Université Montpellier II — Examen 1re session 2011

Département des Sciences Mathématiques et Département de Mécanique et génie civil

Licence Math et Méca, Module Modélisation mathématique, FLSI653

Les deux problèmes sont indépendants, chacun sur 10 points, pour faciliter la correction veuiller les rédiger sur des feuilles séparées à l'intérieur de votre copie.

Problème n^o 1

On s'intéresse à la température $u(x,t)$ dans un barreau $0 < x < 1$ et à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$. On suppose que $(x,t) \mapsto u(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur, *avec convection*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

où $\mu > 0$ désigne le coefficient de diffusion thermique et $c \in \mathbb{R}$ désigne le coefficient de *convection thermique*. On suppose de plus que u satisfait les *conditions limites périodiques* :

$$u(0,t) = u(1,t), \quad \forall t > 0 \tag{2}$$

(1) Résoudre l'EDP. Vérifiez les conditions limites et montrer que la solution générale obtenue est

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \exp\{-4\pi^2\, n^2\, \mu\, t\} \exp\{2\, i\, \pi n\,(x - c\,t)\}$$

Indication : on pourra poser

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n(t) \exp\{2\, i\, \pi n\, x\}$$

et identifier les coefficients de Fourier $\alpha_n(t)$.

(2) On donne maintenant la température initiale : u satisfait la *condition initiale*

$$u(x,0) = \sin(2\pi x), \quad \forall x \in]0,1[.$$

Déterminez les coefficients A_n pour que la condition initiale soit satisfaite. En déduire une expression *très simple* de $u(x,t)$.

(3) Prouver que la fonction $(x,t) \mapsto u(x,t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1] \times [0,\infty[$.

(4) Calculer $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$. La convergence est-elle uniforme ? Interprétez le résultat.

(5) La figure jointe vous paraît-elle confirmer vos résultats ? Commentez. La figure est obtenue pour $\mu = O(1)$. A votre avis, lorsque $\mu \gg 1$, la convergence de $u(\cdot,t)$ vers 0 quand $t \to +\infty$ est-elle plus rapide ou plus lente ? Interprétez ce résultat.

(6) Comment *interprétez* vous le coefficient de convection c ? *Estimer* sa valeur approximative d'après la figure. Justifiez.

(7) Retrouvez les cas particuliers $c = 0$ ou $\mu = 0$. Interprétez.

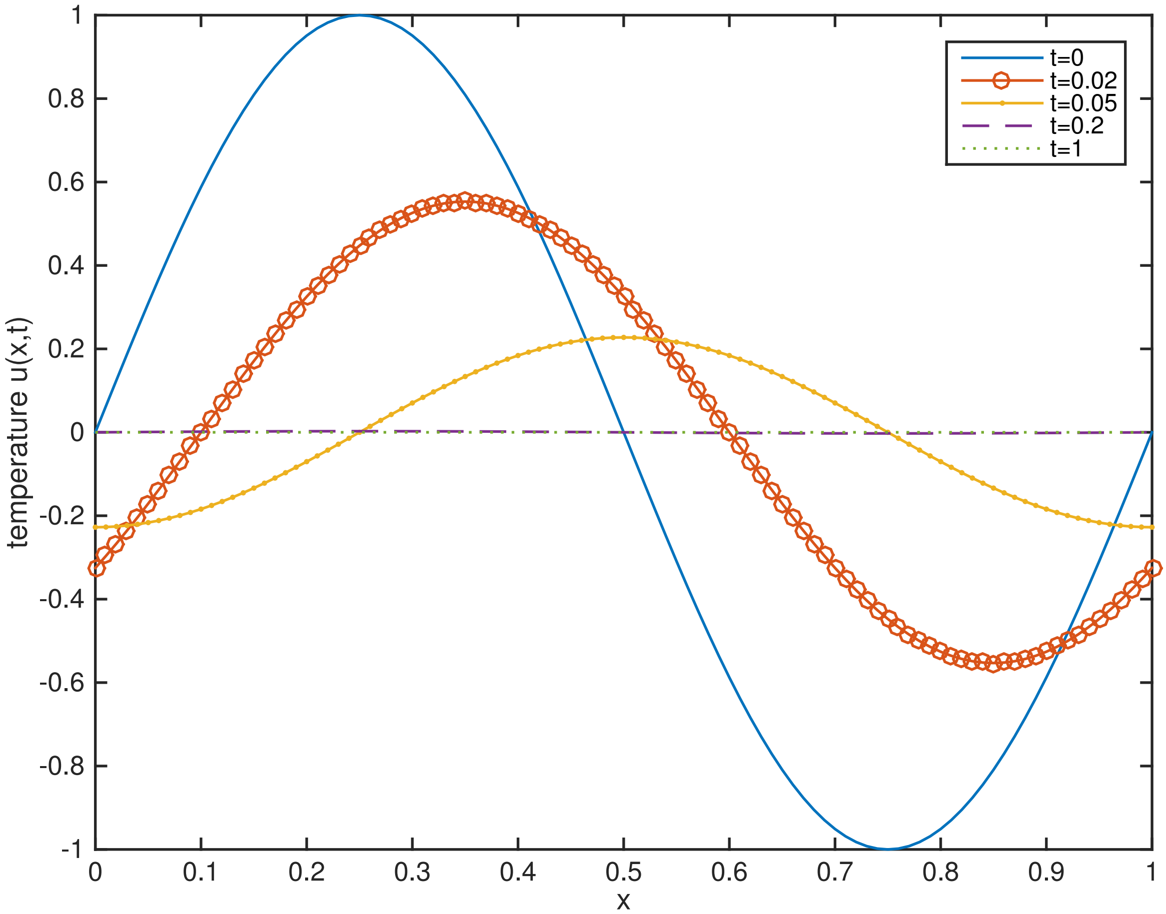

FIGURE 1. Température à différents instants, pour $\mu = 0.7$.