CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Guía semana 05.

Alvarado, Adoree. (2024) *Guía semana 5, Cálculo Diferencial e Integral.* Universidad Andrés Bello, Santiago.

1 Ejercicios resueltos.

Ejemplo 1. Determina $\int e^x \cos(x)dx$.

Solución: Dado que el integrando es una multiplicación de dos funciones, utilizaremos el método de integración por partes.
Sea $u = \cos(x)$ y $dv = e^x dx$, entonces $du = -\sin(x)dx$ y $v = e^x$. Reemplazando en la fórmula, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)dx &= e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x)dx)\\ &= e^x\cos(x) + \underbrace{\int e^x \sin(x)dx}_{I}\end{aligned}$$

Para resolver I, aplicaremos nuevamente el método de integración por partes, definiendo:

- $u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x)dx$
- $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$
- Reemplazando en I, se obtiene:

$$I = e^x \sin(x) - \underbrace{\int e^x \cos(x)dx}_{A}$$

Ahora resolvemos la integral $A = \int e^x \cos(x)dx$ por partes.

$$A = e^x \cos(x) + \underbrace{\int e^x \sin(x)dx}_{I}$$

Observa que vuelve a aparecer la integral I en el desarrollo de la integral A, por lo tanto,

$$\begin{aligned}A &= e^x\cos(x) + I\\ A &= e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - A\end{aligned}$$

Despejamos A, ya que es la integral pedida, quedando:

$$\begin{aligned}2A &= e^x\cos(x) + e^x\sin(x)\\ A &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^x\cos(x) + e^x\sin(x)\right)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)dx &= e^x\cos(x) + I\\ &= e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - A\\ &= e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \frac{1}{2}\cdot(e^x\cos(x) + e^x\sin(x))\\ &= \frac{1}{2}\cdot(e^x\cos(x) + e^x\sin(x)) + C\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int e^x\cos(x)dx = \frac{1}{2}\cdot(e^x\cos(x) + e^x\sin(x)) + C$$

. . . .

Ejemplo 2. Determina $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}dx$.

Solución: Observa que el numerador del integrando se puede reescribir, factorizando por 4:

$$I = \int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{4(x^2-\frac{1}{4})}}{x}dx = \int \frac{2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}{x}dx = 2\int \frac{\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{x}dx$$

Como el integrando tiene la forma $\sqrt{x^2-a^2}$, utilizamos la sustitución trigonométrica $x = a\sec(\theta)$, donde $a = \dfrac{1}{2}$, quedando:

- $x = \dfrac{1}{2}\sec(\theta) \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$
- Reemplazando esta sustitución en el integrando, queda:

$$\begin{aligned}I = 2\int \frac{\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{x}dx &= 2\int \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sec(\theta)\right)^2-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}\sec(\theta)}\cdot\frac{1}{2}\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta\\ &= 2\int \frac{\sqrt{\frac{1}{4}\sec^2(\theta)-\frac{1}{4}}}{\cancel{\frac{1}{2}\sec(\theta)}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}\sec(\theta)}\tan(\theta)d\theta\\ &= 2\int \sqrt{\frac{1}{4}(\sec^2(\theta)-1)}\cdot\tan(\theta)d\theta\\ &= 2\int \frac{1}{2}\sqrt{\sec^2(\theta)-1}\cdot\tan(\theta)d\theta = \int \sqrt{\sec^2(\theta)-1}\cdot\tan(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$, se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} \cdot \tan(\theta) d\theta \\ &= \int \sqrt{\tan^2(\theta)} \cdot \tan(\theta) d\theta \\ &= \int \tan(\theta) \cdot \tan(\theta) d\theta \\ &= \int \tan^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

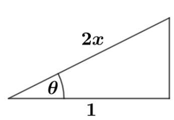
Con la misma identidad trigonomética, reescribimos $\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1$ en el integrando:

$$\begin{aligned} \int \tan^2(\theta) d\theta &= \int (\sec^2(\theta) - 1) d\theta \\ &= \int \sec^2(\theta) d\theta - \int 1 d\theta \\ &= \tan(\theta) - \theta + C \end{aligned}$$

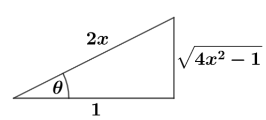
- Finalmente, volvemos a reemplazar todo en términos de x. Recordamos la sustitución realizada:

$$x = \frac{1}{2}\sec(\theta) \Leftrightarrow \frac{2x}{1} = \sec(\theta)$$

De ello, tenemos el siguiente triángulo rectángulo, recordando que $\sec(\theta) = \dfrac{hip}{ady}$:



Calculando el lado faltante :



- De lo anterior, obtenemos que:

  – $\tan(\theta) = \sqrt{4x^2 - 1}$

  – $arcsec(2x) = \theta$

- Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x} dx = \tan(\theta) - \theta + C \\ I &= \int \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x} dx = \sqrt{4x^2 - 1} - arcsec(2x) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Rosa investiga que después de t semanas, el número de adherentes en respuesta a su campaña electoral, aumenta a un ritmo de $2000te^{(-0.2t)}$ suscriptores por semana. Si inicialmente había 4000 suscriptores, ¿cuántos suscriptores tendrá en su campaña luego de 2 meses? ¿Qué método de integración nos ayudará a resolver esta situación?.

Solución: Como el número de adherentes aumenta a un ritmo $2000te^{(-0.2t)}$ suscriptores por semana, definimos la función número de adherentes $n(t)$ dependiendo del tiempo t en semanas, por lo tanto:

$$\frac{dn}{dt} = 2000te^{(-0.2t)}$$

Para obtener la función $n(t)$ utilizamos el método de integración por partes:

$$n(t) = \int 2000te^{(-0.2t)}dt = 2000\int te^{(-0.2t)}dt \tag{1}$$

Sea $u = t \Rightarrow du = dt$, $dv = e^{-0.2t}dt \Rightarrow v = \dfrac{-e^{-0.2t}}{0.2}$. Reemplazando estas expresiones en la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned}
n(t) = 2000\int te^{(-0.2t)}dt &= 2000\left(-\frac{te^{-0.2t}}{0.2} - \int \frac{-e^{-0.2t}}{0.2}dt\right) \\
&= \frac{2000}{0.2}\left(-te^{-0.2t} + \int e^{-0.2t}dt\right) \\
&= 10.000\left(-te^{-0.2t} - \frac{e^{-0.2t}}{0.2}\right) + C \\
&= -10.000te^{-0.2t} - 50.000e^{-0.2t} + C
\end{aligned}$$

Dado que inicialmente había 4000 suscriptores, es decir, $n(0) = 4000$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
n(0) &= -50.000 + C \\
4000 &= -50.000 + C \\
54.000 &= C
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función que modela el número de suscriptores luego de t semanas es:

$$n(t) = -10.000te^{-0.2t} + 50.000e^{-0.2t} + 54.000$$

Finalmente, el número de suscriptores luego de dos meses será:

$$n(8) = -10.000 \cdot 8e^{-0.2\cdot 8} + 50.000e^{-0.2\cdot 8} + 54.000 \approx 47.943.$$

. . . .

2 Ejercicios propuestos con respuesta.

Ejercicio 1. Calcula las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes:

(a) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$ (b) $\displaystyle\int \ln(x) dx$ (c) $\displaystyle\int \sec^3(x) dx$

Solución:

(a) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

(b) $x(\ln(x) - 1) + C$

(c) $\dfrac{1}{2}\left(\sec(x)\tan(x) + \ln|\tan(x) + \sec(x)|\right) + C$

. . . .

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes integrales, determina:

(a) El tipo de sustitución trigonométrica a aplicar.

(b) La solución de la integral indefinida.

i. $A = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ii. $B = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$ iii. $D = \displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$

Solución:

i. $x = 1\sin(\theta)$; $A = \arcsin(x) + C$

ii. $x = 2\sec(\theta)$; $B = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C$

iii. $x = 2\tan(\theta)$; $D = \dfrac{1}{4}\arctan\left(\dfrac{x}{4}\right) - \dfrac{x}{2(x^2+4)} + C$

. . . .

Ejercicio 3. Resuelve las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^3-x}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+6}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$

Solución:

(a) $\frac{5}{2}\ln|x-1| - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

(b) $-\ln|x+1| + 4\ln|x+2| - 3\ln|x+3| + C$

(c) $5\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|(x-1)^2+4| + 11\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

3 Ejercicios sugeridos.

Ejercicio 4. Calcula las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \cos(x)(23+5\sin(x))^5 dx$

(b) $\displaystyle\int \sec(x)dx$

(c) $\displaystyle\int x\sec(x)\tan(x)dx$

(d) $\displaystyle\int x^2\sin(\ln(x))dx$

(e) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx$

(f) $\displaystyle\int x\tan^2(x)dx$

Ejercicio 5. Para cada una de las siguientes integrales, determina:

(i) El tipo de sustitución trigonométrica a aplicar.

(ii) La solución de la integral indefinida.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-81}}{x}dx$ (c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx$

Ejercicio 6. Resuelve las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{4-x^2}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+x-6}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{(e^{2x}+1)^2}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{a^4-x^4}dx$

Ejercicio 7. Resuelve las siguientes integrales aplicando el método conveniente:

(a) $\displaystyle\int \sin^4(x)\cos^3(x)dx$

(b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+2)(x-4)}dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{2\sin(2x)}{\sqrt{1+3\sin^2(x)}}dx$

(f) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx$