Гл 2 Кривые и поверхности второго порядка

§1 Кривые II-го порядка

П1 Определение эллипса и гиперболы

ОПР Вершиной линии, имеющей ось симметрии наз. точка её пересечения с этой осью.

Т. Для линии S на плоскости след. усл-я равносильны:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (1) (1)'

1) S - линия, выражающаяся в ПСК уравнением где $a > b > 0$ (где $a > 0, b > 0$) 1.

2) Найдутся две точки F_1 и F_2 и $d > 0$:

$S = \{ M \mid |F_1 M| + |F_2 M| = d \}$

$S = \{ M \mid \big| |F_1 M| - |F_2 M| \big| = d \}$

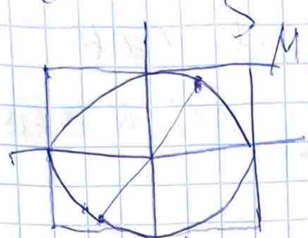
ОПР Линия наз-ся эллипсом (гиперболой), если выполнено любое усл-е из Т

СК, в которой эллипс (гипербола) имеет ур-е (1) (1)' наз-ся канонической

ЛЕММА 1 Точка $O(0,0)$ — единственный центр симметрии, а коорд. оси — единственные оси сим-ии эл-са (1) (гиперболы (1'))

Д-во

УПР 1. Д-ть композиция двух центральных симметрий — парал. перенос пл-ти



$M(x,y)$

$M(-x,-y)$

O' $\cdot O$ $\cdot O''$ — ц. с. $\cdot O'''$

$\overrightarrow{OO'''}$

Ясно, что эллипс (гипербола) не может иметь более одного центра симметрии

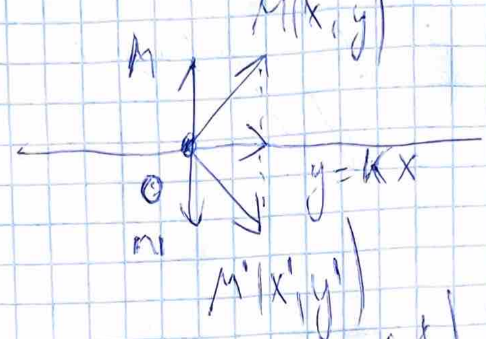
Оси Ox и Oy — оси симметрии э(1)

и $O(0,0)$ — единств. ц. с

Очевидно, любая ось симметрии фигуры с единств. центром сим. проходит через этот ц. с.

Пусть, напротив, $y = kx$, $k \neq 0$, (∂) — ось сим-ии э (1). Положим, что сим-я относительно прямой (∂) переводит т. $M(x,y)$ в т. $M'(x',y')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & -(1-k^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$



Отобр. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ явл. л.о. на $\mathbb{R}^2$

Достаточно проверить, что напр. вектор прямой (2) неподвижен отн-но л.о., а нормаль к (2) меняет направление

$$\frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & -(1-k^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1-k^2+2k^2 \\ 2k-(1-k)^2 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1-k^2+2k^2 \\ 2k-(1-k^2)k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & -(1-k^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = $$

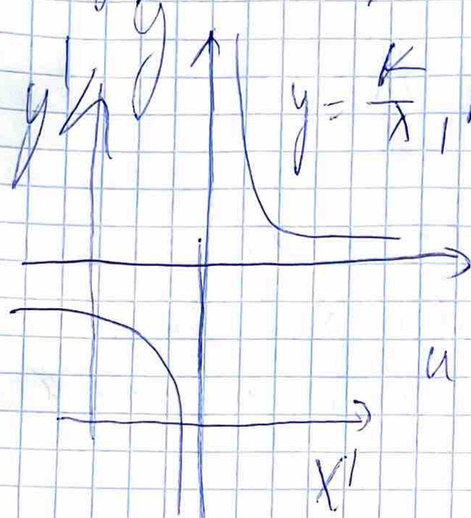
$$= \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} -(1-k^2)k + 2k^2 \\ -2k^2-(1-k^2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$$

В частности $A(a, 0)$ при отр-ии относительно (2) переходит в т. $A'(a', b')$, где $a' = \frac{1-k^2}{1+k^2}$, $b' = \frac{2k}{1+k^2}a \Rightarrow O = \frac{(a')^2}{a^2} + \frac{(b')^2}{b^2}$

$$= \left(\frac{2k}{1+k^2}\right)\frac{a^2}{b^2} + \left(1 - \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 a\right) =$$

$$= \left(\frac{2k}{1+k^2}\right)\left(\frac{a}{b^2} - 1\right) \Rightarrow a = b \quad \text{↯} \quad \rightarrow \text{противоречие}$$

Случай гиперболы



$y = \frac{k}{x}, k>0$

УПР 2 (лемма позже)

Д-ть, что у гип. (1') ровно две асимптоты и они перес. в $O(0,0)$

Д-во Т $\Rightarrow$ Пусть S – эллипс (1). Пусть $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Пусть $M(x, y)$ – произв. т. на S, т. е.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Тогда

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{e^2x^2 + 2aex + a^2} = |a + ex|$$

Из $|ex| = e|x| < ea < a$ следует

$|F_2M| = a - ex$ (4)

Аналог. $|F_1M_1| = a - ex$ (5)

(4) (5) $\Rightarrow |F_1M| + |F_2M| = 2a$ - довт.

$\Leftarrow$ Пусть $a = \frac{d}{2}$. Поместим начало координат в ср $[F_1, F_2]$

Пусть e_1 - ед. в-р сонапр. $\overrightarrow{F_2F_1}$, e_2 - ед. в-р $\perp e_1$ и (e_1, e_2) - правая

Коорд. в ПСК $O e_1 e_2$: ~~$F_1(c, 0)$~~

$F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Обозн. $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Пусть $M(x, y)$: $|F_1M| + |F_2M| = 2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2}$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(xc - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

$$|F_2M| = \begin{cases} a+ex & x>0 \\ -(a-ex) & x<0 \end{cases}$$

$$|F_1M| = |a-ex| = \begin{cases} -a+ex & x>0 \\ a-ex & x<0 \end{cases}$$

$$\big|\,|F_1M| - |F_2M|\,\big| = 2a$$

Аналогично док-ся $2) \Rightarrow 1)$

ОПР Центр симм. O наз-ся центром эллипса (гип.). Ось симм. э-са, на которой э-с высекает больший отрезок (меньший) наз. большой осью эллипса (~~меньшей~~) (малой осью)
Ось сим. гип., на которой вершины, наз. вещественной осью, а другая мнимая

точки F_1, F_2 всегда расположены на большой оси (вещественной) и поэтому определены однозначно. они называются фокусами эллипса. $a = |AO|$ - большая полуось (вещественная)

Точки в от O до вершина на малой оси наз малой полуосью

$|F_1 O| = c$ - наз линейным эксцентриситетом (эл.)

число $e = \frac{c}{a}$ - наз. числовым эксцентриситетом (эл.)

число $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ наз малой полуосью эл.

~~Ол эл~~