UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Examen de Laboratorio EL1

Métodos Numéricos 23 de marzo de 2025

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 100 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 4 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. Formas parte de un equipo de ingeniería aeroespacial y tienes la tarea de analizar cómo los errores en los datos de un misil pueden afectar su energía total. El misil está en movimiento en un campo gravitatorio, y su energía total se puede describir mediante la ecuación:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{1}$$

Para ello, se consideran mediciones precisas de los parámetros físicos involucrados, utilizando instrumentos calibrados con márgenes de error conocidos:

- **Masa (m):** La masa del misil se mide con una balanza de alta precisión, la cual está calibrada con una incertidumbre de 15 kg.
- **Altura (h):** La altura del misil en un momento determinado se mide mediante un sistema de punteros láser de precisión, con una incertidumbre de 10 m.
- **Velocidad (v):** La velocidad del misil se mide utilizando un radar Doppler con una incertidumbre de 20 m/s.
- **Aceleración de la gravedad (g):** Se toma el valor estándar de $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ sin error asociado.

Se le pide implementar un script que efectúe lo siguiente:

a) Determine el error de E_m y almacene en la variable `error1` cuando la masa es $m = 50000\,\mathrm{kg}$, la altura (medida con puntero láser) es $h = 1200 \pm 10\,\mathrm{m}$, la velocidad es $v = 1500\,\mathrm{m/s}$ y la aceleración de la gravedad es $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

b) Determine el error de E_m y almacene en la variable `error2` cuando la masa (medida con balanza de alta precisión) es $m = 50000 \pm 15\,\mathrm{kg}$, la altura (medida con puntero láser) es $h = 1200 \pm 10\,\mathrm{m}$, la velocidad es $v = 1500\,\mathrm{m/s}$ y la aceleración de la gravedad es $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

c) Halle la energía por unidad de masa, $\dfrac{E_m}{m}$ y almacene en la variable `em`, cuando la altura (medida con puntero láser) es $h = 1200 \pm 10\,\mathrm{m}$, la velocidad (medida con radar Doppler) es $v = 1500 \pm 20\,\mathrm{m/s}$ y la aceleración de la gravedad es $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$. También almacene el error de aproximación en la variable `error3`.

2. Supongamos que estamos evaluando la dilatación del tiempo Δt de una partícula que se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. Sin embargo, en este caso, la partícula no solo se mueve a alta velocidad, sino que también experimenta una aceleración no constante debido a fuerzas externas. La dilatación del tiempo y la velocidad de la partícula se describe mediante la siguiente ecuación no lineal modificada:

$$\Delta t(v) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + k\left(\frac{v^3}{c^3}\right) - \alpha \sin\left(\frac{v}{c}\right) \tag{2}$$

Para este modelo:

- Δt_0 es el tiempo propio (tiempo medido en el marco de referencia de la partícula).
- $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el medio.
- $k = 0.02$ es un factor de corrección relacionado con efectos relativistas no lineales.
- $\alpha = 0.5$ es un término que representa la influencia de fuerzas externas en la dilatación del tiempo.
- v es la velocidad de la partícula.

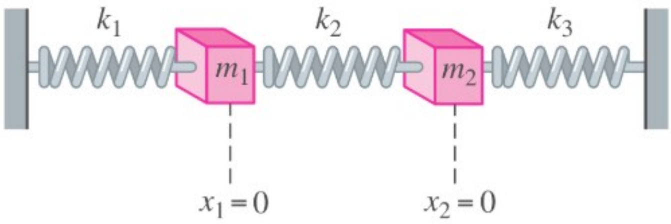
El objetivo es encontrar la velocidad v a la cual la dilatación del tiempo se duplica en comparación con el tiempo propio, es decir, $\Delta t = 2\Delta t_0$. Asuma un valor inicial de $v = 2.5 \times 10^8$ m/s para comenzar con las iteraciones del método de Newton. Para ello:

a) Defina una función $f(v)$ cuya raíz resuelva dicho problema. Dar como respuesta $|f(2.8 \times 10^8)|$ y almacene el resultado en la variable `nvalue`.

b) Aproxime la velocidad v con una tolerancia de 1e-3 utilizando el método de Newton-Raphson, almacene el resultado en la variable `vapprox`.

c) Almacene la cantidad de iteraciones empleadas en la variable `totaliter`.

3. Considere un sistema formado por dos masas m_1 y m_2 conectadas mediante resortes con fuerzas no lineales en una línea recta horizontal:



Para el sistema se tiene que:

- La masa m_1 está conectada a una pared fija mediante un resorte con fuerza elástica no lineal dada por: $F_1 = k_1 e^{x_1}$.
- Las masas m_1 y m_2 están conectadas mediante un resorte con fuerza no lineal dada por: $F_2 = k_2(x_2 - x_1)^2$.
- La masa m_2 está conectada a otra pared fija mediante un resorte con fuerza lineal: $F_3 = k_3 x_2$.
- La segunda ley de Newton para la masa m_1 indica: $m_1 x_1'' = F_2 - F_1$.
- La segunda ley de Newton para la masa m_2 indica: $m_2 x_2'' = -F_2 - F_3$.

Se quiere hallar las posiciones x_1, x_2 de tal manera que el sistema se encuentre en equilibrio (la aceleración de cada masa sea nula).

Considere que los parámetros toman los siguientes valores:

- $k_1 = 1\,\mathrm{N},\ k_2 = 2\,\mathrm{N/m^2},\ k_3 = 1.5\,\mathrm{N/m}$,
- $m_1 = 3\,\mathrm{kg},\ m_2 = 1.5\,\mathrm{kg}$.

Realice lo siguiente:

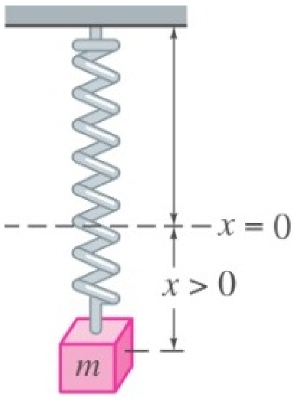
a) Formular el sistema de ecuaciones no lineales resultante en forma vectorial $F(x_1, x_2) = 0$, tal que $F(1, 0)$ toma valores negativos. Almacene el vector columna $F(1, 0)$ en la variable `F_value`.

b) Calcule la matriz jacobiana de F en el punto anterior. Guarde la matriz numérica $J_F(1, 0)$ en la variable `JF_value`.

c) Resolver con el método de Newton el sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x_1 y x_2 en equilibrio, considerando una tolerancia de 1e-4 y un punto semilla $x_1^{(0)} = 1,\ x_2^{(0)} = 0$. Guarde el resultado en las variables `x1_value, x2_value`.

d) Guarde el número de iteraciones realizadas por el método en la variable `niter`.

4. Considere un sistema masa-resorte:



forzado por una fuerza externa de tal manera que la ecuación de movimiento del bloque es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 5\sin(4t) \tag{3}$$

Se quiere hallar la posición de la masa en el instante $t = 1$ sabiendo que $x(0) = 1$ metros y $x(2) = 8$ metros.

Cuando se discretiza equiespaciadamente el intervalo temporal $[0, 2]$, con tamaño de paso Δt segundos, se definen:

- los instantes de tiempo $t_i = i\Delta t,\ i = 0, 1, 2, 3, 4,$
- las posiciones correspondientes $x_i = x(t_i),\ i = 0, 1, 2, 3, 4.$

Para la aceleración en t_i, con $i = 1, 2, 3$, se considera la aproximación mediante la fórmula de diferencias finitas centrada.

$$\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t_i} \approx \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(\Delta t)^2}, \tag{4}$$

de tal manera que reemplazando en la ecuación diferencial se llega a un sistema de ecuaciones lineales (SEL) para las posiciones x_1, x_2, x_3:

$$\begin{bmatrix} 2-(\Delta t)^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-(\Delta t)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\Delta t)^2 r(t_1) + 1 \\ -(\Delta t)^2 r(t_2) \\ -(\Delta t)^2 r(t_3) + 8 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

donde $r(t)$ es una función del tiempo.

Para ello realice lo siguiente:

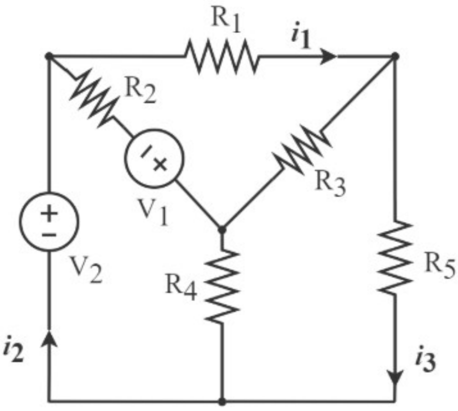
a) Halle la función $r(t)$ y complete el sistema de ecuaciones lineales (SEL) en la forma $Ax = b$. Guarde la matriz en la variable `A` y el lado derecho en el vector columna `b`.

b) Determine si para el sistema de ecuaciones lineales el método de Jacobi converge. Si el método converge, asigne 1 a la variable `op` y 0 en caso contrario.

c) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales con Gauss-Seidel con una tolerancia de 1e-05 y un punto semilla igual al vector nulo. Guarde la aproximación de la posición de la masa en el instante 1 en la variable `x_aprox`.

d) Si el valor exacto de la posición de la masa en el instante 1 es 8.8861 metros halle el error relativo de la aproximación encontrada y guarde en la variable `error_rel`.

5. Se presenta el siguiente circuito donde se deben determinar las corrientes indicadas:



Dicho sistema puede ser modelado con las leyes de Kirchhoff para obtener un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas correspondientes a las corrientes i_1, i_2 e i_3.

El sistema se puede expresar en la forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ siguiente:

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_3) & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & (R_2+R_4) & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & (R_3+R_4+R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Los valores de las resistencias son: $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 5\,\Omega$, $R_5 = 5\,\Omega$.

Los valores de las tensiones son: $V_1 = 24\,\mathrm{V}$ y $V_2 = 24\,\mathrm{V}$ (debe considerar el sentido de las tensiones en su análisis).

Con estos valores se puede resolver parcialmente el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -10 & 15 & -5 \\ -10 & -5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Realice lo siguiente:

a) Defina el elemento b_2. Guarde los valores en `val = b2`. Luego almacene la matriz A en la variable `A` y el vector **b** en la variable `b`.

b) Determine el radio espectral de la matriz T de Jacobi y T de Gauss-Seidel y almacene los valores en `rhoTj` y `rhoTgs`, respectivamente. Guarde en la variable `conv`, una matriz que identifique la convergencia de cada método. Ejemplo:

$$\text{conv} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

significa que el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 y cero indica que no converge dicho método, asimismo 0.8 es el valor del radio espectral usando el método de Gauss-Seidel y 1 significa que dicho método converge.

c) Lleve a cabo el método de Jacobi con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y una tolerancia de 1e-5. Almacene la solución en la variable `xjac` y el número de iteraciones en `njac`. En caso de no convergencia establezca `xjac = 0` y `njac = 0`.