Лабораторная работа № 2 «Градиентные методы поиска экстремума»

<u>Задания практической части:</u>

1. Найти минимум функции из индивидуального задания методом градиентного спуска с постоянным шагом.

2. Построить график функции из индивидуального задания, отметить на графике найденный минимум.

3. Построить блок-схему алгоритма поиска экстремума по методу градиентного спуска с постоянным шагом.

4*. Разработать программный модуль решения задачи индивидуального задания методом градиентного спуска с постоянным шагом.

5*. Найти минимум функции из индивидуального задания методом наискорейшего градиентного спуска.

6*. Построить блок-схему алгоритма поиска экстремума по методу наискорейшего градиентного спуска.

7*. Разработать программный модуль решения задачи индивидуального задания методом наискорейшего градиентного спуска.

8. Оформить отчет.

<u>Комментарии к выполнению заданий:</u>

При решении любых заданий практической части рекомендуется пользоваться доступным программным обеспечением.

В первом и пятом заданиях помимо полного решения должны быть предоставлены ответы, содержащие искомый x^*, значение функции $f\left(x^*\right)$ и количество итераций, за которое достигнут результат.

Для построения графика функции во втором задании можно использовать онлайн сервисы построения трёхмерных графиков, подходящих для графической иллюстрации решения.

Программа (задания №4 и №7) может разрабатываться на любом языке программирования, для сдачи программы необходимо продемонстрировать результат её выполнения и код, ответить на вопросы преподавателя, изменить код для дополнительного тестирования. Результат должен содержать ответ на поставленную задачу (искомый x^*, значение функции $f\left(x^*\right)$ и количество итераций k) со всеми обозначениями. Вывод в результатах работы программы промежуточных значений приветствуется, но не является обязательным.

* – задания практической части на оценку выше «удовлетворительно».

<u>Содержание отчёта:</u>

1. Титульный лист.

2. Выполненные задания 1-3 практической части с постановкой задания, основными используемыми формулами, промежуточными вычислениями и необходимыми графическими иллюстрациями решения. Данный раздел отчёта может быть представлен

как в печатном, так и в рукописном виде на листах А4 без помарок и исправлений по тексту.

3. Листинг программы и результаты выполнения задания 4 практической части (при условии выполнения задания 4).

4. Выполненные задания 5-6 практической части с постановкой задания, основными используемыми формулами, промежуточными вычислениями и необходимыми графическими иллюстрациями решения (при условии выполнения заданий 5-6).

3. Листинг программы и результаты выполнения задания 7 практической части (при условии выполнения задания 7).

Основные теоретические сведения

Постановка задачи

Пусть дана функция $f(x)$, ограниченная снизу на множестве R^n и имеющая непрерывные частные производные во всех его точках.

Требуется найти локальный минимум функции $f(x)$ на множестве допустимых решений $X = R^n$, то есть найти такую точку $x^* \in R^n$, что

$$f\left(x^*\right) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

Метод градиентного спуска с постоянным шагом

Стратегия решения задачи состоит в построении последовательности точек $\left\{x^k\right\}$, $k = 0,1,\ldots$. Точки последовательности $\left\{x^k\right\}$ вычисляются по правилу

$$x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f\left(x^k\right),\ k = 0,1,\ldots, \qquad (1)$$

где точка x^0 задаётся пользователем; $\nabla f\left(x^k\right)$ – градиент функции $f(x)$, вычисленный в точке x^k; величина шага t_k задаётся пользователем и остается постоянной до тех пор, пока функция убывает в точках последовательности, что контролируется путем проверки выполнения условия $f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right) < 0$ или $f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right) < -\varepsilon \left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|^2$, $0 < \varepsilon < 1$. Построение последовательности $\left\{x^k\right\}$ заканчивается в точке x^k, для которой $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| < \varepsilon_1$, где ε_1 – заданное малое положительное число, или $k \ge M$, где M – предельное число интеграций, или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon_2$, $\left|f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right)\right| < \varepsilon_2$, где ε_2 – малое положительное число. Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки минимума, решается путем проведения дополнительного исследования, которое описано ниже.

Определение. Нормой $\|x\|$ вектора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + ... + x_n^{\,2}}\,.$$

Алгоритм:

Шаг 1. Задать x^0, $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M – предельное число итераций. Найти градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания $\left\| \nabla f(x^k) \right\| < \varepsilon_1$:

а) если критерий выполнен, расчёт закончен, $x^* = x^k$;

б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $k \geq M$:

а) если неравенство выполнено, то расчёт окончен: $x^* = x^k$;

б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Задать величину шага t_k.

Шаг 7. Вычислить $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условия

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) < 0 \text{ (или } f(x^{k+1}) - f(x^k) < -\varepsilon \left\| \nabla f(x^k) \right\|^2\text{):}$$

а) если условие выполнено, то перейти к шагу 9;

б) если условие не выполнено, положить $t_k = \dfrac{t_k}{2}$ и перейти к шагу 7.

Шаг 9. Проверить выполнение условий

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon_2, \qquad \left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| < \varepsilon_2:$$

а) если оба условия выполнены при текущем значении k и $k = k-1$, то расчёт окончен, $x^* = x^{k+1}$;

б) если хотя бы одно из условий не выполнено, положить $k = k+1$ и перейти к шагу 3.

Геометрическая интерпретация метода для $n = 2$ приведена на рисунке 1.

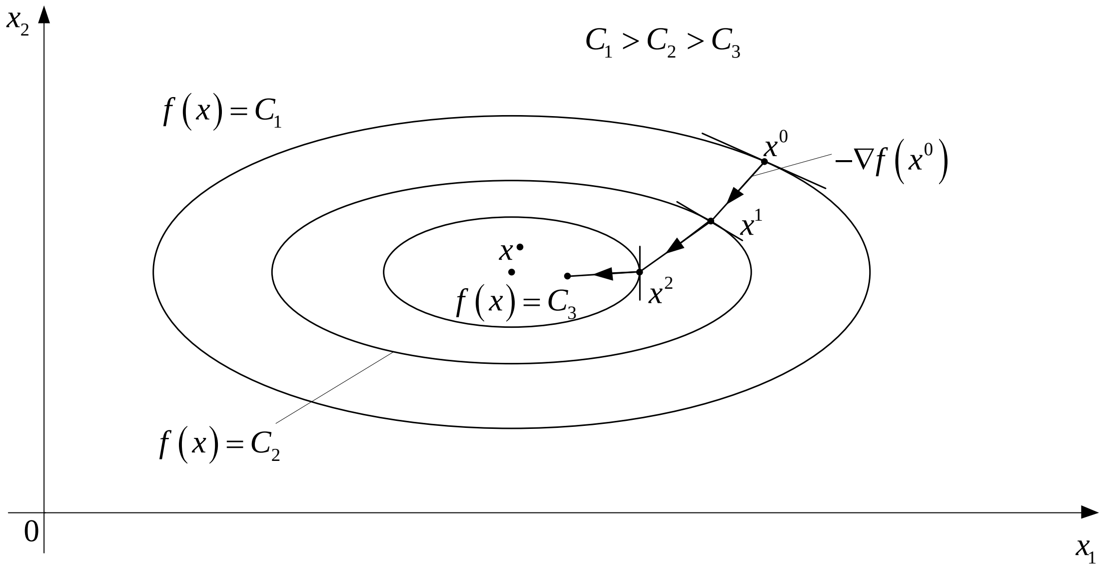

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация метода градиентного спуска с постоянным шагом.

Утверждение 1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и ограничена снизу на R^n, а её градиент удовлетворяет условию Липшица $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \le L\|x - y\|$, $\forall x, y \in R^n$, где $L > 0$. Тогда при произвольной начальной точке $x^0 \in R^n$ для метода градиентного спуска с постоянным шагом имеем

$$\lim_{k\to\infty}\|\nabla f(x^k)\| = 0 \qquad (2)$$

Скорость сходимости. Оценки скорости сходимости получены только для сильно выпуклых функций, когда последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке минимума $f(x)$ со скоростью геометрической прогрессии:

$$f(x^k) - f(x^*) \le q^k \left(f(x^0) - f(x^*) \right), \qquad \|x^k - x^*\| \le C\left(\sqrt{q}\right)^k,$$

где $q \in (0,1)$, $C > 0$ – константы.

Процедура решения задачи

1. Используя алгоритм градиентного спуска с постоянным шагом, найти точку x^k, в которой выполнен, по крайней мере, один из критериев окончания расчётов.

2. Провести анализ точки x^k с целью установить, является ли точка x^k найденным приближением решения задачи. Процедура анализа определяется наличием у функции $f(x)$ непрерывных вторых производных. Если $f(x) \in C^2$, то следует провести проверку выполнения достаточных условий минимума: $H(x^*) > 0$. Если $H(x^*) > 0$, то точка x^k есть найденное приближение искомой точки x^*. Если $f(x) \in C^1$, то следует

провести проверку функции $f(x)$ на выпуклость в Q-окрестности точки x^k, используя критерий выпуклости для функций $f(x)\in C^1$: функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла) в том и только в том случае, если $f(x+y)\ge f(x)+(\nabla f(x),y)$, $\forall x,y\in Q$; $\left(f(x+y)>f(x)+(\nabla f(x),y)\right)$.

Если функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла), то x^k есть найденное приближение точки x^*.

Замечание 1. Если требуется найти глобальный минимум функции $f(x)$, то для строго выпуклой $f(x)$ решение этой задачи аналогично поиску локального минимума функции. В случае, когда $f(x)$ имеет несколько локальных минимумов, поиск глобального минимума осуществляется в результате перебора всех локальных минимумов.

Пример решения задачи

Найти локальный минимум функции $f(x)=2x_1^{\,2}+x_1x_2+x_2^{\,2}$.

I. Определение точки x^k, в которой выполнен по крайней мере один из критериев окончания расчетов.

1. Зададим x^0, ε_1, ε_2, M: $x^0=(0{,}5;1)^T$; $\varepsilon_1=0{,}1$; $\varepsilon_2=0{,}15$; $M=10$. Найдем градиент функции в произвольной точке $\nabla f(x)=(4x_1+x_2;x_1+2x_2)^T$.

2. Положим $k=0$.

3^0. Вычислим $\nabla f(x^0)$: $\nabla f(x^0)=(3;2{,}5)^T$.

4^0. Вычислим $\|\nabla f(x^0)\|$: $\|\nabla f(x^0)\|=3{,}9>0{,}1$. Переходим к шагу 5.

5^0. Проверим условие $k\ge M$: $k=0<10=M$. Переходим к шагу 6.

6^0. Зададим $t_0=0{,}5$.

7^0. Вычислим x^1: $x^1=(0{,}5;1)^T-0{,}5(3;2{,}5)^T=(-1;-0{,}25)^T$; $f(x^1)=2{,}31$.

8^0. Сравним $f(x^1)$ с $f(x^0)=2$. Имеем $f(x^1)>f(x^0)$. Вывод: условие $f(x^{k+1})<f(x^k)$ для $k=0$ не выполняется. Зададим $t^0=0{,}25$, переходим к повторению шагов 7, 8.

7^{01}. Вычислим x^1: $x^1=(0{,}5;1)^T-0{,}25(3;2{,}5)^T=(-0{,}25;0{,}375)^T$; $f(x^1)=0{,}171$.

8^{01}. Сравним $f(x^1)$ с $f(x^0)$. Вывод: $f(x^1)<f(x^0)$. Переходим к шагу 9.

9^{01}. Вычислим $\|x^1-x^0\|$ и $\left|f(x^1)-f(x^0)\right|$:

$$\left\| x^1 - x^0 \right\| = 0,976 > 0,15; \qquad \left| f\left(x^1\right) - f\left(x^0\right) \right| = 1,829 > 0,15.$$

Вывод: полагаем $k = 1$ и переходим к шагу 3.

3^1. Вычислим $\nabla f\left(x^1\right)$: $\nabla f\left(x^1\right) = \left(-0,625; 0,51\right)^T$.

4^1. Вычислим $\left\|\nabla f\left(x^1\right)\right\|$: $\left\|\nabla f\left(x^1\right)\right\| = 0,81$. Переходим к шагу 5.

5^1. Проверим условие $k \geq M$: $k = 1 < 10 = M$. Переходим к шагу 6.

6^1. Зададим $t_1 = 0,25$.

7^1. Вычислим x^2: $x^2 = \left(-0,25; 0,375\right)^T - 0,25\left(-0,625; 0,5\right)^T = \left(-0,094; 0,25\right)^T$; $f\left(x^2\right) = 0,056$.

8^1. Сравним $f\left(x^2\right)$ с $f\left(x^1\right)$. Вывод: $f\left(x^2\right) < f\left(x^1\right)$. Переходим к шагу 9.

9^1. Вычислим $\left\| x^2 - x^1 \right\|$ и $\left| f\left(x^2\right) - f\left(x^1\right) \right|$:

$$\left\| x^2 - x^1 \right\| = 0,2 > 0,15; \qquad \left| f\left(x^2\right) - f\left(x^1\right) \right| = 0,115 < 0,15.$$

Вывод: полагаем $k = 2$ и переходим к шагу 3.

3^2. Вычислим $\nabla f\left(x^2\right)$: $\nabla f\left(x^2\right) = \left(-0,126; 0,406\right)^T$.

4^2. Вычислим $\left\|\nabla f\left(x^2\right)\right\|$: $\left\|\nabla f\left(x^2\right)\right\| = 0,425 > 0,1$. Переходим к шагу 5.

5^2. Проверим условие $k \geq M$: $k = 2 < 10 = M$. Переходим к шагу 6.

6^2. Зададим $t_2 = 0,25$.

7^2. Вычислим x^3: $x^3 = \left(-0,094; 0,25\right)^T - 0,25\left(-0,126; 0,406\right)^T = \left(-0,063; 0,15\right)^T$; $f\left(x^3\right) = 0,021$.

8^2. Сравним $f\left(x^3\right)$ с $f\left(x^2\right)$. Вывод: $f\left(x^3\right) < f\left(x^2\right)$. Переходим к шагу 9.

9^2. Вычислим $\left\| x^3 - x^2 \right\|$ и $\left| f\left(x^3\right) - f\left(x^2\right) \right|$:

$$\left\| x^3 - x^2 \right\| = 0,105 < 0,15; \qquad \left| f\left(x^3\right) - f\left(x^2\right) \right| = 0,035 < 0,15.$$

Вывод: полагаем $k = 3$ и переходим к шагу 3.

3^3. Вычислим $\nabla f\left(x^3\right)$: $\nabla f\left(x^3\right) = \left(-0,102; 0,237\right)^T$.

4^3. Вычислим $\left\|\nabla f\left(x^3\right)\right\|$: $\left\|\nabla f\left(x^3\right)\right\| = 0,257 > 0,1$. Переходим к шагу 5.

5^3. Проверим условие $k \geq M$: $k = 3 < 10 = M$. Переходим к шагу 6.

6^3. Зададим $t_3 = 0,25$.

7^3. Вычислим x^4: $x^4 = \left(-0,063; 0,15\right)^T - 0,25\left(-0,102; 0,237\right)^T = \left(-0,038; 0,091\right)^T$; $f\left(x^4\right) = 0,0076$.

8^3. Сравним $f\left(x^4\right)$ с $f\left(x^3\right)$. Вывод: $f\left(x^4\right) < f\left(x^3\right)$.

9^3. Вычислим $\left\|x^4 - x^3\right\|$ и $\left|f\left(x^4\right) - f\left(x^3\right)\right|$:

$$\left\|x^4 - x^3\right\| = 0,064 < 0,15; \qquad \left|f\left(x^4\right) - f\left(x^3\right)\right| = 0,015 < 0,15.$$

Условия $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon_2$, $\left|f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right)\right| < \varepsilon_2$ выполнены при $k = 2$ и $k = 3$. Расчет окончен. Найдена точка $x^4 = \left(-0,038; 0,091\right)^T$; $f\left(x^4\right) = 0,0076$.

На рисунке 2 полученные точки соединены пунктирной линией.

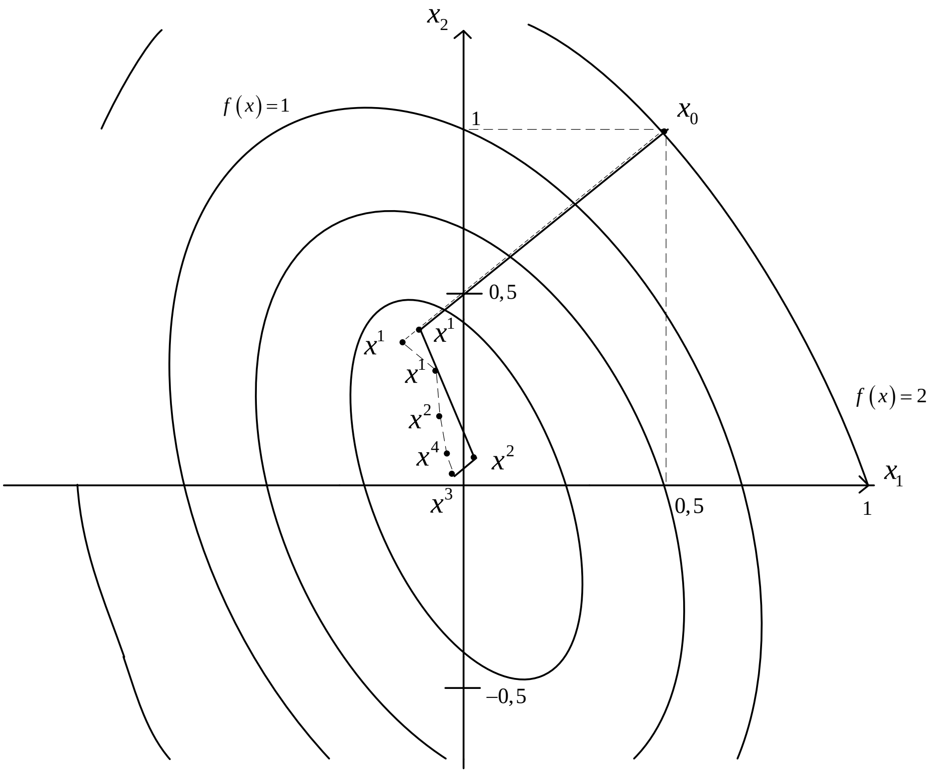

Рисунок 2 – результат процедуры решения задачи.

II. Анализ точки x^4

Функция $f\left(x\right) = 2x_1^{\ 2} + x_1x_2 + x_2^{\ 2}$ является дважды дифференцируемой, поэтому проведем проверку достаточных условий минимума в точке x^4. Для этого проанализируем матрицу Гессе $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Матрица постоянна и является положительно определённой (то есть $H > 0$), так как оба её угловых минора $\Delta_1 = 4$ и $\Delta_2 = 7$ положительны. Следовательно, точка $x^4 = \left(-0,038; 0,091\right)^T$ есть найденное приближение точки локального минимума $x^* = \left(0,0\right)^T$, а значение $f\left(x^4\right) = 0,0076$ есть найденное приближение значения $f\left(x^*\right) = 0$. Заметим, что условие $H > 0$, есть одновременно условие строгой выпуклости функции $f\left(x\right) = 2x_1^{\ 2} + x_1x_2 + x_2^{\ 2}$ на R^2.

Следовательно, $x^4=\left(-0,038;0,091\right)^T$, $f\left(x^4\right)=0,0076$ есть найденные приближения точки глобального минимума $f\left(x\right)$ и её наименьшего значения на R^2.

Метод наискорейшего градиентного спуска

Стратегия решения задачи в построении последовательности точек $\left\{x^k\right\}$, $k=0,1,\ldots$. Точки последовательности $\left\{x^k\right\}$ вычисляются по правилу

$$x^{k+1}=x^k-t_k\nabla f\left(x^k\right), \qquad (3)$$

где точка x^0 задаётся пользователем; величина шага t_k определяется для каждого значения k из условия

$$\varphi\left(t_k\right)=f\left(x^k-t_k\nabla f\left(x^k\right)\right)\to\min_{t_k}. \qquad (4)$$

Решение задачи (4) может осуществляться с использованием необходимого условия минимума $\dfrac{d\varphi}{dt_k}=0$ с последующей проверкой достаточного условия минимума $\dfrac{d^2\varphi}{dt_k^{\ 2}}>0$. Такой путь может быть использован либо при достаточно простой минимизируем функции $\varphi\left(t_k\right)$, либо при предварительной аппроксимации достаточно сложной функции $\varphi\left(t_k\right)=f\left(x^k-t_k\nabla f\left(x^k\right)\right)$ полином $P\left(t_k\right)$ (как правило, второй или третьей степени), и тогда условия $\dfrac{d\varphi}{dt_k}=0$ замещается условием $\dfrac{dP}{dt_k}=0$, а условие $\dfrac{d^2\varphi}{dt_k^{\ 2}}>0$ – условием $\dfrac{d^2P}{dt_k^{\ 2}}>0$.

Другой путь решения задачи (4) связан с использованием численных методов, когда ищется $\min\limits_{t_k\in[a,b]}\varphi\left(t_k\right)=\min\limits_{t_k\in[a,b]}f\left(x^k-t_k\nabla f\left(x^k\right)\right)$. Границы интервала $\left[a,b\right]$ задаются пользователем. При этом степень близости найденного значения t_k к оптимальному значению t_k^*, удовлетворяющему условиям $\dfrac{d\varphi}{dt_k}=0$, $\dfrac{d^2\varphi}{dt_k^{\ 2}}>0$, зависит от задания интервала $\left[a,b\right]$ и точности методов одномерной минимизации.

Построение последовательности $\left\{x^k\right\}$, $k=0,1,\ldots$, заканчивается в точке x^k, для которой $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|<\varepsilon_1$, где ε_1 – заданное число, или, если $k\geq M$, M – предельное число итераций, или при двукратном одновременном выполнении неравенств $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon_2$, $\left| f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right) \right| < \varepsilon_2$, где ε_2 – малое положительное число. Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки локального минимума x^*, решается путём дополнительного исследование.

Алгоритм:

Шаг 1. Задать x^0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, предельное число итерация M. Найти градиент функции в произвольной точке $\nabla f\left(x\right) = \left(\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_n} \right)^T$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f\left(x^k\right)$.

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания $\left\| \nabla f\left(x^k\right) \right\| < \varepsilon_1$:

а) если критерий выполнен, то $x^* = x^k$;

б) если критерий не выполнен, то перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $k \geq M$:

а) если неравенство выполнено, то $x^* = x^k$;

б) если нет, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить величину шага t_k^* из условия

$$\varphi\left(t_k\right) = f\left(x^k - t_k \nabla f\left(x^k\right)\right) \to \min_{t_k}.$$

Шаг 7. Вычислить $x^{k+1} = x^k - t_k^* \nabla f\left(x^k\right)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условий

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon_2, \left| f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right) \right| < \varepsilon_2:$$

а) если оба условия выполнены при текущем значении k и $k = k - 1$, то расчёт окончен, $x^* = x^{k+1}$;

б) если хотя бы одно из условий не выполнено, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

Геометрическая интерпретация метода для $n = 2$ приведена на рисунке 3.

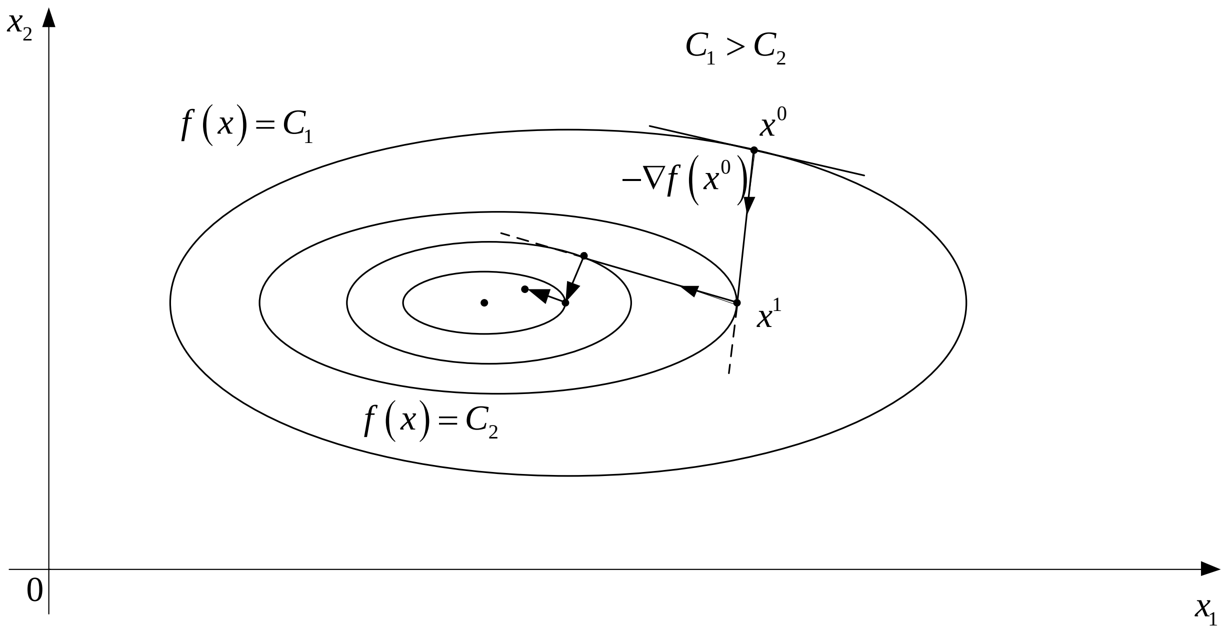

Рисунок 3 – Геометрическая интерпретация метода наискорейшего градиентного спуска.

Утверждение 2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям утверждения 1. Тогда при произвольной начальной точке $x^0 \in R^n$ для метода наискорейшего градиентного спуска имеем $\left\|\nabla f(x^k)\right\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Замечание 2.

1. Утверждение гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к стационарной точке x^*, где $\nabla f(x^*) = 0$. Следовательно, найденная в результате применения метода точка x^* нуждается в дополнительном исследовании с целью ее классификации.
2. Метод наискорейшего спуска гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к точке минимума для сильно выпуклых функций.

Скорость сходимости. Оценки скорости сходимости получены только для сильно выпуклых функций, когда последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке минимума функции $f(x)$ со скоростью геометрической прогрессии (геометрическая сходимость): $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| \le \dfrac{M-m}{M+m}\left\|x^k - x^*\right\|$, где M и m – оценки наибольшего и наименьшего собственных значений матрицы $H(x)$ функции $f(x)$.

Индивидуальные задания:

Вариант 1. $f(x)=5x_1^2+0,5x_1x_2+3x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 2. $f(x)=6x_1^2+0,6x_1x_2+x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 3. $f(x)=3x_1^2+0,4x_1x_2+5x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 4. $f(x)=3x_1^2+0,6x_1x_2+3x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 5. $f(x)=4x_1^2+0,2x_1x_2+6x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 6. $f(x)=3x_1^2+0,1x_1x_2+6x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 7. $f(x)=6x_1^2+0,4x_1x_2+5x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 8. $f(x)=2x_1^2+0,1x_1x_2+2x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 9. $f(x)=2x_1^2+0,2x_1x_2+6x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 10. $f(x)=4x_1^2+0,6x_1x_2+4x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 11. $f(x)=5x_1^2+0,6x_1x_2+2x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 12. $f(x)=x_1^2+0,6x_1x_2+2x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 13. $f(x)=4x_1^2+0,5x_1x_2+2x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 14. $f(x)=6x_1^2+0,6x_1x_2+3x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 15. $f(x)=x_1^2+0,6x_1x_2+6x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 16. $f(x)=4x_1^2+0,5x_1x_2+6x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 17. $f(x)=6x_1^2+0,3x_1x_2+4x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 18. $f(x)=2x_1^2+0,5x_1x_2+2x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 19. $f(x)=x_1^2+0,5x_1x_2+5x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 20. $f(x)=x_1^2+0,6x_1x_2+x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 21. $f(x)=3x_1^2+0,3x_1x_2+5x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 22. $f(x)=6x_1^2+0,5x_1x_2+2x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 23. $f(x)=6x_1^2+0,6x_1x_2+2x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 24. $f(x)=3x_1^2+0,2x_1x_2+3x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 25. $f(x)=4x_1^2+0,1x_1x_2+3x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 26. $f(x)=3x_1^2+0,3x_1x_2+4x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 27. $f(x)=5x_1^2+3x_1x_2+5x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 28. $f(x)=3x_1^2+0,4x_1x_2+4x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 29. $f(x)=x_1^2+0,4x_1x_2+x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.

Вариант 30. $f(x)=2x_1^2+0,5x_1x_2+6x_2^2$; $x^0=(0;0,5)$, $\varepsilon_1=0,15$, $\varepsilon_2=0,2$, $M=10$.