Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora.
Profesor: Hermes Pantoja.
Secciones: 1.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Dado los siguientes puntos $(0;-1)$, $(1;1)$, $(2;9)$, $(3;29)$ por el cuál pasa un polinomio interpolante de Newton de la forma

$$P(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-3) + d(x-1)(x-3)(x-2)$$

Entonces $a+b+c+d = 22$.
Solución:
Reemplazando en los puntos:

a) En $x = 1 \to a = 1$.
b) En $x = 3 \to a + 2b = 29 \to 1 + 2b = 29 \to 2b = 28 \to b = 14$.
c) En $x = 2 \to a + b - c = 9 \to 1 + 14 - c = 9 \to c = 6$.
d) En $x = 0 \to a - b + 3c - 6d = -1 \to d = 1$

En consecuencia: $a + b + c + d = 22$. Por lo tanto, la afirmación es **verdadera**.

2. [**2 ptos**] Dada la siguiente representación en punto flotante de un computador hipotético de 8 bits:

$$x = \pm(1.d_1d_2d_3d_4)_2 \times 2^E$$

El mayor número positivo decimal en dicho sistema es: 15.
Solución:
Como el computador tiene 8 bits, entonces:

- 1 bits está reservado para el signo.
- 4 bits están reservados para la mantisa.
- 3 bits están reservados para el exponente.

Entonces, el número viene dado por:

$$01101111$$

Calculando el $BIAS$: $2^{3-1} - 1 = 3$, encontrando el exponente:

$$110_2 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2 = 6 \to E = 6 - 3 = 3$$

El número será:

$$1.1111_2 \times 2^3 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) \times 2^3 = 15.5$$

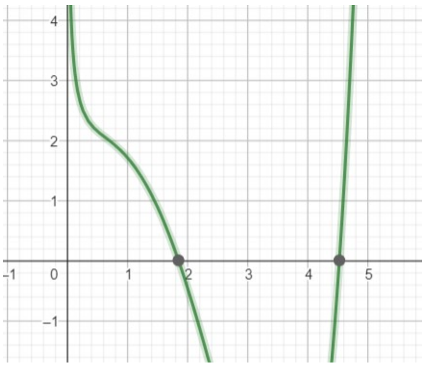
Por lo tanto, la afirmación es **falsa**.

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Dada la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{e^x - x^3}{\sqrt{x}} = 0$$

   a) [**0.5 pto**] Elige un intervalo inicial $[a_0; b_0]$, donde se garantice la existencia de la menor raíz real positiva. Donde a_0 y b_0 son enteros, además $b_0 - a_0 = 1$.
   Solución:
   Dado el comportamiento de la función, es suficiente ir analizando en intervalos de longitud 1, como se puede ver en la gráfica:



   Usar que $f(1) \approx 1.718...$ y $f(2) = -0.43...$ y como la función es cociente de una diferencia de funciones continuas, con una continua, entonces se puede garantizar la existencia de la menor raíz real positiva.

b) [**0.5 pto**] Determine el mínimo número de iteraciones para aproximar la menor raíz real positiva con una tolerancia $Tol = 10^{-3}$ al aplicar el método de la bisección.
Solución:
Bastar usar la desigualdad:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \text{tol} \rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$$

Finalmente:

$$1000 \leq 2^{n+1} \rightarrow n_{min} = 9.$$

c) [**2 ptos**] Realice dos iteraciones utilizando el método de la bisección con las condiciones iniciales encontradas en el ítem (a).
Solución:
Iterando:

Iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Error
0	1	2	1.5	1.7183	-0.4320	0.9036	0.5
1	1.5	2	1.75	0.9036	-0.4320	0.2988	0.25
2	1.75	2	1.875	0.2988	-0.4320	-0.0518	0.1250

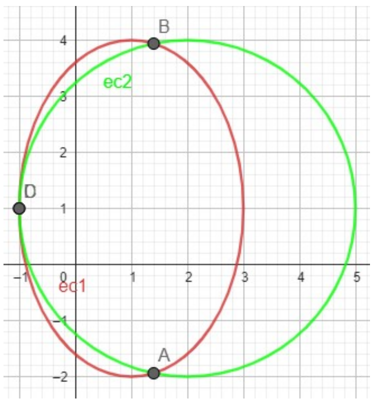
4. [**3 ptos**] Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

a) [**1 pto**] Determine el número de soluciones reales.
Solución:

1) Forma 1: El sistema consta de cónicas básicas, sencillas de graficar:



Por lo tanto, podemos notar 3 puntos de intersección.

2) Forma 2: Podemos proceder de forma analítica:

$$(y-1)^2 = 9 - (x-2)^2$$

Reemplazando en la primera ecuación, tenemos:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{9-(x-2)^2}{9} = 1$$

Homogenizando:

$$9(x-1)^2 + 36 - 4(x-2)^2 = 36$$

$$9(x^2-2x+1) + 36 - 4(x^2-4x+4) = 36$$

$$9x^2 - 18x + 9 + 36 - 4x^2 + 16x - 16 = 36$$

$$5x^2 - 2x - 7 = 0 \leftrightarrow (5x-7)(x+1) = 0 \leftrightarrow x = 1.4, x = -1$$

Luego reemplazando en las ecuaciones de la circunferencia se obtendrán los valores para y, así obtendremos 3 puntos de intersección.

b) **[2 ptos]** Aplique el método de Newton para aproximar una solución. Realice 01 iteración. Considere como punto semilla: $\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Solución:

Encontrando F:

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} - 1 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 - 9 \end{bmatrix}$$

Encontrando el Jacobiano:

$$J\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(x-1)}{2} & \frac{2(y-1)}{9} \\ 2(x-2) & 2(y-1) \end{bmatrix} \rightarrow J\begin{bmatrix} 1.5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow J^{-1}\begin{bmatrix} 1.5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{13} & \frac{-4}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

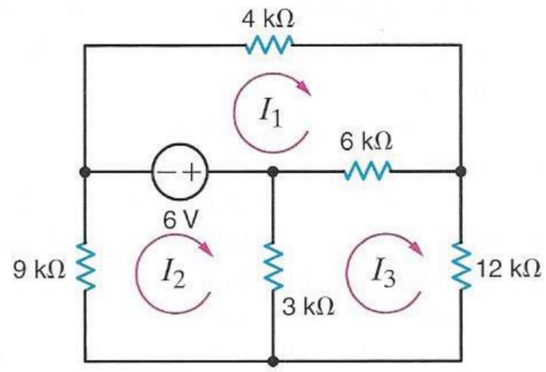
El método iterativo, viene dado por:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - J^{-1}(x^{(0)})F(x^{(0)})$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{36}{13} & \frac{-4}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{3}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.404... \\ 3.942... \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

5. [**10 ptos**] Considere el siguiente circuito de cinco resistencias, impulsadas por una batería de 6 voltios. La notación $k\Omega$ se refiere a "kilo ohmios" o 1000 ohmios.



   a) [**4 ptos**] Luego de reordenar (si es necesario) las ecuaciones obtenidas, modele el sistema de ecuaciones lineales en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \boxed{p} & \boxed{q} & \boxed{-6000} \\ \boxed{0} & \boxed{r} & \boxed{s} \\ \boxed{t} & \boxed{-3000} & \boxed{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   e indique los valores que obtiene p, q, r, s y t.

   Solución:

   Analizando en la malla I_1:

$$(4000 + 6000)I_1 - (6000)I_3 = -6$$

   Analizando en la malla I_2:

$$12000I_2 - 3000I_3 = 6$$

   Analizando en la malla I_3:

$$-6000I_1 - 3000I_2 + (3000 + 6000 + 12000)I_3 = 0$$

   Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \boxed{10000} & \boxed{0} & \boxed{-6000} \\ \boxed{0} & \boxed{12000} & \boxed{-3000} \\ \boxed{-6000} & \boxed{-3000} & \boxed{21000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) **[2 ptos]** Analice la convergencia del método iterativo de Gauss-Seidel (según el criterio de la diagonal dominancia). Indique claramente su conclusión (converge o No se puede afirmar nada).

La matriz de coeficientes claramente es diagonal estrictamente dominante, por lo tanto el método de Gauss - Seidel converge.

c) **[4 ptos]** Luego de descomponer la matriz A en D, L y U, halle la matriz de iteración de Jacobi (T_j) para aplicar el proceso iterativo. Realice 02 iteraciones Considere como vector semilla $I^{(0)} = \begin{bmatrix} -5\times 10^{-4} \\ 5\times 10^{-4} \\ 10^{-4} \end{bmatrix}$.

Solución:

Descomponiendo para encontrar T_j, tenemos:

$$D = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 12000 & 0 \\ 0 & 0 & 21000 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6000 & 3000 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 3000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sabemos que $x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$:

$$T_j \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.25 \\ 0.286 & 0.143 & 0 \end{bmatrix}$$

Primera Iteración:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.25 \\ 0.286 & 0.143 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5\times 10^{-4} \\ 5\times 10^{-4} \\ -1\times 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.6\times 10^{-3} \\ 0.5\times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.54\times 10^{-3} \\ 0.525\times 10^{-3} \\ -0.07143\times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Segunda Iteración:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.25 \\ 0.286 & 0.143 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.54\times 10^{-3} \\ 0.525\times 10^{-3} \\ -0.07143\times 10^{-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.6\times 10^{-3} \\ 0.5\times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.643\times 10^{-3} \\ 0.482\times 10^{-3} \\ -0.0793\times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

UTEC UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA & TECNOLOGÍA

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesores: Jimmy Mendoza.
Sección: 8.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] Sea: $f(x) = e^x - x\,(e-1) - 1 \quad y \quad x = g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e-1}$.

   Para cualquier punto x en $[-1, 1]$ se cumple que $g(x) \in [-1, 1]$. Por ello, esta garantizada la convergencia del método de punto fijo en la determinación de la raíz real de la ecuación.

   Solución:

   Nos dan como dato que $g(x) \in [-1, 1]$, veamos el comportamiento de $g'(x)$, para ello:

   $$g(x) = \frac{e^x - 1}{e-1} = \frac{e^x}{e-1} - \frac{1}{e-1} \rightarrow g'(x) = \frac{e^x}{e-1}$$

   en consecuencia:

   $$-1 \leq x \leq 1$$

   Como $g'(x)$ es creciente, pues es el cociente de la exponencial (que es creciente) con una constante diferente de 0, entonces podemos aplicar g' a todos los miembros de la desigualdad:

   $$g'(-1) \leq g'(x) \leq g'(1)$$

   $$0.214... \leq g'(x) \leq 1.582...$$

   Por lo tanto, no queda garantizada la convergencia del método del punto fijo.

2. [**2 ptos**] En el sistema de ecuaciones no lineales:

   $$\begin{cases} x^2 - ay^2 & = & 0 \\ x + ay & = & 0 \end{cases}$$

   Para cualquier valor en el parámetro a el sistema tiene una solución única usando el método de Newton con una aproximación inicial $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

Solución:

Encontrando el Jacobiano para el sistema:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2ay \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

Por la iteración del método de Newton necesitamos evaluar en la inversa del Jacobiano (en la forma usual):

$$J(-1,1) = \begin{bmatrix} -2 & -2a \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

Para saber si tiene inversa, basta con encontrar el determinante de la matriz, por lo tanto:

$$|J(-1,1)| = -2a - (-2a) = 0$$

Como el determinante es 0 para cualquier valor de a, no se puede aplicar el método de Newton al sistema.

PROCEDIMENTAL

3. **[3 ptos]** Luego de una prueba experimental con un ventilador axial, se obtuvo los datos sobre caudal Q en pies^3/min (eje abscisas) vs altura h en milímetros (eje ordenadas).

Q	1	4	7
h	6	5	1

Se desea encontrar el polinomio interpolante de grado 2, $P_2(Q)$, que represente la variación de la altura como función del caudal. Entregue la cantidad de cifras significativas con la cual se aproxima el valor del polinomio interpolador a la medición de $(Q_0, h_0) = (5, 3.9)$.

Solución:

El polinomio, tiene la forma:

$$P_2(Q) = a_2Q^2 + a_1Q + a_0$$

Reemplazando en la nube de puntos:

a) $6 = a_2 + a_1 + a_0$.

b) $5 = 16a_2 + 4a_1 + a_0$.

c) $1 = 49a_2 + 7a_1 + a_0$.

Expresando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 49 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{17}{3} \end{bmatrix}$$

Reemplazando para $Q = 5$, se tiene:

$$P_2(5) = (-1/6)(25) + (1/2)(5) + (17/3) = 4$$

Analizando la cantidad de cifras significativas:

$$\delta_r = \frac{|4 - 3.9|}{4} = 0.025 < 5 \cdot 10^{-2}$$

Vemos que la aproximación se da con 2 cifras significativas.

4. [**3 ptos**] La ubicación del centro de presiones (y_p) en una placa plana rectangular de base b y altura h sobre la cual actúa la fuerza hidrostática resultante se puede determinar mediante la expresión siguiente:

$$y_p = y_c + \frac{I_{xx,c}}{y_c A}$$

Donde, para la placa rectangular $I_{xx,c} = \frac{1}{2}bh^3$ y $A = bh$. Si se conoce de manera exacta que la base $b = 1\,\mathrm{m}$, pero los valores de $y_c = 5\,\mathrm{m}$ (coordenada y del centroide) y la altura $h = 2\,\mathrm{m}$ presentan una incertidumbre de $\pm 0.1\,\mathrm{m}$ y $\pm 0.05\,\mathrm{m}$, respectivamente, calcule el valor del error relativo porcentual en la determinación de y_p.
Solución:
Tenemos dos variables: y_c y h, reemplazando:

$$y_p = y_c + \frac{1}{2}\frac{h^2}{y_c}$$

Las magnitudes con incertidumbre son y_c y h, aplicando la serie de Taylor:

$$\triangle y_p = \left|\frac{\partial y_p}{\partial y_c}\right| \cdot 0.1 + \left|\frac{\partial y_p}{\partial h}\right| \cdot 0.05$$

Entonces:

- $\left|\dfrac{\partial y_p}{\partial y_c}\right| = \left|1 - \dfrac{h^2}{2y_c^2}\right|$.
- $\left|\dfrac{\partial y_p}{\partial h}\right| = \left|\dfrac{h}{y_c}\right|$.

Reemplazando:

$$\triangle y_p \approx 0.112$$

Luego, el valor de yc es:

$$y_p = y_c + \frac{1}{2}\frac{h^2}{y_c} = 5\,\mathrm{m} + \frac{1}{2}\frac{(2\,\mathrm{m})^2}{(5\,\mathrm{m})} \longrightarrow y_p = 5.4\,\mathrm{m}$$

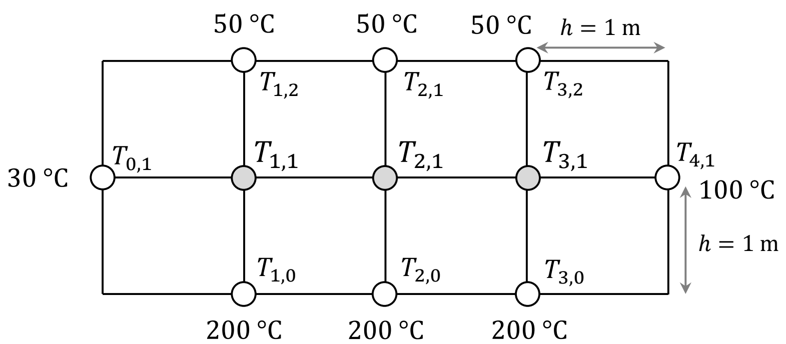
Así, el valor de y_p se encuentra en:

$$y_p = 5.4 \pm \frac{0.112}{5.4} = 5.4 \pm 2.07\,\%$$

El error relativo porcentual es $2.07\,\%$.

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** En la siguiente figura se muestra una placa, la cual se encuentra en contacto con 4 paredes a distintas temperaturas.



$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0}$$

Considerando que es posible aproximar la solución reemplazando las segundas derivadas, en ecuación diferencial que describe la variación de temperatura en la placa bidimensional, por una diferencia finita central:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{T_{i,j}} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{T_{i,j}} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{h^2}$$

a) [**4 ptos**] Discretrice la ecuación diferencial y encuentre una ecuación en diferencias que permita evaluar la temperatura en cada nodo. Considere $h = 1\,\text{m}$. Luego exprese el sistema de ecuaciones lineales en la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para estimar las temperaturas en los nodos interiores $T_{i,j}$. Use los valores de los parámetros del problema.

Solución:

Podemos observar de la figura, que las variables son $T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}$.Analizando para:

- $i = 1, j = 1$ se tiene:

$$\frac{T_{0,1} - 2T_{1,1} + T_{2,1}}{1} + \frac{T_{1,0} - 2T_{1,1} + T_{1,2}}{1} = 0$$

  Reemplazando:

$$\frac{200 - 2T_{1,1} + 50}{1} + \frac{30 - 2T_{1,1} + T_{1,2}}{1} = 0 \to 4T_{1,1} - T_{1,2} = 280.$$

- $i = 1, j = 2$ se tiene:

$$\frac{T_{0,2} - 2T_{1,2} + T_{2,2}}{1} + \frac{T_{1,1} - 2T_{1,2} + T_{1,3}}{1} = 0 \to 250 = -T_{1,1} + 4T_{1,2} - T_{1,3}$$

- $i = 1, j = 3$ se tiene:

$$\frac{T_{0,3} - 2T_{1,3} + T_{2,3}}{1} + \frac{T_{1,2} - 2T_{1,3} + T_{1,4}}{1} = 0 \to 350 = 4T_{1,3} - T_{1,2}$$

Escribiendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{1,2} \\ T_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 280 \\ 250 \\ 350 \end{bmatrix}$$

b) [**2 ptos**] Analice la convergencia del método iterativo de Jacobi o Gauss-Seidel (según el criterio de la diagonal dominancia). Indique claramente su conclusión (converge, diverge o no se puede afirmar nada).

Solución:

La matriz planteada en el item anterior, es diagonal estrictamente dominante, por lo tanto podemos afirmar que el método converge.

c) [**4 ptos**] Luego de descomponer la matriz $\mathbf{A}$ en $\mathbf{D}$, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$, halle la matriz de iteración de Jacobi ($\mathbf{T_j}$) y el vector de Jacobi ($\mathbf{c_j}$) para aplicar el proceso iterativo. Luego realice 02 iteraciones utilizando el método de Jacobi. Considere como vector semilla $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 85 \\ 45 \\ 95 \end{bmatrix}$.

Solución:

Descomponiendo:

- $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
- $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $T_j = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$.
- $c_j = \begin{bmatrix} 70 \\ 62.5 \\ 87.5 \end{bmatrix}$

Iterando:

- $x^{(1)} = T_j x^{(0)} + c_j = \begin{bmatrix} 81.25 \\ 107.5 \\ 98.75 \end{bmatrix}$.
- $x^{(2)} = T_j x^{(1)} + c_j = \begin{bmatrix} 96.875 \\ 107.5 \\ 114.375 \end{bmatrix}$.

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesores: Rósulo Pérez.
Sección: 5.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

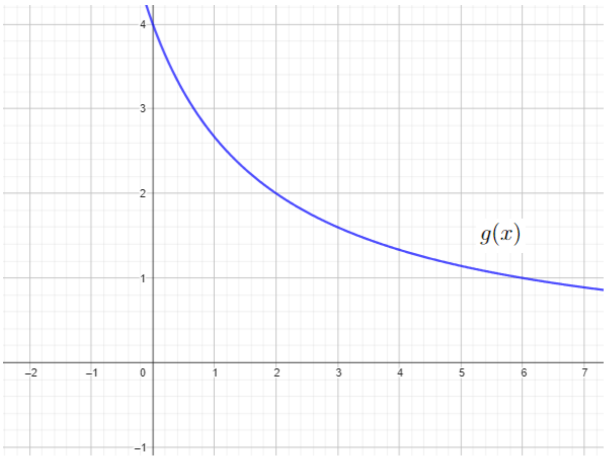
1. [**2 ptos**] Si $a = 9 \pm 0.16$ entonces $\sqrt{a} = 3 \pm 0.4$

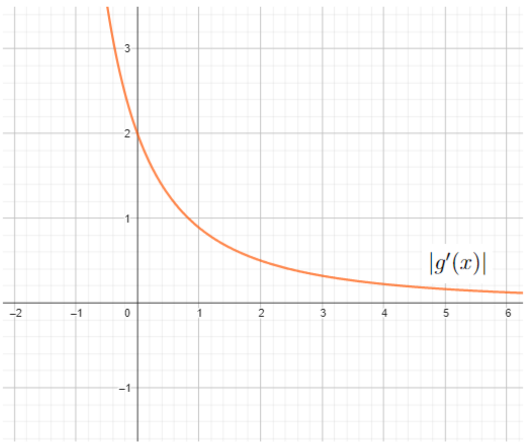
   Solución:
   Siguiendo la fórmula de propagación de error

$$\Delta\sqrt{a} \approx \left|\frac{d\sqrt{a}}{da}\right| \Delta a = \left|\frac{1}{2\sqrt{a}}\right| \Delta a = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0.16 = 0.0267 \neq 0.4$$

   Falso.

2. [**2 ptos**] Sea la función $f(x) = x^2 + 2x - 8$, con el objetivo de aproximarnos a la raíz positiva de f se propone la función $g(x) = \dfrac{8}{x+2}$ con $x \in [1; 3]$ para realizar las iteraciones del punto fijo, se muestran asimismo las gráficas de $g(x)$ y la de $|g'(x)|$ respectivamente





Entonces se concluye que el proceso iterativo es convergente.

Solución:

Se verifican las tres condiciones de convergencia. Primero, la función g es continua en $[1; 3]$. Segundo, de la gráfica de g se observa que para todo $1 \leq x \leq 3$ se tiene $1 \leq g(x) \leq 3$. Tercero, de la gráfica de $|g'(x)|$ se observa que para todo $1 \leq x \leq 3$ se tiene $|g'(x)| < 1$. Por lo tanto, el método de punto fijo converge. **Verdadero**

PROCEDIMENTAL

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay & = & 1 \\ x + y + z & = & 1 \\ by + z & = & 1 \end{cases}$$

donde a y b son números reales positivos.

a) [**1 pto**] La matriz de coeficientes del sistema es Diagonal estrictamente dominante? o depende de los valores de a y b?

Solución:

Podemos escribir el sistema en forma matricial $Av = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, A no es Diagonal estrictamente dominante pues en la segunda fila no se cumple $1 + 1 < 1$.

b) [**2 ptos**] Deduzca una relación entre los parámetros a y b de tal manera que el metodo iterativo de Jacobi sea convergente.

Solución:

Si se descompone la matriz

$$A = D - L - U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$T_j = D^{-1}(L + U) = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, el polinomio característico de T_j es

$$p(t) = \det(T_j - tI_3) = \begin{vmatrix} -t & -a & 0 \\ -1 & -t & -1 \\ ,0 & -b & -t \end{vmatrix} = -t^3 + (a+b)t,$$

de modo que los valores propios son $\lambda = 0, \sqrt{a+b}, -\sqrt{a+b}$ y el radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi es $\rho(T_j) = \sqrt{a+b}$. Por lo tanto, el método iterativo de Jacobi converge si y solo si $a+b<1, a>0, b>0$.

4. **[3 ptos]** Halle el polinomio interpolante (forma de Lagrange) para los puntos

x	-1	0	3
y	-27	5	101

Luego de deducir el grado n del polinomio interpolante escríbalo en la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Comente sobre el grado del polinomio.

Solucionario:

Por la fórmula para el polinomio interpolador de Lagrange

$$P(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{((-1)-0)((-1)-3)}(-27) + \frac{(x-(-1))(x-3)}{(0-(-1))(0-3)}(5) + \frac{(x-(-1))(x-0)}{(3-(-1))(3-0)}(101)$$

$$P(x) = -27\frac{x(x-3)}{4} - 5\frac{(x+1)(x-3)}{3} + 101\frac{x(x+1)}{12}$$

$$P(x) = 32x + 5$$

Entonces el grado del polinomio es 1.

APLICACIONES

5. [**10 ptos**] En la siguiente figura se muestra un canal de agua en forma trapezoidal .

Considerando que el agua fluye a traves de dicho canal a una tasa de $Q = 20\frac{m^3}{s}$, la profundidad crítica h (profundidad en la cual un determinado caudal transita por un canal con el mínimo de energía específica) satisface la ecuación:

$$\frac{Q^2}{gA_c^3}B = 1$$

donde $g = 9.81$ es la aceleración de la gravedad terrestre (en $\frac{m}{s^2}$), A_c es el área de la sección transversal (en m^2) y B es el ancho del canal en la superficie (en m). Debido a la geometría del canal se ha deducido que

$$B = 3 + h \qquad \text{y} \qquad A_c = 3h + \frac{h^2}{2}$$

Con los datos proporcionados determine aproximadamente la altura crítica h.

a) [**3 ptos**] Modele la regla de correspondencia de una función $f(h)$ tal que si h^* es la altura crítica del canal entonces $f(h^*) = 0$. Muestre todos los pasos a realizar.

Solución:

La función...

$$f(h) = \frac{20^2}{9.81 \cdot (3h + \frac{h^2}{2})^3}(3 + h) - 1$$

b) **[3 ptos]** Cuantas iteraciones como mínimo se debe realizar al aplicar el método de la bisección para hallar una aproximación a h^* con una tolerancia igual a $Tol = 10^{-5}$ considerando como intervalo a $[0.5, 2]$.

Solución:
La fórmula del número de iteraciones indica que

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{2.0-0.5}{2\cdot 10^{-5}}\right)}{\ln 2} = 16.19$$

Por lo tanto, el número de iteraciones mínima es 17.

c) **[4 ptos]** Considerando la función modelada en el item anterior y el intervalo inicial $[0.5; 2]$ justifique que existe una raíz para f en dicho intervalo y luego utilize el método de la bisección para hallar una valor aproximado a dicha raíz. Halle las aproximaciones $h^{(0)}$, $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ y $h^{(3)}$. Muestre todo su procedimiento.
Solución:
Se evalúa en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} f(0.5) = \frac{20^2}{9.81\cdot\left(3(0.5)+\frac{0.5^2}{2}\right)^3}(3+0.5) - 1 = 32.2582, \\ f(2.0) = \frac{20^2}{9.81\cdot\left(3(2)+\frac{2^2}{2}\right)^3}(3+2) - 1 = -0.6018 \end{cases}$$

Luego, $f(0.5)f(2.0) < 0$ y por el Teorema de Bolzano existe una raíz de f en el intervalo $[0.5, 2.0]$. Siguiendo la regla del algoritmo de bisección se tiene

Iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Error
0	0.5	2.0	1.25	32.2582	-0.6018	0.8626	0.7500
1	1.25	2.0	1.6250	0.8626	-0.6018	-0.2069	0.3750
2	1.25	1.6250	1.4375	0.8626	-0.2069	0.1844	0.1875
3	1.4375	1.6250	1.5312	0.1844	-0.2069	-0.0363	0.0938

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesores: Máximo Obregón.
Sección: 6.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

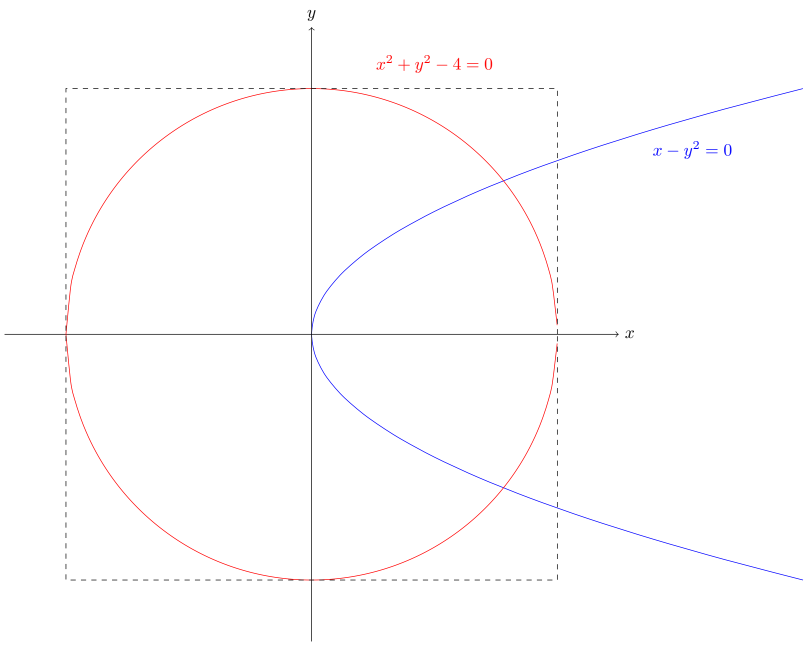
Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] En el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} x - y^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos asegurar gráficamente que posee tres soluciones.

Solución:
Graficando



Por lo tanto, el sistema tiene dos soluciones. **Falso.**

2. **[2 ptos]** A partir de los puntos $(1;2)$, $(3;4)$ y $(5;7)$ le corresponde el polinomio interpolante de Newton $P(x) = 2 + (x-1) + 0.125(x-1)(x-3)$.

Solución:
Por la fórmula del polinomio interpolante de Newton

$$\begin{aligned}
P(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 2 + \frac{4-2}{3-1}(x-1) + \frac{\frac{7-4}{5-3} - \frac{4-2}{3-1}}{5-1}(x-1)(x-3) \\
&= 2 + (x-1) + 0.125(x-1)(x-3)
\end{aligned}$$

Verdadero.

.

PROCEDIMENTAL

3. **[3 ptos]** Si la temperatura (T) en un espacio tridimensional esta dado por el siguiente modelo matemático $T = f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + z \cdot cos(y)}{1+z}$ con x, y, z en metros y T en kelvin determine el error cometido al calcular la temperatura en el punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ m, si la medición de la coordenada del punto tiene un margen de error de hasta 5mm.

Solución:
Por la fórmula de propagación de error se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta T &\approx \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial T}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| \Delta z \\
&\approx 0.005 \left|\frac{2x}{1+z}\right| + 0.005 \left|-\frac{z\sin(y)}{1+z}\right| + 0.005 \left|\frac{\cos(y)}{1+z} - \frac{x^2 + z\cos(y)}{(1+z)^2}\right| \\
&\approx 0.005 \left(\frac{2}{4}\right) + 0.005 \left(\frac{3\sin(3)}{4}\right) + 0.005 \left(\frac{\cos(3)}{4} - \frac{1 + 3\cos(3)}{16}\right) = 3.6511\ mm
\end{aligned}$$

4. **[3 ptos]** Luego del análisis de las fuerzas internas (F_A, F_B y F_C) de una estructura se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
-5F_B + 3F_C &= 0 \\
3F_A - 4F_C &= 0 \\
4F_A + 3F_C &= 500
\end{aligned}$$

Como intercambiaría el orden de las ecuaciones para asegurar que el sistema converge por el método de Jacobi. Luego de asegurar la convergencia, realice 02 iteraciones utilizando el método de Jacobi con vector semilla. $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Se reordenaría las ecuaciones como sigue

$$\begin{aligned} 4F_A + 3F_C &= 500 \\ -5F_B + 3F_C &= 0 \\ 3F_A - 4F_C &= 0 \end{aligned}$$

Así se obtiene un sistema $Ax = b$ donde A es diagonal estrictamente dominante. De hecho, se tiene

$$A = D - L - U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el método de Jacobi Luego,

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$c_j = D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iterando se sigue

$$x^{(1)} = T_j x^{(0)} + c_j = T_j \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_j = \begin{bmatrix} 497/4 \\ 3/5 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = T_j x^{(1)} + c_j = T_j \begin{bmatrix} 497/4 \\ 3/5 \\ 3/4 \end{bmatrix} + c_j = \begin{bmatrix} 1991/16 \\ 9/20 \\ 1491/16 \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** Un equipo multidisciplinar entre médicos e ingenieros en base a la minería de datos, determinaron que un virus, luego de llegar a su máxima expansión, la carga viral se reduce en función al tiempo, bajo el siguiente modelo matemático.

$$V(t) = \frac{a\ln(t+10) + b\cos(0.1t+1.5)}{e^{0.1t}}$$

t es el tiempo en días transcurridos desde el momento que alcanzó la máxima carga viral y V es la cantidad en MCARN(millones de copias de ARN viral) por mililitro de secreción nasal en una persona adulta, también denominado carga viral. Sin embargo para cada persona existe un valor de a y b específico. Este modelo matemático solo es válido en el proceso de recuperación del paciente la cual se da en el intervalo donde la persona tiene la máxima carga viral y no tiene carga viral.

   a) **[3 ptos]** Luis obtuvo este virus y cuando llego a la máxima carga viral de 12.92767 MCARN considerado como día 0, al dia siguiente obtuvo una carga viral de 10.32011 MCARN. A partir de esta información, construya el modelo matemático que caracteriza la carga viral en Luis.

   Solución:

   Por condición del problema se tiene

$$12.92767 = V(0) = \frac{a\ln(10) + b\cos(1.5)}{e^{0}}$$
$$10.32011 = V(1) = \frac{a\ln(11) + b\cos(1.6)}{e^{0.1}}$$

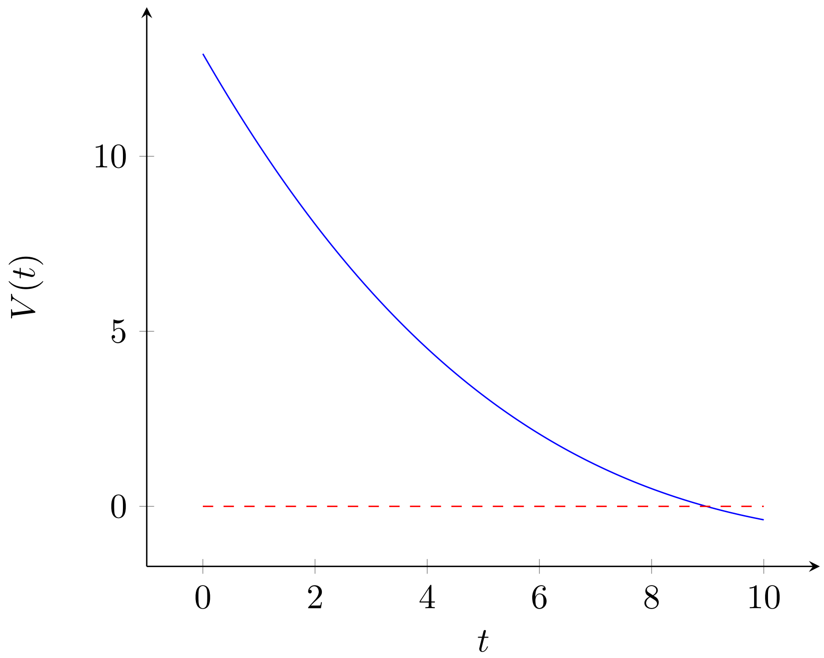
   Resolviendo dicho sistema de ecuaciones se tiene $a = 5, b = 20$. Por lo tanto, el modelo matema´tico de la carga viral de Luis es

$$V(t) = \frac{5\ln(t+10) + 20\cos(0.1t+1.5)}{e^{0.1t}}.$$

   b) **[2 ptos]** Localice un intervalo de longitud 1 que permita estimar la cantidad de días posteriores al día de la máxima carga viral para que Luis se libere por completo del virus. (Sugerencia: Analice lo que sucede dentro del intervalo $[2, 6]$).

   Solución:

   Graficando la función puede observarse que la raíz se encuentra en el intervalo $[0, 10]$:



Primero, aplicando el Teorema de Bolzano al intervalo $[2,6]$ no se puede garantizar una raíz pues

$$V(2)V(6) = 8.06257 \cdot 2.06684 > 0.$$

Segundo, tanteando los intervalos subsiguientes de tamaño 1 se tiene que en el intervalo $[8,9]$ hay una raíz pues

$$V(8)V(9) = 0.50610 \cdot (-0.01044) < 0.$$

c) **[1pto]** En base a lo encontrado en el item anterior, encuentre la cantidad mínima de iteraciones para una tolerancia de 1e-2. Justifique su procedimiento

Solucionario:

Por la fórmula del número de iteraciones se cumple que

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{9-8}{2\cdot 10^{-2}}\right)}{\ln 2} = 5.6439$$

Por lo tanto, la cantidad de iteraciones mínima es 6.

d) **[4ptos]** Use el método de la bisección y efectúe la cantidad de iteraciones encontrada en el item anterior para resolver el problema planteado en el item b. Use la tabla empleada en clase.

Solucionario:

Siguiendo la regla del algoritmo de bisección se tiene

Iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Error
0	8	9	8.5	0.5061	-0.0104	0.2285	0.5
1	8.5	9	8.75	0.2285	-0.0104	0.1044	0.25
2	8.75	9	8.875	0.1044	-0.0104	0.0458	0.125
3	8.875	9	8.9375	0.0458	-0.0104	0.0174	0.0625
4	8.9375	9	8.9688	0.0174	-0.0104	0.0034	0.0313
5	8.9688	9	8.9844	0.0034	-0.0104	-0.0035	0.0156
6	8.9688	8.984	8.9766	0.0034	-0.0035	-0.0001	0.0078

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

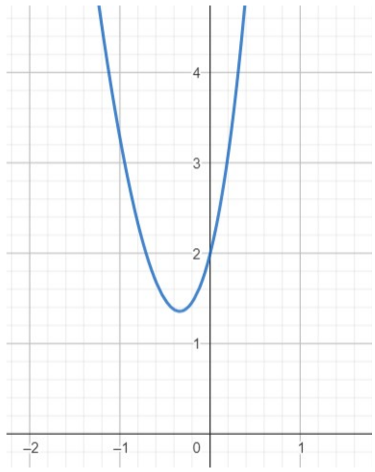
Instrucciones: Se permite el uso de calculadora.
Profesor: José Luis Mantari Laureano.
Sección 2.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] En la siguiente figura se muestra el comportamiento de la derivada de la función $f(x) = x^3 + e^{2x}$. Se puede asegurar que el método de Newton converge para cualquier punto semilla $x^{(0)} \in \mathbb{R}$.



Solucionario:

Se muestra un tramo, en ese tramo la derivada es diferente de 0. Veamos lo que sucede en el resto del dominio:

$$f'(x) = 3x^2 + 2e^{2x}$$

Pero dicha función derivada, es la suma de una función ≥ 0 con una función > 0, por lo tanto,

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

. En consecuencia, el método converge. **Verdadero**

2. [**2 ptos**] Al intentar resolver un sistema de ecuaciones mediante el método de Gauss - Seidel obtenemos:

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}$$

Teniendo como valores propios a $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{a+b} \\ -\sqrt{a+b} \end{bmatrix}$. Si $a = 0.8$ y $b = 1.3$, entonces el método no converge.

Solucionario:

Si $a = 0.8$ y $b = 1.3$ entonces los valores propios son:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2.1} \\ -\sqrt{2.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.449 \\ -1.449 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que $\rho(T_{gs}) > 1$, por lo tanto, el método no converge. **Verdadero**

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Considere las siguientes magnitudes con sus respectivas incertidumbres:

$$x = 4 \pm 0.01 \quad y = 3 \pm 0.02$$

estamos interesados en encontrar el intervalo sobre el cual se ubica el valor exacto, al calcular $\dfrac{xy}{x+y}$. Complete el siguiente código, de modo que le permita encontrar (en formato double) los extremos del intervalo requerido.

```
format long
syms x y
ex=0.01
ey=0.02
f= (x*y)/(x+y)
%completar, no olvidar usar subs
```

Solución:

```
format long
syms x y
ex=0.01
ey=0.02
f= (x*y)/(x+y)
%completar, no olvidar usar subs
f_x=diff(f,x)
f_y=diff(f,y)
er_abs=abs(f_x)*0.01+abs(f_y)*0.02
rpta=double(subs(er_abs,{x,y},{4,3}))
ex=(4*3)/(4+3)
%hallando los extremos
l_izq=ex-rpta
l_der=ex+rpta
```

f_y =

$$\frac{x}{x+y} - \frac{x\,y}{(x+y)^2}$$

er_abs =

$$\frac{\left|\frac{x}{x+y} - \frac{x\,y}{(x+y)^2}\right|}{50} + \frac{\left|\frac{y}{x+y} - \frac{x\,y}{(x+y)^2}\right|}{100}$$

```
rpta =
   0.008367346938776
ex =
   1.714285714285714
l_izq =
   1.705918367346939
l_der =
   1.722653061224490
```

4. [**3 ptos**] Encuentre el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los siguientes puntos:

$$(-1;-11)\quad(0;-2)\quad(0.5;-0.125)$$

Muestre todo su procedimiento.

Solución:

Tenemos $i = 0, 1, 2$, entonces encontrando los polinomios básicos de Lagrange:

a) $L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{(x-0)(x-0.5)}{(-1)(-1.5)} = \dfrac{x(x-0.5)}{1.5}.$

b) $L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x+1)(x-0.5)}{(1)(-0.5)} = \dfrac{(x+1)(x-0.5)}{-0.5}.$

c) $L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(x+1)(x)}{(1.5)(0.5)} = \dfrac{(x+1)(x)}{0.75}.$

Hallando el polinomio interpolador, tenemos:

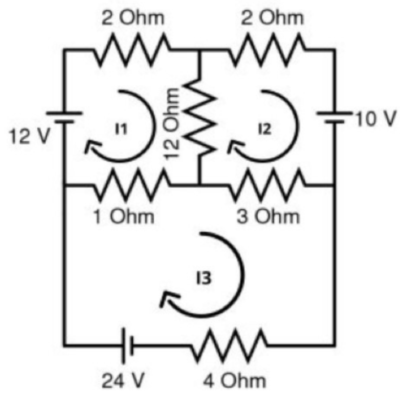
$$P_2(x) = -11\cdot\frac{x(x-0.5)}{1.5} + (-2)\cdot\frac{(x+1)(x-0.5)}{-0.5} + (-0.125)\cdot\frac{(x+1)(x)}{0.75}$$

Reduciendo:

$$P_2(x) = -3.5x^2 + 5.5x - 2$$

APLICACIONES

5. [**10 ptos**] Considere el siguiente circuito de tres baterías y seis resistencias como el mostrado en la figura:



a) **[3 ptos]** Al aplicar la ley de Kirchoff se obtiene un sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial. Complete:

$$\begin{bmatrix} 12 & a & b \\ -15 & c & d \\ 1 & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -12 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Determine los valores de a, b, c, d, e, f. Es claro que debe justificar la obtención de cada uno de estos valores.

Solucionario:

Analizando por mallas:

1) Malla 1:

$$12 - 2I_1 - 12(I_1 - I_2) - (I_1 - I_3) = 0 \to -15I_1 + 12I_2 + I_3 = -12$$

2) Malla 2:

$$-10 - 3(I_2 - I_3) - 12(I_2 - I_1) - 2I_2 = 0 \to 12I_1 - 17I_2 + 3I_3 = 10$$

3) Malla 3:

$$24 - (I_3 - I_1) - 3(I_3 - I_2) - 4I_3 = 0 \to I_1 + 3I_2 - 8I_3 = -24$$

Modelando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 12 & -17 & 3 \\ -15 & 12 & 1 \\ 1 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -12 \\ -24 \end{bmatrix}$$

En consecuencia: $a = -17, b = 3, c = 12, d = 1, e = 3, f = -8$.

b) **[3 ptos]** Intercambie convenientemente filas al sistema formado en el ítem anterior (mencione las filas a intercambiar) de modo que la matriz asociada al nuevo sistema sea diagonal estrictamente dominante:

$$[A_{new}]\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

Descomponga A_{new}, es decir, obtenga las matrices D, L, U y encuentre $\rho(T_j)$. **Observación: Debe mostrar todo el procedimiento encontrando el polinomio característico y usando la sugerencia.**

```
p = [-1 0 163/255 3/85];
r=roots(p)
```

```
r = 3x1
    0.825805489598554
   -0.770323583987732
   -0.055481905610822
```

Solución:

Basta intercambiar las filas 1 y 2, teniendo:

$$\begin{bmatrix} -15 & 12 & 1 \\ 12 & -17 & 3 \\ 1 & 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 10 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Efectuando la descomposición:

- $D = \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$
- $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$
- $U = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Encontrando $\rho(T_j)$, primero necesitamos $T_j = D^{-1}(L+U)$:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 1/15 \\ 12/17 & 0 & 3/17 \\ 1/8 & 3/8 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallamos el polinomio característico encontrando $|T_j - \lambda I|$, entonces:

$$|T_j - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 4/5 & 1/15 \\ 12/17 & -\lambda & 3/17 \\ 1/8 & 3/8 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Trabajamos por cofactores:

$$p(\lambda) = (-\lambda)(\lambda^2 - 9/136) - (4/5)(-12\lambda/17 - 3/136) + (1/15)(36/136 + \lambda/8)$$

Reduciendo:

$$p(\lambda) = (-\lambda)(\lambda^2 - 9/136) - (4/5)(-12\lambda/17 - 3/136) + (1/15)(36/136 + \lambda/8)$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{9}{136}\lambda + \frac{48}{85}\lambda + \frac{3}{170} + \frac{3}{170} + \frac{\lambda}{120}$$

Agrupando:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{163}{255}\lambda + \frac{3}{85}$$

Tiene la forma mencionada en el enunciado. Además $\rho(T_j) = 0.825... < 1$, por lo tanto, el método converge.

c) [**4 ptos**] Efectúe 3 iteraciones del método de Jacobi para resolver el sistema planteado en el item anterior, considerando $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solucionario:

De lo anterior, solo bastaba calcular c_j, entonces:

$$c_j = D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{-1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ 10 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -10/17 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Iterando:

1) **Iteración 1:**

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 1/15 \\ 12/17 & 0 & 3/17 \\ 1/8 & 3/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 \\ -10/17 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/17 \\ 7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6666... \\ 0.29411... \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

2) **Iteración 2:**

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 1/15 \\ 12/17 & 0 & 3/17 \\ 1/8 & 3/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/17 \\ 7/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 \\ -10/17 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 647/510 \\ 41/34 \\ 677/204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.26862... \\ 1.20588... \\ 3.31862... \end{bmatrix}$$

3) **Iteración 3:**

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 1/15 \\ 12/17 & 0 & 3/17 \\ 1/8 & 3/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 647/510 \\ 41/34 \\ 677/204 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 \\ -10/17 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 848/427 \\ 642/719 \\ 3683/1020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9859... \\ 0.89290.... \\ 3.61078... \end{bmatrix}$$

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

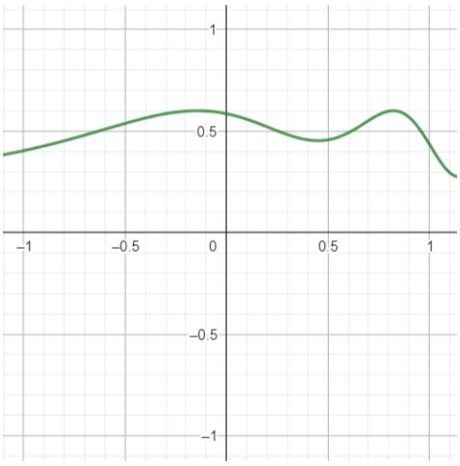
Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesor: Jimmy Mendoza.
Sección: 4.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine si las siguientes proposiciones son Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x) = \sin(3\cos(\sin(e^x)) - 0.6)$, se puede asegurar que la función tiene 1 punto fijo en el intervalo $[-1, 1]$.



Solución:
Recordar que x es punto fijo de $f(x)$, si se verifica $x = f(x)$, viendolo gráficamente, para encontrar la cantidad de puntos fijos basta con ver la cantidad de interceptos de la gráfica de f con la función $y = x$, como solo hay un intercepto entonces la función tiene un punto fijo. **Verdadero.**

2. [**2 ptos**] En el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} \sec(x) - e^{y^2} & = & 0 \\ 4x^2 + 5y & = & 0 \end{cases}$$

Podemos asegurar que el sistema tiene una solución única al resolverse mediante el método de Newton con un punto semilla $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:
Calculando el jacobiano de

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \sec(x) - e^{y^2} \\ 4x^2 + 5y \end{bmatrix}$$

se tiene

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} & -2ye^{y^2} \\ 8x & 5 \end{bmatrix},$$

que no se puede evaluar en el punto semilla, pues:

$$J(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0^2} & -2e \\ 4\pi & 5 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, no se puede realizar las iteraciones del método de Newton. **Falso.**

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Luego de una prueba experimental que modela cierto fenómeno, se obtuvieron los siguientes datos:

x_i	-1	0	1.5	2
y_i	-7.5	-3	1.875	9

Se desea calcular el polinomio interpolador de Newton usando la tabla de diferencias divididas, complete dicha tabla.

x_0	y_0	[,]	[, ,]	[, ,]
-1	-7.5	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
0	-3	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
1.5	1.875	$f[x_2,x_3]$		
2	9			

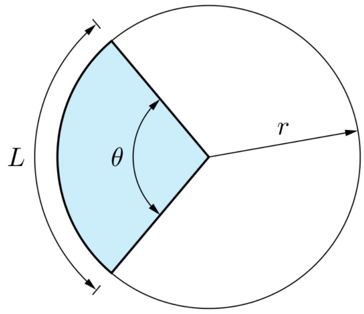
Solución:
Usando las fórmulas de diferencias divididas se tiene

x_0	y_0	[,]	[, ,]	[, ,]
-1	-7.5	4.5	-0.5	2
0	-3	3.25	5.5	
1.5	1.875	14.25		
2	9			

Donde $b_0 = -7.5$, $b_1 = 4.5$, $b_2 = -0.5$, $b_3 = 2$. Luego, el polinomio interpolador será:

$$P_3(x) = -7.5 + 4.5\,(x+1) - 0.5\,(x+1)\,(x) + 2\,(x+1)\,(x)\,(x-1.5)$$

4. **[3 ptos]** Considera el siguiente sector circular:



Un estudiante del curso con ayuda de su regla afirmó que el radio del sector es 5 cm y con ayuda de su transportador afirmó qu el ángulo es $\frac{\pi}{3}$, si la regla tiene un error de 0.5 cm y el transportador 0.1 rad, encuentre el error absoluto al calcular el área del sector.

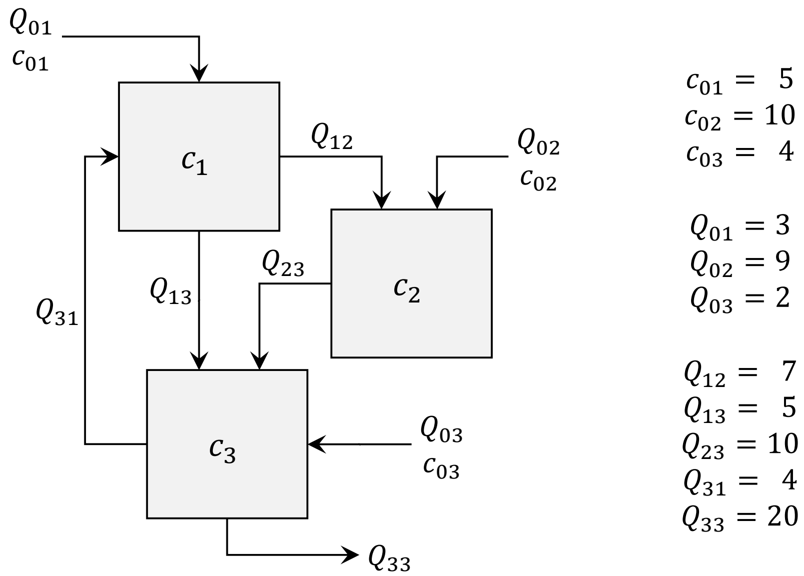
Solución:

Tenemos $r = 5 \pm 0.5$ cm y $\theta = \frac{\pi}{3} \pm 0.1$ rad. Como $A = \frac{\theta r^2}{2}$, por la fórmula de propagación de error se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta A &\approx \left|\frac{\partial A}{\partial r}\right| \Delta r + \left|\frac{\partial A}{\partial \theta}\right| \Delta\theta \\
&\approx 0.5\,|\theta r| + 0.1\left|\frac{r^2}{2}\right| \\
&\approx 0.5\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 0.1\left(\frac{25}{2}\right) = 3.8680
\end{aligned}$$

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** En la siguiente figura se muestra una batería de reactores que son parte de un proceso.



Los caudales Q_i están expresados en m^3/s, mientras que las concentraciones c_i están dadas en mg/m^3.

a) [**4 ptos**] Considerando la conservación de los flujos másicos en estado estacionario, exprese el sistema de ecuaciones lineales en la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para estimar las concentraciones en cada reactor. Use los valores de las concentraciones y caudales del problema.

Solución:

Tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 Q_{13} + c_1 Q_{12} + c_2 \cdot 0 - c_3 Q_{31} &= c_{01} Q_{01} \\ -c_1 Q_{12} + c_2 \cdot Q_{23} + c_3 \cdot 0 &= c_{02} Q_{02} \\ -c_1 Q_{13} - c_2 \cdot Q_{23} + c_3 Q_{31} + c_3 Q_{33} &= c_{03} Q_{03} \end{aligned}$$

que en su forma matricial se escribe como

$$\begin{bmatrix} Q_{13} + Q_{12} & 0 & -Q_{31} \\ -Q_{12} & Q_{23} & 0 \\ -Q_{13} & -Q_{23} & Q_{31} + Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} Q_{01} \\ c_{02} Q_{02} \\ c_{03} Q_{03} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones queda como $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -4 \\ -7 & 10 & 0 \\ -5 & -10 & 24 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 90 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Asimismo, el sistema también puede ser expresado por:

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 4 \\ 7 & -10 & 0 \\ 5 & 10 & -24 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -15 \\ -90 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

La matriz y el vector de Jacobi serán los mismos en ambos casos.

b) [**2 ptos**] Analice la convergencia del método iterativo de Jacobi o Gauss-Seidel (según el criterio de la diagonal dominancia). Indique claramente su conclusión (converge, diverge o no se puede afirmar nada).

Solución:

Veamos que se verifica el criterio de diagonal dominancia sobre A:

$$\begin{aligned} &|12| > |-4| + |0|, \\ &|10| > |-7| + |0|, \\ &|24| > |-5| + |-10|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tanto el método iterativo de Jacobi como Gauss-Seidel convergen.

c) [**4 ptos**] Luego de descomponer la matriz **A** en **D**, **L** y **U**, halle la matriz de iteración de Jacobi ($\mathbf{T_j}$) y el vector de Jacobi ($\mathbf{c_j}$). Finalmente, lleve a cabo el método de Jacobi usando el vector semilla $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ y como criterio de terminación que el error relativo sea menor que una tolerancia de 0.05.

Solución:

Tenemos la descomposición de $A = D - L - U$ donde

$$D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{10} & 0 & 0 \\ \frac{5}{24} & \frac{5}{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$c_j = D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 90 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ 9 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Iterando se sigue

$$x^{(1)} = T_j x^{(0)} + c_j = \begin{bmatrix} \frac{35}{12} \\ \frac{111}{10} \\ \frac{41}{8} \end{bmatrix}, \quad E_r^{(1)} = \frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty}{\|x^{(0)}\|_\infty} = \frac{11}{111} = 0.09910$$

$$x^{(2)} = T_j x^{(1)} + c_j = \begin{bmatrix} 2.95833 \\ 11.04167 \\ 5.56597 \end{bmatrix}, \quad E_r^{(2)} = \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty}{\|x^{(1)}\|_\infty} = 0.03994 < 0.05$$

Por lo tanto, $c_1 = 2.95833,\ c_2 = 11.04167,\ c_3 = 5.56597.$

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesor: Rósulo Pérez.
Sección: 7.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [**2 ptos**] La siguiente representación :

$$01111111100000000000000000000000$$

en el formato estándar IEEE 754 (simple precisión) denota a un número real.
Solución:

Los exponentes 00000000 y 11111111 son reservados por lo que no se representa como un numero real. Por lo tanto, la afirmación es **falsa**.

2. [**2 ptos**] Por una nube de n puntos

$$(x_0, y_0); (x_1, y_1); \ldots (x_{n-1}, y_{n-1})$$

puede pasar un único polinomio de la forma:

$$a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Solución:

Supongamos cuando para $n = 2$ puntos

$$(x_0, y_0); (x_1, y_1)$$

Según el enunciado, el polinomio sería de la forma

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + ax + a_0$$

Es posible ver que por n puntos pasa un único polinomio de grado $n - 1$ o menor. Por lo tanto, la afirmación es **falsa**.

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] El número π es un número irracional, posee muchas aproximaciones (usted ya conoce algunas) entre estas tenemos:

   - *Aproximación debida a Ramanuján :* $\dfrac{9}{5}+\sqrt{\dfrac{9}{5}}$.
   - *Aproximación anónima:* $\sqrt{7+\sqrt{6+\sqrt{5}}}$.

   ¿Cuáles de dichas aproximaciones se acerca mejor a π bajo el criterio de las cifras significativas?.
   Observación: Use como valor **exacto** de π a 3.14159265 y trabaje con el error relativo.
   Solución:

   Aproximación de Ramanuján : 3.14164078

   $\delta_r = \frac{|3.14164078-3.14159265|}{3.14159265} = 0.4813 \times 10^{-4}$

   Aproximación anónima: 3.14163254

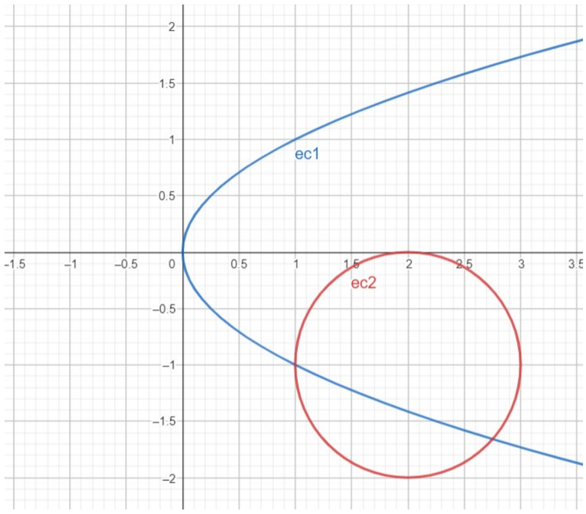
   $\delta_r = \frac{|3.14163254-3.14159265|}{3.14159265} = 0.1269 \times 10^{-4}$

   Pero $\delta_r \leq 5 \times 10^{-4}$
   Se determina que la aproximación anónima se acerca mejor a π.

4. [**3 ptos**] En la siguiente figura, se tiene la representación de las cónicas:

$$x = my^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 1$$



Deseamos encontrar el punto de intersección de dichas cónicas (no lo haga), forma el sistema de ecuaciones no lineales (previamente debes encontrar los valores de m, h, k) y evalúa el jacobiano en el punto $\begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Solución:

Sabemos que la forma iterativa del método de Newton, viene dada por:

$$F(x, y) = x - y^2$$

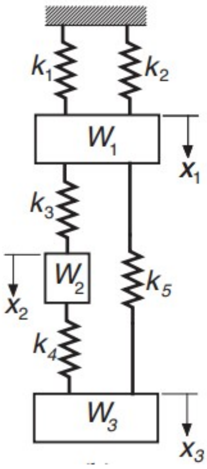
$$G(x, y) = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 1$$

Calculando el Jacobiano para un punto:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ 2(x-2) & 2(y+1) \end{bmatrix} \rightarrow J(0.6, 0.5) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2.8 & 3 \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** En la siguiente figura se muestra un sistema masa - resorte en equilibrio:



Considere lo siguiente: $k_1 = k_3 = k_4 = k$, $k_2 = k_5 = 2k$, $W_1 = W_3 = 2W$ y $W_2 = W$, todas estas magnitudes en sus unidades usuales (no necesita hacer ninguna conversión). Si $k = 2N/m$ y $W = 10N$, efectúe lo siguiente:

a) **[3 ptos]** Forme el sistema de ecuaciones lineales para el sistema masa - resorte, sabiendo que tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}$$

Solución:

Analizando cada resorte se obtiene lo siguiente:

Para el bloque W_3

$$2k(x_3 - x_1) + k(x_3 - x_2) = 2W$$

Para el bloque W_2

$$k(x_2 - x_1) = W + k(x_3 - x_2)$$

Para el bloque W_1

$$3k(x_1) = 2W + k(x_2 - x_1) + 2K(x_3 - x_1)$$

$$\begin{bmatrix} -2k & -k & 3k \\ -k & 2k & -k \\ 6k & -k & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2W \\ W \\ 2W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

b) **[2 ptos]** Analice la convergencia del método iterativo de Jacobi o Gauss-Seidel (según el criterio de la diagonal dominancia). Indique claramente su conclusión (converge, diverge o no se puede afirmar nada).

Solución:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Aplicando el criterio de la diagonal dominancia, no podemos afirmar algo respecto de la convergencia.

c) **[1pto]** En base a lo respondido en el item anterior, responda a la siguiente pregunta: **¿es posible efectuar intercambio alguno de filas de modo que la matriz asociada al sistema sea diagonal estrictamente dominante?.**

Solución:

Se podria intercambiar la fila 3 por la fila 1:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Bajo ningún intercambio la matriz se convierte en diagonal estrictamente dominante.

d) **[4 ptos]** Luego de descomponer la matriz **A** (encontrada en el item *a* en **D**, **L** y **U**. Halle la matriz de iteración de Jacobi ($\mathbf{T_j}$), el vector de Jacobi ($\mathbf{c_j}$) y el radio espectral $\rho(T_j)$. Finalmente, lleve a cabo 2 iteraciones del método de Jacobi usando el vector semilla $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

El sistema inicial, viene dado por:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de coeficientes viene dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Efectuando la descomposición:

- $D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.
- $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
- $U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $T_j = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}, c_j = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 5/2 \\ 10/3 \end{bmatrix}$

Encontrando $\rho(T_j) = 0.784...$. Iterando:

1) $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4.5 \\ 4.666... \end{bmatrix}$.
2) $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 3.9722... \\ 6.333... \\ 6.8333... \end{bmatrix}$.

Métodos Numéricos
Examen Parcial
Pregrado
2023-2

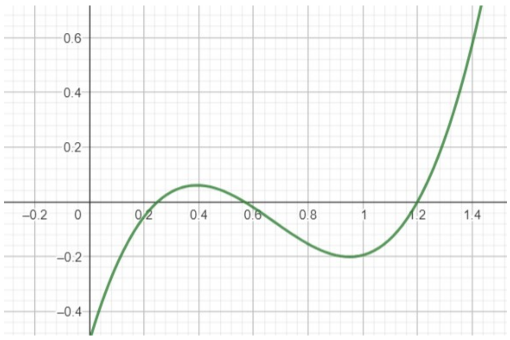
Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, una hoja de formulario.
Profesor: Rósulo Pérez.
Sección: 3.

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. **[2 ptos]** La siguiente gráfica muestra al polinomio característico (de grado 3) de la matriz de iteración de Jacobi asociada a un sistema de ecuaciones lineales, podemos afirmar que el método converge.

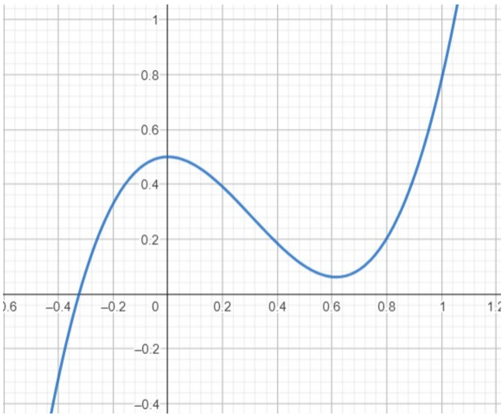


Solucionario:
Del gráfico tenemos que los valores propios de la matriz de iteración de Jacobi son $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ y $\lambda_3 = 1.2$, con lo cual

$$\rho(T_j) = \max\{|\lambda| : \ \lambda \text{ valor propio de } T_j\} = 1.2$$

Podemos ver que $\rho(T_j) > 1$, por lo tanto, el método no converge. **Falso**

2. **[2 ptos]** Se tiene la gráfica de una función continua en todo $\mathbb{R}$, es claro que el objetivo en este tema es encontrar una raíz, entonces podemos afirmar que es posible aplicar el método de Newton tomando como punto semilla cualquiera ubicado en el intervalo $[0.2, 1.4]$.



Solucionario:
Si tomamos como punto semilla $x_0 = 1.2$, del gráfico podemos ver que tanto la función como la derivada tienen signo positivo de modo que $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ es positivo y

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Es decir, el método de Newton genera una secuencia decreciente de valores que convergerá al mínimo local alrededor de $x = 0.6$ que no es una raíz de la función. Luego, no es posible aplicar el método de Newton con cualquier semilla en el intervalo $[0.2, 1.4]$. **Falso**

PROCEDIMENTAL

3. [**3 ptos**] Encuentre el polinomio P_2 interpolador de Lagrange que pasa por los puntos $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}, 0.5\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$ y evalúe el polinomio en el punto 1.5.

Solucionario:
Por la fórmula para el polinomio interpolador de Lagrange

$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)}(1) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right)}(0.5) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)}(-1)$$

$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\left(-\frac{\pi}{12}\right)\left(-\frac{2\pi}{4}\right)} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{5\pi}{12}\right)} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{2\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{12}\right)}(-1)$$

$$P_2(x) = \frac{24}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{72}{5\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{24}{5\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Evaluando para $x = 1.5$, se tiene $P_2(1.5) = -0.2074$.

4. **[3 ptos]** Al querer resolver un sistema de ecuaciones no lineales mediante el método del punto fijo, se llega a los siguientes despejes:

$$x = \frac{x^2 - y + 0.5}{2}$$

$$y = \frac{-x^2 - 4y^2 + 8y + 4}{8}$$

Analice la convergencia del método si se toma como punto semilla $\begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solucionario:
Tenemos las funciones

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y + 0.5}{2}, \quad v(x, y) = \frac{-x^2 - 4y^2 + 8y + 4}{8}.$$

Hallando

$$A = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| = |x| + \left|-\frac{1}{2}\right|, \quad B = \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| = \left|-\frac{x}{4}\right| + |1 - y|,$$

Evaluando para $x = -0.2, y = 1$, se tiene

$$A(-0.2, 1) = |-0.2| + 0.5 = 0.7 < 1, \quad B(-0.2, 1) = \left|\frac{0.2}{4}\right| + |1 - 1| = 0.05 < 1.$$

Por lo tanto, si se cumple el criterio de convergencia.

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** La concentración de bacterias contaminantes c en un lago disminuye de acuerdo con la ecuación:

$$c = 75e^{-1.5t} + 20e^{-0.075t}$$

Se le pide hacer lo siguiente:

a) **[2 ptos]** Modele una función que le permita obtener el tiempo para que la concentración se reduzca a 15.

Solucionario:
Si $c = 15$ entonces

$$75e^{-1.5t} + 20e^{-0.075t} - 15 = 0.$$

Lo que se puede escribir $f(t) = 0$, donde $f(t) = 75e^{-1.5t} + 20e^{-0.075t} - 15$.

b) **[2pto]** Responda si es posible resolver el problema planteado en el item anterior usando el método de la bisección en el intervalo $[3.1, 4.5]$. En caso su respuesta sea afirmativa, encuentre la cantidad mínima de iteraciones para una tolerancia de 10^{-4}.

Solucionario:

Se evalúa en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} f(3.1) = 75e^{-1.5\cdot 3.1} + 20e^{-0.075\cdot 3.1} - 15 = 1.5681, \\ f(4.5) = 75e^{-1.5\cdot 4.5} + 20e^{-0.075\cdot 4.5} - 15 = -0.6411 \end{cases}$$

Luego, $f(3.1)f(4.5) < 0$ y por el Teorema de Bolzano existe una raíz de f en el intervalo $[3.1, 4.5]$. Así, la fórmula del número de iteraciones satisface que

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{4.5-3.1}{2\cdot 10^{-4}}\right)}{\ln 2} = 12.77$$

Por lo tanto, el número de iteraciones mínima es 13.

c) **[3 ptos]** En base a lo respondido en el item *b*. Efectúe 3 iteraciones del método de la bisección usando la tabla proporcionada en clase.

Solucionario:

Siguiendo la regla del algoritmo de bisección se tiene

Iter	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	Error
0	3.1	4.5	3.8	1.5681	-0.6411	0.2912	0.7000
1	3.8	4.5	4.15	0.2912	-0.6411	-0.2009	0.3500
2	3.8	4.15	3.975	0.2912	-0.2009	0.0372	0.1750
3	3.975	4.15	4.0625	0.0372	-0.2009	-0.0837	0.0875

d) **[3 ptos]** Resuelva el mismo problema, usando el método de Newton con un punto semilla igual a 3, use como criterio de parada $tol = 1e-2$. Use el error relativo a fin de responder a lo solicitado.

Solucionario:

Siguiendo la regla del algoritmo de Newton se tiene

k	x_k	Error Rel
0	3	–
1	3.7369	0.1972
2	3.9873	0.0628
3	4.0016	0.0036

Métodos Numéricos
Exámen Final
Pregrado
2023-2

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora
Profesores: H. Pantoja - J.Mantari - R.Perez - J.Mendoza - M.Obregon
Secciones : Todas

Duración 90 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Encuentre el valor de verdad de los siguientes enunciados (V o F) para ello justifique su respuesta.

1. [**2 ptos**] En un problema de ajuste lineal $y = ax + b$, si el coeficiente de correlación r es 0 entonces la suma de residuos cuadráticos S_r no coincide con la suma total de cuadrados S_t.
Solución:
Falso. En efecto, desde que se cumple la relación de porcentaje de varianza explicada $\frac{S_t - S_r}{S_t} = r^2 = 0$ se requiere que $S_t = S_r$.

2. [**2 ptos**] Se registra la posición horizontal(x) de una partícula en función del tiempo(t):

t(s)	1	2	4
x(m)	2	7	21

Si el spline cúbico natural para este conjunto de datos es

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \frac{17}{3}t - 3 & 1 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{6}t^3 + 2t^2 - \frac{1}{3}t + 1 & 2 \leq t \leq 4 \end{cases},$$

entonces en base a este se estima que la aceleración de la partícula en el instante 2 s es de 2 m/s^2.
Solución:
Verdadero. En efecto, como el polinomio cúbico $s_0(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \frac{17}{3}t - 3$ está asociado al intervalo de tiempo $[1, 2]$ se puede derivar dos veces para obtener la aceleración en el instante 2 s. Desde que $s_0''(t) = 2t - 2$ se tiene que $a(2) \approx s_0''(2) = 2m/s^2$. Además, con el segundo polinomio cúbico también se puede hacer la estimación de la aceleración en el instante 2 s dando el mismo resultado.

PROCEDIMENTAL

3. **[3 ptos]** . En un sistema cerrado se registra Presión y Temperatura:

p(Pascal)	4	6	10
T(K)	8	40	80

Determine las ecuaciones normales para calcular la ecuación de la recta que mejor se ajusta a esos puntos de la forma $T = m.p + b$. Halle los valores de m y p.
Solución:
Se desarrolla la tabla datos

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$y_i x_i$
	4	8	16	64	32
	6	40	36	1600	240
	10	80	100	6400	800
$\sum$	20	128	152	8064	1072

Luego, con esta tabla se formulan las ecuaciones normales:

$$\begin{cases} nb + \left(\sum x_i\right) m & = \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right) b + \left(\sum x_i^2\right) m & = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} 3b + 20m = 128 \\ 20b + 152m = 1072 \end{cases}$$

Resolviendo se tiene $m = 82/7 = 11.7143$, $b = -248/7 = -35.4286$.

4. **[3 ptos]** La forma de los cables de suspensión principales de un puente colgante puede ser modelada aproximadamente por la función

$$f(x) = 1.24\left(\frac{e^{x/1.24} + e^{-x/1.24}}{2} - 1\right) \qquad \text{para} \qquad -1.2 \le x \le 1.2 \text{ Km} .$$

La longitud de los cables suspendidos principales está dado por la integral:

$$L = \int_{-1.2}^{1.2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Aproxime la longitud del cable de suspensión principal utilizando el Método de Simpson 1/3. Considere 4 subintervalos.
Solución:
Se calcula la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{e^{x/1.24} - e^{-x/1.24}}{2}.$$

Luego, se halla la función a integrar

$$F(x)=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^{x/1.24}-e^{-x/1.24}}{2}\right)^2}$$

Así, para la Método de Simpson 1/3 compuesta con $n=4$ subintervalos se tiene el paso $h=\frac{1.2-(-1.2)}{4}=0.6$ y la tabla de datos

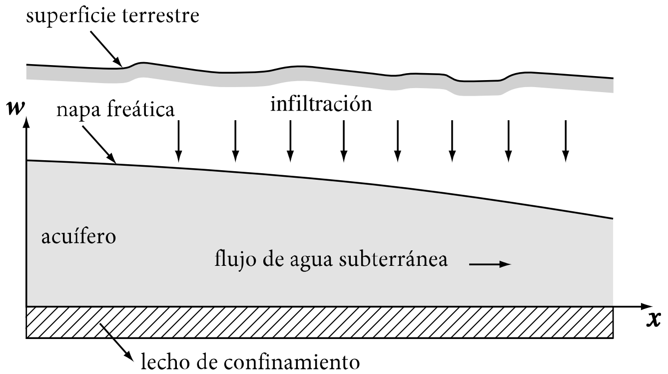
i	$x_i=-1.2+hi$	$F(x_i)$
0	-1.2	1.505967
1	-0.6	1.119368
2	0	1.000000
3	0.6	1.119368
4	1.2	1.505967

Por lo tanto,

$$L=\int_{-1.2}^{1.2}F(x)dx\approx\frac{h}{3}\left(F\left(x_0\right)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1}F\left(x_i\right)+2\sum_{i=2,4,6}^{n-2}F\left(x_i\right)+F\left(x_n\right)\right)=2.793376\text{ Km}\ .$$

APLICACIONES

5. **[10 ptos]** Considerando ciertas suposiciones, se puede modelar la altura de la napa freática de un acuífero no confinado que se muestra en la figura siguiente:



La ecuación diferencial que representa la variación de dicha altura en la dimensión x en régimen estacionario es:

$$K\bar{w}\frac{d^2w}{dx^2}+N=0$$

Donde x es la distancia horizontal, K es la conductividad hidráulica, w es la altura de la napa freática considerado desde el lecho de confinamiento, N es la tasa de infiltración y $\bar{w}$ es el promedio de alturas de la napa freática.

Se desea determinar las alturas de la napa freática para un rango de $0 \leq x \leq 600\,\mathrm{m}$. Los valores en las fronteras son: $w(0) = 15\,\mathrm{m}$ y $w(600) = 10\,\mathrm{m}$. Considere valores de $K = 0.2\,\mathrm{m/d}$, $N = 0.00006\,\mathrm{m/d}$ y $\bar{w}$ igual al promedio de valores de altura en las fronteras.

Para ello, se le pide utilizar el **método del disparo** con un paso $h = 200$ metros considerando lo siguiente:

Nota: Use **4 decimales** para todos sus cálculos.

a) [**5 ptos**] Luego de identificar $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$, plantee el primer P.V.I. y determine su solución usando el método de Euler.

Solución:

Se tiene el PVF

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{N}{K\bar{w}} = -\frac{0.00006}{0.2\times 12.5} = -0.000024 \\ w(0) = 15, \ \ w(600) = 10 \end{cases}$$

donde $p(x) = 0, \ \ q(x) = 0, r(x) = -0.000024$. El primer PVI es

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dx^2} = -0.000024 \\ w(0) = 15, w'(0) = 0 \end{cases},$$

que se puede escribir como

$$w = v_1 \to {v_1}' = v_2$$
$$w' = v_2 \to {v_2}' = -\frac{N}{K\bar{w}}$$
$$v_1(0) = 15, v_2(0) = 0$$

Aplicando el método de Euler da

t_i	$v^{(1)} = v^{(0)} + hf(t_i, v^{(0)})$	
0	15.0000	0.0000
200	15.0000	−0.0048
400	14.0400	−0.0096
600	12.1200	−0.0144

. Luego $w_1(600) = 12.1200$ y

x	$w_1(x)$
0	15.0000
200	15.0000
400	14.0400
600	12.1200

$b)$ **[3 ptos]** Plantee el segundo PVI y determine su solución usando el método de Euler.

Solución:

El segundo PVI es

$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \\ w(0) = 0, \;\; w'(0) = 1 \end{cases},$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned} & w = v_1 \rightarrow {v_1}' = v_2 \\ & w' = v_2 \rightarrow {v_2}' = 0 \\ & v_1(0) = 0, v_2(0) = 1 \end{aligned}$$

Aplicando el método de Euler da

t_i	$v^{(1)} = v^{(0)} + hf(t_i, v^{(0)})$	
0	0	1
200	200	1
400	400	1
600	600	1

.

Luego $w_2(600) = 600$ y

x	$w_2(x)$
0	0
200	200
400	400
600	600

.

$c)$ **[2 ptos]** Determine la solución aproximada mediante el método del disparo usando la información obtenida en los puntos anteriores.

Solución:

Por la fórmula se tiene

x	w_1	w_2	$w(x) = w_1(x) + \frac{(10 - w_1(600))}{w_2(600)} w_2(x)$
0	15.0000	0	15.0000
200	15.0000	200	14.2933
400	14.0400	400	12.6267
600	12.1200	600	10.0000

.