Fonctions a plusieurs variables

raph

September 17, 2023

Contents

1 Surface et lignes de niveau

On peut definir une surface 2D dans un espace 3D de deux manieres:

- $z = f(x, y)$
- $0 = F(x, y, z)$

Une ligne de niveau est donnee par: $cst = f(x, y)$

1.1 Methode

1. Poser $f(x) = cst$ avec cst generalement donnee
2. Isoler une des deux variables de f en fonction du reste (generalement $y =$ le reste)
3. Determiner pour plusieurs points de x la valeur grace a l'equation precedente (**Attention a verifier que le point existe, exemple:** $\sqrt{x}$)
4. Tracer la courbe grace aux points

5. Si on nous demande de determiner les valeurs de x pour lesquelles $f(x) =$ quelque chose, regarder les intersections entre les courbes (cf. Exo 4 TD1)

2 Limites et continuite

2.1 Limite

Le voisinage/limite d'un point a est defini par l'ensemble suivant qui utilise un disque:

$$\{x \in \mathbb{R}^2, \|x - a\| < \delta\}$$

Ce qui implique qu'avec deux variables, ont peut approcher un point depuis **plusieurs directions ou chemins**

Probleme, le disque peut etre en dehors de l'espace de definition, il y a alors 2 points differents:

- Un point entierement dans le disque: **point interieur**
- Un point partiellement en dehors: **point de bord**

2.2 Continuite

$f(x)$ continue en x_0 :

- $f(x_0)$ existe
- $\underset{x \to x_0}{lim} f(x)$ existe
- $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = f(x_0)$

2.3 Methode

2.3.1 Determiner une limite qui existe

Afin d'annuler les Forme Indeterminee:

- $\sim$ quand on a des sinus sous reserve que ca tende vers 0
- Utiliser le conjugue, souvent avec les $\sqrt{\cdot}$
- Annuler le denominateur autrement

Remarques:

- $x^T x = \|x\|^2$ et une norme est toujours positive
- $A^T = A$ si A est symmetrique
- La transposee d'un scalaire c'est lui meme, donc $< x, y >=< x, y >^T$

3 Derivee partielle

3.1 Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

3.2 Utilisation

On peut utiliser ces derivee partielle afin d'etudier une surface dans une direction donnee.

3.2.1 Matrice Hessienne

La matrice Hessienne des derivees secondes est la suivante:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad \text{Heureusement } f_{xy} = f_{yx}$$

4 Plans tangents et approximations linéaires

4.1 Plans

On peut approximer une surface, d'equation $z = f(x, y)$ localement par un **plan** d'equation:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

Et on defini le **vecteur normal** a ce plan:

$$N = \begin{pmatrix} (f_x)_0 \\ (f_y)_0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Dirige vers l'exterieur pour une surface fermee}$$

Note: On peut poser: $f = F + z$

4.2 Approximation lineaire

En prenant $df = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ de f au point (x_0,y_0), on a:

$$f(x,y) \sim f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

4.3 Methode

Attention: toujours verifier qu'on nous donne pas directement un plan

4.3.1 Determiner le plan tangent $z = f(x,y)$

Soit un point $P = (a,b,c)$, on utilise la formule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot (y - b) + f(a,b) - z = 0$$

Ainsi, on calcule les derivees partielles et remplace les expressions et on trouve une equation de plan de la forme:

$$ax + by + cz + cst = 0$$

4.3.2 Determiner le plan tangent $F(x,y,z) = 0$

Soit un point $P = (a,b,c)$, on utilise la formule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \cdot (y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \cdot (z - c) = 0$$

Ainsi, on calcule les derivees partielles et remplace les expressions et on trouve une equation de plan de la forme:

$$ax + by + cz + cst = 0$$

4.3.3 Determiner le vecteur normal

Depuis notre equation de plan tangent, notre vecteur normal est le suivant:

$$N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Avec $c = -1$, des transformations sont peut etre necessaires.

5 Dérivées directionnelles et gradients

Rappel: *En deux dimensions, ont peut construire une derivee dans une direction precise telle que Ox et Oy (cf. Utilisation)*

5.1 Derivee directionnelle

Ainsi, une **derivee directionnelle** est donnee par:

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

Le vecteur u doit etre **unitaire** (cad $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$)

5.2 Taux d'accroissement

Il est donne par:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

5.3 Gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le gradient indique la plus forte pente.

5.4 Methode

5.4.1 Determiner $D_u f(x, y)$ selon la direction d'une droite au lieu d'un vecteur unitaire

- Grace a l'equation de droite donnee, on sait qu'une droite passe par $(0, 0)$, trouvons donc un autre point $(x, f(x))$ qui nous donne notre vecteur directeur $\vec{v}$.
- Verifier que le vecteur est unitaire, si il ne l'est pas comme la plupart du temps, appliquer $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
- Appliquer la formule

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

5.4.2 Determiner la derivee directionnelle dans la direction de la pente positive maximale

La pente positive maximale est donnee par le gradient, cependant le gradient n'est pas unitaire, on l'unitarise et on trouve au final que la derivee directionnelle est $D_u f = \|\nabla f\|$

6 La dérivée composée ou « chain rule »

TODO: Ecrire la formule

Sinon juste remplacer la composee dans la fonction de base.

7 Maxima, minima et points-cols

La nature d'un point **stationnaire** (extrema, point de col) est ensuite determine par ses derievees partielles secondes. Cela revient a etudier la position de la surface associee a f par rapport a son plan tangent au point stationnaire.

Il y **possiblement** mais pas necessairement un point stationnaire quand:

$$\nabla f = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad f_x = f_y = 0$$

Ou alors on utilise la matrice Hessienne, voir methode.

7.1 Methode

7.1.1 Determiner la nature d'un point critique

Tout d'abord, calculer la matrice Hessienne pour le point desire.

Ensuite suivre la forme suivante, soit H la matrice Hessienne:

$$\begin{cases} \det(H) = 0 \implies \text{rien} \\ \det(H) < 0 \implies \text{point de col} \\ \det(H) > 0 \implies tr(H) > 0 \to \text{min} \qquad \text{ou} \qquad tr(H) < 0 \to \text{max} \end{cases}$$