

В.П. КОРЯВОВ

**МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
В ОБЩЕМ КУРСЕ
ФИЗИКИ**

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО
И МАГНЕТИЗМ**

**МОСКВА
«СТУДЕНТ»
2011**

УДК 536:539
ББК 22.317+22.36
К 66

Коряков В.П.

К 66 Методы решения задач в общем курсе физики. Электричество и магнетизм: Учеб. пособие / В.П. Коряков. – М., Студент, 2011. – 533 с.: ил.

ISBN 978-5-4363-0009-2

В учебном пособии подробно разобраны методы решения задач по курсу электричества и магнетизма. Задачи систематизированы по разделам, каждый из которых предваряется кратким изложением теоретического материала.

Для студентов технических вузов, а также преподавателей физики высших и средних учебных заведений.

УДК 536:539
ББК 22.317+22.36

ISBN 978-5-4363-0009-2

© ООО «ТИД «Студент», 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга продолжает рассмотрение методов решения задач в общем курсе физики, начатое в ранее вышедших книгах В.П. Корякова: Методы решения задач в общем курсе физики. Механика, 2007; Методы решения задач в общем курсе физики. Термодинамика и молекулярная физика, 2009. Ссылки на них в дальнейшем будут отмечаться 1 и 2. Здесь повторяем часть предисловия к вышедшим книгам.

Особенности преподавания физики в Московском физико-техническом институте (МФТИ) заключаются, во-первых, в значительности затрачиваемого времени (шесть семестров) и, во-вторых, в привлечении к преподаванию по совместительству сотрудников исследовательских физических институтов Российской академии наук и различных министерств, т. е. весьма квалифицированных специалистов.

Любая практическая деятельность физиков фактически сводится к решению конкретных задач. Понимание этого привело к тому, что и в процессе обучения, и при проверке знаний на экзаменах на кафедре общей физики МФТИ большое внимание уделяется умению решать задачи. Поэтому все экзамены включают письменные контрольные работы. О достаточной сложности предлагаемых задач свидетельствует то, что студентам на письменных экзаменах разрешается пользоваться учебниками, книгами, конспектами и другими учебными пособиями.

Придумывать новые задачи — обязательное требование к сотрудникам кафедры общей физики. О числе задач можно судить, например, по тому, что в первом семестре, посвященном изучению механики, надо иметь 20 задач (контрольная по первому заданию и экзаменационная работа по два варианта из 5 задач). Эта трудная работа (придумывание задач) проводится на кафедре более полувека. Накоплено много хороших задач. Практически исчерпаны все возможные варианты. Лучшие и показательные (представительные) задачи вошли в три тома сборника под редакцией В.А. Овчинкина. В пер-

вом томе (Сборник задач по общему курсу физики в трех частях / Под ред. В.А. Овчинкина. В 3 ч. Ч. 1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МФТИ, 2002) содержится 1060 задач по механике и 827 задач по термодинамике и молекулярной физике. Во втором томе (Сборник задач по общему курсу физики в трех частях / Под ред. В.А. Овчинкина. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика. — М.: Физматкнига, 2004) содержится 715 задач по электричеству и магнетизму и 627 задач по оптике.

В предлагаемой книге систематизированы и приведены методы решения задач по электричеству и магнетизму, содержащихся в упомянутом сборнике. Каждый из 12 тематических разделов начинается с краткого изложения основных теоретических результатов.

В отличие от имеющихся различных задачников с решениями здесь возможно впервые сделан акцент на изложении методов решения задач и соответствующей систематизации.

Предполагается, что основными читателями данной книги могут стать преподаватели и студенты физических специальностей университетов и институтов, а также преподаватели школ.

Более 40 лет автор имел возможность общаться с сотрудниками кафедры общей физики МФТИ и благодарен им за все полезное, что смог от них почерпнуть, а также благодарен профессору А.Д. Гладуну за поддержку работы, А.В. Гуденко за полезные замечания, сделанные им после детального ознакомления с рукописью книги. За помощь в издании книги автор выражает большую благодарность Д.П. Корякову.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Методы решений новых задач создаются на основе общих сведений о рассматриваемых явлениях и известных методах решения похожих задач.

Затруднения при решении задач следует преодолевать дополнительными усилиями, чтением учебников, беседой с однокурсниками, обсуждением на семинарских занятиях с преподавателями. Эта книга также может быть полезна, если самостоятельные упорные предварительные попытки найти решение не дают результата. Автор старался, чтобы книга не была решебником, а помогала бы освоить методы решения, проясняла бы трудные вопросы. Если человек не хочет научиться решать задачи, а стремится лишь к сдаче тетради с заданием, он найдет, откуда переписать решения, может быть и неправильные, и сделает это без настоящей пользы для себя. Автор надеется, что, воспользовавшись этой книгой, даже ленивый чему-нибудь научится.

В общем курсе физики электричество и магнетизм существенно отличаются от школьной программы.

Решение задач полезно проводить по следующему плану:

- 1) хорошо понять условие задачи, используя рисунки и дополнения их затем по ходу решения;
- 2) обдумать условие задачи и возможные пути и варианты решений;
- 3) используя нужные физические законы, выписать уравнения, и если они в векторном виде, то выбрать удобную систему координат и записать уравнения в проекциях;
- 4) выписать дополнительные условия, которые необходимы для решения задачи, и написать решение уравнений;
- 5) провести анализ результатов решения: по размерности, по правильности предельных значений полученных зависимостей (с учетом области применимости решения), по разумности порядков вычисленных величин (по грубым оценкам и здравому смыслу).

В данной книге автор не стремился доводить решения конкретных задач до численных результатов (за некоторым исключением).

Важно было проследить цепочки задач, попытаться их систематизировать и провести анализ различных вариантов. В скобках указываются номера задач из Сборника задач по общему курсу физики под ред. В.А. Овчинкина (Ч. 2. — М.: Изд-во МФТИ, 2004), в которых возможно применение излагаемых методов решения.

Наша цель — показать, как общие физические законы, которые будут кратко изложены, позволяют решить большое число задач.

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД И НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ДИПОЛЬ. ТЕОРЕМА ГАУССА

При изучении механики был рассмотрен закон всемирного тяготения (гравитации), определяющий силу взаимодействия между двумя точечными массами (см. 1, с. 135). Было введено поле тяготения, напряженность поля, экспериментально получена теорема Гаусса.

Опыты показывают, что между телами могут быть взаимодействия, значительно превышающие гравитационные, связанные с электрическими зарядами тел. Заряды на телах возникают в результате явления, называемого **электризацией** (разделение зарядов). В равных количествах появляются положительные и отрицательные заряды. Между телами с зарядами одинакового знака существует отталкивание, а между телами с зарядами разных знаков — притяжение. Электрические заряды изменяют свойства пространства, окружающего заряженное тело, создают электрическое поле, которое проявляет себя тем, что действует на заряженные тела. Заряды являются количественной мерой взаимодействия заряженных тел. Экспериментально получен **закон Кулона** для силы взаимодействия двух неподвижных точечных тел с зарядами q_1 и q_2 в зависимости от расстояния между ними r :

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.1)$$

Здесь векторы обозначены полужирным шрифтом: \mathbf{F} — сила, действующая на тело с зарядом q_2 ; \mathbf{r} — расстояние от тела с зарядом q_1 до тела с зарядом q_2 . Величина (\mathbf{r}/r) — единичный вектор в направлении \mathbf{r} , который определяет направление силы \mathbf{F} . Такое написание формулы (1.1) показывает, что величина силы обратно пропорциональна квадрату расстояния между заряженными телами малых (точечных) размеров. В этой формуле отсутствует влияние среды, окружающей тела, т. е. предполагается, что заряженные тела находятся в вакууме. Однако сразу отметим, что влияние воздуха на силы взаимодействия очень мало и им можно пренебречь.

Единицы измерения зарядов можно получить из (1.1). Используя системы СГС и Гаусса (расстояние в см, сила в динах) находим единицу заряда (СГСЭ ед. заряда). Исторически практической единицей заряда (в системе СИ) стал кулон (1 Кл = $3 \cdot 10^9$ СГСЭ ед. заряда). При этом закон Кулона (в системе СИ) имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.2)$$

Здесь электрическая постоянная (диэлектрическая постоянная вакуума)

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м},$$

где c — скорость света; сила измеряется в ньютонах, расстояние — в метрах; Φ — фарада.

В дальнейшем тексте для основных формул в системе Гаусса будут приведены их аналоги в системе СИ (в фигурных скобках).

Сравнение электростатических (кулоновских) F_k и гравитационных F_g сил можно сделать для частиц с известными зарядами и массами, например протона и электрона (№ 1.1). Из таблиц в соответствующих единицах измерения зарядов, масс и постоянной гравитации находим

$$\frac{F_k}{F_g} = \frac{q^2}{\gamma m^2};$$

для протона это $1,24 \cdot 10^{36}$, для электрона $4,17 \cdot 10^{47}$.

Для проверки зависимости (1.1) Кулон проводил **измерения периода колебаний** шеллаковой (не проводящей зарядов) стрелочки, на одном конце которой был прикреплен небольшой кружок из золотой фольги с зарядом q_1 , подвешенной на неупругой нити за центр масс, с моментом инерции I относительно оси, проходящей через центр масс в направлении нити. Колебания происходят из-за того, что на расстоянии h , которое значительно больше размера стрелочки, в плоскости колебаний находится точечный заряд q_2 противоположного знака относительно q_1 . Найдем зависимость периода колебаний T от расстояния h (№ 1.18). Считая, что колебания малы и фактически происходят в постоянном электрическом поле, получаем уравнение колебаний стрелки

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} = -q_1 q_2 l \frac{\phi}{h^2}.$$

Отсюда для периода имеем

$$T = 2\pi h \left(\frac{I}{q_1 q_2 l} \right)^{1/2}.$$

Заряженное тело меняет свойства окружающего его пространства — создает электрическое поле. Для неподвижного точечного тела с зарядом q_1 из (1.1) получаем для напряженности электростатического поля

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_2} = \frac{q_1 \mathbf{r}}{r^2 r}; \quad \left\{ \mathbf{E} = \frac{q_1 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right\}. \quad (1.3)$$

Такая сила будет действовать на точечное тело с единичным зарядом, называемое пробным заряженным телом. Реальное пробное тело должно иметь настолько малый заряд, чтобы не возникали существенные перераспределения зарядов на телах, создающих поле.

Для изображения полей удобно использовать линии, называемые **силовыми**, касательными к которым являются векторы напряженности поля. Направление линий совпадает с направлением вектора напряженности поля — от положительного к отрицательному заряду.

В декартовых координатах силовую линию определяют дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (1.4)$$

где dx , dy и dz — изменения декартовых координат вдоль силовой линии; E_x , E_y и E_z — декартовы компоненты вектора напряженности электрического поля.

Для вывода этих соотношений вводим элемент длины вдоль силовой линии $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$. Учитывая, что

$$\frac{dx}{ds} = \frac{E_x}{E}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{E_y}{E}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{E_z}{E},$$

выражаем ds/E и получаем (1.4).

Экспериментально установлено, что для сил взаимодействия заряженных тел выполняется **суперпозиция** (геометрическое сложение сил от разных заряженных тел).

Для примера найдем, какой заряд Q надо поместить в центре квадрата со стороной a , чтобы нулю была равна сила, действующая на каждый из зарядов q , находящихся в вершинах квадрата (№ 1.2).

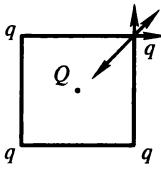


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показаны силы, действующие на один из зарядов в вершине квадрата от других зарядов. Из равенства геометрической суммы нулю получаем

$$\frac{Qq}{(a/\sqrt{2})^2} = \frac{q^2}{(a/\sqrt{2})^2} + \frac{q^2\sqrt{2}}{a^2}; \quad Q = q \frac{1+2\sqrt{2}}{4}.$$

Здесь уместно напомнить **теорему Иришоу** о том, что всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов неустойчива, если на них, кроме кулоновских сил притяжения и отталкивания, никакие другие силы не действуют. Убедиться в справедливости теоремы можно, рассматривая изменение сил при смещении зарядов. Простейший пример устойчивой системы: два тела с зарядами одного знака, подвешенные на ниточках в поле тяжести.

Силы взаимодействия между заряженными телами конечных размеров и напряженности полей от больших тел можно найти путем сложения (интегрирования) сил, действующих от бесконечно малых элементов тел.

Найдем напряженность поля на оси симметрии диска радиусом R , заряженного равномерно с поверхностной плотностью σ (№ 1.10). На рис. 1.2 показан диск и выделено колечко радиусом r и шириной dr . На элементе колечка площадью $rdrd\phi$, который можно считать точечным, находится заряд, равный $\sigma r dr d\phi$, который создает напряженность поля на расстоянии h от поверхности диска на оси симметрии

$$d^2 E = \sigma r dr d\phi \frac{dr}{h^2 + r^2}.$$

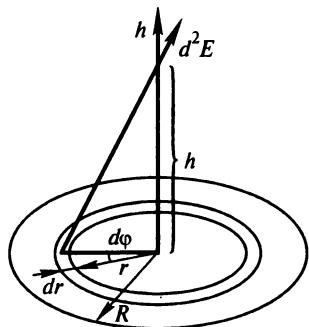


Рис. 1.2

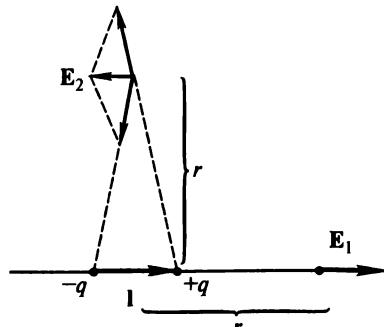


Рис. 1.3

Пользуясь симметрией относительно оси h , интегрируем по углу ϕ , учитывая, что сумма составляющих перпендикулярных оси h равна нулю, а складывать надо только составляющие поля вдоль оси h

$$dE = 2\pi\sigma r dr \frac{h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по r , получаем

$$E = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{h}{(h^2 + R^2)^{1/2}} \right). \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что в центре диска на его поверхности напряженность поля

$$E = 2\pi\sigma; \quad \left\{ E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right\}. \quad (1.6)$$

Важным примером суперпозиции является сложение полей от двух равных по величине зарядов противоположных знаков на расстояниях, значительно превосходящих расстояние между зарядами. Система зарядов в таком случае называется **диполем**. **Моментом диполя** p называется произведение абсолютной величины зарядов q на вектор l — расстояние от заряда $-q$ до заряда $+q$. На рис. 1.3 показаны два заряда на расстоянии l . Напряженность поля E_1 в направлении $p = ql$ на расстоянии r

$$E_1 = \frac{q}{(r - l/2)^2} - \frac{q}{(r + l/2)^2} = q \frac{(r + l/2)^2 - (r - l/2)^2}{(r - l/2)^2 (r + l/2)^2} \approx 2rl \frac{q}{r^4} = 2 \frac{p}{r^3}.$$

В векторном виде

$$\mathbf{E}_1 = 2 \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.7)$$

Напряженность поля в направлении, перпендикулярном \mathbf{p} :

$$E_2 = \frac{q}{r^2 + (l/2)^2} \frac{l}{(r^2 + (l/2)^2)^{1/2}} \approx \frac{ql}{r^3} = \frac{p}{r^3}.$$

В векторном виде

$$\mathbf{E}_2 = - \frac{\mathbf{p}}{r^3}. \quad (1.8)$$

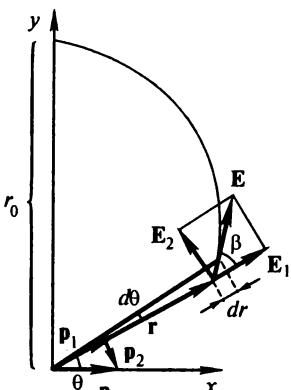


Рис. 1.4

Отметим, что расстояние r отсчитывается от середины расстояния l . Но поскольку $r \gg l$, его можно отсчитывать от любой точки на l . Воспользуемся этим для нахождения поля по любому направлению. На рис. 1.4 поле от диполя p ищется в некотором направлении, заданном вектором r . Представляем p в виде суммы двух векторов p_1 в направлении r и p_2 в направлении, перпендикулярном r . Используя полученные соотношения (1.7) и (1.8), имеем

$$E_1 = 2 \frac{p_1}{r^3}; \quad E_2 = -\frac{p_2}{r^3}.$$

Так как

$$p = p_1 + p_2 \quad \text{и} \quad p_1 = \left(\frac{pr}{r} \right) \frac{r}{r},$$

получаем

$$E = E_1 + E_2 = \frac{2p_1 - p_2}{r^3} = \frac{3p_1 - p}{r^3}.$$

Окончательно (№ 1.3)

$$E = 3(pr) \frac{r}{r^5} - \frac{p}{r^3}; \quad \left\{ E = \frac{3(pr)r/r^5 - p/r^3}{4\pi\epsilon_0} \right\}. \quad (1.9)$$

Найдем уравнение силовых линий точечного диполя в полярной системе координат (№ 1.4). Из полученных ранее соотношений и приведенных на рис. 1.4 изображений векторов и углов можно получить

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2} \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta.$$

Проекцию элемента силовой линии, направление которого совпадает с направлением вектора E , на направление, перпендикулярное вектору r , можно записать следующим образом:

$$rd\theta = \frac{1}{2} dr \operatorname{tg} \theta.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем для силовой линии

$$r = r_0 \sin^2 \theta,$$

где r_0 — расстояние до силовой линии в направлении перпендикуляра к вектору момента диполя (при $\theta = \pi/2$).

На рис. 1.5 показана система четырех зарядов (двух положительных $+q$ и двух отрицательных $-q$, расположенных в вершинах квадрата со стороной a). Поле такой системы на расстояниях $r \gg a$ называется полем квадруполя. Используя (1.9) и разлагая $(1/r_2^3 - 1/r_1^3)$ в ряд Тейлора, получаем для

напряженности поля в точке A (№ 1.6)

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{p}}{r_2^3} - \frac{\mathbf{p}}{r_1^3} \approx \mathbf{p} \frac{d(1/r^3)}{dr} (r_2 - r_1) = -3\mathbf{p} \frac{a}{r^4},$$

где $\mathbf{p} = qa$.

Сила, действующая на заряд q , находящийся в поле диполя \mathbf{p} , определяется (1.9). В частности, на заряд на расстоянии L по направлению диполя (№ 1.7), используя (1.7),

$$\mathbf{F} = \frac{2q\mathbf{p}}{L^3}.$$

Для положительного заряда получаем силу отталкивания, для отрицательного — притяжения. Отметим, что при взаимодействии зарядов сила уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния, при взаимодействии заряда с диполем — обратно пропорционально кубу расстояния, а при взаимодействии с квадрупольем — обратно пропорционально четвертой степени расстояния.

Поле диполя симметрично относительно его оси. Найдем направление вектора \mathbf{r} (угол θ с осью диполя), для которого вектор напряженности поля будет **перпендикулен** направлению оси диполя. Это условие выполняется, если скалярное произведение $\mathbf{E}\mathbf{p} = 0$. Получаем

$$\mathbf{E}\mathbf{p} = 3(\mathbf{p}\mathbf{r}) \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}\mathbf{p}}{r^3} = 3p^2 r^2 \frac{\cos^2 \theta}{r^5} - \frac{p^2}{r^3} = 0.$$

Отсюда находим

$$\cos \theta = \pm \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}.$$

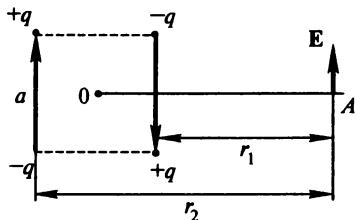


Рис. 1.5

Следовательно, возможны круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг оси точечного электрического диполя на любом расстоянии от него в плоскости, перпендикулярной его оси (№ 1.8). Знак минус для положительного заряда, знак плюс для отрицательного.

Найдем силу взаимодействия F двух точечных диполей, если их дипольные моменты \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между диполями равно L (№ 1.9). Представим $p_2 = ql$ и найдем силу, используя (1.7):

$$F = 2p_1 \frac{q}{(L+l)^3} - 2p_1 \frac{q}{L^3} \approx -\frac{6p_1 p_2}{L^4}. \quad (1.10)$$

Диполи, направленные в одну и ту же сторону, притягиваются, а в противоположные — отталкиваются.

В постоянном по величине и направлению электрическом поле силы, действующие на диполь, представляют пару сил. Они не вызывают поступательное движение, а только вращение. При отклонении диполя на угол α от направления поля **момент сил** (удобно вычислять относительно положения отрицательного заряда $-q$) $M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$. В векторном виде

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\mathbf{E}].$$

В изменяющемся по пространству электрическом поле возникает **сила**, вызывающая поступательное движение диполя:

$$F = q\Delta E = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha.$$

Здесь поле направлено по оси x . Если диполь направлен по полю, то

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Из суперпозиции и (1.3) можно получить **теорему Гаусса**. Потоком вектора называется скалярное произведение этого вектора на вектор площадки (единичный вектор нормали на величину площадки), через которую вектор как бы протекает. Поток через площадки конечной величины в случае меняющегося по пространству вектора надо вычислять интегрированием по бесконечно малым площадкам.

Используя выражение (1.3), для потока вектора напряженности электрического поля от точечной массы с зарядом q_1 (точечного заряда) через замкнутую поверхность, получаем

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint E dS_E = \oint q_1 \frac{dS_E}{r^2} = \oint q_1 d\Omega = 4\pi q_1,$$

где dS_E — проекция площадки поверхности на направление поля; $d\Omega$ — телесный угол из точечного тела на бесконечно малую площадку поверхности.

Используя суперпозицию, для произвольного заряженного тела с некоторым распределением зарядов получаем **теорему Гаусса** для суммы зарядов q внутри замкнутой поверхности:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q; \quad \left\{ \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \right\}. \quad (1.12)$$

Теорема Гаусса может быть использована для вычисления напряженности поля в тех случаях, когда легко вычислить интеграл. Например, в случае симметрии поля: сферической, цилиндрической или плоской.

В случае **сферической симметрии** распределения заряда напряженность на одном и том же расстоянии r от центра симметрии одинакова по абсолютной величине для всех направлений, и для переменной плотности заряда ρ получаем

$$E(r) 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr,$$

откуда

$$E(r) = \frac{1}{r^2} 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr. \quad (1.13)$$

Для **постоянной плотности** имеем линейную зависимость

$$E(r) = \frac{4}{3} \pi \rho r.$$

В векторном виде

$$\mathbf{E}(r) = \frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{r}; \quad \left\{ \mathbf{E}(r) = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0} \right\}. \quad (1.14)$$

Если плотность отлична от нуля только до некоторого R , то для $r > R$ из (1.13) следует

$$\mathbf{E}(r) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.15)$$

Это совпадает с выражением (1.3) для точечной массы. Отсюда для **взаимодействия** двух сферически симметричных распределений зарядов получаем силу взаимодействия такую же, как для точечных

заряженных тел. Логика такая: поле первого заряда такое же, как от точечного, значит, сила взаимодействия та же, что для точечного и второго зарядов. Но силу со стороны второго заряда на точечное заряженное тело вычисляем по полю от второго, которое такое же, как для точечного, равного заряду второго тела.

На рис. 1.6 показано изменение напряженности электрического поля E тела радиусом R с постоянной плотностью заряда.

В металлических телах есть электрические заряды, которые могут свободно перемещаться. Под действием электрических полей в них может происходить перераспределение зарядов — поляризация. Заряды, помещенные на металлический шарик, располагаются равномерно (при отсутствии влияния каких-либо других зарядов или полей) на его поверхности. Внутри металлического шарика (как и любого проводящего тела) электрическое поле отсутствует. Если вокруг такого металлического шарика (радиусом R_1), имеющего заряд Q , концентрически расположить незаряженную металлическую оболочку конечной толщины (внутренний радиус R_2 , наружный R_3), то поле будет меняться так, как показано на рис. 1.7. Напряженность поля падает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра шарика. Внутри металлической оболочки поле отсутствует. На поверхностях оболочки появляются заряды, по абсолютной величине равные заряду шарика (на внешней с тем же знаком, а на внутренней с противоположным). Зависимость напряженности от расстояния за оболочкой продолжает ту же зависимость, которая была перед ней.

Поле вокруг равномерно заряженной сферической поверхности (с поверхностной плотностью заряда σ) определяется (1.15). На внешней стороне поверхности $E = 4\pi\sigma$, на внутренней — поле равно нулю. Найдем поле E_1 , которое будет в центре небольшого отверстия, вырезанного в этой поверхности (№ 1.12). Воспользуемся принципом суперпозиции: сумма E_1 и поля в центре площадки, которую затем удаляют, определяемая (1.6), должна давать соответствующие поля на заряженной сферической поверхности (внутри и снаружи). Следовательно, $E_1 = 2\pi\sigma$ и направлено от центра сферы.

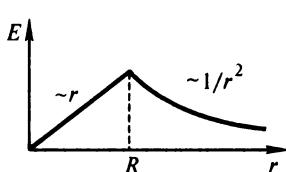


Рис. 1.6

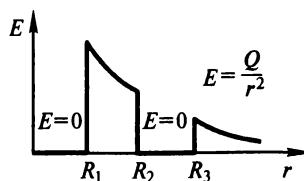


Рис. 1.7

Поле вокруг цилиндрического тела с погонной плотностью заряда q_L из (1.12) получаем

$$E = 2 \frac{q_L}{r}; \quad \left\{ E = \frac{q_L}{2\pi\epsilon_0 r} \right\}. \quad (1.16)$$

Найдем напряженность поля от двух бесконечно длинных параллельных проводов, расстояние между которыми l , с линейной плотностью зарядов $+q_L$ и $-q_L$, на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода, в точке, лежащей в плоскости симметрии (№ 1.14). На рис. 1.8 показано расположение проводов в плоскости, перпендикулярной плоскости симметрии. Используя (1.16), получаем

$$E = 8 \frac{q_L l}{l^2 + 4h^2}.$$

Поле от плоскости с плотностью заряда на поверхности σ

$$E = 2\pi\sigma; \quad \left\{ E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right\}. \quad (1.17)$$

Отметим, что поле не меняется с расстоянием от поверхности и совпадает с результатом для точки в центре диска (1.6) и для диска при $R \rightarrow \infty$.

Для проводящей (например, металлической) пластиинки, на которой плотность заряда σ (по $\sigma/2$ на каждой поверхности), поля с каждой стороны определяются (1.17) (внутри направлены в противоположные стороны и дают нуль). Изменение поля (с учетом знака) при переходе через пластиинку

$$\Delta E = 4\pi\sigma; \quad \left\{ \Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right\}. \quad (1.18)$$

Такое же изменение (скакок) нормальной компоненты поля будет при переходе через любую заряженную поверхность.

Электрическое поле вблизи поверхности Земли (на площадке, характерный размер которой значительно меньше радиуса Земли) можно считать плоским. Поэтому при известном изменении напряженности поля ΔE с изменением высоты h для средней плотности заряда в атмосфере ρ из теоремы Гаусса (1.12) получаем (№ 1.20)

$$\rho = \frac{\Delta E}{4\pi h}.$$

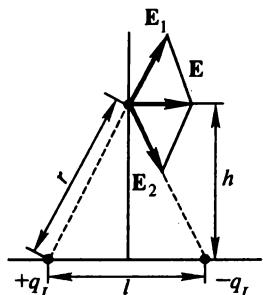


Рис. 1.8

При $\Delta E = 75$ В/м и $h = 1500$ м получаем $\rho = 1,33 \cdot 10^{-9}$ ед. СГСЭ. Измерения показали, что земное электрическое поле меняется во времени. Кроме регулярных (суточных и годичных) существуют и нерегулярные изменения. В среднем напряженность электрического поля у поверхности Земли равна 130 В/м. Заряд Земли отрицательный и равен $6 \cdot 10^5$ Кл. Так как электрическое поле направлено к поверхности Земли, отрицательные заряды будут двигаться вверх, и в атмосфере появится положительный заряд ($\rho > 0$).

Рассмотрим две бесконечные плоскопараллельные металлические пластины, помещенные в вакууме параллельно друг другу и имеющие одна на единицу площади полный заряд (т. е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластинки) q_1 , а другая — q_2 (№ 1.13). На рис. 1.9 показаны пластины и соответствующие параметры (E — напряженности поля, σ — плотности зарядов на поверхностях). Складывая поля от плоских зарядов, которые определяются (1.17), с учетом их направлений внутри металлических пластин, где они должны быть равны нулю, получаем

$$2\pi(\sigma'_1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma'_2) = 0; \quad 2\pi(\sigma'_1 + \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma'_2) = 0.$$

Складывая и вычитая эти соотношения, находим

$$\sigma'_1 = \sigma'_2; \quad \sigma_1 = -\sigma_2.$$

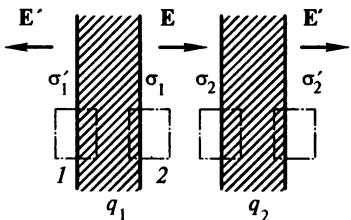
По условию

$$q_1 = \sigma'_1 + \sigma_1; \quad q_2 = \sigma_2 + \sigma'_2.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{q_1 - q_2}{2}; \quad \sigma'_1 = \sigma'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2}.$$

Используя эти результаты и теорему Гаусса (1.12), получаем из потоков через поверхности 1 и 2



$$E = 4\pi\sigma_1 = 2\pi(q_1 - q_2);$$

$$E'_1 = E'_2 = 4\pi\sigma'_1 = 2\pi(q_1 + q_2).$$

Конструкция из двух проводящих пластин, на которых можно поместить заряды, называется **плоским конденсатором**.

Рис. 1.9

Воспользуемся теоремой Гаусса (1.12) для нахождения напряженности поля внутри и вне плоского слоя толщиной l с равномерным распределением положительных зарядов с объемной плотностью ρ (№ 1.15). На рис. 1.10 в плоскости, перпендикулярной слою, показаны поверхности, через которые вычисляются потоки вектора напряженности. Так как вектор напряженности имеет составляющую только в направлении оси x и существует симметрия относительно средней плоскости ($x = 0$), получаем для потоков через поверхность с единичной площадью: для поверхности 1 имеем $2E = 4\pi\rho 2x$, для поверхности 2 — $-2E_1 = 4\pi\rho l$. Откуда находим линейное возрастание напряженности внутри слоя $E = 4\pi\rho x$ и постоянную напряженность поля вне $E_1 = 2\pi\rho l$.

Теорема Гаусса является интегральным соотношением. В некоторых случаях удобнее иметь дифференциальные соотношения. Для этого надо рассмотреть бесконечно малый объем. На рис. 1.11 в декартовых координатах показан бесконечно малый объем $dxdydz$. Чтобы не загромождать рисунок, поток вектора напряженности поля \mathbf{E} показан только вдоль одной координаты x (проекция вектора на эту ось E_x). По другим координатам потоки подсчитываются аналогичным образом. Обозначая плотность заряда ρ , из (1.12) получаем

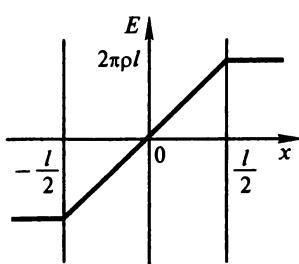
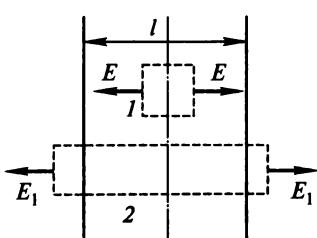


Рис. 1.10

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q = \\ = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz dx dy = \\ = \operatorname{div} \mathbf{E} dx dy dz = 4\pi \rho dx dy dz.$$

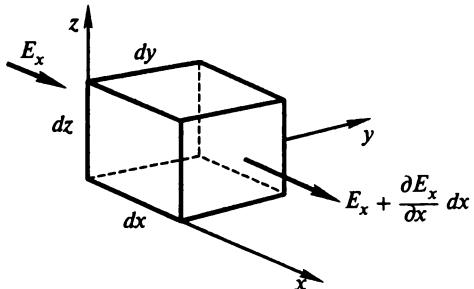


Рис. 1.11

Здесь введено обозначение div , называемое дивергенцией (расходностью) вектора \mathbf{E} ,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\oint \mathbf{E} d\mathbf{S}}{\Delta V} \right).$$

Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальном виде

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad \left\{ \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right\}. \quad (1.19)$$

В декартовых координатах, как это получено ранее,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.20)$$

В случае цилиндрической симметрии относительно оси z , изображенном на рис. 1.12, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{(E_r + \partial E_r / \partial r dr)(r + dr) d\phi dz - E_r r d\phi dz}{r dr d\phi dz} = \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В случае сферической симметрии

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{(E_r + \partial E_r / \partial r dr) 4\pi(r + dr)^2 - E_r 4\pi r^2}{4\pi r^2 dr} = \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + 2 \frac{E_r}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

При равномерном распределении заряда (плотность ρ) в бесконечной плоской пластине толщиной $2h$ напряженность поля можно вычислить, пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальном виде (№ 1.19). Из (1.19) и (1.20) внутри пластины

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho \quad \text{и} \quad E = 4\pi\rho x + C.$$

Постоянная интегрирования C определяется из условия симметрии задачи: при $x = 0$ напряженность поля равна нулю и, следовательно, $C = 0$. Вне пластины заряда нет

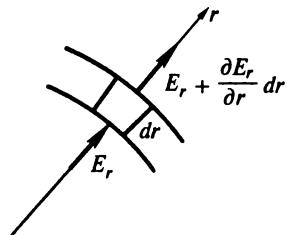


Рис. 1.12

$(\rho = 0)$ и из тех же соотношений напряженность поля постоянна. Ее значение определяется условием на границе пластины, где $E = 4\pi\rho h$.

Для равномерно заряженного шара из интегральной формулы Гаусса (1.12) была найдена напряженность поля (1.14). Можно также воспользоваться теоремой Гаусса в дифференциальном виде (№ 1.19). Из (1.19) и (1.22) получаем

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r + \frac{C}{r^2}.$$

Постоянная интегрирования C внутри шара равна нулю, так как напряженность поля в центре шара конечна, как это ясно из физических соображений.

Вне шара заряда нет. Поэтому $E = C/r^2$. Постоянная интегрирования C определяется по значению поля на границе шара.

Найдем, как должна меняться плотность заряда по радиусу, чтобы напряженность поля была направлена по радиусу и имела постоянную величину E_0 (№ 1.21). Из (1.19) и (1.22)

$$\rho = \frac{E_0}{2\pi r}.$$

Если внутри равномерно заряженного шара имеется сферическая полость, в которой заряд отсутствует, то поле внутри такой полости можно найти из суперпозиции решений для равномерно заряженного шара и противоположно заряженного с той же плотностью шарика, наложенного на полость. Используя (1.14), для поля в точке A (рис. 1.13) находим (№ 1.22)

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{4}{3}\pi\rho l; \quad \left\{ \mathbf{E} = \frac{\rho l}{3\epsilon_0} \right\}. \quad (1.23)$$

Рассмотрим суперпозицию полей напряженности от двух однородных шаровых зарядов противоположных знаков и одинаковой плотности, центры которых смешены на расстояние a (рис. 1.14).

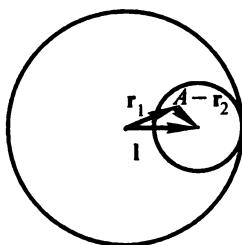


Рис. 1.13

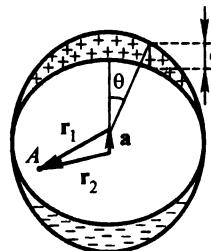


Рис. 1.14

Для каждого из шаров поле определяется (1.14). В области их пересечения (в некоторой точке A) для напряженности поля имеем

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{4}{3}\pi\rho(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{a}. \quad (1.24)$$

Таким образом, в области пересечения, где суммарная плотность заряда равна нулю, поле постоянно и направлено противоположно вектору \mathbf{a} (из центра отрицательно заряженного шара к центру положительно заряженного шара). Если расстояние между центрами шаров мало по сравнению с их радиусами ($a \ll R$), то нескомпенсированные заряды распределены фактически по поверхности сферы. Так как поверхности шаров в направлении вектора \mathbf{a} сдвинуты на a , то расстояние между ними по направлению θ равно $a \cos \theta$. Плотность заряда на единицу поверхности

$$\sigma = \rho a \cos \theta.$$

Отметим, что при стремлении a к нулю произведение ρa должно оставаться конечным. Выражая ρa из (1.24), находим, что для получения внутри сферической поверхности поля E_0 распределение плотности заряда на ней должно быть (№ 1.23)

$$\sigma = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \theta; \quad \{\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta\}. \quad (1.25)$$

Поле вне однородно заряженного шара определяется суммарным зарядом

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Два противоположно заряженных шара на расстояниях, значительно превосходящих расстояние между их центрами, создают поле в области пересечения, соответствующее диполю с моментом $\mathbf{p} = Q\mathbf{a}$. Из (1.24) находим $\mathbf{p} = -R^3\mathbf{E}_0$. Постоянное поле внутри шара согласуется с полем диполя при $r = R$ с учетом скачка поля, связанного с зарядом (1.18).

На границе проводящего тела напряженность электростатического поля может быть направлена только по нормали к границе. В противном случае возникает движение и перераспределение зарядов.

На границе проводящего шара (радиусом R), находящегося в постоянном электрическом поле \mathbf{E}_0 , вектор напряженности поля \mathbf{E}_c направлен по нормали к границе (поверхности), т. е. касательная компонента равна нулю. Попробуем удовлетворить это условие с помощью диполя \mathbf{p} , помещенного в центре шара. Обозначая напряжен-

нность поля от диполя \mathbf{E}_d , получаем, что суммарное поле $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_d$ при $r = R$ должно иметь только радиальную компоненту. Векторное произведение этого поля на \mathbf{R} должно быть равно нулю. Это позволяет найти величину p . Учитывая, что в выражении (1.9) остается только второй член, имеем

$$[\mathbf{E}_c \mathbf{R}] = [\mathbf{E}_0 \mathbf{R}] - \left[\frac{\mathbf{p}}{R^3} \mathbf{R} \right] = \left[\left(\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \right) \mathbf{R} \right] = 0.$$

Откуда

$$\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0; \quad \{ \mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0 \}. \quad (1.26)$$

Распределение зарядов по поверхности проводящего шара, помещенного в постоянное поле с напряженностью E_0 , определяется (1.24) и (1.25), так как в проводнике поле внутри должно быть равно нулю, т. е. распределение зарядов должно создать напряженность постоянную и противоположную напряженности внешнего поля E_0 .

Напряженность поля вне проводящего шара определяется суммой напряженности внешнего поля \mathbf{E}_0 , в которое он помещен, и напряженности поля диполя, возникающего на шаре благодаря поляризации, $\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0$.

Поле вне шара

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + 3R^3 (\mathbf{E}_0 \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - R^3 \frac{\mathbf{E}_0}{r^3}. \quad (1.27)$$

Напряженность поля на поверхности шара

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = 3E_0 \cos \theta \frac{\mathbf{R}}{R}. \quad (1.28)$$

Видно, что на поверхности проводящего шара напряженность поля всегда нормальна к поверхности и на оси симметрии ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$) равна $3E_0$, а при $\theta = \pi/2$ равна нулю (№ 1.26). Направление, при котором напряженность поля по абсолютной величине равна E_0 (№ 1.25), определяется $\cos \theta = \pm 1/3$, а $2E_0$ — соответственно $\cos \theta = \pm 2/3$.

Найдем точки пространства, в которых поле равно $2E_0$ (№ 1.27). Из (1.27)

$$\mathbf{E}_0 = 3R^3 (\mathbf{E}_0 \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - R^3 \frac{\mathbf{E}_0}{r^3}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}_0 \left(1 + \frac{R^3}{r^3} \right) = 3R^3 (\mathbf{E}_0 \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5}.$$

Отсюда направление \mathbf{r} , для которого это условие выполняется, совпадает с направлением \mathbf{E}_0 . Проведя вычисления, находим $r = R(2)^{1/3}$.

Аналогичным образом найдем точки, в которых поле равно $\mathbf{E}/3$ (№ 1.27). Получаем

$$\mathbf{E}_0 \left(\frac{R^3}{r^3} - \frac{2}{3} \right) = 3R^3 (\mathbf{E}_0 \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5}.$$

Если предположить, что \mathbf{r} направлено по \mathbf{E}_0 , то получаем $r = -R(2)^{1/3}$. Так как в случае сферической симметрии r не может быть отрицательным, для удовлетворения уравнения используем $\mathbf{E}_0 \mathbf{r} = 0$. В этом случае $r = R(3/2)^{1/3}$. Следовательно, искомая напряженность поля будет на окружности с радиусом $r = R(3/2)^{1/3}$ в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{E}_0 , проходящей через центр шара.

Найдем величину и направление силы взаимодействия между двумя незаряженными проводящими сферами радиусом R , помещенными в однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 , направленное параллельно линии, соединяющей центры сфер, расстояние между которыми $r \gg R$ (№ 1.29). Действие поля на проводящий шар, как получено ранее, приводит к поляризации — возникновению дипольного момента $\mathbf{p} = R^3 \mathbf{E}_0$. Постоянное по величине и направлению поле на диполи не действует. Однаково направленные диполи, как показано ранее (1.10), притягиваются с силой, которую можно также найти через градиент поля диполя (1.11)

$$F = p \frac{\partial E}{\partial r} = -6 \frac{p^2}{r^4} = -6 E_0^2 \frac{R^6}{r^4}. \quad (1.29)$$

Для сфер, находящихся в поле, перпендикулярном к линии, соединяющей их центры (№ 1.30), как следует из (1.8) и (1.11), происходит отталкивание с силой

$$F = p \frac{\partial E}{\partial r} = 3 \frac{p^2}{r^4} = 3 E_0^2 \frac{R^6}{r^4}. \quad (1.30)$$

Поле внутри равномерно заряженного (с объемной плотностью ρ) бесконечного цилиндра находим с помощью (1.12)

$$\mathbf{E} = 2\pi\rho \mathbf{r}; \quad \left\{ \mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{2\epsilon_0} \right\}. \quad (1.31)$$

Это линейная зависимость, как и (1.14), но с другим коэффициентом. Для двух параллельных цилиндров с зарядами противопо-

ложных знаков в области перекрытия зарядов получаем постоянную напряженность поля

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2\pi\rho(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -2\pi\rho\mathbf{a}, \quad (1.32)$$

где \mathbf{a} — расстояние между осями симметрии цилиндров. Используя рис. 1.14, можем найти необходимое распределение плотности заряда по поверхности цилиндра, чтобы получить постоянную напряженность поля E_0 внутри цилиндра

$$\sigma = \rho a \cos \theta = \frac{E_0}{2\pi} \cos \theta; \quad \{\sigma = \rho a \cos \theta = 2\epsilon_0 E_0 \cos \theta\}. \quad (1.33)$$

Если бесконечно длинный проводящий цилиндр помещен в постоянное электрическое поле, перпендикулярное оси цилиндра, с напряженностью E , то для отсутствия поля в проводящем цилиндре на его поверхности должно быть распределение (1.33) (№ 1.24). Отметим, что поле на поверхности цилиндра в плоскости симметрии ($\theta = 0$) увеличивается до $2E$, а при $\theta = \pi/2$ равно нулю. Силовые линии подходят по нормали к поверхности цилиндра.

По аналогии с диполем можно рассмотреть систему двух разноименно заряженных (с одинаковым абсолютным значением заряда на единицу длины) бесконечных прямолинейных нитей, находящихся на очень близком расстоянии. В соответствии с (1.12) и (1.16), обозначая заряд на единицу длины нити χ , имеем для напряженности поля $E = 2\chi/r$. Если нити находятся на расстоянии l , то можно ввести вектор $\mathbf{p} = \chi\mathbf{l}$, направленный от отрицательно заряженной к положительно заряженной нити и являющийся аналогом дипольного момента. Используя рис. 1.3 вместо (1.7), получаем

$$\mathbf{E}_1 = 2 \frac{\mathbf{p}}{r^2}. \quad (1.34)$$

Вместо (1.8)

$$\mathbf{E}_2 = -2 \frac{\mathbf{p}}{r^2}. \quad (1.35)$$

Используя рис. 1.4, для произвольного угла θ находим поле «плоского» диполя

$$\mathbf{E} = 4(\mathbf{pr}) \frac{\mathbf{r}}{r^4} - 2 \frac{\mathbf{p}}{r^2}. \quad (1.36)$$

Если в безграничном плоском слое толщиной $2h$ объемная плотность заряда ρ изменяется по закону $\rho = \rho_0 x/h$ ($-h \leq x \leq h$), где x —

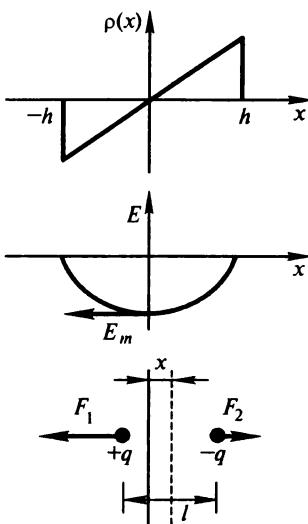


Рис. 1.15

ось, перпендикулярная плоскости слоя (рис. 1.15), то напряженность поля внутри слоя можно найти, воспользовавшись (1.19) и (1.20):

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho \frac{x}{h}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$E(x) = 2\pi\rho_0 \frac{x^2}{h} + C.$$

Постоянная C определяется из условия, что вне слоя, как это следует из сложения полей от всех элементов слоев (от положительных зарядов — в положительном направлении, от отрицательных зарядов — в отрицательном направлении), поле равно нулю. Таким образом,

$$E(x) = 2\pi\rho_0 \frac{x^2 - h^2}{h}.$$

Поле внутри слоя направлено противоположно оси x (см. рис. 1.15). Если внутри слоя имеется тонкий канал вдоль оси x , то на диполь, помещенный внутри канала в точке $x = 0$ и направленный по полю, будет действовать при его смещении на x возвращающая сила. Найдем период малых колебаний диполя массой m (№ 1.16). Для диполя с дипольным моментом $p = ql$ при смещении его середины на $x < l$ получаем возвращающую силу

$$F = q2\pi \frac{\rho_0}{h} \left\{ \left[\left(\frac{l}{2} - x \right)^2 - h^2 \right] - \left[\left(\frac{l}{2} + x \right)^2 - h^2 \right] \right\} = -4\pi\rho_0 ql \frac{x}{h}.$$

Для получения периода колебаний диполя можно было возвращающую силу находить с помощью (1.11), (1.19) и (1.20)

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x} = p4\pi\rho = p4\pi\rho_0 \frac{x}{h}.$$

Отметим еще раз, что при получающемся поле для существования колебаний диполь должен быть направлен в сторону отрицательных иксов.

Из уравнения колебаний

$$\frac{md^2x}{dt^2} = F$$

находим период колебаний

$$T = \left(\frac{\pi h}{\rho_0 p} \right)^{1/2}.$$

Для объяснения электромагнитного излучения из атомов Томсоном была предложена модель атома: в положительном заряде, распределенном в объеме атома (радиусом R), находится отрицательная частица — электрон. Найдем распределение плотности положительного заряда в случае сферической симметрии для обеспечения гармонических колебаний электронов в поле положительного заряда (№ 1.17). Обозначая массу электрона m и заряд e , для гармонических колебаний по радиусу атома имеем

$$\frac{md^2r}{dt^2} = -kr.$$

Частота колебаний

$$\omega = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2}.$$

Возвращающая сила

$$kr = eE(r). \quad (1.37)$$

Распределение заряда определяем из (1.19) и (1.22) и приведенной зависимости, обеспечивающей гармонические колебания (1.37),

$$4\pi\rho = \frac{\partial E}{\partial r} + 2\frac{E}{r} = 3\frac{k}{e}.$$

Из нейтральности атома следует

$$e = \int_0^R 4\pi\rho r^2 dr = k \frac{R^3}{e} \quad \text{и} \quad k = \frac{e^2}{R^3}.$$

Таким образом, плотность зарядов должна быть постоянной и равной

$$\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}.$$

2. ПОТЕНЦИАЛ. МЕТОД ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При изучении механики были введены понятия «работа» и «потенциальная энергия». Работа — это скалярное произведение силы на перемещение (работу совершает только сила, направленная по перемещению)

$$dA = \mathbf{F} d\mathbf{l} = F d\mathbf{l} \cos \theta = F dr, \quad (2.1)$$

где dr — проекция перемещения $d\mathbf{l}$ на направление силы \mathbf{F} . Кулоновские силы, так же как и гравитационные, зависят только от координат. Работа в поле сил (2.1) связана с перемещением точечного заряда q_2 в поле неподвижного точечного заряда q_1 из точки 1 в точку 2, которые определяются расстояниями r_1 и r_2 от заряда q_1 ,

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} q_1 q_2 \frac{dr}{r^2} = q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = (W_1 - W_2). \quad (2.2)$$

Силы, зависящие только от координат, называются консервативными, или потенциальными. Работа не зависит от формы пути, и по замкнутому контуру она равна нулю. Величина W называется потенциальной энергией. Для малых перемещений

$$dA = -dW. \quad (2.3)$$

Рассмотрим две одинаковые и одинаково заряженные капли несжимаемой проводящей жидкости, находящиеся на большом (бесконечном) расстоянии друг от друга. Заряд, радиус и масса каждой капли равны соответственно q , r и m . Найдем, какую минимальную скорость V_0 вдоль прямой, соединяющей их центры, надо сообщить каждой капле, чтобы они стали двигаться навстречу друг другу и при столкновении соединились в одну, не учитывая поверхностное натяжение и колебания формы (№ 2.1). Когда капли соприкоснутся, их потенциальная энергия достигнет величины

$$W_1 = \frac{2q^2}{2r}.$$

При слиянии их потенциальная энергия становится равной

$$W_2 = \frac{(2q)^2}{r_1},$$

где радиус r_1 определяется из условия несжимаемости жидкости, т. е. сохранения объема $r_1^3 = 2r^3$. Увеличение потенциальной энергии происходит за счет имевшейся при соприкосновении капель кинетической энергии

$$W_2 - W_1 = \frac{2mV_1^2}{2}.$$

В результате

$$\frac{2mV_0^2}{2} = \frac{2mV_1^2}{2} + W_1 = W_2 = q^2 \frac{2^{5/3}}{mr}.$$

Отсюда находим V_0 .

Для характеристики поля электрического заряда, кроме введенной ранее напряженности поля (1.3), вводится **потенциал**. Это работа, которую совершает поле при удалении из данной точки на бесконечно большое расстояние единичного точечного (пробного) заряда. Из (2.2) находим изменение потенциала с расстоянием от точечного заряда q

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}; \quad \left\{ \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right\}. \quad (2.4)$$

Потенциал электрического поля можно определить и как работу внешней силы (противоположной кулоновской) по перемещению единичного пробного заряда из бесконечности, где поле отсутствует, в данную точку поля.

Из суперпозиции полей следует сложение потенциалов в точке на расстояниях r_i от точечных зарядов q_i :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (2.5)$$

Связь потенциала с напряженностью поля находим из (2.1)

$$d\varphi = -\mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (2.6)$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_1^2 E_l dl.$$

В соответствии с (2.4) и потенциальностью поля получаем для замкнутой траектории в электростатике

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, циркуляция вектора напряженности в статическом электрическом поле равна нулю.

Приведем пример, когда возникающая разность потенциалов не успевает выровняться. Оценим разность потенциалов U между головной и хвостовой частями стального керна бронебойного снаряда, возникающую вследствие его торможения в преграде. Считаем, что керн длиной $L = 25$ см потерял скорость $v = 1000$ м/с, пробив броню толщиной $H = 5$ см (№ 2.8). Обозначая замедление скорости при торможении a , массу электрона m и заряд его e , для силы инерции, действующей на электрон, получаем $F = ma$. Это приводит к возникновению электрического поля $E = ma/e$ и разности потенциалов на концах керна $U = EL = maL/e$. Предполагая, что вся кинетическая энергия снаряда тратится на работу на пути, равном толщине брони, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = FH = maH.$$

Подставляя это в выражение для разности потенциалов, имеем

$$U = \frac{mv^2}{2} L/eH = 14 \text{ мкВ.}$$

Из (2.6) следует связь между напряженностью поля и потенциалом в дифференциальном виде

$$\mathbf{E}_l = -\frac{\partial \phi}{\partial l} \mathbf{i}.$$

Здесь производная от скаляра берется по направлению \mathbf{l} и называется **градиентом**. В декартовых координатах вектор напряженности поля можно представить

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\operatorname{grad} \phi = -\nabla \phi. \quad (2.8)$$

Обозначение ∇ называется оператором градиента, или набла. Поверхность, на которой потенциал постоянен, называется **поверхностью уровня, или эквипотенциальной поверхностью**. Линии, перпендикулярные к этим поверхностям, называются **линиями градиента** и совпадают с **силовыми линиями**. Вдоль них происходит наибольшее изменение ϕ .

В цилиндрических координатах (на рис. 2.1
 ρ , ψ и z)

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \mathbf{e}_\psi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z\right). \quad (2.9)$$

Здесь введены единичные векторы (орты) по осям координат.

В сферических координатах (на рис. 2.1
 r , ψ и θ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi = \\ &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \mathbf{e}_\psi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

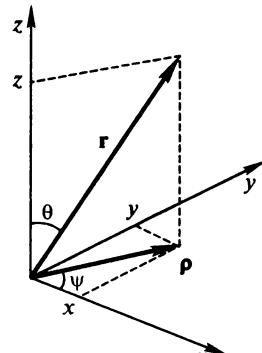


Рис. 2.1

Здесь также введены единичные векторы (орты) по осям координат.

Используя (1.19) и (1.20), получаем

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

и соответственно

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho; \quad \left\{ \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \right\}. \quad (2.11)$$

Это уравнение называется **уравнением Пуассона**, а обозначение Δ называется **оператором Лапласа**. С помощью этого уравнения можно найти распределение потенциала и напряженности поля при заданном распределении зарядов. В проводниках потенциал постоянен, а вне проводника, где нет зарядов, определяется граничными условиями и уравнением Лапласа $\Delta \varphi = 0$.

В цилиндрических координатах (см. рис. 2.1), используя выражение для оператора Лапласа, получаем уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\rho} \partial \frac{\rho (\partial \varphi / \partial \rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho_{\text{зар}}. \quad (2.12)$$

Здесь для плотности зарядов использовано обозначение $\rho_{\text{зар}}$, чтобы отличить от радиуса полярных координат ρ .

В сферических координатах (см. рис. 2.1) соответственно имеем:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -4\pi\rho. \quad (2.13)$$

Найдем для цилиндрического (диаметром D) пучка частиц (это может быть дейtron, у которого заряд равен заряду протона, а масса на нейtron больше) с кинетической энергией W и силой тока в пучке I (с равномерной плотностью по сечению пучка j) напряженность электрического поля E на поверхности и разность потенциалов U между его границей и осью симметрии (№ 2.9). Вводя плотность зарядов ρ , получаем для плотности тока

$$j = \rho V = \frac{4I}{\pi D^2},$$

где

$$V = \left(\frac{2W}{m} \right)^{1/2}.$$

Из теоремы Гаусса (1.12) находим напряженность электрического поля внутри пучка $E 2\pi r = 4\pi\rho r^2$ и, следовательно, $E(r) = 2\pi\rho r$ для $r \leq D/2$. На поверхности пучка

$$E = \frac{4I}{VD}.$$

Для разности потенциалов имеем

$$U = \int_0^{D/2} 2\pi\rho r dr = \pi D^2 \frac{\rho}{4} = \frac{I}{V}.$$

Внутри металлических (и вообще проводящих) тел электростатическое поле равно нулю и потенциал постоянен. Потенциал металлического заряженного шарика радиусом R можно вычислить в его центре, используя (2.5). При $r \geq R$ потенциал описывается (2.4). Если заряд равен q , то потенциал в центре — $\phi = q/R$.

Рассмотрим систему из трех одинаковых металлических шариков радиусом r , расстояния между которыми одинаковы и равны a (очевидно, что они находятся в вершинах равностороннего треугольника), и удаленный заряженный проводник, потенциал которого неизвестен (ϕ), но поддерживается постоянным. Поочередно шарики соединяются проводом с удаленным проводником. Найдем заряд на шарике, который присоединялся последним (q_3), если на двух присоединявшихся ранее оказались заряды q_1 и q_2 (№ 2.46). Для первого шарика после присоединения к удаленному заряженному проводнику имеем $\phi = q_1/r$. Для второго шарика полный потенциал ϕ складывается из потенциала от полученного в результа-

те подсоединения собственного заряда q_2 и на-
веденного от первого заряда

$$\varphi = \frac{q_2}{r} + \frac{q_1}{a}.$$

Для третьего шарика

$$\varphi = \frac{q_3}{r} + \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{a}.$$

Из этих трех уравнений находим

$$q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}.$$

Найдем потенциал диполя с дипольным моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$. Используя рис. 2.2 и суперпозицию (2.5), имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= q \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = q \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \approx \frac{q l \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{r^3}; \\ &\quad \left\{ \varphi = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Воспользуемся этой формулой, чтобы найти, на какое максимальное расстояние L удалится эквипотенциальная поверхность от плоского заряженного конденсатора (расстояние между пластинами h , площадь пластин S), если внутри конденсатора она проходит на расстоянии $599h/1200$ от одной из пластин (№ 2.52). Обозначая разность потенциалов между пластинами Φ_0 и учитывая, что потенциал равен нулю на половине расстояния между пластинами, находим для данной эквипотенциальной поверхности

$$\varphi = \frac{\Phi_0}{1200}.$$

Поле вдали от конденсатора будет соответствовать полю диполя, заряд которого равен заряду пластин, а расстояние между зарядами — расстоянию между пластинами

$$\mathbf{p} = q\mathbf{h} = \sigma S\mathbf{h} = \frac{ESh}{4\pi} = \Phi_0 \frac{S}{4\pi}.$$

Используя (2.14), получаем

$$L = \left(\frac{S}{4\pi} \right)^{1/2} = 10 \left(\frac{3S}{\pi} \right)^{1/2}.$$

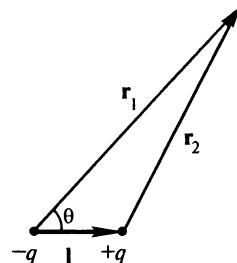


Рис. 2.2

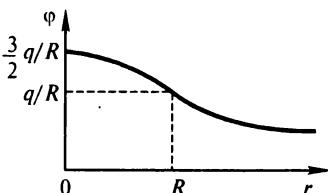


Рис. 2.3

По известному распределению напряженности поля с помощью (2.6) можно найти распределение потенциала.

При равномерном распределении заряда внутри шара радиусом R изменение напряженности поля показано на рис. 1.6.

При $r \geq R$ поле описывается (1.3), и с помощью (2.6) получаем (2.4). Внутри шара поле описывается (1.14). Интегрируя, с учетом полученного потенциала на поверхности шара, имеем

$$\phi = \frac{2}{3} \pi \rho (3R^2 - r^2). \quad (2.15)$$

На рис. 2.3 показано распределение потенциала.

Для заряженного металлического шара, окруженного концентрической металлической незаряженной оболочкой, распределение напряженности поля показано на рис. 1.7. На рис. 2.4 приведено распределение потенциала (№ 2.3), полученное с помощью (2.6). Потенциал оболочки равен

$$\phi = \frac{Q}{R_3}.$$

Потенциал шара

$$\phi_1 = Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

В случае заземленной оболочки (потенциал ее равен нулю) распределение потенциала показано на рис. 2.4 пунктиром. В этом случае потенциал шара

$$\phi_3 = Q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

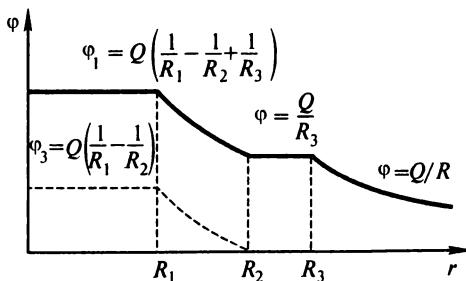


Рис. 2.4

В металлической оболочке любой формы в электростатике всегда поле равно нулю, и внешнее и внутреннее поля независимы. Внутреннее поле не будет меняться, если снаружи подносить заряженный проводник. Это называется электростатической экранировкой. Перемещение зарядов внутри металлической оболочки будет изменять поле внутри, но не будет изменять снаружи (№ 2.2).

Заряд на сферической металлической оболочке располагается на внешней поверхности. Внутри поверхности поля нет. Потенциал ϕ поверхности и всей оболочки определяется зарядом Q и внешним радиусом R :

$$\phi = \frac{Q}{R}.$$

Если незаряженный металлический шарик радиусом r , расположенный достаточно далеко, чтобы можно было не рассматривать индукционные явления (перераспределение зарядов), соединить металлическим проводом с заряженной оболочкой (рис. 2.5), то происходит перемещение зарядов и **выравнивание потенциалов** шарика и оболочки. Движение зарядов происходит благодаря разности потенциалов даже в случае, если проводник через малое отверстие присоединяется к внутренней поверхности оболочки, где зарядов нет. После перемещения зарядов на шарике появляется заряд q , а на оболочке остается $(Q - q)$. Заряд q находится из равенства потенциалов

$$\frac{q}{r} = \frac{Q - q}{R}.$$

Поле от двух зарядов q и $-q$ можно вычислить, используя (1.3) и (2.4). На рис. 2.6 показаны эти заряды, находящиеся на оси x симметрично относительно оси y на расстоянии друг от друга $2h$. Картина поля симметрична относительно оси x . Из (2.4) следует, что на

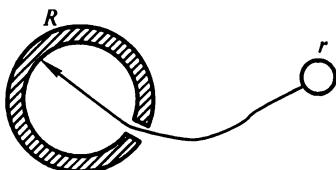


Рис. 2.5

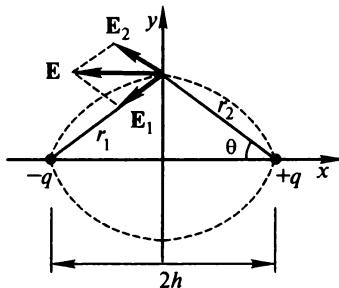


Рис. 2.6

плоскости, проходящей через ось y и перпендикулярной оси x , потенциал равен нулю. Из (1.4) следует, что в плоскости нулевого потенциала напряженность поля перпендикулярна этой плоскости. Вводя угол θ из условия $\cos \theta = h/r_2$, получаем изменение напряженности поля вдоль оси y (линии нулевого потенциала)

$$E = 2q \frac{\cos^3 \theta}{h^2}. \quad (2.16)$$

Уравнения, описывающие положение силовых линий, можно находить, используя дифференциальные связи. В декартовых координатах они имеют вид (1.4)

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \quad (2.17)$$

где dx , dy и dz — изменения декартовых координат вдоль силовой линии; E_x , E_y и E_z — декартовы компоненты вектора напряженности электрического поля. Решение этих уравнений громоздкая процедура. Качественно ход силовых линий можно получить, зная, например, в данном случае, что из точки линии выходят симметрично во все стороны, а на линии нулевого потенциала параллельны оси x . Пунктиром, для примера, показаны на рис. 2.6 две силовые линии поля.

Важным следствием полученной картины поля является то, что при расположении заряда на расстоянии h от проводящей бесконечной плоскости в области положительных значений x возникает такая же картина, как для двух зарядов. Если поля одинаковы, то и воздействие проводящей поверхности на заряд q будет таким же, как воздействие от заряда $-q$, помещенного симметрично относительно границы проводящей плоскости. Поэтому для нахождения картины поля и сил взаимодействия можно заменить проводящую плоскость **зарядом-изображением « $-q$ »,** расположенным симметрично заряду q относительно положения проводящей плоскости. Метод, использующий такую замену, называется **методом электрических изображений.** Сила притяжения заряда к бесконечной проводящей плоскости равна

$$F = \frac{q^2}{(2h)^2}; \quad \left\{ F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2} \right\}. \quad (2.18)$$

Если между зарядами Q_1 и Q_2 было расстояние R и между ними посередине вставили перпендикулярно линии их соединяющей

бесконечную металлическую пластину толщиной $R/2$, то силы, притягивающие каждый из этих зарядов, определяются по (2.18), где $h = R/4$ (№ 2.12).

Для примера найдем напряженность поля в точке A (рис. 2.7), если заряд q находится на расстоянии h от проводящей бесконечной плоскости (№ 2.10). Из (1.3)

$$E_1 = \frac{q}{h^2}; \quad E_2 = \frac{q}{5h^2},$$

из соответствующего треугольника

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Величину напряженности определяем по теореме косинусов

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \theta.$$

Получаем

$$E = q \frac{26 - 2\sqrt{5}}{5h^2}.$$

Наклон к горизонтали вектора \mathbf{E} (угол β) находим также из теоремы косинусов.

На рис. 2.8 показаны два одинаковых шарика массой m с зарядами Q , подвешенные на одинаковых нитях над горизонтальной металлической заземленной плитой на высоте h и соединенных нитью длиной l . Найдем натяжение нитей, если радиусы шариков

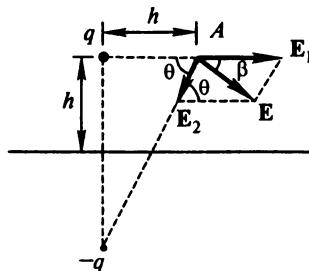


Рис. 2.7

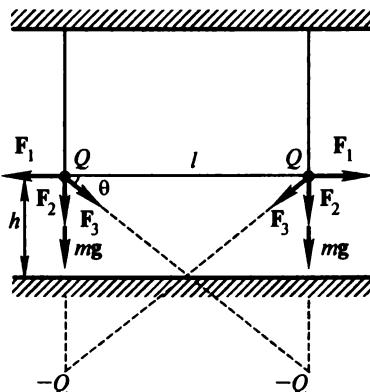


Рис. 2.8

малы по сравнению с h и l , которые значительно меньше размеров плиты (№ 2.13). Для получения нулевого потенциала на плите нужно ввести два симметрично расположенных отрицательных заряда $(-Q)$, как показано на рис. 2.8. Складывая силы, действующие на заряженные шарики, получаем для натяжения горизонтальной нити $F_r = F_1 - F_3 \cos \theta$, вертикальной $F_v = mg + F_2 + F_3 \sin \theta$. Здесь угол θ определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2h}{l}, \quad F_1 = \frac{Q^2}{l^2}, \quad F_2 = \frac{Q^2}{(2h)^2}, \quad F_3 = \frac{Q^2}{l^2 + 4h^2}.$$

Распределение плотности отрицательного заряда, наводимого на проводящей плоскости зарядом q , находящемся на расстоянии h от нее, определяется теоремой Гаусса $E = 4\pi\sigma$ и (2.16) (№ 2.11)

$$\sigma = -q \frac{\cos^3 \theta}{2\pi h^2}. \quad (2.19)$$

Угол θ показан на рис. 2.6.

Интегрируя по всей плоскости, получаем, что полный индуцированный заряд равен $-q$. Плотность индуцированного заряда на оси симметрии ($\theta = 0$) равна

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi h^2}.$$

Если известно, что одна из силовых линий, идущая от точечного заряда q , находящегося на высоте h над бесконечной металлической пластины (потенциал равен нулю), приходит на поверхность пластины на расстоянии $L = h\sqrt{3}$ от точки, над которой находится заряд, то можно определить, под каким углом к горизонту эта силовая линия выходит из заряда (№ 2.50).

Чтобы воспользоваться теоремой Гаусса для потоков вектора напряженности поля, выберем поверхности, через которые удобно вычислять поток. Сечения этих поверхностей показаны на рис. 2.9. Через поверхность, образованную силовыми линиями, потока нет. Поле у поверхности пластины находим методом изображений

$$E = \frac{2qh}{(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

и вычисляем соответствующий поток. Поток через часть сферической поверхности у заряда опреде-

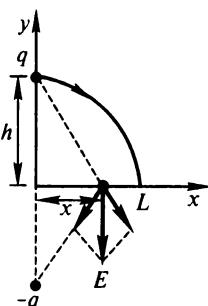


Рис. 2.9

ляется величиной заряда (q) и соответствующим телесным углом (Ω). Таким образом, используя теорему Гаусса (1.12), получаем

$$-q\Omega + 2qh \int_0^{h\sqrt{3}} \frac{2\pi x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = 0.$$

Отсюда находим $\Omega = 2\pi$, т. е. силовые линии от заряда идут горизонтально.

Рассмотрим похожую ситуацию для цилиндрического случая. Длинный тонкий провод, имеющий заряд на единицу длины λ , проходит параллельно горизонтальной металлической поверхности на высоте h . Поле находим, используя провод-изображение, имеющий заряд на единицу длины $-\lambda$, находящийся с другой стороны поверхности на расстоянии h и обеспечивающий условие на металлической поверхности (см. рис. 2.9). Найдем, на каком расстоянии от точки на плоскости под проводом (начало координат) приходит на плоскость силовая линия, уходящая от провода горизонтально (№ 2.51). Поток вектора напряженности поля, идущий от провода между силовой линией и осью y , представляет четвертую часть общего потока, т. е. равен $\pi\lambda$. На оси x напряженность поля (1.16) от двух проводов

$$E = \frac{2\lambda}{(h^2 + x^2)^{1/2}} \frac{2h}{(h^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{4h\lambda}{h^2 + x^2}.$$

Поток этого вектора при изменении x от 0 до L должен равняться

$$\pi\lambda = 4h\lambda \int_0^L \frac{dx}{h^2 + x^2}.$$

Вводя обозначение $x/h = \operatorname{tg} \alpha$ и интегрируя, получаем для граници потока $\alpha = \pi/4$. Это соответствует $L = h$.

Найдем плотность индуцированного заряда в горизонтальном листе металла под вертикально расположенным равномерно заряженным (полный заряд Q) тонким стержнем длиной l , нижний конец которого находится от листа на расстоянии H (№ 2.17). Обозначая вертикальное расстояние от листа y и пользуясь суперпозицией для напряженности поля, находим

$$\sigma = - \int_H^{H+l} q \frac{dy}{2\pi l y^2} = - \frac{q}{2\pi H(H+l)}.$$

Вычислим плотность индуцированного заряда (σ) в горизонтальном листе металла от равномерно заряженного горизонтального диска радиусом R , находящегося на высоте H над листом, в точке под центром диска (№ 2.18). Используя симметрию относительно оси диска, можем напряженность поля вычислять, интегрируя вклады от колец на диске. Обозначая поверхностную плотность заряда на диске

$$\rho = \frac{Q}{\pi R^2},$$

для нормальной к поверхности составляющей поля получаем

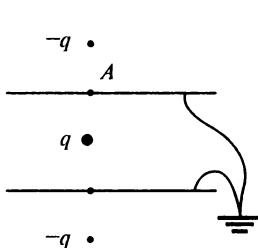
$$dE = \rho 2\pi r dr H (H^2 + r^2)^{-3/2}.$$

Интегрируя, вводя полный заряд диска Q , используя (1.17) и отсутствие поля внутри металла, находим

$$\sigma = -Q \frac{1 - H(H^2 + R^2)^{-1/2}}{\pi R^2}.$$

Заряд q может находиться между двумя параллельными металлическими заземленными пластинами (например, посередине на расстоянии a от каждой), как показано на рис. 2.10. В этом случае для удовлетворения условий на пластинах требуется бесконечное число зарядов-изображений (на рис. 2.10 показана небольшая часть). Для определения, например, плотности заряда в точке A (№ 2.49) можно учесть влияние только ближайших зарядов. Напряженность поля в точке A равна

$+q$.



$+q$.

$-q$.

Рис. 2.10

$$E = 2 \frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right).$$

Метод электрических изображений можно применить для нахождения силы притяжения точечного электрического диполя к бесконечной металлической пластинке (№ 2.15). В случае диполя, находящегося на расстоянии L от пластины, дипольный момент которого p направлен перпендикулярно ей, пластинку заменяют диполем, также направленным и находящимся на расстоянии $2L$ от первого. Используя (1.7) и (1.11), находим

$$F = p \frac{\partial E}{\partial r} = p \frac{\partial (2p/r^3)}{\partial r} = -6 \frac{p^2}{r^4} = -\frac{3}{8} \frac{p^2}{L^4}.$$

Сила отрицательная, поэтому диполь притягивается. Работа внешних сил для отодвигания диполя от пластиинки от расстояния L_1 до расстояния L_2 при этом положительна и равна

$$A = \int_{L_1}^{L_2} F dx = \frac{1}{8} p^2 \frac{1 - L_1^3/L_2^3}{L_1^3}.$$

Двугранный угол образуется при пересечении плоскостей. Это позволяет применить для двугранных углов методы, использованные для плоскостей. Найдем силу, действующую на точечный заряд q , помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями (№ 2.14). На рис. 2.11 показаны заряды, с помощью которых обеспечивается нулевой потенциал на плоскостях, которые образуют двугранный угол. Абсолютные значения сил

$$F_1 = F_2 = \frac{q^2}{2a^2}; \quad F_3 = \frac{q^2}{(2a)^2}.$$

Суммарная сила направлена к вершине двугранного угла

$$F = \frac{q^2}{2a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Найдем силу, действующую на диполь, находящийся на биссектрисе прямого двугранного угла, образованного двумя проводящими плоскостями на расстоянии a от вершины (№ 2.16). На рис. 2.12 показаны диполь в точке A на биссектрисе угла и диполи электри-

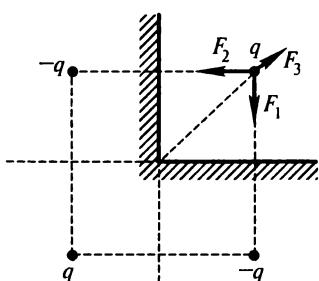


Рис. 2.11

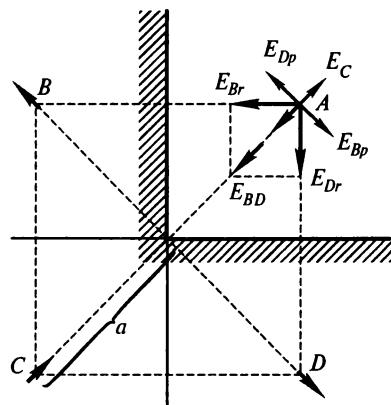


Рис. 2.12

ческих отображений в точках B , C и D , которые обеспечивают нулевые потенциалы на плоскостях, образующих прямой двугранный угол. Напряженности поля от диполей находим по (1.9). От диполей в B и D две составляющие по ρ и по r . По направлению ρ в сумме получаем ноль. Для удобства введем расстояние от точки C до точки A $x = 2a$. Тогда расстояние от точек B и D до точки A равны $x/\sqrt{2}$. Напряженности поля E_{Br} и E_{Dr} одинаковы по абсолютной величине и дают в сумме (геометрической)

$$E_{BD} = 6\sqrt{2} \frac{p}{x^3}.$$

Напряженность поля в точке A от диполя в точке C

$$E_C = \frac{2p}{x^3}.$$

Суммарная напряженность поля направлена к вершине угла

$$E = 2p \frac{3\sqrt{2} - 1}{x^3}.$$

Действие поля на диполь определяется (1.11)

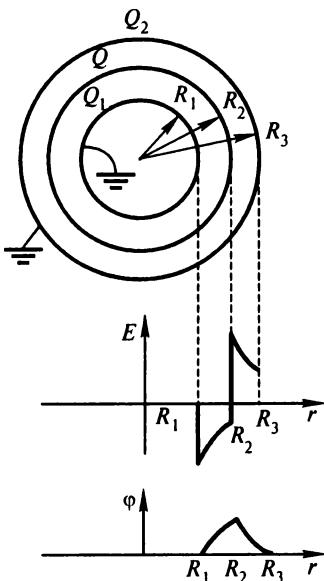


Рис. 2.13

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x} = -6p^2 \frac{3\sqrt{2} - 1}{x^4} = \frac{3}{8} p^2 \frac{3\sqrt{2} - 1}{a^4}.$$

Рассмотрим три концентрические бесконечно тонкие металлические сферы с радиусами $R_1 < R_2 < R_3$ (рис. 2.13). Найдем распределение напряженности поля и потенциала, если крайние сферы заземлены (потенциал равен нулю), а на средней находится заряд Q (№ 1.11).

Так как заряженная сфера при отсутствии заземления на крайних сferах создает на них потенциалы, отличные от нуля, то при заземлении появятся заряды, которые обозначим на внутренней сфере Q_1 , а на внешней Q_2 . Используя суперпозицию (сложение потенциалов) и то, что для заряженной сферы (радиус R , заряд Q) внутри потенциал постоян-

ялен и равен Q/R , а снаружи падает как Q/r , получаем из условия заземления:

на внутренней сфере

$$0 = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} + \frac{Q_2}{R_3};$$

на внешней сфере

$$0 = \frac{Q_1}{R_3} + \frac{Q}{R_3} + \frac{Q_2}{R_3}.$$

Отсюда находим

$$Q_1 = -Q \frac{1 - R_3/R_2}{1 - R_3/R_1}, \quad Q_2 = -Q - Q_1.$$

Наведенные заряды отрицательные. Напряженности поля:

$$E = 0, \quad \text{если } 0 < r < R_1 \text{ и } R_3 < r < \infty;$$

$$E = -Q \frac{1 - R_3/R_2}{r^2 (1 - R_2/R_1)}, \quad \text{если } R_1 < r < R_2;$$

$$E = Q \frac{1 - R_1/R_2}{r^2 (1 - R_1/R_3)}, \quad \text{если } R_2 < r < R_3.$$

На трех концентрических тонких металлических сферах радиусами $R_1 < R_2 < R_3$, находящихся в вакууме, имеются соответственно заряды Q_1 , Q_2 и Q_3 . Найдем изменение потенциала в некоторой точке между первой и второй сферами на расстоянии r от их центра в результате замыкания накоротко второй и третьей сфер (№ 2.4). До соединения потенциал определяется суперпозицией от трех зарядов

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3}.$$

После соединения второй и третьей сфер у них будет одинаковый потенциал, поэтому напряженность поля между ними должна равняться нулю. Следовательно, на второй сфере находится заряд, противоположный заряду на первой сфере ($-Q_1$), а на третьей — заряд, равный сумме всех зарядов $Q_1 + Q_2 + Q_3$. Суперпозиция дает

$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{r} - \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{R_3}.$$

Изменение потенциала равно

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (Q_1 + Q_2) \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right).$$

На рис. 1.10 показано изменение напряженности поля в плоском слое с постоянной плотностью заряда. Если расстояние отсчитывать от одного края слоя толщины h , то для напряженности поля получаем

$$E = 4\pi\rho \left(x - \frac{h}{2} \right).$$

Если этот слой поместить между двумя тонкими металлическими пластинаами (обкладками), образующими плоский конденсатор, в котором одна обкладка заземлена (нулевой потенциал), а вторая имеет потенциал φ_0 , то к напряженности поля добавляется постоянная напряженность φ_0/h . Постоянство напряженности между металлическими пластинаами следует из плоской картины и равномерного распределения зарядов на пластинах. Таким образом, напряженность поля в конденсаторе

$$E = 4\pi\rho \left(x - \frac{h}{2} \right) - \frac{\varphi_0}{h}.$$

Используя (2.6), получаем (№ 2.5):

$$\varphi(x) = \left(\frac{\varphi_0}{h} + 2\pi\rho h \right) x - 2\pi\rho x^2.$$

Найдем, какой должна быть плотность объемного заряда (ρ) равномерно распределенного между пластинаами плоского конденсатора (расстояние между пластинаами h), которая получается, например, при распространении равномерного потока электронов внутри конденсатора параллельно пластинаам, чтобы потенциал и напряженность поля на одной пластине были равны нулю, а на другой потенциал был равен φ_0 (№ 2.6). Из (2.11) для плоского случая имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho.$$

Дважды интегрируя, получаем

$$\varphi = -2\pi\rho x^2 + C_1 x + C_2.$$

Из условия при $x = h$ имеем

$$\varphi = \varphi_0 = -2\pi\rho h + C_1 h + C_2,$$

при $x = 0$

$$\varphi = 0 = C_2; \quad E = -\frac{d\varphi}{dx} = -4\pi\rho \cdot 0 + C_1 = 0.$$

Откуда

$$\rho = -\frac{\varphi_0}{2\pi h}.$$

Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора (внутренний радиус R_2 , внешний радиус R_1), между которыми находится заряд с постоянной объемной плотностью ρ , можно найти (№ 2.7), используя (2.12) для потенциала

$$\frac{1}{r} \frac{d(r d\varphi/dr)}{dr} = -4\pi\rho.$$

Дважды интегрируя, получаем

$$\varphi = C \ln r + C_1 - \pi\rho r^2.$$

Константы определяются, если задано, что при $r = R_2$ потенциал $\varphi = \varphi_0$, а при $r = R_1$ потенциал $\varphi = 0$.

Найдем поверхность нулевого потенциала для двух разноименных зарядов q и $-q/n$ ($n > 1$) (№ 2.19). На рис. 2.14 изображены заряды. Ось x , проходящая через них, является осью симметрии картины поля. Ось y проводим через точку расположения меньшего по абсолютной величине заряда перпендикулярно x . Найдем линию пересечения плоскости (x, y) с поверхностью нулевого потенциала. Обозначая расстояния от зарядов до произвольной точки с нулевым потенциалом r_1 и r_2 , находим

$$\varphi = 0 = \varphi_1 + \varphi_2 = -q \frac{1/r_1 - n/r_2}{n}.$$

Откуда следует, что $r_2 = nr_1$.

Из рис. 2.14 находим

$$r_1^2 = x^2 + y^2; \quad r_2^2 = (l - x)^2 + y^2.$$

Отсюда

$$n^2(x^2 + y^2) = (l - x)^2 + y^2.$$

Окончательно

$$\left(x + \frac{l}{n^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{nl}{n^2 - 1} \right)^2. \quad (2.20)$$

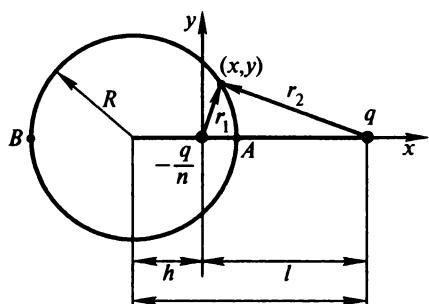


Рис. 2.14

Это окружность радиусом

$$R = \frac{nl}{n^2 - 1}. \quad (2.21)$$

Центр ее находится на расстоянии от меньшего заряда

$$h = \frac{l}{n^2 - 1} = \frac{R^2}{L} \quad (2.22)$$

и на расстоянии от большего заряда

$$L = h + l = \frac{n^2 l}{n^2 - 1} = nR. \quad (2.23)$$

Получаем полезное соотношение

$$n = \frac{R}{h} = \frac{L}{R}. \quad (2.24)$$

Вычислим силу, действующую между заземленным металлическим шаром (потенциал равен нулю) и зарядом (q), расположенным от центра шара на расстоянии L . Воспользуемся тем, что поле вокруг заряда будет таким же, как от этого заряда (q) и заряда-изображения ($-q/n$), находящегося на расстоянии l от заряда q (см. рис. 2.14). Пользуясь законом Кулона (1.1), а также (2.24), (2.23) и (2.22), находим силу, действующую на заряд q (№ 2.20):

$$F = -RL \frac{q^2}{(L^2 - R^2)^2}. \quad (2.25)$$

Знак минус говорит о притяжении заряда к заземленному шару.

Напряженность поля в точке A равна

$$E_A = -q \frac{1 + L/R}{(L + R)^2},$$

а в точке B

$$E_B = \frac{q}{(L + R)^2} - q \frac{R/L}{(R + R^2/L)^2}.$$

Для получения плотности зарядов в данных точках напряженности надо разделить на 4π (№ 2.42).

Если шар не заземлен и заряд его равен нулю, то можно воспользоваться суперпозицией полученного ранее поля и поля от заряда q/n ,

расположенного в точке, соответствующей центру шара. Заряд в этой точке дает на сфере, соответствующей поверхности шара, постоянный потенциал, который получаем также, если этот заряд равномерно расположить на поверхности сферы:

$$\varphi = \frac{q}{nR} = \frac{q}{L}. \quad (2.26)$$

Это важный результат, заключающийся в том, что незаряженный проводящий шар в поле заряда имеет потенциал, который создавался бы в точке, соответствующей центру шара, в его отсутствии (**теорема о среднем**).

Внутри сферы сумма зарядов равна нулю. Сила, действующая на заряд q от зарядов внутри сферы, равна (№ 2.20)

$$F = -\left[\frac{RL}{(L^2 - R^2)^2} - \frac{R}{L^3} \right] q^2. \quad (2.27)$$

Если на шаре еще имеется заряд $-q$ (№ 2.40), то в выражении для силы появится еще член $-q^2/L^2$ и

$$F = -\frac{q^2}{L^2} \left[1 - \frac{R}{L} + \frac{R}{L} \left(1 - \frac{R^2}{L^2} \right)^{-2} \right].$$

Если на шаре полный заряд Q , то сила равна

$$F = \frac{q^2 R}{L(L - R^2/L)} + q \frac{Q + qR/L}{L^2}.$$

Отсюда, чтобы сила взаимодействия была равна нулю (№ 2.41), заряд должен быть равен

$$Q = q \frac{R}{L} \frac{L^4 - (L^2 - R^2)^2}{(L^2 - R^2)L}.$$

Для вычисления работы по удалению заряда q на бесконечность (№ 2.21) надо проинтегрировать полученные выражения, учитывая, что внешняя сила имеет противоположный знак.

В случае заземленного шара (2.25)

$$A_1 = \int_L^\infty F_{\text{вн}} dL = q^2 R \int_L^\infty \frac{L dL}{L^2 - R^2} = \frac{1}{2} \int_L^\infty \frac{q^2 R d(L^2 - R^2)}{(L^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2 R}{L^2 - R^2}.$$

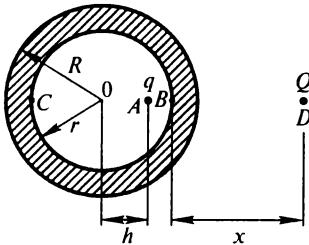


Рис. 2.15

В случае незаряженного шара (2.27)

$$A_2 = A_1 + q^2 R \int_L^\infty \frac{L dL}{L^3} = \frac{1}{2} \frac{q^2 R^3}{L^2 (L^2 - R^2)}.$$

Если внутри незаряженной металлической оболочки (внутренний радиус r , внешний R) в точке A на расстоянии $OA = h$ от ее центра находится сосредоточенный заряд q (рис. 2.15) и требуется вычислить потенциал на внутренней поверхности оболочки, то надо иметь в виду, что на внутреннюю поверхность оболочки притягивается заряд, равный $-q$, но неравномерно распределенный, а на внешней поверхности оболочки заряд, равный q , распределяется равномерно с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2},$$

так как поле в проводящей оболочке равно нулю и влияние внутренних зарядов отсутствует. Потенциал оболочки в сферически симметричном поле $\varphi = q/R$. Такой же и в точках B и C (№ 2.22).

Поле внутри оболочки найдем, пользуясь методом электрических изображений. Найдем вначале, какой заряд Q и на каком расстоянии x от сферической поверхности, находящейся на месте внутренней поверхности оболочки (см. рис. 2.15), надо поместить, чтобы потенциал на этой сфере был постоянен и равен нулю. Можно воспользоваться приведенными ранее формулами, а можно записать соотношения для равенства потенциалов нулю в точках B и C

$$\frac{q}{r-h} + \frac{Q}{x} = 0; \quad \frac{q}{r+h} + \frac{Q}{x+2r} = 0.$$

Отсюда

$$x = r \frac{r-h}{h}; \quad Q = -q \frac{r}{h}.$$

Напряженность поля в точке B от двух зарядов равна

$$E_B = \frac{q(1+h/r)}{(r-h)^2}.$$

Напряженность поля от тех же зарядов в точке C

$$E_C = \frac{q(1-h/r)}{(r+h)^2}.$$

Для получения распределения плотности зарядов надо эти величины разделить на 4π . Изменения потенциала на сферической поверхности на постоянную величину не изменяет картину поля внутри и распределение заряда по поверхности. Если потенциал поверхности не нулевой, а $\phi_0 = q_0/r$, то потенциал, например, точки B равен

$$\phi_B = \frac{q_0}{r} + \frac{q}{r-h} + \frac{Q}{x}.$$

Получаем то же самое уравнение, что и раньше:

$$\frac{q}{r-h} + \frac{Q}{x} = \phi_0 - \frac{q_0}{r} = 0.$$

Рассмотрим теперь тонкостенную металлическую изолированную сферу радиусом R с зарядом на ней Q и зарядом q внутри нее на расстоянии от центра, равном половине радиуса (рис. 2.16). Вне сферы поле сферически симметрично и по теореме Гаусса (1.12) определяется суммарным зарядом на сфере и внутри ее. На внешней поверхности сферы напряженность поля и плотность заряда равны (№ 2.30)

$$E = \frac{Q+q}{R^2}; \quad \sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{Q+q}{4\pi R^2}.$$

Для обеспечения нулевого (и вообще постоянного) потенциала на сфере надо использовать заряд-изображение $Q_1 = -nq$ на расстоянии $L = nR$ от центра сферы (2.23) и (2.24). Если заряд q находится на середине радиуса, то $n = 2$, $Q_1 = -2q$ и $L = 2R$. Поэтому сила, действующая на заряд q , равна

$$F = -n \frac{q^2}{(L-R/2)^2} = -\frac{8}{9} \frac{q^2}{R^2}.$$

Поле на внутренней поверхности сферы в точке A равно

$$E = \frac{q}{(R/2)^2} + \frac{2q}{R^2} = \frac{6q}{R^2}.$$

Заряд на сфере поля внутри не создает.

Поле внутри металлической оболочки должно быть равно нулю. Это обеспечивается плотностью заряда в точке A , равной

$$\sigma = -\frac{E}{4\pi} = -\frac{3q}{2\pi R^2}.$$

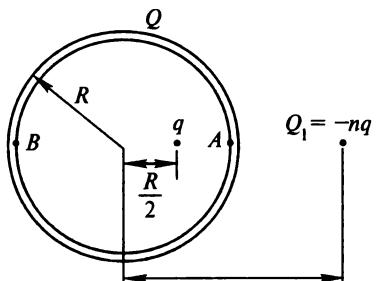


Рис. 2.16

В точке B на внутренней поверхности поле равно

$$E = \frac{q}{(R + R/2)^2} - \frac{2q}{3R^2} = \frac{2}{9} \frac{q}{R^2}.$$

Плотность отрицательного заряда в точке B на внутренней поверхности

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{q}{18\pi R^2}.$$

Плотность на внешней поверхности в случае $Q = -2q$ (№ 2.31)

$$\sigma = \frac{q - 2q}{4\pi R^2} = -\frac{q}{4\pi R^2}.$$

При заземлении сферы плотности зарядов на внутренней поверхности в точках A и B не изменяются, а на внешней поверхности плотность заряда должна быть равна нулю, так как потенциал такой же, как на бесконечности, и нет поля.

Найдем потенциал ϕ металлического шара радиусом R с зарядом на нем Q , когда точечный заряд q помещен на расстоянии L от центра шара (№ 2.23). Пользуясь суперпозицией для потенциала в центре шара, можно написать

$$\phi = \frac{q}{L} + \sum \frac{\Delta Q_i}{R_i} = \frac{q}{L} + \frac{Q}{R}.$$

Здесь суммируются потенциалы от зарядов ΔQ_i на поверхности шара. Потенциал металлического шара такой же, как в центре.

Для нахождения потенциала сферической проводящей оболочки (или полого металлического шара) от собственного заряда Q и заряда q , находящегося на расстоянии L от центра оболочки, также можно использовать суперпозицию теоремы о среднем (2.26) и решение для постоянного заряда на сферической поверхности. В случае заряда q вне сферической поверхности потенциал на оболочке

$$\phi = \frac{q}{L} + \frac{Q}{R}.$$

Если же заряд q переместить через малое отверстие внутрь оболочки (№ 2.25), то потенциал на ней определяется ее внешним радиусом и по теореме Гаусса суммарным зарядом

$$\phi_1 = \frac{Q + q}{R}.$$

Поле вокруг заземленного металлического шара, когда на расстоянии L от его центра находится заряд q , такое же, как от этого заряда и заряда $-q/n$, расположенного, как показано на рис. 2.14, и определяемого (2.24). Можно вычислить напряженность поля на поверхности шара и найти распределение заряда, который в сумме равен $-q/n$. В случае изолированного незаряженного металлического шара картина распределения напряженности поля не изменится, и распределение заряда по поверхности будет таким же, но в центре надо расположить заряд q/n , который обеспечивает суммарный нулевой заряд на шаре и приводит к появлению потенциала на нем. Если этот шар заземлить, то на него притянет заряд $-q/n$, чтобы нейтрализовать заряд, создававший потенциал (№ 2.26).

Если в поле заряда q находится заземленная проводящая сфера, то, используя (2.23) и (2.24), для напряженности поля в точке A (см. рис. 2.14) имеем

$$E_A = \frac{q}{(L-R)^2} + \frac{q}{n(R-R^2/L)^2} = \frac{q(1+L/R)}{(L-R)^2}.$$

Обозначая напряженность в точке A при отсутствии проводящей сферы

$$E_0 = \frac{q}{(L-R)^2},$$

получаем для изменения напряженности при внесении заземленной проводящей сферы (№ 2.27)

$$\frac{E_A}{E_0} = 1 + \frac{L}{R}.$$

Аналогичным образом находим для точки B (см. рис. 2.14)

$$\frac{E_B}{E_0} = 1 - \frac{L}{R}.$$

Для незаряженной проводящей сферы ищем поле от трех зарядов (в центр сферы, как это получено ранее, надо поместить заряд q/n). В этом случае

$$\frac{E_B}{E_0} = q \left(3 - \frac{R}{L} \right) \frac{E_B}{E_0} = q \left(3 + \frac{R}{L} \right).$$

Полученные ранее решения для сферической и плоской проводящих поверхностей можно использовать для решения задачи,

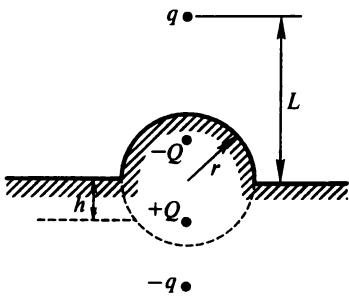


Рис. 2.17

показанные на рис. 2.17 заряды полностью определяют электрическое поле.

Сила, действующая на заряд над бугорком (№ 2.39), определяется тремя зарядами-изображениями

$$F = -\frac{q^2}{L^2} - \frac{qQ}{(L-h)^2} + \frac{qQ}{(L+h)^2}.$$

Если заземленный металлический шар радиусом R лежит на тонком равномерно заряженном диэлектрическом (непроводящем) диске того же радиуса, полный заряд которого равен Q , то притекающий на шар заряд можно найти, рассматривая суперпозицию решений для шара и элементов заряда на диске. На рис. 2.18 показан разрез системы в плоскости, перпендикулярной поверхности диска, проходящей через центры шара и диска. Для заряда на диске

$$dQ = \frac{Q}{\pi R^2} rd\phi dr$$

по (2.24) находим заряд-изображение

$$d^2q = dQ \frac{R}{L} = dQ \frac{R}{(R^2 + r^2)^{1/2}}.$$

Интегрируя по ϕ и r , находим полный наведенный на шаре заряд (№ 2.38)

$$q = -2(\sqrt{2} - 1)Q.$$

Найдем систему зарядов-изображений для заземленной проводящей сферы радиусом R и диполя с моментом $p = ql$, находящегося на расстоянии L от центра сферы, и силу взаимодействия между

в которой заряд q располагается над бугорком в виде полусфера радиусом r на поверхности (№ 2.24). На рис. 2.17 показано расположение заряда q , а также зарядов $-Q$, Q и $-q$, используемых в методе электрических изображений для получения нулевого потенциала на бугорке и плоскости. Из (2.24) определяем, во сколько раз (n) заряд q больше Q ($n = L/r$) и на каком расстоянии он находится от центра сферы ($h = r/n$). Показанные на рис. 2.17 заряды полностью определяют электрическое поле.

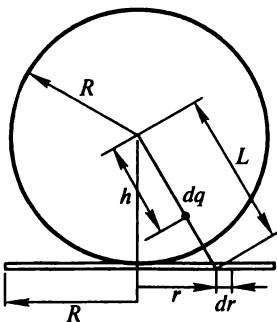


Рис. 2.18

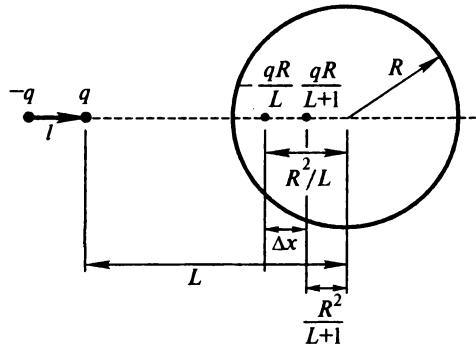


Рис. 2.19

ними (№ 2.28). На рис. 2.19 показаны заряды и расстояния. Пользуясь тем, что для диполя $l \ll L$, имеем для заряда

$$\frac{qR}{L+l} \approx qR \frac{1-l/L}{L} = \frac{qR}{L} - \frac{qRl}{L^2} = \frac{qR}{L} - \frac{pR}{L^2}$$

и для

$$\Delta x = \frac{R^2}{L} - \frac{R^2}{L+l} \approx \frac{lR^2}{L^2}.$$

Таким образом, система изображений состоит из диполя

$$p_1 = \frac{qR\Delta x}{L} = \frac{pR^3}{L^3}$$

и заряда

$$q_1 = -\frac{pR}{L^2}.$$

Диполь p притягивается к диполю p_1 и заряду q_1 . Для вычисления силы притяжения надо воспользоваться (1.10) и (1.7):

$$F = \frac{6pp_1}{(L-R^2/L)^4} + \frac{2q_1p}{(L-R^2/L)^3} = \frac{2p^2RL(2R^2+L^2)}{(L^2-R^2)^4}.$$

Если проводящая сфера радиусом R изолирована и не заряжена и диполь с моментом $p = ql$, находящийся от центра сферы на расстоянии L и направленный перпендикулярно линии, идущей от центра сферы к центру диполя, то расположение зарядов-изображений

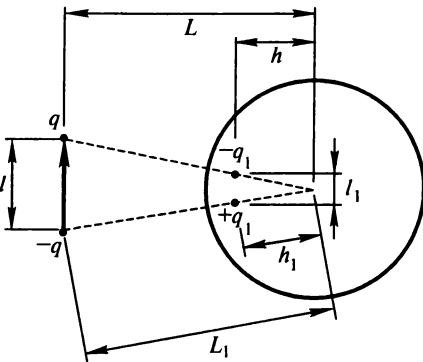


Рис. 2.20

будет таким, как показано на рис. 2.20. Заряды в центре сферы, создающие потенциал, не показаны, так как в сумме равны нулю. Величина зарядов q определяется (2.24)

$$q_1 = \frac{qR}{L_1}, \quad h_1 = \frac{R^2}{L_1}, \quad L_1 = \left(L^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{1/2} \approx L,$$

$$l_1 = \frac{lh_1}{L_1} = l \left(\frac{R}{L} \right)^2, \quad p_1 = q_1 l_1 = q \frac{R}{L} l \left(\frac{R}{L} \right)^2 \approx p \left(\frac{R}{L} \right)^3.$$

Поле диполя в перпендикулярном направлении (1.8) зависит только от расстояния. Из (1.11) следует (№ 2.34)

$$F = p_1 \frac{\partial E}{\partial r} = -p \left(\frac{R}{L} \right)^3 \frac{3p}{L^4} = -\frac{p^2 R^3}{L^7}.$$

Знак минус указывает на притяжение диполей.

Приближенное решение данной задачи (оценка) может быть получено в предположении, что изолированная незаряженная проводящая сфера помещена в **постоянное поле**, равное полю диполя в данном месте. В этом случае **поляризация** приводит к диполю с моментом (1.26) $p_1 = R^3 E$. Поле определяется по (1.9).

В таком же приближении можно оценить силу взаимодействия между двумя маленькими металлическими шариками радиусом R , из которых один имеет заряд q , а второй не заряжен, в зависимости от расстояния между ними L . Поле от заряда $E = q/L^2$ поляризует незаряженный шарик, создавая дипольный момент

$$p = R^3 E = \frac{R^3 q}{L^2}.$$

Поле этого диполя определяется (1.7) и действует на заряд. В результате сила притяжения (№ 2.36)

$$F = \frac{2q^2 R^3}{L^5} - \frac{1}{L^5}.$$

Если к металлическому шарику радиусом R , на котором медленно повышается потенциал ϕ (увеличивается заряд), на тонкой непроводящей нити длины $l \gg R$ подвешен нейтральный металлический шарик массой m и радиусом $r \ll R$, то при некотором потенциале он притягивается к верхнему. Этот потенциал находим из равенства силы притяжения весу нижнего шарика. Для верхнего шарика заряд $Q = \phi R$ и поле вблизи нижнего шарика

$$E = \frac{\phi R}{(l + R)^2}.$$

Это поле поляризует нижний шарик, создавая дипольный момент $p = r^3 E$. При этом поле считаем однородным. Но сила, действующая на диполь, определяется неоднородностью поля — производной

$$\frac{\partial E}{\partial l} = -\frac{2\phi R}{(l + R)^3}.$$

Используя (1.11), получаем

$$mg = 2r^3 \frac{(\phi R)^2}{(l + R)^5}.$$

Откуда находим ϕ (№ 2.43).

Такую же схему решения можно применить, если эти шарики находятся вне поля тяжести и не скреплены между собой, а меньшему сообщается начальная скорость в направлении от большего шарика. Найдем величину этой скорости, чтобы меньший шарик мог уйти на бесконечность (№ 2.44). Благодаря поляризации создается дипольный момент $p = r^3 E$, где E — поле заряженного шарика:

$$E = \frac{Q}{(l + R)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial E}{\partial l} = -\frac{2Q}{(l + R)^3}.$$

Используя (1.11), получаем

$$F = -\frac{2r^3 Q^2}{(l + R)^5}.$$

Для работы внешней силы получаем

$$A = \int_l^\infty F dl = \frac{1}{2} \frac{r^3 Q^2}{(l + R)^4},$$

которую надо приравнять $mv^2/2$, чтобы найти нужную скорость (№ 2.44).

Подобным образом можно рассмотреть устойчивое положение небольшого незаряженного металлического шарика радиусом r , который может смещаться только вдоль оси тонкого однородно заряженного кольца радиусом R . Обозначая расстояние вдоль оси кольца от его плоскости x и полный заряд кольца Q , получаем для напряженности поля вдоль оси

$$E = \frac{Qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Это поле поляризует шарик, создавая дипольный момент $p = r^3 E$. Условие равновесия — равенство силы, действующей на шарик, нулю:

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

Дифференцирование E дает

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{R^2 - 2x^2}{(R^2 + x^2)^{2.5}}.$$

При $x = 0$ равны нулю и поле, и дипольный момент, а производная — положительна. Однако при малейшем отклонении возникает дипольный момент, т. е. равновесие неустойчивое. Устойчивое равновесие будет при равенстве производной нулю, т. е. при (№ 2.37)

$$x = \pm \frac{R}{2^{1/2}}.$$

Поле вне конденсатора на большом расстоянии $r \gg (S)^{1/2}$ (S — площадь пластин конденсатора, которые считаем дисками) можно приближенно описывать как поле диполя с моментом

$$p_1 = qI = CVl = \frac{SV}{4\pi},$$

где q — заряд конденсатора; l — расстояние между пластинами; C — емкость конденсатора; V — напряжение на конденсаторе.

Напряженность поля диполя (1.7)

$$E = \frac{2p}{r^3},$$

изменение поля диполя

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -3 \cdot 2 \frac{p}{r^4}.$$

Если на оси конденсатора на большом расстоянии находится проводящий незаряженный шарик радиусом $R \ll r$, то происходит поляризация и создается дипольный момент, величину которого вычисляем в предположении постоянства поля конденсатора вокруг шарика $p_2 = R^3 E$. Силу вычисляем, используя (1.11) (№ 2.53):

$$F = p_2 \frac{\partial E}{\partial r} = -12 p_1^2 \frac{R^3}{r^7} = -3S^2 V^2 \frac{R^3}{4\pi^2 r^7}.$$

Рассмотрим случай, когда диполь с моментом $p = ql$ помещен в центр проводящей незаряженной сферы (рис. 2.21). Заряды-изображения nq и $-nq$ каждый в паре с соответствующим зарядом диполя создают постоянный потенциал на сфере. Суперпозиция дает полное решение. Сумма зарядов в центре сферы, создающих потенциал на сфере, равна нулю (поэтому на рис. 2.21 не показана). Из (2.24) и (2.22)

$$n = \frac{L}{R} = \frac{2R}{l} \gg 1.$$

Поэтому поле от зарядов nq вокруг сферы можно считать однородным и равным

$$E_0 = 2 \frac{nq}{L^2} = \frac{p}{R^3}.$$

Напряженности поля от диполя в точках A и B определяются соответственно (1.7) и (1.8). Суммарное поле в точке A равно

$$\mathbf{E}_A = \frac{\mathbf{p}}{R^3} + \frac{2\mathbf{p}}{R^3} = \frac{3\mathbf{p}}{R^3},$$

в точке B (№ 2.33):

$$\mathbf{E}_B = \frac{\mathbf{p}}{R^3} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} = 0.$$

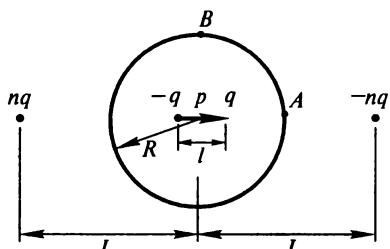


Рис. 2.21

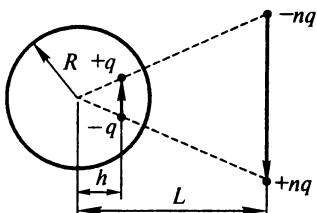


Рис. 2.22

Если внутри проводящей полой изолированной и незаряженной сферы радиусом R на расстоянии h от центра помещен точечный диполь с моментом \mathbf{p} , ориентированный перпендикулярно радиусу (рис. 2.22), то снова, как и ранее, пользуясь суперпозицией и получаем для зарядов-изображений

$$n = \frac{L}{R}; \quad h = \frac{R^2}{L}.$$

Используя подобие треугольников, находим дипольный момент зарядов-изображений

$$p_1 = \frac{nqLL}{h} = p \left(\frac{L}{R} \right)^3.$$

Из (1.8) и (1.11) находим силу взаимодействия диполей, т. е. силу, действующую на диполь внутри сферы (№ 2.34):

$$F = p_1 \frac{3p}{(L-h)^4}.$$

Для точечного диполя, находящегося на расстоянии h от центра сферы и направленного вдоль радиуса (рис. 2.23), изображениями являются диполь p_1 и заряд q_1 . Из (2.24) получаем

$$n = \frac{R}{h} = \frac{L}{R}; \quad n_1 = \frac{R}{h+l} = \frac{L_1}{R}.$$

Отсюда находим

$$L - L_1 \approx l \left(\frac{R}{h} \right)^2$$

и заряд

$$q_1 = nq - n_1 q = \frac{qRL}{h^2}.$$

Для момента диполя-изображения имеем

$$p_1 \approx \frac{pLR}{h^2}.$$

Сила взаимодействия между диполями (притяжение) равна

$$F_1 = 6p \frac{p_1}{(L-h)^4},$$

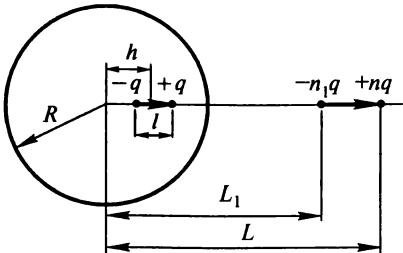


Рис. 2.23

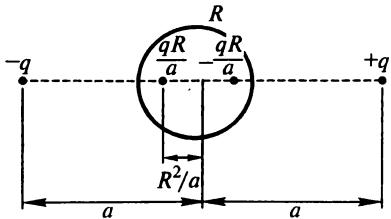


Рис. 2.24

сила действия заряда на диполь (отталкивание)

$$F_2 = \frac{2qp}{L-h} = \frac{2p^2 R}{h^2(L-h)^3}.$$

Суммарная сила (№ 2.35) (притяжение)

$$F = 2 \frac{p^2}{R^4} \frac{h}{R} \frac{2+h^2/R^2}{(1-h^2/R^2)^4}.$$

На рис. 2.24 показана система зарядов изображений qR/a и $-qR/a$ для двух зарядов q и $-q$, расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга, и незаряженной проводящей сферы радиусом R , находящейся посередине между зарядами (№ 2.29). Величины зарядов-изображений определяются (2.24), их расстояния от центра сферы — (2.22). Так как сумма зарядов равна нулю, имеем незаряженную сферу. При $a \gg R$ заряды-изображения действуют на заряды q и $-q$ как диполь с дипольным моментом

$$p = \frac{2R^3 q}{a^2}.$$

Воспользовавшись (1.7), получаем изменение (увеличение) силы, действующей между зарядами,

$$F = \frac{q^2}{4a^2}$$

на

$$\Delta F = \frac{2pq}{a^3} = \frac{4R^3 q^2}{a^5}.$$

Рассмотрим систему двух параллельных бесконечно длинных прямых нитей, находящихся на расстоянии $2a$ друг от друга и имеющих равномерные заряды противоположных знаков по абсолютной величине равные χ на единицу длины. Напряженность электрического поля на расстоянии r от заряженной прямой нити определяется (1.16): $E = 2\chi/r$. Между нитями действует сила притяжения, которая на единицу длины равна

$$F = E\chi = \frac{\chi^2}{a}.$$

Отметим, что этим же способом можно вычислить силы и для разных зарядов на единицу длины. Из (2.8) и (2.10) для потенциала получаем

$$\varphi = 2\chi \ln r + \varphi_0. \quad (2.28)$$

На рис. 2.25 показано сечение, перпендикулярное нитям. Ось x проходит через нити, а ось y перпендикулярно к оси x через середину расстояния между нитями. Потенциал в точке с координатами (x, y) равен

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\chi \ln r_1 + \varphi_0 - 2\chi \ln r_2 + \varphi_0 = 2\chi \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) + 2\varphi_0.$$

Постоянное значение потенциала будет при

$$\frac{r_1}{r_2} = C = \text{const}. \quad (2.29)$$

Значение C определяет различные линии постоянного потенциала (сечение поверхностей равного потенциала). При $C = 1$ получаем ось y . Для других значений C получаем

$$C^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{(a-x)^2 + y^2}{(a+x)^2 + y^2}.$$

Отсюда находим для сечения поверхностей равного потенциала

$$y^2 + \left(x + a \frac{C^2 + 1}{C^2 - 1} \right)^2 = \frac{4a^2 C^2}{(C^2 - 1)^2}. \quad (2.30)$$

Это уравнение окружности.

Полученные результаты позволяют вычислить силу (на единицу длины) взаимодействия между металлическим цилиндром радиусом r

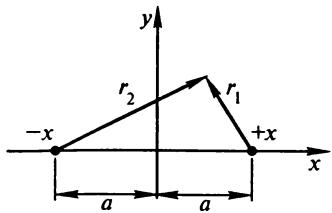


Рис. 2.25

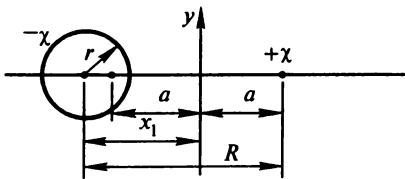


Рис. 2.26

и длинной тонкой проволочкой, расположенной на расстоянии $R > r$, если на единице длины нити заряд χ , а на единице длины цилиндра $-\chi$ (№ 2.45). Из (2.30) находим положение и радиус для нашего металлического цилиндра (линии равного потенциала). Центр сдвинут на

$$x_1 = a \frac{C^2 + 1}{C^2 - 1}$$

в сторону отрицательных иксов, а радиус равен

$$r = 2a \frac{C}{C^2 - 1}.$$

На рис. 2.26 показаны цилиндр и проволока (сечение в перпендикулярной плоскости). Расстояние от центра цилиндра до проволоки $R = a + x_1$. Так как поле вокруг цилиндра такое же, как от проволочки на расстоянии $-a$, то сила взаимодействия между цилиндром и проволочками одна и та же. Из предыдущих соотношений получаем

$$C = \frac{R}{r} \quad \text{и} \quad 2a = R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

С помощью (1.16) получаем

$$F = \frac{2\chi^2}{2a} = \frac{2\chi^2}{R \left(1 - r^2/R^2 \right)}.$$

Найдем, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E = 30$ кВ/см, диаметр проводов $2a = 1$ см, а расстояние между проводами $b = 5$ м (№ 2.48). Используя теорему Гаусса (1.12) для изолированного заряженного цилиндра, как и в случае заряженной нити (1.16), получаем распре-

деление напряженности поля $E = 2\chi/r$, где χ — заряд на единицу длины; r — расстояние от оси цилиндра. В случае двух противоположно заряженных цилиндров благодаря суперпозиции получаем на линии, соединяющей их центры (расстояние x отсчитывается от оси положительно заряженного цилиндра):

$$E = \frac{2\chi}{x} + \frac{2\chi}{b-x}.$$

Исследуя эту зависимость, можно получить, что при $x = b/2$ она имеет минимум. Таким образом максимальное значение напряженности поля на поверхности цилиндров равно

$$E_m = \frac{2\chi b}{a(b-a)}.$$

Из (2.6) следует

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 2\chi \int_a^{b-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) dx = 4\chi \ln \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = \\ &= 2E_m a \left(1 - \frac{b}{a} \right) \ln \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = 207 \text{ кВ.}\end{aligned}$$

Заряд (q), находящийся в точке внешнего электрического поля с потенциалом ϕ , обладает энергией в этом поле, равной

$$W = q\phi. \quad (2.31)$$

Если в поле находятся два заряда $+q$ и $-q$, образующие диполь бесконечно малой длины l , то энергия этих зарядов во внешнем поле равна

$$W = q(\phi - \phi'),$$

где ϕ и ϕ' — потенциалы внешнего поля в полюсах диполя. С точностью до величин второго порядка малости, учитывая (2.10),

$$\phi = \phi' + \frac{\partial\phi}{\partial l} l = \phi' + l \operatorname{grad} \phi = \phi' - l\mathbf{E}.$$

Поэтому

$$W = -ql\mathbf{E} = -\mathbf{p}\mathbf{E}, \quad (2.32)$$

где \mathbf{p} — момент диполя; \mathbf{E} — напряженность внешнего поля в месте расположения диполя. В этом выражении не учитывается взаимная энергия зарядов диполя, величина которой изменяется лишь при изменении длины диполя l .

Силы, действующие на диполь, представляют пару сил. Их момент определяется векторным произведением

$$\mathbf{M} = [\mathbf{lF}] = q[\mathbf{lE}] = [\mathbf{pE}]. \quad (2.33)$$

Используя сокращенное обозначение градиента в виде оператора «набла»:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.34)$$

Скалярным умножением \mathbf{p} на ∇ получаем оператор

$$(\mathbf{p}\nabla) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.35)$$

С помощью этого оператора можно обобщить формулу (1.11) для силы, действующей на диполь,

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E}. \quad (2.36)$$

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ

Диэлектриками, или изоляторами, называются вещества, не проводящие (или очень плохо проводящие) электрический ток. Имеющиеся в них заряженные частицы могут под действием электрического поля лишь смещаться (а не перемещаться свободно, как в проводниках). Возникающая поляризация, как показывает опыт, пропорциональна напряженности электрического поля, прикладываемого к диэлектрикам. Это наблюдается и для веществ, у которых частицы, например молекулы, обладают дипольными моментами (полярные диэлектрики), но из-за хаотичности их направлений суммарный дипольный момент диэлектрика равен нулю, и появляется он только тогда, когда под действием поля происходит выстраивание моментов в направлении поля. Вектором поляризации (или поляризацией) \mathbf{P} называется суммарный дипольный момент единицы объема диэлектрика

$$\mathbf{P} = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i}{\Delta V}. \quad (3.1)$$

Возникающая в диэлектрике поляризация, как показывает опыт при не очень больших напряженностях поля, пропорциональна прикладываемому электрическому полю

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}; \quad \{\mathbf{P} = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}\}. \quad (3.2)$$

Коэффициент пропорциональности называется поляризуемостью. Отметим, что такая зависимость хорошо выполняется для изотропных веществ. Для анизотропных веществ поляризуемость является тензорной величиной и направления векторов \mathbf{P} и \mathbf{E} могут не совпадать. Отметим также, что поляризация может возникнуть и в отсутствие электрического поля, например при механическом сжатии (пьезоэффект).

При поляризации, несмотря на смещение, все заряды внутри диэлектрика скомпенсированы, и только на границах остаются связ-

занные заряды. На рис. 3.1 показано сечение слоя диэлектрика. Выделен объем ΔV с боковыми поверхностями, параллельными вектору поляризации \mathbf{P} , и торцевыми поверхностями площадью ΔS , на которых плотность связанных зарядов σ . Для дипольного момента этого объема имеем

$$\mathbf{P} \Delta V = \sigma \Delta S l.$$

Вводя угол β между нормалью к границе и вектором \mathbf{P} , получаем

$$\sigma = P \cos \beta = P_n = \alpha E_n; \quad \{\sigma = P_n = \epsilon_0 \alpha E_n\}. \quad (3.3)$$

Для диэлектриков в дифференциальную теорему Гаусса (1.19) необходимо включать и связанные заряды

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho + 4\pi \oint \sigma \frac{dS}{\Delta V} = 4\pi\rho - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

В общем для плотности связанных зарядов имеем

$$\rho_{cb} = -\operatorname{div} \mathbf{P}; \quad \{\rho_{cb} = -\operatorname{div} \mathbf{P}\}. \quad (3.4)$$

Вектор электрической индукции (смещения) \mathbf{D} вводится следующим образом:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; \quad \{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\}. \quad (3.5)$$

Вектор \mathbf{D} является суммой различного рода физических величин: напряженности приложенного поля и поляризации единицы объема диэлектрика, но использование его упрощает описание поля в диэлектриках. В частности, для диэлектриков в дифференциальной теореме Гаусса (1.19) надо заменить вектор \mathbf{E} на \mathbf{D} и учитывать только свободные заряды

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad \{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho\}. \quad (3.6)$$

Соответственно для интегральной теоремы (1.12)

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint D_n dS = 4\pi q; \quad \{\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint D_n dS = q\}. \quad (3.7)$$

Для равномерно заряженной пластины диэлектрика (с плотностью заряда ρ) толщиной $2a$ получаем изменение D в зависимости от расстояния от средней плоскости пластины x : внутри пластины $D = 4\pi\rho x$, вне пластины постоянно и равно $D = 4\pi\rho a$.

Для равномерно заряженного шара из диэлектрика (с плотностью заряда ρ) радиусом a в зависимости от расстояния от центра r :

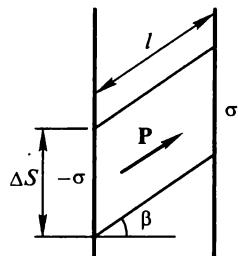


Рис. 3.1

внутри шара

$$\mathbf{D} = \frac{4}{3} \pi \rho r^2 \mathbf{r};$$

вне шара

$$\mathbf{D} = \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Линейная зависимость между поляризацией и напряженностью поля (3.2) нарушается в полярных диэлектриках (элементы которых обладают дипольными моментами) при больших напряженностях поля, когда все диполи среды выстраиваются по полю. Происходит **насыщение** поляризации (поле растет, а поляризация не меняется). Если же (3.2) выполняется, то из (3.5) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = (1 + 4\pi\alpha)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}; \\ \{\mathbf{D} &= \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = (1 + \alpha)\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь введена важная характеристика сред — **диэлектрическая проницаемость** (называемая также **диэлектрической постоянной**)

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha; \quad \{\epsilon = 1 + \alpha\}. \quad (3.9)$$

Приведем формулы для полей и потенциалов в **изотропном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ** .

Для поля точечного (и сферически симметричного) заряда из (3.7) и (3.8) вместо (1.1), (1.2) и (2.4) получаем **обобщенный закон Кулона**

$$E = \frac{q}{\epsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{\epsilon r}; \quad \left\{ E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \right\}. \quad (3.10)$$

Для потенциала точечного диполя вместо (2.14)

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{\epsilon r^3}; \quad \left\{ \varphi = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \right\}. \quad (3.11)$$

Дифференцируя, в соответствии с (2.8), можем найти напряженность поля ($\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$).

Для потенциала поля от **равномерно заряженного по объему** (с плотностью ρ) шара радиусом a из (3.10) и (2.15) получаем:

вне шара

$$\varphi = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho a^3}{\epsilon r}; \quad (3.12)$$

внутри шара

$$\varphi = 2\pi\rho \frac{3a^2 - r^2}{3\epsilon}.$$

Потенциал сферы радиусом a , равномерно заряженной по поверхности зарядом q :
вне сферы

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r}; \quad (3.13)$$

внутри сферы

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon a}.$$

Для равномерно заряженной (плотность заряда ρ) пластины толщиной $2a$ в зависимости от расстояния от средней плоскости x :
внутри пластины

$$\varphi = 2\pi\rho \frac{x^2 + a^2}{\epsilon} + \varphi_0; \quad (3.14)$$

вне пластины

$$\varphi = -4\pi\rho \frac{ax}{\epsilon} + \varphi_0 \text{ при } x > a;$$

$$\varphi = 4\pi\rho \frac{ax}{\epsilon} + \varphi_0 \text{ при } x \leq a,$$

где φ_0 — значение потенциала на средней плоскости.

Для бесконечного равномерно заряженного по объему цилиндра (плотность заряда ρ) радиусом a в зависимости от расстояния от оси цилиндра r

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi\rho}{\epsilon} (a^2 - r^2) + \varphi_0 \text{ при } r \leq a; \\ \varphi &= -2\frac{\pi\rho}{\epsilon} a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \varphi_0 \text{ при } r \geq a, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где φ_0 — значение потенциала на оси цилиндра.

Для бесконечной цилиндрической оболочки, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ , в зависимости от расстояния до оси оболочки

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \text{ при } r \leq a; \\ \varphi &= -2\frac{\pi\sigma}{\epsilon} a \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \varphi_0 \text{ при } r \geq a, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где φ_0 — значение потенциала на оболочке.

Введя обозначение $q_1 = q/\epsilon$, можно для поля (3.10) повторить все выкладки, которые привели к формулам (2.20)–(2.24), и получить обобщение теоремы о среднем (2.26) — потенциал проводящего шара радиусом r , находящегося в поле заряда (на расстоянии L) в диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью ϵ (№ 3.37):

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon L}. \quad (3.17)$$

В электростатике было получено, что циркуляция электрического поля равна нулю (2.7):

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint E_l dl = 0. \quad (3.18)$$

Рассмотрим однородный изотропный диэлектрик с проницаемостью ϵ , на плоской границе которого с вакуумом напряженность электрического поля в вакууме равна E_0 и вектор \mathbf{E}_0 составляет угол θ с нормалью к поверхности диэлектрика (рис. 3.2). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найдем:

1) поток Φ_E вектора \mathbf{E} через сферу радиусом R с центром на поверхности диэлектрика;

2) циркуляцию вектора \mathbf{D} по прямоугольному контуру Γ со сторонами длиной l_1 и l_2 , плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору \mathbf{E}_0 (№ 3.23).

Из (3.18) касательная к поверхности диэлектрика компонента поля $E_0 \sin \theta$ непрерывна на границе. Вследствие симметрии входящий в сферу поток ее равен выходящему потоку. Нормальная компонента поля $E_0 \cos \theta$ дает поток через поверхность сферы такой же, как через ее диаметральное сечение. Из (3.7) следует сохранение нормальной компоненты вектора электрической индукции

$$D_n = E_{0n} = \epsilon E_{dn} = E_0 \cos \theta.$$

Отсюда для нормальной компоненты напряженности электрического поля в диэлектрике имеем

$$E_{dn} = E_0 \frac{\cos \theta}{\epsilon}.$$

Поэтому поток вектора напряженности электрического поля

$$\Phi_E = \pi R^2 E_0 \cos \theta \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right).$$

Касательная компонента вектора индукции в вакууме равна касательной ком-

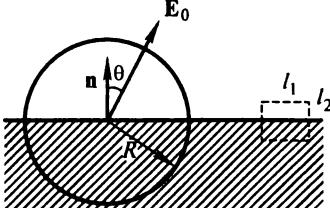


Рис. 3.2

поненте напряженности поля $E_0 \sin \theta$. В диэлектрике $D_\tau = \epsilon E_0 \sin \theta$. Поэтому циркуляция вектора электрической индукции (по контуру Γ из l_1 и l_2) равна

$$\oint_{\Gamma} D dl = l_1 E_0 \sin \theta (1 - \epsilon).$$

Если в центре диэлектрического шара радиусом R с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 помещен точечный заряд q и шар окружен бесконечным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 , то на границе диэлектриков появляются поляризационные заряды. Найдем их плотность (№ 3.22). Из (3.7) следует непрерывность D на границе. Из (3.8)

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon_1 R^2}; \quad E_2 = \frac{q}{\epsilon_2 R^2}.$$

Из (1.12) $4\pi\sigma = E_2 - E_1$. Откуда

$$\sigma = \frac{\Delta E}{4\pi} = \frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right).$$

Из (3.7) и (3.18) следует, что в плоских щелях (воздушных или вакуумных, для которых диэлектрическая постоянная $\epsilon = 1$) напряженность электрического поля $E_{\text{ш}}$ связана с напряженностью электрического поля в диэлектрике (с диэлектрической проницаемостью ϵ) $E_{\text{д}}$ следующим образом: в щели, параллельной полю, $E_{\text{ш}} = E_{\text{д}}$, в щели, перпендикулярной полю, $E_{\text{ш}} = \epsilon E_{\text{д}}$. Аналогичным образом связаны поля на границах диэлектрика в конденсаторах, частично заполненных диэлектриком. Например, если плоский конденсатор (две параллельные металлические пластины, имеющие противоположные заряды) частью опущен в диэлектрик так, что пластины перпендикулярны поверхности диэлектрика, то поле в диэлектрике равно полю в воздушной части конденсатора.

Используя (3.7) и (3.18), получаем, что при отсутствии на границах между диэлектриками свободных зарядов, при переходе через границу сохраняются нормальные к границе компоненты D и касательные к ней компоненты E . На рис. 3.3 показано преломление силовой линии поля на границе двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Учитывая, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{D_\tau}{D_n} = \frac{\epsilon E_\tau}{D_n},$$

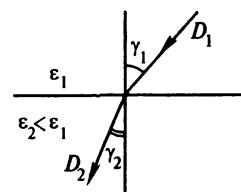


Рис. 3.3

получаем

$$\frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (3.19)$$

Для определения поля равномерно поляризованного шара воспользуемся формулой (1.14) для поля в равномерно заряженном (плотность заряда ρ) шаре и суперпозицией его поля с полем от такого же шара с отрицательным равномерным зарядом ($-\rho$), сдвинутым на малое расстояние l относительно первого. Сложение полей в области пересечения определяется (1.24) и дает

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3} \pi \rho l,$$

где ρl — дипольный момент единицы объема, т. е. $(-\mathbf{P})$. Поэтому поле **внутри** шаров (при малом сдвиге это один как бы шар радиусом R)

$$\mathbf{E}_i = -\frac{4}{3} \pi \mathbf{P}; \quad \left\{ \mathbf{E}_i = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right\}. \quad (3.20)$$

Это поле за счет поляризации. Дополнительного внешнего поля, которое могло приводить к такой поляризации, нет.

Дипольный момент поляризованного шара равен

$$\mathbf{p} = V \mathbf{P} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}. \quad (3.21)$$

Вне шара поле является полем **диполя** (1.9)

$$\mathbf{E}_e = V \left[(\mathbf{Pr}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{P}}{r^3} \right]. \quad (3.22)$$

На границе шара с внешней стороны

$$\mathbf{E}_{er} = 4\pi (\mathbf{Pn}) \mathbf{n} - \frac{4}{3} \pi \mathbf{P}, \quad (3.23)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности шара. В точках поверхности на оси симметрии

$$\mathbf{E}_{r0} = \frac{8}{3} \pi \mathbf{P} = -2\mathbf{E}_i.$$

На диаметре, перпендикулярном оси,

$$\mathbf{E}_{rn} = -\frac{4}{3} \pi \mathbf{P} = \mathbf{E}_i.$$

Равномерная поляризация диэлектрического шара получается при помещении его во внешнее однородное электрическое поле (с напряженностью E_0). Убедимся, что в этом случае сумма внешнего поля и поля равномерно поляризованного шара удовлетворяет условиям на бесконечно большом расстоянии и на границе шара. На бесконечно большом расстоянии суммарное поле $E = E_0 + E_e$ переходит в E_0 , так как поле шара (3.22) стремится к нулю. На границе шара по разные стороны границы должны быть одинаковы касательные составляющие векторов E и нормальные составляющие векторов D . Суммарное поле внутри шара $E = E_0 + E_i$, вне шара $E = E_0 + E_e$. Как видно из (3.20) и (3.23), касательные составляющие поля на границе шара совпадают. Вне шара $D = E_0 + E_e$. Внутри шара $D = E_0 + E_i + 4\pi P$. Используя (3.20) и (3.23), находим, что на границе шара одинаковы нормальные составляющие вектора D . Таким образом, поле внутри диэлектрического шара, находящегося во внешнем поле E_0 ,

$$E = E_0 - \frac{4}{3}\pi P. \quad (3.24)$$

Используя (3.2) и (3.9), находим

$$E = 3 \frac{E_0}{\epsilon + 2}. \quad (3.25)$$

Из (3.2) и (3.25)

$$P = 3(\epsilon - 1) \frac{E_0}{4\pi(\epsilon + 2)}. \quad (3.26)$$

Дипольный момент диэлектрического шара радиусом a ($V = 4\pi a^3/3$) во внешнем поле

$$p = VP = a^3 (\epsilon - 1) \frac{E_0}{\epsilon + 2}. \quad (3.27)$$

Введем координатную ось x , проходящую через центр шара (начало отсчета) параллельно внешнему полю E_0 . При этом потенциал внешнего поля $\phi = -E_0 x$, а потенциал поляризованного шара определяется уравнениями (2.14) и (3.11), в последнем $\epsilon = 1$ для среды, окружающей шар ($r \geq a$),

$$\phi_e = V_0 \frac{Pr}{r^3} \quad \text{при } r \geq a, \quad (3.28)$$

где

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Внутри шара

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Поэтому при $r \leq a$

$$\varphi_i = \frac{4}{3} \pi \mathbf{Pr}. \quad (3.29)$$

Окончательно, для потенциала поляризованного шара во внешнем поле E_0 получаем

$$\varphi_e = -E_0 x + V_0 \frac{\mathbf{Pr}}{r^3} = -E_0 x \left[1 - (\varepsilon - 1) \frac{a^3}{(\varepsilon + 2)r^3} \right], \quad r \geq a; \quad (3.30)$$

$$\varphi_i = -E_0 x + \frac{4}{3} \pi \mathbf{Pr} = -3E_0 \frac{x}{\varepsilon + 2}, \quad r \leq a. \quad (3.31)$$

Найдем напряженность поля \mathbf{E}_n в сферической полости, вырезанной внутри равномерно поляризованного диэлектрика. Обозначим поле внутри диэлектрика, вызвавшее его поляризацию, \mathbf{E} . Если полость заполнить тем же диэлектриком, то к полю в полости добавится поле равномерно поляризованного шара (3.20). Их сумма должна равняться \mathbf{E} . Отсюда

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E} + \frac{4}{3} \pi \mathbf{P} = (\varepsilon + 2) \frac{\mathbf{E}}{3}; \quad \left\{ \mathbf{E}_n = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = (\varepsilon + 2) \frac{\mathbf{E}}{3} \right\}. \quad (3.32)$$

Оценим силу взаимодействия между нейтральным диэлектрическим шариком радиусом R и точечным зарядом q , считая расстояние между ними L большим, а диэлектрическую проницаемость шарика ε , такой, что $\varepsilon - 1 \ll 1$ (№ 3.39). Предполагая, что при вычислении дипольного момента шарика поле, его создающее (от заряда), можно считать постоянным по величине и направлению, а при вычислении силы учитывать его изменение, из (3.27) и (1.11) находим

$$F = \frac{(\varepsilon - 1) R^3 q}{(\varepsilon + 2) L^2} \frac{d(q/L^2)}{dL} = -2 \left(\frac{q}{L} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}.$$

При $\varepsilon - 1 \ll 1$ получаем

$$F = -\frac{2}{3} \left(\frac{q}{L} \right)^2 \left(\frac{R}{L} \right)^3 (\varepsilon - 1).$$

Сила взаимодействия между двумя шариками, один из которых заряжен и состоит из диэлектрика, а другой металлический и не заряжен, определяется (1.26) и (1.11) (№ 3.41). Дипольный момент металлического шарика за счет заряда (q) диэлектрического шарика в соответствии с (1.26) будет уменьшаться с расстоянием между ними (r), как $1/r^5$. Используя (1.11), находим, что $F \sim 1/r^5$. Действие возникающего дипольного момента шарика из диэлектрика дает несущественную добавку.

Рассмотрим взаимодействие точечного заряда (q), находящегося на расстоянии L от плоской поверхности диэлектрика (диэлектрическая проницаемость ϵ) с этим диэлектриком, заполняющим полу-пространство (№ 3.40). Обозначим плотность связанных зарядов на границе диэлектрика σ . Учитывая, что напряженность электрического поля в некоторой точке A (рис. 3.4) создается зарядом q и связанными зарядами диэлектрика (противоположного q знака), и используя (3.3), (3.9), (1.1) и (1.17), получаем

$$\sigma = P_n = (\epsilon - 1) \frac{E_n}{4\pi} = (\epsilon - 1) \frac{q \cos^3 \theta / L^2 - 2\pi\sigma}{4\pi}.$$

Откуда распределение плотности связанных зарядов

$$\sigma = \frac{(\epsilon - 1) q \cos^3 \theta}{2\pi L^2 (\epsilon + 1)}. \quad (3.33)$$

Приведем соотношение между параметрами, использованными здесь и на рис. 3.4:

$$x = L \operatorname{tg} \theta, \quad dx = \frac{L d\theta}{\cos^2 \theta}, \quad r^2 = L^2 + x^2.$$

Вычислим полный связанный заряд на поверхности диэлектрика

$$Q = \int_0^\infty \sigma 2\pi x dx = \frac{(\epsilon - 1)q}{\epsilon + 1}. \quad (3.34)$$

Для силы притяжения получаем

$$F = \int_0^\infty q\sigma 2\pi x dx \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{q^2(\epsilon - 1)}{4L^2(\epsilon + 1)}. \quad (3.35)$$

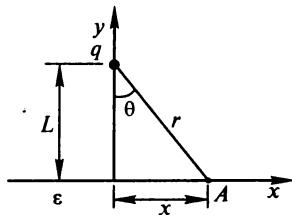


Рис. 3.4

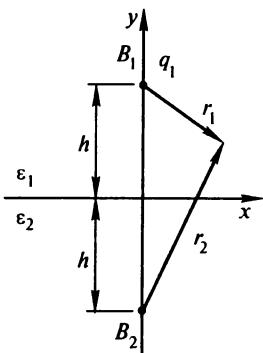


Рис. 3.5

Рассмотрим два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , граничащих друг с другом вдоль плоскости (рис. 3.5). В точке B_1 помещен точечный заряд q_1 . Найдем напряженность электрического поля в каждом из диэлектриков. В окрестности B_1 поле должно описываться (3.10), т. е. в выражение для поля должен входить член вида (3.10). Предположим, что поле от поляризационных зарядов на границе диэлектриков в первом диэлектрике (ϵ_1) эквивалентно полю заряда q_2 , помещенного в точку B_2 , зеркально симметричную точке B_1 относительно границы.

В таком случае поле в первом диэлектрике описывается формулой

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1 \mathbf{r}_1}{\epsilon_1 r_1^3} + \frac{q_2 \mathbf{r}_2}{\epsilon_2 r_2^3}.$$

Предположим также, что поле во втором диэлектрике можно представить через некоторый заряд q_3 , помещенный в точку B_1 ,

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_3 \mathbf{r}_1}{\epsilon_2 r_1^3}.$$

Оба предположения будут оправданы последующими вычислениями. Должны удовлетворяться условия на границе диэлектриков: непрерывность касательных компонент вектора \mathbf{E} и нормальных компонент вектора \mathbf{D}

$$q_1 \frac{\sin \theta}{\epsilon_1} + q_2 \frac{\sin \theta}{\epsilon_1} = q_3 \frac{\sin \theta}{\epsilon_2};$$

$$q_1 \cos \theta - q_2 \cos \theta = q_3 \cos \theta.$$

Видно, что угол θ выпадает из обоих уравнений. Отсюда находим

$$q_2 = q_1 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}; \quad q_3 = 2q_1 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad (3.36)$$

Подставляя их в выражения для полей, имеем

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1 \mathbf{r}_1}{\epsilon_1 r_1^3} - \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) q_1 \mathbf{r}_2}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2) r_2^3}; \quad (3.37)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2q_1 \mathbf{r}_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) r_1^3}. \quad (3.38)$$

При $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ получаем выражения для точечного заряда над проводящей плоскостью

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1 \mathbf{r}_1}{\epsilon_1 r_1^3} - \frac{q_1 \mathbf{r}_2}{\epsilon_1 r_2^3}.$$

Чтобы определить силу, действующую на заряд q_1 , который находится на расстоянии h от границы диэлектриков, находим поле от заряда q_2 , равное

$$E = \frac{q_2}{4h^2 \epsilon_1},$$

и умножаем его на q_1

$$F = \frac{q(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{4h^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}. \quad (3.39)$$

Опишем поля через потенциалы: ϕ_1 в первом диэлектрике и ϕ_2 во втором диэлектрике. Из отсутствия заряда на границе диэлектриков и (2.8) и (3.10) имеем

$$\epsilon_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \epsilon_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (3.40)$$

Используя (3.6), (3.8) и (2.12), получаем уравнения Пуассона

$$\Delta \phi_1 = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon_1}; \quad \Delta \phi_2 = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon_2}. \quad (3.41)$$

Плотность зарядов равна нулю везде, кроме точки B_1 . Поэтому

$$\Delta \phi_2 = 0. \quad (3.42)$$

Другое уравнение из (3.41) можно удовлетворить, положив

$$\phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon_1 r_1} + \phi_3; \quad \Delta \phi_3 = 0, \quad (3.43)$$

где $r_1 = [x^2 + (y - h)^2 + z^2]^{1/2}$. Воспользовавшись (2.13), убеждаемся, что первый член устраняет особенность в точке B_1 .

Потенциал в каждой точке пространства зависит от r и расстояния от плоской границы раздела диэлектриков (y). Вместо y удобно ввести расстояние от точки B_2 , расположенной симметрично точки B_1 относительно границы диэлектриков, $r_2 = [x^2 + (y + h)^2 + z^2]^{1/2}$. Гра-

ница диэлектриков описывается уравнением $r_1 = r_2$. Решениями уравнений Лапласа из (3.42) и (3.43) являются суперпозиции сферически симметричных решений (2.13), зависящих от r_1 и r_2 . При этом потенциал φ_2 во втором диэлектрике не может содержать членов, пропорциональных $1/r_2$, а потенциал φ_3 в первом диэлектрике соответственно членов, пропорциональных $1/r_1$. Решения ищем в виде

$$\varphi_3 = a_1 \frac{q}{\epsilon_1 r_1}; \quad \varphi_2 = a_2 \frac{q}{\epsilon_2 r_2},$$

где a_1 и a_2 — постоянные величины, которые определяем из условий на границе. Равенство потенциалов φ_1 и φ_2 дает

$$\frac{1 + a_1}{\epsilon_1} = \frac{a_2}{\epsilon_2}.$$

Из (3.40) имеем $1 - a_1 = a_2$. Отсюда

$$a_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}; \quad a_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Получаем для потенциала

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{q}{\epsilon_1 r_1} + \frac{q(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 (\epsilon_1 + \epsilon_2) r_2} \quad \text{при } y > 0; \quad (3.44)$$

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) r_1} \quad \text{при } y < 0. \quad (3.45)$$

Рассмотрим взаимодействие между сферическими пузырьками (полостями) радиусом r внутри диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ , помещенного между обкладками плоского конденсатора, имеющими разность потенциалов U . В первом варианте пузырьки расположены на расстоянии l друг от друга в плоскости, параллельной обкладкам конденсатора. Оценим величину и направление силы их электростатического взаимодействия, предполагая, что наличие пузырьков не изменяет однородной поляризации диэлектрика и равномерного распределения заряда на обкладках (№ 3.17). Дипольные моменты пузырьков \mathbf{p}_n противоположны дипольным моментам, которые получились бы при заполнении их данным диэлектриком. Поэтому (3.21) и (3.8) дают

$$\mathbf{p}_n = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P} = \frac{(\epsilon - 1) R^3 E}{3}. \quad (3.46)$$

Для диполей из (1.8) и (1.11) находим силу отталкивания

$$F = \frac{3p_n^2}{l^4} = \frac{(\epsilon - 1)^2 U^2 r^6}{3h^2 l^4}.$$

Если пузырьки расположены вдоль прямой, перпендикулярной обкладкам конденсатора (№ 3.18), то возникает сила притяжения (1.10)

$$F = -\frac{6p_n^2}{l^4} = \frac{2(\epsilon - 1)^2 U^2 r^6}{3h^2 l^4}.$$

Некоторой моделью диэлектрика может служить **среда**, состоящая из большого числа проводящих шариков радиусом R . Предполагая, что концентрация шариков n очень мала $R^3 n \ll 1$, можем найти, на сколько отличается от единицы диэлектрическая постоянная (проницаемость) среды (№ 3.1). Считая, что поле вблизи шариков равно внешнему E , из (1.26) находим дипольный момент шарика $p = R^3 E$. Из (3.1) $P = np$, а из (3.8) находим $\epsilon = 1 + 4\pi n R^3$.

Зная диэлектрическую проницаемость ϵ некоторого одноатомного газа с известным числом атомов в единице объема n , можно оценить, на какое расстояние l в заданном электрическом поле E сместится электронная оболочка (предполагаемая симметричной в отсутствие внешнего поля) атома с известным зарядом ze (№ 3.2). В случае, когда $D = \epsilon E$, имеем $\epsilon E = E + 4\pi P$. Откуда

$$P = \frac{(\epsilon - 1)E}{4\pi}.$$

Так как $P = np$, $p = ql$, $q = ez$, то

$$l = \frac{p}{q} = \frac{P}{nez} = \frac{(\epsilon - 1)E}{4\pi nez}.$$

Отметим, что смещение для атома аргона в поле с напряженностью $E = 300$ В/м получается $2 \cdot 10^{-16}$ см, что значительно меньше размера атома.

Предполагая некоторую структуру электронного облака в атоме, можно вычислить коэффициент поляризуемости атома α в слабом внешнем электрическом поле, пренебрегая деформацией электронного облака (№ 3.3).

Если плотность электронного облака описывается функцией

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где a — радиус первой боровской орбиты, то, используя теорему Гаусса (1.12), имеем

$$E(r)4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr.$$

Откуда находим

$$E(r) = -\frac{e}{r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \right].$$

Отметим, что неопределенность при r , стремящемся к нулю, можно раскрыть по правилу Лопитала. Производная числителя: $4(r^2/a^2)e^{-2r/a}$, производная знаменателя: $2r/a$. Поэтому $E(0) = 0$.

Так как наибольшая плотность заряда в основном находится при $r \ll a$, то, разлагая экспоненту до кубического члена, получаем

$$E(r) = -\frac{4}{3} \frac{er}{a^3}.$$

Это поле в электронном облаке. При наложении внешнего поля E_0 облако сдвигается, и смещение его центра на r_0 определяется положением нулевого поля из условия $E_0 + E(r_0) = 0$. Получаем

$$r_0 = \frac{3}{4} \frac{a^3 E_0}{e}; \quad p = er_0 = \frac{3}{4} a^3 E_0$$

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{3}{4} a^3.$$

Можно предположить, что электронное облако сосредоточено внутри сферы радиусом a с постоянной плотностью (№ 3.4)

$$\rho = -\frac{3e}{4\pi a^3}.$$

По теореме Гаусса (1.12) получаем

$$E(r) = -\frac{er}{a^3}.$$

При наложении внешнего поля E_0 в данном случае смещение центра облака происходит также на r_0 :

$$r_0 = \frac{a^3 E_0}{e}; \quad p = er_0 = a^3 E_0$$

и, следовательно, $\alpha = a^3$.

Диполи диэлектрика, помещенные в постоянное электрическое поле (E_0), выстраиваются по полю. Под действием поперечно направленного переменного электрического поля (например, синусоидального $E = E_a \sin \omega t \ll E_0$) они могут совершать колебания. Найдем резонансную (собственную) частоту колебаний жестких диполей с дипольными электрическими моментами p и моментами инерции I в постоянном электрическом поле E_0 , превосходящем по величине поле насыщения (№ 3.5). Учитывая, что момент сил M , действующий на диполь, равен векторному произведению $\mathbf{M} = [\mathbf{pE}_0]$, для малых отклонений на угол θ , при которых синус можно заменить углом, получаем уравнение вращательных колебаний

$$\frac{Id^2\theta}{dt^2} = -pE_0\theta.$$

Отсюда собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \left(\frac{pE_0}{I} \right)^{1/2}.$$

Найдем напряженность поля E_u в центре сферической полости радиусом R внутри диэлектрической среды с диэлектрической проницаемостью ϵ , созданного поляризационными зарядами, индуцированными на поверхности сферы. В диэлектрике имеется однородное электрическое поле напряженностью \mathbf{E} и вектор поляризации \mathbf{P} всюду (за исключением полости) имеет постоянное значение (№ 3.15). На рис. 3.6 показана сфера и элемент ее поверхности

$$dS = R d\theta R \sin \theta d\psi.$$

Плотность индуцированного на поверхности сферы связанных заряда

$$\sigma = P \cos \theta.$$

В силу симметрии поле в центре сферы направлено так же, как \mathbf{P} . Это учитываем при интегрировании поля от индуцированных зарядов:

$$\begin{aligned} E_u &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} P \cos \theta R^2 \sin \theta d\psi \frac{\cos \theta}{R^2} = \\ &= 2\pi P \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{4\pi P}{3}. \quad (3.47) \end{aligned}$$

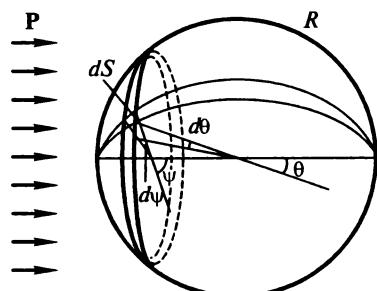


Рис. 3.6

Из (3.2) и (3.9) получаем

$$E_u = \frac{(\epsilon - 1)E}{3}. \quad (3.48)$$

Отметим, что поле в сферической полости определяется (3.32)

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E} + \frac{4\pi\mathbf{P}}{3}.$$

Если диэлектрик состоит из диполей \mathbf{p} по N штук в единице объема, то при отсутствии их взаимного влияния друг на друга получаем из (3.1) $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$ и из (3.2) $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$. Обозначая поляризуемость диполей (например, молекул) β , получаем для диполей $\mathbf{p} = \beta\mathbf{E}$ и связь с поляризуемостью среды $\alpha = N\beta$. Влияние диполей друг на друга можно учесть, считая, что поле вокруг одного диполя, создаваемое другими диполями, соответствует (3.47), и вместе с приложенным описывается (3.32). В таком случае для поляризуемости вводим $\alpha_0 = N\beta$ и для суммарного поля E_c

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\beta\mathbf{E}_c = \alpha_0\mathbf{E}_c = \alpha_0\mathbf{E} + 4\pi\alpha_0 \frac{\mathbf{P}}{3}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha_0\mathbf{E}}{1 - 4\pi\alpha_0/3} = \alpha\mathbf{E} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\alpha_0}{1 - 4\pi\alpha_0/3}.$$

Отметим, что α_0 — поляризуемость, вычисленная без учета отличия E_c от E .

Из (3.9) находим

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{4\pi\alpha_0}{1 - 4\pi\alpha_0/3}.$$

Откуда следует формула Лоренц—Лорентца для определения ϵ с учетом влияния диполей в диэлектрике друг на друга (№ 3.16)

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi N\beta}{3}. \quad (3.49)$$

Эта формула хорошо подтверждается для диэлектрических жидкостей, поляризуемость которых α не мала по сравнению с единицей.

Рассмотрим газ из молекул, представляющих упругие диполи с молекулярной поляризуемостью β , для которых дипольный момент $p = \beta E$. Если в такой газ, имеющий температуру T и среднюю кон-

центрацию n_0 , внести заряженный шарик, то в результате притяжения молекул к шарику и их теплового движения установится большинственное распределение молекул в электрическом поле. Сила притяжения определяется (1.11)

$$F = p \frac{\partial E}{\partial x} = \beta E \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\beta E^2)}{\partial x} = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

где, по определению силы в потенциальном поле, W — потенциальная энергия. Распределение Больцмана дает для распределения числа молекул в единице объема от величины поля в случае малого возмущения концентрации ($\delta n \ll n_0$) (см. 2, с. 188)

$$n = n_0 \exp\left(\frac{\beta E^2}{2kT}\right) \approx n_0 \left(1 + \frac{\beta E^2}{2kT}\right).$$

Для заряда в диэлектрической среде из (3.9) и (3.10) имеем

$$D = \frac{Q}{r^2} = \epsilon E = E [1 + 4\pi n(r)\beta] \approx E (1 + 4\pi n_0\beta) + 4\pi n_0\beta \frac{E^3}{kT}.$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений. В качестве первого приближения берем

$$E_1 = \frac{D}{1 + 4\pi n_0\beta}$$

и подставляем в предыдущее уравнение. В результате для зависимости напряженности поля от расстояния в газе, состоящем из диполей, имеем (№ 3.21)

$$E(r) \approx D(r) \frac{1 - \left[D(r)^2 / (1 + 4\pi n_0\beta)^3\right] 4\pi n_0\beta^2 / kT}{1 + 4\pi n_0\beta}.$$

Если в пространство, первоначально занятое однородным электрическим полем E_0 , вносят длинный диэлектрический цилиндр так, что его ось перпендикулярна начальному полю E_0 , то диэлектрик поляризуется однородно, и в соответствии с (1.31) поле за счет поляризации $E_n = -2\pi r a$. Вводя вектор поляризации P (поляризация единицы объема), получаем для поля за счет поляризации $E_n = -2\pi P$. Полное поле в диэлектрике включает приложенное поле E_0 и равно $E = E_0 - 2\pi P$. Так как именно это поле

вызывает поляризацию, с помощью (3.2) получаем $E = E_0 - 2\pi\alpha E$. Учитывая (3.9), находим (№ 3.20)

$$E = \frac{E_0}{1 + 2\pi\alpha} = \frac{2E_0}{\epsilon + 1} \quad \text{и} \quad P = \alpha E = \frac{(\epsilon - 1) E_0}{2\pi(\epsilon + 1)}.$$

При выключении внешнего поля в диэлектрике может остаться так называемая **замороженная поляризация**. Связанные заряды на границах диэлектрика создают электрические поля вне и внутри диэлектрика.

В случае плоского слоя диэлектрика с замороженной поляризацией P , перпендикулярной границе, поле будет как в плоском конденсаторе: снаружи нулевое (и $D = 0$), внутри из (3.5) получаем $E = -4\pi P$.

Для шара из диэлектрика с замороженной поляризацией P можно воспользоваться (1.25) и (3.3) или сразу (3.20). Получаем, что поле внутри шара

$$\mathbf{E}_w = -\frac{4}{3}\pi\mathbf{P}.$$

Вне шара поле определяется диполем с моментом, равным произведению \mathbf{P} на объем шара (3.21).

Если напряженность поля в диэлектрике \mathbf{E} , то поле в полости внутри диэлектрика из суперпозиции (3.32)

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E} - \mathbf{E}_w = \mathbf{E} + \frac{4}{3}\pi\mathbf{P}.$$

Найдем поля \mathbf{E} и \mathbf{D} для тонкого диэлектрического цилиндра длиной $2l$ и радиусом $r \ll l$ с замороженной поляризацией P , направленной вдоль оси цилиндра (№ 3.7, № 3.8). Электрическое поле создается связанными зарядами на торцах цилиндра. Из (3.3) получаем плотность зарядов на торцах: $\sigma = P$ на верхнем торце, если поляризация направлена вверх, и $\sigma = -P$ на нижнем (рис. 3.7, а). Напряженность поля на торцах определяется плотностью зарядов (1.17) $E = 2\pi\sigma = 2\pi P$. Вдали от торцов поле меняется как от зарядов $q = \pi\sigma r^2$. В середине цилиндра $E = q/l^2$. Еще на больших расстояниях поле превращается в поле диполя. На рис. 3.7, а показаны силовые линии напряженности поля, на рис. 3.7, б — силовые линии вектора $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. Видно, что вне диэлектрика линии \mathbf{D} совпадают с линиями \mathbf{E} , а на боковой поверхности резко меняют направление. Изменение вектора $\Delta\mathbf{D} = 4\pi\mathbf{P}$. При переходе через торцы вектор \mathbf{D} не меняется.

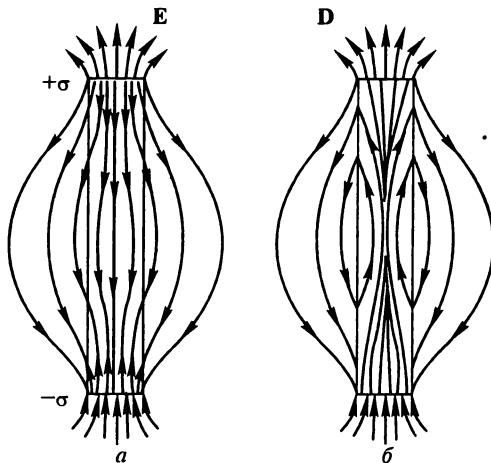


Рис. 3.7

В случае короткого цилиндра радиусом R и высотой $h \ll R$ с замороженной поляризацией P , направленной по оси цилиндра, напряженность поля близка к напряженности поля в плоском конденсаторе: внутри $E = 4\pi\sigma = 4\pi P$ и направлена противоположно P , а снаружи поля нет. Если учесть конечность размера диэлектрика, то, пользуясь для поля заряженного диска формулой (1.5), в центре поверхности диэлектрика получаем напряженность поля (№ 3.8)

$$E \approx \frac{2\pi\sigma h}{R}.$$

Для бесконечной полоски диэлектрика шириной L и толщиной $l \ll L$ с вектором замороженной поляризации P , перпендикулярным меньшей грани (рис. 3.8), найдем поле E и индукцию D на средней линии (№ 3.9). Поле на средней линии полоски будет как от двух линий с зарядами на единицу длины линии, равными $\sigma l = Pl$ и $-\sigma l = -Pl$. Это, как следует из (1.16), дает поле $E = -8Pl/L$. Для индукции из (3.5) получаем

$$D = 4\left(\pi - \frac{2l}{L}\right)P.$$

Если диэлектрический образец с замороженной поляризацией P имеет форму **полого цилиндра** радиусом R и толщиной стенки $h \ll R$ с разрезом ширины $l \ll R$ (сечение его и направление вектора поляризации показаны на рис. 3.9), то поле в точке A будет от двух заряженных линий с зарядами на единицу длины $\sigma h = Ph$ и

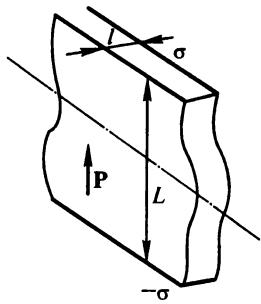


Рис. 3.8

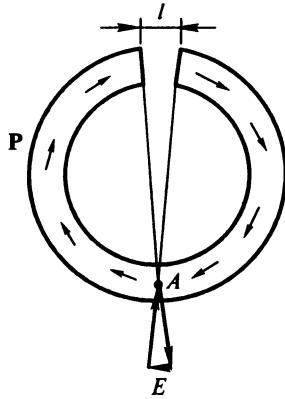


Рис. 3.9

$-\sigma h = -Ph$, отстоящими друг от друга на l и находящимися от точки A на расстоянии $2R$. Используя (1.16), из геометрического сложения получаем

$$E = \frac{Phl}{2R^2}.$$

Так как этот вектор направлен противоположно вектору \mathbf{P}_A (в точке A), получаем (№ 3.10)

$$\mathbf{D}_A = \left(4\pi - \frac{hl}{2R^2} \right) \mathbf{P}_A.$$

Аналогичным образом решается задача для **желоба**, сечение которого показано на рис. 3.10 (№ 3.11). Из (1.16) и геометрического сложения находим в точке A

$$\mathbf{E}_A = -\frac{h\mathbf{P}_A}{R}.$$

и из (3.4)

$$\mathbf{D}_A = \left(4\pi - \frac{2h}{R} \right) \mathbf{P}_A.$$

Рассмотрим тонкий диск из диэлектрика радиусом R с отверстием радиусом r толщиной $h \ll r$ с замороженной поляризацией \mathbf{P} , параллельной поверхности диска (рис. 3.11). В соответствии с (3.3) плотность связанных зарядов на внешней поверхности $\sigma = -P \cos \theta$, а на внутренней — $\sigma = P \cos \theta$. Электрическое поле, создаваемое

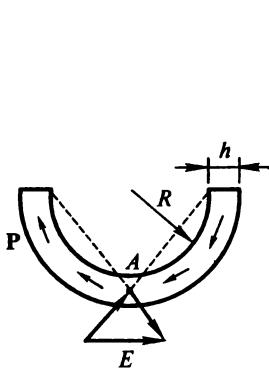


Рис. 3.10

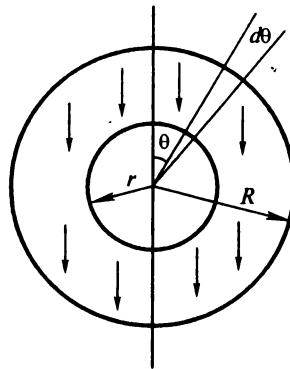


Рис. 3.11

в центре диска этими зарядами при угле θ , направлено вдоль радиуса и равно

$$dE = \frac{dq}{r^2} - \frac{dq}{R^2} = \sigma h \left(\frac{rd\theta}{r^2} - \frac{Rd\theta}{R^2} \right) = Ph \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \cos \theta d\theta.$$

В силу симметрии относительно вертикальной линии при интегрировании по всем углам остается только вертикальная составляющая поля. Учитывая симметричность подынтегральной функции, получаем (№ 3.12)

$$E = 4Ph \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \pi Ph \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

Этой формулой можно воспользоваться для нахождения напряженности поля в центре отверстия в тонкой (толщиной h) длинной рейке шириной $2l$ (рис. 3.12) с замороженной поляризацией, перпендикулярной краям рейки. Связанные заряды на краях рейки дают поле, как от двух противоположно заряженных нитей (1.16), а на отверстии — по последней формуле. В итоге (№ 3.14)

$$E = 4h \left(\frac{\pi}{4} - \frac{r}{l} \right) \frac{P}{r}.$$

На рис. 3.13 показано поперечное сечение диэлектрической пластиинки толщиной $2h$ с замороженной поляризацией, направленной перпендикулярно ее поверхности (по оси x) и равной

$$P = P_0 \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right),$$

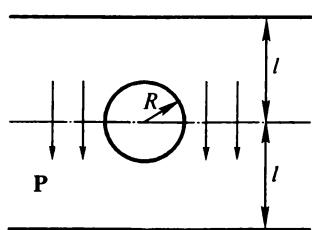


Рис. 3.12

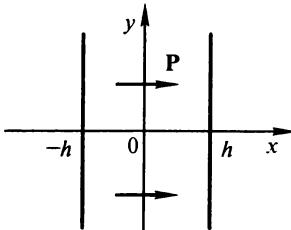


Рис. 3.13

где x отсчитывается от средней плоскости пластинки. В силу симметрии относительно средней плоскости по теореме Гаусса вне пластинки имеем $E_{\text{внеш}} = D = 0$. Из непрерывности нормальной компоненты электрической индукции на границе диэлектрика и внутри пластинки $D = 0$. Из (3.5) $E_{\text{внут}} = -4\pi P$. Разность потенциалов между боковыми поверхностями пластинки (№ 3.13) находим из (2.6)

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \varphi_2 &= \int_{-h}^h E dx = -4\pi P_0 \int_{-h}^h \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) dx = \\ &= -8\pi P_0 \int_0^h \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) dx = -16\pi P_0 \frac{h}{3}.\end{aligned}$$

Для диэлектрической пластинки с замороженной поляризацией P , перпендикулярной поверхностям пластинки, поле E и индукция D снаружи равны нулю. Так как индукция D на границе диэлектрика непрерывна, то из (3.5) следует $E = -4\pi P$. Если такую пластинку поместить внутрь плоского конденсатора (рис. 3.14), пластины которого, находящиеся на расстоянии l , соединены между собой, то картина полей изменится. Наличие связанных зарядов на поверхности диэлектрика приводит к тому, что на пластинах конденсатора наводятся свободные заряды плотностью σ_1 разных знаков. Учитывая, что плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика $\sigma = \pm P$ и что из непрерывности D для поля вне диэлектрика имеем $E_{\text{внеш}} = D = E + 4\pi P$, из (2.6) и равенства потенциалов на пластинах конденсатора (по условию) получаем $E_{\text{внеш}}(l - h) + Eh = 0$. Решая это уравнение совместно с предыдущим, находим (№ 3.19)

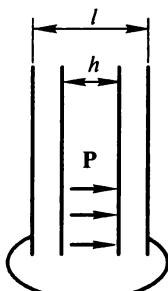


Рис. 3.14

$$D = E_{\text{внеш}} = \frac{4\pi Ph}{l}; \quad E = \frac{4\pi P(l-h)}{l}.$$

Плотность связанных зарядов на поверхности диэлектрика $\sigma = P$,
плотность свободных зарядов на пластинах конденсатора

$$\sigma_1 = \frac{E_{\text{внеш}}}{4\pi} = \frac{Ph}{l}.$$

Важной характеристикой проводящих тел и конденсаторов (специальных технических устройств, предназначенных для накопления и сохранения электрических зарядов) является **емкость**. Это — коэффициент пропорциональности между зарядом проводника или конденсатора и потенциалом или разностью потенциалов, который зависит от размеров и формы устройств и диэлектрической проницаемости окружающего диэлектрика и ее распределения в пространстве.

Емкость металлического шара радиусом R в вакууме из (2.4)

$$C = \frac{q}{\phi} = R; \quad \left\{ C = \frac{q}{\phi} = 4\pi\epsilon_0 R \right\}. \quad (3.50)$$

Емкость такого же шара в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ из (3.10)

$$C = \epsilon R; \quad \{ C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon R \}. \quad (3.51)$$

Для двух металлических шаров (радиусами R_1 и R_2), находящихся в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ и расположенных на расстоянии $2h$ друг от друга, в точке, отстоящей от одного на r_1 , а от другого — на r_2 , из (3.10) и суперпозиции для потенциала получаем

$$\phi = \frac{q}{\epsilon r_1} - \frac{q}{\epsilon r_2} + \text{const.}$$

В случае $h \gg R_1$ и $h \gg R_2$ имеем на первом шаре

$$\phi_1 = \frac{q}{\epsilon R_1} - \frac{q}{\epsilon 2h} + \text{const}$$

и на втором шаре

$$\phi_2 = \frac{q}{\epsilon 2h} - \frac{q}{\epsilon R_2} + \text{const.}$$

Разность потенциалов

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{q[h(R_1 + R_2) - R_1 R_2]}{\epsilon R_1 R_2} \approx \frac{q(R_1 + R_2)}{\epsilon R_1 R_2}.$$

Отсюда емкость такой системы

$$C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad \left\{ C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right\}. \quad (3.52)$$

При $R_1 = R_2 = R$ получаем

$$C = \frac{\epsilon R}{2}; \quad \left\{ C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R}{2} \right\}. \quad (3.53)$$

Применение метода зеркальных изображений дает то же значение емкости для системы из проводящей плоскости и проводящего шара на расстоянии $h \gg R$.

Для концентрических металлических оболочек радиусами R_1 и R_2 , между которыми находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ (сферический конденсатор), из (3.10) получаем

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q(1/R_1 - 1/R_2)}{\epsilon}. \quad (3.54)$$

Отметим, что здесь q — абсолютная величина заряда, который находится на внешней оболочке внутренней сферы и на внутренней поверхности внешней сферы. На внешней поверхности внешней сферы может находиться любой заряд, и он не влияет на поле между сферами.

Из (3.54) емкость сферического (шарового) конденсатора

$$C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}; \quad \left\{ C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right\}. \quad (3.55)$$

Если толщина зазора между обкладками h мала по сравнению с радиусами, то для площадей обкладок имеем

$$S \approx 4\pi R_1^2 \approx 4\pi R_2^2 \approx 4\pi R_1 R_2.$$

В этом случае для емкости получаем

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi h}; \quad \left\{ C = \epsilon_0\epsilon \frac{S}{h} \right\}. \quad (3.56)$$

Естественно, что ту же самую формулу получаем и для плоского конденсатора, если пренебречь краевыми эффектами. Используя (3.7) и (3.8) для напряженности между противоположно заряженными плоскими металлическими пластинаами, получаем

$$E = \frac{4\pi q}{\epsilon S} \quad \text{и} \quad \Phi_1 - \Phi_2 = Eh = \frac{4\pi qh}{\epsilon S}.$$

Отсюда и следует (3.56).

Найдем емкость плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком с линейно изменяющейся диэлектрической проницаемостью от значения ϵ_1 у одной обкладки до $\epsilon_2 < \epsilon_1$ у другой. Обозначая расстояние между обкладками h , площадь обкладок S и координату, перпендикулярную к обкладкам x , получаем из (2.6) для изменения разности потенциалов

$$U = \int_0^h E dx = 4\pi \frac{q}{S} \int_0^h \frac{dx}{\epsilon(x)} = 4\pi \frac{q}{S} \int_0^h \frac{dx}{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)x/h} = 4\pi \frac{q}{S} h \frac{\ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}{\epsilon_1 - \epsilon_2}.$$

Отсюда определяем емкость $C = q/U$ (№ 3.26).

Рассмотрим плоский конденсатор, на пластинах которого распределен заряд с поверхностной плотностью σ , а между пластинами вставлен диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , заряженный положительным пространственным зарядом так, что объемная плотность заряда изменяется от 0 у одной пластины (положительной) до ρ_0 у другой по закону

$$\rho(x) = \sigma \frac{x}{h^2},$$

где h — расстояние между пластинами. Найдем полный пространственный заряд в диэлектрике на единицу площади

$$\sigma_d = \int_0^h \sigma x \frac{dx}{h^2} = \frac{\sigma}{2}.$$

Используя (3.7), находим, что снаружи конденсатора поле, как от заряженной плоскости $2E_{\text{внеш}} = 4\pi\sigma/2$, т. е. абсолютное значение $E_{\text{внеш}} = \pi\sigma$. Снова используя (3.7) для поверхности вне конденсатора и внутри на расстоянии x , получаем

$$\pi\sigma + \epsilon E = 4\pi \left(\sigma + \frac{\sigma x^2}{2h^2} \right).$$

Отсюда получаем $E(x)$ внутри конденсатора (№ 3.27).

Если в изолированный заряженный конденсатор вдвигать пластину (толщиной, равной зазору между обкладками) из диэлектрика (проницаемость ϵ), то заряды на обкладках не меняются, а перераспределается их плотность. Конденсатор можно рассматривать как два конденсатора, соединенных параллельно. Суммарная емкость при этом увеличивается, а разность потенциалов и напряженность поля уменьшаются.

Электрическая индукция (смещение) в диэлектрике при вдвинении уменьшается и при заполнении конденсатора целиком становится равной значению без диэлектрика. На границе диэлектрика меняется плотность заряда на обкладках так, чтобы напряженность поля была одинаковой с обеих сторон границы. Обозначая площадь обкладок S_1 , а площадь, занятую диэлектриком S_2 , и отношение индуктивности в диэлектрике ($D = \epsilon E$) к его значению без диэлектрика ($D_0 = E_0$) буквой $n = D/E_0$, из сохранения заряда получаем

$$q = \frac{S_1 E_0}{4\pi} = \frac{(\epsilon_2 S_2 + S_1 - S_2) E}{4\pi}.$$

Найдем, при каком отношении площади диэлектрика к площади обкладок получим заданное значение n (№ 3.30). Из приведенных ранее соотношений

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\epsilon - n}{n(\epsilon - 1)}.$$

В плоском конденсаторе (расстояние между обкладками l) можно две пластины диэлектрика (диэлектрическая проницаемость ϵ) приложить к обкладкам так, что между ними остается небольшой зазор h . Найдем, при каком h поле в зазоре будет в n раз превышать поле в отсутствие пластин, если конденсатор подключен к батарее (№ 3.31). Обозначая поле в отсутствие диэлектрика E_0 , в диэлектрике E_d и в зазоре E , из постоянства разности потенциалов на обкладках и (2.6) находим

$$E_0 l = E_d(l - h) + Eh.$$

Из непрерывности нормальной компоненты электрической индукции на границе диэлектрика следует $E = \epsilon E_d$. Получаем

$$n = \frac{E}{E_0} = \frac{\epsilon l}{l + h(\epsilon - 1)}.$$

Откуда находим

$$h = \frac{l(\epsilon - n)}{n(\epsilon - 1)}.$$

Если металлический шар радиусом R_1 окружен шаровым слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ толщиной h ($R_2 = R_1 + h$) и помещен концентрично в металлической оболочке с

внутренним радиусом R_3 (№ 3.24), то для разности потенциалов такого конденсатора имеем

$$\Delta\varphi = -\frac{q}{\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} - q \int_{R_2}^{R_3} \frac{dr}{r^2} = q \left[\frac{1/R_1 - 1/R_2}{\epsilon} + \left(\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{R_3} \right) \right].$$

Отсюда находим $C = q/\Delta\varphi$.

Найдем изменение напряженности электрического поля в сферическом конденсаторе (радиусы R_1 и R_2), который заполнен двумя однородными диэлектриками (с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2), граничащими по конической поверхности (тесные углы Ω_1 и Ω_2). Если на внутренней обкладке заряд Q , то $Q = \Omega_1 R_1 \sigma_1 + \Omega_2 R_2 \sigma_2$. Из сохранения касательной компоненты поля на границе диэлектриков и (3.10) получаем

$$E = 4\pi R_1^2 \frac{\sigma_1}{\epsilon_1 r} = 4\pi R_2^2 \frac{\sigma_2}{\epsilon_2 r}.$$

Откуда

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}.$$

Это позволяет найти

$$\sigma_1 = \frac{Q}{R_1^2 (\Omega_1 + \Omega_2 \epsilon_2 / \epsilon_1)}$$

и подставить его в выражение для напряженности поля (№ 3.28)

Рассмотрим пустотелый металлический шар, заряд которого q , а радиус R , плавающий в жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 так, что его центр находится на уровне поверхности жидкости, и найдем плотность свободных зарядов на его поверхности, считая диэлектрическую проницаемость воздуха равной ϵ (№ 3.38). Для потенциала и напряженности поля вокруг шара имеем симметричную картину, описываемую уравнением Лапласа (2.13). Плотность свободных зарядов на шаре и электрическая индукция меняются скачком на границе диэлектриков. Обозначая плотность заряда на половине поверхности, находящейся в жидкости σ_1 , а в воздухе σ , можем написать $q = 2\pi R^2(\sigma_1 + \sigma)$. Изменение электрической индукции из (3.7) в воздухе

$$D = 4\pi R^2 \frac{\sigma}{4\pi r^2},$$

а в жидкости

$$D_1 = 4\pi R^2 \frac{\sigma_1}{4\pi r^2}.$$

Используя непрерывность напряженности электрического поля на границе диэлектриков (2.7), получаем

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{D_1}{\epsilon_1}$$

и затем

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1}.$$

Подставляя это в выражение для суммарного заряда, находим соответствующие плотности.

Найдем емкость сферического конденсатора, т. е. отношение заряда к разности потенциалов, при заданном значении заряда q , если в него (радиусы обкладок соответственно R_1 и R_2) помещен неоднородный диэлектрик с поляризумостью, зависящей от расстояния от центра сфер (r), $\alpha = \beta|E|r^2$. Из (3.7) $D = q/r^2$. Из (3.2), (3.5) и заданного соотношения для поляризумости имеем

$$\frac{q}{r^2} = E(1 + 4\pi\beta r^2 |E|).$$

При положительном заряде на внутренней обкладке $E > 0$ получаем

$$4\pi\beta(r^2 E)^2 + r^2 E - q = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и броя (по смыслу) положительный корень, находим

$$r^2 E = \frac{-1 + (1 + 16\pi\beta q)}{8\pi\beta} = A = \text{const.}$$

С помощью (2.6) получаем

$$\Delta\phi = -A \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = -A \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Откуда емкость (№ 3.33) $C = q/\Delta\phi$.

Найдем объемное распределение связанных зарядов в диэлектрике, заполняющем сферический конденсатор (внутренний радиус R_1 ,

внешний R_2), проницаемость которого с расстоянием от центра сфер (r) изменяется по закону (№ 3.34):

$$\epsilon = \epsilon_1 \frac{R_1^2}{r^2}.$$

Из (3.7) и (3.8) имеем

$$D = \frac{q}{r^2} = E\epsilon = E\epsilon_1 \frac{R_1^2}{r^2}.$$

Откуда следует постоянство напряженности поля при изменении расстояния от центра сфер

$$E = \frac{q}{\epsilon_1 R_1^2}.$$

Из (3.8)

$$P = \frac{(\epsilon - 1)E}{4\pi} = \frac{q(\epsilon_1 R_1^2 / r - 1)}{4\pi\epsilon_1 R_1^2}.$$

Используя (3.4) и выражение для дивергенции в сферических координатах в случае сферической симметрии (1.22), получаем

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} P = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 q \frac{(\epsilon_1 R_1^2 / r^2 - 1)}{4\pi\epsilon_1 R_1^2} \right] = \frac{2q}{4\pi\epsilon_1 R_1^2 r}.$$

Если задан не заряд, а разность потенциалов (U), то

$$U = E(R_2 - R_1) = q \frac{R_2 - R_1}{\epsilon_1 R_1^2}.$$

Емкость цилиндрического конденсатора, состоящего из коаксиальных цилиндрических металлических обкладок радиусами R_1 и R_2 , между которыми находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , получаем, используя (3.7) и (3.8). Из (3.7) для единицы длины цилиндра получаем $\epsilon E 2\pi r = 4\pi q$. Для разности потенциалов на обкладках имеем

$$\phi_2 - \phi_1 = -2 \frac{q}{\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -2 \frac{q}{\epsilon} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Откуда для емкости цилиндрического конденсатора длиной l получаем

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln(R_2/R_1)}; \quad \left\{ C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon l}{2 \ln(R_2/R_1)} \right\}. \quad (3.57)$$

При малом по сравнению с радиусами зазоре между цилиндрами (h) (3.57) переходит в (3.56).

Найдем емкость цилиндрического конденсатора (на единицу длины), т. е. отношение заряда к разности потенциалов, при заданном значении заряда q (на единицу длины), если в него (радиусы обкладок соответственно R_1 и R_2) помещен неоднородный диэлектрик с поляризумостью, зависящей от расстояния от оси цилиндров (r), $\alpha = \beta|E|r$. Из (3.7) $D = 2q/r$. Из (3.2), (3.5) и соотношения для поляризумости имеем

$$2\frac{q}{r} = E(1 + 4\pi\beta r|E|).$$

При положительном заряде на внутренней обкладке $E > 0$ получаем

$$4\pi\beta(rE)^2 + rE - 2q = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и беря (по смыслу) положительный корень, находим

$$rE = \frac{-1 + (1 + 32\pi\beta q)}{8\pi\beta} = A = \text{const.}$$

С помощью (2.6) получаем

$$\Delta\phi = -A \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -A \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Откуда емкость (№ 3.32) $C = q/\Delta\phi$.

Рассмотрим цилиндрический конденсатор (с радиусами обкладок R_1 и R_2 и длиной l), заполненный двумя разными диэлектриками (с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2), граничащими по плоскостям, проходящим через ось цилиндра и образующим двугранные углы θ_1 и $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$. Найдем напряженность электрического поля между обкладками, если заряд на внутренней обкладке равен Q (№ 3.29). Обозначая плотности зарядов на внутренней обкладке σ_1 и σ_2 , име-

ем $Q = R_1 l (\theta_1 \sigma_1 + \theta_2 \sigma_2)$. Из сохранения напряженности поля на границе диэлектриков (3.18) и (3.7) находим

$$E = 4\pi \frac{R_1 \sigma_1}{r \epsilon_1} = 4\pi \frac{R_1 \sigma_2}{r \epsilon_2}.$$

Откуда

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2}.$$

Используя выражение для Q , получаем

$$E = \frac{4\pi Q}{(\epsilon_1 \theta_1 + \epsilon_2 \theta_2) lr}.$$

Найдем распределение объемной плотности поляризационного (связанного) заряда, напряженность поля $E(r)$ и индукцию $D(r)$ внутри и вне в длинном цилиндре радиусом R с замороженной поляризацией (№ 3.35)

$$\mathbf{P}(r) = P_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\mathbf{r}}{R}.$$

Пользуясь (3.4) и выражением для дивергенции в цилиндрически симметричном случае (1.21), получаем

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{P_0}{r} d \frac{(1 - r/R)(r^2/R)}{dr} = -\frac{2P_0}{R} \left(1 - \frac{3r}{2R}\right).$$

Снаружи, так как свободных зарядов нет, $D = 0$. Следовательно, снаружи и $E = 0$. Из непрерывности на границе диэлектрика нормальной компоненты D и (3.8) внутри $E = -4\pi P$.

Если диэлектрический диск вращать, то силы инерции (центробежные) вызывают смещение электронных оболочек и возникновение поляризации диэлектрика. Сила, действующая на электрон, определяется угловой скоростью его вращения ω , массой m и расстоянием r от оси вращения, $F = m\omega^2 r$. Эта сила дает ту же поляризацию, что и электрическое поле $E = F/e$ (e — заряд электрона). Для нахождения поляризации воспользуемся (3.2) и (3.9)

$$P = m\omega^2 r \frac{\epsilon - 1}{4\pi e},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, а вектор поляризации направлен к оси вращения и на поверхности цилиндра

при $r = R$ будет отрицательный заряд. Объемная плотность связанных зарядов определяется (3.4) и дивергенцией для цилиндрических координат. С учетом направления \mathbf{P} получаем (№ 3.36)

$$\rho_{\text{связ}} = \frac{1}{r} d \frac{r^2 m \omega^2 (\epsilon - 1)/4\pi e}{dr} = m \omega^2 \frac{\epsilon - 1}{4\pi e}.$$

Угловую скорость вращения можно выразить через число оборотов

$$n = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Для заряда на поверхности цилиндра получаем

$$q = -m2\pi^2 (\epsilon - 1) n^2 R^2 \frac{H}{e}.$$

Емкость двух прямолинейных параллельных проволок длиной l (много большей диаметров проволок R_1 и R_2 , чтобы можно было пре-небречь краевыми эффектами), имеющих противоположные по знаку заряды q , вычислим, используя суперпозицию и теорему Гаусса. Из (3.7) следует

$$E = \frac{2q}{l\epsilon r}. \quad (3.58)$$

Из (2.6) получаем

$$\varphi = \frac{2q \ln r}{l\epsilon} + \text{const.} \quad (3.59)$$

В точке, которая находится от проволок на расстояниях r_1 и r_2 , потенциал

$$\varphi = -\frac{2q \ln r_1}{l\epsilon} + \frac{2q \ln r_2}{l\epsilon} + \text{const.}$$

Вводя расстояние между проволоками $2h$ и действуя так же, как ранее для шаров, получаем емкость системы

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln(4h^2/R_1 R_2)}; \quad \left\{ C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(4h^2/R_1 R_2)} \right\}. \quad (3.60)$$

В случае одинаковых радиусов проволок

$$C = \frac{\epsilon l}{4 \ln(2h/R)}. \quad (3.61)$$

Система из проводящей поверхности и проволоки, проходящей параллельно ей на расстоянии h , имеет емкость

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln(2h/R)}. \quad (3.62)$$

Это следует из предыдущей формулы при использовании метода зеркальных изображений.

Конденсаторы можно соединять в батареи. Общая формула связи разности потенциалов на конденсаторе с зарядом и емкостью

$$\Delta\varphi = U = \frac{q}{C}. \quad (3.63)$$

При параллельном соединении конденсаторов (емкостями C_1 и C_2) разности потенциалов между обкладками обоих конденсаторов одинаковые, заряд системы равен сумме зарядов конденсаторов $q = q_1 + q_2$. Разделив это на одинаковую разность потенциалов, получаем

$$C = C_1 + C_2. \quad (3.64)$$

При последовательном соединении конденсаторов средние обкладки соединены между собой, поэтому их заряды равны по величине и противоположны по знаку, а разности потенциалов складываются $U = U_1 + U_2$. Поэтому

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (3.65)$$

Если в плоский конденсатор, имеющий расстояние между обкладками h , введена пластина из оптического стекла (ϵ) так, что остался зазор δ , и приложена разность потенциалов U , то напряженность поля E можно найти из соотношения

$$U = E\delta + E \frac{h - \delta}{\epsilon}.$$

При отключении конденсатора от источника на нем сохраняется заряд. При удалении пластины напряженность поля, определяемая плотностью заряда, не меняется. Напряжение будет равно $V = Eh$. Используя предыдущее соотношение, получаем (№ 3.25)

$$U = \frac{V\epsilon}{1 + (\epsilon - 1)\delta/h}.$$

В случае слоев диэлектрика в плоском конденсаторе можно считать на границах диэлектриков обкладки и пользоваться результатами для последовательно соединенных конденсаторов. В данном случае

$$C_1 = \frac{S}{4\pi\delta}; \quad C_2 = \frac{\epsilon S}{4\pi(h-\delta)}.$$

Емкость системы C получаем с помощью (3.63)

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi[h+(\epsilon-1)\delta]}.$$

При удалении диэлектрика заряд $q = VC$ сохраняется, а емкость конденсатора становится

$$C_3 = \frac{S}{4\pi h}.$$

Разность потенциалов

$$U = \frac{q}{C_3}.$$

Перемещение одного заряда в поле другого приводит к изменению энергии электрического взаимодействия зарядов (2.3). Для двух точечных зарядов q_1 и q_2 можно вычислить, например, работу по перемещению заряда q_1 в поле неподвижного заряда q_2 из бесконечности в точку, находящуюся от него на расстоянии r_{12} , потенциал которой обозначим $\phi_1 = q_2/r_{12}$. Для энергии взаимодействия получаем

$$W = \frac{q_1 q_2}{r} = q_1 \phi_1 = q_2 \phi_2 = \frac{1}{2}(q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2). \quad (3.66)$$

Здесь $\phi_2 = q_1/r_{12}$.

Найдем энергию, запасаемую в конденсаторе при зарядке. Работа совершается при перемещении заряда с одной обкладки на другую

$$W = \int_0^q \phi dq = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}, \quad (3.67)$$

где U — напряжение (разность потенциалов) на обкладках конденсатора.

Для плоского конденсатора

$$W = \frac{SE^2 l}{8\pi}. \quad (3.68)$$

На единицу объема электрического поля (плотность энергии) в плоском конденсаторе

$$w = \frac{E^2}{8\pi}; \quad \left\{ w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right\}. \quad (3.69)$$

Можно ввести и электрическую энергию **одного заряда**, подразумевая под этим работу, требующуюся для его создания, например путем последовательного переноса зарядов из бесконечности.

Вычислим электростатическую энергию заряда на шаре радиусом R в вакууме, если заряд шара Q равномерно распределен по его поверхности. Можно заряды из бесконечности приносить на поверхность бесконечно тонкими симметричными слоями. Используя (3.39), имеем (№ 3.42)

$$W = \int_0^Q \phi dq = \frac{1}{R} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{R}; \quad \left\{ W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right\}. \quad (3.70)$$

В случае распределения заряда в шаре с постоянной плотностью (ρ) получаем (№ 3.43)

$$W = \int_0^Q \phi(r, q) dq = \int_0^R \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{1}{r} 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}. \quad (3.71)$$

Те же результаты можно получить, если, воспользовавшись (3.69), (1.14) и (1.15), проинтегрировать по пространству, где имеется электрическое поле:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^R E^2 dV + \int_R^\infty E^2 dV \right) = \int_0^R \left(\frac{4}{3} \pi \rho r \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{1}{10} \frac{Q^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Отметим, что при рассмотрении точечных зарядов в энергии появляются бесконечно большие величины. В некоторых задачах, где требуется найти разности энергий (работу), можно их вычтить.

Рассмотрим две удаленные друг от друга металлические сферы с внешними радиусами R_1 и R_2 и толщиной стенки Δ , в центры которых помещены заряды q_1 и q_2 . Найдем работу, необходимую, чтобы поменять заряды местами (№ 3.47). Используя (3.72), можем написать энергию поля для первой сферы с зарядом

$$W_1 = \frac{1}{2} \left(q_1^2 \int_0^{R_1 - \Delta} \frac{dr}{r^2} + q_1^2 \int_{R_1}^\infty \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \left(q_1^2 \int_0^{R_1 - \Delta} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_1^2}{R_1} \right).$$

Аналогичным образом можно написать и для второй сферы.
Суммарная энергия в начальном состоянии

$$W_{\text{н}} = \frac{1}{2} \left(q_1^2 \int_0^{R_1 - \Delta} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_1^2}{R_1} + q_2^2 \int_0^{R_2 - \Delta} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_2^2}{R_2} \right).$$

В конечном состоянии

$$W_{\kappa} = \frac{1}{2} \left(q_2^2 \int_0^{R_1 - \Delta} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_2^2}{R_1} + q_1^2 \int_0^{R_2 - \Delta} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_1^2}{R_2} \right).$$

Работа равна разности этих энергий

$$\begin{aligned} A = W_{\kappa} - W_{\text{н}} &= \frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2) \int_{R_2 - \Delta}^{R_1 - \Delta} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (q_2^2 - q_1^2) \Delta \left[\frac{1}{R_2 (R_2 - \Delta)} - \frac{1}{R_1 (R_1 - \Delta)} \right]. \end{aligned}$$

Предполагая, что масса электрона определяется из соотношения $W = mc^2$, где W — электростатическая энергия заряда электрона, можно оценить его радиус:

- 1) в случае постоянной плотности заряда по объему с помощью (3.71);
- 2) в случае заряда на поверхности с помощью (3.70) (№ 3.44).

Если известна работа A , необходимая для перемещения заряда q от поверхности равномерно заряженного (плотность заряда ρ) плоского слоя на расстояние l , то, используя (1.12), получаем толщину слоя (№ 3.45)

$$H = \frac{A}{2\pi\rhoql}.$$

Электрическая энергия конденсатора, определяемая (3.67), при разряде передается среде, находящейся между обкладками. Если между ними находился разреженный водород с начальными: объемом $V_0 = 10$ л, давлением $p_0 = 10^{-2}$ мм рт. ст. и температурой $T_0 = 300$ К, а напряжение на конденсаторе емкости $C = 18$ мкФ было $U = 30$ кВ, то, обозначая число частиц в данном объеме N (после нагрева до температуры T их в результате диссоциации и ионизации станет $4N$), можем написать закон сохранения энергии

$$\frac{CU^2}{2} = 4N \frac{3}{2} kT - N \frac{3}{2} kT_0.$$

Используя уравнение состояния идеального газа (см. 2, с. 8)

$$N = \frac{p_0 V_0}{k T_0}$$

и пренебрегая начальной энергией газа (вторым членом), находим (№ 3.46)

$$T = \frac{T_0 C U^2}{12 p_0 V_0} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

Отметим, что температура газа может снизиться, если будут нагреваться обкладки конденсатора.

Энергия трех проводящих шаров с радиусами R_1 , R_2 и R_3 и соответственно потенциалами ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 , далеко разведенных друг от друга, равна

$$W_h = \frac{R_1 \phi_1^2 + R_2 \phi_2^2 + R_3 \phi_3^2}{2}.$$

Если шары соединить тонкими проволочками, емкостями которых можно пренебречь, то потенциалы их станут одинаковыми. Его можно найти из сохранения зарядов

$$R_1 \phi_1 + R_2 \phi_2 + R_3 \phi_3 = (R_1 + R_2 + R_3) \phi.$$

Энергия системы после соединения шаров

$$W_k = \frac{(R_1 + R_2 + R_3) \phi^2}{2}.$$

Количество теплоты, выделившееся при прохождении токов (№ 3.56):

$$Q = W_h - W_k.$$

Рассмотрим диск радиусом R и толщиной l ($l \ll R$) из равномерно заряженного диэлектрика (диэлектрическую проницаемость положим $\epsilon = 1$) с объемной плотностью заряда ρ , который лежит на большой металлической заземленной пластине. Вычислим энергию электростатического поля диска, пренебрегая краевыми эффектами (№ 3.49). Воспользуемся методом электрических изображений. Для удовлетворения условия на металлической пластине надо под диском разместить такой же диск с объемной плотностью заряда $-\rho$. Используя теорему Гаусса (1.12), (1.19) и (1.20), получаем, что вне диска поле отсутствует, а по его толщине меня-

ется линейно. Интегрируя по толщине с помощью (3.69) и умножая на площадь, получаем

$$W = \pi R^2 \int_0^l (4\pi\rho x)^2 \frac{dx}{8\pi} = \frac{2}{3} \pi^2 \rho^2 R^2 l^3.$$

Если во внешнем поле \mathbf{E} находятся два заряда противоположных знаков, образующие диполь с моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, то энергия этих зарядов во внешнем поле равна

$$W = q\phi - q\phi' = q(\phi - \phi').$$

С точностью до величин второго порядка малости

$$\phi = \phi' + \frac{\partial\phi}{\partial l} l = \phi' + \mathbf{l} \operatorname{grad} \phi = \phi' - \mathbf{l}\mathbf{E}.$$

Откуда

$$W = -q\mathbf{l}\mathbf{E} = -\mathbf{p}\mathbf{E}. \quad (3.73)$$

Это энергия взаимодействия зарядов, поэтому она может быть отрицательной. Отметим, что это энергия жесткого диполя (расстояние между зарядами не меняется).

Для проводящего шарика радиусом R в поле E дипольный момент $p = R^3 E$, и поэтому при изменении поля

$$W = -R^3 \int_0^E E dE = -\frac{R^3 E^2}{2}. \quad (3.74)$$

При внесении проводящего незаряженного шарика в заряженный плоский конденсатор его заряд q не меняется, а емкость увеличивается (как бы уменьшается расстояние между пластинами l). Из сохранения энергии

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2(C + \Delta C)} + \frac{R^3 E^2}{2} = \frac{q}{2(C + \Delta C)} + \frac{R^3 q^2}{2C^2 l^2}.$$

Отсюда изменение емкости (№ 3.66) $\Delta C = R^3/l^2$. Заметим, что не учтено исчезновение энергии поля в объеме шарика, которая равна

$\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{E^2}{8\pi}$, т. е. примерно того же порядка в случае $R = 0,2$ мм и $l = 1$ см.

Рассмотрим идеальный газ, полярзуемость молекул которого β , находящийся в большом сосуде при температуре T , где также находится плоский конденсатор с напряженностью поля E . Найдем от-

носительную разность концентраций молекул $\Delta n/n_0$ в конденсаторе и вне его, предполагая выполнение распределения Больцмана (№ 3.6). Дипольный момент молекул в электрическом поле равен $p = \beta E$. Формула (3.73) получена для жесткого диполя и связана с его поворотом в поле. Получим энергию упругого диполя в процессе квазистатического изменения дипольного момента при изменении внешнего поля. При изменении поля изменяется дипольный момент $dp = qdl = \beta dE$. Работа электрических сил $qEdl = \beta EdE$. Определяя энергию упругого диполя W , как работу внешних сил, имеем

$$W = -\frac{\beta E^2}{2} = -\frac{pE}{2} = -\frac{pE}{2}.$$

Распределение Больцмана для числа молекул в единице объема (см. 2, с. 188)

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) = n_0 \exp\left(\frac{\beta E^2}{2kT}\right),$$

где n_0 — концентрация молекул вне конденсатора.

При малых отклонениях концентрации

$$\frac{\Delta n}{n_0} \approx \frac{\beta E^2}{2kT}.$$

Формулы (3.68) и (3.69) можно преобразовать для конденсаторов, заполненных диэлектриками. Используя (2.6) и (3.7), из (3.67) получаем вдоль силовой линии

$$W = \frac{1}{2} Uq = \frac{1}{2} \int Edl \frac{1}{8\pi} \int D_l dS = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{ED}) dV = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon E^2 dV,$$

где $dV = dl dS$.

Для плотности электростатической энергии в диэлектрической среде имеем

$$w = \frac{(\mathbf{ED})}{8\pi} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\epsilon}; \quad \left\{ w = \frac{(\mathbf{ED})}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon} \right\}. \quad (3.75)$$

Используя те же формулы, можно получить выражение для плотности энергии, не предполагающее линейную зависимость между \mathbf{E} и \mathbf{D} ,

$$W = \int \phi dq = \int Edl \frac{dD_n}{4\pi} = V \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{4\pi}; \quad \{ W = V \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \}. \quad (3.76)$$

Рассмотрим два удаленных друг от друга диэлектрических (с диэлектрической проницаемостью ϵ) шара радиусами R_1 и R_2 , в центры которых помещены заряды q_1 и q_2 . Найдем работу, необходимую, чтобы поменять эти заряды местами (№ 3.48). Используя (3.75) и (3.10), можем найти начальную и конечную энергии

$$W_{\text{H}} = \frac{q_1^2}{2\epsilon} \int_0^{R_1} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2\epsilon} \int_0^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_2^2}{2R_2};$$

$$W_{\kappa} = \frac{q_2^2}{2\epsilon} \int_0^{R_1} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_2^2}{2R_1} + \frac{q_1^2}{2\epsilon} \int_0^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{q_1^2}{2R_2}.$$

Работа равна разности энергий

$$A = W_{\kappa} - W_{\text{H}} = (q_2^2 - q_1^2)(\epsilon - 1) \frac{1/R_1 - 1/R_2}{2\epsilon}.$$

Рассмотрим плоский конденсатор емкостью C , подключенный последовательно с некоторым сопротивлением (R) к батарее с ЭДС \mathcal{E} . Пластины конденсатора **быстро сближают**, так что расстояние между ними уменьшается в два раза, причем настолько быстро, что заряд конденсатора практически не меняется. Найдем джоулеву теплоту, которая выделится на сопротивлении к моменту окончания перезарядки (№ 3.58). В соответствии с (3.56) емкость увеличится в два раза ($\Delta C = C$), и, следовательно, при неизменном заряде разность потенциалов уменьшится в два раза (станет равной $\mathcal{E}/2$). После окончания процесса перезарядки разность потенциалов снова станет равной \mathcal{E} , а заряд увеличится в два раза, т. е. протечет заряд, равный начальному на конденсаторе $\Delta q = q = C\mathcal{E}$. Изменение энергии конденсатора в процессе перезарядки

$$\Delta W = 2C \frac{\mathcal{E}^2}{2} - 2C \frac{(\mathcal{E}/2)^2}{2} = \frac{3}{4} C\mathcal{E}^2.$$

Из сохранения энергии следует, что работа батареи $A = \Delta q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$ пошла на изменение энергии конденсатора ΔW и нагрев сопротивления (Q). Таким образом,

$$Q = A - \Delta W = \frac{1}{4} C\mathcal{E}^2.$$

Для того чтобы за время сближения пластин Δt заряд конденсатора не изменился, необходимо выполнить условие $\Delta t \ll \tau = RC$.

Такое выражение для характерного времени τ можно получить из уравнения для данного контура

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

и его решения

$$q = \mathcal{E}C[1 - e^{-t/(RC)}].$$

Рассмотрим плоский конденсатор (площадь пластин S , расстояние между ними h), в котором находится пластина из стекла (диэлектрическая проницаемость ϵ), целиком заполняющая пространство между обкладками. Найдем, как изменяется энергия конденсатора при удалении пластины диэлектрика в случае, когда он все время присоединен к батарее с ЭДС, равной \mathcal{E} , и в случае, когда конденсатор был первоначально присоединен к батарее, а затем отключен, и только после этого пластина была удалена. Вычислим также механическую работу, затрачиваемую на удаление пластины в обоих случаях (№ 3.62).

Энергия конденсатора (3.67)

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Емкость начальная

$$C_h = \frac{\epsilon S}{4\pi h},$$

конечная

$$C_k = \frac{S}{4\pi h},$$

их разность

$$\Delta C = C_k - C_h = -(\epsilon - 1)C_h.$$

В первом случае сохраняется разность потенциалов U . Поэтому соотношение между начальной W_h и конечной W_k энергиями

$$W_h = \frac{\epsilon S U^2}{8\pi h} > W_k = \frac{S U^2}{8\pi h}.$$

В этом случае при уменьшении емкости уменьшается энергия

$$\Delta W_1 = W_k - W_h = (1 - \epsilon) \frac{C_h U^2}{2}.$$

Во втором случае сохраняется заряд. Поэтому

$$W_{\text{h}} = \frac{4\pi h q^2}{2\epsilon S} < W_{\kappa} = \frac{4\pi h q^2}{2S}.$$

Энергия увеличивается

$$\Delta W_2 = W_{\kappa} - W_{\text{h}} = (\epsilon - 1) \frac{q^2}{2\epsilon C_{\kappa}}.$$

При вычислении механической работы A_m в первом случае надо учесть работу источника напряжения

$$A_u = U \int_{\text{h}}^{\kappa} dq = U \Delta q = U^2 \Delta C. \quad (3.77)$$

Эта величина отрицательная, поэтому энергия источника увеличивается за счет механической работы. Следовательно,

$$A_m = \Delta W_1 - A_u = \frac{1}{2} U^2 \Delta C - U^2 \Delta C = -\frac{1}{2} U^2 \Delta C = (\epsilon - 1) \frac{C_{\kappa} U^2}{2}.$$

Во втором случае механическая работа идет на увеличение энергии конденсатора

$$A_m = \Delta W_2 = (\epsilon - 1) \frac{q^2}{2\epsilon C_{\kappa}} = \frac{1}{2} \epsilon (\epsilon - 1) C_{\kappa} U^2.$$

Пондеромоторными называются силы, которые действуют на ве- сомые тела (диэлектрики и проводники), находящиеся в электрическом поле. Сила, действующая на заряд, определяется напряженностью поля, в которое помещен этот заряд, а не того поля, которое возбуждается им самим.

Рассмотрим заряженный проводник. Так как взаимно отталкивающиеся элементы заряда не могут покинуть проводник, к его поверхности будут приложены пондеромоторные силы, стремящиеся ее растянуть. Обозначая поверхностную плотность заряда σ , для напряженности поля с внешней стороны элемента площади поверхности dS имеем из (1.12) $E = 4\pi\sigma$. У поверхности проводника поле направлено по нормали к поверхности. Это поле можно считать суммой полей от заряженной площадки dS (1.17) и поля, создаваемого другими зарядами поверхности в отсутствие площадки. Это поле равно $2\pi\sigma$ и направлено по внешней нормали к поверхности.

Таким образом, сила, действующая на единицу площади элемента dS , равна

$$f = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2} E\sigma = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (3.78)$$

Если по поверхности сферы радиусом R равномерно распределен заряд Q , то давление изнутри поверхности определяется по (3.46) (№ 3.50)

$$p = f = 2\pi\sigma^2 = \frac{Q^2}{8\pi R^4}. \quad (3.79)$$

Силу отталкивания между двумя половинками проводящей сферы радиусом R с общим зарядом Q (№ 3.51) можно найти, используя (3.78):

$$F = p\pi R^2 = \frac{Q^2}{8R^2}. \quad (3.80)$$

Если в центр проводящей сферы, рассмотренной ранее, поместить заряд q , то он увеличит давление на поверхность на $p_1 = \sigma q/R^2$. Складывая это с давлением от заряда Q , получаем (№ 3.52)

$$F = \frac{Q(Q + 2q)}{8R^2}.$$

Рассмотрим незаряженный проводящий шар (радиусом R), разрезанный пополам, находящийся во внешнем однородном поле (E_0), перпендикулярном плоскости разреза. Найдем силу, с которой оба полушария отталкиваются друг от друга (№ 3.53). Поле на поверхности шара описывается (1.28)

$$\mathbf{E} = 3E_0 \cos \theta \frac{\mathbf{R}}{R},$$

где θ — угол между направлением \mathbf{E}_0 и нормалью к поверхности. Проекция силы давления на ось симметрии (направление поля \mathbf{E}_0) из (3.78)

$$f_{||} = E^2 \frac{\cos \theta}{8\pi}.$$

Силу отталкивания, действующую на каждую из половинок, находим интегрированием по углу

$$F = \int_0^{\pi/2} f_{||} 2\pi R \sin \theta R d\theta = \frac{9}{4} E_0^2 R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{9}{16} E_0^2 R^2.$$

Рассмотрим длинный проводящий цилиндр радиусом R , составленный из двух половинок. Найдем силу отталкивания F , действующую на единицу длины каждого полуцилиндра, если на единицу длины цилиндра приходится заряд χ (№ 3.54). Давление на единицу поверхности определяется (3.78). На единицу длины каждой половинки цилиндра действует сила

$$F = 2\pi\sigma^2 2R = \frac{\chi^2}{\pi R},$$

так как

$$\sigma = \frac{\chi}{2\pi R}.$$

Если на оси цилиндра поместить тонкую заряженную нить, на единицу длины которой приходится заряд χ_0 , то на его поверхности

$$E_0 = \frac{2\chi_0}{R}$$

и дополнительное давление

$$p_0 = \frac{2\chi_0\sigma}{R},$$

т. е. в сумме для силы имеем

$$F = \frac{\chi(\chi + 2\chi_0)}{\pi R}.$$

Оценим силу, действующую на атом, находящийся на расстоянии $l = 200$ Å от поверхности острия металлической иглы с радиусом закругления $R = 100$ Å. Потенциал на игле $V = 100$ кВ. Поляризуемость атома α — величина порядка его объема (№ 3.71). Будем считать, что поле острия иглы совпадает с полем заряженного шара

$$E = \frac{q}{r^2} = \frac{VR}{r^2}.$$

Дипольный момент поляризованного атома $p = \alpha E$. Используя (1.11), находим силу притяжения

$$F = -2\alpha \frac{V^2 R^2}{(l + R)^5} \approx 10^{-5} \text{ дин.}$$

Найдем силу притяжения между пластинами плоского конденсатора, на одной из которых плотность заряда σ , а на другой $-\sigma$. Поле, создаваемое одной пластиной там, где находится вторая, равно (1.17) $E = 2\pi\sigma$. Сила, действующая на единицу поверхности второй пластины,

$$\frac{F}{S} = p = 2\pi\sigma^2. \quad (3.81)$$

Учитывая, что поле внутри конденсатора $E = 4\pi\sigma$, получаем, что

$$p = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (3.82)$$

Это можно назвать силой натяжения вдоль силовой линии, и ее величина равна плотности энергии (3.69). Силовая линия как бы старается сократиться, а расстояние между силовыми линиями, как в дальнейшем будет показано, стремится увеличиться.

Рассмотрим плоский конденсатор, состоящий из двух квадратных пластин, расположенных в вакууме вертикально на расстоянии $h = 1$ мм друг от друга, одна из которых закреплена, а другая может двигаться без трения по гладким вертикальным направляющим. Найдем, при какой разности потенциалов U между пластинами подвижная не упадет вниз, если ее масса $M = 1$ г, а сторона квадрата $l = 10$ см (№ 3.69). Обозначая смещение подвижной пластины y и пользуясь (3.68), получаем для энергии конденсатора

$$W = \frac{Ehl(l-y)}{8\pi}.$$

Сила в направлении y равна

$$F = -\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{E^2 hl}{8\pi} = Mg.$$

Отсюда для разности потенциалов получаем

$$U = Eh = \left(\frac{8\pi Mgh}{l} \right)^{1/2} = 4,71 \text{ кВ.}$$

Если между пластинами конденсатора находится диэлектрик, то поле от первой пластины, которое действует на заряд второй, равно $E = 2\pi\sigma/\epsilon$ и сила

$$\frac{F}{S} = p = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}. \quad (3.83)$$

И в этом случае величина силы натяжения вдоль силовой линии равна плотности энергии (3.75).

Отметим, что в случае **твёрдых** диэлектриков, когда имеется хотя бы небольшой зазор между диэлектриком и пластиной, сила притяжения определяется (3.81) и (3.82), а для **жидких** диэлектриков, когда зазор отсутствует, — (3.83).

В заряженном цилиндрическом конденсаторе сила притяжения между обкладками может привести к разрушению обкладки. Рассмотрим цилиндрический конденсатор, состоящий из двух тонкостенных коаксиальных металлических цилиндров, пространство между которыми заполнено жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$. На конденсатор подается напряжение, величина которого медленно увеличивается. Найдем, что наступит раньше: механическое разрушение внутренней обкладки или пробой диэлектрика, если известно, что пробой наступает при напряженности поля $E_{\text{пр}} = 30 \text{ кВ/мм}$, а разрывное усилие стенок цилиндров — $\sigma_{\text{разр}} = 500 \text{ Н/м}$ и радиус внутренней обкладки $R = 3 \text{ см}$ (№ 3.60). Отметим, что сила притяжения между обкладками растягивает внутреннюю обкладку и сжимает внешнюю. Так как материал на сжатие обладает большей прочностью, чем на растяжение, то в первую очередь будет разрушаться внутренняя обкладка. На рис. 3.15 показаны силы, действующие на элемент обкладки (площадью $2\alpha R$, умноженной на единицу длины вдоль образующей цилиндра): сила притяжения $2\alpha R f$, которая определяется по (3.83), и проекции сил $2\alpha f$, которые ее уравновешивают. Откуда

$$f = \frac{R\epsilon E^2}{8\pi}.$$

Если $E = E_{\text{пр}}$, то $f = 2 \cdot 10^5 \text{ дин/см}$. Это меньше, чем $\sigma_{\text{разр}} = 500 \text{ Н/м} = 5 \cdot 10^5 \text{ дин/см}$. Поэтому раньше произойдет пробой диэлектрика.

Найдем силу притяжения между **обкладками** (площадью S) **плоского** воздушного конденсатора (разность потенциалов обкладок U), в который введена **диэлектрическая пластина** толщиной h , и диэлектрической проницаемостью ϵ так, что между обкладками и пластиной еще остались зазоры, суммарная толщина которых l (№ 3.59). Для разности потенциалов имеем

$$U = EI + \frac{Eh}{\epsilon}.$$

Используя (3.82), получаем

$$F = \frac{SU^2}{8\pi(l + h/\epsilon)}.$$

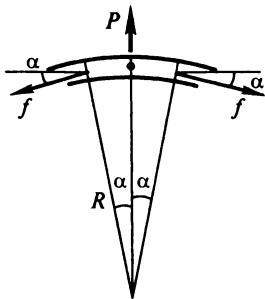


Рис. 3.15

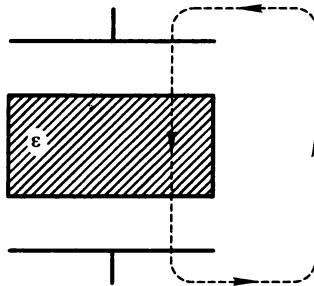


Рис. 3.16

На рис. 3.16 показано сечение плоского конденсатора, в который параллельно его обкладкам вставлена диэлектрическая пластина с проницаемостью ϵ , толщина которой равна половине зазора конденсатора (h), и приложено напряжение V . Пунктиром изображен некоторый замкнутый контур L , пронизывающий конденсатор и диэлектрическую пластину. Найдем циркуляцию $\oint D_I dl$ вектора электростатической индукции D по контуру L (№ 3.65). Круговой интеграл (3.18) в электростатике равный нулю можно разбить на две части. Часть, находящуюся вне конденсатора, обозначим A . Тогда из (3.18)

$$A + \frac{Eh}{2} + \frac{Eh}{2\epsilon} = 0; \quad A = -Eh \frac{\epsilon + 1}{2\epsilon}.$$

Так как вне конденсатора $D = E$, а внутри конденсатора D непрерывно, получаем

$$\oint D_I dl = Dh + A = Eh \frac{\epsilon - 1}{2\epsilon} = V \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}.$$

Рассмотрим плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии h , заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ и присоединенный к батарее постоянного тока, поддерживающей на нем разность потенциалов U . Одну из пластин отодвигают так, что образуется воздушный зазор. Найдем, на какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом совершена работа A (№ 3.57). Изменение напряженности электрического поля E в воздушном зазоре можно определить из условия

$$U = \frac{Eh}{\epsilon} + Ex.$$

Сила, совершающая работу, определяется из (3.82). Работа этой силы

$$A = \frac{S}{8\pi} \int_0^x \frac{U^2 dx}{(x + h/\epsilon)^2} = \frac{SU^2 x \epsilon^2}{8\pi h(x\epsilon + h)}.$$

Откуда получаем

$$x = \frac{h}{SU^2 \epsilon^2 / 8\pi h A - \epsilon}.$$

На границах диэлектриков, находящихся в электрическом поле, действуют силы. Рассмотрим это на примере жидких диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 внутри плоского конденсатора. В первом случае плоская граница диэлектриков параллельна пластинам конденсатора (рис. 3.17). Предполагается, что диэлектрики несжимаемы, и температура постоянна. Как обычно в механике, работу силы fS на виртуальном перемещении δx приравниваем изменению энергии в данном случае при постоянных зарядах на обкладках конденсатора, так как при этом на границе диэлектриков индукция постоянна. Изменение энергии происходит из-за того, что в объеме $S\delta x$ вместо диэлектрика с проницаемостью ϵ_2 появится диэлектрик с проницаемостью ϵ_1 . Таким образом,

$$fS\delta x = -(w_1 - w_2)S\delta x.$$

Используя (3.75), находим силу на единицу площади

$$f = \frac{D^2 (1/\epsilon_2 - 1/\epsilon_1)}{8\pi}. \quad (3.84)$$

При $\epsilon_1 > \epsilon_2$ сила направлена, как показано на рис. 3.17, в сторону диэлектрика с меньшей проницаемостью.

Если граница диэлектриков перпендикулярна пластинам конденсатора (рис. 3.18), то на границе постоянна напряженность поля,

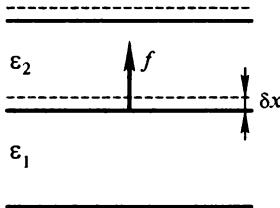


Рис. 3.17

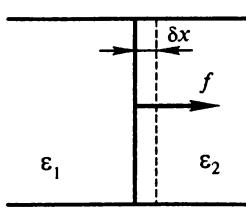


Рис. 3.18

что соответствует постоянной разности потенциалов на конденсаторе (конденсатор присоединен к батарее). Из (3.84) находим силу давления на единичную площадку

$$f = \frac{E^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{8\pi}. \quad (3.85)$$

При $\epsilon_1 > \epsilon_2$ сила направлена, как показано на рис. 3.18, также в сторону диэлектрика с меньшей проницаемостью.

Если к плоскому воздушному конденсатору (площадь пластин S , расстояние между ними h , пластины расположены вертикально), заряженному до разности потенциалов V и отсоединенном от источника ЭДС, снизу подводят сосуд с жидким диэлектриком (диэлектрическая проницаемость ϵ), то диэлектрик втекает в конденсатор. Для случая заполнения конденсатора наполовину найдем емкость конденсатора C , напряженность поля E , распределение плотности заряда на поверхности пластины σ , уменьшение энергии конденсатора ΔW (№ 3.61). Емкость конденсатора можно рассматривать как параллельное соединение двух конденсаторов (с половинной площадью пластин) воздушного и заполненного диэлектриком. Используя (3.56) и (3.64), находим

$$C = \frac{(1 + \epsilon)S}{8\pi h}.$$

Из (3.18) следует непрерывность напряженности поля на границе диэлектрика. Сохранение заряда на конденсаторе

$$q = VC_0 = \frac{VS}{4\pi h} = V_1 C.$$

Откуда

$$E = \frac{V_1}{h} = \frac{2V}{h(\epsilon + 1)}.$$

Из (3.7) $\sigma = D/4\pi$. Используя (3.8) и равенство напряженностей, находим в воздушном зазоре

$$\sigma_{\text{в}} = \frac{V}{2\pi h(1 + \epsilon)}, \quad \sigma_{\text{д}} = \frac{\epsilon V}{2\pi h(1 + \epsilon)}.$$

Из (3.75) изменение энергии

$$\Delta W = \frac{(\epsilon + 1) E^2 h S}{16\pi} - \frac{(V/h)^2 Sh}{8\pi} = \frac{SV^2 (\epsilon - 1)}{8\pi h(\epsilon + 1)}.$$

Аналогичным образом можно решить задачу с **твёрдым диэлектриком**. Найдем, например, силу, с которой пластина из диэлектрика (ϵ), также вставленная до половины конденсатора (с квадратными пластинами), втягивается в него (№ 3.63). Используя (3.85), имеем

$$F = hS^{1/2} \frac{(\epsilon - 1) E^2}{8\pi} = hS^{1/2} \frac{(\epsilon - 1) 4V^2}{8\pi(\epsilon + 1)^2}.$$

Если внутри конденсатора имеется диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , то его емкость (C_0) увеличивается в ϵ раз $C = \epsilon C_0$ (3.56). Из (3.67) для энергии плоского конденсатора имеем

$$W_1 = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon C_0}.$$

Допустим, что в конденсаторе находился **жидкий диэлектрик**, который слили, предварительно отсоединив конденсатор от батареи (источника питания). Так как заряд на конденсаторе сохраняется, его энергия станет равной

$$W_2 = \frac{q^2}{2C_0} = \epsilon W_1.$$

Такая энергия выделится при разрядке конденсатора (№ 3.55). Выливание диэлектрика — это работа силы тяжести против сил электрического поля, которые в соответствии с (3.85) стремятся втягивать диэлектрик. Она увеличивает энергию конденсатора.

На рис. 3.19 показано сечение конденсатора **переменной емкости**, состоящего из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии h друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины с диэлектрической проницаемостью ϵ , которая может поворачиваться и заходить в зазор между металлическими пластинами. Все пластины имеют форму полукруга радиусом R , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с h . Пренебрегая краевыми эффектами, найдем **момент M сил**, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия, а разность потенциалов на пластинах конденсатора равна V (№ 3.67). Сила, действующая на границе между диэлектриком и воздухом внутри пластин конденсатора, втягивает диэлектрик в конденсатор и определяется (3.85). Момент ее равен

$$M = \int_0^R f r dS = \int_0^R (\epsilon - 1) E^2 r h \frac{dr}{8\pi} = \frac{V^2 R^2 (\epsilon - 1)}{16\pi h}.$$

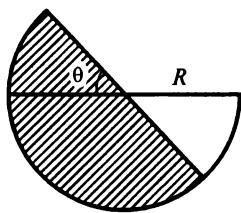


Рис. 3.19

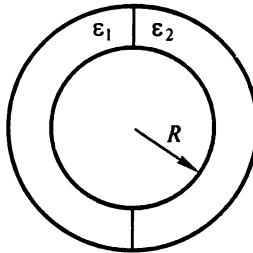


Рис. 3.20

Как видим, момент сил не зависит от угла поворота диэлектрической пластины. Отметим, что когда угол поворота равен нулю, можно считать, что внутри конденсатора находятся две границы диэлектрика, на которых моменты уравновешивают друг друга, и суммарный момент, действующий на пластину диэлектрика, равен нулю (№ 3.68).

На рис. 3.20 показано сечение сферического конденсатора, у которого половина заполнена диэлектриком с проницаемостью ϵ_1 , а другая половина диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Найдем силу, действующую на внутреннюю сферу радиусом R , если конденсатор имеет заряд Q (№ 3.70). Заряд перераспределится (разделится на $Q_1 + Q_2 = Q$) так, чтобы в соответствии с (3.18) на границе оставалась непрерывной напряженность поля

$$E = \frac{Q_1}{\epsilon_1 r^2} = \frac{Q_2}{\epsilon_2 r^2}.$$

Используя связь между зарядами, выражаем через суммарный заряд

$$E = \frac{Q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}.$$

Из (3.85) получаем давление на внутренней сфере, которое для получения силы умножаем на площадь:

$$F = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)Q^2 2\pi R^2}{8\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) R^4}.$$

Рассмотрим подъем жидкого диэлектрика (диэлектрическая проницаемость ϵ , плотность ρ) в вертикальном воздушном цилиндрическом конденсаторе с радиусами обкладок R_1 и $R_2 < R_1$, разность

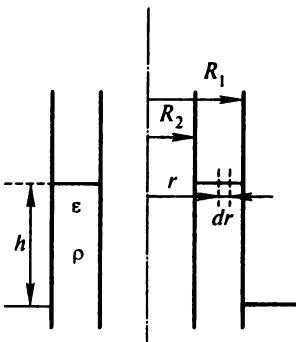


Рис. 3.21

потенциалов на которых равна V (рис. 3.21). Найдем высоту подъема диэлектрика h (№ 3.64). Напряженность поля в цилиндрическом конденсаторе определяется зарядом на единицу длины $\chi = q/l$. Интегрируя (3.58) для воздушной части, получаем

$$V = \chi \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right).$$

Подставляя в (3.58), имеем

$$E = \frac{V}{\ln(R_1/R_2)} \frac{1}{r}.$$

На границе диэлектрика напряженность поля непрерывна. Сила на единицу площади границы определяется (3.85). Интегрируя по площади границы, получаем

$$F = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \int_{R_2}^{R_1} E^2 2\pi r dr = \frac{(\epsilon - 1)V^2}{4 \ln(R_1/R_2)}.$$

Чтобы найти высоту подъема h , эту силу приравниваем весу диэлектрика

$$mg = \rho\pi(R_1^2 - R_2^2)hg.$$

4. ПОСТОЯННЫЙ ТОК. ТОКИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Электрический ток — это движение зарядов, которое возникает в проводнике под действием электрического поля. Плотность тока \mathbf{j} определяется числом частиц в единице объема n , имеющих заряд e , проходящих через единицу поверхности за единицу времени со скоростью \mathbf{u} :

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}. \quad (4.1)$$

Поток электрического заряда через поверхность dS (с нормалью \mathbf{n}) называется силой тока I

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S j_n dS. \quad (4.2)$$

Изменение заряда, имеющего плотность $\rho_{\text{зар}}$, внутри объема V , охватываемого неподвижной поверхностью S , описывается уравнением

$$\frac{\partial \left(\int_V \rho_{\text{зар}} dV \right)}{\partial t} = - \oint_S j_n dS, \quad (4.3)$$

где j_n — проекция плотности тока на внешнюю нормаль поверхности.

В дифференциальном виде отсюда имеем

$$\frac{\partial \rho_{\text{зар}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.4)$$

Это называют законом сохранения заряда.

При постоянных токах распределение зарядов стационарно и из (4.3) и (4.4) имеем

$$\oint_S j_n dS = 0; \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.6)$$

Эти уравнения показывают, что постоянный ток не имеет истоков, т. е. что линии тока всегда замкнуты или уходят в бесконечность.

Как показывает опыт, для многих проводящих сред (в частности, металлов) плотность тока j пропорциональна напряженности электрического поля E (закон Ома в дифференциальном виде)

$$j = \lambda E, \quad (4.7)$$

где λ — постоянная для данной среды величина, называемая **удельной проводимостью**, или **электропроводностью**, зависящая от свойств сред и условий, в которых они находятся. Отметим, что это уравнение остается справедливым и в переменных электрических полях. Величина, обратная удельной проводимости, называется **удельным сопротивлением** среды

$$\rho = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.8)$$

Используя (4.6), (4.7), (3.8) и (3.6), получаем, что в случае стационарных токов макроскопические электрические заряды могут находиться только на поверхности или в местах неоднородности проводящей среды. В этом отношении электрическое поле стационарных токов аналогично электростатическому.

Отметим, что закон Ома не является фундаментальным законом, а выполняется лишь для некоторых (может и многочисленных) сред при определенных ограничениях. Приведем пример модельного представления, позволяющего получить зависимость (4.7) и выражение для λ .

В металлах проводимость связана с наличием свободных электронов (масса m , заряд e), которые под действием электрического поля могут ускоряться в направлении поля (E) и тормозиться при соударениях с ионами решетки. Хаотическое (тепловое) движение электронов не приводит к току. Ток — это дрейфовое (упорядоченное) движение с ускорением

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Предполагая, что при соударении дрейфовое движение пропадает, находим, что за время τ до следующего соударения скорость будет $v = a\tau$. Средняя скорость дрейфа

$$u = \frac{a\tau}{2}.$$

Для плотности тока получаем

$$j = neu = \frac{ne^2\tau E}{2m}.$$

Это — закон Ома (4.7), где выражение для проводимости

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}. \quad (4.9)$$

Время между соударениями можно оценить из длины пробега l и скорости теплового движения c :

$$\tau = \frac{l}{c}. \quad (4.10)$$

Работа, совершаяя в единицу времени (мощность) над электронами единицы объема, при дрейфовом движении

$$nuF = \frac{jF}{e}.$$

Эта энергия идет на увеличение внутренней (тепловой) энергии среды. Термовая мощность N , создаваемая током в единице объема проводящей среды:

$$N = \frac{jF}{e} = \frac{\lambda F^2}{e^2}. \quad (4.11)$$

Или, так как $F = eE$, используя (4.7), получаем

$$N = \frac{j^2}{\lambda}. \quad (4.12)$$

Это закон Джоуля—Ленца в дифференциальном виде.

Для поддержания постоянного электрического тока необходимы электродвижущие силы неэлектростатического происхождения (химические, индукционные, термоэлектрические, контактные, инерциальные и т. д.). Работа этих электродвижущих сил (ЭДС), которые называются **сторонними**, компенсирует потери на джоулеву теплоту. Для совокупного действия электростатического поля E и поля сторонних сил E^c в соответствии с (4.7) можем написать

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^c). \quad (4.13)$$

Это обобщенный закон Ома в дифференциальном виде.

Применим полученные соотношения для токов вдоль проводов. Сопротивлением провода на участке от поперечного сечения 1 до сечения 2 назовем величину

$$R_{12} = \int_1^2 \frac{dl}{S\lambda}, \quad (4.14)$$

при постоянных S и λ

$$R = \frac{l}{S\lambda} = \frac{\rho l}{S}.$$

Так как ток во всех сечениях одинаковый, то, используя (4.2), (4.13) и (4.14), получаем

$$IR_{12} = \int_1^2 Edl + \int_1^2 E^c dl = V_{12} + \mathcal{E}_{12}^c. \quad (4.15)$$

В стационарном поле постоянных токов электрическое поле E обладает потенциалом ϕ . Поэтому

$$IR_{12} = \phi_1 - \phi_2 + \mathcal{E}_{12}^c. \quad (4.16)$$

Для замкнутого контура

$$IR = \mathcal{E}, \quad (4.17)$$

где R — полное сопротивление контура (включая сопротивление ЭДС); \mathcal{E} — полная ЭДС контура (верхний индекс здесь опущен, так как это обозначение будет использоваться только для сторонних электродвигущих сил). Это закон Ома для полной (замкнутой) цепи тока.

Интегрируя (4.12) по объему провода, получаем закон Джоуля—Ленца в интегральной форме

$$N = I^2 R. \quad (4.18)$$

Для разветвленной цепи проводов, включающих ЭДС, сформулированы два правила Кирхгофа:

1) в каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма токов (например, входящие положительны, а выходящие отрицательны) равна нулю

$$\sum_i I_i = 0; \quad (4.19)$$

2) сумма ЭДС в выделяемом контуре равна сумме падений напряжений на всех участках контура

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i I_i R_i. \quad (4.20)$$

В электротехнических расчетах используют единицы измерения, входящие в систему единиц СИ. Приведем их связи с единицами в СГСЭ:

Заряд (q) 1 кулон	$3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ
Напряженность поля (E) 1 В/м (вольт на метр)	$(3 \cdot 10^4)^{-1}$ ед. СГСЭ
Разность потенциалов (ϕ) 1 В (вольт)	1/300 ед. СГСЭ
Емкость (C) 1 Ф (фарада)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Сопротивление (R) 1 Ом	$(9 \cdot 10^{11})^{-1}$ ед. СГСЭ

Для измерения силы тока используют амперметр, разности потенциалов — вольтметр. Идеальный амперметр не обладает сопротивлением, идеальный вольтметр имеет бесконечно большое сопротивление. Реально используемые приборы имеют сопротивление, которое называют внутренним.

Рассмотрим некоторые электрические цепи (схемы). Напомним, что ЭДС на схемах изображают двумя линиями: длинная соответствует положительной клемме, а короткая (более жирная) — отрицательной. Считается, что ток в цепи идет от положительной клеммы к отрицательной. В действительности в металлах отрицательные заряды двигаются от отрицательной клеммы к положительному.

На рис. 4.1 показана схема, в которую включены два одинаковых гальванических элемента с ЭДС равными \mathcal{E} и внутренними сопротивлениями r . Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов и считая вольтметр идеальным (ток через него равен нулю), найдем, какой ток (I) проходит через элементы, и что покажет вольтметр (V_b) (№ 4.1). Из (4.19) и (4.20) следует $2\mathcal{E} = 2Ir$. Отсюда $I = \mathcal{E}/r$. Из (4.20) $\mathcal{E} = Ir + V_b$. Подставляя величину тока, получаем $V_b = 0$. Падение напряжения внутри каждого элемента равно ЭДС элемента. Если бы гальванические элементы были направлены навстречу друг другу (параллельное соединение), то вольтметр показал бы ЭДС элемента (\mathcal{E}).

Найдем токи через гальванические элементы с ЭДС, равными $\mathcal{E}_1 = 1,9$ В и $\mathcal{E}_2 = 1,1$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,1$ Ом и $r_2 = 0,8$ Ом, и падение напряжения на сопротивлении ($R = 10$ Ом) для схемы, изображенной на рис. 4.2 (№ 4.2). На рисунке показаны выбранные направления токов. Если получим отрицательное значение, то направление противоположно выбранному. Из (4.19)

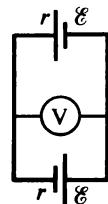


Рис. 4.1

$I = I_1 + I_2$. Из (4.20) $\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR$ и $\mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR$. Три уравнения и три неизвестных тока. Решая уравнения, получаем

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + R(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \approx 1,05 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 r_1 + R(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \approx -0,87 \text{ A};$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \approx 0,18 \text{ A};$$

$$V = IR \approx 1,8 \text{ В.}$$

Ток через второй элемент идет противоположно направлению, указанному на рис. 4.2.

Для схемы, показанной на рис. 4.3 (№ 4.3), пренебрегая сопротивлением соединяющих проводов, из (4.20) имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Откуда

$$V = \mathcal{E} - Ir = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1 + \mathcal{E}_1 r_3 - \mathcal{E}_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

При

$$\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} = \frac{\mathcal{E}_3}{r_3}$$

получаем $V = 0$.

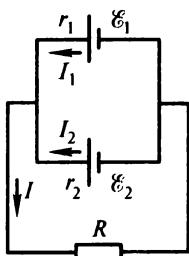


Рис. 4.2

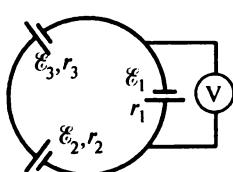


Рис. 4.3

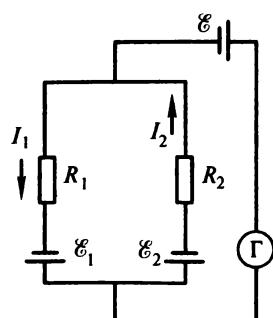


Рис. 4.4

В схеме на рис. 4.4 сопротивления R_1 и R_2 подобраны так, что ток через гальванометр Γ не идет. Считая известными \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , R_1 и R_2 и пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей по сравнению с R_1 и R_2 , найдем \mathcal{E} (№ 4.4). Предполагаем направления токов такими, как показано на рис. 4.4. Так как ток через гальванометр не идет, то $I_1 = I_2 = I$. Используя (4.20), находим

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}; \quad \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = IR_1.$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

Найдем ток, проходящий через R_0 , в схеме на рис. 4.5 (№ 4.5). Предположим направления токов такими, какие обозначены на рис. 4.5. Из (4.19) и (4.20)

$$I_0 = I_2 + I_3; \quad \mathcal{E}_1 = I_3 R_3 - I_2 R_2;$$

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0 = I_2 R_0 + I_3 (R_0 + R_3).$$

Откуда

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_0 + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_0) R_2}{R_0 R_3 + R_0 R_2 + R_2 R_3}; \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_0 (R_2 + R_3)}{R_0 R_3 + R_0 R_2 + R_2 R_3}.$$

Для схемы на рис. 4.6 при заданных значениях R_1 и R_2 найдем R , при котором рассеиваемая на нем мощность максимальна, и определим условие того, что ток, проходящий через R , равен нулю (№ 4.6). Считаем направления токов такими, как обозначенные на рис. 4.6. Из (4.19) и (4.20) имеем

$$I_1 = I + I_2; \quad \mathcal{E}_1 = I(R + R_1) + I_1 R_1; \quad \mathcal{E}_2 = I_2 R_2 - IR.$$

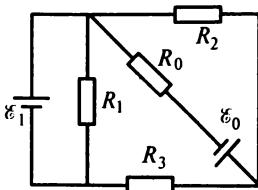


Рис. 4.5

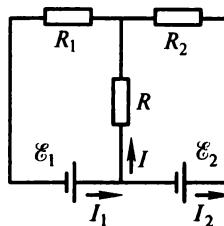


Рис. 4.6

Откуда

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

Отсюда условие, чтобы ток был равен нулю:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Для мощности, рассеиваемой на R , имеем

$$N = I^2 R = \frac{AR}{(R+B)^2},$$

где

$$A = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1)^2}{(R_1 + R_2)^2}; \quad B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Вычисляя производную N по R и приравнивая ее нулю, получаем, что максимальная мощность рассеивается при

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

На рис. 4.7 показана схема из двух батарей ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и четырех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый. Найдем мощность, рассеиваемую на этих резисторах (№ 4.7). На рисунке обозначены выбранные направления токов. Используя (4.19), получаем

$$I_1 + I_6 = I_2; \quad I_2 = I_3 + I_5; \quad I_3 = I_4 + I_1; \quad I_4 + I_5 = I_6.$$

Откуда

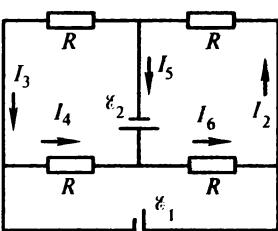


Рис. 4.7

$$I_2 + I_4 = I_3 + I_6.$$

Из (4.20)

$$I_3 + I_4 + I_6 + I_2 = 0;$$

$$I_3 - I_4 = I_2 + I_3 = \frac{\mathcal{E}_1}{R};$$

$$I_2 - I_3 = -I_3 - I_4 = \frac{\mathcal{E}_2}{R}.$$

В результате

$$I_2 = -I_4 = \frac{E_1 + E_2}{2R}; \quad I_3 = -I_6 = \frac{E_1 - E_2}{2R}.$$

Выделяемая мощность равна $N = P^2 R$.

Существует принцип, согласно которому токи и напряжения в цепи, состоящей из линейных (подчиняющихся закону Ома) элементов, распределяются таким образом, что диссилируемая в теплоту мощность минимальна. Найдем с помощью этого принципа напряжения на каждом из трех последовательно соединенных сопротивлений R_1, R_2, R_3 , если суммарное падение напряжения на них равно V (№ 4.10). Обозначим падения напряжений на сопротивлениях $V_1 = IR_1, V_2 = IR_2$. Тогда падение напряжения на третьем сопротивлении ($V - V_1 - V_2$). Для диссилируемой в теплоту мощности, используя (4.18), получаем

$$N = \frac{V_1^2}{R_1} + \frac{V_2^2}{R_2} + \frac{(V - V_1 - V_2)^2}{R_3}.$$

Условие минимальности мощности определяется уравнениями

$$\frac{\partial N}{\partial V_1} = \frac{2V_1}{R_1} - \frac{2(V - V_1 - V_2)}{R_3} = 0; \quad \frac{\partial N}{\partial V_2} = \frac{2V_2}{R_2} - \frac{2(V - V_1 - V_2)}{R_3} = 0.$$

Решая их, находим

$$V_1 = \frac{VR_1}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad V_2 = \frac{VR_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad V_3 = \frac{VR_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Если сопротивления соединить параллельно (№ 4.11), то из (4.18)

$$N = I_1^2 R_1^2 + I_2^2 R_2 + (I - I_1 - I_2) R_3.$$

Условие минимальности мощности

$$\frac{\partial N}{\partial I_1} = \frac{2I_1}{R_1} - \frac{2(I - I_1 - I_2)}{R_3} = 0; \quad \frac{\partial N}{\partial I_2} = \frac{2I_2}{R_2} - \frac{2(I - I_1 - I_2)}{R_3} = 0.$$

Получаем

$$I_1 = \frac{IR_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}; \quad I_2 = \frac{IR_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3};$$

$$I_3 = \frac{IR_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

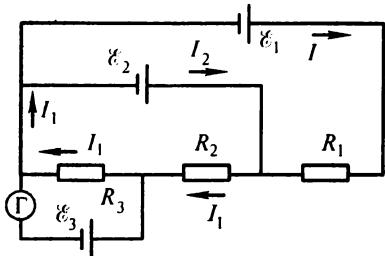


Рис. 4.8

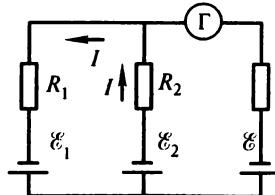


Рис. 4.9

В схеме на рис. 4.8 сопротивления R_1 , R_2 и R_3 подобраны так, что ток через гальванометр Γ не идет. Зная эти сопротивления и ЭДС E_1 и E_3 , найдем ЭДС E_2 и ток I , проходящий через батарею E_1 , пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей (№ 4.8). На рисунке показаны предполагаемые направления токов. Учитывая, что ток через гальванометр не идет, из (4.20) получаем

$$E_3 = I_1 R_3; \quad E_2 = I_1 (R_2 + R_3) = E_3 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right).$$

Ток I находим из уравнения

$$E_1 = IR_1 + I_1(R_2 + R_3).$$

В схеме на рис. 4.9 сопротивления R_1 и R_2 подобраны так, что ток через гальванометр Γ не идет. Пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей и считая известными E_1 и E_2 , найдем E (№ 4.9). Выбранное направление тока указано на рисунке.

Используя (4.20), получаем

$$E_1 - E_2 = I(R_1 + R_2); \quad E - E_1 = IR_1.$$

Откуда

$$E = \frac{E_1 + E_2 R_1 / R_2}{1 + R_1 / R_2}.$$

На рис. 4.10 показана схема включения неоновой лампочки в разрыв подвижного проводящего диаметра CD окружности $ACBD$, сделанной из однородной проволоки постоянного поперечного сечения. Найдем, при каких положениях CD лампочка зажигается (потенциал зажигания $V_{заж}$) и гаснет (потенциал гашения $V_{гаш} < V_{заж}$),

если между A и B поддерживается напряжение V , а сопротивление проводов мало по сравнению с сопротивлением неоновой лампочки. При вращении диаметра по часовой стрелке (от $\alpha = 0$) получаем

$$V_{\text{заж}} = V_{AD} - V_{AC} = \\ = \frac{V}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - \frac{V}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{2V\alpha}{\pi}.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{V_{\text{заж}}}{V} \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично находим

$$V_{\text{гаш}} = \frac{V}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) - \frac{V}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{2V\beta}{\pi}.$$

Поэтому (№ 4.12)

$$\beta = \frac{V_{\text{гаш}}}{V} \frac{\pi}{2}.$$

В длинных сетях потери в проводах могут быть существенными. Найдем, каким должен быть минимальный диаметр медного провода D (удельное сопротивление меди $\rho = 0,017 \cdot 10^{-4}$ Ом · см, длина 10 км), чтобы потери энергии в сети не превышали 10 % от мощности источника ($N = 5$ кВт) с напряжением $V = 110$ В (№ 4.31). По условию теряемая мощность

$$\frac{V^2}{R} < \frac{N}{10},$$

где

$$R = \frac{\rho l}{S}.$$

Откуда

$$D^2 < \frac{4\rho l N}{10\pi V^2} = 10 \text{ см}^2.$$

Основными элементами прибора для измерения напряженности электрического поля у поверхности Земли являются две проводящие

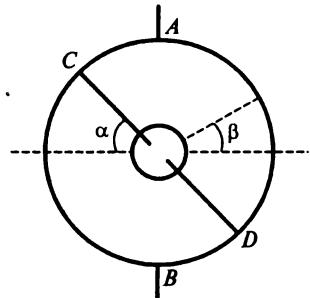


Рис. 4.10

пластины (площадью S каждая), расположенные горизонтально (параллельно поверхности Земли) с небольшим зазором, соединенные с Землей, как показано на рис. 4.11. Верхняя пластина вращается относительно вертикальной оси (n оборотов в минуту). Когда она находится над нижней, то напряженность поля над ней равна напряженности поля Земли (E), а между ними — нулю, так как у них одинаковые потенциалы, равные потенциальному поверхности Земли. После открытия нижней пластины на ней должна быть напряженность поля, равная напряженности поля поверхности Земли. Соответствующий заряд идет через сопротивление R , вызывая на нем падение напряжения V . Считая, что нижняя пластина успевает полностью перезарядиться за один цикл вращения, время которого $\tau = 1/n$, получаем оценку среднего тока

$$I = \frac{q}{\tau} = qn = \sigma Sn = \frac{ESn}{2\pi}.$$

Умножая ток на сопротивление R , получаем среднее падение напряжения (№ 4.13).

Ток в цепи может быть вызван, например, **меняющейся емкостью**, включенного в цепь конденсатора. На рис. 4.12 показана система, состоящая из ЭДС \mathcal{E} и подключенного к ней конденсатора, в который вдвигается пластина из диэлектрика (диэлектрическая проницаемость ϵ) высотой h и шириной b (без зазора) с постоянной скоростью v . Ток в цепи связан с зарядом, приходящим на конденсатор. За время dt приходит заряд $dq = \sigma bvdt$. Здесь, как следует из (3.3) и (3.9),

$$\sigma = P = \frac{(\epsilon - 1)\mathcal{E}}{4\pi h}.$$

Поэтому для силы тока получаем (№ 4.14)

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{(\epsilon - 1)\mathcal{E}Vb}{4\pi h}.$$

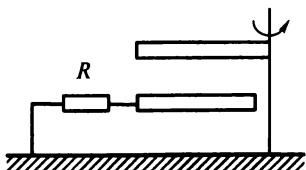


Рис. 4.11

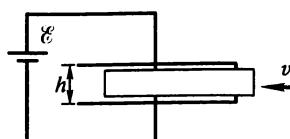


Рис. 4.12

Если пластину не вдвигать принудительно, она сама будет втягиваться в конденсатор. Сила определяется уравнением (3.85). Работа батареи идет на увеличение электрической энергии конденсатора и механическую кинетическую энергию пластины (трением пренебрегаем). Обозначая мощность, развивающую батареей N , получаем $Ndt = \mathcal{E}dq = dW + \delta A$. Для работы батареи из (3.77) имеем $\mathcal{E}^2 dC$, для изменения энергии конденсатора

$$dW = \frac{dC\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\mathcal{E}^2 dC}{2}.$$

Таким образом, половина работы батареи идет на увеличение энергии конденсатора и половина на создание кинетической энергии пластины. Для емкости конденсатора при вхождении пластины внутрь конденсатора на расстояние x имеем

$$C = \frac{C_0 + (\epsilon - 1)bx}{4\pi h},$$

где C_0 — емкость конденсатора без диэлектрика. Подставляя в формулу для работы, имеем

$$Ndt = 2dW = \mathcal{E}^2 dC = \frac{\mathcal{E}^2 (\epsilon - 1) bv dt}{4\pi h}; \quad N = \mathcal{E}I = \frac{(\epsilon - 1) bv \mathcal{E}^2}{4\pi h}.$$

Видно, что мощность, развивающаяся батареей, растет с увеличением мгновенной скорости пластины диэлектрика $v = dx/dt$ (№ 4.15).

Рассмотрим некоторые примеры распространения токов в неограниченной проводящей среде.

На рис. 4.13 изображен металлический лист толщиной a , к которому на расстоянии b друг от друга приварены по нормали к листу два цилиндрических (радиусом r_0) проводника, удельная проводимость которых λ_1 значительно больше удельной проводимости λ материала листа. Найдем сопротивление между проводниками, считая, что $a \ll r_0 \ll b$ (№ 4.16). Из (4.6) и (4.7) следует, что электрическое поле стационарных токов аналогично электростатическому полю. Найдем это поле, учитывая, что благодаря $\lambda_1 \gg \lambda$, цилиндрические проводники по всей своей длине имеют постоянные потенциалы. Если линейная

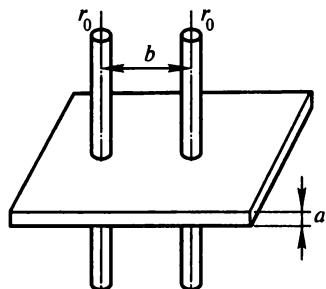


Рис. 4.13

плотность зарядов на проводниках $\pm\rho$, то для стержней в отдельности из (1.12) и (1.16) $E = \pm 2\rho/r$. Разность потенциалов между проводниками находим, интегрируя напряженности от них по линии, проходящей через их оси:

$$V = 2\rho \int_{r_0}^{b-r_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r} \right) dr = 4\rho \ln \left(\frac{b-r_0}{r_0} \right) \approx 4\rho \ln \left(\frac{b}{r_0} \right).$$

Величину тока находим, считая, что вблизи каждого цилиндра влияние другого мало и имеется цилиндрическая симметрия, т. е.

$$I = 2\pi r_0 a j = 2\pi r_0 a \lambda E = 4\pi\rho\lambda a.$$

Следовательно, сопротивление

$$R = \frac{V}{I} \approx \frac{\ln(b/r_0)}{\pi\lambda a}.$$

Аналогичным образом можно найти сопротивление систем, изображенных на рис. 4.14 и рис. 4.15. В первом случае к цилиндрическим электродам диаметром d присоединен проводящий слой с проводимостью λ , намного меньшей проводимости электродов, и толщиной $\delta \ll d$, находящийся на двух конусах, наибольший диаметр которых D , а во втором — такой же проводящий слой на поверхности цилиндра диаметром D и высотой l .

Для изменения напряженности электрического поля в проводящем слое на конусе имеем для компоненты поля, перпендикулярной оси симметрии,

$$E_r = \frac{2\rho}{r}.$$

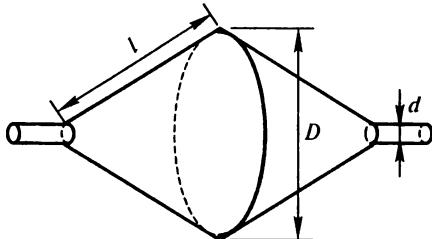


Рис. 4.14

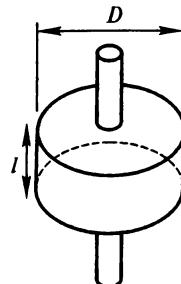


Рис. 4.15

Разность потенциалов на конусе

$$V = - \int_{d/2}^{D/2} E_r dr = 2\rho \ln\left(\frac{D}{d}\right).$$

На втором конусе еще такое же падение потенциала. Для тока получаем

$$I = 2\pi \frac{d}{2} \delta j = \pi d \delta \lambda E_l = \frac{4\pi \rho \lambda \delta}{\sin \alpha},$$

где E_l — поле вдоль образующей конуса, компонентой которого является E_r ,

$$\sin \alpha = \frac{D-d}{2l}.$$

Сопротивление системы (№ 4.17)

$$R = \frac{2V}{I} = \frac{2l \ln(D/d)}{\pi \lambda \delta (D-d)}.$$

В случае цилиндра (см. рис. 4.15) напряженность электрического поля на его основании $E = 2\rho/r$ и разность потенциалов (на каждом основании)

$$V_1 = 2\rho \ln\left(\frac{D}{d}\right).$$

На боковой поверхности цилиндра поле постоянно, так же как постоянна плотность тока. Следовательно, падение потенциала на боковой поверхности

$$V_2 = 4\rho \frac{l}{D}.$$

Полное падение потенциала

$$V = 4\rho \left[\frac{l}{D} + \ln\left(\frac{D}{d}\right) \right].$$

Силу тока вычисляем по плотности потока вблизи электрода

$$I = 2\pi \frac{d}{2} \delta j = \pi d \delta \lambda E = 4\pi \rho \lambda \delta.$$

Сопротивление системы (№ 4.18)

$$R = \frac{V}{I} = \frac{l/D + \ln(D/d)}{\pi \lambda \delta}.$$

Найдем сопротивление между двумя металлическими шарами (радиусами R_1 и R_2), зарытыми на большую глубину и находящимися на большом расстоянии друг от друга в земле, проводимость которой вблизи от шаров λ_1 и λ_2 значительно меньше проводимости металлов (№ 4.32, 4.34). Воспользуемся тем, что токи вблизи шаров близки к сферической симметрии

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} \quad \text{и} \quad E = \frac{j}{\lambda} = \frac{I}{4\pi\lambda r^2},$$

что приводит к быстрой сходимости интеграла $\int_R^\infty Edr$. Для оценки разности потенциалов между шарами имеем

$$V = \int_{R_1}^\infty \frac{Idr}{4\pi\lambda_1 r^2} + \int_{R_2}^\infty \frac{Idr}{4\pi\lambda_2 r^2} = IR.$$

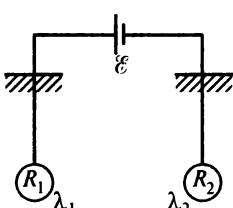
Откуда

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda_1 R_1} + \frac{1}{4\pi\lambda_2 R_2}.$$

Если шары включить в цепь постоянного тока с источником ЭДС \mathcal{E} , как показано на рис. 4.16, то, пренебрегая всеми сопротивлениями, кроме сопротивления заземления, получаем для тока

$$I = \frac{4\pi\mathcal{E}}{1/\lambda_1 R_1 + 1/\lambda_2 R_2}.$$

Это позволяет найти напряженности поля на каждом шаре и по теореме Гаусса (1.12) вычислить соответствующие заряды (знак определяется направлением тока) (№ 4.36)



$$Q_1 = R_1^2 E_1 = \frac{R_1^2 I}{4\pi\lambda_1 R_1^2} = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_2/R_1 + \lambda_1/\lambda_2};$$

$$Q_2 = R_2^2 E_2 = \frac{R_2^2 I}{4\pi\lambda_2 R_2^2} = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1/R_2 + \lambda_2/\lambda_1}.$$

Сопротивление заземления можно найти и для электродов произвольной формы, если заданы

Рис. 4.16

их емкости в вакууме (определяемые только формой) C_1 и C_2 . Для заряда на электроде можно написать

$$q = CV = \oint \sigma dS = \oint \frac{EdS}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\lambda} \oint j dS = \frac{I}{4\pi\lambda} = \frac{V}{4\pi\lambda R}.$$

Откуда

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda C}. \quad (4.21)$$

Если среда обладает диэлектрической проницаемостью ϵ , то в теореме Гаусса должно стоять $D = \epsilon E$ вместо E . Соответственно

$$R = \frac{\epsilon}{4\pi\lambda C}. \quad (4.22)$$

Можно ввести удельное сопротивление $\rho = 1/\lambda$. Тогда (№ 4.33)

$$R = \frac{\epsilon\rho}{4\pi C}. \quad (4.23)$$

Для всего заземления (№ 4.35)

$$R_0 = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1/C_1 + \rho_2/C_2}{4\pi}.$$

Рассмотрим токи в слабо проводящих диэлектриках.

Пусть пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость и удельная электропроводность изменяются от ϵ_1, λ_1 на одной поверхности диэлектрика до ϵ_2, λ_2 на другой его поверхности. Если такой конденсатор (с утечкой) включить в цепь с некоторой ЭДС, то по нему потечет постоянный ток I . Обозначив площадь пластин конденсатора S , для плотности тока получаем $I/S = j = \lambda E$.

Найдем суммарный свободный заряд q , который возникнет в диэлектрике (на границах) и плотность которого $\rho_{зар}$ определяется из (3.6) через дивергенцию электрической индукции

$$\rho_{зар} = \frac{dD/dx}{4\pi}.$$

Для суммарного заряда имеем

$$q = S \int_1^2 \rho_{зар} dx = S \int_1^2 \frac{dD}{4\pi}.$$

Очевидно, что все внутренние слои дают нулевой вклад и результат определяют крайние. Используя (3.8), получаем (№ 4.23)

$$q = \frac{S(D_2 - D_1)}{4\pi} = \frac{S(\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1)}{4\pi} = \frac{Sj(\epsilon_2/\lambda_2 - \epsilon_1/\lambda_1)}{4\pi} = \frac{I(\epsilon_2/\lambda_2 - \epsilon_1/\lambda_1)}{4\pi}.$$

Если электрическое поле направлено от стороны 1 к стороне 2 и

$$\frac{\epsilon_2}{\lambda_2} > \frac{\epsilon_1}{\lambda_1},$$

то заряд положительный.

Если задан не ток, а разность потенциалов на пластинах (обкладках) V , то в случае двух слоев диэлектрика толщиной h_1 и h_2 (№ 4.25) плотность заряда на границе диэлектриков получаем следующим образом:

$$E_1 h_1 + E_2 h_2 = V; \quad j = \lambda_1 E_1 = \lambda_2 E_2,$$

Откуда

$$E_1 = \frac{\lambda_2 V}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{\lambda_1 V}{h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1}$$

и, так как $D_2 - D_1 = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = 4\pi\sigma$, то

$$\sigma = \frac{(\epsilon_2 \lambda_1 - \epsilon_1 \lambda_2)V}{4\pi(h_1 \lambda_2 + h_2 \lambda_1)}.$$

Рассмотрим цилиндрический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и R_2 , заполненный слабо проводящей средой ($\epsilon = 1$, $\lambda = k/r^2$, где k — некоторая постоянная), на который подано напряжение V . Найдем распределение поля и плотности заряда (ρ) в конденсаторе и его емкость (№ 4.24). Из постоянства тока через единицу длины конденсатора

$$I = 2\pi r j = 2\pi r \lambda E = \frac{2\pi r k E}{r^2} = \text{const}$$

следует линейная зависимость напряженности поля от радиуса $E = Ar$. Для определения постоянной A вычислим разность потенциалов на обкладках конденсатора

$$V = \int_{R_1}^{R_2} Edr = \frac{A(R_2^2 - R_1^2)}{2}.$$

Откуда

$$A = \frac{2V}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Следовательно,

$$E = \frac{2Vr}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Из (3.6) и (1.21) при $\epsilon = 1$ имеем

$$\rho = \frac{\operatorname{div} \mathbf{D}}{4\pi} = \frac{(1/r)\partial(rE_r)/\partial r}{4\pi} = \frac{V}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Плотность заряда постоянна.

Величина заряда на единицу длины на внутренней обкладке q определяем из уравнения

$$E = \frac{2q}{R_1} = \frac{2VR_1}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Для определения емкости на единицу длины к этому заряду надо добавить распределенный заряд в диэлектрике

$$Q = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2).$$

Отсюда емкость

$$C = \frac{q + Q}{V} = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Найдем, по какому закону должна меняться проводимость в таком конденсаторе, чтобы напряженность электрического поля была постоянна. Из постоянства тока в конденсаторе имеем

$$I = 2\pi rj = 2\pi r\lambda E.$$

Отсюда (№ 4.28)

$$\lambda = \frac{I}{2\pi Er} \sim \frac{1}{r}.$$

В случае сферического конденсатора (радиусы R_1 и R_2), заполненного диэлектриком с удельной проводимостью λ , из постоянства тока $I = 4\pi r^2 j$ для напряженности электрического поля имеем

$$E = \frac{j}{\lambda} = \frac{I}{4\pi r^2 \lambda}.$$

Для разности потенциалов получаем

$$V = \frac{I}{4\pi\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I(1/R_1 - 1/R_2)}{4\pi\lambda}.$$

Проводимость изоляции (№ 4.26)

$$\Lambda = \frac{I}{V} = \frac{4\pi\lambda}{1/R_1 - 1/R_2}.$$

Можно было бы воспользоваться (4.21) и (3.55).

Найдем, как должна меняться проводимость $\lambda(r)$ в диэлектрике, находящемся в сферическом конденсаторе, чтобы при прохождении тока была **постоянной** во всех точках объемная плотность джоулевых потерь (№ 4.27):

$$N = \frac{j^2}{\lambda}.$$

Постоянство тока дает

$$I^2 = (4\pi r^2 j)^2 = (4\pi r^2)^2 N \lambda.$$

Откуда следует, что должно быть

$$\lambda \sim \frac{1}{r^4}.$$

Изменение проводимости на участке проводника приводит при постоянной плотности тока к изменению напряженности электрического поля и плотности зарядов проводимости. Найдем изменение объемной плотности зарядов проводимости в цилиндрическом проводнике, по которому течет ток плотностью j , на участке, где удельная проводимость меняется по линейному закону (№ 4.29)

$$\lambda = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{x}{l}.$$

Используя теорему Гаусса (1.19) и закон Ома (4.7) в дифференциальном виде, получаем

$$\rho = \frac{dE/dx}{4\pi} = \frac{j(\lambda_2 - \lambda_1)}{4\pi l [\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)x/l]^2}.$$

При постоянном λ объемная плотность зарядов ρ в проводнике, по которому течет ток, равна нулю.

Если в вакууме находятся n идеально проводящих тел с зарядами $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ и соответственно потенциалами $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n$, то поле между телами определяется уравнением Лапласа, следующим из уравнения Пуассона (2.11) при $\rho = 0$. При заполнении пространства между телами однородной жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ и слабой проводимостью λ и поддержании потенциалов тел при прежних значениях электрическое поле между ними не изменится. Найдем, какое количество теплоты будет выделяться ежесекундно в этой жидкости (№ 4.30). Для каждого тела выделяющаяся теплота определяется током с его поверхности

$$I_k = \oint j_N dS,$$

где j_N — плотность тока по нормали к поверхности тела и разностью потенциалов на теле и на бесконечности (0). Используя теорему Гаусса (3.7), для заряда на каждом теле имеем

$$q_k = \oint \frac{D_N dS}{4\pi} = \epsilon \oint \frac{E_N dS}{4\pi} = \epsilon \oint \frac{j_N dS}{4\pi\lambda}.$$

Количество ежесекундно выделяющейся теплоты

$$Q = \sum I_k \Phi_k = \frac{4\pi\lambda}{\epsilon} \sum q_k \Phi_k.$$

Ток может создаваться механическим переносом заряда, например на диэлектрической ленте. С помощь такой ленты заряжается высоковольтный сферический электрод (радиусом R) в генераторе Ван-де-Граафа, изображенном на рис. 4.17. Найдем максимальный потенциал и ток, которые можно получить от такого генератора, если скорость движения ленты v , ширина l , а пробой в атмосфере газа, в котором находится лента и высоковольтный электрод, возникает при напряженности электрического поля $E_{\text{пр}}$ (№ 4.21). Максимальная плотность поверхностного заряда на ленте определяется пробоем

$$\sigma = \frac{E_{\text{пр}}}{2\pi}.$$

Поэтому максимальный ток

$$I = \sigma l v = \frac{E_{\text{пр}} l v}{2\pi}.$$

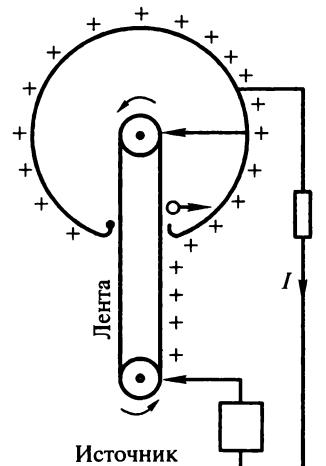


Рис. 4.17

Максимальный потенциал на сфере

$$\Phi = \frac{q}{R} = RE_{\text{пр}}.$$

Атомный электрический элемент представляет собой две концентрические проводящие сферы. Внутренняя сфера сделана из радиоактивного материала, испускающего быстрые электроны. В пространстве между сферами скорость электронов и, следовательно, их ионизирующее действие можно считать постоянным. Пролетев воздушный зазор, электроны поглощаются на внешней сфере. В отключенной батарее устанавливается равновесие между потоком заряда, переносимым быстрыми электронами, и током проводимости в ионизированном воздухе. Найдем напряженность электрического поля E в пространстве между сферами, если ЭДС элемента равна \mathcal{E} , радиусы сфер равны R_1 и R_2 (№ 4.22). Так как проводимость λ ионизированного газа пропорциональна концентрации ионов, которая пропорциональна потоку быстрых электронов, при равновесии равному току проводимости, то из закона Ома ($j_{\text{пр}} = \lambda E$) следует постоянство напряженности электрического поля

$$E = \frac{\mathcal{E}}{R_2 - R_1}.$$

Постоянное поле в сферическом конденсаторе свидетельствует о наличии пространственного заряда.

Если в пространстве между пластинами плоского конденсатора, заполненного газом и подсоединенном к батарее, образуется пара ионов с зарядами $\pm e$, то возникающее движение этих ионов приводит к протеканию заряда (тока) в цепи. Найдем этот ток (№ 4.37). Предполагаем постоянной подвижность ионов, т. е. их скорости v_1 и v_2 . Обозначим расстояние между пластинами l . Тогда, если один проходит путь до соответствующей пластины x , то другой ион проходит до другой пластины путь $l - x$. У одного на это уходит время

$$t_1 = \frac{x}{v_1},$$

а у другого пусть большее время

$$t_2 = \frac{l - x}{v_2}.$$

Ток через конденсатор определяется (4.1), числом зарядов на единицу длины, умноженным на скорость движения. Учитывая, что

движение заряда отрицательного знака в отрицательном направлении дает ток в положительном направлении, получаем, пока двигаются оба иона ($0 < t < t_1$), ток

$$I = I_1 = \frac{e}{l} (v_1 + v_2),$$

а затем при $t_1 < t < t_2$

$$I = I_2 = \frac{e}{l} v_2.$$

Таким образом, ток меняется скачком в момент прихода на пластину одного иона.

Простые правила вычисления суммарного сопротивления системы при последовательном $\left(R = \sum_i R_i \right)$ и параллельном соединении

$\left(\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \right)$ иногда бывает трудно применить. В таких случаях

надо искать некоторую симметрию, возможность где-то систему разомкнуть. Рассмотрим такой пример. Фигура, изображенная на рис. 4.18, сделана из проволоки постоянного сечения. Число вписанных друг в друга правильных треугольников очень велико. Сторона самого большого треугольника $a_1 = 1$ м. Сопротивление одного метра проволоки 1 Ом. Найдем сопротивление между клеммами A и B (№ 4.19). В силу симметрии системы потенциал во всех точках на вертикальной линии, проведенной из верхней вершины треугольника, будет один и тот же (равный половине разности потенциалов между точками A и B). Поэтому ток, идущий от A к a_1 , равен току от a_1 к B , а ток от a_1 к a_2 равен току от a_1 к a_2 . В таком случае можно в нижнем a_1 отделить внутренний треугольник от внешнего. Для внутреннего треугольника ситуация теперь такая же, как была для внешнего. Учитывая, что сторона его равна половине внешнего,

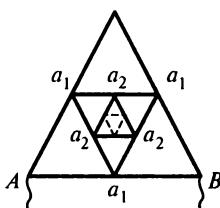


Рис. 4.18

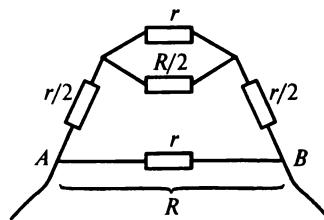


Рис. 4.19

получаем, что и сопротивление его должно быть в два раза меньше внешнего. Если искомое сопротивление R , то сопротивление системы, ограниченной первым внутренним треугольником, равно $R/2$. Обозначая сопротивление куска проволоки, равного длине стороны внешнего треугольника $r = a_1 \rho$, получаем эквивалентную схему, изображенную на рис. 4.19. В результате

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r + rR/(R+2r)}.$$

Это квадратное уравнение относительно R . Выбирая корень, который дает положительное значение, получаем

$$R = \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 1)r \approx 0,55 \text{ Ом.}$$

5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЗАКОН БИÓ—САВАРА—ЛАПЛАСА. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ В ВАКУУМЕ. ИНДУКТИВНОСТЬ ПРОВОДНИКОВ. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

В пространстве, окружающем электрический ток, создается **магнитное поле**, проявляющее себя тем, что действует на движущиеся заряды, в том числе и на токи. Название этого поля объясняется тем, что оно того же типа, как у постоянных магнитов. Величина и направление поля описываются вектором \mathbf{H} , называемым **напряженностью магнитного поля**. На основе опытов сформулирован закон Биó—Савара—Лапласа, позволяющий вычислить напряженность магнитного поля от элементов тока:

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} I \frac{[dlr]}{r^3}, \quad \left\{ d\mathbf{H} = I \frac{[dlr]}{4\pi r^3} \right\}, \quad (5.1)$$

где c — скорость света (электромагнитных волн) в вакууме (при использовании для входящих в формулу величин гауссовой системы единиц); dl — элемент проводника, по которому течет ток I ; r — вектор расстояния, отсчитываемого от элемента тока. Из опыта следует суперпозиция магнитных полей, которая нарушается лишь при наличии в поле ферромагнетиков.

Для бесконечного прямолинейного проводника с током силовые линии магнитного поля представляют окружности с центрами на оси провода. Из (5.1) интегрированием получаем напряженность магнитного поля на расстоянии b от оси провода. На рис. 5.1 показан прямой бесконечный провод, по которому течет ток I . Для вычисления напряженности магнитного поля на расстоянии b от провода пользуемся тем, что

$$\frac{b}{r} = \cos \alpha = \frac{rd\alpha}{dl}.$$

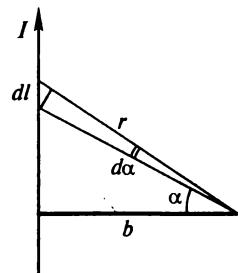


Рис. 5.1

Используя (5.1), имеем

$$dH = \frac{I}{c} dl r \sin \frac{\pi - \alpha}{r^3} = \frac{I}{c} \cos \alpha \frac{d\alpha}{b}.$$

Интегрируя по α от $-\pi/2$ до $\pi/2$, получаем

$$H = \frac{2I}{cb}; \quad \left\{ H = \frac{I}{2\pi b} \right\}. \quad (5.2)$$

Направлено поле внутрь рисунка (вращение правого винта при движении в направлении тока).

Напряженность магнитного поля на оси кругового витка с током в силу осевой симметрии имеет составляющую только в направлении оси. Обозначая радиус витка R , на его оси на расстоянии от элементов r из (5.1) получаем, интегрируя по длине,

$$H = \frac{2\pi R I \sin \alpha}{cr^2},$$

где $\sin \alpha = R/r$. Поэтому окончательно

$$H = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3}; \quad \left\{ H = \frac{R^2 I}{2r^3} \right\}. \quad (5.3)$$

В центре кругового витка с током радиусом R получаем

$$H = \frac{2\pi I}{cR}; \quad \left\{ H = \frac{I}{2R} \right\}. \quad (5.4)$$

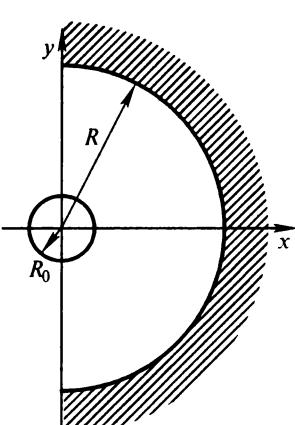
На больших расстояниях, как это видно из (5.3) и (1.7), поле соответствует полюю **ди-поля с моментом** (в данном случае **магнитным**), определяемым как

$$p_m = \frac{IS}{c} = \frac{\pi R^2 I}{c}; \quad \left\{ p_m = IS = \pi R^2 I \right\}. \quad (5.5)$$

На рис. 5.2 показан круглый виток радиусом R_0 , по которому течет ток I . Найдем поток магнитной индукции (в данном случае, в вакууме совпадающий с напряженностью магнитного поля) через заштрихованную часть плоскости xy , если $R = 10R_0$ (№ 5.26). Магнитный момент витка

$$p = \frac{I\pi R_0^2}{c}.$$

Рис. 5.2



На расстояниях, больших R , поле является полем диполя типа (1.9). В таком случае поток поля

$$\int_R^{\infty} \frac{p}{r^3} \pi r dr = \frac{I\pi^2 R_0^2}{cR} = \frac{I\pi^2 R_0^2}{10c}.$$

Магнитные стрелки, далеко отстоящие друг от друга, взаимодействуют как диполи. На рис. 5.3 показано, что в точке A закреплена под углом $\alpha = 45^\circ$ к линии AB одна стрелка. Найдем угол β , под которым установится другая стрелка, которая может вращаться в точке B (№ 5.27). Используя формулу (1.9) и обозначая

$$a = \frac{p}{r^3},$$

находим вдоль направления \mathbf{r} : $E_r = 3a \cos \alpha$; вдоль направления \mathbf{p} : $E_p = -a$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{a \sin \alpha}{3a \cos \alpha - a \cos \alpha} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

При $\alpha = 45^\circ \operatorname{tg} \beta = -1/2$.

Магнитное поле в плоскости кругового витка с током неоднородно. Для прямого провода оно уменьшается обратно пропорционально расстоянию от оси провода. Но для искривленного провода оно могло бы и возрастать. Покажем, что на оси оно имеет минимум (№ 5.9). Рассмотрим два элемента Idl на противоположных сторонах диаметра витка ($2R$). Обозначим расстояние от центра витка x . Используя (5.1), от двух противоположно расположенных элементов имеем

$$dH = \frac{2}{c} Idl \left[\frac{1}{(R-x)^2} + \frac{1}{(R+x)^2} \right].$$

Поведение этого выражения вблизи центра витка ($x = 0$) определяет и поведение суммы всех элементов. Для выяснения этого надо рассмотреть функцию

$$f(x) = \frac{1}{(R-x)^2} + \frac{1}{(R+x)^2}.$$

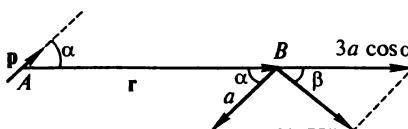


Рис. 5.3

Первая производная по x

$$f'(x) = \frac{2}{(R-x)^3} - \frac{2}{(R+x)^3}.$$

Вторая производная

$$f'' = \frac{6}{(R-x)^4} + \frac{6}{(R+x)^4}.$$

Так как при $x = 0$ первая производная равна нулю, а вторая производная положительна, то здесь минимум функции. Минимум даст и сумму всех элементов витка.

Для плоской катушки (как бы сжатой в один виток), имеющей N витков, в ее центре в соответствии с (5.4) имеем поле

$$H = \frac{2\pi IN}{cR}.$$

Если в центр этой катушки подвесить, например, на жесткой нити другую плоскую катушку, то при пропускании по ним тока возникает взаимодействие. Предполагая, что подвешенная катушка значительно меньше неподвижной, имеет n витков с площадью S и в равновесии плоскости катушек взаимно перпендикулярны, а модуль кручения нити α , найдем угол поворота подвижной катушки в случае одинакового постоянного тока в них I (№ 5.40). В данном случае магнитный диполь с магнитным моментом $p = InS/c$ находится в поле H . Момент сил, действующий на диполь, $M = [pH]$. Величина момента определяется синусом угла между векторами. Угол поворота подвижной катушки φ предполагаем малым. Получаем уравнение для определения φ

$$M = pH \cos \varphi \approx 2\pi SN \frac{n}{R} \left(\frac{I}{c} \right)^2 = \alpha \varphi.$$

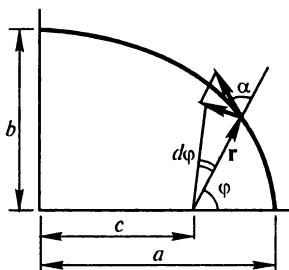


Рис. 5.4

Аналогичным образом можно рассмотреть квадратную рамку, подведенную внутри соленоида (№ 5.41).

Найдем напряженность магнитного поля в фокусе витка с током (I) в виде эллипса, уравнение которого в полярной системе координат (рис. 5.4) имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где

$$p = \frac{b^2}{a}$$

— параметр;

$$e = \frac{c}{a} = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a} < 1$$

— эксцентриситет (№ 5.1).

Используя (5.1) и вводя угол α между $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} , находим

$$dH = \frac{1}{c} \frac{I}{r^2} dl \sin \alpha = \frac{1}{c} \frac{I}{r} \frac{dl_{\perp}}{r} = \frac{1}{c} \frac{I}{r} d\phi.$$

Так как

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p},$$

получаем

$$H = \frac{1}{c} \frac{I}{p} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi) d\phi = \frac{2\pi I}{cp} = \frac{2\pi I a}{cb^2}.$$

Рассмотрим также виток, представляющий «гофрированную окружность» (рис. 5.5), уравнение которой в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + b \cos(m\varphi),$$

где a и b — постоянные величины; m — целое число (№ 5.2).

Можно повторить сделанное ранее

$$dH = \frac{1}{c} \frac{I}{r^2} dl \sin \alpha = \frac{1}{c} \frac{I}{r} \frac{dl_{\perp}}{r} = \frac{1}{c} \frac{I}{r} d\phi.$$

Так как

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + b \cos(m\varphi),$$

получаем

$$H = \frac{1}{c} I \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{a} + b \cos(m\varphi) \right] d\phi = \frac{2\pi I}{ca}.$$

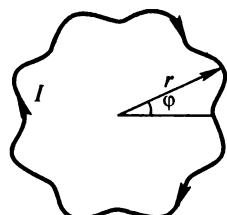


Рис. 5.5

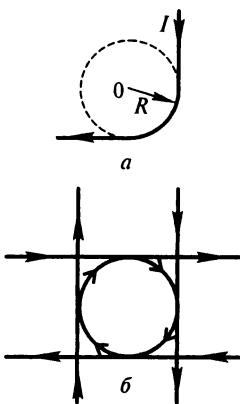


Рис. 5.6

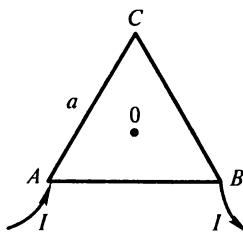


Рис. 5.7

Найдем магнитное поле в центре окружности, если по проводу, изображенному на рис. 5.6, а, протекает ток I (№ 5.3). Суперпозиция четырех таких проводов, изображенная на рис. 5.6, б, позволяет найти поле от круглого витка (5.4) и четырех прямолинейных проводов (5.2)

$$H = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi I}{cR} + 4 \frac{2I}{cR} \right) = 2 \frac{1}{c} \frac{I}{R} \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right).$$

На рис. 5.7 изображена однородная тонкая металлическая пластина, имеющая форму равностороннего треугольника со стороной a , по которой пропускают ток I . Пренебрегая магнитным полем от подводящих ток проводов, найдем магнитное поле в центре треугольника (№ 5.4). Три подобные системы утроят поле в центре. Из симметрии и суперпозиции следует, что поворот второй системы на 120° , а третьей — на 240° ничего не должен изменить. При этом оказывается, что через каждую вершину суммарный ток равен нулю. Таким образом, для трех так расположенных пластин поле в центре равно нулю. Следовательно, оно равно нулю и для одной пластины.

На рис. 5.8 показан длинный тонкий многовитковый соленоид с поверхностной плотностью тока i и площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$ согнутый так, что его ось образует половину окружности радиусом R . Найдем напряженность магнитного поля H в центре этой окружности (№ 5.12). Элемент соленоида на угле $d\phi$ представляет магнитный диполь, магнитный dipольный момент которого в соответствии с (5.5)

$$dp_m = iRd\phi \frac{S}{c},$$

и дает в центре окружности в соответствии с (1.9)

$$dH = \frac{dp_m}{R^3}.$$

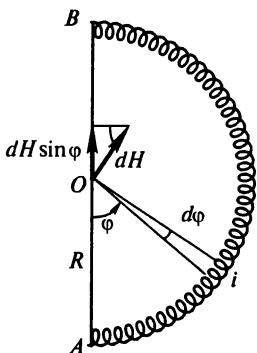


Рис. 5.8

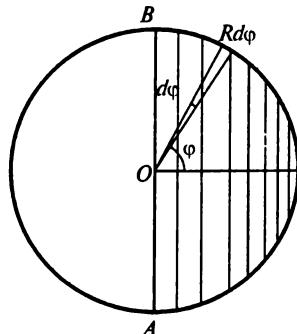


Рис. 5.9

При интегрировании по длине соленоида (по углу ϕ) компоненты поля, перпендикулярные диаметру AB , компенсируются, и окончательное значение поля в точке O дает интеграл от компоненты вдоль AB

$$H = \int_0^\pi dH \sin \phi = \frac{i}{c} \frac{S}{R^2} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{1}{c} 2\pi i \frac{r^2}{R^2}.$$

Магнитное поле от **витков**, намотанных на немагнитную **сферу** радиусом R , можно найти, пользуясь формулой (5.3). Считаем, что плотность поверхностного тока в таком «соленоиде» постоянна и равна i . Найдем напряженность магнитного поля в точке O (рис. 5.9), подставляя в (5.3) ток в витке $iRd\phi$, радиус витка $R \sin \phi$, расстояние от элементов витка до точки O равно R :

$$H = \frac{2\pi i}{c} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi d\phi = \frac{\pi^2 i}{2c}.$$

Если обмотана вся сфера (№ 5.13), то поле будет в два раза больше.

Вычислим циркуляцию напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура для бесконечного **прямолинейного провода** с током, магнитное поле которого описывается (5.2). На рис. 5.10 показана проекция контура на плоскость, перпендикулярную проводу. Интегрируя скалярное произведение вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} на элемент длины контура $d\mathbf{l}$ по длине замкнутого контура, с помощью (5.2) получаем

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint H_I dl_H = \oint H_I dl_H = \oint H r d\alpha = \frac{I}{c} \oint d\alpha = \frac{4\pi}{c} I.$$

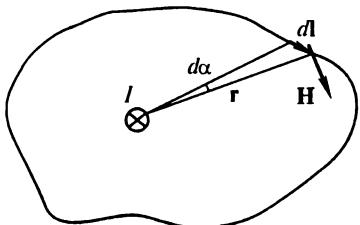


Рис. 5.10

Суперпозиция позволяет написать эту формулу (**теорему о циркуляции в интегральном виде**) для суммы проходящих внутри контура токов

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I; \\ \left\{ \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I \right\}. \quad (5.6)$$

Отсюда для цилиндрического провода радиусом R , по которому течет ток с постоянной плотностью j , получаем напряженность магнитного поля внутри провода

$$H = \frac{2\pi}{c} jr = \frac{2}{c} \frac{Ir}{R^2}; \quad \left\{ H = \frac{jr}{2} = \frac{Ir}{2\pi R^2} \right\}. \quad (5.7)$$

Вне провода магнитное поле описывается формулой (5.2), которую также можно получить с помощью теоремы о циркуляции (5.6).

Здесь уместно ввести еще один дифференциальный оператор — **ротор**. Напомним, что оператор градиента (набла)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{k}.$$

Оператор, примененный к скалярной величине — потенциальну ϕ , дает напряженность электрического поля (2.8)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi; \quad \{ \mathbf{E} = -\nabla\phi \}. \quad (5.8)$$

Скалярное произведение наблы, например, на \mathbf{E} дает дивергенцию (1.20)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (5.9)$$

Векторное произведение наблы, например, на \mathbf{H} дает ротор

$$[\nabla \cdot \mathbf{H}] = \text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Этот определитель раскрывается обычным путем по минорам

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (5.11)$$

Так ротор записывается в декартовых координатах.

В цилиндрических координатах (ρ, ψ, z на рис. 2.1)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} - \frac{\partial H_\psi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\psi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho H_\psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \psi} \right) \mathbf{e}_z. \quad (5.12)$$

В сферических координатах (r, ψ, θ на рис. 2.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} = & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta H_\psi}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \psi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r H_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\psi + \\ & + \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r H_\psi}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из циркуляции (5.6) ротор получается предельным переходом к контуру с бесконечно малой площадью ΔS

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\mathbf{n} \oint \frac{H_l dl}{\Delta S} \right), \quad (5.14)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности ΔS .

Отсюда теорема о циркуляции в дифференциальном виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \{ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \}, \quad (5.15)$$

где \mathbf{j} — вектор плотности тока.

На рис. 5.11 показана широкая полиэтиленовая пленка (диэлектрик) с равномерным поверхностным зарядом с плотностью σ , которая движется по роликам со скоростью v . Движение зарядов создает ток плотностью $j = \sigma v$.

Перпендикулярно току и параллельно поверхности пленки возникает магнитное поле, которое находим с помощью теоремы о циркуляции (5.6)

$$2H = \frac{4\pi j}{c}.$$

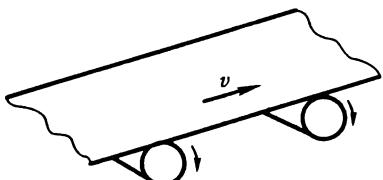


Рис. 5.11

Откуда

$$H = \frac{2\pi\sigma v}{c} = \frac{Ev}{c},$$

где E — напряженность электрического поля у поверхности пленки. При известном значении электрического поля пробоя можно найти максимальные плотность поверхностного заряда и значение магнитного поля при заданной скорости протягивания пленки (№ 5.6).

Если постоянный ток I течет **вдоль** длинной тонкостенной трубы радиусом R , которая имеет тонкую прорезь шириной b , параллельную оси трубы, то вокруг трубы возникает магнитное поле. Найдем его напряженность (№ 5.7). При отсутствии разреза внутри трубы магнитного поля не было бы. Условие в разрезе удовлетворяется, если предположить, что по нему, противоположно I , проpusкается ток силой

$$\frac{Ib}{2\pi R - b} \approx \frac{Ib}{2\pi R}.$$

Внутри трубы на расстоянии r от разреза с помощью (5.2) получаем

$$H = \frac{Ib}{\pi c R r}.$$

Вне трубы добавляется еще поле тока по всей трубке

$$H = \frac{2I}{cl},$$

где l — расстояние от оси трубы.

Найдем распределение магнитного поля вне и внутри длинного цилиндрического провода, состоящего из двух проводящих сред, имеющих удельное сопротивление ρ_1 от оси провода до R_1 и ρ_2 от R_1 до R_2 , по которому идет ток I (№ 5.8). Благодаря электрическому контакту, стационарности токов, при котором электрическое поле аналогично электростатическому, напряженность электрического поля в проводе постоянна. Из (4.7) и (4.8) для плотностей тока в частях провода получаем $E = \rho_1 j_1 = \rho_2 j_2$. Откуда

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Ток через первую среду

$$I_1 = j_1 \pi R_1^2,$$

ток через вторую среду

$$I_2 = j_2 \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

Для токов получаем

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{и} \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right).$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{I}{(1 + \rho_1/\rho_2)(R_2^2/R_1^2 - 1)}; \quad I_2 = \frac{I(\rho_1/\rho_2)(R_2^2/R_1^2 - 1)}{(1 + \rho_1/\rho_2)(R_2^2/R_1^2 - 1)}.$$

Из (5.7) и (5.2) при $0 < r < R_1$ магнитное поле

$$H_1 = \frac{2I_1 r}{cR_1^2},$$

при $R_1 < r < R_2$

$$H_2 = \frac{(2/c)(I/r)(1 + \rho_1/\rho_2)(r^2/R_1^2 - 1)}{(1 + \rho_1/\rho_2)(R_2^2/R_1^2 - 1)},$$

при $r \geq R_2$

$$H_3 = \frac{2I}{cr}.$$

Найдем зависимость магнитного поля H от расстояния r от оси бесконечного прямого провода радиусом R , по которому течет постоянный ток I , а удельное сопротивление его ρ зависит от расстояния от оси по закону $\rho = \rho_0 r$ (№ 5.38). Как и в предыдущей задаче, электрическое поле E в проводнике постоянно, поэтому

$$\rho(r) = \frac{E}{\rho(r)} = \frac{E}{\rho_0 r}.$$

Используя закон Ома (4.7), (4.8), получаем

$$I = \int_0^R j(r) 2\pi r dr = \frac{2\pi R E}{\rho_0}.$$

Из (5.6) внутри провода

$$H 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int_0^r j(r) 2\pi r dr = \frac{4\pi}{c} I \frac{r}{R}.$$

Откуда

$$H = \frac{2I}{cR} = \text{const.}$$

При $r > R$

$$H = \frac{2I}{cr}.$$

Если в плазменном цилиндре радиусом a распределение удельной проводимости λ в зависимости от расстояния от оси цилиндра r имеет вид

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

то плотность тока

$$j(r) = \lambda(r) E = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

где $j_0 = \lambda_0 E$; E — постоянное электрическое поле, вызывающее постоянный ток:

$$I = \int_0^a j 2\pi r dr = \frac{j_0 \pi a^2}{2}.$$

С помощью теоремы о циркуляции (5.6) находим распределение магнитного поля (№ 5.21). Внутри плазменного цилиндра

$$2\pi r H = \frac{4\pi}{c} 2\pi j_0 \int_0^r r \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr = \frac{4\pi}{c} \pi j_0 \left(r^2 - \frac{r^4}{2a^2}\right),$$

откуда

$$H = \frac{4}{c} \frac{I}{a^2} r \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right).$$

Вне плазменного цилиндра

$$2\pi r H = \frac{4\pi I}{c}$$

и, следовательно,

$$H = \frac{2I}{cr}.$$

На рис. 5.12, *a* показано поперечное сечение системы из двух бесконечно длинных прямолинейных проводников из немагнитного материала, изолированных друг от друга и ограниченных цилиндрическими поверхностями. Найдем величину и направление магнитного поля (в данном случае, совпадающего с индукцией магнитного поля) в полости (Π), если токи с одинаковой плотностью j идут по одному проводнику к читателю, а по другому — от читателя (№ 5.23). Используя (5.7), для цилиндра с током можем написать в векторном виде

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} [\mathbf{j}\mathbf{r}].$$

На рис. 5.12, *б* показаны все векторы. В результате получаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_B = \frac{2\pi}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)] = \frac{2\pi}{c} [\mathbf{j}\mathbf{r}_{AB}].$$

Эту же формулу можно применить и к нахождению магнитного поля внутри бесконечной цилиндрической полости, сделанной в бесконечном цилиндрическом проводе, вдоль которого течет постоянный ток плотностью j , равномерно распределенный по сечению провода (№ 5.24).

Рассмотрим плоский конденсатор, пластинами которого являются диски радиусом R , подключенный к источнику постоянного

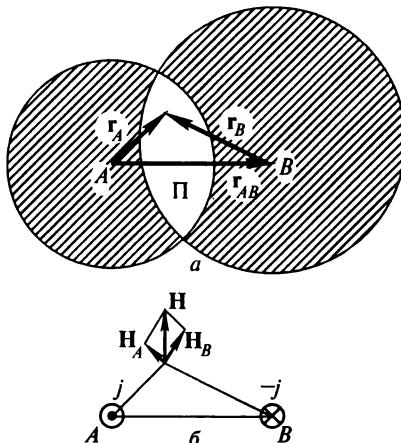


Рис. 5.12

напряжения V . Объем между пластинами заполнен слабопроводящим диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого

$$\epsilon(z) = \epsilon_0 + \frac{z^2}{h^2},$$

а проводимость

$$\lambda(r) = \lambda_0 \left(\frac{R}{h} \right)^{1/2},$$

где h — расстояние между пластинами, а z отсчитывается от нижней пластины; r — расстояние от оси. Пренебрегая краевыми эффектами, найдем плотность заряда $\rho(r, z)$, а также полный свободный заряд Q , сосредоточенный в диэлектрике, и магнитное поле $B(r)$ (№ 5.25). Из (4.7) имеем $E = j/\lambda$. Считая, что плотность тока не зависит от z , получаем, что напряженность поля

$$E = \frac{j(r)}{\lambda_0 (R/r)^{1/2}}$$

также не зависит от z , т. е. $E = V/h$.

Из (3.6)

$$\rho = \frac{\partial D / \partial z}{4\pi} = \frac{\partial (\epsilon E) / \partial z}{4\pi} = \frac{2Ez}{4\pi h^2} = \frac{Vz}{2\pi h^3}.$$

Интегрируя по объему, находим

$$Q = \frac{\pi R^2 V}{2\pi h^3} \int_0^h z dz = \frac{VR^2}{4h}.$$

Из теоремы о циркуляции (5.6) следует

$$2\pi r H = 4\pi E \int_0^r 2\pi r \lambda_0 \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2} dr = 8\pi^2 E R^{1/2} \lambda_0 r^{1/2} dr = \frac{16}{3} \pi^2 E (Rr)^{1/2} r \lambda_0.$$

Откуда, учитывая, что $B = H$, находим

$$B = 8\pi \frac{V}{h} \lambda_0 (Rr)^{1/2}.$$

При симметрии системы можно воспользоваться теоремой о циркуляции (5.6) и в случае части провода конечной длины. Система, изображенная на рис. 5.13, представляет однородную проводящую

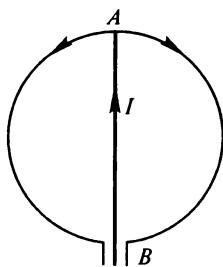


Рис. 5.13

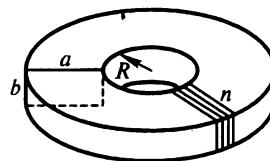


Рис. 5.14

сферу и провод вдоль диаметра. Ток I идет по проводу от B к A , а затем по поверхности сферы (№ 5.10). Так как имеется симметрия относительно AB , то, обозначая расстояние от оси симметрии r , можно из (5.6) внутри сферы получить $H2\pi r = 4\pi I/c$. Снаружи сферы поля нет, так как суммарный ток равен нулю.

На рис. 5.14 показан **круговой тор** прямоугольного поперечного сечения с размерами a и b , на который навита обмотка тонкой проволоки, содержащая N витков (на рисунке не показана). На тор надета кольцевая катушка с числом витков n , по обмотке которой течет ток I . Найдем магнитный поток, который посыпает магнитное поле катушки через обмотку тора с внутренним радиусом R (№ 5.35). Предполагаем, что рассеяния магнитного потока от кольцевой катушки нет, т. е. весь поток идет внутри тора, и учитываем, что силовые линии не пересекаются. Для силовой линии, проходящей на расстоянии r от оси симметрии тора, из (5.6) $2\pi r H = 4\pi n I/c$. Для потока имеем

$$\Phi = \int_R^{R+a} H b dr = 2 \frac{1}{c} Inb \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} = 2 \frac{1}{c} Inb \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right).$$

Умножая это на N , получаем зацепленный поток через тор.

Если по оси полого цилиндра из немагнитного металла или диэлектрика натянута **заряженная нить**, то на его поверхностях появляются заряды. Вращение цилиндра дает электрический ток и приводит к появлению магнитного поля. Пренебрегая краевыми эффектами, пьезоэффектом и всеми эффектами, вызываемыми центробежной силой, найдем магнитные поля в случае металлического и диэлектрического (диэлектрическая проницаемость ϵ) цилиндров, вращающихся с угловой скоростью Ω вокруг нити, на единицу длины которой приходится заряд χ (№ 5.14). Так как суммарный заряд на цилиндре равен нулю, то и суммарный ток равен нулю. Поэтому в

полости и снаружи цилиндра магнитного поля нет. Поле внутри цилиндра определяется плотностью заряда на внешней поверхности цилиндра (радиус R). В соответствии с (1.16) напряженность электрического поля на внешней поверхности цилиндра

$$E = \frac{2\chi}{R}.$$

В случае металла плотность заряда из (1.12)

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{\chi}{2\pi R},$$

а в случае диэлектрика из (3.3) и (3.8), так как

$$E = D = \epsilon E_d = E_d + 4\pi P,$$

то

$$\sigma_d = P_n = \frac{(\epsilon - 1) E_d}{4\pi} = \frac{(\epsilon - 1) E}{4\pi\epsilon} = \frac{(\epsilon - 1)\chi}{2\pi\epsilon R}.$$

Ток на единицу длины цилиндра $I = \sigma\Omega R$. Используя (5.4), получаем в случае металла $H = 2\chi\Omega/c$, а в случае диэлектрика

$$H_d = \frac{2\chi\Omega(\epsilon - 1)}{c\epsilon}.$$

Найдем магнитные поля, возникающие при **вращении** длинного сплошного цилиндра из статически **поляризованного диэлектрика**, вращающегося вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω . Задано, что вектор поляризации во всех точках цилиндра направлен радиально, а его величина пропорциональна расстоянию от продольной оси цилиндра, т. е. $P = kr$ ($k = \text{const}$; r — радиус-вектор, проведенный от оси перпендикулярно к ней), радиус цилиндра R (№ 5.15). Из (3.4) следует для объемной плотности связанных зарядов

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -k \operatorname{div} r = -k \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) = -2k,$$

т. е. постоянна во всем объеме цилиндра.

При вращении связанные заряды создают токи с объемной плотностью

$$j = \omega r \rho_{\text{связ}} = -2k\omega r.$$

Заметим, что на поверхности цилиндра при $k > 0$ из (3.3) положительный поверхностный связанный заряд плотностью $\sigma = P_n = kR$,

а внутренние связанные заряды отрицательные и в сумме равны поверхностному заряду, т. е., как и должно быть, свободных зарядов нет. Поэтому при вращении цилиндра внешнего магнитного поля нет. Для вычисления магнитного поля внутри цилиндра воспользуемся теоремой о циркуляции (5.6). Контур для циркуляции, показанный на рис. 5.15, берем вдоль образующей цилиндра на единице длины по радиусам и линии на расстоянии r от оси цилиндра. Получаем ток

$$I = \int_r^R j dr + \sigma \omega R = -2k\omega \int_r^R r dr + k\omega R^2 = k\omega r^2$$

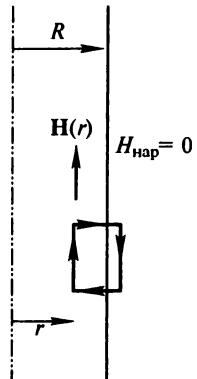


Рис. 5.15

и магнитное поле $H = 4\pi I/c$.

Если тонкостенная длинная дюралевая трубка заряжается электрически и приводится в быстрое вращение относительно оси симметрии, то возникают магнитные поля. Максимальная скорость вращения трубы ω обусловлена механической прочностью дюраля $\sigma_{\text{пр}}$. На рис. 5.16 показана максимальная центробежная сила

$$F = \rho h R d\phi \omega^2 R = 2\sigma_{\text{пр}} h \frac{d\phi}{2},$$

где ρ — плотность дюраля; h — толщина трубы; R — ее радиус.

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\rho R^2}.$$

Обозначая заряд на трубке q , имеем из (1.3) для напряженности электрического поля на поверхности трубы

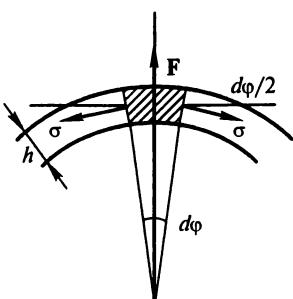


Рис. 5.16

для плотности тока при вращении

$$j = \frac{R\omega q}{4\pi R^2} = \frac{q(\sigma_{\text{пр}}/\rho)^{1/2}}{4\pi R^2}.$$

Этот ток, так же как в соленоиде, создает магнитное поле внутри трубы

$$H = \frac{4\pi j}{c}.$$

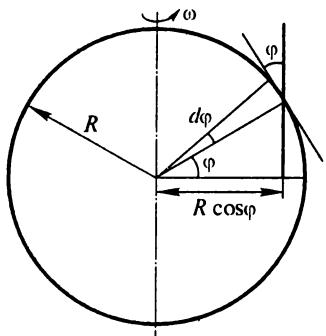


Рис. 5.17

Для наибольшего отношения магнитного поля внутри трубы к электрическому полю на ее внешней поверхности получаем $\frac{(\sigma/\rho)^{1/2}}{c}$ (№ 5.16).

Для вращающегося заряженного шарика магнитное поле вдали от него представляет поле магнитного диполя. Найдем величину магнитного диполя при равномерном распределении заряда q по поверхности шарика радиусом R . Плотность заряда на поверхности

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

На колечке радиусом $R \sin \phi$ (рис. 5.17) имеется заряд $\sigma R d\phi 2\pi R \cos \phi$. Этот заряд проходит за время поворота $T = 2\pi/\omega$. Отсюда получаем ток и, в соответствии с (5.5), магнитный момент

$$dp = \frac{1}{c} \sigma \omega \pi R^4 \cos^3 \phi d\phi.$$

Интегрируя по углам, находим магнитный момент, направленный по ω ,

$$p = \frac{1}{c} \sigma \omega \pi R^4 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi d\phi \sin \phi = \frac{1}{c} q R^2 \frac{\omega}{3}.$$

В случае равномерного распределения заряда по объему шара для плотности заряда имеем

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$

Заряд в кольце высотой $2R \sin \phi$, шириной $R d\phi \sin \phi$ и радиусом $R \cos \phi$ равен $\rho 2R \sin \phi R d\phi \sin \phi 2\pi R \cos \phi$. Этот заряд проходит за время поворота $T = 2\pi/\omega$. Отсюда получаем ток и, в соответствии с (5.5), магнитный момент

$$dp = \frac{1}{c} 2\rho \omega \pi R^5 \cos^3 \phi \sin^2 \phi d\phi.$$

Интегрируя по углам, находим магнитный момент, направленный по ω ,

$$p = \frac{1}{c} \rho \omega \pi R^5 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \sin^2 \phi d\phi \sin \phi = \frac{1}{c} q R^2 \frac{\omega}{5}.$$

Используя полученные магнитные моменты с помощью (1.9), находим магнитное поле (№ 5.17).

Согласно современным данным, допустимое из опытов различие абсолютных величин зарядов электрона q_e и протона q_p таково, что

$$\left| \frac{q_p - q_e}{q_p} \right| < 10^{-21}.$$

Таким образом, каждый атом с номером Z может иметь заряд Zxq_p , где

$$x = \frac{q_p - q_e}{q_p}.$$

Считая, что для атомов, составляющих Землю, отношение относительной атомной массы A к атомному номеру Z порядка 2, а плотность Земли $\rho \approx 5$ г/см³, оценим, не может ли наличие заряда и вращение Земли создать существующее магнитное поле Земли $B \approx 3 \cdot 10^{-5}$ Тл (№ 5.20). Так как масса атома равна массе нуклона (протона или нейтрона) m_n , умноженного на A , то отношение полного заряда Земли q к ее массе M равно

$$\frac{q}{M} = \frac{Zxq_p}{m_n A}.$$

Используя полученное в предыдущей задаче соотношение для магнитного момента Земли, находим

$$\mathbf{p} = x \frac{Z}{A} \frac{q_p}{m_n} 4\pi\rho\omega \frac{R^5}{15c}.$$

Если бы Земля обладала таким дипольным магнитным моментом, то из (1.9) для максимального значения на полюсе получим

$$B = \frac{2p}{R^3},$$

а затем вычисляем

$$x = \frac{A}{Z} \frac{m_n}{q_p} 15cB \frac{T_{\text{сут}}}{16\pi^2 \rho R^2} \approx 2,6 \cdot 10^{-19}.$$

Эта величина намного больше возможной, поэтому магнитное поле Земли не может быть создано из-за разности зарядов.

Найдем магнитный момент **квадратной рамки** со стороной a , равномерно заряженной с линейной плотностью ρ , вращающейся с угловой скоростью ω вокруг одной из сторон (№ 5.18). Сторона, параллельная угловой скорости, дает момент в ее направлении

$$m_1 = \frac{1}{c} \rho a \frac{\omega}{2\pi} \pi a^2 = \rho \omega \frac{a^3}{2c}.$$

Каждая из радиальных сторон дает

$$m_2 = \frac{1}{c} \int_0^a \rho dx \frac{\omega}{2\pi} \pi x^2 = \frac{1}{c} \rho \omega \frac{a^3}{6}.$$

В сумме получаем

$$m = \frac{1}{c} \frac{5}{6} \rho \omega a^3.$$

Для **вращающегося с угловой скоростью ω равномерно заряженного** (полный заряд Q) **диска** радиусом R (рис. 5.18) магнитный момент находим (№ 5.19) интегрированием, используя (5.5):

$$p = \frac{2}{c} \frac{\sigma \omega}{2\pi} \int_0^R 2(R^2 - x^2)^{1/2} dx \pi x^2,$$

где

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}.$$

С помощью таблицы интегралов, либо вводя обозначение $x = R \sin \phi$, получаем

$$p = QR^2 \frac{\omega}{8c}.$$

Вектор-потенциал магнитного поля можно получить из закона Биб—Савара—Лапласа (№ 12.1).

Используя связь $I = jdS$, из (5.1) получаем

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{[jdS d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{r}] \frac{dV}{r^3}.$$

Рис. 5.18

Интегрируя, находим

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int_V [\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}] \frac{dV}{r^3}. \quad (5.16)$$

Входящий в (5.16) радиус-вектор \mathbf{r} имеет начальную точку, где находится элемент тока с плотностью \mathbf{j} , называемую истоком, и конечную точку, где вычисляют величину магнитного поля, называемую точкой наблюдения. Найдем градиент численной величины радиуса-вектора \mathbf{r} . Можно при вычислении градиента оставлять неподвижной точку истока. В таком случае наибольшее возрастание производной происходит в направлении радиуса-вектора (изменение расстояния равно изменению длины вектора)

$$\text{grad}_a \mathbf{r} = \mathbf{r}/r. \quad (5.17)$$

При перемещении истока

$$\text{grad}_u \mathbf{r} = -\mathbf{r}/r. \quad (5.18)$$

Так как для произвольной функции $f(r)$

$$\text{grad}_a f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \text{grad}_a \mathbf{r},$$

то

$$\text{grad}_a \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \text{grad}_a \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.19)$$

Далее можно воспользоваться формулой, в справедливости которой можно убедиться просто вычислением,

$$\text{rot}(f\mathbf{a}) = f \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } f \mathbf{a}].$$

Подставляя в это соотношение $f = 1/r$ и $\mathbf{a} = \mathbf{j}$ и при дифференцировании считая неподвижной точку истока вектора \mathbf{r} , получаем

$$\text{rot}_a \left(\frac{1}{r} \right) = [\text{grad}_a \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{j}] + \frac{1}{r} \text{rot}_a \mathbf{j}.$$

Так как значение вектора \mathbf{j} в элементе dV (точка истока) не зависит от перемещения точки наблюдения, в которой вычисляется поле, то $\text{rot}_a \mathbf{j} = 0$. Следовательно,

$$\text{rot}_a \left(\frac{1}{r} \right) = \left[\text{grad}_a \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{j} \right] = \frac{[\mathbf{j} \cdot \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Внося это в уравнение (5.16), находим

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int_V \text{rot}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{r} \right) dV.$$

Так как дифференцирование (образование ротора) проводится по координатам точки наблюдения, а интегрирование — по объему проводников, обтекаемых током, то возможно изменение последовательности этих операций

$$\mathbf{H} = \text{rot}_a \left(\frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}}{r} dV \right).$$

Вводя обозначение величины, называемой **векторным потенциалом магнитного поля**,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j} \frac{dV}{r}; \quad \left\{ \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{j} \frac{dV}{r} \right\}, \quad (5.20)$$

получаем

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \{\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}\}. \quad (5.21)$$

Найдем поле на оси соленоида (катушки) как сумму полей от набора витков (№ 5.5). На рис. 5.19 показано сечение соленоида и даны его размеры. Обозначая общее число витков N и силу тока I и пользуясь (5.3), получаем поле в точке A от элемента соленоида dx

$$dH = \frac{dI}{c} \frac{2\pi}{R} \sin^3 \varphi; \quad dI = I \frac{N}{l} dx; \quad dx \sin \varphi = R \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

В результате

$$H = \frac{2\pi I}{c} \frac{N}{l} \int_{\beta}^{\alpha} \sin \varphi d\varphi.$$

Откуда

$$H = \frac{2\pi I}{c} \frac{N}{l} (\cos \beta - \cos \alpha). \quad (5.22)$$

Для точек внутри достаточно длинного соленоида, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами $\beta = 0$, $\alpha = \pi$:

$$H = \frac{4\pi}{c} \frac{IN}{l}; \quad \left\{ H = \frac{IN}{l} \right\}. \quad (5.23)$$

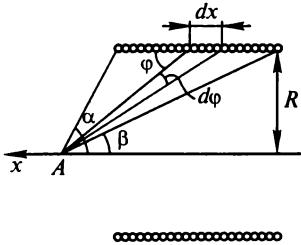


Рис. 5.19

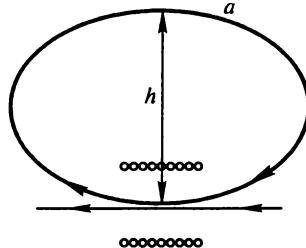


Рис. 5.20

Поле не зависит от расстояния от оси соленоида и направлено в соответствии с (5.1).

На краю достаточно длинного соленоида $\beta = 0$, $\alpha = \pi/2$ поле на оси соленоида

$$H = \frac{2\pi}{c} \frac{IN}{l}; \quad \left\{ H = \frac{IN}{2l} \right\}. \quad (5.24)$$

Если на тонкий латунный прут, свернутый в кольцо, намотано равномерно $N = 10^4$ витков провода, по которому идет ток I , то магнитное поле есть на оси прута и в центре кольца. Так как ток вдоль кольца равен I , то поле в центре кольца радиусом R (5.4)

$$H = \frac{2\pi I}{cR}.$$

Поле на оси прута (5.21)

$$H = \frac{4\pi IN}{2\pi cR}.$$

Отсюда можно найти их отношение N/π (№ 5.22).

На рис. 5.20 показаны силовые линии магнитного поля соленоида. Найдем, на каком расстоянии h от соленоида длиной l с числом витков N пройдет **силовая линия** (a), если в его середине она проходит на расстоянии в α раз меньшем его радиуса (№ 5.39).

Считаем, что на больших расстояниях поле определяется магнитным моментом соленоида (5.5)

$$p = \frac{IN\pi R^2}{c}$$

в соответствии с (1.8)

$$H = \frac{p}{r^3}.$$

Из отсутствия магнитных зарядов (замкнутости силовых линий) и, следовательно, сохранения магнитного потока, пользуясь (5.23), имеем

$$\frac{4\pi I}{c} \frac{N}{l} \pi \left(\frac{R}{\alpha} \right)^2 = \int_h^{\infty} H 2\pi r dr.$$

Подставляя и интегрируя, получаем

$$h = \frac{\alpha^2 l}{2}.$$

В следующем разделе будет введено понятие вектора магнитной индукции \mathbf{B} , который подобно вектору напряженности электрического поля \mathbf{E} является силовым вектором, определяющимponderomotorные силы. Здесь ограничимся лишь указанием, что в отсутствие магнетиков вектор магнитной индукции равен вектору напряженности магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}; \quad \{\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}\}. \quad (5.25)$$

Здесь магнитная постоянная

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,25663706144 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (5.26)$$

Поэтому при отсутствии магнетиков поток вектора магнитной индукции

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{H} d\mathbf{S}; \quad \left\{ \Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{H} d\mathbf{S} \right\}. \quad (5.27)$$

Приведем пример вычисления потока магнитного поля (№ 5.32). Найдем поток напряженности магнитного поля, создаваемого

квадратной рамкой со стороной a , по которой течет ток I , через полуплоскость, граница которой расположена на расстоянии b от одной из сторон рамки (рис. 5.21). Рамка лежит на полуплоскости, граница которой начинается от заштрихованной части. Очевидно, что сумма потоков магнитного поля от сторон рамки, перпендикулярных границе полуплоскости, равна нулю. Чтобы вычислить потоки от единичного отрезка стороны рамки через

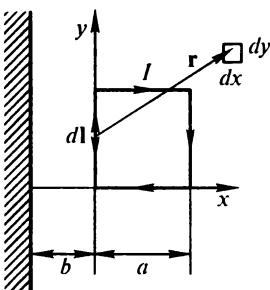


Рис. 5.21

все единичные площадки, лежащие на линиях, параллельных границе полуплоскости, равен потоку от провода бесконечной длины через единичную площадку на этой линии, который вычисляется по (5.2). В соответствии с (5.1) поток равен интегралу

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_b^a dx dy I \frac{[dlr]}{cr^3}.$$

Введенные координаты показаны на рис. 5.21. Можно поменять местами dl и dy и воспользоваться (5.2).

Отсчитывая расстояние x от стороны рамки, получаем, что интегрировать надо для ближней к границе стороны рамки от b до ∞ , а для дальней стороны от $a + b$ до ∞ , так как ближайшие к сторонам части дают интегралы с разными знаками (т. е. нуль). Интегралы надо увеличить в a раз, так как результаты были для единичного элемента стороны. Учитывая, что от ближней и дальней от границы полуплоскости сторон потоки имеют разные знаки, получаем

$$\Phi = \frac{2Ia}{c} \left(\int_b^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{a+b}^{\infty} \frac{dx}{x} \right) = \frac{2Ia}{c} \int_b^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{2Ia}{c} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

Для замкнутого провода, по которому течет ток I , можно вычислить, используя (5.27) и (5.1), поток Φ вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} через замкнутый контур площади S

$$\Phi = \frac{1}{c} LI; \quad \{\Phi = LI\}. \quad (5.28)$$

Здесь, как и в (5.1), используется множитель $(1/c)$, а другой множитель (L), определяемый только геометрией системы (размерами и конфигурацией провода) и не зависящий от силы тока, называется **индуктивностью**, а также **коэффициентом самоиндукции провода, или самоиндукцией**.

Воспользовавшись полученной для длинного соленоида (длину обозначим l) зависимостью (5.23) и учитывая, что площадь витков равна S и число их N , т. е. поток через весь контур увеличивается в N раз и превращается в так называемый **зашелленный поток** $\Psi = \Phi N$, находим самоиндукцию соленоида

$$L = 4\pi N^2 \frac{S}{l}; \quad \left\{ L = \mu_0 N^2 \frac{S}{l} \right\}. \quad (5.29)$$

Найдем индуктивность L проводника, показанного на рис. 5.22. Ток течет по проволоке диаметром $2a$, расположенной по оси доста-

точно тонкой металлической трубки диаметром $2b$, переходит на дно трубки, к центру которой припаяна проволока, и возвращается обратно по ее поверхности (№ 5.28). Пренебрегая краевыми эффектами для магнитного поля внутри трубы, из (5.2) получаем

$$H = \frac{2I}{c} \frac{r}{r}.$$

Внутри провода из (5.7)

$$H = \frac{2Ir}{ca^2}.$$

На единицу длины трубы и провода получаем

$$\frac{\Phi}{l} = \frac{2I}{c} \left(\int_0^a \frac{r dr}{a^2} + \int_a^b \frac{dr}{r} \right) = \frac{I}{c} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right].$$

Используя (5.28), находим

$$\frac{L}{l} = 1 + 2 \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Для единицы длины системы из **двух параллельных одинаковых проводов**, по которым одинаковые токи текут в противоположных направлениях (рис. 5.23), учитывая магнитное поле только вне проводов, из (5.2) и (5.27) получаем (№ 5.29)

$$\Phi = 2I \int_a^{h-a} \frac{2I}{c} \frac{dr}{r} = 4I \frac{l}{c} \ln \left(\frac{h-a}{a} \right);$$

$$\frac{L}{l} = 4 \ln \left(\frac{h-a}{a} \right).$$

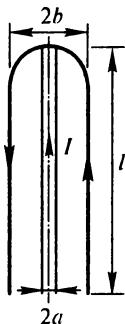


Рис. 5.22

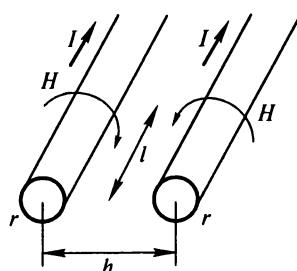


Рис. 5.23

Если имеются два замкнутых контура L_1 и L_2 : первый с током I_1 , а второй с током I_2 , то первый создает поток магнитного поля через второй Φ_{12} , а второй через первый Φ_{21} . Используя теорему Стокса, получаем

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} H_{1n} dS_2 = \oint_{L_2} A_{1l} dl_2 = \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 d\mathbf{l}_2;$$

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} H_{2n} dS_1 = \oint_{L_1} A_{1l} dl_2 = \oint_{L_1} \mathbf{A}_2 d\mathbf{l}_1.$$

Переходя в (5.20) к току ($I = jdS$), находим

$$\Phi_{12} = \frac{I_1}{c} \oint_{L_1} \oint_{L_2} d\mathbf{l}_1 \frac{d\mathbf{l}_2}{r}; \quad \Phi_{21} = \frac{I_2}{c} \oint_{L_2} \oint_{L_1} d\mathbf{l}_2 \frac{d\mathbf{l}_1}{r}.$$

Интегрирование проводится по обоим контурам L_1 и L_2 , причем каждый элемент длиной $d\mathbf{l}_1$ контура L_1 должен быть скалярно умножен на элемент длиной $d\mathbf{l}_2$ контура L_2 , и полученное произведение разделено на расстояние между элементами r . Двойной интеграл, входящий в формулы для Φ_{12} и Φ_{21} , носит название **коэффициента взаимной индукции** контуров L_1 и L_2 , обозначается L_{12} и L_{21} , а из их выражения следует **теорема взаимности**

$$L_{12} = L_{21}. \quad (5.30)$$

Если на один сердечник намотаны две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 и известно, что рассеяния магнитного поля нет, то можно найти их взаимную индукцию M (№ 5.30). Обозначим число витков в катушках N_1 и N_2 , магнитный поток, который не рассеивается, и поэтому одинаковый для обеих катушек Φ , сцепленный поток первой катушки $\Psi_1 = \Phi N_1$, сцепленный поток от первой катушки через вторую $\Psi_{21} = \Phi N_2$, сцепленный поток второй катушки $\Psi_2 = \Phi N_2$ и сцепленный поток от второй катушки через первую $\Psi_{12} = \Phi N_1$. При токе I только в первой катушке имеем

$$\Phi = \frac{\Psi_1}{N_1} = \frac{\Psi_{21}}{N_2}.$$

Надо иметь в виду, что формула (5.28) была написана для одного витка. Если поток пронизывает N витков, то вместо Φ надо брать $\Psi = \Phi N$

$$\Psi = \frac{1}{c} IL; \quad \{\Psi = IL\}. \quad (5.31)$$

В данном случае

$$\Psi_1 = \frac{IL_1}{c} \quad \text{и} \quad \Psi_{21} = \frac{IL_{21}}{c}.$$

Отсюда, используя полученные ранее соотношения при сохранении потока, имеем

$$\frac{L_1}{L_{21}} = \frac{N_1}{N_2}.$$

При токе I только через вторую катушку получаем

$$\Phi = \frac{\Psi_2}{N_2} = \frac{\Psi_{12}}{N_1}.$$

Используя (5.31), находим

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{L_{12}}{L_2}.$$

Из двух соотношений числа витков следует $M = (L_1 L_2)^{1/2}$.

Найдем магнитный поток, который посылает поле маленькой плоской катушечки площадью S с числом витков N_k , по обмотке которой течет ток I_k , через обмотку соленоида длиной l с числом витков N_c (№ 5.31). Используя (5.23) для зацепленного потока магнитного поля от соленоида, по которому течет ток I_c , через катушечку получаем

$$\Psi_k = N_k S 4\pi N_c \frac{I_c}{cl} = \frac{MI_c}{c}.$$

Используя теорему взаимности (5.28), находим для зацепленного магнитного потока через соленоид

$$\Psi_c = M \frac{I_k}{c} = 4\pi N_k S N_c \frac{I_k}{cl}.$$

Поле **намагниченного стержня** и витка с током на больших по сравнению с их размерами расстояниях описывается полем диполя с магнитным моментом (5.5)

$$p = \frac{I_{\text{вит}} S_{\text{вит}}}{c}.$$

Используя это, найдем магнитный поток, пронизывающий длинный соленоид с плотностью намотки n и радиусом R , от намагни-

ченного стержня, находящегося на его оси вдали от концов и имеющего магнитный момент p , направленный по оси соленоида (№ 5.34).

Обозначая коэффициент взаимной индукции M , который по теореме взаимности (5.30) одинаков для витка и соленоида, получаем для магнитного потока через виток

$$\Psi_{\text{вит}} = \frac{1}{c} MI_c = H_c S_{\text{вит}} = 4\pi n I_c \frac{S_{\text{вит}}}{c}.$$

Откуда $M = 4\pi n S_{\text{вит}}$. Поэтому

$$\Psi_c = M \frac{I_{\text{вит}}}{c} = 4\pi n S_{\text{вит}} \frac{I_{\text{вит}}}{c} = 4\pi n p r.$$

Вычислим коэффициент взаимной индукции M между катушкой, намотанной на тор прямоугольного сечения, и бесконечным прямолинейным проводом, идущим по оси тора. Длина стороны поперечного сечения тора, параллельного проводу, — a , перпендикулярной к ней — b , радиус внутренней поверхности тора R , число витков катушки N (№ 5.33). Используя (5.2), получаем для зацепленного магнитного потока от провода через тор

$$\Psi = \int_R^{R+b} \frac{2I}{cr} Nadr = \frac{1}{c} 2IaN \ln \frac{R+b}{R}.$$

Отсюда в соответствии с (5.31)

$$M = 2aN \ln \left(1 + \frac{b}{R} \right) \approx 2aN \frac{b}{R}.$$

На рис. 5.24 показана система: внутри катушки-соленоида длиной l , площадью сечения S и плотностью намотки n расположена небольшая катушка с площадью витков σ и полным числом витков N . Обе катушки соединены последовательно. Найдем, как изменяется индуктивность L такой системы в зависимости от угла θ между осями катушек, если индуктивность меньшей катушки равна L_0 (№ 5.36). В соответствии с (5.29) индуктивность большей катушки $L_1 = 4\pi n^2 Sl$. Используя теорему взаимности (5.30), при заданном по-

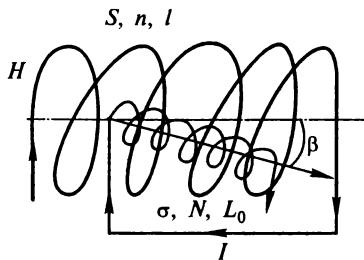


Рис. 5.24

следовательном соединении катушек имеем $L = L_0 + L_1 + 2M$. Взаимную индуктивность M находим, вычисляя зацепленный поток через меньшую катушку:

$$\Psi = \frac{IM}{c} = H\sigma \frac{N}{l} l \cos \theta = \frac{4\pi}{c} In\sigma N \cos \theta.$$

Отсюда

$$M = 4\pi\sigma n N \cos \theta.$$

В результате

$$L = L_0 + 4\pi n^2 l S + 8\pi\sigma n N \cos \theta.$$

Аналогичным методом можно вычислить индуктивность системы, когда внутри длинной катушки-соленоида индуктивностью L_1 расположен соосно другой соленоид меньших размеров с тем же числом витков, все линейные размеры которого в β раз меньше линейных размеров большого соленоида (подобные катушки) (№ 5.37). Так как число витков одинаково, получаем из (5.29), что индуктивность меньшей катушки

$$L_0 = \frac{L_1}{\beta}.$$

Для нахождения взаимной индукции записываем зацепленный поток через меньшую катушку

$$\Psi = \frac{IM}{c} = HN \frac{S}{\beta^2}.$$

Откуда, используя (5.29),

$$M = \frac{L_1}{\beta^2}.$$

В результате индуктивность системы

$$L = L_1 \left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right).$$

На основе опытов Фарадея и правила Ленца, следуя Максвеллу, можно сформулировать закон **электромагнитной индукции**: изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. В неподвижном замкнутом контуре

ре возникает циркуляция напряженности электрического поля \mathbf{E} , определяемая изменением магнитного потока Φ , пронизывающего этот контур:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (5.32)$$

где Φ — поток вектора магнитной индукции, $\Phi = \oint \mathbf{B} d\mathbf{S}$. О магнитной индукции будет подробно сказано в следующем разделе, сейчас лишь заметим, что в отсутствие магнетиков $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ (вектору напряженности магнитного поля).

6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. ВЕКТОРЫ В И Н. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ В ВЕЩЕСТВЕ. СВЕРХПРОВОДНИК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вещества могут обладать **магнетизмом**, который возникает благодаря орбитальному движению электронов вокруг атомных ядер, собственному вращению (спину электрона), собственному вращению ядер (спину атомного ядра). При беспорядочном тепловом движении в отсутствие магнитного поля атомы вещества обычно ориентированы хаотически и возбуждаемые ими магнитные поля компенсируют друг друга. Под воздействием магнитного поля некоторые вещества (например, железо, никель, кобальт) могут сильно намагничиваться. Они называются **ферромагнетиками**. Другие, например платина, вольфрам, алюминий, намагничаются, но слабо. Они называются **парамагнетиками**. Среди слабо намагничающихся веществ есть такие (например, висмут, золото, серебро), которые приобретают намагнченность, противоположную прикладываемому полю, и называются **диамагнетиками**. Замечательной особенностью ферромагнетиков является то, что при снятии внешнего магнитного поля они не размагничаются полностью. Остается постоянное (остаточное) намагничивание. Здесь проявляется нелинейная зависимость намагнченности от напряженности магнитного поля и **гистерезис** — зависимость намагничивания от истории изменения магнитного поля.

Орбитальные и спиновые вращения электронов и спиновые вращения атомных ядер можно рассматривать как **молекулярные токи**, создающие магнитные поля. Таким образом макроскопическое магнитное поле **В** возбуждается как обычными токами проводимости (плотностью j), так и **токами намагничивания** (плотностью j_m), позволяющими описать вклад усредненных молекулярных токов. Заметим, что токи намагничивания не испытывают сопротивления и не приводят к джоулевым потерям на теплоту.

Отсутствие магнитных зарядов приводит к замкнутости силовых линий магнитного поля. Применение аналога теоремы Гаусса дает

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (6.1)$$

В дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (6.2)$$

Теорему о циркуляции (5.6) и (5.15) надо дополнить включением токов намагничивания I_m

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (I + I_m). \quad (6.3)$$

В дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m); \quad \{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_m\}. \quad (6.4)$$

Намагнченность среды принято характеризовать вектором намагничивания \mathbf{M} . Это средний магнитный момент единицы объема магнетика, создаваемый молекулярными токами. Если рассмотреть магнетик цилиндрической формы, магнитный момент которого направлен вдоль оси цилиндра, и обозначить средний магнитный момент молекулы p , а число молекул в единице объема n , то средний магнитный момент единицы объема $M = np$. Молекулярные токи соседних молекул в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и взаимно компенсируют друг друга. Некомпенсированными остаются только молекулярные токи, выходящие на наружную боковую поверхность цилиндра и дающие ток I_m . Для цилиндра, имеющего объем V , высоту l и площадь основания S ($V = lS$), магнитный момент

$$I_m \frac{S}{c} = VM = SIM.$$

Направление \mathbf{S} совпадает с направлением \mathbf{M} . Поэтому $I_m = cIM$. Следовательно, поверхностный ток, приходящийся на единицу длины цилиндра, равен

$$i_m = cM; \quad \{i_m = M\}. \quad (6.5)$$

Если вектор \mathbf{M} не направлен по оси цилиндра, то поверхностный ток (6.5) определяется только проекцией \mathbf{M} на ось цилиндра.

Поверхностный ток создает поле, которое можно найти по формуле для соленоида (5.23) и следует добавить к полю, вызвавшему намагнченность:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}; \quad \{\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}\}. \quad (6.6)$$

Вектор \mathbf{B} называется вектором магнитной индукции. Как выяснится позднее, он подобно вектору напряженности электрическо-

го поля \mathbf{E} и является силовым. Название возникло исторически, так как учение о магнетизме развивалось по аналогии с электростатикой.

Если намагченность (M) пропорциональна напряженности поля (H)

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (6.7)$$

то из (6.6) следует

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \{\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}\}, \quad (6.8)$$

где

$$\mu = 1 + 4\pi\chi; \quad \{\mu = 1 + \chi\}, \quad (6.9)$$

магнитная постоянная $\mu_0 = 1,2566370614 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Величина χ называется **магнитной восприимчивостью**, а μ — **магнитной проницаемостью** вещества. Вещества, для которых $\chi > 0$ и, следовательно, $\mu > 1$, называются парамагнетиками, а вещества, для которых $\chi < 0$ и, следовательно, $\mu < 1$, называются диамагнетиками.

В **постоянном магните** цилиндрической формы с постоянной намагченностью M , направленной по оси цилиндра, плотность тока намагничивания на боковой поверхности определяется (6.5). Чтобы индукция \mathbf{B} в длинном тонком **однослойном соленоиде** с плотностью намотки n [витков/см] была такой же, как в постоянном магните тех же размеров, должно быть $In = i_m$. И, как следует из (6.5), ток в соленоиде $I = cM/n$ (№ 6.1).

Между электрическими и магнитными полями, а также между диэлектриками и магнетиками существует **аналогия**. Основное отличие при этом связано с отсутствием свободных магнитных зарядов. Для связанных «магнитных зарядов», возникающих при намагничивании, существует аналогия со связанными электрическими зарядами при поляризации. На границе магнетика в соответствии с (3.3) плотность «магнитных зарядов» равна нормальной к поверхности компоненте вектора намагченности

$$\sigma = M_n. \quad (6.10)$$

Аналогии, существующие между законом Кулона (1.1) и законом Биб—Савара—Лапласа (5.1), между (3.8) и (6.6), между (3.7) и (6.1), между (3.6) и (6.2), между (5.32) и (5.6), позволяют использовать результаты, полученные для диэлектриков, также и для магнетиков. Картина полей \mathbf{B} и \mathbf{H} для прямоугольного бруска с намагченностью M (№ 6.2), показанная на рис. 6.1, совпадает с картиной для \mathbf{D} и \mathbf{E} , показанной на рис. 3.7.

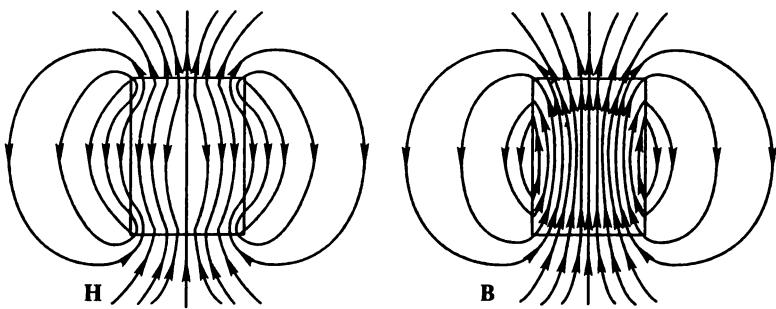


Рис. 6.1

Для бесконечной плоской пластины, изготовленной из однородного намагниченного ферромагнетика с вектором намагничивания M , перпендикулярным плоскости пластины, из (6.1) следует $B = 0$ вне и внутри пластины, а из (6.6) внутри ферромагнетика $H = -4\pi M$. Вне пластины $H = B$ (№ 6.3). Если вектор намагничивания M параллелен плоскости пластины, то из (6.5) следует, что на поверхности текут токи намагничивания. Используя симметрию и отсутствие токов проводимости из (5.6), для напряженности поля H вне и внутри пластины $H = 0$. Для B из (6.3) вне пластины $B = 0$, а из (6.6) в пластине $B = 4\pi M$ (№ 6.4).

Для длинного постоянного магнита в виде цилиндра (длиной $2l$ и радиусом r) с намагниченностью M поля векторов H и B обладают осевой (цилиндрической) симметрией. В плоскости сечения вдоль оси распределение совпадает с изображенным на рис. 6.1. Поле на торце подобно (1.17) $B_t = H_t = 2\pi\sigma = 2\pi M$. Поскольку для зарядов поле падает обратно пропорционально квадрату расстояния, то для поля в средней части магнита от обоих торцов (№ 6.5)

$$H_c = 2\sigma\pi \frac{r^2}{l^2} = H_t \left(\frac{r}{l}\right)^2.$$

Для короткого постоянного магнита (высотой h и радиусом R) поле определяется током намагничивания. Используя формулу для витка с током (5.4) и то, что это ток намагничивания (6.5), получаем (№ 6.6)

$$B = \frac{2\pi}{c} c M \frac{h}{R} = B_t \frac{h}{R}.$$

При помещении стержня из магнитного материала ($\mu \gg 1$, но это еще не ферромагнетик и можно воспользоваться связью $B = \mu H$),

имеющего форму цилиндра радиусом r , во внешнее однородное магнитное поле B_0 , направленное вдоль оси стержня, имеем внутри очень длинного цилиндра $H = B_0$, $B = \mu H = \mu B_0$ и из (6.6)

$$M = (\mu - 1) \frac{B_0}{4\pi}.$$

Для стержня длиной l , используя (5.22) и (6.5), в центре стержня от токов намагничивания получаем

$$B_m = 2\pi i_m \frac{l/2}{[(l/2)^2 + r^2]^{1/2}} \approx 4\pi M \left(1 - 2 \frac{r^2}{l^2}\right) = (\mu - 1) B_0 \left(1 - 2 \frac{r^2}{l^2}\right).$$

В результате

$$B = H + B_m = \left[\mu B_0 - (\mu - 1) 2 \frac{r^2}{l^2} \right] B_0.$$

Найдем длину l , при которой полученное значение менее чем на 1 % отличается от значения для стержня очень большой длины (№ 6.7). Для этого

$$(\mu - 1) 2 \frac{r^2}{\mu l^2} \leq 0,01.$$

Откуда

$$l \geq \left[\frac{2(\mu - 1)}{\mu} \right]^{1/2} \approx 14r.$$

Если круглый диск (радиусом r), изготовленный из такого же материала, поместить в однородное магнитное поле B_0 , то для бесконечно тонкого диска $B = B_0$. Оценим, при какой максимальной толщине l индукция в центре диска отличается от этого значения не более чем на 1 % (№ 6.8). Так как в данном случае $B = B_0$ и $H = B_0/\mu$ из (6.6)

$$M = \frac{(\mu - 1) B_0}{4\pi\mu}.$$

Используя формулы для витка (5.4) и тока намагничивания (6.5), находим

$$B_m = 2\pi i_m \frac{l}{cr} = 2\pi M \frac{l}{r} = (\mu - 1) l \frac{B_0}{2\mu r}.$$

Поэтому

$$B = B_0 + B_m = B_0 + (\mu - 1)l \frac{B_0}{2\mu r}.$$

Откуда

$$(\mu - 1) \frac{l}{2\mu r} \leq 0,01$$

и, следовательно,

$$l \leq 0,02\mu \frac{r}{(\mu - 1)} \approx 0,02r.$$

Соотношения на границе магнетика определяются (6.1) и (6.3). Используем их в случае, когда на плоской границе магнетика (с магнитной проницаемостью μ) в вакууме индукция магнитного поля равна B_0 и вектор B_0 составляет угол θ с нормалью n к поверхности (рис. 6.2). Найдем:

1) поток Φ_h вектора H через поверхность сферы S радиусом R , центр которой лежит на поверхности магнетика;

2) циркуляцию вектора B по квадратному контуру Γ со стороной l , расположенному, как показано на рис. 6.2 (№ 6.9).

Поток вектора H через поверхность сферы такой же, как по нормали к границе раздела, так как параллельно границе какой поток входит, такой и выходит. В вакууме по нормали идет $B_n = B_0 \cos \theta$, а в магнетике $H_n = B_n / \mu$, поэтому

$$\Phi_h = \left(B_0 \cos \theta - \frac{B_0 \cos \theta}{\mu} \right) \pi R^2 = B_0 \cos \theta \pi R^2 \frac{(\mu - 1)}{\mu}.$$

Отметим, что для потока B имеем нуль (сколько входит, столько и выходит).

При вычислении циркуляции B по Γ надо иметь в виду, что при отсутствии токов проводимости циркуляция H равна нулю, т. е. касательная к границе компонента H_t не меняется. В вакууме $B_t = H_t = B_0 \sin \theta$, а в магнетике $B_t = \mu H_t$. Поэтому

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = (B_0 \sin \theta - \mu B_0 \sin \theta) l = \\ = (1 - \mu) l B_0 \sin \theta.$$

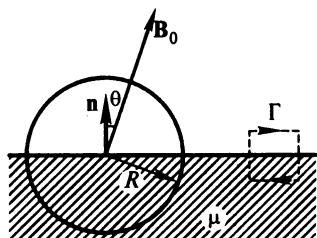


Рис. 6.2

Найдем поток индукции Φ через сечение (в виде квадрата со стороной a) железного сердечника (магнитная проницаемость μ), имеющего форму тора (диаметром D), на который равномерно намотана проволока (N витков), по которой идет ток I (№ 6.10). Используя (5.6), имеем

$$\pi D H = \frac{4\pi}{c} I N.$$

Откуда

$$\Phi = Ba^2 = 4IN\mu \frac{a^2}{cD}.$$

Если в этом сердечнике сделать поперечный разрез (воздушный зазор толщиной h), то поток изменится. Найдем его (№ 6.11). Отмечая параметры в разрезе индексом «р», имеем $B = \mu H = B_p = H_p$. Из (5.6), предполагая, что нет рассеяния потока, следует

$$(\pi D - h) H + hH = \frac{4\pi NI}{c}.$$

Откуда

$$H = \frac{(4I/c)(N/D)}{1 + (\mu - 1)h/\pi D}.$$

Отсюда поток $\Phi = \mu Ha^2$.

Для вычисления коэффициентов индукции необходимо находить потоки индукции Φ . Определим коэффициент самоиндукции L коаксиала, образованного соосно расположеннымми железным стержнем ($\mu = 1000$) и медной ($\mu = 1$) трубкой, замкнутыми на одном из концов проводящим диском. Длина стержня и трубки $l = 10$ см, диаметр стержня $2r_1 = 2$ мм, внутренний диаметр трубы $2r_2 = 9$ мм, наружный — $2r_3 = 10$ мм. Считаем, что в стержне и трубке токи равномерно распределяются по сечениям (№ 6.39). Обозначая ток в цепи I , в соответствии с (5.7) получаем внутри стержня на расстоянии r от оси поле

$$H = 2I \frac{r}{cr_1^2}$$

и поток поля

$$\Phi_1 = 2 \int_0^{r_1} \mu \frac{I}{c} rl \frac{dr}{r_1^2} = \frac{I}{c} l \mu.$$

В зазоре поле, как следует из (5.2),

$$H = \frac{2I}{cr}$$

и поток поля

$$\Phi_2 = 2 \int_0^{r_1} \frac{I}{c} l \frac{dr}{r} = 2 \frac{I}{c} l \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

В трубке, как следует из (5.6),

$$H 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \left[I - \frac{I(r^2 - r_2^2)}{r_3^2 - r_2^2} \right] = \frac{4\pi}{c} \frac{I(r_3^2 - r^2)}{r_3^2 - r_2^2}.$$

Поток

$$\Phi_3 = 2I \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r} (r_3^2 - r^2) l \frac{dr}{r_3^2 - r_2^2} = 2 \frac{I}{c} l \left[\frac{r_3^2 \ln(r_3/r_2)}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{1}{2} \right].$$

Суммарный поток

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{I}{c} l \left[\mu + 2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + 2r_3^2 \frac{\ln(r_3/r_2)}{r_3^2 - r_2^2} - 1 \right] = \frac{LI}{c},$$

поэтому

$$L = 2l \left[\frac{\mu - 1}{2} + \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + r_3^2 \frac{\ln(r_3/r_2)}{r_3^2 - r_2^2} \right] \approx 10^4 \text{ см.}$$

Аналогичным образом можно вычислить индуктивность коаксиала, если стержень такой же проводник, как трубка, а пространство между ними заполнено диэлектрическим магнетиком с магнитной проницаемостью μ (№ 6.40). В этом случае

$$L = 2l \left[\mu \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + r_3^2 \frac{\ln(r_3/r_2)}{r_3^2 - r_2^2} \right] \approx 58 \text{ см.}$$

Требуется построить электромагнит, который создает в зазоре магнитную индукцию B . Длина железного сердечника l , ширина воздушного зазора a , диаметр сердечника d , магнитная проницаемость железа μ . Найдем, какое число витков должна иметь обмотка, если используется медный провод (удельное сопротивление меди ρ)

площадью сечения S , по которому можно пропустить ток, не превышающий I_{\max} . Оценим также напряжение V , которое нужно подать на обмотку для получения максимального поля (№ 6.21).

Из (6.8) и (5.6)

$$\frac{Bl}{\mu} + Ba = 4\pi I_{\max} \frac{N}{c}.$$

Откуда

$$N = \frac{B(l/\mu + a)c}{4\pi I_{\max}}.$$

Для напряжения получаем

$$V = I_{\max} R = \frac{I_{\max} \rho N \pi d}{S}.$$

Найдем индукцию магнитного поля в небольшом зазоре (толщиной h) электромагнита, изображенного на рис. 6.3 (№ 6.12). По обмотке, имеющей N витков, протекает ток I . Участки электромагнита, размеры которых указаны на рисунке ($h \ll l$), имеют одинаковые площади сечения, а магнитная проницаемость его равна μ . При разветвлении потока $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, поэтому $H = H_1 + H_2$. Отмечая параметры в зазоре индексом «р», для циркуляции магнитного поля из (5.6) имеем

$$H_1 2l + Hl = Hl + H_2 (2l - h) + H_p h = \frac{4\pi}{c} IN.$$

Из (6.1) и (6.8) $H_p = B_p = B_2 = \mu H_2$. В результате

$$H_1 = \frac{B_p}{\mu} \left[1 + \frac{(\mu - 1)h}{2l} \right],$$

$$H = H_1 + H_2 = H_1 + \frac{B_p}{\mu} = \frac{B_p}{\mu} \left[2 + \frac{(\mu - 1)h}{2l} \right],$$

$$2H_1 + H = \frac{4\pi IN}{cl},$$

$$\frac{B_p}{\mu} \left[2 + \frac{(\mu - 1)h}{l} + 2 + \frac{(\mu - 1)h}{2l} \right] = \frac{4\pi IN}{cl},$$

$$B_p = \frac{\pi IN \mu}{cl [1 + (3/8)(\mu - 1)h/l]}.$$

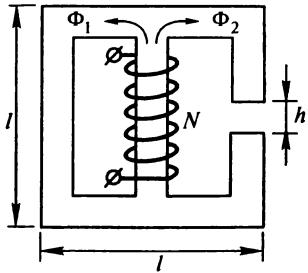


Рис. 6.3

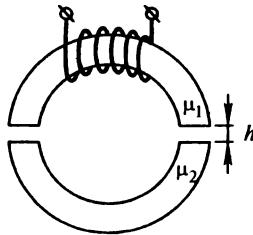


Рис. 6.4

На рис. 6.4 показан тороидальный сердечник, составленный из двух половинок, сделанных из различных ферромагнитных материалов с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Общая длина сердечников, включая два небольших зазора величиной h , равна l . По обмотке сердечника, имеющей N витков, течет ток I . Найдем величину поля B в зазоре, предполагая, что рассеянием магнитного поля в нем можно пренебречь (№ 6.13). Используя (6.1) и (5.6), имеем

$$B = \mu_1 H_1 = \mu_2 H; \quad 2hB + H\left(\frac{l}{2} - h\right) + H\left(\frac{l}{2} - h\right) = \frac{4\pi IN}{c}.$$

Откуда

$$B = \frac{(4\pi/c)IN}{2h + (l/2-h)(\mu_1 + \mu_2)/\mu_1\mu_2}.$$

Тонкий сердечник тороидальной катушки длиной l сделан из ферромагнитного материала. Минимальная напряженность магнитного поля, при которой материал достигает насыщения ($M = M_{\text{нас}}$), равна $H = H_{\text{нас}}$. Найдем, какой минимальный ток I_0 должен течь по обмотке, имеющей N витков, чтобы намагниченность сердечника достигла насыщения (№ 6.15). Из (5.6)

$$I_0 = \frac{H_{\text{нас}}lc}{4\pi N}.$$

При создании воздушного зазора в сердечнике достаточной толщины ($h_{\text{н}}$) насыщения намагниченности не возникает при $I > I_0$. Найдем такую толщину (№ 6.15). При зазоре h из (5.6), обозначая напряженность поля в зазоре H_3 , имеем

$$H_3h + H(l - h) = \frac{4\pi IN}{c}.$$

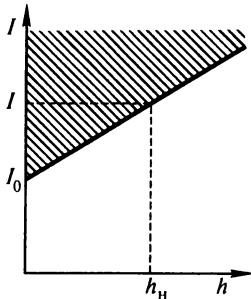


Рис. 6.5

Из (6.1) и (6.6)

$$H_3 = B_3 = B = H + 4\pi M.$$

Для тока получаем

$$I = \frac{Hl + 4\pi Mh}{4\pi c N}.$$

Ток, при котором наступает насыщение,

$$I = \frac{H_{\text{нас}} l + 4\pi M_{\text{нас}} h}{4\pi c N} = I_0 + \frac{M_{\text{нас}} h c}{N}.$$

Эта линия на плоскости (I, h) (рис. 6.5) отделяет область насыщения (заштрихованная) от области отсутствия насыщения. Отсюда

$$h_H = \frac{(I - I_{\text{нас}}) N}{c M}.$$

Следовательно, насыщение отсутствует при $h > h_H$.

На рис. 6.6 показан железный сердечник постоянного сечения длиной $l = 1$ м, который изогнут в виде тора с зазором $h = 1$ мм и на который намотана катушка с числом витков $N = 1600$, по которой идет ток $I = 1$ А. Зависимость $B(H)$ материала сердечника представлена на рис. 6.7. Найдем магнитное поле в зазоре (№ 6.17). Из (5.6)

$$Bh + HI = \frac{4\pi}{c} NI.$$

Подставляя данные, находим $10B + H = 20,1$. Эту линейную зависимость наносим на рис. 6.7. Пересечение с заданной зависимостью позволяет найти $B = 15$ кГс, которое и есть магнитное поле в зазоре.

На рис. 6.8 показан разрез достаточно длинной катушки с плотностью намотки n витков на 1 см, по которым течет постоянный ток I .

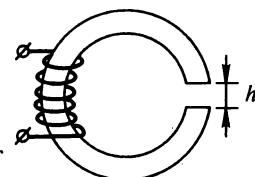


Рис. 6.6

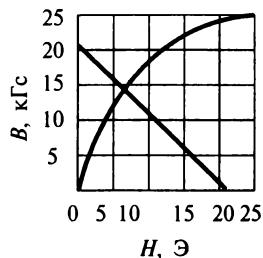


Рис. 6.7

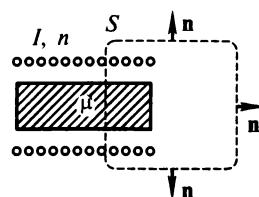


Рис. 6.8

Если смотреть на катушку со стороны правого торца, то ток течет по виткам в направлении по часовой стрелке. В катушку соосно вставлен длинный магнитный стержень с площадью сечения σ и магнитной проницаемостью $\mu > 1$. На рис. 6.8 пунктиром изображена некоторая замкнутая поверхность S , которая пересекает катушку вдали от ее торцов. Найдем поток $\oint_S H_n dS$ вектора напряженности магнитного поля H , пронизывающий поверхность S , и определим его знак (№ 6.16). Используя (6.1), получаем

$$\oint_S BdS = \int_{\sigma} \mu H dS + \int_{S-\sigma} H dS = 0.$$

Откуда

$$\int_{S-\sigma} H dS = -\mu \int_{\sigma} H dS.$$

Поэтому, используя (6.8) и (5.23), имеем

$$\int_S H dS = -\mu \int_{\sigma} H dS + \int_{\sigma} H dS = (1 - \mu) \frac{4\pi}{c} I n \sigma.$$

Тор квадратного сечения с поперечным разрезом шириной h изготовлен из ферромагнитного материала, имеющего остаточную намагниченность M_0 , коэрцитивную силу H_0 и зависимость $M(H)$ в виде четверти окружности (рис. 6.9), представляет постоянный магнит (внутренний радиус тора r_1 , внешний — r_2). Найдем величину магнитного поля в центре зазора (№ 6.14). Из (5.6)

$$H_p h + H(2\pi r - h) = 0,$$

где

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2},$$

поле в разрезе отмечено индексом «р». Отсюда

$$H_p = H \left(1 - \frac{2\pi r}{h} \right).$$

Из (6.6) следует

$$B_p = H_p = H + 4\pi M,$$

поэтому

$$H = -\frac{2hM}{r}.$$

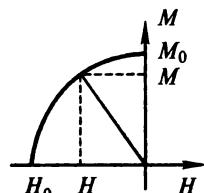


Рис. 6.9

Так как зависимость $M(H)$ представляет окружность, то по теореме Пифагора

$$H^2 + M^2 = M_0^2 = H_0^2.$$

Подставляя H , получаем

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 + (2l/r)^2}}.$$

Таким образом,

$$B_p = H_p = H + 4\pi M = \left(-\frac{2h}{r} + 4\pi \right) M = 4\pi M \frac{1 - h/2\pi r}{\left[1 + (2h/r)^2 \right]^{1/2}}.$$

Тонкий тороидальный сердечник радиусом R , изображенный на рис. 6.10, выполнен из мягкого железа с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. Сердечник разрезан по диаметру, половинки раздвинуты на расстояние h , а затем один из зазоров (А) замкнут постоянным магнитом. Намагниченность вещества магнита равна M . Вектор M перпендикулярен плоскости разреза. Пренебрегая рассеянием, найдем поле в свободном зазоре (Б) (№ 6.18). Используя (6.1), получаем непрерывность магнитной индукции

$$B_m = H_m + 4\pi M = B_c = \mu H_c = B_3 = H_3 = B. \quad (6.11)$$

Из теоремы о циркуляции (5.6) имеем

$$(B - 4\pi M)h + \frac{B}{\mu} 2\pi R + Bh = 0. \quad (6.12)$$

Откуда

$$B = \frac{2\pi Mh}{h + \pi R/\mu}. \quad (6.13)$$

Если разрез Б заполнен диэлектриком и известна величина индукции магнитного поля в диэлектрике B_1 , а намагниченность M неизвестна, то ее можно определить из (6.12)

$$M = \frac{(h + \pi R/\mu) B_1}{2\pi h}.$$

Найдем индукцию магнитного поля в диэлектрике после того, как

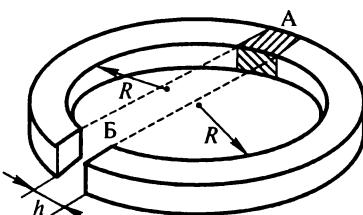


Рис. 6.10

всю систему поместят в среду с магнитной проницаемостью μ (равной магнитной проницаемости сердечника) (№ 6.19). В результате имеем постоянный магнит, который можно рассматривать как магнитный диполь с дипольным моментом $p = MV$, где V — объем магнита. Вокруг магнита среда, являющаяся магнетиком всюду, кроме небольшой области, заполненной диэлектриком. Используя формулу для поля диполя (1.8), а также полученное ранее выражение для магнитного вектора, можем найти

$$B = \frac{p}{(2R)^3}.$$

При заполнении разреза Б веществом с той же магнитной проницаемостью μ , что и сердечник, магнитное поле в центре тора изменится. Найдем, во сколько раз (№ 6.20). При намагниченном сердечнике поле в центре тора от пустых разрезов равно нулю. Если один разрез заполнен магнитом (объем V , намагниченность M), то поле в центре тора можно вычислить в соответствии с (1.9) как поле диполя

$$B_1 = \frac{MV}{R^3}.$$

Если второй разрез заполнить веществом таким же, как вещество сердечника (с магнитной проницаемостью μ), то, используя (5.6) вместо (6.12), получаем

$$(B' - 4\pi M)h + \frac{B'}{\mu}(2\pi R + h) = 0,$$

и вместо (6.13)

$$B' = \frac{4\pi Mh}{h + (2\pi R + h)/\mu}.$$

При этом намагниченность сердечника

$$M' = \frac{B' - B'/\mu}{4\pi} \approx \frac{B'}{4\pi} \quad (\mu \gg 1).$$

Эту намагниченность надо вычесть из намагниченности магнита и снова воспользоваться формулой для поля диполя

$$B_2 = \frac{(M - M')V}{R^3}.$$

Таким образом,

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{M}{M - M'} = \frac{\mu + 2\pi R + h}{2\pi R + h} \approx 1 + \frac{\mu}{2\pi R}.$$

При помещении магнетика эллипсоидальной формы в однородное магнитное поле H_0 внутри него возникает однородное поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\phi. \quad (6.14)$$

Поле \mathbf{H}_ϕ ослабляет внешнее поле внутри магнетика. Оно называется **размагничивающим**, так как в ферромагнетиках и парамагнетиках оно направлено противоположно внешнему полю. Влияние формы тела на его намагниченность M обычно представляют с помощью коэффициента размагничивания (**размагничивающего фактора**)

$$\beta = -\frac{M}{H_\phi}. \quad (6.15)$$

Рассмотрим **стальной шарик**, который намагничивается во внешнем поле до **насыщения**, и затем поле выключается. Оценим остаточную намагниченность M шарика, если B и H для данного сорта стали связаны уравнением

$$B = B_0 \left(1 + \frac{H}{H_k} \right),$$

коэффициент размагничивания β (№ 6.22). Из (6.14) и (6.15), так как $H_0 = 0$, $H = -\beta M$. Используя условие и (6.6), имеем

$$B = H + 4\pi M = 4\pi M - \beta M = B_0 \left(1 - \frac{\beta M}{H_k} \right).$$

Откуда

$$M = \frac{B_0 H_k}{\beta B_0 + (4\pi - \beta) H_k}.$$

Изменение внешнего магнитного поля приводит к изменению намагниченности находящегося в этом поле магнетика. Максимальная намагниченность (все магнитные диполи направлены по внешнему полю) достигается при $B_{\text{нас}}$ (поле насыщения). При уменьшении внешнего поля до нуля в ферромагнетиках остается намагниченность. Разный ход зависимости $B(H)$ для увеличения и уменьшения внешнего поля называется **гистерезисом**. Часть работы, затрачивае-

мой на поворот магнитных моментов магнетика, не возвращается, а уходит в теплоту. Воспользуемся аналогией между электрическими и магнитными процессами. Подобно (3.76) для потерь на теплоту получаем

$$Q = \frac{V}{4\pi} \int H dB, \quad (6.16)$$

где V — объем магнетика.

Теплота, выделяющаяся в одном цикле намагничивания в единице объема, равна площади петли гистерезиса, деленной на 4π .

На рис. 6.11 показана идеализированная петля (прямоугольник) гистерезиса железного цилиндра (радиусом a , длиной l), помещенного внутрь соленоида, по которому пропускают переменный ток (период T), который перемагничивает цилиндр от $B_{\text{нас}}$ до $-B_{\text{нас}}$ и от $-B_{\text{нас}}$ до $B_{\text{нас}}$. Найдем теплоту гистерезиса Q , выделяющуюся за время t (№ 6.41). Используя (6.16), получаем

$$Q = \frac{1}{2} B \Delta H l a^2 \frac{t}{T}.$$

При быстро происходящих процессах, как следует из (5.32), сохраняется (не изменяется) магнитный поток. Рассмотрим цилиндрический (радиус цилиндра R) магнетик (магнитная проницаемость μ), помещенный внутрь соленоида (радиусом R), по обмотке которого течет ток I_0 . Находящийся на оси магнетика детонационный шнур в некоторый момент взрывается. Цилиндрическая взрывная волна распространяется со скоростью v и, не разрушая магнетик, уменьшает его магнитную проницаемость до 1. Найдем, как меняется при этом ток в обмотке (№ 6.42). Используя (5.27), (5.23) и (6.8), получаем

$$\Phi = \pi R^2 \mu 4\pi \left(\frac{I_0}{c} \right) n = \pi \left[\mu (R^2 - r^2) + r^2 \right] 4\pi \left(\frac{I}{c} \right) n,$$

где r — расстояние, на которое распространилась взрывная волна в момент времени t . Отсюда имеем

$$I = \frac{I_0}{1 - (\mu - 1)r^2/\mu R^2},$$

где $r = vt$.

Удельное сопротивление проводников (ρ) уменьшается с уменьшением температуры (T). Для чистых (без примесей) металлов при

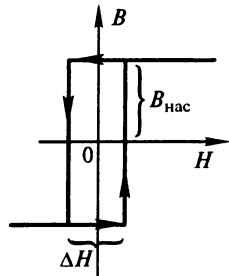


Рис. 6.11

низких температурах $\rho \sim T^5$. Замечательным свойством ряда веществ является переход их при низких температурах в состояние **сверхпроводимости**, когда сопротивление скачком падает до нуля или, во всяком случае, до очень малой величины. Такие вещества называются **сверхпроводниками**. Температура перехода называется **критической** (T_k). Измерения показали, что переход происходит на очень узком интервале температур — для чистых веществ порядка $10^{-3}...10^{-4}$ К. Интервал возрастает при наличии примесей или других дефектов структуры. Однако сверхпроводник не является просто идеальным проводником. Было установлено, что слабое магнитное поле не проникает в глубь сверхпроводника независимо от того, было ли поле включено до или после его перехода в сверхпроводящее состояние (**эффект Мейснера**). Направление намагничивания и в том и в другом случае противоположно направлению намагничивающего поля. Эффект Мейснера связан с тем, что в поверхностном слое сверхпроводника под действием магнитного поля появляется электрический ток, который компенсирует внешнее поле в толще сверхпроводника.

На рис. 6.12 сравнивается действие магнитного поля на сверхпроводник и идеальный проводник. При температуре $T > T_k$ (рис. 6.12, а) магнитное поле захвачено обоими шариками. При температуре $T < T_k$ (рис. 6.12, б) поле вытесняется из шарика, перешедшего в сверхпроводящее состояние. Если затем выключается магнитное поле (рис. 6.12, в), то в идеальном проводнике будет остаточная намагниченность.

По поведению в достаточно сильных магнитных полях сверхпроводники подразделяются на две группы. Их различие можно видеть на примере зависимости намагничивания (M) длинных цилиндрических образцов, когда внешнее магнитное поле (H) направлено по оси цилиндров. На рис. 6.13 приведена зависимость для **сверхпроводников 1-го рода**. Начальный участок зависимости соответствует интервалу значений H от нуля до H_k (критическое), на котором имеет место эффект Мейснера и после которого поле скач-



Рис. 6.12

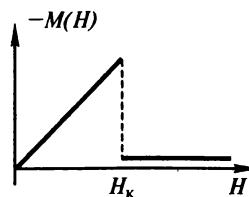


Рис. 6.13

ком проникает внутрь образца, и он во всем объеме переходит в нормальное состояние. При этом удельный магнитный момент также скачком уменьшается примерно в 10^5 раз. Критическое поле H_k зависит от температуры. Оно максимальное при $T = 0$ К и уменьшается до нуля при $T = T_k$. Если разрушение сверхпроводимости магнитным полем проводится при адиабатической изоляции образца, то он будет охлаждаться. Теплота поглощается сверхпроводником при переходе в нормальное состояние. Отметим, что скачкообразный переход наблюдается только в длинном цилиндре в продольном поле. При произвольной форме образца и других ориентациях поля переход из сверхпроводящего состояния в нормальное оказывается растянутым по некоторому интервалу значений H . Он начинается при $H < H_{k1}$ и заканчивается, когда поле во всех точках образца превосходит H_k . Образец расслаивается на чередующиеся области в нормальном и сверхпроводящем состоянии.

Зависимость намагничивания M от магнитного поля H для сверхпроводников 2-го рода показана на рис. 6.14. Как и у сверхпроводников 1-го рода, начальный участок — линейная зависимость. Картина разрушения сверхпроводимости магнитным полем в сверхпроводниках 2-го рода даже в длинных цилиндрических образцах в продольном поле сложнее. Постепенное уменьшение намагничивания начинается от значения магнитного поля H_{k1} (**нижнее критическое поле**), когда оно начинает проникать в толщу образца, и продолжается до значения H_{k2} (**верхнее критическое поле**), при котором происходит полное разрушение сверхпроводимости. Особенность сверхпроводников 2-го рода заключается в том, что имеется смешанное состояние, когда области сверхпроводящего состояния пронизаны областями нормального состояния в виде нитей.

Найдем магнитное поле \mathbf{H} вне шара радиусом R из сверхпроводника 1-го рода, внесенного в постоянное однородное магнитное поле с напряженностью \mathbf{H}_0 , которое еще не разрушило сверхпроводимость в шаре, а также поверхностную плотность сверхпроводящего тока j (№ 6.23).

Так как поле не входит в сверхпроводник (эффект Мейснера), то на его границе оно должно быть направлено по касательной, т. е. скалярное произведение $\mathbf{H}\mathbf{R} = 0$. Попытаемся удовлетворить этому условию с помощью диполя \mathbf{p} , помещенного в центре шара:

$$\mathbf{H}_d = 3\mathbf{r} \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

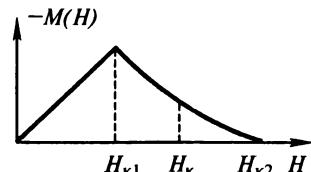


Рис. 6.14

Поле вокруг шара $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{д}}$. Для выполнения граничного условия необходимо

$$\mathbf{H}\mathbf{R} = \mathbf{H}_0\mathbf{R} + 3\mathbf{R} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}\mathbf{R}}{R^3} = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{R} \left(\mathbf{H} + \frac{2\mathbf{p}}{R^3} \right) = 0;$$

$$\mathbf{p} = -R^3 \frac{\mathbf{H}_0}{2}. \quad (6.17)$$

Для поля вокруг шара имеем

$$\mathbf{H} = \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \mathbf{H}_0 - \frac{3}{2} R^3 \mathbf{r} \frac{\mathbf{H}_0 r}{r^5}. \quad (6.18)$$

Для получения напряженности поля на границе шара надо (6.18) умножить на единичный касательный к поверхности шара вектор τ . Введем угол θ , как показано на рис. 6.15. Этот же угол определяет точку на поверхности шара, если его отсчитывать от диаметра, параллельного внешнему полю \mathbf{H}_0 . Картина полей симметрична относительно направления этого диаметра. Для поля на границе шара получаем

$$H_{\tau} = \mathbf{H}\tau = \frac{3}{2} H_0 \sin \theta = 4\pi \frac{j}{c}. \quad (6.19)$$

Это поле на оси симметрии ($\theta = 0$) равно нулю, а на «экваторе» ($\theta = \pi/2$) поле равно $(3/2)H_0$. Плотность поверхностного тока j определяется из (6.19).

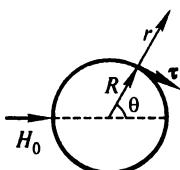


Рис. 6.15

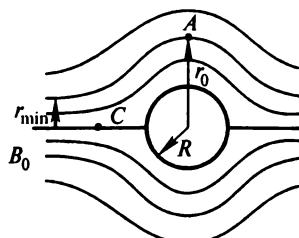


Рис. 6.16

Силовые линии поля вокруг шара (6.18) показаны на рис. 6.16. На продолжении диаметра шара, перпендикулярного внешнему полю, второй член в (6.18) равен нулю, поэтому

$$\mathbf{H} = \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \mathbf{H}_0.$$

Из сохранения потока магнитного поля (6.1) получаем

$$\Phi_{\infty} = \pi r_{\min}^2 H_0 = \Phi_0 = \int_R^{r_0} 2\pi r H(r) dr = \pi H_0 \left(r_0^2 - \frac{R^3}{r_0} \right).$$

Откуда

$$r_{\min} = r_0 \left(1 - \frac{R^3}{r_0^3} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, если расстояние между симметричными точками на продолжении диаметра, перпендикулярного внешнему полю, $2r_0$, то расстояние между симметричными точками, лежащими на тех же силовых линиях на бесконечности, $2r_{\min}$ (№ 6.24).

Если задано, что поле в точке A (см. рис. 6.16) в два раза больше, чем в точке C , находящейся на таком же расстоянии (r_0) от центра шара (№ 6.44), то, пользуясь (6.18), можно найти R/r_0 . Имея в виду, что для точки A вектор \mathbf{r}_0 перпендикулярен вектору \mathbf{H}_0 , а для точки C — противоположен \mathbf{H}_0 , получаем из (6.18)

$$H_A = H_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r_0^3} \right), \quad H_C = H_0 \left(1 - \frac{R^3}{r_0^3} \right).$$

Отсюда

$$\frac{R}{r_0} = \left(\frac{2}{5} \right)^{1/3}.$$

Если к полю \mathbf{H}_0 добавить перпендикулярное к нему поле H_{01} , равное, например, $2H_0$ (№ 6.45), то, используя принцип суперпозиции для поля в точке C , получаем

$$H_{C1} = (H_C^2 + H_{A1}^2)^{1/2}.$$

При задании отношения H_{C1}/H_C можно найти отношение расстояния от центра шара до точки C к радиусу шара.

Среду, состоящую из большого числа (n штук в единице объема) сверхпроводящих шариков радиусом R , находящихся друг от друга на расстояниях, значительно превышающих их радиус, можно характеризовать некоторой магнитной проницаемостью μ . Считая, что $nR \ll 1$, определим, насколько μ отличается от единицы (№ 6.26).

В магнитном поле \mathbf{H} каждый сверхпроводящий шарик, как следует из (6.17), обладает магнитным моментом

$$\mathbf{p} = -R^3 \frac{\mathbf{H}}{2},$$

а единица объема — магнитным моментом (намагченностью) $\mathbf{M} = n\mathbf{p}$. Из (6.8) и (6.6) имеем

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mathbf{H} + 4\pi n\mathbf{M} = \mathbf{H} + 4\pi n \left(-R^3 \frac{\mathbf{H}}{2} \right) = \mathbf{H} \left(1 - 2\pi n R^3 \right).$$

Откуда $\mu - 1 = -2\pi n R^3$. Знак минус показывает, что такая среда является диамагнетиком.

На рис. 6.17 изображена тонкая тороидальная катушка радиусом r , намотанная на полый немагнитный каркас радиусом R , имеющая N витков, по которым течет ток I . Найдем магнитное поле в центре тора (точка O), а также определим, как изменится поле в этой точке, если внутрь катушки поместить небольшой сверхпроводящий шарик радиусом $r_0 \ll r$ (№ 6.27). В отсутствие сверхпроводящего шарика поле в центре тора определяется тем током, который идет вдоль него, т. е. I , и равно в соответствии с (5.4)

$$B_0 = H_0 = \frac{2\pi I}{cR},$$

и перпендикулярно плоскости тора. Магнитное поле внутри тора (катушки) из (5.23)

$$B = \frac{4\pi In}{c} = \frac{2NI}{cR}.$$

В соответствии с (6.17) сверхпроводящий шарик приобретает магнитный момент

$$p = -B \frac{R_0^3}{2} = -NI \frac{R_0^3}{cR}.$$

В точке O поле от этого диполя

$$B = -\frac{p}{R^3} = NI \frac{R_0^3}{cR^4}.$$

Вектор поля лежит в плоскости тора.

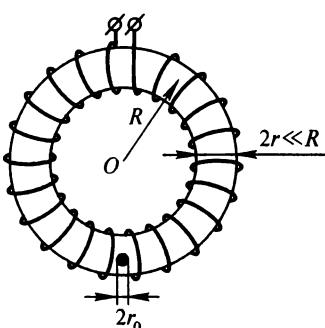


Рис. 6.17

Если внутрь катушки поместить сверхпроводящий шарик, то ее индуктивность изменится. Найдем, насколько изменится коэффициент самоиндукции длинной однослойной катушки, в середину которой поместили сверхпроводящий шарик, радиус которого r значительно меньше радиуса витков. Длина катушки l , число витков N (№ 6.28). Из (5.23) в середине пустой катушки

$$B = H = \frac{4\pi NI_k}{cl}.$$

Магнитный момент шарика, определяемый (6.17)

$$p_m = -r^3 \frac{B}{2},$$

заменим витком с током I_b площадью сечения S , для которого

$$p_b = I_b \frac{S}{c} = p_m.$$

Коэффициент взаимной индукции M определяется из условия

$$\Psi_b = BS = 4\pi NI_k \frac{S}{cl} = M \frac{I_k}{c}.$$

Откуда

$$M = \frac{4\pi NS}{l}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Psi_k &= L_k \frac{I_k}{c} + M \frac{I_b}{c} = L_k \frac{I_k}{c} + 4\pi NS \frac{I_b}{lc} = \\ &= L_k \frac{I_k}{c} + 4\pi \frac{N}{l} \left(-\frac{r^3}{2} \right) \frac{4\pi NI_k}{cl} = \left[L_k - \left(\frac{4\pi N}{l} \right)^2 \frac{r^3}{2} \right] \frac{I_k}{c}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\Delta L = -\left(\frac{4\pi N}{l} \right)^2 \frac{r^3}{2}.$$

Рассмотрим длинный сверхпроводящий короткозамкнутый соленоид (плотность намотки n , радиус R , ток I), на оси которого вдали от концов соленоида находится маленький шарик (радиусом $r \ll R$) из немагнитного материала, который при охлаждении переводится в сверхпроводящее состояние. Найдем, где после этого бу-

дет максимальное поле и чему оно будет равно (№ 6.29). Шарик при переходе в сверхпроводник получает дипольный момент, определяемый (6.17). В длинном соленоиде поток магнитного поля от шарика (в силу симметрии) будет равен нулю, значит, ток не изменится. Поле внутри него складывается из поля соленоида (5.21) и поля диполя (1.9). В соответствии с (6.18) поле максимально в экваториальной плоскости шарика, перпендикулярной полю соленоида, и равно

$$B_{\max} = H_{\max} = \frac{3}{2} H_c = \frac{6\pi n I}{c}.$$

Сверхпроводящий соленоид индуктивностью L и плотностью намотки n в момент времени $t = 0$ подключается к переменной ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$. Внутри соленоида находится сердечник с магнитной проницаемостью μ . Пренебрегая внутренним сопротивлением ЭДС и явлением гистерезиса в сердечнике, найдем среднюю за период колебания ЭДС намагниченность M сердечника (№ 6.38). Из (5.31) и (5.32) можно написать

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt}.$$

Используя условие, имеем

$$dI = \frac{\mathcal{E}_0}{L} c^2 \sin \omega t dt.$$

Интегрируем, учитывая, что при $t = 0$ и $I = 0$,

$$I = \mathcal{E}_0 c^2 \frac{1 - \cos \omega t}{L \omega}.$$

Используя (5.23), (6.7) и (6.9), имеем

$$M = (\mu - 1) n \mathcal{E}_0 c \frac{1 - \cos \omega t}{L \omega}.$$

Для среднего значения намагниченности получаем

$$\langle M \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T M dt = (\mu - 1) n \mathcal{E}_0 \frac{c}{L}.$$

Магнитное поле на оси витка (площадью сечения S) с током (I) определяется (5.3). Вдали от витка, на расстоянии $r \gg (S)^{1/2}$, это поле магнитного диполя, определяемого (5.5), равно

$$H = 2 \frac{p}{r^3} = 2I \frac{S}{cr^3}.$$

Его изменение (градиент)

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -6I \frac{S}{cr^3}.$$

Сверхпроводящий шарик радиусом R в этой точке в соответствии с (6.17) приобретает дипольный момент

$$p_{ш} = -R^3 \frac{H}{2} = -IS \frac{R^3}{cr^3}. \quad (6.20)$$

По аналогии с (1.11) для силы, действующей на шарик (№ 6.48), имеем

$$F = p \frac{\partial H}{\partial r} = 6 \left(\frac{IS}{c} \right)^2 \frac{R^3}{r^7}. \quad (6.21)$$

Шарик отталкивается от витка.

При помещении сверхпроводника в электрическое поле он ведет себя как проводник — происходит поляризация (идет ток, выравнивается потенциал). Проводящий шар радиусом R в электрическом поле \mathcal{E} в соответствии с (1.26) приобретает электрический дипольный момент, равный $p_e = R^3 E$. Два шарика, расположенные вдоль электрического поля на расстоянии $x \gg R$ друг от друга, в соответствии с (1.10) притягиваются как диполи с силой

$$F_e = 6 \frac{p^2}{x^4} = 6 R^6 \frac{E^2}{x^4}. \quad (6.22)$$

Если, кроме того, имеется еще и магнитное поле, перпендикулярное электрическому, то создаются магнитные дипольные моменты (6.17)

$$p = R^3 \frac{H}{2},$$

которые в соответствии с (1.8) и (1.11) вызывают отталкивание шариков с силой

$$F_m = 3 \frac{p^2}{x^4} = \frac{3}{4} R^6 \frac{H^2}{x^4}. \quad (6.23)$$

Сила взаимодействия шариков равна нулю (№ 6.46), если $F_e = F_m$, т. е. $H = 2(2)^{1/2} E$.

Если магнитное поле создается внутри соленоида, то для равенства электрических и магнитных сил в соленоиде, как следует из (5.23), должен идти ток (№ 6.47)

$$I = 2(2)^{1/2} \frac{Ec}{4\pi n}.$$

Если ток силой I идет по бесконечному прямому проводу, расположенному на расстоянии h параллельно плоской поверхности сверхпроводящей среды, то распределение плотности поверхностных токов j и силу, действующую на единицу длины провода, f можно найти, используя условие отсутствия магнитного поля в сверхпроводящей среде (эффект Мейснера). Поле на плоской границе будет иметь только касательную к границе составляющую H_t , если симметрично под ней расположить провод с противоположным направлением тока. Используя (5.2) и рис. 6.18, получаем

$$H_t = 2H \sin \theta = \frac{4Ih}{cr^2}. \quad (6.24)$$

Откуда (№ 6.33; 6.37)

$$j(x) = \frac{H_t}{4\pi} = \frac{Ih}{\pi(h^2 + x^2)}.$$

Для дальнейшего необходимо воспользоваться законом Ампера для взаимодействия тока с магнитным полем. Обозначая силу тока I , элемент тока dI , индукцию магнитного поля \mathbf{B} и силу, действующую на элемент тока, $d\mathbf{F}$, имеем

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c}[d\mathbf{IB}]; \quad \{d\mathbf{F} = I[d\mathbf{IB}]\}. \quad (6.25)$$

Из (5.2) и (6.25) сила, действующая на единицу длины провода от параллельного провода с противоположным направлением тока, является силой отталкивания, равной (№ 6.37)

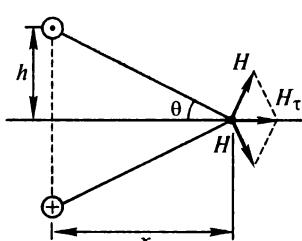


Рис. 6.18

$$f = \frac{I^2}{c^2 h}.$$

Если погонная плотность (масса на единицу длины) провода ρ_l , то условие его парения над плоской поверхностью сверхпроводника

$$\rho_l g = f = \frac{I^2}{c^2 h}. \quad (6.26)$$

Отсюда можем найти высоту, на которой провод будет поддерживаться магнитным полем (№ 6.36).

Если над плоской поверхностью сверхпроводника 1-го рода на изолирующем слое толщиной h лежит тонкое сверхпроводящее кольцо радиусом $R \gg h$, по которому течет ток I , то для каждого небольшого элемента кольца можно силу рассчитывать, как для прямолинейного провода. Найдем, при каком токе I кольцо начинает парить над поверхностью, если его масса m (№ 6.35). Ранее получена сила на единицу длины (6.26). Поэтому

$$f = \frac{I^2}{c^2 h} = \frac{mg}{2\pi R}.$$

Вдали от витка с током (I) поле является полем магнитного диполя (5.5). Если такой виток находится над сверхпроводящей плоскостью, то для удовлетворения условия отсутствия проникновения поля в сверхпроводник (эффект Мейснера) необходимо симметрично от поверхности разместить соответствующим образом ориентированный магнитный диполь (метод зеркальных отображений). Наличие второго диполя изменяет поле вблизи первого и, следовательно, изменяет индуктивность витка с током. Найдем изменение индуктивности (ΔL), когда плоскость витка параллельна поверхности сверхпроводника (№ 6.30) и когда она перпендикулярна ей (№ 6.31). Используя формулы для поля диполя (1.7) и (1.8), следующие из (1.9), и (5.28) для потока поля и индуктивности и обозначая радиус витка R и расстояние витка от поверхности сверхпроводника $h \gg R$, находим в первом случае

$$\Delta\Phi = -\frac{I}{c} \frac{\pi R^2}{(2h)^3} \pi R^2 = \frac{I}{c} \Delta L.$$

Откуда

$$\Delta L = -\frac{\pi^2 R^4}{8h^3}.$$

Во втором случае

$$\Delta\Phi = -2 \frac{I}{c} \frac{\pi R^2}{(2h)^3} \pi R^2 = \frac{I}{c} \Delta L.$$

Откуда

$$\Delta L = -\frac{\pi^2 R^4}{4h^3}.$$

Постоянный магнит со сверхпроводящей поверхностью взаимодействует подобно витку, имеющему такой же магнитный момент. Используя метод зеркальных изображений и выражение для поля диполя (1.8) и силы взаимодействия (1.11), обозначая массу магнита m , магнитный момент p , расстояние до поверхности h , получаем

$$mg = \frac{3p^2}{(2h)^4}.$$

Отсюда находим магнитный момент p , а по нему магнитное поле у поверхности сверхпроводника от двух диполей (№ 6.34)

$$H = \frac{8}{h} \left(\frac{mg}{3} \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим кольцо (радиусом R) из тонкой проволоки радиусом $r \ll R$, находящееся в магнитном поле H , которое перпендикулярно к плоскости кольца. Кольцо охлаждением переводится в сверхпроводящее состояние. При этом магнитное поле вытесняется из кольца, а по поверхности его начинают течь токи намагничивания (рис. 6.19) по внутренней поверхности в одну сторону, а по внешней в другую. При уменьшении магнитного поля его силовые линии удаляются на бесконечность. Но линии, проходящие внутри кольца, пройти через сверхпроводник не могут. Поэтому остается поле внутри кольца и ток на внутренней поверхности проволоки, как показано на рис. 6.20. Используя (5.28) и известную формулу для индуктивности тонкого проволочного кольца

$$L = 4\pi R \left[\ln \left(\frac{R}{r} \right) - 2 \right],$$

можем найти силу тока в кольце (№ 6.32)

$$I = c\pi R^2 \frac{H}{L}.$$

Найдем распределение **поверхностных токов** $i_{\text{пов}}(\theta)$ на проволоке (радиусом a), если поле H_0 , в которое она помещена, еще не раз-

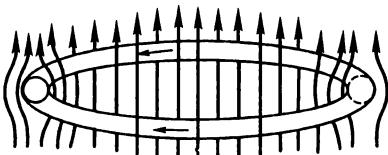


Рис. 6.19

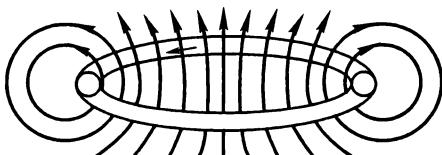


Рис. 6.20

рушает сверхпроводимость в ней (№ 6.25). Поле внутри проводящего цилиндра, по которому течет однородный ток плотностью j , на расстоянии r от оси определяется (5.7)

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} [\mathbf{r j}].$$

Используя метод наложения (рис. 6.21), получаем в полости, где ток отсутствует,

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{j}] = \frac{2\pi}{c} [\mathbf{b j}].$$

Чтобы внутри сверхпроводника поля не было, должно быть $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_0$. Откуда следует

$$H_0 = \frac{2\pi}{c} b j.$$

Из геометрии имеем $i_{\text{пов}} dl = jdS = jdlb$. Поэтому, используя рис. 6.15, получаем распределение поверхностного тока

$$i_{\text{пов}} = jb \sin \theta = c H_0 \frac{\sin \theta}{2\pi}.$$

Ток течет параллельно оси проволоки.

Магнитное поле вне длинной сверхпроводящей проволоки, помещенной во внешнее однородное магнитное поле \mathbf{H}_0 , найдем, используя тот же прием, что и для сверхпроводящего шара. По аналогии с полем электрического «плоского» диполя (1.36) имеем для «плоского» магнитного диполя

$$\mathbf{H}_d = 4(p\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^4} - 2 \frac{\mathbf{p}}{r^2}. \quad (6.27)$$

Величину дипольного момента находим из условия, что сумма внешнего поля и поля диполя на границе проволоки ($\mathbf{r} = \mathbf{R}$) имеет только касательную к поверхности составляющую

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{R} + (p\mathbf{R}) \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{p\mathbf{R}}{R} = 0.$$

Откуда

$$\mathbf{p} = -\mathbf{H}_0 \frac{\mathbf{R}^2}{2}. \quad (6.28)$$

Для поля вне проволоки получаем

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \left(1 + \frac{\mathbf{R}^2}{r^2} \right) - 2 R^2 (\mathbf{H}_0 \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^4}. \quad (6.29)$$

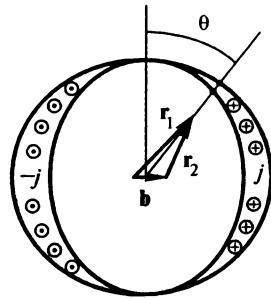


Рис. 6.21

7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ И СИЛЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. СОХРАНЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОТОКА В СВЕРХПРОВОДЯЩИХ КОНТУРАХ

Открытие Фарадея заключалось в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции (\mathbf{B}), охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, называемый **индукционным**. Это означает, что в контуре появляется ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (7.1)$$

где Φ — поток вектора магнитной индукции через площадь S ,
 $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$.

Знак минус связан с выбором положительного направления обхода контура (направления тока и ЭДС). Положительным является направление, при вращении в котором правый винт смещается в направлении нормали к плоскости контура.

Для проверки правильности выбора направления тока можно пользоваться **правилом Ленца**: ток идет так, чтобы возникающее от него магнитное поле противодействовало изменению потока магнитного поля. Помогает также использование формул, полученных обобщением экспериментальных данных для сил Лоренца и Ампера. Сила Лоренца, действующая на заряд q , движущийся в магнитном поле (индуктивность \mathbf{B}) со скоростью \mathbf{v} , равна

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{c} q [\mathbf{v} \mathbf{B}]; \quad \{\mathbf{F}_m = q [\mathbf{v} \mathbf{B}]\}. \quad (7.2)$$

Если кроме магнитного поля действует еще и электрическое \mathbf{E} , то сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right); \quad \{\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}])\}. \quad (7.3)$$

Сила Ампера действует на элемент тока Idl

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \mathbf{B}]; \quad \{d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l} \mathbf{B}]\}. \quad (7.4)$$

Следуя Максвеллу, можно переписать (7.1) для вихревого электрического поля в проводнике в интегральном и дифференциальном виде

$$\oint_L Edl = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \left\{ \oint_L Edl = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \right\}; \quad (7.5)$$

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \left\{ \text{rot } E = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\}. \quad (7.6)$$

Изменение площади внутри контура не всегда предстает в явном виде. Рассмотрим медный диск (радиусом a), вращающийся в однородном магнитном поле (с индукцией \mathbf{B} , перпендикулярной к плоскости диска) с угловой скоростью ω . Две щетки, одна на оси диска, другая на окружности, соединяют его с внешней цепью, в которую включены реостат с сопротивлением R и амперметр, со противлением которого, а также сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Найдем силу тока, идущего через амперметр (№ 7.1). Можно подумать, что площадь, охватываемая контуром, не меняется, если не учитывать подвижность элементов диска, которые замыкают контур. Элемент поворачивается на бесконечно малый угол $d\alpha = \omega dt$ за бесконечно малое время dt . При этом изменение площади

$$dS = \frac{1}{2} a ad\alpha.$$

Из (7.1)

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c} B \frac{\partial S}{\partial t} = -Ba^2 \frac{\omega}{2c}.$$

Для тока получаем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = Ba^2 \frac{\omega}{2cR}.$$

Появление тока свободных зарядов в проводнике можно объяснить действием магнитной силы (7.2), так как заряды вместе с диском имеют скорости $v = \omega r$, где r — это расстояние заряда от оси вращения. Напряженность электрического поля

$$E = \frac{1}{c} \omega r B,$$

а полная движущая сила (ЭДС) на радиусе диска

$$\mathcal{E} = \int_0^a E dr = \frac{1}{c} \omega B \int_0^a r dr = \omega a^2 \frac{B}{2c}.$$

Если диск заменить ободом с двумя спицами (№ 7.2), то ситуация не изменится, так как разность потенциалов \mathcal{E} набирается там, где есть у электронов скорость v .

Для цепи из двух вращающихся дисков радиусами a_1 и a_2 и двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 , изображенной на рис. 7.1, можно написать, учитывая, что заряды, которые появляются на конденсаторах, одинаковы, т. е. $q = V_1 C_1 = V_2 C_2$,

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{\omega B (a_1^2 - a_2^2)}{2c} = V_1 + V_2 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = V_1 \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right).$$

Отсюда (№ 7.7)

$$V_1 = \frac{\omega B a_1^2 \left(1 - a_2^2 / a_1^2 \right)}{1 + C_1 / C_2}; \quad V_2 = V_1 \frac{C_1}{C_2}.$$

Изменение магнитного потока может быть связано с непосредственным движением части контура, изменением площади, через которую идет поток. Рассмотрим систему из двух вертикальных реек (проводящих шин), сопротивлением которых будем пренебречь, замкнутых сверху и снизу проводниками с сопротивлениями R (рис. 7.2). Еще один проводник с сопротивлением R , имеющий длину l и массу m , скользит без трения по рейкам в поле тяжести (g). Найдем максимальную скорость этого проводника, если система находится в однородном магнитном поле, индукция которого B перпендикулярна плоскости, в которой лежат рейки и сопротивления (№ 7.9).

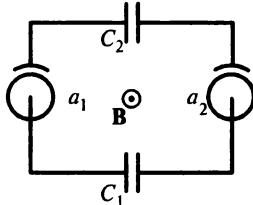


Рис. 7.1

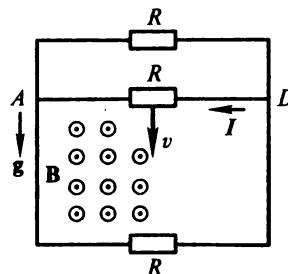


Рис. 7.2

При падении проводника скорость его v направлена вниз, и в соответствии с (7.2) ток идет от D к A (см. рис. 7.2). Сила в соответствии с (7.4) направлена вверх и увеличивается с ростом скорости. Установившаяся скорость (она же и максимальная) определяется из условия

$$mg = IL \frac{B}{c}.$$

Величину тока I находим, используя ЭДС, т. е. разность потенциалов на концах скользящего проводника как интеграл по электрическому полю, определяемому (7.2):

$$\mathcal{E} = El = VB \frac{l}{c} = I \left(R + \frac{R}{2} \right) = \frac{3}{2} IR.$$

Полученное отсюда I подставляем в предыдущее уравнение и находим

$$V = \frac{3}{2} mg \frac{Rc^2}{(Bl)^2}.$$

Можно было бы воспользоваться и (7.1), учитывая, что в верхней части поток растет, а в нижней уменьшается. Так что ток в движущемся проводнике идет в одну сторону (складывается).

На рис. 7.3 вместо верхнего проводника включена батарея. При падении проводника в соответствии с (7.2) создается ЭДС индукции \mathcal{E} , и в направлении от точки D к точке A идет ток, равный I . Обозначая токи и их направления, как показано на рис. 7.3, и ЭДС батареи \mathcal{E}_6 , имеем

$$I = I_1 + I_2; \quad I_1 R = \mathcal{E}_6 + \mathcal{E}; \quad I_2 R = \mathcal{E}; \quad \mathcal{E} = \frac{1}{c} Blv; \quad F = \frac{1}{c} IBl = mg.$$

Откуда

$$v = \frac{mgRc - \mathcal{E}Blc}{2Bl}.$$

Движение будет направлено вверх, если $mgR < \mathcal{E}Bl$ (№ 7.8).

Рассмотрим сверхпроводящее плоское кольцо площадью S , которое перенесено из удаленной области, где поля нет, в область однородного магнитного поля B_0 , так что в результате нормаль к плоскости кольца составляет с направлением поля угол θ . Изме-

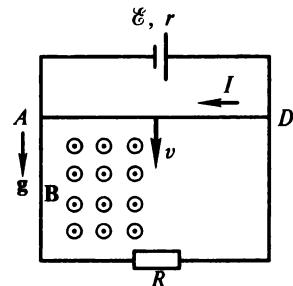


Рис. 7.3

нение потока магнитного поля через кольцо приводит к изменению тока в соответствии с (5.28)

$$\Delta \Phi = B_0 S \cos \theta = \frac{1}{c} L \Delta I.$$

Если известно, что в результате переноса кольца текший по нему ток I обращается в нуль, то можно найти коэффициент его самоиндукции (№ 7.27)

$$L = c B_0 S \frac{\cos \theta}{I}.$$

Поток магнитного поля может меняться за счет изменения со временем магнитного поля. Вычислим ЭДС \mathcal{E} в квадратном проволочном контуре со стороной a , в который включена лампочка, находящаяся на расстоянии b от длинного прямого провода (рис. 7.4), по которому течет синусоидальный ток $I = I_0 \cos \omega t$. В соответствии с (5.2) и (5.27) поток через контур

$$\Phi = \frac{2}{c} I a \int_b^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{2}{c} I a \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

Из (7.1) находим

$$\mathcal{E} = \frac{2}{c} I_0 \omega \sin \omega t a \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

Если сопротивлением контура можно пренебречь и задано напряжение V , требующееся для нормального накала лампочки, то можно найти эффективное (смотри разд. 10) значение силы тока (№ 7.3)

$$I_{\text{эфф}} = \frac{c^2 V}{2a\omega \ln(1 + a/b)}.$$

Рассмотрим длинную катушку с плотностью витков n , по обмотке которой течет ток $I = I_0 \cos \omega t$ и в которую вставлен стержень радиусом R с магнитной проницаемостью μ , обладающий слабой удельной проводимостью λ . Найдем среднюю мощность тепловых потерь в стержне на единицу длины в центральной части катушки (№ 7.87). В соответствии с (5.23) и (6.8) поле в сердечнике, вставленном по оси катушки, будет равно

$$B = 4\pi\mu n \frac{I_0}{c} \cos \omega t.$$

Рис. 7.4

Используя (7.5), находим вихревое электрическое поле

$$E = 2\pi\mu n \frac{I_0}{c^2} \omega r \sin \omega t,$$

где r — расстояние от оси стержня (и соленоида).

В соответствии с (4.12) и (4.7) мощность тепловых потерь определяется интегралом по объему

$$N = \int_V \lambda E^2 dV.$$

Объем на единицу длины стержня равен $dV = 2\pi r dr$, и интегрировать надо от 0 до R . Поэтому

$$N = 2\pi^3 \lambda \mu^2 n^2 \frac{I_0^2}{c^4} \omega^2 R^4 \sin^2 \omega t.$$

Усреднение за период изменения тока дает

$$\langle N \rangle = \pi^3 \lambda \mu^2 n^2 \frac{I_0^2}{c^4} \omega^2 R^4.$$

Аналогичным образом можно найти среднюю мощность тепловых потерь в металлическом диске радиусом a , толщиной b и удельной проводимостью λ , находящемся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости диска и изменяющемся по закону $B = B_0 \sin \omega t$ (№ 7.86). Обозначая расстояние от оси диска r , из (7.5) получаем

$$2\pi r E = -\frac{1}{c} \pi r^2 B \omega \cos \omega t; \quad E = -\frac{1}{2} \frac{1}{c} B_0 \omega r \cos \omega t.$$

В соответствии с (4.12) и (4.7) мощность тепловых потерь определяется интегралом по объему

$$N = \int_V \lambda E^2 dV.$$

Объем $dV = b 2\pi r dr$, и интегрировать надо от 0 до a . Поэтому

$$N = \frac{1}{8} \pi \lambda b \frac{B_0^2}{c^2} \omega^2 \cos^2 \omega t a^4.$$

Усреднение за период изменения тока дает

$$\langle N \rangle = \frac{1}{16} \pi a^4 \lambda b \frac{B_0^2}{c^2} \omega^2.$$

На рис. 7.5 показан соленоид, имеющий форму тонкого тора, в котором ток линейно возрастает со временем:

$$I = I_0 \frac{t}{\tau}.$$

Вокруг тора имеется один незамкнутый виток. Один из входов милливольтметра жестко присоединен к концу 3, а другой перемещается, проходя последовательно положения 1—2—3—1. Найдем, что покажет при этом милливольтметр, если площадь витков соленоида S и плотность намотки витков n (№ 7.4). Милливольтметр показывает ЭДС, которая создается в его контуре благодаря изменению магнитного потока внутри соленоида. Используя (5.23) и (7.1), для положений 1—2—3 получаем

$$V = \mathcal{E} = \frac{4\pi S n I_0}{c^2 \tau}.$$

В результате присоединения снова к 1 получаем, что контур милливольтметра дважды охватывает магнитный поток в соленоиде, поэтому показание будет в два раза больше.

Если в длинном воздушном соленоиде (радиус намотки r_0 , плотность намотки n) ток линейно нарастает со временем ($dI/dt = I' = \text{const}$), то силовые линии возникающего вихревого электрического поля представляют окружности в плоскости, перпендикулярной оси соленоида с центрами на этой оси. Используя (5.23) и (7.5), вдали от концов соленоида на расстоянии r от оси для напряженности электрического поля получаем

$$E = \frac{2\pi r n I'}{c^2 r}.$$

При погружении соленоида в однородный немагнитный диэлектрик (диэлектрическая проницаемость ϵ) электрическое поле в соот-

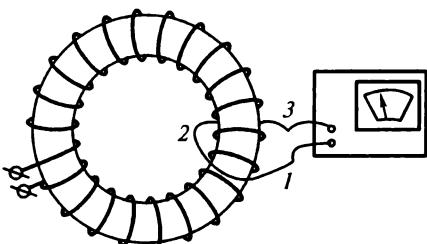


Рис. 7.5

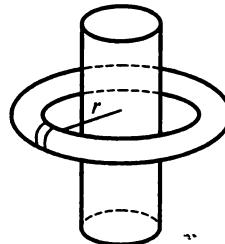


Рис. 7.6

вествии с (7.5) не изменится, а индукция в соответствии с (3.8) увеличится в ϵ раз (№ 7.5).

На рис. 7.6 показан железный цилиндрический сердечник, через который проходит однородный магнитный поток $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$. На сердечник надет тор из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . В торе имеется бесконечно узкий воздушный зазор, образованный двумя бесконечно близкими разрезами вдоль меридиональных плоскостей. Найдем напряженность электрического поля E в зазоре в зависимости от расстояния r от оси цилиндра (№ 7.6). Обозначая штрихом производную потока по времени и ширину воздушного зазора h , из (7.5), непрерывности нормальной составляющей электрической индукции на границе диэлектрика и (3.8) получаем

$$Eh + \frac{E}{\epsilon} (2\pi r - h) = -\Phi'.$$

Откуда

$$E = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\Phi'}{(\epsilon - 1)h + 2\pi r}.$$

При h , стремящемся к нулю, имеем

$$E = -\frac{\epsilon \Phi'}{2\pi r c} = \frac{\epsilon \omega \Phi_0 \sin \omega t}{2\pi r c}.$$

Рассмотрим простейшую динамо-машину (рис. 7.7), состоящую из прямоугольной рамки площадью S (сторона, параллельная оси вращения a , перпендикулярна b) с числом витков n и внутренним сопротивлением r , вращающейся со скоростью ω в однородном магнитном поле (индукция B), работающую на внешнее сопротивление R . Найдем средний момент M , приложенный к рамке, и среднюю мощность N , идущую на вращение динамо-машины (№ 7.10). Из (7.2) находим силу, действующую на заряды в рамке, которая создает ЭДС в частях рамки, параллельных оси вращения,

$$\mathcal{E} = 2nvBa \cos \alpha = n\omega Bab \cos \alpha.$$

Для тока получаем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Из (7.4) находим силу, действующую на ток, и вычисляем момент, приложенный к рамке,

$$M = 2IaBn \frac{b}{2} \cos \alpha = (BSn)^2 \frac{\omega \cos^2 \alpha}{R + r}.$$

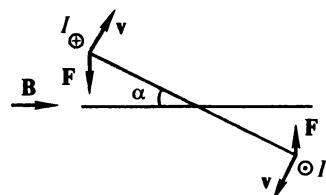


Рис. 7.7

Отсюда находим среднее значение $\langle M \rangle$, имея в виду, что зависящая от времени величина $\langle \cos^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$. Так как работа равна Mda , то мощность $N = M\omega$ и, следовательно, $\langle N \rangle = \langle M \rangle \omega$.

Если внутри длинного соленоида (плотность витков n) вдали от его концов вращается небольшая плоская катушка (площадь сечения S , число витков N), по которой идет постоянный ток I , то из-за изменения магнитного потока через соленоид на его концах появляется переменное напряжение. Найдем его амплитуду и частоту, если угол α между осями соленоида и катушки, которая находится на оси соленоида, меняется по закону $\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t$, где α_0 — малая величина (№ 7.11). Для нахождения магнитного потока от катушки через соленоид воспользуемся теоремой взаимности (5.28), т. е. равенства коэффициентов взаимной индукции катушки и соленоида $M_{\text{кк}} = M_{\text{ск}}$. Если через соленоид идет ток I_c , то в соответствии с (5.23) и (5.28), учитывая поворот катушки,

$$\Phi_{\text{к}}(t) = \frac{1}{c} M_{\text{ск}} I_c = 4\pi n S N \frac{I_c}{c} \cos \alpha(t). \quad (7.7)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M_{\text{кк}} = M_{\text{ск}} &= 4\pi n S N \left[1 - \frac{1}{2} \alpha^2(t) \right] = 4\pi n S N \left[1 - \frac{1}{2} \alpha_0^2 \cos^2 \omega t \right] = \\ &= 4\pi n S N \left[1 - \frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{\alpha_0^2}{4} \cos^2 \omega t \right]. \end{aligned}$$

Используя (5.28) и (7.1), находим

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c^2} I_{\text{к}} \frac{dM_{\text{ск}}}{dt} = 2\pi \frac{1}{c^2} S N n \alpha_0^2 \omega I_{\text{к}} \sin 2\omega t.$$

Внутрь рассмотренного соленоида можно поместить небольшую магнитную стрелку, уравновешенную на острие, вокруг оси которой может свободно вращаться. Если вдоль оси соленоида приложить внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0 , то стрелка, отклоненная в начальный момент (на малый угол α_0), начнет колебаться. При этом магнитный поток через соленоид меняется и в нем возникает переменная ЭДС. Найдем амплитуду и частоту переменной ЭДС на концах обмотки соленоида, если момент инерции стрелки относительно оси вращения J , а ее магнитный момент M (№ 7.12). Магнитная стрелка с магнитным моментом \mathbf{p}_m эквивалентна маленькой катушечке (или просто витку с током) с таким же магнитным моментом ($\mathbf{p}_m = IS/c$). Поэтому можно воспользоваться

решением предыдущей задачи, в том числе и (7.7). Колебания стрелки во внешнем поле описываются уравнением $J\alpha'' = -B_0 p_m \alpha$. Здесь штрихами обозначена вторая производная угла отклонения стрелки по времени, а в правой части момент сил, действующих на магнитный диполь во внешнем поле при малых углах отклонения. Из этого уравнения частота колебаний равна $\omega = (B_0 p_m / J)^{1/2}$, а закон колебаний стрелки $\alpha(t) = \alpha_0 \cos \omega t$. Действуя далее, как в предыдущей задаче, получаем для амплитуды переменной ЭДС на концах обмотки соленоида

$$\mathcal{E}_c = 2\pi \frac{1}{c} n p_m \alpha_0^2 \omega_c,$$

и для частоты $\omega_c = \omega$.

Магнитик в виде цилиндра радиусом r и длиной l с остаточной индукцией B и соответственно намагниченностью $M = B/4\pi$ имеет магнитный момент $p_m = \pi r^2 l M$, которому соответствует виток с магнитным моментом $\pi r^2 l / c$. Откуда сила тока

$$I = \frac{Blc}{4\pi}.$$

Если такой магнит вращается с угловой скоростью ω в центре кругового витка радиусом $R \gg l \gg r$, то коэффициент взаимной индукции находим, как для вращающегося витка. Используя (5.4), (5.28) и (5.30), получаем, как и ранее, для коэффициента взаимной индукции

$$L = \pi r^2 \frac{2\pi}{R} \cos \omega t.$$

Из (5.28)

$$\Phi = \pi r^2 \frac{1}{2} \frac{Bl}{R} \cos \omega t.$$

Если виток радиусом R подключен к вольтметру переменного тока, то, как будет в дальнейшем получено для переменного тока, показание меньше максимального значения в $\sqrt{2}$ раз. Используя (7.1), получаем (№ 7.16):

$$V = \frac{\pi r^2 l \omega B}{2\sqrt{2} R c}.$$

Магнитик такой же, как в предыдущей задаче (массой m и плотностью ρ), расположен посередине между двумя параллельными тон-

кими длинными проводниками, находящимися на расстоянии $2l$, концы которых с одной стороны замкнуты, а с другой — подключены к миллиамперметру. Ось магнитика перпендикулярна плоскости проводников. Найдем изменение показаний прибора (изменение магнитного потока $\Delta\Phi$) после быстрого нагревания магнитика выше температуры Кюри (полного размагничивания), если до этого остаточная индукция в нем была равна B (№ 7.17). Объем магнитика m/ρ . Поэтому магнитный момент

$$p_m = M \frac{m}{\rho} = B \frac{m}{4\pi\rho}.$$

Ему соответствует магнитный момент витка

$$p_m = \frac{1}{c} IS$$

(площадью S с током I). Взаимную индукцию (L) находим по магнитному потоку Φ_S от проводов с током I_n (5.2) через площадь S . Имеем

$$\Phi_S = 2 \frac{2I_n}{c} \frac{S}{l} = \frac{1}{c} LI_n.$$

Откуда взаимная индукция

$$L = 4 \frac{S}{l}.$$

В соответствии с теоремой взаимности (5.30) поток от магнитика

$$\Phi = \frac{1}{c} LI = 4 \frac{p_m}{l} = B \frac{m}{\pi\rho l}.$$

Если остаточная индукция стали стрелки компаса равна индукции насыщения B_0 , то ее намагченность $M = B_0/4\pi$, а магнитный момент $p_m = MV$, где V — объем стрелки. Такой компас расположен под прямым бесконечным проводом, по которому течет ток. Найдем, какая должна быть сила тока, чтобы стрелка поднялась над осью, на которой она находится (№ 7.50). Магнитное поле тока определяется (5.2). Оно увеличивается при приближении к проводу, поэтому магнитный диполь (стрелка компаса) будет втягиваться в это поле. Силу, действующую на диполь, находим по аналогии с (1.11) или из того, что потенциальная энергия $U = p_m B$. Для предельной силы имеем

$$F = \rho V g = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial(p_m B)}{\partial r} = -p_m \frac{\partial B}{\partial r} = B_0 V \frac{2I}{4\pi c r^2},$$

где ρ — плотность материала стрелки.

Отсюда

$$I = 2\pi r c r^2 \frac{g}{B_0}.$$

Стрелка компаса, направленная по горизонтальной составляющей земного поля ($B_0 = 0,2$ Гс), будет отклоняться, если к ней поднести (на расстояние $L = 1$ м) магнитный бруск (площадью сечения $S = 1$ см², длиной $l = 10$ см, с остаточной индукцией материала $B_1 = 10$ кГс). При вычислении магнитного поля, действующего на стрелку, бруск будем считать магнитным диполем в соответствии с (6.6), равным

$$p = \frac{B_1 l S}{4\pi}.$$

Максимальное поле в соответствии с (1.7) получаем в направлении оси диполя

$$H = B = 2 \frac{p}{L^3} = \frac{B_1 l S}{2 L \pi} = 0,016 \text{ Гс.}$$

Поэтому, направляя диполь перпендикулярно полю Земли, получаем максимальное отклонение на угол $\varphi = B/B_0 \approx 0,1$ рад (№ 7.65).

Стрелка компаса с магнитным моментом p может вращаться на вертикальной оси, но связана со спиральной пружиной, модуль кручения которой f . По большому горизонтальному листу, расположенному под стрелкой, начинает течь поверхностный ток плотностью j , направление которого совпадает с направлением начального равновесного направления стрелки. Предполагая угол поворота α малым, найдем его величину (№ 7.49). Магнитное поле, создаваемое током, определяем с помощью (5.6) $H = 4\pi j/c$. Момент сил, действующий на магнитный диполь в магнитном поле, в соответствии с (2.33) и аналогией между магнитными и электрическими полями равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p} \mathbf{B}]. \quad (7.8)$$

В данном случае при малых углах отклонения стрелки и почти перпендикулярном направлении магнитного момента стрелки (\mathbf{p}) к направлению магнитного поля тока, учитывая, что $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, а также связь момента сил, создаваемого пружиной, с углом поворота стрелки, имеем

$$pB = 2\pi j \frac{p}{c} = f\alpha.$$

Отсюда находим угол поворота стрелки.

Искусственный спутник Земли массой m выполнен в виде тонкостенного шара. Для сообщения ему угловой скорости можно использовать магнитное поле Земли, индукция которого B . Найдем угловую скорость ω , которую приобретет спутник при быстрой разрядке аккумуляторов, имеющих заряд Q , через обмотку N витков, уложенную на поверхности спутника вдоль окружности большого круга, считая магнитное поле Земли параллельным плоскости обмотки (№ 7.51). Спутник представляет магнитный диполь, на который в магнитном поле, как и в предыдущей задаче, действует момент сил, приводящий к вращению с угловым ускорением $d\omega/dt$. Момент инерции полого шара массой m и радиусом R равен

$$I_\omega = \frac{2}{3} m R^2$$

(см.: 1, с. 190). Уравнение, описывающее вращение спутника,

$$I_\omega \frac{d\omega}{dt} = pB,$$

так как магнитный диполь спутника при малом времени разрядки аккумулятора практически перпендикулярен магнитному полю. Используя для магнитного момента (5.5), в которое подставляем

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

находим набранную угловую скорость.

Прецессия тяжелого гироскопа (гироскопа, подвешенного таким образом, что на него действует момент силы тяжести) описывается уравнением (см.: 1, с. 286)

$$[\Omega L_\omega] = [r m g], \quad (7.9)$$

где Ω — скорость прецессии; L_ω — момент импульса собственного вращения гироскопа; r — вектор расстояния от точки опоры до центра масс гироскопа; g — напряженность силы тяжести; m — масса гироскопа. Если направление r совпадает с направлением L_ω , то получаем

$$\Omega = -r \frac{mg}{L_\omega}.$$

Скорость прецессии меняется, если гироскоп имеет намагниченность M вдоль своей оси и находится в магнитном поле с индуктивностью B , направленной, например, вертикально вверх. В этом слу-

чае в соответствии с (2.33) и аналогией между электрическим и магнитным полем

$$[\Omega_1 \mathbf{L}_\omega] = [\mathbf{r}mg] - [\mathbf{pB}]. \quad (7.10)$$

Обозначая плотность материала гироскопа ρ , для его объема получаем $V = m/\rho$. Намагниченность, умноженная на объем, дает магнитный дипольный момент $\mathbf{p} = MV$. Для изменения скорости прецессии $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega$ имеем

$$[\Delta\Omega \mathbf{L}_\omega] = -[MVB].$$

Поэтому получаем (№ 7.66)

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{MB}{\rho gr}.$$

Найдем скорость прецессии Ω однородно заряженного непроводящего кольца (массой m , с зарядом q), быстро вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{B} (№ 7.47). Вращение заряда соответствует току

$$I = \frac{q}{T} = q \frac{\omega}{2\pi}.$$

Введем обозначение радиуса кольца R и угол между его осью и направлением магнитного поля α . Собственный момент импульса кольца $L_\omega = mR^2\omega$. Магнитный момент в соответствии с (5.5)

$$\mathbf{p} = q\omega \frac{R^2}{2c}.$$

Используя приведенные ранее формулы для скорости прецессии, получаем $[\Omega \mathbf{L}_\omega] = -[\mathbf{pB}] = [B\mathbf{p}]$. Так как направление скорости прецессии совпадает с направлением магнитного поля, а направление момента импульса кольца совпадает с направлением его магнитного момента, то

$$\Omega = \frac{qB}{2mc}.$$

Отметим, что скорость прецессии не зависит от радиуса кольца, угловой скорости его вращения и угла между его осью и направлением магнитного поля.

Вместо рассмотренного кольца можно взять стержень. Если известно, что работа для поворота этого стержня, обладающего магнитным моментом \mathbf{p} , на 180° в магнитном поле \mathbf{B} равна A , то в соот-

в соответствии с приведенной далее формулой (7.31) и результатом для электрического поля (3.73) $A = 2pB$. При **раскручивании** стержня вокруг собственной оси до большой скорости вращения равной ω стержню сообщается энергия вращения, равная 10 А:

$$\frac{I\omega^2}{2} = 10 \text{ A.}$$

Отсюда для механического момента импульса имеем

$$L_\omega = I\omega = \frac{20}{\omega}.$$

Используя приведенную ранее формулу для скорости прецессии, получаем (№ 7.48):

$$\Omega = B \frac{p}{L_\omega} = \frac{\omega}{40}.$$

Для определения магнитной восприимчивости диамагнитного материала измеряют с помощью весов силу, выталкивающую маленький образец из зазора между полюсами электромагнита (рис. 7.8). Известно, что магнитное поле в зазоре меняется в зависимости от расстояния (r) от оси симметрии $B = B_0 \exp(-\alpha r^2)$. Найдем, на каком расстоянии от оси нужно расположить диамагнитный образец (абсолютное значение магнитной восприимчивости материала $\chi \ll 1$) в виде небольшого тонкого диска объемом V , ориентированного перпендикулярно магнитному полю, чтобы сила его **выталкивающая** была **максимальной** (№ 7.76). Учитывая (6.7) и (6.9) (в данном случае $\mu \approx 1$), для магнитного момента образца имеем

$$p = MV = \chi HV \approx \chi BV.$$

В соответствии с (1.11) на магнитный диполь действует сила

$$F = p \frac{dB}{dr} \sim B \frac{dB}{dr}.$$

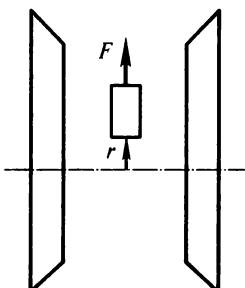
Обычным образом (приравнивая нулю производную) находим экстремальную силу. Надо удовлетворить

$$\left(\frac{dB}{dr}\right)^2 + B \frac{d^2B}{dr^2} = 0.$$

Вычисляя производные, имеем

$$2\alpha r^2 + 2\alpha r^2 - 1 = 0.$$

Рис. 7.8



Откуда

$$r = \frac{1}{2} \alpha^{-1/2}.$$

Подставляя это в выражение для силы, получаем максимальную силу

$$F = \chi V B_0^2 \left(\frac{\alpha}{e} \right)^{1/2}.$$

На рис. 7.9 показан магнитный диполь с моментом \mathbf{p}_m , вращающийся с частотой ω вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной магнитному моменту. Найдем ток в плоской круглой неподвижной рамке радиусом a с сопротивлением R , находящейся на расстоянии $l \gg a$ от диполя (№ 7.13). Нормаль \mathbf{n} к плоскости рамки перпендикулярна оси вращения диполя. Самоиндукцией рамки пренебрегаем. Используя формулу для поля диполя (1.9), имеем

$$\mathbf{B} = 3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}; \quad \left\{ \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right] \right\}, \quad (7.11)$$

где \mathbf{r} — вектор расстояния от центра диполя до центра рамки, длина этого вектора равна l . Для скалярных произведений имеем $\mathbf{rn} = r; \mathbf{p}_m \mathbf{r} = p_m r \cos \alpha; \mathbf{p}_m \mathbf{n} = p_m \cos \alpha; \alpha = \omega t$. В итоге получаем поле в рамке

$$B = \frac{2p_m \cos \alpha}{l^3}.$$

Из (7.1) находим

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \pi a^2 \frac{dB}{dt} = \frac{1}{c} \omega \pi a^2 \frac{2p_m}{l^3} \sin \omega t.$$

Отсюда получаем $I = \mathcal{E}/R$.

На оси круглого витка радиусом R на расстоянии l от него в некоторый момент времени оказывается «точечный» магнитный диполь, параллельный оси витка и движущийся вдоль нее со скоростью v . Оценим силу тока I в витке, если его сопротивление r , а величина магнитного момента диполя p_m (№ 7.18). Магнитный диполь можно заменить соответствующим витком небольшой площади S с током I_m ($p_m = I_m S/c$). Коэффициент взаимной индукции L находим, пользуясь теоремой взаимности (5.30) и (5.28), а также

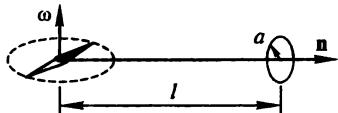


Рис. 7.9

вычисляя с помощью (5.3), где $r = (l^2 + R^2)^{1/2} \approx l$, поток от витка через S , предполагая, что по витку идет ток I_B :

$$\Phi = 2\pi R^2 I_B \frac{S}{cl^3} = L \frac{I_B}{c},$$

откуда

$$L = 2\pi R^2 \frac{S}{l^3}.$$

Поэтому, учитывая, что $l = vt$, получаем с помощью (5.28) магнитный поток через виток

$$\Phi(t) = L \frac{I_m}{c} = 2\pi R^2 \frac{\rho_m}{(vt)^3}.$$

С помощью (7.1) находим ЭДС в витке и затем силу тока

$$I = 6\pi R^2 \rho_m \frac{v}{cr^4}.$$

Намагниченная пуля пролетает **вдоль** оси тонкой (плоской) катушки (диаметром D , с числом витков n), соединенной с баллистическим гальванометром через идеальный выпрямляющий элемент (сопротивление цепи R). Зная, что размеры пули малы по сравнению с диаметром катушки и магнитный момент пули M направлен вдоль оси движения, найдем его величину, если известны баллистическая постоянная гальванометра b (рад/Кл) и угол ϕ , на который стрелка гальванометра отклонилась после пролета пули (№ 7.19). Удобно перейти в систему координат, связанную с пулей. Тогда в движущейся со скоростью v в магнитном поле пули, определяемом (7.11), катушке под действием силы Лоренца (7.2) возникает движение зарядов (вихревое электрическое поле). Используя (7.11) для силы Лоренца и напряженности электрического поля в системе СИ, получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_m = [v\mathbf{B}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ 3(Mr) \frac{[vr]}{r^5} \right\},$$

где \mathbf{r} — вектор от диполя к элементу катушки.

Второй член из (7.11) дает нуль, так как скорость параллельна дипольному моменту.

Обозначая угол наклона вектора \mathbf{r} к оси катушки α , имеем для модуля напряженности электрического поля

$$E = \frac{3}{4} \frac{\mu}{\pi} M \cos \alpha v \frac{\sin \alpha}{r^3}.$$

Это поле, проинтегрированное по всем n виткам, дает ЭДС цепи

$$\mathcal{E} = n\pi D = IR = \frac{dq}{dt} R,$$

где q — заряд, протекший в цепи (в том числе через гальванометр) при изменении α от 0 до $\pi/2$. Ток в противоположном направлении не допускает выпрямляющий элемент. Величина заряда, определяемая гальванометром, $q = \phi/b$.

Учитывая, что

$$r = \frac{D}{2 \sin \alpha} \quad \text{и} \quad v = d \frac{r \cos \alpha}{dt},$$

получаем

$$Rdq = \frac{n}{D} M \mu_0 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha.$$

Интегрируя по α от 0 до $\pi/2$, в итоге получаем

$$M = \frac{\phi RD}{n\mu_0 b}.$$

Сверхпроводящий шарик (радиусом r) в магнитном поле ($\mathbf{H} = \mathbf{B}$) приобретает магнитный дипольный момент (6.17)

$$\mathbf{p} = -r^3 \frac{\mathbf{B}}{2}.$$

Если такой шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси, то возникающий дипольный момент тормозит движение шарика там, где есть изменение магнитного поля. В соответствии с (1.11) сила торможения

$$F = p \frac{dB}{dx},$$

где x — координата вдоль оси соленоида.

Предполагаем, что радиус соленоида $R \gg r$. Шарик пролетит через соленоид, если работа сил торможения (A) до достижения середины соленоида, где задано магнитное поле B_0 , меньше кинетической энергии шарика:

$$B_0 < \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{v^2}{2},$$

где ρ — плотность шарика. Таким образом,

$$A = - \int_{-\infty}^x F dx = \frac{1}{2} r^3 \int_0^{B_0} BdB = \frac{1}{4} r^3 B_0^2 \leq \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \frac{v^2}{2}.$$

Откуда находим (№ 7.20, 7.21):

$$v \geq B_0 \left(\frac{3}{8\pi\rho} \right)^{1/2}.$$

Если к небольшой катушке с числом витков N и площадью витка S , по которой течет переменный ток I (действующее значение, т. е. показание амперметра переменного тока, которое меньше максимального значения в $\sqrt{2}$ раз), поднести (на расстояние a) лист из хорошо проводящего материала, то, как и в случае сверхпроводящего «магнитного зеркала», возникает «отражение» катушки. Так как она небольшая, можно поле, проходящее через нее, вычислять по (5.3)

$$H = 2S \frac{I}{c} \frac{N}{(2a)^3}.$$

Дополнительную ЭДС (действующее значение, которое так же, как и ток, в $\sqrt{2}$ раз меньше максимального) определяем по (7.1)

$$\xi = -IN^2S^2 \frac{\omega}{4c^2a^3}.$$

Знак минус означает, что дополнительная ЭДС направлена против поля катушечки, т. е. ЭДС убывает при экранировке (№ 7.14).

Рассмотрим два соосных круговых витка радиусами R и $r \ll R$, размещенных на расстоянии R друг от друга. Найдем ток $I(t)$ в большом витке, сопротивление которого R_0 , если по малому витку пропускается ток $i = i_0 \cos \omega t$ (№ 7.15). В данном случае, используя (5.3), легко найти поток через малый виток Φ_m , если по большому идет ток I_6 ,

$$\Phi_m = \frac{1}{c} \pi r^2 2\pi R^2 \frac{I_6}{(R^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Отсюда и из (5.28) для взаимной индукции имеем

$$L = \frac{\pi^2 r^2}{\sqrt{2}R}.$$

Используя теорему взаимности (5.30) и (7.1), для тока в большом витке получаем

$$I_6 = \frac{\pi^2 r^2 \omega i_0 \sin \omega t}{\sqrt{2}RR_0c^2}.$$

На рис. 7.10 показан прямолинейный магнит NS , расположенный на оси круглого кольца радиусом a , состоящего из n витков проволоки, концы которой соединены с баллистическим гальванометром. Расстояние между центрами кольца и магнита равно h . Размеры магнита малы по сравнению с h и радиусом кольца. Найдем магнитный момент p_m магнита, если при его удалении от кольца стрелка баллистического гальванометра отклонилась на угол φ . Баллистическая постоянная равна b (рад/Кл), сопротивление цепи (включая сопротивление гальванометра) R (№ 7.22). Магнит можно заменить соответствующим витком небольшой площади S с током I_m и магнитным моментом (5.5) ($p_m = I_m S/c$). Коэффициент взаимной индукции L находим, пользуясь теоремой взаимности (5.30) и (5.28), а также вычисляя с помощью (5.3), где $r = (h^2 + a^2)^{1/2}$, поток от витка через S , предполагая, что по витку идет ток I_b :

$$\Phi = 2\pi a^2 I_b \frac{S}{cr^3} = L \frac{I_b}{c}.$$

Откуда

$$L = 2\pi a^2 \frac{S}{r^3}.$$

Поэтому с помощью (5.28) получаем магнитный поток через n витков (зацепленный)

$$\Psi(t) = n\Phi(t) = nL \frac{I_m}{c} = \frac{2\pi n a^2 p_m}{r^3}.$$

С помощью (7.1) находим для цепи (с гальванометром)

$$R \frac{dq}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}.$$

Интегрируя по времени, получаем

$$q = \frac{\Psi}{b} = \frac{2\pi a^2 p_m c n}{r^3 R}.$$

Отсюда находим магнитный момент.

Длинный соленоид, витки которого намотаны с плотностью n , включен в цепь, общее сопротивление которой R . В торцевых плоскостях на оси соленоида помещены одинаковые магнитики малого

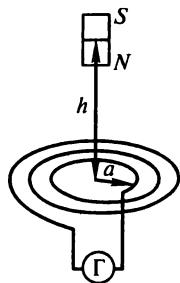


Рис. 7.10

объема V каждый и намагнченностью $4\pi M$, повернутые друг к другу разноименными полюсами. Найдем, какой заряд Q протечет в цепи соленоида, если магнитики, двигаясь по оси соленоида, слипаются в его центре (№ 7.24).

Магнитик можно заменить соответствующим витком небольшой площади S_B с током I_B и магнитным моментом (5.5) ($p = I_B S_B / c$).

Обозначая коэффициент взаимной индукции L , который по теореме взаимности (5.30) одинаков для витка и соленоида, и используя для поля соленоида (5.22), получаем для магнитного потока через виток (на торце соленоида)

$$\Psi_B = \frac{1}{c} L I_c = H_c S_B = \frac{4\pi n I_c S_B}{c}.$$

Откуда $L = 4\pi n S_B$. Поэтому

$$\Psi_c = M \frac{I_B}{c} = \frac{4\pi n S_B I_B}{c} = 4\pi n p r.$$

После слипания общий магнитный момент слипшихся магнитиков $2p$. Поэтому поток через соленоид будет в два раза больше, а изменение потока

$$\Delta\Psi = \Psi_c = 4\pi n p r = 4\pi n M V.$$

Откуда

$$Q = \frac{\Delta\Psi}{cR}.$$

Найдем силу, действующую на магнитный диполь с магнитным моментом p , расположенный в центре торца длинного соленоида с плотностью намотки n (витков/см), радиусом сечения R , по обмотке которого течет ток I , если диполь ориентирован по оси соленоида (№ 7.80). Для поля на оси соленоида воспользуемся (5.22) и рис. 5.19. Координату x отсчитываем от центра торца. Для силы, действующей на диполь в переменном поле, подобно (1.11), можем написать

$$\begin{aligned} F &= p \frac{\partial H}{\partial x} = p \frac{\partial [2\pi(I/c)n(\cos\alpha - \cos\beta)]}{\partial x} = \\ &= p 2\pi \frac{I}{c} n \left(-\sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \sin\beta \frac{\partial\beta}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

При $x = 0 \cdot \sin\alpha = 1$, $\sin\beta$ стремится к нулю для длинного соленоида,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial x} \rightarrow 0.$$

В результате

$$F = p 2\pi \frac{I}{c} \frac{n}{R}.$$

Если дипольный момент направлен так же, как поле в соленоиде, то диполь будет втягиваться в соленоид.

Небольшой сверхпроводящий шарик может свободно перемещаться вдоль оси тонкого кольца радиусом R , по которому течет ток. Найдем, при каком расстоянии между шариком и плоскостью кольца сила, действующая на шарик, принимает максимальное значение и как она направлена (№ 7.81). Обозначая расстояние от плоскости кольца вдоль его оси x , из (5.3) имеем

$$H = 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Дипольный момент сверхпроводящего шарика радиусом r в соответствии с (6.28)

$$p = -r^3 \frac{H}{2}.$$

Сила подобно (1.11)

$$F = p \frac{\partial H}{\partial x} = \left(2\pi I \frac{R}{c}\right)^2 \frac{3}{2} r^3 \frac{x}{(R^2 + x^2)^4}.$$

Приравнивая первую производную по x нулю, находим экстремумы. При $x = R/\sqrt{7}$ сила максимальна и направлена в сторону возрастаия x (сила отталкивания). При $x = -R/\sqrt{7}$ сила по абсолютной величине такая же, но направлена в сторону отрицательных значений x (также сила отталкивания).

В экваториальной плоскости шара радиусом a находится тонкое металлическое кольцо радиусом $\rho > a$ с электрическим сопротивлением R . Внешнее однородное магнитное поле B_0 перпендикулярно плоскости кольца. Пренебрегая индуктивностью кольца, найдем заряд, протекший по кольцу, если охлаждением шар переводится в сверхпроводящее состояние (№ 7.28). Предполагая, что вещество шара является немагнитным, получаем для потока магнитного поля через кольцо $\Phi_n = B_0 \pi \rho^2$. В результате превращения шара в сверхпроводник магнитное поле из него вытесняется (эффект Мейснера).

По поверхности шара текут поверхностные токи. Для удовлетворения граничного условия на поверхности шара, как это следует из (6.17), можно считать, что в центре шара имеется диполь с дипольным моментом

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2}a^3\mathbf{B}_0.$$

Поле в экваториальной плоскости шара будет равно

$$\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

Для потока в этом случае получаем

$$\Phi_k = \int_a^{\rho} B(r) 2\pi r dr = B_0 \pi \rho^2 - B_0 \pi \frac{a^3}{\rho}.$$

Используя (7.1), находим

$$\mathcal{E} = IR = R \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Откуда

$$q = -\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{R} = B_0 \pi \frac{a^3}{cR\rho}.$$

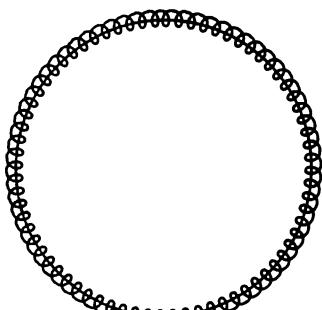
На рис. 7.11 показан стальной магнитопровод длиной L с магнитной проницаемостью μ , в замкнутой сверхпроводящей обмотке которого возбужден ток I_0 . Найдем, как изменится ток в обмотке, если имеющийся в магнитопроводе небольшой зазор l , в котором рассеянием магнитного поля можно пренебречь, уменьшить в два раза (№ 7.30). Из теоремы о циркуляции (5.6), обозначая число витков в обмотке n , находим

$$4\pi n \frac{I_0}{c} = H_1 L + H_2 l.$$

Из условия на границе с помощью (6.1) имеем $\mu H_1 = H_2$. Откуда

$$4\pi n \frac{I_0}{c} = H_2 \left(\frac{L}{\mu} + l \right).$$

Рис. 7.11



Так как сопротивление обмотки и, следовательно, ЭДС \mathcal{E} равны нулю, из (7.1) имеем постоянство магнитного потока и поэтому постоянство напряженности магнитного поля. Отсюда

$$4\pi n \frac{I}{c} = H_2 \left(\frac{L}{\mu} + \frac{l}{2} \right),$$

где I — новый ток в обмотке, для которого получаем

$$I = I_0 \frac{L/\mu + l/2}{L/\mu + l}.$$

Если не уменьшать зазор, а заполнить его тем же веществом, из которого состоит магнитопровод (№ 7.32), то второе уравнение примет вид

$$4\pi n \frac{I}{c} = H_2 \frac{L + l}{\mu}.$$

Откуда

$$I = I_0 \frac{L + l}{L + l\mu}.$$

Постоянство магнитного потока из (7.1) следует также для быстрых (при dt стремящихся к нулю) процессов. Сильные магнитные поля можно получить **взрывным сжатием** проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле с индукцией B_0 . Предполагая материал трубы идеально проводящим (магнитное поле не входит в него), найдем индукцию магнитного поля внутри трубы B при сжатии ее по радиусу от начального внутреннего радиуса R до r и давление p , необходимое для этого (№ 7.31). Из постоянства потока магнитного поля $B\pi r^2 = B_0\pi R^2$ находим B . Для плотности энергии (w) магнитного поля (напряженность H , индукция $B = \mu H$), которое определяет давление (p), по аналогии с (3.75) имеем

$$p = w = H \frac{B}{8\pi}; \quad \left\{ p = w = H \frac{B}{2} \right\}. \quad (7.12)$$

Поэтому в данном случае ($\mu = 1$)

$$p = \frac{B^2}{8\pi} = B_0^2 \frac{(R/r)^2}{8\pi}.$$

Найдем давление p , действующее на боковую поверхность длинного соленоида, имеющего плотность намотки n [витков/см], по ко-

торому течет ток I (№ 7.34). Предполагая магнитную проницаемость среды $\mu = 1$, из (7.12) и (5.23) получаем

$$p = 2\pi \frac{I^2 n^2}{c^2}.$$

С внешней стороны длинного соленоида магнитное поле отсутствует. Отметим, что давление в случае магнитного поля действует в сторону от него, в то время как в случае электрического поля, например в конденсаторе, давление направлено в сторону электрического поля (обкладки заряженного конденсатора притягиваются).

Давление можно найти и другим способом, используя закон Ампера. Сила, действующая на элемент тока Idl , находящийся в магнитном поле H , в соответствии с (7.4) при $B = H$

$$dF = \frac{1}{c} I [dlH], \quad (7.13)$$

где \mathbf{H} — магнитное поле, создаваемое в данной точке всеми элементами тока соленоида, кроме самого рассматриваемого элемента.

Это поле можно найти из условия, что сумма его с полем H_s , создаваемым элементом, равно полю внутри соленоида, а вне — равно нулю ($H - H_s = 0$). Вычисляя циркуляцию поля на единице длины, из (5.6) имеем

$$H + H_s = \frac{4\pi n I}{c}.$$

Откуда

$$H = \frac{2\pi n I}{c} \quad \text{и} \quad p = \frac{dF}{dl} = 2\pi \frac{I^2 n^2}{c^2}.$$

Если обмотка соленоида выполнена проводом диаметром d в один слой, то $n = 1/d$ и, следовательно,

$$p = 2\pi \frac{I^2}{c^2 d^2}.$$

В случае сверхпроводящей обмотки максимальный ток определяется либо механической прочностью провода обмотки, либо разрушением его сверхпроводимости. При разрушающем сверхпроводимость внешнем поле $B_{kp} = 15$ кГс и диаметре провода обмотки $d = 0,2$ мм, используя (5.23), находим

$$I_{max1} = cd \frac{B_{kp}}{4\pi} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1,5 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 3,14} = 240 \text{ A.}$$

При прочности проволоки на разрыв $F_p = 5$ Н и диаметре соленоида $D = 2$ см, учитывая, что давление магнитного поля p уравновешивается силой вдоль оси провода, как показано на рис. 7.12, для предельной прочности получаем уравнение

$$2F \frac{\alpha}{2} = p \frac{D}{2} \alpha d,$$

находим (№ 7.67)

$$I_{\max 2} = c \left(\frac{F_p d}{\pi D} \right)^{1/2}.$$

По заданным значениям находим

$$I_{\max 2} = 3 \cdot 10^{10} \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} / 2 \cdot 3,14}{3 \cdot 10^9} = 400 \text{ А.}$$

Таким образом, вначале разрушается сверхпроводимость (№ 7.68).

На поверхности **сверхпроводящей сферы**, находящейся в однородном магнитном поле, напряженность магнитного поля определяется (6.19)

$$H_\tau = \frac{3}{2} H_0 \sin \theta,$$

где θ — угол отклонения радиуса, направленного в данную точку, от направления магнитного поля ($H_0 = B_0$). Давление на поверхность сферы определяется (7.12)

$$p = \frac{H_\tau^2}{8\pi}$$

и направлено к центру сферы. Если сфера радиусом R разрезана вдоль диаметральной плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля, то для отрыва одной полусфери от другой требуется сила (№ 7.69)

$$F = \int_0^{\pi/2} p R \sin \theta 2\pi R d\theta \cos \theta = \frac{9}{64} B_0^2 R^2.$$

В сверхпроводящем соленоиде отсутствует сопротивление и ЭДС равна нулю. Поэтому из (7.1) следует неизменность потока магнитного поля Φ . Если в короткозамкнутый длинный сверхпроводящий

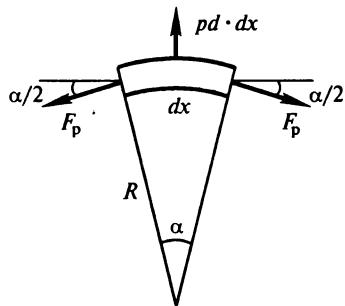


Рис. 7.12

соленоид с начальным внутренним полем, равным B_0 в его центре, и площадью сечения S вставляют длинный сверхпроводящий сердечник с площадью сечения σ , то, пренебрегая краевыми эффектами, получаем, что индукция магнитного поля станет

$$B = B_0 \frac{S}{S - \sigma}.$$

В соответствии с (7.12) и (7.13) давление на внутреннюю поверхность соленоида и боковую поверхность сердечника будет равно (№ 7.71)

$$p = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{[B_0 S (S - \sigma)]^2}{8\pi}.$$

Начальное давление поля было

$$p_0 = \frac{B_0^2}{8\pi}.$$

В общем случае при адиабатическом сжатии магнитного поля получаем из предыдущего соотношение типа адиабаты для газов (№ 7.72)

$$p_1 S_1^2 = p_2 S_2^2.$$

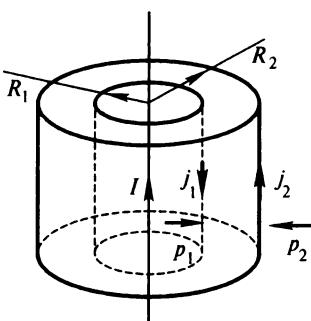
На рис. 7.13 изображен полый цилиндр (конечной длины с радиусами цилиндрических поверхностей R_1 и R_2) из сверхпроводника, вдоль оси которого расположен длинный проводник, по которому идет ток I . Найдем токи, текущие по внутренней и наружной цилиндрической поверхности сверхпроводящего образца, и давление на стенки цилиндра (№ 7.73). Важной особенностью данной задачи является осевая симметрия. Благодаря этому, используя (5.6), находим поле у внутренней стенки цилиндра, как и в (5.2) имеем

$$H = \frac{2I}{cR_1}.$$

Токи, идущие по поверхности сверхпроводника, должны не впустить магнитное поле внутрь. Вводя плотность тока на поверхности j_1 , из (5.6) получим

$$H \cdot 1 = 4\pi \frac{j_1}{c}.$$

Рис. 7.13



Откуда

$$j_1 = \frac{I}{2\pi R_1}.$$

По всей внутренней поверхности идет ток I . Сверхпроводник в поле проводника будет вести себя подобно тороидальной катушке. На внешней боковой поверхности цилиндра полный ток также I и соответственно

$$j_2 = \frac{I}{2\pi R_2},$$

а за внешней боковой поверхностью цилиндра магнитное поле описывается (5.2). Поэтому давления на боковые стенки цилиндра находим с помощью (7.12)

$$p_1 = \frac{I^2}{2\pi c^2 R_1^2}; \quad p_2 = \frac{I^2}{2\pi c^2 R_2^2}.$$

Давления направлены внутрь сверхпроводника, причем $p_2 < p_1$, а силы одинаковые.

Используя формулу для магнитного поля прямого провода бесконечной длины (5.2) и закон Ампера (7.4), находим силу взаимодействия между двумя прямыми параллельными проводами бесконечной длины, расположенными на расстоянии l , много большем диаметров проводов, по которым текут постоянные токи I_1 и I_2 . На единицу длины сила равна

$$F = 2I_1 \frac{I_2}{c^2 l}, \quad \left\{ F = \mu_0 I_1 \frac{I_2}{2\pi l} \right\}. \quad (7.14)$$

Из векторных уравнений (5.1) и (7.13) находим направление силы. При одинаковом направлении токов — притяжение, при противоположном — отталкивание. Обратим внимание на то, что параллельно движущиеся свободные заряды отталкиваются. Полученным направлением силы взаимодействия между элементами тока можно объяснить силы в витках соленоида (отталкивание) и между витками (притяжение).

Для двух параллельных длинных проводов с противоположными направлениями тока силой I из (7.14) для силы отталкивания на единицу длины имеем

$$F = \frac{2I^2}{c^2 r}.$$

Работа, которую совершают магнитное поле, при увеличении расстояния между проводами (h) в два раза (№ 7.43) равна

$$A = \int_h^{2h} \frac{2I^2}{c^2 r} dr = 2 \frac{I^2}{c^2} \ln 2.$$

На такую величину увеличится магнитная энергия единицы длины системы двух проводов.

Если два параллельных цилиндрических провода из сверхпроводника находятся в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B , направленной вдоль проводов, то на их боковые поверхности действует давление, определяемое (7.12). Сила взаимодействия между проводами отсутствует при отсутствии в них тока (№ 7.36).

Рассмотрим два провода в виде прямых плоских шин шириной a , расположенных параллельно на расстоянии $l \ll a$, по которым идут токи I в противоположных направлениях. На единицу ширины шины ток I/a . Используя (5.6), получаем магнитное поле для шины

$$H = 2\pi \frac{I}{ca}.$$

От двух шин, в которых токи идут в противоположных направлениях, поле будет в два раза больше. С помощью (5.28)

$$\Phi = \frac{1}{c} LI = 2Hl = \frac{4\pi Il}{ca}.$$

Откуда находим индуктивность системы на единицу длины

$$L = \frac{4\pi l}{a}.$$

Сила взаимодействия (отталкивания) между шинами на единицу площади (давление) определяем с помощью (7.12) (№ 7.54):

$$P = \frac{2\pi I^2}{c^2 a^2}.$$

Если на шинах задана плотность тока j , то поле между шинами

$$H = \frac{4\pi j}{c}.$$

При заполнении пространства между шинами плоскими слоями магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 , с учетом не-

прерывности напряженности магнитного поля на границах, из (7.12) получаем давление на шинах:

$$p_1 = 2\pi \frac{j^2}{c^2} \mu_1 \quad \text{и} \quad p_2 = 2\pi \frac{j^2}{c^2} \mu_2,$$

а давление на границе раздела магнетиков

$$p_{12} = 2\pi \frac{j^2}{c^2} (\mu_1 - \mu_2).$$

В целом система сбалансирована (№ 7.53).

На рис. 7.14 показано поперечное сечение коаксиального кабеля, во внешнем тонкостенном цилиндрическом проводнике которого вдоль образующей сделана щель шириной $b \ll R$ (R — радиус внешнего проводника). Найдем силу, действующую на центральный проводник при пропускании по этому кабелю тока I . Радиус центрального проводника $r \ll R$. Ток I течет по центральному проводнику в одну сторону, а по внешнему — в другую (№ 7.35). Отсутствие тока в разрезе можно представить как суперпозицию тока по всему сплошному цилиндру и противоположно направленного по разрезу, равного

$$i = I \frac{b}{2\pi R}.$$

Из (7.14) получаем силу притяжения

$$F = 2I \frac{i}{c^2 R} = I^2 \frac{b}{\pi c^2 R^2}.$$

При производстве полиэтиленовой пленки широкая тонкая полоса протягивается по роликам со скоростью v (см. рис. 5.11). В процессе обработки поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд плотностью σ . Над пленкой на расстоянии h , малом по сравнению с ее шириной, расположен прямой провод, по которому течет ток I . Направление тока совпадает с направлением движения пленки. Найдем силу, действующую на единицу длины пленки (№ 7.45). Магнитное поле над ней вычисляем с помощью (5.6) на ширине Δl

$$2\Delta l H = 4\pi \Delta l v \frac{\sigma}{c}.$$

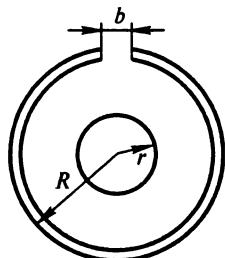


Рис. 7.14

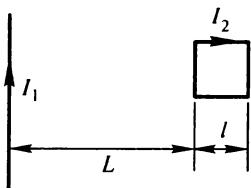


Рис. 7.15

Отсюда

$$H = 2\pi v \frac{\sigma}{c}.$$

На единицу длины провода, в соответствии с (7.4), действует сила

$$f = \frac{dF}{dl} = 2\pi I v \frac{\sigma}{c^2}.$$

Такая же сила действует на единицу длины пленки.

Если на расстоянии L от прямого провода, по которому течет ток силой I_1 , расположена квадратная рамка со стороной l , таким образом, что две ее стороны параллельны проводу, и вся рамка, по которой течет ток силой I_2 , лежит в плоскости, проходящей через провод (рис. 7.15), то, используя (5.2) и (7.4), можно найти силу взаимодействия между проводом и рамкой (№ 7.46) (силы действуют только на стороны рамки, параллельные проводу)

$$F = \frac{I_2}{c} l / 2 \frac{I_1}{c} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L+l} \right) = 2 \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{l^2}{L(L+l)}.$$

При направлении токов, указанном на рисунке, действует сила притяжения.

Из формулы (7.2) для силы, действующей на электрический заряд, движущийся в магнитном поле, можно получить силу, действующую на ток, создаваемый движением одинаковых частиц с зарядами q и концентрацией n . Для плотности тока имеем $\mathbf{j} = nqv$, а для числа частиц в объеме dV получаем $dN = ndV$. Таким образом, для силы, действующей в магнитном поле (индукция \mathbf{B}) на элемент объема dV , находим

$$dF = \frac{q}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] dN = n \frac{q}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] dV = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}] dV.$$

Для объемной плотности силы получаем

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}]; \quad \left\{ \mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = [\mathbf{j}\mathbf{B}] \right\}. \quad (7.15)$$

Рассмотрим прямоугольную кювету (рис. 7.16), передняя и задняя стенки которой металлические, а остальные диэлектрические, наполненную электролитом с проводимостью λ . К металлическим стенкам приложено напряжение V , и вся кювета помещена в однородное магнитное поле с индукцией B , направленное вертикально.

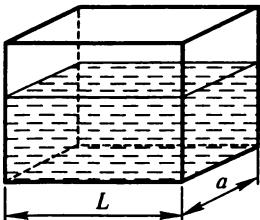


Рис. 7.16

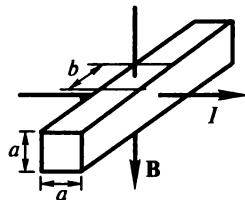


Рис. 7.17

Размеры кюветы: металлическая стенка длиной L , диэлектрическая a . Плотность диэлектрика ρ . При прохождении тока через электролит в соответствии с (7.15) действует сила, перпендикулярная току. Используя (4.7), изменение силы на единицу объема на ширине L получаем

$$\Delta f = jBL = \frac{V}{a} \lambda B \frac{L}{c}.$$

Для компенсации этого давления уровень электролита поднимается на высоту (№ 7.41)

$$\Delta h = \frac{\Delta f}{\rho g}.$$

На рис. 7.17 изображена схема электромагнитного насоса для перекачки расплавленного металла. Участок трубы с расплавленным металлом помещается в магнитное поле, перпендикулярное оси трубы; через этот же участок в перпендикулярном (к магнитному полю и оси трубы) направлении пропускается ток. Найдем избыточное давление Δp , создаваемое насосом (№ 7.39). Считая, что ток I идет через площадку ab , из (7.12) получаем силу, действующую в объеме a^2b ,

$$F = fa^2b = \frac{1}{c} jBa^2b = IB \frac{a}{c}. \quad (7.16)$$

Откуда для избыточного давления имеем

$$\Delta p = \frac{F}{a^2} = I \frac{B}{ac}.$$

Для трубы диаметром D из (7.16) можно написать

$$F \approx IB \frac{D}{c}.$$

Оценим ток, необходимый для перекачки ртути (вязкость η) по трубе диаметром D и длиной L с объемным расходом Q (л/с) в маг-

нитном поле B (№ 7.40). Предполагая, что в трубе реализуется течение Пуазейля, воспользуемся соответствующей формулой для силы трения в трубе (см.: 1, с. 364):

$$F = 32\eta L \frac{Q}{D^2}.$$

Приравнивая это силе в насосе (7.16), где $a \approx D$, получаем

$$I = 32\eta c L \frac{Q}{BD^3}.$$

Применим формулу (7.15) для цилиндрического проводника, по которому течет ток плотностью j , и, следовательно, магнитное поле в нем определяется (5.7)

$$B = \frac{2\pi}{c} jr.$$

Это поле, как следует из (7.15), давит на ток в направлении к оси цилиндра. Токи, текущие по проводнику, имеют одинаковое направление и поэтому притягиваются друг к другу, создавая **давление внутри проводника**.

Обозначая цилиндрическую боковую поверхность элемента объема S , имеем соответственно

$$dV = Sdr \quad \text{и} \quad p = \frac{dF}{S} = fdr.$$

Используя (7.15) и (5.7), с учетом знака имеем

$$dp = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 r dr. \quad (7.17)$$

Найдем давление внутри жидкого (отсутствует сдвиговая прочность) цилиндрического проводника радиусом a , в котором равномерно по сечениюю (плотность тока постоянна) течет ток I (№ 7.38). Интегрируя (7.17), имеем

$$p = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 \int_a^r r dr = \frac{2\pi}{c^2} j^2 \frac{a^2 - r^2}{2} = I^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \pi a^2 c^2.$$

На оси проводника при $r=0$

$$p_0 = \frac{I^2}{c^2 \pi a^2}.$$

Рассмотрим высокий цилиндрический сосуд радиусом R , наполненный электролитом. Внутри него параллельно оси расположен цилиндрический металлический стержень, поверхность которого покрыта изолирующей краской. Радиус стержня равен r_2 . Расстояние между осями стержня и сосуда равно h . В электролите параллельно оси течет ток I , возвращающийся обратно по стержню. Считая плотность тока в электролите постоянной, найдем силу, с которой магнитное поле, созданное рассматриваемыми токами, действует на единицу длины стержня (№ 7.42). Поле в полости, которую занимает стержень, найдем, рассматривая суперпозицию полей токов одинаковой плотности, идущих в противоположных направлениях по всему сосуду и объему полости. Используя (5.7) и обозначения на рис. 7.18, имеем

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} ([j\mathbf{r}_1] - [j\mathbf{r}_2]) = \frac{2\pi}{c} [jh]. \quad (7.18)$$

Зная поле в полости, где находится стержень, с помощью (7.4) находим силу, действующую на элемент длины (dl) стержня:

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}\mathbf{B}].$$

В данном случае $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и для силы, действующей на единицу длины стержня, получаем

$$f = \frac{dF}{dl} = 2\pi I j \frac{h}{c^2} = 2\left(\frac{I}{c}\right)^2 \frac{h}{R^2 - r^2}.$$

При изменении магнитного потока, как следует из (7.1), возникает ЭДС индукции. Элементарная работа, которую должен совершить внешний источник против ЭДС индукции (\mathcal{E}), равна

$$\delta A_{\text{внеш}} = -\mathcal{E}Idt = \frac{1}{c} Id\Phi.$$

Эта работа идет на увеличение магнитной энергии электрического тока

$$dW = I \frac{d\Phi}{c}. \quad (7.19)$$

Вводя самоиндукцию контура L , предполагая, что ферромагнетики отсутствуют, и, используя (5.28), после интегрирования для

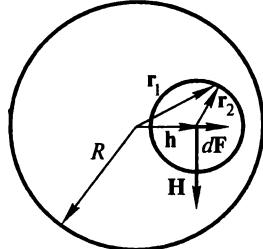


Рис. 7.18

магнитной энергии неподвижного контура, когда самоиндукция остается постоянной, получаем

$$W = \frac{1}{2} L \left(\frac{I}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} I \frac{\Phi}{c} = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}. \quad (7.20)$$

Используя (7.12), для магнитной энергии внутри соленоида площадью S и длиной l можем написать

$$W = \frac{1}{2} L \left(\frac{I}{c} \right)^2 = B^2 S \frac{l}{8\pi} = Fl, \quad (7.21)$$

где

$$F = \frac{B^2 S}{8\pi}$$

— сила, действующая между витками соленоида вдаль от концов.

Из (7.21) можем найти выражение для индуктивности соленоида, которое, конечно, совпадает с (5.29). Это так называемый **энергетический метод нахождения индуктивности**. Воспользуемся им, чтобы найти индуктивность единицы длины коаксиального кабеля, состоящего из толстого внутреннего провода радиусом a и тонкой внешней оболочки радиусом b (№ 7.55). Исходим из (7.12) и (7.20). Объем на единицу длины равен $dV = 2\pi r dr$, где r — расстояние от оси внутреннего провода. Поле внутри провода определяется (5.7)

$$H_1 = \frac{2Ir}{ca^2}.$$

Поле вне провода определяется (5.2)

$$H_2 = \frac{2I}{cr}.$$

В результате получаем

$$W = \frac{1}{2} L \left(\frac{I}{c} \right)^2 = \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^a H_1^2 dV + \int_a^b H_2^2 dV \right),$$

откуда

$$L = \frac{1}{2} + 2 \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Круговую петлю из **сверхпроводника** индуктивностью L , по которой течет ток, помещают **внутрь** длинного сверхпроводящего корот-

козамкнутого соленоида индуктивностью L_c , с числом витков N , в котором тока вначале нет. Найдем, во сколько раз изменится при этом ток в петле, если диаметры петли и соленоида одинаковы (№ 7.29). Обозначая начальный ток в петле I_h и учитывая, что в сверхпроводнике из-за отсутствия сопротивления нет ЭДС и, как следует из (7.1), сохраняется поток (5.28), для петли получаем

$$LI_h = LI_k + MI_c,$$

где M — взаимная индукция петли и соленоида; I_c — ток в соленоиде. В сверхпроводящем соленоиде поток также сохраняется

$$L_c I_c + MI_k = 0.$$

Учитывая, что поток через петлю от соленоида $BS = MI_c$, а зацепленный поток (5.31) в соленоиде $NBS = L_0 I_c$, находим $M = L_c/N$. Используя предыдущие уравнения, получаем

$$\frac{I_k}{I_h} = \frac{L}{L - M^2/L_c} = \frac{L}{L - L_c/N^2}.$$

Найдем, какую работу надо совершить для того, чтобы круговую петлю из сверхпроводника поместить внутрь длинного сверхпроводящего соленоида, замкнутого накоротко. Диаметры петли и соленоида считаем равными, а их оси — параллельными. В отсутствие круговой петли ток в соленоиде равен нулю, начальный ток в петле I_h . Индуктивность петли L , соленоида — L_c , число витков соленоида N (№ 7.75). Используя (7.20), для начальной энергии системы получаем

$$W_1 = L \frac{I_h^2}{2},$$

для конечной соответственно

$$W_2 = L \frac{I_k^2}{2} + L_c \frac{I_c^2}{2} + MI_k I_c.$$

Работа, которую надо совершить, чтобы поместить петлю в соленоид, равна $A = \Delta W = W_2 - W_1$. Используя полученные в предыдущей задаче соотношения, находим

$$A = \frac{1}{2} LI_h^2 \frac{L_c/N^2}{L - L_c/N^2}.$$

Формулами (7.19) и (7.20) можно воспользоваться для вычисления работы, необходимой, чтобы кольцо из сверхпроводника надеть

на длинный однородно намагниченный стержень, индукция на конце которого (в центре торца) равна B_0 . Внешнее поле постоянного магнита совпадает с полем соленоида с током. Пользуясь (5.22) или (5.23) и (5.24), получаем, что поле вдали от концов вдвое больше, чем на торце. Считая, что поле вдали от стержня отсутствует, находим, что при надевании кольца поток через него изменяется на $\Phi = 2B_0S$. Если задана работа (A) (№ 7.84), то из (7.20) выражаем самоиндукцию кольца ($L = 2B_0^2 S^2/A$), и с помощью (5.28) находим ток, который пойдет по кольцу,

$$I = c \frac{\Phi}{L} = \frac{cA}{B_0 S}.$$

Если два одинаковых длинных соленоида (длиной l) приставлены торцами друг к другу, как показано на рис. 7.19, то они притягиваются друг к другу, как витки в соленоиде вдали от концов, с силой F (7.21). Таким образом, по известной силе притяжения можно найти индуктивность соленоидов (№ 7.56).

Рассмотрим две небольшие одинаковые катушки (число витков N , площадь витков S), расположенные так, что их оси лежат на одной прямой (рис. 7.20) на расстоянии l , значительно превышающем их линейные размеры. Найдем, с какой силой взаимодействуют катушки, когда по ним течет одинаковый ток I , и чему равен коэффициент взаимоиндукции M (№ 7.57). Сила взаимодействия катушек равна силе взаимодействия диполей (1.10). С учетом момента витка p (5.5) и числа витков

$$F = -6 \frac{p^2}{l^4} = -\frac{I^2 S^2 N^2}{c^2 l^4}.$$

Используя (5.31), (5.27) и (7.11), получаем

$$\Psi = \frac{MI}{c} = BNS = \frac{2IS^2 N^2}{cl^3},$$

отсюда находим M .

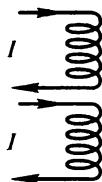


Рис. 7.19

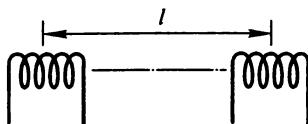


Рис. 7.20

На рис. 7.21 показан длинный прямой провод, по которому течет ток I_1 , и квадратная рамка со стороной a , лежащая в плоскости, проходящей через провод на расстоянии b . По рамке течет ток I_2 . Найдем, какую работу нужно совершить, чтобы прямой провод передвинуть в положение, указанное на рисунке пунктирной линией (№ 7.44). Вводя взаимную индуктивность рамки и провода (M), в соответствии с (5.28) можем записать поток магнитного поля от рамки через провод $\Phi_{12} = MI_2/c$. После перемещения провода в положение, обозначенное на рисунке пунктиром, поток изменит знак на противоположный. Следовательно, изменение потока равно $2\Phi_{12}$. Для нахождения взаимной индукции вычислим магнитный поток от провода через рамку:

$$\Phi_{21} = \frac{MI_1}{c} = \int_b^{a+b} 2 \frac{I_1}{c} a \frac{dr}{r} = 2 \frac{I_1}{c} a \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Здесь использована теорема взаимности (5.30) и (5.2). Поэтому

$$M = 2a \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Из (7.19) получаем работу

$$A = 2a \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \ln \left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Найдем силу, с которой **втягивается в соленоид** с полем B длинный цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью μ и площадью поперечного сечения S . Стержень расположен на оси соленоида таким образом, что один его конец находится внутри, а другой — вне соленоида. Магнитное поле соленоида вблизи первого конца можно считать однородным, вблизи второго (вне соленоида) — равным нулю (№ 7.58). Воспользуемся формулой (7.12) для давления магнитного поля. На торце стержня внутри соленоида давление меняется скачком. Внутри стержня давление

$$p_1 = \frac{B^2}{8\pi\mu},$$

а вне

$$p_2 = \frac{B^2}{8\pi}.$$

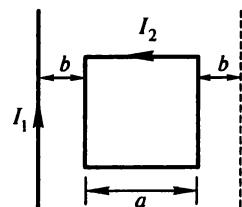


Рис. 7.21

Учитывая, что в случае магнитного поля давление является на-
тяжением (витки притягиваются друг к другу), а на внешнем конце
стержня нет сил, получаем силу втягивания стержня в соленоид

$$F = S(p_2 - p_1) = SB^2 \frac{\mu - 1}{8\pi\mu}. \quad (7.22)$$

Если известна сила втягивания стержня в соленоид, в котором
текет ток I , можно найти коэффициент самоиндукции L соленоида
(без сердечника) при известной длине l (№ 7.59). Используя (7.21) и
(7.22), находим

$$L = 2Flc^2 \frac{\mu}{(\mu - 1)I^2}.$$

В случае длинного соленоида (n витков), намотанного на тонко-
стенный капилляр, погруженный одним концом в парамагнитную
жидкость с плотностью ρ и магнитной проницаемостью μ , найдем,
насколько изменится уровень жидкости в капилляре, если по соле-
ноиду пропустить ток I (№ 7.60). Обозначая изменение уровня (вы-
соту подъема жидкости) h из (7.22), (5.23) и (6.8), получаем

$$h = 2\pi I^2 n^2 \frac{\mu - 1}{c^2 \mu \rho g}.$$

Если в соленоид, по которому течет ток, вставлен тонкий стер-
жень из магнитного материала, то для вычисления сил, действую-
щих на стержень, надо пользоваться условием сохранения касатель-
ной составляющей напряженности магнитного поля на боковой
поверхности стержня: $H_{ct} = H_c = H$. В таком случае для стержня
площадью сечения S получаем из (7.12) силу втягивания стержня

$$F = S \left(\frac{HB}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \right).$$

По заданному току в соленоиде (I) и плотности намотки n (вит-
ков/см) с помощью (5.23) находим

$$H = 4\pi n \frac{I}{c}.$$

По заданной кривой намагничивания стержня

$$M = M_{\text{нас}} \left[1 - \exp \left(\frac{H}{H_0} \right) \right]$$

и (6.6) получаем (№ 7.77)

$$F = \frac{1}{2} SHM_{\text{нac}} \left[1 - \exp\left(\frac{H}{H_0}\right) \right].$$

Если длинный **сверхпроводящий цилиндр** (из сверхпроводника 1-го рода) внесен в постоянное однородное **магнитное поле с индукцией** B , направленное параллельно оси цилиндра, то поле в сверхпроводник не проникает, а создает давление на его поверхность, определяемое (7.12). Предполагая, что для окружающей сверхпроводник среды $H = B$, получаем давление (№ 7.82)

$$p = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Для определения сил в магнитном поле существует **энергетический метод**. Рассмотрим его на примере системы, состоящей из двух контуров с токами I_1 и I_2 . В соответствии с (7.20) магнитная энергия такой системы может быть представлена в виде

$$W = \frac{1}{2} \frac{I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2}{c}, \quad (7.23)$$

где Φ_1 и Φ_2 — полные магнитные потоки, пронизывающие контуры 1 и 2 соответственно (индукции контуров L_1 и L_2 , взаимная индукция $L_{12} = L_{21}$):

$$\Phi_1 = \frac{L_1 I_1 + L_{12} I_2}{c}; \quad \Phi_2 = \frac{L_2 I_2 + L_{21} I_1}{c}. \quad (7.24)$$

Работа δA , которую совершают ЭДС, включенные в контуры, идет на теплоту δQ , приращение магнитной энергии системы dW (из-за движения контуров или изменения токов в них) и механическую работу $\delta A_{\text{мех}}$ (вследствие перемещения или деформации контуров):

$$\delta A = \delta Q + dW + \delta A_{\text{мех}}. \quad (7.25)$$

Предполагая, что емкость и сопротивления контуров пренебрежимо малы, электрическую энергию учитывать не будем. Принимаем во внимание только работу $\delta A_{\text{и}}$, которая совершается против ЭДС индукции и самоиндукции:

$$\delta A_{\text{и}} = -(\mathcal{E}_{\text{и}1} + \mathcal{E}_{\text{с}1}) I_1 dt - (\mathcal{E}_{\text{и}2} + \mathcal{E}_{\text{с}2}) I_2 dt.$$

Учитывая (7.1), т. е.

$$\mathcal{E}_{\text{и}} + \mathcal{E}_{\text{с}} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

получаем

$$\delta A_u = I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2. \quad (7.26)$$

Эта работа идет на приращение магнитной энергии и механическую работу

$$I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = dW + \delta A_{\text{мех}}. \quad (7.27)$$

Из этой формулы получаем в случае постоянных потоков

$$\delta A_{\text{мех}} = -dW_\Phi. \quad (7.28)$$

Если токи постоянны, то, используя (7.23) и (7.27), находим

$$\delta A_{\text{мех}} = dW_I. \quad (7.29)$$

На рис. 7.22 изображен электромагнит, в сердечнике которого имеется малый зазор l , в который помещена пластиинка из того же материала, что и материал сердечника. Найдем, какую работу нужно совершить против магнитных сил, чтобы удалить пластиинку из зазора. Длина сердечника равна L , сечение всюду одинаково и равно S , магнитная проницаемость $\mu \gg 1$. Обмотка электромагнита имеет N витков, по которым течет ток I . Рассеянием магнитного потока пренебрегаем (№ 7.61). При наличии в зазоре пластиинки из (5.6) находим

$$B_1 = 4\pi N \frac{I/c}{L/\mu + l/\mu} = 4\pi N \frac{I}{c} \frac{\mu}{L + l} = \alpha \frac{\mu}{L + l}.$$

Из (7.12) и (6.8) получаем

$$W_1 = B_1^2 S \frac{L + l}{8\pi\mu} = \alpha^2 \mu \frac{S}{8\pi(L + l)}.$$

При отсутствии пластиинки

$$B_2 = \alpha \frac{\mu}{L + \mu l} < B_1;$$

$$W_2 = B_2^2 S \frac{L}{8\pi\mu} + B_2^2 S \frac{l}{8\pi} = \alpha^2 \mu \frac{S}{8\pi(L + \mu l)} < W_1.$$

В случае постоянного тока надо воспользоваться (7.29), учитывая, что внешняя работа

$$\delta A_{\text{внеш}} = -\delta A_{\text{мех}} = -dW_1 = -(W_2 - W_1) = \alpha^2 \mu S \frac{1/(L + l) - 1/(L + \mu l)}{8\pi}.$$

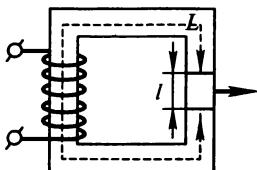


Рис. 7.22

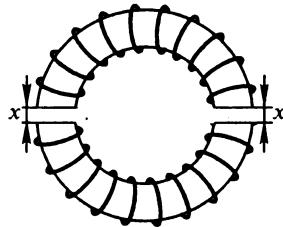


Рис. 7.23

При $\mu \gg 1$ и $L \gg l$ имеем

$$\delta A_{\text{внеш}} = \frac{2\pi\mu^2 N^2 I^2 S l}{c^2 L (L + \mu l)}.$$

На рис. 7.23 показана катушка, имеющая N витков и намотанная на железный тороидальный сердечник с магнитной проницаемостью μ . Радиус тора R , радиус сердечника $r \ll R$. Тор разрезан на две половины, раздвинутые так, что образовался воздушный зазор x . Найдем силу притяжения между половинками тора, если в обмотке течет ток I , в том числе и при $x = 0$ (№ 7.62). Из (5.6) и (6.8)

$$2\pi R \frac{B}{\mu} + 2xB = 4\pi I \frac{N}{c}.$$

Отсюда имеем

$$B = 2 \frac{I}{c} \frac{N}{R/\mu + x/\pi}.$$

Используя (7.12) и (6.8), получаем для магнитной энергии системы

$$W = \pi \left(\frac{I}{c} \right)^2 \frac{N^2 r^2}{R/\mu + x/\pi}.$$

Так как ток постоянный, пользуемся (7.29). Поэтому

$$\delta A_{\text{мех}} = F dx = dW_I. \quad (7.30)$$

Откуда сила (притяжения)

$$F = \frac{dW_I}{dx} = - \left(\frac{I}{c} \right)^2 \frac{N^2 r^2}{(R/\mu + x/\pi)^2}.$$

При $x = 0$

$$F = - \left(\frac{I}{c} \right)^2 \frac{N^2 r^2}{(R/\mu)^2}.$$

Найдем разрывающее усилие в сверхпроводящем кольце радиусом R из цилиндрической проволоки радиусом r ($r \ll R$), по которому течет ток I . Индуктивность кольца (№ 7.70)

$$L = 4\pi R \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 2 \right].$$

Для магнитной энергии кольца из (7.21) имеем

$$W = \frac{1}{2} L \frac{I^2}{c^2} = 2\pi \frac{I^2}{c} R \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 2 \right].$$

Для небольшого угла α (рис. 7.24) имеем

$$W_\alpha = \alpha \frac{I^2}{c^2} R \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 2 \right].$$

При постоянном токе из (7.30) находим силу в направлении изменения радиуса кольца

$$F_\alpha = \alpha \frac{I^2}{c^2} \frac{dR[\ln(8R/r) - 2]}{dR} = \alpha \frac{I^2}{c^2} \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 1 \right].$$

Используя рис. 7.24, где введена сила f , разрывающая кольцо, получаем связь

$$F_\alpha = 2f \frac{\alpha}{2} = f\alpha.$$

Поэтому, используя предыдущее выражение, имеем

$$f = \frac{I^2}{c^2} \left[\ln\left(\frac{8R}{r}\right) - 1 \right].$$

Найдем, как изменится подъемная сила электромагнита, изображенного на рис. 7.25, если его нижнюю подкову изготовить из материала с

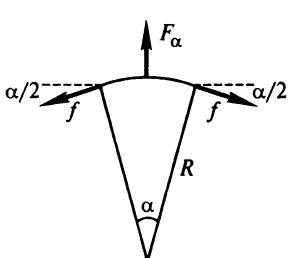


Рис. 7.24

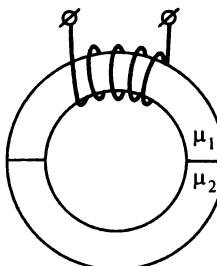


Рис. 7.25

магнитной проницаемостью μ_2 , отличной от магнитной проницаемости верхней подковы μ_1 ($\mu_2 \neq \mu_1$) (№ 7.63). Из (5.6) и (6.8) имеем

$$B\pi R\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) + B2x = 4\pi I \frac{N}{c},$$

где x — величина возможного зазора между подковами.

Отсюда

$$B = 4\pi \frac{I}{c} \frac{N}{\pi R(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + 2x}.$$

Из (7.12) и (6.8)

$$W = B^2 \left[\pi R \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) + 2x \right] \frac{S}{8\pi} = 2\pi \left(I \frac{N}{c} \right)^2 \frac{S}{\pi R(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + 2x}.$$

Используя (7.30), получаем

$$F = -4\pi \frac{(IN/c)^2}{[\pi R(1/\mu_1 + 1/\mu_2) + 2x]^2}.$$

При $x = 0$ находим

$$F = -4\pi \frac{(IN/c)^2}{[\pi R(1/\mu_1 + 1/\mu_2)]^2}.$$

Отношение сил: F_1 при $\mu_1 = \mu_2$, F_2 при $\mu_1 \neq \mu_2$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{4}{(1 + \mu_1/\mu_2)^2}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть другие конфигурации электромагнитов (№ 7.64).

С помощью чувствительных весов измеряется сила $F_1(x)$, втягивающая парамагнитный образец в сверхпроводящую короткозамкнутую катушку в зависимости от его положения (x) (рис. 7.26). Известно, что при $x = 0$ индуктивность катушки равна L_0 , а по ее виткам течет некоторый ток I_1 . Найдем, какую зависимость $F_2(x)$ следует ожидать, если катушку перевести в нормальное состояние и по ее виткам пропускать ток I_2 от внешнего источника (№ 7.78).

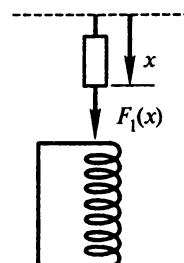


Рис. 7.26

Для сверхпроводящей катушки из (7.1) и (5.28) имеем сохранение потока магнитного поля

$$\Phi = I_1 \frac{L_0}{c} = I \frac{L(x)}{c}.$$

Из (7.28) и (7.20)

$$F_1(x) = -\left(\frac{dW}{dx}\right)_\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi}{L}\right)^2 \frac{dL}{dx}.$$

При известной $F_1(x)$ можем вычислить

$$\frac{2}{\Phi^2} \int_0^x F_1(x) dx = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L^2} = \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L(x)}.$$

Отсюда

$$L(x) = \frac{L_0}{1 - 2c^2/I_1^2 L_0 \int_0^x F_1(x) dx}.$$

Для катушки в нормальном состоянии из (7.29) и (7.20)

$$F_2(x) = \left(\frac{dW}{dx}\right)_I = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{c}\right)^2 \frac{dL(x)}{dx} = F_1(x) \frac{(I_2/I_1)^2}{\left(1 - 2c^2/I_1^2 L_0 \int_0^x F_1(x) dx\right)^2}.$$

При $I_1 = I_2$ $F_2(x) > F_1(x)$ ($x > 0$).

Внутри длинной катушки-соленоида с плотностью намотки витков n расположена небольшая катушка с площадью витков S и полным числом витков N . Ось малой катушки ориентирована под углом θ по отношению к оси соленоида. Катушки включены последовательно, и по ним течет ток I . Найдем момент сил, действующих на малую катушку (№ 7.79). Используя (5.23), для зацепленного потока через малую катушку получаем

$$\Psi = NBS = NBS \cos \theta = 4\pi Nn \frac{I}{c} S \cos \theta = 4\pi Nn \cos \theta \frac{I}{c} = L_{12} \frac{I}{c}.$$

Отсюда взаимная индукция $L_{12} = 4\pi n S N \cos \theta$. Полная индукция системы $L_{\text{полн}} = L_1 + L_2 \pm 2L_{12} = L_1 + L_2 \pm 8\pi n S N \cos \theta$. Используя (7.20), можем написать полную магнитную энергию системы или ее часть, связанную с взаимодействием катушек и зависящую от θ :

$$W = 8\pi n S N \left(\frac{I}{c}\right)^2 \cos \theta.$$

Такое же выражение получим, если, считая магнитный момент малой катушки

$$p_m = N \frac{I}{c} S,$$

будем вычислять энергию, по аналогии с (2.32), как скалярное произведение

$$W = -p_m \mathbf{B}. \quad (7.31)$$

Обозначая момент сил M и используя (7.29), имеем

$$\delta A = F dx = M d\theta = dW_I.$$

Откуда находим

$$M = -4\pi n N S \left(\frac{I}{c} \right)^2 \sin \theta.$$

Малая катушка стремится развернуться, чтобы ее магнитный момент (ее поле) был направлен по полю катушки-соленоида.

Найдем, на какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом p и массой m , который можно считать магнитным диполем, будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника 1-го рода (№ 7.83). Условие на границе сверхпроводника — отсутствие проникновения в него магнитного поля, можно обеспечить с помощью метода зеркальных изображений. Если симметрично относительно его границы расположить такой же диполь как заданный, то на границе магнитное поле будет иметь только компоненту касательную к поверхности. Расстояние между диполями найдем из равенства силы отталкивания между диполями весу магнитика. Силу отталкивания определяем из магнитной энергии взаимодействия диполей. Один диполь создает поле, определяемое (7.11), а второй, находясь в этом поле, в соответствии с (7.31) обладает энергией $W = -p\mathbf{B}$. Поэтому, используя (7.11), получаем

$$F = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial(p\mathbf{B})}{\partial r} = \frac{p\partial \left[3r(\mathbf{pr})/r^5 - \mathbf{p}/r^3 \right]}{\partial r}.$$

Так как \mathbf{r} в данном случае перпендикулярно \mathbf{p} , то находим

$$F = \frac{p\partial(-\mathbf{p}/r^3)}{\partial r} = \frac{3p^2}{r^4} = \frac{3p^2}{16h^4} = mg.$$

Отсюда находим h . Отметим, что такое же выражение для силы получено в (1.10) и (6.23).

Шарик из сверхпроводника можно подвесить на магнитной подушке. Оценим его максимальный размер (R), если известны плотность ρ , критическое магнитное поле (B) и такое изменение поля с расстоянием, что на тыльной стороне шарика давлением магнитного поля можно пренебречь. Используя (7.12), можем написать уравнение равновесия сил

$$\frac{\pi R^2 B^2}{8\pi} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 g.$$

Отсюда находим максимальный радиус (№ 7.74):

$$R = \frac{3B^2}{32\pi\rho g}.$$

Если магнитный компас, стрелка которого может вращаться в горизонтальной плоскости, находится рядом с вертикальной сверхпроводящей плоскостью, то, предполагая, что внешнее магнитное поле отсутствует, действующие на стрелку силы можно найти, используя метод зеркальных изображений. Условие, которому должно удовлетворять зеркальное изображение, заключается в отсутствии нормальной к поверхности сверхпроводника компоненты магнитного поля, т. е. симметричному относительно поверхности расположению стрелки и ее зеркального изображения. Угол стрелки относительно поверхности при устойчивом равновесии определяется минимальной энергией взаимодействия стрелки и ее изображения. Для нахождения энергии стрелку и ее изображение считаем точечными диполями (рис. 7.27). Из (7.31) и (7.11) для энергии взаимодействия имеем

$$\begin{aligned} W = -\mathbf{p} \left[3(\mathbf{pr}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] &= -3p^2 r^2 \cos\alpha \frac{\cos(\pi - \alpha)}{r^5} + p^2 \frac{\cos(\pi - 2\alpha)}{r^3} = \\ &= p^2 \frac{1 + \cos^2\alpha}{r^3}. \end{aligned}$$

Видно, что минимальная энергия при $\alpha = \pi/2$, т. е. устойчивое равновесие стрелки, когда она параллельна сверхпроводящей плоскости (№ 7.85).

В ферромагнитном шаре пропилена узкая глубокая щель. Шар намагнечен до насыщения перпендикулярно плоскости щели, и затем внешнее поле выключено. Кривая размагничивания материала шара $M(H)$ представляет собой четверть окружности (рис. 7.28). Из щели выдергивается и удаляется на значительное расстояние плос-



Рис. 7.27

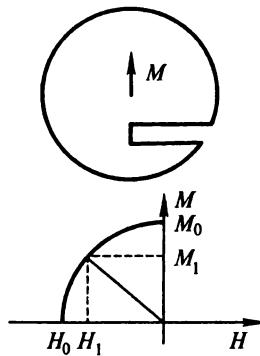


Рис. 7.28

кая рамка площадью S с числом витков N . Рамка подключена к гальванометру. Найдем количество электричества Q , протекшего через гальванометр. Полное сопротивление цепи R . Заданы также H_0 , M_0 и размагничивающий фактор шара $\beta = 4\pi/3$ (№ 7.23). Из (7.1) получаем для цепи гальванометра

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d(\Phi N)}{dt}.$$

Поток вектора магнитной индукции Φ меняется от начального, определяемого начальной магнитной индукцией в щели B_1 , до нуля при значительном удалении рамки от шара. Поэтому

$$Q = B_1 S \frac{N}{cR}. \quad (7.32)$$

Используя (6.15) для размагничивающего фактора и зависимость, изображенную на рис. 7.28, получаем для поля внутри магнетика

$$H_1 = -\beta M_1 = \frac{4}{3}\pi M_1; \quad M_0^2 = H_1^2 + M_1^2 = M_1^2 \left[\left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 + 1 \right].$$

Откуда определяем M_1 . В отсутствие внешнего поля для начальной магнитной индукции в щели имеем

$$B_1 = 4\pi M_1 + H_1 = \frac{8\pi}{3} M_1 = \frac{8\pi}{3} \frac{M_0}{\left(4\pi/3 \right)^2 + 1}.$$

Эту величину подставляем в (7.32).

Для исключения потерь энергии на джоулеву теплоту в линиях передачи постоянного тока предложено использовать коаксиальный

кабель, проводящие поверхности которого для внутренней жилы (диаметр d) и наружной оболочки (диаметр D) выполнены из сверхпроводника. Максимально допустимая индукция магнитного поля на поверхности сверхпроводника B , максимально допустимая напряженность электрического поля в изолирующей прослойке кабеля E_m . Найдем, при каком соотношении диаметров $x = D/d$ можно передать **наибольшую мощность** N и величину этой мощности (№ 7.52). Из (4.18) мощность тока $N = IV$, где I — сила тока, идущего в разные стороны по оболочке и жиле и создающего магнитное поле вокруг жилы, определяемое (5.2) и имеющее максимальное значение на ее поверхности

$$B = H = 4 \frac{I}{cd};$$

V — разность потенциалов между жилой и оболочкой, на которых благодаря сверхпроводимости потенциал не меняется. Для однородной изолирующей прослойки из (3.7) и (3.8) находим (для цилиндрического случая) $E2\pi r = \text{const} = A$. Из (2.6) $dV = -Edr$. Поэтому

$$V = \frac{A}{2\pi} \ln \frac{D}{d}; \quad E = \frac{V}{r \ln x}.$$

Максимальное значение напряженности электрического поля на жиле

$$E_m = 2 \frac{V}{d \ln x} = 2 \frac{Vx}{D \ln x}.$$

Для мощности получаем

$$N = IV = \frac{1}{8} cBED^2 \frac{1}{x^2} \ln x.$$

Приравнивая производную мощности по x нулю, находим, что максимальная мощность будет при $x = e^{1/2}$ и равно

$$N_m = \frac{cBED^2}{16e}.$$

В длинном идеально проводящем соленоиде при изменении индуктивности сохраняется поток магнитного поля, и поэтому из (5.31) следует $IL = I_0L_0$. Используя выражение (5.23) для соленоида, в случае изменения его длины $l = l_0 + a \cos \omega t$ для тока получаем (№ 7.33)

$$I = I_0 \frac{l}{l_0} = I_0 \left(1 + \frac{a}{l_0} \cos \omega t \right).$$

8. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ. ЭДС ХОЛЛА. ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ

При рассмотрении движения заряженных частиц в дополнение к силам, которые были введены в механике, надо учитывать действие электрических и магнитных полей.

Сила взаимодействия между заряженными частицами определяется законом Кулона (1.1), а потенциальная энергия — соответствующей работой в электрическом поле (2.1). Напряженность поля вокруг точечной заряженной частицы описывается (1.3), а потенциал — работа, которую надо совершить, чтобы единичный заряд из бесконечности перевести на расстояние r (2.4). Потенциал от электрона, который считаем точечной частицей с зарядом e , на расстоянии a от него равен e/a . Если в эту точку переместить из бесконечности второй электрон, то потенциальная энергия системы будет равна e^2/r . Потенциал в точке, находящейся на расстоянии a от каждого из этих электронов, будет равен $2e/a$. Чтобы в эту точку переместить из бесконечности еще один электрон, нужно совершить работу $2e^2/a$. Таким образом, система из трех электронов, находящихся в состоянии покоя в вершинах правильного треугольника со стороной a , обладает потенциальной энергией $3e^2/a$. Если этим электронам предоставить возможность свободно разлетаться под действием сил отталкивания, то вся их потенциальная энергия перейдет в кинетическую. Предполагая симметрию движения, получаем для определения предельной скорости разлета (v) электронов массой m уравнение

$$3 \frac{e^2}{a} = 3m \frac{v^2}{2}.$$

Отсюда находим скорость (№ 8.1). Здесь использовано нерелятивистское приближение.

В релятивистском случае (больших энергий и скоростей) кинетическая энергия имеет вид

$$T = mc^2(\gamma - 1),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}}; \quad \beta = \frac{v}{c};$$

c — скорость света (см.: 1, с. 179.). Поэтому имеем

$$\frac{e^2}{a} = mc^2(\gamma - 1).$$

Откуда

$$\gamma = 1 + \frac{e^2}{mc^2 a}; \quad \frac{v}{c} = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} = \frac{\left(1 + 2mc^2 a/e^2\right)^{1/2}}{1 + mc^2 a/e^2}.$$

Нерелятивистским приближением (№ 8.2) можно пользоваться, если выполняется условие

$$\frac{e^2}{a} \ll mc^2.$$

Поэтому должно быть

$$a \gg \frac{e^2}{mc^2} = r_{\text{кл}} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

(классический радиус электрона).

В плоском конденсаторе с напряженностью электрического поля E отрицательно заряженный электрон ускоряется при движении к положительной пластине. Однако на вырвавшийся из отрицательной пластины благодаря термоэмиссии электрон кроме поля конденсатора действует еще притяжение положительного заряда электрического изображения. Обозначая расстояние электрона от отрицательной пластины через x и используя закон Кулона (1.1), получаем уравнение движения электрона

$$m \frac{dv}{dt} = eE - \frac{e^2}{4x^2}.$$

Скорость вырвавшегося электрона будет вначале уменьшаться, а затем увеличиваться. Минимальная скорость определяется условием

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Из уравнения движения находим точку, в которой скорость электрона минимальна (№ 8.3):

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{E} \right)^{1/2}.$$

При $E = 1000$ В/м $x = 6 \cdot 10^{-5}$ см. В результате торможения электронов вблизи отрицательной пластины может образоваться пространственный заряд, который здесь не учитывается.

Рассмотрим действие прямоугольного импульса тока $I = 200$ кА, который протекает за время $\Delta t = 10^{-4}$ с через гибкую металлическую полосу длиной $2l = 2$ м, шириной $a = 0,1$ м, сложенную вдвое и разделенную тонким непроводящим промежутком (рис. 8.1). Под полосой расположен твердый массивный стол, а сверху находится брускок с площадью основания (al) и массой $m = 1$ кг. Оценим скорость бруска после прохождения импульса тока по полосе (№ 8.49). Так как полосы, по которым течет ток, широкие, а промежуток между ними мал, магнитное поле токов будет сосредоточено в основном в этом промежутке. Пренебрегая краевыми эффектами, используя (5.6) и учитывая, что поля от верхней и нижней частей петли складываются, получаем

$$B = H = 4\pi \frac{I}{ca}.$$

Давление магнитного поля (7.12), направленное на пластины,

$$p = \frac{HB}{8\pi} = 2\pi \frac{I^2}{c^2 a^2}.$$

Сила, действующая на пластину и, соответственно, на брускок, равна

$$F = pal = 2\pi \frac{I^2 l}{c^2 a}.$$

Не успевая сдвинуться, брускок приобретает импульс $F\Delta t$. Поэтому его скорость будет

$$v = \frac{F\Delta t}{m} = 2\pi \frac{I^2 l / \Delta t}{mc^2 a} = 25 \text{ м/с.}$$

Магнитное давление проявляется также, если импульс тока (максимальное значение $I = 100$ кА) протекает через две тонкие гибкие металлические полосы шириной $a = 0,1$ м, разделенные тонким зазо-

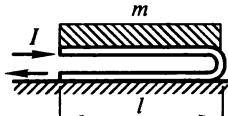


Рис. 8.1

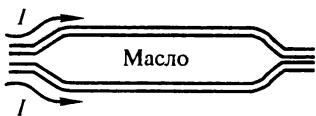


Рис. 8.2

в пластинах такое, что между ними магнитного поля нет. Используя (5.6) и считая, что в каждой полосе идет ток I , находим, что магнитное поле снаружи

$$B = 4\pi \frac{I}{ca}.$$

В соответствии с (7.12) магнитное поле давит на пластины, создавая между ними давление

$$p = \frac{B^2}{8\pi}.$$

Предполагая, что вязкостью можно пренебречь, оценим скорость из уравнения Бернуlli (см. 1, с. 350), которое в данном случае

$$\frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2}.$$

Отсюда скорость

$$v = \frac{2}{c} \frac{I}{a} \left(\frac{\pi}{\rho} \right)^{1/2} = 40 \text{ м/с.}$$

Вдоль эвакуированной длинной цилиндрической трубы радиусом R создан стационарный аксиально симметричный поток электронов, ускоренных при прохождении разности потенциалов V . Изменение магнитного поля в зависимости от расстояния от оси трубы r описывается выражением

$$B = B_0 \left(\frac{r}{R} \right)^q \text{ при } r < R \text{ и } q > 0,$$

где B_0 и q — постоянные. Найдем распределение плотности электронов n в зависимости от расстояния от оси трубы r и электрическое поле $E(r)$, предполагая, что параметры пучка не изменяются вдоль его оси (№ 8.4). Скорость электронов v определяем по полученной ими энергии

$$eV = \frac{mv^2}{2}.$$

Используя (5.6), имеем

$$B 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int_0^r n u e 2\pi r dr.$$

Дифференцируя это соотношение, находим

$$n(r) = \frac{c(1+q) B_0 (r/R)^{(q-1)}}{4\pi e u R}.$$

Используя (1.12), получаем

$$E 2\pi r = 4\pi \int_0^r n e 2\pi r dr.$$

Интегрируя, имеем

$$E(r) = \frac{c}{u} B_0 \left(\frac{r}{R}\right)^q = \frac{c}{u} B.$$

Отметим, что в пучке отрицательно заряженных электронов электрическое поле направлено к оси пучка, а сила, действующая на электрон, направлена от оси пучка. Используя (7.2), можем найти силу Лоренца, которая направлена к оси пучка и равна

$$F_m = \frac{u}{c} e B.$$

Отношение этой силы к электрической (кулоновской) силе $F_k = eE$ равно $(u/c)^2$, т. е. мало, пока скорости электронов малы по сравнению со скоростью света.

Компенсировать разницу сил можно, поместив нужное количество положительных неподвижных однозарядных ионов внутрь пучка. Обозначая концентрацию ионов n_+ и предполагая, что столкновениями электронов (концентрации n) с ионами можно пренебречь, для единицы объема получаем

$$n(F_k - F_m) = n_+ F_k.$$

Откуда (№ 8.10)

$$n_+ = n \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Аналогичное отношение магнитной (F_m) и электрической (F_k) сил получаем для сил взаимодействия двух параллельных пучков электронов

tronov. Предполагая, что поперечный размер пучков много меньше расстояния между ними (a), и обозначая площадь сечения пучков σ и скорость электронов v , из (1.12), (5.6) и закона Ампера (7.4) получаем (№ 8.9)

$$E2\pi a = 4\pi\sigma ne; \quad E = 2\sigma n \frac{e}{a}; \quad F_k = 2\sigma^2 n^2 \frac{e^2}{a};$$

$$B = H = 2\sigma ne \frac{v}{ca}; \quad F_m = 2\sigma^2 n^2 e^2 \frac{v^2}{c^2 a}; \quad \frac{F_m}{F_k} = \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Найдем частоту поперечных колебаний протонов, захваченных релятивистским электронным пучком, имеющим сечение πR^2 и силу тока I (№ 8.6). Обозначая плотность электронов в пучке n , для силы тока в пучке получаем $I = en\pi R^2 \approx en\sigma\pi R^2$, с учетом того, что $v \approx c$. Используя теорему Гаусса (1.12), получаем электрическое поле в электронном пучке

$$E = 2en\pi r = 2I \frac{r}{cR^2}.$$

На протон действует сила притяжения eE . Уравнение колебаний протона (массой m)

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2Ier}{cR^2} = 0.$$

Отсюда частота колебаний

$$\omega^2 = \frac{2Ie}{mcR^2} \quad \text{и} \quad v = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Две щели S_1 и S_2 , которые будем считать бесконечно длинными, шириной l каждая (рис. 8.3), установленные в эвакуированном соуде, выделяют плоский пучок электронов с энергией W . Найдем, на каком расстоянии x от щели S_2 ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, приходящийся на единицу длины щели (за щелью S_2), равен I (№ 8.5). Для скорости электронов (массы m) имеем

$$u = \left(\frac{2W}{m}\right)^{1/2}.$$

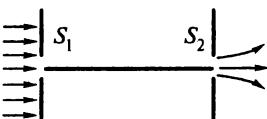


Рис. 8.3

Ток $I = neul$. Используя (1.12), получаем поле на границе пучка $2E = 4\pi nle$. Откуда

$$E = \frac{2\pi J}{u}.$$

Ускорение электрона на границе пучка перпендикулярно к скорости пучка

$$a = e \frac{E}{m}.$$

При двойном расширении пучка

$$y = l = \frac{at^2}{2} = e E \left(\frac{x}{u} \right)^2.$$

Поэтому получаем

$$x = \left(\frac{lmu^3}{2\pi e I} \right)^{1/2}.$$

Из ускорителя выводится пучок протонов с энергией $W = 4$ МэВ, который затем проходит в вакууме путь $l = 4$ м, прежде чем попасть на мишень. Вследствие кулоновского взаимодействия частиц размеры пучка увеличиваются. Оценим максимально возможную плотность тока в пучке, если допускается увеличение его радиуса на $\delta = 10\%$ по сравнению с исходным ($\delta = \Delta r/r_0$). Считаем, что распределение частиц в пучке аксиально симметрично, а их начальными поперечными скоростями пренебрегаем (№ 8.7). Обозначая заряд частиц e , массу m , число в единице объема n , из (1.12) получаем напряженность электрического поля в пучке $E = 2\pi enr$. Для движения частицы в радиальном направлении, т. е. для увеличения радиуса пучка, получаем $mr'' = 2\pi e^2 nr$. Вводя приращение радиуса пучка $x = r - r_0$ и радиальную скорость пучка

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

имеем

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2\pi e^2 n \frac{r^2 - r_0^2}{m} \approx 4\pi e^2 n r_0 \frac{x}{m}.$$

Интегрируя по x от нуля до Δr и по t от нуля до $t = l/V$ и подставляя $j = enV$, получаем

$$j = \delta V^3 \frac{m}{\pi e l^2} = \delta m \frac{(2W/m)^{3/2}}{\pi e l^2}.$$

На рис. 8.4 изображена электронная лампа непосредственного накала со всеми поданными на нее напряжениями. Предполагая, что анодный ток

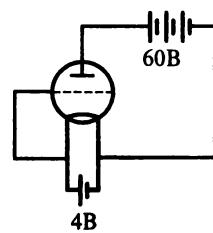


Рис. 8.4

мал по сравнению с током накала, что обычно и бывает в лампах, и учитывая, что нить имеет в разных точках различный потенциал, получаем, что вылетающие из разных частей нити электроны при движении до анода набирают различные скорости в соответствии с той разностью потенциалов, на которой они разгоняются (от 56 до 60) (№ 8.8). Такое распределение скоростей будет иметь место, если анодный ток мал по сравнению с током накала, что обычно и бывает.

Движение частицы, имеющей заряд q и скорость v , в электрическом поле с напряженностью E и магнитном поле с индукцией B определяется, как следует из опыта, силой Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{1}{c}q[\mathbf{v}\mathbf{B}]; \quad \{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]\}, \quad (8.1)$$

где c — скорость света в вакууме.

При $v \ll c$ для частицы с массой m получаем уравнение движения

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{1}{c}q[\mathbf{v}\mathbf{B}]; \quad \left\{ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}] \right\}. \quad (8.2)$$

В дальнейшем будет показано, что движение с нерелятивистскими скоростями может происходить при выполнении условия $E \ll B$.

Так как в нерелятивистском приближении сила одинакова в инерциальных системах координат, а второй член в (8.1) меняется при изменении скорости, то разделение силы на электрическую и магнитную зависит от выбора системы отсчета. Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную S и движущуюся относительно нее со скоростью u подвижную систему S' . Скорость частицы (v) в системе S связана со скоростью (v') в системе S' преобразованием Галилея $v = v' + u$. Из равенства сил имеем

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{1}{c}q[\mathbf{v}\mathbf{B}] = q\mathbf{E} + \frac{1}{c}q[\mathbf{v}'\mathbf{B}] + \frac{1}{c}q[\mathbf{u}\mathbf{B}] = \mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + \frac{1}{c}q[\mathbf{v}'\mathbf{B}].$$

Отсюда следует

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{B}]. \quad (8.3)$$

Для получения закона преобразования магнитной индукции надо привлекать теорию относительности. Приведем результат

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{E}]. \quad (8.4)$$

Соотношения (8.3) и (8.4) позволяют получить условия для выбора систем, в которых существует либо только магнитное поле, либо только электрическое.

В постоянном магнитном поле сила перпендикулярна скорости и поэтому работы не совершает.

Если скорость перпендикулярна \mathbf{B} , то движение происходит по окружности. Вводя угловую скорость вращения ω и радиус окружности R , получаем с помощью (8.2) и уравнения движения по окружности (см. 1, с. 14; 45) для угловой скорости вращения, которую называют **циклотронной частотой**

$$\omega = \frac{qB}{mc}. \quad (8.5)$$

Заметим, что эта частота не зависит от радиуса орбиты, который называется **циклотронным, или ларморовским, радиусом**

$$R = \frac{mcv}{qB}. \quad (8.6)$$

На рис. 8.5 показана траектория электрона, который влетает в постоянное однородное магнитное поле \mathbf{B} со скоростью \mathbf{v} под углом α к направлению поля. Найдем расстояние AC , которое электрон проходит за один оборот (№ 8.12). Обозначим компоненты скорости, перпендикулярной и параллельной магнитному полю соответственно $v_1 = v \sin \alpha$ и $v_2 = v \cos \alpha$. Тогда в соответствии с (8.2) для движения по окружности получаем

$$\frac{mv_1^2}{R} = \frac{1}{c} ev_1 B.$$

Откуда

$$v_1 = \frac{eRB}{mc}$$

и период обращения

$$T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi mc}{eB}.$$

Поэтому

$$AC = v_2 T = \frac{2\pi mc v \cos \alpha}{eB}.$$

Найдем величину магнитного поля, необходимого для того, чтобы в ускорителе ультра-

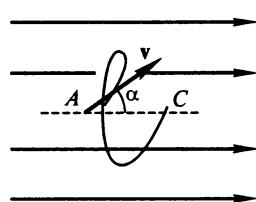


Рис. 8.5

релятивистские частицы, разогнанные разностью потенциалов U , двигались по окружности радиусом R (№ 8.13). Имея в виду, что для ультрарелятивистских частиц $v \approx c$ и кинетическая энергия частицы

$$W = qU \approx \frac{m_0c^2}{\left[1 - (v/c)^2\right]^{1/2}},$$

где m_0 — масса покоя протона. Из (8.6) находим $B = U/R$.

В **солнечном ветре**, представляющем собой поток плазмы, движущейся относительно Солнца со скоростью $v = 400$ км/с, происходит ионизация неподвижных относительно Солнца нейтральных атомов гелия межзвездной среды. Полагая, что вектор магнитной индукции \mathbf{B} в системе отсчета, связанной с ветром, перпендикулярен вектору \mathbf{v} и по модулю равен $5 \cdot 10^{-9}$ Тл, а также что направления векторов \mathbf{B} и \mathbf{v} остаются постоянными, найдем траекторию ионов He^+ как функцию времени после ионизации. В силу высокой проводимости плазмы солнечного ветра считаем, что напряженность электрического поля в системе отсчета, связанной с ветром, равна нулю и влиянием гравитационного поля можно пренебречь (№ 8.86). В системе отсчета, связанной с солнечным ветром, электрического поля нет. Система отсчета, связанная с Солнцем, относительно этой системы движется со скоростью $(-\mathbf{v})$, и поэтому в соответствии с (8.3) в ней есть электрическое поле

$$\mathbf{E}' = -\frac{[\mathbf{v}\mathbf{B}]}{c}.$$

Из (8.4) следует, что магнитное поле в обеих системах одинаково. Предполагаем, что поток плазмы только ионизирует гелий, а ускорение ионов связано с магнитным и электрическим полями, а не с ударным воздействием. На рис. 8.6 показаны векторы полей и

скоростей. Ускорение иона по оси z связано с действием электрического поля и ускорением от движения по оси x в магнитном поле, которое (движение) возникает от движения по оси z в магнитном поле. Эти скорости иона обозначаем u_x и u_z . По оси y никакого движения иона нет. Уравнения движения имеют вид

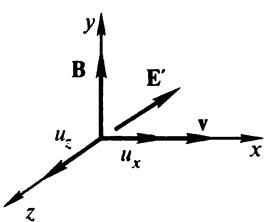


Рис. 8.6

$$mu'_x = -qu_z \frac{B}{c}; \quad mu'_z = -qv \frac{B}{c} + qu_x \frac{B}{c}.$$

Дифференцируя первое уравнение по времени и подставляя второе, получаем

$$u_x'' + \omega^2 (u_x - v) = 0,$$

где

$$\omega = \frac{qB}{mc}.$$

Общее решение $u_x - v = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ при начальных условиях ($t = 0$) $u_x = 0$, $u_z = 0$, а из первого дифференциального уравнения и $u_x' = 0$ дает

$$u_x = v(1 - \cos \omega t); \quad u_z = -v \sin \omega t.$$

Учитывая, что в начальный момент $x = z = 0$, получаем

$$x = v \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right); \quad z = \frac{v}{\omega} (\cos \omega t - 1).$$

Из полученных ранее соотношений видно, что максимальное удаление от начальной точки по оси z по абсолютной величине равно $2v/\omega$, максимальная скорость $u_{x \max} = 2v$, а среднее значение (№ 8.87)

$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_x dt = v.$$

Для моделирования траектории атомной частицы с зарядом e и импульсом p , движущейся в магнитном поле, часто пользуются тем обстоятельством, что очень легкий (невесомый) гибкий проводник с током I , находящийся под постоянным механическим натяжением T , занимает в том же магнитном поле положение, совпадающее с траекторией частицы. Найдем связь между e , p , I и T , когда частица движется перпендикулярно магнитному полю, предполагая, что вне него участки проводника прямолинейны и расположены вдоль соответствующих прямолинейных же участков траектории (№ 8.14). Из (8.6) для радиуса кривизны траектории частицы в магнитном поле получаем

$$R = \frac{cp}{eB}.$$

На проводник с током действует сила Ампера (7.4). Сила на единицу длины

$$F = \frac{IB}{c}.$$

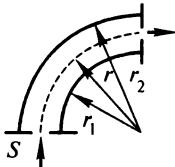


Рис. 8.7

Используя рис. 7.24, находим для силы натяжения (на рисунке она обозначена f) $T = FR_1$, где R — радиус кривизны провода. Для совпадения его с радиусом кривизны траектории частицы должно быть $I_p = eT$. Если задана энергия частицы, то пользуемся связью (№ 8.15)

$$W = \frac{p^2}{2m}.$$

На рис. 8.7 показана схема **масс-селектора**, т. е. прибора, предназначенногодля разделения атомных частиц разных масс, состоящего из цилиндрического конденсатора с внутренним радиусом $r_1 = 2,4$ см и внешним $r_2 = 3$ см. Ионные лучи (частицы) попадают в селектор через узкую щель S , расположенную посередине между обкладками. Параллельно оси конденсатора (т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа) приложено однородное магнитное поле с индукцией $B = 2000$ Гс. Найдем, какую по величине и знаку разность потенциалов надо приложить к пластинам конденсатора, чтобы однократно заряженный положительный ион ${}^7\text{Li}$, имеющий энергию $W = 1000$ эВ, прошел по средней линии конденсатора, т. е. по окружности радиусом $r = 2,7$ см, а также напряженность электрического поля на этой окружности (№ 8.16). Масса иона равна примерно семи массам нуклонов (протонов или нейтронов) $m = 7 \cdot 1,67 \cdot 10^{-24}$ г. Чтобы ион двигался по окружности радиусом r , на него должна действовать сила

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

(см. 1, с. 14; 45). Используя связь заданной энергии со скоростью

$$W = \frac{mv^2}{2},$$

находим скорость $v = 1,65 \cdot 10^7$ см/с. Необходимая сила равна $F = 11,7 \cdot 10^{-10}$ дн. Поэтому из (8.1) для магнитной силы получаем $F_m = 5,12 \cdot 10^{-10}$ дн. Необходимо добавить еще электрическое поле цилиндрического конденсатора

$$E = \frac{F - F_m}{e} = 412 \text{ В/см.}$$

Обозначив заряд на внутренней цилиндрической обкладке q , из (1.12) находим $E = 2q/r$. Для обеспечения движения положительных

ионов по окружности поле должно быть направлено к внутренней поверхности конденсатора. Она должна иметь отрицательный заряд (отрицательный потенциал). Для вычисления разности потенциалов воспользуемся уравнением (2.6)

$$U = 2q \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Для напряженности поля на средней линии получаем

$$E = \frac{U}{r \ln(r_2/r_1)}.$$

Откуда находим

$$U = Er \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = 248 \text{ В.}$$

Для разделения изотопов можно обойтись и одним магнитным полем. В установке для разделения изотопов ^{235}U и ^{238}U пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с энергией $W = 5 \text{ кэВ}$ попадает от источника через щель S (рис. 8.8) в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. В магнитном поле ионы разных масс движутся по различным окружностям и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция последних должна быть такова, чтобы расстояние между пучками ^{235}U и ^{238}U на выходе была меньше $\delta = 5 \text{ мм}$. Найдем, каково должно быть магнитное поле B , удовлетворяющее этому условию, и время t , необходимое для полного разделения $M = 1 \text{ кг}$ природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, $I = 5 \text{ мА}$. Массы протона и нейтрона считаем одинаковыми и равными $m_p = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ (№ 8.17). Используя выражение для скорости через энергию и (8.6), получаем

$$\delta \leq 2(R_2 - R_1) = 2c \left(\frac{2W}{m} \right)^{1/2} \frac{\Delta m}{eB},$$

где $m \approx 235m_p$; $\Delta m = (238 - 235)m_p = 3m_p$. Откуда

$$B \leq 2c \left(\frac{2W}{m} \right)^{1/2} \frac{\Delta m}{e\delta} = 8 \cdot 10^3 \text{ Гс.}$$

Для тока имеем

$$I = \frac{dq}{dt} = e \frac{dN}{dt} = e \frac{dM/dt}{Am_p},$$

где A — атомное число (≈ 235).

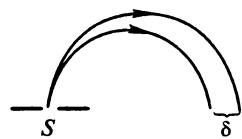


Рис. 8.8

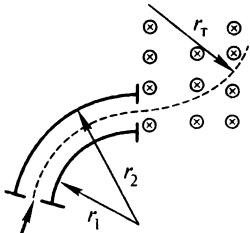


Рис. 8.9

Интегрируя, находим

$$M = IAM_p \frac{t}{e}.$$

Отсюда $t = 2,5$ г.

Сепаратор частиц может быть устроен так, как показано на рис. 8.9. На вход цилиндрического конденсатора с радиусами r_1 и r_2 попадают ионы разных масс и, двигаясь по окружности, попадают затем в магнитное поле B .

Найдем отношение m/q массы иона к его заряду, если он прошел сепаратор при напряжении U , а радиус его траектории в магнитном поле равен r_t (№ 8.18). Из (1.16) напряженность электрического поля в цилиндрическом конденсаторе с зарядом на единицу длины χ равна $E = 2\chi/r$. Из (2.6) для разности потенциалов получаем

$$U = 2\chi \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Уравнение движения частицы по окружности в конденсаторе

$$m \frac{v^2}{r} = 2q \frac{\chi}{r},$$

а в магнитном поле

$$m \frac{v^2}{r_t} = qv \frac{B}{c}.$$

Используя все приведенные соотношения, получаем

$$\frac{m}{q} = r_t^2 B^2 \frac{\ln(r_2/r_1)}{c^2 U}.$$

В ускорителях заряженных частиц индукция B магнитного поля, направленная вдоль оси симметрий, изменяется вблизи равновесной орбиты по закону

$$B = \frac{a}{r^n},$$

где r — радиус круговой орбиты; n — характерный показатель; a — постоянная величина. Найдем, при каком его значении обеспечивается не только круговое движение на равновесной орбите, но и ра-

диальная устойчивость ее (№ 8.23). Используя (8.1) и (8.6) для скорости, магнитного поля и силы на равновесной орбите, получаем

$$v_0 = \frac{qB_0 r_0}{mc}; \quad B_0 = \frac{a}{r_0^n}; \quad F_0 = \frac{qv_0 B_0}{c} = \frac{q^2 a^2}{cmr_0^{(2n-1)}}.$$

Если с той же скоростью частица переходит на орбиту радиусом r_1 , то

$$B_1 = \frac{a}{r_1^n}; \quad F_{01} = \frac{qv_0 B_1}{c} = \frac{q^2 a^2}{cmr_0^{(n-1)} r_1^n}.$$

Таким образом, для равновесия на новой орбите

$$F_1 = \frac{q^2 a^2}{cmr_1^{(2n-1)}},$$

а при сходе с нее

$$F_{01} = \frac{q^2 a^2}{cmr_0^{(n-1)} r_1^n}.$$

Для устойчивости орбиты при увеличении радиуса эта величина должна быть больше равновесной

$$\frac{1}{r_0^{(n-1)}} > \frac{1}{r_1^{(n-1)}}.$$

Чтобы это выполнялось, должно быть $n - 1 < 0$, т. е. $n < 1$. Для устойчивости орбиты при уменьшении радиуса $F_{01} < F_1$ и получаем то же самое соотношение.

Один из ранних методов определения отношения заряда к массе e/m для электрона состоял в следующем. Электроны, вырванные из алюминиевого диска A , ускорялись разностью потенциалов U , приложенной между A и щелью S (рис. 8.10). Пройдя через щель S , электронный пучок попадал в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. Вся система помещалась в вакуум. Изменяя величину магнитного поля, доби-

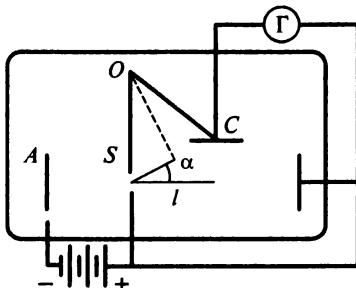


Рис. 8.10

вались того, чтобы ток на коллекторе C , регистрируемый гальванометром Γ , был максимальен. Измерив магнитное поле B в этот момент, можно вычислить e/m . Найдем e/m , зная длину хорды $SC = l$ и ее угол с начальным направлением скорости α (№ 8.19). Из сохранения энергии имеем

$$eU = m \frac{v^2}{2}.$$

Из (8.6)

$$r = mc \frac{v}{eB}.$$

Из треугольника OSC

$$r = \frac{l}{2 \sin \alpha}.$$

В результате находим

$$\frac{e}{m} = 8c^2 \frac{\sin^2 \alpha}{B^2 l^2}.$$

В ускорителе прямого действия протон движется в практически однородном электрическом поле внутри вакуумной трубы (ускоряется от пренебрежимо малой энергии до энергии $W = 4$ МэВ). Оценим допустимое однородное внешнее магнитное поле в зоне такого ускорителя, чтобы на длине трубы $l = 2$ м отклонение протонов от осевой линии было меньше $b = 1$ см (№ 8.20). При такой энергии можно пользоваться нерелятивистскими соотношениями. При малых углах отклонения можно считать, что сила Лоренца и вызываемая ею скорость v_y перпендикулярны к горизонтальной составляющей скорости v_x , приобретаемой за счет электрического поля. Для продольного движения имеем

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$v_x = \frac{q}{m} Et.$$

Еще раз интегрируя, получаем

$$l = \frac{q}{m} E \frac{t_k^2}{2}.$$

Для поперечного движения, учитывая (8.2), имеем

$$m \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{c} v_x B = qB \frac{Et}{cm}.$$

Интегрируя, находим

$$v_y = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{B}{c} \frac{Et^2}{2}.$$

Еще раз интегрируя, для максимального отклонения имеем

$$b = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{B}{c} \frac{Et_k^3}{6}.$$

Учитывая линейное возрастание продольной скорости, можем написать

$$l = \frac{v_{xk}}{2} t_k.$$

Здесь максимальная скорость

$$v_{xk} = \left(\frac{2W}{m}\right)^{1/2}.$$

После алгебраических преобразований находим

$$B \leq 3mc b \frac{(0,5W/m)^{1/2}}{ql^2}.$$

На рис. 8.11 показано движение частицы массой m с зарядом e по равновесной круговой орбите радиусом r_0 в горизонтальной плоскости зазора магнита, в котором магнитное поле спадает по радиусу по закону $B_z(r) = A/r^n$ ($0 < n < 1$). В отсутствие магнетиков в зазоре $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Так как токов нет, из (5.15) получаем $\text{rot } \mathbf{H} = 0$. Круговое движение обладает осевой симметри-

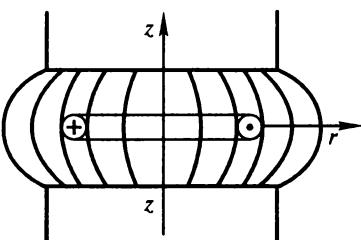


Рис. 8.11

ей относительно z . Удобно воспользоваться цилиндрическими координатами (ρ , ψ , z на рис. 2.1). В использованных ранее обозначениях $r = \rho$. Из симметрии и (5.6) следует, что производные по ψ и $B_\psi = H_\psi$ равны нулю. Поэтому из (5.12)

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} - \frac{\partial H_\psi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\psi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho H_\psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \psi} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\psi = 0.\end{aligned}$$

Отсюда в использованных ранее обозначениях получаем

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z}.$$

Из условия

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -A \frac{n}{r^{(n+1)}} = -\frac{B_z n}{r}.$$

Для изменения компоненты B_r по малому изменению z можем написать

$$B_r = -\frac{n}{r_0} B_z z.$$

Таким образом, увеличение z (от нулевого значения на равновесной орбите) приводит к появлению компоненты B_r , которая в соответствии с (8.1) дает силу, возвращающую (как показано на рис. 8.11) к плоскости $z = 0$:

$$F_z = \frac{e}{c} v B_r = -\frac{e}{c} \omega_0 n B_z z = -\omega_0^2 n m z,$$

где

$$\omega_0 = \frac{v}{r_0} = \frac{eB}{mc}$$

(последнее из (8.5)).

Уравнение колебаний по z (штрихами далее обозначены производные по времени)

$$mz'' + n\omega_0^2 mz = 0.$$

Отсюда для частоты колебаний по z (№ 8.21)

$$\Omega_z = \omega n^{1/2} = n^{1/2} e \frac{B_z(r_0)}{mc},$$

Рассмотрим возможные радиальные колебания частицы в случае малых отклонений от равновесной орбиты (№ 8.22). Устойчивыми колебания будут, если сила Лоренца изменяется с изменением радиуса медленнее, чем центробежная. Сила Лоренца направлена к оси вращения, а центробежная — от оси вращения. На равновесной орбите они равны. При отклонении к оси центробежная сила оказывается больше и возвращает частицу на равновесную орбиту. При отклонении от оси больше оказывается сила Лоренца. Она направлена в сторону равновесной орбиты. Обозначая малое отклонение $x = r - r_0$, представляем $B_z(r)$ в виде ряда Тейлора

$$B_z(r) = B_z(r_0) + \frac{\partial B_z}{\partial r}(r - r_0) = B_z(r_0) - \frac{n}{r_0} B_z(r_0)x.$$

В таком случае радиальная составляющая силы Лоренца имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{e}{c} v B_z(r) = \frac{e}{c} \omega r B_z(r) = \frac{e}{c} \omega_0 \frac{r_0^2}{r} B_z(r_0) \left(1 - n \frac{x}{r_0}\right) = \\ &= \frac{e}{c} \omega_0 r_0 B_z(r_0) \left(1 - \frac{x}{r_0}\right) \left(1 - n \frac{x}{r_0}\right) \approx F(r_0) - m \omega_0^2 (1+n) x. \end{aligned}$$

Здесь использован закон сохранения момента импульса

$$\omega_0 r_0^2 = \omega r^2,$$

где ω_0 — круговая (циклотронная) частота вращения частицы на равновесной орбите (8.5):

$$\omega_0 = e \frac{B_z(r_0)}{mc}.$$

Для центробежной силы имеем

$$F_{\text{цб}} = m \omega^2 r = m \omega_0^2 \frac{r_0^4}{r^3} \approx m \omega_0^2 r_0 \left(1 - 3 \frac{x}{r_0}\right).$$

В результате уравнение радиальных колебаний частицы имеет вид

$$m x'' + m \omega_0^2 (2 - n) x = 0.$$

Колебательный режим возможен при $n < 2$. Частота колебаний

$$\Omega_{\text{рад}} = \omega_0(2 - n)^{1/2}.$$

Длинный соленоид намотан так, что магнитное поле вдоль его оси меняется по линейному закону

$$B = B_0 \left(1 + \frac{|x|}{L} \right),$$

где x — расстояние от центра соленоида вдоль его оси; L — параметр поля. Диаметр соленоида $d \ll L$, поле B не зависит от времени. Отметим, что указанную зависимость $B(x)$ нельзя реализовать в окрестности $x = 0$, что не существенно для решения задачи. Заряженная частица движется так, что ее траектория полностью находится внутри соленоида (для простоты можно считать, что траектория симметрична относительно оси соленоида). Опишем картину движения частицы и найдем период и амплитуду ее колебаний вдоль оси соленоида, если известно, что в центральном поперечном сечении соленоида она движется под углом 60° к его оси со скоростью v (№ 8.24).

На рис. 8.12, *a* показано изменение магнитного поля с изменением x . С увеличением x , как следует из (8.5) и (8.6), увеличивается частота вращения и уменьшается радиус. На рис. 8.12, *b* показаны компоненты скоростей частицы и магнитного поля. Предполагаем, что скорость смещения к оси v_r очень мала. Очень важным является наличие у магнитного поля составляющей, направленной к оси вращения частицы B_r . Благодаря ей магнитное поле образует «ловушку», в которой частица застrevает, т. е. останавливается и идет назад (рис. 8.12, *в*). Используя (8.1), получаем, что компоненты векторных произведений дают: $v_x B_x = 0$; $v_r B_r = 0$; $v_x B_r$ — силу в направлении v_z , которая увеличивает эту скорость, $v_z B_x$ — силу в направлении v_r , которая в основном обеспечивает вращение относительно оси, $v_z B_r$ — силу против

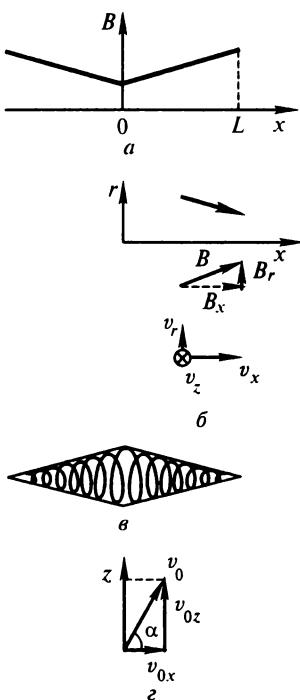


Рис. 8.12

скорости v_x , которая замедляет движение, а затем обеспечивает движение к центру соленоида, $v_r B_x$ — силу в направлении v_z , которая при движении в положительном направлении x увеличивает скорость вращения, а при возвратном движении — уменьшает. Так как сила Лоренца (8.1), представляющая сумму указанных сил, всегда направлена перпендикулярно скорости, то она работы не совершает. Поэтому кинетическая энергия частицы сохраняется. Пренебрегая скоростью v_r по сравнению с v_z и вводя начальные скорости v_{z0} и v_{x0} (рис. 8.12, г), получаем из закона сохранения энергии

$$v_z^2 + v_x^2 = v_{z0}^2 + v_{x0}^2.$$

Медленность изменения орбиты вращения частицы позволяет воспользоваться адиабатическим инвариантом (см.: 1, с. 127). Кинетическая энергия вращения

$$K = m \frac{v_z^2}{2},$$

угловая скорость вращения определяется (8.5). Инвариантность отношения K/ω дает

$$\frac{v_z^2}{B} = \frac{v_{z0}^2}{B_0}.$$

Подставляя это в соотношение для магнитного поля и используя закон сохранения энергии, имеем при $v_x = 0$ максимальное отклонение

$$x_{\max} = L \frac{v_{x0}^2}{v_{z0}^2} = L \operatorname{ctg}^2 60^\circ.$$

Период колебаний в 4 раза больше времени прохождения этого расстояния

$$T = 4 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{v_x} = \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\left(v_{x0}^2 - v_{z0}^2 x/L \right)^{1/2}}.$$

Один из предложенных путей получения высоких температур, необходимых для осуществления термоядерных реакций, использует так называемую «магнитную термоизоляцию». Уход быстрых частиц из зоны высокой температуры предотвращается магнитным полем. Найдем силу тока I в столбе газового разряда радиусом $R = 3$ см,

необходимую для того, чтобы электроны, обладающие средней скоростью хаотического движения, отвечающей температуре $T = 10^6$ К, не могли удаляться от поверхности столба на расстояние больше, чем $r = 2 \cdot 10^{-3}$ см (№ 8.25). Наибольший шанс уйти от столба имеет электрон, у которого скорость

$$v = \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2}$$

направлена перпендикулярно границе столба. Магнитное поле вблизи поверхности столба (5.2)

$$B = 2 \frac{I}{cR}.$$

На расстоянии r поле можно считать постоянным и воспользоваться (8.2)

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e}{c} v B.$$

В результате

$$I = c^2 R \frac{(3kT/m)^{1/2}}{2er} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ A.}$$

При пропускании мощных импульсов тока по коаксиальному токопроводу, находящемуся в вакууме, когда между проводниками коаксиала имеются мегавольтные напряжения, поверхность проводников покрыта плазменной «подушкой» и приобретает неограниченную способность к эмиссии электронов. Найдем, каким должен быть ток в коаксиале с радиусом внутреннего провода $R_1 = 0,6$ см и внешнего провода $R_2 = 1$ см (рис. 8.13) при напряжении между ними $U = 600$ кВ, чтобы не было «вакуумного пробоя» (№ 8.81). Из теоремы о циркуляции (5.6) находим величину магнитного поля между проводниками

$$B = \frac{2I}{cr}.$$

Меньшее значение поля при $r = R_2$. Разность потенциалов между проводами разгоняет электроны, а магнитное поле заставляет их вращаться по окружности. При больших энергиях электронов (см. 1, с. 179) получаем в данном случае

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}} = \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + eU}{mc^2} \approx 2,$$

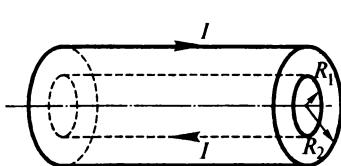


Рис. 8.13

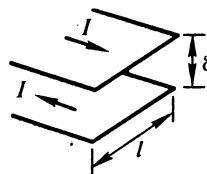


Рис. 8.14

откуда $v/c \approx 1$. А циклотронный радиус из (8.6)

$$r_u \approx 2 \frac{mc^2}{eB}.$$

Чтобы не было «вакуумного пробоя», расстояние между проводниками должно быть больше циклотронного радиуса $R_2 - R_1 > r_u$. Поэтому для тока находим

$$I > \frac{1}{2} \frac{m}{e} c^2 \gamma v \frac{R_2}{R_2 - R_1}.$$

Вместо коаксиала можно использовать две **плоские** параллельные пластины шириной $l = 5$ см с зазором между ними $\delta = 0,5$ см (рис. 8.14), на которых падение напряжения $U = 1$ МВ. Найдем, при каком токе в такой линии проводники окажутся эффективно изолированными друг от друга (№ 8.82). Оценивая, как и раньше, энергию электронов, получаем $\gamma \approx 3$; $v/c \approx 1$. Магнитное поле в соответствии с (5.6)

$$B = 4\pi \frac{I}{cl}.$$

В результате получаем, что для отсутствия пробоя должно быть

$$I > mc^2 \gamma v / 4\pi \delta e.$$

По классическим представлениям электрон, вращающийся в атоме, обладает механическим моментом количества движения $L = mrv$. Считая, что ток, соответствующий движению электрона, $I = -e/T$, где T — период обращения электрона, $T = 2\pi r/v$. В соответствии с (5.5) магнитный момент этого движения (тока)

$$\mathbf{p} = I \frac{\mathbf{S}}{c} = -er \frac{\mathbf{v}}{2c}.$$

В векторном виде (№ 8.26)

$$\mathbf{p} = -e \frac{\mathbf{L}}{2mc}. \quad (8.7)$$

Отношение $\Gamma = p/L$ называется **гиромагнитным отношением**.

Для обладающего магнитным моментом \mathbf{p} и механическим моментом количества движения \mathbf{L} из (7.10) (в отсутствие поля тяготения) и (8.7) получаем

$$[\Omega \mathbf{L}] = [\mathbf{B}\mathbf{p}]; \quad \left[\left(\Omega + \mathbf{B} \frac{p}{L} \right) \mathbf{L} \right] = 0.$$

Откуда (№ 8.27)

$$\Omega = -\mathbf{B} \frac{e}{2mc}. \quad (8.8)$$

Эта частота называется **ларморовской**. Она в два раза меньше циклотронной (8.5).

В классическом опыте, поставленном И.К. Кикоиным, **сверхпроводящий цилиндр** (массой $m = 80$ г, высотой $h = 20$ см, радиусом $R = 0,5$ см) подведен на упругой нити в **магнитном поле**, направленном вертикально вдоль оси цилиндра. Нить подвеса в исходном состоянии не закручена. Магнитное поле постепенно повышается так, что сверхпроводимость скачком исчезает при поле $B = 1$ кГс, а цилиндр при этом закручивается. Найдем максимальный угол закручивания, если модуль кручения $k = 1$ эрг/рад (№ 8.52). Магнитное поле внутрь сверхпроводника не проникает (эффект Мейснера), а по поверхности идет ток плотности i . С величиной внешнего поля $H = B$ в соответствии с (5.21) имеем соотношение

$$H = \frac{4\pi IN}{ch} = \frac{4\pi i}{c}.$$

С помощью (5.5) вычисляем магнитный момент

$$p = BR^2 \frac{h}{4}.$$

При исчезновении сверхпроводимости прекращается поверхностный ток и магнитный момент, с которым, как следует из (8.7), связан механический момент импульса. Так как механический момент импульса должен сохраняться, то возникает вращение цилиндра с угловой скоростью ω ($\omega = d\phi/dt = \dot{\phi}'$). Для абсолютного значения момента импульса имеем

$$L = J\phi' = m_e c BR^2 \frac{h}{2e},$$

где J — момент инерции цилиндра:

$$J = \frac{mR^2}{2};$$

m_e и e — масса и заряд электрона. Полученная кинетическая энергия затем переходит в упругую энергию закручивания нити

$$k \frac{\phi^2}{2} = J \frac{\phi'^2}{2}.$$

В результате имеем

$$\phi = mcBh \frac{R}{e(2km)^{1/2}} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

Сверхпроводящий шар массой $M = 10$ г и радиусом $R = 1$ см покоятся в магнитном поле $B = 1$ кГс. Температура шара постепенно повышается так, что **сверхпроводимость исчезает, а шар начинает вращаться**. Найдем угловую скорость вращения (№ 8.55). Магнитное поле внутрь сверхпроводящего шара не проникает. На поверхности шара магнитное поле направлено по касательной (6.19)

$$B_\tau = \frac{3}{2} B \sin \theta,$$

где θ — угол отклонения от направления внешнего магнитного поля. По поверхности идет ток плотностью

$$j = c \frac{B_\tau}{4\pi}.$$

Движение электронов создает момент количества движения. Подсчитаем его:

$$L = 2 \int_0^{\pi/2} m_e n (R \sin \theta)^2 R d\theta 2\pi R \sin \theta 3B \sin \theta \frac{c}{8\pi enR}.$$

Этот момент количества движения должен сохраняться при исчезновении сверхпроводимости и тока электронов. Для вращения шара получаем

$$\frac{2}{5} MR^2 \omega = m_e c R^3 \frac{B}{e}.$$

Откуда находим угловую скорость ω .

В омегатроне ион остаточного газа раскручивается по спирали в скрещенном электрическом (переменном с амплитудой $E = 1$ В/см)

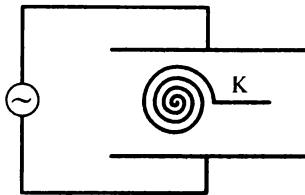


Рис. 8.15

и постоянном магнитном ($B = 3 \cdot 10^3$ Гс) полях (рис. 8.15). Найдем частоту, при которой ионы N_2^+ будут достигать коллектора К (контакта между обкладками конденсатора). При этой частоте радиус спирали будет возрастать до тех пор, пока ион не достигнет коллектора на радиусе $R = 1$ см. Если частоту немножко изменить, то ион будет некоторое время раскручиваться, а потом начнет скручиваться обратно к источнику. Оценим, на сколько надо изменить частоту, чтобы ток на коллекторе прекратился (№ 8.28). Электрическое поле будет способствовать увеличению радиуса орбиты, если оно будет согласовано с изменением направления при вращении, т. е. его частота будет совпадать с частотой вращения (8.5)

$$v_0 = \frac{eB}{2\pi mc} = 163 \text{ кГц.}$$

Для оценки изменения частоты, приводящей к нарушению синхронизма, оценим вначале шаг спирали. Обозначая период обращения T , из второго закона Ньютона получаем

$$m\Delta v \approx eE \frac{T}{2}.$$

Для скорости v на орбите радиусом R имеем

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

поэтому

$$\Delta R = T \frac{\Delta v}{2\pi} \approx T^2 \frac{eE}{4\pi m} = mc^2 \pi \frac{E}{(eB)^2}.$$

При уменьшении периода изменения электрического поля до величины T_1 , меньшей периода обращения T , обозначая

$$R_1 = \frac{vT_1}{2\pi},$$

можем написать

$$\Delta T = T - T_1 = \frac{2\pi}{v} (R - R_1) = (R - R_1) \frac{T}{R}.$$

Если $R - R_1 < \Delta R$, то раскручивания не происходит и ток в цепи коллектора прекращается. Для изменения частоты колебания электрического поля имеем

$$\Delta v = \Delta \frac{1}{T} = -\frac{\Delta T}{T^2}.$$

Нарушение синхронизма будет при

$$\frac{\Delta v}{v_0} > \frac{\Delta R}{R}.$$

Поэтому получаем

$$\Delta v \approx \frac{E}{2RB} = 15 \text{ кГц.}$$

Рассмотрим систему, состоящую из вертикально стоящего **соленоида** и гладкой горизонтальной поверхности внутри него вдали от концов, на которой на расстоянии R от оси соленоида находится шарик массой m с зарядом q , который может скользить по поверхности без трения. Найдем радиус круговой траектории, по которой будет скользить шарик, если быстро, пока шарик еще не успевает заметно сместиться, в соленоиде устанавливается постоянное однородное магнитное поле B (№ 8.29). Из (7.5), используя симметрию, находим

$$E = -\frac{1}{2} \frac{R}{c} \frac{dB}{dt}.$$

Подставляя это во второй закон Ньютона $eEdt = mdv$ и интегрируя, получаем скорость шарика к моменту установления магнитного поля

$$v = qR \frac{B}{2mc}.$$

Дальнейшее движение шарика будет происходить по окружности и описываться уравнением

$$m \frac{v^2}{r} = q \frac{vB}{c}.$$

Отсюда следует $r = R/2$ и $T = 2\pi r/v$. Период оказывается очень большим для макроскопических частиц.

В ускорителе электронов **бетатроне** роль ускоряющего напряжения играет ЭДС индукции (7.1), возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны дви-

жутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Считая радиус орбиты электрона неизменным, определим необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $\langle B(t) \rangle$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем на орбите электрона $B_0(t)$ (№ 8.30). Из (7.5)

$$E = -\frac{r}{c} \frac{d\langle B \rangle}{dt}.$$

Используя второй закон Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = e \frac{r}{2c} \frac{d\langle B \rangle}{dt},$$

находим

$$mv = er \frac{\langle B \rangle}{2c},$$

учитывая, что нет поля, нет и скорости. Движение электрона по окружности определяется полем B_0 на орбите

$$m \frac{v^2}{r} = e \frac{vB}{c}.$$

Из этих соотношений

$$B = \frac{\langle B \rangle}{2}.$$

Магнитное поле некоторой **нейтронной звезды** (массой $M \approx 1,5 \cdot 10^{30}$ кг, радиусом $R_0 \approx 10$ км) имеет дипольный характер, т. е.

$$B = B_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3,$$

где $B_0 \sim 10^{12}$ Гс. Оценим, какие силы будут доминировать в динамике релятивистского электрона ($W \sim 3$ МэВ) на расстоянии от звезды порядка радиуса земной орбиты (150 млн км) (№ 8.31). Для заданной энергии электрона, у которого энергия покоя $mc^2 = 0,511$ МэВ, имеем (см. 1, с. 179),

$$\gamma = \frac{W}{mc^2} \approx 6.$$

Так как

$$\beta = \frac{v}{c} = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)^{1/2},$$

получаем скорость порядка скорости света (c). Из (8.1) для силы Лоренца имеем

$$F = eB_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \sim 10^{-19} \text{ дн},$$

а из закона всемирного тяготения, учитывая релятивизм:

$$F \sim G\gamma m \frac{M}{R^3} \sim 10^{-27} \text{ дн.}$$

Таким образом, доминируют электромагнитные силы.

Длинная катушка, по виткам которой течет ток, движется со скоростью u , направленной перпендикулярно ее оси. Заряженная частица, имеющая скорость v ($c \gg v > u$), догоняет катушку и, пролетев между ее витками, вылетает под углом 90° к первоначальному направлению со скоростью, которую обозначим v_1 (рис. 8.16). Найдем относительное изменение энергии частицы (№ 8.32). В системе отсчета, связанной с катушкой, получаем начальную скорость частицы $v_2 = v - u$, а конечную $v_3 = v_1 - u$. При этом в магнитном поле сила Лоренца (7.2) перпендикулярна скорости, не меняет ее величины, т. е. $v_3 = v_2$. Поэтому $v - u = (v_1 + u)^{1/2}$. Откуда

$$v^2 - 2vu + u^2 = v_1^2 + u^2.$$

Относительное изменение энергии частицы

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{v_1^2 - v^2}{v^2} = -2 \frac{u}{v}.$$

Энергия уменьшается, часть ее передана катушке.

Другой способ решения основан на использовании формулы (8.3). В системе отсчета, которая движется относительно магнитного поля со скоростью $(-u)$, для электрического поля

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{[-u\mathbf{B}]}{c},$$

для магнитного из (8.4)

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c} [-u\mathbf{E}].$$

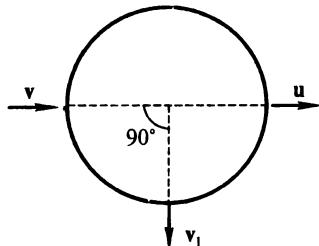


Рис. 8.16

Частица в этой системе имеет начальную скорость v . Так как в системе неподвижного магнитного поля электрическое поле $E = 0$, то из (8.3) и (8.4)

$$E' = \frac{[-uB]}{c} \quad \text{и} \quad B' = B.$$

Чтобы повернуть положительно заряженной частицы в поле B был вниз (см. рис. 8.16), оно должно быть направлено к нам относительно плоскости рисунка. При этом электрическое поле перпендикулярно u и B и направлено вверх, т. е. тормозит движение. Работа этой силы и приводит к уменьшению энергии. Лоренцева сила работы не совершает. Значит, изменение энергии

$$\Delta W = -qBu \frac{R}{c}.$$

Используя уравнение движения

$$m \frac{v^2}{r} = q \frac{vB}{c},$$

получаем, как и ранее,

$$\frac{\Delta W}{m v^2 / 2} = -2 \frac{u}{v}.$$

Один из механизмов ускорения заряженных частиц (протонов и ядер) в космических лучах в Галактике обусловлен их отражением от движущихся «магнитных облаков» — потоков ионизированной плазмы, несущей сильные «замороженные» магнитные поля. На рис. 8.17 показана граница намагниченной области AA' (область, заполненная магнитным полем, заштрихована), которая движется со скоростью u . Магнитное поле в облаке направлено перпендикулярно рисунку. Нерелятивистское заряженное ядро летит перпендикулярно границе AA' со скоростью v ($v \gg u$). Найдем относительное изменение энергии ядра при его отражении от магнитного облака, учитывая действие магнитного и электрического полей (№ 8.33). В системе отсчета, связанной с магнитным полем, скорость ядра $v_1 = v + u$. Для силы Лоренца (7.2) имеем

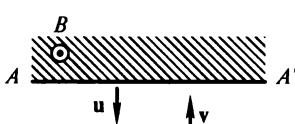


Рис. 8.17

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v}_1 \mathbf{B}].$$

При движении под действием силы Лоренца скорость не меняется по величине. После выхода из магнитного поля в системе Галактики $v_2 = v_1 + u = v + 2u$. Относительное изменение энергии

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{v_2^2 - v^2}{v^2} = \frac{4uv + 4u^2}{v^2} \approx \frac{4u}{v}.$$

Другой метод, как и в предыдущей задаче, с рассмотрением полей в системе Галактики, где начальная скорость ядра равна v . Из (8.3) и (8.4) имеем

$$E' = -\frac{uB}{c} \quad \text{и} \quad B' = B.$$

Используя уравнение, описывающее движение по окружности

$$m \frac{v^2}{R} = q \frac{vB}{c},$$

для работы электрического поля получаем

$$A = \Delta W = qE'2R = quB \frac{2R}{c} = 2umv.$$

Для относительного изменения энергии имеем

$$\frac{\Delta W}{W} = 2um \frac{v}{mv^2/2} = \frac{4u}{v}.$$

В скрещенных однородных полях E и B ($E \perp B$) из некоторой точки x_0 разлетаются электроны с одинаковыми скоростями $v \ll c$, лежащими в плоскости Oxy (рис. 8.18). Считая $E \ll B$ (СГСЭ) и пренебрегая взаимодействием электронов друг с другом, найдем, на каком расстоянии l и через какое время T они снова соберутся в одну точку, а также изобразим (качественно) траекторию частицы, если известно, что в начальный момент она покоялась в точке x_0 (№ 8.34). Перейдем в систему отсчета, в которой электрическое поле равно нулю. В соответствии с (8.3) и заданными условиями эта скорость направлена по оси x (см. рис. 8.18)

и равна

$$u = E \frac{c}{B}.$$

В этой системе частицы движутся по окружностям с угловой скоростью

$$\omega = e \frac{B}{mc}$$

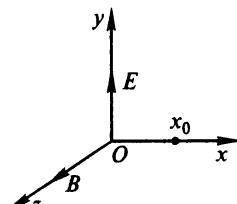


Рис. 8.18

и соответственно периодом

$$T = 2\pi m \frac{c}{eB}.$$

Через это время частицы вернутся в начальную точку, которая в неподвижной системе пройдет путь, равный

$$l = uT = 2\pi mc^2 \frac{E}{eB^2}.$$

Траектории частиц представляют циклоиды, как это было для точки обода катящегося колеса. Радиус получаем из (8.6)

$$R = mc^2 \frac{E}{eB^2}.$$

Приведем подробное решение для движения электрона, обладающего скоростью v , попадающего в однородные и постоянные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля E и B (см. рис. 8.18) (№ 8.35).

Проектируя (8.2) на оси координат и обозначая производные по времени штрихами, получаем

$$mx'' = ey' \frac{B}{c}; \quad my'' = eE - ex' \frac{B}{c}; \quad mz'' = 0. \quad (8.9)$$

Умножая второе уравнение на мнимую единицу $i = (-1)^{1/2}$ и складывая с первым, имеем

$$\frac{d(x' + iy')}{dt} + i\omega(x' + iy') = ie \frac{E}{m}, \quad (8.10)$$

где

$$\omega = \frac{eB}{mc}.$$

Решение (8.10) ищем как сумму однородного (правая часть равна нулю) и частного решения неоднородного. Для однородного имеем

$$x' + iy' = ae^{-i\omega t}. \quad (8.11)$$

Частное решение

$$x' + iy' = c \frac{E}{B}. \quad (8.12)$$

Входящее в (8.11) a — в общем случае комплексная величина $a = be^{i\alpha}$. Поскольку a умножается на $e^{-i\omega t}$ (вращается в комплексной плоскости), то, выбирая начало отсчета времени, можем придать фазе α

любое значение. Выберем так, чтобы a было вещественным. Общее решение уравнения (8.10), учитывая, что $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$, можем записать

$$x' + iy' = a \cos \omega t - ia \sin \omega t + c \frac{E}{B}. \quad (8.13)$$

Приравнивая действительные и мнимые члены, находим

$$x' = a \cos \omega t + c \frac{E}{B}; \quad y' = -a \sin \omega t. \quad (8.14)$$

Видно, что в момент $t = 0$ скорость направлена по оси x , а компоненты скорости — периодические функции. Для средних по времени значений находим

$$\langle x' \rangle = c \frac{E}{B}; \quad \langle y' \rangle = 0.$$

Скорость дрейфа $\langle x' \rangle$ перпендикулярна обоим полям. В векторном виде

$$\mathbf{v} = c \frac{[\mathbf{EB}]}{B^2}. \quad (8.15)$$

Интегрируя (8.14), получаем

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + c E \frac{t}{B}; \quad y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1). \quad (8.16)$$

Это — трохоида. При $a = -cE/B$ — это циклоида.

По двум параллельным проводящим плоскостям текут антипараллельные токи с линейной плотностью i . Они замыкаются через соединяющую плоскости перемычку толщиной δ с удельным сопротивлением ρ (рис. 8.19). В пространстве между плоскостями совершает дрейфовое движение свободный электрон. Найдем величину и направление скорости дрейфа (№ 8.80). Обозначая ширину плоскостей l , а высоту a , получаем:

для тока

$$I = il,$$

для сопротивления перемычки

$$R = \frac{\rho a}{l\delta},$$

для падения напряжения

$$U = IR = i \frac{\rho a}{\delta},$$

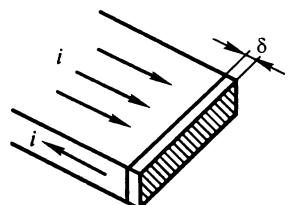


Рис. 8.19

для напряженности электрического поля

$$E = \frac{U}{a} = i \frac{\rho}{\delta}.$$

Из теоремы о циркуляции (5.6)

$$B = 4\pi \frac{i}{c}.$$

Из (8.15) получаем

$$\nu = c \frac{E}{B} = c^2 \frac{\rho}{4\pi\delta}.$$

Заряженный шарик движется в скрещенных однородных электрическом **E** и магнитном **B** полях ($E \ll B$) в среде, сила трения в которой пропорциональна скорости движения. Движение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля. Найдем величину и направление скорости его установившегося движения, если известно, что в отсутствие магнитного поля эта скорость равна v_1 (№ 8.42). Используя (8.2), для описания движения шарика получаем

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \alpha\mathbf{v}. \quad (8.17)$$

На рис. 8.20 показаны векторы полей и скорости.

В установившемся движении производная скорости по времени равна нулю. Поэтому при отсутствии магнитного поля $qE = \alpha v_1$. При наличии магнитного поля запишем уравнение в проекциях

$$qE - \alpha v_x + \frac{q}{c} v_y B = 0; \quad -\alpha v_y - \frac{q}{c} v_x B = 0. \quad (8.18)$$

Из этих уравнений находим

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{Bv_1}{Ec}; \quad v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = \frac{v_1}{\left[1 + B^2 v_1^2 / E^2 c^2\right]^{1/2}}.$$

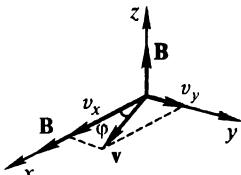


Рис. 8.20

Вместо электрического может быть гравитационное поле. Такое же условие в отсутствие магнитного поля. Кроме того, при отсутствии трения задана скорость дрейфа v_d (№ 8.41).

Из решения уравнений (8.9) следует, что дрейф возникает при любой постоянной силе, например силе тяжести **F**. В уравнении (8.2),

а потом и в (8.17) записываем $\mathbf{E} = \mathbf{F}/e$ (в последнем соответственно $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$). Для скорости дрейфа из (8.15) следует

$$\mathbf{v}_d = c \frac{[\mathbf{FB}]}{B^2 q}. \quad (8.19)$$

Таким образом, при отсутствии магнитного поля $F = \alpha v_1$, а для скорости дрейфа получаем

$$v_d = \frac{cF}{qB} = c\alpha \frac{v_1}{qB}.$$

Подставляя в уравнения (8.18) $E = F/q$ и решая их, находим

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{v_1}{v_d}; \quad v = (v_x + v_y)^{1/2} = \frac{v_1}{[1 + v_1^2/v_d^2]^{1/2}}.$$

Однородный по плотности плоскопараллельный слой электронов удерживается в вакууме однородным магнитным полем с индукцией $B = 57$ Гс (рис. 8.21). Поле параллельно поверхности слоя. Толщина слоя $\delta = 1$ см. Плотность электронов в слое $n = 10^7$ см⁻³. В этих условиях электроны движутся параллельно поверхности слоя в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (дрейф). Найдем скорость дрейфа v_d в зависимости от расстояния x до плоскости симметрии. А также определим разность потенциалов $\Delta\phi$ между плоскостью симметрии и внешними поверхностями слоя. Зная, что для электронов $e/m = 5,27 \cdot 10^{17}$ ед. СГСЭ (№ 8.36) однородный слой заряженных частиц (в данном случае электронов) создает электрическое поле. Учитывая симметрию и применяя теорему Гаусса (1.12), получаем $E = -4\pi n e h$ внутри слоя и $E_c = -2\pi n e \delta$ — вне слоя (см. рис. 8.21). Движение электронов внутри слоя в скрещенных электрическом и магнитном полях описывается уравнениями (8.9), которые в данных наименованиях координат имеют вид

$$mx'' = -eE - ey' \frac{B}{c}; \quad my'' = ex' \frac{B}{c}; \quad mz'' = 0. \quad (8.20)$$

В соответствии с (8.16) получаем

$$\begin{aligned} x &= r \sin \omega t; \quad y = r \cos \omega t - cE \frac{t}{B}; \\ \omega &= e \frac{B}{cm}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Таким образом, заряд наряду с круговым движением дрейфует вдоль оси y (перпенди-

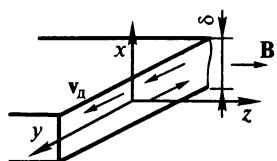


Рис. 8.21

кулярно E и B). В слое частицы удерживаются в результате равновесия электрической и лоренцевой сил

$$E + y' \frac{B}{c} = 0.$$

Отсюда скорость дрейфа

$$v_d = -\frac{cE}{B}.$$

Колебания в линейно меняющемся поле описываются уравнением

$$mx'' + 4\pi e^2 nx = 0. \quad (8.22)$$

Частота их называется плазменной частотой

$$\omega_p^2 = 4\pi e^2 \frac{n}{m}. \quad (8.23)$$

Воспользовавшись этим определением плазменной частоты, выражением для электрического поля

$$E = \omega_p^2 m \frac{x}{e}$$

и формулой для циклотронной частоты (8.5), получаем

$$v_d = \omega_p^2 \frac{x}{\omega}. \quad (8.24)$$

Для разности потенциалов имеем

$$\Delta\varphi = \int_0^{x/2} 4\pi enx dx = \pi en \frac{\delta^2}{2}. \quad (8.25)$$

Электронный пучок представляет собой тонкостенную трубку, движущуюся в направлении своей оси и вращающуюся относительно нее в вакуумированном пространстве между электродами соосного с пучком цилиндрического конденсатора (радиус внутреннего электрода r_1 , внешнего r_2). Считая пучок бесконечно тонкой заряженной поверхностью, свернутой в круглую трубу радиусом r_0 , а полную скорость электронного пучка заданной и равной v_0 , найдем максимальный ток I_{max} , который может быть проведен в таком пучке через пространство, ограниченное электродами конденсатора. Конденсатор электрически закорочен, его длина существенно превышает зазор между электродами (№ 8.37).

Обозначая поверхностный заряд пучка σ , получаем заряд пучка на единицу длины $\chi = 2\pi r_0 \sigma$. Вводя заряд на единицу длины на внутреннем электроде χ_1 , из выражения для напряженности электрического поля, имеющего цилиндрическую симметрию, (1.16) получаем, что поле между r_1 и r_0 равно

$$E_1 = \frac{2\chi_1}{r},$$

а поле между r_0 и r_2 равно

$$E_2 = \frac{2(\chi + \chi_1)}{r}.$$

Используя связь напряженности поля с потенциалом (2.6), находим

$$\begin{aligned}\varphi(r_0) - \varphi(r_1) &= -2\chi_1 \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right); \\ \varphi(r_2) - \varphi(r_0) &= -2(\chi + \chi_1) \ln\left(\frac{r_2}{r_0}\right).\end{aligned}$$

Из условия закороченности конденсатора $\varphi(r_2) = \varphi(r_1)$ получаем

$$\chi_1 = -\chi \frac{\ln(r_2/r_0)}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Скорость движения электронов v_0 складывается из скорости вращения по окружности v_u и скорости вдоль оси пучка

$$v_n = (v_0^2 - v_u^2)^{1/2}.$$

Для движения электрона с зарядом e (отрицательным) и массой m по окружности имеем

$$m \frac{v_u^2}{r_0} = -e \left(\frac{2\chi_1}{r_0} + 2\pi\sigma \right).$$

Используя полученные ранее связи, записываем

$$v_u^2 = \alpha\chi,$$

где

$$\alpha = \frac{e}{m} \frac{\ln(r_1 r_2 / r_0^2)}{\ln(r_2 / r_1)}.$$

Для тока в пучке получаем

$$I = \chi v_n = \chi (v_0^2 - \alpha \chi)^{1/2}.$$

Из условия максимума тока

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0$$

получаем значение

$$\chi = \frac{2}{3} \frac{v_0^2}{\alpha}.$$

В результате

$$I_{\max} = \frac{2v_0^3}{3\sqrt{3}\alpha}.$$

Такой же полый электронный пучок, имеющий форму тонкостенной длинной трубки, движется в вакууме в направлении своей оси, вдоль которой приложено внешнее однородное магнитное поле, и одновременно вращается относительно оси с частотой Лармора (8.8)

$$\Omega = -\frac{eB}{2mc}.$$

Считая пучок бесконечно тонкой заряженной поверхностью, свернутой в трубку круглого сечения, а полную скорость электронов пучка заданной и равной v_0 (много меньшей скорости света c), найдем максимальный ток I_{\max} , который можно провести в таком пучке (№ 8.40). Как и ранее, имеем, что скорость движения электронов v_0 складывается из скорости вращения по окружности v_u и скорости вдоль оси пучка

$$v_n = (v_0^2 - v_u^2)^{1/2}.$$

Для движения электрона с зарядом e (отрицательным) и массой m по окружности имеем

$$mr_0\Omega^2 = -e \left(E + r_0 \frac{\Omega B}{c} \right),$$

где E — напряженность собственного электрического поля пучка, которое действует на электрон в пучке. Обозначая поверхностную плотность заряда пучка σ , подставляя $E = 2\pi\sigma$ и выражая B через Ω , находим

$$\Omega^2 = \frac{e}{m} \frac{2\pi\sigma}{r_0}.$$

Соответственно

$$v_{\text{u}}^2 = r_0^2 \Omega = \frac{e}{m} 2\pi \sigma r_0.$$

Для тока в пучке получаем

$$I = 2\pi \sigma r_0 v_{\text{u}} = \frac{m}{e} v_{\text{u}}^2 (v_0^2 - v_{\text{u}}^2).$$

Из условия максимума

$$\frac{\partial I}{\partial v_{\text{u}}} = 0$$

находим

$$I_{\max} = \frac{2mv_0^3}{3\sqrt{3}e}.$$

Вдоль оси находящегося в вакууме **соленоида** с плотностью намотки n и током I из электронной пушки инжектируется цилиндрический пучок электронов (рис. 8.22). Вследствие пересечения частицами сходящихся магнитных силовых линий в области неоднородного поля у торца соленоида пучок приобретает однородное вращение. Полагая, что пушка находится вдали от торца соленоида, и не принимая во внимание радиальные скорости электронов, приобретенные при движении в неоднородном магнитном поле, найдем угловую скорость вращения пучка (№ 8.38).

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью частиц, вылетающих из пушки. В ней из-за движения неоднородной части магнитного поля соленоида происходит изменение потока магнитного поля, и появляется азимутальное электрическое поле. С помощью (5.32) получаем

$$E 2\pi r = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Считаем, что это поле заставляет электроны вращаться по окружности постоянного радиуса r . Изменение момента количества движения электрона (масса m , заряд e) связано с моментом сил

$$\frac{d(mr^2\omega)}{dt} = -eEr = \frac{e}{2\pi c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Начальный поток $\Phi_{\text{n}} = 0$, так как пушка находится вдали от соленоида.

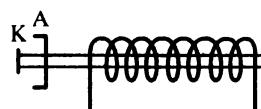


Рис. 8.22

Конечный поток

$$\Phi_k = B\pi r^2,$$

где B — магнитное поле соленоида (5.21):

$$B = 4\pi n \frac{I}{c}.$$

После интегрирования имеем

$$\omega_k = \frac{eB}{2mc},$$

что в два раза меньше (8.5) — циклотронной частоты

$$\omega = \frac{eB}{mc}.$$

Металлическое кольцо радиусом r и массой m падает в магнитном поле, вертикальная составляющая индукции которого зависит от высоты h по закону $B(h) = B_0(1 - ah)$, где a — константа. Плоскость кольца при падении горизонтальна, омическое сопротивление R . Найдем зависимость скорости его падения от времени t (№ 8.46). Используя (7.1), получаем

$$I = \frac{\epsilon}{R} = -\frac{\pi r^2}{cR} \frac{dB}{dt} = \pi r^2 B_0 a \frac{v}{cR},$$

где

$$v = \frac{dh}{dt}.$$

При таком токе кольцо представляет магнитный диполь с магнитным моментом (5.5)

$$p = I\pi \frac{r^2}{c}.$$

Сила, действующая на диполь в меняющемся по пространству магнитном поле, в соответствии с (1.11) и (6.21) равна

$$F = p \frac{dB}{dh} = -\frac{(\pi r^2 a B_0)^2}{c^2 R}.$$

Уравнение движения кольца в магнитном поле и поле тяжести

$$m \frac{dv}{dt} = -\left(\pi r^2 a B_0\right)^2 \frac{v}{c^2 R} - mg. \quad (8.26)$$

Установившаяся скорость при ускорении, равном нулю:

$$v_{\text{уст}} = -mg \frac{c^2 R}{\left(\pi r^2 a B_0\right)^2}.$$

Знак минус соответствует тому, что положительные направления координаты (высоты) и скорости выбраны против силы тяжести (вверх). Интегрируя уравнение движения при условии, что в начальный момент скорость равна нулю, находим

$$v = v_{\text{уст}} (1 - e^{-t/\tau}),$$

где

$$\tau = mg \frac{c^2}{(\pi r^2 a B_0)^2}.$$

Короткозамкнутой проволочной рамке в форме квадрата со стороной a , массой m и омическим сопротивлением R , находящейся в магнитном поле, сообщена начальная скорость v_0 в направлении, перпендикулярном одной из сторон в плоскости рамки. Вектор магнитной индукции B направлен перпендикулярно плоскости рамки, а величина его линейно изменяется в направлении скорости (x) так, что

$$\frac{dB}{dx} = k.$$

Найдем скорость рамки через время t после начала движения (№ 8.47). Так как магнитный поток через рамку меняется, возникает ЭДС (\mathcal{E}), по рамке течет ток. Используя (7.1), находим

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{a^2}{c} \frac{dB}{dt} = -\frac{a^2}{c} \frac{dB}{dx} v = -\frac{a^2}{c} kv.$$

Потери кинетической энергии идут на джоулеву теплоту (4.18)

$$m \frac{v_0^2}{2} - m \frac{v^2}{2} = \int_0^t \mathcal{E}^2 \frac{dt}{R}.$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$-mv \frac{dv}{dt} = a^4 k^2 \frac{v^2}{c^2 R}.$$

Откуда

$$\frac{dv}{v} = -a^4 k^2 \frac{dt}{c^2 R m}.$$

Интегрируя, находим

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{a^4 k^2 t}{c^2 R m}\right).$$

Алюминиевое кольцо, сопротивление которого пренебрежимо мало, надето на сердечник электромагнита и лежит на подставке в верхней части сердечника (рис. 8.23). Магнитный поток, посылаемый сердечником через кольцо, нарастает от нуля до конечного значения $\Phi_0 = 10 \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$. Нарастание потока происходит настолько быстро, что за это время кольцо практически не успевает сместиться. Найдем высоту h , на которую подскочит кольцо, если его масса $m = 100 \text{ г}$, а индуктивность $L = 100 \text{ см}$ (№ 8.62). Изменение потока магнитного поля через кольцо приводит к возникновению в кольце тока I и появлению магнитного момента

$$p = \frac{IS}{c},$$

где S — площадь кольца. Благодаря градиенту внешнего поля $B_{\text{внеш}}$ (от катушки с сердечником) на кольцо, являющееся магнитным ди-полем, действует сила типа (1.11)

$$F = -p \frac{dB_{\text{внеш}}}{dx}.$$

Координата x направлена по оси сердечника вверх. Так как поток внешнего поля через кольцо равен $\Phi_{\text{внеш}} = B_{\text{внеш}}S$, то для силы получаем

$$F = -\frac{I}{c} \frac{d\Phi_{\text{внеш}}}{dx}.$$

Используя (7.1) при быстром нарастании магнитного поля и пренебрежимо малом омическом сопротивлении кольца, получаем сохранение полного потока магнитного поля, который складывается из потоков внешнего поля и собственного поля кольца $\Phi_{\text{полн}} = \Phi_{\text{внеш}} + \Phi_{\text{соб}}$. Так как в начальный момент никакого поля не было, то имеем $\Phi_{\text{внеш}} = -\Phi_{\text{соб}}$. Из (5.28)

$$\Phi_{\text{соб}} = L \frac{I}{c},$$

где L — индуктивность кольца. Таким образом, для силы получаем

$$F = \frac{1}{L} \Phi_{\text{внеш}} \frac{d\Phi_{\text{внеш}}}{dx}.$$

Отсюда находим работу, которая создает кинетическую энергию кольца. Так как за время нарастания магнитного поля оно практически не успевает сдвинуться, то

$$A = \frac{1}{L} \frac{\Phi_0^2}{2} = mgh.$$

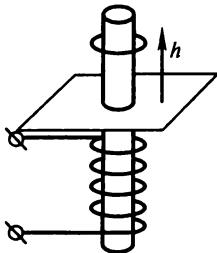


Рис. 8.23

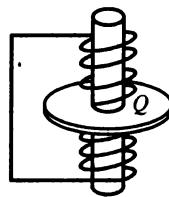


Рис. 8.24

Начиная двигаться, кольцо быстро уходит из области влияния магнитного поля, и потоками магнитного поля там можно пренебречь.

Рассмотрим систему (рис. 8.24), представляющую диск из изолятора, который может свободно вращаться на вертикальной оси и на котором размещены заряды, суммарная величина которых $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл, и в его центре вертикально закрепленный длинный сверхпроводящий соленоид (радиусом $r_0 = 2$ см), замкнутый накоротко, по которому циркулирует ток, создающий в центре соленоида индукцию $B_0 = 10^4$ Гс. Найдем момент импульса (L), который получит система при разогреве соленоида, прекращении тока и исчезновении магнитного поля (№ 8.51).

При изменении магнитного потока вокруг него возникает электрическое поле, которое можно найти из циркуляции (5.22)

$$E 2\pi r = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитный поток в основном идет внутри соленоида, а вне его, где расположены заряды, им можно пренебречь. Момент электрической силы, действующей на заряд q , расположенный на расстоянии r от оси, равен

$$M = \frac{q}{2\pi c} \frac{d\Phi}{dt} r = qr_0^2 \frac{dB/dt}{2c}.$$

Видно, что он не зависит от расстояния r , поэтому для нескольких зарядов просто складывается. Суммарный момент сил изменяет момент количества движения

$$\frac{dL}{dt} = Qr_0^2 \frac{dB/dt}{2c}.$$

Отсюда

$$L = Qr_0^2 \frac{B_0}{2c} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}.$$

С точки зрения механики, кажется, что здесь нарушается закон сохранения импульса. В действительности до прекращения тока в соленоиде, благодаря наличию электрического и магнитного полей, как будет далее показано, существует поток электромагнитной энергии, определяемый вектором Пойнтинга, и соответствующий ему момент количества движения, который затем при исчезновении магнитного поля сохраняется.

Металлический шарик массой m , с зарядом q подвешен на нити длиной L и вращается вокруг вертикальной оси (**конический маятник**). Обозначая расстояние шарика от оси вращения r , угловую скорость вращения ω_0 , ускорение в поле тяжести g и отклонение нити от оси вращения α , получаем

$$\omega_0^2 \frac{r}{g} = \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{r}{L}.$$

Откуда

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{L} \right)^{1/2}.$$

Если включить параллельное оси вращения однородное магнитное поле с индукцией B , то на заряженный шарик будет действовать вихревое электрическое поле с напряженностью E , которая определяется из циркуляции (7.5)

$$E 2\pi r = -\frac{1}{c} \pi r^2 \frac{dB}{dt}.$$

Сила $F = qE$. Импульс

$$F dt = d(mv) = -rq \frac{dB}{2c}.$$

Для угловой скорости, если \mathbf{B} направлено так же, как ω , и сила замедляет вращение, имеем

$$\omega = \frac{v}{r} = \omega_0 - q \frac{B}{2mc}.$$

При противоположном направлении \mathbf{B} вращение на столько же ускоряется.

Для изменения кинетической энергии в случае одинакового направления поля и угловой скорости получаем уменьшение, а в противоположном случае увеличение (№ 8.54) на

$$\Delta W = mr^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = mr^2 \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{2} = mr^2 \frac{qB}{4mc} \left(2\omega_0 + \frac{qB}{2mc} \right).$$

Если задан потенциал U шарика (№ 8.53), то подставляем $q = Ur$, где r — радиус шарика. При вращении в постоянном магнитном поле, направленном как ω , сила Лоренца (8.1) уменьшает центростремительную силу. Без магнитного поля для угла отклонения нити имеем

$$\omega_0^2 \frac{r}{g} = \frac{r}{l}.$$

Откуда

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

При магнитном поле

$$\omega^2 - q\omega \frac{B}{mc} = \frac{g}{l} = \omega_0^2.$$

Таким образом,

$$\omega - \omega_0 = q\omega \frac{B}{2mc\omega_0} \approx q \frac{B}{2mc}.$$

Постоянный короткий магнит с магнитным моментом, ориентированным вертикально, сначала удерживается над сверхпроводящей плоскостью на расстоянии $a = 2$ см, а затем отпускается (рис. 8.25). Оценим высоту h , на которую он подскочит, если масса магнита $m = 15$ г, объем $V = 2$ см³, намагниченность $M = 10^3$ Гс (№ 8.57). При оценке энергии взаимодействия магнита со сверхпроводящей плоскостью воспользуемся методом «изображений», т. е. будем рассматривать взаимодействие его с другим, который обеспечивает такие же граничные условия, как на поверхности сверхпроводника. Для магнитного момента магнита имеем $p = VM$. В дипольном приближении из (7.11) для нашего случая находим

$$B = 2 \frac{p}{(2r)^3},$$

где r — расстояние магнита от сверхпроводящей плоскости. В соответствии с (1.10) сила отталкивания

$$F = 6 \frac{p^2}{(2r)^4}. \quad (8.27)$$

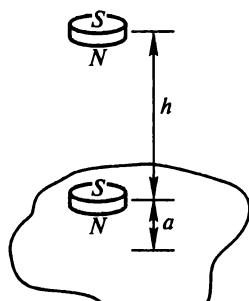


Рис. 8.25

Сила отталкивания и приобретаемая энергия положительны, так как направление диполя «изображения» противоположно диполю магнита. Энергия определяется работой этой силы $dW = Fdr$. Надо иметь в виду, что такая же работа тратится при перемещении «изображения», фактически расходуясь на изменение токов, текущих по поверхности сверхпроводника.

Из закона сохранения энергии после интегрирования следует

$$2 \frac{(vM)^2}{(2a)^3} = 2 \frac{(vM)^2}{(2a + 2h)^3} + mgh.$$

Считая, что в верхнем положении взаимодействие магнита со сверхпроводником мало по сравнению с начальным, находим

$$h = \frac{(vM)^2}{(8mga)^3} = 4 \text{ см.}$$

Используя полную формулу, получаем 4,166 см, т. е. приближение оправдано.

Такой магнит может находиться над сверхпроводящей плоскостью в равновесии или совершать, например, малые гармонические колебания. Используя (8.27), получаем для равновесия на высоте a над сверхпроводящей поверхностью

$$mg = 6 \frac{p^2}{(2a)^4} = \frac{3}{8} \frac{p^2}{a^4}.$$

При малом отклонении x (например, вниз) от равновесия

$$mx'' = mg - \frac{3}{8} \frac{p^2}{(a-x)^4} \approx mg - 3 \frac{p^2(1+4x/a)}{8a^4}.$$

Отсюда получаем (№ 8.56)

$$x'' + 4g \frac{x}{a} = 0; \quad \omega = 2 \left(\frac{g}{a} \right)^{1/2}.$$

Найдем отношение периодов колебаний двух аналогичных магнитов одинаковой массы, если их магнитные моменты отличаются в 16 раз и оси при колебаниях остаются параллельны сверхпроводящей плоскости (№ 8.58). В случае диполя, параллельного сверхпроводящей поверхности, диполь, соответствующий «изображению», параллелен первому диполю. Они отталкиваются. Силу на-

ходим с помощью (1.9) и (1.11). Она оказывается вполовину меньше (8.27). Обозначая отклонение от равновесного положения x , получаем

$$F = \frac{3}{16} \frac{p^2}{(a+x)^4} \approx \frac{3}{16} \frac{p^2}{a^4} \left(1 - 4 \frac{x}{a}\right).$$

Уравнение движения магнита с учетом силы тяжести

$$mx'' = F - mg \quad \text{или} \quad x'' + \omega^2 x = 0, \quad (8.28)$$

где частота и положение равновесия

$$\omega^2 = \frac{3}{4} \frac{p^2}{ma^5}; \quad a = \left(\frac{3}{16} \frac{p^2}{mg}\right)^{1/4}. \quad (8.29)$$

Поэтому $\omega^2 \sim p^{-1/2}$, период

$$T \sim p^{1/4} \quad \text{и} \quad \frac{T_1}{T_0} \sim \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/4} = 2.$$

Если в 16 раз отличаются массы, а магнитные моменты одинаковые и перпендикулярные сверхпроводящей поверхности (№ 8.59), то из (8.27) и (8.28) следует вместо (8.29) для частоты и положения равновесия

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{p^2}{ma^5}; \quad a = \left(\frac{3}{8} \frac{p^2}{mg}\right)^{1/4}.$$

Поэтому $\omega^2 \sim m^{1/4}$, период

$$T \sim m^{-1/8} \quad \text{и} \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{2^{1/2}}.$$

Рассмотрим сверхпроводящий шарик радиусом r и массой m , который со скоростью v подлетает к области постоянного магнитного поля B . Оценим максимальную скорость, при которой он отразится от поля (№ 8.63). При вхождении шарика на расстояние x в область поля на него действует тормозящая сила давления (7.12), равная

$$F = \frac{B^2}{8\pi} \pi [r^2 - (r-x)^2].$$

Уравнение движения шарика

$$m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = -\frac{B^2}{8} (2rx - x^2).$$

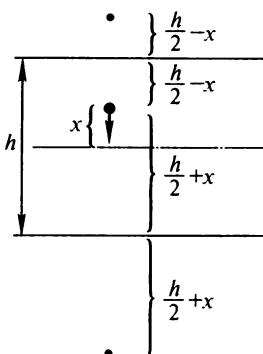


Рис. 8.26

Оценим частоту малых колебаний монополя в направлении нормали к плоскостям. Все размеры конденсатора много больше расстояния h между пластинами (№ 8.60). Чтобы обеспечить отсутствие нормальной к сверхпроводящей поверхности компоненты магнитного поля, необходимо, чтобы «изображение» магнитного заряда имело тот же знак и находилось в симметричном положении. Так как сверхпроводящих поверхностей две, то потребуется целая система зарядов. Для оценки сил, возникающих при небольшом отклонении заряда от начального положения, достаточно учесть лишь ближайшие изображения. На рис. 8.26 показаны заряд и изображения. При отклонении от средней линии, равном x , для силы, действующей на заряд (подобно закону Кулона), получаем

$$F = \frac{b^2}{(h+2x)^2} - \frac{b^2}{(h-x)^2} \approx -8b^2 \frac{x}{h^3}.$$

Уравнение колебаний заряда

$$mx'' + 8b^2 \frac{x}{h^3} = 0.$$

Откуда для частоты получаем

$$\omega^2 = 8 \frac{b^2}{mh^3}.$$

В однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} помещена тонкая металлическая лента шириной l (рис. 8.27) и толщиной a так, что плоскость ленты перпендикулярна к индукции \mathbf{B} . По ленте пропускают ток I . Найдем разность потенциалов U , возникающую между

Если шарик не полностью погрузится в поле ($x < 2r$), то сила давления магнитного поля вытолкнет его. Интегрируя уравнение движения (скорость от v до нуля, x от нуля до $2r$), получаем

$$v < \frac{Br^{3/2}}{(3m)^{1/2}}.$$

Монополь Дирака (элементарная частица, пока не обнаруженная, массой m , обладающая магнитным зарядом b) находится строго посередине зазора между пластинами незаряженного разомкнутого плоского конденсатора, изготовленного из идеального сверхпроводника. Оценим частоту малых колебаний монополя в направлении нормали к плоскостям. Все размеры конденсатора много больше расстояния h между пластинами (№ 8.60). Чтобы обеспечить отсутствие нормальной к сверхпроводящей поверхности компоненты магнитного поля, необходимо, чтобы «изображение» магнитного заряда имело тот же знак и находилось в симметричном положении. Так как сверхпроводящих поверхностей две, то потребуется целая система зарядов. Для оценки сил, возникающих при небольшом отклонении заряда от начального положения, достаточно учесть лишь ближайшие изображения. На рис. 8.26 показаны заряд и изображения. При отклонении от средней линии, равном x , для силы, действующей на заряд (подобно закону Кулона), получаем

$$F = \frac{b^2}{(h+2x)^2} - \frac{b^2}{(h-x)^2} \approx -8b^2 \frac{x}{h^3}.$$

Уравнение колебаний заряда

$$mx'' + 8b^2 \frac{x}{h^3} = 0.$$

Откуда для частоты получаем

$$\omega^2 = 8 \frac{b^2}{mh^3}.$$

В однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} помещена тонкая металлическая лента шириной l (рис. 8.27) и толщиной a так, что плоскость ленты перпендикулярна к индукции \mathbf{B} . По ленте пропускают ток I . Найдем разность потенциалов U , возникающую между

краями ленты (т. е. на расстоянии l), если концентрация свободных электронов в металле n (частный случай явления Холла) (№ 8.64). Обозначая заряд электрона e , для тока получаем $I = enlv$. Отсюда определяем скорость электронов и подставляем ее в выражение для силы Лоренца (8.1), которая, отклоняя электроны, создает электрическое поле

$$E = \frac{1}{c} [vB].$$

Для разности потенциалов имеем

$$U = El = \frac{IB}{cen\alpha}.$$

Вдоль трубы с внутренним и наружным радиусами R_1 и R_2 течет ток I . Найдем, какая разность потенциалов U установится между внутренней и наружной поверхностями трубы, считая, что число свободных электронов в единице объема металла равно n (№ 8.68). Электрический ток создает в трубе магнитное поле. На электроны, движущиеся в этом поле, действует сила Лоренца (8.1). Электроны скапливаются на поверхности и создают электрическое поле, уравновешивающее силу Лоренца и приводящее к разности потенциалов U (явление Холла). Для плотности тока в трубе имеем

$$j = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = env,$$

где e — заряд электрона; v — его скорость.

Из (8.1) для равновесия получаем

$$E = \frac{F}{e} = \frac{vB}{c} = \frac{IB}{cen\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Из (5.6) имеем

$$2\pi rH = \frac{4\pi}{c} \int_{R_1}^r \frac{I2\pi rdr}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{4\pi}{c} I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Откуда

$$B = H = 2I \frac{r - R_1^2/r}{R_2^2 - R_1^2}.$$

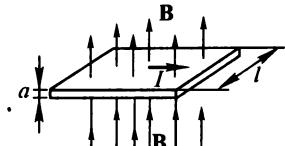


Рис. 8.27

Разность потенциалов

$$U = \int_{R_1}^{R_2} Edr = \frac{2I^2}{c^2en\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) dr = \\ = 2I^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\ln(R_2^2/R_1^2)}{R_2^2/R_1^2 - 1} \right] \left[c^2en\pi(R_2^2 - R_1^2) \right]^{-1}.$$

В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними l помещен в поток проводящей жидкости с проводимостью λ (рис. 8.28), двигающейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Система находится в магнитном поле с индукцией B , направленной перпендикулярно плоскости рисунка. Найдем, какая мощность N выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R (№ 8.69). Сила Лоренца (8.1) вызывает движение заряженных частиц, работает как электродвижущая сила $\mathcal{E} = vBl$. Для тока в цепи имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Здесь внутреннее сопротивление

$$r = \frac{1}{\lambda} \frac{l}{S}.$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи (4.18),

$$N = I^2 R = \frac{v^2 B^2 l^2 R}{[(1/\lambda)l/S + R]^2}.$$

Длинная незаряженная пластина из немагнитного металла движется равномерно в однородном магнитном поле B со скоростью v . Векторы B и v взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластины (рис. 8.29). Найдем поверхностную плотность электри-

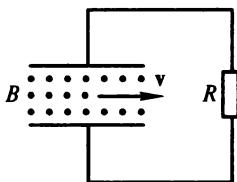


Рис. 8.28

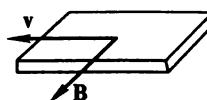


Рис. 8.29

ческих зарядов на плоскостях пластиинки, возникающих вследствие ее движения, и их знаки, если векторное произведение $[vB]$ направлено вверх. Магнитным полем зарядов будем пренебречь (№ 8.70). Используя (8.1), получаем, что электроны будут отклоняться к нижней стороне пластиинки, а верхняя получит положительный заряд. Плотность заряда σ определяется из соотношения

$$E = \frac{vB}{c} = 4\pi\sigma.$$

Откуда

$$\sigma = \frac{vB}{4\pi c}.$$

Длинный сплошной алюминиевый цилиндр радиусом R заряжен электричеством и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси. Заряд на единицу длины цилиндра равен χ . Найдем разность потенциалов U между осью и поверхностью цилиндра, возникающую из-за его вращения, пренебрегая центробежной силой (№ 8.67). За счет вращения заряда, который находится на поверхности цилиндра, с периодом T имеем круговой ток на единицу длины цилиндра

$$I = \frac{\chi}{T} = \frac{\chi\omega}{2\pi}.$$

Из теоремы о циркуляции (5.6) следует, что снаружи цилиндра магнитного поля нет, а внутри оно постоянно и направлено по оси в ту же сторону, что и угловая скорость, и равно

$$H = 4\pi \frac{I}{c} = 2\chi \frac{\omega}{c}.$$

В соответствии с (8.1) на заряды внутри цилиндра действует сила Лоренца, которая создает меняющуюся с расстоянием напряженность электрического поля

$$E = \frac{vH}{c} = 2\chi\omega^2 \frac{r}{c^2}.$$

Для нахождения разности потенциалов надо вычислить интеграл

$$U = 2\chi \frac{\omega^2}{c^2} \int_0^R r dr = \left(\omega \frac{R}{c} \right)^2 \chi.$$

Длинный незаряженный цилиндр из немагнитного металла радиусом $R = 12,56$ см равномерно вращается в однородном магнит-

ном поле $B = 300$ Гс, параллельном оси цилиндра с угловой скоростью $\omega = 60$ рад/с. Найдем поверхностную плотность зарядов, возникающих вследствие вращения на боковой поверхности цилиндра, и их знак, если векторы ω и \mathbf{B} направлены в одну сторону, пренебрегая магнитным полем возникающих зарядов и инерционными эффектами электронов (№ 8.65). Сила Лоренца (8.1) действует на вращающиеся заряды подобно электрическому полю

$$\mathbf{E} = \frac{[\mathbf{v}\mathbf{B}]}{c}.$$

С помощью (1.12) получаем

$$\sigma = \frac{B\omega R}{4\pi c}.$$

Полый диэлектрический цилиндр с внутренним r_1 и наружным r_2 радиусами равномерно вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} параллелен оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала цилиндра равна ϵ . Найдем:

- 1) объемную плотность $\rho_{\text{связ}}$ связанных зарядов, появившихся в диэлектрике вследствие вращения в магнитном поле;
- 2) полный объемный заряд q на единицу длины цилиндра;
- 3) плотность поверхностных зарядов на обеих поверхностях цилиндра (№ 8.66).

В соответствии с (8.1) на заряд e , вращающийся вместе с цилиндром, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] = \frac{e}{c} [[\omega\mathbf{r}]\mathbf{B}] = \frac{e}{c} (\omega\mathbf{B})\mathbf{r}.$$

Используя (3.2) и (3.9), находим поляризацию, которую вызывает эта сила:

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{c} (\omega\mathbf{B})\mathbf{r} = (\epsilon - 1) \frac{(\omega\mathbf{B})\mathbf{r}}{4\pi c}.$$

Используя (1.21), откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial r^2}{\partial r} = 2,$$

и (3.4), находим

$$\rho_{\text{связ}} = -(\epsilon - 1) \frac{\omega\mathbf{B}}{2\pi c}.$$

Интегрируя по объему единицы длины цилиндра, имеем

$$q = \int \rho_{\text{связ}} dv = -(\epsilon - 1)(\omega B) \frac{r_2^2 - r_1^2}{2c}.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней и внешней поверхности цилиндра:

$$\sigma_{1\text{связ}} = -(\epsilon - 1)(\omega B) \frac{r_1}{4\pi c}; \quad \sigma_{2\text{связ}} = (\epsilon - 1)(\omega B) \frac{r_2}{4\pi c}.$$

Диэлектрическая жидкость проницаемостью ϵ протекает между пластинами плоского конденсатора (расстояние между пластинами равно l) со скоростью $v \ll c$. Перпендикулярно направлению движения жидкости и параллельно обкладкам конденсатора приложено однородное постоянное магнитное поле B . Найдем напряжение U между обкладками конденсатора и поверхностную плотность зарядов диэлектрика σ (№ 8.71). В системе отсчета, связанной с конденсатором, задано поле B , а электрическое поле вне конденсатора $E = 0$. В системе отсчета, связанной с движущейся жидкостью, в соответствии с (8.4) и (8.3) магнитное поле не меняется, а электрическое поле вне конденсатора

$$E' = E + \frac{1}{c} [vB] = \frac{1}{c} [vB].$$

При отсутствии свободных зарядов на границе диэлектрика из (3.7) имеем непрерывность электрической индукции $D' = E' = D'' = \epsilon E''$. Таким образом, в системе отсчета, связанной с диэлектрической жидкостью, имеем для напряженности электрического поля

$$E'' = \frac{[vB]}{\epsilon c}.$$

Переходя обратно в систему отсчета, связанную с конденсатором, получаем внутри диэлектрика

$$E = E'' - \frac{[vB]}{c} = [vB] \frac{\epsilon - 1}{\epsilon c}.$$

Из (2.6) для разности потенциалов находим

$$U = -[vB] \frac{\epsilon - 1}{\epsilon c}.$$

Из (3.8)

$$P = \frac{D - E}{4\pi},$$

а из (3.3)

$$|\sigma| = P_n = |[\mathbf{vB}]| \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon c}.$$

Диэлектрическая незаряженная пластина с проницаемостью $\epsilon = 3$ **движется между обкладками плоского конденсатора со скоростью** $v = 1$ **м/с.** **Перпендикулярно направлению движения пластины и параллельно обкладкам конденсатора приложено однородное постоянное магнитное поле** $B = 1,5$ **Тл.** **Найдем поверхностную плотность зарядов на обкладках конденсатора и поверхностную плотность поляризационных зарядов диэлектрика, если к конденсатору приложена разность потенциалов** $U = 1$ **В.** **Расстояние между пластинами конденсатора** $h = 2$ **см и равно толщине пластины диэлектрика** (№ 8.84). **Разность потенциалов создает внешнее поле внутри конденсатора** $E = U/h$. **В системе отсчета, связанной с движущимся диэлектриком, получаем из (8.3)**

$$E' = E \pm \frac{vB}{c}.$$

Знак зависит от направления магнитного поля. Для вектора поляризации из (3.2) и (3.9) имеем

$$P = (\epsilon - 1) \frac{E'}{4\pi}.$$

Отсюда поверхностная плотность поляризационных зарядов в соответствии с (3.3)

$$\sigma_c = (\epsilon - 1) \frac{U/h \pm vB/c}{4\pi}.$$

При знаке плюс это равно $0,91 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², при знаке минус — $0,86 \cdot 10^{-9}$ Кл/м². Для плотности свободных зарядов на обкладках конденсатора из (3.7) и (3.8) получаем

$$\sigma = \frac{D}{4\pi},$$

где

$$D = E + 4\pi P = \epsilon E \pm (\epsilon - 1) \frac{vB}{c}.$$

При знаке плюс плотность зарядов — $1,33 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², при знаке минус — $1,3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м².

На рис. 8.30 показан вертикально расположенный **цилиндрический конденсатор** (радиус наружного цилиндра R , внутреннего — r ,

высота h , масса внутренней обкладки m , $r \ll h$) с зарядом Q . Найдем период малых колебаний внутренней обкладки в поле тяжести (№ 8.77). Из формулы (3.57) для емкости цилиндрического конденсатора в случае сдвигания внутренней обкладки на расстояние x получаем

$$C(x) = \frac{1}{2} \frac{h-x}{\ln(R/r)}.$$

Из (3.67) для энергии конденсатора имеем

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}.$$

Для силы, действующей в направлении x , имеем

$$F_x = - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_Q. \quad (8.30)$$

Дифференцируя и подставляя это в уравнение движения, получаем

$$mx'' = mg - Q^2 \frac{\ln(R/r)}{(h-x)^2}.$$

Положение равновесия x_0 (при $x'' = 0$) определяется из соотношения

$$mg = Q^2 \frac{\ln(R/r)}{(h-x_0)^2}.$$

При колебаниях будут происходить малые смещения (y) внутренней обкладки относительно положения равновесия $x = x_0 + y$. Подставляя это в уравнение колебаний и разлагая по малому параметру, получаем

$$my'' + 2Q^2 \frac{\ln(R/r)}{(h-x_0)^3} y = 0.$$

Отсюда период малых колебаний

$$T = 2\pi \left(\frac{Q}{2g} \right)^{1/2} \left[\frac{\ln(R/r)}{mg} \right]^{1/4}.$$

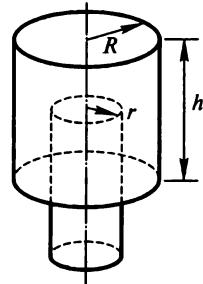


Рис. 8.30

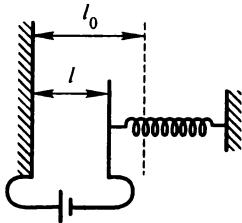


Рис. 8.31

Одна из пластин конденсатора жестко закреплена, а вторая, имеющая массу m , связана с пружиной жесткостью k (рис. 8.31). Расстояние между пластинами при ненагруженной пружине равно l_0 . При подключении к конденсатору батареи в новом положении равновесия расстояние между пластинами

$$l = \frac{4}{5} l_0.$$

Найдем период малых колебаний пластины (№ 8.79). Силу взаимодействия между пластинами найдем из закона сохранения энергии: работа батареи (3.77) равна сумме механической работы и изменению энергии конденсатора $Udq = dW + Fdx$. При подключении к батарее напряжение на конденсаторе U не меняется. Так как емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{S}{4\pi h},$$

а энергия

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

то $dq = UdC$, и при постоянном напряжении на конденсаторе

$$F = U^2 \frac{dC}{dx} = -U^2 \frac{S}{8\pi h^2} \frac{dh}{dx}.$$

Считая отклонения от равновесия (x) при колебаниях малыми, получаем уравнение колебаний

$$mx'' = -k(l_0 - l + x) + U^2 \frac{S}{8\pi(l-x)^2}.$$

Из условия равновесия

$$U \frac{S}{8\pi l^2} = k(l_0 - l).$$

Используя это, малость x и связь l_0 и l , получаем уравнение колебаний

$$x'' + \frac{k}{2m} x = 0.$$

Откуда находим период колебаний

$$T = 2\pi \left(\frac{2m}{k} \right)^{1/2}.$$

Электрический заряд Q равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом R (рис. 8.32). Точечный диполь массой m с дипольным моментом p может перемещаться вдоль оси кольца (ось x), перпендикулярно его плоскости, причем дипольный момент диполя параллелен оси кольца, а сила тяжести отсутствует. В начальный момент времени диполь находится в центре кольца и имеет нулевую скорость. Найдем:

- 1) максимальную скорость v_{\max} диполя при его движении вдоль оси кольца;
- 2) положение равновесия x_0 диполя;
- 3) период малых колебаний диполя около положения равновесия (№ 8.78).

Распределение потенциала вдоль оси кольца

$$\phi = \frac{Q}{(R^2 + x^2)^{1/2}}.$$

В соответствии с (2.6) или (2.8)

$$E(x) = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{Qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Используя (1.11), для силы, действующей на диполь, получаем

$$F = p \frac{dE}{dx} = pQ \frac{R^2 - 2x^2}{(R^2 + x^2)^{5/2}}.$$

В положении равновесия сила равна нулю. Поэтому

$$x_0 = \pm \frac{R}{2^{1/2}}.$$

Вводя малое отклонение y от положения равновесия $x = x_0 + y$, получаем уравнение колебаний

$$y'' + 16pQ \frac{y}{R^4 m^{3/2}} = 0.$$

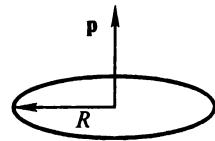


Рис. 8.32

Откуда для периода колебаний находим

$$T = \frac{1}{2} 3^{5/4} \pi R^2 \frac{m^{1/2}}{(pQ)^{1/2}}.$$

Для вычисления максимальной скорости воспользуемся тем, что работа силы $dA = Fdx = pdE$. Сила разгоняет диполь от начального положения $x = 0$ до положения равновесия

$$x_0 = \frac{R}{2^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$A = m \frac{v_{\max}^2}{2} = pE(x_0) = 2p \frac{Q}{3^{3/2} R^2}.$$

Отсюда находим максимальную скорость.

Найдем период малых крутильных колебаний магнитного бруска ($S = 1 \text{ мм}^2$, $l = 10 \text{ см}$), подвешенного горизонтально на неупругом подвесе в магнитном поле Земли (горизонтальная составляющая $B_0 = 0,2 \text{ Гс}$). Плотность стали $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$, остаточная индукция $B = 10 \text{ кГс}$ (№ 8.73). Момент инерции бруска относительно оси вращения (см. 1, с. 191)

$$J = \rho S \frac{l}{12}.$$

Магнитный момент бруска в соответствии с (6.6)

$$p = MSl = \frac{BSl}{4\pi}. \quad (8.31)$$

В соответствии с (7.8) в магнитном поле Земли создается возрастающий момент сил $B_0 BSl\varphi/4\pi$. Уравнение колебаний бруска

$$J\varphi'' + \frac{B_0 BSl\varphi}{4\pi} = 0. \quad (8.32)$$

Отсюда период колебаний

$$T = 2\pi l \left(\frac{\pi\rho}{3B_0 B} \right)^{1/2}.$$

Два одинаковых железных бруска площадью сечения $S = 0,1 \text{ см}^2$ и длиной $l = 5 \text{ см}$ имеют остаточную магнитную индукцию $B = 12560 \text{ Гс}$. Бруски расположены на одной прямой на расстоянии $L = 1 \text{ м}$. Один

брусок закреплен неподвижно, а другой может свободно вращаться вокруг оси OO' , проходящей через его середину и параллельной магнитному полю Земли B_0 (рис. 8.33). Найдем период T малых крутильных колебаний бруска. Плотность железа $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ (№ 8.74).

Магнитные моменты брусков можно вычислить по (8.31), а поле, которое они создают на расстоянии L , — по (7.11). Поле Земли возвращающего момента не создает. Момент со стороны закрепленного бруска равен $2S^2l^2B^2\phi/(16\pi^2L^3)$. Уравнение колебаний

$$J\phi'' + \frac{2S^2l^2B^2\phi}{16\pi^2L^3} = 0.$$

После подстановки J , как в предшествующей задаче, получаем

$$T = 2\pi L \frac{(2\rho l L / 3S)^{1/2}}{B}.$$

Если бы бруски были перпендикулярны линии их соединяющей (№ 8.75), то изменился бы коэффициент (вместо двойки единицы) в выражении для магнитного поля, определяемого по (7.11).

В результате некоторого космического события образовалась система, состоящая из звезды (масса M , магнитный момент \mathbf{p}_0) и планеты (масса $m \ll M$, магнитный момент \mathbf{p}). Планета движется по круговой орбите радиусом R . Найдем возможный разброс величины периода обращения в зависимости от ориентации магнитных моментов, считая плоскость орбиты, перпендикулярной магнитному моменту звезды \mathbf{p}_0 (№ 8.72). Из (7.11) получаем для поля звезды

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{p}}{r^3}.$$

Используя (1.11), для силы магнитного взаимодействия звезды и планеты получаем отталкивание при одинаковом направлении магнитных моментов и притяжение при противоположном направлении с силой $3p_0 p / R^4$. Эта сила складывается с гравитационной. Для движения по окружности имеем

$$m \frac{v^2}{R} = \gamma m \frac{M}{R^2} \pm p_0 \frac{p}{R^4}.$$

Учитывая, что период обращения

$$T = 2\pi \frac{R}{v},$$

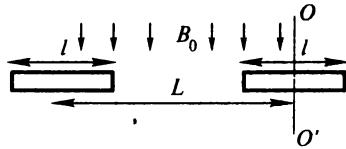


Рис. 8.33

получаем

$$\frac{2\pi m^{1/2}}{\left(\gamma m M/R^3 + p_0 p/R^5\right)^{1/2}} \leq T \leq \frac{2\pi m^{1/2}}{\left(\gamma m M/R^3 - p_0 p/R^5\right)^{1/2}}.$$

Разброс периодов

$$\Delta T = \frac{6\pi p_0 p}{m(\gamma M)^{3/2} R^{1/2}}.$$

По двум горизонтальным параллельным проводам, находящимся на расстоянии $2a = 1$ см друг от друга, текут одинаковые по величине, но противоположные по направлению токи силой $I = 10^3$ А. Точно посередине между проводами находится шарик с диамагнитной восприимчивостью $\chi = -10^{-5}$ и плотностью $\rho = 2,0$ г/см³. Найдем период малых колебаний шарика в горизонтальной плоскости, считая, что вертикальное движение шарика отсутствует и трения при его движении нет (№ 8.61). Используя (5.2), для магнитного поля в точке, отстоящей от средней, между проводами на x , получаем

$$H = \frac{2}{c} I \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) = \frac{4}{c} \frac{Ia}{a^2 - x^2} \approx \frac{4}{c} \frac{I}{a} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Шарик получает дипольный момент $p = |\chi|HV$, где V — объем шарика. Поскольку это диамагнетик, он будет выталкиваться в направлении уменьшения поля, т. е. к средней точке между проводами. Для вычисления силы можно воспользоваться (1.11). Уравнение колебаний шарика

$$\rho v x'' + |\chi| v \left(\frac{4I}{ca^2} \right)^2 2 \frac{x}{a^2} = 0.$$

Отсюда находим период колебаний

$$T \approx \frac{1}{2} \pi c \frac{a}{I} \left(\frac{\rho}{2|\chi|} \right)^{1/2}.$$

Электрический диполь движется в однородном магнитном поле со скоростью v , перпендикулярной \mathbf{B} . Дипольный момент \mathbf{p} составляет малый угол с направлением $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ (рис. 8.34). Найдем угловую частоту малых колебаний диполя ω , считая известными его момент инерции J , скорость v , дипольный момент \mathbf{p} и индукцию поля \mathbf{B} (№ 8.43). Сила Лоренца (8.1), действующая на каждый из

зарядов диполя, будет создавать момент, стремящийся уменьшить отклонения диполя от направления $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$. Для малых углов отклонения α имеем уравнение вращательных колебаний

$$J\alpha'' + p\nu B \frac{\alpha}{c} = 0.$$

Отсюда находим угловую частоту колебаний

$$\omega^2 = \nu p \frac{B}{cJ}.$$

Плоский воздушный конденсатор помещен в горизонтальном положении между круглыми горизонтальными наконечниками электромагнита (рис. 8.35). Между обкладками конденсатора в однородном электрическом поле E на расстоянии R от оси полюсных наконечников неподвижно висит заряженная масляная капля с зарядом q . В обмотке включают ток, и магнитное поле доводят до постоянной величины B . Предполагая, что за время нарастания магнитного поля смещение капли пренебрежимо мало, найдем ее скорость v и траекторию движения после включения магнитного поля (№ 8.44). Для вихревого электрического поля из (7.5) имеем

$$E_B 2\pi R = -\frac{1}{c} \pi R^2 \frac{dB}{dt}. \quad (8.33)$$

Для скорости в направлении этого поля получаем

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{c} qR \frac{dB}{dt}. \quad (8.34)$$

Откуда для этой скорости с учетом нулевых начальных значений получаем

$$v = qR \frac{B}{2mc} = RB \frac{g}{2cE}. \quad (8.35)$$

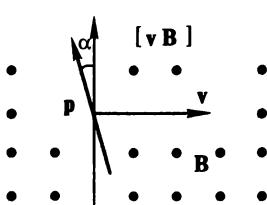


Рис. 8.34

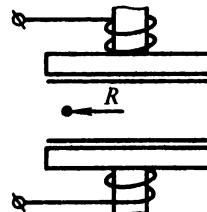


Рис. 8.35

Здесь введено поле конденсатора E из связи $mg = qE$. При такой скорости из (8.6) находим радиус кривизны траектории

$$r = mc \frac{v}{qB} = \frac{R}{2}.$$

Электрический заряд q равномерно распределен по твердому непроводящему тонкому кольцу массой m . Кольцо может свободно вращаться вокруг своего (закрепленного) центра. Вначале оно покится, а магнитное поле равно нулю. Затем включают однородное магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, перпендикулярное к плоскости кольца и произвольно меняющееся во времени. Найдем движение кольца в магнитном поле (№ 8.45). Для него выполняются уравнения (8.33), (8.34) и первая часть уравнения (8.35). Поэтому для угловой скорости вращения кольца имеем

$$\omega = \frac{v}{R} = q \frac{B}{2mc}.$$

Тонкое металлическое кольцо быстро вращается вокруг вертикальной оси, проходящий через его диаметр и перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 100$ Гс. Пренебрегая трением в оси, найдем время t , за которое угловая скорость вращения уменьшается в e раз, если плотность материала кольца $\rho = 9$ г/см³, проводимость $\lambda = 5 \cdot 10^5$ Ом⁻¹ · см⁻¹, считая потери энергии за один оборот малыми (№ 8.76). Момент инерции кольца относительно диаметра (см.: 1, с. 193)

$$J = \rho \pi s r^3,$$

где s — площадь сечения кольца; r — его радиус. Угловая скорость вращения кольца ω изменяется при изменении кинетической энергии вращения W за счет потерь на сопротивлении

$$R = \frac{2\pi r}{\lambda s}.$$

Из (7.1) находим ЭДС в кольце. Разделив ее на сопротивление, имеем для тока в кольце

$$I = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{R} = \frac{B \lambda s \omega r \sin \omega t}{2c}.$$

Потери на джоулеву теплоту равны $dQ = I^2 R t$. Усредняя их по периоду вращения и приравнивая потерям кинетической энергии, получаем

$$d \frac{J \omega^2}{2} = J \omega d\omega = -\frac{B^2 \lambda \pi \omega^2 s r^2 dt}{4c^2}.$$

Подставляя J и сокращая, имеем

$$\rho \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{B^2 \lambda dt}{4c^2}.$$

Откуда

$$\omega = e^{-t/\tau},$$

где

$$\tau = 4c^2 \frac{\rho}{\lambda B^2}.$$

Два одинаковых плоских изолированных конденсатора с квадратными пластинами (обкладками) площадью S каждая расположены так, как показано на рис. 8.36, а. В конденсаторы вставлена длинная диэлектрическая пластина массой m с диэлектрической проницаемостью ϵ . Толщина пластины равна толщине зазора в конденсаторах. В положении равновесия пластина заполняет половину объема каждого из конденсаторов. Конденсаторам сообщены одинаковые заряды q . Их емкость без диэлектрика равна C_0 .

Найдем:

- 1) частоту ω малых колебаний диэлектрической пластины, пре-небрегая силами трения;
- 2) будет ли пластина совершать колебания, если конденсаторы соединить параллельно;
- 3) изменится ли частота колебаний, если на одном из конденса-торов изменить знаки зарядов пластин (№ 8.83).

Найдем силу, действующую на пластинку в одном конденсато-ре, когда она сдвинется на расстояние x от середины конденсатора (рис. 8.36, б). Рассматривая конденсатор как параллельное соединение конденсаторов, из (3.56) получаем

$$C(x) = L \frac{(\epsilon + 1)L/2 + (\epsilon - 1)x}{4\pi h}.$$

Для напряженности электрического поля имеем

$$E = \frac{v}{h} = \frac{q}{hC}.$$

Для давления на границе диэлектрика, которое стремится вдвинуть его в конден-сатор, из (3.83) следует

$$p = (\epsilon - 1) \frac{E^2}{8\pi}.$$

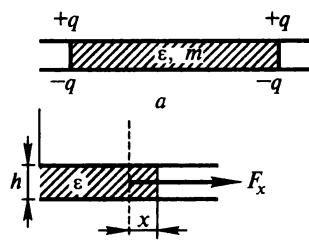


Рис. 8.36

Поэтому для силы, действующей на пластинку, получаем

$$F = pLh = Lh(\epsilon - 1) \frac{E^2}{8\pi} = \\ = \left[8\pi(\epsilon - 1)q^2 \frac{h}{L^3(\epsilon + 1)^2} \right] \left[1 + 2(\epsilon - 1) \frac{x}{L(\epsilon + 1)} \right]^2.$$

При малых x имеем

$$F = \left[8\pi(\epsilon - 1)q^2 \frac{h}{L^3(\epsilon + 1)^2} \right] \left[1 - 4(\epsilon - 1) \frac{x}{L(\epsilon + 1)} \right]. \quad (8.36)$$

Пластинка в одном конденсаторе вдвигается, а в другом выдвигается. Поэтому возвращающая сила

$$\Delta F = 64\pi(\epsilon - 1)^2 q^2 \frac{hx}{L^4(\epsilon + 1)^3}.$$

Вводя обозначение емкости

$$C_0 = \frac{S}{4\pi h} \quad \text{и} \quad S = L^2,$$

получаем

$$\omega^2 = 16(\epsilon - 1)^2 \frac{q^2}{(\epsilon + 1)^3 C_0 S^{1/2} m}.$$

Если на одном из конденсаторов изменить знаки зарядов, то возвращающая сила, а значит, и частота колебаний не изменятся. Если же конденсаторы соединить параллельно, то будет перетекание заряда до выравнивания потенциалов. Следовательно, напряженности электрического поля на границах диэлектрика будут одинаковые, разности давлений одинаковые и направлены в противоположные стороны. Возвращающей силы нет, и колебаний не будет.

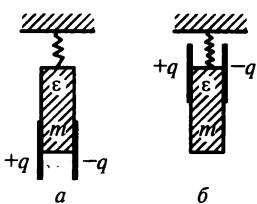


Рис. 8.37

Диэлектрическую пластинку с конденсатором, показанную на рис. 8.36, б, можно подвесить на пружине жесткостью k , как показано на рис. 8.37, а или б. Обозначая растяжение пружины в положении равновесия x_0 , отклонение от положения равновесия (положительное вниз) x и используя (8.31), получаем:

$$a) mx'' = mg - k(x_{01} + x) + F;$$

$$б) mx'' = mg - k(x_{02} + x) - F.$$

Для краткости введем в (8.36) обозначения $F = a(1 - bx)$. В случаях а) и б) колебания будут описываться соответственно уравнениями

$$mx'' + (k + ab)x = 0 \quad \text{и} \quad mx'' + (k - ab)x = 0.$$

Отсюда находим и частоты колебаний. Если конденсатор подсоединить к батарее, то сила F будет постоянной (независящей от отклонения) и скажется только на положении равновесия, а частота колебаний будет как в отсутствие конденсатора (№ 8.85).

9. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Электрические цепи — это соединенные проводами какие-то наборы сопротивлений, конденсаторов, катушек (соленоидов), детекторов, источников электричества и других устройств. Электромагнитное возмущение (например, изменение силы тока в цепи) распространяется с большой, но конечной скоростью. Если время распространения возмущения по цепи длиной l со скоростью c , равное $\tau = l/c$, много меньше характерного времени T изменения, например силы тока, то сила тока будет успевать, как бы мгновенно выравниваться в цепи. Далее будем предполагать выполнение условия $\tau \ll T$, т. е. считать системы **квазистационарными**. В частности, будем считать мгновенные значения квазистационарных токов подчиняющимися закону Ома и для систем пользоваться правилами Кирхгофа.

Рассмотрим цепь (**колебательный контур**), состоящую (рис. 9.1) из последовательно соединенных источника ЭДС \mathcal{E} , активного сопротивления R , катушки (соленоида) с индуктивностью L и конденсатора емкостью C .

В этом разделе удобно использовать практическую систему единиц (**СИ**). В некоторых случаях в фигурных скобках приводим формулы в системе Гаусса.

Падение напряжения на активном сопротивлении R при прохождении через него тока силой I определяется законом Ома

$$V_R = IR. \quad (9.1)$$

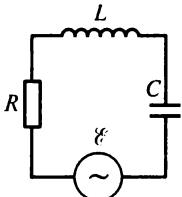


Рис. 9.1

Падение напряжения на индуктивности L определяется изменением зацепленного потока магнитного поля $\Psi = IL$ [(5.27) и (5.28)]:

$$V_L = \frac{dIL}{dt}. \quad (9.2)$$

Эта ЭДС индукции здесь записана как падение напряжения на индуктивности и поэтому без минуса.

Падение напряжения на емкости C , заряженной зарядом q , (3.63):

$$V_C = \frac{q}{C}. \quad (9.3)$$

По правилу Кирхгофа

$$\frac{dIL}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (9.4)$$

Приведем это уравнение в системе Гаусса

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{dIL}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \right\}.$$

Заряд на конденсаторе и сила тока связаны соотношением

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (9.5)$$

поэтому получаем

$$\frac{d[L(dq/dt)]}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (9.6)$$

Будем обозначать производную по времени штрихом. Тогда для **постоянной индуктивности** имеем

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (9.7)$$

Это обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для нахождения решения необходимы еще два начальных условия. Удобно ввести обозначения, смысл которых поясним позднее. **Собственной (циклической) частотой** колебательного контура называется

$$\omega_0 = \frac{1}{(LC)^{1/2}}. \quad (9.8)$$

В системе Гаусса

$$\omega_0 = \frac{c}{(LC)^{1/2}},$$

где c — скорость света. **Коэффициентом затухания:**

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (9.9)$$

В таком случае из (9.7) получаем

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (9.10)$$

Рассмотрим различные виды колебаний и соответствующие им решения уравнения (9.10).

Колебания называются **свободными**, если $\mathcal{E} = 0$. Они могут быть **незатухающими (собственными)**, если $R = 0$ (и соответственно $\beta = 0$), либо **затухающими** при R и β не равных нулю.

Для собственных колебаний имеем уравнение **гармонического осциллятора**

$$q'' + \omega_0^2 q = 0. \quad (9.11)$$

Его решение

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

иначе

$$q = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t. \quad (9.12)$$

Постоянные интегрирования q_m (амплитуда изменения заряда на обкладках конденсатора) и α (начальная фаза колебаний) или A и B определяются из начальных условий, а собственная частота колебаний ω_0 (9.8) — параметрами колебательного контура. Для периода колебаний T_0 и числа колебаний в секунду v_0 имеем

$$T_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi(LC)^{1/2}. \quad (9.13)$$

Из (9.12) можно найти ток в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = q_m \omega_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 t - \alpha\right).$$

Сравнивая это с (9.12), видим, что ток по фазе опережает на $\pi/2$ напряжение на конденсаторе, которое по фазе совпадает с зарядом.

Если (9.11) умножить на q' , проинтегрировать и воспользоваться (9.8), то получим закон **сохранения энергии**

$$\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const.} \quad (9.14)$$

Сумма магнитной энергии в катушке и электрической энергии в конденсаторе остается постоянной. Энергия из катушки переходит в конденсатор, а потом возвращается обратно.

Рассмотрим пример, когда электрическая цепь представляет собой **треугольник**, каждая сторона которого содержит емкость C , а вершины соединены с общей центральной точкой индуктивностями L (рис. 9.2, *a*). Найдем частоту возможных колебаний (№ 9.31). Удобно эту цепь перерисовать так, как на рис. 9.2, *б*. Сразу видна симметрия. На одном конденсаторе нет разности потенциалов, и поэтому отсутствует заряд. Ток через него не идет. В центральной точке одинаковые токи (обозначим их I) складываются. По (9.2), (9.3) и по Кирхгофу для суммы падения напряжений имеем

$$L2I' + LI' + \frac{q}{C} = 0.$$

Отсюда

$$3Lq'' + \frac{q}{C} = 0.$$

Из (9.11) и (9.8)

$$\omega_0 = \frac{1}{(3LC)^{1/2}}.$$

На рис. 9.3 изображена система, в которой вначале через индуктивность L и замкнутый ключ K течет ток I_0 , а напряжение на конденсаторе равно нулю. В момент времени $t = 0$ ключ размыкается. Пренебрегая активным сопротивлением всех элементов цепи, найдем напряжение на конденсаторе и ток через него как функцию времени (№ 9.32). Из (9.2) и (9.3) для цепи после размыкания ключа имеем

$$L_1I' + L_2I' + \frac{q}{C} = 0.$$

Отсюда

$$q'' + \frac{q}{(L_1 + L_2)C} = q'' + \omega_0^2q = 0.$$

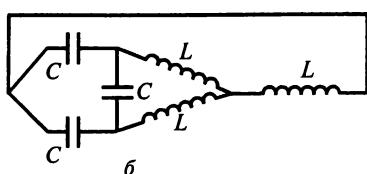
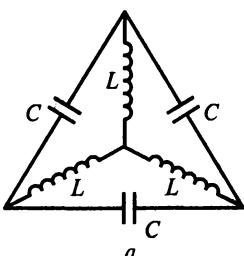


Рис. 9.2

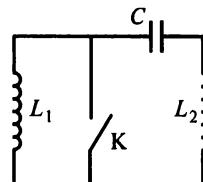


Рис. 9.3

Из (9.11) и (9.12) имеем решение в виде

$$q = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t.$$

Из условия, что напряжение на конденсаторе, а значит и заряд, равно нулю, находим $B = 0$. Для определения второй постоянной рассмотрим момент времени, бесконечно близкий к начальному, когда через конденсатор идет ток I_{01} . Из уравнения для токов, в котором можно считать $q = 0$, получаем

$$L_1(I_{01} - I_0) + L_2(I_{01} - 0) = 0.$$

Откуда находим

$$I_{01} = \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2}.$$

Подставляя этот ток как начальный в решение для тока

$$I = q' = A \omega_0 \cos \omega_0 t,$$

находим $A = L_1 C I_0$. Поэтому

$$I = \frac{L_1 I_0 \cos \omega_0 t}{L_1 + L_2} \quad \text{и} \quad U = \frac{q}{C} = L_1 I_0 \sin \omega_0 t.$$

С одной из пластин конденсатора мгновенно испаряется тонкий слой вещества, несущий заряд (q_0), который затем движется как целое с постоянной скоростью v к противоположной пластине (рис. 9.4). Найдем зависимость тока в LC -цепи от времени при движении слоя в конденсаторе, если расстояние между пластинами конденсатора h , площадь пластин S и индуктивность катушки L (№ 9.50). Конденсатор со слоем можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора с изменяющимися емкостями и зарядами. Обозначим заряд на левой пластине конденсатора $Q(t) - q_0$, на левой стороне слоя $q_0 - Q(t)$, на правой стороне слоя $-Q(t)$, а всего на слое q_0 , на правой пластине конденсатора, $-Q(t)$. Используя (3.56), для емкостей конденсаторов имеем:

для начального

$$C_0 = \frac{S}{4\pi h}$$

и для образовавшихся

$$C_1 = \frac{S}{4\pi x}, \quad C_2 = \frac{S}{4\pi(h-x)}.$$

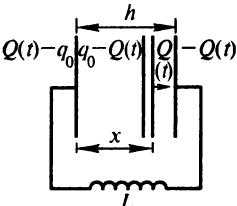


Рис. 9.4

Из (9.4) получаем (в системе Гаусса)

$$\frac{1}{c^2} LI' + \frac{Q - q_0}{C_1(x)} + \frac{Q}{C_2(x)} = 0.$$

Учитывая, что $Q' = I$, $x' = v$, и вводя обозначение

$$\omega^2 = \frac{c^2}{LC_0}$$

(в системе Гаусса), получаем

$$I'' + \omega^2 I = q_0 \omega^2 \frac{v}{h}.$$

Используя решение (9.12) однородного уравнения (9.11) и частное решение неоднородного

$$I = q_0 \frac{v}{h},$$

а также начальное условие $I(0) = I'(0) = 0$, находим

$$I = q_0 \frac{v}{h} (1 - \cos \omega t),$$

В однородное электрическое поле E_0 перпендикулярно ему помещены две плоскопараллельные незаряженные металлические пластины (площадью S , с расстоянием между ними h), образующие плоский конденсатор. Найдем зависимость заряда конденсатора от времени, если в момент времени $t = 0$ пластины закорачиваются через катушку индуктивностью L (№ 9.51). На пластинах происходит разделение зарядов (на $+q$ и $-q$). Обозначая емкость конденсатора C , находим поле внутри конденсатора

$$E = E_0 + \frac{q}{hC}.$$

Используя (9.7), получаем в системе Гаусса

$$\frac{1}{c^2} Lq'' + hE = \frac{1}{c^2} Lq'' + \frac{q}{C} + hE_0 = 0.$$

Вводя обозначение

$$\omega^2 = \frac{c^2}{LC}$$

и используя начальные условия $q(0) = q'(0) = 0$, находим

$$q = E_0 h C (\cos \omega t - 1) = E_0 S \frac{\cos \omega t - 1}{4\pi},$$

где

$$C = \frac{S}{4\pi h}.$$

В центре единственной незаряженной проводящей сферы радиусом R находится точечный заряд Q . В некоторый момент $t = 0$ сферу заземляют через катушку с индуктивностью L длинным и тонким проводом. Пренебрегая активным сопротивлением катушки и сопротивлением провода, найдем зависимость заряда сферы от времени (№ 9.52). На сфере происходит разделение зарядов. При заземлении на нее начинает поступать заряд q . До этого ее потенциал был

$$\varphi_0 = \frac{Q}{R}.$$

При поступлении заряда q он становится

$$\varphi = \frac{Q + q}{R}.$$

Сферу можно рассматривать как конденсатор между ее поверхностью и бесконечностью. Поэтому воспользуемся (9.7)

$$\frac{L}{c^2} q'' + \frac{q}{R} + \frac{Q}{R} = 0.$$

Так как в начальный момент и заряд и ток равны нулю, получаем

$$q = Q(1 - \cos \omega t),$$

где

$$\omega^2 = \frac{c^2}{RL}.$$

Для свободных затухающих колебаний из (9.10) получаем

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0. \quad (9.15)$$

Введем новую функцию x

$$q = x e^{-\beta t}. \quad (9.16)$$

Подставляя в (9.15) и вводя обозначение

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \quad (9.17)$$

получаем

$$x'' + \omega^2 x = 0. \quad (9.18)$$

Используя (9.11) и (9.12), находим $x = a \cos(\omega t + \delta)$. Из (9.16) имеем решение (9.15) с двумя произвольными постоянными, определяемыми из начальных условий

$$q = ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \quad (9.19)$$

либо

$$q = e^{-\beta t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t).$$

На рис. 9.5 приведена эта зависимость. Хотя при таких колебаниях нет точного повторения, время T между прохождениями q через нуль в одном и том же направлении изменения называют периодом затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (9.20)$$

При малом затухании ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) период близок к периоду собственных колебаний (9.13), а с увеличением затухания — растет.

При $\beta \geq \omega_0$ зависимость $q(t)$, как видно из (9.16), (9.17) и (9.18), становится апериодической. Сопротивление, при котором возникает апериодичность, называется **критическим**. Оно определяется из условия $\beta = \omega_0$ с помощью (9.8) и (9.9):

$$R_{kp} = 2 \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}. \quad (9.21)$$

Интегрируя (9.18) при $\omega = 0$ и подставляя в (9.16), получаем

$$q = (a + bt)e^{-\beta t}. \quad (9.22)$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий.

Из (9.22) для тока получаем

$$I = \frac{dq}{dt} = [b - \beta(a + bt)]e^{-\beta t}.$$

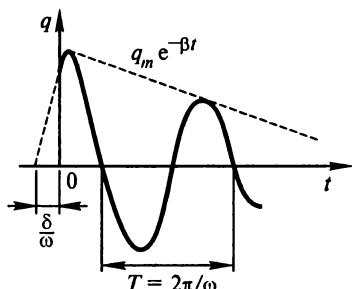


Рис. 9.5

Найдем время, за которое ток достигает максимального значения, и это значение, если конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения ЭДС \mathcal{E} , в момент времени $t = 0$ замыкается на катушку индуктивностью L и сопротивление, равное **критическому** (9.21) для образовавшегося контура (№ 9.36). При $t = 0$ имеем $q = a = \mathcal{E}C$, $I = 0$, $b = a\beta$. Откуда $I = -\beta bt e^{-\beta t}$. Время максимума определяем из условия

$$\frac{dI}{dt} = \beta b(\beta t - 1)e^{-\beta t} = 0.$$

Это дает

$$t_m = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\omega_0} = (LC)^{1/2}, \quad I_m = \frac{\mathcal{E}}{e} \left(\frac{C}{L} \right)^{1/2}.$$

Чтобы рассмотреть случаи $\beta \geq \omega_0$, введем обозначение

$$\gamma = (\beta^2 - \omega_0^2)^{1/2}. \quad (9.23)$$

Тогда из (9.17) и (9.18) $x = Ae^{-\gamma t} + Be^{\gamma t}$, а из (9.16)

$$q = Ae^{-(\beta + \gamma)t} + Be^{(\gamma - \beta)t}. \quad (9.24)$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из начальных условий.

Для характеристики затуханий вводится ряд величин. Время, за которое амплитуда уменьшается в e раз, называется **временем релаксации**. Оно равно

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (9.25)$$

Декрементом затухания называется отношение амплитуд через период $\frac{q(t)}{q(t+T)}$, а **логарифмическим декрементом затухания** называется

$$\lambda = \ln \left[\frac{q(t)}{q(t+T)} \right] = \beta T = \frac{1}{N_e}, \quad (9.26)$$

где N_e — число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз.

Добротностью Q колебательного контура называют величину

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\omega L}{R}. \quad (9.27)$$

При слабом затухании $\beta \ll \omega_0$ получаем $\omega \approx \omega_0$ и

$$Q = \frac{(L/C)^{1/2}}{R}. \quad (9.28)$$

Энергию колебаний можно выразить через максимальную энергию в конденсаторе. Тогда

$$\frac{W(t)}{W(t+T)} = \left[\frac{q(t)}{q(t+T)} \right]^2 = e^{2\beta T}.$$

При малом затухании потери энергии за период

$$\Delta W = W(t) - W(t+T) = W(t)(1 - e^{-2\beta T}) \approx W(t) \frac{2\pi}{Q}.$$

Отсюда добротность при слабом затухании определяется как

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta W}. \quad (9.29)$$

При измерении добротности Q резонансного контура из параллельно включенных катушки индуктивностью $L = 0,1$ Гн, сопротивлением $r = 30$ Ом и конденсатора емкостью $C = 30$ пФ = $30 \cdot 10^{-12}$ Ф поступили следующим образом. Контур подключили к клеммам осциллографа и, включая и выключая ЭДС постоянного тока, наблюдали затухающие колебания в контуре (рис. 9.6). Сравним добротности контура при разомкнутой цепи батареи в случае, когда входное сопротивление R осциллографа очень велико и когда оно конечно (№ 9.29). Используя (9.4) и правила Кирхгофа, получаем уравнения

$$LI'_L + rI_L = \frac{q}{C} = RI_R, \quad I_L + I_R + q' = 0.$$

Дифференцируя и подставляя, в итоге имеем

$$LI''_L + \left(r + \frac{L}{CR} \right) I'_L + \left(\frac{1}{C} + \frac{r}{CR} \right) I_L = 0.$$

Вводя обозначения

$$2\beta = \frac{r}{L} + \frac{1}{CR}, \quad \omega_0^2 = \frac{1+r/R}{LC},$$

получаем (9.15), в котором

$$\omega_0^2 = \frac{10^{12}}{3}, \quad \beta^2 = \frac{10^{12}}{36}.$$

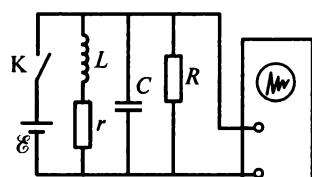


Рис. 9.6

Следовательно, для добротности из (9.27) имеем

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{L}{r} \frac{(1 + r/R)/LC}{1 + L/rRC}.$$

Отношение добротностей

$$\frac{Q_\infty}{Q_R} = \frac{1 + L/rRC}{1 + r/R} \approx 10^3.$$

Рассмотрим колебательный контур, который содержит катушку с индуктивностью L и конденсатор емкостью C с утечкой, сопротивление которой равно R . Пренебрегая активным сопротивлением катушки и прочих проводов, выведем уравнение собственных колебаний контура, найдем собственную частоту колебаний ω_0 и логарифмический декремент затухания λ (№ 9.35). На рис. 9.7 приведена схема колебательного контура. Сопротивление утечки параллельно емкости. Из (9.1)–(9.3) и (9.7)

$$LI_L'' + \frac{q}{C} = 0, \quad \frac{q}{C} = I_R R, \quad I_L = I_R + q'.$$

Из второго соотношения $q' = RCI_R'$, из третьего $q'' = I_L' - I_R'$, из первого

$$q'' + \frac{q'}{RC} + \frac{q}{LC} = 0.$$

Вводя обозначения

$$\beta = \frac{1}{RC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

приходим к стандартному уравнению затухающих свободных колебаний (9.15). Его решение (9.19). Из (9.26) получаем декремент затухания

$$\lambda = \beta T = \frac{\pi(L/C)^{1/2}}{R}.$$

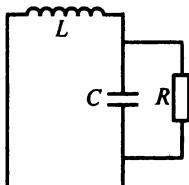


Рис. 9.7

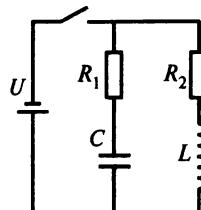


Рис. 9.8

Из (9.17) частота колебаний

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \approx \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Здесь ω в соответствии с (9.8) называется частотой собственных колебаний.

Изображенная на рис. 9.8 цепь питается источником напряжения U . Найдем, как будут изменяться ток через индуктивность и напряжение на конденсаторе после размыкания ключа. Составим уравнение для определения момента t_1 , в который энергия, запасенная в конденсаторе, будет иметь наибольшее значение (в частности, при слабом затухании) (№ 9.38). По правилу Кирхгофа

$$LI' + (R_1 + R_2)I + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{или} \quad Lq'' + (R_1 + R_2)q' + \frac{q}{C} = 0.$$

Вводя обозначения

$$2\beta = \frac{R_1 + R_2}{L} \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

приходим к уравнению (9.15) для изменения заряда на конденсаторе, решением которого является (9.19):

$$q = e^{-\beta t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t).$$

Начальные условия

$$q(0) = q_0 = UC, \quad I(0) = I_0 = \frac{U}{R_2},$$

Используя их, определяем A и B . В результате

$$U_C = \frac{q}{C} = U e^{-\beta t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{\beta}{\omega} + \frac{I_0}{\omega q_0} \right) \sin \omega t \right];$$

$$I_L = I_0 e^{-\beta t} \left[\cos \omega t - \left(\frac{\beta}{\omega} + \omega_0^2 \frac{q_0}{\omega I_0} \right) \sin \omega t \right].$$

Максимальная энергия в конденсаторе будет при максимальном заряде. При этом ток через индуктивность равен нулю. Это дает

$$\operatorname{tg} \omega t_1 = \frac{\omega I_0}{\beta I_0 + \omega_0^2 q_0}.$$

Число колебаний N_e , за которое их амплитуда уменьшается в e раз, определяется (9.27). Считая, что затухание слабое, найдем, во сколько раз оно изменится, если в два раза **уменьшить индуктивность** и в два раза **увеличить емкость**, сохранив неизменным активное сопротивление (№ 9.33). Очевидно, что частота собственных колебаний (9.8) при этом не изменится. Из (9.27)

$$N_e = \frac{Q}{\pi} = \frac{\omega_0 L}{\pi R} = \frac{1}{\pi R} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2} = 2.$$

Найдем добротность контура с емкостью C и индуктивностью L , если на **поддержание** в нем незатухающих колебаний, которые можно считать малыми, с амплитудой напряжения на конденсаторе U необходимо подводить среднюю мощность $\langle N \rangle$ (№ 9.37). Энергия, содержащаяся в колебательном контуре, равна максимальной энергии на конденсаторе $CU^2/2$. В соответствии с (9.13) период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{(LC)^{1/2}}.$$

Потери за период равны $\langle N \rangle T$. Из (9.29) следует

$$Q = 2\pi \frac{CU^2/2}{\langle N \rangle T} = U^2 \frac{(C/L)^{1/2}}{2\langle N \rangle}.$$

Колебательный контур составлен из конденсатора емкостью C и катушки радиусом a и **индуктивностью** L , заполненной слабопроводящим материалом с удельной проводимостью λ и магнитной проницаемостью μ . Пренебрегая сопротивлением проводов и потерями энергии на перемагничивание, найдем добротность колебательного контура (№ 9.57). В данном контуре потери энергии связаны не с сопротивлением в нем, а с процессом нагрева вещества внутри катушки, которое не влияет на параметры собственных колебаний, определяемых уравнением (9.11). Используя его, имеем для собственных колебаний тока и их частоты

$$I = I_0 \cos \omega t, \quad \omega^2 = \frac{c^2}{LC}.$$

Потери будут уменьшать амплитуду тока I_0 . Они определяются циркулярными токами в веществе внутри катушки, связанными с

изменением магнитного поля в ней. Из (5.23) магнитная индукция в катушке

$$B = 4\pi N \mu \frac{I}{cl}.$$

Из (7.5) имеем

$$2\pi rE = -\frac{\pi r^2}{c} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Откуда электрическое поле

$$E(r) = -\frac{1}{2} \frac{1}{c} r \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{r}{l} 4\pi N \mu \omega I_0 \sin \omega t = 2\pi N \mu \omega r I_0 \frac{\sin \omega t}{c^2 l}.$$

Используя (4.7) и (4.12) для средней мощности джоулевых потерь, получаем

$$\begin{aligned} P &= \int_0^a \lambda \langle E^2 \rangle dV = \int_0^a \lambda \langle E^2 \rangle 2\pi r dr l = \\ &= 2\pi \lambda l (2\pi N \mu \omega)^2 \frac{I_0^2}{2c^4 l^2} \int_0^a r^3 dr = \pi^3 \lambda \mu^2 \omega^2 a^4 I_0^2 \frac{N^2}{c^4 l}. \end{aligned}$$

Из (9.29)

$$Q = 2\pi \frac{1}{2} L \frac{(I_0/c)^2}{pT} = \omega L \frac{I_0^2}{2c^2 p},$$

где

$$L = 4\pi^2 a^2 N^2 \frac{\mu}{l}.$$

После подстановки

$$Q = \frac{2c^2}{\pi \lambda \mu \omega a^2} = \frac{2c (LC)^{1/2}}{\pi \lambda \mu a^2}.$$

На рис. 9.9 показан контур, состоящий из заряженного до q_0 конденсатора емкости C_1 , незаряженного конденсатора емкостью C_2 и со противлением R . Опишем процесс разрядки конденсатора C_1 после замыкания ключа (№ 9.2). В законе Кирхгофа для контура надо учесть,

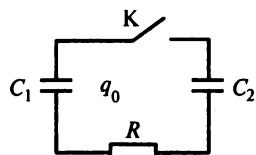


Рис. 9.9

что падение напряжения на C_2 противоположно падению напряжения на C_1 . Поэтому

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} + R \frac{dq_1}{dt} = 0.$$

Из сохранения заряда $q_1 + q_2 = q_0$. Исключая из дифференциального уравнения q_2 и учитывая, что в начальный момент $q_1 = q_0$, получаем

$$q = q_0 \frac{1 + (C_2/C_1) \exp[-(C_1 + C_2)t/RC_1C_2]}{1 + C_2/C_1}.$$

При стремлении сопротивления к нулю q_1 стремится к $\frac{q_0}{1 + C_2/C_1}$.

К такому же значению стремится и конечное значение q_{1k} при стремлении времени t к бесконечности. Соответственно

$$q_{1k} = \frac{q_0}{1 + C_1/C_2}.$$

Используя (3.67), получаем энергию конденсаторов. Потери энергии на сопротивлении (на джоулеву теплоту) равны разности начальной и конечной энергий конденсаторов

$$Q = \Delta W = W_0 - (W_1 + W_2) = \frac{1}{2} q_0^2 \frac{C_2/C_1}{C_1 + C_2}.$$

Если задано напряжение U_0 , которое равно q_0/C , а требуется найти ток

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

(№ 9.18), то, пользуясь полученной формулой, имеем

$$I = \frac{U_0}{R} \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{RC_1C_2}\right].$$

Используя этот результат, можно прямым расчетом найти количество выделенной в соединительных проводах теплоты, пренебрегая индуктивностью проводов, например для случая $C_1 = C_2 = C$ (№ 9.19). Из (3.18) (закон Джоуля—Ленца) имеем $dQ = I^2 R dt$.

Подставляя сюда полученное ранее выражение для тока и интегрируя от 0 до бесконечности, находим

$$Q = \frac{q^2}{4C}.$$

Это же выражение можно получить из изменения энергии конденсаторов.

Рассмотрим случай, когда конденсатор C заряжается от батареи \mathcal{E} через **нелинейное сопротивление** R , сила тока в котором связана с напряжением соотношением $I = \lambda U^{3/2}$ (λ — постоянная величина). Найдем зависимость силы тока в цепи от времени, если батарея включена при $t = 0$ (№ 9.20). Из закона Кирхгофа для падения напряжения на сопротивлении имеем

$$U = \mathcal{E} - \frac{q}{C}.$$

Используя условие для заряда на конденсаторе q , получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d(\mathcal{E} - q/C)}{(\mathcal{E} - q/C)^{3/2}} = -\lambda \frac{dt}{C}.$$

Интегрируя его при условии, что начальный заряд равен нулю, получаем

$$\frac{q}{C} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{\left[1 + \lambda t (\mathcal{E})^{1/2} / 2C\right]^2}.$$

Дифференцируя, находим ток

$$I = \frac{\lambda \mathcal{E}^{3/2}}{\left[1 + \lambda t (\mathcal{E})^{1/2} / 2C\right]^3}.$$

При размыкании рубильника K в электрической цепи, изображенной на рис. 9.10, возник дуговой разряд, вольт-амперная характеристика которого имеет вид $U = a + b/I$, где a и b — известные постоянные величины. Найдем ток в цепи (№ 9.21). Закон Кирхгофа дает

$$L \frac{dI}{dt} + RI + UI = \mathcal{E}.$$

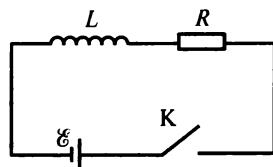


Рис. 9.10

Отсюда для установившегося режима, когда

$$\frac{dI}{dt} = 0,$$

получаем

$$RI_0^2 + (a - \mathcal{E})I_0 + b = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$I_0 = \frac{(\mathcal{E} - a) \pm \left[(\mathcal{E} - a)^2 - 4Rb \right]^{1/2}}{2R}.$$

До размыкания ток был $I_1 = \mathcal{E}/R$. В момент сразу после размыкания рубильника

$$L \left(\frac{dI}{dt} \right)_1 = -a - \frac{b}{I_1}.$$

Ток начинает уменьшаться. Для исследования устойчивости установившегося режима рассмотрим состояния, близкие к равновесному $I(t) = I_0 + x(t)$. Подставляя в закон Кирхгофа и используя уравнение устойчивого режима, получаем для изменения малой добавки со временем

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{L} \left(R - \frac{b}{I_0^2} \right) x.$$

Видно, что более устойчивым является режим с большим током. Он достигается раньше.

Сверхпроводящие катушки с самоиндукциями L_1 и L_2 соединены параллельно и включены через сопротивление R в цепь гальванической батареи с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (рис. 9.11). Найдем токи в катушках I_1 и I_2 и ток в общей цепи I , если коэффициентом взаимной индукции катушек можно пренебречь (№ 9.22). Для контура из катушек, не имеющих сопротивления, получаем

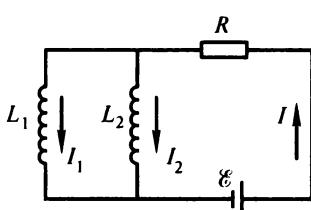


Рис. 9.11

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Интегрируя по времени, имеем $L_1 I_1 = L_2 I_2$. Из первого закона Кирхгофа $I_1 + I_2 = I$. Поэтому

$$I_1 = \frac{IL_2}{L_1 + L_2}, \quad I_2 = \frac{IL_1}{L_1 + L_2}.$$

Из закона Ома следует, что

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Соленоид, реостат и источник постоянного напряжения включены последовательно. Соленоид равномерно растягивают со скоростью $v = 50$ см/с, одновременно передвигая движок реостата так, что сила тока в цепи остается постоянной. Найдем, насколько изменится сопротивление реостата, когда длина соленоида увеличится вдвое, если он после растяжения имеет плотность витков $n = 50$ см $^{-1}$, а диаметр его поперечного сечения $D = 10$ см (№ 9.25). Обозначая сопротивление реостата начальное R_0 и текущее $R(t)$, из (9.4) имеем

$$IR_0 = \mathcal{E} \quad \text{и} \quad \frac{dLI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Отсюда

$$R - R_0 = -\frac{dL}{dt}.$$

Из (5.29) индуктивность соленоида обратно пропорциональна его длине

$$L \sim \frac{1}{l}.$$

Поэтому, обозначая производные по времени штрихом, получаем

$$\dot{L}' = \frac{L'}{l}.$$

Следовательно,

$$\frac{\dot{L}'}{L} = -\frac{l'}{l} = -\frac{v}{l}.$$

Откуда

$$R - R_0 = \frac{Lv}{l}.$$

В схеме, изображенной на рис. 9.12, в некоторый момент времени замыкают ключ К, и конденсатор C , имеющий первоначальный заряд q_0 , начинает разряжаться через индуктивность L . Когда ток разряда достига-

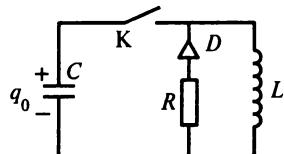


Рис. 9.12

ет максимального значения, ключ К вновь размыкают. Найдем, какой заряд протечет через сопротивление R , если сопротивление диода D в схеме в прямом направлении много меньше R , а в обратном — бесконечно велико (№ 9.27). После замыкания ключа ток идет только через индуктивность, так как на диоде D потенциал в верхней точке выше, чем в нижней. Из (9.7) для заряда на конденсаторе

$$q'' + \omega^2 q = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Решение этого уравнения $q = A \sin \omega t + B \cos \omega t$. В начальный момент заряд на конденсаторе q_0 , а ток через индуктивность $q'(0) = 0$. Используя это, находим $q = q_0 \cos \omega t$, $I = -q' = q_0 \omega \sin \omega t$. Откуда $I_{\max} = q_0 \omega$. В момент максимального тока (заряд на конденсаторе равен нулю) после отключения конденсатора ток идет через диод. Из (9.7) $LI' + RI = 0$. Интегрируя с учетом, что здесь в начальный момент ток был максимальный, получаем $I = I_{\max} e^{-Rt/L}$. Для заряда, протекшего через R ,

$$q = \int_0^\infty Idt = I_{\max} \frac{L}{R} = q_0 \frac{(L/C)^{1/2}}{R}.$$

Длинный соленоид, длина которого равна l , а площадь витков S , замыкается в некоторый момент времени последовательно с сопротивлением R на источник постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} . В средней части соленоида находится небольшое короткозамкнутое кольцо, площадь которого равна σ , сопротивление r . Плоскость кольца перпендикулярна оси соленоида. Пренебрегая самоиндукцией кольца, определим радиальное давление на него (т. е. радиальную силу на единицу длины) в тот момент, когда оно максимально (№ 9.23). Из (9.4) имеем

$$\frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Решая это уравнение, с учетом того, что в начальный момент ток равен нулю, находим

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - \exp \left(-c^2 \frac{Rt}{L} \right) \right].$$

Из (5.23) поле в соленоиде

$$B = H = 4\pi \frac{I}{c} \frac{N}{L}.$$

ЭДС \mathcal{E}_1 в кольце определяется (7.1). Для тока в кольце I_1 получаем

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r} = \frac{\sigma}{r} \frac{1}{c} \frac{dB}{dt} = 4\pi\sigma N \frac{\epsilon}{rl} \exp\left(-c^2 \frac{Rt}{L}\right).$$

Из (5.29) для индуктивности соленоида следует

$$L = 4\pi N^2 \frac{S}{l}.$$

Воспользовавшись законом Ампера (7.4), получаем для радиальной силы на единицу длины кольца

$$f = \frac{dF}{dx} = \frac{I_1}{c} B = 4\pi\sigma N \frac{\epsilon^2}{rlc^2 RS} \exp\left(-c^2 \frac{Rt}{L}\right) \left[1 - \exp\left(-c^2 \frac{Rt}{L}\right)\right].$$

Чтобы вычислить максимальное значение этой величины, приравняем ее производную по времени нулю.

Получаем, что максимальное значение будет при

$$\exp\left(-c^2 \frac{Rt}{L}\right) = \frac{1}{2}.$$

Оно равно

$$f = \pi\sigma \frac{\epsilon^2}{rlc^2 RS}.$$

Тороидальная катушка с радиусом тора R_t и радиусом витка r_t ($r_t \ll R_t$) замыкается в некоторый момент времени последовательно с сопротивлением R на источник постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} . Внутри катушки находится небольшое короткозамкнутое кольцо, площадь которого σ , а сопротивление r . Плоскость кольца совпадает с плоскостью одного из витков тора. Пренебрегая самоиндукцией кольца, определить энергию джоулевых потерь Q в кольце за все время установления тока в цепи тора (№ 9.24). Как и в предыдущей задаче, ток в торе

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} \left[1 - \exp\left(-c^2 \frac{Rt}{L}\right)\right].$$

Из (5.6) для поля внутри тора

$$B = H = 2I \frac{N}{cR_t}.$$

Используя (5.27) и (5.28), находим индуктивность тора

$$L = 2\pi r_t^2 \frac{N^2}{R_t}.$$

ЭДС \mathcal{E}_1 в кольце определяется (7.1). Для тока в кольце I_1 получаем

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r} = \frac{\sigma}{r} \frac{1}{c} \frac{dB}{dt} = 2\sigma N \frac{\mathcal{E}}{rRL} \exp\left(-c^2 \frac{Rt}{L}\right).$$

Из (4.18) находим джоулевы потери

$$Q = \int_0^\infty I_1^2 r dt = \sigma^2 \frac{\mathcal{E}^2}{\pi c^2 r R_t R t^2}.$$

Два соленоида имеют одинаковые геометрические размеры, но один из них изготовлен из проволоки вдвое большей площади поперечного сечения и вдвое меньшей длины, чем другой. Материал проводов обоих соленоидов одинаков. Найдем, в обмотке какого из них будет **выделяться больше теплоты**, если магнитные поля в них одинаковы, а также у какого из них меньше время установления магнитного поля (№ 9.26). Обозначая сечение проводов σ и их длину h , из (4.14) получаем для отношения сопротивлений проводов

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{h_2}{h_1} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{4}.$$

При одинаковых диаметрах соленоидов отношение числа витков пропорционально длинам проволок

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}.$$

Так как по условию длины соленоидов одинаковые и устанавливаются одинаковые магнитные поля, то из (5.23) следует

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = 2.$$

Используя (4.18), для отношений выделившейся теплоты имеем

$$\frac{Q_2}{Q_1} = I_2^2 \frac{R_2}{I_1^2 R_1} = 1.$$

В предыдущих задачах с помощью (9.4) были получены уравнения установления тока и соответственно магнитного поля, куда вошли характерные времена установления τ . Используя (5.29) для индуктивности соленоида

$$L = 4\pi N^2 \frac{S}{l},$$

находим

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{L_2}{L_1} \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{R_1}{R_2} = 1.$$

В схеме, приведенной на рис. 9.13 и состоящий из двух контуров с известными \mathcal{E} , r , L_1 , L_2 и M , в некоторый момент, когда в первом контуре уже установился ток, одновременно и мгновенно разомкнули ключ K_1 , а K_2 замкнули. Вычислим энергию W_R , выделившуюся на сопротивлении R , а также энергию W_2 , полученную вторым контуром, пренебрегая в нем омическим сопротивлением (№ 9.42). Ток, установившийся через индуктивность L_1 , равен $I_{10} = \mathcal{E}/r$. Для второго контура можно написать (7.1), учитывая, что поток магнитного поля через вторую индуктивность складывается из собственного и взаимного (5.25)

$$\Phi = \frac{1}{c} (L_2 I_2 + M I_1);$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Интегрируя I_2 от нуля до I_{2k} и I_1 от I_{10} до нуля, получаем $L_2 I_{2k} = M I_{10}$. Второй контур получает энергию, которая в нем в результате содержится

$$W_2 = L_2 \frac{I_2^2}{2} = M^2 \frac{I_{10}^2}{2L_2} = M^2 \frac{(\mathcal{E}/r)^2}{2L_2}.$$

Из сохранения энергии находим

$$W_R = L_1 \frac{I_{10}^2}{2} - W_2 = \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) L_1 \frac{I_{10}^2}{2} = \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) L \frac{(\mathcal{E}/r)^2}{2}.$$

На рис. 9.14 изображена электрическая цепь, состоящая из батареи \mathcal{E} , сопротивлений r и R и индуктивности L_1 . К катушке L_1 изда-

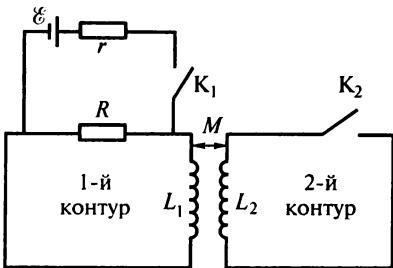


Рис. 9.13

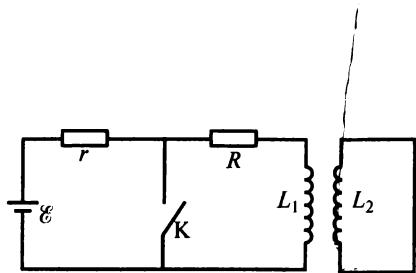


Рис. 9.14

лека приближают короткозамкнутую сверхпроводящую катушку с индуктивностью L_2 . Первоначально ток в ней отсутствует, а после сближения с катушкой L_1 он становится равным I_2 . После сближения катушек ключ K замыкают. Найдем, какая энергия выделится на сопротивлении R в виде джоулевой теплоты (№ 9.43). Первоначально в катушке L_1 течет ток

$$I_{10} = \frac{E}{R+r}.$$

Как и в предыдущей задаче, поток магнитного поля через вторую индуктивность складывается из собственного и взаимного (5.27)

$$\Phi = \frac{1}{c}(L_2 I_2 + M I_1).$$

Но здесь надо учесть, что меняется взаимная индуктивность M , т. е.

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{dM I_1}{dt} = 0.$$

Интегрируя I_2 от нуля до I_{2k} и $M I_1$ от нуля до $M I_{10}$, получаем

$$L_2 I_{2k} = -M I_{10}.$$

Энергия взаимодействия катушек

$$W_k = L_1 \frac{I_{10}^2}{2} + L_2 \frac{I_2^2}{2} + M I_{10} I_2 = L_1 \frac{I_{10}^2}{2} - L_2 \frac{I_2^2}{2}.$$

Эта энергия и выделится в виде теплоты на сопротивлении R .

В схеме, изображенной на рис. 9.15, при замыкании ключа K через гальванометр Γ протек заряд q . Определим коэффициент взаимоиндукции M катушек, обозначенных как L_1 и L_2 , если извест-

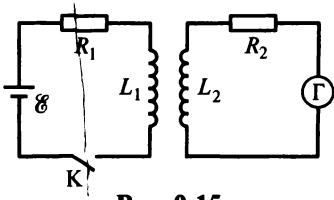


Рис. 9.15

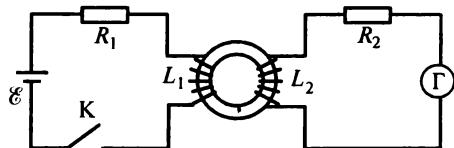


Рис. 9.16

ны \mathcal{E} , R_1 и R_2 (№ 9.58). Для второго контура с помощью (9.4) получаем

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = 0.$$

Интегрируя по t от 0 до ∞ и учитывая, что ток I_2 в начале и в конце был равен нулю, получаем

$$R_2 q = -M I_1(\infty) = -M \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

Откуда

$$|M| = \frac{R_1 R_2 q}{\mathcal{E}}.$$

Уравнение первого контура для решения не нужно.

В схеме, изображенной на рис. 9.16, катушки L_1 и L_2 намотаны на общий магнитный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. При замыкании ключа К в первом контуре через гальванометр Γ , включенный во вторичный контур, протекает заряд q . Считая известными R_2 , L_2 и установившийся ток в первичном контуре I_0 , найдем коэффициент самоиндукции катушки L_1 (№ 9.59). В данном случае рассеянием магнитного потока в общем сердечнике можно пренебречь и пользоваться результатами задачи № 5.30, полученными с помощью (5.30) и (5.31), для коэффициента взаимной индукции $M = (L_1 L_2)^{1/2}$. Уравнение для второго контура такое же, как в предыдущей задаче. Поэтому $R_2 q = -M I_0$.

Отсюда

$$|M| = \frac{R_2 q}{I_0}.$$

Используя выражение для взаимной индукции, находим

$$L_1 = \frac{M^2}{L_2} = \frac{R_2^2 q^2}{L_2 I_0^2}.$$

Ключ (схема на рис. 9.17) размыкают, и в контуре возникают колебания. Найдем, какой должна быть емкость C , чтобы максимальное напряжение на емкости U не более чем в n раз превышало напряжение на батарее \mathcal{E} (№ 9.28). В момент размыкания ключа через соленоид идет ток $I = \mathcal{E}/R$. При колебаниях в контуре через некоторое время (половина периода колебаний) вся энергия соленоида передастся в емкость. Пренебрегая его сопротивлением, из закона сохранения энергии (9.14) имеем

$$\frac{I^2 L}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Чтобы было $U < n\mathcal{E}$, должно быть

$$C > \frac{L}{(Rn)^2}.$$

Генератор с весьма малым внутренним сопротивлением посыпает в контур прямоугольный импульс напряжения (рис. 9.18). Пренебрегая затуханием, найдем:

1) при какой длительности импульса T_1 в контуре отсутствуют колебания после прекращения импульса;

2) при какой длительности импульса T_2 амплитуда колебаний напряжения на емкости максимальна (после прекращения импульса). Чему она равна?

Для обоих случаев нарисуем графики тока и напряжения, начиная с момента t_0 (№ 9.44). Используя (9.4), для времени существования напряжения V_0 на генераторе получаем уравнение

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = V_0.$$

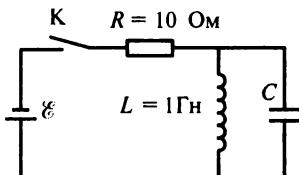


Рис. 9.17

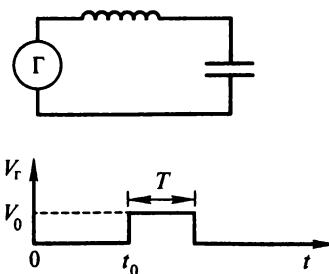


Рис. 9.18

Общее решение для напряжения на конденсаторе

$$V = V_0 + A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где

$$\omega = \frac{1}{(LC)^{1/2}} = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Удобно момент t_0 считать нулевым. В этот момент $V = 0$, $I = 0$, поэтому получаем

$$V = V_0(1 - \cos \omega t), \quad I = V_0 C \omega \sin \omega t.$$

На рис. 9.19, а показано изменение потенциала на конденсаторе и тока через индуктивность. Видно, что при отключении генератора (убирании V_0) в точке T_1 и в других точках, соответствующем времени $t = T_1 = nT_0$ ($n = 1, 2, \dots$), колебания прекратятся. Если генератор выключить в момент, показанный на рис. 9.19, б, при

$$t = T_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)T_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то амплитуда колебаний на емкости будет $V_{\max} = 2V_0$. В соответствии с законом сохранения энергии амплитуда тока также возрастает в два раза.

В момент времени $t = 0$ идеальный LC -контура с собственной частотой 100 Гц возбуждается периодической последовательностью импульсов с длительностью $\tau = 0,002$ с, изображенной на рис. 9.20 ($\mathcal{E} = 5$ В). Найдем период следования импульсов T , при котором среднее значение напряжения на конденсаторе $V = 2$ В. Нарисуем

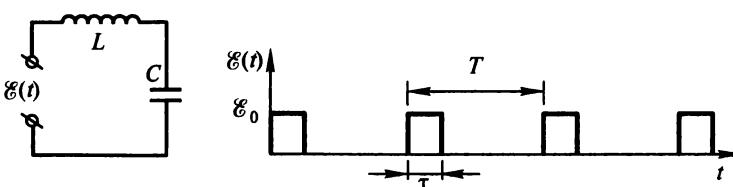


Рис. 9.20

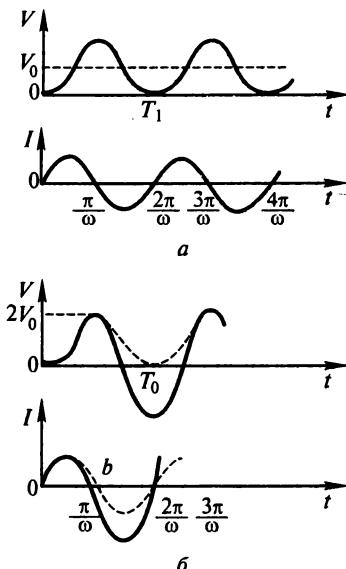


Рис. 9.19

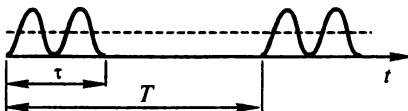


Рис. 9.21

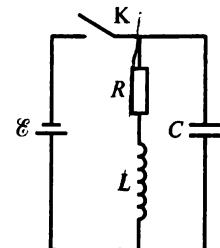


Рис. 9.22

график зависимости $V(t)$ (№ 9.54). Используем решение предыдущей задачи. Соотношение собственной частоты контура и длительности импульса таково, что происходят два колебания (рис. 9.21).

Среднее значение напряжения на этом участке $\langle V_t \rangle = E = 5$ В. Через T повторяется изменение напряжения на конденсаторе. Среднее значение за T равно $\langle V_T \rangle = \langle V_t \rangle \tau / T$. Чтобы эта величина равнялась 2 В, из последнего соотношения $T = 0,05$ с.

После размыкания ключа в контуре (рис. 9.22) возникают медленно затухающие колебания, максимальная амплитуда напряжения которых U_{\max} в n раз превосходит напряжение батареи \mathcal{E} . Найдем собственную частоту контура ω , если уменьшение амплитуды колебаний в e раз происходит за время τ (№ 9.30). Из (9.19) получаем для затухающих колебаний

$$q = e^{-\beta t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t).$$

Как и в (9.9), (9.8) и (9.17),

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2.$$

В начальный момент ($t = 0$) имеем $U = \mathcal{E}$, $I = q' = \mathcal{E}/R$. В результате получаем

$$U = qC = \mathcal{E}e^{-\beta t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{1}{\omega} \right) \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{\tau} \right) \sin \omega t \right].$$

При слабом затухании

$$\beta^2 \ll \omega_0^2, \quad \omega^2 \approx \omega_0^2, \quad \tau = \frac{1}{\beta} \gg \frac{1}{\omega_0} = (LC)^{1/2}.$$

Используя это, имеем

$$U = \mathcal{E}e^{-\beta t} \frac{\tau}{2} \omega \sin \omega t.$$

Из условия и этого результата

$$\frac{U_{\max}}{\varepsilon} = n = \frac{\tau}{2} \omega.$$

Поэтому $\omega = 2n/\tau$.

Постоянная времени разряда плоского масляного конденсатора через некоторое сопротивление равна τ_1 . После того как масло конденсатора отсырело, постоянная времени разряда через то же сопротивление оказалась равной τ_2 . Найдем удельное сопротивление ρ отсыревшего масла, если его диэлектрическая проницаемость ε не изменилась (№ 9.6). Используя (9.1) и (9.3), имеем

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Откуда

$$q = q_0 e^{-t/RC} = q_0 e^{-t/\tau}. \quad (9.30)$$

Таким образом, постоянная разряда конденсатора

$$\tau = RC. \quad (9.31)$$

При прохождении тока через конденсатор схема цепи выглядит, как на рис. 9.23. Конденсатор разряжается через параллельно соединенные сопротивления. С учетом (4.14) для нового сопротивления R_1 получаем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{S}{\rho l}.$$

Таким образом, $\tau_1 = RC$, $\tau_2 = R_1 C$. Учитывая выражение для емкости (3.56)

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi l},$$

находим

$$\rho = 4\pi\tau_1 \frac{\tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)\varepsilon}.$$

Сферический конденсатор с радиусами сфер r_1 и r_2 заполнен слабо проводящей средой. Емкость конденсатора равна C , а разность потенциалов на конденсаторе после отключения его от батареи уменьшилась в два раза за время t . Найдем диэлектрическую

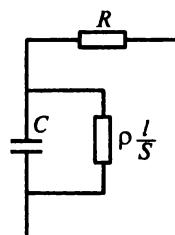


Рис. 9.23

проницаемость ϵ среды и ее удельное сопротивление ρ (№ 9.7). Используя выражение для емкости сферического конденсатора (3.55), находим

$$\epsilon = C \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Используя (9.30) и связь напряжения на конденсаторе с зарядом (3.63), находим для сопротивления

$$R = \frac{t}{C \ln 2}.$$

С другой стороны, в соответствии с (4.14)

$$R = \int_r^{r_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \rho \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2}.$$

Отсюда находим

$$\rho = 4\pi r_1 r_2 \frac{t}{C(r_2 - r_1) \ln 2}.$$

Найдем закон изменения напряжения U на конденсаторе C после замыкания ключа К в основной цепи схемы, представленной на рис. 9.24 (№ 9.11). Обозначая ток после замыкания ключа через R_1 как I_1 и через R_2 как I_2 , получаем с помощью (9.4)

$$\mathcal{E} = I_1 R_1 + U, \quad U = I_2 R_2 = \frac{q}{C},$$

а из первого закона Кирхгофа

$$I_1 = I_2 + \frac{dq}{dt}.$$

В результате имеем уравнение

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q(R_1 + R_2) - \mathcal{E}CR_2}{CR_1 R_2}.$$

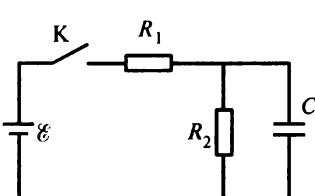


Рис. 9.24

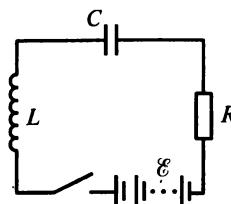


Рис. 9.25

Интегрируя и используя условие, что в начальный момент $q = 0$, находим

$$U = \frac{q}{C} = \mathcal{E}CR_2 \frac{1 - \exp\left[-(R_1 + R_2)t/CR_1R_2\right]}{C(R_1 + R_2)}.$$

К контуру L, C, R (рис. 9.25) с малым затуханием в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС \mathcal{E} с ничтожно малым внутренним сопротивлением. Найдем напряжение U на конденсаторе C в зависимости от времени t , а также, на какое минимальное напряжение он должен быть рассчитан (№ 9.13). Изменение заряда на нем $q = UC$ описывается уравнением (9.7). Решение его представляется суммой решения однородного уравнения (9.19) и частного решения уравнения (9.7), которое для разности потенциалов на конденсаторе имеет вид $U = \mathcal{E}$. Таким образом, общее решение для напряжения на конденсаторе

$$U = \mathcal{E} + e^{-\beta t}(A \sin \omega t + B \cos \omega t).$$

В начальный момент $t = 0$ заряда на конденсаторе нет, и поэтому $U = 0$. Откуда следует $B = -\mathcal{E}$. Так как индуктивность препятствует увеличению тока скачком, то ток в начальный момент равен нулю, т. е.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0.$$

Дифференцируя и подставляя, получаем

$$A = -\frac{\beta \mathcal{E}}{\omega}.$$

Окончательно

$$U = \mathcal{E} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right) \right].$$

Так как по условию затухание мало, то $e^{-\beta T} \approx 1$ и, следовательно,

$$\beta T = 2\pi \frac{\beta}{\omega} \ll 1.$$

Поэтому $U = \mathcal{E}(1 - \cos \omega t)$. Напряжение, которое должен выдерживать конденсатор, $U = 2\mathcal{E}$.

Рассмотрим вариант, когда катушка индуктивностью L , конденсатор емкостью C и батарея с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротиви-

лением R соединены параллельно (рис. 9.26). Найдем силу тока I , текущего через катушку, как функцию времени t после включения батареи, если параметры L , C , R удовлетворяют условию (№ 9.14)

$$\frac{C}{L} > \frac{1}{4R^2}$$

Используя (9.1)–(9.3) и правила Кирхгофа, получаем

$$IL'_L = \frac{q}{C}, \quad I_R R + LI'_L = \mathcal{E}, \quad I_R = I_L + q'.$$

Дифференцируя и подставляя, находим

$$IL''_L + \frac{IL'_L}{RC} + \frac{I_L}{LC} = \frac{\mathcal{E}}{RLC}.$$

Вводя обозначения

$$2\beta = \frac{1}{RC} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{1}{LC}$$

и замечая, что по условию $\omega > \beta$, приходим к уравнению типа (9.10) и соответствующему (9.19) решению

$$I_L = \frac{\mathcal{E}}{R} + e^{-\beta t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t).$$

Частота определяется (9.17). Используя, что в начальный момент $I_L = 0$ и $LI_L = q/C = 0$, имеем

$$I_L = \frac{\mathcal{E}}{R} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\frac{\beta}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right].$$

На рис. 9.27 изображена схема зажигания автомобиля. Вторичная обмотка высоковольтного трансформатора нагружена на запальную свечу. Первичная обмотка трансформатора имеет сопротивление

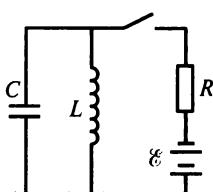


Рис. 9.26

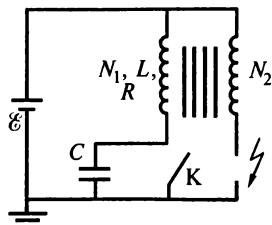


Рис. 9.27

$R = 2,5$ Ом и индуктивность $L = 10^{-3}$ Гн и подключена через конденсатор емкостью $C = 0,2$ мкФ к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В. Отношение числа витков обмоток трансформатора

$$\frac{N_2}{N_1} = 40.$$

Найдем, через какое время после размыкания прерывателя (ключа К) возникает разряд, если пробой зарядного промежутка свечи происходит при напряжении $U = 3$ кВ (№ 9.34). Используя (9.4), получаем уравнение колебаний в контуре

$$LI' + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}.$$

В начальный момент $t = 0$ имеем $q(0) = 0$, $I(0) = \mathcal{E}/R$ и из уравнения колебаний $I'(0) = 0$. Дифференцируя уравнение колебаний, получаем уравнение для тока в первичной обмотке и начальные условия

$$I'' + 2\beta I' + \omega_0^2 I = 0, \quad I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad I'(0) = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = \frac{R}{2L} = 1,25 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_0^2 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2} = 0,71 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Так как $\beta \ll \omega_0$ и рассматриваются времена, не превышающие четверти периода колебаний (нарастание напряжения до величины меньшей максимума), а период $T \approx 10^{-4}$ с, то можно пренебречь затуханием и искать решение в виде

$$I(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Используя начальные условия, находим

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cos \omega t.$$

Напряжения на обмотках определяются зацепленными потоками индукции магнитного поля $\Psi = N\Phi$. Поэтому из сохранения потока для напряжения на вторичной обмотке, которое в момент проскачивания искры равно напряжению на разрядном промежутке, получаем

$$U = \frac{N_2}{N_1} LI' = \frac{N_2}{N_1} \frac{\mathcal{E}}{R} \omega L \sin \omega t = \frac{N_2}{N_1} Q \mathcal{E} \sin \omega t.$$

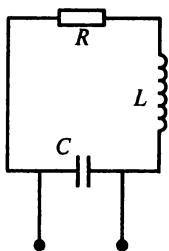


Рис. 9.28

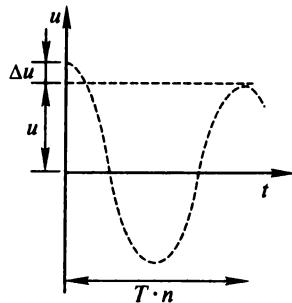


Рис. 9.29

Здесь введена добротность

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2} \approx 28.$$

Подставляя заданные величины, находим время достижения пробойного напряжения на запальной свече $t \approx 3$ мкс.

Потери при затухающих колебаниях в контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора, активного сопротивления и катушки индуктивности (рис. 9.28), можно компенсировать, увеличивая скачком на Δu напряжение на конденсаторе через n колебаний. Считая затухание малым, найдем амплитуду u установившихся колебаний напряжения на конденсаторе (№ 9.53). На рис. 9.29 показано изменение напряжения на конденсаторе со временем для случая $n = 1$. Из (9.19) следует

$$u = (u + \Delta u) e^{-\beta n T}.$$

Отсюда находим

$$u = \Delta u \frac{e^{-\beta n T}}{1 - e^{-\beta n T}} \approx \frac{\Delta u}{\beta n T} = \Delta u \frac{(L/C)^{1/2}}{\pi n R}.$$

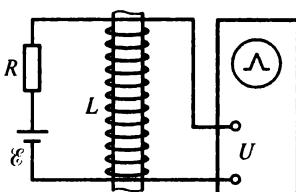


Рис. 9.30

Рассмотрим задачи, в которых переходной процесс связан с быстрым изменением какого-либо параметра контура.

Для измерения магнитной восприимчивости длинных цилиндрических образцов применяется установка, показанная на рис. 9.30. При быстром удалении образца, заполняющего всю катушку, на ней воз-

никает импульс напряжения, величина которого измеряется с помощью осциллографа. Найдем магнитную восприимчивость χ образца, если $\mathcal{E} = 4,5 \text{ В}$, $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$ (пустой катушки), $U = 6,8 \text{ мВ}$ (№ 9.3). Из (9.4) следует, что при быстром удалении образца ($\Delta t \ll L/R \approx 0,1 \text{ с}$) сохраняется магнитный поток $LI = \mu LI_0$, где $I_0 = \mathcal{E}/R$. Таким образом, после удаления образца

$$I = \mu I_0 = \mu \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

В итоге, используя (6.9) в системе СИ, получаем для напряжения на катушке $U = \mathcal{E} - IR = \mathcal{E}(1 - \mu) = -\chi\mathcal{E}$. Откуда

$$\chi = \left| \frac{U}{\mathcal{E}} \right| = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

В контуре, состоящем из батареи с ЭДС \mathcal{E} , сопротивления R и конденсатора емкостью $C = 10^{-10} \Phi$, очень быстро за время $\Delta t = 10^{-2} \text{ с}$ уменьшают расстояние между пластинами в два раза. Найдем, при каком условии за это время заряд конденсатора практически не изменится, а также определим джоулеву теплоту Q , которая выделится в сопротивлении R к моменту перезарядки (№ 9.1). Для того чтобы за время сближения пластин изменение заряда, равное произведению тока I на время Δt , было мало по сравнению с зарядом (q), необходимо условие $I\Delta t \ll q = C\mathcal{E}$, т. е. должно быть $R \gg \Delta t/C = 10^8 \text{ Ом}$. При уменьшении расстояния между пластинами в два раза емкость увеличивается в два раза $C_1 = 2C$. Используя (9.1) и (9.3), получаем уравнение, описывающее изменение заряда после раздвижения пластин,

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_1} = \mathcal{E}.$$

Решение его

$$q = \mathcal{E}C_1 + K \exp\left(-\frac{t}{RC_1}\right).$$

Для определения постоянной K используем условие, что в начальный момент заряд на пластинах $q = \mathcal{E}C$. Поэтому получаем

$$q = \mathcal{E}C\left(2 - e^{-t/2RC}\right).$$

Работа батареи, равная $A = \Delta q\mathcal{E} = q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$, идет на изменение энергии конденсатора и джоулевой теплоты. Энергию конденсатора

после сдвигания пластин можно вычислить с помощью (3.67) из постоянства заряда и увеличения емкости в два раза

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{2C} = C \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Заметим, что при сдвигании разность потенциалов уменьшается в два раза, и снова

$$W_1 = \frac{1}{2} 2C \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 = C \frac{\epsilon^2}{4}.$$

После работы батареи энергия конденсатора

$$W_2 = \frac{1}{2} 2C \epsilon^2.$$

В результате

$$Q = A - (W_2 - W_1) = C \frac{\epsilon^2}{4}.$$

На рис. 9.31 показан контур, состоящий из постоянной ЭДС \mathcal{E} , сопротивления R и плоского конденсатора, из которого очень быстро извлекают пластину из диэлектрика с проницаемостью ϵ , которая заполняла весь объем конденсатора. Найдем зависимость тока в цепи от времени, если после удаления пластины емкость конденсатора равна C (№ 9.4). До удаления пластины заряд на конденсаторе $q = \mathcal{E}\epsilon C$. В процессе удаления пластины в цепи идет ток

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E} - q/\epsilon C}{R}.$$

Так как справа стоит конечная величина, то при бесконечно малом dt должно быть бесконечно малое dq , т. е. q можно считать постоянной величиной. Как следует из (9.7), дальнейшее изменение q описывается уравнением

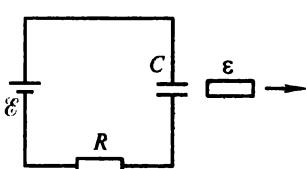


Рис. 9.31

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}.$$

Разделяя переменные и интегрируя при условии, что в начальный момент заряд равен $\mathcal{E}\epsilon C$, получаем

$$q = \mathcal{E}C + \mathcal{E}C(\epsilon - 1)e^{-t/RC}.$$

Отсюда для тока находим

$$I = -\frac{1}{R} \mathcal{E} (\epsilon - 1) e^{-t/RC}.$$

Колебательный контур содержит индуктивность и емкость. В некоторый момент времени из конденсатора быстро извлекают пластину с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$, занимавшей весь его объем. Найдем, как изменится частота колебаний контура, во сколько раз изменятся максимальные величины заряда на конденсаторе и тока в катушке, если пластину извлекают в момент, когда заряд на конденсаторе:

- 1) отсутствует;
- 2) максимальен (№ 9.5).

В соответствии с (3.56) емкость конденсатора уменьшится в 4 раза

$$C_2 = \frac{C_1}{4}.$$

Из (9.8) для изменения частоты колебаний получаем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2.$$

Если при извлечении пластины заряд на конденсаторе отсутствует, то в соответствии с (3.67) энергия конденсатора равна нулю. Вся энергия колебательного контура в этот момент находится в катушке. В соответствии с (7.20) она равна

$$W = L \frac{I_{1M}^2}{2}.$$

Максимальные значения тока не изменятся $I_{2M} = I_{1M}$. Учитывая, что при колебании вся энергия катушки переходит в энергию конденсатора (конечно, когда нет потерь, т. е. сопротивления, как в данном случае),

$$\frac{q_{2M}^2}{2C_2} = \frac{LI_{2M}^2}{2} = \frac{q_{1M}^2}{2C_1},$$

находим

$$\frac{q_{2M}}{q_{1M}} = \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Если на конденсаторе есть заряд, то при быстром извлечении пластины он не успевает измениться. Значит, $q_{2M} = q_{1M}$. Используя закон сохранения энергии, получаем

$$\frac{I_{2M}}{I_{1M}} = \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{1/2} = 2.$$

Другой вариант колебательного контура, в котором емкость не изменяется, а из катушки индуктивности быстро выдергивают сердечник из сверхпроводника с радиусом в два раза меньшим радиуса катушки. Найдем, как изменится частота колебаний контура, во сколько раз изменятся максимальные величины заряда на конденсаторе и тока в катушке, если сердечник выдергивают в момент, когда ток в катушке:

- 1) отсутствует;
- 2) максимален (№ 9.10).

В соответствии с (5.29) для отношения индукции соленоида с сердечником L_0 к индукции без сердечника L_1 получаем

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_0^2} = \frac{3}{4}.$$

Из (9.8) следует, что отношение частот

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^{1/2} = \frac{(3)^{1/2}}{2}.$$

В первом случае энергии в катушке нет, вся энергия в конденсаторе, который не меняется, и поэтому $q_{1M} = q_{0M} = q$. Из сохранения энергии (так потерями на сопротивление пренебрегаем)

$$\frac{q^2}{2C} = L_1 \frac{I_{1M}^2}{2} = L_0 \frac{I_{0M}^2}{2}.$$

Откуда

$$\frac{I_{1M}}{I_{0M}} = \frac{(3)^{1/2}}{2}.$$

Во втором случае в соответствии с (7.1) и (5.28)

$$\frac{I_{1M}}{I_{0M}} = \frac{L_0}{L_1} = \frac{3}{4}.$$

Из сохранения энергии

$$\frac{q_{1M}}{q_{0M}} = \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^{1/2} \frac{I_{1M}}{I_{0M}} = \frac{(3)^{1/2}}{2}.$$

Найдем изменение силы тока в цепи, изображенной на рис. 9.32, когда из катушки индуктивности (дронселя) очень быстро удаляется железный сердечник, и в результате ее индуктивность меняется от L_1 до L_2 (№ 9.8). Из (9.6), обозначая полное активное сопротивление контура R , получаем

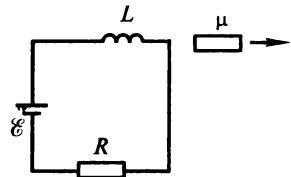


Рис. 9.32

$$\frac{dLI}{dt} + RI = E.$$

При бесконечно малом времени dt должно быть бесконечно малым изменение произведения индуктивности на ток $d(LI)$, т. е. в результате удаления сердечника

$$L_1 I_1 = L_2 I_2 = \text{const.} \quad (9.32)$$

Скачком падает индуктивность и скачком возрастает сила тока от $I_1 = \frac{E}{R}$ до $I_2 = \frac{L_1 I_1}{L_2}$.

Дальнейший процесс описывается уравнением, следующим из (9.4):

$$L_2 \frac{dI}{dt} + IR = E.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\ln (IR - E) = -\frac{Rt}{L_2} + \text{const.}$$

Постоянную интегрирования находим из условия, что при $t = 0$ величина тока

$$I = \frac{EL_1}{RL_2}.$$

В результате

$$I = \frac{E}{R} \left[1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} \exp \left(-\frac{Rt}{L_2} \right) \right].$$

Длинный тонкий соленоид радиусом r_0 подключен к батарее, и по нему течет постоянный ток I_0 . Сердечником в соленоиде служит сплошной цилиндр из сверхпроводника радиусом $r_1 = 0,5r_0$. Сердечник быстро выдергивают из соленоида. Найдем значение I_1 тока в обмотке непосредственно после удаления сердечника и его дальнейшее изменение (№ 9.9). В соответствии с (5.29) для отношения индукции соленоида с сердечником L_0 к индукции без сердечника L_1 получаем

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{r_0^2 - r_1^2}{r_0^2}.$$

Используя (7.1) и (5.28), из сохранения потока магнитного поля при быстром удалении сердечника получаем, как и в (9.32), $L_0 I_0 = L_1 I_1$. Откуда

$$I_1 = \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) I_0 = \frac{3}{4} I_0.$$

Окончательно устанавливающийся ток определяется ЭДС батареи и сопротивлением соленоида и поэтому равен начальному току I_0 . График изменения тока во времени качественно показан на рис. 9.33.

Изменить индуктивность можно и простым **растягиванием катушки** (№ 9.17). Найдем, как изменится собственная частота колебаний в контуре, состоящем из индуктивности L_0 и емкости C , в котором совершаются колебания силы тока $I = I_0 \cos \omega_0 t$ с частотой

$$\omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2},$$

если в момент $t = 0$ длину катушки (l_0), представляющую спираль, очень быстро растянуть в два раза. Из (5.19) получаем, что при увеличении длины катушки в два раза индуктивность ее уменьшится в два раза

$$\left(\frac{L_1}{L_0} = \frac{l_0}{l_1} = \frac{1}{2}\right), \text{ а частота собственных колебаний}$$

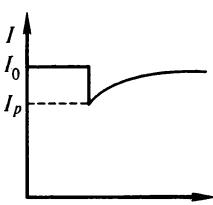


Рис. 9.33

$$\omega = \left(\frac{1}{L_1 C}\right)^{1/2} = \omega_0 (2)^{1/2}.$$

В момент времени $t = 0$ сила тока максимальна (I_0). При быстром растяжении выполняется (9.30), поэтому сила тока практически скачком увеличивается в два раза. При этом вся энергия колебательного контура находится в катушке. Для отношения энергий получаем

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{L_1 I_1^2}{L_0 I_0^2} = 2.$$

Энергия возрастает в два раза за счет работы сил по растяжению катушки.

В колебательном контуре с малым затуханием одновременно увеличивают емкость конденсатора и самоиндукцию катушки в одно и то же число раз, равное n . Увеличение проводится в произвольный момент за время, малое по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найдем соотношение между амплитудами тока I_1 и I_2 до и после изменения параметров контура (№ 9.40). При быстром изменении индуктивности не изменяется магнитный поток (7.1), поэтому энергия в катушке (7.20) обратно пропорциональна индуктивности

$$W_m = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

При быстром изменении емкости C не успевает измениться заряд конденсатора q , поэтому энергия (3.67) обратно пропорциональна емкости

$$W_s = \frac{q^2}{2C}.$$

Так как индуктивность и емкость меняются в одинаковое число раз, то суммарная энергия W изменится в такое же число раз. Максимальные значения тока (амплитуды) определяются полной энергией, поэтому

$$W_2 = L_2 \frac{I_2^2}{2c} = \frac{1}{n} W_1 = \frac{1}{n} L_1 \frac{I_1^2}{2c}.$$

Так как и индуктивность увеличиваются в n раз, то

$$\frac{I_2^2}{I_1^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Намагниченная пуля пролетает **вдоль** оси длинного соленоида, входящего в колебательный контур. Время пролета пулей расстояния, равного диаметру соленоида, мало по сравнению с периодом T колебаний в контуре. Найдем, при какой скорости v пули амплитуда колебаний тока в контуре максимальна и какова при этом величина тока I_{\max} , считая, что магнитный момент пули p параллелен оси соленоида, длина соленоида l , площадь поперечного сечения S , число витков N , и пренебрегая сопротивлением контура (№ 9.56). Движение пули создает переменный поток магнитного поля через соленоид Φ_c . Это в соответствии с (7.1) создает ЭДС, и в цепи идет ток. Максимальная ЭДС и, следовательно, максимальный ток в контуре будет, когда производная потока достигнет максимума. Для оценки будем считать, что это близко к моменту прохождения пули через торец соленоида. Вычислим взаимную индукцию в этой точке. Магнитный момент пули представим как магнитный момент витка площадью σ с током I_b , т. е.

$$p = I_b \frac{\sigma}{c}.$$

Магнитное поле на торце соленоида в соответствии с (5.24) равно

$$H = 2\pi I_c \frac{N}{cl}.$$

Поток магнитного поля через виток

$$\Phi_b = 2\pi I_c N \frac{\sigma}{cl} = MI_c.$$

Отсюда взаимная индукция для положения в этот момент

$$M = 2\pi N \frac{\sigma}{l}.$$

В соответствии с теоремой взаимности (5.30) и (5.28)

$$\Phi_c = M \frac{I_c}{c} = 2\pi N \frac{p}{l}.$$

Для тока в соленоиде из (5.28) и (5.29) получаем

$$I_c = \Phi_c \frac{c}{L} = p \frac{c}{2NS}.$$

В середине соленоида поток будет равен нулю. Движение пули не будет противодействовать изменению ЭДС и тока в контуре,

если до середины соленоида она долетит за четверть периода колебаний

$$v = \frac{2l}{T}.$$

Отключение цепей постоянного тока от источника электричества обычно проводится одновременным отсоединением положительной и отрицательной клемм (рубильником). Если в цепи имеется большая индуктивность, как, например, в обмотках возбуждения генераторов постоянного тока, то между отключающими контактами (1 и 2 на рис. 9.34) может возникнуть большая разность потенциалов, приводящая к пробою и искрению. Для ограничения возникающей разности потенциалов цепь непосредственно перед отключением замыкают на сопротивление r . Найдем, во сколько раз в этом случае максимальное напряжение на отключающих контактах V_m будет превышать приложенное ранее постоянное напряжение V_0 (№ 9.16).

Начальный ток в цепи

$$I_0 = \frac{V_0}{R}.$$

После присоединения r и отключения цепи имеем из (9.4)

$$L \frac{dI}{dt} + I(R + r) = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dI}{I} = -(R + r) \frac{dt}{L}; \quad I = A e^{-(R+r)t/L}.$$

Постоянную интегрирования определяем из условия, что $t = 0$, $I = I_0$. Таким образом,

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-(R+r)t/L}.$$

Отсюда

$$V_m = I(0)r = \frac{V_0 r}{R}.$$

Видно, что чем меньше r , тем меньше V_m . Однако при малых r через источник электричества пойдет большой ток, что приводит к

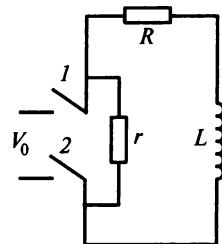


Рис. 9.34

нежелательной перегрузке источника. Достаточно, чтобы V_m было порядка V_0 , т. е. $r \sim R$.

Зашитить аналогичную цепь можно и с помощью конденсатора, как показано на рис. 9.35. Найдем напряжение на конденсаторе после отключения источника электричества, считая, что $4L > CR^2$ (№ 9.15). Учитывая принятые условия, а также (9.8), (9.9) и (9.17), имеем в цепи свободные затухающие колебания, описываемые уравнением (9.15) и его решением (9.19). Начальными условиями при $t = 0$ являются

$$q = q_0 = V_0 C \quad \text{и} \quad I = \frac{dq}{dt} = -\frac{V_0}{R}.$$

Из первого получаем $B = VC$, а из второго

$$A = -\frac{V_0}{R\omega} + \beta V_0 \frac{C}{\omega}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{q}{C} = V_0 e^{-\beta t} \left[\cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\beta - \frac{1}{RC} \right) \sin \omega t \right].$$

Груз массой m подвешен на тонкой проволоке длиной l (рис. 9.36) и сопротивлением R в однородном горизонтальном магнитном поле B и совершает малые колебания в плоскости, перпендикулярной полю. При этом проволока всегда остается замкнутой накоротко неподвижной внешней цепью. Найдем число колебаний, по прошествии которых амплитуда тока в цепи уменьшится в e раз (№ 9.39). В уравнение колебаний маятника (см. 1, с. 244) надо добавить момент силы Ампера (7.4)

$$m\varphi'' = -mg/l\varphi - \int_0^l x \frac{I}{c} dx B.$$

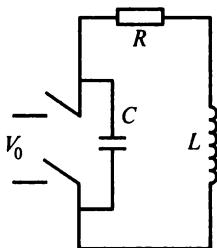


Рис. 9.35

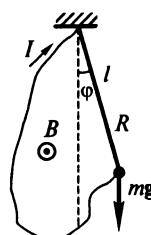


Рис. 9.36

В контуре из-за изменения потока магнитного поля создается ЭДС (7.1)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} Bl^2 \frac{\Phi'}{c},$$

которая создает ток $I = \mathcal{E}/R$. В результате получаем уравнение свободных затухающих колебаний

$$\varphi'' + 2\beta\varphi' + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = B^2 \frac{l^2}{8mc^2 R} \quad (\text{в единицах СГСЭ}); \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Используя (9.19), находим

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta).$$

Изменение амплитуды отклонения $\varphi_m = \varphi_0 e^{-\beta t}$. Максимальный угол отклонения достигается при $\omega t + \delta = 0$. Так как ЭДС и, следовательно, ток пропорциональны φ' , то максимальный ток возникает при $\omega t + \delta = \pi/2$. Для тока имеем

$$I = \varphi' = -\varphi_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \delta) + \omega \sin(\omega t + \delta)].$$

Изменение амплитуды тока $I_m = \varphi_0 \omega e^{-\beta t}$. Время уменьшения амплитуды тока в e раз

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{8mc^2 R}{B^2 l^2}.$$

Так как

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \approx \omega_0^2 = \frac{g}{l}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

то можно вычислить число колебаний $n = \tau/T$.

Кольцо из тонкой проволоки, имеющее омическое сопротивление $R = 10^{-3}$ Ом, массу $m = 1$ г и радиус $r = 1$ см, подвешенное на упругой нити, совершает малые **крутильные колебания** с частотой $v = 1$ Гц (рис. 9.37). Если поместить кольцо в магнитное поле, параллельное плоскости кольца в положении равновесия, то возникает сильное затухание колебаний. Оценим магнитную индукцию поля, при которой

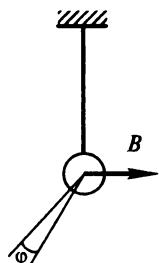


Рис. 9.37

движение крутильного маятника происходит в критическом режиме (т. е. колебательный режим переходит в апериодический), не учитывая самоиндукцию кольца и затухание без магнитного поля (№ 9.41). В уравнение крутильных колебаний (см.: 1, с. 266) надо добавить момент силы Ампера (7.4)

$$J\phi'' + k\phi + 4 \int_0^{\pi/4} r \sin \theta I r d\theta \sin \theta \frac{B}{c} = 0,$$

где J — момент инерции кольца, $J = mr^2/2$; k — модуль кручения нити; θ — угол между направлением тока в кольце и направлением магнитного поля и одновременно из центра кольца на элемент тока от вертикали; ϕ — угол поворота кольца от положения равновесия, который считаем малым ($\sin \phi \approx \phi$). Момент силы Ампера в результате равен $\pi r^2 I \frac{B}{c}$.

В контуре из-за изменения потока магнитного поля создается ЭДС (7.1)

$$\mathcal{E} = B\pi r^2 \frac{\phi'}{c},$$

которая создает ток $I = \mathcal{E}/R$. В результате получаем уравнение свободных затухающих колебаний аналогичное (9.15)

$$\phi'' + 2\beta\phi' + \omega_0^2\phi = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$\beta = B^2 \frac{(\pi r^2)^2}{2c^2 RJ} \quad (\text{в единицах СГСЭ}), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{J}.$$

Из (9.17) и (9.18) критический (апериодический) режим возникает при $\beta = \omega_0$. Отсюда находим соответствующее этому магнитное поле

$$B = \frac{c(2RJ\omega_0)^{1/2}}{\pi r^2} = \frac{c(2\pi v_0 m R)^{1/2}}{\pi r}.$$

Конденсатор емкостью C присоединен к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии l друг от друга. Однородное магнитное поле B горизонтально и перпендикулярно к плоскости шин. Вдоль шин в магнитном поле падает без начальной скорости медный проводник массой m так, что всегда имеется контакт между проводником и шинами. Пренебре-

гая сопротивлением и индуктивностью проводников, а также требуем проводника о шины, найдем:

1) ускорение проводника;

2) силу тока, заряжающего конденсатор (№ 9.45).

Из (8.1) следует, что в движущемся со скоростью x' проводнике создается вдоль проводника электрическое поле $E = x' B$ и на концах проводника разность потенциалов

$$U = x' Bl = q/C. \quad (9.33)$$

На проводник, по которому идет ток I , действует сила Ампера (7.4)

$$F = IlB. \quad (9.34)$$

Она направлена в соответствии с векторными произведениями в (8.1) и (7.4) вверх. Уравнение движения проводника

$$mx'' = mg - ilB = mg - CB^2 l^2 x''. \quad (9.35)$$

Отсюда находим ускорение проводника

$$x'' = \frac{mg}{m + CB^2 l^2}$$

и ток, заряжающий конденсатор,

$$I = \frac{mgBlC}{m + CB^2 l^2}.$$

Та же конструкция, но вверху вместо конденсатора присоединен соленоид индуктивностью L с ничтожным сопротивлением. Найдем закон движения проводника (№ 9.46). В данном случае падение напряжения на проводнике вместо (9.33) равно падению на индуктивности

$$U = x' Bl = LI'. \quad (9.36)$$

Отсюда $x'' Bl = LI''$. Для силы Ампера имеем снова (9.34). Подставляя все соотношения в первую часть уравнения движения проводника (9.35), имеем

$$I'' + B^2 l^2 \frac{I}{mL} - Bl \frac{g}{L} = 0.$$

Используя начальное условие $I(0) = I'(0) = 0$, получаем

$$I = mg \frac{1 - \cos \omega t}{Bl},$$

где

$$\omega^2 = B \frac{l}{mL}.$$

Из (9.36) и начальных условий имеем

$$x = mgL \frac{1 - \cos \omega t}{B^2 l^2}.$$

Если в той же конструкции вверху находится сопротивление R , то вместо (9.33) и (9.36) получаем

$$U = x' Bl = IR. \quad (9.37)$$

Подставляя (9.37) в первую часть уравнения движения проводника (9.35), имеем

$$mx'' = mg - IlB = mg - B^2 l^2 \frac{x'}{R}.$$

При установившемся движении $x'' = 0$ получаем для скорости

$$v = x' = mg \frac{R}{B^2 l^2}.$$

Из (9.34) и (9.37) видно, что скорость падения будет расти (от нуля), пока сила Ампера не станет равной силе тяжести (№ 9.47).

Рассмотрим еще случай (№ 9.48), когда эта система сверху замкнута индуктивностью, а снизу сопротивлением (рис. 9.38). Теперь с помощью (9.35)–(9.37) имеем

$$mx'' = mg + Bl(I_L - I_R), \quad LI'_L = -Blx', \quad RI_R = Blx'.$$

Отсюда

$$x'' + (Bl)^2 \frac{x'}{mR} + (Bl)^2 \frac{x}{mL} = g.$$

После интегрирования при нулевых начальных условиях имеем

$$x = mgL \frac{1 - e^{-\beta t} \cos \omega t}{(Bl)^2},$$

где

$$\beta = \frac{(Bl)^2}{2mg}, \quad \omega^2 = \frac{(Bl)^2}{ml}.$$

Еще один случай, когда к верхним концам присоединены последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L (рис. 9.39). Пренебрегая сопротивлением катушки, медных шин и проводника, а также индуктивностью проводников и

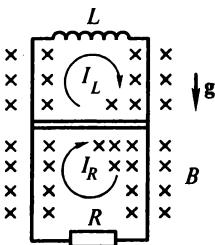


Рис. 9.38

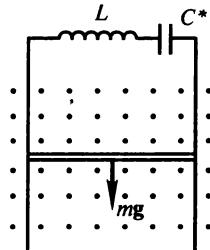


Рис. 9.39

трением проводника о шины, определим закон изменения тока $I(t)$, а также координаты проводника $x(t)$, начиная с момента начала падения $t = 0$, $x(0) = 0$ (№ 9.49). Используя (9.33), (9.35) и (9.36), получаем

$$mx'' = mg - IBl, \quad LI' + q/C = Blx'.$$

Откуда, дифференцируя, имеем

$$I'' + \frac{I}{LC} = Bl \frac{x''}{L} = \frac{Bl/L}{g - BlI/m}.$$

Вводя обозначение

$$\omega^2 = B^2 \frac{l^2}{Lm} + \frac{1}{LC},$$

получаем

$$I'' + \omega^2 I = Bl \frac{g}{L}.$$

Его решение при условии $I(0) = 0$

$$I(t) = Blg \frac{1 - \cos \omega t}{L\omega^2}.$$

Для координаты проводника имеем

$$x'' = g - B^2 l^2 g \frac{1 - \cos \omega t}{m L \omega^2}.$$

Интегрируя и используя условия $x'(0) = 0$ и $x(0) = 0$, получаем

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \left(1 - \frac{B^2 l^2}{m L \omega^2} \right) + B^2 l^2 g \frac{1 - \cos \omega t}{m L \omega^4}.$$

10. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

Колебания в электрической цепи называются **вынужденными**, если их вызывает меняющаяся со временем ЭДС. Для описания изменений в цепи из последовательно соединенных индуктивности, сопротивления, емкости и ЭДС можно пользоваться уравнением (9.6) или при неизменных параметрах контура уравнением (9.10)

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = X(t), \quad (10.1)$$

где $X(t)$ — ЭДС, деленная на индуктивность L .

Решение этого неоднородного уравнения складывается из общего решения однородного (правая часть равна нулю) и частного решения неоднородного уравнения. Возможность представления правой части уравнения в виде ряда Фурье для периодической $X(t)$ или в виде интеграла Фурье при отсутствии периодичности, т. е. набором гармонических функций, требует в первую очередь рассмотреть гармоническую вынуждающую ЭДС и соответственно гармоническую функцию $X(t)$

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = X_0 \cos \omega t. \quad (10.2)$$

Свободные колебания, возникающие в начальный момент приложения вынуждающего воздействия, в соответствии с (9.19) затухают, а устанавливаются колебания на частоте ω , которые поддерживаются внешним воздействием. Найдем амплитуду q_m и фазу ψ таких установившихся колебаний. Частное решения уравнения (10.2) ищем в виде

$$q = q_m \cos(\omega t + \psi) = q_m (\cos \psi \cos \omega t - \sin \psi \sin \omega t), \quad (10.3)$$

где ψ — разность фаз между колебаниями заряда и внешним воздействием.

Дифференцируя (10.3) по времени и подставляя в (10.2), получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \psi - 2\beta \omega \sin \psi] q_m - X_0 \right\} \cos \omega t - \\ & - \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \psi - 2\beta \omega \cos \psi \right] q_m \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Для удовлетворения (10.2) должно быть

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \psi - 2\beta\omega \sin \psi] q_m = X_0; \quad (10.4)$$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \psi + 2\beta\omega \cos \psi] q_m = 0. \quad (10.5)$$

Из (10.5)

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (10.6)$$

Воспользуемся тригонометрическими тождествами

$$\cos^2 \psi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}, \quad \sin^2 \psi = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi}.$$

Получаем

$$\cos \psi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}};$$

$$\sin \psi = \frac{2\beta\omega}{[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}.$$

Подставляя в (10.4), находим амплитуду

$$q_m(\omega) = \frac{X_0}{[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2]^{1/2}}. \quad (10.7)$$

Максимальное значение амплитуды будет при $\omega = \omega_{\text{рез}}$, называемой **резонансной частотой**. Используя (10.7), получаем

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2; \quad (10.8)$$

$$q_{m \text{рез}} = \frac{X_0}{2\beta\omega_{\text{рез}}}. \quad (10.9)$$

При $\omega = 0$ имеем

$$q_m(0) = \frac{X_0}{\omega_0^2}. \quad (10.10)$$

На рис. 10.1 показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающего воздействия. При уменьшении затухания (уменьшении β) максимум становится острее и выше. Частота резонанса при этом стремится к собственной частоте, а отношение максимальной амплитуды к амплитуде при нулевой частоте приближается к добротности Q (9.27).

Удобно в (10.7) ввести добротность и профиль пика. Обозначая отклонение частоты от пика $\Delta\omega = |\omega_0 - \omega|$ (при малых затуханиях $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$), из (10.7) и (9.27) получаем

$$q_m = \frac{q_m \text{ рез}}{\left[1 + (2\Delta\omega/\omega)^2 Q^2 \right]^{1/2}}. \quad (10.11)$$

На рис. 10.2 показано изменение фазы колебаний. При малых частотах фазы совпадают. При резонансе отстают на $\pi/2$, а при больших частотах колебания происходят в противофазе воздействию.

Из (10.3) дифференцированием получаем изменение тока I в цепи

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t + \psi) = I_m \cos(\omega t + \psi + \pi/2). \quad (10.12)$$

Отсюда видно, что изменение тока опережает по фазе изменение заряда на $\pi/2$. При резонансе ток по фазе совпадает с вынуждающим воздействием.

Для производной тока (второй производной заряда) по времени получаем

$$I' = q'' = q_m \omega^2 \cos(\omega t + \psi + \pi). \quad (10.13)$$

Это изменение опережает на $\pi/2$ изменение тока и на π изменение заряда.

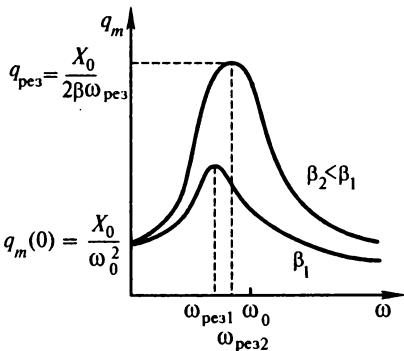


Рис. 10.1

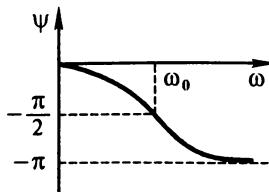


Рис. 10.2

На рис. 10.3 показано изменение амплитуды тока в зависимости от частоты вынуждающего воздействия. Резонансное для тока значение частоты равно собственной частоте. Резонанс тока соответствует резонансу падения напряжения на активном сопротивлении. Резонанс заряда (10.8) соответствует резонансу падения напряжения на емкости. Резонансу падения напряжения на индуктивности будет соответствовать резонанс второй производной заряда. Используя (10.3) и находя экстремум, получаем

$$\omega_{L \text{рез}} = \frac{\omega_0}{\left[1 - 2(\beta/\omega_0)^2 \right]^{1/2}}. \quad (10.14)$$

Установившиеся вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи **переменного тока**.

Обозначая амплитуду прикладываемого напряжения $U_m = X_0 L$, из (10.13), (9.8) и (9.9) получаем для тока

$$I_m = \frac{U_m}{\left[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 \right]^{1/2}}. \quad (10.15)$$

Формально это соотношение можно рассматривать как **закон Ома** для амплитуд напряжения и тока. Величину, стоящую в знаменателе, называют **полным сопротивлением**, или **импедансом**,

$$Z = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (10.16)$$

Величину, стоящую в круглых скобках, называют **реактивным сопротивлением** (в отличие от **активного сопротивления** R), или **релактансом**. **Индуктивным сопротивлением** называют

$$Z_L = \omega L. \quad (10.17)$$

Емкостным сопротивлением называют

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (10.18)$$

Анализ колебательных процессов в многих случаях облегчается при использовании **комплексных чисел**. Если действительные числа

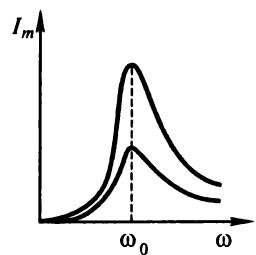


Рис. 10.3

можно расположить на прямой линии — числовой оси, то для представления комплексных чисел нужна плоскость, называемая комплексной, на которой точкой определяется комплексное число (z), имеющее действительную (по оси x) и мнимую (по оси y) части. Оно записывается в виде

$$z = x + iy,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Комплексное число можно записать в полярных координатах, введя радиус-вектор $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и угол φ из соотношения $\operatorname{tg} \varphi = y/x$. Тогда получаем

$$z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (10.19)$$

Дифференцируя по φ , получаем

$$\frac{dz}{d\varphi} = \rho(-\sin \varphi + i \cos \varphi) = iz.$$

Разделяя переменные и интегрируя, с учетом, что при $\varphi = 0 z = \rho$, находим так называемую формулу Эйлера

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}. \quad (10.20)$$

Комплексная (экспоненциальная) форма во многих случаях помогает упростить преобразования.

Для линейных уравнений всегда можно разделить действительную часть, для которой были получены решения, и мнимую. Вместо уравнения (10.2) напишем уравнение для напряжения на конденсаторе, предполагая его комплексной величиной

$$V'' + 2\beta V' + \omega_0^2 V = V_m \omega_0^2 e^{i\omega t}. \quad (10.21)$$

Частное решение ищем в виде

$$V = A e^{i\omega t}. \quad (10.22)$$

Получаем

$$A = V_m \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega}. \quad (10.23)$$

Преобразуя с помощью формулы Эйлера знаменатель, получаем

$$V = V_m \omega_0^2 \frac{e^{i(\omega t - \varphi)}}{\rho}, \quad (10.24)$$

где ρ — модуль комплексного числа, совпадающий со знаменателем (10.7); ϕ — фаза, $\phi = -\psi$ из (10.6).

Действительная часть (10.24) совпадает с решением (10.3). С помощью (10.24) можно найти и другие характеристики колебаний в комплексном виде. Полезно выделить в экспоненте часть, зависящую от времени, от другой части, определяющей фазу характеристики и дающую вместе с амплитудой так называемую **комплексную амплитуду**. Будем далее комплексные величины отмечать сверху специальным значком « $\hat{\cdot}$ ». Например, для тока имеем

$$\hat{I} = \hat{I}_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i\theta} e^{i\omega t}, \quad (10.25)$$

где $\hat{I}_0 = I_0 e^{i\theta}$ — комплексная амплитуда.

Падение напряжения на сопротивлении

$$\hat{U}_{0R} = \hat{I}_0 \hat{Z}_R = \hat{I}_0 R, \quad (10.26)$$

$$\hat{Z}_R = R. \quad (10.27)$$

Для падения напряжения на индуктивности находим

$$\hat{U}_L = \hat{U}_{0L} e^{i\omega t} = L \frac{d\hat{I}}{dt} = L \hat{I}_0 i\omega e^{i\omega t}.$$

Отсюда

$$\hat{U}_{0L} = i\omega L \hat{I}_0 = \hat{I}_0 \hat{Z}_L; \quad (10.28)$$

$$\hat{Z}_L = i\omega L. \quad (10.29)$$

Падение напряжения на емкости

$$\hat{U}_C = \hat{U}_{0C} e^{i\omega t} = \frac{1}{C} \int \hat{I} dt = \frac{\hat{I}_0}{C} \int e^{i\omega t} dt = \hat{I}_0 \frac{e^{i\omega t}}{i\omega C};$$

$$\hat{U}_{0C} = \frac{\hat{I}_0}{i\omega C} = -\frac{i\hat{I}_0}{\omega C} = \hat{I}_0 \hat{Z}_C; \quad (10.30)$$

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}. \quad (10.31)$$

Для цепи из последовательно соединенных сопротивления, индуктивности, емкости и комплексной ЭДС, равной $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$, имеем

$$\hat{I}_0 \left[R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \mathcal{E}_0 = \hat{I}_0 \hat{Z}. \quad (10.32)$$

Эта связь комплексных амплитуд — правило Кирхгофа для установившихся колебаний (**переменного тока**). Роль сопротивления играет импеданс в комплексном виде. Из формулы (10.20) следует, что

$$i = e^{i\pi/2}. \quad (10.33)$$

Комплексные величины, подобные (10.25), на комплексной плоскости вращаются (против часовой стрелки) относительно центра полярной системы координат с угловой скоростью ω . Во вращающейся с такой скоростью плоскости комплексные амплитуды неподвижны и имеют наклон, определяемый их фазой. Такое изображение называется **векторной диаграммой**.

Изобразим на этой плоскости (рис. 10.4) комплексные амплитуды падений напряжений, входящих в (10.32). Для этого воспользуемся (10.26), (10.28), (10.30) и (10.33).

Удобно фазовые углы отсчитывать от вектора \hat{U}_R , так как его фаза совпадает с фазой вектора тока \hat{i} , который одинаков во всех элементах при последовательном их соединении. Фаза напряжения на индуктивности опережает на $\pi/2$ фазу напряжения на сопротивлении, а фаза падения напряжения на емкости отстает от нее на $\pi/2$. Сдвиг фазы ЭДС ($\hat{\mathcal{E}}$) из (10.32) определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (10.34)$$

Рассмотрим систему (рис. 10.5) из двух обмоток, связанных железным сердечником, в котором не происходит рассеяния магнитного потока.

Одна обмотка, из большого числа n витков, присоединена к источнику синусоидальной ЭДС $\sim \mathcal{E}$. Другая обмотка состоит из одного кольца, сопротивление которого R . Точки A , B и C этого кольца отстоят друг от друга на равные расстояния. Найдем, пренебрегая индуктивностью кольца и соединительных проводов:

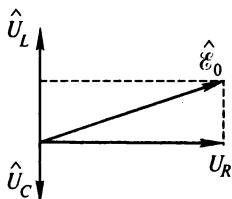


Рис. 10.4

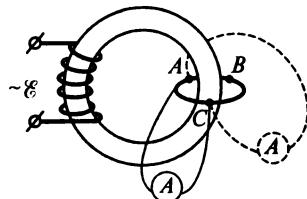


Рис. 10.5

- 1) что покажет достаточно чувствительный амперметр переменного тока с сопротивлением r , если его присоединить к двум из этих точек;
- 2) как изменится показание амперметра, если его перебросить в положение, указанное штриховой линией на рис. 10.5 (№ 10.1).

Из (7.1) для ЭДС в кольце получаем

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ — поток магнитного поля в сердечнике.

Для обмотки из n витков в аналогичном соотношении надо писать зацепленный поток Ψ . Если рассеяние потока отсутствует, то $\Psi = n\Phi$. Поэтому $\mathcal{E} = n\mathcal{E}_k$. В случае присоединения амперметра к точкам A и C имеем контур из параллельно соединенных амперметра и третьей части кольца и последовательно к ним присоединенных остальных двух третей кольца. Используя правило Кирхгофа, получаем

$$\mathcal{E}_k = I \left(\frac{1}{1/r + 3/R} + \frac{2R}{3} \right) = \frac{1}{3} IR \frac{9r + 2R}{3r + R}.$$

Обозначая ток через амперметр I_a , а через часть кольца I_1 , по правилам Кирхгофа имеем

$$I = I_a + I_1, \quad I_a r = \frac{I_1 R}{3}$$

и, следовательно,

$$I_a = \frac{IR}{3r + R} = \frac{3\mathcal{E}_k}{9r + 2R} = \frac{3\mathcal{E}/n}{9r + 2R}.$$

Во втором случае подсоединения, обозначенном пунктиром, поступая аналогичным образом, находим

$$I_a = \frac{6\mathcal{E}/n}{9r + 2R}.$$

В опыте Мандельштама и Папалекси прямой однослойный соленоид с индуктивностью L совершает вынужденные крутильные гармонические колебания вокруг своей оси $\varphi = \varphi \cos \omega t$. Соленоид гибкими проводами присоединен к конденсатору емкостью C . Радиус соленоида a , длина проволоки, из которой он изготовлен, l , сопротивление соленоида R . Найдем напряжение на конденсаторе

при резонансе, когда частота ω равна собственной частоте колебательного контура (№ 10.17):

$$\omega_0 = \frac{1}{(LC)^{1/2}}$$

В системе отсчета, связанной с витками соленоида, на электрона действует переменная тангенциальная сила, равная массе электрона, умноженной на ускорение, которое равно угловому ускорению (второй производной угла по времени), умноженному на радиус витков. Разделив на заряд электрона, получаем напряженность поля, а умножив на длину проволоки, получаем ЭДС, действующую в контуре. Таким образом, приходим к уравнению (10.2), в котором

$$X_0 = mla\phi_0 \frac{\omega^2}{eL}.$$

Используя (10.7), при $\omega = \omega_0$ для амплитуды напряжения на конденсаторе получаем

$$V_0 = mla\phi_0 \frac{\omega^3 L}{eR}.$$

Напряжение в соответствии с (10.3) меняется гармонически

$$V = V_0 \cos(\omega t + \psi),$$

но ψ здесь несущественно.

Рассмотрим подключение к источнику синусоидального напряжения $U = U_0 \sin \omega t$ в момент времени $t = 0$ последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L . Найдем силу тока I как функцию времени и фазы ϕ , а также условие, при котором сразу после замыкания цепи в ней установятся синусоидальные колебания (№ 10.4). Используя (9.4), для цепи получаем уравнение

$$L \frac{dI}{dt} + RI = U_0 \sin \omega t.$$

Решение этого уравнения можно составить из общего решения однородного уравнения (правая часть равна нулю) и частного решения данного уравнения. Решение однородного уравнения

$$I_1 = \frac{A e^{-Rt}}{L},$$

где A — постоянная, которую определим из начальных данных. Частное решение будем искать в виде $I_2 = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Подставляя это в общее уравнение, находим

$$I_0 = \frac{U_0 R}{(R^2 + \omega^2 L^2) \cos \varphi} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = -\frac{\omega L}{R} \cos \varphi.$$

Общее решение

$$I = A e^{-Rt/L} + \frac{U_0 R}{(R^2 + \omega^2 L^2) \cos \varphi}.$$

Используя начальное условие — ток в начальный момент равен нулю, и полученные ранее соотношения, имеем

$$I = U_0 \omega L \frac{e^{-Rt/L} - \sin(\omega t + \varphi)/\sin \varphi}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Заметим, что частное решение можно было искать в виде

$$I_2 = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

При $L = 0$ сразу устанавливаются колебания

$$I = U_0 \frac{\sin \omega t}{R}.$$

Выделяемая мощность в случае переменного тока, как и для постоянного (4.18), определяется силой тока I и напряжением V

$$N = IV.$$

Для переменного тока $V = V_0 \cos \omega t$ и $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$, где φ — сдвиг фаз между напряжением и током. Поэтому

$$N = V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} V_0 I_0 [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)].$$

Для средней за период мощности, так как среднее значение $\cos(2\omega t + \varphi)$ равно нулю, получаем

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \varphi. \quad (10.35)$$

При гармоническом изменении токов и напряжений их среднеквадратичные значения, называемые **эффективными**, равны

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad V_{\text{эфф}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}. \quad (10.36)$$

Эти величины показывают амперметры и вольтметры переменного тока.

Для средней мощности через эффективные значения имеем

$$\langle N \rangle = V_{\text{эф}} I_{\text{эф}} \cos \varphi. \quad (10.37)$$

Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке, у которой неизвестны индуктивность L и сопротивление r , иногда применяют метод трех амперметров. Включение их показано на рис. 10.6. Параллельно катушке включают известное сопротивление R . Измеряют эффективные значения токов: I_1 — через катушку, I_2 — через сопротивление R и полный ток I . Зная показания приборов, определим искомую мощность N (№ 10.3).

В соответствии с (10.32) и (10.33) нарисуем векторные диаграммы для напряжений и токов. На рис. 10.7, *a* для последовательно соединенных сопротивления r и индуктивности получаем, что падение напряжения на индуктивности $\sqrt{2}I_1\omega L$ опережает по фазе падение напряжения на сопротивлении $\sqrt{2}I_1r$ на $\pi/2$. Геометрическая сумма этих падений (т. е. падение на катушке) равна $\sqrt{2}I_1R$ (т. е. падению напряжения на сопротивлении R). Угол φ — это сдвиг фаз между напряжением и током в катушке, который входит в (10.37). На рис. 10.7, *b* показано сложение токов по правилу Кирхгофа $I = I_1 + I_2$. По теореме косинусов

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2 \cos(\pi - \varphi) = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos \varphi.$$

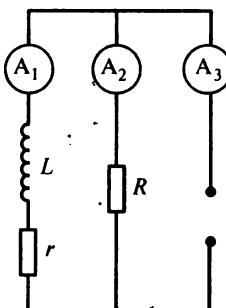


Рис. 10.6

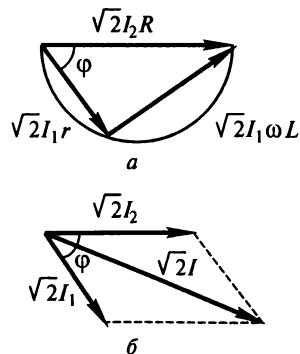


Рис. 10.7

Используя (10.37), получаем

$$\langle N \rangle = VI_1 \cos \varphi = I_2 RI_1 \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_1 I_2} = \frac{1}{2} R(I^2 - I_1^2 - I_2^2).$$

Заметим, что при чисто реактивном сопротивлении катушки ($r = 0$) $\varphi = \pi/2$. Соответственно косинус и джоулевы (тепловые) потери равны нулю.

Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке, у которой неизвестны индуктивность L и сопротивление r , применяют также метод трех вольтметров. Последовательно с катушкой включают известное сопротивление R и присоединяют к цепи три вольтметра так, как показано на рис. 10.8. Измеряют с их помощью эффективные напряжения: V_1 — на катушке, V_2 — на сопротивлении и V — между концами цепи. Зная показания приборов, определим искомую мощность N (№ 10.2). На рис. 10.9 приведены соответствующие векторные диаграммы. Ток через катушку и через сопротивление R один и тот же. По теореме косинусов

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(\pi - \varphi) = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2 \cos \varphi.$$

Используя (10.37), получаем

$$\langle N \rangle = V_1 I \cos \varphi = V_1 \frac{V_2}{R} \frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2V_1 V_2} = \frac{1}{2} \frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{R}.$$

Входящий в (10.35) $\cos \varphi$ называют коэффициентом мощности.

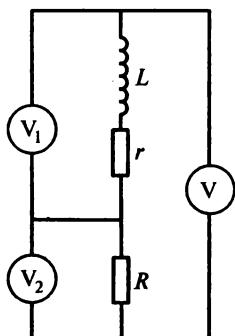


Рис. 10.8

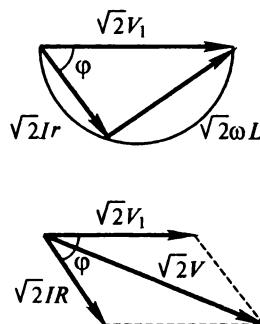


Рис. 10.9

Обмотка электромагнита, полное сопротивление которой $Z = 10 \Omega$ и коэффициент мощности $\cos \varphi = 0,6$, присоединена к цепи переменного тока. Найдем, каким будет коэффициент мощности $\cos \varphi'$, если параллельно обмотке присоединить конденсатор, реактивное сопротивление которого равно $Z_1 = 7 \Omega$ (№ 10.7). Используя комплексные представления (10.27), (10.29), (10.31), (10.32) и (10.35), изобразим их на векторной диаграмме (рис. 10.10). Получаем

$$R = Z \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{Z \sin \varphi - Z_1}{Z \cos \varphi}.$$

Откуда

$$\cos \varphi' = \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varphi - Z_1/Z}{\cos \varphi} \right) \right] \approx 0,999.$$

В приведенной на рис. 10.11 схеме в момент $t = 0$ замыкают ключ К. Найдем зависимость от времени тока I , текущего через источник синусоидальной ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, если параметры контура связаны соотношением (№ 10.5)

$$R = \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}.$$

Используя это соотношение, а также (10.27), (10.29) и (10.31), находим импеданс параллельного соединения Z

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} + \frac{1}{R + 1/i\omega C} = \frac{2R + i(\omega L - 1/\omega C)}{2R + iR(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{1}{R}.$$

Это чисто активное сопротивление. Поэтому

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E}_0 \frac{\sin \omega t}{R}.$$

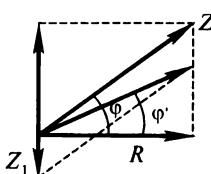


Рис. 10.10

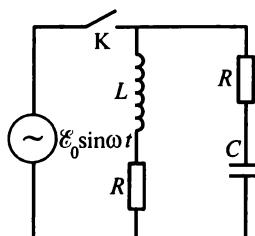


Рис. 10.11

Источник переменного тока с циклической частотой ω и ЭДС \mathcal{E} действует на колебательный контур (рис. 10.12). Определим силу тока I и сдвиг фазы φ между I и \mathcal{E} при резонансе (№ 10.8). Используя условие резонанса (9.8), а также (10.27), (10.29) и (10.31), находим импеданс параллельного соединения Z

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{i\omega CR}{R + i\omega L}.$$

Для тока получаем

$$\hat{I} = \mathcal{E}\omega C \frac{R}{R + i\omega L} = \mathcal{E}\omega CR \frac{\omega L - iR}{R^2 + \omega^2 L^2} = \mathcal{E}\omega CR \rho \frac{e^{i\varphi}}{\rho^2}.$$

Отсюда

$$I_0 = \mathcal{E}\omega R \frac{C}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{R}{\omega L}.$$

Для цепи, изображенной на рис. 10.13, найдем ток I в цепи (в установившемся режиме при $V = V_0 \cos \omega t$), а также значения частот, при которых амплитуда установившихся колебаний будет максимальна и минимальна, и значения максимума и минимума тока (№ 10.9). Обозначив импеданс параллельного соединения Z_1 , имеем

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = 1 - \omega^2 L \frac{C}{i\omega L}.$$

Для полного импеданса цепи получаем

$$Z = \frac{1}{i\omega C} + i\omega \frac{L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{i(2\omega^2 LC - 1)}{\omega C(1 - \omega^2 LC)}.$$

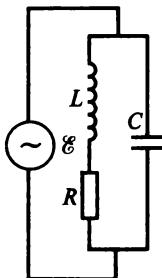


Рис. 10.12

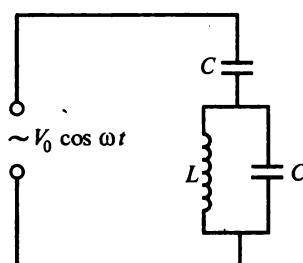


Рис. 10.13

Пользуясь тем, что заданная зависимость напряжения есть реальная часть от комплексного напряжения $V_0 e^{i\omega t}$ и (10.33), вычисляем комплексный ток

$$\hat{I} = V_0 \frac{e^{i\omega t}}{Z} = V_0 \omega C (1 - \omega^2 LC) \frac{e^{i(\omega t - \pi/2)}}{2\omega^2 LC - 1}.$$

Получаем для действительной части

$$I = V_0 \omega C (1 - \omega^2 LC) \frac{\sin \omega t}{2\omega^2 LC - 1}.$$

Минимальное значение

$$I_{\min} = 0 \quad \text{при} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC},$$

максимальное

$$I_{\max} = \infty \quad \text{при} \quad \omega^2 = \frac{1}{2LC}.$$

Индуктивностью резонансного контура ($f = 10$ МГц) служит длинная однослойная катушка диаметром $D = 10$ мм. Найдем, во сколько раз изменится его резонансная частота, если **внутрь катушки вставлен на всю длину латунный цилиндр** (удельное сопротивление латуни $\rho = 8 \cdot 10^{-6}$ Ом · см) диаметром $D/2$ (№ 10.10). При высоких частотах колебаний электромагнитных полей они не проникают внутрь проводников. В данном случае, учитывая также, что для латуни μ порядка единицы в соответствии с (12.56) толщина скин-слоя

$$\delta = \frac{c}{(2\pi\mu\omega/\rho)^{1/2}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Индуктивность катушки меняется из-за уменьшения площади, через которую идет магнитный поток (5.29)

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{D^2}{D^2 - D^2/4} = \frac{4}{3}.$$

Используя (9.8), получаем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^{1/2} = \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2}.$$

В цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления R , индуктивности L и емкости C , включен последовательно источник синусоидальной ЭДС постоянной амплитуды и перестраиваемой частоты. Изменяя частоту источника, настраивают ее в резонанс с частотой цепи, затем уменьшают емкость контура в два раза и снова добиваются резонанса. Посмотрим, изменится ли сила тока при резонансе. Найдем отношение резонансных частот, соответствующих первому и второму случаям (№ 10.11). Из (9.8) следует

$$\omega_1 = \frac{1}{(LC_1)^{1/2}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{(LC_1/2)^{1/2}}$$

и соответственно

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = (2)^{1/2}.$$

Из (10.15) находим

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R}.$$

Сила тока одинакова.

Через баллистический гальванометр пропускается кратковременный импульс тока. При этом его рамка отклоняется на угол ϕ_0 . Спустя половину периода, когда она вернется в исходное положение, через него пропускается такой же импульс тока, но в противоположном направлении; через следующую половину периода пропускается снова такой же импульс, но в первоначальном направлении и т. д. Таким образом, всякий раз, когда рамка гальванометра проходит через положение равновесия, она испытывает одинаковые толчки в направлении своего движения. Найдем максимальный угол ее отклонения ϕ при установившихся колебаниях, зная, что период затухающих колебаний T , а коэффициент затухания β (№ 10.13). Обозначая механический момент толчка рамки M , для изменения момента количества движения (момент инерции J , полученная угловая скорость ϕ'_0) имеем $Mdt = J\phi'_0$. Пока нет толчка, колебания затухают как свободные, и изменения угла описываются уравнением типа (9.15) и имеют решение типа (9.19). В начальный момент угол равен нулю, а угловая скорость благодаря удару ϕ'_0 . Используя это, находим

$$\phi = \frac{\phi'_0}{\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t, \quad \phi' = \frac{\phi'_0}{\omega} (\omega \cos \omega t - \beta \sin \omega t) e^{-\beta t}.$$

Через время $t = T/2$ окажется $\varphi_1 = 0$ и $\varphi'_1 = \varphi'_0 e^{-\beta T/2}$. В результате удара угловая скорость станет равной φ'_{01} . Для ее определения имеем

$$J\varphi'_{01} - J\varphi'_1 = Mdt = J\varphi'_0.$$

В следующий переход через нулевой угол угловая скорость будет

$$\varphi'_2 = \varphi'_{01} e^{-\beta T/2} = (\varphi'_0 + \varphi'_1) e^{-\beta T/2} = \varphi'_0 (1 + e^{-\beta T/2}) e^{-\beta T/2}.$$

В результате удара

$$J\varphi'_{02} - J\varphi'_2 = Mdt = J\varphi'_0.$$

Следовательно,

$$\varphi'_{02} = \varphi'_0 \left[1 + e^{-\beta T/2} + (e^{-\beta T/2})^2 \right].$$

Продолжая этот процесс далее, получаем

$$\varphi'_{0n} = \varphi'_0 \left[1 + e^{-\beta T/2} + (e^{-\beta T/2})^2 + \dots + (e^{-\beta T/2})^n \right].$$

Используя формулу для суммы убывающей геометрической прогрессии, находим

$$\varphi'_{\max} = \frac{\varphi'_0}{1 - e^{-\beta T/2}}.$$

При слабом затухании можно считать, что

$$\frac{\varphi_{\max}}{\varphi_0} = \frac{\varphi'_{\max}}{\varphi'_0}.$$

Поэтому

$$\varphi_{\max} = \frac{\varphi_0}{1 - e^{-\beta T/2}}.$$

С помощью схемы, показанной на рис. 10.14 требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе $V_{\text{вх}}$ и напряжением на выходе $V_{\text{вых}}$. Найдем, какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L , если циклическая частота входного напряжения равна ω , и чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений (№ 10.6). Связь напряжения на выходе с напряжением на входе можно найти либо используя правила Кирх-

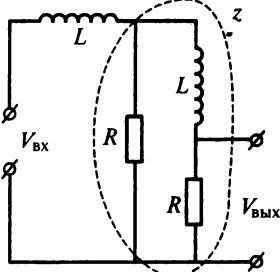


Рис. 10.14

гофа, либо рассматривая цепь как два последовательных делителя напряжения. Воспользуемся вторым способом. Обозначая часть цепи как z и используя (10.27) и (10.29), видим, что $V_{\text{вх}}$ делится на $i\omega L$ и z , а затем z делится на $i\omega L$ и R . Получаем

$$\hat{V}_{\text{вых}} = \frac{\hat{V}_{\text{вх}} z}{z + i\omega L} \frac{R}{R + i\omega L}.$$

Используя правило сложения сопротивлений, имеем

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + i\omega L}.$$

Подставляя и преобразовывая, получаем

$$\hat{V}_{\text{вых}} = \frac{\hat{V}_{\text{вх}} R^2}{R^2 - \omega^2 L^2 + i3\omega LR} = \hat{V}_{\text{вх}} \frac{R}{\rho e^{i\phi}},$$

где

$$\rho = [(R^2 - \omega^2 L^2)^2 + (3\omega LR)^2]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{3\omega LR}{R^2 - \omega^2 L^2}.$$

Если $R = \omega L$, то $\hat{V}_{\text{вых}}$ отстает от $\hat{V}_{\text{вх}}$ на $\phi = 90^\circ$ и

$$\frac{\hat{V}_{\text{вых}}}{\hat{V}_{\text{вх}}} = \frac{1}{3}.$$

Если $R \gg \omega L$, то ϕ — малая величина, т. е. практически нет сдвига фаз и выходное напряжение равно входному. При уменьшении R отставание выходного напряжения от входного увеличивается, достигая 180° при $R \ll \omega L$ (на каждом из делителей отставая на 90°).

С помощью схемы, приведенной на рис. 10.15, требуется получить сдвиг фазы 90° между напряжением на входе V и на выходе U . Найдем, какому условию при этом должны удовлетворять параметры схемы R и C , если частота входного напряжения равна ω (№ 10.54). Как и в предыдущей задаче, находим, рассматривая цепь как два последовательных делителя напряжений:

$$U = \frac{VR^2}{(R - i/\omega C)^2} = \frac{VR^2}{[(R^2 - 1/\omega^2 C^2)^2 + 4R^2/\omega^2 C^2]^{1/2}} e^{-i\phi}.$$

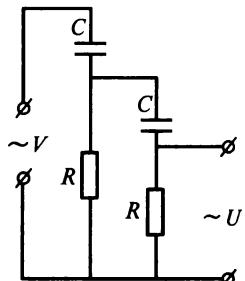


Рис. 10.15

Для определения сдвига фаз имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2R}{\omega C(R^2 - 1/\omega^2 C^2)}.$$

Чтобы удовлетворить условие, должно быть $\omega RC = 1$.

Найдем, при каком соотношении между параметрами схемы, изображенной на рис. 10.16, напряжение на выходе U находится в фазе с напряжением на входе $V = V_0 \cos \omega t$ и какова при этом амплитуда напряжения на выходе, а также построим векторную диаграмму напряжений на элементах схемы (№ 10.55). Для делителей напряжения имеем

$$V_R = \frac{VR}{R + i\omega L}, \quad V_C = \frac{V}{1 + i\omega CR}.$$

В результате

$$U = V_R - V_C = \frac{V i\omega (CR^2 - L)}{R(1 - \omega^2 CL) + i\omega (CR^2 + L)}.$$

При $\omega^2 CL = 1$ это выражение чисто действительное и

$$U = \frac{V(CR^2 - L)}{CR^2 + L}.$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 10.17.

Найдем, при каком соотношении между параметрами схемы, изображенной на рис. 10.18, напряжение на выходе U сдвинуто по фазе относительно напряжения на входе V на 90° и какова при этом амплитуда напряжения на выходе, а также построим векторную диаграмму напряжений на элементах схемы (№ 10.56). Для делителей напряжения имеем

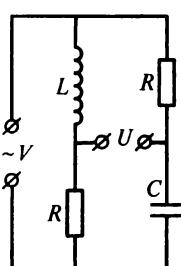


Рис. 10.16

$$V_{R1} = \frac{VR}{R + i\omega L}, \quad V_{R2} = \frac{VRi\omega C}{1 + i\omega CR}.$$

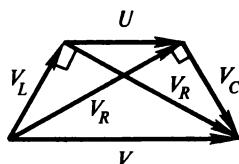


Рис. 10.17

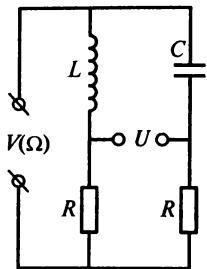


Рис. 10.18

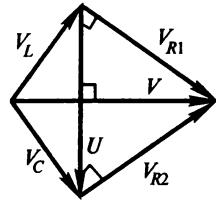


Рис. 10.19

В результате

$$U = V_{R1} - V_{R2} = \frac{VR(1 + \omega^2 LC)}{R(1 - \omega^2 CL) + i\omega(CR^2 + L)}.$$

При $\omega^2 CL = 1$ это выражение чисто мнимое (поворот на 90°) и

$$U = -\frac{V2R(LC)^{1/2}}{CR^2 + L}.$$

Векторная диаграмма представлена на рис. 10.19.

Найдем, при каком соотношении между параметрами схемы, изображенной на рис. 10.20, напряжение на выходе U находится в фазе с напряжением на входе V и каким при этом будет отношение амплитуд напряжений (№ 10.57). Обозначая импеданс параллельного соединения Z , имеем

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C.$$

Откуда

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega CR}.$$

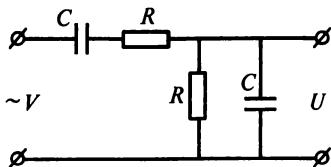


Рис. 10.20

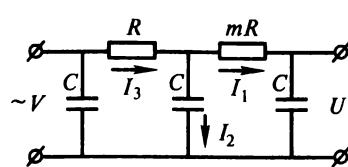


Рис. 10.21

Для делителя напряжений имеем

$$U = \frac{VZ}{R - i/\omega C + Z} = \frac{V}{3 + i(\omega CR - 1/\omega CR)}.$$

Это выражение будет чисто действительным, а следовательно, напряжения будут в одинаковой фазе при $\omega CR = 1$. При этом $V/U = 3$.

На вход фильтра (рис. 10.21) подано напряжение $V = V_0 \cos \omega t$, где

$$\omega = \frac{1}{RC}.$$

Найдем амплитуду напряжения на выходе U (№ 10.58). На рисунке даны обозначения токов. Используя правила Кирхгофа, получаем

$$I_3 = I_1 + I_2; \quad I_1 mR + \frac{I_1}{i\omega C} = \frac{I_2}{i\omega C}; \quad V = I_3 R + \frac{I_2}{i\omega C}; \quad U = \frac{I_1}{i\omega C}.$$

Пользуясь условием для частоты, находим

$$U = \frac{V}{1 - m + i(m + 2)}.$$

Для амплитуды напряжения имеем

$$U_0 = \frac{V_0}{[(1 - m)^2 + (m + 2)^2]^{1/2}} = \frac{V_0}{(2m^2 + 2m + 5)^{1/2}}.$$

К клеммам A и B (рис. 10.22) подводится произвольное переменное напряжение $V_{\text{вх}}(t)$, которое возбуждает между клеммами M и N напряжение $V_{\text{вых}}(t)$. Параметры R , L , C подобраны таким

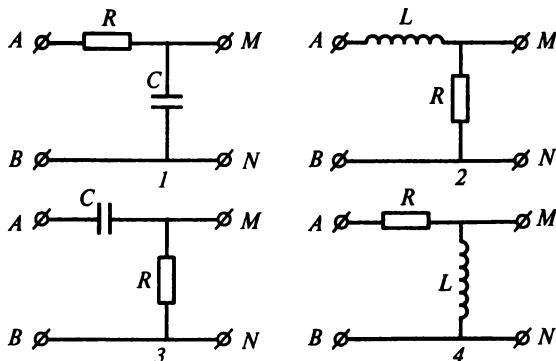


Рис. 10.22

образом, что напряжение на выходе в каждый момент времени мало по сравнению с напряжением на входе в тот же момент. Покажем, что при выполнении этого условия выходное напряжение на схемах 1 и 2 приблизительно пропорционально интегралу, а на схемах 3 и 4 — производной от входного напряжения по времени (№ 10.59). Цепочки 1 и 2 называются интегрирующими, а 3 и 4 — дифференсирующими.

Заметим, что между MN большое сопротивление (как в вольтметре) и ток идет только через конденсатор. Для схемы 1 ток через конденсатор

$$I_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_{\text{вых}}}{dt} = \frac{V_R}{R} = \frac{V_{\text{вх}} - V_{\text{вых}}}{R} \approx \frac{V_{\text{вх}}}{R}.$$

Откуда

$$V_{\text{вых}} = \int V_{\text{вх}} \frac{dt}{RC}.$$

Для схемы 2 имеем

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = V_{\text{вх}} - V_{\text{вых}} \approx V_{\text{вх}}.$$

Откуда

$$V_{\text{вых}} = RI = \frac{R}{L} \int V_{\text{вх}} dt.$$

Для схемы 3 получаем

$$I_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d(V_{\text{вх}} - V_{\text{вых}})}{dt} \approx C \frac{dV_{\text{вх}}}{dt}.$$

Откуда

$$V_{\text{вых}} = I_C R = RC \frac{dV_{\text{вх}}}{dt}.$$

Для схемы 4 находим

$$V_{\text{вых}} = L \frac{dI}{dt} = \frac{L}{R} \frac{d(V_{\text{вх}} - V_{\text{вых}})}{dt} \approx \frac{L}{R} \frac{dV_{\text{вх}}}{dt}.$$

Найдем входной импеданс бесконечной цепочки, показанной на рис. 10.23, а также при каких частотах цепь не будет потреблять мощность от источника (№ 10.60). Импеданс части цепи, обведенной пунктиром, обозначим Z . Импеданс цепи после катушки с ин-

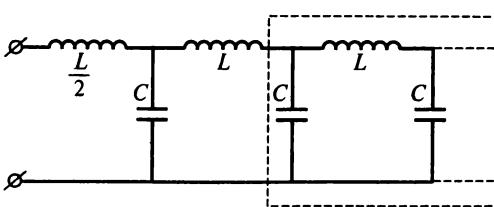


Рис. 10.23

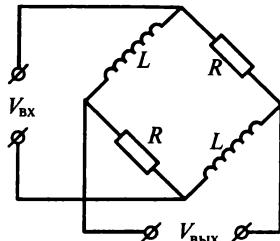


Рис. 10.24

дуктивностью $L/2$ также равен Z . Поэтому для параллельного соединения имеем

$$\frac{1}{Z} = i\omega C + \frac{1}{i\omega L + Z}.$$

Откуда

$$Z^2 + i\omega LZ - \frac{L}{C} = 0; \quad Z = -i\omega \frac{L}{2} \pm \left(\frac{L}{C} - \omega^2 \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}.$$

Для положительного модуля импеданса годится только положительный корень. Учитывая сопротивление катушки с индуктивностью $L/2$, получаем, что импеданс цепи равен $\left(\frac{L}{C} - \omega^2 \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}$. Цепь не потребляет мощности, если импеданс чисто мнимый. Это будет при

$$\omega > \frac{2}{(LC)^{1/2}}.$$

На вход схемы, изображенной на рис. 10.24, подается синусоидальное напряжение с частотой ω . Исследуем зависимость амплитуды и фазы выходного напряжения от величины сопротивления R (№ 10.61). Так как параллельные участки одинаковые, по ним идет одинаковый ток

$$I = \frac{V_{вх}}{R + i\omega L}.$$

Тогда выходное напряжение

$$\begin{aligned} V_{вых} &= I(i\omega L - R) = V_{вх} \frac{i\omega L - R}{R + i\omega L} = V_{вх} \frac{\omega^2 L^2 - R^2 + 2i\omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2} = \\ &= V_{вх} \left[(\omega^2 L^2 - R^2)^2 + 4\omega^2 L^2 R^2 \right]^{1/2} \frac{e^{i\varphi}}{R^2 + \omega^2 L^2} = V_{вх} e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Амплитуды одинаковы. Фаза определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \phi = 2\omega L \frac{R}{\omega^2 L^2 - R^2}.$$

Найдем, при каком соотношении между параметрами моста, изображенного на рис. 10.25, напряжение U на его выходе находится в фазе с входным напряжением V и какая при этом амплитуда напряжения U на выходе (№ 10.62). Вводя обозначения импедансов

$$Z_1 = R + i\omega L; \quad Z_2 = \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}$$

и токов I_1, I_2 , можем по правилам Кирхгофа написать

$$U = I_1 R_1 - I_2 Z_1; \quad V = I_1 (R_1 + R_2) = I_2 (Z_1 + Z_2).$$

Отсюда

$$U = V \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right).$$

Чтобы не было сдвига, в скобках должно быть действительное число. Для этого действительным должно быть

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(R + i\omega L)^2}{i\omega LR} = \frac{R^2 - \omega^2 L^2 + i2\omega LR}{i\omega LR}.$$

Это выполняется при $\omega L = R$. При этом

$$U = V \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{2}{3} \right).$$

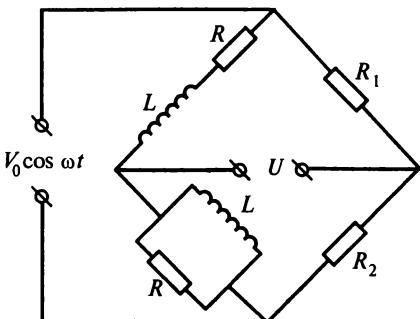


Рис. 10.25

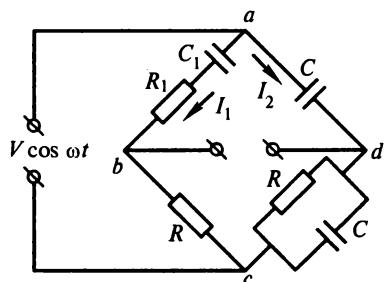


Рис. 10.26

Мост переменного тока, изображенный на рис. 10.26, сбалансирован. Найдем соотношение между постоянными временем плеч ab и cd , выясним, является ли найденное соотношение достаточным условием баланса моста (№ 10.63). Вводя обозначения импеданса

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega CR}.$$

и токов I_1 , I_2 , можем по правилам Кирхгофа написать

$$I_1 = \frac{V}{R + R_l + 1/i\omega C_1} = V i\omega \frac{C_1}{i\omega C_1 (R + R_l) + 1};$$

$$I_2 = \frac{V}{1/i\omega C + R/(1 + i\omega CR)} = V \frac{i\omega C - \omega CR}{1 + 2i\omega CR}.$$

Условие баланса моста (отсутствие выходного напряжения)

$$I_1 (R_l + i\omega C_1) = \frac{I_2}{i\omega C}.$$

Подставляя токи, получаем $C_1 + i\omega C C_1 R = C + i\omega C_1 C R_l$. Откуда $C_1 = C$ и $R_l = R$. Поэтому постоянная времени плеча ab равна $\tau_1 = R_l C_1$ и равна постоянной времени плеча cd , равного $\tau = RC$.

Найдем условие, при котором в схеме, изображенной на рис. 10.27, ток через некоторую нагрузку Z не будет зависеть от величины этой нагрузки, пренебрегая сопротивлением проводов и омическим сопротивлением катушки (№ 10.67). Импеданс параллельного соединения Z_0 находим из условия

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z} + i\omega C.$$

В параллельных участках

$$\frac{I_1}{i\omega C} = I_2 Z.$$

Откуда

$$I = I_1 + I_2 = I_2 (1 + i\omega CZ).$$

Поэтому

$$I_2 = \frac{V}{i\omega L + Z(1 - \omega LC)}.$$

Чтобы ток не зависел от Z , должно быть $\omega LC = 1$.

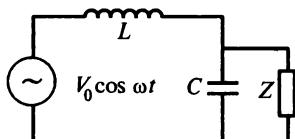


Рис. 10.27

При изменении частоты f вынуждающей силы, действующей на линейную **колебательную систему**, меняется фаза ϕ установившихся колебаний этой системы и **запасенная** в ней энергия W . Пусть при малом сдвиге частоты от резонансной $\Delta f = 1$ Гц фаза колебаний ϕ изменилась на $\pi/4$. Найдем, как изменится при этом энергия W . Определим также, каково время затухания τ системы в режиме свободных колебаний (№ 10.15). При слабом затухании из (10.8) следует, что резонанс при $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$. Изменение фазы от резонансного ($-\pi/2$) на $\pi/4$, как следует из (10.6), дает

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\beta^2\omega^2.$$

Используя это и то, что отношение энергий равно отношению квадратов амплитуд, выражаемых (10.7), получаем

$$\frac{W_{\text{рез}}}{W} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}{4\beta^2\omega^2} = 2.$$

Энергия уменьшится в два раза.

Используя полученное ранее соотношение, для характерного времени затухания свободных колебаний (9.25) получаем

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\omega}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)} = \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi\Delta f} \approx 0,16.$$

В колебательном контуре с индуктивностью $L = 1$ Гн, настроенном в **резонанс**, под действием внешнего синусоидального напряжения с амплитудой $V_0 = 200$ В установился переменный ток с амплитудой $I_0 = 20$ А. Найдем сопротивление контура R и время затухания τ (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз) в режиме свободных затухающих колебаний (№ 10.16). Используя зависимость амплитуды колебаний в контуре от частоты внешнего воздействия (10.15), представленную на рис. 10.3, видим, что максимальное значение будет при

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{(LC)^{1/2}}.$$

При этом сопротивление контура (10.16) чисто активное и равно

$$R = \frac{V_0}{I_0} = 10 \text{ Ом.}$$

В соответствии с (9.25) и (9.9)

$$\tau = \frac{1}{\beta} = 2 \frac{L}{R} = 0,2 \text{ с.}$$

При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 10.28) с малым затуханием найдено: выходное напряжение максимально при частоте $f_0 = 1,6 \text{ кГц}$; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $V_0 = 1 \text{ В}$. Найдем, чему равно выходное напряжение V_1 при частоте $f_1 = 16 \text{ кГц}$ (№ 10.20). В соответствии с (10.7) и рис. 10.1 вдали от резонанса при малом затухании

$$V_{\text{вых}} = \frac{A}{|f_0^2 - f^2|}.$$

Постоянную величину A определяем из условия при малых частотах

$$V_{\text{вых}} = \frac{A}{f_0^2} = V_0 = 1 \text{ В.}$$

Поэтому при высоких частотах

$$V_{\text{вых1}} = V_0 \frac{f_0^2}{f^2} \approx 0,01 \text{ В.}$$

В другом варианте при снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 10.29) найдено: максимальный ток $I_0 = 0,1 \text{ А}$ достигается при частоте $f_0 = 1,6 \text{ кГц}$ (здесь и дальше приведены эффективные значения токов и напряжений); ток при частоте $f_1 = 16 \text{ кГц}$ равен $I_1 = 10^{-4} \text{ А}$. Входное напряжение в обоих случаях равно $V = 1 \text{ В}$. Вычислим по этим данным приближенные значения параметров контура R, L, C (№ 10.21). Используем (10.15) для эффективных значений

$$I_m = \frac{V}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}}.$$

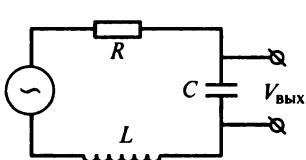


Рис. 10.28

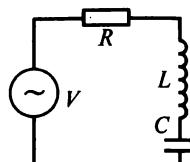


Рис. 10.29

При резонансе

$$\omega = \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{LC} = 10^4 \text{ с}^{-1}; \quad I_m = I_0 = \frac{V}{R}.$$

При высоких частотах

$$I_m = I_1 \approx \frac{V}{\omega_1 L}.$$

В результате

$$R = \frac{V}{I_0} = 10 \text{ Ом}; \quad L = \frac{V}{I_1 \omega_1} = 0,1 \text{ Гн}; \quad C = \frac{1}{L \omega_0^2} = 10^{-7} \text{ Ф} = 0,1 \text{ мкФ}.$$

На колебательный контур с собственной частотой ω_0 и логарифмическим декрементом затухания $\lambda = 0,02$ действует внешняя периодическая сила с постоянной амплитудой. Ее частота ω , вначале равная частоте собственных колебаний, изменяется настолько, что мощность, расходуемая в контуре, падает вдвое. Найдем изменение частоты в процентах к собственной (или резонансной) частоте ω_0 (№ 10.65). Мощность, расходуемая в контуре, определяется (10.35). Так как амплитуда внешней силы, т. е. амплитуда напряжения V_0 , является постоянной, то отношение мощностей зависит от токов и фазы. Используя (10.32) и (10.34) и обозначая $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, получаем для модуля импеданса

$$|Z| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2} = R \left[1 + \frac{4\Delta\omega^2 L^2}{R^2} \right]^{1/2}.$$

Для фазы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = 2\Delta\omega \frac{L}{R}.$$

Откуда

$$\cos \varphi = \frac{1}{\left(1 + 4\Delta\omega^2 L^2 / R^2 \right)^{1/2}}.$$

Учитывая, что резонансу соответствует $\Delta\omega = 0$, получаем

$$\frac{N_0}{N} = 2 = 1 + 4\Delta\omega^2 \frac{L^2}{R^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

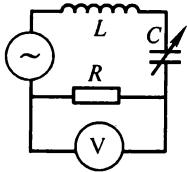


Рис. 10.30

Емкостной датчик — это одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств для регистрации малых механических смещений. Обычно он представляет собой электрический колебательный контур с воздушным конденсатором (рис. 10.30), одна пластина которого подвижна. Оценим минимальное измеряемое перемещение пластины конденсатора Δh , если контур настроен в резонанс.

Напряжение источника питания $U = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжение на сопротивлении $\Delta U = 100$ мкВ, добротность контура $Q = 100$ и зазор между пластинами $h = 1$ мм (№ 10.23). Используя для емкости плоского конденсатора (3.56)

$$C = \epsilon \frac{S}{4\pi h}.$$

и собственной частоты колебательного контура (9.8)

$$\omega_0 = \frac{1}{(LC)^{1/2}},$$

можем получить (например, логарифмируя, а затем дифференцируя)

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}.$$

Из (10.15) получаем для отклонения от резонансного значения

$$\Delta I = \frac{U}{R} - \frac{U}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}}.$$

Для $\omega = \omega_0 + \Delta\omega_0$ получаем

$$\begin{aligned} \omega L - \frac{1}{\omega C} &= L(\omega_0 + \Delta\omega_0) - \frac{1}{(\omega_0 + \Delta\omega_0)C} = \\ &= \omega_0 L \left[1 + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{1 + \Delta\omega_0/\omega_0} \right] \approx \omega_0 L 2 \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Используя соотношение на сопротивлении $\Delta U = R\Delta I$ и выражение для добротности (9.27), находим

$$\frac{\Delta U}{U} = 1 - \frac{1}{\left\{ 1 + [(\omega_0 L/R) 2 \Delta\omega_0/\omega_0]^2 \right\}^{1/2}} = 1 - \frac{1}{\left[1 + (Q^2 \Delta\omega_0/\omega_0)^2 \right]^{1/2}}. \quad (10.39)$$

Так как затухание слабое, получаем

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{1}{2} \left(Q 2 \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} \right)^2.$$

Подставляя сюда полученное ранее соотношение, имеем

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{1}{2} \left(Q \frac{\Delta h}{h} \right)^2.$$

Откуда

$$\Delta h = \frac{h}{Q} \left(\frac{2 \Delta U}{U} \right)^{1/2} = 14 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

Индуктивный датчик является радиотехническим устройством для регистрации небольших изменений индуктивности. Обычно он представляет собой электрический колебательный контур с изменяемой индуктивностью (рис. 10.31). Оценим минимальное измеряемое относительное изменение индуктивности $\Delta L/L$, если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания $U = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta U = 10$ мкВ, добротность контура $Q = 100$ (№ 10.22). Используя выражение для собственной частоты колебательного контура (9.8), находим

$$\left| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta L}{L} \right|.$$

Как и в предыдущей задаче, для падения напряжения на сопротивлении (10.39) получаем

$$\frac{\Delta U}{U} = 1 - \frac{1}{\left\{ 1 + \left[(\omega_0 L / R) 2 \Delta \omega_0 / \omega_0 \right]^2 \right\}^{1/2}} \approx \frac{1}{2} \left(Q \frac{\Delta L}{L} \right)^2.$$

Откуда следует

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Q} \left(2 \frac{\Delta U}{U} \right)^{1/2} \approx 4,4 \cdot 10^{-6}.$$

Так как в (10.39) $\Delta U = U_{\text{рез}} - U_1$, где $U_{\text{рез}}$ — резонансное значение; U_1 — на некотором интервале от резонанса, из (10.39) получаем

$$\frac{U_1}{U_{\text{рез}}} = \frac{1}{\left\{ 1 + [Q 2 \Delta \omega_0 / \omega_0]^2 \right\}^{1/2}}. \quad (10.40)$$

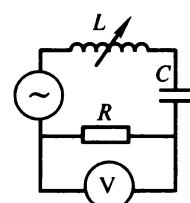


Рис. 10.31

Для отношения энергий соответственно

$$\frac{W_1}{W_{\text{рез}}} = \frac{1}{1 + [Q^2 \Delta\omega_0 / \omega_0]^2}. \quad (10.41)$$

Характеристикой ширины резонансной кривой в случае слабого затухания является **ширина резонансной кривой** ($2\Delta\omega_0$) ($\Delta\omega_0$ называется **расстройкой**) при уменьшении энергии колебаний в два раза. Из (10.41) получаем, что относительная ширина резонансной кривой

$$2 \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (10.42)$$

Обратная величина называется **избирательностью контура**

$$\frac{\omega_0}{2\Delta\omega_0} = Q. \quad (10.43)$$

Найдем, как изменится **избирательность контура**, если вдвое увеличить индуктивность L и вдвое уменьшить емкость, оставляя неизменным активное сопротивление (№ 10.18). Из (10.43), (9.27) и (9.8):

$$\frac{\omega_0}{2\Delta\omega_0} = Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}.$$

Избирательность увеличится в два раза, так как $Q_2 = 2Q_1$.

Считая добротность некоторого контура достаточно большой, найдем:

1) **расстройку** $\Delta\omega_1$ (при снятии резонансной кривой), при которой потребляемая контуром мощность падает в два раза;

2) расстройку $\Delta\omega_2$, при которой сдвиг фазы меняется на $\pi/4$, если при свободных колебаниях этого контура амплитуда падает в e раз за время $\tau = 1$ с (№ 10.14).

Из (10.42), (9.27) и (9.25) следует

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_0 = \frac{\omega}{2Q} = \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Из (10.34), (10.38), (10.42), (9.27) и (9.25) получаем при $\varphi = \pi/4$ также $\Delta\omega_2 = 1/\tau = 1 \text{ с}^{-1}$.

В определенном пункте напряженность электрического поля, создаваемого радиостанцией А (на частоте 210 кГц), в пять раз больше, чем напряженность электрического поля радиостанции В (на

частоте 200 кГц). Определим добротность контура, с помощью которого можно принимать в данном пункте станцию В без помех со стороны станции А, если для этого необходимо, чтобы амплитуда сигналов станции В в контуре была бы по крайней мере в 10 раз больше амплитуды станции А (№ 10.24). В приведенных ранее формулах можно было пользоваться не циклическими частотами, а обычными частотами (обратными периоду) $f = 1/T$, так как

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta f}{f}. \quad (10.44)$$

Используя (10.40) и (10.44) для сигнала станции В на частоте сигнала станции А, имеем

$$\frac{U_{1B}}{U_{pezB}} = \frac{1}{\left[1 + (Q2\Delta f_0/f_0)^2\right]^{1/2}}.$$

Чтобы этот сигнал сравнялся с сигналом станции А, надо U_{pezB} увеличить в 5 раз, а чтобы он был больше еще в 10 раз, увеличить в 50 раз. Это значит, что знаменатель правой части равенства надо увеличить в 50 раз. Таким образом, должно быть

$$1 + \left(Q2\frac{\Delta f_0}{f_0}\right)^2 = 2500.$$

Используя начальные данные, получаем, что должно быть $Q > 525$.

Входной контур радиоприемника имеет добротность $Q = 100$ и настроен на $f_0 = 1000$ кГц. Найдем, во сколько раз напряжение частоты f_0 на конденсаторе больше напряжения частоты $f_1 = 2f_0$ (мешающая станция), при условии, что амплитуды электродвижущих сил, возбуждающихся в контуре, одинаковы (№ 10.19). Обозначая амплитуды электродвижущих сил, деленные на индуктивность, X_0 , из (10.9), (10.7) и (9.27)

$$V_0 = X_0 \frac{Q}{\omega_0^2}; \quad V_1 = \frac{X_0}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega_0^2 \omega^2/Q^2\right]^{1/2}}.$$

Откуда

$$\frac{V_0}{V_1} = \left[Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2} \approx 300.$$

В контуре, состоящем из последовательно соединенных емкости, индуктивности, сопротивления и синусоидальной ЭДС, амплитуда силы тока I , существующая при отклонении частоты ЭДС на небольшую величину Δf , которая называется «расстройкой» (а $\Delta f/f_0$ — «относительной расстройкой»), от резонансной частоты f_0 , в соответствии с (10.15) и (9.27) будет связана с амплитудой силы тока при резонансе I_0 следующим соотношением (№ 10.12)

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\left[1 + (Q^2 \Delta f_0 / f_0)^2\right]^{1/2}}. \quad (10.45)$$

Для схемы, изображенной на рис. 10.32, *a*, определим частоты источника ЭДС, соответствующие **резонансам токов и напряжений**, а не тока и напряжения, как, например, в (10.8). Построим график сдвига фазы тока I относительно ЭДС \mathcal{E} в зависимости от частоты источника, считая внутреннее сопротивление последнего пренебрежимо малым (№ 10.25). Используя (10.29) и (10.31), имеем для импедансов

$$Z_1 = i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right); \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C.$$

В результате импеданс цепи Z находим из соотношения

$$\frac{1}{Z} = \frac{2}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{2}{i(\omega L - 1/\omega C)} + \frac{1}{i\omega L} - \frac{\omega C}{i},$$

или

$$\frac{i}{Z} = \frac{(1 - \omega^2 LC)^2 - 2\omega^2 LC}{\omega L (1 - \omega^2 LC)}. \quad (10.46)$$

Обозначая $\omega^2 LC = x$, из (10.46) получаем

$$\frac{i}{Z} = \frac{1 + 4x + x^2}{\omega L(1 - x)}. \quad (10.47)$$

Резонансу напряжений соответствует наименьшее напряжение в цепи при $Z = 0$, что получаем при

$$\omega = \frac{1}{(LC)^{1/2}} = \omega_0.$$

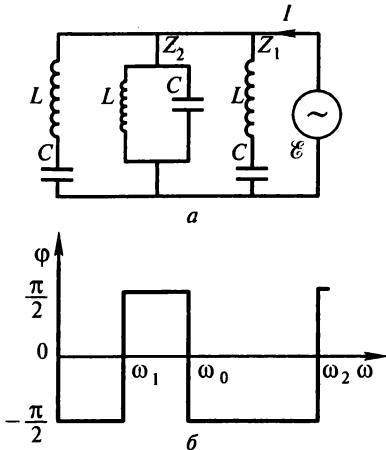


Рис. 10.32

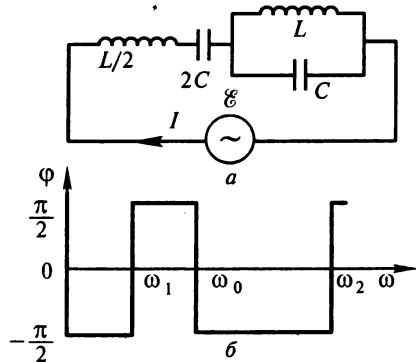


Рис. 10.33

Резонансу токов соответствует минимальный ток, что будет при $1/Z = 0$. Следовательно, надо удовлетворить уравнению $x^2 + 4x + 1 = 0$, решение которого $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Получаем

$$\omega_1 = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{LC} \right)^{1/2} \approx \frac{0,52}{(LC)^{1/2}}, \quad \omega_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{(LC)^{1/2}} \approx \frac{1,93}{(LC)^{1/2}}.$$

Для тока имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{\mathcal{E}}{i} \frac{1 - 4x + x^2}{\omega L(1 - x)}.$$

В соответствии с (10.33)

$$\frac{1}{i} = e^{-i\pi/2}.$$

На рис. 10.32, б показано изменение фазы, которая определяется знаком второй дроби предыдущего выражения. Оно положительно при $0 < \omega < \omega_1$ и при $\omega_0 < \omega < \omega_2$, а отрицательно при $\omega_1 < \omega < \omega_0$ и $\omega_2 < \omega$. Изменение знака соответствует повороту фазы на π (т. е. знаку в показателе экспоненты).

Аналогичным образом можно действовать в случае схемы, изображенной на рис. 10.33, а (№ 10.26). Здесь

$$Z_1 = i \left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{\omega C} \right); \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{i} \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L}.$$

В итоге

$$I = \frac{E}{Z} = -\frac{E}{i} \frac{1 - 4x + x^2}{\omega L(1-x)}.$$

Изменения фазы показано на рис. 10.33, б.

Приведем пример, когда схему можно нарисовать по данным об изменении тока. Дан **черный ящик** с двумя внешними клеммами. Внутри него собрана схема из индуктивности с малыми омическими потерями, емкости и сопротивления. Известно, что если подать на клеммы постоянное напряжение $U_0 = 1$ В, то ток будет равен $I_0 = 10$ мА. При переменном напряжении 1 В на частоте 50 Гц ток равен 1 мА. С ростом частоты ток падает, достигает минимума при частоте $f_0 = 500$ Гц, а затем постоянно возрастает до предельного значения 10 мА. Нарисуем схему черного ящика и определим ее параметры (№ 10.27). Для получения минимума тока, что соответствует резонансу токов, необходимо иметь параллельное соединение индуктивности и емкости, так как при этом

$$Z_{\text{п}} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

Так как по условию значение силы тока при $\omega \rightarrow \infty$ равно силе тока при постоянном напряжении, то значит сопротивление включено последовательно с параллельным соединением индуктивности и емкости (рис. 10.34). В результате имеем

$$R = \frac{U_0}{I_0} = 100 \text{ Ом}; \quad LC = \frac{1}{\omega_0^2} \approx 10^{-7} \text{ с.}$$

При $\omega \neq \omega_0$

$$Z = R + \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

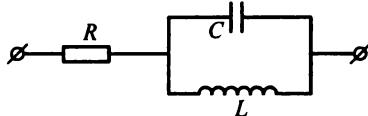


Рис. 10.34

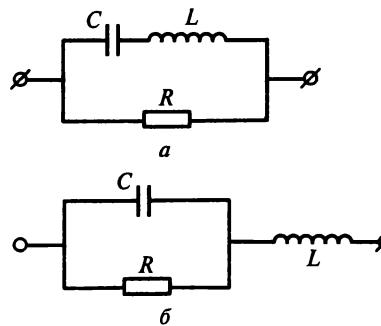


Рис. 10.35

Откуда при 50 Гц

$$|Z| = \left(R^2 + \frac{\omega L}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \right)^{1/2} = 10^3 \text{ Ом.}$$

Так как при этом $R^2 \ll |Z|^2$ и $\omega^2 \ll \omega_0^2$, то $|Z| \approx \omega L$, что дает $L = 3,2 \text{ Гн}$ и $C = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ мкФ}$.

Другой вариант такого же черного ящика. Известно, что если подать на клеммы постоянное напряжение $U_0 = 1 \text{ В}$, то ток будет равен $I_0 = 1 \text{ мА}$. При переменном напряжении 1 В на частоте 50 Гц ток равен 10 мА. С ростом частоты ток растет и достигает максимума на частоте $f_0 = 500 \text{ Гц}$, а затем постоянно возрастает до предельного значения 10 мА. Нарисуем схему черного ящика и определим ее параметры (№ 10.28). Так как ток достигает максимума, то, следовательно, L и C включены последовательно. Чтобы был ток при постоянном напряжении, сопротивление должно быть включено им параллельно (рис. 10.35, а). Получаем

$$R = \frac{U_0}{I_0} = 1000 \text{ Ом}; \quad LC = \frac{1}{\omega_0^2} \approx 10^{-7} \text{ с.}$$

Для импеданса цепи находим

$$|Z| = \frac{1}{\left[1/R^2 + (\omega C/\omega^2 LC - 1)^2 \right]^{1/2}}.$$

При частоте $f = 50 \text{ Гц}$ по условию получаем $|Z| = 10^2 \text{ Ом}$. Подставляя это в предыдущее соотношение и учитывая, что

$$\frac{1}{R^2} \ll 10^{-4} \text{ 1/Ом} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \ll 1,$$

находим $\omega C \approx 10^{-2}$, $C = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$, $L = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$.

Имеется еще и другая возможная схема, когда сопротивление параллельно емкости, а индуктивность им последовательна (рис. 10.35, б). Сопротивление и LC остаются теми же, а для модуля импеданса цепи получаем

$$|Z| = \frac{\left[1 - (\omega/\omega_0)^2 + (\omega L/R)^2 \right]^{1/2}}{\left[1/R^2 + (\omega C)^2 \right]^{1/2}}.$$

Так как при частоте $f = 50$ Гц по условию $|Z| = 10^2$ Ом, то, подставляя это в предыдущее соотношение и учитывая, что $R = 10^3$ Ом

и $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$, находим

$$1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \approx 10^{-2} \omega^2 R^2 C^2.$$

При $\omega = 2\pi f = 100\pi$ получаем для индуктивности уравнение $L^4 + 10L^2 - 10^{-4} = 0$. Откуда $L^2 = -5 \pm 5(1 + 10^{-4}/50)$. Так как эта величина не может быть отрицательной, получаем $L = 3 \cdot 10^{-2}$ Гн. Поэтому емкость равна $C = 13$ мкФ.

В цепь синусоидальной ЭДС включены параллельно активное сопротивление R и реактивное X . Найдем, какие активное r и реактивное x сопротивления должны быть подключены к ЭДС последовательно (рис. 10.36), чтобы ток во внешней цепи (по амплитуде и фазе) остался **неизменным**. Получим, во что переходят точные выражения для x и r при дополнительных условиях:

- 1) $r \ll x$;
- 2) $r \gg x$.

Считаем X и x — величины вещественные (№ 10.29). В соответствии с (10.30)

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}}.$$

При одном и том же источнике для одинакового тока должны быть одинаковые импедансы

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{1/R + 1/iX} = iR \frac{X}{R + iX} = \hat{Z}_2 = r + ix.$$

Из совпадения действительных и мнимых частей получаем

$$r = \frac{R}{1 + R^2/X^2}; \quad x = \frac{X}{1 + X^2/R^2}.$$

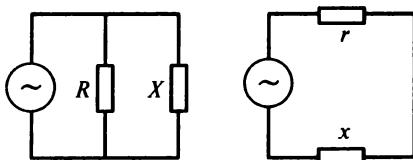


Рис. 10.36

Так как

$$\frac{r}{x} = \frac{X}{R},$$

то в случае $r \ll x$ и соответственно $R \gg X$ получаем $r \approx R$, а в случае $r \gg x$ имеем $X \gg R$ и $x \approx R^2/X$.

В цепь переменного тока с $\mathcal{E} = 440$ В и частотой $f = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и конденсатор. Найдем, чему равна емкость конденсатора C , если лампочка рассчитана на напряжение $V = 220$ В и силу тока $I = 1$ А. Определим также, чему равен сдвиг фаз ϕ между током и полным напряжением в цепи (№ 10.30). Сопротивление лампочки $R = V/I = 220$ Ом. Из (10.32) получаем

$$\mathcal{E} e^{i\phi} = I \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right) = I \left(R - \frac{i}{\omega C} \right).$$

Левая часть является представлением правой в экспоненциальном виде, поэтому

$$\mathcal{E} = I \left(R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \right)^{1/2}; \quad \operatorname{tg} \phi = -\frac{1}{\omega CR}.$$

Отсюда

$$\frac{I}{(\omega C)^2} = \mathcal{E}^2 - I^2 R^2 = \mathcal{E}^2 - V^2; \quad C = \frac{1}{[2\pi f (\mathcal{E}^2 - V^2)]^{1/2}} \approx 8,4 \text{ мкФ}.$$

Поскольку

$$\frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{440 \text{ В}}{1 \text{ А}} = 440 \text{ Ом} = 2R,$$

то

$$\frac{1}{(\omega C)^2} = 3R^2.$$

В таком случае $\operatorname{tg} \phi = -\sqrt{3}$ и $\phi = -60^\circ$. Ток опережает по фазе напряжение.

Другой вариант, когда в цепь переменного тока с $\mathcal{E} = 440$ В и частотой $f = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и катушка самоиндукции. Лампочка рассчитана на напряжение $V_1 = 110$ В и силу тока $I_1 = 1$ А. При замене

лампочки другой, рассчитанной на $V_2 = 220$ В и $I_2 = 0,8$ А, оказалось, что новая лампочка горит также нормальным накалом. Найдем сопротивление R и самоиндукцию L катушки (№ 10.31). Сопротивление первой лампочки

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = 110 \text{ Ом},$$

сопротивление второй лампочки

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} = 275 \text{ Ом}.$$

Из (10.32) получаем

$$|Z_1| = \left[(R_1 + R)^2 + \omega^2 L^2 \right]^{1/2} = 4R_1;$$

$$|Z_2| = \left[(R_2 + R)^2 + \omega^2 L^2 \right]^{1/2} = 2R_2.$$

Возводя в квадрат и решая систему, находим

$$R = \frac{3}{2} \frac{5R_1^2 - R_2^2}{R_1 - R_2} = 137 \text{ Ом},$$

$$L = \frac{\left[16R_1^2 - (R_1 + R)^2 \right]^{1/2}}{2\pi f} = 1,16 \text{ Гн}.$$

Найдем диэлектрическую проницаемость жидкости, если известно, что ее удельное сопротивление $\rho = 10^{11}$ Ом · см и при переходе от постоянного тока к переменному с частотой 50 Гц (при том же эффективном напряжении) ток, текущий через конденсатор, наполненный этой жидкостью, возрастает в 7 раз ($n = 7$) (№ 10.32). Конденсатор с утечкой представляет систему из параллельно соединенных емкости и сопротивления. Импеданс этой системы Z определяем, пользуясь (10.27) и (10.31), $1/Z = R + i\omega C$. Откуда

$$|Z| = \frac{R}{\left[1 + (\omega CR)^2 \right]^{1/2}}.$$

По условию

$$n = \frac{I}{I_0} = \frac{R}{|Z|} = \left[1 + (\omega CR)^2 \right]^{1/2}.$$

Пользуясь (3.56) и (4.14), имеем $C = \epsilon_0 \epsilon S / h$ и $R = \rho h / S$ и соответственно $CR = \epsilon_0 \epsilon \rho$. Отсюда

$$\epsilon = \frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{2\pi f \epsilon_0 \rho} = 2,5.$$

Длинный однослойный реостат из никромовой проволоки с удельным сопротивлением $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м намотан виток к витку с плотностью витков $n = 10$ см⁻¹ на керамический каркас диаметром $D = 5$ см и включен в цепь переменного тока с частотой $f = 50$ Гц. Найдем сдвиг фаз между током и напряжением на реостате, пренебрегая толщиной изоляции проволоки (№ 10.33). Воспользовавшись (5.29) и (4.14), находим

$$L = \mu_0 n N \pi D^2; \quad R = 4\rho D N n^2.$$

Используя (10.34), получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = \pi^2 f \mu_0 \frac{D}{2\rho n} = 0,025.$$

В схеме, представленной на рис. 10.37, емкость C подобрана таким образом, что при замыкании ключа К ток I , показываемый амперметром А, не изменится. Найдем индуктивность катушки, если известно, что $I = 0,5$ А, $U = 380$ В, $f = 50$ Гц (№ 10.34). Из (10.30) $\omega C = I/U$. Используя (10.32), получаем

$$\hat{I}_1 = \hat{U} i \omega C; \quad \hat{I}_2 = \hat{U} \frac{1 - \omega LC + i\omega CR}{R + i\omega L}.$$

Амперметр показывает эффективные значения, т. е. меряет модули. Они и должны быть равны (удобно написать квадраты модулей)

$$\omega^2 C^2 = \frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Откуда

$$2\omega LC = 1; \quad L = \frac{1}{2\omega C} = \frac{U}{4\pi f I} = 1,2 \text{ Гн.}$$

На рис. 10.38 показана принципиальная схема трансформатора — устройства для изменения напряжения переменного тока. Первичная обмотка, связанная с источником переменного на-

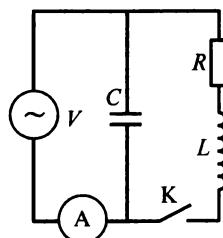


Рис. 10.37

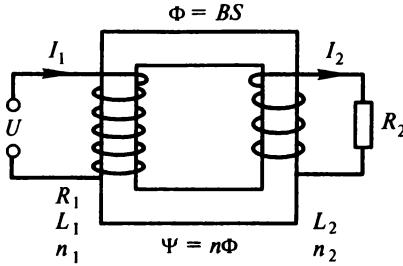


Рис. 10.38

пряжения, и вторичная, связанная с нагрузкой (потребителем), навиты на общий железный сердечник, в котором при вычислениях считаем отсутствие рассеяния магнитного поля и ферромагнетизма. Индукция магнитного поля B сердечника (площадь сечения S) создает магнитный поток $\Phi = BS$. Число витков обмотки n дает зацепленный поток $\Psi = n\Phi$. Этим потоком определяется ЭДС индукции или индуктивное сопротивление $d\Psi/dt$ (здесь и далее используется система СИ). В соответствии с (5.31) имеется связь с коэффициентом индукции L и током I в обмотке $\Psi = IL$. Для обмоток из (10.32) получаем

$$U_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} + R_1 I_1; \quad 0 = \frac{d\Psi_2}{dt} + R_2 I_2. \quad (10.48)$$

При отсутствии рассеяния магнитного потока

$$\Phi = \frac{\Psi_1}{n_1} = \frac{\Psi_2}{n_2}. \quad (10.49)$$

Используя (5.31) и вводя собственную и взаимную индуктивность, получаем для потоков

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2; \quad \Psi_2 = L_{21} I_1 + L_2 I_2. \quad (10.50)$$

Подставляя это в (10.49) и учитывая, что полученное соотношение должно соблюдаться при любых токах, находим $n_2 L_1 = n_1 L_{21}$ и $n_2 L_{12} = n_1 L_2$ и, следовательно, $L_{12} L_{21} = L_1 L_2$. Пользуясь теоремой взаимности (5.30), имеем

$$L_{12} = L_{21} = L_b = (L_1 L_2)^{1/2}. \quad (10.51)$$

Для переменного тока частотой ω из (10.32) получаем

$$\hat{U}_1 = (R_1 + i\omega L_1) \hat{I}_1 + i\omega (L_1 L_2)^{1/2} \hat{I}_2; \quad (10.52)$$

$$0 = i\omega (L_1 L_2)^{1/2} \hat{I}_1 + (R_2 + i\omega L_2) \hat{I}_2. \quad (10.53)$$

Отсюда

$$\hat{I}_1 = \frac{(R_2 + i\omega L_2) \hat{U}_1}{R_1 R_2 + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)}; \quad (10.54)$$

$$\hat{I}_2 = -\frac{i\omega(L_1 L_2)^{1/2} \hat{U}_1}{R_1 R_2 + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)}. \quad (10.55)$$

Если можно пренебречь активным сопротивлением в первичной цепи ($R_1 \ll \omega L_1$), то имеем

$$\hat{I}_1 = \frac{(R_2 + i\omega L_2) \hat{U}_1}{i\omega L_1 R_2}; \quad (10.56)$$

$$\hat{I}_2 = -\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{1/2} \frac{\hat{U}_1}{R_2} = -\frac{n_2}{n_1} \frac{\hat{U}_1}{R_2}, \quad (10.57)$$

где учтено, что индуктивность катушки пропорциональна n^2 .

Для так называемого падения напряжения во вторичной цепи получаем

$$\hat{U}_2 = \hat{I}_2 R_2 = -\frac{n_2}{n_1} \hat{U}_1. \quad (10.58)$$

Разделительный трансформатор имеет две одинаковые обмотки, у каждой из которых индуктивное сопротивление на рабочей частоте в $n = 5$ раз больше омического. Найдем, каково отношение мощностей, потребляемых в первичной цепи при замкнутой и разомкнутой вторичной цепи (№ 10.37). Воспользуемся (10.54) и (10.55). В случае замкнутой цепи (в соответствии с условием) $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L_2 = L$ и $\omega L = nR$. Поэтому получаем

$$\hat{I}_1 = \frac{(R + i\omega L) \hat{U}_1}{R^2 + 2i\omega LR}; \quad (10.59)$$

$$\hat{I}_2 = -\frac{i\omega L \hat{I}_1}{R + i\omega L}. \quad (10.60)$$

Модуль тока в первичной цепи равен

$$I_1 = \frac{U_1}{R} \frac{\left[(1 + 2n^2)^2 + n^2\right]^{1/2}}{1 + 4n^2}. \quad (10.61)$$

Для фазы тока относительно напряжения в первичной цепи получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{n}{1+2n^2}; \quad \cos \varphi = \frac{1+2n^2}{(1+5n^2+4n^4)^{1/2}}. \quad (10.62)$$

В соответствии с (10.35) средняя мощность в первичной цепи

$$\langle N_1 \rangle = \frac{1}{2} I U \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} \frac{1+2n^2}{1+4n^2}.$$

В случае разомкнутой вторичной цепи из (10.54)

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{R + i\omega L} = \frac{\hat{U}(R - i\omega L)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} = \frac{\hat{U}}{R} \frac{1 - in}{1 + n^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -n; \quad \cos \varphi = \frac{1}{(1+n^2)^{1/2}};$$

$$\langle N_2 \rangle = \frac{1}{2} I U \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{U^2/R}{1+n^2}.$$

Отношение мощностей

$$\frac{\langle N_1 \rangle}{\langle N_2 \rangle} = (1+2n^2) \frac{1+n^2}{1+4n^2} = 13,1.$$

В трансформаторе омическое сопротивление первичной цепи в n_1 , а вторичной в n_2 раз меньше индуктивного (на рабочей частоте). Найдем сдвиг фазы φ между током и напряжением в первичной цепи, если рассеянием магнитного потока в сердечнике трансформатора можно пренебречь (№ 10.38). Воспользуемся (10.52) и (10.53) и получим

$$\hat{I}_2 = -i(n_1 n_2 R_1 R_2)^{1/2} \frac{\hat{I}_1}{R_2 (1 + in_2)};$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}}{R_1} = \frac{1 - n_2 (n_1 + n_2) - in_1}{1 + (n_1 + n_2)^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{n_1}{1 + n_2 (n_1 + n_2)}.$$

Ток отстает от напряжения. При $n_1 = n_2 = 10$ $\varphi = -3^\circ$.

По первичной обмотке трансформатора течет ток $I = I_0 \cos \omega t$. Найдем, в какой момент времени следует разорвать вторичную обмотку трансформатора, чтобы в месте разрыва не образовалась искра, и чему будет равна сила тока I_1 в первичной обмотке в этот момент времени, если индуктивность вторичной обмотки L , сопротивление R (№ 10.35). Из (10.53)

$$\hat{I}_2 = \frac{i\omega(L_1 L_2)^{1/2} \hat{I}_1}{R_2 + i\omega L_2} = \omega(L_1 L)^{1/2} \hat{I}_1 \frac{e^{i(\pi/2 - \varphi)}}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}},$$

где фаза определяется из равенства $\operatorname{tg} \varphi = \omega L / R$.

Так как $I = I_0 \cos \omega t = Re(I_0 e^{i\omega t})$, то

$$I_2 = I_0 (L_1 L)^{1/2} \frac{\cos(\pi/2 - \varphi + \omega t)}{(R_2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}.$$

Чтобы не проскочила искра во вторичной цепи, напряжение и ток должны равняться нулю в момент размыкания. Поэтому

$$\pi/2 - \varphi + \omega t_1 = \pi/2.$$

Отсюда $\omega t_1 = \varphi$. Так как

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

то для тока в первичной обмотке имеем

$$I_1 = \frac{I_0}{(1 + \omega^2 L^2 / R^2)^{1/2}}.$$

Если во вторичную обмотку дополнительно включить конденсатор емкостью C , то во все соотношения, в которые входит ωL , добавится $-(1/\omega C)$ (№ 10.36). В таком случае

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \omega t_1 = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}; \quad I_1 = \frac{I_0 R}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}}.$$

Видно, что $I_1 = I_0$ при

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1 , C , R расположена вторая катушка с индуктивностью L_2 . Взаимная индукция между ними равна M . Найдем, какой будет резонансная частота контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко, считая, что ее индуктивное сопротивление на рассматриваемой частоте значительно больше ее активного сопротивления, а также при каком условии резонанс недостижим ($\# 10.39$). В соответствии с (9.4) и (7.1) для первого колебательного контура имеем

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + RI_1 + \frac{1}{C} \int I_1 dt + M \frac{dI_2}{dt} = 0.$$

Для второго

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Подставляя второе соотношение в первое, получаем

$$\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{dI_1}{dt} + RI_1 + \frac{1}{C} I_1 dt = 0.$$

Резонанс тока происходит при собственной частоте контура, поэтому

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{C(L_1 - M^2/L_2)}.$$

Резонанс не достижим, если $M^2 = L_1 L_2$, как это бывает при отсутствии рассеяния магнитного потока через две катушки.

Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, включены **последовательно** в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 10.39. Резонансные частоты колебательных контуров оказались равными ω_1 и ω_2 соответственно. Найдем индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции M ($\# 10.40$). В первом случае соединения взы-

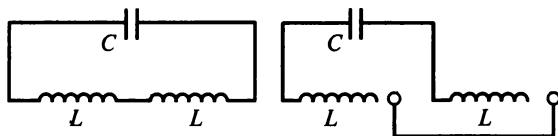


Рис. 10.39

имные индукции действуют так же, как собственные (складываются с собственными), а во втором случае — против собственных:

$$2L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt \pm 2M \frac{dI}{dt} = 0.$$

В первом случае

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2C(L+M)},$$

а во втором

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2C(L-M)}.$$

Отсюда

$$L = \frac{1/\omega_1^2 + 1/\omega_2^2}{4C}; \quad M = \frac{1/\omega_1^2 - 1/\omega_2^2}{4C}.$$

Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, включены параллельно в колебательный контур с емкостью C двумя способами, изображенными на рис. 10.40. Резонансные частоты колебательных контуров оказались равными ω_1 и ω_2 соответственно. Найдем индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции M (№ 10.43). В первом случае соединения взаимные индукции действуют так же, как собственные (складываются с собственными), а во втором случае — против собственных. Так как катушки соединены параллельно, то ток в них равен половине, идущего через конденсатор. Поэтому

$$\frac{1}{2} L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt \pm 2M \frac{dI}{dt} = 0.$$

В первом случае

$$\omega_1^2 = \frac{2}{C(L+M)},$$

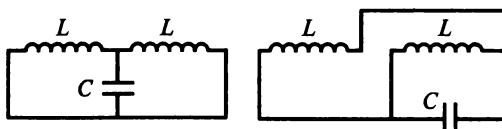


Рис. 10.40

а во втором

$$\omega_2^2 = \frac{2}{C(L - M)}.$$

Отсюда

$$L = \frac{1/\omega_1^2 + 1/\omega_2^2}{C}; \quad M = \frac{1/\omega_1^2 - 1/\omega_2^2}{C}.$$

Высокодобротный колебательный контур (рис. 10.41) включает две последовательно соединенные катушки с индуктивностями L_1 и L_2 . После того как катушку L_2 замыкают накоротко, частота собственных колебаний контура не изменяется. Определим коэффициент взаимной индукции M (№ 10.41). До замыкания накоротко

$$L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt + 2M \frac{dI}{dt} = 0. \quad (10.63)$$

Откуда

$$\omega^2 = \frac{1}{C(L_1 + L_2 + 2M)}.$$

При замыкании второй катушки два контура, для которых имеют уравнения:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C} \int I_1 dt + M \frac{dI_2}{dt} = 0;$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Подставляя второе соотношение в первое, получаем

$$\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C} \int I_1 dt = 0.$$

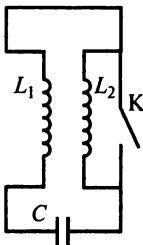


Рис. 10.41

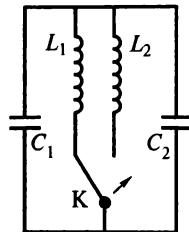


Рис. 10.42

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{1}{C(L_1 - M^2/L_2)}.$$

По условию это равно полученному ранее. Откуда

$$M^2 + 2L_2M + L_2^2 = (M + L_2)^2 = 0$$

и, следовательно, $M = -L_2$.

К высокодобротному колебательному контуру L_1 , C_1 с известной резонансной частотой ω_1 может быть подключена ключом К последовательно цепочка с известными L_2 , C_2 (рис. 10.42). При этом резонансная частота контура не изменяется. Определим коэффициент взаимной индукции M (№ 10.42). До переключения

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

После подключения суммарная емкость конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Цепь описывается уравнением (10.63). Приравнивая частоты, получаем

$$L_1 C_1 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Откуда

$$M = \frac{1}{2} \left(\frac{LC_1}{C_2} - L_2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_1^2 C_2} - L_2 \right).$$

Найдем добротность катушки, намотанной на тонкую медную трубку с внешним диаметром $D = 2$ см и толщиной стенок $\delta = 0,05$ см (удельное сопротивление меди $\rho = 1,8 \cdot 10^{-6}$ Ом · см), подключенной к цепи переменного тока частотой $f = 50$ Гц, если длины катушки и трубки одинаковы и значительно больше диаметра (№ 10.44). Воспользуемся (9.29), (7.21), (4.18), (4.14) и (7.1). Потери энергии связаны с вихревыми (кольцевыми) токами (Фуко) в стенках трубы. Причина вихревых токов — ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} S \frac{dB}{dt},$$

где

$$S = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Обозначая амплитудное значение магнитной индукции B_0 , для переменного поля имеем $B = B_0 \cos(2\pi f t)$. Потери энергии определяются сопротивлением

$$R = \rho \frac{\pi D}{l \delta},$$

где l — длина трубки. Мощность потерь на нагрев трубы

$$N_{\text{пот}} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi f B_0 S/c)^2}{R}. \quad (10.64)$$

Амплитудное значение энергии в катушке с учетом (7.12)

$$W_0 = B_0^2 \frac{Sl}{8\pi\mu}. \quad (10.65)$$

Для меди $\mu = 1$ и поэтому

$$W_0 = B_0^2 \frac{Sl}{8\pi}.$$

Добротность можно определить следующим образом:

$$Q = 2\pi \frac{W_0}{\Delta W_{\text{пот}}} = 2\pi f \frac{W_0}{N_{\text{пот}}} = \frac{\rho c^2}{2\pi^2 f D \delta} = 18.$$

Длинный соленоид с плотной намоткой размещен на цилиндрическом железном сердечнике с магнитной проницаемостью μ и проводимостью λ (рис. 10.43). Соленоид замкнут на конденсатор, вследствие чего образован контур с резонансной частотой ω . Радиус сердечника r , утечки в конденсаторе несущественны, обмотку и

соединительные провода можно считать идеально проводящими, а скин-эффект не учитывать. Найдем добротность контура (№ 10.47). В случае переменного тока I и соответственно переменной индукции магнитного поля $B = B_0 \cos \omega t$ в сердечнике возникает переменное вихревое электрическое поле E . В соответствии с (7.5)

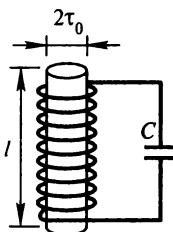


Рис. 10.43

$$E 2\pi r = \frac{1}{c} \omega \pi r^2 B_0 \sin \omega t.$$

Откуда

$$E = \frac{1}{2} \frac{1}{c} B_0 \omega r \sin \omega t.$$

В соответствии с (4.7) и (4.12) мощность выделения энергии

$$N = \int_0^{r_0} \lambda E^2 dS = \lambda \frac{B_0^2}{4} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sin^2 \omega t \int_0^{r_0} 2\pi r^3 dr.$$

Усредняя по периоду, получаем

$$\langle N \rangle = \frac{B_0^2}{8} \pi r_0^2 \lambda \left(\frac{r\omega}{c} \right)^2 = \frac{B_0^2}{8\pi\mu} \pi^2 r_0^2 \mu \lambda \left(\frac{r\omega}{c} \right)^2.$$

Энергия, запасенная в контуре за период (по двум полупериодам) в соответствии с (10.65):

$$W = \frac{B_0^2}{8\pi\mu} 2\pi r_0^2 l.$$

Так как потери энергии $\Delta W = \langle N \rangle T = N 2\pi/\omega$, то из (9.29) получаем

$$Q = \frac{\omega W}{\langle N \rangle l} = \frac{2(c/r_0)^2}{\pi\mu\lambda\omega}. \quad (10.66)$$

Найдем, как изменится добротность контура при увеличении емкости конденсатора в два раза (№ 10.46). Из (9.8)

$$\omega = \frac{1}{(LC)^{1/2}}.$$

Используя (10.66), получаем

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^{1/2} = 2^{1/2}.$$

Катушка колебательного контура имеет добротность $Q = 100$. Если один виток катушки замкнуть накоротко, то ее индуктивность почти не меняется, а добротность уменьшается вдвое. Определим по этим данным число витков катушки N (№ 10.45). ЭДС индукции определяется зацепленным потоком, который в соответствии с (5.31) равен $\Psi = LI$ (в СИ произведению индуктивности на ток). В катушке зацепленный поток больше, чем в витке, в N раз. В соответствии

с (10.29) падение на катушке $U_k = L\omega I$, а на витке $U_b = L\omega I/N$. С помощью (4.18) и (9.27), учитывая, что сопротивление витка равно R/N (R — сопротивление катушки), находим мощность потерь энергии в витке

$$\Delta N_b = \frac{U_b^2}{R/N} = \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \frac{I^2 R}{N} = Q^2 I^2 \frac{R}{N}.$$

Так как по условию добродельность при замыкании витка в два раза меньше, то потери, которые в катушке равны $I^2 R$, в два раза больше, $\Delta N_b + I^2 R = 2I^2 R$. Откуда получаем $N = Q^2 = 10\,000$.

На рис. 10.44 изображена металлическая скоба длиной l , шириной $a \sim l$ и с зазором $h \ll l, a$. Ее можно рассматривать как колебательный контур: конденсатор и полувиток, по которому заряд переходит с одной пластины на другую. Оценим резонансную частоту такого колебательного контура (№ 10.48). Из (3.56) емкость конденсатора

$$C \sim \frac{al}{4\pi h}.$$

Если по скобе идет ток I , то из (5.6)

$$B \sim 4\pi \frac{I}{ca}.$$

Поток индукции магнитного поля

$$\Phi \sim 4\pi Il \frac{h}{ca}$$

и из (5.28)

$$L \sim 4\pi l \frac{h}{a}.$$

Из (9.8)

$$\omega \sim \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2} \sim \frac{c}{l} \sim 3 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1},$$

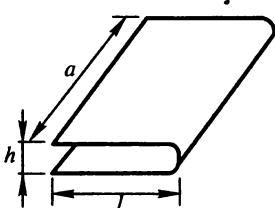


Рис. 10.44

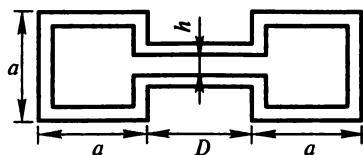


Рис. 10.45

или $f \sim 500$ Гц. Прямая оценка из условия $l \sim \lambda/2$, где λ — длина волны, дает $\lambda \sim 20$ см и частота $\omega = 2\pi c/\lambda \sim 10^{10}$ с⁻¹.

Оценим приближенно резонансную частоту $f_{\text{рез}}$ **тороидального резонатора**, размеры которого представлены на рис. 10.45, где изображено его меридиональное сечение: $a = 20$ см, $D = 10$ см, $h = 1$ мм (№ 10.49). Предполагаем, что размеры резонатора малы по сравнению с резонансной длиной волны. В таком случае можно пользоваться формулами для квазистационарной цепи (9.8). Из (3.56) для емкости плоского конденсатора в центральной части резонатора

$$C = \epsilon \frac{S}{4\pi h} = \frac{D^2}{16h}.$$

Из (5.6) получаем напряженность (равную индукции) магнитного поля в зависимости от расстояния от оси тора (r)

$$H = B = \frac{2I}{cr}.$$

Для потока магнитного поля имеем

$$\Phi = 2a \frac{I}{c} \int_{D/2}^{D/2+a} \frac{dr}{r} = 2a \frac{I}{c} \ln \left(1 + \frac{2a}{D} \right).$$

Из (5.28) получаем индуктивность тора

$$L = 2a \ln \left(1 + \frac{2a}{D} \right).$$

Из (9.8) резонансная частота

$$f_{\text{рез}} = \frac{\omega}{2\pi} = \left(\frac{c}{LC} \right)^{1/2} = \frac{(1/\pi)(c/D)}{\left[(1/2)(a/h) \ln(1 + 2a/D) \right]^{1/2}}.$$

Тороидальный резонатор электромагнитных колебаний представляет собой полый идеально проводящий тор круглого сечения. Внутри него вырезан зазор (рис. 10.46), края которого затянуты двумя проводящими сетками, имеющими форму круга радиусом $a = 5$ см, расстояние между сетками $h = 2$ см, а средний радиус кривизны тора $2a$. Рассматривая резонатор как колебательный контур и считая, что ϵ и μ в нем примерно равны единице, оценим **резонансную частоту** (№ 10.50). Действуем, как в предыдущей задаче. Из (3.56) для емкости плоского конденсатора в центральной части резонатора

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi h} = \frac{\pi a^2}{4\pi h}.$$

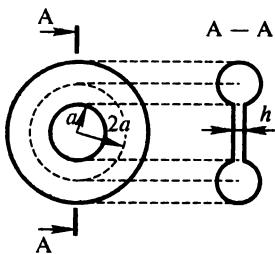


Рис. 10.46

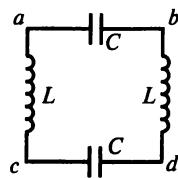


Рис. 10.47

Из (5.6) получаем напряженность (равную индукции) магнитного поля

$$H = B \approx \frac{2I}{ca}.$$

Для потока магнитного поля имеем

$$\Phi = B\pi a^2 = \frac{I}{c}\pi a.$$

Из (5.28) получаем индуктивность тора $L \approx \pi a$. Из (9.8) резонансная частота

$$f_{рез} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{(LC)^{1/2}} = \frac{c}{a} \frac{h}{a} 2\pi^{1/2}.$$

На рис. 10.47 показана схема. Пренебрегая активным сопротивлением катушек, определим частоту **резонанса токов** в схеме, когда генератор подключен к клеммам: 1) ab , 2) ad и 3) ac (№ 10.51). В соответствии с (10.31) и (10.29) и их параллельным соединением в случае:

1) ab

$$\frac{1}{Z} = i\omega C + \frac{1}{2i\omega L - i/\omega C} = 2\omega C \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC}.$$

Для резонанса токов $Z = \infty$. Для этого должно быть

$$\omega^2 = \frac{1}{LC};$$

2) ad

$$\frac{1}{Z} = \frac{2}{i\omega L - i/\omega C} = \frac{2\omega C}{i(\omega^2 LC - 1)}.$$

В этом случае резонанс токов не возможен;

3) ac

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{i\omega L - 2i/\omega C} = 2\omega C \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega^2 LC - 2}.$$

Условие совпадает с первым случаем.

На рис. 10.48 изображена электрическая схема, в которой $R = 6 \Omega$, $L = 0,01 \text{ Гн}$. Внешнее напряжение синусоидальное с круговой частотой $\omega = 300 \text{ с}^{-1}$. Определим, при какой емкости конденсатора C ток I находится в фазе с напряжением V (№ 10.53). Для импеданса цепи Z при параллельном соединении по (10.27), (10.29) и (10.31) имеем

$$\frac{1}{Z} = \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C.$$

Для совпадения фаз тока и напряжения Z должно быть вещественным, т. е.

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0.$$

Откуда

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

В одной из схем радиочастотного лампового генератора наличие электронной лампы с нелинейной характеристикой в цепи обратной связи эквивалентно подключению к колебательному контуру двухполюсника (так называют какое-либо устройство, имеющее вход и выход — две клеммы) (рис. 10.49), комплексное сопротивление которого зависит от амплитуды тока I и на частоте ω равно

$$Z = \frac{a}{I} + ib \frac{I}{\omega},$$

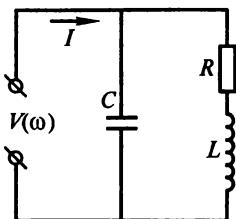


Рис. 10.48

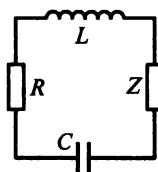


Рис. 10.49

где a и b — известные константы. Найдем, при каких **условиях** возникнут **автоколебания** в такой схеме и какова частота ω и амплитуда A установившихся колебаний (№ 10.70). Импеданс колебательного контура (без двухполюсника)

$$Z_0 = R + i\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) = R + i\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right).$$

Условие возникновения автоколебаний $Z_0 + Z = 0$. Должны нулю равняться действительная и мнимая части этого выражения, поэтому получаем

$$R + \frac{a}{I} = 0.$$

Отсюда видно, что $a < 0$. Следовательно, амплитуда тока

$$A = \frac{|a|}{R}.$$

Из равенства мнимых частей имеем

$$\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = -b \frac{I}{\omega}.$$

Откуда

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{a^2 b}{R^2 L}.$$

Конденсатор колебательного контура возбуждается периодической последовательностью коротких импульсов, частота следования которых равна собственной частоте контура, а их величина равна V_0 . Найдем, как изменится амплитуда вынужденных колебаний, если контур возбудить гармонической ЭДС той же частоты и амплитуды V_0 (ЭДС в этом случае включается последовательно с элементами контура) (№ 10.68). На рис. 10.50 показаны прикладываемые напряжения и схемы соединения элементов контура. В первом случае (рис. 10.50, *a*) в соответствии с (9.19) максимальная амплитуда V_1 затухающих (с коэффициентом затухания β) колебаний через период T будет равна $V_1 e^{-\beta T}$. Добавка (V_0) возвращает амплитуду к максимальному значению

$$V_1 e^{-\beta T} + V_0 = V_1.$$

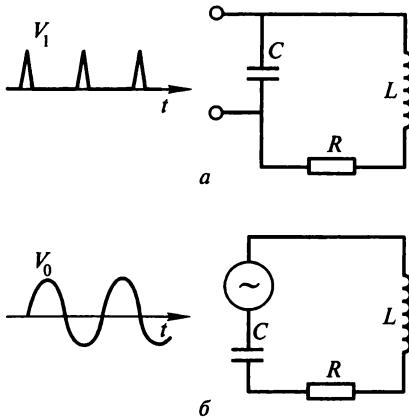


Рис. 10.50

Отсюда, используя (9.27), находим

$$V_1 = \frac{V_0}{1 - e^{-\beta T}} \approx \frac{V_0}{\beta T} = \frac{V_0 Q}{\pi}.$$

Во втором случае (на рис. 10.50, б), используя (10.2), (10.9) и (9.27) и учитывая, что в используемом там обозначении $X_0 = V_0 \omega^2$, получаем $V_2 = V_0 Q$. Откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \pi.$$

Конденсатор подключен к розетке переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и напряжением $U = 220$ В. Через конденсатор с сопротивлением утечки $R = 10$ кОм течет ток $I = 1$ А. Зависимость электрического смещения от напряженности E электрического поля в сегнетоэлектрике конденсатора, объем которого $V = 100$ см³, образует петлю гистерезиса с площадью $S = 12,5$ мДж/см³. Найдем активное сопротивление r_C и емкость C конденсатора (№ 10.72). Потери энергии за счет гистерезиса (переполяризации) определяются (3.76). Для мощности потерь имеем

$$N_{\text{пот}} = \oint E dD \frac{Vf}{4\pi} = SV \frac{f}{4\pi} = 4,97 \text{ Вт.}$$

Мощность, теряемая за счет проводимости (утечки), определяется (4.18) и равна

$$N_{\text{ут}} = \frac{U^2}{R} = 4,84 \text{ Вт.}$$

Активное сопротивление r_C определяется суммарной потерей мощности

$$r_C = \frac{N_{\text{ут}} + N_{\text{пот}}}{I^2} = 9,81 \text{ Ом.}$$

Используя (10.32), находим модуль импеданса цепи

$$Z = \frac{U}{I} = 220 \text{ Ом}$$

и реактивное сопротивление конденсатора

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = (Z^2 - r_C^2)^{1/2} = 219,8 \text{ Ом.}$$

Откуда

$$C = \frac{1}{Z_C \omega} = 14,4 \text{ мкФ.}$$

Для изготовления трансформатора используется замкнутый магнитный сердечник с площадью поперечного сечения $S = 5 \text{ см.}$ Индукция насыщения материала сердечника равна $B_{\text{нас}} = 2 \text{ Тл.}$ Найдем минимальное число N витков первичной обмотки, предназначеннной для включения в сеть с действующим напряжением $V = 220 \text{ В}$ и частотой $f = 50 \text{ Гц}$, чтобы в сердечнике еще не возникало насыщения, пренебрегая рассеянием магнитного потока (№ 10.77). Поток в сердечнике не должен превышать $\Phi = SB_{\text{нас}} \sin \omega t$. Возникающая ЭДС индукции определяется зацепленным потоком $\mathcal{E}_{\text{инд}} = SB_{\text{нас}} N \omega \cos \omega t$. Измеряемое вольтметром напряжение V является эффективным значением напряжения (10.36), т. е.

$$V = \frac{\mathcal{E}_{\text{нас}}}{\sqrt{2}} = SB_{\text{нас}} N \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

При большем числе витков — меньшая индуктивность. При заданном насыщении минимальное число витков определяется

$$N = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi f SB_{\text{нас}}} \approx 990 \text{ витков.}$$

На металлическую трубу с внешним радиусом r и толщиной h намотана катушка (рис. 10.51). Число витков N , длина трубы l , удельная проводимость ее материала λ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Считая обмотку идеально проводящей, найдем активное сопротив-

ление такой катушки переменному току частотой ω (№ 10.78). Если через обмотку течет ток $I = I_0 \cos \omega t$, то внутри катушки возникает магнитное поле (5.23)

$$B = H = 4\pi NI_0 \frac{\cos \omega t}{cl}.$$

Оно возбуждает азимутальное электрическое поле (7.5)

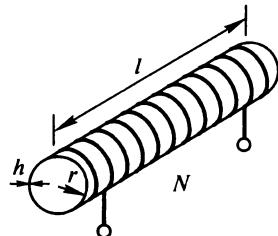


Рис. 10.51

$$2\pi r E_\phi(r) = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 4\pi N \omega I_0 \frac{\sin \omega t \pi r^2}{c^2 l};$$

$$E_\phi = 2\pi \omega r N I_0 \frac{\sin \omega t}{c^2 l}.$$

Активное сопротивление соленоида связано с потерями из-за токов Фуко. Усредняя по периоду колебаний и пользуясь (4.12), получаем

$$R_{\text{вых}} \frac{I_0^2}{2} = \int_{r-h}^r I \lambda E^2 2\pi r dr = 4\pi^3 \lambda \omega^2 N^2 I_0^2 \int_{r-h}^r r^3 \frac{dr}{lc^4}.$$

Откуда

$$R_{\text{вых}} = 2\pi^3 \lambda \omega^2 N^2 \frac{r^4 - (r-h)^4}{lc^4}.$$

На рис. 10.52 изображена электромеханическая колебательная система высокой добротности Q , совершающая вынужденные колебания. Система состоит из неподвижного плоского конденсатора с квадратными пластинами площадью $l \times l$ и расстоянием h между ними. Широкая диэлектрическая пластина (шириной h , массой m и диэлектрической проницаемостью ϵ) подвешена на пружине жесткостью k и входит в зазор между пластинами конденсатора, на который подается переменное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$. Найдем, при каком значении частоты ω наступит механический резонанс, а также амплитуду вертикальных механических колебаний пластины при этом (№ 10.79). Используя (3.85) и (2.6), находим силу, действующую на пластину:

$$F = lh(\epsilon - 1) \frac{E^2}{8\pi} = l(\epsilon - 1) V_0^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{16\pi h}.$$

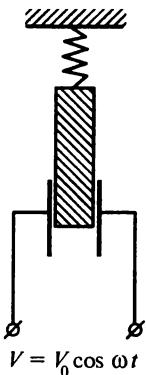


Рис. 10.52

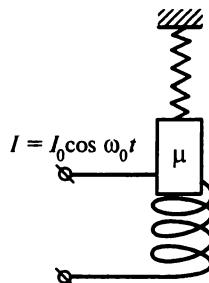


Рис. 10.53

Для нахождения резонансной частоты амплитуды механических колебаний можно воспользоваться соответствующими формулами (например, см. 1, с. 98–100). Резонанс будет при

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2}.$$

Амплитуда вынуждающей силы

$$F_0 = I(\epsilon - 1) \frac{V_0^2}{16\pi h}.$$

Амплитуда колебаний

$$X_{\text{рез}} = I(\epsilon - 1) \frac{V_0^2 Q}{16\pi h}.$$

Обратим внимание на сходство формул с (10.9) и (9.27).

На рис. 10.53 изображена электромеханическая колебательная система высокой добротности Q , совершающая вынужденные колебания. Система состоит из неподвижного соленоида с числом витков на единицу длины n , по виткам которого протекает переменный ток $I = I_0 \cos \omega_0 t$. В катушку вставлен длинный магнитный стержень массой m , площадью сечения S , с магнитной проницаемостью μ , подвешенный на невесомой пружине. Известно, что собственная частота механических колебаний стержня на пружине совпадает с частотой тока в соленоиде. Определим амплитуду колебаний стержня (№ 10.80). В соответствии с (7.22) и (5.23) сила, действующая на стержень:

$$F = \pi(\mu - 1) n^2 I_0^2 S \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{c^2 \mu}.$$

Амплитуда вынуждающей силы

$$F_0 = \pi(\mu - 1) n^2 I_0^2 \frac{S}{c^2 \mu}.$$

Так как частота вынуждающей силы $2\omega_0 \gg \omega_0$, т. е. далека от резонанса, можно пренебречь затуханием и воспользоваться соответствующей формулой (например, см.: 1, с. 100) для нахождения амплитуды колебаний:

$$X_0 = \frac{F_0/m}{4\omega_0^2 - \omega_0^2} = \frac{F_0}{3m\omega_0^2}.$$

Металлическое проволочное кольцо площадью S с омическим сопротивлением R и индуктивностью L подвешено в горизонтальном однородном магнитном поле $B = B_0 \cos \omega t$ и удерживается в нем таким образом, что угол между вектором \mathbf{B}_0 и нормалью \mathbf{n} к плоскости кольца равен φ (рис. 10.54). Найдем средний момент M сил, действующих на кольцо со стороны магнитного поля, а также положения равновесия кольца и исследуем их устойчивость. Рассмотрим два предельных случая:

- 1) $\omega L \gg R$;
- 2) $\omega L \ll R$.

Выясним, в каком случае при одинаковых L вращающий момент больше (№ 10.75). Используя (7.1) и (9.4), для тока в кольце получаем

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \frac{1}{c} B_0 S \cos \varphi \omega \sin \omega t.$$

Решение ищем в виде $I = A \sin \omega t + D \cos \omega t$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах, получаем

$$I = \frac{1}{c} B_0 S \cos \varphi \frac{R \sin \omega t - L \omega \cos \omega t}{R^2 + L^2 \omega^2}.$$

Используя (5.5) и (7.8), находим момент сил

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [\mathbf{pB}] = \\ &= \frac{1}{c^2} B_0 S \cos \varphi \omega \frac{(R \sin \omega t \cos \omega t - L \omega \cos^2 \omega t)[\mathbf{nB}_0]}{R^2 + L^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

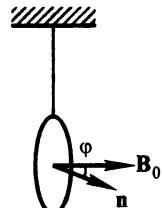


Рис. 10.54

При усреднении по периоду изменения поля получаем

$$\langle M \rangle = \frac{B_0 S^2 \omega^2 L \cos \varphi}{2c^2 (R^2 + L^2 \omega^2)}.$$

Возможны два положения равновесия:

- 1) плоскость кольца перпендикулярна магнитному полю (неустойчивое равновесие, так как магнитный момент кольца противоположен магнитному полю);
- 2) плоскость кольца параллельна магнитному полю (устойчивое равновесие, так как поток магнитного поля равен нулю, т. е. тока нет, а при отклонении плоскости кольца момент возвращает в начальное положение).

При $\omega L \gg R$

$$M \equiv M_1 \approx B_0^2 S^2 \sin \varphi \frac{\cos \varphi}{2Lc^2}.$$

При $\omega L \ll R$

$$M \equiv M_2 = \omega^2 B_0^2 S^2 L \sin \varphi \frac{\cos \varphi}{2R^2 c^2} = M_1 \left(\frac{\omega L}{R} \right)^2.$$

Во втором случае врачающий момент меньше.

Параллельный колебательный контур подключен, как показано на рис. 10.55, через сопротивление $R = 10$ кОм к источнику переменного напряжения (амплитуды U_0). Активное сопротивление катушки $r = 5$ Ом. Для измерения добротности колебательного контура к сопротивлению R подключается параллельно такое же сопротивление (замыканием ключа К). При этом амплитуда колебаний напряжения на контуре при резонансе токов увеличивается в 1,5 раза. Найдем добротность Q контура, если известно соотношение между его параметрами (№ 10.81)

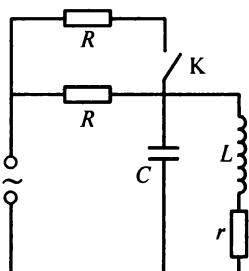


Рис. 10.55

$$\frac{L}{C} \gg r^2.$$

Для импеданса контура \hat{Z} из (10.27), (10.29) и (10.31) получаем

$$\frac{1}{\hat{Z}} = i\omega C + \frac{1}{r + i\omega L} = \frac{i\omega r C - \omega^2 LC + 1}{r + i\omega L}.$$

При резонансе

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

и поэтому

$$\hat{Z} = \frac{r + i\omega L}{i\omega r C} = \frac{1/i + \omega L/r}{\omega C} = \frac{L}{Cr} - i \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}.$$

Отсюда, во-первых, для модуля Z из условия задачи и (9.28) находим

$$Z = \frac{1}{r} \left(\frac{L^2}{C^2} + \frac{Lr^2}{C} \right)^{1/2} \approx \frac{L}{Cr} = Q^2 r.$$

Во-вторых, учитывая, что из условия задачи при резонансе следует, что $L^2\omega^2 \gg r^2$, и поэтому импеданс контура можно считать некоторым активным сопротивлением, которое обозначим R_κ . Обозначая ток от источника I и падение напряжения на контуре U_1 , получаем $U_0 = I(R + R_\kappa)$, $U_1 = IR_\kappa$. Откуда

$$U_1 = U_0 \frac{R_\kappa}{R + R_\kappa}.$$

При включении второго сопротивления получаем

$$U_2 = U_0 \frac{R_\kappa}{R/2 + R_\kappa}.$$

По условию оно в 1,5 раза больше U_1 . Это позволяет найти

$$R_\kappa = \frac{R}{2}; \quad Q = \left(\frac{Z}{r} \right)^{1/2} = \left(\frac{R}{2r} \right)^{1/2} \approx 30.$$

11. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА. АВТОКОЛЕБАНИЯ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС. ШУМЫ

При рассмотрении вынужденных колебаний уже было сказано о важности представления воздействующей нагрузки (правой части в уравнении вынужденных колебаний) в виде набора гармоник (синусов и косинусов). Такое разложение нагрузки (произвольного сигнала) называется **спектральным анализом**.

Периодическую функцию $f(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t). \quad (11.1)$$

С круговой частотой ω связан период основной гармоники

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (11.2)$$

Коэффициенты определяются следующим образом:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt. \quad (11.3)$$

Интегралы всех гармоник по основному периоду дают нули.

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (11.4)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt. \quad (11.5)$$

Легко проверить непосредственным вычислением, что в обоих случаях только квадратичные члены отличны от нуля.

Можно разложение написать и для комплексной функции $S(t)$, для которой $f(t)$ является действительной частью (в отличие от пре-

дыущего раздела специальный значок « $\hat{\cdot}$ » используем для спектральной функции):

$$f(t) = \operatorname{Re} S(t). \quad (11.6)$$

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}. \quad (11.7)$$

Отрицательные частоты соответствуют вращению вектора в комплексной плоскости по часовой стрелке

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S(t) e^{-in\omega t} dt. \quad (11.8)$$

Для непериодической функции $f(t)$ снова имеем (11.6) и интеграл Фурье

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (11.9)$$

Функция $\hat{S}(\omega)$ называется **спектром** (или **преобразованием Фурье**) функции $S(t)$

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (11.10)$$

В спектроскопии принято в показателе (11.9) ставить минус, а в показателе (11.10) соответственно плюс и $1/(2\pi)$ из (11.9) перенести в (11.10).

Найдем, какую величину \hat{S}_1 получаем вместо (11.10) при сдвиге (11.9) на T , т. е. при $S(t - T)$. Из (11.10) следует

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t - T) e^{-i\omega t} dt.$$

Введем новую переменную $t' = t - T$. Производя замену, получаем

$$\hat{S}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t') e^{-i\omega(t-T)} dt' = e^{-i\omega T} \int_{-\infty}^{\infty} S(t') e^{-i\omega t'} dt'.$$

Откуда

$$\hat{S}_1(\omega) = \hat{S}(\omega) e^{-i\omega T}. \quad (11.11)$$

При сдвиге сигнала изменяется фаза спектральной характеристики.

Проведем спектральный анализ некоторых колебаний. Цель такого анализа — найти коэффициенты при гармониках, входящих в разложение (11.1).

Для квадратичного преобразования монохроматического (одной частоты) сигнала $f(t) = A \cos^2 \omega t$ (№ 11.1) даже не нужно пользоваться приведенными ранее формулами для коэффициентов ряда Фурье, а из простой тригонометрии получаем

$$f(t) = A \cos^2 \omega t = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cos 2\omega t,$$

т. е. сигнал представляет сумму постоянной величины и второй гармоники.

Если при колебаниях амплитуда или фаза, или и то и другое меняются со временем, то они называются **модулированными**. Наибольший интерес представляют случаи, когда модуляция является гармонической функцией с частотой, значительно меньшей частоты колебаний, которая называется **несущей частотой**.

Для амплитудной модуляции с частотой $\Omega \ll \omega$ (несущей) частоты и отношением амплитуд $m < 1$ (m называется глубиной модуляции) (№ 11.1) получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t = \\ &= A \cos \omega t + A \frac{m}{2} \cos(\omega + \Omega)t + A \frac{m}{2} \cos(\omega - \Omega)t. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Спектр этого колебания, показанный на рис. 11.1, называется **линейчатым**. Это коэффициенты при соответствующих гармониках, обозначаемые $\hat{A}(\omega)$.

Удобно воспользоваться комплексной формой сигнала и векторными представлениями. Из (10.20)

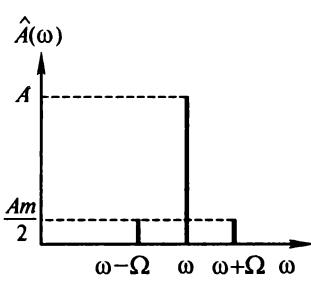


Рис. 11.1

$$\cos \Omega t = \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} S(t) &= A(1 + m \cos \Omega t) e^{i\omega t} = \\ &= A \left(1 + \frac{m}{2} e^{i\Omega t} + \frac{m}{2} e^{-i\Omega t} \right) e^{i\omega t} = \\ &= A e^{i\omega t} + \frac{Am}{2} e^{i(\omega+\Omega)t} + \frac{Am}{2} e^{i(\omega-\Omega)t}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

В плоскости фазовых амплитуд (векторов), вращающейся с угловой скоростью ω , получаем результат, показанный на рис. 11.2. В результате вращения векторов $Am/2$ в противоположные стороны получаем модуляцию амплитуды.

При модуляции фазы колебаний (№ 11.1) имеем

$$f(t) = A \cos \varphi(t) = A \cos(\omega t + m \cos \Omega t). \quad (11.14)$$

В случае $\Omega \ll \omega$ и $m \ll 1$ получаем

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos \omega t \cos(m \cos \Omega t) - A \sin \omega t \sin(m \cos \Omega t) \approx \\ &\approx A \cos \omega t - Am \sin \omega t \cos \Omega t = A \cos \omega t - mA \cos \Omega t \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= A \cos \omega t - \frac{mA}{2} \cos\left[(\omega + \Omega)t - \frac{\pi}{2}\right] - \frac{mA}{2} \cos\left[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2}\right] = \\ &= A \cos \omega t + \frac{mA}{2} \cos\left[(\omega + \Omega)t + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{mA}{2} \cos\left[(\omega - \Omega)t + \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Следует отметить, что происходит модуляция мгновенной частоты колебаний $\omega_{\text{мгн}}$. Это можно определить дифференцированием фазы $\varphi(t)$

$$\omega_{\text{мгн}} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega - m\Omega \sin \Omega t. \quad (11.16)$$

В комплексном виде фазовая модуляция представляет

$$\begin{aligned} S(t) &= A e^{i(\omega t + m \cos \Omega t)} \approx A(1 + im \cos \Omega t) e^{i\omega t} = \\ &= A e^{i\omega t} + i \frac{mA}{2} e^{i(\omega + \Omega)t} + i \frac{mA}{2} e^{i(\omega - \Omega)t}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

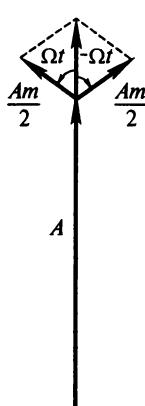


Рис. 11.2

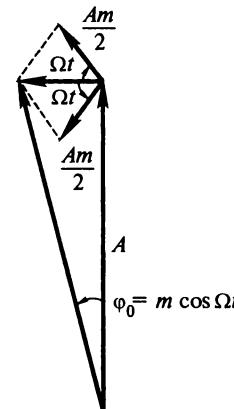


Рис. 11.3

Учитывая (10.33), изображаем вектора на векторной плоскости (рис. 11.3). При $m \ll 1$ амплитуда суммарного вектора не меняется, а меняется его наклон, т. е. фаза.

Найдем, что зарегистрирует приемник радиоизлучения, если известно, что в нем осуществляется **квадратичное преобразование** принимаемого сигнала с последующим **усреднением** за некоторое время Δt ; подчиняющееся условию $2\pi/\omega \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где ω — радиочастота; Ω — частота модуляции ($\Omega \ll \omega$) в следующих случаях:

- 1) на вход поданы амплитудно-модулированные колебания (11.12);
- 2) на вход поданы колебания, модулированные по фазе (11.14);
- 3) на вход поданы колебания, модулированные по фазе с отфильтрованной (т. е. убранной) частотой ω ;
- 4) на вход поданы колебания, модулированные по фазе, в которых фаза спектральной компоненты частоты ω изменена на $\pi/2$ (т. е. фаза несущей изменена на $\pi/2$) (№ 11.2).

В первом случае введем обозначение $B(t) = A(1 + m \cos \Omega t)$ для величины, которая мало меняется на интервале от $t - \Delta t/2$ до $t + \Delta t/2$. В этом случае выходной сигнал, который регистрирует приемник, будет

$$\begin{aligned} g(t) &= \langle f^2(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} B^2(x) \cos^2 \omega x dx = \\ &= \frac{B^2(t)}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \cos^2 \omega x dx = \frac{B^2(t)}{2} = A^2 \frac{(1 + m \cos \Omega t)^2}{2}. \end{aligned}$$

Предполагается, что Δt содержит целое число периодов несущей радиочастоты ω .

Можно воспользоваться комплексными представлениями

$$f(t) = \operatorname{Re} S(t),$$

где $S(t) = x + iy = A(1 + m \cos \Omega t)e^{i\omega t}$. Усреднение модуля комплексного числа по большому числу периодов $\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = 2\langle x^2 \rangle$. Поэтому

$$g = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho^2 \rangle = \frac{1}{2} SS^* = A^2 \frac{(1 + m \cos \Omega t)^2}{2},$$

где S^* — вектор, комплексно сопряженный S , $S^* = x - iy$. При $m \ll 1$ получаем

$$g(t) \approx A^2 \frac{1 + 2m \cos \Omega t}{2}. \quad (11.18)$$

Во втором случае — фазовой модуляции (11.14) — удобно сразу воспользоваться комплексным представлением

$$g = \frac{1}{2} SS^* = \frac{A^2}{2}.$$

Таким образом, фазовая модуляция теряется.

В третьем случае при фильтрации (удалении) несущей частоты вместо (11.17) имеем

$$S(t) = i \frac{mA}{2} e^{i(\omega + \Omega)t} + i \frac{mA}{2} e^{i(\omega - \Omega)t} = imA e^{i\omega t} \cos \Omega t.$$

Получаем

$$g(t) = \frac{1}{2} SS^* = \frac{1}{2} (mA)^2 \cos^2 \Omega t = \left(\frac{mA}{2} \right)^2 (1 + \cos 2\Omega t).$$

В четвертом случае, в отличие от третьего, фаза несущей частоты изменена на $\pi/2$, что соответствует умножению первого члена в (11.17) на i :

$$S(t) = iA e^{i\omega t} + i \frac{mA}{2} e^{i(\omega + \Omega)t} + i \frac{mA}{2} e^{i(\omega - \Omega)t} = A e^{i(\omega t + \pi/2)} (1 + m \cos \Omega t).$$

Отсюда получаем

$$g(t) = \frac{1}{2} SS^* = A^2 \frac{(1 + m \cos \Omega t)^2}{2} \approx A^2 \frac{1 + 2m \cos \Omega t}{2}.$$

Это соответствует амплитудной модуляции (11.18).

Найдем спектры сигналов, изображенных на рис. 11.4:

- периодическая последовательность прямоугольных импульсов;
- прямоугольный импульс;
- синусоидальный щуп (№ 11.3).

В случае рис. 11.4, а для периодической функции можно написать представление в виде ряда Фурье. Воспользовавшись (11.6), (11.7) и (11.8), получаем

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-in\omega t} dt = \frac{A}{-in\omega T} (e^{-in\omega\tau/2} - e^{in\omega\tau/2}) = \\ &= A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} = A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\omega/2)}{n\pi\omega/2}, \end{aligned}$$

где $\omega = 2\pi/T$.

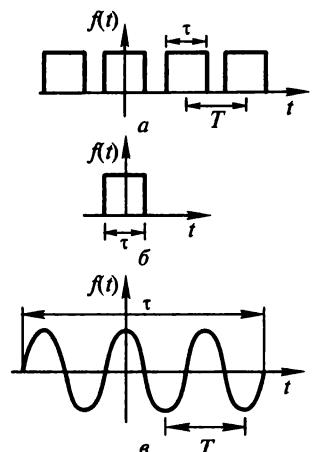


Рис. 11.4

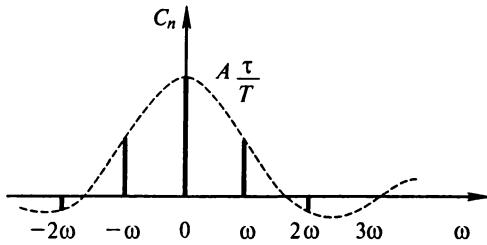


Рис. 11.5

На рис. 11.5 показан линейчатый спектр этого сигнала.

В случае рис. 11.4, б для непериодического сигнала с помощью интеграла Фурье (11.10) получаем сплошной спектр

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{-i\omega} (e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Этот спектр показан на рис. 11.6.

Интервал частот, в котором спектральная амплитуда существенно отличается от нуля, называется **шириной спектра**. В данном случае можно взять ширину главного максимума ($2\Delta\omega$), для которого

$$\Delta\omega = 2\pi/\tau. \quad (11.20)$$

Так как τ равно длительности сигнала Δt , то можно написать общее соотношение, связывающее длительность сигнала с шириной спектра и называемое **соотношением неопределенности**:

$$\Delta t \Delta\omega \approx 2\pi. \quad (11.21)$$

Вводя обозначение $\Omega = 2\pi/T$, в случае рис. 11.4, в получаем сплошной спектр

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos(\Omega t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2} \left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i(\omega - \Omega)t} dt + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i(\omega + \Omega)t} dt \right) = \end{aligned}$$

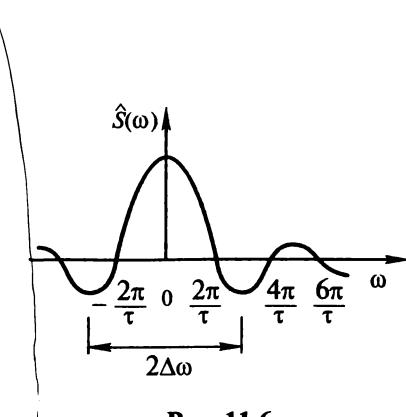


Рис. 11.6

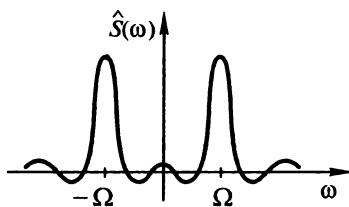


Рис. 11.7

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A}{2} \left[\frac{e^{-i(\omega-\Omega)\tau/2} - e^{i(\omega-\Omega)\tau/2}}{-i(\omega-\Omega)} + \frac{e^{-i(\omega+\Omega)\tau/2} - e^{i(\omega+\Omega)\tau/2}}{-i(\omega+\Omega)} \right] = \\
 &= \frac{A\tau}{2} \left\{ \frac{\sin[(\omega-\Omega)\tau/2]}{(\omega-\Omega)\tau/2} + \frac{\sin[(\omega+\Omega)\tau/2]}{(\omega+\Omega)\tau/2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что этот спектр представляет сумму двух спектров от прямоугольных импульсов, сдвинутых на Ω в разные стороны (рис. 11.7).

Плоский вакуумный диод подключен к источнику постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (рис. 11.8). Эмиссионная способность катода К столь мала, что ток через диод протекает в виде одиночных импульсов **отдельных электронов**, каждый из которых имеет длительность τ . Найдем спектр сигнала на измерительном приборе при прохождении такого импульса (№ 11.4). При пролете заряда dq работа источника

$$Udq = U \frac{dq}{dt} dt = UI dt.$$

Для электрона работа

$$eEdx = e \frac{U}{l} dx,$$

где l — ширина зазора. Поэтому, обозначая ускорение электрона a , получаем

$$I(t) = \frac{e}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{eat}{a\tau^2/2} = \frac{2et}{\tau^2}.$$

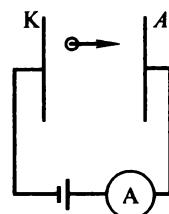


Рис. 11.8

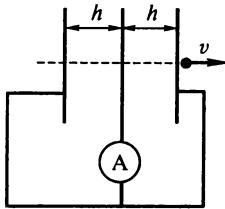


Рис. 11.9

Через систему тонких плоскопараллельных пластин, соединенных с измерительным прибором так, как показано на рис. 11.9, пролетает по нормали к пластинам электрон достаточно высокой энергии, чтобы пронизывать их без заметных потерь. Найдем спектр сигнала на измерительном приборе, если скорость электрона v , ширина каждого зазора h (№ 11.5). Эта задача похожа на предыдущую. Так как там ЭДС не входит в ответ, то здесь можно провести те же самые рассуждения, а затем положить $U = 0$. Получаем для $-\tau < t < 0$ ток $I = -I_0$, а для $0 < t < \tau$ ток $I = I_0$, где $\tau = h/v$ и $I_0 = ev/h$. Из (11.10) следует

$$\hat{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{-i\omega t} dt = 2ev \frac{1 - \cos(\omega h/v)}{i\omega h}.$$

Найдем, при каких условиях, налагаемых на вид сигнала $U_{\text{вх}}(t)$ [и его спектра $U_{\text{вх}}(\omega)$], напряжение $U_{\text{вых}}(t)$ на выходе RC -цепочек, изображенных на рис. 11.10 и 11.11, совпадает с входным напряжением $U_{\text{вх}}(t)$ (№ 11.7). В соответствии с (10.27) и (10.31) в первом случае

$$\hat{U}_{\text{вых}} = \frac{1}{i\omega C} \frac{\hat{U}_{\text{вх}}}{R + 1/i\omega C} = \frac{\hat{U}_{\text{вх}}}{1 + i\omega CR}.$$

Во втором случае

$$\hat{U}_{\text{вых}} = R \frac{\hat{U}_{\text{вх}}}{R + 1/i\omega C} = i\omega CR \frac{\hat{U}_{\text{вх}}}{1 + i\omega CR}.$$

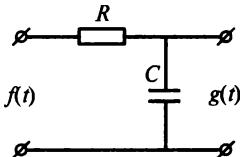


Рис. 11.10

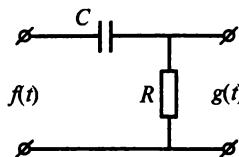


Рис. 11.11

В первом случае при

$$\omega_{\max} \ll \frac{1}{RC},$$

а во втором случае при

$$\omega_{\min} \gg \frac{1}{RC}$$

получаем $U_{\text{вых}} \approx U_{\text{вх}}$.

Высокодобротный колебательный контур находится под действием внешней амплитудно-модулированной ЭДС, изменяющейся по закону $\mathcal{E}(t) = A(1 + m \cos^2 \Omega t) \cos \omega_0 t$. Резонансная частота контура может перестраиваться с помощью изменения емкости. Считая коэффициент затухания контура β заданным, найдем амплитуду вынужденных колебаний в следующих случаях:

- 1) контур настроен на несущую частоту ω_0 ;
- 2) контур настроен на частоту $\omega + 2\Omega$ (№ 11.8).

Используя тригонометрические формулы, для входного сигнала получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) = A & \left(1 + \frac{m}{2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{1}{4} mA \cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \\ & + \frac{1}{4} mA \cos(\omega_0 - 2\Omega)t.\end{aligned}$$

Спектр этого сигнала показан на рис. 11.5. В соответствии с (10.1), (10.9) и (9.27) для выходного сигнала получаем в первом случае

$$A_1 = \omega_0 \frac{L}{R} \left(1 + \frac{m}{2} \right) A = \omega_0 \left(1 + \frac{m}{2} \right) \frac{A}{2\beta}.$$

Во втором случае

$$A_2 = (\omega_0 + 2\Omega) \frac{L}{R} \frac{m}{4} A = (\omega_0 + 2\Omega) \frac{m}{4} \frac{A}{2\beta}.$$

На вход колебательного контура с высокой добротностью подаются амплитудно-модулированные колебания $\mathcal{E}(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t$. При перестройке несущей частоты ω наблюдается несколько резонансов. Найдем **резонансные значения частот** и определим глубину модуляции m , если известно, что амплитуда вынужденных колебаний напряжения на контуре уменьшилась в $n = 4$ раза при перестройке частоты ω от значения ω_0 до $\omega_0 + \Omega + \beta$ (ω_0 — собственная

частота; β — коэффициент затухания контура) (№ 11.9). Для подаваемого напряжения имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t = \\ &= A \cos \omega t + \frac{Am}{2} \cos(\omega + \Omega)t + \frac{Am}{2} \cos(\omega - \Omega)t.\end{aligned}$$

При совпадении ω с ω_0 получаем спектр с резонансами при $(\omega_0 - \Omega)$, ω_0 и $(\omega_0 + \Omega)$. Из (10.41) следует, что отношение энергии при сдвиге частоты от резонанса на $\Delta\omega = \beta$ к энергии при резонансе уменьшается в два раза. Амплитуда уменьшается в $\sqrt{2}$. В соответствии с (10.1), (10.9) и (9.17) амплитуды вынужденных колебаний в Q (добротность) раз больше амплитуды вынуждающей силы. При ω_0 амплитуда AQ , при $(\omega_0 + \Omega)$ амплитуда $AmQ/2$, а при сдвиге на β еще в $\sqrt{2}$ меньше. По условию амплитуда уменьшилась в 4 раза. Отсюда

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7.$$

В схеме, изображенной на рис. 11.12, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Найдем токи I и I_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению (№ 11.10)

$$\Omega^2 = \frac{1}{4LC}.$$

Можно воздействие представить в виде

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} + \frac{\mathcal{E}_0}{2} \cos 2\Omega t.$$

Таким образом, в напряжении имеется постоянная и переменная составляющие. Постоянный ток не проходит через конденсатор, а идет через R , R_1 и L_1 . Правая часть схемы находится в резонансе напряжений с ЭДС

$$(2\Omega)^2 = \frac{1}{LC}.$$

Следовательно, ее сопротивление переменной части тока равно нулю. Весь переменный ток течет через R и LC . Он равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \cos \Omega t}{2R}.$$

Постоянный ток через конденсатор не проходит, поэтому

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0/2}{R + R_1}.$$

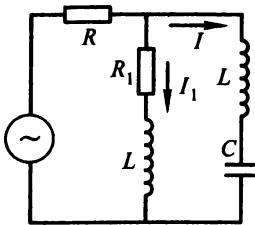


Рис. 11.12

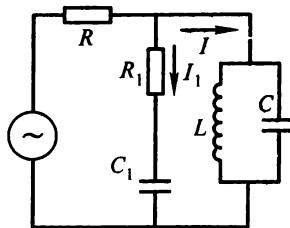


Рис. 11.13

В схеме, изображенной на рис. 11.13, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Найдем токи I и I_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению (№ 11.11)

$$\Omega^2 = \frac{1}{4LC}.$$

Можно воздействие представить

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} + \frac{\mathcal{E}_0}{2} \cos 2\Omega t.$$

Постоянный ток будет идти только через L . Он будет равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{2R}.$$

Так как LC контур находится в резонансе токов, то переменный ток через него не идет, а идет через R_1 и C_1 . Поэтому

$$\hat{I}_1 = \frac{\mathcal{E}_0/2}{R + R_1 + 1/i\Omega C_1}.$$

Амплитуда его

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \cos \frac{2\Omega t + \varphi}{\left[(R + R_1)^2 + 1/(2\Omega C_1)^2 \right]^{1/2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2(R + R_1) + 1/\Omega C_1}.$$

На RC -цепочку (рис. 11.14) подается гармоническое напряжение $U_{\text{вх}} = U_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг фаз между $U_{\text{вых}}$ и $U_{\text{вх}}$ составляет 60° . Найдем спектральный состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для

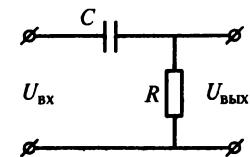


Рис. 11.14

случая, когда расстояние между пластинами конденсатора (конденсатор плоский) изменяется по закону $h = h(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$ (№ 11.12). При неизменных параметрах цепочки, когда $C = C_0$, получаем, как для делителя напряжений, в соответствии с (10.26) и (10.30)

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{вх}} R}{R + 1/i\omega C_0}$$

и для сдвига фаз по условию в 60° в соответствии с (10.34)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega C_0 R} = \sqrt{3}.$$

Откуда соотношение между параметрами цепочки

$$\omega C_0 R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для переменной емкости конденсатора по условию и в соответствии с (3.56) имеем

$$C = \frac{C_0}{1 + a \cos \Omega t}.$$

В таком случае

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + 1/i\omega CR} = \frac{1}{(1 - i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}a \cos \Omega t / 1 - i\sqrt{3})}.$$

Используя условие $a \ll 1$ и формулу Эйлера (10.20) (см. 1, с. 101), получаем

$$\begin{aligned} \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} &\approx \frac{1 + i\sqrt{3}a \cos \Omega t / (1 - i\sqrt{3})}{1 - i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{2} e^{i\pi/3} \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2} a e^{i(5\pi/6 + \Omega t)} + \frac{\sqrt{3}}{2} a e^{i(5\pi/6 - \Omega t)} \right]. \end{aligned}$$

Представляя входное напряжение в комплексном виде $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$, имеем

$$\hat{U} = \frac{U_0}{2} e^{i(\omega t + \pi/3)} + U_0 \sqrt{3} \frac{a}{4} \left[e^{i[(\omega + \Omega)t + 7\pi/6]} + e^{i[(\omega - \Omega)t + 7\pi/6]} \right].$$

Таким образом, в спектре имеем три гармонические компоненты: основную с частотой ω и амплитудой $U_0/2$ и с частотами $\omega \pm \Omega$ и амплитудами $U_0\sqrt{3}\frac{a}{4}$, которые по фазе сдвинуты относительно основной на $5\pi/6$.

Рассмотрим аналогичную задачу, в которой сопротивление и емкость поменялись местами (рис. 11.15) и сдвиг фазы равен -45° (№ 11.13). При этом

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \frac{1/i\omega C_0}{R + 1/i\omega C_0} = \frac{U}{1 + i\omega C_0 R}$$

и $\operatorname{tg} \varphi = -\omega C_0 R = -1$, т. е. $\omega C_0 R = 1$. В результате

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{1 + i/(1 + a \cos \Omega t)} \approx \frac{1 + ia \cos \Omega t / (1 + i)}{1 + i}.$$

Представляя входное напряжение в комплексном виде $\hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$, имеем

$$\hat{U} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} e^{i(\omega t - \pi/4)} \left[1 + \frac{a}{2\sqrt{2}} e^{i(\Omega t + \pi/4)} + \frac{a}{2\sqrt{2}} e^{i(-\Omega t + \pi/4)} \right].$$

Таким образом, в спектре имеем три гармонические компоненты: основную с частотой ω и амплитудой $\frac{U_0}{\sqrt{2}}$ и с частотами $\omega \pm \Omega$ и амплитудами $\frac{a}{4}$, которые по фазе сдвинуты относительно основной на $\pi/4$.

На вход колебательного контура (рис. 11.16) подается амплитудно-модулированное напряжение

$$U_{\text{вх}} = U_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t \quad (m < 1).$$

Контур настроен в резонанс с частотой ω_0 . Вычислим $U_{\text{вых}}$, если $\omega_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\Omega = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, добротность контура $Q = 100$

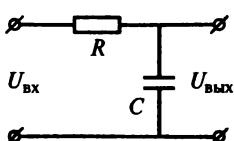


Рис. 11.15

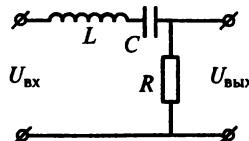


Рис. 11.16

(№ 11.14). Используя (11.12), получаем для спектра входного сигнала

$$U = U_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t = \\ = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{U_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{U_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Чтобы получить спектр тока, надо воспользоваться (10.16) для импеданса, (9.27) и (10.38) для связи с добротностью и (10.34) для фазы:

$$Z = R \left[1 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \frac{1}{R} \right]^{1/2} \approx R \left[1 + \left(Q \frac{2\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}; \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \approx Q \frac{2\Delta\omega}{\omega},$$

где для резонанса $\Delta\omega = 0$, а для смещенных компонент $|\Delta\omega| = \Omega$.

Таким образом, спектр тока

$$I = \frac{U_0}{R} \cos \omega_0 t + \frac{U_0 m}{2} \frac{\cos(\omega_0 t + \Omega t + \varphi)}{\left[1 + (Q 2\Omega/\omega_0)^2 \right]^{1/2}} + \\ + \frac{U_0 m}{2} \frac{\cos(\omega_0 t - \Omega t - \varphi)}{\left[1 + (Q 2\Omega/\omega_0)^2 \right]^{1/2}} = \frac{U_0}{R} \cos \omega_0 t \left(1 + \frac{m \cos(\Omega t + \varphi)}{\left[1 + (Q 2\Omega/\omega_0)^2 \right]^{1/2}} \right).$$

Отсюда

$$U = U_0 \cos \omega_0 t \frac{1 + m \cos(\Omega t + \varphi)}{\left[1 + (Q 2\Omega/\omega_0)^2 \right]^{1/2}} = U_0 \cos \omega_0 t \left(1 + \frac{m_1 \cos(\Omega t + \varphi)}{\left[1 + (Q 2\Omega/\omega_0)^2 \right]^{1/2}} \right),$$

где

$$m_1 = \frac{m}{\left[1 + (Q 2\Omega/\omega_0)^2 \right]^{1/2}} = 0,9m; \quad \operatorname{tg} \varphi \approx 0,5.$$

На вход колебательного контура (см. рис. 11.16) подается периодическая последовательность **прямоугольных импульсов**, длительность которых (τ) в 4 раза меньше величины периода (T). Частота повторения импульсов ($\omega = 2\pi/T$) совпадает с резонансной частотой контура. Найдем отношение амплитуд второй гармоники к первой на

выходе контура, если его добротность $Q = 100$ (№ 11.15). Для входного сигнала, используя (11.7) и (11.8), получаем

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-in\omega t} dt = \frac{A}{n\pi} \sin n\omega \frac{\tau}{2},$$

где A — амплитуда импульса; $\omega = 2\pi/T$ — первая гармоника.

Так как $\tau = T/4$, то для первой гармоники

$$C_{1\text{вх}} = \frac{A}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{A}{\pi\sqrt{2}},$$

а для второй гармоники

$$C_{2\text{вх}} = \frac{A}{2\pi}.$$

Рассматривая схему как делитель напряжения, получаем для резонанса $C_{1\text{вых}} = C_{1\text{вх}}$, а для

$$\omega_2 = 2\omega = \frac{1}{(LC)^{1/2}},$$

используя (10.16), находим

$$\frac{C_{2\text{вых}}}{C_{1\text{вх}}} = \frac{R}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)]^{1/2}} = \frac{R}{[(9/4)L/C + R^2]^{1/2}} \approx \frac{2}{3Q}.$$

Окончательно

$$\frac{C_{2\text{вых}}}{C_{1\text{вых}}} = 0,0047.$$

Сигнал с выпрямителя имеет вид $U(t)$ (половинки косинусоид) (рис. 11.17 сплошная линия). Его подают на схему, изображенную на рис. 11.18. Контур L, C настроен на частоту ω_0 ; $R \gg \omega_0 L$ и $R \gg r$.

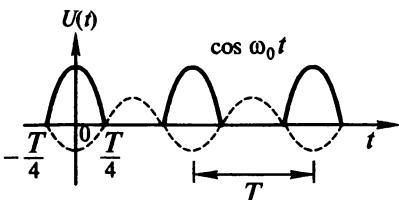


Рис. 11.17

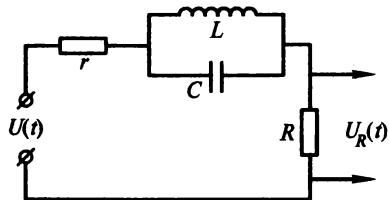


Рис. 11.18

Считая контур идеальным, определим форму сигнала $U_R(t)$ (№ 11.16). При разложении в ряд Фурье (11.1) имеем постоянную составляющую и гармоники. При заданных условиях через данную систему постоянная составляющая и все гармоники, кроме первой, пройдут без изменения. Для первой гармоники в контуре L , C наблюдается резонанс токов, т. е. бесконечное сопротивление. Значит, эту гармонику надо вычесть из сигнала, поступающего на схему. Используя (11.5) для коэффициента первой гармоники, получаем

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2}. \quad (11.22)$$

В результате

$$U_R(t) = U(t) - \frac{1}{2} \cos \omega_0 t.$$

Вычитаемая часть показана на рис. 11.17 пунктиром. Окончательно получаем

$$U_R(t) = \frac{1}{2} |\cos \omega_0 t|.$$

Рассмотрим другой вариант, когда такой же сигнал (на рис. 11.17 сплошная линия) подается на схему, изображенную на рис. 11.19. Контур L , C настроен на частоту ω_0 ; $\omega_0 L \gg R \gg r$. Считая контур идеальным, определим форму сигнала $U_R(t)$ (№ 11.17). Снова пользуясь разложением в ряд Фурье (11.1). Для первой гармоники в контуре L , C наблюдается резонанс напряжений, т. е. нулевое сопротивление. Он шунтирует сопротивление R для этой гармоники, она на него не попадает. Значит, эту гармонику надо вычесть из сигнала, поступающего на схему. Используя (11.5) для коэффициента первой гармоники, получаем (11.22)

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2}.$$

В результате

$$U_R(t) = U(t) - \frac{1}{2} \cos \omega_0 t.$$

Вычитаемая часть показана на рис. 11.17 пунктиром. Окончательно получаем

$$U_R(t) = \frac{1}{2} |\cos \omega_0 t|.$$

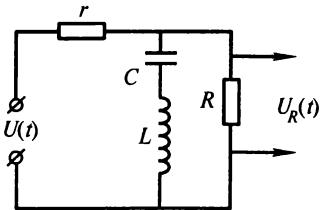


Рис. 11.19

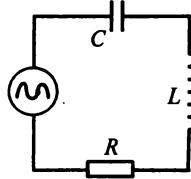


Рис. 11.20

Генератор импульсов, имеющих форму, изображенную на рис. 11.17 (сплошная линия), включен в цепь колебательного контура L , C , R , имеющего добротность $Q = 100$ и настроенного на первую гармонику генератора ω_0 (рис. 11.20). Внутреннее сопротивление генератора $r = 50$ Ом, а амплитуда ЭДС $U = 100$ В. Найдем максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока $I_{1\max}$ в контуре, если все высшие гармоники должны быть подавлены по крайней мере в 100 раз ($\beta = I_1/I_2 \geq 100$) (№ 11.18). Пользуемся разложением в ряд Фурье (11.1). В соответствии с (11.5) для первой гармоники имеем

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{1}{2}.$$

Для второй гармоники, используя четность формы импульсов, находим

$$B_2 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos 2\omega_0 t \cos \omega_0 t dt = \frac{2}{3\pi}.$$

Амплитуды входных сигналов

$$U_1 = \frac{U}{2}; \quad U_2 = \frac{2U}{3\pi}.$$

При резонансе, используя (9.8) и (9.27), имеем

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = QR.$$

При резонансе сопротивление имеет активный характер (10.16), поэтому

$$I_1 = \frac{U_1}{R + r}.$$

Вторая гармоника — вне резонанса. Поскольку по условию она должна быть сильно подавлена, то

$$R + r \ll \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}.$$

Таким образом,

$$I_2 = \frac{U_2}{\omega_2 L - 1/\omega_2 C} = \frac{U_2}{2QR - (1/2)QR} = \frac{2U_2}{3QR}.$$

Отношение гармоник тока

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} = \frac{9}{8} QR \frac{\pi}{R + r}.$$

Откуда

$$R = 8\beta \frac{r}{9\pi Q - 8\beta}.$$

Считая, что β равно как минимум 100, получаем $R \approx 20$ Ом. Это значение сопротивления R определяет максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока

$$I_{1\max} = \frac{U_1}{r + R} = \frac{U/2}{r + R} \approx 0,71 \text{ A.}$$

Аналогичную задачу можно решить в случае генератора **прямоугольных импульсов** (рис. 11.21) с амплитудой $U = 100$ В и скважностью $\alpha = T/\tau = 4$ (T — период следования; τ — длительность импульсов), имеющего внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом, нагруженного на последовательный контур с добротностью $Q = 100$. Найдем максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока $I_{1\max}$ в контуре, если все высшие гармоники должны быть подавлены по крайней мере в 100 раз ($\beta = I_1/I_2 \geq 100$) (№ 11.19). Пользуемся

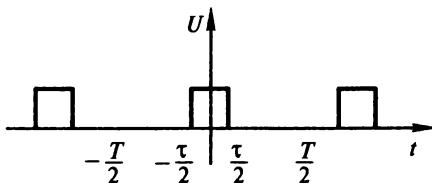


Рис. 11.21

разложением в ряд Фурье (11.1). В соответствии с (11.5) для первой гармоники имеем (11.22)

$$B_1 = \frac{2}{T} U \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\omega_0 t) dt = U \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

В силу выбранной четности зависимости импульсов члены с синусами отсутствуют. В чем можно убедиться непосредственным применением (11.4).

Для второй гармоники, используя четность формы импульсов, находим

$$B_2 = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(2\omega_0 t) dt = \frac{U}{\pi}.$$

Амплитуды входных сигналов

$$U_1 = \frac{U\sqrt{2}}{\pi}; \quad U_2 = \frac{U}{\pi}.$$

При резонансе, используя (9.8) и (9.27), имеем

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = QR.$$

При резонансе сопротивление имеет активный характер (10.16), поэтому

$$I_1 = \frac{U_1}{R + r}.$$

Вторая гармоника — вне резонанса. Поскольку по условию она должна быть сильно подавлена, то

$$R + r \ll \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}.$$

Таким образом,

$$I_2 = \frac{U_2}{\omega_2 L - 1/\omega_2 C} = \frac{U_2}{2QR - (1/2)QR} = \frac{2U_2}{3QR}.$$

Отношение гармоник тока

$$\beta = \frac{I_1}{I_2} = \frac{3}{2} QR \frac{\sqrt{2}}{R + r}.$$

Откуда

$$R = \beta \sqrt{2} r (3Q - \beta \sqrt{2}).$$

Считая, что β равно как минимум 100, получаем $R \approx 45$ Ом. Это значение сопротивления R определяет максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока

$$I_{1\max} = \frac{U_1}{r + R} = \frac{U\sqrt{2}/\pi}{r + R} \approx 0,474 \text{ A.}$$

Квадратичный детектор D преобразует входное напряжение $U = U_0(\sin \omega t + \sin 2\omega t)$ по закону $U_d = kU^2$. К выходу детектора подключена цепь, состоящая из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления R ($\omega L/R = 1/3$) (рис. 11.22). Найдем отношение амплитуды гармоники с максимальной частотой к постоянной составляющей выходного напряжения, снимаемого с сопротивления (№ 11.20). Результат квадратичного преобразования проще всего получить, воспользовавшись (10.20). Обозначив $\omega t = \alpha$, имеем

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \sin 2\alpha)^2 &= \left(\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} + \frac{e^{i2\alpha} - e^{-i2\alpha}}{2i} \right)^2 = \\ &= \frac{e^{i2\alpha} - 2 + e^{-i2\alpha} + e^{i4\alpha} - 2 + e^{-i4\alpha} + 2(e^{i3\alpha} - e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} + e^{-i3\alpha})}{-4}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$U_d = kU_0^2 \left(1 + \cos \omega t - \frac{1}{2} \cos 2\omega t - \cos 3\omega t - \frac{1}{2} \cos 4\omega t \right).$$

Как в делителе напряжения, на выходе получаем

$$U_{\text{вых}\,n} = U_d \frac{R}{(R^2 + \omega_n^2 L^2)^{1/2}}.$$

С учетом условия находим

$$\frac{U_{\text{вых}4}}{U_{\text{вых}0}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + 16\omega^2 L^2 / R^2)^{1/2}} = \frac{3}{10}.$$

Если на квадратичный детектор поступает входное напряжение $U = U_0(\cos \omega t + \cos 2\omega t)$, то, действуя, как в предыдущей задаче, получаем

$$U_d = kU_0^2 \left(1 + \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \cos 3\omega t + \frac{1}{2} \cos 4\omega t \right).$$

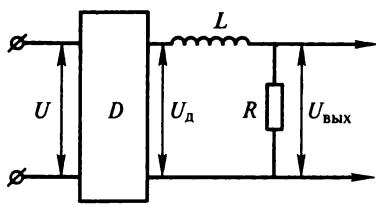


Рис. 11.22

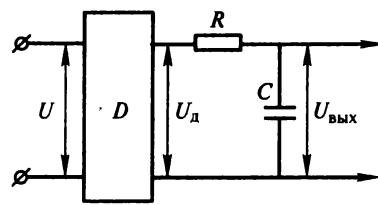


Рис. 11.23

В случае подключения к детектору цепи, изображенной на рис. 11.23, используя (10.27) и (10.31), для амплитуд получаем

$$U_{\text{вых}n} = U_{\text{д}n} \frac{1}{(1 + \omega_n^2 L^2 R^2)^{1/2}}.$$

Если известно, что

$$\omega RC = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то для отношения амплитуды гармоники с максимальной частотой к постоянной составляющей выходного напряжения, снимаемого с емкости (№ 11.21), имеем

$$\frac{U_{\text{вых}4}}{U_{\text{вых}0}} = \frac{1/2}{(1 + 16\omega^2 C^2 / R^2)^{1/2}} = \frac{1}{6}.$$

Дифференциальная магнитная проницаемость μ некоторого ферромагнетика зависит от напряженности магнитного поля по закону

$$\mu = \frac{dB}{dH} = \mu_1 - \mu_2 H^2.$$

На тонкий тороидальный сердечник из такого материала равномерно намотана катушка, имеющая N витков. Сечение сердечника S , радиус тора r (рис. 11.24). Через катушку течет постоянный ток подмагничивания, величина которого такова, что зависимость $B(H)$ достигает максимума. Катушка охвачена короткозамкнутым проводом, сопротивление которого R . Найдем

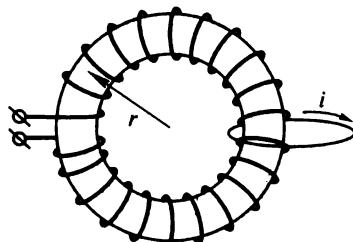


Рис. 11.24

спектр тока i в проводнике (пренебрегая его индуктивностью), если помимо тока подмагничивания через катушку пропустить слабый переменный ток $I = I_0 \sin \omega t$ (№ 11.23). Из условия

$$\left(\frac{dB}{dH} \right)_{H_0} = 0.$$

находим

$$H_0 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2}.$$

Ток I дает добавку магнитного поля ΔH , для которой из (5.6) следует

$$\Delta H 2\pi r = \frac{4\pi NI}{c}.$$

Откуда

$$\Delta H = 2N \frac{I}{cr} = 2NI_0 \frac{\sin \omega t}{cr} = A \sin \omega t,$$

где

$$A = 2N \frac{I_0}{cr}.$$

Магнитную индукцию представим в виде ряда Тейлора (разложение по ΔH относительно максимального B)

$$B = B_0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{dB}{dH} \right)_0 \Delta H + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 B}{dH^2} \right)_0 (\Delta H)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 B}{dH^3} \right)_0 (\Delta H)^3.$$

По условию

$$\left(\frac{dB}{dH} \right)_0 = 0; \quad \left(\frac{d^2 B}{dH^2} \right)_0 = -2\mu_2 H_0 = -2(\mu_1 \mu_2)^{1/2}; \quad \left(\frac{d^3 B}{dH^3} \right)_0 = -2\mu_2.$$

Более высокие производные равны нулю.

Поэтому, подставляя ΔH , получаем

$$B = B_0 - (\mu_1 \mu_2)^{1/2} A^2 \sin^2 \omega t - \frac{\mu_2}{3} A^3 \sin^3 \omega t.$$

Для изменения индукции со временем находим

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -2(\mu_1 \mu_2)^{1/2} A^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t - \frac{\mu_2}{2} A^3 \omega (1 - \cos 2\omega t) \cos \omega t =$$

$$= -(\mu_1 \mu_2)^{1/2} A^2 \omega \sin 2\omega t \cos \omega t - \frac{\mu_2}{4} A^3 \omega (\cos \omega t - \cos 3\omega t).$$

Заметим, что представление степеней гармонических функций проще всего получать с помощью формулы (10.20).

Ток в проводе определяем с помощью (7.1):

$$i = \frac{1}{c} \frac{S}{R} (\mu_1 \mu_2)^{1/2} A^2 \omega \sin 2\omega t \cos \omega t - \frac{\mu_2}{4} A^3 \omega (\cos \omega t - \cos 3\omega t).$$

Таким образом, в спектре тока три гармоники с частотами ω , 2ω и 3ω .

Для такой же тороидальной катушки в отсутствие подмагничивания, которое выводит B на максимум, заданную зависимость магнитной индукции от напряженности поля

$$\mu = \frac{dB}{dH} = \mu_1 - \mu_2 H^2$$

можно проинтегрировать. Используя, что при $H = 0$ и $B = 0$, получаем

$$B = \mu_1 H - \frac{1}{3} \mu_2 H^3.$$

Из (5.6) следует

$$H = 2N \frac{I}{cr}.$$

Если в катушке течет переменный ток $I = I_0 \sin \omega t$, то, вводя обозначение

$$H_0 = 2N \frac{I_0}{cr},$$

находим для индукции магнитного поля

$$B = \mu_1 H_0 \sin \omega t - \frac{1}{3} \mu_2 H_0^3 \sin^3 \omega t.$$

Используя (10.20), (7.1) и (10.18), находим для схемы, изображенной на рис. 11.25, (№ 11.24)

$$i = \frac{1}{c} S \omega^2 C \left(\mu_1 H_0 - \mu_2 \frac{H_0^3}{4} \right) \sin \omega t + \frac{3}{4} \frac{1}{c} S \omega^2 \mu_2 H_0^3 \sin 3\omega t.$$

Найдем, каков спектральный состав выходного напряжения $U_{\text{вых}}$ (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 11.26, если обе индуктивности одновременно изме-

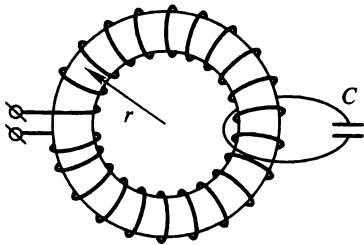


Рис. 11.25

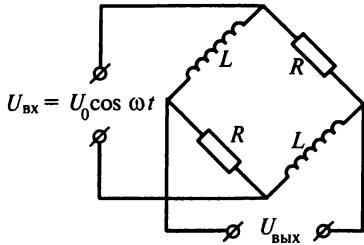


Рис. 11.26

няются по закону $L = L_0(1 + m \cos \Omega t)$, считая, что $m \leq 1$, $\omega \gg \Omega$ и $\omega L_0 \ll R$ (№ 11.25). Используя (10.26) и (10.28), получаем

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \left(\frac{i\omega L}{R + i\omega L} - \frac{R}{R + i\omega L} \right) = \\ = U_{\text{вх}} \frac{i\omega L - R}{R + i\omega L} = U_{\text{вх}} (R + \omega L) \frac{e^{-i\phi}}{(R + \omega L)e^{i\phi}} = U_{\text{вх}} e^{-i2\phi},$$

где $\operatorname{tg} \phi = \omega L/R$. Учитывая условие,

$$2\phi \approx \frac{2\omega L}{R}.$$

Таким образом, если входное напряжение $U_{\text{вх}} = U_0 \cos \omega t$, то выходное напряжение $U_{\text{вых}} = U_0 \cos (\omega t - 2\phi)$. Подставляя фазу и индуктивность, учитывая, что $2\omega L/R \ll 1$, и пользуясь (11.14) и (11.15), находим

$$U_{\text{вых}} = U_0 \cos \left(\omega t - 2m\omega L_0 \frac{\cos \Omega t}{R} - 2\omega \frac{L_0}{R} \right) = \\ = U_0 \cos \omega t + 2U_0 \omega \frac{L}{R} \left\{ \cos \left[(\omega + \Omega)t - \frac{\pi}{2} \right] + \cos \left[(\omega - \Omega)t - \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

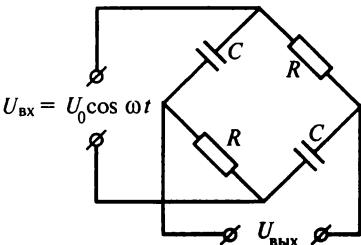


Рис. 11.27

Найдем, каков спектральный состав выходного напряжения $U_{\text{вых}}$ (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 11.27, если обе емкости одновременно изменяются по закону

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} (1 + m \cos \Omega t),$$

считая, что $m \leq 1$, $\omega \gg \Omega$ и $\omega RC_0 \gg 1$ (№ 11.26). Используя (10.26) и (10.30), получаем

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \left\{ \left[\frac{1/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)} \right] - \frac{R}{R + 1/(i\omega C)} \right\} = U_{\text{вх}} \left(\frac{R + i/\omega C}{-R + i/\omega C} \right) = \\ = U_{\text{вх}} \left[R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \right] \frac{e^{i\varphi}}{\left[R^2 + 1/(\omega C)^2 \right] e^{-i\varphi}} = U_{\text{вх}} e^{i2\varphi},$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega CR}.$$

Учитывая условие,

$$2\varphi \approx \frac{2}{\omega CR}.$$

Таким образом, если входное напряжение $U_{\text{вх}} = U_0 \cos \omega t$, то выходное напряжение $U_{\text{вых}} = U_0 \cos (\omega t + 2\varphi)$. Подставляя фазу и емкость, учитывая, что $2\omega CR \gg 1$, и пользуясь (11.14) и (11.15), находим

$$U_{\text{вых}} = U_0 \cos \left(\omega t + 2m \frac{\cos \Omega t}{\omega C_0 R} + \frac{2}{\omega C_0 R} \right) \approx \\ \approx U_0 \cos \omega t + 2m \frac{U_0}{\omega C_0 R} \left\{ \cos \left[(\omega + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right] + \cos \left[(\omega - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

В вольтметре для постоянного тока ток поступает в катушку, которая может вращаться во внешнем постоянном магнитном поле. Выясним, какую величину измеряет такой вольтметр и что он будет показывать, если его включить через идеальный диод в розетку переменного тока с напряжением 220 В (№ 11.27). Ток, текущий в катушке, создает магнитный диполь, на который в постоянном магнитном поле действует механический момент (7.8). Если катушка подвешена на упругой нити (или пружине), то поворот зависит от магнитного момента катушки, т. е. от тока в ней, который определяется подводимым напряжением. Таким образом, измеряется подводимое напряжение. При включении через диод переменного тока, благодаря механической инерционности системы, происходит ус-

реднение прикладываемого напряжения. Гармоническое (синусоидальное) изменение напряжения дает

$$\langle U \rangle = \frac{U_0}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = \frac{U_{\text{эф}} \sqrt{2}}{\pi} \approx 98,8 \text{ В.}$$

В вольтметрах для измерения постоянного или переменного напряжения используется принцип взаимодействия двух катушек, одна из которых подвижная. Катушки соединены последовательно, так что через них проходит один и тот же ток. Выясним, какую величину измеряет такой вольтметр и что он будет показывать, если его включить через идеальный диод в розетку переменного тока с напряжением 220 В (№ 11.28). В отличие от предыдущей задачи внешнее поле зависит от тока, поэтому момент зависит от квадрата тока, т. е. от квадрата приложенного напряжения. В таком виде вольтметр измеряет при постоянном токе квадрат напряжения, а при переменном — средний квадрат напряжения. При соответствующей градировке — шкалы напряжение и среднее квадратичное напряжение. Для среднего получаем

$$\langle U \rangle^2 = \frac{U_0^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^2 \omega t dt = \frac{U_0^2}{4} = \frac{U_{\text{эф}}^2}{2}; \quad \langle U \rangle = \frac{U_{\text{эф}}}{\sqrt{2}} \approx 156 \text{ В.}$$

На вход высокодобротного колебательного контура (L, C, R) в начальный момент времени $t = 0$ подается внешняя ЭДС

$$U(t) = U_0 \cos [\Omega t + \phi(t)]$$

с законом модуляции $\phi(t) = \alpha t^2$ ($\Omega \gg \sqrt{\alpha}$). Параметры колебательного контура удовлетворяют условию

$$\frac{2L}{R} \ll \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Найдем, через какое время после включения ЭДС амплитуда вынужденных колебаний в контуре максимальна и сколько времени должно пройти, чтобы амплитуда вновь уменьшилась (№ 11.31). Изменение аргумента косинуса $\psi(t) = \Omega t + \alpha t^2$ соответствует изменению частоты

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \Omega + 2\alpha t. \quad (11.23)$$

Амплитуда достигнет максимальной величины, когда частота станет равной резонансной

$$\omega_0 = \frac{1}{LC}.$$

Это произойдет в момент

$$t = \frac{\omega_0 - \Omega}{2\alpha}.$$

Надо иметь в виду, что в начальный момент кроме вынужденных возникают также собственные колебания. Их затухание определяется коэффициентом затухания (9.9)

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

По условию характерное время затухания (9.25)

$$\frac{2L}{R} \ll \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Характерное время изменения величины $\cos(\alpha t^2)$ как раз порядка $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, поэтому собственные колебания затухнут раньше, чем изменение фазы приведет к резонансным колебаниям. Существенное снижение амплитуды произойдет, когда частота выйдет за ширину резонансной кривой (10.42), т. е. $\Delta\omega = \beta = 2\alpha t_1$. Откуда

$$t = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{R}{4\alpha L}.$$

На вход высокодобротного колебательного контура (L, C, R) в начальный момент времени $t = 0$ подается внешняя ЭДС

$$U(t) = a(t) \cos \omega_0 t$$

с законом амплитудной модуляции $a(t) = a(1 + \cos \alpha t^2)$, где $\omega_0 \gg \sqrt{\alpha}$. Параметры колебательного контура удовлетворяют условию

$$\frac{2L}{R} \ll \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \quad \frac{1}{LC} = \omega_0.$$

Найдем, через какое время после включения ЭДС колебания напряжения на обкладках конденсатора окажутся близкими к гармоническим (№ 11.32). Для внешней ЭДС получаем

$$\begin{aligned} U(t) &= a(1 + \cos \alpha t^2) \cos \omega_0 t = a \cos \omega_0 t + a \cos \alpha t^2 \cos \omega_0 t = \\ &= a \cos \omega_0 t + (a/2)[\cos(\omega_0 t - \alpha t^2) + \cos(\omega_0 t + \alpha t^2)]. \end{aligned}$$

Два последних слагаемых — модулированные по частоте колебания такие, как в предыдущей задаче. Из (11.23) законы модуляции

$$\omega_{1,2}(t) = \omega_0 \pm 2\alpha t.$$

При смещении частоты на ширину резонансной кривой (10.42), (9.9)

$$\Delta\omega = 2\alpha t = \beta = \frac{R}{2L}.$$

модулированные колебания фактически исчезнут. Таким образом, колебания окажутся близкими к гармоническим через время

$$t \geq \frac{R}{4\alpha L}.$$

Сигнал $U(t) = U_0 \cos(\omega t + m \cos \Omega t)$, где $m \ll 1$ и $\Omega \ll \omega$, подается на вход контура с высокой добротностью $Q \gg 1$. Резонансная частота контура $\omega_0 = \omega - \Omega$. Найдем с точностью до малых поправок зависимость от времени напряжения на конденсаторе $U(t)$, считая $\Omega \gg \omega_0/Q$ (№ 11.33). Воспользовавшись (11.14), (11.15) и (11.17), получаем для входного сигнала

$$U(t) = U_0 \cos \omega t + \frac{mU_0}{2} \cos \left[(\omega + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{mU_0}{2} \cos \left[(\omega - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right].$$

Этот сигнал есть действительная часть действия в комплексном виде

$$\hat{U}(t) = U_0 \left\{ e^{i\omega t} + \frac{m}{2} e^{i[(\omega + \Omega)t + \pi/2]} + e^{i[(\omega - \Omega)t + \pi/2]} \right\}. \quad (11.24)$$

Импеданс контура (10.32)

$$\hat{Z} = R + i\rho, \quad (11.25)$$

где

$$\rho(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (11.26)$$

Сдвиг фазы тока от входного напряжения (10.34)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho}{R}. \quad (11.27)$$

При малой расстройке ($\Delta\omega \ll \omega_0$) из (10.38)

$$|\rho| \approx L2|\Delta\omega| = QR \frac{2|\Delta\omega|}{\omega}. \quad (11.28)$$

Для напряжения на конденсаторе в соответствии с (10.31) и (10.32) получаем

$$\hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C} = \frac{\hat{U}}{i\omega C\hat{Z}} = \hat{U} \frac{e^{-i(\pi/2 + \phi)}}{\omega C(R^2 + \rho^2)^{1/2}}. \quad (11.29)$$

Для разных гармоник получаем разные ρ , так как ρ зависит от частоты, и разные ϕ , так как они зависят от ρ .

Для частоты $(\omega - \Omega)$, которая по условию равна резонансной ω_0 , имеем $\rho = 0$ и $\phi = 0$. В этом случае, учитывая (9.27), получаем

$$\hat{U}_C = \hat{U} \frac{e^{-i\pi/2}}{\omega C(R^2 + \rho^2)^{1/2}};$$

$$U_C = \frac{1}{2} m U_0 \frac{\cos(\omega - \Omega)t}{\omega C R} = \frac{1}{2} m U_0 Q \cos(\omega - \Omega)t.$$

Для частоты ω имеем

$$\rho(\omega) = \rho(\omega_0 + \Omega) \approx 2L\Omega;$$

$$\operatorname{tg} \phi = 2L\Omega/R = 2Q\Omega/\omega_0.$$

Эта величина по условию очень большая, поэтому $\phi = \pi/2$. Откуда, подставляя соответствующую гармонику в (11.29) и учитывая условие, получаем

$$\hat{U}_C = \hat{U} \frac{e^{-i\pi}}{\omega C\rho} = U_0 \frac{e^{i(\omega t - \pi)}}{\omega C\rho};$$

$$U_C = -U_0 \cos \frac{\omega t}{\omega C\rho} = -\frac{U_0}{2} \frac{\omega_0}{\Omega} \cos \omega t.$$

Для частоты $(\omega + \Omega)$ имеем

$$\rho(\omega) = \rho(\omega_0 + 2\Omega) \approx 4L\Omega;$$

$$\operatorname{tg} \phi = 4L\Omega/R = 4Q\Omega/\omega_0.$$

Как в предыдущем случае, получаем

$$\hat{U}_C = \hat{U} \frac{e^{-i\pi}}{\omega C\rho} = U_0 \frac{m}{2} \frac{e^{i(\omega + \Omega)t - i\pi}}{\omega C\rho};$$

$$U_C = -\frac{1}{2} m U_0 \frac{\cos(\omega + \Omega)t}{\omega C\rho}.$$

Этим членом можно пренебречь по сравнению с гармоникой, соответствующей ω . Таким образом, для зависимости напряжения на конденсаторе имеем

$$U_C \approx \frac{1}{2} m U_0 Q \cos(\omega - \Omega)t - \frac{U_0}{2} \frac{\omega_0}{\Omega} \cos \omega t.$$

На вход колебательного контура, настроенного на частоту ω , подается сигнал $U_{\text{вх}}(t) = U_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, $m < 1$. Добротность $Q \gg 1$. Частота модуляции выбрана равной

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}.$$

Найдем амплитуды и фазы **спектральных компонент** напряжения $U_{\text{вых}}(t)$ (№ 11.34). Из (11.12) и (11.13) получаем входной сигнал в комплексном виде

$$\hat{U}_{\text{вх}}(t) = U_0 \exp(i\omega_0 t) + \frac{U_0 m}{2} \exp[i(\omega_0 + \Omega)t] + \exp[i(\omega_0 - \Omega)t]. \quad (11.30)$$

Используя (11.25)–(11.28) и (10.32), при малой расстройке получаем спектральные компоненты тока в виде

$$\hat{I}_\omega = \hat{U}_{\omega \text{ вх}} \frac{e^{-i\phi}}{(R^2 + \rho^2)^{1/2}}.$$

Спектральная составляющая напряжения на конденсаторе

$$\hat{U}_{\omega \text{ вых}} = \frac{\hat{I}_\omega}{i\omega C} = Q \hat{U}_{\omega \text{ вх}} \frac{e^{-i(\phi + \pi/2)}}{(1 + \rho^2/R^2)^{1/2}}. \quad (11.31)$$

Для разных гармоник получаем разные ρ , так как ρ зависит от частоты, и разные ϕ , так как они зависят от ρ .

Для частоты $\omega = \omega_0$ из (11.27) и (11.28) имеем

$$\rho = 0 \quad \text{и} \quad \phi = 0.$$

Для частоты $(\omega_0 + \Omega)$ имеем

$$\rho(\omega_0 + \Omega) \approx 2L\Omega = 2\Omega Q \frac{R}{\omega_0}.$$

Отсюда, используя условие, получаем

$$\frac{\rho}{R} \approx 1.$$

Из (11.27)

$$\Phi = \frac{\pi}{4}.$$

Для частоты $(\omega_0 - \Omega)$ получаем

$$\Phi = -\frac{\pi}{4}.$$

Поэтому

$$\hat{U}_{\omega_0 \text{ вых}} = Q U_0 e^{-i\pi/2} \cos \omega_0 t;$$

$$\hat{U}_{(\omega_0 + \Omega) \text{ вых}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} U_0 e^{-i3\pi/4} \frac{m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t;$$

$$\hat{U}_{(\omega_0 - \Omega) \text{ вых}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} U_0 e^{-i\pi/4} \frac{m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t.$$

Сигнал на выходе представляет амплитудную модуляцию с глубиной $\frac{m}{\sqrt{2}}$. Суммарный сигнал

$$Q U_0 \left[\cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{m}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega_0 t + \Omega t - \frac{3\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \frac{m}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega_0 t - \Omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right] = Q U_0 \sin \omega_0 t \left[1 + \frac{m}{\sqrt{2}} \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Чтобы построить векторную диаграмму, запишем результаты в комплексном виде:

$$\hat{U}_{\omega_0 \text{ вых}} = Q U_0 e^{-i\pi/2} \exp(i\omega_0 t);$$

$$\hat{U}_{(\omega_0 + \Omega) \text{ вых}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} U_0 \frac{m}{2} e^{-i3\pi/4} e^{i\Omega t} \exp(i\omega_0 t);$$

$$\hat{U}_{(\omega_0 - \Omega) \text{ вых}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} U_0 \frac{m}{2} e^{-i\pi/4} e^{-i\Omega t} \exp(i\omega_0 t).$$

Суммарный выходной сигнал в комплексном виде

$$\hat{U}_{\text{вых}} = \left[Q U_0 e^{-i\pi/2} + \frac{Q}{\sqrt{2}} U_0 \frac{m}{2} (e^{-i3\pi/4} e^{i\Omega t} + e^{-i\pi/4} e^{-i\Omega t}) \right] \exp(i\omega_0 t).$$

Аналогичным образом можно представить и входной сигнал

$$\hat{U}_{\text{вх}} = \left[U_0 + U_0 \frac{m}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}) \right] \exp(i\omega_0 t).$$

На рис. 11.28 этот сигнал показан горизонтальным вектором U_0 и двумя векторами, вращающимися в противоположные стороны. Выходной сигнал представлен вектором QU_0 , отстающим от входного на $\pi/2$, и двумя векторами, вращающимися в противоположные стороны.

Индуктивность колебательного контура периодически изменяется во времени по закону, указанному на рис. 11.29. Найдем, при каком значении емкости колебательного контура возможен **параметрический резонанс**, а также при каком максимальном значении активного сопротивления контура произойдет возбуждение параметрических колебаний (№ 11.35). Для резонанса необходимо, чтобы период вынуждающей силы $4\tau_0$ совпал с периодом собственных колебаний

$$4\tau_0 = T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(L_0 C)^{1/2}.$$

Откуда

$$C = \frac{4\tau_0^2}{\pi^2 L_0}.$$

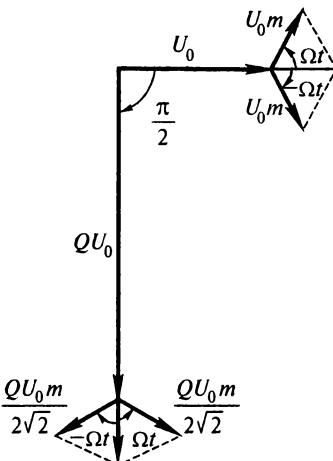


Рис. 11.28

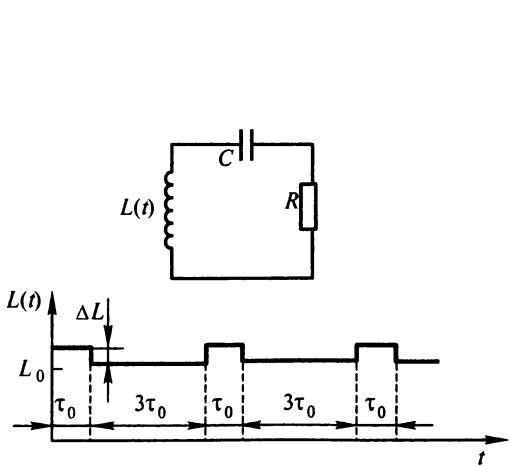


Рис. 11.29

Предположим, что изменение индуктивности происходит за счет изменения длины катушки. При растягивании производится работа, так как витки в катушке притягиваются друг к другу (как параллельные провода). Колебания поддерживаются благодаря этой работе, которая равна изменению энергии магнитного поля в катушке и равна потерям на сопротивлении (4.18)

$$(L + \Delta L) \frac{I^2}{2} - L \frac{I^2}{2} = \frac{1}{2} I^2 R 4\tau_0.$$

Откуда

$$R_{\max} = \frac{\Delta L}{4\tau_0}.$$

Для поддержания незатухающих колебаний в *LCR*-контуре емкость конденсатора быстро меняется на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время τ возвращается в исходное состояние. Найдем величину и знак ΔC (№ 11.36). Когда напряжение на конденсаторе равно нулю, ток в индуктивности максимальен I_{\max} и мало меняется. Если время τ мало по сравнению с характерным временем изменения тока, то на конденсатор притечет заряд $q = I_{\max} \tau$.

Изменение энергии электрического поля в нем связано с изменением емкости от C_1 до C_2 , которое должно восполнить потери на сопротивлении за половину периода колебаний

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C_2} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_1} = I_{\max}^2 \tau^2 \frac{C_1 - C_2}{2C^2} > \frac{1}{2} I_{\max}^2 R \frac{T}{2}.$$

Отсюда

$$C_1 - C_2 > RC^2 \frac{T}{\tau},$$

т. е. емкость надо уменьшить, для чего раздвинуть пластины, при этом совершив работу, так как заряженные пластины притягиваются.

В схеме, изображенной на рис. 11.30, анодный ток I_a при малых колебаниях в контуре линейно зависит от напряжения на сетке V_c по закону $I_a = SV_c + I_0$, где S и I_0 — постоянные величины. Катушка колебательного контура L и катушка связи L_{cb} намота-

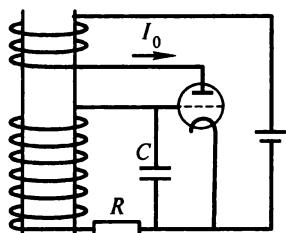


Рис. 11.30

ны на общем магнитном сердечнике. Считая величины L , L_{cb} , C и S заданными ($L = 4 \cdot 10^{-4}$ Гн, $L_{\text{cb}} = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн, $C = 10^{-8}$ Ф, $S = 2 \cdot 10^{-3}$ А/В), найдем, при каком максимальном значении активного сопротивления R контура возможно возбуждение автоколебаний и какова будет эффективная добротность контура, если выбрать $R = 2R_{\max}$ (№ 11.37). Как видим, анодный ток не зависит от потенциала анода, а зависит от потенциала сетки. Это связано с тем, что сетка находится ближе к катоду. Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dV_c} \frac{dV_c}{dt} = S \frac{dV_c}{dt}.$$

При изменении анодного тока в колебательном контуре через L_{cb} в соответствии с (9.1) и (5.27) индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -M \frac{dI_a}{dt} = -MS \frac{dV_c}{dt},$$

где M — коэффициент взаимной индукции. Предполагая, что рассеяние мало, из (5.30) получаем

$$M = (LL_{\text{cb}})^{1/2}.$$

Потенциал на сетке равен потенциальну на конденсаторе, поэтому

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{I}{C},$$

где q и I — заряд на конденсаторе и ток через конденсатор. Следовательно,

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -MS \frac{I}{C}.$$

Если $M < 0$, то $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ и I имеют одинаковые знаки, колебания нарастают (самовозбуждение). При $M > 0$ колебания подавляются. Используя (9.4), получаем для колебательного контура

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = -MS \frac{q'}{C}.$$

Вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad 2\beta = \frac{R}{L} + \frac{MS}{LC} = \frac{R}{L} \left(1 + \frac{MS}{CR} \right),$$

приходим к уравнению (9.15), которое имеет решение (9.19). При $\beta > 0$ — затухающие колебания, при $\beta < 0$ — нарастание колебаний — самовозбуждение. Для самовозбуждения должно быть

$$R < R_{\max} = -M \frac{S}{C} = S \frac{(LL_{\text{cb}})^{1/2}}{C} = 8 \text{ Ом.}$$

При $R = 2R_{\max} = 16$ Ом, используя (9.28) для добротности

$$Q = \frac{(L/C)^{1/2}}{R},$$

получаем при отсутствии обратной связи 12 ($M = 0$), при наличии положительной обратной связи ($M < 0$) 25, при отрицательной обратной связи ($M > 0$) 8.

С помощью высокочувствительной измерительной схемы, которая проводит усреднение за время $\tau \approx 1$ с, регистрируются малые изменения ΔI постоянного тока, текущего через вакуумный диод (рис. 11.31), вызванные, например, изменением напряжения батареи. Оценим минимальное регистрируемое на фоне дробового шума диода значение ΔI_{\min} , если средний ток диода $I \approx 10^{-3}$ А (№ 11.38). Дробовым шумом называется неравномерность термоэлектрической эмиссии электронов с катода лампы, связанная с тепловым хаотическим их движением, зависящим от температуры. Это — электрические флуктуации. Для полосы частот Δf , в которой измеряется флуктуация, по формуле Найквиста для среднего квадрата напряжения

$$(V_{\text{ш}}^2)_{\text{ср}} = 4kTR\Delta f,$$

где R — сопротивление схемы. Для среднего квадрата шумового тока имеем

$$(I_{\text{ш}}^2)_{\text{ср}} = 2eI\Delta f.$$

Поэтому минимально регистрируемое

$$\Delta I_{\min} \approx \left(\frac{eI}{\tau} \right)^{1/2} = 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ А.}$$

Шумы, связанные с тепловыми флуктуациями во входных цепях радиоприемника, можно уменьшить, снижая их температуру. Зная, что сигнал от радиоперен-

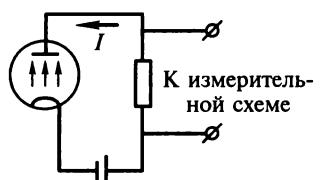


Рис. 11.31

датчика, принятый на расстоянии $l_1 = 1$ км, равен по мощности уровню собственных шумов приемника, найдем, с какого расстояния l_2 можно было бы вести прием с тем же соотношением уровней сигнала и шума, если охладить входные цепи радиоприемника до температуры жидкого гелия $T_r \approx 4$ К (№ 11.39). Энергия сигнала радиоприемника

$$W_{\text{волн}} \sim E_{\text{волн}}^2 \sim \frac{1}{l^2}.$$

Энергия шума

$$W_{\text{ш}} \sim (V_{\text{ш}}^2)_{\text{ср}} \sim T.$$

Если

$$\frac{W_{\text{волн}}}{W_{\text{ш}}} = 1,$$

то $T_{\text{комн}} l_1^2 = T_r l_2^2$. Откуда

$$l_2 = l_1 \left(\frac{T_{\text{комн}}}{T_r} \right)^{1/2} = 8 \text{ км.}$$

Найдем, каков закон амплитудной модуляции, т. е. как зависит от времени амплитуда сигнала на выходе RL -цепочки, показанной на рис. 11.32, если входной сигнал $V(t)$ — колебание, модулированное по фазе: $V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$, $\Omega < \omega_0$, $m < 1$, а также какова глубина модуляции амплитуды выходного сигнала $U(t)$, если параметры R , L удовлетворяют условию $\omega L \ll R$ для всех спектральных компонент входного сигнала (№ 11.40). Для выходного напряжения имеем (9.2)

$$U = L \frac{dI}{dt} = \frac{L}{R} \frac{d(V - U)}{dt} \approx \frac{L}{R} \frac{dV}{dt},$$

так как $\omega L \ll R$. Это дифференцирующая цепочка. Получаем

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{L}{R} \frac{d[V_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)]}{dt} = \\ &= V_0 \left(\omega_0 \frac{L}{R} \right) \left[1 - \left(\frac{m \Omega}{\omega_0} \right) \sin \Omega t \right] \cos \left(\omega_0 t + m \cos \Omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда глубина модуляции $m \Omega / \omega_0$.

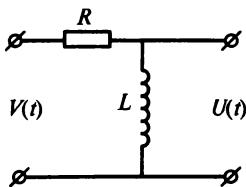


Рис. 11.32

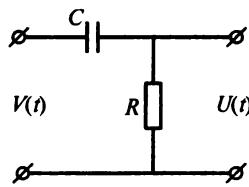


Рис. 11.33

Аналогичным образом действуем и в случае RC -цепочки, показанной на рис. 11.33, на которую действует такой же сигнал $V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$, $\Omega < \omega_0$, $m < 1$, и для которой предполагается, что $\omega RC \ll 1$ (№ 11.42). Для тока получаем

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d(V - U)}{dt} \approx C \frac{dV}{dt},$$

так как

$$R \ll \frac{1}{\omega C}.$$

Выходное напряжение

$$U(t) = IR \approx RC \frac{dV(t)}{dt}.$$

Следовательно, это дифференцирующая цепочка. Получаем

$$\begin{aligned} U(t) &= RC \frac{d[V_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)]}{dt} = \\ &= V_0 \omega_0 RC \left[1 - \left(\frac{m \Omega}{\omega_0} \right) \sin \Omega t \right] \cos \left(\omega_0 t + m \cos \Omega t + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда глубина модуляции $m\Omega/\omega_0$.

На вход LR -цепочки (рис. 11.34) подается амплитудно-модулированное напряжение

$$V(t) = V_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad m < 1.$$

Найдем отношение амплитуд боковых спектральных гармоник выходного сигнала, а также фазовый сдвиг между колебаниями боковых гармоник и несущей, если (№ 11.41)

$$\omega_0 = \frac{R}{L}; \quad \Omega = \frac{\omega_0}{4}.$$

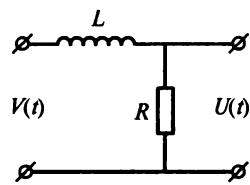


Рис. 11.34

Для данной модуляции из (11.12) имеем

$$V(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{V_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (11.32)$$

Используя (10.26), (10.28) и (10.32), имеем

$$\hat{U} = \hat{V} \frac{R}{R + i\omega L} = \hat{V} \frac{R}{(R^2 + \omega L^2) e^{i\varphi}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Для отношения амплитуд боковых гармоник получаем

$$\frac{A_{\omega_0 + \Omega}}{A_{\omega_0 - \Omega}} = \left[\frac{R^2 + (\omega_0 - \Omega)^2 L^2}{R^2 + (\omega_0 + \Omega)^2 L^2} \right]^{1/2} = \frac{5}{(41)^{1/2}}.$$

Искомый сдвиг $\psi = -\varphi$, поэтому

$$\operatorname{tg} \psi_{\omega_0 + \Omega} = -\frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0} = -\frac{5}{4}; \quad \operatorname{tg} \psi_{\omega_0 - \Omega} = -\frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{tg} \psi_{\omega_0} = -1.$$

Используя связь

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

получаем

$$\Delta \psi_{\omega_0 + \Omega} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{9} \right); \quad \Delta \psi_{\omega_0 - \Omega} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{7} \right).$$

Аналогичным образом можно рассмотреть RC -цепочку (рис. 11.35). Для такого же амплитудно-модулированного напряжения $V(t) = V_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t$, $m < 1$, найдем отношение амплитуд боковых спектральных гармоник выходного сигнала, а также начальные фазы гармоник, если (№ 11.43)

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \quad \Omega = \frac{\omega_0}{4}.$$

Используем (11.32). Из (10.26), (10.30) и (10.32) имеем

$$\hat{U} = \frac{\hat{V}/i\omega C}{R + 1/i\omega C} = \frac{\hat{V}}{1 + \omega^2 R^2 C^2} e^{i\varphi}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \omega RC.$$

Для отношения амплитуд боковых гармоник получаем

$$\frac{A_{\omega_0 + \Omega}}{A_{\omega_0 - \Omega}} = \left[\frac{1 + (\omega_0 - \Omega)^2 R^2 C^2}{1 + (\omega_0 + \Omega)^2 R^2 C^2} \right]^{1/2} = \frac{5}{(41)^{1/2}}.$$

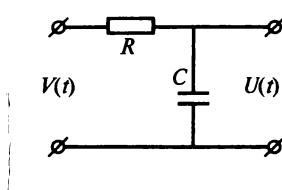


Рис. 11.35

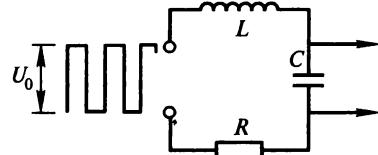


Рис. 11.36

Искомый сдвиг $\psi = -\phi$, поэтому

$$\operatorname{tg} \psi_{\omega_0 + \Omega} = -\frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0} = -\frac{5}{4};$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\omega_0 - \Omega} = -\frac{\omega_0 - \Omega}{\omega_0} = -\frac{3}{4}; \quad \operatorname{tg} \psi_{\omega_0} = -1.$$

На вход колебательного контура (рис. 11.36) подается сигнал в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов, длительность которых равна $\tau = T/2$ — половине периода T их следования. Круговая частота следования сигналов $\Omega = 2\pi/T = 50 \text{ с}^{-1}$, колебательный контур настроен на частоту $\omega_0 = 350 \text{ с}^{-1}$.

1) Определим добротность контура, если амплитуда V_C напряжения на конденсаторе оказалось в 8 раз больше амплитуды импульсов U_0 .

2) Найдем, при каком значении $\Omega = \Omega_1$ наступит **ближайший резонанс** и во сколько раз при этом изменится амплитуда напряжения на конденсаторе, если период T следования импульсов начинают плавно уменьшать, не изменяя отношения τ/T и параметров колебательного контура (№ 11.44).

В соответствии с (11.1)–(11.5) разложение Фурье для сигнала (четной функции) (рис. 11.37) имеет вид

$$f(t) = \sum_n A_n \cos n\Omega t,$$

где

$$A_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\Omega t dt.$$

Для нашей функции

$$A_n = \frac{U_0}{\pi} \frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

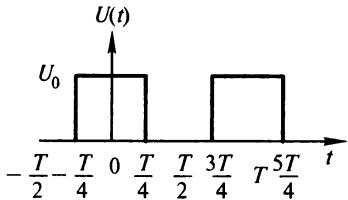


Рис. 11.37

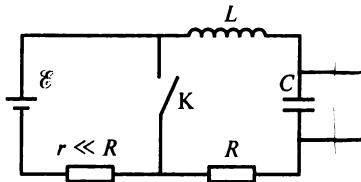


Рис. 11.38

Из условия следует, что контур настроен на седьмую гармонику сигнала и амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе равна $8U_0$. Из (10.9) получаем

$$\frac{2}{7} \frac{Q U_0}{\pi} = 8U_0.$$

Откуда $Q = 28\pi \approx 88$. При уменьшении периода и увеличении частоты целое значение ω_0/Ω получаем для $\Omega_1 = 70 \text{ c}^{-1}$ при $n = 5$. Для амплитуд имеем

$$A_5 = \frac{2U_0}{5\pi}.$$

Отношение амплитуд

$$\frac{A_5}{A_7} = \frac{7}{5}.$$

В схеме, изображенной на рис. 11.38, ключ К периодически замыкает и размыкает цепь на равные промежутки времени (круговая частота переключений $\Omega = 2\pi/T = 100 \text{ c}^{-1}$), и в колебательном контуре возникают колебания. Контур настроен на частоту $\omega = 500 \text{ c}^{-1}$, напряжение источника постоянного тока $E = 1 \text{ В}$, добротность контура $Q = 50$.

1) Определим амплитуду V_C вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе.

2) При каком значении $\Omega = \Omega_1$ наступит ближайший резонанс и какова при этом будет амплитуда V'_C колебаний напряжения на конденсаторе, если частоту переключений Ω начинают плавно увеличивать, оставляя параметры схемы неизменными (№ 11.45). Эта задача аналогична предыдущей. Воспользуемся полученными там результатами. Так как $n = \omega/\Omega$, то $n = 5$, $n_1 = 2$. Поэтому напряжение на конденсаторе

$$V_n = Q \frac{E}{n\pi}; \quad V_5 = 6,4 \text{ В}; \quad V_2 = 15,9 \text{ В}.$$

12. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ВОЛНОВОДЫ И РЕЗОНАТОРЫ. ПЛАЗМА

Обобщение опытных данных и гениальная догадка позволили Максвеллу получить уравнения электродинамики, носящие его имя. В интегральном виде

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, \quad \left\{ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} \right\}; \quad (12.1)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \left\{ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \right\}; \quad (12.2)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV, \quad \left\{ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \right\}; \quad (12.3)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \left\{ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \right\}. \quad (12.4)$$

Максвелл в дополнение к току проводимости (плотности \mathbf{j}), связанному с движением заряженных частиц, ввел **ток смещения** с плотностью

$$\mathbf{j}_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \mathbf{j}_{cm} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (12.5)$$

Этот ток существует только там, где меняется электрическая индукция \mathbf{D} . Подобно тому, что изменение магнитного поля вызывает появление электрического (12.2), изменение электрического вызывает появление магнитного (12.1). На ток смещения не действуют силы, и в нем не выделяется теплота, так как нет движущихся зарядов. Он создает магнитное поле.

Фундаментальные уравнения Максвелла (12.1)–(12.4) не содержат никаких характеристик среды, в которой возбуждается электромагнитное поле. Их необходимо дополнить **материальными уравнениями**. Наиболее простые материальные уравнения имеем в случае слабых электромагнитных полей, достаточно медленно меняющихся

ся в пространстве (заметные изменения происходят на расстояниях, значительно превышающих межатомные и межмолекулярные) и во времени (характерное время изменения велико по сравнению с периодами внутриатомных и внутримолекулярных колебаний). Для изотропных сред, не являющихся ферромагнетиками или сегнетоэлектриками, можно получить

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \{\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}\}; \quad (12.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \{\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}\}; \quad (12.7)$$

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad \{\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}\}. \quad (12.8)$$

Приведенные уравнения Максвелла в интегральной форме справедливы и там, где напряженности полей или свойства среды меняются скачкообразно.

При отсутствии скачков те же уравнения можно записать в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \left\{ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\}; \quad (12.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \left\{ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\}; \quad (12.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho\}; \quad (12.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0\}. \quad (12.12)$$

Отметим, что из четырех уравнений Максвелла два являются векторными и два — скалярными.

Введение в уравнение (12.1) изменения потока вектора электрической индукции (тока смещения) оказалось весьма плодотворным. Для похожести уравнений (12.1) и (12.2) во второе надо ввести ток магнитных зарядов, которые возможно, как показывают известные опыты, вряд ли существуют. Однако предпринимаются попытки обнаружения гипотетического элементарного магнитного заряда — **монополя Дирака**, величина которого в гауссовой системе единиц $g_0 = \hbar c / 2e$, — методом регистрации электрического тока, возникающего в сверхпроводящем контуре после прохождения сквозь него монополя. Оценим величину тока в кольце индуктивностью $L = 0,1 \text{ мкГн}$ (№ 12.14). Обозначая \mathcal{E} — ЭДС, возникающая в контуре, Φ — поток магнитной индукции, I_m — ток монополя, т. е. магнитный заряд, протекающий через площадку,

ограниченную контуром в единицу времени, из (12.2) по аналогии с (12.1) получаем

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} - \frac{4\pi}{c} I_m.$$

Отсюда для тока в сверхпроводящем кольце находим

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI}{dt} = -\frac{4\pi}{c} \frac{dg}{dt}.$$

Поэтому для тока в кольце при прохождении одного монополя имеем

$$LI = \frac{4\pi\hbar c^2}{2e}; \quad I = \frac{2\pi\hbar c^2}{Le} = 124 \text{ ед. СГСЭ} = 0,041 \text{ мкА.}$$

Если кольцо не сверхпроводящее, а металлическое с омическим сопротивлением R , а индуктивным сопротивлением его можно пренебречь, то для протекшего в кольце заряда Q

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} = -\frac{4\pi}{c} \frac{dg}{dt}.$$

Откуда (№ 12.15)

$$Q = \frac{2\pi\hbar}{eR} \approx 12,4 \cdot 10^{-6} \text{ ед. СГСЭ} \approx 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ Кл.}$$

Изменение величины дипольного момента точечного электрического диполя приводит к появлению магнитного поля. На рис. 12.1 в начале координат находится точечный диполь, направленный по оси z и меняющийся со временем по величине $p_z = p \sin \omega t$. Найдем магнитное поле в точке $A(R, 0, R)$, предполагая, что диполь расположен в вакууме (№ 12.63). Картина полей обладает осевой симметрией относительно оси z . Чтобы воспользоваться (12.1), надо найти поток вектора \mathbf{E} , определяемого для диполя (1.9). Угол между \mathbf{p}_z и \mathbf{r} обозначим φ . Тогда имеем

$$r = \frac{R}{\cos \varphi}; \quad \rho = R \operatorname{tg} \varphi;$$

$$ds = 2\pi\rho d\rho; \quad d\rho = R \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Из (1.9)

$$E_n = p_z \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{r^3}.$$

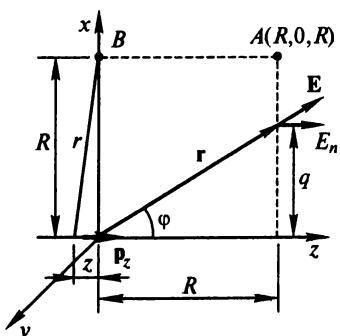


Рис. 12.1

Для потока электрического поля получаем

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S E_n ds = 2\pi \frac{p_z}{R} \int_0^{\varphi_{\max}} \sin \varphi (3 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi = \\ &= 2\pi p_z \frac{\cos \varphi_{\max} - \cos^3 \varphi_{\max}}{R}.\end{aligned}$$

Точка A соответствует $\varphi = \pi/4$. Поэтому

$$\Phi = \pi p \frac{\sin \omega t}{R\sqrt{2}}.$$

Из (12.1) находим

$$H = p\omega \frac{\cos \omega t}{2\sqrt{2} c R^2}.$$

Чтобы поле диполя можно было вычислять по электростатической формуле (1.9), необходимо выполнение условия квазистатичности $R \ll cT = 2\pi c/\omega$.

Аналогичным образом можно найти напряженность магнитного поля, если величина диполя постоянна, а положение меняется $z = a \sin \omega t$, где постоянная величина $a \ll R$ (№ 12.64). Из-за нейтральности диполя ток при его движении не возникает. Это значит, что магнитное поле определяется опять потоком вектора напряженности электрического поля. Найдем магнитное поле в точке B (см. рис. 12.1) Для связи с углом ψ имеем

$$r = \frac{z}{\cos \psi}; \quad \rho = z \operatorname{tg} \psi; \quad ds = 2\pi \rho d\rho; \quad d\rho = \frac{zd\psi}{\cos^2 \psi}.$$

Для потока при каждом z получаем

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S E_n ds = 2\pi \frac{p}{z} \int_0^{\psi_{\max}} \sin \psi (3 \cos^2 \psi - 1) d\psi = \\ &= 2\pi p \frac{\cos \psi_{\max} - \cos^3 \psi_{\max}}{z}.\end{aligned}$$

Из рис. 12.1 видно, что при $z \ll R$ получаем

$$\psi_{\max} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{z}{R}.$$

Поэтому для потока имеем

$$\Phi \approx 2\pi p \frac{1 - z^2/R^2}{R}.$$

Из (12.1)

$$H 2\pi R = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Подставляя зависимость ζ от времени, получаем

$$H = pa^2 \omega \sin \frac{2\omega t}{cR^4}.$$

Из (12.2) следует, что изменение магнитного потока приводит к появлению вихревого электрического поля, созданию ЭДС. Это происходит, например, если в однородное магнитное поле, которое с некоторого момента $t = 0$ начинает уменьшаться по линейному закону со скоростью

$$\frac{dB}{dt} = -a,$$

перпендикулярно полю поместить замкнутый круглый виток радиусом r , индуктивность которого L , а омическое сопротивление R . Используя (9.4) и (12.2), получаем

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \pi r^2 a.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$I = \pi r^2 \frac{a}{R} + A e^{-Rt/L}.$$

Постоянная интегрирования A определяется из начального условия: при $t = 0$, $I = 0$ и

$$A = -\pi r^2 \frac{a}{R}.$$

В результате для потока магнитной индукции через виток, используя (5.27), получаем (№ 12.21)

$$\Phi = B \pi r^2 + LI = \pi r^2 \left(B_0 - at + La \frac{1 - e^{-Rt/L}}{R} \right).$$

На самоиндукционный поток в витке наложен внешний поток поля.

При переменном напряжении ($V = V_0 \cos \omega t$) на обкладках конденсатора (например, в виде круглых дисков, находящихся на рас-

стоянии h) внутри возникает магнитное поле, которое из (12.1) и (12.5) равно

$$H = r \frac{dV/dt}{2ch} = r\omega V_0 \frac{\sin \omega t}{2ch}.$$

Если внутри такого конденсатора находится проволочная прямогольная рамка ($2a \cdot 2b$), одна сторона которой ($2b$) совпадает с осью симметрии конденсатора, то по рамке будет идти ток. Найдем силу тока I , предполагая, что омическое сопротивление рамки R велико по сравнению с индуктивным (№ 12.19). Из (7.1)

$$I = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi / \partial t}{R} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \left(\int_0^{2a} H(r) 2b dr \right) / \partial t}{R} = 2\omega^2 b V_0 \cos \omega t \frac{a}{c^2 h R}.$$

Рассмотрим такой же конденсатор (два круглых диска площадью S), в который помещена квадратная проволочная рамка со стороной, равной a , причем одна сторона рамки совпадает с осью конденсатора, а две другие направлены по радиусу диска. Конденсатор заряжается от источника постоянной ЭДС до заряда Q_0 (постоянная времени $\tau = R_1 C$). Считая, что омическое сопротивление рамки R намного больше ее индуктивного сопротивления, найдем джоулеву теплоту, выделяющуюся в рамке при зарядке конденсатора (№ 12.24).

При изменении заряда конденсатора меняется электрическое поле в нем и в соответствии с (12.1) возникает меняющееся в зависимости от расстояния от оси конденсатора r магнитное поле

$$H = \frac{E'r}{2c}.$$

Штрихом здесь и далее обозначены производные по времени. Поток магнитного поля через рамку

$$\Phi = \int_0^a H a dr = E' \frac{a^3}{4c}.$$

Из (12.2) находим ЭДС в рамке, которая создает ток в ней

$$I = \frac{1}{c} \frac{\Phi'}{R} = a^3 \frac{E''}{4c^2 R}.$$

Поле в конденсаторе равно

$$E = 4\pi \frac{Q}{S}.$$

Для тока получаем

$$I = a^3 \pi \frac{Q''}{c^2 R S}.$$

Ток при зарядке конденсатора $I_1 = Q'$, идущий через сопротивление R_1 , определяется (9.4)

$$R_1 Q' + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dQ}{Q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{R_1 C} = -\frac{dt}{\tau}; \quad Q = \mathcal{E}C + K e^{-t/\tau}.$$

В начальный момент заряд равен нулю, поэтому постоянная

$$K = -\mathcal{E}C; \quad Q = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/\tau}).$$

При $t = \infty$ $Q = Q_0$. Следовательно, $Q = Q_0(1 - e^{-t/\tau})$. Отсюда

$$Q'' = -\left(\frac{Q_0}{\tau^2}\right) e^{-t/\tau}.$$

Для джоулевых потерь в рамке имеем

$$W = \int_0^\infty I^2 R dt = \pi^2 a^6 \frac{Q_0^2}{c^4 S^2 R \tau^4} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \pi^2 a^6 \frac{Q_0^2}{2c^4 S^2 R \tau^3}.$$

Эта энергия берется от батареи, заряжающей конденсатор. Пренебрегать индуктивным сопротивлением можно, когда $a/\tau \ll c$.

Рассмотрим плоский конденсатор с обкладками в форме дисков радиусом R (расстояние между ними равно h), который заполнен диэлектриком (диэлектрическая и магнитная проницаемости ϵ и μ) и через который идет переменный ток смещения $I = I_0 \cos \omega t$. Этот ток создает в конденсаторе магнитное поле. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислим электрическую и магнитную энергии, локализованные в конденсаторе, и найдем отношение максимальной магнитной к максимальной электрической энергии (№ 12.2).

По току смещения I находим изменение заряда

$$q = \int I dt = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t$$

и напряженность электрического поля

$$E = 4\pi \frac{q}{\epsilon S}.$$

Плотность электрической энергии

$$w_3 = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = 2I_0^2 \frac{\sin^2 \omega t}{\epsilon \omega^2 \pi R^4},$$

а в объеме конденсатора

$$W_3 = \pi R^2 h w_3 = 2hI_0^2 \frac{\sin^2 \omega t}{\epsilon \omega^2 R^4}.$$

Для плотности тока смещения в конденсаторе имеем

$$j = \frac{I}{\pi R^2}.$$

Поэтому из (5.7) и (12.1) магнитное поле

$$H = 2I \frac{r}{cR^2},$$

где r — расстояние от оси конденсатора.

Плотность магнитной энергии

$$w_m = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \mu 4I^2 \frac{r^2}{8\pi c^2 R^4}.$$

Магнитная энергия в конденсаторе

$$W_m = \int_0^R w_m 2\pi h r dr = \mu h I_0^2 \frac{\cos^2 \omega t}{4c^2}.$$

Отношение максимальной магнитной энергии к максимальной электрической энергии равно

$$\frac{W_{m \max}}{W_{3 \max}} = \frac{\epsilon \mu}{8} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2.$$

Для справедливости условия квазистационарности, когда выполняются использованные ранее соотношения, должно быть $\omega R \ll c$. При этом полученное отношение много меньше единицы.

Если бы была задана не сила тока в цепи, а переменное напряжение на обкладках этого конденсатора $V = V_0 \sin \omega t$, то для тока смещения из (12.5) получаем

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E/\partial t}{4\pi} = \epsilon \frac{\partial V/\partial t}{\pi h}.$$

Из (12.1), пренебрегая краевыми эффектами, находим магнитное поле (№ 12.6, 12.7)

$$H = \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \frac{r}{2ch} = \epsilon \omega r V_0 \frac{\cos \omega t}{2ch}.$$

Найдем отношение электрической и магнитной энергий внутри длинного соленоида (длина l , радиус R), состоящего из N витков проволоки, заполненного веществом с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ , по которому идет переменный ток $I = I_0 \cos \omega t$ (№ 12.3). Из (5.23) магнитное поле в соленоиде

$$H = 4\pi N \frac{I}{cl} = 4\pi NI_0 \frac{\cos \omega t}{cl}.$$

Плотность магнитной энергии

$$w_m = \mu \frac{H^2}{8\pi}.$$

Пренебрегая краевыми эффектами, получаем магнитную энергию внутри соленоида

$$W_m = w_m \pi R^2 l = 2\pi^2 \mu R^2 N^2 I_0^2 \frac{\cos^2 \omega t}{c^2 l}.$$

Из (12.2)

$$E 2\pi r = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 = \pi r^2 \mu 4\pi NI_0 \omega \frac{\sin \omega t}{c^2 l}.$$

Откуда

$$E = 2\pi \mu N \omega r I_0 \frac{\sin \omega t}{c^2 l}.$$

Плотность электрической энергии

$$w_e = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}.$$

Для вычисления всей электрической энергии внутри соленоида (опять пренебрегая краевыми эффектами) интегрируем

$$W_3 = \epsilon 4\pi^2 \mu^2 \omega^2 N^2 I_0^2 l \frac{\sin^2 \omega t}{c^4 l^2} \int_0^R 2\pi r dr = \epsilon \mu^2 \pi^2 \omega^2 R^4 N^2 I_0^2 \frac{\sin^2 \omega t}{c^4 l}.$$

Отношение максимальной электрической к максимальной магнитной энергии равно

$$\frac{W_{3\max}}{W_{m\max}} = \frac{\epsilon \mu}{8} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2.$$

В случае квазистационарности ($\omega R \ll c$) это отношение много меньше единицы.

При изменении силы тока в соленоиде меняется поток магнитного поля и в соответствии с (12.2) возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют окружности относительно оси соленоида. Например, при возрастании тока с постоянной скоростью $dI/dt = I'$ в длинном воздушном соленоиде с радиусом намотки r_0 , содержащим n витков на единицу длины, имеем для потока, используя (5.23),

$$\Phi = \pi r_0^2 4\pi I \frac{n}{c},$$

и из (12.2)

$$\oint E d\mathbf{l} = 2\pi r E = -\frac{1}{c} \Phi' = \pi r_0^2 4\pi I' \frac{n}{c^2}.$$

Откуда для $r = 2r_0$ (т. е. вне соленоида) находим электрическое поле

$$E = \pi r_0 I' \frac{n}{c^2}.$$

Если соленоид погрузить в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$, то в соответствии с (12.2) $E_1 = E$, а в соответствии с (3.8) $D_1 = 2D$ (№ 12.20).

На рис. 12.2 показана система из двух длинных соленоидов (один радиусом r_1 вставлен в другой радиусом r_2) с одинаковой плотностью намотки n (витков на сантиметр), которые одними концами подключены к батарее постоянного тока ЭДС, равной \mathcal{E} , а другими замкнуты на сопротивление R . Оценим, при каком сопротивлении электрическая и магнитная энергии системы будут одинаковы (№ 12.66). Пренебрегая сопротивлением соленоидов, можем считать, что раз-

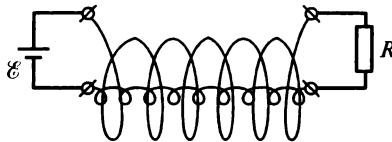


Рис. 12.2

нность потенциалов между ними равна $U = IR$. В случае цилиндрической симметрии из (1.16) или (12.3) получаем $E = A/r$. Постоянную A определяем, используя (2.6):

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = A \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Находим электрическую энергию между радиусами на единицу длины соленоидов при ее плотности (3.69)

$$W_s = \int_{r_1}^{r_2} E^2 2\pi r \frac{dr}{8\pi} = I^2 \frac{R^2}{\left[2 \ln(r_2/r_1)\right]^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = I^2 \frac{R^2}{4 \ln(r_2/r_1)}.$$

Приравниваем эту энергию к энергии магнитного поля на единицу длины соленоида

$$W_m = H^2 \pi \frac{r^2}{8\pi} = 2\pi I^2 n^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{c^2}.$$

Отсюда находим R .

Если внутри вертикально стоящей катушки, питаемой переменным током, подвесить проводящий цилиндр, то в нем возникает вихревое электрическое поле (ЭДС), вызывающее токи Фуко, приводящие к нагреванию цилиндра. Величина тока пропорциональна ЭДС (циркуляции электрического поля) и обратно пропорциональна сопротивлению (для одинаковых цилиндров удельному сопротивлению материала ρ). Из (12.2) и (12.10)

$$I \sim \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{\rho c} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{\rho c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

где μ — магнитная проницаемость материала.

Нагревание может быть связано и с гистерезисом, если цилиндр из ферромагнитного материала, например из железа. Отношение токов Фуко, а значит, и нагреваний железа и меди, которая не

является магнетиком, но имеет меньшее удельное сопротивление, зависит от величины μ/ρ . Для меди $\mu \sim 1$, $\rho \approx 10^{-8}$ Ом · м, для железа $\mu \sim 1000$, $\rho \approx 10^{-7}$ Ом · м. Поэтому ток в железе больше в 10 000 раз. Железный цилиндр будет нагреваться быстрее медного вне зависимости от гистерезиса (№ 12.16).

Для медного цилиндра радиусом a и высотой h в переменном однородном поле $B = B_0 \cos \omega t$ мощность теплоты, выделяющейся из-за токов Фуко, равна

$$Q = h \int_0^a \rho j^2 2\pi r dr,$$

где r — расстояние от оси цилиндра.

Пользуясь законом Ома (4.7), (4.8) и (12.2), получаем

$$Q = \frac{1}{8} \pi h \frac{1}{\rho} \left(\omega B_0 \frac{a^2}{c} \right)^2 \sin^2 \omega t.$$

При вычислении средней мощности теплоты надо учесть, что среднее значение $\sin^2 \omega t$ равно 1/2 (№ 12.22).

Если в цепь переменного тока $I = I_0 \cos \omega t$ входит конденсатор (площадь пластин S , расстояние между ними h), заполненный слабо проводящим диэлектриком (диэлектрическая проницаемость ϵ , удельное сопротивление ρ), то токи проводимости и смещения идут параллельно. Обозначая поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора σ и плотность тока проводимости j , получаем

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{I}{S} - j.$$

Используя (3.8) и (4.7), находим

$$\frac{dE}{dt} + 4\pi \frac{E}{\rho\epsilon} = 4\pi \frac{I}{\epsilon S}.$$

Для изменения напряжения V на конденсаторе имеем

$$\frac{dV}{dt} + 4\pi \frac{V}{\rho\epsilon} = 4\pi I \frac{h}{\epsilon S}.$$

Для решения этого уравнения удобно представить правую часть в комплексном виде $a e^{i\omega t}$ и соответственно искать $V = V_0 e^{i\omega t}$. Подставляя в уравнение, получаем

$$V = \frac{4\pi I_0 h / \epsilon S}{4\pi/\rho\epsilon + i\omega} = \frac{(4\pi I_0 h / \epsilon S) e^{-i\Phi}}{\left[(4\pi/\rho\epsilon)^2 + \omega^2 \right]^{1/2}}.$$

Откуда (№ 12.23)

$$V_0 = \frac{4\pi I_0 h/\epsilon S}{[(4\pi/\rho\epsilon)^2 + \omega^2]^{1/2}}.$$

Можно воспользоваться представлениями об импедансе, переписав (10.32) для параллельного соединения сопротивлений

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega CR},$$

где

$$R = \rho \frac{h}{S}; \quad C = \epsilon \frac{S}{4\pi h}.$$

Получаем тот же результат, так как $V_0 = I_0 |Z|$.

Рассмотрим плоский конденсатор в виде двух плоских дисков с радиусами a и расстоянием между ними h , заполненный слабо проводящей средой ($\epsilon = \mu = 1$) с электропроводностью λ , который в момент времени $t = 0$ подключается к батарее постоянного тока с ЭДС, равной \mathcal{E} , и внутренним сопротивлением r . Найдем зависимость от времени тока проводимости $I_{\text{пр}}$ и тока смещения $I_{\text{см}}$ в конденсаторе, а также магнитное поле H вблизи его боковой поверхности (№ 12.72).

Обозначив напряжение на конденсаторе V , его емкость C и сопротивление току проводимости

$$R = \frac{h}{\lambda \pi a^2}$$

и имея в виду, что ток через конденсатор равен сумме тока проводимости

$$I_{\text{пр}} = \frac{V}{R}$$

и тока смещения $I_{\text{см}} = CV'$ (штрихом обозначена производная по времени), $I = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}$, из (4.20) $\mathcal{E} = V + Ir$ и, следовательно,

$$\frac{\mathcal{E} - V}{r} = CV' + \frac{V}{R}.$$

Интегрируя это уравнение при условии $V(0) = 0$, получаем

$$V = \mathcal{E}R \frac{1 - e^{-t/\tau}}{R + r},$$

где

$$\tau = CR \frac{r}{R+r}.$$

Откуда

$$I = I_{\text{пп}} + I_{\text{см}} = \frac{\mathcal{E} e^{-t/\tau}}{r} + \frac{\mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau})}{R+r} = \frac{\mathcal{E} (1 + R e^{-t/\tau}/r)}{R+r}.$$

Вблизи боковой поверхности конденсатора

$$H = \frac{2I}{ca} = \frac{2\mathcal{E} (1 + R e^{-t/\tau}/r)}{ca(R+r)}.$$

Если этот конденсатор подсоединить к источнику переменного тока с ЭДС, равной $\mathcal{E} \cos \omega t$, и внутренним сопротивлением r , то для определения тех же параметров (№ 12.73) можно воспользоваться комплексными представлениями. Импеданс конденсатора

$$\hat{Z} = \frac{R}{i\omega CR + 1}.$$

Для полного тока находим

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}}{\hat{Z} + r} = \frac{\mathcal{E} (i\omega CR + 1)}{R + r + i\omega CRr}.$$

Для тока проводимости

$$\hat{I}_{\text{пп}} = \frac{i\hat{Z}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R + r + i\omega CRr}.$$

Действительная амплитуда

$$I_{\text{пп}} = \frac{\mathcal{E}}{\left[(R + r)^2 + (\omega CRr)^2 \right]^{1/2}}.$$

Для тока смешения

$$\hat{I}_{\text{см}} = \hat{I} \hat{Z} i\omega C = \frac{\mathcal{E} i\omega CR}{R + r + i\omega CRr}.$$

Действительная амплитуда

$$I_{\text{см}} = \frac{\mathcal{E} \omega CR}{\left[(R + r)^2 + (\omega CRr)^2 \right]^{1/2}}.$$

Если параметры схемы подобраны так, что $\omega CR = 1$, то

$$I_{\text{пп}} = I_{\text{см}} = \frac{\epsilon}{[(R+r)^2 + r^2]^{1/2}}.$$

Из (12.1)

$$\hat{H}2\pi x = 4\pi \frac{(\hat{I}_{\text{пп}} + \hat{I}_{\text{см}})x^2}{a^2 c}; \quad \hat{H} = 2x \frac{\epsilon(i\omega CR + 1)}{a^2 c(R + r + i\omega CRr)}.$$

При $\omega CR = 1$ имеем

$$H = \frac{2\epsilon\sqrt{2}x}{a^2 c [(R+r)^2 + r^2]^{1/2}}.$$

Проводящий шар радиусом $a = 20$ см (рис. 12.3, а), находящийся при потенциале $U_0 = 3 \cdot 10^4$ В, разряжается через сопротивление $R = 5 \cdot 10^3$ Ом. В квазистационарном (следующем изменению тока) приближении найдем возникающее при этом магнитное поле $B(t, r, \theta)$ вне шара (№ 9.12). Заряд шара меняется, и меняется создаваемое им электрическое поле (1.4). Из симметрии картины и уравнения (12.1) получаем

$$\oint H dl = H 2\pi r = \frac{1}{c} \frac{d \left(\int_S E_n dS \right)}{dt}.$$

С помощью рис. 12.3, б и (1.3) можно получить

$$\int_S E_n dS = q\Omega,$$

где q — заряд шара; Ω — телесный угол, для которого из рис. 12.3, а находим

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta).$$

Изменение заряда шара за счет тока через сопротивление R описывается (9.30), где в соответствии с (2.4) $C = a$ и $q = U_0 a e^{-t/Ra}$. Для магнитного поля

$$B = H = U_0 a (1 - \cos \theta) \frac{e^{-t/Ra}}{caRr}.$$

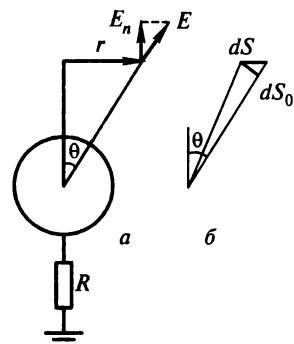


Рис. 12.3

Возмущения электрических и магнитных полей распространяются в виде волн.

Получим уравнение, описывающее распространение **плоской поперечной электромагнитной волны**. Будем предполагать, что заряды и токи отсутствуют ($\rho = 0$, $j = 0$), и волна распространяется вдоль оси x в однородной бесконечной среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ . Из (12.9) и (12.10) получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (12.13)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.14)$$

Используя правую систему координат и (5.13), проектируем (12.13) на y , а (12.14) на z :

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}; \quad (12.15)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (12.16)$$

Дифференцируя первое по t , а второе по x , получаем **волновое уравнение**

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}; \quad \left\{ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \right\}. \quad (12.17)$$

Можно было бы продифференцировать (12.15) по x , а (12.16) по t и получить аналогичное уравнение для H_z .

Легко убедиться простой подстановкой, что решение уравнения (12.17) имеет вид

$$E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \quad (12.18)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции своих аргументов (фаз); v — скорость распространения фазы (**фазовая скорость**):

$$v = \frac{c}{(\epsilon \mu)^{1/2}} = \frac{c}{n}; \quad \left\{ v = \frac{c}{(\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu)^{1/2}} = \frac{c}{n} \right\}. \quad (12.19)$$

Здесь введен **показатель преломления** среды

$$n = \frac{c}{v} = (\epsilon \mu)^{1/2}; \quad \left\{ n = \frac{c}{v} = (\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu)^{1/2} \right\}. \quad (12.20)$$

Для волны, бегущей в положительном направлении оси x , из (12.18) находим $E_y = f_1(x - vt)$. Из (12.16) получаем

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -f_1'(x - vt) = \frac{1}{v} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{c} (\epsilon \mu)^{1/2} \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Отсюда

$$(\mu)^{1/2} \frac{\partial H_z}{\partial t} = (\epsilon)^{1/2} \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (12.21)$$

Интегрируя и учитывая, что постоянных составляющих в волне нет, находим

$$(\mu)^{1/2} H_z = (\epsilon)^{1/2} E_y.$$

На рис. 12.4 показано, для примера, изменение электромагнитного поля в очень важном случае плоской поперечной гармонической (f_1 — гармоническая функция: синус или косинус) волны.

Из (12.21), (3.75) и (7.12) следует одинаковая плотность энергии в электрическом и магнитном полях. Эта энергия распространяется со скоростью v .

Уравнения Максвелла дополним законом сохранения энергии. Для этого умножим скалярно (12.13) на \mathbf{E} , а (12.14) на \mathbf{H} и сложим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial (\epsilon E^2/2 + \mu H^2/2)}{\partial t} = -(\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}).$$

Пользуясь векторной формулой, получаем

$$\frac{\partial (\epsilon E^2 + \mu H^2)/8\pi}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (12.22)$$

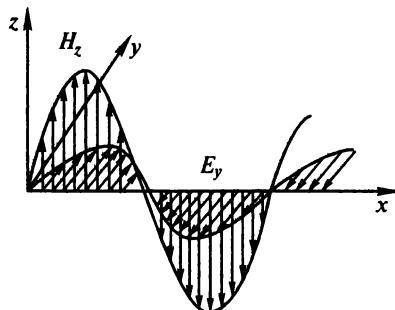


Рис. 12.4

Введенный здесь вектор **плотности потока энергии** \mathbf{S} называется **вектором Пойнтинга**

$$\mathbf{S} = c \frac{[\mathbf{EH}]}{4\pi}; \quad \{\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]\}. \quad (12.23)$$

Поскольку плотности энергии соответствует плотность массы, то при распространении энергии со скоростью c , для плотности **электромагнитного импульса** \mathbf{g} получаем

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{[\mathbf{EH}]}{4\pi c}; \quad \left\{ \mathbf{g} = \frac{[\mathbf{EH}]}{c} \right\}. \quad (12.24)$$

Для **двухпроводной линии** из идеального проводника (без тепловых потерь), соединяющей генератор постоянного тока с нагрузкой (сопротивление R), найдем вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) (№ 12.25). На рис. 12.5 показаны направления векторов. При **отсутствии сопротивления** подводящих проводов их потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 постоянны и отличаются на величину напряжения (падения потенциала) на сопротивлении нагрузки (R). Учитывая направление магнитного поля, получаем из (12.23), что поток энергии идет от генератора к нагрузке между проводами линии.

Если учитывать, что подводящие провода **обладают сопротивлением**, то у вектора напряженности электрического поля появляется составляющая вдоль провода (№ 12.26). Это приводит к потоку энергии к проводу. Если провод имеет длину l и радиус r , а падение напряжения на этой длине V и по нему идет ток силой I , то на поверхности провода

$$E = \frac{V}{l}; \quad H = \frac{2I}{cr},$$

а поток энергии через боковую поверхность, как следует из (12.23):

$$S 2\pi r l = c E H 2\pi r \frac{l}{4\pi} = IV.$$

Этот поток энергии равен мощности, выделяемой током в проводе (в виде джоулевой теплоты).

Если в линии, изображенной на рис. 12.5, поменять направление тока, что соответствует как бы переворачиванию рисунка, то направление потока энергии от генератора к нагрузке не изменится. Поэтому в случае **синусоидального тока**, когда напряжение и сила тока находятся в одной и той же фазе, т. е. одновременно меняют направление (№ 12.39), направление потока энергии не меняется, хотя величина его меняется вместе с изменением величины полей.

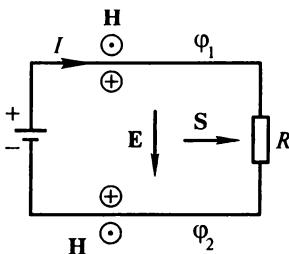


Рис. 12.5

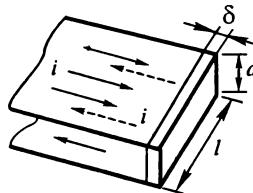


Рис. 12.6

Если ток отстает по фазе от напряжения на 90° ($\pi/2$) (№ 12.40), то результат меняется. Предполагая гармоническое изменение величин, можем написать для напряженности электрического поля, которая по фазе совпадает с напряжением, $E = E_0 \cos \omega t$, а для напряженности магнитного поля, которая по фазе совпадает с током, $H = H_0 \sin \omega t$. Используя (12.23) и вычисляя плотность потока за период, получаем

$$S = \int_0^T EH \frac{dt}{4\pi} = \int_0^T E_0 \cos \omega t H_0 \sin \omega t \frac{dt}{4\pi} = 0.$$

Каждые четверть периода вектор S меняет направление на обратное. Энергия колеблется в отдельных участках, а не течет в одном направлении. Это стоячая волна.

Найдем величину и направление вектора Пойнтинга (S) для системы из двух параллельных проводящих плоскостей (рис. 12.6), по которым текут антипараллельные токи с линейной плотностью i и которые замыкаются через соединяющую плоскости перемычку толщиной δ с удельным сопротивлением ρ (№ 12.71). Полный ток по плоскости $I = il$, полное сопротивление перемычки

$$R = \rho \frac{a}{l\delta},$$

падение напряжения между плоскостями

$$V = IR = i\rho \frac{a}{\delta},$$

напряженность электрического поля между плоскостями

$$E = i \frac{\rho}{\delta}.$$

Из (12.1)

$$H = 4\pi \frac{i}{c}$$

и, следовательно,

$$S = i^2 \frac{\rho}{\delta}.$$

При подключении соленоида к источнику постоянного тока в него втекает (от момента подключения до момента установления постоянного тока) энергия. Найдем ее величину для длинного соленоида (длина L , радиус r , число витков N), который подключается к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} (№ 12.28). Из (9.4) имеем

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Разделяя переменные, интегрируя и используя, что в начальный момент ток был равен нулю, получаем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-Rt/L} \right).$$

Из (5.23) и (5.25) (в системе СИ)

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}.$$

Из (12.2) на боковой поверхности соленоида

$$E = \mu_0 N r \frac{\mathcal{E}}{2lL} e^{-Rt/L}.$$

Используя (12.23), для энергии, прошедшей через боковую поверхность соленоида за все время установления тока, получаем

$$W = l2\pi r \int_0^\infty EH dt = \mu_0 N^2 \mathcal{E}^2 \pi \frac{r^2}{2lR^2} = L \frac{I^2}{2}.$$

На рис. 12.7, *a* изображена цепь, состоящая из резистора сопротивлением R и длинной катушки радиусом r_2 и плотностью намотки витков n [см⁻¹] и соосного с катушкой прямого провода радиусом r_1 , по которому течет постоянный ток I . Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найдем аксиальную S_z и азимутальную S_ϕ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов (№ 12.27).

Разность потенциалов между катушкой и проводом $\Delta\phi = IR$. Это значит, что на проводе имеется заряд, а из (12.3) следует

$$E = \frac{A}{r} = -\frac{d\phi}{dr}.$$

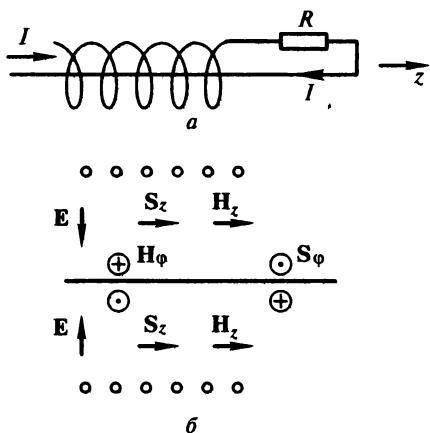


Рис. 12.7

Для определения постоянной A найдем из интеграла

$$\int_1^2 d\phi = A \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}.$$

Отсюда

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -A \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right); \quad A = \frac{\Delta\varphi}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{IR}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Таким образом, для вектора \mathbf{E} имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{IR}{\ln(r_2/r_1)} \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

Для магнитного поля из (5.23) и (5.2) имеем

$$H_z = 4\pi \frac{nI}{c}; \quad H_\phi = \frac{2I}{cr}.$$

На рис. 12.7, б показаны векторы полей и получающиеся на основании (12.23) плотности потоков энергии:

$$S_z = cE \frac{H_\phi}{4\pi} = I^2 \frac{R}{2\pi r^2 \ln(r_2/r_1)};$$

$$S_\phi = cE \frac{H_z}{4\pi} = I^2 R \frac{n}{r \ln(r_2/r_1)}.$$

Полный поток энергии через катушку к сопротивлению R равен

$$\Pi = \int_{r_1}^{r_2} S_z 2\pi r dr = I^2 R.$$

Это — мощность джоулевых потерь на сопротивлении.

Рассмотрим плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом R , заряженный и отключенный от источника электричества. Если **среда внутри конденсатора обладает проводимостью**, то он будет разряжаться. При этом за счет изменения плотности заряда σ идет ток проводимости плотностью

$$j = \frac{d\sigma}{dt},$$

направленный так же, как вектор электрической индукции D , и ток смещения

$$j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{d\sigma}{dt},$$

направленный, как вектор $\partial D / \partial t$, т. е. противоположно вектору D . Таким образом, суммарный ток через конденсатор равен нулю (№ 12.4). И вследствие (12.1) или (12.9) магнитное поле отсутствует.

Если же конденсатор **разряжается посредством искры**, проскаивающей по его оси, то внутри него возникает магнитное поле. Это связано с тем, что плотность тока смещения не зависит от расстояния от оси конденсатора, а ток проводимости I идет только по оси и создает поле в соответствии с (5.2)

$$H_{np} = \frac{2I}{cr}.$$

Учитывая изменение заряда конденсатора для тока смещения в зависимости от расстояния от оси r , получаем

$$I_{cm} = I \frac{r^2}{R^2}.$$

Отсюда и из (12.1) следует (№ 12.5)

$$2\pi r H = \frac{4\pi}{c} (I + I_{cm}) = 2I \frac{1 - r^2/R^2}{cr}.$$

На рис. 12.8 показано изменение магнитного поля в зависимости от расстояния от оси. Вектор Пойнтинга определяем по (12.23).

Поток энергии направлен к оси конденсатора и обеспечивает разогрев среды (в искровом канале) током проводимости (сопротивление искровому пробою). На краях конденсатора, где магнитное поле равно нулю, потока энергии нет (№ 12.8).

Разряд конденсатора может произойти за счет соединения его обкладок проводом длиной l и радиусом a , проходящим вне конденсатора. Пренебрегая краевыми эффектами и обозначая ток в цепи I (в проводе это ток проводимости, в конденсаторе — ток смещения) и заряд на конденсаторе q (и ток и заряд меняются со временем), находим, что на краю конденсатора (из круглых дисков радиусом b , расстояние между которыми h) магнитное поле

$$H_{\kappa} = \frac{2I}{cb}$$

и электрическое

$$E_{\kappa} = 4\pi \frac{q}{\pi b^2} = \frac{4q}{b^2}.$$

Из (12.23) получаем, что через боковую поверхность конденсатора вытекает поток энергии равный $4qIh/b^2$. Электрическое поле вдоль поверхности провода

$$E_{\pi} = E_{\kappa} \frac{h}{l},$$

а магнитное на поверхности провода

$$H_{\pi} = \frac{2I}{ca}.$$

Учитывая направление полей и (12.23), для потока, втекающего в провод через его поверхность ($2\pi al$), получаем $4qIh/b^2$. Таким образом, вся энергия, вытекающая из конденсатора, втекает в провод и идет на его нагрев за счет омического сопротивления (№ 12.9).

Найдем вектор Пойнтинга в зависимости от расстояния от оси конденсатора (r) и времени и полную электромагнитную энергию, вытекающую через боковую поверхность конденсатора за все время разряда, если он заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , а сопротивление провода R (№ 12.32).

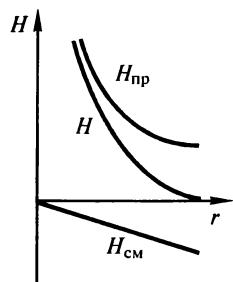


Рис. 12.8

Если конденсатор емкостью

$$C = \epsilon\pi \frac{b^2}{4\pi h}$$

разряжается через сопротивление R , то из (9.4)

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = RC \frac{dV}{dt} + V = 0.$$

Откуда

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}; \quad \tau = RC.$$

Электрическое поле внутри конденсатора $E = V/h$. Плотность тока смещения в конденсаторе

$$j_{cm} = \frac{\partial D / \partial t}{4\pi} = -\frac{V_0 e^{-t/\tau}}{\pi b^2 R}.$$

Из (12.1) имеем

$$H = 2\pi j_{cm} \frac{r}{c} = 2V_0 r \frac{e^{-t/\tau}}{cb^2 R}.$$

Вектор Пойнтинга направлен из конденсатора к сопротивлению

$$S(r, t) = cE \frac{H}{4\pi} = rV_0^2 \frac{e^{-2t/\tau}}{2\pi b^2 h R}.$$

При $r = b$

$$S = V_0^2 \frac{e^{-2t/\tau}}{2\pi b h R}.$$

Полная электромагнитная энергия, вытекающая через боковую поверхность конденсатора за все время разряда,

$$W = \int_0^\infty S 2\pi b h dt = \int_0^\infty V_0^2 e^{-2t/\tau} \frac{dt}{R} = C \frac{V_0^2}{2}.$$

Это начальная энергия заряженного конденсатора.

В подобном конденсаторе, образованном двумя круглыми дисками, расположенными на расстоянии h друг от друга, мысленно выделим замкнутую цилиндрическую поверхность радиусом R ($2R < h$) и длиной L меньше диаметра пластин конденсатора (рис. 12.9). В случае изменения напряжения на конденсаторе по линейному закону

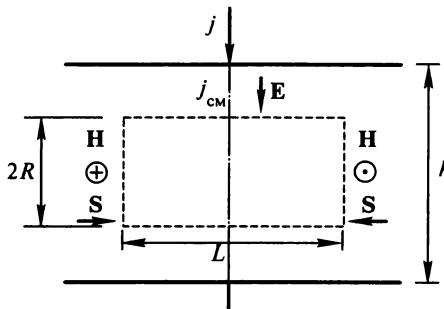


Рис. 12.9

(от времени) $V = At$ (A — известная константа) найдем вектор Пойнгтинга внутри него и вычислим полный поток энергии через цилиндрическую поверхность за время t (№ 12.37).

Напряженность электрического поля

$$E = \frac{V}{h} = \frac{At}{h}.$$

Из (12.1) напряженность магнитного поля

$$H = r \frac{A}{2ch}.$$

Магнитное поле со временем не меняется. С помощью (12.23) находим

$$S = A^2 r \frac{t}{8\pi h^2}.$$

Как видно из рис. 12.9, при положительном A поток энергии идет к оси конденсатора (увеличивается энергия в конденсаторе с увеличением заряда). Для подсчета полного потока через цилиндрическую поверхность воспользуемся тем, что энергия магнитного поля в объеме цилиндра не меняется, так как напряженность магнитного поля не зависит от времени, а меняется только электрическая энергия за счет потока энергии. Из (3.69) энергия электрического поля внутри цилиндра

$$W = w\pi R^2 L = \pi R^2 L \frac{E^2}{8\pi}.$$

Ее изменение равно потоку энергии

$$\Pi = \pi R^2 L \frac{\partial w}{\partial t} = R^2 L A^2 \frac{t}{4h}.$$

Подобный подсчет потока энергии можно использовать для объема внутри длинного соленоида, ток через который меняется по линейному закону (от времени) $I = At$ (№ 12.36). Из (5.23) для соленоида

$$H = 4\pi nA \frac{t}{c}.$$

Для электрического поля из (12.2) имеем

$$E = 2\pi nA \frac{r}{c^2}.$$

Оно со временем не меняется. Вектор Пойнтинга (12.23)

$$S = 2\pi n^2 A^2 r \frac{t}{c^2}.$$

Он направлен к оси соленоида и приводит к увеличению магнитной энергии и напряженности магнитного поля с увеличением силы тока. Для вычисления потока энергии через **сферическую** поверхность радиусом R , центр которой лежит на оси соленоида вдали от торцов и радиус меньше радиуса витков соленоида, учтем, что электрическая энергия внутри сферы не меняется со временем, а меняется только магнитная. Поток энергии обеспечивает изменение магнитной энергии (3.69)

$$W = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{H^2}{8\pi}.$$

Откуда

$$\Pi = \frac{\partial W}{\partial t} = 16\pi^2 R^3 n^2 A^2 \frac{t}{3c^2}.$$

Если выразить n через индуктивность L и объем катушки

$$Vn^2 = \frac{L}{4\pi V},$$

то

$$S = LA^2 r \frac{t}{2c^2 V}; \quad \Pi = \frac{4}{3}\pi R^3 L A^2 \frac{t}{c^2 V}.$$

Рассмотрим, как меняется **ток проводимости** в конденсаторе при **раздвигании** его пластин с постоянной скоростью (№ 12.10). Пренебрегая краевыми эффектами и считая, что при движении пластин расстояние между ними (x) остается всегда малым по сравнению с

их линейными размерами, для электрического поля E (при отсутствии диэлектриков равного индуктивности D), разности потенциалов V и заряда q получаем

$$D = E = 4\pi \frac{q}{S} = \frac{V}{x}.$$

Учитывая (12.5), при постоянных q и площади пластин S имеем отсутствие тока смещения, а при постоянной разности потенциалов на обкладках

$$j = -V \frac{u}{4\pi x^2},$$

где u — скорость раздвигания пластин. При сдвигании пластин изменится направление тока смещения.

Рассмотрим плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых соосных дисков, подключенный к источнику постоянного напряжения \mathcal{E} . В момент времени $t = 0$ расстояние между дисками начинает увеличиваться по некоторому закону $h(t)$. Найдем вектор Пойнтинга S и электромагнитную энергию $W(r, t)$, переносимую через цилиндрическую поверхность радиусом r , расположенную внутри конденсатора вокруг оси, как функцию времени, считая, что расстояние между пластинами остается все время малым по сравнению с радиусом (№ 12.33).

Напряженность электрического поля в конденсаторе $E = \mathcal{E}/h$. Из (12.1)

$$H = -\mathcal{E}r \frac{h'}{2ch^2}.$$

Из (12.23)

$$S = \mathcal{E}r \frac{h'}{8\pi h}.$$

Для переносимой энергии получаем

$$W = \int_0^r Sh 2\pi r dt = \mathcal{E}^2 r^2 \frac{1/h_0 - 1/h}{4}.$$

По длинному отрезку коаксиального кабеля, у которого оболочка (радиусом R_0) и центральный проводник (радиусом r_0) изготовлены из разных сверхпроводников и замкнуты на торцах, вначале циркулирует ток I_0 (рис. 12.10). Найдем вектор Пойнтинга после перехода внутреннего проводника (в результате нагрева) в нор-

мальное состояние и электромагнитную энергию (на единицу длины кабеля), перенесенную за время затухания тока, предполагая, что скорость изменения тока dI/dt известна (№ 12.38). Магнитное поле внутри кабеля определяется током по центральному проводнику (5.2)

$$H_\phi = \frac{I}{cr},$$

где r — расстояние от оси симметрии кабеля. Для определения электрического поля вычислим его циркуляцию по контуру (12.2), изображенном на рис. 12.10 пунктиром, учитывая, что в сверхпроводящей оболочке кабеля электрического поля нет:

$$E_z l = \frac{1}{c} \int_r^{R_0} \frac{dH_\phi}{dt} l dr = -\frac{2}{c^2} \frac{dI}{dt} \ln \frac{R_0}{r}.$$

Здесь учтено, что

$$\frac{dI}{dt} < 0; \quad E_z > 0.$$

В соответствии с (12.23) вектор Пойнтинга направлен к оси кабеля и равен

$$S = \left| \frac{I (dI/dt) \ln (R_0/r)}{\pi c^2 r} \right|.$$

Электромагнитная энергия на единицу длины кабеля за время затухания тока

$$W(r) = \int_0^\infty S 2\pi r dt = \left(\frac{I_0}{c} \right)^2 \ln \left(\frac{R_0}{r} \right).$$

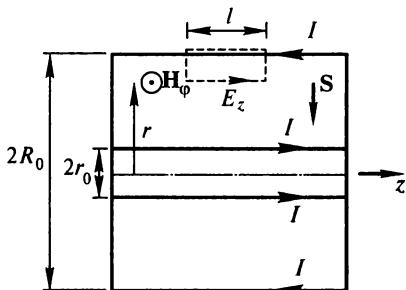


Рис. 12.10

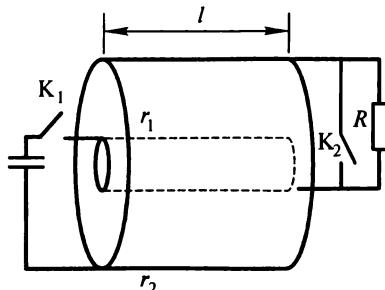


Рис. 12.11

При $r = r_0$

$$W(r_0) = \left(\frac{I_0}{c}\right)^2 \ln\left(\frac{R_0}{r_0}\right).$$

Учитывая, что погонная индуктивность кабеля

$$L = 2 \ln\left(\frac{R_0}{r_0}\right),$$

получаем

$$W(r_0) = L \frac{I_0^2}{2}.$$

На рис. 12.11 показана цепь, в которой источник постоянного тока нагружен на сопротивление R через коаксиальную линию (радиусы внутренний r_1 и внешний r_2) длиной $l \gg r_2$. В некоторый момент ключ K_1 отключает линию от источника и одновременно K_2 замыкает накоротко нагрузку. Полагая все сопротивления, кроме R , пре-небрежимо малыми, а величины ЭДС (напряжение V), I , r_1 заданными, найдем, при какой величине r_2 энергия, излученная линией после срабатывания ключей, будет минимальной (№ 12.41). В момент срабатывания ключей ток в цепи $I = V/R$. В отсутствие омической диссипации излучается вся энергия, имевшаяся в коаксиальной линии:

$$W = L \frac{I^2}{2c^2} + C \frac{V^2}{2}.$$

Для определения индуктивности воспользуемся (12.1) и (5.31)

$$2\pi rH = 4\pi \frac{I}{c}; \quad \Psi = \int_{r_1}^{r_2} 2Il \frac{dr}{cr} = 2Il \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{LI}{c}.$$

Откуда

$$L = 2l \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Обозначая заряд на внутреннем цилиндре Q , получаем из (1.12) или (12.3) для напряженности электрического поля в зависимости от r (расстояния от оси симметрии)

$$E = \frac{2Q}{lr}.$$

Для разности потенциалов находим

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = 2 \left(\frac{Q}{l} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{C}.$$

Откуда

$$C = \frac{l}{2 \ln r_2/r_1}.$$

Таким образом, энергия, излученная линией,

$$W = I^2 l \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{c^2} + \frac{1}{(2/R)^2 \ln(r_2/r_1)} \right].$$

Обозначая

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = x,$$

получаем, что для частного случая $c = 2/R$, надо найти минимум $y = x + 1/x$. Приравнивая нулю производную, получаем минимум при $x = 1$, т. е. при

$$\frac{r_2}{r_1} = e = 2,718.$$

Для цепи, изображенной на рис. 12.11, с замкнутым ключом K_1 и разомкнутым K_2 найдем величину нагруженого сопротивления, при котором в случае заполнения пространства между проводниками коаксиального кабеля диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$ электрическая и магнитная энергии в диэлектрике окажутся одинаковыми, если (№ 12.65)

$$\frac{r_2}{r_1} = 20 \approx e^3.$$

Используя (12.3), получаем $E = A/r$. Постоянную A находим из условия для разности потенциалов

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} A \frac{dr}{r} = A \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Поэтому

$$E = \frac{V/r}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Из (5.2) магнитное поле

$$H = \frac{2I}{cr} = 2\left(\frac{V/R}{cr}\right).$$

Так как получилась одинаковая зависимость полей от r , то энергии в пространстве между проводниками одинаковы, если равны плотности энергий, определяемые (3.75) и (6.5), т. е. $\epsilon E^2 = H^2$, или $\sqrt{\epsilon} E = H$. Используя это, находим

$$R = \frac{2 \ln(r_2/r_1)}{c\sqrt{\epsilon}} = 2 \ln(e^3) \frac{9 \cdot 10^{11}}{(3 \cdot 10^{10})\sqrt{2}} = 127 \text{ Ом.}$$

Обратим внимание, что соотношение между электрическим и магнитным полем при такой нагрузке, которая называется согласованной, такое же, как в бегущей плоской волне (12.21).

Рассмотрим отрезок коаксиального кабеля длиной l , подключенного к входу усилителя с очень высоким входным сопротивлением, другой конец которого замкнут накоротко, а пространство между проводами заполнено диэлектриком (ϵ) с малой удельной проводимостью σ . Найдем наименьшую резонансную частоту v_{\min} и добротность Q контура, эквивалентного отрезку данного кабеля, считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика (№ 12.43). В отрезке кабеля возникнет стоячая волна, в которой благодаря высокому входному сопротивлению на входе пучность напряжения и узел тока, а на замкнутом конце узел напряжения и пучность тока. Длина отрезка соответствует четверти длины стоячей волны для наименьшей резонансной частоты $l = \lambda/4$. Для минимальной частоты имеем в соответствии с (12.19)

$$v_{\min} = \frac{1}{T} = \frac{V}{\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}l}.$$

Учитывая гармоничность волны и используя для обозначения объема букву V , находим для средней электрической энергии за период

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_V \int \int \epsilon E^2 \frac{dV}{8\pi} = \frac{1}{2} W_{\max}.$$

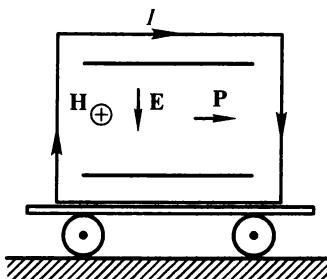


Рис. 12.12

Потери за период на джоулеву тепло-
ту из (4.12) и (4.7)

$$W_{\text{пот}} = \int_0^T dt \int \int \int_V \sigma E^2 dV.$$

Добротность системы в соответствии
с (9.29)

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{max}}}{W_{\text{пот}}} = \frac{\epsilon}{2T\sigma}.$$

Электромагнитный импульс, описываемый (12.24), можно наблюдать в системе, изображенной на рис. 12.12, где **заряженный конденсатор**, в котором электрическое поле E , помещен **внутрь соленоида** прямоугольного сечения, находящегося вместе с батареей постоянного тока и ключом, который включает ток в соленоиде и первоначально разомкнутый, на платформе, которая без трения может двигаться по горизонтальным рельсам. Найдем импульс системы после замыкания ключа (№ 12.12, 12.11). На рис. 12.12 показаны электрическое E и магнитное H поля (после включения тока). В соответствии с (12.24) в объеме конденсатора V появляется электромагнитный импульс

$$\mathbf{P} = \frac{[EH]V}{4\pi c}.$$

Для неизменности полного импульса системы, которого до включения тока в соленоиде не было, платформа должна двигаться в направлении, противоположном \mathbf{P} .

Найдем вектор Пойнтинга, при распространении в свободном пространстве **цилиндрического электронного пучка** радиусом R с концентрацией электронов n и кинетической энергией каждого электрона E . Предполагая, что скорость электронов не очень большая (нерелятивистский случай), получаем для скорости

$$v = \left(\frac{2E}{m} \right)^{1/2},$$

где m — масса электрона. Обозначая заряд электрона e , для плотности тока в пучке получаем $j = nev$. Используя (1.12), получаем электрическое поле внутри пучка $E_{in} = 2\pi n e r$ и вне пучка

$$E_{ex} = 2\pi R^2 n \frac{e}{r},$$

где r — расстояние от оси симметрии пучка. Из (5.6) для магнитного поля внутри пучка

$$H_{in} = 2\pi r \frac{j}{c} = 2\pi nev \frac{r}{c}$$

и для магнитного поля вне пучка

$$H_{ex} = 2\pi R^2 \frac{j}{rc} = 2\pi R^2 ne \frac{v}{rc}.$$

С помощью (12.23) получаем плотности потоков энергии: внутри пучка

$$S_{in} = \pi n^2 e^2 v r^2$$

и вне (№ 12.29)

$$S_{ex} = \pi R^4 n^2 e^2 \frac{v}{r^2}.$$

Видно, что поток энергии идет со скоростью пучка.

Рассмотрим цилиндрический электронный пучок с концентрацией n_e и продольной скоростью электронов v , проходящий сквозь газ положительных неподвижных ионов с концентрацией, подобранный таким образом, чтобы скомпенсировать силы взаимодействия электронов в поперечном направлении. Найдем величину и направление вектора Пойнтинга внутри пучка, а также концентрацию ионов n_i (№ 12.35).

Из (12.1) находим азимутальную составляющую напряженности магнитного поля

$$2\pi r H_\phi = 4\pi \frac{-en_e v \pi r}{c}; \quad H_\phi = -v 2\pi r e \frac{n_e}{c}.$$

Из условия равновесия электрических и магнитных сил

$$E_r = -v \frac{H_\phi}{c} = 0$$

получаем

$$E_r = -v^2 2\pi r e \frac{n_e}{c^2}.$$

Из (12.23) находим

$$S = c E_r \frac{H_\phi}{4\pi} = v \frac{H_\phi}{4\pi} = \pi e^2 n_e^2 r^2 \frac{v^3}{c^2}.$$

Чтобы найти концентрацию ионов n_i , вычислим E_r по теореме Гаусса (1.12) или (12.3) $2\pi r l E_r = 4\pi e(n_i - n_e) \pi r^2 l$. Подставляя сюда E_r , полученное ранее из равновесия сил, находим

$$n_i = n_e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

В случае распространения в свободном пространстве электронного пучка «ножевой» геометрии, т. е. имеющего вид тонкого плоского слоя (№ 12.31), вектор Пойнтинга можно найти тем же способом, что и в случае цилиндрического пучка. На рис. 12.13 показаны векторы полей и потоков энергии. Используя (1.12), получаем электрическое поле внутри пучка $E_{in} = 4\pi n e x$ и вне пучка $E_{ex} = 4\pi n e a$, где x — расстояние от плоскости симметрии пучка. Границы пучка при $x = \pm a$. Из (5.6) для магнитного поля внутри пучка

$$H_{in} = 4\pi j \frac{x}{c} = 4\pi n e \frac{v}{c}$$

и для магнитного поля вне пучка

$$H_{ex} = 4\pi j \frac{a}{c} = 4\pi n e \frac{av}{c}.$$

С помощью (12.23) получаем плотности потоков энергии: внутри пучка $S_{in} = 4\pi n^2 e^2 v x^2$ и вне $S_{ex} = 4\pi n^2 e^2 v a^2$. Видно, что поток энергии идет со скоростью электронов в пучке.

Найдем величину и направление вектора Пойнтинга в произвольной точке внутри проводника ($\mu \approx 1$), имеющего форму плоской ленты (толщина много меньше ширины), по которой течет ток плотностью j , а носителями тока являются электроны (заряд $-e$) с кон-

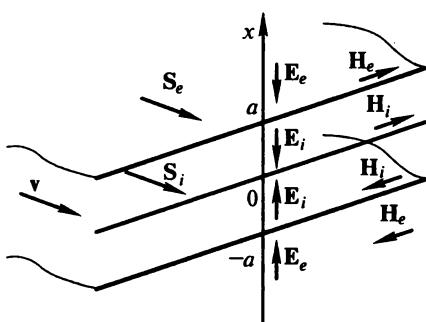


Рис. 12.13

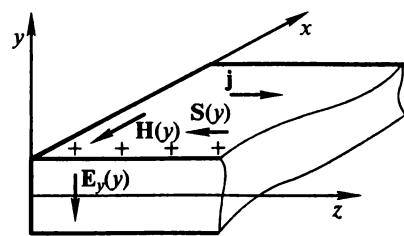


Рис. 12.14

центрацией n (№ 12.34). Координату y будем отсчитывать от средней плоскости ленты в перпендикулярном направлении (рис. 12.14). Из (12.1) для магнитного поля получаем $H_x = 4\pi jy$. Благодаря эффекту Холла (силе Лоренца) устанавливается электрическое поле, определяемое равновесием сил

$$neE_y(y) = jH_x \frac{y}{c}.$$

Из (12.23) для вектора Пойнтинга находим

$$\mathbf{S} = -j \frac{H^2}{4\pi ne} = -j 4\pi j^2 \frac{y^2}{c^2 ne}.$$

Следует обратить внимание на то, что вектор j направлен противоположно скорости движения электронов. Энергия идет туда, куда летят электроны.

Если по цилиндрическому проводнику течет ток, то, как следует из (8.1), в направлении радиуса создается электрическое поле (эффект Холла). В случае однородной по сечению проводника плотности тока $j = env$, где e — заряд электрона; n — концентрация электронов проводимости; v — их скорость, предполагая для проводника диэлектрическую и магнитную проницаемости, равными единице ($\epsilon = \mu = 1$) и обозначая расстояние от оси проводника r , получаем из (5.7) магнитное поле

$$H = 2\pi j \frac{r}{c},$$

а из (8.1) электрическое поле

$$E = 2\pi j^2 \frac{r}{enc^2}.$$

На рис. 12.15 показаны направления векторов. Из (12.23) следует, что вектор Пойнтинга направлен по току и равен (№ 12.30)

$$S = \pi r^2 \frac{j^3}{nec^2}.$$

Рассмотрим заряженный тонкостенный цилиндрический конденсатор с радиусом внешнего электрода R , висящий в вакууме на упругой нити с модулем кручения f в магнитном поле H , параллельном нити и тонкому внутреннему электроду конденсатора. В соответствии с (12.24) система

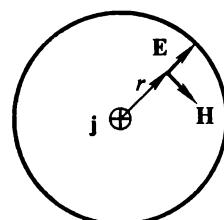


Рис. 12.15

обладает электромагнитным моментом количества движения M . Обозначая заряд конденсатора Q его длину l , из (1.16) находим электрическое поле в зависимости от расстояния от оси конденсатора r :

$$E = \frac{2Q}{lr}.$$

Получаем

$$M = \frac{1}{4\pi c} 2 \left(\frac{Q}{l} \right)^R / 2\pi r r \frac{dr}{r} H = QH \frac{R^2}{2c}.$$

Если конденсатор нагреть, то он быстро разряжается за счет термоэмиссии. В результате электромагнитный момент быстро передается конденсатору, который приобретает кинетическую энергию вращения

$$W = \frac{M^2}{2J} = Q^2 H^2 \frac{R^4}{4Jc^2},$$

где J — момент инерции конденсатора.

Эта кинетическая энергия переходит в упругую энергию закрученной на угол ϕ нити

$$W = f \frac{\phi^2}{2}.$$

Откуда (№ 12.13)

$$\phi = QH \frac{R^2}{2c(Jf)^{1/2}}.$$

В случае описания начальных или граничных условий гармоническими функциями (синусами и косинусами) решения волнового уравнения (12.17), т. е. функции f_1 и f_2 , входящие в (12.18), также будут гармоническими.

Рассмотрим подробнее гармонические бегущие волны. Удобно ввести круговую частоту, связанную с периодом гармонической волны,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{12.25}$$

и волновое число, связанное с длиной волны,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT}. \tag{12.26}$$

Для волны, бегущей в положительном направлении оси x , имеем

$$E_y = A \cos(\omega t - kx). \quad (12.27)$$

Для магнитного поля из (12.21)

$$H_z = \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} A \cos(\omega t - kx). \quad (12.28)$$

Для скорости распространения фазы (**фазовой скорости**) получаем

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (12.29)$$

Как видно из (12.19), фазовая скорость зависит от характеристик среды, по которой распространяется волна, и, в частности, эти характеристики определяются зависимостью $\omega(k)$ — **дисперсионным соотношением**. При постоянной фазовой скорости говорят об отсутствии дисперсии.

Для волны, распространяющейся в пространстве в направлении вектора \mathbf{r} с декартовыми координатами x , y и z , вместо волнового числа в (12.27) надо использовать **волновой вектор** (или **вектор распространения**) \mathbf{k} . В таком случае

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (12.30)$$

Рассмотрим отражение бегущей волны (12.27) и (12.28) от бесконечной плоской поверхности идеального проводника, **перпендикулярной** к направлению распространения волны (рис. 12.16). Ось z направлена к читателю. Для удовлетворения условия отсутствия электрического поля в идеально проводящей среде необходимо существование отраженной от плоскости $x = 0$ волны, бегущей в противоположном направлении:

$$E'_y = -A \cos(\omega t + kx). \quad (12.31)$$

$$H'_z = \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} A \cos(\omega t + kx). \quad (12.32)$$

Здесь использовано, что обозначенный на рис. 12.16 вектор $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$.

В диэлектрике над проводящей поверхностью получаем

$$E_y + E'_y = A [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] = 2A \sin kx \sin \omega t;$$

$$H_z + H'_z = \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} A [\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] = 2 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} A \cos kx \cos \omega t.$$

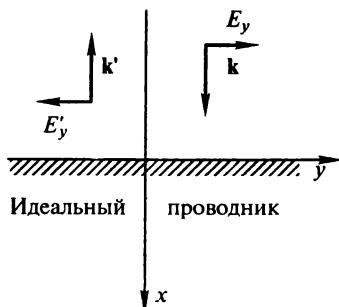


Рис. 12.16

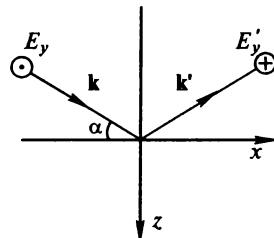


Рис. 12.17

Это стоячие электромагнитные волны. При $x = 0$ имеем узел электрического поля и пучность магнитного. Внутри проводника магнитного поля нет. Изменение магнитного поля на границе (от величины в пучности до нуля) связано с токами проводимости вдоль границы.

Аналогичным образом можно рассмотреть падение электромагнитной волны на плоскую поверхность идеального проводника под углом α (рис. 12.17). Электрическое поле в волне направлено параллельно оси y , которая направлена к читателю. Уравнение падающей волны из (12.27) и (12.30)

$$E_{y1} = A \cos(\omega t - k_x x - k_z z), \quad (12.33)$$

где $k_y = 0$; $k_x = k \cos \alpha$; $k_z = k \sin \alpha$.

Отраженную волну записываем в виде

$$E'_{y1} = A' \cos(\omega t - k'_x x - k'_z z + \varphi).$$

Условия при $x = z = 0$ требуют отсутствия электрического поля, поэтому $A' = A$, $\varphi = \pi$, непрерывность компоненты магнитного поля касательной к границе, поэтому угол падения равен углу отражения и, следовательно, $k_x = k'_x$ и $k_z = -k'_z$. Следовательно,

$$E'_{y1} = -A \cos(\omega t - k_x x + k_z z). \quad (12.34)$$

Волна над проводящей стенкой представляет сумму (12.33) и (12.34)

$$E_y = E_{y1} + E'_{y1} = -2A \sin(k_z z) \sin(\omega t - k_x x). \quad (12.35)$$

Для этой волны выполняется условие отсутствия электрического поля при $z = 0$. Это же решение годится в случае установления

проводящей плоскости, параллельной плоскости $z = 0$ на расстоянии нескольких половин длин волн, определяемых k_z и равном

$$z = -l = -n \frac{\lambda_z}{2} = -n \frac{\pi}{k_z} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.36)$$

Отсюда для k_z имеем

$$k_z = n \frac{\pi}{l}. \quad (12.37)$$

Из (12.30) и (12.29) в данном случае получаем

$$k_x = \left[k^2 - \left(n \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - n^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (12.38)$$

где c — фазовая скорость электромагнитной волны в вакууме, равная скорости света.

Подставляя (12.37) и (12.38) в (12.35), получаем соотношение для волны, распространяющейся между двумя параллельными проводящими плоскими поверхностями, представляющими плоский волновод:

$$E_y(x, z, t) = 2A \sin\left(n\pi \frac{z}{l}\right) \sin(\omega t - k_x x). \quad (12.39)$$

Волна, соответствующая определенному n , называется «модой» волновода. Конфигурация электрического поля для каждой моды своя. На рис. 12.18 показано распределение электрического поля между проводящими стенками для $n = 1$ (a) и для $n = 2$ (б). Распро-

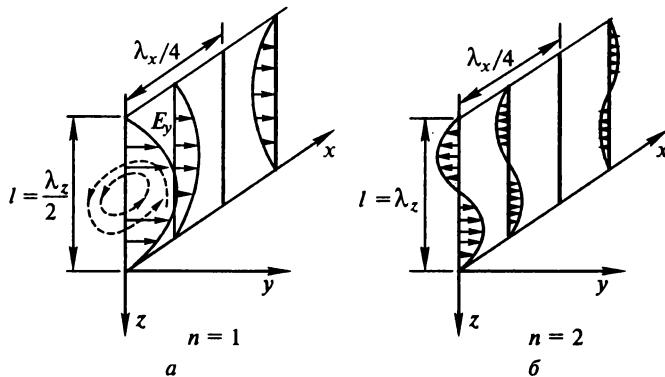


Рис. 12.18

смещение фаз в направлении x вдоль волновода происходит с фазовой скоростью

$$\begin{aligned} v_\phi &= \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\left[(\omega/c)^2 - n^2 (\pi/l)^2 \right]^{1/2}} = \\ &= \frac{c}{\left[1 - n^2 \lambda_0^2 / (2l)^2 \right]^{1/2}} = \frac{c}{\left(\omega^2/c^2 - \omega_{kp}^2/c^2 \right)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (12.40)$$

где λ_0 — длина волны в вакууме, $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$; значение ω_{kp} дано далее в (12.43).

Из (12.40) следует, что фазовая скорость в волноводе больше скорости света в вакууме. Напомним, что в теории относительности для фазовой скорости нет ограничения. Для длины волны в волноводе получаем

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{\lambda_0}{\left[1 - n^2 \lambda_0^2 / (2l)^2 \right]^{1/2}} > \lambda_0. \quad (12.41)$$

Для того чтобы происходило распространение волны, k_x должно быть действительным числом, т. е. должно выполняться

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \geq n^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2. \quad (12.42)$$

Критической (или граничной) частотой является

$$\omega_{kp} = \frac{\pi c}{l}. \quad (12.43)$$

Критическая длина волны

$$\lambda_{kp} = 2l. \quad (12.44)$$

Критическим условиям отвечает угол $\alpha = \pi/2$. Образуется стоячая волна.

В отличие от безграничных плоских волн, о которых говорилось ранее, здесь электрическое поле меняется на конечном интервале. Вычисляя циркуляцию магнитного поля вокруг электрического, получаем, что при электрическом поле, имеющем только компоненту вдоль y , магнитное поле имеет компоненты вдоль z и x , т. е. и в направлении распространения волны. Если у электрического поля есть только компоненты, перпендикулярные направлению распространения электромагнитной волны, то такой тип волн называется

поперечным электрическим (сокращенно **ТЕ** — transverse-electric). Магнитное поле в волне такого типа имеет компоненту в направлении распространения волны. На рис. 12.18 показаны пунктиром, для примера, две силовые линии магнитного поля, лежащие в плоскости (x, z) . Если в электромагнитной волне магнитное поле в ограниченном пространстве имеет только составляющие в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, то такой тип волн называется **поперечным магнитным** (сокращенно **ТМ** — transverse-magnetic). При этом у электрического поля есть составляющая и в направлении распространения волны.

Найдем вектор Пойнтинга, описывающий плотность потока энергии в волноводе **квадратного сечения** (сторона квадрата равна a) с идеально проводящими стенками и вакуумным наполнением при распространении бегущей электромагнитной ТЕ — волны с минимальной частотой при заданном волновом числе k_z (№ 12.50). Ось z направлена вдоль волновода, вектор \mathbf{E} параллелен оси x , а амплитуда поля равна E_0 (рис. 12.19).

Из (12.39), учитывая минимальность частоты ($n = 1$) и переименование осей, для напряженности электрического поля в волне имеем

$$E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - k_z z). \quad (12.45)$$

Из (12.10) и (5.11) получаем

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{j} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathbf{k} \frac{\partial E_x}{\partial y};$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -E_0 k_z \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - k_z z);$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = E_0 \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - k_z z).$$

Интегрируем, учитывая, что постоянных составляющих в волне нет,

$$\frac{1}{c} H_y = E_0 \frac{k_z}{\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - k_z z);$$

$$\frac{1}{c} H_z = -E_0 \frac{\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - k_z z).$$

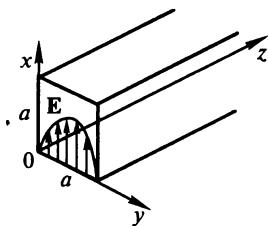


Рис. 12.19

Используя (12.23) и (5.10), находим

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi} (-\mathbf{j} E_x H_z + \mathbf{k} E_x H_y) = \\ = c^2 \frac{E_0^2}{4\pi\omega} \left[\mathbf{j} \frac{\pi}{4a} \sin \left(2\pi \frac{y}{a} \right) \sin 2(\omega t - kz) + \mathbf{k} k_z \sin^2 \left(\pi \frac{y}{a} \right) \cos^2 (\omega t - kz) \right].$$

Для частоты из (12.38) имеем

$$\frac{\omega}{c} = k = \left(k_z^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим волновод с металлическими стенками квадратного сечения со стороной $a = 5$ см, который возбуждается модулированными колебаниями

$$E_x(t) = E_0(1 + \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

где

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = 3001 \text{ МГц}; \quad \frac{\Omega}{2\pi} = 4 \text{ МГц}.$$

Пренебрегая потерями бегущих волн в волноводе, найдем, по какому закону меняется поле $E_{\text{вых}}(t)$ на выходе волновода длиной L . Поле \mathbf{E} перпендикулярно оси волновода и параллельно одной из стенок (см. рис. 12.19). Определим также, чему равна фазовая скорость волны с частотой ω_0 (№ 12.45). Из (12.43) следует, что граничной частотой для данного волновода является

$$v_{\text{тр}} = \frac{\omega_{\text{тр}}}{2\pi} = \frac{c}{2a} \approx 2998 \text{ МГц}.$$

Из имеющихся в спектре модулированной волны гармоник $(\omega_0 - \Omega, \omega_0 \text{ и } \omega_0 + \Omega)$ проходят только две. Из (12.38) находим

$$k_{z0} = \left[\left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad k_{z1} = \left[\frac{(\omega_0 + \Omega)^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Имея в виду, что

$$E_x(t) = E_0(1 + \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = E_0 \cos \omega_0 t + E_0 \cos \Omega t \cos \omega_0 t = \\ = E_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} E_0 \cos(\Omega - \omega_0)t + \frac{1}{2} E_0 \cos(\Omega + \omega_0)t,$$

т. е. амплитуды боковых волн вполовину меньше, получаем поле на выходе из волновода

$$E_{x \text{ вых}}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_{z0} L) + \frac{1}{2} E_0 \cos[(\omega_0 + \Omega)t - k_{z1} L].$$

Из (12.40) фазовая скорость волны с частотой ω_0 равна

$$v = \frac{\omega_0}{k_{z0}} = \frac{c}{\left[1 - (\pi c)^2 / (\omega_0 a)^2\right]^{1/2}} = \frac{c}{\left[1 - (\omega_{\text{рп}}/\omega_0)^2\right]^{1/2}} \approx 22,4c.$$

Если волна с несущей частотой v_0 имеет **амплитудную модуляцию** с частотой v_m , то в соответствии с (11.12) появляются еще волны с частотами $(v_0 - v_m)$ и $(v_0 + v_m)$. Прохождение волн через волновод определяется его размером. Для волновода квадратного сечения со стороной, равной $a = 5$ см, из (12.43) (№ 12.46)

$$v_{\text{кр}} = \frac{c}{2a} = 2998 \text{ МГц.}$$

Если задана несущая частота 2995 МГц, то она не проходит. Тем более не проходит волна с частотой, равной разности частот. Чтобы превзойти критическую частоту, частота модуляции должна быть больше 3 МГц. Для фазовой скорости из (12.40) при частоте модуляции 5 МГц получаем

$$v_{\Phi} = \frac{c}{\left[1 - v_{\text{кр}}^2 / (v_0 + v_m)^2\right]^{1/2}} = 27,4c.$$

Рассмотрим распространение монохроматической волны сложной пространственной структуры в прямоугольном волноводе, изображенном на рис. 12.20. Электрическое поле \mathbf{E} в волне перпендикулярно широкой стенке волновода размером a . Такую волну можно представить как суперпозицию собственных мод волновода типа H_{0m} , поле \mathbf{E} которых в плоскости z имеет вид:

$$E_x(y, 0, t) = \sum_m C_m \sin\left(m\pi \frac{y}{a}\right) \cos(\omega t + \alpha_m).$$

Предположим, что для всех мод выполнено условие $m \gg 2a/\lambda_0$, где λ_0 — длина волны в свободном пространстве. Докажем, что распределение амплитуды колебаний по поперечному сечению волновода $E(y, z)$ воспроизводится (повто-

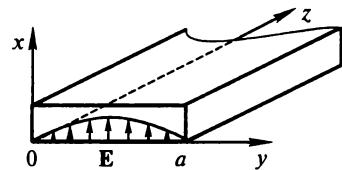


Рис. 12.20

ряется) через определенное расстояние Δz , $E(y, z) = E(y, z + \Delta z)$, и найдем Δz (№ 12.69).

Используя (12.41) и (12.45) для произвольного z , имеем

$$E_x(y, z, t) = \sum_m C_m \sin\left(m\pi \frac{y}{a}\right) \cos(\omega t - k_{zm}z + \alpha_m),$$

где

$$\begin{aligned} k_{zm} &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[1 - m^2 \frac{\lambda_0^2}{(2a)^2} \right]^{1/2} \approx \\ &\approx \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[1 - \frac{1}{2} m^2 \frac{\lambda_0^2}{(2a)^2} \right]. \end{aligned}$$

Разность фаз для некоторых двух мод m_1 и m_2 равна

$$\Delta\phi = (k_{zm1} - k_{zm2})z \approx \frac{\pi}{4} (m_2^2 - m_1^2) \lambda_0 \frac{z}{a^2}.$$

Для совпадения распределений амплитуд необходимо $\Delta\phi = 2\pi n$ (где n — целое число) для любых m_1 и m_2 . Отсюда

$$\Delta z = \frac{8a^2}{\lambda_0},$$

так как $(m_2^2 - m_1^2)$ — всегда какое-нибудь целое число n .

В подобном прямоугольном волноводе со сторонами a и b на входном торце заданы колебания электрического поля, представляющие суперпозицию мод типа H_{01} и H_{10} . Распределения поля \mathbf{E} показаны на рис. 12.21. В моде H_{01} поле \mathbf{E} (при $z = 0$) имеет только x -компоненту

$$E_x = E_0 \sin\left(\pi \frac{y}{a}\right) \cos \omega t,$$

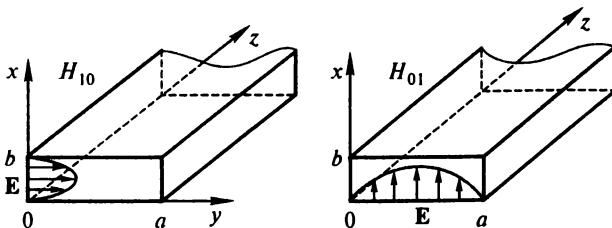


Рис. 12.21

а в моде H_{10} — только y -компоненту

$$E_y = E_0 \sin\left(\pi \frac{x}{b}\right) \cos \omega t.$$

Считая, что частота много больше критических частот обеих $\omega \gg \pi \frac{c}{a}, \pi \frac{c}{b}$, найдем, при какой минимальной длине волновода ориентация вектора E в любой точке (x, y) выходного сечения совпадает с его ориентацией во входном сечении (в точке с теми же координатами x, y) (№ 12.70).

Как видно из (12.40) фазовые скорости мод типа H_{01} и H_{10} различны. Во входном сечении $z = 0$ моды в одинаковой фазе. Волна линейно поляризована. При распространении волны происходит сдвиг фаз составляющих компонент. Они снова будут в фазе при условии

$$\Delta\phi = [(k_z)_{01} - (k_z)_{10}]l = 2\pi,$$

где

$$(k_z)_{01} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[1 - \frac{\lambda_0^2}{(2a)^2} \right]^{1/2}; \quad (k_z)_{10} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[1 - \frac{\lambda_0^2}{(2b)^2} \right]^{1/2}.$$

Так как $\omega \gg \pi \frac{c}{a}, \pi \frac{c}{b}$ и, следовательно, $\lambda_0 \ll a, b$, то совпадение фаз произойдет при

$$\frac{\pi}{4} \lambda_0 l \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = 2\pi.$$

Откуда и находим l .

Энергия, посыпаемая через волновод к некоторой нагрузке, может частично поглотиться, а частично отразиться. Обозначая коэффициент отражения амплитуды a через r , для амплитуды отраженной волны имеем ar . В результате отражения получаем подобие стоячей волны с отношением максимальной напряженности (в пучности) к минимальной (в узле)

$$K = \frac{a + ar}{a - ar} = \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Если заданы посыпаемая мощность N_0 и поглощаемая в нагрузке N_h , то, учитывая, что мощность пропорциональна квадрату амплитуды, имеем

$$\frac{a^2 r^2}{a^2} = r^2 = \frac{N_0 - N_h}{N_0}.$$

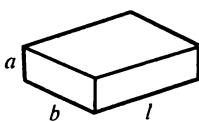


Рис. 12.22

Это уравнение подставляем в предыдущее соотношение (№ 12.52).

Волновод превращается в **объемный резонатор**, если вход в него и выход из него закрыты проводящими стенками.

Найдем **резонансные частоты** двух наименьших мод объемного резонатора в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами $a = 1$ см, $b = 2$ см, $l = 3$ см (рис. 12.22). Из (12.38), подставляя аналогично (12.37) $k_x = m\pi/b$ и беря наименьшие значения $n = 1$ и $m = 1$, чтобы получить наименьшее значение ω , имеем (№ 12.68)

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right). \quad (12.46)$$

Здесь взяты наибольшие стороны (b и l), чтобы ω было меньше.

Следующая наименьшая мода соответствует тому, что на наибольшей стороне укладывается не половина длины волны, а целая длина волны

$$\frac{\omega_1^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2^2}{l^2} \right).$$

Предполагая, что электрические параметры воздуха, заполняющего резонатор, не зависят от частоты, а потери энергии определяются удельной проводимостью ρ , найдем отношение добротностей резонатора при ω и ω_1 (№ 12.68). Потери на джоулеву теплоту в единице объема за период T при плотности тока j и напряженности электрического поля E равны

$$\Delta W \sim j^2 \rho T \sim E^2 \frac{T}{\rho}.$$

Запасенная энергия $W \sim E^2$. Поэтому добротность

$$Q \sim \frac{W}{\Delta W} \sim \frac{E^2 \rho}{E^2 T} \sim \frac{1}{T} \sim \omega.$$

Тогда

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Волну в волноводе (12.45) можно записать в комплексном виде

$$E_x = E_0 \sin(k_y y) \exp[i(\omega t - k_z z)]. \quad (12.47)$$

В трехмерном пространстве волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (12.48)$$

Подставляя сюда (12.47) и учитывая, что E_x не зависит от x , т. е. при изменении x не меняется, получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_y^2 + k_z^2, \quad (12.49)$$

что согласуется с (12.37), (12.38) и (12.46).

Найдем вектор Пойнтинга $\mathbf{S}(t, x, y, z)$ как функцию координат и времени в резонаторе, который представляет собой кубик со стороной a , с идеально проводящими стенками и вакуумным наполнением и в котором возбуждена основная мода электромагнитных колебаний, причем электрическое поле с амплитудой E_0 ориентировано по оси z (№ 12.47). Для основной моды электрического поля в данном резонаторе имеем

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_0 \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{a}\right) \cos \omega t,$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении оси z . Далее будут употребляться единичные векторы вдоль осей x и y \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y .

Из (12.10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E} = \\ &= -c E_0 \frac{\pi}{a} \left[\mathbf{e}_x \sin\left(\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(\pi \frac{y}{a}\right) - \mathbf{e}_y \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(2\pi \frac{y}{a}\right) \right] \cos \omega t. \end{aligned}$$

Отсюда можно найти выражение для поля \mathbf{H} . Из (12.46) частота основной моды в резонаторе

$$\omega = c \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{a^2} \right)^{1/2} = c \pi \frac{(2)^{1/2}}{a}.$$

Используя (12.23), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t, x, y, z) &= \\ &= c \frac{E_0^2}{16\sqrt{2}\pi} \left[\mathbf{e}_x \sin\left(2\pi \frac{x}{a}\right) \sin^2\left(\pi \frac{y}{a}\right) + \mathbf{e}_y \sin^2\left(\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(2\pi \frac{y}{a}\right) \right] \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Найдем максимальную напряженность E_0 электрического поля в прямоугольном резонаторе с проводящими стенками объемом V ,

добротностью Q , в котором полностью поглощается энергия от генератора электромагнитного излучения мощностью N с длиной волны λ , настроенного на основную моду резонатора (№ 12.48).

Учитывая связь эффективной напряженности с максимальной

$$E_{\text{эфф}} = \frac{E_0}{(2)^{1/2}},$$

для энергии в резонаторе получаем

$$W = \frac{E_0^2 V}{16\pi}.$$

Так как из (9.27)

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

а потери

$$\Delta W = NT = \frac{N\lambda}{c},$$

то

$$E_0^2 = 8QN \frac{\lambda}{Vc}.$$

Если стенки резонатора изнутри покрыты сверхпроводником, то для избежания пробоя (достижения критического магнитного поля) электрическое поле всюду не должно превышать E_0 . Измерения для прямоугольного резонатора (в горизонтальном сечении, имеющем форму квадрата со стороной a и высотой $h < a$) на низшей резонансной частоте показали добротность Q . Найдем, какую мощность N можно подводить непрерывно к резонатору на этой частоте, чтобы поддерживать колебания с максимально допустимой амплитудой (№ 12.49). Средняя энергия в объеме резонатора за период, учитывая гармоническое изменение напряженности поля и (3.69),

$$W = \frac{1}{2} E_0^2 h \frac{a^2}{8\pi}.$$

Из добротности (9.29) получаем для потерь за период

$$\Delta W = 2\pi \frac{W}{Q} = E_0^2 h \frac{a^2}{8\pi Q}.$$

Частота определяется из (12.46)

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right).$$

Откуда период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = a \frac{(2)^{1/2}}{c}.$$

Подводимая мощность

$$N = \frac{\Delta W}{T}.$$

Волновод может быть заполнен слабо проводящей (удельная проводимость λ) диэлектрической средой (диэлектрическая проницаемость ϵ). Найдем добротность отрезка такого волновода с запаянными торцами (прямоугольного резонатора с ребрами $a < b < l$) для самой низкой возможной резонансной частоты v_{min} , считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика (№ 12.44). Учитывая, что средняя энергия электрического поля за период T равна половине W_{max} , получаем

$$W_E = \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \epsilon E^2 \frac{dV}{8\pi} = \frac{1}{2} W_{max}.$$

Потери за период

$$W_{пот} = \int_0^T dt \iiint_V \lambda E^2 dV.$$

Добротность резонатора

$$Q = \frac{2\pi W_{max}}{W_{пот}} = \frac{\epsilon}{2T\lambda}.$$

Период надо выразить через самую низкую возможную частоту в резонаторе. Из (12.19) для фазовой скорости в диэлектрической среде имеем $c/(\epsilon)^{1/2}$. Подставляем ее вместо c в (12.46) с учетом необходимости получения наименьшей частоты. Период $T = 2\pi/\omega$.

Оценим силы, оказываемые электромагнитным полем на стеки объемного резонатора, имеющего в плоскости XOY квадратное сечение со стороной $a = 3$ см, в направлении оси OZ сторона равна $b = 1$ см в условиях, когда СВЧ-генератор непрерывно подводит

к резонатору мощность $N = 1$ Вт на наименее моде резонатора, добротность резонатора $Q = 10^3$ (№ 12.76). Из (12.46)

$$\omega = \sqrt{2\pi} \frac{c}{a}.$$

Из (9.29) энергия в резонаторе за период

$$W = Q \frac{\Delta W}{2\pi}.$$

Потери за период

$$\Delta W = NT = N \frac{2\pi}{\omega}.$$

Давление вдоль оси Z равно

$$p_z = \frac{W}{V} = Q \frac{N}{\omega V},$$

где объем $V = a^2 b$.

Рассмотрим распределение переменных токов по сечению проводников — **скин-эффект**. Так как в проводниках, по крайней мере в металлах, можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, то из (12.8) и (12.1) получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi \lambda \frac{\mathbf{E}}{c}. \quad (12.50)$$

Учитывая (12.7) и (12.50), находим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{H}}{\partial t} = -4\pi \frac{\mu \lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (12.51)$$

Рассмотрим однородный проводник с постоянными λ , μ , ϵ .

Непосредственным вычислением в декартовых координатах можно получить

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

При отсутствии в проводнике свободных зарядов из (12.11) и (12.6) получаем

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 4\pi \frac{\mu \lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (12.52)$$

Подобным же способом можно найти

$$\nabla^2 \mathbf{H} = 4\pi \frac{\mu \lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (12.53)$$

Рассмотрим поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z)e^{i\omega t}. \quad (12.54)$$

Здесь амплитуды \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 могут быть комплексными векторами, но от времени не зависят.

Подставляя (12.54) в (12.52) и сокращая на временной множитель, находим

$$\nabla^2 \mathbf{E}_0 = 4\pi \frac{\mu\lambda}{c^2} i\omega \mathbf{E}_0 = \frac{2i\mathbf{E}_0}{\delta^2}, \quad (12.55)$$

где введено обозначение

$$\delta = \frac{c}{(2\pi\mu\lambda\omega)^{1/2}}. \quad (12.56)$$

Предполагаем, что проводник занимает полупространство $z > 0$, так что его поверхность совпадает с плоскостью $z = 0$, а электрическое поле, следовательно, и ток направлены по оси x параллельно граничной поверхности ($E_y = E_z = 0$), причем напряженность поля зависит только от расстояния z рассматриваемой точки проводника от его поверхности, но не зависит от x и y . Из (12.55) получаем

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{0x} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{0x}}{\partial z^2} = 2i \frac{\mathbf{E}_{0x}}{\delta^2}. \quad (12.57)$$

Общее решение этого уравнения

$$E_{0x} = A e^{kz} + B e^{-kz},$$

где A и B — постоянные интегрирования; k — корень уравнения:

$$k^2 = \frac{2i}{\delta^2},$$

т. е.

$$k = \frac{(2i)^{1/2}}{\delta^2} = \frac{1+i}{\delta^2}.$$

Таким образом,

$$E_{0x} = A e^{z/\delta} e^{iz/\delta} + B e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta}. \quad (12.58)$$

Отметим, что в соответствии с (12.56) δ — вещественная величина.

Для ограниченности решения надо считать $A = 0$. В результате

$$E_x = E_{0x} e^{i\omega t} = B e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}. \quad (12.59)$$

Опуская мнимую часть, получаем

$$E_x = B e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right). \quad (12.60)$$

Для плотности тока находим

$$j_x = \lambda E_x = j_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right), \quad (12.61)$$

где $j_0 = \lambda B$ — амплитуда плотности тока на поверхности проводника.

Таким образом, амплитуды напряженности поля и тока убывают в глубь проводника по экспоненциальному закону. Можно считать, что поле и ток сосредоточены в слое **толщиной** δ , который называют **скин-слоем**.

При достаточно больших частотах электрическое поле в проводник фактически не проникает. Воспользовавшись (12.53) и (12.54), то же самое можем получить и для магнитного поля. Это похоже на отсутствие проникновения в сверхпроводник. При этом поле на проводник оказывает давление, определяемое (7.12), с учетом того, что усреднение $\cos^2 \omega t$ дает 1/2.

Капля ртути на несмачиваемой горизонтальной поверхности стола похожа на «блин». Если эту поверхность, предполагая, что она из непроводящего и немагнитного материала, поместить в высокочастотное (но удовлетворяющее квазистатичности $\omega l \ll c$, где l — характерный размер, а c — скорость света) магнитное поле, то на каплю, кроме поверхностного натяжения, будет действовать магнитное давление, и она окажется менее сплющенной. Известно, что до помещения в магнитное поле $B = B_0 \cos \omega t$ диаметр «блина» был равен $d = 10$ см. Найдем, какой должна быть амплитуда поля B_0 , чтобы на частоте $v = 1$ МГц диаметр блина уменьшился в два раза (№ 12.8). Используя (12.56), получаем толщину скин-слоя $\delta = 0,005$ см. Для вычисления высоты «блина» до помещения в магнитное поле можно воспользоваться решением, приведенным в книге 2, с. 342. Для оценки приравниваем давление за счет поверхностного натяжения на краях «блина» среднему давлению в капле. Откуда

$$h = 2 \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2}.$$

При коэффициенте поверхностного натяжения $\sigma = 0,465 \text{ Н/м} = 465 \text{ дн/см}$, $\rho = 13,5 \text{ г/см}^3$ и $g = 980 \text{ см/с}^2$ получаем $h = 0,375 \text{ см}$. Из сохранения массы капли (и объема) высота возрастет в 4 раза $h_1 = 1,5 \text{ см}$. Для равновесия

$$\rho g \frac{h_1}{2} = \frac{2\sigma}{h_1} + \frac{B_0^2}{16\pi}.$$

Отсюда $B_0 = 683 \text{ Гс}$.

Системой Лехера называют систему из двух параллельных проводов, для которой при распространении по ним переменных токов высокой частоты условие квазистационарности выполняется по отношению к поперечным размерам и не выполняется по отношению к продольному. Это значит, что расстояние между проводами должно быть мало по сравнению с длиной волны, а продольное расстояние (длина проводов) может составлять много длин волн. Вследствие этого сила тока I и линейная плотность электрического заряда q существенно меняются вдоль проводов. На рис. 12.23 изображен участок системы (проводы параллельны оси x , токи в них одинаковы по величине и противоположно направлены) с бесконечно малым элементом (от x до $x + dx$). Через конец A за время dt внутрь рассматриваемого элемента входит электрический заряд $I(x)dt$, а через D выходит заряд $I(x + dx)dt$. Обозначая изменение линейной плотности заряда со временем q' (производная по времени), получаем изменение (сохранение) заряда

$$q'dxdt = [I(x) - I(x + dx)]dt = -\frac{\partial I}{\partial x}dxdt.$$

Таким образом,

$$q' = -\frac{\partial I}{\partial x}. \quad (12.62)$$

Для электрического поля между проводами E и разности потенциалов V имеем

$$\int_{DC} Edl = U(x + dx), \quad \int_{BA} Edl = V(x);$$

$$\int_{DC+BA} Edl = U(x + dx) - U(x) = \frac{\partial U}{\partial x} dx;$$

$$\int_{AD+CB} Edl = RI dx,$$

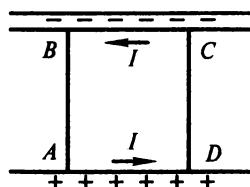


Рис. 12.23

где Rdx — суммарное сопротивление элементов проводов AD и CB . Используя эти соотношения и обозначая магнитный поток, пронизывающий контур $ABCD$,

$$\Phi = \int_{ABCD} Bds = LI,$$

где L — индуктивность единицы длины линии, из (12.2) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} + RI = -\frac{1}{c} \Phi' = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (12.63)$$

Вводя $C = q/U$ — ёмкость на единицу длины линии, из (12.62) имеем

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (12.64)$$

При $R = 0$ из (12.63) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (12.65)$$

Из последних двух уравнений следуют волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{c^2}{CL} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{c^2}{CL} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0.$$

Фазовая скорость волн

$$v = \frac{c}{(CL)^{1/2}}. \quad (12.66)$$

В бегущей волне напряжение и ток связаны соотношением, сходным с законом Ома:

$$U = \pm WI. \quad (12.67)$$

Здесь введено **волновое сопротивление линии**

$$W = \frac{1}{c} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2}. \quad (12.68)$$

Сходство с законом Ома чисто внешнее, так как разность потенциалов берется не вдоль проводов, как в законе Ома, а между проводами.

Для тонких цилиндрических проводов радиусом a на расстоянии h в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ имеем

$$L = 4\mu \ln\left(\frac{h}{a}\right); \quad C = \frac{\epsilon}{4 \ln(h/a)}.$$

Поэтому из (12.66) получаем

$$v = \frac{c}{(\epsilon\mu)^{1/2}}. \quad (12.69)$$

Эта фазовая скорость совпадает с фазовой скоростью электромагнитной волны в свободном пространстве.

При распространении гармонической волны, как следует из (12.67) и (12.68), ток и напряжение колеблются в одинаковых фазах. Так как в бегущей волне электрический и магнитный векторы перпендикулярны проводам, вектор Пойнтинга параллелен проводам и направлен от источника энергии.

Соединим провода лехеровой системы в некоторой точке мостиком из последовательно соединенных катушки индуктивности, омического сопротивления и емкости (с импедансом мостика Z). Волновое сопротивление до мостика W и после мостика W' могут быть разными. Падающая на мостик волна может частично проходить, а частично отражаться. Найдем у мостика отраженную (I_r) и прошедшую (I_d) волны тока, а также ток через мостик I , если ток падающей волны равен I_e . Напряжение в падающей V_e , отраженной V_r и прошедшей V_d волнах у мостика:

$$V_e = WI_e; \quad V_r = -WI_r; \quad V_d = W'I_d.$$

Минус показывает, что отраженная волна идет назад.

Пользуясь правилом Кирхгофа для токов, имеем

$$I_e + I_r = I + I_d.$$

Напряжения между концами мостика можно записать

$$ZI = V_e + V_r = V_d.$$

Выражая напряжения через токи, получаем

$$ZI = W(I_e - I_r), \quad ZI = W'I_d.$$

Решая эти уравнения вместе с уравнением для токов, находим

$$\frac{I_r}{I_e} = \frac{WW' + (W - W')Z}{\Delta}; \quad \frac{I_d}{I_e} = \frac{2WZ}{\Delta}; \quad \frac{I}{I_e} = \frac{2WW'}{\Delta},$$

где $\Delta = WW' + (W + W')Z$.

Для мостика, поставленного в конце линии, получаем в случае отсутствия прошедшей волны ($W' = \infty$)

$$I_r = (W - Z) \frac{I_e}{W + Z}; \quad I = \frac{2WI_e}{W + Z}.$$

При закороченной линии ($Z = 0$) и со свободными концами ($Z = \infty$) в обоих случаях отражение полное, но с разными фазами в первом случае пучность, во втором узел. При чисто реактивном сопротивлении ($Z = iX$) отражение также полное $|I_r| = |I_e|$, а наличие реактивного сопротивления сказывается только на положении узлов и пучностей.

В стоячей волне, которая образуется при полном отражении, узлы тока являются пучностями напряжения, а узлы напряжения — пучностями тока. В узлах вектор Пойнтинга равен нулю. Электромагнитная энергия колеблется между узлами, не переходя через них.

Отраженной волны нет, если

$$Z = W. \quad (12.70)$$

По системе распространяется только бегущая волна. Такое сопротивление называется **согласованным**.

Рассмотрим систему Лехера, в которой между проводами (диаметр $2a$, расстояние между ними h) поставлен плоский лист проводящей пленки толщиной δ с удельным сопротивлением ρ . Используя соотношения для индуктивности на единицу длины провода

$$L = 4\mu \ln\left(\frac{h}{a}\right)$$

и емкости на единицу длины провода

$$C = \frac{\epsilon}{4 \ln(h/a)}$$

при $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$, получаем для волнового сопротивления системы

$$W = \frac{1}{c} \left(\frac{L}{C} \right)^{1/2} = \frac{4}{c} \ln\left(\frac{h}{a}\right).$$

При определении сопротивления из (4.23) емкость надо взять на расстоянии δ . В итоге имеем сопротивление между проводами

$$R = \frac{\rho}{4\pi\delta C}.$$

В случае отсутствия отраженной и проходящей волн $Z = R = W$. Откуда (№ 12.75)

$$\delta = \rho \frac{c}{4\pi}.$$

Если для передачи электромагнитной энергии от генератора высокочастотных колебаний к нагрузке используется длинная линия, состоящая из двух плоских шин (ширина их l , расстояние между ними h), расположенных параллельно друг другу, то на единицу длины емкость равна

$$C = \frac{l}{4\pi h}; \quad L = 4\pi \frac{h}{l},$$

так как для потока

$$\Phi = 4\pi I \frac{h}{cl} = L \frac{I}{c}.$$

Из (12.66) фазовая скорость волны $v = c$. Для отсутствия отраженной волны должны выполняться (12.70) и (12.68), т. е. (№ 12.67)

$$Z = \frac{1}{c} \frac{L}{C} = 4\pi \frac{h}{cl}.$$

Торец линии можно закрыть пленкой толщиной δ из полупроводникового материала с удельным сопротивлением ρ . Найдем, при каком отношении ρ/δ не будет отраженной и проходящей волн (№ 12.74). Так как

$$R = \rho \frac{h}{\delta l} = Z,$$

то в соответствии с полученным ранее

$$\frac{\rho}{\delta} = \frac{4\pi}{c}.$$

На рис. 12.24 показана система Лехера, находящаяся в емкостной связи с генератором синусоидальных колебаний, который поддерживает между концами A и B переменное напряжение

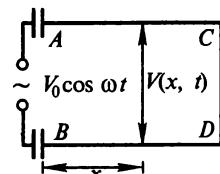


Рис. 12.24

$V_0 \cos \omega t$ (V_0 и ω — постоянные), а концы C и D закорочены. Длина лежеровой системы $AC = BD = l$. Найдем распределение напряжения $V(x, t)$ между проводами как функцию координаты x и времени t , предполагая, что колебания установились, а активное сопротивление всех проводов равно нулю (№ 12.42). В системе установится стоячая волна, представляющая сумму волн, бегущих в противоположных направлениях,

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx - \delta) + \frac{A}{2} \cos(\omega t + kx + \delta) = \\ &= A \cos \omega t \cos(kx + \delta). \end{aligned}$$

При $x = l$ напряжение должно равняться нулю, поэтому

$$kl + \delta = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots.$$

Откуда

$$\delta = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) - kl.$$

Амплитуду колебаний находим из условия на AB

$$V(0, t) = V_0 \cos \omega t = A \cos \omega t \cos \delta.$$

Полностью ионизованная плазма состоит из электронов и тяжелых положительных ионов, которые можно считать неподвижными. Допустим, что плазма находится между двумя плоскостями (например, перпендикулярными осям x), заряд электронов e и число их в единице объема n . Если все электроны смещаются из положения равновесия на расстояние x , то возникнет электрическое поле $E = 4\pi ne^2 x$. Сила, действующая на электрон, $F = 4\pi ne^2 x$. Обозначая производную по времени штрихом, получаем уравнение движения электрона $mx'' = -F$. Это уравнение колебаний электрона с так называемой **плазменной частотой**

$$\omega_p = \left(4\pi n \frac{e^2}{m} \right)^{1/2}. \quad (12.71)$$

Эта частота зависит от числа электронов в единице объема плазмы. Когда по плазме распространяется электрическое поле

$E = E_0 e^{-i(\omega t - kx)}$, то смещение электрона r описывается уравнением $mr'' = -eE$. Дважды интегрируя, получаем

$$r = eE_0 \frac{e^{-i(\omega t - kx)}}{m\omega^2} = \frac{eE}{m\omega^2}.$$

Из (3.8), (3.1) и (12.71) находим

$$\epsilon = 1 - 4\pi n \frac{e^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (12.72)$$

Такое изменение диэлектрической проницаемости надо учитывать, например, при пропускании электронного пучка через пространство между пластинами конденсатора, заполненное диэлектрической средой ($\epsilon = 1$). Если конденсатор входит в колебательный контур с резонансной частотой ω_0 , то она изменится. Найдем, во сколько раз изменится резонансная частота, предполагая, что пучок сечением S с энергией электронов W и полным током I идет параллельно пластинам конденсатора, полностью заполняя пространство между ними (№ 12.56). Для плоского конденсатора емкость, как следует из (3.56), увеличится в ϵ раз. При этом, как следует из (9.8), новая резонансная частота

$$\omega = \frac{\omega_0}{\epsilon^{1/2}}.$$

Из (12.72)

$$\epsilon(\omega) = 1 - 4\pi n \frac{e^2}{m\omega^2} = 1 - a \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Откуда

$$\omega = \omega_0 (1 + a)^{1/2},$$

где

$$a = 4\pi I \frac{e}{S\omega_0^2 (mW)^{1/2}}.$$

Если через волновод прямоугольного сечения со сторонами $a < b$ распространяется волна низшего типа (т. е. H_{01}), возбуждаемая генератором микроволнового излучения с частотой ω , то для трехмер-

ного (пространственного) случая, учитывая диэлектрическую проницаемость ϵ , из (12.17) получаем

$$\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right). \quad (12.73)$$

Обозначим ось волновода, по которой распространяется волна, z . Для бегущей волны $E_x = E \cos(\omega t - kr)$ с учетом (12.30) находим

$$\frac{\epsilon \omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi m^2}{a^2} + \frac{\pi^2 l^2}{b^2} + k_z^2,$$

где $k_z = k = 2\pi/\lambda$.

Для волны, имеющей наименьшую возможную частоту для данного волновода, при $a < b$ должно быть $m = 0$ и $l = 1$. Таким образом,

$$\frac{\epsilon \omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + k^2. \quad (12.74)$$

Известно, что воздух, для которого можно считать $\epsilon = 1$, оставшийся в волноводе после его вакуумирования, превращается в плазму, для которой ϵ определяется (12.72). Найдем концентрацию электронов в плазме (n), если известно, что длина волны в волноводе после ионизации удваивается $\lambda_2 = 2\lambda_1$ и соответственно $k_2 = k_1/2$ (№ 12.54). Из (12.74) для воздуха

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + k_1^2$$

для плазмы, с учетом (12.60) и того, что частота генератора не меняется,

$$\left(1 - 4\pi n \frac{e^2}{m\omega^2} \right) \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + k_2^2.$$

Следовательно,

$$n = 3m \frac{\omega^2 - \pi^2 c^2/b^2}{16\pi e^2}.$$

Рассмотрим плазму со средней концентрацией электронов и ионов n_0 и температурой T , находящуюся между пластинами плоского конденсатора, расстояние между которыми равно a , а разность потенциалов V_0 . Пренебрегая током через плазму, краевыми эффектами

ми и считая $eV_0 \ll kT$ (k — постоянная Больцмана; e — заряд электрона), найдем зависимость потенциала в плазме между пластиинами от координаты, перпендикулярной пластиинам $V(x)$ (№ 12.55). В поле конденсатора энергия электронов ($-eV$), а энергия ионов (eV). В соответствии с распределением Больцмана концентрация электронов

$$n_e = n_0 e^{eV/kT} \approx n_0 \left(1 + \frac{eV}{kT}\right); \quad n_i \approx n_0 \left(1 - \frac{eV}{kT}\right).$$

Плотность заряда

$$\rho = 4\pi e (n_e - n_i) = 4\pi 2 n_0 e^2 \frac{V}{kT} = \frac{V}{l_{\Delta}^2}.$$

Здесь введена важная характеристика плазмы — **дебаевский размер** (или **радиус**), который определяет размер экранировки или расстояние, на котором электрическая энергия порядка тепловой

$$l_{\Delta} = \left(\frac{kT}{8\pi n_0 e^2} \right)^{1/2}. \quad (12.75)$$

Из (2.11) имеем уравнение Пуассона

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{V}{l_{\Delta}^2}.$$

Его решение

$$V = V_1 \exp\left(\frac{x}{l_{\Delta}}\right) + V_2 \exp\left(-\frac{x}{l_{\Delta}}\right).$$

Границные условия: при $x = 0$ $V = 0$, при $x = a$ $V = V_0$. Откуда

$$V_0 = V_1 \left[\exp\left(\frac{a}{l_{\Delta}}\right) - \exp\left(-\frac{a}{l_{\Delta}}\right) \right] = 2V_1 \operatorname{sh}\left(\frac{a}{l_{\Delta}}\right).$$

Окончательно

$$V = V_0 \frac{\operatorname{sh}(x/l_{\Delta})}{\operatorname{sh}(a/l_{\Delta})}.$$

Когда по длинному плазменному цилиндру диаметром $2R$ течет ток I , то образующееся магнитное поле (5.2)

$$H = \frac{2I}{cR}$$

в соответствии с (7.12) создает давление

$$p = \frac{H^2}{8\pi} = \frac{I^2}{2\pi c^2 R^2}.$$

Если ток сосредоточен в поверхностном слое, а давление внутри цилиндра в плазме больше магнитного давления, то плазменный цилиндр будет расширяться (№ 12.57).

Рассмотрим плазменный шнур (Z -пинч), вдоль оси которого течет ток I . Считаем, что плазма нейтральна с однородным распределением плотностей частиц и тока по поперечному сечению пучка и что магнитное давление собственного магнитного поля пучка уравновешивается газокинетическим давлением плазмы. При этом температура меняется по сечению пучка. Оценим температуру T плазмы на оси пучка (№ 12.58). Из закона Ампера плотность силы магнитного давления в зависимости от расстояния r от оси пучка

$$\mathbf{f}(r) = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{B}].$$

Эта сила действует на объем dV , представляющий собой тонкое кольцо толщиной dr , высотой l ($dV = 2\pi l r dr$). Из (5.7), следующего из теоремы о циркуляции,

$$B = H = 2\pi j \frac{r}{c}.$$

Магнитное давление, действующее на стенки элементарного объема (боковую стенку цилиндра радиусом r),

$$dp = -fdr = -2\pi j^2 r \frac{dr}{c}.$$

Здесь надо поставить минус, так как \mathbf{f} направлено противоположно \mathbf{r} . Интегрируя, найдем распределение магнитного давления внутри плазменного пучка

$$\int_{p(R)}^{p(r)} dp = 2\pi j^2 \int_R^r r \frac{dr}{c} = \pi R^2 j^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Таким образом,

$$p(r) = p(R) + I^2 \frac{1 - r^2/R^2}{c^2 \pi R^2}.$$

Магнитное давление, направленное к центру шнура, уравновешивается газокинетическим давлением плазмы $p(r) = nkT(r)$. Предполагается, что для электрически нейтральной плазмы можно воспользоваться уравнением состояния идеального газа. Следовательно,

$$T(r) = \frac{p(R)}{nk} + I^2 \frac{1 - r^2/R^2}{c^2 \pi R^2 nk}.$$

Первый член в этой формуле – температура на периферии шнура $T(R)$, которой можно пренебречь по сравнению с температурой на оси. Тогда

$$T(0) = \frac{I^2}{c^2 \pi R^2 nk}.$$

При заданной температуре можно найти необходимый ток или магнитное поле (№ 12.59).

Этой же формулой можно воспользоваться, если задано число частиц на единицу длины плазменного шнура $N = n\pi R$ (№ 12.62).

При быстром сжатии плазменного шнура сохраняется магнитный поток. Когда по тонкой цилиндрической плазменной оболочке течет ток I , то магнитное поле определяется (5.2)

$$H = \frac{2I}{cr}.$$

Если внутри оболочки предварительно создано продольное магнитное поле H_0 , то внешним магнитным полем оболочки будет сжиматься от начального радиуса R до некоторого радиуса r , при котором внешнее магнитное поле станет равным магнитному полю внутри, которое получается в результате сохранения магнитного потока:

$$H = H_0 \frac{R^2}{r^2} = \frac{I}{cr}.$$

Откуда получаем (№ 12.61)

$$r = H_0 R^2 \frac{c}{2I}.$$

В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц вызывает объемную ионизацию. Найдем время сортирования ионов в

таком счетчике, наполненном аргоном при нормальном давлении. Радиус катода R , радиус анода $a \ll R$. Разность потенциалов между анодом и катодом U . Подвижность положительных ионов аргона b (№ 12.60). В случае цилиндрической симметрии электрическое поле $E = A/r$, где A — постоянная величина; r — расстояние от оси симметрии. Разность потенциалов

$$U = \int_R^a E dr = A \ln\left(\frac{R}{a}\right).$$

Перемещение иона описывается уравнением

$$\frac{dr}{dt} = b \frac{U(1/r)}{\ln(R/a)}.$$

Интегрируя, найдем время перемещения иона на расстояние порядка R

$$T = R \frac{\ln(R/a)}{2bU}.$$

Если известно, что после накопления в резонаторе плазмы, образующейся в результате ионизации оставшегося после откачки воздуха, частота наимизшей моды колебаний удваивается, то можно найти концентрацию электронов плазмы (№ 12.53). Используя (12.73), (12.72) и (12.71), находим в случае воздуха ($\epsilon = 1$)

$$\frac{\omega_1^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{l^2},$$

в случае плазмы

$$\frac{4\omega_1^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{l^2}.$$

С помощью (12.71) получаем

$$n = 3\pi mc^2 \frac{1/b^2 + 1/l^2}{4e^2}.$$

Оценим силы F_x , F_y и F_z , оказываемые электромагнитным полем на стенки объемного резонатора, имеющего размеры в плоскости XOY : $a_1 = a_2 = a = 3$ см, по оси OZ : $b = 1$ см, в условиях, когда СВЧ-генератор непрерывно подводит к резонатору мощность $N = 1$ Вт на наимизшей моде резонатора. Добротность резонатора $Q = 10$

(№ 12.76). Из (9.29) для энергии за период имеем $W = QN/\omega$. Плотность электромагнитной энергии в объеме V равна

$$w = W/V = QN/\omega V.$$

В соответствии с (7.12) эта энергия определяет давление.

Из (12.46) наименьшая частота

$$\omega = c\pi \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Электромагнитное поле представляет двумерную стоячую волну. Энергия w распределяется на четыре бегущие волны. На стенках, перпендикулярных X и Y , складываются две волны. Поэтому

$$F_x = F_y = \frac{1}{2}wab = \frac{QN}{2\omega a} = 0,037 \text{ дин.}$$

По оси Z волны не идут, поэтому $F_z = 0$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда вынужденных колебаний 363
Амплитудная модуляция 426
Апериодичность 321
- Баллистический гальванометр 377
Бетатрон 275
- Вектор
— магнитной индукции 173
— намагничивания 173
— Пойнтига 481
— поляризации 64
— электрической индукции (смещения) 65
- Векторная диаграмма 368
- Векторный потенциал магнитного поля 160
- Вихревое электрическое поле 201
- Волноводы 503
- Волновое уравнение 480
- Волновой вектор 501
- Время релаксации 322
- Гармоническая бегущая волна 500
- Гармоническая волна 481
- Гистерезис 172, 186
- Гиромагнитное отношение 272
- Глубина модуляции 426
- Градиент 30, 148
- Давление поля 223
— магнитного 223
— электрического 109, 112, 113
- Дебаевский радиус 524
- Декремент затухания 322
- Диамагнетики 172
- Дивергенция 20, 148
- Диполь 11, 25, 62, 63
- Дисперсионное соотношение 501
- Диэлектрик 64
- Диэлектрическая проницаемость (диэлектрическая постоянная) 66
- Добротность колебательного контура 322
- Дробовой шум 459
- Емкость 87
- Закон Ампера 196
— Биб—Савара—Лапласа 141
— Джоуля—Ленца в дифференциальном виде 119
— Джоуля—Ленца в интегральном виде 120
— Кулона 7, 66
— Ома в дифференциальном виде 118
— Ома для цепи тока 120
— сохранения заряда 117
— сохранения энергии 316
— Фарадея 171
— электромагнитной индукции 170
- Замороженная поляризация 82
- Зацепленный поток 165
- Избирательность контура 392
- Изолятор 64
- Импеданс (полное сопротивление) 365
- Индукционный ток 200
- Интеграл Фурье 425

Квадруполь 13	
Комплексная амплитуда 367	
Коэрцитивная сила 183	
Коэффициент взаимной индукции 167	
— затухания 315	
— размагничивания 186	
— самоиндукции (индуктивность) 165	
Критическая (гранична) частота 504	
— длина волны 504	
— температура 188	
Критическое поле 188	
— сопротивление	321
Кулон 8	
Ларморовская частота 272	
Линейчатый спектр 426, 430	
Логарифмический декремент затухания 322	
Магнитная восприимчивость 174	
— «ловушка» 268	
— постоянная 164	
— проницаемость 174	
— «термоизоляция» 269	
Магнитно-гидродинамический генератор 298	
Магнитное поле бесконечно-го прямолинейного провода с током 141	
— витка с током 142	
— соленоида 162	
Магнитный диполь 142	
Материальные уравнения 465	
Метод электрических изображений 36	
Модуляция фазы 427	
Молекулярные токи 172	
Момент диполя 11	
Монополь Дирака 296, 466	
Мощность переменного тока 371	
— тепловых потерь 205	
Набла 30	
Напряженность электрического поля 9	
— магнитного поля 141	
Несущая частота 426	
Обобщенный закон Ома в дифференциальном виде 119	
Оператор Лапласа 31	
Остаточная намагниченность 183	
Отключение цепей 355	
Парамагнетики 172	
Параметрический резонанс 456	
Переменный ток 365	
Плазма 521	
Плазменная частота 284, 522	
Плоская поперечная электромагнитная волна 479	
Плоский конденсатор 18, 109, 110	
Плотность тока 117	
— энергии магнитного поля 223	
— электрического поля 103	
Показатель преломления	
среды 480	
Поляризация 64	
Поляризуемость 64	
Пондеромоторные силы 106	
Потенциал 29	
— диполя 33	
Потенциальная энергия 28	
Поток вектора магнитной индукции 164	
Правила Кирхгофа 120, 368	
Правило Ленца 200	
Преобразование Фурье 425	
Пьезоэффект 64	
Размагничающий фактор 186	
Расстройка 392	
Реактивное сопротивление (релактанс) 365	
Резонанс напряжений 394	
— токов 395	

- Резонансная частота 363
Резонаторы 509
Ротор 148
Ряд Фурье 424
- Сверхпроводимость 188
Сверхпроводник первого рода 188
— второго рода 189
Свободные затухающие колебания 320
— незатухающие колебания 316
Связанные заряды 65
Система Лехера 516
Сила Ампера 196, 201, 224
— Лоренца 200, 256
Силовая линия 9
Скин-эффект 515
Скорость дрейфа 281
Собственная частота колебательного контура 315
Согласованная нагрузка 495
Согласованное сопротивление 519
Солнечный ветер 258
Соотношение неопределенности 430
Сопротивление провода 120
Спектральный анализ 426
Суперпозиция 9
Сферический конденсатор 88
- Теорема взаимности 167
— Гаусса 15, 20, 65
— Ирншоу 10
— о среднем 47, 68
— о циркуляции 148, 173
Типы электромагнитных волн (TE и TM) 504
Ток смещения 465
- намагничивания 172
— Фуко 475
Толщина скин-слоя 515
Трансформатор 401
- Удельная проводимость (электропроводность) 118
Удельное сопротивление 118
Уравнение гармонических колебаний (гармонического осциллятора) 316
Уравнения Максвелла 465
Уравнение Пуассона 31
— силовых линий точечного диполя 12
- Фазовая скорость 480
Фазовый сдвиг 378
Ферромагнетики 172
Формула Эйлера 366
- Циклотронная частота 257
Циклотронный (ларморовский) радиус 257
Цилиндрический конденсатор 93
- Ширина резонансной кривой 392
— спектра 430
Шумы 459
- Экранировка 35
Электризация 7
Электромагнитные волны 479
Электромагнитный импульс 482
Энергия в конденсаторе 98, 103
Эффект Мейснера 188
Эффективные значения параметров переменного тока 371

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
1. Электрический заряд и напряженность электрического поля. Диполь. Теорема Гаусса	7
2. Потенциал. Метод электрических изображений	28
3. Электрическое поле в веществе. Энергия электрического поля. Энергетический метод вычисления пондеромоторных сил	64
4. Постоянный ток. Токи в неограниченной среде	117
5. Магнитное поле. Закон Биб—Савара—Лапласа. Теорема о циркуляции в вакууме. Индуктивность проводников. Теорема взаимности	141
6. Магнитное поле в веществе. Векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} . Теорема о циркуляции в веществе. Сверхпроводник в магнитном поле	172
7. Электромагнитная индукция. Энергия и силы в магнитном поле. Сохранение магнитного потока в сверхпроводящих контурах	200
8. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. ЭДС Холла. Движение при наличии пондеромоторных сил	249
9. Переходные процессы в электрических цепях. Свободные колебания	314
10. Вынужденные колебания. Резонанс. Метод комплексных амплитуд	362
11. Элементы спектрального анализа. Автоколебания. Параметрический резонанс. Шумы	424
12. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны. Волноводы и резонаторы. Плазма	465
Предметный указатель	530

Учебное издание

Коряков Владимир Павлович

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ОБЩЕМ КУРСЕ ФИЗИКИ.
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

Редактор *O. A. Кузнецова*
Внешнее оформление *H.E. Ильенко*

Изд. № 036. Подп. в печать 06.04.11. Формат 60×88 $\frac{1}{4}$.
Бум. офсетная. Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Объем 32,83 усл. печ. л., 33,57 усл. кр.-отт.
Тираж 1500 экз. Заказ № 352.

ООО «ТИД» «Студент».
109004, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 64, стр. 2, офис 717 (31).
Тел. (495) 915-80-41; (495) 915-08-96.

Отпечатано ООО «Великолукская городская типография».
182100, Псковская область, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12.