

数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

YLJ a.k.a. Natyiano

2022 年 3 月 3 日

目录

第一章 Complex Numbers	1
1.1 定义以及运算	1
1.2 复数的几何表示	2
1.3 复数数列	3
1.4 欧拉公式以及复数的指数函数形式	3
第二章 Complex Functions	5
2.1 复变函数的概念	5
2.2 单值性与黎曼面	6
2.3 导数及解析函数的定义	7
2.4 柯西-黎曼条件	8
2.5 解析函数的特性	9
2.6 由部分确定整个解析函数	10
2.7 解析函数的积分特性	11
2.8 柯西积分公式	13
2.9 最大模定理	14
2.10 复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开	14
2.11 利用泰勒级数讨论最大模定理	15
2.12 解析函数的零点及其孤立性	16
2.13 解析环域上的洛朗级数展开	17

第一章 Complex Numbers

约定：我们认为 $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$

1.1 定义以及运算

定义 1.1.1.

$$i = \sqrt{-1}$$

称之为虚数单位。通过虚数单位和『实数单位 (1)』的线性组合，可以得到任意复数的表示方式：

$$z = x + iy, z \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$$

x, y 分别称为实部和虚部，记为：

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

定义 1.1.2.

$$z^* = x - yi$$

称为 z 的共轭复数。容易得到，

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$$

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}$$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}$$

注意到复数的运算与实数的运算存在许许多多的不同之处，例如

例 1.1.3.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x + yi} \neq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x + yi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\operatorname{Re} z = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases} \quad \operatorname{Im} z = -i\pi\delta(x)$$

1.2 复数的几何表示

引入复平面可以容易地表示复数的几何形式：即 $z = x + yi$ 在 x 轴 (实轴) 上的投影为 x ，在 y 轴 (虚轴) 上的投影为 y 。那么，对应向量的 (主) 辐角 θ 以及模 ρ 便定义为：

定义 1.2.1.

$$\theta = \operatorname{Arg} z; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

主辐角记为 $\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi] = \arctan \frac{y}{x}$ ，辐角记为 $\arg z$ 那么得到：

引理 1.2.2.

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

注意到：

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{\rho}(\cos \theta - i \sin \theta)$$

引理 1.2.3. 假设 $1/z = n \in \mathbb{C}$,

$$\rho_n = 1/\rho_z; \quad \arg z = -\arg n$$

同样

引理 1.2.4. 假设

$$z = \prod_{i=1}^n z_i \rightarrow \rho_z = \prod_{i=1}^n \rho_{z_i}; \quad \arg z = \sum_{i=1}^n \arg z_i$$

$$z_i \in \mathbb{C}$$

定理 1.2.5. *de Moivre's* 定理：

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

\Rightarrow

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

结合1.2.3和1.2.4, 我们可以得到任意个复数的乘法除法公式:

推论 1.2.6.

$$z = \frac{\prod_{i=1}^n a_i \in \mathbb{C}}{\prod_{i=1}^n b_i \in \mathbb{C}} \implies \rho_z = \frac{\prod_{i=1}^n \rho_{a_i}}{\prod_{i=1}^n \rho_{b_i}} \quad \arg z = \sum_{i=1}^n \arg a_i - \sum_{i=1}^n \arg b_i$$

1.3 复数数列

形式如下的序列称为复数数列

$$z_n = x_n + iy_n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$z_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow x_n, y_n \text{ 收敛}$$

1.4 欧拉公式以及复数的指数函数形式

定理 1.4.1. 欧拉公式:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

证明. 由 Taylor-Series

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

得到

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right] + i \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right]$$

考虑到 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的 Taylor-Series, 得到:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

□

显然如上的证明并不是一个严格的证明, 因为我们没有证明如上的展开适用于复数域, 以及在交换次序时没有事先证明它绝对收敛。结合1.2.2得到

$$z = \rho e^{i\theta}$$

称为复数的指数函数形式。

例 1.4.2. 计算无穷级数: $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots$

证明. 原式等价于

$$\operatorname{Re} [e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + \dots]$$

$$e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + \dots$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

□

第二章 Complex Functions

2.1 复变函数的概念

定义 2.1.1. 复变函数是复数区域到复数区域的映射。

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

与实变函数不同，区域与区间是有显著差异的。

定义 2.1.2. 如果复平面上的点集 D 满足以下条件：

1. 开集性：不包含边界。 $\forall z_0 \in D, \exists \epsilon > 0 \quad s.t. \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\} \subset D$
2. 连通性：任意两点之间可以用区域内的线连通。

那么点集 D 称为 (开) 区域。闭区域

$$\overline{D} = D + \partial D$$

∂D 是 D 区域的边界。边界具有方向，其正方向定义为使得区域位于运动方向的左手侧的方向。

定义 2.1.3. 双曲函数定义为：

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \\ \coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} & \operatorname{sech}(z) &= \frac{1}{\cosh(z)} & \operatorname{csch}(z) &= \frac{1}{\sinh(z)} \end{aligned}$$

类比 $\cos z, \sin z$ 可以得到：双曲函数的周期性：

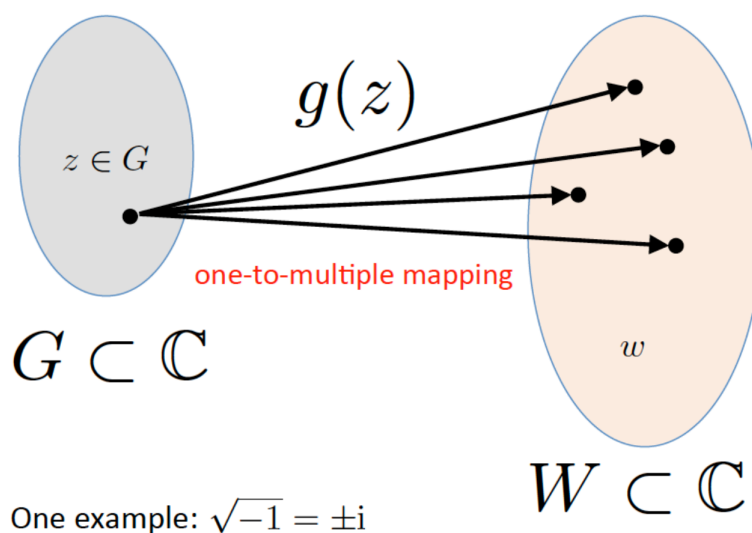
$$\sinh(z) = \sinh(z + i2n\pi) \quad \cosh(z) = \cosh(z + i2n\pi) \quad \tanh(z) = \tanh(z + in\pi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

定义 2.1.4. 函数 $f^{-1}(z)$ 称为函数 $f(z)$ 的逆函数，如果：

$$f^{-1}(f(z)) = z$$

2.2 单值性与黎曼面

注意函数的多值性：



One example: $\sqrt{-1} = \pm i$

定义域 G $z = x + iy$ $\xrightarrow{f(z)}$ 值域 W $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

例 2.2.1. 根式函数: $w = \sqrt[n]{z-a}$ 。令 $z-a = re^{i\theta}$ 得到 w 有 n 个根:

$$w_1 = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n} \quad w_2 = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta/n+2\pi/n)} \quad \dots \quad w_n = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta/n+2(n-1)\pi/n)}$$

辐角的多值性

例 2.2.2. 对数函数:

$$w = \ln z = \ln|z| + i(\theta \pm 2n\pi)$$

模的多值性

反三角函数:

$$\begin{aligned} \arcsin(z) &= \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right) \\ \arccos(z) &= \frac{1}{i} \ln \left(z + \sqrt{z^2-1} \right) \\ \arctan(z) &= \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \end{aligned}$$

例 2.2.3. 以 $\arcsin z$ 为例:

$$\sin(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

Multiply e^{iw} for both sides, we have

$$\begin{aligned}(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 &= 0 \\ e^{iw} &= \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz + \sqrt{1 - z^2} \\ \Rightarrow w &= \frac{1}{i} \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)\end{aligned}$$

复合函数多值性的判断:

例 2.2.4. $\sin \sqrt{z}$ 是多值函数 (两个值), 而 $\cos \sqrt{z}$ 是单值函数。

定义 2.2.5. 当自变量 z 围绕某点 z_0 旋转一圈 (辐角增加 2π) 之后, 若得到的新的函数与原函数不相等, 则 z_0 称为一个支点。

例如:

例 2.2.6. $w = \sqrt{z}$:

$$z' = z \cdot e^{2\pi i} \rightarrow w' = \sqrt{z} \cdot e^{\pi i} = -\sqrt{z} \neq w$$

所以 $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$ 是 w 的两个支点。

2.3 导数及解析函数的定义

定义 2.3.1. $f(z)$ 在 z_0 以及其邻域上有定义, 且沿任何路径 $z \rightarrow z_0$ 时均有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

则 $f(z)$ 在 z_0 上连续。

定义 2.3.2. 若 $f(z)$ 在其定义域上处处连续, 则称其为连续函数。

定义 2.3.3. 若 $f(z)$ 在其 z_0 上连续, 且沿任何路径 $\Delta z \rightarrow 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导。

定义 2.3.4. 若 $f(z)$ 在 z_0 及其邻域各点均可导, 则称为在 z_0 解析。

定义 2.3.5. 若 $f(z)$ 在域 D 上处处解析, 则称为 D 上的解析函数。

2.4 柯西-黎曼条件

若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 其中 u, v 均为二元实函数, 那么 $f(z)$ 可导的必要条件之一为柯西-黎曼条件:

定义 2.4.1. Cauchy-Riemann Condition:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

极坐标的柯西黎曼条件:

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \Delta z = \frac{\partial z}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial z}{\partial \theta} \Delta \theta = e^{i\theta} \Delta r + ire^{i\theta} \Delta \theta$$

(1) Along r direction ($\Delta \theta = 0$)

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta r e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

(2) Along θ direction ($\Delta r = 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{r \Delta \theta i e^{i\theta}} &= \frac{1}{r i e^{i\theta}} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{e^{i\theta}} \left(\frac{-i}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases} \end{aligned}$$

推论 2.4.2. 在某一个点, $f(z)$ 可导的充分必要条件:

1. 函数的实部和虚部均为二元可微实函数。
2. 满足柯西黎曼条件。

证明. 假设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 由条件 1 得:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \epsilon_3 \Delta x + \epsilon_4 \Delta y \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \epsilon_i &= 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y + \\
&\quad i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \epsilon_3\Delta x + \epsilon_4\Delta y\right) \\
&= \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + \left(i\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\Delta x + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\Delta y \\
&= \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + i\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\Delta x + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\Delta y
\end{aligned}$$

由条件 2 得:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta z + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\Delta x + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\Delta y \\
z &= x + iy \rightarrow \Delta z = \Delta x + i\Delta y \\
\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

□

推论 2.4.3. 在某一个区域 G 内, $f(z)$ 解析的充分必要条件:

1. 函数的实部和虚部均为二元可微实函数, 且其四个偏导 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 连续。
2. 满足柯西黎曼条件。

注意: 多值函数一定不可导, 不解析。

例 2.4.4. e^z 在 $z \rightarrow \infty$ 时一定不解析, 因为其在 $z \rightarrow \infty$ 时是多值的。同理, 三角函数和双曲函数在 $z \rightarrow \infty$ 时也是不可导的。

2.5 解析函数的特性

假设某个复变解析函数: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $u, v \in \mathbb{R}$ 。由柯西-黎曼条件得到:

引理 2.5.1.

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial^2 y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial^2 y} = 0 \quad (2.2)$$

2.1和2.2 是拉普拉斯方程。所以解析函数的实部和虚部均为调和函数。即：

$$\begin{aligned}\Delta u &= \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta v &= \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\end{aligned}$$

定理 2.5.2.

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$$

即解析函数与其自变量的共轭无关。

证明.

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} &= \frac{\partial f(z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} = \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] &= 0\end{aligned}$$

□

定理 2.5.3. 解析函数的实部和虚部的等值线的切向量相互垂直。

证明.

$$u(x, y) = C \Rightarrow du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$$

$d\vec{s}$ 是实部等值线的切向量，则

$$d\vec{s} = (dx, dy) \propto \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$v(x, y) = C' \Rightarrow dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

$d\vec{s}'$ 是虚部等值线的切向量，则

$$d\vec{s}' = (dx', dy') \propto \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$d\vec{s} \cdot d\vec{s}' \propto \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow d\vec{s} \perp d\vec{s}'$$

□

2.6 由部分确定整个解析函数

如果已知某个解析函数的实部 $u(x, y)$ 以及在某点 z_0 的取值, 可以确定整个解析函数:

方法 2.6.1. 由于柯西-黎曼条件,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \rightarrow v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + h(y) \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \rightarrow v(x, y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} dx + h(y) \\ &\Rightarrow \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &= -\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx + h'(y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ &\Rightarrow \\ h'(y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \int \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} dx \rightarrow h(y) = \int h'(y) dy + C\end{aligned}$$

方法 2.6.2. 利用 $C-R$ 条件, 先找到解析函数的导数:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dz} &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \equiv g(z) \\ &\Rightarrow \\ f(z) &= \int g(z) dz + C\end{aligned}$$

方法 2.6.3.

$$\begin{aligned}f(z) &= u(x, y) + iv(x, y), \quad f^*(z) = u(x, y) - iv(x, y) \\ &\Rightarrow \\ u(x, y) &= \frac{f(z) + f^*(z)}{2}, \quad v(x, y) = \frac{f(z) - f^*(z)}{2i}\end{aligned}$$

通过代数运算, 我们可以将 $u(x, y)$ 写成:

$$u(x, y) = u\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right) = h(z) + h^*(z) = [h(z) + iC] + [h(z) + iC]^*$$

对比系数可得:

$$f(z) = 2h(z) + 2iC$$

2.7 解析函数的积分特性

定义 2.7.1. 复变函数的积分定义为:

$$\int_L f(z)dz \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(z_j - z_{j-1})$$

其中 L 为有向路径。

一些较为常用的性质:

$$\begin{aligned} \int_L f_1(z) + f_2(z)dz &= \int_L f_1(z)dz + \int_L f_2(z)dz \\ \int_L f(z)dz &= - \int_{-L} f(z)dz \\ \int_{L_1+L_2} f(z)dz &= \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz \end{aligned}$$

定理 2.7.2. 单连通域上解析函数的柯西积分定理: 假设 C 是某个单连通域的边界。

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

证明. 假设将复变解析函数 $f(z)$ 沿着某一单连通域做回路积分:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) \quad (2.3)$$

其中正方向定义为确保解析区域在左手边的方向。展开2.3得到:

$$\oint_C [udx - vdy] + i \oint_C [udy + vdx]$$

由格林公式

$$\oint_C [Pdx + Qdy] = \iint_{\Sigma} \left[-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dxdy$$

得到:

$$\oint_C f(z)dz = \iint_{\Sigma} \left[-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] dxdy + i \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy \quad (2.4)$$

考虑 C-R 条件,

$$2.4 \equiv 0$$

□

定理 2.7.3. 复连通域上解析函数的柯西积分定理: 假设 C 是一个复连通域的边界, 而填上这个复连通域中的 C_1, C_2, \dots, C_N 所围成的区域可以将该域变为单连通域。那么:

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{n=1}^N \oint_{C_n} f(z)dz$$

2.8 柯西积分公式

定理 2.8.1. 柯西积分公式: 假设 C 包围了 $f(z)$ 的单连通解析区域, z_0 为区域内一点, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

证明. 不妨用一个小圆将 z_0 包围, 其边界设为 C_r : $\forall z \in \Sigma_{C_r} \quad z = z_0 + re^{i\theta}$, 则由2.7.3,

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \\ \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

再不妨令 $r \rightarrow 0$, 那么2.5化为

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

即:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad (2.6)$$

□

引理 2.8.2. 令2.6中的 $f(z) = 1$, 推出公式:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \begin{cases} 1 & z_0 \in \Sigma_C \\ 0 & z_0 \notin \Sigma_C \end{cases}$$

可以利用2.6计算解析函数的导数:

方法 2.8.3.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \rightarrow \\ f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \rightarrow \\ f''(z) &= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi \\ &\quad \dots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

这说明解析函数是任意阶可导的。

2.9 最大模定理

定理 2.9.1. 最大模定理：设 $f(z)$ 在闭区域上解析，则其模 $|f(z)|$ 的最大值只能出现在该区域的边界上，除非 $f(z)$ 是一个常函数。

证明.

$$\begin{aligned} f^n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f^n(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ |f(z)|^n &= |[f(z)]^n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f^n(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint \frac{|f(\xi)|^n}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \frac{M^n}{2\pi d} \oint_C |d\xi| = \frac{M^n}{2\pi d} l \end{aligned}$$

d 为 z 至边界的最短距离, $\forall z: |z - \xi| \geq d$

M 为 $|f(\xi)|$ 的最大值, $\forall z: |f(\xi)| \leq M, \xi \in C$

即

$$|f(z)| \leq M \left[\frac{l}{2\pi d} \right]^{1/n} \rightarrow |f(z)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \left[\frac{l}{2\pi d} \right]^{1/n} = M$$

即 $f(z)$, $z \in \overline{\Sigma_C}$ 的最大值便是 $f(\xi)$, $\xi \in C$ 的最大值。 □

2.10 复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开

$f(z)$ 在 z_0 为圆心的圆域内解析，则对于任意一圆域内点 z ，有

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} d\xi \end{aligned}$$

由于

$$\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \leq 1, \quad \frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right]^n d\xi = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n &= f(z) \end{aligned}$$

□

复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开的收敛半径为:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{or} \quad R = |z_0 - z_1| \quad z_1 \text{ 是离 } z_0 \text{ 最近的奇点}$$

2.11 利用泰勒级数讨论最大模定理

定义 2.11.1. Kronecker- δ 符号:

$$\delta_{mn} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

假设最大模定理不成立, 即:

$$\exists z_0 \in \Sigma, z_0 \notin \partial\Sigma \text{ s.t. } |f(z_0)| = \max |f(z)|$$

那么以 z_0 为中心做泰勒展开:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \rightarrow a_0 = f(z_0)$$

由于

$$z - z_0 = r e^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} |a_0|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |a_0|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 d\theta \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(z) \cdot f(z) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* [(z - z_0)^*]^m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n d\theta \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m^* a_n r^{m+n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m^* a_n r^{m+n} \delta_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* a_n r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \\ &= |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \end{aligned} \quad (2.7)$$

考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \geq 0 \Rightarrow |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \geq |a_0|^2$$

若想要2.7成立, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = 0 \rightarrow a_n = 0 \rightarrow f(z) = \text{constant}.$$

定理 2.11.2. 刘维尔定理：在全复平面内解析且有界的复变函数必为常函数。

证明. 以 $z_0 = 0$ 为中心做泰勒展开：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

由于

$$\xi \in C \rightarrow \xi = re^{i\theta} \rightarrow d\xi = ire^{i\theta} d\theta$$

则 $|a_n|$ 可以化为

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi^{n+1}|} |d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^n} d\theta = \frac{M}{r^n}$$

由于 $f(z)$ 在整个复平面上解析，即其泰勒展开的收敛半径 $R = \infty$ ，那么

$$|a_n| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{r^n} = 0 \rightarrow \forall n \neq 0: a_n = 0$$

□

2.12 解析函数的零点及其孤立性

定义 2.12.1. $f(z)$ 在 z_0 点有 $f(z_0) = 0$ ，且在以 z_0 为圆心的圆域内的泰勒级数展开式最低幂次（最小的使得 $a_n \neq 0$ 的 n ）为 k 次，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 k -阶零点。

由定义得到，若 z_0 是 $f(z)$ 的 k -阶零点，则 $\forall k > n > 0: f^{(n)}(z_0) = 0$

定理 2.12.2. 零点的孤立性：假设 z_0 为 $f(z)$ 的一个零点，则

$$\exists r > 0 \text{ s.t. } \forall z \in \{z \mid |z - z_0| < r\}, f(z) \neq 0$$

即零点不能构成区域。

证明. 假设 z_0 为 $f(z)$ 的一个 k -阶零点：

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m = (z - z_0)^k \varphi(z)$$

$$\varphi(z_0) \equiv a_k \neq 0$$

由于函数解析，函数必定连续，则

$$\forall \epsilon > 0: \exists z \neq z_0 \text{ s.t. } |\varphi(z_0) - \varphi(z)| < \epsilon$$

令 $\epsilon = |\varphi(z_0)|/2$:

$$|\varphi(z_0)| - |\varphi(z)| < |\varphi(z_0) - \varphi(z)| < |\varphi(z_0)|/2$$

$$|\varphi(z)| > |\varphi(z_0)|/2 > 0$$

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z) \neq 0$$

即总可以在 z_0 为中心找到一圆域使得在该圆域内除圆心 z_0 外的所有点 z 满足 $f(z) \neq 0$ □

2.13 解析环域上的洛朗级数展开

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心的环域内解析, 则对于该环域内任何一点 z , 有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\xi) (\xi - z_0)^{-n-1} d\xi$$

证明. 将环域的外环和内环建立一微小链接, 使得 $L = C_1 + C_2 + \partial L - \partial L = C_1 + C_2$ 为一单连通区域的边界,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \end{aligned}$$

回想起证明泰勒级数时的过程, 不妨将 $\xi - z_0$ 设为 r , $z - z_0$ 设为 R , 不难发现: 对于 C_1 , $r > R$, 对于 C_2 , $r < R$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{r - R} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{1 - R/r} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{r - R} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{1 - r/R} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{C_2} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{f(\xi)}{z - z_0} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{z - z_0} d\xi
 \end{aligned}$$

代入 $f(z)$ 中得到

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{z - z_0} d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n
 \end{aligned}$$

□

洛朗级数的收敛半径:

$$R_1 < |z - z_0| < R_2, \quad R_1 = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \quad R_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

或者可以认为

R_1 := 以 z_0 为圆心的包含考察点 z 的最大解析环域的内径

R_2 := 以 z_0 为圆心的包含考察点 z 的最大解析环域的外径