

Ecuación de Lindbland

Maximiliano Gatto¹

¹Instituto Balseiro (UNCuyo - CNEA) - Bariloche, Río Negro, Argentina

¹maximiliano.gatto@ib.edu.ar

30 de noviembre de 2024

lorem it

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas cuánticos deben entenderse como sistemas abiertos debido a su inevitable interacción con el entorno, que influye significativamente en su dinámica. Dado que el aislamiento perfecto es imposible y la descripción microscópica completa del entorno resulta impráctica o irrelevante, la teoría de sistemas cuánticos abiertos se vuelve esencial. Este enfoque simplifica el análisis mediante herramientas probabilísticas, permitiendo tratar sistemas complejos con múltiples grados de libertad y enfocándose en información relevante para describir su evolución.

Cuando se tiene un sistema cuántico cerrado, según la ecuación de Schrödinger los autoestados del Hamiltoniano son estados estacionarios y la evolución temporal es unitaria, por lo tanto solo agregan una fase global a los estados pero no produce cambios a otros estados. A su vez, cuando se quieren describir situaciones más complejas considerando estados mixtos, se utiliza la matriz de densidad [1]. Esta matriz es una generalización de los estados puros, y se puede escribir como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (1)$$

donde p_i es la probabilidad de que el sistema esté en el estado $|\psi_i\rangle$. Esta probabilidad no es cuántica, sino que es una probabilidad clásica que surge de nuestro desconocimiento del estado cuántico. Notar que esta probabilidad es diferente a la probabilidad cuántica, proveniente de una superposición

de estados.

Los elementos de la diagonal de la ρ se conocen como **poblaciones** y los elementos fuera de la diagonal como **coherencias**. Notar que las coherencias indican superposición entre estados cuánticos. Además, se puede demostrar que la matriz de densidad (Ecuación 1) es hermítica y tiene traza unitaria [1].

La evolución temporal de la matriz de densidad sigue la ecuación de Liouville-von Neumann dada por [1, 2]

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \rho] \quad (2)$$

donde \mathcal{H} es el Hamiltoniano del sistema. Notar que esta evolución temporal es unitaria, por lo tanto los autoestados del Hamiltoniano son estados estacionarios.

Si consideramos una situación más realista, en donde el sistema (S) se encuentra embebido en un entorno (E), entonces la matriz de densidad del universo (U) se puede escribir como

$$\rho_u = \rho_s \otimes \rho_e, \quad (3)$$

donde $\rho_s \in \mathcal{H}_s$ y $\rho_e \in \mathcal{H}_e$ son las matrices de densidad del sistema y del entorno respectivamente en sus respectivos espacios de Hilbert, por lo tanto, $\rho_u \in \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_e = \mathcal{H}_u$.

La evolución temporal de la matriz de densidad del universo es unitaria y se puede obtener mediante la Ecuación 2 como

$$\partial_t \rho_u = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, \rho_u].$$

Como se quiere obtener la evolución temporal de la matriz de densidad del sistema,

se tiene que realizar la traza parcial sobre el entorno, es decir $\rho_s(t) = \text{tr}_e(\rho_u(t))$. Si se escribe el Hamiltoniano del universo como el producto tensorial de los Hamiltonianos del sistema y del entorno más un término de interacción, se puede demostrar que la evolución temporal de la matriz de densidad del sistema es [2]

$$\begin{aligned} \rho_s(t) = & \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}_s, \rho_s] \\ & + \sum_n \left(C_n \rho C_n^\dagger - \frac{1}{2} \{ C_n C_n^\dagger, \rho \} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

donde C_n son llamados operadores de colapso o de Lindblad. La ecuación 4 es la ecuación de Lindblad, que describe la evolución temporal de la matriz de densidad del sistema en presencia de un entorno.

Los operadores de colapso son operadores que describen la interacción del sistema con el entorno. Si bien el entorno puede ser muy complejo o contener infinitos grados de libertad, puede suponerse una interacción efectiva dada por un conjunto finito de operadores. Usualmente, los operadores de colapso se escriben como $C_n = \sqrt{\gamma_n} O_n$, donde γ_n es una tasa efectiva de colapso y O_n es un operador del sistema.

En este trabajo se resuelve numéricamente la ecuación de Lindblad para sistemas de dos niveles, conocidos como qubits, de gran relevancia en la computación cuántica. La sección 2 detalla el algoritmo empleado para la resolución numérica. En la sección 3A, se analizan los efectos de relajación, excitación y coherencia en un qubit. Posteriormente, en la sección 3B, se estudia la evolución temporal de dos qubits entrelazados, incluyendo la evolución de la concurrencia definida por Wootters [3] y el fenómeno de “muerte súbita del entrelazamiento” (Entanglement Sudden Death, ESD) [4]. Finalmente, en la sección 4, se resumen los resultados obtenidos y su relevancia en el contexto del trabajo.

II. IMPLEMENTACIÓN

La implementación numérica de la ecuación de Lindblad se desarrolló en **C++** y está

disponible en el enlace correspondiente. Para el manejo eficiente de matrices y vectores complejos, se utilizó la librería **Eigen** [5]. El diseño del código adoptó una sintaxis familiar para físicos, inspirada en la notación de la librería **QuTiP** [6, 7] de **Python**.

Para facilitar el manejo de las operaciones matemáticas, se definieron alias como **QuantumMatrix** y **QuantumValue**, destinados a representar matrices, vectores y valores escalares complejos de forma intuitiva. El programa se estructuró en torno a la clase abstracta **QobjEvo**, que sirve como interfaz genérica para implementar el Hamiltoniano y los operadores de colapso. Esto permite definir distintos sistemas físicos mediante la herencia de esta clase, garantizando un correcto funcionamiento en la resolución numérica de la ecuación de Lindblad.

Para resolver la ecuación de Lindblad 4, se implementó una función principal, **mesolve**, que utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener la evolución temporal de la matriz de densidad del sistema. Esta función toma como entrada el Hamiltoniano, un vector que contiene los límites temporales, el intervalo de tiempo, el estado inicial del sistema como una matriz de densidad y un vector de operadores de colapso. Su salida es un vector de matrices de densidad que describen la evolución del sistema a lo largo del tiempo.

Además, el código incluye la función **save_states**, que permite exportar las matrices de densidad calculadas junto con información como los límites temporales, el paso de integración y las dimensiones del sistema. Los datos se guardan en un formato estructurado que facilita su análisis y visualización con herramientas como **Python** u otros lenguajes de programación.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A. Relajación, excitación y desfase de un qubit acoplado al entorno

Se considera un qubit (*quantum bit*) como un sistema de dos niveles cuyo hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar}{2}\omega_q\sigma_z \quad (5)$$

donde ω_q es la frecuencia de resonancia del qubit, es decir la diferencia de energía entre los dos niveles, y σ_z es la matriz de Pauli.

Los autoestados correspondientes al hamiltoniano son $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$, con energías $\pm\hbar\omega_q/2$. Si se prepara el sistema en uno de estos autoestados la ecuación de Schrödinger agrega solo una fase temporal a la función de onda, pero no permite transiciones. Sin embargo, se sabe que un sistema de 2 niveles acoplado a un entorno tienden a producirse efectos de relajación. Por ejemplo, si se prepara el sistema en el estado $|\uparrow\rangle$, el sistema tiende a relajarse al estado de menor energía $|\downarrow\rangle$. Este proceso se conoce como relajación, y se suele modelar como un operador de colapso $C_\downarrow = \sqrt{\Gamma_\downarrow}\sigma_-$, donde Γ_\downarrow es la tasa de relajación y σ_- es el operador de aniquilación.

Reemplazando este operador en la ecuación de Lindblad 4, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen la evolución temporal del sistema dadas por

$$\dot{\rho}_{00}(t) = -\Gamma_\downarrow\rho_{00}(t), \quad (6)$$

$$\dot{\rho}_{01}(t) = -i\omega_q\rho_{01}(t) - \frac{\Gamma_\downarrow}{2}\rho_{01}(t), \quad (7)$$

donde $\rho_{ij}(t)$ es el elemento de la matriz densidad $\rho(t)$ correspondiente al estado $|i\rangle\langle j|$. Notar que se utilizó que la matriz de densidad es hermítica y de traza unitaria, por lo tanto $\rho_{10}(t) = \rho_{01}^*(t)$ y $\rho_{11}(t) = 1 - \rho_{00}(t)$. La solución de las ecuaciones diferenciales 6 y 7 es

$$\rho_{00}(t) = \rho_{00}(0)e^{-\Gamma_\downarrow t}, \quad (8)$$

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-\Gamma_\downarrow t/2}e^{-i\omega_q t}. \quad (9)$$

Notar que la relajación no solo cambia las poblaciones, sino que también disminuye las coherencias de manera exponencial. Para ilustrar este fenómeno, se simuló la evolución temporal de la población y coherencia de un qubit acoplado a un entorno, inicialmente en el estado $|x\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, con

una tasa de relajación $\Gamma_\downarrow = 0.1$. Se asumió $\hbar = 1$ y $\omega_q = 1$, de modo que el hamiltoniano se expresa en función de las frecuencias en GHz. La simulación se realizó durante un intervalo de tiempo entre 0 ns a 30 ns con un paso temporal de 0.001 ns, lo que introduce un error de $\mathcal{O}(10^{-12})$. Estos parámetros se mantienen para todas las simulaciones posteriores de la sección. La Figura 1 muestra la evolución temporal de la población y coherencia del qubit.

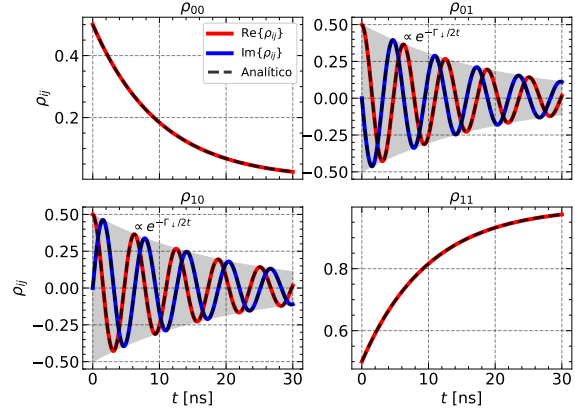


Figura 1: evolución temporal de la población y coherencia de un qubit acoplado a un entorno en el estado $|x\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, con una tasa de relajación $\Gamma_\downarrow = 0.1$.

Además de la relajación, un qubit acoplado a un entorno también puede ser excitado. Por ejemplo, si se supone que el baño térmico está formado por un conjunto de osciladores armónicos, se pueden producir transiciones entre los niveles del qubit y los niveles del baño, resultado en una excitación efectiva del sistema. Este proceso se modela como un operador de colapso $C_\uparrow = \sqrt{\Gamma_\uparrow}\sigma_+$, donde Γ_\uparrow es la tasa de excitación y σ_+ es el operador de creación. Agregando este operador junto al proceso de relajación en la ecuación de Lindblad 4, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen la evolución temporal del sistema dadas por

$$\dot{\rho}_{00}(t) = -\Gamma_\downarrow\rho_{00}(t) + \Gamma_\uparrow\rho_{11}(t), \quad (10)$$

$$\dot{\rho}_{01}(t) = -\left[i\omega_q + \frac{1}{2}\Gamma_1\right]\rho_{01}(t), \quad (11)$$

donde $\Gamma_1 = \Gamma_\uparrow + \Gamma_\downarrow$ se denomina tasa de decaimiento. Añadiendo la condición de traza unitaria, la solución de las ecuaciones diferenciales 10 y 11 es

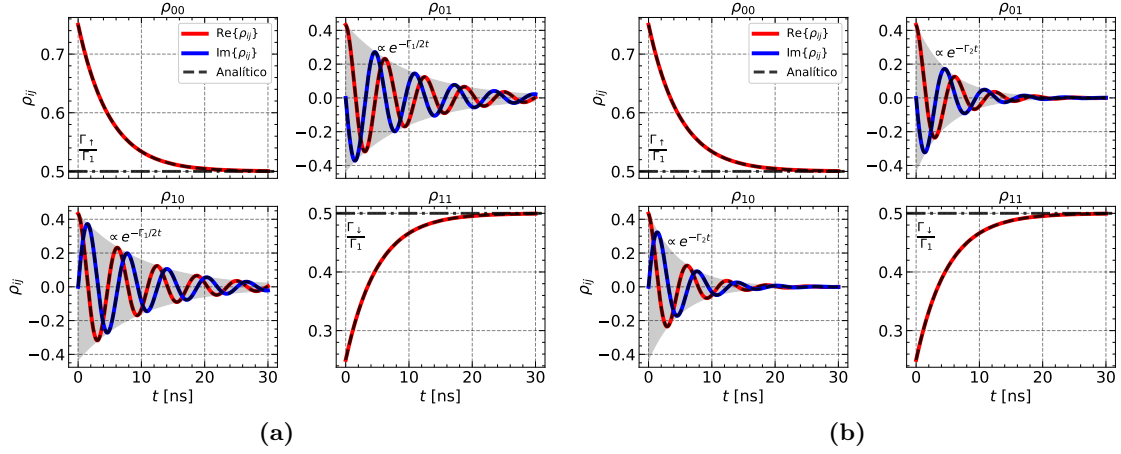


Figura 2: Evolución temporal de la población y coherencia de un qubit inicialmente en el estado $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(\sqrt{3}|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$, acoplado a un entorno. (a) Con una tasa de relajación $\Gamma_\downarrow = 0.1$ y una tasa de excitación $\Gamma_\uparrow = 0.1$. (b) Con las mismas tasas de relajación y excitación, y además una tasa de desfase $\Gamma_\phi = 0.1$.

$$\rho_{00}(t) = \rho_{00}(0)e^{-\Gamma_1 t} + \frac{\Gamma_\uparrow}{\Gamma_1}(1 - e^{-\Gamma_1 t}), \quad (12)$$

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)e^{-i\omega_q t}e^{-\Gamma_1 t/2}. \quad (13)$$

La cantidad Γ_\uparrow/Γ_1 se llama población de equilibrio, ya que representa el valor al que tiende $\rho_{00}(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Si los procesos de relajación y excitación son iguales, la población de equilibrio es 0.5, lo que indica un estado de equilibrio térmico.

Para ilustrar esto, se simuló la evolución temporal de la población y coherencia de un qubit acoplado a un entorno, comenzando en un estado con mayor población en el estado $|\uparrow\rangle$ para analizar la evolución dado por $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(\sqrt{3}|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ y con tasas de relajación y excitación iguales ($\Gamma_\downarrow = \Gamma_\uparrow = 0.1$). La Figura 2a muestra los resultados de la simulación.

Notar que las poblaciones tienden a la población de equilibrio, y que además ambos procesos disminuyen los términos de coherencia del sistema.

Por último, un qubit acoplado a un entorno también puede sufrir desfase, es decir modificaciones sobre los términos de coherencia. Este proceso se modela como un operador de colapso $C_\phi = \sqrt{\Gamma_\phi/2}\sigma_z$, donde Γ_ϕ es la tasa de desfase. Agregando este operador junto a los procesos de relajación y excitación en la ecuación de Lindblad 4,

se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen la evolución temporal del sistema dadas por

$$\dot{\rho}_{00}(t) = -\Gamma_\downarrow \rho_{00}(t) + \Gamma_\uparrow \rho_{11}(t), \quad (14)$$

$$\dot{\rho}_{01}(t) = -(i\omega_q + \Gamma_2) \rho_{01}(t), \quad (15)$$

donde $\Gamma_2 = \Gamma_\phi + \Gamma_1/2$ se denomina tasa de decoherencia. Notar que el término de desfase no afecta a las poblaciones, sino que solo modifica las coherencias. La solución de la ecuación 14 es análoga a la ecuación 12, mientras que la solución de la ecuación 15 se obtiene reemplazando $\Gamma_1/2$ por Γ_2 en la ecuación 13.

Para ilustrar esto, se simuló la evolución temporal de la población y coherencia de un qubit acoplado a un entorno, comenzando en el mismo estado que en la simulación anterior, pero añadiendo una tasa de desfase $\Gamma_\phi = 0.1$. La Figura 2b muestra los resultados de la simulación.

Notar que en este caso, los términos de coherencia disminuyen más rápidamente debido al desfase. Además, la población de equilibrio se mantiene en 0.5, lo que indica que el desfase no afecta a las poblaciones del sistema.

B. Entrelazamiento de dos qubit acoplados a entornos independientes idénticos

El entrelazamiento cuántico es clave para la criptografía, la teleportación y la computación cuántica. Aunque idealmente se espera que se mantenga el tiempo suficiente para completar tareas, en la práctica los sistemas cuánticos interactúan con entornos que lo pueden destruir el entrelazamiento. Por ello, es de interés estudiar cómo evoluciona en el tiempo el entrelazamiento de dos qubits interactuantes con el entorno.

Se considera una situación en donde se tiene dos qubits idénticos independientes, es decir con la misma frecuencia de resonancia y sin interacción entre ellos. Además, cada qubit está acoplado a un entorno idéntico independiente, es decir con la misma tasa de decaimiento. El hamiltoniano total del sistema es

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar}{2} \left(\omega_q^{(A)} \sigma_z^{(A)} + \omega_q^{(B)} \sigma_z^{(B)} \right), \quad (16)$$

donde $\sigma_z^{(A)}$ y $\sigma_z^{(B)}$ son las matrices de Pauli correspondientes a los qubits A y B, respectivamente. Si bien $\omega_q^{(A)} = \omega_q^{(B)}$, se escribe de esta manera para notar la simplificación de considerar qubits idénticos en cálculos posteriores. Los autoestados se corresponde con el producto tensorial de los autoestados de cada qubit, es decir $|i, j\rangle = |i\rangle^{(A)} \otimes |j\rangle^{(B)}$, con $i, j \in \{0, 1\}$.

Se considera solo procesos de desfase en los qubit motivado por ** REFERENCIA **, por lo que en el formalismo de Lindblad se puede modelar como un operador de colapso $C_\phi = \sqrt{\Gamma_\phi^{(A)}} \sigma_z^{(A)} + \sqrt{\Gamma_\phi^{(B)}} \sigma_z^{(B)}$.

En la base de autoestados obtenida mediante el producto tensorial, el Hamiltoniano y el operador de colapso pueden representarse matricialmente usando matrices de 4×4 con índices $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ como

$$\mathbf{e} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1, \\ -1, & \text{si } i = j = 4, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\mathbf{m} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 2, \\ -1, & \text{si } i = j = 3, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

de modo que el hamiltoniano y el operador de colapso se pueden escribir como

$$\mathcal{H}/\hbar = \frac{\omega_q^{(A)} + \omega_q^{(B)}}{2} \mathbf{e} + \frac{\omega_q^{(A)} - \omega_q^{(B)}}{2} \mathbf{m}, \quad (17)$$

$$C_\phi = \left(\sqrt{\Gamma_\phi^{(A)}} + \sqrt{\Gamma_\phi^{(B)}} \right) \mathbf{e} + \left(\sqrt{\Gamma_\phi^{(A)}} - \sqrt{\Gamma_\phi^{(B)}} \right) \mathbf{m}. \quad (18)$$

Por lo tanto, si se consideran qubits idénticos y entorno idénticos, cancelan los términos de \mathbf{m} en las ecuaciones 17 y 18, lo que simplifica el cálculo de la ecuación de Lindblad. Como resultado, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que describen la evolución temporal del sistema dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{ij}(t) &= - \left(\frac{i}{\hbar} \omega_q + 2\Gamma_\phi \right) \rho_{ij}(t) \\ \dot{\rho}_{14}(t) &= -2 \left(\frac{i}{\hbar} \omega_q + 2\Gamma_\phi \right) \rho_{14}(t) \end{aligned}$$

donde $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{2, 3, 4\}$ tal que $i \neq j$ y excluyendo el caso $i = 1, j = 4$. Notar que los elementos diagonales de la matriz densidad no se ven afectados por el desfase, y la simplificación de considerar qubits idénticos y entornos idénticos permite que los términos ρ_{23} y ρ_{32} no se modifiquen en la evolución temporal.

Como resultado de estas expresiones, se obtienen decaimientos exponenciales con alguna fase compleja, similar a lo que se obtuvo para el caso de un qubit, es decir

$$\rho_{ij}(t) = \rho_{ij}(0) e^{-i\omega_q t} e^{-2\Gamma_\phi t}, \quad (19)$$

$$\rho_{14}(t) = \rho_{14}(0) e^{-i\omega_q t} e^{-4\Gamma_\phi t}, \quad (20)$$

con las mismas restricciones para los índices que el caso anterior.

Dado que las ecuaciones 19 y 20 muestran que los elementos de matriz decrecen exponencialmente, es razonable que si se parte de

un estado entrelazado o una combinación de estados de Bell, luego de un cierto tiempo este estado se deteriore. Para cuantificar el entrelazamiento entre dos qubit en la base acoplada, se utiliza la concurrencia definida por Wootters *** REFERNCIA *** dada por

$$C(\rho) = \max \left\{ 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right\}, \quad (21)$$

donde se tiene que λ_i son los autovalores de $\rho(\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B) \rho^\dagger(\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B)$ ordenados de mayor a menor. La concurrencia es 0 si el estado es separable, y 1 si el estado es máximamente entrelazado.

Para analizar los efectos de entrelazamiento del sistema acoplado al entorno, se analizan las matrices de densidad con la forma “estandar” dada por

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & w(t) \\ 0 & b & z(t) & 0 \\ 0 & z^*(t) & c & 0 \\ w^*(t) & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (22)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $w, z \in \mathbb{C}$ con $a + b + c + d = 1$. Este tipo de matriz se encuentra presente en una gran cantidad de situaciones físicas. Además, esta matriz incluye los estados de Bell, que son los estados máximamente entrelazados y los estados de Werner. Además, en el trabajo de [ESB] se demostró que existen condiciones en las cuales se produce la muerte súbita del entrelazamiento (ESD). Para verificar estas condiciones, se tiene que analizar los casos en que la concurrencia de como resultado 0 para tiempo finito. Para esta matriz de densidad, los autovalores λ_i son

$$\lambda_{1,2} = \left(\sqrt{ad} \pm |w| \right)^2, \quad (23)$$

$$\lambda_{3,4} = \left(\sqrt{bc} \pm |z| \right)^2. \quad (24)$$

A partir de estos autovalores, se puede obtener la concurrencia como

$$C(\rho) = 2 \max \left\{ 0, |w(t)| - \sqrt{bc}, |z(t)| - \sqrt{ad} \right\} \quad (25)$$

donde se consideran los casos en que λ_1 o λ_3 son los autovalores más grandes.

Para que se produzca ESB, se tienen que satisfacer simultaneamente las condiciones [ESB]

$$|w(t)| - \sqrt{bc} \leq 0, \quad (26)$$

$$|z(t)| - \sqrt{ad} \leq 0. \quad (27)$$

Notar que, según las ecuaciones 19 y 20, los estados de Bell $|B_{10}\rangle, |B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ no se ven afectados por el desfase, por lo tanto la concurrencia no se modifica en el tiempo. Por otro lado, los estados $|B_{00}\rangle, |B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ se ven afectados por el desfase, por lo que la concurrencia disminuye en el tiempo. Para estos últimos, se tiene que $b = c = z = 0$. Según la condición 26, para que la concurrencia sea 0 se tiene que cumplir que $|w(t)| \leq 0$. Sin embargo, según la Ecuación 20, se tiene que $|w| = |\rho_{14}| = \rho_{14}(0)e^{-8\Gamma_\phi t}$, la cual tiende a 0 para $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, se concluye que para qubits idénticos independientes, acoplados a baños idénticos no produce ESD si se tiene como condición inicial un estado de Bell.

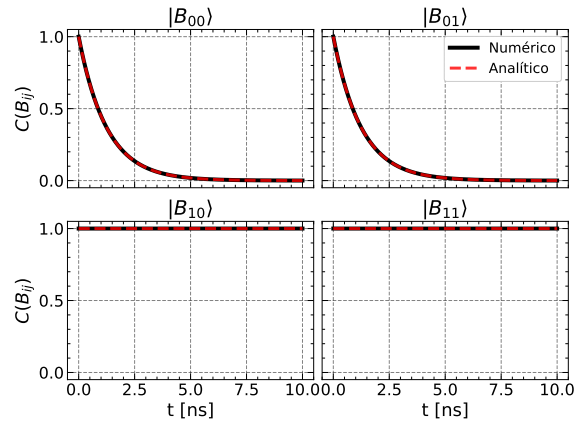


Figura 3: concurrencia para los estados de Bell obtenidos mediante resolución numérica en comparación con el resultado analítico.

Para verificar esta condición, se resolvió numericamente la ecuación de Lindblad para 2 qubits idénticos de frecuencia 1 GHz, acoplados al entorno con un operador de colapso C_ϕ con una tasa de $\Gamma_\phi = 0.1$. Los resultados obtenidos para la concurrencia se muestra en la Figura 3.

Luego, se seleccionaron parámetros de la matriz de la Ecuación 22 con valores $a = d = 1/3$, $b = c = 1/6$, $w = 1/3$ y $z = 0$, que verifica las condiciones 26 y 27. Además, se puede obtener el tiempo en el que se produce ESD en este estado mediante la ecuación 20. Como resultado, se obtiene que el tiempo en el que se produce ESD es

$$t_d = \frac{1}{4\Gamma_\phi} \ln \left(\frac{\rho_{03}(0)}{\sqrt{bc}} \right) \quad (28)$$

En la Figura 4 se muestra los resultados de la resolución numérica para la concurrencia en función del tiempo del estado mencionado, y se compara con el tiempo en el que se produce ESD según la Ecuación 28.

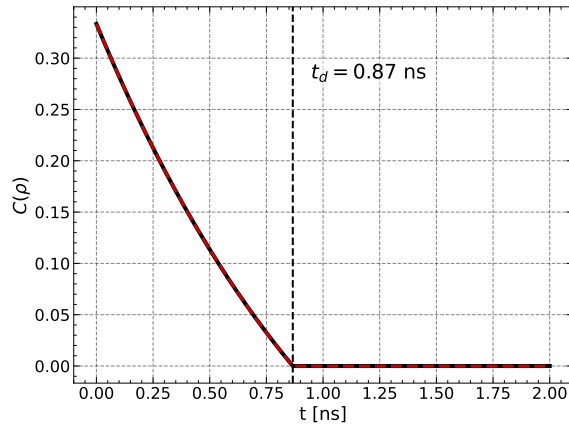


Figura 4: concurrencia para un estado que verifica las condiciones de ESD en comparación con el tiempo en el que se produce ESD.

IV. CONSLUCIONES

REFERENCIAS

1. Blum, K. *Density Matrix Theory and Applications* ISBN: 9783642205613. https://books.google.com.ar/books?id=o0Bofi3_ZIOC (Springer Berlin Heidelberg, 2012).
2. Breuer, H. P. y Petruccione, F. *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, Great Clarendon Street, 2002).

3. Wootters, W. K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245-2248. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.80.2245> (10 1998).
4. Yu, T. y Eberly, J. Sudden death of entanglement: Classical noise effects. *Optics Communications* **264**. Quantum Control of Light and Matter, 393-397. ISSN: 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401806005104> (2006).
5. Guennebaud, G., Jacob, B. *et al. Eigen v3* <http://eigen.tuxfamily.org>. 2010.
6. Johansson, J., Nation, P. y Nori, F. QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications* **183**, 1760-1772. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.02.021> (2012).
7. Johansson, J., Nation, P. y Nori, F. QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications* **184**, 1234-1240. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.019> (2013).