论文标题

Dylaaan

2022 年 4 月 21 日

目录

1 泰勒展开与劳伦展开的区别

1.1 泰勒级数和洛朗级数的定义

泰勒展开的定义:

$f(z)$ 在 z_0 为圆心的圆域内解析，则对于任意一圆域内点 z，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

证明.

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

由于

$$\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\leq 1,\quad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad |t|<1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right]^n\mathrm{d}\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n=f(z)\end{aligned}$$

□

复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开的收敛半径为:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\quad or\quad R=|z_0-z_1|\quad z_1\text{ 是离 }z_0\text{ 最近的奇点}$$

洛朗展开的定义：

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心的环域内解析，则对于该环域内任何一点 z，有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$a_n(z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint f(\xi)(\xi-z_0)^{-n-1}\mathrm{d}\xi$$

证明. 将环域的外环和内环建立一微小链接，使得 $L = C_1+C_2+\partial L-\partial L = C_1+C_2$ 为一单连通区域的边界，

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

回想起证明泰勒级数时的过程，不妨将 $\xi - z_0$ 设为 r，$z-z_0$ 设为 R，不难发现：对于 C_1，$r > R$，对于 C_2，$r < R$。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{1-R/r}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{1-r/R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{C_2}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

代入 $f(z)$ 中得到

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n
\end{aligned}$$

□

洛朗级数的收敛半径:

$$R_1 < |z-z_0| < R_2, \quad R_1 = \lim_{n\to-\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \quad R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

或者可以认为

$$R_1 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的内径}$$

$$R_2 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的外径}$$

泰勒展开的使用范围是：对于某一在复平面上，以 z_0 为圆心的圆域内部均解析，才可以使用泰勒展开得到其相应的泰勒级数。如果不解析，会发

生什么情况呢？我们尝试对 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $z_0=0$ 处进行泰勒展开，会发现由于泰勒展开的证明过程中使用到了柯西积分公式，使得 f 不适用。

柯西积分公式：假设 C 包围了 $f(z)$ 的单连通解析区域，z_0 为区域内一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

考虑到函数解析的定义，f 在 $z_0=0$ 处不解析等价为

$$f'(z)|_{z=0}\text{ 不存在}$$

1.2 适用范围的差异

考虑到柯西积分公式的证明过程：不妨用一个小圆将 $z_0=0$ 包围，其边界设为 C_r： $\forall\, z\in\Sigma_{C_r}\quad z=+re^{i\theta}$，则由柯西积分定理，

$$\oint_C\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

红色部分会在接下来的证明过程中（令 $r\to 0$）导出错误，因为

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}\quad\text{不存在}$$

这也是为什么泰勒展开仅仅适用于在圆域内全解析的情况。

而洛朗展开，通过构建合适的积分路径可以避免以上情况的发生，因此洛朗级数也可以适用于当 $f(z)$ 在 z_0 处不解析的区域。例如：对于 $f(z)=1/z$，通过将泰勒展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

中的 z^n 替换为 $(\frac{1}{z})^n$，使得原式的 $f(z)$ 变为 $f(1/z)$。

1.3 表达式的差异

考虑泰勒级数的系数表达式：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{For } n \geq 0$$

其中 C_1 是任一解析圆域内部可求长的包围住了 z_0 的闭合曲线。

以及洛朗级数的系数表达式：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \quad \text{For } -\infty \leq n \leq +\infty$$

其中 C_2 是任一解析环域内部可求长的包围住了 z_0 的闭合曲线。

不难发现，当函数 $f(z)$ 仅仅拥有可去奇点时 ($\forall\, n < 0,\ a_n = 0$)，其洛朗展开就是其泰勒展开。因为任一 C_2，一定也是其 C_1。同时，由于洛朗展开和泰勒展开的唯一性，我们可以部分使用泰勒展开帮助计算洛朗展开。

例 1.1. 对 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ $\quad |z| > 1$ 进行洛朗展开。

$$f(1/z) = \frac{z^2}{1-z} = z^2\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=-2}^{\infty} z^n \qquad |z| > 1$$

1.4 特殊点的差异

一个函数如果以 z_0 为圆心的环域做洛朗展开，那么根据其洛朗展开的系数，z_0 可以是 $f(z)$ 的：

1. 可去奇点，如果其展开不含负数项且包含常数项。
2. $m-$ 阶零点，如果其最小的正数数项是 m 阶的。
3. $m-$ 阶极点，如果其最小的负数项是 $-m$ 阶的。
4. 本性奇点，如果其展开包含无穷负数项。

当 $f(z)$ 在整个圆域内解析时，其洛朗展开就是其泰勒展开。且由于其解析性质，z_0 不可能是 $f(z)$ 的极点和本性奇点。换言之，泰勒展开不可能拥有极点和本性奇点，只有可能拥有零点和可去奇点。而洛朗展开则可能拥有上述四种特殊点的的任一一种 (不过显然 z_0 只会是四种特殊点中的其中一种)。

不妨假设 b 是 $f(z)$ 的 $m-$ 阶极点，那么：

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \ldots + a_0 + a_1(z-b) + \ldots \\ &= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \ldots\right] \\ &= (z-b)^{-m}\phi(z), \quad 0 < |z-b| < R \end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m \frac{1}{\phi(z)}$$

换言之，如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，那么 z_0 也是 $1/f(z)$ 的 m 阶零点。

2 复数域上根式函数和对数函数多值性的来源

众所周知，复数域上的根式函数

$$r_n(z) = \sqrt[n]{z}$$

和对数函数

$$L(z) = \mathrm{Ln}(z)$$

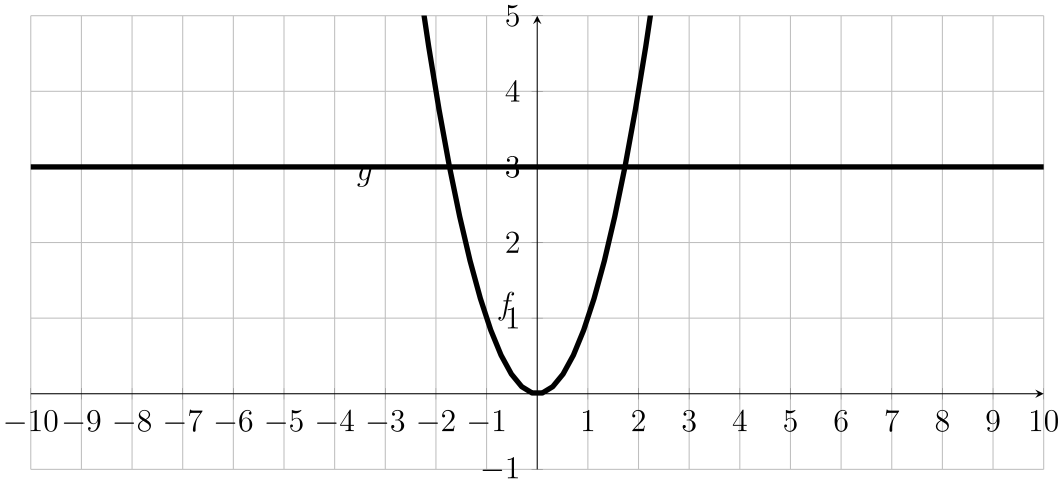
拥有其在实数域上所不具备的多值性。下面我们对两个函数分别进行讨论。

2.1 根式函数的多值性来源

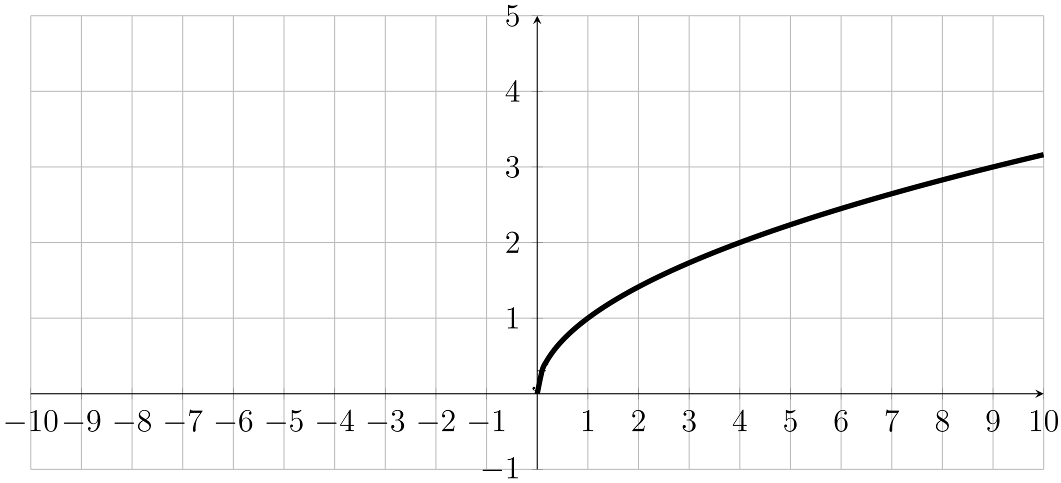
实数域中，根式函数定义为指数函数的反函数：

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x) = y = x^n \to f^{-1}(y) = x = \sqrt[n]{y}$$

实数域中的根式函数有时也会遇到“多值性”。考虑函数 $f(x) = x^2$，其反函数 $f^{-1}(y)$ 似乎存在两个值对应。如图：



对于 $f(x) = x^2$，任一一个给定的 y 都有两个 x 值与 y 对应，这意味着 $y = x^2$ 的严格定义的反函数有可能具备某种多值性。然而，为何实数域上，当我们定义其反函数时，只定义在了 $y > 0$ 的情况？



这可能是为了简化实数域内的相关计算。由欧拉公式，在复数域内，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$