Approximation de fonctions

raph

September 13, 2023

Contents

1 Espace metrique

Rappel: Definition de suite (U_n) convergente:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |U_n - \ell| < \epsilon$$

1.1 Notion de distance

Une distance satisfie:

1. **Separation**: $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. **Symetrie**: $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
3. **Inegalite Δ**: $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

1.2 Les boules

Definition: Une boule ouvert / fermee. On appelle une boule ouverte centree en a de rayon r par rapport a la distance d l'ensemble:

$$B_d(a, r) = \{x \in E | d(a, x) < r\}$$

Et une boule fermee:

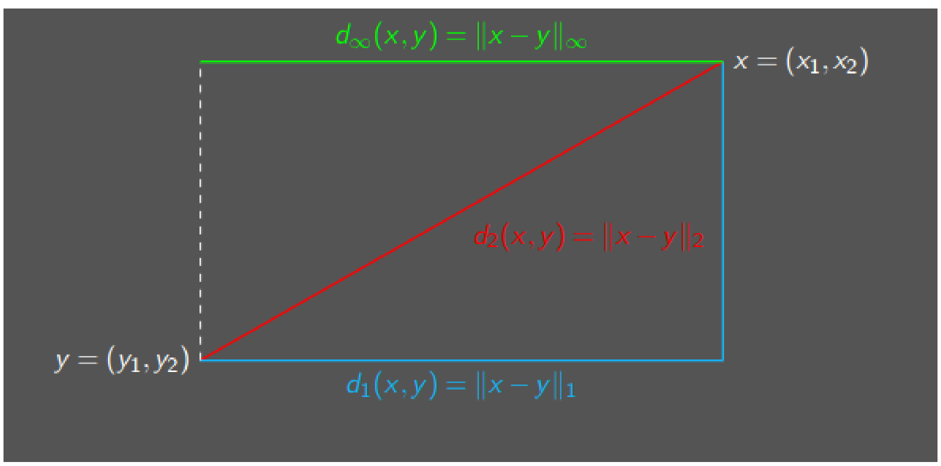
$$B_d(a,r) = \{x \in E | d(a,x) <= r\}$$

1.3 Notion de norme

Definition: Soit $p \in [1, +\infty[$. On appelle norme p sur $\mathbb{R}^n$ la norme notee $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

On note d_p la distance induite par $\|\cdot\|_p$.

- d_1 distance de Manhattan
- d_2 distance euclidienne
- d_∞ distance infinie



On remarque l'egalite:

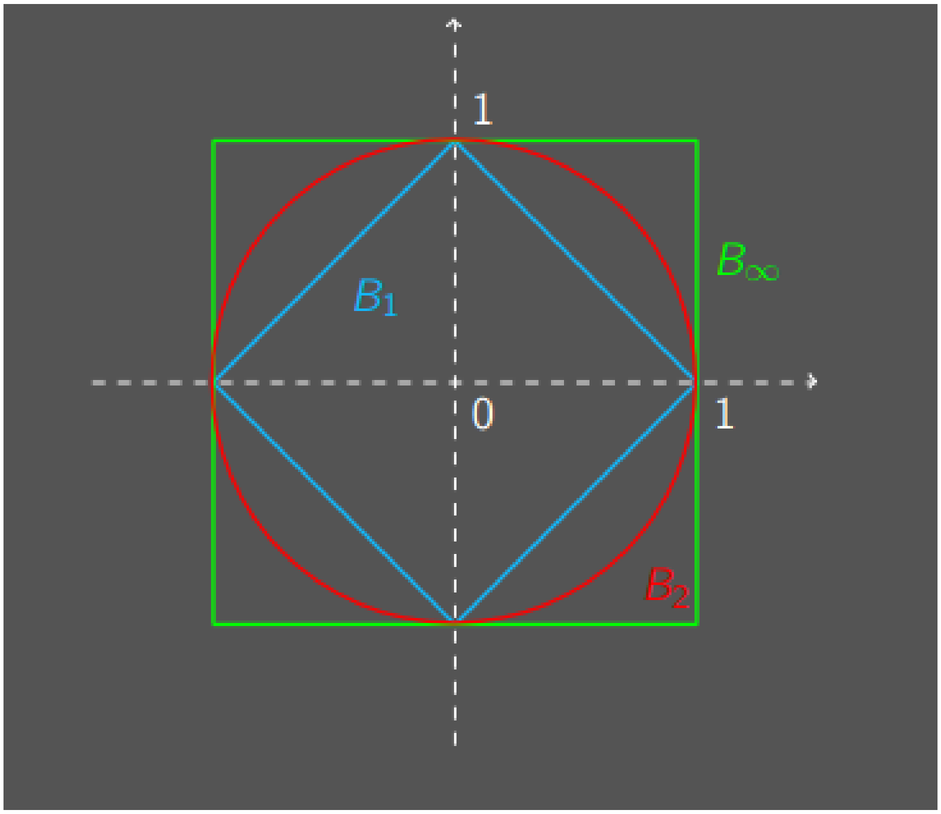
$$\|x-y\|_\infty \leq \|x-y\|_2 \leq \|x-y\|_1$$

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Et plus generalement:

$$p < q \implies \|x\|_p \geq \|x\|_q$$



1.4 Normes dans des espaces de fonctions

$$\|f\|_p = (\int_I |f(t)|^p \, dt)^{\frac{1}{p}}$$

Et pour $p = +\infty$ on a:

$$\|f\|_\infty = \underset{x \in I}{sup} |f(x)|$$