

Паросочетания

Тахонов Иван Иванович

Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет

НГУ, 2019

Вспомним...

Пусть $G = (V, E)$ – неорграф.

- **Паросочетанием** в G называют такое $M \subseteq E$, что каждой вершине графа инцидентно не более одного ребра из M .
- Вершина $v \in V$ **покрыта**, если ей инцидентно ребро из M . В противном случае v **свободна** или **непокрыта**.
- Паросочетание называется **наибольшим**, если не существует паросочетания большей мощности.
- Паросочетание M **максимально**, если не существует паросочетания M' : $M \subset M'$.
- Паросочетание **совершенно**, если им покрыты все вершины графа.

Вопрос: как соотносятся максимальное и наибольшее паросочетания? Как сильно могут отличаться их мощности?

Поиск наибольшего паросочетания

Альтернирующие и аугментальные пути

Рассмотрим паросочетание M в графе G :

- **чередующимся (альтернирующим)** относительно M путем называется путь, в котором из любых двух послед. ребер одно принадлежит M , а другое нет;
- **увеличивающим (аугментальным)** путем называется чередующийся путь, концевые вершины которого не покрыты паросочетанием.

Лемма 1 (Berge – 1957)

Паросочетание M является наибольшим в $G \Leftrightarrow$ в G нет путей, аугментальных относительно M .

Док.-во. \Rightarrow Пусть P – аугментальный отн. M в G . Рассмотрим $M \Delta P$ (симм. разность): это паросочетание большей мощности.

↳

\Leftarrow Пусть M' – паросочетание большей мощности. Рассмотрим подграф $G' = M \Delta M' \subseteq G$.

Очевидно, степени вершин в G' не превосходят 2. То есть, компоненты связности G' – это альтернирующие пути, альтернирующие циклы и изолированные вершины. Так как в G' больше ребер из M' , чем из M , то должен найтись путь, в котором концевые ребра из M' . Он аугм. отн. M в $G' \subseteq G$. ↳ ■

Наибольшее паросочетание в двудольном графе

Идея: ищем аугментальные пути! То есть,

- начинаем с некоторого начального паросочетания M (пустого, состоящего из одного ребра, жадного...),
- строим максимальный по включению альтернирующий путь P , начиная с непокрытой вершины,
- если путь закончился в непокрытой вершине, то полагаем $M' = M \Delta P$;
- повторяем, пока не убедимся, что аугментальных относительно M путей в графе нет.

Заметим: задачу можно свести к поиску путей между двумя вершинами.

Дан двудольный неорграф $G = (V_1 \cup V_2, E)$ и паросочетание M . Построим орграф $G_M = (V_M, E_M)$ следующим образом:

$$V_M = V_1 \cup V_2 \cup \{s, t\};$$

$$\begin{aligned}E_M = & \{(v_1, v_2) : (v_1, v_2) \in E \setminus M, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \cup \\& \{(v_2, v_1) : (v_1, v_2) \in M, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \cup \\& \{(s, v) : v \in V'_1\} \cup \{(v, t) : v \in V'_2\},\end{aligned}$$

где

$$V'_1 = \{v \in V_1 : v \text{ не покрыта } M\},$$

$$V'_2 = \{v \in V_2 : v \text{ не покрыта } M\}.$$

$s \rightarrow t$ пути в G_M соответствуют аугментальным путям в G .

Algorithm 1 (Наиб. парос. в двудольном графе)

procedure FINDAUGPATH($G = (V_1 \cup V_2, E)$, M)

Построить G_M по M .

Осуществить поиск $s \rightarrow t$ пути в G_M .

if в G_M есть простой $s \rightarrow t$ путь P **then**

return P (без двух крайних ребер) – это аугм. путь в G
else

return nil (\nexists аугм. пути в G)

end.

Выбрать начальное паросочетание M (e.g. $M = \emptyset$).

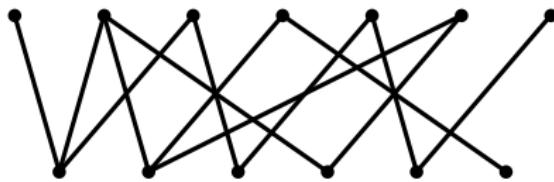
repeat

$P = \text{FindAugPath}(G, M)$

Увеличить M : $M = M \Delta P$

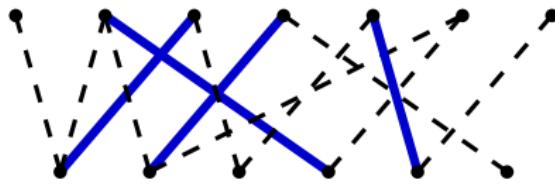
until $P = \text{nil}$

Пример



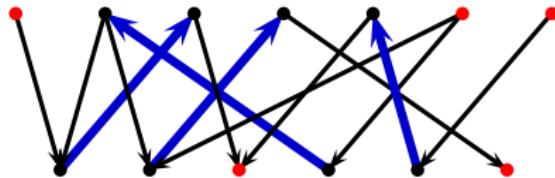
Рассмотрим двудольный граф...

Пример



Построим некоторое паросочетание (например, жадным алгоритмом)

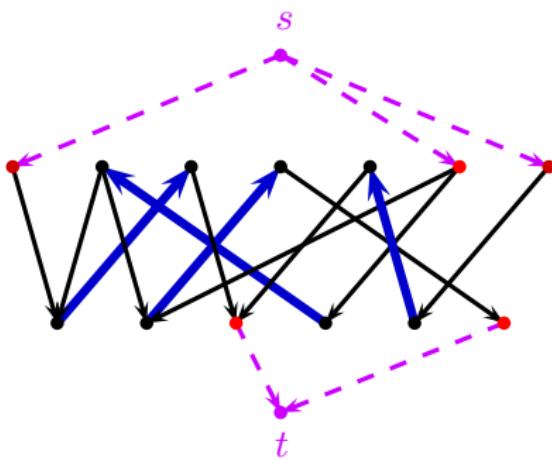
Пример



Ориентируем ребра: из паросочетания – снизу вверх, не из паросочетания – сверху вниз.

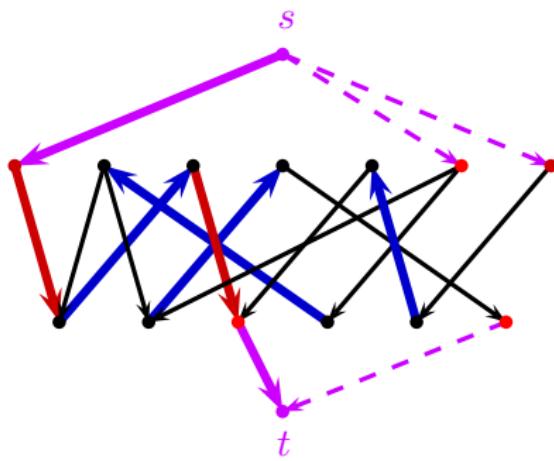
Отметим свободные вершины разных долей.

Пример



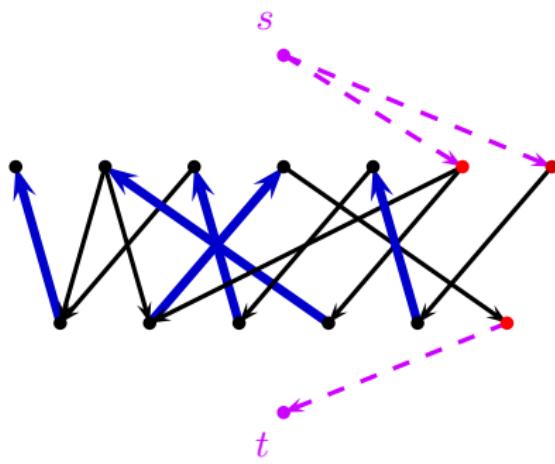
Добавляем источник (из него дуги во все свободные вершины первой доли) и сток (в него дуги из всех свободных вершин второй доли). Ищем путь между этими двумя вершинами.

Пример



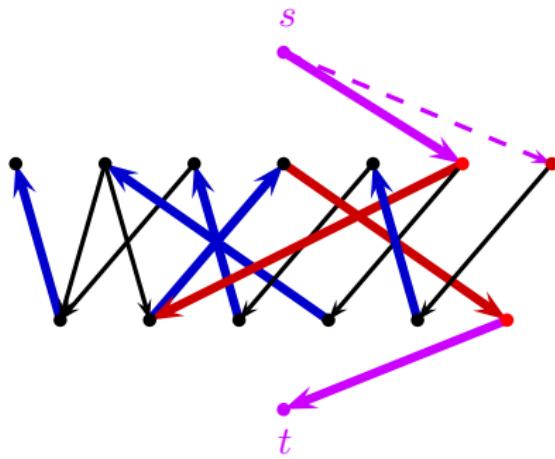
Нашли $s \rightarrow t$ путь.

Пример



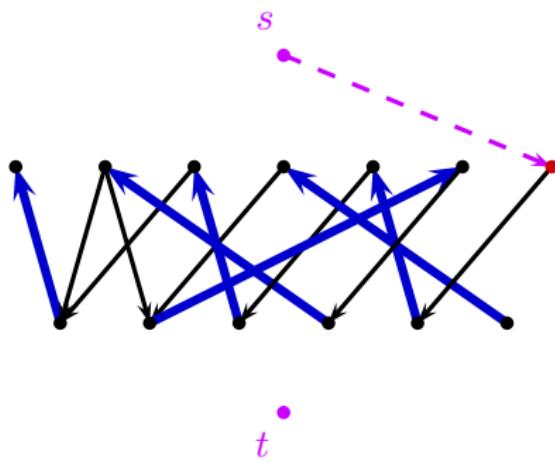
Обновляем паросочетание, обновляем граф.

Пример



Снова нашли $s \rightarrow t$ путь.

Пример



Обновляем паросочетание, обновляем граф.

Вершина t недостижима из s . Аугментального пути нет, построено наибольшее паросочетание.

Теорема 1

Алгоритм 1 строит наибольшее паросочетание в двудольном графе с трудоемкостью $O(|V||E|)$.

Док.-во. **Корректность процедуры.** Очевидно. Если найден $s \rightarrow t$ путь в G_M , то в G есть аугм. путь. С другой стороны, если в G есть аугм. путь, то ему соотв. $s \rightarrow t$ путь в G_M . Таким образом, умея искать путь м/у двумя вершинами, всегда либо найдем аугм. путь (если он есть), либо придем к выводу, что его нет (когда его действительно нет).

Корректность алгоритма. Очевидно в силу Леммы Бержа.

Временная сложность. Мощность паросочетания не превышает $|V|/2 \Rightarrow$ алгоритм делает не более $|V|/2$ итераций. Процедуру можно выполнить за $O(|E|)$ операций \Rightarrow весь алгоритм работает $O(|V||E|)$. ■

Заметим: описанный алгоритм ищет один аугментальный путь за итерацию и каждый раз увеличивает паросочетание на одно ребро. В итоге получаем трудоемкость $O(|V||E|)$.

Hopcroft, Karp – 1973

Пусть $G = (V, E)$ – двудольный граф. Существует алгоритм, строящий паросочетание максимальной мощности в G с трудоемкостью $O(\sqrt{|V||E|})$.

J.E. Hopcroft, R.M. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs // SIAM Journal on Computing, 2 (4): 225–231 (1973)

Идея: ищем не один, а несколько не пересекающихся по вершинам аугм. путей за раз и используем их все для увеличения паросочетания!

Дополнительная информация

Еще заметим: переход к ориентированному графу, добавление вершин и проч. осуществляется исключительно для удобства изложения. Алгоритм вполне можно сформулировать, не изменяя исходный граф. Можно также явно расписать процесс поиска аугментального пути. В итоге получим

Алгоритм приводится по изданию: Ерзин А.И. Введение в исследование операций: учебное пособие / Изд. НГУ, 2006

Algorithm 2 Построение наибольшего паросочетания в двудольном графе

Input: Двудольный граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$, начальное паросочетание M .

Шаг 1. Пометка вершин.

- 1.0. Помечаем '*' все непокрытые вершины из V_1 .
- 1.1. Если нет непросмотренных вершин \Rightarrow Шаг 3.
Иначе берем помеченную и не просмотр. v .
 $v \in V_1 \Rightarrow 1.2, v \in V_2 \Rightarrow 1.3.$
- 1.2. Просмотр $v \in V_1$: смотрим все $(v, w) \in E \setminus M$;
если $w \in V_2$ не помечена, дать метку v .
Вершина v просмотрена. Переходим на 1.1.
- 1.3. Просмотр $v \in V_2$: если v не покрыта \Rightarrow Шаг 2.
Иначе просматриваем ребра $(v, w) \in M$; если
 $w \in V_1$ не помечена, даем метку v . Вершина v
просмотрена. Переходим на 1.1.

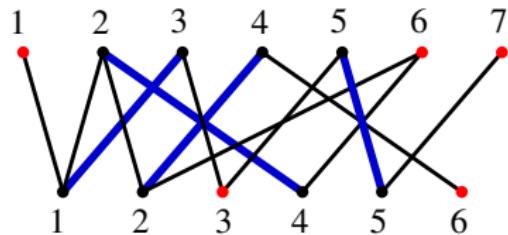
Шаг 2. Аугментация. Найден аугментальный путь P .

Восстанавливаем его по меткам. Полагаем $M = M \Delta P$.

Убираем метки, переходим на Шаг 1.

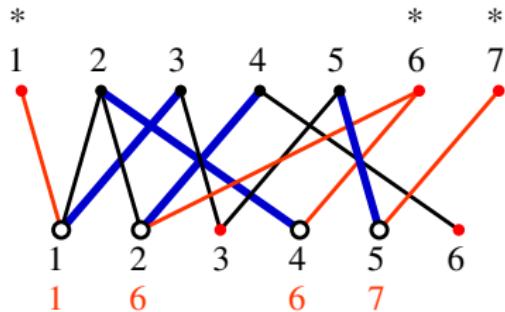
Шаг 3. Аугментального пути нет. Stop.

Пример



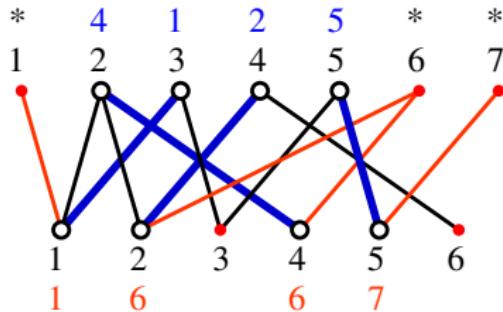
Рассмотрим предыдущий пример (тот же граф и то же начальное паросочетание).

Пример



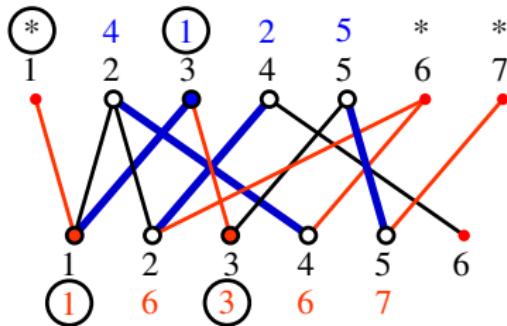
Помечаем все непокрытие вершины первой (верхней) доли.
Просматриваем их в некотором порядке, переходим вниз по
ребрам не из паросочетания и помечаем потомков.

Пример



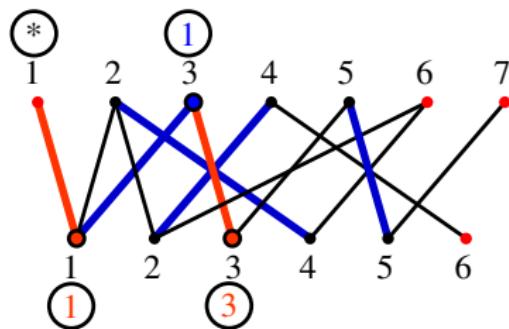
Просматриваем помеченные вершины нижней доли. Переходим вверх по ребрам из паросочетания, помечаем потомков.

Пример



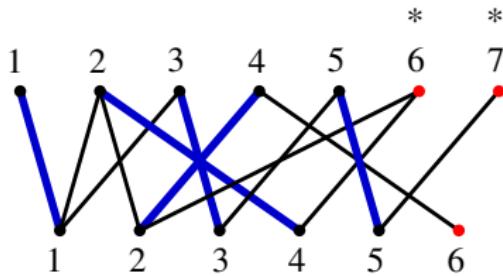
Идем вниз. Попали в свободную вершину.

Пример



Восстанавливаем аугментальный путь по пометкам.

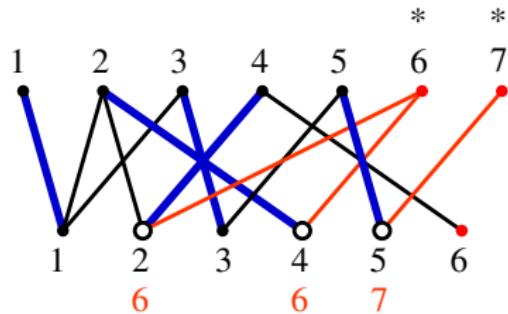
Пример



Увеличиваем паросочетание, стираем пометки и начинаем все заново.

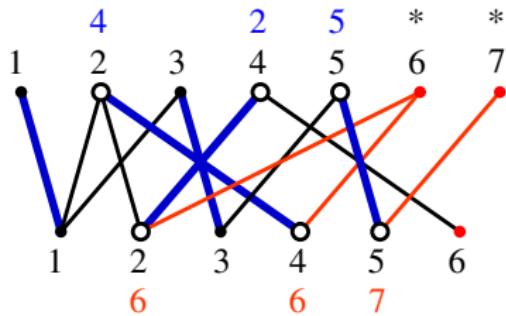
Метим свободные вершины верхней доли.

Пример



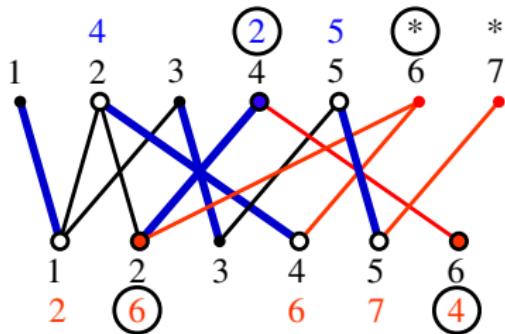
Переходим из них вниз по ребрам не из паросочетания и
метим потомков.

Пример



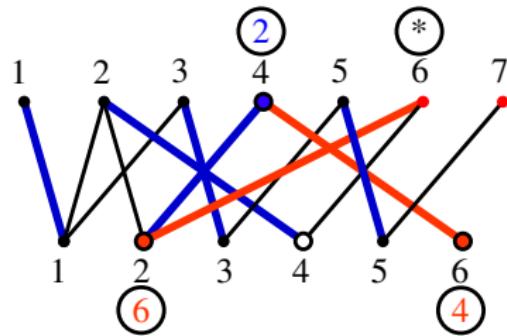
Поднимаемся из помеченных вершин вверх, метим потомков.

Пример



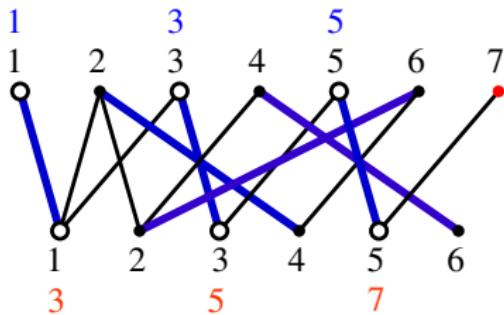
Спускаемся вниз по ребрам не из паросочетания. Попали в свободную вершину. Найден аугментальный путь

Пример



Восстанавливаем путь по пометкам.

Пример



Увеличиваем паросочетание, стираем пометки и начинаем все заново.

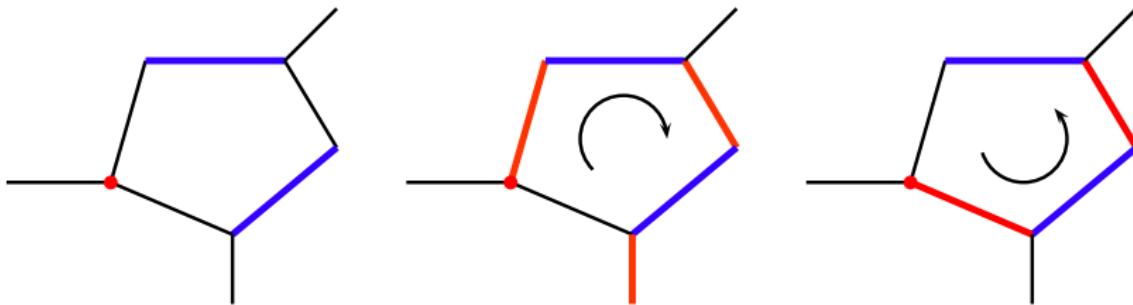
Выходим из свободной вершины, повторяем все шаги. В итоге в какой-то момент не остается непросмотренных вершин. В свободные вершину нижней доли так и не попали (потому что их нет). Получено наибольшее паросочетание.

Недвудольный граф

С двудольным графом разобрались. Как найти наибольшее паросочетание в произвольном, не двудольном графе?

С одной стороны, лемма Бержа верна для любого графа, так что можем использовать тот же подход с поиском аугм. путей.

С другой стороны, когда граф не двудольный, реализовать этот подход гораздо сложнее. Мешают нечетные циклы!



Edmonds – 1965

Пусть $G = (V, E)$ – простой неорграф. Существует алгоритм, строящий паросочетание максимальной мощности в G с трудоемкостью $O(|V|^2|E|)$.

J. Edmonds. Paths, trees, and flowers // Canad. J. Math. 17: 449–467 (1965)

Идея: в процессе построения аугментальных путей отслеживаем появление нечетных циклов, в которых (почти) половина ребер принадлежит паросочетанию. Если такой цикл обнаружен, то немного изменяем текущее паросочетание, сжимаем цикл в одну вершину и работаем дальше с новым графом. Можно показать, что по наибольшему паросочетанию в измененном графе можно восстановить наибольшее паросочетание в исходном.

Свойства паросочетаний

Паросочетания и вершинные покрытия

Пусть $G = (V, E)$ – простой неорграф. Множество вершин $C \subseteq V$ называется **вершинным покрытием**, если

$\forall e = (u_e, v_e) \in E$ имеет место: $\{u_e, v_e\} \cap C \neq \emptyset$.

Иными словами: вершинное покрытие – это множество вершин, покрывающих все ребра графа.

Теорема 2 (о связи паросочетания и вершинного покрытия)

Пусть $G = (V, E)$ – простой неорграф, $C \subseteq V$ – вершинное покрытие, а M – паросочетание в G . Тогда $|M| \leq |C|$.

Док.-во. Очевидно. Вершины из C покрывают все ребра графа, в том числе, ребра из M . Ребра паросочетания не имеют общих вершин $\Rightarrow C$ должно содержать хотя бы одну вершину от каждого ребра из M . ■

Следствие 1

Пусть $G = (V, E)$ – простой неорграф, $C \subseteq V$ – вершинное покрытие, а M – паросочетание в G . Если $|M| = |C|$, то M – наибольшее паросочетание, а C – наименьшее верш. покрытие.

Вопрос: верно ли обратное? Если M – наибольшее паросочетание, а C – наименьшее в.п., то $|M| = |C|$?

Теорема 3 (König – 1931)

В двудольном графе мощность наибольшего паросочетания M^ равна мощности наименьшего вершинного покрытия C^* .*

Док.-во. Ранее доказали, что $|M^*| \leq |C^*|$. Покажем, что найдется вершинное покрытие, по мощности $\leq |M^*|$.

Рассмотрим $V'_1 \subset V_1$ – множество непокрытых M^* вершин доли V_1 и определим множество $W \subseteq V_1 \cup V_2$:

$w \in W \Leftrightarrow \exists v \in V'_1 : v$ и w соединены альтернирующим путем.

Вершины из V'_1 входят в W (альтернирующий путь длины 0).

Рассмотрим множество $C = (V_1 \setminus W) \cup (V_2 \cap W)$.

Заметим: $C = (V_1 \setminus W) \cup (V_2 \cap W)$ – вершинное покрытие.

Предположим это не так. Тогда найдутся вершины $x \in V_1 \setminus C$ и $y \in V_2 \setminus C$ такие, что $(x, y) \in E$.

Вершина $x \in V_1 \cap W$. Допустим, $x \in V'_1$. В этом случае ребро $(x, y) \notin M^*$. Если вершина y не покрыта M^* , то ребро (x, y) можно добавить к M^* , увеличив мощность паросочетания.

Если же y инцидентна ребру из паросочетания, то y лежит на альтернирующем пути, начинающемся в x , и должна быть отнесена к W . ↴

Пускай $x \notin V'_1$. Рассмотрим алт. путь P , соединяющий ее с некоторой $v \in V'_1$. Этот путь содержит четное число ребер (вернулись в V_1), последнее ребро должно быть из M^* . Значит, ребро $(x, y) \notin M^*$ и $P \cup (x, y)$ – альтернирующий путь, завершающийся в y . То есть, $y \in V_2 \cap W$. ↴

Еще заметим: $|C| \leq |M^*|$.

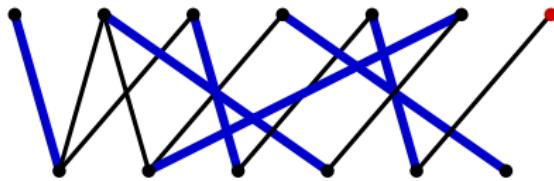
Действительно,

- ① все вершины из $V_1 \setminus W$ покрыты M^* : свободные вершины из V_1 входят в W по определению;
- ② все вершины из $V_2 \cap W$ покрыты M^* : иначе существовал бы аугментальный путь, а M^* – наибольшее;
- ③ между вершинами из $V_1 \setminus W$ и $V_2 \cap W$ нет ребер из паросочетания: если $y \in V_2 \cap W$ и $(x, y) \in M^*$, то x также должна быть из W .

Таким образом, каждой вершине из C соответствует отдельное ребро из M^* и, следовательно, $|C| \leq |M^*|$.

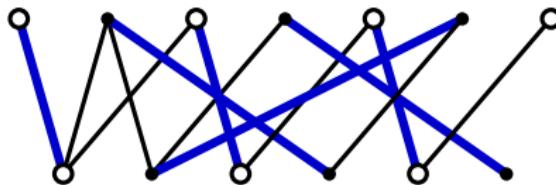
С учетом доказанного ранее, получаем, что $|C| = |M^*|$ и C – наименьшее вершинное покрытие. ■

Пример



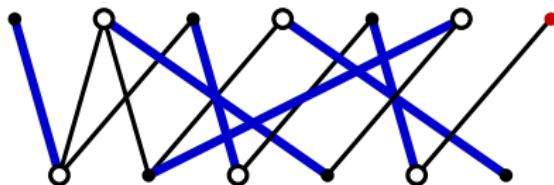
Вернемся к паросочетанию из прошлого примера.

Пример



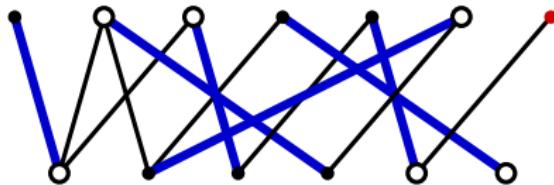
Найдем вершины, достижимые из непокрытой (множество W)

Пример



Меняем вершины в первой доле. Получили наименьшее вершинное покрытие.

Пример



Заметим, что если просто возьмем по одной вершине от каждого ребра паросочетания, то совсем не обязательно получим вершинное покрытие...

Замечание 1

Задача поиска наименьшего вершинного покрытия в двудольном графе полиномиально разрешима.

Более того: в конце работы алгоритма, строящего наибольшее паросочетание, мы фактически имеем множество W , о котором шла речь в предыдущей теореме. Алгоритм на финальном шаге должен построить альтернирующие пути и удостовериться, что среди них нет аугментальных.

Замечание 2

Задача поиска наименьшего вершинного покрытия в произвольном графе не является полиномиально разрешимой если $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Оценим мощность наибольшего паросочетания в графе.

- Пусть $G = (V, E)$ и $X \subseteq V$. Обозначим через $G \setminus X$ граф, полученный из G удалением X вместе с инцидентными ребрами.
- Пусть G' компонента связности G . Назовем G' (не)четной, если в G' (не)четное число вершин.
- Обозначим через $\text{odd}(G)$ число нечетных компонент в G .

Лемма 2

Пусть $G = (V, E)$, $X \subseteq V$ и M – паросочетание в G . Тогда:

$$|M| \leq \frac{1}{2} (|V| + |X| - \text{odd}(G \setminus X)).$$

Док.-во. Пусть $\{G_i = (V_i, E_i)\}$ – множество комп. связности $G \setminus X$. Очевидно,

$$|M \cap E_i| \leq \left\lfloor \frac{|V_i|}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{|V_i|}{2} & \text{для четных компонент,} \\ \frac{|V_i|}{2} - \frac{1}{2} & \text{для нечетных компонент.} \end{cases}$$

Удалив X из G , мы уменьшаем $|M|$ не более чем на $|X| \Rightarrow$

$$|M| \leq |X| + \sum_i \frac{|V_i|}{2} - \frac{\text{odd}(G \setminus X)}{2} = |X| + \frac{|V| - |X|}{2} - \frac{\text{odd}(G \setminus X)}{2}.$$

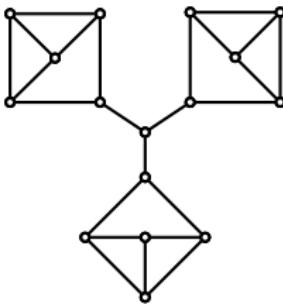
Следствие 2

Пусть M – паросочетание в $G = (V, E)$ и $X \subseteq V$:

$$|M| = \frac{1}{2} (|V| + |X| - \text{odd}(G \setminus X)),$$

тогда M наибольшее в G .

Упражнение: найти наибольшее паросочетание в указанном графе.



Лемма 3

Пусть $G = (V, E)$, M – наибольшее паросочетание в G .
Существует $X \subseteq V$:

$$|M| = \frac{1}{2} (|V| + |X| - \text{odd}(G \setminus X)).$$

Док.-во. Для краткости обозначим через $\nu(G)$ размер наибольшего паросочетания в G . Также полагаем, что G связный.

Доказательство индукцией по $|V|$. При $|V| = 0$ очевидно.
Предположим, неравенство верно для графов с $\leq |V| - 1$ вершинами. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1: существует $v \in V$, покрываемая всеми наибольшими паросочетаниями.

Удалим v из G , получим G' . Очевидно, $\nu(G') = \nu(G) - 1$. Для G' существует $X' \subseteq V \setminus \{v\}$:

$$\nu(G') = \frac{1}{2} (|V \setminus \{v\}| + |X'| - \text{odd}(G' \setminus X')).$$

Для исходного графа G положим $X = X' \cup \{v\}$. Очевидно, $\text{odd}(G' \setminus X') = \text{odd}(G \setminus X)$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|V| + |X| - \text{odd}(G \setminus X)) &= \frac{1}{2} (|V \setminus \{v\}| + 1 + |X'| + 1 - \text{odd}(G' \setminus X')) \\ &= \nu(G') + 1 = \nu(G). \end{aligned}$$

Случай 2: вершины, покрываемой всеми наибольшими паросочетаниями, нет.

Заметим, что в этом случае наибольшее паросочетание не может быть совершенным. Следовательно, $\nu(G) < |V|/2$.

Покажем, что $\nu(G) = \frac{|V|-1}{2}$. В этом случае $X = \emptyset$.

Предположим противное: $\nu(G) < \frac{|V|-1}{2}$. Это означает, что любое наибольшее паросочетание M оставляет непокрытыми хотя бы две вершины: u_M, v_M . Выберем M и непокрытые вершины таким образом, что расстояние между u_M и v_M минимально.

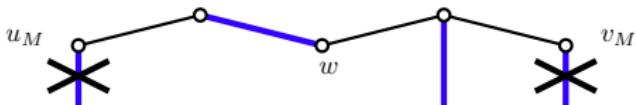
Расстояние $dist(u, v)$ – наименьшее число ребер в пути, соединяющем u и v .

Случай 2а: $\text{dist}(u_M, v_M) = 1$.

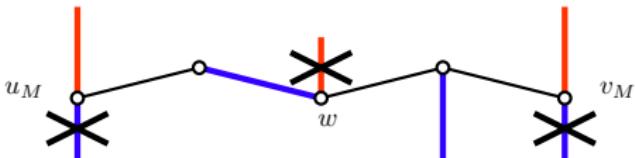
То есть, вершины u_M и v_M смежны. Они обе не покрыты $M \Rightarrow$ можно увеличить мощность M , добавив ребро (u_M, v_M) . \checkmark

Случай 2б: $\text{dist}(u_M, v_M) \geq 2$.

Рассмотрим кратчайший путь P , соединяющий u_M и v_M .
Выберем некоторую промежуточную вершину $w \in P$.

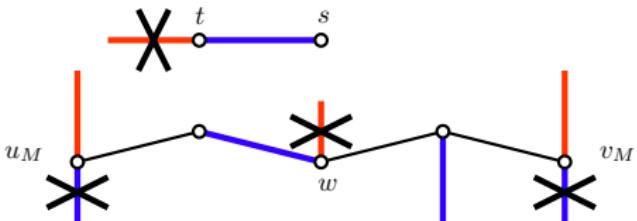


По условию Случая 2, существует наибольшее паросочетание M' , не покрывающее w . Среди всех M' с этим свойством выберем такое, что $|M \cap M'|$ максимально.

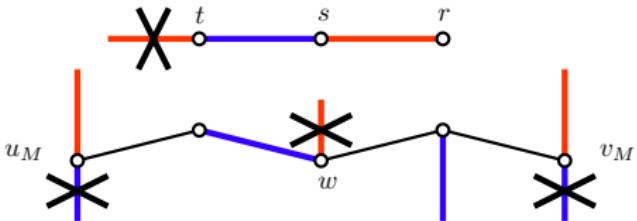


Заметим: $\text{dist}(w, u_M) < \text{dist}(u_M, v_M)$, M' – наибольшее паросочетание, не покрывающее $w \Rightarrow M'$ покрывает u_M (иначе выбрали бы M' вместо M). Аналогично заключаем, что M' покрывает v_M .

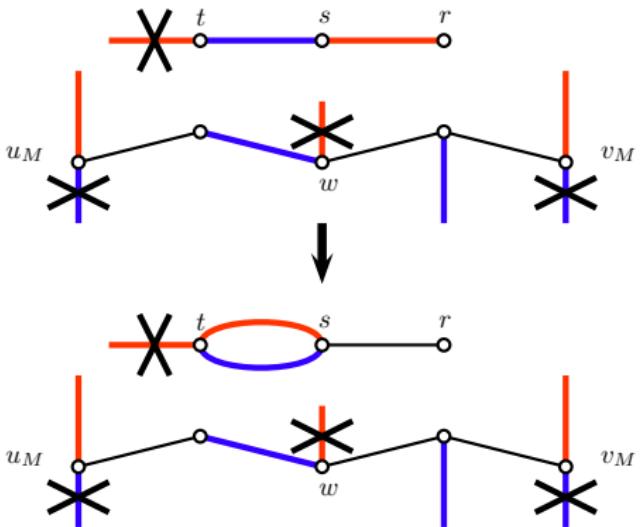
M' покрывает две вершины, не покрытые M . Значит, должна быть вершина $t \neq w$, покрытая M , но не M' : пусть $(s, t) \in M$.



Вершина t не покрыта $M' \Rightarrow s$ должна быть покрыта M' (иначе можем добавить (s, t) в M'): пусть $(r, s) \in M'$.



Рассм. $M'' = M' \setminus (r, s) \cup (s, t)$. Это наиб. паросочетание, оно не покрывает w и имеет с M больше общих ребер, чем M' . \checkmark



Таким образом, $|M| = \frac{|V|-1}{2}$ и в качестве искомого X можно взять пустое множество. ■

Теорема 4 (Tutte–Berge Formula)

Пусть $G = (V, E)$, \mathcal{M} – множество паросочетаний в G . Тогда:

$$\max_{M \in \mathcal{M}} |M| = \min_{X \subseteq V} \frac{1}{2} (|V| + |X| - \text{odd}(G \setminus X)).$$

Док.-во. Следует из двух предыдущих лемм. ■

Следствие 3 (теорема Татта)

Граф G содержит совершенное паросочетание \Leftrightarrow

$$\forall X \subseteq V \text{ имеет место: } |X| \geq \text{odd}(G \setminus X).$$

Док.-во. По формуле Татта-Бержа

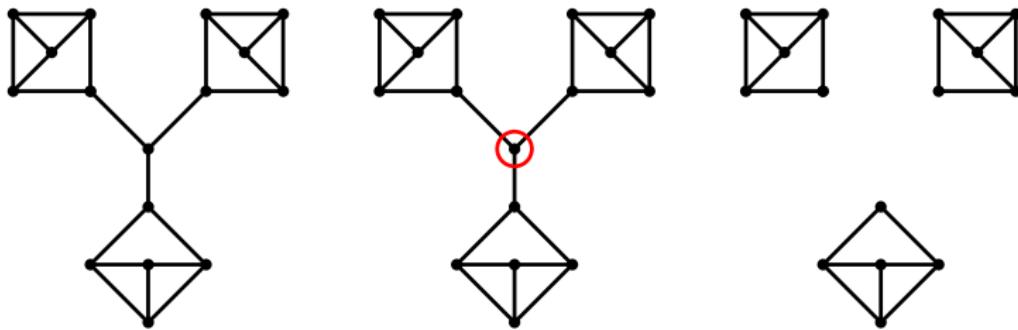
$$\begin{aligned}\frac{|V|}{2} &= \max_{M \in \mathcal{M}} |M| = \frac{1}{2} \min_{X \subseteq V} \{|V| + |X| - \text{odd}(G \setminus X)\} \Rightarrow \\ 0 &= \min_{X \subseteq V} \{|X| - \text{odd}(G \setminus X)\}.\end{aligned}$$

Или: $|X| \geq \text{odd}(G \setminus X)$ для всех $X \subseteq V$. ■

Следствие 4

Неорграф G не содержит совершенного паросочетания \Leftrightarrow
найдется $X \subseteq V$ такое, что $|X| < \text{odd}(G \setminus X)$.

Пример



Граф не содержит совершенного паросочетания: после удаления выделенной вершины образуется 3 компоненты связности

$$1 = |X| < \text{odd}(G \setminus X) = 3.$$

Подсчет паросочетаний

Число совершенных паросочетаний в двудольном графе

Попробуем выяснить число совершенных паросочетаний в **двудольном** графе.

Пусть $G = (V_1 \cup V_2, E)$ – двудольный граф. Считаем $|V_1| = |V_2| = n$ (иначе сов. пар. заведомо нет). Рассмотрим матрицу смежности

$$A_G = (a_{ij})_{i \in V_1, j \in V_2}, \text{ где } a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E, \\ 0, & (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Несложно понять, что совершенное паросочетание в G соответствует такому набору единиц в A_G , что в каждой строке и каждом столбце находится ровно одна единица.

Посчитаем число таких наборов.

Пусть $\{a_{1\pi_1}, a_{2\pi_2}, \dots, a_{n\pi_n}\}$, $\pi \in S_n$, – набор элементов по одному в линии. Все они равны 1 (и определяют сов. пар.) $\Leftrightarrow \prod_{i=1}^n a_{i\pi_i} = 1$. В противном случае произведение = 0. Значит,

$$\text{число совершенных паросочетаний} = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\pi_i} = \text{per}(A_G).$$

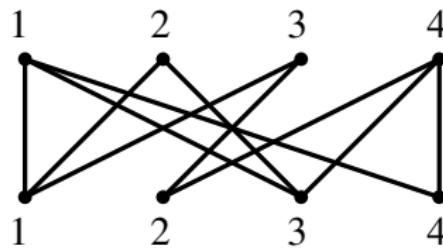
Перманент $\text{per}(A)$ – матричная функция, ближайший родственник детерминанта.

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi_i}, \quad \text{per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} 1 \prod_{i=1}^n a_{i\pi_i}.$$

Как и детерминант, перманент можно вычислять рекуррентно, используя разложение по строкам (без смены знака).

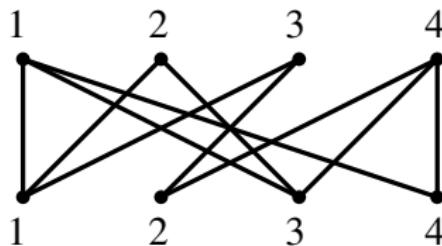
Пример

Рассмотрим следующий граф.



Пример

Рассмотрим следующий граф.

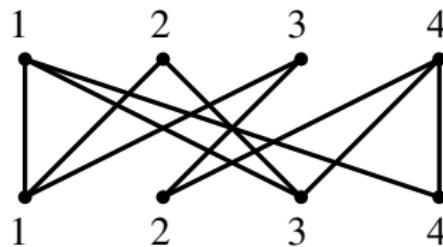


Для него

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

Рассмотрим следующий граф.



Для него

$$\text{per}(A_G) = \text{per} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

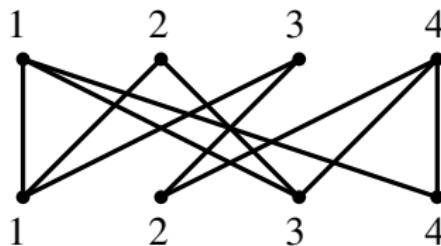
Более того: мы можем перечислить все совершенные паросочетания! Введем [матрицу Эдмондса](#)

$$\tilde{A}_G = (\tilde{a}_{ij})_{i \in V_1, j \in V_2}, \text{ где } \tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \text{"a}_{ij}\text{" (символ),} & (i, j) \in E, \\ 0, & (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Тогда каждое ненулевое слагаемое (символично вычисленного) $\text{per}(\tilde{A}_G)$ соответствует совершенному паросочетанию и $\text{per}(\tilde{A}_G) = 0 \Leftrightarrow$ в G нет совершенного паросочетания.

Пример

Рассмотрим следующий граф.

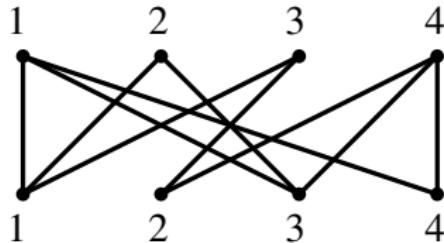


Для него

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A}_G = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Пример

Рассмотрим следующий граф.



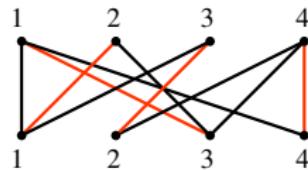
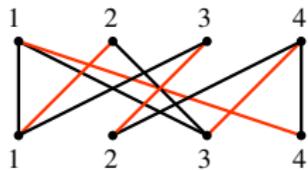
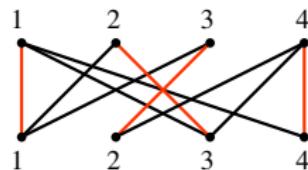
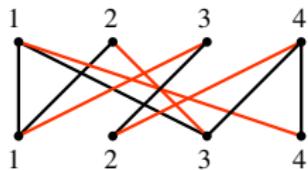
Для него

$$\text{per}(\tilde{A}_G) = \text{per} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} + a_{32}a_{11}a_{23}a_{44} + a_{32}a_{21}a_{14}a_{43} + a_{32}a_{13}a_{21}a_{44}$$

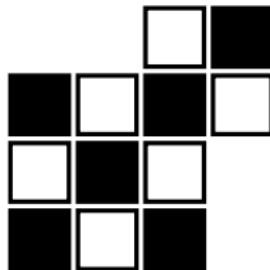
Пример

В графе есть следующие паросочетания:



$$\text{per}(\tilde{\Lambda}_G) = a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} + a_{32}a_{11}a_{23}a_{44} + a_{32}a_{21}a_{14}a_{43} + a_{32}a_{13}a_{21}a_{44}$$

Упражнение: можно ли покрыть указанный фрагмент шахматной доски костяшками домино? Если да, то сколькими способами?



Теорема 5

Подсчет числа совершенных паросочетаний в двудольном графе (или, эквивалентно, вычисление перманента {0-1}-матрицы) – это # \mathcal{P} -полнная задача.

L.G. Valiant. The Complexity of Enumeration and Reliability Problems // SIAM J. Comput., 8(3), 410–421 (1979)

Примечательно, что:

- 1 найти одно совершенное паросочетание (или доказать, что их в графе нет) можно за полиномиальное время – т.е., за полином можем сказать, равен ли нулю перманент {0-1}-матрицы;
- 2 посчитать детерминант можно на полиномиальное время.

Далее для любознательных.

Что с недвудольными графиками?

Пусть $G = (V, E)$ – неориентированный граф. Считаем $|V| = 2n$ (иначе сов. пар. заведомо нет). Рассмотрим матрицу смежности G :

$$A_G = (a_{ij})_{i,j \in V}, \text{ где } a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in E, \\ 0, & (i, j) \notin E, \end{cases}$$

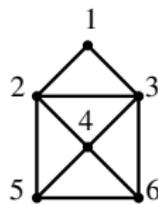
и матрицу Татта:

$$T_G = (t_{ij})_{i,j \in V}, \text{ где } t_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & (i, j) \in E, \quad i < j \\ -x_{ji}, & (i, j) \in E, \quad i > j \\ 0, & (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Здесь x_{ij} – символ переменной.

Пример

Рассмотрим следующий граф.



$$T_G = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 0 \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} & 0 & x_{36} \\ 0 & -x_{24} & -x_{34} & 0 & x_{45} & x_{46} \\ 0 & -x_{25} & 0 & -x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & -x_{36} & -x_{46} & -x_{56} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6

Пусть G – неор.граф с четным числом вершин, T_G – матрица Татта для G . Граф G содержит совершенное паросочетание $\Leftrightarrow \det(T_G) \neq 0$.

Док.-во. Вспомним про детерминант.

$$\det(T) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) \prod_{i=1}^n t_{i\pi_i} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) T_\pi, \text{ где } T_\pi = \prod_{i=1}^n t_{i\pi_i}$$

Пусть $\pi \in S_n$ – такая перестановка, что $T_\pi \neq 0$. Тогда ребра $1 \rightarrow \pi_1, 2 \rightarrow \pi_2, \dots, n \rightarrow \pi_n$ присутствуют в графе, покрывают все его вершины и образуют набор циклов (возможно, длины 2: $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$).

Заметим также, что перестановка π задает *ориентацию* циклов. Например, $(1, 2, 3)$ дает обход $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Если захотим обойти цикл в другом направлении, $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$, получим перест. $(1, 3, 2) \neq (1, 2, 3)$.

Вспомним теперь, что T кососимметрична и предположим, что π содержит нечетный цикл C . Рассмотрим перест. $\pi' \in S_n$, отличающуюся от π только ориентацией C .

Заметим:

- $T_\pi \neq 0 \Leftrightarrow T_{\pi'} \neq 0$ – действ., если $t_{i\pi_i} \neq 0$, то и $t_{\pi_i i} \neq 0$;
- $T_\pi = -T_{\pi'}$ – действ., $t_{i\pi_i} = -t_{\pi_i i}$, а так как изменения касаются нечетного числа ребер, то меняется знак у произведения;
- $\text{sign}(\pi) = \text{sign}(\pi')$ – действительно, у обеих перестановок одинаковая циклическая структура.

Следовательно, если рассмотреть $O_n \subset S_n$ – перестановки, содержащие нечетные циклы, то

$$\sum_{\pi \in O_n} \text{sign}(\pi) T_\pi \equiv 0.$$

Таким образом, перестановки с нечетными циклами в $\det(T_G)$ ничего не вносят. Что если все циклы четные?

$\exists \pi \in S_n \setminus O_n$ такая, что $T_\pi \not\equiv 0 \Rightarrow$ в G есть соверш.пар.

Действительно, π соотв. остаточный подграф, состоящий из несмежных ребер (циклы длины 2) и четных циклов. Берем несмежные ребра + ребра из циклов (через одно). Получаем совершенное паросочетание.

$\text{Если в } G \text{ есть соверш.пар.} \Rightarrow \exists \pi \in S_n \setminus O_n \text{ такая, что } T_\pi \not\equiv 0.$

Совершенное паросочетание M – набор циклов длины 2. По нему можно построить перестановку: если $(i, j) \in M$, то $\pi_i = j$ и $\pi_j = i$. Так как все ребра из M есть в графе, то $T_\pi \not\equiv 0$.

Наконец, докажем утверждение теоремы.

$\det(T_G) \not\equiv 0 \Rightarrow$ в G есть совершенное паросочетание.

Если дет. не 0, значит нашлась перестановка $\pi \in S_n \setminus O_n$ такая, что $T_\pi \neq 0$. А это означает, что есть сов. пар.

В G есть совершенное паросочетание $\Rightarrow \det(T_G) \not\equiv 0$.

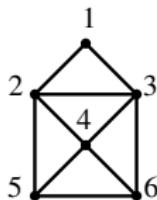
По паросочетанию $M = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{n/2}, j_{n/2})\}$ строим перестановку π (как только что). Заметим, что

$$T_\pi = (-1)^{n/2} \prod_{l: i_l < j_l} x_{i_l j_l}^2 \prod_{l: i_l > j_l} x_{j_l i_l}^2.$$

Ни одно другое слагаемое в детерминанте не содержит такого набора переменных \Rightarrow это слагаемое не может уничтожиться. Следовательно, $\det(T_G) \not\equiv 0$. ■

Пример

Для предыдущего графа



$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 0 \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} & 0 & x_{36} \\ 0 & -x_{24} & -x_{34} & 0 & x_{45} & x_{46} \\ 0 & -x_{25} & 0 & -x_{45} & 0 & x_{56} \\ 0 & 0 & -x_{36} & -x_{46} & -x_{56} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$(x_{12}x_{34}x_{56} + x_{12}x_{36}x_{45} - x_{13}x_{24}x_{56} + x_{13}x_{25}x_{46})^2 = \\ x_{12}^2x_{34}^2x_{56}^2 + x_{12}^2x_{36}^2x_{45}^2 + x_{13}^2x_{24}^2x_{56}^2 + x_{13}^2x_{25}^2x_{46}^2 + \dots \neq 0.$$

Замечание 3

Ранг T_G равен удвоенной мощности наибольшего паросочетания в G .

Док.-во. Действительно, ранг матрицы равен размеру макс ненулевого главного минора. Главные миноры T_G соотв. матрицам Татта для подграфов, полученных из G удалением вершин. Т.о., если какой-то из гл. миноров $\neq 0 \Rightarrow$ в соотв. подграфе есть совершенное паросочетание (которое будет паросочетанием в исходном графе) $\Rightarrow \text{rank}(T_G) \leqslant 2|M|_{\max}$.

С другой стороны, если в G есть бОльшее паросочетание (на вершинах v_1, \dots, v_k), то (под)матрица Татта для $G[v_1, \dots, v_k]$ должна быть невырожденной. Значит, $\text{rank}(T_G) \geqslant 2|M|_{\max}$. ■

Замечание 4

Если в G несколько совершенных паросочетаний, то в $\det(T_G)$ каждому из них соответствует слагаемое вида $x_{e_1}^2 x_{e_2}^2 \cdots x_{e_{n/2}}^2$.

То есть, вычислив \det , можно посчитать и перечислить все совершенные паросочетания. Но в выражении много других слагаемых, удобнее использовать другие функции от матриц.

Заметим: если G – полный граф с четным числом вершин, то совершенные паросочетания – это всевозможные наборы ребер $M = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{n/2}, j_{n/2})\}$ такие, что:

- (для определенности) $i_l < j_l$ для всех l ,
- (для определенности) $i_1 < i_2 < \dots < i_{n/2}$,
- каждая $v \in V$ принадлежит в точности одному ребру.

Если граф неполный – нас интересуют только те наборы ребер, которые представлены в графе.

Обозначим: $\Pi_n \subset S_n$ – множество перестановок

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_{n/2} & j_{n/2} \end{pmatrix}$$

таких, что $i_l < j_l$ для всех $l = \overline{1, n/2}$ и $i_1 < i_2 < \dots < i_{n/2}$.

Пусть A_G – матрица смежности G , $\pi \in \Pi_n$. Произведение

$$A_\pi = a_{\pi_1 \pi_2} a_{\pi_3 \pi_4} \cdots \cdots a_{\pi_{n-1} \pi_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots \cdots a_{i_{n/2} j_{n/2}} = 1$$

в том и только том случае, когда набор ребер

$$M = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{n/2}, j_{n/2})\}$$

содержится в G и образует совершенное паросочетание.

Аналогично, если X_G – матрица Эдмондса или Татта для G (с символами переменных $\pm x_{ij}$, $i < j$, для всех $(i, j) \in E$), то ненулевые мономы X_π соответствуют соверш. пар. в G .

Значит, нас интересуют функции, строящиеся по матрице смежности и включающие соответствующие произведения...

Определение 1

Пусть A – кососимметрическая матрица четной размерности.
Пфаффианом (Pfaffian) A называется функция:

$$\text{Pf}(A) = \sum_{\pi \in \Pi_n} \text{sign}(\pi) \prod_{l=1}^{n/2} a_{\pi_{2l-1}\pi_{2l}}.$$

Определение 2

Пусть A – симметрическая матрица четной размерности.
Гафнианом (Hafnian) A называется функция:

$$\text{Hf}(A) = \sum_{\pi \in \Pi_n} \prod_{l=1}^{n/2} a_{\pi_{2l-1}\pi_{2l}}.$$

Заметим: как и в случае с детерминантом/перманентом, пфаффиан и гафниан можно записать рекуррентно:

$$Pf(A) = \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} Pf(A_{\hat{1}\hat{j}}),$$

$$Hf(A) = \sum_{j=2}^n a_{1j} Hf(A_{\hat{1}\hat{j}}),$$

где матрица $A_{\hat{1}\hat{j}}$ получается из A вычеркиванием строк 1, j и столбцов 1, j. Пфаффиан и гафниан от матриц размера 0 считаются равными 1.

Действительно: вычислим Hf (с Pf аналогично, но нужно следить за знаком). Рассмотрим $\pi = (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_{n/2}, j_{n/2}) \in \Pi_n$. Несложно видеть:

1. с учетом требований к i_l и j_l , $i_1 = 1$;
2. набор $(i_2, j_2, \dots, i_{n/2}, j_{n/2})$ также удовл. требованиям к i_l и j_l с той лишь оговоркой, что в нем не встречается 1 и j_1 . То есть, ему можно сопоставить $\pi' \in \Pi_{n-2}$, применив перенумерацию (после исключения 1 и j_1 смещаем все индексы в $\{1, \dots, n-2\}$):

$$\pi' = (i'_1, j'_1, \dots, i'_{(n-2)/2}, j'_{(n-2)/2}), i'_l | j'_l = \begin{cases} i_l - 1 | j_l - 1, & i_l | j_l < j_1; \\ i_l - 2 | j_l - 2, & i_l | j_l > j_1; \end{cases}$$

3. верно и обратное, если зафикс. $j \in \overline{2, n}$ и выбрать $\pi' \in \Pi_{n-2}$, то можно построить $\pi \in \Pi_n$, положив $i_1 = 1$, $j_1 = j$, а для $l \geq 1$

$$i'_l | j'_l = \begin{cases} i'_l + 1 | j'_l + 1, & i'_l | j'_l < j - 1; \\ i'_l + 2 | j'_l + 2, & i'_l | j'_l \geq j - 1. \end{cases}$$

Обозначим через $f_j(\pi')$ набор $(i_2, j_2, \dots, i_{n/2}, j_{n/2})$, полученный таким способом по π' и номеру j .

Зафиксируем $j \in \overline{2, n}$ и рассмотрим все $\pi \in \Pi_n$ такие, что $\pi = (1, j, i_2, j_2, \dots, i_{n/2}, j_{n/2})$. Обозначим множество таких перест. через $\Pi_n^{1,j}$. Ввиду отмеченного выше, $\pi \in \Pi_n^{1,j}$ можно представить как $(1, j, f_j(\pi'))$ для некоторой $\pi' \in \Pi_{n-2}$. Тогда

$$\begin{aligned} Hf(A) &= \sum_{\pi \in \Pi_n} \prod_{l=1}^{n/2} a_{\pi_{2l-1} \pi_{2l}} = \sum_{j=2}^n \sum_{\pi \in \Pi_n^{1,j}} \prod_{l=1}^{n/2} a_{\pi_{2l-1} \pi_{2l}} \\ &= \sum_{j=2}^n a_{1,j} \sum_{\pi' \in \Pi_{n-2}} \prod_{l=1}^{(n-2)/2} a_{f_j(\pi')_{2l-1} f_j(\pi')_{2l}}. \end{aligned}$$

Запись $a_{f_j(\pi')_{2l-1} f_j(\pi')_{2l}}$ означает, что в произведениях не встреч. индексы 1 и j. Это то же самое, что рассматривать матрицу размера $n - 2$, в которой удалены строки и столбцы с номерами 1 и j: $A_{\hat{j}\hat{j}}$!

$$Hf(A) = \sum_{j=2}^n a_{1,j} \sum_{\pi' \in \Pi_{n-2}} \prod_{l=1}^{(n-2)/2} \hat{a}_{\pi'_{2l-1} \pi'_{2l}} = \sum_{j=2}^n a_{1,j} Hf(A_{\hat{j}\hat{j}}).$$

Теорема 7 (Cayley, 1847)

Пусть A – кососимметрическая матрица четной размерности.

Тогда

$$\det(A) = \text{Pf}^2(A).$$

В частности, для матрицы Татта T_G : $\det(T_G) = \text{Pf}^2(T_G)$.

Теорема 8

Пусть A_G – матрица смежности неорграфа G , а \mathcal{M} – множество совершенных паросочетаний в G . Тогда

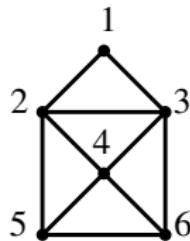
$$|\mathcal{M}| = \text{Hf}(A_G).$$

Док.-во. Очевидно в силу предыдущих рассуждений. ■

Заметим: $\text{Pf}(T_G)$ и $\text{Hf}(\tilde{A}_G)$, где \tilde{A}_G – матрица Эдмондса для простого графа, содержат набор мономов, соответствующий совершенным паросочетаниям в G .

Пример

Для предыдущего графа

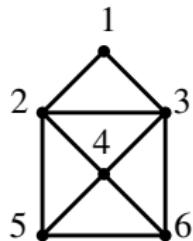


$$Hf(A_G) = 4, Hf(\tilde{A}_G) = Hf \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} & 0 & a_{36} \\ 0 & a_{24} & a_{34} & 0 & a_{45} & a_{46} \\ 0 & a_{25} & 0 & a_{45} & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & a_{36} & a_{46} & a_{56} & 0 \end{pmatrix} =$$

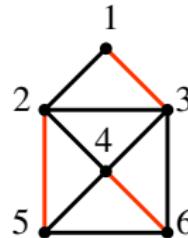
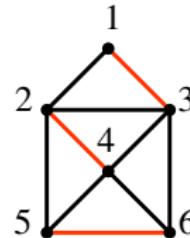
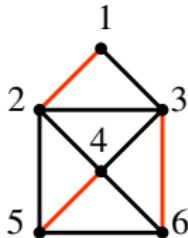
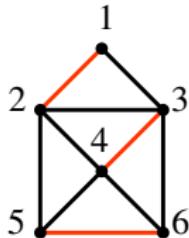
$$a_{12}a_{34}a_{56} + a_{12}a_{36}a_{45} + a_{13}a_{24}a_{56} + a_{13}a_{25}a_{46}.$$

Пример

Для предыдущего графа



$$Hf(\tilde{A}_G) = a_{12}a_{34}a_{56} + a_{12}a_{36}a_{45} + a_{13}a_{24}a_{56} + a_{13}a_{25}a_{46}.$$



Библиография

Книги:

- L. Lovász, M.D. Plummer – Matching Theory. Budapest, Akadémiai Kiadó (1986).
- K. Thulasiraman, M.N.S. Swamy – Graphs: Theory and Algorithms. Wiley-Interscience (1992)
- A.S. Asratian – Bipartite graphs and their applications. Cambridge University Press (1998)
- J.A. Bondy, U.S.R. Murty – Graph Theory. (Graduate Texts in Mathematics, 244). Springer, New York (2008).
- Jean-Claude Fournier, Graph Theory and Applications: With Exercises and Problems. Wiley (2010)
- N. Loehr – Bijective Combinatorics. (Discrete mathematics and its applications). CRC Press, (2011).

Библиография

Статьи:

- J.E. Hopcroft, R.M. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs // SIAM Journal on Computing, 2 (4): 225–231 (1973)
- J. Edmonds. Paths, trees, and flowers // Canad. J. Math. 17: 449–467 (1965)
- P.M. Gibson. Combinatorial Matrix Functions and 1-Factors of Graphs // SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 19, No. 2 (Sep., 1970), pp. 330-333