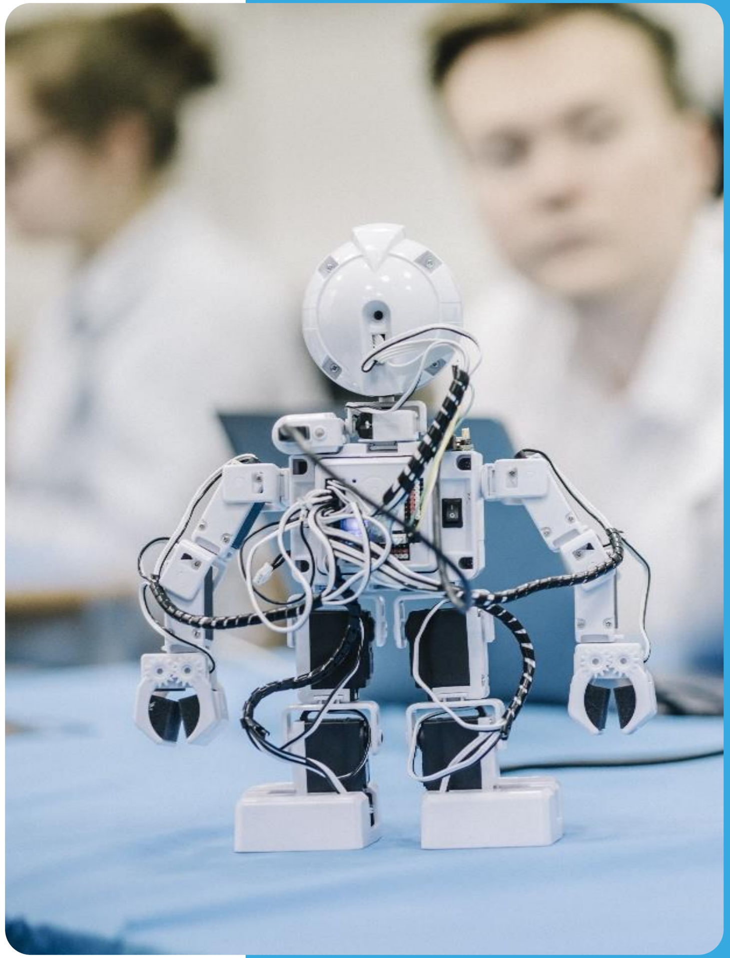
TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

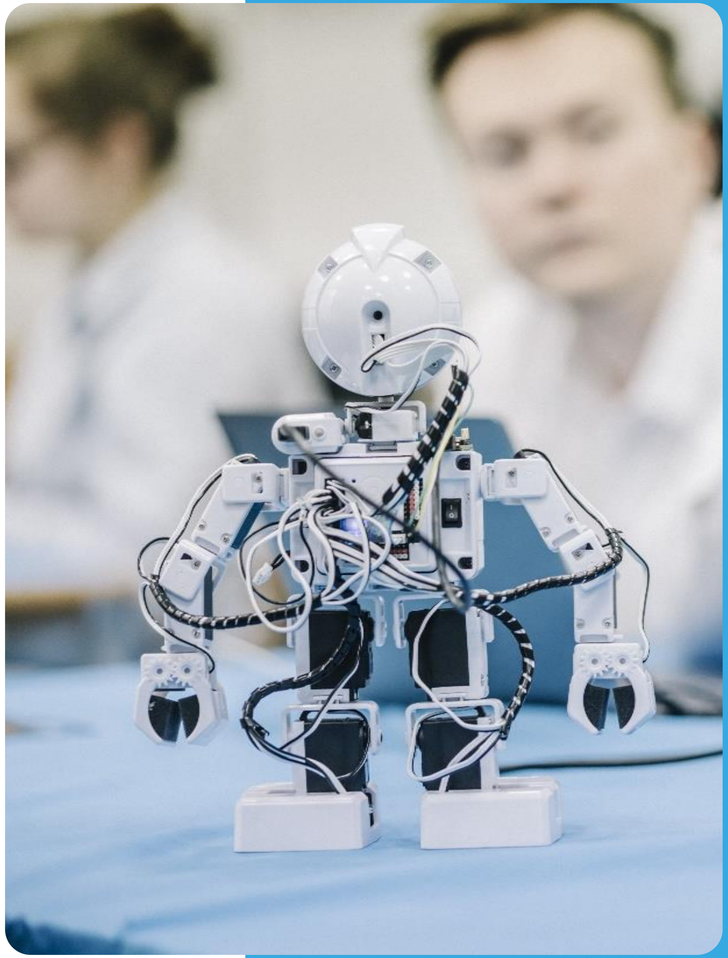
(FA-SYS3045)

Maryam L'Hernault

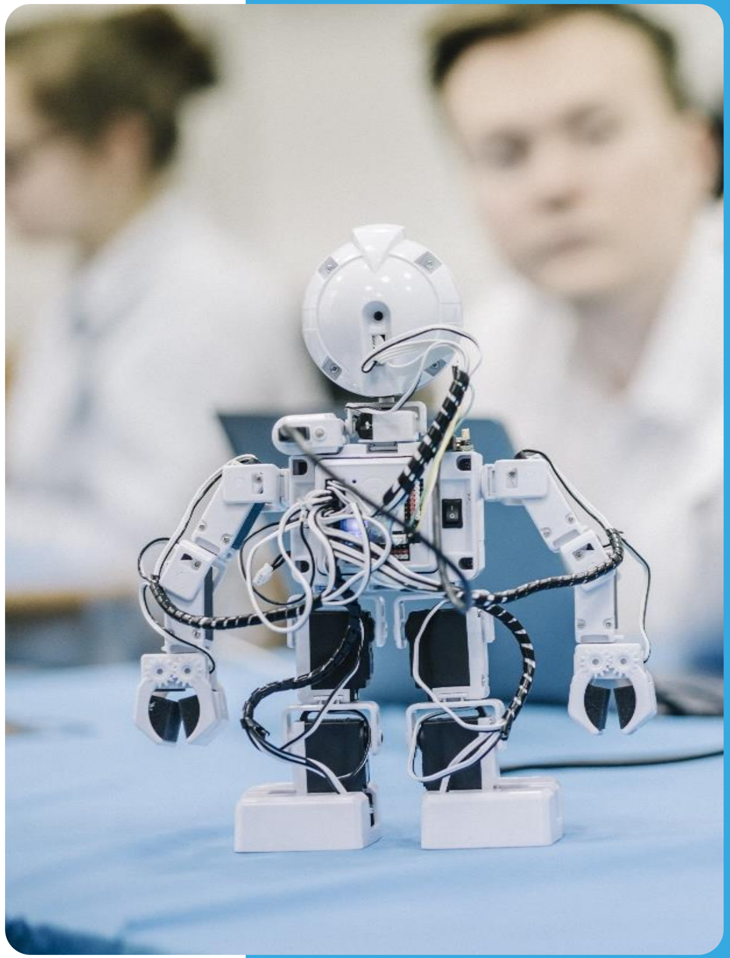
Maryam.lhernault@esiea.fr



ANALYSE DES SYSTEMES ET SIGNAUX DISCRETS



SIGNAUX DISCRETS



Introduction

Le signal discret $x[n]$ est une suite de valeurs qui peuvent être issues:

- de l'échantillonnage du signal analogique et en considérant $T_e = 1$:

$$x[n] = x(nT_e)\ ,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

- d'une séquence d'information discrète, ex.: données statistiques (variable n discrète)

Un signal discret est représenté en fonction du numéro de l'échantillon n, et non en fonction du temps. On utilise $x[n]$ pour présenter le signal discret au lieu de $x(t)$.

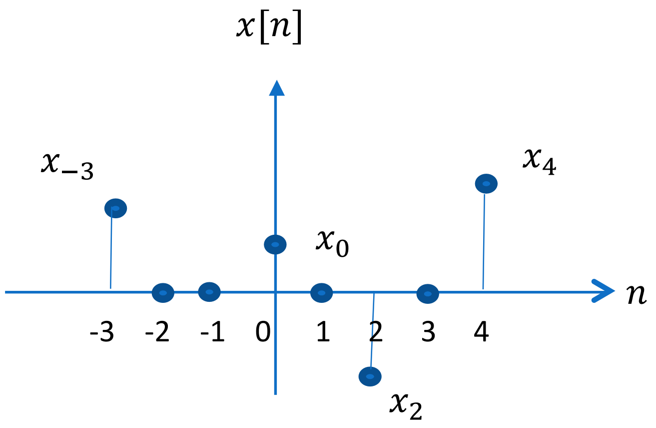
Introduction

La longueur du signal indique le nombre d'échantillons du signal discret. Elle se calcule de la façon suivante:

$$\{x[n]\} = \begin{cases} \{x[D], x[D+1], \dots x[M]\}, & D \leq M \\ longueur\ l = M - D + 1 \end{cases}$$

Exemple : $\{x[-3], x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], x[3], x[4]\} = \{2,0,0,1,0,-2,0,3\}$

$D = -3$, $M = 4$
$l = 4 - (-3) + 1 = 8$: nombre d'échantillons de x[n]

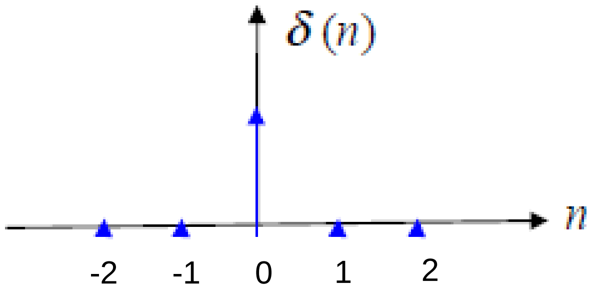


$x[-3] = x_{-3} = 2$
$x[-2] = x_{-2} = 0$
$x[-1] = x_{-1} = 0$
$x[0] = x_0 = 1$
$x[1] = x_1 = 0$
$x[2] = x_2 = -2$
$x[3] = x_3 = 0$
$x[4] = x_4 = 3$

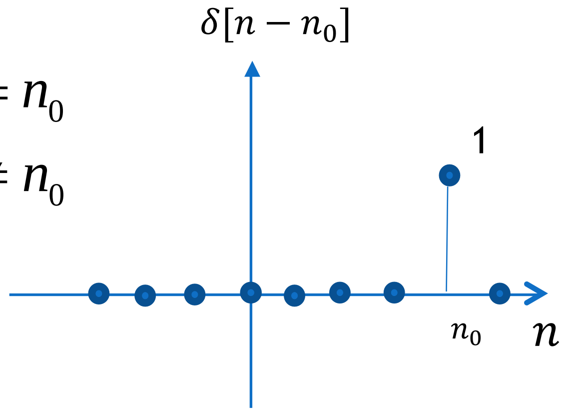
Signaux discrets élémentaires

1. Impulsion discrète:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ 0 & si \quad n \neq 0 \end{cases}$$



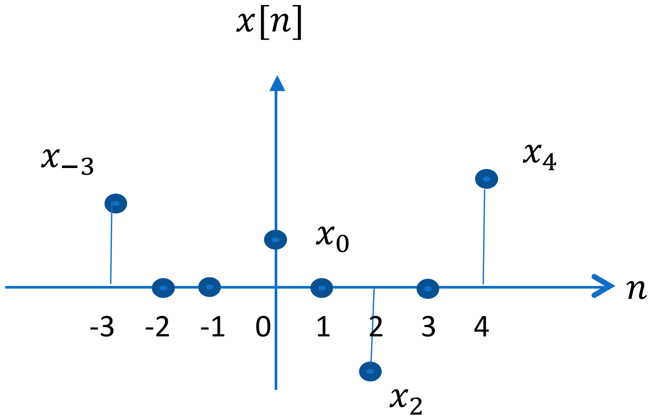
$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1 & si \quad n = n_0 \\ 0 & si \quad n \neq n_0 \end{cases}$$



Tout signal à temps discret peut s'écrire sous forme d'une combinaison d'impulsions discrètes:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \delta[n-k]}$$

Exemple:

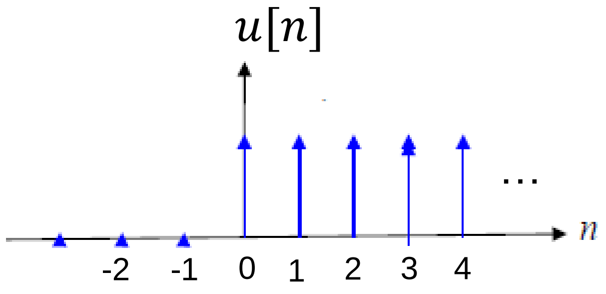


$$x[n] = x_{-3}\delta[n+3] + x_0\delta[n] + x_2\delta[n-2] + x_4\delta[n-4]$$

Signaux discrets élémentaires

2. Echelon unité:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & si \quad n \geq 0 \\ 0 & si \quad n < 0 \end{cases}$$

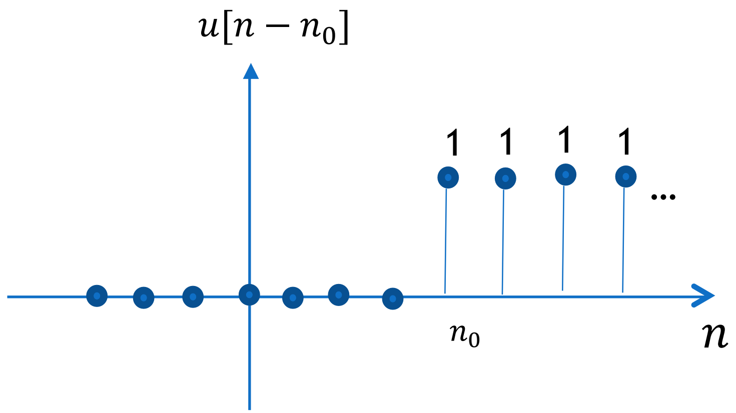


On a:

$$u[n] = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta[n-m]$$

Translation de n_0:

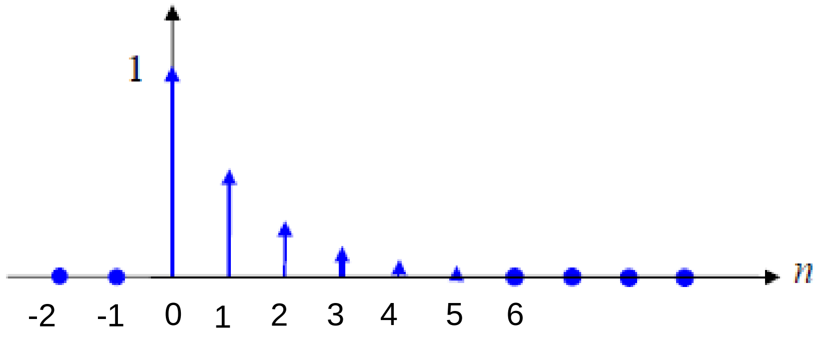
$$u[n-n_0] = \begin{cases} 1 & si \quad n \geq n_0 \\ 0 & si \quad n < n_0 \end{cases}$$



Signaux discrets élémentaires

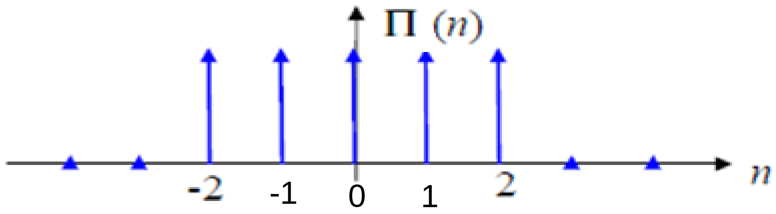
3. Exponentielle décroissante causale:

$$x[n] = a^n\, u[n]; \quad a < 1, \qquad n \in \mathbb{Z}$$



4. Signal rectangulaire:

$$\Pi_T(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } -T \leq n \leq T & T \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



Longueur du signal (nombre d'échantillons) = 2T+1

Signaux discrets élémentaires

5. Signal sinusoïdal: Si l’on échantillonne une sinusoïde continue $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ à un intervalle t_s, on obtient la sinusoïde échantillonnée suivante :

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 n t_s + \theta) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) = \cos(2\pi F n) = \cos(\Omega n)$$

$F = \frac{f_0}{f_s}$ est appelé la fréquence numérique, $\Omega = 2\pi F$ est la fréquence radiale.

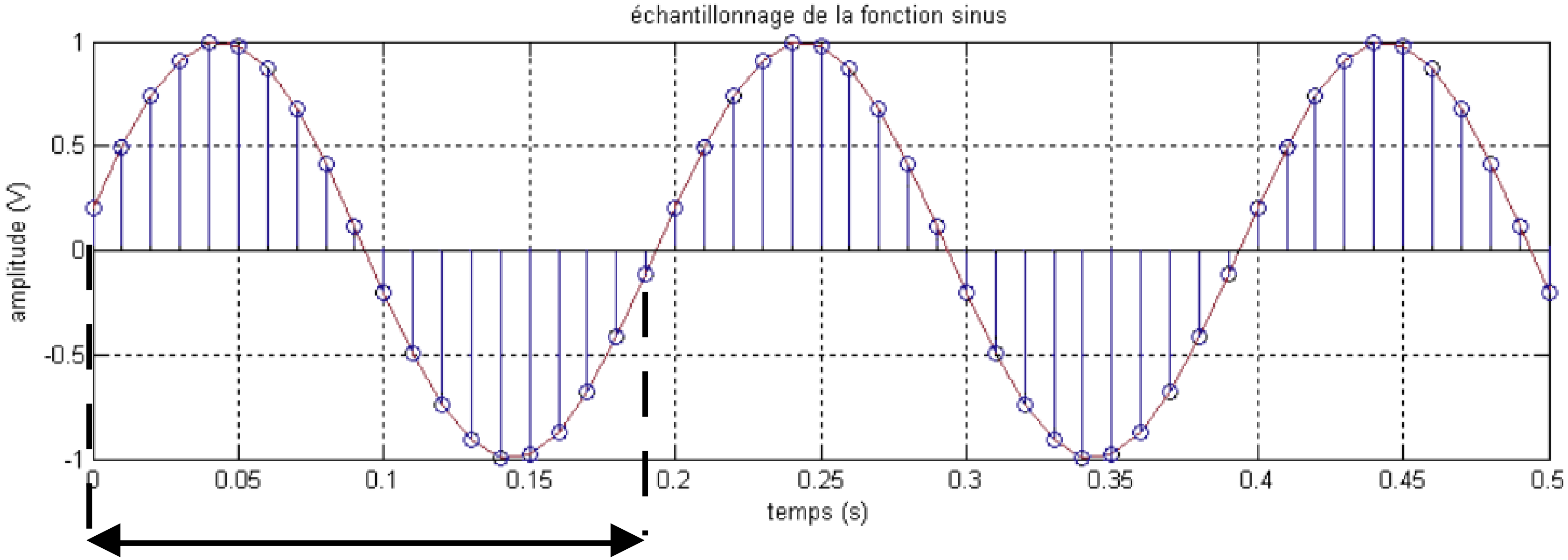
Condition de périodicité: $\cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s}(n+N)\right) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n + 2\pi \frac{f_0}{f_s} N) = \cos(2\pi \frac{f_0}{f_s} n)$

$$\Rightarrow 2\pi \frac{f_0}{f_s} N = 2k\pi \Rightarrow N = k\frac{f_s}{f_0} \qquad k \in \mathbb{N}, \frac{f_s}{f_0} \in \mathbb{Q}$$

- $x[n]$ n’est pas nécessairement périodique.
- La période est **le plus petit nombre d'échantillons** qui se répètent.
- La période est toujours un entier.

Signaux discrets élémentaires

5. Signal sinusoïdal:



$k = 1\,, N = 20$

$$T_e = 0{,}01\,\text{sec} \Rightarrow F_e = 100Hz$$

$$f_0 = 5Hz$$

$$N = k\frac{F_e}{f_0} = k\frac{100}{5} = k\frac{20}{1}$$

$$k \in \mathbb{N}, \frac{f_s}{f_0} \in \mathbb{Q}$$

Energie est puissance des Signaux discrets

Valeur moyenne	$x_{av} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$
Energie	$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2$
Puissance (Nombre d'échantillons= N)	$P_{moy} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2$

N: nombre d'échantillons

TF d'un signal à temps discret (TFTD)

Signal échantillonné à la période T_e: $$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

On calcule généralement la TFTD en considérant $T_e = 1$:

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[t-n]$$

Rappel:
$TF\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0}$

On calcule la transformée de Fourier de $x_e(t)$:

$$X(f) = TF\{x_e(t)\} = TF\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[t-n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].TF\{\delta[t-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\exp(-j2\pi f n)$$

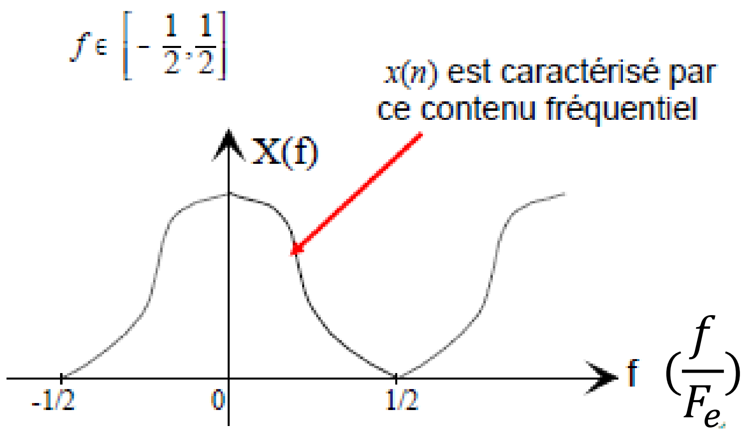
$$\boxed{X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\ \exp(-j2\pi f n)\quad \text{: TFTD de } x[n]}$$

TF d'un signal à temps discret (TFTD)

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\ \exp(-j2\pi f n)$$

f: fréquence (variable continue)
Seul le temps est discrétisé.

- $X(f)$: fonction continue et périodique car f est une variable continue.
- On peut montrer que $X(f)$ est périodique de période F=1.
- L'information fréquentielle est localisée dans l'intervalle de fréquence normalisé $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.



TFTD: fonction continue de f → TFTD inverse: une intégrale

$$\boxed{TFTD^{-1}\{X(f)\} = x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f)\exp(j2\pi n f)\,df}$$

Quelques TFTD usuelles

$x[n]$	$X(f)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j2\pi f n_0}$
1	$\delta(f)$
$e^{jn2\pi f_0}$	$\delta(f-f_0)$
$a^n.u[n] \quad ; \quad \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j2\pi f}}$
-$a^n.u[-n-1] \quad ; \quad \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j2\pi f}}$
$(n+1)a^n.u[n] \quad ; \quad \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j2\pi f})^2}$

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Inconvénients de la TFTD (Transformée de Fourier à Temps Discret):

- Nombre d'échantillons de $x[n]$ infini,
- Fréquence considérée comme une variable continue dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ → nombre d'échantillons de fréquence infini → Difficile à traiter à l'aide d'ordinateur

Solution:

- Limiter le nombre d'échantillons de $x[n]$ à N valeurs
- Discrétiser la fréquence (limiter le nombre d'échantillons de f à L valeurs)

⟹ Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Soit la suite finie $\{x[n]\}$, $n = 0,1, \ldots, N-1$

TFTD de $x[n]$ pour N échantillons:

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-jn.2\pi.f)$$

Pour obtenir L valeurs pour la fréquence, on écrit: $f_k = \frac{k}{L}$, avec: $k \in [0,1, \ldots, L-1]$

En général $L = N$, alors on obtient la TFD (Transformée de Fourier Discrète) de $x[n]$:

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-jn.2\pi.\frac{k}{N}) \;,\; k \in [0,1,\ldots, N-1]}$$

Suite de N termes $X(0), X(2), \ldots X(N-1)$

Transformée de Fourier Discrète inverse

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-jn.2\pi.\frac{k}{N}) \;,\; k \in [0,1,\ldots,N-1]$$

$$\Big\Downarrow \; TFD^{-1}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \exp(j.2\pi.n.\frac{k}{N}) \;,\; k \in [0,1,\ldots,N-1]$$

Propriétés de la TFD et la TFTD

	$x[n]$	$X(k)$	
Linéarité	$a.x(n)+b.y(n)$	$a.X(k)+b.Y(k)$	
Translation	$x(n-n_0)$	$X(k)e^{-j2\pi k n_0/N}$	TFD
	$x(n-n_0)$	$X(f)e^{-j2\pi n_0 f}$	TFTD
	$x(n)e^{j2\pi k_0 n/N}$	$X(k-k_0)$	TFD
	$x(n)e^{j2\pi f_0 n}$	$X(f-f_0)$	TFTD
Convolution	$x(n)*y(n)$	$X(k).Y(k)$	
	$x(n).y(n)$	$X(k)*Y(k)$	

- Théorème de *Plancherel-Parseval:* **Conservation de l'énergie**

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2}$$

Exemple

Calculer la TFD de la suite suivante: x[n]={1,2,1,0}

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp(-jn.2\pi.\frac{k}{N})\ ,\ \ k\in[0,1,\ldots,N-1]$$

- ***Solution***
  - On a N=4, selon la définition: $e^{-j2\pi kn/N}=e^{-j\pi kn/2}$. on calcule les valeurs de $X(k)$ pour différentes valeurs de k

$$k=0:\quad X[0]=\sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot e^{0}=1+2+1+0=4$$

$$k=1:\quad X[1]=\sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot e^{-\frac{j\pi n}{2}}=1+2e^{-\frac{j\pi}{2}}+1e^{-j\pi}+0=-2j$$

$$k=2:\quad X[2]=\sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot e^{-j\pi n}=1+2e^{-j\pi}+e^{-2j\pi}+0=0$$

$$k=3:\quad X[3]=\sum_{n=0}^{3} x[n]\cdot e^{-3j\pi n/2}=1+2e^{-j3\pi/2}+e^{-3j\pi}+0=2j$$

➔ $X(k)$={4, -2j, 0, 2j}

Transformée de Fourier Rapide (TFR) (Fast Fourier Transfom ou FFT)

- La transformée de Fourier rapide est simplement un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations, en particulier le nombre de multiplications, pour calculer la TFD. Ce temps de calcul est en effet primordial pour réaliser des systèmes numériques en « temps réel ».

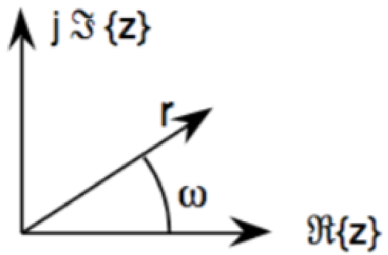
- Il existe différents algorithmes de TFR. Le plus connu est l'algorithme de Cooley-Tukey.

Transformée en Z

Soit un signal en temps discret $x[n]$, la transformée en Z de $x[n]$ est définie par:

$$\boxed{TZ\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}}$$

- z est la variable de la transformée en Z
- z est complexe: $z = re^{j\omega} = Re\{z\} + j\ Im\{z\}$
- $X(z)$ est une fonction complexe de la variable z



Pour un signal causal, ça veut dire $x[n] = 0, \forall n < 0$, on définit la transformée en z mono-latérale:

$$\boxed{TZ\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}}$$

Applications principales de la TZ:

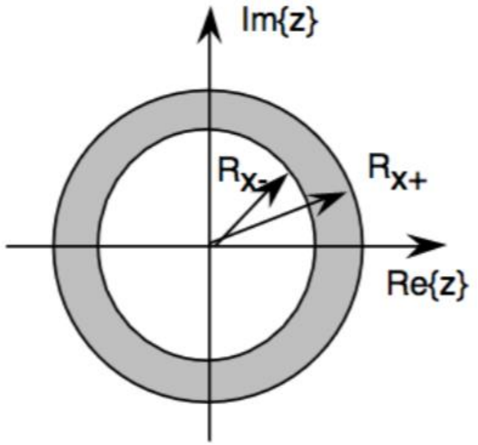
- présentation des systèmes numériques à l'aide d'une fonction de transfert $H(z)$
- conception de filtres numériques

Région de convergence (RDC)

- L'ensemble des valeurs de z pour lesquelles la série converge est appelé la "région de convergence » ou le « domaine de convergence » de la transformée en z.

- La RDC est située dans un anneau du plan complexe des z situé entre deux domaines de convergence R_{X-} et R_{X+} :

$$R_{X-} < |z| < R_{X+}$$



- $R_{X-} = 0\,, 0 < R_{X+} < D$: la ROC est à l'intérieur d'un disque de rayon D
- $0 < R_{X-} < D_1\,, 0 < R_{X+} < D_2$: la ROC est à l'intérieur d'un anneau
- $0 < R_{X-} < D_1,\ 0 < R_{X+} < +\infty$: la ROC est à l'extérieur d'un disque de rayon D_1
- $R_{X-} = 0\,, 0 < R_{X+} < +\infty$: la série converge pour tout z.

Exemple

Rappel: série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r},$$

Convergence si $|r| < 1$

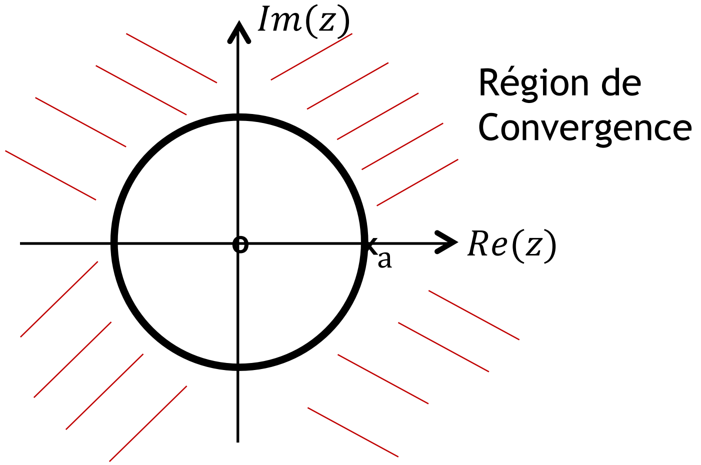
Soit: $x[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n & si\ n \geq 0 \\ 0 & si\ n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

série géométrique de raison az^{-1}

$X(z)$ Converge si:

$\sum_{n=0}^{+\infty} |az^{-1}|^n < \infty \Rightarrow |(az^{-1})| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$: Région de convergence à l'extérieur d'un disque de rayon a



$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

Pôle: $z = a$: racine du dénominateur

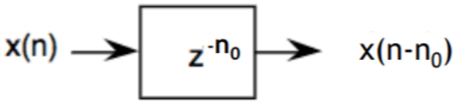
Zéro: $z = 0$: racine du numérateur

Quelques TZ

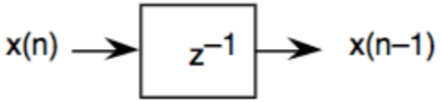
$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	Tout z
$\delta[n-n_0]$	z^{-n_0}	Tout z sauf zéro si $n_0 > 0$
$\mathrm{u}[n]$	$\frac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$
$u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\mathrm{z}^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert < 1$
$a^n.u[\mathrm{n}]$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert > \lvert \mathrm{a} \rvert$
$-a^n.u[-\mathrm{n}-1]$;	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert < \lvert \mathrm{a} \rvert$
$r^n\cos[\Omega_0 n].u[n]$	$\frac{1-\mathrm{r}\cos\Omega_0.z^{-1}}{1-2r\cos\Omega_0.z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > r$
$r^n \sin[\Omega_0 n].u(n)$	$\frac{\mathrm{r}\sin\Omega_0.z^{-1}}{1-2\,rcos\,\Omega_0.z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > r$

Propriétés de la TZ

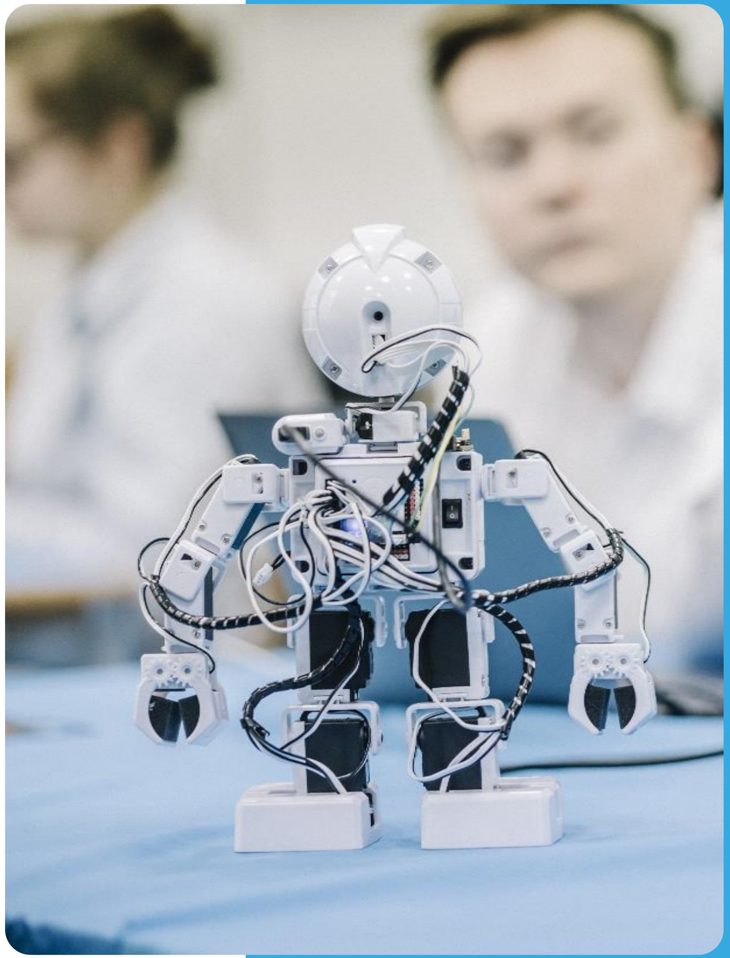
Linéarité	$a.x[n] + b.y[n] \rightarrow a.X(z) + b.Y(z)$
Translation temporelle	$x[n - n_0] \rightarrow X(\mathrm{z})z^{-n_0}$
Changement d'échelle fréquentiel	$x[n]z_0^n \quad \rightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
Inversion temporelle	$x[-n] \rightarrow X(z^{-1})$
Dérivée fréquentielle	$nx[n] \rightarrow -z\frac{d}{dz}X(z)$
Convolution	$x[n] * y[n] \rightarrow X(z).Y(\mathrm{z})$



Exemple: n_0=1



SYSTEMES LINEAIRES (A TEMPS) DISCRETS



Système LTI à temps discret

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$h[n]$: réponse impulsionnelle

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k]$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k].x[n-k]$$

Convolution en temps discret: (Mêmes propriétés qu'en temps continu)

Convolution par impulsion de Dirac: $x(n) * \delta(n-m) = x(n-m)$

On écrit $h[n]$ sous forme d'une combinaison d'impulsions de Dirac: $h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k \delta[n-k]$

Alors:

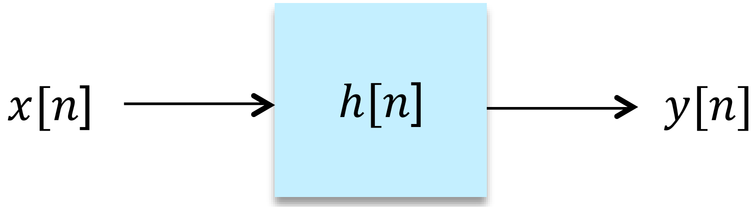
$$y[n] = x[n] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x[n] * \delta[n-k]$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x[n-k]}$$

Exemple

Calculer la sortie du système ci-contre pour n=0,1,… ,4

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x[n-k]}$$



$$h[n] = \{0.1\,, 0.2, 0.1\}$$
$$x[n] = \{1, 1\}$$

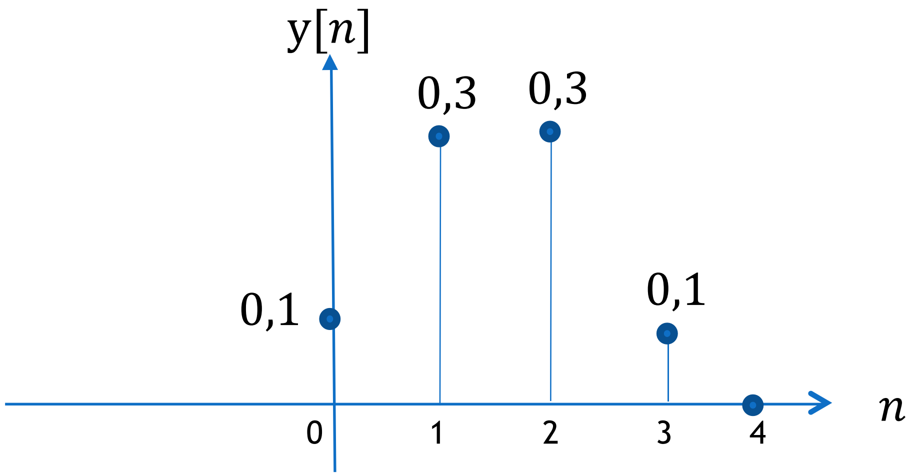
N=3:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h_k x[n-k] = h_0 x[n-0] + h_1 x[n-1] + h_2 x[n-2]\}$$

$$y_n = h_0 x_n + h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2}$$

$$h_0 = 0{,}1 \quad h_1 = 0{,}2 \quad h_2 = 0{,}1 \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 1$$

$$y_0 = h_0 x_0 + h_1 x_{-1} + h_2 x_{-2} = 1 \times 0{,}1 + 0 + 0 = 0{,}1$$
$$y_1 = h_0 x_1 + h_1 x_0 + h_2 x_{-1} = 0{,}1 \times 1 + 0{,}2 \times 1 + 0{,}1 \times 0 = 0{,}3$$
$$y_2 = h_0 x_2 + h_1 x_1 + h_2 x_0 = 0{,}1 \times 0 + 0{,}2 \times 1 + 0{,}1 \times 1 = 0{,}3$$
$$y_3 = h_0 x_3 + h_1 x_2 + h_2 x_1 = 0{,}1 \times 0 + 0{,}2 \times 0 + 0{,}1 \times 1 = 0{,}1$$
$$y_4 = h_0 x_4 + h_1 x_3 + h_2 x_2 = 0{,}1 \times 0 + 0{,}2 \times 0 + 0{,}1 \times 0 = 0$$
$$y_n = 0 \; pour \; n \geq 4$$



➔ $Taille\ de\ y = \ taille\ de\ h\ +\ taille\ de\ x\ - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$

Analyse des systèmes linéaires à l'aide de la T.Z.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$Y(z) = X(z).H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ *: Fonction de Transfert du système discret*

$H(z) = TZ\{x[n]\}$

Le système linéaire à temps discret est modélisé à l'aide d'une équation aux différences à coefficients constants:

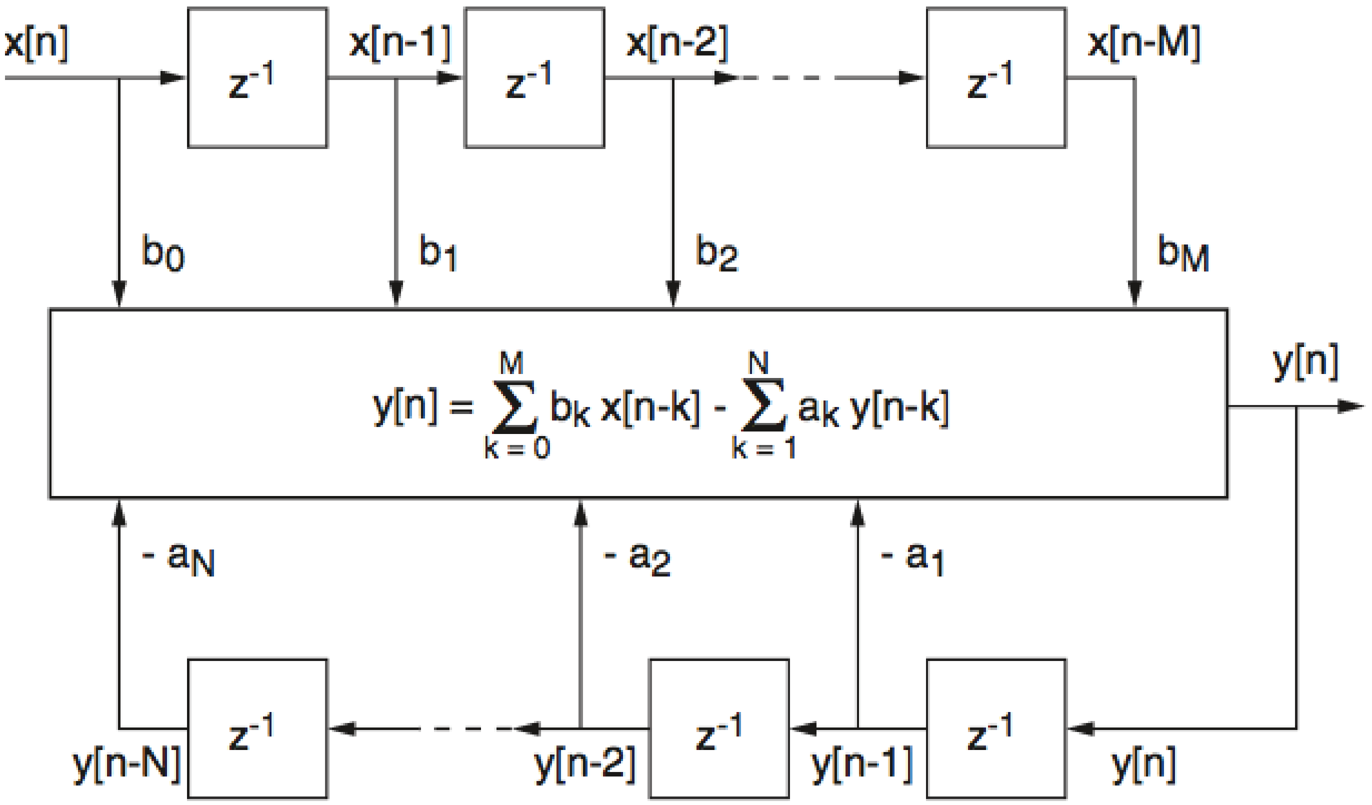
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_N y[n-N]$$

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

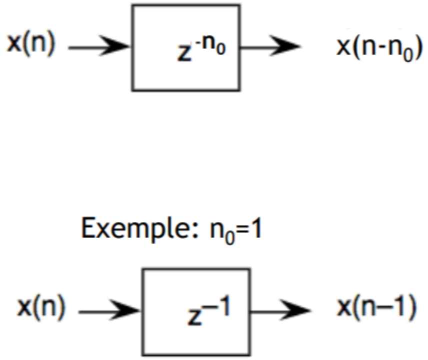
N: ordre du système

Analyse des systèmes linéaires à l'aide de la T.Z.

Schéma fonctionnel du système linéaire à temps discret

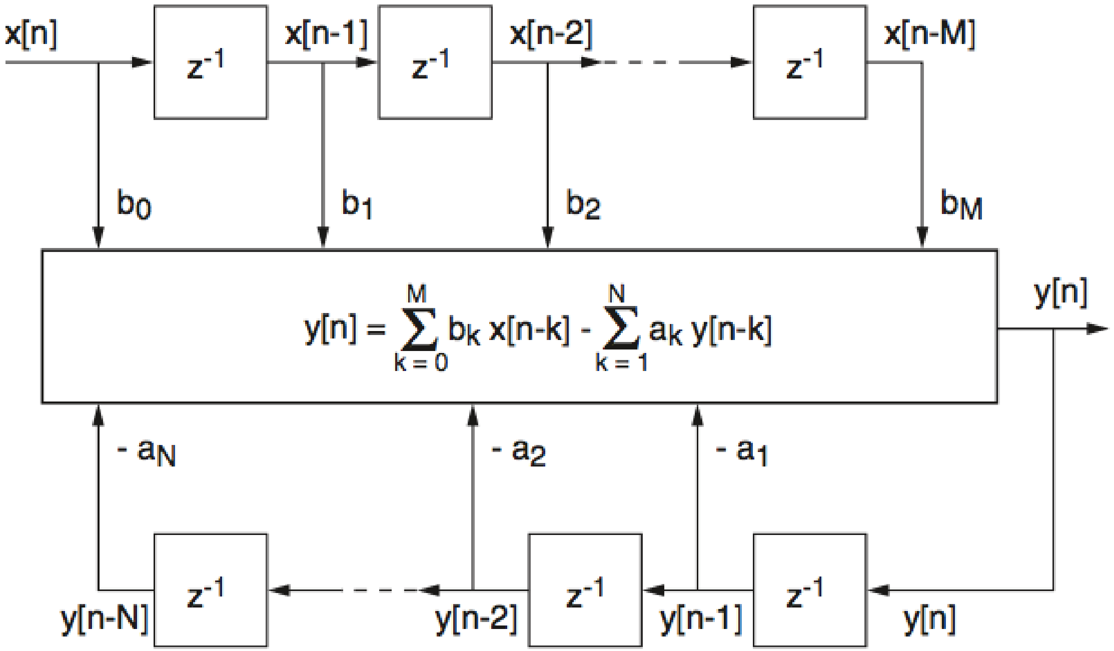


Rappel:



Analyse des systèmes linéaires à l'aide de la T.Z.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$



$$\boxed{TZ\{x[n-n_0]\} = X(z)z^{-n_0}}$$

TZ

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$Y(z)\left\{1 + \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right\} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}}$$

Analyse des systèmes linéaires à l'aide de la T.Z.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = A\frac{\prod_{j=1}^{M}(z - z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)}$$

- Les zéros sont les racines du numérateur de H(z) : $z = z_j, \quad j = 1, \dots, M$
- Les pôles sont les racines du dénominateur de H(z): $z = p_i\ , \ i = 1, \dots, N$
- Gain statique c'est la valeur de H(z) lorsque $z = 1$: $\quad K = \lim_{z \to 1} H(z)$

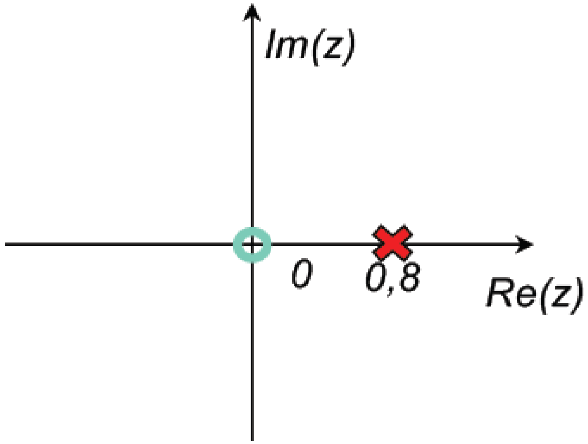


Diagramme des pôles/zéros

Exemple:

$$y[n] - 0{,}8\, y[n-1] = 0{,}2\, x[n]$$
$$Y(z) - 0{,}8\, Y(z).z^{-1} = 0{,}2\, X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}8z^{-1}} \times \frac{z}{z} = \frac{0{,}2z}{z - 0{,}8}$$

Zéro: $z = z_1 = 0$, pôle: $z = p_1 = 0{,}8$

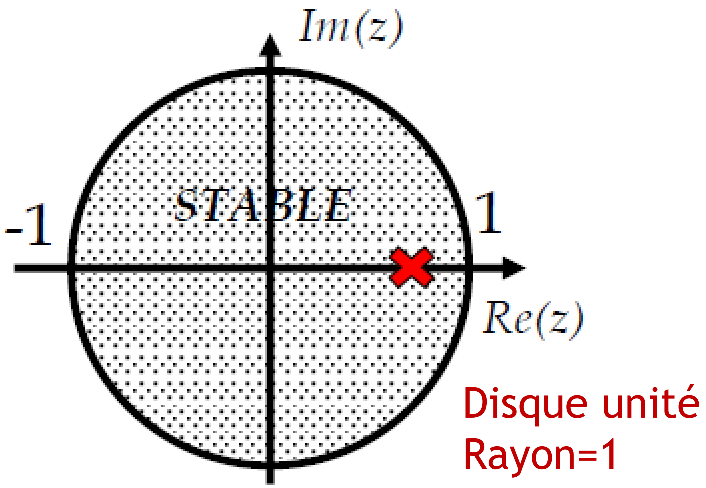
$$K = \lim_{z \to 1} H(z) = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}8} = 1$$

Stabilité des systèmes à temps discret

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = A\,\frac{\prod_{j=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)}$$

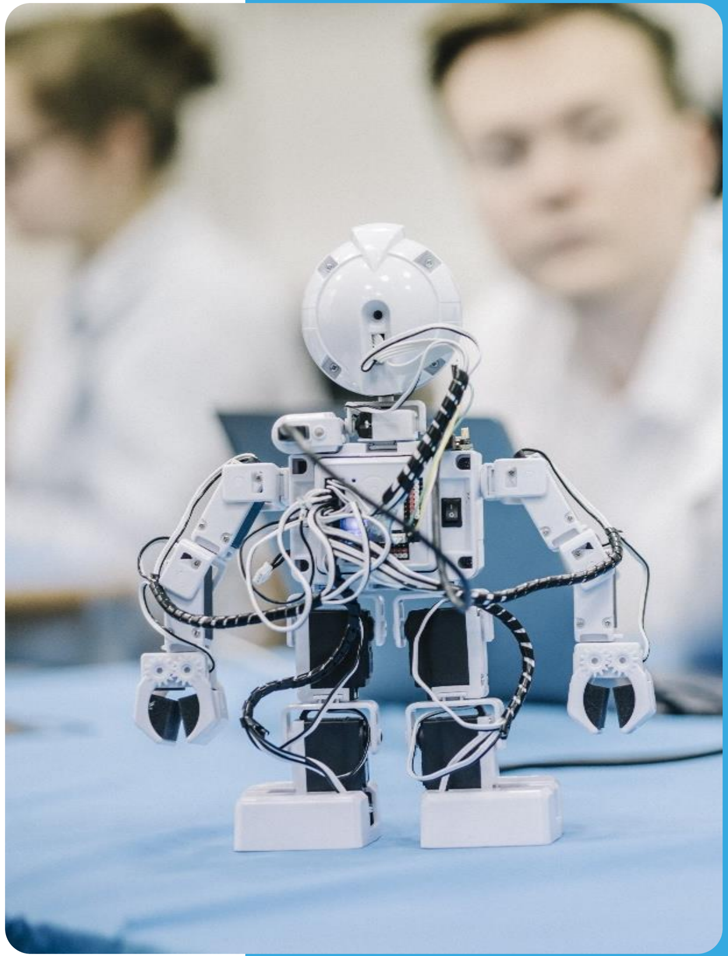
- Le système à temps discret est stable si tous les pôles sont à l'intérieur du disque unité, soit $|p_n| < 1$

Exemple: $h[n] = (0{,}8)^n\, u[n] \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-0{,}8}$, $p_1 = 0{,}8 \Rightarrow |p_1| < 1$ alors le système est stable.



p_1 est situé à l'intérieur du disque unité

FILTRES NUMERIQUES



Filtres numériques

Un filtre numérique est un système linéaire à temps discret, défini par une équation aux différences à coefficients constants.

Deux familles de filtres numériques:

- Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)
- Filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$Y(z) = X(z).H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ *: Fonction de Transfert du système discret*

$H(z) = TZ\{h[n]\}$

Réponse fréquentielle des filtres numériques

On obtient la réponse fréquentielle $H(f)$ à partir de $H(z)$ en remplaçant $z = e^{j\Omega}$, où :

$$\Omega = 2\pi f T_e = \frac{2\pi f}{f_e} \text{ (rad/sec)} \quad , f_e = \frac{1}{T_e} : fréquence\ d'échantillonnage$$

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| \exp(j \arg H(e^{j\Omega}))$$

$$H(f) = |H(f)| \exp(j \arg H(f))$$

$$H(f) = TFTD\ (h[n])$$

Le tracé de l'évolution du module et de la phase en fonction de la fréquence constitue la réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre.

Caractéristiques de la réponse fréquentielle de filtres numérique:

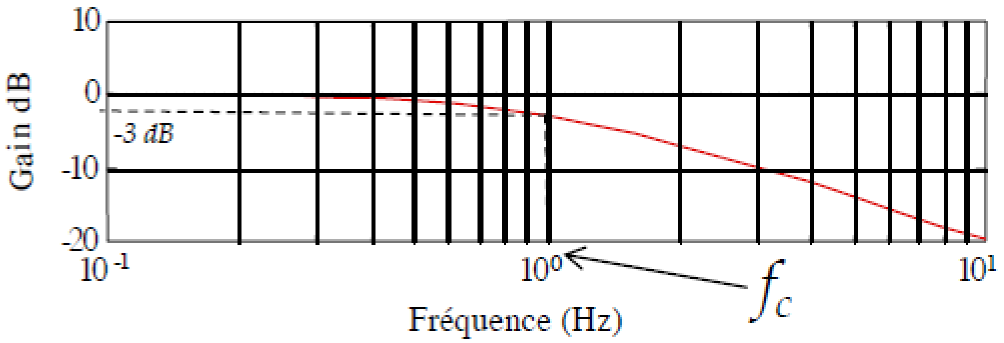
- Elle est périodique de période f_e
- L'analyse et le tracé se limitent à a plage de fréquences $[0, \frac{f_e}{2}]$
- Pas de pente particulière au niveau du diagramme de Bode (contrairement aux systèmes en temps continu)

Réponse fréquentielle des filtres numériques

Fréquence de coupure: c'est la fréquence f_c ou la pulsation Ω_c pour laquelle le signal d'entrée subit une atténuation d'amplitude de $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$ ou de -3dB:

$$H_{dB}(f) = 20 \log |H(f)|$$

$$|H(f_c)| = \frac{\max|H(f)|}{\sqrt{2}} \qquad H_{dB}(f_c) = max\ (H_{dB}(f)) - 3dB$$



$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_c &= 2\pi f_c T_e \\ f_c &= \frac{\Omega_c}{2\pi T_e} \end{aligned}}$$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

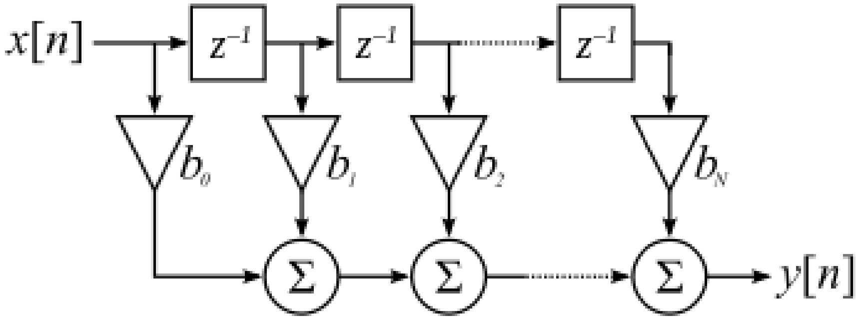
- Un filtre numérique RIF est caractérisé par une réponse uniquement basée sur un nombre fini de valeurs du signal d'entrée. Ce type de système est appelé un système <u>non-récursif</u>.

- sa réponse impulsionnelle est alors de durée finie, dépendante du nombre de coefficients du filtre.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M]$$

Rappel du produit de convolution:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x[n-k]$$



Alors la sortie du filtre est le produit de convolution du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle définie par les coefficients $b_k = h_k$.

$b_k = h_k$

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

- La fonction de transfert du filtre est calculée de la façon suivante:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k X(z).z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{N} b_k.z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}$$

Aussi:

$$H(z) = TZ\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{N} h[n].z^{-n}$$

- Le filtre RIF est toujours stable car $H(z)$ n'admet pas de pôles.
- Un filtre RIF d'ordre N aura besoin de $N+1$ coefficients.
- Réponse en fréquences : $H(f) = \left(H(z)\right)_{z=e^{j2\pi f T_e}} = |H(f)|\exp(j\varphi(f))$
- $\varphi(f)$ est linéaire lorsque $h[n]$ est symétrique.

Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

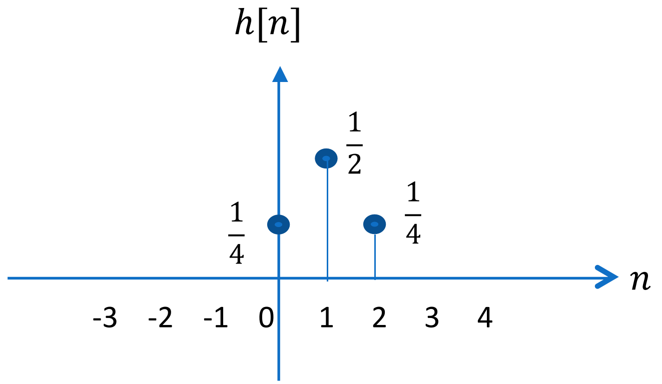
Exemple:

Soit le filtre numérique RIF défini par la relation entrée-sortie suivante:

$$y[n] = \frac{1}{4}(x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

a) Déterminer et tracer la réponse impulsionnelle $h[n]$.
b) Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.
c) Déterminer la réponse en fréquence du filtre. On considère la période d'échantillonnage $T_e = 1$.
d) Tracer le module et l'argument de la réponse en fréquence. Que peut-on dire sur la phase? Calculer la fréquence de coupure du filtre. Quel est le type de ce filtre?

Solution:



$$h[n] = \frac{1}{4}(\delta[n] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n-2])$$

$$H(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \xrightarrow{z=e^{j\Omega}} H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega}$$

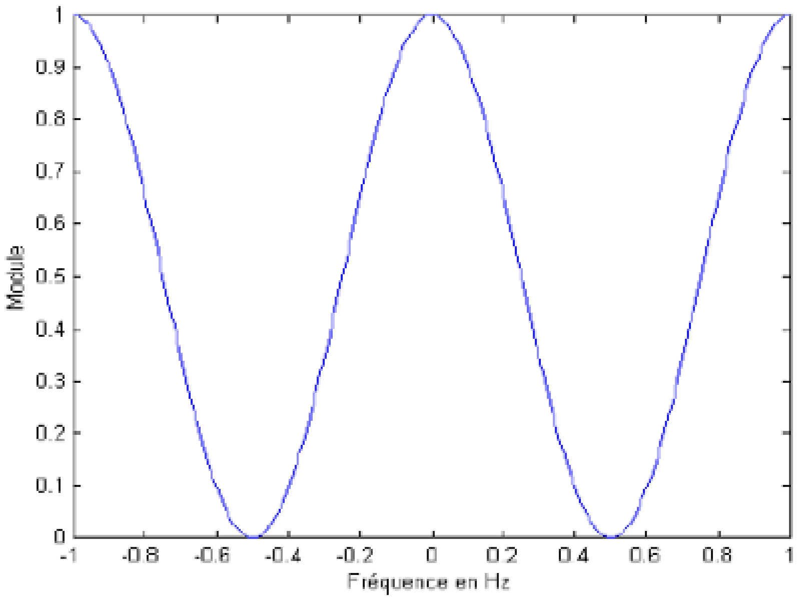
$$\Omega = 2\pi f T_e \quad ,T_e = 1 \quad \Rightarrow \quad H(f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{4}e^{-j4\pi f}$$

$$H(f) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi f} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}\right) = \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}(1 + \cos(2\pi f) = e^{-j2\pi f}\cos^2(\pi f)$$

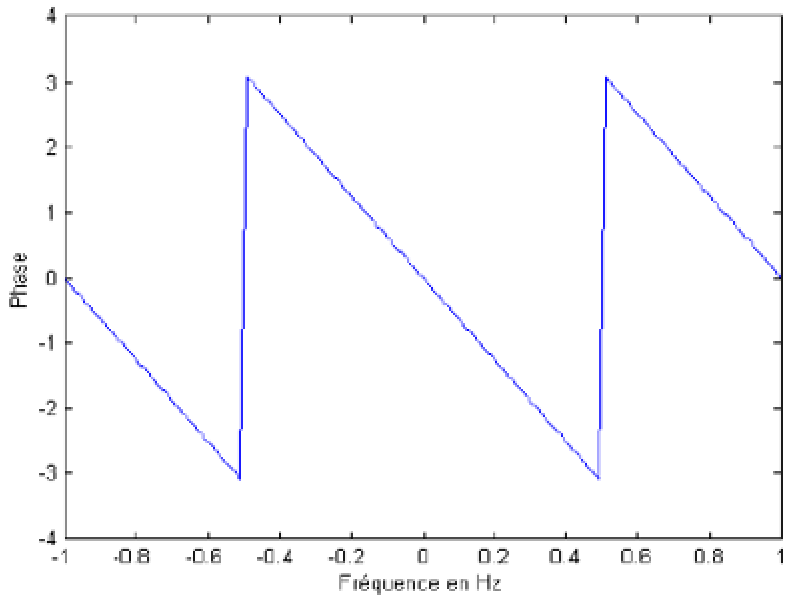
$$|H(f)| = \cos^2(\pi f), \quad \arg\big(H(f)\big) = -2\pi f \;:\; \textit{phase linéaire}$$

• Module $|H(f)| = \cos^2(\pi f)$

• Phase $\arg(H(f)) = -2\pi f$



Filtre passe-bas



On remarque que la phase est linéaire par rapport à f

Réponse en fréquence périodique de période $F_e = 1$. information fréquentielle localisée entre $-\frac{F_e}{2}$ et $\frac{F_e}{2}$ soit $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Calcul de la fréquence de coupure:

$$|H(f_c)| = \frac{\max|H(f)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2(\pi f_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad f_c \approx 0{,}03\ Hz$$

Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Synthèse de filtres RII :

- Méthode de la fenêtre : utilisée pour limiter la durée de la réponse impulsionnelle, en la multipliant par une « fenêtre » de dimension finie.
- Optimisation par moindres carrés
- Calcul des coefficients par approximation de tchebycheff
- Par TFD récursive
- etc.

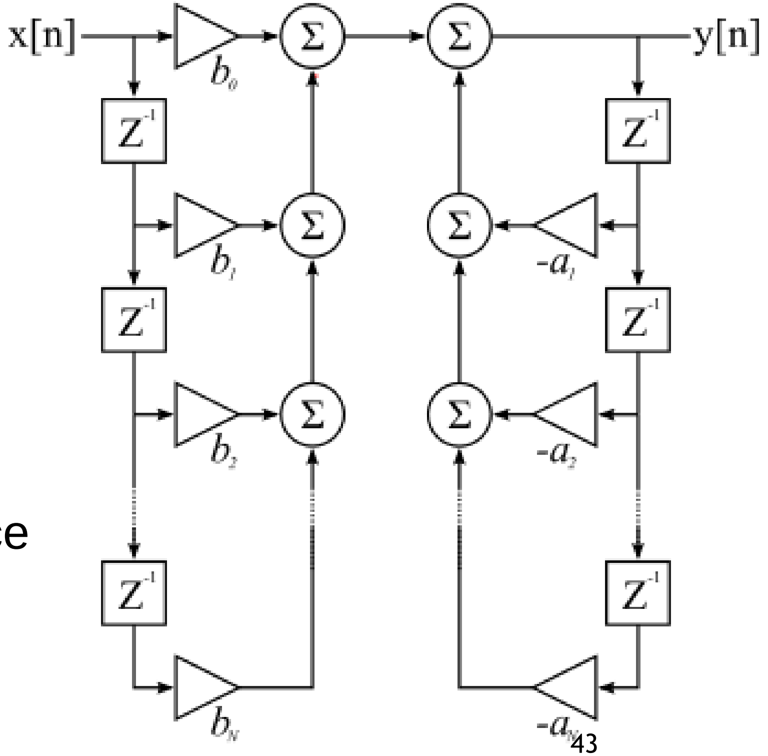
Filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

- Un filtre à réponse impulsionnelle infinie est caractérisé par une réponse fondée sur les valeurs du signal d'entrée ainsi que les valeurs antérieures de la sortie. Ce type de système est appelé un système <u>récursif</u> .

- la réponse impulsionnelle de ce type de filtre s'annule au bout d'un temps théoriquement infini, c'est pourquoi il s'appelle un filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII).

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{M} a_k y[n-k]$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-1} + \ldots + a_M\, z^{-M}}}$$



- Le filtre RII n'est pas obligatoirement stable, à cause de la présence des pôles dans H(z).

Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Principe de synthèse de filtres RII:

- Calculer un filtre analogique $H(j\omega)$
- Transformer le filtre analogique en un filtre numérique équivalent $H(z)$

Contrainte: conserver la stabilité du filtre (pôles situés à l'intérieur du cercle unité).

- Zone utile d'analyse du filtrage : $[0, \frac{f_e}{2}]$
- Pas de phase linéaire
- Utilisation d'un logiciel (*Matlab par exemple*) pour tracer la réponse fréquentielle

Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Exemple: soit un filtre numérique décrit par l'équation de récurrence:

$$y[n] = \frac{4}{5}y[n-1] + \frac{1}{5}x[n]$$

Déterminer:

a) La fonction de transfert en z. s'agit-il d'un filtre RII ou RIF? Justifier.
b) La réponse impulsionnelle.
c) Le diagramme des pôles et des zéros. Conclure sur la stabilité.
d) La réponse fréquentielle. Quel est le type du filtre?

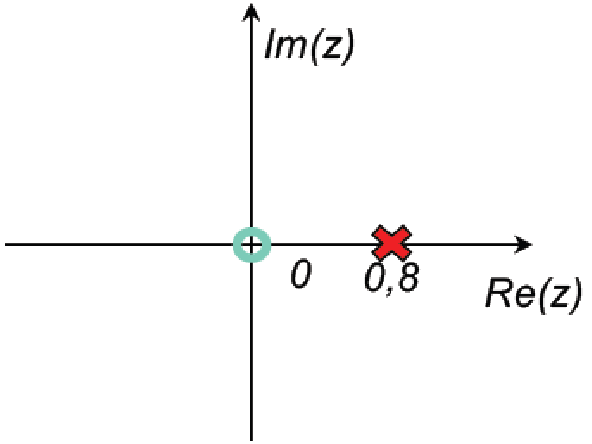


Diagramme des pôles/zéros

$$Y(z) = \frac{4}{5}Y(z).z^{-1} + \frac{1}{5}X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,2}{1-0,8z^{-1}} = \frac{0,2z}{z-0,8}$$

$$\boxed{h[n] = TZ^{-1} = 0,2 \times (0,8)^n u[n]}$$

$a^n.u[\mathrm{n}]$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,2}{1 - 0,8z^{-1}} \times \frac{z}{z} = \frac{0,2z}{z - 0,8}$$

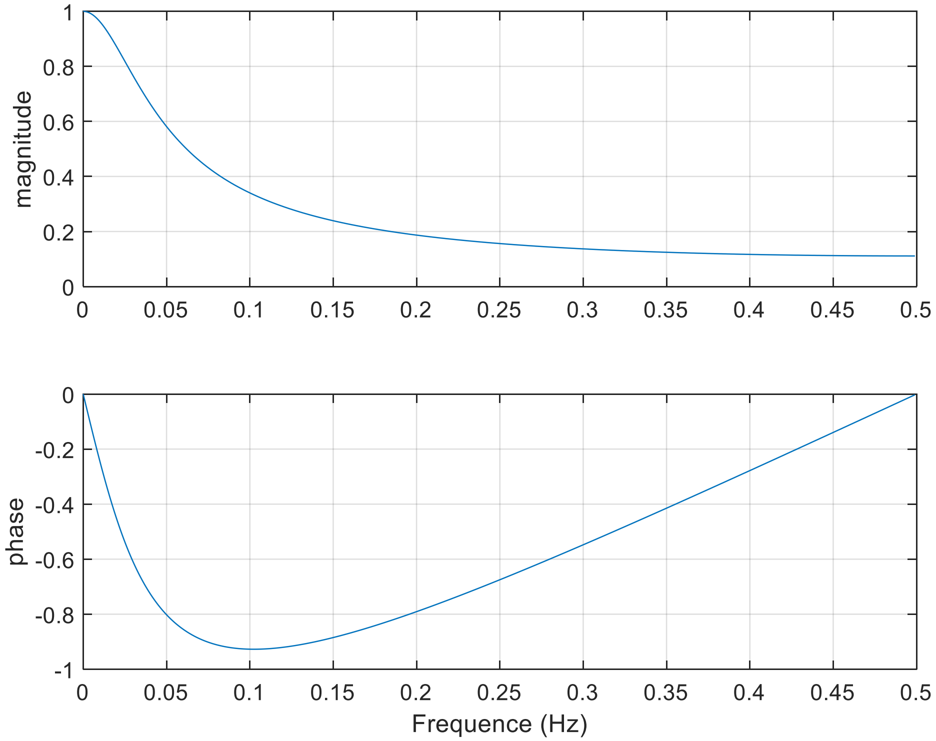
Zéros: $z_1 = 0$

Pôle: $p_1 = 0,8$; $|p_1| = 0,8 < 1$ alors le filtre est stable.

$$H(f) = 0,2\frac{e^{j2\pi fT_e}}{e^{j2\pi fT_e} - 0,8}$$

Sous MATLAB:

```
B=1/5;
A=[1 -4/5];
fe=1;
[H,f]=freqz(B,A,512,fe);
subplot(2,1,1)
plot(f,abs(H)),grid
ylabel('magnitude')
subplot(2,1,2)
plot(f,angle(H)),grid
xlabel('Frequence (Hz)')
ylabel('phase')
```



Filtre passe-bas, phase non linéaire