论文标题

Dylaaan

2022 年 4 月 21 日

目录

1 泰勒展开与劳伦展开的区别

1.1 泰勒级数和劳伦级数的定义

泰勒展开的定义:

$f(z)$ 在 z_0 为圆心的圆域内解析，则对于任意一圆域内点 z，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

证明.

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

由于

$$\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\le 1,\quad \frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n,\quad |t|<1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right]^n\mathrm{d}\xi\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n=f(z)\end{aligned}$$

□

复变函数在其解析圆域上的泰勒级数展开的收敛半径为:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\quad or\quad R=|z_0-z_1|\quad z_1\text{ 是离 }z_0\text{ 最近的奇点}$$

劳伦展开的定义：

$f(z)$ 在以 z_0 为圆心的环域内解析，则对于该环域内任何一点 z，有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint f(\xi)(\xi - z_0)^{-n-1}\mathrm{d}\xi$$

证明. 将环域的外环和内环建立一微小链接，使得 $L = C_1+C_2+\partial L-\partial L = C_1 + C_2$ 为一单连通区域的边界，

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

回想起证明泰勒级数时的过程，不妨将 $\xi - z_0$ 设为 r，$z - z_0$ 设为 R，不难发现：对于 C_1，$r > R$，对于 C_2，$r < R$。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{r - R}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{1 - R/r}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{r-R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{1-r/R}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{C_2}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

代入 $f(z)$ 中得到

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(\xi)}{z-z_0}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\oint\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi\right](z-z_0)^n
\end{aligned}
$$

□

劳伦级数的收敛半径：

$$
R_1<|z-z_0|<R_2,\quad R_1=\lim_{n\to-\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\quad R_2=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|
$$

或者可以认为

$$
R_1 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的内径}
$$

$$
R_2 := \text{以 } z_0 \text{ 为圆心的包含考察点 } z \text{ 的最大解析环域的外径}
$$

泰勒展开的使用范围是：对于某一在复平面上，以 z_0 为圆心的圆域内部均解析，才可以使用泰勒展开得到其相应的泰勒级数。如果不解析，会发

生什么情况呢？我们尝试对 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $z_0=0$ 处进行泰勒展开，会发现由于泰勒展开的证明过程中使用到了柯西积分公式，使得 f 不适用。

柯西积分公式：假设 C 包围了 $f(z)$ 的单连通解析区域，z_0 为区域内一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

考虑到函数解析的定义，f 在 $z_0=0$ 处不解析等价为

$$f'(z)|_{z=0}\text{ 不存在}$$

1.2 适用范围的差异

考虑到柯西积分公式的证明过程：不妨用一个小圆将 $z_0=0$ 包围，其边界设为 C_r： $\forall\, z\in\Sigma_{C_r}\quad z=+re^{i\theta}$，则由柯西积分定理，

$$\oint_C\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta$$

红色部分会在接下来的证明过程中 (令 $r\to 0$) 导出错误，因为

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}\quad\text{不存在}$$

这也是为什么泰勒展开仅仅适用于在圆域内全解析的情况。

而劳伦展开, 通过构建合适的积分路径可以避免以上情况的发生，因此劳伦级数也可以适用于当 $f(z)$ 在 z_0 处不解析的区域。例如：对于 $f(z)=1/z$，通过将泰勒展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

中的 z^n 替换为 $(\frac{1}{z})^n$，使得原式的 $f(z)$ 变为 $f(1/z)$。

1.3 表达式的差异

考虑泰勒级数的系数表达式：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{For } n \geq 0$$

其中 C_1 是任一解析圆域内部可求长的包围住了 z_0 的闭合曲线。

以及劳伦级数的系数表达式：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi \quad \text{For } -\infty \leq n \leq +\infty$$

其中 C_2 是任一解析环域内部可求长的包围住了 z_0 的闭合曲线。

不难发现，当函数 $f(z)$ 仅仅拥有可去奇点时 ($\forall\, n < 0,\ a_n = 0$)，其劳伦展开就是其泰勒展开。因为任一 C_2，一定也是其 C_1。同时，由于劳伦展开和泰勒展开的唯一性，我们可以部分使用泰勒展开帮助计算劳伦展开。

例 1.1. 对 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ $\quad |z| > 1$ 进行劳伦展开。

$$f(1/z) = \frac{z^2}{1-z} = z^2\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=-2}^{\infty} z^n \qquad |z| > 1$$

1.4 特殊点的差异

一个函数如果以 z_0 为圆心的环域做劳伦展开，那么根据其劳伦展开的系数，z_0 可以是 $f(z)$ 的：

1. 可去奇点，如果其展开不含负数项且包含常数项。

2. $m-$ 阶零点，如果其最小的正数数项是 m 阶的。

3. $m-$ 阶极点，如果其最小的负数项是 $-m$ 阶的。

4. 本性奇点，如果其展开包含无穷负数项。

当 $f(z)$ 在整个圆域内解析时，其劳伦展开就是其泰勒展开。且由于其解析性质，z_0 不可能是 $f(z)$ 的极点和本性奇点。换言之，泰勒展开不可能拥有极点和本性奇点，只有可能拥有零点和可去奇点。而劳伦展开则可能拥有上述四种特殊点的的任一一种 (不过显然 z_0 只会是四种特殊点中的其中一种)。

不妨假设 b 是 $f(z)$ 的 $m-$ 阶极点，那么：

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \ldots + a_0 + a_1(z-b) + \ldots \\ &= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \ldots\right] \\ &= (z-b)^{-m}\phi(z), \quad 0 < |z-b| < R \end{aligned}$$

则

$$\frac{1}{f(z)} = (z-b)^m \frac{1}{\phi(z)}$$

换言之，如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，那么 z_0 也是 $1/f(z)$ 的 m 阶零点。

2 复数域上根式函数和对数函数多值性的来源

众所周知，复数域上的根式函数

$$r_n(z) = \sqrt[n]{z}$$

和对数函数

$$L(z) = \mathrm{Ln}(z)$$

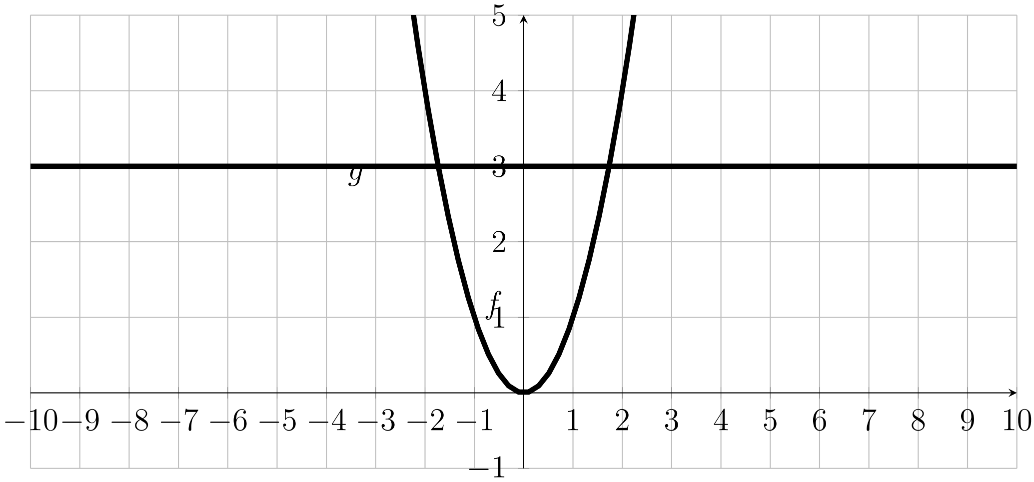
拥有其在实数域上所不具备的多值性。下面我们对两个函数分别进行讨论。

2.1 根式函数的多值性来源

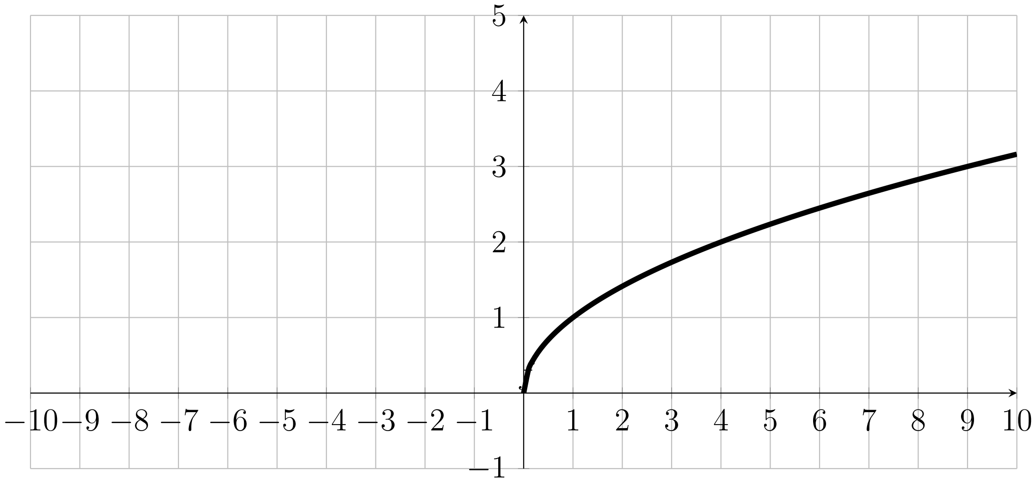
实数域中，根式函数定义为幂函数的反函数：

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x) = y = x^n \to f^{-1}(y) = x = \sqrt[n]{y}$$

实数域中的根式函数有时也会遇到“多值性”。考虑函数 $f(x)=x^2$，其反函数 $f^{-1}(y)$ 似乎存在两个值对应。如图：



对于 $f(x)=x^2$，任一一个给定的 y 都有两个 x 值与 y 对应，这意味着 $y=x^2$ 的严格定义的反函数有可能具备某种多值性。然而，为何实数域上，当我们定义其反函数时，只定义在了 $y>0$ 的情况？



这可能是为了简化实数域内的相关计算。

由欧拉公式，在复数域内，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

那么由三角函数的诱导公式，得到：

$$e^{i\theta+2n\pi i}=\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

考虑到任何一个复平面上的复数都可以表示为

$$z=r\cdot e^{i\theta}=re^{i\theta+2n\pi i}$$

假定 $r=1$, 那么根据幂运算的性质，根式函数 $r_k(z)$:

$$\sqrt[k]{z}=e^{(i\theta+2n\pi i)/k}=e^{i\theta/k+2n\pi i/k}=e^{i\theta/k+\Sigma}$$

其中 Σ:

$$\Sigma=2\pi i/k+4\pi i/k+\cdots+2(k-1)\pi i/k$$

也就是说，如果我们约定 $k\in\mathbb{Z}$, 那么一个 k 次方根式函数，拥有 k 个不同的多值分支。众所周知，一个复数 z 可以写成

$$z=x+iy\ \ z\in\mathbb{C}\ \ x,y\in\mathbb{R}$$

如果我们令 $y=0$，则复数 z “退化” 为了实数。但是，根据复数根式函数的定义，当 $y=0$ 时，其辐角 $\theta=n\pi$，则

$$z=e^{in\pi}$$

那么根式函数 (以二次根为例)

$$r_2(z)=e^{in\pi/2}=e^{0i}\ \ \text{or}\ \ e^{i\pi}$$

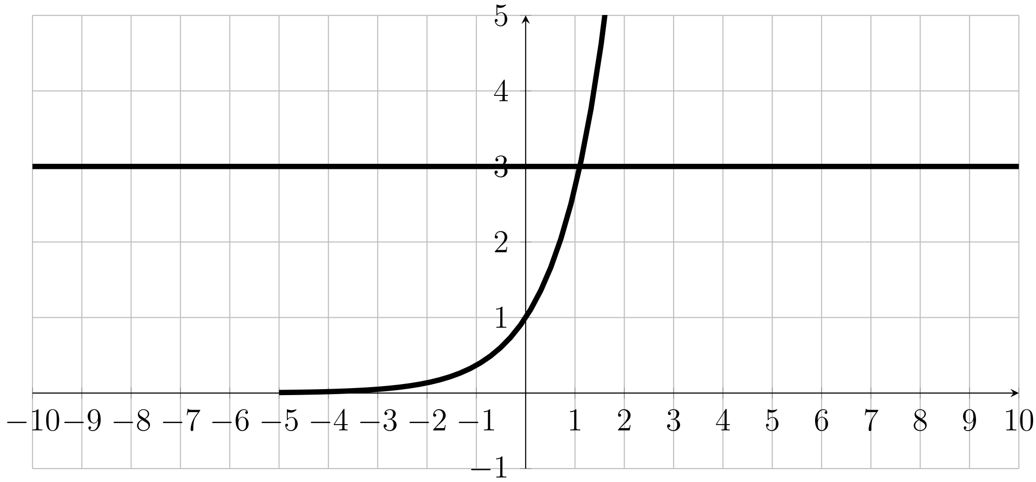
换言之，即使 z “退化” 为了实数，根式函数的多值性依然保留，而不是像实数域的根式函数一样只保留其中的一支，也意味着复数域上的根式函数与实数域上的根式函数有着本质区别，复数域上的根式函数更 “严格” 地保留了幂函数反函数的意义。

2.2 对数函数的多值性的来源

实数域中，(自然) 对数函数定义为指数函数的反函数：

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad f(x) = y = e^x \to f^{-1}(y) = x = \ln y$$

与实数域的根式函数不同，实数域的指数函数是不存在多值性的。



由欧拉公式，在复数域内，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

那么由三角函数的诱导公式，得到：

$$e^{i\theta+2n\pi i} = \cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

考虑到任何一个复平面上的复数都可以表示为

$$z = r \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta+2n\pi i}$$

那么根据幂运算的性质，对数函数 $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} re^{i\theta} = \operatorname{Ln} re^{i\theta+2n\pi i} = \ln r + i(\theta + 2n\pi i) = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi i)$$

注意到，当 z “退化” 为实数时，其辐角

$$\theta = \begin{cases} 2n\pi & x > 0 \\ \pi + 2n\pi & x \leq 0 \end{cases}$$

如果我们在实数域约定 $\theta \in [0, 2\pi)$，则复数域 $\operatorname{Ln} z$

$$\theta = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \pi & x \leq 0 \end{cases}$$

由于实数域中的指数函数恒大于 0，则指数函数不可能包含 $\theta = \pi$ 的分支，也就退化为了实数域的自然对数函数。换言之，复数域中指数函数的多值性的根本来源为将原定义域为实数域的对数函数拓展至复数域的过程中。同根式函数一样，复数域的对数函数与实数域的根式函数也存在根本差异。当 z 退化为实数时，对其使用复数域的指数函数，其结果也不等于实数域的对数函数。

3 复数与实数、复函数与实函数的区别

实数与复数、实数函数和复数函数的区别有许多。接下来我们分别讨论。

3.1 实数与复数的区别

实数与复数的最主要区别是，复数相比实数增加了一个基元 (base) i，并且让其具备了所有实数都不具备的性质：

$$i^2 = -1$$

通过两种基 1 与 i 的任意线性组合，可以表示任一复数和实数。

同时，不同于实数域可以排序，复数域是无法排序的。也就是说，不存在某种关系，我们定义为 “$>$”、“$<$” 以及 “$=$”：设 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 是复数，

1. 对于 a 和 b，要么 $a > b$，要么 $a < b$，要么 $a = b$
2. 如果 $a < b$ ，那么 $a + c < b + c$ 。
3. 如果 $a < b$ 并且 $c > 0$ ，那么 $ac < bc$ 。
4. 如果 $a < b$ 并且 $c < 0$ ，那么 $ac > bc$ 。

下面我们举一个反例：假设 $i > 0$，则由上条性质 2，

$$i \cdot i > i \cdot 0 \Leftrightarrow -1 > 0$$

显然矛盾。若 $i < 0$，则由上条性质 3，

$$i \cdot i > 0 \cdot i \Leftrightarrow -1 > 0$$

显然矛盾，且显然 $i \neq 0$。这说明如果引入了 i，便无法再定义一个关系满足以上四种性质。

3.2 复变函数和实变函数的区别

一元实变函数与复变函数的最本质区别是, 复变函数是某种特殊的 "二元函数"，因为任一一个复数 z 都可以表示成：

$$z = x + iy$$

这样的形式。也即：

$$复函数 f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$一元实函数 f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

$$二元实函数 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

而因此, 当我们在讨论复变函数的 "可导" 与 "可微" 时, 这两个概念便不会像一元实变函数那样等价。但是，如果 $f(z)$ 可以直接写成 z 的形式 (而不

是实部虚部分离的形式)，复变函数又表现出了一元实函数的部分特性，看上去像是一个一元函数。

而能否认为复变函数是特殊的二元实变函数呢？考虑到二元函数连续的定义：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

注意到二元实函数连续要求以任何方向 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时其极限均存在且相等。复变函数 $u(z)$ 可以写成

$$u(z)=u(x,y)=v(z)+iw(z)=v(x,y)+iw(x,y)\quad x,y,v,w\in\mathbb{R}$$

形式如上的复变函数的连续性等价为 u 和 w 均连续。也就是说，只要一个复变函数的实部和虚部分别连续，那么这个复变函数一定连续；反之，无法从二元实变函数中找到类似的两个部分，使得当这两个部分分别连续时，实变函数一定连续。

考虑到二元实变函数的可微定义：

$$z=f(x,y)\ \text{可微}\Leftrightarrow \mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$$

而二元实变函数即使在 x 和 y 方向均可导，也不意味着其可微。例如：

例 3.1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\dfrac{0}{|x|}-0}{x}\right)=0\Rightarrow f'_x(0,0)=0$$

同理，$f'_y(0,0)=0$。但是，其微分：

$$\Delta z = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

直接带入$\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 得到

$$A=0,\quad B=0, \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{1}{2};\ \lim_{\substack{x\to 00\\ \Delta y=-\Delta x}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=-\frac{1}{2}$$

说明 $f(x,y)$ 的微分不存在。说明 $f(x,y)$ 在 x、y 方向上的偏导不一定能完全表示其微分性质，即使保证了

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)$$

也无法保证在沿着其他方向求得的偏导相等，进而也无法保证其导数存在。换言之，函数 $f(x,y)$ 的偏导数存在，也不一定可微。仅仅当偏导数存在且连续时，其可微。

而复变函数，似乎很少谈论其“偏导数”。复变函数 $u(z)$ 写成

$$u(z)=u(x,y)=v(z)+iw(z)=v(x,y)+iw(x,y)\quad x,y,v,w\in\mathbb{R}$$

即使 u 的实部和虚部的偏导数均存在且连续，也无法认为其在区域内可微。还需要考虑 Cauchy-Riemann 条件：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\end{cases}$$

除此之外，复变函数的“解析性”带来的一些性质也是复变函数所独有的。考虑二元实变函数所类似的性质“区域内可微”。一个解析函数所具有

的零点是孤立的。而区域内可微的实变函数，其零点未必是孤立的。例如函数：

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

同时，由于复数可以表示成以下形式：

$$z=re^{i\theta}$$

所以复变函数还具有实变函数所不具备的柯西积分公式、留数定理等数学工具。

不过,实变函数也具备一些复变函数所不具备的性质。例如 Lagrange 中值定理：比如设 $f(z)=z^3+1, z_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, z_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, 则有 $f\left(z_2\right)-f\left(z_1\right)=0$, $z_2-z_1=-\sqrt{3}i$, 显然连接 z_1 和 z_2 的线段上的任意一点 x, 都不可能使得等式 $f\left(z_2\right)-f\left(z_1\right)=f'(\xi)\left(z_2-z_1\right)$ 成立, 即 Lagrange 中值定理不成立.