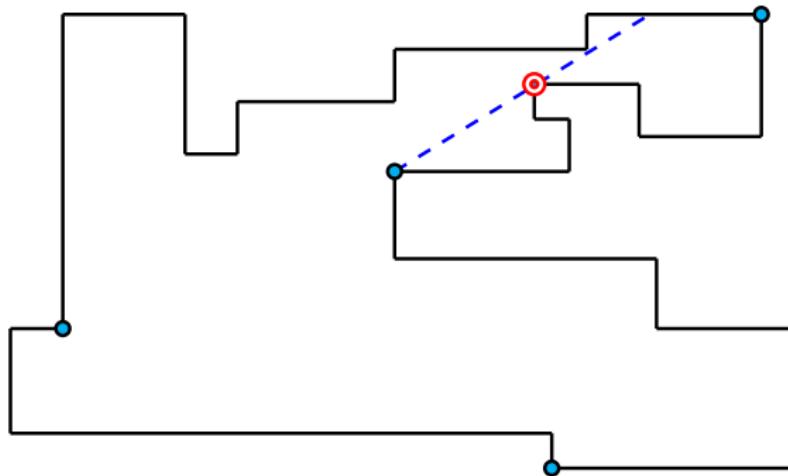
# Пример

Выбираем наименьший цвет  $\Rightarrow$  5 охранников.



## Пример

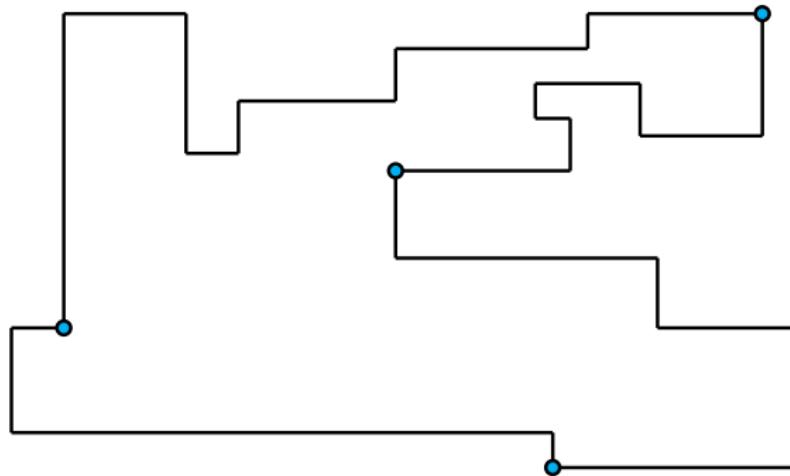
Можно заметить, что один из них лишний.



То, что видит выделенный охранник, видят и два соседних.

## Пример

Достаточно 4 охранников.



**Вопрос:** можно ли обойтись меньшим числом?

Заметим:

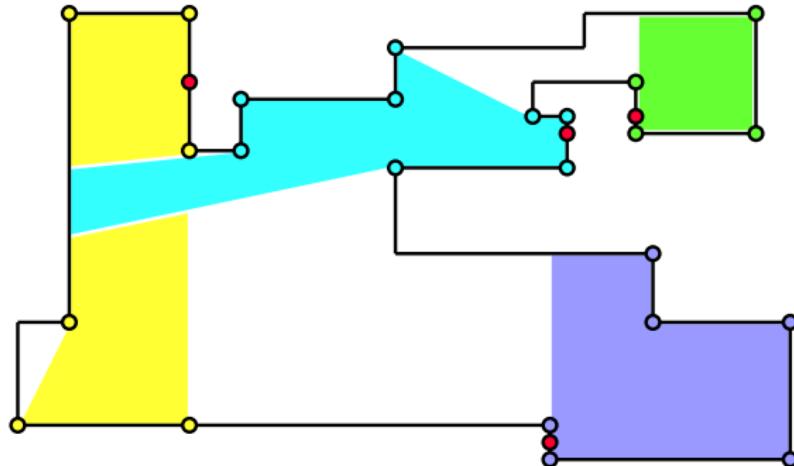
- пусть  $P_1, P_2, \dots, P_k \in \mathcal{P}$  – некоторый набор точек  $\mathcal{P}$ ;
- $V_i$  – множество вершин  $\mathcal{P}$ , из которых видна  $P_i$ ;
- пусть  $V_i \cap V_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ .

Тогда для полного обзора  $\mathcal{P}$  требуется не менее  $k$  вершинных охранников.

Аналогично с точечными охранниками: в этом случае  $V_i$  – это не набор вершин, а множество точек  $\mathcal{P}$ , из которых видна  $P_i$ .

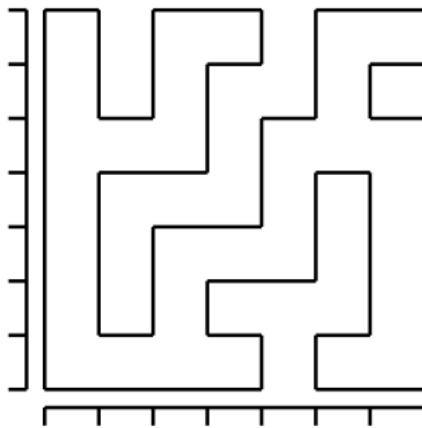
## Пример

В данном случае меньше 4 вершинных охранников нельзя.



Четыре красные точки видны из непересекающихся наборов вершин. **Достаточно ли трех точечных охранников?**

**Упражнение.** Найти приближенное решение задачи о картинной галерее. Проведите улучшение решения, убрав некоторое максимальное по включению множество “избыточных” охранников (или покажите, что ни одного убрать нельзя). Является ли полученное множество точным решением задачи?



## Библиография

- Р. Дистель – Теория графов. Издательство ИМ СО РАН, Новосибирск (2002)
- J.L. Gross, J. Yellen – Graph Theory and Its Applications. Chapman and Hall (2006)
- J.A. Bondy, U.S.R. Murty – Graph Theory. Springer (2008)
- M. Patrignani – Planarity testing and embedding // In: Tamassia, R. (ed.) Handbook of Graph Drawing and Visualization. CRC Press, Boca Raton (2013)
- J. O'Rourke – Art Gallery Theorems and Algorithms. Oxford University Press (1987)