П5 Частные производные высших порядков

Пусть для ф-ции $z=f(x,y)$ для её частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ снова $\exists$ частн. произв., тогда они наз. частными произв. второго порядка (или просто вторыми произв.) ф-ции $z=f(x,y)$ и обознач.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cancel{\frac{\partial^2 z}{}}=f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)$$

Т (Шварца) Пусть $z=f(x,y)$ имеет в окрестности т. A смешанные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, явл. непр. в т. A.

Теорема

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\Big|_a$$

Пример 1. Пусть $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\, x^{y-1}$$

Дифференциалы высших порядков

Пусть $f(x,y)$ — дифф. по лес. [illegible]

$$d f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Таким образом дифф-ал $f(x,y)$ — ф-я перем-х x, y, dx, dy. В дальнейшем мы будем предполагать, что dx, dy перем-х x, y имеют произвольное, но фиксированное значение независящее от x, y.

Опр

Дифф-циалом второго порядка или (вторым дифф-лом) $d^2 f(x,y)$ ф-ции $f(x,y)$ наз-ся дифф-ал от дифф-ала этой ф-ции т.е. $d^2 f(x,y) = d[df(x,y)]$ (2)

Аналогично, дифф-лом третьего порядка (или третьим дифф-лом) наз-ся дифф-ал от второго порядка, т.е. $d^3 f(x,y) = d(d^2 f(x,y))$

Пусть ф-я $f(x,y)$ имеет непр. частн. произв. второго порядка.

$$d^2 f(x,y) = d(f'_x(x,y)\,dx) + d(f'_y(x,y)\,dy)$$

$$d(f'_x(x,y)\,dx) = dx \cdot d(f'_x(x,y)) = dx \cdot \left(\frac{\partial f'_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f'_x}{\partial y}dy\right) =$$

$$= dx\,(f''_{xx}(x,y)\,dx + f''_{xy}(x,y)\,dy)$$

Аналогично $d(f'_y(x,y)\,dy) = dy\,(f''_{yx}(x,y)\,dx + f''_{yy}(x,y)\,dy)$

Итог: $d^2 f(x,y) = f''_{xx}(x,y)\,dx^2 + f''_{xy}(x,y)\,dx\,dy + f''_{yx}(x,y)\,dy\,dx + f''_{yy}(x,y)\,dy^2$

Т. Дифф-ал второго порядка данной ф-ии равен сумме произведений частных произв. II порядка на произведения дифф-лов соответствующ. ~~перемен.~~ незав. переменной

Дифф-ал высш. порядков ф-ий от трёх и более перемен. аналогично.

П7 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$

$|x - y| \overset{\text{опр}}{=} \operatorname{dist}(x, y)$

ОПР| Ф-я $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наз. мономом степени r, если $\exists A \in \mathbb{R}$ и набор $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$:

$\forall k$: ~~k_j~~ $1 \le i_k \le n$ и такие, что

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = A x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$

Ф-я $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наз-ся полиномом степени не выше r, если она может быть представлена в виде суммы мономов степени $\le r$ ~~степени полинома~~ P, ~~сте~~ ~~наз.~~

Степенью полинома P наз-ся высшая степень мономов, входящих в это разложение

ОПР| Пусть X – откр мн-во в $\mathbb{R}^n$, $f: X \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что f принадлежит классу $C^r(X)$, если f имеет в X конт. производные порядка r)

причём каждая из этих произв.-х непр в X.

Т. Пусть X — открытое мн-во в $\mathbb{R}^n$, $f \in C^r(X)$, $r \geq 2$, $a \in X$. Тогда $\exists$ полином $P_{\leq r}$ от одной переменной: $f(x) - P(x) = o(|x-a|^r)$ при $x \to a$. Такой полином единственный и $P(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} d^k f(a) \Big|_{dx = x-a}$

<u>ОПР</u> Указанный в теореме полином наз. полиномом Тейлора ф-ции f степени $\leq r$.

<u>Сл 1)</u> Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — открыто, $f \in C^r(X)$. Пусть a — такая т. из X, что все частн. произв. ф-ции f в т. a равны 0. Тогда $f(x) = o(|x-a|^2)$ при $x \to a$

Д-во По опр дифф-ла $df(a)\Big|_{dx=x-a} = 0$

по опред. нужно ~~второй дифф-ал~~

$$d^2 f(a)\Big|_{dx = x-a} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a)(x_i - a_i)(x_k - a_k) = 0$$

и т.д.

$dx = (dx_1, \dots, dx_n) \to 0$

$d^r f(a)\Big|_{dx = x-a} = 0 \Rightarrow$ — полином Тейлор ф-ии f нулевой

Сл. 2 Пусть P_1 - многочлен от n перем-х от $\leq r$: $P_1(x) = o(\|x-a\|^r)$ при $x \to a$

Тогда $P_1 = 0$

Д-во Пусть, напротив, $P_1 \neq 0$. Для $f = 0$ многочлен Тейлора ~~на~~ $P = 0$.

Противоречие

Пусть $f \in C^r(A)$, $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ - набор длины r целых чисел: $1 \leq i_k \leq n$ $\forall k$

Частн. произв. $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} \dots \partial x_{i_1}}(x)$ порядка r будем обозначать $D_{i_r}, \dots, D_{i_1}(f)(x) = D_I f$,

Пусть $\tilde{I}$ перестановка набора I. Говорят, что $\tilde{I}$ возрастающая перестановка I, если $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_r$

ОПР | n-мерный мультииндекс - это вектор в $\mathbb{R}^n$, координаты которого неотр. целые числа. (сокращ. м/и)

ОПР | Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - ~~м/и~~, м/и, $|\alpha| \overset{\text{опр}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Пусть $I=(i_1,\dots,i_r)$. Построим $\alpha(I)$ – м/и, называемый мультииндексом:

α_1 – число членов в наборе I равных 1

α_2 – // – // – 2

α_n – // – // – n

Построим $\alpha(I)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$

Замечание: набор J длины r перестановка $I \Leftrightarrow \alpha(I)=\alpha(J)$

Пусть $f\in C^r(X)$, $I(i_1,i_2,\dots,i_r)$,

$\alpha=\alpha(I)$, J – возр. перест. I

Тогда $D_I f = D_J f = \underbrace{D_n\dots D_n}_{\alpha_n}\underbrace{D_1\dots D_1}_{\alpha_1} f =$

$= D_n^{\alpha_n}\dots D_1^{\alpha_1} f = D^\alpha f$

ОПР $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – м/и $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

Обозн. $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$

$\alpha! \overset{\text{опр}}{=} \alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_n!$

Лемма Пусть $a\in\mathbb{R}^n$. Тогда $D^\beta(x-a)^\alpha\big|_{x=a} =$

$= \begin{cases}0, & \beta\ne\alpha\\ \alpha!, & \beta=\alpha\end{cases}$