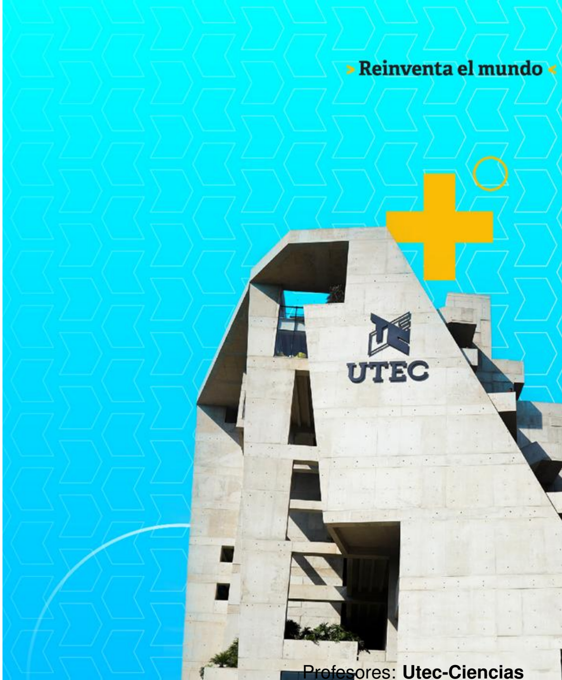
Métodos Numéricos

Teoría de Errores - **S1**

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Rósulo Pérez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Jimmy Mendoza Montalvo
(jmendozam@utec.edu.pe)
Máximo Obregón Ramos
(mobregon@utec.edu.pe)
Daniel Camarena Perez
(vcamarena@utec.edu.pe)



Profesores: **Utec-Ciencias**

Índice

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

> Reinventa el mundo <

1 INTRODUCCIÓN A MÉTODOS NUMÉRICOS

Logros de Aprendizaje

- Reconoce la importancia de los métodos numéricos en la resolución de problemas de ingeniería.

Motivación

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales se pueden resolver problemas matemáticos complejos, como: encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales, integración numérica, raíces de ecuaciones, optimización, entre otros. Estos problemas muchas veces no tienen una solución exacta o su solución exacta es difícil de obtener utilizando procedimientos analíticos.

Las principales características de los métodos numéricos son:

- **Aproximación:** Dado que en muchos casos, para algún problema encontrar las soluciones exactas es difícil o imposible, los métodos numéricos buscan soluciones aproximadas, con un grado aceptable de precisión.
- **Error numérico:** Es crucial estimar y controlar los errores de aproximación y los debidos a la precisión finita de la computadora.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Motivación

- **Iterativos:** Muchas veces se necesita efectuar una cantidad necesaria de pasos, a fin de refinar la solución hasta alcanzar un grado de tolerancia aceptable. Por ejemplo, en la búsqueda de raíces, los métodos iterativos como Newton-Raphson refinan la solución hasta alcanzar la precisión deseada.
- **Eficiencia y estabilidad:** Es muy importante que los métodos numéricos sean eficientes en el uso de recursos (tiempo de ejecución y uso de memoria del computador) y estables ante pequeñas pertubaciones en los datos de entrada.

¿Por qué necesitas aprender métodos numéricos?

- En el transcurso de su carrera, es posible que usted tenga la oportunidad de utilizar paquetes disponibles comercialmente, o programas "**en caja negra**" que contengan métodos numéricos. El uso eficiente de estos programas depende del buen entendimiento de la teoría básica en que se basan tales métodos.
- Los métodos numéricos son herramientas muy poderosas para la solución de problemas en ciencias e ingeniería, y otras disciplinas cuantitativas en general.
- A menudo encontrarás problemas que no se pueden resolver con programas "en caja negra"; si usted es conocedor de métodos numéricos y es hábil en programación, entonces tiene la capacidad de diseñar sus propios programas, sin tener que comprar software costoso.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Continuación...

- Los métodos numéricos son un vehículo eficiente para aprender a servirse de las computadoras.
- Los métodos numéricos le brindan una buena oportunidad para reforzar su comprensión de las matemáticas.
- Estos conocimientos son fundamentales en tu formación como ingeniero o científico.
- En este curso, utilizaremos MATLAB para implementar y experimentar con estos métodos

Solución de problemas de ingeniería

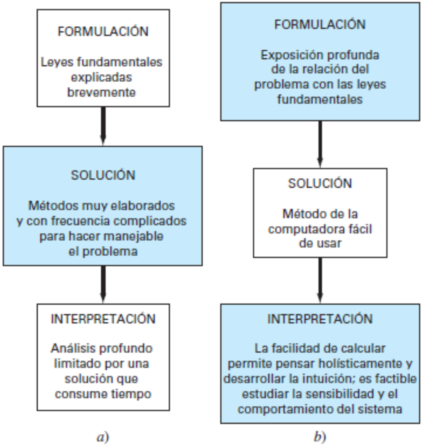
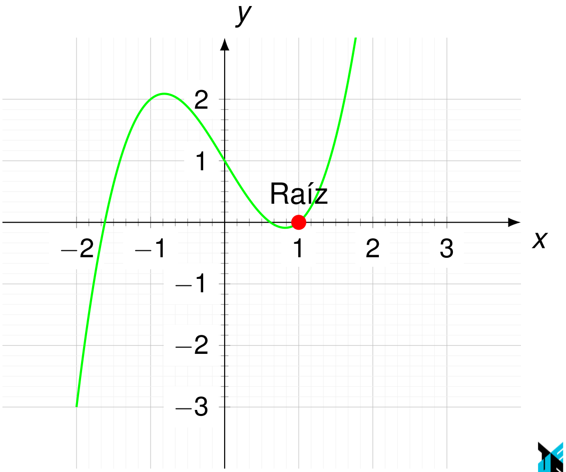


Figure: a) La era anterior a las computadoras, b) La era de las computadoras

Problemas a resolver en el curso

1. **Raíces de ecuaciones:** Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en A, resuelva $f(x) = 0$ para

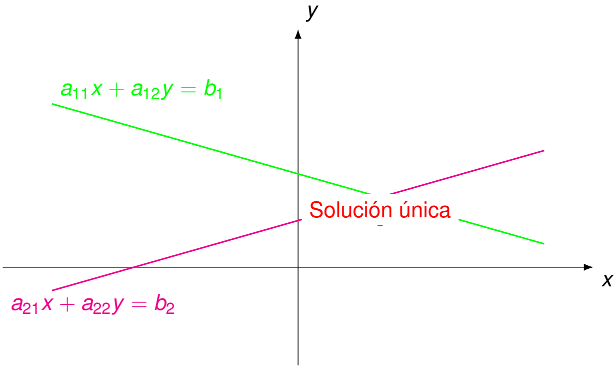


$x \in [a, b]$.

...Continuación

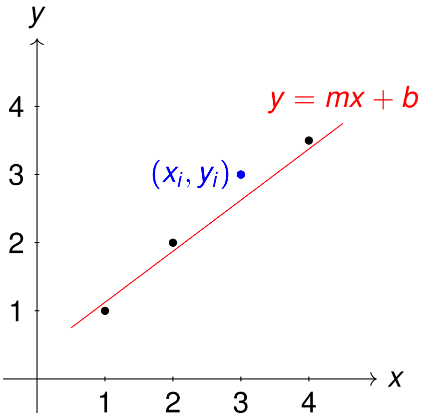
2. **Sistema de ecuaciones algebraicas lineales:** Resolver:

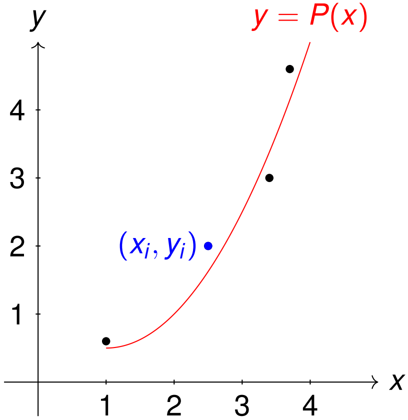
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$



...Continuación

3. **Ajuste de curvas e interpolación:**



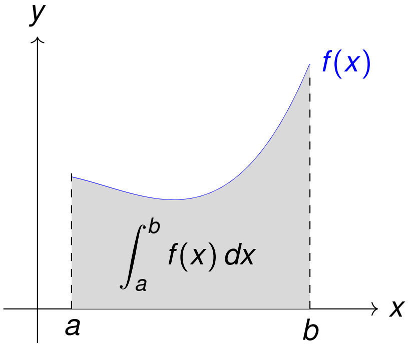


Universidad de Ingeniería y Tecnología

...Continuación

4. **Integración:** Encuentre el área bajo la curva:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$



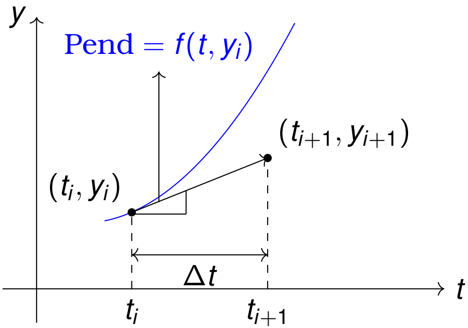
...Continuación

5. **Ecuaciones diferenciales ordinarias:** Dada

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\triangle y}{\triangle t} = f(t, y)$$

resolver para y como función de t.

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\triangle t$$



2 TEORIA DE ERRORES

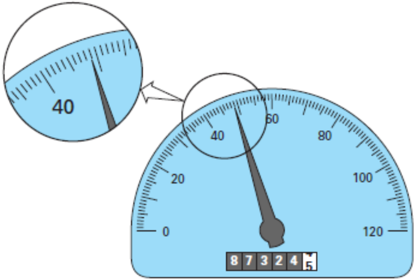
Logros de Aprendizaje

- Identifica y cuantifica el margen de error correspondiente al valor aproximado que se obtiene al resolver numéricamente un problema.

Aproximaciones y errores de redondeo

- Dado que con la técnica numérica se obtiene una aproximación a la solución exacta, existe cierta discrepancia o *error*.
- Para muchos problemas de aplicación en ingeniería no es posible obtener la solución analítica o exacta.
- Por lo tanto, no se pueden calcular con exactitud los errores en nuestros métodos numéricos.
- En tales casos, debemos usar aproximaciones o estimaciones de los errores (generalmente mediante cotas superiores).

Cifras Significativas



- Las cifras significativas de un número son aquellas que pueden utilizarse en forma confiable.
- Se trata del número de dígitos que se ofrecen con certeza, más uno estimado.
- El velocímetro y el odómetro muestran lecturas de hasta tres y siete cifras significativas, respect.
- Para el velocímetro, los dos dígitos seguros son 48. Por convención se ajusta un dígito estimado a la mitad de la división de escala menor en el instrumento. Así, la lectura del velocímetro consiste de tres cifras significativas: 48.5.
- En forma similar, el odómetro dará una lectura con siete cifras significativas, 87 324.45

Continuación...

- Los ceros no son siempre cifras significativas, ya que pueden usarse sólo para ubicar el punto decimal.
- Los números 0.00001845, 0.0001845 y 0.001845 tienen cuatro cifras significativas.
- Asimismo, cuando se incluyen ceros en números muy grandes, no queda claro cuántos son significativos.
- El número 45 300 puede tener tres, cuatro o cinco dígitos significativos, dependiendo de si los ceros se conocen con exactitud.
- La incertidumbre se puede eliminar utilizando la notación científica, donde 4.53×10^4, 4.530×10^4, 4.5300×10^4 muestran, respectivamente, que el número tiene tres, cuatro y cinco cifras significativas.

Ejemplo

Valores	Cifras Significativas
38.65	4
0.325	3
3.0×10^2	2
0.0000425	3
2.0854	5
35.80	4
3×10^2	1
3.1416	5
3.00×10^2	3

Exactitud y Precisión

- **Exactitud:** Que tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.
- **Precisión:** Que tan cercanos se encuentran, unos de otros, diversos valores calculados o medidos.
- **Inexactitud:** (o sesgo). Una desviación sistemática del valor verdadero.
- **Imprecisión:** (o incertidumbre). Magnitud en la dispersión.

Continuación...

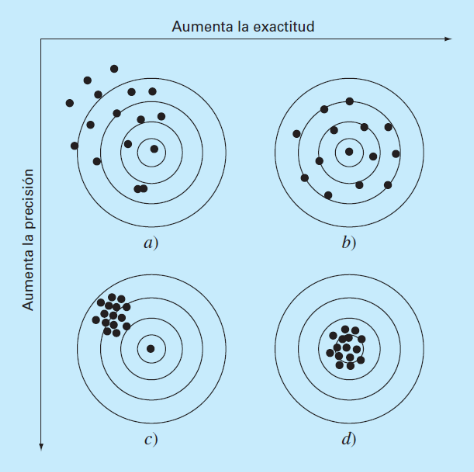
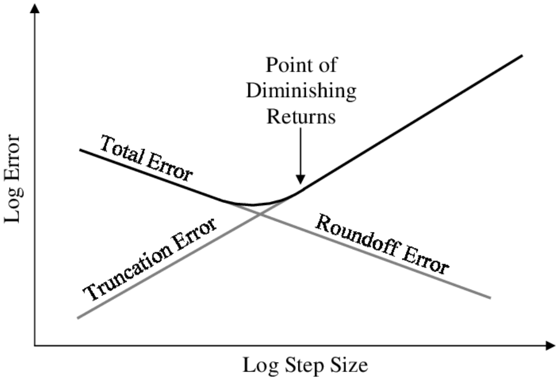


Figure: a) Inexacto e impreciso; b) exacto e impreciso; c) inexacto y preciso; d) exacto y preciso.

Definiciones de error

- **Error de redondeo:** Al aproximar números con dígitos finitos.
- **Error de truncamiento:** Al usar una serie finita para una infinita.



Error Absoluto

Consideremos "*A*" el valor exacto de la medida de cierta magnitud (en general desconocida) y sea "*a*" un valor conocido que se llamará aproximación de "*A*".

Error Absoluto

Llamaremos error absoluto del número aproximado "*a*" al valor

$$\xi_a = |A - a|$$

y todo número $\xi_a^\star \geq \xi_a$, se denominará cota del error absoluto.

En las aplicaciones de ciencia e ingeniería A suele ser desconocido, por lo que se las cotas o estimaciones, establecen un error a priori.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Error Relativo

Error Relativo

Llamamos error relativo del número aproximado "*a*" al valor:

$$\delta_a = \frac{|A - a|}{|A|}, \quad A \neq 0$$

y todo número $\delta_a^\star \geq \delta_a$, se denominará cota del error relativo.

Nota: El error relativo se puede multiplicar por 100 y se obtiene entonces el **error relativo porcentual**.
Por lo tanto, estas nociones son útiles para comparar errores en diferentes escalas, sin afectar la rigurosidad.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Ejemplos

Ejemplo

¿Cuál es el error absoluto y relativo de la aproximación 6.28 *al valor de* $2\pi = 6.283185$ *?*

Continuación...

Ejemplo

Supongamos que medimos un puente y un tornillo y resultan con 9999 *cm y* 9 *cm respectivamente. Si los verdaderos valores son* 10000 *cm y* 10 *cm. Hallar el error absoluto y relativo para cada caso.*

Continuación...

Ejercicio

Calcule el error absoluto y el error relativo cometidos cuando $ab \times 10^4$ se escribe erróneamente como $ab \times 10^5$

Definición

Sean "A" y "a" dos números reales, con $A \neq 0$. Se dice que "a" es una aproximación de "A" con "n" cifras significativas (o que "A" y "a" coinciden en "n" cifras significativas), si "n" es el mayor entero no negativo tal que

$$\delta_a \leq 5 \times 10^{-n},$$

Ejercicio: Establecer una fórmula para hallar la cantidad de cifras significativas N en términos de δ_a.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Ejemplo

Verificar que $a = 6.28$ *aproxima a* $2\pi = 6.283185$ *con tres cifras significativas.*

Polinomio de Taylor y Residuo de Lagrange

El polinomio de Taylor aproxima una función $f(x)$ cerca de un punto a usando sus derivadas.

Teorema:

Si f tiene $n+1$ derivadas continuas en un intervalo que contiene a, entonces:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

donde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ es el **residuo de Lagrange**, y ξ está entre a y x.

Ejemplo: $f(x) = e^x$, con $a = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \xi \in [0, x].$$

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Ejemplo

El polinomio de Taylor permite aproximar la función exponencial mediante las sumas:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

- Estimar el valor de $e^{-0.5}$ usando 3 términos de la serie anterior. Trabaje con 4 cifras decimales.

Continuación

- Considere el valor exacto de $e^{-0.5} = 0.606531$, ¿con cuántos términos el valor estimado tiene un error relativo δ_a menor que una tolerancia preestablecida $\delta_a^\star$ en tres cifras significativas?
- Por otro lado, ¿Cómo se relaciona el residuo de Lagrange con el error absoluto?

Conclusiones

En el campo del cálculo numérico toda aproximación tiene un error asociado

- Que puede descomponerse en inexactitud (sesgo) más imprecisión (incertidumbre).
- Que puede deberse al sistema de representación (redondeo) o al método de cálculo (truncamiento).

Bibliografía

- **Steven C. Chapra and Raymond P. Canale**
  Métodos numéricos para ingenieros, 7a ed.
- **Richard L. Burden and J. Douglas Faires**
  Análisis numérico, 7a ed.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA