Métodos Numéricos
Examen Final
Pregrado
2025-0

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres: ______________________

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [**2 ptos**] Sea la función cuadrática $f(x) = x^2 + bx + c$ y $P_2(x)$ el polinomio interpolante en los puntos $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$. Entonces el error de interpolación polinomial es 0; es decir, $E_2(x, f) = 0$ para todo $-1 \leq x \leq 1$.

   Solución:
   Como tenemos 3 puntos que pasan por un polinomio de grado 2, el polinomio interpolador también tendrá grado 2 y como el polinomio interpolador es único, entonces:

   $$f(x) = P_2(x), \quad \forall x \in [-1, 1]$$

   por lo tanto, $E_2(x, f) = 0$ para todo $-1 \leq x \leq 1$. En consecuencia la afirmación es **verdadera**.

2. [**2 ptos**] Se tiene una función f cuya derivada en el punto x_0 necesita ser aproximada, considerando el tamaño de paso $h > 0$. Si tenemos en cuenta las aproximaciones:

   $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{aproximación hacia adelante}$$

   $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \qquad \text{aproximación hacia atrás}$$

   Siempre la aproximación hacia adelante es mayor que la aproximación hacia atrás

   Solución:
   Si consideramos la siguiente data:

x	1	2	3
$f(x)$	2	4	6

   ambas aproximaciones nos dan $f'(2) \approx 2$. **Falso**.

PROCEDIMENTAL

3. **[3 ptos]** Considere la función: $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, construya el spline cúbico natural que pasa por $(0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))$ y posteriormente calcule el error absoluto generado por la aproximación del spline cúbico natural al pasar por el punto $(0.5, f(0.5))$. Deberá mostrar el proceso de la obtención de todos los coeficientes, sustente el desarrollo en su totalidad.

Solución:

Los puntos con los que trabajaremos son: $(0, 0), (1, 3), (2, 3)$; a partir de ellos, obtenemos la siguiente tabla:

i	x	y	h	$y[x_i, x_{i+1}]$
0	0	0	1	3
1	1	3	1	0
2	2	3		

Ya conocemos los valores $M_0 = M_2 = 0$, para obtener el valor de M_1 resolvemos la siguiente ecuación:

$$2(1 + 1)M_1 = -18 \to M_1 = -\frac{18}{4}$$

A partir de estos valores, obtenemos los coeficientes del spline:

$$a_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

$$b_0 = \frac{M_0}{2} = 0$$

$$c_0 = y[x_0, x_1] - \frac{M_1 + 2M_0}{6}h_0 = 3 - \frac{-3}{4} = 3.75$$

$$d_0 = y_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{M_2 - M_1}{6h_1} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$b_1 = \frac{M_1}{2} = -\frac{18}{8} = -2.25$$

$$c_1 = y[x_1, x_2] - \frac{M_2 + 2M_1}{6}h_1 = 0 - \frac{-6}{4} = 1.5$$

$$d_1 = y_1 = 3$$

Finalmente, el spline cúbico natural queda de la forma:

$$S(x) = \begin{cases} -0.75x^3 + 3.75x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0.75(x-1)^3 - 2.25(x-1)^2 + 1.5(x-1) + 3 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Para calcular el error, calculamos primero el valor de $S(0.5)$

$$S(0.5) = -0.75(0.5^3) + 3.75(0.5) = 1.78125$$

Calculamos también el valor exacto:

$$f(0.5) = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \approx 1.73205$$

Luego, calculamos el error absoluto:

$$\text{error} = |f(0.5) - S(0.5)| \approx 0.0492$$

4. **[3 ptos]** En aerodinámica de aerogeneradores, la fuerza de sustentación por unidad de envergadura se obtiene integrando el coeficiente de sustentación a lo largo de la cuerda de la pala, donde x representa la coordenada a lo largo de dicha cuerda.

$$L = \int_0^c \frac{1}{2}\rho U^2 \boldsymbol{C_L} dx, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{C_L(x)} = 1.2 + 0.4\cos\left(\frac{2x}{c}\right)$$

donde L es la fuerza de sustentación (N/m), ρ la densidad del aire (kg/m^3), U la velocidad del viento (m/s), $\boldsymbol{C_L(x)}$ el coeficiente de sustentación y c la cuerda de la pala (m). El coeficiente de sustentación varía a lo largo de la cuerda según una función periódica que modela la interacción aerodinámica con el flujo.

Con base en esta información, resuelva lo siguiente:

a. **[0.5 pts]** Exprese la integral en términos de la variable de referencia z en el intervalo $[-1, 1]$ de la cuadratura gaussiana, es decir, encuentre la función $g(z)$ tal que $L = \int_{-1}^{1} g(z)dz$.

Solución:
Realizamos el cambio de variable:

$$x = \frac{c + cz}{2} \rightarrow dx = \frac{c}{2}dz$$

Reemplazamos en la integral:

$$L = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1.2 + 0.4\cos\left(\frac{2}{c}.\frac{c+cz}{2}\right)\right].\frac{c}{2}dz$$
$$L = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\rho U^2 c[1.2 + 0.4\cos(1+z)]dz$$

La función $g(z)$ es:

$$g(z) = \frac{1}{4}\rho U^2 c[1.2 + 0.4\cos(1+z)]$$

b. [**1.5 pts**] Aproxime el valor de la integral utilizando la Cuadratura Gaussiana con 2 puntos. Use los valores: $c = 2\,\text{m}$, $U = 12\,\text{m/s}$, $\rho = 1.225\,\text{kg/m}^3$. Desarrolle los cálculos detalladamente.

Solución:
Reemplazamos los valores de los parámetros:

$$L = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} \times 1.225 \times 12^2 \times 2[1.2 + 0.4\cos(1+z)]dz$$
$$L = \int_{-1}^{1} 88.2[1.2 + 0.4\cos(1+z)]dz$$

Aproximamos con dos puntos,

$$L \approx 1 \times 88.2[1.2 + 0.4\cos(1 - 1/\sqrt{3})] + 1 \times 88.2[1.2 + 0.4\cos(1 + 1/\sqrt{3})]$$

$$L \approx 243.6243$$

c. [**1 pt**] Determine la cota del error de la aproximación obtenida para la integral en el inciso (b).
Solución:
Hallamos la cuarta derivada de $g(z) = 88.2[1.2 + 0.4\cos(1+z)]$, y acotamos:

$$g^{(4)}(z) = 88.2 \times 0.4 \times \cos(1+z)$$
$$|g^{(4)}(\xi)| \leq 88.2 \times 0.4 = 35.2800$$

Luego:

$$E_g = \frac{2^{2(1)+3}\left[((1)+1)!\right]^4}{(2(1)+3)\left[(2(1)+2)!\right]^3}|g^{(4)}(\xi)| = \frac{1}{135} \times 35.2800 = 0.2613$$

APLICACIONES

5. **[10 puntos]** Bajo una carga uniforme, las pequeñas deflexiones y de una viga apoyada en ambos extremos están dadas por la siguiente ecuación diferencial:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{3}x(x-L), \quad y(0) = y(L) = 0,$$

donde:

- EI es la **rigidez a la flexión** de la viga, siendo E el módulo de elasticidad del material e I el momento de inercia de la sección transversal de la viga.
- q es la **magnitud de la carga uniformemente distribuida** por unidad de longitud.
- L es la **longitud de la viga** entre los dos apoyos.
- x es la coordenada longitudinal a lo largo de la viga, con $x = 0$ y $x = L$ correspondiendo a los extremos apoyados.
- $y(x)$ es la **deflexión vertical** de la viga en el punto x.

a) **[3 ptos] Plantee los 2 problemas de valor inicial que se requieren para aplicar el método del disparo. Luego, para cada PVI, plantee su correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales**.

Solución:

El primer PVI es:

$$\begin{cases} y_1'' = \dfrac{q}{3EI}x(x-L) & ,0 \leq x \leq L \\ y_1(0) = 0, y_1'(0) = 0 \end{cases}$$

Hacemos el cambio de variable: $u_1 = y_1$, $u_2 = y_1'$, la EDO se convierte en el sistema:

$$\begin{cases} u_1' = x_2, & u_1(0) = 0 \\ u_2' = \dfrac{q}{3EI}x(x-L), & u_2(0) = 0 \end{cases}$$

El segundo PVI es:

$$\begin{cases} y_2'' = 0 & ,0 \leq x \leq L \\ y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

Hacemos el cambio de variable: $u_1 = y_1$, $u_2 = y_1'$, la EDO se convierte en el sistema:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(0) = 0 \\ u_2' = 0, & u_2(0) = 1 \end{cases}$$

b) **[3 ptos] Aproxime la solución del primer problema de valor inicial utilizando el método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2)** y considerando los siguientes valores: $\boldsymbol{L = 10\,\mathrm{ft}}$, $\boldsymbol{EI = 1\,250\,\mathrm{kip}\cdot\mathrm{ft}}$, $\boldsymbol{q = 0.6\,\mathrm{kip/ft}}$. **Complete la tabla** siguiente con los resultados obtenidos.

x	y_1
0	
5	
10	

Solución:

Reemplazamos los valores de los parámetros, y nos queda el sistema EDO:

$$\begin{cases} u_1' = u_2 & u_1(0) = 0 \\ u_2' = \dfrac{1}{6250}x(x-10) & u_2(0) = 0 \end{cases}$$

Definimos a la variable $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, y a la función:

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ \dfrac{1}{6250}x(x-10) \end{bmatrix}$$

Primera iteración: $\underline{i = 0}$, $x_0 = 0$ y consideramos $h = 5$ (de tabla), entonces:

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{u_0} + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{k_1} + \frac{1}{2}\mathbf{k_2}\right)$$

donde

$$\mathbf{k_1} = \mathbf{F}(x_0, \mathbf{u}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k_2} = \mathbf{F}\left(x_0 + h, \mathbf{u}_0 + (5)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.004 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -0.004 \end{bmatrix}\right) \quad \longrightarrow \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración: $\underline{i = 1}$, $x_1 = x_0 + h = 0 + 5 = 5$, entonces:

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{u_1} + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{k_1} + \frac{1}{2}\mathbf{k_2}\right)$$

donde

$$\mathbf{k_1} = \mathbf{F}(x_1, \mathbf{u_1}) = \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.004 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k_2} = f\left(x_1 + 5, \mathbf{u_1} + (5)\begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.004 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.01 \end{bmatrix} + 5\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.004 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -0.03 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \longrightarrow \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{-0.1} \\ -0.02 \end{bmatrix}$$

Completamos la tabla:

x	y_1
0	0
5	0
10	-0.1

c) [**2 ptos**] **Aproxime la solución del segundo problema de valor inicial utilizando el método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2).** y considerando los mismos valores siguientes: $\boldsymbol{L = 10\,\mathrm{ft}}$, $\boldsymbol{EI = 1\,250\,\mathrm{kip\cdot ft}}$, $\boldsymbol{q = 0.6\,\mathrm{kip/ft}}$. **Complete la tabla** siguiente con los resultados obtenidos.

x	y_2
0	
5	
10	

Solución:

Reemplazamos los valores de los parámetros, y nos queda el sistema EDO:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(0) = 0 \\ u_2' = 0, & u_2(0) = 1 \end{cases}$$

Definimos a la variable $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, y a la función:

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primera iteración: $\underline{i = 0}$, $x_0 = 0$ y consideramos $h = 5$ (de tabla), entonces:

$$\mathbf{u_1} = \mathbf{u_0} + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{k_1} + \frac{1}{2}\mathbf{k_2}\right)$$

donde

$$\mathbf{k_1} = \mathbf{F}(x_0, \mathbf{u_0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k_2} = \mathbf{F}\left(x_0 + h, \mathbf{u_0} + (5)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \longrightarrow \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración: $\underline{i = 1}$, $x_1 = x_0 + h = 0 + 5 = 5$, entonces:

$$\mathbf{u_2} = \mathbf{u_1} + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{k_1} + \frac{1}{2}\mathbf{k_2}\right)$$

donde

$$\mathbf{k_1} = \mathbf{F}(x_1, \mathbf{u_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k_2} = \mathbf{F}\left(x_1 + 5, \mathbf{u_1} + (5)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad \longrightarrow \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Completamos la tabla:

x	y_2
0	0
5	5
10	10

d) [**2 ptos**] **Aplique el método del disparo** utilizando los resultados previos. Luego complete la tabla siguiente.

x	y_{aprox}
0	
5	
10	

Finalmente, dada la solución exacta $\boldsymbol{y(5) = 0.041667}$, **calcule el error relativo al aproximar este valor mediante el método del disparo**.

Solución:

Para completar la tabla, usamos la función:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{0 - y_1(10)}{y_2(10)}.y_2(x)$$

$$y(x) = y_1(x) + \frac{0.1}{10}.y_2(x) = y_1(x) + \frac{1}{100}.y_2(x)$$

A partir de los valores anteriores, completamos la tabla:

x	y_{aprox}
0	0
5	0.05
10	0

Calculamos el error relativo:

$$\text{error} = \frac{|0.041667 - 0.05|}{|0.041667|} = 0.19999$$