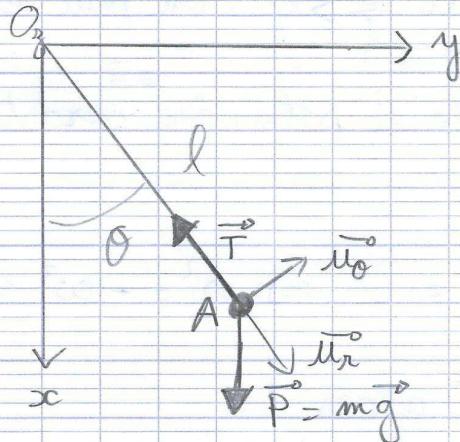


GIUDICE Anthony
SIMONET Théo
SONZOGNI Marc

TP3
Catalogue de problèmes

① Le pendule simple

Soit une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur l . On repère la position de la masse par l'angle θ entre la verticale et la direction du fil



En appliquant le PFD sur la masse, on a :

$$\vec{T} + \vec{P} = m \vec{a} \quad (\Rightarrow) -T_x \cos \theta \vec{x} - T_y \sin \theta \vec{y} + mg \vec{x} = m \vec{a}$$

Si on se place dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, on a :

$$\cdot \vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} (l \vec{u}_r) = \frac{d}{dt} (l \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$$\cdot \vec{T} = -T \vec{u}_r \quad \cdot \vec{P} = mg (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Ainsi on obtient, en projetant sur ces deux axes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -T + mg \cos \theta = -m l \ddot{\theta} \\ -mg \sin \theta = m l \dot{\theta}^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -T + mg \cos \theta = -m l \ddot{\theta} \\ -mg \sin \theta = m l \dot{\theta}^2 \end{array} \right. \quad (2)$$

En utilisant l'approximation des petits angles, on a

$$\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$$

Si on réinjecte dans (2), on obtient :

$$-mg\theta = m\ell\ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0 \quad (3)$$

Comme on a $\frac{g}{\ell} > 0$, on peut écrire $\frac{g}{\ell} = \omega^2$

Si on calcule le polynôme caractéristique de (3), on obtient :

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\omega$$

On obtient alors

$$\theta(t) = a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Si on a, comme conditions initiales, $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, alors on a :

$$\begin{cases} \theta(0) = A = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \omega B = \dot{\theta}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \theta_0 \\ B = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \end{cases}$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$

Programme de l'exercice 1 :

```
%la partie en commentaire sert à enregistrer les films

clear all
close all
clc

g = 9.81;
l = 5;      %longueur du fil
tspan = [0:0.1:10];

%variation de l'angle initial de 15° a 180° par pas de 15°

y0 = [0 1];

%mov = VideoWriter('./VideoExo1Pt1.avi');

while (y0(1)<pi)

y0 = [y0(1)+pi./12 y0(2)];

[t,y] = ode23(@(t,y)[y(2); (-g/l)*sin(y(1))],tspan,y0);

x = zeros(2,1);
z = zeros(2,1);
for ind = 2:length(t)
    tic
    x(2) = l*sin(y(ind,1));
    z(2) = -l*cos(y(ind,1));
    subplot(2,1,1,'replace');
    axis([-22 22 -11 11]);
    box on;
    grid on;
    line(x,z,'LineWidth',2);
    line(x(2),z(2),'Marker','.', 'MarkerSize',40);
    subplot(2,1,2);
    line([y(ind-1,1) y(ind,1)], [y(ind-1,2) y(ind,2)]);
    %F = getframe(gcf);
    %open(mov);
    %writeVideo(mov,F);
    drawnow;
    while toc<0.0025; end
end

end

close all
```

```

%variation de la vitesse initiale de 0.5 et 7.5 par pas de 0.5

y0 = [pi./12 0];

%mov = VideoWriter('./VideoEx01Pt2.avi');

while (y0(2)<7.5)

    y0 = [y0(1) y0(2)+0.5];

    [t,y] = ode23(@(t,y)[y(2); (-g/l)*sin(y(1))],tspan,y0);

    x = zeros(2,1);
    z = zeros(2,1);

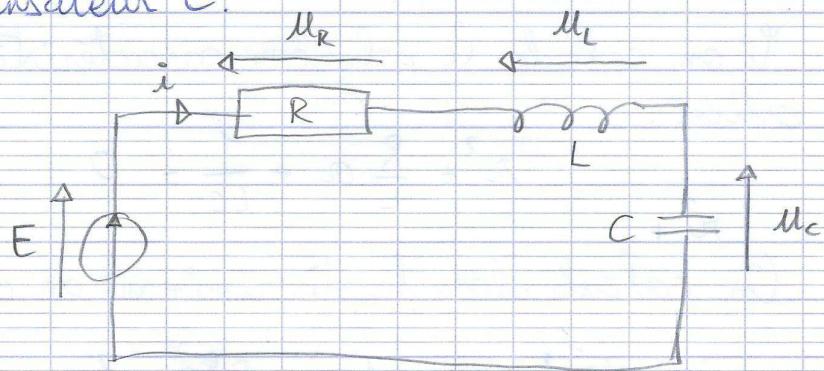
    for ind = 2:length(t)
        tic
        x(2) = l*sin(y(ind,1));
        z(2) = -l*cos(y(ind,1));
        subplot(2,1,1,'replace');
        axis([-22 22 -11 11]);
        box on;
        grid on;
        line(x,z,'LineWidth',2);
        line(x(2),z(2),'Marker','.', 'MarkerSize',40);
        subplot(2,1,2);
        line([y(ind-1,1) y(ind,1)], [y(ind-1,2) y(ind,2)]);
        %F = getframe(gcf);
        %open(mov);
        %writeVideo(mov,F);
        drawnow;
        while toc<0.0025; end
    end

end

```

② Le circuit RLC

Soit le circuit électrique constitué d'une source de tension E , d'une résistance R , d'une bobine L et d'un condensateur C .



On peut alors :

$$E = U_R + U_L + U_C$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} U_R = R i \\ U_L = L i' \\ \frac{dU_C}{dt} = \frac{i}{C} \end{array} \right.$$

$$E = E_0 \sin(\omega t)$$

En utilisant la relation $i = \dot{q}$, où q représente la charge électrique, on a alors :

$$E = R i + L i' + U_C$$

$$\Leftrightarrow E = R \dot{q} + L \ddot{q} + \frac{q}{C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L}}$$

Dans notre cas, on pose $E = E_0$. On obtient alors

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{E_0}{L} \quad (*)$$

Si on calcule le polynôme caractéristique de (*), on obtient :

$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0$$

On calcule alors le discriminant de cette équation :

$$\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{LC} = \frac{R^2 C - 4L}{L^2 C}$$

Ici, on a pris $R = 10 \text{ m}\Omega$, $C = 100 \text{ mF}$ et $L = 50 \text{ mH}$.
On a alors $\Delta < 0$, ce qui nous place dans le régime pseudo-périodique

$$\text{On obtient alors : } r_{\pm} = \frac{-\frac{R}{L} \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

ce qui permet d'avoir :

$$q_1(t) = a e^{(-\frac{R}{2L} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})t} + b e^{(-\frac{R}{2L} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})t}$$

$$\Leftrightarrow q_1(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left(a e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} + b e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t} \right)$$

Comme la solution doit être réelle, on a :

$$q_1(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

$$\text{avec } \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\frac{4L - R^2 C}{4L^2 C}}$$

Cherchons maintenant la solution particulière :

Si on pose $q_2(t) = q_0$, on obtient :

$$0 + \frac{R}{L} \cdot 0 + \frac{1}{LC} q_0 = \frac{E_0}{L} \quad (\Rightarrow) \quad q_0 = E_0 C$$

Ainsi, on obtient :

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t)$$

$$\Leftrightarrow q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + E_0 C$$

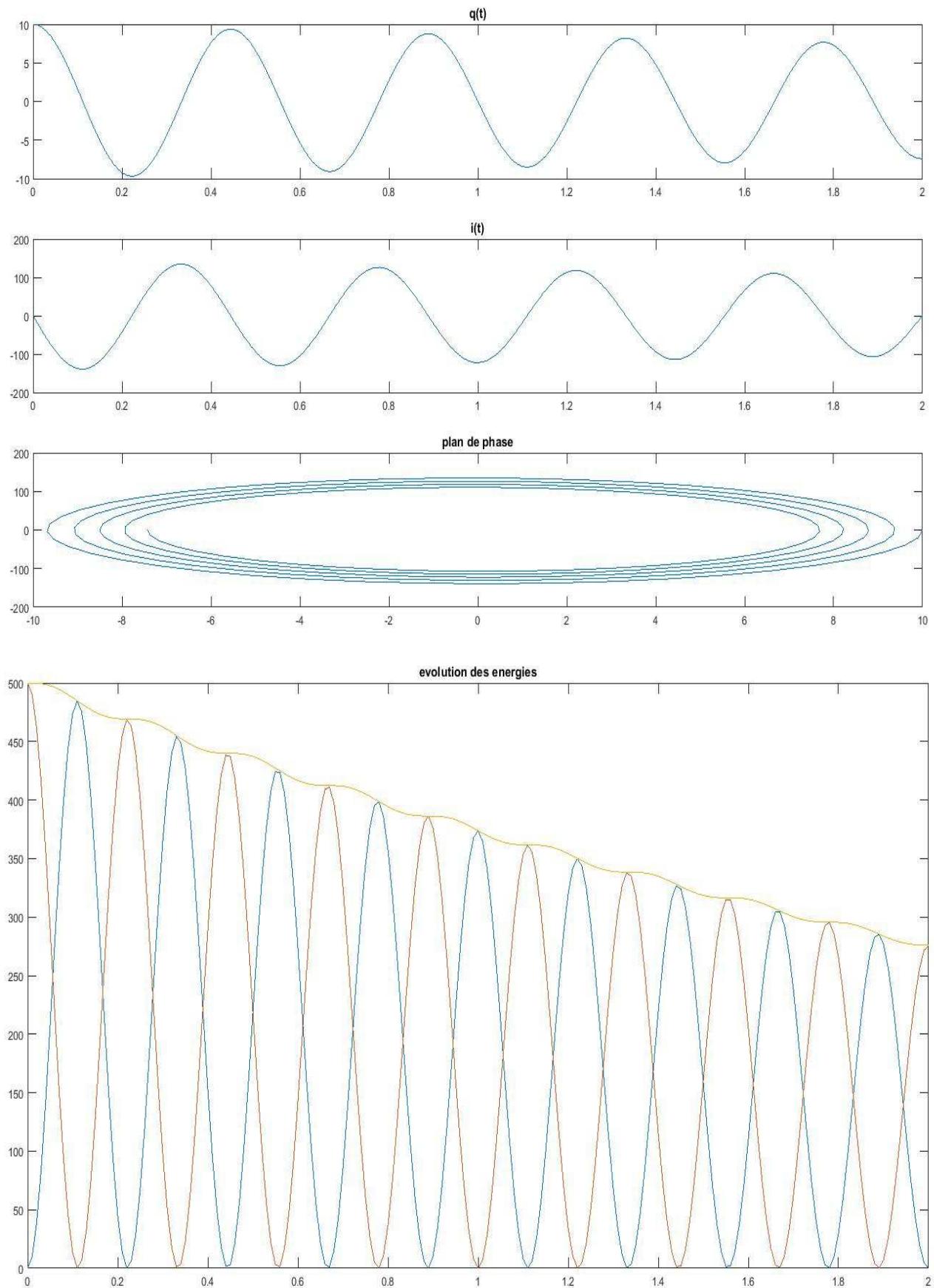
En appliquant les conditions initiales, on a :

$$\begin{cases} q(0) = E_0 \\ \dot{q}(0) = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} A + E_0 C = E_0 \\ -\frac{R\omega}{2L} B = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} A = E_0(1-C) \\ B = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$q(t) = E_0 \left(C + (1-C) \cos(\omega t) e^{-\frac{R}{2L}t} \right)$$

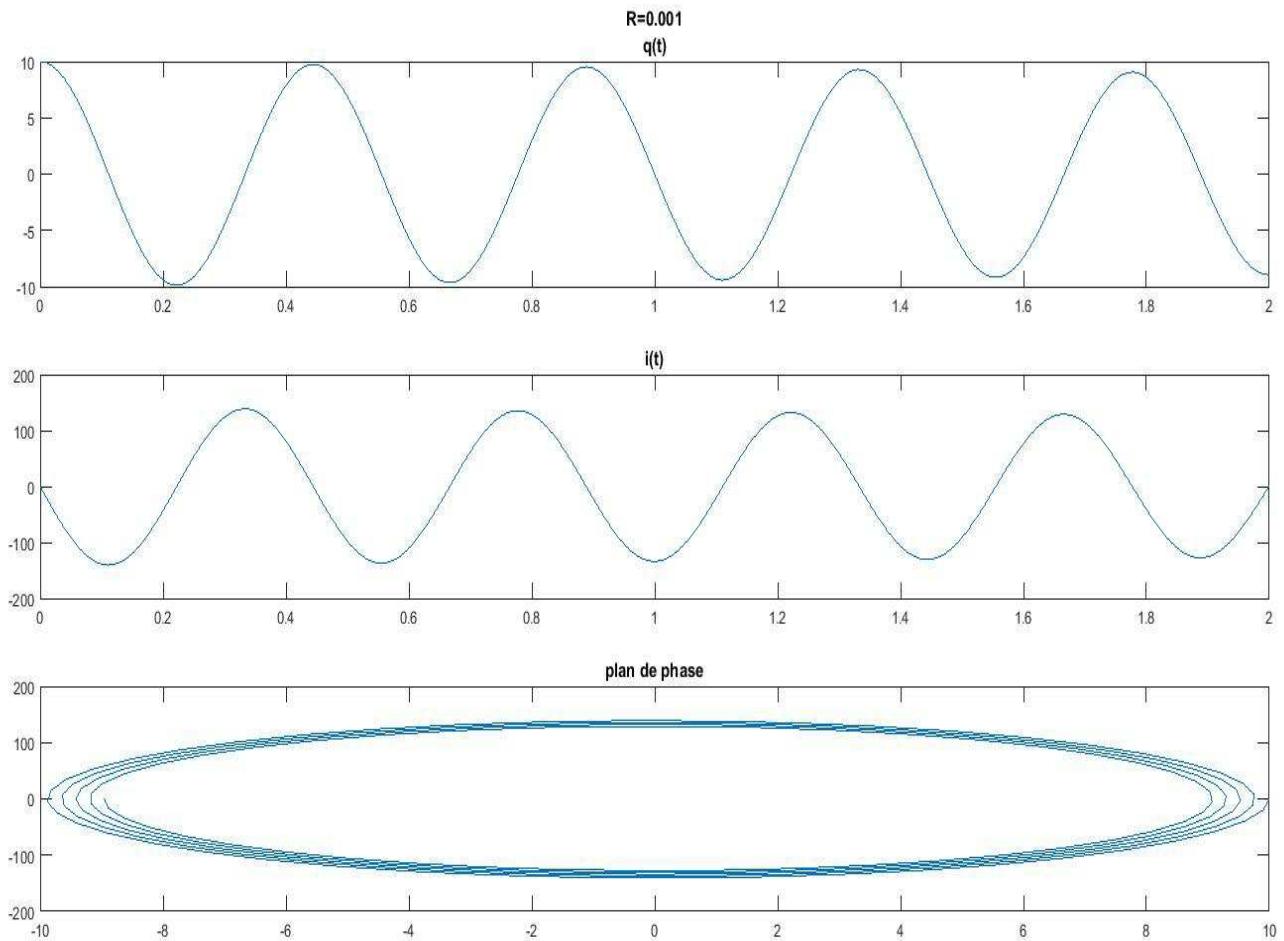
On obtient alors comme tracé de courbes :

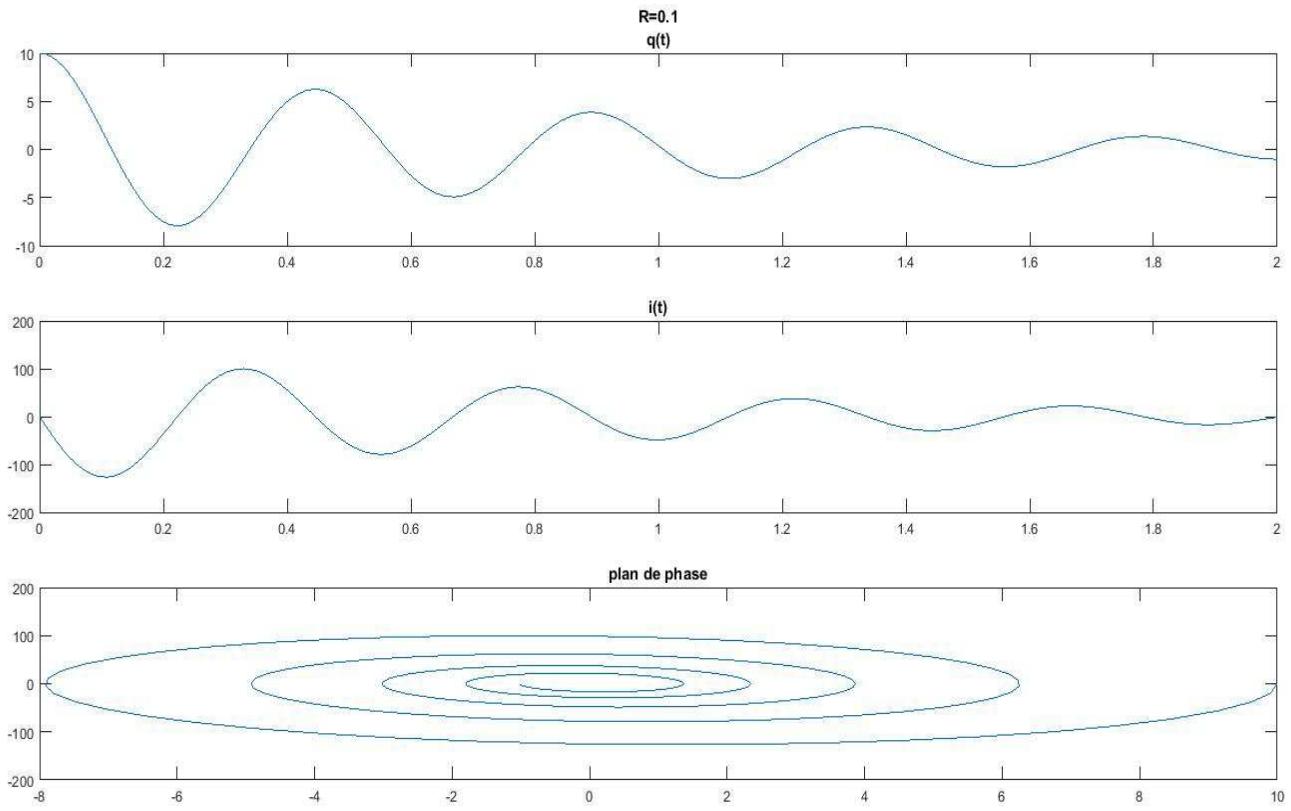
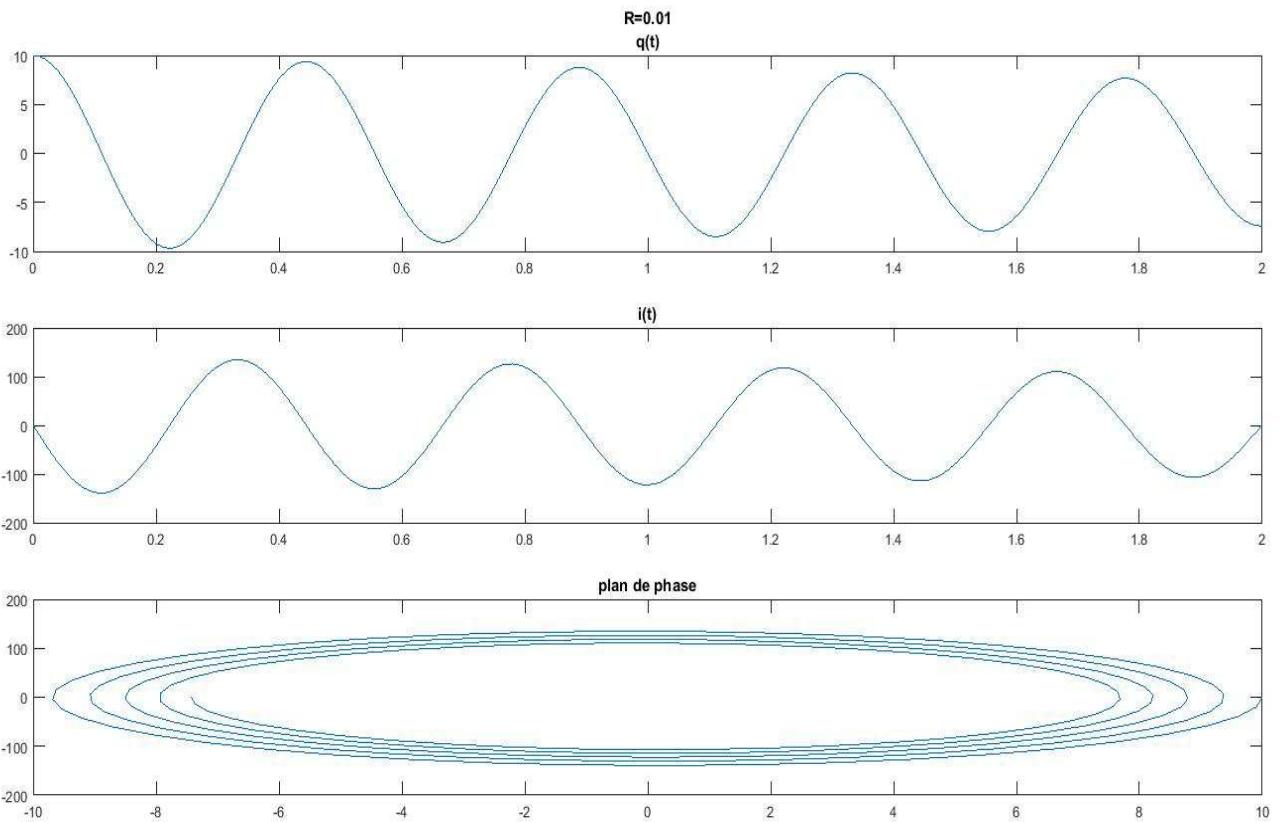


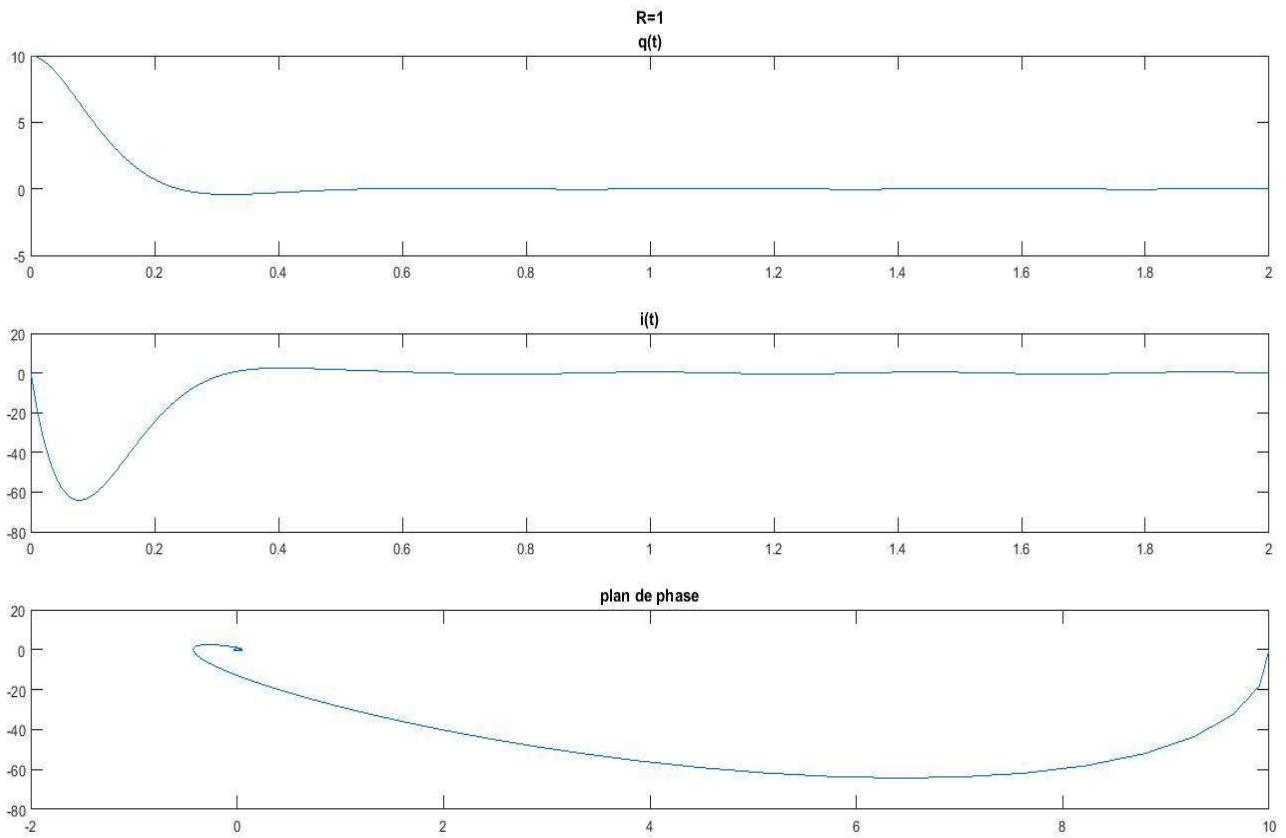
On peut voir que la charge varie comme un cosinus amorti, tandis que l'intensité varie elle comme un sinus amorti : c'est tout à fait normal car l'intensité est la dérivée de la charge, tout comme le sinus est la dérivée du cosinus. L'amortissement est dû au fait que la bobine dissipe plus d'énergie que ce que le condensateur peut en conserver.

Sur le graphe de l'évolution des énergies, on a en bleu l'énergie de la bobine, en rouge celle du condensateur et en jaune l'énergie totale. On peut remarquer que les énergies des deux composants sont en opposition de phase, et que l'énergie totale diminue de manière continue, ce qui correspond tout à fait à la réalité physique. En effet, l'énergie du condensateur est nulle au départ, tandis que la bobine commence "directement" à dissiper l'énergie, et lorsque la bobine n'a plus d'énergie à dissiper, le condensateur est totalement chargé.

Si on fait varier la valeur de la résistance, on obtient alors les courbes suivantes :







On peut observer que pour $R=0.1$ ohm et plus, la charge et l'intensité sont très rapidement amorties, et les plans de phase entre l'intensité et la charge passent d'une forme de spirale à une courbe qui converge vite vers le point de coordonnées (0,0).

Programme de l'exercice 2 :

```
clear all
close all
clc

E0 = 10;
C = 0.1;
L = 0.05;
omega0 = 1./sqrt(L*C);

R = 0.01;

tspan = [0:0.01:2];
q0 = [E0 0];

[t,q] = ode23(@(t,y)[y(2); -(R/L)*y(2)-
y(1)./(L*C)+E0*sin(omega0*t)],tspan,q0);

El = 0.5*L*q(:,2).^2;
Ec = (q(:,1).^2)/(2*C);

subplot(3,1,1); plot(t,q(:,1)); title('q(t)')
subplot(3,1,2); plot(t,q(:,2)); title('i(t)')
subplot(3,1,3); plot(q(:,1),q(:,2)); title('plan de phase')
figure
plot(t,El,t,Ec,t,El+Ec); title('evolution des energies')

%variation de R de 0.001 a 1
R = [1 0.1 0.01 0.001];

for p=1:length(R)

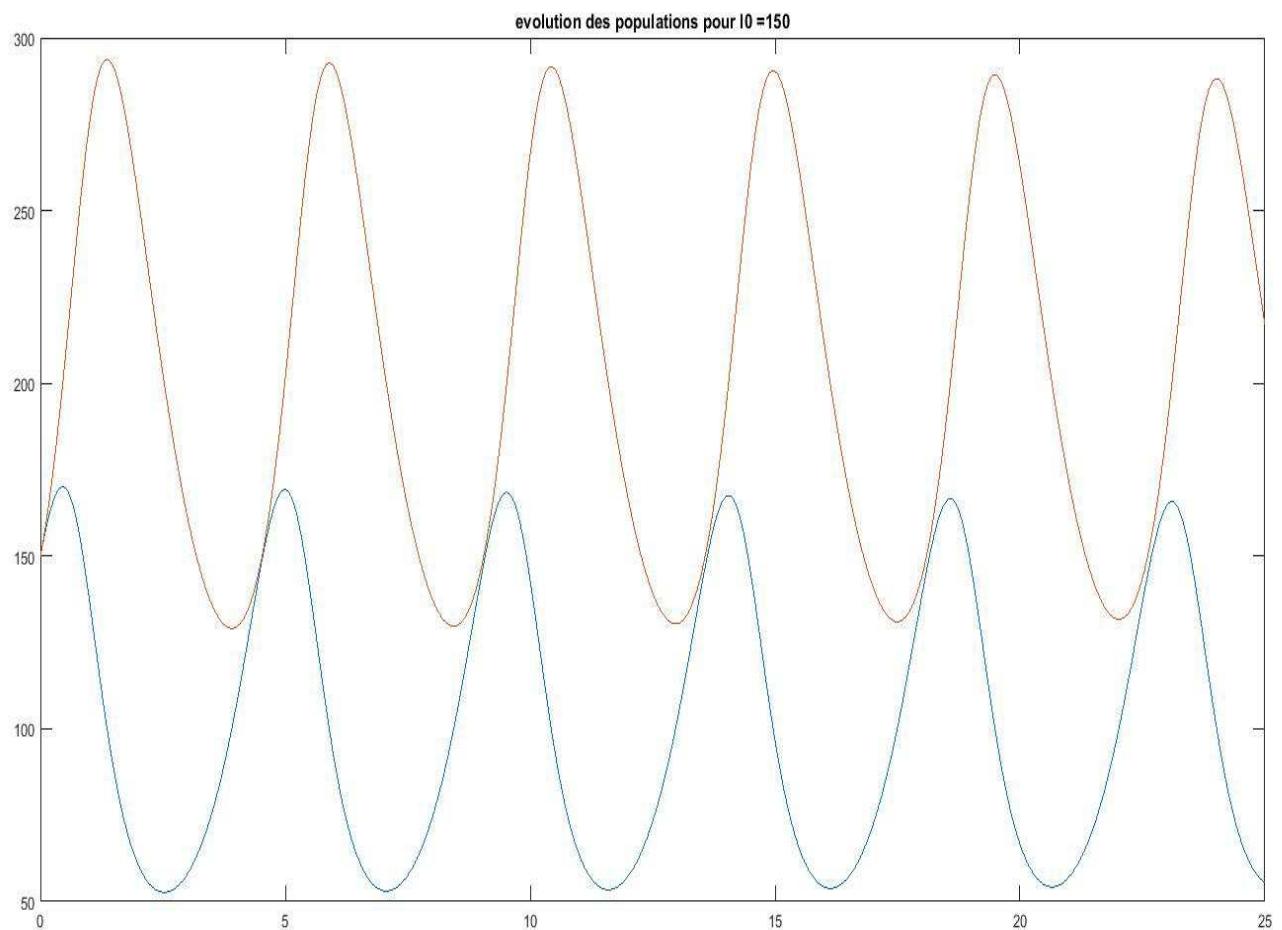
    [t,q] = ode23(@(t,y)[y(2); -(R(p)/L)*y(2)-
y(1)./(L*C)+E0*sin(omega0*t)],tspan,q0);

    figure;
    subplot(3,1,1); plot(t,q(:,1));
    title({strcat('R=',num2str(R(p))); 'q(t)'})
    subplot(3,1,2); plot(t,q(:,2)); title('i(t)')
    subplot(3,1,3); plot(q(:,1),q(:,2)); title('plan de phase')

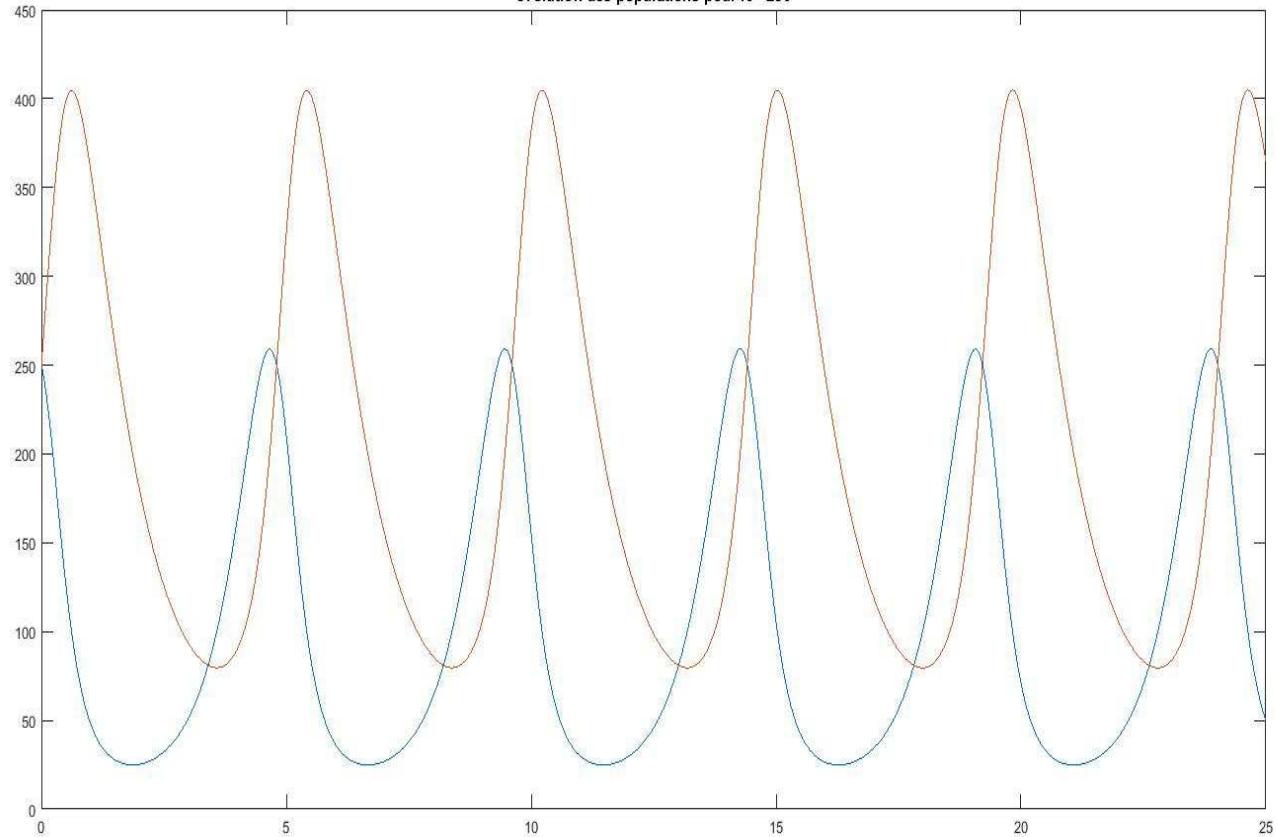
end
```

3) Population de renard et de lapin

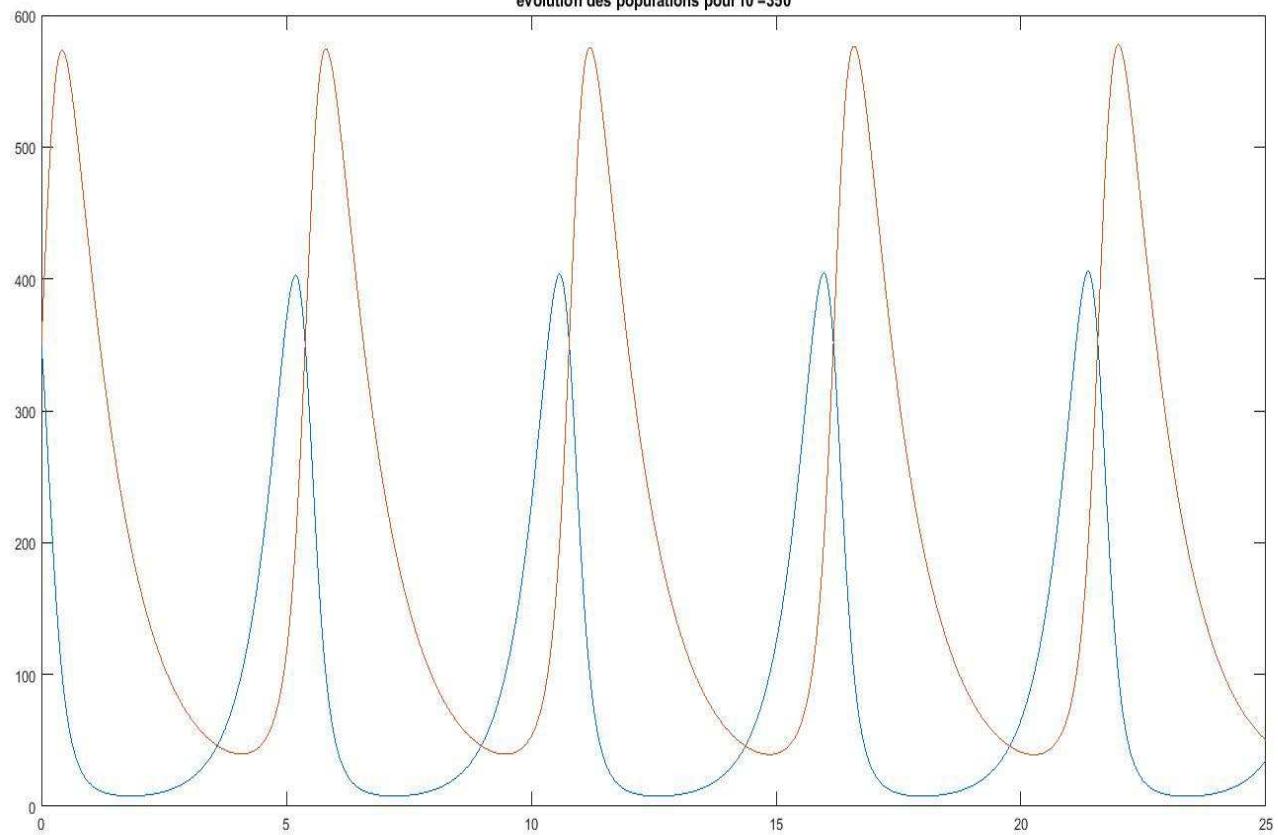
Après modélisation du problème sur Matlab, on obtient 20 graphes différents où sont représentés en rouge la population de renards et en bleu la population de lapins, dont en voici quelques-uns :



évolution des populations pour $I_0 = 250$



évolution des populations pour $I_0 = 350$



Programme de l'exercice 3 :

```
clear all
close all
clc

a = 2;
b = 0.01;
c = 0.01;
d = 1;

t0 = 150:10:350;
r0 = 10;

tspan = [0:0.01:25];

for i=1:length(t0)

y0 = [t0(i) r0(i)];

[t,y] = ode23(@(t,y)[a*y(1)-b*y(1)*y(2); -
d*y(2)+c*y(1)*y(2)],tspan,y0);

figure
plot(t,y(:,1),t,y(:,2)); title(strcat('evolution des
populations pour t0 = ',num2str(t0(i))));
disp('Appuyez sur une touche pour continuer');
waitForbuttonpress; clc; close all

end
```

④ L'effet papillon

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = -\sigma (x_2 - x_3) \\ \dot{x}_3 = -x_2 x_1 + \rho x_2 - x_3 \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = -\sigma (x_2 - x_3) \\ \dot{x}_3 = -x_2 x_1 + \rho x_2 - x_3 \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_1 + x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = -\sigma (x_2 - x_3) \\ \dot{x}_3 = -x_2 x_1 + \rho x_2 - x_3 \end{cases} \quad (c)$$

avec, dans notre cas, $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ et $\rho = 28$

Si on pose $x_c = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors $\dot{x}_c = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}$

On peut alors réécrire le système différentiel :

$$(a) \quad \dot{x}_1 = (-\beta \quad x_3 \quad 0) x_c$$

$$(b) \quad \dot{x}_2 = (0 \quad -\sigma \quad \sigma) x_c$$

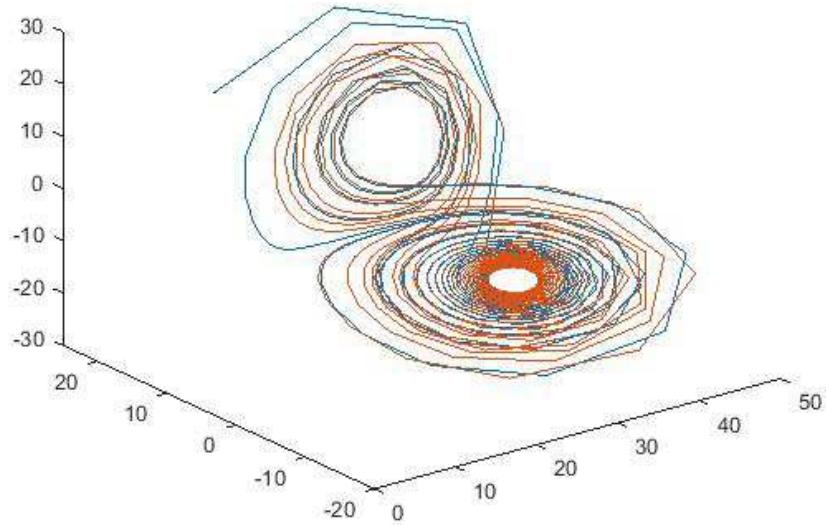
$$(c) \quad \dot{x}_3 = (-x_2 \quad \rho \quad -1) x_c$$

Ce qui donne

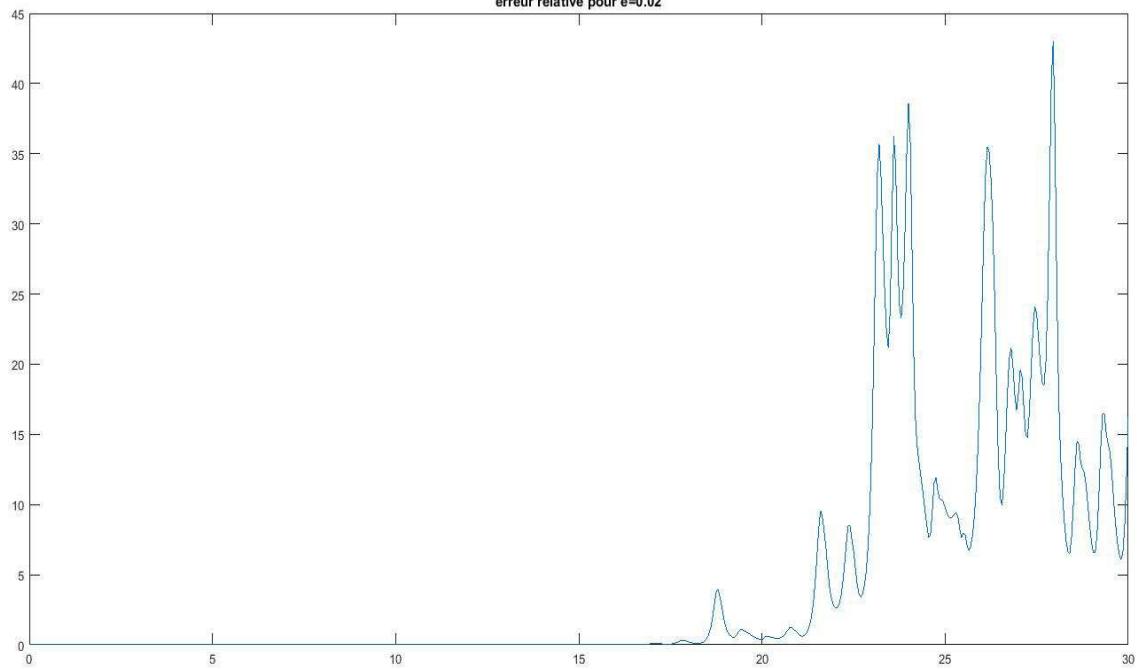
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & x_3 & 0 \\ 0 & -\sigma & \sigma \\ -x_2 & \rho & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

En résolvant numériquement ce système, et en prenant des valeurs initiales variant de 0.04, on obtient les trajectoires, où est représentée en bleu la trajectoire pour $x_a(t_0) = [10, 15, 20]$ et en rouge $x_b(0) = x_a(t_0) + \varepsilon$, et les erreurs relatives suivantes :

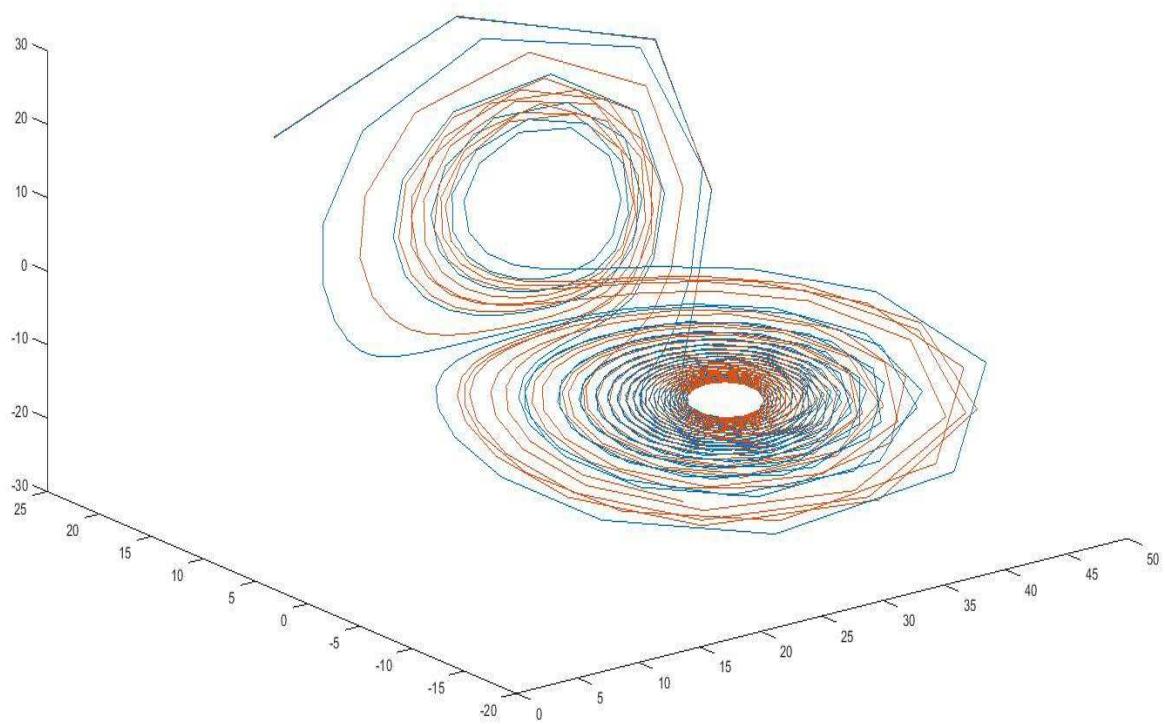
trajectoires pour $e=0.02$



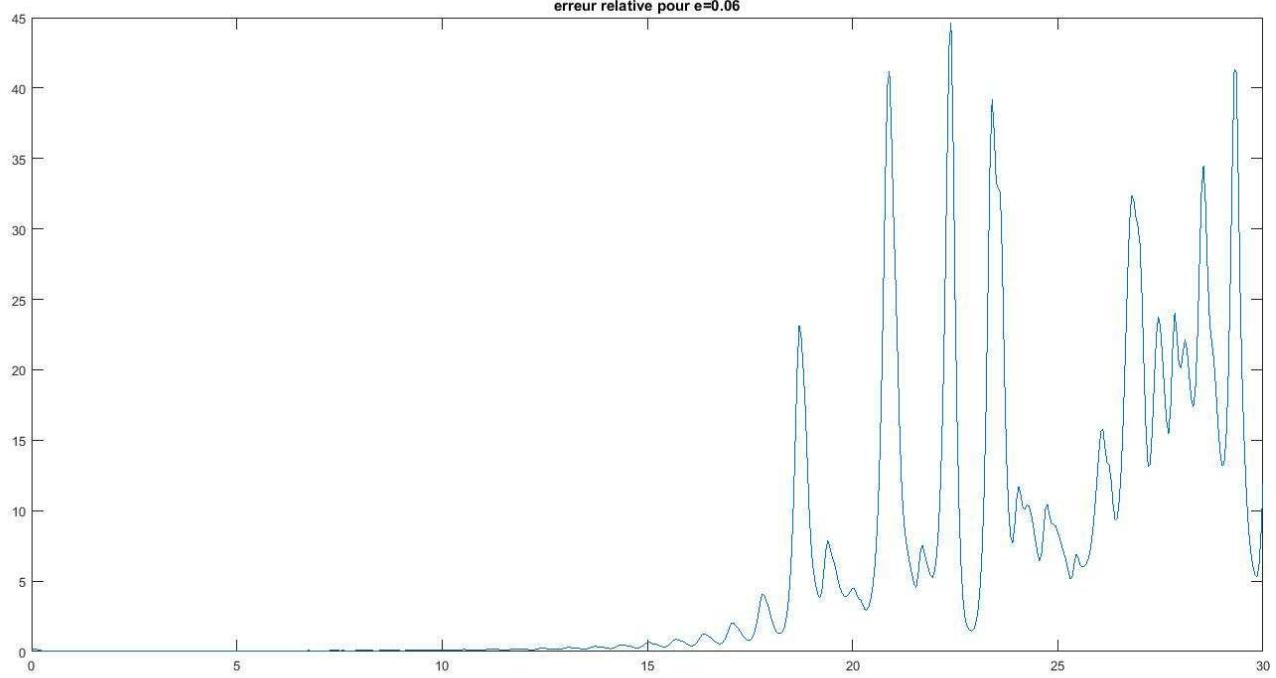
erreur relative pour $e=0.02$



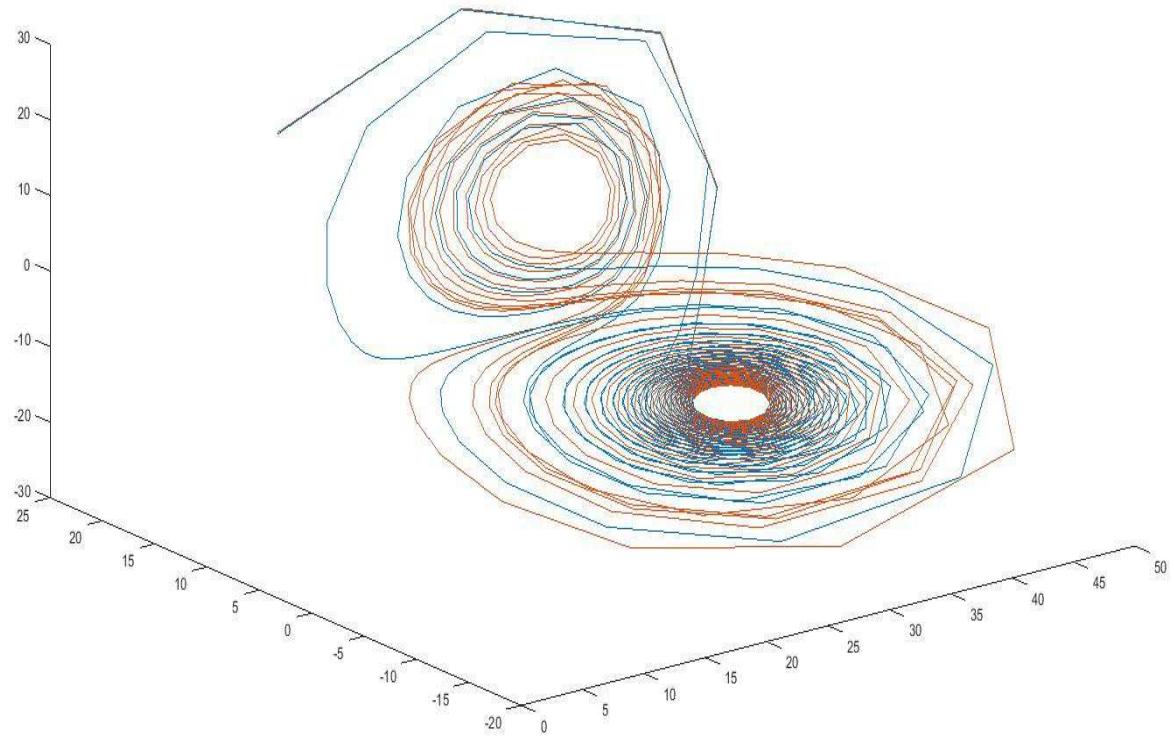
trajectoires pour $e=0.06$



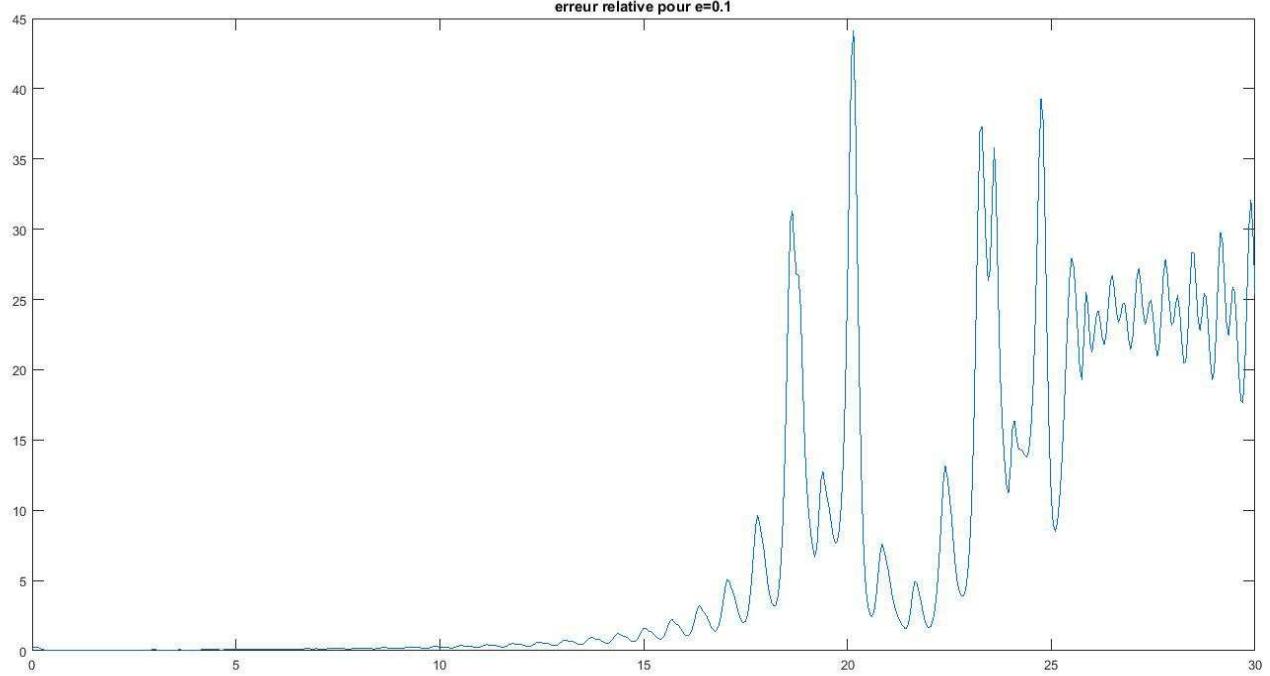
erreur relative pour $e=0.06$



trajectoires pour $e=0.1$



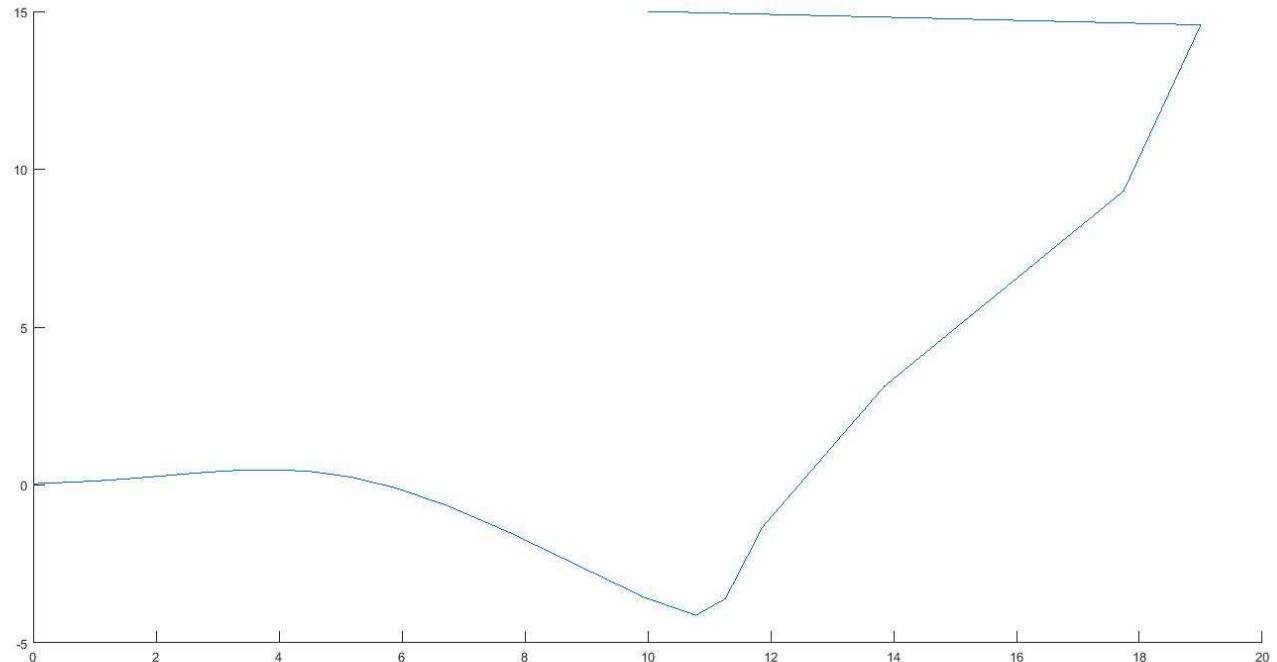
erreur relative pour $e=0.1$



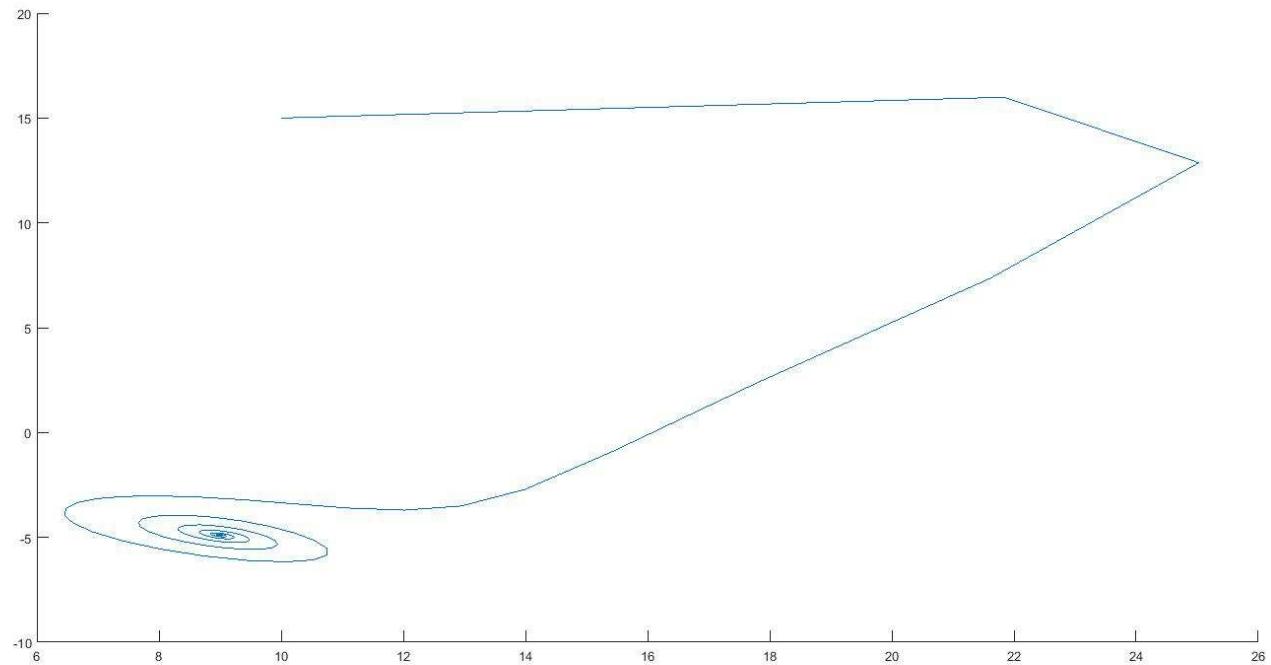
On remarque que, pour des valeurs initiales très peu modifiées, la trajectoire de la courbe est assez différente de celle de base, et que l'erreur relative entre les deux se voit surtout lorsque les fonctions commencent à "tourner" autour des points de convergence. En effet, comme les conditions initiales sont différentes, "l'angle d'attaque" de chaque courbe est différent, et donc si l'une arrive plus près d'un des points de convergence, elle y restera plus longtemps, la faisant ainsi s'éloigner de l'autre.

Si on fait varier la valeur de ρ , on obtient des trajectoires différentes :

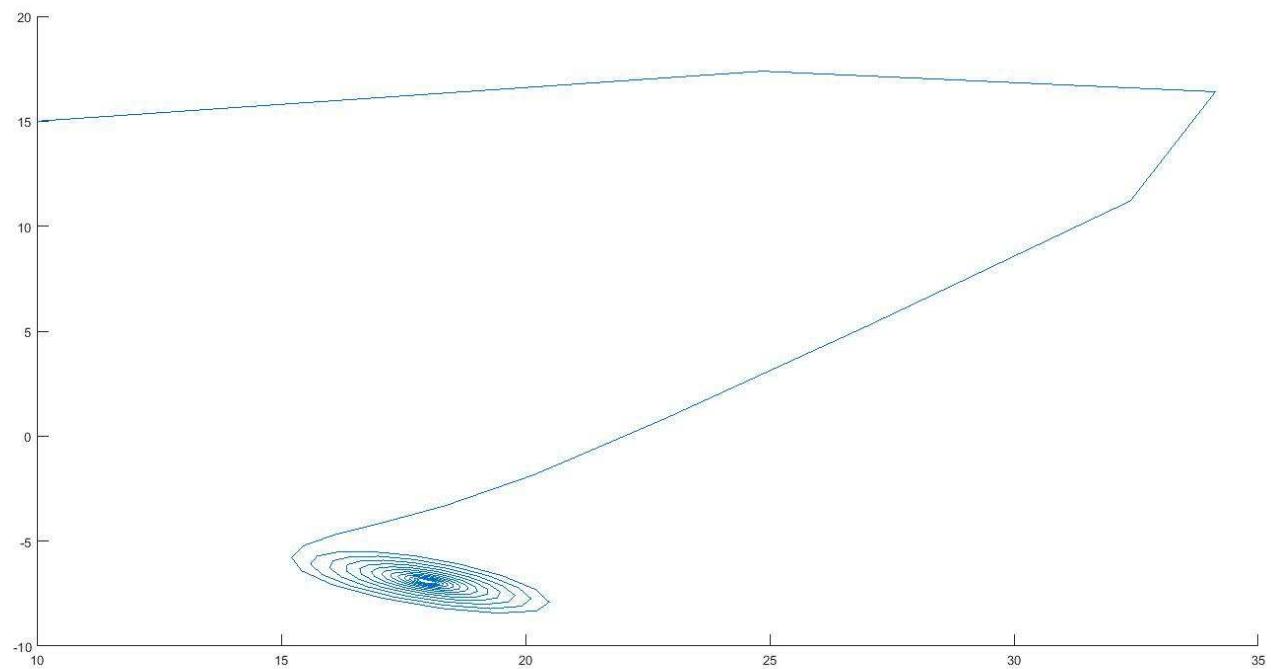
$$\rho = 0.5$$



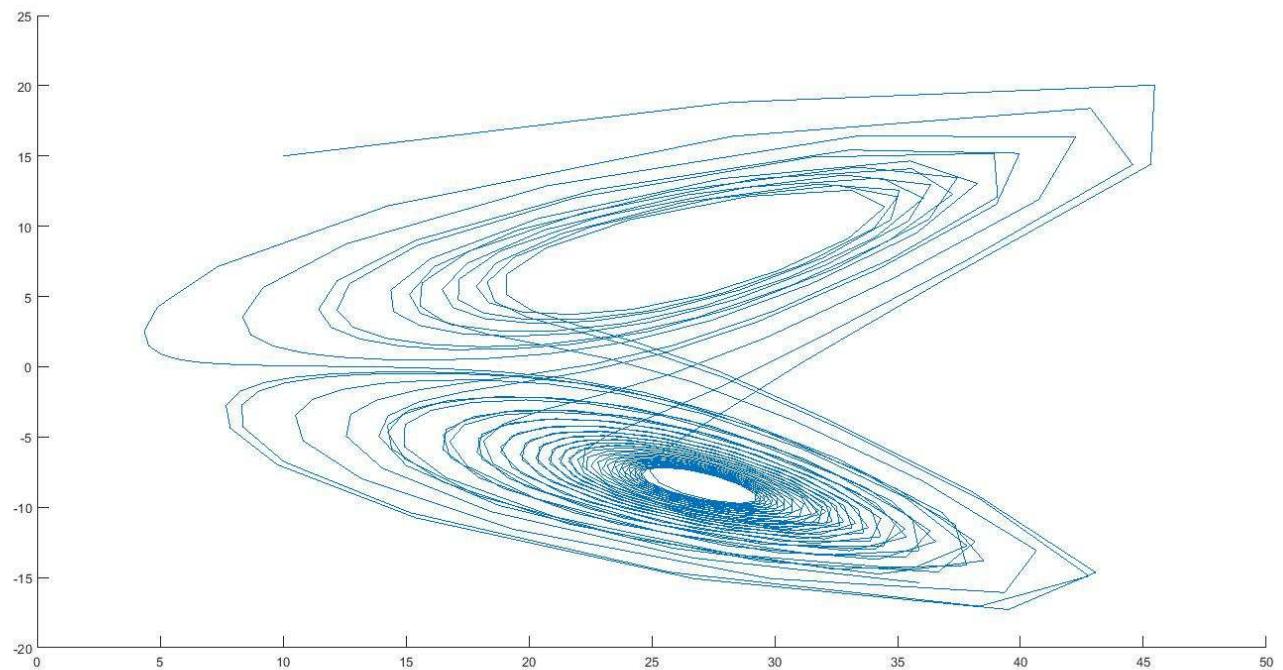
$$\rho = 10$$



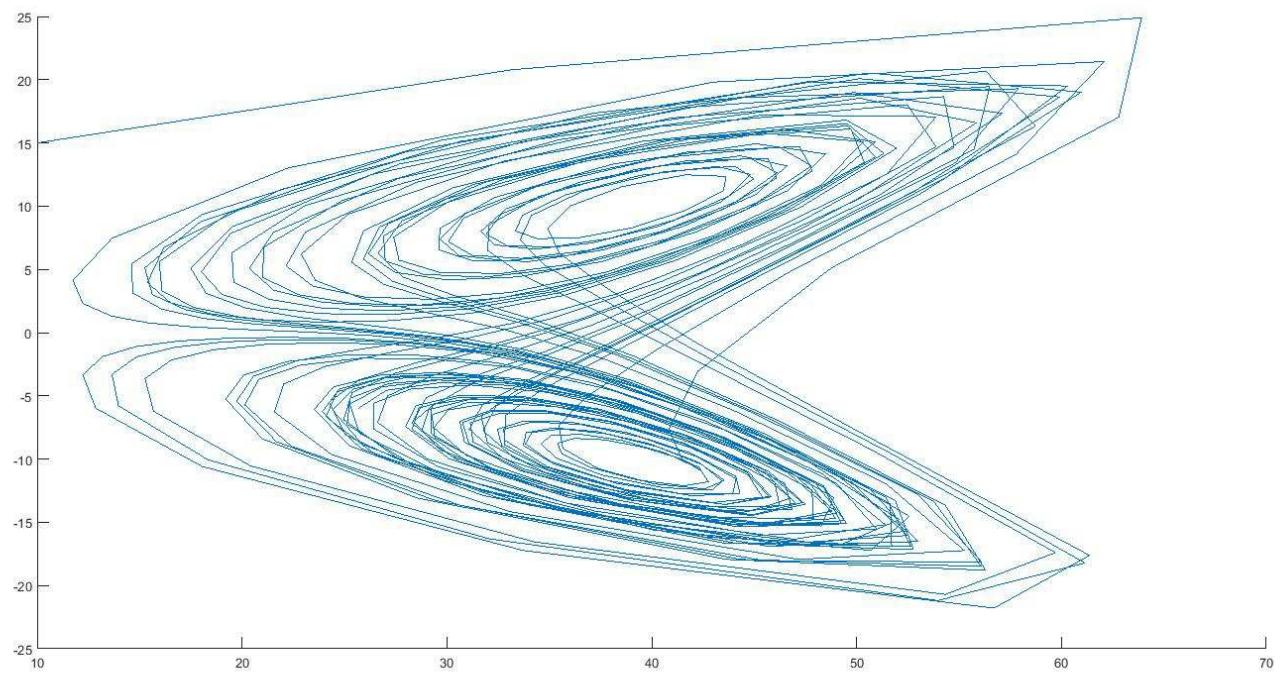
$$\rho = 19$$



$\rho = 28$



$\rho = 40$



On peut voir que pour différentes valeurs de ρ , on a différentes trajectoires. Pour $\rho=0.5$ et $\rho=10$, la courbe converge plus ou moins vite vers le point de coordonnées $(0,0,0)$. Pour $\rho=19$, on voit que la courbe converge vers un point unique en tournant autour, comme dans un siphon. Pour $\rho=28$ et $\rho=40$, la courbe gravite alternativement autour de deux points, et, contrairement aux autres valeurs de ρ , au lieu de converger vers ces points, la courbe s'en éloigne pour tourner autour du point le plus proche.

Programme de l'exercice 4 :

```
%la partie en commentaire permet d'enregistrer la courbe

clear all
close all
clc

sigma = 10;
beta = 8/3;
rho = 28;

tspan = [0:0.05:30];

xa = [10 15 20];
[t1,x1] = ode23(@(t,y)[-beta*y(1)+y(2)*y(3); -sigma*(y(2)-y(3)); -
y(2)*y(1)+rho*y(2)-y(3)],tspan,xa);

e = [2:4:10]*0.01;

for i=1:length(e)
    xb = xa + e(i);
    [t2,x2] = ode23(@(t,y)[-beta*y(1)+y(2)*y(3); -sigma*(y(2)-y(3));
-y(2)*y(1)+rho*y(2)-y(3)],tspan,xb);

    er = sqrt( (x1(:,1)-x2(:,1)).^2 + (x1(:,2)-x2(:,2)).^2 +
(x1(:,3)-x2(:,3)).^2 );

    figure; plot3(x1(:,1),x1(:,2),x1(:,3),x2(:,1),x2(:,2),x2(:,3));
title(strcat('trajectoires pour e=',num2str(e(i))));
    disp('Appuyez sur une touche pour continuer');
    waitforbuttonpress; clc; close all
    figure; plot(t1,er); title(strcat('erreur relative pour
e=',num2str(e(i))));
    disp('Appuyez sur une touche pour continuer');
    waitforbuttonpress; clc; close all
end

rho = [0.5 10 19 28 40];

for i=1:length(rho)

    %modification de la valeur d'arret pour ne pas avoir des films
    %trop longs
    if i==1
```

```

        tf = 5;
elseif i>3
    tf = 40;
else
    tf = 10;
end

tspan = [0:0.05:tf];

[t,x] = ode23(@(t,y)[-beta*y(1)+y(2)*y(3); -sigma*(y(2)-y(3)); -
y(2)*y(1)+rho(i)*y(2)-y(3)],tspan,xa);

%mov =
VideoWriter(strcat('./VideoExo4Rho',strcat(num2str(rho(i)),'.avi')))

for ind=2:length(t)

    line([x(ind-1,1) x(ind,1)],[x(ind-1,2) x(ind,2)],[x(ind-1,3)
x(ind,3)])
    %F = getframe(gcf);
    %open(mov);
    %writeVideo(mov,F);
    drawnow

end

disp('Appuyez sur une touche pour continuer');
waitForbuttonpress; clc; close all

end

```

⑤ Problèmes elliptiques

1. Équation de Poisson

Soit un domaine rectangulaire Ω dont le bord est noté $\partial\Omega$.
On a, dans ce domaine, l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (\alpha)$$

avec $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$

et $f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)$

Pour modéliser ce problème, on va utiliser un schéma de discréétisation aux différences finies.

On suppose d'abord Ω comme un domaine rectangulaire composé de T_x points suivant l'axe \bar{x} , et de T_y points suivant l'axe \bar{y} .

On peut alors noter :

$$u(x, y) = u(x_i, y_j) = u_{i,j} \quad \forall i \in [1, T_x], j \in [1, T_y]$$

Si on note Δx l'écart entre chaque point de l'axe \bar{x} , et que l'on fait des développements limités de u , on a :

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + O(\Delta x^2)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + O(\Delta x^2)$$

$$\rightarrow u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} + O(\Delta x^2)$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(1)$$

En faisant de même pour y , on obtient

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(1)$$

On peut alors réécrire l'équation (x) :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} = f(x_i, y_j)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{\Delta x^2} u_{i+1,j} + \frac{1}{\Delta y^2} u_{i,j+1} + \left(-\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} \right) u_{i,j} + \frac{1}{\Delta y} u_{i,j-1} + \frac{1}{\Delta x} u_{i+1,j} = f(x_i, y_j)$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x^2} & \frac{1}{\Delta y^2} & \left(-\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} \right) & \frac{1}{\Delta y} & \frac{1}{\Delta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1,j} \\ u_{i,j-1} \\ u_{i,j} \\ u_{i,j+1} \\ u_{i+1,j} \end{pmatrix} = f(x_i, y_j)$$

On peut alors généraliser, en posant $k = j + (i-1)Ty$, sous forme matricielle

$$A U = B$$

avec

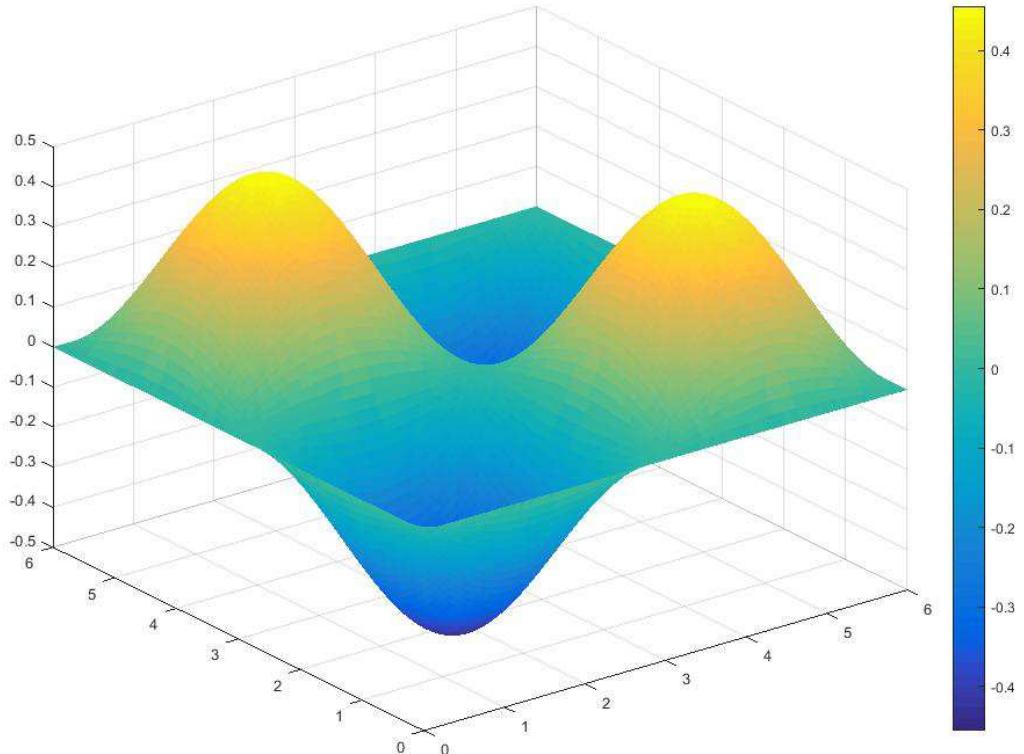
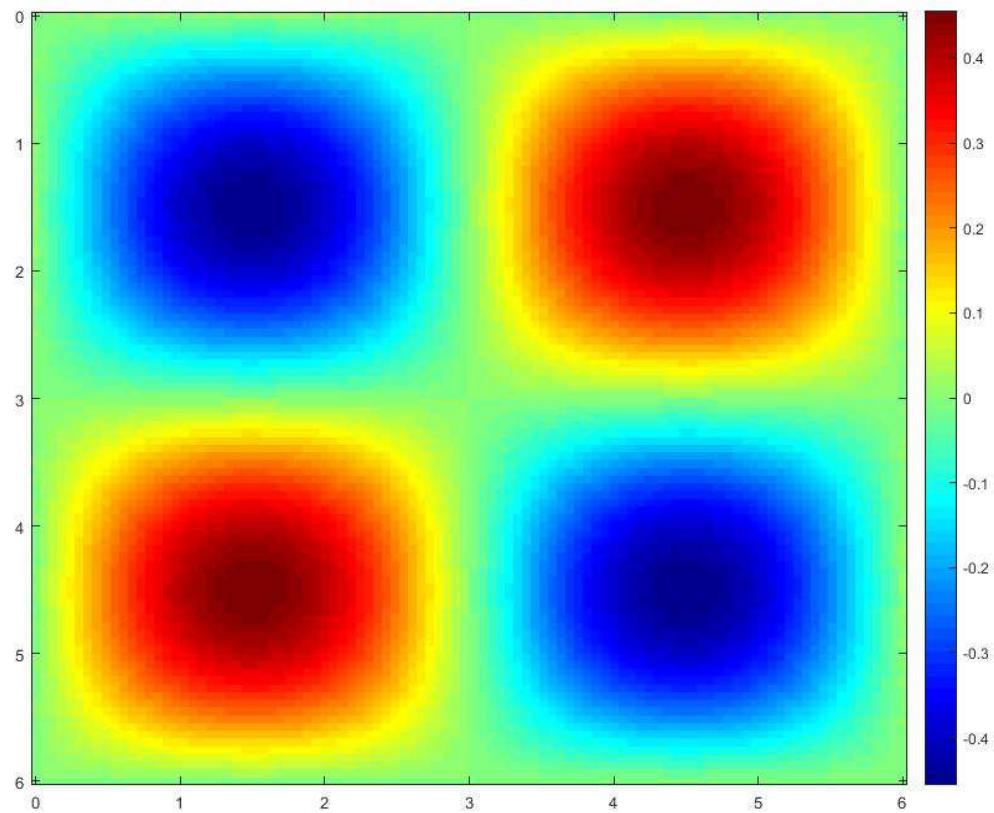
$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ \vdots \\ u_{i,T_y-1} \\ u_{i,T_y} \\ u_{i+1,1} \\ \vdots \\ u_{T_x,T_y} \end{pmatrix}, \text{ soit } U_k = u_{i,j},$$

$$B_k = \begin{cases} 0 & \text{si } i=1, j=1, i=T_x \text{ ou } j=T_y \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}x_i\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}y_j\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{si } i=1, j=1, i=T_x \text{ ou } j=T_y : \begin{cases} 1 & \text{si } l=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$A_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2} & \text{si } l=j+(i-2)T_y \text{ ou } l=j+iT_y \\ \frac{1}{\Delta y^2} & \text{si } l=j-1+(i-1)T_y \text{ ou } l=j+1+(i-1)T_y \\ -\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} & \text{si } l=k=j+(i-1)T_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si on résout alors numériquement ce problème, on obtient :



On voit que la solution $u(x,y)$ a une allure similaire à la fonction $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)$

Programme de l'exercice 5.1 :

```
clear all
close all
clc

xi = 0;
xf = 6;
taux = 100; %nombre de points en x

yi = 0;
yf = 6;
tauy = 100; %nombre de points en y

dx = (xf-xi)./(taux-1);
dy = (yf-yi)./(tauy-1);
x = [xi:dx:xf];
y = [yi:dy:yf];

A = zeros(taux*tauy,taux*tauy);
B = zeros(taux*tauy,1);

for i=1:taux
    for j=1:tauy
        k = j+(i-1)*tauy;
        if i==1 || j==1 || i==taux || j==tauy
            A(k,k) = 1;
        else
            A(k,j+(i-2)*tauy) = 1./(dx.^2);
            A(k,j-1+(i-1)*tauy) = 1./(dy.^2);
            A(k,j+(i-1)*tauy) = -2./(dy.^2)-2./(dx.^2);
            A(k,j+1+(i-1)*tauy) = 1./(dy.^2);
            A(k,j+i*tauy) = 1./(dx.^2);
            B(k) = sin(x(i)*pi/3)*sin(y(j)*pi/3);
        end
    end
end

X = linsolve(A,B);

u = zeros(taux,tauy);

for i=1:taux
    for j=1:tauy
        k = j+(i-1)*tauy;
        u(i,j) = X(k);
    end
end

surf(x,y,u,'EdgeColor','none'); colorbar
figure
imagesc(x,y,u); colormap('jet'); colorbar
```

2. Equation de Laplace

Ici, on a comme équation

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(0, y) = u(6, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 6) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right) \end{cases}$$

On peut alors reprendre la même démarche que précédemment, et on obtient alors

$$A U = B$$

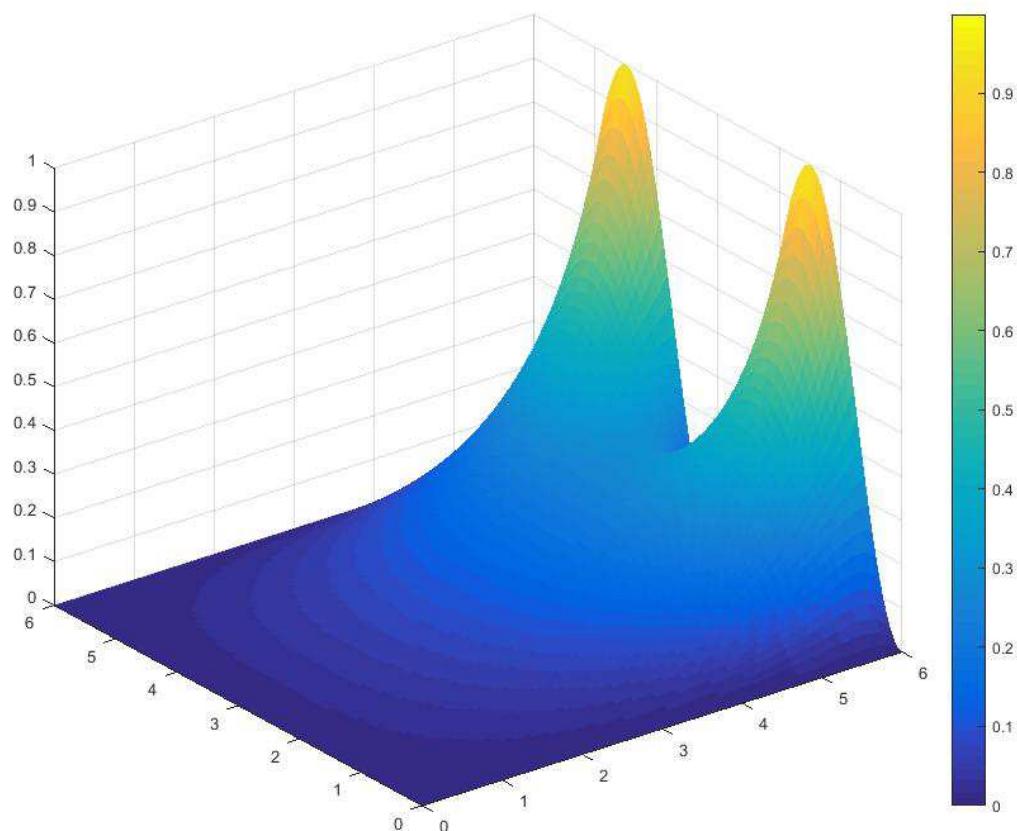
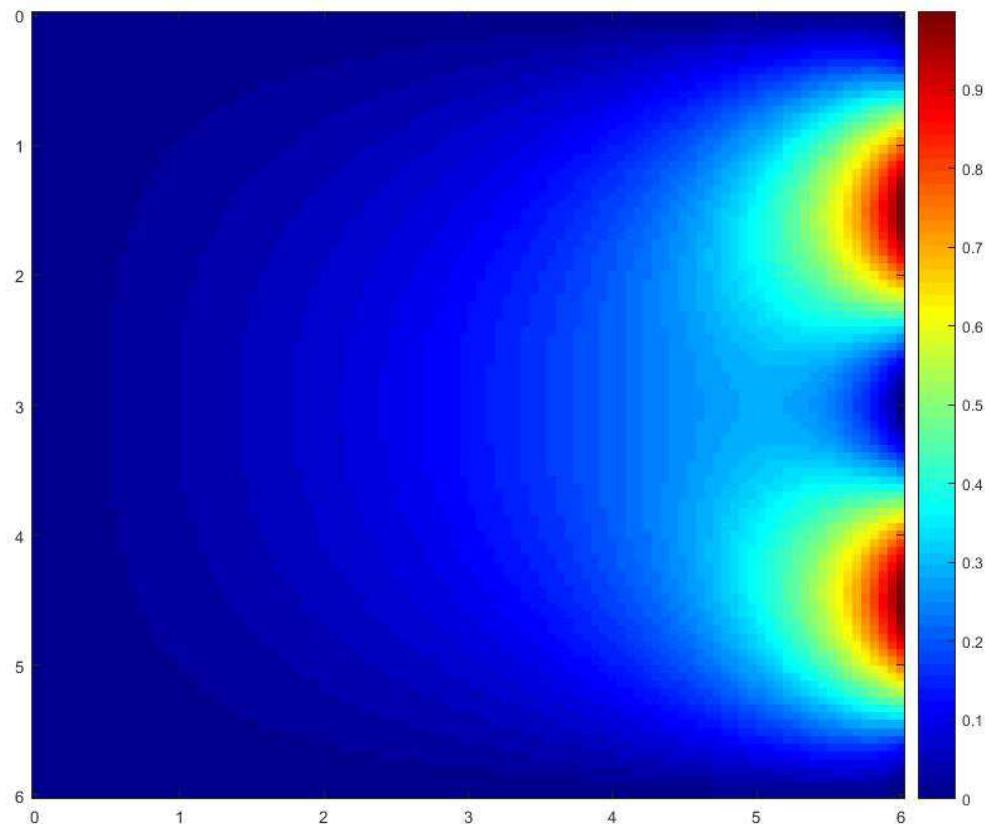
avec $U_k = u_{i,j}$

$$B_k = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{3}x_i\right) & \text{si } j = T_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$A_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } l=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$A_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2} & \text{si } l = j + (i-2)T_y \text{ ou } l = j + iT_y \\ \frac{1}{\Delta y^2} & \text{si } l = j - 1 + (i-1)T_y \text{ ou } l = j + 1 + (i-1)T_y \\ -\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} & \text{si } l = k = j + (i-1)T_y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient alors, en résolvant numériquement :



Ici, on peut remarquer que les conditions aux limites sont bien respectées, avec $u(x, 6) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ et $u(x, 0) = u(0, y) = u(6, y) = 0$

Programme de l'exercice 5.2 :

```
clear all
close all
clc

xi = 0;
xf = 6;
taux = 100; %nombre de points en x

yi = 0;
yf = 6;
tauy = 100; %nombre de points en y

dx = (xf-xi)./(taux-1);
dy = (yf-yi)./(tauy-1);
x = [xi:dx:xf];
y = [yi:dy:yf];

A = zeros(taux*tauy,taux*tauy);
B = zeros(taux*tauy,1);

for i=1:taux
    for j=1:tauy
        k = j+(i-1)*tauy;
        if i==1 || j==1 || i==taux
            A(k,k) = 1;
        elseif j==tauy
            A(k,k) = 1;
            B(k) = (sin(x(i)*pi/3)).^2;
        else
            A(k,j+(i-2)*tauy) = 1./(dx.^2);
            A(k,j-1+(i-1)*tauy) = 1./(dy.^2);
            A(k,j+(i-1)*tauy) = -2./(dy.^2)-2./(dx.^2);
            A(k,j+1+(i-1)*tauy) = 1./(dy.^2);
            A(k,j+i*tauy) = 1./(dx.^2);
        end
    end
end

X = linsolve(A,B);

u = zeros(taux,tauy);

for i=1:taux
    for j=1:tauy
        k = j+(i-1)*tauy;
        u(i,j) = X(k);
    end
end

surf(x,y,u,'EdgeColor','none'); colorbar
figure
imagesc(x,y,u); colormap('jet'); colorbar
```