Approximation de fonctions

raph

September 17, 2023

Contents

1 Espace métrique

Rappel: Définition de suite (U_n) convergente:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |U_n - \ell| < \epsilon$$

1.1 Notion de distance

Une distance satisfis:

1. **Separation**: $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. **Symétrie**: $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
3. **Inégalité** Δ: $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

1.2 Les boules

Définition: Une boule ouvert / fermée. On appelle une boule ouverte centrée en a de rayon r par rapport a la distance d l'ensemble:

$$B_d(a, r) = \{x \in E | d(a, x) < r\}$$

Et une boule fermée:

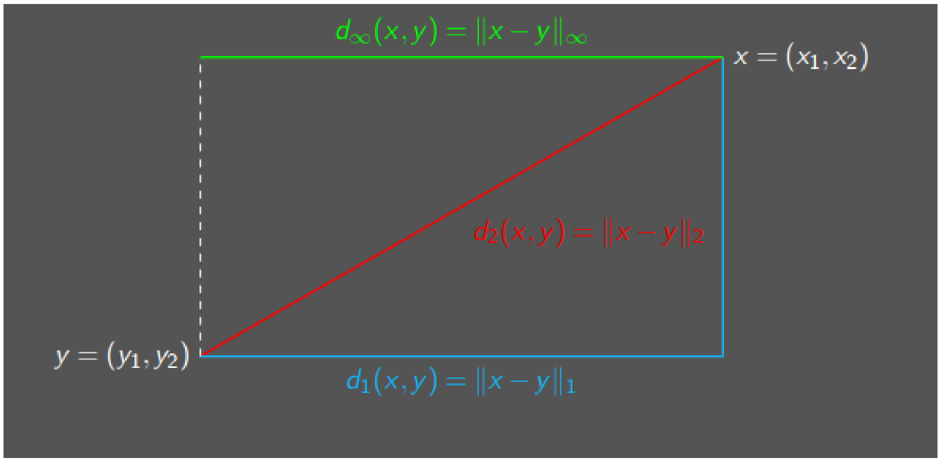
$$B_d(a, r) = \{x \in E | d(a, x) <= r\}$$

1.3 Notion de norme

Définition: Soit $p \in [1, +\infty[$. On appelle norme p sur $\mathbb{R}^n$ la norme notée $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

On note d_p la distance induite par $\|\cdot\|_p$.

- d_1 distance de Manhattan d'équation $d_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
- d_2 distance euclidienne $d_2 = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$
- d_∞ distance infinie $d_\infty = sup(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$



On remarque l'égalité:

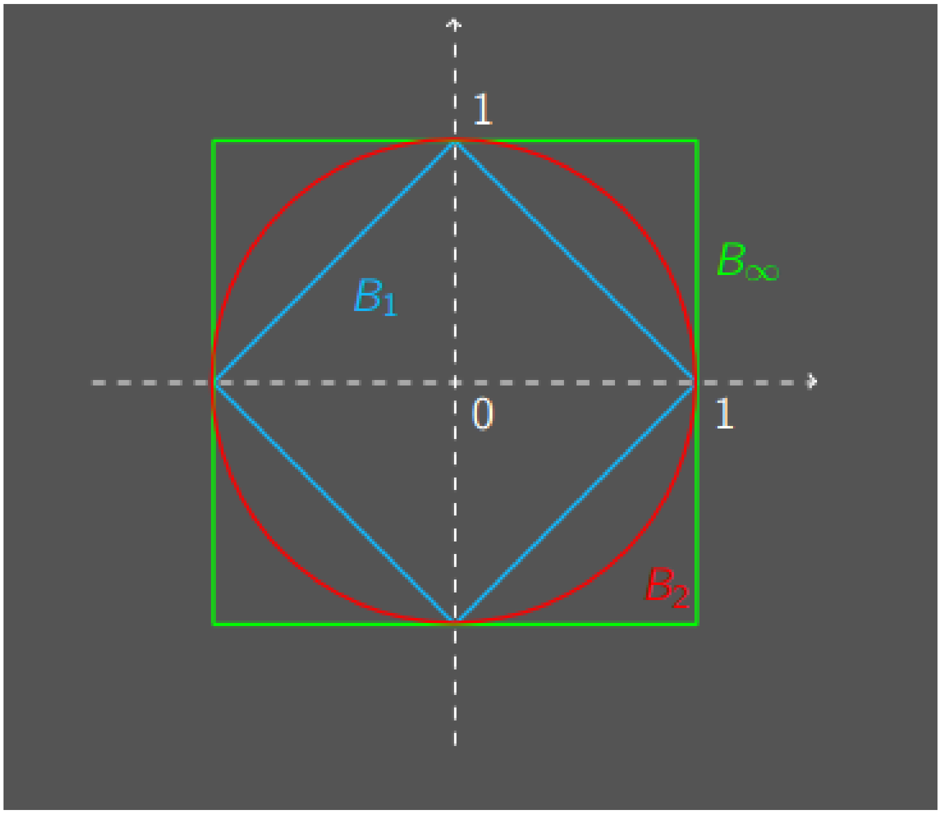
$$\|x-y\|_\infty \leq \|x-y\|_2 \leq \|x-y\|_1$$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Et plus généralement:

$$p < q \implies \|x\|_p \geq \|x\|_q$$



1.4 Normes dans des espaces de fonctions

$$\|f\|_p = (\int_I |f(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}}$$

Et pour $p = +\infty$ on a:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$