

CHANE-SANE Elliott

LALUBIN Adrien  
MAP411

## Applications de méthodes d'optimisation à la résolution des EDP

Avant-propos : L'ensemble des résultats numériques est présenté en annexe

### I Méthode des gradient

#### I 1 Gradient à pas constant

Connaissons  $J(u_1, u_2) = (u_1 - 1)^2 + 100(u_1^2 - u_2)^2$

On a  $\nabla J(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 2(u_1 - 1) + 400u_1(u_1^2 - u_2) \\ -200(u_1^2 - u_2) \end{pmatrix}$

En appliquant la méthode de gradient à pas constant  
 $u_{k+1} = u_k - p \nabla J(u_k)$  pour  $u_0 = (1, 0)$  et  $p = 0,002$ ,  
le critère d'arrêt  $J(u_{k+1}) < 10^{-3}$  est atteint en 2765  
itérations. On trouve bien  $u \approx (1, 1)$  minimum de la  
fonction de Rosenbrock. (voir graph 1).

- Pour  $p = 0,0045$ , le programme ne parvient pas à trouver  
de résultat  $\Rightarrow u_k$  ne converge pas

- Pour  $p = 0,01$ ,  $u_k$  diverge

## I.2 Gradient optimal

$$J(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle \Rightarrow \nabla J(u) = Au - b$$

Sait  $u \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \text{En posant } \forall p \in \mathbb{R}_+, f(p) &= J(u - p \nabla J(u)) \\ &= \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - p \times \frac{1}{2} \langle A \nabla J(u), u \rangle - p \times \frac{1}{2} \langle Au, J(u) \rangle \\ &\quad + \frac{p^2}{2} \langle A \nabla J(u), \nabla J(u) \rangle - \langle b, u \rangle + p \langle b, \nabla J(u) \rangle \\ &= J(u) - p \langle Au - b, \nabla J(u) \rangle + \frac{p^2}{2} \langle A \nabla J(u), \nabla J(u) \rangle \\ &\quad \text{par symétrie de } A \end{aligned}$$

On a  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  polynôme de degré 2.

$$f \text{ est donc minimal en } p = \frac{\langle Au - b, \nabla J(u) \rangle}{\langle A \nabla J(u), \nabla J(u) \rangle} = \frac{\langle \nabla J(u), \nabla J(u) \rangle}{\langle A \nabla J(u), \nabla J(u) \rangle}$$

Avec  $r_k = \nabla J(u_k)$ , on a donc  $p_k = \frac{\langle r_k, r_k \rangle}{\langle A r_k, r_k \rangle}$

$$r_k = Au_k - b$$

L'estimation de  $\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|}$  pour la méthode de gradient à pas optimale

pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour différentes conditions

initiales sont présentées dans graph 2

Fonctionnelle non quadratique : Le procédé de dichotomie pour la fonction de Rosenbrock est présenté dans graph 3. Elle donne des résultats plus rapides que la méthode à pas constant : 937 itérations

## II Méthode de Gauss-Newton

$$J(\beta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|y_i - g(x_i; \beta)\|^2$$

En posant  $\forall i \in [1, m], f_i = y_i - g(x_i; \beta)$

et  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ , on a bien  $J(u) = \frac{1}{2} \|f(u)\|^2$

En considérant que  $\nabla J(u) = Df^T(u) f(u)$  et en utilisant

l'approximation  $\nabla^2 J(u) = Df^T(u) Df(u)$ , le procédé

itératif devient:  $\boxed{\beta^{k+1} = \beta^k - (Df^T(u) Df(u))^{-1} Df^T(u) f(u)}$

Avec  $[Df(u)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$        $k = j[k]$

$$= -\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \beta_k^0)^2}{\sigma_k^2}\right) \text{ si } j \in [1, k]$$

$$- \alpha_k \frac{(x_i - \beta_k^0)^2}{\sigma_k^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \beta_k^0)^2}{\sigma_k^2}\right) \text{ si } j \in [k+1, 2k]$$

$$- \alpha_k \frac{(x_i - \beta_k^0)}{\sigma_k^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \beta_k^0)^2}{\sigma_k^2}\right) \text{ si } j \in [2k+1, 3k]$$

Le graph 4 présente le résultat d'une simulation pour

$x_i$	1	2	3	4	5	6	8
$y_i$	0,127	0,2	0,3	0,25	0,32	0,7	0,9

$$\beta \ni (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \beta_1^0 = 3, \beta_2^0 = 7)$$

En vert-figure  $(x_i, g(x_i; \beta_{\text{initial}}))$

En rouge  $(x_i, g(x_i; \beta_{\text{final}}))$

En grand disque bleu :  $(x_i, y_i)$

Les petits disques bleus témoignent de l'approximation au cours des itérations de la boucle d'optimisation.

Pour  $\beta = (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, x_1^0 = 3, x_2^0 = 6)$ ,  
le graph 5 montre la divergence au cours des itérations.

CHANE-SANE

Elliot

LALUBIN

Adrien

MAP411

## III Application à l'équation de convection-diffusion

### III. 1 Différents schémas d'approximation

#### 1] \* Consistance du schéma (1)

En remplaçant  $u_i^m$  par  $u(x_i, t_m)$  et en faisant un développement de Taylor centré en  $(x_i, t_m)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{m+1}) - u(x_i, t_m)}{\Delta t} + a \frac{u(x_{i+1}, t_m) - u(x_{i-1}, t_m)}{2 \Delta x} \\ & - b \frac{u(x_{i+2}, t_m) + u(x_{i-2}, t_m) - 2u(x_{i-1}, t_m)}{\Delta x^2} \\ & = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_m) + O(\Delta t) + a \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_m) + O(\Delta x^2) \\ & - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_m) + O(\Delta x^2) = O(\Delta t + \Delta x^2) \text{ car } u \\ & \text{satisfait l'équation de convection-diffusion.} \end{aligned}$$

Le schéma (1) explicite est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace

\* En effectuant un développement de Taylor centré en  $(x_i, t_{m+1})$ , des calculs similaires permettent d'affirmer que:

Le schéma (2) implicite est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace

#### 2] \* Stabilité en norme $\ell^\infty$ pour (2)

Le schéma (1) se réécrit

$$\begin{aligned} u_i^{m+1} &= \left(1 - 2b \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_i^m + \left(b \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x}\right) u_{i+2}^m \\ & + u_{i-2}^m \left(\frac{b \Delta t}{\Delta x^2} + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

Si  $\begin{cases} \Delta x^2 \geq 2b\Delta t \\ \text{et } \frac{2b}{|\alpha|} \geq \Delta x \end{cases}$

Alors  $u_i^{m+2}$  est une combinaison convexe de  $u_{i-2}^m, u_i^m, u_{i+2}^m$   
 Une simple récurrence permettrait de montrer que  $u_i^m$  vérifie  
 le principe du maximum discret

(1) est stable en norme  $\ell^\infty$  si  $\begin{cases} \Delta x^2 \geq 2b\Delta t \\ \frac{2b}{|\alpha|} \geq \Delta x \end{cases}$

\* Stabilité en norme  $\ell^2$  de (1)

Dans le cadre de la décomposition en somme de Fourier, en notant  $\hat{u}^m(k)$  les coefficients de la série de Fourier et en renarrant que pour  $v^m(x) = u^m(x + \Delta x)$ ,  $\hat{v}^m(k) = \hat{u}^m(k) \exp(2i\pi k \Delta x)$

Par application de la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned} \hat{u}^{m+2}(k) &= A(k) \hat{u}^m(k) \\ \text{où } A(k) &= 1 - 2 \frac{b\Delta t}{\Delta x^2} + (e^{2ik\pi \Delta x} + e^{-2ik\pi \Delta x}) \frac{b\Delta t}{\Delta x^2} \\ &\quad - (e^{2ik\pi \Delta x} - e^{-2ik\pi \Delta x}) \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\ &= 1 - 4 \frac{b\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k\pi \Delta x) - i \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2k\pi \Delta x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|A(k)\|^2 = \left[ 1 - 4 \frac{b\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k\pi \Delta x) \right]^2 + \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2(2k\pi \Delta x)$$

$$\|A(k)\|^2 \leq 1 \forall k$$

$$\Rightarrow -8 \frac{b\Delta t}{\Delta x^2} + 16 \frac{b^2 \Delta t^2}{\Delta x^4} + \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 0$$

$b \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \geq 0 \\ b \leq \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} \left( 1 + \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}} \right) \\ b \geq \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} \left( 1 - \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}} \right) \end{cases}$$

par étude du polynôme en  $b$

Sous ces conditions CFL, (1) est stable en norme  $L^2$

\* Stabilité en norme  $L^2$  pour (2)

$$(2) \text{ écrit } u_i^{m+1} = u_i^{m+2} \left( 1 + 2b \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + u_{i+2}^{m+2} \left( \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} - b \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) + u_{i-2}^{m+2} \left( - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} - b \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right)$$

Par application de la transformée de Fourier,

$$\hat{u}_i^{m+1} = A(k) \hat{u}_i^m \Rightarrow \hat{u}_i^{m+1} = A(k)^{-1} \hat{u}_i^m$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } A(k) &= 1 + 2b \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{2ik\pi\Delta x} - e^{-2ik\pi\Delta x}) \\ &\quad - b \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (e^{2ik\pi\Delta x} + e^{-2ik\pi\Delta x}) \\ &= 1 + 2b \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k\pi\Delta x) + i\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(2k\pi\Delta x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|A(k)\| \geq 1 \Rightarrow \|A(k)^{-1}\| \leq 1$$

Le schéma (2) est stable en norme  $L^2$

### III.2 Schéma implicite

Avec  $u_{i-1} = u_i = u_{i+1} = 0$   
 Le schéma (2) se réécrit  $U = MU^{m+1}$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} \left(1 + 2\frac{\alpha St}{\Delta x^2}\right) & \left(\frac{\alpha St}{\Delta x^2} - \frac{\beta St}{\Delta x^2}\right) \\ -\left(\frac{\alpha St}{\Delta x^2} + \frac{\beta St}{\Delta x^2}\right) & \left(1 + 2\frac{\beta St}{\Delta x^2}\right) \end{pmatrix}$$

(Cette matrice tridiagonale étant à diagonale dominante,  $M$  est inversible.)

En pratique, on applique la méthode du gradient optimal pour  $A = t^2 MM^T$  symétrique définie positive et  $B = t^2 MU^m$  pour le processus itératif  
 $U^{m+1} = (t^2 MM^T)^{-1} t^2 M U^m$

Le graph 6 présente l'évolution de  $u$  pour  $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $\alpha = \beta = 1$

### IV Application à l'équation de la chaleur non-linéaire

#### IV.1 Schéma implicite linéaire

Le schéma s'écrit  $u_i^{m+1} = u_i^{m+2} \left(1 + 2\frac{\beta St}{\Delta x^2}\right)$

$$-\frac{\beta St}{\Delta x^2} u_{i+2}^{m+2} - \frac{\beta St}{\Delta x^2} u_{i-2}^{m+2} + St u_i^{m+2} (u_i^m)^3$$

CHANE-SANE On a donc  $U^m = (A + \Delta t \operatorname{diag}((u_{\text{inac}})^3, \dots, (u_{\text{inac}})^3)) U^{m+1}$

Elliot

LALUBIN avec  $A = \begin{pmatrix} (1+2\frac{b}{\Delta x^2}) & -\frac{b}{\Delta x^2} \\ -\frac{b}{\Delta x^2} & (1+2\frac{b}{\Delta x^2}) \end{pmatrix}$

Adrien

MAP411

$$\begin{pmatrix} (1+2\frac{b}{\Delta x^2}) & -\frac{b}{\Delta x^2} \\ -\frac{b}{\Delta x^2} & (1+2\frac{b}{\Delta x^2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-\frac{b}{\Delta x^2}) & \frac{-1}{\Delta x^2} \\ \frac{-1}{\Delta x^2} & (1+2\frac{b}{\Delta x^2}) \end{pmatrix}$$

De même que précédemment, on applique la méthode du gradient optimal pour l'inversion.

Le graphique présente l'évolution de  $u_i$  pour  $u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $b = 1$

#### IV.2 Schéma pour l'équation stationnaire

$$\left\{ \begin{array}{l} -b \frac{u_{i+2} + u_{i-2} - 2u_i}{\Delta x^2} + (u_i)^4 = R_i \\ u_{-i_{\text{max}}-2} = u_{i_{\text{max}}+2} = 0 \end{array} \right.$$

nécessite  $G(U) = 0$

$$\text{avec } G(U) = \frac{b}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} U + \begin{pmatrix} u_{-i_{\text{max}}}^4 \\ \vdots \\ u_{i_{\text{max}}}^4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{-i_{\text{max}}} \\ \vdots \\ R_{i_{\text{max}}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} G(U + W) &= G(U) + \frac{b}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} W \\ &\quad + 4 \begin{pmatrix} u_{-i_{\text{max}}}^3 & u_{-i_{\text{max}}}^3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{i_{\text{max}}}^3 & u_{i_{\text{max}}}^3 & \end{pmatrix} + O(W) \end{aligned}$$

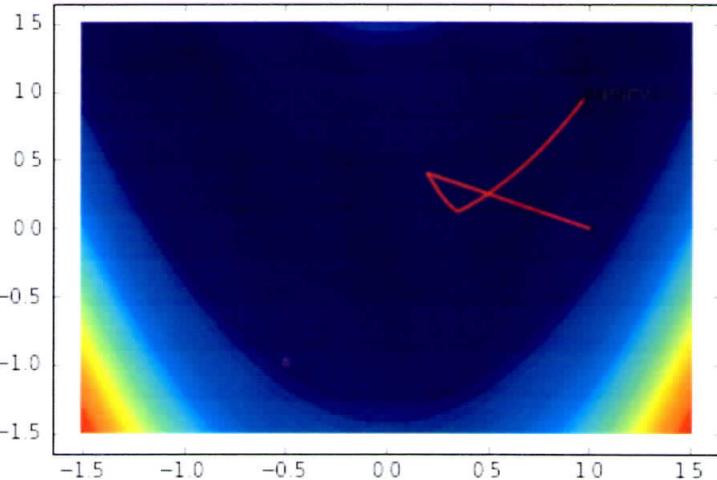
$$\Rightarrow \nabla G(U) = \frac{b}{\Delta x^2} + 4 \begin{pmatrix} u_{-i_{\text{max}}}^3 & -u_{-i_{\text{max}}}^3 \\ \vdots & \vdots \\ u_{i_{\text{max}}}^3 & -u_{i_{\text{max}}}^3 \end{pmatrix}$$

Le graph 8 présente l'allure de la solution pour  $\Omega$  constant à 1,  $b=1$ .

On remarque que la solution tend vers  $u(x \in ]-10, 10[) = 1$  tout en gardant la continuité aux bords.

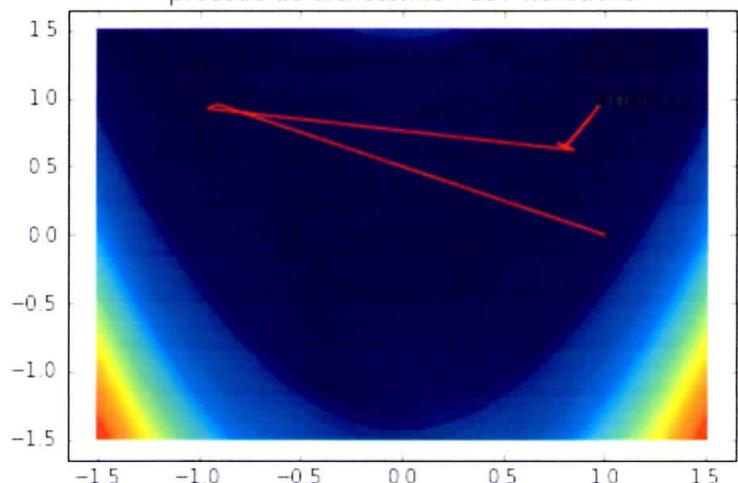
## Annexe 1 : Méthodes de gradient

Gradient pas constant pour  $p=0.002$ . 2765 itérations.

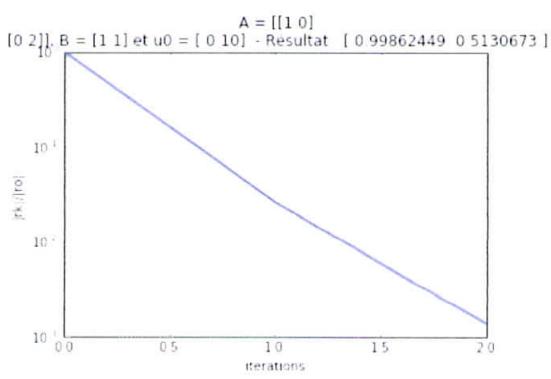
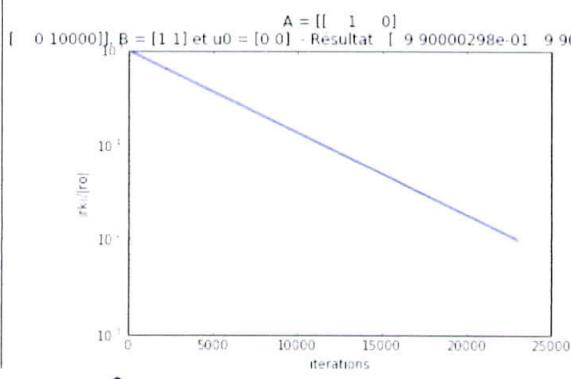
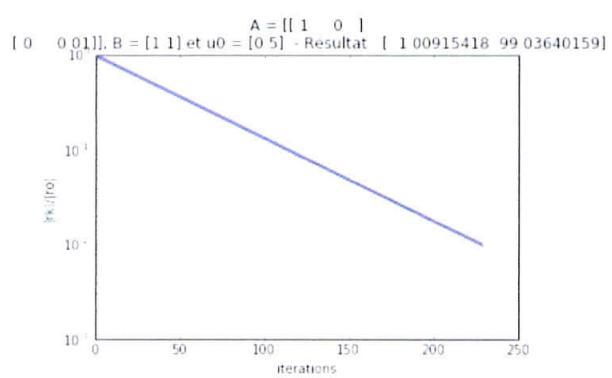
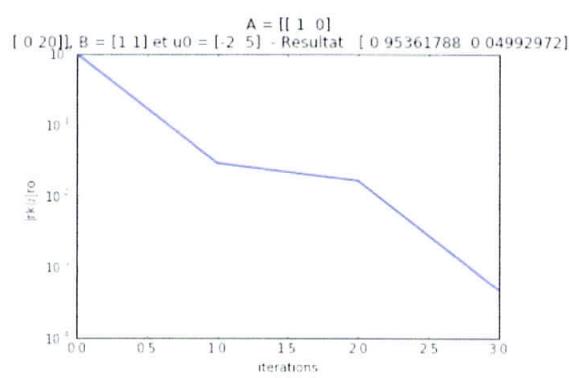


Graph1: Gradient à pas constant

procédé de dichotomie : 937 itérations

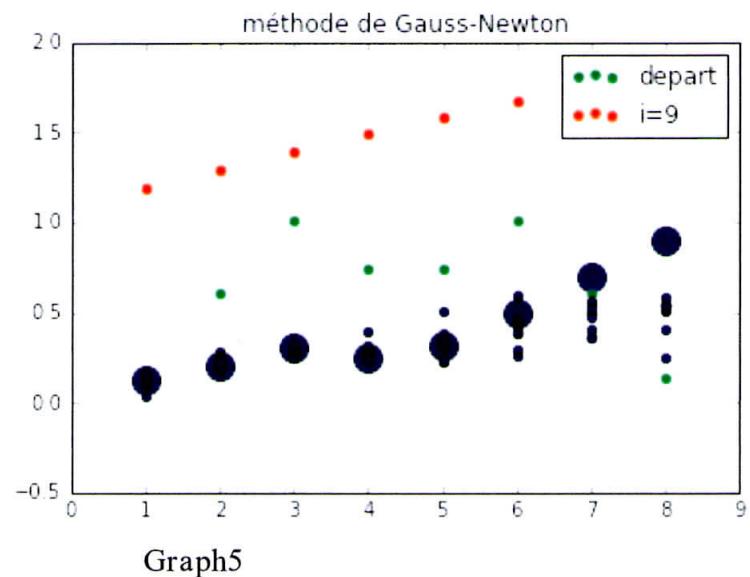
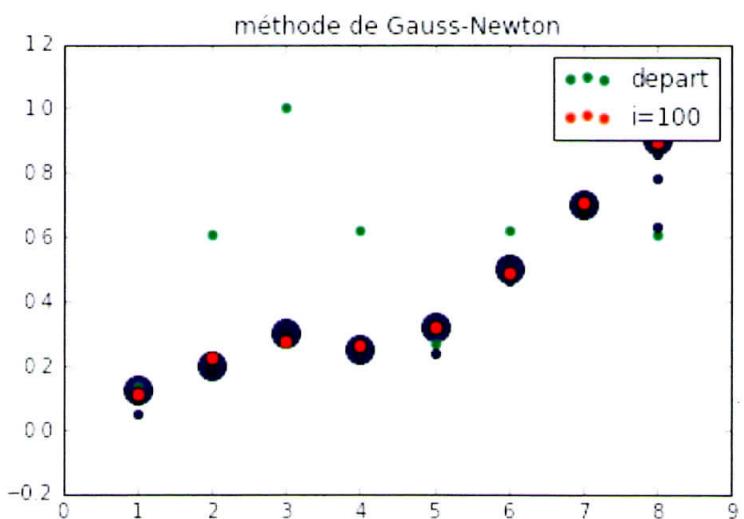


Graph3 : procédé dichotomique



Graph 2

## Annexe 2 : Méthode de Gauss-Newton



## Annexe 3 : Applications

