UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

# Matemáticas Discretas II
# CS1022

## Lista de problemas del curso

Ciclo académico: 2025-1

# Capítulo 1: Inducción Matemática

## Diferentes esquemas de inducción matemática

Use inducción matemática para demostrar las proposiciones:

1. Sea $n$ entero positivo, entonces
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

2. Sea $n$ entero positivo, entonces
$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

3. Sea $n$ entero positivo, entonces
$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

4. Sea $n$ entero positivo y $a$ un número real distinto de 1, pruebe que
$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

5. Demuestre que $n(n+7)$ es par, para todo entero positivo $n$.

6. Demuestre que $n^3 - n$ es divisible por 6, para todo entero positivo $n$.

7. *a*) Demuestre que $6^n - 1$ es divisible por 5, para todo entero positivo $n$.
   *b*) Demuestre que $7^n - 1$ es divisible por 6, para todo entero positivo $n$.

8. Para $n \geq 4$:
$$n^2 \leq 2^n$$

9. Para $n \geq 10$:
$$n^3 \leq 2^n$$

10. Para $n \geq 3$:
$$n^3 \leq 3^n$$

11. Para $n \geq 1$:
$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{n}$$
donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos cualesquiera.

12. Sea $A$ un conjunto finito y no vacío con $n$ elementos. Demuestre que el número de elementos de $P(A)$, el conjunto potencia de $A$, es $2^n$.

13. Para cada entero positivo $n$ definimos $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Demuestre que $2^n \leq n!$ para $n \geq 4$.

14. Se considera la sucesión definida por $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 2$.

    *a*) Hacer uso del método de inducción para probar que: $a_n + a_{n-1} = n^2$ cualquiera que sea el entero $n \geq 2$.

    *b*) Determinar la fórmula explícita del término general de la sucesión $(a_n)$.

15. Pruebe que todo número entero mayor o igual a 14 se puede expresar como $3x + 8y$, donde $x$ y $y$ son números enteros no negativos.

16. Un cajero automático solo tiene billetes de 20 y 50 soles. Demuestre que es posible retirar cualquier cantidad de soles que es múltiplo de 10 y mayor que 30.

17. Sea la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida por $a_1 = 2$ y $a_n = 3a_{n-1} - 2$. Demuestre que $a_n = 3^{n-1} + 1$ para todo entero positivo $n$.

18. Sea la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida por $a_1 = 5$ y $a_n = 3a_{n-1} - 2$. Demuestre que $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} + 1$ para todo entero positivo $n$.

19. Sea la sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$ definida por $b_1 = 1$, $b_2 = 3$ y $b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$. Demuestre que $b_n = 2n - 1$ para todo entero positivo $n$.

20. Sea la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ definida por $x_1 = 5$, $x_2 = 13$, $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$. Pruebe que para todo $n$ entero positivo se cumple que:

$$x_n = 2^n + 3^n$$

21. Pruebe mediante inducción que $a_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, donde $(a_n)$ es la sucesión definida por $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \forall n \geq 3 \end{cases}$

22. La sucesión

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 24, 55, \ldots$$

es llamada *sucesión de Fibonacci*. Se define como la sucesión $(f_n)_{n \geq}$ mediante

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ \text{ para } \ n \geq 3\,.$$

Muestre las siguientes propiedades:

*a*) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$ para todo $n \geq 1$

*b*) $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ para todo $n \geq 1$;

*c*) $f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ para todo $n \geq 1$;

*d*) $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ para todo $n \geq 1$.

*e*) $f_n \leq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

*f*) $f_n \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ para todo $n \geq 1$.

**23.** Se define la sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ mediante

$$f_1 = 1 \ , \ f_2 = 1 \ , \ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

Pruebe que $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 2((-1)^{f_n} + 1)$ es divisible por 7 para todo entero positivo $n$.

**24.** Dada la sucesión de números reales $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, probar que:

*a*) $H_{2^n} \leq 1 + n, \forall n \in \mathbb{N}$.

*b*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n, \forall n \in \mathbb{N}$.

**25.** Demuestre que, para todo entero positivo $n$, se cumple que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

**26.** Sea $g_n$ una sucesión definida por $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 6$ y

$$g_n = (n^3 - 3n^2 + 2n)g_{n-3}, \quad \text{para todo } n \geq 4.$$

Demuestre que $g_n = n!$.