Fonctions a plusieurs variables

raph

September 16, 2023

Contents

1 Surface et lignes de niveau

On peut definir une surface 2D dans un espace 3D de deux manieres:

- $z = f(x, y)$
- $0 = F(x, y, z)$

Une ligne de niveau est donnee par: $cst = f(x, y)$

1.1 Methode

1. Poser $f(x) = cst$ avec cst generalement donnee
2. Isoler une des deux variables de f en fonction du reste (generalement $y =$ le reste)
3. Determiner pour plusieurs points de x la valeur grace a l'equation precedente (**Attention a verifier que le point existe, exemple:** $\sqrt{x}$)
4. Tracer la courbe grace aux points
5. Si on nous demande de determiner les valeurs de x pour lesquelles $f(x) =$ quelque chose, regarder les intersections entre les courbes (cf. Exo 4 TD1)

2 Limites et continuite

2.1 Limite

Le voisinage/limite d'un point a est defini par l'ensemble suivant qui utilise un disque:

$$\{x \in \mathbb{R}^2, \|x - a\| < \delta\}$$

Ce qui implique qu'avec deux variables, ont peut approcher un point depuis **plusieurs directions ou chemins**

Probleme, le disque peut etre en dehors de l'espace de definition, il y a alors 2 points differents:

- Un point entierement dans le disque: **point interieur**
- Un point partiellement en dehors: **point de bord**

2.2 Methode

2.2.1 Determiner une limite qui existe

Afin d'annuler les Forme Indeterminee:

- $\sim$ quand on a des sinus sous reserve que ca tende vers 0
- Utiliser le conjugue, souvent avec les $\sqrt{\cdot}$
- Annuler le denominateur autrement

Remarques:

- $x^T x = \|x\|^2$ et une norme est toujours positive
- $A^T = A$ si A est symmetrique
- La transposee d'un scalaire c'est lui meme, donc $< x, y >=< x, y >^T$

2.3 Continuite

$f(x)$ continue en x_0 :

- $f(x_0)$ existe
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

3 Derivee partielle

3.1 Notation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

3.2 Utilisation

On peut utiliser ces derivee partielle afin d'etudier une surface dans une direction donnee.

3.2.1 Matrice Hessienne

La matrice Hessienne des derivees secondes est la suivante:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \qquad \text{Heureusement } f_{xy} = f_{yx}$$

3.2.2 Point de col

Il y **possiblement** mais pas necessairement un point de col quand:

$$f_x = f_y = 0$$

4 Plans tangents et approximations linéaires

4.1 Plans

On peut approximer une surface, d'equation $z = f(x, y)$ localement par un **plan** d'equation:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

Et on defini le **vecteur normal** a ce plan:

$$N = \begin{pmatrix} (f_x)_0 \\ (f_y)_0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Dirige vers l'exterieur pour une surface fermee}$$

Note: On peut poser: $f = F + z$

4.2 Approximation lineaire

En prenant $df = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ de f au point (x_0, y_0), on a:

$$f(x, y) \sim f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

5 Dérivées directionnelles et gradients

Rappel: /En deux dimensions, ont peut construire une derivee dans une direction precise telle que Ox et Oy / (cf. Utilisation)

5.1 Derivee directionnelle

Ainsi, une **derivee directionnelle** est donnee par:

$$D_u f = \nabla f \cdot u$$

Le vecteur u est **unitaire** (cad $\|u\| = 1$)

5.2 Taux d'accroissement

Il est donne par:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

6 La dérivée composée ou « chain rule »

TODO: Ecrire la formule

7 Maxima, minima et points-cols

Ceci est aussi vrai pour les extrema

La nature d'un point **stationnaire** (extrema, point de col) est ensuite determine par ses derievees partielles secondes. Cela revient a etudier la position de la surface associee a f par rapport a son plan tangent au point stationnaire.

En dimension arbitraire, la condition de stationnarite est formulee par:

$$\nabla f = 0$$

Ou alors on utilise la matrice Hessienne, voir methode.

LE RESTE NE SEMBLE PAS ETRE DANS LES TDS, A VOIR ET CORRIGER SI NECESSAIRE