数学物理方法

Mathematical Methods in Physics

YLJ a.k.a. Natyiano

2022 年 3 月 8 日

目录

第一章　Complex Numbers

约定：我们认为 $z \in \mathbb{C}$，$x, y \in \mathbb{R}$

1.1　定义以及运算

定义 1.1.1.

$$i = \sqrt{-1}$$

称之为虚数单位。通过虚数单位和『实数单位 (1)』的线性组合，可以得到任意复数的表示方式：

$$z = x + iy,\ z \in \mathbb{C}, x\&y \in \mathbb{R}$$

x, y 分别称为实部和虚部，记为：

$$x = \mathrm{Re}\ z$$

$$y = \mathrm{Im}\ z$$

定义 1.1.2.

$$z^* = x - yi$$

称为 z 的共轭复数。容易得到，

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$$
$$x = \mathrm{Re}\ z = \frac{z + z^*}{2}$$
$$y = \mathrm{Im}\ z = \frac{z - z^*}{2i}$$

注意到复数的运算与实数的运算存在许许多多的不同之处，例如

例 1.1.3.

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{x + yi} \neq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{x+yi}=\lim_{y\to 0}\frac{x-yi}{x^2+y^2}\to$$

$$\text{Re } z=\begin{cases}0,\ x=0\\ \dfrac{1}{x},\ x\neq 0\end{cases}\qquad \text{Im } z=-i\pi\delta(x)$$

1.2　复数的几何表示

引入复平面可以容易地表示复数的几何形式：即 $z=x+yi$ 在 x 轴 (实轴) 上的投影为 x，在 y 轴 (虚轴) 上的投影为 y。那么，对应向量的 (主) 辐角 θ 以及模 ρ 便定义为:

定义 1.2.1.

$$\theta=\text{Arg } z;\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

主辐角记为 $\text{Arg } z\in[-\pi,\pi]=\arctan\dfrac{y}{x}$，辐角记为 $\arg z$ 那么得到:

引理 1.2.2.

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

注意到:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

引理 1.2.3. 假设 $1/z=n\in\mathbb{C}$,

$$\rho_n=1/\rho_z;\ \ \arg z=-\arg n$$

同样

引理 1.2.4. 假设

$$z=\prod_{i=1}^{n}z_i\to\rho_z=\prod_{i=1}^{n}\rho_{z_i};\quad \arg z=\sum_{i=1}^{n}\arg z_i$$

$$z_i\in\mathbb{C}$$

定理 1.2.5. *de Moivre's* 定理:

$$z_1=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\quad z_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$\Rightarrow$$

$$z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

结合1.2.3和1.2.4，我们可以得到任意个复数的乘法除法公式：

推论 1.2.6.

$$z = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{C}}{\prod_{i=1}^{n} b_i \in \mathbb{C}} :\Longrightarrow \rho_z = \frac{\prod_{i=1}^{n} \rho_{a_i}}{\prod_{i=1}^{n} \rho_{b_i}} \quad \arg\, z = \sum_{i=1}^{n} \arg\, a_i - \sum_{i=1}^{n} \arg\, b_i$$

1.3　复数数列

形式如下的序列称为复数数列

$$z_n = x_n + iy_n,\ \ n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$z_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow x_n, y_n \text{ 收敛}$$

1.4　欧拉公式以及复数的指数函数形式

定理 1.4.1. 欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

证明. 由 Taylor-Sereis

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

得到

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\theta^n}{n!} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right]$$

考虑到 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的 Taylor-Series，得到：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

□

显然如上的证明并不是一个严格的证明，因为我们没有证明如上的展开适用于复数域，以及在交换次序时没有事先证明它绝对收敛。结合1.2.2得到

$$z = \rho e^{i\theta}$$

称为复数的指数函数形式。

例 1.4.2. 计算无穷级数：$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots$

证明. 原式等价于

$$\text{Re}\ [e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\dots]$$

$$\begin{aligned}&e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\dots\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{e^{i\theta}-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\end{aligned}$$

□

1.5 复数域上的指数函数的反函数

对于 $\forall\ z\in\mathbb{C}$, 如何定义函数 $g=f(z)=e^z$ 的反函数? 即定义一个函数，使得:

$$f^{-1}(g)=z$$

这个函数称为复对数函数，区别于 $\mathbb{R}$ 上的指数函数 $\ln(x)$。

定义 1.5.1. 复对数函数:

$$\text{Ln}\ z=\ln|z|+i\text{arg}\ z+2n\pi i$$

$$s.t.\text{Ln}\ g=\text{Ln}\ |z|e^{i\text{arg}\ z+2ni\pi}$$

其多值性来源于

$$g=e^z=e^{z+2ni\pi}$$

第二章 Complex Series

对于某一复数序列 $u_n = x_n + iy_n$，其和前 n 项和 S_n：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + iy_n)$$

$$S_n = X_n + iY_n$$

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} x_i, Y_n = \sum_{j=0}^{n} y_j$$

无穷级数收敛的充要条件：$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, n > 0;\ \ n \in \mathbb{Z}\ \ s.t.\ \ \forall\, p > 0$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

级数收敛的必要条件：

$$\text{Preliminary Test:}\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

2.1 级数收敛性判别法

Test for alternating series: An alternating series converges if the absolute value of the terms decreases steadily to zero, that is, if $|a_{n+1}| \le |a_n|$ and $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. **一致递减 至 0**

Comparison Method: If $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$, the condition $|u_n| < v_n$ is satisfied. If $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ are convergent, then $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ are convergent.

Ratio Method: If there exists a constant ρ (un-correlated with n), and $|u_{n+1}/u_n| < \rho < 1$, then $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ are absolutely convergent.

d'Alembert Method(Criterion): 级数的通项比值 $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 的上极限小于 1，则原级数绝对收敛；级数的通项比值的下极限大于 1，则原级数发散。

Gauss Method: Assume that the ratio between two neighboring terms has the following form: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(n^{-\lambda}\right)$ where $\mu = a + ib, \lambda > 1$.

If $a > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ absolutely convergent.

If $a \leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ divergent.

例 2.1.1. 使用 Gauss Method 判别级数 $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的收敛性:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

则 $a = 1$，原级数发散。

使用 Gauss Method 判别级数 $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}$$

则 $a = 2$，原级数绝对收敛。

Cauchy Method: $|u_n|^{1/n}$ 的上极限小于 1，原级数绝对收敛；大于 1，原级数发散。

2.2 复数序列的一致收敛

如果 S_n 一致收敛，则:

- Continuity $u_k(z)$ is continuous in G, and $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ is uniformly convergent, then $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ is continuous in G
- $\int_C \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C u_k(z) dz$
- $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ is analytic in $G \to f^{(p)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$

2.3 幂级数

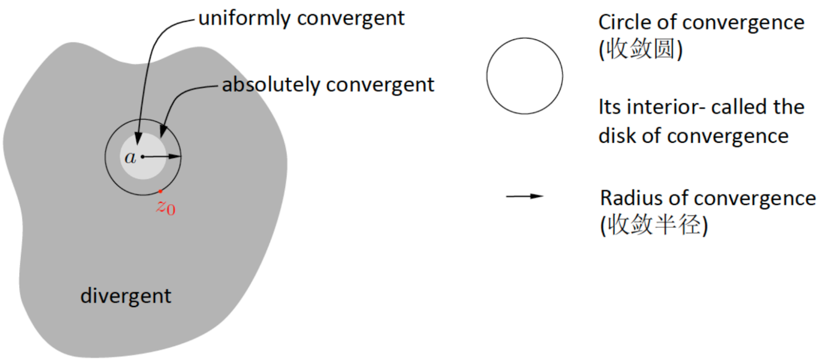
对于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

有

定理 2.3.1. Abel theorem: If the series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ are convergent at $z = z_0$, then the series are absolutely convergent in a disk region (with a radius of $|z_0 - a|$) surrounding z_0, and are uniformly convergent in the region $|z-a| \leq r$ $(r < |z_0 - a|)$.

推论 2.3.2. If $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ are divergent at z_1, then also divergent in $|z-a| > |z_1 - a|$.



2.4 幂级数阿贝尔定理收敛半径的计算

方法 2.4.1. Cauchy-Hadamard Formula:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{1}{c_n}\right|^{1/n}$$

方法 2.4.2. d'Alembert Critrion:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

第三章　Complex Functions

3.1　复变函数的概念

定义 3.1.1. *复变函数是复数区域到复数区域的映射。*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$$

与实变函数不同，区域与区间是有显著差异的。

定义 3.1.2. *如果复平面上的点集 D 满足以下条件：*

1. *开集性：不包含边界。$\forall\, z_0 \in D, \quad \exists\, \epsilon > 0 \quad s.t.\ \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\} \subset D$*
2. *连通性：任意两点之间可以用区域内的线连通。*

那么点集 D 称为（开）区域。闭区域

$$\overline{D} = D + \partial D$$

∂D 是 D 区域的边界。边界具有方向，其正方向定义为使得区域位于运动方向的左手侧的方向。

定义 3.1.3. *双曲函数定义为：*

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$
$$\coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \quad \mathrm{sech}(z) = \frac{1}{\cosh(z)} \quad \mathrm{csch}(z) = \frac{1}{\sinh(z)}$$

类比 $\cos z, \sin z$ 可以得到：双曲函数的周期性：

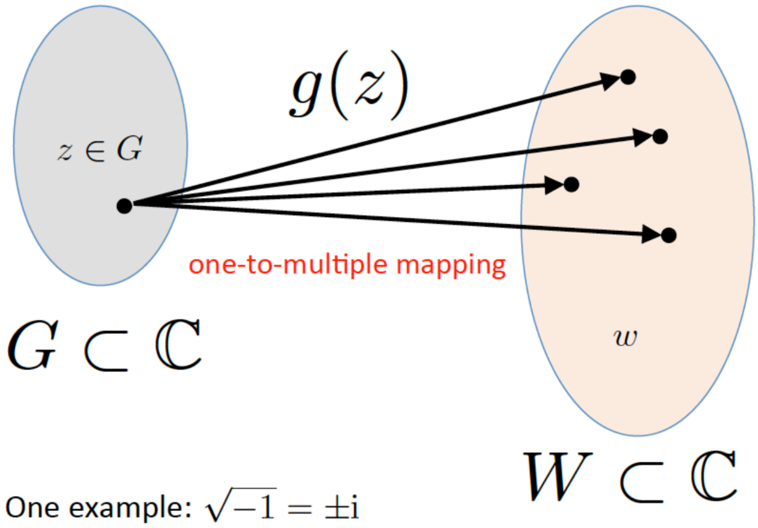
$$\sinh(z) = \sinh(z + i2n\pi) \quad \cosh(z) = \cosh(z + i2n\pi) \quad \tanh(z) = \tanh(z + in\pi) \quad n \in \mathbb{Z}$$

定义 3.1.4. *函数 $f^{-1}(z)$ 称为函数 $f(z)$ 的逆函数，如果：*

$$f^{-1}(f(z)) = z$$

3.2 单值性与黎曼面

注意函数的多值性:



$$\text{定义域 } G \quad z = x + iy \quad \xrightarrow{f(z)} \quad \text{值域 } W \quad w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

例 3.2.1. 根式函数: $w = \sqrt[n]{z-a}$。令 $z - a = re^{i\theta}$ 得到 w 有 n 个根:

$$w_1 = \sqrt[n]{r}e^{\theta/n} \quad w_2 = \sqrt[n]{r}e^{\theta/n+2\pi/n} \quad \ldots \quad w_n = \sqrt[n]{r}e^{\theta/n+2(n-1)\pi/n}$$

辐角的多值性

例 3.2.2. 对数函数:

$$w = \ln z = \ln|z| + i(\theta \pm 2n\pi)$$

模的多值性

反三角函数:

$$\arcsin(z) = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$
$$\arccos(z) = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$
$$\arctan(z) = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

例 3.2.3. 以 $\arcsin z$ 为例:

$$\sin(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

Multiply e^{iw} for both sides, we have

$$
\begin{aligned}
&\left(e^{iw}\right)^2 - 2iz\left(e^{iw}\right) - 1 = 0 \\
&e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4-4z^2}}{2} = iz + \sqrt{1-z^2} \\
&\Rightarrow w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)
\end{aligned}
$$

复合函数多值性的判断：

例 3.2.4. $\sin\sqrt{z}$ 是多值函数 (两个值)，而 $\cos\sqrt{z}$ 是单值函数。

定义 3.2.5. 当自变量 z 围绕某点 z_0 旋转一圈 (辐角增加 2π) 之后，若得到的新的函数与原函数不相等，则 z_0 称为一个支点。

例如：

例 3.2.6. $w = \sqrt{z}$:

$$z' = z \cdot e^{2\pi i} \to w' = \sqrt{z} \cdot e^{\pi i} = -\sqrt{z} \neq w$$

所以 $z_1 = 0,\ z_2 = \infty$ 是 w 的两个支点。

3.3　导数及解析函数的定义

定义 3.3.1. $f(z)$ 在 z_0 以及其邻域上有定义，且沿任何路径 $z \to z_0$ 时均有

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则 $f(z)$ 在 z_0 上连续。

定义 3.3.2. 若 $f(z)$ 在其定义域上处处连续，则称其为连续函数。

定义 3.3.3. 若 $f(z)$ 在其 z_0 上连续，且沿任何路径 $\Delta z \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在且唯一，则称 $f(z)$ 在 z_0 可导。

定义 3.3.4. 若 $f(z)$ 在 z_0 及其邻域各点均可导，则称为在 z_0 解析。

定义 3.3.5. 若 $f(z)$ 在域 D 上处处解析，则称为 D 上的解析函数。

3.4 柯西-黎曼条件

若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 其中 u,v 均为二元实函数，那么 $f(z)$ 可导的必要条件之一为柯西-黎曼条件：

定义 3.4.1. Cauchy-Riemann Condition*:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{cases}$$

极坐标的柯西黎曼条件：

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow \Delta z = \frac{\partial z}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial z}{\partial \theta}\Delta\theta = e^{i\theta}\Delta r + ire^{i\theta}\Delta\theta$$

(1) Along r direction ($\Delta\theta = 0$)

$$\lim_{\Delta r\to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta r e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

(2) Along θ direction ($\Delta r = 0$)

$$\lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{r\Delta\theta i e^{i\theta}} = \frac{1}{rie^{i\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{-i}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

推论 3.4.2. *在某一个点，$f(z)$ 可导的充分必要条件：*

1. *函数的实部和虚部均为二元可微实函数。*

2. *满足柯西黎曼条件。*

证明. 假设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，由条件 1 得：

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \epsilon_3\Delta x + \epsilon_4\Delta y$$
$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \epsilon_i = 0 \quad i = 1,2,3,4$$

$$
\begin{aligned}
\Delta f = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \\
i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \epsilon_3 \Delta x + \epsilon_4 \Delta y\right) \\
= \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + \left(i\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\Delta x + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\Delta y \\
= \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + i\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\Delta x + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\Delta y
\end{aligned}
$$

由条件 2 得:

$$
\begin{aligned}
\Delta f = \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta z + (\epsilon_1 + i\epsilon_3)\Delta x + (\epsilon_2 + i\epsilon_4)\Delta y \\
z = x + iy \to \Delta z = \Delta x + i\Delta y \\
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
$$

□

推论 3.4.3. *在某一个区域 G 内，$f(z)$ 解析的充分必要条件:*

1. *函数的实部和虚部均为二元可微实函数，且其四个偏导 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 连续。*
2. *满足柯西黎曼条件。*

注意：多值函数一定不可导，不解析。

例 3.4.4. *e^z 在 $z \to \infty$ 时一定不解析，因为其在 $z \to \infty$ 时是多值的。同理，三角函数和双曲函数在 $z \to \infty$ 时也是不可导的。*

3.5 解析函数的特性

假设某个复变解析函数：$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad u, v \in \mathbb{R}$。由柯西-黎曼条件得到:

引理 3.5.1.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial^2 y} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial^2 y} = 0 \tag{3.2}$$

3.1和3.2 是拉普拉斯方程。所以解析函数的实部和虚部均为调和函数。即：

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\Delta v = \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

定理 3.5.2.

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$$

即解析函数与其自变量的共轭无关。

证明.

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2}$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{\partial f(z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f(z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0$$

□

定理 3.5.3. 解析函数的实部和虚部的等值线的切向量相互垂直。

证明.

$$u(x,y) = C \Rightarrow \mathrm{d}u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

$\mathrm{d}\vec{s}$ 是实部等值线的切向量，则

$$\mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \propto \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$v(x,y) = C' \Rightarrow \mathrm{d}v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$$

$\mathrm{d}\vec{s'}$ 是虚部等值线的切向量，则

$$\mathrm{d}\vec{s'} = (\mathrm{d}x', \mathrm{d}y') \propto \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\mathrm{d}\vec{s} \cdot \mathrm{d}\vec{s'} \propto \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\vec{s} \perp \mathrm{d}\vec{s'}$$

□

3.6　由部分确定整个解析函数

如果已知某个解析函数的实部 $u(x,y)$ 以及在某点 z_0 的取值，可以确定整个解析函数：

方法 3.6.1. 由于柯西-黎曼条件，

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\to v(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+h(y)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\to v(x,y)=-\int\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+h(y)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=-\int\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}x+h'(y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow$$

$$h'(y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\int\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\mathrm{d}x\to h(y)=\int h'(y)\mathrm{d}y+C$$

方法 3.6.2. 利用 *C-R* 条件，先找到解析函数的导数：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv g(z)$$

$$\Rightarrow$$

$$f(z)=\int g(z)\mathrm{d}z+C$$

方法 3.6.3.

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\quad f^*(z)=u(x,y)-iv(x,y)$$

$$\Rightarrow$$

$$u(x,y)=\frac{f(z)+f^*(z)}{2},\quad v(x,y)=\frac{f(z)-f^*(z)}{2i}$$

通过代数运算，我们可以将 $u(x,y)$ 写成：

$$u(x,y)=u\left(\frac{z+z^*}{2},\frac{z-z^*}{2i}\right)=h(z)+h^*(z)=[h(z)+iC]+[h(z)+iC]^*$$

对比系数可得：

$$f(z)=2h(z)+2iC$$

3.7 解析函数的积分特性

定义 3.7.1. 复变函数的积分定义为：

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1})$$

其中 L 为有向路径。

一些较为常用的性质：

$$\int_L f_1(z) + f_2(z)\mathrm{d}z = \int_L f_1(z)\mathrm{d}z + \int_L f_2(z)\mathrm{d}z$$

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-L} f(z)\mathrm{d}z$$

$$\int_{L_1+L_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(z)\mathrm{d}z$$

定理 3.7.2. 单连通域上解析函数的柯西积分定理：假设 C 是某个单连通域的边界。

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

证明. 假设将复变解析函数 $f(z)$ 沿着某一单连通域做回路积分：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C [u(x,y) + iv(x,y)]\,(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \tag{3.3}$$

其中正方向定义为确保解析区域在左手边的方向。展开3.3得到：

$$\oint_C [u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y] + i\oint_C [u\mathrm{d}y + v\mathrm{d}x]$$

由格林公式

$$\oint_C [P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y] = \iint_\Sigma \left[-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

得到：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \left[-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_\Sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.4}$$

考虑 C-R 条件，

$$3.4 \equiv 0$$

□

定理 3.7.3. 复连通域上解析函数的柯西积分定理：假设 C 是一个复连通域的边界，而填上这个复连通域中的 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ 所围成的区域可以将该域变为单连通域。那么：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{N}\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

3.8 柯西积分公式

定理 3.8.1. 柯西积分公式：假设 C 包围了 $f(z)$ 的单连通解析区域，z_0 为区域内一点，则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

证明. 不妨用一个小圆将 z_0 包围，其边界设为 C_r： $\forall z \in \Sigma_{C_r} \quad z = z_0 + re^{i\theta}$，则由3.7.3，

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z =$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta = i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \tag{3.5}$$

再不妨令 $r \to 0$，那么3.5化为

$$i\int_0^{2\pi} f(z_0)\mathrm{d}\theta = 2\pi i f(z_0)$$

即：

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0) \tag{3.6}$$

□

引理 3.8.2. 令*3.6*中的 $f(z)=1$，推出公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} 1 & z_0 \in \Sigma_C \\ 0 & z_0 \notin \Sigma_C \end{cases}$$

可以利用3.6计算解析函数的导数：

方法 3.8.3.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \to$$
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\mathrm{d}\xi \to$$
$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\mathrm{d}\xi$$
$$\cdots$$
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

这说明解析函数是任意阶可导的。

3.9 最大模定理

定理 3.9.1. 最大模定理：设 $f(z)$ 在闭区域上解析，则其模 $|f(z)|$ 的最大值只能出现在该区域的边界上，除非 $f(z)$ 是一个常函数。

证明.

$$
\begin{aligned}
f^n(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f^n(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \\
|f(z)|^n = |\,[f(z)]^n\,| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f^n(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi\right| \\
\leq \frac{1}{2\pi}\oint \frac{|f(\xi)^n|}{|\xi - z|}|\mathrm{d}\xi| &\leq \frac{M^n}{2\pi d}\oint_C |\mathrm{d}\xi| = \frac{M^n}{2\pi d}l
\end{aligned}
$$

d 为 z 至边界的最短距离，$\forall\, z$：$|z-\xi| \geq d$

M 为 $|f(\xi)|$ 的最大值，$\forall\, z : |f(\xi)| \leq M,\ \xi \in C$

即

$$
|f(z)| \leq M\left[\frac{l}{2\pi d}\right]^{1/n} \to |f(z)| \leq \lim_{n\to\infty} M\left[\frac{l}{2\pi d}\right]^{1/n} = M
$$

即 $f(z),\ z \in \overline{\Sigma_C}$ 的最大值便是 $f(\xi),\ \xi \in C$ 的最大值。 □

3.10 复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开

$f(z)$ 在 z_0 为圆心的圆域内解析，则对于任意一圆域内点 z，有

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}
\end{aligned}
$$

证明.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

由于

$$
\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \leq 1, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n,\ \ |t| < 1
$$

$$
\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right]^n \mathrm{d}\xi =
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z - z_0)^n = f(z)
$$

□

复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开的收敛半径为:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad or \quad R = |z_0 - z_1| \quad z_1 \text{ 是离 } z_0 \text{ 最近的奇点}$$

3.11 利用泰勒级数讨论最大模定理

定义 3.11.1. *Kronecker-δ* 符号:

$$\delta_{mn} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^i(n-m)\theta \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

假设最大模定理不成立，即:

$$\exists\ z_0 \in \Sigma,\ z_0 \notin \partial\Sigma \ \ s.t.\ |f(z_0)| = \max|f(z)|$$

那么以 z_0 为中心做泰勒展开:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \to a_0 = f(z_0)$$

由于

$$z - z_0 = re^{i\theta}$$

$$\begin{aligned}
|a_0|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|a_0|^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|^2\mathrm{d}\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(z)\cdot f(z)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty} a_m^*[(z-z_0)^*]^m \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m^* a_n r^{m+n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m^* a_n r^{m+n}\delta_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* a_n r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \\
&= |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \geq 0 \Rightarrow |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} \geq |a_0|^2$$

若想要3.7成立，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n} = 0 \to a_n = 0 \to f(z) = constant.$$

定理 3.11.2. 刘维尔定理：在全复平面内解析且有界的复变函数必为常函数。

证明. 以 $z_0 = 0$ 为中心做泰勒展开：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \mathrm{d}\xi$$

由于

$$\xi \in C \to \xi = re^{i\theta} \to \mathrm{d}\xi = ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

则 $|a_n|$ 可以化为

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi^{n+1}|} |\mathrm{d}\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^n} \mathrm{d}\theta = \frac{M}{r^n}$$

由于 $f(z)$ 在整个复平面上解析，即其泰勒展开的收敛半径 $R = \infty$，那么

$$|a_n| \leq \lim_{r \to \infty} \frac{M}{r^n} = 0 \to \forall n \neq 0 : \ a_n = 0$$

□

3.12 解析函数的零点及其孤立性

定义 3.12.1. $f(z)$ 在 z_0 点有 $f(z_0) = 0$，且在以 z_0 为圆心的圆域内的泰勒级数展开式最低幂次 (最小的使得 $a_n \neq 0$ 的 n) 为 k 次，则称 z_0 为 $f(z)$ 的 $k-$阶零点。

由定义得到，若 z_0 是 $f(z)$ 的 k-阶零点，则 $\forall\, k > n > 0 : \ f^{(n)}(z_0) = 0$

定理 3.12.2. 零点的孤立性：假设 z_0 为 $f(z)$ 的一个零点，则

$$\exists\, r > 0 \ s.t. \ \forall z \in \{z \mid |z - z_0| < r\}, \ f(z) \neq 0$$

即零点不能构成区域。

证明. 假设 z_0 为 $f(z)$ 的一个 k-阶零点：

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m = (z - z_0)^k \varphi(z)$$

$$\varphi(z_0) \equiv a_k \neq 0$$

由于函数解析，函数必定连续，则

$$\forall\, \epsilon > 0 : \ \exists\, z \neq z_0 \ s.t. \ |\varphi(z_0) - \varphi(z)| < \epsilon$$

令 $\epsilon = |\varphi(z_0)|/2$：

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(z_0)| - |\varphi(z)| < |\varphi(z_0) - \varphi(z)| < |\varphi(z_0)|/2 \\
&|\varphi(z)| > |\varphi(z_0)|/2 > 0 \\
&f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z) \neq 0
\end{aligned}
$$

即总可以在 z_0 为中心找到一圆域使得在该圆域内除圆心 z_0 外的所有点 z 满足 $f(z) \neq 0$ □

3.13 解析环域上的洛朗级数展开

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心的环域内解析，则对于该环域内任何一点 z，有

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint f(\xi)(\xi - z_0)^{-n-1} \mathrm{d}\xi
$$

证明. 将环域的外环和内环建立一微小链接，使得 $L = C_1 + C_2 + \partial L - \partial L = C_1 + C_2$ 为一单连通区域的边界，

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

回想起证明泰勒级数时的过程，不妨将 $\xi - z_0$ 设为 r，$z - z_0$ 设为 R，不难发现：对于 C_1，$r > R$，对于 C_2，$r < R$。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{r - R} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{1 - R/r} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{1-r/R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{C_2}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

代入 $f(z)$ 中得到

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n
\end{aligned}
$$

□

洛朗级数的收敛半径:

$$
R_1 < |z-z_0| < R_2, \quad R_1 = \lim_{n\to-\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \quad R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|
$$

或者可以认为

$$R_1 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的内径}$$

$$R_2 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的外径}$$