1. Ejercicio

1. Comprobar que el conjunto dado es l.i.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego, escribir $A = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de D.

· Para determinar si son l.i., se debe cumplir que:

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta & \beta \\ 3\beta & 2\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma \\ -\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $-\alpha + 2\beta = 0$

(2) $\alpha + \beta + 2\gamma = 0$

(3) $\alpha + 3\beta - \gamma = 0$

(4) $-\alpha + 2\beta + \gamma = 0$

(3) y (4) $5\beta = 0$ $\quad \beta = 0$

(1) $= \alpha = 0$

(2) $2\gamma + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \therefore$ Es linealmente independiente.

• Con los datos anteriores realizamos matriz ampliada y realizamos combinación lineal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -25 \\ -1 & 2 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

• Se ingresa a geogebra para realizar matriz escalonada *

> A: = {{-1, 2, 0, 9}, {1, 1, 2, -3}, {1, 3, -1, -25}, {-1, 2, 1, 15}}

> Escalonada reducida (A):

$\alpha = -13$; $\beta = -2$; $\gamma = 6$

∴ La combinación lineal según el conjunto dado D, quedaría como:

$$-13\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Geogebra *

2. Ejercicio

2.- Determinar la dimensión del subespacio:

$$S = \{ a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R}) : a + 2b + 3c = 0 \wedge$$
$$a - 2b + Kc = 0 \wedge$$
$$a + Kb + Kc = 0 \}$$

Suponiendo que:

i) $K = 1$

ii) $K = -2$

i) Si $K = 1$, entonces:

$$a + 2b + 3c = 0$$
$$a - 2b + c = 0$$
$$a + b + c = 0$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

- Realizamos el mismo paso en Geogebra (escalonada reducida)

- Geogebra nos indica que:

$$\text{Escalonada Reducida } (B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $a = b = c = 0$, por lo que son l.i. y si (a, b, c) tiene a $K = 1$, tiene un conjunto generador en $(0, 0, 0)$, lo que significa que su dimensión es 0.

ii) Si $k = -2$

$$a + 2b + 3c = 0$$
$$a - 2b + (-2)c = 0$$
$$a + (-2)b + (-2)c = 0$$

(1) $a + 2b + 3c = 0$
(2) $a - 2b - 2c = 0$
(3) $a - 2b - 2c = 0$

(1) y (2) $\Rightarrow$ $2a + c = 0$ Geogebra: *

$$a + \frac{1}{2}c = 0 \qquad a = \frac{-1}{2}c$$

$$b + \frac{5}{4}c = 0$$

$$b = \frac{-5}{8}$$

Entonces si reescribimos (a, b, c) en términos de conjunto generador:

Sea $S = \{(a, b, c) \in P_2(\mathbb{R})$
$= \{(\frac{-1}{2}c, \frac{-5}{8}, c) : \in \mathbb{R}\}$

$= \langle\{c(-\frac{1}{2}, \frac{-5}{8}, 1)\}\rangle : \in \mathbb{R}\}$

$\therefore$ Si $k = -2$, tiene el conjunto generador mencionado anteriormente y dimensión 1.

3. Ejercicio

3- Considerando $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (x-y, 3x+2y)$, y la base ordenada $B = \{(1,2),(3,4)\}$ de $\mathbb{R}^2$, se solicita determinar la representación matricial de T en la base B: $[T]_B$

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow T(x,y) = (x-y, 3x+2y)$$

Base ordenada = $B = \{\underset{V_1}{(1,2)}, \underset{V_2}{(3,4)}\}$

• Representación matricial:

$$[T]_B = \Big[[T(V_1)]_B \quad [T(V_2)]_B \Big]$$

$$T(V_1) = T(1,2)$$
$$= (1-2, 3\cdot(1)+2(2)) = (-1, 7)$$

$$T(V_2) = T(3,4)$$
$$= (3-4, 3(3)+2(4)) = (-1, 9+8)$$
$$= (-1, 17)$$

$$[T]_B = \Big[[(-1,7)]_B \quad [(-1,17)]_B \Big]$$

• Para $(-1,7)$:

$$(-1,7) = \alpha(1,2) + \beta(3,4)$$
$$(-1,7) = (\alpha, 2\alpha) + (3\beta, 4\beta)$$

$$\alpha + 3\beta = -1$$
$$2\alpha + 4\beta = 7$$

(1) $\alpha + 3\beta = -1$
(2) $2\alpha + 4\beta = 7$ $\quad \cdot -2$

$-\cancel{2\alpha} - 6\beta = 2$
$\cancel{2\alpha} + 4\beta = 7$

$-2\beta = 9$
$\beta = \frac{-9}{2}$

(1) $\alpha - \frac{27}{2} = -1$

$\alpha = -1 + \frac{27}{2} = \frac{-2+27}{2} = \frac{25}{2}$

- Para $(-1, 17)$:

$(-1, 17) = \alpha(1,2) + \beta(3,4)$

$(-1, 17) = (\alpha, 2\alpha) + (3\beta, 4\beta)$

$\alpha + 3\beta = -1$
$2\alpha + 4\beta = 17$ $\quad \cdot -2$

$-\cancel{2\alpha} - 6\beta = 2$
$\cancel{2\alpha} + 4\beta = 17$
$-2\beta = 19$
$\beta = -\frac{19}{2}$

$\alpha + 3\left(-\frac{19}{2}\right) = -1$

$\alpha - \frac{57}{2} = -1$

$\alpha = -1 + \frac{57}{2}$

$\alpha = \frac{-2+57}{2} = \frac{55}{2}$

3. Respuesta:

La representación matricial es:

$$[T]_B = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 25/2 & 55/2 \\ -9/2 & -19/2 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \\ \begin{array}{cc} V_1 & \quad V_2 \end{array} & \end{array}$$

4. Dada la transformación lineal $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$, satisfaciendo:

$$T(1+x) = 1 - x$$
$$T(1-x) = 1 + x + x^2$$
$$T(1-x^2) = 2 + x^2$$

Se solicita: determinar $T(ax^2+bx+c)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y responder si es inyectiva.

$$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1-x) + \gamma(1-x^2)$$
$$\cancel{ax^2} + \cancel{bx} + \cancel{c} = \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha x} + \cancel{\beta} - \cancel{\beta x} + \cancel{\gamma} - \cancel{\gamma x^2}$$

(1) $a = -\gamma$
(2) $b = \alpha - \beta$
(3) $c = \alpha + \beta + \gamma$

(1) $\gamma = -a$
$\beta = \dfrac{a - b + c}{2}$
$\alpha = \dfrac{a + b + c}{2}$

- Con geogebra y escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a+b+c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{array}\right)$$

4. Ejercicio (también se encuentra en la hoja de arriba)

- Luego tenemos que:

$$T(1+x) = 1-x$$
$$T(1-x) = 1+x+x^2$$
$$T(1-x^2) = 2+x^2$$

$$T(x) \Rightarrow \alpha(T(1+x)) + \beta(T(1-x)) + \gamma(T(1-x^2))$$

- Tenemos que:

$$\alpha = \frac{a+b+c}{2} \qquad \beta = \frac{a-b+c}{2} \qquad \gamma = -a$$

- Reemplazamos con los datos iniciales

$$T(x) = \alpha(1-x) + \beta(1+x+x^2) + \gamma(2+x^2)$$
$$= \alpha - \cancel{\alpha x} + \beta + \cancel{\beta x} + \beta x^2 + 2\gamma + \cancel{\gamma x^2}$$

- Agrupamos: $\underbrace{\beta x^2 + \gamma x^2}_{(1)} + \underbrace{\beta x - \alpha x}_{(2)} + \underbrace{\alpha + \beta + 2\gamma}_{(3)}$

$$\underbrace{(\beta+\gamma)}_{(1)} x^2 + \underbrace{(\beta-\alpha)}_{(2)} x + \underbrace{(\alpha+\beta+2\gamma)}_{(3)}$$

(1) $\frac{a-b+c}{2} - a = \frac{a-b+c-2a}{2} = \frac{c-b-a}{2}$

(2) $\frac{a-b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2} = \frac{\cancel{a}-b+\cancel{c}-\cancel{a}-b-\cancel{c}}{2} = -b$

(3) $\frac{a+b+c}{2} + \frac{a-b+c}{2} + -2a = \frac{a+\cancel{b}+c+a-\cancel{b}+c-4a}{2} = \frac{-2a+2c}{2}$

$= c-a$

- Por lo que la $T(ax^2+bx+c)$ según las T dadas en el enunciado serían $\left(\frac{c-b-a}{2}, -b, c-a\right)$, considerando que a, b y $c \in \mathbb{R}$.

- Necesitamos que $T(x) = (0,0,0)$ en sus componentes, por lo que igualamos

$$\frac{c-b-a}{2} = 0 \quad , \quad -b = 0 \quad , \quad c-a = 0$$
$$b = 0 \qquad c = a$$

$$\frac{a-0-a}{2} = 0$$

$\therefore$ Existen ∞ valores de a que siguiendo con la igualdad de la definición dan resultado 0, por lo que no es inyectiva.

Geogebra

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -25 \\ -1 & 2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

EscalonadaReducida(A)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EscalonadaReducida(B)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

EscalonadaReducida(F)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a+b+c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

≈