Intégrales généralisées

raph

September 23, 2023

Contents

1 Suite d'intégrales

1.1 Méthodes

1.1.1 Calculer limite de suites d'intégrales

Soit I_n notre intégrale.

1. Vérifier que la fonction est continue donc CM *Exemple*: Quotient de fonction dont le dénominateur ne s'annule pas, alors continue sur un **intervalle** donc CM sur le même **intervalle**
2. Étudier la convergence simple de f_n
3. Chercher une fonction Φ intégrable tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |F_n(x)| \leq \Phi(x)$ et que $\int_0^{+\infty} \Phi(x)dx$ converge
4. Par théorème de convergence dominée, on a I_n qui **converge** donc:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

2 Intégrales a paramètres

2.1 Méthode

2.1.1 Trouver domaine de définition de x

1. Prendre la fonction $f(x,t)$ pour tout t et regarder pour quelles valeurs de x la fonction a des FI
2. En déduire le domaine de définition de x

2.1.2 Montrer la continuité

1. Vérifier: $\forall t \in I, x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A
2. Vérifier: $\forall x \in A, t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I

Si les 2 sont continue, on peut même écrire $\forall x \in A, \forall t \in I, (x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $A \times I$

1. Trouver un $g(t)$ tel que $|f(x,t)| \leq g(t)$ et que g(t) continue et converge (donc intégrable) **Remarque**: si on trouve pas de fonction $g(t)$ facilement, prendre un subset du domaine de définition de x, soit $[a,b]$ et remplacer x par a si la fonction est décroissante ou b si croissante

Si ces conditions sont réunies, alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A

2.1.3 Montrer la dérivabilité (montrer classe C^1)

Pareil que la continuité mais avec $\frac{\partial f}{\partial x}$

2.1.4 Déterminer une limite

Si $G_n(x)$ converge alors $\underset{x \to 0}{lim} G_n(x) = G(0)$