Lycée qualifiant Tassaouat	Série6 : Notions de logique	Niveau :1BAC STM/STE

Exerxice1 :

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers
4. Il existe un entier multiple de tous les autres
5. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel
6. f est paire
7. f est croissante
8. f ne s'annule jamais.
9. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{Z}$.

Exerxice2 :

Déterminer la valeur de vérité et la négation de chaque proposition suivante :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x \geq y$
2. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x \geq y$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$
4. $(-6 < -8\ et\ 4+1=5) ou\ \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
5. $(-6 < -8 \Rightarrow 4+1=5) ou\ \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
6. $(\exists x \in \mathbb{R}_-)\ x^2 = 4$
7. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{Z})\ n \leq x < n+1$
8. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ xy = 0 \Rightarrow x = 0\ ou\ y = 0$
9. $(\forall n \in Z)\ (n\ impair\ ou\ n = 2) \Rightarrow n\ premier$
10. $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$

Exerxice3 :

I. On utilisant le raisonnement par contre-exemple, montrer que les propositions suivantes sont fausses.

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x^2 + y^2 \geq x + y$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \sqrt{a^2+b^2} = a + b$

II.

1. Soient $x\ et\ y \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Par $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$; montrer que :

$|x-1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}|x-1| \leq |f(x) - f(1)| \leq \frac{1}{2}|x-1|$

III. On utilisant le raisonnement par contraposée montrer que :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$
$(x \neq 1 \wedge y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y$
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ montrer que si 8 ne divise pas $n^2 - 1$ alors n est pair.

IV. Montrer par l'absurde que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\quad \frac{4n+3}{6} \notin \mathbb{N}$
2. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

V. On utilisant la démonstration par séparation des cas. Montrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ \frac{4n+3}{6} \in \mathbb{N}$
2. Montrer que 6 divise $n^2 - n$ pour tout entier naturel n

VI. On utilisant l'équivalence successives, montrer que :

1. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow P\ et\ Q \Rightarrow R$
2. $\mathrm{x} = 18$ et $\mathrm{y} = 18 \Leftrightarrow$
$3\sqrt{x-9} + 2\sqrt{y-4} = \frac{a+b}{2}$

VII. On utilisant le raisonnement par le récurrence, Montrer que :

1. pour tout n de $\mathbb{N}$ le nombre $4^n + 2$ est divisible par 3
2. pour tout n de $\mathbb{N}$ le nombre $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ est
divisible par 17
3. $\forall n \in \mathbb{N}\quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{4}$
4. $\forall n \in N^*$
$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(1+n)(2+n)$