CS1022
Inducción fuerte

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Resumen

El método de inducción matemática: Inducción fuerte

Ejemplos

Inducción fuerte

Principio de Inducción Fuerte

Para cada entero positivo n, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$ es verdadera.
- Si $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son verdaderas entonces $P(k+1)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo n.

Inducción fuerte

Principio de Inducción Fuerte

Para cada entero positivo n, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$ es verdadera.
- Si $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son verdaderas entonces $P(k+1)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo n.

Es decir, a diferencia de la inducción simple, todas las proposiciones $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ juntas aseguran que se cumpla $P(k+1)$. En la inducción simple, $P(k)$ por sí solo asegura que $P(k+1)$ se cumpla.

Inducción fuerte

Se pueden plantear versiones similares, como la siguiente:

Principio de Inducción Fuerte (modificado)

Para cada entero positivo n, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(2)$ es verdadera.
- Si $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ son verdaderas entonces $P(k+1)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo $n \geq 2$.

Ejemplo 1

Demuestre que cualquier entero positivo se puede expresar como el producto de una potencia de 2 con un número impar.

Aclaración: Considere que las potencias de 2 son $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$

Ejemplo 1

Demuestre que cualquier entero positivo se puede expresar como el producto de una potencia de 2 con un número impar.

Aclaración: Considere que las potencias de 2 son $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$

Ejemplo 1

Demuestre que cualquier entero positivo se puede expresar como el producto de una potencia de 2 con un número impar.

Aclaración: Considere que las potencias de 2 son $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$

Solución.
Sea $P(n)$ la proposición: n se se puede expresar como el producto de una potencia de 2 con un número impar.
Caso base: $P(1)$ es verdadero porque $1 = 2^0 \times 1$.
Hipótesis inductiva: Suponemos que $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ son verdaderos. Tenemos que demostrar que $P(k+1)$ es verdadero y haremos esto por casos:

Ejemplo 1

- Si $k+1$ es impar, podemos expresar $k+1 = 2^0 \times (k+1)$, con lo cual $P(k+1)$ es verdadero.

Ejemplo 1

- Si $k+1$ es impar, podemos expresar $k+1 = 2^0 \times (k+1)$, con lo cual $P(k+1)$ es verdadero.
- Si $k+1$ es par, entonces $k+1 = 2t$, donde t es un entero positivo. Como $t = \frac{k+1}{2}$ es menor o igual que k (¿por qué?) entonces $P(t)$ es una de las proposiciones $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ entonces $P(t)$ es verdadero.

Ejemplo 1

- Si $k+1$ es impar, podemos expresar $k+1 = 2^0 \times (k+1)$, con lo cual $P(k+1)$ es verdadero.
- Si $k+1$ es par, entonces $k+1 = 2t$, donde t es un entero positivo. Como $t = \frac{k+1}{2}$ es menor o igual que k (¿por qué?) entonces $P(t)$ es una de las proposiciones $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ entonces $P(t)$ es verdadero. Luego, t se puede expresar como $2^a \times i$ donde i es impar y reemplazando resulta que $k+1 = 2 \times 2^a \times i = 2^{a+1} \times i$. Por lo tanto, $P(k+1)$ es verdadero.

Ejemplo 1

- Si $k+1$ es impar, podemos expresar $k+1 = 2^0 \times (k+1)$, con lo cual $P(k+1)$ es verdadero.
- Si $k+1$ es par, entonces $k+1 = 2t$, donde t es un entero positivo. Como $t = \frac{k+1}{2}$ es menor o igual que k (¿por qué?) entonces $P(t)$ es una de las proposiciones $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ entonces $P(t)$ es verdadero. Luego, t se puede expresar como $2^a \times i$ donde i es impar y reemplazando resulta que $k+1 = 2 \times 2^a \times i = 2^{a+1} \times i$. Por lo tanto, $P(k+1)$ es verdadero.

En cualquier caso $P(k+1)$ es verdadero.

Ejemplo 2

En un país solamente hay monedas de 3 y 5 pesos. Demuestre que es posible pagar exactamente n pesos, para todo entero $n \geq 8$.

Ejemplo 2

En un país solamente hay monedas de 3 y 5 pesos. Demuestre que es posible pagar exactamente n pesos, para todo entero $n \geq 8$.

Solución:
Vamos a modificar un poco el esquema. Las proposiciones $P(8), P(9), P(10)$ son verdaderas porque $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$. Supongamos que $P(8), P(9), \ldots, P(k)$ son verdaderas para algún $k \geq 10$ (hipótesis inductiva).

Ejemplo 2

En un país solamente hay monedas de 3 y 5 pesos. Demuestre que es posible pagar exactamente n pesos, para todo entero $n \geq 8$.

Solución:
Vamos a modificar un poco el esquema. Las proposiciones $P(8), P(9), P(10)$ son verdaderas porque $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$. Supongamos que $P(8), P(9), \ldots, P(k)$ son verdaderas para algún $k \geq 10$ (hipótesis inductiva).
Consideremos la proposición $P(k+1)$, como $k \geq 10$ entonces $(k+1) - 3 \geq 8$ con lo cual tenemos que $P((k+1) - 3)$ es verdadero por hipótesis. Luego $(k+1) - 3$ se puede expresar como $3a + 5b$, con lo cual $k + 1 = 3(a+1) + 5b$. Es decir, es posible pagar $k+1$ pesos con monedas de 3 y 5. Por lo tanto, $P(k+1)$ es verdadero

Ejemplo 3

En otro país solamente hay monedas de 4 y 5 pesos. Determine para qué valores enteros de n es posible pagar exactamente n pesos con las monedas disponibles en ese país.

Ejemplo 4

Demuestre que todo entero positivo se puede expresar como suma potencias de 2 que son distintas entre sí. Por ejemplo, $11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$.

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Antes de ver el siguiente ejemplo recordemos algunas cuestiones de teoría de números.

Antes de ver el siguiente ejemplo recordemos algunas cuestiones de teoría de números.

Definiciones: Un número primo es aquel que tiene exactamente dos divisores positivos. Un número compuesto es aquel que tiene más de dos divisores positivos.

Antes de ver el siguiente ejemplo recordemos algunas cuestiones de teoría de números.

Definiciones: Un número primo es aquel que tiene exactamente dos divisores positivos. Un número compuesto es aquel que tiene más de dos divisores positivos.

Teorema: Todo número compuesto se puede expresar como el producto de dos números enteros positivos ambos mayores que 1.

Antes de ver el siguiente ejemplo recordemos algunas cuestiones de teoría de números.

Definiciones: Un número primo es aquel que tiene exactamente dos divisores positivos. Un número compuesto es aquel que tiene más de dos divisores positivos.

Teorema: Todo número compuesto se puede expresar como el producto de dos números enteros positivos ambos mayores que 1.

(Aunque no vamos a ver la demostración de este teorema ahora)

Ejemplo 5

Demuestre que todo entero mayor o igual que 2 se puede expresar como producto de uno o más números primos.

Ejemplo 5

Demuestre que todo entero mayor o igual que 2 se puede expresar como producto de uno o más números primos.

Sugerencia: si un número es primo ya lo tenemos expresado como el producto de **un** número primo, si es compuesto podemos aplicar el teorema.