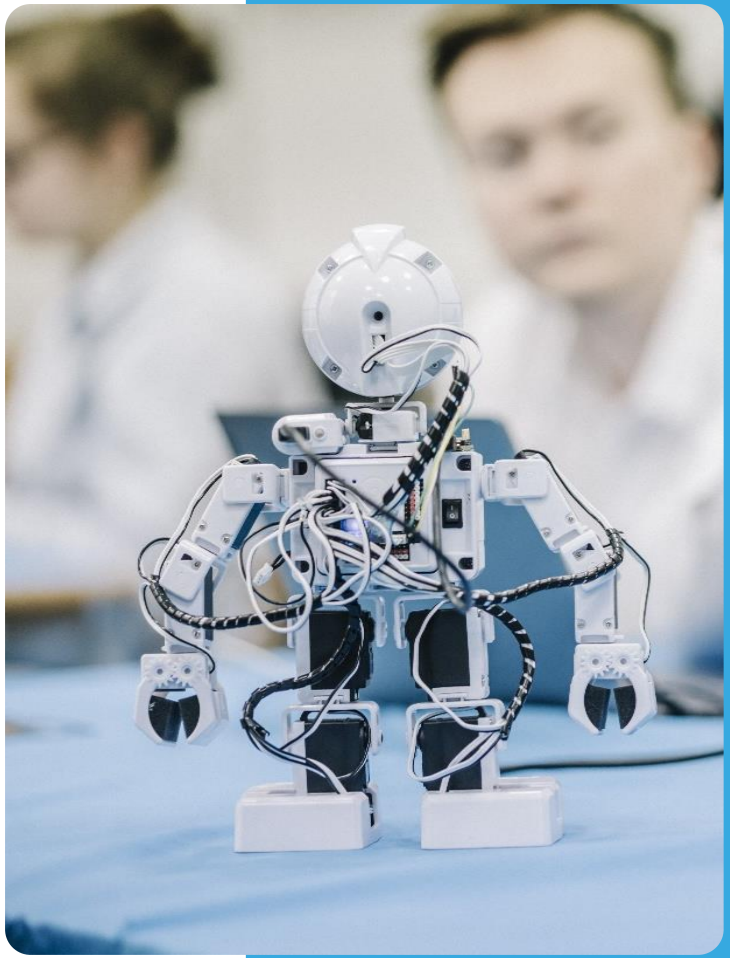
TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

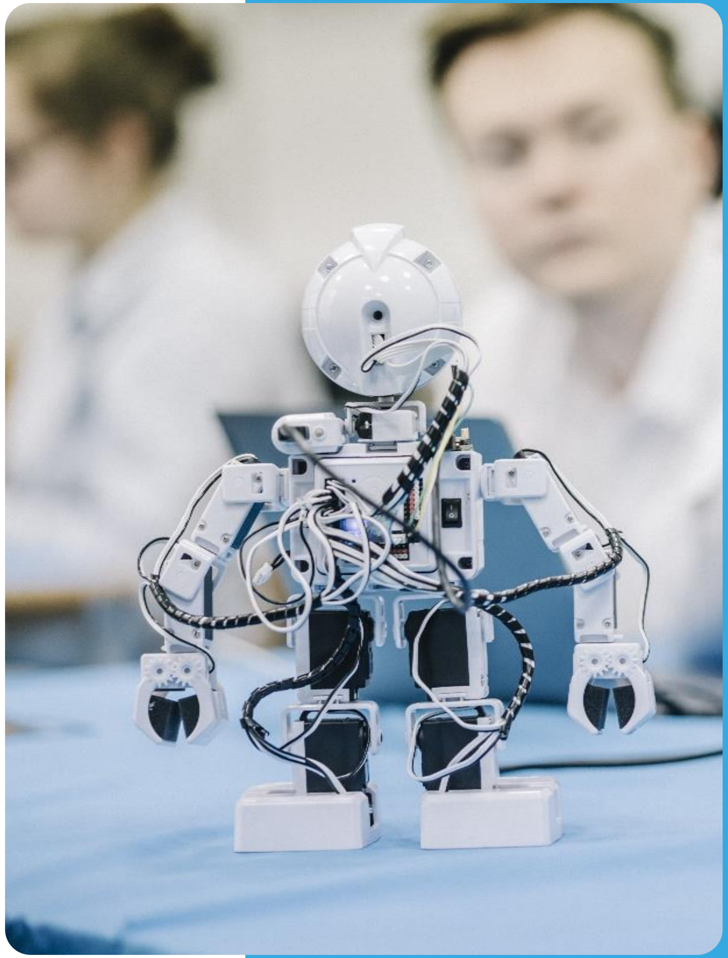
(FA-SYS3045)

Maryam L'Hernault

Maryam.lhernault@esiea.fr



SYSTEMES LINEAIRES ET INVARIANT AVEC LE TEMPS



Systèmes Linéaires et Invariants avec le Temps

Définition du système:

Un système est un ensemble d'éléments qui relie son signal d’entrée à son signal de sortie selon une fonction.

$$\text{Entrée: } x \longrightarrow \boxed{\text{Système S}} \longrightarrow \text{Sortie: } y = S(x)$$

Un <u>système linéaire et invariant avec le temps (LTI)</u> répond aux caractéristiques suivantes:

- Superposition: $y = S(x_1(t) + x_2(t) + \ldots x_n(t)) = S(x_1(t)) + S(x_2(t)) + \ldots S(x_n(t))$
- Changement d’échelle: $S(a.x(t)) = a.S(x(t))$

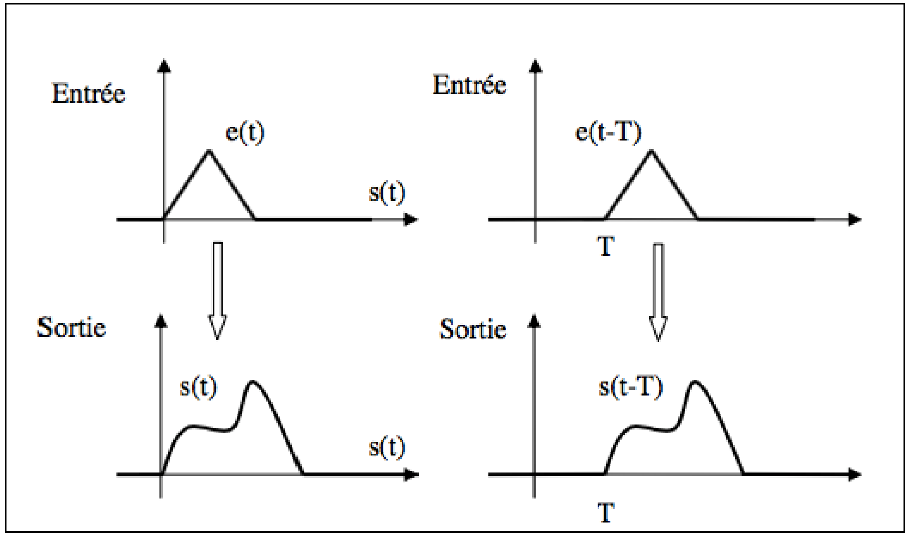
Linéarité:

$$\boxed{S(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \ldots a_n x_n(t)) = a_1 S(x_1(t)) + a_2 S(x_2(t)) + \ldots a_n S(x_n(t))}$$

Systèmes Linéaires et Invariants avec le Temps

➢ Invariance temporelle:

$$\text{Si } S(x(t)) = y(t) \text{ alors } S(x(t-T)) = y(t-T)$$



Une translation du signal d'entrée génère la même translation à la sortie.

➢ Causalité:

$$\text{Si } x(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ alors } y(t) = S(x(t)) = 0 \text{ pour } t < 0$$

La sortie ne précède pas l'entrée.

Systèmes Linéaires et Invariants avec le Temps

- Stabilité:

le système est stable lorsque pour une entrée bornée, la sortie est aussi bornée.

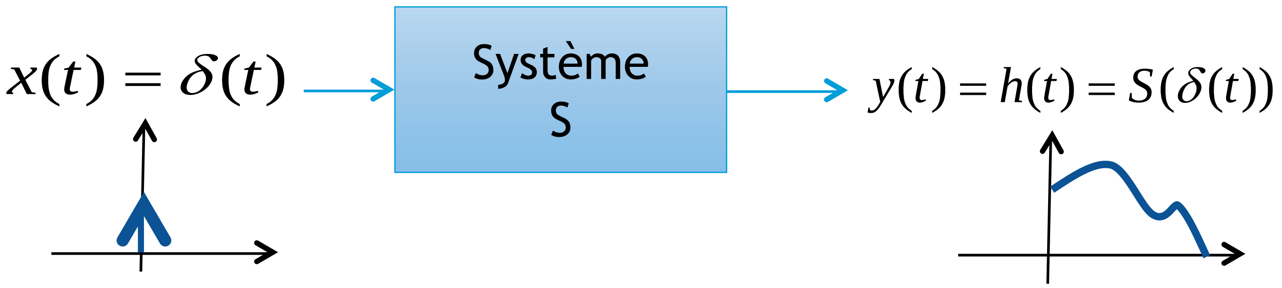
$$\exists M_x\ ; \left|\mathrm{x(t)}\right| < M_x \ \text{ alors } \ \exists M_y\ ; \left|y(t) = S(x(t))\right| < M_y$$

Un système stable, perturbé, revient à son état initial une fois que la perturbation disparait.

Réponse impulsionnelle (R.I.)

Définition:

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système est la sortie (la réponse) du système lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac.



Produit de convolution

Utilité de la Réponse Impulsionnelle.:

1. Permet de caractériser le système linéaire: sa transformée de Fourier représente la fonction de transfert.

2. Permet de calculer la réponse (sortie) du système à un signal d'entrée quelconque, à l'aide du <u>produit de convolution</u>.

convolution

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Système}\\ h(t)\end{array}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Produit de convolution:

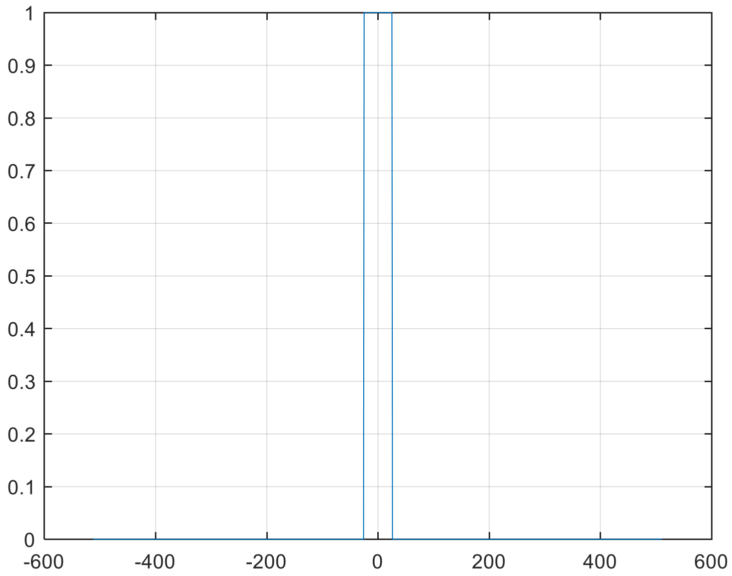
$$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = x(t) * h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\[2ex] y(t) = h(t) * x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{array}}$$

Ce n'est pas un produit simple!

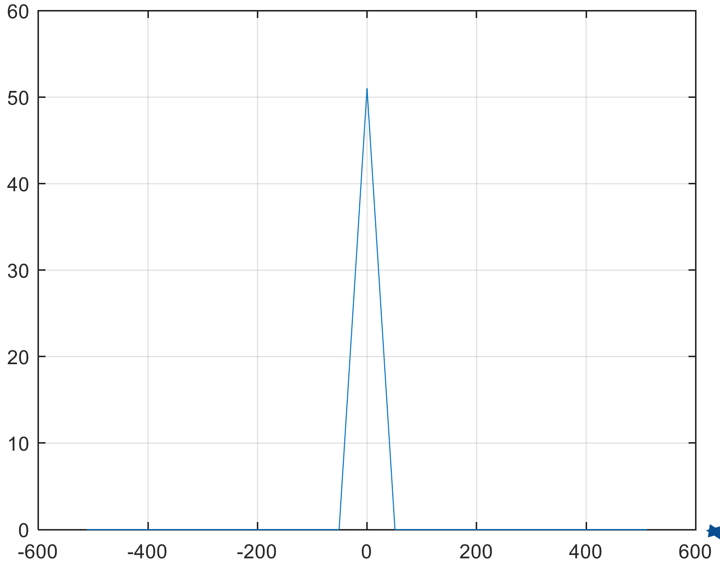
Produit de convolution

Exemple:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Système}\\ h(t)\end{matrix}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$



$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & si \quad -25 \leq t \leq 25 \\ 0 & \quad\quad\quad\quad sinon \end{cases}$$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Ce n'est pas un produit simple!

Propriétés du Produit de convolution

Commutativité	$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$
Associativité	$e(t)*f(t)*g(t)=e(t)*(g(t)*f(t))=(e(t)*f(t))*g(t)$
Distributivité par rapport à l'addition:	$e(t)*\left(f(t)+g(t)\right)=e(t)*f(t)+e(t)*g(t)$
Elément neutre: Impulsion de Dirac	$f(t)*\delta(t)=f(t)$
Translation temporelle (convolution avec impulsion de Dirac décalée):	$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

Fonction de Transfert

La fonction de transfert d'un système est le rapport entre les T.F. des signaux d'entrée et de sortie.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Produit de convolution

TF $\Updownarrow$ TF $\Updownarrow$ TF $\Updownarrow$

$X(f)$ $H(f)$ $Y(f) = X(f) \times H(f)$: Produit algébrique des Transformées de Fourier

Convolution en temporel $\xrightarrow{\text{T.F}}$ Multiplication des TF en fréquentiel

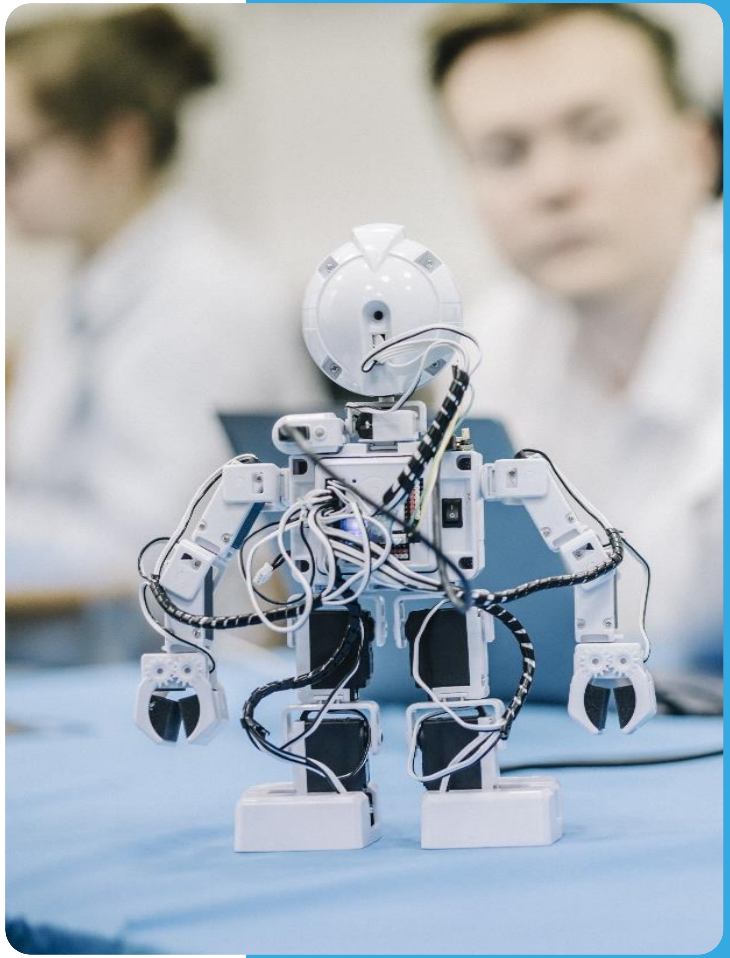
Fonction de Transfert:

$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = |H(f)|\exp(j\varphi(f))}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} H(f) = F\{h(t)\} \\ h(t) = F^{-1}\{H(f)\} \end{array}}$$

$|H(f)|$: module de $H(f)$
$\varphi(f)$: argument de $H(f)$

FILTRAGE FREQUENTIEL



Filtrage fréquentiel

Définition:

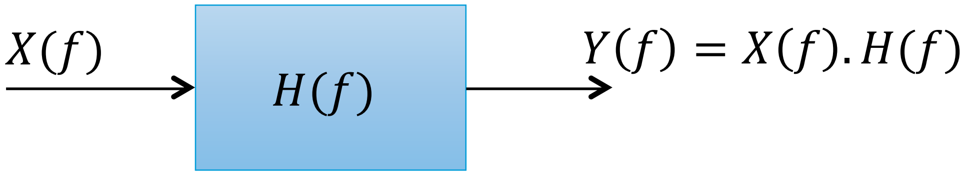
- Un filtre est un système Linéaire qui montre un comportement sélectif vis-à-vis des fréquences. Il modifie le spectre du signal et par conséquent sont aspect temporel.

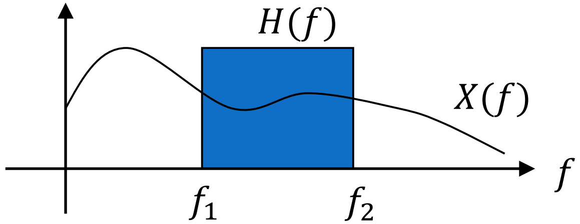
- Un filtre est utilisé pour:
  - Eliminer ou affaiblir des fréquences parasites indésirables (le bruit),
  - Isoler dans un signal la ou les bandes de fréquences utiles

- On classe les filtres en deux grandes familles :

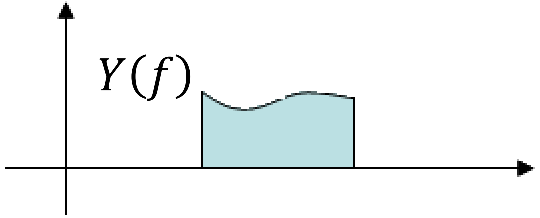
  - Les filtres analogiques réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance, condensateur) ou actifs (AOP).
  - Les filtres numériques réalisés à l’aide de structures intégrées micro-programmables (DSP).

Filtrage fréquentiel





$Y(f) = X(f) \times H(f)$



$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = |H(f)| \exp(j\emptyset(f))}$$

Gain du filtre: $|H(f)| = |\frac{Y(f)}{X(f)}|$

Atténuation: $A(f) = \frac{1}{H(f)} = \frac{X(f)}{Y(f)}$

Gain du filtre en décibel: $G_{dB} = 20\log_{10}|H(f)| = 20\log_{10}|\frac{Y(f)}{X(f)}|$

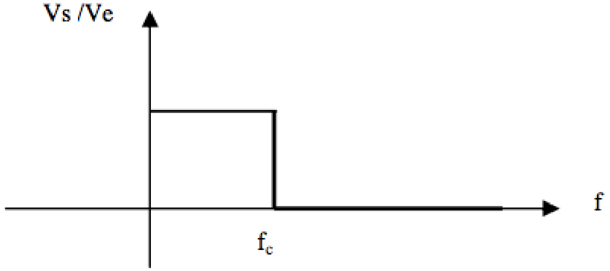
Phase: $\phi(f) = \arg H(f) = \arg(\frac{Y(f)}{X(f)})$: déphasage (appliqué par le filtre) entre l'entrée et la sortie

Pulsation: Vitesse de rotation qu'aurait un système en rotation de même fréquence. pour une fréquence f, la pulsation est donc $\omega = 2\pi.f(rad/s)$

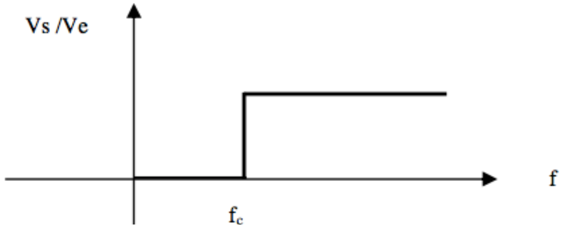
Filtrage fréquentiel

Réponses en fréquence idéales:

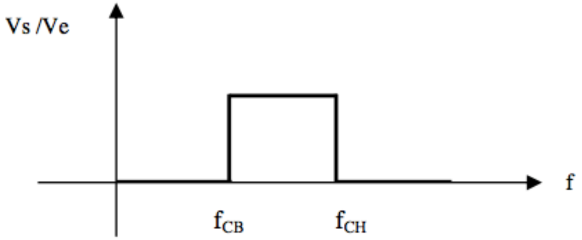
•Filtre passe-bas: laisse passer les basses fréquences et rejette les hautes fréquences.
Bande passante: $BP = [0, f_c]$



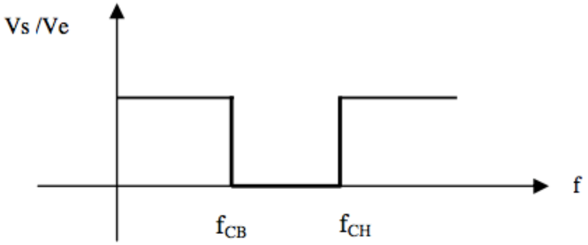
•Filtre passe-haut: laisse passer les hautes fréquences et rejette les basses fréquences.
Bande passante: $BP = [f_c\,, +\infty[$



•Filtre passe-bande: ne laisse passer que les fréquences comprise dans une bande limitée
Bande passante: $BP = [f_{cB}\,, f_{cH}]$



•Filtre coupe-bande: laissent passer toutes les fréquences, sauf celles comprises dans une bande spécifique.
Bande passante: $BP = [0, f_{cB}[\, \cup \,]f_{cH}, +\infty[$



Pulsation de coupure

La pulsation de coupure d'un filtre réel est la pulsation ω_c telle que:

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dBmax} - 3dB$$

Exemple: filtre passe-bas réel avec $G_{dBmax} = 0dB$

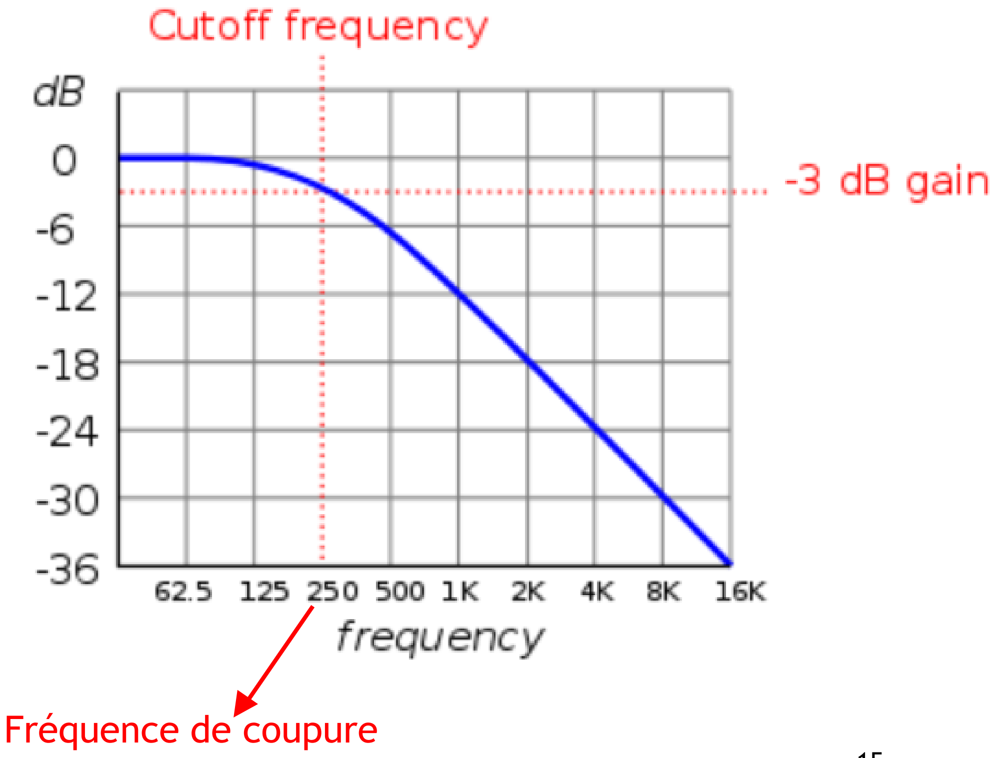


Diagramme de Bode

Pour étudier un filtre, on observe l'évolution du module et de la phase de la fonction de transfert en fonction de la fréquence (ou la pulsation.
On trace le gain du filtre en dB et la phase en fonction de la pulsation ou la fréquence. Le diagramme obtenu ainsi est appelé le diagramme de Bode.

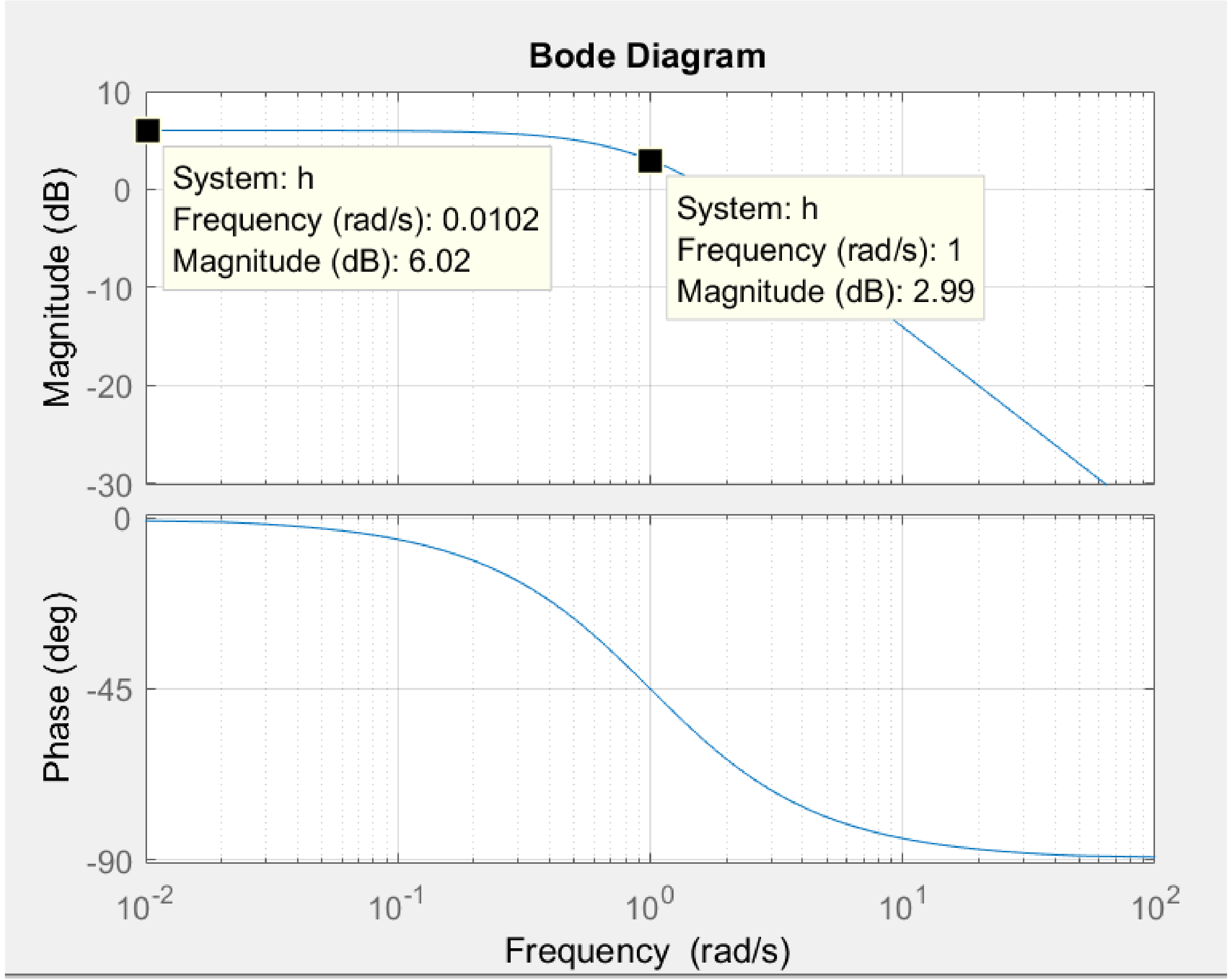
Exemple: filtre passe-bas avec la fonction de transfert:

$$H(f) = \frac{2}{1 + j2\pi f} \Rightarrow G_{dB} = 20\log\frac{2}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2}}$$

$$f = 0 \Rightarrow H(f) = 2 \Rightarrow G_{dBmax} = 20\log 2 = 6\ dB$$

Fréquence de coupure calculée pour
$G_{dBmax} - 3\text{dB} = 6 - 3 = 3\text{dB}$,

$$\omega_c \approx 3\ rad/sec$$



Le gabarit

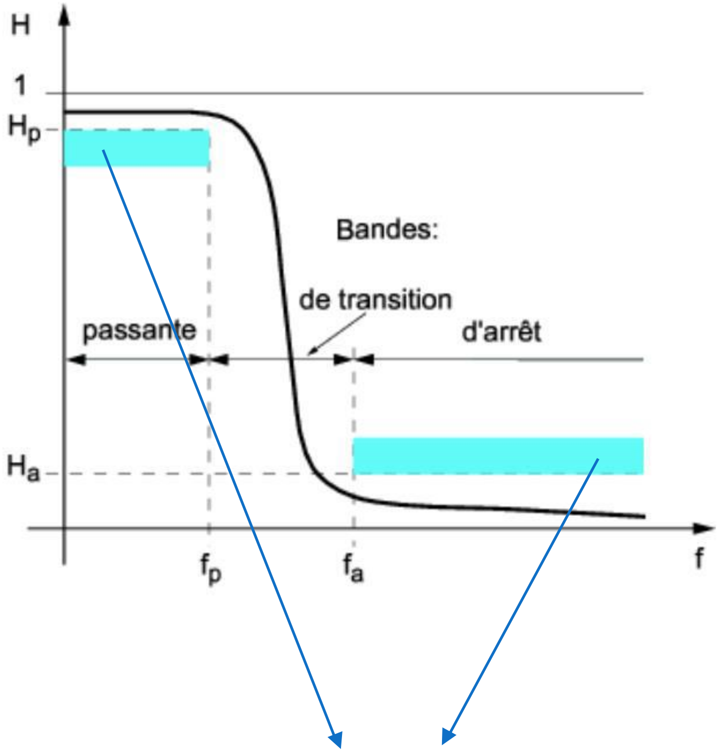
Filtre idéal: impossible à réaliser en pratique.

Un filtre réel possède:

- Une bande passante,
- Une bande d'arrêt,
- une bande de transition entre la bande passante et la bande d'arrêt.
- Des ondulations dans les bandes passante et/ou d'arrêt selon le type du filtre.

On approche le filtre réel à l'aide d'un <u>gabarit</u>.

Le gabarit précise les bandes souhaitées et l'amplitude des ondulations acceptées dans les bandes passantes et/ou d'arrêt.

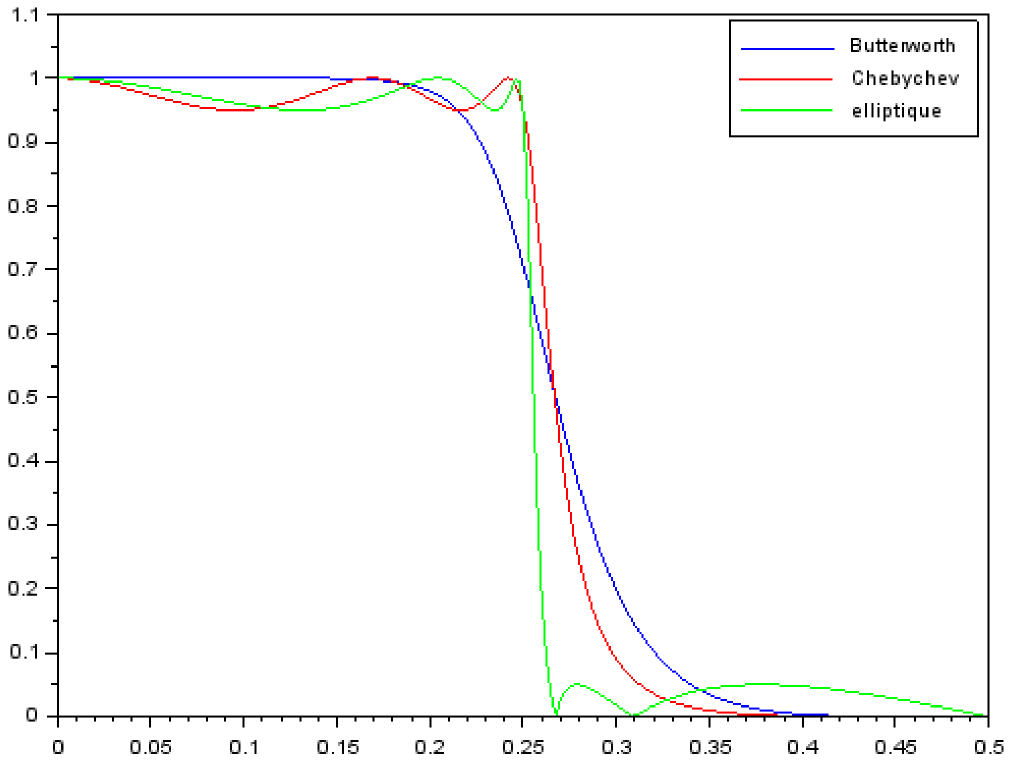


Le gabarit

Filtrage fréquentiel

Différents types de filtres:

- Filtre de Butterworth: Bande passante plate au maximum,
- Filtre de Chebychev: Bande de transition étroite, ondulations dans la bande passante,
- Filtre elliptique: oscillations dans les bandes passantes et d’arrêt, bande de transition très étroite,
- …



Fonctions de transfert Des filtres analogiques (forme canonique)

Type	Forme canonique
Passe bas du 1er ordre	$\dfrac{A}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
Passe bas du 2nd ordre m: coefficient d'amortissement	$\dfrac{A}{1+2mj\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Passe haut du 1er ordre	$\dfrac{A.j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
Passe haut du 2nd ordre	$\dfrac{A\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2mj\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Passe bande Facteur de qualité $Q=\dfrac{\omega_0}{\omega_{c2}-\omega_{c1}}$	$A\dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+2mj\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Coupe bande (réjecteur) Facteur de qualité $Q=\dfrac{\omega_0}{\omega_{c2}-\omega_{c1}}$	$A\dfrac{1+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+2mj\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$
Passe tout	$A\dfrac{1-j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$