

# homework-4

2024 fall

## 1 问题描述

设 pdf 函数满足关系式

$$p'(x) = a\delta(x) + b \exp(-cx) \quad x \in [-1, 1], a \neq 0$$

讨论该函数性质并给出抽样方法

## 2 题目解答

### 2.1 PDF

狄拉克函数积分后为阶跃函数。故积分得到分段的 pdf:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{b}{c}(e^c - e^{-cx}) + A_0 & x \in [-1, 0) \\ a + \frac{b}{c}(e^c - e^{-cx}) + A_0 & x \in (0, 1] \end{cases} \quad (1)$$

$A_0$  为归一化常数, 满足:  $\int_{-1}^1 (\frac{b}{c}(e^c - e^{-cx}) + A_0) dx + \int_0^1 a dx = 1$

### 2.2 舍选抽样法

鉴于累计函数能解析求解但反函数难以求解, 使用舍选抽样法。 $p(x)$  是分段单调的, 因此最大值为  $p(0)$  或  $p(1)$  或  $p(-1)$ , 记作  $M$ 。

在  $(0,1)$  上取随机数  $\xi_1, \xi_2$ , 根据直接抽样法:

$$\xi_x = 2\xi_1 - 1 \quad (2)$$

$$\xi_y = M\xi_2 \quad (3)$$

对于  $\forall \xi_x$ : 若  $\xi_y < P(\xi_x)$ , 保留  $\xi_x$ , 否则舍去。保留下来的  $\{\xi_x\}$  服从  $p(x)$  分布。此题没必要给出比较函数  $F(x)$ , 也不要求编写程序。