PHYSIQUE, ELECTRONIQUE ET SYSTEMES
FISA – Semestre 5

TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL ET SES APPLICATION
TDAO2

Objectif du TDAO

Echantillonnage, Analyse de Fourier, Analyse corrélative

Echantillonnage :

Un signal numérique est défini par un nombre d'échantillons N prélevés à une fréquence d'échantillonnage F_e. Les signaux sont toujours captés de manière temporelle, mais on s'intéresse souvent à leur allure fréquentielle. Afin de rester cohérent avec les mesures, il est important de respecter les grandeurs physiques impliquées dans le signal. Il faut donc définir les axes temporels et fréquentiels relatifs au signal.

- L'axe temporel est un vecteur de N points espacés à des instants espacés de $T_e = \frac{1}{F_e}$. Sous Scilab, la syntaxe pour créer l'axe des temps est:

  axe_t= (1:N)/Fe;

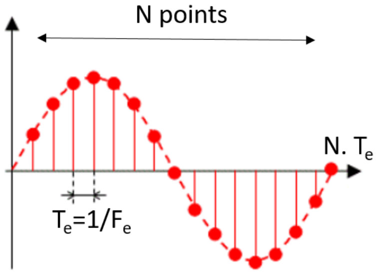
  Ou:

  axe_t= (0:N-1)/Fe;

- L'axe fréquentiel est un vecteur de N points compris entre 0 et F_e. Les syntaxes pour créer les axes de fréquences centré (symétrique autour de zéro) et non centré sont:

  *axe_f=(0:N-1)*Fe/N; //axe de fréquence non-centré*

  *axe_fcentre=(-N/2:N/2-1)*Fe/N ; //axe de fréquence centré*



- La relation ci-dessous lie la durée *d* d'un signal au nombre de points *N* (nombre d'échantillons):

$$N = d \times F_e = \frac{d}{T_e}$$

- D'après le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal à échantillonner :

$$F_e \geq 2F_{max}$$

Transformée de Fourier Discrète et Rapide

Afin d'obtenir le comportement fréquentiel des signaux, on leur applique la transformée de Fourier, qui fournit une approximation du spectre du signal. Comme Scilab (et les ordinateurs en général) fonctionnent avec des données discrètes, on calcule la Transformée de Fourier Discrète (TFD). Sous Scilab, la TFD est donnée par la fonction *fft*(*s*) qui calcule la TFD de manière rapide (voir la documentation en tapant *help fft* dans la fenêtre de commande).
On définit le spectre d'amplitude du signal *s(t)* par :

>>abs(fft(s)) ; % spectre d'amplitude |fft(s)|

Souvent, pour les signaux périodiques, On étudie la TF sur seulement une période: on choisit donc *f* appartenant à [-Fe/2, Fe/2] (*exemple :* [-500,500] pour Fe=1000Hz).

La fonction ***fftshift*** réorganise une transformée de Fourier *X* en déplaçant la composante de fréquence zéro vers le centre de l'axe des fréquences. Pour cela le vecteur de fréquences doit être centré. On procède de la façon suivante :

```
axe_fcentre=(-N/2:N/2-1)*Fe/N ;  //création d'un axe de fréquence centré
SX=abs(fft(x)) ; // Calcul du module de la fft
SSX=fftshift(SX) ; // réorganisation de la FFT autour de l'origine
plot2d(axe_fcentre, SSX) ;// Tracer la fft réorganisée
```

Exercice 1

a) Générer un signal de 0.5 s composé de la somme de deux sinusoïdes d'amplitude 1V, échantillonnés à 256 Hz et qui ont respectivement des fréquences de 100 et 156 Hz.
b) Représenter ce signal.

c) Sur une nouvelle figure, générer le même signal de la partie (a) avec une fréquence d'échantillonnage de 356 Hz. Comparer ce signal avec celui de la partie (a). Conclusion ?

Exercice 2

a) Générez un signal sinusoïdal $x_1(t)$ de fréquence f_1 = 10 Hz. La fréquence d'échantillonnage est f_e = 100 Hz, l'amplitude est A=1V et la longueur du signal est N=512.
b) Calculer l'énergie du signal à l'aide de Scilab.
c) Utiliser la fonction *fft* pour calculer la TFD du signal.
d) En utilisant la fonctions *abs*, tracer le spectre de x_1. (créer un vecteur de fréquence **non-centré** en fonction de *N* et f_e)
e) En utilisant la fonction *fftshift*, retracer sur une nouvelle figure le spectre de x_1 (créer un vecteur de fréquence **centré**).
f) Calculer l'énergie dans le domaine fréquentiel à l'aide de Scilab. Comparer avec la question b et conclure.
g) Soit $x(t)$ la somme de deux sinus : $x_1(t)$ défini précédemment et $x_2(t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_2=5Hz et de même amplitude que $x_1(t)$:

$$x(t)=x_1(t) + x_2(t)$$

h) Créer $x(t)$ puis tracer son spectre et interpréter. Comparer avec les résultats théoriques.

Fonctions de corrélation

- La fonction de corrélation permet de comparer deux signaux entre eux pour détecter la présence d'un message et mesurer un temps de propagation, ou faire ressortir une caractéristique d'un signal noyé dans le bruit.
- La fonction d'inter-corrélation compare donc un signal $x(t)$ pris à un instant t à un signal $y(t)$ pris à un instant $t'=t+\tau$

$$r_{xy}(\tau) = \int x(t)y(t+\tau)dt$$

- La fonction d'autocorrélation consiste à décaler un signal par rapport à lui-même, puis à intégrer le produit des deux.

$$r_{xx}(\tau) = \int x(t)x(t+\tau)dt$$

En Scilab, la fonction *xcorr(x,y)* calcule la corrélation entre *x* et *y* (voir l'aide de Scilab en tapant *help xcorr* dans la fenêtre de commande).

Rapport Signal sur Bruit (RSB)

Tout signal *s(t)* noyé dans un bruit $b(t)$ s'écrira sous la forme suivante:

$$R(t) = s(t) + b(t)$$

Le rapport signal sur bruit permet de déterminer si le bruit est « important » par rapport au signal ou vice versa. Il est défini comme le rapport entre la puissance moyenne du signal et la puissance moyenne du bruit, exprimé en dB :

$$RSB = \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \qquad RSB_{dB} = 10 log_{10}(RSB)$$

Si RSB_{dB} est positif: le signal est plus puissant que le bruit,
Si RSB_{dB} nul: il y a autant de bruit que de signal,
Si RSB_{dB} est négatif: le signal est ***dégradé***, il y a plus de bruit que d'information.

Dans le domaine temporel, la puissance d'un signal déterministe est égal à la moyenne de la somme des échantillons au carré :

$$P_{temp} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2}{N}$$

La puissance d'un signal aléatoire est égale à la variance du signal. Sous Scilab, elle est fournie par le carré de la fonction *stdev* (*standard deviation* ou écart-type).

Le modèle de bruit le plus couramment rencontré dans les mesures est le bruit blanc Gaussien. Le bruit blanc est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences (il contient toutes les fréquences). Le bruit blanc gaussien est un bruit blanc qui suit une loi normale de moyenne et écart type donnés. Il est réalisé à l'aide de la commande *rand(m,n, "normal")*:

```
// Exemple de Génération du bruit de moyenne moy=0 et écart type sigma=0,25

sigma = 0.25;   // écart type du bruit, sigma=sqrt(variance)
moy = 0;        // moyenne du bruit
bruit = moy + sigma*rand(1,N, "normal");
// N est le nombre de points du bruit
```

Exercice 3

Détection d'un signal périodique

a) Créer une fonction : *generer_sinus* qui génère un signal sinusoïdal ayant comme arguments d'entrée la période *T* du signal, la durée *d* du signal, le nombre d'échantillons N et la phase *phi*. Cette fonction rend en sortie le signal x et le vecteur du temps *axe_t* (**Rq : pour définir l'axe des temps dans la fonction utiliser la relation de la partie a**)

b) Dans un nouveau script, utiliser la fonction *generer_sinus* afin de générer deux sinusoïdes avec les paramètres suivants :

- x_1 (T_1=1; t_1=5; N_1=256 ; phi_1=0)
- x_2 (T_2=1; t_2=10; N_2=512 ; phi_2=0)

Tracer les deux signaux sur la même figure à l'aide de la commande *subplot*

c) Utiliser la fonction *xcorr* pour calculer l'autocorrélation des 2 signaux. La syntaxe est la suivante :

```
[C , lagindex]=xcorr(x)
```

En tapant *help xcorr* dans la fenêtre de commande, expliquer le rôle des vecteur **C** et **lagindex** et tracer les fonctions d'autocorrelation.

d) Créer un bruit blanc b_1 de moyenne=0 et d'écart-type =2, pour l'ajouter au signal x_1. Nommer le nouveau signal bruité S_1 (Note : b_1 doit posséder la même longueur que x_1). On aura alors :

$$S_1 = x_1 + b_1$$

e) Créer S_2 de la même manière que S_1 à partir de x_2 (le bruit blanc b_2 aura les mêmes caractéristiques que $b_1$mais une longueur différentes pour pouvoir s'ajouter à x_1). Tracer les signaux bruités S_1 ,$S2$ sur une même figure en utilisant *subplot.*

f) Tracer les fonctions d'autocorrélation de S_1, S_2. Expliquer l'intérêt de l'utilisation de la fonction d'autocorrélation dans le cas d'un signal bruité.

g) Calculer le RSB du signal x_1 par rapport au bruit b_1. Que peut-on conclure ?

h) Modifier l'écart-type de b_1 à 0.5 au lieu de 2. Recalculer le RSB du signal x_1 par rapport au bruit b_1. Que constatez-vous ?

Exercice 4

Détection d'un signal connu intégré dans le bruit en utilisant l'inter-corrélation

- Générer et tracer un signal rectangulaire x avec les paramètres suivants:
    - Centré à zéro
    - Nombre d'échantillonnage = 1024
    - Dimension du rectangle= 50 échantillons
    - Amplitude =2

- Créer une version décalée de x avec un décalage d=100 (centré à 100). Nommer le signal décalé x_d. Tracer ce signal sur la même figure.

- Ajouter à x_d un bruit blanc de moyenne=0 et d'écart-type=0,25 pour obtenir le signal :

$$y=x_d+bruit$$

- Dessiner x et y sur le même schéma.
- Tracer l'inter-corrélation entre y et x. Où se trouve la valeur maximale de cette inter-corrélation ?
- Conclure.