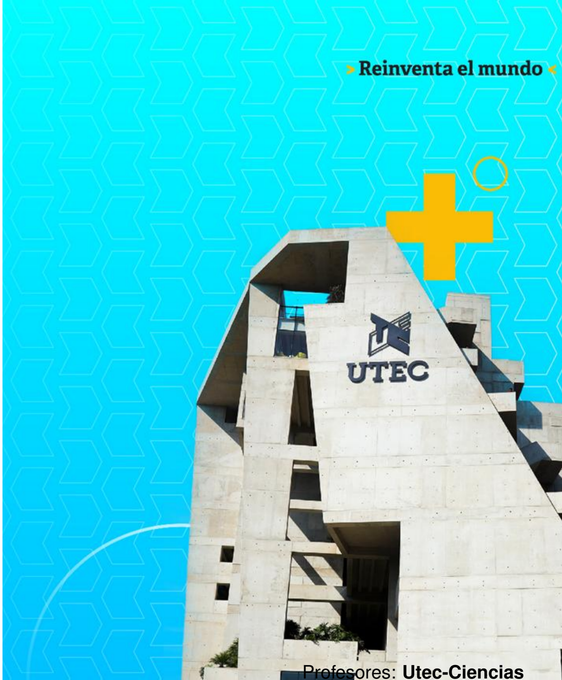
Métodos Numéricos

Ecuaciones No Lineales - S3

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Rósulo Pérez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Jimmy Mendoza Montalvo
(jmendozam@utec.edu.pe)
Daniel Camarena Perez
(vcamarena@utec.edu.pe)
Máximo Obregón Ramos
(mobregon@utec.edu.pe)



Índice

Logros de Aprendizaje

- Localiza las raíces de las ecuaciones no lineales.
- Aplica los métodos cerrados y abiertos para aproximar la raíz de ecuaciones no lineales.
- Identifica la convergencia de los métodos iterativos. Calcula el error cometido.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

1 MÉTODOS CERRADOS

Problema

Dada f una función real con valores reales (es decir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) nos interesa encontrar al menos una raíz de la ecuación:

$$f(x) = 0$$

Es decir, interesa encontrar $\hat{x} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.
En algunos casos, la ecuación se puede resolver de forma analítica y obtener la raíz exacta, pero, **para la gran mayoría de las ecuaciones encontrar raíces es complicado y debe hacerse de manera numérica**.

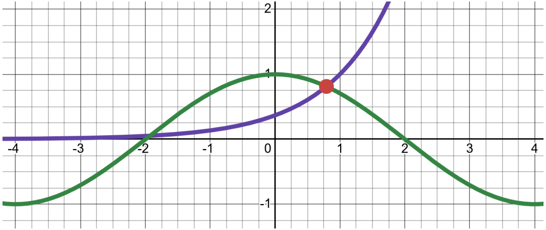
Métodos Gráficos

El método gráfico es útil porque proporciona un valor inicial a ser usado por otros métodos.

Ejemplo

Utilice un argumento geométrico (método gráfico) para garantizar la existencia de una única raiz positiva r

$$e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0$$



Teorema de Bolzano

Si sabemos que la función f es continua en un intervalo $[a, b]$ y sabemos que en ese intervalo tiene un cambio de signo:

$$\boldsymbol{f(a) \cdot f(b) < 0}$$

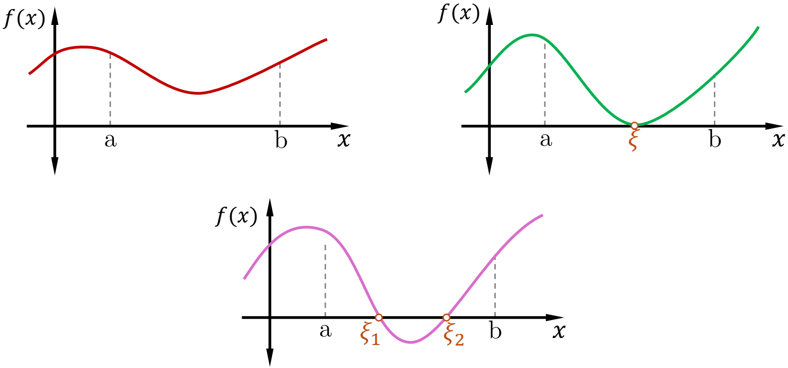
entonces podemos garantizar que existe **al menos un valor** $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $f(\hat{x}) = 0$.

- La **condición de continuidad es esencial** para garantizar la existencia de una raíz.
- Dentro de ese intervalo la función puede tener más de una raíz.

Continuación...

Observación:

Si $\boldsymbol{f(a)f(b) > 0}$, entonces se puede dar **diversas situaciones** en el intervalo $[a, b]$.



Método de la Bisección

El método de la bisección es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide siempre a la mitad. Si la función cambia de signo sobre un intervalo, se evalúa la función en el punto medio. La posición de la raíz se determina situándola en el punto medio del subintervalo, dentro del cual ocurre un cambio de signo. El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación.

0 Comienza desde un intervalo $[a_0, b_0] = [a, b]$ que contiene la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, por lo que $f(a)f(b) < 0$, f es continua en $[a, b]$.

1 Se calcula el valor de la función en el punto medio, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ intervalo $[a_0, b_0]$.

2 Si $f(c_0)$ tiene el mismo signo que $f(a_0)$ establecemos $a_1 = c_0$.

3 Si $f(c_0)$ tiene el mismo signo que $f(b_0)$ establecemos $b_1 = c_0$.

4 Se realizan, una cantidad de veces, los pasos 1, 2, 3 con el intervalo $[a_0, b_0] = [a_1, b_1]$.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Método de la Bisección

Algoritmo 1: Método de Bisección

Entrada: a, b tales que $f(a)f(b) < 0$, tolerancia Tol, número máximo de iteraciones N
Salida: Aproximación c de la raíz de $f(x) = 0$
para $i \leftarrow 0$ **a** N **hacer**
    $c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
    si $f(c) = 0$ **entonces**
        Terminar
    fin si
    si $f(c)f(a) > 0$ **entonces**
        $a \leftarrow c$
    en otro caso
        $b \leftarrow c$
    fin si
fin para
devolver c

Continuación...

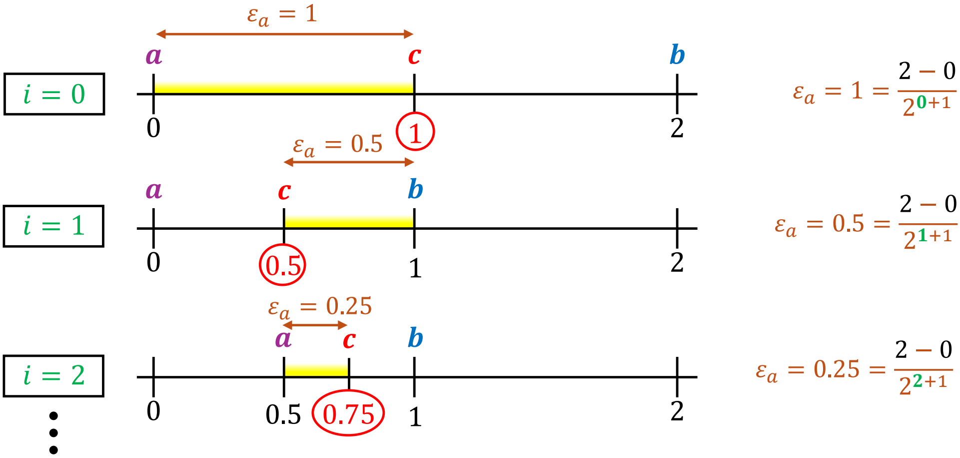


Figure: Una representación gráfica del método de la bisección.

Convergencia de método de bisección

Convergencia

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

1. f admite un cambio de signo en el intervalo $[a, b]$

Entonces la sucesión de aproximaciones del método de bisección $\{x_n\}$ converge a alguna raíz $\hat{x}$ de f.

Resta ver cuál va a ser el **criterio de parada** del algoritmo.

Error y algoritmos iterativos

En muchas aplicaciones reales, como cuando se emplean algoritmos iterativos, no se conoce a priori la respuesta verdadera. Entonces en dichos casos, una alternativa es normalizar el error, usando una buena estimación posible al valor verdadero.

Error y tolerancia

Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión (de aproximaciones) convergente a un valor desconocido. Entonces los *errores absoluto y relativo* están dados por:

$$\xi_n = |\text{aprox. anterior} - \text{aprox. actual}| = |x_n - x_{n-1}|,$$

$$\delta_n = \frac{|\text{aprox. anterior} - \text{aprox. actual}|}{|\text{aprox. actual}|} = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|}.$$

Además, decimos que se tiene una ***tolerancia*** de Tol en el *error absoluto* (*relativo*) cuando:

$$\xi_n \leq \mathrm{Tol} \qquad (\delta_n \leq \mathrm{Tol})$$

Mínimo número de iteraciones

Condición de parada

Si $a = a_0$ y $b = b_0$ son los extremos originales del intervalo donde ocurre un cambio de signo, una estimativa del ***error absoluto*** (ancho del intervalo) después de $\boldsymbol{n}$ pasos es el valor $\frac{b-a}{2^{n+1}}$.
Fijado una tolerancia Tol en el error absoluto, para saber cuántos pasos hace el algoritmo debemos resolver:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \mathrm{Tol}.$$

Claramente

$$\boldsymbol{n} \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\times\mathrm{Tol}}\right)}{\ln 2},$$

por lo que podemos tomar a $\boldsymbol{n}$ como el menor valor entero que cumpla dicha desigualdad.

Ejemplo 1

Ejemplo (EP 2023-2)

Dada la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{e^x - x^3}{\sqrt{x}} = 0$$

(a) *Elige un intervalo inicial* $[a_0, b_0]$*, donde se garantice la existencia de la menor raíz real positiva. Donde* a_0 *y* b_0 *son enteros, además* $b_0 - a_0 = 1$.

(b) *Determine el mínimo número de iteraciones para aproximar la menor raíz real positiva con una tolerancia de* 10^{-3} *al aplicar el método de la bisección.*

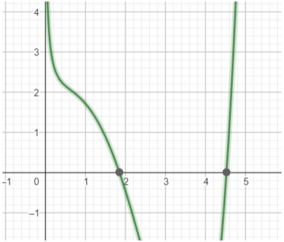
(c) *Realice dos iteraciones utilizando el método de la bisección con las condiciones encontradas en el ítem (a).*

Ejemplo 1

(a) Dado el comportamiento de la función, es suficiente ir analizando en intervalos de longitud 1,

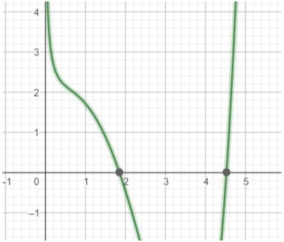
Ejemplo 1

(a) Dado el comportamiento de la función, es suficiente ir analizando en intervalos de longitud 1, como se puede ver en la gráfica:



Ejemplo 1

(a) Dado el comportamiento de la función, es suficiente ir analizando en intervalos de longitud 1, como se puede ver en la gráfica:



La función es continua en $[1, 2]$ y $f(1)f(2) < 0$.

(b) Bastar usar la desigualdad:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \text{tol} \to \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$$

Ejemplo 1

(c) Realizamos las iteraciones:

Iter	a	c	b	f(a)	f(c)	f(b)	Error
0							
1							
2							

Ejercicio 2

Ejemplo (Examen de Rezagados 2024 -1)

El flujo de corriente eléctrica en un circuito RLC, para determinados valores de la resistencia R , la inductancia L y la capacitancia C , viene dado por la expresión:

$$i(t) = 10e^{-t/2}\cos(3t) \text{ (miliamperios)}$$

Estime el primer instante cuando la corriente alcanza el valor de 2 miliamperios. Considere el intervalo inicial [0;0.5] seg., el método de la bisección y realice 02 iteraciones.

2 MÉTODOS ABIERTOS

Introducción

Los métodos abiertos se basan en fórmulas que **requieren únicamente de un solo valor de inicio x o que empiecen con un par de ellos**, pero que no necesariamente encierran la raíz. Estos, algunas veces, divergen o se alejan de la raíz verdadera a medida que se avanza con el cálculo. Sin embargo, cuando los métodos abiertos convergen, **en general lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados**.

Método de Newton

De las fórmulas para localizar raíces, la fórmula de Newton-Raphson es una de las más utilizadas. Si el valor inicial para la raíz es x_i, entonces se puede trazar una tangente desde el punto $(x_i; f(x_i))$. El punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.

Interpretación Geométrica

La ecuación de la recta tangente es:

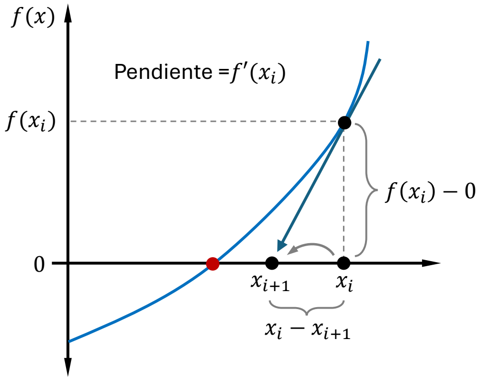
$\boxed{f(x_i) - y = f'(x_i)(x_i - x)}$ Cuando $y = 0,\ x = x_{i+1}$, reemplazando:

$f(x_i) - 0 = f'(x_i)(x_i - x_{i+1})$

Despejando:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Observación: $f'(x_i) \neq 0$.



Método de Newton

Algoritmo 2: Método de Newton

Entrada: Función $f(x)$, punto inicial x_0, tolerancia en error relativo δ_r
Salida: Aproximación x de la raíz de $f(x) = 0$
$k \leftarrow 0$
$\delta_r \leftarrow 1$ (valor mayor a Tol)
Obtener expresión $f'(x)$
mientras $\delta_r > Tol$ **hacer**
  si $f'(x_k) = 0$ **entonces**
    Terminar con error
  fin si

$$x_{k+1} \leftarrow x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\delta_r \leftarrow \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$$

  $k \leftarrow k + 1$
fin mientras
devolver x_{k+1}

Ejemplo

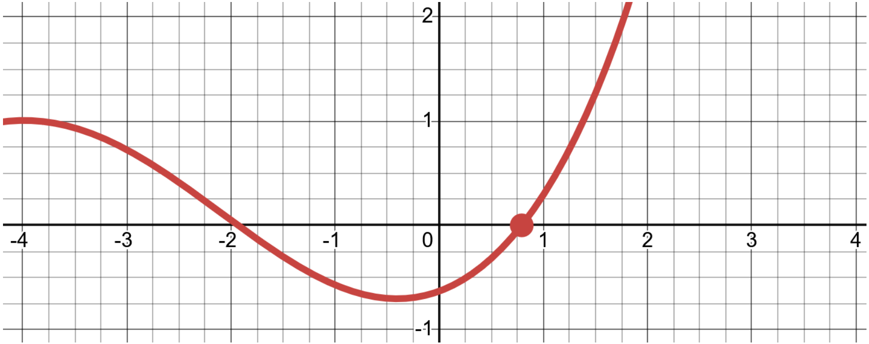
Ejemplo

Aproximar una raíz de la función $f(x) = e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ *, utilizando el método de Newton con* $x_0 = 0.1$;. *Realice 04 iteraciones. Calcule el error (relativo).*

Solución:

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}	Error relativo
0					
1					
2					
3					
4					

Idea gráfica



La gráfica nos muestra una aproximación al valor de la raíz de la ecuación $f(x) = e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Convergencia de método de Newton

Convergencia

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

1. Existe una raíz $x^\star$ de f en el intervalo $[a, b]$
2. $f'(x) \neq 0$ en todo un intervalo $I = [x^\star - \delta, x^\star + \delta]$ para algún $\delta > 0$
3. $f''(x)$ es continua es I
4. x_0 es suficientemente cercano a $x^\star$, $x_0 \in I$

Entonces la sucesión de aproximaciones de Newton $\{x_k\}$ converge a $x^\star$.

Además, si se cumple

$$M\delta < 1 \text{ con } M = \max_{x \in I} \frac{|f''(x)|}{2|f'(x)|},$$

se tiene que

$$|x_{k+1} - x^\star| \leq M|x_k - x^\star|^2;$$

es decir, el método de Newton converge cuadráticamente.

Método del Punto Fijo

Para resolver una ecuación $f(x) = 0$, se reescribe en la forma:

$$\boxed{x = g(x)}$$

A una solución x^* de esta ecuación se le llama **punto fijo** de la función g, es decir:

$$g(x^*) = x^*$$

Geométricamente, es la intersección de la función $y = g(x)$ y la función $y = x$.

La elección de $g(x)$ no es única. Algunas formas acercan x a la solución, otras lo alejan.

Método del Punto Fijo

Algoritmo 3: Método del Punto Fijo

Entrada: Función $g(x)$, punto inicial x_0, tolerancia en error relativo δ_r
Salida: Aproximación x de la raíz de $f(x) = 0$
$k \leftarrow 0$
$\delta_r \leftarrow 1$ (valor mayor a Tol)
mientras $\delta_r > Tol$ **hacer**
  $x_{k+1} \leftarrow g(x_k)$
  $$\delta_r \leftarrow \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$$
  $k \leftarrow k + 1$
fin mientras
devolver x_{k+1}

Método del Punto Fijo

Ejemplo

Dada la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$*. Expresar la ecuación en la forma* $x = g(x)$

Solución:

a) $x = g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

b) $x = g(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$

Continuación...

Ahora vamos a usar el proceso iterativo $x^{(n+1)} = g(x^{(n)}); \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ en las expresiones a y b.
Tomamos como semilla $x^{(0)} = 1.8$.

Iteración	a)$x = g(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$	b)$x = g(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$
0	1.8	1.8
1	-6.992	1.313064329
2	149.281087	1.371915816
3	-3415685.7	1.364380177
4		1.36533815
5		1.365216255
6		1.365231764
7		1.365229791

Convergencia de método del punto fijo

Convergencia

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b\rangle$ que satisface:

1. Para cualquier punto x en $[a, b]$, se tiene que $g(x) \in [a, b]$ (**condición de existencia**).
2. Se cumple $|g'(x)| < 1$ para cualquier $x \in \langle a, b\rangle$ (**condición de contracción**).

Entonces existe un único punto $p \in \langle a, b\rangle$ tal que $g(p) = p$. Además, si $x^{(0)}$ es algún punto del intervalo $[a, b]$, y la sucesión $\{x^{(k)}\}$ se construye de manera recursiva

$$\boxed{x^{(k+1)} = g(x^{(k)})}$$

entonces la sucesión $\{x^{(k)}\}$ converge al punto fijo p de la función g.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Representación gráfica

En 1a) y 1b) el método del punto fijo converge, tienen un comportamiento monótono.

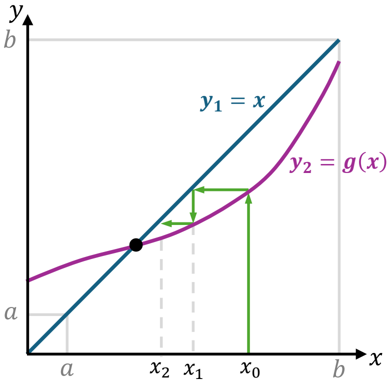


Figura 1a

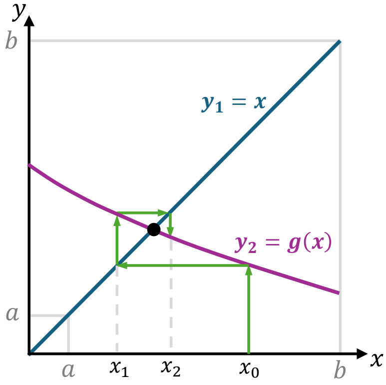


Figura 1b

Representación gráfica

En 1c) y 1d) el método de punto fijo diverge, tienen un comportamiento oscilatorio o en espiral.

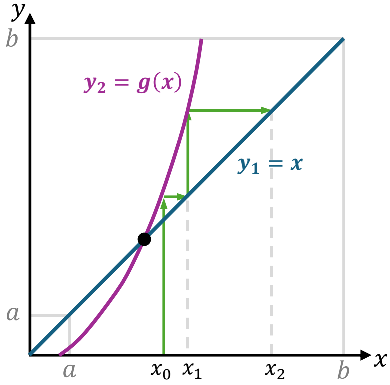


Figura 1c

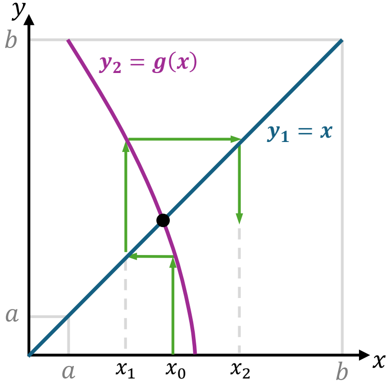


Figura 1d

Ejemplo

Ejemplo

La ecuación $x^2 - x = 0$*, tiene en el intervalo* $[0.64; 1.44]$ *una única raíz* α*.*

- *Verificar que* α *es un punto fijo de la función* $g(x) = \sqrt{x}$*.*
- *Pruebe que la sucesión* $\{x^{(n)}\}$ *definida por*

$$\begin{cases} x^{(0)} = 0.64 \\ x^{(n+1)} = \sqrt{x^{(n)}}, \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

Converge para α

Solución:

- Como α es raíz de la ecuación $x^2 - x = 0$ entonces $\alpha^2 - \alpha = 0$
  De este modo:

$$\alpha^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\alpha} = g(\alpha)$$

  Por lo tanto α es punto fijo de la función $g(x) = \sqrt{x}$.

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Solución:

- Como α es raíz de la ecuación $x^2 - x = 0$ entonces $\alpha^2 - \alpha = 0$
  De este modo:

$$\alpha^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\alpha} = g(\alpha)$$

  Por lo tanto α es punto fijo de la función $g(x) = \sqrt{x}$.

- Es necesario verificar que la función $g(x) = \sqrt{x}$ satisface en el intervalo $[0.64; 1.44]$ las condiciones del teorema del punto fijo. Se tiene $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y se observa que g' es una función positiva y decreciente, por eso es fácil calcular el máximo de su valor absoluto:

$$k = \max_{x \in [0.64;1.44]} |g'(x)| = g'(0.64) = \frac{1}{2 \times 0.8} = 0.625 < 1$$

Luego hay que demostrar que $g([0.64; 1.44]) \subset [0.64; 1.44]$. Calculemos los valores mínimo y máximo de g en el intervalo $[0.64; 1.44]$. Dado que $g' > 0$, la función g es creciente:

$$\boxed{\min_{x\in[0.64;1.44]} g(x) = g(0.64) = 0.8}$$

$$\boxed{\max_{x\in[0.64;1.44]} g(x) = g(1.44) = 1.2}$$

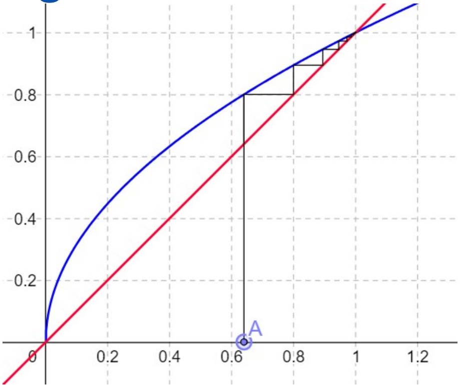
$$g([0.64; 1.44]) = [g(0.64), g(1.44)] = [0.8; 1.2]$$

Así que:

$$\boxed{[0.8; 1.2] \subset [0.64; 1.44]}$$

Por lo tanto, g tiene <u>un único punto fijo</u> en este intervalo.

Comprobación gráfica



Comprobación de la convergencia del método del punto fijo en el intervalo $[0.64; 1.44]$ con $x^{(0)} = 0.64$.

Ejercicio 3

Ejemplo (Examen parcial 2023 - 2)

Determine la veracidad de la siguiente proposición: Sea: $f(x) = e^x - x\,(e-1) - 1$ *y* $x = g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$. *Para cualquier punto* x *en* $[-1, 1]$ *se cumple que* $g(x) \in [-1, 1]$. *Por ello, esta garantizada la convergencia del método de punto fijo en la determinación de la raíz real de la ecuación.*

Conclusiones

- Los métodos abiertos, aunque más rápidos, son menos estables que los métodos cerrados, los cuales ofrecen mayor seguridad en la convergencia.
- La convergencia de los métodos numéricos, en particular los métodos abiertos, depende en gran medida de la elección adecuada del valor inicial.
- La precisión en la resolución numérica es crucial, y un control adecuado de la tolerancia y el error garantiza resultados más fiables en aplicaciones prácticas.

Gracias por su atención

Bibliografía

Steven C. Chapra and Raymond P. Canale

Métodos numéricos para ingenieros, 7a ed.

Richard L. Burden and J. Douglas Faires

Análisis numérico, 7a ed.

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA