CHAP 4 : LE FILTRAGE ANALOGIQUE

I. Notion d'impédance
II. Filtrage passif du 1er ordre
III. Filtrage passif du 2nd ordre
IV. Filtrage actif

1

Notion d’impédance

- En régime continu
- En régime alternatif

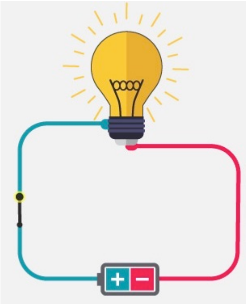
En régime continu (DC ≡ f = 0 Hz)

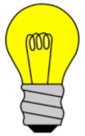
- Loi d'Ohm : relation courant – tension en régime continu

$$\boxed{U = R\,I}$$

- La résistance est une ''force'' avec laquelle un conducteur s'oppose au passage du courant.

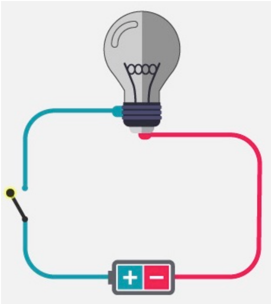
Georg OHM
[1789 – 1854]





R

R

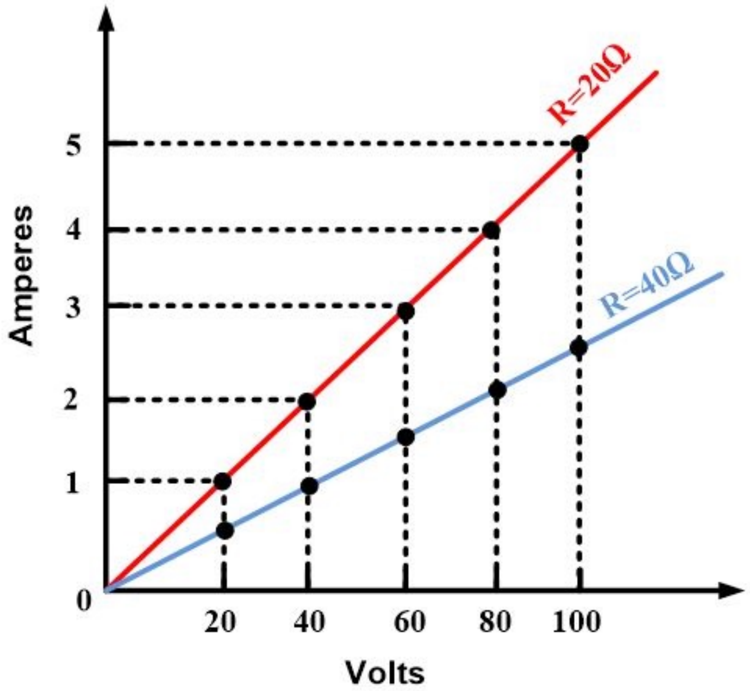


R [Ω]

R = 0
Fil idéal

$R \rightarrow \infty$

Circuit ouvert



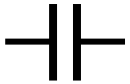
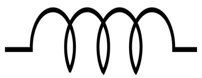
En régime alternatif (AC $\equiv f > 0$ Hz)

- Si $u(t) = A\sin(\omega t) = Ae^{j\omega t}$ alors $\frac{du(t)}{dt} = j\omega\, Ae^{j\omega t} = j\omega\, u(t)$ $\qquad (e^u)' = u'e^u$

- Linéarisation des relations courant-tension en notation complexe :
  - **Résistance :** u = Z_R i avec $\boxed{\boldsymbol{Z_R = R}}$
  - **Capacitance** : $i = C\frac{du}{dt} = C\, j\omega\, u \rightarrow u = Z_C\, i$ avec $\boxed{\boldsymbol{Z_C = -j\frac{1}{\omega C}}}$
  - **Inductance** : $u = L\frac{di}{dt} = L\, j\omega\, i \rightarrow u = Z_L\, i$ avec $\boxed{\boldsymbol{Z_L = L\, j\omega}}$

- Loi d'Ohm généralisée $\boxed{u = Z\,i}$

- L'impédance complexe s'écrit : $\boxed{Z = R + jX}$

	Basses fréquences	Hautes fréquences
Condensateur 	$\lim_{\omega\to 0}\lvert Z_C\rvert = \lim_{\omega\to 0}\left\lvert j\frac{1}{\omega C}\right\rvert \to \infty$ 	$\lim_{\omega\to \infty}\lvert Z_C\rvert = \lim_{\omega\to \infty}\left\lvert j\frac{1}{\omega C}\right\rvert \to 0$ 
Bobine 	$\lim_{\omega\to 0}\lvert Z_L\rvert = \lim_{\omega\to 0}\lvert Lj\omega\rvert \to 0$ 	$\lim_{\omega\to \infty}\lvert Z_L\rvert = \lim_{\omega\to \infty}\lvert Lj\omega\rvert \to \infty$ 

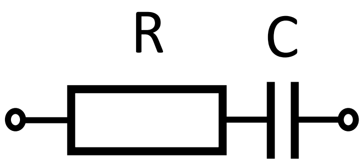
- R est la partie réelle dite résistive et X est la partie imaginaire dite réactive ou réactance.
  - Si X < 0, on parle d'impédance capacitive : sa tension en quadrature avance de $\pi/_2$ sur le courant (le courant met un certain temps à s'établir dans une bobine) ;
  - Si X > 0, on parle d'impédance inductive : la tension en quadrature retard de - $\pi/_2$ sur le courant (au moment de la mise sous tension, un condensateur déchargé est parcouru par un courant très fort qui décroit ensuite).

En régime alternatif (AC ≡ f > 0 Hz)

EXERCICE 1

- Déterminer les impédances complexes des circuits suivants et leurs valeurs limites en basse et haute fréquence:

(a)



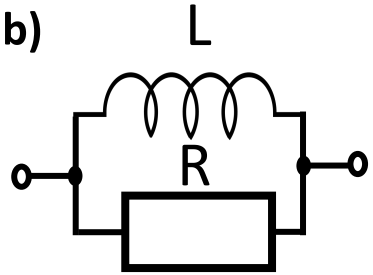
$$Z_{(a)} = Z_R + Z_C$$
$$= R + \left(-j\frac{1}{\omega C}\right)$$
$$= \boldsymbol{R - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$|Z_{(a)}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\lim_{\omega \to 0} |Z_{(a)}| = \frac{1}{\omega C} = \boldsymbol{|Z_C|}$$

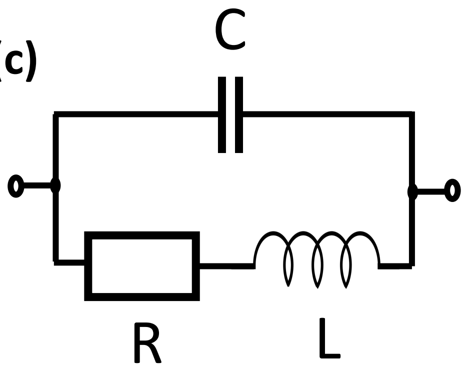
$$\lim_{\omega \to \infty} |Z_{(a)}| = \boldsymbol{|Z_R|}$$

(b)



$$Z_{(b)} = Z_L \,//\, Z_R$$
$$= \frac{Z_L Z_R}{Z_L + Z_R}$$
$$= \frac{RLj\omega}{R + Lj\omega}$$
$$= \boldsymbol{\frac{R}{1 + \frac{R}{Lj\omega}}}$$

(c)



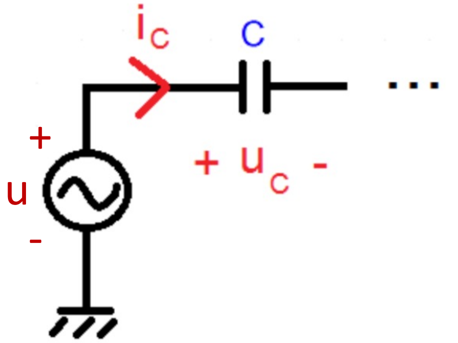
$$Z_{(c)} = Z_C \,//\, (Z_R + Z_L)$$
$$= \frac{Z_C(Z_R + Z_L)}{Z_C + Z_L + Z_R}$$
$$= \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R + Lj\omega)}{-j\frac{1}{\omega C} + Lj\omega + R}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)}}$$

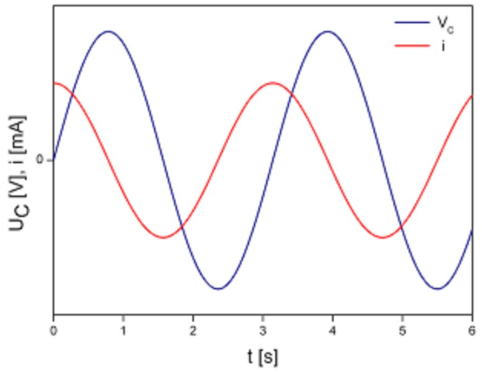
En régime alternatif (AC ≡ f > 0 Hz)

EXERCICE 2

- Montrer que pour un dipôle purement capacitif la tension est en quadrature avance de $^{\pi}/_{2}$ sur le courant. Faire de même pour un dipôle purement inductif (quadrature retard de - $^{\pi}/_{2}$ sur le courant).

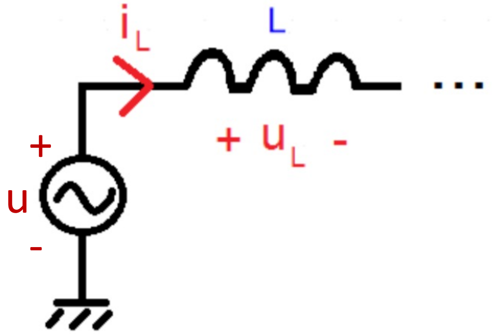
dipôle capacitif

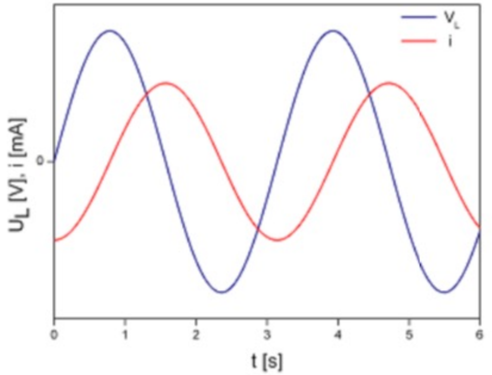




- Loi des mailles : $\mathrm{u} = u_c = \frac{q}{C}$ **(1)**
- On a $i_C = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = idt = I_{C,0}sin(\omega t + \varphi)dt$
- On intègre : $q = -I_{C,0}cos(\omega t + \varphi) = I_{C,0}sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ **(2)**
- Par substitution de **(2)** dans **(1)**, on obtient $u_c = \frac{I_{C,0}}{C} sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$
- finalement, $u_c = U_{C,0}\ sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$

dipôle inductif





- On part de la relation caractéristique de la bobine : $u_L = L\frac{di_L}{dt}$
- On a $i_L = I_{L,0}sin(\omega t + \varphi)$ donc $u_L = L\frac{d}{dt}\left(I_{L,0}sin(\omega t + \varphi)\right)$

$= \mathrm{L}I_{L,0}cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{L}I_{L,0}sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$

> finalement, $u_L = U_{L,0}\ sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$

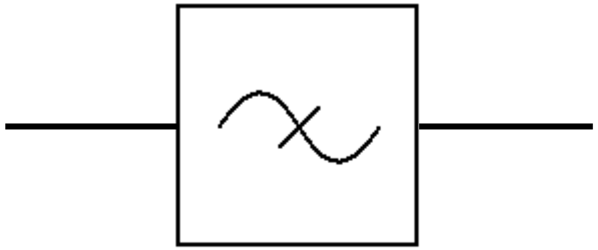
2

Filtrage passif du 1^{er} ordre

- Introduction
- La fréquence de coupure
- Le diagramme de Bode
- Formes canoniques et gabarits usuels
- Condensateurs de découplage

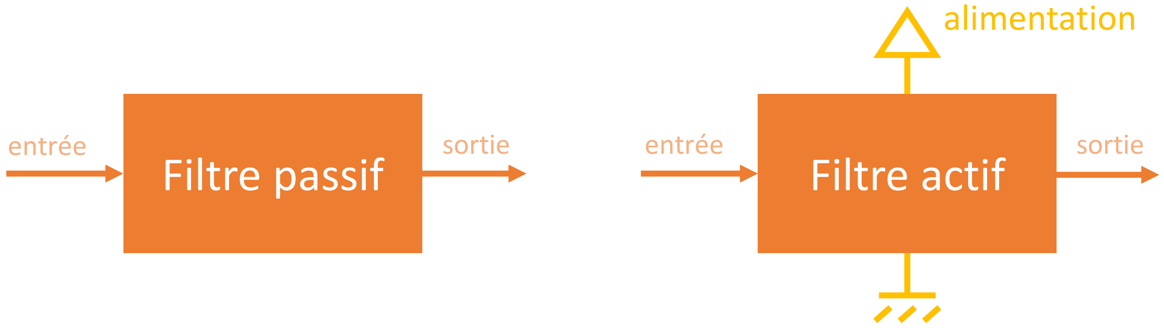
Introduction au filtrage

- Un **filtre** est un circuit électronique qui permet de :
  - d'éliminer ou d'affaiblir des fréquences (parasites indésirables) ;
  - d'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.



- Les **applications** sont nombreuses :
  - Alimentations électriques ;
  - Systèmes de télécommunication (radio, téléphone, télévision, etc.).
  - Systèmes d'acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, instrumentation scientifique, radars, etc.) ;
  - Acquisition de données analogiques – filtre anti-repliement.

- **Historique** :
  - 1920 – 1960 : filtres passifs RLC ;
  - 1960 : filtres actifs à AOP ;
  - 1970 : circuits intégrés (VLSI) ;
  - 1980 : filtres numériques, DSP ;
  - 1980 : filtres actifs à capacité commutée.



- Deux grandes familles :
  - Les **filtres numériques** : réalisés à partir de structure intégrée micro programmable (DSP) ;
  - Les **filtres analogiques passifs** : circuits RLC et **actifs** : consomment nécessairement une source d'alimentation.

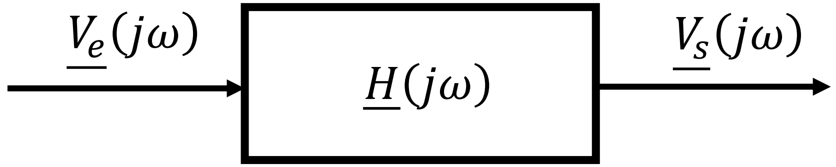
Différents types de filtres

		Composants	Spécificités
Filtres numériques		➢ Circuits logiques intégrés	➢ Signaux numérisés ➢ f limitée (< 100 MHz) ➢ Entièrement programmable
Filtres analogiques	**Filtres passifs**	➢ Circuits discrets RC, RL, RLC ➢ Composants piézoélectriques (Quartz)	➢ f élevée ➢ Pas d'alimentation ➢ Le moins coûteux
	Filtres actifs	➢ AOP avec condensateur(s) et/ou bobine(s)	➢ f limitée (< 1 MHz) ➢ Besoin d'une alimentation ➢ Plus précis ➢ Temps de réponse faible
	Filtres à capacité commutée	➢ AOP avec condensateur(s) et/ou bobine(s) et interrupteurs commandés MOS	➢ f limitée (< qq. MHz) ➢ Besoin d'alimentation ➢ Fréquence programmable

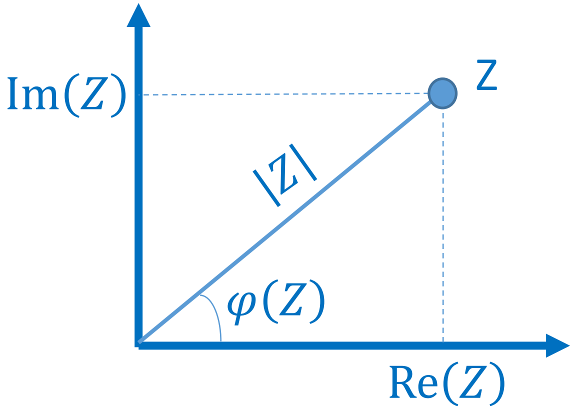
La fonction de transfert (1 / 2)

- On définit la fonction de transfert (= transmittance) comme suit :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}(j\omega)}{\underline{V_e}(j\omega)}}$$



- La fonction de transfert permet d'étudier le comportement d'un filtre.



- On définit :
  - **Le gain G [dB]**

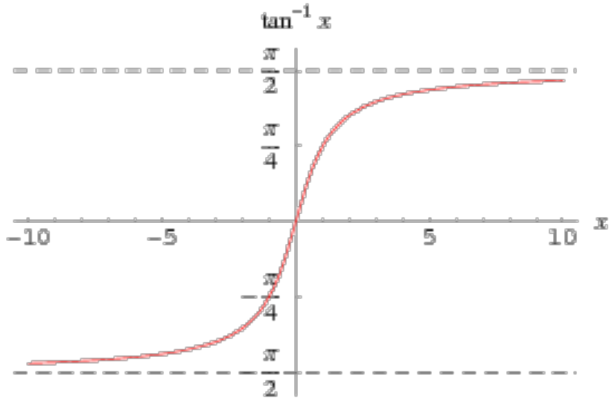
$$\boxed{G = 20\, log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\, log\left(\sqrt{\left[\mathrm{Re}\left(\underline{H}(j\omega)\right)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\left(\underline{H}(j\omega)\right)\right]^2}\right)}$$

    - Il traduit l'atténuation ou l'amplification relative du signal de sortie

  - **La phase φ [rad]**

$$\boxed{\varphi = \mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\underline{H}(j\omega)\right)}{\mathrm{Re}\left(\underline{H}(j\omega)\right)}\right)}$$

    - Il exprime le déphasage entre la tension de sortie et la tension d'entrée



La fonction de transfert (2 / 2)

- **Remarque sur le dB**
  - Par définition, le Bel compare la puissance de sortie à la puissance d'entrée, en appliquant la fonction log pour « mieux voir » cet effet en fonction des ordres de grandeur (puissances de 10) :

$$G = log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)\ [B]$$

  - En électronique, l'ordre de grandeur du Bel le plus adapté est le décibel (1 dB = $^1/_{10}$ B) :

$$G = 10\ log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)\ [dB]$$

  - Cependant, la plupart du temps, on ne connait pas la puissance mais seulement la tension l'expression du gain peut être réarrangée afin de comparer un rapport de tensions comme suit :

$$G = 10\ log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10\ log\left(\frac{V_s\frac{V_s}{Z}}{V_e\frac{V_e}{Z}}\right) = 10\ log\left(\frac{V_s^2}{V_e^2}\right) = 10[log(V_s^{\ 2}) - log(V_e^{\ 2})] = 20[log(V_s) - log(V_e)] = 20\ log\left(\frac{V_s}{V_e}\right)$$

- **Remarque sur la phase**
  - $\varphi < 0$ traduit un retard du signal de sortie par rapport au signal d'entrée ;
  - $\varphi > 0$ traduit une avance du signal de sortie par rapport au signal d'entrée ;

La fréquence de coupure (1 / 2)

- La fréquence de coupure f_c d'un filtre est la fréquence pour laquelle la puissance de sortie est réduite de moitié, et donc pour laquelle :

$$\boxed{\mathrm{G}\ (f_c) = G_{max} - 3{,}01\ dB}$$

En effet, $\mathrm{G}\ (f_c) = G_{max} - 10\ log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = G_{max} - 10\ log\left(\frac{1}{2}\right) = G_{max} - 3{,}01\ dB$

- En terme de de tensions, on a donc :

$$\mathrm{G}\ (f_c) = 20\ log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = G_{max} - 3{,}01\ dB$$

$$\Leftrightarrow\ log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = \frac{G_{max}}{20} - \frac{3{,}01}{20}$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\underline{H}(j\omega)\right| = 10^{\frac{G_{max}}{20} - \frac{3{,}01}{20}} = \frac{10^{\frac{G_{max}}{20}}}{10^{\frac{3{,}01}{20}}} \approx \frac{10^{\frac{G_{max}}{20}}}{0{,}707} \approx \frac{\max\left(\underline{H}(j\omega)\right)}{0{,}707} = \frac{\max\left(\underline{H}(j\omega)\right)}{\sqrt{2}}$$

$pour\ X > 0\ si\ Y = log(X)\ alors\ X = 10^Y$

- Dans la pratique, on utilise donc :
  - Pour déduire la fréquence de coupure d'un diagramme de Bode $\mathrm{G}\ (f_c) = G_{max} - 3{,}01\ dB$
  - Pour calculer la fréquence de coupure :

$$\boxed{\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

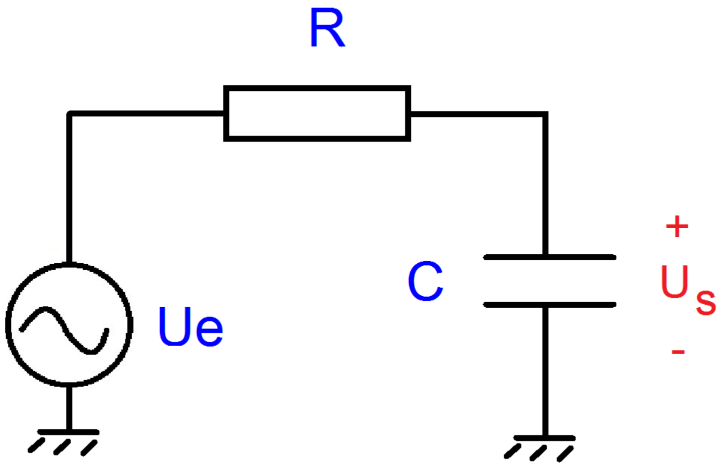
- On appelle bande passante, l'intervalle de fréquences pour lesquelles l'affaiblissement du signal est inférieur à une valeur spécifiée. On utilisera comme valeur limite la fréquence de coupure et on utilisera comme définition :

$$\boxed{G_{max} - 3 \leq G \leq G_{max}}$$

La fréquence de coupure (2 / 2)

EXEMPLE

- Soit le circuit suivant (filtre passe-bas). Déterminer la fonction de transfert, son module, le gain maximal, la fréquence de coupure et la bande-passante.



- On a $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}(j\omega)}{\underline{u_e}(j\omega)} = \frac{\frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}}\underline{u_e}(j\omega)}{\underline{u_e}(j\omega)} = \frac{Z_C}{Z_R+Z_C} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R-j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1+\frac{R}{-j\frac{1}{\omega C}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+jRC\omega}}$

- $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \left|\frac{1}{1+jRC\omega}\right| = \frac{|1|}{|1+jRC\omega|} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1+(RC\omega)^2}}}$

- À la fréquence de coupure, on a $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

On a donc $\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + RC\omega_c = 2 \Leftrightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$ d'où

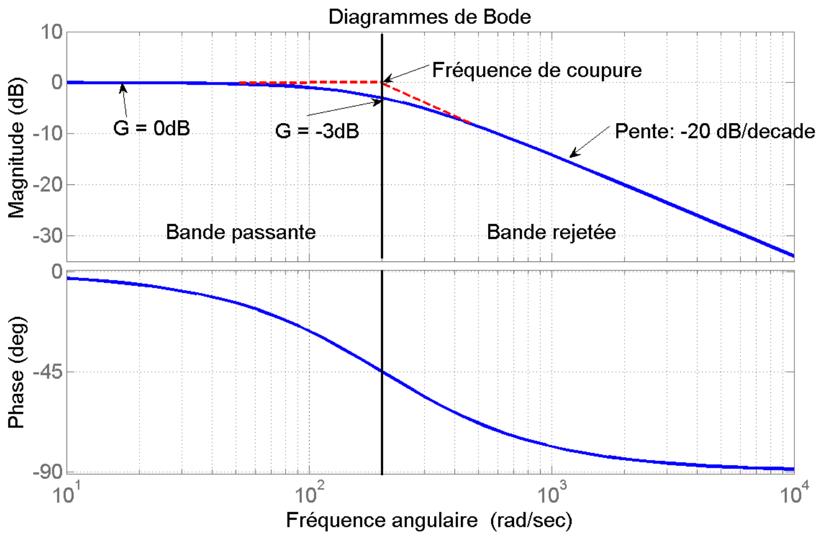
$f_c = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi RC}}$

- La bande passante est $]-\infty; f_c\,]$ donc $]-\infty; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi RC}}\,]$

Le diagramme de Bode (1 / 4)

- Le **diagramme de Bode** permet de représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système (nature d'un filtre par exemple) à partir de sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.
- Il comprend deux tracés en échelle semi-logarithmique :
  - Le **gain** en décibels (dB) : G = $20\ log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right)$
  - La **phase** (en rad ou en degré) : $\varphi = \mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right)$

Hendrik Wade BODE
[1905 – 1982]



- Les diagrammes de Bode sont représentés en fonction de la pulsation ω en rad·s ou de la fréquence f en Hz ;
- On rappelle que : $\boxed{\omega = 2\pi f}$

Le diagramme de Bode (2 / 4)

EXEMPLE 1

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

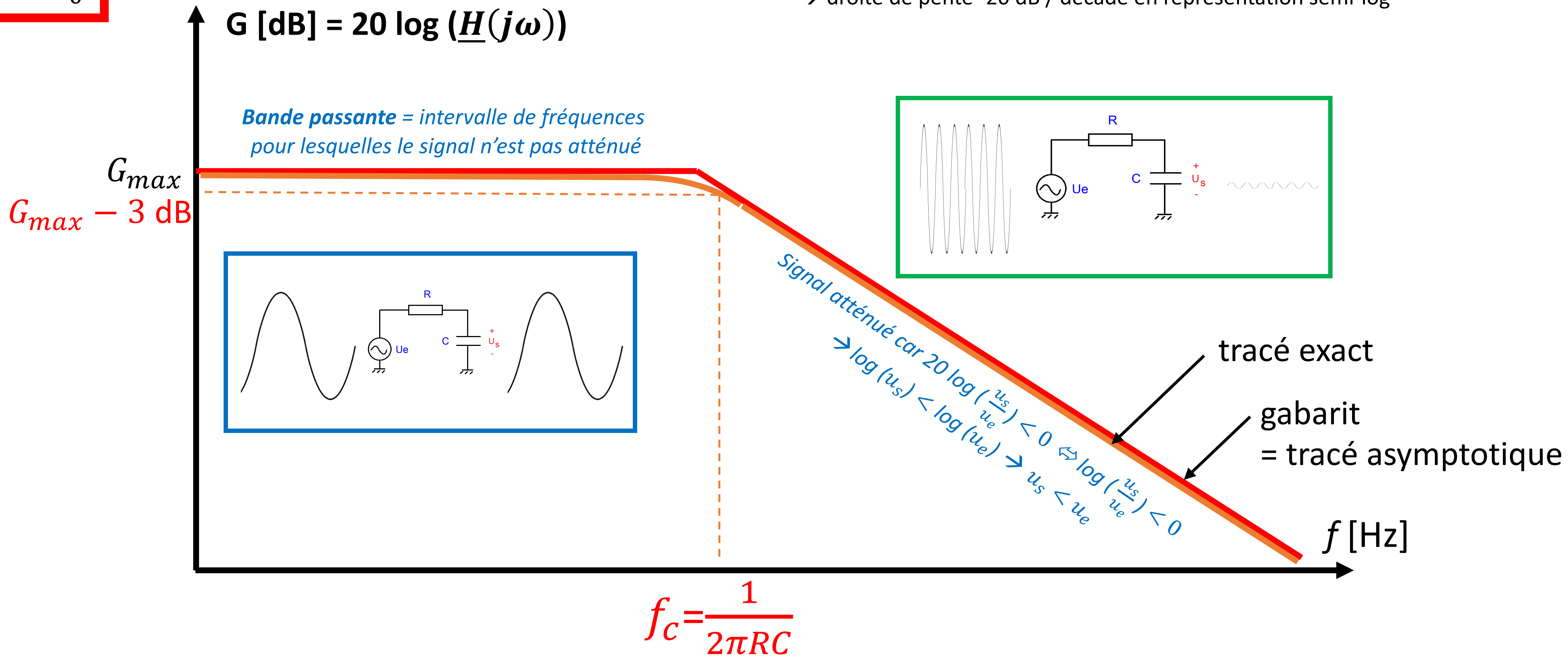
$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$\lim\limits_{\omega \to 0} |\underline{H}(j\omega)| = 1$ donc $G(0) = 20\,log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20\,log(1) = \mathbf{0\ dB}$

$\lim\limits_{\omega \to \omega_0} |\underline{H}(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $G(\omega_0) = 20\,log(1) - 10\,log(2) = \mathbf{-3{,}01\ dB}$

$\lim\limits_{\omega \to \infty} |\underline{H}(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \dfrac{\omega_0}{\omega}$ donc $''G(+\infty)'' = 20\,log(|\underline{H}(j\omega)|) = 20\,log\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right) = \mathbf{20\ log(\omega_0) - 20\ log(\omega)}$

→ droite de pente -20 dB / decade en représentation semi-log



Le diagramme de Bode (3 / 4)

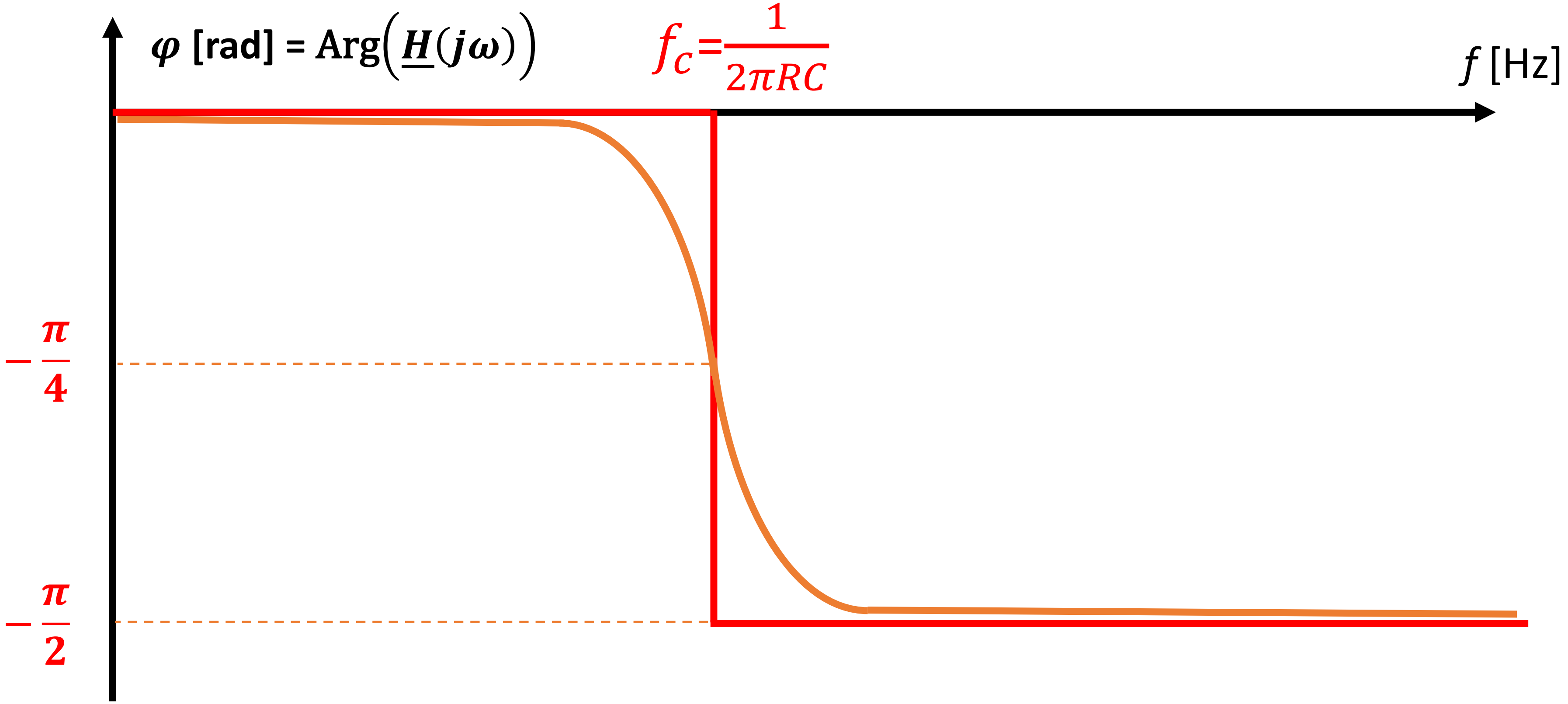
$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

$$\varphi = \mathrm{Arg}\left(\underline{H}(j\omega)\right) = \mathrm{Arg}(1) - \mathrm{Arg}\left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$
$$= 0 - tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$\lim\limits_{\omega\to 0} \varphi = \lim\limits_{\omega\to 0} -tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 0$ donc $\varphi(0) = \mathbf{0\ rad}$

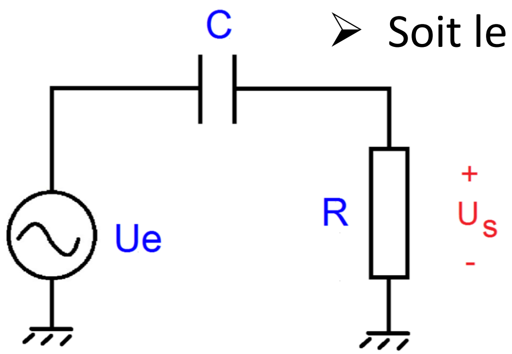
$\lim\limits_{\omega\to \omega_0} \varphi = \lim\limits_{\omega\to \omega_0} -tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$ donc $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$ rad

$\lim\limits_{\omega\to \infty} \varphi = \lim\limits_{\omega\to \infty} -tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{\pi}{2}$ donc $''\varphi(+\infty)'' = -\frac{\pi}{2}$ rad



Le diagramme de Bode (4 / 4)

EXEMPLE 2



- Soit le circuit suivant où R = 10 $k\Omega$ et C = 80 nF

  1/ Déterminer la fonction de transfert et la fréquence de coupure.

  2/ Tracer les gabarit du diagramme de Bode.

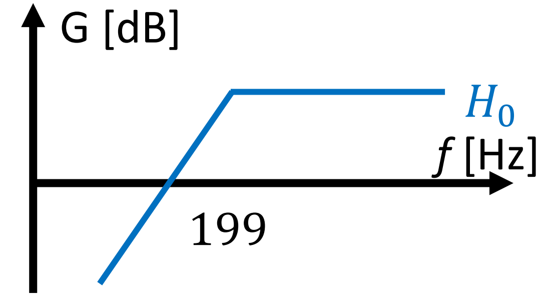
  3/ En déduire l'expression de la tension de sortie u_s si u_e = 8.6 sin $(1664\,\pi\,t)$.

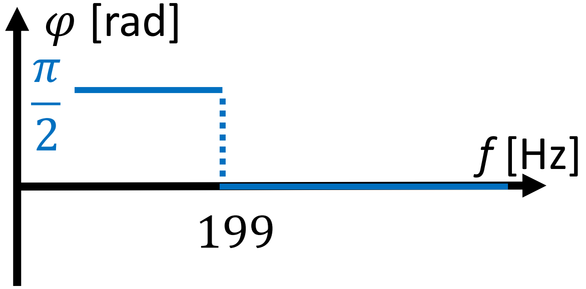
  4/ Existe t'il une fréquence à laquelle la tension moyenne soit diminuée d'un facteur 3.

1/ On a $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}(j\omega)}{\underline{u_e}(j\omega)} = \frac{\frac{Z_R}{Z_R+Z_C}\underline{u_e}(j\omega)}{\underline{u_e}(j\omega)} = \frac{Z_R}{Z_R+Z_C} = \frac{R}{R-j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1+\frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R}} = \mathbf{\frac{1}{1+\frac{1}{j\frac{\omega}{RC}}}}$

La fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\cdot10\cdot10^3\cdot80\cdot10^{-9}} = \mathbf{198{,}9\ Hz}$

2/

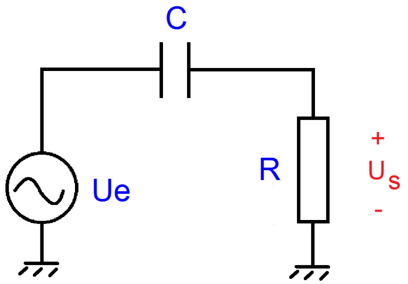
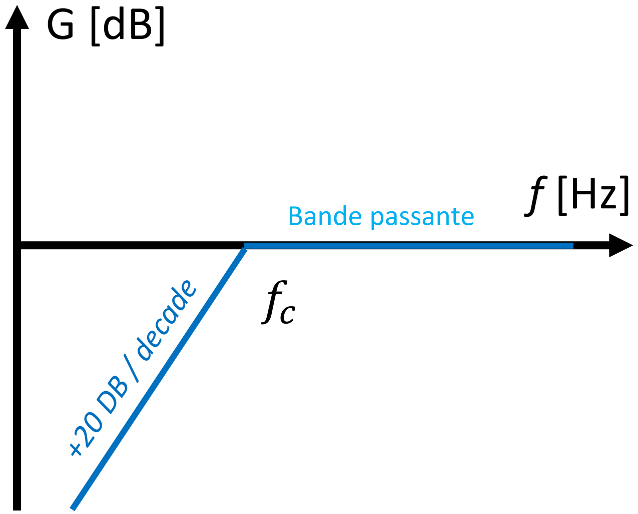
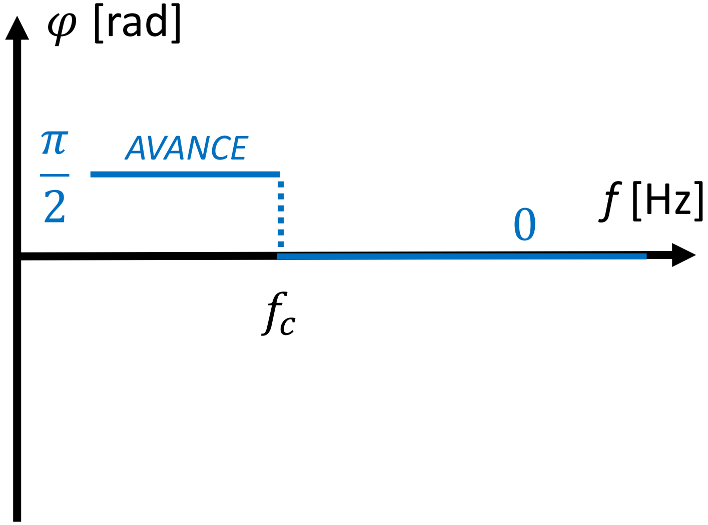
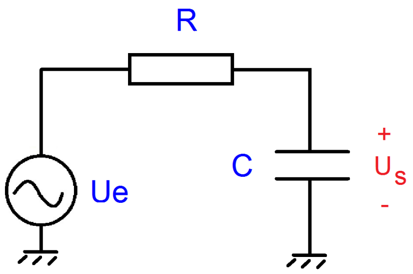
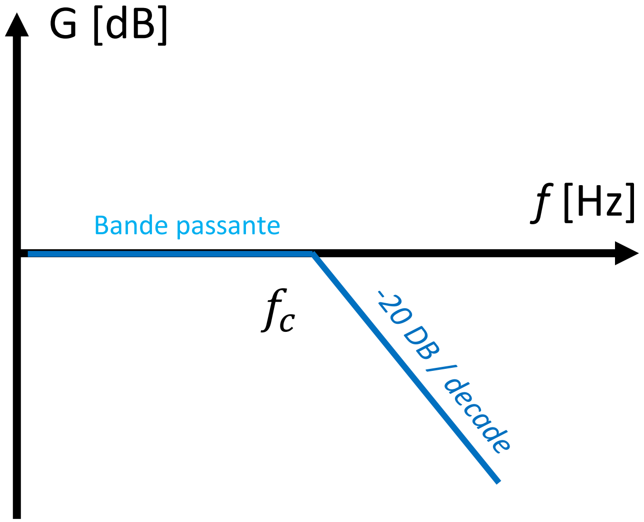
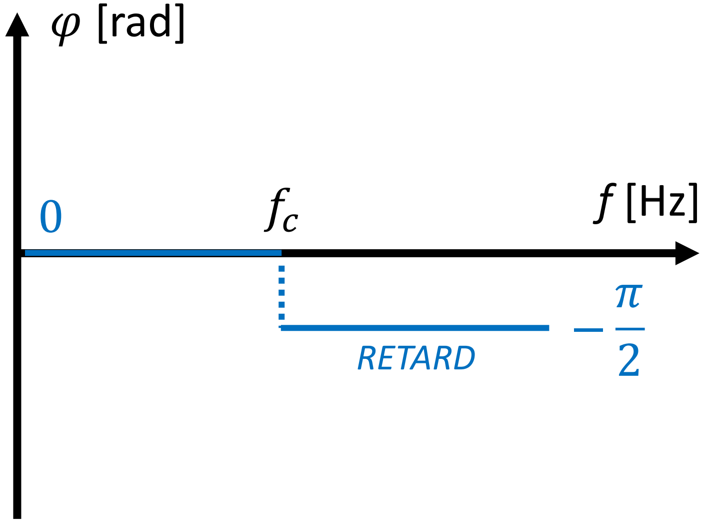




3/ $\omega = 1664\,\pi = 5{,}2\ \mathrm{k\ rad/s}$
d'où f = 832 Hz >> f_c
donc $\boldsymbol{u_s = u_e}$ = 8.6 sin $(1664\,\pi\,t)$

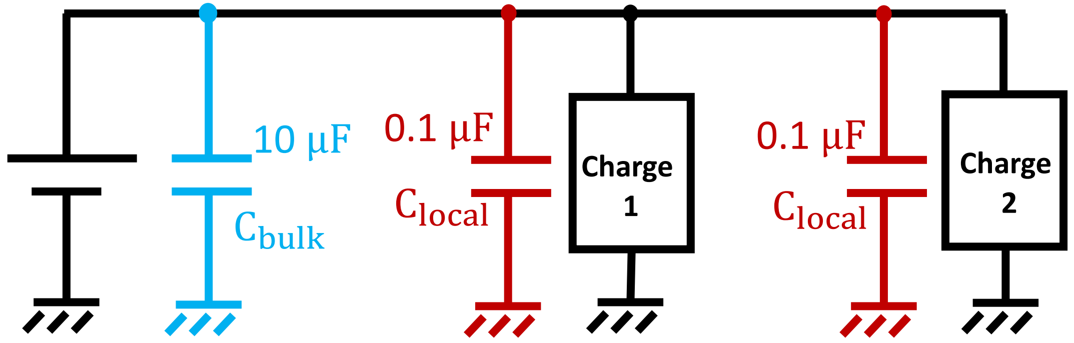
4/ $< u_e > = <$ 8.6 sin $(1664\,\pi\,t) > = 0$
donc la tension moyenne ne peut pas être dimin
facteur 3.

Formes canoniques et gabarits usuels

	FONCTION DE TRANSFERT	DIAGRAMME DE BODE	
Filtre passe-haut 	 $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}}$		
Filtre passe-bas 	 $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$		

Condensateur de découplage

- But : Rendre les sources de tension idéales (tension DC constante délivrée aux charges et suppression des parasites AC)



- Principalement deux types :
  - Condensateur de découplage général
    - Proche de la source
    - Puisque $C = \frac{Q}{V}$, on a $Q = C \cdot V$
      → ils jouent un rôle de réservoir
  - Condensateurs de découplage locaux
    - Puisque $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$, les bruits parasites (hautes fréquences) sont renvoyés à la masse ;
    - Ils jouent un rôle de filtre passe-bas.
      → Plus la fréquence à filtrer est haute et plus C est petit

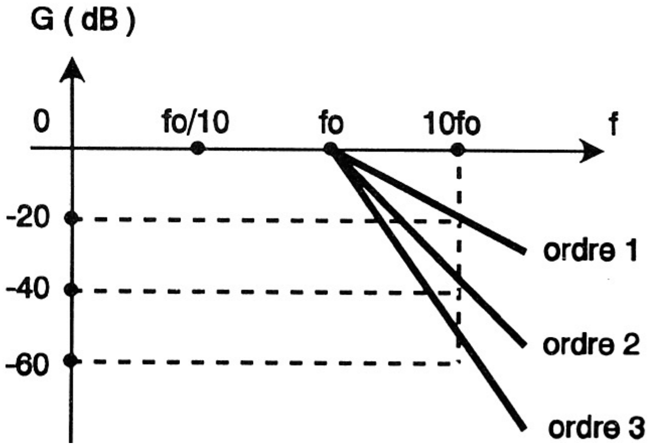
3

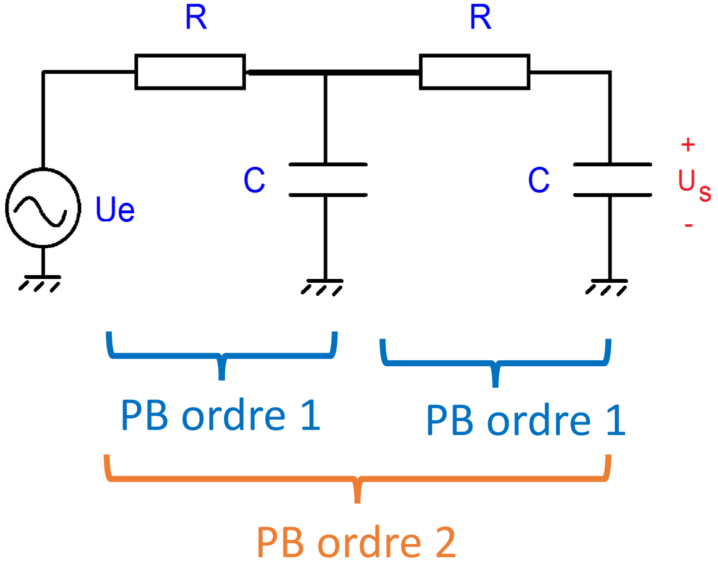
Filtrage passif du 2^{nd} ordre

- Ordre d'un filtre
- Méthode de séparation des bandes
- Filtres passe-bas et passe-haut du 2^{nd} ordre
- Filtres passe-bande et coupe-bande
- Filtre passe-tout

Ordre d'un filtre

- On distingue l'ordre d'un filtre par la pente du gain en fonction de la fréquence : la pente est de « n fois $\pm$20 dB / décade » où n est l'ordre du filtre.





- On peut augmenter l'ordre d'un filtre en mettant en série des filtres du 1er ordre.

Exemple pour un filtre du 2nd ordre : le signal de sortie du premier filtre du 1er ordre est injecté dans le second filtre du 1er ordre et l'atténuation sera de deux fois 20 dB / décade soit 40 dB / décade.

- Bien souvent l'ordre du filtre correspond au nombre de condensateur ou d'inductance.
- L'augmentation de l'ordre du filtre augmente la précision (atténuation plus forte après la fréquence de coupure) au détriment de la taille du circuit et sa puissance consommée.
- La fréquence telle que l'atténuation est de -3 dB varie avec l'ordre du filtre :

$$\boxed{f(-3\ dB) = f_c\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}}$$

Méthode de séparation des bandes (1 / 2)

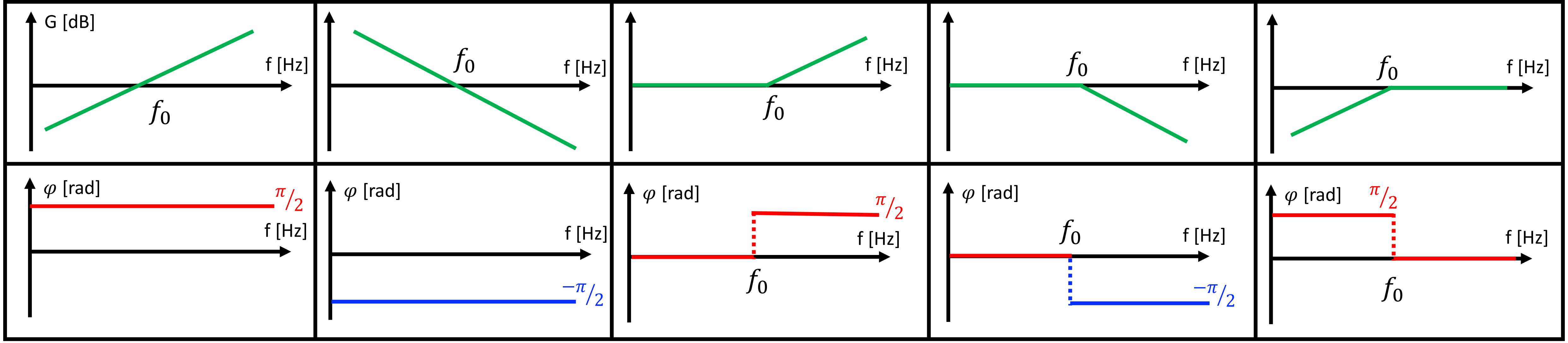
- La fonction de transfert d'un groupement de plusieurs quadripôles est le produit des fonctions de transfert de chaque quadripôle : les gains et les phases des filtres en cascade s'ajoutent.

<u>Remarque</u> : La fonction de transfert d'un quadripôle se définit à vide ($i_s = 0$). Lorsque l'on associe un quadripôle en série, sa fonction de transfert peut être modifiée par le fait qu'il n'est plus à vide, sauf si :

- l'impédance de sortie du premier quadripôle peut être considérée comme nulle ;
- l'impédance d'entrée du quadripôle suivant peut être considérée comme infinie ;

- Afin de tracer le diagramme de Bode d'une fonction de transfert complexe :
  - **(1)** On exprime cette dernière comme étant le produit de fonctions de transfert élémentaires ;
  - **(2)** On superpose les diagrammes de Bode des fonctions de transfert élémentaires.

dérivateur : $j\frac{\omega}{\omega_0}$	**intégrateur** : $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$	**pseudo intégrateur** : $1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$	**passe-bas** : $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$	**passe-haut** : $\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$



Méthode de séparation des bandes (2 / 2)

EXEMPLE

- Tracer l'allure des diagramme de Bode de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{3\,000(1+j10^{-4}\omega)}{j\omega(1+0{,}02j\omega)}$

- On a $\underline{H}(j\omega) = \frac{3\,000(1+j10^{-4}\omega)}{j\omega(1+0{,}02j\omega)} = \frac{3\,000}{j\omega}(1+j10^{-4}\omega)\frac{1}{(1+0{,}02j\omega)} = \frac{1}{j\frac{\omega}{3\,000}}\left(1+j\frac{\omega}{10\,000}\right)\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{200}\right)} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1}}\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)\frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_3}\right)} = \underline{H_1}(j\omega)\,\underline{H_2}(j\omega)\,\underline{H_3}(j\omega)$

avec $\omega_1 = 3\,000\ rad \cdot s^{-1}$, $\omega_2 = 10$ k $rad \cdot s^{-1}$ et $\omega_3 = 200\ rad \cdot s^{-1}$

soit $f_1 = \frac{3\,000}{2\pi} \approx$ 480 Hz, $f_2 = \frac{10\,000}{2\pi} \approx$ 1 600 Hz et $f_3 = \frac{200}{2\pi} \approx$ 30 Hz

Diagramme de Bode en Gain

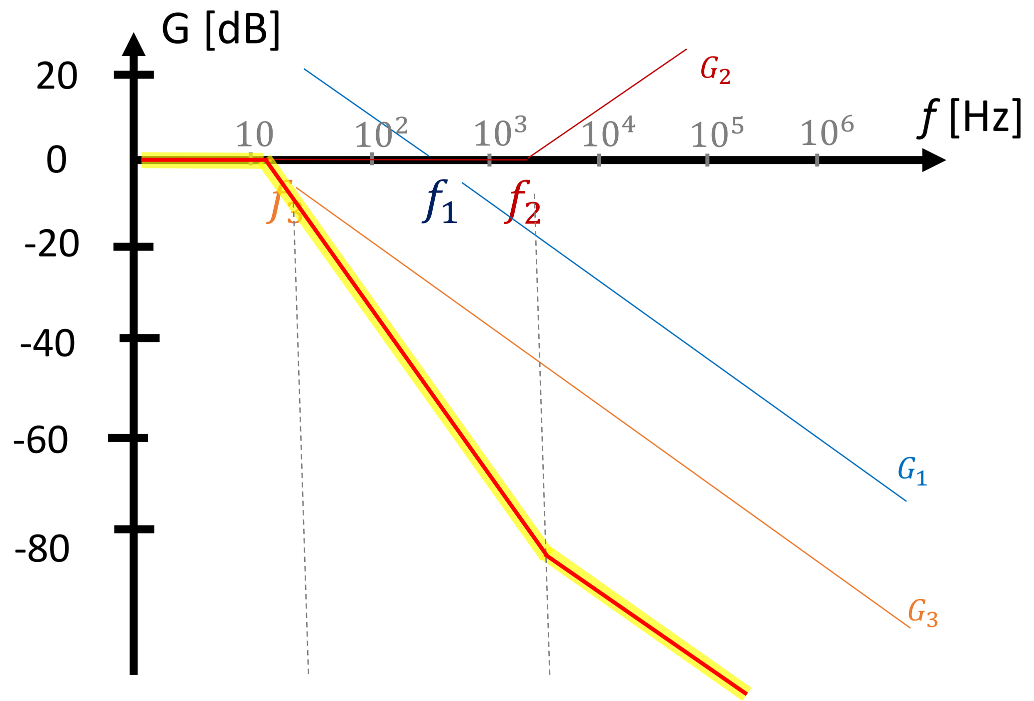
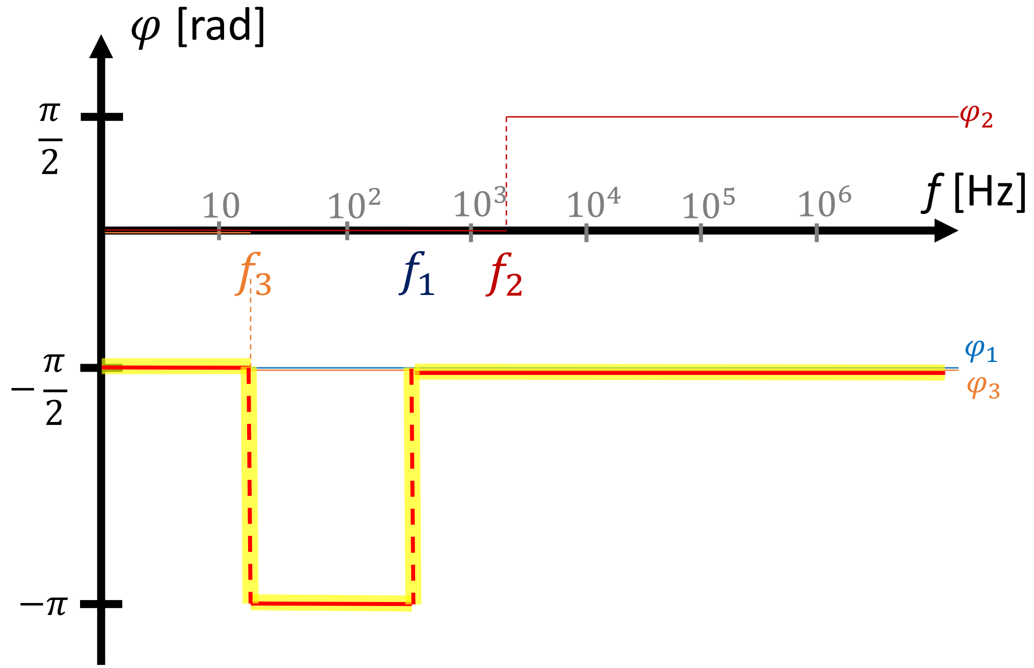


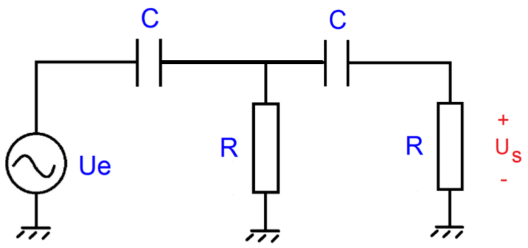
Diagramme de Bode en Phase

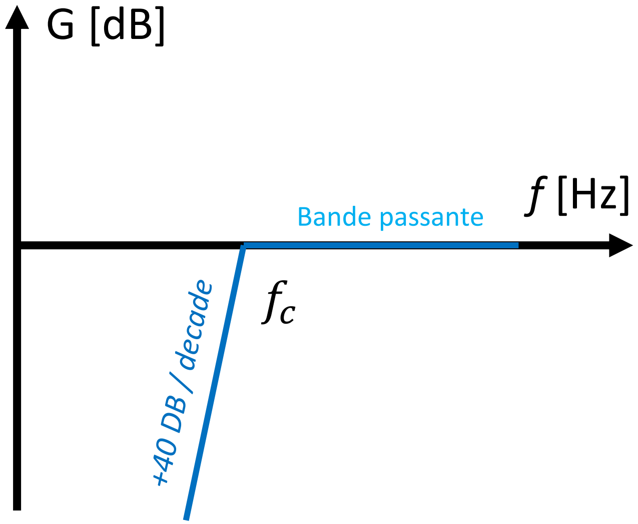


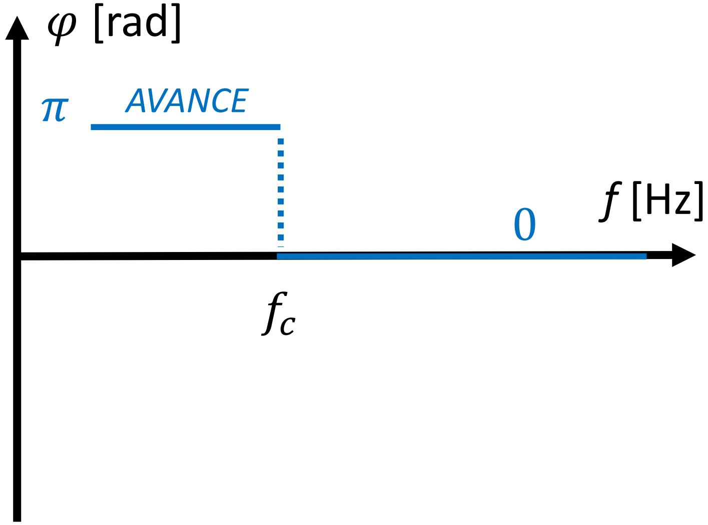
Passe-bas et Passe-haut du 2nd ordre (1 / 5)

CIRCUIT | **DIAGRAMME DE BODE**

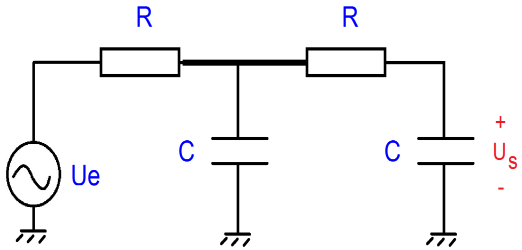
Filtre passe-haut

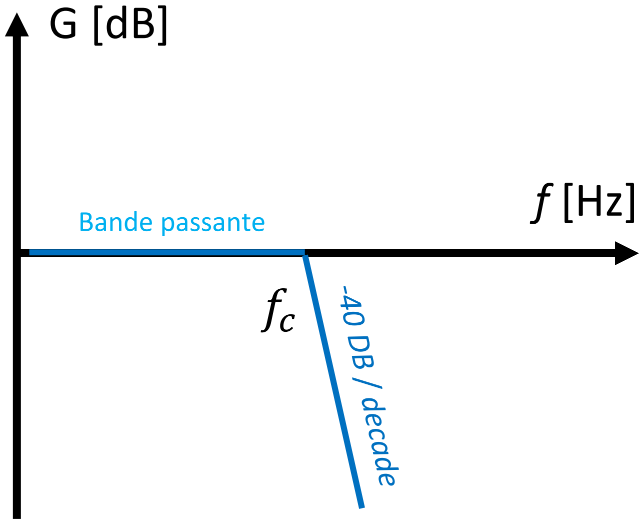


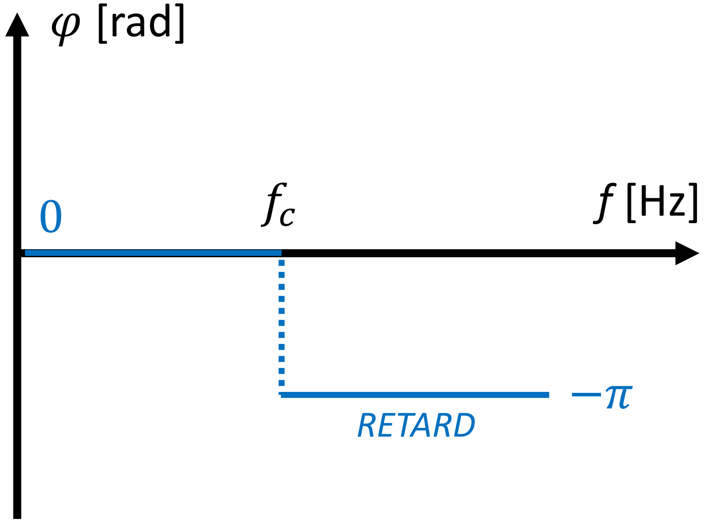




Filtre passe-bas



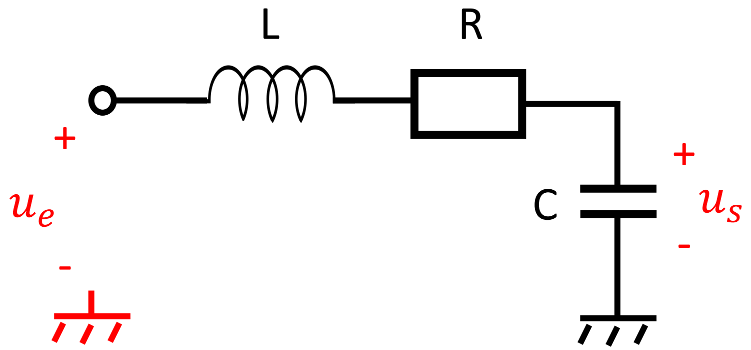




Passe-bas et Passe-haut du 2nd ordre (2 / 5)

EXEMPLE

- Soit le circuit RLC suivant où la sortie est ouverte sur C de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Montrer que la pente du diagramme de Bode en gain est de – 40 dB / décade.



- La fonction de transfert s'écrit $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}(j\omega)}{\underline{u_e}(j\omega)}$

$$= (Z_L + Z_R) \,//\, Z_C = \frac{Z_C}{Z_L+Z_R+Z_C} = \frac{1}{1+\frac{Z_L}{Z_C}+\frac{Z_R}{Z_C}} = \boldsymbol{\frac{1}{1-LC\omega^2+jRC\omega}}$$

- $\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \left|\frac{1}{1-LC\omega^2+jRC\omega}\right| = \frac{|1|}{|1-LC\omega^2+jRC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2+(RC\omega)^2}}}$

- On a $\lim\limits_{\omega\to 0}\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 1$ donc $G(0) = 20\,log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\,log(1) = \boldsymbol{0\ dB}$

- De même, $\lim\limits_{\omega\to\infty}\left|\underline{H}(j\omega)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^2+(RC\omega)^2}}\right| = \lim\limits_{\omega\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}\right| = \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2$

donc $''G(+\infty)'' = 20\,log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\,log\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) = \boldsymbol{40\,log(\omega_0) - 40\,log(\omega)}$

Passe-bas et Passe-haut du 2nd ordre (3 / 5)

On pose $x = \frac{\omega}{\omega_C}$ pulsation réduite et $m = \frac{RC\omega_C}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ facteur d'amortissement

➢ Simplifier l'écriture de la fonction de transfert et déterminer le gain et la phase dans le cas où $m \geq 1$ puis pour $0 < m < 1$.

➢ $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1-LC\omega^2+jRC\omega} = \frac{1}{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2+2mj\frac{\omega}{\omega_C}} = \boldsymbol{\frac{1}{1+2mjx+(jx)^2}}$

Rq : Le dénominateur $1 + 2mjx + (jx)^2$ est caractéristique des fonctions de transfert du 2nd ordre, c'est un polynôme du 2nd degré de variable jx.

➢ Cas 1 : $m \geq 1$ (décomposable)

On applique la méthode de séparation des bandes : on cherche à exprimer $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme d'un produit de deux fonctions élémentaires :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+2mjx+(jx)^2} = \frac{1}{1+\frac{jx}{a}} \cdot \frac{1}{1+\frac{jx}{b}}$$

On résout en identifiant les dénominateurs : $1 + 2mjx + (jx)^2 = \left(1 + \frac{jx}{a}\right) \cdot \left(1 + \frac{jx}{b}\right)$

$\Leftrightarrow 1 + 2mjx + (jx)^2 = 1 + jx\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{(jx)^2}{ab}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2m \\ ab = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow a^2 - 2ma + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4a^2 = 4(m^2 - a^2) > 0$$

$a_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2ma-\sqrt{4m^2-4a^2}}{2a^2} = \frac{ma-\sqrt{m^2-a^2}}{a^2} = m - \sqrt{m^2 - 1}$

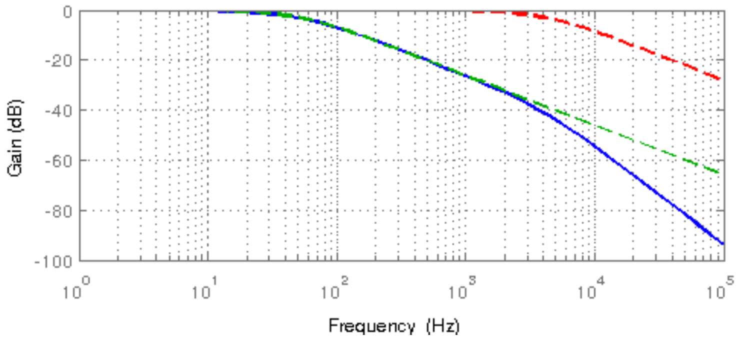
$a_2 = m + \sqrt{m^2 - 1}$

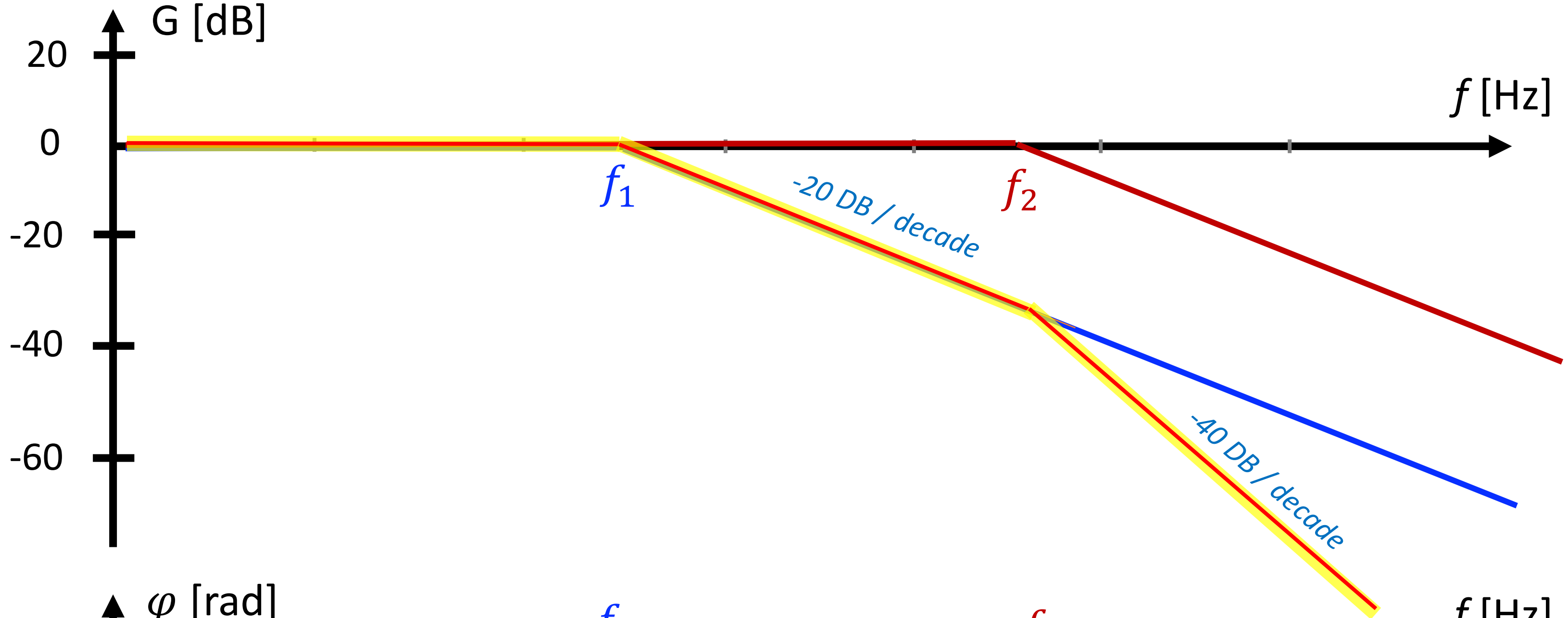
On peut vérifier que $a_1 a_2 = 1$. Ces deux solutions correspondent respectivement à a et b.

Passe-bas et Passe-haut du 2nd ordre (4 / 5)

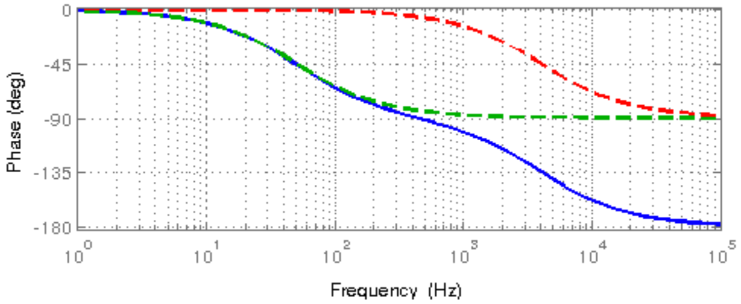
- Par séparation des bandes, le diagramme de Bode s'obtient par superposition des deux gabarits d'ordre 1 :

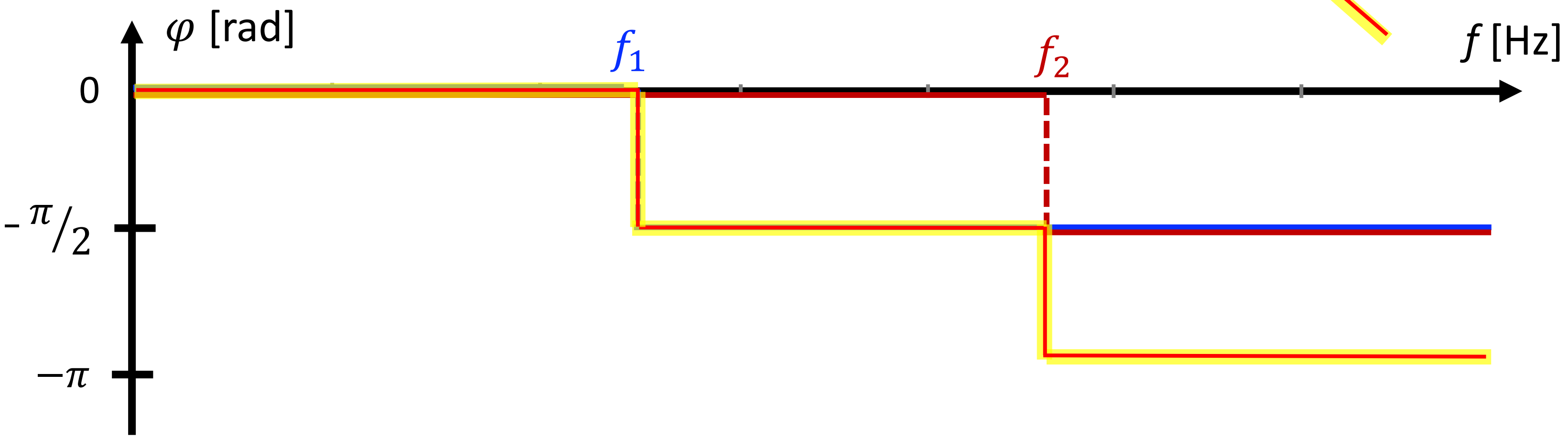
$$G = 20\,log\left(\left|\frac{1}{1+\frac{jx}{a}}\right|\right) + 20\,log\left(\left|\frac{1}{1+\frac{jx}{b}}\right|\right)$$





$$\varphi = \text{Arg}\left(\frac{1}{1+\frac{jx}{a}}\right) + \text{Arg}\left(\frac{1}{1+\frac{jx}{b}}\right)$$





- Le diagramme de Bode présente alors deux cassures.

Passe-bas et Passe-haut du 2nd ordre (5 / 5)

- Cas 2 : $0 < m < 1$ (non décomposable)

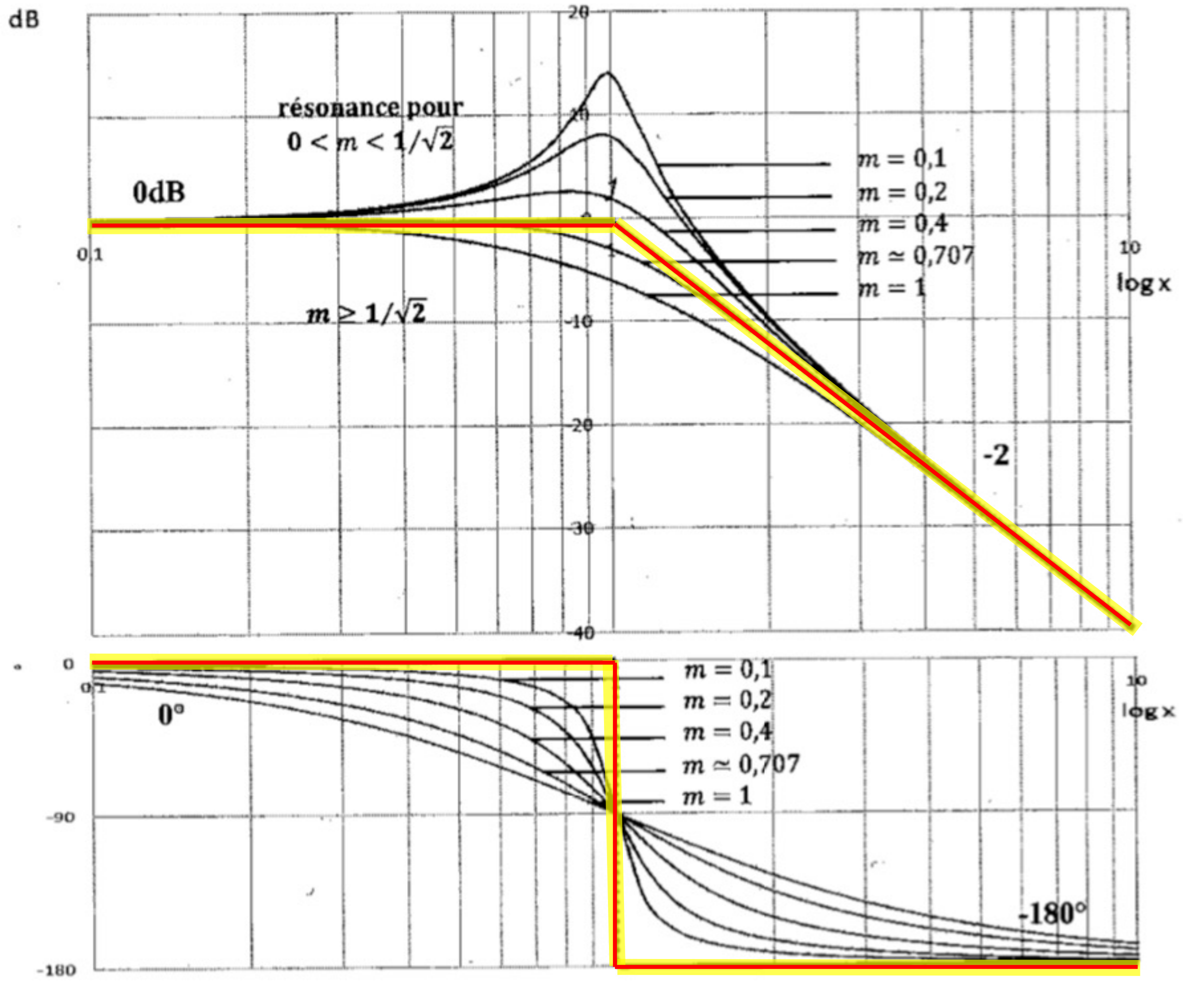
- Le dénominateur de la fonction de transfert n'est pas factorisable et il faut donc calculer le gain et la phase directement : […]

- On trouve :
  - Gain :

$$\boxed{G = -20\, log\left((1-x^2)^2 + (2mx)^2\right)}$$

  - Phase :

$$\boxed{\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{2mx}{1-x^2}\right)}$$



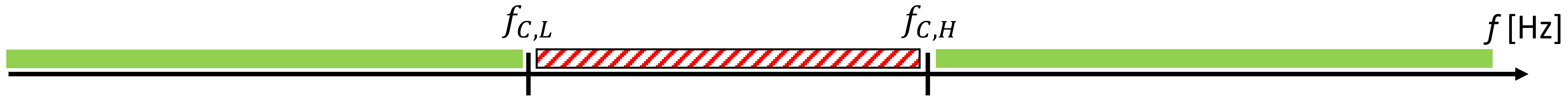
- **Pour $0 < m < 1/\sqrt{2}$**
  - il apparait un phénomène de résonnance au voyage de $x \approx 1$ ($\omega \approx \omega_c$) et l'amplitude de u_s devient supérieure à celle de u_e
- **Pour $m \geq 1/\sqrt{2}$**
  - Pas de phénomène de résonnance et la courbe de gain reste en dessous des asymptotes

- **Cas particulier pour $m = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$** conduisant à un écart de -3 dB entre le point de cassure des asymptotes et la courbe réelle : réponse dite de Butterworth.

Filtres passe-bande et coupe-bande (1 / 4)

- Un filtre **passe-bande** est un filtre qui ne laisse passer qu'une bande ou intervalle de fréquences comprises entre une fréquence de coupure basse $f_{C,L}$ et une fréquence de coupure haute $f_{C,H}$.
  - Il permet donc d'atténuer les fréquences à l'extérieur de la bande passante.
  - On peut obtenir un tel filtre en mettant <u>en série</u> un filtre passe-haut et un filtre passe-bas.

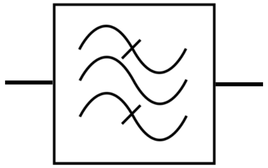
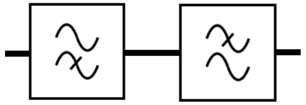
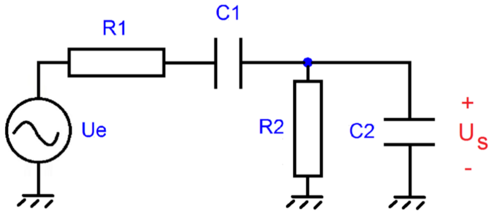
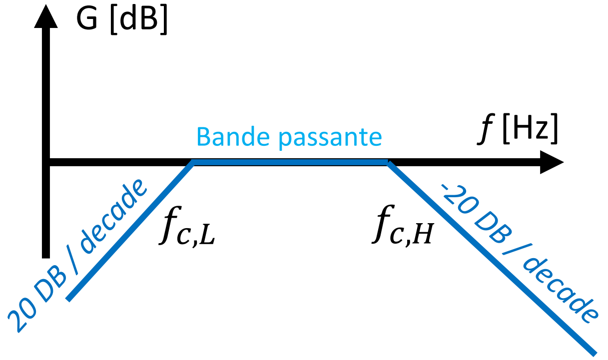
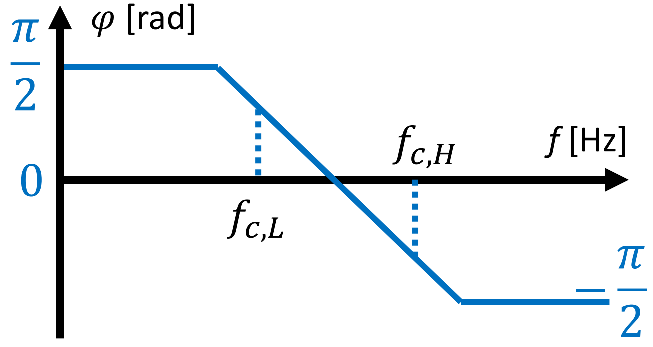
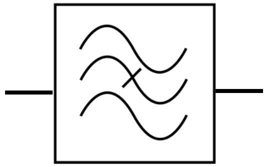
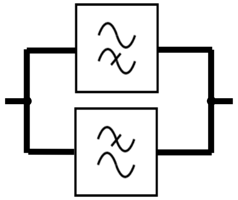
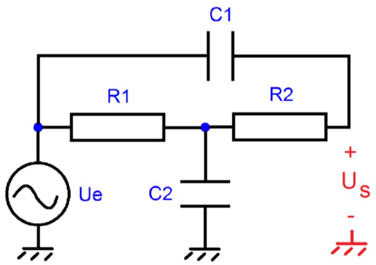
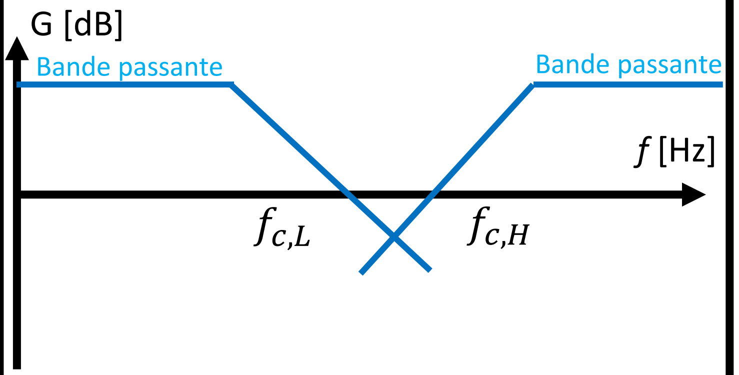
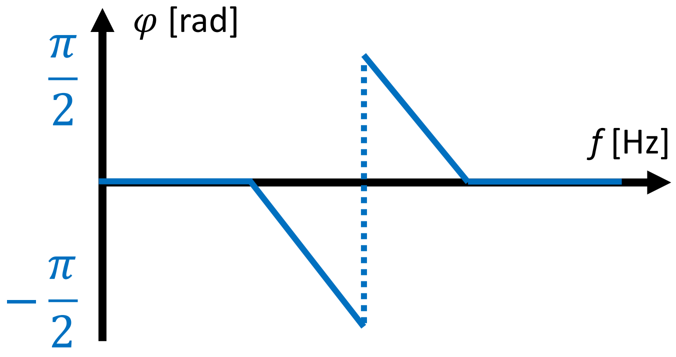
- Un filtre **coupe-bande** est un filtre qui empêche le passage d'une bande ou intervalle de fréquences comprises entre une fréquence de coupure basse $f_{C,L}$ et une fréquence de coupure haute $f_{C,H}$.
  - Il permet donc d'atténuer les fréquences à l'intérieur de la bande passante.
  - On peut obtenir un tel filtre en mettant <u>en parallèle</u> un filtre passe-haut et un filtre passe-bas.



- Dans les deux cas, on définit la fréquence centrale f_C comme suit :

$$\boxed{f_C = \sqrt{f_{C,L} \cdot f_{C,H}}}$$

Filtres passe-bande et coupe-bande (2 / 4)

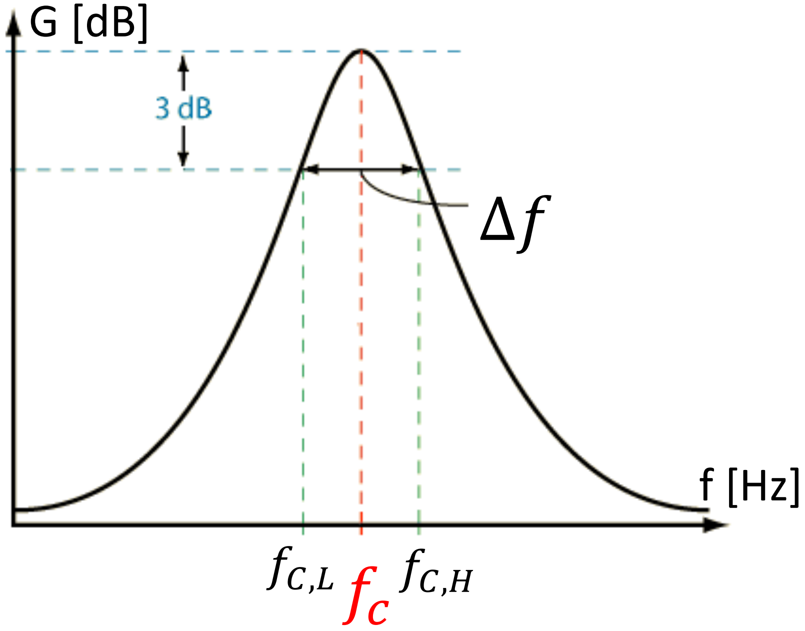
	CIRCUIT	DIAGRAMME DE BODE	
Filtre passe-bande 	 		
Filtre réjecteur De bande 	 		

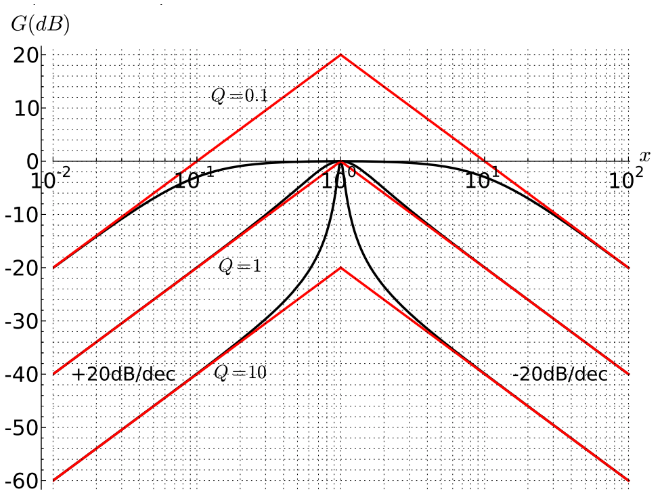
Filtres passe-bande et coupe-bande (3 / 4)

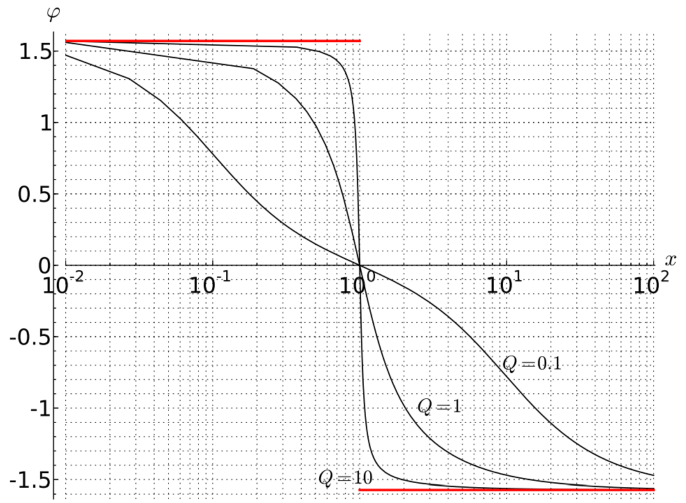
- On appelle **facteur de qualité Q** la grandeur sans unité du taux d'amortissement d'un filtre. Il est défini comme étant le rapport entre la fréquence centrale et la bande passante du filtre à 3 dB :

$$\boxed{Q = \frac{f_c}{\Delta f} = \frac{\sqrt{f_{c,L} \cdot f_{c,H}}}{f_{c,H} - f_{c,L}}}$$

- Plus Q est élevé, plus la bande passante est petite, plus la résonnance est « piquée » et donc plus le filtre est sélectif.







Filtres passe-bande et coupe-bande (4 / 4)

EXEMPLE

- Proposer un filtre qui ne laisse passer que les fréquences comprises entre 100 Hz et 500 Hz en utilisant que des résistances de 10 kΩ.
- Calculer le facteur de qualité.

- On souhaite mettre au point un filtre passe-bande de fréquences de coupure $f_{C,L} = 100$ Hz et $f_{C,H} = 500$ Hz.

- **Pour le passe-bas** : $f_{C,L} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \Leftrightarrow 2\pi R_1 C_1 f_{C,L} = 1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{2\pi R_1 f_{C,L}}$

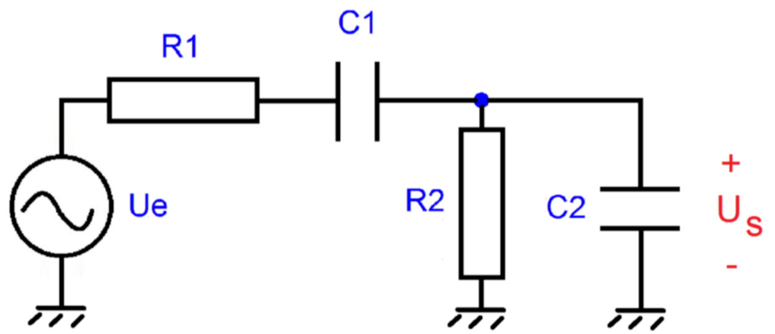
  A.N.

  $$C_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 100} = 1{,}59 \cdot 10^{-7} = \mathbf{15,9\ \mu F}$$

- **Pour le passe-haut** : $f_{C,H} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} \Leftrightarrow 2\pi R_2 C_2 f_{C,H} = 1 \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{2\pi R_2 f_{C,H}}$

  A.N.

  $$C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 500} = 3{,}18 \cdot 10^{-7} = \mathbf{31,8\ \mu F}$$



- On a $Q = \frac{f_C}{\Delta f} = \frac{\sqrt{f_{C,L} \cdot f_{C,H}}}{f_{C,H} - f_{C,L}} = \frac{\sqrt{100 \cdot 500}}{500 - 100} = \frac{\sqrt{50\ 000}}{400} = \frac{223{,}6}{400} = \mathbf{0,56}$

4

Introduction au filtrage actif

- Défauts des filtres passifs
- Filtrage actif

Défauts des filtres passifs

- Les filtres passifs n'utilisant que composants passifs : R, L et/ou C et sont sujet à quelques limitations :

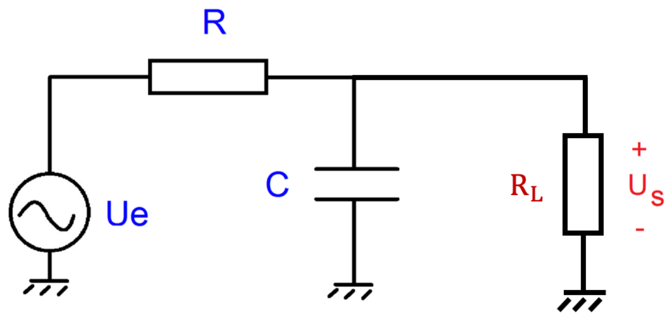
  (1) l'impédance du circuit abaisse la tension de sortie : $v_s < v_e$;

  (2) le filtre ne peut qu'atténuer un signal et pas l'amplifier : $G \leq 0$;

  (3) Les caractéristiques du filtres dépendent fortement de la charge du circuit.

$\left\|{}^{V_s}/_{V_e}\right\|$	**0,000 001**	**0,01**	**${}^{1}/_{2}$**	**0,1**	**${}^{1}/_{\sqrt{2}}$**	**1**	**$\sqrt{2}$**	**2**	**10**	**100**	**1 000 000**
G [dB]	-120	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40	120
	atténuation						amplification				

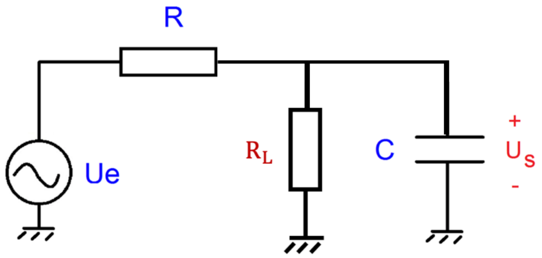
Défauts des filtres passifs

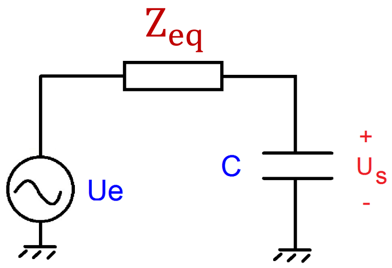


- Remarque sur l'effet de la charge

= Que se passe t'il si l'on branche une composante à grande impédance en sortie du filtre ?

- On commence par remarquer que C et R_L sont en parallèle :



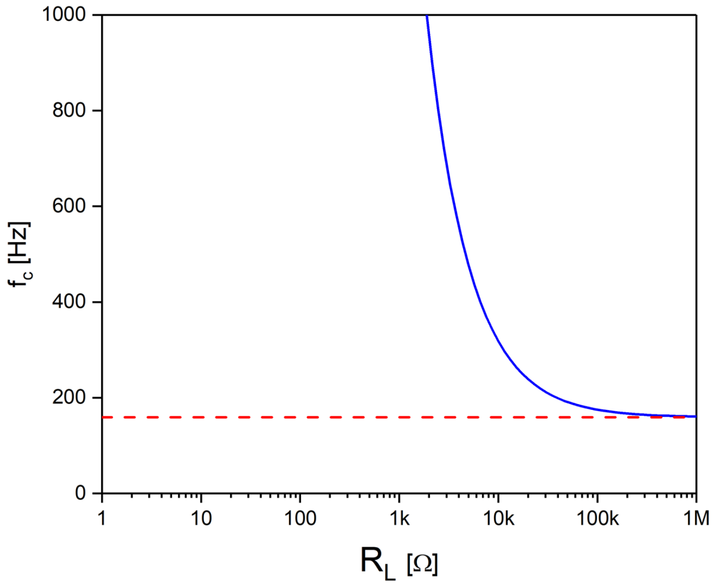


$$Z_{eq} = R_{eq} = R\ //\ R_L = \frac{R\ R_L}{R + R_L}$$

- On reconnait le filtre passe-bas passif d'ordre 1,

  la fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi R_{eq} C} = \frac{1}{2\pi \frac{R\ R_L}{R + R_L} C}$

Cas arbitraire où $R = 10\ k\Omega$ et $C = 100$ nF :



f_c sans la présence de R_L

<u>Rq</u> : il en est de même pour un filtre passe-haut

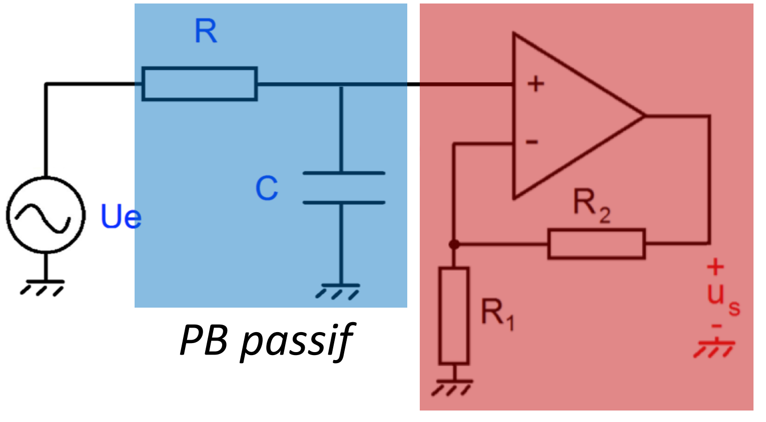
→ La charge modifie la fréquence de coupure du filtre !

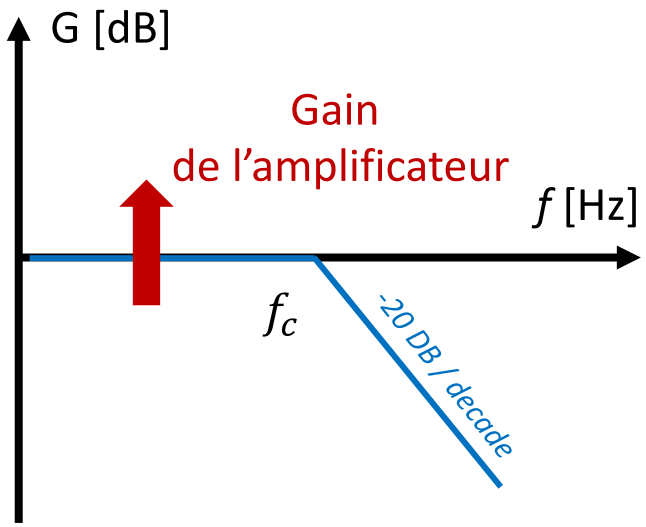
Filtrage actif

- Afin de palier à ces trois désagréments, on ajoute un composant actif, la plupart du temps un AOP à un filtre passif et l'on obtient un **filtre actif**.

EXEMPLE

Filtre passe-bas actif





- Les propriétés du filtre restent inchangées mais il est maintenant possible de modifier le gain de la bande passante :

$$\boxed{A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

- On peut alors modifier le gain du filtre facilement :

$$G = 20\,log\left(\left|\underline{H}(j\omega)\right|\right) = 20\,log\left(\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = 20\,log\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) + 20\,log(\text{filtre Passe} - \text{bas passif})$$

- …et multiplier les gains en branchant en série des amplificateurs puisque leurs gains sont multiplicatifs.