Mathématiques

Classe : Bac technique

Série : Complexes 1

Nom du Prof : Hajer El May

Rappels

Activité 1 — 5 min

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

1. Placer les points A, B et C de $\mathscr{C}$ tels que

$$(\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OA}) \equiv \frac{5\pi}{6}\left[2\pi\right],\quad (\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{-\pi}{3}\left[2\pi\right] \text{ et } (\vec{u}\,,\,\overrightarrow{OC}) \equiv \frac{3\pi}{4}\left[2\pi\right].$$

2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B et C.

Activité 2 — 5 min — 20 pt

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points

$A\left(\sqrt{3},\ 1\right)$; $B\left(0,\ -1\right)$; $C\left(2,\ -2\right)$ et $D\left(-2,\ 2\sqrt{3}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées polaires de chacun de ces points.
2. Placer ces points.

Définition et opérations sur les nombres complexes

Activité3 — 5min

On considère les équations

$(E_1): x+2=0$; $(E_2): x^2-2=0$; $(E_3): 2x^2-3x-2=0$; $(E_4): x^2+1=0$.

Résoudre chacune de ces équations dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$.

Soit a un réel strictement négatif. L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solutions réelles. Par contre, elle admet des solutions dans un ensemble contenant $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$.

Activité 4 — 10 min

1 On donne les nombres complexes $z = 1+2i$ et $z' = -3+i$.

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$z+z'$; $z-z'$; $z\times z'$; $z+iz'$; $z^2-z'^2$; $-z^3$; $(-z')^2$.

2. Soit $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux nombres complexes tels que a, b, a', b' appartiennent à $\mathbb{R}$.

a. Vérifier que $zz' = aa' + i\,(ab'+a'b) - bb'$.

b. En déduire $\Re e\left(z\times z'\right)$ et $\Im m\left(z\times z'\right)$.

Activité 5 — 15 min

1. Calculer $(1 + i)(1- i)$, $(1 + i)^2$, $(-1 + i)^3$.
2. a. Calculer i^3, i^4, i^5, i^6, i^7 et i^8.
   b. Calculer i^n, $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes $-3 \times i^{58}$ et $6 \times i^{2006}$.
4. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes $(i-\sqrt{3})^3$ et $(-1+i)^4$.

Conjugué d'un nombre complexe

Activité 6 — 15 min

1)

Déterminer les conjugués des nombres complexes ci-dessous.

$1+2i$; $-\sqrt{2}+3i$; i ; i^3.

2)

Déterminer les conjugués des nombres complexes ci-dessous.

$(1+i)^2(-3+2i)$; $\dfrac{1}{2-i}$; $\dfrac{2i}{1+i}$; $\dfrac{5-i}{5+i}$.

Equation $z^2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Activité 7 — 5 min

1. a. Soit z un nombre complexe. Factoriser l'expression $z^2 + 1$.
   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 = 2$ et $z^2 = -2$.

Interprétation géométrique

Activité 8 — 10 min

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour chacun des cas ci-dessous, placer le point M de coordonnées $\left(\Re e(z), \Im m(z)\right)$.
   $z=2$, $z=-3i$, $z=1-2i$, $z=3+i$ et $z=-1+3i$.
2. Déterminer chacun des ensembles
   $E_1=\left\{M\left(\Re e(z), \Im m(z)\right) \text{ tels que } \Im m(z)=0\right\}$ et $E_2=\left\{M\left(\Re e(z), \Im m(z)\right) \text{ tels que } \Re e(z)=0\right\}$.

Activité 8 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. Placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives
   $z_A=2$, $z_B=-3i$, $z_C=1-2i$, $z_D=3+i$ et $z_E=-1+3i$.
2. Placer alors les points A', B', C', D' et E', symétriques respectifs de A, B, C, D et E, par rapport à $(O,\vec{u})$.
3. Déterminer les affixes de A', B', C', D' et E'. Que remarque-t-on ?

Activité 9 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A tout point M d'affixe $z=x+iy$ tel que x et y appartiennent à $\mathbb{R}$, on associe le point M' d'affixe $z'=x^2+y^2-x+2y+i(-2x+y+1)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $z'=\overline{z'}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $z'=-\overline{z'}$.

Module d'un nombre complexe

Activité 10 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C et Ω les points du plan ayant pour affixes respectives

$z_A = 1$; $z_B = 3 + 2i$; $z_C = 4 - i\sqrt{3}$ et $z_\Omega = 3$.

1. On désigne par E l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation $|z - 3| = 2$.
   a. Les points A, B et C sont-ils des points de E ?
   b. Déterminer E puis le tracer.

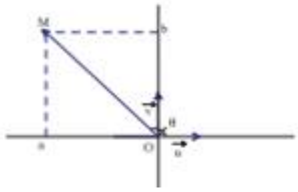
2. On désigne par F l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$. Déterminer F puis le tracer.

Argument d'un nombre complexe non nul

Activité 11 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 3i$, $z_C = 1 + i$ et $z_D = \sqrt{3} - i$.
   Déterminer les coordonnées polaires de chacun des points A, B, C et D.
   b. En déduire une nouvelle écriture des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
2. Soit M un point d'affixe non nulle $z_M = a + ib$.
   On note (r, θ) les coordonnées polaires de M.
   Montrer que $z_M = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.



Activité 11 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe non nul z, dans chacun des cas suivants.
   $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$; $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$; $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
2. Représenter les ensembles
   $E = \left\{M(z) \in P / \arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$; $F = \left\{M(z) \in P / \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$.

Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Activité 12 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

   $z_1=-1+i$; $z_2=\sqrt{3}-i$; $z_3=1+i\sqrt{3}$; $z_4=2+2i$.

2. En déduire les coordonnées polaires de leurs images.

Activité 13 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_B=1-i$ et $z_C=\dfrac{z_A}{z_B}$.

1. Déterminer une écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes z_A et z_B.
2. Déterminer une écriture trigonométrique du nombre complexe z_C.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Activité 14 — 10 min

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A un point d'affixe $z_A=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A.
2. On désigne par B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Déterminer z_B l'affixe de B.
   b. Déterminer l'affixe du point B' symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.
3. On désigne par C le point d'affixe $z_C = z_A \times z_B$.
   Montrer que C est l'image de A par une rotation que l'on déterminera.