# CS1022
# Inducción - recursividad

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# Resumen

Sucesiones recurrentes

Otros esquemas de inducción

## Sucesiones recurrentes

Una sucesión formada por números reales es llamada recurrente si cada término, a partir de cierta posición, se define a partir de los anteriores.
En otras palabras, tenemos una sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ en la que se cumple que $x_n$ está expresado en función de los términos anteriores $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, desde cierto valor de $n$ en adelante.

# Sucesiones recurrentes

Una sucesión formada por números reales es llamada recurrente si cada término, a partir de cierta posición, se define a partir de los anteriores.
En otras palabras, tenemos una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en la que se cumple que $x_n$ está expresado en función de los términos anteriores $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, desde cierto valor de $n$ en adelante.

**Aclaración:** en la notación $x_k$, la letra $k$ es llamada índice.
Una sucesión puede empezar con el índice 0 o cuaqluier otro índice.

# Ejemplo 1

Consideremos la sucesión cuyo primer término es $x_1 = 1$ y satisface la recurrencia $x_n = 2x_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, es decir, cada término a partir del segundo es el doble del término anterior.

## Ejemplo 1

Consideremos la sucesión cuyo primer término es $x_1 = 1$ y satisface la recurrencia $x_n = 2x_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, es decir, cada término a partir del segundo es el doble del término anterior.
Esta sucesión es $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16$, etc.
Como se puede observar, es una progresión geométrica.

# Ejemplo 1

Consideremos la sucesión cuyo primer término es $x_1 = 1$ y satisface la recurrencia $x_n = 2x_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, es decir, cada término a partir del segundo es el doble del término anterior.
Esta sucesión es $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16$, etc.
Como se puede observar, es una progresión geométrica.

**Aclaración:** La recurrencia $x_n = 2x_{n-1}$ para todo $n \geq 2$ también se puede expresar como $x_{n+1} = 2x_n$ para todo $n \geq 1$. ¿De qué otra forma se puede expresar?

# Ejemplo 2

Consideremos la sucesión cuyo primer término es $y_1 = 2$ y satisface la recurrencia $y_n = 2y_{n-1} + 1$ para todo $n \geq 2$, es decir, cada término a partir del segundo es el doble del término anterior sumado con 1.

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# Ejemplo 2

Consideremos la sucesión cuyo primer término es $y_1 = 2$ y satisface la recurrencia $y_n = 2y_{n-1} + 1$ para todo $n \geq 2$, es decir, cada término a partir del segundo es el doble del término anterior sumado con 1.
Esta sucesión es $y_1 = 2$, $y_2 = 5$, $y_3 = 11$, $y_4 = 23$, $y_5 = 47$, etc.

## Ejemplo 3

**La sucesión de Fibonacci.**
Consideremos la sucesión $F_1, F_2, F_3, \ldots$ definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 1$. Es decir, cada término a partir del tercero es igual a la suma de los dos términos anteriores.

# Ejemplo 3

**La sucesión de Fibonacci.**
Consideremos la sucesión $F_1, F_2, F_3, \ldots$ definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 1$. Es decir, cada término a partir del tercero es igual a la suma de los dos términos anteriores.

De esta forma tenemos $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, etc.

## Ejercicio

Considere la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, para todo $n \geq 1$. Demuestre (usando inducción simple) que $x_n = 2^n - 1$, para todo entero positivo $n$.

# Otros esquemas de inducción

Plantearemos algunos esquemas de inducción que serán útiles para tratar sucesiones recurrentes y otro tipo de problemas

## Inducción a partir de los dos anteriores

Para cada entero positivo $n$, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas.
- Si $P(k)$ y $P(k+1)$ son verdaderas entonces $P(k+2)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo $n$.

# Otros esquemas de inducción

Plantearemos algunos esquemas de inducción que serán útiles para tratar sucesiones recurrentes y otro tipo de problemas

## Inducción a partir de los dos anteriores

Para cada entero positivo $n$, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas.
- Si $P(k)$ y $P(k+1)$ son verdaderas entonces $P(k+2)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo $n$.

Note que el caso base requiere de dos condiciones.

# Ejemplo 4

Considere la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = 5$, $x_2 = 9$ y $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$, para todo $n \geq 1$. Demuestre que $x_n = 2^{n+1} + 1$, para todo entero positivo $n$.

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

## Ejemplo 4

Considere la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = 5$, $x_2 = 9$ y $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$, para todo $n \geq 1$. Demuestre que $x_n = 2^{n+1} + 1$, para todo entero positivo $n$.

Solución.
Comprobamos los dos primeros:
$x_1 = 5 = 2^{1+1} + 1$ y $x_2 = 9 = 2^{2+1} + 1$.

# Ejemplo 4

Considere la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = 5$, $x_2 = 9$ y $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$, para todo $n \geq 1$. Demuestre que $x_n = 2^{n+1} + 1$, para todo entero positivo $n$.

Solución.
Comprobamos los dos primeros:
$x_1 = 5 = 2^{1+1} + 1$ y $x_2 = 9 = 2^{2+1} + 1$.
Suponemos que se cumplen las condiciones $x_k = 2^{k+1} + 1$ y $x_{k+1} = 2^{k+2} + 1$. Entonces

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= 3x_{k+1} - 2x_k \\ &= 3(2^{k+2} + 1) - 2(2^{k+1} + 1) \\ &= 12 \cdot 2^k + 3 - 4 \cdot 2^k - 2 \end{aligned}$$

## Ejemplo 4

Por lo tanto, $x_{k+2} = 2^{k+3} + 1$ que es lo que necesitamos demostrar. Esto completa la inducción.

## Ejemplo 5

Sea $F_n$ la sucesión de Fibonacci definida antes. Demuestre que $F_n < 2^n$, para todo entero positivo $n$.

# Otros esquemas de inducción

## Inducción de dos en dos

Para cada entero positivo $n$, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas.
- Si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+2)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo $n$.

# Otros esquemas de inducción

## Inducción de dos en dos

Para cada entero positivo $n$, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas.
- Si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+2)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo $n$.

Note que el caso base requiere de dos condiciones.

# Otros esquemas de inducción

Podemos plantear algunas variantes al esquema anterior, por ejemplo:

### Inducción de tres en tres

Para cada entero positivo $n$, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(1)$, $P(2)$ y $P(3)$ son verdaderas.
- Si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+3)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero positivo $n$.

# Otros esquemas de inducción

También podemos cambiar los casos iniciales, con lo cual cambia la conclusión. Por ejemplo:

## Inducción de 3 en 3

Para cada entero positivo $n$, sea $P(n)$ una proposición. Si se cumplen las condiciones:

- $P(5)$, $P(6)$ y $P(7)$ son verdaderas.
- Si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k+3)$ es verdadera.

concluimos que $P(n)$ es verdadera, para todo entero $n \geq 5$.

# Ejemplo 5

En un país solo hay billetes de 3 y 7 pesos. Demuestre que para todo entero $n \geq 12$ es posible pagar exactamente $n$ pesos.

## Ejemplo 6

Demuestre que para todo $n \geq 6$ es posible dividir un cuadrado en $n$ cuadrados (no necesariamente del mismo tamaño).