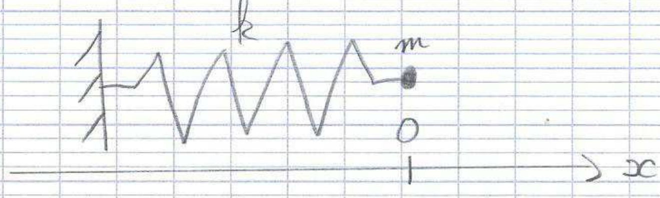
GUIDICE Anthony
SIMONET Théo
SONZOGNI Max

TP 1

Vibrations d'un système à n ressorts

I Prise en main

1) Soit le système masse-ressort 1D suivant à l'équilibre :



Si la masse est notée m, le ressort est de raideur k et la position de la masse en fonction du temps est notée $x(t)$, on obtient, en appliquant le PFD sur ce système :

$$\sum \vec{F} = -k\,x(t) = m\,\ddot{x}(t) \Leftrightarrow m\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$$

2) La solution analytique de cette équation est de la forme :

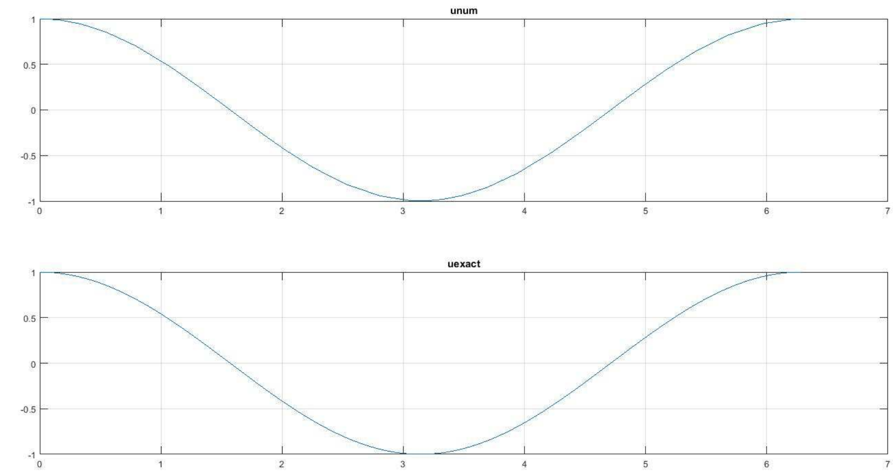
$$x(t) = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \alpha_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

où $\alpha_1 = x(0)$ et $\alpha_2 = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\dot{x}(0)$

3) La solution numérique de ce problème s'obtient ici en résolvant l'équation différentielle grâce à une méthode de Runge-Kutta d'ordre (2,3)

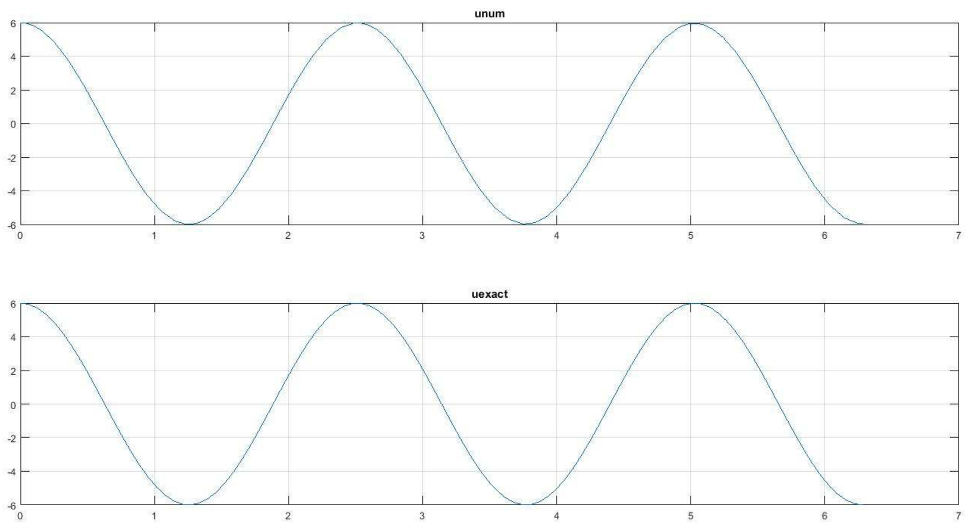
4) Analytiquement, on obtient, avec $k = 1$, $m = 1$, $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 1$:

$$x(t) = \cos(t)$$



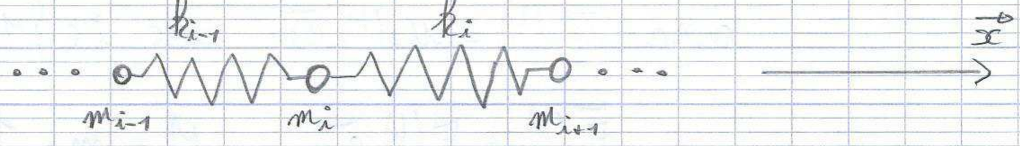
5) Analytiquement, on obtient, avec $k = 25$, $m = 4$, $x(0) = 6$ et $\dot{x}(0) = 0$:

$$x(t) = 6 \cos\left(\frac{5}{2} t\right)$$



II) Système à ressorts

1) Au point i, on obtient le système suivant :



En appliquant le PFD au point représenté par la masse m_i, on obtient :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{ressort_{i-1/m_i}} + \vec{F}_{ressort_{i/m_i}} = m_i \ddot{u}_i(t)$$

$$\Leftrightarrow -k_{i-1}\left(u_i(t) - u_{i-1}(t)\right) + k_i\left(u_{i+1}(t) - u_i(t)\right) = m_i \ddot{u}_i(t)$$

$$\Leftrightarrow m_i \ddot{u}_i(t) + u_i(t)\left(k_i + k_{i-1}\right) - u_{i-1}(t)\, k_{i-1} - u_{i+1} k_i = 0$$

$$\Leftrightarrow m_i \ddot{u}_i(t) + \begin{pmatrix} -k_{i-1} & k_i + k_{i-1} & -k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = 0$$

En prenant en compte les conditions aux limites, on a, respectivement aux points $i = 1$ et $i = N$:

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + u_1(t)\, k_1 - u_2(t)\, k_1 = F(t)$$

et

$$m_N \ddot{u}_N(t) + u_N(t)\, k_N - u_{N-1}(t)\, k_N = 0$$

On peut alors, en généralisant l'équation, la réécrire sous une forme matricielle :

$$M \frac{d^2\vec{u}}{dt^2}(t) + K\vec{u}(t) = \vec{F}(t)$$

avec $\vec{u}(t) = u_i(t)\,\vec{e_i}$ avec $i \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$\vec{F}(t) = F(t)\,\vec{e_1}$, $M = m_i\,\mathbb{1}$,

$$K = \begin{cases} K_{11} = k_1,\ K_{12} = -k_1,\ K_{NN-1} = -k_N,\ K_{NN} = k_N \\ i \notin \{1, N\} : K_{ii-1} = -k_{i-1},\ K_{ii} = k_i + k_{i-1},\ K_{ii+1} = -k_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2) • En explicitant M et K, on a :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_N \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & -k_{i-1} & (k_{i-1}+k_i) & -k_i & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & -k_{N-1} & (k_{N-1}+k_N) & -k_N \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -k_N & k_N \end{pmatrix}$$

• Si on introduit la variable $w(t) = M^{\frac{1}{2}} u(t)$, on a:

$$w(t) = M^{\frac{1}{2}} u(t) \Leftrightarrow u(t) = M^{-\frac{1}{2}} w(t)$$

En remplaçant dans le système (1), on obtient:

$$M \frac{d^2 u}{dt^2}(t) + K u(t) = F(t)$$

$$\Leftrightarrow M M^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 w}{dt^2}(t) + K M^{-\frac{1}{2}} w(t) = F(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 w}{dt^2}(t) + M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} w(t) = M^{-\frac{1}{2}} F(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 w}{dt^2}(t) + T w(t) = M^{-\frac{1}{2}} F(t)$$

De plus, on a aussi

$$w(0) = M^{+\frac{1}{2}} u(0) = M^{+\frac{1}{2}} \cdot \emptyset = 0$$

et

$$\frac{dw}{dt}(0) = M^{+\frac{1}{2}} \frac{du}{dt}(0) = M^{\frac{1}{2}} \cdot \emptyset = 0$$

3) On a $T = M^{-\frac{1}{2}} K M^{\frac{1}{2}}$

4) Si on introduit la variable $q(t) = V^T w(t)$, on a :

$$q(t) = V^T w(t) \Leftrightarrow w(t) = V^{-T} q(t)$$

En remplaçant dans le système (1), on obtient :

$$\frac{d^2 w}{dt^2}(t) + T w(t) = M^{-\frac{1}{2}} F(t)$$

$$\Leftrightarrow V^{-T} \frac{d^2 q}{dt^2}(t) + T V^{-T} q(t) = M^{-\frac{1}{2}} F(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 q}{dt^2}(t) + V^T T V^{-T} q(t) = V^T M^{-\frac{1}{2}} F(t)$$

Or, comme on a T symétrique définie positive, et Λ la matrice de ses valeurs propres, on obtient

$$V^T T V^{-T} = V^{-1} T V = \Lambda$$

Soit, en remplaçant dans le système :

$$\frac{d^2 q}{dt^2}(t) + \Lambda q(t) = V^T M^{-\frac{1}{2}} F(t)$$

De plus, on a aussi

$$q(0) = V^T w(0) = V^T . \emptyset = 0$$

et

$$\frac{dq}{dt}(0) = V^T \frac{dw}{dt}(0) = V^T . \emptyset = 0$$

5) Pour obtenir $u(t)$, il "suffit" de "remonter" les variables :

$$q(t) = V^T w(t) = V^T M^{\frac{1}{2}} u(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad u(t) = M^{-\frac{1}{2}} V^{-T} q(t)$$

Ainsi, une fois le champ de déplacements normaux $q(t)$ déterminé, on peut calculer $u(t)$

7) • Le fichier init_ressort.m permet de créer un système de N masses et N ressorts de raideurs et de masses aléatoires

• Le fichier spectre.m permet de calculer les matrices V et Λ, respectivement matrice des valeurs propres et matrice des vecteurs propres de $T = M^{-\frac{1}{2}} K M^{\frac{1}{2}}$

• Le fichier film.m permet d'illustrer par une animation le calcul de la vibration d'une chaîne de N ressorts

• Le fichier manipfilm.m permet d'entrer une valeur N et de déclencher le fichier film.m

8) La force $F(t)$ est introduite dans les lignes 35 et 54 du fichier film.m, dans la formule :

```
u = W * diag(sin(sqrt(lambda)*t)) * w ;
```

Pour imposer une force différente, il serait bon de créer une nouvelle variable R de la forme

$R(i) = R_i$ où R_i est la force appliquée sur la i^e masse

Il faudrait ensuite modifier la formule de u :

u = W * diag(sin(sqrt(lambda)*t) * R(:)) * w;