

С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ  
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО

*Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов математических специальностей  
высших учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1980

**22.181.5**

**Т 81**

**УДК 517.5**

**Сборник задач по теории функций действительного переменного.** Теляковский С. А.—М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Сборник содержит задачи, относящиеся к элементам теории множеств, теории меры, измеримым функциям, интегралу Лебега и теории дифференцирования. Основное содержание сборника составляют задачи средней и повышенной трудности. Сборник предназначается для проведения семинарских занятий и для самостоятельной работы студентов, изучающих курсы теории функций действительного переменного, теории функций и функционального анализа, анализа-III.

T 20203—012  
053(02)-80 16-79. 1702050000

© Наука,  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1980

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория функций действительного переменного изучается студентами математических специальностей университетов и педагогических институтов в качестве отдельной дисциплины или как составная часть курсов теории функций и функционального анализа или анализа-III.

Отдельные темы из теории функций действительного переменного — в первую очередь интеграл Лебега — изучаются также студентами ряда университетов, специализирующимися в области механики и теоретической физики, и студентами некоторых технических вузов с повышенной подготовкой по математике.

Это связано с тем, что изучение на современном уровне ряда разделов анализа в широком понимании этого слова (имеются в виду некоторые разделы теории вероятностей, дифференциальных уравнений и т. д.) требует знания интеграла Лебега.

В последние годы наметилась тенденция включать интеграл Лебега наряду с интегралом Римана в курс математического анализа. Например, учебники математического анализа С. М. Никольского [8] и В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [4] содержат главы, посвященные интегралу Лебега.

Важная роль интеграла Лебега в анализе обусловлена тем, что он хорошо приспособлен к операции предельного перехода и что пространства функций, интегрируемых по Лебегу, полны.

Настоящий сборник задач составлен так, что интеграл Лебега занимает в нем центральное место. При этом избран наиболее часто употребляемый, традиционный путь введения интеграла Лебега, когда

сначала определяются измеримые множества и функции.

Расположение материала в сборнике таково.

Первые две главы являются вспомогательными. Они посвящены теории множеств, поскольку для изучения теории функций действительного переменного необходимо владение элементами теории множеств.

В третьей главе вводится мера на кольцах множеств, затем строится лебегово продолжение меры и рассматриваются свойства измеримых множеств.

Четвертая глава посвящена измеримым функциям, в частности, вопросам сходимости последовательностей измеримых функций.

В пятой главе дается определение интеграла Лебега, изучаются свойства интегрируемых функций и пространств интегрируемых функций, сравниваются интегралы Лебега и Римана.

В последней, шестой главе рассматривается связь интегрирования по Лебегу и дифференцирования функций, изучается интеграл Римана — Стильесса.

Настоящий сборник задач предназначается для проведения семинарских занятий и для самостоятельной работы студентов при изучении теории функций действительного переменного. Имеется в виду, что он будет использоваться главным образом при первом знакомстве с предметом. Поэтому во многих случаях задачи ставятся не в самом общем виде.

Например, начиная со второй главы, предполагается, что рассматриваемые множества лежат в конечномерных евклидовых пространствах  $E_n$ , хотя в большинстве задач, в которых нужны топологические свойства множеств, можно было бы говорить о множествах из произвольных полных сепарабельных метрических пространств. В сборнике даются общие определения меры множеств (из  $E_n$ ) и интеграла Лебега, но когда нужны какие-либо дополнительные свойства меры, мы ограничиваемся классической мерой Лебега. В шестой главе, а также при сравнении интегралов Лебега и Римана рассматриваются функции только одного переменного.

При желании можно упростить задачи, так или иначе связанные с мерой, считая, что все они относятся к мере Лебега. При этом, разумеется, некоторые задачи нужно будет опустить.

Часть задач, помещенных в сборнике, — совсем простые, но основное содержание составляют задачи средней и повышенной трудности. Есть несколько очень трудных задач, решение которых может составить, например, курсовую работу.

В большинстве задач предлагается доказать какое-либо утверждение. Ответы даны только в тех немногих случаях, когда конечный результат не указан в формулировке задачи.

При составлении сборника в основном использовались монографии и задачники, указанные в списке литературы. Много задач взято из удачно подобранных упражнений, имеющихся в книгах И. П. Натансона [7] и П. Халмоса [12]. В качестве задач приведены также многие утверждения из основного текста этих книг и учебников А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [6] и У. Рудина [11]. Отметим также задачники [3] и [9].

Часть задач была составлена специально для этого сборника. При работе над сборником автор использовал свой опыт чтения курса анализа-III и спецкурсов по теории функций действительного переменного (интегралу Лебега) в Московском физико-техническом институте.

Задачи сборника охватывают основное содержание теории функций действительного переменного, как оно обычно излагается в учебных курсах. Но при любом построении курса, как кратком, так и подробном, останется достаточное количество задач различной степени трудности, решение которых не войдет в лекции и даст студентам возможность приобрести навыки, необходимые для активного усвоения предмета.

Авторы теорем указаны лишь тогда, когда, как например, в случае теоремы Егорова, одного упоминания фамилии автора достаточно для того, чтобы понять, о каком утверждении идет речь.

Главы и параграфы начинаются с кратких вступлений, в которых приводятся определения и обозначения. Некоторые определения даются в текстах задач. При первом упоминании терминов они выделяются курсивом. В конце сборника помещен предметный указатель.

В заключение мне приятно назвать лиц, содействовавших работе над книгой.

Составление задачника я начал несколько лет назад по совету академика В. С. Владимира. Мои ученики К. И. Осколков и В. Н. Темляков читали главы рукописи по мере их написания и сделали много ценных замечаний, способствовавших улучшению книги. Кроме того, К. И. Осколков предложил несколько оригинальных задач, которые были включены в сборник. В. Л. Великин и В. И. Рубан познакомили меня с составленным ими сборником задач по теории функций и функциональному анализу, который используется в Днепропетровском государственном университете при проведении семинарских занятий. Мною было взято несколько задач из этого сборника. Отдельные задачи предложили Л. Д. Кудрявцев и Ю. Э. Липпус. Искренне благодарю всех названных лиц, а также Р. И. Сорокину и Л. Н. Абрамочкину за помощь при подготовке рукописи к печати.

Май 1979

С. А. Теляковский

# Глава 1

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

### § 1. Операции над множествами

Используются следующие определения и обозначения.

$x \in A$  — элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ ,  
 $x \notin A$  — элемент  $x$  не принадлежит множеству  $A$ .

Если каждый элемент множества  $A$  принадлежит множеству  $B$ , то  $A$  называют подмножеством множества  $B$  и пишут  $A \subset B$  или  $B \supset A$ .

Если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то множества  $A$  и  $B$  называют равными и пишут  $A = B$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым и обозначают  $\emptyset$ .

Объединением множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ . Это множество обозначают  $A \cup B$ .

Объединением произвольного конечного или бесконечного семейства множеств  $\{A_\alpha\}$  называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств

$A_1, \dots, A_n$  обозначают  $\bigcup_{k=1}^n A_k$ , объединение бесконеч-

ной последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .

Объединение семейства множеств  $\{A_\alpha\}$ , где индекс  $\alpha$  пробегает некоторое множество  $\mathfrak{U}$ , обозначают  $\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{U}} A_\alpha$

или просто  $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ .

*Пересечением* множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех элементов, принадлежащих обоим этим множествам. Обозначают пересечение  $A \cap B$ .

Пересечением произвольного семейства множеств  $\{A_\alpha\}$  называется множество всех элементов, принадлежащих всем этим множествам. Пересечение множеств  $A_1, \dots, A_n$  обозначают  $\bigcap_{k=1}^n A_k$ , пересечение бесконечной последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots, \dots - \bigcap_{k=1}^\infty A_k$ . Пересечение семейства множеств  $\{A_\alpha\}$ , где индекс  $\alpha$  пробегает некоторое множество  $\mathfrak{U}$ , обозначают  $\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{U}} A_\alpha$  или  $\bigcap_\alpha A_\alpha$ .

Непосредственно из определений операций  $\cup$  и  $\cap$  следует их коммутативность и ассоциативность:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C, \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C. \end{aligned}$$

Если множества  $A$  и  $B$  не имеют общих элементов, т. е. если  $A \cap B = \emptyset$ , то эти множества называются непересекающимися.

*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех тех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$ . Это множество обозначают  $A \setminus B$ .

*Симметрической разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех элементов, которые принадлежат любому одному из этих множеств, но не принадлежат другому. Обозначают симметрическую разность  $A \Delta B$ . Непосредственно из определения следует коммутативность операции  $\Delta$ :  $A \Delta B = B \Delta A$ .

Если  $A \subset X$ , то множество  $X \setminus A$  называют *дополнением* множества  $A$  до  $X$ . Иногда в случаях, когда ясно, что рассматриваются только подмножества множества  $X$ , слова «до  $X$ » опускают.

Для подмножеств множества  $X$  вводится *характеристическая функция*, определенная на  $X$ : характеристикой функцией множества  $A \subset X$  называется функция

$$\chi_A(x) = \chi(A, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

*Верхним пределом* последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots$  называется множество всех элементов, которые принадлежат бесконечному набору множеств  $A_n$ , а *нижним пределом* — множество всех элементов, которые принадлежат всем множествам  $A_n$ , начиная с некоторого номера (своего для каждого элемента). Верхний предел обозначают  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ , нижний предел

$-\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ . Ясно, что всегда  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ . Если  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ , то это множество называют *пределом* последовательности  $A_1, A_2, \dots$  и обозначают  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

Последовательность множеств  $A_1, A_2, \dots$  называется *возрастающей*, если  $A_n \subset A_{n+1}$  для всех  $n$ , и *убывающей*, если  $A_n \supset A_{n+1}$  для всех  $n$ .

Все множества в задачах этой главы предполагаются произвольными, если не оговорено противное.

**1.1.** Доказать дистрибутивность операций  $\cup$  и  $\cap$ :

- 1)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,
- 2)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

**1.2.** Доказать, что для произвольного семейства множеств  $A_\alpha$  справедливы равенства:

- 1)  $\left( \bigcup_{\alpha} A_\alpha \right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_\alpha \cap B)$ ,
- 2)  $\left( \bigcap_{\alpha} A_\alpha \right) \cup B = \bigcap_{\alpha} (A_\alpha \cup B)$ .

**1.3.** Доказать, что  $(A \cup B) \setminus B = A$  в том и только том случае, когда  $A \cap B = \emptyset$ .

**1.4.** Доказать, что  $(A \setminus B) \cup B = A$  в том и только том случае, когда  $B \subset A$ .

**1.5.** Доказать, что  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ .

**1.6.** Доказать, что  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ .

**1.7.** Доказать, что  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ .

**1.8.** Доказать, что  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .

**1.9.** Доказать, что  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

**1.10.** Доказать, что

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

**1.11.** Доказать, что  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

**1.12.** Доказать, что если  $C = A \Delta B$ , то  $A \Delta C = B$ .

**1.13.** Доказать, что  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ . Это свойство позволяет писать  $A \Delta B \Delta C$  без скобок, указывающих, в каком порядке производятся действия.

**1.14.** Доказать, что множество всех подмножеств множества  $X$  образует группу относительно операции  $\Delta$ .

**1.15.** Написать условия на характеристические функции множеств, эквивалентные соотношениям:

- 1)  $A = \emptyset$ ,
- 2)  $A \subset B$ ,
- 3)  $A = B$ .

**1.16.** Представить характеристические функции множеств

- 1)  $A \cap B$ ,
- 2)  $\bigcap_a A_a$ ,
- 3)  $A \cup B$ ,
- 4)  $\bigcup_a A_a$ ,
- 5)  $A \setminus B$ ,
- 6)  $A \Delta B$

с помощью характеристических функций множеств  $A$ ,  $B$  и  $A_a$ . Решить задачи 1.1—1.13, выражая действия над множествами через их характеристические функции.

**1.17.** Доказать, что для произвольных множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$  справедливы равенства (дистрибутивность относительно операций  $\cap$  и  $\setminus$ ):

- 1)  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ ,
- 2)  $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ ,
- 3)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ,
- 4)  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ ,
- 5)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ ,
- 6)  $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$ .

**1.18.** Доказать, что следующие равенства в общем случае неверны:

- 1)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ ,
- 2)  $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$ ,
- 3)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ,

- 4)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ,
- 5)  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ,
- 6)  $A \setminus (B \Delta C) = (A \setminus B) \Delta (A \cap C)$ ,
- 7)  $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$ ,
- 8)  $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ ,
- 9)  $A \Delta (B \setminus C) = (A \Delta B) \setminus (A \Delta C)$ ,
- 10)  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta (A \Delta C)$ .

Можно ли утверждать, что множество, стоящее в одной из частей этих соотношений, всегда содержит множество из другой части? Найти необходимые и достаточные условия на множества  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , при которых будет справедливо каждое из этих равенств.

**1.19.** Пусть  $A_{kn}$  — набор множеств, зависящих от двух индексов. Доказать, что всегда

$$\bigcup_k \left( \bigcap_n A_{kn} \right) \subset \bigcap_n \left( \bigcup_k A_{kn} \right)$$

и что в общем случае здесь нельзя поставить знак равенства.

**1.20.** Для неотрицательных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , заданных на  $(-\infty, \infty)$ , построим на плоскости множества  $A(f)$  и  $A(g)$ , состоящие из точек, координаты которых  $(x, y)$  удовлетворяют соответственно условиям  $0 \leq y \leq f(x)$  и  $0 \leq y \leq g(x)$ . Каким функциям будут соответствовать множества  $A(f) \cup A(g)$  и  $A(f) \cap A(g)$ ?

**1.21.** Пусть  $\Gamma_\lambda$  — множество точек на плоскости, принадлежащих графику функции  $x^{-\lambda}$ ,  $0 < x < \infty$ . Найти множества:

- 1)  $\bigcap_{\lambda \geq 1} \Gamma_\lambda$ ;
- 2)  $\bigcup_{\lambda \geq 1} \Gamma_\lambda$ ;
- 3)  $\Gamma_\lambda \Delta \Gamma_\mu$ , где  $\lambda \neq \mu$ ;
- 4)  $\Gamma_{\lambda_1} \Delta \Gamma_{\lambda_2} \Delta \Gamma_{\lambda_3}$ , где все  $\lambda_k$  различны.

**1.22.** Даны множества  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . С помощью теоретико-множественных операций записать множество элементов, которые принадлежат;

- 1) всем трем множествам;  
 2) по крайней мере двум из этих множеств;  
 3) любым двум из этих множеств, но не принадлежат всем трем;  
 4) по крайней мере одному из этих множеств;  
 5) любому одному из этих множеств, но не принадлежат двум остальным.

**1.23.** Непустой набор множеств  $R$  называется *кольцом*, если он замкнут относительно операций  $\Delta$  и  $\cap$ , т. е. если для любых множеств  $A$  и  $B$  из  $R$  к  $R$  принадлежат также  $A \Delta B$  и  $A \cap B$ . Доказать, что кольцо замкнуто также относительно операций  $\cup$  и  $\setminus$ .

**1.24.** Доказать, что получим эквивалентное определение кольца множеств, если потребовать замкнутость относительно операций

- 1)  $\cup$  и  $\setminus$ , 2)  $\cup$  и  $\Delta$ , 3)  $\setminus$  и  $\Delta$ .

**1.25.** Доказать, что набор множеств, замкнутый относительно операций

- 1)  $\cup$  и  $\cap$ ,  
 2)  $\cap$  и  $\setminus$ ,

может не быть кольцом.

**1.26.** Для заданной последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots$  построить последовательность попарно непересекающихся множеств  $B_1, B_2, \dots$  таких, что

$$B_n \subset A_n \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

**1.27.** Пусть  $\{A_\alpha\}$  — произвольное семейство подмножеств множества  $X$ . Доказать следующие свойства дополнений множеств (*законы двойственности*):

- 1)  $X \setminus \left( \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha})$ ,  
 2)  $X \setminus \left( \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (X \setminus A_{\alpha})$ .

**1.28.** Доказать, что если  $A$  и  $B$  являются подмножествами множества  $X$ , то

- 1)  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ ,  
 2)  $X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B$ ,  
 3)  $(X \setminus A) \Delta (X \setminus B) = A \Delta B$ .

**1.29.** Найти верхний и нижний пределы последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots$ , если

1)  $A_n = B$  для четных  $n$  и  $A_n = C$  для нечетных  $n$ ;

2)  $A_n$  является множеством всех рациональных чисел со знаменателем  $n$ , т. е. множеством чисел вида  $k/n$ , где  $k$  — произвольное целое число;

3)  $A_n$  является множеством чисел  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - v_n| \leq 1$ , где  $\{v_n\}$  — произвольная последовательность всех рациональных чисел из интервала  $(0, 1)$ .

**1.30.** Доказать, что если последовательность множеств  $\{A_n\}$  монотонна, т. е. множества  $A_n$  возрастают или убывают, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

При этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , если  $A_n$  возрастают, и

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , если  $A_n$  убывают.

**1.31.** Доказать, что всегда

$$1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

**1.32.** Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — последовательность подмножеств множества  $X$ . Доказать следующие свойства дополнений множеств:

$$1) X \setminus \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (X \setminus A_n),$$

$$2) X \setminus \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (X \setminus A_n).$$

**1.33.** Пусть на множестве  $A$  задана функция  $f(x)$ , принимающая конечные значения. Для каждого чис-

ла  $t$  определим множества  $A_t$  тех точек  $x \in A$ , для которых  $f(x) \leq t$ . Доказать, что

1) если  $s < t$ , то  $A_s \subset A_t$ ;

2)  $\bigcup_t A_t = A$ ,  $\bigcap_t A_t = \emptyset$ ;

3)  $\bigcap_{t>s} A_t = A_s$ .

Доказать, что для каждого семейства множеств  $A_t \subset A$ , обладающего этими тремя свойствами, существует единственная функция  $f(x)$ , заданная на  $A$  и такая, что для всех  $t$  множества  $A_t$  являются множествами точек  $x$ , для которых  $f(x) \leq t$ .

## § 2. Мощность множеств

Два множества называются *эквивалентными* или *имеющими одинаковую мощность*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Если множества  $A$  и  $B$  эквивалентны, то пишут  $A \sim B$ .

Непосредственно из определения вытекает, что конечные множества (т. е. множества, имеющие конечное число элементов) эквивалентны в том и только том случае, когда они имеют одинаковое число элементов.

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным*. Другими словами: множество называется счетным, если все его элементы можно представить в виде бесконечной последовательности  $a_1, a_2, \dots$ .

Если множество конечно или счетно, то говорят, что оно не более чем счетно.

Говорят, что множество имеет *мощность континуума*, если оно эквивалентно множеству всех точек отрезка  $[0, 1]$ , или, другими словами, если оно эквивалентно множеству всех действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих условиям  $0 \leq x \leq 1$ .

Если множество  $A$  эквивалентно некоторому подмножеству множества  $B$ , а сами множества  $A$  и  $B$  не эквивалентны, то говорят, что  $B$  имеет большую мощность, чем  $A$ .

Предлагаемые ниже задачи следует решать независимо от гипотезы континуума, т. е. независимо от того, допускается или не допускается существование

множеств, имеющих мощность, большую, чем счетные множества, но меньшую, чем множества мощности континуума.

**1.34.** Пусть множество  $A$  имеет  $n$  элементов,  $n = 1, 2, \dots$  Установив взаимно однозначное соответствие между подмножествами  $A$  и их дополнениями (до  $A$ ), показать, что

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

где  $C_n^k$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

**1.35.** Пусть множество  $A$  имеет  $n$  элементов,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (если  $n = 0$ , то  $A = \emptyset$ ). Доказать, что множество всех подмножеств множества  $A$  имеет  $2^n$  элементов. С помощью этого результата показать, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

**1.36.** Доказать, что каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

**1.37.** Построить взаимно однозначное соответствие между точками отрезка  $[0, 1]$  и интервала  $(0, 1)$ .

**1.38.** Доказать, что если множество  $A$  бесконечно, а  $B$  счетно, то  $(A \cup B) \sim A$ .

**1.39.** Доказать, что множество бесконечно в том и только том случае, когда оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству (т. е. подмножству, не совпадающему с ним самим).

**1.40.** Доказать, что счетное объединение попарно непересекающихся конечных множеств счетно.

**1.41.** Доказать, что объединение конечного или счетного набора счетных множеств счетно.

**1.42.** Доказать, что множество всех рациональных чисел счетно.

**1.43.** Доказать, что множество всех интервалов  $(a, b)$  с рациональными концами  $a$  и  $b$  счетно.

**1.44.** Доказать, что множество всех точек конечномерного евклидова пространства, все координаты которых рациональны, счетно.

**1.45.** Доказать счетность множества всех алгебраических чисел (число называется алгебраическим, если оно является корнем алгебраического многочлена с целыми коэффициентами).

**1.46.** Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции  $f(x)$  не более чем счетно.

**1.47.** Доказать, что произвольный набор попарно непересекающихся интервалов  $(a, b)$  не более чем счетен.

**1.48.** Пусть функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[0, 1]$ , имеет в каждой точке локальный минимум (т. е. для каждого  $x_0 \in [0, 1]$  найдется такое  $\varepsilon$ , что  $f(x) \geq f(x_0)$  для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \varepsilon$ ). Доказать, что множество значений, принимаемых функцией  $f$ , не более чем счетно.

**1.49.** Доказать, что произвольное множество точек на плоскости, расстояние между любыми двумя из которых превосходит некоторое фиксированное число  $a > 0$ , не более чем счетно.

**1.50.** Пусть  $A$  — счетное множество точек на  $(-\infty, \infty)$ . Доказать, что существуют такие  $\alpha$ , что  $A$  не имеет общих точек со сдвигом  $A$  на  $\alpha$ , т. е. с множеством  $\{x + \alpha\}, x \in A$ .

**1.51.** Пусть  $A$  — счетное множество точек на  $(-\infty, \infty)$ . Доказать, что для каждого  $\alpha > 0$  можно так выбрать точку  $x$ , что равномерная сетка с начальной точкой  $x$  и шагом  $\alpha$ , т. е. множество  $\{x + am\}; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , не будет содержать ни одной точки множества  $A$ .

**1.52.** Пусть на множестве  $A$  задано бесконечное семейство функций  $\{f(x)\}$ , равномерно ограниченных на  $A$ . Доказать, что для каждого счетного множества  $B \subset A$  из этого семейства можно выделить последовательность функций, сходящуюся в каждой точке  $x \in B$ .

**1.53.** Доказать, что если  $A \setminus B \sim B \setminus A$ , то  $A \sim B$ .

**1.54.** Доказать, что если  $A \subset B \subset C$  и  $A \sim C$ , то  $A \sim B$ .

**1.55.** Доказать, что если у каждого из двух множеств имеется подмножество, эквивалентное другому множеству, то сами эти множества эквивалентны.

**1.56.** Доказать, что континуум несчетен.

**1.57.** Доказать, что множество точек любого интервала  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , имеет мощность континуума.

**1.58.** Доказать, что объединение счетного набора множеств мощности континуума имеет мощность континуума.

**1.59.** Доказать, что множество точек  $(x, y)$  единичного квадрата  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  имеет мощность континуума.

**1.60.** Доказать, что множество всех точек конечномерного евклидова пространства имеет мощность континуума.

**1.61.** Доказать, что объединение континуума множеств мощности континуума имеет мощность континуума.

**1.62.** Доказать, что множество всех последовательностей, составленных из 0 и 1, имеет мощность континуума.

**1.63.** Доказать, что мощность континуума имеет множество всех чисел из  $(0, 1)$ , в представлении которых бесконечной десятичной дробью участвуют только две, три, ..., девять цифр.

**1.64.** Доказать, что каждая последовательность  $a_1, a_2, \dots$  имеет континуум подпоследовательностей.

**1.65.** Доказать, что множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность континуума.

**1.66.** Доказать, что для каждого множества множество всех его подмножеств имеет мощность, большую, чем исходное множество.

**1.67.** Доказать, что множество всех функций  $f(x)$ , заданных на отрезке, имеет мощность, большую, чем мощность континуума.

**1.68.** Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

**1.69.** Доказать, что множество всех счетных подмножеств множества мощности континуума имеет мощность континуума.

**1.70.** Доказать, что множество всех непрерывных функций  $f(x)$ , заданных на отрезке, имеет мощность континуума.

**1.71.** Доказать, что множество всех монотонных функций  $f(x)$ , заданных на отрезке, имеет мощность континуума.

**1.72.** Доказать, что мощность континуума имеет множество всех подмножеств отрезка, являющихся объединением не более чем счетного набора попарно непересекающихся интервалов.

**1.73.** Доказать, что множество всех последовательностей непрерывных функций, заданных на отрезке, имеет мощность континуума.

**1.74.** Доказать, что если  $A = B \cup C$  и  $A$  имеет мощность континуума, то по крайней мере одно из множеств  $B$  и  $C$  имеет мощность континуума.

**1.75.** Доказать, что если  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  и  $A$  имеет мощность континуума, то по крайней мере одно из множеств  $A_n$  имеет мощность континуума.

## Глава 2

### МНОЖЕСТВА В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Множества, рассматриваемые в этой и следующих главах, предполагаются принадлежащими  $n$ -мерному евклидову пространству  $E_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Расстояние между точками  $x$  и  $y$  из  $E_n$  обозначается  $\rho(x, y)$ , т. е.

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2},$$

где  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$  — координаты точек  $x$  и  $y$  (относительно прямоугольной системы координат). Множество всех точек  $y$ , для которых  $\rho(x, y) < \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x$ .

Точка  $x$  называется предельной точкой множества  $A \subset E_n$ , если каждая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$  содержит бесконечное подмножество точек множества  $A$ . Множество всех предельных точек множества  $A$  обозначается  $A'$ . Замыканием множества  $A$  называется множество  $\bar{A} = A \cup A'$ . Множество  $A$  называется замкнутым, если  $A = \bar{A}$ , и называется совершенным, если  $A = A'$ .

Точка  $x \in A$  называется изолированной точкой множества  $A$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x$ , которая не содержит других точек множества  $A$ , кроме самой этой точки.

Точка  $x$  называется точкой конденсации множества  $A$ , если каждая ее  $\varepsilon$ -окрестность содержит несчетное подмножество точек множества  $A$ .

Точка  $x$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, целиком принадлежащая множеству  $A$ . Множество  $A$  назы-

вается *открытым*, если каждая точка  $x \in A$  является его внутренней точкой.

Говорят, что семейство множеств  $\{B_\alpha\}$  покрывает множество  $A$ , если каждая точка множества  $A$  принадлежит по крайней мере одному из множеств семейства  $\{B_\alpha\}$ .

Расстоянием между точкой  $x$  и непустым множеством  $A$  называют величину

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y),$$

а *расстоянием* между произвольными непустыми множествами  $A$  и  $B$  — величину

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y).$$

Множество  $A \subset E_n$  называется *всюду плотным* (в  $E_n$ ), если для каждой точки  $x \in E_n$  любая ее  $\varepsilon$ -окрестность содержит точки множества  $A$ , т. е. если  $\bar{A} = E_n$ . Множество  $A \subset E_n$  называется *нигде не плотным* (в  $E_n$ ), если для каждой точки  $x \in E_n$  в любой ее  $\varepsilon$ -окрестности найдется такая точка  $y$ , некоторая  $\varepsilon_1$ -окрестность которой не содержит точек множества  $A$ .

Говорят, что множество  $A$  имеет *тип*  $F_\sigma$ , если существуют такие замкнутые множества  $F_1, F_2, \dots$ ,

что  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ , и  $A$  имеет *тип*  $G_\delta$ , если существуют такие открытые множества  $G_1, G_2, \dots$ , что  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ .

Если множество  $A$  представимо в виде  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ , где каждое множество  $B_k$  имеет тип  $F_\sigma$ , то говорят, что  $A$  имеет *тип*  $F_{\sigma\sigma}$ . Если  $A$  представимо в виде

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ , где каждое множество  $B_k$  имеет тип  $G_\delta$ , то говорят, что  $A$  имеет тип  $G_{\delta\delta}$ .

Те задачи этой главы, в которых не указана явно размерность пространства  $E_n$ , которому принадлежат рассматриваемые множества, следует решать для произвольного  $n$ . При этом иногда будет полезно рассмотреть сначала случай  $n = 1$  и только после этого переходить к пространствам большей размерности.

**2.1.** Доказать, что замыкание произвольного множества  $A$  замкнуто, т. е.  $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$ .

**2.2.** Доказать, что для произвольного множества  $A$  множество всех его предельных точек  $A'$  замкнуто.

**2.3.** Доказать, что

1)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ,

2)  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .

**2.4.** Построить множество  $A$  такое, что все его точки являются изолированными, а множество  $A'$  непусто.

**2.5.** Доказать, что множество изолированных точек произвольного множества не более чем счетно.

**2.6.** Доказать, что каждое бесконечное ограниченное множество имеет по крайней мере одну предельную точку (теорема Больцано — Вейерштрасса).

**2.7.** Пусть  $A'$  — множество предельных точек множества  $A$ ,  $A''$  — множество предельных точек  $A'$  и т. д. Построить множество  $A$ , у которого

1)  $A'$  непусто, а  $A''$  пусто;

2)  $A^{(n)}$  непусто, а  $A^{(n+1)}$  пусто,  $n = 2, 3, \dots$ ;

3) все  $A^{(n)}$  различны.

**2.8.** Доказать, что если множество  $A'$  счетно, то и  $A$  счетно.

**2.9.** Построить счетное множество  $A$  такое, что множество  $A'$  имеет мощность континуума и не пересекается с  $A$ .

**2.10.** Доказать, что для каждого множества совокупность всех его внутренних точек открыта.

**2.11.** Доказать, что дополнение замкнутого множества до всего пространства открыто, а дополнение открытого множества замкнуто.

**2.12.** Доказать, что если множество  $F$  замкнуто, а множество  $G$  открыто, то  $F \setminus G$  замкнуто, а  $G \setminus F$  открыто.

**2.13.** Доказать, что как подмножества пространства  $E_1$  отрезок  $[a, b]$  замкнут, интервал  $(a, b)$  открыт, а полуотрезок  $[a, b)$  не является ни замкнутым, ни открытым множеством. Будут ли эти множества замкнутыми или открытыми как подмножества  $E_2$ ?

**2.14.** Доказать, что  $n$ -мерные шар и параллелепипед, рассматриваемые вместе с их границами (т. е. множества точек, координаты которых удовлетворяют соответственно условиям  $\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2 \leq r^2$  и  $a_k \leq x_k \leq b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ), замкнуты. Эти же множества без граничных точек (т. е. когда соответствующие условия на координаты имеют вид  $\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2 < r^2$  и  $a_k < x_k < b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ) открыты.

**2.15.** Доказать, что пересечение произвольного набора замкнутых множеств замкнуто.

**2.16.** Доказать, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

**2.17.** Доказать, что объединение произвольного набора открытых множеств открыто.

**2.18.** Доказать, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

**2.19.** Доказать, что замыкание произвольного множества  $A$  равно пересечению всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .

**2.20.** Доказать, что предел убывающей последовательности непустых замкнутых ограниченных множеств замкнут и непуст.

**2.21.** Доказать, что если замкнутые ограниченные множества  $F_1, F_2, \dots$  таковы, что пересечение произвольного конечного набора их непусто, то и  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$  непусто.

**2.22.** Доказать, что каждое открытое множество на прямой представимо как объединение не более чем счетного набора непересекающихся интервалов (допускаются интервалы с одним или обоими бесконечными концами).

**2.23.** Доказать, что каждое бесконечное замкнутое множество на прямой является замыканием некоторого своего счетного подмножества.

**2.24.** Доказать, что каждое открытое множество в  $E_n$  представимо как объединение не более чем счетного набора открытых шаров  $\left( \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0)^2 < r^2 \right)$  или

открытых параллелепипедов ( $a_k < x_k < b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ).

2.25. Построить в  $E_n$  такую последовательность открытых множеств, что каждое открытое множество можно представить как объединение множеств из некоторой ее подпоследовательности.

2.26. Представить отрезок  $[a, b]$  как пересечение счетного набора открытых множеств. Сначала решить задачу, рассматривая отрезок как подмножество прямой, а затем как подмножество в  $E_n$ ,  $n \geq 2$ .

2.27. Представить интервал  $(a, b)$  как объединение счетного набора замкнутых множеств.

2.28. Доказать, что каждое открытое множество в  $E_n$  можно представить как объединение счетного набора замкнутых множеств (т. е. что открытое множество имеет тип  $F_\sigma$ ).

2.29. Доказать, что каждое замкнутое множество в  $E_n$  можно представить как пересечение счетного набора открытых множеств (т. е. что замкнутое множество имеет тип  $G_\delta$ ).

2.30. Пусть замкнутое ограниченное множество  $F$  покрыто бесконечным набором открытых множеств  $\{G_\alpha\}$ . Доказать, что существует конечное число множеств  $G_\alpha$ , которые покрывают  $F$  (теорема Гейне — Бореля).

2.31. Показать, что теорема Гейне — Бореля перестает быть верной, если в ней отказаться от любого из следующих трех условий, сохранив два остальных:

- 1) множество  $F$  замкнуто,
- 2) множество  $F$  ограничено,
- 3) множества  $G_\alpha$  открыты.

2.32. Пусть  $\{F_\alpha\}$  — произвольное семейство замкнутых ограниченных множеств таких, что пересечение любого их конечного набора непусто. Доказать, что  $\bigcap_\alpha F_\alpha$  непусто.

2.33. Доказать, что если множество  $A$  покрыто бесконечным набором открытых множеств  $\{G_\alpha\}$ , то существует счетный набор множеств  $G_\alpha$ , которые покрывают  $A$ .

2.34. Доказать, что непустое множество  $A \subset E_n$  замкнуто в том и только том случае, когда для каж-

дой точки  $x \in E_n$  найдется такая точка  $y \in A$ , что  $\rho(x, A) = \rho(x, y)$ .

2.35. Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  не пусты, замкнуты и по крайней мере одно из них ограничено, то существуют такие точки  $x \in A$  и  $y \in B$ , что  $\rho(A, B) = \rho(x, y)$ .

2.36. Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  не пусты, замкнуты, не пересекаются и по крайней мере одно из них ограничено, то  $\rho(A, B) > 0$ .

2.37. Построить непустые замкнутые непересекающиеся множества  $A$  и  $B$  такие, что  $\rho(A, B) = 0$ .

2.38. Доказать, что для произвольного непустого множества  $A \subset E_n$  функция  $f(x) = \rho(x, A)$  непрерывна на  $E_n$ .

2.39. Доказать, что для произвольного непустого множества  $A \subset E_n$ :

1) для каждого  $\epsilon > 0$  множество точек  $x \in E_n$ , для которых  $\rho(x, A) < \epsilon$ , открыто;

2) для каждого  $\epsilon \geq 0$  множество точек  $x \in E_n$ , для которых  $\rho(x, A) \leq \epsilon$ , замкнуто.

2.40. Каждую точку  $x$  непустого множества  $A \subset E_n$  покроем замкнутым шаром радиуса  $\epsilon > 0$  с центром в точке  $x$  (т. е. множеством точек  $y$ , для которых  $\rho(x, y) \leq \epsilon$ ). Доказать, что объединение всех этих шаров:

1) открыто, если  $A$  открыто;

2) замкнуто, если  $A$  замкнуто.

2.41. Доказать, что произвольное непустое замкнутое множество  $A$  и произвольную точку  $x \in A$  можно покрыть непересекающимися открытыми множествами (т. е. существуют такие непересекающиеся открытые множества  $G_1$  и  $G_2$ , что  $A \subset G_1$  и  $x \in G_2$ ).

2.42. Доказать, что произвольные непустые замкнутые непересекающиеся множества  $A$  и  $B$  можно покрыть открытыми множествами, которые также не пересекаются (оба множества  $A$  и  $B$  могут быть не ограниченными).

2.43. Пусть множество  $G$  открыто и ограничено, а непустое множество  $F$  замкнуто и  $F \subset G$ . Доказать, что существует такое  $\epsilon > 0$ , что множество всех точек  $x$ , для которых  $\rho(x, F) \leq \epsilon$ , будет содержаться в  $G$ .

2.44. Выпуклой оболочкой множества  $A$  называется пересечение всех выпуклых множеств, содержа-

ющих  $A$ . Доказать, что для каждого открытого множества его выпуклая оболочка открыта.

2.45. Доказать, что выпуклая оболочка каждого замкнутого ограниченного множества замкнута.

2.46. Доказать, что в пространствах  $E_n$  при  $n \geq 2$  существуют неограниченные замкнутые множества, выпуклая оболочка которых незамкнута.

2.47. Доказать, что для каждого непустого ограниченного множества замыкание его выпуклой оболочки совпадает с выпуклой оболочкой его замыкания.

2.48. Доказать, что если функция непрерывна в  $E_n$ , то множество точек, в которых она обращается в нуль, замкнуто.

2.49. Для произвольного замкнутого множества  $F \subset E_n$  построить непрерывную в  $E_n$  функцию, множество нулей которой совпадает с  $F$ .

2.50. Пусть  $F$  — замкнутое множество на прямой и функция  $f$  непрерывна на  $F$ . Построить непрерывное продолжение функции  $f$  на всю прямую, т. е. построить функцию  $\varphi$ , которая непрерывна на прямой и такова, что  $\varphi(x) = f(x)$  для  $x \in F$ .

2.51. Пусть  $F$  — замкнутое множество в  $E_n$  и функция  $f$  непрерывна на  $F$ . Построить непрерывное продолжение функции  $f$  на  $E_n$ .

2.52. Пусть  $F$  — замкнутое множество в  $E_n$  и функция  $f$  непрерывна на  $F$ . Доказать, что для каждого  $c$  множество тех точек  $x \in F$ , для которых  $f(x) \geq c$ , замкнуто.

2.53. Построить на  $[a, b]$  разрывную функцию  $f(x)$  такую, что для каждого  $c$  множества точки, в которых  $f(x) \geq c$  и  $f(x) = c$ , замкнуты.

2.54. Пусть функция  $f(x)$  задана на  $[a, b]$  и для каждого  $c$  множества точек, в которых  $f(x) \geq c$  и  $f(x) \leq c$ , замкнуты. Доказать, что функция  $f$  непрерывна.

2.55. Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Доказать, что если множество  $A \subset [a, b]$  замкнуто, то замкнуто множество  $f(A)$  (образ множества  $A$  при отображении, осуществляемом функцией  $f$ );

2) имеет тип  $F_\sigma$ , то множество  $f(A)$  имеет тип  $F_\sigma$ .

**2.56.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная строго возрастающая функция  $f(x)$ . Доказать, что если множество  $A \subset [a, b]$

1) всюду плотно на  $[a, b]$ , то  $f(A)$  всюду плотно на  $[f(a), f(b)]$ ;

2) нигде не плотно на  $[a, b]$ , то  $f(A)$  нигде не плотно на  $[f(a), f(b)]$ .

**2.57.** Доказать, что если множество  $A$  нигде не плотно, то и его замыкание  $\bar{A}$  нигде не плотно.

**2.58.** Доказать, что если множество нигде не плотно, то его дополнение всюду плотно.

**2.59.** Доказать, что если открытое множество всюду плотно, то его дополнение нигде не плотно, а для произвольных всюду плотных множеств это утверждение неверно.

**2.60.** Пусть множества  $A_1, A_2 \dots$  нигде не плотны.

Доказать, что множество  $E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  всюду плотно.

**2.61.** Пусть множества  $A_1, A_2, \dots$  всюду плотны. Доказать, что их пересечение всюду плотно, если каждое из множеств  $A_n$

1) открыто,

2) имеет тип  $G_\delta$ .

**2.62.** Построить убывающую последовательность всюду плотных множеств, пересечение которых пусто.

**2.63.** Доказать, что для произвольного множества  $A \subset E_n$  объединение его дополнения до  $E_n$  и множества всех внутренних точек  $A$  всюду плотно в  $E_n$ .

**2.64.** Чтобы построить на отрезке  $[0, 1]$  канторово множество, сначала удаляют из этого отрезка интервал  $(1/3, 2/3)$ . Затем каждый из двух оставшихся отрезков делят на три равные части и удаляют средние интервалы, т. е.  $(1/9, 2/9)$  и  $(7/9, 8/9)$ . На следующем шаге каждый из оставшихся отрезков опять делят на три равные части и удаляют средние интервалы. Множество точек отрезка  $[0, 1]$ , оставшихся после неограниченного продолжения этого процесса, называют канторовым. Доказать, что это множество:

1) нигде не плотно,

2) совершенно,

3) имеет мощность континуума.

**2.65.** Пусть  $F$  — непустое замкнутое ограниченное множество на прямой и  $[a, b]$  — наименьший отрезок,

содержащий  $F$ . Доказать, что  $F$  совершенно в том и только том случае, когда его можно получить, удалив из  $[a, b]$  не более чем счетное множество непересекающихся интервалов, не имеющих общих концов ни друг с другом, ни с отрезком  $[a, b]$ .

2.66. Рассмотрим множество всех чисел из  $(0, 1)$ , в представлении которых бесконечной десятичной дробью участвуют только две, три, ..., девять цифр. Доказать, что если к этому множеству добавить числа 0 и 1, то полученное множество будет совершенным.

2.67. Доказать, что каждое непустое совершенное множество имеет мощность континуума.

2.68. Доказать, что если множества  $F_k$  замкнуты и  $E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ , то хотя бы одно из  $F_k$  имеет внутренние точки.

2.69. Доказать, что отрезок  $[0, 1]$  нельзя представить в виде объединения счетного множества попарно непересекающихся замкнутых множеств.

2.70. Представить отрезок  $[0, 1]$  в виде объединения континуума попарно непересекающихся совершенных множеств.

2.71. Доказать, что множеством точек конденсации объединения двух множеств является объединение их точек конденсации.

2.72. Доказать, что каждое несчетное множество имеет точки конденсации, принадлежащие этому множеству.

2.73. Доказать, что множество точек конденсации каждого несчетного множества совершенно.

2.74. Доказать, что множество точек произвольного несчетного множества, не являющихся его точками конденсации, не более чем счетно.

2.75. Доказать, что каждое несчетное замкнутое множество представимо как объединение совершенного множества и не более чем счетного множества и, значит, имеет мощность континуума.

2.76. Доказать, что пересечение счетного множества множеств типа  $G_\delta$  имеет тип  $G_\delta$ .

2.77. Доказать, что объединение счетного множества множеств типа  $F_\sigma$  имеет тип  $F_\sigma$ .

2.78. Доказать, что дополнение множества типа  $F_\sigma$

до  $E_n$  имеет тип  $G_\delta$ , а дополнение множества типа  $G_\delta$  имеет тип  $F_\sigma$ .

2.79. Доказать, что множество всех рациональных точек на  $(-\infty, \infty)$  является множеством типа  $F_\sigma$  и не является множеством типа  $G_\delta$ .

2.80. Доказать, что никакое счетное всюду плотное в  $E_n$  множество не может иметь тип  $G_\delta$ .

2.81. Привести пример множества, не являющегося ни множеством типа  $F_\sigma$ , ни множеством типа  $G_\delta$ .

2.82. Доказать, что множество точек непрерывности произвольной функции имеет тип  $G_\delta$ .

2.83. Построить функцию  $f(x)$ , непрерывную во всех иррациональных и разрывную во всех рациональных точках.

2.84. Для произвольного множества  $A \subset E_n$  типа  $G_\delta$  построить функцию, множество точек непрерывности которой совпадает с  $A$ .

2.85. Доказать, что для произвольной последовательности функций  $f_m(x)$ , непрерывных в  $E_n$ , множество точек ее неограниченной расходимости (т. е. точек  $x$ , в которых  $\lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x)| = \infty$ ) имеет тип  $G_\delta$ .

2.86. Построить на  $(-\infty, \infty)$  последовательность непрерывных функций, множеством точек неограниченной расходимости которой является множество всех иррациональных точек.

2.87. Для произвольного множества  $A \subset E_n$  типа  $G_\delta$  построить последовательность функций, непрерывных в  $E_n$ , множество точек неограниченной расходимости которой совпадает с  $A$ .

2.88. Доказать, что для произвольной последовательности непрерывных функций множество точек сходимости имеет тип  $F_{\sigma\delta}$ .

2.89. Построить на  $(-\infty, \infty)$  последовательность непрерывных функций, множеством точек сходимости которой является множество всех рациональных точек.

2.90. Построить на  $(-\infty, \infty)$  последовательность непрерывных функций, множеством точек сходимости которой является множество всех иррациональных точек.

2.91. Для произвольного множества  $A \subset E_n$  типа  $F_{\sigma\delta}$  построить последовательность функций, непрерывных в  $E_n$ , множество точек сходимости которой совпадает с  $A$ .

# Глава 3

## ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

### § 1. Мера на кольцах

Непустой набор множеств  $R$  называется кольцом, если для любых множеств  $A$  и  $B$  из  $R$  к  $R$  принадлежат  $A \Delta B$  и  $A \cap B$ . Можно доказать (этому была посвящена задача 1.23), что к  $R$  будет принадлежать также  $A \cup B$ , а значит, и объединение любого конечного набора множеств из  $R$ . Если для произвольной последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots, A_l \in R$ , к  $R$  принадлежит их объединение  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , то кольцо  $R$  называют  $\sigma$ -кольцом. Если среди элементов кольца множеств  $R$  есть такое множество  $E$ , что  $A \subset E$  для каждого  $A \in R$ , то  $R$  называют алгеброй, а множество  $E$  — единицей алгебры. Алгебру называют  $\sigma$ -алгеброй, если кольцо  $R$  было  $\sigma$ -кольцом.

Непустой набор множеств  $P$  называют полукольцом, если для любых множеств  $A$  и  $B$  из  $P$  к  $P$  принадлежит  $A \cap B$  и найдется такой конечный набор попарно непересекающихся множеств  $C_1, \dots, C_k$  из  $P$ , что  $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^k C_i$ .

Определенная на кольце множеств  $R$  числовая функция  $\varphi$ , которая может принимать и бесконечные значения, но только одного знака, называется аддитивной (или конечно аддитивной), если для любых попарно непересекающихся множеств  $A_1, \dots, A_k$  из  $R$  справедливо равенство

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \varphi(A_i). \quad (*)$$

Аналогично вводится определение аддитивности для функций, заданных на полукольце  $P$ , только в этом случае требуется, чтобы равенство (\*) выполнялось для любых попарно непересекающихся множеств  $A_1, \dots, A_k$  из  $P$  таких, что и  $\bigcup_{i=1}^k A_i$  принадлежит к  $P$ . Функция  $\varphi$ , заданная на кольце или полукольце мно-

жеств, называется  $\sigma$ -аддитивной (или счетно аддитивной), если равенство

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$$

выполняется для любой последовательности попарно непересекающихся множеств  $A_1, A_2, \dots$  таких, что сами эти множества и их объединение  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  принадлежат этому кольцу или соответственно полукольцу.

Функция  $m$ , определенная на кольце множеств, называется мерой, если она неотрицательна,  $\sigma$ -аддитивна и  $m(\emptyset) = 0$ .

В задачах 3.11 и 3.14 определены полукольца  $P_1$  и  $P_n$ , в задачах 3.12 и 3.15 — полукольца  $Q_1$  и  $Q_n$ . Эти обозначения используются в последующих задачах этой главы без пояснений.

**3.1.** Доказать, что для произвольного множества множество всех его подмножеств образует  $\sigma$ -алгебру.

**3.2.** Доказать, что множество всех ограниченных подмножеств прямой образует кольцо, но не является ни  $\sigma$ -кольцом, ни алгеброй.

**3.3.** Пусть  $R$  — кольцо множеств,  $A \subseteq R$  и  $R_A$  — совокупность всех множеств вида  $A \cap B$ , где  $B \subseteq R$ . Доказать, что  $R_A$  — алгебра, единицей которой является  $A$ , а если  $R$  было  $\sigma$ -кольцом, то  $R_A$  будет  $\sigma$ -алгеброй.

**3.4.** Доказать, что для произвольного множества  $A$  множество всех его конечных подмножеств образует кольцо. При каком условии на множество  $A$  это кольцо будет:

1) алгеброй, 2)  $\sigma$ -кольцом?

**3.5.** Доказать, что для произвольного бесконечного множества  $A$  множество всех его не более чем счетных подмножеств образует  $\sigma$ -кольцо. При каком условии на множество  $A$  это кольцо будет алгеброй?

**3.6.** Доказать, что для произвольного несчетного множества  $A$   $\sigma$ -алгебру образует множество всех таких подмножеств  $A$ , что либо само это подмножество, либо его дополнение до  $A$  не более чем счетно.

**3.7.** Доказать, что полукольцо множеств  $P$  будет кольцом, если объединение любых двух множеств из  $P$  принадлежит  $P$ .

**3.8.** Пусть множества  $A, A_1, \dots, A_k$  принадлежат полукольцу множеств  $P$ ,  $A_i \subset A$  и множества  $A_i$  попарно не пересекаются,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Доказать, что в  $P$  можно выбрать такие множества  $A_{k+1}, \dots, A_n$ ,

что  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  и все множества  $A_1, \dots, A_n$  попарно не пересекаются.

**3.9.** Пусть множества  $A_1, \dots, A_k$  принадлежат полукольцу множеств  $P$ . Доказать, что в  $P$  можно выбрать такие попарно непересекающиеся множества  $B_1, \dots, B_n$ , что каждое  $A_i$  представимо как объединение некоторых  $B_j$ .

**3.10.** Пусть задано полукольцо множеств  $P$  и  $R$  — множество всех конечных объединений множеств из  $P$ . Доказать, что  $R$  — кольцо и что любое другое кольцо, содержащее все множества из  $P$ , будет содержать все элементы  $R$ , т. е. что  $R$  — минимальное кольцо, содержащее  $P$ . Говорят, что *кольцо  $R$  порождено полукольцом  $P$* , обозначают его  $R(P)$ .

**3.11.** Пусть  $P_1$  — множество всех конечных полуинтервалов вида  $[a, b)$  на прямой. Доказать, что  $P_1$  — полукольцо, а порожденное им кольцо  $R(P_1)$  не является ни  $\sigma$ -кольцом, ни алгеброй.

**3.12.** Пусть  $Q_1$  — множество всех конечных промежутков вида  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  и  $[a, b]$ ,  $a \leq b$ , на прямой. Доказать, что  $Q_1$  — полукольцо, а порожденное им кольцо  $R(Q_1)$  не является ни  $\sigma$ -кольцом, ни алгеброй.

**3.13.** Доказать, что для каждого из колец  $R(P_1)$  и  $R(Q_1)$  совокупность всех их элементов, являющихся подмножествами отрезка  $[0, 1]$ , образует алгебру. Какие множества играют роль единиц в этих алгебрах? Будут ли алгебрами совокупности всех элементов из  $R(P_1)$  и из  $R(Q_1)$ , являющихся подмножествами интервала  $(0, 1)$ ?

**3.14.** В  $n$ -мерном евклидовом пространстве рассмотрим параллелепипеды, определяемые условиями на координаты вида  $a_k \leq x_k < b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Пусть  $P_n$  — множество всех таких конечных параллелепипедов. Доказать, что  $P_n$  — полукольцо, а порожденное им кольцо  $R(P_n)$  не является ни  $\sigma$ -кольцом, ни алгеброй.

**3.15.** В  $n$ -мерном евклидовом пространстве рас-

смотрим параллелепипеды, определяемые условиями на координаты вида  $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , причем каждое из этих  $2n$  нестрогих неравенств может быть заменено на строгое, т. е. на  $<$ . Здесь  $a_k < b_k$ , а если для некоторого  $k$  оба условия на координаты заданы с нестрогими неравенствами, то допускается и  $a_k = b_k$ . Пусть  $Q_n$  — множество всех таких конечных параллелепипедов. Доказать, что  $Q_n$  — полукольцо, а порожденное им кольцо  $R(Q_n)$  не является ни  $\sigma$ -кольцом, ни алгеброй.

**3.16.** Доказать, что совокупность всех тех элементов каждого из колец  $R(P_n)$  и  $R(Q_n)$ , которые принадлежат  $n$ -мерному единичному кубу  $\{0 \leqslant x_k \leqslant 1, k = 1, \dots, n\}$ , образует алгебру. Какие множества играют роль единиц в этих алгебрах?

**3.17.** Доказать, что для произвольной последовательности элементов  $A_1, A_2, \dots$  из  $\sigma$ -кольца множеств

$R$  их пересечение  $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$  также принадлежит  $R$ .

**3.18.** Доказать, что если алгебра множеств  $R$  такова, что пересечение каждой последовательности элементов из  $R$  принадлежит  $R$ , то  $R$  есть  $\sigma$ -алгебра.

**3.19.** Построить кольцо множеств  $R$ , которое не является  $\sigma$ -кольцом, но пересечение каждой последовательности элементов из  $R$  принадлежит  $R$ .

**3.20.** Для произвольного непустого набора множеств  $\{A_\alpha\}$  построить минимальное кольцо  $R$ , содержащее все множества  $A_\alpha$  в качестве своих элементов (минимальность кольца  $R$  означает, что любое другое кольцо, элементами которого являются все  $A_\alpha$ , содержит все элементы  $R$ ).

**3.21.** Множество  $A$  из евклидова пространства  $E_n$  называется *борлевским*, если оно может быть получено из открытых множеств счетным применением операций объединения, пересечения и перехода к дополнению. Доказать, что совокупность всех борлевских множеств пространства  $E_n$

1) образует  $\sigma$ -алгебру;

2) является минимальной  $\sigma$ -алгеброй, содержащей все открытые множества;

3) является минимальной  $\sigma$ -алгеброй, содержащей все замкнутые множества;

4) имеет мощность континуума.

**3.22.** Пусть  $\varphi$  — аддитивная функция, заданная на кольце множеств  $R$ . Доказать, что

- 1) если  $\varphi$  принимает конечное значение хотя бы на одном элементе из  $R$ , то  $\varphi(\emptyset) = 0$ ;
- 2) для любых  $A$  и  $B$  из  $R$

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B);$$

3) множество тех элементов из  $R$ , на которых  $\varphi$  принимает конечные значения, образует кольцо.

**3.23.** Пусть  $\varphi$  — аддитивная неотрицательная функция, заданная на кольце множеств  $R$ . Доказать, что

- 1) если множества  $A$  и  $B$  принадлежат  $R$  и  $A \subset B$ , то  $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ ;
- 2) если для множеств  $A$  и  $B$  из  $R$  имеем

$$\varphi(A \Delta B) = 0,$$

то  $\varphi(A) = \varphi(B)$ ;

3) множество тех элементов из  $R$ , на которых  $\varphi$  обращается в нуль, образует кольцо.

**3.24.** Показать, что ни в одном из утверждений задачи **3.23** нельзя отказаться от условия неотрицательности функции  $\varphi$ .

**3.25.** Пусть  $\varphi$  — аддитивная неотрицательная функция, заданная на кольце множеств  $R$ , и попарно непересекающиеся множества  $A_1, A_2, \dots$  принадлежат  $R$ . Доказать, что если  $A \in R$  и

$$1) \bigcup_{i=1}^k A_i \subset A, \text{ то } \sum_{i=1}^k \varphi(A_i) \leq \varphi(A);$$

$$2) \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A, \text{ то } \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i) \leq \varphi(A).$$

**3.26.** Доказать, что для произвольной неотрицательной аддитивной функции  $\varphi$ , заданной на кольце множеств  $R$ , и для произвольных  $A, A_1, \dots, A_k$ , принадлежащих  $R$ , из  $A \subset \bigcup_{i=1}^k A_i$  следует  $\varphi(A) \leq \sum_{i=1}^k \varphi(A_i)$ .

**3.27.** Пусть  $\varphi$  — неотрицательная аддитивная функция, заданная на кольце множеств  $R$ . Доказать, что  $\varphi$  будет  $\sigma$ -аддитивной в том и только том случае, когда для произвольных множеств  $A, A_1, A_2, \dots$ , принадлежащих  $R$ , из  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  следует  $\varphi(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$ .

**3.28.** Пусть  $m$  — мера на кольце  $R$ . Доказать, что если  $A_1, A_2, \dots$  — монотонная (т. е. возрастающая или убывающая) последовательность множеств из  $R$ , имеющих конечную меру и таких, что  $\lim_n A_n \in R$ , то

$$m(\lim_n A_n) = \lim_n mA_n.$$

**3.29.** Пусть  $\varphi$  — конечная неотрицательная аддитивная функция, заданная на кольце  $R$ . Доказать, что любое из следующих условий достаточно для  $\sigma$ -аддитивности функции  $\varphi$ :

1) для каждой возрастающей последовательности множеств  $A_n$  из  $R$  такой, что  $\lim_n A_n \in R$ ,

$$\varphi(\lim_n A_n) = \lim_n \varphi(A_n);$$

2) для каждой убывающей последовательности множеств  $A_n$  из  $R$  такой, что  $\lim_n A_n = \emptyset$ ,

$$\lim_n \varphi(A_n) = 0.$$

**3.30.** На алгебре всех подмножеств рациональных чисел из  $[0, 1]$  ввести меру так, чтобы мера каждого рационального числа была положительна, а мера множества всех рациональных чисел из  $[0, 1]$  равнялась 1.

**3.31.** Определить неотрицательную аддитивную, но не  $\sigma$ -аддитивную функцию на алгебре всех подмножеств рациональных чисел из  $[0, 1]$ .

**3.32.** Пусть  $\varphi$  — неотрицательная аддитивная функция, заданная на полукольце множеств  $P$ . Доказать, что  $\varphi$  можно, и притом единственным образом, продолжить до аддитивной функции на кольце  $R(P)$ , порожденном  $P$ . Если функция  $\varphi$  была  $\sigma$ -аддитивна на  $P$ , то продолженная функция на  $R(P)$  будет  $\sigma$ -аддитивной, т. е. будет мерой, если  $\varphi(\emptyset) = 0$ .

**3.33.** Пусть на полукольце множеств  $P$  задана неотрицательная функция  $\varphi$ . Доказать, что если для каждого непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  из  $P$

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

то  $\varphi$  аддитивна, т. е. для произвольных попарно непересекающихся множеств  $A_1, \dots, A_k$ ,  $k \geq 2$ , из  $P$

таких, что  $\bigcup_{i=1}^k A_i \in P$ , имеем

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \varphi(A_i).$$

**3.34.** Для множеств  $A$ , являющихся промежутками вида  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  и  $[a, b]$ ,  $a \leq b$ , положим  $m(A) = b - a$ . Доказать  $\sigma$ -аддитивность функции  $m$  на каждом из полуколец  $P_1$  и  $Q_1$ .

**3.35.** Пусть на  $(-\infty, \infty)$  задана неубывающая непрерывная слева функция  $g(x)$ . Для множества  $A = [a, b)$  положим  $m(A) = g(b) - g(a)$ . Доказать  $\sigma$ -аддитивность функции  $m$  на полукольце  $P_1$ .

**3.36.** По заданной на полукольце  $P_1$  конечной аддитивной неотрицательной функции  $m$  построить на  $(-\infty, \infty)$  неубывающую непрерывную слева функцию  $g$  такую, чтобы для всех  $a < b$  выполнялось равенство  $m([a, b)) = g(b) - g(a)$ .

**3.37.** Пусть на  $(-\infty, \infty)$  задана неубывающая функция  $g(x)$ . Положим

$$\begin{aligned} m(A) &= g(b - 0) - g(a + 0), & \text{если } A = (a, b), \\ m(A) &= g(b - 0) - g(a - 0), & \text{если } A = [a, b), \\ m(A) &= g(b + 0) - g(a + 0), & \text{если } A = (a, b], \\ m(A) &= g(b + 0) - g(a - 0), & \text{если } A = [a, b]. \end{aligned}$$

Доказать  $\sigma$ -аддитивность функции  $m$  на полукольце  $Q_1$ .

**3.38.** Для множества  $A$ , являющегося  $n$ -мерным параллелепипедом, определяемым условиями на координаты вида  $a_k \leq x_k \leq b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  (где любые из  $2n$  знаков нестрогого неравенства могут быть заменены на строгие), положим  $mA = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ .

Доказать  $\sigma$ -аддитивность функции  $m$  на каждом из полуколец  $P_n$  и  $Q_n$ .

**3.39.** Пусть  $\sigma$ -аддитивные функции  $m_1, \dots, m_n$  заданы на полукольце  $P_1$ . Для  $n$ -мерного параллелепипеда  $A$ , состоящего из точек, координаты которых удовлетворяют условиям  $a_k \leq x_k < b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , положим  $m(A) = \prod_{k=1}^n m_k(A_k)$ , где  $A_k = [a_k, b_k)$ . Дока-

зать  $\sigma$ -аддитивность функции  $m$  на полукольце  $P_n$ . Рассмотреть аналогичную задачу для случая, когда функции  $m_k$  заданы на полукольце  $Q_1$ , а функция  $m$  определяется подобным образом на полукольце  $Q_n$ .

**3.40.** Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве задана функция  $g(x_1, \dots, x_n)$  такая, что смешанная производная  $\frac{\partial^n g}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$  непрерывна и неотрицательна. Для  $n$ -мерного параллелепипеда  $A$ , определяемого условиями на координаты вида  $a_k \leq x_k \leq b_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  (любые из  $2n$  знаков нестрогого неравенства могут быть заменены на строгие), положим

$$m(A) = \sum (-1)^{v(c)} g(c_1, \dots, c_n),$$

где суммирование производится по всем точкам  $c = (c_1, \dots, c_n)$ , у которых каждое  $c_k$  принимает значение  $a_k$  или  $b_k$ , и  $v(c)$  — число тех координат, для которых  $c_k = a_k$ . Доказать  $\sigma$ -аддитивность функции  $m$  на каждом из полукольца  $P_n$  и  $Q_n$ .

## § 2. Лебегово продолжение меры

Мера  $m$ , заданная на кольце  $R$ , называется конечной, если  $m(B) < \infty$  для каждого элемента  $B \in R$ .

Пусть  $R$  — алгебра множеств,  $E$  — ее единица и  $m$  — конечная мера, заданная на  $R$ . Для каждого множества  $A \subset E$  положим

$$\mu^*(A) = \inf \sum_k mB_k,$$

где нижняя грань берется по всевозможным последовательностям  $B_1, B_2, \dots$  элементов из  $R$  таким, что  $A \subset \bigcup_k B_k$ . Число  $\mu^*(A)$  называется *внешней мерой* множества  $A$ . *Внутренней мерой* множества  $A$  называется число

$$\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A).$$

Если  $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ , то множество  $A$  называют *измеримым*, а число  $\mu^*(A)$  называют *мерой* множества  $A$  и обозначают  $\mu(A)$ . При этом говорят, что мера  $\mu$  является *лебеговым продолжением* меры  $m$ .

Во всех задачах этого параграфа до задачи 3.63 включительно имеются в виду множества, являющие-

ся подмножествами  $E$  — единицы алгебры  $R$ , на которой была задана конечная мера  $m$ .

Лебегово продолжение меры  $m$ , заданной на кольце  $R$ , не являющимся алгеброй, определено в задаче 3.64. В последующих задачах имеется в виду это более общее определение меры.

**3.41.** Доказать, что если  $A$  — элемент алгебры, то  $\mu^*A = mA$ .

**3.42.** Доказать, что если  $A \subset B$ , то  $\mu^*A \leq \mu^*B$  и  $\mu_*A \leq \mu_*B$ .

**3.43.** Доказать, что для произвольного множества  $A$  и каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такую последовательность попарно непересекающихся множеств  $B_1, B_2, \dots$  из  $R$ , что  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$  и

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} mB_k - \varepsilon.$$

**3.44.** Доказать, что для произвольных множеств  $A$  и  $B$

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

**3.45.** Доказать, что для произвольных множеств  $A$  и  $B$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

**3.46.** Доказать, что для произвольной последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots$  из  $A \subset \bigcup_k A_k$  следует

$$\mu^*A \leq \sum_k \mu^*A_k.$$

**3.47.** Доказать, что для произвольных множеств  $A$  и  $B$  и каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такую последовательность попарно непересекающихся множеств  $C_1, C_2, \dots$  из  $R$ , что для некоторых ее подпоследовательностей  $\{C_{k_i}\}$  и  $\{C_{l_j}\}$  имеем

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{k_i}, \quad B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{l_j}$$

и

$$\mu^*A \geq \sum_{i=1}^{\infty} mC_{k_i} - \varepsilon, \quad \mu^*B \geq \sum_{j=1}^{\infty} mC_{l_j} - \varepsilon.$$

**3.48.** Доказать, что для произвольных множеств  $A$  и  $B$

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

**3.49.** Доказать, что внешняя мера, вообще говоря, неаддитивна.

**3.50.** Доказать, что для произвольного множества  $A$

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A).$$

**3.51.** Доказать, что множества  $A$  и  $E \setminus A$  одновременно измеримы или неизмеримы.

**3.52.** Доказать, что множество  $A$  измеримо в том и только том случае, когда для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $B \in R$  такое, что  $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ .

**3.53.** Доказать, что множество  $A$  измеримо в том и только том случае, когда для каждого множества  $B \subset E$

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A).$$

**3.54.** Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  измеримы и  $A \subset B$ , то  $\mu A \leq \mu B$ .

**3.55.** Доказать, что если множество имеет нулевую меру, то любое его подмножество измеримо.

**3.56.** Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  измеримы, то измеримы также множества:

1)  $A \cup B$ , 2)  $A \cap B$ , 3)  $A \setminus B$ , 4)  $A \Delta B$ ,  
т. е. измеримые множества образуют алгебру.

**3.57.** Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  измеримы и не пересекаются, то

1)  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ,  
2) для любого множества  $C$   $\mu^*((A \cup B) \cap C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(B \cap C)$ .

**3.58.** Доказать, что если множества  $A$  и  $B$  измеримы, то

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

**3.59.** Доказать, что мера аддитивна на алгебре всех измеримых множеств, т. е. если  $A_1, \dots, A_k$  измеримы и попарно не пересекаются, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$

**3.60.** Доказать, что из измеримости множеств  $A_1, A_2, \dots$  вытекает измеримость множества  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , т. е. что измеримые множества образуют  $\sigma$ -алгебру.

**3.61.** Доказать, что мера  $\sigma$ -аддитивна на алгебре всех измеримых множеств, т. е. если множества  $A_1, A_2, \dots$  измеримы и попарно не пересекаются, то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

**3.62.** Доказать, что из измеримости множеств  $A_1, A_2, \dots$  вытекает измеримость множества  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ .

**3.63.** Доказать, что если множество  $A$  измеримо, то существует множество  $B$  такое, что  $A \subset B$ ,  $\mu A = \mu B$  и  $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ , где множества  $B_k$  монотонно убывают,  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$  и  $B_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{ki}$ , множества  $B_{ki}$  являются элементами алгебры  $R$  и при каждом  $k$  монотонно возрастают  $B_{k1} \subset B_{k2} \subset \dots$

**3.64.** Пусть на кольце множеств  $R$  задана конечная мера  $m$ ,  $A_1, A_2, \dots$  — возрастающая последовательность элементов из  $R$  таких, что каждое множество из  $R$  принадлежит  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , и  $R_{A_k}$  — алгебра всех множеств вида  $A_k \cap C$ , где  $C \in R$ . Если множество  $A$  таково, что  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  и множества  $A \cap A_k$  измеримы (как подмножества единицы алгебры  $R_{A_k}$ ), то

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A \cap A_k)$$

(этот предел может оказаться и бесконечным) называют мерой множества  $A$ , а само это множество называют измеримым. Полученную меру называют лебеговым продолжением меры  $m$ . Доказать, что в этом определении измеримость множества и значение меры для измеримых множеств не зависят от выбора последовательности  $A_1, A_2, \dots$ , обладающей указанными выше свойствами.

**3.65.** Решить задачи 3.54—3.63, считая, что входящие в них множества  $A, B, A_1, A_2, \dots$  измеримы в том смысле, как это определено в задаче 3.64.

**3.66.** Доказать, что если  $A_1, A_2, \dots$  — возрастающая последовательность измеримых множеств, то множество  $A = \lim_k A_k$  измеримо и

$$\mu A = \lim_k \mu A_k.$$

**3.67.** Доказать, что если  $A_1, A_2, \dots$  — убывающая последовательность измеримых множеств, то множество  $A = \lim_k A_k$  измеримо и

1) если  $\mu A_1 < \infty$ , то  $\mu A = \lim_k \mu A_k$ ;

2) если мера всех  $A_1, A_2, \dots$  бесконечна, то мера  $A$  может быть и конечной и бесконечной.

**3.68.** Доказать, что для произвольной последовательности измеримых множеств  $A_1, A_2, \dots$  множества  $\overline{\lim}_k A_k$  и  $\underline{\lim}_k A_k$  измеримы и справедливы оценки

$$\mu (\underline{\lim}_k A_k) \leq \lim_k \mu (A_k) \leq \overline{\lim}_k \mu (A_k) \leq \mu (\overline{\lim}_k A_k).$$

Привести пример последовательности, для которой во всех этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

**3.69.** Доказать, что если множества  $A_1, A_2, \dots$  измеримы и  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k < \infty$ , то  $\mu (\overline{\lim}_k A_k) = 0$ .

### § 3. Мера Лебега

Задачи этого параграфа относятся к частному, но наиболее важному случаю меры, которую принято называть *мерой Лебега*.

Мера Лебега вводится сначала на полукольце  $P_n$  (или  $Q_n$ ) так, как это указано в задачах 3.34 (для  $n = 1$ ) и 3.38 (в  $n$ -мерном случае), т. е. мерой Лебега  $n$ -мерного параллелепипеда (с границей или без границы) называется его  $n$ -мерный объем. Затем мера распространяется на кольцо, порожденное полукольцом  $P_n(Q_n)$ , т. е. на множество всех конечных объединений попарно непересекающихся  $n$ -мерных

параллелепипедов. После этого строится лебегово продолжение этой меры так, как это указано во введении к § 2.

Последние две задачи параграфа относятся к *покрытиям* множеств в смысле Витали. Говорят, что система невырождающихся отрезков покрывает множество  $A$  в смысле Витали, если для каждой точки  $x \in A$  и для каждого  $\varepsilon > 0$  существует отрезок из этой системы, содержащий точку  $x$ , длина которого меньше  $\varepsilon$ .

**3.70.** Доказать, что все ограниченные открытые и замкнутые множества на прямой измеримы.

**3.71.** Доказать, что если  $G$  — ограниченное открытое множество на прямой и  $G = \bigcup_k (a_k, b_k)$  — его представление в виде объединения попарно непересекающихся интервалов, то

$$\mu G = \sum_k (b_k - a_k).$$

**3.72.** Доказать, что все ограниченные открытые и замкнутые множества в  $n$ -мерном евклидовом пространстве измеримы.

**3.73.** Доказать, что для произвольного ограниченного множества  $A$

$$\mu^* A = \inf_G \mu G,$$

где нижняя грань берется по всем открытым множествам  $G$ , содержащим  $A$ .

**3.74.** Доказать, что для произвольного ограниченного множества  $A$

$$\mu_* A = \sup_F \mu F,$$

где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам  $F$ , содержащимся в  $A$ .

**3.75.** Доказать, что для измеримости ограниченного множества  $A$  необходимо и достаточно, чтобы для каждого  $\varepsilon > 0$  существовало такое замкнутое множество  $F \subset A$ , что  $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$ .

**3.76.** Доказать, что все ограниченные множества, имеющие тип  $F_\sigma$  или  $G_\delta$ , измеримы.

**3.77.** Доказать, что все ограниченные борелевские множества измеримы.

**3.78.** Доказать, что каждое счетное множество имеет нулевую меру.

**3.79.** Доказать, что каждое множество, лежащее в  $(n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве, имеет нулевую  $n$ -мерную меру.

**3.80.** Доказать, что канторово множество, построенное в задаче 2.64, имеет нулевую меру.

**3.81.** Найти меру множества точек из отрезка  $[0, 1]$ , в разложении которых в бесконечную десятичную дробь не участвует какая-либо одна цифра.

**3.82.** Доказать, что каждое множество положительной меры имеет мощность континуума.

**3.83.** Доказать, что каждое замкнутое множество меры нуль нигде не плотно.

**3.84.** Построить на  $[0, 1]$  нигде неплотное множество меры нуль, замыкание которого имеет положительную меру.

**3.85.** Доказать, что каждое непустое совершенное множество содержит (непустое) совершенное подмножество меры нуль.

**3.86.** Доказать, что для каждого измеримого множества  $A$  существуют такие множества  $B$  типа  $F_\sigma$  и  $C$  типа  $G_\delta$ , что  $B \subset A \subset C$  и  $\mu(C \setminus B) = 0$ .

**3.87.** Пусть  $0 \leq \alpha < 1$ . Построить на  $[0, 1]$  совершенное нигде неплотное множество меры  $\alpha$ .

**3.88.** Пусть  $0 \leq \alpha < 1$ . Построить на единичном кубе  $n$ -мерного евклидова пространства совершенное нигде неплотное множество  $n$ -мерной меры  $\alpha$ .

**3.89.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Построить на  $[0, 1]$  множество  $A$  такое, что  $\mu A = \alpha$  и для каждого отрезка  $[a, b] \subset [0, 1]$

$$0 < \mu(A \cap [a, b]) < b - a.$$

**3.90.** Построить на  $[0, 1]$  счетную последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств таких, что пересечение произвольного отрезка  $[a, b] \subset [0, 1]$  с каждым из этих множеств имеет положительную меру.

**3.91.** Пусть множество  $A \subset [0, 1]$  измеримо. Доказать, что функция  $f(x) = \mu(A \cap [0, x])$  непрерывна на  $[0, 1]$ .

**3.92.** Пусть множество  $A$  измеримо,  $\mu A = \alpha > 0$  и  $0 < \beta < \alpha$ . Построить измеримое множество  $B \subset A$  такое, что  $\mu B = \beta$ .

**3.93.** Доказать, что множество  $B$  в задаче 3.92 можно выбрать совершенным.

**3.94.** Пусть  $A_1, \dots, A_k$  — измеримые подмножества отрезка  $[0, 1]$ , причем  $\sum_{i=1}^k \mu A_i > k - 1$ . Доказать, что  $\mu \left( \bigcap_{i=1}^k A_i \right) > 0$ .

**3.95.** Доказать, что в каждом множестве  $A \subset [0, 1]$  положительной меры существует такая пара точек, расстояние между которыми иррационально.

**3.96.** Доказать, что в каждом множестве  $A \subset [0, 1]$  положительной меры существует такая пара точек, расстояние между которыми рационально.

**3.97.** Доказать, что множество всех измеримых подмножеств отрезка  $[0, 1]$  имеет ту же мощность, что и множество всех его подмножеств.

**3.98.** Разобьем множество точек отрезка  $[0, 1]$  на классы, относя точки  $x$  и  $y$  к одному классу, если число  $x - y$  рационально. Доказать, что

1) два класса либо не пересекаются, либо совпадают;

2) множество  $A$ , в которое входит по одной точке каждого из построенных классов, неизмеримо.

**3.99.** Построить на плоскости такое измеримое множество, проекции которого на обе координатные оси неизмеримы.

**3.100.** Доказать, что если система невырождающихся отрезков покрывает ограниченное множество  $A$  в смысле Витали, то из нее можно выбрать не более чем счетный набор попарно непересекающихся отрезков, которые покрывают все точки  $A$ , за исключением некоторого множества меры нуль.

**3.101.** Доказать, что если система невырождающихся отрезков покрывает ограниченное множество  $A$  в смысле Витали, то для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать такой конечный набор попарно непересекающихся отрезков  $d_1, \dots, d_k$  из этой системы, что

$$\mu^* \left( A \setminus \bigcup_{i=1}^k d_i \right) < \epsilon.$$

## Глава 4

### ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Множество тех элементов  $x \in A$ , которые обладают некоторым свойством  $P$ , будем обозначать

$$A\{x: P\}.$$

Функция  $f(x)$ , заданная на множестве  $A$ , называется *измеримой* на этом множестве относительно меры  $\mu$ , если относительно этой меры измеримы само множество  $A$ , а также множества  $A\{x: f(x) < c\}$  для всех чисел  $c$ . Там, где это не может вызвать недоразумений, слова «относительно меры  $\mu$ » опускают.

Пусть множество  $A$  измеримо относительно меры  $\mu$ . Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* (относительно меры  $\mu$ ) или  $\mu$ -*почти всюду* на множестве  $A$ , если оно выполняется для всех элементов  $x \in A$ , за исключением, быть может, элементов некоторого множества  $B \subset A$  меры нуль.

Чтобы не делать каждый раз оговорок, будем предполагать, что при арифметических действиях над функциями неопределенности вида  $0 \cdot \infty$ ,  $(+\infty) - -(+\infty)$  и т. п. могут встречаться только на множествах меры нуль.

Последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  называется *сходящейся по мере* (сходящейся по мере  $\mu$ ) на множестве  $A$  к функции  $f(x)$ , если функция  $f(x)$ , а также все функции  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , измеримы и почти всюду конечны на множестве  $A$  и для каждого  $\sigma > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu A\{x: |f_k(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0.$$

Отметим, что во всех определениях, данных выше, мера множества  $A$  не предполагалась конечной.

**4.1.** Доказать, что если функция измерима на некотором множестве, то она измерима и на каждом его измеримом подмножестве.

**4.2.** Доказать, что если функция измерима на множествах  $A_1, A_2, \dots$ , то она будет измеримой и на множествах

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_1 \setminus A_2, \quad A_1 \Delta A_2.$$

4.3. Доказать, что если функция  $f^3$  измерима, то и  $f$  измерима.

4.4. Доказать, что из измеримости функции  $f^2$  или функции  $|f|$  не вытекает измеримость  $f$ .

4.5. Пусть на измеримом множестве  $A$  задана функция  $f$ . Доказать, что каждое из следующих условий эквивалентно остальным:

1) для каждого  $c$  множество  $A\{x: f(x) < c\}$  измеримо,

2) для каждого  $c$  множество  $A\{x: f(x) \leq c\}$  измеримо,

3) для каждого  $c$  множество  $A\{x: f(x) > c\}$  измеримо,

4) для каждого  $c$  множество  $A\{x: f(x) \geq c\}$  измеримо.

4.6. Пусть на измеримом множестве  $A$  задана функция  $f$ . Доказать, что  $f$  будет измеримой, если измеримы множества  $A\{x: f(x) < c\}$  для всех  $c$  из некоторого множества, всюду плотного на прямой.

4.7. Пусть функция  $f$  измерима и конечна почти всюду на множестве  $A$ . Построить неубывающую последовательность измеримых на  $A$  функций  $f_k$ , сходящуюся к  $f$  равномерно на  $A$ , и таких, что множество значений каждой функции  $f_k$  не более чем счетно.

4.8. Доказать, что если функции  $f$  и  $g$  измеримы на  $A$ , то измеримы множества  $A\{x: f(x) < g(x)\}$ ,  $A\{x: f(x) \leq g(x)\}$ ,  $A\{x: f(x) = g(x)\}$ .

4.9. Доказать, что непрерывные функции в евклидовом пространстве  $E_n$  измеримы относительно меры Лебега.

4.10. Доказать, что если функция  $f$  измерима на множестве  $A$  относительно меры Лебега в евклидовом пространстве  $E_n$ , то для каждого борелевского множества  $B$  на прямой измерим его *полный прообраз*  $f^{-1}(B)$  — совокупность всех  $x \in A$ , для которых  $f(x) \in B$ .

4.11. Пусть  $A$  — неизмеримое множество на прямой. Будет ли измерима функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A, \\ -x, & \text{если } x \notin A? \end{cases}$$

4.12. Пусть на измеримом множестве  $A$  задана функция  $f$ . Доказать, что измеримость множеств

$A\{x: f(x) = c\}$  для всех  $c$  недостаточна для измеримости  $f$ .

4.13. Доказать, что если функции  $f$  и  $g$  измеримы, то измеримы функции:

1)  $f \pm g$ ; 2)  $f \cdot g$ ; 3)  $f/g$ ; 4)  $|f|$ ;

5)  $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ;

6)  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ;

7)  $f(x)^{g(x)}$ , если  $f(x) > 0$ .

4.14. Построить на  $[0, 1]$  такую функцию, измеримую относительно меры Лебега, что она сама и любая функция, совпадающая с ней почти всюду, разрывны в каждой точке.

4.15. Пусть функция  $f$  измерима на множестве  $A$ . Доказать, что функция

$$\varphi(t) = \mu A \{x: f(x) < t\}$$

не убывает и непрерывна слева, а функция

$$\psi(t) = \mu A \{x: f(x) > t\}$$

не возрастает и непрерывна справа.

4.16. Для измеримой на  $[0, 1]$  функции  $f$  построить на  $[0, 1]$  неубывающую равнозмеримую с ней функцию  $g$ . Равнозмеримость  $f$  и  $g$  означает, что

$$\mu \{x: f(x) < t\} = \mu \{x: g(x) < t\}$$

для всех  $t$ . Функция  $g$  называется *неубывающей перестановкой* функции  $f$ . Доказать, что если  $f$  непрерывна, то непрерывна и ее неубывающая перестановка  $g$ .

4.17. Пусть функция  $\varphi(t)$  непрерывна на прямой. Доказать, что если функция  $f(x)$  измерима на некотором множестве  $A$   $n$ -мерного евклидова пространства, то на  $A$  будет измеримой и функция  $\varphi(f(x))$ .

4.18. Пусть функция  $\varphi(t_1, \dots, t_k)$  непрерывна в  $k$ -мерном евклидовом пространстве. Доказать, что если функции  $f_1, \dots, f_k$  измеримы на некотором множестве  $A$   $n$ -мерного евклидова пространства, то на  $A$  будет измеримой и функция  $\varphi(f_1(x), \dots, f_k(x))$ .

4.19. Канторовой функцией называется функция  $c(x)$ , определенная на отрезке  $[0, 1]$  следующим образом. Представим число  $x \in [0, 1]$  бесконечной

троичной дробью  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ ,  $a_i$  принимают значения

0, 1 и 2. Пусть  $k(x)$  — наименьший индекс в этом представлении, для которого  $\alpha_k = 1$ , а если  $\alpha_i \neq 1$  для всех  $i$ , то  $k(x) = \infty$ .

Положим

$$c(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^k}$$

(при этом для тех  $x$ , для которых возможны два различных представления с помощью троичных дробей, значение  $c(x)$  не зависит от выбора представления). Доказать, что функция  $c(x)$  не убывает, непрерывна и  $c'(x) = 0$  для всех  $x$ , не принадлежащих канторову множеству, построенному в задаче 2.64. Найти меру Лебега образа канторова множества при отображении, осуществляемом функцией  $c(x)$ .

**4.20.** Построить на  $[0, 1]$  такую строго возрастающую непрерывную функцию  $f$ , что для некоторого множества  $A \subset [0, 1]$  лебеговой меры нуль множество  $f(A)$  — образ множества  $A$  при отображении, осуществляемом функцией  $f$ , — будет иметь положительную лебегову меру.

**4.21.** Доказать, что из непрерывности функции  $f$  на  $[0, 1]$  и измеримости множества  $A \subset [0, 1]$  не вытекает измеримость множества  $f(A)$ .

**4.22.** Доказать, что для непрерывной на  $[0, 1]$  функции  $f$  и измеримого множества  $B$  из области значений функции  $f$  может быть неизмеримым множество  $f^{-1}(B)$  — полный прообраз множества  $B$  при отображении, осуществляющем функцией  $f$ .

**4.23.** Доказать, что из непрерывности функции  $\varphi$  и измеримости функции  $f$  не вытекает измеримость функции  $f(\varphi(x))$ .

**4.24.** Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots$  — последовательность функций, измеримых на множестве  $A$ . Доказать, что на  $A$  измеримы функции  $\sup_k f_k(x)$  и  $\inf_k f_k(x)$ .

**4.25.** Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots$  — последовательность функций, измеримых на множестве  $A$ . Доказать, что на  $A$  измеримы функции

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} f_k(x) \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{k \rightarrow \infty}} f_k(x).$$

**4.26.** Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots$  — последовательность функций, измеримых на множестве  $A$ . Доказать изме-

римость множества тех точек  $x \in A$ , в которых существует предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ .

**4.27.** Показать, что если  $\mathfrak{M}$  — несчетное семейство функций, измеримых на множестве  $A$ , то функции

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x) \text{ и } \inf_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$$

могут быть неизмеримы на  $A$ .

**4.28.** Пусть  $\mathfrak{M}$  — произвольное семейство функций, непрерывных на  $[0, 1]$ . Доказать, что функции

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x) \text{ и } \inf_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$$

измеримы на  $[0, 1]$  относительно меры Лебега.

**4.29.** Построить на  $[0, 1]$  последовательность непрерывных функций, сходящуюся по мере Лебега и расходящуюся в каждой точке.

**4.30.** Доказать, что если последовательность функций сходится на множестве  $A$  по мере к двум функциям  $f$  и  $g$ , то  $f(x) = g(x)$  почти всюду на  $A$ .

**4.31.** Пусть на множестве  $A$  конечной меры последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  сходится по мере к функции  $f(x)$ , а последовательность  $g_1(x), g_2(x), \dots$  сходится по мере к  $g(x)$ . Доказать сходимость по мере последовательностей:

1)  $|f_k(x)| \rightarrow |f(x)|$ ;

2)  $f_k(x) + g_k(x) \rightarrow f(x) + g(x)$ ;

3)  $f_k^2(x) \rightarrow 0$ , если  $f(x) = 0$  почти всюду на  $A$ ;

4)  $f_k(x)g(x) \rightarrow f(x)g(x)$ ;

5)  $f_k^2(x) \rightarrow f^2(x)$ ;

6)  $f_k(x)g_k(x) \rightarrow f(x)g(x)$ .

**4.32.** Доказать, что при  $\mu A = \infty$  первые три утверждения задачи 4.31 остаются справедливыми, а остальные в общем случае неверны.

**4.33.** Доказать, что если последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  сходится к функции  $f(x)$  по мере на множестве  $A$ , то она *фундаментальна* (сходится в себе) по мере, т. е. для каждого  $\sigma > 0$  и  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $N$ , что для всех  $i$  и  $k > N$  будет выполняться оценка

$$\mu A \{x: |f_i(x) - f_k(x)| \geq \sigma\} < \varepsilon.$$

**4.34.** Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots$  — последовательность функций, измеримых и почти всюду конечных на мно-

жестве  $A$ . Доказать, что если эта последовательность фундаментальна по мере, то существует измеримая, конечная на  $A$  функция  $f(x)$ , к которой последовательность  $\{f_k(x)\}$  сходится на  $A$  по мере.

**4.35.** Пусть множество  $A$  измеримо,  $A_1, A_2, \dots$  — последовательность его измеримых подмножеств и  $\chi_k(x)$  — характеристическая функция множества  $A_k$ . Доказать, что последовательность  $\{\chi_k(x)\}$  фундаментальна по мере в том и только том случае, когда  $\mu(A_i \Delta A_k) \rightarrow 0$  при  $i, k \rightarrow \infty$ .

**4.36.** Пусть функции  $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots$  измеримы и конечны почти всюду на множестве  $A$  конечной меры. Доказать, что последовательность  $f_1(x), f_2(x), \dots$  сходится к  $f(x)$  почти всюду на  $A$  в том и только том случае, когда для каждого  $\sigma > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{i=k}^{\infty} A \{x: |f_i(x) - f(x)| \geq \sigma\} \right) = 0.$$

**4.37.** Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots$  — последовательность функций, измеримых и конечных почти всюду на множестве  $A$  конечной меры, сходящаяся почти всюду на  $A$  к конечной почти всюду функции  $f(x)$ . Доказать, что последовательность  $\{f_k(x)\}$  сходится к  $f(x)$  по мере на множестве  $A$  (теорема Лебега).

**4.38.** Доказать, что в теореме Лебега (задача 4.37) нельзя опустить условие  $\mu A < \infty$ .

**4.39.** Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots$  — последовательность функций, измеримых и конечных почти всюду на множестве  $A$  конечной меры, сходящаяся почти всюду на  $A$  к конечной почти всюду функции  $f(x)$ . Доказать, что для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать такое измеримое множество  $A_\epsilon \subset A$ , что  $\mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$  и на  $A_\epsilon$  последовательность  $\{f_k(x)\}$  сходится равномерно (теорема Егорова).

**4.40.** Пусть последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  удовлетворяет условиям теоремы Егорова (задача 4.39). Доказать, что существуют измеримая, конечная почти всюду функция  $F(x)$  и монотонно убывающая к нулю числовая последовательность  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  такие, что для всех  $k$  справедлива оценка

$$|f(x) - f_k(x)| \leq F(x) \epsilon_k.$$

**4.41.** Доказать, что в теореме Егорова (задача 4.39) нельзя опустить условие  $\mu A < \infty$ .

**4.42.** Перенести теорему Егорова (задача 4.39) на последовательность функций, сходящуюся к  $+\infty$  почти всюду на  $A$ .

**4.43.** Пусть функции  $f(x)$ ,  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ... измеримы и почти всюду конечны на множестве  $A$ . Доказать, что если для каждого  $\epsilon > 0$  существует такое измеримое множество  $A_\epsilon \subset A$ , что  $\mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$  и на  $A_\epsilon$  последовательность  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ... сходится к  $f(x)$  равномерно, то эта последовательность сходится к  $f(x)$  почти всюду на  $A$ .

**4.44.** Доказать, что каждая последовательность функций, сходящаяся на множестве  $A$  по мере, содержит подпоследовательность, сходящуюся на  $A$  почти всюду (теорема Рисса).

**4.45.** Доказать, что если множество  $A$  измеримо и имеет конечную меру, то для каждой функции  $f(x)$ , измеримой и конечной почти всюду на  $A$ , существует последовательность непрерывных на  $A$  функций, сходящаяся к  $f(x)$  почти всюду на  $A$ .

**4.46.** Пусть множество  $A$  измеримо, имеет конечную меру и функция  $f(x)$  конечна почти всюду на  $A$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима на  $A$  в том и только том случае, когда она обладает *C-свойством Лузина*, т. е. когда для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать такое измеримое множество  $A_\epsilon \subset A$ , что  $\mu(A \setminus A_\epsilon) < \epsilon$  и  $f(x)$  как функция, заданная на  $A_\epsilon$ , непрерывна (теорема Лузина).

**4.47.** Доказать, что в каждой из задач 4.45 и 4.46 нельзя опустить условие  $\mu A < \infty$ .

**4.48.** Пусть при каждом фиксированном  $k$  последовательность  $\{f_{k,i}(x)\}$  сходится при  $i \rightarrow \infty$  на множестве  $A$  по мере к функции  $f_k(x)$ , а последовательность  $\{f_k(x)\}$  сходится на  $A$  по мере к  $f(x)$ . Доказать, что из множества функций  $\{f_{k,i}(x)\}$  можно выбрать последовательность, сходящуюся к  $f(x)$  по мере.

**4.49.** Пусть функция  $f(x)$  измерима на отрезке  $[a, b]$  относительно меры Лебега. Доказать измеримость множества тех точек  $x \in [a, b]$ , в которых существует производная  $f'(x)$ , и измеримость производной на этом множестве.

**4.50.** Пусть функция  $f(x)$  измерима на отрезке  $[a, b]$  относительно меры Лебега. Доказать измери-

мость на  $[a, b]$  функций

$$\bar{D}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

значениями которых являются соответственно верхнее и нижнее производные числа функции  $f(x)$ .

4.51. Построить на  $[0, 1]$  такую ограниченную измеримую функцию  $f(x)$ , для которой последовательность  $f_k(x) = f\left(x - \frac{1}{k}\right)$  не является почти всюду сходящейся.

## Глава 5 ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

### § 1. Определение интеграла Лебега

Измеримую на множестве  $A$  функцию  $g$  называют *существенно ограниченной* на  $A$ , если существует такое число  $M$ , что  $|g(x)| \leq M$  для почти всех  $x \in A$ . Точную нижнюю грань чисел  $M$ , для которых выполнено это условие, обозначают

$$\text{vrai sup}_{x \in A} |g(x)|$$

и называют *существенной верхней гранью* значений функции  $|g(x)|$  на множестве  $A$ . Если функция  $g$  не является существенно ограниченной, то пишут

$$\text{vrai sup}_{x \in A} |g(x)| = \infty.$$

Пусть множество  $A$  измеримо относительно меры  $\mu$  и  $\mu A < \infty$ . Заданная на  $A$  конечная функция  $\varphi$  называется *простой*, если она измерима и множество всех ее значений не более чем счетно.

Пусть функция  $\varphi$  — простая на множестве  $A$ ,  $c_1, c_2, \dots$  — последовательность всех ее значений и

$$A_k = A \{x: \varphi(x) = c_k\}.$$

Если сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \mu A_k$ , то функцию  $\varphi$  называют *интегрируемой по Лебегу* на множестве  $A$  по

мере  $\mu$ , а сумму ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu A_k$  называют интегралом Лебега от функции  $\varphi$  по множеству  $A$  относительно меры  $\mu$  и обозначают

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \int_A \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu A_k.$$

Измеримая и конечная почти всюду на множестве  $A$  конечной меры функция  $f$  называется *интегрируемой по Лебегу* на множестве  $A$  по мере  $\mu$ , если существует простая интегрируемая на  $A$  функция  $\varphi$  такая, что

$$\text{vrai } \sup_{x \in A} |f(x) - \varphi(x)| < \infty.$$

Если это условие выполнено, то \*) *интегралом Лебега* от функции  $f$  по множеству  $A$  относительно меры  $\mu$  называют число, которое обозначают

$$\int_A f(x) d\mu \quad \text{или} \quad \int_A f d\mu,$$

равное пределу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \varphi_k d\mu, \quad (*)$$

где  $\varphi_k$  — такая последовательность простых интегрируемых функций, для которой

$$\text{vrai } \sup_{x \in A} |f(x) - \varphi_k(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (**)$$

Корректность этих определений обосновывается в задачах 5.7 и 5.8, которые показывают, что свойство функции быть интегрируемой не зависит от выбора простой функции  $\varphi$  и что для любой последовательности простых функций  $\varphi_k$ , удовлетворяющих условию (\*\*), предел (\*) существует и его значение не зависит от выбора последовательности  $\varphi_k$ .

---

\*) Таким образом, понятие интеграла вводится только для интегрируемых функций. В некоторых руководствах принята другая терминология: интеграл (возможно, равный  $+\infty$ ) определяют для каждой измеримой неотрицательной функции и функцию называют интегрируемой, если ее интеграл конечен.

В приведенном определении интеграла Лебега условие конечности меры множества  $A$  было существенно. Последние две задачи параграфа показывают, что в случае  $\mu A = \infty$  описанное выше построение не проходит. Определение интеграла Лебега на множествах бесконечной меры будет дано во втором параграфе (см. задачи 5.31, 5.32), поскольку для обоснования корректности этого определения нужны свойства интегралов, рассматриваемые во втором параграфе.

5.1. Доказать, что если функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  являются простыми на множестве  $A$ , то простыми на  $A$  будут также  $\varphi(x) + \psi(x)$ ,  $|\varphi(x)|$  и  $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ .

5.2. Доказать, что если простая функция интегрируема на множестве  $A$ , то она интегрируема и на каждом его измеримом подмножестве.

5.3. Пусть  $\mu A < \infty$ . Доказать, что каждая простая и ограниченная на множестве  $A$  функция  $\varphi$  интегрируема на  $A$ , и если  $K \leq \varphi(x) \leq M$  для  $x \in A$ , то

$$K\mu A \leq \int_A \varphi d\mu \leq M\mu A.$$

5.4. Пусть функция  $\varphi$  — простая на множестве  $A$ ,  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ , множества  $B_k$  измеримы и попарно не пересекаются и на каждом  $B_k$  функция  $\varphi$  принимает постоянное значение  $d_k$  (числа  $d_k$  не предполагаются различными). Доказать, что  $\varphi$  интегрируема на  $A$  в том и только том случае, когда  $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \mu B_k < \infty$ , и если это условие выполнено, то

$$\int_A \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \mu B_k.$$

5.5. Пусть функция  $\varphi$  — простая на множестве  $A$ . Доказать, что функции  $\varphi$  и  $|\varphi|$  интегрируемы или неинтегрируемы на  $A$  одновременно, и если они интегрируемы, то

$$\left| \int_A \varphi d\mu \right| \leq \int_A |\varphi| d\mu.$$

**5.6.** Доказать, что если  $\phi$  и  $\psi$  — простые, интегрируемые на множестве  $A$  функции, то для произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $\alpha\phi + \beta\psi$  интегрируема на  $A$  и

$$\int_A (\alpha\phi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int_A \phi d\mu + \beta \int_A \psi d\mu.$$

**5.7.** Пусть функция  $f$  измерима и конечна почти всюду на множестве  $A$  конечной меры. Доказать, что либо все простые функции  $\phi$ , для которых

$$\text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x) - \phi(x)| < \infty,$$

интегрируемы на  $A$ , либо все такие  $\phi$  неинтегрируемы на  $A$ .

**5.8.** Пусть функция  $f$  измерима и конечна почти всюду на множестве  $A$  конечной меры и существует простая, интегрируемая на  $A$  функция  $\phi$  такая, что

$$\text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x) - \phi(x)| < \infty.$$

Доказать, что для каждой последовательности простых функций  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ , сходящихся к  $f(x)$  равномерно на  $A$  почти всюду, т. е. таких, что

$$\text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x) - \phi_k(x)| \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , будет существовать предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \phi_k d\mu$$

и значение этого предела будет одним и тем же для каждой такой последовательности простых функций.

**5.9.** Пусть функция  $f$  измерима на множестве  $A$  конечной меры и

$$f_a^b(x) = \begin{cases} a, & \text{если } f(x) < a, \\ f(x), & \text{если } a \leq f(x) \leq b, \\ b, & \text{если } b < f(x), \end{cases}$$

— срезка функции  $f$ . Доказать, что  $f$  интегрируема на  $A$  в том и только том случае, когда существует конечный предел

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_A f_a^b(x) d\mu$$

( $a$  и  $b$  стремятся к своим пределам независимо). При этом, если  $f$  интегрируема, то

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_A f_a^b(x) d\mu.$$

**5.10.** В определении простой функции можно опустить условие  $\mu A < \infty$ . Для случая  $\mu A = \infty$  простую функцию  $\varphi$  называют интегрируемой на множестве  $A$ , если (в тех же обозначениях, что и во введении к этому параграфу)

$$\sum'_k |c_k| \mu A_k < \infty,$$

где штрих у знака суммы означает, что в ней опущено слагаемое, для которого  $c_k = 0$ . Если указанный ряд сходится, то интегралом от  $\varphi$  называют сумму ряда

$$\sum'_k c_k \mu A_k.$$

Доказать, что при  $\mu A = \infty$  утверждения задач **5.1**, **5.2** и **5.4—5.6** остаются справедливыми, а утверждения задач **5.3** и **5.7** неверны.

**5.11.** Построить последовательность простых, интегрируемых на множестве  $A$  бесконечной меры, ограниченных функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  таких, что эти функции сходятся на  $A$  равномерно, а последовательность их интегралов

$$\int_A \varphi_1 d\mu, \quad \int_A \varphi_2 d\mu, \dots$$

не сходится.

## § 2. Основные свойства интеграла Лебега

Определение интеграла Лебега по множеству конечной меры приведено во введении к § 1. В задачах **5.31**, **5.32** дано определение интеграла по множеству  $\sigma$ -конечной меры, т. е. по множеству, представимому в виде объединения возрастающей последовательности множеств конечной меры. Отметим, что этот переход к множествам бесконечной меры не зависит от того, как был введен интеграл по множествам конеч-

ной меры — с помощью интегралов от простых функций (как в § 1) или каким-либо другим способом.

Если функция  $f$  интегрируема по Лебегу на множестве  $A$  по мере  $\mu$ , то это обозначают  $f \in L_1(A, \mu)$ . В этом параграфе мы будем писать короче —  $f \in L(A)$ , поскольку это не может вызвать недоразумений.

Если интеграл берется по мере Лебега, то под знаком интеграла вместо  $d\mu$  пишем  $dx$ .

**5.12.** Пусть  $\mu A < \infty$ . Доказать, что если функция  $f$  измерима и ограничена на  $A$ , то  $f \in L(A)$ . При этом, если  $K \leq f(x) \leq M$  для почти всех  $x \in A$ , то

$$K \mu A \leq \int_A f d\mu \leq M \mu A.$$

**5.13.** Пусть функция  $f$  измерима на множестве  $A$ ,

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases}$$

и

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) > 0, \\ f(x), & \text{если } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Доказать, что  $f$  интегрируема на  $A$  в том и только том случае, когда обе функции  $f^+$  и  $f^-$  интегрируемы. При этом, если  $f$  интегрируема, то

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu.$$

**5.14.** Пусть функция  $f$  измерима на множестве  $A$ . Доказать, что функции  $f$  и  $|f|$  интегрируемы или неинтегрируемы на  $A$  одновременно, и если они интегрируемы, то

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

**5.15.** Доказать, что если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на множестве  $A$ , то для произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $\alpha f + \beta g$  интегрируема на  $A$  и

$$\int_A (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu.$$

**5.16.** Доказать, что если  $f \in L(A)$ , а функция  $g$  измерима на  $A$  и  $|g(x)| \leq |f(x)|$  для почти всех  $x \in A$ , то  $g \in L(A)$  и

$$\int_A |g| d\mu \leq \int_A |f| d\mu.$$

**5.17.** Доказать, что если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $A$  и  $g(x) \leq f(x)$  для почти всех  $x \in A$ , то

$$\int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

**5.18.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что если для измеримой функции  $h(x)$  почти всюду на  $A$  выполняется условие  $|h(x)| \leq M$ , то  $f(x)h(x) \in L(A)$  и

$$\left| \int_A f(x) h(x) d\mu \right| \leq M \int_A |f(x)| d\mu.$$

**5.19.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что если для измеримой функции  $h(x)$  почти всюду на  $A$  выполняются условия  $-\infty < \alpha \leq h(x) \leq \beta < \infty$ , то

1) (теорема о среднем) существует такое число  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ , что

$$\int_A |f(x)| h(x) d\mu = \gamma \int_A |f(x)| d\mu;$$

2) может не найтись такого  $\gamma$ , что

$$\int_A f(x) h(x) d\mu = \gamma \int_A f(x) d\mu.$$

**5.20.** Пусть измеримые на множестве  $A$  функции  $f$  и  $g$  равнозмеримы на этом множестве, т. е. для каждого числа  $c$

$$\mu A \{x: f(x) < c\} = \mu A \{x: g(x) < c\}.$$

Доказать, что функции  $f$  и  $g$  одновременно интегрируемы или неинтегрируемы на  $A$ , и если они интегрируемы, то

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu.$$

**5.21.** Доказать, что если функция интегрируема на множестве  $A$ , то она интегрируема и на каждом его измеримом подмножестве.

**5.22.** Пусть  $f \in L(A)$ , множество  $B \subset A$  измеримо и  $C = A \setminus B$ . Доказать, что

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_C f d\mu.$$

**5.23.** Доказать, что если  $f \in L(A)$  и  $\sigma > 0$ , то

$$\mu_A \{x: |f(x)| \geq \sigma\} \leq \frac{1}{\sigma} \int_A |f| d\mu$$

(неравенство Чебышева).

**5.24.** Доказать, что если функция  $f$  интегрируема и неотрицательна на множестве  $A$  и

$$\int_A f d\mu = 0,$$

то  $f(x) = 0$  почти всюду на  $A$ .

**5.25.** Пусть  $f \in L(A)$  и  $f(x) > 0$  для почти всех  $x \in A$ . Доказать, что если множество  $B \subset A$  измеримо и

$$\int_B f d\mu = 0,$$

то  $\mu B = 0$ .

**5.26.** Доказать, что если  $f \in L(A)$  и для каждого измеримого множества  $B \subset A$

$$\int_B f d\mu = 0,$$

то  $f(x) = 0$  почти всюду на  $A$ .

**5.27.** Пусть  $f \in L(A)$  и  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , где все множества  $A_k$  измеримы и попарно не пересекаются. Доказать, что справедливо равенство

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu,$$

причем этот ряд абсолютно сходится. Таким образом, функция множества

$$\varphi(B) = \int_B f d\mu$$

$\sigma$ -аддитивна на  $\sigma$ -алгебре всех измеримых подмножеств множества  $A$ . Если  $f \geq 0$  почти всюду на  $A$ , то функция  $\varphi$  будет мерой.

5.28. Доказать *абсолютную непрерывность интеграла Лебега*: если  $f \in L(A)$ , то для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta > 0$ , что для любого измеримого множества  $B \subset A$  такого, что  $\mu B < \delta$ , будет справедливо неравенство

$$\left| \int_B f d\mu \right| < \epsilon.$$

5.29. Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — последовательность измеримых, попарно непересекающихся множеств и  $f \in L(A_k)$  для всех  $k$ . Доказать, что  $f \in L(A)$ , где

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ , в том и только том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu < \infty,$$

и что если это условие выполнено, то

$$\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu.$$

5.30. Показать, что в задаче 5.29 абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu$$

недостаточна для того, чтобы  $f \in L(A)$ .

5.31. Пусть  $\mu A = \infty$  и  $A$  является пределом неубывающей последовательности измеримых множеств  $A_1, A_2, \dots$ , мера каждого из которых конечна. Неотрицательная, измеримая на  $A$  функция  $f$  называется *интегрируемой по Лебегу* на  $A$ , если  $f \in L(A_k)$  для всех  $k$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f d\mu < \infty,$$

и если эти условия выполнены, то по определению интегралом Лебега называют число

$$\int_A f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f d\mu.$$

Доказать корректность этих определений, т. е. что интегрируемость функции  $f$  и значение ее интеграла не зависят от выбора последовательности  $\{A_k\}$ , обладающей указанными выше свойствами.

**5.32.** Определение интеграла от неотрицательных функций по множеству  $A$  бесконечной меры, данное в задаче 5.31, следующим образом распространяется на функции, не являющиеся неотрицательными. Функция  $f$  называется интегрируемой на  $A$ , если она измерима и если интегрируемы функции  $f^+$  и  $|f|$ , где

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases} .$$

и  $f^-(x) = f(x) - f^+(x)$ . Если эти условия выполнены, то по определению

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu.$$

Доказать, что результаты задач 5.14—5.30 справедливы и при  $\mu A = \infty$ .

**5.33.** Пусть функция  $f$  измерима на множестве  $A$  конечной меры. Доказать, что сходимость каждого из рядов

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} k \mu A \{x: |f(x)| \leq k < k+1\},$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \mu A \{x: |f(x)| \geq k\}$$

необходима и достаточна для интегрируемости  $f$  на  $A$ .

**5.34.** Показать, что утверждения задачи 5.33 неверны, если  $\mu A = \infty$ .

**5.35.** Пусть функция  $f$  измерима на множестве  $A$ . Доказать, что условие

$$\mu A \{x: |f(x)| > k\} = o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

является необходимым, но не является достаточным для интегрируемости  $f$  на  $A$ .

**5.36.** Доказать, что для каждой интегрируемой на  $A$  функции  $f$  существует такая возрастающая на  $[0, \infty)$  функция  $\Phi(u)$ , что  $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty$  и

$$\int_A |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu < \infty.$$

**5.37.** Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  измеримы на множестве  $A$  конечной меры. Доказать, что последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к  $f$  на  $A$  по мере в том и только том случае, когда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \frac{|f - f_k|}{1 + |f - f_k|} d\mu = 0.$$

**5.38.** Показать, что утверждение задачи 5.37 неверно, если  $\mu A = \infty$ .

**5.39.** Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — последовательность измеримых множеств и  $B_q, q = 1, 2, \dots$ , — множество тех точек, которые принадлежат не менее чем  $q$  множествам из  $A_k$ . Доказать, что множества  $B_q$  измеримы и

$$\mu B_q \leq \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

**5.40.** Пусть функция  $f$  интегрируема и строго положительна на множестве  $A$  конечной меры и  $0 < \alpha \leq \mu A$ . Доказать, что

$$\inf_B \int_B f d\mu > 0,$$

где нижняя грань берется по всем измеримым множествам  $B \subset A$ , для которых  $\mu B \geq \alpha$ .

**5.41.** Показать, что утверждение задачи 5.40 неверно, если  $\mu A = \infty$ .

**5.42.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  неотрицательны и измеримы на множестве  $A$ . Доказать, что если функция  $f(x)g(x)$  интегрируема на  $A$  и  $A_y = A \{x : g(x) \geq y\}$ , то функция

$$\Phi(y) = \int_{A_y} f(x) d\mu$$

определенна для всех  $y > 0$ , интегрируема на  $(0, \infty)$  по мере Лебега и

$$\int_0^\infty \Phi(y) dy = \int_A f(x) g(x) d\mu.$$

**5.43.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  — последовательность интегрируемых на множестве  $A$  функций, сходящихся почти всюду на  $A$  к функции  $f$ . Доказать, что если существует функция  $\varphi \in L(A)$  такая, что для каждого  $k$

$$|f_k(x)| \leq \varphi(x)$$

для почти всех  $x \in A$ , то  $f \in L(A)$  и

$$\int_A f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu$$

(теорема Лебега; иногда ее называют теоремой Лебега об ограниченной сходимости).

**5.44.** Доказать, что в теореме Лебега (задача 5.43) сходимость функций  $f_1, f_2, \dots$  к  $f$  почти всюду на  $A$  можно заменить сходимостью на  $A$  по мере.

**5.45.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  — последовательность интегрируемых на множестве  $A$  функций, не убывающих почти всюду на  $A$ , т. е. таких, что для каждого  $k$

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$$

почти всюду на  $A$ . Доказать, что если существует такое число  $M$ , что для всех  $k$

$$\int_A f_k d\mu \leq M,$$

то почти всюду на  $A$  существует конечный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x),$$

$f \in L(A)$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu$$

(теорема Б. Леви; иногда ее называют теоремой Лебега о монотонной сходимости).

**5.46.** Доказать, что теорема Лебега (задача 5.43) и теорема Б. Леви (задача 5.45) могут быть получены как следствия одна из другой.

**5.47.** Пусть  $g_1, g_2, \dots$  — последовательность интегрируемых на множестве  $A$  функций, неотрицательных почти всюду, и

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Доказать, что  $g \in L(A)$  в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_k d\mu,$$

и если это условие выполнено, то

$$\int_A g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_k d\mu.$$

**5.48.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  — последовательность интегрируемых на множестве  $A$  функций, неотрицательных почти всюду. Доказать, что если существует такое число  $M$ , что для всех  $k$

$$\int_A f_k d\mu \leq M,$$

то функция

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

интегрируема и выполняется оценка

$$\int_A f d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu$$

(теорема Фату).

**5.49.** Показать, что при условиях теоремы Фату (задача 5.48) функция

$$F(x) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

может оказаться неинтегрируемой.

**5.50.** Показать, что в теореме Фату (задача 5.48) нельзя утверждать справедливость равенства

$$\int_A f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu$$

даже в том случае, когда последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится в каждой точке и, таким образом,

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

**5.51.** Вывести теорему Лебега (задача 5.43) как следствие из теоремы Фату (задача 5.48).

**5.52.** Пусть функции  $f_1, f_2, \dots$  интегрируемы на множестве  $A$  и существует такая функция  $\varphi \in L(A)$ , что  $|f_k(x)| \leq \varphi(x)$  для каждого  $k$  почти всюду на  $A$ . Доказать, что функции

$$f^*(x) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad \text{и} \quad f_*(x) = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

интегрируемы на  $A$  и имеют место оценки

$$\int_A f_* d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \leq \int_A f^* d\mu.$$

Показать, что в каждой из этих оценок возможно строгое неравенство.

**5.53.** Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  интегрируемы на  $A$  и последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к  $f$  на  $A$  по мере. Доказать, что если функции  $f_k$  неотрицательны почти всюду на  $A$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu,$$

то для каждого измеримого множества  $B \subset A$  справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_B f_k d\mu = \int_B f d\mu.$$

**5.54.** Показать, что в задаче 5.53 нельзя опустить условие неотрицательности функций  $f_k$ .

**5.55.** Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  неотрицательны, интегрируемы на множестве  $A$  конечной меры и последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к  $f$  на  $A$  по мере. Доказать, что равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu$$

имеет место в том и только том случае, когда функции  $f_k$  имеют равнотепенно абсолютно непрерывные

интегралы, т. е. для каждого  $\epsilon > 0$  существует такое число  $\delta$ , что для каждого измеримого  $B \subset A$ , для которого  $\mu B < \delta$ , для всех  $k$  справедлива оценка

$$\left| \int_B f_k d\mu \right| < \epsilon.$$

**5.56.** Показать, что в задаче 5.55 нельзя опустить условие  $\mu A < \infty$ .

**5.57.** Пусть  $\mathfrak{M}$  — некоторое семейство функций, интегрируемых на множестве  $A$ . Доказать, что функции этого семейства имеют равнотененно абсолютно непрерывные интегралы в том и только том случае, когда существует возрастающая на  $[0, \infty)$  функция  $\Phi(u)$ , удовлетворяющая условию  $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty$  и такая, что

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \int_A |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu < \infty.$$

### § 3. Пространства интегрируемых функций

Пусть  $p \geq 1$ . Множество функций  $f$ , измеримых на множестве  $A$  по мере  $\mu$  и таких, что функция  $|f(x)|^p$  интегрируема на  $A$  по мере  $\mu$ , обозначается  $L_p(A, \mu)$  или просто  $L_p$  и называется *пространством функций, интегрируемых в  $p$ -й степени*. Каждой функции  $f \in L_p$  ставится в соответствие число

$$\|f\|_p = \left( \int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

— норма этой функции. Если условиться считать одним элементом все функции  $f \in L_p$ , отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, то  $L_p(A, \mu)$  будет банаховым пространством. С помощью нормы можно задать метрику, определив расстояние между функциями  $f$  и  $g$  из  $L_p$  как  $\|f - g\|_p$ .

Говорят, что последовательность функций  $f_1, f_2, \dots$  из пространства  $L_p$  сходится к функции  $f \in L_p$  в метрике  $L_p$  или по норме  $L_p$ , если  $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**5.58.** Доказать следующие свойства пространства  $L_1(A, \mu)$ :

1) если функция  $f \in L$  и  $\alpha$  — число, то  $\alpha f \in L_1$  и  
 $\| \alpha f \|_1 = |\alpha| \cdot \| f \|_1;$

2) если  $\| f \|_1 = 0$ , то  $f(x) = 0$  почти всюду на множестве  $A$ ;

3) если функции  $f$  и  $g$  принадлежат  $L_1$ , то  $f + g \in L_1$  и

$$\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$$

(неравенство треугольника).

5.59. Доказать, что в неравенстве треугольника в задаче 5.58 знак равенства достигается в том и только том случае, когда  $f(x)g(x) \geq 0$  почти всюду на  $A$ .

5.60. Доказать, что предел последовательности функций, сходящейся в метрике  $L_1(A, \mu)$ , единствен с точностью до значений на множестве меры нуль.

5.61. Доказать, что если последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  сходится к функции  $f(x)$  в метрике  $L_1(A, \mu)$ , а функция  $h(x)$  измерима и

$$\text{vrai } \sup_{x \in A} |h(x)| < \infty,$$

то последовательность  $f_1(x)h(x), f_2(x)h(x), \dots$  сходится в метрике  $L_1$  к функции  $f(x)h(x)$ .

5.62. Построить последовательность функций из пространства  $L_1(A, \mu)$ , сходящуюся в метрике  $L_1$ , но не сходящуюся ни в одной точке множества  $A$ .

5.63. Доказать, что если последовательность функций сходится к функции  $f$  в метрике  $L_1(A, \mu)$ , то она сходится к  $f$  на множестве  $A$  по мере.

5.64. Показать, что последовательность интегрируемых на множестве  $A$  функций  $f_1, f_2, \dots$  может сходиться на множестве  $A$  по мере, но не сходиться в метрике  $L_1(A, \mu)$ .

5.65. Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  принадлежат пространству  $L_1(A, \mu)$ . Доказать, что если существует такая функция  $g \in L_1$ , что для всех  $k$

$$|f_k(x)| \leq g(x)$$

почти всюду на  $A$ , то последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к функции  $f$  в метрике  $L_1$  в том и только том случае, когда она сходится к  $f$  на  $A$  по мере.

5.66. Построить последовательность функций, неотрицательных и интегрируемых на множестве  $A$ , сходящуюся в каждой точке множества  $A$  к интегри-

руемой функции, но не сходящуюся в метрике  $L_1(A, \mu)$ .

5.67. Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  неотрицательны и интегрируемы на множестве  $A$ . Доказать, что если последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к  $f$  почти всюду на  $A$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu,$$

то  $f_k$  сходятся к  $f$  в метрике  $L_1(A, \mu)$ .

5.68. Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  принадлежат пространству  $L_1(A, \mu)$ . Доказать, что если последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к  $f$  в метрике  $L_1$ , то она фундаментальна в метрике  $L_1$ , т. е. для каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $N$ , что для всех  $i, k > N$  справедлива оценка

$$\|f_i - f_k\|_1 < \varepsilon.$$

5.69. Доказать полноту пространства  $L_1(A, \mu)$ , т. е. что каждая фундаментальная в метрике  $L_1$  последовательность функций сходится в метрике  $L_1$  к некоторой функции из  $L_1$ .

5.70. Доказать, что если функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A$  и для каждой функции  $g(x) \in L_1(A, \mu)$  имеем  $f(x)g(x) \in L_1$ , то

$$\text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty.$$

5.71. Пусть функция  $f$  существенно ограничена на множестве  $A$  относительно меры  $\mu$ . Доказать, что

$$\text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x)| = \sup_g \int_A f(x) g(x) d\mu,$$

где верхняя грань берется по всем функциям  $g \in L_1(A, \mu)$ , для которых  $\|g\|_1 \leq 1$ . Привести примеры функций  $f$ , для которых эта верхняя грань достигается для некоторой функции  $g$  и для которых она не достигается.

5.72. Найти условия на функцию  $f$ , необходимые и достаточные для того, чтобы существовала функция  $g$ , для которой достигается верхняя грань в задаче 5.71.

5.73. Пусть функция  $f$  измерима и почти всюду конечна на множестве  $A$  относительно меры  $\mu$  и

$$\text{vrai } \sup_{x \in A} |f(x)| = \infty.$$

Доказать, что

$$\sup_g \int_A f(x) g(x) d\mu = \infty,$$

где верхняя грань берется по всем функциям  $g \in L_1(A, \mu)$  таким, что  $\|g\|_1 \leq 1$  и  $f(x) g(x) \in L_1(A, \mu)$ .

5.74. Пусть функция  $f \in L_1(A, \mu)$ . Доказать, что

$$\int_A |f(x)| d\mu = \sup_g \int_A f(x) g(x) d\mu,$$

где верхняя грань берется по всем функциям  $g$ , непрерывным на  $A$  и удовлетворяющим условию

$$|g(x)| \leq 1 \quad \text{для } x \in A.$$

5.75. Привести примеры функций  $f$  (принимающих значения разных знаков на множествах положительной меры), для которых верхняя грань в задаче 5.74 достигается и для которых она не достигается.

5.76. Пусть функция  $f$  интегрируема на множестве  $A$  по мере Лебега. Доказать, что для каждого  $\epsilon > 0$  можно найти такую непрерывную на  $A$  функцию  $g$ , что

$$\int_A |f(x) - g(x)| dx < \epsilon.$$

5.77. Доказать, что в задаче 5.76 функция  $g$  может быть выбрана бесконечно дифференцируемой, а если множество  $A$  ограничено, то в качестве  $g$  можно взять алгебраический многочлен.

5.78. Доказать, что пространство  $L_1(A)$  с мерой Лебега *сепарабельно*, т. е. в нем существует такая последовательность функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , что для каждой функции  $f \in L_1$  и каждого  $\epsilon > 0$  можно найти функцию  $\varphi_k$  из этой последовательности, для которой

$$\|f - \varphi_k\|_1 < \epsilon.$$

**5.79.** Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  по мере Лебега. Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

**5.80.** Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  по мере Лебега и

$$\omega(f, \delta)_1 = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)| dx$$

— ее модуль непрерывности в метрике  $L_1([a, b])$ . Доказать, что

$$1) \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta)_1 = 0;$$

2) если  $\omega(f, \delta)_1 = o(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то  $f(x) = c$ , где  $c$  — некоторая постоянная, почти всюду на  $[a, b]$ .

**5.81.** Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  по мере Лебега. Доказать, что

1) существует число  $c_0$  такое, что

$$\inf_c \int_a^b |f(x) - c| dx = \int_a^b |f(x) - c_0| dx;$$

2) если  $f$  непрерывна, то такое число  $c_0$  единственно;

3) если  $f$  непрерывна и для каждого числа  $c$  мера множества точек, в которых  $f(x) = c$ , равна нулю, то условие

$$\int_a^b \text{sign}[f(x) - c_0] dx = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы число  $c_0$  решало эту экстремальную задачу.

**5.82.** Доказать следующие свойства пространств  $L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ :

1) если функция  $f \in L_p$  и  $\alpha$  — число, то  $\alpha f \in L_p$  и

$$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p;$$

2) если  $\|f\|_p = 0$ , то  $f(x) = 0$  почти всюду на множестве  $A$ .

5.83. Пусть  $p > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Доказать, что если  $f(x) \in L_p(A, \mu)$  и  $g(x) \in L_q(A, \mu)$ , то  $f(x)g(x) \in L_1(A, \mu)$  и справедлива оценка

$$\left| \int_A f(x)g(x) d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

(неравенство Гельдера; при  $p = q = 2$  его называют неравенством Коши — Буняковского).

5.84. Доказать, что в неравенстве Гельдера (задача 5.83) знак равенства достигается в том и только том случае, когда почти всюду на  $A$  выполняются соотношения:

$$1) f(x)g(x) \geq 0 \text{ или } f(x)g(x) \leq 0;$$

2) для некоторых чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , не равных нулю одновременно,

$$\alpha |f(x)|^p = \beta |g(x)|^q.$$

5.85. Пусть функции  $f$  и  $g$  принадлежат пространству  $L_p(A, \mu)$ ,  $1 < p < \infty$ . Доказать, что  $f + g \in L_p$  и справедлива оценка

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(неравенство Минковского; его называют также неравенством треугольника).

5.86. Доказать, что в неравенстве Минковского в задаче 5.85 знак равенства достигается в том и только том случае, когда для некоторых неотрицательных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , не равных нулю одновременно,  $\alpha f(x) = \beta g(x)$  почти всюду на  $A$ .

5.87. Пусть  $\mu A < \infty$  и функция  $f \in L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ . Доказать существование и единственность числа  $c_0$ , для которого

$$\inf_c \|f - c\|_p = \|f - c_0\|_p.$$

5.88. Доказать, что предел последовательности функций, сходящейся в метрике  $L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ , единствен с точностью до значений на множестве меры нуль.

5.89. Доказать, что если последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  сходится в метрике  $L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ , к функции  $f(x)$ , а функция  $h(x) \in L_q(A, \mu)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то последовательность  $f_1(x)h(x)$ ,

$f_2(x)h(x), \dots$  сходится в метрике  $L_1(A, \mu)$  к функции  $f(x)h(x)$ .

5.90. Пусть последовательность функций  $f_1(x), f_2(x), \dots$  сходится в метрике  $L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ , к функции  $f(x)$ , а последовательность  $h_1(x), h_2(x), \dots$  сходится в метрике  $L_q(A, \mu)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , к функции  $h(x)$ . Доказать, что последовательность  $f_1(x)h_1(x), f_2(x)h_2(x), \dots$  сходится в метрике  $L_1(A, \mu)$  к функции  $f(x)h(x)$ .

5.91. Пусть функция  $\Phi(u)$  положительна и возрастает на  $(0, \infty)$ . Доказать, что если функции  $f, f_1, f_2, \dots$  измеримы на множестве  $A$  относительно меры  $\mu$  и таковы, что при  $k \rightarrow \infty$

$$\int_A \Phi(|f(x) - f_k(x)|) d\mu \rightarrow 0,$$

то последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к  $f$  на множестве  $A$  по мере.

5.92. Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  принадлежат пространству  $L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ . Доказать, что если существует такая функция  $g \in L_p$ , что для каждого  $k$

$$|f_k(x)| \leq g(x)$$

почти всюду на  $A$ , то последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к функции  $f$  в метрике  $L_p$  в том и только том случае, когда она сходится к  $f$  на  $A$  по мере.

5.93. Пусть функции  $f_1, f_2, \dots$  принадлежат пространству  $L_p(A, \mu)$ ,  $p \geq 1$ , и  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$ . Доказать,

что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится абсолютно почти всюду на множестве  $A$  и справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p.$$

5.94. Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  принадлежат пространству  $L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ . Доказать, что если последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к  $f$  в метрике  $L_p$ , то она фундаментальна в метрике  $L_p$ .

5.95. Доказать полноту пространства  $L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ , т. е. что каждая фундаментальная в метрике

$L_p$  последовательность функций сходится в метрике  $L_p$  к некоторой функции из  $L_p$ .

5.96. Пусть  $\mu$  — мера Лебега и  $f \in L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ . Доказать, что для каждого  $\varepsilon > 0$  можно найти такую непрерывную на  $A$  функцию, что  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ .

5.97. Доказать, что в задаче 5.96 функция  $g$  может быть выбрана бесконечно дифференцируемой, а если множество  $A$  ограничено, то в качестве  $g$  можно взять алгебраический многочлен.

5.98. Доказать, что пространство  $L_p(A)$ ,  $p > 1$ , с мерой Лебега сепарабельно, т. е. в нем существует такая последовательность функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , что для каждой функции  $f \in L_p$  и каждого  $\varepsilon > 0$  можно найти функцию  $\varphi_k$  из этой последовательности, для которой

$$\|f - \varphi_k\|_p < \varepsilon.$$

5.99. Пусть  $\mu$  — мера Лебега и функция  $f \in L_p$ ,  $p > 1$ , на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

5.100. Пусть  $\mu$  — мера Лебега, функция  $f \in L_p$ ,  $p > 1$ , на отрезке  $[a, b]$  и

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left( \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

— ее модуль непрерывности в метрике  $L_p([a, b])$ . Доказать, что

$$1) \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta)_p = 0;$$

2) если  $\omega(f, \delta)_p = o(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то  $f(x) = c$ , где  $c$  — некоторая постоянная, почти всюду на  $[a, b]$ .

5.101. Доказать, что если функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A$  и для каждой функции  $g(x) \in L_q(A, \mu)$ ,  $q > 1$ , имеем  $f(x)g(x) \in L_1(A, \mu)$ , то  $f(x) \in L_p(A, \mu)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

5.102. Пусть функция  $f \in L_p(A, \mu)$ ,  $p > 1$ . Доказать, что

$$1) \|f\|_p = \sup_g \int_A f(x) g(x) d\mu,$$

где верхняя грань берется по всем функциям  $g \in L_q(A, \mu)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , таким, что  $\|g\|_q \leq 1$ ;

2) если  $\|f\|_p > 0$ , то существует единственная с точностью до значений на множестве меры нуль экстремальная функция  $g$ , для которой эта верхняя грань достигается.

**5.103.** Доказать, что в задаче 5.102 при нахождении верхней грани можно ограничиться рассмотрением только непрерывных функций  $g$ , удовлетворяющих условию  $\|g\|_q \leq 1$ , но при этом верхняя грань в общем случае не будет достигаться.

**5.104.** Пусть  $p > 1$ , функция  $f$  измерима и почти всюду конечна на множестве  $A$  относительно меры  $\mu$  и  $f \in L_p(A, \mu)$ . Доказать, что  $\sup_g \int_A f(x) g(x) d\mu = \infty$ ,

где верхняя грань берется по всем функциям  $g \in L_q(A, \mu)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , таким, что  $\|g\|_q \leq 1$  и  $f(x)g(x) \in L_1(A, \mu)$ .

**5.105.** Пусть  $\mu A < \infty$  и  $p > 1$ . Доказать, что если функция  $f \in L_p(A, \mu)$  и  $1 \leq r < p$ , то  $f \in L_r(A, \mu)$ , а если последовательность функций сходится к  $f$  в метрике  $L_p(A, \mu)$ , то эта последовательность будет сходиться к  $f$  в метрике  $L_r(A, \mu)$ .

**5.106.** Пусть  $\mu A < \infty$ ,  $1 \leq r < p$ , функции  $f, f_1, f_2, \dots$  принадлежат пространству  $L_p(A, \mu)$  и их нормы в метрике  $L_p(A, \mu)$  равномерно ограничены:  $\sup_k \|f_k\|_p < \infty$ . Доказать, что если последовательность  $f_1, f_2, \dots$  сходится к функции  $f$  по мере на множестве  $A$ , то эта последовательность сходится к функции  $f$  в метрике  $L_r(A, \mu)$ .

**5.107.** Пусть  $\mu A < \infty$  и  $p \geq 1$ . Показать, что последовательность функций  $f_1, f_2, \dots$  из пространства  $L_p(A, \mu)$  может сходиться почти всюду на множестве  $A$  к функции  $f \in L_p(A, \mu)$  и иметь равномерно ограниченные нормы в  $L_p(A, \mu)$ , но не сходиться в метрике  $L_p(A, \mu)$ .

**5.108.** Пусть  $\mu A = \infty$  и  $p \geq 1$ . Построить функцию  $f \in L_p(A, \mu)$  и такую, что она не принадлежит никакому пространству  $L_r(A, \mu)$ ,  $r \geq 1$ , при  $r \neq p$ .

**5.109.** Пусть  $\mu A = \infty$  и  $1 \leq s < p < \infty$ . Доказать, что если функция  $f$  принадлежит пространствам

$L_s(A, \mu)$  и  $L_p(A, \mu)$ , то  $f \in L_r(A, \mu)$  для каждого  $r$  такого, что  $s < r < p$ , но  $f$  может не принадлежать  $L_r(A, \mu)$  для других  $r$ .

**5.110.** Доказать, что утверждение задачи 5.109 справедливо и при  $p = \infty$ , если считать, что  $f \in L_\infty(A, \mu)$  означает

$$\text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty.$$

**5.111.** Построить функцию, которая принадлежит пространствам  $L_p(A, \mu)$  для всех  $p \geq 1$ , но

$$\text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x)| = \infty.$$

**5.112.** Доказать, что если функция  $f \in L_p(A, \mu)$  для всех  $p \geq p_0$ , где  $p_0 \geq 1$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \text{vrai} \sup_{x \in A} |f(x)|$$

(обе части этого равенства могут быть конечны или бесконечны).

**5.113.** Пусть функция  $f$  измерима на множестве  $A$  относительно меры  $\mu$ . Доказать, что если множество тех  $p$ , для которых  $f \in L_p(A, \mu)$ , непусто, то оно образует некоторый интервал, к которому, возможно, принадлежат какая-либо одна или обе граничные точки, и для этих  $p$  функция  $\|f\|_p$  как функция от  $p$  непрерывна.

**5.114.** Доказать, что если в обозначениях задачи 5.113  $\mu A = 1$  и функция  $f$  не эквивалентна константе, то  $\|f\|_p$  строго возрастает с ростом  $p$ .

**5.115.** Пусть функция  $f$  интегрируема на  $(-\infty, \infty)$  по мере Лебега. Введем функции Стеклова для функции  $f$ :

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt, \quad h > 0.$$

Доказать, что

1) для почти всех  $x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x);$$

2)  $f_h \in L_1(-\infty, \infty)$ ,  $\|f_h\|_1 \leq \|f\|_1$  и  $\|f - f_h\|_1 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ;

3) если  $f \in L_p(-\infty, \infty)$ ,  $p > 1$ , то  $f_h \in L_p(-\infty, \infty)$ ,  $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$  и  $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

**5.116.** Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[0, 1]$  по мере Лебега. Положим

$$f_k(x) = k \int_{l/k}^{(l+1)/k} f(t) dt,$$

если  $x \in \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ ;  $k = 1, 2, \dots$

Доказать, что

1) для почти всех  $x$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x);$$

2)  $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ;

3) если  $f \in L_p([0, 1])$ ,  $p > 1$ , то  $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**5.117.** Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[0, 1]$  по мере Лебега и имеет период 1. Положим

$$s_k(x) = 2^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} f\left(x + \frac{i}{2^k}\right).$$

Доказать, что для почти всех  $x$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = \int_0^1 f(t) dt.$$

**5.118.** Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[0, 1]$  по мере Лебега и имеет период 1. Доказать, что последовательность функций

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f\left(x + \frac{i}{k}\right)$$

может расходитьсяся почти всюду.

#### § 4. Произведения мер. Теорема Фубини

Прямым или декартовым произведением множеств  $A$  и  $B$  называется множество всех пар  $(x, y)$ , где  $x \in A$  и  $y \in B$ . Обозначают прямое произведение множеств  $A \times B$ .

Если имеются два семейства множеств, то их прямым произведением называют совокупность всех мно-

жества вида  $A \times B$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные множества из первого и второго семейств соответственно.

Прямое произведение мер определено в задаче 5.128. Для простоты рассматривается произведение двух мер. Точно так же связь кратных и повторных интегралов (теорема Фубини) рассматривается только в случае, когда область интегрирования кратного интеграла является прямым произведением двух множеств.

Обозначения, введенные в задачах 5.125, 5.126 и 5.128, используются в дальнейших задачах параграфа без пояснений.

5.119. Доказать, что

- 1)  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$
- 2)  $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cap B_2)] \cup [A_1 \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [A_2 \times (B_2 \setminus B_1)],$
- 3)  $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)],$
- 4)  $(A_1 \times B_1) \Delta (A_2 \times B_2) = [(A_1 \Delta A_2) \times (B_1 \cap B_2)] \cup [A_1 \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [A_2 \times (B_2 \setminus B_1)].$

5.120. Доказать, что если  $A_1, A_2, B_1, B_2$  — непустые множества, то  $(A_1 \times B_1) \subset (A_2 \times B_2)$  тогда и только тогда, когда  $A_1 \subset A_2$  и  $B_1 \subset B_2$ .

5.121. Пусть  $A_1, A_2, B_1, B_2$  — непустые множества. Доказать, что множества  $A_1 \times B_1$  и  $A_2 \times B_2$  не пересекаются и

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = A \times B$$

в том и только том случае, когда

или  $A_1 \cup A_2 = A$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  и  $B_1 = B_2 = B$ ,

или  $B_1 \cup B_2 = B$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  и  $A_1 = A_2 = A$ .

5.122. Доказать, что если среди множеств  $A_1, A_2, B_1, B_2$  есть пустое, то утверждения задач 5.120 и 5.121, вообще говоря, неверны.

5.123. Доказать, что прямое произведение полукольца является полукольцом.

5.124. Доказать, что прямое произведение колец может не быть кольцом.

5.125. Пусть  $S$  и  $T$  — кольца множеств. Доказать, что множество  $U$  всех конечных объединений попарно непересекающихся множеств вида  $A \times B$ ,  $A \in S$ ,  $B \in T$ , является кольцом. При этом, если  $S$  и  $T$  —

алгебры, то и  $U$  — алгебра, единицей которой  $E_U$  будет  $E_S \times E_T$ , где  $E_S$  и  $E_T$  — единицы алгебр  $S$  и  $T$ .

**5.126.** Пусть алгебра  $U$  определена, как в задаче 5.125, по алгебрам  $S$  и  $T$  и  $m_1$  и  $m_2$  — аддитивные функции множеств, заданные на  $S$  и  $T$  соответственно. Если  $A_i \in S$ ,  $B_i \in T$  и множества  $A_i \times B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , попарно не пересекаются, то положим

$$m\left(\bigcup_{i=1}^k (A_i \times B_i)\right) = \sum_{i=1}^k m_1(A_i) m_2(B_i).$$

Доказать, что для каждого элемента алгебры  $U$  при различных представлениях его через элементы алгебр  $S$  и  $T$  получим одно и то же значение функции  $m$  и что функция  $m$  аддитивна на  $U$ .

**5.127.** Доказать, что если в задаче 5.126 функции  $m_1$  и  $m_2$  являются мерами, то функция  $m$  также будет мерой.

**5.128.** Пусть меры  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m$  определены, как в задаче 5.126, а  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu$  — лебеговы продолжения этих мер. Меру  $\mu$  в этом случае называют *прямым произведением мер*  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и обозначают  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ .

Доказать, что если множество  $A$  измеримо по мере  $\mu_1$ , а множество  $B$  — по мере  $\mu_2$ , то  $A \times B$  измеримо по мере  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  и

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A) \mu_2(B).$$

**5.129.** Пусть  $A \subset E_U$  — подмножество единицы алгебры  $U$ , измеримое по мере  $\mu$ . Доказать, что для  $\mu_1$ -почти всех  $x$  множества  $A_x = \{y: (x, y) \in A\}$  будут  $\mu_2$ -измеримы, функция  $\varphi(x) = \mu_2 A_x$   $\mu_1$ -измерима и

$$\mu A = \int_{E_S} \varphi(x) d\mu_1,$$

где  $E_S$  — единица алгебры  $S$ . Аналогичные утверждения справедливы и для сечений  $\{x: (x, y) \in A\}$ .

**5.130.** Пусть функция  $f(x, y)$  интегрируема на множестве  $A$  по мере  $\mu$ . Для упрощения дальнейших обозначений положим  $f(x, y) = 0$  для  $(x, y) \in E_U \setminus A$ . Доказать, что для  $\mu_1$ -почти всех  $x \in E_S$  функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $E_T$  по мере  $\mu_2$ , функция

$$\int_{E_T} f(x, y) d\mu_2$$

(доопределенная произвольным образом для тех  $x$ , для которых этот интеграл не существует) интегрируема на  $E_S$  по мере  $\mu_1$  и справедливо равенство

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_{E_S} \left( \int_{E_T} f(x, y) d\mu_2 \right) d\mu_1.$$

Аналогичные утверждения справедливы и при другом порядке интегрирования и

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_{E_T} \left( \int_{E_S} f(x, y) d\mu_1 \right) d\mu_2$$

(теорема Фубини).

**5.131.** Пусть  $\mu$ -измеримая на  $E_U$  функция  $f(x, y)$  такова, что существует интеграл

$$\int_{E_S} \left( \int_{E_T} |f(x, y)| d\mu_2 \right) d\mu_1.$$

Доказать, что функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $E_U$  по мере  $\mu$ , и значит, по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_{E_U} f(x, y) d\mu &= \int_{E_S} \left( \int_{E_T} f(x, y) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \\ &= \int_{E_T} \left( \int_{E_S} f(x, y) d\mu_1 \right) d\mu_2. \end{aligned}$$

**5.132.** Построить измеримую и неинтегрируемую на  $E_U$  по мере  $\mu$  функцию  $f(x, y)$  такую, что существуют интегралы

$$\int_{E_S} |f(x, y)| d\mu_1 \quad \text{для всех } y \in E_T,$$

$$\int_{E_T} |f(x, y)| d\mu_2 \quad \text{для всех } x \in E_S,$$

$$\int_{E_S} \left| \int_{E_T} f(x, y) d\mu_2 \right| d\mu_1 \quad \text{и} \quad \int_{E_T} \left| \int_{E_S} f(x, y) d\mu_1 \right| d\mu_2$$

и справедливо равенство

$$\int_{E_S} \left( \int_{E_T} f(x, y) d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{E_T} \left( \int_{E_S} f(x, y) d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

**5.133.** Доказать, что если функция  $f(x)$  интегрируема на множестве  $A$  по мере  $\mu_1$ , а функция  $g(y)$  интегрируема на множестве  $B$  по мере  $\mu_2$ , то функция  $f(x)g(y)$  интегрируема на  $A \times B$  по мере  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  и

$$\int_{A \times B} f(x) g(y) d\mu = \int_A f(x) d\mu_1 \int_B g(y) d\mu_2.$$

**5.134.** Пусть функция  $f$  неотрицательна и интегрируема на отрезке  $[a, b]$  по линейной (одномерной) мере Лебега. Доказать, что интеграл

$$\int_a^b f dx$$

равен плоской (двумерной) мере Лебега множества точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям  $a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$ .

**5.135.** Распространить определение меры  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  и теорему Фубини на множества, не обязательно имеющие конечную меру, но представимые в виде предела возрастающей последовательности множеств, мера каждого из которых конечна.

## § 5. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Интеграл Лебега при сравнении его с интегралом Римана рассматривается по мере Лебега и это не оговаривается в условиях задач. Для простоты сравнение интегралов Римана и Лебега проводится в одномерном случае и интегрирование ведется на отрезке или на полуоси.

**5.136.** При каких значениях параметра  $\alpha$  функция  $f(x) = x^{-\alpha} \sin x$  интегрируема на  $[1, \infty)$ :

- 1) по Лебегу,
- 2) по Риману в несобственном смысле,
- 3) абсолютно интегрируема по Риману в несобственном смысле?

**5.137.** При каких значениях параметра  $\alpha$  функция  $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$  интегрируема на  $[0, 1]$ :

- 1) по Лебегу,
- 2) по Риману в собственном смысле,
- 3) по Риману в несобственном смысле,

4) абсолютно интегрируема по Риману в несобственном смысле?

**5.138.** Пусть  $f$  — ограниченная на  $[0, 1]$  функция и

$$\sigma_{n,k} = \left[ \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right), \quad k=1, 2, \dots, 2^n; n=1, 2, \dots$$

Определим на  $[0, 1]$  последовательность невозрастающих кусочно постоянных функций

$$\bar{f}_n(x) = \sup_{t \in \sigma_{n,k}} f(t) \quad \text{при } x \in \sigma_{n,k}$$

и последовательность неубывающих кусочно постоянных функций

$$\underline{f}_n(x) = \inf_{t \in \sigma_{n,k}} f(t) \quad \text{при } x \in \sigma_{n,k}.$$

Пусть

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x) \quad \text{и} \quad \underline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}_n(x).$$

Доказать, что

- 1) функции  $\bar{f}(x)$  и  $\underline{f}(x)$  интегрируемы по Лебегу;
- 2) функция  $f$  интегрируема по Риману в том и только том случае, когда почти всюду  $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ .

**5.139.** Доказать, что если функция интегрируема на отрезке по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и значения ее интегралов по Риману и по Лебегу совпадают.

**5.140.** Доказать, что если функция неотрицательна и интегрируема в несобственном смысле по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и значения ее интегралов по Риману и по Лебегу совпадают.

**5.141.** Доказать, что если функция интегрируема по Риману в несобственном смысле и интегрируема по Лебегу, то значения обоих этих ее интегралов совпадают.

**5.142.** Построить на  $[0, \infty)$  ограниченную и интегрируемую по Риману в несобственном смысле функцию такую, что она не принадлежит ни одному из пространств  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**5.143.** Пусть функция  $f$  ограничена на  $[0, 1]$  и  $\bar{f}(x)$  и  $\underline{f}(x)$  — функции, построенные в задаче 5.138. Доказать, что если точка  $x_0$  не является двоично рациональной, т. е. не является точкой вида  $k/2^n$ , то

равенство  $\bar{f}(x_0) = f(x_0)$  необходимо и достаточно для непрерывности функции  $f$  в точке  $x_0$ .

**5.144.** Доказать, что функция интегрируема по Риману на отрезке в том и только том случае, когда она на этом отрезке ограничена и почти всюду непрерывна (теорема Лебега).

**5.145.** Доказать, что характеристическая функция канторова множества, построенного в задаче 2.64, интегрируема по Риману.

**5.146.** Пусть  $A$  — замкнутое множество нулевой лебеговой меры, расположенное на  $[0, 1]$ . Доказать, что характеристическая функция множества  $A$  интегрируема по Риману.

**5.147.** Построить интегрируемую по Риману функцию, множество точек разрыва которой всюду плотно.

**5.148.** Построить на  $[0, 1]$  функцию, дифференцируемую в каждой точке и такую, что ее производная ограничена, но неинтегрируема по Риману.

**5.149.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы функции  $f$  и  $g$ , и пусть  $h(x) = \max(f(x), g(x))$ . При каком определении интеграла — по Лебегу, по Риману в собственном и несобственном смысле — из интегрируемости функций  $f$  и  $g$  вытекает интегрируемость функции  $h$ , а при каком не вытекает?

**5.150.** Пусть интегрируемые по Риману на отрезке  $[a, b]$  функции  $f_1, f_2, \dots$  равномерно сходятся к функции  $f$ .

Доказать, что  $f$  интегрируема по Риману и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**5.151.** Построить последовательность равномерно ограниченных, интегрируемых на отрезке по Риману функций, сходящихся в каждой точке и таких, что предельная функция неинтегрируема по Риману.

**5.152.** Доказать, что

1) измеримая на отрезке функция интегрируема по Лебегу в том и только том случае, когда ее равнозамеримая неубывающая перестановка интегрируема по Риману (в несобственном смысле);

2) если обе эти функции интегрируемы, то соответствующие их интегралы равны.

## Глава 6

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

## § 1. Функции с ограниченной вариацией

Для простоты и большей наглядности мы ограничиваемся в этой главе рассмотрением функций только от одной переменной. Отметим, что для функций многих переменных некоторые из рассматриваемых здесь вопросов существенно более сложны. В тех случаях, когда говорится о мере множеств или об интегрируемости функций, имеются в виду мера Лебега и интегрируемость по мере Лебега.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция  $f$ , принимающая конечные значения. Для каждого разбиения  $r$  отрезка  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

построим сумму

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i+1})|. \quad (*)$$

Если функция  $f$  такова, что независимо от числа точек разбиения  $r$  и от выбора этих точек все суммы  $(*)$  равномерно ограничены, то говорят, что  $f$  является функцией *с ограниченной вариацией* (с ограниченным изменением) или имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$ . В этом случае точная верхняя грань сумм  $(*)$  по всем разбиениям  $r$  называется *вариацией*, точнее, *полной вариацией* функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается

$$\bigvee_a^b f.$$

Если для функции  $f$  суммы  $(*)$  не являются равномерно ограниченными, то говорят, что вариация функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  неограничена.

Говорят, что функция  $f$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , удовлетворяет на этом отрезке *условию Липшица порядка  $\alpha$* ,  $0 < \alpha \leq 1$ , если существует такое число  $M$ , что для любых  $x, y \in [a, b]$  справедлива

оценка

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}.$$

Функция  $f$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется *сингулярной* на этом отрезке, если она непрерывна, отлична от постоянной и  $f'(x) = 0$  почти всюду на  $[a, b]$ . Примером сингулярной функции является канторова функция, построенная в задаче 4.19.

Если функция  $f$  определена в окрестности точки  $x$ , то ее *правым верхним производным числом*  $\Lambda_+(x)$  в этой точке называют верхний предел

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Аналогично определяются *правое нижнее производное число*

$$\lambda_+(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и *левые* соответственно *верхнее и нижнее производные числа*

$$\Lambda_-(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow -0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и

$$\lambda_-(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow -0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

**6.1.** Пусть функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что равенство

$$\bigvee_a^b f = f(b) - f(a)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы  $f$  не убывала на  $[a, b]$ .

**6.2.** Пусть функция  $f$  задана на отрезке  $[a, b]$  и существует такое разбиение этого отрезка  $a = c_0 < c_1 < \dots < c_k = b$ , что на каждом отрезке  $[c_i, c_{i+1}]$  функция  $f$  не возрастает или не убывает. Доказать, что  $f$  имеет на  $[a, b]$  ограниченную вариацию, и найти  $\bigvee_a^b f$ .

**6.3.** Доказать, что если на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  и  $g$  имеют ограниченную вариацию, то ограничен-

ную вариацию имеют функции  $f \pm g$  и  $\alpha f$ , где  $\alpha$  — число, и при этом

$$\bigvee_a^b (f \pm g) \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g,$$

$$\bigvee_a^b \alpha f = |\alpha| \bigvee_a^b f.$$

**6.4.** Доказать, что если на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  и  $g$  имеют ограниченную вариацию, то ограниченную вариацию имеют функции  $f \cdot g$  и  $\max(f, g)$ .

**6.5.** Доказать, что если на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  и  $g$  имеют ограниченную вариацию и  $|g(x)| \geq \alpha > 0$  для всех  $x \in [a, b]$ , то функция  $f/g$  имеет ограниченную вариацию, а условие  $g(x) \neq 0$  недостаточно для того, чтобы  $f/g$  имела ограниченную вариацию.

**6.6.** Доказать, что если на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  имеет ограниченную вариацию, то функция  $|f|$  имеет ограниченную вариацию и

$$\bigvee_a^b |f| \leq \bigvee_a^b f.$$

**6.7.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $|f|$  имеет ограниченную вариацию. Доказать, что

- 1) вариация функции  $f$  может быть неограничена;
- 2) если функция  $f$  непрерывна, то она имеет ограниченную вариацию и

$$\bigvee_a^b |f| = \bigvee_a^b f.$$

**6.8.** Выяснить, при каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, 1]$ .

**6.9.** Доказать, что функции, удовлетворяющие на отрезке условию Липшица первого порядка, имеют ограниченную вариацию.

**6.10.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Построить функцию, удовлетворяющую на отрезке условию Липшица порядка  $\alpha$ , вариация которой неограничена.

**6.11.** Построить на отрезке непрерывную функцию ограниченной вариации, которая не удовлетво-

ряет условию Липшица порядка  $\alpha$  ни при каком  $\alpha < 1$ .

**6.12.** Пусть  $a < c < b$ . Доказать, что функция  $f$  имеет на отрезке  $[a, b]$  ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она имеет ограниченную вариацию на каждом из отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , и если это условие выполнено, то

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

**6.13.** Доказать, что если функция  $f$  имеет на отрезке  $[a, b]$  ограниченную вариацию, то функция  $v(x) = \bigvee_a^x f$  не убывает на  $[a, b]$ .

**6.14.** Доказать, что функция имеет ограниченную вариацию в том и только том случае, когда она представима в виде разности двух неубывающих функций.

**6.15.** Представить в виде разности двух неубывающих функций:

1) функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x=a, \\ 0 & \text{при } x \neq a, \end{cases} \text{ где } 0 \leq a \leq 1,$$

на отрезке  $[0, 1]$ ;

2) функцию  $f(x) = \sin x$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

**6.16.** Доказать, что если функция  $f$  имеет на отрезке ограниченную вариацию, то  $f$  непрерывна в каждой точке этого отрезка, за исключением не более чем счетного множества точек, в которых она может иметь разрывы первого рода.

**6.17.** Доказать, что функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда существует возрастающая ограниченная на  $[a, b]$  функция  $\varphi$  такая, что если  $a \leq x < y \leq b$ , то

$$|f(y) - f(x)| \leq \varphi(y) - \varphi(x).$$

**6.18.** Пусть функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и  $x_0 \in [a, b]$ . Указать необходимые и достаточные условия для того, чтобы, изменяя значение функции в точке  $x_0$ , можно было уменьшить вариацию  $f$ .

**6.19.** Пусть функция  $f$  имеет на  $[a, b]$  ограниченную вариацию, а функция  $\varphi$  удовлетворяет на всей оси условию Липшица первого порядка. Доказать, что функция  $\varphi(f(x))$  имеет на  $[a, b]$  ограниченную вариацию.

**6.20.** Показать, что в задаче 6.19 условие Липшица первого порядка нельзя заменить на условие Липшица никакого порядка  $\alpha < 1$ .

**6.21.** Доказать, что если функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ , то функция  $v(x) = \bigvee_a^x f$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**6.22.** Доказать, что если функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и разрывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ , то функция  $v(x) = \bigvee_a^x f$  разрывна в точке  $x_0$ .

**6.23.** Доказать, что непрерывная функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух неубывающих непрерывных функций.

**6.24.** Пусть функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и  $x_1, x_2, \dots$  — последовательность всех ее точек разрыва, принадлежащих интервалу  $(a, b)$ . Пусть  $s(a) = 0$  и

$$s(x) = f(a + 0) - f(0) + \sum_{k: x_k < x} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + \\ + f(x) - f(x - 0)$$

для  $x \in (a, b]$ . Функция  $s(x)$  называется функцией скачков функции  $f$  или просто *функцией скачков*. Доказать, что

1) функция  $s(x)$  непрерывна во всех точках непрерывности функции  $f$ ;

2) функция  $f(x) - s(x)$  непрерывна и имеет ограниченную вариацию;

3) если функция  $f(x)$  не убывает, то функции  $s(x)$  и  $f(x) - s(x)$  также не убывают.

**6.25.** Построить на отрезке  $[0, 1]$  строго возрастающую функцию скачков, множество точек разрыва которой совпадает с множеством рациональных чисел из  $[0, 1]$ .

**6.26.** Доказать, что если функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$ , то для ее инте-

грального модуля непрерывности в метрике  $L_1([a, b])$  справедлива оценка  $\omega(f, \delta) = O(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**6.27.** Пусть функция  $f$  задана на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что если для ее интегрального модуля непрерывности в метрике  $L_1([a, b])$  справедлива оценка  $\omega(f, \delta) = O(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то  $f$  совпадает почти всюду с некоторой функцией ограниченной вариации.

**6.28.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  — последовательность неубывающих функций, равномерно ограниченных на  $[a, b]$ . Доказать, что существует подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в каждой точке отрезка  $[a, b]$ .

**6.29.** Пусть  $f_1, f_2, \dots$  — последовательность функций, имеющих ограниченную вариацию и равномерно ограниченных на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что если полная вариация всех функций  $f_k$  равномерно ограничена (т. е.  $\sup_k \bigvee_a^b f_k < \infty$ ), то из последовательности  $f_1, f_2, \dots$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке, причем предельная функция будет иметь ограниченную вариацию (теорема Хелли).

**6.30.** Пусть функции  $f_1, f_2, \dots$  имеют ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать число  $N$  такое, что для всех  $i, k > N$  справедлива оценка

$$\bigvee_a^b (f_i - f_k) < \epsilon.$$

Доказать, что существует функция  $f$  ограниченной вариации, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bigvee_a^b (f_k - f) = 0.$$

**6.31.** Пусть функция  $f$  непрерывна и имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$ . Для каждого разбиения  $r$  отрезка

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

определим суммы

$$V_r = \sum_{i=0}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \quad \text{и} \quad \Omega_r = \sum_{i=0}^{k-1} (M_i - m_i),$$

где  $M_i$  и  $m_i$  — соответственно максимальное и минимальное значения функции  $f$  на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ . Доказать, что если  $\lambda_r = \max_{i=1}^k (x_{i+1} - x_i) \rightarrow 0$ , то обе суммы  $V_r$  и  $\Omega_r$  стремятся к  $\bigvee_a^b f$ .

**6.32.** Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а  $M$  и  $m$  — ее максимальное и минимальное значения соответственно. Определим на  $[m, M]$  функцию  $N(y)$ , равную числу тех  $x \in [a, b]$ , для которых  $f(x) = y$ , если это число конечно, и  $N(y) = \infty$ , если  $f(x) = y$  для бесконечного множества точек  $x \in [a, b]$ . Функция  $N(y)$  называется *индикаторисой Банаха* функции  $f$ . Доказать, что

1) функция  $N(y)$  измерима относительно меры Лебега;

2) интегрируемость функции  $N(y)$  на  $[m, M]$  является необходимым и достаточным условием ограниченности вариации функции  $f$ ;

3) если  $N(y)$  интегрируема на  $[m, M]$ , то

$$\int_m^M N(y) dy = \bigvee_a^b f.$$

**6.33.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана функция ограниченной вариации  $g(x)$ , непрерывная в концах отрезка. Положим  $G(x) = \max(g(x-0), g(x), g(x+0))$ . Пусть  $A$  — множество тех точек  $x \in (a, b)$ , для которых существует точка  $\xi > x$  такая, что  $G(x) < g(\xi)$ . Доказать, что  $A$  — открытое множество, и если  $A = \bigcup_k (a_k, b_k)$  — представление множества  $A$  в виде объединения непересекающихся интервалов, то  $g(a_k + 0) \leq G(b_k)$ .

**6.34.** Пусть функция  $f(x)$  не убывает на интервале  $(\alpha, \beta)$  и  $\Lambda_+(x)$  — ее верхние правые производные числа. Доказать, что множество тех точек  $x \in (\alpha, \beta)$ , в которых  $\Lambda_+(x) > C > 0$ , можно покрыть открытым множеством  $A_C$  таким, что

$$\mu A_C \leq \frac{f(\beta - 0) - f(\alpha + 0)}{C}.$$

**6.35.** Пусть функция  $f(x)$  не убывает на отрезке  $[a, b]$  и  $\Lambda_+(x)$  — ее верхние правые производные числа. Доказать, что  $\Lambda_+(x) < \infty$  почти всюду на  $[a, b]$ .

**6.36.** Пусть функция  $f(x)$  не убывает на отрезке  $[a, b]$ ,  $\Lambda_+(x)$  и  $\Lambda_-(x)$  — ее верхние правые и нижние левые производные числа соответственно. Доказать, что если  $0 < c < C$ , то множество тех точек  $x \in [a, b]$ , в которых  $\Lambda_+(x) > C$  и  $\Lambda_-(x) < c$ , имеет меру нуль.

**6.37.** Доказать, что монотонная на отрезке функция имеет конечную производную почти всюду (теорема Лебега).

**6.38.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задано множество  $A$  меры нуль. Построить непрерывную возрастающую на  $[a, b]$  функцию  $f$ , для которой  $f'(x) = +\infty$  для всех  $x \in A$ .

**6.39.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функции  $f_1, f_2, \dots$  не убывают, ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится в каждой точке и  $f(x)$  — сумма этого ряда. Доказать, что почти всюду на  $[a, b]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = f'(x).$$

**6.40.** Доказать, что производная функции скачков почти всюду равна нулю.

**6.41.** Доказать, что если функция  $f$  не убывает на  $[a, b]$ , то ее производная интегрируема по Лебегу на  $[a, b]$  и справедлива оценка

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

**6.42.** Доказать, что если функция имеет на отрезке ограниченную вариацию, то ее производная существует почти всюду и является интегрируемой функцией.

**6.43.** Доказать, что в оценке из задачи 6.41 имеет место строгое неравенство, если функция  $f$  является на отрезке  $[a, b]$ :

- 1) функцией скачков,
- 2) сингулярной функцией.

**6.44.** Построить на отрезке сингулярную функцию, строго возрастающую в каждой точке.

## § 2. Абсолютно непрерывные функции

Функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , называется *абсолютно непрерывной* на этом отрезке, если для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta$ , что для произвольного набора попарно непересекающихся отрезков  $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , для которых

$$\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta, \text{ справедлива оценка}$$

$$\sum_{i=1}^k |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Точка  $x \in (a, b)$  называется *точкой Лебега* функции  $f$ , если значение  $f(x)$  в этой точке конечно и

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

Пусть  $A$  — измеримое множество на прямой. Для каждой точки  $x \in (-\infty, \infty)$  введем функцию  $\varphi(x, h)$ ,  $h > 0$ , — меру Лебега множества  $A \cap [x - h, x + h]$ . Точка  $x$  называется *точкой плотности* множества  $A$ , если

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\varphi(x, h)}{2h} = 1.$$

**6.45.** Доказать, что если функция удовлетворяет условию Липшица первого порядка, то она абсолютно непрерывна.

**6.46.** Пусть функция  $f$  задана на отрезке  $[a, b]$  и для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta$ , что для произвольного набора попарно непересекающихся отрезков  $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , для которых

$$\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta, \text{ справедлива оценка}$$

$$\left| \sum_{i=1}^k [f(b_i) - f(a_i)] \right| < \epsilon.$$

Доказать, что функция  $f$  абсолютно непрерывна.

**6.47.** Доказать, что если на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  и  $g$  абсолютно непрерывны, то абсолютно не-

прерывны функции: 1)  $f \pm g$ , 2)  $f \cdot g$ , 3)  $f/g$ , если  $g$  не обращается в нуль на  $[a, b]$ .

**6.48.** Доказать, что если функция  $f$  абсолютно непрерывна, то функция  $|f|$  абсолютно непрерывна.

**6.49.** Доказать, что если на отрезке функция  $f$  непрерывна, а  $|f|$  абсолютно непрерывна, то  $f$  абсолютно непрерывна.

**6.50.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы неубывающие абсолютно непрерывные функции  $f_1, f_2, \dots$ . Доказать, что если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится для всех  $x \in [a, b]$  и  $f(x)$  — его сумма, то функция  $f$  абсолютно непрерывна.

**6.51.** Доказать, что абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию.

**6.52.** Доказать, что если функция  $f$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ , то и функция  $v(x) = \bigvee_a^x f$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ .

**6.53.** Доказать, что абсолютно непрерывная функция представима в виде разности неубывающих абсолютно непрерывных функций.

**6.54.** Пусть функция  $f$  абсолютно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что если функция  $\varphi$  удовлетворяет на всей оси условию Липшица первого порядка, то функция  $\varphi(f(x))$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ .

**6.55.** Пусть функция  $f$  абсолютно непрерывна и строго возрастает на отрезке  $[a, b]$ , а  $\varphi$  абсолютно непрерывна на  $[f(a), f(b)]$ . Доказать, что функция  $\varphi(f(x))$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ .

**6.56.** Показать, что в задаче 6.55 условие строгого возрастания функции  $f$  можно заменить на ее неубывание.

**6.57.** Пусть функция  $\varphi$ , заданная на всей оси, такова, что для каждой функции  $f(x)$ , абсолютно непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , функция  $\varphi(f(x))$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ . Доказать, что  $\varphi$  удовлетворяет условию Липшица первого порядка.

**6.58.** Пусть функция  $f$  задана на отрезке  $[a, b]$  и для каждого  $\epsilon > 0$  можно указать такое  $\delta$ , что для произвольного набора отрезков  $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  (а не только для попарно непересе-

кающихся отрезков, как в определении абсолютной непрерывности), для которых  $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$ , справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^k |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Доказать, что функция  $f$  удовлетворяет на  $[a, b]$  условию Липшица первого порядка.

**6.59.** Пусть функция  $f$  задана на отрезке  $[a, b]$  и для произвольного набора отрезков  $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , такого, что  $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \infty$ , ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{f(b_i) - f(a_i)\}$$

сходится. Доказать, что  $f$  удовлетворяет на  $[a, b]$  условию Липшица первого порядка.

**6.60.** Доказать, что если на отрезке функция абсолютно непрерывна, то и ее неубывающая перестановка абсолютно непрерывна.

**6.61.** Доказать, что если на отрезке функция  $f$  абсолютно непрерывна и  $f'(x) = 0$  почти всюду, то  $f$  постоянна.

**6.62.** Пусть функция  $f$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$  и множество  $A \subset [a, b]$  имеет меру нуль. Доказать, что  $f(A)$  — образ этого множества — имеет меру нуль.

**6.63.** Пусть функция  $f$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ . Доказать, что если множество  $A \subset [a, b]$  измеримо, то и множество  $f(A)$  измеримо.

**6.64.** Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , имеет ограниченную вариацию и для каждого множества  $A \subset [a, b]$  меры нуль мера множества  $f(A)$  равна нулю. Доказать, что  $f$  абсолютно непрерывна.

**6.65.** Доказать, что если функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то ее *неопределенный интеграл Лебега*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$$

является абсолютно непрерывной функцией на  $[a, b]$ .

**6.66.** Доказать, что если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то для почти всех  $x$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

**6.67.** Доказать, что абсолютно непрерывная функция является неопределенным интегралом своей производной.

**6.68.** Пусть функции  $f$  и  $g$  абсолютно непрерывны на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

**6.69.** Доказать, что функция удовлетворяет на отрезке условию Липшица первого порядка в том и только том случае, когда она является неопределенным интегралом от измеримой ограниченной функции.

**6.70.** Доказать, что если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и имеет ограниченную вариацию, то она единственным образом представляется в виде суммы

$$f(x) = \varphi(x) + r(x),$$

где  $\varphi(a) = f(a)$ , функция  $\varphi(x)$  абсолютно непрерывна и  $r(x)$  — сингулярная функция или нуль.

**6.71.** Пусть функция  $f$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и

$$f(x) = \varphi(x) + r(x) + s(x),$$

где функция  $\varphi$  абсолютно непрерывна,  $r$  сингулярна и  $s$  — функция скачков. Доказать, что

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b \varphi + \bigvee_a^b r + \bigvee_a^b s.$$

**6.72.** Пусть функции  $f, f_1, f_2, \dots$  имеют ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bigvee_a^b (f_k - f) = 0.$$

Доказать, что если

1) функции  $f_1, f_2, \dots$  являются функциями скачков, то  $f$  является функцией скачков;

2) функции  $f_1, f_2, \dots$  абсолютно непрерывны, то  $f$  абсолютно непрерывна;

3) функции  $f_1, f_2, \dots$  сингулярны, то  $f$  сингулярна.

6.73. Пусть функция  $f$  не убывает на отрезке  $[a, b]$ . Доказать, что если

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

то  $f$  абсолютно непрерывна.

6.74. Доказать, что если функция  $f$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b |f'(x)| dx.$$

6.75. Пусть функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и непрерывна в точке  $x \in [a, b]$ . Доказать, что точка  $x$  является точкой Лебега функции  $f$ .

6.76. Доказать, что точки неустранимого разрыва первого рода интегрируемой функции не являются ее точками Лебега.

6.77. Пусть функция  $f \in L_1([a, b])$ . Доказать, что почти все точки отрезка  $[a, b]$  являются точками Лебега функции  $f$ .

6.78. Пусть функция  $f \in L_p([a, b])$ ,  $p > 1$ . Доказать, что для почти всех  $x \in [a, b]$  выполняется соотношение

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|^p dt = 0.$$

6.79. Пусть функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ . Доказать, что в каждой точке Лебега функции  $f$  производная ее неопределенного интеграла  $\int_a^x f(t) dt$  существует и равна  $f(x)$ .

6.80. Привести пример интегрируемой функции  $f$  и точки  $x$ , не являющейся точкой Лебега функции  $f$ .

но такой, что в этой точке производная неопределенного интеграла функции  $f$  существует и равна  $f(x)$ .

**6.81.** Пусть  $A$  — измеримое множество на  $(-\infty, \infty)$ . Доказать, что почти все точки множества  $A$  являются его точками плотности.

**6.82.** Пусть множество  $A \subset (-\infty, \infty)$  измеримо и  $x$  — его точка плотности. Доказать, что для произвольной последовательности интервалов  $(\alpha_k, \beta_k)$ , содержащих  $x$  и таких, что  $\beta_k - \alpha_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} \mu(A \cap (\alpha_k, \beta_k)) = 1.$$

**6.83.** Пусть функция  $\phi(t)$  абсолютно непрерывна и не убывает на  $[\alpha, \beta]$ , множество  $A \subset [\alpha, \beta]$  измеримо и  $\mu\phi(A)$  — мера Лебега множества  $\phi(A)$ . Доказать, что

$$\mu\phi(A) = \int_A \phi'(t) dt.$$

**6.84.** Пусть функция  $\phi(t)$  абсолютно непрерывна и не убывает на  $[\alpha, \beta]$ . Пусть множество  $A \subset [\alpha, \beta]$  таково, что его образ  $\phi(A)$  имеет меру нуль и  $B$  — множество тех точек  $t \in A$ , в которых  $\phi'(t) = 0$ . Доказать, что мера Лебега множества  $A \setminus B$  равна нулю.

**6.85.** Пусть функция  $\phi(t)$  абсолютно непрерывна и не убывает на  $[\alpha, \beta]$ ,  $\phi(\alpha) = a$  и  $\phi(\beta) = b$ . Доказать, что если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то справедлива формула интегрирования подстановкой

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

**6.86.** Пусть функция  $f$  непрерывна и строго возрастает на отрезке  $[a, b]$  и  $A$  — множество точек  $x \in [a, b]$ , в которых  $f'(x) = \infty$ . Доказать, что  $f$  абсолютно непрерывна в том и только том случае, когда мера множества  $f(A)$  равна нулю.

**6.87.** Пусть функция  $f$  непрерывна и строго возрастает на отрезке  $[a, b]$  и  $A$  — множество точек  $x \in [a, b]$ , в которых  $f'(x) = 0$ . Доказать, что обратная функция  $f^{-1}$  абсолютно непрерывна в том и только том случае, когда мера множества  $A$  равна нулю.

**6.88.** Пусть функция  $f(x)$  имеет в каждой точке отрезка  $[a, b]$  конечную производную и  $f'(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ . Доказать, что для всех  $x \in [a, b]$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

**6.89.** Построить на отрезке  $[a, b]$  такую функцию  $f(x)$ , имеющую в каждой точке конечную производную, что функция  $f'(x)$  неинтегрируема на  $[a, b]$ .

**6.90.** Пусть функция  $f$  имеет в каждой точке отрезка  $[a, b]$  конечную производную. Доказать, что для каждого множества  $A \subset [a, b]$  меры нуль его образ  $f(A)$  имеет меру нуль.

### § 3. Интеграл Римана — Стильеса

Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы функции  $f$  и  $\varphi$ , принимающие конечные значения. Для каждого разбиения  $r$  отрезка  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

в каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  выберем некоторую точку  $\xi_i$  и составим сумму

$$S_r = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i) [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)].$$

Если существует такое число  $I$ , что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всех разбиений  $r$ , для которых  $\max_i (x_{i+1} - x_i) < \delta$ , и для любых чисел  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  будет справедлива оценка  $|I - S_r| < \varepsilon$ , то число  $I$  называют *интегралом Римана — Стильеса* функции  $f$  по функции  $\varphi$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначают

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) \quad \text{или} \quad \int_a^b f d\varphi.$$

В этом случае пишут  $f \in R(\varphi)$  и называют функцию  $f$  интегрируемой по функции  $\varphi$  в смысле Римана — Стильеса.

При  $\varphi(x) = x$  получаем обычный интеграл Римана от функции  $f$ .

**6.91.** Доказать, что если  $f \in R(\varphi)$  и  $g \in R(\varphi)$ , то  $f \pm g \in R(\varphi)$  и

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] d\varphi(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x) \pm \int_a^b g(x) d\varphi(x).$$

**6.92.** Доказать, что если  $f \in R(\varphi)$ , то для произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$   $\alpha f \in R(\beta\varphi)$  и

$$\int_a^b \alpha f(x) d[\beta\varphi(x)] = \alpha\beta \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

**6.93.** Доказать, что если  $f \in R(\varphi)$  и  $f \in R(\psi)$ , то  $f \in R(\varphi \pm \psi)$  и

$$\int_a^b f(x) d[\varphi(x) \pm \psi(x)] = \int_a^b f(x) d\varphi(x) \pm \int_a^b f(x) d\psi(x).$$

**6.94.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $\varphi$  имеет ограниченную вариацию, а  $f$  ограничена и  $f \in R(\varphi)$ . Доказать, что

$$\left| \int_a^b f d\varphi \right| \leq M \vee \varphi,$$

где  $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

**6.95.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $\varphi$  не убывает,  $f \in R(\varphi)$  и  $g \in R(\varphi)$ . Доказать, что если  $f(x) \leq g(x)$ , то

$$\int_a^b f d\varphi \leq \int_a^b g d\varphi.$$

**6.96.** Доказать, что если существует интеграл

$$\int_a^b f d\varphi,$$

то для каждого  $c$ ,  $a < c < b$ , существуют интегралы

$$\int_a^c f d\varphi \quad \text{и} \quad \int_c^b f d\varphi.$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b f d\varphi = \int_a^c f d\varphi + \int_c^b f d\varphi.$$

6.97. Пусть точки  $\alpha$  и  $\beta$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ ,  $f(x)$  — характеристическая функция отрезка  $[\alpha, b]$  и  $\varphi(x)$  — характеристическая функция отрезка  $[\beta, b]$ . Выяснить, при каких  $\alpha$  и  $\beta$  существует интеграл  $\int_a^b f d\varphi$ , и найти его значение в тех случаях, когда он существует.

6.98. Пусть  $a < c < b$  и функция  $\varphi(x)$  равна 0 при  $x < c$  и равна 1 при  $x > c$ . Доказать, что

1) независимо от того, как определена функция  $\varphi$  в точке  $c$ ,  $f \in R(\varphi)$  в том и только том случае, когда  $f$  непрерывна в точке  $c$ ;

2) если  $f$  непрерывна в точке  $c$ , то

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = f(c).$$

6.99. Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — кусочно постоянные функции на отрезке  $[a, b]$ . Выяснить, при каких условиях на точки разрыва этих функций существует интеграл  $\int_a^b f(x) d\varphi(x)$ , и найти его значение в тех случаях, когда он существует.

6.100. Пусть  $a < c < b$ . Показать, что из существования интегралов

$$\int_a^c f d\varphi \quad \text{и} \quad \int_c^b f d\varphi$$

не вытекает существование интеграла  $\int_a^b f d\varphi$ . Привести соответствующие примеры, когда

1) функции  $f$  и  $\varphi$  кусочно постоянны;

2) функция  $\varphi$  непрерывна и имеет ограниченную вариацию.

**6.101.** Пусть  $a < c < b$ . Доказать, что если функция  $f(x)$  ограничена, а функция  $\phi(x)$  непрерывна в точке  $c$ , то из существования интегралов

$$\int_a^c f d\phi \quad \text{и} \quad \int_c^b f d\phi$$

вытекает существование интеграла

$$\int_a^b f d\phi.$$

**6.102.** Доказать, что если  $f \in R(\phi)$ , то  $\phi \in R(f)$  и справедливо равенство (формула интегрирования по частям)

$$\int_a^b \phi df = f(x)\phi(x) \Big|_a^b - \int_a^b f d\phi.$$

**6.103.** Доказать, что если на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна, а  $\phi$  имеет ограниченную вариацию, то  $f \in R(\phi)$ .

**6.104.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $\phi$  имеет ограниченную вариацию, а функции  $f_1, f_2, \dots$  непрерывны и равномерно сходятся к функции  $f$ . Доказать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k d\phi = \int_a^b f d\phi.$$

**6.105.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна, а  $\phi$  кусочно постоянна. Найти значение интеграла

$$\int_a^b f d\phi.$$

**6.106.** Пусть функция  $\phi$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, 2\pi]$ . Доказать, что для  $n = 1, 2, \dots$  справедлива оценка

$$\left| \int_0^{2\pi} \phi(x) \cos nx dx \right| \leq \frac{1}{n} \bigvee_0^{2\pi} \phi$$

и что эта оценка неулучшаема.

**6.107.** Пусть функция  $\phi$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, 2\pi]$ . Доказать, что для  $n = 1, 2, \dots$  справедлива оценка

$$\left| \int_0^{2\pi} \phi(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{2}{n} \bigvee_0^{2\pi} \phi$$

и что эта оценка неулучшаема. Доказать, что если функция  $\phi$  удовлетворяет условию  $\phi(0) = \phi(2\pi)$ , то справедлива неулучшаемая оценка

$$\left| \int_0^{2\pi} \phi(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{1}{n} \bigvee_0^{2\pi} \phi.$$

**6.108.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна, а  $\phi$  имеет ограниченную вариацию. Доказать, что функция

$$\int_a^x f(t) d\phi(t)$$

имеет ограниченную вариацию и непрерывна в точках непрерывности функции  $\phi$ .

**6.109.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  и  $g$  непрерывны, а  $\phi$  имеет ограниченную вариацию. Положим

$$\psi(x) = \int_a^x f d\phi.$$

Доказать, что

$$\int_a^b g d\psi = \int_a^b gf d\phi.$$

**6.110.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна, а  $\phi$  имеет в каждой точке производную, причем  $\phi'$  интегрируема по Риману. Доказать, что  $f \in R(\phi)$  и справедливо равенство

$$\int_a^b f d\phi = \int_a^b f\phi' dx,$$

где последний интеграл является интегралом Римана.

**6.111.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна, а  $\varphi$  абсолютно непрерывна. Доказать, что справедливо равенство  $\int_a^b f d\varphi = \int_a^b f\varphi' dx$ , где последний интеграл является интегралом Лебега.

**6.112.** Доказать, что в задаче 6.111 условие непрерывности функции  $f$  можно заменить на ограниченность вариации функции  $f$ .

**6.113.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна, а функции  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  имеют ограниченную вариацию и сходятся в каждой точке к функции  $\varphi$ . Доказать, что если вариация функций  $\varphi_k$  равномерно ограничена (т. е.  $\sup_k \text{Var}_{[a, b]} \varphi_k < \infty$ ), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f d\varphi_k = \int_a^b f d\varphi$$

(теорема Хелли).

**6.114.** Пусть  $x_1, x_2, \dots$  — последовательность различных точек интервала  $(a, b)$  и числа  $c_1, c_2, \dots$  таковы, что  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$ . Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

и

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi(x - x_k).$$

Доказать, что для каждой функции  $f$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ ,

$$\int_a^b f d\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f(x_k).$$

**6.115.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  непрерывна и  $f \in R(\varphi)$ . Доказать, что значение интеграла

$$\int_a^b f d\varphi$$

не изменится, если изменить значение функции  $\varphi$  в произвольной внутренней точке отрезка  $[a, b]$ . Как изменится этот интеграл, если изменить значение функции  $\varphi$  в концах отрезка?

**6.116.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $\varphi$  имеет ограниченную вариацию и  $\mathfrak{M}$  — множество всех непрерывных функций, удовлетворяющих условию  $|f(x)| \leq 1$ . Доказать, что

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}} \left| \int_a^b f d\varphi \right| = \bigvee_a^b \varphi^*,$$

где  $\varphi^*(x) = \varphi(x)$  в концах отрезка  $[a, b]$  и во всех точках непрерывности функции  $\varphi$ , а если  $x$  — точка разрыва функции  $\varphi$ , принадлежащая интервалу  $(a, b)$ , то значение  $\varphi^*(x)$  заключено между  $\varphi(x - 0)$  и  $\varphi(x + 0)$ .

**6.117.** Сохраним обозначения, принятые в задаче **6.116**. Пусть  $\mathfrak{M}_0$  — множество всех функций  $f$  из  $\mathfrak{M}$ , удовлетворяющих условию  $f(a) = f(b)$ . Доказать, что

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}_0} \left| \int_a^b f d\varphi \right| = \bigvee_a^b \varphi_0^*,$$

где  $\varphi_0^*(x) = \varphi^*(x)$  во всех точках полуотрезка  $[a, b]$  и  $\varphi_0^*(b) = \varphi(b)$ , если  $[\varphi(b) - \varphi(b - 0)][\varphi(a) - \varphi(a + 0)] \leq 0$ , а если это условие не выполняется, то

$$\varphi_0^*(b) = \varphi(b) - [\varphi(a) - \varphi(a + 0)].$$

**6.118.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha$ , а  $\varphi$  — условию Липшица порядка  $\beta$ . Доказать, что если  $\alpha + \beta > 1$ , то  $f \in R(\varphi)$ .

**6.119.** Доказать, что в задаче **6.118** условие  $\alpha + \beta > 1$  нельзя заменить на  $\alpha + \beta = 1$ .

**6.120.** Доказать, что если  $f \in R(\varphi)$ , то  $|f| \in R(\varphi)$  и  $f^2 \in R(\varphi)$ .

**6.121.** Доказать, что если  $f \in R(\varphi)$  и  $g \in R(\varphi)$ , то  $fg \in R(\varphi)$ , и если функция  $\varphi$  не убывает, то

$$\left[ \int_a^b f(x) g(x) d\varphi(x) \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) d\varphi(x) \cdot \int_a^b g^2(x) d\varphi(x).$$

**6.122.** Доказать, что если  $f(x) \in R(\varphi)$  и  $g(x) \in R(\varphi)$ , то функция  $\max(f(x), g(x)) \in R(\varphi)$ .

**6.123.** Доказать, что если  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — неубывающие функции на отрезке  $[a, b]$  и  $f \in R(\varphi + \psi)$ , то  $f \in R(\varphi)$  и  $f \in R(\psi)$ .

**6.124.** Пусть функция  $\varphi$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$  и  $v(x) = \bigvee_a^x \varphi$ . Доказать, что для каждой функции  $f$ , заданной на  $[a, b]$ , существование одного из интегралов

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) dv(x)$$

влечет существование другого.

**6.125.** Можно ли в задаче 6.94 в качестве  $M$  взять  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ?

**6.126.** Пусть функция  $\varphi$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[0, 1]$ , а функция  $f$  непрерывна на  $[0, 2]$ . Доказать, что функция

$$F(x) = \int_0^1 f(x+t) d\varphi(t)$$

непрерывна на  $[0, 1]$ .

**6.127.** Останется ли верным утверждение задачи 6.126, если в ее условии вместо непрерывности  $f$  потребовать, чтобы функция  $f$  была ограничена на  $[0, 2]$  и такова, что интеграл

$$\int_0^1 f(x+t) d\varphi(t)$$

существует для всех  $x \in [0, 1]$ ?

**6.128.** Пусть функция  $\varphi$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$ . Найти условия на функцию  $\varphi$ , необходимые и достаточные для того, чтобы для каждой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f$  выполнялось равенство

$$\int_a^b f d\varphi = 0.$$

**6.129.** Пусть функция  $\phi$  имеет ограниченную вариацию на отрезке  $[a, b]$ . Найти условия на функцию  $\phi$ , необходимые и достаточные для того, чтобы для каждой непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x) \geq 0$  выполнялось неравенство

$$\int_a^b f d\phi \geq 0.$$

**6.130.** Выяснить, при каких значениях  $\alpha$  существует интеграл

$$\int_0^1 x^\alpha d \sin \frac{1}{x}.$$

**6.131.** Выяснить, при каких значениях  $\alpha$  существует предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_\epsilon^1 x^\alpha d \sin \frac{1}{x}.$$

**6.132.** Пусть функции  $f(x)$  и  $\phi(x)$  определены на  $(-\infty, \infty)$ . Если для произвольных чисел  $a$  и  $b$  существует интеграл

$$\int_a^b f d\phi$$

и существует конечный предел

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f d\phi,$$

когда  $a$  и  $b$  стремятся к своим пределам независимо, то этот предел обозначают

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\phi.$$

Доказать следующее утверждение, переносящее теорему Хелли (задача 6.113) на функции, заданные на  $(-\infty, \infty)$ . Пусть функции  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$  сходятся в каждой точке  $x \in (-\infty, \infty)$  к функции  $\phi(x)$  и имеют

ограниченную вариацию на каждом отрезке  $[a, b]$ , причем

$$\sup_{a, b, k} \bigvee_a^b \varphi_k < \infty.$$

Если функция  $f$  непрерывна на  $(-\infty, \infty)$  и

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f d\varphi_k = \int_{-\infty}^{\infty} f d\varphi_k$$

равномерно относительно  $k$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f d\varphi_k = \int_{-\infty}^{\infty} f d\varphi.$$

**6.133.** Пусть  $c(x)$  — канторова функция, построенная в задаче 4.19. Вычислить интегралы

$$1) \int_0^1 x dc(x), \quad 2) \int_0^1 x^2 dc(x), \quad 3) \int_0^1 c(1-x) dc(x).$$

**6.134.** Вычислить интеграл

$$\int_0^\pi \sin x d\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 2 & \text{для } x = \frac{\pi}{2} \text{ и } x = \pi, \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{для } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

**6.135.** Вычислить интегралы:

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d(e^x \operatorname{sign} \sin x),$$

$$2) \int_0^{\pi} (x-1) d[(\cos x) \operatorname{sign} x].$$

## ОТВЕТЫ

**1.15.** 1)  $\chi(A, x) = 0$ , 2)  $\chi(A, x) \leq \chi(B, x)$ , 3)  $\chi(A, x) = \chi(B, x)$ .

**1.16.** 1)  $\chi(A \cap B, x) = \chi(A, x) \cdot \chi(B, x) = \min\{\chi(A, x), \chi(B, x)\}$ ,

2)  $\chi\left(\bigcap_a A_a, x\right) = \inf_a \chi(A_a, x)$ ,

3)  $\chi(A \cup B, x) = \chi(A, x) + \chi(B, x) - \chi(A, x)\chi(B, x) = \max\{\chi(A, x), \chi(B, x)\}$ ,

4)  $\chi\left(\bigcup_a A_a, x\right) = \sup_a \chi(A_a, x)$ ,

5)  $\chi(A \setminus B, x) = \chi(A, x)(1 - \chi(B, x))$ ,

6)  $\chi(A \Delta B, x) = \chi(A, x) + \chi(B, x) - 2\chi(A, x)\chi(B, x)$ .

**1.18.** Множества в левых и правых частях соотношений 1), 2), 4), 5), 8) и 9) связаны знаком  $\supseteq$ , соотношений 3) и 7) — знаком  $\subset$ . В соотношениях 6) и 10) ни одно из этих множеств в общем случае не содержит другое. Необходимое и достаточное условие равенства в 1), 2), 6) и 10) —  $A = \emptyset$ , в 3), 4), 7) и 8) —  $A \cap (B \Delta C) = \emptyset$ , в 5) и 9) —  $A \setminus (B \Delta C) = \emptyset$ .

**1.20.**  $A(f) \cup A(g)$  соответствует функции  $\max(f(x), g(x))$ ,  $A(f) \cap A(g)$  — функции  $\min(f(x), g(x))$ .

**1.21.** 1) Точка  $(1, 1)$ ; 2) множество точек  $(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют одному из следующих условий:  $0 < x < 1$ ,  $y \geq x^{-1}$ ;  $x = 1$ ,  $y = 1$ ;  $1 < x < \infty$ ,  $0 < y \leq x^{-1}$ ;

3) все точки графиков  $\Gamma_\lambda$  и  $\Gamma_\mu$ , кроме точки  $(1, 1)$ ;

4)  $\Gamma_{\lambda_1} \cup \Gamma_{\lambda_2} \cup \Gamma_{\lambda_3}$ .

**1.22.** Эти множества можно записать следующим образом (возможны и другие представления): 1)  $A \cap B \cap C$ , 2)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ , 3)  $(A \cup B \cup C) \setminus (A \Delta B \Delta C)$ , 4)  $A \cup B \cup C$ , 5)  $(A \Delta B \Delta C) \setminus (A \cap B \cap C)$ .

**1.26.**  $B_n = A_n \setminus \left( \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)$ .

**1.29.** 1)  $\overline{\lim_n} A_n = B \cup C$ ,  $\underline{\lim_n} A_n = B \cap C$ ;

2)  $\overline{\lim_n} A_n$  — множество всех рациональных чисел;  $\underline{\lim_n} A_n$  — множество всех целых чисел;

3)  $\overline{\lim_n} A_n$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих условиям  $-1 < x < 2$ ,  $\underline{\lim_n} A_n$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих условиям  $0 \leq x \leq 1$ .

**2.13.** В  $E_2$  отрезок  $[a, b]$  замкнут, а интервал  $(a, b)$  и полуотрезок  $[a, b)$  не являются ни замкнутыми, ни открытыми множествами.

**3.4.** Множество  $A$  конечно.

**3.5.** Множество  $A$  счетно.

**3.13.** Единицами алгебр всех элементов из  $R(P_1)$  и  $R(Q_1)$ , принадлежащих  $[0, 1]$ , являются соответственно  $[0, 1)$  и  $[0, 1]$ . Совокупность всех принадлежащих  $(0, 1)$  элементов из  $R(P_1)$  не является алгеброй, а из  $R(Q_1)$  является алгеброй.

**3.16.** Единицами алгебр всех элементов из  $R(P_n)$  и  $R(Q_n)$ , принадлежащих кубу  $\{0 \leq x_k \leq 1, k = 1, \dots, n\}$ , являются соответственно кубы  $\{0 \leq x_k < 1, k = 1, \dots, n\}$  и  $\{0 \leq x_k \leq 1, k = 1, \dots, n\}$ .

**3.81.** Мера равна 0.

**4.11.** Функция  $f$  неизмерима.

**4.19.** Мера образа канторова множества равна 1.

**5.72.** Если  $\mu A > 0$ , то необходима и достаточна положительность меры множества точек  $x \in A$ , в которых

$$|f(x)| = \text{vrai sup}_{x \in A} |f(x)|.$$

**5.136.** 1)  $\alpha > 1$ , 2)  $\alpha > 0$ , 3)  $\alpha > 1$ .

**5.187.** 1)  $\alpha > -1$ , 2)  $\alpha \geq 0$ , 3)  $\alpha > -2$ , 4)  $\alpha > -1$ .

**5.149.** Из интегрируемости функций  $f$  и  $g$  вытекает интегрируемость функции  $h$ , если интеграл понимается как интеграл Лебега или Римана в собственном смысле, и в общем случае не вытекает для иесобственного интеграла Римана.

**6.2.**

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=0}^{k-1} |f(c_i) - f(c_{i+1})|.$$

**6.8.** Варнация функции  $f$  ограничена при  $\alpha > \beta$  и при  $\alpha = \beta \leq 0$ .

**6.18.** Если  $x_0 \in (a, b)$ , то вариацию функции  $f$  можно уменьшить в том и только том случае, когда число  $f(x_0)$  не заключено между  $f(x_0 - 0)$  и  $f(x_0 + 0)$ . Если  $x_0 = a$ , то вариацию можно уменьшить в том и только том случае, когда  $f(a) \neq f(a + 0)$ . Аналогично для  $x_0 = b$ .

**6.97.** Интеграл существует при  $\alpha \neq \beta$  и при  $\alpha = \beta = a$ ; он равен 1 при  $\alpha < \beta$  и равен 0 в остальных случаях.

**6.99.** Интеграл  $\int_a^b f d\varphi$  существует, если функции  $f$  и  $\varphi$  не

имеют общих точек разрыва. Пусть это условие выполнено и  $c_1, \dots, c_k$  — все точки разрыва функции  $\varphi$ , принадлежащие интервалу  $(a, b)$ . Если  $\varphi$  непрерывна в концах отрезка  $[a, b]$ , то интеграл равен сумме

$$\sum_{i=1}^k f(c_i) [\varphi(c_i + 0) - \varphi(c_i - 0)],$$

а если  $\varphi$  имеет разрыв в точке  $a$ , соответственно в точке  $b$ , то к этой сумме нужно прибавить  $f(a) [\varphi(a + 0) - \varphi(a)]$ , соответственно  $f(b) [\varphi(b) - \varphi(b - 0)]$ .

**6.105.** Если  $c_1, \dots, c_k$  — все точки разрыва функции  $\varphi$ , принадлежащие интервалу  $(a, b)$ , то

$$\int_a^b f d\varphi = f(a) [\varphi(a+0) - \varphi(a)] + \\ + \sum_{i=1}^k f(c_i) [\varphi(c_i+0) - \varphi(c_i-0)] + f(b) [\varphi(b) - \varphi(b-0)].$$

**6.115.** При замене  $\varphi(a)$  на  $A$  и  $\varphi(b)$  на  $B$  к значению интеграла добавляется  $f(b)[B - \varphi(b)] - f(a)[A - \varphi(a)]$ .

**6.125.** Нельзя.

**6.127.** Не останется.

**6.128.** Можно так изменить значения функции  $\varphi$  в не более чем счетном множестве точек из интервала  $(a, b)$ , что она станет равной нулю на отрезке  $[a, b]$ .

**6.129.** Можно так изменить значения функции  $\varphi$  в не более чем счетном множестве точек из интервала  $(a, b)$ , что она станет неубывающей на отрезке  $[a, b]$ .

**6.130.**  $\alpha > 0$ .

**6.131.**  $\alpha > 0$ .

**6.133.** 1)  $\frac{1}{2}$ ; 2)  $\frac{3}{8}$ ; 3)  $\frac{1}{2}$ .

**6.134.** 2)  $-\frac{\pi}{2}$ .

**6.135.** 1)  $2 - e^\pi - e^{-\pi}$ ; 2)  $1 - \pi$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. — М.—Л.: Гостехиздат, 1938.
3. Березин Ф. А., Гвишнани А. Д., Горни Е. А., Кириллов А. А. Сборник задач по функциональному анализу. — М.: Издательство МГУ, 1977.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. 2. — М.: Наука, 1973.
5. Камке Е. Интеграл Лебега — Стилтьеса. — М.: Физматгиз, 1959.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Гостехиздат, 1957.
8. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. II. — М.: Наука, 1973.
9. Очан Ю. С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. — М.: Просвещение, 1965.
10. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М., ИЛ, 1954.
11. Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966.
12. Халмаш П. Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.
13. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.—Л.: Гостехиздат, 1937.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная непрерывность интеграла Лебега 58  
Абсолютно непрерывная функция 89  
Аддитивная функция множеств 28  
Алгебра множеств 28  
Борелевское множество 31  
  
Вариация функции 81  
Верхний предел последовательности множеств 9  
Внешняя мера множества 35  
Внутренняя мера множества 35  
— точка множества 18  
Возрастающая последовательность множеств 9  
Всюду плотное множество 19  
Выпуклая оболочка множества 23  
  
Дополнение множества 8  
Единица алгебры множеств 28  
  
Законы двойственности 12  
Замкнутое множество 18  
Замыкание множества 18  
  
Измеримая функция 43  
Измеримое множество 35, 38  
Изолированная точка множества 18  
Индикаториса Банаха функции 87  
Интеграл Лебега 51, 59  
— Римана — Стильеса 95  
Интегрируемая по Лебегу функция 51, 58  
  
Канторова функция 45  
Канторово множество 25  
Кольцо множеств 12  
— —, порожденное полукольцом 30  
Конечная мера 35  
  
Лебегово продолжение меры 35, 38  
  
Мера 35, 38  
— Лебега 39  
— на кольце множеств 29  
Множества типа  $F_\sigma$ ,  $F_{\sigma\delta}$ ,  $G_\delta$ ,  $G_{\delta\sigma}$  19  
— имеющие одинаковую мощность 14  
Множество мощности континуума 14  
Модуль непрерывности функций в  $L_p$  68, 71  
Монотонная последовательность множеств 13  
  
Неопределенный интеграл Лебега 91  
Неравенство Гельдера 69  
— Коши — Буняковского 69  
— Минковского 69  
— треугольника 65, 69  
— Чебышева 57  
Неубывающая перестановка функции 45  
Нигде не плотное множество 19  
Нижний предел последовательности множеств 9  
Норма функции в  $L_p$  64

**Объединение множеств** 7  
**Открытое множество** 19  
**Пересечение множеств** 8  
**Подмножество** 7  
**Покрытие множеств** 19  
— — в смысле Витали 40  
**Полная вариация функции** 81  
**Полиота пространства**  $L_p$  66,  
70  
**Полный прообраз значений**  
функции 44  
**Полукольцо множеств** 28  
**Почти всюду** 43  
**Предел последовательности**  
множеств 9  
**Предельная точка множества**  
18  
**Производные числа функции**  
верхние, нижние, левые, правые 50, 82  
**Простая функция** 50  
**Пространство функций, интегрируемых в  $p$ -й степени** 64  
**Прямое произведение мер** 76  
— — множеств 74  
— — семейств множеств 74  
**Пустое множество** 7  
  
**Равноизмеримые функции** 45  
**Равные множества** 7  
**Разность множеств** 8  
**Расстояние между множествами** 19  
  
**Сепарабельность пространства**  
 $L_p$  67, 71  
**Симметрическая разность множеств** 8  
**Сингулярная функция** 82  
**Совершенное множество** 18  
**Существенная верхняя грань**  
значений функции 50  
**Существенно ограниченная**  
функция 50  
**Сходимость функций в метрике**  
(по норме)  $L_p$  64  
— — по мере 43  
**Счетно аддитивная функция**  
множеств 29  
**Счетное множество** 14

**Теорема Больцано — Вейерштрасса** 20  
— Гейне — Бореля 22  
— Егорова 48  
— Лебега 48, 61, 80, 88  
— Б. Леви 61  
— Лузина 49  
— Рисса 49  
— Фату 62  
— Фубини 77  
— Хелли 86, 100  
**Точка конденсации множества**  
18  
— Лебега функции 89  
— плотности множества 89

**Убывающая последовательность**  
множеств 9  
**Условие Липшица порядка  $\alpha$**   
81

**Фундаментальная относительно**  
сходимости по мере последовательность функций 47  
— в  $L$  последовательность  
функций 66  
**Функция с ограниченной вариацией** 81  
— скачков 85  
— Стеклова 73

**Характеристическая функция**  
множества 8

**Эквивалентные множества** 14

**C-свойство** Лузина 49

**ε-окрестность** точки 18

**μ-почти всюду** 43

**σ-аддитивная функция множеств** 29  
**σ-алгебра множеств** 28  
**σ-кольцо множеств** 28

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Элементы теории множеств . . . . .</b>	<b>7</b>
§ 1. Операции над множествами (7)   § 2. Мощность множеств (14)	
<b>Глава 2. Множества в евклидовых пространствах . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>Глава 3. Измеримые множества . . . . .</b>	<b>28</b>
§ 1. Мера на кольцах (28)   § 2. Лебегово продолжение меры (35)   § 3. Мера Лебега (39)	
<b>Глава 4. Измеримые функции . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>Глава 5. Интеграл Лебега . . . . .</b>	<b>50</b>
§ 1. Определение интеграла Лебега (50)   § 2. Основные свойства интеграла Лебега (54)   § 3. Пространства интегрируемых функций (64)   § 4. Произведения мер. Теорема Фубини (74)   § 5. Сравнение интегралов Римана и Лебега (78)	
<b>Глава 6. Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования . . . . .</b>	<b>81</b>
§ 1. Функции с ограниченной вариацией (81)   § 2. Абсолютно непрерывные функции (89)   § 3. Интеграл Римана — Стильеса (95)	
Ответы . . . . .	105
Литература . . . . .	108
Предметный указатель . . . . .	109

*Сергей Александрович Теляковский*

**Сборник задач по теории функций  
действительного переменного**

М., 1980 г., 112 стр.

Редакторы *К. И. Осколков, М. М. Горячая*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11455

Сдано в набор 02.07.79. Подписано к печати 04.01.80.  
Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>, тип. № 3. Литературная гарнитура.  
Высокая печать. Условн. печ. л. 5,88.  
Уч.-изд. л. 5,51. Тираж 26 000 экз. Заказ № 260.  
Цена книги 20 коп.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинград-  
ская типография № 2 имени Евгении Соколовой  
«Союзполиграфпрома» при Государственном комите-  
тете СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли.

198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29