FONCTIONS RECIPROQUES

Titre	Description	Remarques

- Définitions:

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur f(I) si pour tout y de f(I) l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

• Soit f une bijection de I sur f(I). On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur f(I) qui à tout y de f(I) associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$.
Il on découle que :

$\forall\, x \in I$ et $\forall\, y \in f(I)$, $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

et $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ et aussi $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$.

- Théorèmes (bijection)

• Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur f(I) et on a :

• f^{-1} possède le même sens de variation que f.

• $\begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$

• (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$..

• Théorème : (dérivabilité de f^{-1})

Si $\begin{cases} \bullet f \text{ est strictement monotone sur } I \\ \bullet f \text{ est dérivable sur } I \\ \bullet f' \text{ ne s'annule jamais sur } I \end{cases}$ alors f^{-1} est dérivable sur f(I)

et on a pour tout $x \in f(I)$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$ avec $y = f^{-1}(x)$

Théorème et définition :	Fonction racine nième : Soit n un entier supérieur ou égal à 2. La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque Strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine nième. On a : $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$. Lorsque $n = 2$ et pour x positif on note $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$. Conséquences : Soient deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. On a : • $\sqrt[n]{a^n} = a$ • $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ • $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ • $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$. • $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ • $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$ • $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$. Théorème : Pour tout entier $n \geq 2$ et $p \geq 2$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x > 0$.	