Examen de Laboratorio EL2

Métodos Numéricos 20 de febrero de 2025

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 100 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 4 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

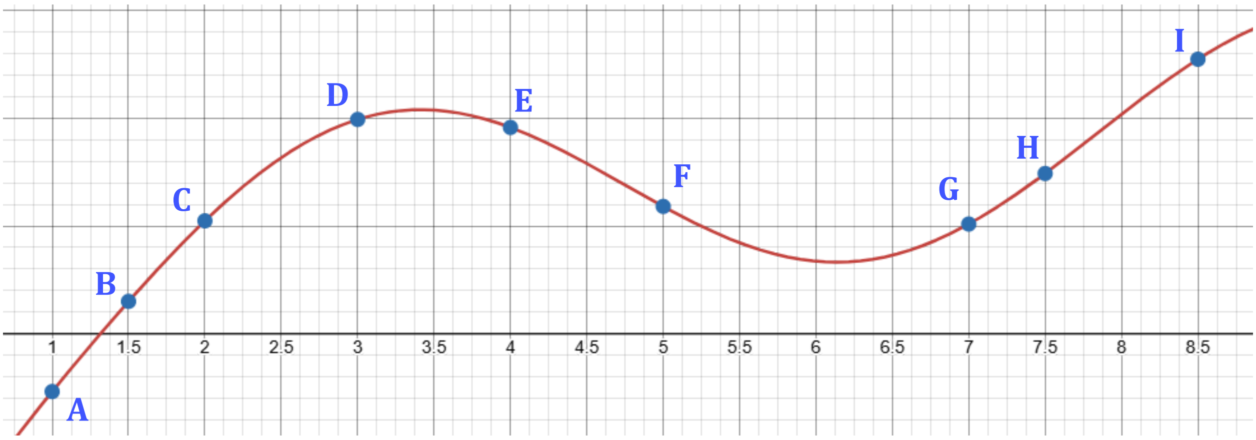
1. Al construir un spline cúbico natural para aproximar $\boldsymbol{f(x) = \cos(\pi x)}$ en el intervalo $x \in [0, 1]$, utilizando los siguientes puntos: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ y $x_4 = 1$, se obtuvo lo siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0, & \text{si } 0 \leq x \leq 0.25, \\ S_1(x) = a_1(x-0.25)^3 + b_1(x-0.25)^2 + c_1(x-0.25) + d_1, & \text{si } 0.25 \leq x \leq 0.5, \\ S_2(x) = a_2(x-0.5)^3 + b_2(x-0.5)^2 + c_2(x-0.5) + d_2, & \text{si } 0.5 \leq x \leq 0.75, \\ S_3(x) = a_3(x-0.75)^3 + b_3(x-0.75)^2 + c_3(x-0.75) + d_3, & \text{si } 0.75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- Halle el valor de c_2 y asígnelo a la variable `C`.
- Utilizando el spline cúbico natural, halle $S(0.6)$ y asigne el valor a `valor1`.
- Halle $S'(0.6)$ y asigne el valor a la variable `valor2`.
- Halle $S''(1)$ y asigne el valor a la variable `valor3`.

---

2. Considere la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = \log_3(x) - \cos(x)}$ en puntos del dominio $[\boldsymbol{1, 8}]$ (la gráfica siguiente muestra el eje x en paso de $1 : 0.5 : 8.5$)



se le pide implementar un script que efectúe lo siguiente:

a) Crear un vector fila llamado `xx` que almacene las respectivas abscisas de los puntos marcados en la gráfica.

b) Crear un vector fila llamado `yy` que almacene las respectivas ordenadas de los puntos marcados en la gráfica.

c) Encuentre el polinomio P interpolante de Newton (diferencias divididas) y almacene el valor de $P(6)$ en la variable `newton6`.

d) Encuentre el polinomio Q interpolante de Lagrange y almacene el valor de $Q(6)$ en la variable `Lagrange6`.

e) Utilice splines cúbico natural para encontrar el polinomio S interpolante (con la nube de puntos dada al inicio) y almacene $S(6)$ en la variable `spcubic6`.

f) Bajo el criterio del error relativo, determine cuál de los polinomios encontrados en los puntos 3, 4 y 5 se aproxima peor a $f(6)$. Si considera que lo hace Newton, asigne la variable `op` $= 1$; si lo hace Lagrange, asigne `op` $= 2$; y si lo hace el spline cúbico, asigne `op` $= 3$.
Sugerencia: use el error relativo para tomar la decisión correcta.

3. En un proyecto de ingeniería civil, se está estudiando la relación entre la carga aplicada x (en toneladas) y la deflexión y (en milímetros) en una viga de acero. Se realizaron mediciones experimentales y se obtuvieron los siguientes datos:

x (toneladas)	10	20	30	40	50
y (mm)	2.5	4.8	6.9	8.7	10.5

Se desea modelar la relación entre la carga x y la deflexión y mediante un **ajuste lineal** de la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$, donde m es la pendiente y b es el intercepto.

Para ello, siga los siguientes pasos:

a) Plantee el sistema sobredeterminado $Mp = y$ donde $p = [m; b]$. Almacene la matriz aumentada del sistema $[M\ y]$ en la variable `MY`.

b) Determine el sistema de ecuaciones normales $Ap = B$. Almacene la matriz aumentada del sistema $[A\ B]$ en la variable `AB`.

c) Obtenga los valores de la pendiente e intercepto del modelo lineal, almacene los resultados en las variables `pendiente` e `intercepto`, respectivamente.

d) Halle la suma de los cuadrados de los errores $S_r = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$. Almacene su respuesta en la variable `Sr`.

e) Halle la suma total de cuadrados $S_t = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$. Almacene su respuesta en la variable `St`.

f) Halle el valor del coeficiente de determinación r^2. Almacene su respuesta en la variable `r2`.

Observación: no realice cambios de unidades.

---

4. Si se supone que el arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad, se puede modelar la velocidad de un objeto que cae, como un paracaidista, por medio de la ecuación diferencial siguiente:

$$\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2}$$

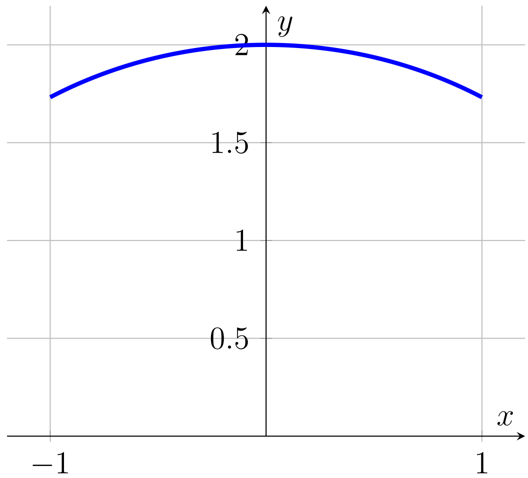
Donde:

- v: velocidad (m/s)
- t: tiempo (s)
- g: aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2)
- c_d: coeficiente de arrastre (0.225 kg/m)
- m: masa (90 kg)

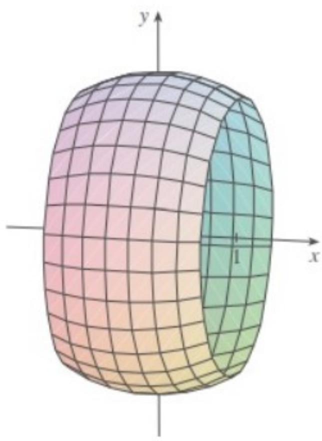
Si se asume que el cuerpo parte del reposo ($v(0) = 0$). Se necesita conocer la velocidad transcurridos 10 segundos, para ello:

- Utilice el método de Euler para resolver la EDO que modela la velocidad , con un tamaño de paso de tiempo: $h = \Delta t = 0.1$. Almacene el resultado obtenido en la variable `ValueEuler`.
- Halle la velocidad exacta para **10** segundos, almacene el resultado en la variable `ValueExacto`.
- Utilice el método de Runge Kutta de orden 4 (RK4) para resolver la EDO que modela la velocidad con un tamaño de paso de tiempo almacene el resultado en la variable `ValueRK4`.
- Calcule el error absoluto entre la solución numérica (utilizando el método de RK4) y la solución exacta en el punto de tiempo . Almacene el resultado en la variable `ValueError`.

5. Considere la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{4 - x^2}}$, con $\boldsymbol{-1 \leq x \leq 1}$:



Esta función al rotar genera un sólido de revolución como el mostrado en la figura:



La teoría nos dice que el área superficial de la superficie obtenida al rotar una curva alrededor del eje X generada por $y = f(x)$ cuando f es positiva y tiene derivada continua viene dada por:

$$\boldsymbol{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}}\,dx$$

Se le pide implementar un script que efectúe lo siguiente:

a) Calcule el área exacta de revolución y almacénela en la variable `exac` usando la función integral de Matlab.

b) Use la cuadratura de Gauss con 10 puntos para encontrar el área y almacénela en la variable `aproxCG`.

c) Encuentre el área aproximada utilizando el método de Trapecio compuesto (20 subintervalos), almacene el resultado obtenido en la variable `aproxTC`.

d) Encuentre el área superficial usando el método de Simpson 1/3 compuesto con 20 subintervalos y almacénela en la variable `aproxSC`.