Métodos Numéricos
Exámen Parcial
Pregrado
2023-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesor: Hermes Pantoja
Sección: 1.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Se quiere hallar el área de un círculo con su respectiva incertidumbre absoluta, cuyo radio es $r = (10 \pm 1)cm$. Recordar que el área de un círculo se puede hallar como $A = \pi r^2$, entonces el área del circulo es igual 100π y la incertidumbre absoluta es igual a 20π.
Solución:
El área de un círculo, puede calcularse como:
$$A(r) = \pi r^2$$
Usando la fórmula de Taylor:
$$\triangle A \approx \left|\frac{\partial A}{\partial r}\right| \triangle r$$
Entonces:
$$\triangle A \approx 2\pi r \triangle r \rightarrow \triangle A \approx 2\pi(10)(1)$$
Por lo tanto, la incertidumbre absoluta es 20π.

2. [**2 ptos**] Dada la siguiente representación en punto flotante de un computador hipotético de 7 bits:
$$x = \pm(1.d_1 d_2 d_3)_2 \times 2^E, \quad -2 \leq E \leq 3$$
El menor número positivo en dicho sistema es: 0001000. Justifique correctamente su respuesta.
Solución:
Sabemos lo siguiente:
   - La mantisa tiene 3 bits, escogemos 000.
   - El exponente tiene 3 bits, pero, 000 está reservado, por lo tanto el más pequeño sería 001.

- El número es positivo, su primer bit es 0.

El menor número positivo en dicho sistema es: 0001000.

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Dada la siguiente ecuación no lineal:

$$x^2 - e^x = \frac{1}{2}$$

a) [**0.5 pto**] Elige un intervalo inicial $[a_0; b_0]$, donde se garantice la existencia de al menos una raíz real negativa. Donde a_0 y b_0 son enteros, además $b_0 - a_0 = 1$.

Solución:

Podemos usar la siguiente gráfica (no fue necesaria conocerla en el examen, pues es clara la tendencia de la función): Si hacemos $a_0 = -1$ y $b_0 = 0$, tenemos:

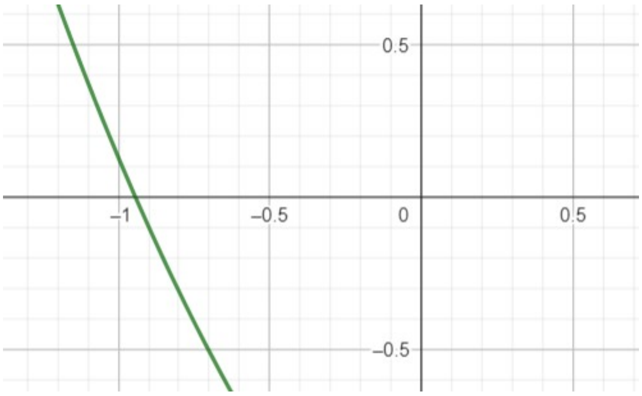


Figura 1: Gráfica de $f(x)$

- $f(-1) = 0.132...$
- $f(0) = -1.5$

Observación: La única elección posible para el intervalo de confianza era $[-1, 0]$, pues este es el único intervalo de longitud 1 y extremos enteros.

b) [**0.5 pto**] Determine el número de iteraciones mínima para aproximar la raíz real negativa con una tolerancia $Tol = 10^{-3}$.

Solución:

Sabemos de la fórmula para la cantidad de iteraciones:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \text{Tol}$$

Reemplazando:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3} \to 1000 \leq 2^{n+1}$$

De la desigualdad anterior, el valor mínimo de iteraciones es $n = 9$.

c) **[2 ptos]** Realice dos iteraciones utilizando el método de la Bisección con las condiciones iniciales encontradas en el ítem (a).
Solución:
La función viene dada por: $f(x) = x^2 - e^x - \frac{1}{2}$ en el intervalo $[-1, 0]$, aplicando el método:

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	error
-1	0	-0.5	0.13212	-1.5	-0.8565	0.5
-1	-0.5	-0.75	0.1312	-0.856	-0.4099	0.25
-1	-0.75	-0.875	0.1312	-0.4098	-0.1512	0.125

4. **[3 ptos]** Queremos calcular la raíz $r = 1$ de la función

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

utilizando el método del punto fijo:

$$g(x) = \alpha f(x) + x$$

donde α, es una constante.

a) **[1 pto]** Verifique que $r = 1$ es un punto fijo de $g(x)$.
Solución:
Para verificar ello, deberiamos tener $g(1) = 1$, entonces: $g(1) = \alpha f(1) + 1 = \alpha(0) + 1 = 1$, por lo tanto, $r = 1$ es punto fijo.

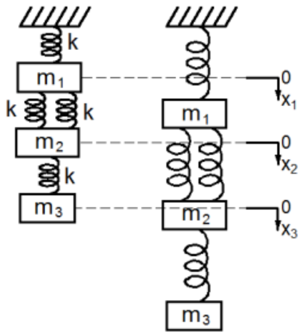
b) **[2 ptos]** Verificar que para $\alpha = \frac{1}{2}$, el método del punto fijo es convergente en el intervalo $\langle 0, 1\rangle$. Justifique apropiadamente su respuesta.
Solución:
La función g queda definida de la forma $g(x) = \frac{1}{2}f(x) + x$, además $|g'(x)| = \left|\frac{1}{2}(2x-3)+1\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Pero:

$$0 < x < 1 \to -\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

Tomando valor absoluto: $|g'(x)| < 1$. Por lo tanto, el método es convergente.

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** Dado el siguiente sistema masa resorte con 3 bloques de masas diferentes, sostenidad mediante 4 resortes:



Considerando $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg, $m_3 = 2.5$ kg, $k = 10$ kg$/s^2$ y $g = 9.81$ m$/s^2$

a) [**4 ptos**] La relación entre las masas y los desplazamiento (x_i) se modela mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$kx_1 - (x_2 - x_1)(2k) = m_1 g \quad (1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots = m_2 g \quad (2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots = m_3 g \quad (3)$$

Complete la ecuación (2) y (3).

Solución:

Al tratarse de un sistema masa resorte, tenemos las siguientes ecuaciones, luego de hacer el D.C.L:

- $kx_1 = 2k(x_2 - x_1) + m_1 g$
- $2k(x_2 - x_1) = m_2 g + k(x_3 - x_2)$
- $k(x_3 - x_2) = m_3 g$

Dando forma a lo solicitado:

$$kx_1 - (x_2 - x_1)(2k) = m_1 g \quad (4)$$
$$-2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 = m_2 g \quad (5)$$
$$-kx_2 + kx_3 = m_3 g \quad (6)$$

b) [**3 ptos**] Si eliminamos el bloque 3 y el resorte que une el bloque 2 y el bloque 3 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3kx_1 - 2kx_2 = m_1 g$$
$$-2kx_1 + 2kx_2 = m_2 g$$

Calcule los desplazamientos usando el método de Gauss-Seidel y Jacobi en la segunda iteración, partiendo del punto semilla $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Reemplazando por los valores dados, el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 30x_1 - 20x_2 &= 19.62 \\ -20x_1 + 20x_2 &= 29.43 \end{aligned}$$

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.62 \\ 29.43 \end{bmatrix}$$

Empezando a iterar por Gauss - Seidel:

1) $x_1^{(1)} = \dfrac{19.62 + 20x_2^{(0)}}{30} \approx 1.321$
2) $x_2^{(1)} = \dfrac{29.43 + 20x_1^{(1)}}{20} \approx 2.793$
3) $x_1^{(2)} = \dfrac{19.62 + 20x_2^{(1)}}{30} \approx 2.516$
4) $x_2^{(2)} = \dfrac{29.43 + 20x_1^{(2)}}{20} \approx 3.988$

Iterando por Jacobi:

1) $x_1^{(1)} = \dfrac{19.62 + 20x_2^{(0)}}{30} \approx 1.321$
2) $x_2^{(1)} = \dfrac{29.43 + 20x_1^{(0)}}{20} \approx 2.472$
3) $x_1^{(2)} = \dfrac{19.62 + 20x_2^{(1)}}{30} \approx 2.302$
4) $x_2^{(2)} = \dfrac{29.43 + 20x_1^{(1)}}{20} \approx 2.792$

c) [**3 ptos**] Del item anterior, indique cuál de los dos métodos converge más rápido. Utilice el radio espectral para responder a la pregunta.

Solución:

Calculando los radios espectrales para Jacobi y Gauss - Seidel:

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad T_j = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto los radios espectrales:

1) $\rho(T_{gs}) \approx 0.666$
2) $\rho(T_j) \approx 0.816$

Como $\rho(T_{gs})$ está más cerca a 0 podemos decir que el método de Gauss - Seidel converge más rápido.

Métodos Numéricos
Exámen Parcial
Pregrado
2023-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesor: Rósulo Pérez.
Sección 6.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si $g(x) = x^2$ tiene m puntos fijos y $h(x) = x^3$ tiene n puntos fijos entonces $m + n = 3$.
   Solución:
   Encontrando los puntos fijos de:

   a) $g(x)$, hacemos $g(x) = x \to x^2 = x \to x^2 - x = 0 \to x(x-1) = 0$, los puntos fijos son 0 y 1, por lo tanto, $m = 2$.

   b) $h(x)$, hacemos $h(x) = x \to x^3 = x \to x^3 - x = 0 \to x(x^2-1) = 0 \to x(x+1)(x-1) = 0$ los puntos fijos son $0, -1, 1$, por lo tanto, $n = 3$.

   Finalmente $m + n = 5$. La afirmación es **falsa**.

2. [**2 ptos**] Dado el sistema de ecuaciones no lineales $\begin{cases} x^3 + 3y^2 &= 21 \\ x^2 + 2y + 2 &= 0 \end{cases}$ entonces la matriz Jacobiana es invertible para todo punto de la forma $(2; a)$ con $a \neq 0$.
   Solución:
   Encontramos las derivadas parciales, previa asignación de funciones:

   $$F(x,y) = x^3 + 3y^2 - 21 = 0 \quad G(x,y) = x^2 + 2y + 2 = 0$$

   Encontrando las derivadas parciales:

   a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$.

   b) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 6y$.

   c) $\dfrac{\partial G}{\partial x} = 2x$.

   d) $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 2$

Formando el jacobiano:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 & 6y \\ 2x & 2 \end{bmatrix} \rightarrow J(2,a) = \begin{bmatrix} 12 & 6a \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Evaluando el determinante $24 - 24a \neq 0 \rightarrow 24 \neq 24a \rightarrow a \neq 1$. Por lo tanto, la afirmación es **FALSA**

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Dado el número $N = 19.5625$ representado en la base 10:

   a) [**1 pto**] Expresar al número N en el sistema de base 2.
   Solución:
   Efectuamos la conversión:

   - Parte entera: 19, en binario $19 = 10011_2$.
   - Parte fraccionaria: $0.5625 = 0.1001_2$.

   El número en representación binaria, viene dado por: $19 = 10011.1001_2$.

   b) [**1 pto**] Luego de normalizar el resultado obtenido en el item anterior halle el exponente interno, exponente externo y mantisa considerando la notacion IEEE-754 de precisión simple.
   Solución:
   Del item anterior:

   $$19 = 10011.1001_2 \rightarrow 19 = 1.00111001_2 \times 2^4$$

   Como el bias es 127, entonces el exponente será $127 + 4 = 131$, representando en binario:

   $$131 = 10000011_2$$

   Como el número es positivo, el primer bit es 0, representando en precisión simple:

   $$01000001100111001000000000000000$$

   c) [**1 pto**] Halle la secuencia de bits que representa al número N en la notación de punto flotante IEEE-754 de precisión simple.
   Solución:
   Del item anterior:

   $$19.5625 = 01000001100111001000000000000000$$

4. **[3 ptos]** La velocidad límite v de una gota esférica de radio R compuesta de un fluido de viscosidad μ_1 y densidad ρ_1 desplazándose bajo la acción de la gravedad constante g en otro fluido de viscosidad $\mu_2 \neq 0$ y densidad ρ_2 viene dada por:

$$v = \frac{2R^2 g(\rho_1 - \rho_2)(\mu_1 + \mu_2)}{3\mu_2(2\mu_2 + 3\mu_1)}$$

Si se conocen de manera exacta los siguientes datos: $\rho_1 = 10$, $\rho_2 = 15$, $\mu_2 = 0.3$ y $g = 9.8$ sin embargo $R = 1.5 \pm 0.02$, $\mu_1 = 0.2 \pm 0.01$, halle el error absoluto con el que se obtiene la velocidad v.

Indicación: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

Solución:

Definimos la función:

$$v = v(R, \mu_1) = \frac{2R^2 g(\rho_1 - \rho_2)(\mu_1 + \mu_2)}{3\mu_2(2\mu_2 + 3\mu_1)}$$

Encontrando las derivadas parciales:

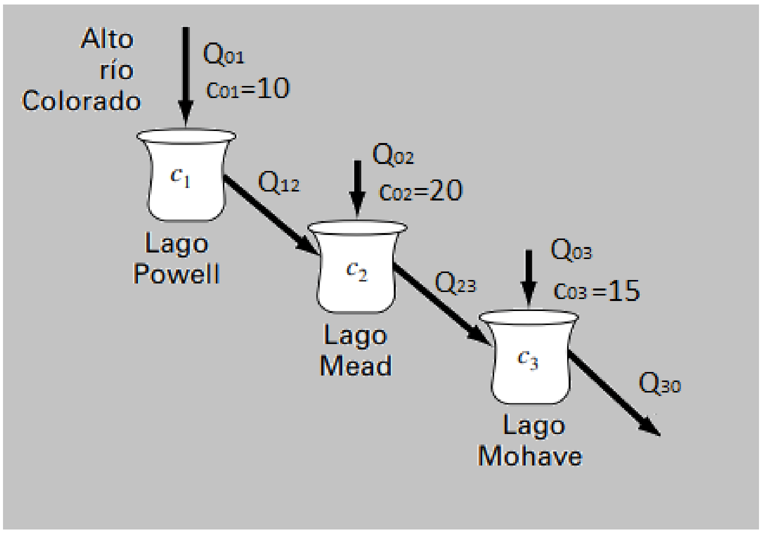
- $\left|\dfrac{\partial v}{\partial R}\right| = \dfrac{196R\left(\mu_1 + \frac{3}{10}\right)}{\frac{27\mu_1}{10} + \frac{27}{50}}$
- $\left|\dfrac{\partial v}{\partial \mu_1}\right| = \dfrac{1323R^2\left(\mu_1 + \frac{3}{10}\right)}{5\left(\frac{27\mu_1}{10} + \frac{27}{50}\right)^2} - \dfrac{98R^2}{\frac{27\mu_1}{10} + \frac{27}{50}}$

Usando la serie de Taylor:

$$\triangle v \approx \left|\frac{\partial v}{\partial R}\right| \triangle R + \left|\frac{\partial v}{\partial \mu_1}\right| \triangle \mu_1 \approx 3.2326$$

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** La parte baja del río Colorado consiste en una serie de tres almacenamientos tal como como se ilustra en la figura.



Luego de escribir los balances de masa para cada uno de ellos, considerando las concentraciones de cloruro c_1, c_2 y c_3 de cada uno de los depósitos en mg/m^3 asi como los caudales: $Q_{01} = 100$; $Q_{12} = 50$; $Q_{02} = 80$; $Q_{23} = 120$; $Q_{03} = 40$ y $Q_{30} = 60$ (todos en m^3/min) y las concentraciones externas $c_{01} = 10$; c_{02} se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas:

a) [**2 ptos**] Luego de reordenar (si es necesario) y simplificar a su mínima expresión las ecuaciones obtenidas, modele el sistema de ecuaciones lineales en la forma $Ax = b$ de tal modo que $b = \begin{bmatrix} 20 \\ 160 \\ 10 \end{bmatrix}$ y $x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.

Solución:

Modelando el sistema:

$$Q_{01} \times 10 = Q_{12} \times c_1$$

$$Q_{02} \times 20 + Q_{12} \times c_1 = Q_{23} \times c_2$$

$$Q_{23} \times c_2 + Q_{03} \times 15 = Q_{30} \times c_3$$

Quedando:

$$100 \times 10 = 50 \times c_1$$

$$80 \times 20 + 50 \times c_1 = 120 \times c_2$$

$$120 \times c_2 + 40 \times 15 = 60 \times c_3$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 160 \\ 10 \end{bmatrix}$$

b) **[2 ptos]** Analice la convergencia del método iterativo de Jacobi (según el criterio de la diagonal dominancia). Indique claramente su conclusión (converge, diverge o no se sabe).

Solución:

Del item anterior, rescatamos la matriz de coeficientes asociada al sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual no es diagonal estrictamente dominante, pues en la tercera fila se cumple que $|1| < |-2| + |0|$. Por lo tanto, no podemos afirmar nada, para poder concluir necesitariamos analizar el radio espectral de las matrices de iteración.

c) **[3 ptos]** Halle la matriz de iteración Tj para aplicar el proceso iterativo de Jacobi, muestre su polinomio característico y hallando su radio espectral concluya respecto a la convergencia del método de Jacobi.

Solución:

Del item anterior, procedemos a calcular T_j, pero antes:

1) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2) $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

3) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Al ser $T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando el polinomio característico de T_j, hacemos $|T_j - \lambda I| = 0$, nos quedaría $\left| \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 5/12 & -\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$, pero, la matriz es triangular, por lo tanto su polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3$, el valor propio es 0. Finalmente $\rho_{T_j} = 0$ y el método de Jacobi converge.

d) **[3 ptos]** Realice 02 iteraciones utilizando el método de Jacobi. Considere como vector semilla $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Del item anterior, solo queda calcular $c_j = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 20 \\ 40/3 \\ 10 \end{bmatrix}$ Entonces:

- $x^{(1)} = T_j \times x^{(0)} + c_j = \begin{bmatrix} 20 \\ 55/4 \\ 12 \end{bmatrix}$.
- $x^{(2)} = T_j \times x^{(1)} + c_j = \begin{bmatrix} 20 \\ 65/3 \\ 75/2 \end{bmatrix}$

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesora: Brígida Molina.
Sección: 5.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si $a = 2.6 \pm 0.07$ y $b = 3.2 \pm 0.0012$ entonces $\frac{a}{b} = 0.8125 \pm 0.0712$.
   Solución:
   Definimos la función
   $$f(a,b) = \frac{a}{b}$$
   Para encontrar el error absoluto, necesitamos:
   a) $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \frac{1}{b}$
   b) $\left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| = \left|\frac{-a}{b^2}\right| = \frac{a}{b^2}$
   Usando la serie de Taylor para encontrar el error absoluto:
   $$E_{abs} = \frac{1}{b} \times 0.07 + \frac{a}{b^2} \times 0.0012$$
   Reemplazando por los valores de a y b estimados:
   $$E_{abs} = \frac{1}{3.2} \times 0.07 + \frac{2.6}{3.2^2} \times 0.0012 = 0.0221796875$$
   Calculando $\frac{a}{b} \approx 0.8125$, finalmente $\frac{a}{b} = 0.8125 \pm 0.0221796875$.
   La proposición es Falsa!

2. [**2 ptos**] El exponente en el formato IEEE-754 de precisión simple del número -0.171875 en base 10, es 01111100.
   Solución:
   Convirtiendo a binario el número 0.171875:

a) $0.171875 \times 2 = \mathbf{0}.34375$

b) $0.34375 \times 2 = \mathbf{0}.6875$

c) $0.6875 \times 2 = \mathbf{1}.375$

d) $0.375 \times 2 = \mathbf{0}.75$

e) $0.75 \times 2 = \mathbf{1}.5$

f) $0.5 \times 2 = \mathbf{1}$

El número en binario es $0.001011 = 1.011 \times 2^{-3}$, como estamos en formato de precisión simple IEEE - 754, el bias es 127, entonces:

$$exp = -3 + 127 = 124$$

Convirtiendo a binario:

$$124 = 1111100_2$$

Como la parte del exponente, tiene 8 bits, entonces completamos con un 0, finalmente el exponente viene dado por:

$$01111100$$

La proposición es Verdadera!

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Se desea hallar una aproximación al **mínimo** de la función $f(x) = 2e^x - 3x$ que se encuentra en el intervalo [0.2,1].

3a) [**1 ptos**] Cuántas iteraciones se deben realizar con el método de bisección, si se quiere obtener una aproximación al **mínimo** con error absoluto menor o igual a 0.0005.

Solución:

Sabemos que en el método de la bisección se cumple:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \text{Tol}$$

Reemplazando:

$$\frac{1-0.2}{2^{n+1}} \leq 5 \times 10^{-4} \rightarrow \frac{0.8}{2^{n+1}} \leq 5 \times 10^{-4} \rightarrow \frac{0.8}{5 \times 10^{-4}} \leq 2^{n+1}$$

Tomando logaritmo neperiano en ambos lados de la desigualdad:

$$\ln\left(\frac{0.8}{5\times 10^{-4}}\right) \leq \ln(2^{n+1}) \to \ln\left(\frac{0.8}{5\times 10^{-4}}\right) \leq (n+1)\ln(2)$$

Entonces:

$$10.6439 \leq n+1 \to 9.6439 \leq n.$$

En consecuencia, la cantidad mínima de iteraciones a realizar es 10.

3b) [**2 ptos**] Obtenga una aproximación al mínimo de la función con el método de Newton-Raphson, tomando como iterado inicial $x^{(0)} = 0.6$ y $Tol = 0.0005$.
Solución: Como queremos encontrar el mínimo de la función (podemos ver la gráfica, no era necesaria en el examen, solo es para darnos cuenta de una aproximación): Debemos hacer $g(x) = f'(x) = 0$, esto se resume a encontrar una raíz de la función

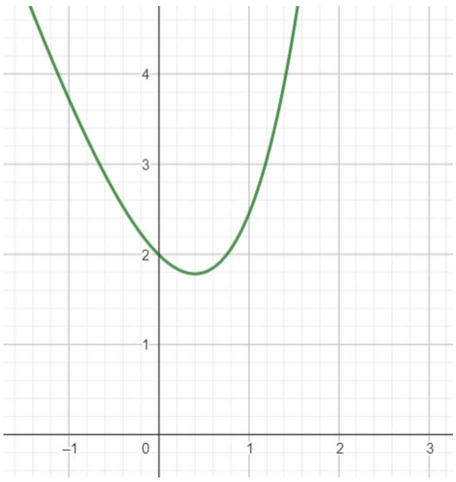


Figura 2: Gráfica de $f(x)$

g, por lo tanto, la ecuación a resolver es:

$$g(x) = 2e^{x} - 3 = 0.$$

Aplicando el método de Newton:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{g(x^{(k)})}{g'(x^{(k)})}.$$

Tenemos por dato inicial $x^{(0)} = 0.6$, por fines didácticos podemos resumir el proceso en la siguiente tabla:

Iteración (i)	$x^{(i)}$	Error relativo
0	0.6	1
1	0.423217454....	0.4177109....
2	0.405621752....	0.0433795....
3	0.40546512....	0.000386302....

Son necesarias 3 iteraciones y una aproximación al valor donde se produce el mínimo de la función es 0.40546512

4. **[3 ptos]** Se desea hallar una raíz de la ecuación $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$. Considere la ecuación $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, con $5/4 \leq x \leq 4$. Para aproximar una solución, se intentará usar una iteración de punto fijo.

3a) **[2 ptos]** Realice el estudio de convergencia para la iteración de punto fijo $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$.

Solución:

Como tenemos la ecuación:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Hacemos $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$. La función $g(x)$ es continua en [5/4,4] y diferenciable en (5/4,4).

Analizamos la derivada de la función g:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \to |g'(x)| = \frac{1}{x^2}$$

Como $\dfrac{1}{x^2} > 0$, entonces la función g es decreciente, así:

- $g\left(\frac{5}{4}\right) = 1.8$
- $g(4) = 1.25$

Se cumple la primera condición de convergencia $g([5/4;4]) \subset [5/4;4]$. Además:

$$\frac{5}{4} \leq x \leq 4 \to \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{4}{5} \to \frac{1}{16} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{16}{25} \to |g'(x)| < 1$$

Al verificarse las condiciones de convergencia, podemos decir que el método del punto fijo va a converger para $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ para cualquier iterado inicial dado.

3b) **[1 pto]** Realice 3 iteraciones con $x^{(0)} = 2$ como iterado inicial.

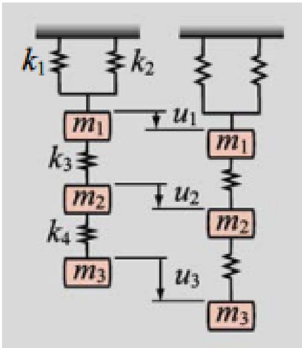
Solución:

Organizando el proceso en una tabla:

Iteración	$x^{(i)}$
0	2
1	1.5
2	1.66666...
3	1.6

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** Tres masas, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 1.5$ kg, están unidas a resortes, $k_1 = 30$ N/m, $k_2 = 25$ N/m, $k_3 = 20$ N/m y $k_4 = 15$ N/m, como se muestra en la figura. Inicialmente, las masas se colocan de manera que los resortes estén en su longitud natural (sin estirar, ni comprimir); luego, las masas se sueltan lentamente y se mueven hacia abajo hasta una posición de equilibrio, tal como se muestra.



Las ecuaciones de equilibrio de las tres masas son:

$$
\begin{aligned}
(k_1 + k_2 + k_3)u_1 - k_3 u_2 &= m_1 g \\
-k_3 u_1 + (k_3 + k_4)u_2 - k_4 u_3 &= m_2 g \\
-k_4 u_2 + k_4 u_3 &= m_3 g
\end{aligned}
$$

donde u_1, u_2 y u_3 son los desplazamientos relativos de cada masa como se muestra. Determine el desplazamiento de las tres masas. (Tome $g = 9.81$ m/s^2).

a) **[2 ptos]** Modele el problema planteado mediante un sistema de ecuaciones lineales. Identifique claramente las componentes del vector incógnita.
Solución:
Solo resta reemplazar datos de acuerdo a las ecuaciones de equilibrio de las tres masas:

$$
\begin{bmatrix} 75 & -20 & 0 \\ -20 & 35 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 19.6 \\ 29.4 \\ 14.7 \end{bmatrix}
$$

b) **[5 ptos]** Realice el estudio de convergencia del método de Gauss-Seidel si:

$$
(D - L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/75 & 0 & 0 \\ 4/525 & 1/35 & 0 \\ 4/525 & 1/35 & 1/15 \end{bmatrix}
$$

Sugerencia: Aplique el criterio del radio espectral.

Solución:

Rescatamos la matriz U y tenemos:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, usamos el dato para encontrar la matriz de iteración T_{gs} y tenemos:

$$T_{gs} = (D-L)^{-1} \times U = \begin{bmatrix} 1/75 & 0 & 0 \\ 4/525 & 1/35 & 0 \\ 4/525 & 1/35 & 1/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4/15 & 0 \\ 0 & 16/105 & 3/7 \\ 0 & 16/105 & 3/7 \end{bmatrix}.$$

Encontrando el polinomio característico de dicha matriz, hacemos:

$$\det(T_{gs} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4/15 & 0 \\ 0 & (16/105) - \lambda & 3/7 \\ 0 & 16/105 & (3/7) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)\left[\left(\frac{16}{105} - \lambda\right)\left(\frac{3}{7} - \lambda\right) - \frac{3}{7} \times \frac{16}{105}\right] = 0 \to \lambda^3 - \frac{61}{105}\lambda^2 = 0.$$

Factorizando:

$$\lambda^2\left(\lambda - \frac{61}{105}\right) = 0.$$

Los valores propios, son 0 y $\frac{61}{105}$, por lo tanto, el radio espectral $\rho_{T_{gs}} = \dfrac{61}{105} \approx 0.58$. Al ser el radio espectral menor que 1, podemos decir que el método de Gauss - Seidel converge.

c) **[3 ptos]** Calcule dos iteraciones del método de Gauss-Seidel, seleccionando como iterado inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solución:

Podemos aprovechar el item anterior para encontrar T_{gs} y c_{gs}, tenemos:

- $T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 4/15 & 0 \\ 0 & 16/105 & 3/7 \\ 0 & 16/105 & 3/7 \end{bmatrix}$
- $c_{gs} = \begin{bmatrix} 98/375 \\ 371/375 \\ 1477/750 \end{bmatrix}$.

Empezamos a iterar:

$$x^{(1)} = T_{gs} \times x^{(0)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 398/375 \\ 1346/375 \\ 3427/750 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.0613 \\ 3.5893 \\ 4.5693 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = T_{gs} \times x^{(1)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 6854/5625 \\ 643/184 \\ 6685/1494 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.2184 \\ 3.49456 \\ 4.447456 \end{bmatrix}.$$

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesores: Jimmy Mendoza - Rósulo Pérez.
Secciones: 3 - 4.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$, entonces cualquier valor semilla garantizará la convergencia del método de Newton en la determinación de la raíz real de la ecuación.
   Solución:
   Sabemos que la forma iterativa del método de Newton, viene dada por:
   $$x^{(r+1)} = x^{(r)} - \frac{f(x^{(r)})}{f'(x^{(r)})}$$
   Analizando lo que sucede con la derivada:
   $$f'(x) = 6x^2 + 2x = 0 \to f'(x) = 0 \text{ si } x = 0, -1/3$$
   Por lo tanto, existen puntos para los cuales no está garantizada la convergencia del método de Newton.

2. [**2 ptos**] En el sistema de ecuaciones no lineales:
   $$\begin{cases} x^3 + 3x + y &= 0 \\ kx + e^y - 2 &= 0 \end{cases}$$
   Si el parámetro k toma el valor de 1, entonces el sistema tiene una solución única usando el método de Newton con una aproximación inicial $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
   Solución:
   Definiendo:
   $$F(x, y) = x^3 + 3x + y$$
   $$G(x, y) = x + e^y - 2$$
   Calculando el Jacobiano para un punto en general:
   $$J(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 + 3 & 1 \\ 1 & e^y \end{bmatrix} \to J(0, 0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   Calculando el determinante de dicho Jacobiano, vemos es 2, por lo tanto el sistema tiene solución única.

PROCEDIMENTAL

3. **[3 ptos]** Dado el número $N = 35.3125$ representado en la base 10:

   a) **[1 pto]** Expresar al número N en el sistema de base binaria.
   Solución:
   Primero necesitamos expresar:

   - 35 en binario: 100011
   - 0.3125 en binario: 0101

   Entonces $N = 100011.0101_2$

   b) **[1 pto]** Exprese el resultado anterior en el formato $x = \pm(1.d_1d_2...d_p)_\beta \times \beta^E$ e indique el valor de la mantisa y el exponente entero.
   Solución:
   Del item anterior:

$$35.3125 = 100011.0101_2 = 1.000110101_2 \times 2^5$$

   c) **[1 pto]** Halle la secuencia de bits que representa al número N en la notación de punto flotante IEEE-754 de precisión simple.
   Solución:
   Del item anterior, tenemos que el exponente es 5, para adaptar al estándar IEEE - 754, tenemos exp $= 5+127 = 132 = 10000100_2$ y la mantisa 00011010100000000000000, como el número es positivo, el primer bit es 0, finalmente la respuesta es:

$$01000010000011010100000000000000$$

4. **[3 ptos]** El coeficiente de sustentación es una medida (adimensional) de la capacidad de una superficie aerodinámica para generar sustentación. La expresión que permite estimar dicho coeficiente es:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

   Si se conocen de manera exacta los siguientes datos: $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, $V = 50\,\mathrm{m/s}$. Sin embargo, los valores de fuerza de sustentación $L = 500\,\mathrm{N}$ y $A = 10\,\mathrm{m^2}$ presentan una incertidumbre de $\pm 1\,\mathrm{N}$ y $\pm 0.1\,\mathrm{m^2}$, respectivamente. Halle el valor del error relativo porcentual en la determinación del coeficiente de sustentación.

Solución:
El coeficiente de sustentación depende de dos variables L y A, por lo tanto:

$$C_L = C_L(L, A) = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

Encontrando el valor estimado del coeficiente:

$$C_L = \frac{500}{0.5 \times 1.2 \times 50^2 \times 10} = 0.03333...$$

Para encontrar el error absoluto usamos la serie de Taylor:

- $\left|\dfrac{\partial C_L}{\partial L}\right| = \dfrac{1}{1500A}$.
- $\left|\dfrac{\partial C_L}{\partial A}\right| = \dfrac{L}{1500A^2}$.

Entonces:

$$\triangle \approx \frac{1}{1500A} \times 1 + \frac{L}{1500A^2} \times 0.1$$

Reemplazando:

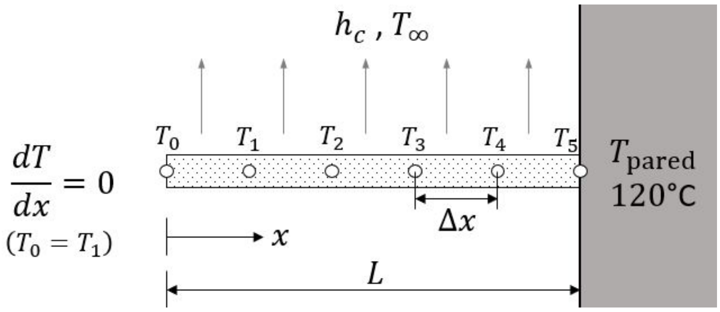
$$\triangle \approx 4 \times 10^{-4}$$

Para encontrar el error relativo porcentual:

$$er\,\% = \frac{4 \times 10^{-4}}{0.033333} \times 100\,\% = 1.20012001....\,\%$$

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** En la siguiente figura se muestra una barra, la cual se encuentra en contacto con una pared a 120°C.



La ecuación diferencial que describe la variación de temperatura en la barra es:

$$\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_{T_i} - \left.\frac{h_c P}{kA}(T - T_\infty)\right|_{T_i} = 0$$

El valor de cada parámetro del problema es: $L = 0.50\,\mathrm{m}$, $P = 0.01\,\mathrm{m}$, $A = 2\times10^{-5}\,\mathrm{m}^2$, $T_\infty = 20\,^\circ\mathrm{C}$, $k = 237\,\mathrm{W/m.K}$, $h_c = 10\,\mathrm{W/m^2.K}$. Considerando que es posible aproximar la solución reemplazando la segunda derivada por una diferencia finita central:

$$\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_{T_i} = \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta\mathrm{x}^2}$$

a) **[2 ptos]** Discretrice la ecuación diferencial y encuentre una ecuación en diferencias que permita evaluar la temperatura en cada nodo. Expréselo en términos de h_c, P, k, A y Δx.

Solución:

De las igualdades líneas arriba, llegamos a:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta\mathrm{x}^2} = \frac{h_c P}{kA}(T_i - T_\infty)$$

Lo cual es equivalente a:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta\mathrm{x}^2} = \frac{h_c P}{kA}(T_i - T_\infty) \rightarrow T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = \frac{h_c P \Delta\mathrm{x}^2}{kA}(T_i - T_\infty)$$

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = 0.211\,(T_i - 20)$$

b) **[2 ptos]** Encuentre el sistema de ecuaciones lineales en la forma matricial $Ax = b$ para estimar las temperaturas en los nodos interiores T_i. Use los valores de los parámetros del problema.

Solución:

Evaluando:

- $i = 1 \rightarrow -T_1 + T_2 = 0.211(T_1 - 20)$
- $i = 2 \rightarrow T_1 - 2T_2 + T_3 = 0.211(T_2 - 20)$
- $i = 3 \rightarrow T_2 - 2T_3 + T_4 = 0.211(T_3 - 20)$
- $i = 4 \rightarrow T_3 - 2T_4 + T_5 = 0.211(T_4 - 20)$

Utilizando los datos brindados:

1) $-1.211T_1 + T_2 = -4.22$
2) $T_1 - 2.211T_2 + T_3 = -4.22$

3) $T_2 - 2.211T_3 + T_4 = -4.22$

4) $T_3 - 2.211T_4 = -124.211$

Convirtiendo a notación matricial:

$$\begin{bmatrix} -1.211 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.211 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2.211 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.22 \\ -4.22 \\ -4.22 \\ -124.211 \end{bmatrix}$$

c) **[2 ptos]** Analice la convergencia del método iterativo de Gauss-Seidel (según el criterio de la diagonal dominancia). Indique claramente su conclusión (converge o diverge).

Solución:

La matriz de coeficientes claramente es diagonal estrictamente dominante, por lo tanto el método de Gauss - Seidel converge.

d) **[2 ptos]** Luego de descomponer la matriz A en D, L y U, halle la matriz de iteración de Gauss-Seidel (T_{gs}) para aplicar el proceso iterativo.

Solución:

Descomponiendo para encontrar T_{gs}, tenemos:

$$D = \begin{bmatrix} -1.211 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.211 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.211 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.211 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando como dato, lo dado en la pizarra el día del examen:

$$T_{gs} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0.8257 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3734 & 0.4522 & 0 \\ 0 & 0.1689 & 0.2045 & 0.4522 \\ 0 & 0.0763 & 0.0925 & 0.2045 \end{bmatrix}$$

e) **[2 ptos]** Realice 02 iteraciones utilizando el método de Gauss-Seidel. Considere como vector semilla $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 70 \\ 90 \end{bmatrix}$.

Solución:

Efectuando:

$$x^{(k+1)} = T_{gs}x^{(k)} + c_{gs}$$

Tenemos:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 44.7729 \\ 53.8185 \\ 66.9554 \\ 86.4615 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 47.9261 \\ 53.8677 \\ 65.3773 \\ 85.7477 \end{bmatrix}$$

Métodos Numéricos
Exámen Parcial
Pregrado
2023-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesor: Rósulo Pérez
Sección 2.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Si $a = 3 \pm 0.03$ y $b = 5 \pm 0.02$ entonces $a \times b = 15 \pm 0.0018$.
   Solución:
   Definimos la función:
   $$f(a, b) = a \times b$$
   Para encontrar el error absoluto, necesitamos encontrar:
   a) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial a}\right| = b$
   b) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial b}\right| = a$

   Haciendo uso de la serie de Taylor para obtener el error absoluto:
   $$\triangle \approx b \times 0.03 + a \times 0.02$$
   $$\triangle \approx 5 \times 0.03 + 3 \times 0.02$$
   Finalmente:
   $$\triangle \approx 0.27$$
   Así:
   $$a \times b = 15 \pm 0.27$$

2. [**2 ptos**] Si el exponente externo E en una representación de punto flotante de precisión simple es igual a 12, entonces el exponente interno exp está dado por la secuencia de bits 10001011.
   Solución:
   En un formato IEEE 754 de precisión simple BIAS $= 127$, entonces el exponente viene dado por $127 + 12 = 139$, pasando a representación binario $exp : 10001011$

PROCEDIMENTAL

3. **[3 ptos]** Una cadena uniforme, de longitud L, está colocada sobre una tabla horizontal, libre de fricción, de tal manera que una parte de longitud b de la cadena cae por el borde. Se demuestra que el tiempo t que tarda la cadena en deslizarse completamente hacia abajo viene dado por:

$$t = \ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-b^2}}{b}\right)\sqrt{\frac{L}{g}}$$

siendo $g = 9.8m/s^2$ la aceleración de la gravedad.

a) **[1.5 ptos]** Si $b = 5$ y $t = 15$ demuestre que existe un único valor $L^* \in [5; 150]$ tal que satisface la ecuación planteada.
Solución:
Dando forma $f(L) = 0$, tenemos:

$$15 - \ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-25}}{5}\right)\sqrt{\frac{L}{9.8}} = 0$$

Calculando $f(5) = 15$ y $f(150) = -1.017233....$ Como $f(5)\times f(150) < 0$, queda garantizada la existencia de una raíz para la ecuación.

b) **[1.5 ptos]** Halle el menor número de iteraciones n necesarias del método de la bisección para hallar un valor aproximado de L^* iniciando en el intervalo $[130; 140]$, considerando una tolerancia $Tol = 10^{-5}$.
Solución:
Recordando la fórmula:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \text{Tol} \rightarrow \frac{10}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{10^5}$$

Resolviendo:

$$10^6 \leq 2^{n+1} \rightarrow 19.9315... \leq n+1 \rightarrow 18.9315 \leq n$$

Entonces el número mínimo de iteraciones es $n = 19$.

4. **[3 ptos]** Sea la ecuación no lineal $f(x) = e^{-x} + x - 2 = 0$, si consideramos la expresión de punto fijo $x = g(x) = 2 - e^{-x}$ sabemos que si se dan las condiciones de convergencia todo punto fijo de g es raíz de f. Analice la convergencia del proceso iterativo asociada a la función g en el intervalo $[1; 2]$. Justifique detalladamente su razonamiento.

Solución:
Tenemos:

$$f(x) = e^{-x} + x - 2 = 0$$

Entonces, para la expresión del punto fijo:

$$x = g(x) = 2 - e^{-x}$$

$$|g'(x)| = |-e^{-x}| = |e^{-x}|$$

Esta función ya ha sido estudiada en cursos anteriores, sabemos que es decreciente en su dominio, graficando (no era necesario hacerlo en el examen: Podemos darnos cuenta

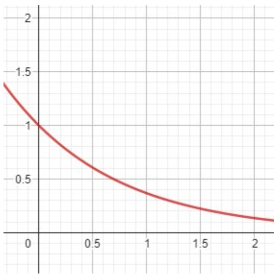
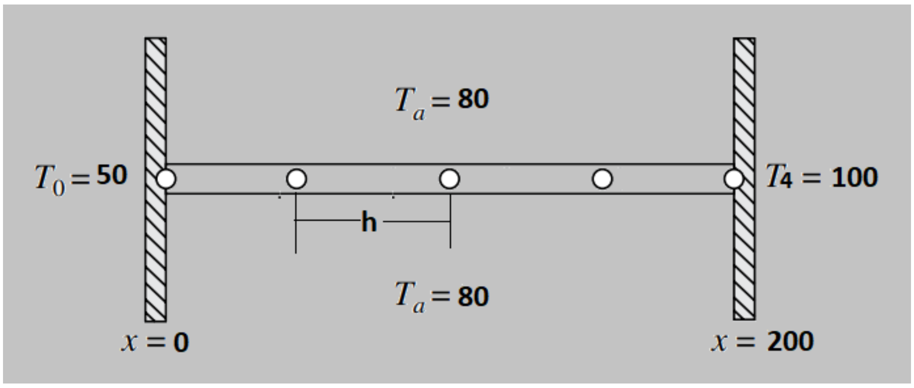


Figura 3: Gráfica de e^{-x}

que en el intervalo $[1; 2]$ se cumple que $|g'(x)| < 1$. Además la función $g(x) = 2 - e^{-x}$ es creciente en dicho intervalo y $g(1) = 1.632...$, $g(2) = 1.864...$, en consecuencia $g([1; 2]) \subset [1; 2]$

APLICACIONES

5. [**10 ptos**] Una barra delgada y larga de 200 cm de longitud está sujeto en sus extremos a 50^oC y 100^oC, asimismo la temperatura ambiente proporciona a la barra 80^oC tal como se muestra en la figura



Para conocer la distribución de la temperatura sobre la barra, su longitud $L = 200$ en este caso se particiona en $n = 4$ partes iguales, resultando un tamaño de paso $h = 50$. La discretización de la ecuación diferencial que modela la distribución de la temperatura a lo largo de la barra dá como resultado la ecuación en diferencias

$$-T_{i-1} + (2 + ch^2)T_i - T_{i+1} = ch^2 T_a \qquad i = 1; 2; 3$$

donde $c = 0.001cm^{-2}$ es el coeficiente de transferencia de calor entre la barra y el aire del ambiente, asimismo $T_i = T(x_i)$ denota la temperatura en el punto de coordenada x_i, formulándose así un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas.

a) [**2 ptos**] Luego de reordenar las ecuaciones planteadas (si fuera necesario) formule el sistema en la forma $Ax = b$ donde A es diagonal estrictamente dominante y $x = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$.

Solución:

Usando la ecuación en diferencias, llegamos al siguiente sistema en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2+ch^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2+ch^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2+ch^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80ch^2 + T_0 \\ 80ch^2 \\ 80ch^2 + T_4 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los datos, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 4.5 & -1 & 0 \\ -1 & 4.5 & -1 \\ 0 & -1 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

b) **[2 ptos]** Analice la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss Seidel.
Solución:
En el item anterior, hemos visto que la matriz asociada de coeficientes es diagonal estrictamente dominante, por lo tanto, podemos garantizar convergencia tanto para Gauss - Seidel como para Jacobi.

c) **[3 ptos]** Luego de descomponer la matriz A en D , L y U, halle la matriz de iteración para aplicar el proceso iterativo de Gauss-Seidel T_{gs} y el vector cgs. Sabiendo que:

$$(D-L) = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ \\ \frac{4}{81} & \frac{2}{9} & 0 \\ \\ \frac{8}{729} & \frac{4}{81} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}^{-1}$$

.
Solución:
Sabemos por teoría que:

$$T_{gs} = (D-L)^{-1} \times U$$

Entonces:

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 2/9 & 0 & 0 \\ 4/81 & 2/9 & 0 \\ 8/729 & 4/81 & 2/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 4/81 & 2/9 \\ 0 & 8/729 & 4/81 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$c_{gs} = (D-L)^{-1}b = \begin{bmatrix} 500/9 \\ 4600/81 \\ 11338/143 \end{bmatrix}$$

d) **[3 ptos]** Realice 02 iteraciones utilizando el método de Gauss Seidel. Considere como vector semilla $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$.
Solución:
Como ya tenemos T_{gs} y c_{gs}, podemos empezar:

$$x^{(1)} = T_{gs}x^{(0)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 60 \\ 580/9 \\ 6560/81 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 59.999 \\ 64.444 \\ 80.987... \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = T_{gs}x^{(1)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 5660/81 \\ 18089/232 \\ 12515/149 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 69.8765... \\ 77.9698... \\ 83.9932... \end{bmatrix}$$

Métodos Numéricos
Exámen Parcial
Pregrado
2023-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesor: Rósulo Pérez.
Sección 7.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] En el contexto de la teoría de propagación de errores: Si $a = 5.8 \pm 0.070$ y $b = 3.2 \pm 0.012$ entonces $a - b = 2.6 \pm 0.058$.

   Solución:
   Sea $q = a - b$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &\approx \varepsilon_a + \varepsilon_b = 0.070 + 0.012 \\ \varepsilon_q &\approx 0.082 \\ a - b &= 2.6 \pm 0.082 \end{aligned}$$

   Falso

2. [**2 ptos**] En la notación de punto flotante IEEE-754 con precisión simple, si el exponente entero $E = 5$ entonces el exponente interno $exp = 10000101$.

   Solución:
   El exponente es: $exp = 127 + 5 = 132$

$$132 = 2^7 + 2^2 = 10000100$$

   Falso

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Considere la ecuación no lineal

$$0.12e^x + sen(x) = 3$$

   a) Demuestre que existe al menos una raíz en el intervalo $[3; 4]$.

b) Aplique el método de bisección para hallar un valor aproximado de la raiz, tomando como intervalo inicial $[3; 4]$. Muestre las aproximaciones: $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$

Solución:

a) Definimos la función $f(x) = 0.12e^x + \text{sen}(x) - 3$, f es continua en $[3, 4]$.

$$f(3) = 0.12e^3 + \text{sen}(3) - 3 = -0.45 < 0$$
$$f(4) = 0.12e^4 + \text{sen}(4) - 3 = 2.79 > 0$$

Por el teorema de Bolzano, existe una raíz de f.

b) Aplicamos el método de bisección:

a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
3	4	3.5	$(-)$	$(+)$	$(+)$
3	3.5	3.25	$(-)$	$(+)$	$(-)$
3.25	3.5	3.3750			

$x^{(0)} = 3.5, x^{(1)} = 3.25, x^{(2)} = 3.3750$

4. **[3 ptos]** Dado el sistema de ecuaciones no lineal

$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 & = & 0 \\ y + 2sen(x) & = & 0 \end{cases}$$

con el punto semilla $\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para ejecutar el primer paso del método de Newton se requiere calcular la inversa de la matriz Jacobiana $J(x^{(0)}, y^{(0)})$, halle dicha matriz inversa.

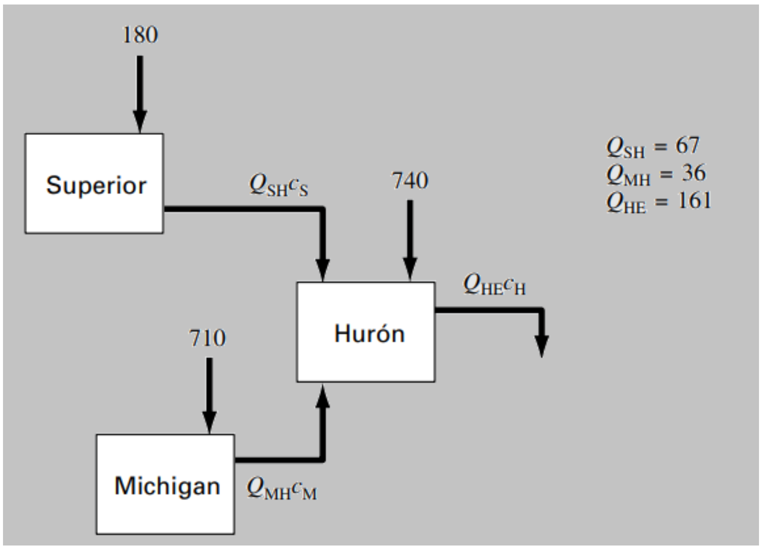
Solución:

Hallamos la matriz Jacobiana:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 10x & -2y \\ 2\cos(x) & 1 \end{bmatrix}$$
$$J(x^{(0)}, y^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$J(x^{(0)}, y^{(0)}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** En la siguiente figura se muestran los flujos de agua entre tres grandes lagos en una zona de EEUU (Superior, Hurón y Michigan). Cada lago debe tener una concentración de cloro (c_S , c_H y c_M) tal que se mantenga el equilibrio ecológico de la zona



Las flechas numeradas denotan entradas directas externas al sistema (los números sobre las flechas ya representan a la cantidad de masa de cloro, es decir al producto del flujo por la concentración Qc). Determine la concentración de cloro de cada lago para mantener el equilibrio, para ello:

a) **[2 ptos]** Modele el problema planteado mediante la formulación de un sistema de ecuaciones lineales en la forma matricial $Ax = b$ donde $x = \begin{bmatrix} c_S \\ c_H \\ c_M \end{bmatrix}$ es el vector incógnita que contiene las concentraciones.

Solución:

El sistema de ecuaciones en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 67 & 0 & 0 \\ -67 & 161 & -36 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_S \\ c_H \\ c_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 740 \\ 710 \end{bmatrix}$$

b) **[2 ptos]** Estudie la convergencia de los procesos iterativos Jacobi y Gauss Seidel a partir del criterio de la diagonal dominancia.

Solución

La matriz es diagonal estrictamente dominante, por lo tanto, converge.

c) **[3 ptos]** Luego de descomponer la matriz de coeficientes A en D, L y U halle la matriz de iteración de Jacobi Tj y el vector de Jacobi cj.

Solución

Las matrices son:

$$D = \begin{bmatrix} 67 & 0 & 0 \\ 0 & 161 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.4161 & 0 & 0.2236 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_j = \begin{bmatrix} 2.6866 \\ 4.5963 \\ 19.7222 \end{bmatrix}$$

d) **[3 ptos]** Halle dos iteraciones del método de Jacobi, seleccionando como iterado inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

Las dos iteraciones son:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.686567 \\ 4.596273 \\ 19.722222 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.686567 \\ 10.124224 \\ 19.722222 \end{bmatrix}$$

Métodos Numéricos
Exámen Final
Pregrado
2023-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesores: H. Pantoja - B.Molina - R.Perez - J.Mendoza
Secciones : Todas

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, verdadero (V) o falso (F) según corresponda. ***Justifique claramente cada una de sus respuestas***.

1. [**2 ptos**] Dada la siguiente tabla:

x	0	3	5
y	1	2	4

La información se ajusta a una recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Usando el método de mínimos cuadrados en forma matricial, es posible afirmar que la suma de los elementos de la diagonal principal del producto $A^T A$ es igual a 37, donde A es la matriz de coeficientes.
Solución:
Formamos el sistema:

$$1 = \beta_0 + \beta_1(0)$$
$$2 = \beta_0 + \beta_1(3)$$
$$4 = \beta_0 + \beta_1(5)$$

Expresándolo de forma matricial: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$ en consecuencia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow A^t A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 34 \end{bmatrix}$$

La traza de $A^t A$ es 37 en consecuencia la afirmación es verdadera.

2. [**2 ptos**] Dada la información registrada:

t	0	0.75	1.5	2.25	3
y	0	0.51	a	1.75	0.42

Si el área aproximada bajo la curva en $t \in [0,3]$ y el eje X es 3.21 usando el método de Simpson 1/3 compuesto, entonces el valor de a es 1.5.
Solución:
Tenemos que el número de subintervalos es 4, por lo tanto es posible aplicar el método de Simpson. Usando la fórmula: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{4} = 0.75$

$$I = \frac{0.75}{3}\left[0 + 4 \times 0.51 + 2 \times a + 4 \times 1.75 + 0.42\right] = 3.21 \rightarrow 9.46{+}2a = 12.84 \rightarrow a = 1.69$$

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

PROCEDIMENTAL

3. **[3 ptos]** Un spline cúbico natural S está definido por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + b(x-1) - d(x-1)^3 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ S_1(x) = 1 + a(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + c(x-2)^3 & si \quad 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Si S interpola los datos $(1,1)$, $(2,1)$ y $(3,0)$, encuentre b, d, a y c.
Solución:
Empezando a evaluar las condiciones:

a) $S_0(2) = S_1(2) \rightarrow 1 + b - d = 1 \rightarrow b = d$.

b) Derivando $S_0(x)$ y $S_1(x)$, se tiene:
$S_0'(x) = b - 3d(x-1)^2$ y $S_1'(x) = a - \frac{3}{2}(x-2) + 3c(x-2)^2$
Evaluando en 2, se tiene: $S_0'(2) = b - 3d$ y $S_1'(2) = a$ en consecuencia $b - 3d = a$.

c) Encontrando la segunda derivada: $S_0''(x) = -6d(x-1)$ y $S_1''(x) = -\frac{3}{2} + 6c(x-2)$ evaluando en $x = 2$:

$$S_0''(2) = -6d \quad S_1''(2) = -\frac{3}{2} \rightarrow 6d = \frac{3}{2} \rightarrow d = \frac{1}{4} \text{ y } b = \frac{1}{4}$$

.

d) Usando la condición de naturalidad:

$$S_0''(1) = 0 \text{ y } S_1''(3) = -\frac{3}{2} + 6c = 0 \rightarrow c = \frac{1}{4} \text{ y } a = -\frac{1}{2}$$

4. **[3 ptos]** Dados los puntos $(1,1)$, $(4/3, 3/4)$, $(5/3, 3/5)$ y $(2, 1/2)$, construya el polinomio de grado 2, $P_2(x) = ax^2 + bx + 2.1675$, que mejor ajusta los datos en el sentido de los mínimos cuadrados.
Solución:
Solo resta hallar los valores de a y b, evaluando:

a) $P_2(1) = 1 = a(1)^2 + b(1) + 2.1675 \to -1.1675 = a + b$

b) $P_2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4} = a\left(\frac{4}{3}\right)^2 + b\left(\frac{4}{3}\right) + 2.1675 \to -1.4175 = \frac{16}{9}a + \frac{4}{3}b$

c) $P_2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5} = a\left(\frac{5}{3}\right)^2 + b\left(\frac{5}{3}\right) + 2.1675 \to -1.5675 = \frac{25}{9}a + \frac{5}{3}b$

d) $P_2(2) = \frac{1}{2} = a(2)^2 + b(2) + 2.1675 \to -1.6675 = 4a + 2b$

Formando el sistema de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1.1675 \\ -1.4175 \\ -1.5675 \\ -1.6675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{16}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{25}{9} & \frac{5}{3} \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

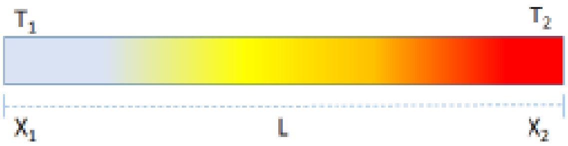
Multiplicando a ambos lados por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{16}{9} & \frac{4}{3} \\ \frac{25}{9} & \frac{5}{3} \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^t$ tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{2258}{81} & 16 \\ 16 & \frac{86}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2398}{163} \\ -\frac{1801}{200} \end{bmatrix} \to a = \frac{27}{80} = 0.3375, b = \frac{-603}{400} = -1.5075$$

Por lo tanto $P_2(x) = 0.3375x^2 - 1.5075x + 2.1675$.

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** Se tiene una barra metálica de longitud $L = 10\ m$, como se muestra en la figura, cuyo cambio de temperatura sólo existe a lo largo y no a lo ancho de la barra (sólo en la dimensión x), entonces la temperatura T cambia a lo largo de la barra, esa es la ecuación diferencial: $\dfrac{dT}{dL}$ y la ecuación de segundo orden $\dfrac{d^2T}{dL^2}$ expresa cómo varía el cambio de temperatura a lo largo de la barra.



La ecuación diferencial que expresa la variación del cambio de temperatura de la barra es:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = k(T - T_a)$$

con condiciones de frontera:

- $T(0) = 50\,°C$ temperatura de la barra en el extremo izquierdo.
- $T(L) = 200\,°C$. temperatura de la barra en el extremo derecho.

Para lo cual se puede aplicar el método de diferencias finitas. Discretizamos la barra en 4 segmentos de longitud $h = 2.5$ m, $x_0 = 0$, $x_{i+1} = x_i + h$.
Donde:

- $k = 0.01\ m^{-2}$ Coeficiente de transmisión de calor que expresa la disipación de calor en el ambiente.
- $T_a = 25\,°C$ Temperatura ambiente.

a) **[3 ptos]** Plantear el sistema de ecuaciones lineales usando diferencias finitas para $i = 1, 2$ y 3.
Solución:
De la ecuación inicial:

$$T'' = 0.01T - 0.25$$

con $T(0) = 50$ y $T(10) = 200$, planteando de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2.0625 & -1 & 0 \\ -1 & 2.0625 & -1 \\ 0 & -1 & 2.0625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.5625 \\ 1.5625 \\ 201.5625 \end{bmatrix}$$

b) **[5 ptos]** Aplicar el método de la diferencias finitas para aproximar las temperaturas T_1, T_2 y T_3.
Solución:
Del sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} 2.0625 & -1 & 0 \\ -1 & 2.0625 & -1 \\ 0 & -1 & 2.0625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.5625 \\ 1.5625 \\ 201.5625 \end{bmatrix}$$

Encontramos que:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80.14416259... \\ 113.73483535... \\ 152.87143532... \end{bmatrix}$$

c) **[2 ptos]** Si la solución exacta $T(5) = 113.6818839$. Determine con cuantas cifras significativas se aproxima T_2 a la solución exacta.
Solución:
Encontramos el error relativo:

$$er = \frac{|113.73483535 - 113.6818839|}{|113.6818839|} \approx 4.6578 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4}$$

La aproximación tiene 4 cifras significativas.