Asesoría - semana 02

Propagación de errores.

1. **(EP-2024-1-S6-Pregunta 3).** Dado un solenoide circular, el campo magnético B en el eje central a una distancia z del centro de la espira se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde: μ_0 es la permeabilidad del vacío ($4\pi \times 10^{-7}$H/m), I es la corriente a través del solenoide, R es el radio de la espira z, es la distancia desde el centro de la espira. Si los valores constantes son $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m y $I = 5$ A. El radio de la espira R se mide como 0.05 m con un error de $\Delta R = 0.001$ m.

a) Calcule el valor del campo magnético B en el eje central.

b) Calcule el error relativo porcentual en la estimación de B debido al error en la medición de R, para $z = 0.1$ m.

a) $z = 0$:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+0^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \times (R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \times R^3} = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{2R}}_{\text{reemplazar valores.}}$$

b) $$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{B}$$

$$\text{Error absoluto} = \left|\frac{dB}{dR}\right| \Delta R$$

$$\rightarrow \frac{dB}{dR} = \frac{d}{dR}\left(\frac{\mu_0 I R^2}{2(\underbrace{R^2+z^2}_{})^{3/2}}\right) =$$

$$= \frac{(\mu_0 I \cdot 2R) \times (2(R^2+z^2)^{3/2}) - (\mu_0 I R^2)(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}-1} \cdot 2R)}{[2(R^2+z^2)^{3/2}]^2}$$

$$= \frac{4\mu_0 R I (R^2+z^2)^{3/2} - 6\mu_0 I R^3 (R^2+z^2)^{1/2}}{4(R^2+z^2)^3}$$

2. **(EP-2024-1-S1,2,7-Pregunta 3).** Sean

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{3} \pm 0.01 \\ y = & 1 - |2x - 1| \\ z = & \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} y\right) \end{cases}$$

$2x-1$

$3x+5$

a) Estime la incertidumbre de y

b) Estime la incertidumbre de z

a) $x = \frac{1}{3} \pm 0.01 \rightarrow \frac{1}{3} - 0.01 \leq x \leq \frac{1}{3} + 0.01$

$\times 2$

$\rightarrow \frac{2}{3} - 0.02 \leq 2x \leq \frac{2}{3} + 0.02$

-1 $\qquad$ -1

$\frac{2}{3} - 0.02 - 1 \leq 2x-1 \leq \frac{2}{3} + 0.02 - 1 = -\frac{97}{300} < 0$

$\rightarrow 2x-1$ es negativo

$\rightarrow |2x-1| = -(2x-1)$
$= -2x+1$

$\rightarrow y = 1 - |2x-1| = 1 - (-2x+1) = 1 + 2x - 1 = 2x$

$\rightarrow y = 2x$

$\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right| \Delta x = 2 \times 0.01 = \boxed{0.02}$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3} \pm 0.02$

$x = \frac{1}{3} \pm 0.01$

$\bar{x} + \Delta x$

$y = 2 \cdot \frac{1}{3} + \Delta y$

c) $z = \operatorname{Sen}^2\left(\frac{\pi}{2}y\right) \rightarrow \Delta z = \left|\frac{dz}{dy}\right| \Delta y$

- $\frac{dz}{dy} = 2\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}y\right) \cdot \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow \frac{dz}{dy} = 2 \cdot \operatorname{Sen}\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\pi/3}\right) \operatorname{Cos}\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{\pi/3}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

$\rightarrow \Delta Z = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \cdot \Delta y = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \times 0{,}02$

$\rightarrow b$

3. **(EP-2024-1-S9-Pregunta 3).** Consideremos la ecuación de estado de Redlich-Kwong para un gas real:

$$P = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{\sqrt{T} V_m (V_m + b)}$$

donde: P es la presión absoluta en bar, T es la temperatura, V_m es el volumen molar, a y b son constantes específicas del gas, y R es la constante de los gases ideales. Si los valores constantes son $a = 17.4248\,\frac{\mathrm{bar}\cdot(\mathrm{m}^3)^2}{\mathrm{kmol}^2}$, $b = 0.0221\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kmol}}$, y $R = 0.08314\,\frac{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{bar}}{\mathrm{kmol}\cdot\mathrm{K}}$, un volumen molar $V_m = 0.09896\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kmol}}$, y una temperatura $T = 190\,\mathrm{K}$ medida con un error absoluto de $\Delta T = \pm 0.1\,\mathrm{K}$. **Nota:** No realice cambio de unidades.

a) Calcule el valor de la presión P en bar.

b) Calcule el error relativo porcentual en la estimación de P debido al error en la medición de T.

4. **(EP-2024-2-S10-Pregunta 3).** La demanda agregada D de un país está modelada en función del ingreso disponible Y y del tipo de interés r, mediante la siguiente fórmula:

$$D(Y,r) = \alpha \ln(Y^2+1) + \beta e^{-r^2}$$

donde $\alpha = 3.2$ y $\beta = 1.5$ son constantes conocidas. Las mediciones de Y y r están sujetas a incertidumbre, se sabe que:

- $Y = 120$ con $\Delta = 3$.
- $r = 0.07$ con $\Delta = 0.02$.

reemplazar

En base a dicha información estime el valor de la demanda agregada, así como el respectivo error absoluto junto con el intervalo donde se encuentra el posible valor exacto.

Error absoluto $= \left|\dfrac{\partial D}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\dfrac{\partial D}{\partial r}\right| \Delta r$

supongamos:

$D(y,r) = 8$ error abs. $= 0.02$

$\Rightarrow [8-0.02 \,;\, 8+0.02]$

5. **(EP-2024-2-S9-Pregunta 3).** Consideremos una partícula de masa $m = (3.0 \pm 0.1)$ kg confinada en una caja unidimensional de longitud $L = (2.0 \pm 0.02)$ m. Los niveles de energía E_n de la partícula están dados por la siguiente ecuación:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{T^\beta}\right)$$

donde:

- $\hbar = 1.05$ J·s (una constante simplificada para este problema)
- $n = 1$ (nivel cuántico)
- $m = (3.0 \pm 0.1)$ kg (masa de la partícula)
- $L = (2.0 \pm 0.02)$ m (longitud de la caja)
- $\alpha = 0.3$ (constante)
- $T = 300$ K (temperatura del sistema)
- $\beta = 0.5$ (constante)

- **[2 ptos]** Calcula el valor de la energía en el estado base E_1 y su error absoluto debido a las incertidumbres en m y L.
- **[1 pto]** Determine que variable contribuye más al cálculo del error absoluto.

¿Cuál es mayor entre:

$$\left|\frac{\partial E_1}{\partial m}\right| \Delta m \quad y \quad \left|\frac{\partial E_1}{\partial L}\right| \Delta L \text{ ?}$$

$$\underbrace{\left|\frac{\partial E_1}{\partial m}\right| \Delta m}_{0.008} \qquad \underbrace{\left|\frac{\partial E_1}{\partial L}\right| \Delta L}_{0.013}$$

L

6. Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

- **(EP-2023-2-S5-Pregunta 1).** Si $a = 9 \pm 0.16$ entonces $\sqrt{a} = 3 \pm 0.4$
- **(EP-2024-2-S4,8-Pregunta 1).** Considerando que $f(x,y) = x^2 \sin(y)$, donde x e y son variables medidas con incertidumbre. Para estimar la incertidumbre de f, en función a la incertidumbre de cada variable se calcula:

$$\Delta f(x,y) = |2x\sin(y)|\Delta\tilde{x} + |x^2\cos(y)|\Delta\tilde{y}$$

Punto flotante

1. **(EP-2024-1-S3-Pregunta 1).** Dada la siguiente representación en punto flotante de un computador hipotético:

$$x = \pm(1.d_1d_2d_3d_4)_2 \times 2^E$$

Considere que este sistema tiene un rango de exponentes limitado de $E_{\text{mín}} = -3$ a $E_{\text{máx}} = 4$. ¿Cuál sería el menor número positivo diferente de cero que puede representarse en este sistema?. ¿Determine cuantos bits tiene este sistema hipotético?. Explique cómo se determina este valor.

- $-3 \leq E \leq 4$

- Menor número positivo:

$$+1,0000 \times 2^{-3} = 1 \times 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

- Número de bits:

$2 \times 2 \times 2$

$$\underbrace{1}_{\text{signo}} + \underbrace{x}_{\text{exponente}} + \underbrace{4}_{\text{mantisa}}$$

Entre -3 y 4 hay 8 números enteros

$$8 = 2^3$$

$\Rightarrow x = 3$

$1 + 3 + 4$

$\therefore$ Necesito 8 bits para representar en este sistema

2. **(EP-2024-2-S1,2,7-Pregunta 3).** En una prueba respecto a la precisión de resultados, se necesita representar al número $\frac{-1237}{2}$ en la notación coma flotante IEEE-754 con precisión simple, detalle paso a paso el proceso y luego halle la secuencia de bits.

- $-\frac{1237}{2} = -618.5$

Parte entera: 618

$$
\begin{array}{r|l} 618 & 2 \\ \hline 0 & 309 \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 309 & 2 \\ \hline 1 & 154 \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ \hline 0 & 77 \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 77 & 2 \\ \hline 1 & 38 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l} 38 & 2 \\ \hline 0 & 19 \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 19 & 2 \\ \hline 1 & 9 \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \hline 1 & 4 \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}
\quad
\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}
$$

$\rightarrow 618 = 1001101010$

$1,\ldots \times 2^8$

Parte decimal: 0,5

$0,5 \times 2 = 1,0$

$1,10011 \times 2^2$

$\rightarrow -618,5 = -1001101010,1$

$= -1,\underbrace{\boxed{0011010101}}_{\text{mantisa}} \times 2^9$

- Exponente: sesgo $= 127 = 2^{8-1} - 1$

$\rightarrow$ Exponente real $= 9$

$\rightarrow$ Exponente interno $=$ Exponente real $+$ sesgo $= 9 + 127 = 136$

$$\begin{array}{r|l} 136 & 2 \\ \hline 0 & 68 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 68 & 2 \\ \hline 0 & 34 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 34 & 2 \\ \hline 0 & 17 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 17 & 2 \\ \hline 1 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 136 = 10001000$

• Secuencia de bits:

1 | 1 0 0 0 1 0 0 0 | 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0...

0 0 0 0 0 1 0 0 ... 0

signo

$exp_{maq} = 4 = 100_2$

0,72

0,72000000

3. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

- **(EP-2024-1-S4,8-Pregunta 1).** Un sistema hipotético de punto flotante cuyo $BIAS = 511$ y que tiene 1013 bits en la mantisa tiene una cantidad total de 1024 bits.
- **(EP-2024-1-S1,2,7-Pregunta 1).** Un alumno del curso afirma que la siguiente expresión dada en el formato IEEE 754 de precisión simple:

0	11111111	10000000000000000000000

F

representa al número $x = 1.10000000000000000000000 \times 2^{128}$.

- **(EP-2024-2-S11,6-Pregunta 1).** La secuencia de bits mostrada en el recuadro (precisión simple en formato IEEE 754):

$$\boxed{11000001110111000000000000000000}$$

equivale en **decimal** al número -27.5.

- **(EP-2024-2-S3,5-Pregunta 1).** La representación en formato IEEE 754 de simple precisión para el número decimal -2.125 es:

$$\boxed{11000000000010000000000000000000}$$

e

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array} = 1 \times 2^7 = 128$$