论文标题

Dylaaan

2022 年 4 月 21 日

目录

1 泰勒展开与劳伦展开的区别

1.1 泰勒级数和洛朗级数的定义

泰勒展开的定义:

$f(z)$ 在 z_0 为圆心的圆域内解析，则对于任意一圆域内点 z，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

证明.

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

由于

$$\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\leq 1,\quad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad |t|<1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right]^n\mathrm{d}\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n=f(z)\end{aligned}$$

□

复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开的收敛半径为:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\quad or\quad R=|z_0-z_1|\quad z_1\text{ 是离 }z_0\text{ 最近的奇点}$$

洛朗展开的定义：

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心的环域内解析，则对于该环域内任何一点 z，有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint f(\xi)(\xi-z_0)^{-n-1}\mathrm{d}\xi$$

证明. 将环域的外环和内环建立一微小链接，使得 $L = C_1+C_2+\partial L-\partial L = C_1+C_2$ 为一单连通区域的边界，

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

回想起证明泰勒级数时的过程，不妨将 $\xi - z_0$ 设为 r，$z-z_0$ 设为 R，不难发现：对于 C_1，$r > R$，对于 C_2，$r < R$。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{1-R/r}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{1-r/R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{C_2}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

代入 $f(z)$ 中得到

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n
\end{aligned}
$$

□

洛朗级数的收敛半径:

$$
R_1 < |z-z_0| < R_2, \quad R_1 = \lim_{n\to-\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \quad R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|
$$

或者可以认为

$$R_1 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的内径}$$

$$R_2 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的外径}$$

泰勒展开的使用范围是:对于某一在复平面上,以 z_0 为圆心的圆域内部均解析,才可以使用泰勒展开得到其相应的泰勒级数。如果不解析,会发

生什么情况呢？我们尝试对 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $z_0=0$ 处进行泰勒展开，会发现由于泰勒展开的证明过程中使用到了柯西积分公式，使得 f 不适用。

柯西积分公式：假设 C 包围了 $f(z)$ 的单连通解析区域，z_0 为区域内一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

考虑到函数解析的定义，f 在 $z_0=0$ 处不解析等价为

$$f'(z)|_{z=0}\text{ 不存在}$$

1.2 适用范围的差异

考虑到柯西积分公式的证明过程：不妨用一个小圆将 $z_0=0$ 包围，其边界设为 C_r： $\forall\, z\in\Sigma_{C_r}\quad z=+re^{i\theta}$，则由柯西积分定理，

$$\oint_C\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

红色部分会在接下来的证明过程中 (令 $r\to 0$) 导出错误，因为

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}\quad\text{不存在}$$

这也是为什么泰勒展开仅仅适用于在圆域内全解析的情况。

而洛朗展开, 通过构建合适的积分路径可以避免以上情况的发生，因此洛朗级数也可以适用于当 $f(z)$ 在 z_0 处不解析的区域。例如：对于 $f(z)=1/z$，通过将泰勒展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

中的 z^n 替换为 $(\frac{1}{z})^n$，使得原式的 $f(z)$ 变为 $f(1/z)$。

1.3 表达式的差异

考虑泰勒级数的系数表达式：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{For } n \geq 0$$

其中 C_1 是任一解析圆域内部可求长的包围住了 z_0 的闭合曲线。

以及洛朗级数的系数表达式：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \quad \text{For } -\infty \leq n \leq +\infty$$

其中 C_2 是任一解析环域内部可求长的包围住了 z_0 的闭合曲线。

不难发现，当函数 $f(z)$ 仅仅拥有可去奇点时 ($\forall\, n < 0,\ a_n = 0$)，其洛朗展开就是其泰勒展开。因为任一 C_2，一定也是其 C_1。同时，由于洛朗展开和泰勒展开的唯一性，我们可以部分使用泰勒展开帮助计算洛朗展开。

例 1.1. 对 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ $|z| > 1$ 进行洛朗展开。

$$f(1/z) = \frac{z^2}{1-z} = z^2\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=-2}^{\infty} z^n \qquad |z| > 1$$

1.4 特殊点的差异

一个函数如果以 z_0 为圆心的环域做洛朗展开，那么根据其洛朗展开的系数，z_0 可以是 $f(z)$ 的：

1. 可去奇点，如果其展开不含负数项且包含常数项。
2. $m-$ 阶零点，如果其最小的正数数项是 m 阶的。
3. $m-$ 阶极点，如果其最小的负数项是 $-m$ 阶的。
4. 本性奇点，如果其展开包含无穷负数项。

当 $f(z)$ 在整个圆域内解析时，其洛朗展开就是其泰勒展开。且由于其解析性质，z_0 不可能是 $f(z)$ 的极点和本性奇点。换言之，泰勒展开不可能拥有极点和本性奇点，只有可能拥有零点和可去奇点。而洛朗展开则可能拥有上述四种特殊点的的任一一种 (不过显然 z_0 只会是四种特殊点中的其中一种)。

不妨假设 b 是 $f(z)$ 的 $m-$ 阶极点，那么：

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \ldots + a_0 + a_1(z-b) + \ldots \\ &= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \ldots\right] \\ &= (z-b)^{-m}\phi(z), \quad 0 < |z-b| < R \end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m \frac{1}{\phi(z)}$$

换言之，如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，那么 z_0 也是 $1/f(z)$ 的 m 阶零点。

2 复数域上根式函数和对数函数多值性的来源

众所周知，复数域上的根式函数

$$r_n(z) = \sqrt[n]{z}$$

和对数函数

$$L(z) = \mathrm{Ln}(z)$$

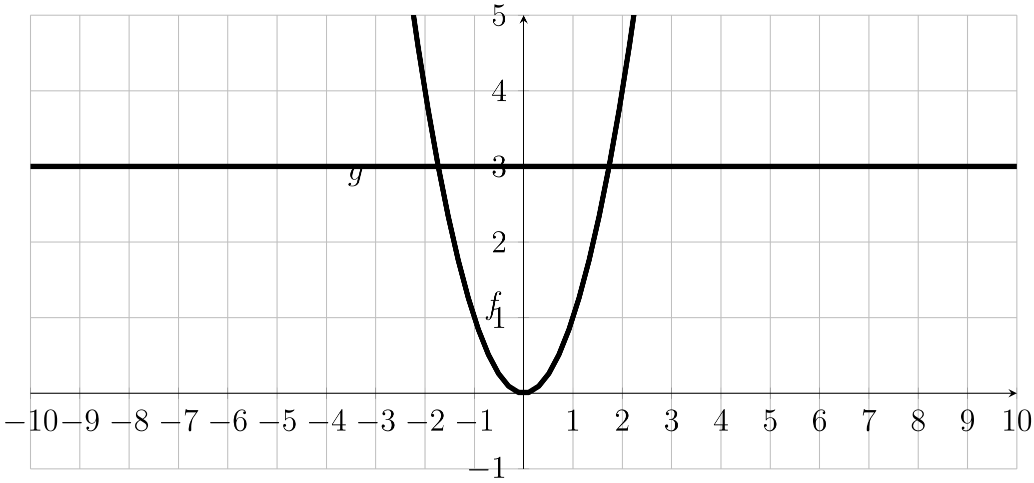
拥有其在实数域上所不具备的多值性。下面我们对两个函数分别进行讨论。

2.1 根式函数的多值性来源

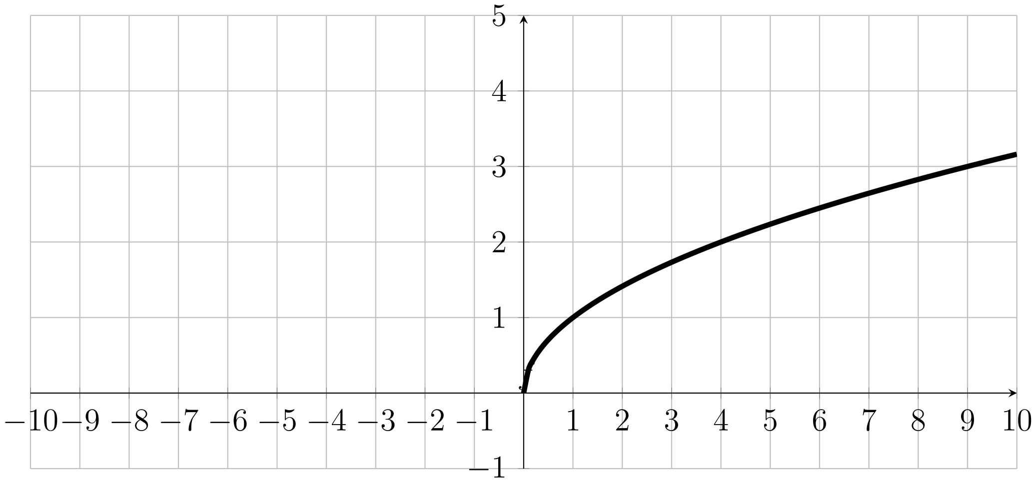
实数域中，根式函数定义为幂函数的反函数：

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x) = y = x^n \rightarrow f^{-1}(y) = x = \sqrt[n]{y}$$

实数域中的根式函数有时也会遇到“多值性”。考虑函数 $f(x)=x^2$，其反函数 $f^{-1}(y)$ 似乎存在两个值对应。如图：



对于 $f(x)=x^2$，任一一个给定的 y 都有两个 x 值与 y 对应，这意味着 $y=x^2$ 的严格定义的反函数有可能具备某种多值性。然而，为何实数域上，当我们定义其反函数时，只定义在了 $y>0$ 的情况?



这可能是为了简化实数域内的相关计算。

由欧拉公式，在复数域内，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

那么由三角函数的诱导公式，得到：

$$e^{i\theta+2n\pi i}=\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

考虑到任何一个复平面上的复数都可以表示为

$$z=r\cdot e^{i\theta}=re^{i\theta+2n\pi i}$$

假定 $r=1$, 那么根据幂运算的性质，根式函数 $r_k(z)$:

$$\sqrt[k]{z}=e^{(i\theta+2n\pi i)/k}=e^{i\theta/k+2n\pi i/k}=e^{i\theta/k+\Sigma}$$

其中 Σ:

$$\Sigma=2\pi i/k+4\pi i/k+\cdots+2(k-1)\pi i/k$$

也就是说，如果我们约定 $k\in\mathbb{Z}$, 那么一个 k 次方根式函数，拥有 k 个不同的多值分支。众所周知，一个复数 z 可以写成

$$z=x+iy\ \ z\in\mathbb{C}\ \ x,y\in\mathbb{R}$$

如果我们令 $y=0$，则复数 z “退化” 为了实数。但是，根据复数根式函数的定义，当 $y=0$ 时，其辐角 $\theta=n\pi$，则

$$z=e^{in\pi}$$

那么根式函数 (以二次根为例)

$$r_2(z)=e^{in\pi/2}=e^{0i}\ \text{ or }\ e^{i\pi}$$

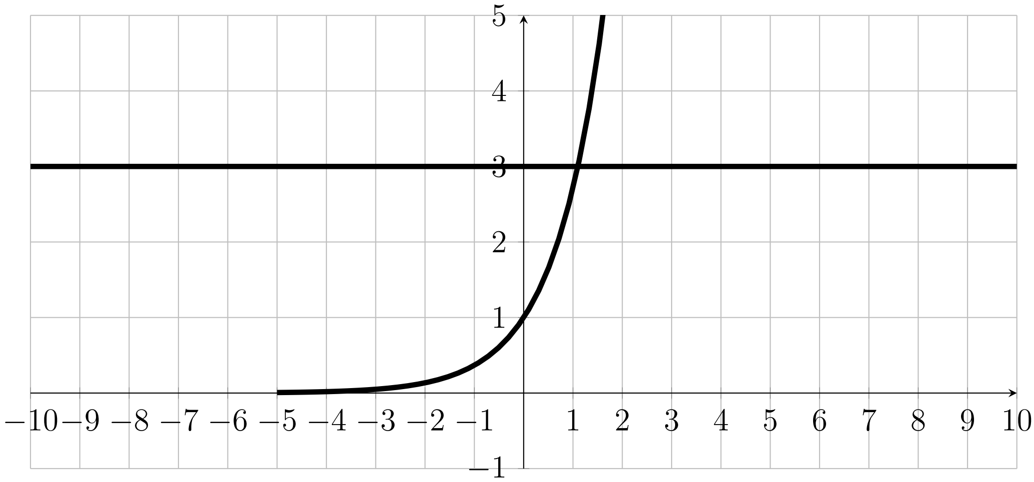
换言之，即使 z “退化” 为了实数，根式函数的多值性依然保留，而不是像实数域的根式函数一样只保留其中的一支，也意味着复数域上的根式函数与实数域上的根式函数有着本质区别, 复数域上的根式函数更 “严格” 地保留了幂函数反函数的意义。

2.2 对数函数的多值性的来源

实数域中，(自然) 对数函数定义为指数函数的反函数：

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x) = y = e^x \to f^{-1}(y) = x = \ln y$$

与实数域的根式函数不同，实数域的指数函数是不存在多值性的。



由欧拉公式，在复数域内，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

那么由三角函数的诱导公式，得到：

$$e^{i\theta+2n\pi i} = \cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

考虑到任何一个复平面上的复数都可以表示为

$$z = r \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta+2n\pi i}$$

那么根据幂运算的性质，对数函数 $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} re^{i\theta} = \operatorname{Ln} re^{i\theta+2n\pi i} = \ln r + i(\theta + 2n\pi i) = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi i)$$

注意到，当 z “退化”为实数时，其辐角

$$\theta = \begin{cases} 2n\pi & x > 0 \\ \pi + 2n\pi & x \leq 0 \end{cases}$$

如果我们在实数域约定 $\theta \in [0, 2\pi)$，则复数域 $\operatorname{Ln} z$

$$\theta = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \pi & x \leq 0 \end{cases}$$

由于实数域中的指数函数恒大于 0，则指数函数不可能包含 $\theta = \pi$ 的分支，也就退化为了实数域的自然对数函数。换言之，复数域中指数函数的多值性的根本来源为将原定义域为实数域的对数函数拓展至复数域的过程中。同根式函数一样，复数域的对数函数与实数域的根式函数也存在根本差异。当 z 退化为实数时，对其使用复数域的指数函数，其结果也不等于实数域的对数函数。

3 复数与实数、复函数与实函数的区别

实数与复数、实数函数和复数函数的区别有许多。接下来我们分别讨论。

3.1 实数与复数的区别

实数与复数的最主要区别是，复数相比实数增加了一个基元 (base) i，并且让其具备了所有实数都不具备的性质：

$$i^2 = -1$$

通过两种基 1 与 i 的任意线性组合，可以表示任一复数和实数。