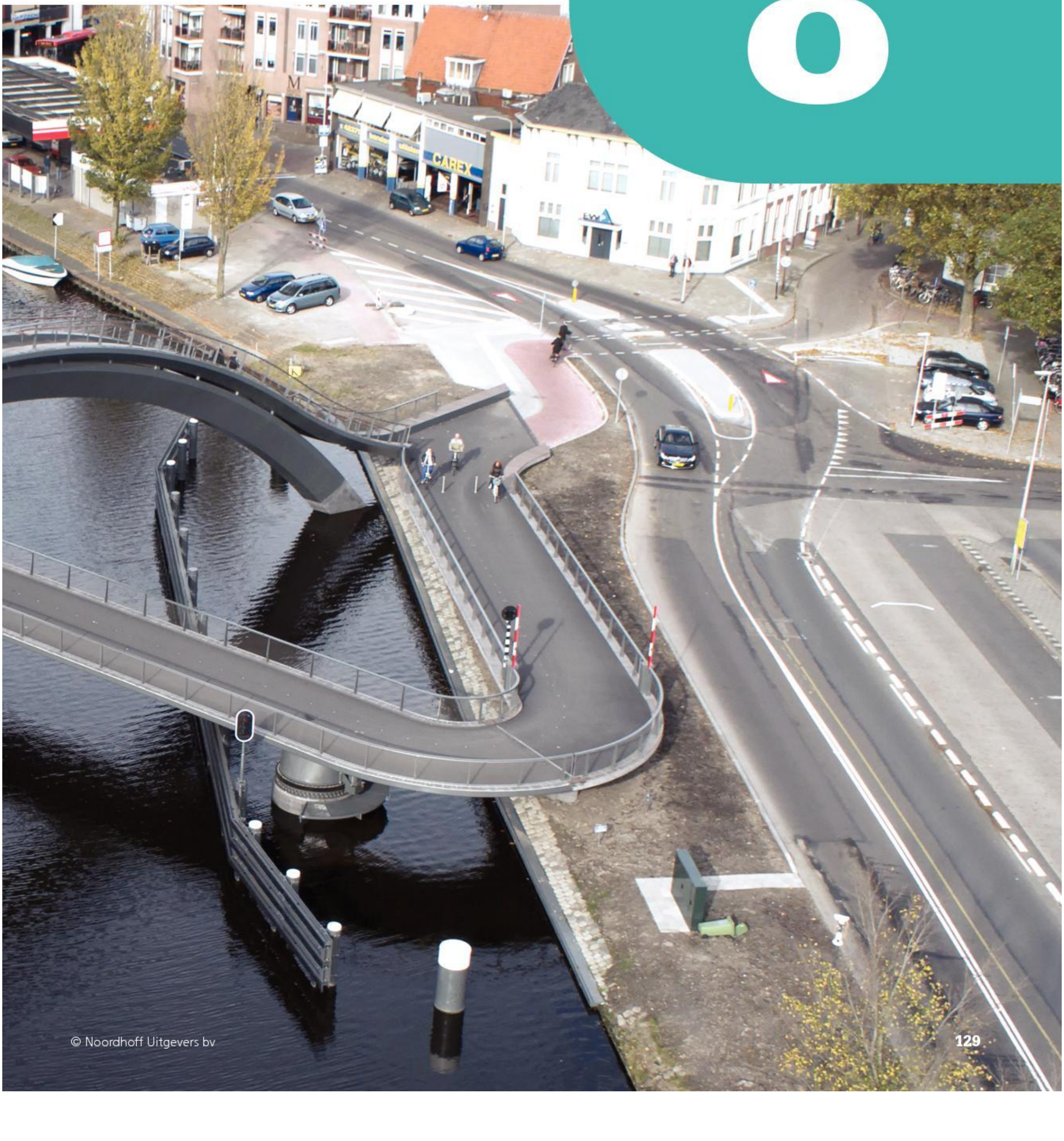
Goniometrie

8



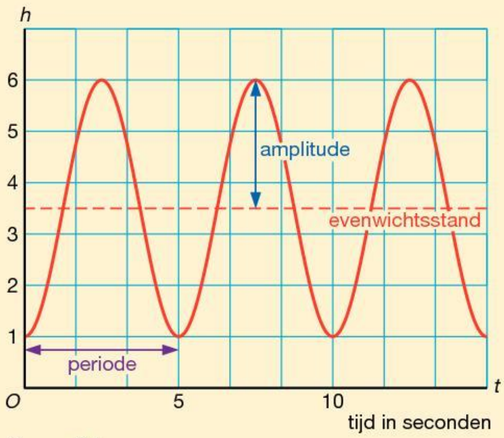
Voorkennis Periodieke verbanden en bijzondere rechthoekige driehoeken

Theorie A Periodieke verbanden

Er bestaan verschijnselen die zich regelmatig herhalen. Je hebt dan te maken met een **periodiek verband**.

Bij een periodiek verband hoort een grafiek die zich steeds herhaalt.
De kortste tijd die het duurt tot herhaling optreedt, heet de periode.

In figuur 8.1 zie je de grafiek van een periodiek verband. De **periode** is 5 seconden.
De horizontale stippellijn hoort bij de **evenwichtsstand**.
De hoogste en laagste punten van de grafiek liggen even ver van deze stippellijn. De grafiek schommelt als het ware om de evenwichtsstand.
In de figuur hiernaast is de evenwichtsstand $\frac{6+1}{2} = 3{,}5$.
Het verschil tussen de hoogste stand en de evenwichtsstand heet de **amplitude**. Hiernaast is de amplitude dus $6 - 3{,}5 = 2{,}5$.



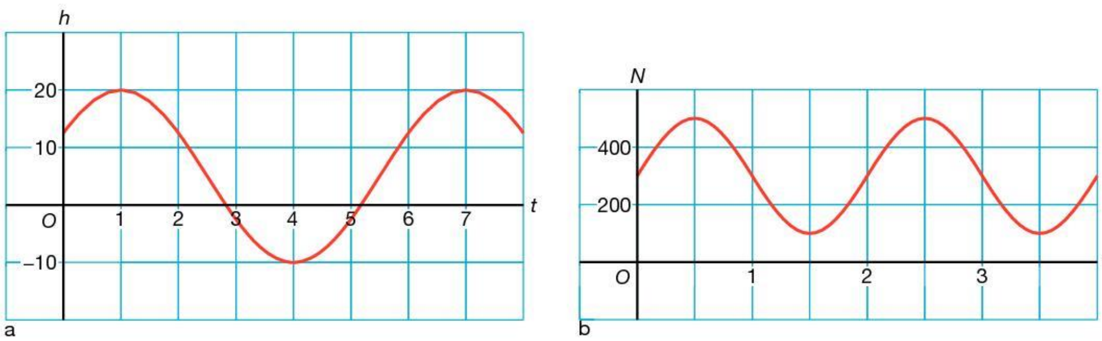
figuur 8.1

$$\textbf{evenwichtsstand} = \frac{\textbf{hoogste stand + laagste stand}}{\textbf{2}}$$

amplitude = hoogste stand − evenwichtsstand

8

1 **a** Zie figuur 8.2a.
Lees de periode, de evenwichtsstand en de amplitude af.
b Zie figuur 8.2b.
Lees de periode, de evenwichtsstand en de amplitude af.



figuur 8.2

2 Van een periodiek verband is de periode 4, de evenwichtsstand 1 en amplitude 2. De grafiek gaat stijgend door het punt (0, 1).

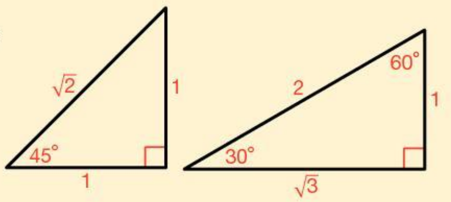
a Teken drie perioden van de grafiek. Neem t op de horizontale as en h op de verticale as.

b Neem de tabel over en vul hem in. Licht toe.

t	22	33	35	1002
h				

Theorie B Bijzondere rechthoekige driehoeken en goniometrische verhoudingen

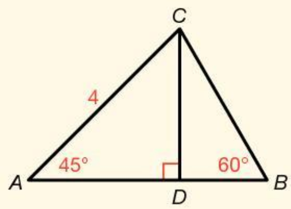
- De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.
- De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $AC = 4$, $\angle A = 45°$ en $\angle B = 60°$.
Bereken BC exact.

Uitwerking
Zie de figuur hiernaast met de hoogtelijn CD.

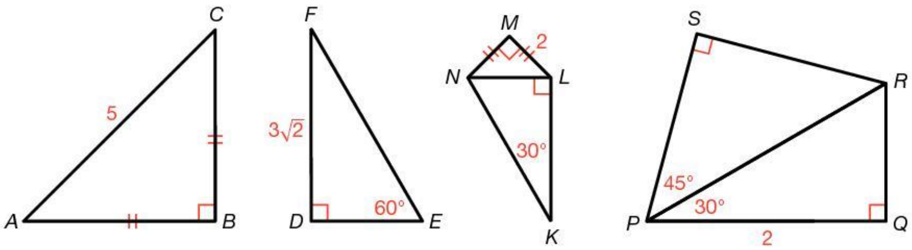


$AC = 4$ geeft $CD = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$CD = 2\sqrt{2}$ geeft $BD = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

$BD = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ geeft $BC = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} = 1\frac{1}{3}\sqrt{6}$

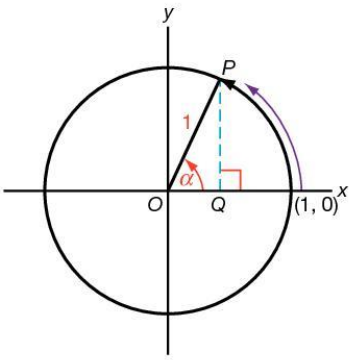
3 Zie figuur 8.3.
Bereken exact BC, EF, KN en RS.

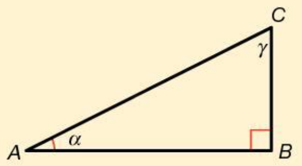


figuur 8.3

8.1 De eenheidscirkel

O 1 In figuur 8.4 is de cirkel getekend met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1. Het punt P draait tegen de wijzers van de klok in over de cirkel en begint daarbij in $(1, 0)$.
De hoek waarover gedraaid is geven we aan met de Griekse letter α. In figuur 8.4 is $\alpha = 65°$.



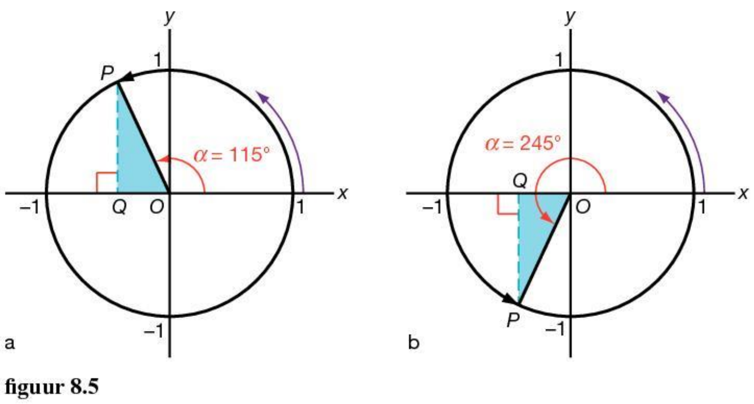


$$\sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} \quad \cos(\alpha) = \frac{AB}{AC}$$

figuur 8.4

a Bereken PQ en OQ in twee decimalen nauwkeurig.
b Geef de coördinaten van P in twee decimalen nauwkeurig.

O 2 In figuur 8.5a zie je de situatie met $\alpha = 115°$ en in figuur 8.5b die met $\alpha = 245°$.
a Hoeveel graden is $\angle POQ$ in figuur 8.5a? Geef in twee decimalen nauwkeurig PQ, OQ en de coördinaten van P.
b Wat is het resultaat als je de GR $\cos(115°)$ en $\sin(115°)$ laat berekenen?
Vergelijk de resultaten met de coördinaten van het punt P van vraag a. Wat valt je op?

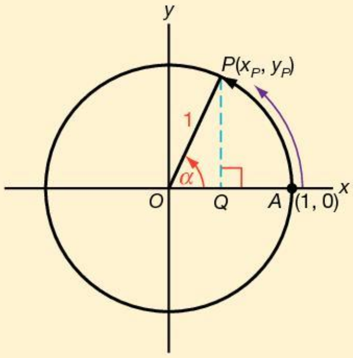


figuur 8.5

c Zie figuur 8.5b.
Hoeveel graden is $\angle POQ$?
Geef de coördinaten van P in twee decimalen nauwkeurig.
Ga na dat je deze coördinaten op je GR kunt krijgen door $\cos(245°)$ en $\sin(245°)$ te berekenen.

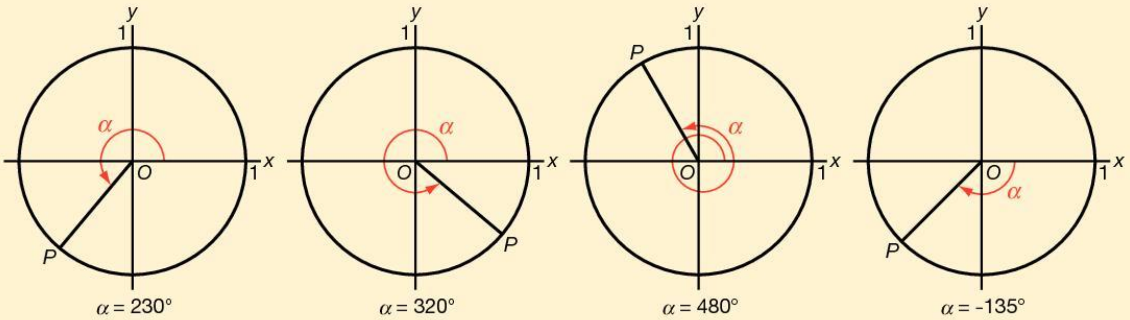
Theorie A Sinus en cosinus

De cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heet de **eenheidscirkel**.
Het punt P beweegt over de eenheidscirkel en begint in het punt $A(1, 0)$. Zie figuur 8.6. Hierdoor ontstaat hoek AOP die we de **draaiingshoek** van P noemen. We geven deze hoek aan met α. Het eerste been van een draaiingshoek is altijd de positieve x-as, het tweede been gaat door het punt P.
In figuur 8.6 is de draaiingshoek α scherp. Voor deze scherpe hoek weet je $\sin(\alpha) = \frac{PQ}{OP} = \frac{y_P}{1} = y_P$ en
$\cos(\alpha) = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_P}{1} = x_P$.



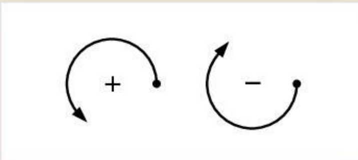
figuur 8.6

De draaiingshoek α neemt allerlei waarden aan. Hieronder zie je enkele voorbeelden. Je ziet dat α ook groter dan 360° kan zijn.



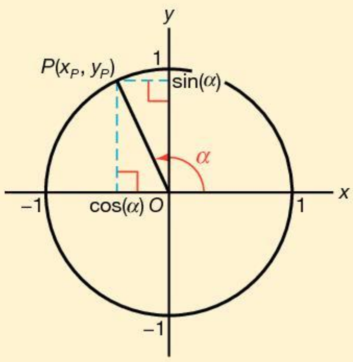
figuur 8.7 Draaiingshoeken kunnen zowel positief als negatief zijn.

Afspraak
Draait P
- tegen de wijzers van de klok in, dan is α positief
- met de wijzers van de klok mee, dan is α negatief.



Voor alle hoeken α is afgesproken $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.

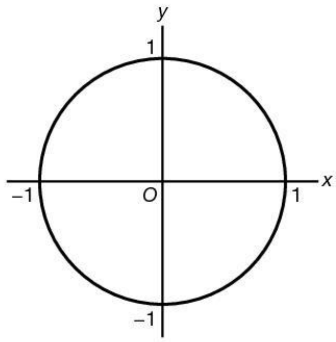
Snijdt het tweede been van de draaiingshoek α de eenheidscirkel in het punt $P(x_P, y_P)$, dan is $\sin(\alpha) = y_P$ en $\cos(\alpha) = x_P$.



Van sommige draaiingshoeken zoals 180° en −90° kun je de sinus en de cosinus eenvoudig uit de eenheidscirkel aflezen. Zo hoort bij $\alpha = 180°$ het punt $P(-1, 0)$, dus $\sin(180°) = 0$ en $\cos(180°) = -1$. Maar meestal moet je de GR gebruiken. Je krijgt dan benaderingen. Zo is $\sin(215°) \approx -0{,}57$. Ga dit na.

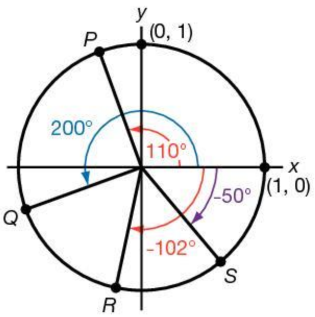
3 Lees uit de eenheidscirkel af.

a sin(0°)
b cos(0°)
c sin(90°)
d cos(90°)
e sin(270°)
f cos(270°)
g sin(360°)
h cos(360°)
i sin(450°)
j cos(−90°)
k sin(−540°)
l cos(1080°)
m sin(1980°)
n cos(−180°)
o sin(990°)

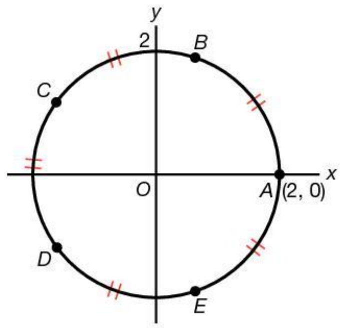


figuur 8.8

4 Op de eenheidscirkel in figuur 8.9 liggen de punten P, Q, R en S. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de punten P, Q, R en S.



figuur 8.9

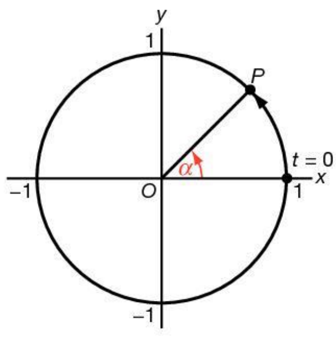


figuur 8.10

A 5 Op de cirkel met middelpunt O en straal 2 van figuur 8.10 liggen de punten A, B, C, D en E zo, dat de cirkel wordt verdeeld in vijf cirkelbogen van gelijke lengte. Het punt A is het punt (2, 0). Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de punten B, C, D en E.

D 6 Het punt P doorloopt met een constante snelheid tegen de wijzers van de klok in de eenheidscirkel. Eén rondgang duurt 8 seconden. De tijd t is in seconden. Op $t = 0$ is P in het punt (1, 0).

a Hoe groot is de draaiingshoek α op $t = 1$? Bereken in dit geval de coördinaten van P in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 8.11

b Vul de tabel in. Rond zo nodig af op één decimaal.

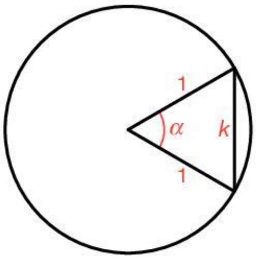
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_P	0	0,7											0

c Schets de grafiek van y_P als functie van t. Neem $0 \le t \le 12$.

Geschiedenis Sinus

Vraagstukken uit de sterrenkunde en op het terrein van navigeren op zee hebben de ontwikkeling van de goniometrie vanaf de Oudheid gestimuleerd. De Griekse astronoom Ptolemeus (ca 85-165) rekende aan planeetbanen. Als hulpmiddel ontwikkelde hij koordentafels waarin hij lengten van koorden in de eenheidscirkel tot op vijf decimalen nauwkeurig berekende.

hoek	koorde
59°	0,98485
59° 30′	0,99243
60°	1
60° 30′	1,00755
61°	1,01508



In de vijfde eeuw hebben Indiase wiskundigen het begrip sinus ingevoerd. De sinustafel verving de koordentafel. De notaties die tegenwoordig in de goniometrie gangbaar zijn, hebben we aan Leonhard Euler (1707-1783) te danken.
Tegenwoordig bereken je de lengte van koorde k in de figuur hierboven simpel op je GR met $k = 2\sin(\frac{1}{2}\alpha)$.

O 7 Op de eenheidscirkel liggen de punten P en Q met $y_P = y_Q = 0{,}5$, $x_P > 0$ en $x_Q < 0$.

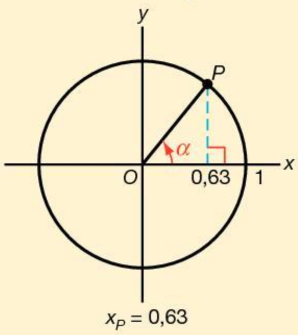
a Teken de eenheidscirkel met de punten P en Q.

b Voor de draaiingshoek α van P geldt $\alpha = 30°$.
Gebruik dit en symmetrie om de draaiingshoek β van Q, met $0° \leq \beta \leq 360°$, af te lezen uit de figuur van vraag a.

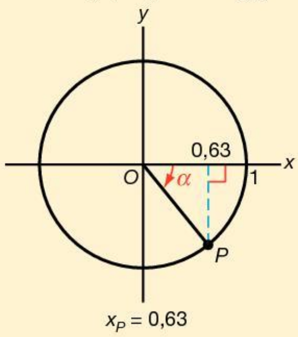
8

Theorie B Hoek berekenen bij gegeven x_P of y_P

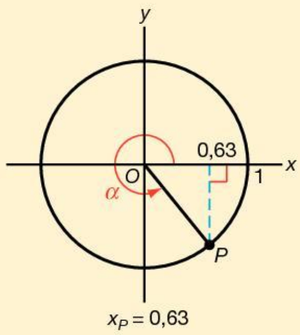
In figuur 8.12 zie je het punt P met $x_P = 0{,}63$. Dus $\cos(\alpha) = 0{,}63$.
Je berekent α op de GR met $\cos^{-1}(0{,}63)$. Je krijgt $\alpha \approx 51°$.



figuur 8.12



figuur 8.13

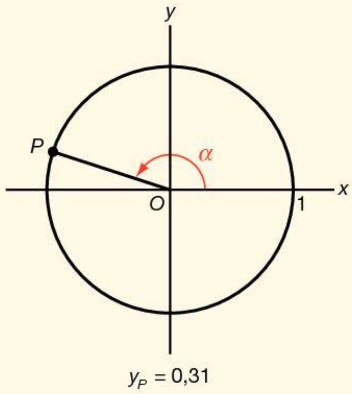


figuur 8.14

Ook in figuur 8.13 is $\cos(\alpha) = 0{,}63$. Maar de bijbehorende hoek $\alpha \approx -51°$ krijg je niet met de GR. Je moet dit zelf bedenken. Je gebruikt daarbij symmetrie.
Bij $x_P = 0{,}63$ in figuur 8.14 hoort $\alpha \approx 360° - 51° = 309°$.

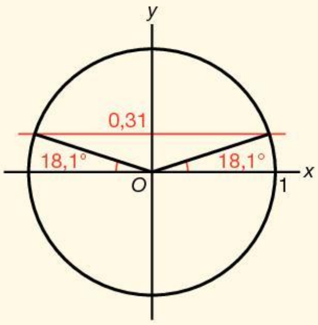
Voorbeeld

In figuur 8.15 is $y_P = 0{,}31$.
Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



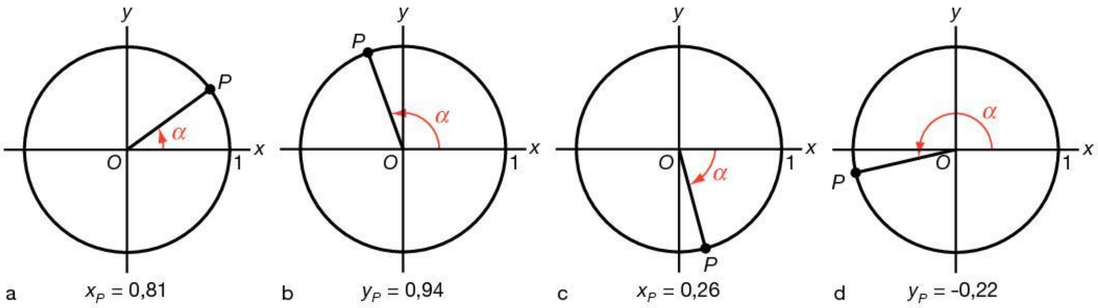
figuur 8.15

Uitwerking
$y_P = 0{,}31$ dus $\sin(\alpha) = 0{,}31$.
De GR geeft $\sin^{-1}(0{,}31) \approx 18{,}1°$.



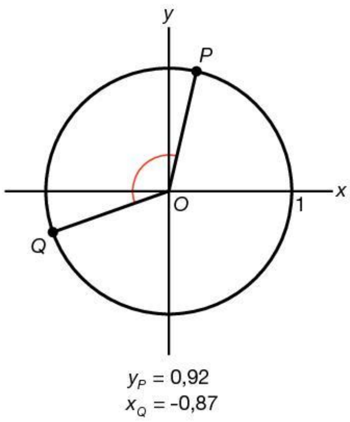
Dus $\alpha \approx 180° - 18{,}1° = 161{,}9°$.

8 Bereken α in graden. Rond af op één decimaal.



figuur 8.16

A 9 In figuur 8.17 is $y_P = 0{,}92$ en $x_Q = -0{,}87$.
Bereken $\angle POQ$ in graden. Rond af op één decimaal.

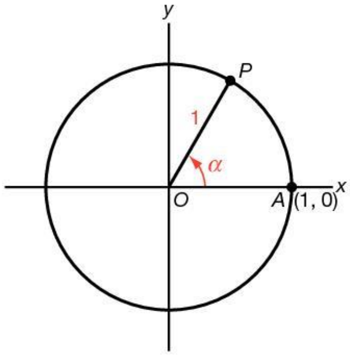


figuur 8.17

Terugblik

Eenheidscirkel en draaiingshoek

De eenheidscirkel is de cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1.
$\angle AOP$ heet de draaiingshoek van P.
Het eerste been van de draaiingshoek α is de positieve x-as, het tweede been snijdt de eenheidscirkel in het punt P.
Hiernaast is α positief, want het punt P draait tegen de wijzers van de klok in.



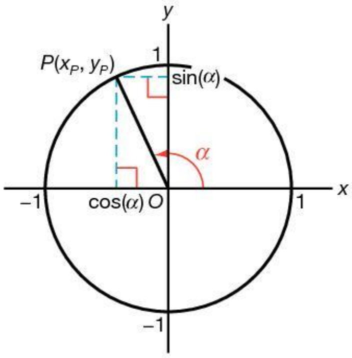
Sinus en cosinus

In de eenheidscirkel is voor alle hoeken afgesproken wat de sinus en de cosinus zijn. Zie de figuur hiernaast.

$\sin(\alpha) = y_P$

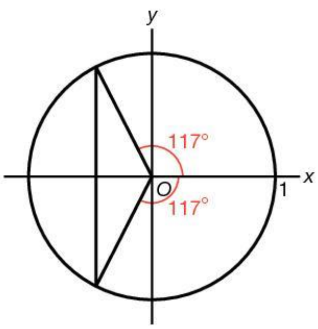
$\cos(\alpha) = x_P$

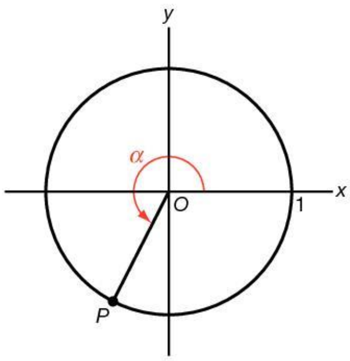
Is α een veelvoud van 90°, dan ligt P op de x-as of de y-as. Je kunt dan de sinus en de cosinus uit de eenheidscirkel aflezen. Voor andere hoeken gebruik je de GR.



Hoek berekenen bij gegeven x_P of y_P

In de figuur hiernaast is $x_P = -0{,}45$, dus $\cos(\alpha) = -0{,}45$.
De GR geeft $\cos^{-1}(-0{,}45) \approx 117°$.





$x_P = -0{,}45$

Dus $\alpha \approx 360° - 117° = 243°$.

8.2 Radialen

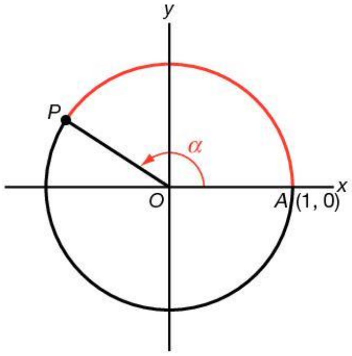
O 10 **a** Licht toe dat de omtrek van de eenheidscirkel gelijk is aan 2π.

Het punt P begint in $A(1, 0)$ en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is positief. De lengte van de cirkelboog hangt af van α.

b Licht toe dat bij $\alpha = 90°$ de lengte van de door P doorlopen cirkelboog gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$.

c Vul de tabel verder in.

draaiingshoek α	0°	90°	180°	270°	360°
lengte cirkelboog b		$\frac{1}{2}\pi$			2π



figuur 8.18

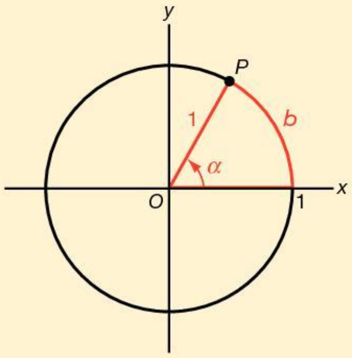
Theorie A De hoekeenheid radiaal

In opgave 10c heb je een verhoudingstabel ingevuld.

Uit

α	180°
b	π

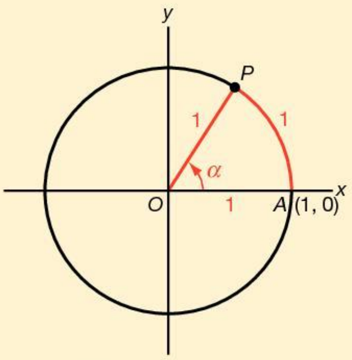
volgt $b = \dfrac{\alpha \cdot \pi}{180°}$ ofwel $b = \dfrac{\pi}{180°} \cdot \alpha$.



figuur 8.19

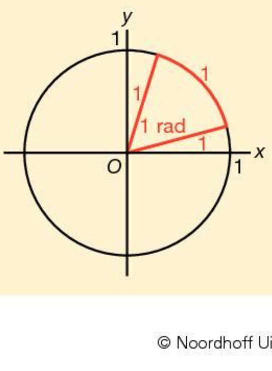
Er is een hoekeenheid waarbij de lengte van de boog van de eenheidscirkel gelijk is aan de draaiingshoek α.
Deze hoekeenheid heet **radiaal**, afgekort **rad**.

De radiaal is zo gekozen, dat bij een booglengte van 1 op de eenheidscirkel een draaiingshoek van 1 radiaal hoort.
Bij een booglengte van 2 hoort een draaiingshoek van 2 rad.
En bij een booglengte van π hoort een draaiingshoek van π rad.

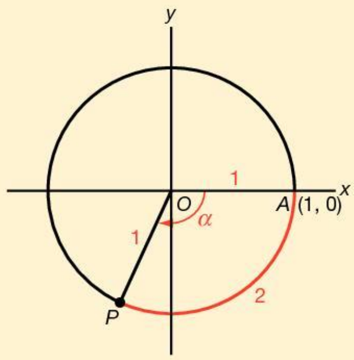


figuur 8.20 $\alpha = 1$ rad

De middelpuntshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1 is een hoek van 1 radiaal.



In figuur 8.21 is α negatief. De booglengte $AP = 2$.
Hierbij hoort een draaiingshoek $\alpha = -2$ rad.

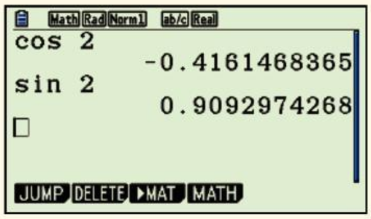


figuur 8.21

Voorbeeld

Het punt P doorloopt de eenheidscirkel.
De draaiingshoek is positief en de afgelegde afstand over de cirkel is 2.
Bereken de coördinaten van P in twee decimalen nauwkeurig.

Aanpak
De door P afgelegde afstand is 2, dus $\alpha = 2$ rad.
Stel de hoekeenheid van je GR in op radialen, op de TI in het MODE-menu en op de Casio in het SET-UP-menu.



Uitwerking
$x_P = \cos(2 \text{ rad}) \approx -0{,}42$ en $y_P = \sin(2 \text{ rad}) \approx 0{,}91$.
Dus $P(-0{,}42; 0{,}91)$.

11 Het punt P begint in (1, 0) en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek is positief.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van P bij een afgelegde afstand

a 5 **b** 6 **c** 20.

Geschiedenis Hoekeenheden

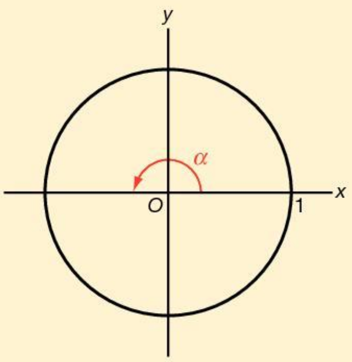
Bij de graad als hoekeenheid is uitgegaan van een verdeling van een cirkel in 360 stukken. Men vermoedt dat deze verdeling afkomstig is uit de astronomie.
In de Soemerische periode (ongeveer 2100 voor Christus) verdeelden astronomen een jaar in 12 maanden van elk 30 dagen ($12 \times 30 = 360$).
De Soemeriërs waren woonachtig in het huidige Irak. Ze waren al bedreven in het rekenen, waarbij ze een zestigtallig stelsel hadden ontwikkeld. Dit getallenstelsel verschilt in principe niet veel van het tientallig stelsel dat we tegenwoordig gebruiken. Er zijn duizenden teksten uit deze periode gevonden met verslagen over de levering van vee en graan, vergezeld van bijbehorende berekeningen in het zestigtallig stelsel.
De hoekeenheid radiaal werd door James Thomson in 1873 gedefinieerd. James was wiskundeprofessor aan het Queens College in Belfast. Zijn broer is de bekende natuurkundige William Thomson, Lord Kelvin.

O 12 Het punt P begint in (1, 0) en doorloopt de eenheidscirkel. De draaiingshoek is positief.
Bereken de coördinaten van P bij een afgelegde afstand
a $\frac{1}{2}\pi$
b π
c $1\frac{1}{2}\pi$.

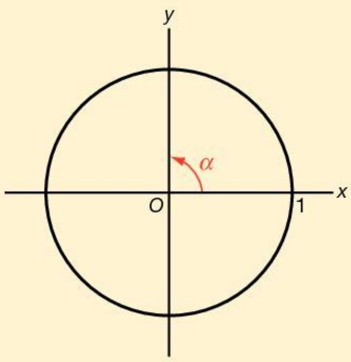
Theorie B Radiaal en graad

De omtrek van een cirkel is $2\pi r$. De straal van de eenheidscirkel is 1, dus de hele eenheidscirkel heeft booglengte $2\pi \cdot 1 = 2\pi$.
Bij deze booglengte hoort dus een draaiingshoek van 2π rad.
Hieruit volgt direct 2π rad = 360°, dus π rad = 180°.

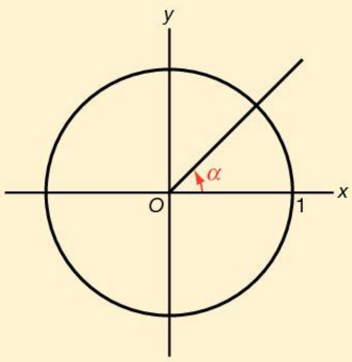
π rad = 180°



figuur 8.22 booglengte π
$\alpha = \pi$ rad = 180°



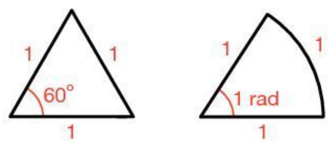
figuur 8.23 booglengte $\frac{1}{2}\pi$
$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad = 90°



figuur 8.24 booglengte $\frac{1}{4}\pi$
$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ rad = 45°

Dus	1 rad	=	$\frac{180°}{\pi}$	≈	57,3°
	1°	=	$\frac{1}{180}\pi$ rad	≈	0,017 rad
			exact		afgerond

Let op het verschil tussen $\frac{1}{3}$ rad en $\frac{1}{3}\pi$ rad.
$\frac{1}{3}$ rad $= \frac{1}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 19{,}1°$ en $\frac{1}{3}\pi$ rad $= \frac{1}{3} \cdot 180° = 60°$.



1 rad is bijna 60°

Voorbeeld

omzetten van radialen in graden	omzetten van graden in radialen (benaderd)	omzetten van graden in radialen (exact)
$\frac{2}{3}\pi$ rad $= \frac{2}{3} \cdot 180° = 120°$	$107° = \frac{107}{180}\pi$ rad $\approx 1{,}87$ rad	$20° = \frac{20}{180}\pi$ rad $= \frac{1}{9}\pi$ rad
$\frac{3}{4}$ rad $= \frac{3}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 43{,}0°$	$-26° = -\frac{26}{180}\pi$ rad $\approx -0{,}45$ rad	$75° = \frac{75}{180}\pi$ rad $= \frac{5}{12}\pi$ rad

13 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

a $\frac{1}{6}\pi$ rad **c** 2π rad **e** $1\frac{1}{4}\pi$ rad **g** $-2\frac{1}{3}\pi$ rad

b $\frac{1}{4}\pi$ rad **d** 2 rad **f** $1\frac{1}{4}$ rad **h** $-2\frac{1}{3}$ rad

14 Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

a 360° **e** 90° **i** 300° **m** 210°
b 30° **f** 135° **j** 720° **n** −5°
c −45° **g** −75° **k** 400° **o** 540°
d 60° **h** 240° **l** 0° **p** 1°

15 Druk uit in radialen. Rond af op twee decimalen.

a 7° **c** −51,3° **e** −320° **g** 90°
b 18° **d** 1,7° **f** 1030° **h** 57°

Afspraak
In het vervolg laten we bij een hoek in radialen de eenheid rad meestal weg.
Dus $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ betekent $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ rad.

8

16 Vul de tabel verder in. Laat π in de antwoorden staan.

hoek in graden	0°	30°		60°	90°			240°	315°	360°
hoek in radialen	0		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π			2π

17 Bereken in twee decimalen nauwkeurig.

a $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ **c** $\sin\left(\frac{4}{5}\pi\right)$ **e** $\cos(7{,}6\pi)$

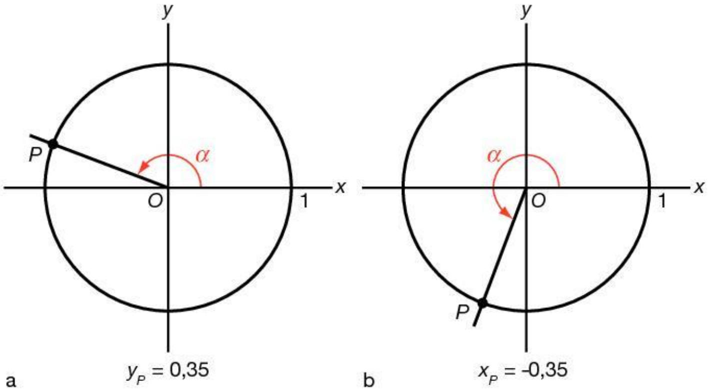
b $\cos\left(\frac{2}{3}\right)$ **d** $\sin\left(\frac{4}{5}\right)$ **f** $\cos(7{,}6)$

18 Bereken α met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ in radialen in twee decimalen nauwkeurig.

a $\sin(\alpha) = 0{,}92$ **c** $\sin(\alpha) = \frac{5}{12}$ **e** $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

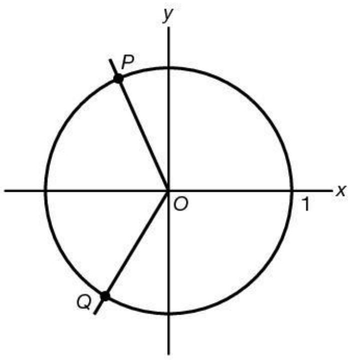
b $\cos(\alpha) = 0{,}85$ **d** $\cos(\alpha) = \frac{3}{17}$ **f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

19 Zie figuur 8.25.
Bereken α in radialen in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 8.25

A 20 In figuur 8.26 is $x_P = -0{,}32$ en $y_Q = -0{,}88$.
Bereken $\angle POQ$ in radialen in twee decimalen nauwkeurig.

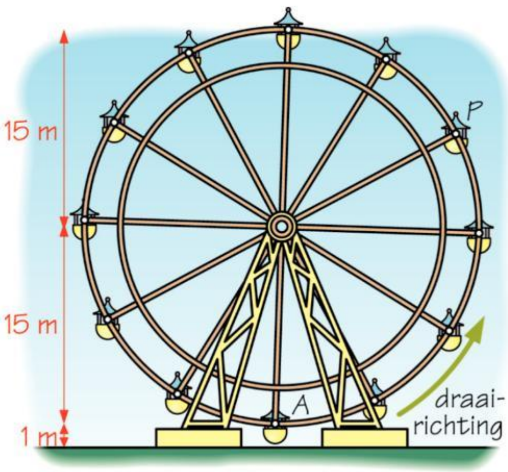


figuur 8.26

A 21 In figuur 8.27 zie je een tekening van een reuzenrad. De straal van het rad is 15 meter en het instappunt A is op 1 meter boven de grond. Sanne zit in een stoeltje dat zich op 23 meter hoogte boven de grond in het punt P bevindt.
Neem aan dat Sanne nog aan de eerste omwenteling bezig is.

a Bereken in radialen in twee decimalen nauwkeurig de hoek waarover Sanne gedraaid is.

b Tijdens de eerste omwenteling is er nog een punt waarin Sanne's stoeltje 23 meter boven de grond hangt. Bereken in radialen in twee decimalen nauwkeurig de hoek waarover Sanne dan gedraaid is.



figuur 8.27

O 22 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$ met domein $[-7, 7]$.

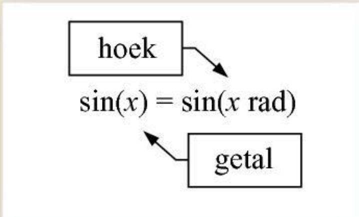
a Voer op de GR in $y_1 = \sin(x)$, neem Ymin = −2, Ymax = 2 en plot de grafiek. Zorg wel eerst voor de instelling op radialen.

b Bereken $f(\frac{1}{6}\pi)$, $f(\frac{5}{6}\pi)$, $f(1\frac{1}{6}\pi)$ en $f(1\frac{5}{6}\pi)$.

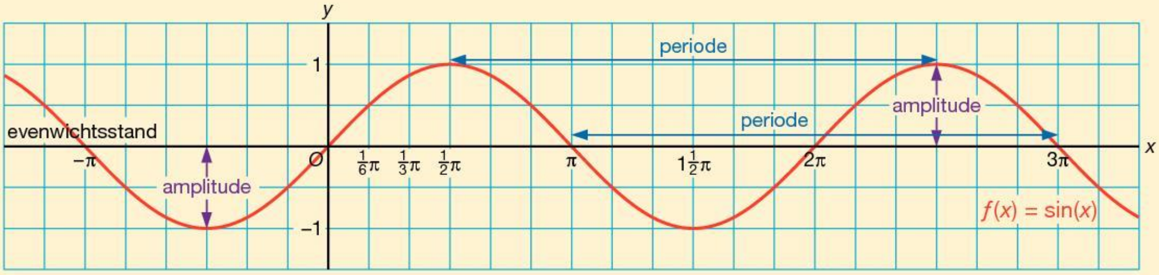
c Teken de grafiek en zet de coördinaten van de vier toppen van de grafiek erbij.

d Welke nulpunten zie je in de grafiek? Geef exacte antwoorden.

Theorie C Grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$



Het sinusbegrip wordt niet alleen bij hoeken, maar ook bij getallen gebruikt. De sinus van het getal 2 is de sinus van een hoek van 2 radialen.
Je kunt op deze manier praten over de functie $f(x) = \sin(x)$, die aan elk getal de sinus van dat getal toevoegt.
Hieronder is de grafiek van de **goniometrische functie** $f(x) = \sin(x)$ getekend. Op de horizontale as is 3 cm rechts van de oorsprong het getal π gezet. De nulpunten zijn ..., -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ...
De grafiek is periodiek met **periode** 2π.
De **evenwichtsstand** is 0 en de **amplitude** is 1.



figuur 8.28 Op de x-as is 1 cm rechts van de oorsprong $\frac{1}{3}\pi$ gezet. Merk op dat $\frac{1}{3}\pi \approx 1{,}047 \approx 1$.

8

23 Gegeven is de functie $g(x) = \cos(x)$ met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

$\cos(x) = \cos(x \text{ rad})$

a Plot de grafiek. Neem Ymin = −2 en Ymax = 2.

b Teken de grafiek. Gebruik de schaalverdeling van figuur 8.28

c Geef de coördinaten van de vijf toppen. Geef exacte antwoorden.

d Welke nulpunten zie je in de grafiek? Geef exacte antwoorden.

A 24 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$, beide met domein $[-2\pi, 2\pi]$.

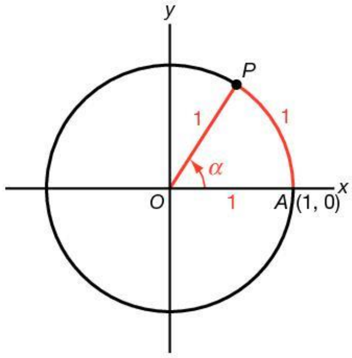
a Teken de grafieken van f en g in één figuur. Gebruik de schaalverdeling van figuur 8.28.

b De grafieken van f en g snijden elkaar in vier punten.
Licht toe dat de x-coördinaat van één van die snijpunten $\frac{1}{4}\pi$ is en geef de exacte waarden van de x-coördinaten van de andere drie snijpunten.

Terugblik

Radialen

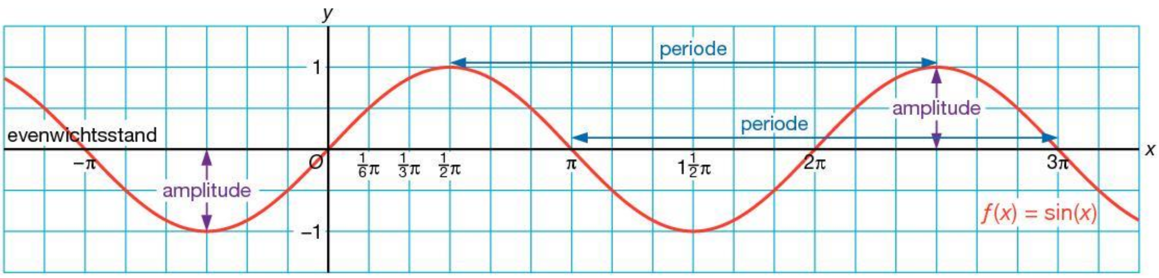
De radiaal is een hoekmaat.
De draaiingshoek in de eenheidscirkel die hoort bij een cirkelboog met lengte 1, is een hoek van 1 radiaal.
Bij een draaiingshoek van 2,5 rad hoort een punt P op de eenheidscirkel met coördinaten
$(\cos(2{,}5), \sin(2{,}5)) \approx (-0{,}80; 0{,}60)$.
Stel hierbij je GR in op radialen.

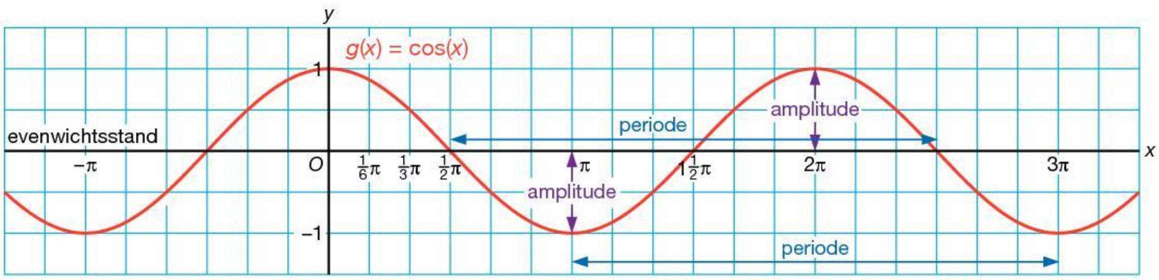


Een hoek van 1 radiaal hoort bij een boog met lengte 1 × de straal.

Maak bij het omzetten van graden in radialen en omgekeerd gebruik van π rad = 180°.
De hoekeenheid radialen mag weggelaten worden, maar de hoekeenheid graden niet.
Dus $\sin(2{,}5) \approx 0{,}60$ en $\sin(2{,}5°) \approx 0{,}04$.

Grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$





Hierboven zijn de grafieken van $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ getekend.
Hierbij hoort
- evenwichtsstand 0
- amplitude 1
- periode 2π.

8.3 Transformaties en sinusoïden

O 25 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$.

a Hoe ontstaat de grafiek van $g(x) = 2 + \sin(x)$ uit de grafiek van f? Wat is de evenwichtsstand van de grafiek van g?

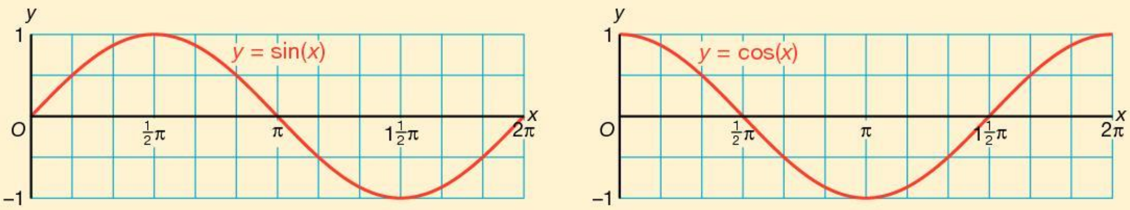
b Hoe ontstaat de grafiek van $h(x) = \sin(x - 3)$ uit de grafiek van f?

c Hoe ontstaat de grafiek van $k(x) = 4\sin(x)$ uit de grafiek van f? Wat is de amplitude van de grafiek van k?

d Hoe ontstaat de grafiek van $l(x) = \sin(5x)$ uit de grafiek van f? Wat is de periode van de grafiek van l?

Theorie A Transformaties bij goniometrische functies

De functies $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \cos(x)$ zijn standaardfuncties.
De bijbehorende grafieken mag je zonder toelichting tekenen.
Bij beide grafieken hoort evenwichtsstand 0, amplitude 1 en periode 2π.
Een punt waar de grafiek van $f(x) = \sin(x)$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, noemen we een **beginpunt** van de grafiek.
Een hoogste punt van de grafiek van $g(x) = \cos(x)$ noemen we een beginpunt van de grafiek van g.



figuur 8.29 Van de standaardgrafieken $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ is één periode getekend.

Op deze grafieken kun je de vier bekende transformaties toepassen.

Effect van transformaties op de standaardgrafiek $y = \sin(x)$		
transformatie	*beeldgrafiek*	*kenmerk*
translatie $(0, a)$	$y = a + \sin(x)$	evenwichtsstand a
verm. x-as, b	$y = b\sin(x)$	amplitude b $(b > 0)$
verm. y-as, $\frac{1}{c}$	$y = \sin(cx)$	periode $\frac{2\pi}{c}$ $(c > 0)$
translatie $(d, 0)$	$y = \sin(x - d)$	beginpunt $(d, 0)$

8

Pas je meer transformaties na elkaar toe, dan moet je op de volgorde letten.

$$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3\sin(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0,\, 2)} y = 2 + 3\sin(x)$$

$$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{translatie } (0,\, 2)} y = 2 + \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3(2 + \sin(x))$$

ofwel $y = 6 + 3\sin(x)$

Ook bij de combinatie van een horizontale translatie en een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as is de volgorde van belang.

$$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{3}\pi,\, 0)} y = \sin\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = \sin\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}\pi\right)$$

$$y = \sin(x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 2} y = \sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) \xrightarrow{\text{translatie } (\frac{1}{3}\pi,\, 0)} y = \sin\left(\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{3}\pi\right)\right)$$

ofwel $y = \sin\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}\pi\right)$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$.
Geef aan hoe de grafiek van f uit een standaardgrafiek ontstaat en geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

Uitwerking

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \sin(x)$	0	1	2π	$(0, 0)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$				
$y = \sin(2x)$	0	1	π	$(0, 0)$
$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 0)$				
$y = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$	0	1	π	$\left(\frac{1}{3}\pi, 0\right)$
$\downarrow$ translatie $(0, \frac{1}{2})$				
$y = \frac{1}{2} + \sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$	$\frac{1}{2}$	1	π	$\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\right)$

26 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek ontstaan en geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

a $f(x) = 2\sin(x + 3)$

b $g(x) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{5}$

c $h(x) = \cos(3(x - 4))$

d $j(x) = 1\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{4}x\right)$

27 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek ontstaan en geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

a $f(x) = 5 + 1{,}2\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)$

b $g(x) = 0{,}4 + \sin\left(\frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

c $h(x) = 0{,}29\cos(3(x + 1{,}4))$

d $j(x) = -0{,}8 + 2\sin\left(3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$

28 De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \sin(x)$ door eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 3 en dan de translatie $(4; -1{,}5)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.

29 **a** De grafiek van f ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door eerst de translatie $\left(\frac{1}{4}\pi, 4\right)$ en dan de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 3 toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.

b De grafiek van g ontstaat uit die van $y = \cos(x)$ door de vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met 3 en dan de translatie $\left(\frac{1}{4}\pi, 4\right)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van g op.

A 30 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2} + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ met domein $[0, 3\pi]$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit een standaardgrafiek?

b Geef de exacte coördinaten van de punten waar de grafiek van f de lijn van de evenwichtsstand snijdt.

c Geef de exacte coördinaten van de drie toppen van de grafiek.

d De grafiek van f snijdt de x-as achtereenvolgens in de punten A, B en C.
Geef de exacte afstand tussen de punten A en C.

D 31 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 + 4\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ en $g(x) = -2 + 4\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$. Je kunt een translatie (m, n) op de grafiek van f toepassen zo, dat het beeld van de grafiek van f samenvalt met de grafiek van g.
Bereken mogelijke waarden van m en n.

O 32 **a** Gegeven is de functie $f(x) = 2 + 3\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.
Hoe ontstaat de grafiek van f uit de standaardgrafiek $y = \sin(x)$?
Geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

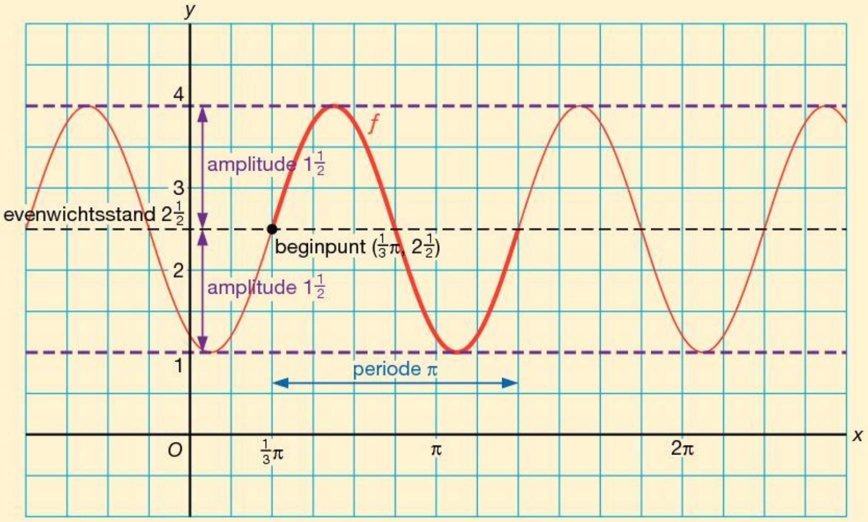
b Geef van de grafiek van de functie $g(x) = 4 + 2\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

c Geef van de grafiek van de functie $h(x) = \sin\left(3\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$ de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

Theorie B Sinusoïden tekenen

Bij het tekenen van de grafiek van de functie
$f(x) = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$ gebruik je de kenmerken

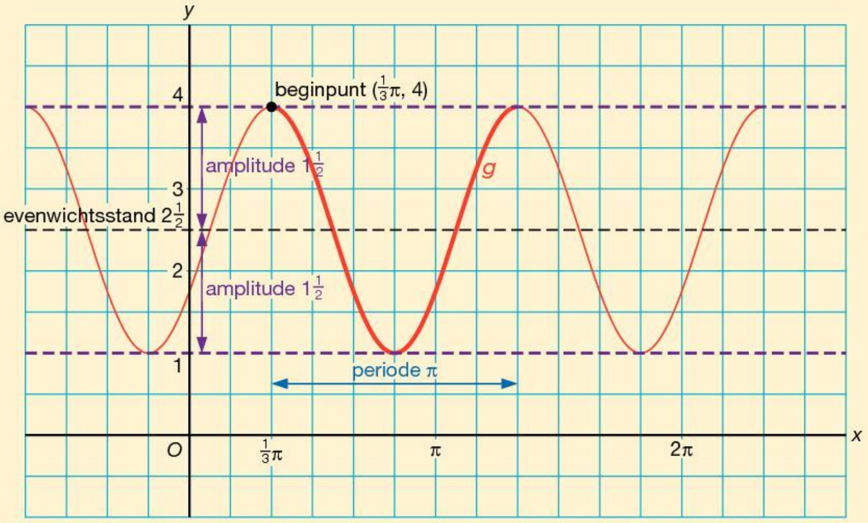
- evenwichtsstand $2\frac{1}{2}$
- amplitude $1\frac{1}{2}$
- periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- beginpunt $\left(\frac{1}{3}\pi, 2\frac{1}{2}\right)$



figuur 8.30

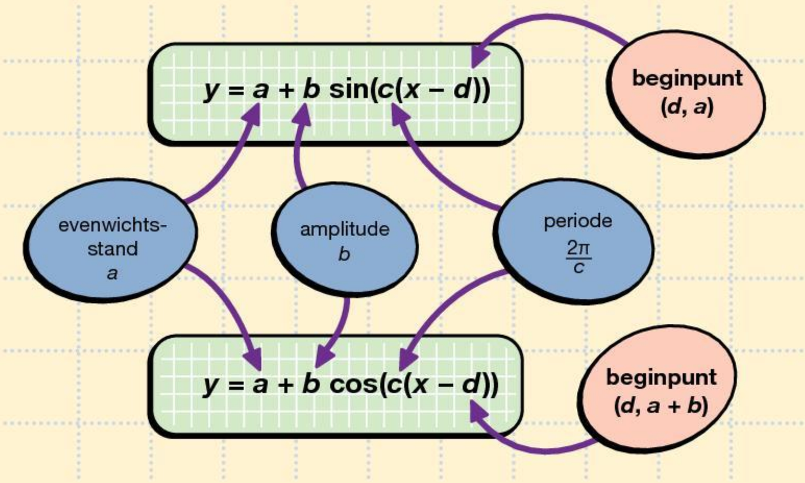
Bij het tekenen van de grafiek van de functie
$g(x) = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\cos\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$ krijg je

- evenwichtsstand $2\frac{1}{2}$
- amplitude $1\frac{1}{2}$
- periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- beginpunt $\left(\frac{1}{3}\pi, 4\right)$



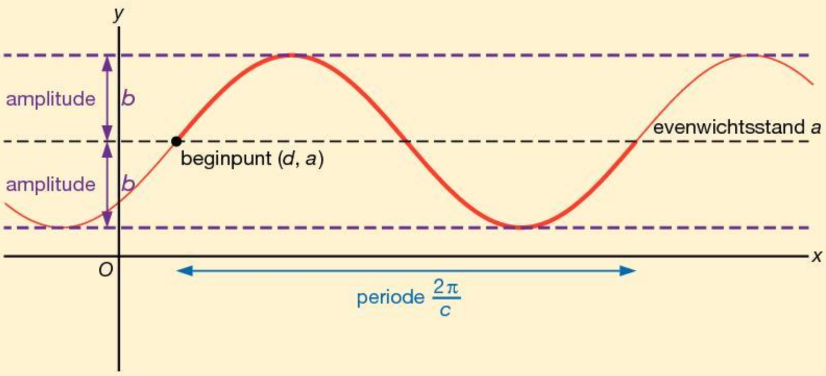
figuur 8.31 Je hebt met een cosinus te maken, dus een beginpunt is een hoogste punt.

In het algemeen heb je te maken met formules van de vorm
$y = a + b\sin(c(x - d))$ en van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$.
Het schema hieronder geldt voor $b > 0$ en $c > 0$.



Kenmerken van de grafiek van $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$ en $c > 0$

- **evenwichtsstand a**
- **amplitude b**
- **periode $\frac{2\pi}{c}$**
- **beginpunt (d, a)**



De grafieken van $y = a + b\sin(c(x - d))$ en $y = a + b\cos(c(x - d))$ heten **sinusoïden**.
Hoe je zo'n sinusoïde tekent zie je in het volgende voorbeeld.

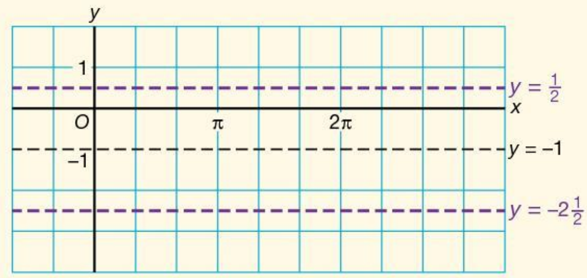
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f.

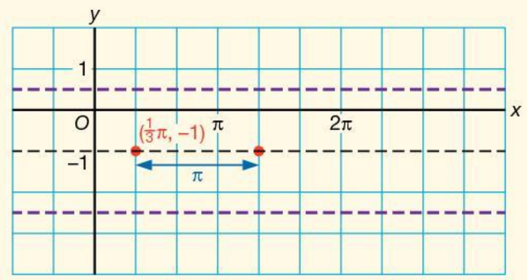
Aanpak

1 Schrijf de formule in de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ en vermeld de vier kenmerken.

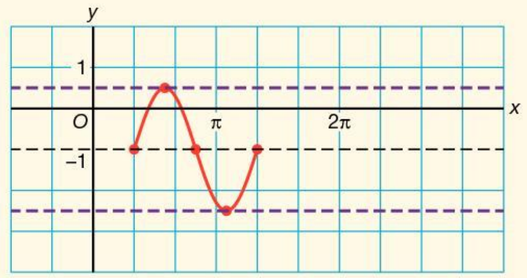
2 Stippel in een assenstelsel de lijn van de evenwichtsstand en de horizontale lijnen waarop de toppen liggen.



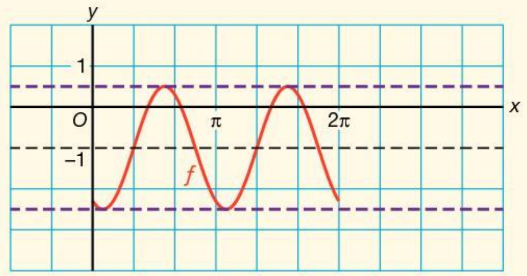
3 Teken een beginpunt en het punt dat één periode verder ligt.



4 Teken één periode van de grafiek. Gebruik dat de grafiek $\frac{1}{4}$ periode na een beginpunt een hoogste punt heeft, $\frac{1}{2}$ periode na een beginpunt weer door de lijn van de evenwichtsstand gaat en $\frac{3}{4}$ periode na een beginpunt een laagste punt heeft.



5 Teken de grafiek op het gegeven domein. Gebruik de periodiciteit.

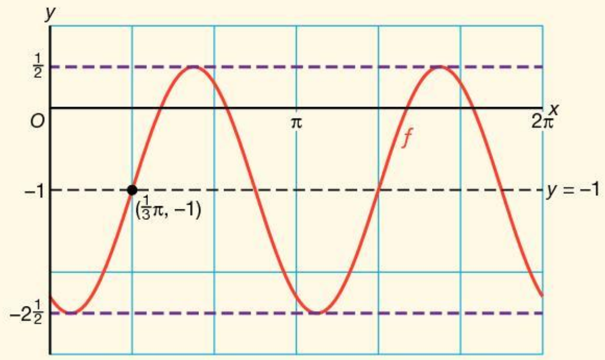


Uitwerking

$f(x) = -1 + 1\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$

$\quad\; = -1 + 1\frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

evenwichtsstand -1
amplitude $1\frac{1}{2}$
periode $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$
beginpunt $\left(\frac{1}{3}\pi, -1\right)$
Zie de grafiek hiernaast.



33 Gegeven is de functie $f(x) = -2 + 3\sin(3x + \pi)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f.

34 Gegeven is de functie $f(x) = 1 + 3\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[-\pi, \pi]$.
Teken de grafiek van f.

Controleer de grafiek met de GR.

35 Gegeven is de formule $A = 40 + 25\sin\left(\pi\left(t - 1\frac{1}{2}\right)\right)$ met domein $[0, 6]$.
- **a** Teken de grafiek van A.
- **b** Los op $A < 30$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
- **c** Bereken in één decimaal nauwkeurig de grootste helling van de grafiek.

De grafiek van een sinusoïde is het steilst in de snijpunten van de grafiek met de lijn van de evenwichtsstand.

De helling bereken je op de GR met dy/dx (TI) of d/dx (Casio).

A 36 Gegeven is de formule $N = 1\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) + 3\frac{1}{2}$ met domein $[0, 10]$.
- **a** Teken de grafiek van N.
- **b** Los op $N > 4$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
- **c** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de helling van de grafiek in het snijpunt met de verticale as.
- **d** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de grootste helling van de grafiek.

O 37 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3\sin(x)$ en $g(x) = 2 - 3\sin(x)$.
- **a** Plot de grafieken. Neem Xmin = 0 en Xmax = 2π.
- **b** De amplitude is een positief getal.
  Geef van de grafiek van f en de grafiek van g de amplitude.

8

Theorie C Amplituden van sinusoïden

De amplitude is een positief getal, dus de grafiek van $y = -3\sin(x)$ heeft amplitude 3.
De amplitude van de grafiek van $f(x) = b\sin(x)$ is voor $b > 0$ gelijk aan b en voor $b < 0$ gelijk aan $-b$.

De sinusoïden $y = a + b\sin(c(x - d))$ en $y = a + b\cos(c(x - d))$

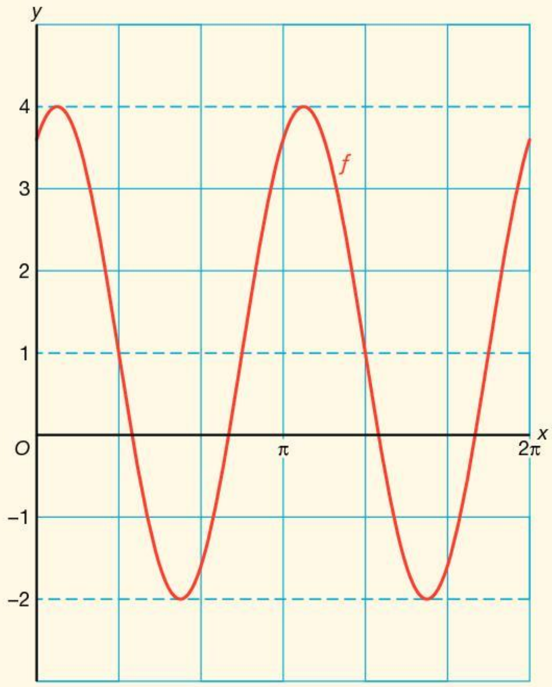
	$b > 0$	$b < 0$
sin	stijgend door (d, a)	dalend door (d, a)
cos	$(d, a + b)$ is een hoogste punt	$(d, a + b)$ is een laagste punt

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 1 - 3\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Teken de grafiek van f.

Aanpak
Omdat $b < 0$ in $y = a + b\sin(c(x - d))$ gaat de grafiek dalend door het punt (d, a).

Uitwerking
$f(x) = 1 - 3\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = 1 - 3\sin\left(2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$
evenwichtsstand 1
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
$-3 < 0$, dus grafiek dalend door het punt $\left(\frac{1}{3}\pi, 1\right)$



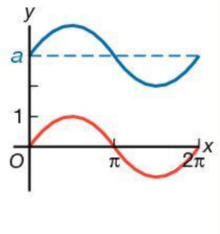
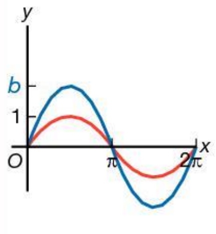
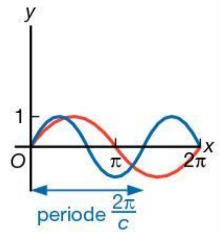
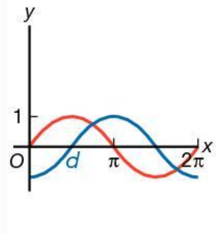
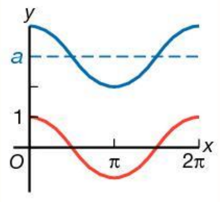
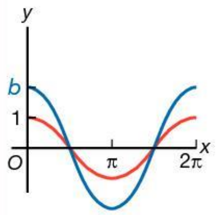
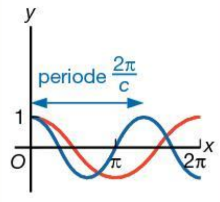
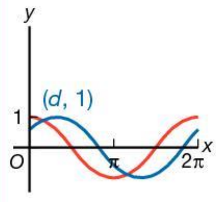
Bereken met de GR
$f(0) \approx 3{,}6$ en $f(2\pi) \approx 3{,}6$ en gebruik dat bij je tekening.

38 **a** Teken de grafiek van $f(x) = 1 - 2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.
b Teken de grafiek van $g(x) = -2 - \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$ met domein $[0, 3\pi]$.

39 **a** Gegeven is de functie $h(x) = 5 - 3\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$ met domein $[0, 10]$.
Teken de grafiek van h.
b Gegeven is de functie $k(x) = 3 - 4\cos(\pi x)$ met domein $[0, 6]$.
Teken de grafiek van k.

Terugblik

Overzicht transformaties

standaard-grafiek	translatie $(0, a)$	verm. t.o.v. de x-as met b $(b > 0)$	verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{c}$ $(c > 0)$	translatie $(d, 0)$
$y = \sin(x)$	 $y = a + \sin(x)$	 $y = b\sin(x)$	 $y = \sin(cx)$	 $y = \sin(x - d)$
$y = \cos(x)$	 $y = a + \cos(x)$	 $y = b\cos(x)$	 $y = \cos(cx)$	 $y = \cos(x - d)$
	evenwichtsstand a beginpunt sinus $(0, a)$ cosinus $(0, a + 1)$	amplitude b beginpunt cosinus $(0, b)$	periode $\frac{2\pi}{c}$	beginpunt sinus $(d, 0)$ cosinus $(d, 1)$

Sinusoïden tekenen

De grafieken van $y = a + b\sin(c(x - d))$ en $y = a + b\cos(c(x - d))$ heten sinusoïden.

De vier kenmerken van sinusoïden zijn

- evenwichtsstand is a
- amplitude is b als $b > 0$ en is $-b$ als $b < 0$
- periode is $\frac{2\pi}{c}$, dus $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ $(c > 0)$
- een beginpunt bij een sinusgrafiek is (d, a)
  een beginpunt bij een cosinusgrafiek is $(d, a + b)$.

Deze vier kenmerken gebruik je bij het tekenen van sinusoïden.

	$b > 0$	$b < 0$
sin	stijgend door (d, a)	dalend door (d, a)
cos	$(d, a + b)$ is een hoogste punt	$(d, a + b)$ is een laagste punt

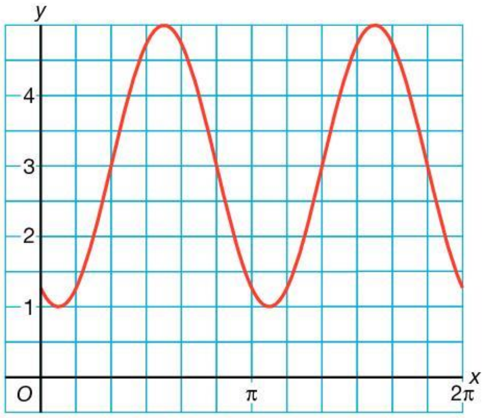
8

8.4 Formules van sinusoïden opstellen

O 40 Gegeven is de sinusoïde in figuur 8.32.

a Lees de evenwichtsstand, de amplitude en de periode af.

b De formule is van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$. Geef mogelijke waarden van a, b, c en d.



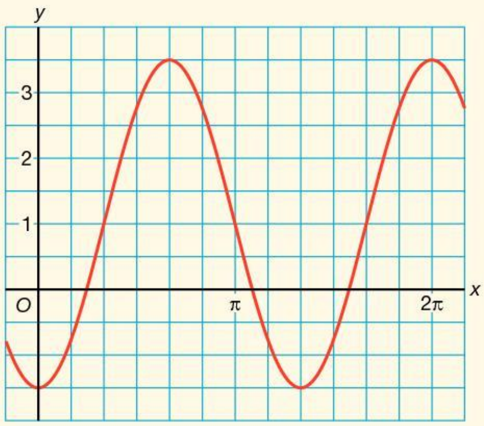
figuur 8.32

Theorie A Een formule van een sinusoïde opstellen

Bij een sinusoïde moet je een formule kunnen opstellen.
Hoe dat gaat zie je in het voorbeeld.

Voorbeeld

In figuur 8.33 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$.



figuur 8.33

Uitwerking

a = evenwichtsstand

$$= \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2} = \frac{3\frac{1}{2} + -1\frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b = amplitude = maximum − evenwichtsstand

$$= 3\tfrac{1}{2} - 1 = 2\tfrac{1}{2}$$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

Periode $= 1\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$, dus $c = \dfrac{2\pi}{\text{periode}} = \dfrac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = 1\frac{1}{2}$.

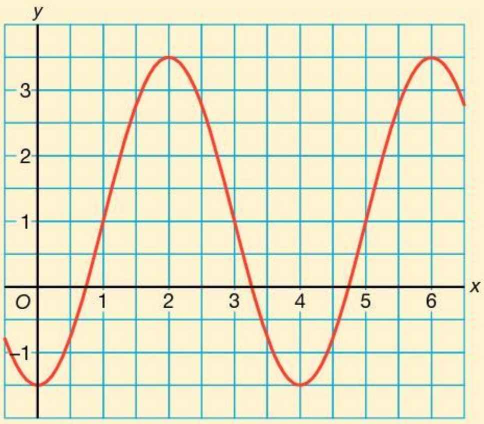
Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = \frac{1}{3}\pi$, dus $d = \frac{1}{3}\pi$.

Dus $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin\left(1\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$.

8

Bij de sinusoïde van het voorbeeld is ook een formule van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ op te stellen. Je neemt dan een hoogste punt als beginpunt.
Een hoogste punt is $(\frac{2}{3}\pi, 3\frac{1}{2})$, dus $d = \frac{2}{3}\pi$ en de formule is $y = 1 + 2\frac{1}{2}\cos\left(1\frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)\right)$.

In figuur 8.34 zie je een sinusoïde zoals in het voorbeeld, maar nu staan bij de horizontale as de getallen 1, 2, 3, ...
De periode is $5 - 1 = 4$, dus $c = \dfrac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$.
Je krijgt $y = 1 + 2\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\pi(x - 1)\right)$ en ook $y = 1 + 2\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi(x - 2)\right)$.

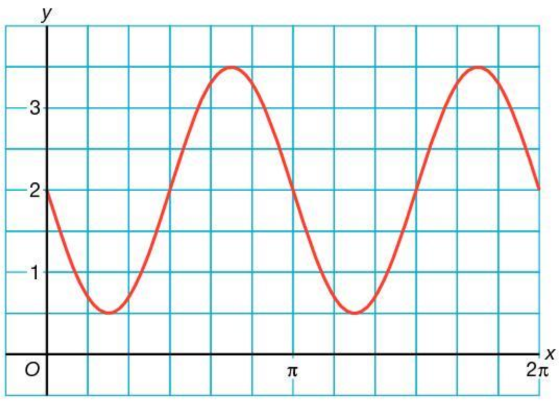


figuur 8.34

41 Zie het voorbeeld.
Stel bij figuur 8.33 een formule op van de vorm
a $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$
b $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$.

42 Zie de theorie hierboven met figuur 8.34.
Stel bij deze figuur een formule op van de vorm
a $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$
b $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$.

43 In figuur 8.35 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm
a $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$
b $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$.

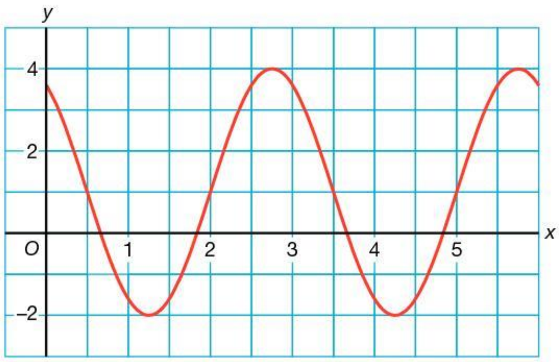


figuur 8.35

8

44 In figuur 8.36 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

a $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b > 0$
b $y = a + b \sin(c(x - d))$ met $b < 0$.



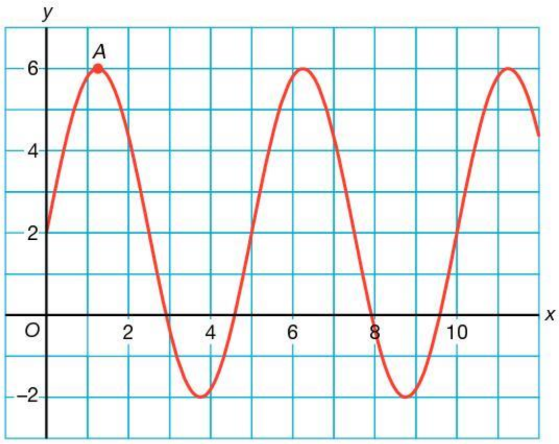
figuur 8.36

45 In figuur 8.37 is een sinusoïde getekend.
Het punt A is een hoogste punt.

a Beredeneer dat $x_A = 1\frac{1}{4}$.

Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

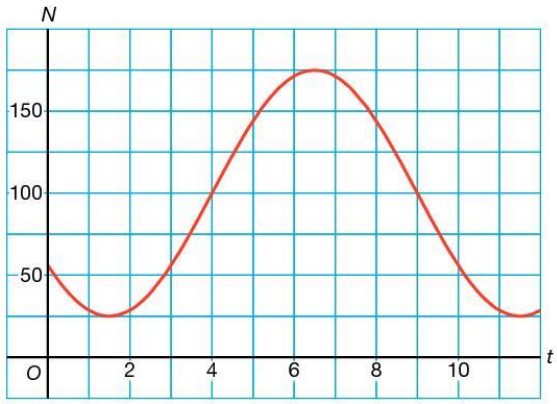
b $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b > 0$
c $y = a + b \cos(c(x - d))$ met $b < 0$.



figuur 8.37

A 46 In figuur 8.38 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

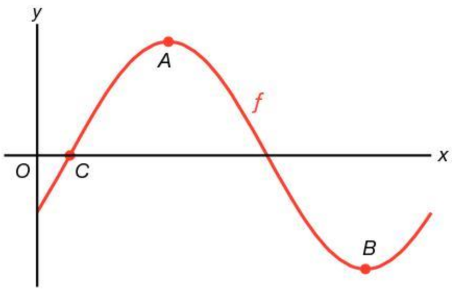
a $N = a + b \sin(c(t - d))$ met $b > 0$
b $N = a + b \cos(c(t - d))$ met $b > 0$.



figuur 8.38

8

O 47 Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x) + \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$.
De grafiek van f is een sinusoïde. Zie figuur 8.39.
De punten A en B zijn toppen van de grafiek.
Het punt C is een snijpunt van de grafiek met de x-as.



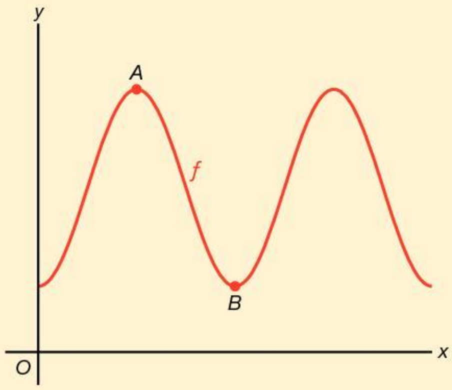
figuur 8.39

a Bereken in drie decimalen nauwkeurig de coördinaten van A en B.
b Licht toe hoe uit vraag a volgt dat de evenwichtsstand van de sinusoïde gelijk is aan 0, dat de amplitude ongeveer 1,732 is en dat de periode gelijk is aan 2π.
c Bereken de x-coördinaat van C in drie decimalen nauwkeurig.

Uit het bovenstaande volgt dat $y = 1{,}732 \sin(x - 0{,}524)$ een formule is die bij de grafiek van f hoort.
d Licht dit toe en geef een formule bij de grafiek van f van de vorm $y = b \cos(x - d)$.

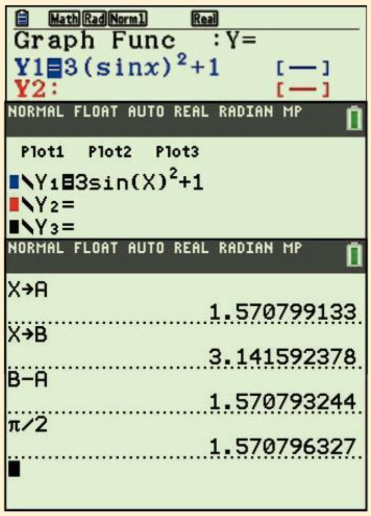
Theorie B Kenmerken opsporen met de GR

In figuur 8.40 zie je de grafiek van de functie $f(x) = 3(\sin(x))^2 + 1$.
We noteren dit ook als $f(x) = 3 \sin^2(x) + 1$.
De grafiek van f is een sinusoïde.
Door de formule van f in te voeren op de GR en enkele opties van de GR te gebruiken kun je een formule van f opsporen van de vorm $y = a + b \sin(c(x - d))$.
Met de optie maximum krijg je de coördinaten van de top A en met de optie minimum krijg je de coördinaten van de top B.
Je vindt $A(1{,}57...;\ 4)$ en $B(3{,}14...;\ 1)$.



figuur 8.40

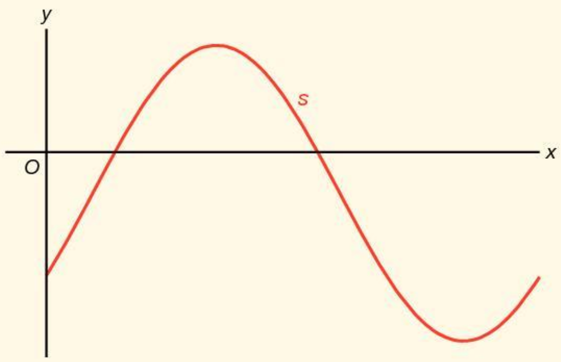
Hieruit volgt dat de evenwichtsstand is $\frac{4 + 1}{2} = 2\frac{1}{2}$ en dat de amplitude is $4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.
De halve periode is $3{,}14... - 1{,}57... = 1{,}57...$ en dit is gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$, dus de periode is π, en $c = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.
Door vervolgens bij y_2 de evenwichtsstand in te voeren en de optie intersect te gebruiken, vind je dat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat in het punt $(0{,}79;\ 2{,}5)$.
Een formule bij de sinusoïde in figuur 8.40 is dus $y = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\sin(2(x - 0{,}79))$.



8

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2 + 3\sin(x)$ en $g(x) = -3 + 2\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)$.
In de figuur hiernaast is de grafiek van de somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ getekend. De grafiek van s is een sinusoïde.
Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.



figuur 8.41

Uitwerking
Voer in $y_1 = 2 + 3\sin(x) - 3 + 2\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.
De optie maximum geeft $x = 2{,}158...$ en $y = 2{,}605...$
De optie minimum geeft $x = 5{,}300...$ en $y = -4{,}605...$
$a = \dfrac{2{,}605... + -4{,}605}{2} = -1$
$b = 2{,}605... - -1 \approx 3{,}61$
$\frac{1}{2}$ periode $= 5{,}300... - 2{,}158 = 3{,}141...$, dus π
periode $= 2\pi$, dus $c = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$
Voer in $y_2 = -1$.
Intersect geeft $x = 0{,}588...$, dus $d \approx 0{,}59$.
Dus $y = -1 + 3{,}61\sin(x - 0{,}59)$.

8

48 Zie het voorbeeld.
a Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.
b Voor de verschilfunctie v geldt $v(x) = f(x) - g(x)$.
De grafiek van v is een sinusoïde.
Stel bij de grafiek van v een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

49 Gegeven zijn de functies $f(x) = 1 + 2\sin(x)$ en $g(x) = -1 + 3\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$, beide met domein $[0, 2\pi]$.
a Teken de grafieken van f en g in één figuur.
b Los op $f(x) > g(x)$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.

Voor de somfunctie s geldt $s(x) = f(x) + g(x)$. De grafiek van s is een sinusoïde.
c Stel bij de grafiek van s een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

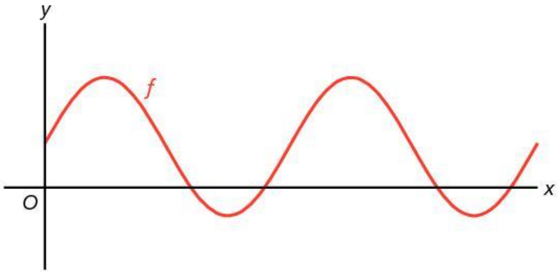
Voer in $y_3 = y_1 + y_2$ en zet y_1 en y_2 uit.

A 50 Gegeven zijn de functies $f(x) = 2\cos(x) - 3$ en $g(x) = \cos(x - \frac{1}{4}\pi) - 2$.
De somfunctie is $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie is $v(x) = f(x) - g(x)$.
De grafieken van de somfunctie en de verschilfunctie zijn beide sinusoïden.

a Stel van de somfunctie s een formule op van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$. Rond in het antwoord zo nodig af op twee decimalen.

b Stel van de verschilfunctie v een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$. Rond in het antwoord zo nodig af op twee decimalen.

A 51 Gegeven is de functie $f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x - 1)$ met domein $[0, 2\pi]$.
De grafiek van f is een sinusoïde. Zie figuur 8.42.



figuur 8.42

a Los op $f(x) \leq 0$. Rond in het antwoord af op drie decimalen.

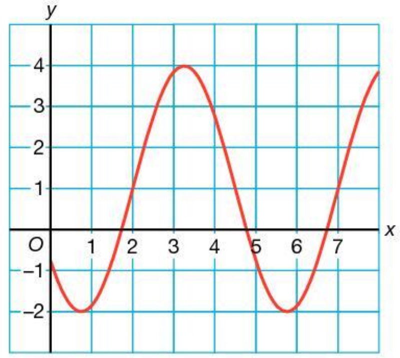
b Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.

c Stel bij de grafiek van f een formule op van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$. Rond zo nodig af op drie decimalen.

8

Terugblik

Een formule van een sinusoïde opstellen



Om bij de sinusoïde in de figuur hiernaast een formule van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b > 0$ op te stellen lees je af

a = evenwichtsstand = $\dfrac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$

$= \dfrac{4 + {-2}}{2} = 1$

b = amplitude = maximum − evenwichtsstand
$= 4 - 1 = 3$

Stijgend door de evenwichtsstand bij opvolgend $x = 2$ en $x = 7$, dus periode $= 7 - 2 = 5$ en $c = \dfrac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

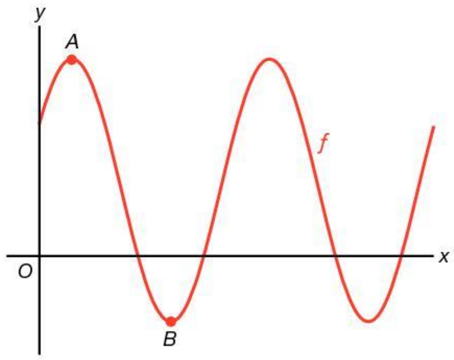
Stijgend door de evenwichtsstand bij $x = 2$, dus $d = 2$.
Dus $y = 1 + 3\sin\left(\frac{2}{5}\pi(x - 2)\right)$.

Voor een formule van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$ gebruik je dat de grafiek dalend door de evenwichtsstand gaat bij $x = 4\frac{1}{2}$.
De formule is $y = 1 - 3\sin\left(\frac{2}{5}\pi\left(x - 4\frac{1}{2}\right)\right)$.

Voor een formule van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$ gebruik je dat een hoogste punt is $(3\frac{1}{4}, 4)$. De formule is $y = 1 + 3\cos\left(\frac{2}{5}\pi\left(x - 3\frac{1}{4}\right)\right)$.

Voor een formule van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b < 0$ gebruik je dat een laagste punt is $(\frac{3}{4}, -2)$. De formule is $y = 1 - 3\cos\left(\frac{2}{5}\pi\left(x - \frac{3}{4}\right)\right)$.

Kenmerken opsporen met de GR



De grafiek van de functie $f(x) = 4\cos^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) - 1$ is een sinusoïde. Hiernaast zie je deze grafiek met de toppen A en B.
Bij deze grafiek is een formule van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ op te stellen.

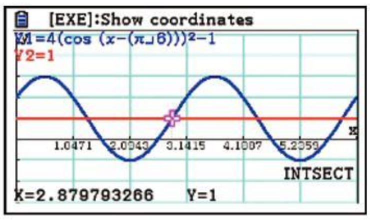
Voer in $y_1 = 4\cos^2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) - 1$.
De optie maximum geeft $A(0{,}523...; 3)$ en de optie minimum geeft $B(2{,}094...; -1)$.

Dus $a = \dfrac{3 + {-1}}{2} = 1$ en $b = 3 - 1 = 2$.

$\frac{1}{2}$ periode $= 2{,}094... - 0{,}523... = 1{,}570... = \frac{1}{2}\pi$,

dus periode $= \pi$ en $c = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.

Voer in $y_1 = 1$.
Intersect geeft $x = 2{,}879...$, dus $d \approx 2{,}88$.
De formule is $y = 1 + 2\sin(2(x - 2{,}88))$.



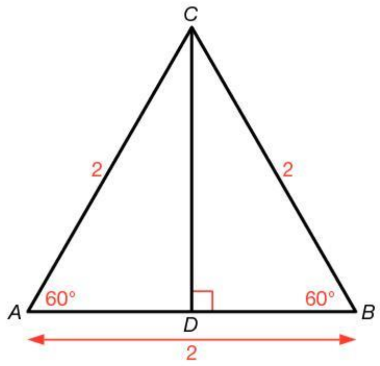
8.5 Goniometrische vergelijkingen

O 52 Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 2 en hoogtelijn CD. Zie figuur 8.43.

a Licht toe dat $AD = 1$ en $CD = \sqrt{3}$.

b Licht toe dat $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos(60°) = \frac{1}{2}$.

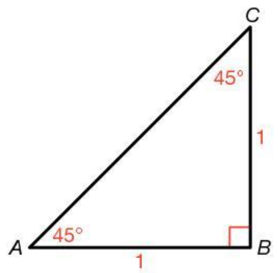
c Bereken exact $\sin(30°)$ en $\cos(30°)$.



figuur 8.43

In figuur 8.44 is de rechthoekige driehoek ABC getekend met $AB = BC = 1$.

d Licht toe dat $AC = \sqrt{2}$ en $\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



figuur 8.44

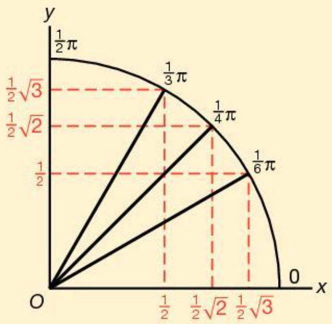
Theorie A De exacte-waarden-cirkel

Uit opgave 52 volgt de tabel hiernaast.
Deze tabel breiden we uit met hoeken van 0° en 90°.
Verder gebruiken we radialen in plaats van graden.
Zo krijg je de tabel hieronder.
Leer deze tabel uit het hoofd.

hoek	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

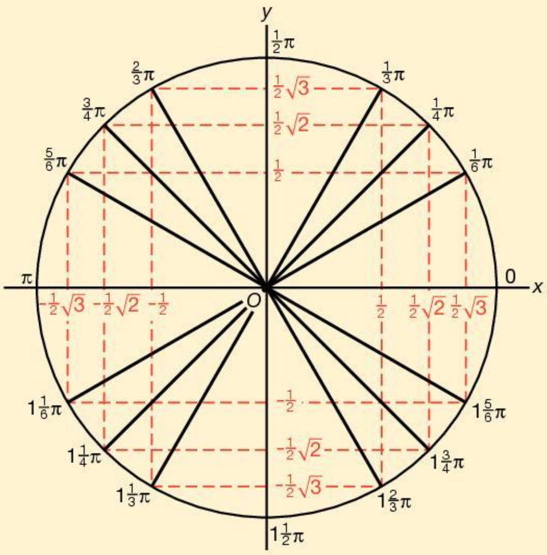
hoek	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

In de kwartcirkel hiernaast zijn de sinus en de cosinus van de hoeken uit de tabel verwerkt.



figuur 8.45

Door te spiegelen in de y-as en de x-as krijg je de **exacte-waarden-cirkel**.



figuur 8.46

Je leest af $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

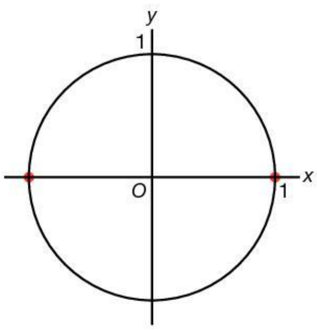
53 Geef de exacte waarde.

a $\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$	**d** $\cos\left(1\frac{2}{3}\pi\right)$
b $\cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$	**e** $\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right)$
c $\sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right)$	**f** $\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$

A 54 Geef de exacte waarden van α met $0 \le \alpha \le 2\pi$.

a $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	**d** $\cos(\alpha) = 0$
b $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$	**e** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
c $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	**f** $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

O 55 De eenheidscirkel snijdt de x-as in de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$.
Bij deze punten horen de draaiingshoeken $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$
en ook $-\pi, -2\pi, -3\pi, \ldots$
Welke draaiingshoeken horen bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de y-as?



figuur 8.47

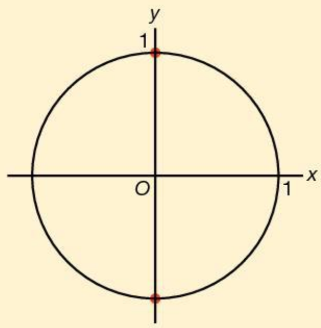
Theorie B $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$

In opgave 55 heb je gezien dat bij de snijpunten van de eenheidscirkel met de x-as de draaiingshoeken $\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ horen.
Dit noteren we kort als $k \cdot \pi$, waarin k een geheel getal is.
De getallen $k \cdot \pi$ zijn oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$.

k is in dit hoofdstuk een geheel getal.

Hiermee heb je alle oplossingen van de vergelijking $\sin(x) = 0$, want de sinus van een hoek is de y-coördinaat van het bijbehorende punt op de eenheidscirkel en de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ zijn alle punten op de eenheidscirkel met y-coördinaat 0.

En zo heeft de vergelijking $\cos(x) = 0$ als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.



figuur 8.48 Bij $\cos(x) = 0$ horen punten op de eenheidscirkel met x-coördinaat 0.

Bij de vergelijking $\sin(x) = 1$ hoort het punt op de eenheidscirkel met y-coördinaat 1, dus het punt $(0, 1)$. Dus de vergelijking $\sin(x) = 1$ heeft als oplossing $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$.

Bij het punt $(0, 1)$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{2}\pi$, $2\frac{1}{2}\pi$, $4\frac{1}{2}\pi$, ... en ook $-1\frac{1}{2}\pi$, $-3\frac{1}{2}\pi$, $-5\frac{1}{2}\pi$, ...

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met behulp van de eenheidscirkel.
$\sin(A) = 0$ geeft $A = k \cdot \pi$
$\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$\sin(A) = -1$ geeft $A = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = 0$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
$\cos(A) = 1$ geeft $A = k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = -1$ geeft $A = \pi + k \cdot 2\pi$

In voorbeeld a op de volgende bladzijde wordt de vergelijking $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$ opgelost in $[0, 2\pi]$. Dat wil zeggen dat alle oplossingen in het interval $[0, 2\pi]$ moeten worden gegeven.
Na gebruik van de regel $\sin(A) = 1$ geeft $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ krijg je $x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$.
Dit geeft voor $k = ..., -1, 0, 1, 2, 3, ...$

⋮

$x = \frac{5}{12}\pi + -1 \cdot \pi = -\frac{7}{12}\pi$ niet in $[0, 2\pi]$

$x = \frac{5}{12}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi$ wel in $[0, 2\pi]$

$x = \frac{5}{12}\pi + 1 \cdot \pi = 1\frac{5}{12}\pi$ wel in $[0, 2\pi]$

$x = \frac{5}{12}\pi + 2 \cdot \pi = 2\frac{5}{12}\pi$ niet in $[0, 2\pi]$

⋮

Dus de oplossingen in $[0, 2\pi]$ zijn $x = \frac{5}{12}\pi$ en $x = 1\frac{5}{12}\pi$.

8

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

b $\cos^2(x) = 1$

Uitwerking

a $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

Deel alle termen door 2, dus $k \cdot 2\pi$ wordt $k \cdot \pi$.

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{12}\pi \vee x = 1\frac{5}{12}\pi$

b $\cos^2(x) = 1$

$\cos(x) = 1 \vee \cos(x) = -1$

$x = k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = 0 \vee x = 2\pi \vee x = \pi$

56 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\sin(3x) = 1$

b $\sin(2x) = 0$

c $\sin^2(x) = 1$

d $\sin\left(\frac{3}{4}x\right) = -1$

e $\sin\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = 0$

f $\sin(\pi x) = -1$

57 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $\cos(3x) = 0$

b $\cos(4x) = 1$

c $\cos^2(2x) = 1$

d $\cos\left(\frac{2}{5}x\right) = -1$

e $\cos\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = 0$

f $\cos(2\pi x) = -1$

A 58 Bereken exact de oplossingen in $[-\pi, \pi]$.

a $3\sin\left(2x + \frac{1}{6}\pi\right) = 0$

b $2\cos\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

c $\sin\left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}\pi\right) = -1$

d $\cos\left(1\frac{1}{2}x - \pi\right) = -1$

e $\sin^2(2x) = 1$

f $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

g $\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) = 0$

h $\cos\left(1\frac{1}{2}\pi x + \pi\right) = 0$

A 59 Gegeven is de functie $f(x) = 2\sin(x) \cdot \cos(2x)$ met domein $[0, 2\pi]$.
In figuur 8.49 zie je de grafiek van f met de toppen $A\left(\frac{1}{2}\pi, -2\right)$ en $B\left(1\frac{1}{2}\pi, 2\right)$.

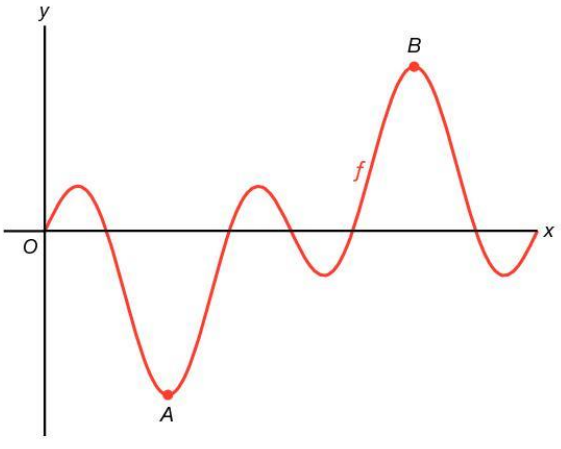
a Bereken exact de nulpunten van f.

b Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door de punten A en B de x-as snijdt in een snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

Op de grafiek van f liggen de punten $C\left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\right)$ en $D\left(1\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{2}\right)$.

c Toon dit aan.

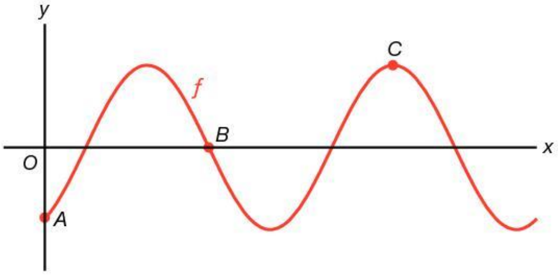
d Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn door de punten C en D de x-as snijdt in een snijpunt van de grafiek van f met de x-as.



figuur 8.49

8

D 60 Gegeven is de functie
$f(x) = \sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.
Het snijpunt van de grafiek van f met de y-as is het punt A, het punt B is een snijpunt van de grafiek van f met de x-as en het punt C is een top van de grafiek.
Zie figuur 8.50.
Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn die door B en C gaat de y-as snijdt in A.



figuur 8.50

O 61 Gegeven is de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

a Licht toe dat $x = \frac{1}{6}\pi$ een oplossing is.

b Waarom is $x = 2\frac{1}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = 4\frac{1}{6}\pi$?

c Licht toe dat $x = \frac{5}{6}\pi$ een oplossing is.

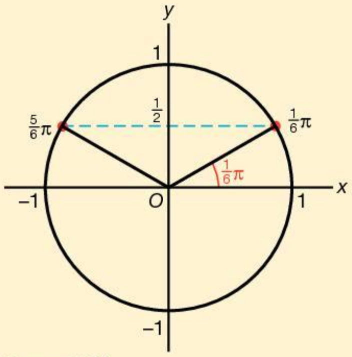
d Waarom is $x = 2\frac{5}{6}\pi$ een oplossing? En waarom $x = -1\frac{1}{6}\pi$?

Theorie C $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

In opgave 61 heb je gezien dat bij de vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ twee rijtjes oplossingen horen.
Omdat $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ is het ene rijtje $x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Omdat ook $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ is het andere rijtje $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

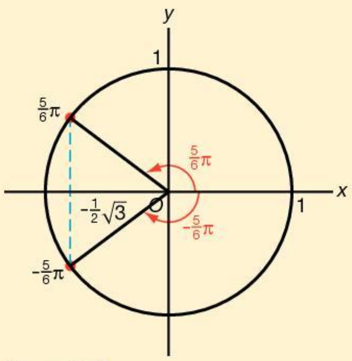
De oplossingen $\frac{1}{6}\pi$ en $\frac{5}{6}\pi$ zijn gevonden met de exacte-waarden-cirkel.
Merk op dat $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi$.



figuur 8.51

Bij het vinden van de rijtjes oplossingen van de vergelijking $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ gebruik je figuur 8.52. Je krijgt

$\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ geeft $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.



figuur 8.52

De vergelijkingen $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$, los je op door uit de exacte-waarden-cirkel één oplossing B af te lezen.
Daarna gebruik je
$\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
$\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $2\sin(3x) = \sqrt{3}$

b $2\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{2}$

Uitwerking

a $2\sin(3x) = \sqrt{3}$

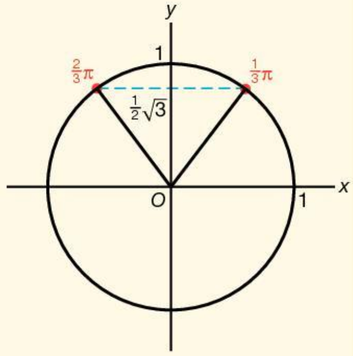
$\sin(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$3x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft

$x = \frac{1}{9}\pi \vee x = \frac{7}{9}\pi \vee x = 1\frac{4}{9}\pi \vee x = \frac{2}{9}\pi \vee x = \frac{8}{9}\pi \vee x = 1\frac{5}{9}\pi$



b $2\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{2}$

$\cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

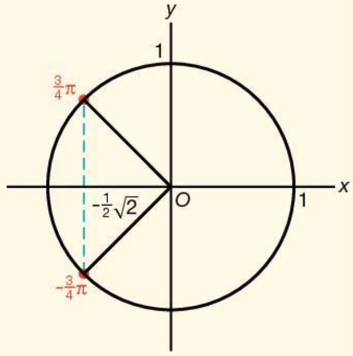
$2x - \frac{1}{3}\pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{3}\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x = \frac{13}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \pi \vee x = -\frac{5}{24}\pi + k \cdot \pi$

x in $[0, 2\pi]$ geeft

$x = \frac{13}{24}\pi \vee x = 1\frac{13}{24}\pi \vee x = \frac{19}{24}\pi \vee x = 1\frac{19}{24}\pi$



62 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

b $2\cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1$

c $2\sin\left(2x - \frac{1}{4}\pi\right) = -\sqrt{3}$

d $2\cos(3x - \pi) = -1$

63 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $2\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{2}$

b $2\cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = \sqrt{3}$

c $\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

d $\cos\left(\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

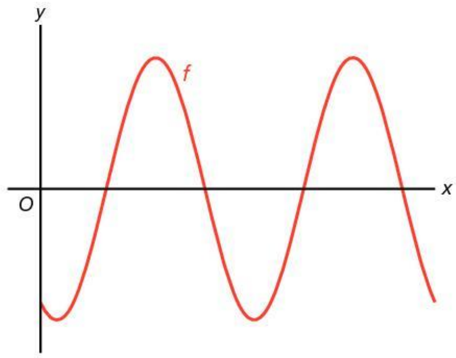
A 64 Gegeven is de functie
$f(x) = 4\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) \cdot \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$ met domein $[0, 2\pi]$.
In figuur 8.53 is de grafiek van f getekend.

a Bereken exact de nulpunten van f.

Het functievoorschrift van f is te schrijven in de vorm $f(x) = a + b\sin(c(x - d))$.

b Bereken exacte waarden van a, b, c en d.

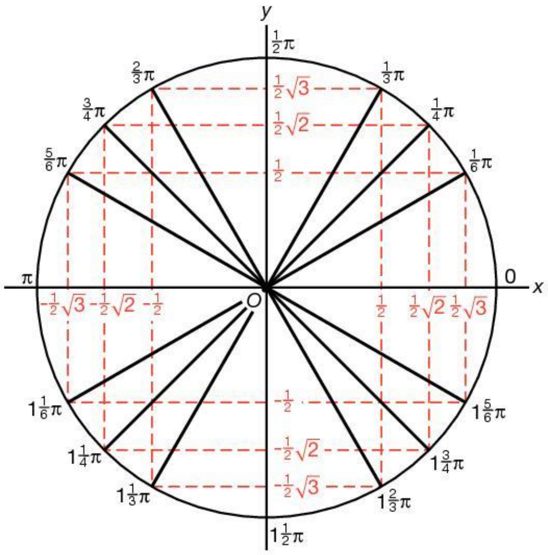
c Bereken exact de oplossingen van de vergelijking $f(x) = 1$.



figuur 8.53

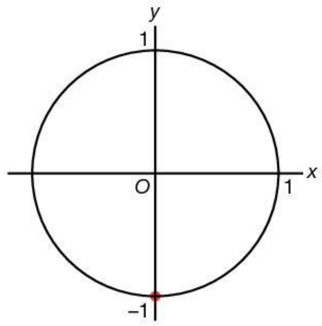
Terugblik

Exacte-waarden-cirkel



Bij hoeken die een veelvoud zijn van $\frac{1}{6}\pi$ of van $\frac{1}{4}\pi$ moet je de exacte waarde weten van de sinus en de cosinus. Je gebruikt hierbij de exacte-waarden-cirkel.
Je leest bijvoorbeeld af
$\cos\left(1\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ en
$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

De vergelijkingen sin(*A*) = *C* en cos(*A*) = *C* met *C* = -1, 0, 1



Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$ los je op met de eenheidscirkel.
Bij $\sin(x) = -1$ hoort het punt met y-coördinaat -1 op de eenheidscirkel, dus het punt $(0, -1)$ en hierbij hoort een draaiingshoek van $1\frac{1}{2}\pi$.
Zo krijg je $\sin(x) = -1$ geeft $x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$. Hierin is k een geheel getal.

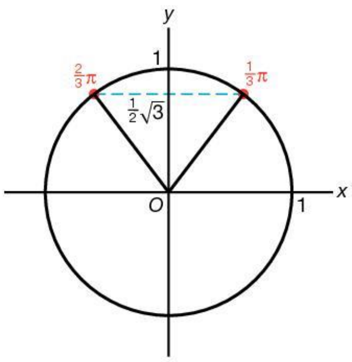
Uit $\cos(A) = 0$ volgt $A = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$.
Dit gebruik je bij het oplossen van $\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0$.
Je krijgt $2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

x in $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{7}{12}\pi \vee x = 1\frac{1}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$

De vergelijkingen sin(*A*) = *C* en cos(*A*) = *C* met *C* = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$



Vergelijkingen van de vorm $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$ los je op met de exacte-waarden-cirkel.
Bij $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ horen de draaiingshoeken $\frac{1}{3}\pi$ en $\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.
Er zijn twee rijtjes oplossingen:
$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

8.6 Toepassingen van sinusoïden

O 65 Gegeven is de formule $y = 2 + 3\sin\left(\frac{1}{5}\pi(x-1)\right)$ met $0 \le x \le 10$.
a Plot de grafiek en bereken de coördinaten van het hoogste punt van de grafiek.
b Bereken y in twee decimalen nauwkeurig voor $x = 1{,}8$.
c Voor welke x is $y = 3{,}6$? Rond af op twee decimalen.

Theorie A Berekeningen met de sinus en de cosinus

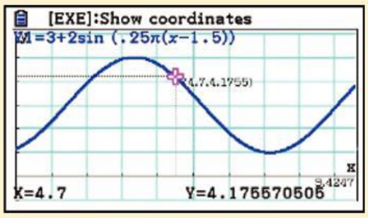
Bij een formule als $y = 3 + 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-1{,}5)\right)$ met $0 \le x \le 10$ moet je de volgende vragen kunnen beantwoorden.

1 Bereken algebraïsch y_{max} en de bijbehorende x
y_{max} = evenwichtsstand + amplitude = 3 + 2 = 5
De periode is $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$.

y is maximaal een kwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus y is maximaal voor $x = 1{,}5 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 3{,}5$.

2 Bereken algebraïsch y_{min} en de bijbehorende x
y_{min} = evenwichtsstand − amplitude = 3 − 2 = 1
y is minimaal driekwart periode nadat de evenwichtsstand stijgend is gepasseerd, dus y is minimaal voor $x = 1{,}5 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 7{,}5$.

3 Bereken y voor $x = 4{,}7$
Voer in $y_1 = 3 + 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi(x-1{,}5)\right)$ en plot de grafiek in een venster met Xmin = 0 en Xmax = 10.
TRACE (TI) of Y-CAL (Casio) geeft $y \approx 4{,}18$.

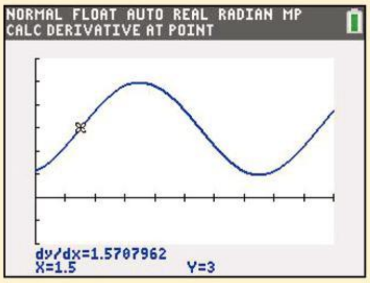


4 Voor welke x is $y = 4{,}6$?
Voer in $y_2 = 4{,}6$. Intersect geeft $x \approx 2{,}68$ en $x \approx 4{,}32$.

5 Bereken de helling van de grafiek voor $x = 5$.

De helling is $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=5} \approx -1{,}45$.

6 Bereken de maximale helling van de grafiek.
De helling is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat is bij $x = 1{,}5$.
De maximale helling is $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=1{,}5} \approx 1{,}57$.



8

66 Gegeven is de formule $y = 5 + 2\sin\left(\frac{2}{5}\pi(x - 0{,}8)\right)$ met $0 \leq x \leq 5$.
- **a** Bereken algebraïsch y_{max} en de bijbehorende x.
- **b** Bereken algebraïsch y_{min} en de bijbehorende x.
- **c** Bereken y in twee decimalen nauwkeurig voor $x = 4{,}62$.
- **d** Voor welke x is $y = 6$? Rond af op twee decimalen.
- **e** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de y-as.
- **f** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de helling van de grafiek voor $x = 4$.
- **g** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de maximale helling van de grafiek.

67 Gegeven is de formule $P = 25 + 6\sin\left(\frac{1}{2}q - 1\right)$ met $0 \leq q \leq 15$.
- **a** Bereken algebraïsch P_{max} en de bijbehorende q. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- **b** Bereken algebraïsch P_{min} en de bijbehorende q. Rond zo nodig af op twee decimalen.
- **c** Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke q geldt $P > 30$.
- **d** Bereken de maximale helling van de grafiek.

A 68 Gegeven is de formule $N = 30{,}8 + 6{,}3\cos\left(\frac{2}{15}\pi(t - 5{,}1)\right)$ met $0 \leq t \leq 15$.
- **a** Bereken algebraïsch N_{max} en de bijbehorende t.
- **b** Bereken algebraïsch N_{min} en de bijbehorende t.
- **c** Bereken N in twee decimalen nauwkeurig voor $t = 7{,}2$.
- **d** Bereken voor welke t de waarde van N groter is dan 35. Rond af op twee decimalen.
- **e** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de helling van de grafiek voor $t = 10$.
- **f** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de maximale helling van de grafiek.

O 69
- **a** Van een sinusoïde zijn de punten (3, 12) en (18, 12) twee opeenvolgende hoogste punten, die op afstand 4 van de evenwichtsstand liggen.
  Stel een formule op van deze sinusoïde.
- **b** Van een sinusoïde is de evenwichtsstand 650 en de periode 48.
  Het punt (16, 812) is een top.
  Stel een formule op van deze sinusoïde.
- **c** Van een sinusoïde zijn de punten (2, 250) en (26, 110) twee opeenvolgende toppen.
  Stel een formule op van deze sinusoïde.

8

Theorie B Sinusoïden gebruiken

De gemiddelde dagtemperatuur T in °C in Napels kan worden benaderd door het model $T = a + b\ \sin(c(n - d))$. Hierin is n het dagnummer met $n = 1$ op 1 januari.
Gegeven is dat T maximaal is op 20 juli en dat $T_{max} = 25\ °C$.
Verder is T minimaal op 19 januari en $T_{min} = 9\ °C$.

Uit deze gegevens volgt dat $a = \dfrac{25 + 9}{2} = 17$ en $b = 25 - 17 = 8$.

Omdat de periode 365 dagen is, is $c = \dfrac{2\pi}{365}$.

De grafiek van T gaat $\frac{1}{4}$ periode voor 20 juli ($n = 201$) stijgend door de evenwichtsstand. Dat is dus $\frac{1}{4} \cdot 365 \approx 91$ dagen voor $n = 201$, dus $d = 201 - 91 = 110$.

Zo krijg je de formule $T = 17 + 8\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$.

Napels

70 Zie de theorie met de formule
$T = 17 + 8\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{365}(n - 110)\right)$.
In de tabel hiernaast is voor een niet-schrikkeljaar bij elke datum het bijbehorende dagnummer te vinden.

a Bereken in één decimaal nauwkeurig de gemiddelde dagtemperatuur op 1 maart en op 18 mei.

b Tussen welke data is de gemiddelde dagtemperatuur meer dan 12 °C?

c Bereken de grootste snelheid waarmee de gemiddelde dagtemperatuur stijgt. Geef het antwoord in graden Celsius per week en rond af op twee decimalen.

maand	dagnummer
januari	1-31
februari	32-59
maart	60-90
april	91-120
mei	121-151
juni	152-181
juli	182-212
augustus	213-243
september	244-273
oktober	274-304
november	305-334
december	335-365

71 De daglengte L in Kristiansand in Noorwegen als functie van het dagnummer n is gegeven door $L = 11{,}9 + 6{,}1 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(n - 80)\right)$.

Hierbij is de daglengte L de tijd in uren tussen zonsopkomst en zonsondergang en $n = 1$ op 1 januari.
Geef bij de volgende vragen over de daglengte het antwoord in minuten nauwkeurig.

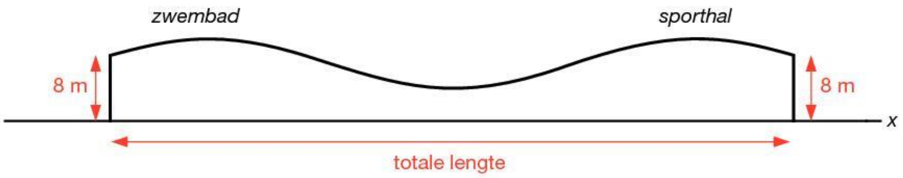
a Hoe lang duurt de langste dag in Kristiansand?
b Hoeveel is de langste dag in Kristiansand langer dan de kortste dag?
c Bereken de daglengte op 1 maart.
d Op welke datum duurt de dag in Kristiansand volgens de formule het langst?
e Bereken de grootste snelheid waarmee de dagen in Kristiansand lengen. Geef het antwoord in gehele seconden per dag.

A 72 De daglengte, dat is de tijd tussen zonsopkomst en zonsondergang, varieert in Nederland tussen 8 uur op 21 december en 16 uur op 21 juni. Deze daglengte kan worden beschreven met het model $l = a + b \sin(c(t - d))$ met l in uren en t in maanden met $t = 0$ op 21 januari.

a Bereken a, b, c en d.
b Bereken gedurende hoeveel dagen in het jaar de daglengte meer is dan 15 uur.
c Toon met berekeningen aan dat de daglengte op 21 maart sneller toeneemt dan op 21 februari.
d Bereken in gehele seconden per dag de snelheid waarmee de daglengte toeneemt op 1 april.

73 Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In figuur 8.54 op de volgende bladzijde is een schematisch vooraanzicht getekend. In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule $h = 3 \sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) + 7$.

De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meter. De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt O dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt. Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog.

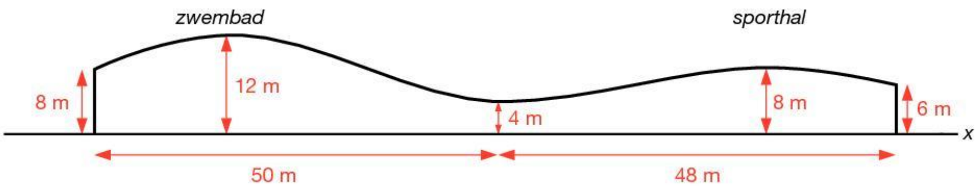


figuur 8.54

a Bereken exact de minimale en de maximale hoogte van het dak.

b Bereken de totale lengte van het gebouw in gehele meters nauwkeurig.

Voordat het zwembad met sporthal werd gebouwd, heeft een architect een ontwerp gemaakt van het gebouw. In het eerste ontwerp dat de architect had gemaakt, was het dak boven het zwembad hoger dan het dak boven de sporthal. Ook de lengte van de voorkant van het gebouw in dit eerste ontwerp was anders dan die van het uiteindelijke gebouw. In figuur 8.55 staan de afmetingen van het gebouw volgens het eerste ontwerp.



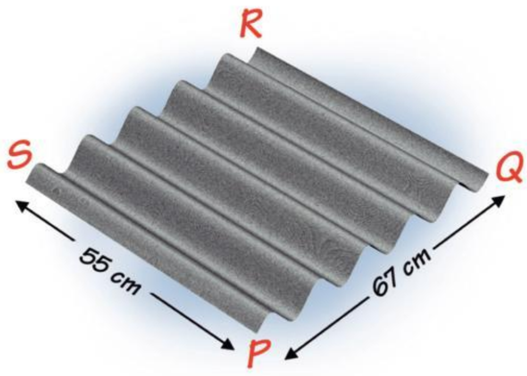
figuur 8.55

Het gedeelte van het dak dat boven het zwembad ligt, heeft in het vooraanzicht de vorm van een sinusoïde. Dit geldt ook voor het gedeelte van het dak boven de sporthal.
De twee sinusoïden gaan vloeiend in elkaar over op de grens tussen zwembad en sporthal op een hoogte van 4 meter. Op die grens is de hoogte van het dak minimaal. Boven de sporthal heeft het dak een maximale hoogte van 8 meter.
Met behulp van deze gegevens kun je een formule opstellen die hoort bij het vooraanzicht van het gedeelte van het dak boven de sporthal volgens het eerste ontwerp.

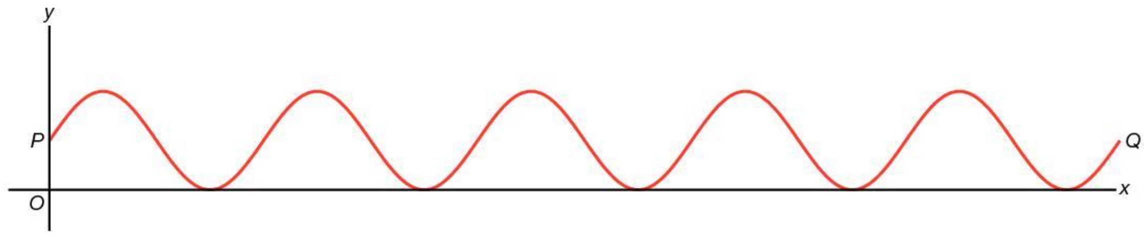
c Stel deze formule op. Je mag zelf de oorsprong kiezen. Licht je werkwijze toe.

8

74 Golfplaat is een bouwmateriaal dat gebruikt wordt voor het afdekken van eenvoudige bouwwerken. In figuur 8.56 is een rechthoekig stuk golfplaat getekend.
In figuur 8.57 is het vooraanzicht van dit stuk golfplaat in een assenstelsel getekend. Hierbij is de dikte verwaarloosd.
In het assenstelsel zijn x en y uitgedrukt in cm. Bij deze grafiek hoort de formule $y = 3 + 3\sin(0{,}469x)$.

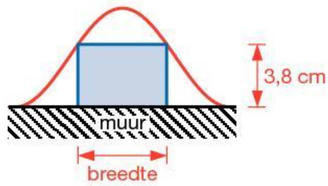


figuur 8.56



figuur 8.57

De golfplaat uit figuur 8.56 wordt als afdakje gebruikt. De plaat wordt horizontaal neergelegd en steunt aan de randen PQ en RS op een muur.
De ruimtes tussen de bovenrand van de muur en de golfplaat worden afgedicht met houten blokjes. Deze blokjes zijn 3,8 cm hoog en hebben een zo groot mogelijke breedte. In figuur 8.58 is dit geschetst.



figuur 8.58

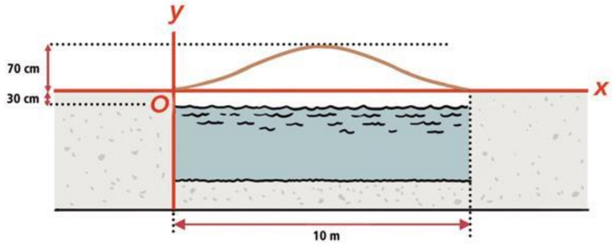
a Bereken de breedte van zo'n blokje. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Het bovenaanzicht van het stuk golfplaat uit figuur 8.56 is een rechthoek $PQRS$.
$PQ = 67$ cm en $PS = 55$ cm.
Dit stuk golfplaat wordt diagonaal doorgezaagd. In het bovenaanzicht is de zaagsnede een rechte lijn van S naar Q.
De werkelijke vorm van de doorsnede is een sinusoïde.

b Stel een formule op van deze sinusoïde van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ met x en y in cm. Rond in het antwoord zo nodig af op drie decimalen.

8

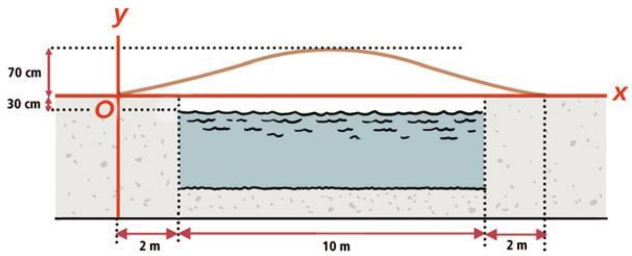
A 75 In figuur 8.59 zie je een dwarsdoorsnede van een gracht met een breedte van 10 m waarover een voetgangersbrug ligt.
Er is een assenstelsel aangebracht waarbij de oorsprong aan het begin van de brug is genomen en de x-as samenvalt met het maaiveld.
Het wegdek van de brug kan worden beschreven door een formule van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$.
Het hoogste punt van het wegdek zit 1 meter boven het wateroppervlak en het water staat 30 cm onder de kade.
Voor een brug waarbij de gracht nog juist wordt overspannen geldt $y = 0{,}35 + 0{,}35\sin\left(\frac{1}{5}\pi\left(x - 2{,}5\right)\right)$ met x en y in meter.



figuur 8.59

a Licht de formule $y = 0{,}35 + 0{,}35\sin\left(\frac{1}{5}\pi\left(x - 2{,}5\right)\right)$ toe.
b Toon aan dat de maximale helling van het wegdek 12,4° is.

De helling van het wegdek mag maximaal 8° zijn.
Om dit te bereiken maakt men de brug zo, dat de overspanning van de gehele brug meer is dan 10 meter.
Het hoogste punt van het wegdek blijft hierbij 1 meter boven het wateroppervlak in het midden van de gracht.
Alex beweert dat de brug dan 2 meter vanaf de oever kan beginnen.
c Onderzoek met berekeningen of Alex gelijk heeft.



figuur 8.60

8

Terugblik

Berekeningen met de sinus en de cosinus

Bij de formule $N = 18 + 5\sin\left(\frac{4}{15}\pi(t-4)\right)$ met $0 \le t \le 8$ geldt

- de evenwichtsstand is 18
- de amplitude is 5
- de periode is $\dfrac{2\pi}{\frac{4}{15}\pi} = 7\frac{1}{2}$
- de grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand bij $t = 4$.

Hieruit volgt

- N is maximaal $18 + 5 = 23$ voor $t = 4 + \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 + \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 5\frac{7}{8}$
- N is minimaal $18 - 5 = 13$ voor $t = 4 - \frac{1}{4} \cdot \text{periode} = 4 - \frac{1}{4} \cdot 7\frac{1}{2} = 2\frac{1}{8}$
- voor $t = 4{,}5$ is $N \approx 20{,}03$ (met de GR)
- $N = 15$ voor $t \approx 1{,}02$ en $t \approx 3{,}23$ (met intersect op de GR)
- de helling van de grafiek voor $t = 3$ is $\left[\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right]_{t=3} \approx 2{,}80$ (met de optie dy/dx op de GR)
- de helling van de grafiek is maximaal als de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus voor $t = 4$, en de maximale helling is $\left[\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right]_{t=4} \approx 4{,}19$.

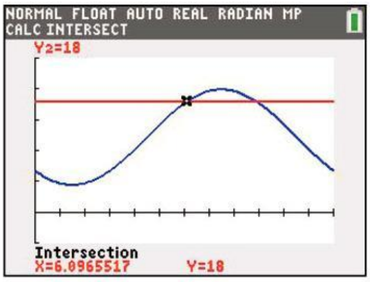
Sinusoïden gebruiken

De temperatuur van het zeewater langs de Nederlandse kust is te beschrijven met een model van de vorm $T = a + b\sin(c(t-d))$ met T in °C en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari.
De laagste temperatuur van het zeewater is 4,5 °C halverwege februari.
De hoogste temperatuur van het zeewater is 20,0 °C halverwege augustus.
Zo krijg je

- $a = \dfrac{20{,}0 + 4{,}5}{2} = 12{,}25$
- $b = 20{,}0 - 12{,}25 = 7{,}75$
- $c = \dfrac{2\pi}{\text{periode}} = \dfrac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$
- $d = 1{,}5 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5$.

Dus $T = 12{,}25 + 7{,}75\sin\left(\frac{1}{6}\pi(t - 4{,}5)\right)$.

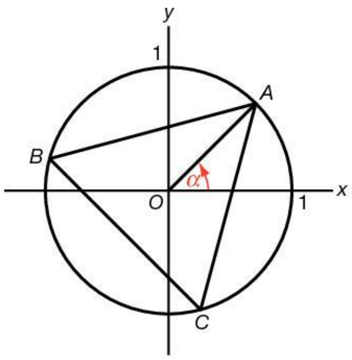
Om te berekenen hoeveel dagen volgens dit model de temperatuur van het zeewater meer is dan 18 °C voer je in $y_1 = 12{,}25 + 7{,}75\sin\left(\frac{1}{6}\pi(x - 4{,}5)\right)$ en $y_2 = 18$ en gebruik je intersect. Je krijgt $x = 6{,}09...$ en $x = 8{,}90...$
Dus de temperatuur is meer dan 18 °C gedurende $8{,}90... - 6{,}09... = 2{,}80...$ maanden $\approx 2{,}80... \times 30$ dagen $\approx$ 84 dagen.



Diagnostische toets

8.1 De eenheidscirkel

1 De hoekpunten van de gelijkzijdige driehoek ABC liggen op de eenheidscirkel. De draaiingshoek α is 40°. Zie figuur 8.61.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van de punten A, B en C.



figuur 8.61

8.2 Radialen

2 Druk uit in graden. Rond zo nodig af op één decimaal.

a $\frac{3}{4}\pi$ rad
b $\frac{1}{5}\pi$ rad
c 0,6 rad
d 26π rad
e $\frac{2}{3}\pi$ rad
f $\frac{2}{3}$ rad

3 Druk uit in radialen. Geef een exact antwoord.

a 270°
b −60°
c 150°
d 330°
e 40°
f −70°

8.3 Transformaties en sinusoïden

4 Geef aan hoe de grafieken van de volgende functies uit een standaardgrafiek ontstaan en geef de evenwichtsstand, de amplitude, de periode en de coördinaten van het beginpunt.

a $f(x) = 2 + 3\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$
b $g(x) = -3 + \sin\left(2\left(x - \frac{1}{4}\right)\right)$

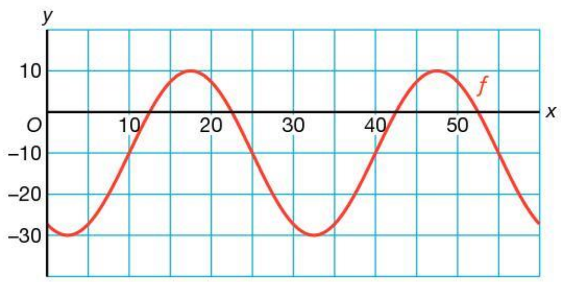
5 Gegeven is de functie $f(x) = 4 + 2\sin(\pi(x-1))$ met domein $[-4, 4]$.

a Teken de grafiek van f.
b Los op $f(x) \geq 5$. Rond in het antwoord af op twee decimalen.
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de helling van de grafiek van f in het punt $A(1, 4)$.

8.4 Formules van sinusoïden opstellen

6 In figuur 8.62 is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm

a $y = a + b\sin(c(x-d))$ met $b > 0$
b $y = a + b\cos(c(x-d))$ met $b > 0$
c $y = a + b\sin(c(x-d))$ met $b < 0$
d $y = a + b\cos(c(x-d))$ met $b < 0$



figuur 8.62

7 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - 2\ \sin(x)$ en $g(x) = 3 + 2\ \cos\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)$. De somfunctie $s(x) = f(x) + g(x)$ en de verschilfunctie $v(x) = f(x) - g(x)$ zijn beide sinusoïden.

a Stel een formule van s op van de vorm $y = a + b\ \sin(c(x - d))$. Rond in het antwoord zo nodig af op drie decimalen.

b Stel een formule van v op van de vorm $y = a + b\ \cos(c(x - d))$. Rond in het antwoord zo nodig af op drie decimalen.

8.5 Goniometrische vergelijkingen

8 Bereken exact de oplossingen in $[0, 2\pi]$.

a $4\ \sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = 2\sqrt{2}$

b $\cos\left(x - \frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c $\cos\left(1\frac{1}{2}x\right) = -1$

d $2\ \sin\left(3x + \frac{1}{2}\pi\right) = -\sqrt{3}$

9 Gegeven is de functie $f(x) = 3\ \sin(x)\sin(2x)$ met domein $[0, 2\pi]$.

a Schets de grafiek van f.

b Bereken exact de nulpunten van f.

Op de grafiek liggen de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{2}{3}\pi$.

c Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn AB de grafiek van f op de x-as snijdt.

8.6 Toepassingen van sinusoïden

10 Gegeven is de formule $A = 3{,}9 + 2{,}7\ \cos\left(\frac{2}{9}\pi(t - 2{,}4)\right)$ met $0 \leq t \leq 10$.

a Bereken algebraïsch A_{max} en de bijbehorende t.

b Bereken algebraïsch A_{min} en de bijbehorende t.

c Bereken voor welke t de waarde van A kleiner is dan 2. Rond af op twee decimalen.

d Bereken de maximale helling van de grafiek. Rond af op drie decimalen.

11 De temperatuur van het zeewater langs de Griekse kust is te beschrijven met het model $T = a + b\ \sin(c(t - d))$ met T in °C en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari. De laagste temperatuur is 10 °C op 15 januari en de hoogste temperatuur is 28 °C.

a Bereken a, b, c en d.

b Gedurende hoeveel dagen per jaar is de temperatuur volgens het model hoger dan 25 °C?

c Bereken de maximale snelheid waarmee de watertemperatuur stijgt. Geef het antwoord in °C per dag in drie decimalen nauwkeurig