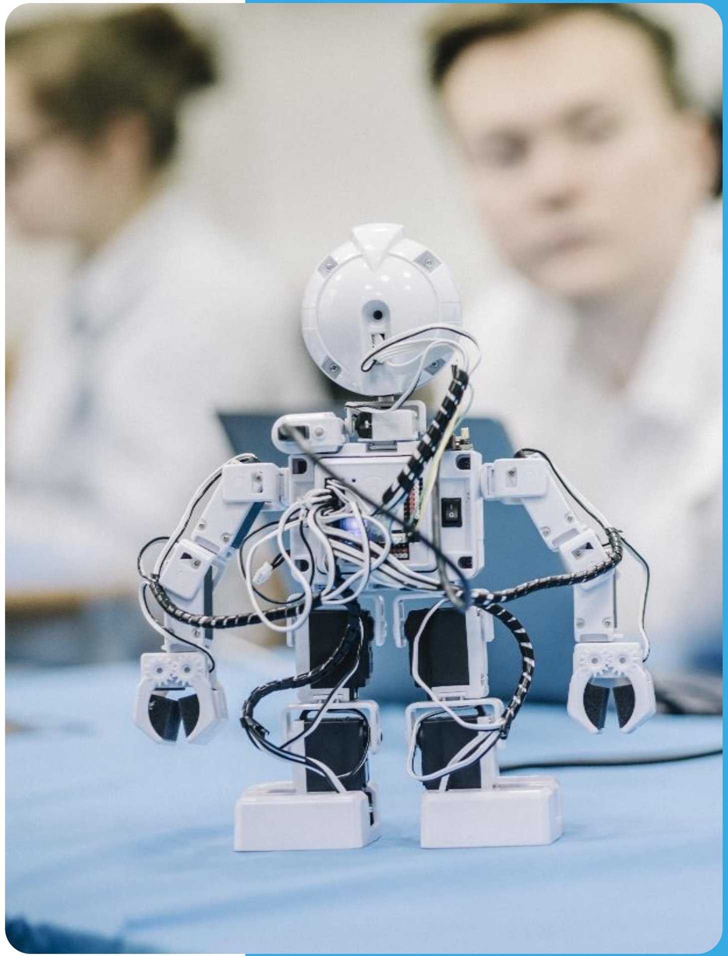
TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS (FA-SYS3045)

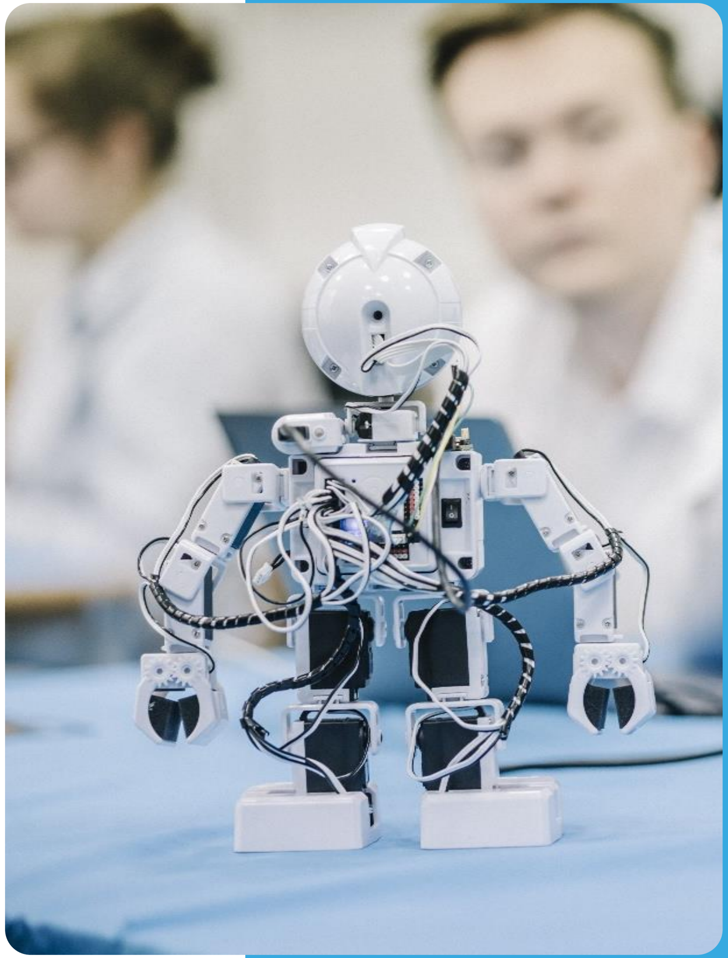
Maryam L’Hernault

Maryam.lhernault@esiea.fr



ANALYSE FREQUENTIELLE DES SIGNAUX A TEMPS CONTINU

(ANALYSE SPECTRALE)

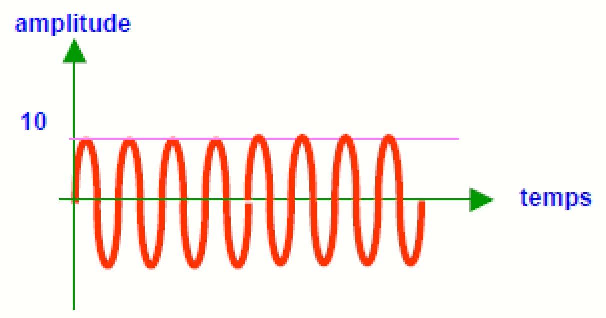


Analyse spectrale

L'analyse spectrale consiste à étudier le comportement des signaux dans le domaine fréquentiel (étude des ondes lumineuses, le son, …)

Représentation temporelle d'un signal: les variations de l'amplitude du signal sont présentées <u>en fonction du temps</u>. On peut visualiser le signal électrique sur l'oscilloscope.

Exemple: $x(t) = 10\sin(400t)$ est un signal sinusoïdal d'amplitude 10V, de pulsation $400\ rad/\sec$, soit une fréquence $63{,}7\ Hz$.



Représentation temporelle

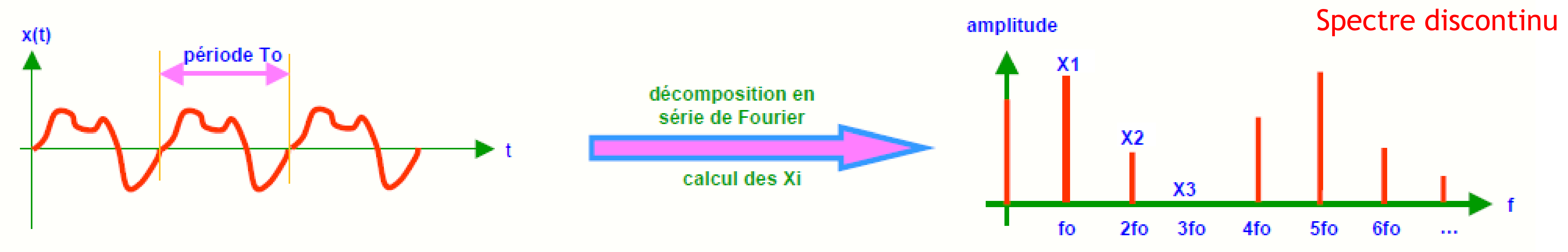
Représentation fréquentielle d'un signal: Pour voir les fréquences contenues dans un signal, on le représente sous la forme d'un diagramme <u>amplitude-fréquence</u> appelé <u>spectre d'amplitude</u>.

Exemple: $x(t) = 10\sin(400t)$ est un signal d'amplitude $10V$ et de pulsation $400\ rad/\sec$ (ou de fréquence 63,7Hz).

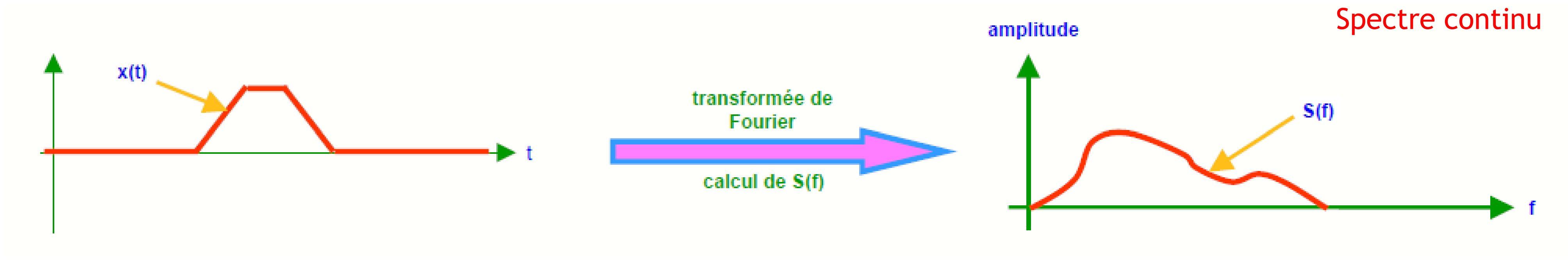
Représentation fréquentielle
(spectre d'amplitude unilatéral)

Outils mathématiques

Signal périodique: la décomposition en séries de Fourier permet de calculer l'amplitude des raies du spectre discontinu.

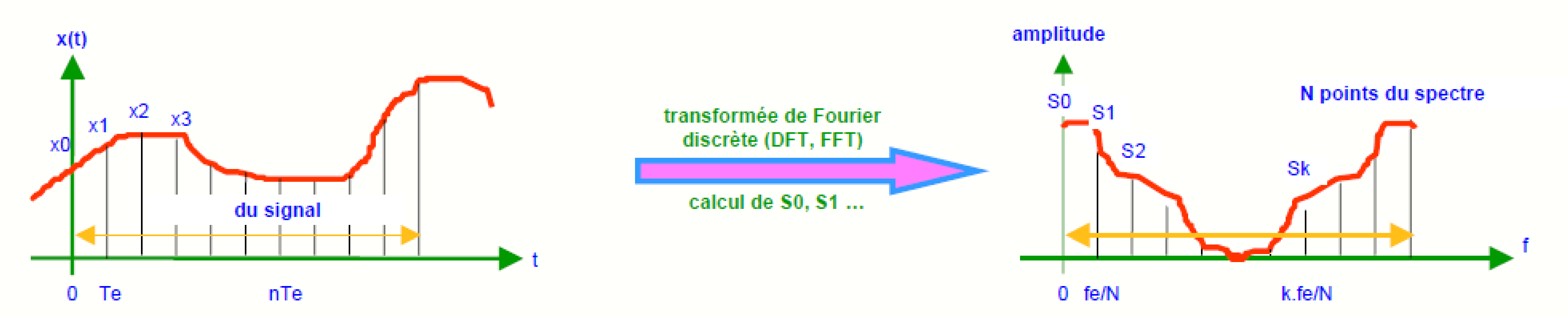


Signal non-périodique: la transformée de Fourier permet de calculer l'expression de la courbe du spectre.

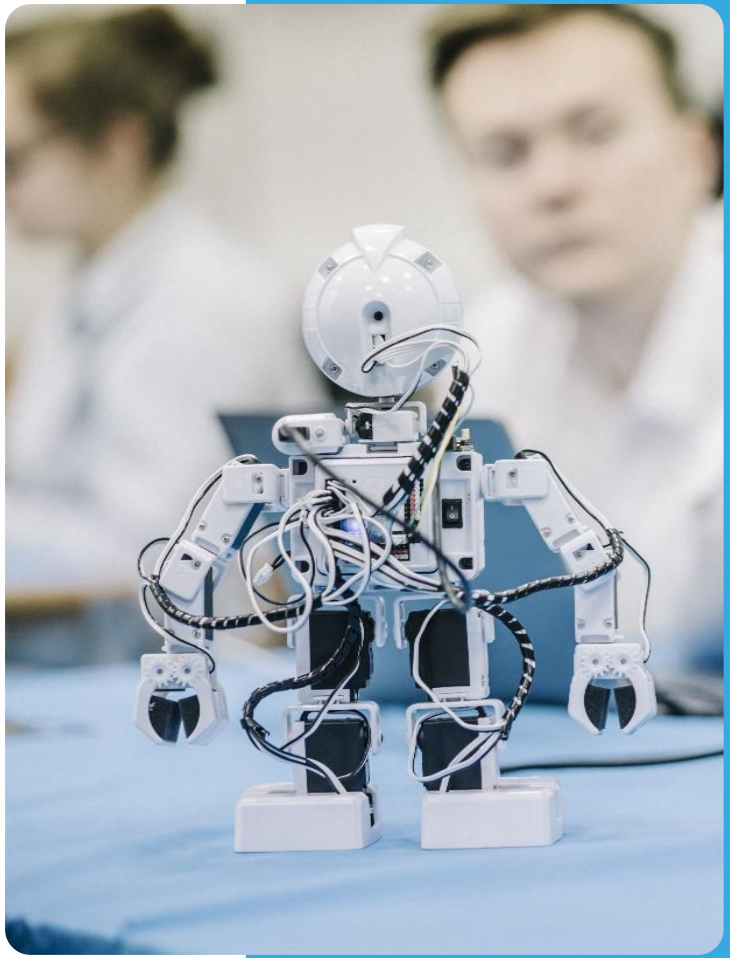


Outils mathématiques

Signal échantillonné de N échantillons: la Transformée de Fourier Discrète permet de calculer N points de la courbe du spectre.

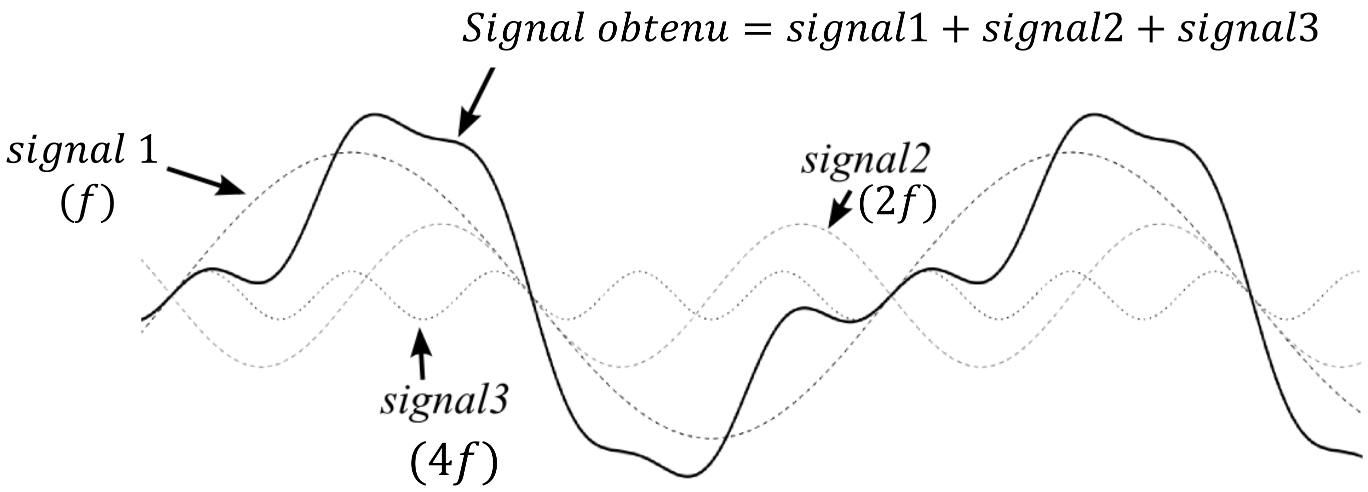


DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER



Représentation fréquentielle des signaux périodiques

Un signal périodique de fréquence f et de forme quelconque peut être obtenu en ajoutant à une sinusoïde de fréquence f (fondamentale), des sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples entiers de f. Ces signaux ont des amplitudes et des positions de phase appropriées.



https://www.youtube.com/watch?v=d5ScbZVDaI4

Décomposition en Série de Fourier

Un signal périodique de fréquence f_0 peut s'écrire (se décomposer) sous forme d'une somme infinie de signaux sinusoïdaux de fréquences $n \times f_0$, appelées les harmoniques du signal. Cette méthode, appelée la décomposition en série de Fourier a été proposée pour la première fois par Joseph Fourier (1768-1830).

Trois présentation de la série de Fourier:

1. Série de Fourier trigonométrique: coefficients a_n et b_n réels
2. Série de Fourier en cosinus: coefficients A_n réels
3. Série de Fourier complexe: coefficients C_n complexes

Valeur moyenne d’un signal périodique

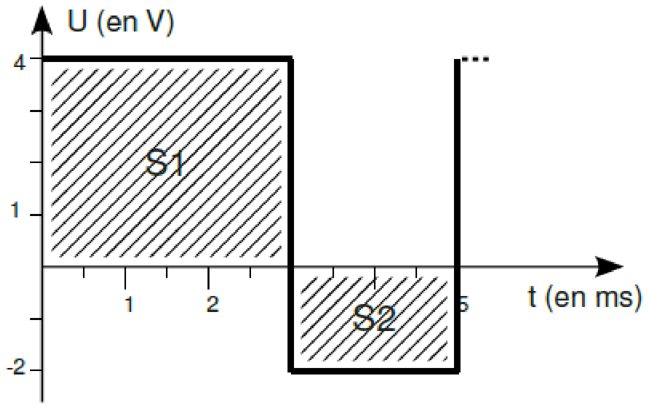
La valeur moyenne d'une grandeur dépendante du temps, périodique, de période T est:

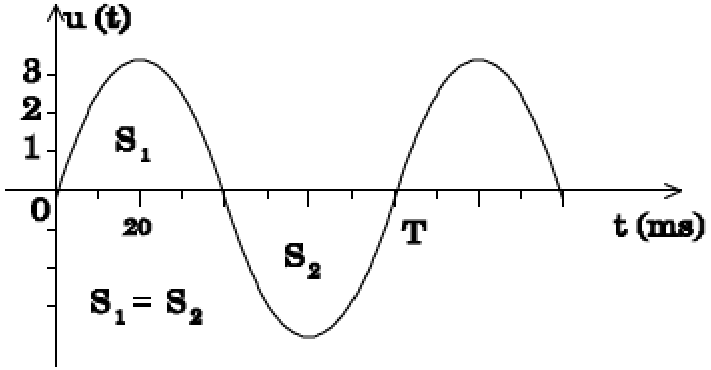
$$\langle U \rangle = \frac{S}{T}$$

où S est la surface comprise entre la courbe u(t) et l'axe des temps pendant la durée de la période T.

$$S = S_1 - S_2 \Rightarrow \langle U \rangle = \frac{S_1 - S_2}{T}$$

Exemple:





$$\langle U \rangle = \frac{S_1 - S_2}{T} = \frac{4 \times 3.10^{-3} - 2 \times 2.10^{-3}}{5.10^{-3}} = 1{,}6\,V$$

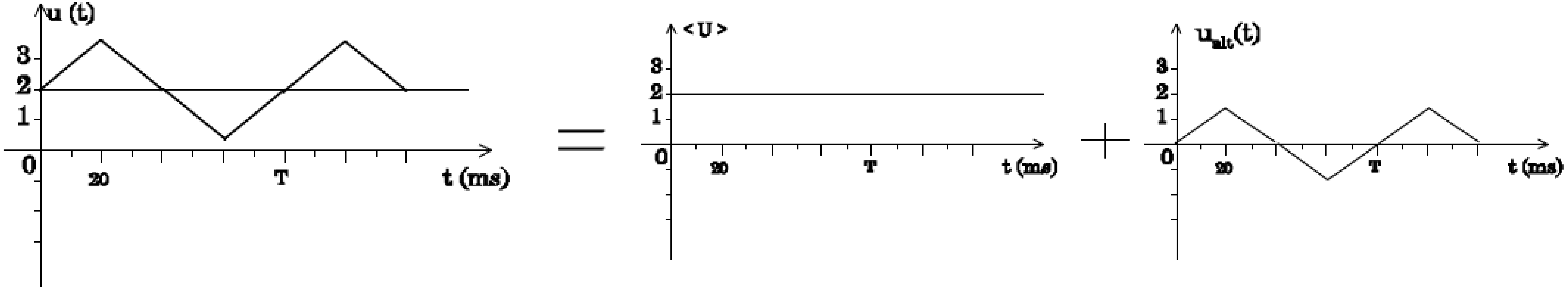
Signal sinusoïdal alternatif: $\langle U \rangle = 0$

Valeur moyenne d'un signal périodique

On Calcule la valeur moyenne d'un signal périodique $u(t)$, de période T, à l'aide d'une intégrale:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, dt$$

Cas d'un signal périodique ayant une composante continue:



$u(t)$ est la somme de sa valeur moyenne $< U >$ et de sa composante alternative $u_{alt}(t)$ de valeur moyenne nulle:

$$u(t) \;=\; < U > + u_{alt}(t)$$

Série de Fourier trigonométrique

Soit $x(t)$ un signal T_0 −périodique, on écrit la décomposition en série de Fourier trigonométrique de $x(t)$ de façon suivante:

$$\boxed{x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \omega_0 = 2\pi f_0$$

- f_0: fréquence fondamentale
- $f_n = n f_0$: harmoniques de rang n; $(n > 1)$
- $\frac{a_0}{2}$: valeur moyenne du signal (composante continue) de fréquence nulle
- a_n et b_n : coefficients trigonométriques de la série de Fourier, calculés d'après les formules suivantes:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi n f_0 t)\, dt \rightarrow a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi n f_0 t)\, dt$$

Série de Fourier en cosinus

Relation trigonométrique: $A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(x + \arctan(-\frac{B}{A}))$

Série de Fourier trigonométrique:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

Série de Cosinus:

$$\boxed{x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)}$$

Avec:

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \ (valeur\ moyenne)\ ,\ A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \text{ et } \varphi_n = \arctan(\frac{-b_n}{a_n})$$

Où: a_n et b_n sont les coefficients de la série trigonométrique.

Série de Fourier complexe

Série de Fourier trigonométrique:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

Série de Fourier complexe:

$$\boxed{x(t) = C_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}}$$

Formules d'Euler:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\underbrace{C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt}_{\text{Coefficients complexes}} \rightarrow C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt$$

: valeur moyenne de $x(t)$

$$\boxed{C_0 = \frac{a_0}{2}} \quad \boxed{C_n = \left(\frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}\right)} \quad \boxed{C_{-n} = \overline{C_n} = \left(\frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2}\right)}$$

Propriétés

On montre que:

1. Si $x(t)$ est pair, alors $b_n = 0$ → $C_n = \frac{a_n}{2}$ (coefficients réels)

2. Si $x(t)$ est impair, alors $a_n = 0$ → $C_n = -j\frac{b_n}{2}$ (coefficients imaginaires)

3. $a_n = C_n + \overline{C_n}$, $\qquad b_n = j(C_n - \overline{C_n})$

4. $C_{-n} = \overline{C_n} \Rightarrow |C_{-n}| = |\overline{C_n}| = |C_n|$

5. $\arg(C_n) = \operatorname{atan}(-\frac{b_n}{a_n})$, $\arg(C_{-n}) = \operatorname{atan}(\frac{b_n}{a_n}) = -\arg(C_n)$

Relation entre les coefficients

Série trigonométrique

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n2\pi f_0 t) + b_n \sin(n2\pi f_0 t)$$

Série complexe

$$x(t) = C_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Série en cosinus

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 t + \varphi_n)$$

$C_0 = \frac{a_0}{2} = A_0$ (valeur moyenne)

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} = \overline{C_n}$$

$$|C_{-n}| = |\overline{C_n}| = |C_n| = \frac{\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}}{2} = \frac{A_n}{2}$$

$$A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}$$

$$\varphi_n = \mathrm{atan}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

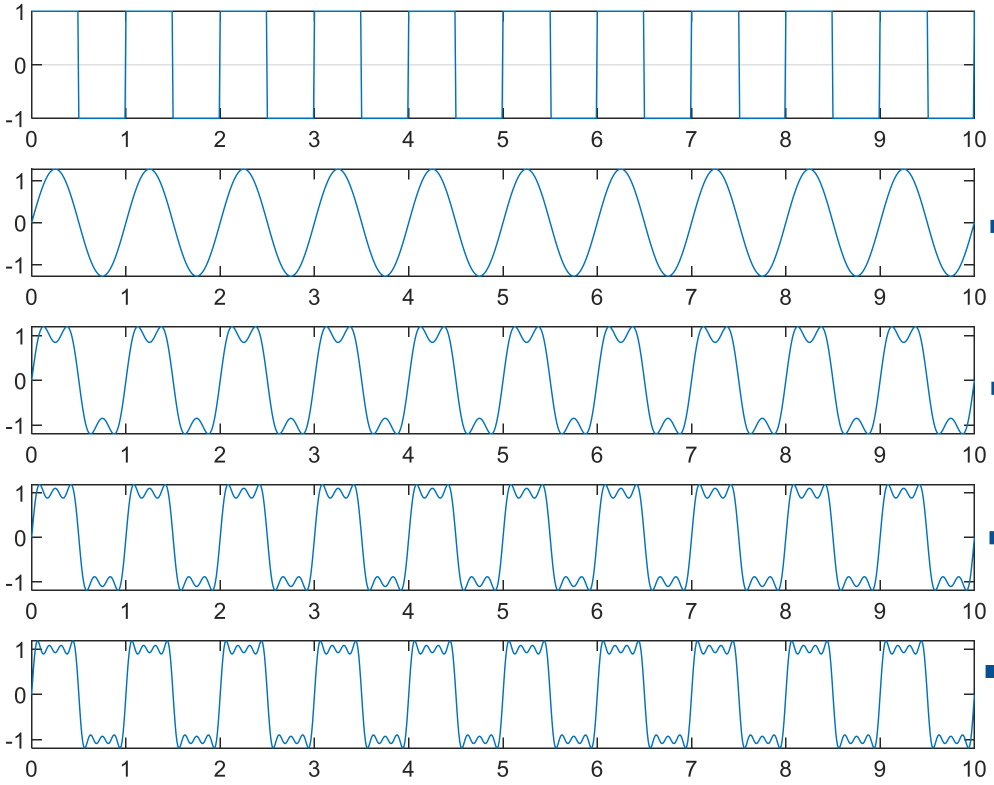
$$\arg(C_n) = \mathrm{atan}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = \varphi_n$$

$$\arg(C_{-n}) = \mathrm{atan}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = -\varphi_n$$

Exemple

Exemple: Signal carré périodique de période T=1 à décomposer en série de Fourier, fréquence fondamentale $f_1 = 1$, Valeur moyenne = 0

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \cos(2\pi(2n+1)f_1 t - \frac{\pi}{2})$$



$n = 0: x(t) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi \times 1 \times f_1 t)$ harmonique de rang 1 (fondamental)

$$n = 0\,,1 : x(t) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi \times 1 \times f_1\ t) + \frac{4}{3\pi}\sin(2\pi \times 3 \times f_1\ t)$$

$$n = 0,1\,,2 : x(t) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi f_1 t) + \frac{4}{3\pi}\sin(2\pi \times 3 f_1\ t) + \frac{4}{5\pi}\sin(2\pi \times 5 f_1\ t)$$

$$\frac{4}{\pi}\sin(2\pi \times 1 f_1 t) + \frac{4}{3\pi}\sin(2\pi \times 3 f_1\ t) + \frac{4}{5\pi}\sin(2\pi \times 5 f_1\ t) + \frac{4}{7\pi}\sin(2\pi \times 7 f_1\ t)$$

Harmoniques impairs

coefficients de Fourier

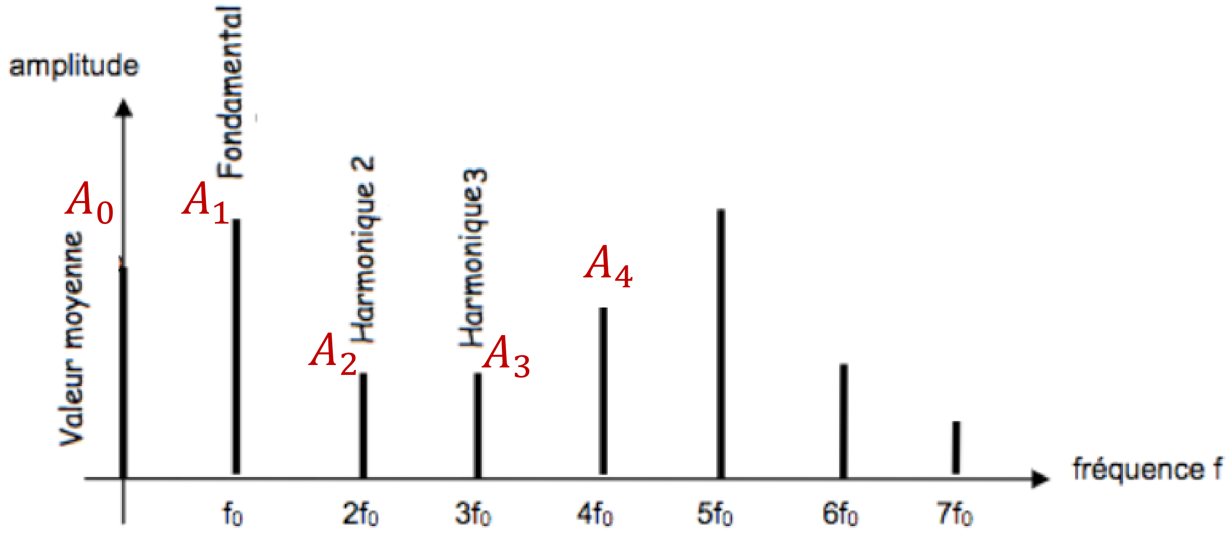
f_1 : fréquence fondamentale
nf_1 : harmoniques $(n > 1)$

Spectre unilatéral d'un signal périodique

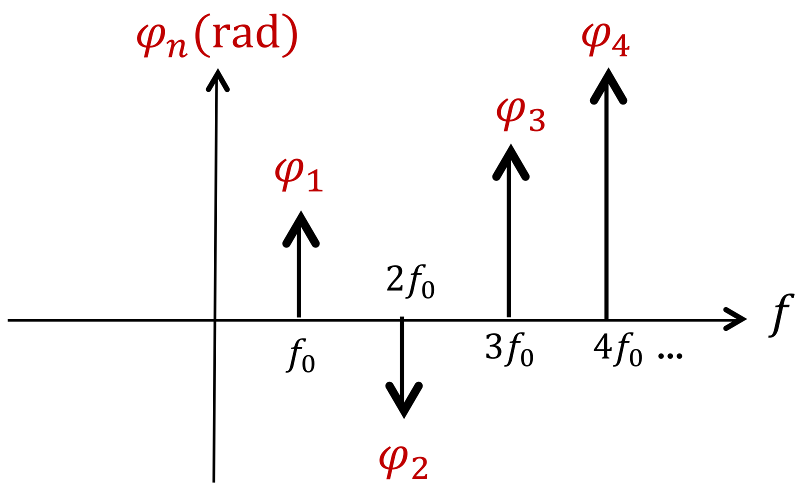
Le Spectre d'amplitude unilatéral d'un signal T_0-périodique est un spectre sous forme d'impulsions (spectre discontinu) d'amplitude A_n (coefficients de la série de cosinus), situées aux fréquences $\mathrm{n}f_0;\ \ n \geq 0$.

Le spectre de phase unilatéral est constitué d'impulsions d'amplitude φ_n situées aux fréquences $\mathrm{n}f_0;\ \ n \geq 0$.

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$



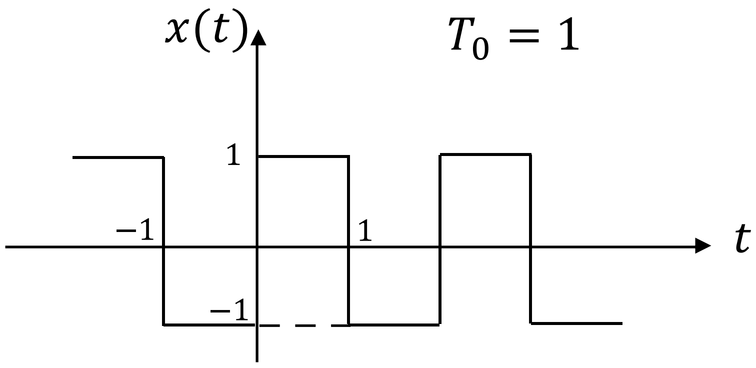
Spectre d'amplitude unilatéral

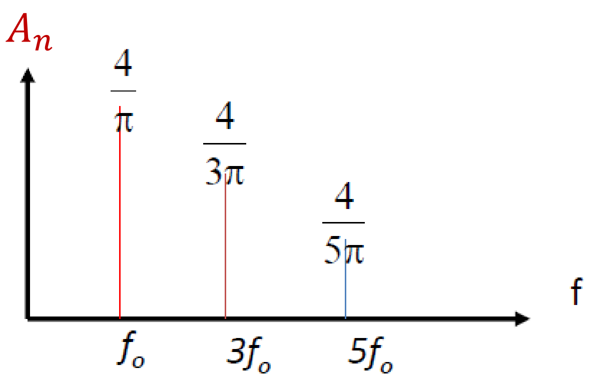


Spectre de phase unilatéral

Spectre unilatéral d'un signal périodique

Exemple: spectres unilatéraux d'un signal carré périodique:

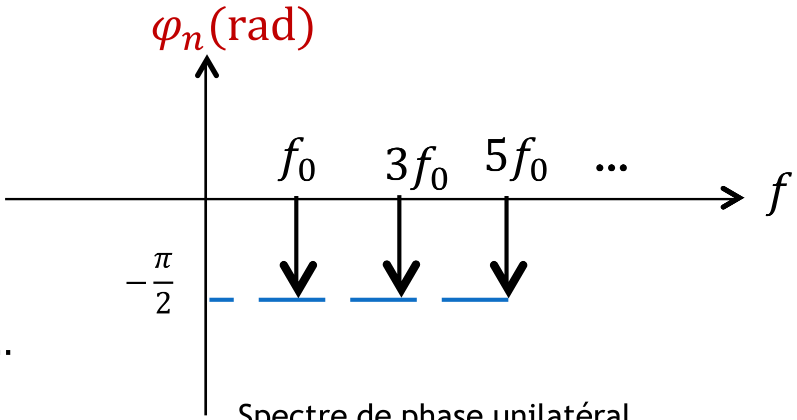




Spectre d'amplitudes unilatéral

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi f_0 t) + \frac{4}{3\pi}\sin(2\pi(3f_0)t) + \frac{4}{5\pi}\sin(2\pi(5f_0)t) + \ldots.$$

$$x(t) = \underbrace{0}_{A_0} + \underbrace{\frac{4}{\pi}}_{A_1}\cos\left(2\pi f_0 t \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\varphi_1}\right) + \underbrace{\frac{4}{3\pi}}_{A_3}\cos\left(2\pi \times 3f_0\, t \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\varphi_3}\right) + \underbrace{\frac{4}{5\pi}}_{A_5}\cos\left(2\pi \times 5f_0\, t \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\varphi_5}\right) + \ldots$$



Spectre de phase unilatéral

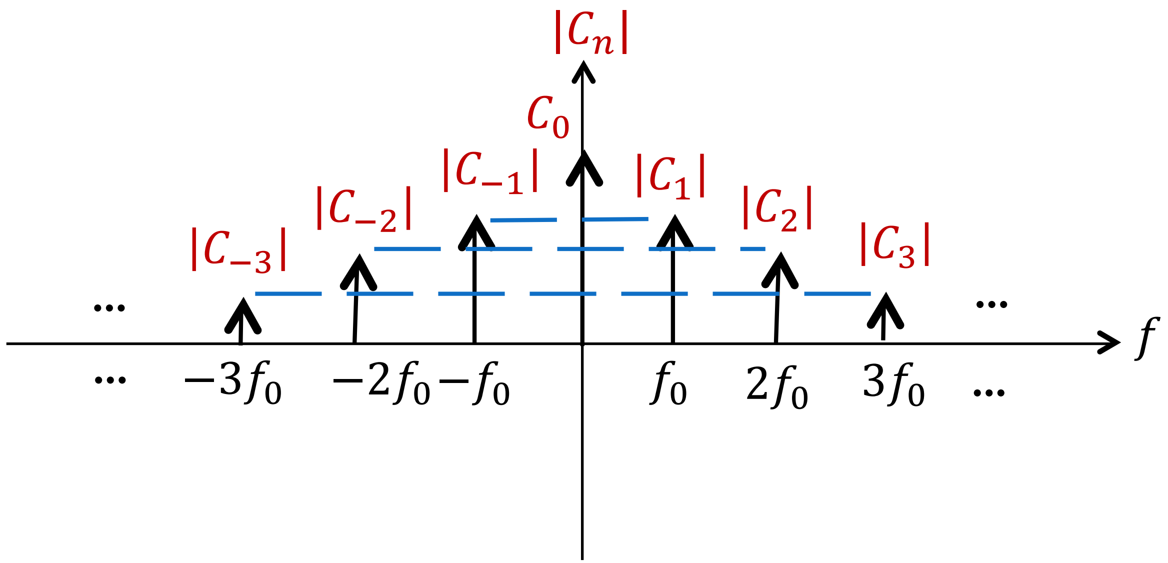
Spectre bilatéral d'un signal périodique

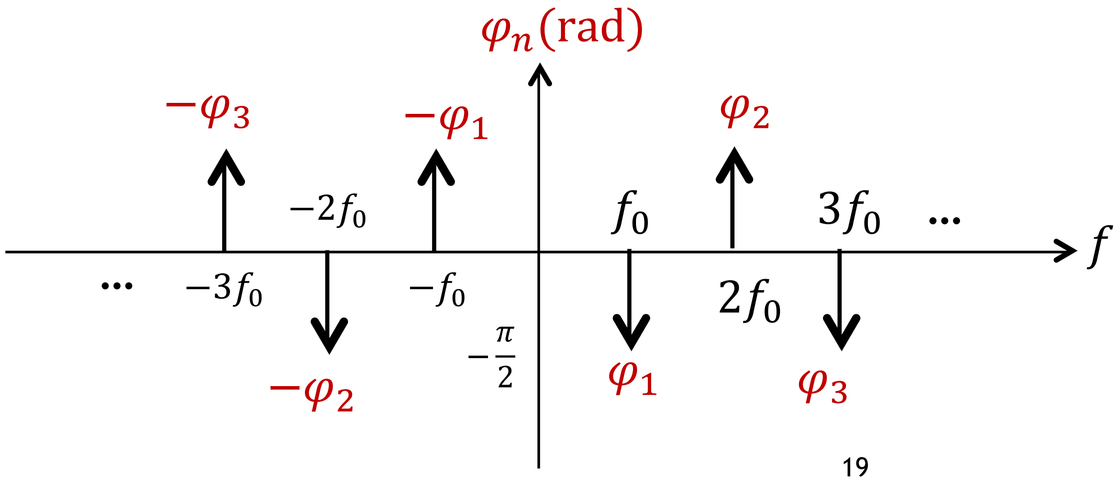
Le Spectre d'amplitude bilatéral d'un signal T_0-périodique est un spectre sous forme d'impulsions (spectre discontinu) d'amplitude $|C_n|$, situées aux fréquences $\mathrm{n}f_0$; $n \in \mathbb{Z}$. C'est une fonction paire (symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) car $|C_n| = |C_{-n}|$

On note que:

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{A_n}{2}$$

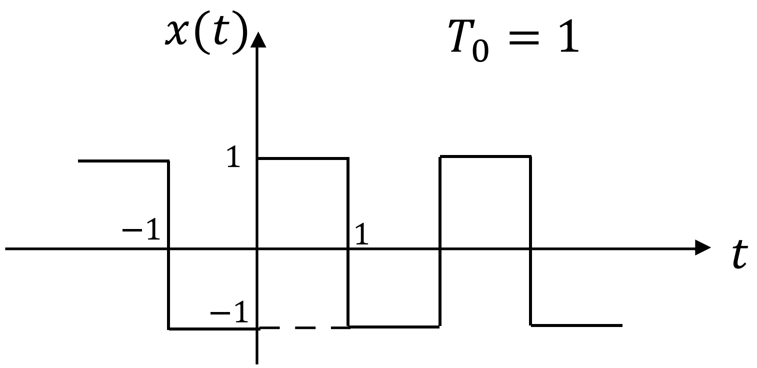
Le spectre de phase bilatéral est constitué d'impulsions d'amplitude $\arg(C_n) = \varphi_n$ pour $n > 0$ et $\arg(C_{-n}) = -\varphi_n$ pour $n < 0$. C'est une fonction impaire car $\varphi_{-n} = -\varphi_n$.





Spectre bilatéral d’un signal périodique

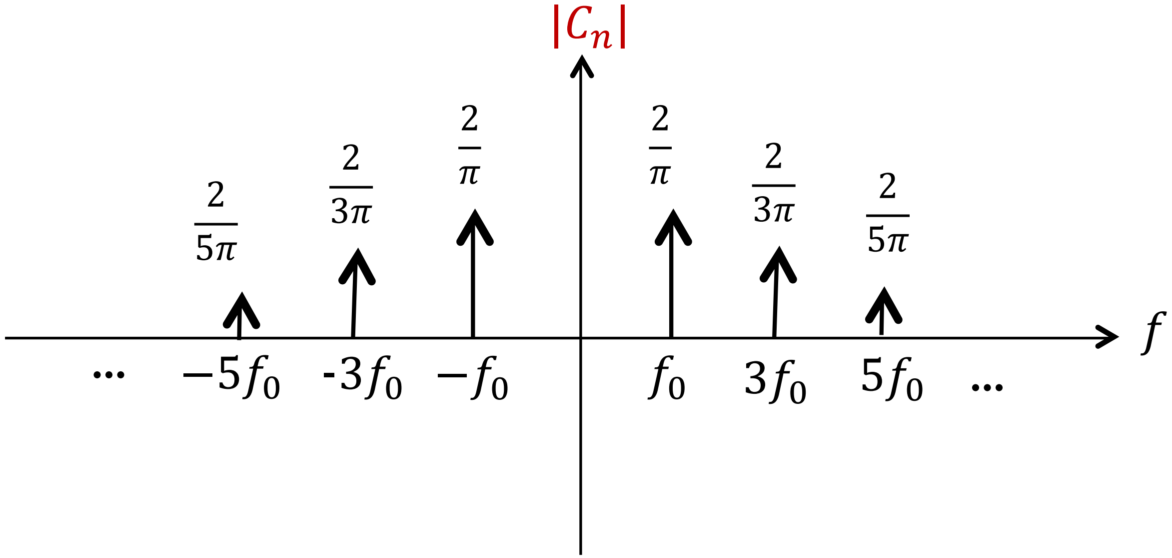
Exemple: spectres bilatéraux d’un signal carré périodique:

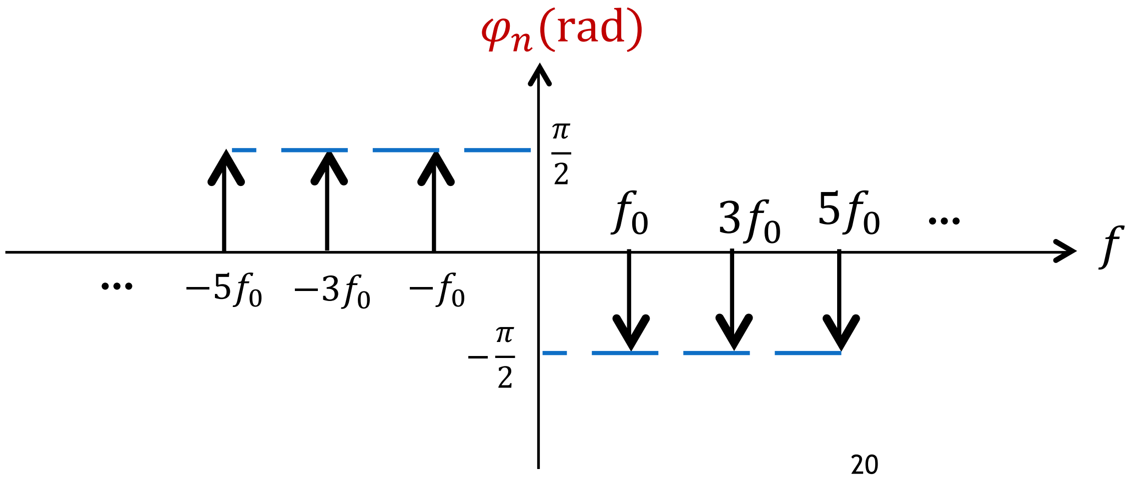


$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sin(2\pi f_0 t) + \frac{4}{3\pi}\sin(2\pi(3f_0)t) + \frac{4}{5\pi}\sin(2\pi(5f_0)t) + \dots$$

$$x(t) = 0 + \frac{4}{\pi}\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3\pi}\cos\left(2\pi \times 3f_0\, t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{5\pi}\cos\left(2\pi \times 5f_0\, t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{A_n}{2} \Rightarrow C_0 = 0, |C_1| = |C_{-1}| = \frac{2}{\pi}, |C_3| = |C_{-3}| = \frac{2}{3\pi}, \dots \qquad \varphi_0 = 0, \varphi_{-1} = -\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \dots$$



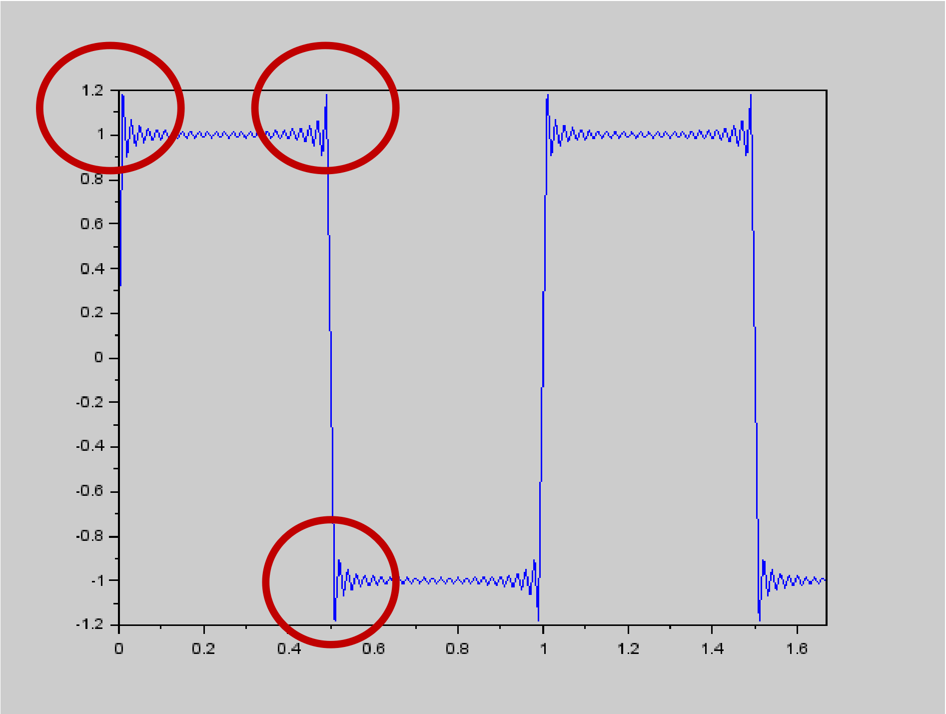


Phénomène de Gibbs

Prenons l'exemple du signal carré:

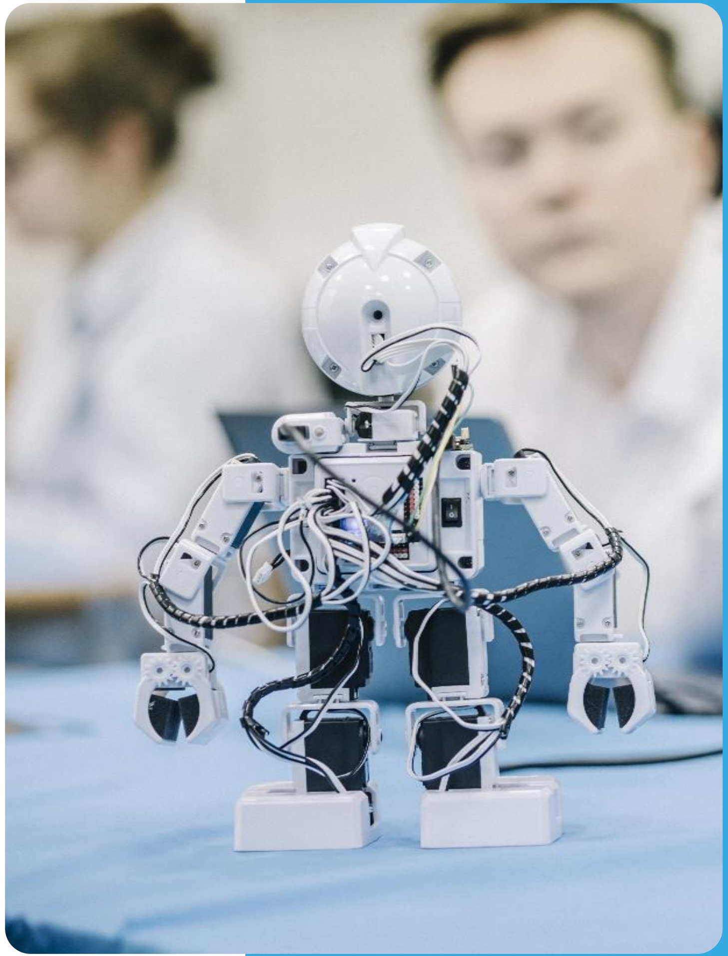
Lorsque l'on trace $x(t)$ à partir de sa série de Fourier, de fortes oscillations appariassent aux points de discontinuité. Lorsque le nombre d'harmoniques devient grand, l'amplitude de ces oscillations tend vers une limite strictement plus grande que l'amplitude de la discontinuité, tandis que la largeur de la zone d'oscillations tend vers zéro.

Ce phénomène est appelé le phénomène de Gibbs.



Signal carré restitué à partir de la série de Fourier avec 50 sinusoïdes

TRANSFORMEE DE FOURIER



Transformée de Fourier

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\xrightarrow{(\omega = 2\pi f)}$$

$$F\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Signal non-périodique

- La Transformation de Fourier concerne principalement les signaux non-périodiques.
- Celle-ci conduit à un spectre continu pour le signal non périodique (contrairement aux signaux périodiques qui possède un spectre discontinu).
- La T.F. représente le comportement fréquentiel du signal. C'est une fonction de la fréquence f.
- La transformée de Fourier existe si $x(t)$ est bornée et absolument intégrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Transformée de Fourier

Remarque:

La T.F. est une fonction complexe, c'est-à-dire:

$$X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{Module (amplitude)}} \exp(j\underbrace{\Phi(f)}_{\text{Phase (argument)}}) = \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(f)\}$$

$$|X(f)| = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\{X(f)\}\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\{X(f)\}\right]^2} \qquad \Phi(f) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}\{X(f)\}}{\mathrm{Re}\{X(f)\}}\right)$$

Le module de $X(f)$ est appelé le spectre de $x(t)$.

Transformée de Fourier inverse

La transformée de Fourier inverse (TF^{-1}) permet de retrouver $x(t)$ à partir de sa transformée de Fourier:

$$\boxed{x(t) = TF^{-1}\big(X(f)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\exp(j2\pi f t)\,df}$$

$$(\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad , \qquad df = \frac{d\omega}{2\pi})$$

$$\boxed{x(t) = TF^{-1}\big(X(\omega)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(j\omega t)\,d\omega}$$

Propriétés de la T.F.

1. Linéarité: $\forall a, b \in R$

$$F\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(f) + bX_2(f)$$

2. Translation temporelle:

$$F\{x(t - t_0)\} = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

3. Translation fréquentielle:

$$F\{\exp(j2\pi f_0 t) \,.\, x(t)\} = X(f - f_0)$$

4. Changement d'échelle temporelle:

$$F\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right); \quad a \neq 0$$

5. Dérivation temporelle:

$$F\left\{\frac{d^n}{dt^n} x(t)\right\} = (j2\pi f)^n . X(f)$$

6. Dérivation fréquentielle:

$$F\{tx(t)\} = j\frac{d}{df} X(f)$$

7. convolution:

$$F\{x(t) * y(t)\} = X(f) \times Y(f)$$
$$F\{x(t) \times y(t)\} = X(f) * Y(f)$$

8. TF de l'impulsion de Dirac:

$$F\{\delta(t)\} = 1$$

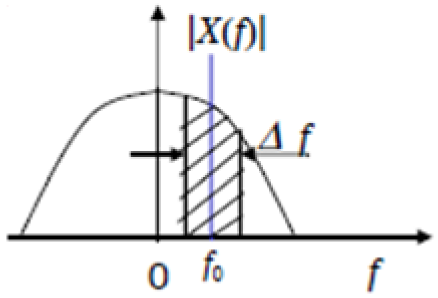
9. TF de $x(t) = 1$: $F\{1\} = \delta(t)$

T.F. et notions d'énergie

La Densité Spectrale d'Energie (DSE) d'un signal non périodique $x(t)$ est définie par:

$$\boxed{\emptyset_{xx}(f) = |X(f)|^2 \quad \text{ou:} \quad \emptyset_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \ \text{ avec } \omega = 2\pi f}$$

On peut alors calculer l'énergie du signal contenue dans une bande de fréquence donnée:



$$\Delta E = \int_{f_0-\frac{\Delta f}{2}}^{f_0+\frac{\Delta f}{2}} \emptyset_{xx}(f)df \quad , \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\boxed{E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} \emptyset_{xx}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}$$ Energie totale

Théorème de Parseval-Plancherel:

Dans le domaine temporel, l'énergie totale du signal non-périodique (à énergie finie) $x(t)$ est calculée par:

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

D'après le théorème de Parseval-Plancherel, l'énergie totale du signal est conservée, dans le domaine fréquentiel d'où l'égalité ci-dessous:

$$\underbrace{E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt}_{\text{Domaine temporel}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df}_{\text{Domaine fréquentiel}}$$