ОПР В кан. ПСК эллипс/гипербола задаётся ур-ем $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$ $(1)/(1')$
$(a>0, b>0)$

Ур-е (1)(1') наз. каноническим ур-ем эл-са/гиперболы. Прямоугольник $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ наз. основным прямоугольником эл-са (1) (или (1')).

ОПР Для любой т. M эл-са/гиперболы длины отрезков соединяющих ее с фокусами, наз. фокальными радиусами (соотв. правым $\rho_1$ и левым $\rho_2$)

~~Для~~ Их длины для т. $M(x, y)$

$\rho_1 = |a - ex|$, $\rho_2 = |a + ex|$.

ОПР Для эллипса (1) гиперболы (1') прямые

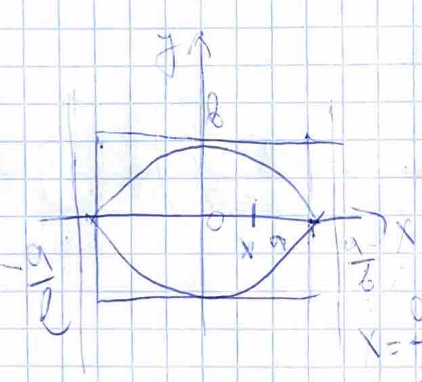
$x = -\frac{a}{e}$ и $x = \frac{a}{e}$ наз. его директрисами (соотв. левой и правой)

Фокусы и дир-сы наз. одноименными, если они оба левые или оба правые.

Т. (директориальное св-во эл-са/гиперболы)

Эллипс/гипербола есть ГМТ, отношение расстояний которых от данной т. (фокуса) и от данной прямой (одноим. дир-сы) равно данному пол. числу меньшему (большему) единицы (эксцентриситету)

Д-во Заметим, что весь эл-с расположен в полосе м/у дир-сами



Поэтому расст. $\delta_2$ т. $M(x,y)$ э-са до лев. дир-сы $x=-\frac{a}{e}$ равно $\delta_2=\frac{a}{e}+x$, а расст. $\delta_1$ т. $M(x,y)$ до прав. дир-сы $x=\frac{a}{e}$ равно $\delta_1=\frac{a}{e}-x$

$$\frac{r_2}{\delta_2}=\frac{r_1}{\delta_1}=e$$

($\Leftarrow$)

Пусть т. $M(x,y)$ – любая т. эл-ти, что отн-е её расст. от лев. фокуса к её расст. от лев. дир-сы равно $e$, т.е

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = e\left|\frac{a}{e}+x\right| \Rightarrow x^2+2cx+c^2+y^2 = e^2\left(\frac{a}{e}+x\right)^2 =$$

$$= a^2+2aex+e^2x^2 \Rightarrow (1-e^2)x^2+y^2 = a^2-c^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \blacksquare$$

Д-во для гиперболы аналогично

Т. (Фокальное св-во эллипса)

Эллипс есть ГМТ, сумма расст. которых от двух данных т. (фокусов эл-са) постоянна (равна удвоенной большой полуоси)

Т. (Фокальное св-во гиперболы)

Гипербола явл. ГМТ, абсолютная вел-на разности расст. которых от двух данных т. (фокусов гип.) постоянна (равна удвоенной полуоси).

__ОПР__ Любая окружность явл-ся эллипсом.

__УПР__ Сформулировать д-во фокального св-ва эллипса

## п.2 Асимптоты гиперболы

<u>Опр</u> Равномерным преобразованием пл-ти, переводящим произв. т. $M(x,y)$ в т. $M'(x',y')$ с координатами $x'=x$, $y'=ky$ где ~~k — некоторое~~ $k>0$

наз-ся сжатием пл-ти с коэф. $k$

При $a=b$ ур-е (1') принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (3)$$

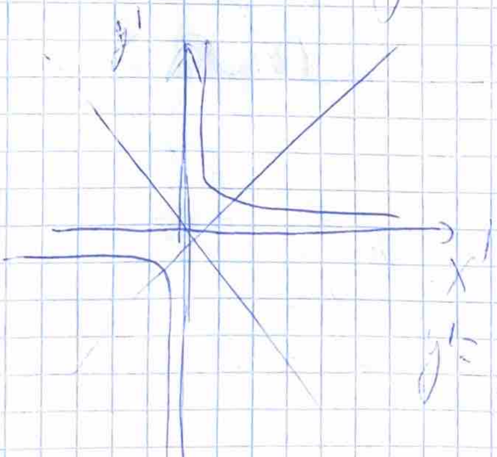
<u>Опр</u> Гипербола (3) наз-ся равнобочной

В коорд. $x', y'$, связанных с нач. коорд. соотношением $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$

(для этих координат оси $Ox'$ и $Oy'$ получаются поворотом на пол. угол на $\frac{\pi}{4}$)

равнобочная гип-ла выр-ся ур-ем $x'y' = \frac{a^2}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = \frac{(x^2-y^2)}{2} = \frac{a^2}{2}$$




$y' = \frac{a^2}{2} / x'$

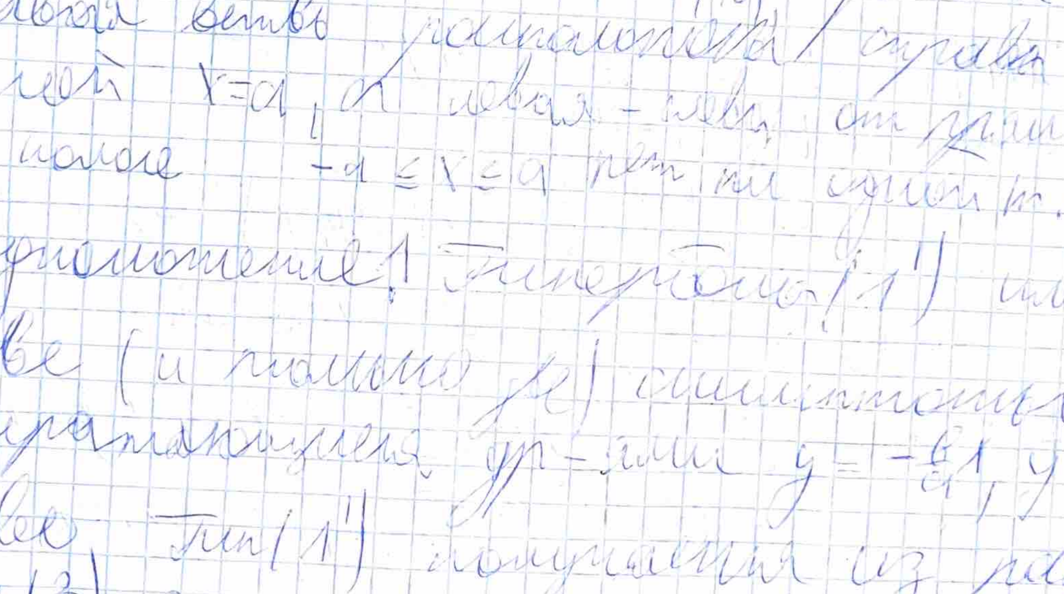
Вывод: Гипербола (3) целиком помещается в двух вертикальных углах, образованных асимптотами, содержащих ось абсцисс.

ОПР Часть гип-лы (1') содержащаяся в правом вертик. угле, наз. правой ветвью, а содержащаяся в левом — левой ветвью. Гипербола пересек. ось абсцисс в точках $(\pm a, 0)$, причём её правая ветвь расположена справа от прямой $x=a$, а левая — слева от прямой $x=-a$. В полосе $-a \le x \le a$ нет ни одной т. гип-лы (3)

Предложение 1. Гипербола (1') имеет две (и только две) асимптоты, выражающиеся ур-ями $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$

Д-во Гип (1') получается из гип (3) сжатием к оси $Ox$ с коэфф. $\frac{a}{b}$

~~(3)~~



При сжатии Ox и оси Ox с коэф. $\frac{b}{a}$ оси прямоуг. $|x|\le a, |y|\le b$ переходит в пр-к с вертик. стороной $2b$ и горизонт. шириной $2a$, а его диагонали — в диагонали ин. пр-ка, т.е. в прямые $y=-\frac{b}{a}x$ и $y=\frac{b}{a}x$

~~ОП~~ П3. Оптические св-ва эллипса и гиперболы

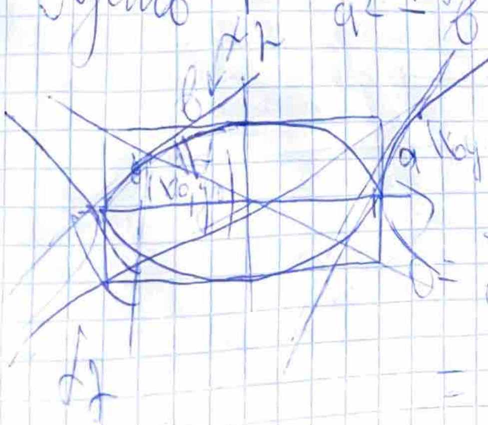
Пусть $F(x,y)$ — ф-я перем. $x,y$. Изобразим линию уровня $F(x,y)=0$


Из пред. лекции $\nabla F(x_0,y_0)\perp$ касательной $l$. Тогда прямая

$$\left\langle \nabla F(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

проходит через т. $(x_0,y_0)$ и $\perp \nabla F(x_0,y_0)$, т.е. совпадает с касательной $l$.

Пусть $F=\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-1$. $\nabla F=\begin{pmatrix}\frac{2x_0}{a^2}\\ \pm\frac{2y_0}{b^2}\end{pmatrix}$ $\left\langle \begin{pmatrix}\frac{x_0}{a^2}\\ \pm\frac{y_0}{b^2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$




$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)\pm\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)=$$
$$=\frac{xx_0}{a^2}\pm\frac{yy_0}{b^2}-\left(\frac{x_0^2}{a^2}\pm\frac{y_0^2}{b^2}\right)=$$

$y$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1 \quad (4)\ (4')$$

Предложение 2 (2') Касательная в т. $(x_0, y_0)$ к эл-су (1) гиперболе удовлетворяет выражению ур-ем (4) (4')

Т (оптическое св-во) Касательная к эллипсу / гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания

Док-во Дост. показать, что

$\sin \alpha' = \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$

Имеем $\sin \alpha_1 = \frac{\rho(F_1, l)}{\rho_1}$, $\sin \alpha_2 = \frac{\rho(F_2, l)}{\rho_2}$

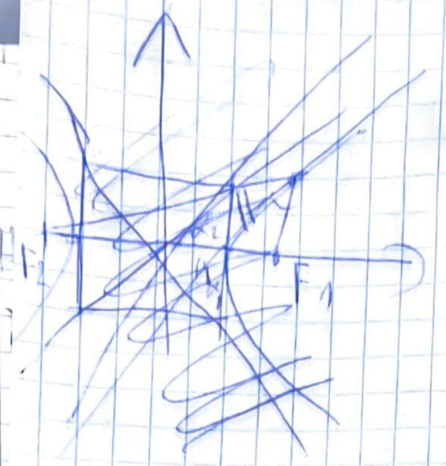
$\rho_1 = |a - e x_0|$, $\rho(F_1, l) = \left|\frac{\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}}}\right|_{\substack{x=c\\y=0}} =$

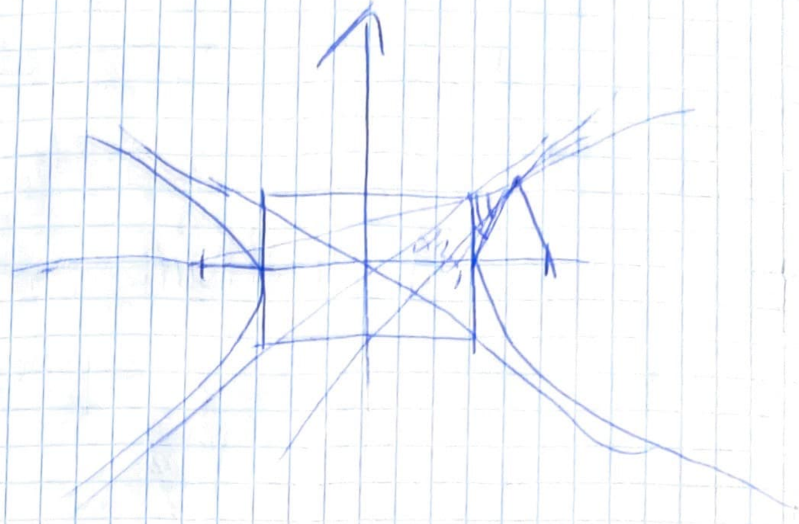
$= \frac{\left|\frac{x_0 c}{a^2}-1\right|}{N}$

$\rho_2 = |a + e x_0|$

$\rho(F_2, l) = \frac{\left|-\frac{x_0 c}{a^2}-1\right|}{N}$

~~$\rho_2 = |a + e x_0|$ $\rho$~~





$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$l: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$$

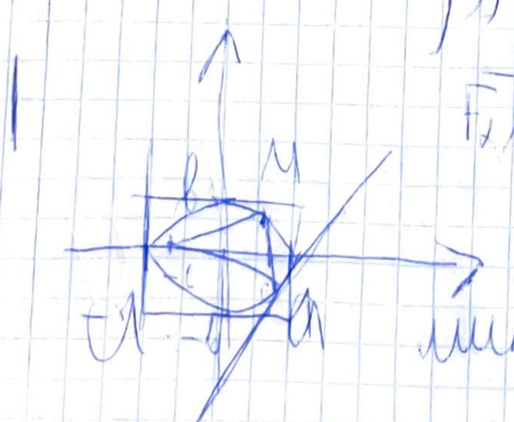
Пример 1 Рассм. ф-цию $f(x,y) = \sqrt{(x+c)^2+y^2} +$
$\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $c>0$ $(0<a<c)$

найдите линию уровня $f(x,y) = 2a$, $a>c$

$b = \sqrt{a^2-c^2}$ $\quad b = \sqrt{c^2-a^2}$

$p_0 = |F_0 M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $p_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\overline{F_0 M}\,(x+c, y)$



Вывод: $f$ не имеет минимума в т. $(x_0, y_0)$