

Раздел 4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 4.1. Неопределенный интеграл

Первообразная и неопределенный интеграл, их свойства. Основная таблица неопределенных интегралов. Метод замены переменной, формула интегрирования по частям. Интегрирование некоторых классов функций.

Тема 4.2. Определенный интеграл

Определенный интеграл, его свойства. Классы интегрируемых функций. Критерий интегрируемости. Теорема о среднем значении непрерывной функции. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям. Несобственные интегралы.

Тема 4.3. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площади фигуры, объема тела вращения с помощью определенного интеграла.

Раздел 5. Ряды

Тема 5.1. Числовые ряды

Числовой ряд, его сходимость, сумма. Свойства сходящихся числовых рядов. Необходимое условие сходимости числового ряда. Абсолютная, условная сходимость. Достаточные условия сходимости положительных числовых рядов.

Тема 5.2. Степенные ряды

Функциональный ряд, область его сходимости, сумма. Степенной ряд. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение функции в степенной ряд.

Лекция 1

Неопределенный интеграл

1.1 Основные понятия.

Определение. Функция F называется первообразной для функции f на промежутке X , если в каждой точке x из промежутка X :

- 1) F является дифференцируемой (при этом если точка x - конец промежутка X , то в ней должна существовать соответствующая односторонняя производная);
- 2) $F'(x) = f(x)$.

Пример. Для функции $f(x) = x$ первообразной является, например, функция

$F(x) = \frac{x^2}{2}$. Очевидно, что функция $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ - также ее первообразная.

Следующее утверждение сразу следует из определения первообразной:

Лемма 1. Если $F(x)$ – некоторая первообразная для функции $f(x)$, то $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$.

Верно и обратное утверждение:

Лемма 2. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке X . Тогда они отличаются только на константу, то есть $F_1(x) - F_2(x) \equiv \text{const}$.

Доказательство. Найдем производную от разности этих первообразных: $(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Тогда, по теореме об условиях постоянства функции на промежутке, $F_1(x) - F_2(x) \equiv \text{const}$.

Следствие. Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке X , то $\{F(x) + C, \text{ где } C - \text{произвольная константа}\}$ – это множество всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке X .

Определение. Неопределённый интеграл функции f – это множество всех первообразных для неё. Он обозначается символом $\int f(x)dx$.

Из этого определения и предыдущего следствия видим, что $\int f(x)dx = \{ F(x) + C \}$, где C – произвольное действительное число, F – некоторая первообразная функции f . Обычно это записывают короче: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $C \in \mathbf{R}$.

1.2. Свойства неопределённого интеграла

- 1) $\int dF(x) = F(x) + C$.
- 2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
- 3) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ при $k \neq 0$.
- 4) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Доказательство.

$$1). \int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

$$2). d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

3). Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$. Из свойств производной следует, что $k \cdot F(x)$ является первообразной для функции $k \cdot f(x)$. Тогда

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot F(x) + C, \quad (1)$$

$$k \int f(x)dx = k(F(x) + C_1) = k \cdot F(x) + k \cdot C_1. \quad (2)$$

Так как C и C_1 – произвольные константы, то $k \cdot C_1$ – тоже произвольная константа. Поэтому правые, а, значит, и левые части в равенствах (1) и (2) равны.

4). Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$; $G(x)$ – первообразная для $g(x)$. Тогда $F(x) + G(x)$ – первообразная для $f(x) + g(x)$. Поэтому выполняются равенства

$$\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C_1 \quad (3)$$

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C_3 + C_2. \quad (4)$$

Так как C_1, C_2, C_3 – произвольные константы, то в равенствах (3) и (4) правые, а, значит, и левые части равны. ■

Первые два свойства неопределённого интеграла говорят о том, что дифференцирование и интегрирование – взаимно обратные операции. Третье и четвертое свойства означают, что операция интегрирования линейна. Свойства 1), 3) и 4) используются для вычисления интегралов.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

$$1) \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}).$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}).$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1).$$

$$11) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (-a < x < a, a > 0).$$

$$13) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (x \neq \pm a, a \neq 0).$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$.

Решение. В числителе дроби прибавим и вычтем 1, затем, поделив почленно, получим разность двух табличных интегралов:

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - \arctg x + C;$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение. Применим тригонометрическую формулу понижения степени:

$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$. Затем вынесем постоянный множитель $\frac{1}{2}$ за знак интеграла и получим сумму двух табличных интегралов:

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos x dx \right) = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C.$$

1.4. Замена переменной в неопределённом интеграле

Теорема. Пусть X, Y, Z – промежутки, и заданы функции $\varphi: X \rightarrow Y$, $f: Y \rightarrow Z$. При этих условиях определена композиция $f \circ \varphi: X \rightarrow Z$, $x \mapsto f(\varphi(x))$. Пусть функция φ дифференцируема на промежутке X , и функция f имеет первообразную F на промежутке Y . Тогда $F(\varphi(x))$ – первообразная для функции $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ на промежутке X , то есть справедливы формулы:

$$\boxed{\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt \Big|_{t=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C} \quad \text{– формула замены переменной;}$$

$$\boxed{\int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = \int f(t) dt \Big|_{t=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C} \quad \text{– формула внесения под знак дифференциала.}$$

Доказательство. По правилу вычисления производной от сложной функции имеем

$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Это означает, что функция $F(\varphi(x))$ является первообразной для функции $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$. Тогда по определению неопределенного интеграла имеем:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C \quad \text{и} \quad \int f(t) dt = F(t) + C.$$

Так как $t = \varphi(x)$, то формула доказана.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Воспользуемся приемом внесения под дифференциал.

Так как $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, то

$$\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int e^{\sqrt{x}} d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Вычислим этот интеграл двумя способами.

1 способ (внесение под дифференциал).

Домножим на $\sin x$ числитель и знаменатель дроби

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x}.$$

Применив формулу $\sin x dx = -d(\cos x)$, получаем табличный интеграл.

$$I = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C.$$

Ответ можно упростить, пользуясь тригонометрическими формулами понижения степени

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

2 способ (универсальная подстановка).

Из курса тригонометрии известны формулы

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Сделаем замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставляя эти выражения в первоначальный интеграл, получаем

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение. Сделаем замену

$$x = a \sin \varphi \quad (-a \leq x \leq a); \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right); \quad dx = a \cos \varphi d\varphi.$$

Применяя формулу $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$ понижения степени, получаем

$$\int a(\cos \varphi) a(\cos \varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + C.$$

Вернемся к первоначальной переменной

$$\varphi = \arcsin \frac{x}{a}, \quad \sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi = \frac{2x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Тогда получаем окончательный ответ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

1.5. Формула интегрирования по частям.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемы на промежутке X и найдётся первообразная для функции $v(x) \cdot u'(x)$. Тогда существует первообразная для функции $u(x) \cdot v'(x)$ и верна формула:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx.$$

Если учесть формулу для вычисления дифференциала от функции, то получается более краткая и удобная для запоминания запись формулы интегрирования по частям

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Доказательство. По правилу вычисления производной произведения имеем $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Умножим это равенство на dx , получаем

$$(u \cdot v)' dx = u' \cdot v dx + u \cdot v' dx \quad \text{или} \quad u \cdot v' dx = (u \cdot v)' dx - v \cdot u' dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части этого равенства

$$\int u \cdot v' dx = \int (u \cdot v)' dx - \int v \cdot u' dx.$$

Так как интеграл в правой части формулы существует, то левая часть также определена и выполняется равенство

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int v \cdot u' dx, \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

Метод интегрирования по частям удобно применять в следующих случаях.

- 1) Подынтегральное выражение содержит в виде множителя функции $\ln x$, $\ln f(x)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$. Если в качестве $u(x)$ выбрать эти функции, то подынтегральное выражение $v(x) \cdot du(x)$ нового интеграла обычно получается проще.
- 2) Подынтегральная функция имеет вид $P(x) \cdot e^{ax}$, $P(x) \cdot \sin(ax)$, $P(x) \cdot \cos(ax)$, где $P(x)$ – многочлен относительно переменной x . Если в качестве $u(x)$ выбрать $P(x)$, то в новом интеграле подынтегральная функция снова принадлежит одному из указанных типов, но степень многочлена окажется уже на единицу меньше. Выбирая этот многочлен снова в качестве $u(x)$, понижаем степень еще на единицу и т.д.
- 3) Циклическими называются интегралы, для которых после однократного либо неоднократного интегрирования по частям приходим к точно такому же интегралу. В этом случае получаем алгебраическое уравнение относительно искомого интеграла. Например, к этому типу относятся интегралы $\int e^{ax} \cdot \sin(bx) dx$, $\int e^{ax} \cdot \cos(bx) dx$, $\int \sin(\ln x) dx$, $\int \cos(\ln x) dx$. После двукратного интегрирования их по частям получается снова исходный интеграл с некоторым коэффициентом. К данному типу относится и ряд других интегралов.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int \arcsin x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Обозначим через

$$u = \arcsin x; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$dv = dx; \quad v = \int dx = x.$$

Подставив эти выражения в формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} I &= x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int (x^2 + 3x) \cdot e^x dx$.

Решение. Обозначим через

$$u = x^2 + 3x; \quad du = (2x + 3)dx;$$

$$dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Подставив эти выражения в формулу интегрирования по частям, получим

$$\int (x^2 + 3x) \cdot e^x dx = (x^2 + 3x) \cdot e^x - \int (2x + 3) \cdot e^x dx.$$

Проинтегрируем еще раз по частям, обозначив

$$u = 2x + 3; \quad du = 2dx;$$

$$dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

Отсюда находим окончательный результат

$$I = (x^2 + 3x)e^x - (2x + 3)e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 + x - 1)e^x + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Решение. Обозначим через

$$u = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$dv = dx; \quad v = x.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получаем

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

В числителе подынтегральной дроби добавим и вычтем a^2 , затем поделим дробь почленно и запишем интеграл от разности как разность двух интегралов

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Мы пришли к такому же интегралу, с которого начали, это циклический интеграл. Получили уравнение относительно искомого интеграла I :

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a};$$

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

Поделив пополам и добавив константу, получаем ответ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Пример 4 (рекуррентная формула). Обозначим через $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Покажем, что для вычисления этого интеграла справедлива рекуррентная формула

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \cdot I_n \quad (n \in \mathbb{N}), \text{ где } I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$$

Доказательство. Проинтегрируем интеграл $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \int (t^2 + a^2)^{-n} dt$ по частям, обозначив

$$u = (t^2 + a^2)^{-n}; \quad du = \frac{-2ntdt}{(t^2 + a^2)^{n+1}}$$

$$dv = dt; \quad v = t.$$

Подставим в формулу интегрирования по частям

$$I_n = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^{n+1}} dt.$$

Поделив почленно последнюю подынтегральную дробь, приходим к равенству

$$I_n = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 \cdot I_{n+1}.$$

Выражая отсюда интеграл I_{n+1} , получаем искомую формулу

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + (2n - 1) \cdot I_n;$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} \cdot I_n.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{dt}{(t^2 + 4)^4}.$

Решение. Обозначим этот интеграл $I_4 = \int \frac{dt}{(t^2 + 4)^4}.$ К нему можно применить

рекуррентную формулу, выведенную в предыдущем примере 4. Положив в этой

формуле $n = 3$ и $a = 2$, получаем $I_4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{t}{(t^2 + 4)^3} + \frac{5}{24} I_3.$

Аналогично, при $n = 2$ и $a = 2$ из рекуррентной формулы получаем

$$I_3 = \frac{1}{16} \cdot \frac{t}{(t^2 + 4)^2} + \frac{3}{16} I_2, \text{ где}$$

$$I_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2 + 4} + \frac{1}{8} I_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{t^2 + 4} + \frac{1}{16} \arctg \frac{t}{2} + C.$$

Подставив I_3 , а затем I_2 в I_4 , получим

$$I_4 = \frac{t}{24(t^2 + 4)^3} + \frac{5t}{384(t^2 + 4)^2} + \frac{5t}{1024(t^2 + 4)} + \frac{5}{2048} \arctg \frac{t}{2} + C.$$

При желании можно три первых дроби привести к общему знаменателю.