Corrigé Examen 1ère session 2011 **Azorad**

(1) On pose $u(x,t) = \sum \alpha_n(t)\, e^{2i\pi n x}$

on calcule $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum_n \dot{\alpha}_n(t)\, e^{2i\pi n x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_n 2i\pi n\, \alpha_n(t)\, e^{2i\pi n x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum (2i\pi n)^2 \alpha_n(t)\, e^{2i\pi n x}$$

$$= \sum -4\pi^2 n^2 \alpha_n(t)\, e^{2i\pi n x}$$

Ainsi $\dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se traduit par

$$\sum_n \left\{\dot{\alpha}_n(t) + 2i\pi n c\, \alpha_n(t)\right\} e^{2i\pi n x} = \sum -4\pi^2 n^2 \mu\, \alpha_n(t)\, e^{2i\pi n x}$$

En identifiant les coefficient de Fourier on a :

$$\dot{\alpha}_n(t) + (2i\pi n c + 4\pi^2 n^2 \mu)\, \alpha_n(t) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficient constant dont la solution est :

$$\alpha_n(t) = A_n\, e^{-(4\pi^2 n^2 \mu + 2i\pi n c)t}$$

Ainsi $u(x,t) = \sum_n A_n\, e^{-4\pi^2 n^2 \mu t}\, e^{-2i\pi n c t}\, e^{2i\pi n x}$

$$u(x,t) = \sum_n A_n\, e^{-4\pi^2 n^2 \mu t}\, e^{2i\pi n (x - ct)}$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat par séparation de variable mais il faut faire attention, voir variante

<u>variante :</u>

on cherche des solutions sous forme

$$u(x,t) = f(t)\,g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \iff \dot f(t)\,g(x) + c f(t)\,g'(x) = \mu f(t)\,g''(x)$$

$$\frac{\dot f(t)}{f(t)} = \frac{-c g'(x) + \mu g''(x)}{g(x)} = \lambda \quad \text{cte} \underline{\underline{\in \mathbb{C}}}$$

on obtient deux equations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \dot f(t) = \lambda f(t) \\ \mu g''(x) - c g'(x) - \lambda g(x) = 0 \end{cases}$$

On cherche des solution périodiques en x

$$g(1) = g(0)$$

on cherche $g(x)$ sous forme e^{rx}, r vérifie <u>l'equation caractéristique</u> :

$$\mu r^2 - c r - \lambda = 0$$

On veut $\quad g(1) = e^{r} = 1 = g(0)$

$$\iff r = 2i\pi n \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

l'equation caractéristique donne

$$\lambda = \mu r^2 - c r = -4\pi^2 n^2 \mu - 2i\pi n c$$

ainsi $\dot f(t) = \lambda f(t) \iff f(t) = e^{-4\pi^2 n^2 \mu t - 2i\pi n c t}$

$$f(t)\,g(x) = e^{-4\pi^2 n^2 \mu t - 2i\pi n c t}\, e^{2i\pi n x}$$
$$= e^{-4\pi^2 n^2 \mu t}\, e^{2i\pi n (x - ct)}$$

On applique ensuite le principe de superposition pour trouver la solution générale :

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n e^{-4\pi^2 n^2 \mu t} e^{2i\pi n(x-ct)}$$

---

(2) $u(x,0) = \sin(2\pi x) = \dfrac{e^{i2\pi x} - e^{-i2\pi x}}{}$

Comme $u(x,t) = \sum A_n e^{-4\pi^2 n^2 \mu t} e^{2i\pi n(x-ct)}$

on a $u(x,0) = \sum_n A_n e^{2i\pi n x} = \dfrac{e^{i2\pi x} - e^{-i2\pi x}}{2i}$

par identification on a :

$A_n = 0 \quad \forall n \notin \{-1,1\}$

$A_1 = \dfrac{1}{2i}$, $A_{-1} = -\dfrac{1}{2i}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2i} e^{-4\pi^2 \mu t} e^{2i\pi(x-ct)} - \frac{1}{2i} e^{-4\pi^2\mu t} e^{-2i\pi(x-ct)}$$

$$= e^{-4\pi^2\mu t} \frac{e^{2i\pi(x-t)} - e^{-2i\pi(x-t)}}{2i}$$

$$u(x,t) = e^{-4\pi^2\mu t} \sin 2\pi(x-ct)$$

(3) u est le produit de fonctions C^∞ donc u est C^∞ sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$

(4) $|u(x,t)| \leqslant e^{-4\pi^2\mu t}$

donc $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$

de plus $\sup_{x\in[0,1]} |u(x,t)| = e^{-4\pi^2\mu t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

donc la convergence est uniforme en x.

Le résultat signifie que la température finit par atteindre l'équilibre thermique $u \equiv 0$ à cause de la dissipation thermique par diffusion

(5) la figure confirme les résultats.
La solution $u(x,t) = e^{-4\pi^2 \mu t} \sin 2\pi(x-ct)$ est un sinus dont l'amplitude s'atténue exponentiellement et tend vers 0. On voit également l'effet du déphasage proportionnel au temps ct. le sinus se déplace vers la droite à vitesse c en même temps qu'il est amorti.
Lorsque $\mu \gg 1$, l'atténuation sera beaucoup plus rapide donc la convergence vers 0 sera plus rapide. $e^{-4\pi^2 \mu t} \longrightarrow 0$ plus vite.

(6) $\sin 2\pi(x-ct)$ est un sinus déphasé de $2\pi ct$. le sinus se déplace vers la droite à vitesse c.
On observe un déphasage de $\pi/2$ pour $t \cong 0.05$
donc $2\pi c \times 0.05 \cong \pi/2 \Rightarrow \underline{c \cong 5}$

(7) $\underline{c=0}$ pas de convection. Il y a seulement l'amortissement exponentiel $u(x,t) = e^{-4\pi^2 \mu t} \sin 2\pi x$
Il n'y a pas de déphasage, ni de déplacement.
$\underline{\mu=0}$ pas de diffusion. Il y a seulement une onde qui se déplace à vitesse c $u(x,t) = \sin 2\pi(x-ct)$