

Dinámica de sistemas acoplados

Maximiliano Gatto

Instituto Balseiro (UNCuyo - CNEA) - Bariloche, Río Negro, Argentina

maximiliano.gatto@ib.edu.ar

12 de septiembre de 2024

1. Introducción

En esta práctica se analiza la dinámica de sistemas acoplados correspondiente a neuronas. Especialmente el ejercicio 1 se implementó de manera numérica en un script de Python, cuyo código se encuentra disponible en el siguiente [enlace](#).

2. Resultados

Ejercicio 1

En este ejercicio se analizó la dinámica de 2 neuronas de Hodgkin-Huxley idénticas y conectadas con excitaciones sinápticas tanto excitatorias como inhibitorias. Para garantizar la oscilación en las neuronas, se estableció una corriente de $I = 10$ mA en cada neurona.

La interacción entre las neuronas se modeló con una corriente de interacción sináptica dada por $I_{\text{syn}} = -g_{\text{syn}}s(t)(V - V_{\text{syn}})$, donde se tiene que $\partial_t s(t) = (s_{\infty}(V) - s)/\tau$ y $s_{\infty}(V) = 0.5(1 + \tanh(V/5))$. Si $V_{\text{syn}} \geq 0$ se tiene el caso excitatorio, en cambio si $V \leq 0$ se tiene el caso inhibitorio.

Se implementó un script en Python para simular la dinámica de las neuronas y se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras

1 y 2 para el caso excitatorio e inhibitorio respectivamente.

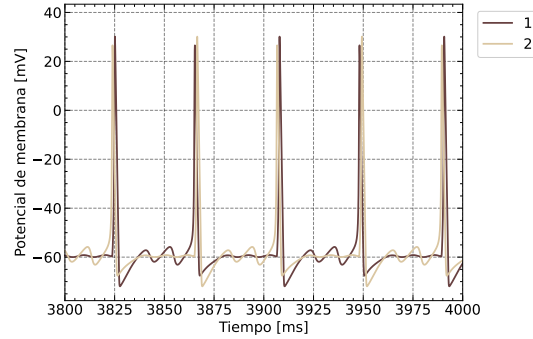


Figura 1: *dinámica de 2 neuronas de Hodgkin-Huxley con acoplamiento excitatorio para un valor de $g_{\text{syn}} = 0.45 \text{ mS cm}^{-2}$ y $V_{\text{syn}} = 0 \text{ mV}$.*

Para un valor de $g_{\text{syn}} = 0.45 \text{ mS cm}^{-2}$, en el caso excitatorio con $V_{\text{syn}} = 0 \text{ mV}$ (Figura 1), se visualiza que las neuronas oscilan en fase, en cambio en el caso inhibitorio con $V_{\text{syn}} = -80 \text{ mV}$ (Figura 2) se observa que las neuronas oscilan en contrafase. Para observar la dependencia tanto del desfase como la tasa de disparo del sistema en función de g_{syn} se realizó un barrido con 30 valores en el rango de 0 mS cm^{-2} , que se corresponde a 2 neuronas independientes sin interacción, a 2 mS cm^{-2} , dejando evolucionar el sistema hasta 4s, en donde se supone que el sistema alcanzó un

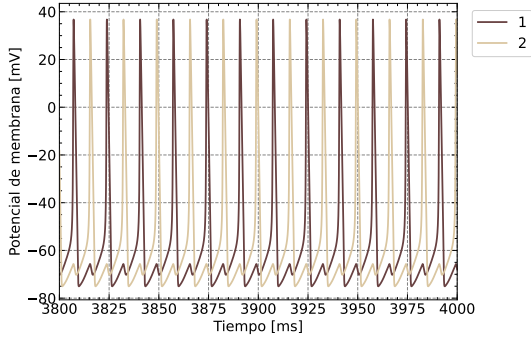


Figura 2: dinámica de 2 neuronas de Hodgkin-Huxley con acoplamiento inhibitorio para un valor de $g_{syn} = 0.45 \text{ mS cm}^{-2}$ y $V_{syn} = -80 \text{ mV}$.

régimen estacionario. Los resultados se muestran en la Figura 3.

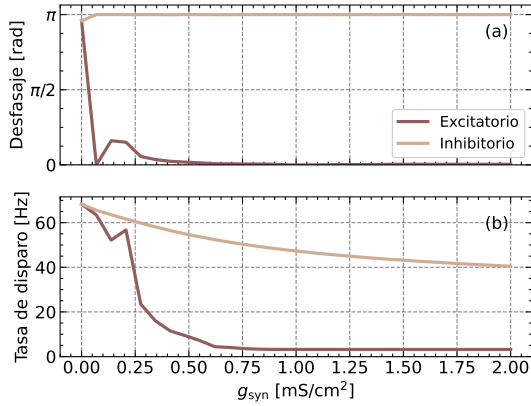


Figura 3: desfase y tasa de disparo en función de g_{syn} para el caso (a) excitatorio y (b) inhibitorio.

Se observa que para el caso excitatorio (Figura 3a) el desfase es 0 para todos los valores de g_{syn} , excepto en un entorno cercano a $g_{syn} \sim 0.25$, sin embargo este último es cercano a 0 y podría deberse a un error numérico en la simulación. La tasa de disparo disminuye de manera abrupta para valores de $g_{syn} \leq 0.5$, luego la tendencia cambia pero la tasa de disparo sigue disminuyendo. En el caso inhibitorio (Figura 3b) se observa que el desfase es 180 para todos los valores de g_{syn} y la tasa de disparo disminuye de manera suave a medida que g_{syn} aumenta, tendiendo a un valor cercano a 40 Hz para los valores más altos de g_{syn} analizados.

Ejercicio 2

Se considera un modelo de dos poblaciones de neuronas descritas por un modelo de tasa de disparo con una relación f-I semilineal de la forma

$$\begin{aligned}\tau \partial_t h_e &= -h_e + g_{ee} f_e - g_{ei} f_i + I_e, \\ \tau \partial_t h_i &= -h_i + g_{ie} f_e - g_{ii} f_i + I_i,\end{aligned}$$

donde $f_a = S(h_a)$ ($a = e, i$) con $S(x) = x\Theta(x)$, siendo Θ la función de Heaviside.

Notar que si $h_i < 0$ y $h_e < 0$ entonces el sistema se desacopla por lo que no hay cambio de actividad. Luego si $h_i < 0$ pero $h_e > 0$, o viceversa, una de las variables queda desacoplada y la restante se acopla con la anterior. Esto puede tener soluciones estables, pero la variable desacoplada tiene su propia dinámica, sin tener en cuenta la evolución de la variable restante. El sistema se acopla completamente cuando $h_i > 0$ y $h_e > 0$. De este modo, el sistema resulta

$$\begin{aligned}\tau \partial_t h_e &= -h_e + g_{ee} h_e - g_{ei} h_i + I_e, \\ \tau \partial_t h_i &= -h_i + g_{ie} h_e - g_{ii} h_i + I_i,\end{aligned}$$

y como se quieren buscar soluciones estacionarias se tiene que $\partial_t h_e = \partial_t h_i = 0$, por lo que se obtienen que las neuclinas del sistema son

$$\begin{aligned}0 &= f(h_e, h_i) = -h_e + g_{ee} h_e - g_{ei} h_i + I_e \\ 0 &= g(h_e, h_i) = -h_i + g_{ie} h_e - g_{ii} h_i + I_i.\end{aligned}$$

Notar que las neuclinas son rectas en el espacio (h_e, h_i) y se intersectan si las pendientes no son iguales. Además, como se analiza el caso en que $h_e > 0$ y $h_i > 0$, se tiene como condición que el punto fijo $\bar{h}^* = (h_e^*, h_i^*)$ se encuentra en el primer cuadrante. El sistema resultante se expresa como

$$\bar{I} = \mathbf{A} \cdot \bar{h}^*,$$

donde $\bar{I} = (I_e, I_i)$ y \mathbf{A} es la matriz de coeficientes del sistema, es decir

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 - g_{ee} & g_{ei} \\ -g_{ie} & 1 + g_{ii} \end{pmatrix}.$$

Luego, el punto fijo del sistema está dado por

$$\begin{aligned} \bar{h}^* &= \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{I}} \\ &= \frac{1}{\det(\bar{\mathbf{A}})} \begin{pmatrix} 1 + g_{ii} & -g_{ei} \\ g_{ie} & 1 - g_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_e \\ I_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta ecuación, se pueden determinar 2 condiciones para los coeficientes

$$(1 + g_{ii})I_e - g_{ei}I_i > 0, \quad (1)$$

$$g_{ei}I_e + (1 - g_{ee})I_i > 0, \quad (2)$$

Luego, se puede analizar la estabilidad del sistema. Si se linealiza la perturbación $\bar{\epsilon} = (\delta h_e, \delta h_i)$ en torno a al punto de estabilidad (h_e^*, h_i^*) y se escribe de manera matricial, se obtiene que

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \bar{\epsilon},$$

donde

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \partial_{h_e} f(h_e, h_i) & \partial_{h_i} f(h_e, h_i) \\ \partial_{h_e} g(h_e, h_i) & \partial_{h_i} g(h_e, h_i) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se convierte en un problema de autovalores, en donde para que sea estable se requiere que la parte real de los autovalores sea negativa. Se puede ver que los autovalores estan dados por $\lambda = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4D})$, donde $T = \text{Tr}(A)$ y $D = \det(A)$, y se tiene que el sistema es estable si $T < 0$ y $D > 0$.

Particularizando para el sistema dado, se tiene que

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} g_{ee} - 1 & -g_{ei} \\ g_{ie} & -g_{ii} - 1 \end{pmatrix},$$

además, se tiene que $T = g_{ee} - g_{ii} - 2$ y $D = 1 - g_{ee} - g_{ee}g_{ii} + g_{ii} + g_{ie}g_{ei}$. Por lo tanto, imponiendo las condiciones de estabilidad se tiene que

$$g_{ee} - g_{ii} > 2, \quad (3)$$

$$1 - g_{ee} - g_{ee}g_{ii} + g_{ii} + g_{ie}g_{ei} > 0. \quad (4)$$

Por lo tanto, se tiene que las ecuaciones 1, 2, 3 y 4 son las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema sea estable.