ЛЕКЦИЯ 4

Числовые ряды

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Если $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – числовая последовательность, то сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.1)$$

называется числовым рядом. Числа $a_1, a_2, \ldots$ называются членами ряда, а число a_n – общим членом ряда.

Сумма первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (1.2)$$

называется его частичной суммой.

Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$ частичных сумм ряда (1.1) имеет конечный предел S, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то ряд (1.1) называется сходящимся, а число S – его суммой; в противном случае, т.е. когда этот предел не существует или равен бесконечности, ряд (1.1) называется расходящимся.

Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$, полученный из ряда (1.1) отбрасыванием n первых его членов, называется остатком ряда (1.1).

Пример 1

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

N-ая частичная сумма ряда S_N при $q \neq 1$ имеет вид

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = (1 - q^n)/(1 - q).$$

При $|q|<1$ последовательность частичных сумм $\{S_N\}$ имеет предел, равный $1/(1-q)$. Таким образом, данный ряд сходится и имеет сумму, равную $S=1/(1-q)$. При $|q|>1$ последовательность частичных сумм $\{S_N\}$ предела не имеет, т.е. при $|q|>1$ геометрическая прогрессия расходится.

Рассмотрим случай, когда $|q|=1$. При $q=+1$ частичная сумма S_N равна N, что приводит к расходимости рассматриваемого ряда. При $q=-1$ частичная сумма S_N равна +1 и -1, что приводит к совпадению с заведомо расходящейся последовательности 1, 0, 1, 0, … и, как следствие, к расходимости рассматриваемого ряда.

2. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

2.1. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ

Необходимый признак сходимости числового ряда (1.1) (но недостаточный) состоит в следующем:

если числовой ряд (1.1) *сходится, то* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. (1.3)

Из этого признака следует

достаточный признак расходимости ряда (1.1):

если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *– расходится.*

Пример 2 Используя определение (вычислением $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$), исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{9k^2+12k-5}$.

Решение. Для преобразования частичных сумм используем разложение дроби на простейшие:

$$\frac{1}{9k^2+12k-5} = \frac{A}{3k-1} + \frac{B}{3k+5}.$$

Методом неопределенных коэффициентов нашли значения: $A = \dfrac{1}{6}$ и $B = -\dfrac{1}{6}$.

Следовательно, общий член ряда запишется в виде:

$$\frac{1}{9k^2+12k-5} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+5}\right).$$

Тогда частичную сумму можно представить следующим образом:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2+12k-5} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{11}-\frac{1}{17}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n+2}\right) + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{7}{10} - \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right].$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{6}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{10} = \frac{7}{60}.$$

Так как сумма ряда существует и равна конечному значению, то искомый ряд сходится. ■

2.2 ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Признак Даламбера:

если $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, *то ряд* (1.1) *с неотрицательными членами сходится при* $q<1$ *и расходится при* $q>1$; *при* $q=1$ *вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Признак Коши:

если $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, *то ряд* (1.1) *с неотрицательными членами сходится при* $q<1$ *и расходится при* $q>1$; *при* $q=1$ *вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Первый признак сравнения:

если для двух знакоположительных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, *начиная с некоторого номера* n, *выполняется неравенство для общих членов:* $a_n\le b_n$, *то ряд с меньшими членами сходится, если сходится ряд с большими членами; если ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.*

Второй признак сравнения:

если для двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *с неотрицательными членами существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=q$, *то при* $q\ne 0$ *оба ряда ведут себя одинаково в смысле сходимости, т.е. либо оба ряда сходятся, либо оба - расходятся.*

Интегральный признак Коши:

если члены ряда (1.1) *удовлетворяют условиям* $a_{n+1}\le a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, *а непрерывная убывающая неотрицательная функция вещественной переменной* $f(x)$ *такова, что при* $x=1,2,\dots,n,\dots$ *ее значения равны соответствующим членам ряда* (1.1) *и* $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=0$, *то ряд* (1.1) *и несобственный интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)\,dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Пример 3. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд (иногда его называют рядом Дирихле) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, p – любое вещественное число.

Решение. Если $p<0$, то общий член a_n ряда при $n\to+\infty$ стремится к бесконечности; если $p=0$, то при любом $n: a_n=1$, и, следовательно, по достаточному признаку расходимости исходный ряд расходится. Если $p>0$, то данный ряд удобно исследовать на сходимость с помощью интегрального признака Коши. Действительно, общий член ряда $a_n=\dfrac{1}{n^p}$ стремится к нулю при $n\to+\infty$, причем это стремление монотонно относительно n. В качестве функции $f(x)$ выберем функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$, которая удовлетворяет всем условиям, наложенным на нее в формулировке интегрального признака (она определена при $x\geq1$, непрерывна, неотрицательна, монотонно убывает и стремится к нулю при $x\to+\infty$). Остается выяснить, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$, при $p>0$.

Так как первообразная неопределенного интеграла имеет вид:

$$\int\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(p-1)\,x^{p-1}}, & \text{при } p\neq1,\\ \ln|x|, & \text{при } p=1,\end{cases}$$

то определенный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(p-1)}, & \text{при } p>1,\\ +\infty, & \text{при } p\leq1.\end{cases}$$

Итак, обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad\begin{matrix}\text{сходится, при } p>1,\\ \text{расходится, при } p\leq1.\end{matrix}\tag{2.1}$$

При $p=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$ называется гармоническим, и как установили, он является расходящимся. ■

При исследовании некоторых задач на сходимость числовых рядов удобно при применении признаков сравнения использовать эквивалентные соотношения между функциями (следствия первого и второго замечательных пределов)

Таблица эквивалентностей

$\sin(\alpha)\sim\alpha$	$tg(\alpha)\sim\alpha$	$(1+\alpha)^k-1\sim k\alpha$
$\arcsin(\alpha)\sim\alpha$	$arctg(\alpha)\sim\alpha$	$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$
$1-\cos(\alpha)\sim\dfrac{\alpha^2}{2}$	$ctg(\alpha)\sim\dfrac{1}{\alpha}$	$\log_b(1+\alpha)\sim\dfrac{\alpha}{\ln(b)}$
$\pi/2-\arccos(\alpha)\sim\alpha$	$e^\alpha-1\sim\alpha$	$b^\alpha-1\sim\alpha\cdot\ln(b)$

Пример 4 Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\ln\left(\dfrac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1}\right)$.

Решение. Так как $\ln\left(\frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1}\right)=\ln\left(1+\frac{n^2-2n}{n^3+2n+1}\right)$ и $\frac{n^2-2n}{n^3+2n+1}\to\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to+\infty$, то можно применить эквивалентность: $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$. Тогда общий член исследуемого ряда $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\ln\left(\frac{n^3+n^2+1}{n^3+2n+1}\right)\sim\ b_n=\frac{1}{n^{4/3}}$ при $n\to+\infty$. Из второго признака сравнения и сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ (см. (2.1)) следует сходимость искомого ряда. ■

2.3 СХОДИМОСТЬ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots \tag{3.1}$$

называется знакопеременным, если члены этого ряда a_n не все являются неотрицательными числами.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots \tag{3.2}$$

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$ – знакопеременный, но не является знакочередующимся.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots, \tag{3.3}$$

составленный из абсолютных величин его членов.

Числовой ряд (3.1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, расходится.

Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов:

если члены знакочередующегося ряда (3.2) монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю при $n\to+\infty$, то ряд сходится, иначе говоря, если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n\ge 0$ удовлетворяют условиям:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}a_n=0,\ \ 2)\ a_{n+1}\le a_n,$$

то ряд сходится.

Отметим, что из сходимости ряда (3.3) $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ следует сходимость и ряда (3.1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, причем абсолютная, а из расходимости ряда (3.3), установленной с помощью признаков Даламбера или Коши, – расходимость ряда (3.1): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Только для знакочередующихся рядов верна оценка остатка ряда:

$$| R_n | < | a_{n+1} |, \tag{3.4}$$

т.е. ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

В ряде не всегда можно группировать члены. Например, ряд

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots,$$

является расходящимся, так как частичные суммы четного, нечетного чисел членов равны

$$S_{2m}=0 \ \ (m=1,2,3\ldots),\ S_{2m+1}=1 \ (m=1,2,3\ldots)$$

и, следовательно, нет предела его частичных сумм. После группировки членов

$$(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ \ldots=0+0+\ldots+0+\ldots=0$$

получаем сходящийся ряд, сумма которого равна нулю. При другой группировке членов

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots-(1-1)-\ \ldots=1-0-0-\ldots-0-\ldots=1$$

получаем сходящийся ряд, его сумма равна единице.

Приведем два утверждения:

Утверждение 1. *Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости, сумма ряда при этом остается прежней.*

Утверждение 2. *Если ряд сходится неабсолютно (т.е. сходится условно по признаку Лейбница), то путем надлежащей перестановки его членов всегда можно придать сумме ряда произвольное значение и даже сделать ряд расходящимся.*

Пример 5 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Это знакочередующийся гармонический ряд. Первоначально, исследуем исходный ряд на абсолютно сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – это гармонический расходящийся ряд. Следовательно, абсолютной сходимости нет. Поэтому исследуем исходный ряд по признаку Лейбница на условную сходимость.

Условия для $a_n=\frac{1}{n}\geq 0$: 1) $\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{n}$, 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ выполняются, следовательно, искомый ряд сходится условно. ■