I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$

1) ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ يطلب تعيينه ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$ و (C_f) تمثيلها البياني في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ثم استنتج تغيرات f

2) (D) و (D') مستقيمين معادلتيهما $y=x$ و $y=-3x$ على الترتيب

أ- احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+3x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (D) و (D')

جـ- ارسم (D) و (D') ثم انشئ (C_f)

الحل: **I)** $g(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$ ، $D_g=\mathbb{R}$

1) دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها:

النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-\sqrt{x^2+1})=\boxed{-\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{x^2+1})=+\infty-\infty$ ح ع

$=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]$

إذا لدينا: $\boxed{x\to+\infty \quad |x|=x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\boxed{+\infty}$

المشتقة: g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$g'(x)=2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$g'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}$

إشارة المشتقة: إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام موجب $\sqrt{x^2+1}>0$

وإشارة البسط: $2\sqrt{x^2+1}-x$

نفرض أن $2\sqrt{x^2+1}-x>0$

ومنه $2\sqrt{x^2+1}>x$ نميز حالتين

* إذا كان $x<0$ فإن $\underbrace{2\sqrt{x^2+1}}_{+}>\underbrace{x}_{-}$ محققة دوما

* إذا كان $x>0$ فإن $\underbrace{2\sqrt{x^2+1}}_{+}>\underbrace{x}_{+}$ نربع الطرفين

نجد $4x^2+4>x^2$ ومنه $4x^2+4x-x^2>0$

ومنه $\underbrace{3x^2+4x}_{+}>0$ محققة دوما

إذن $\boxed{g'(x)>0}$

اتجاه تغير g: $g'(x)>0$ معناه أن x من $\mathbb{R}$

إذن g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$ | $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيان أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $\mathbb{R}$

لدينا g دالة مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$

و $\lim_{x\to-\infty} g(x)\times\lim_{x\to+\infty} g(x)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من $\mathbb{R}$

* تعيين قيمة α : $g(\alpha)=0$

ومنه $2\alpha-\sqrt{\alpha^2+1}=0$

ومنه $2\alpha=\sqrt{\alpha^2+1}$ $(*)$

لدينا $\sqrt{\alpha^2+1}>0$ فإن $2\alpha>0$ ومنه $\boxed{\alpha>0}$

من $(*)$ لدينا $2\alpha=\sqrt{\alpha^2+1}$ بتربيع الطرفين

$4\alpha^2=\alpha^2+1$

$4\alpha^2-\alpha^2=1$

$3\alpha^2=1$

$\alpha^2=\frac{1}{3}$

إذن $\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

أو $\alpha=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ حل مرفوض لأن $\alpha>0$

إذن $\boxed{\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}}$

اشارة $g(x)$: لدينا $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$ ومنه جدول تغيرات g نجد:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

1) تبيان أن $f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ من أجل $x\in\mathbb{R}$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\cancel{2}\frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

استنتاج تغيرات f:

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ لأن $\sqrt{x^2+1}>0$

ومنه f متناقصة تماما على $\left]-\infty,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$

النهايات: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x\right)=\boxed{+\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty-\infty$ ح ع

نزيل الحالة: $=\lim_{x\to+\infty}\left[2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right]$ $\quad x\to+\infty$ ، $|x|=x$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\right]$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

جدول تغيرات f:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}$

2) $(D): y=-3x \qquad (D'): y=x$

أ- حساب النهايتين

* $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+3x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-3x)\right]$

$=\lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}-x+3x\right]$

$=\lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{x^2+1}+2x\right]=+\infty-\infty$ ح ع

نزيل الحالة بالمرافق لأن بإخراج العامل المشترك $\infty\times0$ ح ع

$\lim_{x\to-\infty}\left[2\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]\right]$

$=\lim_{x\to-\infty}2\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}\right]$

$=\lim_{x\to-\infty}2\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}-x}_{+\infty}}$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+3x\right)=0}$$

التفسير البياني: $(D): y=-3x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x-x\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-2x\right)=+\infty-\infty$ ح ع

نزيل الحالة بالمرافق:

$\lim_{x\to+\infty}\left[2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]$

$=\lim_{x\to+\infty}\left[2\,\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$

$=\lim_{x\to+\infty}2\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}+x}_{+\infty}}$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0}$$

التفسير البياني: $(D'): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) مع (D) و (D')

مع (D): اشارة الفرق $f(x)-y$

$f(x)+3x=2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

نفرض أن $\sqrt{x^2+1}+x>0$ أي $\sqrt{x^2+1}>-x$

نميز حالتين:

* اذا كان $x>0$: $\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+}>\underbrace{-x}_{-}$ محققة دوما

اذن من أجل $x>0$ (C_f) يقع أعلى (D)

* اذا كان $x<0$: $\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+}>\underbrace{-x}_{+}$ نربع الطرفين $x^2+1>x^2$

ومنه $x^2+1-x^2>0$ أي $1>0$ محققة دوما

اذن من أجل $x<0$ (C_f) يقع أعلى (D)

الوضع النسبي مع (D') : $f(x) - y = 2(\sqrt{x^2+1} - x)$

نفرض أن $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ فإن $\sqrt{x^2+1} > x$ نميز حالتين

* إذا كان $x<0$ فإن $\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+} > \underbrace{x}_{-}$ محققة دوما

$\boxed{\text{إذن من أجل } x<0 \ (C_f) \text{ يقع أعلى } (D')}$

* إذا كان $x>0$ فإن $\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+} > \underbrace{x}_{+}$ نربع الطرفين

$x^2+1 > x^2$ ومنه $x^2+1-x^2 > 0$

$1>0$ محققة دوما

$\boxed{\text{إذن من أجل } x>0 \ (C_f) \text{ يقع أعلى } (D')}$