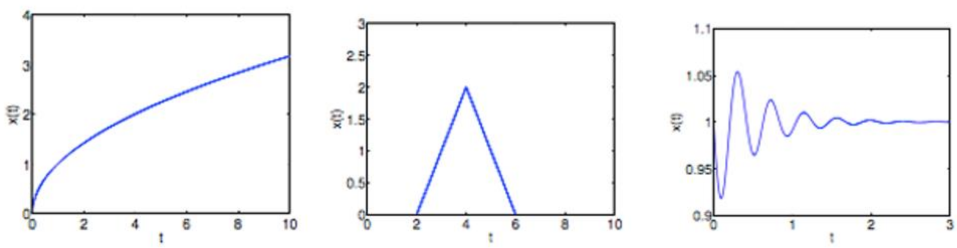
TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL ET APPLICATIONS
TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Préciser sans calcul si les signaux suivants sont à énergie finie ou infinie, à puissance moyenne finie ou infinie.



(a) (b) (c)

Exercice 2

Calculer l'énergie et la puissance moyenne des signaux suivants :

a) $x(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$ où u(t) est la fonction Échelon et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\neq 0$

b) $x(t) = e^{i\alpha t}$

Exercice 3

a) Quelles sont les propriétés de la fonction d'autocorrélation ?
b) Vérifier si les fonctions suivantes peuvent-elle définir des fonctions d'autocorrélation et expliquer pourquoi ?

$$R_{xx}(t) = \sin(2pf\,t)$$

$$R_{xx}(t) = \begin{cases} e^{-a\cdot t} & si \quad t \geq 0 \\ e^{2a\cdot t} & si \quad t < 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Calculer la valeur moyenne des signaux périodiques suivants:

1) $x(t) = \sin(2\pi t)$

2) $x(t) = t^2 \quad ; \quad -\pi \leq t \leq \pi \, ; \; T = 2\pi$

Exercice 5

Considérant le signal suivant pour lequel f_0 = 1 kHz

$$x(t) = 4 + 1{,}8 \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}\right) + 0{,}8\sin(6\pi f_0 t)$$

a) Quelle est la forme de la série de Fourier de x(t) ?
b) Quelle sont les harmoniques présents dans le signal ?
c) Tracer les spectres d'amplitude et de phase unilatéral et bilatéral de $x(t)$.

Exercice 6

Considérant les spectres unilatéraux de la figure 1, d'un signal $x(t)$:

a) Donner l'expression de $x(t)$

b) Tracer ses spectres bilatéraux de $x(t)$

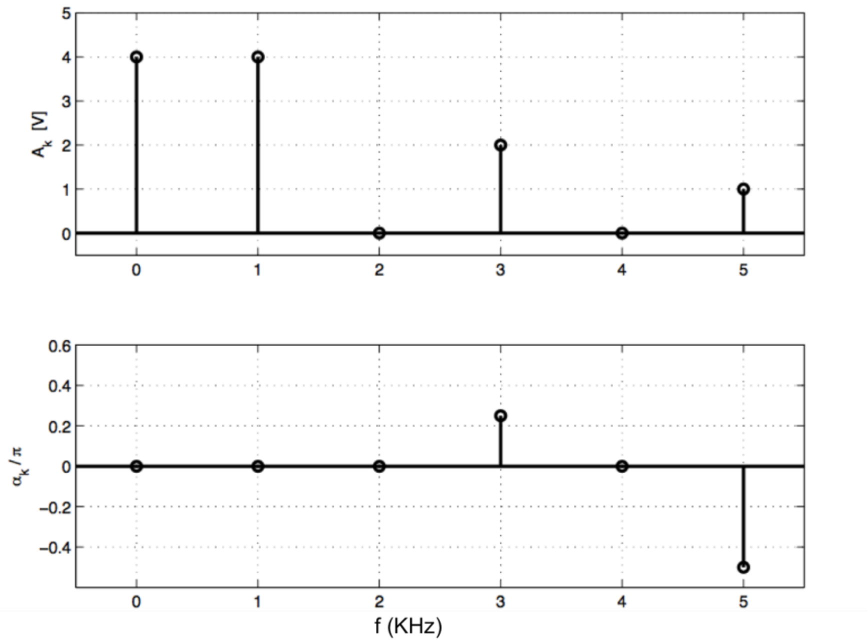
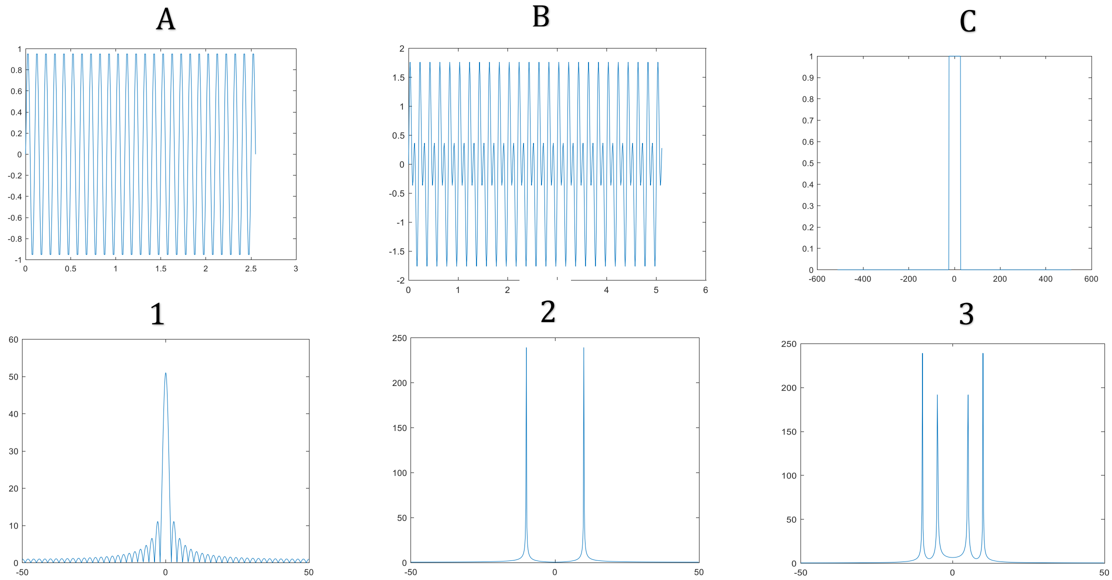


Figure 1 Spectres unilatéraux de $x(t)$

Exercice 7

Associer à chaque signal temporel le spectre d'amplitude correspondant et justifier.



Exercice 8

Ecrire la série de Fourier trigonométrique du signal 2π-périodique ci-dessous :

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \le t \le \pi \\ -1 & si\ \ \pi \le t \le 2\pi \end{cases}, \quad T_0 = 2\pi$

Note : $\cos(n\,\pi) = (-1)^n$

b) $f(t), \quad -\pi \le t \le \pi\ , T_0 = 2\pi$

Exercice 9

Calculer la transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire définie par:

$$rect_\tau(t) = \begin{cases} A & si\ t \in \left[\frac{-\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Note : Formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x\ , \quad e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$$

Exercice 10

a) Ecrire la propriété de la translation fréquentielle de la transformées de Fourier.

b) Quelle est la transformée de Fourier d'une fonction constante $f(t) = 1$?

c) Déduire de (a) et (b) la transformée du signal exponentiel défini par : $S(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

d) En utilisant la formule d'Euler, déduire de c) la transformée du signal sinusoïdal de fréquence f_0 défini par:

$$S(t) = cos(2\pi f_0 t)$$

Exercice 11

On souhaite estimer la vitesse de rotation d'une machine. On modélise le signal mesuré comme $x(t)=\cos(2\pi f t)$ de fréquence f inconnue. On sait qu'elle ne peut pas tourner à plus de 10 tours par seconde.

a) On veut traiter le signal numériquement. A quelle fréquence minimale f_e^{min} doit-on échantillonner le signal $x(t)$?
   Lors de la mesure, une expérience voisine génère des vibrations parasites notées $b(t)$. Le signal mesuré est donc $y(t)=x(t)+b(t)$. L'amplitude du signal parasite $b(t)$ est bien plus grande que celle de $x(t)$, mais on sait que sa bande de fréquence est limitée, comprise entre 10 et 30 Hz.

b) Représenter le module de la transformée de Fourier $Y(f)$ du signal $y(t)$. Sur la base de ce spectre analogique, peut-on déduire que l'on peut mesurer la vitesse de la machine sans ambiguïté ?

c) On échantillonne donc le signal $y(t)$ à la fréquence f_e^{min} définie dans la partie (a). Peut-on mesurer dans ce cas la vitesse de la machine tournante sans ambigüité ? sinon, proposer une solution.

Exercice 12

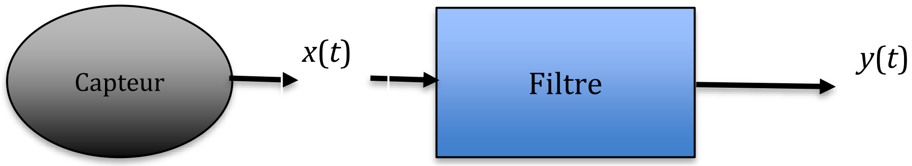
On mesure le rayonnement électromagnétique avec un capteur large bande fonctionnant entre 0 et 500 KHz. On note $x(t)$ le signal mesuré. Dans ce signal, une bande de fréquences nous intéresse particulièrement: on espionne des télécommunications que l'on sait se trouver entre 450 et 500 KHz. Le signal filtré dans cette bande limitée et extrait de $x(t)$ est noté $y(t)$ (figure A). On considère que le filtre est parfait:

$$Y(f) = \begin{cases} X(f) & si\ f\epsilon\ [450, 500[\ KHz \\ 0 & sinon \end{cases}$$

a- Quelle est le type du filtre utilisé pour avoir $y(t)$? Dessiner la forme de sa fonction de transfert.

b- Quel doit être la fréquence d'échantillonnage minimale pour $x(t)$ et $y(t)$?

c- On construit $z(t) = y(t).e^{-i2\pi f_0 t}$ avec f_0=475 KHz. A quelle fréquence peut-on échantillonner $z(t)$? Quel est l'intérêt d'une telle opération ?



Exercice 13

Un signal $x(t)$, dont le spectre est représenté sur la figure B, est filtré par un filtre dont la réponse fréquentielle $H(f)$ est représentée sur la figure C. On note $y(t)$ le signal de sortie.

a) Dessiner le spectre de y

b) Donner l'expression de $y(t)$

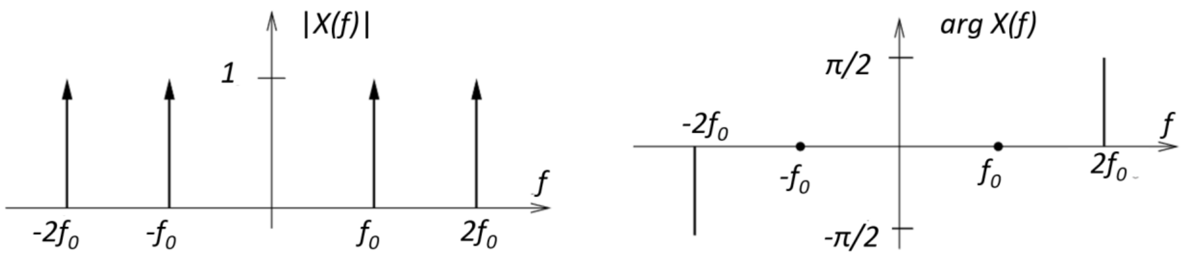


Figure B. Spectre de x

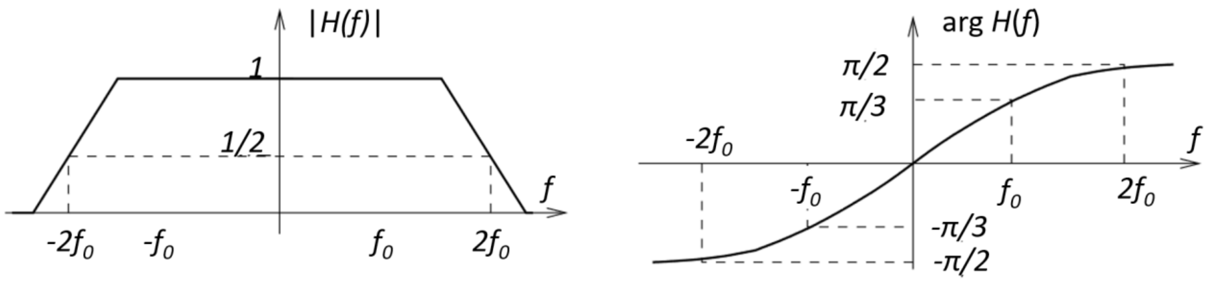


Figure C. Réponse fréquentielle du filtre

Exercice 14

Considérons le filtre linéaire suivant:

Avec: $$V_e(t) = V_{emax}\cos(\omega t)$$

$$V_s(t) = V_{smax}\cos(\omega t + \alpha)$$

Le comportement fréquentiel de ce filtre est représenté par son diagramme de Bode dans la figure D.

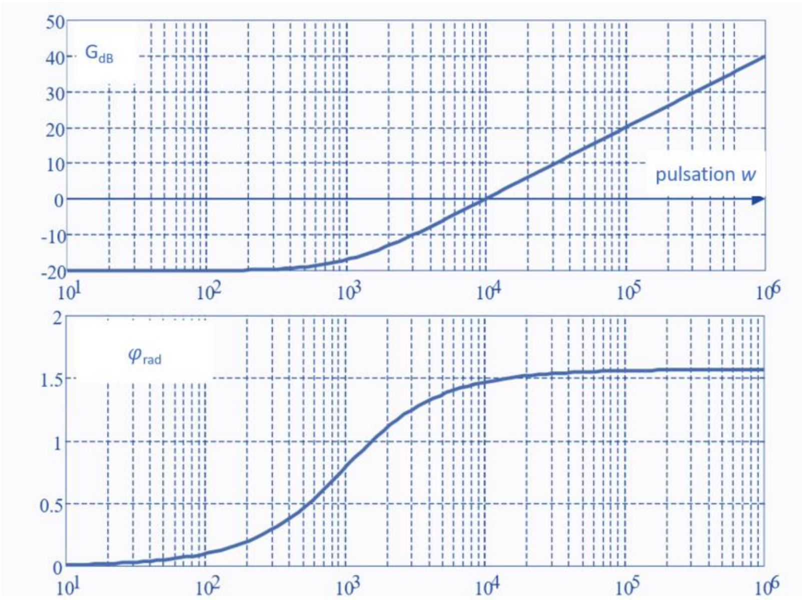


Figure D. Diagramme de Bode du filtre

a) Quelles sont les propriétés fondamentales d'un système linéaire?
b) Ecrire la formule du Gain (G) et de la phase (φ) du filtre en fonction de son entrée $V_e(t)$ et sa sortie $V_s(t)$
c) Déterminer la valeur de $\frac{V_{smax}}{V_{emax}}$ pour $\omega = 10$ rad/s à partir de la figure. Si $V_{emax} = 1$ et $V_e(t)$=1.cos(10t), déterminer l'expression numérique de $V_s(t)$.
d) Dans le cas où $V_e(t)$=1.cos(10^5t), déterminer l'expression numérique de Vs(t).
e) Dans le cas où $Ve(t)$= 1.cos(10t) +1.cos(10^5t). Déterminer l'expression numérique de Vs(t).

Exercice 15

Transformée de Fourier à temps discret (TFTD) inverse d'un rectangle

Soit la fonction périodique de période 1 définie par :

$$X(f) = 1 \quad pour\ f \in [-b; b] \qquad \text{Avec } 0 < b < \frac{1}{2}$$

a) Déterminer la suite $x[n]$ dont $X(f)$ est la transformée de Fourier à temps discret.
b) En déduire la suite $y[n]$ dont $Y(f) = \frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$ est la transformée de Fourier à temps discret.

Exercice 16

Considérons les fonctions discrètes suivantes :

$$x[n]=0.8^n\,u[n] \quad \text{et} \quad y[n]=n\,0.8^n\,u[n]$$

Calculer la transformée en z de ces 2 fonctions.

Exercice 17

Filtrage numérique

Soit le filtre numérique suivant :

$H(z)=0.1(z^{-1}+z^{-3}) + 0.2\,z^{-2}$

La période d'échantillonnage T_e égal à 1 ms

a) Donner et tracer sa réponse impulsionnelle $h[n]$. Quelles sont ses caractéristiques ?
b) Calculer la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$ du système. ($\Omega = 2\,\pi f\,T_e$)
c) Trouver son module et sa phase pour les valeurs de Ω qui se trouvent dans le tableau suivant :

	0	$\pi/2$	π	$2\,\pi$
$\lvert H(e^{j\Omega})\rvert$				
$\arg(H(e^{j\Omega}))$				

d) Tracer le module et la phase. Que peut-on dire sur la phase?
e) Calculer la fréquence de coupure du filtre. Quel est le type du filtre?

Exercice 18

On donne l'algorithme d'un filtre numérique :

$$y(n) \ = \ 0{,}5x(n-1) \ + \ 0{,}9y(n-1) \ - \ 0{,}4y(n-2)$$

a) Ecrire la Fonction de transfert H(z) du filtre.
b) Quel est le type de ce filtre (RIF ou RII) ?
c) Le filtre est-il stable ?
d) Donner le schéma fonctionnel du filtre.

Exercice 19

On donne la fonction de transfert en z d'un filtre numérique :

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{4}$$

Quel est l'algorithme (l'équation aux différences) de ce filtre ?