CS1022
Inducción simple

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

Resumen

Objetivos

- Comprender el principio de inducción matemática y su importancia en la demostración de proposiciones para todos los números naturales.
- Aplicar la inducción matemática en la demostración de fórmulas y propiedades numéricas de manera estructurada y rigurosa.

Inducción simple

El método de Inducción Matemática sirve para demostrar una proposición que depende de una variable n, que toma valores naturales.

Inducción simple

El método de Inducción Matemática sirve para demostrar una proposición que depende de una variable n, que toma valores naturales.

Estos son algunos ejemplos de proposiciones que dependen de una variable natural n:

- $P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Inducción simple

El método de Inducción Matemática sirve para demostrar una proposición que depende de una variable n, que toma valores naturales.

Estos son algunos ejemplos de proposiciones que dependen de una variable natural n:

- $P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $Q(n) : n + 1 \leq 2^n$.

Inducción simple

El método de Inducción Matemática sirve para demostrar una proposición que depende de una variable n, que toma valores naturales.

Estos son algunos ejemplos de proposiciones que dependen de una variable natural n:

- $P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $Q(n) : n + 1 \leq 2^n$.
- $T(n)$: Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Inducción simple

Principio de Inducción Matemática

Para cada entero positivo n, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$ es verdadera.
- Si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+1)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n.

Inducción simple

Deber quedar totalmente claro qué proposición vamos a probar por inducción (a veces debemos conjeturar o completar la proposición que tenemos).

Inducción simple

Deber quedar totalmente claro qué proposición vamos a probar por inducción (a veces debemos conjeturar o completar la proposición que tenemos).

La primera condición es llamada **caso inicial**, **caso base** o **base de la inducción**.
La segunda condición es llamada **paso inductivo**.

Ambas condiciones son necesarias para que el método funcione.

Ejemplos

Ejemplo 1

Demostrar que la siguiente igualdad es válida para todo entero positivo n

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplos

Identificamos la proposición que demostraremos por inducción:

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejemplos

Identificamos la proposición que demostraremos por inducción:

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notamos que $P(1) : 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ es verdadero (**caso inicial**).

Ejemplos

Identificamos la proposición que demostraremos por inducción:

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notamos que $P(1) : 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ es verdadero (**caso inicial**). Suponemos que $P(k)$ es verdadero, es decir, suponemos que se cumple la ecuación $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Sumando $(k+1)$ a ambos lados, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

Ejemplos

es decir, hemos demostrado que $1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, lo cual es precisamente $P(k+1)$. De esta forma queda demostrado el **paso inductivo**.

Por lo tanto, usando el método de inducción matemática, queda demostrado que $P(n)$ es verdadero para todo entero positivo n.

Ejemplos

Ejemplo 2

Demostrar que la siguiente igualdad es válida para todo entero positivo n

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Ejemplos

Ejemplo 3

Demuestre que, para cada entero positivo n, se cumple:

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Ejemplos

Ejemplo 4

Demuestre que $n + 1 \leq 2^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplos

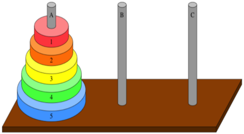
Ejemplo 5

Demuestre que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Ejemplos

Ejemplo 6: Torres de Hanoi

Se tiene tres postes. En el primer poste hay n discos de diferentes tamaños, ordenados de mayor a menor, como se muestra en la figura.



En cada paso se mueve un disco de un poste a otro. No se puede colocar un disco sobre otro que sea más pequeño. El objetivo es pasar todos los discos a otro poste. Demostrar que es posible conseguir el objetivo con $2^n - 1$ pasos.

Puedes jugar acá:
https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html

Un video adicional:
Video del canal de Youtube: Derivando