Лекция 3
Геометрические приложения определенного интеграла

С помощью геометрических приложений вычисляются: площадь плоской фигуры, площадь криволинейного сектора, объем тела вращения, длина дуги кривой, площадь поверхности вращения.

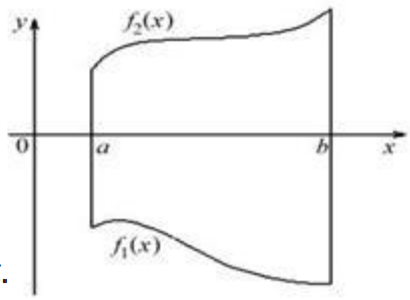
1. Вычисление площади плоской фигуры

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке [a; b] . Тогда площадь фигуры, ограниченной осью Ох, отрезками прямых x=a, x=b и графиком функции , может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

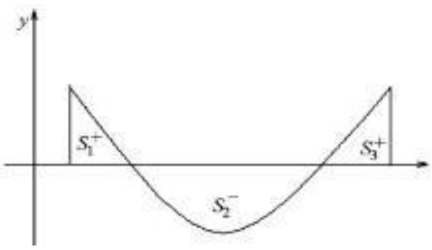
2. Если на отрезке $[a,b], f_1(x), f_2(x)$ - непрерывные функции $f_2(x) > f_1(x)$, то площадь фигуры, ограниченной прямыми x=a, x=b, графиками функций , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

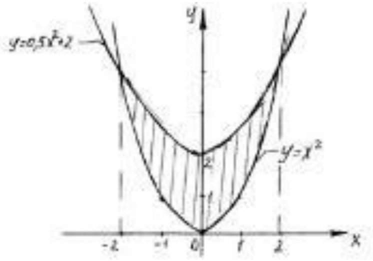


3. Если функция $f(x)$ на отрезке [a; b] принимает значения разных знаков, то площадь фигуры, заключенная между кривой и осью ОХ, равна

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$



Пример 1: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 0{,}5x^2 + 2$



Решение: $y = 0{,}5x^2 + 2$ - парабола, вершина которой имеет координаты $(0;2)$. Найдём пределы интегрирования.

$x^2 = 0{,}5x^2 + 2$

откуда $x = \pm 2$

$$S = 2\int_0^2 (0{,}5x^2 + 2 - x^2)dx = 2\int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 2\left(2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$

$$2\left(4 - \frac{6}{8}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

4. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha;\beta],$$

прямыми x = a и x = b и осью Ox, то площадь ее находится по формуле

$$S = \left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)\,dt\right|,$$

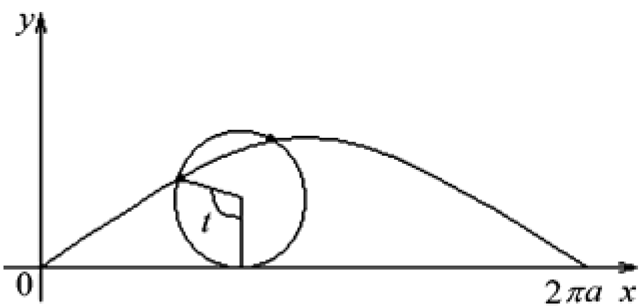
где α и β определяются из равенств x(α) = a и x(β) =b.

Пример 2: Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды

и осью .

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi\, M \end{cases}$$

Замечание. Циклоида - плоская кривая, которую описывает точка окружности радиуса t, катящаяся без скольжения по прямой линии.

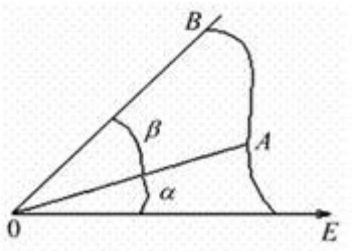


Решение. Искомая площадь

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$= a^2\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{\sin 2t}{4}\right) = a^2(2\pi+0+\pi) = 3\pi a^2; S$$
$$= 3\pi a^2.$$

5. Полярные координаты

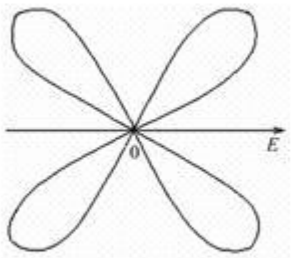
Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, причем - непрерывная и неотрицательная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция. Фигуру, ограниченную кривой AB и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы α и β , будем называть *криволинейным сектором*.



Площадь криволинейного сектора может быть вычислена по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,(\varphi)d\,\varphi.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 4\sin 2\varphi$ (4 - лепестковая роза).



Решение: Меняя непрерывно φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, можно построить первый лепесток.

Вычислим площадь одного лепестка по формуле:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\sin^2 2\varphi d\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = 4\left(4 - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

Следовательно, площадь всех лепестков равна: $S = 8\pi$.

2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y=f(x)$, где $a\leq x\leq b$.

Под длиной дуги AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю. Покажем, что если функция $y=f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке [a; b], то кривая AB имеет длину, равную

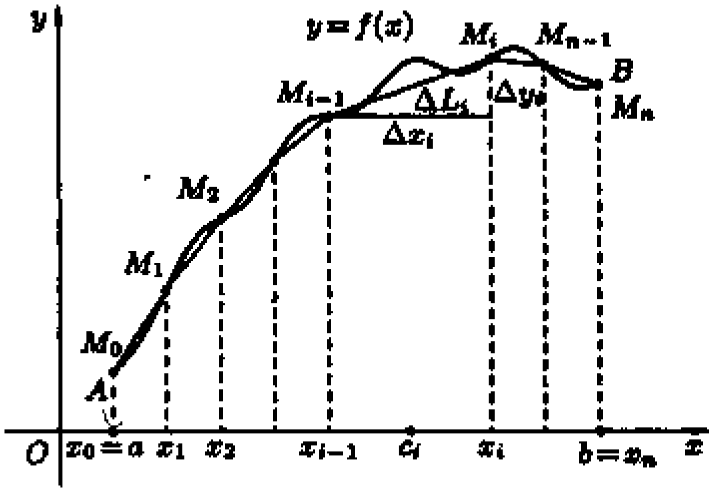


Рис. 183.

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.} \qquad (41.3)$$

1. Точками $x_0 = a$, $x_1 \ldots$, $x_n = b$ ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) разобьем отрезок [a; b] на n частей (см. рис. 183). Пусть этим точкам соответствуют точки $M_0 = A$, $M_1, \ldots, M_n = B$ на кривой AB. Проведем хорды M_0M_1, $M_1M_2, \ldots$, $M_{n-1}M_n$, длины которых обозначим соответственно через ΔL_1, $AL_2, \ldots$, ΔL_n. Получим ломаную $M_0M_1M_2 \ldots M_{n-l}M_n$, длина которой равна $L_n=\Delta L_1 + \Delta L_2+\ldots+ \Delta L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i.$

2. Длину хорды (или звена ломаной) ΔL_1 можно найти по теореме Пифагора из треугольника с катетами Δx_i и Δy_i:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}, \text{ где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции $\Delta y_i = f'(c_i) \cdot \Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Поэтому

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i) \cdot \Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i,$$

а длина всей ломаной $M_0M_1 \ldots M_n$ равна

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i. \qquad (41.4)$$

3.Длина l кривой AB, по определению, равна

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} L_n = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i.$$

Заметим, что при $\Delta L_i \to 0$ также и $\Delta x_i \to 0$ $\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$ и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$).

Функция $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ непрерывна на отрезке [a; b], так как, по условию, непрерывна функция $f'(x)$. Следовательно, существует предел интегральной суммы (41.4), когда $\max \Delta x_i \to 0$:

$$l = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Таким образом, $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$ или в сокращенной записи l = $= \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$

Т.о. имеем:

1. Если функция непрерывна вместе с её производной на отрезке , то длина дуги , где , выражается формулой:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями, где

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), x(t), y(t) \end{cases}$$

- дифференцируемые функции, то длина дуги:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt.$$

3. Если дуга задана в полярных координатах , , то длина дуги

$$\rho = \rho(\varphi) \alpha \le \varphi \le \beta\, L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

3. Вычисление объема тела

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ох: S = S(x), a ≤ x ≤ b.

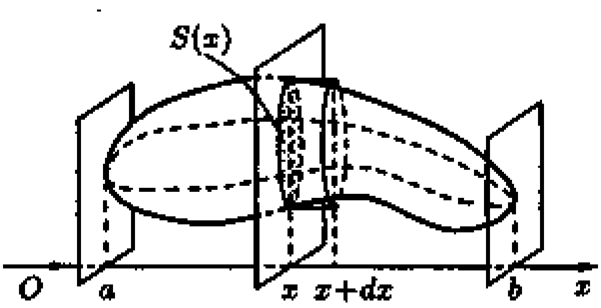


Рис. 188.

1. Через произвольную точку х є [a;b] проведем плоскость ∏, перпендикулярную оси Ох (см. рис. 188). Обозначим через S(x) площадь сечения тела этой плоскостью; S(x) считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении х. Через v(x) обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости П. Будем считать, что на отрезке [а; х] величина v есть функция от х, т. е. v = v(x) (v(a) = 0, v(b) = V).

2. Находим дифференциал dV функции v = v(x). Он представляет собой «элементарный слой» тела, заключенный между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ох в точках х и х+Δх, который приближенно может быть принят за цилиндр с основанием S(x) и высотой dх. Поэтому дифференциал объема dV = S(x) dx.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от а до В:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\, dx.} \qquad (41.6)$$

Полученная формула называется формулой объема тела по площади параллельных сечений.

Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ох вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией y = ƒ(x) 0, отрезком a ≤ x ≤ b и прямыми x = a и x = b (см. рис. 190). Полученная от вращения фигура называется телом вращения. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ох, проведенной через произвольную точку x оси Ох (x ∈ [a; b]), есть круг с радиусом y= ƒ(x). Следовательно, S(x)=πy[2.]

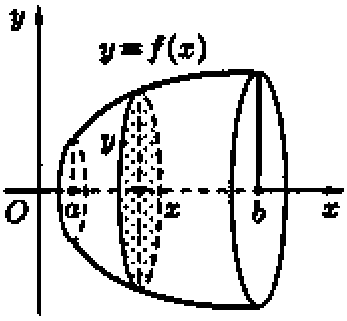


Рис. 190.

Применяя формулу (41.6) объема тела по площади параллельных сечений, получаем

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx.} \qquad (41.7)$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком не прерывной функции x=φ(y) ≥ 0 и прямыми x = 0, y = c,

y = d (c < d), то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Оу, по аналогии с формулой (41.7), равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy. \qquad (41.8)$$

4. Длина дуги кривой.

Если плоская кривая *L* задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \le t \le t_1,$$

причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то она имеет длину, вычисляемую по следующей формуле

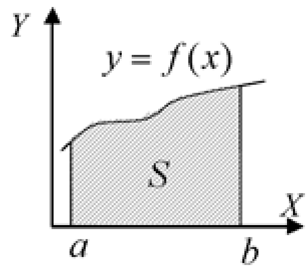
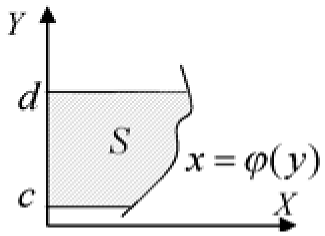
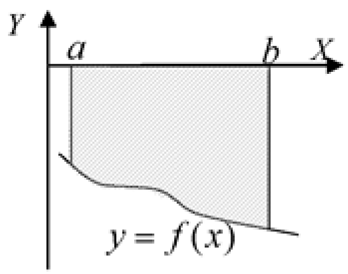
$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

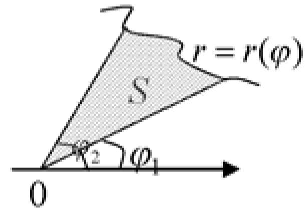
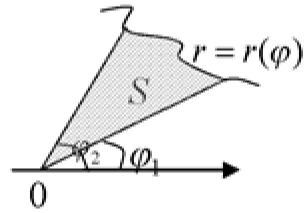
Если плоская кривая *L* – график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$ и $x_0 \le x \le x_1$, то длина этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

В полярных координатах

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\rho'(\varphi)\right]^2 + \left[\rho(\varphi)\right]^2}\, d\varphi$$

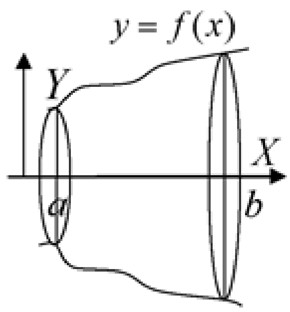
Площадь криволинейной трапеции	
1-й случай $\forall x \in [a;b]:\ f(x) \geq 0 \Rightarrow$ $S = \int_a^b f(x)dx$	
2-й случай $\forall y \in [c;d]:\ \varphi(y) \geq 0 \Rightarrow$ $S = \int_c^d \varphi(y)dy$	
3-й случай Кривая задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}\quad y(t) \geq 0; \quad t \in [\alpha;\beta]$	$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$
Площадь плоской области в декартовых координатах	
1-й случай $\forall x \in [a;b]:\ f(x) \leq 0 \Rightarrow$ $S = \int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$	

2-й случай $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$	
Площадь криволинейного сектора в полярных координатах	
$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$	

Длина дуги кривой

Способ задания кривой	Формула
$y=f(x)$	$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$
$r=r(\varphi)$	$l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$
$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha;\beta]$	$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

Объемы и площади тел вращения

Вращение криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *y* = *f(x)*, осью абсцисс и прямыми *x* = *a* и *x* = *b* вокруг оси OX: $V_{OX}=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$, оси OY: $V_{OY}=2\pi\int\limits_a^b x f(x)dx$. $S_{OX}=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$	

Вращение криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой *x* = *φ(y)*, осью ординат и прямыми *y* = *c* и *y* = *d* вокруг **оси** OY: $V_{OY} = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$