UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2025-0

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [**2 ptos**] Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2-1=0,\\ f_2(x,y,z) &= x^3-y+z=0,\\ f_3(x,y,z) &= x+y^3-z=0. \end{aligned}$$

con la aproximación inicial $\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si se desea resolver este sistema con el método de Newton y dicho punto inicial, entonces dicho método es un método numérico abierto y factible.

El método de Newton según su naturaleza es un método abierto porque no siempre garantiza convergencia y depende de la elección adecuada de un punto inicial. Para analizar la factibilidad, encontramos la matriz jacobiana asociada al sistema de ecuaciones no lineales:

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & -1 & 1 \\ 1 & 3y^2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculando el jacobiano, como determinante de la matriz jacobiana:

$$|J_F(0,0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, no es posible aplicar el método de Newton con tal punto semilla, dado que el determinante de la matriz jacobiana es 0 y no es posible trabajar con la inversa.

2. [**2 ptos**] Un sistema de ecuaciones no lineales $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ puede transformarse en su forma de punto fijo como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad \text{donde} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{4}(\sin(x_1) + \cos(x_2)) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Si $\mathbf{x}$ está definida en el conjunto $D = \left\{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le \dfrac{\pi}{2} \quad ; \quad 0 \le x_2 \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$ y se sabe que para todo $\mathbf{x} \in D$ se cumple $\left|\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right| \le \dfrac{K}{n}$ para $i, j = 1, 2$ y $n = 2$, donde $K < 1$, entonces el método de punto fijo converge para cualquier punto inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in D$.

De la función G podemos identificar que:

$$G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

donde $g_1(\mathbf{x}) = \dfrac{x_2}{\sqrt{5}}$ y $g_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(\sin(x_1) + \cos(x_2))$ entonces:

$$0 \le x_2 \le \frac{\pi}{2} \to 0 \le \underbrace{\frac{x_2}{\sqrt{5}}}_{g_1(x)} \le \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$$

De manera similar, como $0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$ y $0 \le x_2 \le \frac{\pi}{2}$ entonces:

$$0 \le \sin(x) \le 1, \quad 0 \le \cos(x) \le 1 \to 0 \le \frac{1}{4}\sin(x) \le \frac{1}{4}, \quad 0 \le \frac{1}{4}\cos(x) \le \frac{1}{4}$$

Finalmente:

$$0 \le \underbrace{\frac{1}{4}(\sin(x_1) + \cos(x_2))}_{g_2(x)} \le \frac{1}{2}$$

De esto $G(D) \subset D$ y se cumple la primera condición. Además:

- $\dfrac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0, \dfrac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}.$
- $\dfrac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \dfrac{1}{4}\cos(x_1) < \dfrac{1}{2}, \quad \left|\dfrac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right| = \dfrac{1}{4}\sin(x) < \dfrac{1}{2}.$

En consecuencia, el método del punto fijo converge en D.
Observación: Analizar las derivadas parciales no era necesario, pues el dato menciona que estas están acotadas.

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] El coeficiente de arrastre (C_D) es una medida (adimensional) de la resistencia aerodinámica que experimenta un objeto en movimiento a través de un fluido. La expresión que permite estimar dicho coeficiente es:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Se conocen de manera exacta los siguientes datos: densidad del aire $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ y velocidad del objeto $V = 26\,\mathrm{m/s}$. Sin embargo, los valores de la fuerza de arrastre $D = 300\,\mathrm{N}$ y el área frontal del objeto $A = 2\,\mathrm{m}^2$ presentan una incertidumbre de $\pm 0.5\,\%$ y $\pm 0.05\,\mathrm{m}^2$, respectivamente. Halle el valor del error relativo porcentual en la determinación del coeficiente de arrastre.

Planteamos:

$$C_D(D, A) = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

reemplazando para los valores que no se ven afectados por las mediciones, se tiene:

$$C_D(D, A) = \frac{5D}{2028A}$$

hallando las derivadas parciales:

- $\left|\dfrac{\partial C_D}{\partial D}\right| = \dfrac{5}{2028A}$.
- $\left|\dfrac{\partial C_D}{\partial A}\right| = \dfrac{5D}{2028A^2}$.

Recordando que $D = 300\,\mathrm{N} \pm 0.5\,\% = 300 \pm 1.5N$, $A = 2 \pm 0.05\,\mathrm{m}^2$, aplicando la serie de Taylor y reemplazando los valores, tenemos:

$$\Delta C_D \approx \left|\frac{\partial C_D}{\partial D}\right| \cdot \Delta D + \left|\frac{\partial C_D}{\partial A}\right| \cdot \Delta A$$

Así:

$$\Delta C_D \approx 0.0111$$

Calculando el coeficiente estimado $C_D = 0.3698$, con esto se puede calcular el error relativo porcentual como:

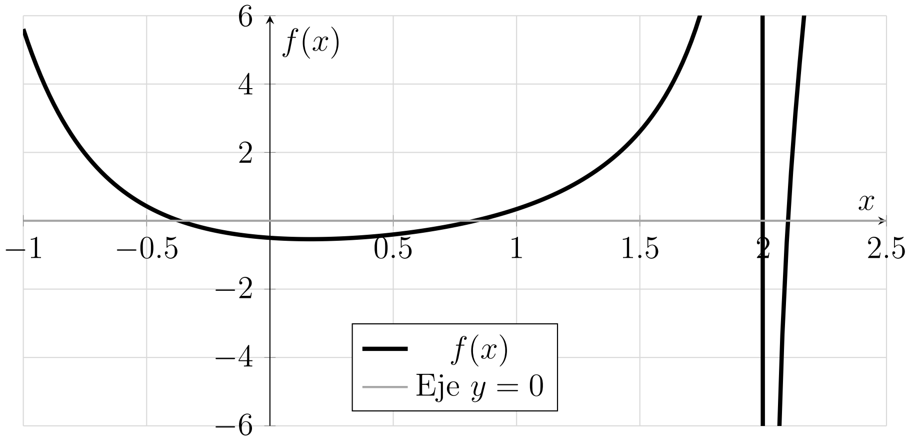
$$\frac{\Delta C_D}{C_D} \times 100\,\% = \frac{0.0111}{0.3698} \times 100\,\% = 3.002\,\%$$

4. **[3 ptos]** Dada la siguiente función:

$$f(x) = -\frac{\sin(x)}{x-2} + e^{(x^2-x)} - 1.5$$

en el intervalo $[-1, 2.5]$ (restrinja su análisis a este intervalo) cuya gráfica es mostrada a continuación:

Gráfica de $f(x)$ con asíntota vertical en $x = 2$



a. **[0.5 pts]** Determine el número de raíces reales en dicho intervalo.

Según el gráfico podemos ver que la curva que representa a la función intersecta al eje X en 3 puntos, pues como dato también nos dicen que tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

b. **[0.5 pts]** Localice el intervalo de longitud 0.5 que contenga a la menor raíz real (según el intervalo de análisis), de modo que el extremo derecho sea un número entero.

Según la gráfica podemos ver que el intervalo $[-0.5, 0]$ cumple con las características solicitadas.

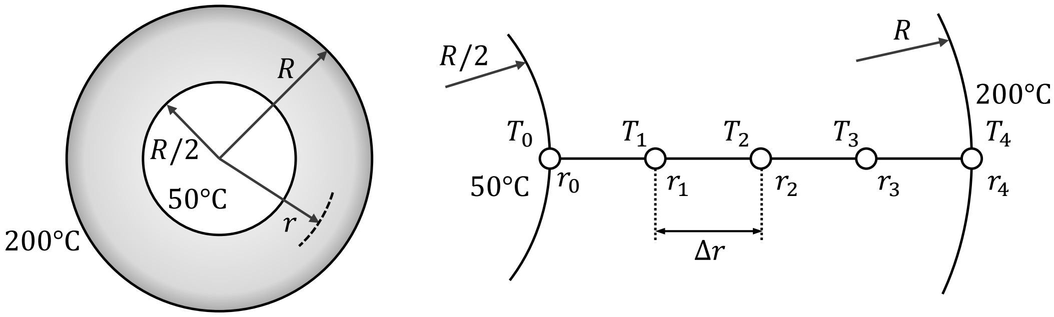
c. **[2pts]** Usando el intervalo encontrado en el ítem anterior, efectúe dos iteraciones para el método de la bisección mostrando todos los cálculos de forma detallada y mencione la aproximación a la raíz.

El intervalo encontrado en el ítem anterior era $[-0.5, 0]$, iterando y presentando los datos en forma de tabla, se tiene $a = -0.5, b = 0$:

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
-0.500000	0	-0.250000	0.4252298	-0.500000	-0.2431193
-0.500000	-0.250000	-0.375000	0.4252298	-0.2431193	0.0204648
-0.375000	-0.250000	-0.312500	0.0204648	-0.2431193	-0.1258931

De aquí se puede ver que la aproximación a la raíz viene dada por -0.3125.

5. **[10 ptos]** En el lado izquierdo de la figura siguiente se muestra un cilindro grueso de radio interno $R/2$ y radio externo R que está en contacto con un fluido que mantiene su superficie interna a una temperatura de 50°C, mientras que su superficie externa está a 200°C.



La ecuación diferencial que describe el perfil de temperatura estacionaria en el cilindro, junto con las condiciones de frontera, está dada por:

$$\frac{d^2T}{dr^2} = -\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} \quad , \quad T\left(\frac{R}{2}\right) = 50°\text{C}, \quad T(R) = 200°\text{C}$$

a) **[3 ptos]** Discretice la ecuación diferencial que describe la temperatura en el cilindro. Considere nodos igualmente espaciados y ordenados como se muestra en el lado derecho de la figura previa, asuma un radio interno $R/2 = 0.4\,\text{m}$ y un radio externo $R = 0.8\,\text{m}$, calcule Δr. Además, considere las siguientes expresiones para las derivadas:

$$\left.\frac{d^2T}{dr^2}\right|_{r_i} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta r)^2} \quad , \quad \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r_i} \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r}.$$

Luego, escriba el sistema de ecuaciones para T_1, T_2, T_3 en forma matricial $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$.

Tenemos la fórmula para la aproximación a la primera y segunda derivada, además al momento de la discretización, el gráfico nos ayuda a entender quien es r, reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta r)^2} = -\frac{1}{r_i}\frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r}$$

Reemplazando:

1) Para $i = 1$, se tiene:

$$\left(-2 + \frac{\Delta r}{r_1}\right)T_1 + T_2 = \frac{T_0 \Delta r}{r_1} - T_0$$

2) Para $i = 2$, se tiene:

$$\left(1 - \frac{\Delta r}{r_2}\right)T_1 + \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_2}\right)T_2 + T_3 = 0$$

3) Para $i = 3$, se tiene:

$$\left(1 - \frac{\Delta r}{r_3}\right) T_2 + \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_3}\right) T_3 = -T_4$$

Escribiendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_1}\right) & 1 & 0 \\ \left(1 - \frac{\Delta r}{r_2}\right) & \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_2}\right) & 1 \\ 0 & \left(1 - \frac{\Delta r}{r_3}\right) & \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_0 \Delta r}{r_1} - T_0 \\ 0 \\ -T_4 \end{bmatrix}$$

Reemplazando con los parámetros proporcionados por el ejercicio:

$$\begin{bmatrix} -1.8 & 1 & 0 \\ 0.8333 & -1.8333 & 1 \\ 0 & 0.8571 & -1.8571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix}$$

b) [**4 ptos**] Ejecute 2 iteraciones usando el método de Gauss-Seidel con un punto semilla de $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 100 & 140 & 170 \end{bmatrix}^T$.
Sugerencia: La inversa de una matriz triangular inferior se puede hallar con la siguiente fórmula:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ p & b & 0 \\ 0 & q & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-p}{ab} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{pq}{abc} & \frac{-q}{bc} & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

Efectuando la descomposición en matrices D, L, U recordemos que:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1} \cdot U \qquad c_{gs} = (D - L)^{-1} b$$

De aquí:

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5555 & 0 \\ 0 & 0.2525 & 0.5454 \\ 0 & 0.1166 & 0.2518 \end{bmatrix}, \quad c_{gs} = \begin{bmatrix} 22.222 \\ 10.1010 \\ 112.354 \end{bmatrix}$$

Iteramos:

1) $x_1 = T_{gs} x_0 + c_{gs} = \begin{bmatrix} 100 \\ 138.181818 \\ 171.4685314 \end{bmatrix}.$

2) $x_2 = T_{gs} x_1 + c_{gs} = \begin{bmatrix} 98.98989 \\ 138.52369 \\ 171.626322 \end{bmatrix}$

c) [**3 ptos**] Analice el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss-Seidel. En base al resultado de dicho análisis indique claramente si converge o diverge.
Debemos de analizar los valores propios de dicha matriz para ello hacemos:

$$p(\lambda) = det(T_{gs} - \lambda I) = 0$$

así:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0.5555 & 0 \\ 0 & 0.2525-\lambda & 0.5454 \\ 0 & 0.1166 & 0.2518-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Efectuando la expansión de Laplace sobre la primera columna:

$$(-\lambda)\begin{vmatrix} 0.2525-\lambda & 0.5454 \\ 0.1166 & 0.2518-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

operamos

$$(-\lambda)(\lambda^2 - 0.5043\lambda) = 0$$

En consecuencia $\rho(T_{gs}) = 0.5043 < 1$ por lo tanto, el método converge.