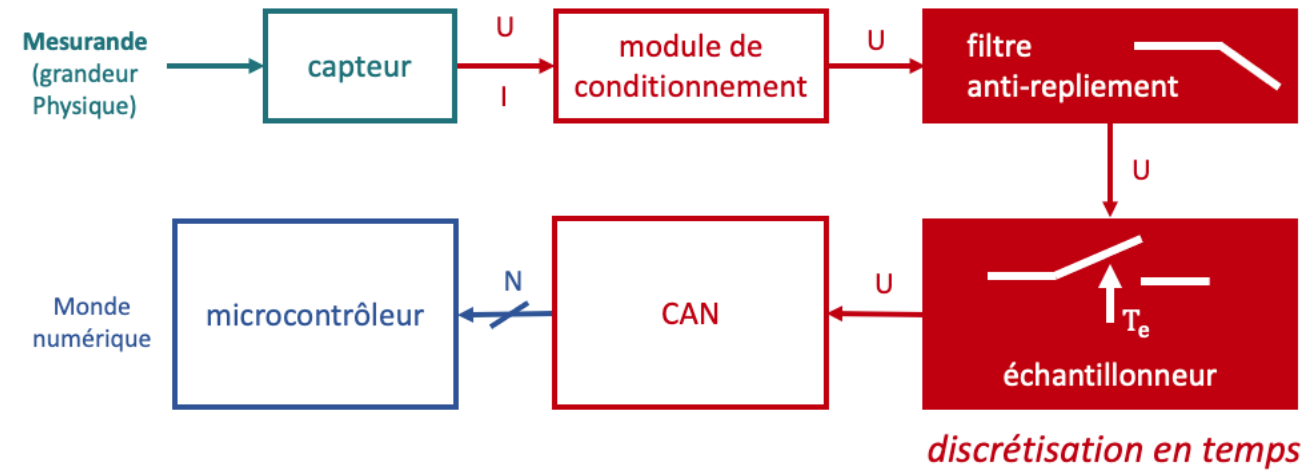


Cours 3 : Échantillonnage



Enjeu de l'échantillonnage



■ Un bon échantillonnage ne détériore pas le signal. En particulier, il doit conserver le spectre du signal initial et doit permettre de le restituer en fin d'opération.

→ Comment choisir la fréquence d'échantillonnage ? Quels sont les risques en cas de sous et de sur-échantillonnage ?

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation
B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur
B. Modélisation
C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

A. Rôle
B. Filtre classique
C. Gabarit
D. Butterworth
E. Tchebychev
F. Synthèse

Cours 3 : Échantillonnage

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

I. Échantillonnage réel

- A. Structure de l'échantillonneur-bloqueur
- B. Modélisation de l'échantillonneur-bloqueur
- C. Dimensionnement de l'échantillonneur-bloqueur

II. Filtre anti-repliement

- A. Rôle du filtre anti-repliement
- B. Rappels sur le filtrage analogique classique
- C. Gabarit d'un filtre
- D. Fonction d'approximation de Butterworth
- E. Fonction d'approximation de Tchebychev
- F. Synthèse du filtre

1 Échantillonnage idéal

Modélisation de l'échantillonnage idéal (1 / 6)

I. Échantillonnage idéal

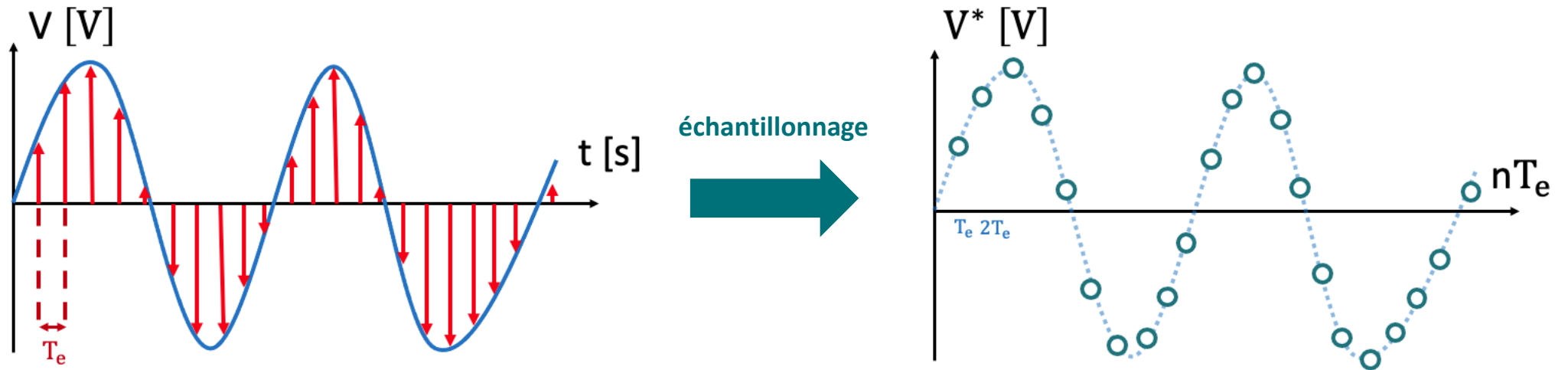
- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse



- La prise d'échantillon est nécessaire pour numériser le signal **car il faut laisser le temps au CAN de convertir.**
 - En première approximation, $t_{\text{CONV}} < T_e$
- Il faut prendre un certain nombre d'échantillon afin d'avoir une représentation fidèle du signal
 - En première approximation, T_e doit être le plus petit possible
- Un bon échantillonnage ne détériore pas le signal. En particulier, il doit conserver le spectre du signal initial et doit permettre de le restituer en fin d'opération.

Modélisation de l'échantillonnage idéal (2 / 6)

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur B. Modélisation C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

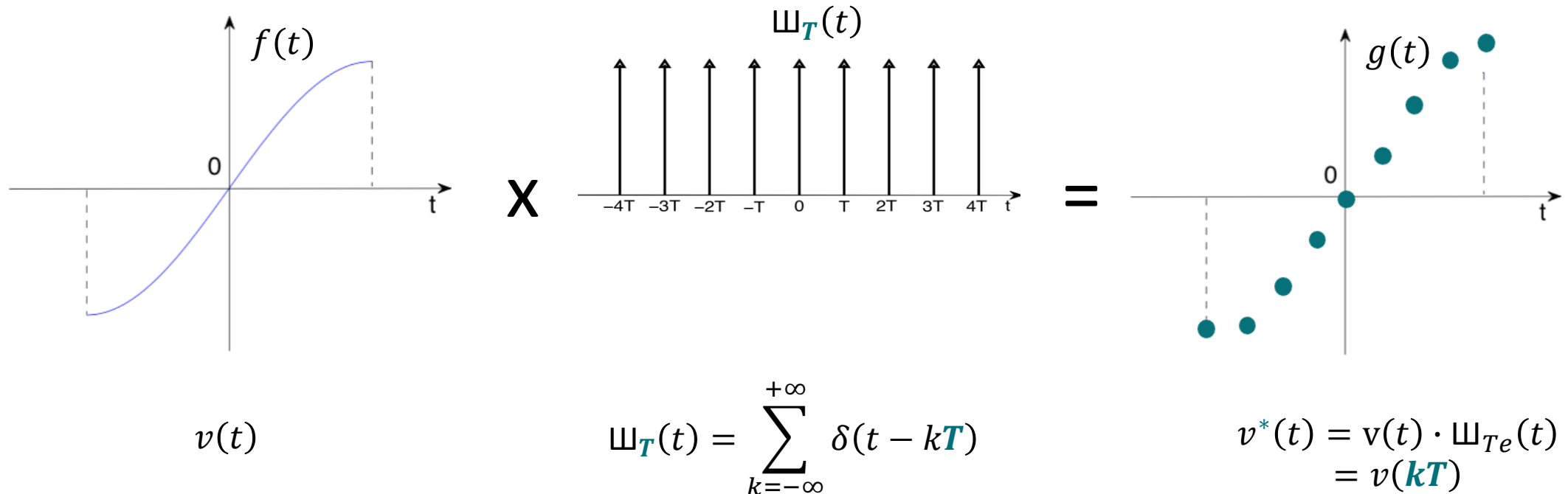
A. Rôle B. Filtre classique C. Gabarit D. Butterworth E. Tchebychev F. Synthèse

■ Hypothèses :

- Pas de maintien du signal pour la conversion
- Prise d'échantillon instantanée

■ Question : Quelle est la représentation du spectre de $v^*(t)$ connaissant celui de $v(t) = \sin(2\pi f_0 t)$?

■ Rappel : Echantillonner revient à multiplier le signal par un peigne de Dirac de fréquence d'échantillonnage T_e :



Modélisation de l'échantillonnage idéal (3 / 6)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

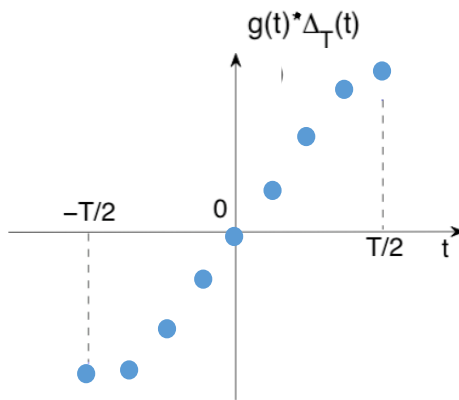
III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

produit simple

$$g(t) \mathfrak{W}_{T_e}(t) = g(kT_e)$$

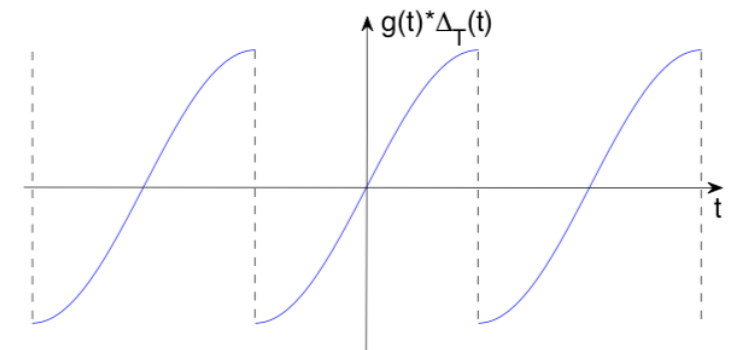
→ échantillonnage



produit de convolution

$$g(t) * \mathfrak{W}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_e)$$

→ périodisation



Modélisation de l'échantillonnage idéal (4 / 6)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ Théorème de Plancherel : $v^*(t) = v(t) \cdot \mathbb{W}_{T_e}(t) \Leftrightarrow V^*(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} * \mathcal{F}\{\mathbb{W}_{T_e}(t)\}$

$$\text{donc } V^*(f) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j} * \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e)$$

$$= \frac{1}{2jT_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(f - f_0) * \delta(f - kF_e) - \delta(f + f_0) * \delta(f - kF_e))$$

d'où :

$$V^*(f) = \frac{1}{2jT_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(f - (f_0 + kF_e)) - \delta(f - (-f_0 + kF_e))) = \frac{1}{2jT_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(f - (f_0 + kF_e)) - \delta(f + (f_0 - kF_e)))$$

Et finalement :

$$|V^*(f)| = \frac{1}{2T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(f - f_0 - kF_e) + \delta(f + f_0 - kF_e))$$

→ Le spectre du signal échantillonné est le spectre du signal $v(t)$ périodisé tous les $f_0 - kF_e$

Modélisation de l'échantillonnage idéal (5 / 6)

I. Échantillonnage idéal

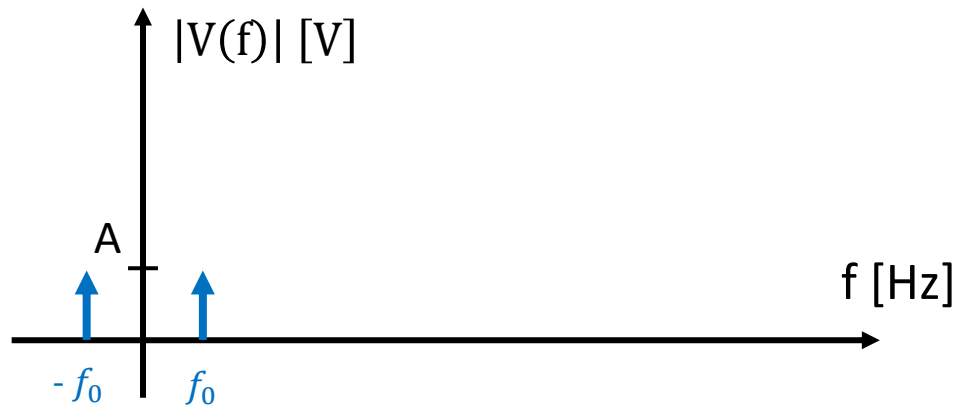
- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

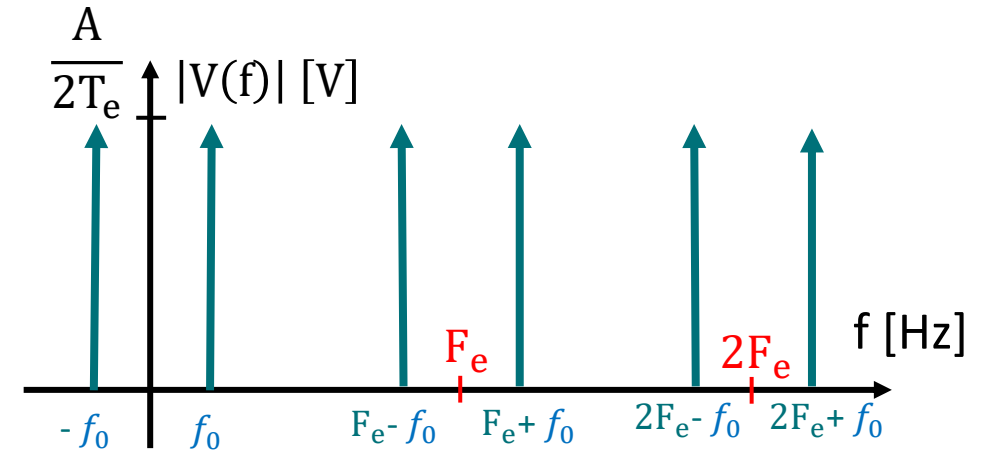
- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse



$$V(f) = \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$



$$|V^*(f)| = \frac{A}{2T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(f - f_0 - kF_e) + \delta(f + f_0 - kF_e))$$

Modélisation de l'échantillonnage idéal (6 / 6)

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation

B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur

B. Modélisation

C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

A. Rôle

B. Filtre classique

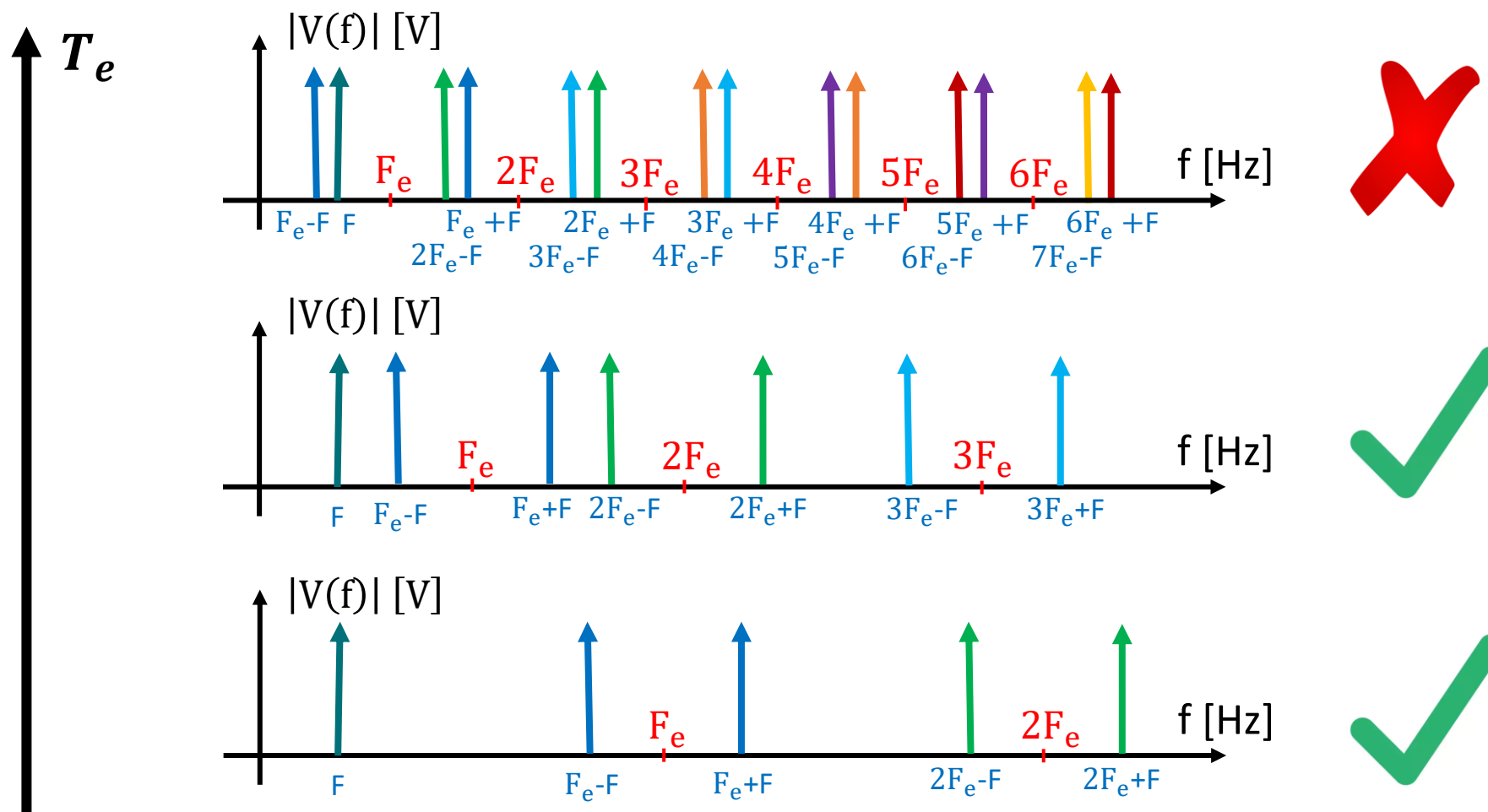
C. Gabarit

D. Butterworth

E. Tchebychev

F. Synthèse

- Question : Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale afin d'éviter le recouvrement spectral ?
- Hypothèse : $F \in [0 ; F_{\text{MAX}}]$



Condition de Shannon (1 / 3)

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation B. Condition de Shannon

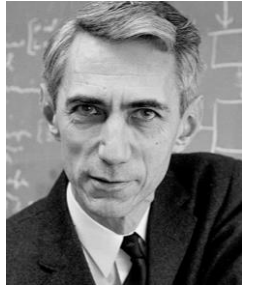
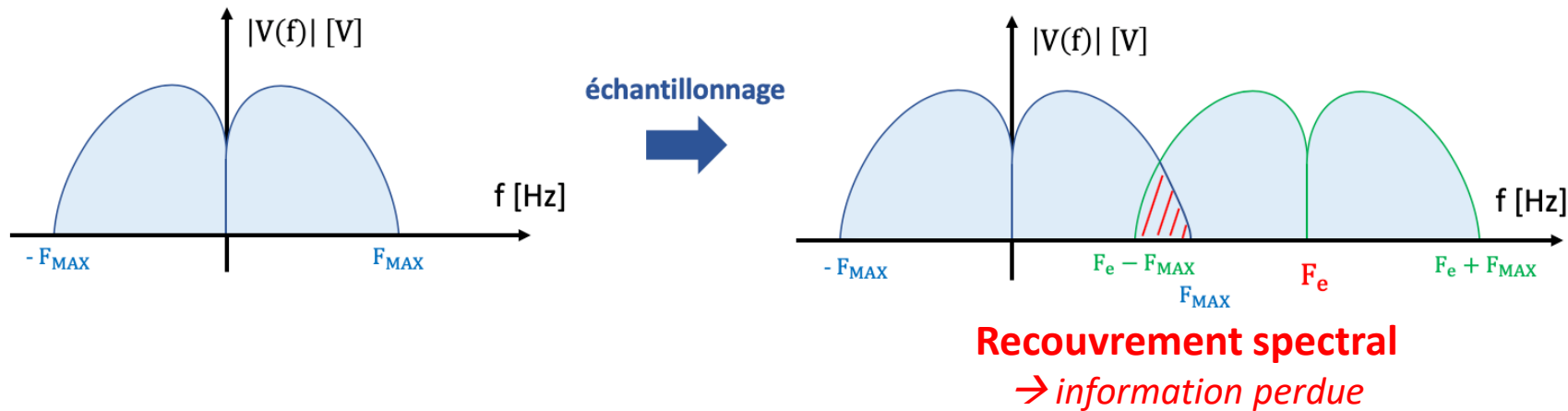
II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur B. Modélisation C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

A. Rôle B. Filtre classique C. Gabarit D. Butterworth E. Tchebychev F. Synthèse

- Question : Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale afin d'éviter le recouvrement spectral ?
- Hypothèse : $F \in [0 ; F_{MAX}]$



Claude Shannon
[1916 - 2001]

- Il ne faut pas qu'il y ait de recouvrement spectral pour pouvoir restituer le signal d'origine. On veut que $F_e - F_{MAX} > F_{MAX}$

Condition de Shannon

$$F_e > 2 F_{MAX}$$

Condition de Shannon (2 / 3)

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur B. Modélisation C. Dimensionnement

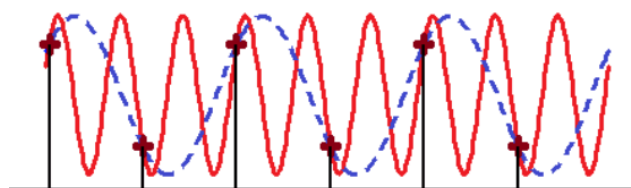
III. Filtre anti-repliement

A. Rôle B. Filtre classique C. Gabarit D. Butterworth E. Tchebychev F. Synthèse

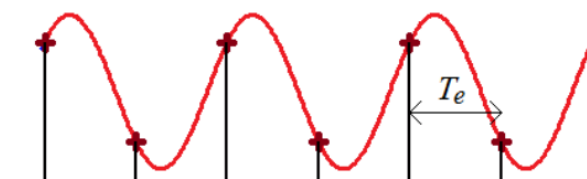
■ Choix de la fréquence d'échantillonnage



Recouvrement spectral
→ Information perdue

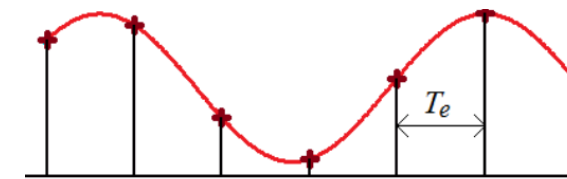


Avec moins de deux points par période, il existe une autre sinusoïde de fréquence inférieure (en pointillés), qui passe par les mêmes échantillons.



Si la condition de Shannon est respectée (au moins 2 points par période), alors le signal peut être parfaitement restitué.

Suréchantillonnage
→ ressources mémoire ++



Le suréchantillonnage facilite la conception du filtre anti-repliement et permet de diminuer le bruit présent dans la bande utile, mais ce au détriment de la mémoire utilisée.

Condition de Shannon (3 / 3)

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur B. Modélisation C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

A. Rôle B. Filtre classique C. Gabarit D. Butterworth E. Tchebychev F. Synthèse

EXEMPLE 1

Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage pour un signal audio ($F \in [0 ; 20 \text{ kHz}]$) ?

La condition de Shannon s'écrit $f_e > 2 f_{MAX}$

$$\Leftrightarrow f_e > 2 \cdot 20 \text{ kHz} \Leftrightarrow f_e > 40 \text{ kHz}$$

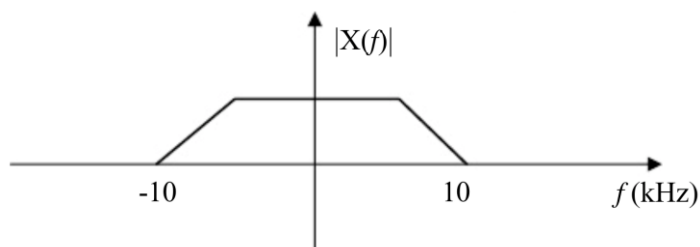
→ Fréquence d'échantillonnage des CD : $f_e = 44,1 \text{ kHz}$

Support	Fréquence d'échantillonnage
CD audio (1982)	44,1 kHz
DVD (1995)	48 kHz
téléphonie	8 kHz
Radio numérique (2011)	22,5 kHz

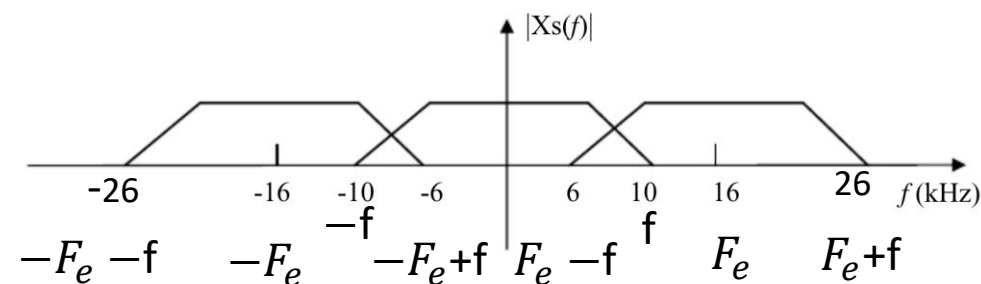
EXEMPLE 2

Soit le spectre représenté ci-dessous.

- Quelle fréquence d'échantillonnage minimale doit-on choisir ?
- Représenter le spectre échantillonné à 16 kHz.



$f_{max} = 10 \text{ kHz}$
donc $f_e > 20 \text{ kHz}$



2 Échantillonnage réel

L'échantillonneur bloqueur

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

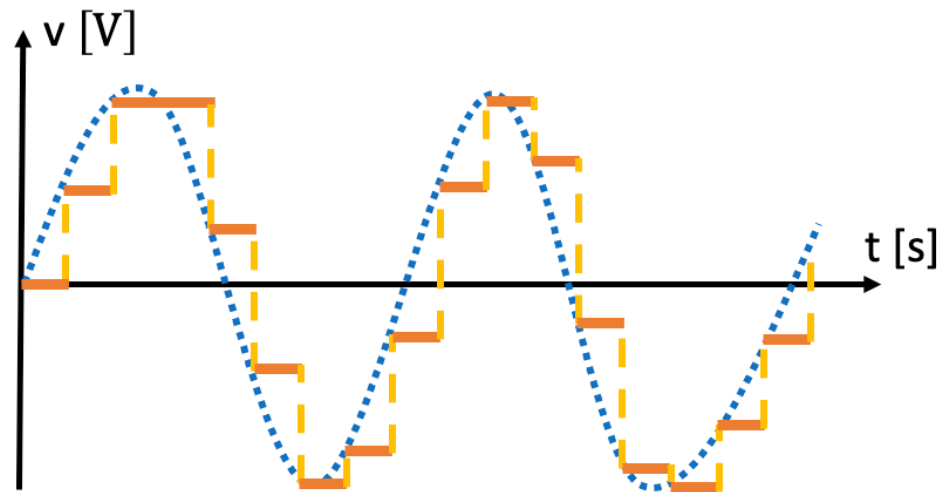
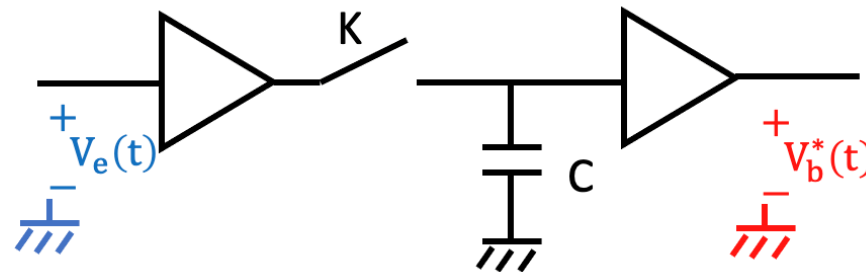
II. Échantillonnage réel

- A. **Bloqueur**
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

- En réalité, la prise d'échantillon prend un certain temps et l'on a recours à un **échantillonneur-bloqueur**.
- Exemple : LF398 - interrupteur piloté à la fréquence F_e (transistor MOS)



- K fermé : **prise d'échantillon**
 - Charge / décharge du condensateur
 - Objectif : avoir $V_b^*(t) = V_e(t)$
- K ouvert : **phase de blocage**
 - Signal maintenu constant par C

Modélisation de l'effet de l'E-B (1 / 2)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

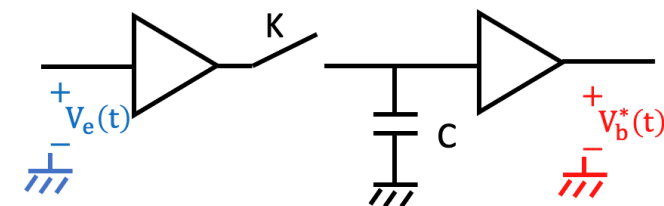
- A. Bloqueur
- B. **Modélisation**
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ Hypothèses :

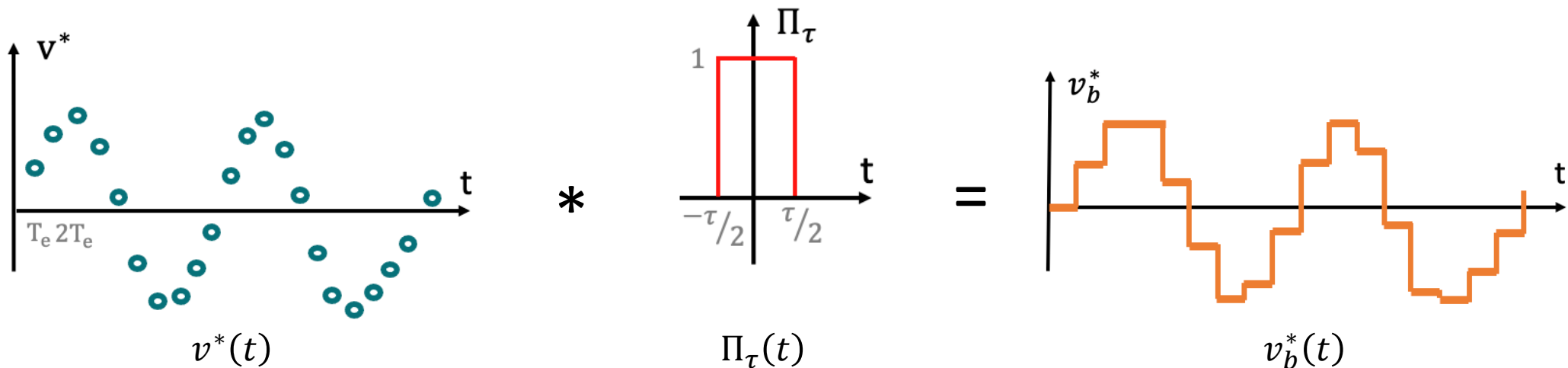
- La prise d'échantillon est immédiate ($\Delta t \approx 0$) ;
- La durée du maintien est de l'ordre de T_e .



$$\tau = R_{ON}C$$

■ Question : Quel est l'effet du bloqueur sur le signal échantillonné ?

■ Le bloqueur peut être modélisé par une **porte de temps caractéristique τ** : $v_b^*(t) = v^*(t) * \Pi_\tau(t)$



Modélisation de l'effet de l'E-B (2 / 2)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. **Modélisation**
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ Plancherel : $v_b^*(t) = v^*(t) * \Pi_\tau(t) \xrightarrow{FFT} V_b^*(f) = V^*(f) \cdot \mathcal{F}\{\Pi_\tau(t)\}$

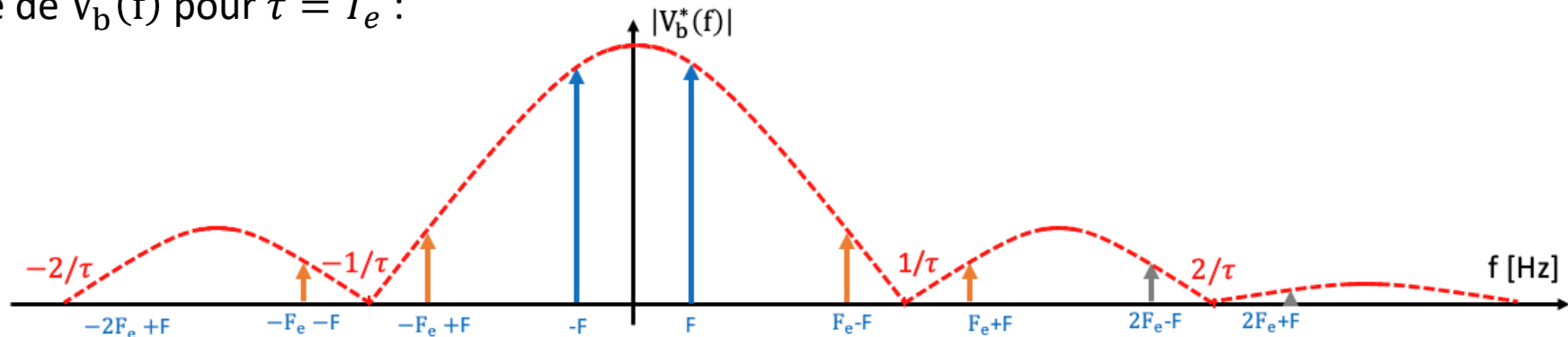
$$\Leftrightarrow V_b^*(f) = \left(V(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e) \right) \cdot (\tau \text{sinc}(\pi f \tau))$$

■ d'où finalement :

$$V_b^*(f) = \frac{\tau}{T_e} V(f) * \text{sinc}(\pi f \tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kF_e)$$

s'annule tous les $\frac{1}{\tau}$ inchangé

■ Allure de $V_b^*(f)$ pour $\tau = T_e$:



→ Le bloqueur atténue l'amplitude des raies et l'annule tous les kF_e .

Dimensionnement du bloqueur (1 / 2)

I. Échantillonnage idéal

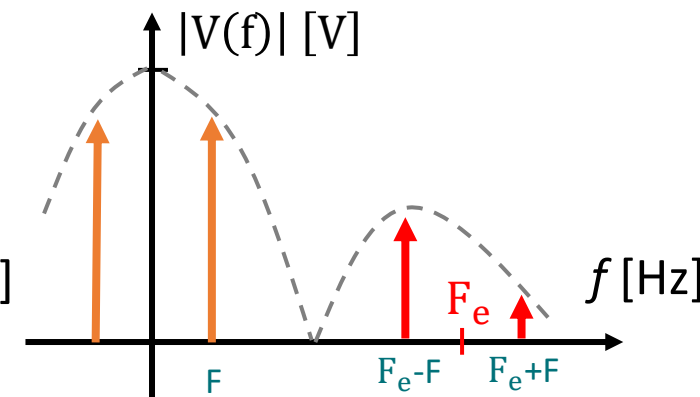
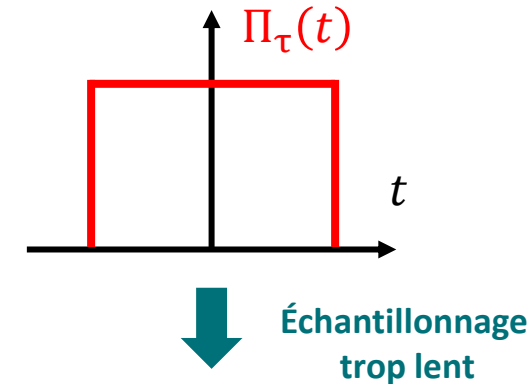
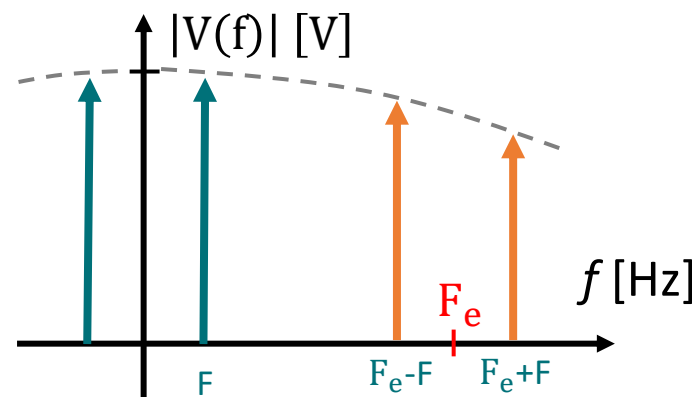
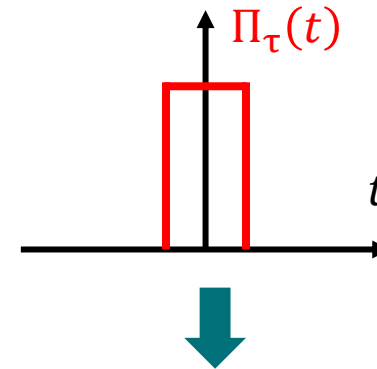
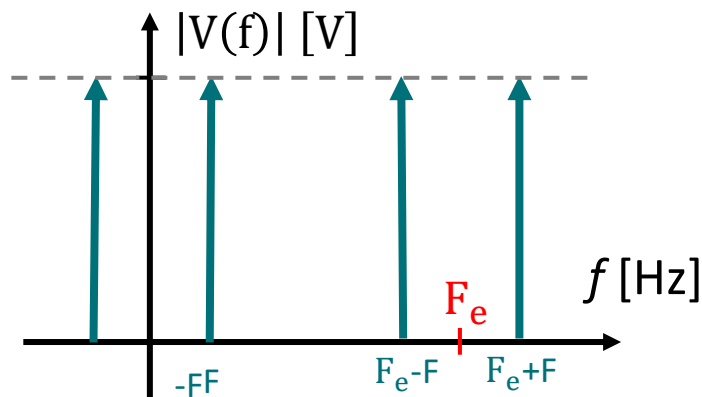
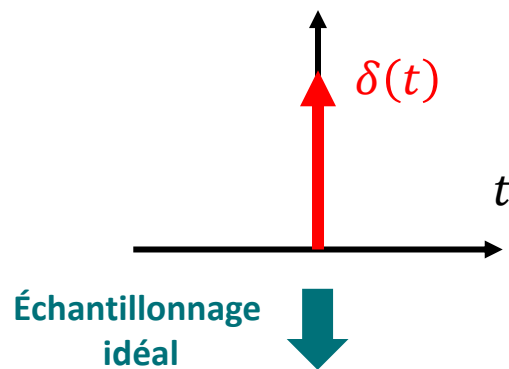
- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse



■ Le CAN mettant du temps à convertir, τ ne peut malheureusement pas être nul (Dirac).

■ Afin de réduire la largeur de la porte, on peut jouer avec la fréquence d'échantillonnage, mais aussi avec le temps de charge du condensateur, ce qui aurait un effet similaire à la réduction du rapport cyclique.

Dimensionnement du bloqueur (2 / 2)

I. Échantillonnage idéal

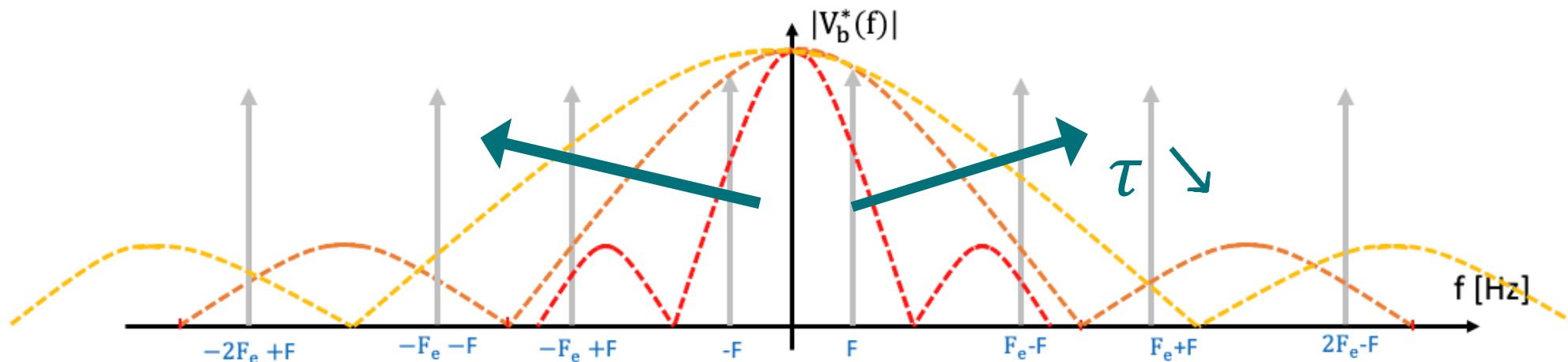
- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

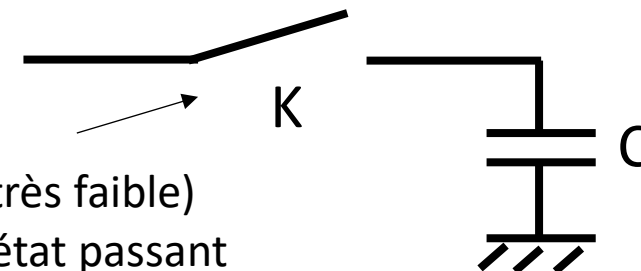
III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse



■ Une fois T_e fixé, il faut donc que la charge du condensateur soit la plus rapide possible ($\tau = RC$ petit), afin d'avoir une porte étroite et donc un lobe le plus large possible, et donc une atténuation des raies la plus faible possible.

$R_{DS,ON}$: résistance (très faible) du transistor MOS à l'état passant



Choix de la capacité du bloqueur

$$R_{DS,ON} C = \frac{T_e}{10} \Rightarrow C = \frac{T_e}{10 R_{DS,ON}}$$

3

Filtre anti-repliement

Rôle du filtre anti-repliement

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

A. Rôle

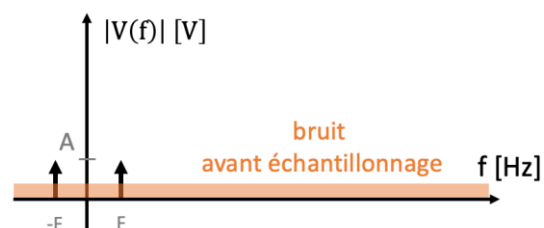
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ L'échantillonnage amplifie le bruit et il faut donc le filtrer avant l'échantillonnage à l'aide d'un **filtre anti-repliement**.

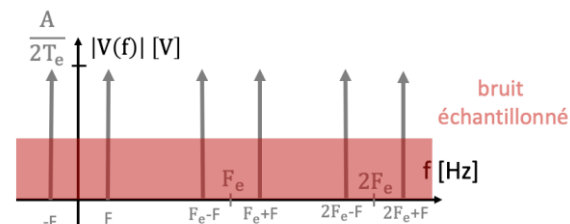
■ En présence d'un filtre d'anti-repliement qui est typiquement un **filtre passe-bas**, les fréquences inférieures à F_{MAX} sont conservées et les fréquences supérieures à $F_e - F_{MAX}$ sont rejetées.

■ Remarque importante : **le filtre anti-repliement fixe la fréquence max du signal**, ce qui influe directement sur la condition de Shannon ($f_e > 2 f_{MAX}$). On passe d'une plage de fréquence infinie à un intervalle fini ($f_{MAX} = f_c$).

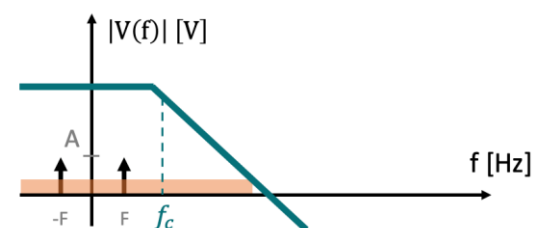
Sans filtre



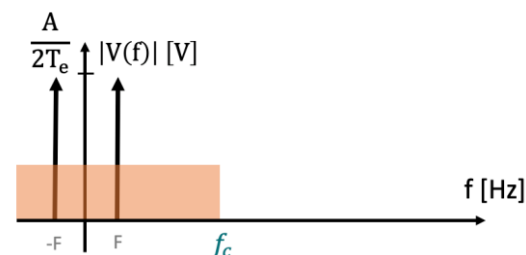
échantillonnage



Avec filtre



échantillonnage



Rappels sur le passe-bas du 1^{er} ordre

I. Échantillonnage idéal

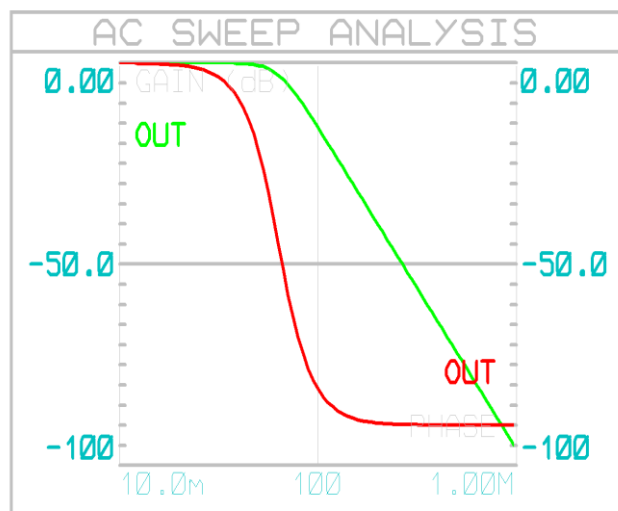
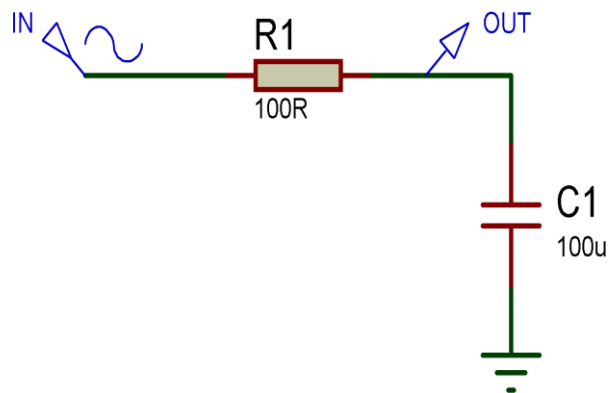
- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse



$$\blacksquare \text{ On a } \underline{H}(j\omega) = \frac{u_s(j\omega)}{u_e(j\omega)} = \frac{\frac{Z_C}{Z_R + Z_C} u_e(j\omega)}{u_e(j\omega)} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$= \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{-j\frac{1}{\omega C}}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\blacksquare |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{|1|}{|1 + jRC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\blacksquare \text{ À la fréquence de coupure, on a } |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{On a donc } \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + RC\omega_c = 2 \Leftrightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \text{ d'où } f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\blacksquare \text{ La bande passante est }] -\infty; f_c] \text{ donc }] -\infty; \frac{1}{2\pi RC}]$$

Rappels sur l'ordre d'un filtre passif

I. Échantillonnage idéal

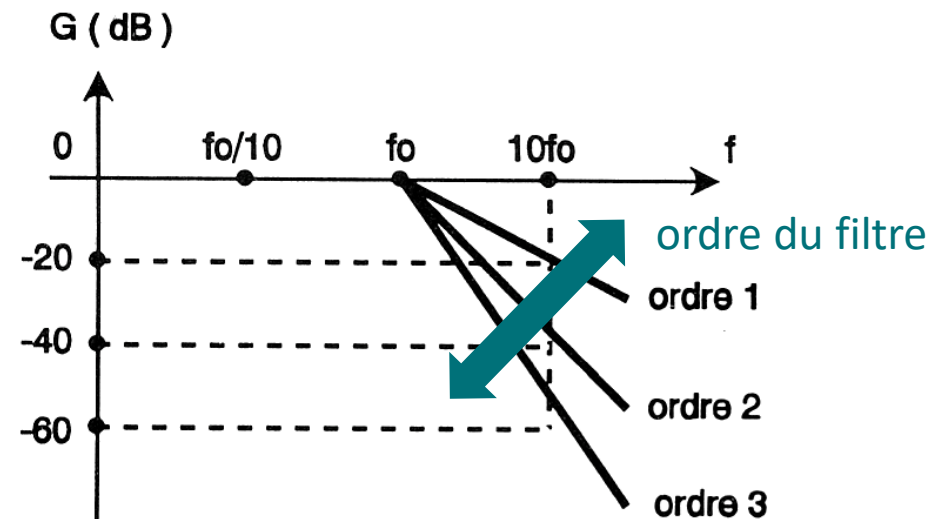
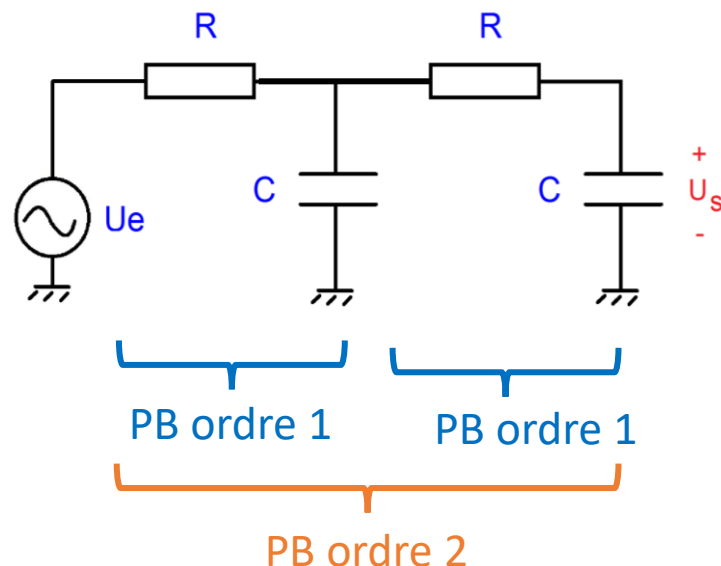
- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse



■ On distingue l'ordre d'un filtre par la pente du gain en fonction de la fréquence : la pente est de « n fois ± 20 dB / décade » où n est l'ordre du filtre.

■ On peut augmenter l'ordre d'un filtre en mettant en série des filtres du 1^{er} ordre.

Exemple pour un filtre du 2nd ordre : le signal de sortie du premier filtre du 1^{er} ordre est injecté dans le second filtre du 1^{er} ordre et l'atténuation sera de deux fois 20 dB / décade soit 40 dB / décade.

■ Bien souvent l'ordre du filtre correspond au nombre de condensateur ou d'inductance.

Rappels : défaut des filtres passifs

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ Les filtres passifs augmentent l'impédance du circuit.

■ Ils ne peuvent qu'atténuer un signal et pas l'amplifier ($G \leq 0$)

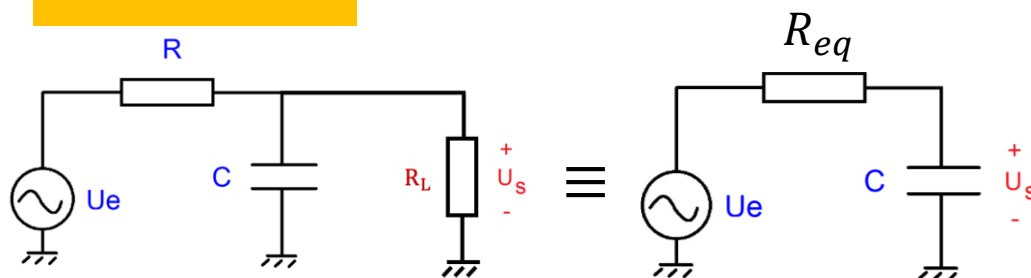
$ V_s/V_e $	0,000 001	0,01	0,1	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100	1 000 000
G [dB]	-120	-40	-20	-6	-3	0	3	6	20	40	120

atténuation

amplification

■ Les caractéristiques du filtre dépendent fortement de la charge du circuit

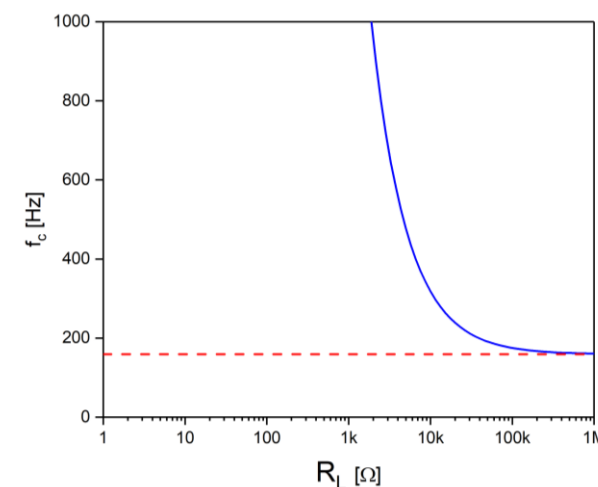
EXEMPLE



$$Z_{eq} = R_{eq} = R // R_L = \frac{R R_L}{R + R_L}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_{eq} C} = \frac{1}{2\pi \frac{R R_L}{R + R_L} C}$$

Cas arbitraire où $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$:



f_c sans
la présence de R_L

Défaut des filtres actifs

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

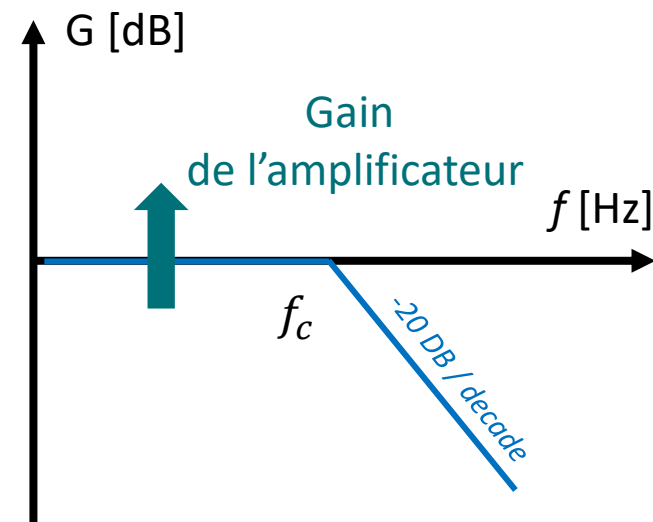
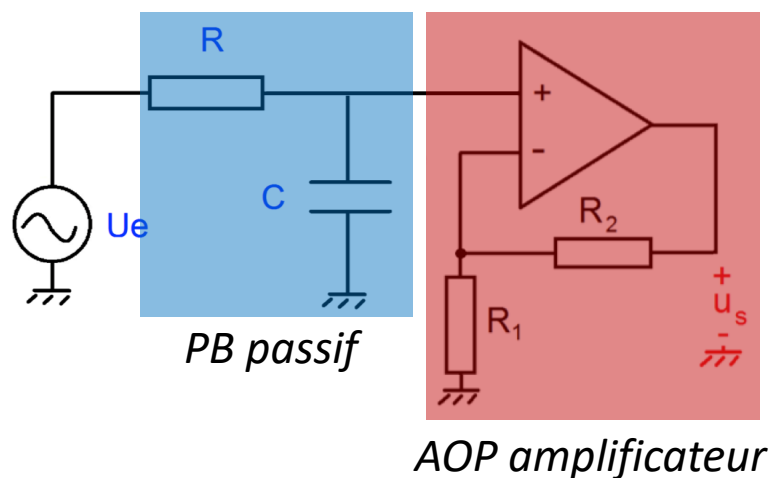
III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

- Afin de palier à ces désagréments, on ajoute un composant actif, la plupart du temps un AOP à un filtre passif et l'on obtient un **filtre actif**.

EXEMPLE

Filtre passe-bas actif



- Cependant, pour notre filtre anti-repliement, il nous faut un filtre :

- Insensible à la charge ✓
- À gain nul (signal inchangé) dans la bande passante ✗



Gabarit d'un filtre

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

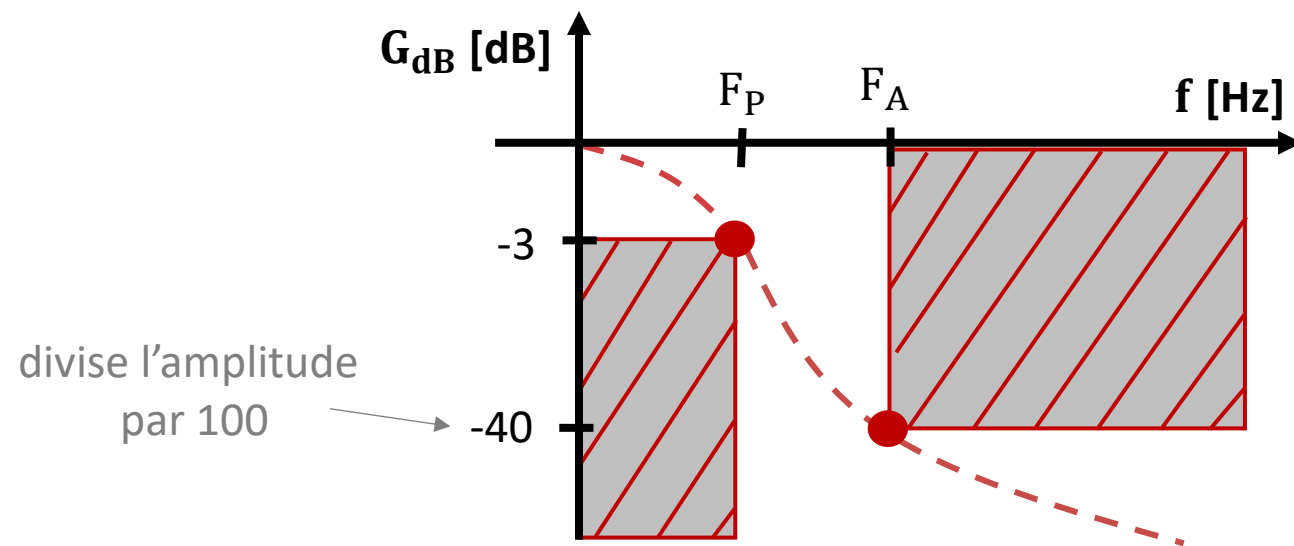
- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. **Gabarit**
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ Pour concevoir un filtre d'ordre élevé, il ne suffit pas de monter des filtres en cascade. Il faut chercher la fonction de transfert qui répond à un gabarit cherché.

■ Le **gabarit d'un filtre** est un tracé qui définit les zones où le gain de la fonction de transfert doit passer.

■ On définit :

- la bande passante du filtre : $]-\infty ; F_P]$
- l'ondulation possible dans cette bande : - 3 dB
- La fréquence à partir de laquelle on garantit une atténuation forte : F_A à -40 dB



■ La **synthèse du filtre** correspond à la recherche de la fonction de transfert qui s'inscrit dans le gabarit.

Fonctions d'approximation

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

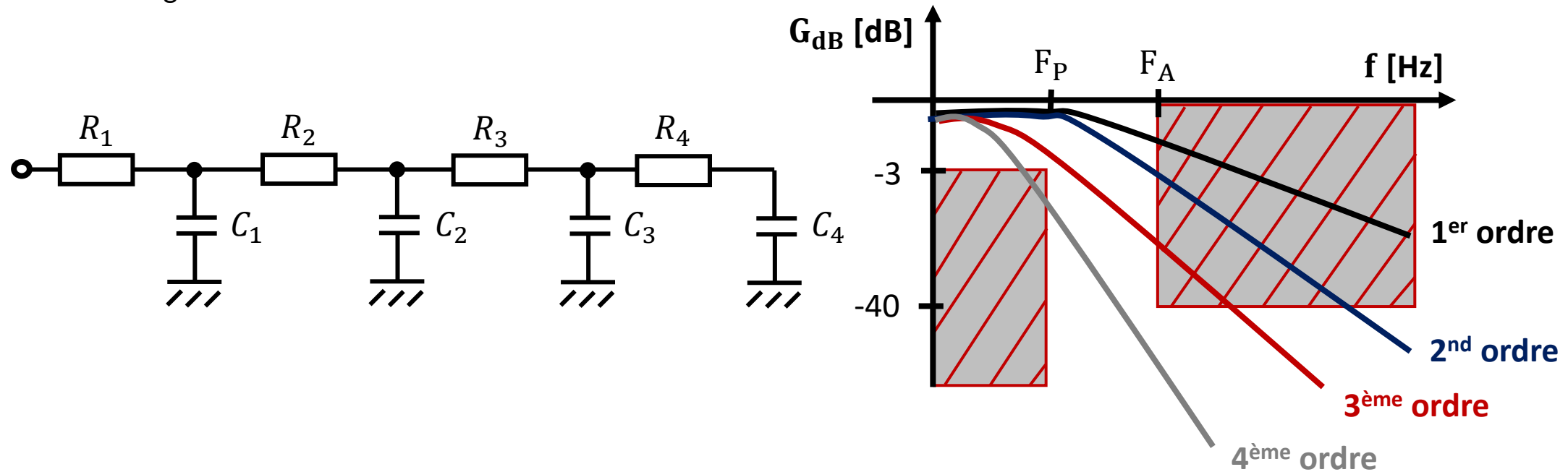
II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

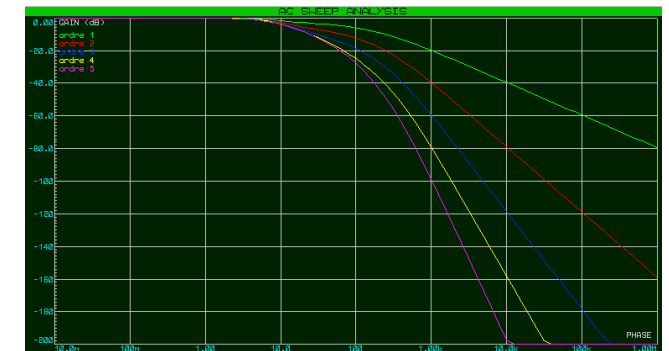
- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

- Le branchement en cascade de filtres « classiques » ne permet pas de trouver une fonction de transfert qui s'inscrit dans un gabarit :



- On a alors recourt à des **fonctions d'approximation**.

- Nous en verrons deux dans le cadre de ce cours :
 - Fonction d'approximation de **Butterworth**
 - Fonction d'approximation de **Chebyshev**



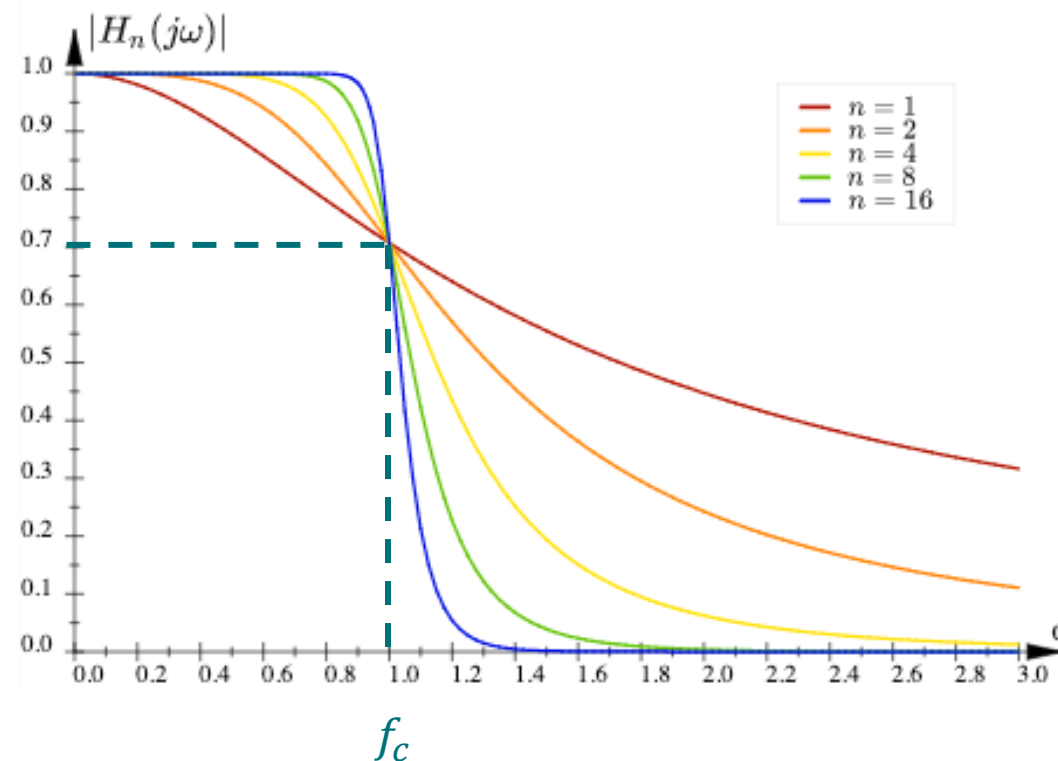
Filtre de Butterworth (1 / 4)



Stephen Butterworth
[1885 – 1958]

- Décrit par Stephen Butterworth dans les années 1930 ;
- Filtre conçu pour posséder **un gain très plat dans sa bande passante** ;
- Quel que soit l'ordre du filtre, **la réponse fréquentielle passe par -3 dB pour $f = f_c$** .

$G_{MAX} - 3 \text{ dB}$



- L'expression de la réponse fréquentielle $H(j\omega)$ **ne dépend que de l'ordre n du filtre**.

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation
B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur
B. Modélisation
C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

A. Rôle
B. Filtre classique
C. Gabarit
D. Butterworth
E. Tchebychev
F. Synthèse

Filtre de Butterworth (2 / 4)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth**
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ On note n l'ordre du filtre (plus n est grand et plus le filtre est sélectif) et f_c sa fréquence de coupure. La fonction d'approximation de Butterworth s'écrit :

Fonction d'approximation de Butterworth

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

ordre du filtre
fréquence de coupure

Ordre	Fonction de transfert
2	$\frac{1}{1 + 1,4142 \cdot \frac{jf}{f_c} + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}$
3	$\frac{1}{1 + \frac{jf}{f_c} + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{jf}{f_c}}$
4	$\frac{1}{1 + 1,8477 \frac{jf}{f_c} + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + 0,7653 \frac{jf}{f_c} + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}$

Filtre de Butterworth (3 / 4)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth**
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

$$\begin{aligned}
 20 \log(|H|) = -40 &\Leftrightarrow 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_e}{f_{MAX}} \right)^{2n}}} \right) = -40 \Leftrightarrow \left(\log \left(1 + \left(\frac{f_e}{f_{MAX}} \right)^{2n} \right) \right)^{-1/2} = -2 \Leftrightarrow \log \left(1 + \left(\frac{f_e}{f_{MAX}} \right)^{2n} \right) = 4 \\
 &\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{f_e}{f_{MAX}} \right)^{2n} = 10^4 \Leftrightarrow \left(\frac{f_e}{f_{MAX}} \right)^{2n} = 10^4 - 1 \Leftrightarrow 2n \log \left(\frac{f_e}{f_{MAX}} \right) = \log(10^4 - 1)
 \end{aligned}$$

Ordre du filtre de Butterworth

$$n = \frac{1}{2} \frac{\log(10^4 - 1)}{\log \left(\frac{f_e}{f_{MAX}} \right)}$$

→ Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée et moins le filtre a besoin d'être d'un ordre élevé ($f_e \nearrow \Leftrightarrow n \searrow$).

EXEMPLE

$$f_e = 10f_{MAX} \Rightarrow n = 2$$

Filtre de Butterworth (4 / 4)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

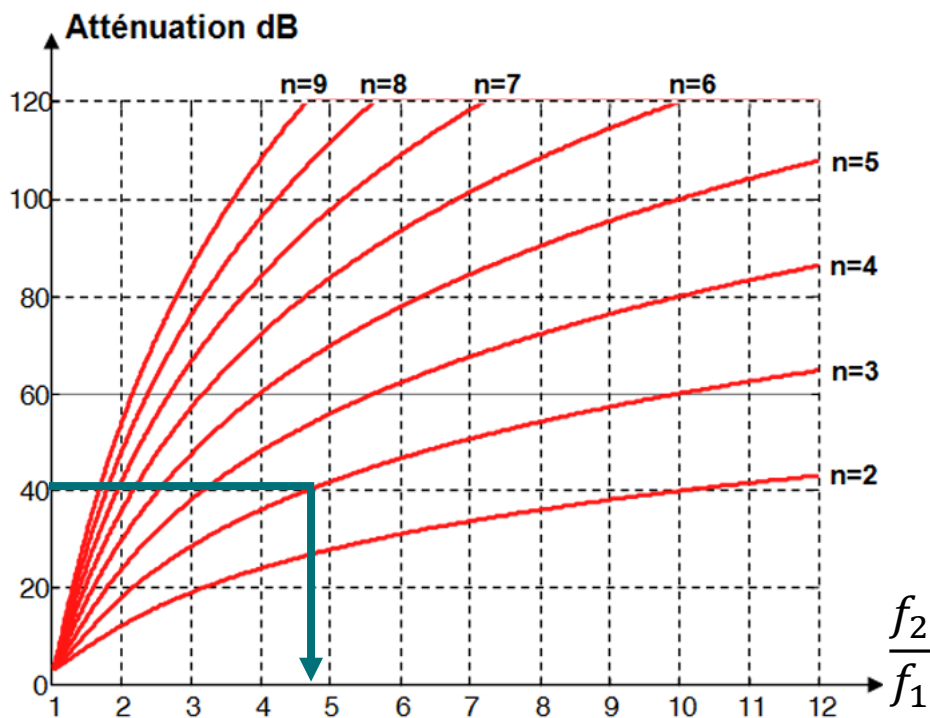
III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

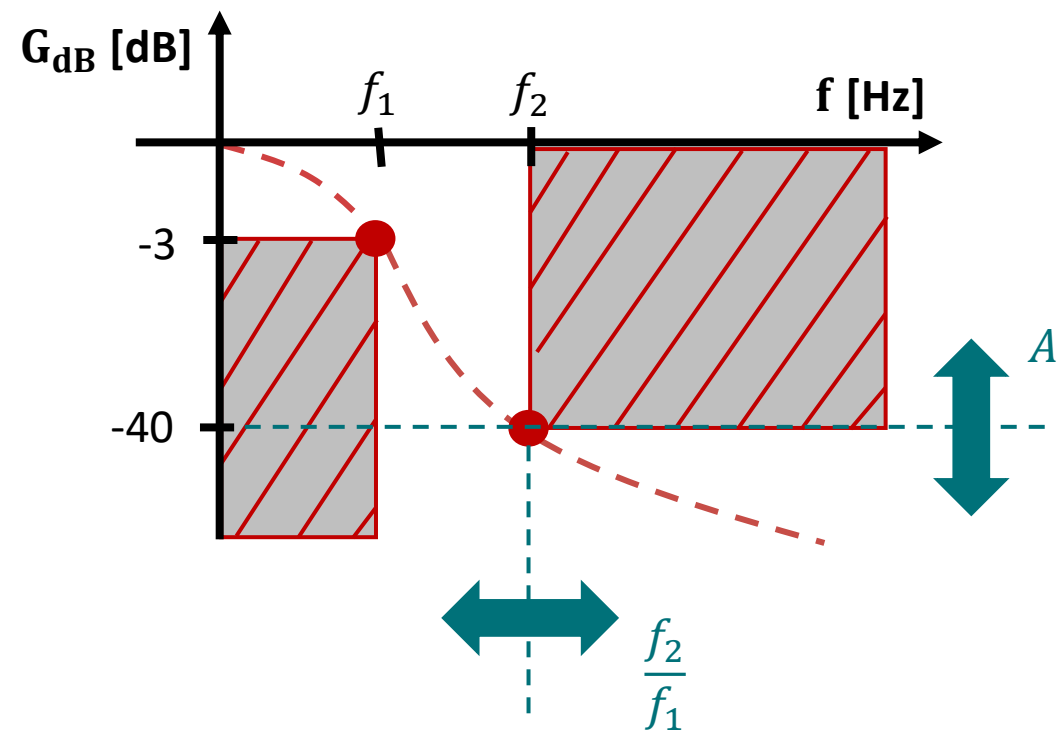
■ En utilisant les abaques :

EXEMPLE

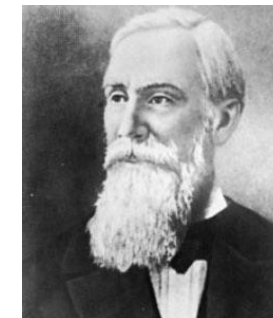
$$f_e = 4,5 f_{MAX}$$



$$|H|(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{jf}{f_c} + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{jf}{f_c}}$$

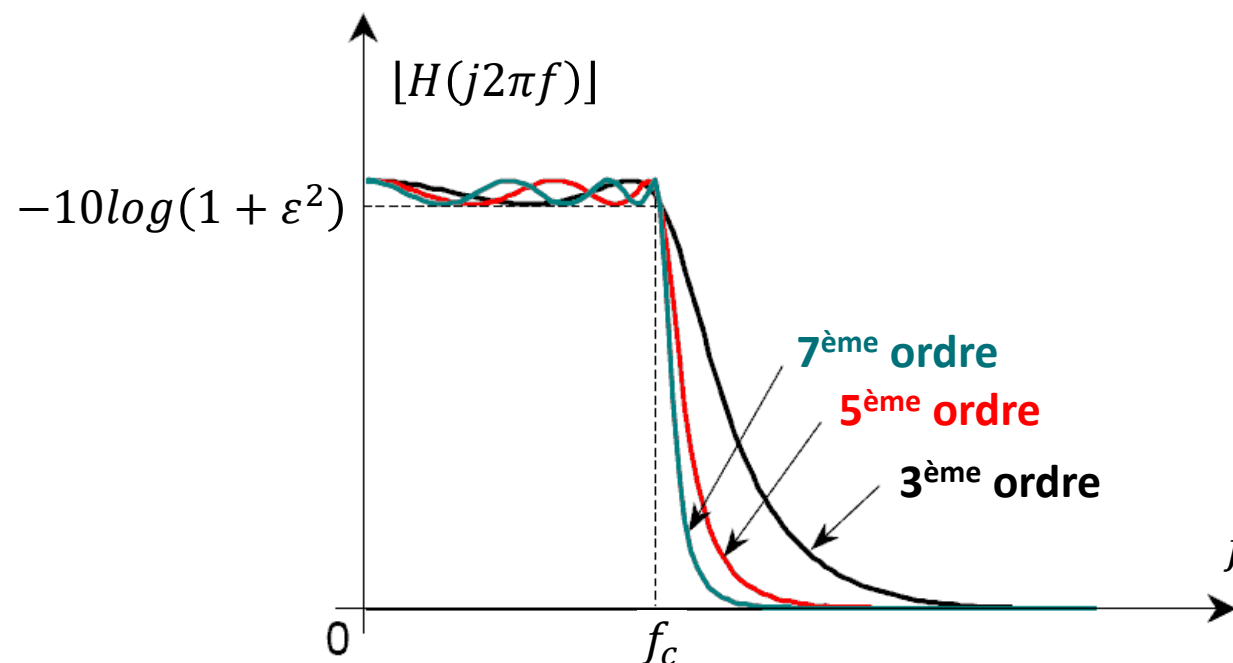


Filtre de Tchebychev (1 / 3)



Pafnouti Tchebychev
[1821 - 1894]

- Décrit par Pafnouti Tchebychev (*Chebyshev* en anglais)
- Filtre **ayant une ondulation dans la bande passante mais présentant une forte atténuation**



- ε permet de fixer l'ondulation dans la bande passante.

I. Échantillonnage idéal

A. Modélisation
B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

A. Bloqueur
B. Modélisation
C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

A. Rôle
B. Filtre classique
C. Gabarit
D. Butterworth
E. **Tchebychev**
F. Synthèse

Filtre de Tchebychev (2 / 3)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

■ On note n l'ordre du filtre (plus n est grand et plus le filtre est sélectif) et f_c sa fréquence de coupure. La fonction d'approximation de Tchebychev s'écrit :

Fonction d'approximation de Tchebychev

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left(\frac{f}{f_c} \right)}}$$

fréquence de coupure

- $C_n \left(\frac{f}{f_c} \right)$ est un polynôme défini par récurrence, avec n l'ordre du filtre.

$$\begin{cases} C_0 \left(\frac{f}{f_c} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{f}{f_c} \right) = \frac{f}{f_c} \\ C_{n+1} \left(\frac{f}{f_c} \right) = 2 \frac{f}{f_c} C_n \left(\frac{f}{f_c} \right) - C_{n-1} \left(\frac{f}{f_c} \right) \end{cases}$$

Ordre	Fonction de transfert
2	$\frac{0,7079}{1 + 0,9109 \frac{jf}{f_c} + 1,4125 \left(\frac{jf}{f_c} \right)^2}$
3	$\frac{1}{1 + 0,3559 \frac{jf}{f_c} + 1,1916 \left(\frac{jf}{f_c} \right)^2} \cdot \frac{1}{1 + 3,3487 \frac{jf}{f_c}}$
4	$\frac{0,7079}{1 + 0,1886 \frac{jf}{f_c} + 1,1073 \left(\frac{jf}{f_c} \right)^2} \cdot \frac{1}{1 + 2,0984 \frac{jf}{f_c} + 5,1026 \left(\frac{jf}{f_c} \right)^2}$

Filtre de Tchebychev (3 / 3)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

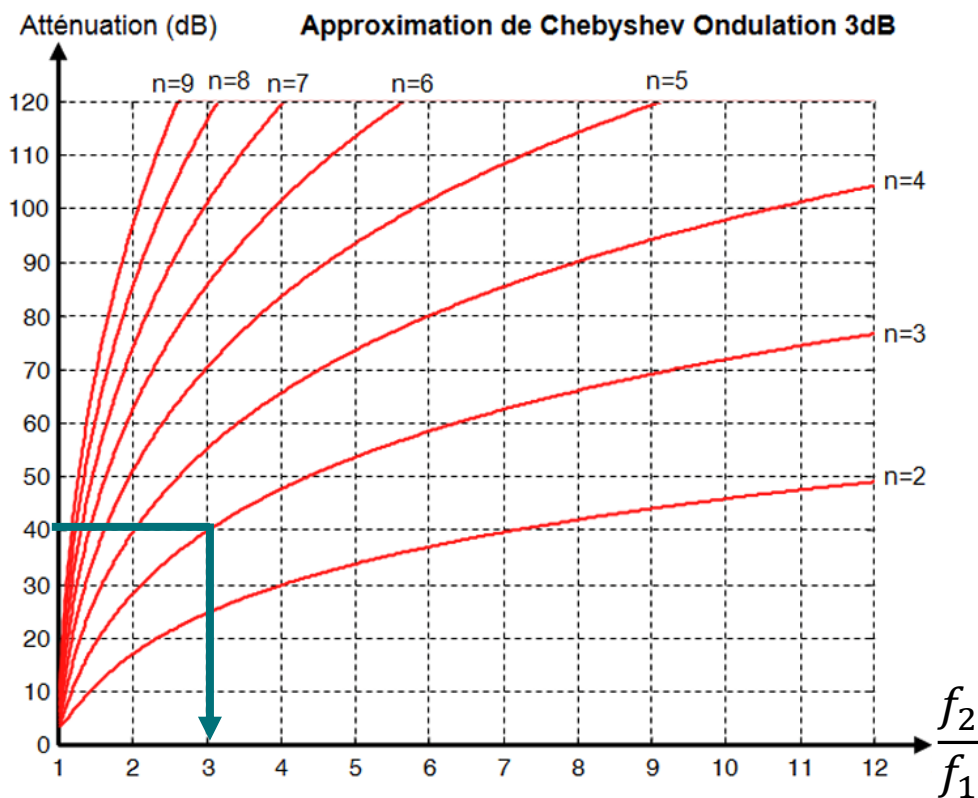
II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

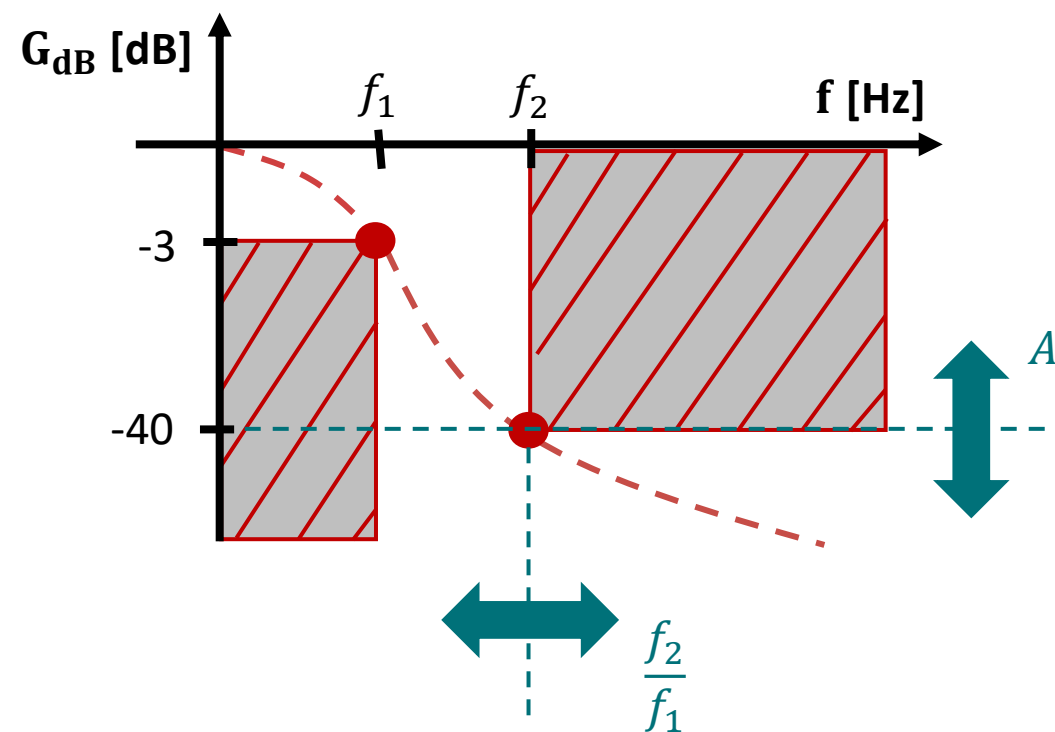
III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

EXEMPLE



$$|H|(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,3559 \frac{jf}{f_c} + 1,1916 \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + 3,3487 \frac{jf}{f_c}}$$



→ Pour une atténuation de -40 dB en ordre 3, le filtre de Tchebychev est plus sélectif que celui de Butterworth.

Mise en œuvre : structure de Sallen & Key (1 / 2)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

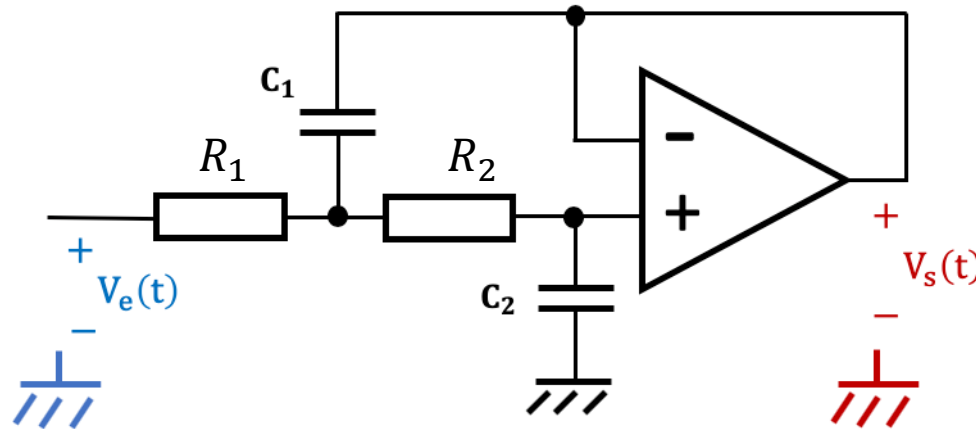
II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

- La structure de Sallen & Key permet d'implémenter des filtres actifs du 2nd ordre relativement facilement.
- Ces filtres ne comportent que des réseaux RC, ce qui leur permet d'également fonctionner à basse fréquence.



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_c} + \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + C_2(R_1 + R_2)j\omega + C_1C_2R_1R_2(j\omega)^2}$$

Fonction de transfert de la cellule de Sallen & Key (2nd ordre)

$$\begin{cases} f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_1C_2R_1R_2}} \\ 2m = \frac{C_2(R_1 + R_2)}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}} \end{cases}$$

Mise en œuvre : structure de Sallen & Key (2 / 2)

I. Échantillonnage idéal

- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

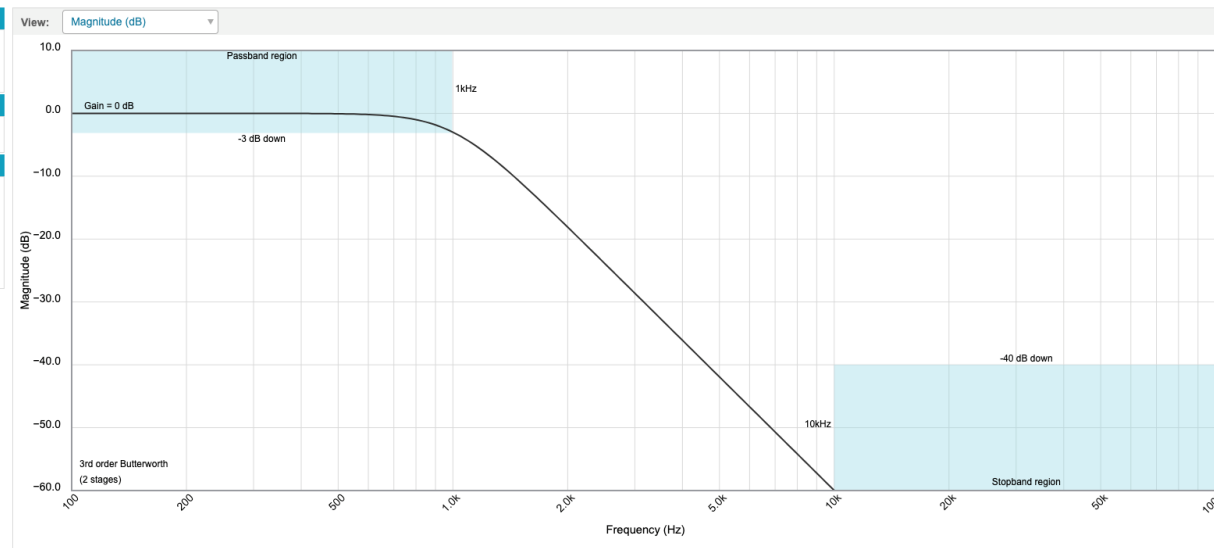
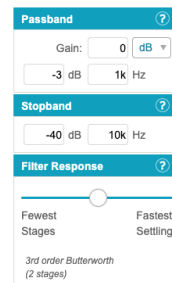
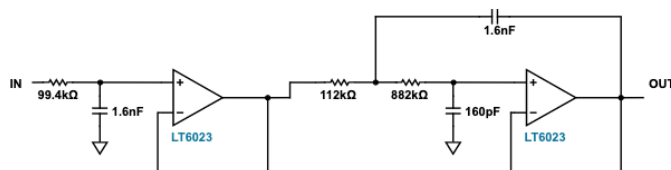
II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

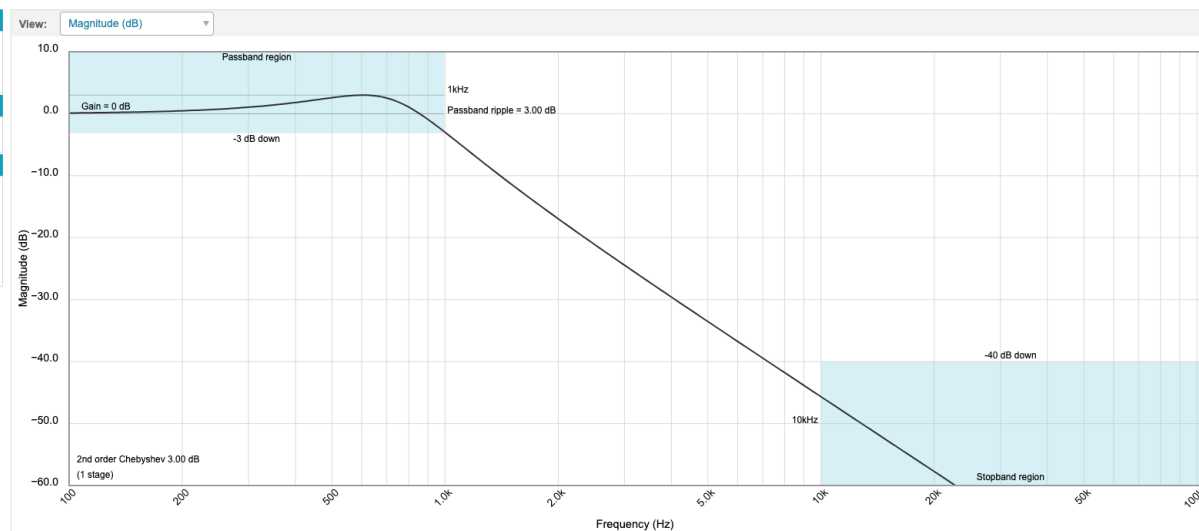
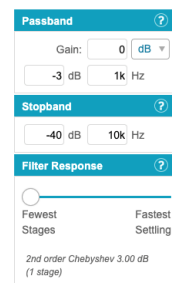
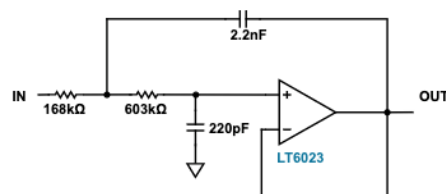
III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse

BUTTERWORTH



TCHEBYCHEV



<https://tools.analog.com/en/filterwizard/>

Mise en œuvre : structure de Sallen & Key (2 / 2)

I. Échantillonnage idéal

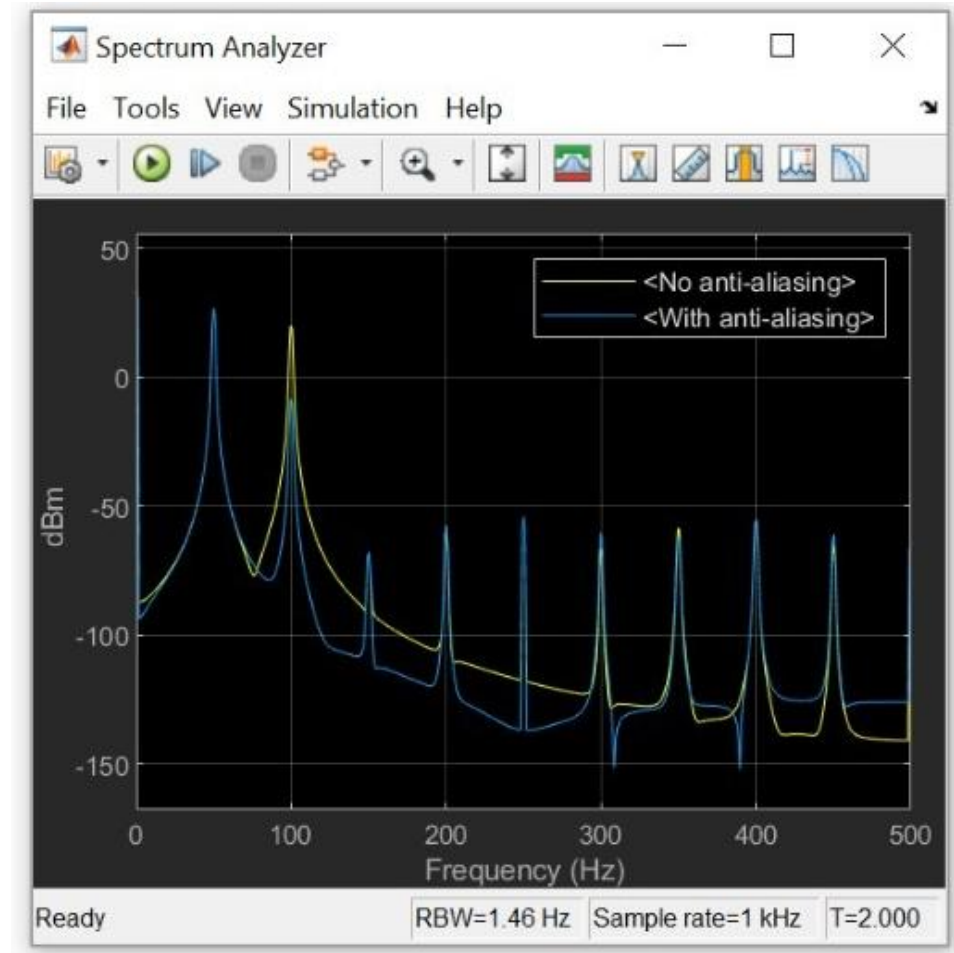
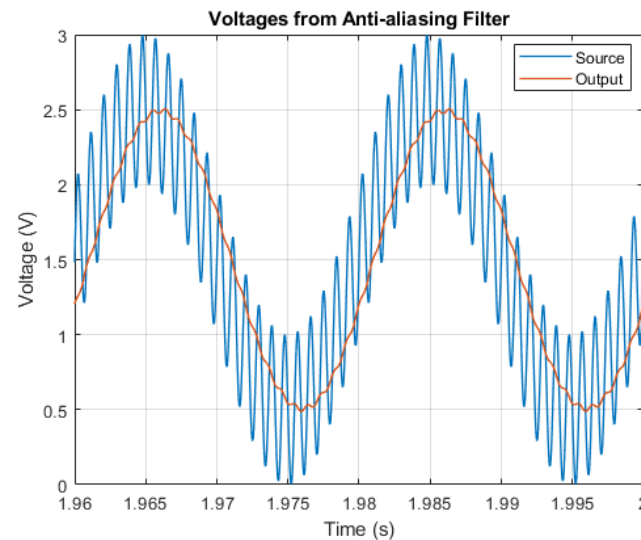
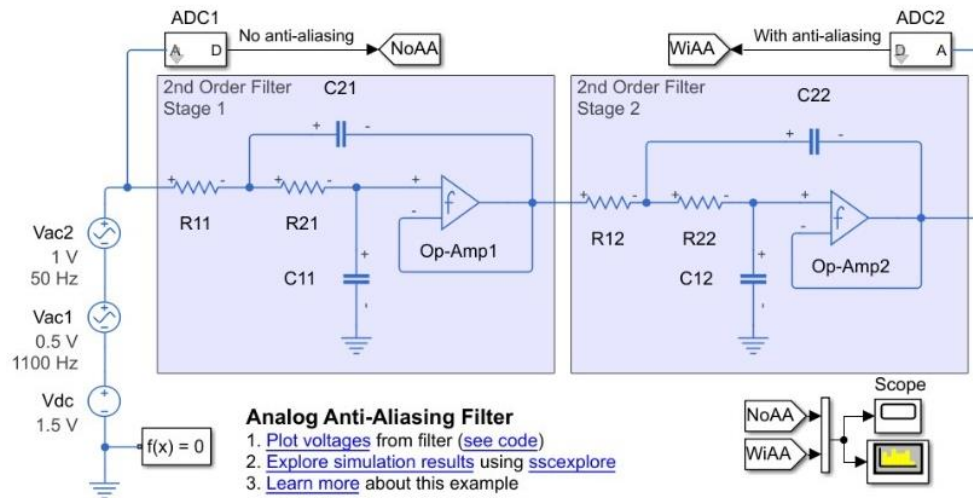
- A. Modélisation
- B. Condition de Shannon

II. Échantillonnage réel

- A. Bloqueur
- B. Modélisation
- C. Dimensionnement

III. Filtre anti-repliement

- A. Rôle
- B. Filtre classique
- C. Gabarit
- D. Butterworth
- E. Tchebychev
- F. Synthèse



<https://www.mathworks.com/help/physmod/sps/ug/analog-anti-aliasing-filter.html>

RÉSUMÉ DU COURS 3

I. Échantillonnage idéal

- Modélisation : multiplier le signal par un peigne de Dirac
- Le spectre du signal échantillonné est le spectre du signal $s(t)$ périodisé tous les $f - kF_e$
- Condition de Shannon pour éviter le recouvrement spectral

II. Échantillonnage réel

- Nécessité d'utiliser un échantillonneur bloqueur pour laisser le temps au CAN de convertir
- Modélisation : convolution avec un porte de largeur τ
- Dimensionnement de f_c et du couple $R_{DS,ON}C$: choix du transistor et de la capacité du bloqueur

III. Filtre anti-repliement

- Nécessité d'utiliser un filtre passe-bas car l'échantillonnage amplifie le bruit de fond
- Le filtre anti-repliement donne la borne maximale f_{MAX} , donnée qui sert ensuite à choisir la fréquence d'échantillonnage (condition de Shannon)
- Synthèse et réalisation de filtres de Butterworth et de Tchebychev