СЕМИНАР №1

ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

Таблица основных определенных интегралов для функции f(u)

Таблица 1.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$	2. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$	4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$	6. $\int \sin u du = -\cos u + C$
7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$	8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$
9. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C$	10. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$.
11. $\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + C$	12. $\int \mathrm{sh} du = \mathrm{ch} u + C$
13. $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th} u + C$	14. $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth} u + C$
15 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C_1$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
17. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{u}{a} + C_1$	18. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$

1. Тождественное преобразование подынтегральной функции

Зачастую удается так преобразовать подынтегральное выражение, что после использования свойств интегралов, данный интеграл окажется равен одному или сумме нескольких табличных интегралов. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x} dx$.

Решение. Т.к. интеграл не является табличным и не похож ни на один интеграл из таблицы 1, попробуем его преобразовать, для этого воспользуемся свойствами интегралов и формулой $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$I=\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{x}dx=\int\frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{x}dx=\int\left(\sqrt{x}+3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\int x^{1/2}dx+3\int dx+3\int x^{-1/2}dx+\int\frac{dx}{x}.$$

Каждый из полученных интегралов является табличным:

$\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}+C_1$. (См. форм. 1 при $n=\frac{1}{2}$).

$\int dx=x+C_2$. (См. форм. 1 при n=0).

$\int x^{-1/2}dx=2x^{1/2}+C_3$. (См. форм. 1 при n=-$\frac{1}{2}$).

$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C_4$. (См. форм. 2).

Ответ. $I=\frac{2}{3}x^{3/2}+x+2\sqrt{x}+\ln|x|+C$, где $C=C_1+C_2+C_3+C_4$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{9x^2+4}$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на 17 из таблицы. Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\int\frac{dx}{9x^2+4}=\int\frac{dx}{9(x^2+\frac{4}{9})}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+\frac{4}{9}}=\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt{4/9}}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I=\int\frac{x^2}{x^2-9}dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на 18 из таблицы, «мешается» числитель. Произведем следующие тождественные преобразования:

$$I=\int\frac{x^2}{x^2-9}dx=\int\frac{\left(x^2-9\right)+9}{x^2-9}dx=\int\left(1+\frac{9}{x^2-9}\right)dx=\int dx+9\int\frac{dx}{x^2-9}.$$

Используя свойства интегралов и таблицу формулы 1 и 18 получаем

$$I=x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

Пример 4. Вычислить интеграл $I=\int\operatorname{tg}^2xdx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но к подынтегральной функции можно применить известные тригонометрические тождества:

$$\int\operatorname{tg}^2xdx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2x}-\int dx.$$

Т.о. исходный интеграл равен $I = \mathrm{tg}x - x + C.$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.	Отв. $\frac{1}{2}\arcsin 2x + C$.	См. **таблицу 1**, форм.15.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.	Отв. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left\|x+\sqrt{x^2-\frac{2}{3}}\right\|+C$.	См. **таблицу 1**, форм. 16.
3. $\int e^{x+5}dx$.	Отв. $e^5e^x + C$.	См. **таблицу 1**, форм. 3.
4. $\int 3^x e^x dx$.	Отв. $\frac{(3e)^x}{1+\ln 3}+C$.	См. **таблицу 1**, форм.4.
5. $\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx$.	Отв. $\ln\|x\| - 6\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$.	См. **таблицу 1**, форм. 1 и 2.
6. $\int \frac{x^2}{4x^2+25}dx$.	Отв. $\frac{1}{4}(x-\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{2x}{5})+C$.	См. **таблицу 1**, форм.17 и пр.3.
7. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.	Отв. $\ln\left\|x+\sqrt{1+x^2}\right\|-\arcsin x + C$.	См. **таблицу 1**, форм.15 и 16.
8. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.	Отв. $x - \cos x + C$.	См. **таблицу 1**, форм.1 и 6.
9. $\int ctg^2 x dx$.	Отв. $-ctgx - x + C$.	См. **таблицу 1**, форм. 4

2. Внесение под знак дифференциала.

Многие интегралы можно привести к табличным используя формулу 12121

$$du(x) = u'(x)dx$$

, преобразовав их следующим образом:

$$\int \varphi(x)dx = \int f(u(x))\cdot u'(x)dx = \int f(u(x))du(x) = F(u(x)) + C,$$

Рассмотрим насколько вариантов такого метода.

- $$\boxed{\int f(ax+b)dx = \begin{bmatrix} d(ax+b) = adx \\ dx = \frac{1}{a}d(ax+b) \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,} \qquad (1)$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \sin(5x+3)dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на табличный №6, где роль u играет выражение (5x+3). Воспользуемся схемой преобразования (1) и приведем наш интеграл к табличному:

$$\int \sin(5x+3)dx = \begin{bmatrix} f(ax+b) = \sin(5x+3) \\ a=5,\ b=3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \sin(5x+3)d(5x+3).$$

Последний интеграл, согласно формуле №6 таблицы равен $-\frac{1}{5}\cos(5x+3)+C.$.

- Т.к. справедливы следующие равенства $du(x)=u'(x)dx$ и $\int u'(x)dx=u(x)+C$, то можно сделать вывод:
  чтобы часть подынтегральной функции внести под знак дифференциала, следует ее отдельно проинтегрировать , результат интегрирования записать под знаком дифференциала.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, но похож на табличный №15.

Разобьём подынтегральную функцию на произведение двух $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{16-x^4}}$ и $f_2(x)=x$. Очевидно, что первую функцию мы не сможем проинтегрировать, используя только таблицу и свойства интегралов, а от функции $f_2(x)=x$ можно взять интеграл: $\int f_2(x)dx=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C.$

Тогда $f_2(x)\cdot dx=x\cdot dx=d(\frac{x^2}{2}+C)=\frac{1}{2}dx^2.$ Исходный интеграл равен $\int\frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{16-x^4}}.$

Новый интеграл является табличным №15 при $u=x^2$ и $a=4$. Тогда интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$ равен $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{4}+C.$

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Данный интеграл не является табличным, его можно представить в виде суммы двух интегралов: $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Тогда

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{x^2+1}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{-1/2}d(x^2+1)+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+2\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int (4x+1)^7 dx$	Отв. $\frac{1}{32}(4x+1)^8+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 1
2. $\int \cos 3x dx$	Отв. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 5
3. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$	Отв. $\frac{1}{2}\ln\lvert \operatorname{tg} x\rvert+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 9
4. $\int (\sin x+\cos x)^2 dx$	Отв. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ См. (3.1), таблицу 1 форм. 6
5. $\int \frac{dx}{6x+5}$	Отв. $\frac{1}{6}\ln\lvert 6x+5\rvert+C$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 2
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$	Отв. $\sqrt{2x-3}+C \quad n=-1/2$	См. (3.1), таблицу 1 форм. 2
7. $\int x\cdot 3^{x^2} dx$	Отв. $\frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{x^2}+C$	См. (3.2), таблицу 1 форм. 4
8. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1}dx$	Отв. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+C$	См. (3.2), таблицу 1 форм. 17 и 1
9. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$	Отв. $\frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x}+C$	См. (3.2), таблицу 1 форм. 15 и 1
10. $\int \cos 3x \sin^2 3x dx$	Отв. $\frac{1}{9}\sin^3 3x+C$	См. (3.1), (3.2), таблицу 1 форм. 1
11. $\int \frac{x+5}{x^2-9}dx$	Отв. $\frac{1}{2}\ln\lvert x^2-9\rvert+\frac{5}{6}\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+3}\right\rvert+C$	См. пример *9*, таблицу 1 форм. 2 и 18
12. $\int \frac{3-4x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$	Отв. $\arcsin 3x+\frac{4}{9}\sqrt{1-9x^2}+C$	См. пример *9*, таблицу 1 форм. 1 и 15
13. $\int \frac{dx}{1+e^x}$	Отв. $x-\ln(1+e^x)+C$	$\frac{1}{1+a}=\frac{1+a-a}{1+a}$, См. (3.2), таблицу 1 форм. 1 и 2
14. $\int \frac{x+\operatorname{arctg} 4x}{1+16x^2}dx$	Отв. $\frac{1}{32}\ln\lvert 1+16x^2\rvert-\frac{1}{8}\operatorname{arcctg}^2 4x+C$	См. (3.1), (3.2), таблицу 1 форм. 1 и 2

3. Интегрирование по частям $\boxed{\int u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x)}$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int x\cos x dx$

Решение $\int x\cos x dx = \int \underset{u}{x} d\underset{v}{\sin x} = \underset{u}{x}\cdot\underset{v}{\sin x} - \int \underset{v}{\sin x}\, d\underset{u}{x}.$ В итоге, исходный интеграл равен $x\sin x + \cos x + C$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Решение. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \underset{u}{\ln x}\, d\underset{v}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x}\ln x - \int \underset{v}{\sqrt{x}}\, d\underset{u}{\ln x}\right)$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\left(\sqrt{x}\ln x - \int \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right) = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int x^2 e^x dx$

Решение. $\int x^2e^xdx = \int x^2de^x = x^2e^x - \int e^xdx^2 = x^2e^x - 2\int xe^xdx.$ Применив для последнего интеграла формулу интегрирования по частям еще раз, получаем

$\int xe^xdx = \int xde^x = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x + C$, тогда исходный интеграл равен:

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$

Решение.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int\left(\frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)dx =$$

$$= \int\sqrt{a^2+x^2}dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Теперь для исходного интеграла мы имеем следующее:

$$\underline{\int\sqrt{a^2+x^2}dx} = x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} - \underline{\int\sqrt{a^2+x^2}dx}.$$

Получили уравнение, из которого можно выразить искомый интеграл. Перенесем последнее слагаемое в левую часть и окончательно получим:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right) + C.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int e^x\sin x dx$

Решение.

$$J_1=\int e^x\cos x dx=\int \cos x de^x=e^x\cos x-\int e^x d\cos x=\left[\begin{array}{l} d\cos x=(\cos x)'dx= \\ =-\sin x dx. \end{array}\right]=$$

$$=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx.$$

Из данного уравнения выразим исходный интеграл:

$$J=\int e^x\sin x=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int \operatorname{arcctg} x dx$	Отв. $x\operatorname{arcctg} x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$	См. (4.1)
2. $\int x^2\ln x dx$	Отв. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$	См. (3.2) и (4.1)
3. $\int \frac{\log_2 x}{x^2}dx$	Отв. $-\frac{1}{x}\log_2 x-\frac{1}{x\ln 2}+C$	См. (3.2) и (4.1)
4. $\int xe^{3x}dx$	Отв. $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$	См. (3.2) и (4.1)
5. $\int x\sin 2x dx$	Отв. $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$	См. (3.2) и (4.1)
6. $\int x^2\cos x dx$	Отв. $x^2\sin x+2x\cos x-\sin x+C$	См. (3.2), (4.1) и пример *15*
7. $\int 2^x\sin x dx$	Отв. $\frac{\ln 2\cdot\sin x-\cos x}{1+\ln^2 x}\cdot 2^x+C$	См. пример *17*
8. $\int \cos\ln x dx$	Отв. $\frac{1}{2}x\cdot(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$	См. (4.1) и пример *17*
9. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$	Отв. $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{\operatorname{ctg} x}{2}+C$	См. (3.2) и (4.1)

4. Метод подстановки (замена переменной)

Пример 12. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$

Решение.

Данный интеграл не является табличным, не похож ни на один из табличных интегралов. Используя свойства интегралов, невозможно представить этот интеграл в виде суммы табличных интегралов. В подынтегральной функции отсутствует часть, которую можно было бы подвести под знак дифференциала. Данный интеграл нельзя вычислить, используя формулу интегрирования по частям. Попробуем упростить подынтегральную функцию, заменив ее знаменатель новой переменной: t

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}} = \left[\begin{array}{l} 2+\sqrt{3x+1}=t, \\ x=\frac{(t-2)^2}{3}, \\ dx=\frac{2}{3}(t-2)dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2}{3}(t-2)}{t}dt = \frac{2}{3}\int \frac{t-2}{t}dt.$$

$$\int \frac{t-2}{t}dt = \int \left(1-\frac{2}{t}\right)dt = t - 2\ln|t| + C.$$

Вернувшись к старой переменной $t = 2+\sqrt{3x+1}$, окончательно имеем: $\int \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3}\left(2+\sqrt{3x+1}-2\ln\left|2+\sqrt{3x+1}\right|\right)+C.$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int x(2x+3)^7 dx$ Отв. $\frac{(2x+3)^9}{36} - \frac{3(2x+3)^8}{32} + C$ $2x+3=t$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$ Отв. $2\left(\sqrt{x}+2-2\ln(\sqrt{x}+2)\right)+C$ $\sqrt{x}+2=t$

3. $\int e^{\sqrt{x}}dx$ Отв. $2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\right)+C$ $\sqrt{x}=t$

4. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$ Отв. $e^{\sqrt[3]{x}}\left(3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6\right)+C$ $\sqrt[3]{x}=t$ и (4.1)

5. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$ Отв. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} + 2\sqrt[3]{x+1} - $ $- 6\sqrt[6]{x+1} + \mathrm{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C$ $\sqrt[6]{x+1}=t$

6. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{4\sqrt[3]{x}+1}$ Отв. $\frac{3}{10}\sqrt[6]{x^5} - \frac{1}{8}\sqrt{x} + \frac{3}{32}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{64}\mathrm{arctg}\,2\sqrt[6]{x} + C$ $\sqrt[6]{x}=t$

5. Интегрирование рациональных дробей.

Выражение вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены m-й и n-й степени , называется **рациональной дробью**, дробь называется **правильной**, если $m \geq n$. Проблема интегрирования рациональной дроби можно свести к проблеме интегрирования правильной рациональной дроби, так как всякую неправильную рациональную дробь можно посредством деления столбиком представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример 1. Рассмотрим неправильную рациональную дробь $\dfrac{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}{4x^3-6x^2+6x-2}$. Деление столбиком приводит к следующему результату:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
 & x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & +1 & 4x^3 & -6x^2 & +6x & -2 \\ \cline{7-10}
- & x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & +\frac{3}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x & & \frac{1}{4}x & -\frac{1}{8} & & \\ \cline{3-6}
 & & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{3}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & & & & \\
- & & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{3}{4}x^2 & -\frac{3}{4}x & +\frac{1}{4} & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & \frac{3}{4}x^2 & -\frac{3}{4}x & +\frac{3}{4} & & & &
\end{array}
$$

Здесь $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}$ - неполное частное, а $\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$ - остаток. Для представления неправильной рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби воспользуемся следующим правилом:

$$\frac{\textit{числитель}}{\textit{знаменатель}} = \textit{неполное частное} + \frac{\textit{остаток}}{\textit{знаменатель}}.$$

Таким образом,

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}{4x^3-6x^2+6x-2} = \frac{1}{4}x-\frac{1}{8}+\frac{\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{4x^3-6x^2+6x-2}.$$

$$\int\frac{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}{4x^3-6x^2+6x-2}dx = \frac{x^2}{8}-\frac{x}{8}+\int\frac{\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{4x^3-6x^2+6x-2}dx$$

Рассмотрим интегрирование правильных рациональных дробей. Можно доказать, что любая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа дробей четырех типов: $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, где A, a, M, N, p, q – некоторые числа, k и m отличные от единицы натуральные числа, x^2+px+q - квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом. Интегралы от этих дробей вычисляются:

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C, \quad \int\frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$$

$$\int\frac{A(2x+p)}{(x^2+px+q)^m}dx = A\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m} = \frac{A}{(1-m)(x^2+px+q)^{m-1}}+C$$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left[\begin{array}{l} t=x+\frac{p}{2}, x=t-\frac{p}{2}, dx=dt, \\ x^2+px+q=t^2+(q-\frac{p^2}{4}). \end{array}\right] = \int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+(q-\frac{p^2}{4})}dt = M\int\frac{t}{t^2+(q-\frac{p^2}{4})}dt+$$

$$+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dt}{t^2+(q-\frac{p^2}{4})} = \frac{M}{2}\ln[t^2+(q-\frac{p^2}{4})]+\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C;$$

План разложения рациональной правильной несократимой дроби на сумму элементарных дробей

1. Разложить многочлен $Q_n(x)$ на множители вида $(x-a)$ и (x^2+px+q) с дискриминантом $D<0$: $Q_n(x) = b_0(x-a)^k(x-b)^l \dots (x^2+px+q)^r$.

2. Разложить саму дробь следующим образом на сумму элементарных дробей с неопределенными коэффициентами, которые далее предстоит найти:

$$\frac{P_m(x)}{b_0\underline{(x-a)^k}(x-b)^l \dots \underline{\underline{(x^2+px+q)^r}}} = \underline{\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}}$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \underline{\underline{\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} \dots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+px+q)^r}}}.$$

3. Для вычисления неопределённых коэффициентов $A_1, A_2, \dots, B_1, \dots, N_r$ необходимо правую часть разложения привести к общему знаменателю $Q_n(x)$ и выписать равенство числителей обеих дробей:

$$\frac{1}{b_0}P_m(x) = A_1(x-a)^{k-1}(x-b)^l \dots (x^2+px+q)^r + \dots + (M_rx+N_r)(x-a)^k(x-b)^l. \quad (*)$$

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{x^3+4x^2-5x+1}{\underbrace{(x+1)^3}_{k=3}\underbrace{(x-3)^2}_{l=2}\underbrace{(x^2+2x+3)^2}_{r=2}} = \underbrace{\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}}_{k=3} +$$

$$+ \underbrace{\frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2}}_{l=2} + \underbrace{\frac{M_1x+N_1}{x^2+2x+3} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+2x+3)^2}}_{r=2}$$

Пример 6.

Пример 7. Разложим дробь $\frac{2x+3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ на сумму простых дробей. Так как $\frac{2x+3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$, то

$$2x+3 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x^2-2x+1).$$

Запишем правую часть этого равенства в стандартном виде (в порядке убывания показателей степени переменной x):

$$2x+3 = (A+C)x^3 + (B-2C+D)x^2 + (B+C-2D)x - A + B + D.$$

Приравнивая коэффициенты многочлена в правой части соответствующим коэффициентам многочлена в левой части равенства, получим систему линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B-2C+D=0, \\ B+C-2D=2, \\ -A+B+D=3. \end{cases}$$

Решив систему, получаем:

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = -\frac{1}{x-1}+\frac{5}{3(x-1)^2}+\frac{x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}$$

Иногда нет необходимости в разложении правильной дроби на простые дроби. Так, например в дроби $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ можно выделить полный квадрат в знаменатели:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})},$$

и далее, используя таблицу, вычислить.

Пример 8.

$$\int\frac{dx}{2x^2+4x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{\frac{3}{2}})^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{2(x+1)}{\sqrt{6}}+C$$

Пример 9.

$$\int\frac{3x^2+8x+5}{(x^3+4x^2+5x+6)^{11}}dx=\left[d(x^3+4x^2+5x+6)=(3x^2+8x+5)dx\right]=$$

$$=\int\frac{d(x^3+4x^2+5x+6)}{(x^3+4x^2+5x+6)^{11}}=-\frac{1}{10(x^3+4x^2+5x+6)^{10}}+C$$

Пример 10.

$$\int\frac{3x^2+2x+5}{(x-1)^{11}}dx=\begin{bmatrix} t=x-1, dt=dx, \\ x=t+1. \end{bmatrix}=\int\frac{3(t^2+2t+1)+2(t+1)+5}{t^{11}}dt=$$

$$=\int\frac{3t^2+8t+10}{t^{11}}dt=3\int t^{-9}dt+8\int t^{-10}dt+10\int t^{-11}dt=-\frac{3}{8t^8}-\frac{8}{9t^9}-\frac{1}{t^{10}}+C=$$

$$=-\frac{3}{8(x-1)^8}-\frac{8}{9(x-1)^9}-\frac{1}{(x-1)^{10}}+C$$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int \frac{5x^2+13x-6}{x^3+x^2-2x}dx$ Отв. $3\ln|x|+4\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C$.

2. $\int \frac{x-9}{x^3-6x^2+9x}dx$ Отв. $\ln|x-3|-\ln|x|+\frac{2}{x-3}+C$

3. $\int \frac{8+5x-x^2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$ Отв. $2\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+2|-7\mathrm{arctg}(x+1)+C$

4. $\int \frac{x^4+x-8}{x^3+4x}dx$ Отв. $\frac{1}{2}x^2-2\ln|x|-\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$

5. $\int \frac{32dx}{(x^2+16)^2}$ Отв. $\frac{x}{x^2+16}+\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x}{4}+C$

6. $\int \frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx$ Отв. $-\frac{1}{4}\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+\frac{3}{4}\mathrm{arctg}x+C$

7. $\int \frac{4x-4}{x^3+8}dx$ Отв. $-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$

6. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен

- $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}$, $k=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$ Для вычисления интеграла такого вида достаточно выделить полный квадрат в квадратном трехчлене знаменателя, что приведет к табличному интегралу.
- $\int \frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^k}dx$, $k=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$
  Первый способ. Выделив полный квадрат, преобразовать квадратный трехчлен так, что $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2+B$ и затем сделать замену $x-x_0=t$.
  Второй способ. Тождественно преобразовать числитель $mx+n$, вы- делив в нем слагаемое, равное производной квадратного трехчлена $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$. Пользуясь тем, что $u'dx=du$, подвести это слагаемое под знак дифференциала.
  $$\int \frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^k}dx=\int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+n-\frac{mb}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}dx=\frac{m}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^k}+$$
  $$+(n-\frac{mb}{2a})\cdot\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}$$
- $\int \frac{dx}{(mx+n)^\alpha\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\alpha\in N$
  Для вычисления интеграла данного вида существует стандартная подстановка $mx+n=\frac{1}{t}$, которая приводит этот интеграл к одному из предыдущих видов.
- $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, **где $P_n(x)$ - многочлен степени n**
  Для вычисления полагаем, что $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где многочлен

$Q_{n-1}(x)=Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+...+C$ имеет неопределенные коэффициенты, которые вместе с числом λ можно найти, продифференцировав обе части равенства и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в получившемся выражении.

Пример $J=\int\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Решение.

Данный интеграл не является табличным, но похож на интеграл 15 таблицы $\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{3}+C$

Пример. $J=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx$

Решение.

Выполним тождественные преобразования числителя и приведем его к виду производной от знаменателя: $3x+4=\frac{3}{2}(2x)+4=\frac{3}{2}(2x+7)-\frac{3\cdot 7}{2}+4=\frac{3}{2}(2x+7)-\frac{13}{2}$

$$\int\frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+7)-\frac{13}{2}}{x^2+7x+10}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+10}-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{x^2+7x+10}$$

$$J_1=\int\frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+10}=\int\frac{d(x^2+7x)}{x^2+7x+10}=\int\frac{d(x^2+7x+10)}{x^2+7x+10}=\ln\left|x^2+7x+10\right|+C_1$$

$$J_2=\int\frac{dx}{x^2+7x+10}=\int\frac{dx}{(x+\frac{7}{2})^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{7}{2}+\frac{3}{2}}\right|=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right|+C_2.$$

$$J=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+10}dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+10\right|-\frac{13}{6}\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right|+C$$

Пример. $\int\frac{dx}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2+2x-2}}$

Решение.

$\int\frac{2x^3+x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx=Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{x^2+2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$, где $Q_{n-1}(x)=Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$.

Продифференцировав обе части равенства, получаем

$$\frac{2x^3+x^2-1}{\sqrt{x^2+2x+5}}=(2Ax+B)\cdot\sqrt{x^2+2x+5}+\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$2x^3+x^2-1=(2Ax+B)\cdot(x^2+2x+5)+\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot(x+1)+\lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} x^3\Rightarrow\ \ 2=2A+A\\ x^2\Rightarrow\ \ 1=B+4A+A+B\\ x\ \Rightarrow\ \ 0=10A+2B+B+C\\ x^0\Rightarrow -1=5B+\lambda+C\end{array}\right\}$$

$A=\frac{2}{3},B=-\frac{7}{6},C=-\frac{19}{6}$ и $\lambda=8$, тогда исходный интеграл равен

$$J=\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+5}+8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$J=\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+5}+8\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

Задачи для самостоятельной работы

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$ Отв. $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+13}\right|+C$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+4x-2x^2}}$ Отв. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{2}+C$.

3. $\int \frac{dx}{3x^2+12x+16}$ Отв. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(x+2)}{2}+C$.

4. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3x+4}}dx$ Отв. $2\sqrt{x^2+3x+4}-2\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+4}\right|+C$

5. $\int \frac{3-x}{2x^2+5x+2}dx$ Отв. $\frac{17}{2}\ln\left|\frac{x+1/2}{x+2}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5x+2\right|+C$.

6. $\int (x+2)\sqrt{x^2+6x+8}dx$ Отв. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+6x+8\right)^3}-\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{x^2+6x+8}+ \\ \quad +\frac{1}{2}\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+8}\right|+C\end{array}\right.$

7. Интегрирование тригонометрических функций

- Следующие интегралы приводятся к табличному виду в результате применения известных тригонометрических формул

$$\int \sin mx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)dx$$

$$\int \sin mx\cdot\sin nxdx=\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)dx$$

$$\int \cos mx\cdot\cos nxdx=\frac{1}{2}\int(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x)dx$$

- $\boldsymbol{I=\int \sin^m x\cdot\cos^n x\,dx}$

Если **хотя бы один из показателей степени есть нечетное положительное целое** число, интеграл приводится к табличному виду следующим образом:

$$\int \sin^m x\cos^{2k+1}xdx=\int \sin^m x\left(\cos^2 x\right)^k\cos xdx=$$
$$=\int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k d\sin x=\int f(\sin x)d\sin x$$

Если **оба показателя степени четные неотрицательные целые числа**, то используя формулы $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, преобразуем к следующему виду:

$$\int \sin^{2k}x\cdot\cos^{2l}xdx=\int\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^k\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^l dx=\int f(\cos 2x)dx$$

Если **оба показателя степени отрицательные целые числа**, то возможно следующее преобразование, которое упростит подынтегральное выражение.

$$\int\frac{dx}{\sin^k x\cdot\cos^l x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^k x\cdot\cos^l x}=\int\frac{dx}{\sin^{k-2}x\cdot\cos^l x}+\int\frac{dx}{\sin^k x\cdot\cos^{l-2}x}$$

- **Универсальная тригонометрическая подстановка**.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right]=\int R_1(t)dt,$$

где $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

- Если подынтегральная функция удовлетворяет условию $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\operatorname{tg} x = t$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Задачи для самостоятельной работы

1. $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx$. Отв. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + c$.

2. $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$ Отв. $-\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C$.

3. $I = \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 5}$. Отв. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{5}} + C$.

4. $I = \int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{2} dx$. Отв. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$,

5. $I = \int \frac{\sin^2 3x}{\cos^6 3x} dx$. Отв. $\frac{1}{9}\operatorname{tg}^3 3x + \frac{1}{15}\operatorname{tg}^5 3x + C$.

6. $I = \int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^4 \frac{x}{2} dx$. Отв. $\frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \frac{1}{24}\sin^3 x + C$.

7. $I = \int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx$. Отв. $\frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$.

8. $I = \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x}$. Отв. $-\frac{1}{4}\ln|2 + 4\operatorname{ctg} x| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 2}\right| + C_1$.

8. Тригонометрические подстановки

Для вычисления некоторых интегралов существуют стандартные подстановки, которые позволяют успешно и рационально вычислить эти интегралы. Рассмотрим следующие, так называемые, тригонометрические подстановки.

Подынтегральная функция	Подстановка	Новая подын функция
$f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$	$x = a\sin t, (x = a\cos t)$	$f(a\sin t, a\cos t)$
$f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\cos t}, (x = \frac{a}{\sin t})$	$f(\frac{a}{\cos t}, a\operatorname{tg} t)$
$f(x, \sqrt{x^2 + a^2})$	$x = a \cdot \operatorname{tg} t,\ (x = a \cdot \operatorname{ctg} t)$	$f(a \cdot \operatorname{tg} t, \frac{a}{\cos t})$

Пример. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение.

Если $x = a\sin t$, то $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$. Отсюда следует, что $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a\cos t \cdot a\cos t \cdot dt = a^2 \int \cos^2 t \cdot dt$.

$$I = a^2 \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2}\int \cos 2t \cdot d2t = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

Осталось сделать обратную замену $t=\arcsin\frac{x}{a}$. $I=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C.$

9. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Подынтегральная функция	Подстановка
$f(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$	$\frac{ax+b}{cx+d}=t^r$, где r - наименьшее общее кратное чисел m и n.
$f(x)=x^m\left(a+bx^n\right)^p$, где m,n,p - рациональные числа	Подстановки Чебышева 1) Если p целое число, то $x=t^s$, где s - наименьший общий знаменатель чисел m и n. 2) Если $\frac{m+1}{n}$ целое число, то $\left(a+bx^n\right)=t^s$, где s знаменатель дроби p. 3) Если $\frac{m+1}{n}+p$ целое число, то $\frac{a}{x^n}+b=t^s$, где s знаменатель дроби p.

Теорема Чепышева

Интеграл $I=\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ может быть выражен в элементарных функциях только в трех случаях:

если p целое число,

если $\frac{m+1}{n}$ целое число,

если $\frac{m+1}{n}+p$ целое число.

Пример. $I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Решение. Подынтегральная функция имеет вид $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$, проверим выполнение условий теоремы Чепышева:

Имеем $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{2}$. Так как p не целое положительное число, вычисляем $\frac{m+1}{n}=2$. Результат есть целое число. Для вычисления данного интеграла подойдет подстановка $a+bx^n=t^s$, то есть $1+x^{\frac{1}{4}}=t^2$, где $s=2$ знаменатель дроби $p=\frac{1}{2}$

Из подстановки следует, что $x=\left(t^2-1\right)^4$, $dx=8\left(t^2-1\right)^3\cdot tdt$. И после преобразования данный интеграл будет иметь следующий вид.

$$I=\int\frac{t}{\left(t^2-1\right)^2}\cdot 8\left(t^2-1\right)^3 tdt=8\int t^2\left(t^2-1\right)dt=8\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем окончательный ответ: $I=\frac{8}{5}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}+C.$

Задачи для самостоятельной работы

1. $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}dx.$ Отв. $\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\arcsin\frac{x}{3}+C.$

2. $I=\int\frac{x^3}{\sqrt{\left(x^2-16\right)^5}}dx.$ Отв. $\frac{1}{\sqrt{x^2-16}}-\frac{1}{3}\frac{16}{\sqrt{\left(x^2-16\right)^3}}+C.$

3. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}.$ Отв. $\frac{1}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{1}{4\sqrt{x^2+4}}+C.$

4. $I=\int\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\frac{dx}{(x+2)^3}dx$ Отв. $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3}+2\sqrt{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}+C.$

5. $I=\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$ Отв. $-\frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^3}+C.$

Список литературы

1. Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчис-ление функций одного переменного: Учеб. для вузов. /Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 528 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2006. 544 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 2. Диффе-ренциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2003. 512 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Интеграл-Пресс, 1997. 416 с.