Практическая задача по вычислительной математике

Эльмира Сафина, 677 группа

21 мая 2019 г.

Задача X.8.4
Решить систему дифференциальных уравнений на интервале $[0, 10]$
$u' = 998u + 3996\nu$
$\mu' = -499.5u - 1999\nu$
с начальными значениями $u(0) = \nu(0) = 1$ явным и неявным методами Эйлера, решение сравнить с точным решением.
Решение:
Краткая теория: Рассмотрим метод решения задач Коши для ОДУ вида:
$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), t > 0; u(0) = u_0,$
а также систем ОДУ
$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)^T$ - векторы столбцы искомых функций.
К аналогичной форме можно привести задачу Коши для ОДУ(системы уравнений) порядка выше первого вида
$\frac{d^m u(t)}{dt^m} = g(t, u, \frac{du}{dt}, \cdots, \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}), t > 0; \frac{du}{dt}(0) = a_1, \cdots, \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}(0) = a_{m-1},$
если положить
$u_1 = u, u_2 = \frac{du_1}{dt}, \cdots, u_m = \frac{du_{m-1}}{dt}, \frac{du_m}{dt} = g(t, u_1, u_2, \cdots, u_m),$
$u_i(0) = a_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, m.$

Введем в расчетной области $t \in [0, T]$ точки(узлы расчетной сетки) $\{t_n = n\tau, n = 0, 1, \cdots, N\}$, в которых вычисляется искомоео решение. Совокупность узлов называется **расчетной сеткой**, τ - **шагом интегрирования**. Будем рассматривать в нашей задаче равномерную сетку. Введем сеточную функцию u^τ, определенную в узлах сетки и представляющую собой совокупность приближенных значений искомой функции, U^τ - проекцию точного решения искомой задачи на сетку и f^τ - значения правой части в узлах сетки.
Также введем опрераторное обозначение дифференциальной задачи

$L(u) = F,$

где $L(u) = \begin{cases} \frac{du}{dt} - f(t,u), & t > 0; \\ u(0), & t = 0; \end{cases}$ $F = \begin{cases} 0, & t > 0; \\ u_0, & t = 0; \end{cases}$

и аппроксимирующей разностной задачи

$L_\tau(u^\tau) = F_\tau$

где L_τ - обозначения разностного оператора, F_τ - проекция F на расчетную сетку.

Говорят, что решение разностной задачи сходится к решению исходной задачи при $\tau \to 0$, если $||u^\tau - U^\tau|| \to 0$ при $\tau \to 0$.

При этом если имеет место оценка $||u^\tau - U^\tau|| \leq C\tau^\rho (C \neq C(\tau))$, то имеет место сходимость порядка p.

Кроме того, говорят, что разностная задача аппрксимирует исходную задачу на ее решении, если невязка $||r_\tau|| \to 0$ при $\tau \to 0$, где $r_\tau = L\tau(U^\tau) - F_\tau$. При этом если имеет место оценка

$r^\tau|| \leq C_1\tau^\rho(C_1 \neq C_1(\tau))$, то говорят, что имеет место аппроксимация пордка p.

Разностная задача устойчива, если из соотношений

$L_\tau(u^\tau) - F_\tau = \xi_\tau$

$L_\tau(v^\tau) - F_\tau = \eta_\tau$

следует $||u^\tau - v^\tau|| \leq C_2(||\xi_\tau|| + ||\eta_\tau||), C_2 \neq C2(\tau)$.

Приведем необходимые формулы для разностных схем Эйлера, аппроксимирцющих исходное уравнение:

$\frac{u_{n+1} - un}{\tau} = f(t_n, u_n), 0 \leq n \leq N-1$ - явная схема Эйлера

$\frac{u_{n+1} - un}{\tau} = f(t_n, u_{n+1}), 0 \leq n \leq N-1$ - неявная схема Эйлера.

Тогда получим итоговые формулы для методов:

$u_{n+1} = u_n + \tau f(t_n, u_n)$ - явный метод Эйлера.

$u_{n+1} = u_n + \tau f(t_n, u_{n+1})$ - неявный метод Эйлера.

Для решения исходной задачи составим матрицу системы и найдем ее характеристические числа:

A $= \begin{pmatrix} 998 & 3996 \\ -499.5 & -1999 \end{pmatrix}$, f $= \begin{pmatrix} 998u + 3996\nu \\ -499.5u - 1999\mu \end{pmatrix}$.

det|A - $\lambda E| = (998 - \lambda)(-1999 - \lambda) + 499.5 \cdot 3996 = 0$.

$\lambda^2 + 1001\lambda + 1000\lambda = 0$, $\lambda_1 = -1000, \lambda_2 = -1$.

Тогда решение системы будет иметь вид:

$\begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{-1000x} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}$.

С учетом начальных условий $u(0) = \nu(0) = 1$ получим, что

$$\begin{pmatrix} u \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2.5 \end{pmatrix} e^{-1000x} + \begin{pmatrix} 6 \\ -1.5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}.$$

Или запишем вид решения в более удобном виде:

$u = -5e^{-1000x} + 6e^{-x}$, $\nu = 2.5e^{-1000x} - 1.5e^{-x}$.

Запрограммируем решение задачи на языке Python: найдем решение явным и неявным методами Эйлера, а также точное решение задачи по записанной выше формуле для разных вариантов шага на промежутке $[0, 10]$.

Покажем ниже, какие были получены решения для двух вариантов шагов и построим графики для точного решения. Мы видим, что и явный, и неявный метод Эйлера для данной системы очень быстро расходятся от точного решения. Это происходит, так как в системе коэффициенты при u только положительные, а при m отрицательные, и они очень большие по модулю. Поэтому при расчете значений u и m на каждом шаге мы все сильнее удаляемся от решения задачи. При этом неявный метод Эйлера расходится сильнее, чем явный. Также отметим, что если уменьшать шаг, то метод будет расходиться медленнее, чем при большем шаге. Однако тот факт, что в этом случае будет посчитано значение в большем числе узлов, приводит к тому, что в результате мы получим еще большее удаление от точного решения.

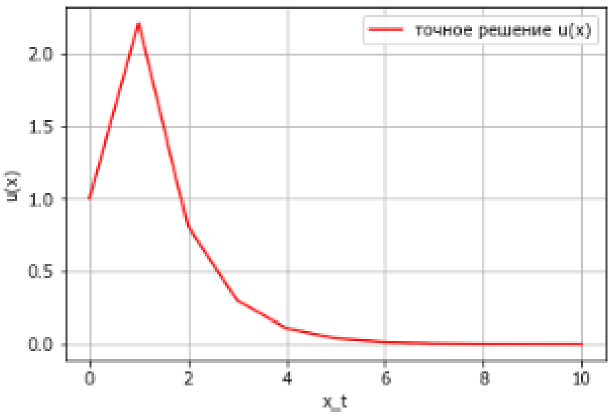
```
N = 10 ,h = 1
x_0..x_n = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]


Решение явным методом Эйлера
x 0 = 0, u 0 = 1
x 0 = 0, m 0 = 1
x 1 = 1 ,u 1 = 4995
x 1 = 1 ,m 1 = -2497.5
x 2 = 2 ,u 2 = -4990005.0
x 2 = 2 ,m 2 = 2495002.5
x 3 = 3 ,u 3 = 4985014995.0
x 3 = 3 ,m 3 = -2492507497.5
x 4 = 4 ,u 4 = -4980029980005.0
x 4 = 4 ,m 4 = 2490014990002.5
x 5 = 5 ,u 5 = 4975049950024995.0
x 5 = 5 ,m 5 = -2487524975012498.0
```

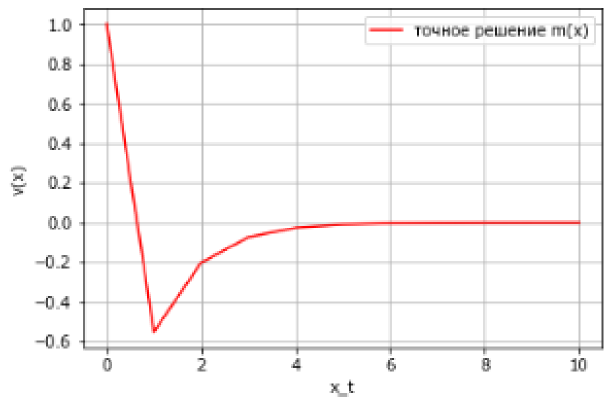
```
x 6 = 6 ,u 6 = -4.970074900074972e+18
x 6 = 6 ,m 6 = 2.4850374500374866e+18
x 7 = 7 ,u 7 = 4.965104825174898e+21
x 7 = 7 ,m 7 = -2.48255241258745e+21
x 8 = 8 ,u 8 = -4.960139720349726e+24
x 8 = 8 ,m 8 = 2.4800698601748633e+24
x 9 = 9 ,u 9 = 4.955179580629378e+27
x 9 = 9 ,m 9 = -2.477589790314689e+27
x 10 = 10 ,u 10 = -4.9502244010487486e+30
x 10 = 10 ,m 10 = 2.4751122005243746e+30


Решение неявным методом Эйлера
x 0 = 0, u 0 = 1
x 0 = 0, m 0 = 1

x 1 = 1 ,u 1 = -4994999.0
x 1 = 1 ,m 1 = 2499994504.0
x 2 = 2 ,u 2 = 4985010001.0
x 2 = 2 ,m 2 = -2492500010993.0
x 3 = 3 ,u 3 = -4980029984999.0
x 3 = 3 ,m 3 = 2490014999983510.0
x 4 = 4 ,u 4 = 4975049950020001.0
x 4 = 4 ,m 4 = -2.487524975000022e+18
x 5 = 5 ,u 5 = -4.970074900074977e+18
x 5 = 5 ,m 5 = 2.485037450037501e+21
x 6 = 6 ,u 6 = 4.965104825174898e+21
x 6 = 6 ,m 6 = -2.4825524125874483e+24
x 7 = 7 ,u 7 = -4.960139720349726e+24
x 7 = 7 ,m 7 = 2.4800698601748626e+27
x 8 = 8 ,u 8 = 4.955179580629378e+27
x 8 = 8 ,m 8 = -2.4775897903146892e+30
```

```
x 9 = 9 ,u 9 = -4.950224401048748 6e+30
x 9 = 9 ,m 9 = 2.4751122005243743e+33
x 10 = 10 ,u 10 = 4.945274176647702e+33
x 10 = 10 ,m 10 = -2.472637088323851e+36
```

```
Точное решение системы
x 0 = 0 ,u 0 = 1.0
x 1 = 1 ,u 1 = 2.207276647028654
x 2 = 2 ,u 2 = 0.8120116994196762
x 3 = 3 ,u 3 = 0.29872241020718365
x 4 = 4 ,u 4 = 0.10989383333240507
x 5 = 5 ,u 5 = 0.0404276819945128
x 6 = 6 ,u 6 = 0.014872513059998151
x 7 = 7 ,u 7 = 0.005471291793327097
x 8 = 8 ,u 8 = 0.0020127757674150712
x 9 = 9 ,u 9 = 0.0007404588245200774
x 10 = 10 ,u 10 = 0.0002723995785749091
```

```
x 0 = 0 ,m 0 = 1.0
x 1 = 1 ,m 1 = -0.5518191617571635
x 2 = 2 ,m 2 = -0.20300292485491905
x 3 = 3 ,m 3 = -0.07468060255179591
x 4 = 4 ,m 4 = -0.027473458333101268
x 5 = 5 ,m 5 = -0.0101069204986282
x 6 = 6 ,m 6 = -0.0037181282649995377
x 7 = 7 ,m 7 = -0.0013678229483317743
x 8 = 8 ,m 8 = -0.0005031939418537678
x 9 = 9 ,m 9 = -0.00018511470613001934
x 10 = 10 ,m 10 = -6.809989464372728e-05
```






```
N = 20 ,h = 0.5
x_0..x_n = [0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.
0]


Решение явным методом Эйлера
x 0 = 0, u 0 = 1
x 0 = 0, m 0 = 1
x 1 = 0.5 ,u 1 = 2498.0
x 1 = 0.5 ,m 1 = -1248.25
x 2 = 1.0 ,u 2 = -1245003.5
x 2 = 1.0 ,m 2 = 622502.125
x 3 = 1.5 ,u 3 = 621257495.75
x 3 = 1.5 ,m 3 = -310628747.6875
x 4 = 2.0 ,u 4 = -310007490004.625
x 4 = 2.0 ,m 4 = 155003745002.40625
x 5 = 2.5 ,u 5 = 154693737512495.2
x 5 = 2.5 ,m 5 = -77346868756247.56
```

```
x 6 = 3.0 ,u 6 = -7.719217501873502e+16
x 6 = 3.0 ,m 6 = 3.859608750936752e+16
x 7 = 3.5 ,u 7 = 3.851889533434879e+19
x 7 = 3.5 ,m 7 = -1.9259447667174396e+19
x 8 = 4.0 ,u 8 = -1.9220928771840044e+22
x 8 = 4.0 ,m 8 = 9.610464385920026e+21
x 9 = 4.5 ,u 9 = 9.59124345714819e+24
x 9 = 4.5 ,m 9 = -4.7956217285740954e+24
x 10 = 5.0 ,u 10 = -4.786030485116947e+27
x 10 = 5.0 ,m 10 = 2.3930152425584742e+27
x 11 = 5.5 ,u 11 = 2.388229212073357 6e+30
x 11 = 5.5 ,m 11 = -1.19411460603667 9e+30
x 12 = 6.0 ,u 12 = -1.1917263768246058e+33
x 12 = 6.0 ,m 12 = 5.9586318841230285e+32
x 13 = 6.5 ,u 13 = 5.946714620354781e+35
x 13 = 6.5 ,m 13 = -2.973357310177391e+35
x 14 = 7.0 ,u 14 = -2.9674105955570364e+38
x 14 = 7.0 ,m 14 = 1.4837052977785184e+38
```

```
x 15 = 7.5 ,u 15 = 1.4807378871829615e+41
x 15 = 7.5 ,m 15 = -7.4036894359148075e+40
x 16 = 8.0 ,u 16 = -7.388882057042977e+43
x 16 = 8.0 ,m 16 = 3.6944410285214886e+43
x 17 = 8.5 ,u 17 = 3.6870521464644457e+46
x 17 = 8.5 ,m 17 = -1.8435260732322226e+46
x 18 = 9.0 ,u 18 = -1.8398390210857578e+49
x 18 = 9.0 ,m 18 = 9.19919510542879e+48
x 19 = 9.5 ,u 19 = 9.180796715217934e+51
x 19 = 9.5 ,m 19 = -4.590398357608967e+51
x 20 = 10.0 ,u 20 = -4.5812175608937496e+54
x 20 = 10.0 ,m 20 = 2.2906087804468748e+54

Решение неявным методом Эйлера
x 0 = 0, u 0 = 1
x 0 = 0, m 0 = 1
x 1 = 0.5 ,u 1 = -1247500.5
x 1 = 0.5 ,m 1 = 312810876.75
```

```
x 2 = 1.0 ,u 2 = 621254998.75
x 2 = 1.0 ,m 2 = -155467815935.0
x 3 = 1.5 ,u 3 = -310007492501.625
x 3 = 1.5 ,m 3 = 77579376869659.5
x 4 = 2.0 ,u 4 = 154693737509998.2
x 4 = 2.0 ,m 4 = -3.871210780938229Ge+16
x 5 = 2.5 ,u 5 = -7.719217501873752e+16
x 5 = 2.5 ,m 5 = 1.93173417984421Be+19
x 6 = 3.0 ,u 6 = 3.851889533434879e+19
x 6 = 3.0 ,m 6 = -9.63935355742078e+21
x 7 = 3.5 ,u 7 = -1.922092877184004 4e+22
x 7 = 3.5 ,m 7 = 4.810037425152971e+24
x 8 = 4.0 ,u 8 = 9.59124345714819e+24
x 8 = 4.0 ,m 8 = -2.4002086751513343e+27
x 9 = 4.5 ,u 9 = -4.786030485116947e+27
x 9 = 4.5 ,m 9 = 1.197704128900516e+30
x 10 = 5.0 ,u 10 = 2.3882292120733576e+30
x 10 = 5.0 ,m 10 = -5.9765436032135776e+32
```

```
x 11 = 5.5 ,u 11 = -1.1917263768246058e+33
x 11 = 5.5 ,m 11 = 2.982295258003576e+35
x 12 = 6.0 ,u 12 = 5.946714620354781e+35
x 12 = 6.0 ,m 12 = -1.488165333743784e+38
x 13 = 6.5 ,u 13 = -2.9674105955570364e+38
x 13 = 6.5 ,m 13 = 7.425945015381483e+40
x 14 = 7.0 ,u 14 = 1.4807378871829615e+41
x 14 = 7.0 ,m 14 = -3.70554656267536le+43
x 15 = 7.5 ,u 15 = -7.388882057042977e+43
x 15 = 7.5 ,m 15 = 1.8490677347750052e+46
x 16 = 8.0 ,u 16 = 3.687052146464445 7e+46
x 16 = 8.0 ,m 16 = -9.226847996527275e+48
x 17 = 8.5 ,u 17 = -1.8398390210857578e+49
x 17 = 8.5 ,m 17 = 4.604197150267108 6e+51
x 18 = 9.0 ,u 18 = 9.180796715217934e+51
x 18 = 9.0 ,m 18 = -2.297494377983288e+54
x 19 = 9.5 ,u 19 = -4.5812175608937496e+54
x 19 = 9.5 ,m 19 = 1.146449694613661e+57
```

```
x 20 = 10.0 ,u 20 = 2.286027562885981e+57
x 20 = 10.0 ,m 20 = -5.720783976122169e+59


Точное решение системы
x 0 = 0.0 ,u 0 = 1.0
x 1 = 0.5 ,u 1 = 3.6391839582758005
x 2 = 1.0 ,u 2 = 2.207276647028654
x 3 = 1.5 ,u 3 = 1.338780960890579
x 4 = 2.0 ,u 4 = 0.8120116994196762
x 5 = 2.5 ,u 5 = 0.4925099917433928
x 6 = 3.0 ,u 6 = 0.29872241020718365
x 7 = 3.5 ,u 7 = 0.181184300533911
x 8 = 4.0 ,u 8 = 0.10989383333240507
x 9 = 4.5 ,u 9 = 0.06665397922945383
x 10 = 5.0 ,u 10 = 0.0404276819945128
x 11 = 5.5 ,u 11 = 0.0245206286307844
x 12 = 6.0 ,u 12 = 0.014872513059998151
x 13 = 6.5 ,u 13 = 0.009020635157865435


x 14 = 7.0 ,u 14 = 0.005471291793327097
x 15 = 7.5 ,u 15 = 0.003318506220887002
x 16 = 8.0 ,u 16 = 0.0020127757674150712
x 17 = 8.5 ,u 17 = 0.001220810214063865
x 18 = 9.0 ,u 18 = 0.0007404588245200774
x 19 = 9.5 ,u 19 = 0.0004491109793262036
x 20 = 10.0 ,u 20 = 0.0002723995785749091


x 0 = 0.0 ,m 0 = 1.0
x 1 = 0.5 ,m 1 = -0.9097959895689501
x 2 = 1.0 ,m 2 = -0.5518191617571635
x 3 = 1.5 ,m 3 = -0.33469524022264474
x 4 = 2.0 ,m 4 = -0.20300292485491905
x 5 = 2.5 ,m 5 = -0.1231274979358482
x 6 = 3.0 ,m 6 = -0.07468060255179591
x 7 = 3.5 ,m 7 = -0.04529607513347775
x 8 = 4.0 ,m 8 = -0.027473458333101268
x 9 = 4.5 ,m 9 = -0.016663494807363458
```

```
x 10 = 5.0 ,m 10 = -0.0101069204986282
x 11 = 5.5 ,m 11 = -0.0061301571576961
x 12 = 6.0 ,m 12 = -0.0037181282649995377
x 13 = 6.5 ,m 13 = -0.0022551587894663588
x 14 = 7.0 ,m 14 = -0.0013678229483317743
x 15 = 7.5 ,m 15 = -0.0008296265552217505
x 16 = 8.0 ,m 16 = -0.0005031939418537678
x 17 = 8.5 ,m 17 = -0.0003052025535159627
x 18 = 9.0 ,m 18 = -0.00018511470613001934
x 19 = 9.5 ,m 19 = -0.0001122777448315509
x 20 = 10.0 ,m 20 = -6.809989464372728e-05
```