数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

YLJ a.k.a. Natyiano

2022 年 3 月 1 日

目录

第一章　Complex Numbers

约定：我们认为 $z \in \mathbb{C}$，$x, y \in \mathbb{R}$

1.1　定义以及运算

定义 1.1.1.

$$i = \sqrt{-1}$$

称之为虚数单位。通过虚数单位和『实数单位 (1)』的线性组合，可以得到任意复数的表示方式：

$$z = x + iy,\ z \in \mathbb{C}, x\&y \in \mathbb{R}$$

x, y 分别称为实部和虚部，记为：

$$x = \mathrm{Re}\, z$$

$$y = \mathrm{Im}\, z$$

定义 1.1.2.

$$z^* = x - yi$$

称为 z 的共轭复数。容易得到，

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$$

$$x = \mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2}$$

$$y = \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2i}$$

注意到复数的运算与实数的运算存在许许多多的不同之处，例如

例 1.1.3.

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{x + yi} \neq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{x+yi}=\lim_{y\to 0}\frac{x-yi}{x^2+y^2}\to$$
$$\mathrm{Re}\ z=\begin{cases}0,\ x=0\\ \dfrac{1}{x},\ x\neq 0\end{cases}\quad \mathrm{Im}\ z=-i\pi\delta(x)$$

1.2　复数的几何表示

引入复平面可以容易地表示复数的几何形式：即 $z=x+yi$ 在 x 轴 (实轴) 上的投影为 x，在 y 轴 (虚轴) 上的投影为 y。那么，对应向量的 (主) 辐角 θ 以及模 ρ 便定义为:

定义 1.2.1.

$$\theta=\mathrm{Arg}\ z;\ \ \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

主辐角记为 $\mathrm{Arg}\ z\in[-\pi,\pi]=\arctan\dfrac{y}{x}$，辐角记为 $\arg z$ 那么得到:

引理 1.2.2.

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

注意到:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

引理 1.2.3. 假设 $1/z=n\in\mathbb{C}$，

$$\rho_n=1/\rho_z;\ \ \arg z=-\arg n$$

同样

引理 1.2.4. 假设

$$z=\prod_{i=1}^{n}z_i\to\rho_z=\prod_{i=1}^{n}\rho_{z_i};\quad \arg z=\sum_{i=1}^{n}\arg z_i$$
$$z_i\in\mathbb{C}$$

定理 1.2.5. *de Moivre's* 定理:

$$z_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\quad z_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$\Rightarrow$$

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

结合1.2.3和1.2.4，我们可以得到任意个复数的乘法除法公式：

推论 1.2.6.

$$z=\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i\in\mathbb{C}}{\prod_{i=1}^{n}b_i\in\mathbb{C}}:\Longrightarrow\rho_z=\frac{\prod_{i=1}^{n}\rho_{a_i}}{\prod_{i=1}^{n}\rho_{b_i}}\quad \arg\,z=\sum_{i=1}^{n}\arg\,a_i-\sum_{i=1}^{n}\arg\,b_i$$

1.3 复数数列

形式如下的序列称为复数数列

$$z_n=x_n+iy_n,\ \ n=1,2,3,4,\dots$$

$$z_n\text{ 收敛}\Leftrightarrow x_n,y_n\text{ 收敛}$$

1.4 欧拉公式以及复数的指数函数形式

定理 1.4.1. 欧拉公式:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

证明. 由 Taylor-Sereis

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

得到

$$e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\theta^n}{n!}=\left[1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{4!}+\dots\right]+i\left[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\dots\right]$$

考虑到 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的 Taylor-Series，得到：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

□

显然如上的证明并不是一个严格的证明，因为我们没有证明如上的展开适用于复数域，以及在交换次序时没有事先证明它绝对收敛。结合1.2.2得到

$$z=\rho e^{i\theta}$$

称为复数的指数函数形式。

例 1.4.2. 计算无穷级数：$\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\dots$

证明. 原式等价于

$$\mathrm{Re}\ [e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + \dots]$$

$$\begin{aligned} &e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + \dots \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \end{aligned}$$

□

第二章　Complex Functions

2.1　复变函数的概念

定义 2.1.1. *复变函数是复数区域到复数区域的映射。*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

与实变函数不同，区域与区间是有显著差异的。

定义 2.1.2. *如果复平面上的点集 D 满足以下条件：*

1. *开集性：不包含边界。$\forall\, z_0 \in D, \quad \exists\, \epsilon > 0 \quad s.t.\ \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\} \subset D$*
2. *连通性：任意两点之间可以用区域内的线连通。*

那么点集 D 称为（开）区域。闭区域

$$\overline{D} = D + \partial D$$

∂D 是 D 区域的边界。边界具有方向，其正方向定义为使得区域位于运动方向的左手侧的方向。

定义 2.1.3. *双曲函数定义为：*

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$
$$\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \quad \mathrm{sech}(z) = \frac{1}{\cosh(z)} \quad \mathrm{csch}(z) = \frac{1}{\sinh(z)}$$

类比 $\cos z, \sin z$ 可以得到：双曲函数的周期性：

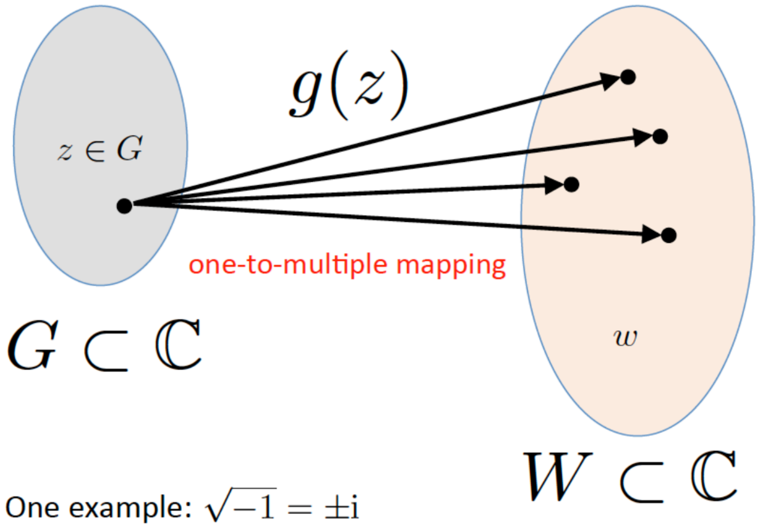
$$\sinh(z) = \sinh(z + i2n\pi) \quad \cosh(z) = \cosh(z + i2n\pi) \quad \tanh(z) = \tanh(z + in\pi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

定义 2.1.4. *函数 $f^{-1}(z)$ 称为函数 $f(z)$ 的逆函数，如果：*

$$f^{-1}(f(z)) = z$$

2.2 单值性与黎曼面

注意函数的多值性：



$$\text{定义域 } G \quad z = x + \mathrm{i}y \quad \xrightarrow{f(z)} \quad \text{值域 } W \quad w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

例 2.2.1. 根式函数：$w = \sqrt[n]{z-a}$。令 $z - a = re^{i\theta}$ 得到 w 有 n 个根：

$$w_1 = \sqrt[n]{r}e^{\theta/n} \quad w_2 = \sqrt[n]{r}e^{\theta/n+2\pi/n} \quad \ldots \quad w_n = \sqrt[n]{r}e^{\theta/n+2(n-1)\pi/n}$$

辐角的多值性

例 2.2.2. 对数函数：

$$w = \ln z = \ln|z| + i(\theta \pm 2n\pi)$$

模的多值性

反三角函数：

$$\begin{aligned}
\arcsin(z) &= \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \\
\arccos(z) &= \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \\
\arctan(z) &= \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}
\end{aligned}$$

例 2.2.3. 以 $\arcsin z$ 为例：

$$\sin(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

Multiply e^{iw} for both sides, we have

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2iz\left(e^{iw}\right) - 1 = 0$$
$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4-4z^2}}{2} = iz + \sqrt{1-z^2}$$
$$\Rightarrow w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

复合函数多值性的判断:

例 2.2.4. $\sin\sqrt{z}$ 是多值函数 *(两个值)*，而 $\cos\sqrt{z}$ 是单值函数。

定义 2.2.5. 当自变量 z 围绕某点 z_0 旋转一圈 *(辐角增加 2π)* 之后，若得到的新的函数与原函数不相等，则 z_0 称为一个支点。

例如:

例 2.2.6. $w = \sqrt{z}$:

$$z' = z \cdot e^{2\pi i} \to w' = \sqrt{z} \cdot e^{\pi i} = -\sqrt{z} \neq w$$

所以 $z_1 = 0,\ z_2 = \infty$ 是 w 的两个支点。

2.3 导数及解析函数的定义

定义 2.3.1. $f(z)$ 在 z_0 以及其邻域上有定义，且沿任何路径 $z \to z_0$ 时均有

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则 $f(z)$ 在 z_0 上连续。

定义 2.3.2. 若 $f(z)$ 在其定义域上处处连续，则称其为连续函数。

定义 2.3.3. 若 $f(z)$ 在其 z_0 上连续，且沿任何路径 $\Delta z \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 可导。

定义 2.3.4. 若 $f(z)$ 在 z_0 及其邻域各点均可导，则称为在 z_0 解析。

定义 2.3.5. 若 $f(z)$ 在域 D 上处处解析，则称为 D 上的解析函数。

2.4 柯西-黎曼条件

若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 其中 u,v 均为二元实函数，那么 $f(z)$ 可导的必要条件之一为柯西-黎曼条件：

定义 2.4.1. Cauchy-Riemann Condition*:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{cases}$$

推论 2.4.2. *$f(z)$ 可导的充分必要条件：*

1. *函数的实部和虚部均为二元可微实函数*
2. *满足柯西黎曼条件。*

证明. 假设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，由条件 1 得：

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$$
$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\epsilon_3\Delta x+\epsilon_4\Delta y$$
$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\epsilon_i=0 \quad i=1,2,3,4$$

$$\begin{aligned}\Delta f=\Delta u+i\Delta v=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y+ \\ i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\epsilon_3\Delta x+\epsilon_4\Delta y\right) \\ =\left(i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x+\left(i\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y+(\epsilon_1+i\epsilon_3)\Delta x+(\epsilon_2+i\epsilon_4)\Delta y \\ =\left(i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x+i\left(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y+(\epsilon_1+i\epsilon_3)\Delta x+(\epsilon_2+i\epsilon_4)\Delta y\end{aligned}$$

由条件 2 得：

$$\Delta f=\left(i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta z+(\epsilon_1+i\epsilon_3)\Delta x+(\epsilon_2+i\epsilon_4)\Delta y$$
$$z=x+iy\to\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

□

2.5 解析函数的特性

假设某个复变解析函数：$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad u, v \in \mathbb{R}$。由柯西-黎曼条件得到：

引理 2.5.1.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 y} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial^2 y} = 0 \tag{2.2}$$

2.1和2.2 是拉普拉斯方程。所以解析函数的实部和虚部均为调和函数。

定理 2.5.2.

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$$

即解析函数与其自变量的共轭无关。

证明.

$$x = \frac{z+z^*}{2}, \quad y = \frac{z-z^*}{2}$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0$$

□

2.6　由部分确定整个解析函数

如果已知某个解析函数的实部 $u(x,y)$ 以及在某点 z_0 的取值，可以确定整个解析函数：

方法 2.6.1. 由于柯西-黎曼条件，

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \to v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + h(y)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \to v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + h(y)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}x + h'(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow$$

$$h'(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \int \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\mathrm{d}x \to h(y) = \int h'(y)\mathrm{d}y + C$$

方法 2.6.2. 利用 C-R 条件，先找到解析函数的导数：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv g(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$f(z) = \int g(z)\mathrm{d}z + C$$

方法 2.6.3.

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad f^*(z) = u(x,y) - iv(x,y)$$

$$\Rightarrow$$

$$u(x,y) = \frac{f(z)+f^*(z)}{2}, \quad v(x,y) = \frac{f(z)-f^*(z)}{2i}$$

通过代数运算，我们可以将 $u(x,y)$ 写成：

$$u(x,y)=u\left(\frac{z+z^*}{2},\frac{z-z^*}{2i}\right)=h(z)+h^*(z)=[h(z)+iC]+[h(z)+iC]^*$$

对比系数可得：

$$f(z)=2h(z)+2iC$$

2.7　解析函数的积分特性

定义 2.7.1. 复变函数的积分定义为：

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z\equiv\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)(z_j-z_{j-1})$$

其中 L 为有向路径。

一些较为常用的性质：

$$\int_L f_1(z)+f_2(z)\mathrm{d}z=\int_L f_1(z)\mathrm{d}z+\int_L f_2(z)\mathrm{d}z$$

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=-\int_{-L}f(z)\mathrm{d}z$$

$$\int_{L_1+L_2}f(z)\mathrm{d}z=\int_{L_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{L_2}f(z)\mathrm{d}z$$

定理 2.7.2. 单连通域上解析函数的柯西积分定理：假设 C 是某个单连通域的边界。

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

证明. 假设将复变解析函数 $f(z)$ 沿着某一单连通域做回路积分：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_C[u(x,y)+iv(x,y)](\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\tag{2.3}$$

其中正方向定义为确保解析区域在左手边的方向。展开2.3得到：

$$\oint_C[u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y]+i\oint_C[u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x]$$

由格林公式

$$\oint_C[P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y]=\iint_\Sigma\left[-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

得到：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\left[-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+i\iint_\Sigma\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\tag{2.4}$$

考虑 C-R 条件，

$$2.4 \equiv 0$$

□

定理 2.7.3. 复连通域上解析函数的柯西积分定理：假设 C 是一个复连通域的边界，而填上这个复连通域中的 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ 所围成的区域可以将该域变为单连通域。那么：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N} \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

2.8 柯西积分公式

定理 2.8.1. 柯西积分公式：假设 C 包围了 $f(z)$ 的单连通解析区域，z_0 为区域内一点，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z$$

证明. 不妨用一个小圆将 z_0 包围，其边界设为 C_r：$\forall\, z \in \Sigma_{C_r} \quad z = z_0 + re^{i\theta}$，则由2.7.3，

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = \\ \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta = & i\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{2.5}$$

再不妨令 $r \to 0$，那么2.5化为

$$i\int_0^{2\pi} f(z_0)\mathrm{d}\theta = 2\pi i f(z_0)$$

即：

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \tag{2.6}$$

□

引理 2.8.2. 令*2.6*中的 $f(z) = 1$，推出公式：

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} 1 & z_0 \in \Sigma_C \\ 0 & z_0 \notin \Sigma_C \end{cases}$$

可以利用2.6计算解析函数的导数：

方法 2.8.3.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\rightarrow$$
$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\mathrm{d}\xi\rightarrow$$
$$f''(z)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}\mathrm{d}\xi$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

这说明解析函数是任意阶可导的。

2.9 最大模定理

定理 2.9.1. 最大模定理：设 $f(z)$ 在闭区域上解析，则其模 $|f(z)|$ 的最大值只能出现在该区域的边界上，除非 $f(z)$ 是一个常函数。

证明.

$$f^n(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f^n(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$
$$|f(z)|^n=|\,[f(z)]^n\,|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f^n(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\right|$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\oint\frac{|f(\xi)^n|}{|\xi-z|}|\mathrm{d}\xi|\leq\frac{M^n}{2\pi d}\oint_C|\mathrm{d}\xi|=\frac{M^n}{2\pi d}l$$

d 为 z 至边界的最短距离，$\forall\, z:\ |z-\xi|\geq d$

M 为 $|f(\xi)|$ 的最大值，$\forall\, z: |f(\xi)|\leq M,\ \xi\in C$

即

$$|f(z)|\leq M\left[\frac{l}{2\pi d}\right]^{1/n}\rightarrow|f(z)|\leq\lim_{n\to\infty}M\left[\frac{l}{2\pi d}\right]^{1/n}=M$$

即 $f(z),\ z\in\overline{\Sigma_C}$ 的最大值便是 $f(\xi),\ \xi\in C$ 的最大值。 □

2.10 复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开

$f(z)$ 在 z_0 为圆心的圆域内解析，则对于任意一圆域内点 z，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

证明.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}\mathrm{d}\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi$$

由于

$$\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\leq 1,\quad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\ \ |t|<1$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right]^n\mathrm{d}\xi=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n=f(z)$$

□

复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开的收敛半径为:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\ \ or\ \ R=|z_0-z_1|\ \ z_1\text{ 是离 }z_0\text{ 最近的奇点}$$

2.11 利用泰勒级数讨论最大模定理

定义 2.11.1. *Kronecker-δ* 符号:

$$\delta_{mn}\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^i(n-m)\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

假设最大模定理不成立，即:

$$\exists\ z_0\in\Sigma,\ z_0\notin\partial\Sigma\ \ s.t.\ |f(z_0)|=\max|f(z)|$$

那么以 z_0 为中心做泰勒展开:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\to a_0=f(z_0)$$

由于

$$z-z_0=re^{i\theta}$$

$$
\begin{aligned}
|a_0|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|a_0|^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|^2\mathrm{d}\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^*(z)\cdot f(z)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}a_m^*[(z-z_0)^*]^m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}a_m^*a_nr^{m+n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}a_m^*a_nr^{m+n}\delta_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n^*a_nr^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n} \\
&= |a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n} \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\geq 0 \Rightarrow |a_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\geq|a_0|^2$$

若想要2.7成立，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}=0\to a_n=0\to f(z)=constant.$$

定理 2.11.2. 刘维尔定理：在全复平面内解析且有界的复变函数必为常函数。

证明. 以 $z_0=0$ 为中心做泰勒展开：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

由于

$$\xi\in C\to\xi=re^{i\theta}\to\mathrm{d}\xi=ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

则 $|a_n|$ 可以化为

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{|f(\xi)|}{|\xi^{n+1}|}|\mathrm{d}\xi|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M}{r^n}\mathrm{d}\theta=\frac{M}{r^n}$$

由于 $f(z)$ 在整个复平面上解析，即其泰勒展开的收敛半径 $R=\infty$，那么

$$|a_n|\leq\lim_{r\to\infty}\frac{M}{r^n}=0\to\forall n\neq 0:\ a_n=0$$

□

2.12 解析函数的零点及其孤立性

定义 2.12.1. $f(z)$ 在 z_0 点有 $f(z_0)=0$，且在以 z_0 为圆心的圆域内的泰勒级数展开式最低幂次 (最小的使得 $a_n\neq 0$ 的 n) 为 k 次，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 $k-$阶零点。

由定义得到，若 z_0 是 $f(z)$ 的 k-阶零点，则 $\forall\, k > n > 0$： $f^{(n)}(z_0) = 0$

定理 2.12.2. 零点的孤立性：假设 z_0 为 $f(z)$ 的一个零点，则

$$\exists\, r > 0\ s.t.\ \forall z \in \{z \mid |z - z_0| < r\},\ f(z) \neq 0$$

即零点不能构成区域。

证明. 假设 z_0 为 $f(z)$ 的一个 k-阶零点：

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m = (z - z_0)^k \varphi(z)$$

$$\varphi(z_0) \equiv a_k \neq 0$$

由于函数解析，函数必定连续，则

$$\forall\, \epsilon > 0 :\ \exists\, z \neq z_0\ s.t.\ |\varphi(z_0) - \varphi(z)| < \epsilon$$

令 $\epsilon = |\varphi(z_0)|/2$：

$$\begin{aligned}
&|\varphi(z_0)| - |\varphi(z)| < |\varphi(z_0) - \varphi(z)| < |\varphi(z_0)|/2 \\
&|\varphi(z)| > |\varphi(z_0)|/2 > 0 \\
&f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z) \neq 0
\end{aligned}$$

即总可以在 z_0 为中心找到一圆域使得在该圆域内除圆心 z_0 外的所有点 z 满足 $f(z) \neq 0$ □

2.13 解析环域上的洛朗级数展开

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心的环域内解析，则对于该环域内任何一点 z，有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\xi)(\xi - z_0)^{-n-1} \mathrm{d}\xi$$

证明. 将环域的外环和内环建立一微小链接，使得 $L = C_1 + C_2 + \partial L - \partial L = C_1 + C_2$ 为一单连通区域的边界，

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

回想起证明泰勒级数时的过程，不妨将 $\xi - z_0$ 设为 r，$z - z_0$ 设为 R，不难发现：对于 C_1，$r > R$，对于 C_2，$r < R$。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{1-R/r}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{1-r/R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{C_2}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{f(\xi)}{z - z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z - z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z - z_0}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

代入 $f(z)$ 中得到

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z - z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z - z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n
\end{aligned}$$

□

洛朗级数的收敛半径：

$$R_1 < |z - z_0| < R_2, \quad R_1 = \lim_{n\to-\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \quad R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

或者可以认为

$$R_1 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的内径}$$

$$R_2 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的外径}$$