Métodos Numéricos

Lab. Ecuaciones no lineales

S3

Hermes Pantoja Carhuavilca
(hpantoja@utec.edu.pe)
Rósulo Pérez Cupe
(rperezc@utec.edu.pe)
Jimmy Mendoza Montalvo
(jmendozam@utec.edu.pe)
Daniel Camarena Perez
(vcamarena@utec.edu.pe)
Máximo Obregón Ramos
(mobregon@utec.edu.pe)

Profesores: **Utec-Ciencias**

Índice

Logros de Aprendizaje

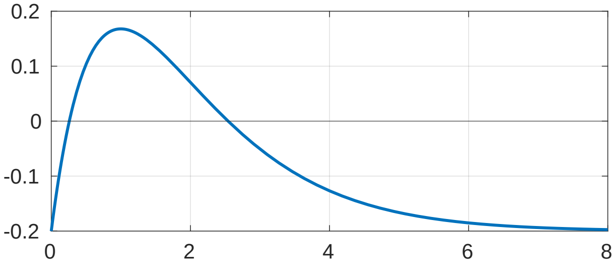
1. Aplica métodos cerrados y abiertos para aproximar las raíces de ecuaciones no lineales.

1 MÉTODOS CERRADOS

Introducción

Determine la solución de la ecuación $xe^{-x} = 0.2$.

```
f=@(x)(x.*exp(-x)-0.2)
fplot(f,[0 8]); grid on;
yline(0);
fzero(f,0.7)
fzero(f,2.8)
```



Localización de raíces

Localizar graficamente las raíces de $f(x) = -x^2 + 2x + e^x$

```
xx=[-4:0.01:4];
f1=@(x) x.^2-2.*x;
yy1=f1(xx)
f2=@(x) exp(x);
yy2=f2(xx)
plot(xx,yy1,'r',xx,yy2,'b')
grid on
```

Teorema de Bolzano

Teorema

Si f es continua en [a;b], $f(a) \times f(b) < 0$ entonces existe al menos un raiz $x^{\star}$ en el intervalo $[a; b]$ tal que $f(x^{\star}) = 0$.

Si $f(a) \times f(b) = 0$, la raiz se encuentra en uno de los extremos del intervalo $[a; b]$.
Ejemplo: Localizar las raíces de $f(x) = -x^2 + 2x + e^x$

```
f=@(x)(-x^2+2*x+exp(x))
a=-1
b=0
if f(a)*f(b)<0
    fprintf('Existe al menos una raiz')
else
    fprintf('No se puede afirmar que existe una raiz')
end
```

Método de la Bisección

```
function [z] = biseccion(f,a,b,itermax)
    z = [];
    for i = 0:itermax
        c = (a+b)/2;
        ea = ((b-a)/2);
        z = [z; i a c b f(a) f(c) f(b) ea];
        if f(c)*f(a)>0
            a = c;
        else
            b = c;
        end
    end
end
```

Método de la Bisección

```
function [z] = biseccion2(f,a,b,Tol)
    z = [];  i = 0;
    ea = ((b-a)/2);
    N=ceil(log((b-a)/(2*Tol))/log(2));
    fprintf('Para Tol = %.3f se necesitan %d iteraciones\n', Tol, N);
    while(ea>Tol)
        c = (a+b)/2;
        ea = ((b-a)/2);
        z = [z; i a c b f(a) f(c) f(b) ea];
        if f(c)*f(a)>0
            a = c;
        else
            b = c;
        end
        i = i + 1;
    end
end
```

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Ejemplo 1

Ejemplo

Aproximar la solución de la ecuación no lineal $e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0$ *utilizando el método de la bisección. Realice 6 iteraciones.*

```
f = @(x) exp(x-1) - cos(pi/4*x);
a = 0;
b = 1;
Maxiter = 6;
z = biseccion(f,a,b,Maxiter)
```

Ejercicio 1

Ejercicio

Aproximar la solución de la ecuación no lineal $-x^2 + 2x + e^x = 0$ *utilizando el método de la bisección con una tolerancia 1e-3 e indique el número de iteraciones necesarias para alcanzar dicha tolerancia.*

Ejercicio 2 - EL1 2024 - 2

Se tiene la función:

$$f(x) = e^{1+3x-x^2} + \frac{\cos(x)}{x} - \sin(2x)$$

en el intervalo $[-7, 7]$.
Realice lo siguiente:

1. Determine el número de raíces reales y asigne el valor a la variable `nvar`.
2. Localice el intervalo $[a, b]$ de longitud 1, que contenga la menor raíz. Donde a y b son números enteros, almacene el resultado en el vector fila `test`, donde `test` = $[a, b]$.
3. Aproxime la menor raíz (en el intervalo dado inicialmente) utilizando el método de la bisección con una tolerancia $\texttt{tol} = 1 \times 10^{-5}$ y asigne el resultado a la variable `yaprox`. Considere como intervalo $[a, b]$ para la ejecución del método lo localizado en el ítem anterior.

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

> Reinventa el mundo <

2 MÉTODOS ABIERTOS

Método de Newton

Se desea resolver de forma aproximada:

$$\boxed{\boxed{f(x) = 0}}$$

<u>Formula de recurrencia:</u>

$$\boxed{\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'\left(x^{(k)}\right)}}}$$

Dado un $x^{(0)}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Función Newton

```
function z = newton(f,x0,Tol)
    syms x
    df = diff(f,x);
    df = matlabFunction(df);
    dr = 1;
    i = 0;
    z = [i x0 f(x0) df(x0) dr];
    while(dr>Tol)
        x1 = x0 - f(x0)/df(x0);
        dr = abs(x1 - x0)/abs(x1);
        x0 = x1;
        i = i + 1;
        z = [z; i x1 f(x1) df(x1) dr];
    end
end
```

Ejemplo 1

Ejemplo

Usar el método de Newton para aproximar las raíces de $f(x) = e^{x-1} - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, *comenzando con* $x^{(0)} = 0.01$ *con una tolerancia de 1e-2.*

```
f = @(x) exp(x-1) - cos(pi/4*x);
x0 = 0.01;
Tol = 1e-2;
z = newton(f,x0,Tol)
```

Ejemplo 2

Ejemplo

Usar el método de Newton para aproximar las raíces de $f(x) = x^3 - 2x + 2$, comenzando con $x^{(0)} = 1$ con una tolerancia de 1e-3. Analice el funcionamiento del código bajo esta situación.

```
f = @(x) x^3-2*x+2
x0 = 1;
Tol = 1e-3;
z = newton(f,x0,Tol)
```

Ejercicio 3 - Examen EL1 2024 - 2

El rendimiento de un motor de combustión interna está influenciado por varios factores, incluyendo la temperatura del motor, la presión interna y la velocidad de operación. La eficiencia térmica $\eta(T)$ de un motor puede ser modelada por:

$$\eta(T) = \eta_0 - k(T - T_{\text{opt}})^2 + \frac{c}{T}$$

donde:

- $\eta_0 = 0.35$: eficiencia máxima del motor.
- $k = 0.01$: constante que describe la pérdida de eficiencia por desviación de T_{opt}.
- $T_{\text{opt}} = 90^\circ$: temperatura óptima para máxima eficiencia.
- $c = 300$: constante relacionada con el calor generado en el motor.

Se busca calcular la temperatura T en ℃ a la cual $\eta(T) = 0.2$ usando el método de Newton-Raphson:

1. Defina una función $f(T)$ cuya raíz corresponda al problema, es decir, resuelva $f(T) = \eta(T) - 0.2$.
2. Calcule T con tolerancia 1×10^{-5} usando Newton-Raphson, iniciando en $T = 80^\circ$. Almacene el resultado en `Taprox`.
3. Determine la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar la solución y almacénela en `iterations`.

Adicionalmente, almacene el valor de $|f(85)|$ en la variable `nvalue`.

Método del Punto Fijo

Dada

$$\boxed{\boxed{f(x) = 0 \rightarrow x = g(x)}}$$

Condiciones de convergencia

- $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [a; b]$
- $g([a; b]) \subset [a; b]$

Ecuación de recurrencia:

$$\boxed{\boxed{x^{(k+1)} = g\left(x^{(k)}\right); \quad k = 0, 1, 2, \ldots}}$$

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Función Punto Fijo

```
function z = pfijo(g,x0,Tol)
    dr = 1;
    i = 0;
    z = [i x0 dr];
    while(dr>Tol)
        x1 = g(x0);
        dr = abs(x1 - x0)/abs(x1);
        x0 = x1;
        i = i + 1;
        z = [z; i x1 dr];
    end
end
```

Ejemplo 1

Ejemplo

Usar el método del punto fijo para aproximar las raíces de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ *, comenzando con* $x_0 = 4$ *, utilice 10 iteraciones. Analice previamente su convergencia.*

```
syms x
g = matlabFunction(sqrt(2*x+3));
% CONDICION DE EXISTENCIA:
xx = [0:0.01:4];
yy = g(xx);
plot(xx,yy,'r',[0 4],[g(0) g(4)],'ob'); grid on;
% Se visualiza que g([0;4]) in [0;4] (cumple)
% CONDICION DE CONTRACCION:
dg = diff(g(x))
fudg = matlabFunction(dg)
xx = [0:0.01:4];
yy1 = abs(fudg(xx));
plot(xx,yy1,'b'); grid on;
% Se visualiza que |g'(x)|<1 para x in [0;4] (cumple)
% METODO DE PUNTO FIJO:
x0 = 4;
Maxiter = 10;
z = pfijo(g,x0,Maxiter)
```

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Ejercicio 4 - Examen EL1 - 2024 - 2

Considere la estimación de un parámetro α a partir de la distribución de eficiencia de una antena parabólica, que tiene la función de eficiencia $E(r;\alpha)$ como:

$$E(r;\alpha) = \frac{\alpha r e^{-ar}}{1 - e^{-\alpha}}$$

donde $\alpha > 0$ y $r = 1, 2, 3, \ldots$. La eficiencia de la antena depende de las características de construcción y se ajusta en base a mediciones discretas de la señal. La ecuación de máxima verosimilitud para α, basada en una muestra aleatoria $R_1, R_2, \ldots, R_n$, se reduce a

$$R - \frac{n\alpha}{1 - e^{-\alpha}} = 0 \quad \text{donde} \quad R = \sum R_i.$$

Universidad de Ingeniería y Tecnología

Continuación...

Para encontrar una solución a esta ecuación, podríamos reescribirla como:

$$\hat{\alpha} = \bar{R}(1 - e^{-\hat{\alpha}}) \quad \text{donde} \quad \bar{R} = \frac{R}{n}.$$

Por lo tanto, α se considera como la eficiencia promedio observada en las mediciones. La identidad reformulada sugiere la iteración de punto fijo:

$$\begin{cases} \alpha^{(0)} = \bar{R} \\ \alpha^{(k+1)} = \bar{R}\left(1 - \exp(-\alpha^{(k)})\right) \end{cases}$$

Los datos que vamos a emplear en el problema son una muestra de tal manera que $\bar{R} = 4$.

Continuación...

Se le pide efectuar lo siguiente:

1. Defina la función del método del punto fijo $g(\alpha)$ donde g tiene la notación trabajada en clase y asigne el valor de $g(1)$ a la variable numérica `g1`.
2. Efectúe las iteraciones del método del punto fijo hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-5}. Almacene la cantidad de iteraciones en la variable numérica `niter_pf`.
3. Se sabe que el valor exacto de $\hat{\alpha}$ se puede calcular en MATLAB con el comando `lambertw` (consulte la documentación de MATLAB para ello) de la siguiente forma:

   $$\alpha_{\text{exacto}} = 4 + \texttt{lambertw}\left(-3/exp(4)\right).$$

   Halle el error absoluto de la aproximación dada por el método del punto fijo y almacene el resultado en la variable numérica `error_pf`.
4. Aplique el método de la bisección para resolver la ecuación $\bar{R}(1 - e^{-\hat{\alpha}}) - \hat{\alpha} = 0$ en el intervalo $[0, 4]$. Realice tantas iteraciones como las realizadas por el método del punto fijo. Almacene el error absoluto de la aproximación por el método de la bisección (ojo que ya conoce el valor exacto) en la variable numérica `error_bi`.

Conclusiones

- Los métodos cerrados como bisección garantizan convergencia, mientras que los abiertos como Newton son más rápidos pero dependen de una buena aproximación inicial.
- La precisión y eficiencia de un método depende a su vez de la función y la tolerancia elegida, afectando el número de iteraciones necesarias.
- Los métodos numéricos son herramientas esenciales para resolver ecuaciones no lineales en ingeniería y ciencias cuando no es posible encontrar soluciones analíticas exactas.

UTEC

UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA