

Systèmes Actionnés

MI4

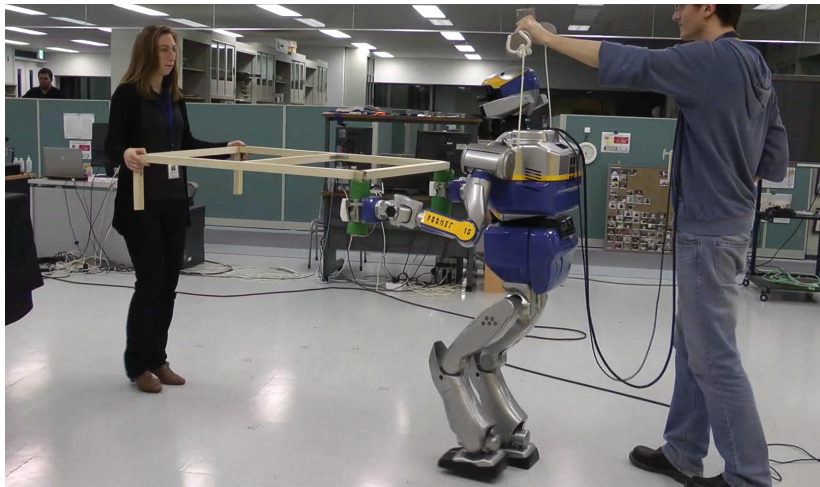
Philippe Fraisse

Université de Montpellier

23/01/2018

Introduction

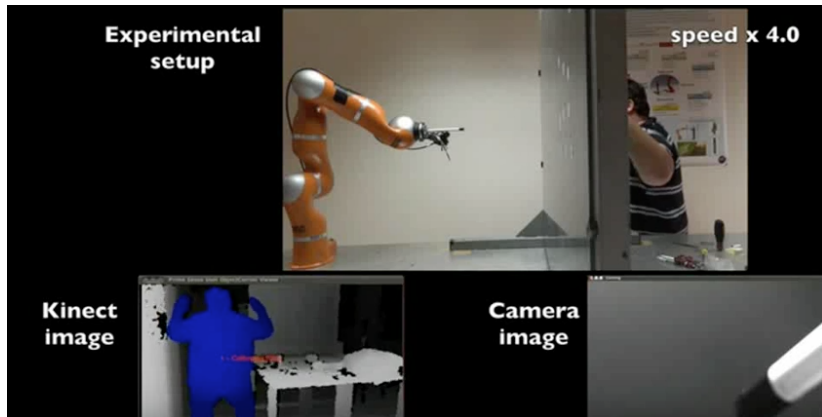
Systèmes robotisés



Interaction Humain-Humanoïde (Joint Robotics Lab, Tsukuba, Japan, 2013).

Introduction

Systèmes robotisés



Interaction Humain-Humanoïde (Projet ANR ICARO 2011).

Introduction

Systèmes robotisés

Les robots sont des systèmes poly-articulés qui sont actionnés au moyen de moteurs :

- courant continu,
- brushless,
- hydraulique,
- pneumatique,
- ..

Le contrôle de ces structures nécessite la connaissance des modèles des actionneurs ainsi que de la structure mécanique constituant le robot.

Le cours de systèmes actionnés vise à présenter une introduction sur les outils de modélisation et de commande des systèmes actionnés.

Modélisation et représentation d'état

Modélisation d'un moteur à courant continu

On considère les équations d'un moteur à courant continu :

$$u(t) = e(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) \quad (1)$$

$$\tau_m(t) = J_m \frac{d\omega(t)}{dt} + f_m \omega(t) \quad (2)$$

avec $\tau_m(t) = k_c I(t)$ et $e(t) = k_e \omega(t)$.

On propose de modéliser le système sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4)$$

Modélisation et représentation d'état

Définitions

Il s'agit de la représentation d'état d'un système linéaire continu mono variable (1 entrée, 1 sortie):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (6)$$

Avec :

- (5), (6) : **l'équation d'état, l'équation de sortie**
- $x(t)$: **le vecteur d'état** $\in \mathbb{R}^n$
- $y(t)$: **le vecteur de sortie** $\in \mathbb{R}$
- $u(t)$: **le vecteur de commande** $\in \mathbb{R}$
- A : **la matrice d'état** $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
- B : **la matrice de commande** $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- C : **la matrice de sortie** $\in \mathbb{R}^{1 \times n}$
- D : **la matrice de transfert directe** $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$

Modélisation et représentation d'état

Modélisation d'un moteur à courant continu

En reformulant les équations (1), (2), on obtient les expressions suivantes :

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{L} [u(t) - e(t) - RI(t)]$$

$$\dot{\omega}(t) = \frac{1}{J_m} [\tau_m(t) - f_m\omega(t)]$$

Remplaçons les variables $I(t)$ et $\omega(t)$ par :

$$\dot{I}(t) = \frac{1}{L} [u(t) - k_e\omega(t) - RI(t)] \quad (7)$$

$$\dot{\omega}(t) = \frac{1}{J_m} [k_c I(t) - f_m\omega(t)] \quad (8)$$

Modélisation et représentation d'état

Modélisation d'un moteur à courant continu

Les équations (7), (8) peuvent être exprimées sous la forme souhaitée en posant :

$$x_1(t) = I(t)$$

$$x_2(t) = \omega(t)$$

On obtient ainsi :

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k_e}{L}x_2(t) + \frac{u(t)}{L}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k_c}{J_m}x_1(t) - \frac{f_m}{J_m}x_2(t)$$

Modélisation et représentation d'état

Modélisation d'un moteur à courant continu

Les équations dynamiques du moteur à courant-continu :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k_e}{L}x_2(t) + \frac{u(t)}{L} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{k_c}{J_m}x_1(t) - \frac{f_m}{J_m}x_2(t)\end{aligned}$$

sont mises sous la forme d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L} \\ \frac{k_c}{J_m} & -\frac{f_m}{J_m} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Modélisation et représentation d'état

Modélisation d'un moteur à courant continu

Si l'on considère la variable de sortie observée étant la vitesse du moteur $x_2(t) = \omega(t)$. La sortie s'écrit :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (11)$$

avec $C = [0 \ 1]$ et $D = [0]$

La représentation d'état du moteur à courant-continu

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L} \\ \frac{k_c}{J_m} & -\frac{f_m}{J_m} \end{bmatrix} x(t) + B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (12)$$

$$y(t) = [0 \ 1] x(t) \quad (13)$$

avec $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]$

Modélisation et représentation d'état

Exercices

La représentation d'état n'est pas unique.

Exercice 1

Soit les matrices A et B et C suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ❶ Écrire l'expression des équations différentielles de ce système.
- ❷ Réaliser la transformation de Laplace de ce système linéaire.
Représenter le système sous forme d'un schéma-bloc.
- ❸ Trouver une nouvelle représentation d'état de ce système telle que la nouvelle matrice d'état est A diagonale.
- ❹ Réaliser la transformation de Laplace de ce système linéaire.
Représenter le système sous forme d'un schéma-bloc.

Représentation d'état

Unicité de la représentation d'état

Démonstration

Soit l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (14)$$

On pose $x(t) = Pz(t)$ avec $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On obtient ainsi:

$$P\dot{z}(t) = APz(t) + Bu(t)$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par P^{-1} , on obtient :

$$\dot{z}(t) = P^{-1}APz(t) + P^{-1}Bu(t) \quad (15)$$

Soit une nouvelle représentation d'état :

$$\dot{z}(t) = A_z z(t) + B_z u(t) \quad (16)$$

avec $A_z = P^{-1}AP$ et $B_z = P^{-1}B$.

Modélisation et représentation d'état

Exercices

Exercice 2

On souhaite modéliser un moteur à courant continu Maxon DCX22S dont les caractéristiques techniques sont disponibles sur le lien suivant :

<http://www.mdp.fr/produits/dcx22s-77672.html>

- ❶ Écrire le modèle du moteur sous la forme d'un schéma bloc en utilisant la transformée de Laplace. Déterminer les caractéristiques propres du moteur (fréquence de coupure, coefficient d'amortissement). Conclusions.
- ❷ Écrire le modèle du moteur sous la forme d'état. Déterminer les caractéristiques propres du moteur (fréquence de coupure, coefficient d'amortissement). Conclusions.
- ❸ Écrire une représentation du modèle du moteur telle que la matrice d'état A soit sous forme diagonale. Conclusions.

Représentation d'état

Résolution de l'équation d'état

On peut résoudre une équation différentielle scalaire du premier ordre définie par :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad (17)$$

La solution de cette équation est obtenue par l'expression suivante :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \quad (18)$$

La généralisation au cas à n dimension est :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (19)$$

avec $\Phi(t) = e^{At}$: matrice de transition

Représentation d'état

Résolution de l'équation d'état

La principale difficulté réside dans le calcul de la matrice de transition. Il existe plusieurs méthodes.

Méthode de la diagonalisation

Par définition on a :

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{A^m t^m}{m!} \quad (20)$$

Soit $D = T^{-1}AT$

$$A = TDT^{-1}$$

$$A^2 = TDT^{-1}TDT^{-1} = TD^2T^{-1}$$

.

.

$$A^m = TD^mT^{-1}$$

Représentation d'état

Résolution de l'équation d'état

On remplace ce résultat dans l'équation (20). On obtient:

Méthode de la diagonalisation

Par définition on a :

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{T D^m T^{-1} t^m}{m!} \quad (21)$$

Soit

$$e^{At} = T \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{D^m t^m}{m!} T^{-1}$$

et

$$e^{At} = T e^{Dt} T^{-1} \quad (22)$$

Représentation d'état

Résolution de l'équation d'état

Méthode de la transformée de Laplace

On exprime la transformée de Laplace de l'équation d'état :

$$\mathcal{L} [\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)]$$

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \quad (23)$$

$$[s\mathbb{I} - A] X(s) = x(0) + BU(s)$$

on obtient :

$$X(s) = [s\mathbb{I} - A]^{-1} x(0) + [s\mathbb{I} - A]^{-1} BU(s) \quad (24)$$

En comparant cette équation avec l'équation (19), on obtient :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbb{I} - A)^{-1}]$$

Représentation d'état

Exercices

On peut ainsi calculer à l'aide de ces deux méthodes l'expression de la matrice de transition.

Exercice 3

Soit les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 1 Déterminer l'expression de la matrice de transition $\Phi(t)$.
- 2 Est-ce que ce système est stable?

Exercice 4

- 1 Calculer la matrice de transition associée à la matrice d'état du moteur à courant-continu Maxon DCX22S.
- 2 Est-ce que ce système est stable?

Représentation d'état

Analyse des propriétés d'un système sous forme d'état

Commandabilité

Un système est commandable si et seulement s'il existe un vecteur de commande $u(t)$ permettant de contrôler l'état d'un système x_0 vers un état quelconque x_1 en un temps fini.

Exemple

- Le mouvement latéral d'un véhicule autonome n'est pas commandable.
- La vitesse de déplacement dans le sens du roulement d'un véhicule autonome est commandable.
- Le mouvement latéral d'un bateau n'est pas commandable.

Représentation d'état

Analyse des propriétés d'un système sous forme d'état

Définition

Un système d'état est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A, B)$ est de rang plein.

$$R_c = \text{rang} [\mathcal{C}(A, B)] = n \quad (25)$$

avec

$$\mathcal{C}(A, B) = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (26)$$

- Si $R_c = m < n$, alors le système n'est pas complètement commandable.
- m états sont commandables.
- $(n - m)$ états sont non commandables.

Représentation d'état

Analyse des propriétés d'un système sous forme d'état

Exercice 5

- Calculer la commandabilité du système suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Calculer la commandabilité du moteur Maxon DCX22S.

Représentation d'état

Analyse des propriétés d'un système sous forme d'état

Observabilité

Un système est observable si et seulement s'il est possible de déterminer l'état x_0 du système en un temps fini connaissant $u(t)$ et $y(t)$.

Exemple

- Le courant d'un moteur à courant continu est observable.
- L'accélération d'un moteur à courant continu n'est pas observable.
- La vitesse latérale d'une voiture n'est pas observable.

Représentation d'état

Analyse des propriétés d'un système sous forme d'état

Définition

Un système d'état est observable si et seulement si la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(A, C)$ est de rang plein.

$$R_o = \text{rang} [\mathcal{O}(A, C)] = n \quad (27)$$

avec

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (28)$$

- Si $R_o = m < n$, alors le système n'est pas complètement observable.
- m états sont observables et $(n - m)$ états ne sont pas observables.

Représentation d'état

Analyse des propriétés d'un système sous forme d'état

Exercice 6

- Calculer l'observabilité du système suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

- Calculer l'observabilité du moteur Maxon DCX22S avec $C = [0 \quad 1]$

Représentation d'état

Stabilité

Stabilité

Un système est stable si et seulement si du système est stable si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{A(t-t_0)} x(t_0) = 0 \quad (29)$$

Calcul

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} T^{-1} e^{D(t-t_0)} T x(t_0) = 0 \quad (30)$$

Avec D l'expression diagonale de la matrice d'état A . Les termes sur la diagonales correspondent aux valeurs propres de la matrice A . Par conséquent le système sera stable si et seulement si les valeurs propres de la matrices D sont à parties réelles négatives.

Représentation d'état

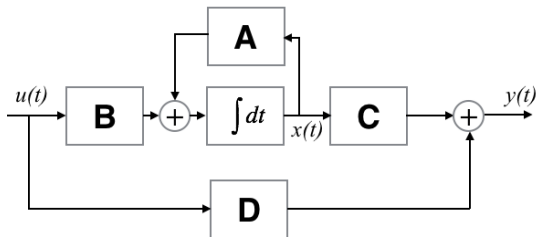
Commande par retour d'état

Soit le système en boucle ouverte représenté sous forme d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (31)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (32)$$

Ce système peut être également décrit par le schéma suivant :



Système en boucle ouverte

Représentation d'état

Commande par retour d'état

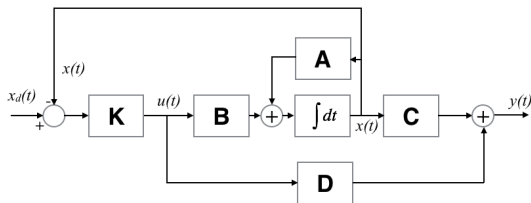
On souhaite fermer la boucle avec le vecteur de contrôle suivant :

$$u(t) = v(t) - Kx(t) \quad (33)$$

On peut représenter le système en boucle fermé par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) - BKx(t) \quad (34)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dv(t) - BDx(t) \quad (35)$$



Système en boucle fermé

Représentation d'état

Commande par retour d'état

On obtient la nouvelle expression d'état du système :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t) \quad (36)$$

$$y(t) = (C - DK)x(t) + Dv(t) \quad (37)$$

On obtient le système suivant en boucle fermé :

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + Bv(t) \quad (38)$$

$$y(t) = C_k x(t) + Dv(t) \quad (39)$$

L'utilisation du retour d'état K permet d'imposer, si le système est complètement commandable, les nouvelles valeurs propres du système en boucle fermé. Cette approche permet d'imposer une nouvelle dynamique en boucle fermée et de stabiliser le système dans le cas où il serait instable en boucle ouverte.

Représentation d'état

Commande par retour d'état

Exercice 7

Soit les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rappeler les valeurs propres de ce système. Est-il stable en boucle ouverte?
- Vérifier la commandabilité du système.
- On souhaite fermer la boucle en utilisant un retour d'état $K = [k_1 k_2]$. Donner l'expression du nouveau système.
- Calculer K tels que les nouvelles valeurs propres du système soit : $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -2$.

Représentation d'état

Commande par retour d'état

Exercice 8

On considère l'équation d'état du moteur à courant continu précédemment étudié.

- Rappeler les valeurs propres de ce système. Est-il stable en boucle ouverte?
- Vérifier la commandabilité du système.
- On souhaite fermer la boucle en utilisant un retour d'état $K = [k_1 k_2]$. Donner l'expression du nouveau système.
- Calculer K tels que les nouvelles valeurs propres du système soit : $\lambda_1 = -0.5 + i1.5$ et $\lambda_2 = -0.5 - i1.5$.

Introduction à la robotique

Introduction

On considère un système polyarticulé équipé de deux actionneurs et deux segments de longueurs l_1 et l_2 (cf. Fig. 2).

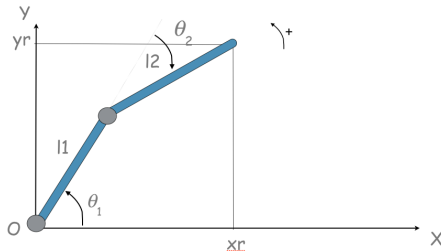


Figure 1: Bras robotisé à 2 degrés de libertés

On souhaite contrôler le mouvement de l'effecteur défini par sa position (x_r, y_r) dans le repère (O, X, Y) . Le contrôle des moteurs s'effectue dans le repère des actionneurs défini par (θ_1, θ_2) .

Exercice 1

Déterminer l'expression de la fonction vectorielle $f(\Theta)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = f(\Theta) \quad (40)$$

- avec $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$.
- Déterminer l'expression de $\dot{X} = \frac{d}{dt}f(\Theta)$.
- En déduire l'expression de $J(\Theta) = \frac{\partial f(\Theta)}{\partial \Theta}$.
- Explorer l'espace accessible du robot lorsque $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $l_1 = 0.6m$ et $l_2 = 0.3m$.

Introduction à la robotique

Introduction

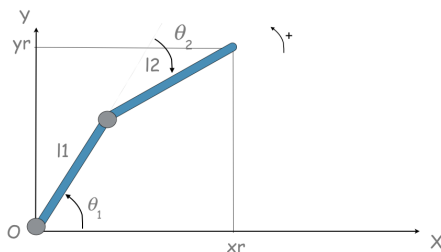


Figure 2: Bras robotisé à 2 degrés de libertés

Modèle Géométrique Direct (MGD)

- On peut exprimer $X = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$.

Introduction à la robotique

Introduction

Modèle Cinématique Direct (MCD)

- En dérivant cette expression, on obtient :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

- Soit :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

- On peut ainsi exprimer les relations de vitesses avec :

$$\dot{X} = J(\Theta) \dot{\Theta}$$

- $J(\Theta)$ est appelée matrice Jacobienne et représente la matrice des dérivées partielles du 1^{er} ordre de la fonction vectorielle $f(\Theta)$.

Exercice 2

Déterminer l'expression de la fonction $g(X)$:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = g(X) \quad (41)$$

- avec $X = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$.
- Déterminer le domaine de définition de la fonction $g(X)$ connaissant le domaine de définition de $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $l_1 = 0.6m$ et $l_2 = 0.3m$.
- Que se passe-t-il si l'on cherche à atteindre le point suivant : $x_r = 1m$ et $y_r = 1m$?

Introduction à la robotique

Modélisation

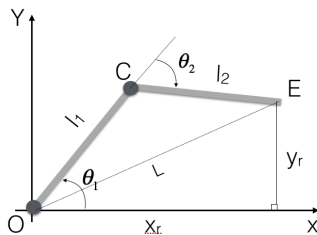


Figure 3: Bras à 2ddl: Construction du MGI

Modèle Géométrique Inverse

On considère le triangle quelconque formé par les points (O, C, E) , avec :

$$L^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi - \theta_2) \quad (42)$$

$$L^2 = x_r^2 + y_r^2 \quad (43)$$

Introduction à la robotique

Modélisation

Modèle Géométrique Inverse

On peut ainsi déterminer l'expression de θ_2 tel que :

$$\cos(\pi - \theta_2) = -\cos(\theta_2)$$

$$L^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\theta_2)$$

On obtient ainsi :

$$\cos(\theta_2) = \frac{L^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2}$$

$$\theta_2 = \pm \arccos\left(\frac{x_r^2 + y_r^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2}\right)$$

Avec $\theta_2 > 0$: coude haut et $\theta_2 < 0$: coude bas.

Introduction à la robotique

Modélisation

Modèle Géométrique Inverse

On considère maintenant le MGD du bras manipulateur à 2ddl avec θ_2 qui est une variable connue. On a :

$$X = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

On peut exprimer le système sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} = A_p * \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_1 = l_1 + l_2 \cos(\theta_2)$ et $\alpha_2 = l_2 \sin(\theta_2)$

Modèle Géométrie Inverse

On obtient la solution en inversant la matrice des paramètres A_p :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{pmatrix} = A_p^{-1} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \quad (44)$$

avec :

$$A_p^{-1} = \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{x_r \alpha_1 + y_r \alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \quad (45)$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{y_r \alpha_1 - x_r \alpha_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \quad (46)$$

Introduction à la robotique

Modélisation

Modèle Géométrique Inverse

On obtient donc pour le modèle géométrique inverse MGI d'un robot 2R plan les équations suivantes :

$$\theta_2 = \pm \arccos \left(\frac{x_r^2 + y_r^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2} \right) \quad (47)$$

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{x_r(l_1 + l_2 \cos(\theta_2)) + y_rl_2 \sin(\theta_2)}{(x_r^2 + y_r^2)} \right) \quad (48)$$

$$\theta_1 = \arcsin \left(\frac{y_r(l_1 + l_2 \cos(\theta_2)) - x_rl_2 \sin(\theta_2)}{(x_r^2 + y_r^2)} \right) \quad (49)$$

Quelles sont les contraintes que doivent respecter x_r et y_r ?

Exercice 3

- ❶ Déterminer l'expression du MGI avec $l_1 = 0.65m$, $l_2 = 0.35m$.

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = g(X)$$

- ❷ Déterminer et tracer les configurations du robot pour les 4 positions suivantes :

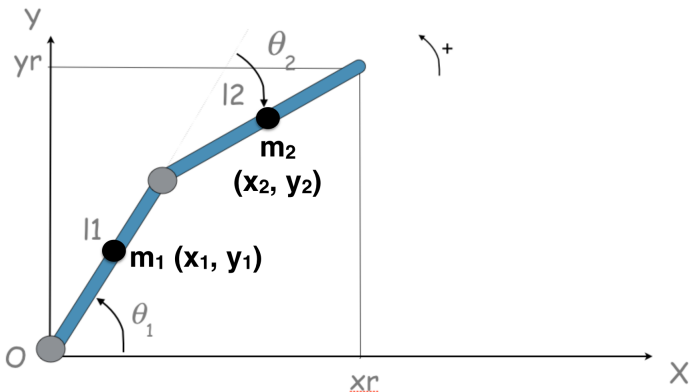
$$P_{os} = \begin{pmatrix} x_{r1} & x_{r2} & x_{r3} & x_{r4} \\ y_{r1} & y_{r2} & y_{r3} & y_{r4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.5 & 0.85 \\ 0.7 & 0 & 0.6 & 0.85 \end{pmatrix}$$

- ❸ Conclusions.

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

On considère maintenant les masses de chaque segment positionner au centre de chacun des segments à $\frac{l_1}{2}$ et $\frac{l_2}{2}$.



On propose d'écrire l'expression des positions et des vitesses des centres de masses.

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Position et vitesses des centres des masses

Positions :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \\ y_1 = \frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \\ x_2 = l_1 \cos \theta_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Vitesses :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{l_1}{2} \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = \frac{l_1}{2} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 - \frac{l_2}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_1 + \frac{l_2}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Energie Cinétique

On calcule l'énergie cinétique du système :

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

Énergie:

$$\begin{cases} E_{ci} = \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 + \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 \\ \dot{r}_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \\ \omega_1 = \dot{\theta}_1 \\ \omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{cases}$$

on obtient :

$$E_c = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1^2(4m_2l_1^2 + 4m_2l_1l_2 \cos \theta_2 + 3m_2l_2^2 + 3m_1l_1^2) \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2m_2(4l_1l_2 \cos \theta_2 + 6l_2^2) + \dot{\theta}_2^2(3m_2l_2^2) \end{pmatrix} \quad (50)$$

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Energie Potentielle

On calcule l'énergie cinétique du système :

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

On obtient :

$$E_p = -g \left(\frac{1}{2} l_1 \sin \theta_1 m_1 + (l_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)) m_2 \right) \quad (51)$$

Equation de Lagrange

On écrit le Lagrangien du système :

$$\Gamma = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Avec $L = E_c - E_p$

Introduction à la robotique

Modélisation Dynamique

Modèle dynamique

On obtient :

$$\Gamma = A(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} + G(\theta) + J^T F_{ext} \quad (52)$$

Avec :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}m_1l_1^2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 + m_2l_1^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 \\ \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{4}m_2l_2^2 & \frac{1}{4}m_2l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$H(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \sin(\theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \frac{1}{2}m_1l_1l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\theta) = -g \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l_1 \cos \theta_1 m_1 + (l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)m_2) \\ \frac{1}{2}l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)m_2 \end{pmatrix}$$

Introduction à la robotique

Commande Dynamique

Technique du couple calculé

On souhaite contrôler un robot manipulateur dont le modèle dynamique direct est :

$$\Gamma = A(\theta)\ddot{\theta} + H(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} + G(\theta) \quad (53)$$

- Proposer un schéma de commande de type proportionnel-dérivé sur l'erreur de position $(\theta_d - \theta)$ capable de contrôler la position articulaire du robot. Conclusions
- Est-il possible d'éliminer les effets de la dynamique avec l'hypothèse que le modèle est parfaitement connu? Conclusions.
- Choisissons une commande de type linéaire qui ne tient pas compte de la dynamique du robot avec $\Gamma_c = K_p(\theta_d - \theta) + K_d(\dot{\theta}_d - \dot{\theta})$
- Écrire l'équation du système en boucle fermée. Conclusions.

Introduction à la robotique

Commande Dynamique

Technique du couple calculé

On choisit cette fois-ci :

$$\Gamma_c = \hat{A}(K_p(\theta_d - \theta) + K_d(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + \ddot{\theta}_d) + \hat{H}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + F_v\dot{\theta} + \hat{G}(\theta) \quad (54)$$

- Réécrire l'équation de la boucle fermée. Conclusions.
- Discuter sur le cas où les valeurs du modèle estimées sont différentes du système réel.
- Écrire l'équation du système en boucle fermée. Conclusions.
- Que représente les gains K_p et K_d dans cette équation?
- Calculer

Introduction à la robotique

Commande Dynamique

Espace opérationnel

On souhaite contrôler un robot manipulateur dont le modèle dynamique est exprimé dans l'espace opérationnel :

$$F_c = M(\theta)\ddot{X} + \Lambda(\dot{\theta}, \theta) + F_{ext} \quad (55)$$

- Déterminer les expressions de $M(\theta)$ et $\Lambda(\dot{\theta}, \theta)$
- En utilisant la technique du couple calculé déterminé un vecteur de commande F_c tel que le comportement du robot dans l'espace opérationnel soit linéaire.
- Conclusions

Introduction à la robotique

Commande Cinématique

Commande Cinématique

On souhaite contrôler la position d'un robot manipulateur en utilisant le MCI. Soit :

$$\dot{\theta} = J^{-1}\dot{e} \quad (56)$$

On choisit $e = X - X_d$. Avec X_d On définit le comportement dynamique du robot avec la relation suivante

$$\dot{e} + \lambda e = 0$$

- Déterminer le vecteur de commande $\dot{\theta}$ pour le contrôle du robot avec le MCI.
- En déduire le schéma de commande.
- Conclusions

Introduction à la robotique

Commande Géométrique

Commande Géométrique

On souhaite contrôler la position d'un robot manipulateur en utilisant le MGI. Soit :

$$\theta = g(X) \quad (57)$$

- Déterminer le schéma de commande de la position de l'effecteur (x_r, y_r) du robot en utilisant le MGI.
- Conclusions

Introduction à la robotique

Exercice

Commande du Centre de Masse (CdM)

On souhaite contrôler la position du Centre de Masse d'un robot manipulateur à 2ddl.

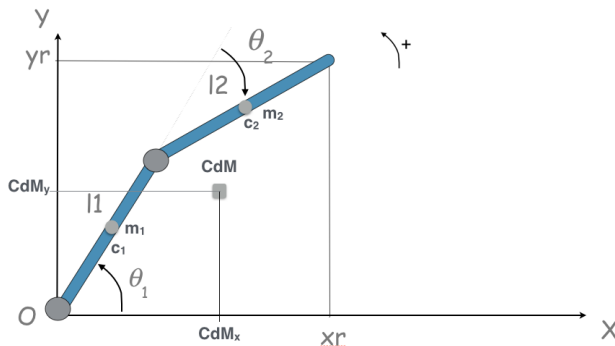


Figure 4: Contrôle de la position du CdM

Introduction à la robotique

Exercice

Commande du Centre de Masse (CdM)

Le calcul du centre de masse ou centre de gravité d'un système mécanique est défini par :

$$OC\vec{dM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i O\vec{c}_i \quad (58)$$

Avec $M = \sum_{i=1}^N m_i$

- ➊ Déterminer la position du CdM du robot en fonction des variables articulaires (θ_1, θ_2) .
- ➋ Comparer ce résultat avec le MGD du bras manipulateur à 2ddl. Conclusions. En déduire le MGI.
- ➌ Représenter le bras de robot série équivalent dont la position de l'effecteur est associée à la position du CdM. Déterminer les longueurs équivalentes r_1 et r_2 de ce bras série?
- ➍ En déduire la matrice jacobienne associée au MDG du CdM.

Introduction à la robotique

Exercice

Contrôle du CdM

Représenter les schémas de commande du CdM utilisant soit les MGD et MCI soit le MGI.

Identification Centre de Masse (CdM)

On réalise deux mesures statiques sur un robot à 2ddl en utilisant une plate-forme de force fixée au sol permettant de relever uniquement la valeur du CdM selon l'axe x .

On a mesuré $l_1 = 0.82m$, $l_2 = 0.9m$, $M = 80kg$ et $c_i = l_i/2$.

1 ^{er} Essai	$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$
CdM_x	0.179m
CdM_y	pas de mesure

2 nd Essai	$\theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$
CdM_x	-0.453m
CdM_y	pas de mesure

- 1 Déterminer les coefficients r_1 et r_2 .
- 2 En déduire les valeurs des masses m_1 et m_2 .

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Il existe plusieurs types de cinématiques de véhicules terrestres dont deux sont très couramment utilisés :

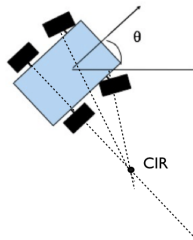


- Il s'agit d'une part du robot mobile de type unicycle avec 2 roues motrices indépendantes assurant à la fois la vitesse et l'orientation du véhicule.
- D'autre part, il y a le robot mobile de type véhicule à 3 ou 4 roues dont 1 ou 2 roues placées à l'avant sont orientables et assurent la direction indépendamment de la vitesse.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

La disposition des roues est viable s'il existe un point unique de vitesse nulle autour duquel tourne le robot. Il s'agit du Centre Instantané de Rotation (CIR).



- Le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires de tous les vecteurs vitesses du véhicule.

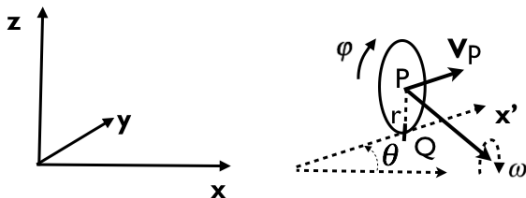
Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Hypothèses :

- Contact roue-sol ponctuel,
- Les roues sont indéformables de rayon r ,
- Roulement sans glissement,

En réalité le contact est une surface déformable (roue déformable) avec glissement.



$$\overrightarrow{V_Q} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$$

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Modélisation cinématique

Avec :

$$\overrightarrow{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin(\theta) \vec{x} \\ -\dot{\psi} \cos(\theta) \vec{y} \\ \dot{\theta} \vec{z} \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \vec{z} \end{pmatrix} \quad (60)$$

$$\overrightarrow{V_P} = \begin{pmatrix} \dot{x} \vec{x} \\ \dot{y} \vec{y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

On obtient :

$$\dot{x} \vec{x} + \dot{y} \vec{y} + (\dot{\theta} \vec{z} + \dot{\psi} \sin(\theta) \vec{x} - \dot{\psi} \cos(\theta) \vec{y}) \wedge (-r \vec{z}) = \vec{0} \quad (62)$$

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un véhicule

Modélisation cinématique

On projette cette équation sur les axes x et y .

$$\dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + (\dot{\theta}\vec{z} + \dot{\psi}\sin(\theta)\vec{x} - \dot{\psi}\cos(\theta)\vec{y}) \wedge (-r\vec{z}) = \vec{0} \quad (63)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} l/\vec{x} : \dot{x} + r\dot{\psi}\cos(\theta) &= 0 \\ / \vec{y} : \dot{y} + r\dot{\psi}\sin(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

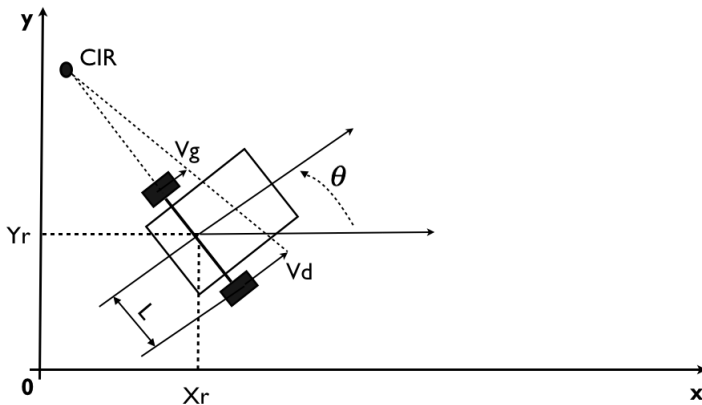
On exprime ainsi le roulement sans glissement de la roue par une contrainte non intégrale de la forme :

$$\dot{y}\cos(\theta) - \dot{x}\sin(\theta) = 0 \quad (65)$$

Il s'agit d'une contrainte de non-holonomie. c'est une contrainte non-intégrable.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique de l'unicycle



Déterminer la relation cinématique entre la vitesse des roues du véhicule V_d et V_g et le vecteur vitesse $\vec{P} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ dans le plan (o, \vec{x}, \vec{y})

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique de l'unicycle

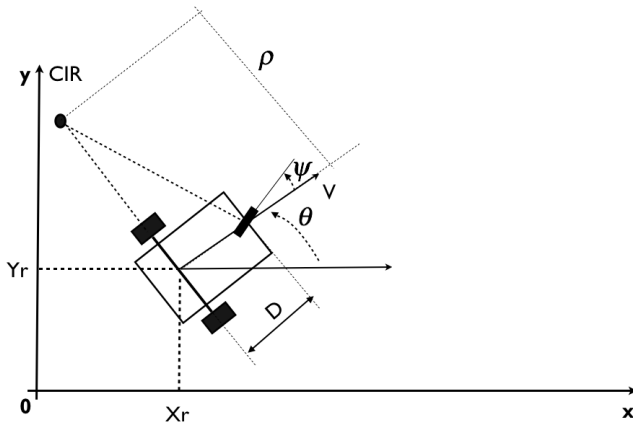
Modélisation de l'unicycle

On considère un véhicule unicycle avec $L = 0.5m$, et $V_{gmax} = V_{dmax} = 3m/s$.

- ➊ On veut réaliser une trajectoire circulaire dans le plan (o, x, y) avec la vitesse maximale. Donner l'expression de $x(t)$ et $y(t)$.
- ➋ En déduire les expressions des vitesses $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.
- ➌ Déterminer les expressions de $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.
- ➍ Donner les expressions de $V_g(t)$ et $V_d(t)$.
- ➎ Déterminer le rayon de braquage maximal r_{max} pour une vitesse de rotation ω_0 donnée en prenant en compte la vitesse maximale des roues.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique du véhicule



Déterminer la relation cinématique entre la vitesse des roues du véhicule V et la commande du volant η et le vecteur vitesse $\vec{P} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ dans le plan (o, \vec{x}, \vec{y})

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique du véhicule

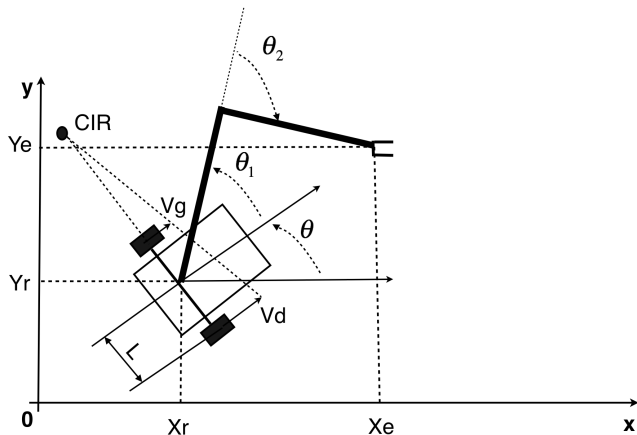
Modélisation du véhicule

On considère un véhicule avec $D = 1m$ et $V_{max} = 10m/s$.

- ➊ On veut réaliser une trajectoire circulaire dans le plan (o, x, y) avec la vitesse maximale. Donner l'expression de $x(t)$ et $y(t)$.
- ➋ En déduire les expressions des vitesses $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$.
- ➌ Déterminer les expressions de $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et $\psi(t)$.
- ➍ Donner les expressions de $V(t)$ et $\eta(t)$.
- ➎ Déterminer le rayon de braquage maximal r_{max} pour une vitesse de rotation ω_0 donnée en prenant en compte la vitesse du véhicule.

Introduction à la robotique

Modélisation cinématique d'un manipulateur mobile



Déterminer la relation cinématique entre la vitesse de l'effecteur \dot{X}_e, \dot{Y}_e ainsi que l'orientation du véhicule $\dot{\theta}$ et les variables de commandes dans l'espace des configurations $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, V_d$ et V_g .

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Systèmes sous-déterminés

Soit le système algébrique :

$$Ax = b \quad (66)$$

Avec A une matrice de dimension $m \times n$ et x un vecteur de dimension $n \times 1$ et b de dimension $m \times 1$.

On considère le cas sous-déterminé avec : $m < n$ et $\text{rang}(A) = m$. Le système présente un nombre d'équations (m) inférieur aux nombres d'inconnus (n).

Le nombre de solution est infinie. On propose alors le choix de minimiser la norme euclidienne du vecteur x . Dans ce cas essayons de trouver quelle est la relation qui permet de réaliser cette minimisation. Soit :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x\|_2^2 \\ \text{s.t. : } Ax - b = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Systèmes sous-déterminés

On propose de déterminer sa solution en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Soit une nouvelle fonction objectif définie par :

$$\xi(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2 + \lambda^T (Ax - b)$$

Avec un vecteur de dimension m . On a maintenant un problème de minimisation non-contraint avec $m + n$ variables, les m composantes de b et les n composantes de x . On peut les regrouper dans le vecteur :

$$y = [x^T \lambda^T]^T$$

On peut maintenant établir la solution de ce problème par :

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial y} = 0$$

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Systèmes sous-déterminés

On peut décomposer cette expression en deux solutions :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = x + A^T \lambda = 0_n$$

et

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = Ax - b = 0_m$$

. On a : $x = -A^T \lambda$ et $AA^T \lambda - b = 0$ De ces deux expressions on en déduit :

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b \quad (68)$$

Avec :

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1} \quad (69)$$

A^+ est appelée la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice A ou inverse généralisée.

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

propriétés de la pseudo-inverse

En considérant la relation :

$$Ax = b$$

avec $x = A^+b$ et $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$, on obtient les propriétés suivantes :

$$AA^+A = A$$

$$A^+AA^+ = A^+$$

$$(A^+A)^T = A^+A$$

Une solution particulière x_p peut-être trouver en utilisant le projecteur dans le noyau de la matrice A . Soit :

$$x_p = A^+b + (I - A^+A)z \quad (70)$$

Avec z un vecteur quelconque.

Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

propriétés de la pseudo-inverse

Démonstration :

$$x_p = A^+b + (I - A^+A)z$$

$$Ax_p = AA^T(AA^T)^{-1}b + A(I - A^T(AA^T)^{-1}A)z$$

$$Ax_p = AA^T(AA^T)^{-1}b + Az - AA^T(AA^T)^{-1}Az$$

$$Ax_p = b + Az - Az$$

soit :

$$Ax_p = b$$

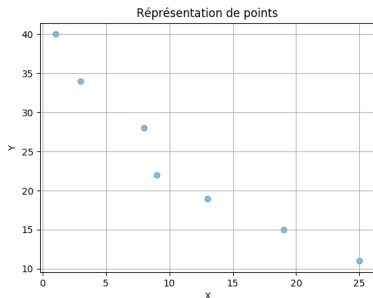
Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Exercice : système sur-déterminé

Soit l'ensemble des points suivants :

- 1 $X = [1 \ 3 \ 8 \ 9 \ 13 \ 19 \ 25]$ et $Y = [40 \ 34 \ 28 \ 22 \ 19 \ 15 \ 11]$
- 2 Déterminer la droite d'équation $Y = a * X + b$ minimisant l'écart entre la distribution des points et la droite au sens des moindres carrés.



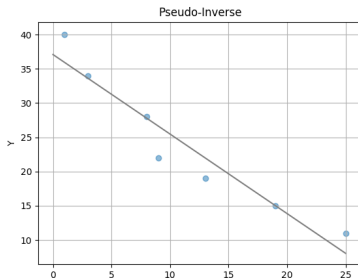
Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Exercice : système sur-déterminé

Soit l'ensemble des points suivants :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ X_7 & 1 \end{pmatrix}^+ Y^T = \begin{pmatrix} -1.1617 \\ 37.0875 \end{pmatrix} \quad (71)$$



Introduction à la robotique

Étude des robots redondants

Exercice : système sous-déterminé

Soit le système suivant à 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3 & 0.1 \\ 2 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3 & 0.1 \\ 2 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.38 \\ 1.98 \\ 3.77 \\ 4.30 \end{pmatrix}$$