Fonctions a plusieurs variables

raph
September 17, 2023

Contents

1 Surface et lignes de niveau

On peut définir une surface 2D dans un espace 3D de deux manières:

- $z = f(x, y)$
- $0 = F(x, y, z)$

Une ligne de niveau est donnée par: $cst = f(x, y)$

1.1 Méthode

1. Poser $f(x) = cst$ avec cst généralement donnée
2. Isoler une des deux variables de f en fonction du reste (généralement $y =$ le reste)
3. Déterminer pour plusieurs points de x la valeur grâce a l'équation précédente (**Attention a vérifier que le point existe, exemple:** $\sqrt{x}$)
4. Tracer la courbe grâce aux points
5. Si on nous demande de déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x) =$ quelque chose, regarder les intersections entre les courbes (cf. Ex 4 DT1)

2 Limites et continuité

2.1 Limite

Le voisinage/limite d'un point a est défini par l'ensemble suivant qui utilise un disque:

$$\{x \in \mathbb{R}^2, \|x - a\| < \delta\}$$

Ce qui implique qu'avec deux variables, ont peut approcher un point depuis **plusieurs directions ou chemins**

Problème, le disque peut être en dehors de l'espace de définition, il y a alors 2 points différents:

- Un point entièrement dans le disque: **point intérieur**
- Un point partiellement en dehors: **point de bord**

2.2 Continuité

$f(x)$ continue en x_0 :

- $f(x_0)$ existe
- $\underset{x \to x_0}{lim} f(x)$ existe
- $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = f(x_0)$

2.3 Méthode

2.3.1 Déterminer une limite qui existe

Afin d'annuler les Forme Indéterminée:

- $\sim$ quand on a des sinus sous réserve que ça tende vers 0
- Utiliser le conjugue, souvent avec les $\sqrt{\cdot}$
- Annuler le dénominateur autrement

Remarques:

- $x^T x = \|x\|^2$ et une norme est toujours positive
- $A^T = A$ si A est symétrique
- La transposée d'un scalaire c'est lui même, donc $< x, y > = < x, y >^T$

3 Dérivée partielle

3.1 Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

3.2 Utilisation

On peut utiliser ces dérivée partielle afin d'étudier une surface dans une direction donnée.

3.2.1 Matrice Hessienne

La matrice Hessienne des dérivées secondes est la suivante:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad \text{Heureusement } f_{xy} = f_{yx}$$

4 Plans tangents et approximations linéaires

4.1 Plans

On peut approximer une surface, d'équation $z = f(x, y)$ localement par un **plan** d'équation:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

Et on défini le **vecteur normal** a ce plan:

$$N = \begin{pmatrix} (f_x)_0 \\ (f_y)_0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Dirige vers l'exterieur pour une surface fermee}$$

Note: On peut poser: $f = F + z$

4.2 Approximation linéaire

En prenant $df = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ de f au point (x_0, y_0), on a:

$$f(x, y) \sim f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

4.3 Méthode

Attention: toujours vérifier qu'on nous donne pas directement un plan

4.3.1 Déterminer le plan tangent $z = f(x, y)$

Soit un point $P = (a, b, c)$, on utilise la formule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) + f(a, b) - z = 0$$

Ainsi, on calcule les dérivées partielles et remplace les expressions et on trouve une équation de plan de la forme:

$$ax + by + cz + cst = 0$$

4.3.2 Déterminer le plan tangent $F(x, y, z) = 0$

Soit un point $P = (a, b, c)$, on utilise la formule:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) \cdot (y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \cdot (z - c) = 0$$

Ainsi, on calcule les dérivées partielles et remplace les expressions et on trouve une équation de plan de la forme:

$$ax + by + cz + cst = 0$$

4.3.3 Déterminer le vecteur normal

Depuis notre équation de plan tangent, notre vecteur normal est le suivant:

$$N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Avec $c = -1$, des transformations sont peut être nécessaires.

5 Dérivées directionnelles et gradients

Rappel: *En deux dimensions, ont peut construire une dérivée dans une direction précise telle que Ox et Oy (cf. Utilisation)*

5.1 Dérivée directionnelle

Ainsi, une **dérivée directionnelle** est donnée par:

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

Le vecteur u doit être **unitaire** (cad $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$)

5.2 Taux d'accroissement

Il est donne par:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

5.3 Gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le gradient indique la plus forte pente.

5.4 Méthode

5.4.1 Déterminer $D_u f(x, y)$ selon la direction d'une droite au lieu d'un vecteur unitaire

- Grâce a l'équation de droite donnée, on sait qu'une droite passe par $(0, 0)$, trouvons donc un autre point $(x, f(x))$ qui nous donne notre vecteur directeur $\vec{v}$.
- Vérifier que le vecteur est unitaire, si il ne l'est pas comme la plupart du temps, appliquer $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$
- Appliquer la formule

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

5.4.2 Déterminer la dérivée directionnelle dans la direction de la pente positive maximale

La pente positive maximale est donnée par le gradient, cependant le gradient n'est pas unitaire, on l'unitarise et on trouve au final que la dérivée directionnelle est $D_u f = \|\nabla f\|$

6 La dérivée composée ou « chain rule »

TODO: Écrire la formule

Sinon juste remplacer la composée dans la fonction de base.

7 Maxima, minima et points-cols

La nature d'un point **stationnaire** (extrema, point de col) est ensuite détermine par ses dérivées partielles secondes. Cela revient à étudier la position de la surface associée a f par rapport a son plan tangent au point stationnaire.

Il y **possiblement** mais pas nécessairement un point stationnaire quand:

$$\nabla f = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad f_x = f_y = 0$$

Ou alors on utilise la matrice Hessienne, voir méthode.

7.1 Méthode

7.1.1 Déterminer la nature d'un point critique

Tout d'abord, calculer la matrice Hessienne pour le point désiré.

Ensuite suivre la forme suivante, soit H la matrice Hessienne:

$$\begin{cases} \det(H) = 0 \implies \text{rien} \\ \det(H) < 0 \implies \text{point de col} \\ \det(H) > 0 \implies tr(H) > 0 \rightarrow \text{min} \qquad \text{ou} \qquad tr(H) < 0 \rightarrow \text{max} \end{cases}$$