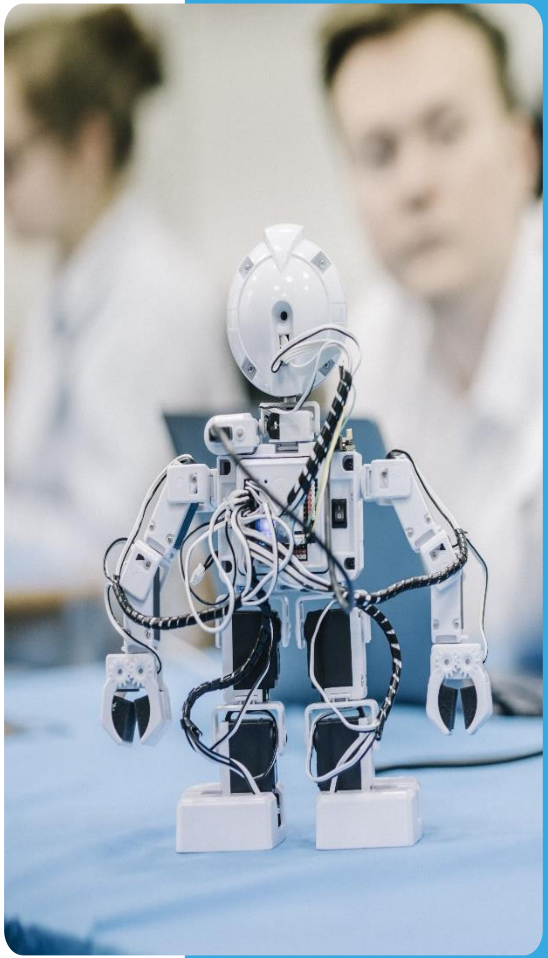
# TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

## (FA-SYS3045)

Maryam L'Hernault

Maryam.lhernault@esiea.fr



# Plan du cours

- Introduction aux signaux
- Analyse corrélative des signaux
- Analyse fréquentielle des signaux en temps continu
- Systèmes linéaires et filtres en temps continu

Temps continu

- Numérisation des signaux
- Analyse fréquentielle des signaux en temps discret
- Systèmes linéaires en temps discret
- Filtres numérique

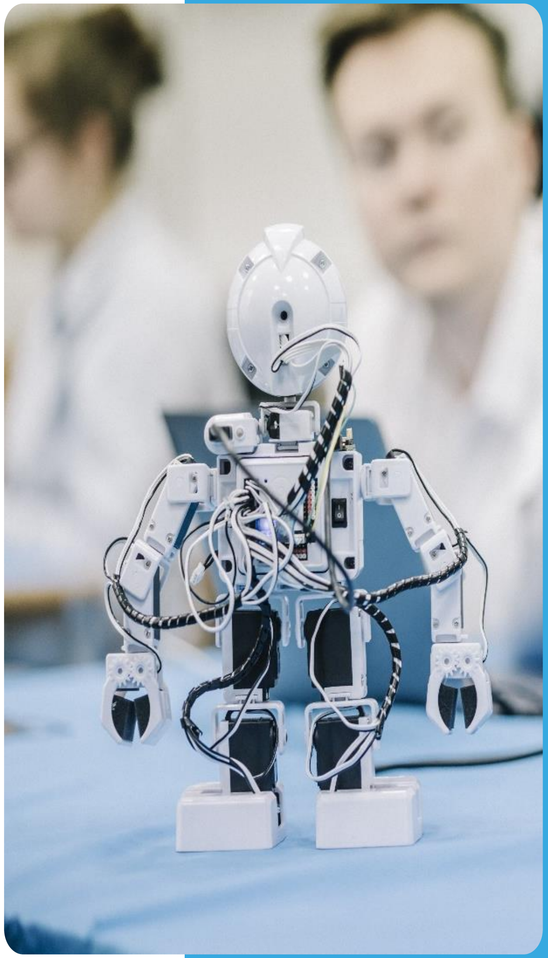
Temps discret

21h de cours/TD, 15h de TDAO/TP

Cours disponible sur: https://learning.esiea.fr

Evaluation: Notes TDAO, TP, QCM, Examen final

# INTRODUCTION AUX SIGNAUX

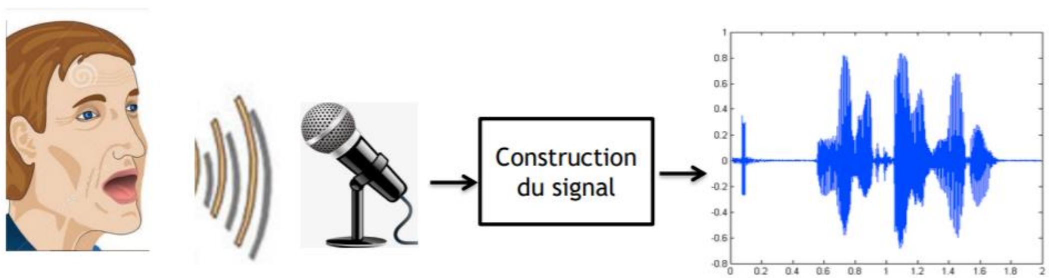


# Introduction aux signaux

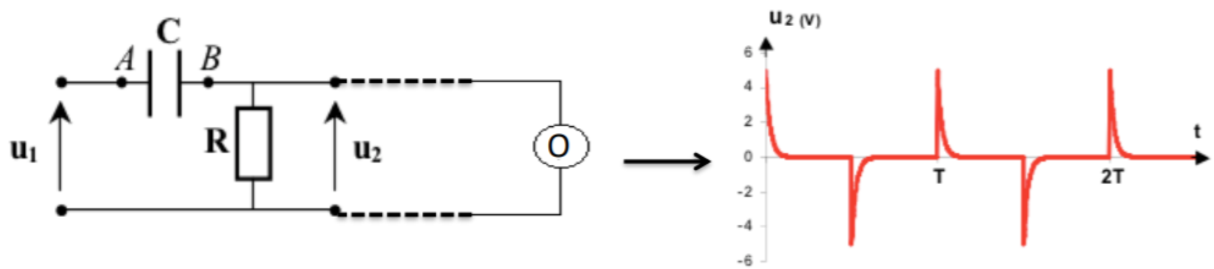
Définition du Signal: Manifestation physique d'une grandeur mesurable, d'une information à transmettre.

Exemple:

Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, musique, …)

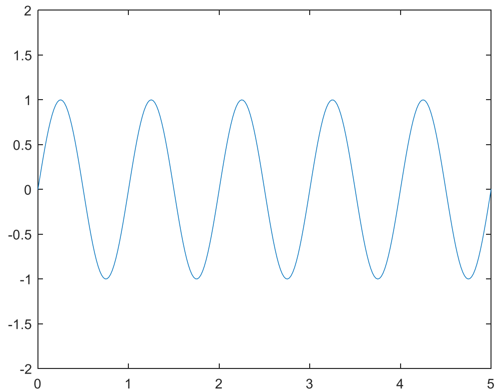



Signal électrique:

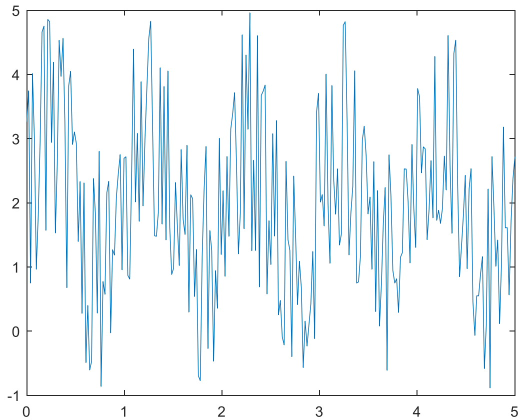


# Le bruit

**Définition du Bruit:** Tout phénomène perturbateur pouvant gêner la perception ou l'interprétation d'un signal est appelé le bruit.



Sinusoïde non bruitée



Sinusoïde bruitée

## Rapport signal sur bruit (RSB):

Le rapport signal sur bruit mesure la quantité de bruit contenu dans le signal. Il s'exprime par le rapport des puissances du signal ($P_s$) et du bruit ($P_B$). Il est souvent donné en décibels (dB).

$$RSB_{dB} = 10\log\left(\frac{P_s}{P_B}\right)$$

$$RSB > 0:\ \ P_s > P_B$$
$$RSB < 0:\ \ P_s < P_B$$
$$RSB = 0:\ \ P_s = P_B$$

# Traitement du signal

Il s’agit de:

- L’Analyse des caractéristiques du signal (analyse temporelle ou fréquentielle)
- La Modification du signal (élimination du bruit et des dégradations: filtrage)
- La Mise en forme du signal: numérisation, modulation, …

Champs d’application:

- L’acoustique (signaux musicaux, signaux de parole, etc.),
- Le domaine biomédical (signaux encéphalographiques, électrocardio-graphiques,etc.),
- La mécanique (signaux vibratoires, émission acoustique, etc.),
- La télécommunication,
- etc.

# Classification des signaux

Les signaux sont classés selon:

- leur dimension
- leur évolution
- leur morphologie
- leur énergie

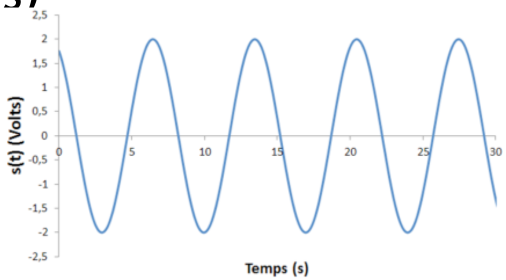
Il existe des techniques qui ne s'appliquent qu'à des familles de signaux spécifiques.

# Classification dimensionnelle

**Signal monodimensionnel (1-D):**

Le signal monodimensionnel est une fonction d'une seule variable indépendante.

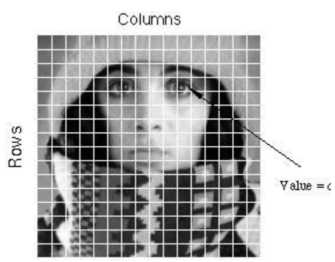
*Exemple*: *Mesure de la tension électrique (en volts) aux bornes d'une source de courant alternatif.*




**Signal bidimensionnel (2-D):**

Le signal bidimensionnel est une fonction de 2 variables, $f(V1,V2)$

*Exemple*: Image $X(n1,n2)$




**Signal Multidimensionnel (M-D):**

*Exemples*: vidéo (3-D): $X(n1,n2,t)$

# Classification selon l'évolution du signal

Signaux déterministes:

L'évolution du signal déterministe est parfaitement prévisible et peut être décrite par un modèle mathématique. Exemple: signal sinusoïdal périodique.

On distingue plusieurs familles de signaux déterministes:

a) Signaux périodiques: se répètent identiquement à des intervalles de temps réguliers appelés la période du signal: $x(t)=x(t+T)$

b) Signaux non-périodiques ou apériodiques:

- Signal transitoires: Partie du signal correspondant à son évolution rapide, suivie d'une décroissance. Ils se manifestent lors de changement d'état d'un système et leur existence est limitée dans le temps.
- Signaux pseudo périodiques: une somme de sinusoïdes de périodes différentes.

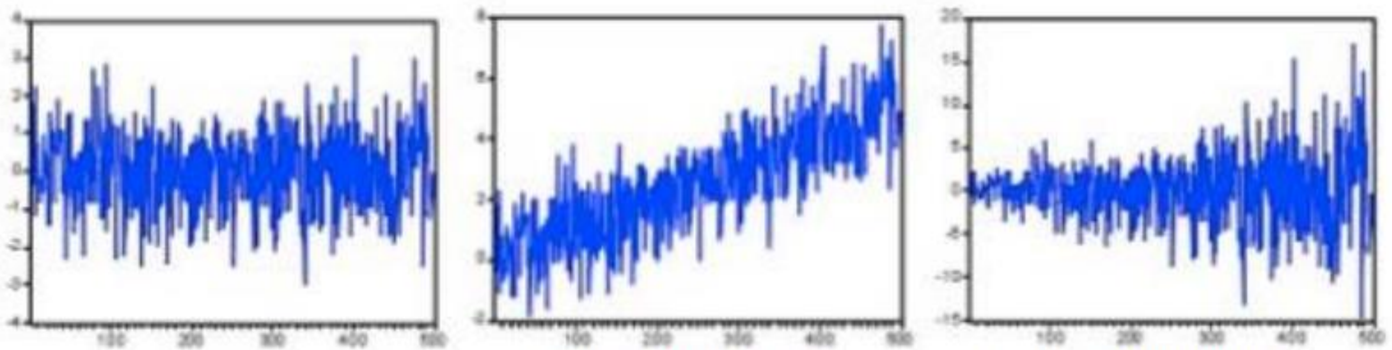
# Classification selon l’évolution du signal

Signaux aléatoires (probabilistes):

Le comportement temporel du signal aléatoire est imprévisible. On se contente alors d’observations statistiques (moyenne, écart type, histogramme). Exemple: le bruit, le signal de parole, ….

Signaux aléatoires stationnaires: les caractéristiques statistiques ne varient pas avec le temps.

Signaux aléatoires non-stationnaires: les caractéristiques statistiques varient avec le temps.



Signal stationnaire

Signal non stationnaire
La moyenne varie avec le temps

Signal non stationnaire
La variance varie avec le temps

# Classification selon l'évolution du signal

## Signaux réels et signaux complexes

Signal réel: Un signal $x(t)$ est réel si toutes ses valeurs sont réelles.

Exemple:

$$x(t) = A\sin(2\pi t)$$

Signal complexe: les valeurs su signal sont complexes:

$$x(t) = Re\{x(t)\} + j\, Im\{x(t)\}$$

$$x(t) = |x(t)|\exp(j\emptyset(t)) = |x(t)|.[\cos(\emptyset(t))\text{+jsin}(\emptyset(t))]$$

$$|x(t)| = \sqrt{(Re\{x(t)\})^2 + (Im\{x(t)\})^2}$$ : module de $x(t)$

$$\emptyset(t) = Arctan(\frac{Im\{x(t)\}}{Re\{x(t)\}})$$ : argument de $x(t)$

Exemple:

$$x(t) = A\, e^{j3\pi t} = A\cos(3\pi t) + j\,\mathrm{A}\sin(3\pi t)$$

$$Re\{x(t)\} = A\cos(3\,\pi t)\ , \qquad Im\{x(t)\} = A\sin(3\pi t)\,,$$

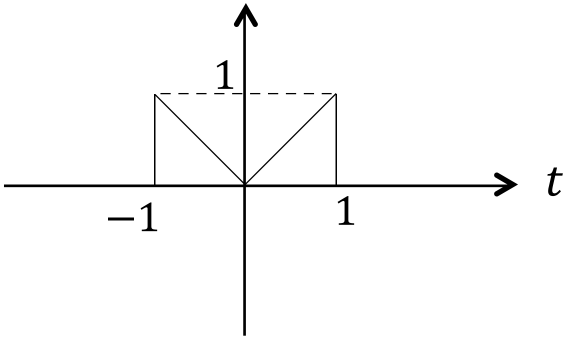
$$|x(t)| = \sqrt{(A^2\cos^2(3\pi \mathrm{t}) + A^2\sin^2(3\pi t))} = A\,, \qquad \phi(t) = 3\pi t$$

# Classification selon l'évolution du signal

## Signaux pairs et impairs

$$x(t) = \begin{cases} -t & si \ -1 \leq t \leq 0 \\ t & si \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

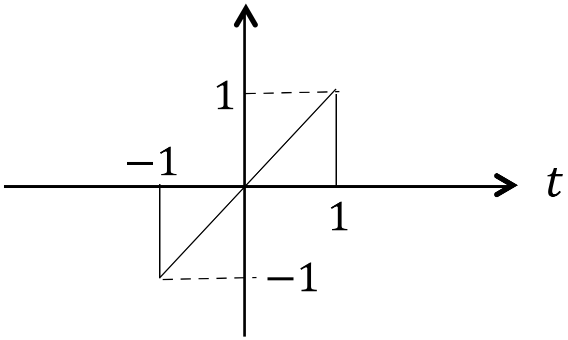
$x(t)$ est pair si $x(-t) = x(t)$.
Ou pour un signal discret: $x[-n] = x[n]$
(Symétrique par rapport à l'axe des Ordonnées)




Signal pair

$$x(t) = \mathrm{t}\,, -1 \leq t \leq 1$$

$x(t)$ est impair si $x(-t) = -x(t)$.
Ou pour un signal discret: $x[-n] = -x[n]$
(Symétrique par rapport à origine)

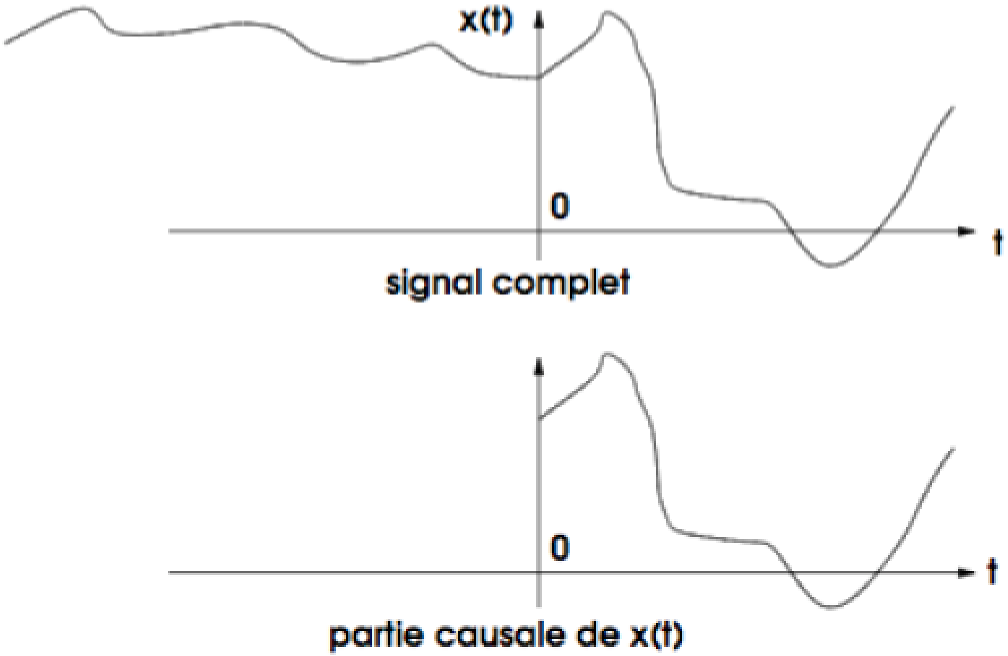



Signal impair

# Classification selon l'évolution du signal

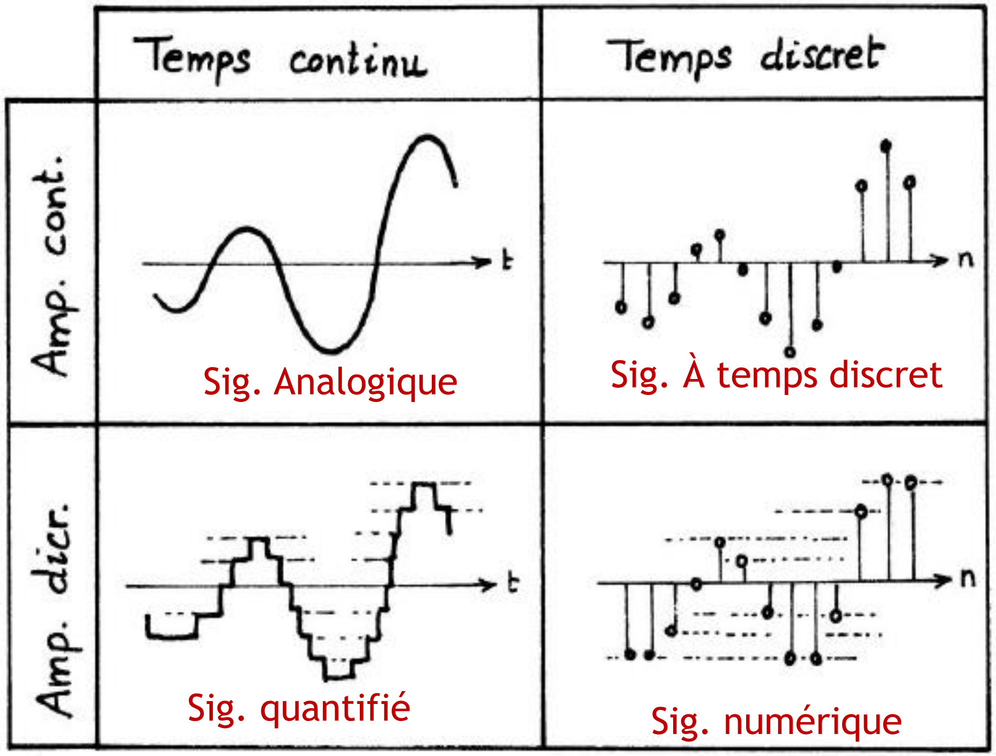
Signal causal:

Un signal $x(t)$ est dit causal si: $x(t) = 0\ ;\ t < 0$



# Classification morphologique

Signal à temps continu : la variable indépendante, *le temps*, prend ses valeurs sur un ensemble continu.
Signal à temps discret: la variable indépendante prend ses valeurs sur une grille de points (ensemble discret).



# Classification selon l'énergie

On appelle énergie totale d'un signal $x(t)$ la grandeur suivante, si elle existe :

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Où $|x(t)|^2$: module au carré de $x(t)$

Dans le cas d'un signal à temps discret on écrit:

$$E_{tot} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Lorsque $0 < E_{tot} < +\infty$, le signal est à énergie finie.

# Classification selon l'énergie

Lorsque l'énergie ne converge pas ($E_{tot} \rightarrow \infty$), on calcule sa quantité par unité du temps. C'est la puissance moyenne du signal définie par:

$$P_{moy} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Dans le cas des signaux périodiques, la puissance moyenne est calculée sur une période:

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Dans le cas d'un signal à temps discret on écrit: $P = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{k} |x(n)|^2$

Lorsque $0 < P_{moy} < +\infty$, le signal est à puissance moyenne finie.

# Classification selon l'énergie

Classement des signaux:

- Signal à énergie finie: Un signal non-périodique (ou transitoire) ou à support temporel borné possède une énergie totale finie. Le signal à énergie finie possède une puissance moyenne nulle:

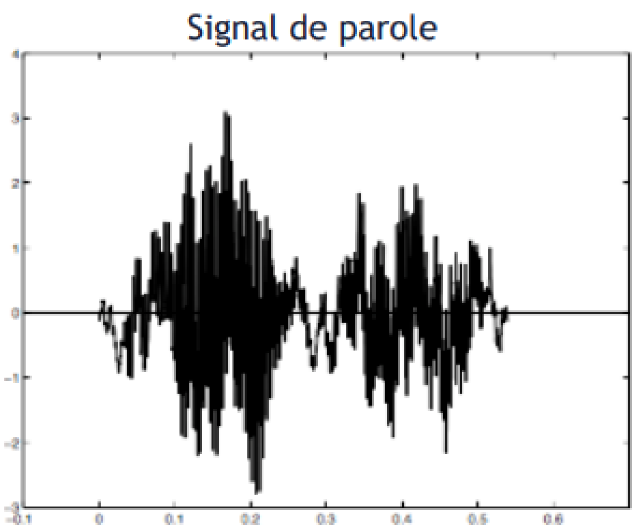
$$0 < E_{tot} < +\infty \rightarrow P_{moy} = 0$$

- Signal à puissance moyenne finie: un signal à puissance moyenne finie possède une énergie infinie. Il est aussi appelé « signal à énergie infinie ». Exemple: signaux périodique, signaux issus d'un générateur de fonctions, signaux permanents non-périodiques, signaux à support temporel non-borné, signaux permanents aléatoires,…

$$0 < P_{moy} < +\infty \rightarrow E_{tot} \rightarrow \infty$$

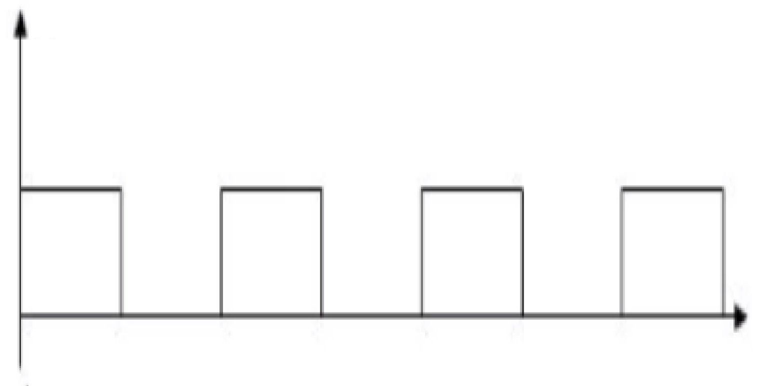
# Classification selon l’énergie

Exemples:




Signal à énergie finie

Support temporel borné



Signal à puissance moyenne finie

Signal périodique

# Translation temporelle des signaux

On parle de la translation temporelle du signal x(t) lorsque le signal est décalé dans le temps (déplacement horizontal sur l’axe des temps) vers la gauche ou vers la droite:

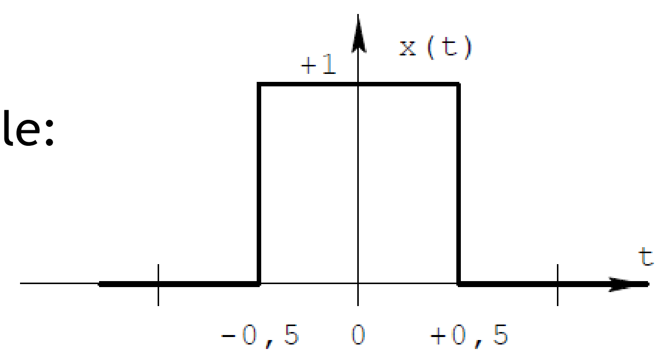
- $x(t-t_0)$; $t_0 > 0$ : *décalage de* $t_0$ *unités vers la droite. Le signal est alors retardé de* $t_0$.

- $x(t-t_0)$; $t_0 < 0$ : *décalage de* $t_0$ *unités vers la gauche. Le signal est alors avancé de* $t_0$.

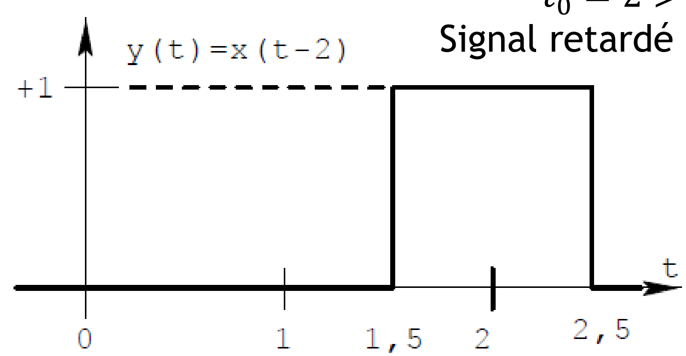
$t_0 = 2 > 0$

Signal retardé de 2sec

Exemple:




(a)

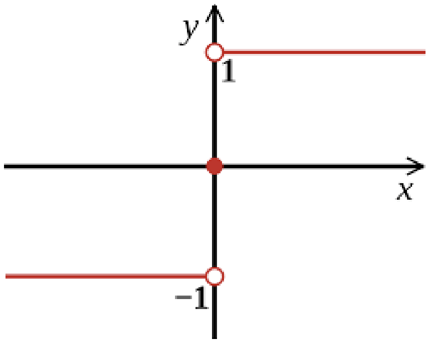



(b)

# Signaux élémentaires

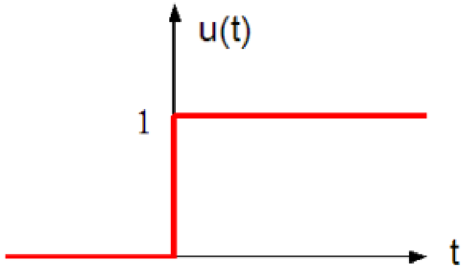
## 1. Fonction signe:

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad t>0\\ 0 & \text{si} \quad t=0\\ -1 & \text{si} \quad t<0\end{cases}$$



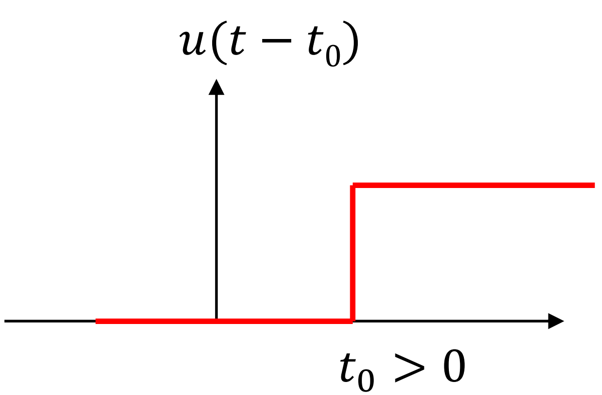

## 2. Échelon unité (fonction de Heaviside):

$$u(t)=\begin{cases}1 & si \quad t\geq 0\\ 0 & si \quad t<0\end{cases}$$




### Translation temporelle:

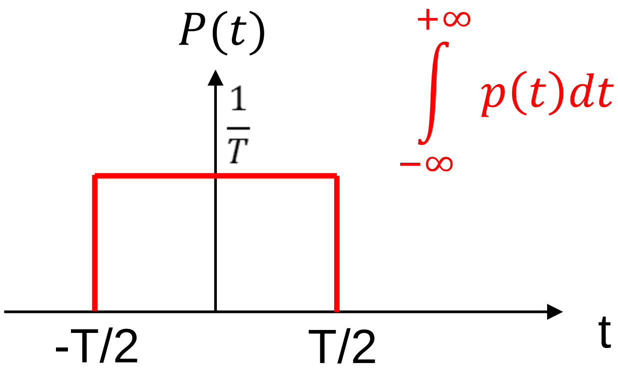
$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & si \quad t\geq t_0\\ 0 & si \quad t<t_0\end{cases}$$



# Signaux élémentaires

## 3. Signal porte:

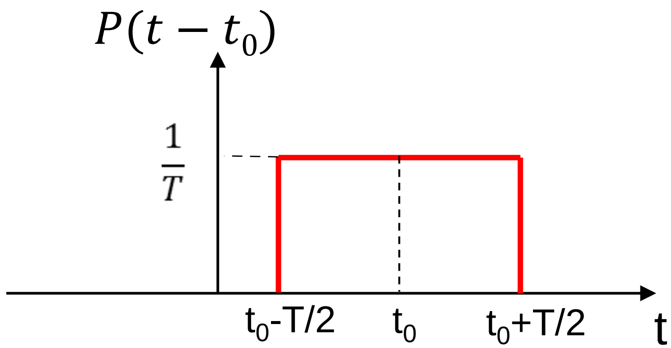
$$rect_T(t) = P(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & si \quad |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & si \quad |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$




$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$$

### Translation temporelle:

$$P(t-t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & si \quad t_0 - \dfrac{T}{2} \le t \le t_0 + \dfrac{T}{2} \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases} \quad (t_0 > 0)$$




$t_0 > 0$

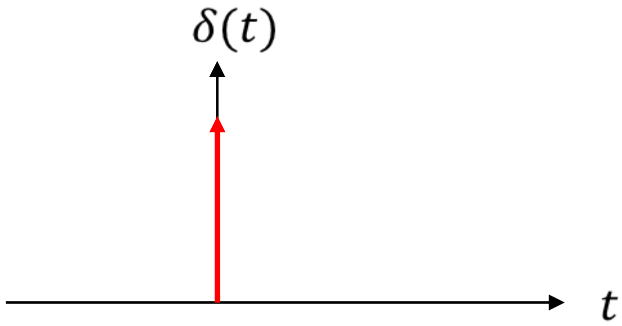
# Signaux élémentaires

4. Impulsion de Dirac:

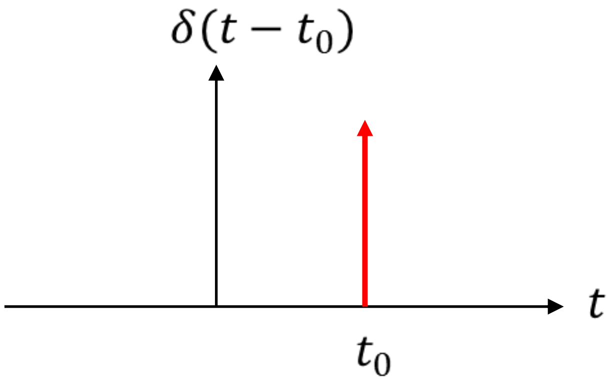
$$\delta(\mathrm{t}) = \lim_{T\to 0} P(t)$$

$$\delta(t) = 0 \;\; pour\, t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$




Translation temporelle:




$$\delta(t - t_0) = 0 \;\; pour\, t \neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

# Signaux élémentaires

Propriétés de l'impulsion de Dirac:

1. Multiplication par une fonction:

soit $f(t)$ une fonction:

$f(t).\delta(t) = f(0).\delta(t)$ impulsion de Dirac de poids $f(0)$

$f(t).\delta(t-t_0) = f(t_0).\delta(t-t_0)$ impulsion de Dirac en $t_0$ de poids $f(t_0)$

2. Intégrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0).\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

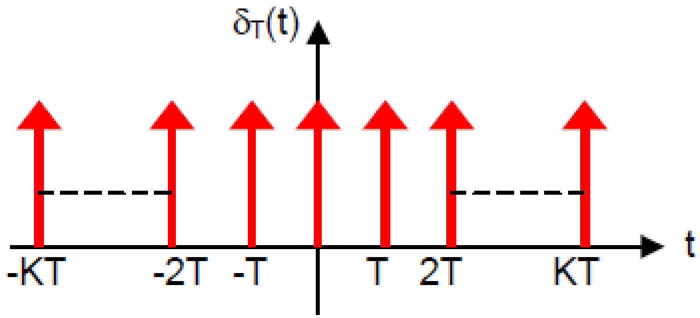
De la même manière:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta(t-t_0) = f(t_0)$$

# Signaux élémentaires

5. Peigne de Dirac: succession périodique d'impulsions de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT)$$




- T est la période du peigne.

- Cette suite est parfois appelée *<u>train d'impulsions</u>* ou *<u>fonction d'échantillonnage.</u>*

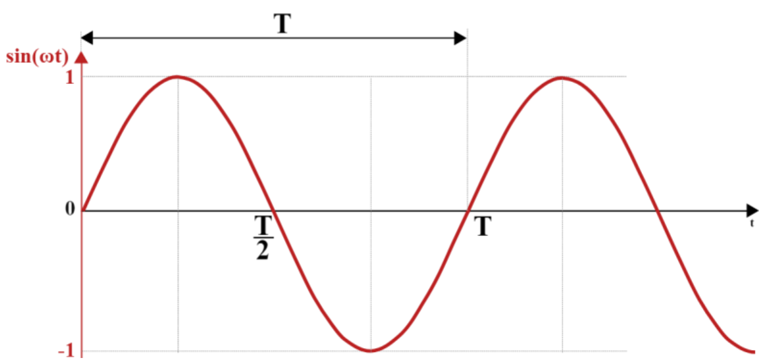
- Ce type de signal est principalement utilisé en échantillonnage .

# Signaux élémentaires

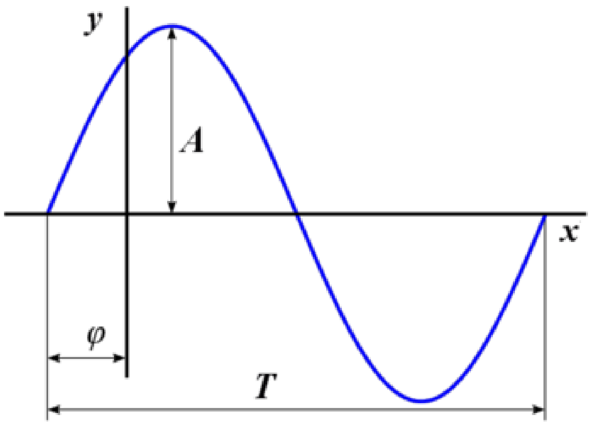
6. Signal sinusoïdal: $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Pulsation: $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,

$T_0$: période , $f_0 = \frac{1}{T_0}$ : Fréquence , $\varphi$: phase à l'origine




$A = 1,\ \varphi = 0$
Phase nulle à l'origine
$$x(t) = \sin(\frac{2\pi}{T}t)$$



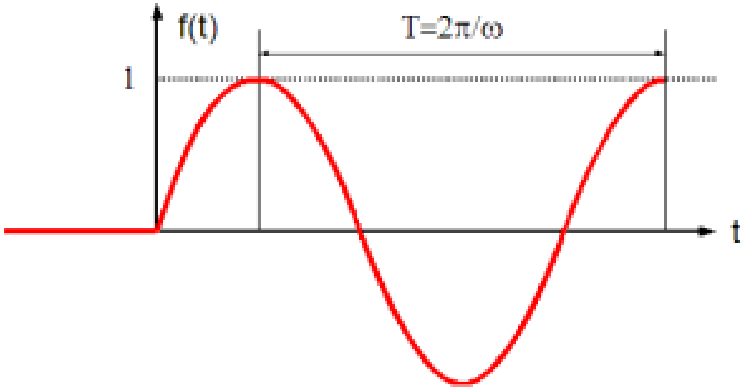

$\varphi \neq 0$
Phase non nulle à l'origine
$$y(x) = \sin(\frac{2\pi}{T}x + \varphi)$$

# Signaux élémentaires

Sinusoïde causale

$$f(t) = \sin(\omega t) \, . \, u(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) \, , & t \geq 0 \\ 0 \, , & t < 0 \end{cases}$$



# Signaux élémentaires

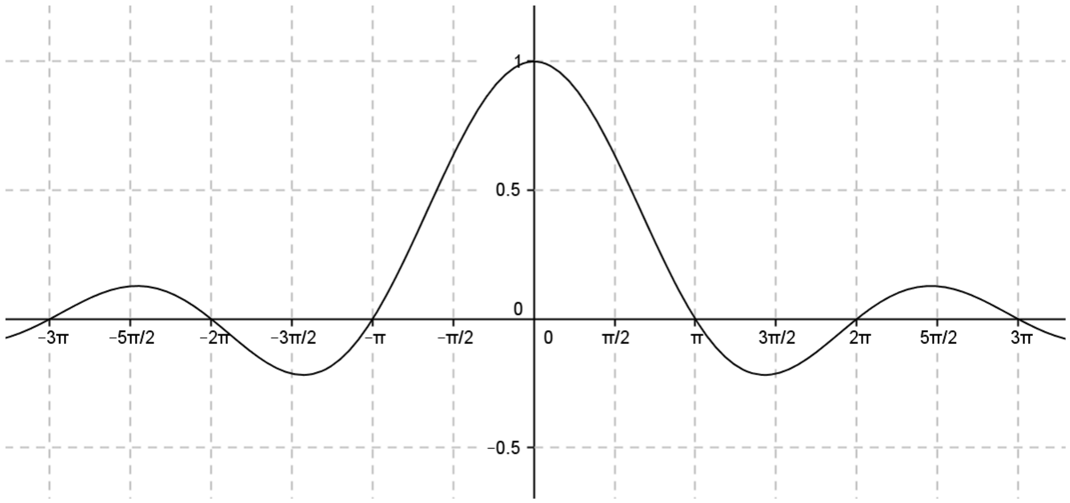
7. Sinus cardinal:

$$sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

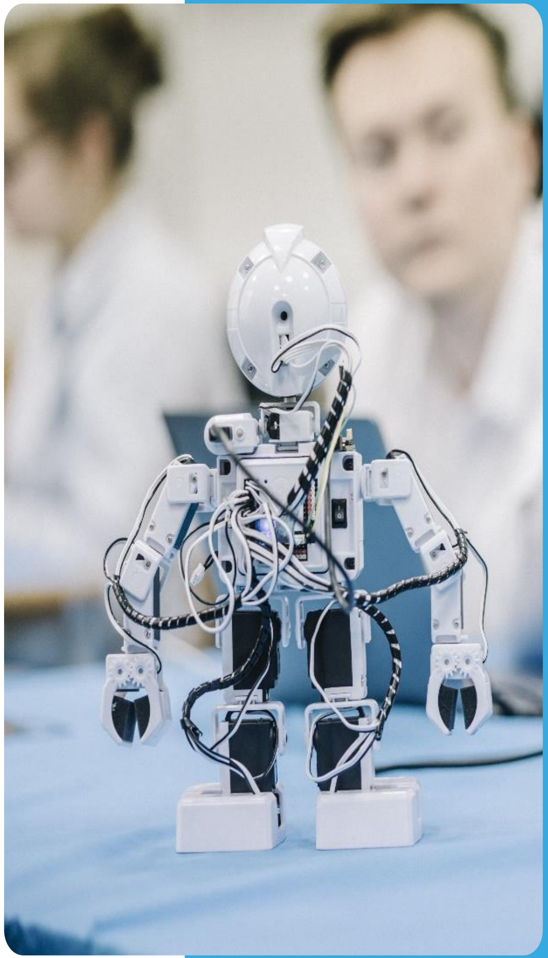
$$\lim_{x \to 0}(sinc(x)) = 1$$

Points d'intersection avec l'axe des abscisses:

$$sinc(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \quad x = k\pi \; ; k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$



# ANALYSE CORRELATIVE DES SIGNAUX



# Inter-corrélation

L'analyse corrélative permet mesurer la ressemblance entre deux signaux.

Lorsque les deux signaux sont différents, on calcule <u>l'inter-corrélation</u> entre eux.

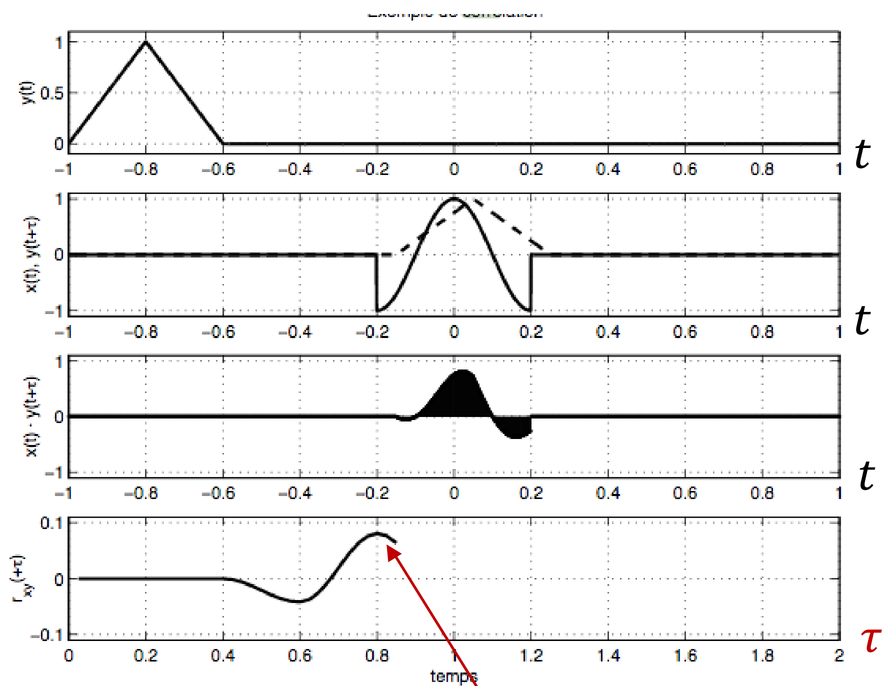
L'inter-corrélation réalise une comparaison entre un signal de référence $x(t)$ et un signal $y(t)$ retardé (mesure de la ressemblance entre deux signaux).

- $x, y$: signaux à énergie finie:

Intégrale du produit de $x(t)$ par $y(t)$ décalé dans le temps

Remarque: la fonction de corrélation est une fonction du décalage $\tau$

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(t+\tau)dt}$$




Ressemblance maximale entre les deux signaux pour un décalage de $\tau = 0{,}8 \text{ sec}$

# Inter-corrélation

- $x, y$: signaux à énergie infinie (puissance moyenne finie):

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t).y(t+\tau)dt$$

- $x, y$: périodiques:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t).y(t+\tau)dt$$

# Autocorrélation

- Lorsque $x(t) = y(t)$ on parle d'autocorrélation.
- L'autocorrélation permet une comparaison entre $x(t)$ et ses copies retardées (mesure de ressemblance du signal avec lui-même au cours du temps).

Pour un signal à énergie finie:

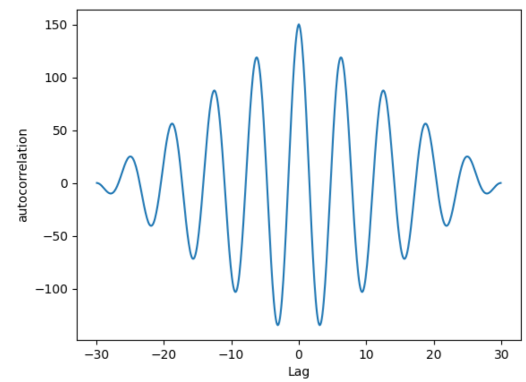
$$\boxed{R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x(\underbrace{t+\tau}_{\text{retard}})dt} \longrightarrow R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_{tot}$$

Pour un signal à énergie infinie (puissance moyenne finie):

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t).x(\underbrace{t+\tau}_{\text{retard}})dt} \longrightarrow R_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t)dt = P_{moy}$$

# Autocorrélation

Autocorrélation d'une sinusoïde



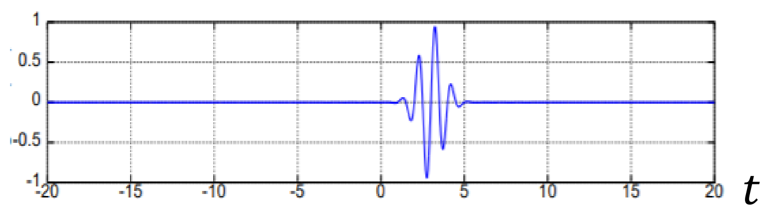

Propriétés de la fonction d'autocorrélation:

- $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$ Maximum en $\tau = 0$
- $R_{xx}(\tau)$ est paire pour les signaux réels

Exemple du radar:

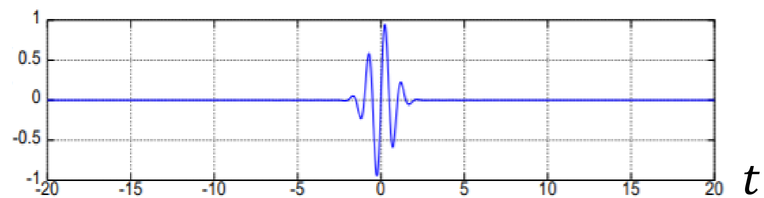
Signal reçu par le radar réfléchi par l'avion (sans tenir compte du bruit):

$x(t+\tau)$



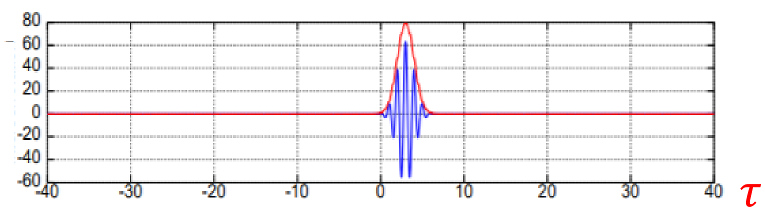

Signal émis par le radar:

$x(t)$




Autocorrélation: non nulle lorsqu'il y a ressemblance (obstacle détecté)

$r_{xx}(\tau)$




Le maximum de ressemblance indique le retard entre le signal émis et le signal reçu.

# Le bruit blanc

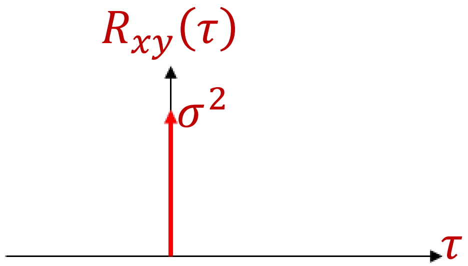
- Le bruit blanc (ainsi appelé par analogie à la lumière blanche constituée de toutes les fréquences lumineuses) est un processus stochastique qui possède la même puissance à toutes les fréquences.

- Le bruit blanc varie si rapidement que sa valeur présente est indépendante de ces valeurs précédentes.

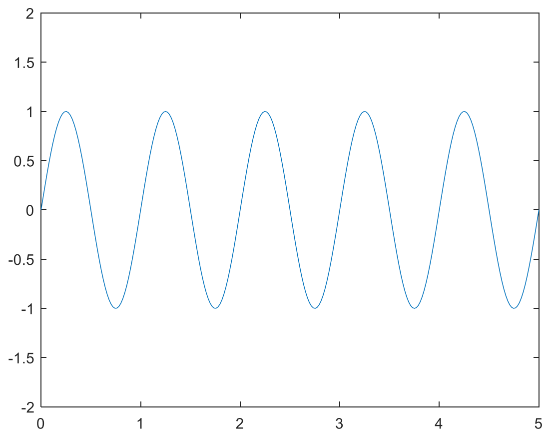
- L'autocorrélation du bruit blanc est une impulsion de Dirac:

$$R_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

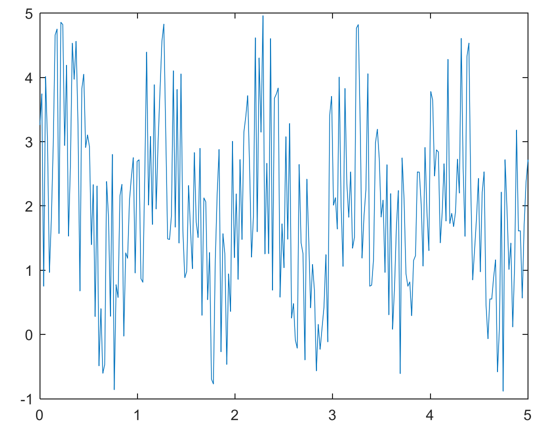
Où: $\sigma^2$ est la variance du signal aléatoire = la puissance du signal aléatoire



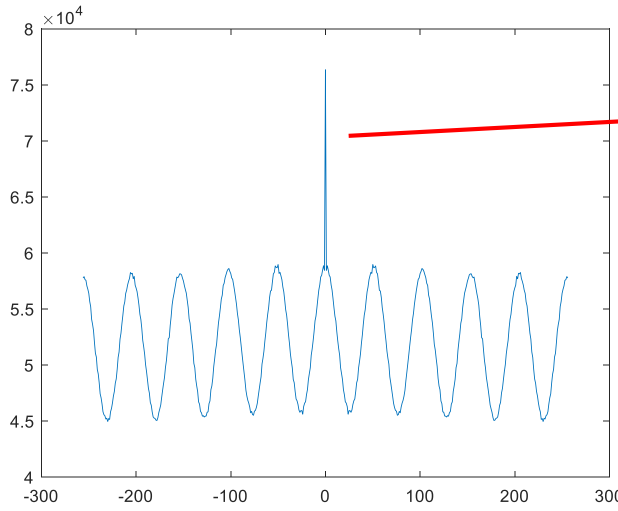
# Le bruit blanc



Sinusoïde non bruitée



Sinusoïde bruitée



Autocorrélation de la Sinusoïde bruitée

Autocorrélation du bruit blanc

On détecte la présence du signal périodique dans le signal bruité