Mathématiques pour l'économie

Mathématiques pour l'économie

Analyse-Algèbre

Cours et exercices corrigés

Naïla Hayek
Maître de conférences
à l'université
Paris II Panthéon-Assas

Jean-Pierre Leca
Maître de conférences
à l'université
Paris I Panthéon-Sorbonne

5e édition

DUNOD

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-072255-6

Table des matières

Introduction

Les modèles mathématiques ont un succès inouï dans le domaine de la physique par leur capacité à prédire les phénomènes auxquels ils s'appliquent : mécanique classique, mécanique quantique, électromagnétisme, physique des particules, astrophysique, etc. En un siècle, les mystères de la physique ont réduit comme peau de chagrin.

Ce succès, en soi fascinant, peut-il, fut-ce de manière beaucoup plus modeste, se reproduire dans le domaine de l'économie[1] ? La question est ouverte, elle est l'objet d'un débat : *l'utilisation des modèles mathématiques en économie.*

Pour participer à ce débat, il est indispensable de comprendre les modèles formalisés de l'économie. Il ne serait pas raisonnable de ne pouvoir accéder à ces modèles par peur ou méconnaissance des outils mathématiques de base.

Loin de nous l'idée que ces outils mathématiques de base sont à portée facile d'intellect : on affirme seulement qu'il faut savoir s'y prendre et ce, de manière pragmatique. Aussi, dans ce livre, quatre étapes jalonnent le chemin de la compréhension.

1) *L'écriture*, le sens des mots, la définition rigoureuse des objets mathématiques. L'expérience nous a appris qu'un étudiant qui sait et qui se trompe, est un étudiant qui, à un endroit de sa copie, n'a plus géré son écriture ou a négligé le sens des mots. Ce n'est pas l'étudiant qui déraille, c'est son écriture qui ne tient plus la route.

2) *Le raisonnement* et son catalogue de règles du jeu logique, expliquées ou démontrées (en partie) au chapitre 1 ; l'étudiant les appliquera « sans état d'intellect » tel un automobiliste le code de la route.

3) *La démonstration* pour décoder le chemin du labyrinthe qui mène au théorème ; grâce à elle, ce qui paraissait « magique » devient « vrai ». Chaque

1. Le mot « économie » a pour racine grecque « *oikonomia* » : règle de vie domestique, gestion de la maison.

fois que la généralité n'en est pas compromise, afin de ne pas alourdir inutilement l'écriture, on traite sur des exemples simples la démarche de démonstration qui conduit au résultat. Ne pas comprendre en première lecture une démonstration n'est pas gênant du tout ; par contre, faire le choix d'ignorer la démonstration, c'est décider de rester dans la magie des mots du théorème incompris. Manipuler les idées, les concepts, sans les comprendre est strictement interdit car dangereux pour l'intelligence.

4) *Le calcul*, les exercices qui rassurent et indiquent la position de l'étudiant sur le chemin de la compréhension. Pour cela, nous vous proposons des points méthode. L'intérêt d'un exercice est le questionnement qu'il amène, les idées, les initiatives qu'il nécessite d'où, parfois, l'obligation de revoir le cours mais sans la démonstration bien sûr.

À la fin de chaque chapitre, se trouvent des exercices dont les corrigés sont mis à la fin du livre. L'étudiant mesurera son assurance et son savoir-faire à l'envie qu'il a de regarder la solution avant d'avoir fini l'exercice.

De par notre expérience de l'enseignement des notions introduites dans ce livre, pour cette 5e édition, nous l'affirmons haut et fort :

Parler à tous avec simplicité tout en restant ambitieux sur le sujet.

Quelques indications :

- En début de chapitre, on désigne par mots clés des mots nouveaux importants que l'on va définir et qu'il est indispensable de connaître.
- Au sein d'un même chapitre, les définitions, propositions, théorèmes sont numérotés dans l'ordre d'arrivée.
- *Mutatis mutandis* signifie « en changeant ce qu'il faut changer ». On emploie cette expression pour dire que les arguments du raisonnement restent les mêmes, seuls changent les objets auxquels ils s'appliquent.
- Dans tout le livre, les mots « fonction » et « application » sont synonymes.

1. Langage mathématique, mode d'emploi

En mathématiques, démontrer c'est convaincre avec des arguments autorisés, répertoriés, codés, indépendants du langage parlé qui les exprime. « La logique est parfaitement intelligible, néanmoins totalement inexplicable dans ses fondements » (S. Kleene). Dans ce chapitre, on code les règles de la logique et de ses signes « ET, OU, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$ ». Il s'agit d'apprendre à mieux cerner « ce que démontrer veut dire ».

Mots clefs : proposition, vrai, faux, connecteur, implication, pour tout x, il existe au moins un x, ensemble, union, intersection, produit de deux ensembles, fonction, application, injection, surjection, bijection.

I. Connecteurs logiques ET, OU, NON, $\Rightarrow$

A. Le vrai et le faux

• Définition 1

On appelle *proposition* tout assemblage de lettres et de signes qui vérifie les trois conditions suivantes :

– cet assemblage a une syntaxe correcte. (En d'autres termes, le lecteur sait le « lire ») ;

– cet assemblage a une sémantique correcte. (En d'autres termes le lecteur « comprend » ce qu'il lit) ;

– cet assemblage a une seule valeur de vérité : la valeur vrai ou bien la valeur faux.

→ *Commentaires*

Dans le langage mathématique les lettres peuvent être d'alphabets différents (latins ou grec) et les signes vont de la parenthèse, virgule, +, ., =, etc. aux chiffres arabes (0, 1, 2, ..., 9) ainsi que romains (I, V X. L, C, D, M) en passant par des dessins plus ou moins parlants ($\sum$, $\int$, $\nearrow$, $\searrow$, etc.) que les mathématiciens ont l'art d'inventer au fil de leurs théories.

▶ Exemples

Considérons les assemblages suivants :

- $P_1 = (\sum + oui\ !\ \nearrow =)$

  Ce n'est pas une proposition car la syntaxe est incorrecte.

- P_2 = *(La racine carrée de Napoléon n'est pas carrée)*

  Ce n'est pas une proposition : on la lit très bien mais on ne comprend pas. Sémantique incorrecte.

- $P_3 = (12 \times 14 = 168)$

  C'est une proposition, on sait à partir du cours moyen qu'elle a la valeur vrai.

- P_4 = (XII × XIV = CLXVIII)

  C'est une proposition, la même que P_3 *à l'écriture près. On remarquera que s'il est courant de multiplier en chiffres arabes, cela l'est beaucoup moins avec les chiffres romains. Pour faire de l'arithmétique il fallait faire le bon choix de l'écriture et de ses signes !*

- P_5 = *(dans un triangle quelconque, la somme des angles est un angle plat)*

  C'est une proposition, on sait depuis le collège qu'elle a la valeur vrai.

- P_6 = *(a et b deux nombres réels quelconques,* $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$*)*

  C'est une proposition, vraie pour un lycéen.

- P_7 = *(si* $\alpha < 0$ *et* $f \nearrow$ *sur* $\mathbb{R}$*, alors* $\alpha f \searrow$ *sur* $\mathbb{R}$*)*

  C'est une proposition, vraie pour un bachelier. On remarquera la variété des lettres et des signes.

- P_8 = *(tout entier pair supérieur à 4 est la somme de deux nombres premiers)*

  C'est une proposition qui date de 1742, appelée la conjecture[1] *de Goldback. On ne connaît toujours pas sa valeur de vérité, en effet, s'il est facile de vérifier que* $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $24 = 11 + 13$, *le cas général n'a toujours pas été démontré. On sait cependant que la propriété est vraie pour tout entier pair compris entre 6 et* 33×10^6.

1. Une conjecture est une proposition que l'on subodore vraie quoique ni contredite ni démontrée.

– P_9 = *(Il existe au moins un triplet (x, y, z) d'entiers naturels strictement positifs tel que $x^2 + y^2 = z^2$.)*

Il suffit de chercher un peu. On trouve : $3^2 + 4^2 = 5^2$. *La proposition P_9 est donc vraie. Tel est le sens de « il existe au moins un... »*

On trouve aussi $5^2 + 12^2 = 13^2$, *puis* $99^2 + 4900^2 = 4901^2$, *puis... Mais cela est sans importance pour* P_9, *l'existence à lui seul du triplet* $(3, 4, 5)$ *pour* (x, y, z) *assure la valeur de vérité Vrai à P_9, qu'il y en ait d'autres, et combien, en nombre fini ou pas, est une tout autre question.*

– P_{10} = *(Pour $n \geqslant 3$, il n'existe pas d'entiers x, y, z non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$.)*

Il s'agissait de la conjecture de Pierre Simon de Fermat (1601-1665) devenue un théorème en 1990 grâce au mathématicien anglais Andrew Wiles. Il aura donc fallu plus de trois siècles pour savoir P_{10} *vraie !*

B. ET, OU, NON

1) Définitions

• Définition 2 : connecteur NON

Soit A une proposition, on définit la nouvelle proposition notée NON A, ou encore ¬A (lire non A), à l'aide de la table de vérité suivante (tableau 1.1).

Tableau 1.1 – V est l'abréviation de vrai ; F est l'abréviation de faux.

A	**¬A**
V	F
F	V

• Définition 3 : connecteurs OU et ET

Soit A et B deux propositions, on définit les nouvelles propositions « A OU B » ainsi que « A ET B » à l'aide de la table de vérité suivante (tableau 1.2).

Tableau 1.2

A	**B**	**A OU B**	**A ET B**
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

→ ***Commentaires***

A et B sont deux propositions, chacune vraie ou bien fausse, il y a donc quatre cas possibles de valeur de vérité pour le couple (A, B).

La proposition « A ET B » a clairement le sens de « A et B » du langage courant – appelé aussi langage de l'observateur – avec « et » conjonction de coordination.

La proposition « A OU B » a le sens de « ou bien A ou bien B ou bien les deux ». Il s'agit du « ou » avec le sens inclusif (qui inclut les deux cas). Le « ou » français (langage de l'observateur) — même écriture, même phonétique — peut avoir un tout autre sens qui est « ou l'un ou l'autre mais pas les deux ». Il s'agit alors du « ou » exclusif (qui exclut les deux cas). Ainsi dans l'expression « tout ou rien », seul le « ou » exclusif est cohérent ; dans l'expression « fromage ou dessert » il faut choisir entre les deux « ou », chacun donnant un sens différent, au bon vouloir du lecteur ! Le « OU » défini tableau 1.2 est, lui, sans ambiguïté. Rigueur des mathématiques oblige !

• **Définition 4 : P = Q**

Si la proposition P et la proposition Q dépendent des mêmes propositions A,B,C..., et, sur chacune des lignes de leur table de vérité commune, ont la même valeur de vérité, alors on dit qu'elles sont égales et on écrit $P = Q$.

2) Propriétés du NON, ET, OU

Par le biais des tables de vérité on obtient les propriétés des trois connecteurs définis plus haut.

a) ¬¬A = A

On construit la table de vérité (tableau 1.3).

Tableau 1.3

A	**¬A**	**¬¬A**
V	F	V
F	V	F

Les propositions A et ¬¬A (comprendre ¬(¬A) et lire NON NON A) ont les mêmes valeurs de vérité sur les mêmes lignes, donc $\neg\neg A = A$ d'après la définition 4.

→ ***Commentaires***

Dans le langage mathématique deux négations ont valeur d'affirmation. Ce n'est pas le cas dans le langage courant : « Non, je ne viendrai pas lundi », ne signifie pas : « Je viendrai lundi. »

b) ¬(A OU B) = ¬A ET ¬B

On construit la table de vérité (1.4).

Tableau 1.4

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**A OU B**	**¬(A OU B)**	**¬A ET ¬B**
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Les propositions ¬(A OU B) et ¬A ET ¬B ont mêmes valeurs de vérité sur les mêmes lignes, d'après la définition 4 : ¬(A OU B) = ¬A ET ¬B.

c) ¬(A ET B) = ¬A OU ¬B

On procède comme dans b), *mutatis mutandis*.

→ ***Commentaires***

Les écritures ci-dessus sont ambigües dans leur lecture ; on aurait dû écrire :

[¬(A OU B)]=[¬(A) ET (¬B)] pour b) et

[¬(A ET B)] = [(¬A) OU (¬B)] pour c).

On a implicitement (sans le dire !) décidé que « = » domine « ET » et « OU » qui eux-mêmes dominent « ¬ ». D'où la suppression des parenthèses et la simplification d'écriture. On continuera par la suite.

C. ⇒ ; Si. . . , Alors. . .

• **Définition 5 : « ⇒ » le connecteur *implication***

Soit A et B deux propositions, on définit la nouvelle proposition « A ⇒ B » (lire « A implique B » ou bien « A entraîne B » ou encore « si A, alors B ») par (A ⇒ B) = (¬A OU B). D'où la table de vérité de « A ⇒ B » (tableau 1.5).

Tableau 1.5

A	**B**	**¬A**	**¬A OU B**	**A ⇒ B**	
V	V	F	V	V	ligne 1
V	F	F	F	F	ligne 2
F	V	V	V	V	ligne 3
F	F	V	V	V	ligne 4

→ ***Commentaires***

On retiendra que la proposition A $\Rightarrow$ B est toujours vraie sauf dans le cas où A vrai et B faux (ligne 2).

On ne tentera pas de « donner du sens » à la proposition « A $\Rightarrow$ B » en l'interprétant par le « Si A, alors B » du langage de l'observateur. Ainsi dire à un ami : « Si demain il pleut, alors je viens te voir » sous-entend : « Si demain il ne pleut pas, alors je ne viens pas te voir »... et on n'est plus dans le cadre de la définition exprimée ligne 3 de la table de vérité de « A $\Rightarrow$ B ». On doit regarder la table de vérité sans réfléchir (sans réfléchir pour une fois !). Dans le langage mathématique, le seul sens d'une proposition est sa valeur de vérité, c'est-à-dire la propriété d'être vraie ou fausse.

On ne confondra pas « A $\Rightarrow$ B », proposition dont la valeur de vérité dépend de celles de A et de B avec « l'affirmation A $\Rightarrow$ B est vraie », souvent utilisée pour énoncer un théorème.

Dans A $\Rightarrow$ B, A est appelée condition suffisante pour B, et B condition nécessaire pour A. En effet, dans le cas où A $\Rightarrow$ B est vraie (lignes 1, 3, 4 de sa table de vérité) :

– Il suffit d'avoir A vraie pour être assuré de B vraie.

– On ne peut avoir A vraie et B fausse, le vrai de B est donc nécessaire au vrai de A.

Exemple : soit p un entier naturel, A et B les propositions :

– A = (p nombre premier strictement supérieur à 2)

– B = (p nombre impair)

Il est clair que A $\Rightarrow$ B est une proposition vraie, que A est suffisant (mais pas nécessaire) pour B, que B est nécessaire (mais pas suffisant) pour A.

• Propriétés du connecteur $\Rightarrow$

a) Il est *faux* que : (A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ ($\neg$A $\Rightarrow$ $\neg$B). On le constate (ligne 3, tableau 1.6).

Tableau 1.6

A	**B**	**A $\Rightarrow$ B**	**$\neg$A $\Rightarrow$ $\neg$B**	**(A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ ($\neg$A $\Rightarrow$ $\neg$B)**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

b) $(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Propriété qui se démontre par la table de vérité suivante (tableau 1.7)

Tableau 1.7

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**A ⇒ B**	**¬B ⇒ ¬A**
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Ce résultat est très utile dans les démonstrations quand, pour montrer que $A \Rightarrow B$ est une proposition vraie, il est plus commode de montrer la valeur vraie de $\neg B \Rightarrow \neg A$, appelée l'implication *contraposée* de $A \Rightarrow B$. On énonce parfois ce résultat : L'implication « $A \Rightarrow B$ » est *équivalente* à « $\neg B \Rightarrow \neg A$ » sa contraposée. Nous donnerons plus loin un sens au mot « *équivalent* ».

c) $(\neg(A \Rightarrow B)) = (A \text{ ET } \neg B)$

On peut, pour démontrer ce résultat, soit construire la table de vérité *ad hoc*, soit utiliser les propriétés du NON, ET, OU vues précédemment. Ainsi :

$$\neg(A \Rightarrow B) = \neg(\neg A \text{ OU } B) = \neg\neg A \text{ ET } \neg B = A \text{ ET } \neg B$$

→ ***Commentaire***

La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

d) L'implication est *transitive*

Propriété qui se traduit par

$$Q = \big[(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]\big]$$

est une proposition toujours vraie (tableau 1.8).

→ ***Commentaires***

La proposition $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]$ est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité de ses variables A, B, C. On dit qu'elle est *valide*.

De la même manière, *mutatis mutandis*, on montre que

$[(A \Rightarrow B) \text{ ET } (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est une proposition valide. Cette validité exprime, elle aussi, la transitivité du connecteur $\Rightarrow$.

Cette technique de preuve par table de vérité clôt toute discussion.

Tableau 1.8

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Q
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

D. $\Leftrightarrow$, Bi-implication

• Définition 6 : « $\Leftrightarrow$ » le connecteur *bi-implication*

Soit A et B deux propositions, on définit la nouvelle proposition « $A \Leftrightarrow B$ » (lire « A bi-implication B » ou encore « A si et seulement si B ») par :

$$(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \text{ ET } (B \Rightarrow A)$$

La table de vérité de « $A \Leftrightarrow B$ » est la suivante (tableau 1.9).

Tableau 1.9

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On constate, *via* la définition 4, que

– si « $A \Leftrightarrow B$ est vrai », alors « $A = B$ » ; et réciproquement.

– Si « $A \Leftrightarrow B$ est vrai », on dit que « A *équivaut logiquement* à B », ou encore les propositions A et B sont *équivalentes.*

→ ***Commentaires***

Dans la suite du cours, pour énoncer un théorème, une propriété, on écrira $A \Leftrightarrow B$ pour dire « $A \Leftrightarrow B$ est une proposition vraie », c'est-à-dire $A = B$.

De même. on écrira $A \Rightarrow B$ pour dire « $A \Rightarrow B$ est une proposition vraie ».

II. Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$

$\forall$ se lit « quel que soit », « pour tout ».
$\exists$ se lit « il existe au moins un ».

Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ une famille rangée (ou suite) de nombres réels, les indices n pris dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On considère les propositions :

– A = les a_n sont tous nuls ;

– B = les a_n sont non tous nuls ;

– C = à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls.

Pour de telles propositions, l'emploi des signes $\forall$ et $\exists$, appelés *quantificateurs*, permet de rendre mécanique 1) l'écriture des contraires ; 2) la recherche de leur lien logique ; 3) la démonstration de leur valeur de vérité dans les cas où les a_n sont explicités.

A. Règles d'utilisation

1) Le quantificateur « $\forall$ »

La proposition A = les a_n sont tous nuls :

– s'écrit « $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ » ;

– se lit « quel que soit n élément de $\mathbb{N}$, $a_n = 0$ » ;

– signifie « $a_0 = 0$ ET $a_1 = 0$ ET $a_2 = 0$ ET... etc. »

2) Le quantificateur « $\exists$ »

La proposition B = les a_n sont non tous nuls :

– s'écrit « $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ » ;

– se lit « il existe au moins un élément $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ » ;

– signifie « l'un au moins des a_n est non nul ».

3) Passage d'une proposition à son contraire

On remarque que A et B sont des propositions contraires (*i.e.* A $= \neg$B et B $= \neg$A). Si on remplace la proposition ($a_n \neq 0$) par $\neg(a_n = 0)$, les écritures suivantes font apparaître les règles permettant de passer d'une proposition contenant des quantificateurs à sa proposition contraire.

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A} = \forall n \in \mathbb{N}, & a_n = 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ \neg\mathrm{A} = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } & \neg(a_n = 0) \\ \mathrm{B} = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } & \neg(a_n = 0) \\ \downarrow & \downarrow \\ \neg\mathrm{B} = \forall n \in \mathbb{N}, & a_n = 0 \end{array}$$

Point méthode

Pour passer d'une proposition à son *contraire* :

- on remplace le signe $\forall$ par $\exists$;
- on remplace le signe $\exists$ par $\forall$;
- on remplace la proposition sur laquelle porte le signe $\forall$ par son contraire ;
- on remplace la proposition sur laquelle porte le signe $\exists$ par son contraire.

4) Propositions contenant deux quantificateurs

a) Considérons la proposition C = « à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls ».

C signifie : il existe au moins un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p = 0$ ET $a_{p+1} = 0$ ET $a_{p+2} = 0$ ET, etc. La proposition $a_p = 0$ ET $a_{p+1} = 0$ ET $a_{p+2} = 0$ ET, etc. peut s'écrire :

$$\forall n \geqslant p,\ a_n = 0$$

ou encore, *via* la définition 5 de « $\Rightarrow$ » donnée plus haut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0$$

C'est la deuxième écriture que l'on choisit.

Récapitulation :

C = « à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls » :

- s'écrit $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0$;
- se lit « il existe au moins $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant p$ alors $a_n = 0$ ».

b) Considérons la proposition D $= \neg$C et appliquons le point méthode ci-dessus vu en 3 pour l'écrire à l'aide des quantificateurs.

$$\text{C} = \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0$$

$$\neg\text{C} = \forall p \in \mathbb{N}, \neg(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0)$$

$$\neg\text{C} = \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0)$$

$$\neg\text{C} = \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant p \text{ ET } \neg(a_n = 0)$$

ou encore

$$\text{D} = \neg\text{C} = \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n \geqslant p \text{ ET } a_n \neq 0$$

On a utilisé la propriété de négation de l'implication vue plus haut, à savoir : $\neg$(A $\Rightarrow$ B) = A ET $\neg$B.

Point méthode

$P(n, p)$ étant une proposition qui dépend de n et p, la négation de la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } P(n, p)$$

est :

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \ \neg P(n, p)$$

B. Exemples

• Soit A la proposition suivante, où $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

A = Il existe dans $\mathbb{N}$ un entier plus grand que tous les autres.

À l'aide des quantificateurs, A s'écrit,

$$A = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leqslant n$$

d'où l'écriture mécanique de son contraire

$$\neg A = \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(k \leqslant n)$$

$$\neg A = \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k > n$$

La connaissance intuitive des entiers naturels permet d'affirmer que A est fausse. Quant à la démonstration de cette affirmation faisons-la en démontrant que $\neg$A est vraie.

Soit n un entier quelconque, en considérant $k = n + 1$ on a bien $k \in \mathbb{N}$ et $k > n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe (on l'a trouvé !) $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$.

Donc « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$ » est une proposition vraie.

Conclusion : $\neg$A est vrai.

→ ***Commentaires***

Dans la proposition $\neg$A, l'existence de l'entier k une fois n choisi est tout à fait concrète. En effet on sait expliciter k en fonction de n : $k = n + 1$ dans notre cas.

Pour un n choisi, il n'y a pas d'unicité de l'entier k : $k = n+2$, $k = n+3$, etc., conviennent aussi.

Dans notre exemple les entiers k qui conviennent dépendent toujours de n, mais il peut ne pas en être ainsi.

Pour déterminer la valeur de vérité de A, on a étudié $\neg$A.

• Soit H = l'ensemble des humains et $\mathbb{C}$ = l'ensemble des chaussures.

Considérons la proposition : A = « Tout le monde trouve chaussure à son pied ». À l'aide des quantificateurs, A s'écrit : A $= \forall h \in$ H $\exists c \in \mathbb{C}$ tel que la pointure de c convienne à h. Si on change l'ordre des quantificateurs dans la proposition A, la nouvelle proposition B s'écrit : B $= \exists c \in \mathbb{C}$ tel que $\forall h \in$ H, la pointure de c convient à h. La traduction de B dans le langage courant est : il existe une chaussure « taille unique » qui convient à tous.

On retiendra de cet exemple, la propriété générale suivante :

– on change le sens d'une proposition en changeant l'ordre des quantificateurs ;

– la proposition B $= (\exists c \in \mathbb{C}$ tel que $\forall h \in$ H$\ldots)$
implique la proposition A $= (\forall h \in$ H $\exists c \in \mathbb{C}$ tel que$\ldots)$.
Implication qui, dans notre exemple, se comprend aisément puisque la chaussure c dont B vrai assure l'existence, convient à tous les hommes h dans l'écriture de A.