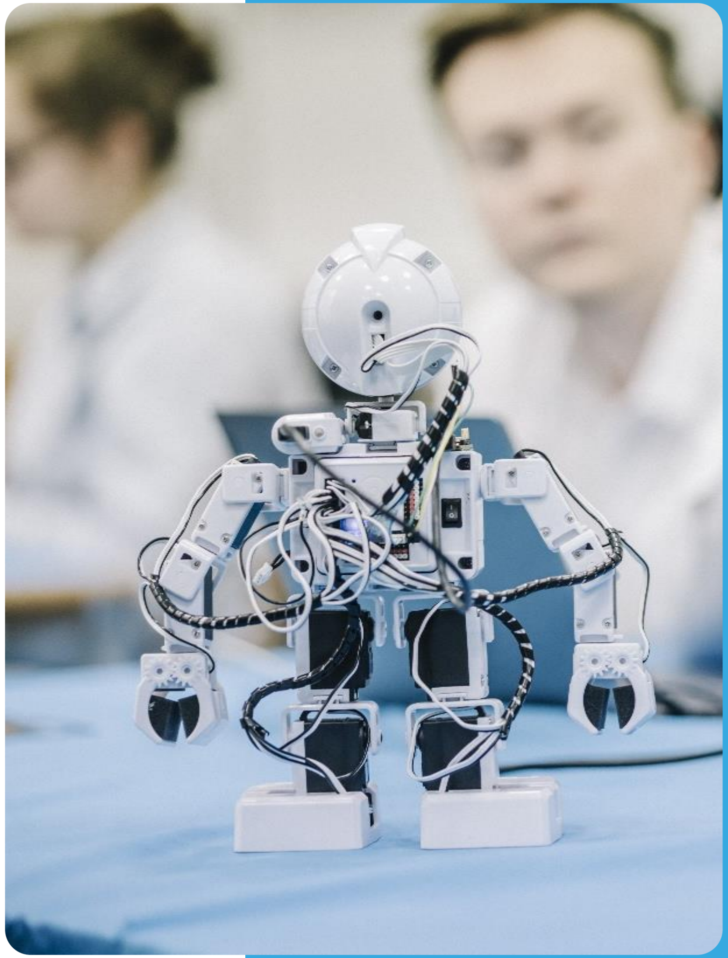
TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

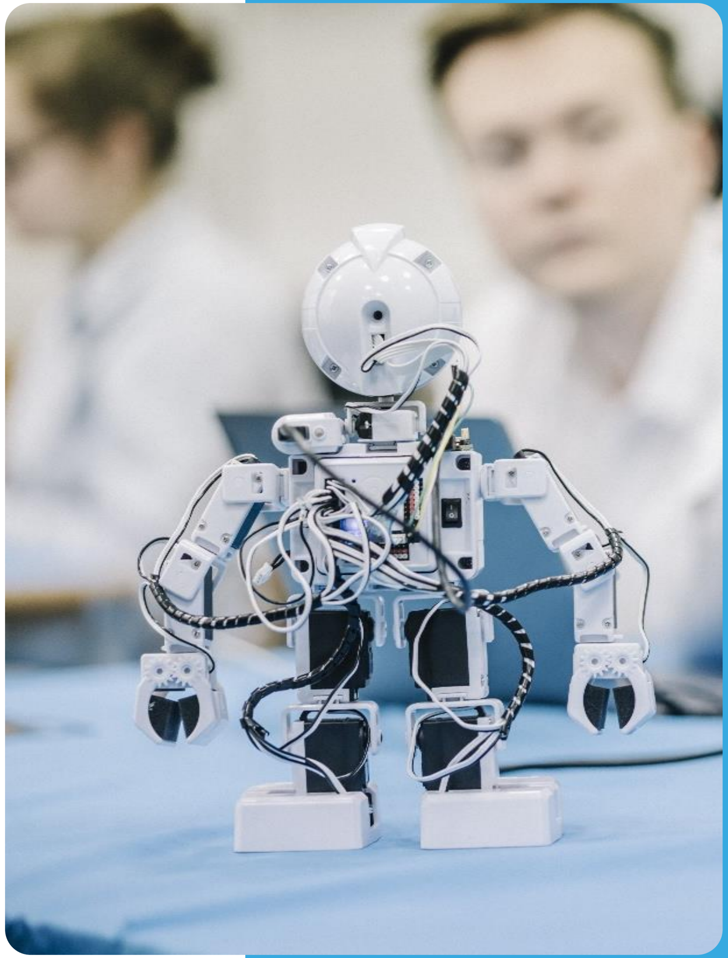
(FA-SYS3045)

Maryam L'Hernault

Maryam.lhernault@esiea.fr



NUMERISATION DES SIGNAUX CONTINUS

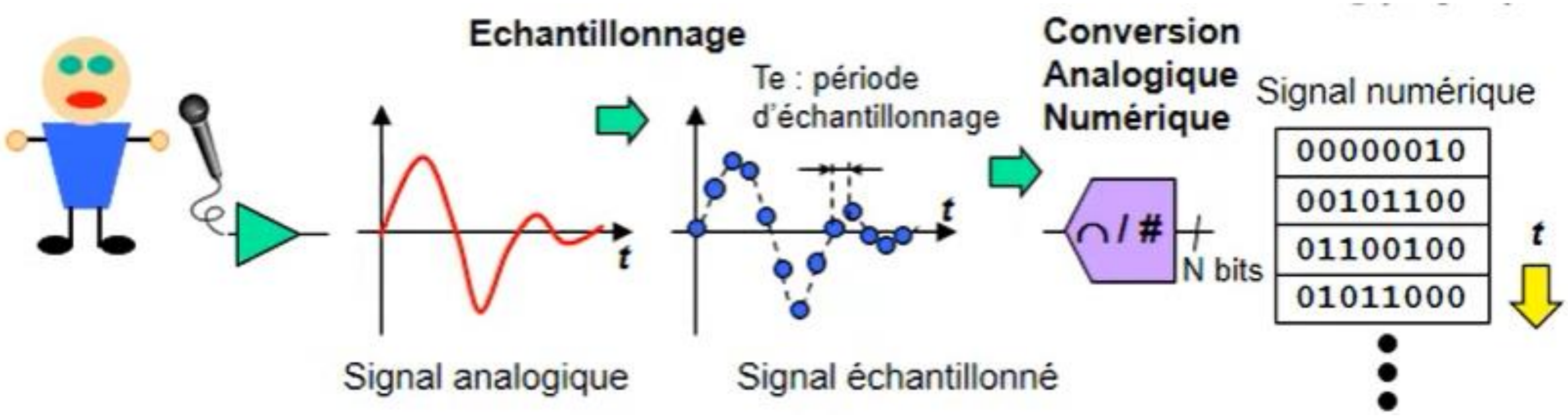


Introduction

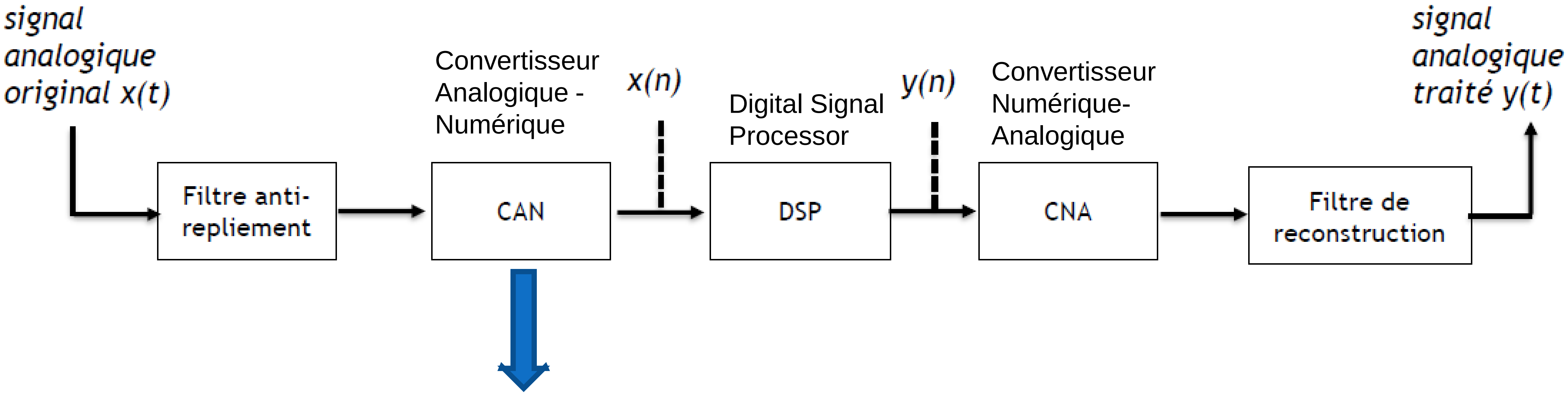
Signal analogique: c’est un signal qui varie de façon continue avec le temps.
Exemple de supports de signaux analogique: microphone, guitare électrique, téléphone filaire, radio FM-AM,…

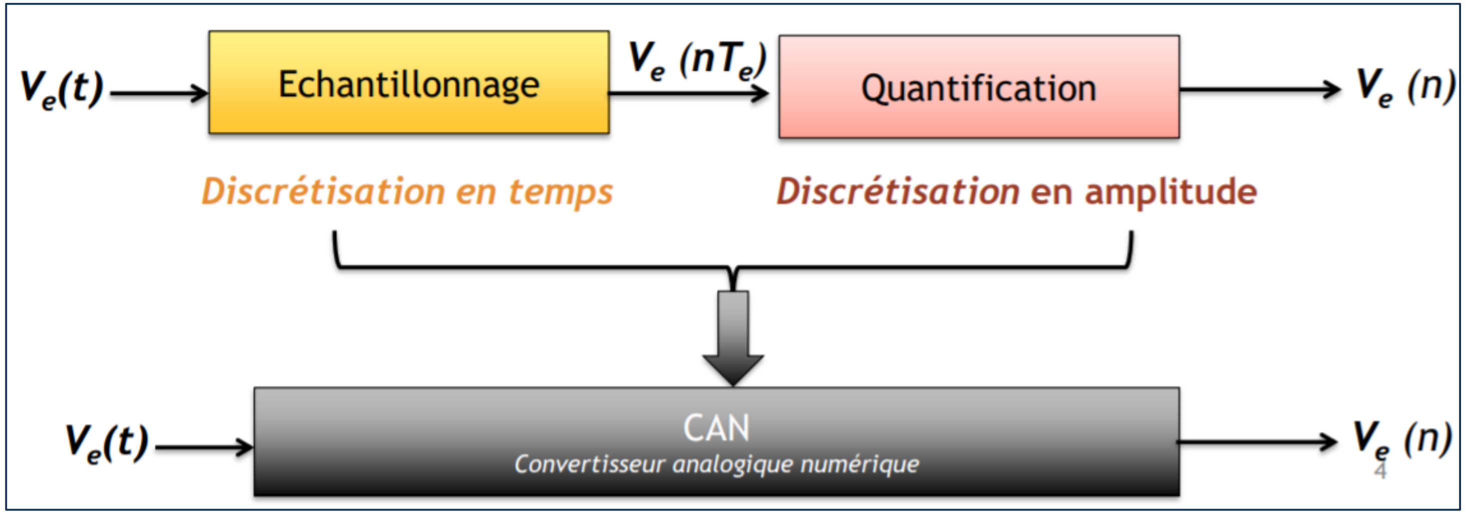
Signal numérique: c’est un signal qui varie de façon discrète (ou discontinue).
Exemple de supports numérique: CD, DVD, appareils photos numérique, TV satellites,…

Numérisation: La transformation d'un signal analogique en signal numérique est appelée la numérisation. La numérisation se fait à l’aide du Convertisseur Analogique Numérique (CAN).



Chaine de traitement numérique du signal



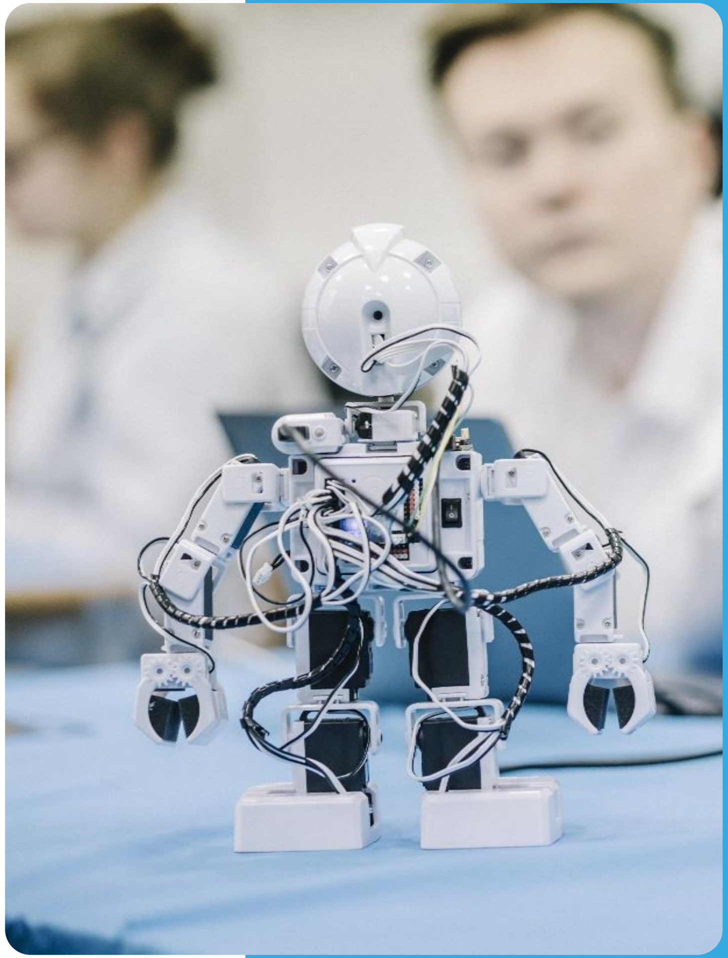


Etapes de la numérisation:

- Echantillonnage
- Quantification
- Codage

Ses étapes sont réalisées par le CAN

ECHATIILLONNAGE



Échantillonnage

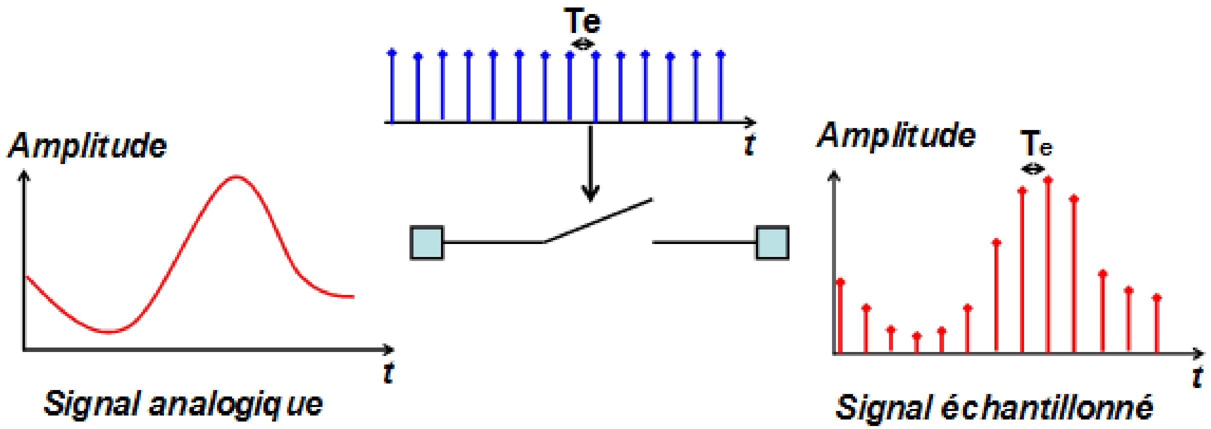
Le CAN prélève les valeurs du signal à intervalles de temps réguliers. Ce procédé est appelé l'échantillonnage et se modélise à l'aide d'un interrupteur commandé par une commande périodique $I(t)$.

$I(t) = 1$: interrupteur fermé, échantillon prélevé.

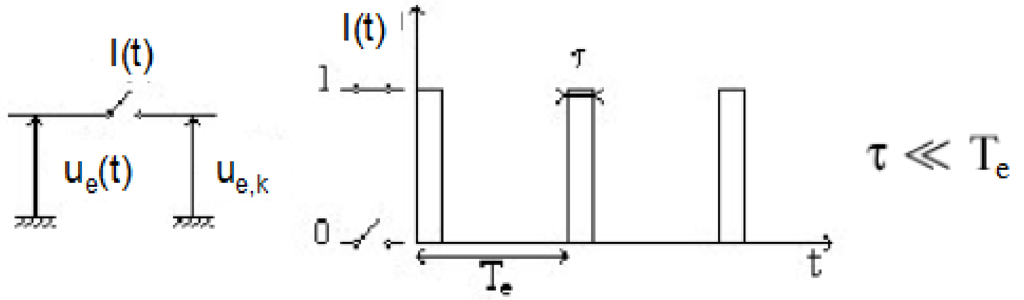
$I(t) = 0$: interrupteur ouvert, pas de valeur prélevée.

T_e (période d'échantillonnage): c'est l'intervalle entre deux échantillons, mesurée en secondes.

$F_e = \frac{1}{T_e}$ (fréquence d'échantillonnage): c'est <u>le nombre de points retenus par seconde</u>, mesurée en Hertz (Hz).



Temps discret, amplitude réelle



Signal échantillonné = signal analogique × $I(t)$

Echantillonnage

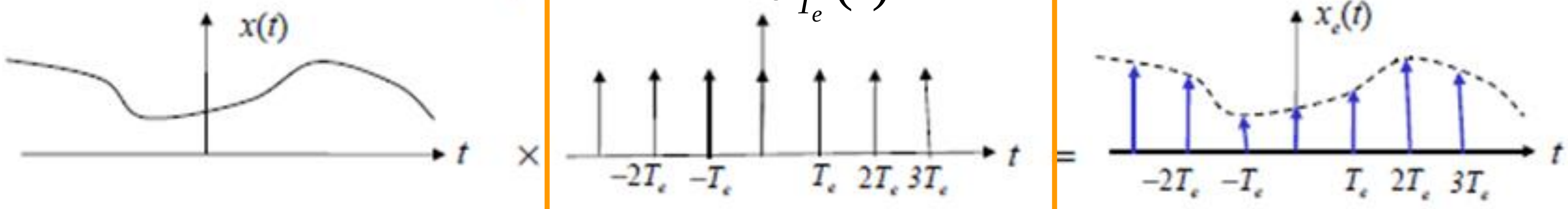
Modélisation mathématique:

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

Multiplication par le peigne de Dirac

Echantillonneur

$\delta_{T_e}(t)$



Signal continu

Peigne de Dirac

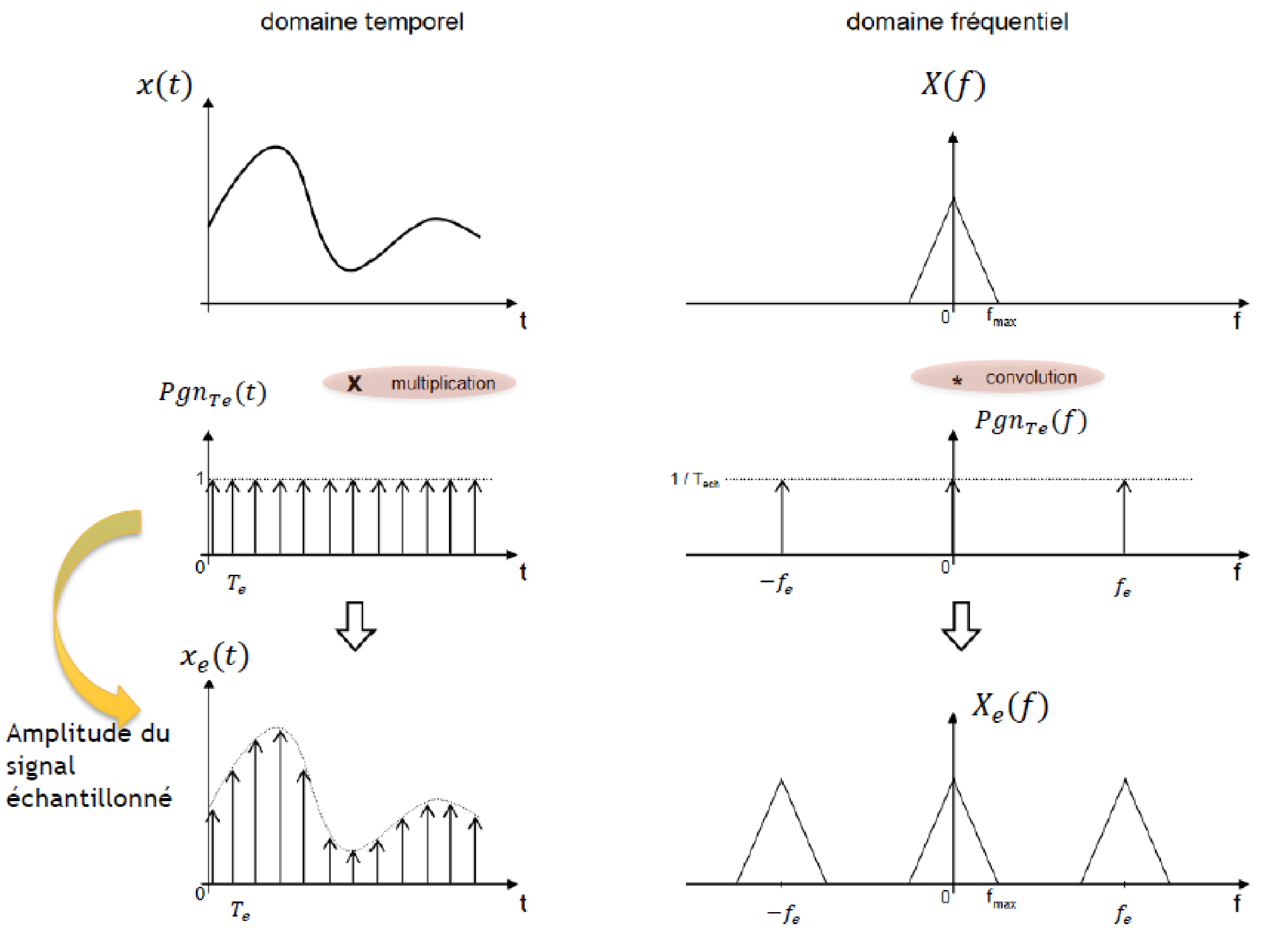
Signal échantillonné

$$x_e(t) = x(t).\delta_{T_e}(t) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t).\delta(t - nT_e)$$

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

$x[n] = x(nT_e)$, $n \in \mathbb{Z}$: signal à temps discret

Spectre d’un signal Echantillonné



Spectre infini périodique de fréquence f_e

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_e)$$

$$\boxed{F\{x_1(t).x_2(t)\} = X_1(f) * X_2(f)}$$

$$F\{x_e(t)\} = X_e(f) = X(f) * F\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right\}$$

$$F\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right\} = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)$$

$$F\{x_e(t)\} = X_e(f) = X(f) * \left\{\frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e)\right\}$$

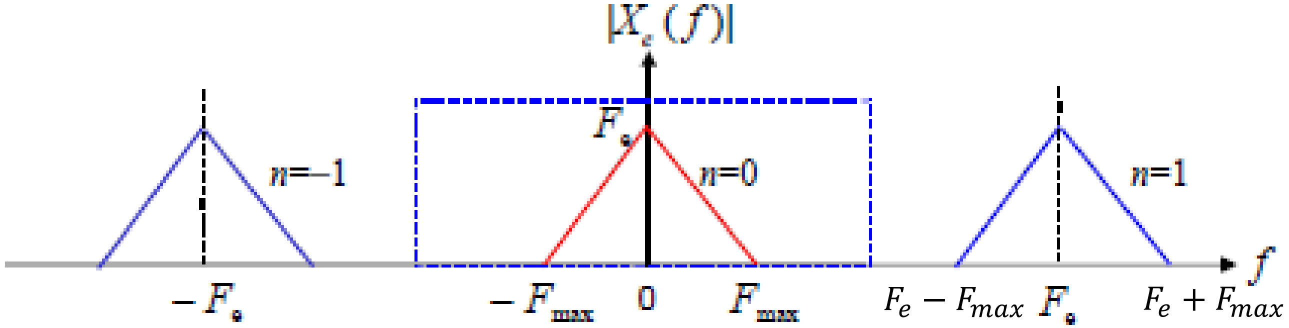
$$= \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f - nf_e)$$

$$\boxed{X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0)}$$

$$\Rightarrow X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e)$$

Spectre d’un signal Echantillonné

1er cas:

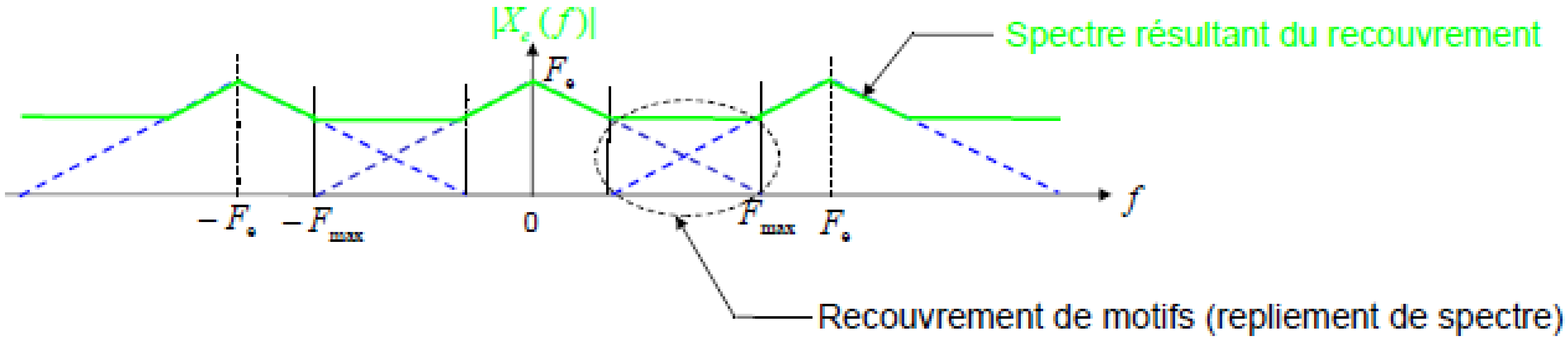


$$F_e - F_{max} \geq F_{max} \Rightarrow F_e \geq 2F_{max} \Rightarrow T_e \leq \frac{1}{2F_{max}}$$

- Les motifs sont disjoints (pas de recouvrement entre les motifs).
- On peut alors reconstituer $x(t)$ à l’aide d’un filtre passe-bas idéal.

Spectre d'un signal Echantillonné

2ème cas:



$$F_e - F_{max} \leq F_{max} \Rightarrow F_e \leq 2F_{max} \Rightarrow T_e \geq \frac{1}{2F_{max}}$$

- Les motifs élémentaires de $|X_e(f)|$ se recouvrent. On parle de repliement de spectre.
- A cause du chevauchement des motifs, il n'est pas possible de reconstituer $x(t)$ à l'aide de filtrage.

Théorème de Shannon

- La condition nécessaire et suffisante pour échantillonner un signal sans perte d'information est que la fréquence d'échantillonnage F_e soit supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal.

Plus précisément, si on note F_{max} la fréquence maximale du signal, il faut et il suffit que :

$$F_e \geq 2Fmax \Rightarrow T_e \leq \frac{1}{2F_{max}}$$

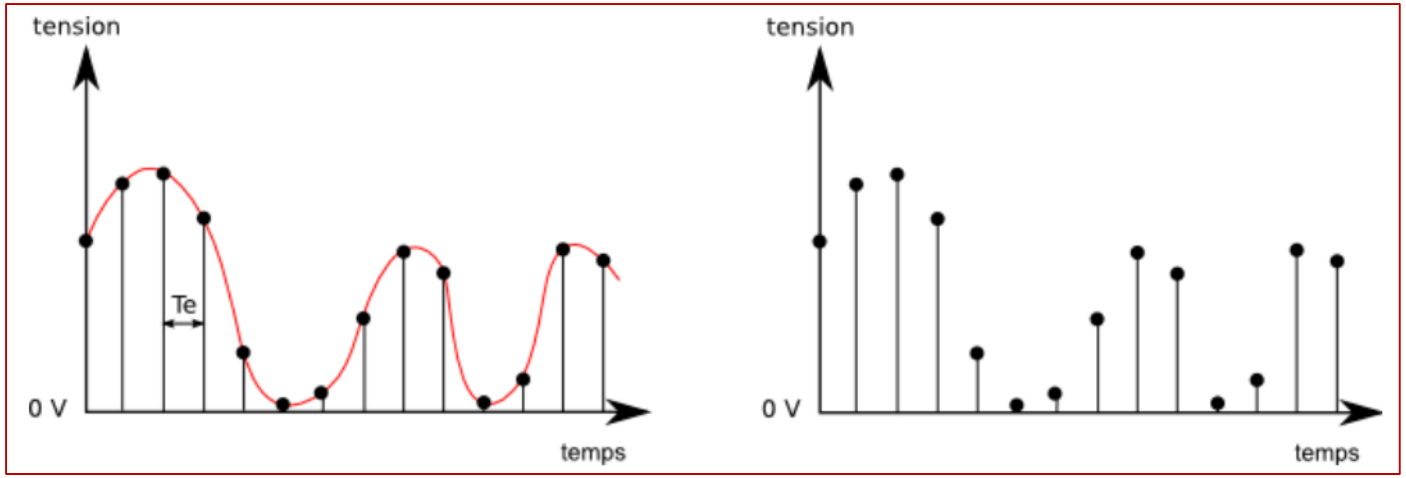
Exemple: $x(t) = \sin(100\pi t) + \cos(400\pi t)$: on a $f_1 = 50\ Hz, f_2 = 200\ Hz$. Alors $f_{max} = 200\ Hz$. Il faut échantillonner le signal au moins à $2 \times 200\ Hz = 400\ Hz,$ soit $F_e \geq 400\ Hz$.

Théorème de Shannon

Démonstration temporelle:

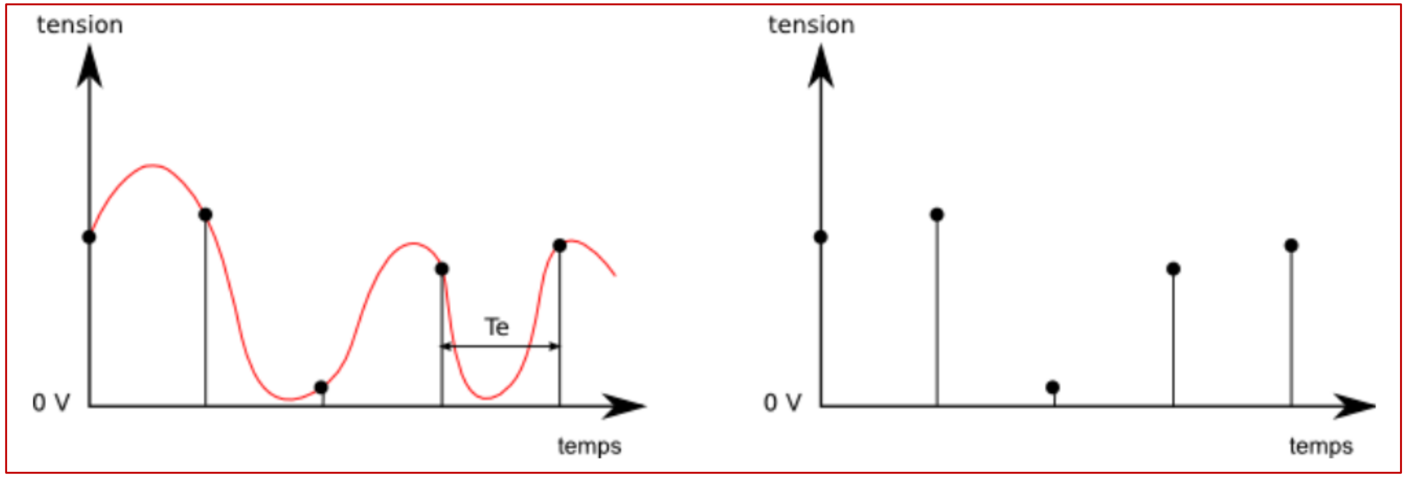
Echantillonnage rapide:

$f_e \geq 2F_{max}$: fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée,
Reconstruction du signal possible



Echantillonnage lent:

$f_e < 2F_{max}$: fréquence d'échantillonnage pas suffisamment élevée
Reconstruction du signal impossible



Filtre anti-repliement

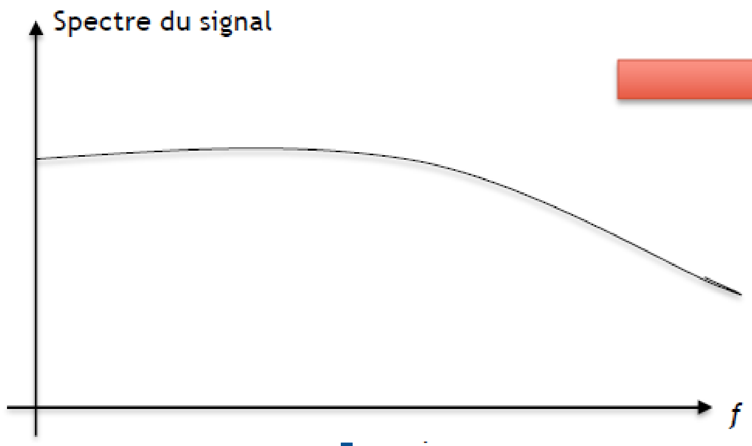
- Dans le cas des signaux a support fréquentiel infini, il est impossible de définir une notion de fréquence maximale. Quelle que soit la fréquence d'échantillonnage F_e, il y aura toujours un repliement de spectre.

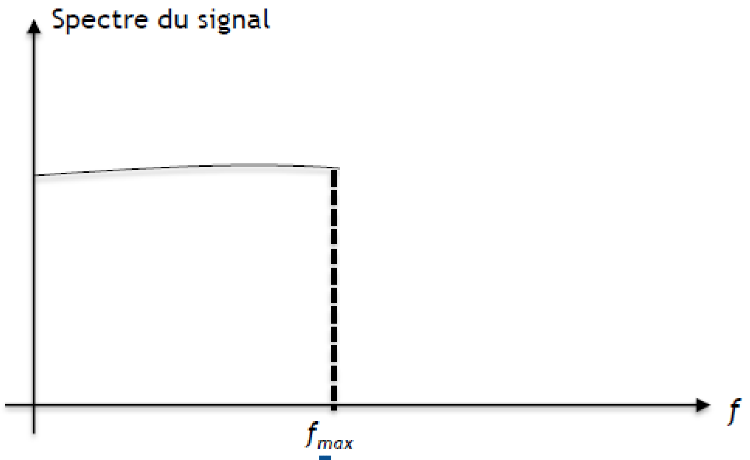
- Les signaux réels comportent souvent une composante fréquentielle à large bande due à la présence du bruit (perturbations aléatoires), ce qui imposerait une fréquence F_e importante.

Solution: filtrage anti-repliement: placer un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{2}$ devant $x(t)$ avant l'échantillonnage, afin de limiter la fréquence maximale du signal d'entrée.

Filtre anti-repliement

Filtrage anti-repliement: filtre passe-bas, $f_c = \frac{f_e}{2}$

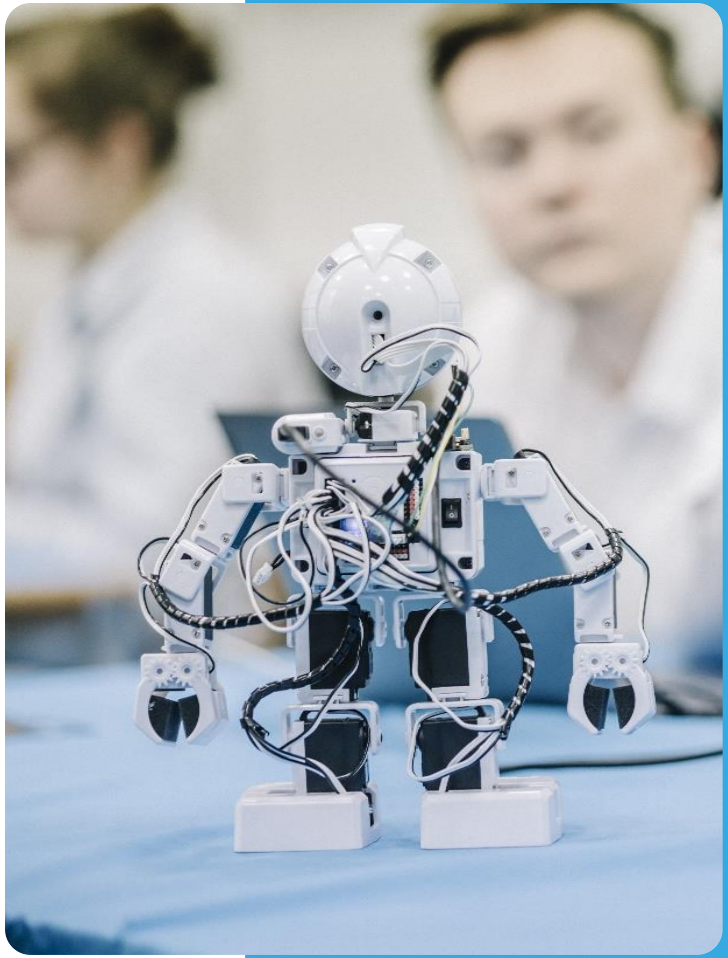




Spectre du signal illimité

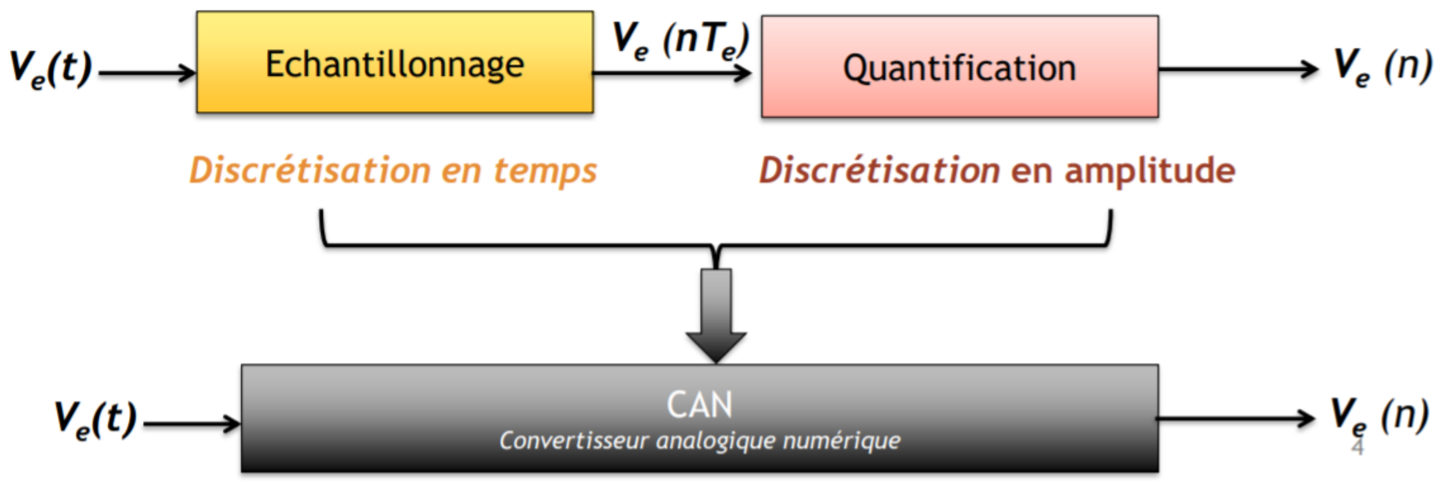
Spectre du signal limité: $F_{max} = \frac{f_e}{2}$

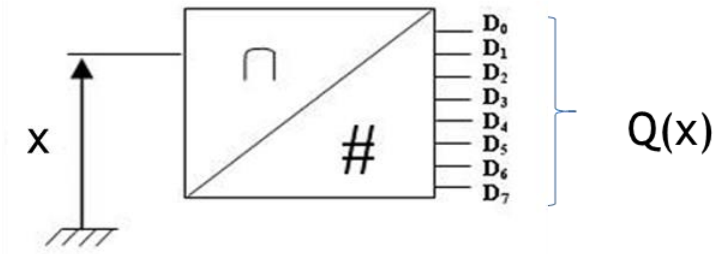
QUANTIFICATION



Quantification

Définition: Associer une valeur approchée à l'échantillon prélevé → Discrétisation de l'amplitude

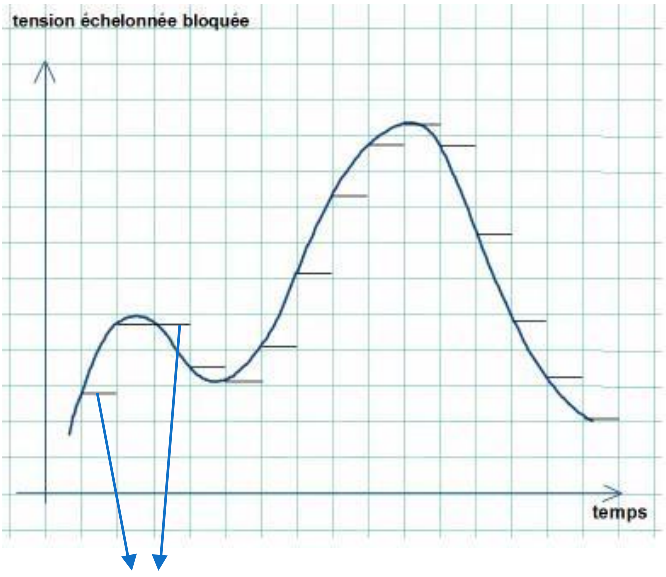




CAN de 8 bits

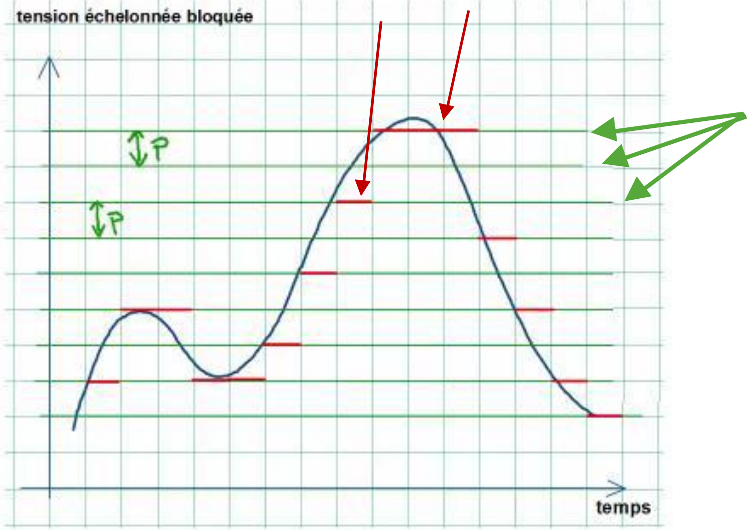
Quantification

- Les valeurs des échantillons sont « bloquées » par le CAN pendant la durée d'échantillonnage T_e.
- Le CAN crée des niveaux de quantifications. Chaque échantillon bloqué sera « approché » par un niveau de quantification selon une certaine loi (Arrondi au plus proche voisin, arrondi supérieur, etc.).
- De ce fait, plusieurs échantillons pourront être quantifiés par le même niveau de quantification.
- L'intervalle entre deux niveaux de quantification est appelé le « pas de quantification ».



Échantillons bloqués

Échantillons quantifiés

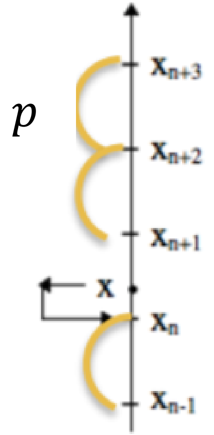


Niveaux de quantification

Quantification: amplitude discrétisée

p: pas de quantification

Pas de quantification:
$p = |x_{n+1} - x_n|$



Quantification uniforme

- C'est la méthode de quantification la plus simple, où les intervalles sont de longueur constante. Le pas de quantification est fixe. Les niveaux de reconstruction sont aussi uniformément répartis.

- Le convertisseur est caractérisé par son « pas » p, en volt. C’est la plus petite variation du signal que le CAN peut détecter, soit l’écart entre deux niveaux de quantification.

- Pour calculer le pas de quantification, la plage de mesures (A_{max}) est divisée en k intervalles (niveaux de quantification) identiques. Un convertisseur à n bits possède $k = 2^n$ niveaux de quantification.

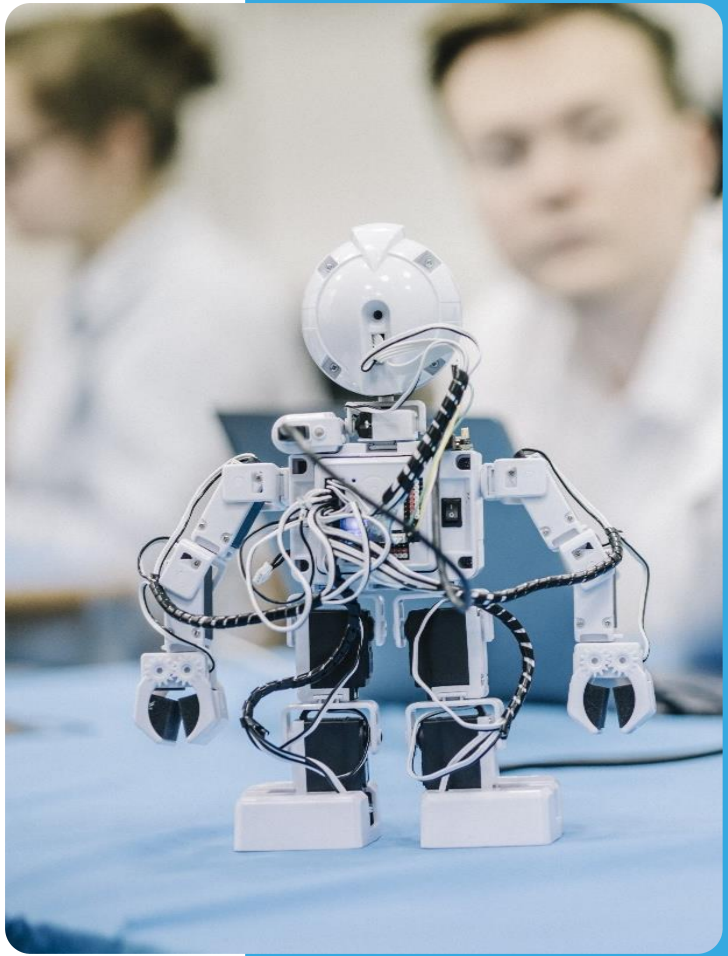
- Le pas de quantification est alors calculé par:

$$p = \frac{A_{max}}{k} = \frac{A_{max}}{2^n}$$

- Le bruit de quantification (erreur de quantification) est donné par: $e = x - Q(x)$, ou $Q(x)$ est le signal quantifié. Pour la quantification uniforme, on peut montrer que:

$$e = \frac{p^2}{12}.$$

CODAGE

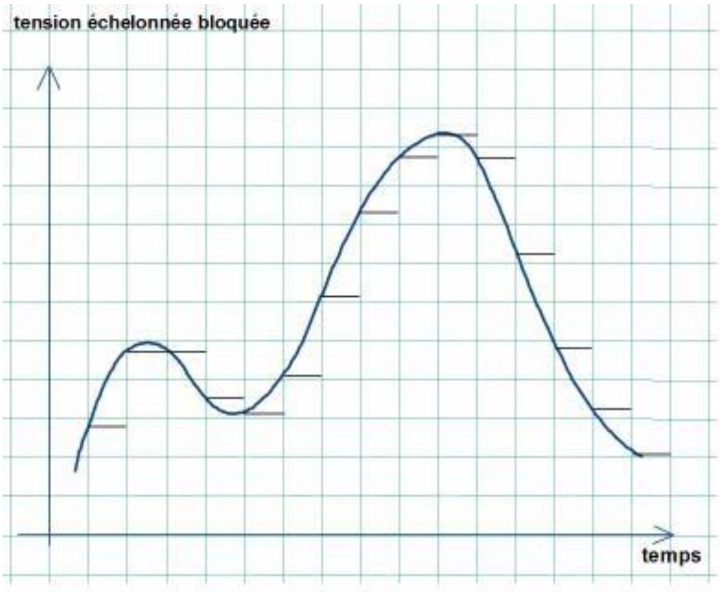


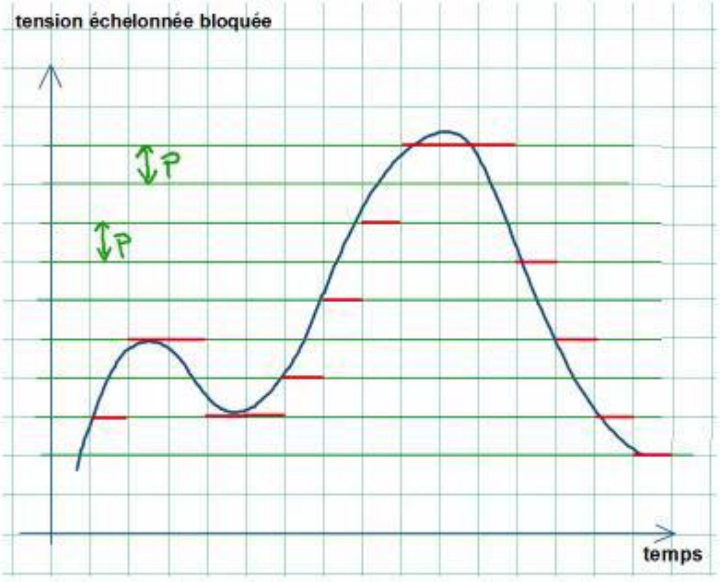
Codage

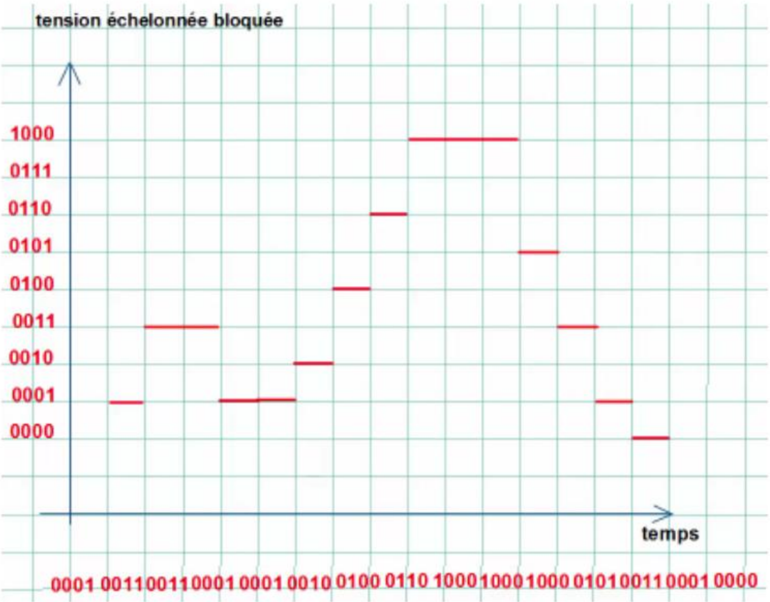
- Il s’agit d’attribuer un code binaire à chaque échantillon quantifié.

- On obtient une suite de nombres binaires qui correspondra, au plus près, à l’évolution du signal analogique.

- la numérisation est meilleure pour une période d’échantillonnage T_e et un pas de quantification p faibles.

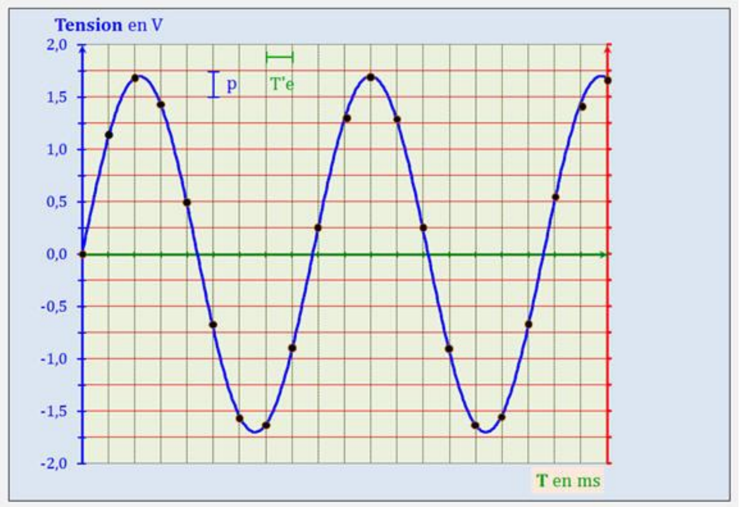




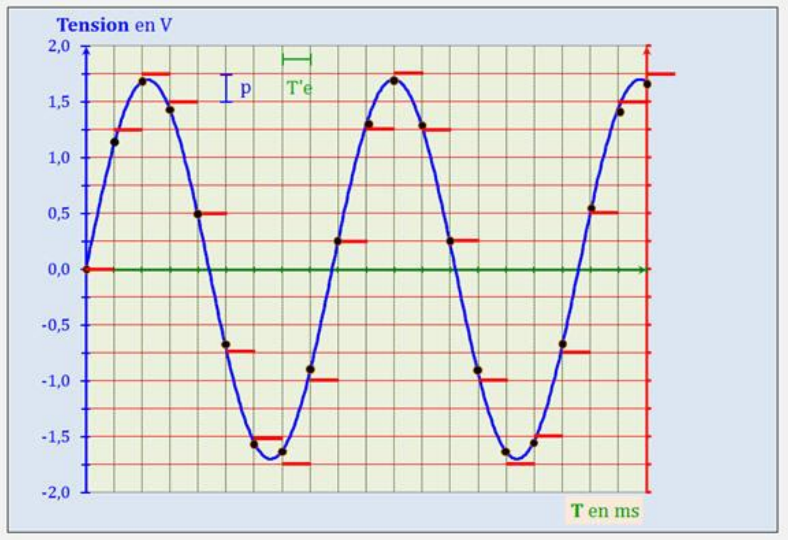


Codage sur 4 bits

Exemple

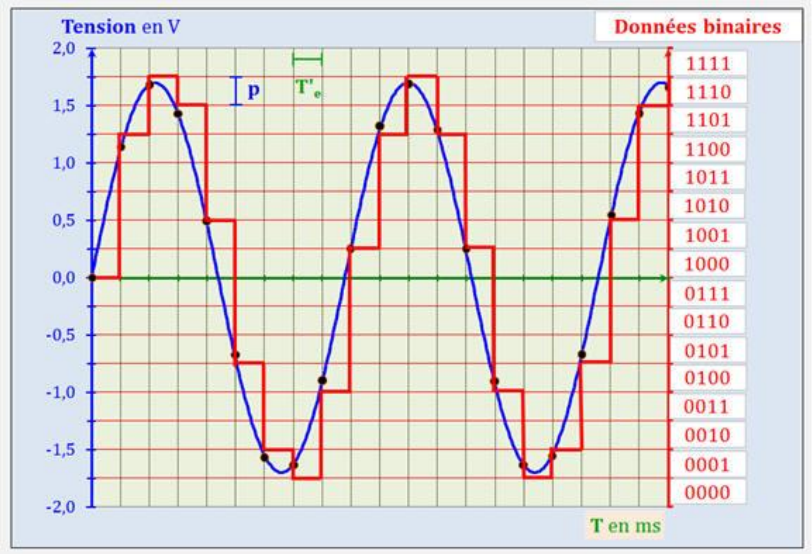


Échantillonnage à la période T_e



Quantification sur 16 niveaux (4 bits)

$$p = \frac{plage\ de\ mesure}{2^4} = \frac{4V}{16} = 0{,}25\ V$$



Codage sur 4 bits (16 niveaux)

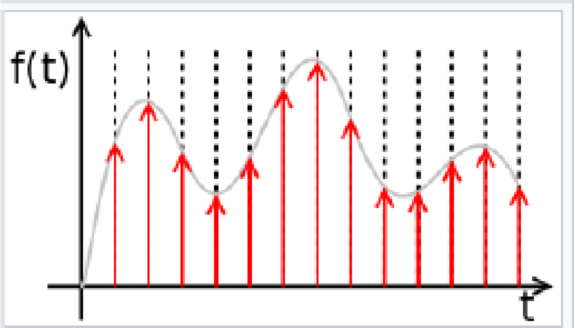
- Pas de quantification: $p = \frac{4}{16} = 0{,}25\ V$
- Aux valeurs comprises entre – 2V et – 1,75V, on associe la combinaison 0000
- …
- Aux valeurs comprises entre +1,75V et 2V, on associe la combinaison 1111.

-2V → -1,75V	0000
-1,75V →-1,5V	0001
1,5V → -1,25V	0010
…	…
0V → 0,25V	1000
0,25V → 0,5V	1001
…	…
1,75V → 2V	1111

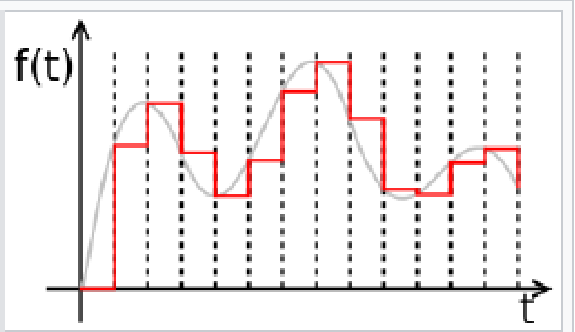
Echantillonneur-Bloqueur

- La quantification devrait théoriquement se faire en un laps de temps très court et coïncider exactement aux instants d'échantillonnage: conditions difficiles à réunir.

- L'objectif d'un échantillonneur-bloqueur est, en plus de prélever le signal d'entrée aux instants d'échantillonnage, de maintenir le dernier échantillon à une valeur constante. Cela permet à l'étage de quantification de disposer du temps suffisant pour le codage de l'information.



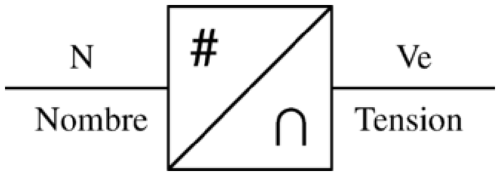
Echantillonnage



Le résultat du Sample and Hold16

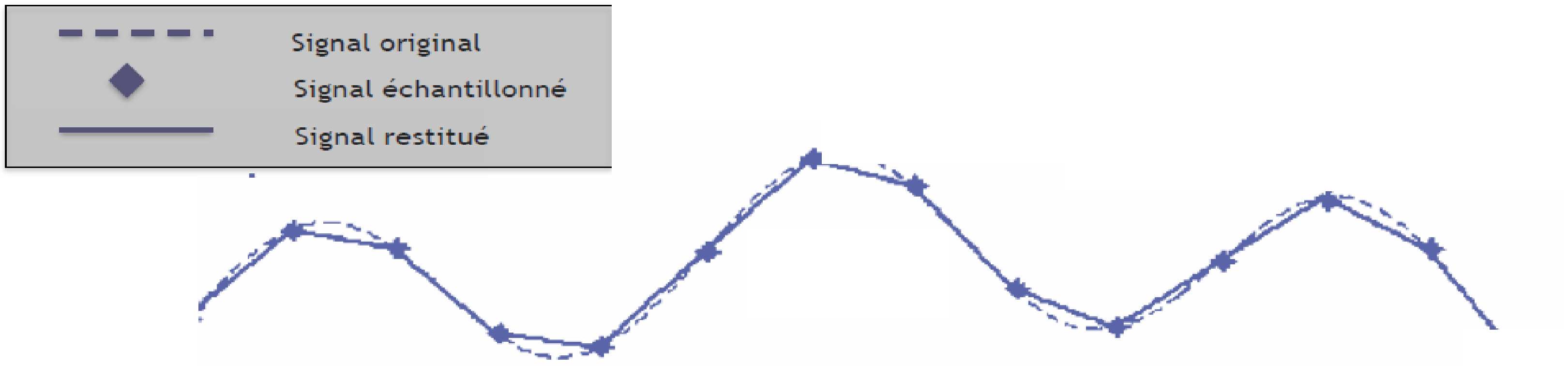
Conversion Numérique-Analogique

La restitution du signal continu à partir du signal codé se fait à l'aide d'un Convertisseur Numérique-Analogique (CNA).



- La connaissance de tous les échantillons $x(nT_e)$ est nécessaire pour reconstruire le signal, ce qui est impossible en pratique. La restitution est alors approximative: il existe une erreur d'approximation appelée distorsion.

- Interpolation linéaire: relier les échantillons par une droite.



Exercices

1. On désire coder sur 3 bits un signal analogique par un CAN dont la plage de mesure est entre 0 et 10V.
   a. Déterminer le nombre de niveaux de quantification.
   b. Quel est le pas de quantification convenable si l'on désire effectuer une quantification uniforme?
   c. Quelles sont les valeurs quantifiées par le CAN ?
   d. Donner le code binaire des différentes valeurs.

2. Pour l'équipement des salles de physique d'un lycée, on a besoin de mesurer des tensions allant de 0 à 4,5 V à 10 mV près. Une carte d'acquisition trouvée dans le commerce contient un CAN de 8 bits et a pour calibre 0,0 – 5,0 V.
   a. Déterminer le pas p du convertisseur de ce modèle.
   b. Ce modèle correspond-il aux besoins du lycée ?
   c. Quel doit-être le nombre minimum de bits du CAN pour que sa précision soit suffisante ?

   (Rappel : si $b^n = c$ alors $n = \frac{\ln c}{\ln b}$)