

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
АКАДЕМИЯ НАУК РБ  
СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ  
ИНСТИТУТА СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РБ  
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АДМИНИСТРАЦИЯ ГО Г. СТЕРЛИТАМАК

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ**

*Материалы  
Международной научной конференции  
(г. Стерлитамак, 12 – 15 сентября 2021 г.)*

*Том II*

УФА  
РИЦ БашГУ  
2021

УДК 517.95, 517.91, 532.546, 539.422.2

ББК 22.161

С56

*Издание печатается по решению Ученых советов Стерлитамакского филиала  
Башкирского государственного университета и Стерлитамакского филиала  
Института стратегических исследований РБ и осуществлено  
при финансовой поддержке СФ БашГУ и Правительства Республики Башкортостан*

**Рецензенты:**

д.ф.-м.н., проф. **Р.Ф. Шарафутдинов** (кафедра геофизики БашГУ);  
Лаборатория дифференциальных уравнений механики Института механики  
им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (зав. лаб., д.ф.-м.н., проф. **С.В. Хабиров**, г. Уфа)

**Редакционная коллегия:**

Ответственный редактор – д.т.н., проф. **А.И. Филиппов**;

Отв. секретари – д.ф.-м.н., проф. **П.Н. Михайлов**, к.ф.-м.н., сис **С.Н. Сидоров**.

Члены редакционной коллегии: акад. АН Узбекистана **Ш.А. Алимов** (Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент); чл.-корр. НАН Азербайджана **Б.Т. Билалов** (Институт математики и механики НАНА, г. Баку); чл.-корр. РАН **М.А. Ильгамов** (Академия наук РБ, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа); академик АН Казахстана **Т.Ш. Кальменов** (Институт математики и математического моделирования, г. Алматы), д.ф.-м.н., проф. **Н.Ю. Капустин** (МГУ им. М.В. Ломоносова, г.Москва); д.ф.-м.н., проф. **А.И. Кожанов** (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г.Новосибирск); д.ф.-м.н., проф. **И.С. Ломов** (МГУ им. М.В. Ломоносова, г.Москва); д.ф.-м.н., проф. **Н. Попиванов** (Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Sciences, г.София, Болгария) д.ф.-м.н., проф. **Л.С. Пулькина** (Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королёва, г.Самара); академик АН Таджикистана **Н.Р. Раджабов** (Таджикский национальный университет, г. Душанбе); д.ф.-м.н., чл.-корр. АН РБ **К.Б. Сабитов** (Стерлитамакский филиал БашГУ, Стерлитамакский филиал ИСИ РБ, г.Стерлитамак); д.ф.-м.н., проф. **А.П. Солдатов** (ФИЦ "Информатика и управление" РАН, г. Москва); д.ф.-м.н., акад. АН РБ **В.Ш. Шагапов** (Институт механики УФИЦ РАН, г.Уфа).

**Современные проблемы математики и физики:** материалы Международной

С56 научной конференции (г. Стерлитамак, 12 – 15 сентября 2021 г.). Том II / отв. ред.

А.И. Филиппов. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. – 256 с.

ISBN 978-5-7477-5328-0

Материалы в двух томах составлены из докладов, представленных на международную научную конференцию "Современные проблемы математики и физики", которые содержат новые результаты по спектральной теории дифференциальных операторов, теории краевых задач для дифференциальных уравнений и их приложения в механике многофазных систем, неравновесной термодинамике и математическом моделировании сложных систем. Также приведены результаты исследований актуальных проблем образования в школе и вузе.

Предназначено для специалистов в области физико-математических наук, преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

ISBN 978-5-7477-5328-0

УДК 517.95, 517.91, 532.546, 539.422.2

ББК 22.161

© Стерлитамакский филиал ИСИ РБ, 2021

© БашГУ, 2021

# Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	8
ГОДЫ, ПОСВЯЩЁННЫЕ СЛУЖЕНИЮ НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИЮ . . . . .	12
<b>Секция 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ</b>	
Башмаков Р.А., Фокеева Н.О.	
ОБ ЭВОЛЮЦИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ТРЕЩИНЕ ГРП ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДАВЛЕНИЯ НА ЗАБОЕ СКВАЖИНЫ	24
Галиакбарова Э.В.	
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОЧИСТКИ И ПЕРЕМЕШИВАНИЯ УГЛЕВОДОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ . . . . .	29
Гималтдинов И.К., Родионов А.С., Кочанова Е.Ю.	
ОБ ИНИЦИРОВАНИИ ДЕТОНАЦИИ В ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ ВОЛНАМИ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ . . . . .	34
Куликова Н.А., Фадеева О.В.	
АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА В ЗАДАЧЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА . . . . .	38
Нигматулин Р.И.	
О ГЛОБАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ КЛИМАТА . . . . .	43
Ситдикова Л.Ф.	
ПРОХОЖДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ПЕРЕГОРОДКУ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ . . . . .	45
Хабиров С.В.	
О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕД . . . . .	50
Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.	
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВОЛНОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ТРУБОПРОВОДОВ С ПОВРЕЖДЕННЫМИ УЧАСТКАМИ МЕТОДОМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ . . . . .	60
Шагапов В.Ш., Хусаинов И.Г., Хакимова З.Р.	
К ЗАДАЧЕ О РЕЛАКСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ В ТРУБОПРОВОДЕ С ПОВРЕЖДЕНИЕМ СТЕНКИ . . . . .	64
Юлдашева А.В.	
О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С ПЕРИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ . . . . .	67

## Секция 7. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОДИНАМИКИ И ТЕПЛОФИЗИКИ

**Ala V., Demirbilek U., Mamedov Kh.R.**

NEW EXACT TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF (1+1)-  
DIMENSIONAL SPACE-TIME FRACTIONAL SCHRODINGER  
MODEL . . . . . 71

**Ахметова О.В., Ковальский А.А.**

ПОГРАНСЛОЙНАЯ ЗАДАЧА ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕД-  
СТАВЛЕНИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ . . . . . 76

**Зеленова М.А., Филиппов А.И.**

ОБРАЩЕНИЕ ДЕН ИЗЕГЕРА В ЗАДАЧАХ О ПОЛЯХ ТЕМПЕРА-  
ТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ И СКВАЖИНЕ . . . . . 79

**Зеленова М.А., Филиппов А.И.**

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ С ИСПОЛЬ-  
ЗОВАНИЕМ ИДЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА . . . . . 87

**Михайлов П.Н., Филиппов А.И.**

ОСОБЕННОСТИ ВЫТЕСНЯЮЩИХ СВОЙСТВ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ 90

**Низамова Л.И., Переверзева Р.Р.**

ПЛАЗМЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ПО-  
ВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТВЕРДЫХ  
ТОПЛИВ . . . . . 99

**Родионов А.С., Низамова Л.И.**

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕ-  
СКОМ КАНАЛЕ С ИЗМЕНЕНИЕМ РАДИУСА . . . . . 102

**Спиридонова Н.А.**

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКО-  
СТИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЯХ ДАВЛЕНИЯ . . . . . 107

**Филиппов А.И., Зеленова М.А.**

НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУ-  
ГИХ ПОЛЕЙ В МЫШЕЧНОЙ ТКАНИ . . . . . 110

**Филиппов А.И., Зеленова М.А.**

НЕКОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ О ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В  
СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ЗАДАННОМ  
ОТБОРЕ . . . . . 118

---

**Филиппов А.И., Кабиров И.Ф.**

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ НА ЭТАПЕ ВЫДЕРЖКИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ СОЛЯНОКИСЛОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА КАРБОНАТОСОДЕРЖАЩИЙ НЕФТЕГАЗОВЫЙ ПЛАСТ . . . . . 125

**Хасанов И.Ю.**

ТЕХНОЛОГИЯ И УСТАНОВКА ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕСТАБИЛЬНЫХ ГАЗОВЫХ КОНДЕНСАТОВ НА НЕФТЕПРОМЫСЛАХ . . . . . 129

**Шабаров А.Б., Шастунова У.Ю., Сахарова М.С.**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ПАРАФИНИСТОЙ НЕФТИ В НЕФТЕПРОВОДЕ . . . . . 133

**Секция 8. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ**
**Байрамдурдыев Д.Я., Маликов Р.Ф.**

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С СУПЕРКРИСТАЛЛОМ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК В СРЕДЕ ANYDYNAMICS . . . . . 135

**Биккулова Н.Н., Цыганкова Л.В.**

ДИНАМИКА РЕШЕТКИ СУПЕРИОННЫХ ПРОВОДНИКОВ CU2SE И AG2TE . . . . . 140

**Галиакбарова Э.В.**

К ЗАДАЧЕ ОЧИСТКИ НЕФТИ ОТ МИНЕРАЛИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ ПЛАСТОВОЙ ВОДЫ . . . . . 152

**Гурская А.В., Колайкова О.И., Долгополов М.В.**

УРАВНЕНИЯ РОСТА ФАЗЫ SiC\*/Si В CVD-РЕАКТОРЕ . . . . . 155

**Давлетшина М.Р., Столповский М.В., Чиглинцева А.С.**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ МОНОЛИТА ГИДРАТА . . . . . 158

**Каюмов Ш., Мустапокулов Х.Я., Каюмов А.Б.**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ АНОМАЛЬНЫХ ФЛЮИДОВ 163

**Кильдибаева С.Р., Гималтдинов И.К.**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНОЙ СТРУИ С УЧЁТОМ СЕПАРАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ . . . . . 171

<b>Нафикова А.Р., Кризский В.Н.</b>	
ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА РАДОНА В АНИЗОТРОПНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ . . . . .	175
<b>Петров И.Б.</b>	
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕФТЕГАЗОВОЙ ИНДУСТРИИ В АРКТИЧЕСКОМ РЕГИОНЕ . . . . .	180
<b>Половинкина М.В., Половинкин И.П.</b>	
ОВ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В БИО- ЛОГИИ . . . . .	181
<b>Филиппов А.И., Губайдуллин М.Р.</b>	
КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ РАСЧЕТЫ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ В НЕСОВЕРШЕННО ВСКРЫТОМ ПЛАСТЕ . . . . .	186
<b>Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А.</b>	
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА НА ПОТРЕ- БИТЕЛЬСКОЕ КРЕДИТОВАНИЕ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ В РОССИИ . . . . .	191
<b>Цыганов Ш.И., Белова А.С.</b>	
SIR-МОДЕЛЬ КЕРМАКА-МАККЕНДРИКА ДЛЯ ОЦЕНКИ РАЗ- ВИТИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19 . . . . .	196
<b>Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Каримова Г.Р., Ха- кимова З.Р.</b>	
ВОЛНЫ СТОУНЛИ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОГО И ТВЕРДОГО ПО- ЛУПРОСТРАНСТВ . . . . .	199
<b>Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З.</b>	
ДИНАМИКА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ, СООБЩАЮЩЕЙСЯ С ПЛАСТОМ . . . . .	201
<b>Секция 9. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕ- СКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ</b>	
<b>Башмаков Р.А., Коробчинская О.Г., Махота А.А.</b>	
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ НЕФТЕДОБЫЧИ .	205
<b>Бенгина Т.А., Лиманова Л.В., Муратова Л.А.</b>	
ОСОБЕННОСТИ ДИСТАНЦИОННОГО ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕ- МАТИКИ В ВУЗЕ . . . . .	210
<b>Воистинова Г.Х.</b>	
ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .	213

---

<b>Минченков Н.Д., Кунсбаева Г.А.</b>	
НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭНЕРГИИ СВЯЗИ И МАССЫ ПОКОЯ АТОМНЫХ ЯДЕР . . . . .	216
<b>Михайлов П.Н., Михайлова В.В.</b>	
СИСТЕМАТИЗАЦИЯ КЛЮЧЕВЫХ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ И МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ . . . . .	217
<b>Охтя Н.В.</b>	
РОЛЬ МЕТОДА ПРОЕКТОВ В ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА ОБРА- ЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА . . . . .	230
<b>Салаватова С.С.</b>	
МЕТОДИЧЕСКИЕ СИТУАЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ОШИБКАМИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ . . . . .	236
<b>Салаватова С.С., Юлбарисова Ю.Ш.</b>	
АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧА- ЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБРА- ЗОВАТЕЛЬНОГО РЕСУРСА LEARNIS . . . . .	244
<b>Старирадева Й.М.</b>	
АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ДО- ШКОЛЬНИКОВ НА ИНТЕГРИРОВАННЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО МА- ТЕМАТИКЕ И КОНСТРУИРОВАНИЮ . . . . .	249
<b>Хакимов А.Г.</b>	
О РОЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ . . . . .	255
<b>Шарафеева Л.Р.</b>	
ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ . . . . .	260

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник материалов конференции в двух томах составлен на основе научных докладов, представленных ведущими учеными на Международную научную конференцию "Современные проблемы математики и физики посвященную 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова.

Основные направления работы (секции) конференции:

Секция 1. Спектральная теория дифференциальных операторов.

Секция 2. Теория функций и функциональный анализ.

Секция 3. Краевые задачи для дифференциальных уравнений.

Секция 4. Обратные и некорректные задачи.

Секция 5. Уравнения смешанного типа.

Секция 6. Математические проблемы механики.

Секция 7. Прикладные задачи термодинамики и теплофизики.

Секция 8. Математическое моделирование сложных процессов и систем.

Секция 9. Актуальные проблемы математического образования в школе и вузе.

В первый том вошли материалы секций 1–5, а во второй – секций 6–9. Статьи первого тома посвящены преимущественно фундаментальной математической проблематике, а второго тома – прикладной.

В материалах первой секции представлены новые достижения в области спектральной теории дифференциальных операторов. Рассмотрены актуальные проблемы существования и единственности решения для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе в неограниченных областях. Представляют существенный интерес результаты по уравнениям с дробными производными высокого порядка, дискретной задаче Римана, задачам с нелокальными граничными условиями и т.п. Полученные результаты иллюстрируются на примерах конкретных практических задач о квантовых графах, колебаниях балки, теории фильтрации и ориентированы на создание новых алгоритмов решения прямых и обратных задач.

Во второй секции освещены проблемы устойчивости базисов из возмущенных систем экспонент, частично интегральных операторов в конкретных пространствах, разрешимости в малом эллиптических уравнений высокого порядка в симметричных пространствах, единственности решения частно-интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром в анизотропных пространствах Лебега и т.д.

---

Рассмотрены неравенства Колмогорова для пространств Соболева, весовой частно-интегральный оператор и оператор Киприянова с отрицательными показателями операторов Бесселя, приведены явные решениях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особыми линиями.

Материалы третьей секции наиболее обширно представлены в настоящем сборнике и содержат статьи, представляющие новые результаты по краевым задачам для дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи предингеровской бегущей волны, исследованы единственность краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом и задачи с условием Геллерстедта на параллельных характеристиках для одной специальной области, класс интегро-дифференциальных уравнений многоточечными и интегральными условиями. Рассмотрены задача Коши для нагруженного одномерного волнового уравнения, а также задача с динамическим нелокальным условием для гиперболического уравнения. Исследованы проблемы интегрирования нелинейного уравнения SINE-GORDON с источниками.

В статьях четвертой секции развита теория обратных и некорректных задач. Рассмотрены обратная задача по определению мест и источников начала колебания мембранные, проблемы разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа и существование решения обратных коэффициентных задач для системы уравнений в частных производных.

Освещена проблема интегрирования нагруженного уравнения КДФ с источником интегрального типа, трехмерных обратных задач восстановления магнитной восприимчивости по экспериментальным данным.

Цикл работ по исследованию уравнений смешанного типа представлен в материала секции 5. В представленных работах исследованы разрешимость задачи Келдыша для одного уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами, задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя плоскостями изменения типа, задача для нелокального уравнения смешанного типа дробного порядка с вырождением, задача с аналогом условия Франкли на отрезке вырождения для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка. Описаны результаты по расположению спектра задачи Трикоми для операторов смешанного

эллиптико-гиперболического типа и сформулированы актуальные задачи в этом направлении. Приведены новые нелокальные спектральные эллиптические задачи, которые в общем случае не исследованы. Также описаны нерешенные задачи по нелокальной проблеме Франкля и задачи с отходом характеристики.

В материалах шестой секции представлены результаты исследований полей давления в трещинах гидроразрыва нефтегазовых пластов, процессов очистки и перемешивания углеводородов, процессов детонации в пузырьковой жидкости, акустических процессов в пористой среде. Освещены преобразования эквивалентности газодинамических сред, исследованы новые особенности процессов релаксации давления в трубопроводе, приведено решение задач волнового зондирования трубопроводов.

В материалах секции 7 представлены новые теоретические результаты по неравновесной термодинамике и теплофизике. Представляют значительный научный и практический интерес результаты по температурным эффектам при фильтрации жидкости в нестационарных полях давления. На основе развитых теоретических представлений обнаружены новые физические эффекты, определяющие вытесняющие свойства пористой среды. Получены новые результаты по теплофизическому процессам при солянокислотном воздействии. Обсуждается использование идей искусственного интеллекта при исследовании полей давления в пласте.

Проблемам математического моделирования сложных процессов и систем посвящено содержание секции 8. Обсуждаются проблемы и достижения математического моделирования и разработки вычислительных алгоритмов решения различных задач, описывающих очистку нефти от минерализованных частиц, роста фазы в реакторе. Представлены программные комплексы исследования процессов переноса радона в анизотропных геологических средах, динамики собственных колебаний жидкости в скважине, рассмотрены волны Стоунли на границе жидкого и твердого полупространств. Обсуждается математическое моделирование спроса на потребительское кредитование домашних хозяйств в России, представлены новые модели развития пандемии COVID-19.

В девятой секции представлены результаты исследований актуальных проблем образования в школе и вузе. Рассмотрено применение прикладной математики в задачах нефтедобычи, освещены проблемы дистанционного преподавания математики в вузе, роль метода

проектов в повышении качества образовательного процесса, роль математики при подготовке инженеров-механиков.

Большинство статей печатается в авторской редакции.

Доклады отражают последние достижения научных исследований по указанным направлениям, ведущихся в России и мире. Работы, представленные в сборнике, демонстрируют высокий уровень квалификации авторов, представляют научный интерес, и будут полезны для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся по теории дифференциальных уравнений и их приложений.

*Редакторы*

## ГОДЫ, ПОСВЯЩЁННЫЕ СЛУЖЕНИЮ НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИЮ

### А ВЕДЬ МОГ НЕ ПОСТУПИТЬ НА ФИЗМАТ

В своей автобиографии Камиль Басирович записал: "родился в д. Елембетово Стерлибашевского района БАССР в семье служащего". Всё верно, за исключением, пожалуй, одного: отец Басир Кабирович, служащим стал поневоле. В сорок первом добровольцем ушёл на фронт, а в сорок втором вернулся инвалидом I группы. К тяжёлому крестьянскому труду уже был бы негоден. Трудовую деятельность продолжил бухгалтером-ревизором Стерлибашевского района. Заново учился ходить, заново жить. Матери Миникамал Мухамадулловны - фронтовички-зенитчицы - не стало, когда Камилю Басировичу было двадцать: сказались фронтовые раны. Семья бухгалтера-ревизора района то и дело меняла место жительства. Из-за этого все трое детей родились в разных сёлах. Работа бухгалтера связана с цифрами. Возможно, это обстоятельство и повлияло на судьбу среднего сына в семье Сабитовых. Камиль с детства любил математику. В старших классах он уже лидировал на районных олимпиадах по физике, математике, химии. Неудивительно, что в юности Камиль видел своё будущее на инженерном поприще. Но мечту о нефтяном институте перечеркнула болезнь матери и последствия фронтовых ран отца. И уже в последний момент, 31 июля, родители решились отпустить сына в ближайший город, в котором имелся вуз. Так, в 1968 году серебряный медалист Тятер-Араслановской школы Камиль Сабитов подаёт документы на физико-математический факультет СГПИ. И... проваливает первый экзамен по математике. Проза жизни: в канун экзамена будущий профессор отравился. Спасибо ректору института И.И.Насырову: вызвал медалиста "на ковёр выслушал его и поставил условие: если второй экзамен по математике устно сдаст на пять, можно будет вести речь о пересдаче - случай беспрецедентный.

Окончив физмат с отличием в 1973 году, К.Б.Сабитов начинает трудовую деятельность ассистентом кафедры математики. Служба в армии не ослабила у парня страсть к математическим наукам. После демобилизации он поступает в аспирантуру Куйбышевского (Самарского) государственного педагогического института (КГПИ), к известному учёному профессору С.П.Пулькину, основателю Самарской

школы математиков. На первом же собеседовании, вердикт профессора поверг аспиранта в шок: "У вас очень слабая подготовка, юноша. Надо будет подрасти до университетского уровня".

И действительно, уровень педагогического института, ориентированного на подготовку школьных учителей, в то время был далёк от университетского. Под руководством Пулькина, разработавшего для аспиранта специальную программу, он выучился в аспирантуре и блестяще защитил кандидатскую. А по возвращении сделал для себя соответствующие выводы. Возглавив кафедру математического анализа СГПИ и впоследствии - физико-математический факультет, он кардинально пересмотрел институтские программы, "перекроив" их под университетские.

Ещё одной несомненной удачей в своей судьбе Камиль Басирович считает стажировку в Новосибирском государственном университете. Здесь он понял одну истину: базовые курсы студентам должны читать ведущие специалисты, профессора. И дело не только в научных степенях. Именно на этих курсах специалисты имеют возможность готовить своих последователей из числа наиболее одарённых студентов. Это "открытие" скажется на принципах его руководства физматом СГПИ. С 1992 по 2007 годы Камиль Басирович сделает многое, чтобы базовые дисциплины обязательно вели профессора.

После окончания докторантуры при кафедре общей математики факультета ВМК МГУ в 1992 году, он стал первым, в полувековой истории этого вуза, доктором наук.

**— Расскажите о Ваших научных результатах.**

— Первые результаты мои были получены при исследовании на корректную постановку краевых задач типа Дарбу, Дирихле и Трикоми (задача Т) для уравнений смешанного типа с сильным характеристическим вырождением

$$x^n u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + c u = 0, \quad n = \text{const} > 0, \quad c = \text{const}, \quad (1)$$

в ограниченных и неограниченных областях. Были установлены точные по  $n$  классы решений уравнения (1), в которых доказаны теоремы единственности и существования регулярных решений указанных выше краевых задач в классе ограниченных вблизи линии  $x = 0$  функций. Тем самым, известные результаты Келдыша М.В. для эллиптических уравнений были перенесены для уравнения смешанного типа (1). Эти результаты составили основное содержание кандидат-

ской диссертации, защищённой в г. Куйбышев (ныне г. Самара) 2 апреля 1980 года под руководством известного учёного доктора физико-математических наук, профессора Пулькина С.П.

В дальнейшем под руководством В.А. Ильина, А.В. Бицадзе и Е.И. Моисеева из МГУ им. М.В. Ломоносова начал заниматься вопросами качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа, моделирующие околозвуковые течения жидкости и газов, магнитогидродинамические течения с переходом через скорость звука. Эти исследования имеют также важное значение в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, теории оболочек с кривизной переменного знака, теории сопел Лаваля и плазмы.

Были установлены:

- качественные свойства решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных для обоснования корректности постановки краевых задач для уравнений смешанного типа с гладкой и негладкой линией изменения типа;
- спектральные свойства решений краевых задач для уравнений смешанного типа с гладкой и негладкой линией изменения типа;
- разработан метод спектрального анализа (аналога метода Фурье) для решения краевых задач для уравнений смешанного типа.

Приведённые выше результаты составили основное содержание докторской диссертации, защищённой 10 марта 1992 года.

В дальнейшем я вёл и веду исследования со своими учениками по следующим направлениям:

- 1) изучение качественных и спектральных свойств решений краевых задач для уравнений смешанного типа с гладкой и негладкой линией вырождения;
- 2) разработкой спектрального метода построения (аналога метода Фурье) решений краевых задач для уравнений смешанного типа;
- 3) разработкой численных методов решения краевых задач для уравнений и систем уравнений смешанного типа;
- 4) локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа второго и высоких порядков в прямоугольных областях;
- 5) обратные задачи для уравнений смешанного типа;
- 6) начально-граничные и обратные задачи для уравнений колебаний балок и пластин.

По результатам этих исследований опубликованы в центральной печати более 200 статей и монографии:

---

1. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.

2. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.

3. Отправлена в редакцию «Наука» новая монография «Обратные задачи уравнений математической физики».

За эти годы было подготовлено 35 кандидатов физико-математических наук. При моей поддержке защищены докторские диссертации: Репин О.А. (1998), Кризский В.Н. (2004), Раджабова Л.Н. (2008), Михайлов П.Н. (2009), Кожевникова Л.М. (2009), Дорофеев А.В. (2011).

— **Какие результаты были достигнуты в годы Вашего деканства?**

— С 1981 года на базе физико-математического факультета СГПИ организовал и руководил научным семинаром по теории дифференциальных уравнений. Из участников семинара более 50 человек закончили аспирантуру, из них более 40 успешно защитили диссертации.

В 1994 году по моей инициативе, впервые в истории СГПИ на базе физико-математического факультета открыта аспирантура по 3-м специальностям: 01.01.02 – дифференциальные уравнения; 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы; 01.04.15 – молекулярная физика и теплофизика, что стало возможным благодаря приглашению д.т.н., проф. Филиппова А.И. из БашГУ на наш факультет при поддержке тогдашнего главы города Ахметова С.Г., т.е. город обеспечил семью Филиппова А.И. жильем.

Будучи профессором кафедры математического анализа СГПИ, читал лекции по математическому анализу, по теории функций вещественной и комплексной переменной, дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики; разработал различные спецкурсы по специализациям: дифференциальные уравнения, уравнения математической физики. Написал студентам учебные пособия:

1. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 2003. 256 с.

2. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высшая школа, 2005. 672 с.

3. Основные элементарные функции. М.: Высшая школа, 2010. 176 с.,

которые опубликованы под грифом УМО и Министерства образования и науки РФ.

В 2013 г. в издательстве «Физматлит» вышло второе издание «Уравнения математической физики» в качестве учебника для университетов страны. Подготовлено третье издание этого учебника, планируется опубликовать в этом году в «Физматлит».

Как декан физико-математического факультета особое внимание уделял созданию центра новых информационных технологий, научно-исследовательских лабораторий и семинаров при кафедрах, применению вычислительной техники в учебном процессе и в научных исследованиях. За годы моего деканства (1992–2007) были созданы 5 новых кафедр (их стало 9 на физмате), так как при поддержке Ахметова С.Г. были приглашены известные ученые Шагапов В.Ш., Мукминов Ф.Х. и др. Факультет значительно вырос в научном отношении, оステпененность преподавателей достигла 90%.

Принимал участие в различных мероприятиях в области школьного и вузовского математического образования. В течение более 10 лет являлся председателем жюри Республиканской математической олимпиады школьников, которые проводились на базе физмата СГПИ; членом научно-методического объединения математических кафедр Урала и Поволжья по линии Минобрнауки РФ. Являюсь членом НМС по прикладной математике и информатике УМО классических университетов России.

**— Когда появилась идея об открытии в Стерлитамаке филиала Академии наук?**

— В г. Стерлитамак к 1995 г. сложился достаточно высокий научный потенциал, в связи с чем при поддержке мэра города Ахметова С.Г., институтов (СГПИ, СФ УГНТУ, СФ БГУ) и крупных промышленных предприятий химии и нефтехимии 19 июня 1995 года на Общем собрании АН РБ мы обратились с предложением о создании филиала АН РБ в г. Стерлитамак. Наша инициатива, прежде всего, была поддержана тогдашним Президентом АН РБ академиком РАН Нигматулиным Р.И., а затем и Общим собранием. В решении Общего собрания АН РБ появилась строка о создании в г. Стерлитамак опорной научной базы – филиала АН РБ.

Вопрос о создании научного центра в г. Стерлитамак обсуждался в заседаниях Президиумов АН РБ и УНЦ РАН, по результатам которых были приняты постановления о необходимости создания фили-

---

ала АН РБ на базе вузов и лабораторий крупных нефтехимических предприятий Южного региона РБ. Директором-организатором филиала был назначен я, и была проведена большая работа по реализации постановлений совместных Президиумов АН РБ и УНЦ РАН от 15.12.1995 г. и 14.02.1996 г.

При поддержке руководства РБ в лице Премьер-министра РБ Бакиева Р.С. 25 ноября 1996 года вышло постановление №310 КМ РБ "Об открытии в городе Стерлитамак филиала АН РБ" для решения научных задач в области экологии, конверсии, природопользования и здравоохранения, создания новых технологий, подготовки научно-педагогических кадров, а также проведения фундаментальных исследований в области социально-гуманитарных и медико-биологических наук, математического моделирования сложных естественно-научных систем, плазмохимических технологий, в целях социально-экономического развития Юго-западного региона РБ.

В период становления филиала существенную поддержку оказали вице-президенты АН РБ: академик АН РБ, чл.-корр. РАН Ильгамов М.А., академики АН РБ Гумеров А.Г., Ураксин З.Г., Вахитов В.А.; академики-секретари отделений академики АН РБ Бакиев А.В., Магазов Р.Ш., Абдрахманов И.Б. и чл.-корреспонденты АН РБ Мазунов В.А., Галяутдинов И.Г., Хазиев Ф.Х. и другие члены АН РБ. Затем большую поддержку оказали будучи президентом АН РБ Ильгамов М.А., вице-президент АН РБ Кунакова Р.В. и др. члены президиума АН РБ.

В составе СФ АН РБ созданы 5 отделов и 19 лабораторий на базе Вузов и НТЦ крупных предприятий южного региона РБ. За годы деятельности филиала (института) совместно вузами региона защищены 40 докторских и более 180 кандидатских диссертаций, проведены 13 научных конференций регионального, 15 - всероссийского, 7 - международного уровня, школы и совещания-семинары. Издано 55 сборников научных трудов, 87 монографий, 204 учебников, 7102 статей в центральной и зарубежной печати, более 300 патентов на изобретения.

За эти годы на юге республики сложилось несколько научных школ по механике многофазных систем (рук. Шагапов В.Ш.), по дифференциальным уравнениям (рук. Сабитов К.Б.), по теплофизике (рук. Филиппов А.И.) и др. В числе научных достижений филиала относятся работы профессора И.Ю.Хасанова по раз-

работке комплексной системе предупреждения и ликвидации аварий и их последствий на магистральных нефтепроводах. Созданы фильтры для системы магистрального трубопроводного транспорта нефти, камеры для технического обслуживания и проведения ремонтных работ на трубопроводе в условиях болот и обводненной местности, Всесезонный комплекс для локализации и сбора нефти с поверхности воды, сепаратор для дегазации и фракционирования нестабильных газовых конденсатов и многое другое. И не просто созданы, а внедрены на ведущих предприятиях страны, таких как "Транснефть" "Башнефть" "Татнефть" "Газпром" и других. Сейчас фильтрами-грязеуловителями оснащены все магистральные нефтепроводы страны в т.ч. Балтийская трубопроводная система, Каспийский трубопроводный консорциум, система трубопроводов Восточная Сибирь - Тихий Океан и другие.

В нашем регионе не редки заболевания щитовидки из-за недостатка йода в почве. В связи с чем в Стерлитамакском филиале АН РБ на базе филиала МГУ Технологий и управления в 2004 году была создана лаборатория Пищевых технологий под руководством докторов биологических наук А.Н.Мамцева и В.Н.Козлова, где был синтезирован новый БАД и на Мелеузовском молочноконсервном комбинате разработана и налажена технология производства пастеризованного молока, обогащённого йодом.

Юг Башкирии - крупный промышленный центр. В связи с чем была создана лаборатория перспективных конструкций и моделирования технологических аппаратов под руководством члена-корреспондента АН РБ А.К.Панова. Только с 1991 по 2006 годы на предприятиях города было внедрено 13 научно-технических разработок с общим годовым экономическим эффектом более 50 млн. рублей в ценах тех лет. В стенах филиала шла и интенсивная научная работа. О достижениях стерлитамакских учёных знают не только в России, но и далеко за рубежом. Здесь велись совместные изыскания с учёными зарубежных стран. Словом, СГПИ созрел для открытия специализированного учёного совета по защите диссертаций.

- Но убедить Высшую аттестационную комиссию России в необходимости его открытия было архисложно, - признаётся Камиль Басирович. - Мы многократно обращались с письмами в ВАК. А сколько раз я сам лично выезжал в Москву! Порой опускались руки. Существенную помощь нам оказали академики РАН В.А.Ильин и Р.И.Нигматулин. На заседании президиума ВАКа наш вопрос вы-

---

носился три раза. И всё же, в декабре 2003 снова при поддержке Р.И.Нигматулина года при СГПИ диссертационный совет на соискание учёной степени кандидата наук был открыт. Здесь состоялись защиты 40 кандидатских диссертаций (в том числе из Уфы, Самары, Москвы, Новосибирска, Челябинска, Магнитогорска, Орска).

**— Как Вы оцениваете качество подготовки в Вузах?**

— Увы, качество подготовки в вузах падает. И это падение за-кладывается уже в школе, одна из основных причин этого — ЕГЭ. При подготовке к ЕГЭ учеников натаскивают на решение определённого типа задач в ущерб формированию научного мировоззрения и навыков самостоятельной работы над учебниками и специальной литературой. Первые три года введение ЕГЭ я поддерживал, так как преподаватели не привлекались в приемную комиссию и полноцен-но отдыхали в летнее время, но затем стало прослеживаться замет-ное падение уровня подготовки выпускников школ. Считаю, что ЕГЭ нужно отменить и вернуться к прежней системе обучения, то есть по всем основным дисциплинам ввести госэкзамены. Если ЕГЭ не отме-нять, то хотя бы дать право вузам по каждой специальности ввести один устный или письменный экзамен, что уравняет шансы тех, кто сдал ЕГЭ самостоятельно без посторонней помощи. Это предложе-ние былозвучено не так давно ректором МГУ академиком РАН В.А.Садовничим. Это поможет снять наболевшие проблемы: в наши Вузы придут более подготовленные выпускники, значительно умень-шившись отток молодежи в другие регионы.

Другая причина - в процессах оптимизации в самих вузах, кото-рые начались после известного Указа Президента РФ от 2012 года. Не углубляясь в подробности, отмечу реальное сокращение часов. Например, по какой-то дисциплине на обучение выделяется 100 ча-сов, из них 50% отводится на самостоятельное изучение студентами, а при этом на проверку знаний никаких часов не планируется, хотя в зачетке студента изучение этого предмета оформляется на все 100 часов.

Уменьшились часы на выполнение курсовых и дипломных работ. В некоторых вузах отменили даже госэкзамены. В связи с чем, от-менены также и обзорные лекции по подготовке к госэкзаменам. Эти экзамены играют важную роль в подготовке выпускников вузов, так как чтение обзорных лекций и сдача госэкзаменов дают возможность выпускникам на более высоком уровне пройти по изученным ранее

дисциплинам, осознать их важность, понять и разобраться в тех вопросах, которые остались не изученными на младших курсах. Я убедился в этом на своем опыте.

Последние годы идет значительное сокращение базовых дисциплин, например, раньше курс высшей математики в технических Вузах велся в течение первых четырех семестров, а теперь планируется вести только на первом курсе.

**— Камиль Басирович, вы долгие годы являетесь членом Президиума Академии наук Башкортостана и директором Стерлитамакского филиала АН РБ. Как вы оцениваете роль Академии наук РБ в нашем обществе?**

— Созданная в 1991 году указом первого Президента РБ Рахимова М.Г. Академия наук сыграла и играет важную роль в нашем обществе. Её создание позволило в тяжелые 90-е годы сохранить научный потенциал республики, остановило отток учёных из Башкортостана. В 1996 и чуть позже были открыты филиалы АН РБ в Стерлитамаке и Сибае. Особенно активными периодами в работе Академии стали годы, когда её возглавляли академик РАН Р.И. Нигматулин, член-корреспондент РАН М.А. Ильгамов. Затем последовал определенный спад. Академия координировала научную деятельность всей республики, финансировала проекты учёных по наиболее важным в практическом плане направлениям. Вела активную работу по подготовке научных кадров путём выделения средств аспирантам и их научным руководителям. Планировала и активно помогала в проведении многочисленных научных семинаров и конференций различного уровня. Самое главное, вела фундаментальные исследования по социально-гуманитарным, медико-биологическим, сельскохозяйственным, физико-математическим и техническим наукам. Эти исследования всегда поддерживались грантами самой Академии, РФФИ, РГНФ, РНФ. К сожалению, в последние годы уделялось мало внимания развитию и сохранению АН РБ. Сокращены средства на исследовательские проекты по отделениям, на подготовку аспирантов, на проведение научных конференций. Не индексированы стипендии членам АН РБ, хотя в других госакадемиях это давно сделано.

Чтобы оживить работу АН РБ, думаю - надо привлечь в руководство известных в РБ и РФ учёных своими крупными достижениями и обладающими организаторскими способностями.

Академия наук - это символ суверенитета нашей республики, ее

---

надо всячески поддерживать и развивать, сохранить филиалы в городах Стерлитамак и Сибай. В противном случае ее следует назвать Академией наук г. Уфы.

Наука, как писал выдающийся ученый В.А. Стеклов, есть нравственный образователь человечества, выражющий высшую степень образованности человеческого общества.

— **Каково Ваше отношение к объединению вузов РБ?**

— Прежде чем ответить на этот вопрос, давайте обратимся к опыту наших соседей. В Самарской области, когда губернатором был Н.И.Меркушин (2014-2017 гг.), путём объединения Самарского государственного технического университета (бывшего политехнического института) и Самарского государственного архитектурно-строительного университета был создан в 2015 году опорный вуз СамГТУ, а в 2016 году был создан Самарский национальный исследовательский университет им.С.П.Королёва путем объединения Самарского государственного авиационного университета и Самарского госуниверситета. При этом область добилась привлечения дополнительных средств из центра для развития науки и образования, однако спустя годы выяснилось, что часть научных кадров СГУ и СГАСУ ушла в другие вузы области и регионы. По существу эти два вуза потерялись в этих объединениях, и число вузов сократилось на два. В эти годы я работал на полставки в двух вузах Самары: педагогическом университете и СГАСУ, руководил научной работой аспирантов и соискателей и для этих вузов подготовил 10 кандидатов физико-математических наук, одна из них стала доктором наук. Поэтому ситуацию по объединению вузов знаю изнутри.

В Татарстане в 2010 году подали заявку на создание Федерального университета путём объединения трёх вузов: КГУ, КГПУ и Казанской экономической академии, они выиграли в этом конкурсе. Но мы, к сожалению, с опозданием подали заявку на создание Федерального университета путём объединения трёх вузов: БГУ, СГПА и БГПИ и не выиграли конкурс.

В 2009-2010 гг. при финансовой поддержке Правительства РТ Казанский государственный авиационный университет и Казанский химико-технологический университет приняли участие в конкурсе на создание национально-исследовательских университетов и стали победителями. Руководство РТ в 2012 году пошло на создание инновационного университета Иннополис на новой площадке типа "СКОЛ-

КОВО" в Московской области, где обучаются около 800 студентов с привлечением более 260 преподавателей из 24 стран с опытом работы в ведущих кампаниях мировой ИТиндустрии. По итогом 2020 года этот университет опубликовал 310 статей на базе Scopus, выиграл 55 грантов и проектов на сумму 6201 млн. руб. и привлек 434,2 млн. руб. спонсорских средств из различных компаний. Появление новых университетов в Татарстане мне довелось наблюдать являясь долгие годы членом диссертационного совета при Институте математики и механики КГУ, затем КФУ.

Выступая с новой инициативой создания НОЦ Евразийский университет путём объединения двух крупных университетов УГАТУ и БГУ, Глава Республики Башкортостан Р.Ф. Хабиров желает исправить ранее допущенные ошибки и привлечь дополнительные финансовые средства из центра в РБ. При этом чрезвычайно важно, чтобы после объединения УГАТУ и БГУ, в новом составе не потерялись научные школы, образовательные направления и традиции, наработанные годами, как это случилось в Самаре, а наоборот, полученные финансовые средства способствовали бы их дальнейшему развитию.

**— Камиль Басирович, где взять ресурсы для развития науки и образования кроме национальных проектов по этим областям?**

— По Конституции нашей страны все имеют равные права на получение образования независимо, где они обучаются - в Стерлитамаке, Уфе, Москве т.д., поэтому Правительством РФ должны быть созданы равные условия для обеспечения данного конституционного права, что у нас не выполняется. Причиной тому является недостаточное финансирование Вузов и НИИ. Откуда взять средства? Прежде всего, ввести прогрессивную шкалу налогообложения, налог на роскошь как в других развитых странах Запада и Востока. Значительно сократить расходы на государственное и муниципальное управление. Н.И. Меркушин за 4 года руководства Самарской областью сократил расходы на госуправление с 11 млрд. до 8 млрд. и освободившиеся средства 3 млрд. направил на развитие науки и образования (Волжская коммуна, № 28 от 3 февраля 2017 г.).

В соседней республике Казахстан в этом году финансирование научных проектов увеличили в два раза, а к 2024 году планируют увеличить в 7 раз. В КНР планируют поднять финансирование науки в 17 раз. Отсюда идут успехи развития этих стран.

## С НАДЕЖДОЙ НА БУДУЩЕЕ

И всё же профессор не теряет оптимизма. В условиях объединения ведущих вузов республики забрасывает вышестоящие инстанции письмами и обращениями, направленными на развитие науки и образования в городе. "Необходимо сократить отток молодёжи и научных кадров, — пишет он в одном из таких посланий. — Существенным шагом в этом направлении было бы создание самостоятельного вуза в Стерлитамаке, отвечающего современным трендам в плане подготовки высококвалифицированных кадров для промышленных предприятий юга республики, реализации проектов особой экономической зоны (ОЭЗ) "Алга", школ и в целом для формирования крупной Южно-Башкортостанской агломерации "Стерлитамак–Салават–Ишимбай...".

*Собственный корреспондент газеты  
"Стерлитамакский рабочий" Фаяз ЮМАГУЗИН*

## **Секция 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ**

УДК 532.5

### **ОБ ЭВОЛЮЦИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ТРЕЩИНЕ ГРП ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДАВЛЕНИЯ НА ЗАБОЕ СКВАЖИНЫ**

**Башмаков Р.А.<sup>1,2</sup>, Фокеева Н.О.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия;

<sup>2</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
г. Уфа, Россия;

*bashmakov\_rustem@mail.ru, ffoxnina@gmail.com*

*В статье рассматривается математическая модель фильтрации флюида в трещине гидроразрыва и окружающем пласте, изучается изменение давления в трещине и расхода при переходных режимах работы скважины.*

*Ключевые слова: вертикальная скважина, расход, низкопроницаемый коллектор, гидроразрыв пласта, изменение давления.*

### **ON THE EVOLUTION OF THE PRESSURE FIELD IN THE FRACTURE WITH VARYING VALUES OF PRESSURE AT THE BOTTOMHOLE**

**Bashmakov R.A.<sup>1,2</sup>, Fokeeva N.O.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Bashkir State University, Ufa, Russia;

<sup>2</sup> Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Investigation Center, RAS;  
*bashmakov\_rustem@mail.ru, ffoxnina@gmail.com*

*This work considers a mathematical model of fluid filtration in the fracture and the surrounding reservoir, studying the change in pressure in the fracture and flow rate during transient well operation modes.*

*Key words: vertical well, rate, low-permeability reservoir, hydraulic fracturing, pressure change.*

Гидроразрыв пласта (ГРП) — один из важнейших методов интенсификации добычи нефти. Определение параметров трещины, полученной путем гидроразрыва является актуальной в настоящее время

задачей, когда значительная часть нефти добывается из труднопроницаемых пластов, либо обладает большой вязкостью.

Теория ГРП накопила результаты за много лет применения [1, 2]. В случае низкопроницаемых пластов, жидкость в основном рас текается по трещине, и из трещины перетекает в пласт, что можно описать системой дифференциальных уравнений (см. [3 – 6]). В работах [5, 6] описание распределения давления в трещине сведено к одному интегро-дифференциальному уравнению и изучены вопросы об эволюции давления в окрестности трещины ГРП и динамике распределение давления в скважине и вертикальной трещине при поддержании постоянного расхода и постоянного давления на скважине [4 – 6].

Рассмотрим вертикальную закреплённую пропантом трещину, полученную путем гидроразрыва пласта (рис. 1).

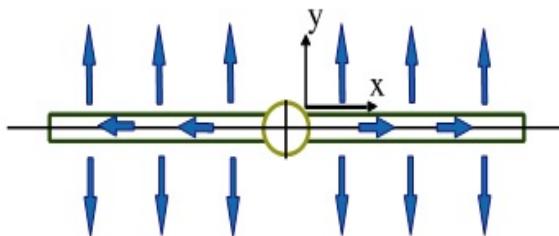


Рис. 1. Схема течения жидкости по трещине и из трещины в пласт

Пласт однородный, ширина трещины значительно меньше ее высоты  $d_f \ll h_f$ . Скелет пористой среды пласта и трещины несжимаемый, длина трещины бесконечная. Жидкость в пласте распространяется перпендикулярно ее направлению и далее по трещине течет к скважине. В силу симметрии рассматривается одно крыло трещины. Движение флюида в трещине квазидномерное вдоль оси  $OX$ , так как от изменения глубины давление в пласте и трещине не меняется. Начало координат на стенке забойного участка. Ось  $OY$  перпендикулярна трещине. Отсчет идет от границы пласт — трещина. Система, описывающая распределение давления в трещине и пласте:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p \alpha_p}{m_f d_f} \left( \frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad (0 < x < \infty),$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2}, (0 < x < \infty, 0 < y < \infty),$$

где  $\alpha_i = \frac{\rho_0 C^2 k_i}{\mu m_i}$  — коэффициенты пьезопроводности,  $P_f = P_f(t, x)$ ,  $P_p = P_p(t, x, y)$ . Индексы  $i = f, p$  соответствуют значениям параметров в трещине и пласте, окружающем трещину. Данные уравнения рассматривались в работах [3, 4, 6] при различных краевых условиях.

Пусть до момента  $\tau_0$  флюид в пласте находится в покое, а в момент времени  $\tau_0$  расход резко выходит на значение  $q_0$  и поддерживается постоянным до момента времени  $\tau_1$ , когда он резко изменяется до величины  $q_1$  и держится постоянным до момента  $\tau_2$ , и т. д.

Для перепада давления  $\Delta P_{(w)}$  между значениями на забое скважины и пластом получим

$$\Delta P_{(w)} = \frac{-0.78\mu}{\sqrt{\frac{A_f}{2}} d_f k_f} (H(t-\tau_0) q_0 (t-\tau_0)^{\frac{1}{4}} + \sum_{i=1}^n H(t-\tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t-\tau_i)^{\frac{1}{4}}).$$

Здесь  $H(t)$  — функция Хевисайда. Полученные в работе формулы позволяют описать связь между расходом жидкости на скважине и эволюцией давления в трещине и скважине. На рисунке 2 приведено П – образное изменение давления на скважине и изменение количества жидкости, закачиваемой в трещину, приходящейся на единицу ее высоты в зависимости от времени  $t$ .

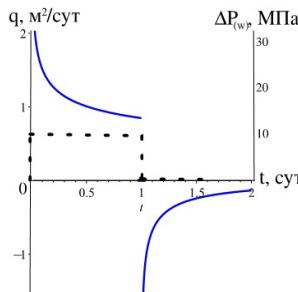


Рис. 2. П – образное изменение давления на скважине (пунктирная линия) и соответствующее изменение расхода закачиваемой жидкости (сплошная линия)

На рисунке 3 показана эволюция давления в трещине и значения расхода при двухступенчатом изменении давления в скважине  
Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

на величину  $\Delta P_{(w)0} = 10$  МПа в момент времени  $\tau_0 = 0$  и резком увеличении до  $\Delta P_{(w)1} = 20$  МПа в момент времени  $\tau_1 = 1$  сутки.

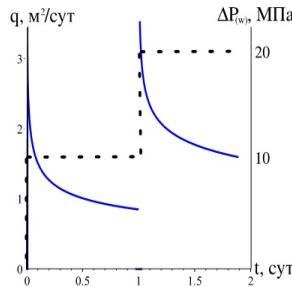


Рис. 3. Двухступенчатое изменение давления (пунктирная линия), расход жидкости на единицу высоты трещины (сплошная линия)

Рисунок 4 демонстрирует как  $\Pi$ -образное изменение давления на скважине влияет на давление в трещине при различном расстояния от скважины: в момент времени  $\tau_0 = 0$  давление на скважине изменяется на величину  $\Delta P_{(w)} = 10$  МПа, и держится постоянным до момента времени  $\tau_1 = 1$  сут. В момент времени  $t = \tau_1$  давление в скважине резко возвращается к первоначальному значению. Линии 1, 2, 3, 4 соответствуют моментам времени  $t = 1$  сутки, 1 сутки и 10 минут, 1 сутки и 30 минут, 1 сутки и 12 часов.

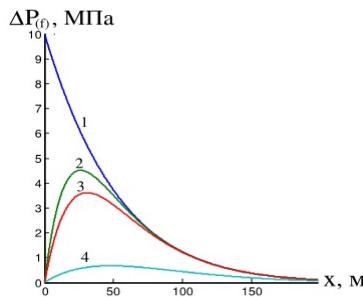


Рис. 4. Распределение давления в трещине при  $\Pi$  – образном изменении давления на скважине: 1 – сутки, 2 – сутки и 10 минут, 3 – сутки и 30 минут, 4 – сутки и 12 часов

В настоящей работе изучены переменные режимы работы скважины, получены формулы для определения изменения давления и

расхода в трещине ГРП в зависимости от времени и расстояния до скважины. Основываясь на результатах, могут быть определены параметры трещины ГРП и пласта, что применимо при интерпретации данных гидродинамических исследований скважин.

Работа частично выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. 237 с.
2. Каневская Р.Д., Диляшев И.Р., Некипелов Ю.В. Применение гидравлического разрыва пласта для интенсификации добычи и повышения нефтеотдачи. Нефтяное хозяйство. 2002. № 5. С. 96–101.
3. Cinco-Ley H. Evaluation of Hydraulic Fracturing by Transient Pressure Analysis Methods. SPE 10043 Petrol. Exh. and Techn. Symp., Beijing China. Mar 18–26. 1982.
4. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва. Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22, № 2. С. 309–314.
5. Шагапов В.Ш., Нагаева З.М. К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде. Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, № 5 (345). С. 121–130.
6. Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте. Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 81, № 3. С. 319–329.

УДК 532/529.534.2

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОЧИСТКИ И ПЕРЕМЕШИВАНИЯ УГЛЕВОДОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Галиакбарова Э.В.

Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;  
[emi.galiakbar@yandex.ru](mailto:emi.galiakbar@yandex.ru)

*Предложена гидродинамическая модель смешения эмульсии типа "вода в нефти" с капельной промывной водой, которая реализована в струйном гидравлическом смесителе, широко внедряемом на предприятиях очистки нефти от солей в ПАО "Татнефть" ПАО "Роснефть". Также предложена гидродинамическая модель перемешивания нефтей (или нефтепродуктов) в резервуарах хранения, которая реализована в струйном смесителе для резервуаров, внедряемом в резервуарных парках в цепи хранения ПАО "Роснефть".*

*Ключевые слова: технология обессоливания, смешение, движение капель, технология хранения, затопленные струи, смесители.*

## THEORETICAL BASIS OF TECHNOLOGICAL PROCESSES CLEANSING AND MIXING OF HYDROCARBON FLUIDS

Galiakbarova E.V.

Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia;  
[emi.galiakbar@yandex.ru](mailto:emi.galiakbar@yandex.ru)

*A hydrodynamic model is proposed for mixing a water-in-oil emulsion with drip wash water, which is implemented in a jet hydraulic mixer, which is widely implemented at oil purification enterprises from salts in PAO "Tatneft" PAO "Rosneft". Also proposed is a hydrodynamic model of mixing oils (or oil products) in storage tanks, which is implemented in a jet mixer for tanks, which is being introduced in tank farms in the storage chain of PAO "Rosneft".*

*Keywords:* desalination technology, mixing, droplet movement, storage technology, flooded jets, mixers.

Большинство месторождений России находится на поздней стадии разработки, поэтому добываемая из них нефть низкого качества с большим содержанием пластовой воды, в состав которой входят соли, кислоты, асфальто-смолистые вещества, различные примеси. После предварительного отстаивания такой нефти, количество пластовой воды снижается примерно до 1%, содержание солей в этой пластовой воде может достигать 2 г/л. Для очистки такой эмульсии типа "вода в нефти" предлагается формировать встречно-направленное движение к ней очищенной промывной воды, подаваемой в зону смешения методом дождевания [1, 2]. Опираясь на данные опытно-промышленных испытаний таких устройств смешения показано, что в данных устройствах реализуется инерционный механизм зацепления крупными каплями промывочной воды минерализованных частиц, находящихся в пластовой воде в эмульгированном состоянии с нефтью [3].

Задача о зацеплении минерализованных частиц крупными каплями воды сводится к расчету траекторий движения минерализованных частиц в потоке нефти в зависимости от их начального положения при обтекании крупной капли промывочной воды [4].

Уравнения движения крупной капли воды (1) и минерализованных частиц (2), а также траекторий частиц нефти (3) следующие [5, 6]:

$$m_w \frac{dv_w}{dt} = -\xi \pi R^2 \frac{\rho_0}{2} v_w^2 - \frac{V_w}{2} \rho_0 \frac{dv_w}{dt}, \quad \frac{dl_w}{dt} = v_w \quad (1)$$

где  $m_w = V_w \rho_w$ ,  $V_w = \frac{4}{3} \pi R^3$ ,  $\xi = \frac{12}{Re} (1 + 0,0811 Re^{0,879})$ ,  $Re = 2\rho_0 R v_w / \mu_0$ ,  $l_w$  — перемещение крупной капли воды в потоке нефти;

$$m_s \frac{d\bar{v}_s}{dt} = -V_s \bar{\nabla} p + 6\pi \mu_0 a (\bar{v}_0 - \bar{v}_s) + \frac{V_s \rho_0}{2} \left( \frac{d\bar{v}_0}{dt} - \frac{d\bar{v}_s}{dt} \right) - m_s \frac{dv_w}{dt}, \quad (2)$$

$$\text{где } V_s = \frac{4}{3} \pi a^3, m_s = V_s \rho_w, \frac{d\bar{v}_0}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t} + \bar{v}_{ox} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} + \bar{v}_{oy} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y},$$

$$\frac{d\bar{r}_s}{dt} = \bar{v}_s, \bar{v}_s = v_{sx} \bar{i} + v_{sy} \bar{j}, \bar{r}_s = x_s \bar{i} + y_s \bar{j}.$$

$$\frac{dx_0}{dt} = v_{ox}, \frac{dy_0}{dt} = v_{oy} \quad (3)$$

где  $v_{ox} = -v_w \left( 1 + \frac{R^3}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \theta) \right)$ ,  $v_{oy} = \frac{3}{2} \frac{R^3}{r^3} v_w \cos \theta \sin \theta$ , ось

Ох совпадает с направлением движения крупной капли. Поле давления вокруг крупной капли воды определяется на основе интеграла

Копи–Лагранжа [7]:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_0)^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \frac{\partial v_w}{\partial t} x = 0$$

где  $\phi_0 = -v_w \cos \theta \left( r + \frac{R^3}{2r^2} \right)$ ,  $v_w$  — определяется из (1).

Начальные условия для уравнения (2) совместно с уравнением (3) запишутся в виде:

$$v_w = v_{w(0)}, \quad l_w = 0, \quad x_s = x_{(0)}, \quad y_s = y_{(0)},$$

$$v_{sx} = v_{ox}(0, x_{(0)}, y_{(0)}), \quad v_{sy} = v_{oy}(0, x_{(0)}, y_{(0)}).$$

Результаты расчетов по теоретической модели показали, что увеличением дисперсности капель промывочной воды в зону смешения с эмульсией "вода в нефти" по порядку величин в десять раз приводит к снижению расхода промывочной воды примерно во столько же раз.

Очищенная от солей и примесей нефть перед транспортировкой к местам назначения обычно хранится в специальных емкостях, в основном это вертикальные стальные резервуары (РВС) различного объема. На практике смешивают тяжелые и легкие фракции нефти (или дизельное топливо с керосином и т.д.) различными способами, как правило, организуя рециркуляцию (одновременную закачку и опорожнение) потоков в резервуаре или используя мешалки пропеллерного типа, что сопровождается большими энергетическими затратами и недостаточной степенью смешения углеводородных жидкостей.

Для более эффективного смешения предложено установить во входной узел резервуара устройство с инжектированием [8, 9]. В этом случае смешение происходит за счет энергии потоков в камере смешения смесителя, а также вне смесителя при взаимодействии турбулентных струй, вытекающих из камеры смешения смесителя, с окружающей струей жидкостью. Кроме того, за счет инжекции жидкости из емкости образуются вынужденные циркуляционные потоки, разрушающие застойные зоны и препятствующие образованию донных осадков. Предложена теоретическая модель перемешивания с помощью устройства с инжектированием, получено характеристическое уравнение и коэффициент полезного действия этого устройства [10]. Составлены уравнения, описывающие траекторию осевой линии

струи, выходящей из устройства в резервуар с более тяжелой нефтью [11, 12]:

$$R(l) = 0, 22l, \quad \frac{dM}{dl} = J \quad (4)$$

$$(M = \rho S w, S = \pi R^2, J = \pi R \sin(\alpha/2) \rho^{(i)} w, \sin(\alpha/2) = 0, 22)$$

$$\frac{d}{dl}(MwP) = 0, \quad \frac{d}{dl}(MwQ) = (\rho^{(i)} - \rho) S g, \quad \rho = \frac{(1+k)\rho^{(i)}}{\rho^{(i)}/\rho^{(a)} + k} \quad (5)$$

$$P = \frac{dx}{dl} = \cos \theta, Q = \frac{dy}{dl} = \sin \theta, P^2 + Q^2 = 1,$$

где  $M, \rho$  и  $w$  — массовый расход смеси, средняя плотность и скорость смеси для сечения струи с координатой  $l$ ;  $J$  — интенсивность поступления нефти в струю через ее границу отнесенная на единицу длины по оси струи;  $\theta$  — угол наклона между касательной к траектории оси струи и осью Ох.

Начальные условия для системы уравнений (4)) - (5):

$$l = l^{(l)}, R^{(l)} = 0, 22l^{(l)}, k = k^{(l)}, w = w^{(l)}, x = y = 0,$$

$$P = \cos \theta_0^{(l)}, Q = \sin \theta_0^{(l)} \rho = \rho^{(l)}, M = M^{(l)} = \rho^{(l)} S^{(l)} w^{(l)},$$

где  $\theta_0^{(l)}$  — угол наклона оси струи от горизонтального направления на выходе из смесителя.

Получены расчетные графики характеристик турбулентной затопленной струи в резервуаре хранения нефти. Показано: 1) проходит полное выравнивание концентрации инжектируемой смеси жидкости с концентрацией жидкости находящейся в резервуаре; 2) скорость струи снижается на расстоянии порядка нескольких метров до значения, превышающее минимальную промысловую скорость известную из практики ликвидации донных отложений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галиакбаров В. Ф., Галиакбарова Э. В., Яхин Б. А. Струйный гидравлический смеситель. Пат. изобретение 2600998, Рос. Федерация дата подачи 25.08.2015, опубл. 27.10.2016, БИ 30.
2. Галиакбаров В. Ф., Галиакбарова Э. В., Яхин Б. А. Струйный гидравлический смеситель. Пат. 159236, Рос. Федерация дата подачи 25.08.2015, опубл. 10.02.2016, БИ 4.

3. Шагапов В. Ш., Галиакбаров В. Ф., Гималтдинов И. К. К теории вымывания солей из водонефтяных эмульсий // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92 № 5. С. 2262–2268.
4. Шагапов В. Ш., Галиакбаров В. Ф., Гималтдинов И. К. К теории вымывания солей из водонефтяной эмульсии пресной водой // Прикладная механика и техническая физика. 2019.- Т. 60 № 4. С. 91–99.
5. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматлит, 1959. 699 с.
6. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 2. 464 с.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 2 568 с.
8. Галиакбаров В. Ф., Галиакбарова Э. В., Яхин Б. А. Струйный смеситель для резервуаров. Патент 2594023 РФ, B01F 5/00. Опубл. 10.08.2016. Бюл. № 22.
9. Галиакбаров В. Ф., Галиакбарова Э. В., Яхин Б. А. Смеситель для резервуаров. Патент 161351 РФ, B01F 5/00. Опубл. 20.04.2016. Бюл. № 11.
10. Шагапов В. Ш., Галиакбарова Э. В. Элементы теории вынужденного перемешивания нефтей в резервуарах // Многофазные системы. 2019. Т. 14 № 2. С. 101–107.
11. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 720 с.
12. Ландау Л. Д., Лишинц Е. М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. Т. 6. 736 с.

УДК 532.329

## ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ДЕТОНАЦИИ В ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ ВОЛНАМИ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Гималтдинов И.К., Родионов А.С., Кочанова Е.Ю.

Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;

*iljas\_g@mail.ru, artrodionov@mail.ru, moto8728@mail.ru*

*Исследуются процессы инициирования и распространения детонационной волны при наклонном падении импульса давления на «пузырьковая среда – «чистая» жидкость» в плоском канале. Показано, что наличие наклонной границы, разделяющей области пузырьковой и «чистой» жидкости, способствует инициированию детонации волнами малой амплитуды.*

*Ключевые слова: пузырьковая среда, детонация, амплитуда, наклонное падение, преломление через границу.*

## INITIATION OF DETONATION IN A BUBBLE LIQUID BY WAVES OF LOW AMPLITUDE

Gimaltdinov I.K., Rodionov A.S., Kochanova E.Y.

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russian Federation;  
*iljas\_g@mail.ru, artrodionov@mail.ru, moto8728@mail.ru*

*The processes of initiation and propagation of a detonation wave are investigated with an oblique drop of a pressure pulse on a "bubble medium - "pure "liquid" in a flat channel. It is shown that the presence of an inclined boundary separating the regions of the bubbly and "pure" liquid promotes the initiation of detonation by waves of small amplitude.*

*Key words: bubbly liquid, detonation, amplitude, oblique incidence, refraction across the boundary.*

Детонационные волны (ДВ) могут возникать в различных средах, в том числе и в сильно отличающихся по физико-химическим свойствам [1 – 3]. Однако, во всех средах детонация – это самоподдерживающийся, автоволновой процесс. Энерговыделение в среде обеспечивает возможность существования самоподдерживающихся волн детонации.

Рассмотрим плоский канал, заполненный пузырьковой (газонасыщенной) и «чистой» жидкостью с границей раздела этих сред, расположенной под углом  $\varphi$  по длине канала (рис. 1). Предположим, что газовая фаза пузырьковой жидкости является взрывчатой газовой смесью (например, смесь ацетилена с кислородом или гремучий газ). В момент времени  $t = 0$  на границу  $x_0 = 0$  воздействует П-образный импульс протяженностью  $t_*$  и амплитудой  $\Delta p_0$ , причем амплитуда  $\Delta p_0$  недостаточна для инициирования детонации на границе  $x_0 = 0$  [3]. Требуется определить динамику волнового процесса в канале при  $t > 0$ .

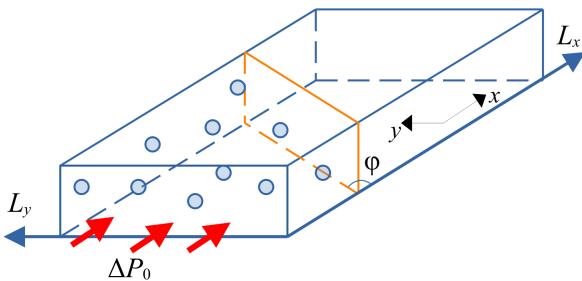


Рис. 1. Схема задачи

В качестве газовой фазы для расчетов принимается ацетилено-кислородная стехиометрическая смесь  $\text{C}_2\text{H}_2 + 2.5\text{O}_2$ . Такой выбор газовой фазы обусловлен тем, что она использовалась в большинстве экспериментов [1 – 3]. В качестве жидкой фазы – водоглицериновый раствор с массовой долей глицерина 0.5 [1 – 3].

Для численного анализа задачи о распространении ДВ при прохождении границы раздела «пузырьковая среда – «чистая» жидкость» используем систему уравнений, описывающей волновые движения в пузырьковой жидкости в лагранжевых координатах [4,5,7]. Это связано с тем, что в лагранжевых координатах первоначальная граница, разделяющая области газожидкостной и однородной среды, остается неподвижной

$$\frac{\partial p_l}{\partial t} = \frac{C_l^2 \rho_l^0}{(1 - \alpha_g)} \left[ \frac{3\alpha_g}{a} w - \left( \frac{\alpha_g}{J} + \frac{\rho_{l0}}{J^2 \rho_l^0} \right) \frac{\partial J}{\partial t} \right], \quad \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{\alpha_g}{J} \frac{\partial J}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{J\rho} \left( \frac{\partial p_l}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial p_l}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} \right), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{J\rho} \left( \frac{\partial p_l}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial p_l}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} \right), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \\
\frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma-1)}{a_0} q, \\
\frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_R + w_A, \\
\frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left[ \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4\nu_l \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}}, \quad |v_{lg}| = \sqrt{u_{lg}^2 + v_{lg}^2}, \\
\frac{\partial u_{lg}}{\partial t} &= -2 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{a} w u_{lg} - \frac{3 f_x}{2\pi a^3 \rho_l^0}, \quad \frac{\partial v_{lg}}{\partial t} = -2 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{3}{a} w v_{lg} - \frac{3 f_y}{2\pi a^3 \rho_l^0}, \\
f_x &= \frac{1}{2} C_D \pi a^3 u_{lg} |v_{lg}|, \quad f_y = \frac{1}{2} C_D \pi a^3 v_{lg} |v_{lg}|, \\
C_D &= \begin{cases} \frac{48}{Re}, & 0 \leq Re < 180, \\ \frac{Re^{4/3}}{10^{3.6}}, & Re > 180, \end{cases}, \quad Re = \frac{2a |v_{lg}|}{v_l}, \\
q &= \text{Nu}_l \lambda_l \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3, \quad \text{Nu}_l = 0,65 \sqrt{\text{Pe}_l}, \quad \text{Pe}_l = \frac{2a |v_{lg}|}{k_l}, \quad \rho_l^0 c_l \\
J &= \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial u}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} - \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{\partial v}{\partial x_0}.
\end{aligned}$$

Система уравнений в лагранжевых координатах решалась численно по явной схеме [6].

Пусть волна с амплитудой давления  $\Delta p_0$  П-образной формы, равной 6 атм. (рис. 2, а) распространяется в пузырьковой среде и падает на наклонную границу раздела сред «пузырьковая среда – «чистая» жидкость». При достижении границы раздела через 0.6 мс от начала движения, волна давления начинает преломляться в «чистой» жидкости. Вследствие разницы значений акустических сопротивлений пузырьковой среды и «чистой» жидкости преломление и отражение падающей волны на границе раздела этих сред будет аналогичен взаимодействию волны с жесткой границей [8]. При прохождении волнной области пузырьковой среды начальная амплитуда давления, равная 6 атм., недостаточна для инициирования детонации, тогда как падение волны на наклонную границу в момент времени 1.0 мс привело к значительному увеличению амплитуды, что послужило причиной инициирования детонации в точке с координатами  $x = 0.24$  м и  $y = 0.09$  м и повышению давления до 16 атм. Момент начала детонации показан на рисунке 2, б.

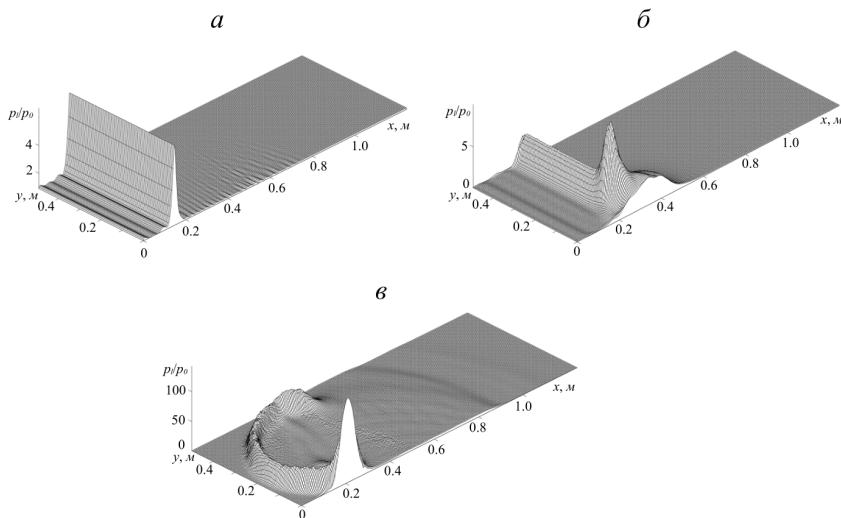


Рис. 2. Эпюры давления в моменты времени: *a* – 0.6 мс, *б* – 1.0 мс, *в* – 1.4 мс. Параметры системы: газ – ацетилено-кислородная смесь, жидкость – 50% по массе водоглицериновый раствор:  $p_0 = 0.1$  МПа,  $\Delta p_0 = 0.6$  МПа,  $T_0 = 293$  К,  $\rho_{l0} = 1130$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_l = 6 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $c_l = 3.3$  кДж/(кг·К),  $\lambda_l = 0.42$  Вт/(м·К),  $C_l = 1700$  м/с,  $\rho_{g0} = 1.29$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_g = 2.6 \cdot 10^{-2}$  Вт/(м·К),  $\alpha_{g0} = 0.01$ ,  $\alpha_0 = 1.25$  мм,  $\gamma_{up} = 1.36$ ,  $L_x = 1.2$  м,  $L_y = 0.5$  м,  $x_{01} = 0.2$  м,  $x_{02} = 0.49$  м,  $\varphi = 60^\circ$ .

На рис. 2, *в* представлено распределение давления в ДВ для момента 1.4 мс, когда фронт взрывной волны достиг координаты  $x=0$  и произошел удар о непроницаемую границу рассматриваемой области, что вызвало значительное увеличение амплитуды давления, свыше 100 атм. Форма фронта ДВ при этом представляет собой окружность с амплитудой давления до 50 атм. Следовательно, относительно небольшие амплитуды давления (до 6 атм.), изначально недостаточные для инициирования ДВ в пузырьковой жидкости, могут вызывать детонацию при падении на наклонную границу раздела «пузырьковая среда – «чистая» жидкость» с последующим образованием ДВ и увеличением амплитуды давления до значений, больших 100 атм.

Таким образом, исследованы процессы инициирования и распро-

странения ДВ при прохождении границы раздела пузырьковой среды и «чистой» жидкости в случае, когда граница раздела расположена под некоторым углом к фронту ДВ при начальном давлении, не способном инициировать детонацию. Показано, что при малых амплитудах начального давления (до 6 атм.) волна давления при прохождении границы раздела сред увеличивает амплитуду давления до 16 атм. вследствие значительной разницы в показателях акустических сопротивлений пузырьковой среды и «чистой» жидкости, в связи с чем детонация инициируется только при падении на наклонную границу раздела пузырьковой среды и «чистой» жидкости вследствие интерференции волн.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ в сфере научной деятельности № FEUR-2020-0004 «Решение актуальных задач и исследование процессов в нефтехимических производствах, сопровождающихся течениями многофазных сред».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев А.И. Волна детонации в системе жидкость – пузырьки газа // ФГВ. 1985. Т. 21, № 3. С. 103.
2. Пинаев А.В., Сычев А.И. Структура и свойства детонации в системах жидкость – пузырьки газа. ФГВ. 1986. Т. 22, № 3. С. 109.
3. Пинаев А.В., Сычев А.И. Влияние физико-химических свойств газа и жидкости на параметры и условия существования волны детонации в системах жидкость – пузырьки газа. ФГВ. 1987. Т. 23, № 6. С. 76.
4. Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Динамика детонационных волн в цилиндрических каналах переменного сечения. Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 5. С. 1233-1242.
5. Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Распространение детонационных волн в пузырьковых жидкостях в каналах с внезапным расширением. Акустический журнал. 2019. Т. 65, № 3. С. 317.
6. Николаев Ю.А., Топчиян М.Е. Расчет равновесных течений в детонационных волнах в газах. ФГВ. 1977. Т 13, № 3. С. 393.
7. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики, М.: Наука, 1980. 424 с.
8. Исакович М. А. Общая акустика: учеб. пособие. М.: Наука, 1973. 496 с.

УДК 517.95

## АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА В ЗАДАЧЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА

Куликова Н.А., Фадеева О.В.

Самарский государственный технический университет,  
г. Самара, Россия;  
*kulikova-duty@mail.ru, faoks@yandex.ru*

*В статье затрагиваются вопросы описания полей напряжений и деформаций в материале со степенным законом вблизи трещины, метод разложения по собственным значениям, метод малого параметра, нахождение коэффициентов асимптотического разложения показателя нелинейности материала.*

*Ключевые слова: задача Хатчинсона-Райса-Розенгрена, асимптотическое разложение, собственные функции, метод малого параметра, показатель упрочнения материала.*

## ANALYSIS OF THE MATERIAL NONLINEARITY INDICATOR IN THE ANTI-PLANE SHEAR PROBLEM

Kulikova N.A., Fadeeva O.V.

Samara State Technical University, Samara, Russia  
*kulikova-duty@mail.ru, faoks@yandex.ru*

*The article deals with the description of stress and strain fields in a material with a power law near a crack, the method of expansion in eigenfunctions, the method of a small parameter, and finding the coefficients of the asymptotic expansion of the nonlinearity index of the material.*

*Key words: Hutchinson-Rice-Rosengren problem, asymptotic expansion, eigenfunctions, small parameter method, material hardening index.*

В работе Д. Райса [1] задача антиплоского сдвига, которая является классической, была решена методом годографа. Тем не менее, и в последнее время вопрос нахождения полей напряжений, деформаций и перемещений в окрестности острого выреза или трещины

продолжает вызывать интерес [2 – 7]. Спектр собственных значений для нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины антиплоского сдвига, найден в [5] с помощью метода малого параметра, который дает возможность отыскания аналитической зависимости собственного значения нелинейной задачи от собственного значения соответствующей линейной задачи и показателя нелинейности материала. В данной работе обращается внимание на суммирование ряда для показателя нелинейности материала в задаче антиплоского сдвига.

При рассмотрении задачи об остром вырезе с раствором  $2\alpha$  в бесконечной плоскости, находящейся в условии продольного сдвига, возникают следующие уравнения равновесия и условие совместности деформации

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \partial \sigma_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0, \quad -\frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \varepsilon_{rz} = 0.$$

Компоненты тензора деформации и напряжения связаны степенной зависимостью

$$\varepsilon_{rz} = 1,5B\sigma^{n-1}\sigma_{rz}, \quad \varepsilon_{\theta z} = 1,5B\sigma^{n-1}\sigma_{\theta z}, \quad \sigma^2 = 3(\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2),$$

где  $\sigma$  – интенсивность касательных напряжений, показатель упрочнения  $n$  и  $B$  – постоянные материала.

Тождественно удовлетворить уравнениям равновесия можно, если ввести такую функцию напряжения  $\Phi(r, \theta)$ , что

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Решение уравнения для функции  $\Phi(r, \theta)$ , следующего из условия совместности деформаций, в окрестности вершины трещины ищется в виде разложения по степеням малого параметра  $r$ :

$$\Phi(r, \theta) = r^s f_1(\theta) + r^t f_2(\theta) + \dots, \quad s < t, \dots .$$

Главным членом разложения является  $\Phi(r, \theta) = r^s f(\theta)$ .

Обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение для функции напряжений  $f(\theta)$  можно получить, используя все отношения, перечисленные выше:

$$f''(n(f')^2 + s^2 f^2) + f(C_1(f')^2 + C_2 f^2) = 0, \quad (1)$$

где  $C_1 = s(n-1)(2s-1) + s^2$ ,  $C_2 = s^3(n-1)(s-1) + s^4$ .

Уравнения с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют вид  $f(\theta = \pm\pi) = 0$ .

Аналитическое выражение для собственных функций можно получить представляем собственное число  $s$ , а также показатель упрочнения  $n$  и функцию напряжений  $f(\theta)$  в виде:

$$s = s_0 + \varepsilon, \quad n = n_0 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j n_j, \quad (2)$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j f_j(\theta). \quad (3)$$

Подставляя асимптотические представления для собственного значения, показателя нелинейности материала и искомой собственной функции в уравнение (1) и собирая слагаемые с одинаковой степенью  $\varepsilon$ , получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & (f_0)'' + s_0^2 f_0 = 0, \\ \varepsilon^1 : \quad & (f_1)'' + s_0^2 f_1 = s_0 [n_1(s-1) + 2] f_0, \\ \varepsilon^2 : \quad & (f_2)'' + s_0^2 f_2 = -\frac{1}{s_0^2} [(f_0)''(n_2(f'_0)^2 + f_0^2) + f_0(C_1^2(f'_0)^2 + C_2^2 f_0^2)], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C_1^2 = n_1(4s_0 - 1) + n_2 s_0(2s_0 - 1) + 1$ ,  $C_2^2 = s_0^3(n_2(s_0 - 1) + n_1)$ .

В [6] показано, краевые задачи для полученных неоднородных линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $f_k(\theta)$ ,  $k > 0$  разрешимы в том и только в том случае, если выполнено условие разрешимости, которое дает возможность найти коэффициенты асимптотического разложения показателя нелинейности материала. Анализируя коэффициенты  $n_1, n_2, n_3$  можно найти в общем виде выражения для  $n_k$ :

$$n_k = \frac{(-1)^k s_*}{(s_0 - s_*)^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{(s_0 - 1)^{k+1}}, \quad (5)$$

где  $s_* = \frac{s_0^2}{2s_0 - 1}$ , и просуммировать две получающиеся бесконечно убывающие геометрические прогрессии. Будем иметь

$$n = 1 + \frac{s_*}{s_0 - s_*} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{-\varepsilon}{s_0 - s_*} \right)^i - \frac{1}{s_0 - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{-\varepsilon}{s_0 - 1} \right)^i = \frac{s}{s - s_*} - \frac{s}{s - 1}. \quad (6)$$

Из (6) можно найти функциональную зависимость  $s = s(n, s_0)$ .

Отметим, что выражение (5) справедливо для всех  $s_0 \neq 0,5$ . В случае  $s_0 = 0,5$  получим

$$n_k = -\frac{(-1)^k}{(s_0 - 1)^{k+1}}$$

или

$$n = 1 - \frac{1}{s_0 - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{-\varepsilon}{s_0 - 1} \right)^i = -\frac{s}{s - 1}.$$

Получили зависимость Хатчинсона–Райса–Розенгrena, которая устанавливает связь собственного числа с показателем нелинейности [1, 2].

В работе получено выражение для собственной функции нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения нахождения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины антиплоского сдвига в материалах со степенными определяющими уравнениями, проанализированы коэффициенты асимптотического разложения показателя нелинейности материала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rice J.R.* Математические методы в механике разрушения. Разрушение: Т.2: Математические основы теории разрушения / под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
2. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Trans. ASME. Ser. E. J. Applied Mechanics. 1967. V. 34. P. 287–298.
3. *Stolz C.* Closed form solution for the finite anti-plane shear field for a class of hyperelastic incompressible brittle solids // Comptes Rendus Mecanique. 2010. V. 338. Issue 12. P. 663–669.
4. *Abdelmoula R., Debruyne G.* Analyse des champs mecaniques au voisinage d'une fissure mobile dans un milieu viscoelastique: le problem de Hui et Riedel revisite par une methode de developpements asymptotiques raccordes // Comptes Rendus Mecanique. 2016. V. 344. Issue 9. P. 613–622.
5. *Anheuser M., Gross D.* Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // Arch. Applied Mechanics. 1994. V. 64. P. 509–518.

6. Степанова Л.В. О собственных значениях в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенными определяющими уравнениями // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 173–180.

7. Кулинова Н.А. Метод малого искусственного параметра в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины антиплоского сдвига в материалах со степенным законом // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж: Издательство "Научно-исследовательские публикации". 2019. С. 1171–1174.

УДК 551.524.3:551.583

## О ГЛОБАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ КЛИМАТА

Нигматулин Р.И.

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва, Россия;  
nigmat@ocean.ru

*Рассматриваются вопросы, касающиеся роли природных и антропогенных факторов изменчивости глобального климата. Качественно анализируется роль океанической циркуляции в глобальных термодинамических процессах Земли. Анализируются балансы парниковых газов в атмосфере и океане, влияние антропогенных факторов. Формулируются требования к моделям климата Земли нового поколения. Рассматривается вопрос о наличии альтернативы сценарию все ускоряющегося потепления климата, которое предсказывается из-за антропогенного увеличения концентрации парниковых газов в атмосфере.*

*Ключевые слова: глобальное изменение климата, природные и антропогенные факторы, вариации средней глобальной температуры нижней тропосферы, вейвлетное преобразование, циклы гелиомагнитной активности и обращения солнца, стабилизация температуры.*

## ON GLOBAL CLIMATE CHANGE

Nigmatulin R.I.

Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia;  
[nigmar@ocean.ru](mailto:nigmar@ocean.ru)

*Issues related to the role of natural and anthropogenic factors in the variability of the global climate are considered. The role of oceanic circulation in the global thermodynamic processes of the Earth is qualitatively analyzed. The balances of greenhouse gases in the atmosphere and ocean, the influence of anthropogenic factors are analyzed. Requirements for new generation Earth climate models are formulated. The question of the availability of an alternative to the scenario of an ever-accelerating climate warming, which is predicted due to an anthropogenic increase in the concentration of greenhouse gases in the atmosphere, is being considered.*

*Key words:* global climate change, variations in the global average temperature of the lower troposphere, wavelet transformation, cycles of heliomagnetic activity and sun rotation, temperature stabilization.

В последние годы не утихают споры по поводу глобального потепления. Вопросы вызывают и вклад антропогенного фактора в этот процесс, и возможное развитие ситуации, и её последствия, и роль океана в формировании климата на планете. Обсуждению этой проблематики было посвящено одно из заседаний Президиума РАН, материалы которого мы предлагаем вниманию читателей [1].

Изучаются также вопросы, касающиеся роли природных и антропогенных факторов изменчивости глобального климата. Качественно анализируется роль океанической циркуляции в глобальных термодинамических процессах Земли. Анализируются балансы парниковых газов в атмосфере и океане, влияние антропогенных факторов. Формулируются требования к моделям климата Земли нового поколения [2].

Исследован вопрос о наличии альтернативы сценарию все ускоряющегося потепления климата, которое предсказывается из-за антропогенного увеличения концентрации парниковых газов в атмосфере. С помощью вейвлетов сравниваются ряды средней глобальной температуры воздуха, построенные по данным измерений и моделирования. Установлено, что с помощью современных климатических

моделей нельзя разрабатывать сценарии изменения климата на следующие десятилетия. Предлагается сценарий, основанный на реальных особенностях вариаций глобальной температуры. Согласно этому сценарию, в ближайшие десятилетия не только сохранится продолжающаяся уже 15 лет стабилизация температуры, но и возможно некоторое похолодание [3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Океан: климат, ресурсы, природные катастрофы // Вестник Российской академии наук. 2010. Т. 80. № 8. С. 675–689.
2. Нигматулин Р.И. Заметки о глобальном климате и океанских течениях // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 37.
3. Вакуленко Н.В., Нигматулин Р.И., Сонечкин Д.М. К вопросу о глобальном изменении климата // Метеорология и гидрология. 2015. № 9. С. 89–97.

УДК 532.546

## ПРОХОЖДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ПЕРЕГОРОДКУ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ

Ситдикова Л.Ф.

Уфимский государственный нефтяной технический университет,

г. Уфа, Россия;

SitdikovaLF@yandex.ru

*Теоретически исследовано распространение акустического импульса при прохождении через пористую перегородку с “открытыми” границами. Выполнено сравнение эволюции импульсных возмущений давлений колокообразной формы в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью при нормальном и наклонном падении.*

*Ключевые слова: коэффициенты отражения и прохождения, волновой импульс, акустическая волна.*

## PASSAGE OF AN ACOUSTIC IMPULSE THROUGH A POROUS PARTITION IN INCLINED FALL

Sitdikova L.F.

Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia;  
SitdikovaLF@yandex.ru

*The propagation of an acoustic pulse when passing through a porous partition with “open” boundaries is studied theoretically. A comparison is made of the evolution of bell-shaped impulse pressure perturbations in a porous medium saturated with a bubbly liquid with oblique and oblique incidence.*

*Key words:* reflection and transmission coefficients, wave impulse, acoustic wave.

Исследование динамики звуковых волн при прохождении через пористые перегородки, насыщенные пузырьковыми жидкостями, а также их воздействие на преграды, покрытые пористым слоем, представляет значительный научный и практический интерес в связи с распространением таких сред. Известно большое количество трудов, посвященных изучению процессов распространения волн в пористых средах [1 – 3].

Полная математическая модель, описывающая распространение малых возмущений в жидкости с газовыми пузырьками, представлена в работе [1].

В работе [2] экспериментально исследовались ударные волны в пузырьковых средах. Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов параметров ударных волн.

В работе [3] исследована эволюция импульса конечной длительности в пористой среде, насыщенной газожидкостной смесью. Рассмотрены два случая пузырьков в пористой среде. Первая, когда пузырек охватывает несколько пор, и вторая ситуация – пузырьки газа намного меньше, чем размеры пор и находятся на стенках пор. Показано, что существуют три диапазона частот, где качественно и количественно меняется зависимость фазовой скорости звука и коэффициента затухания.

В данной работе исследуется эволюция волнового импульса разной геометрии в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью.

**Прохождение гармонических волн через пористую преграду.** Пусть гармоническая плоская волна с частотой  $\omega$ , распро-

Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

страняясь по воде, падает под углом  $\theta_1^{(0)}$  на первую границу «вода – пористая среда, насыщенная пузырьковой жидкостью». Тогда движение в левой части от границы ( $x < 0$ ) является наложением двух волн – падающей и отраженной. Движение слева от второй границы ( $0 < x < l$ ) в пористой среде прошедшая волна делится на две: быструю и медленную. Справа от второй границы, в области ( $x > l$ ), также имеются две вышедшие волны (из-за разных скоростей распространения медленной и быстрой волн в пористой среде).

В случае падения плоской волны под углом на границу «вода – пористая среда, насыщенная пузырьковой жидкостью», получим:

$$\sin \theta_1^{(0)} = \sin \theta_1^{(r)}, \sin \theta_{1s}^{(t)} = \frac{\omega}{K_s C_e} \sin \theta_1^{(0)}, \quad (1)$$

$$\sin \theta_1^{(0)} = \sin \theta_1^{(r)}, \sin \theta_{1l}^{(t)} = \frac{\omega}{K_l C_e} \sin \theta_1^{(0)}. \quad (2)$$

В случае падения плоской волны под углом на границу «пористая среда, насыщенная пузырьковой жидкостью – вода», получим:

$$\sin \theta_{2s}^{(0)} = \sin \theta_{2s}^{(r)}, \sin \theta_{2s}^{(t)} = \frac{K_s C_e}{\omega} \sin \theta_{2s}^{(0)}, \quad (3)$$

$$\sin \theta_{2l}^{(0)} = \sin \theta_{2l}^{(r)}, \sin \theta_{2l}^{(t)} = \frac{K_l C_e}{\omega} \sin \theta_{2l}^{(0)}. \quad (4)$$

Здесь  $C_e$  – скорость распространения волны в окружающей среде,  $K_s, K_l$  – волновые числа, определяемые в [4]. Нижний индекс  $e$  относится к параметрам воды, окружающего пористую среду, а верхние индексы 0,  $r$  и  $t$  относятся, соответственно, к параметрам падающей, отраженной и прошедшей волн.

Для определения коэффициентов отражения и прохождения волны запишем граничные условия, количество которых должно соответствовать количеству возникающих волн.

На границе  $x = 0$  должны выполняться следующие условия:

$$p_e^{(0)} + p_e^{(r)} = p_l^{(t)} = -\sigma_s^{*(t)}, \quad (5)$$

$$\left( v_e^{(0)} - v_e^{(r)} \right) \cos \theta_1^{(0)} = (1 - \alpha_{s0}) v_l^{(t)} \cos \theta_{1l}^{(t)} + \alpha_{s0} v_s^{(t)} \cos \theta_{1s}^{(t)}. \quad (6)$$

На границе  $x = l$  граничные условия записутся:

для медленной волны

$$(1 - \alpha_{s0}) \left( p_e^{(0)} + p_e^{(r)} \right) = p_{2l}^{(t)}, \quad (7)$$

$$(1 - \alpha_{s0}) (v_l^{(0)} - v_l^{(r)}) \cos \theta_{2l}^{(0)} = v_{2l}^{(t)} \cos \theta_{2l}^{(t)}, \quad (8)$$

для быстрой волны

$$\alpha_{s0} (\sigma_s^{*(0)} + \sigma_s^{*(r)}) = -p_{2s}^{(t)}, \quad (9)$$

$$(v_s^{(0)} - v_s^{(r)}) \cos \theta_{2s}^{(0)} = v_{2s}^{(t)} \cos \theta_{2s}^{(t)}. \quad (10)$$

Здесь  $\theta_j^{(0)}$ ,  $\theta_j^{(r)}$ ,  $\theta_j^{(t)}$  – соответственно углы падения, отражения и преломления, где  $j = 1l, 1s, 2l, 2s$ ; здесь цифры 1 и 2 соответствуют первой или второй границе соответственно.

На основе полученных выражений для коэффициентов отражения и прохождения гармонических плоских волн для первой и второй границ рассмотрим динамику волны конечной длительности колоколообразной формы при прохождении через пористую преграду.

На рис. 1 представлена динамика отражения импульса давления от первой «открытой» границы пористой перегородки при нормальном и наклонном падении. Характерные размеры среды:  $a_0 = 10^{-4}$  м,  $b_0 = 10^{-3}$  м,  $\alpha_{l0} = 0,6$ ,  $\alpha_{s0} = 0,39$ ,  $\alpha_{g0} = 0,01$ . Параметры среды взяты при  $T=300$ К.

Расположение датчиков следующее. Датчик D1 размещен с левой стороны, вблизи первой границы пористой среды и регистрирует исходный импульс давления и отраженный. Датчики D2 и D3 расположены внутри пористой среды, вблизи первой границы и регистрируют прошедшие импульсы давлений в порах среды и материале скелета соответственно. Датчики D4 и D5 расположены внутри пористой среды, вблизи второй границы и регистрируют импульсы, дошедшие до этой границы и отраженные от нее (медленная и быстрая волны соответственно). Датчик D6 расположен справа от пористой среды, вблизи второй границы и регистрирует прошедшие через вторую границу импульсы давлений (по порам и по скелету).

Из рис. 1 видно, что при падении под углом  $30^0$  к первой границе происходит меньшее отражение и, следовательно, через первую границу волновой импульс пройдет большей амплитудой.

Следует отметить, что для быстрой волны на расстоянии 1 м импульс трансформируется и фаза сжатия небольшой амплитуды меняется на фазу разрежения из-за радиальной пульсации пузырьков. А для медленной волны прошедший импульс через границу «вода – пористая среда, насыщенная пузырьковой жидкостью» на расстоянии 1м полностью затухает.

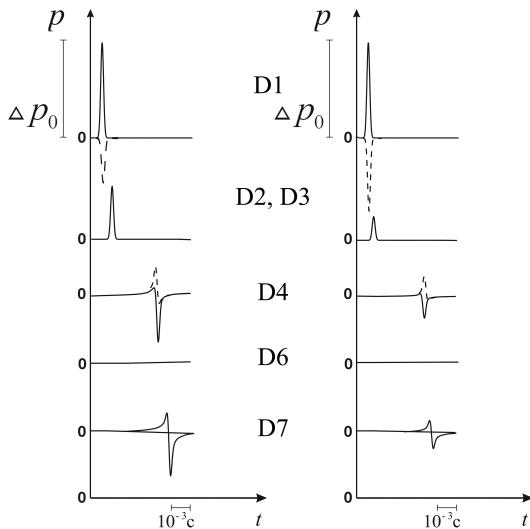


Рис. 1. Динамика отражения и прохождения импульсом давления «открытых» границ пористой среды и эволюция импульса давления в пористой среде толщиной 1 м. Рис.1а соответствует нормальному падению, рис. 1б – под углом  $30^0$ .

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60015.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматуллин Р. И., Шагапов В. Ш., Вахитова Н. К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волн в пузырьковой среде // ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 35. С. 1077–1081.
2. Сычев А.И Сильные ударные волны в пузырьковых средах // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. № 6. С. 31–35.
3. Ситдикова Л.Ф. Об эволюции линейных волн в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2020. Вып. 5(127). С. 9–20.
4. Ситдикова Л.Ф., Гималтдинов И.К. Задача о распространении акустических волн в пористой среде, насыщенной пузырьковой жидкостью // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2021. Т. 13. № 1. С. 59–66.

УДК 517.958:533.7

## О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕД

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
г. Уфа, Россия;  
habirov@anrb.ru

В работе рассмотрена квазилинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение идеальной газодинамической сплошной среды. Из термодинамического тождества следует, что среда двухпараметрическая. Уравнение состояния задается внутренней энергией в функции от энтропии и удельного объема. Преобразования эквивалентности не изменяет вид системы, но меняют лишь уравнения состояния. Найдены преобразования эквивалентности, преобразующие лишь термодинамические параметры и растягивающие все переменные. Известная групповая классификация, расширяющая допускаемую группу, состоит из найденных преобразований эквивалентности. Исключение в случае уравнение состояния линейного по удельному объему и в случае одноатомного газа, модель которого инвариантна относительно проективного преобразования. Если уравнение состояния изменяется со временем, то найдены семейства уравнений состояния, для которых проективные преобразования являются преобразованиями эквивалентности.

**Ключевые слова:** газовая динамика, уравнение состояния, преобразования эквивалентности, групповая классификация.

## ON EQUIVALENCE TRASFORMATIONS OF GASDYNAMIC MEDIUM

Khabirov S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia;  
habirov@anrb.ru

*In the work we consider a quasilinear system of differential equations describing the motion of ideal gasdynamic medium. From the thermodynamic identity it is follow that the medium is two-parameter.*

*The state equation is given by the inner energy as a function of an entropy and a specific volume. The equivalent transformations are not change the form of the system but change only the state equation. We found all equivalent transformations converting only thermodynamic parameters and expanding all variables. The known group classification extended admitted group consists of the equivalent transformations. There is exclusion when the state equation is linear on the specific volume and in the case of oneatomic gas. In the last case the model is invariant under projective transformations. We found a family of the state equations for which the projective of transformations are the equivalent transformations if the state equations change with the time.*

*Key words:* *gas dynamics, state equation, equivalent transformation, group classification.*

## 1. Введение

Групповой анализ уравнений газовой динамики наиболее продвинут [1, 2]. Найдены алгебры Ли допускаемой группы преобразований. Проведена групповая классификация по функции  $A(p, \rho) = \rho c^2$ ,  $c^2 = f_\rho$ ,  $c$  – скорость звука,  $p = f(\rho, S)$  – уравнение состояния в виде давления как функция плотности и энтропии [1, 3]. Построены оптимальные системы неподобных подалгебр основных допускаемых групп [4]. Составлен граф вложенных подалгебр, позволяющий строить цепочки вложенных подмоделей [5]. Рассмотрены множества инвариантных, частично инвариантных подмоделей и точных решений, которые тоже могут быть подвержены групповому анализу. Физическая интерпретация полученных решений, подобно тому как это сделано для одномерных нестационарных движений и плоских установившихся безвихревых течений [6, 7], далека от завершения.

В работе рассмотрены преобразования эквивалентности, которые изменяют лишь уравнения состояния  $\varepsilon = e(V, S)$ ,  $V = \rho^{-1}$ , стационарного типа и  $\varepsilon = e(t, V, S)$  нестационарного типа. Показано, что все расширения допускаемых групп при групповой классификации [1] являются преобразованиями эквивалентности некоторых классов уравнений состояния.

## 2. Идеальные двухпараметрические среды газодинамического типа

Законы сохранения массы, импульса и энергии без внешних сил и теплопроводности в дифференциальной форме имеют вид [6]

$$\begin{aligned} V_t + (\vec{u} \cdot \nabla) V &= V \nabla \cdot \vec{u}, \\ \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + V \nabla p &= 0, \\ \varepsilon_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \varepsilon + V p \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V = \rho^{-1}$  — удельный объем,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $\vec{u}$  — скорость частицы газа в момент времени  $t$  в точке пространства  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla = \partial_{\vec{x}}$  — градиент. 5 скалярных уравнений связывают 6 газодинамических величин. Для замыкания системы пользуются энергетическим термодинамическим тождеством

$$TdS = d\varepsilon + pdV \quad (2)$$

справедливым в частице газа. Здесь  $T$  — температура,  $S$  — энтропия,  $d$  — дифференциал. Все термодинамические функции зависят от  $t$  и  $\vec{x}$ . Если дифференциал взять вдоль мировой линии  $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ , то из (2) следует уравнение для энтропии

$$S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0. \quad (3)$$

Дифференцирование вдоль  $\vec{x}$ ,  $t$  дает еще  $n+1$  равенство

$$T \nabla S = \nabla \varepsilon + p \nabla V, \quad TS_t = \varepsilon_t + pV_t. \quad (4)$$

Мы получаем  $n+3$  эволюционных уравнений,  $n$  неэволюционных равенств и  $2^{-1}n(n-1)$  условий совместности, сравнивая смешанные производные функции  $\varepsilon(t, \vec{x})$ . В одномерном случае  $n=1$  все функции зависят от  $t$  и  $x$ :  $\varepsilon = \varepsilon(t, x)$ ,  $V = V(t, x)$ ,  $S = S(t, x)$ . Исключение  $t$ ,  $x$  дает уравнение состояния двухпараметрической среды

$$\varepsilon = e(V, s), \quad T = es, \quad p = -ev. \quad (5)$$

При  $n=2$  из условий совместности равенств (4) следует

$$\begin{vmatrix} S_t & S_x & S_y \\ p_t & p_x & p_y \\ V_t & V_x & V_y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} S_t & S_x & S_y \\ T_t & T_x & T_y \\ V_t & V_x & V_y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$p = p(V, S)$ ,  $T = T(V, S)$ , а из (2) следует (5). В пространстве  $\mathbb{R}^n(\vec{x})$ ,  $n \geq 3$  из условий совместности (4) следует

$$\begin{vmatrix} S_t & S_{x^i} & S_{x^j} \\ p_t & p_{x^i} & p_{x^j} \\ V_t & V_{x^i} & V_{x^j} \end{vmatrix} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} S_t & S_{x^i} & S_{x^j} \\ T_t & T_{x^i} & T_{x^j} \\ V_t & V_{x^i} & V_{x^j} \end{vmatrix} = 0.$$

В новой системе координат  $S, V, x^3, \dots, x^n$  отсюда следует  $p = p(V, S)$ ,  $T = T(V, S)$ , а из (2) следует (5).

Итак, среди с термодинамическим тождеством (2) двухпараметрические. С уравнением состояния  $\varepsilon = e(V, S)$  движение определяется уравнениями  $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ :

$$\begin{aligned} DV &= V \nabla \cdot \vec{u}, \\ D\vec{u} &= V(e_{VV} \nabla V + e_{VS} \nabla S), \quad DS = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Для других термодинамических функций справедливы уравнения

$$\begin{aligned} D\varepsilon &= V e_V \nabla \cdot \vec{u}, \quad Dp = -V e_{VV} \nabla \cdot \vec{u}, \\ DT &= V e_{SV} \nabla \cdot \vec{u}. \end{aligned} \tag{7}$$

Если  $e_{VV} > 0$ , то система уравнений гиперболична и описывает движения газа [6, 7]. Для измеряемых термодинамических величин  $p, V, T$  уравнение состояния и дифференциальные уравнения принимают вид [7]

$$\begin{aligned} p &= g_V, \quad \varepsilon = T g_T - g(T, V), \quad S = g_T, \\ g_{TT} Dp &= V(g_{VV} g_{TT} - g_{TV}^2) \nabla \cdot \vec{u}, \\ g_{TT} DT + V g_{TV} \nabla \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Дифференциальные уравнения для  $V$ ,  $\vec{u}$  из (1) и для  $T$  из (8) задают замкнутую систему с измеряемым уравнением состояния.

### 3. О преобразованиях эквивалентности

Система (6) удобна для группового анализа, когда разыскиваются преобразования всех переменных (зависимых и независимых), оставляющих неизменными уравнения системы. Преобразования не меняющие уравнение состояния образуют ядро допускаемых групп преобразований. Ядро было найдено Л.В. Овсянниковым [3]. Оно состоит

из переносов по времени и по пространству, галилеевых переносов (движения начала с постоянной скоростью), вращений вокруг любой оси, проходящей через начало и равномерного растяжения по времени и пространству. Ядро образует 11-параметрическую группу преобразований. Ядро может расширяться для специальных уравнений состояния. Классификацию всех расширений следует делать с точностью до преобразований эквивалентности, когда система (6) не меняется, но изменяется лишь уравнение состояния. Некоторые преобразования были замечены в [1, 2] и с их помощью была проделана групповая классификация. Оказывается, что почти все расширения являются преобразованиями эквивалентности.

Вычислим частный случай преобразований эквивалентности системы (6) вида

$$\tilde{\varepsilon} = h(S, V, \varepsilon), \quad \tilde{V} = g(S, V, \varepsilon), \quad \tilde{S} = f(S, V, \varepsilon), \quad (9)$$

когда уравнение состояния  $\varepsilon = e(S, V)$  перейдет в  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{e}(\tilde{S}, \tilde{V})$ , т.е. выполнено соотношение

$$\begin{aligned} h(S, V, e(S, V)) = \\ = \tilde{e}(f(S, V, e(S, V)), g(S, V, e(S, V))), \end{aligned} \quad (10)$$

а переменные  $t, \vec{x}, \vec{u}$  инвариантны.

Из уравнений (6) и (7) следует

$$\begin{aligned} D\tilde{S} = f_S DS + f_V DV + f_\varepsilon D\varepsilon = 0 \Rightarrow f_V + f_\varepsilon e_V = 0; \\ D\tilde{V} = g_S DS + g_V DV + g_\varepsilon D\varepsilon = \tilde{V} \nabla \cdot \vec{u} \\ \Rightarrow g = V(g_V + g_\varepsilon e_V). \end{aligned}$$

Если уравнение состояния общего вида, т.е.  $g_V$  принимает любые значения, то  $f_V = 0$ ,  $f_\varepsilon = g_\varepsilon = 0$ ,  $g = Vg_V$  (расщепление по  $e_V$ ). Далее считаем  $\tilde{S} = f(S)$ ,  $\tilde{V} = Vg(S)$ . Из уравнений для импульса

$$\nabla \cdot \vec{u} = \tilde{V}(\tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} \nabla \tilde{V} + \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{S}} \nabla \tilde{S}) = V(e_{VV} \nabla V + e_{VS} \nabla S)$$

следует

$$e_{VS} = g(Vg' \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} + f' \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{S}}), \quad e_{VV} = g^2 \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}}. \quad (11)$$

Дифференцирование (10) по  $S$  и по  $V$  дает зависимость между первыми производными функций  $e$ ,  $\tilde{e}$ :

$$h_S + h_\varepsilon e_S = \tilde{e}_{\tilde{S}} f' + \tilde{e}_{\tilde{V}} V g', \quad h_V + h_\varepsilon e_V = \tilde{e}_{\tilde{V}} g. \quad (12)$$

Дальнейшее дифференцирование по  $V$  в силу (11) и расщепления по  $e_V, e_{VV}$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{V}\tilde{V}}g^2 &= h_{VV} + 2h_{V\varepsilon}e_V + h_{\varepsilon\varepsilon}e_{VV} = e_{VV} \\ \Rightarrow h_\varepsilon &= 1, \quad h_{VV} = 0\end{aligned}$$

определяет функцию  $h = \varepsilon + V\alpha(S) + \beta(S)$ , а (12) принимает вид

$$\alpha'V + \beta' + e_S = \tilde{e}_{\tilde{S}}f' + \tilde{e}_{\tilde{V}}Vg', \quad \alpha + e_V = \tilde{e}_{\tilde{V}}g.$$

Дифференцирование по  $V$  в силу (11) дает

$$\begin{aligned}\alpha' &= g'\tilde{e}_{\tilde{V}} \Rightarrow \alpha' = g' = 0 \\ \Rightarrow \alpha &= A, \quad g = C — \text{постоянные.}\end{aligned}$$

Таким образом, преобразование эквивалентности вида (9) таковы

$$\tilde{S} = f(S), \quad \tilde{V} = CV, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + AV + \beta(S), \quad (13)$$

где  $A, C$  — произвольные постоянные,  $f, g$  — произвольные функции.

Вычислим преобразования эквивалентности — растяжения общего вида. Учитывая преобразования (13) достаточно искать преобразования эквивалентности — растяжения вида

$$\tilde{t} = Tt, \quad \tilde{x} = X\vec{x}, \quad \tilde{u} = U\vec{u}, \quad \tilde{\varepsilon} = E\varepsilon.$$

Система (6) с произвольной функцией  $e(S, V)$  сохраняет свой вид, только если

$$X = TU, \quad E = U^2. \quad (14)$$

Базисные операторы бесконечной алгебры Ли  $L$  группы преобразований эквивалентности в декартовой системе координат записываются в виде ( $k = 1, 2, 3$ ) [8]

$$\begin{aligned}X_k &= \partial_{x^k}, \quad X_{3+k} = t\partial_{x^k} + \partial_{u^k}, \\ X_{6+k} &= x^i\partial_{x^j} - x^j\partial_{x^i} + u^i\partial_{u^j} - u^j\partial_{u^i},\end{aligned}$$

$(i, j, k)$  — круговая перестановка индексов  $(1, 2, 3)$ ;

$$\begin{aligned}X_{10} &= \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x^k\partial_{x^k}; \quad X_{12} = V\partial_V - p\partial_p, \\ X_{13} &= t\partial_t - u^k\partial_{u^k} - 2\varepsilon\partial_\varepsilon - 2p\partial_p, \quad X_{14} = V\partial_\varepsilon - \partial_p, \\ \langle f(S) \rangle_1 &= f(S)\partial_S, \quad \langle \beta(S) \rangle_2 = \beta(S)\partial_\varepsilon,\end{aligned}$$

где  $f(S)$ ,  $\beta(S)$  — произвольные функции.

Здесь операторы продолжены на производную  $p = -e_V$  для сравнения с групповой классификацией из работы [3]. Есть только два расширения из групповой классификации, которые не входят в алгебру  $L$ . Выясним для каких уравнений состояния они являются преобразованиями эквивалентности. Первое расширение задается оператором контактных преобразований [9]

$$\begin{aligned} & -\varphi'(-e_V)V\partial_V - V(\varphi(-e_V) + e_V\varphi'(-e_V))\partial_\varepsilon - \\ & -\varphi(-e_V)\partial_{e_V}, \quad \varphi'' \neq 0, \end{aligned}$$

где  $\varphi(e)$  — произвольная функция.

Бесконечная псевдогруппа задаётся равенствами

$$\begin{aligned} p &= -e_V, \quad \tilde{e}_{\tilde{V}} = -\mu(p), \quad \tilde{V} = \frac{V}{\mu'(p)}, \\ \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon - Vp + \frac{V\mu(p)}{\mu'(p)}, \quad \varphi(p)\mu' = \varphi(\mu). \end{aligned}$$

Уравнения (6) не изменятся при таких преобразованиях с произвольной функцией  $\mu(p)$  лишь при линейном уравнении состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -P(S)V + \varepsilon_0(S), \\ \tilde{P}(\tilde{S}) &= P(S)\mu(P(S)), \quad \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{S}) = \varepsilon_0(S) \end{aligned}$$

с произвольной функцией  $P(S)$ .

Второе расширение связано с проективным оператором

$$\begin{aligned} & t(t\partial_t - u^k\partial_{u^k}) + x^j(t\partial_{x^j} + \partial_{u^j}) - \\ & -t(2\varepsilon\partial_\varepsilon - 3V\partial_V + MS\partial_S + 5p\partial_p), \quad p = -e_V, \end{aligned}$$

где  $M$  — постоянная.

Решая уравнения Ли [8], получим проективные преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t(1-at)^{-1}, \quad \tilde{x}^j = x^j(1-at)^{-1}, \\ \tilde{u}^k &= ax^k + u^k(1-at), \quad \tilde{V} = V(1-at)^{-3}, \\ \tilde{S} &= S(1-at)^M, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1-at)^2, \end{aligned}$$

где  $a$  — групповой параметр.

На производные преобразования продолжаются по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= p(1-at)^\delta, \quad \tilde{V}_{\tilde{j}} = V_j(1-at)^{-2}, \\ \tilde{V}_{\tilde{t}} &= V_t(1-at)^{-1} - a(x^j V_j - 3V)(1-at)^{-2}, \\ \tilde{u}_{\tilde{j}}^k &= u_j^k(1-at)^2 + a\delta_j^k(1-at), \\ \tilde{u}_{\tilde{t}}^k &= u_t^k(1-at)^3 - a(1-at)[ax^k + (x^j u_j^k + u^k)(1-at)], \\ \tilde{S}_{\tilde{j}} &= S_j(1-at)^{M+1}, \\ \tilde{S}_{\tilde{t}} &= S_t(1-at)^{M+2} - a(x^j S_j + M S)(1-at)^{M+1}.\end{aligned}$$

Система [6] инвариантна относительно проективных преобразований только если  $M = 0$ . Уравнение состояния удовлетворяет функциональному равенству

$$\tilde{e}(S, V(1-at)^{-3}) = e(S, V)(1-at)^2.$$

Дифференцирование по  $V$  и по  $t$  приводит к уравнению

$$3Ve_V = -2e \Rightarrow e = V^{-2/3}h(S) \Rightarrow p = \frac{2}{3}V^{-5/3}h(S).$$

Получили уравнение состояния одноатомного газа, модель которого инвариантна относительно проективных преобразований. Можно ли обобщить уравнения состояния, для которых проективное преобразование будет преобразованием эквивалентности?

#### 4. Газодинамическая среда, меняющаяся со временем

Рассмотрим газодинамическую сплошную среду с непрерывно меняющимся уравнением состояния, например, в результате реакций

$$\varepsilon = e(t, S, V).$$

В термодинамическом тождестве учитывается приток энергии

$$TdS = d\varepsilon + \mu dt \Rightarrow T = e_s, p = -e_V, \mu = -e_t,$$

где  $\mu$  — мощность притока энергии. В системе (6) изменится уравнение для энтропии

$$e_S DS + e_t = 0. \tag{15}$$

Преобразования эквивалентности (13) и (14) остаются прежними.

Чтобы проективное преобразование было преобразованием эквивалентности, уравнение состояния должно удовлетворять функциональному равенству

$$\begin{aligned}\tilde{e} &= (t(1-at)^{-1}, S(1-at)^M, V(1-at)^{-3}) = \\ &= e(t, S, V)(1-at)^2.\end{aligned}$$

Вычисляя преобразования производных функции  $e$  и подставляя их в преобразованное уравнение (15), получим уравнение

$$MSe_S + 3Ve_V = -2e.$$

Решение этого уравнения

$$\begin{aligned}\varepsilon &= S^{-2/M}e(t, VS^{-3/M}), \quad M \neq 0; \\ \varepsilon &= V^{-2/3}e(t, S), \quad M = 0,\end{aligned}$$

задают уравнение состояния, для которых проективной оператор задаёт преобразование эквивалентности. Преобразование эквивалентности используют для групповой классификации, когда находят классы уравнений состояния, с которыми система уравнений допускает большее симметрией, чем в случае общего уравнения состояния. Если известна вся группа преобразований эквивалентности, то оптимальная система подгрупп задаёт групповую классификацию.

## 5. Заключение

Для стационарных уравнений состояния система квазилинейных уравнений газодинамического типа будет двухпараметрическая. Для уравнения состояния  $\varepsilon = e(S, V)$  определены преобразования эквивалентности термодинамических параметров и общих растяжений. Проективные преобразования допускаются системой уравнений в случае стационарного уравнения состояния для одноатомного газа. Проективные преобразования эквивалентности возможны для специальных нестационарных уравнений состояния.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Программа "Подмодели". Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. *Овсянников Л.В.* Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
3. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: издательство СО АН СССР, 1962. 239 с.
4. *Хабиров С.В.* Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 6, № 2. С. 99–103.
5. *Хабиров С.В. Мукминов Т.Ф.* Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сибирские электронные матем. известия. 2019. Т. 16. С. 121–143.
6. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
8. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

УДК 532/529.534.2

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВОЛНОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ  
ТРУБОПРОВОДОВ С ПОВРЕЖДЕННЫМИ  
УЧАСТКАМИ МЕТОДОМ БЫСТРОГО  
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**

**Шагапов В.Ш.<sup>1</sup>, Галиакбарова Э.В.<sup>1,2</sup>, Хакимова З.Р.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
г. Уфа, Россия;

<sup>2</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;

*Shagapov@rambler.ru, emi.galiakbar@yandex.ru,  
zulfyahakimova@yandex.ru*

*Для обнаружения повреждений в трубопроводах при транспорте углеводородных жидкостей или газов предложено создавать зондирующий импульс давления во флюиде, заполняющем канал. Построена теоретическая модель распространения импульсов конечной длительности по трубопроводу с повреждениями типа коррозионных проржавлений, трещин и пробоин, пробок. Рассмотрены случаи наземного и подземного расположения трубопроводов. Получены системы интегро-дифференциальных уравнений. Выведены дисперсионные уравнения, коэффициенты отражения и прохождения в зависимости от типа повреждения. Изучена динамика импульсов в трубопроводе с поврежденными участками на основе быстрого преобразования Фурье.*

*Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, гармоническая волна, быстрое преобразование Фурье.*

**SOLUTION OF PROBLEMS OF WAVE SENSING OF  
PIPELINES WITH DAMAGED SEGMENTS BY THE  
METHOD OF FAST FOURIER TRANSFORM**

**Shagapov V.Sh.<sup>1</sup>, Galiakbarova E.V.<sup>1,2</sup>, Khakimova Z.R.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Mavlutov Institute of Mechanics, Ufa, Investigation Center, R.A.S.,  
Ufa, Russia;

<sup>2</sup> Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia;  
*Shagapov@rambler.ru, emi.galiakbar@yandex.ru,  
zulfyahakimova@yandex.ru*

*To detect damage in pipelines during the transport of hydrocarbon liquids or gases, it is proposed to create a probing pressure pulse in the fluid filling the channel. A theoretical model of the propagation of pulses of finite duration through a pipeline with damages such as corrosive rusting, cracks and holes, plugs has been built. Cases of aboveground and underground location of pipelines are considered. Systems of integro-differential equations are obtained. Dispersion equations, reflection and transmission coefficients are derived depending on the type of damage. The dynamics of impulses in a pipeline with damaged sections was studied based on the fast Fourier transform.*

*Key words:* integro-differential equations, harmonic wave, fast Fourier transform.

Рассматривается трубчатый канал (трубопровод), заполненный газом или жидкостью, содержащий поврежденный участок протяженностью  $l_\delta$  в виде щелей, трещин, пробоин или пробок. На конце трубопровода, радиуса  $a$  создается сканирующий импульс давления длительностью  $l_\delta$  и длиной волны  $\lambda$ . Приняты допущения [1]:  $\lambda \gg l_\delta$ ,  $\lambda > 2a$ , ( $\lambda = 2\pi C/\omega$ ,  $C$  — скорость звука в среде). По-вреждения рассматриваются отражающей поверхностью, возмущения давления и скорости — функции одной пространственной координаты  $z$  и времени  $t$ ; ось Oz направлена по оси симметрии трубопровода, начало отсчета ( $z = 0$ ) совпадает с поврежденным участком; расстояние до повреждения равно  $l$ .

Импульсный сигнал при распространении по трубопроводу застухает. Принята модель[2], в которой вязкость и теплопроводность флюида проявляются в тонком слое вблизи внутренней поверхности стенки трубопровода ( $a \gg 2\sqrt{\nu^{(j)}}/\omega$ ,  $j = T, \nu$ , где  $\nu^{(j)}$ ,  $j = T, \nu$  — коэффициент температуропроводности и кинематической вязкости газа или жидкости).

Уравнение неразрывности для возмущения давления и скорости имеет вид в газе

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( p + \frac{\sqrt{\nu^{(T)}}(\gamma - 1)}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{p(z, \tau)}{\sqrt{(t - \tau)}} d\tau \right) + \rho_0 C^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ C = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \gamma = \frac{c_g}{c_g - R_g}, \nu^{(T)} = \frac{\lambda_g}{\rho_0 c_g}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 C^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

где  $C$  — скорость звука в газе (или жидкости),  $p$  и  $w$  — возмущения давления и скорости,  $\rho_0$  — невозмущенное значение плотности,  $c_g, R_g, \gamma$  и  $\lambda_g$  — теплоемкость при постоянном давлении, приведенная газовая постоянная, показатель адиабаты и коэффициент теплопроводности газа, соответственно.

Уравнение импульсов следующее

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{2\sigma}{a}, \sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\pi\nu^{(\mu)}}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial w/\partial\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} d\tau, \nu^{(\mu)} = \mu/\rho_0,$$

где  $\sigma$  — касательное напряжение на поверхности стенки канала.

Начальные условия

$$p|_{t_0=-\infty} = 0, w|_{t_0=-\infty} = 0.$$

Границные условия для повреждений, приводящих к «утечкам» флюида

$$\begin{aligned} \pi a^2 \rho_0 (w^{(1)} - w^{(2)})|_{z=0} &= \rho_0 s \tilde{u}, \\ p^{(1)}|_{z=o} &= p^{(2)}|_{z=o} = \tilde{p} \end{aligned}$$

( $\tilde{u}$  — скорость фильтрации жидкости через повреждение;  $\tilde{p}$  — возмущение давления на отражающей границе  $z = 0$ );  
для повреждений типа «пробки»

$$Sw^{(1)}|_{z=o} = \tilde{S}w^{(2)}|_{z=o}, S = \pi a^2, \tilde{S} = \pi(a - \Delta)^2$$

( $\Delta$  — толщина пробки),

$$p^{(1)}|_{z=0} = p^{(2)}|_{z=0}.$$

Решение ищется в виде затухающих гармонических волн:

$$p = A_p \exp[i(Kz - \omega t)], w = A_w \exp[i(Kz - \omega t)] \quad (i = \sqrt{-1}),$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $K = k + i\delta$  — волновой вектор. Действительная и мнимая части волнового вектора определяют скорость распространения и затухания гармонических волн, причем  $C_p = \omega/k, z_\delta = \delta^{-1}$  ( $C_p$  — фазовая скорость,  $z_\delta$  — характерное расстояние, на которое амплитуда гармонической волны уменьшается в  $e$  раз).

В работах [2 – 5] получены дисперсионные уравнения, которые проанализированы для различных газов, жидкостей, заполняющих

канал, характеристики канала, выведены коэффициенты отражения и прохождения в зависимости от типа повреждения. Динамика импульсного сигнала конечной длительности изучалась с помощью быстрого преобразования Фурье [6 – 7]. Теоретические построения положены в основу патента на изобретение [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, [https://rscf.ru/project/21-11-00207/».](https://rscf.ru/project/21-11-00207/)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исаакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
2. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.* К теории акустического сканирования трубопроводов с поврежденными участками // Труды института механики им. Р.Р. Мавлютова. Электронный журнал теоретической механики. 2016. Т. 11. № 2. С. 180–188.
3. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.* К теории акустического зондирования трубчатых каналов, содержащих участки с нарушением герметичности // Инженерно физический журнал. 2018. Т. 91. № 3, С. 709 –719.
4. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хусаинов И.Г., Хакимова З.Р.* Акустическое сканирование поврежденных трубопроводов, находящихся в грунте // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 4. С. 169–178.
5. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.* Динамика импульсных сигналов в трубопроводе, заполненном метано-парокапельной смесью и подверженной газогидратным отложениям // Инженерно- физический журнал. 2021. Т. 94. № 3. С. 698 –706.
6. *Ефимов В.А.* Математический анализ (специальные разделы), ч. I, М: Высшая школа. 1980. 279 с.
7. *Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю.* Компьютерное моделирование волновых процессов в пористых средах // Вестник кибернетики. 2016. № 2(22). С. 103–111.
8. *Галиакбаров В.Ф., Галиакбарова Э.В., Ковшов В.Д., Аминев Ф.М., Хакимова З.Р.* Система контроля состояния трубопровода. Пат.2606719 С1 РФ, F17D5/00, опубл. 10.01.2017, Бюл. № 1.

УДК 534.21

## К ЗАДАЧЕ О РЕЛАКСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ В ТРУБОПРОВОДЕ С ПОВРЕЖДЕНИЕМ СТЕНКИ

Шагапов В.Ш.<sup>1</sup>, Хусаинов И.Г.<sup>2</sup>, Хакимова З.Р.<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
г. Уфа, Россия;

<sup>2</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>3</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;

Shagapov@rambler.ru, ivt30@mail.ru, zulfyahakimova@yandex.ru

*Исследуется динамика релаксации давления в подземном трубопроводе с повреждением стенки, после опрессовки. Построена теоретическая модель, учитывающая фильтрационные характеристики, окружающей трубопровод среды. Получено линейное интегральное уравнение описывающее релаксацию давления в трубопроводе. Представлены результаты численных расчетов зависимости времени снижения давления от масштабов повреждения стенки.*

*Ключевые слова:* давление, фильтрация, жидкость.

## TO THE TASK ON PRESSURE RELAXATION IN PIPELINE WITH WALL DAMAGE

Shagapov V.Sh.<sup>1</sup>, Khusainov I.G.<sup>2</sup>, Khakimova Z.R.<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Investigation Center, R.A.S.,  
Ufa, Russia;

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia

<sup>3</sup> Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia;

Shagapov@rambler.ru, ivt30@mail.ru, zulfyahakimova@yandex.ru

*Dynamics of pressure relaxation after pressurization in underground pipeline with wall damage is investigated. A theoretical model was built that takes into account the filtration characteristics surrounding the pipeline of the environment. Linear integral equation describing pressure relaxation in pipeline is obtained. The results of numerical calculations of the dependence of the time of pressure reduction on the scale of wall damage are presented.*

*Key words:* pressure, filtration, liquid.

Своевременная диагностика трубопроводов является предупреждением возникновения аварийных ситуаций. При имеющемся большом количестве различных методов диагностики одним из эффективных методов обнаружения повреждений стенок трубопровода является метод опрессовки. В работах [1,2] показана возможность применения данного метода для зондирования коллекторских характеристик призабойных участков нефтяных и газовых скважин. В [3] исследуется восстановление давления в подземном горизонтальном резервуаре хранения, после опрессовки.

Рассматривается линейный участок подземного трубопровода, заполненный жидкостью, длиной  $L$ , имеющий повреждение стенки протяженности  $l$ . Участок закрыт с обоих концов. В начальный момент времени  $t = 0$  давление в выбранном участке канале мгновенно увеличивается до некоторого значения  $p^{(M)}$ . После этого, за счет фильтрации жидкости через поврежденный участок, давление в трубе постепенно будет снижаться до значения  $p_0$ . Давление в жидкости, насыщающей грунт, также принимаем равным  $p_0$ .

При описании процесса восстановления давления принимаем, что интенсивность утечек полностью определяется гидравлическим соотивлением грунта. Будем полагать, что повреждение представляет собой цилиндрическую поверхность, а фильтрационное течение в грунте вокруг поврежденного участка будем считать параллельно симметричным.

Уравнение сохранения массы жидкости в трубопроводе с учетом утечки через повреждение стенки

$$\frac{dm}{dt} = -2\pi la\rho_0 u, m = V\rho,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $\rho_0$  — начальное значение плотности жидкости,  $a$  — радиус трубы,  $u$  — скорость фильтрации жидкости через поврежденный участок.

Жидкость будем считать акустически сжимаемой

$$p - p_0 = C^2(\rho - \rho_0).$$

Для определения скорости фильтрации  $u$  запишем основное уравнение фильтрации и закон Дарси как

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \varkappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p'}{\partial r} \right),$$

$$u' = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad a < r < \infty,$$

где  $p'$ ,  $u'$  — давление и скорость фильтрации в грунте возле поврежденного участка.

На поверхности поврежденной стенки трубы должны выполняться начальное и граничные условия

$$p' = p_0 (a < r < \infty, t \leq 0),$$

$$u' = u, p' = p(r = a, t > 0),$$

$$p' = p(t) (t > 0, r = a),$$

$$p' = p_0 (t > 0, r \rightarrow \infty).$$

Используя решение уравнения фильтрации, закон Дарси, на основе уравнения сохранения массы получим интегральное уравнение, описывающее изменение давления в трубопроводе

$$p^{(M)} - p_0 = \frac{ml\kappa}{a^2 L} \int_0^t \varphi \left( \frac{t-t'}{a^2/\kappa} \right) (p(t') - p_0) dt',$$

здесь  $\varphi(S)$  — ядро интегрального уравнения.

В работе [4], на основе решения интегрального уравнения, приведен анализ численных расчетов зависимости времени снижения давления от радиуса трубы, от величины повреждения и свойств жидкости и грунта.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шагапов В. Ш., Хусаинов И.Г., Хафизов Р.М. Релаксация давления в полости, окруженнной пористой и проницаемой породой, при опрессовке введением газа // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 1. С. 109–118.

2. Хафизов Р.М., Хусаинов И.Г., Шагапов В.Ш. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

3. Шагапов В.Ш., Хакимова З.Р. К теории релаксации давления в подземном резервуаре с поврежденной стенкой // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92. № 2. С. 468–473.

Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

4. Шагапов В.Ш., Хусаинов И.Г., Хакимова З.Р. Релаксация давления в трубчатом канале, имеющем поврежденный участок, после опрессовки // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93. № 2. С. 466–473.

УДК 517.968.73

**О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ  
УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С  
ПЕРИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ**

**Юлдашева А.В.**

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Ташкенте,  
г. Ташкент, Узбекистан;  
yuasv86@mail.ru

*Найдены условия существования и единственности решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с периодической моделью механики твёрдого тела.*

*Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, сингулярный оператор, перидинамика.*

**ON THE SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM  
FOR AN EQUATION OF PERIDYNAMIC MODEL**

**Yuldasheva A.V.**

Lomonosov Moscow State University, Tashkent Branch,  
Tashkent, Uzbekistan;  
yuasv86@mail.ru

*The uniqueness and existence of a solution to the Cauchy problem for an integro-differential equation associated with a peridynamic model of solid mechanics are proved.*

*Key words: Integro-differential equation, singular integral operator, peridynamics.*

В области  $\Omega \subset R^2$  с кусочно-гладкой границей рассмотрим сле-

дующую задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \int_{\Omega} K(x, y) [u(x, t) - u(y, t)] dy = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь предполагается, что неизвестная функция  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow R$ , ядро  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow R$  и внешняя сила  $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow R$  являются скалярными функциями, причём  $n = 2$ . Интегральный оператор в правой части уравнения (1) имеет специальное сильно сингулярное ядро, особенность которого заключается в том, что вблизи диагонали  $x = y$  оно имеет вид

$$K(x, y) = \frac{c_n}{|x - y|^n} + \gamma(x, y),$$

где  $\gamma(x, y)$  непрерывная интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x, y) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь  $\nu = \nu(x)$  – внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  в точке  $x \in \partial\Omega$ .

Соответствующий интегральный оператор

$$Au(x) = \int_{\Omega} K(x, y) [u(x, t) - u(y, t)] dy. \quad (4)$$

Уравнение (1) является гиперсингулярным и неограниченным в классических функциональных пространствах, таких, как  $L_p(\Omega)$  или соболевские пространства  $W_p^l(\Omega)$ .

При решении задачи мы воспользуемся самосопряжённым расширением оператора Лапласа  $-\Delta$ , порождённым граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений  $\{\lambda_k\}$ , а собственные функции  $\{v_k(x)\}$  удовлетворяют соотношениям:

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Решение этой спектральной задачи мы понимаем в смысле  $W_2^1(\Omega)$

Для любого  $\beta \geq 0$  введем гильбертово пространство  $H^\beta(\Omega) = D((I - \Delta)^{\beta/2})$  с нормой

$$\|u\|_\beta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k)^\beta |(u, v_k)|^2.$$

Определим ядро уравнения (1) вне диагонали  $x = y$  следующим образом

$$K(x, y) = \Delta_y L(x, y), x \in \Omega, y \in \Omega,$$

где

$$L(x, y) = \frac{1}{2} \ln^2 |x - y| + \eta(x, y), x \in \Omega, y \in \Omega.$$

Здесь  $\eta(x, y)$  бесконечно дифференцируемая функция в области  $\Omega \times \Omega$ .

Отметим, что данная задача при рассмотрена в работе [1], а в работах [3-4] изучались задачи Коши для перидинамических моделей, допускающих разрывы первого рода по пространственным переменным, исключаемые моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями.

Для сингулярного интегрального оператора  $A$  имеет место следующая

**Лемма.** Для любой функции  $u$  выполняется равенство

$$Au(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \lambda_k(u, v_k) v_k(x), x \in \Omega.$$

Перейдем к исследованию уравнения (1). Решение ищем в виде ряда по собственным функциям задачи (5)

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1), учитывая Лемму и начальные условия (2), находим

$$c_0(t) = (\varphi, v_0) + (\psi, v_0)t + \int_0^t (t-s)(f, v_0)(s) ds$$

$$c_k(t) = (\varphi, v_k) \cos \mu_k t + (\psi, v_k) \frac{\sin \mu_k t}{\mu_k} + \\ + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t \sin \mu_k(t-s) f_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\mu_k^2 = \lambda_k$ .

Итак, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $0 < \alpha < 1$  и  $0 < \beta < \alpha/2$ . Для любого  $T > 0$  и любых  $\varphi \in W_2^\alpha(\Omega)$ ,  $\psi \in W_2^\alpha(\Omega)$  и  $f \in C\{[0, T] \rightarrow W_2^\alpha(\Omega)\}$  существует, и при том единственное, решение задачи (1)-(2) из класса  $C^2\{[0, T] \rightarrow H^\beta(\Omega)\}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А., Юлдашева А.И. О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром // Дифференциальные уравнения. 2021 Т. 57. № 3. С. 375–386.
2. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Высшая школа, 2005. 671 с.
3. Du Q., Zhou K. Mathematical analysis for the peridynamic nonlocal continuum theory // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2011. Vol. 45. P. 217-234.
4. Alimov S. A., Cao Y., Ilhan O. A. On the problems of peridynamics with special convolution kernels // J. of Integral Equations and Applications. 2014. Vol. 26. № 3. P. 301–321.

## **Секция 7. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОДИНАМИКИ И ТЕПЛОФИЗИКИ**

УДК 517.95

### **NEW EXACT TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF (1+1)-DIMENSIONAL SPACE-TIME FRACTIONAL SCHRODINGER MODEL**

**Ala V., Demirbilek U., Mamedov Kh.R.**

Mersin University, Mersin, Turkey;

volkanala@mersin.edu.tr, udemirbilek@mersin.edu.tr,

hanlar@mersin.edu.tr

*This study is about to formulate exact traveling wave solutions of (1+1)-dimensional space-time fractional Schrodinger model by utilizing Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method (IBSEFM) in conformable fractional derivative sense. Using a proper wave transformation, the original equation is transformed to the nonlinear ordinary differential equation. The method is very simple in comparison with the classical techniques and very effective for solving fractional order partial differential equations.*

*Key words:* Traveling wave solution, conformable derivative, Schrodinger model.

#### **1. Introduction**

Because of applications of fractional differential equations (FDEs) in different areas of applied mathematics and physics, fractional calculus has received much attention. They can model real world problems better than the integer-order differential equations. Indeed, they describe nonlinear phenomena which appear in a wide variety of engineering and scientific applications. There are many different FDEs which are direct extensions of the integer-order differential equations. One of them is conformable space-time fractional differential equations. The  $\alpha$  th order conformable fractional derivative is proposed in [1] with the following definition:

$$D_t^\alpha(y(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{y(t + \tau t^{1-\alpha}) - y(t)}{\tau}, \quad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1],$$

for a function  $y = y(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Some properties for conformable fractional derivative can be found in [1]. There are many conformable fractional derivative equations which have been solved recently [2, 3].

In this work, we apply the Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method (IBSEFM) to obtain exact traveling wave solution for nonlinear (1+1)-dimensional space-time fractional Schrodinger model. The space-time conformable fractional nonlinear Schrodinger model ( NLS<sup>+</sup> ) is as:

$$iD_t^\alpha u + D_x^{2\beta} u + 2\delta |u|^2 u = 0, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad (1)$$

where,  $i^2 = -1$ ,  $\delta \neq 0$  is a real number and  $u = u(x, t)$  is a complex-valued function,  $x$  shows the non-dimensional distance along the fiber while  $t$  shows time.

## 2. Description of the ibsefm

In this part, let us give the fundamental properties of the IBSEFM (see [2, 4]) that is the improvement form of Bernoulli sub-equation function method [5]. We present the six main steps of the IBSEFM below the following:

**Step 1:** Let us take account of the following conformable time-fractional partial differential equation of the style

$$P(u, D_t^{(\alpha)} u, D_x^{(\alpha)} u, D_{xt}^{(2\alpha)} u, D_{xxt}^{(3\alpha)} u, \dots) = 0, \quad (2)$$

where  $D_t^{(\alpha)}$  is the conformable derivative operator,  $u(x, t)$  is an unknown function,  $P$  is a polynomial that contains  $u$ , its partial and fractional derivatives. The aim is to convert the nonlinear conformable fractional partial differential equation with a suitable wave transformation into the nonlinear ordinary differential equation. The wave transformation as

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \xi(x, t^\alpha). \quad (3)$$

Applying to the properties of conformable derivative, it enables us to convert (2) into an ordinary differential equation in the form

$$N(U, U', U'', \dots) = 0. \quad (4)$$

**Step 2:** If we integrate (4) term to term once or more, we acquire integration constant(s) which may be determined then.

**Step 3:** We hypothesize that the solution of (4) may be presented as follows;

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i F^i(\xi)}{\sum_{j=0}^m b_j F^j(\xi)} = \frac{a_0 + a_1 F(\xi) + a_2 F^2(\xi) + \dots + a_n F^n(\xi)}{b_0 + b_1 F(\xi) + b_2 F^2(\xi) + \dots + b_m F^m(\xi)}, \quad (5)$$

where  $a_0, a_1, \dots, a_n$  and  $b_0, b_1, \dots, b_m$  are coefficients which will be determined later.  $m \neq 0, n \neq 0$  are chosen arbitrary constants according to the balance principle and considering the form of Bernoulli differential equation below the following;

$$F'(\xi) = \sigma F(\xi) + dF^M(\xi), \quad d \neq 0, \sigma \neq 0, \quad M \in \mathbb{R}/\{0, 1, 2\}, \quad (6)$$

where  $F(\xi)$  is polynomial.

**Step 4:** The positive integer  $m, n, M$  (are not equal to zero) which are found by balance principle that is both nonlinear term and the highest order derivative term of (4).

Substituting (5) and (6) in (4) it yields us an equation of polynomial  $\Theta(F)$  of  $F$  as following;

$$\Theta(F(\xi)) = \rho_s F(\xi)^s + \dots + \rho_1 F(\xi) + \rho_0 = 0,$$

where  $\rho_i, i = 0, \dots, s$  are coefficients and will be determined later.

**Step 5:** The coefficients of  $\Theta(F(\xi))$  which will give us a system of algebraic equations, whole be zero.

$$\rho_i = 0, i = 0, \dots, s.$$

**Step 6:** Once we solve (4), we get the following two cases with respect to  $\sigma$  and  $d$ ,

$$F(\xi) = \left[ \frac{-de^{\sigma(\epsilon-1)} + \epsilon\sigma}{\sigma e^{\sigma(\epsilon-1)}\xi} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}, \quad d \neq \sigma, \quad (7)$$

$$F(\xi) = \left[ \frac{(\epsilon-1) + (\epsilon+1)\tanh(\sigma(1-\epsilon))\frac{\xi}{2}}{1 - \tanh(\sigma(1-\epsilon)\frac{\xi}{2})} \right], \quad d = \sigma, \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Using a complete discrimination system for polynomial of  $F(\xi)$ , we obtain the analytical solutions of (4) via mathematics software and categorize the exact solutions of (4). To achieve better results, we can plot two and three dimensional figures of analytical solutions by considering suitable values of parameters.

### 3. Application of the proposed method

To solve (1), let us consider the following wave transform:

$$u(x, t) = U(\xi)e^{i\theta}, \quad \xi = \frac{kx^\beta}{\beta} - \frac{wt^\alpha}{\alpha}, \quad \theta = \frac{dx^\beta}{\beta} - \frac{ct^\alpha}{\alpha}, \quad (9)$$

where  $c, k, w, d$  and  $q$  are constants, while  $w$  is the wave speed to be determined later,  $U$  gives the soliton amplitude component and  $\theta$  gives the soliton phase component. Putting (9) into (1) yields:

$$D_t^\alpha u = (-wU' - icU)e^{i\theta}, \quad D_x^{2\beta} u = (k^2U'' + 2idkU' - d^2U)e^{i\theta}. \quad (10)$$

Setting (10) into (1), one can get the following equation [6] :

$$(-w + 2dk)iU' + k^2U'' + (c - d^2)U + 2\delta U^3 = 0. \quad (11)$$

From the imaginary part, it is obtained  $w = 2dk$ . In this case (11) can be rewritten as

$$k^2U'' + (c - d^2)U + 2dU^3 = 0, \quad (12)$$

We applied the balancing technique to (12) by considering the highest derivative  $U''$  and the highest power nonlinear term  $U^3$  we get the relationship as follow:

$$M = n - m + 1.$$

That shows us the different cases of the solutions of (12) and we can obtain some analytical solutions as follows:

With respect to the balance, we consider  $M = 3, m = 1, n = 3$  and hold the following equations;

$$U(\xi) = \frac{a_0 + a_1F(\xi) + a_2F^2(\xi) + a_3F^3(\xi)}{b_0 + b_1F(\xi)} \equiv \frac{\Upsilon(\xi)}{\Psi(\xi)}, \quad (13)$$

$$U'(\xi) = \frac{\Upsilon'(\xi)\Psi(\xi) - \Upsilon(\xi)\Psi'(\xi)}{\Psi^2(\xi)}, \quad (14)$$

and

$$U''(\xi) = \frac{\Upsilon'(\xi)\Psi(\xi) - \Upsilon(\xi)\Psi'(\xi)}{\Psi^2(\xi)} - \frac{[\Upsilon(\xi)\Psi'(\xi)]'\Psi^2(\xi) - 2\Upsilon(\xi)[\Psi'(\xi)]^2\Psi(\xi)}{\Psi^4(\xi)}, \quad (15)$$

where  $F' = \sigma F + dF^3$ ,  $a_3 \neq 0$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$ ,  $d \neq 0$ . Using (13)-(15) in (12), we get from coefficients of polynomial of  $F$ . By solving system the coefficients using software, one of the solution case is

**Case1.** For  $\sigma \neq d$ ,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sigma a_2}{2d}; \quad a_1 = \frac{\sigma a_2 b_1}{2db_0}; \quad a_3 = \frac{a_2 b_1}{b_0}; \\ \delta &= -\frac{2(cd^2 b_0^2 - d^4 b_0^2)}{\sigma^2 a_2^2}; \quad k = -\frac{i\sqrt{-c+d^2}}{\sqrt{2}\sigma}. \end{aligned} \quad (16)$$

Using these coefficients we obtain the conformable time fractional Schrodinger model as follows:

$$u_1(x, t) = \frac{e^{-\frac{ict^\alpha}{\alpha} + \frac{idx^\beta}{\beta}} \sigma \left( \frac{1}{d} - \frac{2}{d - e^{\frac{i\sqrt{-2c+2d^2}x^\beta}{\beta} + 2\frac{t^\alpha w\sigma}{\alpha} \epsilon\sigma}} \right) a_2}{2b_0},$$

here all constants are different from zero.

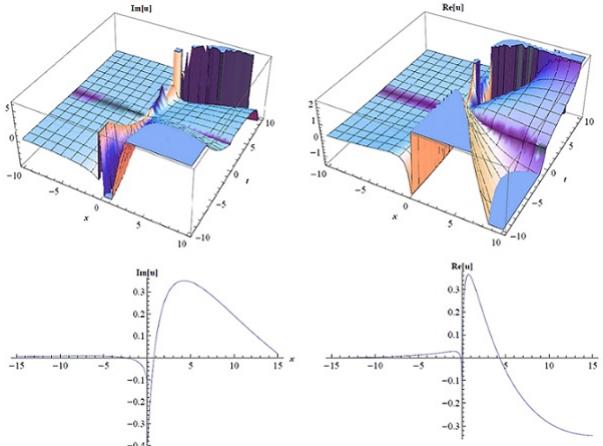


Рис. 1: 3D- plots of imaginary and real parts of  $u_1(x, t)$  for the values  $a_2 = 0.5$ ;  $w = 0.4$ ;  $k = 1$ ;  $b_0 = 0.7$ ;  $\alpha = 0.4$ ;  $\beta = 0.2$ ;  $d = 0.8$ ;  $c = 0.65$ ;  $\sigma = 0.7$ ;  $\epsilon = 0.1$ ;  $-15 < x < 15$ ,  $-10 < t < 10$ , 2D- graphs of imaginary and real parts of  $u_1(x, t)$  for  $-15 < x < 15$ ,  $t = 0.4$ .

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Khalil R., Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2014.
2. Ala V., Demirbilek U., Mamedov Kh.R. An application of improved Bernoulli sub-equation function method to the nonlinear conformable time-fractional SRLW equation // AIMS Mathematics. 2020. Vol.5, № 4, C. 3751–3761.
3. Rezazadeh H., Kumar D., Sulaiman T.A., Bulut H. New complex hyperbolic and trigonometric solutions for the generalized conformable fractional Gardner equation // Modern Physics Letters B. 2019.
4. Baskonus H.M., Bulut H. Exponential prototype structures for (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Pempinelli systems in mathematical physics // Waves in Random and Complex Media. 2016. Vol. 26.
5. Zheng B. Application of a generalized bernoulli sub-ODE method for finding traveling solutions of some nonlinear equations // WSEAS Trans. Math. 2012. Vol.7. C. 618–626.
6. Darvishi M.T., Najafia M., Wazwaz A. Conformable space-time fractional nonlinear (1+1)-dimensional Schrodinger-type models and their traveling wave solutions // Chaos, Solitons and Fractals. 2018. Vol. 150.

УДК 532.685

### **ПОГРАНСЛОЙНАЯ ЗАДАЧА ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ**

**Ахметова О.В., Ковальский А.А.**

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;  
[ahoksana@yandex.ru](mailto:ahoksana@yandex.ru), [aakov68@mail.ru](mailto:aakov68@mail.ru)

*Описана оригинальная процедура нахождения погранслойной (в математическом смысле) функции, позволяющей удовлетворить предельному граничному условию исходной задачи о радиальной фильтрации в полубесконечных массивах, разделенных пластом с отличающимися свойствами при ее асимптотическом решении.*

*Ключевые слова: фильтрация, поле давления, задача сопряжения, асимптотический метод*

## BOUNDARY-LAYER PROBLEM WITH AN ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF THE PRESSURE FIELD IN FORMATION

Akhmetova O.V., Kovalskiy A.A.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
ahoksana@yandex.ru, aakov68@mail.ru

*An original procedure for finding a boundary-layer (in the mathematical sense) function that allows satisfying the limiting boundary condition of the original problem of radial filtration in semi-infinite arrays separated by a layer with different properties with its asymptotic solution is described.*

*Key words:* filtration, pressure field, conjugation problem, asymptotic method.

Описание процессов и при радиальной фильтрации в трехслойном пласте, центральный слой которого обладает повышенной проницаемостью, и соответствующая математическая постановка, представлены в работе [1]. Исходная задача записывается в безразмерных величинах с использованием критериальных соотношений и содержит нестационарные уравнения пьезопроводности для всех пропластков в предположении осевой симметрии, условия равенства давлений и потоков на границах пропластков, условия изолированности от скважины для крайних полубесконечных слоев и условие постоянного расхода для среднего высокопроницаемого пропластка. Предполагается, что в начальный момент времени возмущения давления отсутствуют.

Сложности решения исследуемой задачи связаны с нестационарностью уравнений пьезопроводности, перераспределением давления при двумерном течении флюида и условиями 4 рода на границах слоев. Задача допускает точное решение в пространствах изображений Лапласа - Карсона по времени и Фурье - Бесселя по радиальной координате [2]. В работах [1, 3] найдено ее асимптотическое решение в нулевом и первом асимптотических приближениях с использованием модификации асимптотического метода формального параметра [4]. Установлено, что нулевой коэффициент разложения для функции

давления среднего пропластика [1] описывает асимптотически осредненное [5] по ограниченной пространственной области значение поля давления.

Выражение для первого коэффициента асимптотического разложения [3] позволяет определить "погрешность" осредненных значений физических параметров. При его построении возникает проблема определения ослабленных условий, поскольку выражение для радиальной производной первого коэффициента асимптотического разложения предельного условия не обращается в нуль при  $r = 0$  вопреки требованиям исходной задачи. Указанный недостаток решения устранен построением погранслойной (в математическом смысле) функции [6]. Для этого в задаче для остаточного члена [2] введена растянутая переменная, вид которой устанавливается на основании анализа размерностей.

Сумма асимптотических коэффициентов после первого приближения представлена в виде асимптотического разложения погранслойной функции по параметру  $\varepsilon$ , откуда сформулированы задачи для коэффициентов разложения погранслойной функции. Задачи для погранслойных коэффициентов нулевого и первого порядков разделяются на три по количеству исследуемых пропластков. При этом показано [2], что задача для погранслойных коэффициентов нулевого порядка имеет только тривиальное решение. Решение задач для первого коэффициента асимптотического разложения погранслойной функции строится с помощью преобразования Лапласа - Карсона методом разделения переменных и выражается через функцию Кельвина  $K_0(x)$ .

Практическое значение погранслойных решений заключается в том, что они уточняют стабилизацию или эволюцию стационарного или квазистационарного профиля давления в центральном пласте. Выражения для погранслойных функций позволяют удовлетворить граничному условию исходной задачи при  $r = 0$ . Найденные погранслойные функции и вместе с нулевыми [1] и первыми [5] коэффициентами определяют искомое асимптотическое "в среднем точное" решение исходной задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А. Задача о радиальной фильтрации в полубесконечных массивах, разделенных

пластом с отличающимися свойствами // Прикладная физика и математика. 2017. № 3. С. 37 – 47.

2. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А. Уточнение асимптотического решения задачи о радиальной фильтрации в трехслойной системе на вязкой границе // Прикладная физика и математика. 2018. № 3. С. 39 – 49.

3. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А. Асимптотическое представление фильтрационного поля в пласте со слоистой неоднородностью // Прикладная физика и математика. 2017. № 6. С. 33 – 45.

4. Филиппов А.И., Шабаров А.Б., Ахметова О.В. Температурное поле турбулентного потока в скважине с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 1. С. 12 – 22.

5. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р. Асимптотически осредненное решение задачи о поле давления в слоисто-неоднородной пористой среде // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. 2015. № 3. С. 693 – 712.

6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

УДК 532.546; 519.6

## ОБРАЩЕНИЕ ДЕН ИЗЕГЕРА В ЗАДАЧАХ О ПОЛЯХ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ И СКВАЖИНЕ

Зеленова М.А.<sup>1</sup>, Филиппов А.И.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>2</sup> Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия  
*marina\_ag@inbox.ru, filippovai1949@mail.ru*

Для исследования фильтрационных полей давления в нефтегазовых пластах широко используются методы интегральных преобразований, например, Лапласа–Карсона. При этом типичной является ситуация, когда удается построить аналитическое решение

в пространстве изображений, однако переход в пространство оригиналов существенно затруднён, либо полученные выражения представляются громоздкими для реализации вычислительных экспериментов. В таких условиях весьма эффективным оказывается использование численных программ обращения, в качестве которых нами использован алгоритм ден Изигера. Показано, что применение этого алгоритма при исследовании фильтрационных полей давления является весьма эффективным и в некоторых случаях разработанные программы оказываются более результативными, нежели конечно-разностные.

**Ключевые слова:** фильтрация, конечно-разностный алгоритм, нелинейное уравнение пьезопроводности, численное обращение, алгоритм ден Изегера.

## IZEGER'S DAY INVERSION IN TEMPERATURE AND PRESSURE FIELDS IN A FORMATION AND A BOREHOLE

Zelenova M.A.<sup>1</sup>, Filippov A.I.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;  
marina\_ag@inbox.ru, filippovai1949@mail.ru

*For the study of filtration pressure fields in oil and gas reservoirs, methods of integral transformations are widely used, for example, Laplace–Carson. In this case, a typical situation is when it is possible to construct an analytical solution in the image space, but the transition to the space of the originals is significantly complicated, or the obtained expressions seem cumbersome for the implementation of computational experiments. Under such conditions, the use of numerical inversion programs turns out to be very effective, for which we used the den Isiger algorithm. It is shown that the application of this algorithm in the study of filtration pressure fields is very effective and in some cases the developed programs turn out to be more effective than the finite-difference ones.*

**Key words:** filtration, finite-difference algorithm, nonlinear piezoeconductivity equation, numerical inversion, den Iseger algorithm.

Развитие нефтяной и газовой промышленности в нашей стране связано с появлением новых районов добычи углеводородов и откры-

тием новых типов месторождений, освоение которых требует развития теории упругого режима фильтрации в пласте и течения отобранного флюида по скважине. Во многих, ставших уже классическими, монографиях и учебниках модели таких фильтрационных течений получены с использованием уравнения пьезопроводности и закона Дарси. Учет гидродинамической связи скважины и окружающего пласта важен для оптимизации различных этапов разработки месторождений, поэтому задачи о фильтрации углеводородов должны содержать и информацию о влиянии скважины на вскрытую ею залежь [1].

Задача о течении нефти в вертикальной скважине развита на основе классической теории представленной В.Г. Шуховым, Э.Б. Чекалюком, М.А. Пудовкиным, В.А. Чугуновым и др. Недостаток перечисленных работ заключается в том, что математические модели разработаны в предположении постоянства профиля скорости и температуры по сечению скважины. Позже профессором А.И. Филипповым разработана эффективная модификация асимптотического метода, ориентированная на задачи скважинной термодинамики и позволяющая учитывать нестационарный теплообмен с окружающими породами. Построенный новый способ расчета средней по сечению и радиального распределения температуры для ламинарного и турбулентного потоков позволяет осуществлять детальные расчеты температуры в скважинах. Это дает возможность прогнозировать температурные аномалии, возникающие в скважине, и обеспечивает возможность создания новых способов исследования скважин и оптимизацию условий теплоотдачи в реальных скважинах и трубопроводах [2].

Аналитические выражения нестационарной фильтрации, полученные на основе развитого асимптотического метода с применением интегральных преобразований Лапласа–Карсона представлены в работах [2 – 6]. При этом переход в пространство оригиналов осложнён наличием бесселевых функций и осуществлен только для области малых и больших времён.

В таких условиях актуально использование численных алгоритмов для обращения полученных решений. Здесь иллюстрируется применение алгоритма ден Изегера [7] для задач подземной термогидродинамики на примере задачи о поле давления с учётом влияния скважины [1].

На рисунке 1 представлена геометрия задачи.

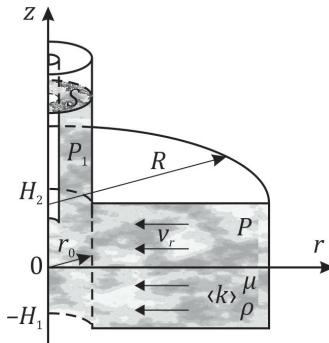


Рис. 1. Геометрия задачи

Здесь  $H$  ( $-H_1 < z < H_2$ ) – толщина перфорированной области. Ось  $z$  цилиндрической системы координат совпадает с осью скважины, а радиальная линия  $r$  направлена перпендикулярно оси. Представленная система координат обладает осевой симметрией, а течение флюида в пласте считается плоскорадиальным.

При добыче жидкких полезных ископаемых скважинным методом отбор жидкости насосом осуществляется из ствола скважины, хотя приток продукции происходит из насыщенного пласта. Поток флюида из продуктивного пласта идет на обеспечение производительности насоса и изменение уровня в стволе скважины. Если производительность насоса больше дебита коллектора, то жидкость частично отбирается из скважины. При этом происходит понижение уровня, и как следствие, уменьшается гидростатическое давление в интервале пласта, что приводит к росту притока. В противном случае часть притока из пласта расходуется на повышение уровня, а величина гидростатического давления возрастает, снижая приток из пласта.

Постановка задачи для этого случая сформулирована в работе [1] и в безразмерных переменных представляется как

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \tau} - \alpha \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = -q, \quad \tau > 0. \quad (2)$$

Границные и начальные условия имеют вид

$$P|_{r=1} = P_1, \quad P|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (3)$$

$$P|_{\tau=0} = 0, \quad P_1|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

Отметим, что уравнение (2) содержит след радиальной производной от давления из внешней области, в качестве которой выступает пространство эксплуатируемого коллектора. Таким образом оно связывает поля давления в скважине  $P_1$  и продуктивном пласте  $P$ . Отсюда следует, что соотношение (2) представляет неклассическое граничное условие для уравнения поля давления в пласте и выводит рассматриваемую задачу из разряда классических.

В работе [1] предпринята попытка решения задачи (1) – (4), а также произведено сопоставление численных расчетов и аналитического решения, построенного в пространстве изображений Лапласа–Карсона

$$P^{uL} = -\frac{1}{p} \frac{qK_0(r\sqrt{p})}{\sqrt{p} [\sqrt{p}K_0(\sqrt{p}) + \alpha K_1(\sqrt{p})]}, \quad (5)$$

оригинал которого имеет вид

$$P = -\frac{4q\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{du}{u^3} \frac{1 - e^{-u^2 t}}{[uJ_0(u) - \alpha J_1(u)]^2 + [uY_0(u) - \alpha Y_1(u)]^2}. \quad (6)$$

При проведении вычислительного эксперимента с помощью аналитических формул вычисление интегралов приводит к наличию существенных ошибок, что иллюстрируется на примере рис. 2, где расчёты осуществлены с использованием стандартной программы MathCad.

Таким образом, несмотря на наличие даже аналитического решения возникает необходимость выполнения расчётов другими методами, в качестве которых выступают численные алгоритмы обращения. Для перевода изображения в пространство оригиналов и выполнения вычислительных экспериментов нами использован численный алгоритм ден Изегера [7]. Метод численного обращения преобразования Лапласа–Карсона имеет преимущество некоторой универсальности, но требует постоянного контроля хотя бы в отдельных точках. Отметим, что каждый из использованных методов обладает определенными преимуществами и недостатками. Аналитическое решение, например, содержит в подынтегральном выражении комбинацию бесселевых функций, поэтому требует использования специаль-

ных программ для вычисления интегралов от осциллирующих функций, пространственно-временная область успешной реализации которых существенно ограничена. Комплексное же использование этих методов обладает преимуществом, поскольку в результате сопоставления достигается высокая достоверность полученных результатов, что является основным требованием научности.

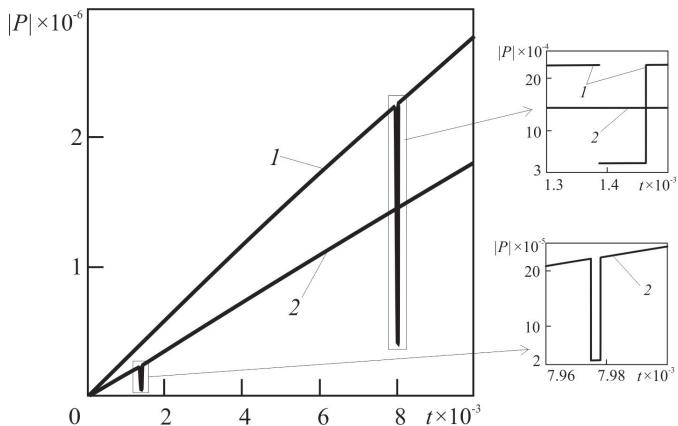


Рис 2. Вычисление поля давления на основе аналитического решения в виде интеграла (6): 1 –  $r = 1$ ; 2 –  $r = 5$

Рисунок 3 иллюстрирует согласование кривых, построенных на основе аналитического решения (6) (сплошные линии) и с использованием численного обращения ден Изегера на основе выражения (5) (пунктирные линии) [1]. Расчёты выполнены при значениях безразмерных параметров:  $q = 295$ ,  $\alpha = 0.00005292$ , которые получены при следующих величинах физических характеристик пласта и скважины:  $m = 0.3$ ;  $\mu = 10^{-2}$  Па·с;  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>;  $\langle k \rangle = 10^{-14}$  м<sup>2</sup>;  $H = 1$  м;  $\beta = 10^{-8}$  Н/м<sup>2</sup>;  $r_0 = 0.1$  м,  $Q = 1.1 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с.

Из рисунка следует, что вычисления по аналитической формуле совпадают с результатами численного обращения. Это сопоставление позволяет устраниТЬ и избежать возникновения выбросов и областей молчания алгоритма расчетов по аналитической формуле (6) и увеличить достоверность результатов численного обращения ден Изегера с использованием формулы (5). Достоверность и эффективность применения численного обращения подтверждено ранее на многочисленных теплофизических задачах [8 – 10].

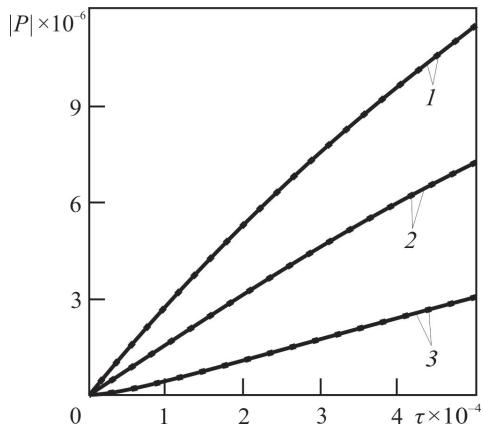


Рис. 3. Изменение возмущения давления в пласте с течением времени, построенные методом согласования расчётов по аналитической формуле (сплошные линии) и с использованием численного обращения (пунктирные линии) на различных расстояниях от скважины: 1 –  $r = 1$ ; 2 – 7.4; 3 – 54.6

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А. Поле давления в пласте при заданном дебите скважины // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Т. 6. 3(23). С. 58-78.
2. Горюнова М.А. Теоретическое исследование температурных полей в стволе действующей скважины: дис. .... канд. физ.-мат. наук: 01.04.14: защищена 10.12.09: утв. 12.03.10. Стерлитамак, 2009. –153 с.
3. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Квазистационарное температурное поле в тонком проницаемом анизотропном слое в нулевом асимптотическом приближении // Фундаментальные исследования. 2015. № 5-3. С. 553-557.
4. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Кручинов А.Г. Исследование температурных полей потока газа в скважине // Инженерно – физический журнал, 2011. Т. 84. № 5. С. 1052-1064
5. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р., Зеленова М.А. Квазистационарная модель фильтрации в

слоисто-неоднородном пласте с учетом влияния скважины // Инженерная физика. 2020. № 7. С. 16-25.

6. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Релаксационные процессы в скважине после пуска насоса // Инженерная физика. 2020. № 10. С. 17-22.

7. Den Iseger P. Numerical transform inversion using Gaussian quadrature // Probability in the in Engineering and Informational Sciences. 2006. № 20. Р. 1-44.

8. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Численная инверсия квазистационарного температурного поля в тонком анизотропном слое // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы X Межд. молодежн. науч.-практ. конф., г. Стерлитамак / отв. ред. Т.А. Михайлова. Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2020. С. 274-279.

9. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Щеглова Е.П. Применение численной инверсии к задаче о температурном поле в скважине // В сборнике: Юность и Знания – Гарантия Успеха. Сборник научных трудов 2-й Международной научно-практической конференции: В 2-х томах, г. Курск. Ответственный редактор: Горохов А.А., 2015. С. 259-262.

10. Зеленова М.А., Санкина Ю.В., Мырзабекова А.М. Численная инверсия преобразований Лапласа–Карсона на примере температурного поля в скважине // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы X Межд. молодежн. науч.-практ. конф., г. Стерлитамак / отв. ред. Т.А. Михайлова. Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2020. С. 106-111.

УДК 532.546(685); 519.63

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИДЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Зеленова М.А.<sup>1</sup>, Филиппов А.И.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>2</sup> Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия;  
marina\_ag@inbox.ru, filippovai1949@mail.ru

*Развивающиеся ныне идеи искусственного интеллекта составляют интерес для различных направлений исследования в науке. В работе представлены возможности использования развитых достижений искусственного интеллекта для изучения фильтрационных полей давления.*

*Ключевые слова:* фильтрация, искусственный интеллект, конечно-разностный алгоритм, нелинейное уравнение пьезопроводности.

## STUDY OF PRESSURE FIELDS IN A FORMATION USING THE IDEAS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Zelenova M.A.<sup>1</sup>, Filippov A.I.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the

Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;

marina\_ag@inbox.ru, filippovai1949@mail.ru

*The ideas of artificial intelligence that are currently being developed are of interest for various areas of research in science. The paper presents the possibilities of using the advanced achievements of artificial intelligence to study filtration pressure fields.*

*Key words:* filtering, artificial intelligence, finite-difference algorithm, nonlinear piezoelectricity equation.

Основными целями моделирования пласта являются прогноз его состояния и определение оптимальных способов увеличения дебита скважин. Исследуемые физические процессы описываются уравнением пьезопроводности [1 – 4], представляющим дифференциальное уравнение в частных производных. Большие перепады давлений характерные для механических способов увеличения нефтеотдачи, приводят к нелинейным уравнениям, а неоднородности пластовых систем требуют введения в уравнения переменных коэффициентов, что усложняет решение фильтрационных задач. Взаимное влияние нефтенасыщенного пласта и скважины, нескольких скважин на разрабатываемой площади и наличие перетоков между пропластками требуют задания граничных условий, привносящих в процесс поиска решения дополнительные трудности. Всё вышесказанное приводит к тому, что построение аналитических решений задач о полях давления в нефтенасыщенном пласте в точной постановке становится практически невозможным. Однако, применение вычислительной техники и искусственного интеллекта наряду с аналитическими методами позволяет обойти некоторые математические трудности, что способствует успешному поиску решения задач при моделировании сложных процессов, происходящих при разработке месторождений углеводородов.

В частности, в ходе решения уравнения пьезопроводности зачастую прибегают к методам интегральных преобразований, например, Лапласа–Карсона, что значительно упрощает поиск решений поставленных задач. Однако обратный переход в пространство оригиналов с использованием интеграла Меллина не всегда представляется возможным. При этом полученное аналитическое решение теряет всякую ценность. На помощь приходит искусственный интеллект, позволяющий осуществить численный переход в пространство оригиналов [3 – 5].

В геологии и геофизике также применяются программные продукты, основанные на «машинном обучении» при обработке и интерпретации геофизических сигналов для построения цифровых геологических и петрофизических моделей месторождений [6]. Сотрудниками научно производственного центра «Нейросейм» Татарского геологического разведочного управления ПАО «Татнефть» разработана нейрокомпьютерная технология прогнозирования нефтеперспективных объектов, базирующаяся на решении задач методами искусственного интеллекта. Нейрокомпьютерная система представляет собой обучаемую

ящуюся многослойную нейронную сеть. Настроенная и обученная нейронная сеть позволяет значительно снизить риски при бурении поисково-разведочных скважин и выявить наиболее перспективные участки для постановки бурения уже на стадии подготовки структур. Разработка и внедрение новых модификаций данной технологии, таких как «Нейросейм-Foreground», позволяет прогнозировать нефтеносность в отложениях нетрадиционных источников углеводородного сырья [6].

Одной из идей применения искусственного интеллекта при анализе и интерпретации полученных аналитических и численных решений, предложенной профессором А.И. Филипповым и его учениками, является так называемый девиантный анализ [7], который представляет самостоятельную научную проблему, имеющую фундаментальное и прикладное значение. В частности, максимум девианты несет информацию о вычислительных программных расхождениях и целиком определяется используемыми алгоритмами. Проведение девиантного анализа при исследовании математических моделей также позволяет избежать выявления «новых» ложных физических эффектов и закономерностей.

Совместное применение метода регрессионного анализа и искусственного интеллекта в ходе аппроксимации кривых давления, полученных при термогазодинамическом воздействии на призабойную зону, позволяет успешно прогнозировать эффективность интенсификации залежи, а также определять практически важные параметры на основе измерения давления в процессе упругих колебаний столба жидкости в стволе скважины. Идеи искусственного интеллекта в этом случае дают возможность построить новую теорию колебательного процесса в скважине, представляющей собой резонатор, в котором могут реализовываться колебания различных типов.

Таким образом, возможности применения искусственного интеллекта с использованием свободного программного обеспечения R-Studio [8], Jupyter Notebook [9] и т.п. при исследовании полей давления в пласте многогранны и могут использоваться как на этапе прогнозирования месторождений, так и на этапе интерпретации скважинных пьезо- и термограмм. Построение математических моделей физических процессов, протекающих в пласте и скважине также не обходятся без идей искусственного интеллекта и наряду с аналитическими решениями повышают точность исследования и расширяют границы применимости полученных в пространстве изображений

аналитических выражений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А.* Поле давления в пласте при заданном дебите скважины // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Т. 6. 3(23). С. 58-78.
2. *Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р., Зеленова М.А.* Квазистационарная модель фильтрации в слоисто-неоднородном пласте с учетом влияния скважины // Инженерная физика. 2020. № 7. С. 16-25.
3. *Филиппов А.И., Зеленова М.А.* Релаксационные процессы в скважине после пуска насоса // Инженерная физика. 2020. № 10. С. 17-22.
4. *Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А.* Поле давления в пласте при заданном дебите скважины // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Т. 6. 3(23). С. 58-78.
5. *Филиппов А.И., Зеленова М.А. Щеглова Е.П.* Анализ температурных полей в скважине на основе численного обращения Изегера // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1. № 3. С. 6-13.
6. *Хисамов Р.С., Бачков А.П., Войтович С.Е., Грунис Е.Г., Алексеев Р.А.* Искусственный интеллект ? важный инструмент современного геолога // Геология нефти и газа. 2021. № 2. С. 37-45.
7. *Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А.* Моделирование полей давления в нефтеносном пласте с учетом изменения уровня жидкости в скважине // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2021. Т. 7. № 2 (26). С. 95-112.
8. URL: [https://www.r-studio.com/downloads/ru/Recovery\\_Manual.pdf](https://www.r-studio.com/downloads/ru/Recovery_Manual.pdf)
9. URL: <https://pythonru.com/baza-znanij/jupyter-notebook-dlja-nachinajushhih>

УДК 532.1

## ОСОБЕННОСТИ ВЫТЕСНЯЮЩИХ СВОЙСТВ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Михайлов П.Н., Филиппов А.И.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований  
Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия;  
*mihaylovpn@mail.ru*

С использованием законов сохранения массы и импульса уточнено выражение для коэффициента, характеризующего вытесняющую способность среды в упругом режиме эксплуатации залежей. Показано, что найденное выражение отличается от классических представлений, а также от величины коэффициента сжимаемости пористой среды в фильтрационном приближении. Определены критерии, при выполнении которых упругие свойства среды не зависят от ее микроструктуры. Доказано существование физического эффекта, заключающегося в преобладающем вкладе деформации материала скелета в процесс вытеснения в областях коллектора нефти и газа с пониженнной пористостью.

**Ключевые слова:** упругая среда, сжимаемость двухфазной системы, законы сохранения, давление, пористость, плотность.

## FEATURES OF DISPLACING PROPERTIES OF A POROUS MEDIUM

Mihaylov P.N., Filippov A.I.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the

Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;

*mihaylovpn@mail.ru*

Using the laws of conservation of mass and momentum, the expression for the coefficient characterizing the displacement capacity of the medium in the elastic mode of reservoir exploitation has been refined. It is shown that the found expression differs from the classical concepts, as well as

*from the value of the porous medium compressibility factor in the filtration approximation. Criteria are determined under which the elastic properties of the medium do not depend on its microstructure. The existence of a physical effect has been proven, consisting in the predominant contribution of the deformation of the skeleton material to the displacement process in the areas of the oil and gas reservoir with low porosity.*

*Key words:* elastic medium, compressibility of a two-phase system, conservation laws, pressure, porosity, density.

Исследование упругих свойств пористых сред лежит в основе добычи жидких полезных ископаемых. В частности, сжимаемость пористой среды является основным физическим параметром в задаче о полях давления, которая представляет основу теории тепло- и массопереноса в природных коллекторах и имеет большое практическое значение для нефте- и газодобычи, гидрогеологии и экологии.

Определение сжимаемости пористой среды представляет самостоятельную сложную научную проблему теории фильтрации и требует привлечения сведений из теории упругости. Сложность проблемы обусловлена тем, что нахождение соответствующих физических характеристик требует использования моделей микроструктуры, которые, как правило, для реальных пористых сред обладают высоким разнообразием. Это привело к тому, что в литературе описаны многочисленные модели [1, 2], однако между ними нет согласования, кроме того, как показано в данной статье, использование этих моделей и соответствующих выражений для физических величин приводит к противоречиям.

Будем считать, что пористая среда является двухфазной и представлена твердой и жидкой фазами. Сжимаемость фаз вычисляется с помощью уравнения состояния, которая в общем случае связывает плотность  $\rho$ , давление  $P$  и абсолютную температуру  $T$ :  $\rho = \rho(P, T)$ . Для вычисления коэффициента сжимаемости важно представить это уравнение состояния в виде баротропной зависимости  $\rho = \rho(P)$ . Линеаризованные уравнения жидкости и скелета соответственно представляются как

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{d\rho}{dP} \right|_{P=P_0} (P - P_0) \right] = \rho_0 [1 + \beta_l (P - P_0)], \quad (1)$$

$$\rho_s = \rho_{s0} \left[ 1 + \frac{1}{\rho_{s0}} \left. \frac{d\rho_s}{dP} \right|_{P=P_0} (P - P_0) \right] = \rho_{s0} [1 + \beta_s (P - P_0)], \quad (2)$$

здесь  $\beta_1 = \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{d\rho}{dP} \right|_{P=P_0}$  – сжимаемость, положим, для жидкой фазы,  $\beta_s = \frac{1}{\rho_{s0}} \left. \frac{d\rho_s}{dP} \right|_{P=P_0}$  – сжимаемость материала, из которого состоит скелет пористой среды.

В пористой среде уравнение неразрывности для массы представляется для текучей фазы – жидкости или газа – и твердой – скелета. По аналогии с классическими работами считается, что плотность и пористость, входящее в закон сохранения (изменения) массы в виде произведения, представлены функцией, зависящей только от давления. Согласно общепринятым подходу, оно представлено в виде линеаризованной зависимости от давления

$$m\rho = m_0\rho_0 \left[ 1 + \frac{1}{m_0\rho_0} \left. \frac{\partial(m\rho)}{\partial P} \right|_{P=P_0} (P - P_0) \right] = m_0\rho_0 [1 + \beta(P - P_0)] \quad (3)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{1}{m_0\rho_0} \left. \frac{\partial(m\rho)}{\partial P} \right|_{P=P_0}. \quad (4)$$

Для коэффициента  $\beta$  в литературе используются такие названия, как «эффективная сжимаемость» или «упругоемкость» пористой среды и т.п. Этот коэффициент имеет важное практическое значение, поскольку он входит в уравнение пьезопроводности и определяет добывные возможности реальных коллекторов нефти и газа. В данной статье показана необходимость уточнения названия и физического смысла этого важнейшего параметра пористой среды.

Из уравнением (2) и уравнения неразрывности получено выражение для эффективной сжимаемости, с учетом линеаризованных уравнений состояния

$$\beta = \frac{1}{m_0\rho_0} \left. \frac{\partial(m\rho)}{\partial P} \right|_{P=P_0} = \frac{m}{m_0} \beta_1 \Big|_{P=P_0} + \frac{\rho}{m_0\rho_0} \frac{1-m}{\rho_s} \beta_s \rho_{s0} \Big|_{P=P_0}.$$

Таким образом, в точке линеаризации имеем (индекс нуль опущен)

$$\beta = \beta_1 + \frac{1-m}{m} \beta_s. \quad (5)$$

Это выражение показывает, что при единичной пористости  $m = 1$  величина  $\beta$  совпадает со сжимаемостью жидкости вне пористой среды,

что очень физично и закономерно. Второй же предел при стремлении пористости к нулю  $m \rightarrow 0$  вызывает недоумение, поскольку полученный предел не совпадает со сжимаемостью скелета  $\beta_s$  и, кроме того, является бесконечным. Важно проанализировать, как в предшествующих научных работах устранено это противоречие.

Обзор литературы позволяет заключить, что формула для вычисления сжимаемости пористой среды, а, следовательно, и коэффициента пьезопроводности, является дискуссионной.

Чаше всего в литературе используется подход Чарного В.Н. [5], который, следуя Щелкачеву В.Н., коэффициент пьезопроводности выводит из допущения, что изменения пористости и плотности при малых перепадах давления считается пропорциональным изменению поля давления. Получена формула для вычисления «приведенного модуля упругости жидкости в упругой пористой среде» [5. С. 251]

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_l} + \frac{1}{m_0 K_s}$$

что, в терминах настоящей работы примет вид

$$m\beta = m\beta_l + \beta_s. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что эта запись скрывает отмеченный выше эффект возрастания сжимаемости при  $m \rightarrow 0$ , но приводит к нелогичным выводам при  $m=0$ . Вместе с тем, она предлагается в качестве расчетной во многих работах, в том числе в учебных пособиях, например, [3].

В некоторых современных работах, например, в [5], следуя Э.Б. Чекалюку [5. С. 41], при определении коэффициента пьезопроводности, без указания источника используется формула

$$\tilde{\beta} = m\beta_l + \beta_s \quad (7)$$

Символ «тильда» здесь и ниже означает использование заимствованных из литературы выражений для  $\beta$ .

В монографии Николаевского В.Н. [6. С. 99] без вывода предложена следующая формула для определения средней сжимаемости пористой среды

$$\tilde{\beta} = m\beta_l + (1 - m)\beta_s. \quad (8)$$

Формулы (6), (7) и (8) подчеркивают достаточно ожидаемый факт, что сжимаемость пористой среды складывается из сжимаемости, как

скелета, так и жидкости. Но вклад их в общую сжимаемость разные авторы считают различной. Наиболее априори ожидаемой, наверное, является формула (6). Здесь при  $m = 0$  средняя сжимаемость совпадает со сжимаемостью скелета, а при  $m = 1$  – жидкости. Но в реальности, как следует из (5), картина явно иная.

Важно отметить, что во всех работах тем или иным способом за- вуалировано явление возрастания  $\beta$  при устремлении пористости к нулю, который вряд ли не замечен авторами. Между тем, трудно сомневаться в справедливости полученного выражения (5), поскольку он получен на основе закона сохранения массы с использованием представления уравнения состояния в виде ряда Тейлора, применимость которых не подлежит сомнению.

Для более глубокого представления о существе вопроса рассмотрены некоторые вспомогательные задачи. Первая из них заключается в вычислении сжимаемости пористой среды.

В случае, когда уравнения состояния в баротропном приближении для жидкости и скелета заданы в общем виде показано, что

$$\beta_p = \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dP} = \frac{1}{m\rho_l + (1-m)\rho_s} \left( m\rho\beta_l + (1-m)\rho_s\beta_s + (\rho_l - \rho_s) \frac{dm}{dP} \right). \quad (9)$$

Анализируя полученные выражения, приходим к выводу, что два первых слагаемых правой части в круглых скобках определяются макроскопическими характеристиками фаз и их объемным содержанием и не зависят от микроскопической структуры пористой среды.

Третье слагаемое в скобках правой части формул (9) включает множитель  $\frac{dm}{dP}$ , который в общем случае, зависит от микроструктуры пористой среды. Разделение этих слагаемых на две группы позволяет выделить случаи, когда сжимаемость пористой среды не зависит от микроструктуры: первый случай, когда плотность подвижной фазы равна плотности твердой  $\rho = \rho_s$ , и второй, – когда пористость не зависит от давления  $\frac{dm}{dP} = 0$ . В обоих случаях выражение для сжимаемости пористой среды приобретает вид

$$\beta_{mc} = \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dP} = \frac{m\rho\beta_l + (1-m)\rho_s\beta_s}{m\rho_l + (1-m)\rho_s}. \quad (10)$$

Из выражения (10) следует, что при нулевой пористости  $m = 0$  сжимаемость среды совпадает со сжимаемостью твердой фазы  $\beta_{mc} =$

$\beta_s$ , а при отсутствии твердой фазы  $m = 1$  сжимаемость равна сжимаемости жидкой фазы  $\beta_{mc} = \beta_l$ . Таким образом, только в тех случаях, когда сжимаемость пористой среды не зависит от микроструктуры, выполняется соответствие сжимаемости пористой среды сжимаемостям соответствующих фаз. Напротив, влияние микроструктуры пористой среды приводит к возникновению этого несоответствия.

В случае пустых пор имеем

$$\beta_e = \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dP} = \beta_s - \frac{1}{m-1} \frac{dm}{dP}. \quad (11)$$

Из полученной зависимости следует, что в этом случае сжимаемость пористой среды  $\beta_e$  отличается от сжимаемости твердой фазы, а для ее вычисления требуется отыскание зависимости пористости от давления. Такая задача может быть решена в рамках теории упругости, а ее постановка требует учета формы микрополостей, которые можно представлять в виде цилиндрических, сферических и другой формы пустот [8]. Задачи такого рода весьма сложны, а их решение выходит за рамки настоящей работы.

Из приведенного анализа следует, что класс задач о вычислении сжимаемости пористой среды весьма широк, а основной проблемой здесь является вычисление зависимости пористости от давления. Здесь приведем случай, когда эта зависимость может быть определена с помощью законов сохранения. Такую сжимаемость мы обозначим как фильтрационную  $\beta_f$ . Термин «фильтрационная» применительно к сжимаемости означает, что при ее вычислении используются уравнения неразрывности. Выражение для фильтрационной сжимаемости имеет вид

$$\beta_f = \frac{m\beta_l + (1-m)\beta_s}{m + (1-m) \frac{\rho_s}{\rho}}. \quad (12)$$

Из этого выражения следует, что при отсутствии твердой фазы сжимаемость среды совпадает со сжимаемостью жидкой фазы, а при устремлении пористости к нулю получаем предельное значение сжимаемости  $\beta_f = \frac{\rho_s}{\rho} \beta_s$ , которое отличается от сжимаемости твердой фазы. Изложенное выше позволяет заключить, что это отличие обусловлено изменением объема пористого пространства при изменении давления.

Следует отметить, что предельное значение фильтрационной сжимаемости при устремлении пористости к нулю отличается от сжима-

емости сплошной твердой фазы и это отличие обусловлено действием законов сохранения.

Важно сравнить полученное значение для фильтрационной сжимаемости  $\beta_f$  (12) с выражением для  $\beta$ , представленным формулой (5). Сравнение показывает, что  $\beta$  не совпадает с фильтрационной сжимаемостью пористой среды. Кроме того, при уменьшении пористости значение фильтрационной сжимаемости ограничено значением  $\beta_f = \frac{\rho_s}{\rho} \beta_s$ , а величина  $\beta$  неограниченно возрастает. Это свидетельствует о существовании мощного физического эффекта дополнительного вытеснения при малой пористости за счет усиления влияния сжимаемости скелета, на который ранее не обращали внимания.

Наиболее парадоксальным является возрастание величины  $\beta$  до бесконечности при устремлении пористости к предельной. Представляется целесообразным обсудить это явление более подробно. К сожалению, развитый здесь подход, основанный на законе сохранения массы, не позволяет выявить возможности построения теории, в рамках которой предельное значение  $\beta$  было бы ограниченным. Дальнейшее обсуждение сосредоточим на возможных ограничениях теории, которые позволили бы ограничить величину предела. Отметим, что обсуждаемые далее возможные пути ограничения предела носят в значительной степени гипотетический характер.

Итак, приведенные теоретические факты позволяют сделать утверждение о существовании физического эффекта, заключающегося в том, что в областях с малой пористостью проявляются значительно более высокие вытесняющие свойства пористой среды. Это явление объясняется возрастанием вклада сжимаемости скелета не только за счет увеличения его объемного содержания, но и за счет зависимости пористости от давления, вклад которой является преобладающим при малых пористостях.

Существование такого эффекта качественно изменяют представления о процессах фильтрации в коллекторах нефти и газа. Дело в том, что реальные пластины представлены соседствующими областями нефти и газа с различной проницаемостью, причем в научных работах показано, что структура таких областей имеет фрактальную природу [8]. Наличие обсуждаемого эффекта означает, что области с малой пористостью обладают повышенными вытесняющими свойствами. По этой причине в процессе фильтрации происходит обогащение нефтесодержания в областях с повышенной пористостью за счет вытеснения из областей с малой пористостью. Области с повышенной

пористостью, в свою очередь, обеспечивают доставку углеводородов к скважине.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блинова Е.Ю., Индрупский И.М., Закиров Э.С., Коваленко К.Б. Учет пространственной неоднородности упругих свойств коллектора при моделировании процессов разработки // Электронный научный журнал. Георесурсы. Геоэнергетика. Геополитика. Институт проблем нефти и газа РАН. 2012. 17 с.
2. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006.
3. Куштanova Г.Г. Подземная гидромеханика. (уч.-метод. пособие) [электронный ресурс]. Казань: Изд-во Казан. (Приволж.) федер. ун-та, 2010. [http://www.kpfu.ru/docs/F1070764481/ovchin\\_kushtan\\_podzemn\\_gidromehanika](http://www.kpfu.ru/docs/F1070764481/ovchin_kushtan_podzemn_gidromehanika).
4. Рамазанов А.Ш., Исламов Д.Ф. Аналитическая модель нестационарной температуры в неоднородном пласте // Известия Томского политехнического ун-та. Инженеринг георесурсов. 2017. Т. 328. № 5. С. 39–48.
5. Чекалюк Э.Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. Киев: ГИТЛ УССР, 1961.
6. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиновидных сред. Москва: Недра, 1984.
7. Дмитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. Вып. 3.
8. Кадет В.В. Перколоационный анализ гидродинамических и электрохимических процессов в пористых средах. М: Инфра, 2013.

УДК 533.9

## ПЛАЗМЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТОПЛИВ

**Низамова Л.И., Переверзева Р.Р.**

Салаватский филиал Уфимского государственного нефтяного  
технического университета г. Салават, Россия;  
*lnizamova01@mail.ru, rita.yagafarova@bk.ru*

*Рассмотрены плазменно-энергетические технологии для повышения эффективности твердых топлив, например, угля. Описан принцип работы плазменно-топливных систем, влияние их на окружающую среду, причины их внедрения и преимущества перед традиционными технологиями топливоиспользования.*

*Ключевые слова:* уголь, технология, сжигание, плазменно-топливные системы, топливоиспользование.

## PLASMA ENERGY TECHNOLOGIES TO INCREASE THE EFFICIENCY OF USING SOLID FUELS

**Nizamova L.I., Pereverzeva R.R.**

Salavat branch of Ufa State Petroleum Technical University,  
Salavat, Russia;  
*lnizamova01@mail.ru, rita.yagafarova@bk.ru*

*Plasma-energy technologies for increasing the efficiency of solid fuels, for example, coal, are considered. The principle of operation of plasma-fuel systems, their impact on the environment, the reasons for their implementation and advantages over traditional technologies of fuel use are described.*

*Key words:* coal, technology, combustion, plasma-fuel systems, fuel use.

В настоящее время мировая энергетика направлена на использование органического топлива, в связи с чем проблема практического и экологически чистого сжигания одного из самых дешевых и доступных источников энергии - угля является наиболее актуальной.

На сегодняшний день всемирно на угольных электростанциях производится более 50% электрической и тепловой энергии. Доказанные запасы угля в мире, по оценкам на 2017 г., составляют более 1 трлн т, которых при текущем уровне добычи хватит более чем на 130 лет [1]. Следствием значительного сокращения качества энергетических углей является радикальное ограничение требований к увеличению эффективности топливоиспользования, а также охране окружающей среды от загрязняющих выбросов. Наиболее распространенным способом повышения качества воспламенения и стабилизации горения низкосортных углей со сниженным содержанием летучих и высоким числом негорючих золообразующих добавок является сжигание недостающих мазута и природного газа. Данное техническое решение не является действенным, поскольку при совместном сжигании угля и обладающего наиболее высокой реакционной способностью мазута наблюдается рост выбросов оксидов азота и серы, а также повышение потерь с механическим недожогом для твердых топлив, которые бывают достаточно велики и борьба с ними представляет собой один из главных резервов усовершенствования топочно-горелочных устройств [4]. Использование технологии сжигания мазута и угля ухудшает эколого-экономические показатели котлов. Для решения поставленной задачи стало необходимым разрабатывать новые технологии сжигания и газификации низкосортных углей.

Плазменно-топливные системы — это новые системы, представляющие собой пылеугольные горелки, которые оборудованы электродуговыми плазмотронами, и комбинированные плазменные газификаторы для ТЭС. Основой плазменно-энергетической технологии выступает плазменно термохимическая подготовка угля к сжиганию, состоящая из нагревания электродуговой плазмой воздушно-топливной смеси (аэросмеси) до температуры выделения летучих угля и частичной газификации углеродного остатка [3]. В связи с этим из воздушно-угольной смеси образуется высокореакционное двухкомпонентное топливо (горючий газ и коксовый остаток). При подаче в топку данное топливо при смешении со вторичным воздухом воспламеняется и устойчиво горит без сжигания дополнительных топлив, традиционно используемых для растопки котлов и стабилизации факела низкосортных энергетических углей.

Плазменные технологии безмазутной растопки котлов и стабилизации факела имеют следующие преимущества:

- снижение или устранение расхода мазута и газа на ТЭС;

- повышение энергетической эффективность в 3-4 раза (так как относительная электрическая мощность плазмотронов составляет всего 0,5-2% от тепловой мощности пылеугольной горелки);
- сокращение образования оксидов азота на 40-50% из-за образования молекулярного азота;
- сокращение образования оксидов серы на 30-40% и эмиссии диоксида углерода;
- возможность применения разнообразной гаммы энергетических углей;
- ресурсное использование растопки энергетических блоков ТЭС;

Таким образом, рассмотренные плазменные технологии повышения эффективности использования твердых топлив позволяют решать наиболее значимые экологические и экономические проблемы, одно из которых уменьшение мазутного хозяйства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ноздренко Г.В., Пугач Л.И. Новая технология сжигания низкокореакционного угля // Теплоэнергетика: физико-технические и экологические проблемы, новые технологии, технико-экономическая эффективность: сб. научн. трудов, вып. 2: "Наука СИФ РАН.1995. № 1. 304 с.
2. Жуков М.Ф., Карпенко Е.И. Плазменная безмазутная растопка котлов и стабилизация горения пылеугольного факела. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998.56 с.
3. Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1978. 136 с.
4. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. 464 с.

УДК 532.546.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ИЗМЕНЕНИЕМ РАДИУСА

Родионов А.С.<sup>1</sup>, Низамова Л.И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;

<sup>2</sup> Филиал УГНТУ в городе Салавате, г. Салават, Россия;  
[artrodionov@mail.ru](mailto:artrodionov@mail.ru)

Рассмотрена задача о распределении температуры в скважине при наличии изменения радиуса трубы, обусловленное, например, отложением парафинов или переходом потока нефти в насосно-компрессорные трубы. Показано, что участки сужения или расширения трубы приводят к заметным отклонениям температуры по сравнению с прямой трубой. Приведено численно-аналитическое решение основной задачи термокаротажа с учетом возможного изменения радиуса при помощи «в среднем точного» асимптотического метода.

*Ключевые слова:* скважина, температура, дебет, изменение радиуса.

## STUDY OF THE TEMPERATURE FIELD IN A CYLINDRICAL CHANNEL

Rodionov A.S.<sup>1</sup>, Nizamova L.I.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia;

<sup>2</sup> Branch of Ufa State Petroleum Technological University in the City of  
Salavat, Salavat, Russia;  
[artrodionov@mail.ru](mailto:artrodionov@mail.ru)

*The problem of the temperature distribution in the well in the presence of a change in the radius of the pipe, caused, for example, by the deposition of paraffins or the transition of the oil flow into the tubing, is considered. It has been shown that sections of narrowing or expansion of a pipe lead to noticeable temperature deviations compared to a straight pipe. A numerical-analytical solution of the main problem of thermal logging is*

*given, taking into account the possible change in the radius using the "on average exact" asymptotic method.*

*Key words:* well, temperature, debit, radius change.

При эксплуатации скважин возможно проявление различных проблемных ситуаций, например, наиболее остро стоит вопрос с заколонной циркуляцией. Заколонная циркуляция характеризуется значительным содержанием воды в добываемой нефти, доля которой может составлять до 90%. Данная проблема характерна для большинства используемых нефтяных скважин. Позднее выявление проблемы может привести к необходимости капитального ремонта, стоимость которого посредством последствий заколонной циркуляции может достигать 40% от стоимости бурения новой скважины (12 млн. руб), причем процент случаев, когда ремонт завершается успешно составляет около 37%. В 60% случаев капитальный ремонт не может быть успешно завершен, что вызывает необходимость бурения новой скважины, которое приводит к значительным расходам, накладывающимся на капитальный ремонт (дополнительные траты от 30-35 млн. руб). При своевременном выявлении участков с заколонной циркуляцией стоимость ремонтных работ будет составлять порядка 2 млн. руб. Данный факт указывает на необходимость совершенствования методов выявления подобных ситуаций на месторождениях.

Одним из эффектов [1 – 3], который может препятствовать успешному выявлению интервалов заколонной циркуляции является изменение диаметра канала, по которому движется жидкость (нефть). Подобное изменение диаметра может сильно искажить результаты, например, термометрических измерений температуры в скважине.

На рисунке 1 изображена геометрия описываемой задачи. Пусть  $\theta_{up\ 1}$ ,  $\theta_{up\ l}$ ,  $\theta_{up\ h}$  – температура окружающей скважину породы и жидкости в нижней и верхней части цилиндрического канала соответственно. Температура в удаленных участках породы считается стремящейся к геотермической температуре, зависящей от геотермического градиента. Примем обозначение радиусов  $r_l$  и  $r_h$  соответственно, для радиусов нижнего и верхнего участков цилиндрического канала. Приняты предположения, при которых скорость потока нефти в скважине имеет одну ненулевую составляющую в направлении вертикальной оси  $z_d \rightarrow_v = (0, 0, v)$ . Малосжимаемая жидкость при движении в нижнем участке канала приобретает скорость  $\vec{v}_l$ , при движении в верхнем –  $\vec{v}_h$ .

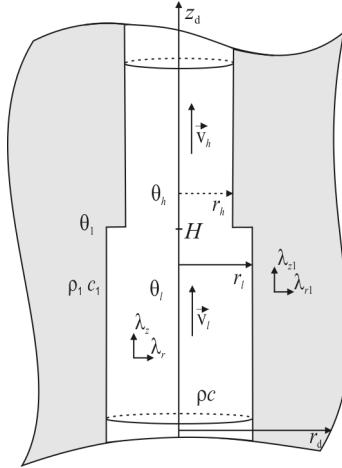


Рис. 1. Геометрия задачи

Постановка задачи определяется из основной задачи термокаротажа [2, 3], путем разделения постановки на две части – для верхнего и нижнего участков канала. Решение данной задачи получено с помощью «в среднем точного» асимптотического метода.

Решение задачи для нижнего участка канала имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_l \approx & \frac{\Lambda}{\chi} T_0 \Phi \left( \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe\nu} \right) \left\{ \left( \frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) \times \right. \\
 & \times \psi \left( \frac{\chi z}{R_1(1)Pe\nu}, \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe\nu} \right) - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \times \\
 & \times \frac{\chi}{\sqrt{\pi \left( \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe\nu} \right)}} \exp \left( -\frac{\chi^2 z^2}{4R_1^2(1)Pe^2\nu^2 \left( \text{Fo} - \frac{z}{2R_1(1)Pe\nu} \right)} \right) \Bigg\} + \\
 & + \frac{\Lambda(1-H)}{\chi} \int_0^z \Phi \left( \text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)Pe\nu} \right) \left\{ \left( \frac{\lambda_1(r) - \lambda_1(1)}{2} - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{2R_1(1)} \right) \times \right. \\
 & \times \psi \left( \frac{\chi(z-\xi)}{R_1(1)Pe\nu}, \text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)Pe\nu} \right) - \frac{R_2(r) - R_2(1)}{R_1(1)} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{\chi}{\sqrt{\pi \left( \text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)\text{Pe}\nu} \right)}} \exp \left( -\frac{\chi^2 (z-\xi)^2}{4R_1^2(1) \text{Pe}^2 \nu^2 \left( \text{Fo} - \frac{z-\xi}{2R_1(1)\text{Pe}\nu} \right)} \right) dz \Bigg\}$$

Полученные выше выражения представляют приближенные решения задачи о температурном поле турбулентного потока жидкости в нижней части цилиндрического канала с наличием изменения радиуса.

Для верхнего участка решение записывается в виде

$$\begin{aligned} T_h^{(0)} = & \Phi(\text{Fo} - S_l(L) - S_h(z-L)) T_0 \operatorname{erfc} \left[ \frac{\chi (S_l(L) + S_h(z-l)/r_{hl})}{\sqrt{\text{Fo} - S_l(L) - S_h(z-L)}} \right] + \\ & + (1-H) \int_0^L \left\{ \Phi(\text{Fo} - S_l(L-\xi) - S_h(z-L)) \times \right. \\ & \times \operatorname{erfc} \left[ \frac{\chi (S_l(L-\xi) - S_h(z-L)/r_{hl})}{\sqrt{\text{Fo} - S_l(L-\xi) - S_h(z-L)}} \right] \right\} d\xi + \\ & + (1-H) \int_L^z \left\{ \Phi(\text{Fo} - S_h(z-\xi)) \operatorname{erfc} \left[ \frac{\chi S_h(z-\xi)/r_{hl}}{\sqrt{\text{Fo} - S_h(z-\xi)}} \right] \right\} d\xi, \end{aligned}$$

где  $r < r_{hl}$ ,  $z \geq L$ ,  $S_l(z) = z/2R_{l1}(1)\text{Pe}_l\nu$ ,  $S_h(z) = r_{hl}^2 z/2R_{h1}(r_{hl})\text{Pe}_h\nu$ .

Таким образом, полное решение для анализа распределения температуры по глубине, времени и зависимости от параметров потока жидкости и параметров, окружающей скважину среды строится в виде

$$T^{(0)} = \begin{cases} T_l^{(0)}, & 0 < z < L, \\ T_h^{(0)}, & z \geq L. \end{cases}$$

Данные формулы позволяют использовать компьютерное моделирование [4,5] для выявления влияния изменения радиуса на температурное поле потока нефти при проведении температурных исследований на скважинах.

В примере на рисунке 3 показано тестирование модуля расчета температуры при изменении диаметра.

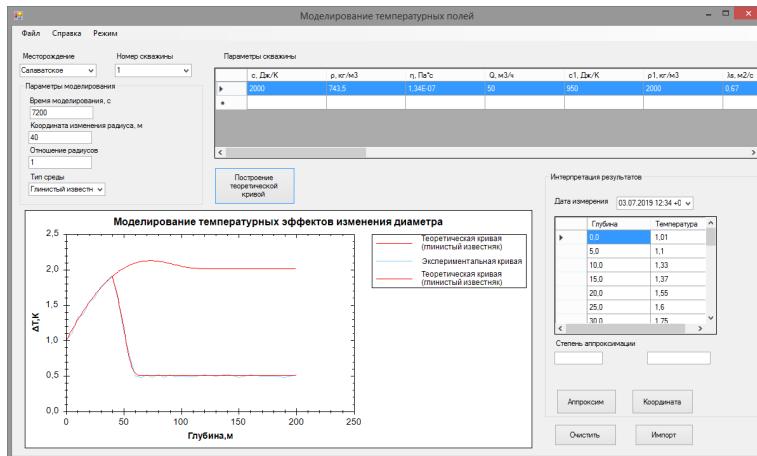


Рис. 2. Пример теста определения степени изменения диаметра

Как следует из графиков на рисунке 3, в приведенном примере наблюдается увеличение диаметра трубы на 5 см.

Таким образом, описанные формулы и примеры расчетов создают предпосылки для создания программного средства, обеспечивающего удобный способ моделирования температурных процессов в скважине для улучшения проведения термометрических исследований скважины на выявление проблемных участков.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Filippov A.I., Akhmetova O.V., Rodionov A.S. Quasi-one-dimensional nonstationary temperature field of a turbulent flow in a well // Journal of Engineering Thermophysics. 2012. Т. 21. № 3. С. 167–180.*
2. *Филиппов А.И., Ахметова О.В., Родионов А.С., Горюнова М.А. Исследование температурных полей в трубах переменного радиуса // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6. № 10. С. 171–178.*
3. *Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Родионов А.С. Задача термокаротажа с заданным радиальным профилем скорости нефтяного потока в стволе скважины // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86. № 1. С. 172–190.*
4. *Родионов А.С., Фархутдинов Р.И., Хусаинов И.Р. Программный комплекс моделирования температурных полей в скважине //*

Информационные технологии. Проблемы и решения: Материалы Международной научно-практической конференции. 2017. № 1 (4). С. 27–30.

5. Родионов А.С., Фархутдинов Р.И., Хусаинов И.Р. Разработка программного комплекса моделирования температурных полей в скважине с учетом диаметра скважины // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2018. Т. 14. № 1. С. 43–48.
6. Кейс В.М. Конвективный тепло- и массообмен. М.: Энергия, 1972.

УДК 532.546.6

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЯХ ДАВЛЕНИЯ

Спиридонова Н.А.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;  
[hope.kimi@mail.ru](mailto:hope.kimi@mail.ru)

*В работе представлены выявленные температурные эффекты при фильтрации жидкости в нестационарных полях давления, выделена зона охлаждения и исследованы зависимости этой зоны от безразмерных параметров.*

*Ключевые слова:* Ключевые слова: термодинамическая система, неравновесный диссипативный процесс, законы сохранения, фильтрация, закон Дарси, баротермический эффект, безразмерные параметры.

## TEMPERATURE EFFECTS DURING FILTRATION LIQUIDS IN NON-STATIONARY PRESSURE FIELDS

Spiridonova N.A.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
[hope.kimi@mail.ru](mailto:hope.kimi@mail.ru)

*The paper presents the revealed temperature effects during filtration of a liquid in non-stationary pressure fields, a cooling zone is identified,*

and the dependences of this zone on dimensionless parameters are investigated.

*Key words:* thermodynamic system, non-equilibrium dissipative process, conservation laws, filtration, Darcy's law, barothermal effect, dimensionless parameters.

Исследование неравновесных термодинамических процессов в природных и технических системах представляет актуальную научную проблему в связи с многочисленными приложениями. Основные принципы исследования неравновесных процессов изложены в современных учебниках [1, 2], а также представлены в научных работах [4, 5].

Данная работа посвящена исследованию некоторых температурных эффектов, возникающих при фильтрации в пористой среде. Физической моделью такого движения является фильтрационное течение в изолированном пористом стержне.

Задача для одномерного поля давления представится как

$$m\beta \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где  $m_0$  – пористость при давлении  $P = P_l$ ,  $k$  – проницаемость,  $\mu$  – вязкость,  $\beta$  – коэффициент сжимаемости пласта.

Начальное и граничные условия строятся на основании того, что на правом конце стержня в начальный момент времени создаётся и далее поддерживается давление, равное  $P_0$ , в удалённых точках давление остаётся невозмущённым:

$$P|_{x=0} = -P_0, \quad P|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad P|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$P(x, t) = -P_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{kt}} \sqrt{\mu m \beta} \right). \quad (3)$$

Уравнение для несущей фазы температурного поля при нестационарной фильтрации жидкости в пористой среде выражается, как показано в [4], в виде

$$m\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + mv\rho c_p \frac{\partial T}{\partial x} + k_1(T - T_s) = m\rho c_p \eta \frac{\partial P}{\partial t} + mv\rho c_p \varepsilon \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right).$$

Для скелета аналогично

$$(1 - m) \rho_s c_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} - k_1 (T - T_s) = (1 - m) \rho_s c_{ps} \eta_s \frac{\partial P_s}{\partial t}.$$

Дальнейшие преобразования осуществляется формальным сложением двух последних уравнений, полагая  $T = T_s$ , и введя обозначения для полной объемной теплоемкости пористой среды  $c_{\pi} = (1 - m) \rho_s c_{ps} + m \rho c_p$  и эффективного адиабатического коэффициента  $\eta_{\pi} = ((1 - m) \rho_s c_{ps} \eta_s + m \rho c_p \eta) / c_{\pi}$ , уравнение термодинамики пористой среды представляется как

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \rho m v \frac{c_p}{c_{\pi}} \frac{\partial T}{\partial x} = \eta_{\pi} \frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon \rho m v \frac{c_p}{c_{\pi}} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4)$$

Это есть уравнение для температурного поля, индуцированного полем давления в проницаемой среде.

Для построения решения сначала с помощью подстановки  $z = \frac{x}{2\sqrt{kt}} \sqrt{\mu t \beta}$  осуществляется переход к автомодельной переменной и после преобразований

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{z}{2t} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{z}{2t} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\chi t}} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\chi t}} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (5)$$

получим упрощённую задачу о баротермическом эффекте в линейном потоке

$$\left( z + \frac{d}{P_0} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} = -\varepsilon \frac{d}{P_0} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + az \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (6)$$

$$T|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (7)$$

где

$$d = \frac{c_{\infty} \beta m P_0}{2 c_{\pi}}, \quad a = \frac{\eta m c_{\infty}}{\varepsilon c_{\pi}}. \quad (8)$$

Точное решение находится интегрированием (6)

$$\frac{T}{\varepsilon P_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \frac{4d \exp(-2y)^2 / \sqrt{\pi} - 2ay \exp(-y^2)}{y + 2d \exp(-y^2) / \sqrt{\pi}} dy. \quad (9)$$

Полученное выражение (9) показывает, что величина температурного эффекта при движении жидкости в пористой среде в нестационарных полях давления определяется только двумя параметрами  $d, a$ .

Данное решение предоставляет новые возможности для изучения особенностей нестационарных температурных полей при фильтрации жидкостей в пористой среде. Ниже представлены некоторые результаты вычислительных экспериментов такого рода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пригожин И, Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М. Мир, 2002. 461 с.
2. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: ИЛ, 1960. 320 с.
3. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2002. 616 с.
4. Филиппов А.И. Баротермический эффект в жидкостях. Уфа: Гилем, 2006. 185 с.
5. Филиппов А.И. Основы теории переноса радиоактивных растворов в пористой среде: Монография. Стерлитамак: СФ БашГУ, 2016. 220 с.

УДК 536.1

## НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГИХ ПОЛЕЙ В МЫШЕЧНОЙ ТКАНИ

Филиппов А.И.<sup>1,2</sup>, Зеленова М.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>2</sup> Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия  
*filippovai1949@mail.ru, marina\_ag@inbox.ru*

*В связи с широким практическим использованием акустики для медицинской диагностики важным представляется исследование волновых полей в мышечной среде, представляющей двухфазную систему. В работе предпринята попытка применения методов неравновесной термодинамики, развитых нобелевским лауреатом И. Пригожиным, для исследования волновых процессов в таких условиях.*

*Ключевые слова:* поле давления, двухфазная термодинамическая система, неравновесная термодинамика.

## NON-EQUILIBRIUM THERMODYNAMIC MODEL OF ELASTIC FIELDS IN MUSCLE TISSUE

**Filippov A.I.<sup>1,2</sup>, Zelenova M.A.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the

Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;

filippovai1949@mail.ru, marina\_ag@inbox.ru

*In connection with the wide practical use of wave fields for medical diagnostics, it is important to study wave fields in the muscular environment, which is a two-phase system. An attempt is made in this work to apply the methods of nonequilibrium thermodynamics, developed by the Nobel laureate I. Prigogine, to study wave processes under such conditions.*

*Key words:* pressure field, two-phase thermodynamic system, nonequilibrium thermodynamics.

Исследование упругих волновых процессов в биологических тканях актуально в связи с успешным и расширяющимся использованием методов диагностики на основе УЗИ. Сложность строения биологических сред разного строения порождает большое количество конкретных задач. Нами рассмотрена задача о волновых процессах в мышечной среде, которая является двухфазной. Рассматривается макроскопический объем мышечной ткани с развитой сетью кровеносных сосудов, представленных преимущественно капиллярами.

Обозначим через  $m$  объемное содержание текучей фазы – крови с плотностью  $\rho$  – в мышечной среде, тогда объемное содержание нетекущей фазы – мышечной ткани с плотностью  $\rho_s$  – составит  $1 - m$ . Наряду с истинной скоростью движения крови  $\vec{w}$  использована скорость приведенная скорость  $\vec{v} = m \vec{w}$ .

Уравнение движения, или закон сохранения импульса [1 – 4], строится на основе использования второго закона Ньютона, согласно которому сила Даламбера  $\rho d\vec{w}/dt$ , а точнее ее пространственная плотность, приравнивается к геометрической сумме всех действующих сил, представленных в соответствующей форме. Для деформируемой сплошной среды важен учет деформаций или напряжений, которые,

будучи отличными от равновесных, сами являются причинами движения. В общем случае такая задача решается путем использования тензора напряжений. В случае движения жидкости, в чем нетрудно убедиться, описание движения существенно упрощается путем введения дополнительной эффективной силы, равной градиенту давления с противоположным знаком.

Уравнение движения крови в мышечной ткани представлено в виде

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \nabla) \vec{w} \right) = -\text{grad}P + \rho \left( \vec{g} + \vec{F} + \vec{R}^* \right). \quad (1)$$

Представляя диссипативную силу  $\vec{R}^*$  в различных видах, из этой формулы легко получить уравнения Эйлера или Навье – Стокса.

Движение крови в сосудах инициирует наличие объемных сил трения, пропорциональных скорости фильтрации

$$\vec{R}^* = -\frac{\mu}{k} \frac{\vec{v}}{\rho} = -\frac{\mu m}{k} \frac{\vec{w}}{\rho}. \quad (2)$$

Здесь  $k$  – пропускная способность кровеносных сосудов,  $\mu$  – вязкость крови.

Сила  $\vec{R}^*$ , согласно (2), пропорциональна скорости  $\vec{w}$ , поэтому из (1) получим уравнение

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \nabla) \vec{w} \right) + \text{grad}P - \rho \left( \vec{g} + \vec{F} \right) + \frac{\mu}{km} \vec{w} = 0. \quad (3)$$

Если движение является стационарным  $\partial \vec{w} / \partial t = 0$  и пространственные градиенты скорости равны нулю  $(\vec{w} \nabla) \vec{w} = 0$ , то из уравнения (3) следует выражение

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu m} \left( \text{grad}P - \rho \vec{g} - \rho \vec{F} \right),$$

согласно которому скорость *стационарного* (или *квазистационарного* и *квазибезградиентного*) течения крови без учета сил тяжести  $\vec{g}$  и других массовых потенциальных сил  $\vec{F}$  пропорциональна градиенту давления. В теории фильтрации это выражение известно как закон Дарси.

Пусть  $\rho(\vec{r}, t)$  – плотность реальной гомогенной текучей среды, а  $m\rho(\vec{r}, t)$  – средняя плотность жидкой фазы в мышечной среде. Здесь  $m(\vec{r}, t)$  – объемное содержание подвижной фазы. Уравнение неразрывности для мышечной ткани запишем как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho + (1 - m)\rho_s) + \operatorname{div} \left( m\rho \vec{w} + m \vec{j}_{\rho d} + (1 - m) \vec{j}_{sd} \right) = \\ = mq_\rho + (1 - m)q_s. \end{aligned} \quad (4)$$

Это уравнение учитывает наличие источников массы,  $q_s$ , диффузионный поток массы  $\vec{j}_{\rho d}$ , пропорциональный коэффициенту диффузии  $D_\mu$  и градиенту химического потенциала  $\nabla\mu_c$ , а именно:  $\vec{j}_{\rho d} = -D_\mu \nabla\mu_c$ .

Из (4) следует, что составляющая плотности потока вещества в мышечной среде  $\vec{j}_l$ , обусловленная фазой с объемным содержанием  $m$ ,  $\vec{j}_l = m \vec{j}_\rho = m\rho \vec{w} + m \vec{j}_{\rho d}$ , равна произведению объемного содержания фазы  $m$  на вектор плотности потока в подвижной фазе  $\vec{j}_\rho$ , складывающегося геометрически из конвективного  $\vec{j}_{\rho, \text{conv}} = \rho \vec{w}$  и диффузионного потоков  $\vec{j}_{\rho d}$  массы.

Далее для простоты ограничимся рассмотрением *одномерного плоского случая* в изотропной однородной среде и построением линейного волнового уравнения, для получения которого следует воспользоваться одномерным уравнением движения по координате  $x$ , следующим из (1):

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - R^* = 0.$$

Здесь учтен вклад силы трения  $R^* = -\mu tw / (\rho k)$ . Выражение для силы трения определено таким образом, что из уравнения

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \mu t \frac{w}{k} = 0, \quad (5)$$

получающегося из (1) после подстановки силы трения, в случае *стационарного движения и отсутствия пространственного ускорения*, следует известный одномерный закон  $w = -\frac{k}{\mu t} \frac{\partial P}{\partial x}$  для истинной скорости  $w$ .

Это означает, что уравнение (5) представляет уравнение движения в мышечной среде с учетом нестационарности и пространственных градиентов скорости. Заметим, что развиваемый здесь подход представляется более обоснованным физическими соображениями в сравнении с попытками использования эмпирического времени релаксации.

Закон изменения (сохранения) массы крови, при отсутствии источников и без учета диффузионных процессов, записывается в форме уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho m w) = 0. \quad (6)$$

При наличии источников уравнение (6) изменяется – в правой части возникает функция источников массы.

Приведенные выше выражения позволяют получить уравнения, описывающие волновые явления в мышечной среде. Для этого линеаризуем исходные уравнения. Во втором слагаемом уравнения неразрывности (3) полагаем приближенно  $\rho = \rho_0$ ,  $m = m_0$ , в итоге получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \rho_0 m_0 \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

В уравнении движения (5) полагаем  $m = m_0$ ,  $\rho = \rho_0$  и, пренебрегая слагаемыми второго порядка по скорости, имеем

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \mu m_0 \frac{w}{k} = 0. \quad (8)$$

С уравнениями (7) и (8) осуществим следующие преобразования. Продифференцируем уравнение (8) по пространственной переменной  $x$ , а уравнение (7) – по времени  $t$ . Исключив из полученных соотношений скорость, найдем

$$\frac{1}{m_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m\rho) + \frac{\mu}{\rho_0 k} \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0.$$

Для линеаризованных уравнений состояния жидкой фазы  $\rho = \rho(P, T) = \rho_0 [1 + \beta_l (P - P_l)]$  и скелета  $\rho_s = \rho_s(P, T) = \rho_{0s} [1 + \beta_s (P - P_l)]$  баротропное приближение для произведения плотности крови на ее объемное содержание в мышечной среде может быть представлено в линеаризованной

по давлению форме с помощью разложения в степенной ряд с использованием формулы Тейлора с сохранением нулевого и первого слагаемых

$$\rho m = \rho_0 m_0 \left[ 1 + \frac{1}{\rho_0 m_0} \frac{\partial \rho m}{\partial P} \Big|_{P=P_l} (P - P_l) \right] = \rho_0 m_0 [1 + \beta (P - P_l)],$$

$$\beta = \frac{1}{\rho_0 m_0} \frac{\partial \rho m}{\partial P} \Big|_{P=P_l}.$$

Для вычисления упругого отклика мышечной среды  $\beta$  воспользуемся уравнением неразрывности для основы мышечной ткани  $\frac{\partial(\rho_s(1-m))}{\partial t} = 0$ . Поскольку  $\rho_s$  и  $m$  являются функциями давления, которое, в свою очередь, зависит от времени, то уравнение неразрывности представим как  $\frac{\partial(\rho_s(1-m))}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = 0$ . Для нестационарных процессов  $\frac{\partial P}{\partial t} \neq 0$ , поэтому уравнение неразрывности представляется как

$$\frac{\partial(\rho_s(1-m))}{\partial P} = 0.$$

Отсюда с помощью известных формул дифференцирования найдем выражение для производной от объемного содержания крови по давлению

$$\frac{\partial m}{\partial P} = \frac{1-m}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial P}.$$

Тогда выражение для упругого отклика мышечной среды, с учетом линеаризованных уравнений состояния, запишется как

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\rho_0 m_0} \frac{\partial \rho m}{\partial P} \Big|_{P=P_l} = \frac{m}{m_0} \beta_l \Big|_{P=P_l} + \frac{\rho}{\rho_0 m_0} \frac{1-m}{\rho_s} \beta_s \rho_{s0} \Big|_{P=P_l} = \\ &= \beta_l + \frac{1-m_0}{m_0} \beta_s. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho_0$ ,  $\rho_{s0}$ ,  $m_0$ ,  $P_l$  – значения плотности крови, мышечной ткани, объемного содержания крови и давления в точке линеаризации;

$\beta_l$ ,  $\beta_s$  – сжимаемость крови и нетекущей фазы мышечной среды. Заметим, что выражение для упругого отклика мышечной среды мышечной среды, полученное для одномерного случая, применимо для любого количества измерений, поскольку все осуществленные выкладки связаны только с использованием уравнений состояния, которые являются пространственно инвариантными.

С учетом этого уравнение для поля давления в представляется в виде как

$$\rho_0 \beta \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\mu m_0 \beta}{k} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad (9)$$

Если в этом уравнении использовать обозначения для скорости упругих волн в мышечной среде  $c^2 = (\beta \rho_0)^{-1}$  и коэффициента  $\chi = k / (\mu \beta m_0)$ , то оно представится как

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{1}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0.$$

Путем сопоставления полученного уравнения с классическим уравнением колебаний [5] можно выразить величину коэффициента затухания через параметры биосреды

$$\gamma = \frac{c^2}{2\chi} = \frac{\mu m_0}{2k\rho_0}.$$

Сравнивая уравнение, содержащее время релаксации [6], с (9), запишем соотношение для времени релаксации

$$\tau_p = \frac{k\rho_0}{\mu m_0} = \frac{1}{2\gamma}.$$

Уравнение (7) совпадает с телеграфным уравнением, которое нашло широкое применение при исследовании электромагнитных полей. Итак, в одномерном случае линеаризованное уравнение фильтрации совпадает с телеграфным уравнением. Выражение для скорости упругой волны в мышечной среде представляется как

$$c = (\beta \rho_0)^{-1/2} = \left[ \rho_0 \left( \beta_l + \frac{1-m_0}{m_0} \beta_s \right) \right]^{-1/2}.$$

Анализ полученных выражений показывает, что измерение скорости и коэффициента затухания позволяет определить упругие свойства мышечной ткани и пропускающую способность кровеносных сосудов, которые определяют жизненно важные характеристики организмов. Это открывает также новые возможности для развития методов диагностики на основе использования упругих акустических и ультразвуковых волн.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Релаксационные процессы в скважине после пуска насоса // Инженерная физика. 2020. № 10. С. 17–22.
2. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А. Поле давления в пласте при заданном дебите скважины // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Т. 6. 3(23). С. 58–78.
3. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А. Асимптотическое решение задачи о поле давления в пласте и скважине // Прикладная физика и математика. 2021. № 1. С. 27–37.
4. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р., Зеленова М.А. Квазистационарная модель фильтрации в слоисто-неоднородном пласте с учетом влияния скважины // Инженерная физика. 2020. № 7. С. 16–25.
5. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Механика. Теоретическая физика. Т. I. М.: Наука, 1988. 216 с.
6. Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. Казань: Изд-во Казанского университета, 1980. 136 с.
7. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М.: Наука, 1986. 736 с.

УДК 532.546

## НЕКОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ О ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ЗАДАННОМ ОТБОРЕ

Филиппов А.И.<sup>1,2</sup>, Зеленова М.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>2</sup> Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия  
filippovai1949@mail.ru, marina\_ag@inbox.ru

Обсуждается корректность постановки задачи о поле давления в слоисто-неоднородном пласте при заданном отборе на границе пласта и скважины. Показано, что проблема возникает вследствие необходимости использования неклассического нелокального интегрального граничного условия, которое оправдано слоистой неоднородностью среды.

*Ключевые слова:* поле давления, заданный отбор, разложение Фурье.

## NCORRECTITY OF THE PRESSURE FIELD PROBLEM IN A LAYERED INHOMOGENEOUS FORMATION WITH A GIVEN SAMPLING

Filippov A.I.<sup>1,2</sup>, Zelenova M.A.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;  
filippovai1949@mail.ru, marina\_ag@inbox.ru

*The correctness of the formulation of the problem of the pressure field in a layered heterogeneous reservoir for a given production at the boundary of the reservoir and the well is discussed. It is shown that the problem arises due to the need to use a nonclassical nonlocal integral boundary condition, which is justified by the layered inhomogeneity of the medium.*

*Key words:* pressure field, specified selection, Fourier expansion.

Рассматривается обобщенная задача о поле давления при фильтрации жидкости с плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\mu$ , частный случай которой рассмотрен в работе [1], в несовершенно вскрытом нефтегазовом пласте. Несовершенство вскрытия означает, что границы интервала перфорации не совпадают с границами пласта. Рассмотрен случай, когда перфорирована только наиболее проницаемая часть пласта. На рис. 1 представлена геометрия задачи в цилиндрической системе координат, ось  $z$  которой совпадает с осью скважины радиуса  $r_0$ . Для удобства построения решения нефтегазовый пласт разделен двумя горизонтальными плоскостями на три слоя. Таким образом среда представлена тремя областями с плоскими границами раздела  $z = \pm h$ . Покрывающий и подстилающий пласты считаются слабопроницаемыми, средняя область толщины  $2h$  является хорошо проницаемым перфорированным слоем. Все пласты считаются анизотропными по коллекторским свойствам.

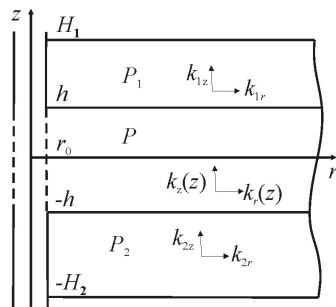


Рис. 1. Геометрия задачи о радиальной фильтрации в слоисто-неоднородном пласте

Невозмущенное разработкой давление определяется гравитационным полем, ускорение свободного падения  $g$  направлено противоположно единичному вектору  $\vec{e}_z$ . Считается, что невозмущенное поле давления является гидростатическим.

Математическая постановка гидродинамической задачи для осесимметричного течения включает уравнение для поля давления  $P_1$  в верхнем слое  $h < z < H_1$ . Поскольку породы в неперфорированных слоях считаются слабопроницаемыми, то зависимость физических параметров от координат в этом слое пренебрегается

$$\frac{\partial m_1 \rho}{\partial P_1} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d} \left( \frac{k_{1r} \rho}{\mu} r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_{1z} \rho}{\mu} \left( \frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho g \right) \right) = 0,$$

$$t > 0, \quad r > r_0, \quad h < z < H_1.$$

Поле давления  $P$  в центральной области пласта  $-h < z < h$  описывается уравнением, учитывающим зависимость радиальной  $k_r(z)$  и осевой  $k_z(z)$  компонент тензора проницаемости от осевой координаты  $z$

$$\frac{\partial m \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_r(z) \rho}{\mu} r \frac{\partial P}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_z(z) \rho}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right) \right) = 0,$$

$$t > 0, \quad r > r_0, \quad -h < z < h.$$

В нижнем слое  $-H_2 < z < -h$  поле давления  $P_2$  также моделируется однородной средой, поэтому зависимостью физических параметров от координат пренебрегается

$$\frac{\partial m_2 \rho}{\partial P_2} \frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_{2r} \rho}{\mu} r \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_{2z} \rho}{\mu} \left( \frac{\partial P_{d_2}}{\partial z} + \rho g \right) \right) = 0,$$

$$t > 0, \quad r > r_0, \quad -H_2 < z < -h.$$

Условия сопряжения представляют равенства давлений и скоростей фильтрации в вертикальном направлении на границах раздела слоев

$$P_1|_{z=h} = P|_{z=h}, \quad P_2|_{z=-h} = P|_{z=-h},$$

$$k_{1z} \left( \frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho g \right) \Big|_{z=h} = k_z(z) \left( \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right) \Big|_{z=h},$$

$$k_{2z} \left( \frac{\partial P_2}{\partial z} + \rho g \right) \Big|_{z=-h} = k_z(z) \left( \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right) \Big|_{z=-h}.$$

Покрывающий слой считается изолированным сверху, а покрывающий – снизу

$$\left. \left( \frac{\partial P_1}{\partial z} + \rho g \right) \right|_{z=H_1} = 0, \quad \left. \left( \frac{\partial P_2}{\partial z} + \rho g \right) \right|_{z=-H_2} = 0.$$

Окружающие пластины считаются изолированными от скважины

$$\left. \frac{\partial P_1}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad h < z < H_1, \quad \left. \frac{\partial P_2}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad -H_2 < z < -h.$$

В начальный момент времени, до достижения которого давление совпадало с невозмущённым  $\tilde{P}$ , имеют место равенства

$$P|_{t=0} = \tilde{P}, \quad P_1|_{t=0} = \tilde{P}, \quad P_2|_{t=0} = \tilde{P}.$$

Наиболее оправданными для реальных месторождений являются условия, когда на перфорированный слой накладывается возмущение в виде заданного перепада давления  $P_w$  в скважине

$$P|_{r=r_0} = \tilde{P} + P_w, \quad -h < z < h.$$

В этом случае при задании условий регулярности на бесконечности решение задачи является единственным.

В научной и технической литературе типичным также является задание постоянного удельного притока в интервале перфорации. Нетрудно заметить, что обеспечение равномерности притока по все толщине перфорированного слоя требует создания специальных устройств, что технически трудно выполнимо. Причинами неравномерности притока по толщине пласта являются слоистая неоднородность пласта, обусловленная условиями формирования осадочных пород, и подтягивание жидкости из неперфорированных слоев.

В таких условиях более естественным представляется задание интегральной величины отбора из всего перфорированного слоя. Соответствующее условие представляется как

$$\frac{2\pi}{\mu} \int_{-h}^h k_r(z) r \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_0} dz = -Q, \quad -h \leq z \leq h. \quad (1)$$

Здесь  $Q$  – величина отбора из всего интервала перфорации.

В отличие от задания постоянного удельного притока, условие (1) более оправдано физическими условиями, однако требование его выполнения создает математические трудности, некоторые из которых обсуждаются в данной статье.

Итак, в слоисто-неоднородных перфорированных интервалах, когда проницаемость  $k_r$  меняется по толщине пласта произвольным образом  $k_r = k_r(z)$ , условие заданного отбора выражается в интегральном (нелокальном) виде. Из анализа нелокального граничного условия следует, что переход к локальной форме, даже в однородных пластах, возможен только в случае, когда давление в пласте не зависит от координаты  $z$ . Такие условия реализуются, если пласт однородный, а интервал перфорации совпадает с границами пласта. В этом случае происходит одномерная радиальная фильтрация. Вертикальные движения жидкости, т.е. межпластовые перетоки, в таких условиях отсутствуют.

Если проницаемость центрального слоя и поле давления не зависят от вертикальной координаты, то нелокальное граничное условие представляется в классической локальной форме

$$r \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -\frac{Q\mu}{4\pi k_r h}, \quad -h \leq z \leq h.$$

Предполагается, что решение поставленной задачи является регулярным на бесконечности, т.е. при устремлении пространственных координат в бесконечность искомое решение, а при необходимости и его производная, обращаются в нуль.

В рассматриваемой задаче легко определить невозмущенное поле как решение уравнения  $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = -\rho(\tilde{P})g$ . В результате получим неявное уравнение для определения невозмущённого поля  $\int_{P_h}^{\tilde{P}} \frac{dx}{\rho(x)} = -gz$ , где  $P_h = \tilde{P}(z=0)$ . Для поля возмущений  $P_i' = P_i - \tilde{P}$ , где  $i = \text{пробел}, 1$  или  $2$  в зависимости от номера среды, задача упрощается, поскольку в задаче исчезает слагаемое  $\rho g$ .

Применение нелокального интегрального условия порождает неединственность решения задачи, которую поясним следующим образом. Радиальную компоненту скорости фильтрации на левой границе области представим в виде ряда Фурье

$$k_r(z) \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n z}{h} + b_n \sin \frac{\pi n z}{h} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(z) dz, \quad a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(z) \cos \frac{\pi n z}{h} dz,$$

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h f(z) \sin \frac{\pi n z}{h} dz.$$

Подставляя это разложение в (1), получим равенство

$$\frac{2\pi}{\mu} a_0 = -Q,$$

согласно которому нелокальное интегральное условие имеет силу только для нулевого коэффициента  $a_0$ , поскольку интегралы для всех других коэффициентов обращаются в нуль.

Далее, если заменить нелокальное интегральное условие в задаче условиями вида

$$k_r(z) \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_0} = f(z) = a_n \cos \frac{\pi n z}{h},$$

$$k_r(z) \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_0} = f(z) = b_n \sin \frac{\pi n z}{h},$$

или любой их линейной комбинацией, то решение такой вспомогательной задачи не будет тривиальным. Сумма же любого решения вспомогательной и исходной задач буде решением исходной задачи. Это обстоятельство порождает неединственность решения задачи нелокальным интегральным условием.

Означает ли это, что следует отказаться от необходимости решения задач такого рода? Вовсе нет. Постановка задачи описывает реальную физическую ситуацию, исследование оторой оправдано практической необходимостью. Выход из ситуации заключается в том, что необходимо использовать дополнительные условия, обеспечивающие правильный выбор комбинаций решений исходной и вспомогательной задач. Это, конечно, потребует дополнительных исследований.

Отмеченная нетривиальная особенность рассматриваемого класса задач требует создания новых подходов и физических концепций, а также математических методов, а отмеченные особенности выделяют класс задач такого рода из разряда классических. Обнаруженные свойства задач такого рода необходимо учитывать при их численной

реализации [2 – 6], поскольку они несомненно создадут трудности и будут источником неустойчивостей разного рода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р. Поле давления при заданном отборе в слоисто-неоднородном анизотропном нефтяном пласте // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Т. 5. № 1. С. 187-200.
2. Филиппов А.И., Ковальский А.А., Ахметова О.В., Губайдуллин М.Р. Численное моделирование фильтрационных полей давления в изолированном однородном изотропном несовершенно вскрытом пласте // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94. № 1. С. 41-50.
3. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Релаксационные процессы в скважине после пуска насоса // Инженерная физика. 2020. № 10. С. 17-22.
4. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А. Поле давления в пласте при заданном дебите скважины // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Т. 6. 3(23). С. 58-78.
5. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Зеленова М.А. Асимптотическое решение задачи о поле давления в пласте и скважине // Прикладная физика и математика. 2021. № 1. С. 27-37.
6. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р., Зеленова М.А. Квазистационарная модель фильтрации в слоисто-неоднородном пласте с учетом влияния скважины // Инженерная физика. 2020. № 7. С. 16-25.

УДК 532.1

**ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ  
ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ НА ЭТАПЕ ВЫДЕРЖКИ  
ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ СОЛЯНОКИСЛОТНОМ  
ВОЗДЕЙСТВИИ НА КАРБОНАТОСОДЕРЖАЩИЙ  
НЕФТЕГАЗОВЫЙ ПЛАСТ**

**Филиппов А.И.<sup>1,2</sup>, Кабиров И.Ф.**

<sup>1,2</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия;  
*filippovai1949@mail.ru, kabirov.ilshat@bk.ru*

*Получено асимптотическое решение задачи о температурном поле, возникающем при выдержке химически активного растворителя в слоисто-неоднородном ортотропном пласте. Учтены возмущения температуры, вызванные предшествующими технологическими процессами, что позволяет использовать полученное решение для расчетов в условиях многократного циклического воздействия. Источниками возмущений температуры выступают выделение тепла за счет химической реакции и изменение температуры закачиваемого в пласт раствора кислоты, поэтому полученное решение охватывает также круг процессов термохислотного воздействия. Учтены теплофизические свойства накрывающего, проводящего и подстилающего пластов.*

*Ключевые слова:* СПО, «в среднем точный» асимптотический метод, остаточный член, осреднение, нулевой коэффициент разложения.

**SOFTWARE FOR CALCULATION OF TEMPERATURE  
FIELDS AT THE STAGE OF HOLDING DURING CYCLIC  
HYDROLIC ACID IMPACT ON  
CARBONATE-CONTAINING OIL AND GAS FORMATION**

**Filippov A.I.<sup>1,2</sup>, Kabirov I.F.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;  
filippovai1949@mail.ru, kabirov.ilshat@bk.ru

*An asymptotic solution to the problem of the temperature field arising during holding a chemically active solvent in a layered inhomogeneous orthotropic formation is obtained. Temperature perturbations caused by previous technological processes are taken into account, which makes it possible to use the obtained solution for calculations under conditions of repeated cyclic exposure. The sources of temperature perturbations are the release of heat due to a chemical reaction and a change in the temperature of the acid solution injected into the formation, therefore the obtained solution also covers the range of processes of thermoacid action. The thermophysical properties of the overburden, conductive and underlying layers are taken into account.*

*Key words:* selection, “on the average exact” asymptotic method, the residual term, averaging, zero coefficient of expansion.

Измерение температурных полей в скважинах, осуществляемое при закачке растворов изотопов и химически активных веществ в подземные горизонты, позволит контролировать безопасность процесса и увеличить эффективность теплового воздействия на месторождения газовых гидратов. Даже непрерывная технология закачки предполагает наличие технологических перерывов, в процессе которых движение жидкости по пласту прекращается. По этой причине возникает проблема изучения температурных полей в пластах после прекращения фильтрации химически- и радиоактивных растворов.

Размеры области нарушений предшествующей закачкой температурного поля в направлении движения во много раз превосходят вертикальные размеры, поскольку преобладающим процессом выступает конвекция. Это означает, что вертикальные градиенты температуры во много раз превосходят горизонтальные и ими можно пренебречь. Технологический процесс кислотного воздействия на карбонатосодержащий пласт носит циклический характер: выдержка следует за этапом закачки (или отбора) соляно-кислотного раствора. Поэтому будем считать, что температура в начальный момент времени отличается от геотермической в пластах, (рис.1). Более подробная постановка задачи приведена в работах [1 – 3]. Программы для расчетов составлены с использованием пакетов СПО.

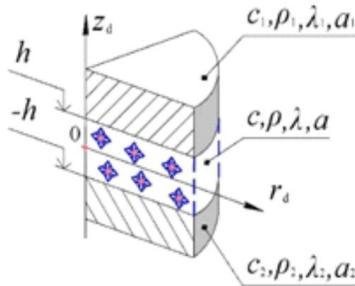


Рис. 1. Геометрия задачи

На рис. 2 представлены нормированные на максимальное значение температуры изотермы поля начальных возмущений. Рисунки дают представление о динамике пространственных изменений поля, вызванных предшествующими выдержке технологическими процессами, представленными в рассматриваемой модели начальными возмущениями температуры. В расчетах приняты следующие параметры: накрывающий пласт – кварц, пористый слой – известняк и подстилающий слой – гранит. Температурные возмущения, вызванные предшествующими технологическими операциями, описываются с помощью решений, приведенных в цитированных работах.

На рис. 2, *a* изображены пространственные зависимости температуры от координат  $r$  и  $z$ , а на 2, *б* – плоское изображение линий равной температуры того же, что и на *a*, температурного поля. Сопоставление этих зависимостей обеспечивает наглядное пространственно-временное представление полей температуры. В расчетах принято, что максимальное значение начального возмущения температуры локализовано в скважине в интервале пласта ( $r = 0$ ,  $z_1 < z < z_2$ ). Кривые для малых времен после прекращения закачки  $Fo = 0.1$ , представленные на рис. 2, свидетельствуют о том, что максимальные возмущения температуры локализованы в скважине и составляют 0.9 амплитуды исходного температурного возмущения.

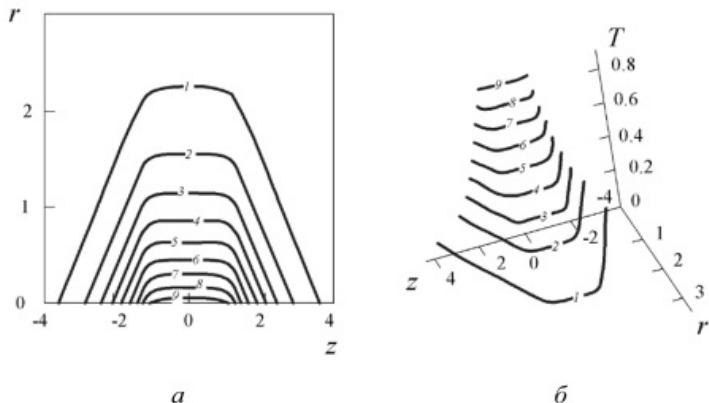


Рис. 2. Результаты вычислительных экспериментов

Заметим, что созданное программное обеспечение составляет часть комплекса для расчетов физических полей при соляно-кислотной и других видах обработки нефтегазовых и газогидратных пластов [4 – 8] с целью повышения нефтеизвлечения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Кабиров И.Ф. Теплообмен при отборе химически активного или радиоактивного флюида из продуктивного пласта // Вестник Тюменского государственного университета. 2017. Т. 3. № 1. С. 58–78.
2. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковалевский А.А., Кабиров И.Ф. Асимптотическое представление температурного поля на стадиях закачки при циклической кислотной обработке пласта // Инженерно-физический журнал, 2016. Т. 89. № 6. С. 1447–1462.
3. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Кабиров И.Ф. Температурное поле источников тепла при закачке жидкости в анизотропный неоднородный пласт // Прикладная механика и техническая физика, 2013. Т. 54. № 6. С. 95–111.
4. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Релаксационные процессы в скважине после пуска насоса // Инженерная физика. 2020. № 10. С. 17–22.
5. Filippov A.I., Akhmetova O.V., Zelenova M.A., Asylbaev M.A. Temperature field in inhomogeneous strongly anisotropic medium with

sources // Journal of Engineering Thermophysics, 2014. Vol. 23. № 2. P. 158–170.

6. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Квазистационарное температурное поле в тонком проницаемом анизотропном слое в нулевом асимптотическом приближении // Фундаментальные исследования, 2015. № 5-3. С. 553–557.

7. Филиппов А.И., Зеленова М.А. Способ отыскания первого коэффициента асимптотического разложения задачи о прогреве пласта // Научно-технический вестник Поволжья. 2015. № 4. С. 31–34.

8. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Зеленова М.А., Кручинов А.Г. Расчеты температурного поля в газовой скважине // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2011. № 6. С. 350–365.

УДК 665.62

**ТЕХНОЛОГИЯ И УСТАНОВКА ДЛЯ  
РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ  
НЕСТАБИЛЬНЫХ ГАЗОВЫХ КОНДЕНСАТОВ НА  
НЕФТЕПРОМЫСЛАХ**

**Хасанов И.Ю.**

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;  
[rpc-sherik@mail.ru](mailto:rpc-sherik@mail.ru)

*Газовый конденсат в нефтепромыслах образуется, в основном после третьей, частично второй ступени сепарации нефти. Описывается разработка технологии и малогабаритной блочной установки полной заводской готовности для разделения нестабильных газовых конденсатов на газовую и жидкие части на нефтепромыслах смешении полученной жидкостью его части с товарной нефтью. Технология и установка призваны способствовать решению проблемы рациональной утилизации попутных нефтяных газов в остро стоящей применительно малых и средних удаленных месторождений нефти.*

*Ключевые слова: нефтепромыслы, попутно нефтяной газ, газовый конденсат, технология разделения, малогабаритная блочная установка.*

## TECHNOLOGY AND INSTALLATION FOR THE RATIONAL USE OF UNSTABLE GAS CONDENSATES IN OIL FIELDS

Khasanov I.Yu.

Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
npc-sherik@mail.ru

*Gas condensate in oil fields is formed mainly after the third, partly the second stage of oil separation. The development of a technology and a small-sized block unit of full factory readiness for separating unstable gas condensates into gas and liquid parts in oil fields by mixing the obtained liquid part with commercial oil is described. The technology and the installation are designed to help solve the problem of rational utilization of associated petroleum gases in the acutely applicable small and medium-sized remote oil fields.*

*Key words:* oil field, associated petroleum gas, gas condensate, separation technology, small-sized block unit.

В России разрабатываются свыше 1200 месторождений нефти. Проблема рациональной утилизации попутных нефтяных газов (ПНГ) остро стоит применительно малых и средних удаленных месторождений нефти. Они составляют более 70% всех месторождений с объемами добычи до 1,0-1,5 млн т нефти в год и ПНГ менее 100 тыс м<sup>3</sup> в сутки. В настоящее время последнее - ценное техническое сырье в неизвестных количествах, кроме, используемой на собственные нужды, сжигается на факелах. В этих условиях, разрабатываются рациональная технология и блочное техническое средство промыслового разделения ПНГ и нестабильного газового конденсата третьей, частично второй ступени сепарации нефти для возврата максимального количества их жидкой части в товарную нефть на удаленных и малых месторождениях с эффективным использованием ее энергетического потенциала и при минимизации дополнительно устанавливаемого оборудования. Проблема связана с решением ряда неординарных задач по выбору технологии сепарации нестабильного газового конденсата от газовых углеводородов. Неординарность задач разделения обусловлена особенностями её физико-технологических свойств: повышенной газонасыщенностью при высоких температурах и давлениях; склонностью к тепловому расширению; образованию большого объема паров по сравнению с жидкой частью при ступенча-

том снижении давления, обуславливающему протекание ряда элементарных процессов дросселирования, тепло - и массообмена в одном аппарате в составе установки комплексной подготовки газа (УКПГ).

Разрабатываемая нами новая технология дегазации нестабильного газового конденсата и её аппаратурное оформление обеспечивают сохранение максимального количества компонентов  $C_{5+}$  в жидкой фазе.

Предлагаемые технические решения позволяют существенно повысить технико - экономические показатели процесса подготовки нефти, а именно: увеличить выход товарной нефти; восстановить её бензиновый потенциал; улучшить реологические свойства высокопарафинистой товарной нефти. Более того, увеличение бензинового потенциала нефти, как известно, увеличивает рентабельность её переработки на НПЗ.

Ниже показаны результаты моделирования процессов разделения конденсата и смешения полученной при этом жидкой продукции с товарной нефтью на одном из месторождений. В качестве оптимального режима принятого параметра действующей установки. Расходы нефти и нестабильного конденсата  $g_{\text{нефти}} = 160 \text{ т/ч}$ ;  $g_{\text{нестаб.конденс}} = 4,2 \text{ т/ч}$  (содержание  $C_2 - 2,5\%$  масс.), при давлении  $P_0 = 8 \text{ атм (абс)}$  и температуре  $T_0 = 650\text{C}$ . В процессе сепарации полученный конденсат  $g_0 = 1,49 \text{ т/ч}$ , при смешении которого с товарной нефтью (ДНП=24 кПа) получена нефтегазоконденсатная смесь с ДНП = 38 кПа; расход тепла  $Q_0 = 0,47 \text{ МДж/ч}$ .

Подготовка продукции нефтяных скважин на установке подготовки нефти, как известно включает ступенчатую сепарацию нефти для снижения ДНП нефти до 66,7 кПа при 37,8 0С (ГОСТ 51858-2002), что необходимо для поставки её на НПЗ без сверхнормативных потерь от испарения.

Для снижения потерь нефти от испарения при ее транспорте и хранении рекомендуется принимать ДНП до 46,6 кПа. В исследованиях принято ДНП получаемой нефтегазоконденсатной смеси 38 кПа.

Получены корреляционные зависимости относительного выхода стабильного конденсата  $g/g_0 = A$  от давления сепарации  $P$ ;  $A$  – от температуры сепарации; расхода тепла – от  $P$ ; ДНП смешанной нефти – расход конденсата. Показано, что увеличение содержания  $C_2$  в конденсате приводит к резкому снижению выхода полуфабриката и, как следствие, к увеличению стабильности смешанной неф-

ти. Результаты моделирования процесса компаундирования товарной нефти конденсатом позволяют оценить эффективность горячей сепарации газового конденсата при отклонении термобарических параметров, количества и состава последнего от базового режима её сепарации. Технологическая схема предлагаемой установки приведена на рисунке.

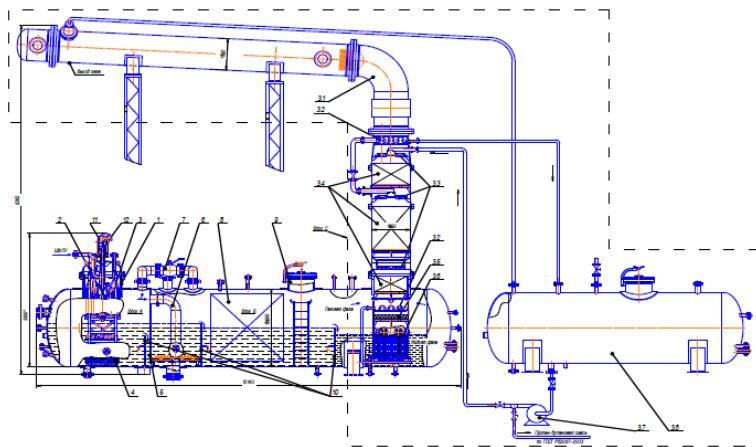


Рис. Принципиальная схема малогабаритной блочной установки  
 1 – головка сепарационная; 2 – устройство распределительное; 3 – нагреватель конденсата; 4 – подогреватель; 5 – перегородка; 6 – труба барботажная; 7 – регулятор барботажа; 8 – пеногаситель; 9 – люк-лаз; 10 – переливные перегородки; 11 – узел управления со штурвалом; 12 – лимб.

Питание колонны осуществляется раздельно паром и жидкостью. Блоки сепарации и фракционирования работают при близких давлениях. Колонны имеют небольшую высоту и диаметр. Вместо тарелок используется высокоэффективная насадка. Создание парового орошения не требует стационарных печей, а используется мобильная парогенерирующая установка, применяющаяся на промыслах. В качестве хладагента в конденсаторе-холодильнике используется вода.

Рисунок не полностью расшифрован, имеется ряд ноу-хау.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патент №2545587, RU, МПК B01D 19/00 Аппарат для сепарации многокомпонентных легкокипящих нефтегазовых смесей (вариант). Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

анты) / Хасанов И.Ю., заявл. 06.06.2013, опубл. 20.12.2014, бюл. №3 5.

2. Хасанов И.Ю. Современные технологии и технические средства защиты природных комплексов от отрицательного влияния добычи и транспорта нефти. Уфа: Изд-во «Гилем», Башк. энцикл., 2015 256 с.

3. Хасанов И.Ю., Рогозин В.И., Иванов Д.В. Совершенствование технологии и оборудования подготовки нефти на удаленных объектах нефтедобычи. // Экспозиция Нефть Газ – Набережные Челны: Изд. ООО «Экспозиция Нефть Газ», №4 (64), 2018 г. С. 73–76.

4. Хасанов И.Ю., Пименов А.С., Рогозин В.И., Иванов Д.В. Технология получения товарной продукции из попутных газов на малых и средних удаленных нефтяных месторождениях. // Нефтепереработка и Нефтехимия. М: Изд. ОАО «ЦНИИТЭНЕФТЕХИМ», 2018. №12. С. 25–30.

УДК 532

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ПАРАФИНИСТОЙ НЕФТИ В НЕФТЕПРОВОДЕ

Шабаров А.Б., Шастунова У.Ю., Сахарова М.С.

Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия;  
*u.y.shastunova@utmn.ru*

В работе рассмотрена постановка задачи, исходная система уравнений, начальные и граничные условия, численный алгоритм и результаты расчета, температуры при течении парафинистой нефти в нефтепроводе с учетом фазового перехода. Неизвестными величинами, найденными в результате расчетов, являются: распределение по длине нефтепровода и по времени температуры и давление нефтяной парафинистой смеси, объемных долей «жидкой» и «твердой» фаз парафина в потоке, а также толщина слоя парафина на стенке нефтепровода. В расчетах используется уравнение баланса внутренней энергии с учетом изменения фазового состава смеси и теплоотдачи в окружающую среду, а также уравнения баланса импульсов и массы фаз. Предложен вид и параметры диаграммы фазового состояния парафина, позволяющие уточнять интенсивность фазовых переходов. Полученные результаты дают

*возможность уточнений и прогнозирования термогидродинамических параметров и изменения «живого сечения» нефтепровода при перекачке парафинистой нефти.*

## **PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODEL OF PARAFFINY OIL FLOW IN A PIPELINE**

**Shabarov A.B., Shastunova U.Yu., Sakharova M.S.**

*Tyumen State University, Tyumen, Russia;*

*u.y.shastunova@utm.ru*

*The paper considers the formulation of the problem, the initial system of equations, initial and boundary conditions, a numerical algorithm and calculation results, temperatures during the flow of paraffinic oil in an oil pipeline, taking into account the phase transition. The unknown quantities found as a result of the calculations are: the distribution along the length of the pipeline and in time, the temperature and pressure of the oil paraffinic mixture, the volume fractions of "liquid" and "solid" phases of paraffin in the flow, as well as the thickness of the paraffin layer on the wall of the pipeline. The calculations use the equation for the balance of internal energy taking into account the change in the phase composition of the mixture and heat transfer to the environment, as well as the equation for the balance of impulses and phase masses. The form and parameters of the phase state diagram of paraffin are proposed, which make it possible to refine the intensity of phase transitions. The results obtained make it possible to refine and predict the thermohydrodynamic parameters and changes in the "living section" of the oil pipeline when pumping paraffinic oil.*

## **Секция 8. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ**

УДК 532.2

### **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С СУПЕРКРИСТАЛЛОМ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК В СРЕДЕ ANYDYNAMICS**

**Байрамдурдыев Д.Я., Маликов Р.Ф.**

Башкирский государственный педагогический университет  
им. М.Акмуллы, г. Уфа, Россия;  
*d.bayramdurdyev@gmail.com, rfmalikov@mail.ru*

*Проведен теоретический анализ нелинейного оптического отклика монослоя трёхуровневых квантовых излучателей с дублетом в возбужденном состоянии с помощью среды виртуального моделирования AnyDynamics. Исследована устойчивость динамической системы суперкристалла при нормальном падении резонансного оптического поля при учете дефазировок квантовых состояний. Показаны возможности среды моделирования AnyDynamics.*

*Ключевые слова:* нелинейные динамические системы, компьютерное моделирование, оптические метаматериалы, суперкристаллы, нелинейный оптический отклик, нанофотоника, фазовая релаксация.

### **COMPUTER SIMULATION OF INTERACTION OF OPTICAL RADIATION WITH A SUPERCRYSTAL OF QUANTUM DOTS IN ANYDYNAMICS SOFTWARE**

**Bayramdurdyev D.Ya., Malikov R.F.**

*Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla;*  
*d.bayramdurdyev@gmail.com, rfmalikov@mail.ru*

*A theoretical analysis of the nonlinear optical response of a monolayer of three-level quantum emitters with a doublet in the excited state is carried out using the AnyDynamics virtual simulation environment. The*

*stability of the dynamical system of a supercrystal under the normal incidence of a resonant optical field is investigated, taking into account the dephasing of the quantum states. The capabilities of the AnyDynamics modeling environment are shown.*

*Key words:* nonlinear dynamical systems, computer simulation, optical metamaterials, supercrystals, nonlinear optical response, nanophotonics, phase relaxation.

В течение последнего десятилетия получили большое внимание так называемые метаматериалы – класс новых объектов, не существующих в природе (см. [1 – 4]). Двумерные суперкристаллы (СК) полупроводниковых квантовых точек (ПКТ) [5] и органических полимеров [6], представляют собой один из примеров оптических метаматериалов. Оптические свойства СК зависят от размера компонентов, его образующих, их формы, химического состава, геометрии решетки и могут быть целенаправленно контролируемы (см. публикацию [1 – 7] и ссылки в ней), что представляет исключительный интерес для нанофотоники.

В настоящей работе на основе среды визуального моделирования AnyDynamics, теоретически исследуется стационарный нелинейный оптический отклик монослоя, состоящего из регулярно расположенных квантовых излучателей (КИ) с дублетом в возбужденном состоянии (так называемая V-схема оптических переходов [8]). В качестве такого излучателя может выступать ПКТ. Благодаря высокой плотности КИ и их большой силе осциллятора переходов, диполь-дипольное взаимодействие КИ играет важную роль в оптическом отклике монослоя. Как показали исследования ансамблей квантовых излучателей с другими схемами переходов (Λ и Θ), это взаимодействие обеспечивает положительную обратную связь, которая, вместе с нелинейностью КИ, приводит к богатой оптической динамике монослоя, включая мультистабильность, автоколебания и динамический хаос [9]. Мы моделируем КИ трехуровневой квантовой системой, включающей основное состояние  $|1\rangle$  и дублет  $|2\rangle$  и  $|3\rangle$  в возбужденном состоянии. Оптически разрешенными являются переходы  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  и  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , характеризующиеся дипольными моментами переходов  $\mathbf{d}_{21}$  и  $\mathbf{d}_{31}$  (для простоты одинаково направленными) и константами затухания  $\gamma_{21}$  и  $\gamma_{31}$ . Безызлучательная релаксация в дублете учитывается константой  $\gamma_{32}$ . Предполагается, что монослой подвергается действию внешнего гармонического поля с Раби ампли-

тудой  $\Omega_0$  и частотой  $\omega_0$ , падающего нормально к поверхности монолюса и квазирезонансного переходам в КИ.

В пространственно-однородном приближении оптическая динамика КИ описывается системой уравнений для матрицы плотности  $\rho_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), которая во вращающейся системе отсчета (с частотой внешнего поля  $\omega_0$ ) имеет вид:

$$\dot{\rho}_{11} = \gamma_{21}\rho_{22} + \gamma_{31}\rho_{33} + \Omega^*\rho_{31} + \Omega\rho_{31}^* + \mu(\Omega^*\rho_{21} + \Omega\rho_{21}^*) , \quad (1a)$$

$$\dot{\rho}_{22} = \gamma_{32}\rho_{33} - \gamma_{21}\rho_{22} - \mu(\Omega^*\rho_{21} + \Omega\rho_{21}^*) , \quad (1b)$$

$$\dot{\rho}_{33} = -(\gamma_{31} + \gamma_{32})\rho_{33} - \Omega^*\rho_{31} - \Omega\rho_{31}^* , \quad (1c)$$

$$\dot{\rho}_{31} = -[i\Delta_{31} + (\gamma_{31} + \gamma_{32})/2 + \Gamma]\rho_{31} + \Omega(\rho_{33} - \rho_{11}) + \mu\Omega\rho_{32} , \quad (1d)$$

$$\dot{\rho}_{21} = -(i\Delta_{21} + \gamma_{21}/2 + \Gamma)\rho_{21} + \mu\Omega(\rho_{22} - \rho_{11}) + \Omega\rho_{32}^* , \quad (1e)$$

$$\dot{\rho}_{32} = -[i\Delta_{32} + (\gamma_{31} + \gamma_{21} + \gamma_{32})/2 + 2\Gamma]\rho_{32} - \mu\Omega^*\rho_{31} - \Omega\rho_{21}^* . \quad (1f)$$

где точка над  $\rho_{\alpha\beta}$  означает производную по времени,  $\Delta_{32}$  – расщепление дублета,  $\Delta_{31} = \omega_0 - \omega_{31}$  и  $\Delta_{32} = \omega_0 - \omega_{32}$  – отстройки частоты внешнего поля  $\omega_0$  от частот резонансов переходов  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  и  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ , соответственно,  $\mu = (\gamma_{21}/\gamma_{31})1/2$ ,  $\Omega$  – Раби амплитуда действующего на КИ поля. Последнее представляет собой сумму внешнего поля и вторичного поля, создаваемого другими КИ в месте расположения данного:

$$\Omega = \Omega_0 + (\gamma_R - i\Delta_L)(\rho_{31} + \mu\rho_{21}) . \quad (2)$$

здесь  $\gamma_R$  и  $\Delta_L$  – амплитуды вторичного поля в дальней и ближней зонах, соответственно. Первая из них определяет коллективное динамическое уширение, вторая – динамические сдвиги уровней КИ, оба зависящие от их разностей населенностей [8].

Пакет визуального моделирования динамических систем в виде инструментальной среды имитационного моделирования (СИМ) Model Vision 2 была задумана и в первоначальном варианте создана Ю.Б. Колесовым в начале 90-х гг. XX в. В 1997 году была основана компания MVSTUDIUM Group, которая разработала СИМ Model Vision 3 и следующие модификации. В 2009 г. появилось название «Rand Model Designer» (RMD) для общей версии (специальные версии имеют название «MVStudium»). Пакет RMD является системой визуального объектно-ориентированного имитационного моделирования, базирующейся на расширении языка UML

для непрерывно-дискретных систем. В декабре 2020 г. выпущена новая версия 8.0 получившая название AnyDynamics, поддерживающая символьное дифференцирование и создание 64-разрядных моделей (<https://www.mvstudium.com/>). Пользователь, используя интегрированную среду, создает в нем проект, являющийся описанием математической модели (1)-(2), и наполняет его модельными элементами (см. например [10-11]). В среде имеются редактор уравнений, в которой можно ввести системы уравнений в естественной математической форме. При описании системы уравнений интегрированная среда автоматически запрашивает и предлагает описание констант, параметров и переменных. После описания всех переменных и задания реальных параметров системы мы выбираем численный метод решения. На рис. 1 представлен интерфейс программной среды AnyDynamics для разработки непрерывных моделей сложных динамических систем.

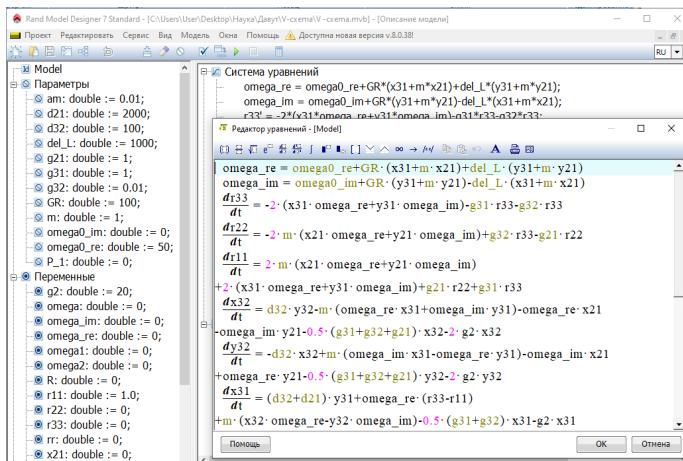


Рис. 1. Интерфейс программной среды AnyDynamics для разработки непрерывных моделей

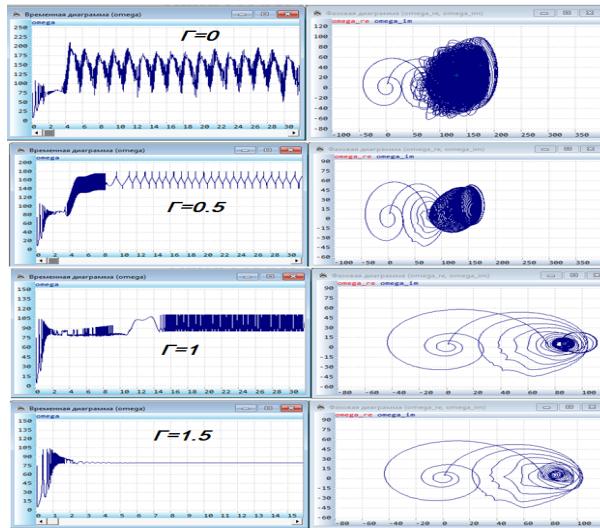


Рис. 2. Влияние дефазировки на временную и фазовую диаграмму динамической системы при значении поля  $\omega_0 = 75$  и параметрах среды  $\Delta_{32} = 100$ ,  $\Delta_{21} = -50$ ,  $\Delta_{31} = \Delta_{32}/2$ ,  $\rho_{11} = 1$ ,  $\gamma_{32} = 0.05$

Таким образом, как показывают расчеты (рис. 2) увеличение дефазировки состояний приводит к переходу динамической системы от сложного хаотического колебания к периодическому аттрактору, переходящий в конечном счете к стационарному режиму.

Работа выполнена при поддержке вузовского гранта ЕГИСУ НИ-ОКТР АААА-А19-119082900009-7 (2019-2021).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zheludev N.I. The Road Ahead for Metamaterials // Science. 2010. Vol. 328. P. 582.
2. Bekenstein, R. et al. Quantum metasurfaces with atom arrays // Nat. Phys. 2020. Vol. 16. 676–681.
3. Solntsev A.S., Agarwal G.S., Kivshar Y. Y. Metasurfaces for quantum photonics // Nature Photonics. 2021. V. 15. P.327–336.
4. Soukoulis C.M., Wegener M. Optical metamaterials-More bulky and less lossy // Science. 2010. Vol. 330. P. 1633.

5. *Boneschanscher M.P., Evers W.H., Geuchies J.J. et. al.* Long-range orientation and atomic attachment of nanocrystals in 2D honeycomb superlattices // *Science*. 2014. Vol. 344. P. 1377.
6. *Liu W., Luo X., Bao Y. et.al.* A two-dimensional conjugated aromatic polymer via C–C coupling reaction // *Nat. Chem.* 2017. Vol. 9. P. 563.
7. *Baimuratov A.S., Rukhlenko I.D., Turkov V.K. et. al.* Quantum-dot supercrystals for future nanophotonics // *Sci. Rep.* 2013. Vol. 3. P. 1727.
8. *Байрамдурдыев Д.Я., Маликов Р.Ф., Рыжсов И.В., Малышев В.А.* Нелинейная оптическая динамика и высокая отражательная способность монослоя трёхуровневых квантовых излучателей с дублетом в возбуждённом состоянии // *ЖЭТФ*. 2020. Т. 158. Вып. 2(8). С. 269–281.
9. *Ryzhov I.V., Malikov R.F., Malyshev A.V., Malyshev V.A.* Nonlinear optical response of a two-dimensional quantum-dot supercrystal: emerging multistability, periodic and aperiodic self-oscillations, chaos, and transient chaos// *Physical Review A*. 2019. Т. 100. № 3. С. 033820.
10. *Сениченков, Ю.Б.* Численное моделирование гибридных систем. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004. 206 с.
11. *Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б.* Объектно-ориентированное моделирование в среде Rand Model Designer 7: учебно-практическое пособие. Москва : Издательство «Проспект», 2016. 256 с.

УДК 532.2

## ДИНАМИКА РЕШЕТКИ СУПЕРИОННЫХ ПРОВОДНИКОВ CU<sub>2</sub>SE И AG<sub>2</sub>TE

Биккулова Н.Н., Цыганкова Л.В.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;  
bickulova@mail.ru

*В представленной работе изучены закономерности формирования суперионного состояния на примере изоморфно-замещенных смешанных ионно-электронных проводников селенидов, сульфидов,*

теллуридов меди и серебра, что позволяет изучить механизм ионного переноса в такого рода соединениях.

*Ключевые слова:* нанодоты, зонная структуры, теллурид серебра, суперионный проводник.

## LATTICE DYNAMICS OF SUPERIONIC CONDUCTORS CU<sub>2</sub>SE AND AG<sub>2</sub>TE

Bikkulova N.N., Tsygankova L.V.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
*bickulova@mail.ru*

*In the presented work, the regularities of the formation of the superionic state are studied using the example of isomorphically substituted mixed ion-electronic conductors of selenides, sulfides, tellurides of copper and silver, which makes it possible to study the mechanism of ion transfer in such compounds.*

*Key words:* nanodots, band structures, silver telluride, superionic conductor.

Суперионные проводники это твердые вещества, обладающие высокой ионной проводимостью при температурах далеких от точки плавления. Их проводимость может достигать значений близких к проводимости жидких электролитов или расплавленных солей. В таком необычном состоянии, мобильность одного сорта ионов достигает значений характерных для жидких сред, в то время как другой сорт ионов образует кристаллическую решетку, с фиксированным положением ионов. Таким образом, суперионные проводники могут рассматриваться как системы, являющиеся переходными от твердого тела к жидкости. Уникальные макроскопические физико-химические свойства этих веществ (которые изучены достаточно хорошо) делают эти вещества очень важными с точки зрения их прикладного применения. В то же время ощущается явный недостаток результатов микроскопических исследований динамики и структуры кристаллической решетки суперионных проводников, которые представляют огромную важность в плане понимания явления ионной проводимости. С точки зрения фундаментальной физики этот класс веществ представляет большой интерес, как объект изучения веществ с частичным разупорядочением.

В настоящее время нет универсальной теории описывающей механизм ионного переноса, но существуют различные теоретические

подходы, которые возможно выделить в два предельных случая: 1) Потенциальный барьер для мобильных ионов значительно превышает их тепловую энергию  $kT$ . В этом случае может быть применена стандартная модель решеточного газа. Согласие экспериментальных и теоретических значений ионной проводимости для широкого круга представителей твердых электролитов, показывает, что этот подход может рассматриваться как хорошая стартовая точка для описания механизма ионного переноса.

2) Потенциальный барьер мал по сравнению с тепловой энергией мобильных ионов. В этом случае подвижные ионы рассматриваются как квазисвободные частицы, движущиеся в потенциальном поле кристаллической решетки неподвижных ионов. Для описания явления ионного переноса применяются различные модели непрерывной диффузии.

Модели решеточного газа имеют преимущество в описании статических свойств суперионных проводников и особенно полезны для описания разупорядочения при фазовом переходе. При рассмотрении динамических свойств суперионных проводников и явления ионного переноса более полезными являются модели непрерывной диффузии. Динамика кристаллической решетки суперионных проводников характеризуется особенностями, которые обусловлены частичным разупорядочением в этих системах и высокой мобильностью части ионов, в то время как другая часть образует жесткую кристаллическую решетку.

Пожалуй, самой яркой особенностью динамики кристаллической решетки является аномалия в низкоэнергетической части спектра колебаний, т.е. присутствие низкоэнергетических мод колебаний. Предполагается, что существует тесная корреляция между наличием НВ (низкоэнергетического возбуждения) в спектре частот и явлением ионного переноса, хотя природа мод НВ в суперионных проводниках в настоящее время обсуждается. В некоторых работах рассмотрена объемная неупорядоченная система сильно связанных гармонических осцилляторов с непрерывным распределением силовых констант. Согласно этому подходу НВ являются характерной чертой всех неупорядоченных систем, и наиболее выражены, когда эти системы нестабильны. Моды НВ наблюдались в большинстве суперионных проводников. Их поведение в разных системах различно и, соответственно, предлагаются различные подходы для их объяснения. Халькогениды меди и серебра  $\text{Me}_2 - \delta X$  ( $\text{Me} = \text{Cu}, \text{Ag}; X =$

S, Se, Te) проявляют высокую ионную проводимость наряду с преимущественной электронной проводимостью. Большое разнообразие физических и физико-химических свойств, возможность управления этими свойствами путем контролируемого изменения состава  $\delta$ , простота кристаллической структуры делают эти системы модельными при исследовании свойств широкого класса систем со смешанной ионно-электронной проводимостью. Ионная проводимость в исследуемых соединениях осуществляется катионами и достигает величин 1-5 Ом<sup>-1</sup> см<sup>-1</sup>, что сравнимо с проводимостью в растворах жидких электролитов. По электронным свойствам халькогениды меди и серебра ведут себя как полупроводники.

В настоящее время не существует единой теории, объясняющей явление перехода в суперионное состояние. Есть попытки объяснения данного явления исходя из особенностей строения кристаллической структуры, дефектной структуры, разупорядоченности и т.д. В ряде работ возникновение высокоподвижного состояния катионов связывается с особенностями строения зонной структуры, в частности степенью гибридизации d-уровней металла и p-уровней халькогена. Отсутствие системного подхода при рассмотрении высокой подвижности катионов с точки зрения электронной структуры и особенностей химической связи, делает актуальными исследования в данной области. Построение модели ионного переноса в суперионных проводниках на основе детального изучения динамики решетки, кристаллической структуры, электронной зонной структуры представляет интерес как с точки зрения фундаментальной науки, так и с практической точки зрения.

В представленной работе изучены закономерности формирования суперионного состояния на примере изоморфно-замещенных смешанных ионно-электронных проводников селенидов, сульфидов, теллуридов меди и серебра, что позволяет изучить механизм ионного переноса в такого рода соединениях.

Проведены систематические теоретические расчеты динамики решетки, зонной структуры, кристаллической структуры в суперионном состоянии и проведено сопоставление полученных данных с экспериментальными данными, полученными ранее и измеренными в зависимости от температуры. Изучена динамика решетки в суперионном и несуперионном состояниях при различных температурах для сульфидов, селенидов и теллуридов меди и серебра и их твердых растворов. Полученные спектры неупругого рассеяния нейтронов и

плотности фононных состояний для суперионной фазы селенида меди были сопоставлены с теоретическими расчетными данными. Компьютерное моделирование фононного спектра и зонной структуры данных соединений сопоставлено с экспериментально полученными данными, что позволяет провести сравнительный анализ свойств и оценить влияние природы анионной и катионной подсистемы на возникновение суперионного состояния.

На основе анализа литературных и полученных в данной работе экспериментальных результатов предложен физический механизм ионного переноса в смешанных ионно-электронных проводниках. На основе полученных данных выработаны критерии поиска материалов с заданными свойствами и проверена гипотеза о взаимосвязи динамики решетки и зонной структуры в формировании структурно разупорядоченных соединений.

Использование метода неупругого рассеяния медленных нейтронов, для изучения динамики решетки суперионных проводников, открывает новые возможности комплексного исследования условий, способствующих образованию суперионного состояния и определения характера связей между различными элементами решетки. Данный метод позволяет получить экспериментальные данные о структуре, динамике ионной решетки, механизме проводимости.

Эксперименты проводились на двойном времязпролетном спектрометре прямой геометрии ДИН-2ПИ, который расположен на одном из нейtronных пучков импульсного быстрого реактора ИБР-2 в Лаборатории Нейтронной Физики им. И.М. Франка ОИЯИ, (г. Дубна).

Порошкообразные образцы весом около 65 грамм, при комнатной температуре, помещались в контейнеры из алюминиевой фольги размером  $3 \times 70 \times 110$  мм<sup>3</sup>. Образцы устанавливались в геометрии на отражение с углом 60° к пучку падающих нейтронов.

Анализируя полученные спектры неупругого рассеяния нейтронов, можно сказать, что зависимость спектров от угла рассеяния, в каждой группе детекторов  $2\theta_1$  и  $2\theta_2$  незначительна.

Спектры суммировались по пяти углам рассеяния для каждой группы детекторов, с целью улучшения статистической точности. Пики, наблюдаемые для углов рассеяния  $2\theta_1$  в спектрах Cu<sub>2</sub>Se и Cu<sub>1.75</sub>Se при  $\varepsilon \approx 3\text{-}4\text{ мэВ}$  согласуется с данными приведенными в работах Сакумы [1, 2] в которой низкочастотные моды связывались с локализованными бездисперсионными колебаниями меди. Интенсивность этих пиков значительно выше рассеяния от акустических и

оптических мод.

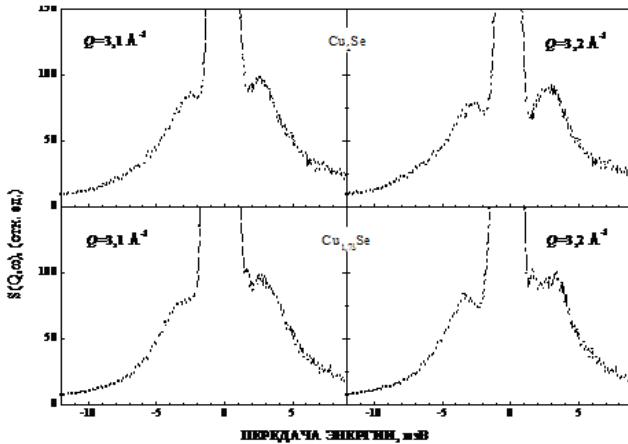


Рис. 1. Динамический структурный фактор для  $Cu_2Se$  и  $Cu_{1.75}Se$  при комнатной температуре.

Обобщенная плотность фононных состояний для несуперионной фазы  $Cu_2Se$  представлена на рисунке 2. Низкочастотная часть спектра в основном сохраняет свой вид, её можно связать с колебаниями в подвижной подсистеме катионов меди. В высокочастотной части спектра – 20-30 мэВ, наблюдаются некоторые изменения.

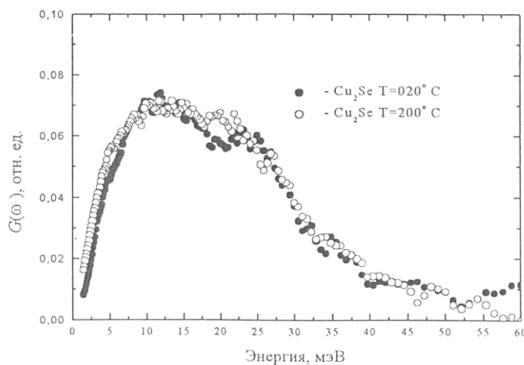


Рис. 2. Плотность фононных состояний в низкотемпературной ( $T = 20^\circ C$ ) и высокотемпературной ( $T = 200^\circ C$ ) фазах. Спектры  $G(\omega)$

нормированы на единицу по площади в интервале энергий 0 – 30 мэВ.

Из теоретически рассчитанных и экспериментально полученных кривых дисперсии фононов Cu<sub>2</sub>Se можно видеть[3], что низкоэнергетические акустические ветви в фононном спектре соответствуют энергии ≈ 5 мэВ, что несколько отличается от экспериментальных данных 3.5 – 4 мэВ.

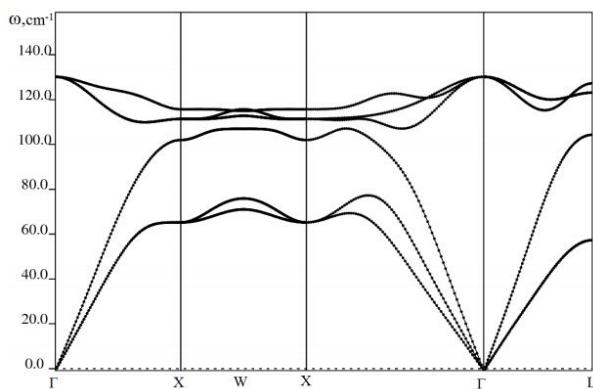


Рис. 3. Кривые дисперсии фононов в Cu<sub>2</sub>Se.

Плотность фононных состояний в Cu<sub>2-x</sub>Se при  $\alpha$ - $\beta$  переходе меняется незначительно. Низкочастотная часть спектра, которую можно связать с колебаниями в подвижной подсистеме катионов меди в основном сохраняет свой вид. Наблюдаются некоторые изменения в высокочастотной части спектра – 20-30 мэВ.

В спектрах  $S(\omega)$  наблюдаются низкоэнергетические пики с энергией в области 4-5 мэВ. Мягкие моды в данных соединениях имеют акустическую природу, что подтверждается и исследованиями фононного спектра данных образцов, хотя в ряде работ они считаются бездисперсионными.

Плотность фононных состояний  $G(\omega)$   $G(\omega)$  характеризуется выраженным максимумами при комнатной температуре с энергией 6,5 мэВ и 10 мэВ. Исчезновение этих максимумов наблюдается при переходе к высокотемпературным фазам, характеризующимся структурной разупорядоченностью катионов.

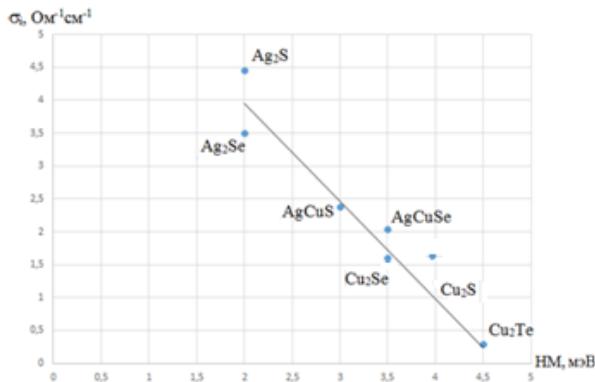


Рис. 4. Корреляция между величиной низкоэнергетической моды и величиной ионной проводимости для халькогенидов меди и серебра.

Наблюдается явная корреляция между величиной низкоэнергетической мягкой моды и ионной проводимостью (рис. 4). Однако сама величина ионной проводимости также зависит от состояния жесткой подрешетки, внутри которой осуществляется ионный перенос. Более тяжелый и устойчивый остов не способствует увеличению величины ионной проводимости.

Установлено, что величина низкоэнергетической моды коррелирует с величиной ионной проводимости и определяется электронным строением, соотношением масс подвижного катиона и аниона, поляризуемостью и степенью ионности их связи. Знание данных закономерностей позволит с помощью модельных экспериментов предсказывать суперионные свойства в новых соединениях и синтезировать суперионные проводники с заданными физико-химическими свойствами.

В настоящее время одной из актуальных задач физики конденсированного состояния является исследование механизмов суперионной проводимости. Кристаллические суперионные соединения, обладающие высокой ионной проводимостью в твердом состоянии, содержат два типа ионов: одни из них подвижны и непосредственно обеспечивают ионную проводимость, а другие сохраняют свое регулярное положение в кристалле. В халькогенидах меди и серебра значительная ионная проводимость проявляется на фоне сопутствующей электронной проводимости.

Для описания кристаллического суперионного состояния удобно воспользоваться моделью двухатомной цепочки. Так как отличительной особенностью супериоников является наличие подвижных ионов, традиционные двухатомные модели требуют модификации. Впервые линейная цепочка с чередующимися подвижными и неподвижными ионами была предложена К. Вакамурой для описания галогенидов – твердотельных бинарных суперионных проводников, обладающих чисто ионной проводимостью. Однако, модель применима только для супериоников со структурой  $\text{MeCh}$  ( $\text{Me}$  – атом металла,  $\text{Ch}$  – атом халькогена), и для описания соединений  $\text{Me}_x \text{Ch}_y$  требуется более сложная цепочка.

Далее получение динамических уравнений и расчет констант взаимодействия ионов в кристаллах супериоников со структурой  $\text{Me}_2 \text{Ch}$  (халькогенидов меди и серебра) на основе модифицированной двухатомной модели. Предложенная простая модель позволяет установить взаимосвязь возникновения суперионной проводимости с физическими свойствами ионов, входящих в кристаллическую решетку, что является важным для понимания природы суперионной проводимости.

Рассмотрена одномерная двухатомная цепочка, где чередуются два последовательно соединенных атома металла с одним атомом халькогена. Учтем действие на каждый ион цепочки упругих сил со стороны только двух соседних ионов. Влиянием более отдаленных элементов цепочки пренебрегаем. Полагаем также, что ионы в цепочке испытывают лишь продольные смещения от положения равновесия.

Введем следующие обозначения:  $g$  – константа взаимодействия, описывающая связь атомного ядра и электронной оболочки в поляризованном ионе;  $f$  – силовая константа, описывающая связь электронной оболочки поляризованного иона и соседнего жесткого иона;  $m_s$  – масса электронной оболочки поляризованного иона;  $m_1$  – масса ядра поляризованного иона;  $m_2$  – масса жесткого иона;  $u_n$  – смещение ядра  $n$ -го поляризованного иона;  $V_n$  – смещение электронной оболочки  $n$ -го поляризованного иона;  $W_n$  – смещение  $n$ -го жесткого иона, находящегося в цепочке справа от поляризованного иона;  $Z_n$  – смещение  $n$ -го жесткого иона, находящегося в цепочке слева от поляризованного иона.

Тогда уравнения движения атомов цепочки имеют вид:

$$m_1 \ddot{u}_n = -g \cdot (u_n - V_n), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m_s \ddot{V}_n &= -g \cdot (V_n - u_n) - f \cdot [(V_n - W_{n+1}) - (Z_n - V_n)] = \\ &\quad -g \cdot (V_n - u_n) - f \cdot [2V_n - W_{n+1} - Z_n], \end{aligned} \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{W}_n = -f \cdot (W_n - V_{n-1}) - F \cdot (W_n - Z_n), \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{Z}_n = -f \cdot (Z_n - V_n) - F \cdot (Z_n - W_n). \quad (4)$$

Решения этой системы дает уравнение, определяющее зависимость  $\omega(k)$ :

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2^2}{2f \cdot f^*} \cdot \omega^6 + \left[ \left( \frac{1}{g} - \left( 1 - \frac{F}{f} \right) \cdot \frac{1}{f^*} \right) m_1 - \frac{m_2}{f} \right] \cdot m_2 \cdot \omega^4 + \\ + \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{F}{f} \right) (m_1 + 2m_2) + 2m_1 \frac{F}{g} \sin^2(ka/2) \right] \cdot \omega^2 - \\ - 2F \sin^2(ka/2) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь  $1/f^* = 1/f + 2/g$ .

Решение для акустической ветви, полученное по формуле Кардано [4], на краю основной зоны Бриллюэна имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega_A^2 \left( \frac{\pi}{a} \right) = \frac{g}{m_1} \left[ 2\sqrt{\delta} \cos \left( \frac{\$}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - \right. \\ \left. \left( \frac{2ff^*}{3g^2} \frac{m_1}{m_2} - \frac{2f}{3g} \frac{m_1}{m_2} + \frac{2F}{3g} \frac{m_1}{m_2} - \frac{2f^*}{3g} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \delta &= -(m_1^2 \cdot p) / (3g^2), \\ \Phi &= \arctg \left[ \sqrt{-(q^2/4 + p^3/27)} / (-q/2) \right] + \pi, \\ q &= (2B^3 - 9ABC + 27A^2D) / (27A^3). \end{aligned}$$

Экспериментальные значения для  $\omega_A(\pi/a)$  были взяты из [6 – 11]. Тогда из выражения (6) можно найти силовую константу  $g$ , а затем для принятых нами соотношений силовых констант  $f/g$  и  $F/g$  получить также оценки  $f$  и  $F$ . Мы оценили таким способом значения силовых констант  $g$  и  $f$  для халькогенидов меди и серебра, имеющих суперионные свойства, и полупроводников Cu<sub>2</sub>O и Ag<sub>2</sub>O. Отметим, что во всех случаях экспериментальные измерения для супериоников проводились в несуперионной фазе.

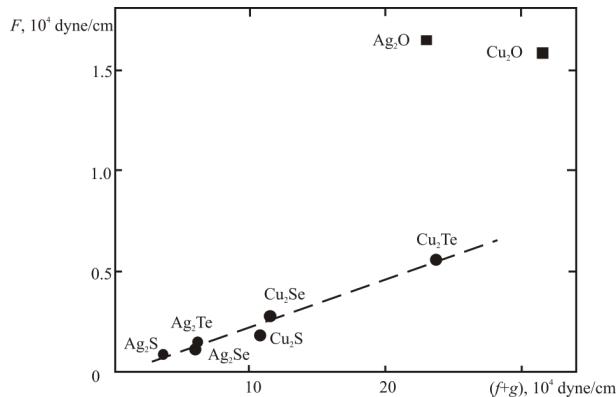


Рис. 5. Зависимость констант взаимодействия  $F$  и  $(f+g)$  для халькогенидов меди и серебра, обладающих суперионными свойствами, и не имеющих суперионных свойств ( $\text{Cu}_2\text{O}$  и  $\text{Ag}_2\text{O}$ ).

Расчеты показали, что константы взаимодействия  $f$  и  $F$  чувствительны к изменению  $g$ . На графике зависимости  $F$  от  $(f+g)$  (рис. 1), видно линейное возрастание величины  $F$  при увеличении  $(f+g)$ , в то время как соединения  $\text{Cu}_2\text{O}$  и  $\text{Ag}_2\text{O}$ , не обладающие суперионными свойствами, лежат существенно выше вне прямой.

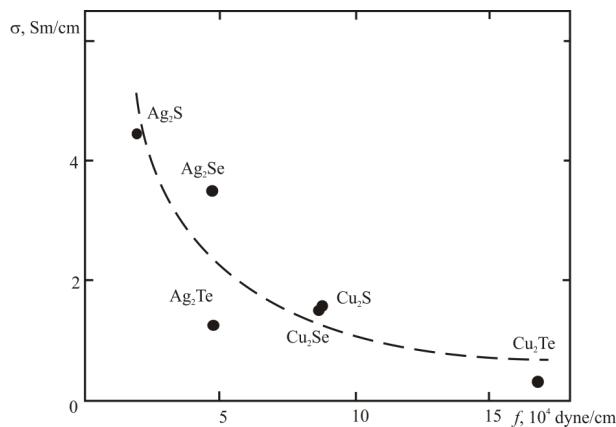


Рис. 6. Зависимость ионной проводимости [5] халькогенидов меди и серебра от силовой константы  $f$ .

Из рис. 6, дающего зависимость ионной проводимости халькогенидов меди и серебра [5] от константы взаимодействия  $f$ , видно, что

Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

уменьшение численного значения  $f$  ведет к росту ионной проводимости.

Расчеты показывают, что суперионникам уже в несуперионной фазе соответствуют силовые константы  $g$ ,  $F$  и  $f$ , меньшие по величине, чем у соединений, не обладающих суперионными свойствами. Этот результат объясняется значительной поляризацией ионов халькогена, благодаря специфической электронной структуре вблизи зонной щели в супериониках. Это значит, что амплитуды колебаний катионов в супериониках больше, чем в несупериониках. То есть, в супериониках уже в несуперионной фазе присутствует относительно сильный ангармонизм колебаний решетки, который значительно усиливается при переходе в суперионное состояние. Это приводит к появлению дополнительных минимумов потенциальной энергии, что облегчает ионный транспорт.

Таким образом, при наличии экспериментальных дисперсионных кривых, представленная модель позволяет теоретически предсказать для какого-либо соединения, находящегося в несуперионной фазе, возможность его перехода в суперионное состояние.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-302-00675

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sakuma T., Shibata K. Low-Energy Excitation in  $\beta$ -Cu<sub>2</sub>Se // J. Phys.Society of Japan. 1989. Vol. 58. № 9. P. 3061–3064.
2. Sakuma T., Aoyama T., Takahashi H., Shimojo Y., Morii Y. Diffuse neutron scattering from the superionic phase of Cu<sub>2</sub>Se // J.Physica B. 1995. Vol. 213-214. P. 399–401.
3. Quantum-ESPRESSO: <http://www.quantum-espresso.org>.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. С.-П-б.: Лань, 2006. С. 234–239.
5. Биккулова Н.Н., Степанов Ю.М., Миколайчук А.Н. Электрохимия. 2007. 43, 621.
6. Sakuma T., Shibata K. J. Phys.Society of Japan. 1989. 58, 3061.
7. Yakshibaev R.A., Mukhamadeeva N.N., Kadrgulov R.F. Phys. Stat. Sol. 1990. A 121, 111
8. Grier B.H., Shapiro S.M., Cava R.J. Phys. Rev. 1984. B 29, 3810.
9. Ebbsjo, Vashishta P., Dejus R., Skold K. Journal of Physics. 1987. C 20, L. 441 (1987).

10. Шапиро С.М., Рейдингер Ф. В сб.: Физика суперионных проводников / Под ред. М.Б. Саламона. Зинатне, Рига, 1982. С. 95.

11. Березин В.М., Вяткин Г.П. Суперионные полупроводниковые халькогениды. Изд-во ЮУрГУ, Челябинск, 2001. 135 с.

УДК 532/529.534.2

## К ЗАДАЧЕ ОЧИСТКИ НЕФТИ ОТ МИНЕРАЛИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ ПЛАСТОВОЙ ВОДЫ

Галиакбарова Э.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,  
г. Уфа, Россия;

Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;  
[emi.galiakbar@yandex.ru](mailto:emi.galiakbar@yandex.ru)

Предложена гидродинамическая модель смешения эмульсии типа «минерализованные частицы в нефти» с капельной промывной водой по инерциальному механизму. Составлена система дифференциальных уравнений, описывающая лобовое движение минерализованных частиц при потенциальном обтекании капель промывной воды в нефти. Введен характерный объем нефти, очищаемый одной каплей промывной воды. Расчеты по модели согласуются с промышленными данными по порядку величин.

**Ключевые слова:** технология обессоливания, движение капель, зацепление.

## TO THE PROBLEM OF OIL PURIFICATION FROM MINERALIZED PARTICLES OF FORMATION WATER

Galiakbarova E.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Investigation Center, R.A.S.,  
Ufa, Russia;

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia;  
[emi.galiakbar@yandex.ru](mailto:emi.galiakbar@yandex.ru)

*A hydrodynamic model of mixing an emulsion of the "mineralized particles in oil" type with drip wash water by an inertial mechanism*

*is proposed. A system of differential equations has been compiled that describes the frontal motion of mineralized particles with a potential flow around rinsing water droplets in oil. Introduced a characteristic volume of oil, purified with one drop of wash water. Model calculations are in order of magnitude with field data.*

*Key words:desalting technology, droplet movement, engagement.*

Большинство месторождений России находится на поздней стадии разработки, поэтому добываемая из них нефть низкого качества с большим содержанием пластовой воды, в состав которой входят соли, кислоты, асфальто-смолистые вещества, различные примеси. После предварительного отстаивания такой нефти, количество пластовой воды снижается примерно до 1%, содержание солей в этой пластовой воде может достигать 2 г/л. Для очистки такой эмульсии типа "вода в нефти" предлагается формировать встречно-направленное движение к ней очищенной промывной воды, подаваемой в зону смешения методом дождевания [1, 2]. Опираясь на данные опытно-промышленных испытаний таких устройств смешения показано, что в данных устройствах реализуется инерционный механизм зацепления крупными каплями промывочной воды минерализованных частиц, находящихся в пластовой воде в эмульгированном состоянии с нефтью [3].

Задача о зацеплении минерализованных частиц крупными каплями воды сводится к расчету траекторий движения минерализованных частиц в потоке нефти в зависимости от их начального положения при обтекании крупной капли промывочной воды [4 – 5].

Уравнения движения крупной капли воды (1) и минерализованных частиц (2), а также траекторий частиц нефти (3) следующие [6 – 7]:

$$m_w \frac{dv_w}{dt} = -\xi \pi R^2 \frac{\rho_0}{2} v_w^2 - \frac{V_w}{2} \rho_0 \frac{dv_w}{dt}, \frac{dl_w}{dt} = v_w \quad (1)$$

где  $m_w = V_w \rho_w$ ,  $V_w = \frac{4}{3} \pi R^3$ ,  $\xi = \frac{12}{Re} (1 + 0,0811 Re^{0,879})$ ,  $Re = 2\rho_0 R v_w / \mu_0$ ,  $l_w$  — перемещение крупной капли воды в потоке нефти;

$$m_s \frac{d\bar{v}_s}{dt} = -V_s \bar{v}_p + 6\pi \mu_0 a (\bar{v}_0 - \bar{v}_s) + \frac{V_s \rho_0}{2} \left( \frac{d\bar{v}_0}{dt} - \frac{d\bar{v}_s}{dt} \right) - m_s \frac{dv_w}{dt}, \quad (2)$$

где  $V_s = \frac{4}{3} \pi a^3$ ,  $m_s = V_s \rho_w$ ,

$$\frac{d\bar{v}_0}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t} + \bar{v}_{ox} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} + \bar{v}_{oy} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y},$$

$$\frac{d\bar{r}_s}{dt} = \bar{v}_s, \bar{v}_s = v_{sx}\bar{i} + v_{sy}\bar{j}, \bar{r}_s = x_s\bar{i} + y_s\bar{j}.$$

$$\frac{dx_0}{dt} = v_{ox}, \frac{dy_0}{dt} = v_{oy} \quad (3)$$

где  $v_{ox} = -v_w \left( 1 + \frac{R^3}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \theta) \right)$ ,  $v_{oy} = \frac{3}{2} v_w \frac{R^3}{r^3} \cos \theta \sin \theta$ , ось Ох совпадает с направлением движения крупной капли. Поле давления вокруг крупной капли воды определяется на основе интеграла Коши - Лагранжа [8]:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi_0)^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \frac{\partial v_w}{\partial t} x = 0$$

где  $\phi_0 = -v_w \cos \theta \left( r + \frac{R^3}{2r^2} \right)$ ,  $v_w$  — определяется из (1).

Начальные условия ( $t = 0$ ) для уравнения (2) совместно с уравнением (3) записутся в виде:

$$v_w = v_{w(0)}, l_w = 0, x_s = x_{(0)}, y_s = y_{(0)},$$

$$v_{sx} = v_{ox}(0, x_{(0)}, y_{(0)}), v_{sy} = v_{oy}(0, x_{(0)}, y_{(0)})$$

Результаты расчетов по теоретической модели показали, что увеличение дисперсности капель промывочной воды в зону смешения с эмульсией "вода в нефти" по порядку величин в десять раз приводит к снижению расхода промывочной воды примерно во столько же раз.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галиакбаров В.Ф., Галиакбарова Э.В., Яхин Б.А. Струйный гидравлический смеситель: пат.изобретение 2600998, Рос. Федерация дата подачи 25.08.2015, опубл. 27.10.2016, БИ 30
2. Галиакбаров В.Ф., Галиакбарова Э.В., Яхин Б.А. Струйный гидравлический смеситель: пат. 159236, Рос. Федерация дата подачи 25.08.2015, опубл. 10.02.2016, БИ 4
3. Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Гималтдинов И.К. К теории вымывания солей из водонефтяных эмульсий // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92 № 5. С. 2262–2268.

Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

4. Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Гималтдинов И.К. К теории вымывания солей из водонефтяной эмульсии пресной водой // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60 № 4. С. 91 – 99.

5. Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В. Влияние размеров и начальной скорости капель промывочной воды при струйной инжекции на эффективность промывки нефти от минерализованных частиц // Труды Академэнерго. 2020. № 1. С. 84–94.

6. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматлит. 1959. 699 с.

7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1 М: Наука. 1987. 464 с.

8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 2 568 с.

УДК 519.63

## УРАВНЕНИЯ РОСТА ФАЗЫ SiC\*/Si В CVD-РЕАКТОРЕ

Гурская А.В.<sup>1,2</sup>, Колайкова О.И.<sup>1</sup>, Долгополов М.В.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Самарский государственный технический университет,  
г. Самара, Россия;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени  
академика С.П. Королева, г. Самара, Россия;  
[a-gurska@yandex.ru](mailto:a-gurska@yandex.ru)

Рассматривается система уравнения в частных производных, описывающая диффузию углерода и других примесей в кремниевую подложку в электрическом поле. Система может иметь только численное решение и описывает процесс, проходящий в реакторе газо-фазного осаждения, применяемого для получения карбида кремния  $SiC$ . Решение дает возможность предсказать глубину залегания  $p$ - $n$ -перехода, исходя из распределения электрического поля в материале, а также руководствуясь зависимостью числа носителей зарядов от толщины роста пленки.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, численные методы, математическое моделирование.

## SIC\*/Si PHASE GROWTH EQUATIONS IN A CVD REACTOR

Gurskaya A.V.<sup>1,2</sup>, Kolajkova O.I.<sup>1</sup>, Dolgopolov M.V.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Samara State Technical University, Samara, Russia;

<sup>2</sup> Samara National Research University, Samara, Russia;

a-gurska@yandex.ru

*The authors consider systems of partial differential equations that describe the diffusion of silicon and other dopant impurity into silicon in the presence of an electric field. This system can only have a numerical solution and describes the process taking place in a gas phase chemical vapor deposition for silicon carbide manufacturing. The solution makes it possible to predict the depth of p-n-junction position based on the electric field and charges distribution in the material.*

*Key words:* differential equations, numerical methods, mathematical modeling.

Получение карбида кремния SiC с помощью технологии газофазного разложения из паровой фазы углерод-содержащих соединений давно известно и имеет множество модификаций и режимов. Использование такой технологии приводит к удешевлению производства SiC. Задача, рассматриваемая в данной работе, имеет целью своей описать математически одну из таких технологий получения SiC [1]. Рассматриваемая технология эндотаксии SiC уникальна и реализуется на специально собранном для нее CVD-реакторе. В настоящий момент актуально математически объяснить процессы, происходящие в нем с подложками кремния при заданных температурных режимах.

Так как эндотаксия подразумевает под собой проникновение одной фазы в другую, то разумно описывать данный процесс уравнениями диффузии [2, 3]. В работе рассматривается частный случай диффузии углерода и фосфора из неограниченного источника с поверхности пленки, а также диффузии встречного потока фосфора из подложки кремния, как ограниченного источника, с учетом влияния внутреннего электрического поля. Фосфор может иметь различную валентность, что уже приведет к созданию p-n-перехода. Последний формируется одновременно с ростом фазы SiC на подложке кремния Si. Таким образом, система уравнений содержит три уравнения (два - для фосфора разной валентности, одно - для углерода), связывающих изменение концентрации примесей во времени

с изменением электрического потенциала. Дополнительно в системе присутствуют уравнения для концентрации электронов и дырок полупроводника. А также уравнение Пуассона для электрического потенциала, порожденного имеющимися зарядами.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процесс эндотаксии в CVD-реакторе, решается численно. В результате решения восстанавливаются, в частности, зависимости концентрации зарядов от глубины подложки и распределение электрического поля в материале, что позволяет узнать глубину залегания р-п-перехода.

Необходимые коэффициенты в уравнении - коэффициенты диффузии и подвижности зарядов - разные для молекул С-12 и С-14, что представляет дальнейший интерес для исследования, т.к. описываемая технология эндотаксии применяется для создания уникального бета-преобразователя на С-14.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурская А.В., Чепурнов В.И., Латухина Н.В., Долгополов М.В. Способ получения пористого слоя гетероструктуры карбида кремния на подложке кремния // Патент РФ №2653398 опубл. 24.01.2018. Бюл. № 3
2. Покоева В.А., Сивакова К.П.. Особенности диффузационного легирования структуры SiC/Si для полупроводниковых СВЧ-датчиков фосфором и бором под действием внутреннего электрического поля // Физика волновых процессов радиотехнических систем. Самара: Самарский университет. 2007. Т. 10. № 2. С. 110–114.
3. Тейтельбаум А.З., Ходунова А.В. Одновременное моделирование процессов ионного легирования и диффузационного перераспределения примесей в кремнии // Электронная промышленность. 1984. № 9. С. 41–45.

УДК 519.63

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ МОНОЛИТА ГИДРАТА

Давлетшина М.Р., Столповский М.В., Чиглинцева А.С.

Уфимский государственный нефтяной технический университет,

г. Уфа, Россия;

davletshina@yandex.ru

*Решена задача о разрушении монолита газогидрата в воде, в котором газовое включение имеет сферическую и цилиндрическую форму, а также когда основная часть стенок включения представляют параллельные между собой полости. Получены распределения для основных параметров (давления и газосодержания) в полости гидрата. Установлена динамика движение границы фазовых переходов, сопровождаемых разложением газогидрата. Описаны температурные поля вблизи полости заполненной продуктами разложения газогидрата. Полученные результаты позволяют объяснить различный характер разрушения монолита газогидрата, который наблюдался в экспериментах на озере Байкал при его всплытии в воде.*

*Ключевые слова:* фазовый переход, сферическая полость, монолит гидрата.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE DESTROYING PROCESSES OF A HYDRATE MONOLITH

Davletshina M.R., Stolpovsky M.V., Chiglintseva A.S.

Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia ;

davletshina@yandex.ru

*The paper presents a mathematical model of the destruction of a spherical hydrate monolith. It is assumed that there is a spherical cavity inside the hydrate particle, initially containing only methane. Since the conditions on the surface of the particle correspond to the conditions of the free existence of gas and water, the gas hydrate begins to decompose. On the basis of the obtained system consisting of the mass and heat conservation equations, the temperature distributions in the "cavity - gas*

*hydrate "system are obtained, and the influence of the initial temperature of the system and the temperature in the cavity on the dynamics of hydrate decomposition is analyzed.*

*Key words:* phase transition, spherical cavity, hydrate monolith.

**Введение.** Представляется, что картина разрушения гидратов при подъеме в воде происходит, благодаря наличию микропузырьков – зародышей [1, 2]. Можно предположить, что природные монолиты газогидрата метана также содержит множество газовых включений в виде мелких сферических или цилиндрических пузырьков, а также в виде замкнутых трещин. При снижении давления в жидкой или газовой среде окружающей монолит газогидрата ниже значения равновесного давления, соответствующей его исходной температуре основная масса газогидрата переходит в метастабильное состояние, поскольку в процессе подъема гидратного монолита в воде при определенной глубине начнется разрушение (раздробление) монолита.

Таким образом, если в результате разрушений вблизи газосодержащих замкнутых включений давление станет ниже равновесного значения для исходной температуры монолита гидрата, то начнется разложение гидрата с выделением газа и это обстоятельство, главным образом, будет способствовать дальнейшей интенсификации процесса распада твердого гидрата. Данная проблема на сегодняшний день недостаточно исследована, в литературных источниках отсутствуют описания подобных процессов.

**Постановка задачи и основные уравнения.** Для описания температурных полей вблизи полостей заполненные продуктами разложения гидрата запишем уравнение теплопроводности в виде

$$\rho_h^0 c_h \frac{\partial T_h}{\partial t} = \frac{\lambda_h}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial T_h}{\partial r} \right), \quad (a < r < \infty).$$

Здесь  $n=0,1$  и 2 показатель степени соответствующий для распределения вокруг включений с плоскопараллельными плоскостями, цилиндрической и сферической поверхностью;  $a$  – полуширина между плоскими поверхностями (в случае включений в виде трещин) и радиусы когда полость представляет собой цилиндрический и сферический объемы.

Граничные условия для уравнения теплопроводности примем в виде  $T_h = T_s(p)$ ,  $r = a$  и  $T_h = T_0$ ,  $r = \infty$ .

Условие баланса тепла на поверхности включений ( $r = a$ ) запишем как

$$\rho_h^0 l_h \dot{a} = \lambda_h \left( \frac{\partial T_h}{\partial r} \right)_{r=a}, \quad \left( \dot{a} = \frac{da}{dt} \right).$$

В этом уравнении затратами тепла на изменение температуры газо-водяной смеси в полости пренебрегается.

Запишем также уравнение сохранения массы для продуктов разложения гидрата для трех случаев

$$\frac{dm}{dt} = \rho_h^0 \dot{a} \quad (m = \rho a, n = 0), \quad \frac{dm}{dt} = 2\pi \rho_h^0 a \dot{a} \quad (m = \pi a^2 \rho, n = 1)$$

,

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi \rho_h^0 a^2 \dot{a} \quad \left( m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho, n = 2 \right).$$

Здесь параметр  $m$  для  $n = 1, 2$  и 2 соответствуют массе смеси отнесенная к единице площади поверхности трещины, к единице длины цилиндрического включения, а также всей поверхности сферического включения;  $\rho$  – средняя плотность газожидкостной смеси, которую можно записать как [3]

$$\rho = \rho_g^0 \alpha + \rho_l^0 (1 - \alpha),$$

где  $\rho_i^0$  ( $i = g, l$ ) истинные плотности газа и воды;  $\alpha$  – объемная концентрация газа. Если в исходном состоянии ( $t \leq 0$ ) внутри полости находится только один газ, то  $\alpha$  будет переменной величиной. Поэтому для получения замкнутой системы уравнений добавим уравнения для изменения массы воды в полости

$$\begin{aligned} \frac{dm_l}{dt} &= \rho_h^0 (1 - G) \dot{a} \quad (m_l = \rho_l^0 (1 - \alpha) a, n = 0), \\ \frac{dm_l}{dt} &= 2\pi \rho_h^0 (1 - G) a \dot{a} \quad (m_l = \pi a^2 \rho_l^0 (1 - \alpha), n = 1), \\ \frac{dm_l}{dt} &= 4\pi \rho_h^0 (1 - G) a^2 \dot{a} \quad (m_l = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_l^0 (1 - \alpha), n = 2). \end{aligned}$$

Здесь  $G$  массовое содержание газа в составе гидрата (для гидрата метана  $G = 0.12$ ).

Уравнения состояния для газа, воды и гидрата примут вид [4, 5]

$$p = \rho_g^0 R_g T, \quad T = T_s(p), \quad \rho_l^0, \rho_h^0 = const.$$

В качестве начальных условий ( $t \leq 0$ ) примем

$$a = a_0, \quad p = p_0, \quad \alpha = 1, \quad T = T_0 \quad (a_0 < r < \infty).$$

Для зависимости равновесной температуры  $T_s(p)$  от давления примем выражение [4-6]

$$T_s(p) = T_0 + T_* \ln(p/p_0),$$

где  $T_*$  – эмпирический параметр, который зависит от вида газогидрата и от рассматриваемых диапазонов температур и давлений [4, 5].

**Результаты численных расчетов.** Рассмотрен случай для сферической и осесимметричной полости.

Параметры:  $a_0 = 0.01$  м, радиус монолита 0.1 м,

Начальная температура  $T_0 = 274$  К, температура в полости  $T = 279.047$  К соответствует равновесной температуре при давлении в полости  $p = 5$  МПа.

На рис. 1 представлены зависимости объемной концентрации газа и радиуса полости от времени при различных значениях исходной температуры. Как следует из рисунка, с ростом исходной температуры интенсивность образования полости уменьшается. Это обусловлено тем, что интенсивность разложения гидрата, лимитируемая подводом тепла к границе «полость – газогидрат», с ростом температуры  $T_0$  уменьшается. Поэтому, вследствие интенсивного разложения гидрата, при более низких значениях  $T_0$  объемная концентрация газа в полости уменьшается быстрее.

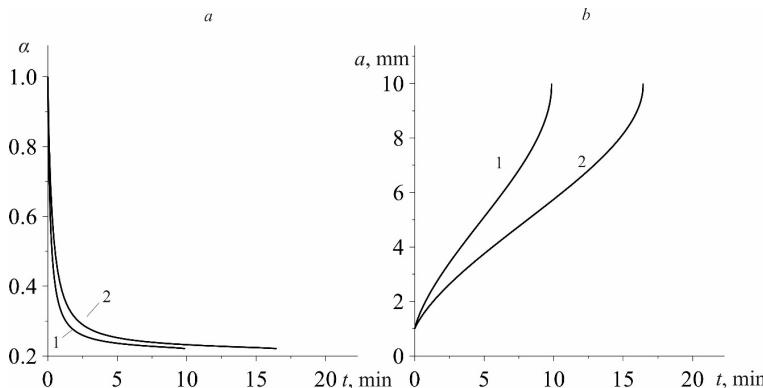


Рис. 1. Зависимость объемной концентрации газа (a) и радиуса полости (b) от времени при  $T_0 = 274$  К (1) и  $276$  К (2).

На рис. 2 представлены зависимости объемной концентрации газа и радиуса полости от времени при различных значениях температу-

ры полости при  $T_0 = 274$  К. На фрагменте *a*) температура полости полагалась равной  $T_s = 276.3$  К (соответствует давлению 3.8 МПа); на фрагменте *b*) –  $T_s = 276.8$  К (соответствует давлению 4 МПа). Как следует из рисунка с уменьшением температуры полости (что соответствует уменьшению давления) интенсивность разложения гидратата же уменьшается. Это объясняется тем, что с уменьшением температуры полости уменьшается и поток тепла направленный на разложение гидрата. Как следствие при более высоких значениях  $T_s$  объемная концентрация газа в полости уменьшается быстрее.

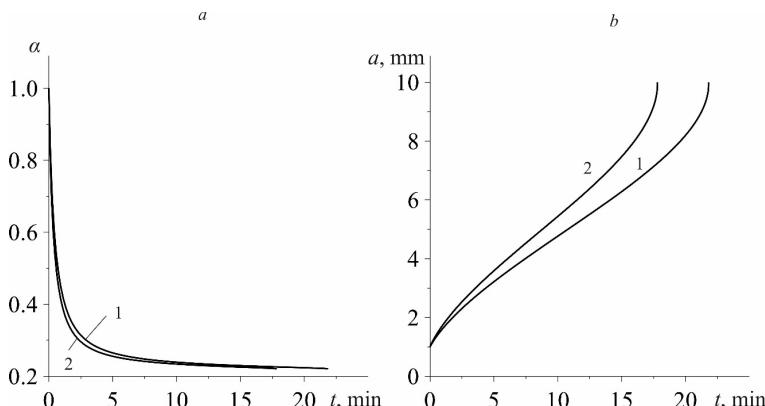


Рис. 2. Зависимость объемной концентрации газа (*a*) и радиуса полости (*b*) от времени при  $T_s = 276.3$  К (1) и  $276.8$  К (2).

**Заключение.** Построена математическая модель процесса разложения газогидрата в воде, в котором газовое включение имеет сферическую и цилиндрическую форму. Полученные результаты позволяют объяснить внезапное разрушение монолита газогидрата при его подъеме в воде на частицы различного размера.

Работа поддержана грантом президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (Конкурс – МД-2020) № МД-2179.2020.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Егоров А.В., Нигматуллин Р.И., Рожков А.Н. Переход глубоководных метановых пузырей в твердые гидратные формы. М.: ИП Мех РАН, 2013. 34 с. (Препринт / ИП Мех РАН; № 1038).

Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

2. Егоров А.В., Рожков А.Н. Разрушение подводных залежей газовых гидратов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 93–103.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
4. Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И. Моделирование динамики образования и разложения газогидратных частиц при их всплытии в воде // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. Механика. 2013. 9/2 (110). С. 34–140.
5. Шагапов В.Ш., Тазетдинов Б.И., Нурисламов О.Р. К теории образования и разложения газогидратных частиц в процессе их всплытия в воде // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2013. №6 (26). С. 106–113.
6. Davletshina M.R., Stolpovsky M.V., Chiglintseva A.S. Technologies for methane production from hydrogen using a heated liquid // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. Krasnoyarsk, Russia, 2020. С. 62070.

УДК 532.546; 519.633.688; 517.962.2

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ АНОМАЛЬНЫХ ФЛЮИДОВ

Каюмов Ш., Мустапокулов Х.Я., Каюмов А.Б.

Ташкентский государственный технический университет,

г. Ташкент, Узбекистан;

*m\_hamdam@mail.ru*

Известно, что движение флюидов имеющие различные компоненты в пористых средах связано с решением квазилинейных параболических уравнений в частных производных второго порядка, моделирующих эти движения. Предположим далее, что область  $D$  занята флюидом имеющим аномальные характеристики. А  $\Omega$  – область, которая содержит флюид с обычными характеристиками. Область  $D$  оказывается как бы "плавающей" на  $\Omega$  причем ее границы имеют большую протяженность по сравнению с размерами области  $D$ .

Математически эту задача можно сформулировать следующим образом.

Требуется определить функцию  $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t)$  и подвижную границу  $h(x, y, z, t)$  из системы дифференциальных уравнений в виде [1]:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{K^*(x, U)}{\mu_2(U)} \Phi \left( \frac{|\nabla U|}{\beta} \right) \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \\ & = M_1(x, U) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m(U)}{z(U)} U \right) + F(x, t), \quad x \in D_r, \quad t > 0, \quad |\nabla U| > \beta \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{K^*(x, U)}{\mu_2(U)} \Phi \left( \frac{|\nabla U|}{\beta} \right) \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \\ & = M_2(x, U) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m(U)}{z(U)} U \right), \quad x \in D, \quad t > 0, \quad |\nabla U| < \beta \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{K(x, V)}{\mu_b(V)z(V)} \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = M(x, V) \sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( m(V)V \right), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

с начальными

$$U(x, 0) = V(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega \cup \overline{D}, \quad (4)$$

с условиями на  $\Gamma_r(x, t)$

$$|\nabla U|_{x \in \Gamma_{r-0}} = |\nabla U|_{x \in \Gamma_{r+0}} = \beta G, \quad (5)$$

$$U(x, t)|_{x \in \Gamma_{r-0}} = U(x, t)|_{x \in \Gamma_{r+0}}, \quad (6)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial U}{\partial n_1} \Big|_{\Gamma_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial V}{\partial n_2} \Big|_{\Gamma_2} = \varphi_2, \quad \frac{\partial V}{\partial n_3} \Big|_{x_3=H_1} = \varphi_3, \quad \frac{\partial V}{\partial n_3} \Big|_{x_3=H} = 0, \quad (7)$$

а также с условиями на контакте области  $\Omega$  и  $D$ :

$$U(x, t) \Big|_{x_3=h} = V(x, t) \Big|_{x_3=h^+}, \quad \frac{K}{\mu_b} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{x_3=h^-} = \frac{K}{\mu_b} \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{x_3=h^+}. \quad (8)$$

$$m\sigma \frac{dh}{dt} = -\frac{K}{\mu_b} \frac{\partial \nu}{\partial n} \Big|_{x_3=h^-}, \quad h(x, 0) = \omega_0, \quad (9)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $z = x_3$ ,  $\bar{D} = D + \sum_{r=1}^n D_r$ ,

$$D_r = \left\{ (x, t) : \Gamma_r(x, t) > 0 \right\},$$

$$D = \left\{ (x) : h(x, t) \leq \Gamma_1(x), \Gamma_r(x, t) < 0 \right\},$$

$$\Omega = \left\{ (x) : H(x) \leq x_3 \leq h(x, t) \right\}.$$

$$\Phi\left(\frac{|\nabla U|}{\beta}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{\beta G \mu_0}{|\nabla U|}, & |\nabla U| > \beta, \\ \frac{\nabla U}{\beta + \sqrt{\beta + |\nabla U|^2}}, & |\nabla U| < \beta. \end{cases} \quad (10)$$

Критерием точности решения задачи (1)-(6) является сравнение значений динамического изменения поля давлений с параметрами из истории разработки реальных месторождений. Задача сравнения расчетных значений поля давления с реально измеренными данными забойных давлений на скважинах приводится к задаче минимизации функционала

$$J(k, m) = \int_0^T \iiint_{\Omega_0} \varepsilon (u_{ras} - u_{fak})^2 d\sigma dt. \quad (11)$$

Функционал  $J$  может иметь минимум, если коэффициенты задачи (1)-(6), отражают состояния пласта, в которых проведено измерение фактических давлений.

Задачи (1)-(11) относятся к сложным нелинейным краевым задачам математической физики. Построение точных решений этих задач невозможно и следовательно, необходимо построить приближенное решение, состоящее из следующих этапов:

- Выбор видов разностной решетки, учитывающей геометрию исходной области;

- Применение процедуры дискретизации дифференциальной задачи и сведение их к системе алгебраических уравнений;

- Выбор подходящего прямого или итерационного метода решения системы алгебраических уравнений.

Проиллюстрируем применение процедуры дискретизации на примере задачи (1)-(9) а осталльная будет изложена в описательном виде.

Построим решетки  $\omega$ , элементы которого - параллелепипеды [2-5]:

$$\omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \Delta x_i, x_2 = \sum_{j=1}^{N_2} \Delta y_j, x_3 = \sum_{k=1}^{N_3} \Delta z_k,$$

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}(\Delta S_{i+\frac{1}{2}} + \Delta S_{i-\frac{1}{2}}), \Delta S_{i+\frac{1}{2}} = S_{i+1} - S_i, \Delta S_{i-\frac{1}{2}} = S_i - S_{i-1}\}.$$

В результате к дифференциальным уравнениям (1), (2), (3) соответствует конечно-разностные уравнения (для изящности изложения эти уравнения запишем только к (1) и (3) а для (2) она аналогично к (1), без  $f$ ).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} [a_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + a_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_{i-1} - U_i}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}]_{jk} + \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} [a_{j+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + a_{j-\frac{1}{2}} \frac{U_{j-1} - U_j}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}}]_{jk} + \\ & + \frac{1}{\Delta z_k} [a_{k+\frac{1}{2}} \frac{U_{k+1} - U_k}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} + a_{k-\frac{1}{2}} \frac{U_{k-1} - U_k}{\Delta z_{k-\frac{1}{2}}}]_{ij} = \alpha_{ijk} \frac{dU}{dt} + f_{ijk}, \quad (12) \\ & \frac{1}{\Delta x_i} [\bar{a}_{i+\frac{1}{2}} \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \bar{a}_{i-\frac{1}{2}} \frac{V_{i-1} - V_i}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}]_{jk} + \frac{1}{\Delta y_i} [\bar{a}_{j+\frac{1}{2}} \frac{V_{j+1} - V_j}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}} + \\ & + \bar{a}_{j-\frac{1}{2}} \frac{V_{j-1} - V_j}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}}]_{ik} + \frac{1}{\Delta z_k} [\bar{a}_{k+\frac{1}{2}} \frac{V_{k+1} - V_k}{\Delta z_{k+\frac{1}{2}}} + \bar{a}_{k-\frac{1}{2}} \frac{V_{k-1} - V_k}{\Delta z_{k-\frac{1}{2}}}]_{ij} = \alpha_{ijk} \frac{dV}{dt}, \quad (12') \end{aligned}$$

Здесь

$$a_{r+\frac{1}{2}} = ((K_0)_{r+\frac{1}{2}} \xi(u)_{r+\frac{1}{2}}), \alpha_{ijk} =$$

$$= (M_0)_{ijk} \eta_{ijk}(\bar{u}), \xi(u)_{r+\frac{1}{2}} = \Phi\left(\frac{|\nabla U|}{\beta}\right) \frac{1}{\mu_2(U)},$$

$$\bar{\alpha}_{r+\frac{1}{2}} = (K_0)_{r+\frac{1}{2}} (\xi_1(\bar{v}))_{r+\frac{1}{2}}, \bar{\alpha}_{ijk} = (M_0)_{ijk} \eta_{ijk}(\bar{v}). r = i, j, k.$$

Уравнения (12), (12)' после раскрытия выражений в скобках и группировки по индексам, записывается так:

$$S u_{k-1} + G u_{i-1} + Q u_{i-1} + \varphi u + R u_{i+1} + \Phi u_{j+1} + Z u_{k+1} = \alpha \frac{du}{dt} + \alpha_1; \quad (13)$$

$$\bar{S}v_{k-1} + \bar{G}v_{i-1} + \bar{Q}v_{j-1} + \bar{\varphi}V + \bar{R}v_{i+1} + \bar{\Phi}v_{j+1} + \bar{Z}v_{k+1} = \bar{\alpha} \frac{dV}{dt} + \bar{\alpha}_1; \quad (13)'$$

где нижние индексы  $i, j, k$  опущены.

Отметим, что уравнения (13), (13)' можно выписать для каждого из узлов сетки, причем вновь полученные уравнения записываются в матричной форме:

$$C \frac{du}{dt} = A(t)u + g(t). \quad (14)$$

$$\bar{C} \frac{dV}{dt} = \bar{A}(t)V + \bar{G}(t) \quad (14)'$$

С целью упрощения задачи будем считать, что матрица  $C$  в интервале  $(t_n, t_{n+1})$  изменяются мало и его можно принять в качестве констант. Далее, для дискретизации по времени интегрируем (14), (14)' от  $t_n$  до  $t_{n+1}$ , используя аппроксимации:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi dt \approx [\varphi(t_{n+1}) + (1 - \theta)\varphi(t_n)](t_{n+1} - t_n).$$

При этом получим:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{C}{\Delta t_{n+1}} - \theta A(t_{n+1}) \right] U_{n+1} = \\ & = \left[ \frac{C}{\Delta t_{n+1}} + (1 - \theta)A(t_n) \right] U_n + [\theta g(t_{n+1}) + (1 - \theta)g(t_n)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\bar{C}}{\Delta t_{n+1}} - \theta \bar{A}(t_{n+1}) \right] V_{n+1} = \\ & = \left[ \frac{\bar{C}}{\Delta t_{n+1}} + (1 - \theta)\bar{A}(t_n) \right] V_n + [\theta \bar{g}(t_{n+1}) + (1 - \theta)\bar{g}(t_n)], \end{aligned} \quad (15)'$$

где  $\theta$  – весовой коэффициент интегрирования. Если  $\theta = 1$ , то получим метод конечных разностей с интерполяированием назад, а при  $\theta = 1/2$  – метод центральных разностей (метод Кранка - Николсона). Последние уравнения нетрудно записать в виде

$$\bar{A}U_{n+1} = b_{n+1}, \quad (16)$$

$$\tilde{A}V_{n+1} = \tilde{b}_{n+1}, \quad (16)'$$

где  $b_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}$  – известный вектор, определяемые правой частью (15), (15)'.

В разностном уравнение (16), (16)' произвольный внутренний узел содержит 7 неизвестных, поэтому у матриц  $\bar{\bar{A}}, \tilde{\bar{A}}$  соответственно, имеется семь диагоналей.

В случае, когда система линейных алгебраических уравнений вида (12) ((12)') записана в матричном виде (16), (16)' подразумевается, что существует соответствие между упорядочением уравнений и упорядочением неизвестных.

Для данного случая узлы сетки  $i, j, k$  порядочны так, что сначала совершается обход по  $i(i = 1, 2, 3, \dots, I)$ , а затем, по  $j(j = 1, 2, 3, \dots, J)$  и, наконец, по  $k(k = 1, 2, 3, \dots, K)$ .

Элементы вектора  $U$  для данного упорядочения следующие:

$$U = U_{111}, U_{211}, \dots, U_{121}, U_{221}, \dots, U_{1jk}, U_{IJK}.$$

Уравнения (16), (16)' решаются прямыми, либо итерационными методами.

Для решения этого матричного уравнения применим строго неявный метод (СНМ). Алгоритмы данного метода приведем на примере уравнение (16)

$$(\bar{\bar{A}}^{(s)} + N)U_{n+1}^{(s+1)} = (\bar{\bar{A}}^{(s)} + N)U_{n+1}^{(s)} - (\bar{\bar{A}}U_{n+1}^{(s)} - b_{n+1}),$$

и обозначив  $R^{(s)} = A^{(s)}U_{n+1}^{(s)} - b_{n+1}$  и  $\delta_{n+1}^{(s+1)} = U_{n+1}^{(s+1)} - U_{n+1}^{(s)}$ , получим  $A^{(s)} + N)\delta_{n+1}^{(s+1)} = -R^{(s)}$  или  $L\bar{V}\delta_{n+1}^{(s+1)} = -R^{(s)}$  где  $L$  и  $\bar{V}$  – нижние и верхние треугольные матрицы, имеющие лишь по четыре неизвестных элемента в строке.

Элементы матрицы  $L$  и  $\bar{V}$  вычисляются по формулам.

$$\begin{aligned} Z_{ijk} &= Z_{ijk}[(1 + \alpha(b_{i,j,k-1} + f_{i,j,k-1})^{-1}], g_{ijk} = \\ &g_{ijk}[1 + \alpha(b_{i,j-1,k} + b_{i,j-1,k})^{-1}]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= C_{ijk}[1 + \alpha(S_{i-1,j,k} + f_{i-1,j,k})^{-1}], A_{ijk} = \\ &Z_{ijk}b_{i,j,k-1}, C_{ijk} = g_{ijk}f_{i-1,j,k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ijk} &= C_{ijk}f_{i-1,j,k}, W_{ijk} = C_{ijk}f_{i-1,j,k}, T_{ijk} = Z_{ijk}f_{i,j,k-1}, U_{ijk} = \\ &g_{ijk}S_{i,j-1,k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{ijk} &= a_{ijk} + \alpha[A_{ijk} + C_{ijk} + g_{ijk} + W_{ijk} + T_{ijk}] - C_{ijk}b_{i-1,j,k} - \\ &g_{ijk}f_{i,j-1,k} - r_{ijk}h_{i,j,k-1}, \end{aligned}$$

$$b_{ijk} = \partial_{ijk}^{-1}[b_{ijk} - \alpha(A_{ijk} + C_{ijk})], f_{ijk} = \partial_{ijk}^{-1}[f_{ijk} - \alpha(T_{ijk} + C_{ijk})].$$

$$S_{ijk} = \partial_{ijk}^{-1}[S_{ijk} - \alpha(W_{ijk} + U_{ijk})].$$

После определения элементов  $L$  и  $U$  [1, 5] получаем вектор

$$L\bar{U}_{n+1}^{(s+1)} = R^{(s)}. \quad (17)$$

Прямой подстановкой решаем уравнения

$$\bar{U}_{n+1}^{(s+1)} = \partial_{ijk}^{-1}[R_{ijk}^{(s)} - Z_{ijk}^{-1}\bar{U}_{ijk-1}^{(s+1)} - g_{ijk}\bar{U}_{ij-1,k}^{(s+1)} - C_{ijk}\bar{U}_{i-1,jk}^{(s+1)}]. \quad (18)$$

Вектор  $\delta_{n+1}^{(s+1)}$  находится из

$$U\delta_{n+1}^{(s+1)} = \bar{U}_{n+1}^{(s+1)}, \quad (19)$$

обратной подстановкой, как решения уравнения

$$\delta_{ijk}^{(s+1)} = \bar{U}_{ijk}^{(s+1)} - b_{ijk}\delta_{i+1,jk}^{(s+1)} - f_{ijk}\delta_{i,j+1,k}^{(s+1)} - S_{ijk}\delta_{ij,k+1}^{(s+1)}. \quad (20)$$

В уравнениях (18)-(20) полагается, что

$Z_{ij1} = h_{ijk} = 0$ , если  $i = \overline{1\dots i}, j = \overline{1\dots j}; g_{i1k} = f_{ijk} = 0$ ; если  $i = \overline{1\dots i}; k = \overline{1\dots k}$ ;

$C_{1jk} = b_{ijk} = 0$  если  $j = \overline{1\dots i}, k = \overline{1\dots k}$ .

Для улучшения сходимости решений примем изменяющийся порядок упорядочений записей, например, для нечетных итераций:  $i = \overline{1, I}$  каждому значению  $j$  соответствует порядок  $j = \overline{1, J}$ , а для четных итераций данная последовательность меняется следующим образом:  $i = \overline{1, I}, j = J, J - 1, \dots, 1; k = k, k - 1, \dots, 1$ .

Аналогичные алгоритмы можно получить и для (2) и (3).

Необходимо отметить, что аппроксимация граничных условий второго рода на  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_r$  (формулы (4), (5), (6), (7)) производится аналогично описанной и включается в разностные уравнения (13), (13)' и другим разностным уравнениям.

После определения  $U_{ijk}$  и  $V_{ijk}$  производится уточнение положения ГВК по формуле (9), предварительно дискретизируя  $h_{e+1} = h_e - G_{ijk}P_{ijk}$ , где  $P_{ijk} = (\partial V / \partial n|_{x_3=h^-})_{ijk}$ , которые можно аппроксимировать первым или вторым порядком точности. При необходимости нетрудно улучшить значения  $\Gamma$  по формуле Эйлера.

Таким образом, если известно начальное поле параметров  $k$  и  $t$ , то нетрудно построить поле давления на любую дату времени. Однако на практике невозможно задать все значения  $k$  и  $t$ , в особенности на всех точках области, и даже на тех, которые определены геофизическими или другими методами, ввиду несовершенства измеряемых средств, условий, содержащих в себе не устранимые отклонения от истинного значения. Поэтому имеющиеся данные всегда фильтруются, дополнительно обрабатываются, а при необходимости уточняются.

Особенный недостаток информации проявляется при рассмотрении трехмерных моделей. Для построения трехмерных матриц начальных данных параметров  $k$  и  $t$ , сначала производится выбор разностной сетки с учетом геометрии области, т.е. создается трехмерная сеточная структура. Далее, методом непараметрической идентификации строятся трехмерные полиномы и подсчитываются элементы трехмерной матрицы. С учетом начальных данных решается прямая задача, при этом на каждом временном шаге определяется продвижение газоводяного контакта из уравнений (9).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каюмов Ш. Математическое моделирование задач теории фильтрации со свободными границами. Т: ТашГТУ, 2017. 273 с.
2. Закиров С.Н. Многомерная и многокомпонентная фильтрация. М., 1998. 335 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1990. 614 с.
4. Марчук Г.У. Методы вычислительной математики. М., 2002. 536 с.
5. Антоновский И.В., Гузенко А.А., Истомен Е.А. Оптимизация двухфазных течений с помощью решения обратной задачи // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 72–77.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНОЙ СТРУИ С УЧЁТОМ СЕПАРАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ

Кильдибаева С.Р.<sup>1</sup>, Гималтдинов И.К.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>2</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;  
s.r.kildibaeva@strbsu.ru, iljas\_g@mail.ru

*На основе построенной математической модели течения многофазной затопленной струи исследован процесс сепарации пузырьков из струи. Определено влияние параметров окружающей среды, гидратообразования на процесс сепарации, получены теплофизические зависимости характеристик струи, изменяющихся со временем.*

*Ключевые слова:* затопленная струя, гидратообразование, сепарация пузырьков, ликвидация глубоководных утечек.

## MODELING OF THE FLOW OF A MULTIPHASE JET TAKING INTO ACCOUNT BUBBLE SEPARATION

Kildibaeva S.R.<sup>1</sup>, Gimaltdinov I.K.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia;  
s.r.kildibaeva@strbsu.ru, iljas\_g@mail.ru

*A mathematical model of the flow of a multiphase submerged jet is constructed, the process of separation of bubbles outside the jet is investigated. The influence of the environmental parameters and hydrate formation on the separation process is determined, the thermophysical dependences of the jet characteristics that change with time are obtained.*

*Key words:* submerged jet, hydrate formation, bubble separation, elimination of deep-sea leaks.

Исследование особенностей распространения многофазных затопленных струй в водах Мирового океана способно решить проблему ликвидации утечек, которые имеют техногенный характер и вызваны: аварийным повреждением скважины, повреждением подводного

трубопровода, крушением танкера, нарушением герметичности нефтехранилища и т.д. Согласно статистике, почти все этапы добычи, хранения и транспортировки углеводородов в нефтяной отрасли сопровождаются авариями. Разлив нефти в Мексиканском заливе на платформе Deepwater Horizon показал, как важна быстрая локализация и ликвидация разлива. На момент разлива общественность впервые столкнулась с такой проблемой, отсутствовали быстрые и качественные методы устранения разлива, вследствие чего в океан вылилось более 5 миллионов баррелей нефти[2,3].

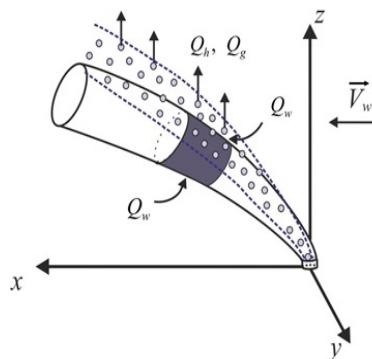


Рис. 1. Схема струи

В данной работе рассматривается математическая модель течения многофазной затопленной струи[1]. Считаем, что на дне некоторого водоема присутствует источник техногенного происхождения, из которого поступает смесь нефти и газа. Нефть распространяется в виде капель, газ в виде пузырьков. Течение углеводородов происходит в условиях стабильного существования гидрата, поэтому на поверхности пузырьков образовывается гидратная оболочка, превращая газовые пузырьки в гидратные. Более подробно об этом процессе описано в работе [4]. Условимся, что газовые пузырьки занимают центральное ядро струи, а с течением времени под действием сил плавучести и течения окружающей среды пузырьки начнут сепарироваться и покидать пределы струи.

Основные уравнения:

$$\frac{dM}{dt} = \rho_w Q_w - \rho_{com} Q^f, \quad \rho = \sum_i \alpha_i \rho_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1,$$

$$\frac{dM_g}{dt} = -J_g - \rho_g Q_g^f, \quad \frac{dM_h}{dt} = J_h - \rho_h Q_h^f, \quad \frac{dM_w}{dt} = \rho_w Q_w - J_w,$$

$$J_g = G \cdot J_h \quad J_w = (1 - G) J_h \quad J_h = N 4 \pi a_{gh}^2 j_h$$

$$\frac{d}{dt} (cMT) = c_w T_w \rho_w Q_w + J_h L - J_w c_w T_{hs}, \quad c = \sum \chi_i c_i,$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (Mu) = u_w \rho_w Q_w - u \rho_{com} Q^f, \\ \frac{d}{dt} (Mv) = v_w \rho_w Q_w - v \rho_{com} Q^f, \\ \frac{d}{dt} [(M_w + M_o) w + (M_g + M_h) \cdot (w + w_b)] = w_w \rho_w Q_w - (w + w_b) \rho_{com} Q^f + \\ \quad + (\rho_w - \rho_l) \pi b^2 h (\alpha_w + \alpha_o) g + (\rho_w - \rho_{com}) \pi b^2 h (\alpha_g + \alpha_h) g, \end{cases}$$

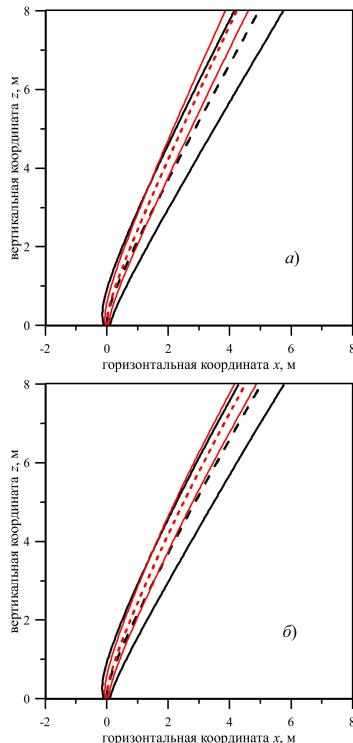


Рис. 2. Траектория струи

Параметры системы:  $r = 0.23$  м,  $Q_o^e = 0.1$  м<sup>3</sup>/с,  $Q_g^e = 0.05$  м<sup>3</sup>/с,  $u_w = 1$  м/с,  $T_w = 4$  °C,  $T^e = 80$  °C,  $p = 15$  МПа,  $\rho_w = 1030$  кг/м<sup>3</sup>,

$\rho_o = 650 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_g = 99.4 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_h = 910 \text{ кг/м}^3$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $v_w = 2 \text{ м/с}$ ,  $w_w = 0 \text{ м/с}$ ,  $c_o = 2090 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $c_g = 2365 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $c_h = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $c_w = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $\lambda_w = 0.58 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ,  $\mu_w = 1.57 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $L = 5 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ ,  $G = 0.12$ ,  $D^* = 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$

На рисунке 2 представлены траектории струи для случаев гидратообразования, лимитируемого диффузией газа через гидратную оболочку (а) и теплообменом с окружающей средой (б). Из графиков видно, что отделение пузырьков в случае, когда гидратообразование лимитируется диффузией, происходит быстрее. Этот эффект связан с тем, что, согласно этой схеме, пузырьки газа покрываются гидратной оболочкой медленнее, чем в случае, когда гидратообразование лимитируется теплообменом. В случае, когда гидратообразование лимитируется диффузией, плотность пузырьков меньше и они легче, вследствие чего отделение газового ядра под действием поперечного течения происходит быстрее.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-10227, <https://rscf.ru/project/21-79-10227/>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zheng L., Yapa P.D., Chen F. A model for simulating deepwater oil and gas blowouts - part i: theory and model // Journal of hydraulic research. 2002. Vol. 41. № 4. P. 339–351.
2. Лаврова О.Ю., Костяной А.Г. Катастрофический разлив нефти в мексиканском заливе в апреле–мае 2010 г // Исследование Земли из космоса. 2010. № 6. С. 67–72.
3. Fleeger J.W., Riggio M.R., Mendelsohn I.A., Lin Q., Houc A., Deis D.R. Recovery of saltmarsh meiofauna six years after the Deepwater Horizon oil spill // Journal of Experimental Marine Biology and Ecology V. 502. 2018. P. 182-190.
4. Гималтдинов И. К., Кильдибаева С.Р. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25. № 1. С. 79–88.

УДК 519.63:517.958

**ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ИССЛЕДОВАНИЯ  
ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА РАДОНА В  
АНИЗОТРОПНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ**

**Нафикова А.Р.<sup>1</sup>, Кризский В.Н.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Башкирский государственный педагогический университет  
им. М. Акмуллы, г. Уфа, Россия;

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский Горный Университет,  
г. Санкт-Петербург, Россия;  
albinabikbaeva@gmail.com, krizsky@rambler.ru

*Работа посвящена описанию программного комплекса, разработанного средствами компьютерной системы Maple в соответствии с предложенным способом решения трехмерной задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных слоистых средах с включениями, учитывающей анизотропию диффузионных свойств подобластей геологической среды.*

*Ключевые слова:* диффузия-адвекция радона, анизотропная среда, краевая задача, математическая модель, метод интегральных преобразований и интегральных представлений, программный комплекс.

**SOFTWARE PACKAGE FOR THE STUDY OF RADON  
TRANSFER PROCESSES RESEARCH IN ANISOTROPIC  
GEOLOGICAL MEDIA**

**Nafikova A.R.<sup>1</sup>, Krizsky V.N.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Bashkir State Pedagogical University named after M. Akhmetulla,  
Ufa, Russia;

<sup>2</sup> Saint Petersburg Mining University, St. Petersburg, Russia;  
albinabikbaeva@gmail.com, krizsky@rambler.ru

*The paper is devoted to the description of a software package developed by means of the Maple computer system in accordance with the proposed method for solving the three-dimensional problem of radon diffusion-advection in piecewise constant layered media with inclusions, taking into account the anisotropy of the diffusion properties of the subsurface of the geological medium.*

*Key words:* radon diffusion-advection, anisotropic medium, boundary value problem, mathematical model, method of integral transformations and integral representations, software package.

Изучение миграции радона в геологических средах актуально для поиска и оконтуривания нефтяных и газовых месторождений, поиска урановых и ториевых руд, экологического картирования при выборе площадок под строительство промышленных и жилых сооружений, прогнозирования событий в зонах сейсмической активности.

Математическое моделирование процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка математических моделей, алгоритмов решения и программ расчета процессов распространения радона — актуальная задача, имеющая практическое значение во многих научных направлениях и областях.

Так, в работе [1] построена математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных слоистых средах с включениями, учитывающая анизотропию диффузионных свойств подобластей геологической среды (1):

$$\frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} A_{i,j}(P,t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_{i,j}(P,t) - A_{i,\infty}),$$

$$P = P(x, y, z) \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i};$$

$$((D_{i,0} \bar{\nabla} A_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}} = ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} A_{i+1,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} A_{i+1,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}$$

$$A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}} = A_{i+1,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$((D_{i,j} \bar{\nabla} A_{i,j}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,j} A_{i,j}(P,t))|_{\gamma_{i,j}} = ((D_{i,0} \bar{\nabla} A_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i};$$

$$A_{i,j}(P,t)|_{\gamma_{i,j}} = A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i};$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_{N,0}(P,t) = A_{N,\infty}, \lim_{z \rightarrow -\infty} A_{0,0}(P,t) = 0;$$

$$\lim_{P \in \Omega_{i,0}, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_{i,0}(P,t) = A_i(P,t), i = \overline{0, N};$$

$$A_{i,j}(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}.$$

Здесь  $A_{i,j}(P, t)$  – функция объемной активности радона (ОАР) в грунте,  $A_{i,j}(P, t) \in C_P^2(\Omega) \cap C_P^1(\gamma_{i,j}) \cap C_t^1(\Omega)$ ;  $\lambda$  – постоянная распада радона;  $A_{i,\infty}$  – объемная активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием ( $^{226}Ra$ ) в грунте  $i$ -го слоя, которая равна  $A_{i,\infty} = K_{i.em} A_{i.Ra} \rho_{i.s} (1 - \eta_i)$ ,  $K_{i.em}$  – коэффициент эммирования радона,  $A_{i.Ra}$  – удельная активность  $^{226}Ra$ ,  $\rho_{i.s}$  – плотность твердых частиц,  $\eta_i$  – пористость грунта,  $A_i(P, t)$  – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений,  $\gamma_{i,0} = \{\gamma_{i,0}(x, y) | \gamma_{i,0} \rightarrow z_i \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty\}$  ( $i = \overline{0, N}$ ) – гладкие параметрические заданные границы горизонтально-слоистой среды, разделенной ими на горизонтальные слои  $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \dots, \Omega_{N,0}$ , заполненные веществом, диффузационные свойства которого описываются симметричными тензорами  $D_{i,0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,0} & d_{xy}^{i,0} & d_{xz}^{i,0} \\ d_{xy}^{i,0} & d_{yy}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} \\ d_{xz}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} & d_{zz}^{i,0} \end{pmatrix}$  и скоп-

ростями адвекции  $\nu_{0,0}, \nu_{1,0}, \dots, \nu_{N,0}$  соответственно. Каждый слой  $\Omega_{i,0}$  содержит  $M_i$  локальных включений  $\Omega_{i,j}$  ( $j = \overline{1, M_i}$ ) с границами  $\gamma_{i,j}$ , заполненных веществом, физические свойства которого описываются постоянными симметричными тензорами диффузии

$$D_{i,j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,j} & d_{xy}^{i,j} & d_{xz}^{i,j} \\ d_{xy}^{i,j} & d_{yy}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} \\ d_{xz}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} & d_{zz}^{i,j} \end{pmatrix} \text{ и скоростями адвекции } \nu_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}.$$

Переменная  $t \geq 0$  – время. Если область  $\Omega_{0,0}$  – приземный слой атмосферы, то в задаче (1) следует положить  $A_{0,\infty} = 0$ . При  $M_0 > 0$  включения  $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M_0}$  могут описывать жилые и производственные сооружения.

Предложен комбинированный способ решения данной задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений, и построен алгоритм расчета поля ОАР [1].

Для реализации алгоритмов решения поставленной задачи разработан комплекс программ для работы в среде операционных систем Windows XP/Vista/7/8/10. В качестве средства разработки использован программный пакет – система компьютерной алгебры Maple, имеющая собственный встроенный язык программирования.

Данный комплекс обладает следующими средствами и возможностями: задание параметров описания модели; нахождение функции нормального поля радона в кусочно-однородной горизонтально-

слоистой среде с плоскопараллельными границами; вычисление функции Грина в горизонтально-слоистой среде с плоскопараллельными границами; определение функции аномального поля радона, учитывающей влияние одного или нескольких включений; графического отображения результатов расчетов.

С помощью разработанного программного комплекса проведены сравнения с известными моделями для случая однородных кусочно-постоянных сред и вычислительные эксперименты по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели. Выявлено, что учет анизотропии при моделировании процессов переноса радона в геологических средах приводит к существенному изменению поля объемной активности радона и является значимым фактором, необходимым при описании математической модели поля в реальных геологических средах [2].

Адекватность полученных теоретических решений наиболее удобно апробировать на лабораторных моделях, позволяющих точно учитывать все исходные расчетные параметры. Так, в работе [3] представлены результаты сравнительного сопоставления данных вычислительного и натурного экспериментов по исследованию процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями также показали адекватность и достоверность предложенных модели и метода решения задачи.

Следует отметить, что предложенные комбинированные методы и алгоритмы являются развитием теории решения краевых задач для уравнений тепломассопереноса в кусочно-постоянных анизотропных средах и позволяют решать практические задачи по исследованию процессов переноса радона в трехмерных кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с анизотропными включениями.

Таким образом, разработанное, апробированное и зарегистрированное математическое и программное обеспечение моделирования процессов переноса радона в анизотропных геологических средах [4] позволит производить расчет динамических полей диффузии-адвекции радона, интерпретировать результаты полевых измерений, осуществлять зонирование, определяя границы сред промышленного района по данным полевых и скважинных измерений объемной активности и плотности потока поля радона. Полученные решения могут быть использованы для прогнозирования сейсмических событий, поиска урановых и ториевых руд, экологического картирования при

выборе площадок под строительство промышленных и жилых сооружений, поиска и оконтуривания нефтяных и газовых месторождений.

Результаты проведенных научных исследований позволили перейти к постановке обратной задачи переноса радона. Так, в работе [5] представлена математическая модель обратной геометрической задачи поиска границы локального включения. В настоящий момент ведутся обсуждения о разработке и применении параллельных алгоритмов решения поставленной обратной задачи, что в перспективе позволит получить высокопроизводительное программное обеспечение решения обратной задачи переноса радона в анизотропных геологических средах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кризский В.Н., Нафикова А.Р. Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями // Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. 2014. № 2. С. 38–45.
2. Нафикова А.Р., Кризский В.Н. Математическое моделирование процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями. Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. 87 с.
3. Кризский В.Н., Нафикова А.Р., Козлова И.А., Юрков А.К. Математическое моделирование процесса переноса радона в анизотропных средах // Математические заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 1. С. 88–100.
4. Нафикова А.Р., Кризский В.Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020615152 «Решение прямой задачи переноса радона в анизотропных геологических средах», 18.05.2020 г. // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (РосПатент).
5. Krizsky V.N., Nafikova A.R., Kozlova I.A. and Yurkov A.K. Research of radon transport processes in anisotropic media // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 1479 (2020) 012068.

УДК 519

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕФТЕГАЗОВОЙ ИНДУСТРИИ В АРКТИЧЕСКОМ РЕГИОНЕ

Петров И.Б.

Московский физико-технический институт, г. Москва, Россия;  
[petrov@mipt.ru](mailto:petrov@mipt.ru)

Рассматриваются вычислительные задачи , возникающие при исследовании природных и индустриальных процессов в Арктическом регионе страны. Для их исследования применяются методы численного моделирования динамических процессов, описываемых системой нестационарных уравнений в частных производных механики сплошных сред, в первую очередь, механики деформируемого твердого тела и акустики. В арктическом регионе актуальны ми являются задачи сейсморазведки нефти и газа, разведочного бурения, безопасности шельфовых сооружений ( например, морских стационарных или якорных платформ, береговых сооружений). Для численного решения поставленных задач используется семейство сеточно-характеристических методов , использующих характеристические свойства нестационарных систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Представлены результаты решения рассматриваемых задач , проводится их анализ.

*Ключевые слова:* сейсморазведка, системы нестационарных уравнений, вычислительные задачи.

## COMPUTATIONAL PROBLEMS OF THE OIL AND GAS INDUSTRY IN THE ARCTIC REGION

Petrov I.B.

Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia;  
[petrov@mipt.ru](mailto:petrov@mipt.ru)

*Computational problems arising in the study of natural and industrial processes in the Arctic region of the country are considered. To study them, methods of numerical simulation of dynamic processes described by a system of nonstationary partial differential equations of continuum mechanics, first of all, mechanics of a deformable solid and acoustics,*

*are used. In the Arctic region, the tasks of seismic exploration for oil and gas, exploration drilling, and the safety of shelf structures (for example, offshore fixed or anchor platforms, coastal structures) are relevant. For the numerical solution of the problems posed, a family of grid-characteristic methods is used that use the characteristic properties of non-stationary systems of partial differential equations of hyperbolic type. The results of solving the problems under consideration are presented, and their analysis is carried out.*

*Key words:* seismic exploration, systems of non-stationary equations, computational problems.

УДК 519.765, 51-7, 517.9

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В БИОЛОГИИ

**Половинкина М.В.<sup>1</sup>, Половинкин И.П.<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет инженерных  
технологий, Воронеж, Россия;

<sup>2</sup> Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;

<sup>3</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский  
университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия;  
*polovinkina-marina@yandex.ru, polovinkin@yandex.ru*

*Результаты работ авторов позволяют провести попарное сравнение стационарных состояний нескольких моделей с сосредоточенными параметрами (в моделях роста, содержащих обыкновенные дифференциальные уравнения) и построенных на их основе с помощью учета вклада диффузионных (миграционных) процессов моделей с распределенными параметрами (в моделях роста и распространения, содержащих дифференциальные уравнения с частными производными). Установлено, что постоянные стационарные состояния, которые не являются устойчивыми в моделях с сосредоточенными параметрами, становятся устойчивыми в моделях с распределенными параметрами, по крайней мере, в областях с малыми диаметрами.*

*Ключевые слова:* система с распределенными параметрами, популяционная диффузионная модель роста опухоли, модель иммунного ответа, устойчивость стационарного решения.

## ON A PROPERTY OF MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

Polovinkina M.V.<sup>1</sup>, Polovinkin I.P.<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Voronezh State University of Engineering Technologies,  
Voronezh, Russia;

<sup>2</sup> Voronezh State University, Voronezh, Russia;

<sup>3</sup> Belgorod State National Research University (BelGU),  
Belgorod, Russia;  
polovinkina-marina@yandex.ru, polovinkin@yandex.ru

*The authors' results allow for a pairwise comparison of the stationary states of several models with concentrated parameters (in growth models containing ordinary differential equations) and models with distributed parameters constructed on their basis by taking into account the contribution of diffusion (migration) processes (in growth and propagation models containing partial differential equations). It is established that constant stationary states that are not stable in models with concentrated they become stable in models with distributed parameters, at least in areas with small diameters.*

*Key words:* system with distributed parameters, population diffusion model of tumor growth, model of immune response, stability of stationary solution.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений в частных производных:

$$\partial u_s / \partial t = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad s = 1, \dots, m, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$(\mu_s u_s + \eta_s \partial u_s / \partial \nu)|_{x \in \partial \Omega} = B_s(x), \quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \quad \mu_s \geq 0, \quad \eta_s \geq 0,$$

$$u_s(x, 0) = u_s^0(x), \quad s = 1, \dots, m,$$

где  $\Omega$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  — единичный внешний вектор внешней нормали к границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ ,  $u = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$ ,  $\vartheta_s \geq 0$ ,  $\text{diam}\Omega = d$ ,  $B_s(x) \in C(\partial\Omega)$ ,  $u_s^0(x) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $s = 1, \dots, m$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа, определяемый формулой  $\Delta v = \sum_{j=1}^n \partial^2 v / \partial x_j^2$ . Предполагается, что функции  $F_s$  дифференцируемы в стационарной точке  $w = (w_1(x), \dots, w_m(x))$  рассматриваемой задачи.

Показано, что достаточным условием устойчивости стационарного решения является отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^m A_{sk} z_k z_s,$$

где  $A_{sk} = 1/2 (\partial F_s / \partial x_k + \partial F_k / \partial x_s) - \delta_{ks} \vartheta_s / d^2$ . Этот результат получен с помощью оценок производной функции Ляпунова. В монографии Т. Пу [1] для уравнения Хотеллинга

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A(\xi - p)p + B\Delta p$$

с помощью функции Ляпунова получено достаточное условие устойчивости стационарного решения  $w$  в виде  $w > \xi/2$ . При этом в монографии отмечалось, что компьютерные эксперименты обнаруживают устойчивость и при менее жестких условиях. В работе [2] получено менее жесткое достаточное условие устойчивости  $w > \xi/2 - B/(2Ad^2)$ . Метод, с помощью которого получено это условие, развит в [3–6].

**Диффузионная модель онкологического процесса.** Приводимое ниже описание интересующей нас модели иммунного ответа почерпнуто нами из работы [7]. Там же можно познакомиться с весьма представительным обзором литературы по теме математического моделирования в онкологии. Пусть  $u_1$  – линейная плотность делящихся клеток,  $q = q(x, t)$  – линейная плотность лимфоцитов. Тогда математическая модель, описывающая взаимодействие делящихся клеток и лимфоцитов, в предположении об отсутствии их взаимодействия с нормальными и погибшими клетками, имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu_1 u_1 - \gamma_{12} u_1 q,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_4 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - v \frac{\partial q}{\partial x} - \gamma_{21} u_1 q.$$

$$u_1(x, 0) = u_1^0(x) \in C^\infty([0, l]), \quad q(x, 0) = q^0.$$

При выборе граничных условий предполагается, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad q|_{x=0} = q^0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad q|_{x=l} = q^0.$$

Уточненное достаточное условие асимптотической устойчивости стационарного решения состоит в выполнении двух неравенств [6]

$$\mu_1 - \gamma_{12} w_2 - 2D_1/l^2 < 0,$$

$$4(\mu_1 - \gamma_{12}w_2 - 2D_1/l^2) (-\exp(-\sigma x)\gamma_{21}w_1 - \sigma^2 D_4/(\exp(\sigma l) - 1 - l\sigma)) - \\ - (\gamma_{12}w_1 + \exp(\sigma l)\gamma_{21}w_2)^2 > 0.$$

Очевидно, что векторная функция с координатами  $u_1 = 0, q = 0$  является неустойчивым стационарным решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых при  $D_1 = D_4 = v = 0$  (без диффузионных и конвективных членов). Однако для рассматриваемой системы уравнений с частными производными эта же векторная функция может оказаться и устойчивым стационарным решением при выполнении условия  $\mu_1 - 2D_1/l^2 < 0$ .

**Модель Вольтерры.** Рассмотрим еще один классический пример: модель "хищник-жертва" В. Вольтерры (Vito Volterra, 1860–1940). Без учета миграций (диффузии) в простейшем варианте эта модель имеет вид следующей задачи Коши (см., напр., [8]):

$\partial u_1/\partial t = \alpha u_1 - \beta u_1 u_2, \quad \partial u_2/\partial t = \kappa \beta u_1 u_2 - m u_2, \quad u_s(x, 0) = u_s^0, \quad s = 1, 2.$   
Добавив диффузионные слагаемые, мы получим следующую систему уравнений в частных производных:

$$\partial u_1/\partial t = \alpha u_1 - \beta u_1 u_2 + \vartheta_1 \Delta u_1, \quad \partial u_2/\partial t = \kappa \beta u_1 u_2 - m u_2 + \vartheta_2 \Delta u_2.$$

Будем рассматривать эту систему уравнений в ограниченной области  $\Omega$  с диаметром  $d$ , с кусочно гладкой границей и потребуем от решения выполнения краевых условий

$$(\mu_s u_s + \eta_s \partial u_s / \partial \nu)|_{x \in \partial \Omega} = B_s(x), \quad \mu_s^2 + \eta_s^2 > 0, \quad \mu_s \eta_s \geq 0,$$

и начальных условий  $u_s(x, 0) = u_s^0(x), s = 1, 2$ . Пусть  $w = (w_1, w_2)$  — стационарное решение этой начально-краевой задачи. Стационарное решение  $w$  будет асимптотически устойчивым, когда будут выполнены неравенства

$$\alpha - \beta w_2 - \vartheta_1/d^2 < 0, \\ (\alpha - \beta w_2 - \vartheta_1/d^2)(\kappa \beta w_1 - m - \vartheta_2/d^2) - \beta^2(\kappa w_2 - w_1)^2/4 > 0.$$

Очевидно, что если стационарное решение постоянно, эти неравенства заведомо выполнены в областях с малыми диаметрами. Поэтому стационарные решения бездиффузионной модели  $w_1 = w_2 = 0$  и  $w_1 = m/(\kappa \beta), w_2 = \alpha/\beta$ , оставаясь стационарными решениями и в диффузионной модели в области с малым диаметром (разумеется, при соответствующем наборе начальных и краевых условий), меняют характер устойчивости, а именно становятся асимптотически устойчивыми. С другой стороны, как показано в [8], при большом значении диаметра области может иметь место так называемая диффузионная неустойчивость.

**Уравнения репликатора.** Рассмотрим в качестве примера систему, которая в бездиффузионном варианте давно является одним из основных инструментов в математической экологии, генетике и математической теории отбора и эволюции [9]:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \left( \phi_s - \sum_{j=1}^m \phi_j u_j \right) u_s + \vartheta_s \Delta u_s, \quad s = 1, \dots, m.$$

Условие  $\phi_s < \vartheta_s/d^2$ ,  $s = 1, \dots, m$ , достаточно для устойчивости тривиального решения этой системы. При  $\vartheta_s > 0$ ,  $s = 1, \dots, m$ , то есть в случае диффузионной модели с распределенными параметрами, это условие выполнено для областей с небольшим диаметром. В случае системы с сосредоточенными параметрами (при  $\vartheta_s = 0$ ,  $\phi_s > 0$ ,  $s = 1, \dots, m$ ) тривиальное решение неустойчиво.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Puu T.* Nonlinear economic dynamics. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hong Kong; London; Milan; Paris; Santa Clara; Singapore; Tokyo, Springer-Verlag, 1997. 288 pp.
2. *Мешков В.З., Половинкин И.П., Семенов М.Е.* Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9, вып. 1. С. 226–227.
3. *Gogoleva T.N., Shchepina I.N., Polovinkina M.V. and Rabeeakh S.A.* On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation // 2019. J. Phys.: Conf. Ser. 1203 012041.
4. *Половинкин И.П., Половинкина М.В., Рабеекх С.А.* К вопросу об устойчивости стационарного решения в миграционной модели // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. 2019. С. 889–892.
5. *Половинкина М.В., Половинкин И.П.* Об изменении характера устойчивости тривиального решения при переходе от модели с сосредоточенными параметрами к модели с распределенными параметрами // Прикладная математика & Физика. 2020. Т. 52, №4. С. 255–261.
6. *Debbouche A., Polovinkina M.V., Polovinkin I.P., Valentim C.A., David S.A.* On the stability of stationary solutions in diffusion models of oncological processes // The European Physical Journal Plus. 136(1). P. 1–18.

7. Жукова И.В., Колпак Е.П. Математические модели злокачественной опухоли // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2014. Сер. 10, Вып. 3. С. 5–18.
8. Свириджев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978. 352 с.
9. Karev G.P. Replicator Equations and the Principle of Minimal Production of Information // Bulletin of Mathematical Biology. 2010. № 72. Р. 1124–1142.

УДК 532/529.534.2

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ РАСЧЕТЫ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ В НЕСОВЕРШЕННО ВСКРЫТОМ ПЛАСТЕ

Филиппов А.И.<sup>1,2</sup>, Губайдуллин М.Р.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>2</sup> Стерлитамакский филиал Института стратегических  
исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>3</sup> ООО "РН-БашНИПИнефть", г. Уфа, Россия  
fir\_bmf@mail.ru

Исследованы поля давления и скорости фильтрационных потоков, возникающих при отборе углеводородов из пластов-коллекторов, вскрытых несовершенно. Представлена задача о поле давления, в которых учтены два фактора несовершенства перфорации: первый заключается в наличии невскрытого участка в интервале перфорации, а второй вызван несовпадением интервала перфорации с границами проницаемого насыщенного пласта. Создана конечно-разностная программа для расчетов полей скорости и давления в пласте с несовершенным вскрытием.

Ключевые слова: фильтрация, несовершенное вскрытие, двухмерное течение, конечно-разностная программа, поле давления, поле скоростей.

## FINITE-DIFFERENCE CALCULATIONS OF VELOCITY FIELDS IN IMPERFECTLY OPENED RESERVOIR

Filippov A.I.<sup>1,2</sup>, Gubaiddullin M.R.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> Sterlitamak Branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, Russia;

<sup>3</sup> RN-BashNIPI, Ufa, Russia;

*fir\_bmf@mail.ru*

*The pressure fields and the filtration flow rates arising from the selection of hydrocarbons from reservoirs that were opened imperfectly were studied. A pressure field problem is presented, in which two factors of perforation imperfection are taken into account: the first is the presence of an undisclosed section in the perforation interval, and the second is caused by a mismatch in the perforation interval with the boundaries of the permeable saturated formation. A finite-difference program has been created for calculating velocity and pressure fields in a reservoir with an imperfect opening.*

*Key words:* filtration, imperfect autopsy, two-dimensional flow, finite-difference program, pressure field, velocity field.

Значительный интерес представляет решение задачи о полях давления и скорости фильтрации в частично вскрытом пласте, поскольку оно позволяет оценить выработку невскрытых зон [1]. В большинстве предшествующих работ влияние несовершенства вскрытия учтено на основе эмпирически вводимого в задачу скин-фактора, который позволяет учесть совокупность факторов неидеального вскрытия (см. [2] и цитированные в ней источники). Однако такой подход не снимает проблемы изучения вклада каждого фактора в отдельности и комбинации этих факторов, что и явилось целью настоящей работы.

Для исследования важнейших закономерностей полей давления и скорости в несовершенно вскрытом пласте, а также возникающих при этом фильтрационных эффектов, удобно рассмотреть плоское движение, которое сохраняет все важнейшие закономерности фильтрационного течения в пласте и обеспечивает возможность упрощения расчетов.

Геометрия задачи, описывающей поля давления и скорости фильтрации в пласте с неполной перфорацией и наличием пропущенного

участка, представлена на рис. 1. Течение считается плоским и линейным. Ось  $z$  прямоугольной системы координат направлена нормалью по отношению к слою коллектора нефти или газа; кроме того, она включает границу галереи, моделирующей скважину. Предполагается, что изолированный однородный изотропный пласт, лежащий в интервале от  $H_1$  до  $-H_2$ , отдает или принимает жидкость в режиме заданного перепада давления  $P_0$  в перфорированном интервале, состоящем из двух зон  $-h_2 < z < -h_1$ ,  $h_1 < z < h_2$ . Это означает, что качество вскрытия в интервале  $-h_1 < z < h_1$  не обеспечивает достаточной гидродинамической связи пласта и скважины, хотя он и расположен в планируемом интервале перфорации. Фильтрационные свойства пористой среды, составляющей пласт, считаются изотропными и однородными. Полагается, что коллекторские характеристики, сжимаемость и плотность всех фаз пористой среды не зависят от давления во всем наблюдаемом диапазоне перепадов.

Задача заключается в отыскании фильтрационных полей давления  $P(x, z, t)$  и скорости  $\vec{v}(x, z, t) = [v_x(x, z, t), v_z(x, z, t)]$  в изолированном однородном изотропном пласте с описанными выше свойствами для случая двухмерного плоского течения.

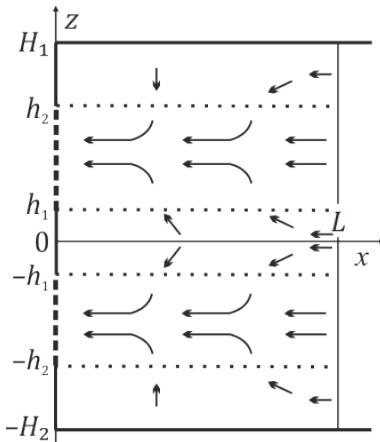


Рис. 1. Геометрия задачи о фильтрационных полях давления и скорости в изолированном пласте с несовершенной перфорацией

Постановка задачи о поле давления осуществлена на основе уравнения пьезопроводности, которое в однородном изотропном изолиро-

ванном пласте представляется в виде

$$m\beta\mu \frac{\partial P}{\partial t} - k \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

$$t > 0, \quad 0 < x < L, \quad -H_2 < z < H_1.$$

Рассматриваемый пласт считается изолированным, поэтому нормальные к границе пласта компоненты скорости фильтрации равны нулю, а граничные условия представляют равенства нулю вертикальных производных давления

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=H_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z_d=-H_2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (2)$$

Условие в момент времени  $t = 0$  представлено нулевыми значениями давления

$$P|_{t=0} = 0, \quad -H_2 < z < H_1, \quad 0 < x < L, \quad (3)$$

Условие на удаленной от скважины поверхности  $x = L$ , положение которой выбирается таким образом, что создаваемые в скважине возмущения давления за рассматриваемое время не достигают указанной поверхности, имеет вид

$$P|_{x=L} = 0, \quad t > 0, \quad -H_2 < z < H_1. \quad (4)$$

На границе со скважиной в слоях с гидродинамической связью постулируется режим заданного давления

$$P|_{x=0} = P_0, \quad -h_2 < z < -h_1, \quad h_1 < z < h_2. \quad (5)$$

В невскрытых слоях и слое без гидродинамической связи на границе пласта и скважины задано условие изолированности

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad -H_2 < z < -h_2, \quad -h_1 < z < -h_1, \quad h_2 < z < H_1. \quad (6)$$

Поле скорости фильтрации определено на основе закона Дарси. Горизонтальная и вертикальная компоненты (или координаты) вектора скорости фильтрации определяются с помощью найденных значений полей давления  $P$  согласно следующим выражениям:

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (7)$$

Поля давления и скорости в условиях, описываемых в задаче (1) – (7), определены с помощью конечно-разностных методов. Программа для расчетов на ЭВМ создана с использованием явной схемы.

На рис. 2 представлено пространственное распределение (а) и изолинии (б) поля давления в несовершенно вскрытом пласте для случая симметричной геометрии вскрытия  $H_2 = H_1 = 5$  м при значении безразмерного времени  $t = 3600$  с. Толщина интервалов притока равна 2 м, а расстояние между ними также принято равным 2 м, поскольку  $h_2 = 3$  м, а  $h_1 = 1$  м. Значения проницаемости в расчетах принято равными  $k = 10^{-13} \text{ м}^2$ , вязкости –  $\mu = 6 \times 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ , сжимаемости –  $\beta = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ , пористости –  $m = 0.1$ , амплитудного значения возмущений –  $P_0 = 10^6 \text{ Па}$ .

В каждом поперечном сечении максимальные возмущения давления, как следует из рисунка, наблюдаются в центре перфорированных слоев и достигают абсолютного максимума во всех точках, где происходит приток жидкости в скважину. При удалении от центра слоев, гидродинамически связанных со скважиной, возмущения давления, вызванные фильтрационным потоком, уменьшаются. Минимальные значения давления в каждом поперечном сечении приурочены к границам пласта и точке, соответствующей середине интервала без гидродинамической связи пласта и скважины. Причем, наблюдаются изменения давления на изолированных границах. Это означает, что горизонтальные фильтрационные потоки имеются и на границах пласта, в то же время вертикальные фильтрационные потоки на изолированной границе пласта отсутствуют.

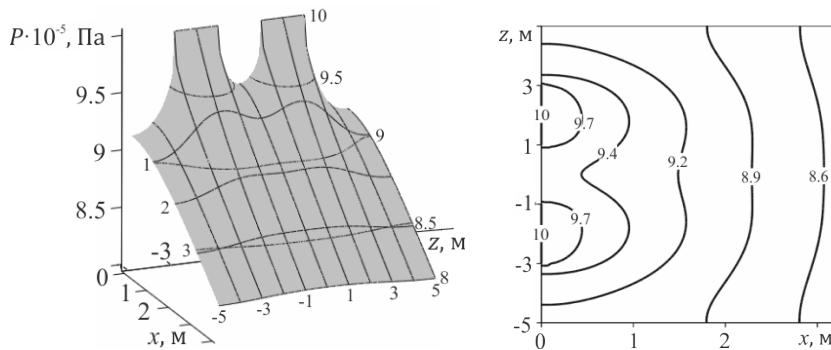


Рис. 2. Пространственное распределение (а) и линии уровня (б) поля давления при значении времени  $t = 3600$  с

Описанные особенности течения имеют результатом неравномерный профиль притока в интервале перфорации. Причем минимальные значения удельного притока наблюдаются в центре вскрытых слоев, а максимальные – на их границах. Причиной такого распределения являются вертикальные межслойные перетоки, неизбежно возникающие вследствие учитываемых в модели факторов несовершенства вскрытия пласта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.И., Ахметова О.В., Ковальский А.А., Губайдуллин М.Р. Поля скоростей фильтрации в слоисто-неоднородных пластах // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Т. 4. № 4. С. 118–130.
2. Морозов П.Е. Полуаналитическое решение задачи нестационарного притока жидкости к несовершенной скважине // Ученые записки Казанского университета. серия: физико-математические науки. 2017. № 3. С. 340–353.

УДК 517.977.5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПРОСА НА ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЕ КРЕДИТОВАНИЕ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ В РОССИИ

Тарасенко М.В.<sup>1</sup>, Трусов Н.В.<sup>2,3,4</sup>, Шананин А.А.<sup>2,3,4,5</sup>

<sup>1</sup> 119234 Москва, Ленинские горы, МГУ;

<sup>2</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ;

<sup>3</sup> 141701 Долгопрудный, М.О., Институтский пер., 9, МФТИ;

<sup>4</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН;

<sup>5</sup> 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН;

[tarasenko.m12@gmail.com](mailto:tarasenko.m12@gmail.com), [trunick.10.96@gmail.com](mailto:trunick.10.96@gmail.com),

[alexshan@yandex.ru](mailto:alexshan@yandex.ru)

На основе модифицированной модели Рамсея представлено поведение репрезентативного домашнего хозяйства. Модель идентифицирована по данным Российской статистики. С её помощью проанализирована проблема потребительского кредитования в России.

*Представлены эффективные меры сдерживания роста задолженности по потребительским кредитам.*

*Ключевые слова:* модифицированная модель Рамсея, потребительское поведение, прогнозирование.

## CONSUMER LOAN DEMAND MODELING FOR THE HOUSEHOLDS IN RUSSIA

**Shananin A.A.** <sup>1,2,3,4</sup>, **Tarasenko M.V.** <sup>5</sup>, **Trusov N.V.** <sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> MSU, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,  
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory;

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Russia, 141701, Moscow Region, 9 Institutsky pereulok, Dolgoprudny;

<sup>3</sup> Federal Research Center "Computer Science and Control"of RAS,  
Russia, 119333, Moscow, Vavilova st. 40;

<sup>4</sup> Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Russia,  
117198, Moscow, Miklukho-Maklaya st. 6;

<sup>5</sup> MSU, Moscow School of Economics, Russia, 119992, Moscow, GSP-1,  
1-61 Leninskiye Gory;  
alexshan@yandex.ru, tarasenko.m12@gmail.com,  
trunick.10.96@gmail.com

*We present the economic behavior of a representative household based on a modified Ramsey model. The model is identified against Russian statistical data, and is used to analyze the problem of consumer crediting in Russia. An effective measures to contain the growth of the consumer loan debt are presented.*

*Key words:* modified Ramsey model, consumer behavior, forecasts.

Для новейшей истории России характерны высокие темпы роста задолженности по потребительскому кредитованию. В течение последних 20 лет фактически произошло формирование нового общественного явления в форме потребительского кредита, что, в частности, выражается в росте отношения задолженности по потребительскому кредиту к годовому ВВП страны с 1% в 2000г. до 12% в 2021г. Следует отметить, что устойчивый и сбалансированный рост потребительского кредитования приводит к стимулированию совокупного спроса, а также позволяет населению увеличивать потребление в периоды отсутствия роста доходов.

Темпы роста потребительского кредита в России характеризуются высокой волатильностью. За последнее десятилетие максимальные темпы роста задолженности составили 50% в год, а максимальный спад 13% в год. Высокая волатильность темпов роста задолженности является отражением изменений в структуре выдаваемых населению кредитов.

Последствия таких изменений могут наблюдаться в статистике как экспертным сообществом, так и профильными ведомствами. К примеру, на протяжении последних лет министерство экономического развития в лице бывшего министра М.С. Орешкина неоднократно заявляло о рисках формирования перекредитованности россиян в сегменте потребительского кредита, что потенциально может вылиться в кризис просроченных кредитов. Помимо этого, в 2019г. Банк России дополнительно ввёл повышенные коэффициенты риска по выдаче потребительских кредитов наиболее закредитованным заёмщикам, что потребовало введения обязательной процедуры оценки банками текущего долгового бремени заёмщика при выдаче потребительского кредита. Эта мера была обусловлена высоким спросом на потребительское кредитование именно со стороны перекредитованных заёмщиков. В частности, по данным Банка России в начале 2019г. доля выдаваемых кредитов заёмщикам, у которых соотношение среднемесячного платежа по кредиту к среднемесячному доходу составило более трети, установилась на уровне в 62%, а доля выданных кредитов заёмщикам с долговым бременем более 80% выросла до 9% по сравнению с 3% годом ранее.

Математическое моделирование поведения домохозяйств способно выявить структурные сдвиги в кредитно-сберегательном и потребительском поведении населения, анализировать возможные исходы проведения различных вариантов экономической политики в разрезе различных видов кредитования и социальных групп. Оно основывается на модели рамсеевского типа [1, 2]. В данной работе авторами исследована задача оптимального управления, моделирующая экономическое поведение презентативного домашнего хозяйства с переключениями между различными типами кредитно-сберегательного поведения [3]. Такая модель учитывает несовершенность российского денежного рынка, которая проявляется в большой разнице между ставками по выданным населению кредитам и принятым у населения депозитам.

Модель описывает потребительский выбор репрезентативного домохозяйства в условиях возможности заимствования в форме потребительского кредита, а также при возможности сбережения средств в формах наличности или банковских депозитов. Решение модели подразумевает наличие трёх типов поведения домашних хозяйств в зависимости от соотношений между параметрами, описывающими предпочтения домохозяйства, и показателями экономической конъюнктуры. Три типа поведения включают в себя домохозяйства с потребительскими кредитами и без сбережений, домохозяйства без кредитов и сбережений, домохозяйства со сбережениями и без потребительских кредитов. Модель позволяет анализировать траектории потребительского кредитования в разрезе обеспеченного и необеспеченного кредита, а также траектории сбережений и потребления.

Для того, чтобы провести идентификацию модели, существующие временные ряды потребления, задолженности по потребительскому кредиту и доходов при помощи статистики РМЭЗ НИУ ВШЭ [4] были разбиты на части, принадлежащие классам домохозяйств, которые были выбраны, исходя из типов поведения, возникающих в решении модели. Помимо этого, был проведен пространственный анализ регионов, представленных в выборке РМЭЗ. На основании региональных показателей покупательной способности среднего дохода, региональных уровней бедности, а также различиях в распределениях долгового бремени между децилиями в разных регионах, были выделены две группы регионов: столичная и провинциальная. В столичную группу регионов вошли Москва и Московская Область, Санкт-Петербург, Казань. Все остальные регионы, представленные в статистике РМЭЗ, вошли в группу провинциальных регионов.

Модель идентифицирована по статистическим данным о доходах, расходах, потребительских кредитах и сбережениях домашних хозяйств России за апрель 2009г. — январь 2019г. и верифицирована по статистическим данным за февраль 2019г. — февраль 2020г. На временном горизонте 2020-2022 гг. был проведен сценарный анализ будущих траекторий задолженности по потребительскому кредиту в зависимости от различных состояний экономической конъюнктуры и проводимой экономической политики. В каждом из сценариев потенциальная динамика задолженности по потребительскому кредиту моделировалась в зависимости от прогнозируемых входных параметров: доходов населения, ставок по потребительским кредитам и депозитам населения в банках, инфляции.

В рамках первого сценария отсутствия пандемии COVID-19 использовалось предположение о неизменном нахождении ключевой ставки Банка России на уровне в 6% годовых на протяжении всего рассматриваемого периода. Было обнаружено, что задолженность в группе провинциальных регионов демонстрирует всё ускоряющиеся темпы роста, увеличиваясь с 6 трлн. руб. по состоянию на начало 2020г. до уровня в 15 трлн. руб. к концу 2021г. При этом, рост происходит за счёт необеспеченного потребительского кредитования, что приводит к росту просроченной задолженности и значительному снижению доходов банковского сектора. Более того, необеспеченные кредиты репрезентативного домашнего хозяйства становятся неплатёжеспособными с середины 2021г. Данный сценарий подтверждает опасения бывшего министра М.С. Орешкина. В ситуации неплатёжеспособных потребительских кредитов репрезентативного домашнего хозяйства нужно более детально моделировать социальный слой. Такой анализ проводился в [5] в рамках концепции игр среднего поля.

Снижение реальных доходов населения, вызванные пандемией COVID-19 обостряют эту проблему. Значимое влияние на увеличение долговой нагрузки населения оказывает рост процентной ставки. Она может быть оперативно отрегулирована государством с помощью изменения ключевой ставки Банка России. Расчёты по модели показывают, что снижение ключевой ставки уменьшает долговую нагрузку на домашние хозяйства и долю неплатёжеспособных заёмщиков среди физических лиц. При этом эффективность снижения ключевой ставки существенно зависит от динамики снижения.

Помимо этого, было рассмотрено влияние возможных субсидий на модельную траекторию задолженности по потребительскому кредитованию в период июль 2021 – декабрь 2022гг. Было обнаружено, что субсидирование доходов бедного населения в группе провинциальных регионов в размере 2.3 трлн. руб. за данный период при текущей ключевой ставки Банка России в 5.5% способно снизить остроту проблемы роста необеспеченного кредитования, но не решить её.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00285).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рудева А.В., Шананин А.А. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учётом ограничения ликвидности // Диф-

ференциальные уравнения. 2009. Т.45. № 12. С. 1799–1803.

2. Гималтдинов И.Ф. Исследование спроса на потребительские кредиты и наличные деньги // Математическое моделирование. 2012. Т.24. № 2. С. 84–89.

3. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т.61. № 6. С. 1034–1056.

4. «Russia Longitudinal Monitoring survey, RLMS-HSE», «Российский мониторинг экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ (RLMS HSE)», проводимый Национальным исследовательским университетом „Высшая школа экономики“ и ООО «Демоскоп» при участии Центра народонаселения Университета Северной Каролины в Чапел Хилле и Института социологии Федерального научно-исследовательского социологического центра РАН.

5. A.A. Shananin, N.V. Trusov. The household behavior modeling based on Mean Field Games approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V.42. № 7. P. 1738–1752.

УДК 51.7

## SIR-МОДЕЛЬ КЕРМАКА-МАККЕНДРИКА ДЛЯ ОЦЕНКИ РАЗВИТИЯ ПАНДЕМИИ COVID-19

Цыганов Ш.И., Белова А.С.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия;

TsyganovSI@ufanet.ru, 89177662488@mail.ru

Даны оценки сверху для коэффициентов интенсивности контактов с последующим инфицированием в детерминистской SIR-модели Кермака-Маккендрика для пандемии COVID-19. Проведена сравнительная оценка развития эпидемий инфекционных заболеваний. Выявлены некоторые общие закономерности течения эпидемии COVID-19 с гриппом H1N1, а также различия по вирулентности и патогенности. Описана динамика распространения COVID-19 по России и континентам с момента выявления вируса.

Ключевые слова: математические модели эпидемий, детерминистские модели.

## SIR-MODEL OF KERMAK-MAKKENDRIK FOR ASSESSMENT OF DEVELOPMENT OF THE COVID-19 PANDEMIC

Tsyganov S.I., Belova A.S.

Bashkir State University, Ufa, Russia;

TsyganovSI@ufanet.ru, 89177662488@mail.ru

*Upper estimates are given for the intensity factors of contacts with subsequent infection in the Kermak-Mackendrick deterministic SIR model for the COVID-19 pandemic. A comparative assessment of the development of infectious disease epidemics has been carried out. Some general patterns of the course of the COVID-19 epidemic with H1N1 influenza, as well as differences in virulence and pathogenicity. The dynamics of the spread of COVID-19 across Russia and continents since the detection of the virus is described.*

*Key words:* mathematical models of epidemics, deterministic models.

Математические методы, применяемые в педагогических измерениях [1] и доказательной медицине [2], носят сходный характер. В настоящее время в связи с распространением COVID-инфекции приобрели актуальность вопросы изучения математических моделей эпидемий.

Для математического описания течения эпидемии коронавируса была использована SIR-модель распространения инфекционных болезней, в которой описывается динамика групп восприимчивых  $x(t)$ , инфицированных  $y(t)$  и выздоровевших  $z(t)$  индивидов. Данная модель может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta xy, \\ \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma y, \end{cases}$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = 0$ , где  $\beta$  – коэффициент интенсивности контактов с последующим инфицированием,  $\gamma$  – коэффициент выздоровления. Из системы уравнений видно, что в данной модели численность популяции постоянна:  $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0$ .

В нашей модели численность популяции восприимчивых была ограничена сверху предельным значением — инфекционной емкостью  $K$ . При определении инфекционной емкости  $K$  были выполнены поправки на величину популяционного иммунитета и учитывать, что не все слои общества, в силу разных моделей социального поведения, одинаково подвержены опасности заболевания.

В целом приведенные показатели смертности отражают демографические потери от эпидемии и подтверждают, что для малых стран человеческие потери более ощутимы при внешнем благополучном состоянии при оценке заболеваемости. Было показано, что величина показателя для COVID-19 соизмерима с гриппом H1N1. Следует отметить, что контагиозность этих двух вирусов напоминает таковую новой коронавирусной инфекции на начальном этапе развития эпидемии. Однако, исследование системы показал, что анализ заболеваемости COVID-19 и многочисленные попытки строить прогностические модели показали неоднозначность результатов, которые зависели от многих социальных и биологических особенностей.

<sup>1</sup> Исследование второго автора выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыганов Ш.И. Математические теории педагогических измерений — Уфа: Эдвис, 2007. 92 с.
2. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 327 с.

УДК 532.546:534.1

## ВОЛНЫ СТОУНЛИ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОГО И ТВЕРДОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Шагапов В.Ш.<sup>1</sup>, Рафикова Г.Р.<sup>1</sup>, Каримова Г.Р.<sup>1</sup>,  
Хакимова З.Р.<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФМЦ РАН,  
г. Уфа, Россия;

<sup>2</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;

*shagapov@rambler.ru, rafikova\_guzal@mail.ru,*  
*gulnazkar69@gmail.com, zulfiya.hakimova@yandex.ru*

Построена математическая модель для исследования процесса распространения акустических волн на границе раздела "вода - песок, насыщенный флюидом". Получены аналитические решения для давления, перемещений частиц в средах, выведено дисперсионное уравнение для определения зависимости волнового числа  $k$  от частоты. В зависимости от скоростей продольных и поперечных волн, насыщенности песка водой или газогидратом, найдены скорости волны Стоунали.

*Ключевые слова:* акустические поверхностные волны, продольные волны, поперечные волны, волна Стоунали, песок, газогидрат.

## STONELEY WAVES AT THE BOUNDARY OF LIQUID AND SOLID HALF-SPACES

Shagapov V.Sh.<sup>1</sup>, Rafikova G.R.<sup>1</sup>, Karimova G.R.<sup>1</sup>,  
Khakimova Z.R.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia;

<sup>2</sup> Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia;

*shagapov@rambler.ru, rafikova\_guzal@mail.ru,*  
*gulnazkar69@gmail.com, zulfiya.hakimova@yandex.ru*

*A mathematical model is constructed to study the propagation of acoustic waves at the interface "water-sand saturated with fluid". Analytical solutions for pressure and particle displacements in media*

*are obtained, and a dispersion equation is derived to determine the dependence of the wave number  $k$  on the frequency. Depending on the velocities of the longitudinal and transverse waves, the saturation of the sand with water or gas hydrate, the Stonely wave velocities are found.*

*Key words:* acoustic surface waves, longitudinal waves, transverse waves, Stonely wave, sand, gashydrate.

Одним из способов морских исследований дна водоёмов является изучение физических свойств подводных грунтов акустическим методом, например, при помощи поверхностных волн Стоунли [1,2,3]. Волна Стоунли – это волна, распространяющаяся вдоль границы жидкого и твердого полупространств [4]. В различных породах скорость распространения продольных и поперечных волн различается, исследование методом акустического зондирования гидратосодержащих пород позволит по скоростям и поглощению продольных, поперечных волн и волн Стоунли определить плотность содержания газогидратов в пластах, а также масштабы таких пластов.

В данной работе рассматривается распространение плоской гармонической поверхностной волны в направлении положительной оси  $x$  вдоль плоской границы  $z=0$  в двух сред: в одном – идеальная жидкость, в другом – твердое полупространство. Волна в каждой из сред представляет собой сумму продольных и поперечных волн. Система уравнений состоит из уравнений неразрывности, состояния жидкости, импульсов для области жидкости, волновые уравнения для области твердого тела. Записывая выражения для смещений и компонентов тензора напряжений, получаем условие существования нетриционального решения, которое сводится к дисперсионному уравнению. На основе данного уравнения и использования значений продольных и поперечных волн из экспериментальных данных [5] можно установить связь акустических свойств среды с содержанием воды и гидратов в порах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Stoneley Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids , Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1924. Vol. 106. №. 738. P. 416–428.

2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981.
3. Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю. Волны в пористой среде со слоем, содержащим газовый гидрат // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61. № 4.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
5. Дучков А.Д., Дучков А.А., Дугаров Г.А., Дробчик А.Н. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лёд или гидраты метана и тетрагидрофурана // Доклады академии наук. 2018. Т. 478. № 1. С. 94–99.

УДК 532.59

## ДИНАМИКА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ, СООБЩАЮЩЕЙСЯ С ПЛАСТОМ

**Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З.**

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,

г. Уфа, Россия;

*Shagapov@rambler.ru, guzal@mail.ru, zilia16@mail.ru*

*Построена теоретическая модель собственных колебаний жидкости в скважине, сообщающейся с пластом. Изучено влияние основных параметров системы «скважина – пласт» на зависимости частоты колебаний жидкости, коэффициента затухания и декремента затухания и изучена динамика давления в различных точках скважины.*

*Ключевые слова: собственные колебания, собственные частоты, гидроудар, скважина, фильтрация жидкости, затухающие колебания.*

## DYNAMICS OF THE OWN VIBRATIONS OF A LIQUID IN A RECESSION WELL

**Shagapov V.Sh., Rafikova G.R., Mamaeva Z.Z.**

*Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutova - a separate structural unit of the Federal State Budgetary Scientific Institution of*

the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,  
Ufa, Russia;  
*Shagapov@rambler.ru, guzal@mail.ru, zilia16@mail.ru*

*A theoretical model of natural oscillations of fluid in a well communicating with the formation has been built. The influence of the main parameters of the "well-reservoir" system on the dependence of the frequency of fluid oscillations, the damping coefficient and the damping decrement has been studied, and the dynamics of pressure at various points of the well has been studied.*

*Key words:* natural vibrations, natural frequencies, water hammer, well, fluid filtration, damped vibrations.

Изучение состояния скважин, а именно, состояния призабойной зоны имеет важное значение в нефтяной отрасли. В настоящее время проводятся большое количество работ по повышению дебита скважины, и дальнейшим необходимым пунктом, после проведенных работ, является получения информации о таких параметрах призабойной зоны пласта, как проницаемость, качество перфорации, гидроразрыв пластов и др. Существуют много методов для изучения данного вопроса, один из которых – метод акустической спектроскопии[1,2]. В частности, экспериментальные исследования возмущений жидкости в скважине при акустической спектроскопии описаны в работе [3], построена математическая модель и проведено сравнение с промысловыми данными в [4]. В представленной работе построена математическая модель для описания колебаний столба жидкости в вертикальной скважине, возникающих при резком закрытии или открытии скважины. Для описания модели использованы уравнения сохранения масс и импульсов в области скважины, уравнения сохранения масс в области открытого участка скважины, уравнение для описания упругого режима фильтрации в сообщающемся со скважиной пласте [5]. Применяя решение уравнения в виде стоячих волн с учетом граничных условий получено характеристическое уравнение для определение комплексных частот. С помощью данного уравнения проанализировано влияние основных параметров скважины на изменение частоты колебания, декремента затухания и коэффициента затухания, и исследовано поведение давления в разных точках скважины.

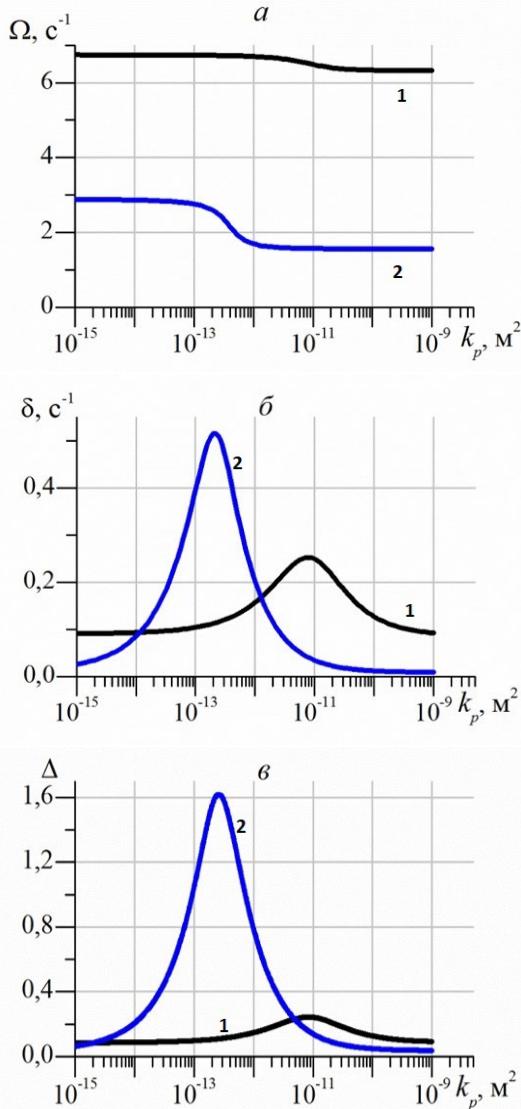


Рис. 1. Сравнение зависимости собственной частоты (а), коэффициента затухания (б), декремента затухания (в) от коэффициента проницаемости пласта для нефти и воды. 1-нефть, 2-вода.

На рис. 1 показаны зависимости собственной частоты, коэффициента затухания и декремента затухания от проницаемости пласта для нефти и воды. Видно, что немонотонные зависимости коэффициента затухания и декремента затухания от коэффициента проницаемости пласта выявляют нетривиальный эффект.

«Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мэзон У. Физическая акустика: в 2-х т. М: Мир, 1969 422 с. 2 т.
2. Трубецкой К. Н., Калмунова Д.Р. Горное дело: Терминологический словарь. М: Горная книга, 2016. 635 с.
3. Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y. Water hammer effects on water injection well performance and longevity // SPE Intern. symp. and exhibition on formation damage control, Lafayette (USA), 13–15 Febr. 2008. SPE 112282.
4. Ляпидевский В. Ю., Неверов В. В., Кривцов А. М. Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. № 15. С. 1687–1696.
5. Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // Прикладная механика и техническая физика. 2020. № 4. С. 5–14.

**Секция 9. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЕ И  
ВУЗЕ**

УДК 001

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ  
НЕФТЕДОБЫЧИ**

**Башмаков Р.А., Коробчинская О.Г., Махота А.А.**

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия;  
*bashmakov\_rustem@mail.ru, korobchinskaya@mail.ru, allarum@mail.ru*

*В работе рассматриваются вопросы о взаимодействии математики, гидромеханики, механики сплошных сред, механики текучих жидкостей (флюидов), т.е. вопросы о взаимном влиянии математики и тех разделов механики, которые развивались во многом благодаря проблемам и задачам добычи нефти и газа.*

*Ключевые слова:* прикладная математика, нефтедобыча, нефтяные месторождения.

**APPLIED MATHEMATICS AND ITS PERIODS IN OIL  
PRODUCTION PROBLEMS**

**Bashmakov R.A., Korobchinskaya O.G., Makhota A.A.**

Bashkir State University, Ufa, Russia;  
*bashmakov\_rustem@mail.ru, korobchinskaya@mail.ru, allarum@mail.ru*

*The work deals with the interaction of mathematics, hydromechanics, continuum mechanics, and fluid mechanics (fluids), i.e., with the mutual influence of mathematics and those parts of mechanics that have developed largely due to the problems and tasks of oil and gas production.*

*Key words:* applied mathematics, oil production, oil fields.

Прикладная математика обслуживает не только сферы науки, но и решает многие инженерно-технические задачи. Наиболее ярко прикладная математика проявляет себя в такой традиционной для нее области, как механика. Механика, по своей сути, есть описание наиболее общих свойств движущихся или покоящихся объектов с изменением времени.

Развитие нефтяной и газовой промышленности, в свою очередь, стимулировало развитие многих направлений и разделов механики.

При этом изменялось понимание роли математики в изучении реальных процессов. Выделим четыре основных периода, которые отличаются по методам и подходам к решению практических задач.

**В первый период** применение математики ограничивалось лишь применением к техническим расчетам конструкций.

**Второй период** характеризуется применением математики к описанию течений флюида в нефтяных и газовых пластах. Этот период можно считать романтическим периодом гидромеханики. Были предложены весьма красивые, неожиданные методы решения задач математической физики. Нашли свое приложение методы комплексного анализа, теории аналитических функций, функционального анализа и другие абстрактные разделы математики. Задачи, рассматривавшиеся в этот период, описывают подземное движение жидкостей и газов, деформацию пород, термогидродинамические явления, т.е. процессы, связанные с механическими явлениями, происходящими в пластах.

Бурный рост нефтегазовой промышленности в нашей стране связан не только с появлением новых районов добычи, но и с открытием новых типов месторождений, дальнейшим совершенствованием и расширением искусственного воздействия на пласти. С другой стороны, появление вычислительной техники, совершенствование численных алгоритмов решения подготовили почву для изменения подходов к решению задач.

**Третий период** характеризуется переходом от аналитических методов прикладной математики, как недостаточно эффективных и трудоемких, к численным и статистическим методам с использованием компьютеров, как достаточно эффективным при практическом применении, и отрицанием, а иногда и пренебрежением классической теорией.

Накопление большого количества статистических данных, необходимость прогнозирования, невозможность проведения экспериментов для проверки создаваемых компьютерных моделей, необходимость решения новых задач подготовили почву для перехода к **четвертому периоду** – периоду возвращения к аналитическим математическим моделям. Большое количество задач вновь требуют теоретического осмысливания и обоснования. Новые задачи связаны с разработкой шельфовых и сланцевых месторождений, применением новых

методов гидроразрыва пласта, новых материалов, использованием газовых гидратов и т.п.

#### **Четвертый современный период применения математики к задачам нефтедобычи**

Исходя из данных о добыче нефти в прошлом и исключая внешние факторы (например, изменение спроса), модель Хабберта предсказывает дату максимальной добычи нефти для нефтяной залежи нескольких нефтяных месторождений или всего региона. Эта точка максимального выхода называется пик.

Геологическая служба США оценивает, что запасы нефти достаточны для продолжения добычи в течение пятидесяти-ста лет при существующей скорости добычи. Исследование мировых запасов нефти, проведенное пятнадцать лет назад, предсказывает возможный пик нефтедобычи около 2037 г. Рост населения и экономики может в будущем привести к увеличению спроса на нефть.

Британский Совет по энергетическим исследованиям предсказывает наступления «пика нефти» в 2020-е годы, Международное энергетическое агентство — в 2030 году.

По мнению научного руководителя Института нефтегазовой геологии и геофизики Сибирского отделения РАН А. Конторовича, пик мировой нефтедобычи придётся на 2030–2040 годы, когда ежегодно будет добываться около 4,6–4,8 млрд тонн.

Указанные оценки и прогнозы предъявили новые требования к разделам прикладной математики и механики, решающим проблемы нефтедобычи. Возникли новые интересные задачи, связанные с методами и способами определения направления трещин, создаваемых гидроразрывом, их размеров, с разработкой сценария ГРП для достижения наибольшего эффекта, моделирования смыкания трещин. Новые задачи ставят также эффекты повторного гидроразрыва, подбор идеальных пропантов (расклинивающих веществ,держивающих трещину и не дающих ей смыкаться).

Математиками предложены различные модели, описывающие поведение трещин при проведении ГРП. Созданы также компьютерные 3D модели, позволяющие разглядеть трещину во всех подробностях.

Компьютерные модели требуют обновления, а значит, требуется новая постановка задач, а также нахождение точных аналитических решений в простейших идеальных случаях, сравнение их с численными решениями и с практическими данными. Фактически возник

«ренессанс» методов математики, применительно к вопросам механики нефтегазоносного пласта.

Если в предшествующие периоды при решении уравнения пьезопроводности использовались в радиальном случае функции Бесселя, то сейчас находят применение более сложные специальные функции, например, функции Матье. Сама постановка задач предполагает использование более сложных интегро-дифференциальных уравнений.

К сожалению, подавляющая часть работ в настоящее время выполняется учеными не из России. Возможно, сейчас намечается интерес к отечественным разработкам, к созданию собственных программных продуктов.

В настоящее время в Республике Башкортостан активно ведутся работы в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук, Башкирском государственном университете. Представлены наиболее важные в перспективном развитии направления, такие, как механика жидкости, газа и плазмы – область, изучающая на основе идей и подходов кинетической теории и механики сплошной среды процессы и явления, сопровождающие течения однородных и многофазных сред при механических, тепловых, электромагнитных и прочих воздействиях, а также процессы и явления, происходящие при взаимодействии текучих сред с движущимися или неподвижными телами.

Задачей механики жидкости, газа и плазмы является построение и исследование математических моделей для описания параметров потоков движущихся сред в широком диапазоне условий, проведение экспериментальных исследований течений и их взаимодействия с телами и интерпретация экспериментальных данных с целью прогнозирования и контроля природных явлений и технологических процессов, включающих движения текучих сред.

В Институте механики им. Р.Р. Мавлютова изучаются реологические законы поведения текучих однородных и многофазных сред при механических и других воздействиях, гидравлические модели и приближенные методы расчетов течений в водоемах, технологических устройствах и энергетических установках, ламинарные и турбулентные течения, течения сжимаемых сред и ударные волны, динамика разреженных газов и молекулярная газодинамика, течения многофазных сред (газожидкостные потоки, пузырковые среды, газовзвеси, аэрозоли, суспензии и эмульсии), фильтрация жидкостей

и газов в пористых средах, физико-химическая гидромеханика (течения с химическими реакциями, горением, детонацией, фазовыми переходами, при наличии излучения и др.), гидромеханика плавающих тел, пограничные слои, слои смешения, течения в следе, струйные течения, кавитация в капельных жидкостях, гидродинамическая устойчивость, линейные и нелинейные волны в жидкостях и газах, тепломассоперенос в газах и жидкостях. Все эти задачи напрямую или опосредованно связаны с задачами нефтедобычи Наиболее известны в России и за рубежом работы Р.И. Нигматулина (см. [1, 2]), В.Ш. Шагапова. (см. [3, 4]). В 2013 г. Шагапов В.Ш. был включен в топ список самых цитируемых ученых России в области механики.

В наше время отсутствует романтизм второго периода, отсутствует вера в то, что аналитическая механика способна описать любые физические процессы при правильном построении модели, но и возможности компьютерной техники, возможности численной математики также подвергаются сомнению. Только соединение этих двух направлений дает мощнейший инструмент познания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nigmatullin R.I.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.: ГЭОТАР-Медиа. 2014. 640 с.
2. *Egorov, A.V., Nigmatulin, R.I., Rozhkov, A.N.* Transformation of deep-water methane bubbles into hydrat // Geofluids Issu. 2014. V. 14. P 430–442.
3. *Шагапов В.Ш., Белова О.В., Давлетбаев А.Я.* Особенности фильтрации в низкопроницаемых коллекторах с проявлением предельного градиента // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 6. С. 1269–1281.
4. *Шагапов В.Ш., Дударева О.В.* Проявление нелинейных эффектов фильтрации в низкопроницаемых коллекторах при переменных режимах функционирования скважины // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2016. № 1(39). С. 102–114.

УДК 400.378

## ОСОБЕННОСТИ ДИСТАНЦИОННОГО ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ

Бенгина Т.А., Лиманова Л.В., Муратова Л.А.  
Самарский государственный технический университет,  
г. Самара, Россия;  
*bengina1@mail.ru, llv-1@mail.ru, muratova-la@mail.ru*

*В статье представлен обзор различных средств дистанционного обучения, проведен анализ преимуществ и недостатков этой формы образования.*

*Ключевые слова: дистанционное обучение, образование, информационные технологии.*

## FEATURES OF DISTANCE TEACHING MATHEMATICS AT THE UNIVERSITY

Bengina T.A., Limanova L.V., Muratova L.A.  
Samara State Technical University, Samara, Russia;  
*bengina1@mail.ru, llv-1@mail.ru, muratova-la@mail.ru*

*The article provides an overview of the various means of distance learning, an analysis of the advantages and disadvantages of this form of education.*

*Key words: distance learning, education, information technology.*

Весной 2020 года были введены ограничения, связанные с пандемией, что немедленно отразилось на жизни общества и, в частности, на образовательном процессе в ВУЗах.

Переход на дистанционное обучение повлек за собой значительное преобразование всего процесса обучения. С одной стороны, дистанционно-образовательные технологии на тот момент уже присутствовали в Российских ВУЗах и имелся определенный опыт работы в этом направлении [1], с другой стороны, масштаб развернувшихся преобразований поставил новые задачи: и технические, и дидактические.

Различные информационные технологии позволяют создать благоприятную образовательную среду, обеспечивающую высокий уровень обучения. К средствам дистанционного обучения можно отнести [2]:

- различные видеоконференции, передающие изображение и звук в режиме реального времени;
- Chat-общение;
- веб-сервис, веб-конференции;
- FTR серверы;
- электронная почта;
- активные каналы для подписки в сети интернет и пр.

На момент перехода на дистанционный форму обучения, в Самарском государственном техническом университете была уже создана информационно-образовательная среда, что позволило быстро перестроиться на новую форму работы. Был четко определен формат работы: занятия проходят в онлайн режиме, таким образом, связь между преподавателем и студентом не теряется.

Перед педагогами стояла задача: изложить материал так, чтобы студент мог освоить его и задать, при необходимости, вопросы преподавателю. Общение преподавателя со студентами осуществлялось посредством чата в режиме реального времени. Эта задача относилась уже к дидактическим, так как перевести весь имеющийся материал в электронный формат, методически грамотно выстроить процесс изложения темы было не просто.

При дистанционной форме обучения использовались различные средства:

- электронные учебники, пособия, методические указания;
- видео- и аудио-уроки;
- обучающие системы;
- программы-тренажеры.

Контроль за усвоением изучаемого материала также осуществлялся в дистанционном формате. Преподаватели организовывали его по-разному, в зависимости от уровня знаний обучающихся, количества студентов в группе и своих требований. Например, контрольные работы выкладывались в строго определенное время и на определенный промежуток времени, после окончания, которого студенты должны были прикрепить свои работы в личном кабинете для проверки преподавателем.

Проведение промежуточной аттестации (зачета, экзамена) также проходило в онлайн режиме. Студенты были оповещены заранее о необходимости иметь веб-камеру, любой документ, идентифицирующий личность, и предупреждены о видеозаписи сдачи контрольной точки. Рабочее место должно было быть видно при обзоре пространства камерой.

Работа в подобном формате сформировала определенный опыт, которым преподаватели готовы делиться, помогла увидеть преимущества и недостатки сравнительно новой формы обучения, искать новые резервы, новые виды телекоммуникаций.

Использование компьютерных технологий при изучении математики позволяет лучше раскрыть ее практическую направленность.

К положительным моментам дистанционного преподавания математики можно отнести:

- наглядность материала, возможность внимательно слушать и вести диалог с преподавателем и по окончанию занятия составить конспект, либо воспользоваться готовыми файлами;
- возможность неоднократного возвращения к материалам лекций или практических занятий;
- индивидуальный подход к обучающемуся;
- большая доля самостоятельной работы студента в освоении предмета с возможностью получения консультации преподавателя;
- относительно большой временной промежуток выполнения заданий;
- использование при обучении разнообразных средств и технологий.

Существенными недостатками дистанционной формы обучения является огромный объем дополнительной работы преподавателя (создание новых электронных курсов, перевод в цифровой формат имеющихся материалов, проверка выполнения заданий в электронном виде и т.д.), отсутствие, зачастую, мотивации со стороны студента, так как данная форма обучения предполагает высокую степень осознанности, умения планировать личное время.

Современный мир диктует свои условия, обстоятельства заставляют быть готовым и мобильным для перехода к разным формам обучения, исследования по данной проблеме начинают активно развиваться, появляются новые методические разработки в этой области [3, 4].

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. ГОСТ Р 52653-2006 Информационно-коммуникационные технологии в образовании.
2. Голицына И.Н., Половникова Н.Л. Мобильное обучение как новая технология в образовании // Образовательные технологии и общество, 2011. № 1. С. 241–252.
3. Каримова А.К., Пономарева Е.В., Звездина Л.В. Особенности преподавания математики в условиях дистанционного обучения // Молодой ученый, 2020. № 33(323). С. 116–121.
4. Мобильное обучение: прошлое, настоящее и будущее [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://apptractor.ru/mLearning/>.

УДК 372.8:51

## **ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Воистинова Г.Х.**

*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;*  
*voistinova69@mail.ru*

*В статье раскрываются некоторые приемы решения нестандартных уравнений. Предлагаются методические рекомендации при организации поиска решения таких уравнений.*

*Ключевые слова: решение уравнения, метод оценки, область определения, область значений.*

## **SOME METHODOLOGICAL TRICKS SOLUTIONS OF DIFFICULT EQUATIONS**

**Voistinova G.H.**

*Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;*  
*voistinova69@mail.ru*

*The article reveals some techniques for solving non-standard equations. Methodological recommendations are proposed for organizing the search for solutions to such equations.*

*Key words:* equation solution, estimation method, domain of definition, domain of values.

**Введение.** Очень часто сложный вид уравнения часто приводит к тому, что большинство обучающихся даже не приступают к их решению, а действия тех, кто всё-таки приступил к решению, сводятся зачастую к попытке использовать известные методы решения без учета анализа самого уравнения. Ознакомление с некоторыми методическими приемами позволит избежать этой проблемы.

**Изложение основного материала статьи.** Одна из важных рекомендаций методистов [1, 2] при решении задач - прежде чем приступить к решению задачи следует начать с анализа данных, представленных в этой задаче. Не являются исключением и уравнения. Если стандартные уравнения еще допускают поспешных действий, как говорится "с места в карьер то при решении нестандартных уравнений такая спешка ни к чему хорошему не приведет.

Рассмотрим довольно сложное на первый взгляд уравнение, которое трудно отнести к какому-либо известному типу.

$$1) \text{ Решить уравнение: } \sqrt{5x - x^2 - 6} + 3\sqrt{x-\pi} = \sqrt{1-3x}.$$

Решение сходу ни к чему хорошему не приводит, так в уравнении участвуют три разные функции. Действия тех, кто приступал к решению, сводились только к возведению обеих частей уравнения в квадрат, что, конечно, ни к чему хорошему не приводило. Наличие показательной функции не позволяло упростить вид уравнения возведением в квадрат. И только с помощью наводящих вопросов, организованных в ходе поиска решения уравнения и анализа его данных, некоторые обучающиеся начинали рассматривать само уравнение, выделять функции, входящие в него и обдумывать условия существования решения уравнений, т.е. приступали к анализу области допустимых значений. После нахождения ОДЗ обучающиеся выяснили, что:

а)  $\sqrt{5x - x^2 - 6}$  существует при  $x$ , принадлежащих промежутку  $[2, 3]$ ;

б)  $3\sqrt{x-\pi}$  — при  $x$  из промежутка  $[\pi; +\infty)$ ;

в)  $\sqrt{1-3x}$  — при  $x$  из промежутка  $(-\infty, 1/3]$ .

Данные промежутки не пересекаются, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

$$2) \text{ Решить уравнение: } \sqrt{-x^2 + 5x - 6} = 4\sqrt{x-3} - 1.$$

Окрыленные успехами после первого уравнения, большинство

обучающихся начинают свое решение с анализа области допустимых значений.

Поиск ОДЗ приводит к тому, что область допустимых значений состоит всего лишь из одного числа 3. Это свидетельствует о том, что если решение существует, то только при  $x = 3$ . Простая проверка с помощью подстановки  $x = 3$  в уравнение позволяет найти окончательный ответ:  $x = 3$  — корень уравнения.

$$3) \text{ Решить уравнение: } 2 \sin^2 \frac{x}{6} \cos^2 \frac{x}{12} = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Аналогичные действия при решении данного уравнения не дают результата, так как область допустимых значений - это все числа, кроме 0. Но уже некоторые обучающиеся с помощью наводящих вопросов могут прийти самостоятельно к выводу, что можно анализировать не только область определения, но и область значений функций, входящих в уравнение.

Оценивая левую часть уравнения, приходят к выводу, что  $2 \sin^2 \frac{x}{6} \cos^2 \frac{x}{12} \leq 2$ , т.е. левая часть не больше 2. Аналогичный анализ правой части дает неравенство:  $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ , т.е. правая часть не меньше 2. Единственно возможное решение, когда левая часть равна правой части и равна 2. Решим уравнение:  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ . Корни уравнения:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ . Подставив их в левую часть уравнения, убеждаемся, что эти числа не удовлетворяют, т.е. уравнение не имеет решений.

**Выводы.** Резюмируя сказанное, сделаем вывод. Прежде чем приступить к решению нестандартных уравнений, полезно сделать сначала подробный анализ самого уравнения: проанализировать вид уравнения, попытаться отнести его к известному типу уравнений; выделить функции, входящие в уравнение; проанализировать область определения (ОДЗ); оценить область значений левой и правой частей уравнения. И только после этого приступать к решению самого уравнения. Ведь довольно часто уже этих мер бывает достаточно, чтобы решить большой ряд страшных на первый взгляд уравнений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волстинова Г.Х. Анализ в задачах на построение // Современные проблемы образования и науки: электронный научный журнал.

2014. № 2. 206 с.

2. Войстинова Г.Х., Сагитова Г.Г. Некоторые приемы обучения решению текстовых задач по математике // Проектирование и реализация математического образования в школе и вузе. Уфа: Башкирский государственный университет, 2015. С. 26–31.

УДК 539.143.34

## НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭНЕРГИИ СВЯЗИ И МАССЫ ПОКОЯ АТОМНЫХ ЯДЕР

Минченков Н.Д., Кунсбаева Г.А.

Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
г. Уфа, Россия;  
[nminch02@mail.ru](mailto:nminch02@mail.ru)

*В работе выводится формула для расчета энергии связи атомных ядер на основании закона Кулона. Потенциальная энергия ядерных сил принимается равной по модулю потенциальной энергии электростатического отталкивания. Выводится эмпирическая формула зависимости коэффициента пропорциональности K от отношения числа протонов в ядре к массовому числу в степени 2/3  $Z/A^{(2/3)}$ . На основании полученных данных об энергиях связи ядер вычисляется дефект масс и масса покоя.*

*Ключевые слова:* энергия связи, диэлектрическая проницаемость, дефект масс, масса покоя.

## A NEW METHOD FOR CALCULATING THE BINDING ENERGY AND REST MASS OF ATOMIC NUCLEI

Minchenkov N.D., Kunsbaeva G.A.

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia;  
[nminch02@mail.ru](mailto:nminch02@mail.ru)

*The paper provides a formula for calculating the binding energy of atomic nuclei based on Coulomb's law. The potential energy of nuclear forces is assumed to be equal in modulus to the potential energy of electrostatic repulsion. An empirical formula is derived for the dependence of the proportionality coefficient K on the ratio of the number of protons*

*in the nucleus to the mass number to the power of 2/3 Z/A (2/3). Based on the obtained data on the binding energies of the nuclei, the mass defect and the rest mass are calculated.*

*Key words:* binding energy, permittivity, mass defect, rest mass.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук, Номер гранта: МД-2179.2020.1

УДК 372.851

## **СИСТЕМАТИЗАЦИЯ КЛЮЧЕВЫХ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ И МЕТОДИКА ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ**

**Михайлов П.Н., Михайлова В.В.**

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;  
*mihaylovpn@mail.ru, mikhaylovavv@mail.ru*

*В работе дан обзор различных пособий по подготовке к ЕГЭ. Как один из главных недостатков отмечается, что, в основном, во всех пособиях приводятся задачи с последующим разбором, мало уделяется методике работы над задачами. Отмечается, что для рационального использования и экономии времени на подготовку следует системно повторить общие подходы к решению задач и выделить специальные методы, которые необходимо повторить на подобраных для этой цели задачах. Здесь же приводится авторский подход к работе над задачами, основанный на умственных ориентирах. Выделены ориентиры трех порядков. Ориентир первого порядка - это основные этапы решения задач, которые позволяют приступить к работе над задачей, понять ее. Второй ориентир - стратегия решения задачи, он определяет направление мышления по преобразованию задачи. Третий ориентир - способы преобразования задачи. В качестве основных выделены следующие преобразования: замена информации по эквивалентности, учет особенностей данных и искомых, вывод следствий, введение вспомогательных элементов, обобщение и конкретизация, разбиение отношений и другие способы получения из задачи новых задач, например, за счет комбинации выделенных выше способов. Описаны возможности их использования*

при работе над задачами ЕГЭ, а также приведен один из возможных вариантов наборов ключевых задач, позволяющих эффективно повторить курс школьного курса планиметрии.

**Ключевые слова:** задачи ЕГЭ по геометрии, общие походы, умственные ориентиры, ключевые задачи, планиметрия.

## THE SYSTEM OF KEY PROBLEMS IN GEOMETRY AS AN EFFECTIVE ELEMENT OF THE METHODOLOGY OF PREPARATION FOR THE EXAM

Mikhaylov P.N., Mikhaylova V.V.

Sterlitamak branch of Bashkir state University, Sterlitamak, Russia;  
mihaylovpn@mail.ru, mikhaylovavv@mail.ru

*The paper provides an overview of various manuals for preparing for the exam. As one of the main shortcomings, it is noted that, in general, all the manuals provide tasks with subsequent analysis, little is paid to the methodology of working on tasks. It is noted that for rational use and saving time for preparation, general approaches to solving problems should be systematically repeated and special methods should be selected that must be repeated on tasks selected for this purpose. Landmarks of three orders are highlighted. The first-order guideline is the main stages of solving problems, which allow you to start working on a problem, to understand it. The second reference point is the strategy for solving the problem, it determines the direction of thinking for transforming the problem. The third guideline is how to transform the task. The following transformations are highlighted as the main ones: replacing information by equivalence, taking into account the features of the data and the desired ones, deriving the consequences, introducing auxiliary elements, generalizing and concretizing, splitting relations and other methods of obtaining new problems from the problem, for example, by combining the methods highlighted above. It also provides the author's approach to work on tasks, based on mental guidelines. The possibilities of their use when working on the tasks of the Unified State Exam are described, and one of the possible options for the sets of key tasks is given, which allows you to effectively repeat the course of the school course of planimetry.*

**Key words:** use problems in geometry, General trips, mental reference points, key tasks, planimetry.

**Введение.** Особое беспокойство в подготовке школьников вызывает уровень освоения геометрии. Согласно статистике, приведенной

Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

в [1], "низки результаты выполнения геометрических задач, причем как планиметрических (задания 8, 15), так и стереометрических (задания 13, 16); к сожалению, с этими заданиями справляются только наиболее подготовленные участники экзамена. Это свидетельствует о концептуальных недостатках в обучении геометрии, о необходимости пересмотра традиционных систем обучения и создания единой линии изучения геометрии с 1 по 11 класс на основе единых дидактических подходов к результатам обучения и содержанию образования, с существенным акцентом на развитие геометрической интуиции, наглядных геометрических представлений, с учетом возрастных особенностей обучающихся".

Выяснение причин слабого усвоения геометрии требует специального исследования, однако некоторые из них достаточно очевидны. Такое положение дел вызвано, в первую очередь, сокращением количества часов на изучение геометрии (15 лет назад было 3 часа в неделю, сейчас только 2), особенностью геометрического материала: освоение фактов требует пространственного воображения, задачный материал обладает особенность заключающейся в том, что каждая задача не похожа на предыдущую.

Введение ЕГЭ придало большое значение повторению геометрии и системе подготовки к единому экзамену. Появилось большое количество методической литературы в помощь по подготовке к ЕГЭ. Так Балаян Э.Н. [2] предлагает в целях экономии времени задачи формулировать на чертежах. Черняк А.А. [3] задачи разбиты на однотипные группы, каждая из которых предваряется методическими советами и комментариями, общими алгоритмами и подходами, подсказывающими единые эффективные приемы решения. Особое место занимают пособия [4,5], в которых представлен широкий круг сложных задач с решениями. Разбор решений задач полезен, но слабо вырабатывает умения по поиску их решений. Вольфсон Б.И. [6] считает, что важны этапы решения задач, основное внимание необходимо уделить освоению каждого из них учащимися.

Техника решения геометрических задач детально изложена в известном пособии Е.В. Потоскуева [7]. В отличие от большинства других руководств, не носящих методического характера, данное пособие ставит своей целью обучить учащихся методам и приемам решения геометрических задач. Для этого из всего многообразия геометрических задач выделяются классы, объединенные общей идеей и стандартной техникой решения. Объясняется, в чем именно состоит идея

задач того или иного класса и какова методика их решения. Такой подход определил как расположение материала, так и подборку задач для самостоятельных упражнений, приведенных в конце каждого параграфа.

Кроме указанных имеется большое количество работ, в которых без какой-либо систематизации приводятся наборы задач с подробными решениями.

Обзор методической литературы показывает, что проблема улучшения обучения геометрии актуальна, однако в работах решаются лишь отдельные ее стороны. Работа Э.Н. Балаяна, например, полезна только тем, кто по условию задачи может самостоятельно строить чертеж. В других представленных работах приведены различные систематизации, как материала геометрии, так и методов решений задач, однако нельзя их назвать совершенными системами. На это же указывает и многообразие авторских подходов.

**Цель работы:** провести краткий обзор методик обучения решению задач по математике; описать авторский подход к работе над задачами и его реализацию при подготовке учащихся к ЕГЭ; представить один из многократно апробированных авторами подходов систематизации ключевых задач для эффективного повторения курса геометрии.

**Основная часть.** При подготовке учащихся ЕГЭ по геометрии учитель и ученики ограничены по времени и повторение всех разделов геометрии возможно лишь при специальном структурировании материала. В методической литературе такой подход не нов. Так, в системе работы Р.Г. Хазанкина, как само изучение, так и повторение шло через систему ключевых задач [8]. В пособиях по геометрии Шарыгина И.Ф. и в различных пособиях для абитуриентов предлагаются системы опорных задач. Следует отметить, что Хазанкин Р.Г. не раз подчеркивал при обсуждении списка ключевых задач, что он является индивидуальным для каждого учителя. В пособии Шарыгина И.Ф. [7, 9], и других авторов по подготовке к конкурсным экзаменам в вузы списки задач приводятся. Но остается открытыми вопросы, почему именно эти задачи попали в этот список? Что изменится, если ту или иную задачу исключить из списка?

Обсуждение принципов составления системы опорных задач по геометрии позволило бы, с одной стороны, учителям математики повысить свой профессиональный уровень, а с другой стороны, помочь ученикам эффективно повторить курс геометрии. В работе предла-

гается один из возможных подходов при выборе опорных задач, показавший свою эффективность на практике.

Следуя И.Ф Шарыгину, выделим опоры - как метод и опоры - как факт.

По степени общности можно выделить следующие классы приемов решения: 1) конкретных, отдельных задач; 2) задач некоторого типа; 3) задач некоторого класса; 4) общие приемы решения математических задач.

Разработкой общих приемов решения задач занимается эвристика, поэтому общие приемы решения математических задач называются эвристическими. Наиболее известные попытки создать стройную систему эвристик принадлежат Г. Декарту, Г. Лейбницу, Б. Больцано, Л. Эйлеру, Ж. Адамару, Д. Пойа.

В методической литературе в основном различают два эвристических приема поиска решения задач: 1) прием, основанный на принципе "парадигмы"; 2) прием, основанный на принципе "по части - целое".

В зависимости от сложности задачи можно использовать каждый из названных приемов в отдельности или их сочетание.

Л.М. Фридман [10], анализируя используемые ныне учителями школ методики обучения решению задач, отмечает, что их можно разбить на следующие три вида:

1. Все задачи, которые необходимо прорешать, разбиваются на многочисленные виды. Для каждого вида задач разрабатывается типовой способ решения, который учитель демонстрирует (выводит) на нескольких примерах-задачах.

2. В процессе обучения кроме типовых задач решается большое число разнообразных, так называемых развивающих задач. К.И. Нешков, А.Д. Семушкин пишут: "... наибольшая польза от этих задач получается тогда, когда они решаются без предварительной подготовки, когда они достаточно разнообразны по содержанию и по способам решения". По мнению Л.М. Фридмана, авторы уповают на природные способности учащихся, а поэтому этот метод помогает только "сильным" (способным) учащимся.

3. Учащимся даются эвристические схемы процесса решения задач или поиска способа решения, подобных тем, которые приведены в конце книги Д. Пойа [11].

Несомненно, использование этого метода в сочетании с первыми двумя явились большим шагом вперед в развитии методики обуче-

ния решению задач. Эвристические схемы, которые в разных вариантах давались учащимся, настолько общие и абстрактные, что их использование приносило пользу лишь наиболее развитым учащимся, а остальные эти схемы практически не научились применять. Указания типа "Понять предложенную задачу" или "Сформулировать отношение (отношения) между неизвестными и данными" [11] мало помогают в поиске способа решения задачи.

К настоящему времени имеется достаточно много различных методик обучения решению задач, хорошо зарекомендовавших себя на практике. Не претендуя на полноту, перечислим лишь те, что нам хорошо известны и оставили заметный след в формировании представлений авторов о процессе решений задач.

1. Структурный подход, разработанный Ю.М. Калягиным и продолженный рядом авторов, и, видимо, наиболее значимо В.И. Крупичем [12]. Согласно которому, в задаче выделяются структурные элементы и отношения, и в зависимости от того, что является искомым элементом или отношение организуется поиск плана решения задачи.

2. Беда, а может и трагедия общеобразовательной школы, заключается в том, что в содержании тем, обязательных для изучения на уроках, включены лишь некоторые методы решений задач. Поэтому для обучения решению задач либо необходимо перестроить организацию учебного процесса так как, например, это сделано в системе Р.Г. Хазанкина [8], либо нужны дополнительные - внеклассные занятия такие, как, например, в заочной физмат школе МФТИ.

В системе Р.Г. Хазанкина урок решения ключевых задач - основа обучения учащихся работе над задачами. Один из возможных вариантов подготовки данного урока может быть реализован в следующей последовательности:

1. Изучение программы и определение умений, которые должны быть сформированы у всех учеников после изучения темы.
2. Систематизация методов решения задач по изучаемой теме.
3. Отбор ключевых задач по изучаемой теме.
4. Проработка ключевых задач по определенной теме.
5. Выбор методов решения ключевых задач, которые будут использованы при работе с учащимися.
6. Изучение затруднений и возможных ошибок учащихся при реализации отобранных алгоритмов, их диагностика, способы предупреждения их преодоления.
7. Обоснование последовательности разбора ключевых задач.

## 8. Планирование проведения урока.

Примерами реализации такой схемы можно ознакомиться в [8].

Замечание. При выделении методов решения задач по теме следует помнить о типичной ошибке - попытке выделить методы решения при работе над сложными задачами. Сложность задач во многом и обусловлена тем, что она имеет практически единственный метод решения. Заметим также, что понятия сложность и трудность задачи в методической литературе имеют вполне определенную трактовку.

Сложной, интересной и важной работой является работа по повторению методов решения задач. В системах Р.Г. Хазанкина, А.В. Ефремова, В.Ф. Шаталова и некоторых других, но не в обычных школах, этому уделяется специальное внимание.

Для формирования у учащихся умений решать задачи учитель должен иметь достаточное число упражнений. Как правило, в учебниках и задачниках имеются упражнения на основные методы, но учесть все конкретные особенности учащихся они не могут. Поэтому перед учителем довольно часто возникает проблема - найти задачу с "определенными свойствами". Но на поиски затрачивается слишком много времени, да, заканчиваются такие поиски не всегда успешно. Гораздо эффективнее знать методы составления задач и, пользуясь ими, конструировать задания.

Несколько слов о заочной физико-математической школе МФТИ. Система заданий, разработанных ими, направлена на ознакомление с основными методами решения задач. У школы богатый, многолетний опыт, оформленный в кратких методиках, составленных в помощь ученикам. В каждой из которых последовательно знакомят учащихся с дополнительным теоретическим материалом, с методом (или методами); задания выстроены в порядке усиления их сложности. Задачи не повторяются, применение метода (методов) показано в различных, в том числе, неожиданных случаях и их достаточно не только для знакомства, но и для полного усвоения метода. Для тех, кто желает изучить методы решений математических задач, эта школа является интересным и полезным дополнением к обычной.

Как отмечает И.Ф. Шарыгин: "Искусство решать задачи основывается на хорошем знании теоретической части курса, знании достаточного количества геометрических фактов, не вошедших в этот курс, и владении определенным арсеналом приемов и методов решения геометрических задач. Поэтому представляется полезным выделить некоторое множество задач (будем называть их опорными), в

которых формулируется некоторый факт, достаточно часто используемый в задачах, либо иллюстрируется какой-либо метод или прием решения задач. Соответственно мы будем различать две разновидности опорных задач: задача-факт (задача-теорема) и задача-метод". Примерами опорных задач можно ознакомиться в пособиях [7, 9].

Л.М. Фридман пишет: "Решение задачи есть сложная умственная деятельность. Для того, чтобы сознательно овладеть ею, надо, во-первых, иметь ясное представление о ее объектах и сущности, во-вторых, предварительно овладеть теми элементарными действиями и операциями, из которых состоит эта деятельность, и, наконец, в-третьих, знать основные методы ее выполнения и уметь ими пользоваться. К сожалению, современная методика обучения решению задач ни первого, ни второго, ни третьего не содержит. Поэтому она неэффективна" [10].

Далее он отмечает, что необходимо дать учащимся основы, на базе которых только и можно сформулировать у них навыки сознательной и разумной деятельности по решению задач.

Эти основы, по его мнению, состоят из трех частей:

1. Задача. Структура задачи. Сущность решения задач.
2. Навыки по использованию первой части.
3. Знание общих методов решения задач.

"Для решения нестандартных задач учащиеся сами должны изобрести (составить) способ их решения. Чтобы поиск и способ решения таких задач производились учащимися разумно, по определенному плану, они должны уметь пользоваться общими эвристическими методами решения математических задач. Эти общие методы следует сообщать учащимся постепенно, иллюстрируя их достаточным числом примеров" [10].

Решение задачи - это специфическая умственная деятельность и для продуктивного его выполнения необходимы умственные ориентиры [13]. Именно их отсутствие, с нашей точки зрения, является одним из существенных недостатков имеющихся систем обучения решению задач по математике.

Предлагается выделить ориентиры трех порядков [14]. Ориентир первого порядка должен помочь осмыслить задачу. Таким ориентиром могут служить этапы решения задач.

Решение любой задачи условно можно разбить на восемь этапов, как сделано в [15] или на четыре этапа:

1. Изучение задачи,

2. Поиск решения задачи и составление плана или выделение узловых моментов какого-либо способа решения,
3. Реализация плана решения,
4. Изучение выполненной работы - решения.

Процесс изучения задачи в школьном курсе математики достаточно подробно представлен в школьном курсе и в различных пособиях по решению задач. Поэтому здесь лишь отметим, что на этом этапе выделяется в задаче, что задано, что требуется найти или доказать, строят схемы или чертежи, помогающие понять задачу.

Самым трудным всегда остается поиск решения задачи. Здесь должны помочь ориентиры второго и третьего порядков.

Ориентир второго порядка указывает, что при поиске решения задачи мышление должно быть направлено на то, чтобы из нестандартной задачи получить стандартную или задачу, решение которой решаемому известен.

Значит, для того, чтобы ученики умели решать задачи, необходимо:

1. Научить решать стандартные (ключевые или опорные) задачи.
2. Сформировать достаточно широкий банк стандартных задач.
3. Научить способам сведения новых задач к стандартным.

В качестве способов получения из задачи новой предлагаются следующие [14]:

1. Замена информации по эквивалентности
2. Учет особенностей данных и искомых.
3. Вывод следствий.
3. Введение вспомогательных элементов.
4. Обобщение и конкретизация.
5. Разбиение отношений.
6. Какие-либо другие способы получения из задачи новых задач, например, за счет комбинации выделенных выше способов.

Таким образом, третьим ориентиром должны стать способы получения из задачи стандартные задачи. Тогда решение задачи представляется следующим образом: изучается задача и если она незнакомая, то берется первый способ и задача преобразуется в новую; если полученная задача снова незнакомая, процедура повторяется, используя другой способ. Сначала перебираются известные способы, затем - комбинации известных способов.

Конечно, направление мышления при поиске решения задачи зависит от кругозора, уровня образования, от психологических особенностей.

ностей, интуиции решаемого, а также от структуры задачи и многих других факторов. Кроме того, есть круг задач даже школьного курса, для решения которых необходимы специальные знания, такие как принцип Дирихле, метод инвариантов и т.п. Некоторые из них для тех, кто занимается олимпиадными задачами, являются достаточно шаблонными и в этих случаях решаемому необходимо просто знать признак применимости метода. Подчеркнем еще раз, что объектом изучения должны стать не только то, как применить тот или иной метод, но и признаки применимости методов!

В школьном курсе математики ученики в основном решают стандартные задачи, а нестандартные задачи решают лишь эпизодически. Поэтому первым из умений они в большинстве случаев овладевают, но теряются при решении незнакомых задач.

Для того, чтобы обучение способам сведения к стандартным задачам шло успешно, во-первых, необходимо отобрать задачи, которые сводятся к стандартным одним и тем же способом; во-вторых, расположить эти отобранные задачи по возрастающей сложности, например так, как в пособии авторов [14]. Получается набор задач, или цикл задач, по терминологии Г.В. Дорофеева, связанных с общим приемом поиска решения, образующие "окрестность" этой задачи (по той же терминологии).

Следует заметить: во-первых, в силу того, что способы сведения задач к стандартным редко применяются по отдельности, и в методической литературе термин "способ" применяется по-разному, то, как приведенное разбиение на способы, так и сами названия способов, являются условными и не обязательными; во-вторых, список способов не окончательный и может быть продолжен; в-третьих, авторы далеки от идеи абсолютизации в методике обучения решению задач общих подходов. По нашему мнению такая методика должна строиться на разумном сочетании общих и частных методов.

Следует отметить что опоры – как метод и опоры – как факт взаимосвязаны, так как каждый метод реализуется на конкретном материале. Поэтому выделять методы решений задач удобно на опорных задачах. Приведем примерный набор части опорных задач по геометрии, раскрывая логику их систематизации.

По точному выражению Шарыгина И.Ф. "Сердце геометрии - это треугольник, а окружность - его душа". Отдавая дань памяти этого выдающегося человека, отметим, что список задач должен начинаться с задач о треугольнике.

В школьном курсе геометрии изучаются три общеизвестных признака равенства треугольников, хотя признаков существует бесконечно много. Остальные сводятся к этим трем. Что следует из них - любой треугольник, при надлежащем выборе, однозначно определяется тремя элементами, один из которых линейный. Построения примеров неоднозначного определения треугольника по трем элементам оставим на самостоятельную работу.

Выделим основной, на взгляд авторов, способ задания треугольника и покажем, как сводятся остальные к рассматриваемому.

Задача 1. В треугольнике  $ABC$  известны длины сторон  $|AB| = c$ ,  $|AC| = b$  и величина угла  $\angle BAC = \alpha$ .

Найти:  $|BC|$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ ,  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$ ,  $l_a$ ,  $l_b$ ,  $l_c$ ,  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $S$ .

Задача является ключевой по многим причинам. Во-первых, здесь повторяются основные теоремы и формулы, применяемые при решении треугольника; во-вторых, задача позволяет оценить и сравнить теоремы косинусов и синусов и избежать часто встречающейся ошибки, когда при нахождении угла треугольника используют теорему синусов; в-третьих, есть возможность повторить часто встречающиеся дополнительные построения, например, при нахождении  $m_a$ , удвоение медианы; в-четвертых, при выводе формул для нахождения длины биссектрисы  $l_a$  и радиуса вписанной окружности  $r$  повторить признак применимости и сам метод площадей; в-пятых, дает возможность рассмотреть различные обобщения, например, с одной стороны, обобщением треугольника является многоугольник, то показать, что формула  $r = \frac{S}{p}$  распространяется на  $n$ -угольники, в которые можно вписать окружности, а заодно определить условие существования вписанной окружности; с другой стороны, обобщением треугольника является тетраэдр, это позволяет повторить признак применимости и метод объемов, а также распространить формулу  $r = \frac{3V}{\sum_{i=1}^n S_i}$  на многогранники, в которые можно вписать сферу. Здесь же можно вспомнить выводы различных формул для площади треугольника, частные случаи известных формул для случая прямоугольного треугольника.

Если же треугольник задан тремя другими элементами, то нетрудно показать, что для определения всех элементов треугольника таким же способом, как в задаче 1, достаточно предварительно решить систему трех уравнений с тремя неизвестными  $A$ ,  $b$ ,  $\alpha$ , то есть, возможность сведения решения задачи к знакомой равносильна решению, в общем случае, нелинейной системы уравнений.

Рассмотренный пример отражает план повторения свойств параллелограммов, ромбов, трапеций: 1) признаки равенства, 2) основной способ задания, 3) выводы формул для вычисления элементов фигуры, 4) сведение других способов задания фигуры к основному.

Завершить повторение раздела можно разбором решения задачи следующего типа: в трапеции  $ABCD$   $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle B = 40^\circ$ ,  $|MN| = 4$ ,  $M$  и  $N$  – середины оснований  $AB$  и  $CD$  трапеции соответственно; средняя линия трапеции равна 4. Найти основания трапеции.

Задача полезна тем, что здесь удобно, во-первых, показать, что решение многих задач планиметрии сводится к решению треугольников, во-вторых, повторить дополнительные построения в задачах на трапеции. В рассматриваемом случае построением  $A_1N \parallel AD$ ,  $NB_1 \parallel CD$ , задача сводится к решению треугольника  $A_1NB_1$ , которого известны два угла и медиана.

Следующий тип задач, обязательный для повторения: в треугольнике  $ABC$ , заданы отношения  $AB_1:B_1C$ ,  $A_1!_1B$ , где  $B_1 \in AC$ ,  $C_1 \in AB$ . Определить: 1) в каком отношении делит точка пересечения прямой  $AO$  и отрезка  $BC$ , 2) в каком отношении делит точка  $O$  отрезки  $BB_1$  или  $CC_1$ .

Такие задачи допускают много способов решения: 1) сведением к подобию треугольников, 2) сведением к теоремам Менелая и Чевы, 3) с помощью векторов, 4) методом координат и др. Первый способ простой, но громоздкий, остальные требуют дополнительных фактов, не входящих в обязательную школьную программу. Как показывает наш опыт, наиболее рациональным здесь является использование метода центра масс. Указанного типа задачи часто встречаются на ЕГЭ как подзадачи, использование метода позволит сэкономить время на их решение.

Выводы о различных свойствах вписанных и описанных фигур важны для повторения метода вспомогательной окружности. Дальнейшее повторение целесообразно организовать по следующему плану. Доказать последовательно утверждения: 1) о величине центрального угла, 2) о вписанном угле, 3) угол между двумя пересекающимися хордами, 3) угол между двумя непересекающимися хордами, 4) угол между касательной и хордой, 5) теорема Евклида о степени точки относительно окружности, 6) внутреннее и внешнее касание двух окружностей, 7) свойства четырехугольника, в который вписана (описана) окружность, возможные обобщения на случай многоугольников, 8) метод вспомогательной окружности. Завершить повторение

раздела можно решением задач следующего типа:

1. Высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Определить углы треугольника.

2. Доказать, что высоты треугольника являются биссектрисами педального треугольника, образованного основаниями высот данного треугольника.

3. На стороне  $AB$  ромба  $ABCD$ , где  $\angle A = 60^\circ$ , выбрана точка  $M$ , а на стороне  $BC$  – точка  $N$  так, что  $\angle MDN = 60^\circ$ . Определить величину угла  $\angle DMN$ .

Такой подход к работе над такими задачами позволяет, с одной стороны, повторить основные факты и методы, с другой, – показать эффективность общих подходов работы над задачами. Самое главное – позволяет существенно сэкономить время на повторение при подготовке к ЕГЭ. Заметим, что, если единообразно рассмотреть пирамиды, призмы, круглые тела и добавить сечения тел и их комбинации, то многие идеи изложенного легко применить при повторении стереометрии. И, по существу, вспомнить все необходимое по геометрии для сдачи ЕГЭ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ященко И.В., Рослова Л.О., Высоцкий И.Р., Семенов А.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2018 г 2018 г. М.: ФИПИ. 2018. 26 с.

2. Балаян Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ. Ростов н/Д: Феникс. 2013. 223 с.

3. Черняк А.А. ЕГЭ по математике. Геометрия. Практическая подготовка. СПб.: БХВ – Петербург. 2015. 336 с.

4. Золотарев Н.Д., Попов Ю.А., Семеняева Н.Л., Федотов М.В. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: Учебно-методическое пособие / под ред. М.В. Федотова. М.: Издательство Московского университета. 2011. 538 с.

5. Золотарева Н.Д., Бурдак Б.А., Федотов М.В. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие. 5-е изд., испр. и доп. М.: Лаборатория знаний, 2018. 596 с.

6. Вольфсон Б.И. Геометрия. Все типы заданий ГИА и ЕГЭ. Решаем задачи – повторяем теорию: учебное пособие. Ростов н/Д: Легион. 2013. 96 с.

7. Потоскуев Е.В. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. ФГОС. – М.: Издательство «Экзамен». 2016. 223 с.
8. Зильберберг Н.И. Урок математики. Подготовка и проведение. М.: Просвещение, АО «Учебная литература». 1995. 178 с.
9. Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. М.: Дрофа. 1999. 304 с.
10. Фридман Л.М. Методика обучения решению математических задач // Математика в школе., 1991. № 5. С. 59-63.
11. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Либроком. 2010. 208 с.
12. Аксенов А.А. Единая теоретико-методическая концепция обучения логическому поиску решения математических задач в школе и вузе // Вестник ВГУ, серия: проблемы образования. 2019. № 1. С. 105–110.
13. Михайлова П.Н. Об умственных ориентирах при решении математических задач / Материалы международной научно-методической конференции «Обучение фрактальной Геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А.Н. Колмогорова, 7 – 9 декабря 2011. Кострома. 2011. С. 385–389.
14. Михайлова П.Н. Пособие по подготовке к школьным математическим олимпиадам: учебное пособие. Стерлитамак: СФ БашГУ. 2017. 196 с.
15. Костюченко Р.Ю. Методика обучения учащихся решению математических задач: содержание этапов решения // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. 2018. № 4(18). С. 117–123.

УДК 37.013.75

## РОЛЬ МЕТОДА ПРОЕКТОВ В ПОВЫШЕНИИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Охтя Н.В.

Самарский государственный технический университет,  
г. Самара, Россия;  
[n.ohtya@yandex.ru](mailto:n.ohtya@yandex.ru)

*Аннотация: обосновывается роль метода проектов в обеспечении качества подготовки специалистов в соответствии с потребностями современного общества, даются методические рекомендации*

ции по составлению рабочей программы дисциплины "Математика" с учетом формирования соответствующих компетенций. Рассматривается структурная схема формирования компетенций при изучении математики в техническом ВУЗе, указываются место и значение различных видов учебных занятий (лекций, практических занятий, самостоятельной работы). Математическая компетентность будущих инженеров формируется в результате синтеза усвоенных математических знаний и методов при их использовании в решении профессионально направленных задач, лежащих вне предмета математики. Показывается, что задачи практического содержания с реальной постановкой вопроса способствуют пониманию студентами междисциплинарных связей математики с другими предметами.

**Ключевые слова:** педагогические технологии, модели обучения, метод проектов, личностно-ориентированное обучение, компетенции, математическое образование, способности, мотивация, качество образования.

## FEATURES OF DISTANCE TEACHING MATHEMATICS AT THE UNIVERSITY

Okhtya N.V.

Samara State Technical University, Samara, Russia;  
n.ohtya@yandex.ru

*Annotation:explains the role of project method in ensuring the quality of training of special-ists in accordance with the needs of modern society, guidelines for the preparation of the work pro-gram of discipline of "Mathematics"through the development of appropriate competencies. The structural scheme of competence formation in the study of mathematics at a technical University is considered, and the place and significance of various types of training sessions (lectures, practical classes, independent work) are indicated. The mathematical competence of future engineers is formed as a result of the synthesis of acquired mathematical knowledge and methods when they are used in solving professionally directed problems that lie outside the subject of mathematics. It is shown that problems of practical content with a real statement of the question contribute to students ' understanding of interdisciplinary connections of mathematics with other subjects.*

*Key words: pedagogical technologies, learning models, project method, personality-oriented learning, competencies, mathematical education, abilities, motivation, quality of education.*

За последнее время преобразования в системе образования характеризуются не только содержанием, но в значительной мере определяются ее структурой и управлением. Важным шагом реформирования стала замена прямого государственного контроля деятельности образовательных учреждений механизмом государственной регламентации их деятельности[1; 2]. Процесс трансформации содержания и структуры образовательной системы потребовал применения инновационных технологий обучения, обеспечивающих порождение познавательных мотивов, интереса к будущей профессиональной деятельности, условий для творчества в обучении.

Понятие "качество образования" имеет самые различные толкования, связанные в первую очередь с целями системы образования. Согласно исследованиям Международного института планирования образования качество образования - очень широкое понятие и рассматривается, прежде всего, как "качественные изменения" в учебном процессе и в среде, окружающей обучаемого, которые можно идентифицировать как улучшение знаний, умений и ценностей, приобретаемых обучаемым по завершении определенного этапа. Повышение качества образования связано с созданием дидактических и психологических условий понимания процесса взаимодействия и общения преподавателя и учащихся, направленного на достижение объединяющей их цели - высокого уровня подготовки будущих специалистов.

Повышению качества образования в процессе обучения, может служить проектное обучение, побуждающее учащихся проявлять способности: к осмыслинию своей деятельности с позиций ценностного подхода, к целеполаганию, к самообразованию и самоорганизации, к синтезированию и обобщению информации из разных источников, умению делать выбор и принимать решения. С внедрением проектного метода обучения, в основе которого лежат исследовательская и творческая деятельность, появляется возможность углублять и закреплять знания, выполнять социальные заказы общества. «Все, что я познаю, я знаю, для чего это мне надо и где и как я могу эти знания применить» – это основной тезис современного понимания метода проектов [3, с. 43]. Проектная методика дополняет традиционную систему вузовского образования, является новой технологией обучения,

более тесно связанной с жизнью, практикой, стимулирует студентов самоутверждаться и самореализовываться в разнообразной учебной и практической деятельности. Она помогает освоить новые способы деятельности на основе интегрированного содержания. Используя потенциал информационных ресурсов, метод проектов позволяет вывести образовательный процесс за пределы ВУЗа.

Одним из наиболее распространенных видов исследовательского труда является метод проектов. Применение метода проектов направлено на повышение исследовательской деятельности учащихся, что развивает познавательную деятельность учащихся. В образовательных стандартах обязательной частью учебного процесса становится подготовка проектов. Одним из ведущих направлений в профессиональной деятельности бакалавра и магистра является проектная деятельность, которая предполагает умение проектировать, оценивать проекты и управлять ими. Поэтому одна из целей высшей школы – подготовить бакалавра и магистра, умеющего осуществлять проектную деятельность. В последнее время в отечественной педагогике инициируется интерес к методу проектов, как технологии, направленной на решение важных образовательных стратегий[4, с. 57]. Ныне проектные технологии обучения выступают в качестве альтернативы традиционных лекционно-семинарских, которые в современных условиях глобализации знаний и бурного роста научной информации не в состоянии обеспечить образовательные потребности социума.

С учетом выше изложенного незыблемым является утверждение, что превращение учащегося в субъект учебной деятельности происходит только после появления у него цели собственной деятельности. Процесс обучения должен быть ориентирован в первую очередь на "выращивание" такой цели. Этому наиболее полно отвечает метод проектов – как педагогическая технология, направленная на переориентацию процесса обучения с конечных результатов на сам процесс овладения учащимся этими результатами и осознания им способов деятельности и значимости для себя самого процесса учения. Такими характеристиками обладает инновационное обучение по сравнению с традиционным обучением. Ранее проведенный нами сравнительный анализ моделей традиционного и проектного обучения представлен в работе [5].

Важной составляющей образовательного процесса в вузе является формирование такой структуры дисциплин, которая позволит определить и целенаправленно управлять той частью необходимых зна-

ний и умений в профессиональной деятельности специалиста, которая зависит и от данной учебной дисциплины.

Математическое образование в техническом ВУЗе занимает особое место, поскольку устанавливает межпредметные связи за счет применения аналогии, интуиции, сравнения. Содержание и уровень изложения учебного материала по математике определяется рабочей программой и рекомендованными учебными пособиями с учетом привлекаемых учебных ресурсов, в том числе видов учебных занятий. Следует отметить, что при разработке структуры математической дисциплины основной задачей является четкое определение перечня разделов (тем), их взаимосвязь с предшествующими и последующими дисциплинами, содержания разделов по темам и затрат времени на аудиторные и внеаудиторные виды занятий [6]. В связи с этим возрастает актуальность правильного выбора структуры рабочей программы при ее проектировании с целью активизации учебного процесса и осуществления контроля ритмичности освоения содержащихся в ней разделов студентами.

На кафедре высшей математики Самарского государственного технического университета особое внимание при составлении рабочих программ уделяется проектированию комплексов индивидуальных заданий, построенных по возрастанию степени сложности, которые позволяют двигаться вперед, выстраивать систему своих знаний, исходя из собственных возможностей и устремлений, что способствует включению в проектную деятельность самих студентов. Индивидуальные задания погружают в изучаемый материал, развивают самостоятельные навыки. Выполнение индивидуальных заданий способствует подготовке студента к профессиональной деятельности, стимулирует к исследовательской деятельности, а также предполагает гуманистические основы, на значимость которых в учебно-воспитательном процессе указывали Д. Дьюи, В.А. Сухомлинский, Л.Н. Толстой, К.Д. Ушинский.

Важным в освоении такой дисциплины как математика, является правильный подбор задач при изучении того или иного раздела. Любая задача – это маленькая проблема, решение которой бросает вызов интеллекту студента, поэтому размышления над задачами развивает сообразительность и повышает уровень грамотности человека. При решении математических задач достаточно часто приходится формулировать, записывать в различных формах и математических моделях одно и то же утверждение с целью установления определен-

ной аналогии в задачах, что позволяет определить метод решения и найти его различные варианты. Знания специалистов технического профиля характеризуются не только количеством, но и качеством связей между ними. Необходимые смысловые связи будут образовываться, если в процессе обучения отдельные явления будут изучаться не изолированно, а как часть единого целого, что со-действует развитию конструктивно-моделирующих исследовательских умений [7, с. 169].

Оценка качества подготовки студентов при этом осуществляется по результатам педагогических измерений, которые представлены в рабочих программах как степень освоения дисциплины основной образовательной программы на каждом этапе изучения соответствующего ей учебного материала государственного образовательного стандарта.

Совместная проектная деятельность преподавателя, заключающаяся в умении выделить при составлении учебных рабочих программ наиболее важные компетенции в изучении дисциплины, с одной стороны и индивидуальная работа студентов, направленная на решение мини-проектов с другой стороны, положительно отражается на усвоении профессионально-значимых дисциплин студентами ВУЗа. Использование метода проектов в учебной деятельности – одно из определяющих педагогических условий системы подготовки студентов к научно-исследовательской деятельности в условиях непрерывного профессионального обучения. Метод проектов позволяет глубже проникать в суть явлений, развивает мышление, помогает формировать гражданскую позицию и систему общественных ценностей учащихся, а также мотивирует и активизирует познавательные процессы учащихся – внимание, восприятие, мышление, память, воображение, повышает интерес к предмету, что способствует повышению качества образования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Закон Российской Федерации "Об образовании" в редакции Федерального закона от 29.12.12 №273-ФЗ.
2. Положение о разработке рабочих программ профессиональных модулей основных профессиональных образовательных программ по наиболее перспективным и востребованным специальностям высшего профессионального образования. Самара, 2019. СамГТУ.

3. Семенюк Н.В. Проектная технология как средство повышения качества образования школьников // Проблемы и перспективы развития образования : материалы V Междунар. науч. конф. (г. Пермь, март 2014 г.). - Пермь : Меркурий, 2014. - С. 43- 45.
4. Ильченко В.Н. Использование метода проектов в целях повышения качества правового образования в школе / В. Н. Ильченко, А.А. Носко // Педагогическое образование в России. - 2017. - № 4. - С. 56-62.
5. Охтя Н.В. Повышение объективности оценки знаний слушателей подготовительных курсов САМГТУ / Н.В. Охтя // ВЕСТНИК Самарского государственного технического университета. Серия: психолого-педагогические науки. - 2010. - 3 (13). С. 139-144.
6. Михелькевич В.Н., Охтя Н.В. "Метод проектов" и его использование в средней общеобразовательной и высшей инженерной школах: Учеб.пособ. / Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2004. - 48 с.
7. Стельмах Я.Г. Активизация исследовательской деятельности студентов при изучении математики / Я.Г. Стельмах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Психолого-педагогические науки. - 2014. - №1 (21). -. С. 166-173.

УДК 378

## МЕТОДИЧЕСКИЕ СИТУАЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ОШИБКАМИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Салаватова С.С.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного  
университета, г. Стерлитамак, Россия;  
sssalavatova@mail.ru

Описана опытно-исследовательская работа по использованию методических ситуаций в системе профессионально-методической подготовки будущих учителей математики. Выделены два класса ситуаций: методические ситуации по преодолению имеющихся ошибок и методические ситуации по предупреждению ошибок.

**Ключевые слова:** методическая ситуация, методическая задача, обучение математике.

## METHODOLOGICAL SITUATIONS RELATED TO ERRORS STUDENTS WHEN LEARNING MATH

Salavatova S.S.

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
sssalavatova@mail.ru

*Experimental research work on the use of methodological situations in the system of professional and methodological training of future mathematics teachers is described. Two classes of situations are distinguished: methodological situations for overcoming existing errors and methodological situations for preventing errors.*

*Key words:* methodical situation, methodical task, teaching mathematics.

Идея моделирования педагогических ситуаций в системе профессиональной подготовки будущих учителей хотя и не является новой, однако не теряет своей актуальности по сей день. Это связано, во-первых, с тем, что педагогические ситуации пронизывают всю деятельность учителя-практика, то есть являются составной частью будущей профессиональной деятельности студента и потому должны входить в содержание его профессиональной подготовки. С другой стороны, моделирование педагогических ситуаций, используемое как метод обучения в учебном процессе, анализ различных возможных решений этих ситуаций позволяет формировать качественное практическое мышление будущего специалиста, основанное на "применении знаний всеобщего к частным ситуациям деятельности" [2]. Известный отечественный ученый Борис Михайлович Теплов, проведя в свое время психологическое изучение мышления великих полководцев, результаты которого изложены в его замечательной работе "Ум полководца высоко оценил роль практического мышления. Интересны его выводы о соотношении теоретического и практического ума: если в науке высокую ценность может иметь иногда неправильное в целом решение, но "дающее глубокое, оригинальное и верное освещение отдельных сторон вопроса то в работе практического ума такого быть не может и не должно [6].

Можно без преувеличения утверждать, что учитель в своей профессиональной деятельности является своего рода полководцем, которому приходится решать в кратчайшие сроки многообразные сложные педагогические задачи без права на ошибку.

Из всего многообразия педагогических ситуаций в настоящей статье объектом рассмотрения выступают методические ситуации, связанные с ошибками учеников при обучении математике.

Используя терминологический оборот "методическая ситуация" автор вкладывает в него следующие существенные свойства:

1) ситуация (от французского "situation") означает "положение, обстановка, совокупность обстоятельств";

2) использование прилагательного "методическая" основано на традиционном разделении понятий "педагогика" "дидактика" и "методика обучения конкретной дисциплине": в нашем случае исследуются педагогические ситуации , связанные с обучением математике;

3) под педагогической ситуацией понимается (вслед за принятым в учебном пособии "Педагогика высшей школы") "составная часть обучения которая характеризует "его состояние в определенное время и в определенном месте"[4]. Отметим, что педагогическая ситуация, это не задача, а лишь условие, при которой решается педагогическая задача.

В нашей опытно-исследовательской работе моделирование (конструирование) методических ситуаций происходит в системе методической подготовки будущих учителей математики в соответствии со следующими блоками - этапами:

1) Обоснование актуальности изучения и создания банка ситуаций, связанных с математическими ошибками обучающихся.

2) Анализ различных типов ошибок учеников, возникающих при обучении математике, выяснение причин их возникновения.

3) Выделение и конструирование 2-х классов методических ситуаций: ситуаций совершившихся ошибок у обучающихся и ситуаций по предупреждению ошибок.

Алгоритм конструирования любых методических ситуаций требует ответа, по крайней мере, на 3 основных известных вопроса методики: "для чего?"(вопрос о целях деятельности), "что?"(вопрос о содержании деятельности), "как?"(вопрос о методах,формах и средствах обучения с учетом возрастных и других особенностей обучающихся). Ответ на первый вопрос находится в названии ситуации. Вопрос о содержании деятельности предполагает наличие информации у учителя о различных типах возможных ошибок учеников и их причин. Третий вопрос можно переформулировать так: как построить, организовать учебный процесс, чтобы избежать этих ошибок?

Итак, первая методическая ситуация в общем виде такова: "име-

ет место ошибки ученика"; далее формулируем задачу: что делать в этой ситуации? Вторая методическая ситуация в общем виде формулируется так: "учитель совместно с учениками начинает осуществлять некоторую математическую деятельность далее ставится методическая задача: как работать учителю, чтобы при этом не возникали ошибки?

Для ответа на поставленные задачи-вопросы необходимо выяснить, а какие ошибки могут возникнуть у учащихся.

Отметим, что вопросы, связанные с математическими ошибками (сущность, виды ошибок, причины их возникновения, методика предупреждения ошибок) рассматривали в разные времена многие известные методисты: В.М.Брадис, В.Г.Болтянский, Ю.М. Колягин, Г.И. Саранцев, В.И.Рыжик и другие. Однако до настоящего времени ошибки учеников сопровождают процесс обучения математике и названные выше вопросы остаются предметом исследования современных методистов.

Выделим некоторые современные работы, которые посвящены классификации математических ошибок школьников.

Так, известный математик-педагог В.А.Далингер в ряде своих работ выделяет случайные ошибки, к которым относит те, "которые появляются однократно, не систематически у одного-двух обучающихся" и типичные (устойчивые, систематические) ошибки учеников, понимая под этим те ошибки, "которые появляются у одного и того же обучающегося (или у нескольких) неоднократно, или те, которые появляются хотя и однократно, но у многих обучающихся". Кроме того отмечается также, что эти ошибки имеют "высокую частоту "встречаемости" в работах обучающихся то есть имеют массовый характер [1, с. 94-95].

В работе Н.С.Майковой [3, с. 115-117] выделены 4 класса ошибок, которые встречаются при решении задач: ошибки понимания постановки задачи, ошибки составления плана решения задачи, ошибки осуществления плана решения задачи и ошибки изучения полученных результатов. Известны также классификации ошибок, связанные с психологическими факторами: специфика внимания, памяти, мышления, репрезентативных систем и др.

В своем опыте, строя методические ситуации и соответствующие задачи, мы выделяем общематематические (логические) ошибки и ошибки тематические (некоторые авторы называют их "потемными"), то есть связанные со спецификой содержания определенной

изучаемой темы.

Для иллюстрации тематической ошибки приведем ситуацию, содержащую одну из типичных ошибок учащихся (из имеющегося у нас банка ошибок учеников) по теме "Решение квадратных неравенств из года в год сопровождающую выпускников 9-х классов: если ученику предложить решить неравенство вида  $ax^2 + bx + c > 0$ , при условии, что  $a > 0$  и  $D < 0$ , или же неравенство вида  $ax^2 + bx + c < 0$ , при условии, что  $a < 0$  и  $D < 0$ , то примерно в 80% случаев школьники, имеющие оценку "4" по математике, отвечают, что это неравенство не имеет решений.

К общематическим (логическим) ошибкам мы относим ошибки, которые могут возникать при работе с математическими понятиями (например, неверное выделение существенных и несущественных свойств понятия, формирование ошибочных ассоциаций и др.), при работе с теоремами (неумение обосновать истинность утверждения, составить обратное и противоположное утверждения, замена прямо-го утверждения обратным, тавтология в рассуждениях, неверное заключение по аналогии и т.п.).

Возвращаясь к задаче, связанной с методической ситуацией 1-го вида: "имеет место ошибка ученика отмечаем, что здесь требуется выяснение дополнительного условия: определить вид ошибки, то есть выявить, является ли она случайной по невнимательности, либо же неслучайной. В том случае, если ошибка случайная, ученик ее легко исправит, особых действий учителя не требуется. Однако, если ошибка не случайная, то не стоит надеяться, что ученик ее увидит и поймет свою ошибку. В этом случае переходим к действиям, согласно ситуации предупреждения ошибки.

Модель методической ситуации 2-го типа: в ходе той или иной математической деятельности учитель работает целенаправленно на предупреждение ошибки. Для этого в некоторых случаях, таких как работа с понятиями, теоремами, задачами, аксиомами методической наукой и практикой выработаны определенные схемы, технологии. В рамках настоящей статьи нет возможности привести описания этих технологий, однако они приведены в ряде опубликованных работ автора (см., к примеру [5]).

Ниже для иллюстрации приведем несколько примеров моделей ситуаций, используемых нами в опытно-исследовательской работе.

**Пример 1.** Модель методической ситуации, связанной с ошибками при работе с математическим понятием.

При формировании понятия "ромб" довольно часто в учебных пособиях и в практике некоторых школьных учителей для удобства используется только такое изображение ромба, которое приведено на рисунке 1.

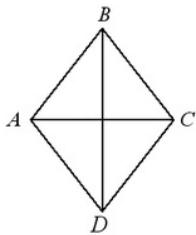


Рис. 1.

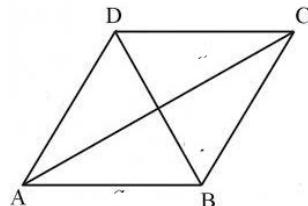


Рис. 2

Использование только такого положения ромба на чертеже привело к ситуации создания у учеников неправильной ассоциации: несущественное свойство ромба "расположение чертежа в плоскости доски или тетради" превратилось в существенное, которое привело к тому, что ученики, видя изображение ромба в другом положении, например, на рисунке 2, испытывают неуренность и называют эту фигуру скорее параллелограммом, но не ромбом. Данная ситуация создает методическую задачу: каким образом преодолевать такие ошибки? В данном случае ответ прост: использовать всевозможные расположения используемой фигуры.

**Пример 2.** Модель методической ситуации по предупреждению ошибок учащихся при работе с математическими понятиями.

На основе анализа вышеприведенной модели методической ситуации, содержащей ошибочные действия учителя, создайте модель действий учителя по предупреждению таких ошибок.

Далее происходит развитие этой задачи, студенты составляют образец принятия правильного способа действия учителя при введении других геометрических (а также алгебраических) понятий, с тем чтобы несущественные свойства понятия не превращались в существенные. Как указано выше, способ действий может быть выбран в соответствии с разработанной в методике технологией работы с понятиями.

Таким образом, построен определенный алгоритм в работе с методическими ситуациями: при ситуации наличия ошибки: выясни тип ошибки (случайная или типичная), в случае случайной ошибки нет

необходимости заострения на нем, нужно лишь дать возможность ученику исправить ее, а в случае типичной ошибки, надо переходить к действиям согласно модели ситуации по предупреждению ошибок.

Как известно, отношение к тому, что "нужно ли использовать задачи с ошибками при обучении" нужно ли вводить обучающихся в ситуацию совершения ошибки неоднозначное. Однако, опыт автора позволяет утверждать об эффективности использования таких ситуаций. Приведу пример (см. Пример 3) хода и результата многократного эксперимента с аудиторией различной подготовки (школьники, студенты, учителя математики).

**Пример 3.** Методическая ситуация по предупреждению ошибок, с использованием приема "учим на ошибках".

Рассматривая метод угадывания корней (по терминологии известного учителя математики Р.Г. Хазанкина "метод пристального взгляда"), учитель начинает работу с иррациональных уравнений, которые ученики не смогут решить с помощью известных алгоритмов. Например, решить уравнение:

$$\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = 10.$$

Шаги решения: 1) угадай корень (в данном случае  $x = 2$ ); 2) докажи, что других корней нет или найди их (в данном случае доказываем, что левая часть представляет собой возрастающую функцию, и следовательно, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента). Далее ребятам тут же предлагаются и такое уравнение, которое они хотя и могут решить известным способом, однако рациональнее использовать метод угадывания корней, например, решить уравнение  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$  методом угадывания корня. Следующий шаг – обманный, при котором учитель специально делает ошибку, решая уравнение  $x + 1/x = 1/3$ , а именно сам быстро называет корень  $x = 3$  и "обосновывает" факт что других корней нет тем, что в левой части сумма двух монотонных функций, и следовательно, как монотонная функция она принимает свое значение  $1/3$  только при одном значении аргумента.

Эффект ситуации в том, что далее учитель признается в глупости своих "обоснований" (при этом с обучающимися выясняются все допущенные нелепости), называет еще один корень уравнения и просит теперь правильно обосновать, что других корней нет.

О чём говорит данная методическая ситуация? Во-первых, о том, что когда учащимся дается много однообразных заданий, они могут

упустить важные особенности условий. Во-вторых, удачный эксперимент, когда удалось "обмануть" даже учителей, подтверждает тот факт, что учитель обладает большой силой увлечения обучающихся за собой. И потому его ошибки чреваты большими последствиями. Необходимо учить учеников критичности восприятия информации, обоснованию каждого шага своих действий.

**Выводы.** На основе анализа школьной практики и собственного лонгитюдного исследования в ходе многолетнего руководства педагогической практикой студентов выявлено наличие связи между двумя выделенными классами методических ситуаций: если в учебной ситуации учителем неверно выбран способ математической деятельности и способ воздействия, неграмотно осуществлены возможности предупреждения ошибок, то обязательно вслед за этим возникает ситуация по преодолению совершенных учеником ошибок. В то же время правильно принятное учителем решение в ситуации работы с математической информацией по предупреждению ошибок может привести лишь к ситуации случайных или единичных ошибок.

В заключение отметим, что как показывает многолетний опыт использования моделей различных методических ситуаций, имитации решения методических задач в системе профессиональной подготовки будущих учителей, несомненно повышает уровень их компетенций, практического мышления, делает процесс обучения более привлекательным для студентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далингер В.А. Типичные ошибки учащихся по математике и их причины // Современные научноемкие технологии. 2014. № 12-1. С. 94-97.
2. Кулюткин Ю.Н. Творческое мышление в профессиональной деятельности учителя. URL: <http://www.voppsy.ru/issues/1986/862/862021.htm> (дата обращения 07.07.2021).
3. Майкова Н.С. Виды ошибок учащихся при обучении решению геометрических задач, их причины и способы предупреждения // Известия Российского государственного педагогического ун-та им. А. И. Герцена. №73-2. СПб, 2008. С. 113–118.
4. Егоров В.В., Скибицкий Э.Г., Храпченков В.Г. Педагогика высшей школы / Сост. . Новосибирск: САФБД, 2008. 260 с.

5. Салаватова С.С. Технология как педагогическая категория. Подготовка будущих учителей математики к реализации технологического подхода: Монография. 2-е изд., перераб. о Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2017. 196 с.
6. Теплов Б.М. Ум полководца (опыт психологического исследования мышления полководца по военно-историческим материалам // Теплов Б.М. Избр. труды. В 2-х томах. Т.1. М., 1985. С. 223–305.

УДК 378

## АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО РЕСУРСА LEARNIS

Салаватова С.С.<sup>1</sup>, Юлбарисова Ю.Ш.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, Россия;

<sup>2</sup> МБОУ "Гимназия №2", г. Салават, Россия;  
sssalavatova@mail.ru, fgt31015@mail.ru

В статье изложены результаты опытно-экспериментальной работы по активизации познавательной деятельности учащихся на уроках математики с использованием образовательного ресурса "learnis". Диагностика уровня познавательной активности учащихся проводилась по методике Г.И. Щукиной с выделением четырех уровней познавательной активности.

**Ключевые слова:** активизация, познавательная деятельность, обучение математике, уровни познавательной активности.

## ACTIVATION OF COGNITIVE ACTIVITY OF STUDENTS IN MATHEMATICS LESSONS USING THE EDUCATIONAL RESOURCE "LEARNIS"

Salavatova S.S.<sup>1</sup>, Yulbarisova Yu.Sh.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

<sup>2</sup> MBOU "Gymnasium № 2", Salavat, Russia  
sssalavatova@mail.ru, fgt31015@mail.ru

*The article presents the results of experimental work on the activation of cognitive activity of students in mathematics lessons using the educational resource "learnis". Diagnostics of the level of cognitive activity of students was carried out according to the method of G. I. Shchukina with the allocation of four levels of cognitive activity.*

*Key words:* activation, cognitive activity, teaching mathematics, levels of cognitive activity.

Активизацию познавательной деятельности учащихся мы выделяем в качестве одного из главных направлений совершенствования обучения математике.

Поскольку речь идет об активизации познавательной деятельности, следует вначале определиться с понятием "познавательная деятельность".

Учение о познании имеет длинную историю, берет свое начало в античной философии, связано с трудами Аристотеля, Сократа, Платона, Ф.Бэкона, Р.Декарта, Гегеля, и др. Современный этап развития учения о познавательной деятельности в отечественной науке связан с именами Б.Г. Ананьева, А.Н.Леонтьева, Н.Ф.Талызиной, Г.И.Шукиной и др.

Из многочисленных подходов и определений рассматриваемого понятия в качестве рабочего нами выбрано определение, приведенное в педагогическом словаре А. Коджаспирова, согласно которому "познавательная деятельность – сознательная деятельность субъекта, направленная на приобретение информации об объектах и явлениях реальной действительности, а также конкретных знаний [2, с. 102].

Г.С. Нога активизацию познавательной деятельности понимает как целеустремленную деятельность учителя, направленную на совершенствование содержания, форм, методов и средств обучения с целью возбуждения познавательной деятельности, творчества и самостоятельности учащихся при усвоении знаний, умений и навыков [3].

На современном этапе развития педагогической теории и практики большие возможности для активизации познавательной деятельности обучающихся видятся в использовании информационно-коммуникационных технологиях. В настоящее время каждый учитель имеет возможность использовать такие платформы. Однако эффективность таких платформ с одной стороны недостаточно исследо-

дovана, с другой стороны, недостаточна методически разработана.

В своей опытно-экспериментальной работе мы исследовали эффективность применения образовательного ресурса Learnis (<https://www.learnis.ru/>) для активизации познавательной деятельности учащихся.

Для работы на данном образовательном сервисе подойдет любой современный гаджет и интернет, что делает данный ресурс более удобным в применение его на уроках математики.

Образовательный сервис Lernis имеет целый набор инструментов, таких как:

- Веб квесты "Выберись из комнаты".
- Интеллектуальная игра "Твоя викторина".
- Терминологическая игра "Объясни мне".
- Веб-сервис "Интерактивное видео".

Данный сервис выбран нами в связи с тем, что его формат содержит игровую технологию и потому привлекателен для пользователей.

Д.Б. Эльконин отмечал, что в игре не только развиваются и заново формируются отдельные интеллектуальные операции, но и коренным образом может изменяться позиция ребёнка в отношении к окружающему миру [4, с. 97].

Экспериментальная работа проходила с использованием двух классов: экспериментального и контрольного.

В данной статье рассмотрим более подробно один из инструментов образовательного ресурса, такого как веб-квест "Выберись из комнаты". В предложенном инструменте образовательного ресурса мы создали математический веб-квест "Остров знаний". Цель такого математического веб-квеста заключается в том, чтобы ученики закрепили свои полученные знания и проверили их.

На рисунке 1 представлена комната для прохождения математического квеста под названием "Остров знаний".

В ходе данной игры, ученики должны решить не только задачи математического характера, но и развить свои аналитические и творческие способности. Ведь идея прохождения веб-квеста "Выберись из комнаты" заключается в том, что ученик должен логически догадаться где спрятаны задачи, например для того чтобы включить компьютер нужно ввести пароль, а паролем является дата изображенная на доске в комнате квеста (рис. 1). И после того как ученик решит все задания правильно он сможет открыть дверь комнаты.

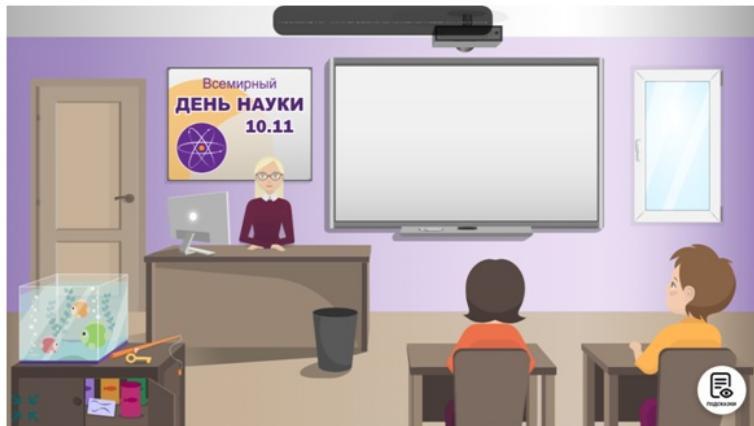


Рис. 1. Скриншот фрагмента веб-квеста.

Математический веб-квест "Остров знаний" для учащихся 7Б класса был разработан как обобщающий урок по курсу геометрии. На рисунке 2 и 3 изображены некоторые задания математического квеста "Остров знаний".

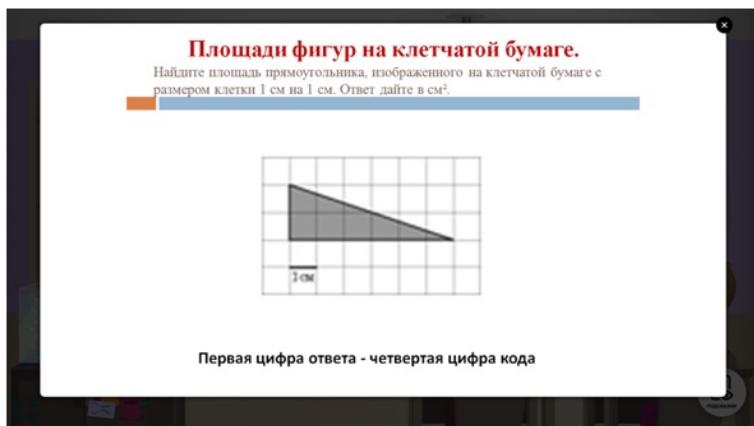


Рис. 2. Скриншот фрагмента веб-квеста.

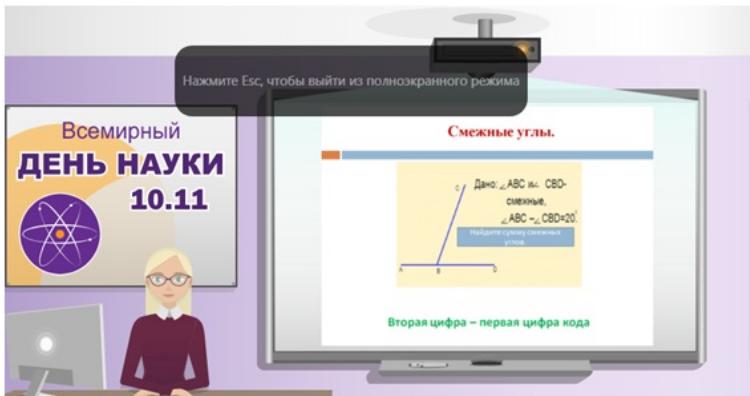


Рис. 3. Скриншот фрагмента веб-квеста.

Исследование по использованию образовательного ресурса Learnis для активизации познавательной деятельности учащихся проводилось в период с февраля 2021 по май 2021 года. В качестве экспериментальной группы выступали учащиеся 7 "Б" класса МБОУ "Гимназия № 2" города Салавата, при обучении которых активно использовался данный образовательный ресурс уроках математики. В качестве контрольной группы выступали учащиеся 7 "А" класса, где уроки проводились в традиционной форме.

Диагностику уровня познавательной активности учащихся проводилась по методике Г.И. Щукиной [3]. Данная методика выделяет четыре уровня познавательной активности:

- Нулевой уровень (ученику не интересно на уроке, ведет себя пассивно и не проявляет желание к самостоятельной работе).
- Низкий уровень (ученик стремиться запомнить, понять, воспропризвести знания. Данный уровень отличается отсутствием интереса к углубленному знанию).
- Средний уровень (ученик стремиться познать новые знания и ищет пути решения проблемных ситуаций).
- Высокий уровень (ученик проявляет свои творческие способности и стремиться не только глубоко проникнуть в суть, но и найти для этой цели новый способ).

Результаты данного исследования показали, что уровень познавательной активности учащихся стал на ступень выше, следовательно, наше исследование подтверждает эффективность использования об-

разовательной платформы Learnis на уроках математики для активизации познавательной деятельности учащихся.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дементьева О.М. Особенности познавательной деятельности в образовательном процессе // Современные проблемы науки и образования. 2017. № 2.
2. Коджаспиров А. Педагогический словарь. М.: Изд-во "МарТ" 2000. 176 с.
3. Нога, Г.С. Активизация познавательной деятельности в процессе обучения. Ташкент: Фан, 1983. 89 с.
4. Щукина Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе. М.: Просвещение, 1979. 160 с.
5. Эльконин Д.Б. Психология игры. 2-е изд. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. 360 с.

УДК 378

### АКТИВИЗАЦИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ДОШКОЛЬНИКОВ НА ИНТЕГРИРОВАННЫХ ЗАНЯТИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ И КОНСТРУИРОВАНИЮ

Старирадева Й.М.

Великотырновский университет им. Кирилла и Мефодия,

г. Велико Търново, Болгария;

[vimirin@abv.bg](mailto:vimirin@abv.bg)

*Разработана теоретическая модель процесса активизации познавательной деятельности на основе интегрированных занятиях по математике и конструированию. Включает взаимосвязанные компоненты и реализуется в определенной последовательности: целевой, содержательный, методический, операционально-деятельностный и результизивно-рефлексивный.*

*Ключевые слова: активизация, познавательная деятельность, интегрированные занятия, математика, конструирование, теоретическая модель.*

## ACTIVATION OF COGNITIVE ACTIVITIES PRESCHOOLERS IN INTEGRATED LESSONS OF MATHEMATICS AND CONSTRUCTION

Stariradeva Y.M.

Veliko Tarnovo University Cyril and Methodius,

Veliko Tarnovo, Bulgaria;

vimirin@abv.bg

*A theoretical model of the process of enhancing cognitive activity based on integrated lessons in mathematics and construction has been developed. It includes interrelated components and is implemented in a specific sequence: target, meaningful, methodical, operational-activity and productive-reflexive.*

*Key words:* activation, cognitive activity, integrated lessons, mathematics, construction, theoretical model.

Активизация у детей познавательной деятельности является одной из приоритетных задач дошкольного образования, решение которой вплетено в целостный воспитательно-образовательный процесс, как бы "пронизывает" развитие его сторон, и во многом предопределяет эффективность создания необходимых предпосылок дальнейшего успешного обучения детей в школе.

Проблема активизации познавательной деятельности в разных аспектах отражена в философской литературе: (Н.А. Бердяев, Г. Гегель, К.А. Гельвеций, Д. Дидро, В.В. Зеньковский, Г.В. Лейбниц, Н.А. Лосский, В.В. Розанов, В.С. Соловьев, и др.), а также в психологических (Д.Б. Богоявленская, Л.С. Выготский, А.М. Матюшкин, С.Л. Рубинштейн и др.) и педагогических исследованиях (Г.М. Лебедев, Г.И. Щукина, Т.И. Шамова и др.). Рассмотрены структура и динамика познавательной активности личности, особенности развития как в общепсихологическом, так и возрастном аспектах, даны ее определения.

Значительным потенциалом в развитии познавательной деятельности старших дошкольников обладают занятия по формированию элементарных математических представлений (А.М. Леушина, Н.А. Менчинская, Е.И. Тихеева). При разработке методики формирования этих представлений авторы в первую очередь выделяли такие методы, которые способствуют организации практической деятельности детей и дают возможность использовать математические знания в продуктивной деятельности.

Материалы Международной конференции. Сентябрь, 2021 г.

На основе концепции формирования элементарных математических представлений у дошкольников, разработанной А.М. Леушиной, изучались различные вопросы математического развития детей. Успешность обучения математике исследователи ставили в прямую зависимость от степени сформированности познавательной деятельности дошкольников, которая существенно возрастала в условиях соединения элементарной математической деятельности с деятельностью конструирования. При этом было обнаружено, что интегрированное содержание занятия, построенное на взаимосвязи элементарной математической деятельности и конструирования, обладает большим потенциалом формирования познавательной деятельности детей старшего дошкольного возраста, нежели работа с содержанием каждой из этих деятельности раздельно. Некоторые авторы (В.С. Безрукова, М.В. Лазарева, Н.К. Чапаев и др.), утверждают, что, подчиняясь универсальному закону гетерозиса (изменения, превращения), любое предметное содержание, обогащенное интегративными связями (не только тематически, но и операционально-деятельностно), несомненно, обладает большим развивающим резервом, чем традиционные занятия. Интеграция содержания образования, по мнению многих исследователей, является одним из педагогических условий, эффективно влияющих на развитие эмоционально-интеллектуальной сферы личности ребенка.

Действенным средством для преодоления перегрузки детей при сохранении качества воспитательно-образовательной работы является интегрированное обучение, в частности, такая его форма организации как интегрированное занятие. Как инновационное явление в педагогической практике, интегрированное обучение вызывает сложность во внедрении в практику в силу слабой теоретической обоснованности.

По мнению Н.С. Лейтеса, именно интегрированное обучение (на основе междисциплинарного подхода) создает благоприятные условия для интеллектуального развития детей.

В исследованиях Н.Н. Поддъякова подчеркивается, что проблемность (наличие противоречий, нуждающихся в разрешении) является мощным стимулятором активности детей. Интегрированное содержание чаще всего основано на проблемности, и, следовательно, имеет значительный потенциал, реализуемый в процессе активизации познавательной деятельности.

Несмотря на слабую изученность развивающего потенциала инте-

грированных занятий, в современной теории и практике дошкольного образования имеется опыт установления связей между отдельными компонентами их содержания. Наибольшее количество работ посвящено развитию творческих способностей дошкольников средствами взаимосвязи различных видов детской художественной деятельности: изобразительной, музыкальной, театрализованной, речевой. Появились исследования, в которых изучается математическое развитие на основе ознакомления с художественной литературой (Т.С. Шевченко), рассматривается взаимосвязь музыкального и математического развития на занятиях (В. А. Лаптева, В. А. Ралькова ).

Математическое содержание связано с различными разделами программы, среди которых логично выступает такой вид продуктивной деятельности, как конструирование. Детское конструирование, являясь практической деятельностью, отвечающей интересам и потребностям дошкольников, при целенаправленной организации обучения может носить подлинно развивающий характер и влиять на активизацию познавательной и творческой деятельности (Т.В. Кудрявцев, Н.Н. Поддъяков, Л.А. Парамонова, О.А. Сафонова). По данным авторов, интегративность математической деятельности и конструирования определяется наличием между ними естественных жизненных связей. Конструирование как практическая деятельность предоставляет дошкольникам такой жизненный материал, в котором ребенок глубже осмысливает математические знания и понимает их практическую значимость, при целенаправленной организации способствует формированию познавательных мотивов, интересов и потребностей ребенка, развивает познавательную деятельность.

В методической литературе отражен опыт интегрирования, вместе с тем пока еще нет четких ориентиров для проведения интегрированных занятий по математике и конструированию.

Мы предполагаем, что познавательная деятельность детей старшего дошкольного возраста может быть сформирована в условиях установления и реализации взаимосвязи между содержанием математического знания и содержанием конструирования на занятиях.

Структура познавательной деятельности старших дошкольников содержит следующие значимые компоненты:

- мотивационный;
- креативный;
- волевой.

Теоретическая модель процесса активизация познавательной де-

ятельности детей старшего дошкольного возраста включает взаимосвязанные компоненты и реализуется в определенной последовательности:

- а) целевой – активизация познавательной деятельности (интересов, потребностей, мотивов);
- б) содержательный – элементарные математические представления и конструирование во взаимосвязи (их реализация в процессе личностно-ориентированного обучения);
- в) методический – формы организации познавательной деятельности: традиционные занятия по конструированию и математическому развитию, и интегрированные занятия, а также методы и приемы, направленные на развитие познавательной активности: экспериментирование, игровые и проблемные ситуации, наглядные методы и приемы и т.п.;
- г) операционально-деятельностный – деятельность педагога (реализация субъект-субъектных отношений, личностно-ориентированного подхода к активизацию познавательной деятельности), взаимосвязанная с деятельностью ребенка (проявление инициативы, самостоятельности, интереса и других показателей познавательной активности);
- д) результативно-рефлексивный – (оценка педагогом деятельности ребенка и собственной деятельности по достижению цели, коррекция результатов; оценка и самооценка ребенка как проявление познавательной активности, коррекция результатов деятельности).

Интегрированные занятия обеспечивают единство в раскрытии темы на материале математики и конструирования, а также создают благоприятные условия для поиска связей и отношений между предметами, явлениями, их свойствами и качествами. Математические представления закрепляются в конструировании и лучше осмысливаются детьми, поскольку применяются в продуктивной деятельности, либо порождаются в конструктивной деятельности и воспринимаются как новая, неизвестная грань конструирования, а процесс конструирования становится более осознанным на всех этапах творческой деятельности (в формировании замысла, в исполнительской части и в результативно-рефлексивной).

Наиболее эффективным в активизации познавательной деятельности исследователи считают обеспечение перехода от конструирования по образцу к конструированию по условию, а от него - к свободному творческому конструированию (Н.Н. Поддъяков, Л.А. Па-

рамонова). Принципы жизненности содержания дошкольного образования (Е.А. Флерина) и наличия естественных, существенных связей между компонентами содержания интегрированных занятий обусловливают возможность соединения (интеграции) математических представлений с конструированием как практической продуктивной деятельностью, апробирующей и реализующей эти представления.

Разработанная теоретическая модель процесса активизации познавательной деятельности включает взаимосвязанные компоненты и реализуется в определенной последовательности: целевой, содержательный, методический, операционально-деятельностный и результативно-рефлексивный.

Интегрированные занятия обеспечивают единство в раскрытии темы на материале математики и конструирования, а также создают благоприятные педагогические условия для развития познавательной активности детей. Математические представления закрепляются в конструировании и лучше осмысливаются детьми, поскольку применяются в продуктивной деятельности, либо порождаются в конструктивной деятельности и воспринимаются как новая, неизвестная грань конструирования, а процесс конструирования становится более осознанным на всех этапах творческой деятельности.

Изучаемую нами проблему нельзя считать исчерпанной.

Предстоит экспериментальная проверка теоретической модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусарова С.В. Формирование представлений о технике как средство развития познавательного интереса у детей старшего дошкольного возраста: Автореф. дисс. .канд. пед. наук. М., 2009. 27 с.
2. Лазарева М.В. Интегрированные занятия по познавательному развитию детей // Воспитатель дошкольного образовательного учреждения. 2008. №10 (16). С. 44–49.
3. Лазарева М.В. Здоровьесберегающий потенциал интегрированных занятий с детьми дошкольного возраста // Ценностные приоритеты здоровья и профессионально-личностного развития студентов в образовательном пространстве физической культуры: материалы Всероссийской научно-практической конференции 16-17 сентября 2008 года, Москва. М.: МАНПО, 2008. С. 150–153.

УДК 531; 534

## О РОЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ

Хакимов А.Г.

ИМех им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия;  
[hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

*Инженера - механика следует учить лишь тому, что трудно освоить индивидуально, сначала теоретической механике.*

*Ключевые слова:* теоретическая механика, динамика.

## THEORETICAL MECHANICS AS AN ABC FOR A MECHANICAL ENGINEER

Khakimov A.G.

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russia;  
[hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

*A mechanical engineer should be taught only what is difficult to master individually, first theoretical mechanics.*

*Key words:* theoretical mechanics, dynamics.

Ни одно творение техники невозможно без использования законов механики [1]. Знание истории механики углубляет педагогический процесс в конкретных механических дисциплинах: ведь структура современной механики и ее разделов не представляет собой чего-то неизменного; она является результатом исторического развития этих дисциплин[2]. Выдающиеся ученые и педагоги — Н. Е. Жуковский, Г. К. Суслов, А. И. Некрасов, В. В. Голубев, А. П. Минаков не только прекрасно знали историю механики, но гибко и умело пользовались этими знаниями для углубления лекционного материала. В этом смысле известная фраза Жуковского о том, что человек полетит, опираясь не на силу мускулов, а на силу разума, вполне оправдывалась [1].

К сожалению, курсы динамики машин и ее фундаментальной основы — теории колебаний при подготовке специалистов этого проффиля не только не являются основными, но порой вообще отсутствуют

[3]. Университетские курсы этих наук не ориентированы на инженера. Фундаментальная инженерная специальность «Динамика и прочность машин» предназначена расчетчикам, прививает навыки повреждения расчета и обеспечения надежности уже существующих конструкций, но не дает достаточных знаний по проектированию машин и управлению ими. Обучение же специалистов по автоматическим системам не связано с основополагающими механическими дисциплинами: теорией колебаний, механикой сплошных сред, теоретической механикой, практикой конструирования машин. Постоянное возрастание роли механики — закономерная черта технического прогресса. Поэтому остро необходимо формирование фундаментальной вузовской дисциплины, посвященной проблемам синтеза автоматизированных машин и систем, объединяющей на основе механики вопросы динамики, управления и прочности. Учить, по нашему убеждению, следует лишь тому, что трудно освоить индивидуально, — фундаментальным наукам, навыкам их приложений. И лишь тех, кто имеет к этому несомненные способности. Техника развивается быстро, и учиться нужно всю жизнь. Но многое в деловых качествах инженера определяется тем, как начался этот процесс в молодые студенческие годы, когда закладывались основополагающие знания. Пожалуй, полезно было бы у рабочего места каждого специалиста вывешивать его диплом с оценками, как это принято в некоторых странах: профессиональную репутацию надо зарабатывать смолоду [4]. «Береги платье снову, а честь смолоду» — так сказал... Старший Гринев (отец Петруши Гринева) в произведении А. С. Пушкина «Капитанская дочка», отправляя сына служить Отечеству. Так прозвучал его отцовский завет: «Прощай, Петр. Служи верно, кому присягнешь; слушайся начальников; за их лаской не гоняйся; на службу не напрашивайся; от службы не отговаривайся ...». Просчеты, связанные с подготовкой инженеров-конструкторов, могут иметь для общества серьезные отрицательные последствия [3]. В США, например, создана специальная комиссия из высокоавторитетных ученых для исследования современных задач, стоящих перед механикой, и разработки предложений по их решению в общегосударственном масштабе. Высказываются тревожные опасения по поводу нехватки инженеров-механиков из-за переориентации молодежи на более «модные» электронные специальности. Подобная тенденция в образовании заметна и у нас [3]. Эту диспропорцию необходимо выправить. Механику и ЭВМ могут соединить талантливые высококвалифицированные кадры, владею-

щие методами современной науки и искусством конструирования, а появиться они могут лишь тогда, когда в обществе престиж конструктора будет чрезвычайно высок [3].

В настоящее время нет глубокого понимания такого рода нелинейных процессов среди большинства специалистов в области вибраций и прочности, занимающихся проблемами надежности, безопасности и бесшумности объектов современной техники как в России, так и на Западе. Эти разработки – российский приоритет [4]. При оценке надежности и безопасности технических объектов, в первую очередь, должны быть рассмотрены именно нелинейные многократные резонансные процессы – самые напряженные, т.е. опасные динамические режимы – многомерные волновые и колебательные резонансные взаимодействия в конструкциях машин и аппаратов, в сооружениях, в транспортных системах и в других сложных управляемых динамических объектах. Разработанные основы нелинейных многочастотных резонансных колебаний механических систем дают достаточные основания развивать исследования нелинейных колебаний для различных объектов современной техники, в том числе и для таких важных проблем, как “земной резонанс” вертолета [4]. Подтверждение выводов авторов [3] дается в [5]. Система постоянного контроля вибрации, установленная на гидроагрегате № 2, выполняла информационную задачу для эксплуатационного персонала, не имела блока спектрального анализа вибрации и быстродействующей буферной памяти для сохранения параметров вибрации при ненормальных режимах работы. ... 11 шпилек разрушились по резьбе при площадях усталостного излома: от 80 до 98 процентов от общей площади сечения шпильки. ... Остальные 6 шпилек имеют полную длину, резьба не сорвана, что может свидетельствовать об отсутствии на них гаек в момент срыва турбины. Длина не разрушенной шпильки составляет 245 мм и соответствует заданной по чертежу. Здесь же приводятся данные о людском и материальном ущербе от этой аварии [5].

Большое значение приобретают проблемы формирования экстремальных волн в результате силового, теплового, радиационного или ударного нагружения границ тел и конструкций [6, 7].

Если бы марсоход Perseverance [8], шестиколесный ровер размером с небольшой паркетник стоимостью 2,7 млрд., не достиг поверхности Марса в проектном режиме, то ущерб был бы только материальный. Он стал самой тяжелой и сложной астробиологической лабораторией, когда-либо отправленной на поверхность этой планеты. Запущенный

американской ракетой *Atlas* в июле 2020 года, оказавшись на поверхности планеты, он сразу же приступил к работе и прислал свой первый снимок окружающей панорамы, сделанный с одной из своих 19 камер. *Perseverance* на 14 процентов тяжелее работающего на планете с 2012 года ровера *Curiosity*, он и сложнее своего предшественника. Посадка марсохода, проходившая в несколько этапов, стала серьезным техническим вызовом. С помощью парашюта и реактивных двигателей ему надо было погасить скорость с 20 тыс. км/час до нуля. Проходила она в автоматическом режиме, поскольку радиосигнал с планеты в настоящее время идет до Земли 11 минут [8].

В №4 за 2016 г. «Морской флот» начал публикацию материалов о кафедрах морских университетов. В этом номере редакция журнала предлагает материал о кафедре теоретической механики и сопротивления материалов МГУ им. адм. Г.И. Невельского. В новых ФГОС с каждым годом сокращается количество часов на фундаментальную общеинженерную подготовку [9]. В некоторых вузах уже раздают эту нагрузку специальным, выпускающим кафедрам, а это уже профанация образования, поскольку для преподавания таких дисциплин требуется специально обученный человек [9]. Уровень профессиональной подготовки при таком подходе к решению злободневной для всей России задачи будет падать еще быстрее. Высшее техническое образование в стране упорно движется к уровню профессионально-технического училища, ну может быть, колледжа [9]. То есть сегодня, через 73 года с тех пор, когда морские техникумы были преобразованы в высшие учебные заведения, начался обратный процесс. Перечислю содержание цикла: теоретическая механика, сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин. Оппоненты могут возразить, а пятьдесят процентов на самостоятельную подготовку? Их же тоже надо учитывать в общей нагрузке. Учитывать-то можно, но большинство современных ЕГЭшных выпускников школ в принципе не могут учиться самостоятельно. Вот и получается – круг замкнулся [9].

Какие варианты улучшения преподавания теоретической механики существуют:

1. Вернутся к системе, которая существовала в 1970 годах прошлого века. На это потребуется время, потому что кадров нет [9].
2. Студентам, избравшим технические специальности технических ВУЗов самостоятельно изучать курс теоретической механики, например, по учебникам Н.В. Бутенина, Я.Л. Лунца, Д.Р. Меркина [10, 11].

Инженера - механика нужно учить механике. Сначала азбуке машиностроителя - теоретической механике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тюлина И. А.* История и методология механики. М., Изд-во Моск ун-та. 1979. 282 с.
2. *Тюлина И. А.* [http://publ.lib.ru/ARCHIVES/T/TYULINA Irina Aleksandrovna Tyulina I.A..html](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/T/TYULINA_Irina_Aleksandrovna_Tyulina_I.A..html).
3. *Фролов К.В., Бабицкий В.И.* Механика и искусство конструирования в эпоху ЭВМ // Изобретатель и рационализатор. 1986. № 12. С. 16, 17, 25.
4. *Ганиев Р.Ф.* О современном состоянии и перспективах развития ИМАШ РАН. Проблемы механики машин и прорывных технологий // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 3. С. 11-36.
5. *Акт технического расследования причин аварии, произошедшей 17 августа 2009 года в филиале ОАО “Русгидро” – “Саяно Шушенская ГЭС им. П.С. Непорожнегого”.* [ru.wikisource.org](http://ru.wikisource.org).
6. *Galiev Sh. U.* Evolution of Extreme Waves and Resonances. CRC Press. 2020. 508 р. Обзор этого тома написанный Ильгамовым М.А. помещен в журнале: Известия Уфимского Научного Центра РАН. 2021.№ 1. С. 118-125.
7. *Galiev Sh. U.* Extreme Waves and Shock-Excited Processes in Structures and Space Objects. CRC Press. 2020. 314 р.
8. *Котляр П.* Езеро надежды: вертолетоносец сел на Марс. [https://www.gazeta.ru/science/2021/02/19\\_a\\_13484294.shtml](https://www.gazeta.ru/science/2021/02/19_a_13484294.shtml).
9. *Гаманов В.* Заведующий кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов МГУ им. адм. Г.И. Невельского, к.т.н., профессор. <http://www.morvesti.ru/themes/1700/69238/>
10. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах. Т. I. Статика и кинематика. - 4-е изд., испр. - М.: Наука. 1985. 240 с.
11. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Учебник. В 2-х томах. Т. II. Динамика. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука. 1979. 544 с.

УДК 531

**ПОДГОТОВКА БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ К  
ИСПОЛЬЗОВАНИЮ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ  
МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ  
ОБРАЗОВАНИЯ**

**Шарафеева Л.Р.**

Елабужский институт Казанского федерального университета, г.

Елабуга, Россия;

*shlandysh@yandex.ru*

*В статье автор делится опытом подготовки будущих учителей математики к использованию систем компьютерной математики в профессиональной деятельности в рамках курса «Информационные технологии в математике».*

*Ключевые слова: система компьютерной математики, будущий учитель математики, информационные технологии, цифровизация образования, цифровая культура педагога.*

**PREPARATION OF FUTURE TEACHERS FOR USE OF  
COMPUTER MATHEMATICS SYSTEMS IN THE  
CONDITIONS OF DIGITALIZATION OF EDUCATION**

**Sharafeeva L.R.**

*Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia;  
shlandysh@yandex.ru*

*In the article, the author shares the experience of preparing future mathematics teachers to use computer mathematics systems in their professional activities as part of the course «Information Technologies in Mathematics».*

*Key words: computer mathematics system future teacher of mathematics, information technologies, digitalization of education, digital culture of the teacher.*

В системе высшего педагогического образования одним из актуальных проблем остается вопрос подготовки высококвалифицированных кадров. Для успешной педагогической деятельности педагогу необходима осознание сущности и ценности выбранной профессии,

теоретическая и практическая готовность к осуществлению педагогической деятельности, готовность к постоянному самообразованию и саморефлексии. В условиях цифровизация образования от учителя требуется навыки применения цифровых образовательных ресурсов, облачных и мобильных технологий, платформ дистанционного обучения. Современному обществу необходимы педагоги нового поколения, обладающие цифровой культурой. Под цифровой культурой педагога понимается «сложное системное качество личности, характеризующееся информационным мировоззрением, ориентированным на ценности информационного взаимодействия в цифровой среде, совокупностью знаний, умений и практического опыта информационной деятельности, проявляющееся в организации предметного обучения и методического воздействия на становление обучающихся» [1].

Одним из компонентов цифровой культуры учителя математики является умение применять в педагогической деятельности различные прикладные программы для решения математических задач и для работы с математическими текстами. В профессиональном стандарте педагога говорится о необходимости учителю математики «владеть основными математическими компьютерными инструментами, квалифицированно набирать математический текст» [2]. Поэтому для учителя математики становится актуальной задача использования систем компьютерной математики в своей педагогической деятельности.

Наиболее популярными системами компьютерной математики являются такие программы, как Maple, MathCAD, Matlab, Mathematica, Scilab, Maxima. При использовании систем компьютерной математики в профессиональной деятельности у учителя математики встает вопрос их выбора. Поэтому при подготовке будущих учителей необходимо научить навыкам самостоятельного изучения систем компьютерной математики, анализировать их и выбрать наиболее оптимальный вариант для решения математических задач.

В Елабужском институте Казанского федерального университета готовят учителей математики по профилям «Математика и информатика» и «Математика и физика». Одной из дисциплин, позволяющей выявить готовность студентов к использованию информационных технологий в профессиональной деятельности, является курс по выбору «Информационные технологии в математике». Цель данного курса - знакомство будущих учителей математики с возможностями, особенностями и основными направлениями использования инфор-

мационных технологий в математике. Этот курс носит интегрированный характер и находится на стыке таких наук, как информатика, математика, методика преподавания математики.

Опыт преподавания и анализ предметных компетенций позволили выделить основные компоненты содержания дисциплины:

Модуль 1. Введение. Основные понятия курса.

Модуль 2. Системы компьютерной математики.

Модуль 3. Системы подготовки математических текстов.

Продолжительность курса всего 2 зачетные единицы: 18 часов лекций, 18 часов лабораторных занятий и 36 часов отводится на самостоятельную работу.

Модуль 1 вводный и изучаются основные понятия курса: информационные технологии, цифровые образовательные ресурсы, цифровизация образования, системы компьютерной математики. Используя интерактивные методы обучения будущим учителям математики необходимо дать возможность самим сформулировать основные понятия, что способствует активизации учебно-познавательной деятельности. Модуль заканчивается тестированием.

Модуль 2 носит практический характер. Студенты во время лабораторных занятий изучают основы вычислений и программирования в системе MathCAD PRIME. Также рассматриваются такие темы, как массивы, графика, решение уравнений и их систем, задачи оптимизации, задачи теории вероятностей и математической статистики. MathCAD – это универсальная система компьютерной математики. Отличается удобным интерфейсом, написанием выражений стандартными математическими символами, хорошей двух- и трехмерной графикой, простым языком программирования.

Основной задачей данного курса является не изучение конкретной программы, будущим учителя необходимо иметь общее представление о системах компьютерной математики и выбрать наиболее подходящий вариант. Учитывая ограниченность аудиторных занятий, изучение остальных систем компьютерной математики осуществляется в рамках самостоятельной работы в виде проекта. Проектная деятельность условно делится на три этапа.

Первый этап – организационно-подготовительный. Студенты в подгруппах выбирают систему компьютерной математики и изучают ее возможности в течение 4 недель.

Второй этап – изучение возможностей систем компьютерной математики. Студентам необходимо разработать примеры решения за-

дач, используя выбранную систему компьютерной математики. Для оформления материалов к защите студентам рекомендуется использовать сервисы облачных технологий. Сначала пишется текст доклада, далее оформляется в виде презентации. Далее проекты подгрупп объединяются в один и представляется в виде сайта.

Третий этап – защита проектных работ. Оценивается работа подгруппы в целом, а не отдельного студента. Оценивается работа над проектом, наличие примеров решения задач, оформление материалов и защита проекта.

Такая схема организации самостоятельной работы имеет свои преимущества:

1. Работа в команде способствует развитию критического мышления, коммуникации, креативности, т.е. развитию у студентов 4К-компетенции.

2. Студентам предлагается самостоятельно изучить возможности систем компьютерной математики и привести примеры решения задач с использованием выбранной программы.

3. Для подготовки текстовых файлов и презентаций совместно с другими студентами в режиме реального времени используются облачные технологии, позволяющие всем участникам работать удаленно и в любое время.

4. Студенты учатся презентовать результаты проекта и провести рефлексию.

Завершающим этапом курса является модуль «Системы подготовки математических текстов», целью которой является изучение издательской системы LaTeX. Отчет по модулю – оформленный математический текст в редакторе LaTeX.

Разработанная структура и содержание курса «Информационные технологии в математике» позволяет формировать у будущего учителя математики готовность к использованию информационных технологий в математическом образовании, вырабатывает навыки самостоятельного изучения систем компьютерной математики, расширяет информационно-образовательную среду учебного курса, что способствует повышению качества подготовки педагогических кадров в условиях цифровизации образования.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №20-313-90026.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Гнатышина Е.В. Ценностно-смысловые ориентиры формирования цифровой культуры будущего педагога: монография / Е. В. Гнатышина. – Челябинск: Российская академия образования, 2019. – 234 с. – ISBN 9785604214695.
2. Приказ Минтруда России от 18.10.2013 N 544н (с изменениями от 05.08.2016) «Об утверждении профессионального стандарта «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начально-го общего, основного общего, среднего общего образования) (воспи-татель, учитель)». - URL: <https://base.garant.ru/70535556/> (дата об-ращения: 05.06.2021).

Научное издание

## СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Материалы международной научной конференции  
12 – 15 сентября 2021 г., г. Стерлитамак

Оригинал-макет изготовлен в СФ ГАНУ ИСИ РБ

Компьютерная верстка: С.Н. Сидоров

*Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать 30.08.2021 г. Формат 60 × 84/16.

Усл. печ.л. 22,1. уч. -изд. л. 24,0

Тираж 100 экз.

Изд. № . Заказ

*Редакционно издательский центр  
Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке  
Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Научное издание*

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ**

*Материалы*

*Международной научной конференции  
(г. Стерлитамак, 12 – 15 сентября 2021 г.)*

**Том II**

*За достоверность информации, изложенной в статьях,  
ответственность несут авторы. Мнение редколлегии  
может не совпадать с мнением авторов материалов.*

*Статьи публикуются в авторской редакции*

*Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать 06.09.2021 г. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 14,72. Уч.-изд. л. 15,36.

Тираж 300 экз. (1-й завод 60 экз.). Изд. № 55. Заказ 271.

*Редакционно-издательский центр  
Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке  
Башкирского государственного университета  
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*