Lijnen en cirkels

7

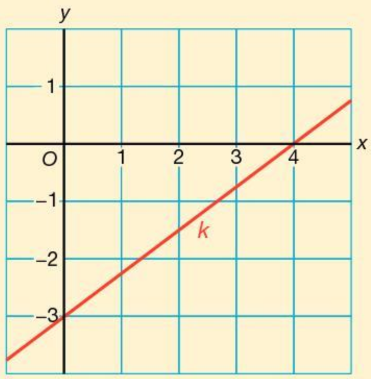
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorkennis Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

Theorie A De vergelijking $ax + by = c$

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.
Om de lijn k: $3x - 4y = 12$ te tekenen maak je een tabel met twee punten, bijvoorbeeld

x	0	4
y	-3	0



figuur 7.1 De lijn k: $3x - 4y = 12$.

We zeggen dat $(0, -3)$ en $(4, 0)$ oplossingen zijn van de vergelijking $3x - 4y = 12$.

De oplossingen van $3x - 4y = 12$ zijn de getallenparen (x, y) die aan de vergelijking voldoen.

Voorbeeld

Gegeven is de lijn l: $2x - 5y = 12$.
a Voor welke p ligt het punt $A(3, p)$ op l?
b Voor welke q is $(q, 4)$ een oplossing van $2x - 5y = 12$?
c Bereken de richtingscoëfficiënt van l.

Uitwerking
a $A(3, p)$ op l, dus $2 \cdot 3 - 5 \cdot p = 12$
$$6 - 5p = 12$$
$$-5p = 6$$
$$p = -1\tfrac{1}{5}$$
b $(q, 4)$ is een oplossing, dus $2 \cdot q - 5 \cdot 4 = 12$
$$2q - 20 = 12$$
$$2q = 32$$
$$q = 16$$
c $2x - 5y = 12$
$$-5y = -2x + 12$$
$$y = \tfrac{2}{5}x - 2\tfrac{2}{5}$$
Dus $\text{rc}_l = \tfrac{2}{5}$.

1 Gegeven is de lijn k: $4x - 7y = 22$.
a Voor welke p ligt het punt $A(2, p)$ op k?
b Voor welke q is $(q, -3)$ een oplossing van $4x - 7y = 22$?
c Bereken de richtingscoëfficiënt van k.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 Gegeven zijn de lijnen k: $2x - 3y = 10$ en l: $x + 2y = 6$.

a Teken de lijnen k en l in één figuur.

b De lijn m gaat door de oorsprong en is evenwijdig met k. Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

c De lijn n gaat door het punt $A(2, -3)$ en is evenwijdig met l. Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

Theorie B Stelsels lineaire vergelijkingen

Het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ kun je oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.

Om y te elimineren vermenigvuldig je de eerste vergelijking met 2 en de tweede met 3. Daarna tel je de vergelijkingen bij elkaar op.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 6y = 20 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases} +$$

$$7x = 38$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{38}{7} = 5\frac{3}{7} \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} 5\tfrac{3}{7} + 2y = 6$$

$$2y = \tfrac{4}{7}$$

$$y = \tfrac{2}{7}$$

De oplossing is $(x, y) = \left(5\frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

Je kunt bij dit stelsel ook x elimineren. Dat gaat als volgt.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases} -$$

$$-7y = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{7} \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} x + 2 \cdot \tfrac{2}{7} = 6$$

$$x + \tfrac{4}{7} = 6$$

$$x = 5\tfrac{3}{7}$$

3 Los op.

a $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$

b $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x - 9y = -5 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

7

7.1 Lijnen en hoeken

Door eerst paragraaf 7.5 Meetkunde met GeoGebra door te nemen zul je de theorie in dit hoofdstuk beter begrijpen.

O 1 Gegeven is de lijn l: $2x + 3y = 18$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x-as en de y-as.

b Licht toe dat de vergelijking $2x + 3y = 18$ ook kan worden geschreven als $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$.

c Hoe kun je in de vorm $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$ de coördinaten van de snijpunten van l met de assen herkennen?

O 2 Gegeven is de lijn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

a Toon aan: de lijn snijdt de x-as in het punt $(a, 0)$.

b Toon aan: de lijn snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

Theorie A De assenvergelijking van een lijn

De lijn k: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijdt de x-as in het punt $(a, 0)$ en de y-as in het punt $(0, b)$. Dit gebruik je om een vergelijking van een lijn op te stellen als de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de assen gegeven zijn.

De vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de **assenvergelijking** van de lijn.

Snijdt de lijn l de assen in de punten $(4, 0)$ en $(0, -5)$, dan krijg je l: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$.

Na vermenigvuldigen met 20 krijg je l: $5x - 4y = 20$.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ snijden met de x-as, dus $y = 0$, geeft

$\frac{x}{a} = 1$

$x = a$

snijpunt $(a, 0)$

De lijn door de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$ heeft de vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ met $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Heb je te maken met de lijn k door de punten $(-1, 0)$ en $(0, 2)$ en de lijn l door de punten $(3, 0)$ en $(0, 4)$, dan krijg je k: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$, ofwel k: $2x - y = -2$ en l: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$, ofwel l: $4x + 3y = 12$.

Om het snijpunt van de lijnen k en l te berekenen los je het stelsel

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 4x + 3y = 12 \end{cases}$$ op.

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

De lijn k snijdt de x-as in het punt $(6, 0)$ en de y-as in het punt $(0, q)$.

a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.

b Bereken q in het geval het punt $(4, -1)$ op k ligt.

c Voor welke waarde van q is k evenwijdig met de lijn l: $y = 3x + 2$?

Uitwerking

a $\frac{x}{6} + \frac{y}{q} = 1$ Vermenigvuldig alle termen met $6q$.

$qx + 6y = 6q$

Dus k: $qx + 6y = 6q$.

b $(4, -1)$ op k geeft $q \cdot 4 + 6 \cdot -1 = 6q$

$4q - 6 = 6q$

$-2q = 6$

$q = -3$

c k: $qx + 6y = 6q$

$6y = -qx + 6q$

$y = -\frac{q}{6}x + q$

Dus $rc_k = -\frac{q}{6}$.

l: $y = 3x + 2$, dus $rc_l = 3$

$k \,//\, l$, dus $rc_k = rc_l$

$-\frac{q}{6} = 3$

$q = -18$

7

3 De lijn k gaat door de punten $(2, 0)$ en $(0, -1)$.
De lijn l gaat door de punten $(5, 0)$ en $(0, -3)$.

a Stel van k en van l een vergelijking op.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van k en l.

4 Stel een assenvergelijking op van de lijn en schrijf de vergelijking vervolgens in de vorm $ax + by = c$.

a l door $(p, 0)$ en $(0, 5)$

b m door $(4, 0)$ en $(0, q)$

c n door $(3r, 0)$ en $(0, r)$

5 De lijn k snijdt de x-as in het punt $(p, 0)$ en de y-as in het punt $(0, 8)$.

a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.

b Bereken p in het geval het punt $(1, 2)$ op k ligt.

c Voor welke p is k evenwijdig met de lijn l: $y = 2x + 3$?

© Noordhoff Uitgevers bv

A 6 De lijn k snijdt de assen in de punten $(3, 0)$ en $(0, p)$ en de lijn l snijdt de assen in de punten $(2p, 0)$ en $(0, 5)$.

a Stel van k en van l een vergelijking op in de vorm $ax + by = c$.

b Voor welke p ligt het punt $A(1, 2)$ op k? En voor welke p op l?

c Voor welke p is de lijn k evenwijdig met de lijn m: $y = 4x + 5$?

d Voor welke p is de lijn l evenwijdig met de lijn n: $2x + 3y = 10$?

R 7 **a** Jan zegt dat met de vergelijking $y = ax + 3$ alle lijnen door $(0, 3)$ zijn gegeven.

Harm zegt dat met de vergelijking $\frac{x}{p} + \frac{y}{3} = 1$ alle lijnen door $(0, 3)$ zijn gegeven.

Volgens Gerrit missen Jan en Harm enkele lijnen.

Welke lijnen bedoelt Gerrit? Licht toe.

b Door de lijnen door $(4, 0)$ te noteren als $y = a(x - 4)$ mis je één lijn. Welke?

c Door de lijnen door $(4, 0)$ te noteren als $\frac{x}{4} + \frac{y}{p} = 1$ mis je twee lijnen. Welke?

8 Gegeven zijn de lijnen k_p: $px + 2y = 8$.

Voor welke p

a gaat de lijn door het punt $(3, 5)$

b snijdt de lijn de x-as in het punt $(3, 0)$

c is de lijn evenwijdig met de lijn $3x + 5y = 10$

d is de lijn evenwijdig met de lijn $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$?

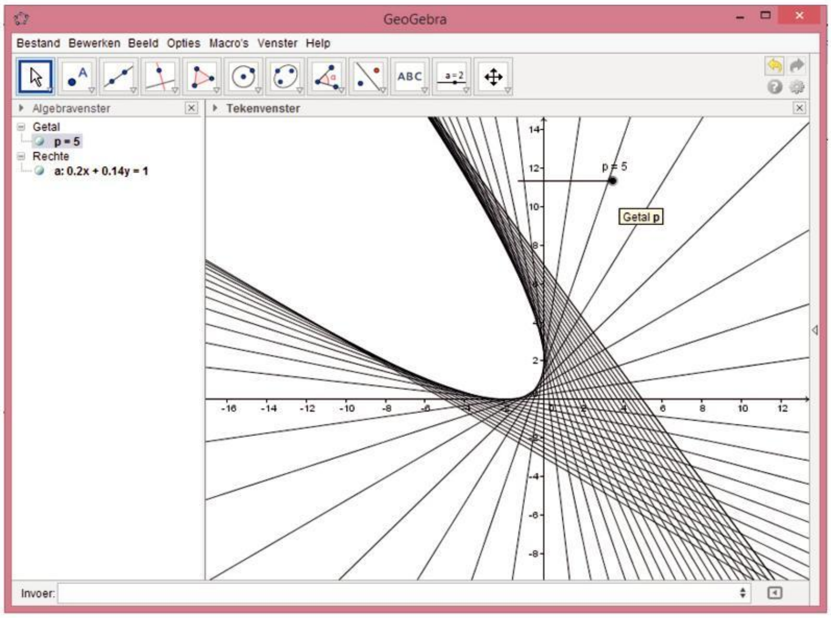
7

A 9 Gegeven zijn de lijnen l_p: $\frac{x}{p} + \frac{y}{p + 2} = 1$.

Voor welke p

a gaat de lijn door het punt $(3, 4)$

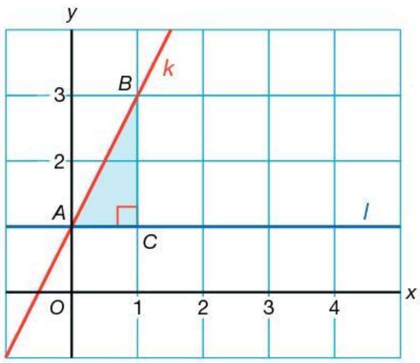
b is de richtingscoëfficiënt van de lijn gelijk aan 2?



© Noordhoff Uitgevers bv

O 10 In figuur 7.2 zijn de lijnen k: $y = 2x + 1$ en l: $y = 1$ getekend.
Het punt $A(0, 1)$ is het snijpunt van k en l, het punt $B(1, 3)$ ligt op k en het punt $C(1, 1)$ ligt op l.
Er geldt $\angle CAB \approx 63{,}435°$.

a Toon dit aan.

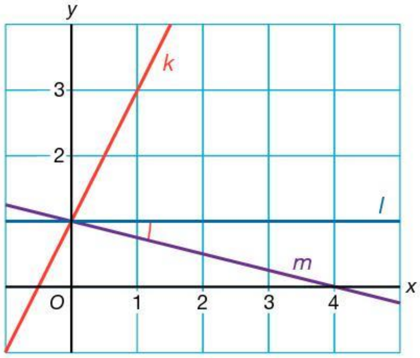


figuur 7.2

In figuur 7.3 is bovendien de lijn m: $y = -\frac{1}{4}x + 1$ getekend. De hoek tussen l en m is met een boogje aangegeven. Deze hoek is ongeveer $14{,}036°$.

b Toon dit aan.

c Bereken de hoek tussen de lijnen k en m in één decimaal nauwkeurig.

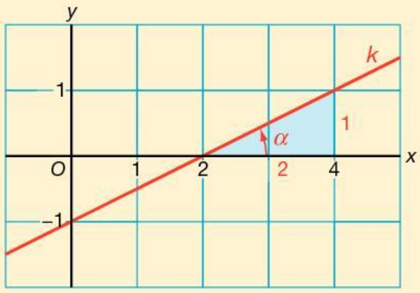


figuur 7.3

Theorie B De hoek tussen twee lijnen

In figuur 7.4 is de lijn k: $y = \frac{1}{2}x - 1$ getekend. De **richtingshoek** van deze lijn is de hoek α waarover je de x-as moet draaien om de x-as te laten samenvallen met k. Hierbij is $-90° < \alpha \leq 90°$.
Je ziet dat $\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ en dit geeft $\alpha \approx 26{,}6°$.

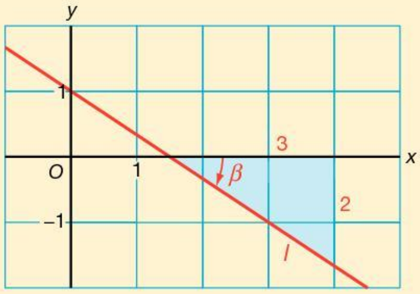
Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = \text{rc}_k$ en $-90° < \alpha \leq 90°$.



figuur 7.4

De richtingshoek van de lijn l: $y = -\frac{2}{3}x + 1$ in figuur 7.5 is aangegeven met β.
Er geldt $\tan(\beta) = \text{rc}_l$, dus $\tan(\beta) = -\frac{2}{3}$ en dit geeft $\beta \approx -33{,}7°$.
De richtingshoek van de lijn l is dus negatief.

Bij berekeningen met richtingshoeken nemen we aan dat de eenheden op de assen gelijk zijn.

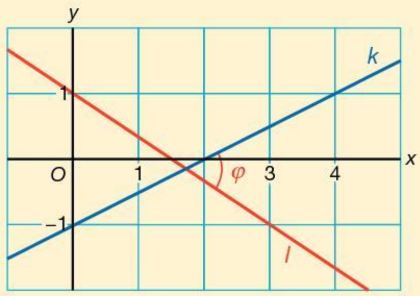


figuur 7.5

7

In figuur 7.6 zijn zowel de lijn k: $y = \frac{1}{2}x - 1$ als de lijn l: $y = -\frac{2}{3}x + 1$ getekend.
De **hoek tussen de lijnen** k en l is aangegeven met φ.
Hier is
$\varphi = \alpha - \beta \approx 26{,}6° - -33{,}7° = 26{,}6° + 33{,}7° \approx 60°$.

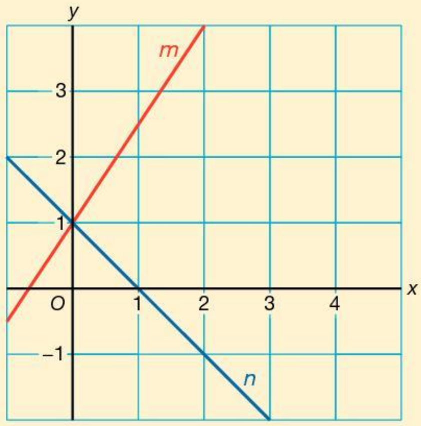
Voor de hoek φ tussen twee lijnen nemen we altijd de hoek waarvoor geldt $0° \leq \varphi \leq 90°$.



figuur 7.6

In figuur 7.7 heb je te maken met de lijnen
m: $y = 1\frac{1}{2}x + 1$ en n: $y = -x + 1$.
Voor de richtingshoek α van m geldt $\tan(\alpha) = 1\frac{1}{2}$, dus $\alpha = 56{,}30...°$ en voor de richtingshoek β van n geldt $\tan(\beta) = -1$, dus $\beta = -45°$.
Omdat $\alpha - \beta = 56{,}30...° - -45° \approx 101{,}3°$ geldt voor de hoek φ tussen m en n dat $\varphi \approx 180° - 101{,}3° = 78{,}7°$.

Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β, waarbij $\alpha > \beta$, geldt
$\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90°$
$\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90°$.

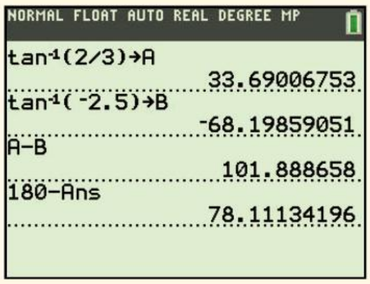


figuur 7.7

Voorbeeld

Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen
k: $2x - 3y = 5$ en l: $5x + 2y = 3$.

Uitwerking
k: $2x - 3y = 5$
$-3y = -2x + 5$
$y = \frac{2}{3}x - 1\frac{2}{3}$, dus $rc_k = \frac{2}{3}$
$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$
l: $5x + 2y = 3$
$2y = -5x + 3$
$y = -2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$, dus $rc_l = -2\frac{1}{2}$
$\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -68{,}19....°$
$\alpha - \beta = 33{,}69...° - -68{,}19...° \approx 102°$
De gevraagde hoek is $180° - 102° = 78°$.



R 11 Om de hoek te berekenen waaronder grafieken elkaar snijden, wordt aangenomen dat de eenheden op de assen gelijk zijn. Licht toe dat deze aanname nodig is.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a $k: y = 3x + 4$ en $l: y = 2x - 1$

b $m: y = 1\frac{1}{2}x + 2$ en $n: y = -\frac{1}{2}x + 3$

c $p: y = 3\frac{1}{2}x - 1$ en $q: y = -1\frac{1}{4}x + 5$

13 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a $k: 3x - 2y = 5$ en $l: 4x - 3y = 6$

b $m: 4x + y = 1$ en $n: 3x + 4y = 2$

c $p: 5x + 3y = 4$ en $q: 6x - 5y = 1$

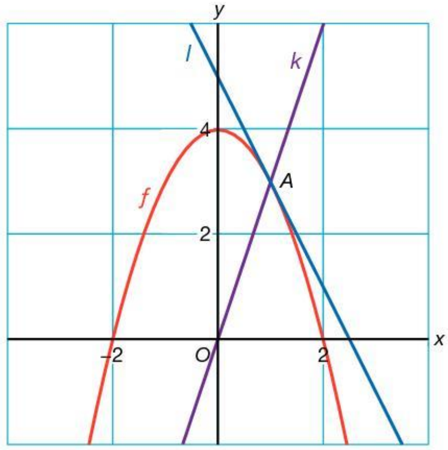
A 14 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.

a $k: y = \frac{2}{3}x + 4$ en $l: 6x - 5y = 3$

b m door (4, 0) en (0, 5) en n door (−2, 0) en (0, 1)

c p door (2, 1) en (5, 6) en q door (−3, 1) en (2, −6)

O 15 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4$ en de lijn $k: y = 3x$. Het punt $A(1, 3)$ is een snijpunt van k en de grafiek van f. De lijn l raakt de grafiek in A. Zie figuur 7.8.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek van de lijnen k en l.



figuur 7.8

Theorie C De hoek tussen twee krommen

Om de hoek tussen een kromme en een rechte lijn te berekenen, gebruik je dat de helling van de kromme in een punt gelijk is aan de helling van de raaklijn in dat punt.
De hoek tussen de lijn k en de raaklijn l in opgave 15 is dus de hoek die de lijn k maakt met de grafiek van f in het punt A.

Heb je te maken met de grafieken van twee functies, dan is de hoek tussen de twee grafieken in een snijpunt gelijk aan de hoek tussen de twee raaklijnen in dat punt.

Deze afspraak geldt algemeen voor krommen.

De hoek tussen twee krommen in een snijpunt A is gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in A.

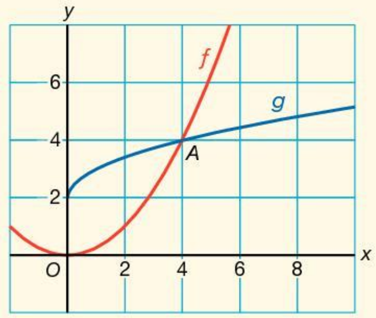
© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = \sqrt{x} + 2$.
Bereken langs algebraïsche weg de hoek tussen de grafieken van f en g in het snijpunt $A(4, 4)$. Rond af op één decimaal.

Uitwerking

k is de raaklijn van de grafiek van f in A.
$f(x) = \frac{1}{4}x^2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x$, dus $\text{rc}_k = f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.
l is de raaklijn van de grafiek van g in A.
$g(x) = \sqrt{x} + 2$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, dus $\text{rc}_l = g'(4) = \dfrac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$.
$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2$ geeft $\alpha = 63{,}43...°$
$\tan(\beta) = \text{rc}_l = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14{,}03...°$
De gevraagde hoek is $\alpha - \beta \approx 49{,}4°$.



figuur 7.9

16 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ en $g(x) = 2\frac{1}{2}\sqrt{x}$.
Bereken langs algebraïsche weg in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de grafieken van f en g in het snijpunt $A(1, 2\frac{1}{2})$.

17 Bereken langs algebraïsche weg in één decimaal nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = x^2 - 10x + 24$ elkaar snijden.

7

18 **a** Bereken langs algebraïsche weg in graden nauwkeurig de hoeken waaronder de parabolen $p_1 : y = x^2$ en $p_2 : y = -x^2 + 4x + 6$ elkaar snijden.
b Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = -2x + 6$ elkaar snijden.

A 19 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{4x + 5}$ en $g(x) = -x^2 + 6\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $A(1, 3)$ en $B(5, 5)$.
a Toon dit aan.
b Bereken langs algebraïsche weg in graden nauwkeurig de hoeken waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden in de punten A en B.

D 20 Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$ en $g(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2}$.
Bereken langs algebraïsche weg in één decimaal nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden.

© Noordhoff Uitgevers bv

Terugblik

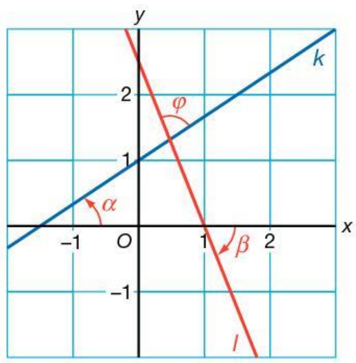
De assenvergelijking van een lijn

De vergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ heet de assenvergelijking van een lijn.

De lijn snijdt de assen in de punten $(a, 0)$ en $(0, b)$.
Snijdt de lijn k de assen in de punten $(5, 0)$ en $(0, -6)$, dan hoort hierbij de vergelijking $\frac{x}{5} + \frac{y}{-6} = 1$, ofwel $6x - 5y = 30$.
Snijdt de lijn l de assen in de punten $(8, 0)$ en $(0, p)$ en gaat l door het punt $(5, 2)$, dan bereken je p als volgt.
l: $\frac{x}{8} + \frac{y}{p} = 1$, ofwel l: $px + 8y = 8p$.
$(5, 2)$ op l geeft $5p + 16 = 8p$, dus $-3p = -16$ en dit geeft $p = 5\frac{1}{3}$.

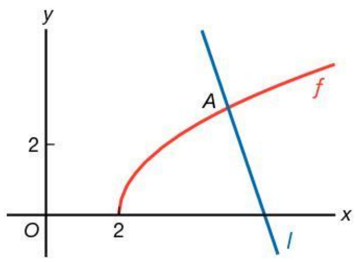
De hoek tussen twee lijnen

Voor de richtingshoek α van een lijn l geldt $-90° < \alpha \leq 90°$ en $\tan(\alpha) = \text{rc}_l$.
De lijn k: $y = \frac{2}{3}x + 1$ in de figuur hiernaast heeft richtingshoek α.
Er geldt $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ en dit geeft $\alpha \approx 33{,}69°$.
De lijn l: $y = -2\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ heeft richtingshoek β. Er geldt $\tan(\beta) = -2\frac{1}{2}$ en dit geeft $\beta \approx -68{,}20°$.
De hoek tussen k en l is in de figuur aangegeven met φ.
De hoek tussen de lijnen is de niet-stompe hoek tussen de lijnen.
Omdat $\alpha - \beta \approx 33{,}69° - -68{,}20° = 101{,}89°$ is
$\varphi \approx 180° - 101{,}89° \approx 78°$.



De hoek tussen twee krommen

De hoek tussen twee krommen in een snijpunt A is gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in A.



Om de hoek tussen de grafiek van $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ en de lijn l: $y = -3x + 18$ in het snijpunt $A(5, 3)$ langs algebraïsche weg te berekenen, ga je als volgt te werk.

- Bereken $f'(5)$ en rc_l.
  $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ geeft $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x - 6}}$,
  dus $f'(5) = \frac{3}{2\sqrt{15 - 6}} = \frac{1}{2}$ en $\text{rc}_l = -3$.
- Bereken de richtingshoek α van de raaklijn k in A aan de grafiek van f en de richtingshoek β van lijn l.
  $\tan(\alpha) = \text{rc}_k = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26{,}56...°$ en $\tan(\beta) = \text{rc}_l = -3$ geeft $\beta = -71{,}56...°$
- Bereken de hoek φ tussen de lijnen k en l.
  $\alpha - \beta = 26{,}56...° - -71{,}56...° = 98{,}13...°$, dus $\varphi = 180° - 98{,}13...° \approx 81{,}9°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

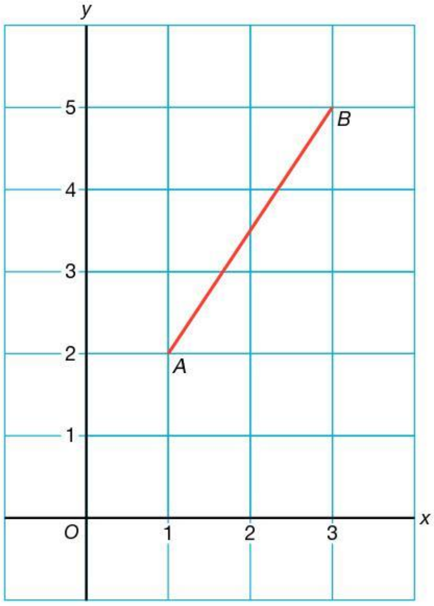
7.2 Afstanden bij punten en lijnen

O 21 Gegeven zijn de punten $A(1, 2)$ en $B(3, 5)$. Zie figuur 7.11.

a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.

b Het punt M is het midden van het lijnstuk AB. Geef de coördinaten van M.

c Geef de coördinaten van het midden N van de punten $C(83, 61)$ en $D(89, 69)$.



figuur 7.11

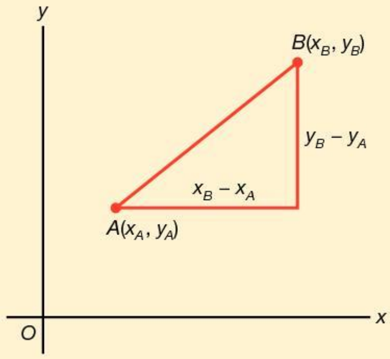
Theorie A De afstand tussen twee punten

De afstand tussen twee meetkundige figuren is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen die figuren.
De afstand tussen de punten A en B is dus de lengte van het lijnstuk AB.
Voor de lengte van het lijnstuk AB bestaat de notatie $d(A, B)$.
In deze notatie is de letter d van distance (afstand) gebruikt.

In figuur 7.12 zijn de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ getekend. Met de stelling van Pythagoras in de getekende driehoek vind je

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, dus de afstand tussen de punten A en B is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Om de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB te berekenen, neem je het gemiddelde van de x-coördinaten van A en B en het gemiddelde van de y-coördinaten van A en B.
Zo krijg je $M(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B))$.



figuur 7.12

Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt
- **de afstand tussen A en B is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$**
- **de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.**

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Voor $q > 0$ zijn gegeven de punten $A(0, q)$ en $B(q, 5)$.

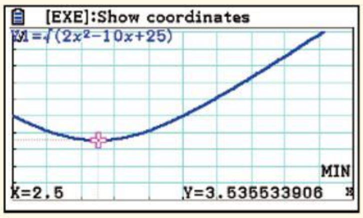
a Druk de afstand tussen de punten A en B uit in q.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de minimale afstand tussen A en B.

c Bereken vanaf welke waarde van q de afstand tussen A en B groter is dan 7. Rond af op twee decimalen.

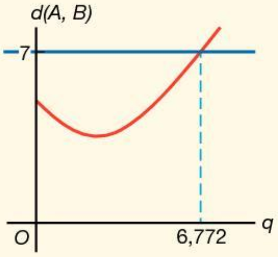
Uitwerking

a $d(A, B) = \sqrt{(q-0)^2 + (5-q)^2} = \sqrt{q^2 + 25 - 10q + q^2} = \sqrt{2q^2 - 10q + 25}$



b Voer in $y_1 = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$.
De optie minimum geeft $x = 2{,}5$ en $y \approx 3{,}54$.
De minimale afstand is 3,54.

c Voer in $y_2 = 7$.
Intersect geeft $x \approx 6{,}772$.



Dus vanaf $q = 6{,}78$. ← Let op met afronden.

22 Voor $p > 0$ zijn gegeven de punten $A(p, 3)$ en $B(p + 2, 2p)$.

a Druk de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB uit in p.

b Druk de afstand tussen A en B uit in p.

c Bereken de minimale afstand tussen A en B.

d Bereken vanaf welke waarde van p de afstand tussen A en B groter is dan 5. Rond af op twee decimalen.

23 Voor $p > 0$ en $q > 0$ zijn gegeven de punten $A(0, p)$ en $B(p + q, q)$.
Voor de afstand d tussen de punten A en B geldt $d = \sqrt{2p^2 + 2q^2}$.

a Toon dit aan.

b Voor $q = 2p$ is de formule van d te schrijven in de vorm $d = p\sqrt{c}$.
Bereken c.

c Er geldt $q = \sqrt{p}$ en $d = 12$.
Bereken p algebraïsch.

A 24 Gegeven zijn de punten $A(3, 4)$ en $B(p + 5, p + 2)$.
a Bereken voor welke waarde van p het midden M van het lijnstuk AB op de lijn k: $y = 2x - 3$ ligt.

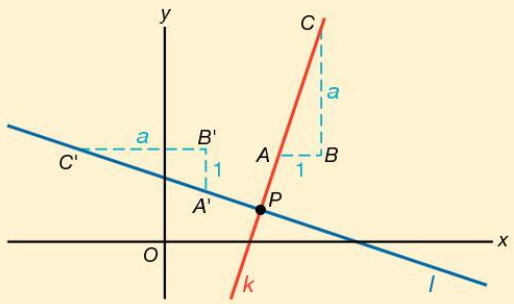
De afstand d tussen de punten A en B is te schrijven in de vorm $d = \sqrt{ap^2 + b}$.
b Bereken a en b.
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de minimale afstand tussen de punten B en $C(2p, 3p)$.

O 25 Bereken de hoek tussen de lijnen k: $y = 2x - 2$ en l: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Theorie B Onderling loodrechte lijnen

In opgave 25 heb je gezien dat de lijnen k met $\text{rc}_k = 2$ en l met $\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$ loodrecht op elkaar staan.
Ook de lijnen m met $\text{rc}_m = 5$ en n met $\text{rc}_n = -\frac{1}{5}$ staan loodrecht op elkaar.

In het algemeen staan de lijnen k en l met $\text{rc}_k = a$ en $\text{rc}_l = -\dfrac{1}{a}$ loodrecht op elkaar.
Dus als $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen k en l loodrecht op elkaar.



figuur 7.13 $k \perp l$ omdat $\text{rc}_k = a$ en $\text{rc}_l = -\dfrac{1}{a}$.

Als voor de lijnen k en l geldt $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de lijn k die door het punt $A(6, 5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l: $y = 4x - 1$.

Uitwerking

$$\left.\begin{array}{l} k \perp l \text{, dus } \text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1 \\ \text{rc}_l = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{rc}_k \cdot 4 = -1 \\ \text{rc}_k = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } A(6,5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{4} \cdot 6 + b = 5 \\ -1\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 6\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus k: $y = -\frac{1}{4}x + 6\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

26 Stel een vergelijking op van de lijn

a k die door het punt $A(6, 7)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l: $y = 3x - 2$

b m die door het punt $B(-3, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn n: $y = \frac{1}{2}x + 2$

c p die door het punt $C(2, -5)$ gaat en loodrecht staat op de lijn q: $y = -\frac{2}{7}x + 3$.

27 Gegeven is de lijn k: $2x - 3y = 5$.
Elke lijn met een vergelijking van de vorm $3x + 2y = c$ staat loodrecht op k.

a Toon dit aan.

b De lijn l gaat door het punt $A(4, 1)$ en staat loodrecht op k
Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

c De lijn m gaat door het punt $B(3, -1)$ en staat loodrecht op de lijn n: $4x + 5y = 6$.
Stel van m een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

De lijn k: $ax + by = c$ staat loodrecht op de lijn l: $bx - ay = d$.

28 De lijn k gaat door de punten $(3, 0)$ en $(0, 5)$.

a Stel van k een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

b De lijn l gaat door het punt $A(2, -4)$ en staat loodrecht op k.
Stel van l een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

c De lijn m gaat door de punten $(p, 0)$ en $(0, 2p)$.
De lijn n gaat door het punt $B(5, -3)$ en staat loodrecht op m.
Stel van n een vergelijking op van de vorm $ax + by = c$.

29 De lijn k gaat door de punten $A(2, 3)$ en $B(7, 5)$.

a Stel van k de vergelijking op in de vorm $y = ax + b$.

b De lijn l gaat door het punt $C(4, 6)$ en staat loodrecht op k.
Stel van l een vergelijking op.

c De lijn m gaat door de punten $D(-3, 4)$ en $E(2, -5)$.
De lijn n gaat door het punt $F(3, 7)$ en staat loodrecht op m.
Stel van n de formule op.

A 30 Stel een vergelijking op van de lijn

a k die door het punt $A(6, 15)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l: $y = -\frac{3}{5}x + 1$

b m die door het punt $B(2, -2)$ gaat en loodrecht staat op de lijn n: $6x - 7y = 3$

c p die door het punt $C(-5, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn die de assen snijdt in de punten $(-4, 0)$ en $(0, 3)$

d q die door het punt $D(-6, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn door de punten $E(1, 5)$ en $F(5, -1)$.

D 31 In deze opgave is $p \neq 0$ en $q \neq 0$.
De lijn k door de punten $(2p, 0)$ en $(0, 3p)$ staat loodrecht op de lijn l door de punten $(3q, 0)$ en $(0, aq)$.
Bereken a.

O 32 Gegeven is de lijn k: $y = \frac{1}{2}x$ en het punt $A(1, 3)$.
Zie figuur 7.14.
De lijn l: $y = -2x + 5$ gaat door A en staat loodrecht op k.

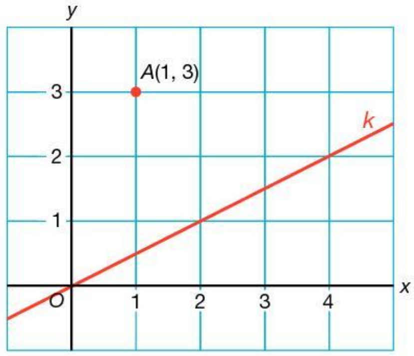
a Toon dit aan.

De lijnen k en l snijden elkaar in het punt B.

b Toon aan dat B het punt $(2, 1)$ is.

De afstand van A tot k is de lengte van het lijnstuk AB.

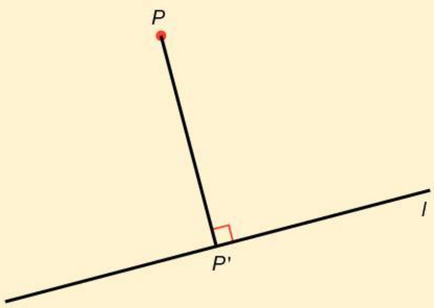
c Bereken exact de afstand van A tot k.



figuur 7.14

Theorie C De afstand van een punt tot een lijn

Bij de afstand van een punt tot een lijn speelt het begrip **loodrechte projectie** een rol.
In figuur 7.15 is P' de loodrechte projectie van het punt P op de lijn l.
De afstand van het punt P tot de lijn l is gelijk aan de lengte van het lijnstuk PP'. Notatie $d(P, l) = PP'$.



figuur 7.15

De afstand van een punt *P* tot een lijn *l* is de afstand van *P* tot zijn loodrechte projectie *P'* op *l*.

Voor de berekening van de afstand van een punt tot een lijn gebruiken we het volgende werkschema.

Werkschema: het berekenen van de afstand van een punt *A* tot de lijn *k*

1. Stel een vergelijking op van de lijn l door A die loodrecht staat op k.
2. Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l.
3. Gebruik $d(A, k) = d(A, B)$.

7

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Bereken exact de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn k: $3x + 2y = 12$.

Uitwerking
De lijn l gaat door A en staat loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l: 2x - 3y = c \\ A(5, 5) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5$$

Dus l: $2x - 3y = -5$.
k en l snijden geeft het punt B.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 9x + 6y = 36 \\ 4x - 6y = -10 \end{cases} +$$

$$13x = 26$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} 3 \cdot 2 + 2y = 12$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

Dus $B(2, 3)$.
$d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

33 Bereken exact de afstand van
- **a** het punt $A(3, 0)$ tot de lijn k: $y = \frac{1}{2}x + 1$
- **b** het punt $B(6, 0)$ tot de lijn l: $2x + y = 2$
- **c** de oorsprong tot de lijn m: $y = -3x + 10$
- **d** de oorsprong tot de lijn n: $3x - 4y = 12$.

34 Bereken in twee decimalen nauwkeurig de afstand van het punt $A(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ tot de lijn door de punten $B(2, 1)$ en $C(7, 3)$.

35 Gegeven zijn de lijnen $k: x + 3y = 3$ en $l: x + y = 9$. Onderzoek met een berekening of het punt $A(1, 4)$ dichter bij k dan bij l ligt.

A 36 Gegeven is $\triangle ABC$ met de punten $A(1, 0)$, $B(7, 4)$ en $C(3\frac{1}{2}, 6)$.
- **a** Bereken exact de afstand van het punt C tot de lijn door de punten A en B.
- **b** Bereken algebraïsch de oppervlakte van $\triangle ABC$.

Terugblik

De afstand tussen twee punten

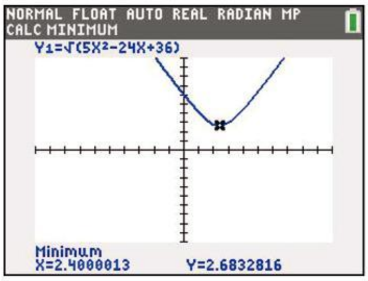
Voor de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ geldt

- de afstand tussen A en B is $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- de coördinaten van het midden M van het lijnstuk AB zijn $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ en $y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B)$.

Voor de punten $A(p, 3p)$ en $B(2p, p + 6)$ geldt dus

- het midden M is $M(\frac{1}{2}(p + 2p), \frac{1}{2}(3p + p + 6)) = M(1\frac{1}{2}p, 2p + 3)$
- $d(A, B) = \sqrt{(2p - p)^2 + (p + 6 - 3p)^2} = \sqrt{p^2 + (6 - 2p)^2} =$
  $\sqrt{p^2 + 36 - 24p + 4p^2} = \sqrt{5p^2 - 24p + 36}$.

Door de formule $y_1 = \sqrt{5x^2 - 24x + 36}$ in te voeren op de GR kun je de minimale afstand tussen de punten A en B berekenen. De GR geeft dat de minimale afstand ongeveer 2,68 is voor $p = 2{,}4$.



Onderling loodrechte lijnen

Als voor de lijnen k en l geldt $rc_k \cdot rc_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.
De lijnen m: $4x + 3y = 1$ en n: $3x - 4y = 2$ staan loodrecht op elkaar, want $rc_m \cdot rc_n = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$.
Je krijgt de formule van de lijn k die door het punt $A(5, 4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l door de punten $B(-1, 3)$ en $C(5, -2)$ als volgt.

$$rc_l = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 3}{5 - -1} = -\frac{5}{6}, \text{ dus } rc_k = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 1\frac{1}{5}x + b \\ \text{door } A(5, 4) \end{array}\right\} 1\frac{1}{5} \cdot 5 + b = 4, \text{ dus } b = -2 \text{ en } k\text{: } y = 1\frac{1}{5}x - 2.$$

De lijn q door het punt $S(4, -3)$ die loodrecht staat op de lijn p: $2x - 5y = 1$ is van de vorm $5x + 2y = c$.
$c = 5 \cdot 4 + 2 \cdot -3 = 14$,
dus q: $5x + 2y = 14$.

De afstand van een punt tot een lijn

De afstand van een punt P tot een lijn l is de afstand tot zijn loodrechte projectie P' op l.

Om de afstand van het punt $A(2, 5)$ tot de lijn k: $y = \frac{1}{3}x + 1$ te berekenen ga je als volgt te werk.

1. Stel een vergelijking op van de lijn l door $A(2, 5)$ die loodrecht staat op k.
   Omdat $rc_k = \frac{1}{3}$ is $rc_l = -3$.
   l: $y = -3x + b$ door $(2, 5)$ geeft $b = 11$, dus l: $y = -3x + 11$.
2. Bereken de coördinaten van het snijpunt B van k en l.
   $y = \frac{1}{3}x + 1$ en $y = -3x + 11$ geeft $\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 11$, dus $3\frac{1}{3}x = 10$ en dit geeft $x = 3$, dus $B(3, 2)$.
3. De afstand van A tot k, dus $d(A, k)$ is de afstand van A tot B.
   $d(A, k) = d(A, B) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

© Noordhoff Uitgevers bv

7.3 Cirkelvergelijkingen

O 37 Gegeven is het punt $M(1, 4)$ en het variabele punt $P(x, y)$.
Voor de afstand d tussen M en P geldt $d^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2$.
a Licht dit toe.

In het geval $d = 5$ krijg je de vergelijking
$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$.
b Licht toe dat deze vergelijking hoort bij de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal $r = 5$.
c Stel een vergelijking op van de cirkel met middelpunt $M(1, 4)$ en straal 10.
d Geef van de cirkel met vergelijking $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ de coördinaten van het middelpunt en de straal.

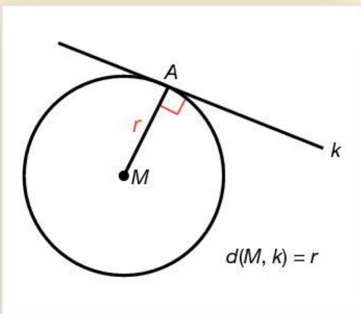
Theorie A De cirkelvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

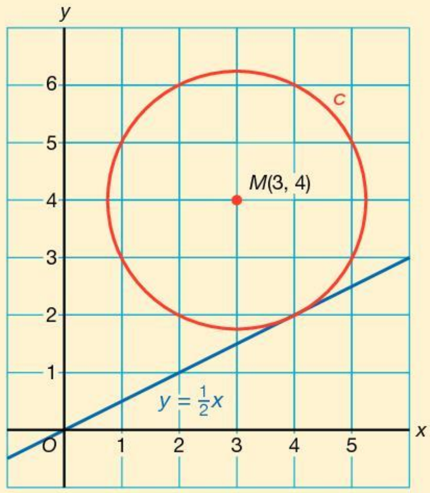
Voor een punt $P(x, y)$ op afstand r van $M(a, b)$ geldt
$d(P, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ en $d(P, M) = r$, dus
$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$.
Kwadrateren geeft $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Hiermee is een vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r opgesteld.

De cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r heeft vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

In figuur 7.16 zie je de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die de lijn k: $y = \frac{1}{2}x$ raakt.
Omdat een raaklijn van een cirkel loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de straal van de cirkel gelijk aan de afstand van M tot k, dus $r = d(M, k)$.

$d(M, k) = r$ en
$MA \perp k$.





figuur 7.16

7

Voorbeeld

Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $M(3, 4)$ die de lijn k: $y = \frac{1}{2}x$ raakt.

Uitwerking

De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k.

$\text{rc}_k = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_l = -2$

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = -2x + b \\ \text{door } M(3, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 4 \\ -6 + b = 4 \\ b = 10 \end{array}$$

l: $y = -2x + 10$ snijden met k: $y = \frac{1}{2}x$ geeft $-2x + 10 = \frac{1}{2}x$

$$-2\tfrac{1}{2}x = -10$$
$$x = 4$$

Het snijpunt van k en l is het raakpunt $A(4, 2)$.

$r = d(M, k) = d(M, A) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

c: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

38 Stel een vergelijking op van de cirkel

a c_1 met middelpunt $(2, -5)$ en straal 3

b c_2 met middelpunt $(3, 1)$ die de x-as raakt

c c_3 met middelpunt $(-4, 2)$ die de y-as raakt

d c_4 met middelpunt $(3, 4)$ die door de oorsprong gaat.

7

39 Gegeven is de lijn k: $y = \frac{1}{3}x$.

a Stel een vergelijking op van de cirkel c_1 met middelpunt $M(5, 5)$ die k raakt.

b Er zijn twee cirkels c_2 en c_3 waarvan het middelpunt op k ligt, die straal 2 hebben en die de x-as raken.
Stel van zowel c_2 als c_3 een vergelijking op.

c Er zijn twee cirkels c_4 en c_5 waarvan het middelpunt op k ligt, die straal 12 hebben en die de y-as raken.
Stel van zowel c_4 als c_5 een vergelijking op.

40 Gegeven zijn de punten $A(-1, 4)$ en $B(9, 4)$. Het lijnstuk AB is een middellijn van cirkel c_1.
Een vergelijking van c_1 is $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$.

a Toon dit aan.

c_1 snijdt de x-as in de punten $C(1, 0)$ en $D(7, 0)$ en de y-as in de punten $E(0, 1)$ en $F(0, 7)$.

b Toon aan dat de coördinaten van C, D, E en F juist zijn door vergelijkingen op te lossen.

Een middellijn van cirkel c_2 is CD en een middellijn van cirkel c_3 is EF.

c Stel van zowel c_2 als c_3 een vergelijking op.

© Noordhoff Uitgevers bv

A 41 Gegeven zijn de punten $A(3, 7)$ en $B(9, 1)$ en de lijn k: $3x + 4y = 12$.
Stel een vergelijking op van de cirkel
a c_1 met middelpunt A die de x-as raakt
b c_2 met middelpunt B die door de oorsprong gaat
c c_3 met middellijn AB
d c_4 met middelpunt A die k raakt
e c_5 met middelpunt de oorsprong die k raakt.

O 42 Een vergelijking van de cirkel met middelpunt $(2, {}^-3)$ en straal 4 is $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.
Laat zien dat ook de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ bij deze cirkel hoort.

Theorie B Kwadraatafsplitsen

In opgave 42 heb je gezien dat de cirkelvergelijkingen $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ en $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ op hetzelfde neerkomen. Je kreeg de tweede vorm door de haakjes bij de eerste vorm weg te werken. Maar hoe krijg je de eerste vorm uit de tweede vorm? De eerste vorm is immers prettig omdat je meteen de coördinaten van het middelpunt en de straal kunt aflezen.

Bij het herleiden van de vergelijking $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ tot de vorm $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ gebruik je de techniek van het **kwadraatafsplitsen**.

Om bij de vorm $x^2 - 4x$ een kwadraat af te splitsen vul je eerst $x^2 - 4x$ aan tot een kwadraat.
Je krijgt $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$.

Bij $y^2 + 6y$ krijg je $y^2 + 6y = y^2 + 6y + 9 - 9 = (y+3)^2 - 9$.

Dus bij $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ krijg je
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$
$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 - 3 = 0$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

Om in het voorbeeld op de volgende bladzijde het kwadraat af te splitsen bij $x^2 + 8x$ vul je $x^2 + 8x$ eerst aan tot $(x+a)^2$.
Omdat $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ is $2ax = 8x$, dus is a de helft van 8.
Je krijgt $x^2 + 8x = x^2 + 8x + 16 - 16 = (x+4)^2 - 16$.
En omdat de helft van ${}^-3$ gelijk is aan ${}^-1\frac{1}{2}$, krijg je

$y^2 - 3y = y^2 - 3y + (1\frac{1}{2})^2 - (1\frac{1}{2})^2 = (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}$.

7

© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Schrijf $x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$ in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$.

Uitwerking

$x^2 + y^2 + 8x - 3y + 6 = 0$
$x^2 + 8x + y^2 - 3y + 6 = 0$
$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 - 3y + 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$
$(x + 4)^2 - 16 + (y - 1\frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4} + 6 = 0$
$(x + 4)^2 + (y - 1\frac{1}{2})^2 = 12\frac{1}{4}$

43 Schrijf in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$.
a $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$
b $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 13 = 0$
c $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
d $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$

44 Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.
a $c_1: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$
b $c_2: x^2 + y^2 - 8x + 10y + 31 = 0$
c $c_3: x^2 + y^2 + 5x + 3y + 3 = 0$
d $c_4: x^2 + y^2 - 7x + 8y = 0$

7

O 45 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ en de punten $A(0, 4)$ en $B(-3, 0)$. Van deze cirkel is het middelpunt $M(-3, 4)$ en is de straal $\sqrt{10}$.
a Toon dit aan.
b Bereken $d(M, A)$ en $d(M, B)$.
c Ligt A op, binnen of buiten c? Licht toe.
d Ligt B op, binnen of buiten c? Licht toe.

Informatief Kwadraatafsplitsen en tweedegraadsvergelijkingen

Elke tweedegraadsvergelijkingen is op te lossen met kwadraatafsplitsen.
Je hebt dan de *abc*-formule niet nodig.
Bij het oplossen van $x^2 - 6x - 4 = 0$ met kwadraatafsplitsen krijg je

$x^2 - 6x - 4 = 0$
$x^2 - 6x + 9 - 9 - 4 = 0$
$(x - 3)^2 = 13$
$x - 3 = \sqrt{13} \vee x - 3 = -\sqrt{13}$
$x = 3 + \sqrt{13} \vee x = 3 - \sqrt{13}$

En bij $x^2 - 5x + 1 = 0$ krijg je

$x^2 - 5x + 1 = 0$
$x^2 - 5x + \left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$
$\left(x - 2\frac{1}{2}\right)^2 = 5\frac{1}{4}$
$x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{21}{4}} \vee x - 2\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{21}{4}}$
$x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21} \vee x = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie C De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Door de vergelijking $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$ in de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ te schrijven, kun je zien dat je met een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r te maken hebt.
Je gebruikt hierbij kwadraatafsplitsen.

Voorbeeld

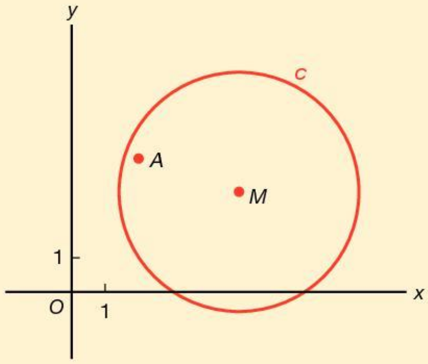
Onderzoek met een berekening of het punt $A(2, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$ ligt.

Uitwerking

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 21 = 0$
$x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 - 6y + 9 - 9 + 21 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 21 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 13$
Cirkel met middelpunt $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{13}$.

$d(M, A) = \sqrt{(2 - 5)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} < r$, dus A binnen de cirkel.

In figuur 7.17 is de cirkel c van het voorbeeld met het punt A getekend.
Om de afstand van het punt A tot de cirkel te berekenen gebruiken we dat de afstand van A tot c gelijk is aan de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen A en c.



figuur 7.17

De afstand van een punt tot een kromme is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk tussen het punt en de kromme.

Dit betekent dat in figuur 7.17 de afstand van A tot c, dus $d(A, c)$, gelijk is aan $d(M, c) - d(M, A)$.
Ofwel $d(A, c) = r - d(M, A)$.

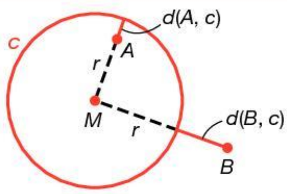
Omdat $r = \sqrt{13}$ en $d(M, A) = \sqrt{10}$ is $d(A, c) = \sqrt{13} - \sqrt{10}$.

Als je te maken hebt met een punt B buiten c, dan is $d(B, c) = d(M, B) - r$.

Omdat in figuur 7.17 geldt $d(M, O) = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ is $d(O, c) = \sqrt{34} - \sqrt{13}$.

Afstand van punt tot cirkel c met middelpunt M en straal r

Voor punt A binnen c geldt $d(A, c) = r - d(M, A)$.
Voor punt B buiten c geldt $d(B, c) = d(M, B) - r$.



46 Onderzoek met een berekening of

a het punt $A(-1, 2)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ ligt

b de oorsprong op, binnen of buiten de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 2 = 0$ ligt

c het punt $B(1, 4)$ op, binnen of buiten de cirkel $c_3: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ ligt.

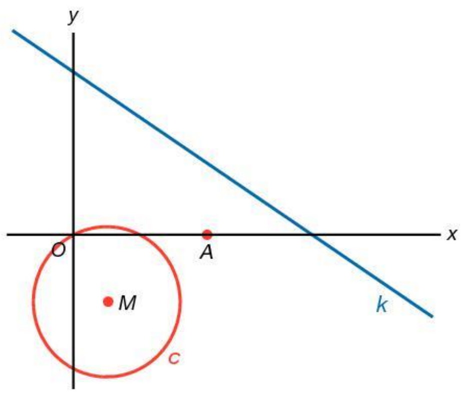
47 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ en de punten $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$ en $C(9, 4)$.
Bereken exact.

a $d(A, c)$

b $d(B, c)$

c $d(C, c)$

A 48 Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, de lijn $k: 4x + 6y = 29$ en het punt $A(4, 0)$. Zie figuur 7.18.
Toon op algebraïsche wijze aan dat het punt A dichter bij c dan bij k ligt.



figuur 7.18

7

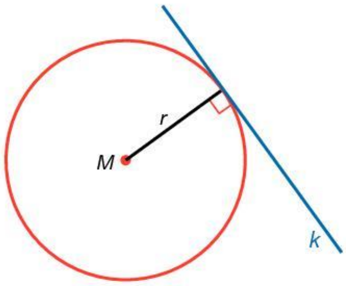
D 49 Bereken voor welke waarde van a de lijn k: $2x + y = 18$ raakt aan de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x + a = 0$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Terugblik

De cirkelvergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

De cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r heeft vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. In de figuur hiernaast geldt $d(M, k) = r$.



Om een vergelijking op te stellen van de cirkel met middelpunt $M(5, 2)$ die de lijn k: $2x - y = -2$ raakt ga je als volgt te werk.

1 Stel een vergelijking op van de lijn l door M die loodrecht staat op k.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon x + 2y = c \\ \text{door } M(5,2) \end{array}\right\} c = 5 + 2 \cdot 2 = 9, \text{dus } l\colon x + 2y = 9$$

2 Bereken de coördinaten van het snijpunt van k en l. Dit is het raakpunt A.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ x + 2y = 9 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ \underline{x + 2y = 9} \; + \end{cases}$$
$$5x \quad = 5, \text{dus } x = 1$$

Het raakpunt is $A(1, 4)$.

3 Bereken de straal van de cirkel met $r = d(M, A)$.
$r = d(M, A) = \sqrt{(1-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

4 Gebruik de coördinaten van M en de straal om een vergelijking van c op te stellen.
Je krijgt $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

De cirkelvergelijking $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Om de vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ te herleiden tot de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ga je kwadraatafsplitsen.
Je krijgt $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$

$$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 - 25 + (y - 2)^2 - 4 + 9 = 0$$
$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

Je hebt dus te maken met de cirkel met middelpunt $M(5, 2)$ en straal $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Om de afstand van het punt $A(1, 6)$ tot de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ te berekenen, gebruik je de afstand van A tot $M(5, 2)$.
$d(A, M) = \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
Omdat $d(A, M) > r$ ligt A buiten c.
$d(A, c) = d(A, M) - r = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$

7

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

O 50 Gegeven is de cirkel c: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ en het punt $A(5, 2)$ op c. De lijn k raakt c in A. Zie figuur 7.19.

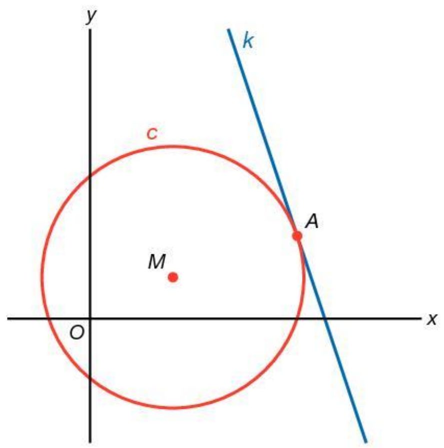
a Hoe kun je controleren dat A op c ligt?

De lijn l gaat door M en A.

b Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van l.

De lijn k staat loodrecht op l.

c Stel de formule van k op.



figuur 7.19

Theorie A Raaklijnen aan cirkels

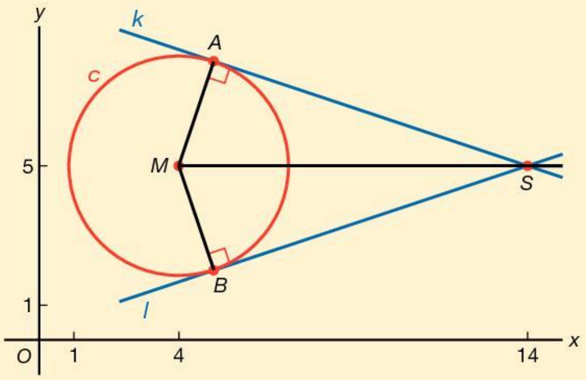
In opgave 50 heb je de formule opgesteld van een raaklijn aan een cirkel in een gegeven raakpunt.
Je gaat daarbij als volgt te werk.

Werkschema: het opstellen van een vergelijking van een raaklijn *k* aan een cirkel *c* met middelpunt *M* in een gegeven punt *A* op *c*

1. Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A.
2. Gebruik $k \perp l$, dus $rc_k \cdot rc_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
3. Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

In het voorbeeld op de volgende bladzijde wordt dit werkschema gebruikt om de vergelijkingen van de raaklijnen k en l op te stellen.

In figuur 7.20 is de cirkel c met middelpunt $M(4, 5)$ en straal $\sqrt{10}$ getekend.
De lijnen k en l raken c en snijden elkaar in het punt $S(14, 5)$.
In $\triangle MSA$ is $MS = 14 - 4 = 10$ en $MA = \sqrt{10}$,
dus $\sin(\angle MSA) = \dfrac{MA}{MS} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.
Dit geeft $\angle MSA = 18{,}43...°$, dus de hoek tussen de lijnen k en l is $2 \cdot 18{,}43...° \approx 36{,}9°$.



figuur 7.20

© Noordhoff Uitgevers bv

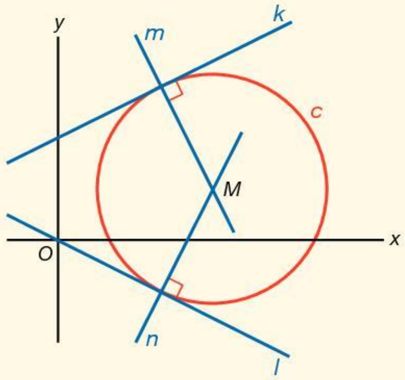
Voorbeeld

Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.
De punten A en B met $x_A = x_B = 2$ en $y_A > y_B$ liggen op c.
De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B.
Stel van k en van l een vergelijking op.

Uitwerking

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \\ x = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2^2 + y^2 - 6 \cdot 2 - 2y + 5 = 0 \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \\ (y+1)(y-3) = 0 \\ y = -1 \vee y = 3 \end{array}$$

$y_A > y_B$ dus $A(2, 3)$ en $B(2, -1)$.
$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 5 = 0$
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$
Dus c heeft middelpunt $M(3, 1)$ en straal $r = \sqrt{5}$.



m door M en A met $\text{rc}_m = \dfrac{3-1}{2-3} = -2$, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} k: y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 2 + b = 3 \\ 1 + b = 3 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus $k: y = \frac{1}{2}x + 2$.

n door M en B met $\text{rc}_n = \dfrac{-1-1}{2-3} = 2$, dus $\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} l: y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } B(2, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ -1 + b = -1 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $l: y = -\frac{1}{2}x$.

51 Zie het voorbeeld met de cirkel $c: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.

a c snijdt de x-as in de punten C en D met $x_C < x_D$.
De lijn p raakt c in C en de lijn q raakt c in D.
Stel van p en van q een vergelijking op.

b De raaklijn l in B gaat door de oorsprong.
Er is nog een lijn door de oorsprong die c raakt.
Toon aan dat bij deze lijn de vergelijking $y = 2x$ hoort door de afstand van M tot deze lijn te berekenen.

7

R 52 Zie het voorbeeld.
In figuur 7.21 zijn c, de punten A en B en de raaklijnen k en l getekend.

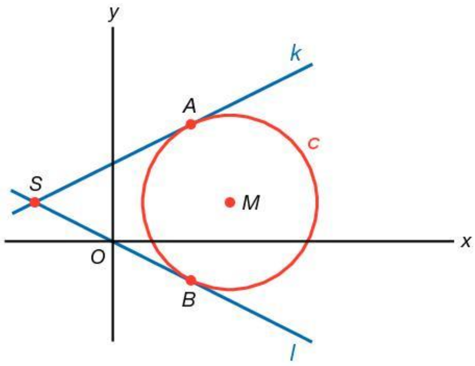
a Bereken de hoek tussen k en l door gebruik te maken van de richtingshoeken van k en l. Rond af op één decimaal.

Het snijpunt van k en l is S.

b Bereken de coördinaten van S.

Door gebruik te maken van de lengte van het lijnstuk MS en de straal van de cirkel is $\angle MSA$ in $\triangle AMS$ te berekenen.

c Bereken op deze manier $\angle MSA$ en gebruik dit om de hoek tussen k en l te berekenen. Rond af op één decimaal.



figuur 7.21

53 De aarde heeft een straal van 6371 km en de maan heeft een straal van 1738 km. Neem in deze opgave aan dat de afstand tussen de middelpunten van de aarde en de maan 384 450 km is.
Bereken in één decimaal nauwkeurig de grootste hoek

a waaronder je de maan ziet vanaf de aarde

b waaronder de aarde te zien is vanaf de maan.

Het internationaal ruimtestation ISS heeft een baan op een afstand van 420 km van de aarde.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de aarde te zien is vanaf het ISS.

54 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$.
De punten A en B met $x_A = x_B = 3$ en $y_A > y_B$ liggen op c.
De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B.

a Stel van k en van l een vergelijking op.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l.

c Er zijn twee raaklijnen aan de cirkel die door de oorsprong gaan. Bereken in graden nauwkeurig de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken.

A 55 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$.
c snijdt de negatieve x-as in het punt A en de positieve x-as in het punt B. Verder ligt het punt $C(1, 3)$ op c.
De lijn k raakt c in A, de lijn l raakt c in B en de lijn m raakt c in C.

a Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en m.

De lijnen l en m snijden elkaar in het punt D.

b Bereken de coördinaten van D.

c Bereken exact de afstand van D tot c.

 © Noordhoff Uitgevers bv

O 56 Gegeven zijn de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ en de lijn k: $y = x - 1$.
Door $y = x - 1$ te substitueren in de cirkelvergelijking krijg je de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$.
a Toon dit aan.
b Los de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ op en bereken de coördinaten van de snijpunten van k met c.

Theorie B Snijpunten van lijnen met cirkels

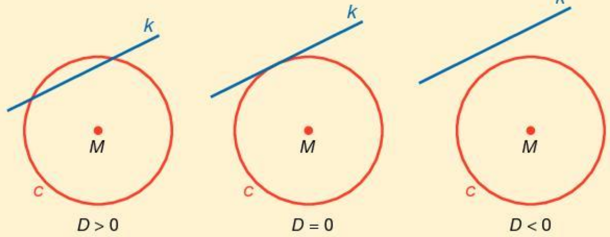
In opgave 56 heb je de coördinaten van de snijpunten van de lijn k: $y = x - 1$ met de cirkel c: $x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$ berekend. Dit deed je door $y = x - 1$ te substitueren in de cirkelvergelijking. Zo kreeg je een vergelijking met alleen de variabele x.

Heb je te maken met de lijn l: $y = x + 1$ en c, dan krijg je
$x^2 + (x + 1)^2 - 10x + 15 = 0$
$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 10x + 15 = 0$
$2x^2 - 8x + 16 = 0$
$x^2 - 4x + 8 = 0$
$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$
Hieruit volgt dat de lijn l geen snijpunten heeft met c.

Heb je te maken met de lijn m: $y = 3x - 5$ en c, dan krijg je
$x^2 + (3x - 5)^2 - 10x + 15 = 0$
$x^2 + 9x^2 - 30x + 25 - 10x + 15 = 0$
$10x^2 - 40x + 40 = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$(x - 2)^2 = 0$
$x = 2$
Hieruit volgt dat de lijn m precies één gemeenschappelijk punt met de cirkel heeft, dus dat m de cirkel raakt. Het raakpunt is (2, 1).
Merk op dat de discriminant van de vergelijking $x^2 - 4x + 4 = 0$ gelijk is aan nul.

De ligging van de lijn $y = ax + b$ ten opzichte van een cirkel

Ontstaat na substitutie van $y = ax + b$ in de cirkelvergelijking een tweedegraadsvergelijking waarvan de discriminant
- groter is dan nul, dan zijn er twee snijpunten
- kleiner is dan nul, dan zijn er geen snijpunten
- gelijk is aan nul, dan raakt de lijn de cirkel.



© Noordhoff Uitgevers bv

Voorbeeld

Gegeven is de cirkel c: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 17$.

a Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn k: $3x + 5y = 37$ met c.

b Bereken voor welke waarden van q de lijn $y = 4x + q$ de cirkel raakt.

Aanpak

b Gebruik de vergelijking van de cirkel in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Uitwerking

a $3x + 5y = 37$

$5y = -3x + 37$

$y = -\frac{3}{5}x + 7\frac{2}{5}$

Substitutie van $y = -\frac{3}{5}x + 7\frac{2}{5}$ in $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 17$

geeft $(x-5)^2 + (-\frac{3}{5}x + 6\frac{2}{5})^2 = 17$.

Voer in $y_1 = (x-5)^2 + (-\frac{3}{5}x + 6\frac{2}{5})^2$ en $y_2 = 17$.

Intersect geeft $x = 4$ en $x = 9$.

$x = 4$ geeft $y = -\frac{3}{5} \cdot 4 + 7\frac{2}{5} = 5$

$x = 9$ geeft $y = -\frac{3}{5} \cdot 9 + 7\frac{2}{5} = 2$.

De snijpunten zijn $(4, 5)$ en $(9, 2)$.

Er staat niet dat het algebraïsch moet, dus je mag de GR gebruiken.

b $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 17$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 17$

$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$

Substitutie van $y = 4x + q$ in $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$ geeft

$x^2 + (4x+q)^2 - 10x - 2(4x+q) + 9 = 0$

$x^2 + 16x^2 + 8qx + q^2 - 10x - 8x - 2q + 9 = 0$

$17x^2 + (8q - 18)x + q^2 - 2q + 9 = 0$

$D = (8q-18)^2 - 4 \cdot 17 \cdot (q^2 - 2q + 9) = 64q^2 - 288q + 324 - 68q^2 + 136q - 612$

$= -4q^2 - 152q - 288$

$D = 0$ geeft $-4q^2 - 152q - 288 = 0$

$q^2 + 38q + 72 = 0$

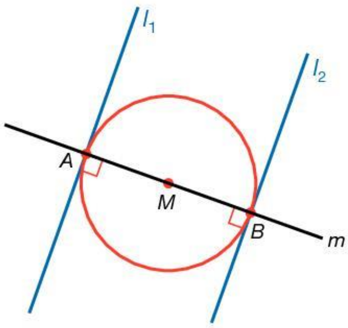
$D = 38^2 - 4 \cdot 1 \cdot 72 = 1156$, dus $\sqrt{D} = 34$

$$q = \frac{-38-34}{2} = -36 \vee q = \frac{-38+34}{2} = -2$$

R 57 Zie het voorbeeld b.
Je kunt q ook op een andere manier berekenen. Daartoe stel je een vergelijking op van de lijn m door het middelpunt M van c die loodrecht staat op $y = 4x + q$.
De snijpunten A en B van m met c zijn raakpunten.

a Bereken de coördinaten van A en B.

b Gebruik dat de lijn $y = 4x + q$ door A of B gaat om de waarden van q te berekenen.



figuur 7.22

© Noordhoff Uitgevers bv

58 Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van
a de lijn $k: y = x + 1$ met de cirkel $c_1: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 9 = 0$
b de lijn $l: x + y = 6$ met de cirkel $c_2: x^2 + y^2 = 26$
c de lijn $m: y = 2x - 1$ met de cirkel $c_3: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$.

59 Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn met de cirkel. Rond zo nodig af op twee decimalen.
a De lijn $k: 2x - 3y + 4 = 0$ en de cirkel $c_1: (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 26$.
b De lijn $l: 3x + 4y = 19$ en de cirkel $c_2: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
c De lijn $m: y = 2x$ en de cirkel $c_3: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

60 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$.
Bereken voor welke a de lijn $y = ax + 1$
a raaklijn is van c
b geen punten gemeenschappelijk heeft met c
c twee snijpunten heeft met c.

61 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$.
Bereken voor welke b de lijn $y = \frac{1}{2}x + b$
a raaklijn is van c
b geen punten gemeenschappelijk heeft met c
c twee snijpunten heeft met c.

A 62 Gegeven is de cirkel $c: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$ en de lijn $k: y = 3x - 6$.
Bereken in graden nauwkeurig onder welke hoek de lijn k de cirkel snijdt.

De hoeken bij beide snijpunten van een lijn met een cirkel zijn gelijk.

A 63 Het lijnstuk AB met $A(-1, 3)$ en $B(7, -1)$ is een middellijn van de cirkel c.
a Stel een vergelijking op van c in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
b Bereken in graden nauwkeurig onder welke hoek de lijn $k: y = -3x$ de cirkel c snijdt.
c Bereken voor welke p de lijn $y = -2x + p$ de cirkel c raakt.
d Bereken voor welke q de lijn $y = qx - 5\frac{1}{2}$ geen punten gemeenschappelijk heeft met c.

© Noordhoff Uitgevers bv

Terugblik

Een vergelijking van een raaklijn aan een cirkel opstellen
Bij het opstellen van een vergelijking van de raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c ga je als volgt te werk.
1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A.
2 Bereken rc_k met behulp van $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$.
3 Stel een vergelijking op van k met behulp van rc_k en de coördinaten van A.

Bij het opstellen van een vergelijking van de lijn k die de cirkel $c\colon (x-6)^2 + (y-2)^2 = 17$ raakt in het punt $A(2, 3)$ krijg je
1 $M(6, 2)$, dus de lijn l door M en A heeft $\text{rc}_l = \frac{3-2}{2-6} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.
2 Uit $\text{rc}_l = -\frac{1}{4}$ en $k \perp l$ volgt $\text{rc}_k = 4$.
3 $\left.\begin{array}{l} k\colon y = 4x + b \\ \text{door } A(2, 3) \end{array}\right\} \; 4 \cdot 2 + b = 3$ geeft $b = -5$
Dus $k\colon y = 4x - 5$.

Snijpunten van lijnen met cirkels
Om de coördinaten van de snijpunten van de lijn $l\colon y = -x + 3$ met de cirkel $c\colon (x-6)^2 + (y-2)^2 = 17$ te berekenen, substitueer je $y = -x + 3$ in de cirkelvergelijking. Je krijgt $(x-6)^2 + (-x+1)^2 = 17$.
Algebraïsch oplossen van deze vergelijking geeft $x^2 - 12x + 36 + x^2 - 2x + 1 = 17$

$$2x^2 - 14x + 20 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x-2)(x-5) = 0$$
$$x = 2 \vee x = 5$$

$x = 2$ geeft $y = -2 + 3 = 1$ en $x = 5$ geeft $y = -5 + 3 = -2$.
De snijpunten van l en c zijn $(2, 1)$ en $(5, -2)$.
Afhankelijk van de vraagstelling mag je de vergelijking die je na substitutie krijgt eventueel grafisch-numeriek oplossen.

Om te berekenen voor welke p de lijn $y = px + 5$ de cirkel $c\colon x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$ raakt, substitueer je $y = px + 5$ in de cirkelvergelijking en gebruik je dat moet gelden $D = 0$ bij de vergelijking die je krijgt.
Substitutie geeft $x^2 + (px+5)^2 - 10x - 4(px+5) + 12 = 0$.
Herleiden geeft $(p^2+1)x^2 + (6p-10)x + 17 = 0$.
Hierbij hoort $D = -32p^2 - 120p + 32$.
$D = 0$ geeft $-32p^2 - 120p + 32 = 0$ ofwel $4p^2 + 15p - 4 = 0$.
Oplossen van deze vergelijking geeft $p = -4 \vee p = \frac{1}{4}$.
Dus de lijnen $y = -4x + 5$ en $y = \frac{1}{4}x + 5$ raken de cirkel.

 © Noordhoff Uitgevers bv

7.5 Meetkunde met GeoGebra

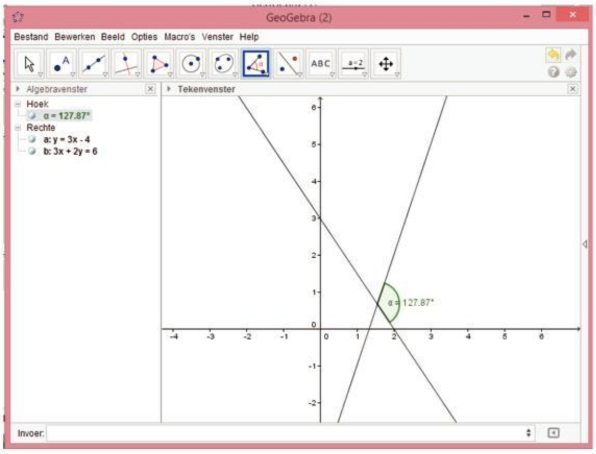
In deze paragraaf ga je met behulp van het computerprogramma GeoGebra meetkundeproblemen verkennen en oplossen.

O 64 Met Hoek kun je met GeoGebra hoeken tussen lijnen berekenen. Bij het gebruik van deze optie kun je twee lijnen of drie punten aanklikken. Dan berekent GeoGebra een van de vier hoeken bij het snijpunt.

a Bereken de hoek tussen de lijnen k: $y = 3x - 4$ en l: $3x + 2y = 6$ door Hoek en vervolgens beide lijnen aan te klikken. Geef een scherpe hoek als antwoord.

b Bereken een stompe hoek tussen de lijnen m: $y = -0{,}5x + 6$ en n: $5x - 2y = 10$.

c Bereken een scherpe hoek tussen de lijnen p: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ en q: $y = -x$.



figuur 7.23

Theorie A Hoek tussen krommen

GeoGebra kan de hoek tussen twee rechte lijnen berekenen. Om de hoek tussen een kromme en een rechte lijn te berekenen gebruik je dat de helling van de kromme in het snijpunt gelijk is aan de helling van de raaklijn in het snijpunt.
Je berekent dus de hoek tussen de lijn en de raaklijn aan de kromme in het snijpunt.

Om de hoek tussen twee krommen te berekenen teken je eerst het snijpunt en vervolgens de beide raaklijnen aan de krommen in het snijpunt.

> De hoek tussen krommen is de niet-stompe hoek tussen de raaklijnen in het snijpunt.

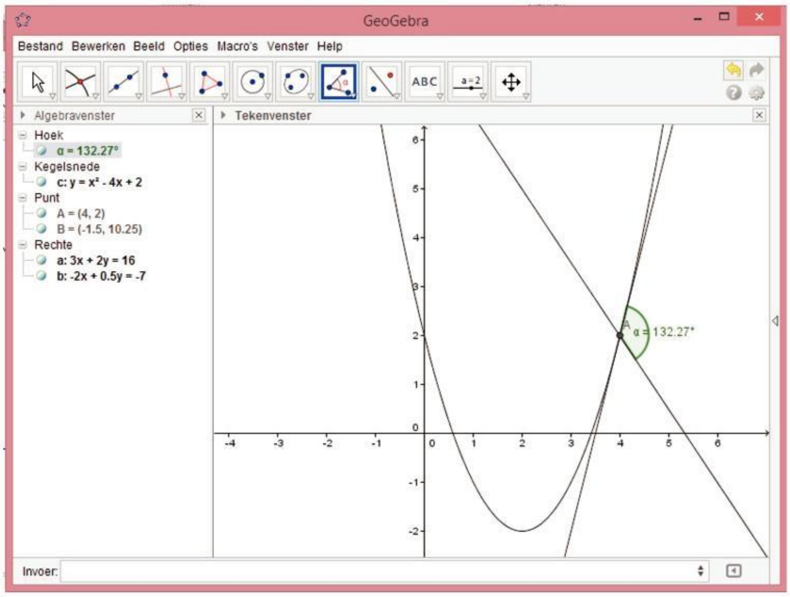
Om een raaklijn aan de kromme c in het punt A te tekenen, tik je bij Invoer de opdracht **raaklijn[A,c]** in.

65 Gegeven zijn de parabool p: $y = x^2 - 4x + 2$ en de lijn l: $3x + 2y = 16$. Het punt A is het rechtersnijpunt van p en l.

a Teken p, l en A. Je krijgt de parabool door op de invoerregel in te tikken y=x^2-4x+2.

b Teken de raaklijn aan p in A.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen p en l in A.



figuur 7.24

7

66 Gegeven is de parabool p: $y = x^2 + 2x - 4$.

a Bereken de hoek tussen p en de y-as.

Op de parabool ligt het punt P zo, dat de raaklijnen in P en $Q(2, 4)$ loodrecht op elkaar staan.

b Onderzoek wat de coördinaten van P zijn. Rond af op één decimaal.

Je krijgt het punt (2, 4) door op de invoerregel in te tikken (2,4).

De raaklijn in de punten R en S aan de parabool maken hoeken van 30° met de lijn $2x + 5y = 10$.

c Onderzoek wat de coördinaten van R en S zijn. Rond af op één decimaal.

O 67 Gegeven zijn de punten $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, 5)$ en $D(1, 5)$. E is het midden van BC en F is het midden van CD.

a Teken het vierkant $ABCD$ en de lijnstukken AE en BF.

Het snijpunt van de lijnstukken AE en BF is S.
Om de lengte van een lijnstuk te berekenen hoef je in GeoGebra dat lijnstuk alleen maar te tekenen. In het algebravenster vind je de lengte van het lijnstuk.

b Bereken de lengte van het lijnstuk DS.

c Teken de cirkel met middelpunt D die door A gaat.
Waarom gaat deze cirkel door S?

© Noordhoff Uitgevers bv

Theorie B De afstand van een punt tot een lijn

Om met GeoGebra de afstand tussen de punten A en B te berekenen teken je het lijnstuk AB. Je leest de lengte van dat lijnstuk af in het algebravenster. GeoGebra noemt de lengten van lijnstukken a, b, c, ... Je kunt deze namen gebruiken in de invoerregel.

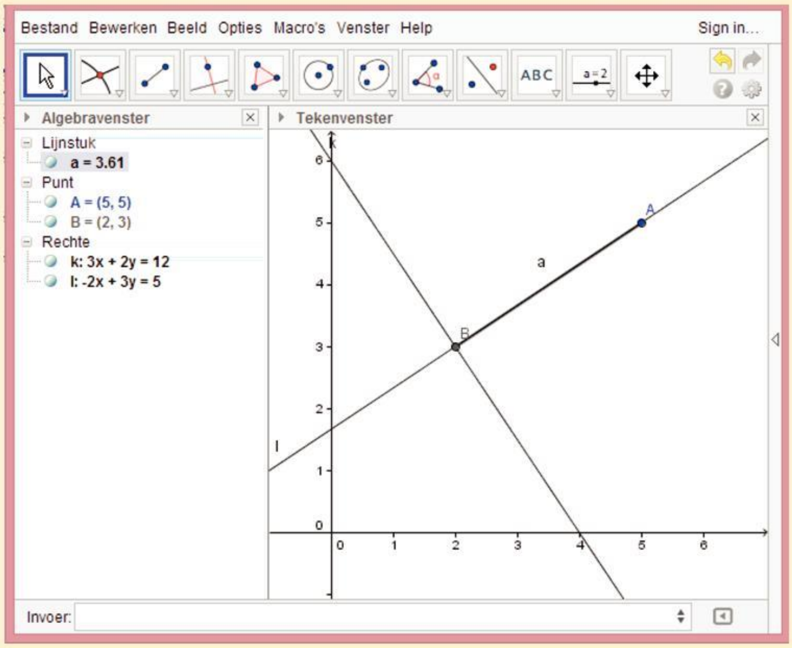
> De afstand tussen een punt A en een lijn k is de lengte van het loodlijnstuk vanuit A op k.

Om met GeoGebra de afstand van het punt A tot de lijn k te berekenen kun je het volgende werkschema gebruiken.

Werkschema: het berekenen van de afstand van een punt *A* tot de lijn *k*

1 Teken de lijn l door A die loodrecht staat op k.
2 Teken het snijpunt B van k en l.
3 Teken het lijnstuk AB en lees de lengte af.

Bij de afstand van het punt $A(5, 5)$ tot de lijn k: $3x + 2y = 12$ krijg je uiteindelijk het volgende scherm.
Je leest in het algebravenster af dat de afstand ongeveer gelijk is aan 3,61.



figuur 7.25

© Noordhoff Uitgevers bv

68 Bereken de afstand van

a het punt $A(3, 0)$ tot de lijn k: $y = \frac{1}{2}x + 1$

b het punt $B(6, 0)$ tot de lijn l: $2x + y = 2$

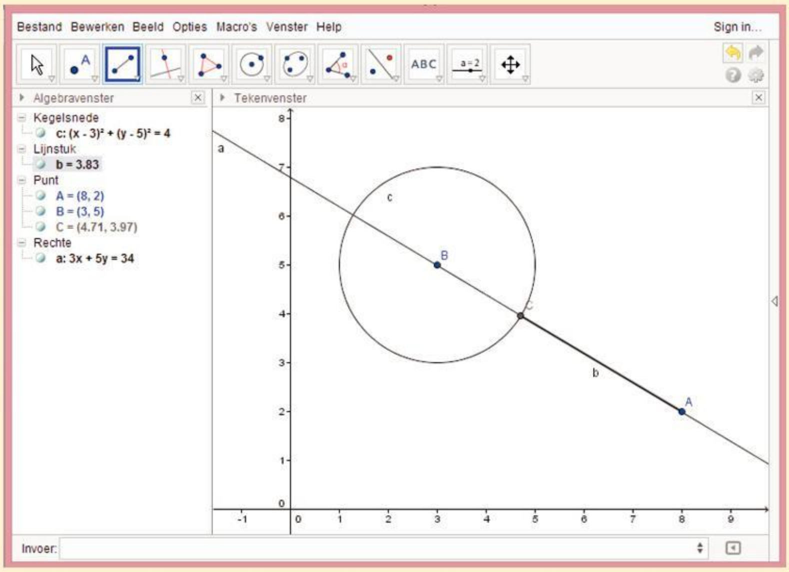
c de oorsprong tot de lijn m: $y = -3x + 10$

d de oorsprong tot de lijn n: $3x - 4y = 12$.

A 69 Gegeven zijn de lijnen k: $x + 3y = 3$ en l: $x + y = 9$.
Onderzoek met een berekening of het punt $A(1, 4)$ dichter bij k dan bij l ligt.

Theorie C De afstand van een punt tot een cirkel

De cirkel met middelpunt $M(a, b)$ en straal r heeft als vergelijking $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Zo hoort bij de cirkel met middelpunt $M(3, 5)$ en straal 2 de vergelijking $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$. Werk je in deze vergelijking de haakjes weg, dan krijg je
$x^2 - 6x + y^2 - 10y + 25 = 4$ ofwel $x^2 + y^2 - 6x - 10y = -30$.
Zowel de vergelijking $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$ als de vergelijking $x^2 + y^2 - 6x - 10y = -30$ kun je in de invoerregel invoeren.
Door in het algebravenster op de formule rechts te klikken is de ene vergelijking om te zetten in de andere vergelijking.



figuur 7.26

Gebruik in de volgende opgaven dat de afstand tussen twee meetkundige figuren de kortste afstand tussen deze figuren is.

© Noordhoff Uitgevers bv

70 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ en het punt $A(8, 2)$.
Om de afstand tussen A en c, dus $d(A, c)$, met GeoGebra te berekenen ga je als volgt te werk.

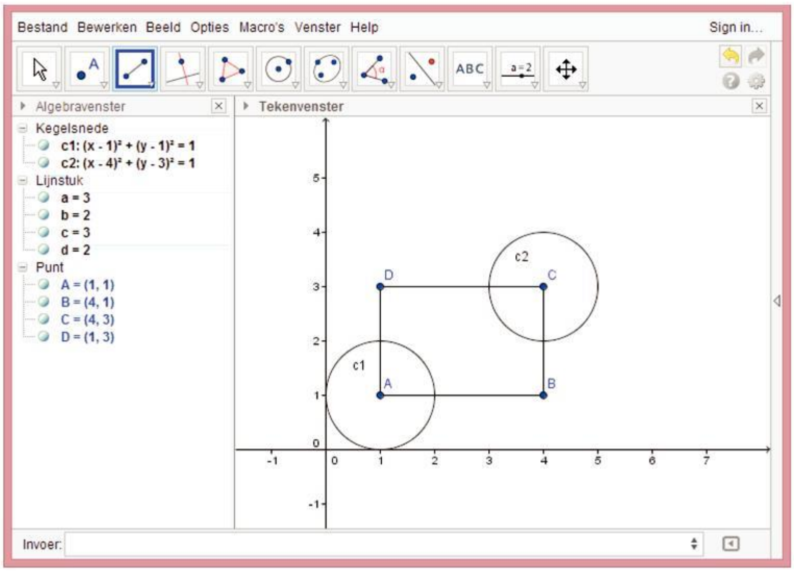
- Teken c, A en het middelpunt M van c.
- Teken de lijn k door A en M.

De lijn k snijdt c in twee punten.

a Geef met behulp van de opdracht Lijnstuk de afstand van A tot c in twee decimalen nauwkeurig.

b Teken het punt $C(4, 6)$ en bereken $d(C, c)$ in twee decimalen nauwkeurig.

A 71 Gegeven zijn de punten $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 3)$ en $D(1, 3)$.
c_1 is de cirkel met middelpunt A en straal 1 en c_2 is de cirkel met middelpunt C en straal 1.



figuur 7.27

a Bereken de afstand tussen c_1 en c_2 in twee decimalen nauwkeurig.

b Licht toe dat het exacte antwoord van vraag b gelijk is aan $\sqrt{13} - 2$.

c Bereken de afstand tussen c_1 en de lijn BD in twee decimalen nauwkeurig.

© Noordhoff Uitgevers bv

Diagnostische toets

7.1 Lijnen en hoeken

1 De lijn k snijdt de assen in de punten $(p, 0)$ en $(0, 3)$.
a Stel een vergelijking op van k van de vorm $ax + by = c$.
b Voor welke p ligt het punt $A(3, 6)$ op k?
c Voor welke p is k evenwijdig met de lijn m: $2x + 5y = 10$?

2 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen.
a k: $y = 4x + 2$ en l: $y = -\frac{1}{2}x + 6$
b m door $(3, 0)$ en $(0, -2)$ en n door $(2, 0)$ en $(0, 5)$
c p: $2x + 3y = 6$ en q: $y = 8x - 6$

3 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en $g(x) = \sqrt{4x + 1}$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $A(2, 3)$.
Bereken langs algebraïsche weg in graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken elkaar snijden in A.

7.2 Afstanden bij punten en lijnen

4 Gegeven zijn de punten $A(2p, 0)$ en $B(3, p + 1)$.
a Druk de afstand tussen de punten A en B uit in p.
b Bereken langs algebraïsche weg voor welke p de afstand tussen A en B kleiner is dan 5.
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de minimale afstand tussen A en B.
d Voor welke p ligt het midden van lijnstuk AB op de lijn k: $x + y = 6$?

5 Stel een vergelijking op van de lijn
a k die door het punt $A(2, 3)$ gaat en loodrecht staat op de lijn l: $y = -\frac{1}{3}x + 5$
b m die door het punt $B(-2, 6)$ gaat en loodrecht staat op de lijn n door de punten $(3, 0)$ en $(0, 4)$
c p die door het punt $C(2, -4)$ gaat en loodrecht staat op de lijn q: $3x + 2y = 6$.

6 **a** Bereken exact de afstand van het punt $A(6, -1)$ tot de lijn k: $y = 2x - 3$.
b Bereken exact de afstand van het punt $B(3, 5)$ tot de lijn l door de punten $C(2, 1)$ en $D(-2, 5)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

7.3 Cirkelvergelijkingen

7 Gegeven zijn de punten $A(2, -3)$ en $B(8, 2)$ en de lijn k: $y = 3x - 6$.
Stel een vergelijking op van de cirkel

a c_1 met middelpunt B en straal 5
b c_2 met middelpunt A die door B gaat
c c_3 met middelpunt B die door O gaat
d c_4 met middelpunt A die de y-as raakt
e c_5 met middellijn AB
f c_6 met middelpunt B die k raakt.

8 Bereken van de volgende cirkels de straal en de coördinaten van het middelpunt.

a $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
b $x^2 + y^2 + 3x - 7y = 0$

9 Gegeven zijn de cirkel c: $x^2 + y^2 - 16x + 8y - 1 = 0$ en de punten $A(3, -4)$, $B(2, 5)$ en $C(3, 4)$.

a Onderzoek met een berekening of het punt A op, binnen of buiten de cirkel ligt.
b Bereken exact $d(B, c)$.
c Bereken exact $d(C, c)$.

7.4 Raaklijnen en snijpunten bij cirkels

10 Gegeven is de cirkel c: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$. De punten A en B met $x_A = x_B = 4$ en $y_A > y_B$ liggen op c. De lijn k raakt c in A en de lijn l raakt c in B. Het snijpunt van k en l is S.

a Stel van k en van l een vergelijking op.
b Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen k en l.
c Bereken exact $d(S, c)$.
d Het punt $C(-1, -1)$ ligt op c.
Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijn CS en c in C.

11 Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(1, 2)$ en straal $r = \sqrt{5}$.

a Bereken voor welke p de lijn k: $y = -2x + p$ de cirkel raakt.
b Bereken voor welke q de lijn l: $y = 2x + q$ geen gemeenschappelijke punten met de cirkel heeft.
c Bereken voor welke r de lijn m: $y = \frac{1}{2}x + r$ twee snijpunten met de cirkel heeft.