TP2
Corde vibrante

(I) Corde de longueur infinie

(1) Solution exacte

1) On sait que $u(x,t) = U(X,T)$

avec $X = \alpha x + \beta t$ et $T = \gamma x + \mu t$ où $\alpha, \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R}^*$

On a alors:

- $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial U}{\partial t}(X,T) = \frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\cdot\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial T}(X,T)\cdot\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\cdot\beta + \frac{\partial U}{\partial T}(X,T)\cdot\mu$$

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)(X,T) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial X}(X,T)\cdot\beta + \frac{\partial U}{\partial T}(X,T)\cdot\mu\right)$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial X\partial T}(X,T)\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\cdot\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T)\cdot\frac{\partial X}{\partial t}\cdot\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T)\cdot\frac{\partial T}{\partial t}\cdot\mu$$
$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial T\partial X}(X,T)\cdot\frac{\partial X}{\partial t}\cdot\mu$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 2\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X,T) \cdot \mu\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T) \cdot \beta^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) \cdot \mu^2$$

• De la même manière, on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 2\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X,T) \cdot \alpha\gamma + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T)\,\alpha^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) \cdot \gamma^2$$

Ainsi, en remplaçant dans (1), on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X,T)\,\mu\beta + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T)\,\beta^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T)\,\mu^2$$
$$= 2\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X,T)\,\alpha\gamma c^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T)\,\alpha^2 c^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T)\,\gamma^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow (\mu^2 - \gamma^2 c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) + (\beta^2 - \alpha^2 c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T)$$
$$+ 2(\beta\mu - \alpha\gamma c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T}(X,T) = 0 \qquad (*)$$

2). Si on choisit $\mu = c\gamma$ et $\beta = -c\alpha$, on obtient :

$$\mu^2 - \gamma^2 c^2 = c^2\gamma^2 - \gamma^2 c^2 = 0 ,$$

$$\beta^2 - \alpha^2 c^2 = c^2\alpha^2 - \alpha^2 c^2 = 0$$

et $\quad \beta\mu - \alpha\gamma c^2 = -c^2\alpha\gamma - \alpha\gamma c^2 = -2\alpha\gamma c^2$

Ainsi, en remplaçant dans $(*)$, on a

$$(\mu^2-\gamma^2c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T) + (\beta^2-\alpha^2c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(X,T)$$

$$+ 2(\beta\mu-\alpha\gamma c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial T}(X,T) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\alpha\gamma c^2\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial T}(X,T) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial X\partial T}(X,T) = 0$$

car $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^*$ et $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \in \mathbb{R}^{*+}$

- Comme on a $\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial T}(X,T) = 0$, on en déduit :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial T}(X,T) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial X}(X,T) = k + h(X)$$

$$\Leftrightarrow U(X,T) = G(T) + F(X)$$

où F et G sont des fonctions telles que

$\frac{\partial F}{\partial X}(X) = h(X)$ et $k \in \mathbb{R}$

- On sait que $U(X,T) = u(x,t)$, on a alors :

$$u(x,t) = U(X,T) = F(X) + G(T)$$

On sait aussi que $X = \alpha x + \beta t$ et $T = \gamma x + \mu t$, avec $\mu = c\gamma$ et $\beta = -c\alpha$

On a alors

$$u(x,t) = F(\alpha x + \beta t) + G(\gamma x + \mu t)$$
$$= F(\alpha x - c\alpha t) + G(\gamma x + c\gamma t)$$
$$= F(\alpha(x-ct)) + G(\gamma(x+ct))$$

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

où $f(x) = F(\alpha x)$ et $g(x) = G(\gamma x)$

3) En utilisant les conditions initiales (2), on a

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial(x-ct)}(x-ct) \cdot \dfrac{\partial(x-ct)}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial(x+ct)}(x+ct) \cdot \dfrac{\partial(x+ct)}{\partial t}\right)(x, t=0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) \\ -c\,f'(x) + c\,g'(x) = u_1(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) & (a) \\ g(x) - f(x) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^x u_1(s)\,ds & (b) \end{cases}$$

$(a)+(b)$: $2g(x) = u_0(x) + \frac{1}{c}\int_0^x u_1(s)\,ds$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x u_1(s)\,ds$$

$(a)-(b)$: $2f(x) = u_0(x) - \frac{1}{c}\int_0^x u_1(s)\,ds$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_x^0 u_1(s)\,ds$$

En procédant à deux changements de variables, on obtient :

$$f(x-ct) = \frac{u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^0 u_1(s)\,ds$$

$$g(x+ct) = \frac{u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(s)\,ds$$

Ainsi, on trouve :

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds$$

② Solution numérique

1). • Ici, on note u_i^n la valeur de u prise au temps t_n et au point x_i

La méthode des différences finies nous donne alors :

$$(c) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{du_i}{dt}\right)_n + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2u_i}{dt^2}\right)_n + \frac{\Delta t^3}{6}\left(\frac{d^3u_i}{dt^3}\right)_n + O(\Delta t^4)$$

$$(d) \quad u_i^{n-1} = u_i^n - \Delta t \left(\frac{du_i}{dt}\right)_n + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2u_i}{dt^2}\right)_n - \frac{\Delta t^3}{6}\left(\frac{d^3u_i}{dt^3}\right)_n + O(\Delta t^4)$$

$$(c)+(d) : u_i^{n+1} + u_i^{n-1} = 2u_i^n + \Delta t^2 \left(\frac{d^2u_i}{dt^2}\right)_n + O(\Delta t^4)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^2u_i}{dt^2}\right)_n = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2)$$

En appliquant la même méthode pour les dérivées spatiales, on obtient

$$\left(\frac{d^2u^n}{dx^2}\right)_i = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Si on néglige les termes d'ordre 2 ou plus, et en remplaçant dans l'équation (1), on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

- Cet algorithme nécessitant les informations aux noeuds temporels n et $(n-1)$ pour déterminer la valeur au noeud temporel $(n+1)$, il faut donc au minimum 2 conditions initiales, notées u_0 et u_1

On a alors, naturellement : $u_i^0 = u_0(x_i)$

Pour obtenir u_i^1, on utilise alors une méthode d'Euler explicite :

$$u_i^1 = u_i^0 + \Delta t\, u_1(x_i)$$

- Une fois les conditions initiales établies, on peut appliquer la partie "principale" de l'algorithme. On a alors :

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \, \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = 2u_i^n\left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{c^2}{\Delta x^2}\right) - \frac{u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + \left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right)\frac{c^2}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow u_i^{n+1} = 2u_i^n\left(1 - c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) + \left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right)c^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - u_i^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow u_i^{n+1} = 2u_i^n\left(1 - \sigma^2\right) + \sigma^2\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) - u_i^{n-1}$$

avec $\sigma^2 = c^2\dfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \Leftrightarrow \sigma = |c|\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$

2). Soit u_0 et u_1 périodiques de période commune p
On a alors, pour tout x :

$$u_0(x+p) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u_1(x+p) = u_1(x)$$

On a alors :

$$u(x+p,t) = \frac{u_0(x+p-ct) + u_0(x+p+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x+p-ct}^{x+p+ct} u_1(s)\,ds$$

$$= \frac{u_0(x-ct) + u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\left(\int_{x-ct+p}^{x-ct} u_1(s)\,ds + \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds + \int_{x+ct}^{x+ct+p} u_1(s)\,ds\right)$$

Or, comme u_1 est périodique de période p, on a

$$\int_x^{x+p} u_1(s)\,ds = \int_0^p u_1(s)\,ds$$

Ainsi, on a

$$\int_{x-ct+p}^{x-ct} u_1(s)\,ds + \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds + \int_{x+ct}^{x+ct+p} u_1(s)\,ds$$

$$= \int_p^0 u_1(s)\,ds + \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds + \int_0^p u_1(s)\,ds = \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds$$

On en déduit alors

$$u(x+p,t) = \frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds = u(x,t)$$

On a donc que $u(x,t)$ est périodique en espace de période p

- On suppose maintenant que u_1 est à moyenne nulle sur une période
On a alors

$$u\left(x, t+\frac{p}{c}\right) = \frac{u_0(x-ct-p)+u_0(x+ct+p)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct-p}^{x+ct+p} u_1(s)\,ds$$

$$= \frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}K$$

où $K = \int_{x-ct-p}^{x+ct+p} u_1(s)\,ds$

$$K = \int_{x-ct-p}^{x+ct+p} u_1(s)\,ds = U_1(x+ct+p) - U_1(x-ct-p)$$

avec $\frac{dU_1}{ds}(s) = u_1(s)$

Or, comme u_1 est périodique de période p et est à moyenne nulle sur une période, on a que U_1 est aussi périodique de période p

On obtient alors

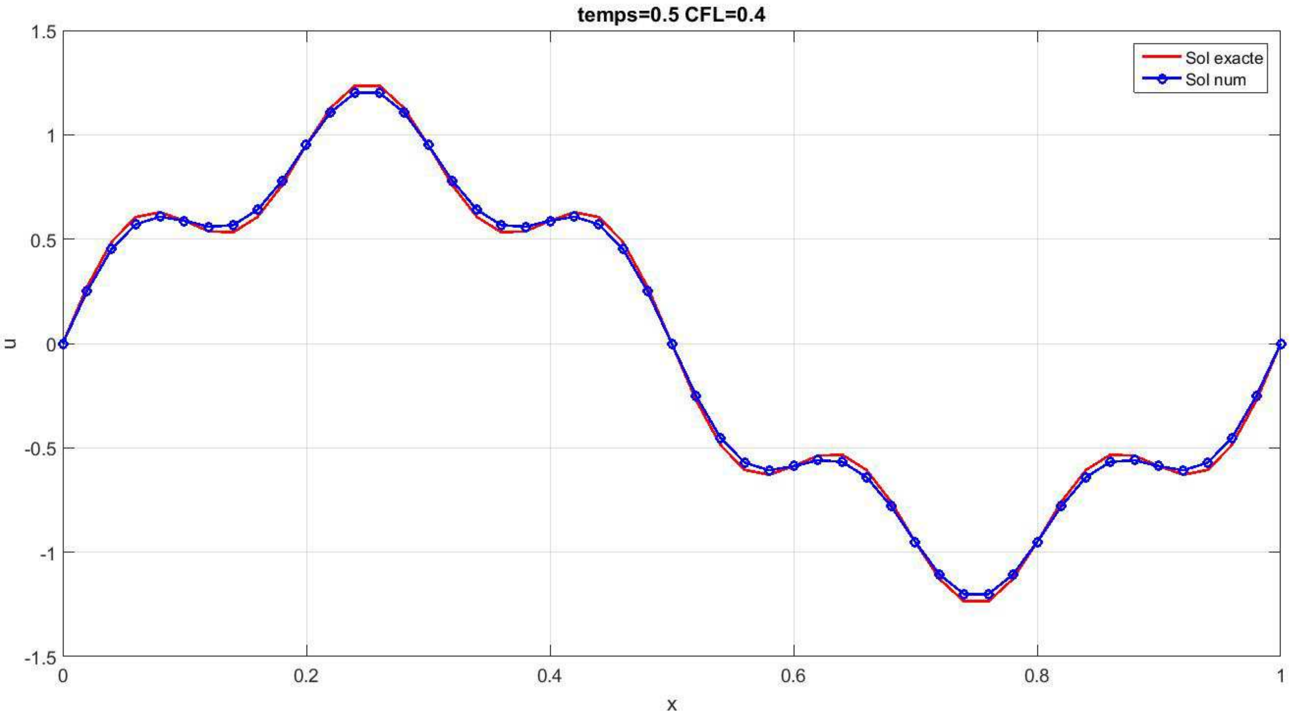
$$K = U_1(x+ct+p) - U_1(x-ct-p)$$
$$= U_1(x+ct) - U_1(x-ct) = \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds$$

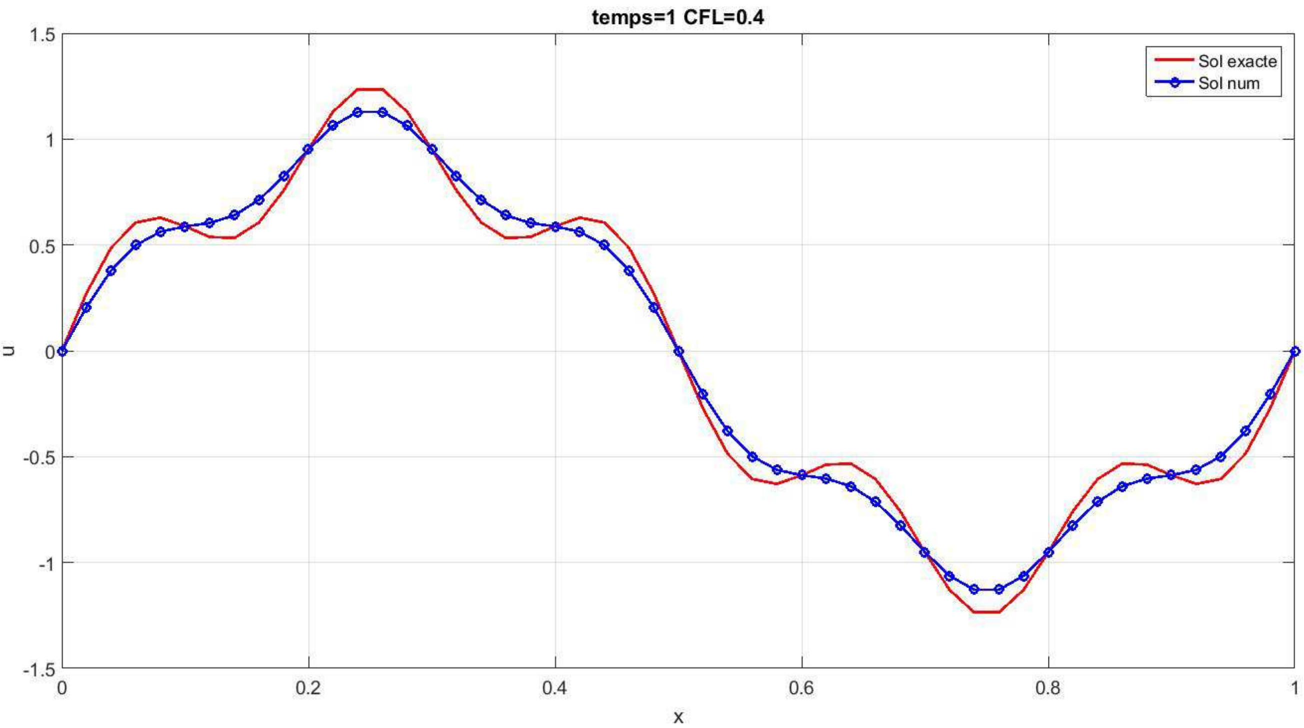
Et donc

$$u\left(x, t+\frac{p}{c}\right) = \frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} K$$
$$= \frac{u_0(x-ct)+u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds = u(x,t)$$

On a donc que $u(x,t)$ est périodique en temps de période p/c

4) Après modélisation sur ordinateur, on obtient :





III Corde longueur finie

1) On considère $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t)\,\varphi_k(x) \quad , \quad \text{avec } \varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

On a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t)\,\varphi_k(x)\right)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}(t)\,\varphi_k(x)$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t)\,\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2}(x)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\right)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t)\cdot\left(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)\right)$$
$$= -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\,v_k(t)\,\varphi_k(x)$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}(t)\,\varphi_k(x) = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}c^2\,v_k(t)\,\varphi_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}(t) + \frac{k^2\pi^2}{\ell^2} c^2 v_k(t) \right) \varphi_k(x) = 0 \qquad (**)$$

Comme on doit avoir $(**)$ vraie pour tout t, x, et comme φ_k s'écrit $\varphi_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell} x\right) \neq 0 \ \forall x$, il faut que, pour tout t :

$$\frac{\partial^2 v_k(t)}{\partial t^2} + \frac{k^2\pi^2}{\ell^2} c^2 v_k(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + \omega^2 v_k(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{k\pi}{\ell} c \qquad (e)$$

- Pour résoudre l'EDO (e), on applique la méthode dite de "l'équation caractéristique" :

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}(t) + \omega^2 v_k(t) = 0 \Rightarrow r^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i\omega$$

car $\omega \in \mathbb{R}$

On a alors

$$v_k(t) = A_k^1 e^{i\omega t} + B_k^1 e^{-i\omega t}$$

Or, comme $u(x,t)$ est réel, $v_k(t)$ l'est aussi :

$$v_k(t) \text{ "=" } \mathcal{R}e(v_k(t)) = A_k \cos(\omega t) + B_k \sin(\omega t) \qquad (f)$$

Avec $\quad A_k = v_k(0)$

$$B_k = \frac{1}{\omega} \frac{\partial v_k}{\partial t}(0)$$

2). On a, d'après la forme (f) de $v_k(t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v_k(t)\,\varphi_k(x)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(A_k \cos(\omega t) + B_k \sin(\omega t)\right)\varphi_k(x)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l}ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}ct\right)\right)\varphi_k(x)$$

En utilisant les conditions initiales décrites en (2), on a :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} A_k \varphi_k(x) = u_0(x) & (\alpha) \\ \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k\pi c}{l} B_k \varphi_k(x) = u_1(x) & (\beta) \end{cases}$$

$$(\alpha) : \sum_{k\in\mathbb{N}} A_k \varphi_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = u_0(x)$$

$$\iff \int_0^l \sum_{k\in\mathbb{N}} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx = \int_0^l u_0(x)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

On sait que $\displaystyle\int_0^l \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx = \begin{cases} \frac{l}{2} \text{ si } k = p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a alors:

$$\int_0^l \sum_{k\in\mathbb{N}} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} A_k \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

$$= A_p \frac{l}{2}$$

Soit :

$$\int_0^l u_0(x)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx = A_p\,\frac{l}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_p = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\,\varphi_p(x)\,dx$$

De même, si on utilise cette méthode sur (β) :

$$(\beta) : \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k\pi c}{l} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = u_1(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k\pi c}{l} B_k \int_0^l \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx = \int_0^l u_1(x)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p\pi c}{l} B_p \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l u_1(x)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad B_p = \frac{2}{p\pi c}\int_0^l u_1(x)\sin\left(\frac{p\pi}{l}x\right)dx$$

- Si $u(x,t)$ est périodique en temps de période d, on a alors $u(x,t+d) = u(x,t) \quad \forall x, t$

$$u(x,t+d) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(A_k\cos\left(\frac{k\pi}{l}c(t+d)\right) + B_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}c(t+d)\right)\right)\varphi_k(x)$$

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(A_k\cos\left(\frac{k\pi}{l}ct\right) + B_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}ct\right)\right)\varphi_k(x)$$

Il faut donc, pour avoir périodicité temporelle :

$$\frac{k_d \pi c}{l}(t+d) = \frac{k_d \pi c}{l} t + 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{k_d \pi c}{l} d = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{2l}{c} k_d$$

Comme il faut que la période soit valable pour chaque k, on pose $k_d = 1$

On a alors $\quad d = \frac{2l}{c}$

. De même, en posant s la période spatiale, on a
$u(x+s, t) = u(x,t) \quad \forall x, t$

$$u(x+s, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(A_k \cos\left(\frac{k\pi}{l} ct\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} ct\right)\right) \varphi_k(x+s)$$

Il faut donc, pour avoir périodicité spatiale :

$$\varphi_k(x+s) = \varphi_k(x)$$

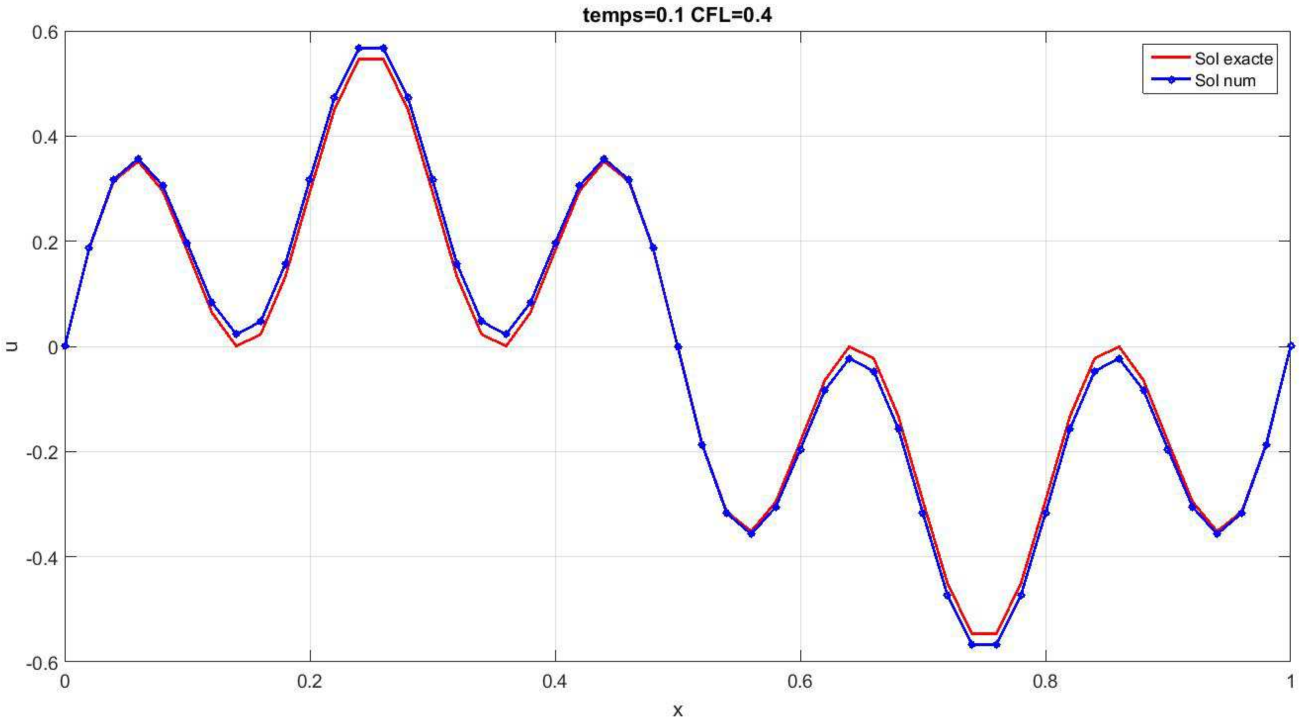
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{k\pi}{l}(x+s)\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right)$$

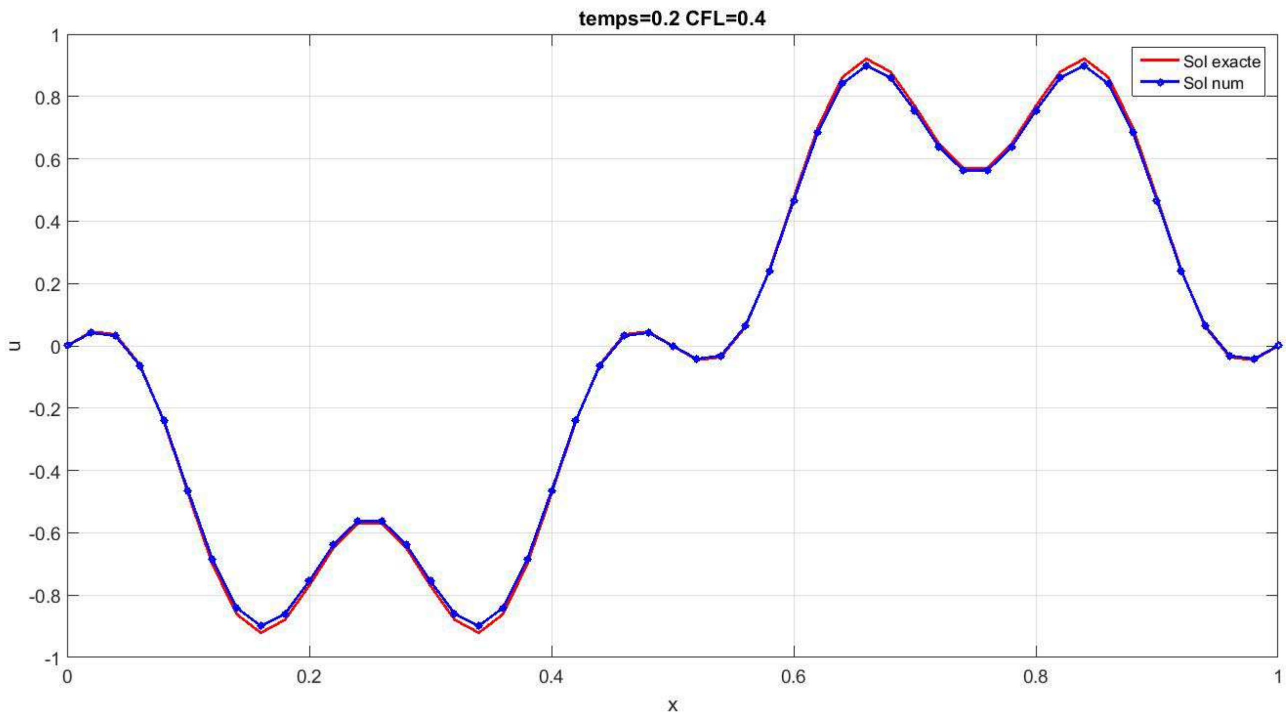
$$\Leftrightarrow \frac{k_s \pi}{l}(x+s) = \frac{k_s \pi}{l} x + 2\pi k_s$$

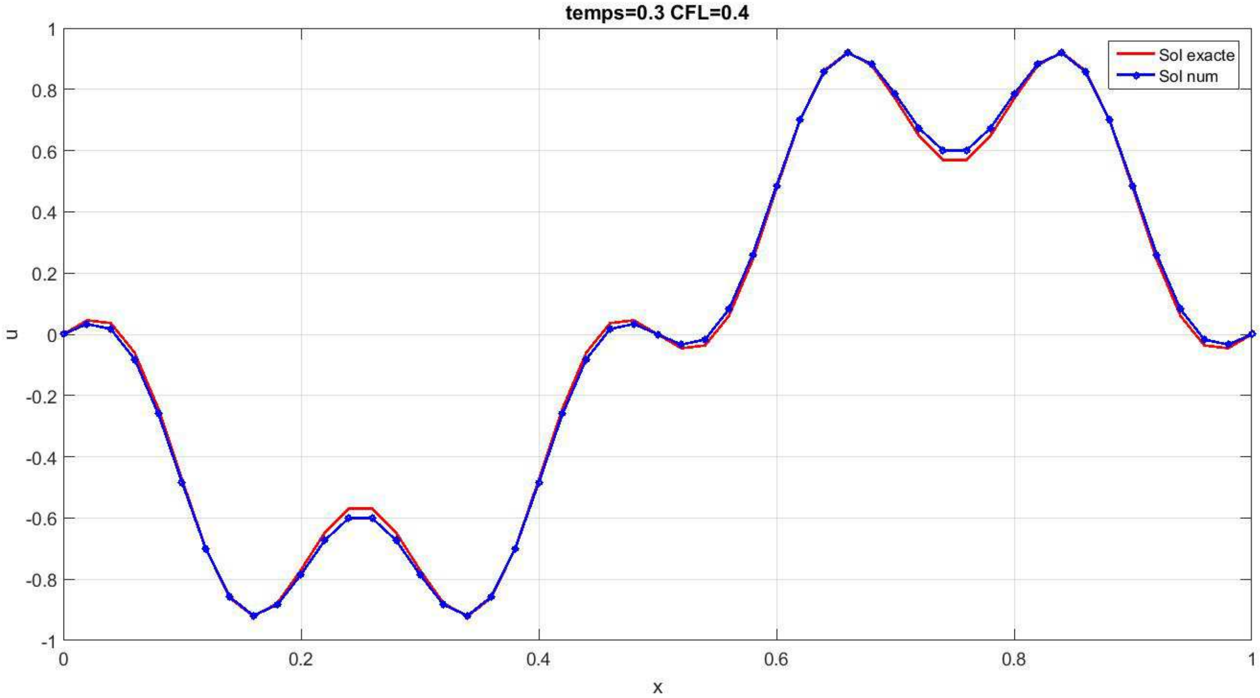
$$\Leftrightarrow \frac{k_s \pi}{l} s = 2\pi k_s$$

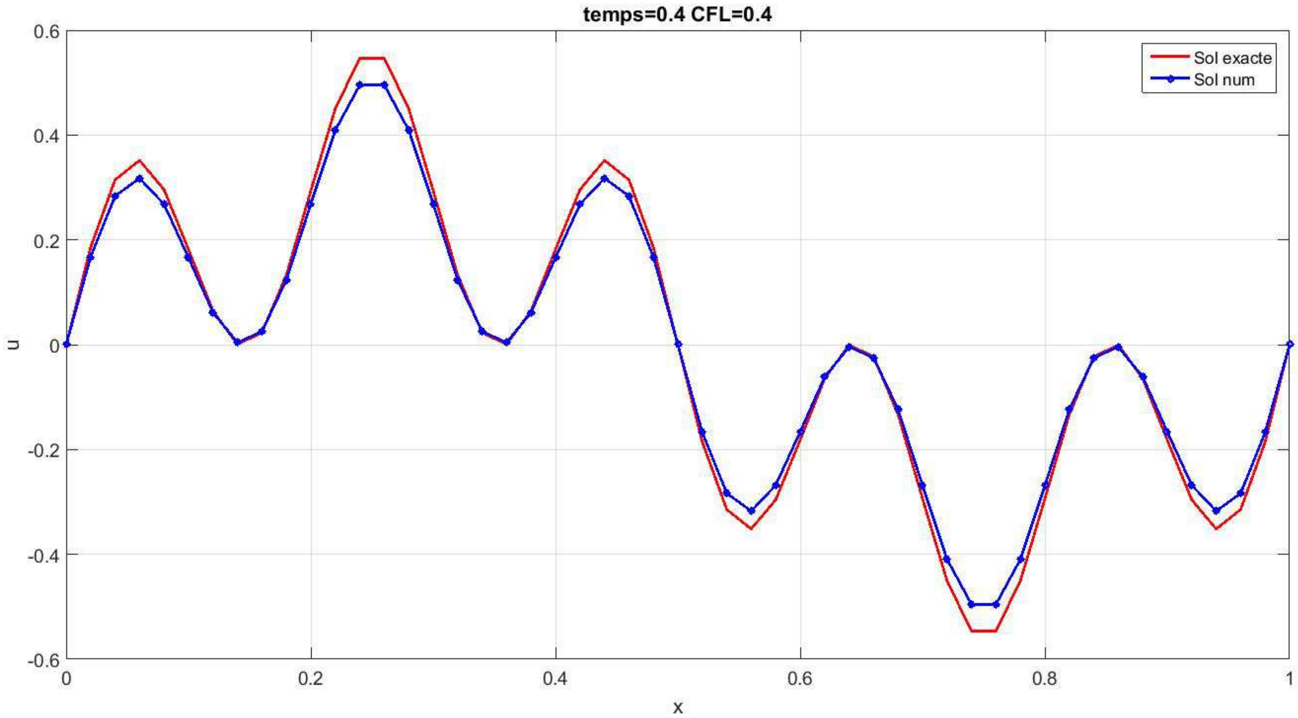
$$\Leftrightarrow s = 2l$$

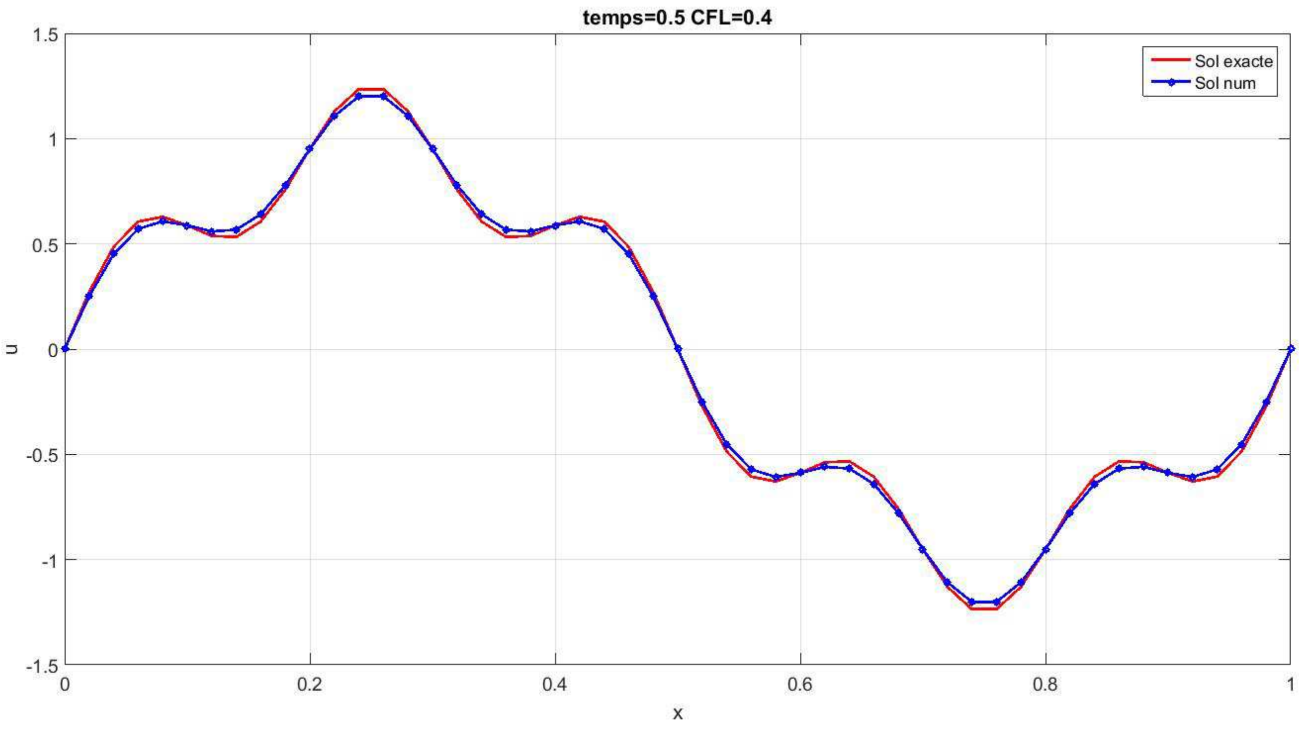
4) Après modélisation sur ordinateur, on obtient :






temps=0.3 CFL=0.4
Sol exacte
Sol num
u
x


temps=0.4 CFL=0.4
Sol exacte
Sol num
u
x


temps=0.5 CFL=0.4
Sol exacte
Sol num
u
x