

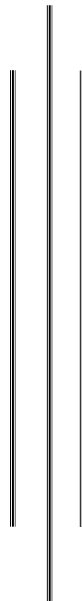


USP

Universitas Safin Pati

MODUL KALKULUS 1

PROGRAM STUDI INFORMATIKA



UNIVERSITAS SAFIN PATI

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
SATUAN ACARA PERKULIAHAN	iii
PERTEMUAN 1 SISTEM BILAGAN REAL	1
PERTEMUAN 2 PERSAMAAN	5
PERTEMUAN 3 PERTIDAKSAMAAN	13
PERTEMUAN 4 PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK	18
PERTEMUAN 5 RELASI DAN FUNGSI	22
PERTEMUAN 6 KOMPOSISI FUNGSI	31
PERTEMUAN 7 FUNGSI INVERS	35
PERTEMUAN 8 LATIHAN SOAL UTS	38
PERTEMUAN 9 LIMIT ALJABAR	40
PERTEMUAN 10 LIMIT TRIGONOMETRI	45
PERTEMUAN 11 TURUNAN ALJABAR	50
PERTEMUAN 12 TURUNAN TRIGONOMETRI	52
PERTEMUAN 13	54

TURUNAN ATURAN
RANTAI

PERTEMUAN 14
TURUNAN PARSIAL 63

PERTEMUAN 15
APLIKASI 70
TURUNAN

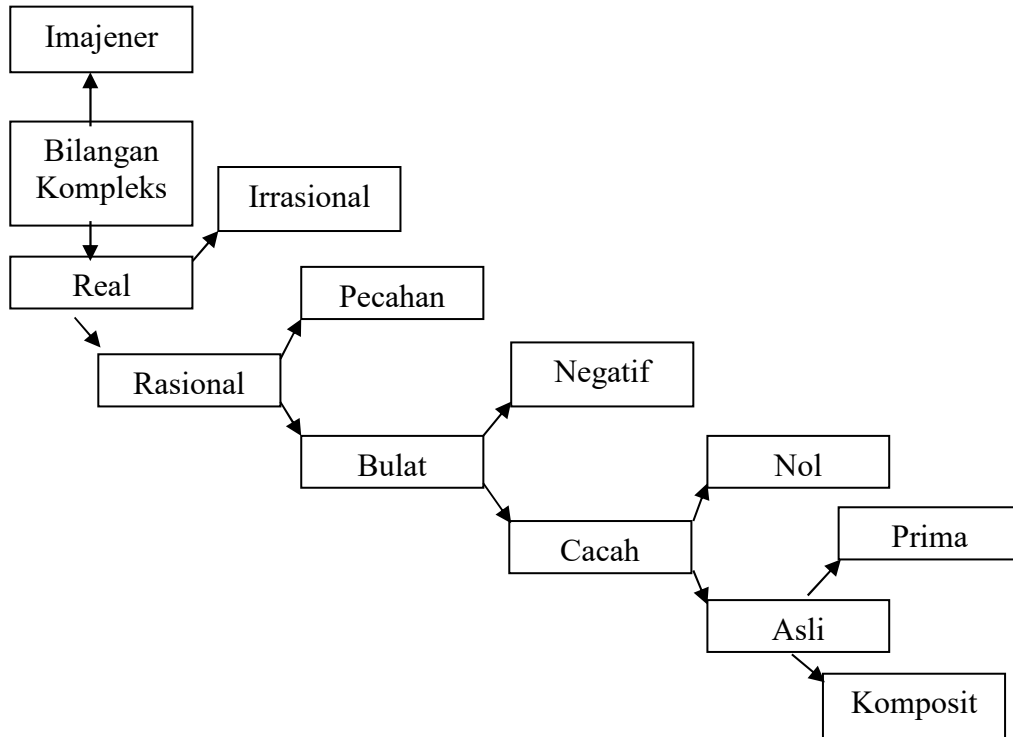
PERTEMUAN 16
LATIHAN SOAL 78
UPM

DAFTAR PUSTAKA

PERTEMUAN 1

(SISTEM BILANGAN REAL)

A. Bilangan Real



Bilangan kompleks yaitu bilangan yang ada pada dua dimensi, yaitu bilangan real dan bilangan imajiner. Bentuk umum $Z = a+bi$; dimana a = bilangan real, b = koefisien imajiner, dan i = imajiner

Bilangan real yaitu bilangan yang digunakan dalam ilmu pengetahuan maupun kehidupan sehari-hari.

Bilangan rasional yaitu bilangan yang dapat dinyatakan dalam perbandingan dua buah bilangan bulat atau jika dalam bentuk desimal merupakan desimal yang berakhir atau jika tidak berakhir merupakan bentuk desimal berulang secara teratur.

Definisikan dan berikan contoh dari bilangan berikut :

- Pecahan
- Bulat
- Negatif

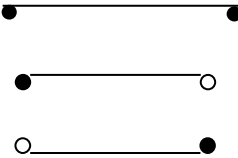
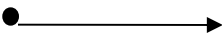

- d. Cacah
- e. Nol
- f. Asli
- g. Prima
- h. Komposit

B. Interval Bilangan Real

Beberapa cara menyatakan interval bilangan real

1. Menggunakan notasi himpunan
2. Menggunakan garis
3. Menggunakan pasangan suprimun (batas max) dan infimum (batas min)

Contoh soal

1	$A = \{1, 2, 3, 4\}$	
	Notasi	$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ $A = \{x \mid 1 \leq x < 5, x \in \mathbb{R}\}$ $A = \{x \mid 0 < x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$
	Grafik garis	
	Suprimum dan Infimum	$A = [1, 4]$ $A = [1, 5)$ $A = (0, 4]$
2	$B = \{1, 2, 3, \dots\}$	
	Notasi	$B = \{x \mid x \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$
	Grafik garis	
	Suprimum dan Infimum	$B = [1, \sim)$
3	$C = \{\dots, 8, 9, 10\}$	
	Notasi	$C = \{x \mid x \leq 10, x \in \mathbb{R}\}$
	Grafik garis	
	Suprimum dan Infimum	$C = (\sim, 10]$

C. Sifat-sifat urutan bilangan real

- ✓ **Trikotomi** : Jika x dan y adalah bilangan-bilangan, maka pasti salah satu diantara yang berikut ini berlaku $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$
- ✓ **Ketransitifan** : $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$
- ✓ **Penambahan** : $x < y$ dan $x + z < y + z$
- ✓ **Perkalian** : Bilamana z positif, $x < y$ maka $xz < yz$. Bilamana z negatif, $x < y$ maka $xz > yz$

D. Sifat Kealjabaran Bilangan Real

- ✓ **Hukum Komutatif** : $x + y = y + x$ dan $xy = yx$
- ✓ **Hukum Asosiatif** : $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$
- ✓ **Hukum Distributif** : $x(y + z) = xy + xz$
- ✓ **Elemen-elemen Identitas** : Terdapat dua bilangan real yang berlainan 0 dan 1 yang memenuhi $x + 0 = x$ dan $x \cdot 1 = x$ untuk setiap x bilangan real
- ✓ **Balikan (Invers)** : Setiap bilangan x mempunyai balikan penambahan (disebut juga negatif), $-x$, yang memenuhi $x + (-x) = 0$. Jiga, setiap bilangan x kecuali 0 mempunyai balikan perkalian (disebut juga kebalikan), x^{-1} , yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$

E. Latihan Soal

1. Coba ingat kembali :

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a. $0 \cdot 0 = \dots$ | c. $0^5 = \dots$ | e. $12^0 = \dots$ |
| b. $\frac{0}{17} = \dots$ | d. $\frac{0}{0} = \dots$ | f. $\frac{3}{0} = \dots$ |

2. Selesaikanlah

- | | |
|--|----------------------------------|
| a. $\frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6} \right]$ | f. $(2x - 3)^2$ |
| b. $\frac{14}{21} \left(\frac{2}{5 - \frac{1}{3}} \right)^2$ | g. $(2t + 3)^3$ |
| c. $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ | h. $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ |
| d. $2\sqrt[3]{4} [\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{16}]$ | i. $\frac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$ |

e. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$

j. $\frac{12}{x^2 + 2x} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x + 2}$

3. Nyatakan dengan benar atau salah dari pernyataan berikut

a. $-3 < -7$

d. $-5 > -\sqrt{26}$

b. $-1 > -17$

e. $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$

c. $-3 < -\frac{22}{7}$

f. $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{59}$

4. Manakah diantara yang berikut ini bilangan rasional dan manakah yang irasional

a. $-\sqrt{9}$

d. $0,375$

b. $1 - \sqrt{2}$

e. $(1 + \sqrt{3})^2$

c. $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$

f. $5\sqrt{2}$

5. Manakah diantara yang berikut ini selalu benar jika $a \leq b$

a. $a^2 \leq ab$

c. $a - 3 \leq b - 3$

b. $a^3 \leq a^2b$

d. $-a \leq -b$

PERTEMUAN 2

(PERSAMAAN)

- Kesamaan : suatu kalimat matematika yang tidak memiliki variable dengan tanda hubung “=”.

Misal: $2+3 = 5$

- Persamaan: suatu kalimat matematika yang memiliki variable dengan tanda “=”, sehingga memerlukan penyelesaian khusus untuk mencari nilai variabel tsb.

Misal: $2x - 5 = 9$

A. Persamaan Linier

1. Pengertian persamaan linear

Persamaan adalah kalimat terbuka yang mengandung hubungan (relasi) sama dengan. Sedangkan persamaan linear adalah suatu persamaan yang pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu atau berderajat satu.

2. Persamaan linear satu variabel

Bentuk umum :

$$ax + b = 0; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

a = koefisien dari x

x = variabel

b = konstanta

Contoh:

a. $4x + 8 = 0$

b. $6x - 18 = 0$

Kedua persamaan di atas akan bernilai benar jika variabelnya berturut-turut diganti dengan -2 dan 3.

Sifat-sifat persamaan linear

a. Nilai persamaan tidak berubah, jika :

- 1) Kedua ruas ditambah atau dikurangi bilangan yang sama.
- 2) Kedua ruas dikalikan atau dibagi bilangan yang sama.

b. Suatu persamaan jika dipindahkan ruas, maka :

- 1) Penjumlahan berubah menjadi pengurangan dan sebaliknya.

2) Perkalian berubah menjadi pembagian dan sebaliknya.

Contoh:

a. $\frac{1}{3}x + 3 = 12$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x + 3 - 3 = 12 - 3 \quad (\text{kedua ruas dikurangi 3})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x \cdot 3 = 9 \cdot 3 \quad (\text{kedua ruas dikali 3})$$

$$\Leftrightarrow x = 27$$

b. $4x - 7 = 2x + 9$

$$\Leftrightarrow 4x - 7 + 7 = 2x + 9 + 7 \quad (\text{kedua ruas ditambah 7})$$

$$\Leftrightarrow 4x = 2x + 16$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2x = 2x - 2x + 16 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 16$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \frac{1}{2} = 16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 8$$

3. Himpunan penyelesaian persamaan linear

Menentukan himpunan penyelesaian persamaan linear berarti mencari harga yang memenuhi untuk pengganti variabel pada persamaan linear yang bersangkutan.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari :

a. $2x + 4 = x + 7$

b. $\frac{2x-1}{5} = \frac{x+1}{2}$

Jawab:

a. $2x + 4 = x + 7$

$$\Leftrightarrow 2x - x = 7 - 4$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$HP = \{3\}$$

$$b. \frac{2x-1}{5} = \frac{x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-1) = 5(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2 = 5x + 5$$

$$\Leftrightarrow 4x - 5x = 2 + 5$$

$$\Leftrightarrow -x = 7$$

$$\Leftrightarrow x = -7$$

$$HP = \{-7\}$$

Latihan soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linear berikut !

$$a. 2x - 3 = 3x - 7$$

$$b. 5 + 3(2 - x) + 2 = 2(x - 3)$$

$$c. 8x - 3 = 4(x + 1) + 5$$

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan linear berikut !

$$a. \frac{3x}{5} - 2 = \frac{x}{3}$$

$$b. \frac{x}{3} + \frac{3x}{4} = x + 2$$

$$c. \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x = \frac{2x-3}{4}$$

B. Persamaan Kuadrat

1. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah persamaan berderajat dua dalam x yang dinyatakan dengan :

$$ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in R; a \neq 0$$

a = koefisien dari x^2

b = koefisien dari x

c = konstanta

Contoh:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

2. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara menyelesaikan persamaan kuadrat, antara lain :

a. Memfaktorkan

Contoh:

1) Selesaikan $x^2 - 5x + 6 = 0$!

Jawab:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ atau } x - 2 = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = 2$$

$$\text{Jadi HP} = \{3, 2\}$$

2) Selesaikan $x^2 - 25 = 0$!

Jawab:

$$x^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ atau } x - 5 = 0$$

$$x = -5 \text{ atau } x = 5$$

$$\text{Jadi HP} = \{-5, 5\}$$

b. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

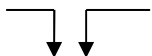
Contoh:

1) Selesaikan $x^2 + 10x + 21 = 0$!

Jawab:

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x = -21$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 = -21 + 25$$


$$(\frac{1}{2} \text{ koefisien } x)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 2 \text{ atau } x + 5 = -2$$

$$x = -3 \text{ atau } x = -7$$

$$\text{Jadi HP} = \{-3, -7\}$$

2) Selesaikan $4x^2 + 8x + 3 = 0$!

Jawab:

$$4x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x = -3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -\frac{3}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{2} \text{ atau } x + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Jadi HP} = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\}$$

c. Dengan Rumus ABC

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh:

1) Selesaikan $x^2 + 6x - 16 = 0$!

Jawab:

$$a = 1, b = 6, c = -16$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ atau } x_2 = \frac{-6 - 10}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

$$\text{Jadi HP} = \{2, -8\}$$

3. Sifat-sifat Akar persamaan Kuadrat

Sifat-sifat akar persamaan kuadrat yang menyangkut banyaknya akar persamaan kuadrat, ditentukan oleh nilai diskriminannya yaitu $D = b^2 - 4ac$.

- (i) $D > 0 \rightarrow$ kedua akar real dan berbeda
- (ii) $D = 0 \rightarrow$ kedua akar sama (kembar)
- (iii) $D < 0 \rightarrow$ Persamaan kuadrat tidak mempunyai akar nyata

Contoh:

Tentukan sifat-sifat akar persamaan berikut ini !

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$

2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

3) $x^2 + 3x + 3 = 0$

Jawab:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

$D > 0$, kedua akar real dan berbeda.

2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$a = 1, b = 6, c = 9$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

$D = 0$, kedua akar sama (kembar)

3) $x^2 + 3x + 3 = 0$

$$a = 1, b = 3, c = 3$$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3$$

$D < 0$, persamaan tidak mempunyai akar nyata.

Latihan Soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dengan menggunakan pemfaktoran!

a. $x^2 - 5x - 36 = 0$

b. $x^2 - 13x + 22 = 0$

2. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dengan pemfaktoran !

a. $x^2 + 5x + 4 = 0$

b. $x^2 - 11x + 24 = 0$

3. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dengan menggunakan rumus abc !

a. $x^2 - 4x - 45 = 0$

b. $x^2 + 2x - \frac{3}{4} = 0$

4. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan kuadrat berikut dari $x^2 + 4x - 60 = 0$!
5. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x - 36 = 0$, tentukan x_1 dan x_2 !

PERTEMUAN 3 (PERTIDAKSAMAAN)

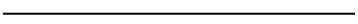
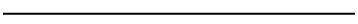



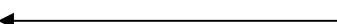



- Ketidaksamaan: suatu kalimat matematika yang tidak memiliki variabel dengan tanda hubung “<, >, ≠.

Misal: $2+5 < 10$

- Pertidaksamaan: suatu kalimat matematika yang memiliki variabel dengan tanda hubung “<, ≤, >, ≥, ≠”, sehingga memerlukan penyelesaian khusus untuk mencari nilai variabel tsb.

Misal: $3x+6 > 5$

Aturan penulisan ketaksamaan

Penulisan Himpunan	Pemisah Selang	Grafik
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
R	$(-\infty, \infty)$	

1. Pertaksamaan Linier

Contoh: $2x + 5 > 3$

$$3x + 8 < x + 10$$

$$-2 < 2x + 3 < 8$$

$$2x < 5x - 7 < 8x + 3$$

$$\frac{2x+8}{5} > 6$$

$$\frac{2x}{3} + 2 < 1$$

Dalam penyelesaian pertaksamaan linier gunakan kaidah additif dan multiplikatif dalam urutan bilangan real, yaitu:

1. Pada tiap pertaksamaan dapat menambahkan bilangan real yang sama pada masing-masing ruas tanpa mengubah tanda pertaksamaan
2. Pada setiap pertaksamaan dapat dikalikan bilangan yang sama untuk masing-masing ruas, dengan catatan:
 - a. jika bilangan pengali ≥ 0 , tanda pertaksamaan tetap
 - b. jika bilangan pengali < 0 , tanda pertaksamaan dibalik

Contoh:

a. $-3 < 2x + 5 < 9$

Jawab: $-3 - 5 < 2x < 9 - 5$

$$-8 < 2x < 4 \text{ (dikali } \frac{1}{2})$$

$$-4 < x < 2 \quad \text{Maka HP } (-4, 2)$$

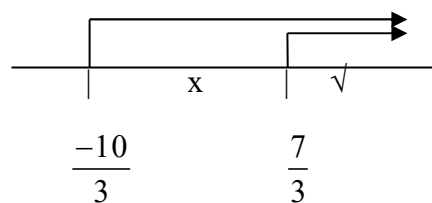
b. $2x < 5x - 7 < 8x + 3$

$$2x < 5x - 7 \quad \text{dan} \quad 5x - 7 < 8x + 3$$

$$-3x < -7 \text{ (dikali } -1/3) \quad -3x < 10 \text{ (dikalikan } -1/3)$$

$$x > \frac{7}{3}$$

$$x > \frac{-10}{3}$$



Jadi $\{x > 7/3\}$ maka $hp = \left[\frac{7}{3}, \infty \right)$

$$c. \frac{2x+8}{5} > 6$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{8}{5} > 6$$

$$\frac{2x}{5} > 6 - \frac{8}{5}$$

$$\frac{2x}{5} > \frac{30-8}{5}$$

$$\frac{2x}{5} > \frac{22}{5}$$

$$x > 11$$

$$\{x > 11\}$$

$$d. \frac{2x}{3} + 2 < 1$$

$$\frac{2x}{3} < 1 - 2$$

$$\frac{2x}{3} < -1$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

$$\left\{ x < -\frac{3}{2} \right\}$$

Pertidaksamaan Non Linier

Contoh: $x^2 + 5x - 6 > 0$

$$\frac{3x+5}{2x-1} > 2$$

untuk menyelesaikan pertaksamaan non linier perlu dilakukan langkah sebagai berikut:

1. Gunakan kaidah additif dan multiplikatif seperti pada pertaksamaan linier
2. Buat ruas kanan = 0
3. Buat ruas kiri menjadi faktor-faktor linier

4. Jika ruas kiri merupakan bentuk fungsi rasional buatlah masing-masing penyebut dan pembilang menjadi faktor linier tersendiri
5. Tentukan nilai nol fungsi dari faktor linier pada ruas kiri
6. Dengan menggunakan garis bilangan real, tentukan ruas interval dengan pembagi di titik nol fungsi yang diperoleh
7. Dengan menggunakan sample bilangan pada masing-masing ruas interval, yaitu:
 - a. jika positif merupakan daerah penyelesaian dari pertaksamaan $>$ atau \geq
 - b. jika negatif merupakan daerah penyelesaian dari pertaksamaan $<$ atau \leq

Contoh:

a. $x^2 - x - 6 > 0$
 $(x+2)(x-3) > 0$

$$x < -2 \text{ atau } x > 3$$

$$Hp (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$$

b. $\frac{3x+5}{2x-1} \geq 2$

$$\frac{3x+5}{2x-1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{3x+5}{2x-1} - \frac{2(2x-1)}{2x-1} \geq 0$$

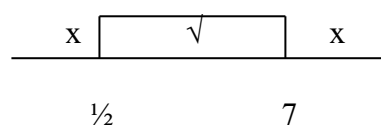
$$\frac{3x+5-4x+2}{2x-1} \geq 0$$

$$\frac{-x+7}{2x-1} \geq 0$$

Persamaannya: $-x + 7 = 0$ maka $x = 7$

$$2x - 1 = 0 \text{ maka } x = 1/2$$

Ujikan setiap interval ke pertidaksamaan awal



Karena penyebut $2x - 1$ maka $x \neq 1/2$

Jadi $\{1/2 < x \leq 7\}$ maka $hp = (1/2, 7]$

Latihan Soal

1. $2x - 7 < 4x - 2$
2. $-5 \leq 2x + 6 < 4$
3. $x^2 - x < 6$
4. $3x^2 - x - 2 > 0$
5. $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$
6. $x^3 - 5x^2 + 4x \leq 0$
7. $(x+1)(x-1)^2(x-3) \leq 0$
8. $2,9 < \frac{1}{x} < 3,1$
9. $x - 7 < 2x - 5$
10. $7x - 2 \leq 9x + 3$
11. $10x + 1 > 8x + 5$
12. $-4 < 3x + 2 < 5$
13. $-3 < 1 - 6x \leq 4$
14. $2 + 3x < 5x + 1 < 16$
15. $x^2 + 2x - 12 < 0$
16. $2x^2 + 5x - 3 > 0$
17. $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$
18. $\frac{2}{X} < 5$
19. $\frac{1}{3x-2} \leq 4$
20. $3x - 5 < 4x - 6$
21. $5x - 3 > 6x - 4$
22. $-2x + 5 \geq 4x - 3$
23. $-3 < 4x - 9 < 11$
24. $4 < 5 - 3x < 7$
25. $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
26. $x^2 - 5x - 6 > 0$
27. $4x^2 - 5x - 6 > 0$
28. $\frac{3x-2}{x-1} \geq 0$
29. $\frac{7}{4x} \leq 7$
30. $\frac{3}{x+5} > 2$

PERTEMUAN 4 (PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK)

Nilai Mutlak

Nilai mutlak dituliskan dengan $|x|$ didefinisikan dengan $|x| = x$ jika $x \geq 0$ dan $-x$ jika $x < 0$

Misal: $|5| = 5$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$

Sifat-sifat nilai mutlak:

1. $|ab| = |a| |b|$
2. $|a/b| = |a|/|b|$
3. $|a+b| = |a| + |b|$
4. $|a-b| = ||a| - |b||$

Penyelesaian nilai mutlak dapat menggunakan pengkuadratan atau dengan teorema:

1. $|x| < a$ maka $-a < x < a$
2. $|x| > a$ maka $x < -a$ atau $x > a$
3. $|f(x)| < g(x)$ maka $-(g(x)) < f(x) < g(x)$
4. $|f(x)| > g(x)$ maka $f(x) < -(g(x))$ dan $f(x) > g(x)$
5. $|f(x)| < |g(x)|$ maka $(f(x))^2 < (g(x))^2$
6. $|f(x)| > |g(x)|$ maka $(f(x))^2 > (g(x))^2$

Contoh:

1. Tentukan penyelesaian pertidaksamaan berikut:

a. $|3x-5| \geq 1$

Karena persamaan lebih besar menggunakan teorema 2

Jawab: $3x-5 \leq -1$ atau $3x-5 \geq 1$

$$3x \leq 4 \qquad 3x \geq 6$$

$$\{x \leq 4/3\} \qquad \{x \geq 2\}$$

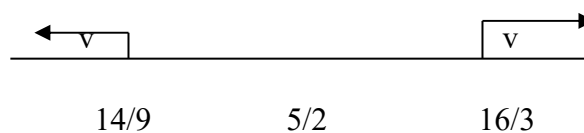
b. $\left| \frac{3x+1}{2x-5} \right| \leq 3$

Karena pertidaksamaan lebih kecil menggunakan teorema 1

$$\begin{aligned} -3 &\leq \frac{3x+1}{2x-5} & \frac{3x+1}{2x-5} &\leq 3 \\ -3 - \frac{3x+1}{2x-5} &\leq 0 & \frac{3x+1}{2x-5} - 3 &\leq 0 \\ \frac{-3(2x-5) - (3x+1)}{2x-5} &\leq 0 & \text{dan} & \frac{3x+1 - 3(2x-5)}{2x-5} \leq 0 \\ \frac{-6x+15-3x-1}{2x-5} &\leq 0 & & \frac{3x+1-6x+15}{2x-5} \leq 0 \\ \frac{-9x+14}{2x-5} &\leq 0 & & \frac{-3x+16}{2x-5} \leq 0 \end{aligned}$$

Persamaannya: $-9x + 14 = 0$ maka $x = 14/9$	Persamaannya: $-3x + 16 = 0$ maka $x = 16/3$
$2x - 5 = 0$ maka $x = 5/2$	$2x - 5 = 0$ maka $x = 5/2$

Uji setiap intervalnya



Karena penyebut $2x - 5$ maka $x \neq 5/2$

Yang memenuhi $x \leq 14/9$ U $x \geq 16/3$

c. $|x+5| < 2|x+5|$

Mutlak di kedua ruas digunakan metode pengkuadratan.

$$(x+5)^2 < 2(x+5)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 < (2x+10)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 < (4x^2 + 40x + 100)$$

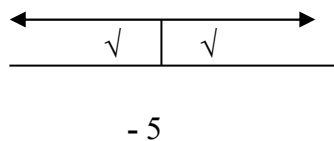
$$-3x^2 - 30x - 75 < 0$$

$$(-3x-15)(x+5) < 0$$

Persamaannya: $-3x - 15 = 0$ maka $x = -5$

$$x + 5 = 0 \text{ maka } x = -5$$

ujikan tiap interval ke persamaan awal



Jadi $\{x \in \text{bil real}\}$

d. $\left| \frac{x+5}{x-2} \right| > 1$

Karena tanda lebih besar digunakan teorema 2

$$\frac{x+5}{x-2} < -1$$

$$\frac{x+5}{x-2} + 1 < 0$$

$$\frac{x+5}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} < 0$$

$$\frac{x+5+x-2}{x-2} < 0$$

$$\frac{2x+3}{x-2} < 0$$

dan

$$\frac{x+5}{x-2} > 1$$

$$\frac{x+5}{x-2} - 1 > 0$$

$$\frac{x+5}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} > 0$$

$$\frac{x+5-x+2}{x-2} > 0$$

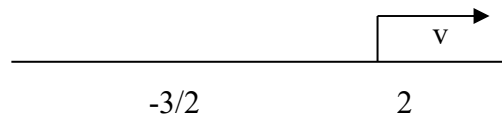
$$\frac{7}{x-2} > 0$$

Persamaan: $2x+3 = 0$ maka $x = -3/2$

Persamaan: $x-2 = 0$ maka $x = 2$

$$x-2 = 0 \text{ maka } x = 2$$

Ujikan tiap interval



Karena penyebut $x - 2$ maka $x \neq 2$ maka Hp $\{ x > 2 \}$

Latihan Soal

1. $|x - 4| < 2$
2. $|x + 2| < 1$
3. $|2x - 1| > 2$
4. $\left| \frac{x}{4} + 1 \right| < 1$
5. $|2x - 7| > 3$
6. $|x - 2| \geq 5$
7. $|4x + 5| \leq 10$
8. $\left| \frac{2x}{7} - 5 \right| \geq 7$
9. $|5x - 6| > 1$
10. $|4x + 2| \geq 10$
11. $\left| 2 + \frac{5}{x} \right| > 1$
12. $\left| \frac{x}{2} + 7 \right| \geq 2$
13. $\left| \frac{1}{x} - 3 \right| > 6$
14. $|x - 1| < 2|x - 3|$
15. $2|2x - 3| < |x + 10|$
16. $|2x - 1| \geq |x + 1|$
17. $|3x - 1| < 2|x + 6|$
18. $|3x + 1| < 2|x - 6|$
19. $x^2 - 2x - 4 \leq 0$
20. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

PRTEMUAN 5

(RELASI DAN FUNGSI)

A. Pengertian Relasi

Definisi 1 (Hasil Kali Kartesian)

Hasil kali kartesian antara himpunan A dan himpunan B, ditulis $A \times B$ adalah semua pasangan terurut (a, b) untuk $a \in A$ dan $b \in B$.

Contoh 1

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

Banyaknya himpunan yang terlibat dalam operasi ini mempengaruhi nama operasinya, jika operasi tersebut hanya melibatkan dua himpunan, disebut operasi biner.

Definisi 2 (Relasi)

Relasi, dilambangkan dengan huruf besar R, adalah Subset dari hasil kali Cartesian (Cartesian product). Jika $(x, y) \in R$, maka x berelasi dengan y.

$\{x \in A \mid (x, y) \in R \text{ untuk suatu } y \in B\}$ disebut domain dari R. Sedangkan Range dari $R = \{y \in B \mid (x, y) \in R \text{ untuk suatu } x \in A\}$

Contoh 2

Pada contoh 1, kita dapat membuat relasi:

$$R_1 = \{(1, a), (1, b)\}$$

$$R_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$$

$$R_3 = \{(1, b), (2, b), (1, a)\}$$

$$R_4 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

$$R_5 = \emptyset$$

$$R_6 = \{(a, 1), (2, a)\}$$

Himpunan pasangan terurut R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , merupakan subset dari $A \times B$, dan membentuk suatu relasi, tetapi R_6 bukan relasi dari $A \times B$, karena $(a, 1) \in A \times B$.

Sebuah pasangan terurut menjadi anggota relasi R_1 , ditulis: $(1, a) \in R_1$ atau $1 R_1 a$. Dan jika $(2, a)$ bukan anggota relasi R_1 , ditulis: $(2, a) \notin R_1$ atau $2 \not R_1 a$.

Definisi 3 (Relasi biner atas satu himpunan A)

Relasi biner atas himpunan A adalah relasi biner dari A ke A.

Relasi yang demikian ini, seringkali muncul dalam kehidupan sehari-hari, di dalam kalkulus I, kita kenal relasi dari \mathbb{R} ke \mathbb{R} , dari bilangan riil ke bilangan riil.

Contoh 3

Masing-masing relasi berikut adalah relasi biner atas bilangan bulat (\mathbb{Z}):

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a, b) \mid a \geq b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\} \\ R_2 &= \{(a, b) \mid a < b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\} \\ R_3 &= \{(a, b) \mid a=b \text{ atau } a=-b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\} \\ R_4 &= \{(a, b) \mid a=b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\} \\ R_5 &= \{(a, b) \mid a = b+1, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\} \\ R_6 &= \{(a, b) \mid a + b \leq 3, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}\} \\ R_7 &= \{(a, b) \mid a|b, \text{ dan } a, b \in \mathbb{Z}, \text{ dan } b \neq 0\} \end{aligned}$$

Contoh 4

$$\begin{aligned} D &= \{a, b, c\} \\ \varphi(D) &= \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \} \end{aligned}$$

B. Operasi Relasi

Karena relasi merupakan himpunan, maka operasi pada himpunan juga berlaku dalam relasi:

1. Operasi \cap (intersection)
2. Operasi \cup (union)
3. Operasi \oplus (symmetric difference)
4. Operasi $-$ (difference)
5. Operasi komplemen (komplemen relative terhadap Cartesian product)

Contoh 5

Jika $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5), (6, 6), (2, 5)\}$ dan

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$, maka:

$$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 5)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5), (6, 6), (2, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(5, 5), (6, 6)\}$$

$$(R_1 \cup R_2)^C = A \times A - (R_1 \cap R_2) = \{(1, 5), (2, 1), (2, 6), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2), (6, 5)\}$$

Operasi komposisi, merupakan gabungan dari dua buah relasi yang harus memenuhi syarat tertentu, yaitu jika R_1 relasi dari A ke A dan R_2 relasi dari A ke A , maka relasi komposisi R_1 dan R_2 , dinyatakan oleh $R_2 \circ R_1$ berarti relasi R_1 diteruskan oleh relasi R_2 . Syarat tersebut

adalah jika $(a, b) \in R_1$ dan $(b, c) \in R_2$, maka $(a, c) \in R_2 \circ R_1$.

Contoh 6

Dengan menggunakan contoh 5, didapat:

$$R_2 \circ R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 6), (2, 2), (2, 5), (5, 6), (2, 6)\}$$

Yang diperoleh dengan cara:

Jika $A = \{1, 2, 5, 6\}$, $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5), (6, 6), (2, 5)\}$ dan

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 5), (1, 2), (1, 6), (5, 6)\}$, maka:

R_1	R_2	$R_2 \circ R_1$	R_1	R_2	$R_2 \circ R_1$
(1,1)	(1,1)	(1,1)	(6,6)	(1,1)	-
	(2,2)	-		(2,2)	-
	(2,5)	-		(2,5)	-
	(1,2)	(1,2)		(1,2)	-
	(1,6)	(1,6)		(1,6)	-
	(5,6)	-		(5,6)	-
(2,2)	(1,1)	-	(2,5)	(1,1)	-
	(2,2)	(2,2)		(2,2)	Sudah ada

	(2,5)	(2,5)		(2,5)	Sudah ada
	(1,2)	-		(1,2)	-
	(1,6)	-		(1,6)	-
	(5,6)	-		(5,6)	-
(5,5)	(1,1)	-			
	(2,2)	-			
	(2,5)	-			
	(1,2)	-			
	(1,6)	-			
	(5,6)	(5,6)			

Tentunya operasi komposisi ini tidak hanya berlaku pada relasi atas satu himpunan saja, melainkan dapat pula digunakan untuk relasi yang melibatkan dua himpunan. Jika S relasi dari himpunan A ke himpunan B , dan R relasi dari himpunan B ke himpunan C , maka $R \circ S$, komposisi S diteruskan ke R adalah jika $(a,b) \in S$, dan $(b,c) \in R$, maka $(a, c) \in R \circ S$.

Contoh 7

Diberikan: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{z, x, y\}$, $S = \{(1, a), (2, a), (2, b), (3, b)\}$, $R = \{(a, x), (a, y), (b, z)\}$. Tentukan $R \circ S$.

Untuk menjawab persoalan ini, perhatikan:

$R \circ S = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (2, z), (3, z)\}$, yang didapat dari tabel berikut:

S	R	$R \circ S$	S	R	$R \circ S$
(1,a)	(a,x)	(1,x)	(2,b)	(a,x)	-
	(a,y)	(1,y)		(a,y)	-
	(b,z)	-		(b,z)	(2,z)
(2,a)	(a,x)	(2,x)	(3,b)	(a,x)	-
	(a,y)	(2,y)		(a,y)	-
	(b,z)	-		(b,z)	(3,z)

C. Sifat Relasi

Sifat relasi:

1. Reflexive: $\forall a \in A$, maka $(a, a) \in R$
2. Symmetry: $\forall a, b \in A$, jika $(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
3. Antisymmetry: $\forall a, b \in A$, jika $(a, b) \in R \wedge a \neq b \rightarrow (b, a) \notin R$
{ini setara dengan $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a=b$ }
4. Transitivity: $\forall a, b, c \in A$, jika $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

Contoh 9:

Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$, berikut diberikan relasi atas A :

$$R1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$R3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

$$R6 = \{(3, 4)\}$$

$$R7 = \{(1, 1)\}$$

$$R8 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

Manakah dari kedelapan relasi di atas yang masing-masing bersifat: refleksif, simetri, anti simetri, transitif, dan yang bukan simetri sekaligus bukan antisimetri.

Jawab:

Pada relasi-relasi di atas yang bersifat refleksif adalah: $R3$, dan $R5$. $R1$ tidak refleksif karena $(3, 3) \notin R1$.

Relasi yang bersifat simetri: $R2$, $R3$, dan $R7$.

Relasi yang bersifat antisimetri: $R4$, $R6$, dan $R7$.

Relasi yang bersifat transitif: $R5$, $R6$, dan $R7$.

Untuk melihat $R3$ tidak bersifat transitif, dapat menggunakan tabel berikut:

(a,b)	(b,c)	(a,c)	Keterangan
(1,1)	(1,2)	(1,2)	Anggota $R3$
(1,2)	(2,2)	(1,2)	Anggota $R3$

(1,4)	(4,1)	(1,1)	Anggota R3
(2,1)	(1,4)	(2,4)	Bukan Anggota R3
(2,2)	(2,1)	(2,1)	Anggota R3

Untuk melihat R5 bersifat transitif, lihat tabel berikut:

$R5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2,2), (2,3), (2,4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

(a,b)	(b,c)	(a,c)	Keterangan
(1,1)	(1,2)	(1,2)	Anggota R5
(1,2)	(2,2)	(1,2)	Anggota R5
(1,3)	(3,3)	(1,3)	Anggota R5
(1,4)	(4,1)	(1,1)	Anggota R5
(2,2)	(2,4)	(2,4)	Bukan Anggota R3
(2,2)	(2,1)	(2,1)	Anggota R3
(2,4)			
(3,3)			
(3,4)			
(4,4)			

D. Relasi Ekuivalen

Definisi 4 (Relasi Ekuivalen)

Adalah relasi yang memenuhi sifat: refleksif, simetri, dan transitif

Contoh 15

$R = \{(a, b) \mid a=b \text{ atau } a=-b, a, b \in \mathbb{Z}\}$

Pada relasi ini, jelas dipenuhi $a=a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, berarti $(a, a) \in R$ atau bersifat refleksif.

Untuk sifat simetri, terdapat dua kemungkinan:

- Jika $a=b$, berarti $(a, b) \in R$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b=a$, berarti $(b, a) \in R$
- Jika $a=-b$, berarti $(a, b) \in R$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $b=-a$, berarti $(b, a) \in R$, Sehingga R bersifat simetri.

Untuk sifat transitif, mempunyai empat kemungkinan:

- Jika $a=b$, dan $b=c$, maka $a=c$, berarti $(a, c) \in R$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

- Jika $a=b$, dan $b=-c$, maka $a=-c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in Z$
- Jika $a=-b$, dan $b=c$, maka $a=-c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in Z$
- Jika $a=-b$, dan $b=-c$, maka $a=c$, berarti $(a, c) \in R, \forall a, b, c \in Z$

Sehingga R bersifat transitif.

Jadi, R relasi ekivalen.

Contoh 16

$$R = \{(a, b) \mid a-b \in Z, a, b \in R\}$$

Jelas kita dapatkan $a-a=0 \in Z$, berarti $(a, a) \in R$, berarti R bersifat refleksif

Jika $a-b \in Z$, maka $b-a = -(a-b) \in Z$, berarti $(b, a) \in R$, berarti R bersifat simetri

Jika $a-b \in Z$ dan $b-c \in Z$, maka $a-c = (a-b) + (b-c)$, berarti $a-c \in Z$, berarti R bersifat transitif.

Jadi, R relasi ekivalen.

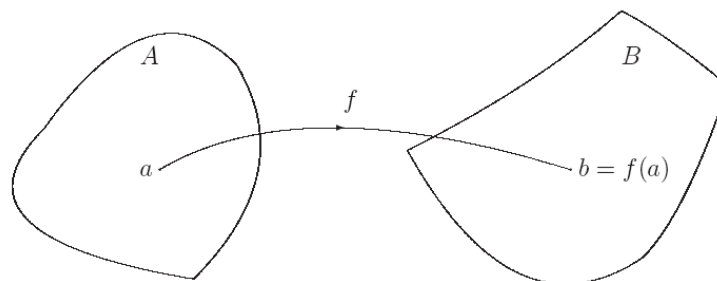
E. FUNGSI

Dalam matematika dan banyak aplikasi lain fungsi memainkan peranan penting. Dalam bab ini akan membahas fungsi sebagai bentuk khusus dari relasi. Relasi akan dibahas secara lebih mendalam dalam Bab 7.

Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Fungsi dari A ke B ,

$$f : A \rightarrow B$$

dapat dipandang sebagai aturan atau cara memasangkan setiap elemen A dengan tepat satu elemen B . Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari f , dan himpunan B dinamakan daerah kawan (*codomain*) dari f .



Gambar 6.1: Fungsi

Kawan (*image*) dari $a \in A$ adalah $b = f(a) \in B$, seperti diagram panah pada Gambar 6.1.

Daerah hasil (*range*) dari f , dinotasikan sebagai $\text{Ran}(f)$, adalah himpunan semua elemen B yang menjadi kawan elemen A . Jadi, $\text{Ran}(f) \subseteq B$.

fungsi $f : A \rightarrow B$ dapat pula dipandang sebagai himpunan bagian $A \subseteq B$ dan ditulis pasangan berurut $(a, f(a))$.

Contoh 6.1.

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, maka

$f = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ adalah fungsi, sedangkan

$g = \{(1, a), (1, b), (3, c)\}$ bukan fungsi karena $g(1) = \{a, b\}$ (tidak memasangkan elemen A tepat satu pada elemen B).

Perhatikan bahwa dalam contoh ini $\text{Ran}(f) = \{a, c\}$.

LATIHAN RELASI DAN FUNGSI

1. Diberikan $A = \{a, b, c\}$. Hasil kali cartes dari A ke dirinya sendiri adalah

- A. $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
- B. $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$.
- C. $\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c)\}$.
- D. $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

2. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y < 0\} \subseteq A \times A$. Maka anggota-anggota R adalah

- A. $\{(-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.
- B. $\{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2)\}$.
- C. $\{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.
- D. $\{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$.

3. Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relasi pada A yang memenuhi sifat transitif adalah

- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y < 0\}$.
- B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan genap}\}$.

- C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x + y \geq 5\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y \leq 2\}$.
4. Diberikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Relasi pada A yang memenuhi sifat simetris adalah
- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y < 0\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan genap}\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x - y \geq 2\}$.
5. Diberikan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Relasi pada A yang memenuhi sifat refleksif adalah
- A. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \leq 0\}$.
 B. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \geq 0\}$.
 C. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan genap}\}$.
 D. $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, xy \text{ bilangan ganjil}\}$.

Latihan

- Mengapa persamaan berikut bukan fungsi dari \mathbb{R} ke \mathbb{R} ?
 - $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + 1}$
- Dari fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ berikut tentukan fungsi mana yang dapat dibalik, lalu tentukan kebalikannya.
 - $f(x) = x^2$
 - $f(x) = x - 2$
 - $f(x) = x^3 - 2$
- Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $f, g, h : A \rightarrow A$ diberikan oleh pasangan berurut berikut:

$$\begin{aligned} f &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\} \\ g &= \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\} \\ h &= \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (4, 3)\} \end{aligned}$$
 - Tentukan f^{-1}, g^{-1}, h^{-1} jika ada.
 - Tentukan $f \circ g, g \circ h, g^{-1} \circ h, g \circ g, g \circ f, h \circ g, h \circ f$ bila mungkin.

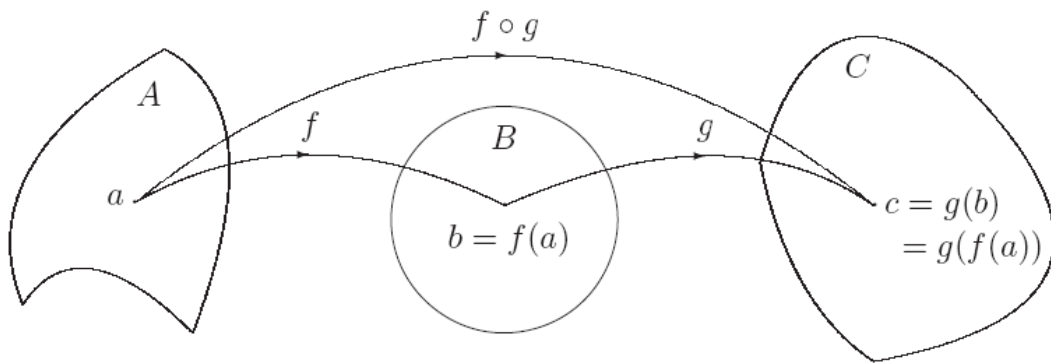
PERTEMUAN 6 (KOMPOSISI FUNGSI)

A. Komposisi Fungsi

Misalkan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ adalah fungsi, maka dapat ditunjukkan bahwa komposisi dari f dan g , $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C . Jika $a \in A$ dan $b = f(a) \in B$ sedangkan $c = g(b) \in C$, maka

$$(f \circ g)(a) = g(f(a));$$

sehingga $(f \circ g)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Gambar 6.3 menyajikan komposisi fungsi dalam bentuk diagram panah



Gambar 6.3: Komposisi Fungsi

Contoh 6.3. Misalkan $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x + 1$ dan $g(y) = y^2$:

Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Jawab:

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

dan

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1;$$

Pada umumnya, $g \circ f \neq f \circ g$.

Catatan

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(h \circ f \circ g)(x) = h(f(g(x)))$$

Contoh soal

Diketahui $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$g(x) = \frac{2}{x}$$

$$h(x) = x^2 + 4x$$

a. $(f \cdot g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= \sqrt{x^2 - 1} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x}\end{aligned}$$

b. $(f \cdot g)(2)$

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(2) &= \sqrt{2^2 - 1} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

c. $(f/g)(3)$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(3) &= \frac{\sqrt{3^2 - 1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{3^2 - 1}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{8}}{2} = \frac{3(2\sqrt{2})}{2} \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

d. $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4}{x^2}\right) - 1}\end{aligned}$$

$$e. (g \circ f \circ h)(x) = g(f(h(x))) = g(f(x^2 + 4x))$$

$$\begin{aligned}
 &= g(\sqrt{(x^2 + 4x)^2 - 1}) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{(x^2 + 4x)^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{(x^2 + 4x)^2 - 1}}{\sqrt{(x^2 + 4x)^2 - 1}} \\
 &= \frac{2\sqrt{(x^2 + 4x)^2 - 1}}{(x^2 + 4x)^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$f. (f \circ h \circ g)(1)$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ h \circ g)(1) &= f(h(g(1))) \\
 &= f\left(h\left(\frac{2}{1}\right)\right) \\
 &= f((2)^2 + 4(2)) \\
 &= f(12) \\
 &= \sqrt{(12)^2 - 1} \\
 &= \sqrt{143}
 \end{aligned}$$

$$g. g(2) + f(3) = \frac{2}{2} + \sqrt{3^2 - 1} = 1 + \sqrt{8}$$

$$h. h(1) \cdot f(2) = (1^2 + 4(1)) \cdot (\sqrt{2^2 - 1}) = 5\sqrt{3}$$

Latihan Soal

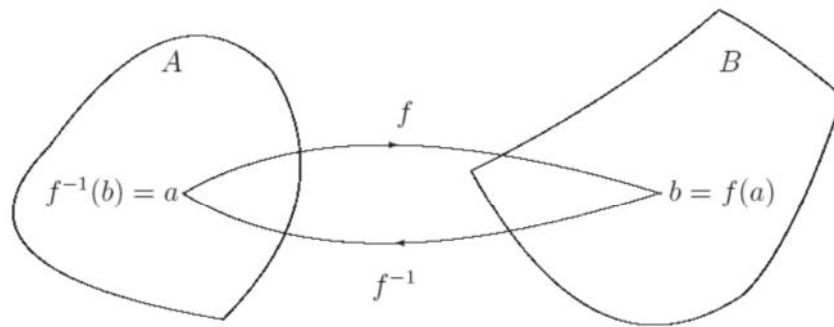
1. Diketahui $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = \frac{x-1}{x+4}, x \neq -4$, maka $(f \circ g)(x) = \dots$
2. Fungsi f dan g adalah pemetaan dari \mathbb{R} ke \mathbb{R} yang dirumuskan oleh $f(x) = 3x+5$ dan $g(x) = \frac{2x}{x+1}, x \neq -1$. Rumus $(g \circ f)(x)$ adalah ...
3. Diketahui fungsi $f(x) = 3x - 5$ dan $g(x) = \frac{4x-2}{6-4x}, x \neq \frac{3}{2}$. Nilai komposisi fungsi $(g \circ f)(2)$ adalah ...
4. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x-3}, x \neq 3$, dan $g(x) = x^2 + x + 1$. Nilai komposisi fungsi $(g \circ f)(2) = \dots$

5. Diketahui fungsi-fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = 3x - 5$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $g(x) = \frac{x-1}{2-x}, x \neq 2$. Hasil dari fungsi $(f \circ g)(x)$ adalah ...
6. Diketahui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dirumuskan oleh $f(x) = x^2 - 4$ dan $g(x) = 2x - 6$. Jika $(f \circ g)(x) = -4$, nilai $x = \dots$
7. Diketahui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dirumuskan oleh $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = x^2 + 4x - 3$. Jika $(g \circ f)(x) = 2$, maka nilai x yang memenuhi adalah ...
8. Jika $g(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$, maka $f(x - 2) = \dots$
9. Diketahui $g(x) = 2x + 5$ dan $(f \circ g) = 4x^2 + 20x + 23$. Rumus fungsi $f(x)$ adalah...
10. Suatu pemetaan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x + 5$ dan $g(x) = 2x + 3$, maka $f(x) = \dots$

PERTEMUAN 7 (FUNGSI INVERS)

A. Fungsi Kebalikan (Fungsi Invers).

Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan dapat dibalik (invers) bila $f^{-1} : B \rightarrow A$ juga merupakan fungsi.



Gambar 6.2: Fungsi Kebalikan

Contoh 6.2. Fungsi f pada Contoh 6.1 tidak dapat dibalik karena $f^{-1}(a) = \{1, 2\}$.

Fungsi Invers

$$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Contoh:

$$\text{Diketahui } f(t) = \frac{2t+5}{7} \quad g(t) = \frac{t^2-9}{t^2-5t+6} \quad h(t) = t^2 + 2t - 6$$

$$\text{a. } f^{-1}(t) \rightarrow f(t) = \frac{2t+5}{7}$$

$$y = \frac{2t+5}{7}$$

$$7y = 2t+5$$

$$2t = 7y-5$$

$$t = \frac{7y-5}{2}$$

$$f^{-1}(t) = \frac{7t-5}{2}$$

$$\text{b. } f^{-1}(3) = \frac{7 \cdot 3 - 5}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\text{c. } g^{-1}(t) \rightarrow g(t) = \frac{t^2-9}{t^2-5t+6}$$

$$y = \frac{t^2-9}{t^2-5t+6}$$

$$y = \frac{(t-3)(t+3)}{(t-3)(t-2)}$$

$$y = \frac{(t+3)}{(t-2)}$$

$$yt - 2y = t + 3$$

$$yt - t = 3 + 2y$$

$$t(y-1) = 3 + 2y$$

$$t = \frac{3+2y}{y-1}$$

$$g^{-1}(t) = \frac{3+2t}{t-1}$$

$$\text{d. } g^{-1}(2) = \frac{3+2 \cdot 2}{2-1} = \frac{7}{1} = 7$$

$$\text{e. } h^{-1}(t) \rightarrow h(t) = t^2 + 2t - 6$$

$$y = t^2 + 2t - 6$$

$$y = (t+1)^2 - 7$$

$$(t+1)^2 = y+7$$

$$t+1 = \sqrt{y+7}$$

$$t = \sqrt{y+7} - 1$$

$$h^{-1}(t) = \sqrt{t+7} - 1$$

$$\text{f. } h^{-1}(2) = \sqrt{2+7} - 1 = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$g. (f \circ h)^{-1}(t) = (f \circ h)^{-1}(t) = h^{-1} \circ f^{-1}$$

$$h^{-1}(t) = \sqrt{t+7} - 1$$

$$f^{-1}(t) = \frac{7t-5}{2}$$

$$\begin{aligned} (f \circ h)^{-1}(t) &= h^{-1}(t) \circ f^{-1}(t) \\ &= h^{-1}\left(f^{-1}(t)\right) \\ &= h^{-1}\left(\frac{7t-5}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{7t-5}{2} + 7} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{7t-5}{2} + \frac{14}{2}} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{7t+9}{2}} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{7t+9}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{7t+9-2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{7t-7}{2}} \end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}, x \neq -\frac{4}{3}$. Invers dari fungsi f adalah $f^{-1}(x) = \dots$
2. Jika $f^{-1}(x)$ adalah invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}, x \neq 3$. Maka nilai $f^{-1}(4) = \dots$
3. Diketahui $f(x) = \frac{1-5x}{x+2}, x \neq -2$ dan $f^{-1}(x)$ adalah invers dari $f(x)$. Nilai $f^{-1}(-3) = \dots$
4. Fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$. Invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x) = \dots$
5. Diketahui $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ dan $g(x) = x + 2$. Jika f^{-1} menyatakan invers dari f , maka $(f \circ g)^{-1}(x) = \dots$

LATIHAN SOAL-SOAL UTS

1. $f(x) = 3 - \frac{x}{2x-1}$ dan $g(x) = \frac{3x-2}{5x+1}$, tentukanlah :
 - a. $(f + g)(x)$
 - b. $(f : g)(x)$
2. Tentukanlah penyelesaian dari
 - a. $\frac{3x+5}{2x-1} \geq 2$
 - b. $|2x-5| < |x+4|$
3. Diketahui $f(x) = 2x+2$; $g(x) = \frac{4x+2}{3x}$; $h(x) = x^2 + 18x - 6$, tentukan
 - a. $(f \cdot g)(2)$
 - b. $(g \circ f)^{-1}(1)$
 - c. $h^{-1}(x)$
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari
 - a. $-5 \leq 2x + 6 < 4$
 - b. $|x-2| < 3$
 - c. $x^2 - 7x + 6 < 0$
5. Diketahui $f(x) = 2x+1$

$$g(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$h(x) = 3x^2 + 2x - 1$$
 Tentukan :
 - a) $f \circ g(-2)$
 - b) $(f \circ g)^{-1}(x)$
 - c) $(f-g)(-3)$
6. Selesaikan pertidaksamaan berikut ini !
 - a. $x^2 - 7x + 6 < 0$
 - b. $3 |2x-4| \geq |x+2|$
 - c. $\frac{3x-2}{x} \leq x$

7. Diketahui : $f(x) = \frac{4x}{x-1}$, $g(x) = x^2 + 4x - 1$, $h^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}$

Tentukan :

a. $(f \circ g)^{-1}(3)$

b. $(f - h^{-1})(x)$

c. $(g \circ h)(3)$

8. Jika diketahui $f(x) = \frac{3x-2}{5x+1}$ dan $g(x) = 2x+3$

Tentukanlah

a. $(f \circ g)(x) =$

b. $(f + g)(x) =$

c. $(g \circ f)^{-1}(x) =$

LIMIT

(Pertemuan ke 9 dan 10)

Limit bermakna “mendekati”. Misal bada bentuk $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Dalam hal ini, fungsi tersebut tidak terdefinisi pada $x = 1$ karena di titik ini $f(x) = \frac{0}{0}$ yang tanpa arti. Tetapi kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada x mendekati 1.

x	$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
1,1	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1	?
↑	↑
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,710

Definisi limit secara intuitisi:

“Untuk menyatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ berarti bahwa jika x dekat tetapi berlainan dengan c , maka $f(x)$ dekat ke L ”.

Contoh:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

LIMIT SEPIHAK

Definisi:

“Suatu fungsi dikatakan memiliki limit pada $x = a$, jika dan hanya jika

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) ”$$

Contoh: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^{(-)}} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3^{(-)}} \frac{(x + 3)(x + 2)}{(x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^{(-)}} (x + 2) \\ &= -3 + 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^{(+)}} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3^{(+)}} \frac{(x + 3)(x + 2)}{(x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^{(+)}} (x + 2) \\ &= -3 + 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = -1$

Terdapat beberapa fungsi yang memungkinkan limit kiri tidak sama dengan limit kanan, yaitu:

1. Fungsi bersyarat / tangga
2. Fungsi mutlak
3. Fungsi bilangan bulat terbesar

Contoh:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x + 1|}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^{(-)}} \frac{|x + 1|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^{(-)}} \frac{(x + 1)}{x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^{(+)}} \frac{|x + 1|}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^{(+)}} \frac{(x + 1)}{x + 1} = 1$$

$$\text{Karena } \lim_{x \rightarrow 1^{(-)}} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^{(+)}} \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$\text{maka } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+1|}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^{(-)}} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^{(-)}} -\frac{(x+1)}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^{(+)}} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^{(+)}} \frac{(x+1)}{x+1} = 1$$

$$\text{Karena } \lim_{x \rightarrow -1^{(-)}} \frac{|x+1|}{x+1} \neq \lim_{x \rightarrow -1^{(+)}} \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$\text{maka } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1} \text{ tidak ada.}$$

Ketentuan Penyelesaian Soal Limit

1. Jika $f(x)$ bukan bentuk tak tentu

$$\text{Maka } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\text{Contoh: } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 2) = 2(2)^2 - 2 = 6$$

2. Jika $f(x)$ merupakan bentuk tak tentu $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0)$

Lakukan alternative:

- a. Menggunakan trik manipulasi aljabar dengan memperhatikan dalil-dalil limit dan atau rumus dasar limit
- b. Menggunakan dalil l'hospital

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \\ &= 1^2 + 1 + 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} - 3} \\ &= \sqrt{9} + 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

3. Jika fungsi yang dicari limitnya merupakan fungsi khusus (f.bilangan bulat terbesar, f.mutlak, atau (bersyarat) maka perlu meneliti limit kiri dan limit kanan.

Dalil-dalil Limit

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \pm \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \cdot \lim_{x \rightarrow a} [g(x)]$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
6. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$
7. $\lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$
8. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

Contoh soal

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} x + |x| &= \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} |x| \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 2)^8 &= \left[\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 2) \right]^8 \\ &= (2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 2)^8 \\ : &= (5)^8 \\ &= 390625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5x - 1)^{x^2 + 1} &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5x - 1) \right)^{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 1} \\ &= (1^2 + 5 \cdot 1 - 1)^{1^2 + 1} \\ &= (5)^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -8$. Tentukan :

$$\begin{aligned}a. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{g(x)} (f(x) + 3) &= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + 3) \\ &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} 3 \right) \\ &= \sqrt[3]{-8} \cdot (2 + 3) \\ &= -2 \cdot (5) \\ &= -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b. \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)} &= \frac{2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow a} g(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ &= \frac{2 \cdot 2 - 3(-8)}{2 + (-8)} \\ &= \frac{4 + 24}{-6} \\ &= -\frac{28}{6} \\ &= -\frac{14}{3}\end{aligned}$$

Rumus dasar limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0 ; a \in B.\text{real}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + \dots}{bx^m + \dots} \begin{cases} = \frac{a}{b} & \text{untuk } n = m \\ = 0 & \text{untuk } n < m \\ = \infty & \text{untuk } n > m \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b} \right)^x \quad \text{ketentuan} \left(\frac{a}{b} \right)^\infty \begin{cases} = 1 & \text{untuk } a = b \\ = 0 & \text{untuk } a < b \\ = \infty & \text{untuk } a > b \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Contoh Soal

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x^2 - 5x}{8x^4 + 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^4} + \frac{7x^2}{x^4} - \frac{5x}{x^4}}{\frac{8x^4}{x^4} + \frac{5}{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{8 + \frac{5}{x^4}} \\ &= \frac{\frac{5}{\infty} + \frac{7}{\infty^2} - \frac{5}{\infty^3}}{8 + \frac{5}{\infty^4}} \\ &= \frac{0 + 0 - 0}{8 + 0} \\ &= \frac{0}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x}{\tan 7x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 7x} \cdot \frac{4x}{4x} \cdot \frac{7x}{7x}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{7x}{\tan 7x} \cdot \frac{4x}{7x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot 1 \cdot \frac{4x}{7x} \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{7x} \\
&= 2 \cdot \frac{4}{7} \\
&= \frac{8}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 5}{5^x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \left(1 + 5 \frac{1}{2^x} \right)}{5^x \left(1 + 2 \frac{1}{5^x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^x \frac{\left(1 + 5 \left(\frac{1}{2} \right)^x \right)}{\left(1 + 2 \left(\frac{1}{5} \right)^x \right)} \\
&= \left(\frac{2}{5} \right)^\infty \frac{\left(1 + 5 \left(\frac{1}{2} \right)^\infty \right)}{\left(1 + 2 \left(\frac{1}{5} \right)^\infty \right)} \\
&= 0 \cdot \frac{(1+0)}{(1+0)} \\
&= 0 \cdot \frac{1}{1} = 0
\end{aligned}$$

Dalil L'hospital

Jika $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ merupakan bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$, maka:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g''(x)}{h''(x)}
\end{aligned}$$

$$= \dots \quad \text{dst s/d} \neq \frac{0}{0} \text{ atau } \frac{\infty}{\infty}$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} \\ &= \frac{\cos 0}{6} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Latihan Soal

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 2}{3x^5 - 2x + 1} = \dots$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6-x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) = \dots$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos^2(x-2)}{3x^2 - 12x + 12} = \dots$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{x^2-1} \right) = \dots$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{1-\sqrt{x-3}} = \dots$$

$$6. \quad \text{Nilai } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} = \dots$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 - x}} = \dots$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x \tan 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \dots$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}} = \dots$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)^3}{2x^3-1} = \dots$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 \sin 2x}{x - \pi} = \dots$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{4x^2 + 5x} - \sqrt{4x^2 - 3}) = \dots$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x) = \dots$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-2) - \sqrt{9x^2 - 2x + 5} = \dots$$

$$31. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(2x-5)(2x+1)} + (5-2x)) = \dots$$

$$32. \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \dots$$

$$33. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(t^2 - 5t + 6) \sin(t-2)}{(t^2 - t - 2)^2} = \dots$$

$$34. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x^2} = \dots$$

- 10.. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 3x \cos 2x}{2x^2} = \dots$
11. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(4 - 2\sqrt{x})}{4 - x} = \dots$
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1} = \dots$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin 3x}{1 - \cos 6x} = \dots$
14. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{x^2 - 2x - 8} = \dots$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x} = \dots$
16. $\lim_{a \rightarrow b} \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dots$
17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 2} - 2}{\sqrt{3x} - 3} = \dots$
18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \dots$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \dots$
20. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2 + 8x - 3} - \sqrt{4x^2 + 9}}{x - 2} = \dots$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \dots$
22. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 - 4} = \dots$
23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x} = \dots$
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \dots$
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^2 + 2x} = \dots$
37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \dots$
38. $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} = \dots$
39. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \dots$
40. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x} = \dots$
41. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x + 1)}{x - 1} \right) = \dots$
42. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{3x - 3a + \tan(x - a)} = \dots$
43. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{3}\pi + h) - \sin \frac{1}{3}\pi}{h} = \dots$
44. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 4} - \sqrt{x}}{x - 2} = \dots$
45. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} \tan \frac{1}{x} = \dots$
46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)\sin 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \dots$
47. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x = \dots$
48. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \dots$

$$24 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \dots$$

$$49. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 - \cos(x+2)}{x^2 + 4x + 4} = \dots$$

$$25 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sin(1-\frac{1}{x})}{x} \cos(1-\frac{1}{x})}{(x-1)} = \dots$$

$$50. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 3x}{\sin^2 6x} = \dots$$

TURUNAN (DIFERENSIAL)

(Pertemuan Ke 11,12 dan 13)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\frac{dy}{dx}$ merupakan Turunan fungsi $y = f(x)$ terhadap perubahan x

Contoh soal :

Buktikan turunan $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dari :

a. $f(x) = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

b. $f(x) = \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

c. $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(x+h)^2 - 5(x+h) + 6) - (3x^2 - 5x + 6)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 6) - (3x^2 - 5x + 6)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 - 5x - 5h + 6 - 3x^2 + 5x - 6}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6hx + 3h^2 - 5h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x - 5 + 3h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} 6x - 5 + 3h \\
&= 6x - 5 + 3(0) \\
&= 6x - 5
\end{aligned}$$

Dalil turunan

$$Y = c \text{ (konstanta real)} \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = f(x) \pm g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

$$y = f(x).g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$$

Rumus-rumus dasar turunan

$$y = ax^n \rightarrow \frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$$

$$y = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = a^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \ell n a$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$y = \cos x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$y = \sin x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y = \tan x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

$$y = \cot x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$$

$$y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$$

Turunan Fungsi Logaritma

a. Pandanglah fungsi $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$$\text{Jadi } f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

b. Jika $f(x) = {}^a \log x$, maka

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\text{Jadi } f(x) = {}^a \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Turunan Fungsi Eksponensial

a. Jika $f(x) = e^{g(x)}$, maka

$$\ln f(x) = \ln e^{g(x)} = g(x) \cdot \ln e$$

$$\ln f(x) = g(x)$$

jika kedua ruas diturunkan

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = g'(x),$$

$$\text{sehingga } f'(x) = f(x) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$\text{Jadi } f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

Contoh

a. Jika $y = e^x$, maka $y' = e^x \cdot 1 = e^x$

$$\text{Sehingga } y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

b. Untuk fungsi eksponensial $y = a^{g(x)}$, maka

$$\ln y = \ln a^{g(x)}$$

$\ln y = g(x) \cdot \ln a$ jika kedua ruas diturunkan, maka

$$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

$$= a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

$$\text{Jadi } y = a^{g(x)} \Rightarrow y' = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

Contoh

Jika $y = 2^{2x^3-3}$, maka

$$y' = 2^{2x^3-3} \cdot 6x^2 \cdot \ln 2$$

$$= 6x^2 \cdot 2^{2x^3-3} \cdot \ln 2$$

Turunan Fungsi Aturan Rantai

$$y = f(x) \rightarrow \frac{dy}{du}$$

Missal : $u = g(x) \rightarrow \frac{du}{dv}$

$$v = h(x) \rightarrow \frac{dv}{dx}$$

Sehingga : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ memiliki 2 cara penyelesaian.

1. dengan cara tak langsung \rightarrow menggunakan pemisah-pemisah
2. dengan cara langsung \rightarrow filosofi mengupas kulit bawang

Contoh:

1. Dengan cara tak langsung tentukan Y' dari :

$$Y = \ln (\cos (x^2+3))$$

Jawaban

$$v = x^2 + 3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

Misal $\rightarrow u = \cos(x^2 + 3) = \cos v \rightarrow \frac{du}{dv} = -\sin v = -\sin(x^2 + 3)$

$$y = \ln \cos(x^2 + 3) = \ln u = \frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{\cos(x^2 + 3)}$$

$$\text{Maka } \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos(x^2 + 3)} \cdot (\sin(x^2 + 3)) \cdot 2x$$

$$= \frac{-2x \sin(x^2 + 3)}{\cos(x^2 + 3)}$$

$$= -2x \tan(x^2 + 3)$$

Jadi turunan dari $y = \ln \cos(x^2 + 3)$ adalah

$$-2x \tan(x^2 + 3)$$

$$2. \ y = (\cos^3(x^2 - 6))^4$$

Jawaban:

$$y = (\cos^3(x^2 - 6))^4 = \cos^{12}(x^2 - 6)$$

$$= (\cos(x^2 - 6))^{12}$$

$$v = x^2 - 6 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\text{Misal } u = \cos(x^2 - 6) = \cos v \rightarrow \frac{du}{dv} = -\sin v = -\sin(x^2 - 6) \quad \text{Maka}$$

$$y = \cos^{12}(x^2 - 6) = u^{12} \rightarrow \frac{dy}{du} = 12u^{11} = 12\cos^{11}(x^2 - 6)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= 12\cos^{11}(x^2 - 6) \cdot -\sin(x^2 - 6) \cdot 2x$$

$$= -24\cos^{11}(x^2 - 6)\sin(x^2 - 6)$$

Jadi turunan dari $y = (\cos^3(x^2 - 6))^4$ adalah $-24\cos^{11}(x^2 - 6)\sin(x^2 - 6)$

Operasi turunan

$$1. \ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$2. \ (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$3. \ (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$4. (f/g)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Contoh Soal:

1. Tentukan turunan dari:

a. $y = \cos^2 3x$

$$y' = D(\cos 3x)^2$$

$$y' = 2 (\cos 3x)^{2-1} \cdot -\sin 3x \cdot 3$$

$$y' = -6 \sin 3x \cos 3x$$

b. $h(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 + 5x}$

$$D(3x^2 - 4x) = 6x - 4$$

$$D(x^2 + 5x) = 2x + 5$$

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{(6x - 4)(x^2 + 5x) - (2x + 5)(3x^2 - 4x)}{(x^2 + 5x)^2} \\ &= \frac{(6x^3 + 30x^2 - 4x^2 - 20x) - (6x^3 - 8x^2 + 15x^2 - 20x)}{(x^2 + 5x)^2} \\ &= \frac{(6x^3 + 26x^2 - 20x) - (6x^3 + 7x^2 - 20x)}{(x^2 + 5x)^2} \\ &= \frac{6x^3 + 26x^2 - 20x - 6x^3 - 7x^2 + 20x}{(x^2 + 5x)^2} \\ &= \frac{19x^2}{(x^2 + 5x)^2} \end{aligned}$$

$$c. y = \sin^2 x \cdot \ln \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$D(\sin^2 x) = 2 \sin x \cos x$$

$$D(\ln \sqrt{x^2 + 2x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \cdot 2x + 2$$

$$= \frac{2x + 2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \right)^2$$

$$= \frac{2x + 2}{2(x^2 + 2x)}$$

$$= \frac{2(x + 1)}{2(x^2 + 2x)}$$

$$= \frac{x + 1}{x^2 + 2x}$$

$$Y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$= 2 \sin x \cos x \cdot \ln \sqrt{x^2 + 2x} + \sin^2 x \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 2x}$$

$$= \sin 2x \cdot \ln \sqrt{x^2 + 2x} + \sin^2 x \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 2x}$$

Turunan fungsi implisit

1. Fungsi eksplisit

Yaitu fungsi yang variable terikatnya dapat dibuat dalam ruas terpisah dari variable bebas.

$$Y = f(x)$$

y = variable terikat

f(x) = variable bebas

missal: $y = e^{2x} + 3x$
 $y = x^2 - 2x - 3$

2. Fungsi implicit

Yaitu fungsi dimana variable terikatnya bercampur dalam satu rumus dengan variable bebas.

$$F(x,y)=0 \quad \text{misal: } \begin{aligned} y^2 + x^2 - 9 &= 0 \\ y^2 + e^{xy} - 3x &= 0 \end{aligned}$$

Fungsi implisit dibagi 2, yaitu :

1. fungsi implisit yang dapat di eksplisitkan

$$\text{Contoh: } y^2 + x^2 - 9 = 0 \rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$$

2. fungsi implisit yang tidak dapat di eksplisitkan

$$\text{Contoh : } y^2 + e^{xy} - 3x = 0$$

Kaidah-kaidah penurunan fungsi implisit:

Prinsip sama seperti menurunkan fungsi eksplisit, hanya saja setiap menurunkan variable terikat (y) harus dikalikan dengan $\frac{dy}{dx}$ atau y' .

$$\text{Contoh : } y^2 + x^2 - 9 = 0$$

1. Dengan cara eksplisit

$$y^2 + x^2 - 9 = 0$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$= (9 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{sehingga : } y = \frac{1}{2} (9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$\begin{aligned}
 &= -x(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \\
 y' &= \frac{-x}{y}
 \end{aligned}$$

2. Dengan cara implisit

$$y^2 + x^2 - 9 = 0$$

Maka derivatifnya / turunannya:

$$2y \cdot y' + 2x - 0 = 0$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = \frac{-x}{y}$$

Contoh 2: $y^2 + e^{xy} - 3x = 0$

Maka derivative atau turunannya:

$$2y \cdot y' + xy' e^{xy} + ye^{xy} - 3 = 0$$

$$2y y' + xy' e^{xy} = -ye^{xy} + 3$$

$$y' (2y + x e^{xy}) = -ye^{xy} + 3$$

$$y' = \frac{-ye^{xy} + 3}{2y + x e^{xy}}$$

Contoh 3: $x^3 + 3y^2 + 4x^2y + 5 = 0$

Maka derivative/ turunannya:

$$3x^2 + 6yy' + 8xy + 4x^2y' = 0$$

$$6yy' + 4x^2y' = -3x^2 - 8xy$$

$$y' (6y + 4x^2) = -3x^2 - 8xy$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 8xy}{6y + 4x^2}$$

Latihan Soal

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = 2x$
3. $f(x) = 3x^2$
4. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x^3 - 7x + 1$
5. $f(x) = 3\sqrt{x}$
6. $f(x) = (2x + 5)(x^3 - 3x + 5)$
7. $f(x) = \frac{x + 3}{5 - x^2}$
8. $f(x) = 2 \cos x$
9. $f(x) = 5 \sin x$
- 10.. $f(x) = -3 \sin x + 4 \cos x$
11. $f(x) = 2x^5 - \frac{1}{2} \sin x$
12. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
13. $f(x) = 5x \sin x$
14. $f(x) = (10x^3 - 2x)^5$
15. $f(x) = 2x - 5$
16. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 7x$
17. $f(x) = 5\sqrt{x} - 7x$

18. $f(x) = (2x + 5)(4x - 7)$
19. $f(x) = (2x^2 - 3)(2x^2 - 5x + 7)$
20. $f(x) = \frac{2x - 1}{3 + x^2}$
21. $f(x) = 3(2x - 4)^2$
22. $f(x) = 5 \cos x - \frac{1}{2} x^2$
23. $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$
24. $f(x) = x^2 \cdot \sin x$
25. $f(x) = 7 \sin 3x + \cos 5x$
26. $f(x) = -\cos 6x - \sin 2x$
27. $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x + \cos 3x$
28. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$
29. $f(x) = (2x^3 - 3)^8$
30. Diketahui $f(x) = 3x^3 + 4x + 8$. Jika turunan pertama $f(x)$ adalah $f'(x)$, maka nilai $f'(3)$
31. Turunan pertama dari $y = \frac{1}{4} \sin 4x$ adalah
32. Turunan pertama dari $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 3x}$ adalah $f'(x) = \dots$
33. Turunan dari $y = \sin^3(2x - 4)$ adalah $y'(x) = \dots$
34. Turunan pertama fungsi $f(x) = \sin^2(8x - 2\pi)$ adalah $f'(x) = \dots$
35. Turunan pertama $f(x) = \cos^3 x$ adalah \dots
36. Turunan pertama fungsi $f(x) = \cos^2(3x + 6)$ adalah $f'(x) = \dots$

37. Turunan pertama dari $f(x) = (3x^2 - 5)\cos x$ adalah $f'(x) = \dots$

38. Turunan pertama dari $f(x) = \sin^2(2x - 3)$ adalah $f'(x) = \dots$

39. Jika $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 2x + 1}$, maka $f'(2) = \dots$

40. Turunan pertama fungsi $y = \frac{x}{1 - x}$,

adalah $y' = \dots$

41. Jika $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 2x + 1}$, maka $f'(2) = \dots$

42. Diketahui $f(x) = (1 + \sin x)^2(1 + \cos x)^4$ dan $f'(x)$ adalah turunan pertama $f(x)$. nilai $f'(\frac{\pi}{2}) = \dots$

TURUNAN PARSIAL

(Pertemuan ke 14)

a. Fungsi dua peubah atau lebih

Fungsi dua peubah atau lebih dapat ditulis dalam bentuk eksplisit atau implisit. Jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk eksplisit, maka secara umum ditulis dalam bentuk $z = F(x,y)$. Sebaliknya jika fungsi dituliskan dalam bentuk implisit, secara umum ditulis dalam bentuk $F(x,y,z) = 0$.

Contoh:

1. $z = 2x + y$

2. $z = \ln |x^2 - 2y^4|$

3. $z = 1 - 2 \sqrt{\frac{1}{2 \sin x - \sin y}}$

4. $xy + xz - yz = 0$

5. $xy - e^x \sin y = 0$

6. $\ln |x^2 - y^2| - \arctan \frac{y}{x} = 0$

7. $\arctan \frac{y}{x} - 2z = 0$

Pada contoh di atas, fungsi yang ditulis dalam bentuk eksplisit adalah pada contoh 1,2, dan 3. Sedangkan contoh 4, 5, 6, dan 7 adalah fungsi yang ditulis dalam bentuk implisit. Semua fungsi dalam bentuk eksplisit dengan mudah dapat dinyatakan dalam bentuk implisit. Akan tetapi tidak semua bentuk implisit dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit.

Untuk menggambar fungsi dua peubah dapat dengan membuat sumbu-sumbu koordinat, yaitu sumbu x, sumbu y, dan sumbu z seperti gambar berikut:

b. Turunan Parsial Fungsi Dua dan Tiga Peubah

Misal $z = F(x,y)$ adalah fungsi dengan variable bebas x dan y . Karena x dan y variable bebas maka terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

1. y dianggap tetap, sedangkan x berubah-ubah.
2. x dianggap tetap, sedangkan y berubah-ubah
3. x dan y berubah bersama-sama sekaligus.

Pada kasus 1 dan 2 diatas mengakibatkan fungsinya menjadi fungsi satu peubah, sehingga fungsi tersebut dapat diturunkan dengan menggunakan definisi turunan pertama yang telah dipelajari pada kalkulus diferensial.

Definisi

Misal $z = F(x,y)$ adalah fungsi dua peubah yang terdefinisi pada interval tertentu, turunan parsial pertama z terhadap x dan y dinotasikan dengan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dan

didefinisikan oleh

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

dan

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$$

Asalkan limitnya ada.

Contoh :

Tentukan turunan parsial pertama dari

a. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Jawab

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x \sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x \sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y + \Delta y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x \sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x \sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x + \Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

b. $z = \sin(x+y)$

Jawab

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x + y) - \sin(x + y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cos(x + \Delta x + y + x + y) \sin \frac{1}{2}(x + \Delta x + y - x - y)}{\Delta x}$$

$$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + y + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + y + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x / 2}{\Delta x}$$

$$= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + y + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x / 2}{\Delta x / 2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2 \cos(x + y)(1)(1/2)$$

$$= \cos(x + y)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin(x + y + \Delta y) - \sin(x + y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{1}{2}(x + y + \Delta y + x + y) \sin \frac{1}{2}(x + y + \Delta y - x - y)}{\Delta y} \\
&= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + y + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + y + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\
&= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x / 2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= 2 \cos(x + y)(1)(1/2) \\
&= \cos(x + y)
\end{aligned}$$

Untuk memudahkan persoalan andaikan $z = F(x, y)$ maka untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ sama artinya dengan menurunkan variabel x dan variabel y dianggap konstan dan selanjutnya y diturunkan. Demikian pula untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial y}$ sama artinya dengan menurunkan variabel y dan variabel x dianggap konstant lalu diturunkan.

Dengan cara yang sama, andaikan $W = F(x, y, z)$ adalah fungsi tiga peubah yang terdefinisi dalam selang tertentu maka turunan parsial pertama dinyatakan dengan

$\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, dan $\frac{\partial W}{\partial z}$ yang secara berturut didefinisikan oleh:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y, z) - F(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y, z) - F(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z}$$

Asalkan limitnya ada.

Contoh:

1. Ditentukan $F(x, y, z) = xyz + 2 \tan \left(\frac{y}{x} \right)$ Carilah turunan parsial pertamanya.

Dengan metode seserhana didapat

$$\text{a. } \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = yz + \frac{2}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right)$$

$$= yz - \frac{2yx^2}{x^2(1 + y^2)}$$

$$\text{b. } \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = xz + \frac{2}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$= xz - \frac{2x^2}{x(1 + y^2)}$$

$$\text{c. } \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = xy$$

Untuk latihan tentukan turunan persial fungsi-fungsi di bawah ini:

1. $z = \ln \sqrt{x+y}$

2. $z = 36 - x^2 - y^2$

3. $z = 3 - \frac{1}{\sqrt{\sin(x+y)}}$

4. $z = xy^2 - 2x^2 + 3y^3$

5. $z = \arctan \frac{y}{x}$

6. $F(x,y,z) = xy - yz + xz$

7. $F(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}$

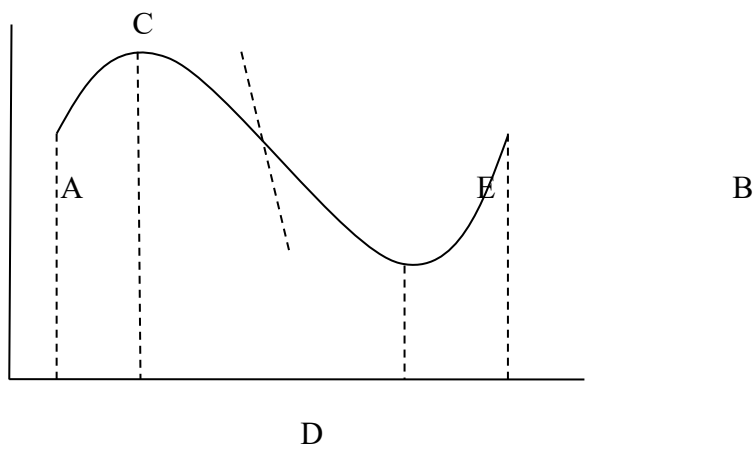
8. $F(x,y,z) = \sin(xy) - 2e^{xy}$

9. $F(x,y,z) = \arcsin \left(\frac{xy}{z} \right)$

APLIKASI TURUNAN

(Pertemuan ke 15)

1. analisis bagian-bagian istimewa fungsi
2. masalah optimasi (maks/min)
3. garis singgung



Titik:

A dan B : batas definitif fungsi

C : titik ekstrem maks

$$f'(x)=0$$

$$f''(x)<0$$

D : titik ekstrem min

$$f'(x)=0$$

$$f''(x)>0$$

E : titik belok $\rightarrow f''(x)=0$

Titik Stasioner $\longrightarrow f'(x) = 0$

Interval:

\overline{AC} dan \overline{DB} = interval monoton naik $\rightarrow F^I(x) > 0$

CE dan ED = interval monoton turun $\rightarrow F^I(x) < 0$

\overline{ACE} = interval cabang ke bawah $\rightarrow F^{II}(x) < 0$

EDB = interval cabang ke atas $\rightarrow F^{II}(x) > 0$

Contoh:

Diketahui $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Ditanya : a. titik ekstrem maks, min , dan belok?

b. interval fungsi monoton naik/turun?

c. interval fungsi cekung ke bawah/atas?

d. sketsa grafik fungsi tersebut?

Jawab :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$\text{a. Syarat ekstrem : } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\text{Untuk } x = 1 \rightarrow y = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$$

$$\rightarrow (1, -1)$$

$$\text{Untuk } x = -1 \rightarrow y = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3 \rightarrow (-1, 3)$$

$$F^{II}(x) = 6x$$

$$\text{Ekstrem minimum } f'(x) > 0$$

Untuk $x = 1$ maka $f'(1) = 6(1) = 6 \{ 6 > 0, \text{ titik minimum} \}$

Untuk $x = -1$ maka $f'(-1) = 6(-1) = -6 \{ -6 < 0, \text{ titik maksimum} \}$

Titik belok $f''(x) = 0$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 0 \text{ maka } y = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ (0,1)}$$

Jadi titik maksimum $(-1, 3)$;

Titik minimum $(1, -1)$

Titik belok $(0, 1)$

b. interval monoton naik/turun

$$\text{Dari } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

Diperoleh titik nol fungsi turunan 1 yaitu $X = -1$ dan $X = 1$

\therefore interval fungsi monoton naik yaitu pada $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

\therefore interval fungsi monoton turun yaitu pada $(-1, 1)$

c. interval cekung ke bawah atau ke atas

$$\text{dari } f''(x) = 6x = 0$$

$$x = 0$$

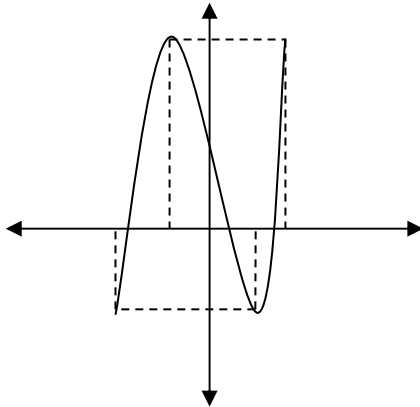
\therefore interval fungsi monoton cekung ke atas yaitu pada $(0, \infty)$

\therefore interval fungsi monoton cekung ke bawah yaitu pada $(-\infty, 0)$

c. Titik stasioner pada $f'(x) = 0$

Jadi titik stasioner pada $x = 1$ atau $x = -1$

e. Sketsa grafik



Contoh:

1. tentukan 2 buah bilangan positif yang jumlahnya 10 dan memiliki hasil kali maximal.

Jawab :

1. misal bilangan I = x dan bilangan II = $10 - x$

Karena bilangan I dan II = $x + (10 - x) = 10$

$$\begin{aligned}\text{Hasil kali} \rightarrow H &= x(10 - x) \\ &= 10x - x^2\end{aligned}$$

Syarat ekstreem : $H' = 0$ maka $10 - 2x = 0$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

\therefore Bilangan I = 5 maka bilangan II = $10 - 5$

$$= 5$$

2. Akan dibuat tempat air dari plat kaleng yang sangat tipis yang alasnya berbentuk lingkaran dan dapat menampung air sebanyak 1000 liter. Tentukan ukuran tempat air (jari-jari dan tinggi) agar bahan yang dipakai sehemat mungkin.

catatan : tempat air tersebut tidak memakai tutup.

Jawab:

volume silinder

$$v = \pi r^2 h$$

$$1000l = \pi r^2 h$$

$$1000000cm^3 = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1000000}{\pi r^2}$$

Luas Bahan

$$L = \pi r^2 + 2\pi rh$$

$$= \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000000}{\pi r^2}$$

$$= \pi r^2 + 2 \cdot \frac{1000000}{r}$$

$$= \pi r^2 + 2000000r^{-1}$$

Syarat Ekstreem $\frac{dL}{dr} = 0$

$$\frac{dL}{dr} = 2\pi r - 2000000r^{-2} = 0$$

$$2\pi r = 2000000r^{-2}$$

$$\pi r^3 = 1000000$$

$$r^3 = \frac{1000000}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000000}{\pi}}$$

$$r = \frac{100}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

Maka

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{1000000}{\pi r^2} \\
 &= \frac{1000000}{\pi \left(\frac{100}{\pi^{1/3}} \right)^2} \\
 &= \frac{1000000}{\pi \frac{10000}{\pi^{2/3}}} \\
 &= \frac{100}{\pi^{1/3}}
 \end{aligned}$$

Jadi panjang $r = \frac{100}{\pi^{1/3}}$ cm dan $h = \frac{100}{\pi^{1/3}}$ cm

Laihan Soal

1. Turunan fungsi $f(x) = (5x-3)(2x^2+1)$ adalah.....
2. Turunan fungsi $f(x) = \sqrt{2x^5 - 6x + 1}$ adalah....
3. Turunan fungsi $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{4x - 7}$ adalah
4. Jika $f(x) = (x^2+1)(x^3-1)$, maka turunannya adalah.....
5. Diketahui kurva $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ dan $P(2,4)$. Persamaan garis singgung di P pada kurva adalah.....
6. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 5x - 2$ di titik yang berbasis 1 adalah.....
7. Diketahui titik P terletak pada kurva $y = x^2 + x - 7$. Garis singgung pada kurva tersebut melalui titik P dan sejajar dengan garis $6x - 2x - 5 = 0$ Koordinat titik P adalah....
8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12$ turun pada interval...
9. Nilai stasioner fungsi $f(x) = 9x^2 - 4x + 9$ adalah.....
10. Titik belok fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 9$ adalah....
11. Fungsi $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x - 20$ mencapai maksimum untuk nilai $x = \dots\dots$
12. Fungsi yang ditentukan oleh $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$ turun pada interval.....
13. Diketahui $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 2x + 1$

Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = -2$ untuk nilai $a =$ Nilai maksimum fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9$ dalam interval $-3 \leq x \leq 2$ adalah.....

14. Jumlah dua buah bilangan sama dengan 150. Jika perkalian salah satu bilangan dengan kuadrat bilangan lainnya maksimum, bilangan-bilangan itu adalah....
15. Turunan kedua fungsi $f(x) = (3x-1)^3$ adalah
16. Jika $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ dan $f'(x) = 10$ maka nilai $a =$
17. jika $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ maka nilai $f(2) =$
18. Jika persamaam fungsi $y = x^3 - 5x^2$, maka koordinat titik A
19. Garis singgung kurva $y = x^3 - 3x + 4$ dititik p sejajar dengan garis $9x - y = 7$ maka koordinat titik p =
20. Persamaan garis singgung parabola $y = 2x^2 + 1$ yang ditarik melalui titik (2,9) adalah
21. Jika di ketahui $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 20$ maka fungsi f turun pada interval:
22. Nilai stasioner untuk fungsi $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x - 8$ adalah
23. Nilai stasioner untuk fungsi $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 5$ adalah
24. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ dalam interval $-2 \leq x \leq 3$, mencapai maximum pada titik $x =$
25. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ dalam interval $-2 \leq x \leq 3$ mencapai minimum pada titik $x =$
26. Jika $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$ maka turunan dari $f'(x)$ adalah
27. Jika fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 2x + 8$ maka fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval
28. Jika fungsi biaya total $c = \frac{1}{3}Q^3 - \frac{7}{2}Q^2 + 12Q - 5$ fungsi marginal, dinyatakan MC adalah turunan dari fungsi biaya total terhadap Q, dengan Q menyatakan jumlah produk, maka berapa unit produksi agar biaya total minimum
29. Tentukan nilai maksimal dari fungsi $f(x) = 3x(x^2 - 12)$

30. Suatu proyek pembangunan gedung perkuliahan dapat diselesaikan dalam waktu x hari dengan biaya proyek $\left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$ ratus ribu rupiah per hari. Agar biaya minimum maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu ..
31. Suatu perusahaan memproduksi x buah barang. Setiap barang yang diproduksi memberikan keuntungan $(225x - x^2)$ rupiah. Supaya total keuntungan mencapai maksimum. Banyak barang yang harus di produksi adalah ...
32. Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan $2m-n-40$ nilai minimum $p=m^2+n^2$ adalah
33. Dari selembar karton berbentuk persegi yang berukuran sisi 18 cm akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara memotong empat bujur sangkar pada setiap bagian pojok karton. Tentukan volume maksimum dari kotak tersebut.

PERTEMUAN 16

LATIHAN SOAL UPM

1. Tentukan HP dari :

- a. $\| 3x + 1 \| < 2 \| x - 6 \|$
- b. $2x - 7 < 4x - 2$
- c. $-5 \leq 2x + 6 < 4$
- d. $x^2 - x < 6$
- e. $3x^2 - x - 2 > 0$
- f. $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$
- g. $\| x - 2 \| < 5$
- h. $2x^2 - 5x - 4 \leq 0$
- i. $\| 4x + 2 \| \geq 10$
- j. $\| \frac{x}{2} + 7 \| \geq 0$
- k. $\frac{x+2}{x-4} < 3$
- l. $6x - 2 < 3x + 4$
- m. $4x - 5 > 6x + 3$
- n. $-3 < 4x - 8$
- o. $\| x \| < 6$
- p. $(2x + 3)(3x + 1)(x - 2) < 0$

2. a. Diketahui $f(x) = 2x^2 + 1$

$$g(x) = x^2 + 2x + 1$$

tentukan : $(g \circ f)(x)$ dan $(g \circ f)(-2)$

b. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$

tentukan : $(g \circ f)(1)$ dan $(g \circ g \circ f)(x)$

c. Jika $f(x) = 4x + 5$, $g(x) = 2x - 2$, dan $h(x) = 2x^2 + 5x + 2$

tentukan : $(f \circ g \circ h)(x)$, $(g \circ f \circ h)(2)$, dan $(f \circ g \circ h)^{-1}$

3. tentukan turunan pertama dari :

- a. $y = \left(\frac{2x+3}{x^3+1}\right)^3$
- b. $y = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3$
- c. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)(4x + 3)$
- d. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
- e. $f(x) = \frac{6x^2-7x-1}{2x+1}$
- f. $y = e^{\cos(x^2+5)}$
- g. $y = \sin 2x$
- h. $y = \sin\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)$
- i. $y = \cos^4(x^2 + 3x)$
- j. $y = \sin^2(2x^2 + 8x + 8)^2(3x^2 - 6x)$

4. Tentukan nilai limit dari :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 2x)$
- b. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{x^2+9}{x}}$
- c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-10}{x^2-1}$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$
- e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$
- f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+2^x}{2+3^x}$
- g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{7x^2}$
- h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-5x \cos^2 3x}{7x \tan^2 2x}$
- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{5x \tan x}$
- j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{5x \tan x}$
- k. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 2x}$
- l. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
- m. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}$
- n. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x^2-20}}{x}$

5. Aplikasi

- a. Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisi $s = 2t^2 - 12t + 8$ dimana s dalam meter dan t dalam detik. Tentukan kecepatan benda jika $t=1$ dan $t=6$!
- b. Buatlah sebuah kotak dari selembar papan yang mempunyai panjang 24 inchi dan lebar 9 inchi dengan cara melipat keempat sisinya. Tentukan volume max dari kotak tersebut dan berapa ukurannya !
- c. Tentukan nilai max dan min, kurva naik dan turun, cekung atas dan bawah dari $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$ dan $y = x^2 - 2x - 8$
- d. Duah buah bilangan jumlahnya 17. Tentukan berapa nilai bilangan tersebut agar hasil kalinya maksimum !

DAFTAR PUSTAKA

<http://jimmywok.blogspot.co.id/2014/08/teknik-informatika-1kalkulus.html>

<https://rinim.wordpress.com/kuliah/kalkulus/kalkulus-1/>

<http://informatikalani.blogspot.co.id/2016/10/materi-kalkulus-teknik-informatika.html>

<https://ketinggalan.wordpress.com/category/semester-i/kalkulus-1/>

<https://materipembelajarananti.blogspot.co.id/2015/10/kalkulus-1.html>

<https://www.codepolitan.com/kumpulan-materi-kuliah-jurusan-teknik-informatika-dan-ilmu-komputer>