

Automatique des systèmes linéaires continus

MI3

P.Fraisse

Polytech'Montpellier
Université de Montpellier

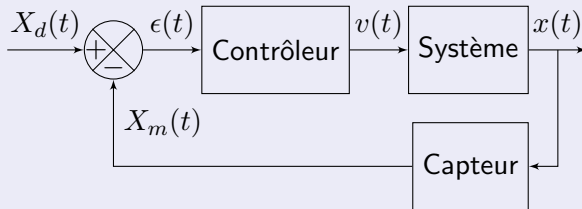
26 avril 2017

Introduction

Automatique

La commande des systèmes

La commande des systèmes se compose d'une entrée désirée $x_d(t)$, d'un vecteur de commande $v(t)$, d'une mesure capteur $x_m(t)$ et d'une erreur de commande $\epsilon(t)$.



L'objectif de la commande est de piloter la variable de sortie $x(t)$ telle qu'elle soit égale à la variable de référence $x_d(t)$ avec une erreur $\epsilon(t) = 0$. Pour atteindre ces objectifs, il est important de connaître avec précision le comportement du système qui est contrôlé.

Introduction

Systèmes dynamiques linéaires

Définitions

- 1 Un système dynamique linéaire est un système physique dont il est possible de modéliser les relations entrées/sorties à partir d'équations différentielles linéaires.
- 2 Un système mono-dimensionnel sera défini par une entrée $v(t)$ et une sortie $x(t)$.
- 3 Un système dynamique est linéaire si et seulement si les principes de superposition et d'invariance temporelle sont applicables.



FIGURE 1 – Moteur à courant-continu à aimants permanents

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Equations différentielles

On peut représenter un système dynamique linéaire par une équation différentielle telle que :

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m v(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dv(t)}{dt} + b_0 v(t) \quad (1)$$

Avec $m \leq n$.

La difficulté de cette représentation est de déterminer la solution cette équation pour une entrée $e(t)$ donnée.

Exemple

Pour un système décrit par $\dot{x}(t) = ax(t) + bv(t)$, on obtient la solution suivante :

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bv(\tau)d\tau \quad (2)$$

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Transformée de Laplace

On peut représenter un système dynamique linéaire en utilisant la transformée de Laplace :

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3)$$

Avec les propriétés suivantes :

$$① \quad \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s) = \mathcal{L}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]$$

$$② \quad sX(s) - x(0) = \mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]$$

$$③ \quad \frac{X(s)}{s} = \mathcal{L}\left[\int x(t)dt\right]$$

$$④ \quad \mathcal{L}[x(t - \tau)] = X(s)e^{-\tau s}$$

$$⑤ \quad \mathcal{L}[h(t) * x(t)] = H(s)X(s)$$

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Transformée de Laplace

Avec les définitions suivantes :

- ① $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ (valeur finale)
- ② $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$ (valeur initiale)

Ainsi le modèle d'un système linéaire qui s'exprime par une équation différentielle d'ordre n se transforme en une équation algébrique d'ordre n .

Transformée de Laplace d'un système

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = v(t) \quad (4)$$

On obtient en considérant les conditions initiales nulles :

$$a_n s^n X(s) + \dots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = V(s) \quad (5)$$

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Transformée de Laplace d'un système

Soit :

$$X(s) (a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) = V(s) \quad (6)$$

on peut réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$X(s) = \frac{V(s)}{(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)} \quad (7)$$

On a :

$$X(s) = H(s)V(s) \quad (8)$$

avec :

$$H(s) = \frac{1}{(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0)} \quad (9)$$

Avec $H(s)$ la fonction de transfert du système.

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Exercice 1

Écrire l'expression de la fonction de transfert d'un moteur à courant continu à aimants permanents. Le modèle du système peut être exprimé par les équations différentielles suivantes :

$$u(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (10)$$

$$\tau_m(t) = J_m \frac{d\omega(t)}{dt} + f_m \omega(t) \quad (11)$$

avec $u(t)$ la tension d'induit, $i(t)$ le courant d'induit, R et L respectivement la résistance et l'inductance de l'induit. ω est la vitesse de rotation de l'axe moteur, τ_m est le couple moteur, J_m et f_m l'inertie et les frottements visqueux sur l'axe moteur. On a également $\tau_m(t) = k_c I(t)$ et $e(t) = k_e \omega(t)$. On considère les conditions initiales $i(0) = 0$ et $\omega(0) = 0$.

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Modélisation d'un système dynamique non-linéaire

Soit un moteur à courant-continu déplaçant une barre de longueur l avec une masse m situé à l'extrémité de la barre. On écrit le modèle dynamique :

$$\Gamma(t) = ml^2\ddot{\theta}(t) + \lambda\dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) \quad (12)$$

Cette équation différentielle est non-linéaire car on ne peut pas appliquer le théorème de superposition. On propose de réaliser une linéarisation autour d'un point de repos $\bar{\theta} = cste$. On a :

$$\theta(t) = \bar{\theta} + \phi(t) \quad (13)$$

On peut réécrire $\sin \theta(t) = \sin(\bar{\theta} + \phi(t))$. En développant, on obtient :

$$\sin(\bar{\theta} + \phi(t)) = \sin \bar{\theta} \cos \phi(t) + \cos \bar{\theta} \sin \phi(t)$$

Avec de faibles variations de l'angle $\phi(t)$ autour du point de référence.

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Modélisation d'un système dynamique non-linéaire

On obtient :

$$\sin(\theta(t)) = \sin(\bar{\theta}) + \cos(\bar{\theta})\phi(t) \quad (14)$$

On exprime l'équation dynamique autour du point de référence $\bar{\theta}$, avec $\dot{\theta}(t) = \dot{\phi}(t)$ et $\ddot{\theta}(t) = \ddot{\phi}(t)$. On obtient :

$$\Gamma(t) = ml^2\ddot{\phi}(t) + \lambda\dot{\phi}(t) + mgl \sin(\bar{\theta}) + mgl \cos(\bar{\theta})\phi(t) \quad (15)$$

On décompose également le couple moteur avec $\Gamma(t) = \bar{\Gamma} + \gamma(t)$. On obtient :

$$\bar{\Gamma} + \gamma(t) = ml^2\ddot{\phi}(t) + \lambda\dot{\phi}(t) + mgl \sin(\bar{\theta}) + mgl \cos(\bar{\theta})\phi(t) \quad (16)$$

On élimine les parties constantes à gauche et à droite de l'équation qui constitue l'égalité suivante : $\bar{\Gamma} = mgl \sin(\bar{\theta})$.

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Modélisation d'un système dynamique non-linéaire

On obtient :

$$\gamma(t) = ml^2 \ddot{\phi}(t) + \lambda \dot{\phi}(t) + mgl \cos(\bar{\theta}) \phi(t) \quad (17)$$

Avec $mgl \cos(\bar{\theta}) = \alpha = cste$, on peut exprimer le comportement du système avec l'équation dynamique linéaire suivante :

$$\gamma(t) = ml^2 \ddot{\phi}(t) + \lambda \dot{\phi}(t) + \alpha \phi(t) \quad (18)$$

La transformée de Laplace peut ainsi s'exprimer :

$$\gamma(s) = ml^2 s^2 \phi(s) + \lambda s \phi(s) + \alpha \phi(s) \quad (19)$$

Soit :

$$\phi(s) = \frac{\gamma(s)}{ml^2 s^2 + \lambda s + \alpha} \quad (20)$$

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

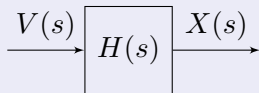
Modélisation

Représentation par schémas-blocs

Lorsque l'on considère la fonction de transfert suivante :

$$X(s) = H(s)V(s) \quad (21)$$

On peut représenter cette relation par un schéma-bloc dont l'écriture et la lecture se font de gauche à droite en multipliant la variable d'entrée à gauche $V(s)$ par l'expression contenu dans le bloc $H(s)$.



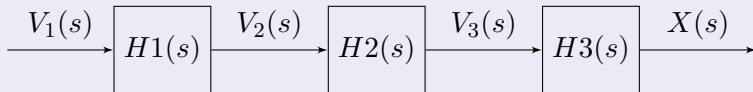
Le résultat de cette multiplication est la variable de sortie $X(s)$.

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

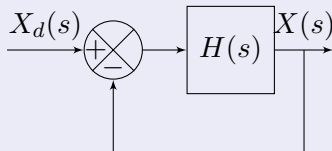
Représentation par schémas-blocs

❶ Soit :



Exprimer la relation $X(s) = f(V(s))$.

❷ Soit :



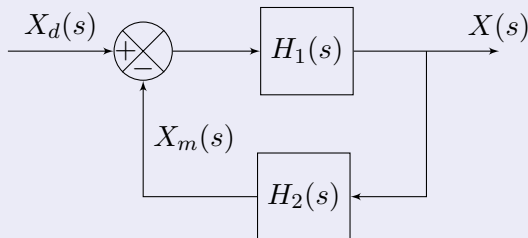
Exprimer la relation $X(s) = f(X_d(s))$.

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Représentation par schémas-blocs

1 Soit :



Exprimer la relation $X(s) = f(X_d(s))$.

Exercice 2

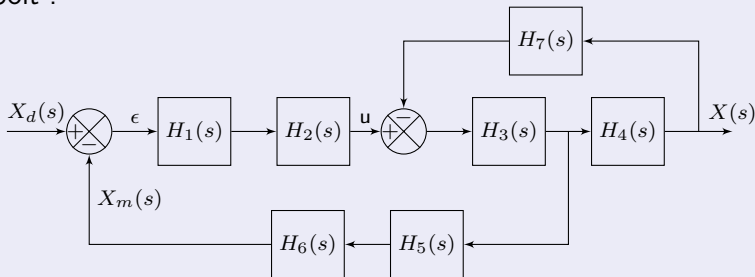
Représenter sous forme de schémas-bloc les fonctions de transferts du moteur à courant-continu à aimants permanents (cf. Exercice 1).

Représentation des systèmes dynamiques linéaires

Modélisation

Représentation par schémas-blocs

❶ Soit :



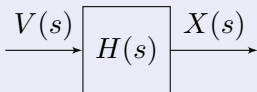
Exprimer la relation $X(s) = f(X_d(s))$.

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Diagramme de Bode

Il s'agit d'étudier le comportement fréquentiel d'un système défini par la fonction de transfert suivante :



Pour étudier le comportement en régime purement sinusoïdal on va considérer que la variable s qui est habituellement une variable complexe du type $s = a + jb$ est dans ce cas un imaginaire pur du type $s = j\omega$. La solution de la fonction de transfert dans ce cas est purement sinusoïdale. On a :

$$X(j\omega) = H(j\omega)V(j\omega) \quad (22)$$

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Diagramme de Bode

L'entrée de référence $V(j\omega)$ est un signal sinusoïdal de la forme $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi_0)$, avec $V_0 = |V(j\omega)| = 1$ et $\phi_0 = \arg(\phi_0) = 0$. Aussi est-il possible de connaître dans le cas d'un système dynamique linéaire l'expression du signal de sortie $x(t)$ tel que :

$$x(t) = X(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) \quad (23)$$

Avec :

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |V(j\omega)| = |H(j\omega)| \quad (24)$$

et

$$\phi(\omega) = \arg(X(j\omega)) = \arg(H(j\omega)) + \arg(V(j\omega)) = \arg(H(j\omega)) \quad (25)$$

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Diagramme de Bode

On définit ainsi le diagramme de Bode par deux équations. La première représente le rapport des amplitudes du signal sinusoïdal de sortie $X(\omega)$ sur le signal d'entrée unitaire exprimé en décibel (dB) :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (26)$$

Le second représente le déphasage $\theta(\omega)$ du signal de sortie $X(\omega)$ exprimé en radians :

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) \quad (27)$$

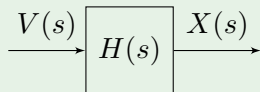
On trace le gain $G_{dB}(\omega)$ en fonction de la pulsation ω rad/s ou de la fréquence f Hz réparties sur l'axe des abscisses en utilisant une échelle logarithmique en base 10. On procédera de la même façon pour la phase $\phi(\omega)$.

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Exercice 3

On propose d'étudier le système suivant :



$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s} \quad (28)$$

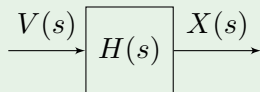
- ❶ Étudier la fonction $|H(j\omega)|$ avec $\omega \in [0, +\infty]$. En déduire l'évolution de la fonction $G_{dB}(\omega)$.
- ❷ Est-ce que la fonction $G_{dB}(\omega)$ admet une asymptote d'équation $Y(\omega) = a \log_{10}(\omega) + b$?
- ❸ Tracer la fonction $G_{dB}(\omega)$ ainsi que son diagramme asymptotique.
- ❹ Étudier et tracer la fonction $\phi(\omega)$ avec $\omega \in [0, +\infty]$.

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Exercice 4

On propose d'étudier le système suivant :



Avec :

$$H(s) = \frac{30(1 + 0.4s)}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)(1 + s)} \quad (29)$$

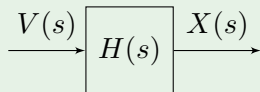
- 1 En utilisant les résultats de l'exercice 3 étudier et tracer le diagramme asymptotique de Bode de la fonction $G_{dB}(\omega)$.
- 2 Étudier et tracer la fonction $\phi(\omega)$ avec $\omega \in [0, +\infty]$.

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Exercice 5

On propose d'étudier le système suivant :



Avec :

$$H(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}s + 1} \quad (30)$$

- ❶ On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$: la pulsation réduite et $Q_0 = \frac{1}{2\xi}$ le facteur de qualité.
- ❷ Étudier et tracer le diagramme de Bode de la fonction $G_{dB}(x)$ avec $x \in [0, +\infty]$. On considère le cas $\xi < 1$. Montrer que le cas $\xi \geq 1$ peut être analysé avec les résultats obtenus à l'exercice 3.
- ❸ Étudier et tracer la fonction $\phi(x)$ avec $x \in [0, +\infty]$.

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Exercice 5

$$|H(jx)| = \frac{Q_0}{\sqrt{Q_0^2(1-x^2)^2 + x^2}} \quad (31)$$

On cherche x^* tel que :

$$\frac{\partial |H(jx)|}{\partial x} = 0 \quad (32)$$

On obtient la fréquence de résonance x^* :

$$x^* = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (33)$$

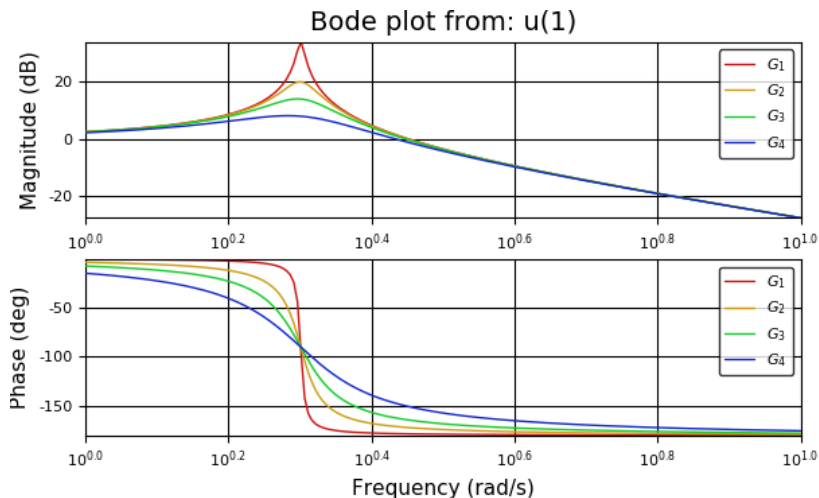
La condition d'existence de la résonance est pour $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. On en déduit le gain maximal $|H(jx^*)|_{max}$ pour $x = x^*$:

$$|H(jx^*)|_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (34)$$

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Exemple : $H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{w_0^2} + \frac{2\xi s}{w_0} + 1}$ avec $w_0 = 2\text{rd/s}$ et $\xi = [0.01, 0.02, 0.1, 0.2]$

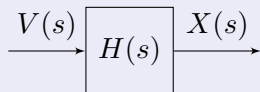


Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse fréquentielle

Lieu de Nyquist

On propose d'étudier le système suivant :



Avec :

$$X(s) = H(s)V(s) \quad (35)$$

- Le lieu de Nyquist est défini par la relation suivante :

$$M(\omega) = \rho(\omega)e^{j\theta(\omega)} \quad (36)$$

avec $\rho(\omega) = |H(j\omega)|$ et $\theta(\omega) = \arg(H(j\omega))$

Exercice 6 : Lieu de Nyquist

- ❶ Étudier et tracer dans le lieu de Nyquist les fonctions suivantes :

$$H(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + 0.1s}$$

$$H(s) = \frac{1}{s(1 + 0.1s)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}$$

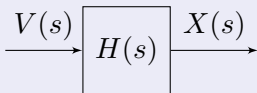
$$H(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}$$

Analyse des systèmes dynamiques linéaires

Analyse temporelle

Analyse temporelle

L'analyse temporelle consiste d'évaluer le comportement d'un système dynamique linéaire en analysant la réponse temporelle du signal de sortie par rapport à une entrée donnée. L'analyse utilisera les transformées directe et inverse de Laplace.

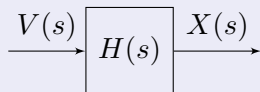


Avec $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ et $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. En définissant la variable $v(t)$ on estime $X(s)$ et calcule ensuite $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ (cf. TD 1).

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Stabilité



Un système sera considéré comme stable si pour toutes entrées $v(t)$ bornées, la sortie $x(t)$ sera bornée lorsque $t \rightarrow \infty$.

Soit la fonction de transfert $H(s)$ composée seulement de pôles simples :

$$X(s) = H(s)V(s) \quad (37)$$

Avec $V(s) = 1$ dans le cas d'un essai impulsionnel $v(t) = \delta(t)$. On a dans le cas général :

$$X(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (38)$$

avec $m \leq n$

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Stabilité

On obtient :

$$X(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{(s - s_n)(s - s_{n-1})(\dots)(s - s_2)(s - s_1)} \quad (39)$$

Dans l'hypothèse de pôles simples, on peut faire une décomposition en éléments simples et la transformée de Laplace inverse telle que :

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s - s_i)} \right] \quad (40)$$

On a :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} = \sum_{i=1}^n A_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} = \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} e^{j\beta_i t} \quad (41)$$

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Stabilité

On a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} e^{j\beta_i t} \quad (42)$$

Cette limite tendra vers un point d'équilibre qui est zéro si et seulement si $\alpha_i < 0$.

Stabilité

Un système dynamique linéaire sera stable si et seulement si les parties réelles des pôles de la fonction de transfert $H(s)$ sont strictement négatives $\Re(s_i) < 0$.

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Exercice : Stabilité

Étudier la stabilité des fonctions de transferts suivantes :

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s - 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s + 2)(s - 3)}$$

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Critère de stabilité

Critère de Routh

Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (43)$$

avec $m \leq n$

On propose d'étudier les pôles de la fonction de transfert $H(s)$ soit :

$$Den(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0 \quad (44)$$

Le critère de Routh propose d'étudier la stabilité du système par l'analyse des changements de signes des parties réelles des racines de l'équation $Den(s) = 0$.

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Critère de stabilité

Critère de Routh

s^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}
s^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	b_{n-7}
s^{n-2}	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	
s^{n-3}	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$		
s^{n-4}	$C_{5,1}$			

$$\text{Avec : } C_{3,1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, \quad C_{3,2} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$C_{3,3} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-6} \\ b_{n-1} & b_{n-7} \end{vmatrix}, \quad C_{4,1} = -\frac{1}{C_{3,1}} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$C_{4,2} = -\frac{1}{C_{3,1}} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-5} \\ C_{3,1} & C_{3,3} \end{vmatrix}, \quad C_{5,1} = -\frac{1}{C_{4,1}} \begin{vmatrix} C_{3,1} & C_{3,2} \\ C_{4,1} & C_{4,2} \end{vmatrix}$$

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Critère de Routh

Lorsque l'on étudie, en utilisant le critère de Routh, les pôles de la fonction de transfert $H(s)$ dont le dénominateur $Den(s)$ est :

$$Den(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0 \quad (45)$$

On peut définir la stabilité si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1 $\forall i = 0, \dots, n$, les coefficients $b_i > 0$.
- 2 Les coefficients de la 1^{ère} colonne du tableau de Routh sont strictement positifs.

Le système décrit par la fonction de transfert $H(s)$ sera stable si et seulement si les conditions (1) et (2) sont vérifiées. Dans le cas contraire, le nombre de changements de signe sera égal au nombre de pôles instables (partie réelle positive).

Exercice : Critère de Routh

Étudier la stabilité des fonctions de transferts suivantes :

$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 5.5s^4 + 11.5s^3 + 11.5s^2 + 5.5s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^5 + 3.5s^4 + 2.5s^3 - 2.5s^2 - 3.5s - 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + s^3 + s^2 + s + 1}$$

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Critère graphique

Critère du revers

On propose d'étudier la stabilité d'un système tel que :

$$FTBF(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} \quad (46)$$

Pour calculer les pôles de la fonction de transfert on va étudier les racines de l'équation $1 + H(s) = 0$ soit

$$H(s) = -1$$

Critère du revers

Le système sera stable si en parcourant le lieu de Nyquist du système $H(j\omega)$ dans le sens des ω croissants on laisse le point -1 à gauche du lieu de Nyquist.

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Exercice : Critère du revers

Étudier la stabilité des fonctions de transferts suivantes :

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s - 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s + 2)(s - 3)}$$

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Exercice : Éléments de Correction

Soit :

$$H(s) = \frac{1}{s - 1}$$

on a

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - 1}$$

Avec :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

et :

$$\phi(\omega) = \arccos\left(-\frac{1}{1 + \omega^2}\right)$$

$$\phi(\omega) = \arcsin\left(-\frac{\omega}{1 + \omega^2}\right)$$

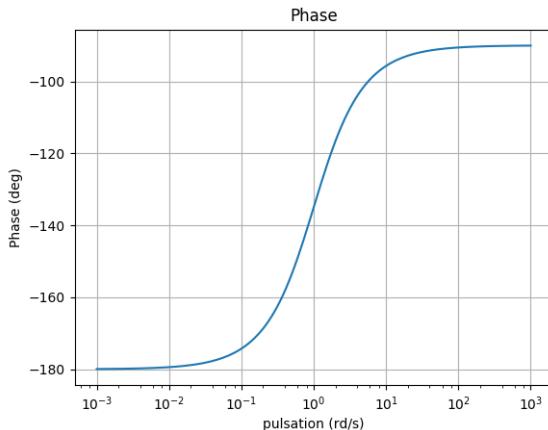
Soit pour $\omega \in [0, +\infty]$, on a $\phi(\omega) \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$.

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Exercice : Éléments de Correction

Soit : Soit pour $\omega \in [0, +\infty]$, on a $\phi(\omega) \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$.



Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Définitions de la marge de gain et de la marge de phase

En utilisant le diagramme de Bode on peut définir une marge de gain et une marge de phase d'un système telles que :

- 1 La marge de gain M_G d'une fonction de transfert $H(j\omega)$ est définie par :

$$M_G = 0_{dB} - G_{dB}(\omega_1)$$

avec $\phi(\omega_1) = -\pi$.

- 2 La marge de phase M_ϕ d'une fonction de transfert $H(j\omega)$ est définie par :

$$M_\phi = \phi(\omega_2) + \pi$$

avec $G_{dB}(\omega_2) = 0_{dB}$.

Un système dont : $M_G > 0$ et $M_\phi > 0$ est stable. Un système dont au moins une des marges de phase ou de gain est < 0 est instable.

Stabilité des systèmes dynamiques linéaires

Stabilité

Exercice : Marge de gain, marge de phase

Étudier la stabilité des fonctions de transferts suivantes en calculant les marges de gain et les marges de phases :

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{s - 1}$$

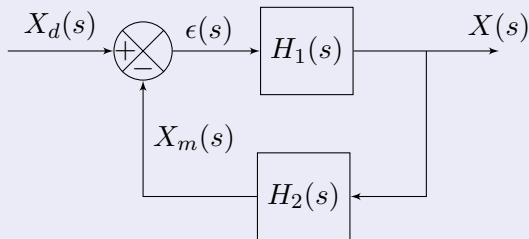
$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s + 2)(s - 3)}$$

Précision des systèmes dynamiques linéaires

Précision

Précision statique



On s'intéresse à la valeur de $\epsilon(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Cette valeur représente l'erreur du système en régime permanent. On a ainsi :

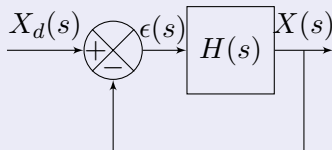
$$\epsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\epsilon(s) \quad (47)$$

Précision des systèmes dynamiques linéaires

Précision

Précision statique

On considère le système suivant :



Avec :

$$H(s) = \frac{K}{s^\alpha} H_1(s) \quad (48)$$

et :

$$H_1(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1}{a_n s^{n-\alpha} + \dots + a_1 s + 1} \quad (49)$$

Précision des systèmes dynamiques linéaires

Précision

Précision statique

$$\epsilon(s) = X_d(s) - X(s) \quad (50)$$

$$X(s) = H(s)\epsilon(s) \quad (51)$$

$$\epsilon(s) = \frac{X_d(s)}{1 + H(s)} \quad (52)$$

$$\epsilon(s) = \frac{X_d(s)}{1 + \frac{K}{s^\alpha} H_1(s)} \quad (53)$$

Le calcul de l'erreur statique devient :

$$\epsilon_p = \lim_{s \rightarrow 0} s\epsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sX_d(s)}{1 + \frac{K}{s^\alpha} H_1(s)} \quad (54)$$

Précision des systèmes dynamiques linéaires

Précision

Précision statique

Calculer l'erreur statique ϵ_p pour les fonctions suivantes :

① $\alpha = 0$

① $X_d(s) = \frac{1}{s}$

② $X_d(s) = \frac{1}{s^2}$

③ $X_d(s) = \frac{2}{s^3}$

② $\alpha = 1$

① $X_d(s) = \frac{1}{s}$

② $X_d(s) = \frac{1}{s^2}$

③ $X_d(s) = \frac{2}{s^3}$

③ $\alpha = 2$

① $X_d(s) = \frac{1}{s}$

② $X_d(s) = \frac{1}{s^2}$

③ $X_d(s) = \frac{2}{s^3}$

Précision des systèmes dynamiques linéaires

Précision

Précision statique

La précision d'un système en fonction de l'entrée $X_d(s)$ et du nombre d'intégration α est donnée par :

$\epsilon_p / X_d(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{2}{s^3}$
$\epsilon_p, \alpha = 0$	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
$\epsilon_p, \alpha = 1$	0	$\frac{1}{K}$	∞
$\epsilon_p, \alpha = 2$	0	0	$\frac{1}{K}$

Synthèse d'un correcteur pour un système dynamique linéaire

Synthèse d'un correcteur