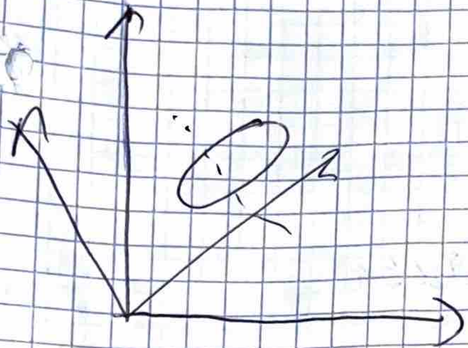


Можно считать ур-е линии S имеет вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0$$

I) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

М.с. $b_1 = 0 \quad b_2 = 0$

а) 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – точка

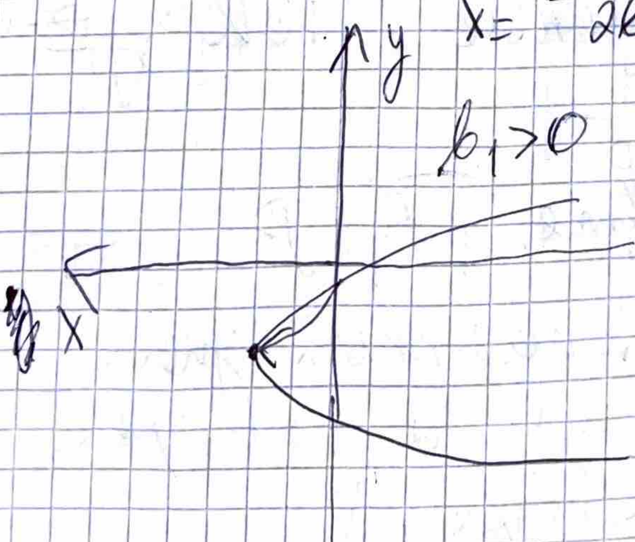
б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола

в) 5) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ – пара пересек. прямых

II а) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$

а) $b_1 \neq 0 \quad y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + c = 0$

$$x = -\frac{1}{2b_1} y^2 - \frac{b_2}{b_1} y - c$$



5) $y^2 = 2px$ – парабола

6) $b_1 = 0$, н.с. $b_2 = 0$

7) $y^2 = d^2, d \neq 0$ – пара || прямых

8) $y^2 = -d^2, d \neq 0$ – пара мнимых прямых

9) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых

Вывод: С помощью поворота и сдвига люб. линию II порядка можно привести к виду 1)–9)

§2 Криволинейные системы координат в пр-ве

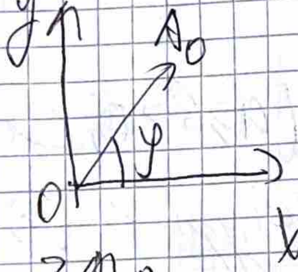
Пусть $Oxyz$ – ПСК в пр-ве. Обозн. через π пл-ть Oxy

<u>ОПР</u> Сферическими координатами произвольной точки A, согласованные с ПСК xyz наз-ся:

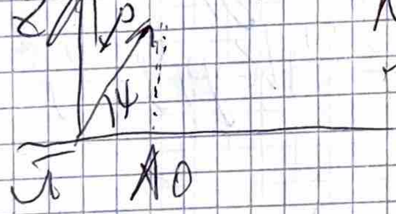
1) её полярный радиус ρ, т.е. $|\overline{OA}| = \rho$

2) её долгота φ, т.е. полярный угол ортогон. проекции т. A на π в полярной СК, согласованной с П(Ox, y);

3) её широта ψ, т.е. угол м/у $\overline{OA}$ и его проекцией на Π, считаем положительным, $0 < \psi \le \frac{\pi}{2}$, если $\overline{OA}$ напр. в пол. полупр-во, и отриц., $-\frac{\pi}{2} \le \psi < 0$, если $\overline{OA}$ напр. в отр. полупр-во



Замечание: ~~$\rho > 0$~~ $r \ge 0$, $-\pi < \varphi \le \pi$



Координаты: x, y, z выр-ся через r, φ, ψ по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \quad (*) \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

ОПР Цилиндрические координаты т. A - тройка ρ, φ, z, где φ и z имеют прежний смысл, а ρ - полярный радиус проекции A_0 т. A на пл-ть Π. (коорд x, y, z ДК связаны формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \quad (**) \\ z = z \end{cases}$$

§3 Поверхности II-го порядка

п.1 Эллипсоид и двуполостный гиперболоид.

ОПР Эллипсоидом (Э.) Двуполостным гиперболоидом наз пов-ть, выраж.-ся в некот. ПСК Oxyz ур-ем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a \geq b \geq c > 0 \; (a \geq b > 0, c > 0)$$

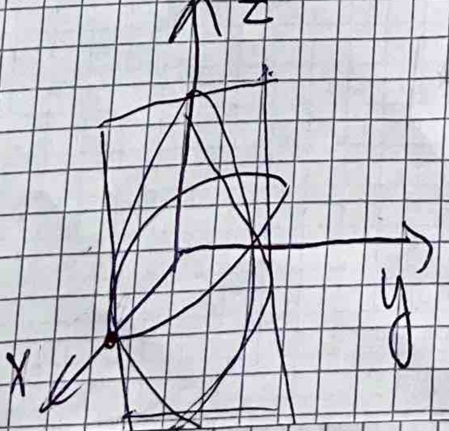
Эта ПСК наз. канонической ур-ия Э. (1) (ДГ (1'))

Пусть $a=b$, перейдём к ЦК ρ, φ, z, связ с x, y, z.

Тогда (1) примет вид $\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Предл. 1 Э, ДГ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$ (2)

получается из эллипса $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1$, (гиперболы) расп-ого в пл-ти Oxz вращения вокруг оси Oz в Oxz, вращения вокруг оси Oz

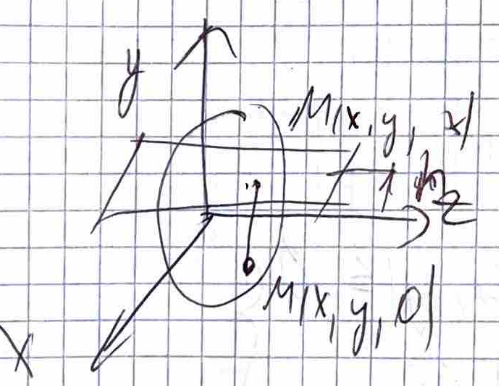


ОПР Растяжение преобр-е пр-ва, переводящее произв. т. $M(x,y,z)$ в т. $M'(x',y',z')$ с коорд. $x'=x$, $y'=ky$, $z'=z$, ~~где $k>0$~~.

([illegible]

где $k>0$. Это пр-е наз. сжатием к пл-ти Oxz

Предл 2 Произв Э. (1) получается Э вращения (2) сжатием к Oxz с коэфф $\frac{b}{a}$. Метод плоских сечений



$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=1-\frac{h^2}{}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

Сечение с ~~эл~~ Э в пл-ти $z=h$;

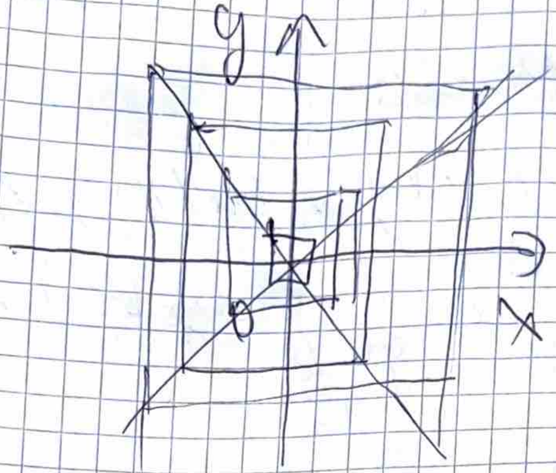
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$, т.е. $|h|>c$ $\varnothing$

при $|h|=c$ $(0,0,c)$ или $(0,0,-c)$

при $|h|<c$ – эллипс с полуосями

$a\sqrt{\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}$ и $b\sqrt{\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}$

при $h\to c$ убывают



Сечение пл $y=h$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$, т.е.

при $|h|>b$ $\quad \varnothing$

при $|h|=b$ $\quad (0,b,0)$ или $(0,-b,0)$

при $|h|<b$ - эллипс с полуосями

$a\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$ $\quad c\sqrt{1-\frac{h^2}{b^2}}$

при $|h|\to b$

Предл 3 $\quad$ а) Э(1) с $\left.\begin{matrix} |x|\le a, |y|\le b \\ |z|\le c \end{matrix}\right\}$

б) коорд. пл-ти - пл. симм

в) Э. не содержит прямых

Любая пл-ть $y=h$ пересекает $Г(1)$ по гиперболе, с полуосями $c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$,

$a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$

при $|h| \to \infty$

Предл. 3 (б) а) $\partial\Gamma$ (1') состоит из двух частей в $z \geq b$ и $b z \leq c$

б) коорд. пл-ти - пл. симм $\partial\Gamma$ (1')

в) $\partial\Gamma$ не содержит прямых

П2 Однополостный гиперболоид (ОГ) наз. пов-ть, имеющую в некот ПСК ур-е вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ где } a \geq b > 0, \ c > 0 \ (1)$$

Эта ПСК наз кан., а ур-е (1) наз-ся кан. ур-ем. ОГ При $a = b$ ОГ в ЦК ρ, φ, z, имеет вид

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Предл. 1 а) ОГ $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$ (2) получ из гипербол $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, леж в Oxy вращения вокруг оси Oz (явл-я мнимой осью)