DM1 : Gravito-Électromagnétisme et effet Lense-Thirring

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'effet Lense-Thirring, une prédiction de la théorie de la Relativité Générale (RG) datant de 1918, confirmée en 2011 de manière directe par les mesures de la sonde Gravity Probe B. Pour cela, on construira, par analogie avec l'Électromagnétisme, une théorie linéaire de la gravitation dite Gravito-ÉlectroMagnétique (GEM), qui constitue une bonne approximation de la Relativité Générale en champ faible et pour des objets non-relativistes ($v/c \ll 1$).

1. Rappeler les équations de Maxwell reliant, dans le vide, le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ aux densités totales de charges et de courants électriques $(\rho_e, \vec{j}_e)$. Justifier la définition des potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$ à partir de ces équations.

2. À quoi les équations de Maxwell se réduisent-elles en régime statique ?

1. Équations de Maxwell :

Maxwell-Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$
Conservation du flux magnétique	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Maxwell-Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Conservation du flux magnétique $\rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
Maxwell-Faraday + potentiel vecteur $\vec{A} \rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

2. Régime statique $\equiv$ indépendant du temps $\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e$

On rappelle que, dans la théorie newtonnienne de la gravitation, le champ gravitationnel $\vec{g}$ associé à une distribution statique de matière, de masse volumique ρ, vérifie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G_N \rho,$$

où $G_N = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} est la constante de Newton et qu'il dérive d'un potentiel scalaire ϕ, c'est-à-dire que $\vec{g} = \vec{\nabla} \phi$.

3. Avec quelle(s) composante(s) du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ voyez-vous une analogie ? Vous justifierez votre proposition en complétant le tableau ci-dessous

Gravitation newtonnienne	Électromagnétisme
$\vec{g}$	?
ρ	?
$-4\pi G_N$	?
$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G_N \rho$	?
$\vec{\nabla} \times \vec{g} = ?$	?

4. Quelles sont les deux différences majeures entre les deux colonnes du tableau ainsi complété ? En donner la raison physique.

3. Comme $\vec{g}$ dérive d'un potentiel scalaire, on a localement $\vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0}$, d'où l'analogie suivante entre gravitation newtonnienne et électrostatique :

Gravitation newtonnienne	Électromagnétisme
$\vec{g}$	$\vec{E}$
ρ	ρ_e
$-4\pi G_N$	$1/\epsilon_0$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G_N \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e/\epsilon_0$
$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

4. Les deux différences principales entre les deux colonnes ci-dessus sont :
   - ρ_e est à valeurs réelles quelconques tandis que $\rho \geq 0$;
   - $\epsilon_0 > 0$ a pour analogue $1/(4\pi G_N) < 0$.

   L'origine physique de ces différences est :
   - l'existence de charges positives et négatives en électrostatique tandis que la gravitation a pour analogue la masse qui est positive;
   - la nature universellement attractive de la gravitation newtonnienne, par opposition au caractère tantôt attractif tantôt répulsif de l'interaction électrostatique.

Afin d'obtenir une théorie de la gravitation en régime variable, il est tentant de pousser l'analogie précédente jusqu'à considérer l'existence d'un champ dit gravito-électromagnétique (GEM), que l'on notera $(\vec{E}_g, \vec{B}_g)$ vérifiant une version gravitationnelle des équations de Maxwell.

5. Proposer un analogue gravitationnel $\vec{j}$ au vecteur densité de courant de l'Électromagnétisme. Exprimer $\vec{j}$ pour une distribution de matière de masse volumique ρ animée d'un champ de vitesse $\vec{v}$.

5. L'analogue de la charge électrique étant la masse, l'analogue naturel de la densité de courant est la densité de courant de matière, autrement dit la densité de quantité de mouvement. Ainsi, pour une distribution de matière de masse volumique ρ animée d'un champ de vitesse $\vec{v}$, on a

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

6. Écrire les équations de Maxwell dépendant du temps reliant $(\vec{E}_g, \vec{B}_g)$ à $(\rho, \vec{j})$. On introduira les constantes réelles ϵ et μ à la place respectivement de la permittivité diélectrique ϵ_0 et de la perméabilité magnétique μ_0 du vide. Que vaut ϵ ? Préciser les dimensions de $\vec{E}_g$ et $\vec{B}_g$.

6. On pose, comme l'énoncé nous y invite

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g &= \tfrac{\rho}{\epsilon} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_g &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}_g &= -\tfrac{\partial \vec{B}_g}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B}_g &= \mu_0 \vec{j} + \mu\epsilon \tfrac{\partial \vec{E}_g}{\partial t}
\end{aligned}$$

Afin de reproduire l'analogie gravitation newtonnienne/électrostatique en régime statique, on pose également

$$\epsilon = -\frac{1}{4\pi G_N}$$

On a

$$\left[\vec{E}_g\right] = [\vec{g}] = LT^{-2}$$

et donc

$$\left[\vec{B}_g\right] = T^{-1}$$

7. Montrer que les équations de Maxwell gravitationnelles garantissent la conservation de la masse.

7. Par analogie avec l'équation locale de conservation de la charge électrique, on obtient l'équation local de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

On suppose dans toute la suite que

$$\mu = -\frac{4\pi G_N}{c^2} \tag{1}$$

8. Montrer que les équations de Maxwell gravitationnelles entraînent l'existence d'ondes gravitationnelles. À quelle vitesse se propagent ces ondes ? *Indication : on montrera que, dans le vide et en l'absence de charges et de courants* $(\rho = 0, \vec{j} =$

0), *le champ GEM vérifie l'équation de d'Alembert.*

8. Comme dans le cours, on obtient
$$\mu\epsilon = -\frac{\mu}{4\pi G_N} = \frac{1}{c^2}$$
Les ondes gravitationnelles se propagent alors à la vitesse c.

9. Proposer une expression pour l'analogue gravitationnel du vecteur de Poynting $\vec{R}$. En déduire une équation locale de conservation pour l'énergie gravitationnelle dont on interprétera physiquement chacun des termes.

9. On propose
$$\vec{R} = \frac{\vec{E}_g \times \vec{B}_g}{\mu} = -c^2 \frac{\vec{E}_g \times \vec{B}_g}{4\pi G_N}$$
Comme dans le cours, on déduit alors des équations de Maxwell gravitationnelles une équation locale de conservation
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = -\vec{j} \cdot \vec{E}_g$$
avec
$$u = \frac{\epsilon}{2}\vec{E}_g^2 + \frac{1}{2\mu}\vec{B}_g^2 = -\frac{1}{8\pi G_N}\left(\vec{E}_g^2 + c^2\vec{B}_g^2\right)$$
qu'on interprète comme la densité volumique d'énergie gravito-électromagnétique, le vecteur de Poynting gravitationnel $\vec{R}$ s'interprétant comme la densité de flux de puissance et le membre de droite comme la puissance cédée par le champ à la matière.

Dans le cadre de l'analogie GEM, il est naturel de supposer que le champ GEM exerce sur toute particule de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$ une version gravitationnelle de la force de Lorentz et il semble tout aussi naturel de supposer que cette force soit égale à $m\vec{E}_g + m\vec{v} \times \vec{B}_g$. Toutefois, un calcul approché en Relativité Générale montre que pour des particules non-relativistes ($v/c \ll 1$) évoluant dans un champ gravitationnel suffisamment faible pour être convenablement décrit par un champ GEM ($\vec{E}_g$, $\vec{B}_g$), on a en réalité
$$\vec{F} = m\vec{E}_g + 4m\vec{v} \times \vec{B}_g \tag{2}$$
Le facteur 4 apparaissant dans le terme gravitomagnétique tient en fait au caractère strictement tensoriel de la gravitation, par opposition au caractère vectoriel de l'électromagnétisme.

10. Montrer que l'expression (2) est compatible avec votre interprétation des termes figurant dans l'équation de conservation de l'énergie gravitationnelle obtenue

à la question précédente. *Indication : on calculera la puissance de la force de Lorentz gravitationnelle s'exerçant sur une particule de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$.*

10. La puissance $\mathcal{P}$ de la force de Lorentz gravitationnelle s'exerçant sur une particule ponctuelle M de masse m animée d'une vitesse $\vec{v}$ est donnée par

$$\mathcal{P} = m\left(\vec{E}_g(M,t) + \vec{v} \times \vec{B}_g(M,t)\right) \cdot \vec{v} = m\vec{E}_g(M,t) \cdot \vec{v} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{E}_g(\vec{x},t) \cdot \vec{j}(\vec{x},t)$$

avec ici

$$\vec{j} = m\vec{v}\delta_M.$$

On retrouve donc bien – au signe près – la puissance cédée à la matière par le champ gravitationnel.

11. En quoi l'expression (2) diffère-t-elle de la force gravitationnelle newtonnienne ?

11. La force gravitationnelle newtonnienne s'écrit $m\vec{g} = m\vec{E}_g$. C'est la partie gravitoélectrique de la force de Lorent GEM. La contribution non-newtonnienne responsable de l'effet Lense-Thirring est donc la composante gravitomagnétique de cette force.

Cette différence est à l'origine de l'effet Lense-Thirring que l'on se propose d'étudier à présent.

12. Expliquer, par analogie avec l'électromagnétisme, pourquoi le champ gravitomagnétique est non-nul au voisinage d'un astre en rotation.

12. Un astre en rotation est constitué de masses en mouvement. Dans le cadre de notre analogie EM/GEM, cela revient à considérer des charges en mouvement, autrement dit des courants. On s'attend donc à avoir un champ gravitomagnétique non-nul au voisinage d'un astre en rotation.

13. On assimile la Terre à une boule homogène de centre O, de masse $M = 5{,}97.10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6371$ km, en rotation à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Déterminer le champ gravitoélectrique associé à l'aide du théorème de Gauss. On adoptera les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centrées en O, θ étant mesuré à partir de l'axe Oz de rotation de la Terre.

13. On est en régime statique. Le champ $\vec{E}_g$ est donc indépendant du temps. Soit M un point de l'espace. Tout plan contenant le centre O de la Terre et le point M est un plan de symétrie de la distribution de masse et le vecteur $\vec{E}_g(M)$ est contenu dans

ce plan. On en déduit que $\vec{E}_g(M)$ est radial. On adopte les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) centrées en O, θ étant mesuré à partir de l'axe Oz de rotation de la Terre. Alors $\vec{E}_g(M) = E_r(r, \theta, \phi)\vec{u}_r$. La distribution de masses étant par ailleurs invariant par toutes les rotations fixant O, on a finalement $\vec{E}_g(M) = E_r(r)\vec{u}_r$. En appliquant le théorème de Gauss à la sphère $\mathbb{S}_r$ de centre O et de rayon r, on obtient pour tout $r > R_T$,

$$\int_{\mathbb{S}_r} d\vec{S} \cdot \vec{E}_g = 4\pi r^2 E_r(r) = -4\pi G_N M,$$

soit finalement

$$\forall r > R_T \quad \vec{E}_g(r) = -\frac{G_N M}{r^2}\vec{u}_r.$$

> 14. Calculer, en coordonnées sphériques, $\vec{j}(\vec{r})$ pour la Terre, dans le modèle de la question précédente.

14. Tout point M de la Terre est animé, du fait de la rotation de cette dernière, d'une vitesse

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OM}.$$

On a donc, par définition

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho\vec{v}(\vec{r}) = \rho\vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Dans les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), on trouve donc

$$\vec{j}(r, \theta, \phi) = \rho\Omega r\vec{u}_z \times \vec{u}_r = \rho\Omega r \sin\theta\vec{u}_\phi.$$

> 15. En utilisant les symétries de $\vec{j}(\vec{r})$, déterminer la direction du champ gravitomagnétique dans le plan équatorial de la Terre ($\theta = \pi/2$) et sur son axe de rotation Oz. De quelles coordonnées, parmi les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) le champ $\vec{B}_g$ dépend-il ?

15. D'après la question précédente, la distribution de courants est invariante par rotation d'axe Oz et le champ $\vec{B}_g$ est donc indépendant de la coordonnée ϕ. De plus, il est clair que la plan équatorial de la Terre est un plan de symétrie de la distribution de courants ($\vec{j}(r, \pi - \theta) = \vec{j}(r, \theta)$). Le pseudo-vecteur $\vec{B}_g$ est donc orthogonal à ce plan, autrement dit $\vec{B}_g(r, \pi/2) = B_\theta(r, \pi/2)\vec{u}_\theta = -B_\theta(r, \pi/2)$. Enfin, tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants ($\vec{j}(r, \theta, \phi + \pi) = \vec{j}(r, \theta, \phi)$) et, sur l'axe Oz, le pseudo-vecteur $\vec{B}_g$ est contenu dans l'intersection de ces plans, c'est-à-dire que $\vec{B}_g(r, 0) = -\vec{B}_g(r, \pi) = B_r(r, 0)\vec{u}_r = B_g\vec{u}_z$.

16. On considère un point matériel P en orbite circulaire de rayon R dans le plan équatorial de la Terre ($\theta = \pi/2$). En supposant, dans un premier temps, que P est soumis au seul champ gravito-électrique terrestre $\vec{E}_g$ (on suppose donc que $\vec{B}_g = \vec{0}$), exprimer, à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, la vitesse angulaire ω_0 de P sur son orbite en fonction de R.

16. On suppose tout d'abord que P décrit, à la pulsation ω_0, une orbite circulaire de rayon R dans le plan équatorial sous l'action du seul champ gravitoélectrique $\vec{E}_g$. En appliquant le PFD à P, on obtient

$$-m\omega_0^2 R\vec{u}_r = m\vec{E}_g = -\frac{G_N Mm}{R^2}\vec{u}_r,$$

soit

$$\omega_0 = \left(\frac{G_N M}{R^3}\right)^{1/2}$$

ce qui constitue la troisième loi de Kepler.

17. On suppose à présent que $\vec{B}_g \neq \vec{0}$. Déterminer la composante gravitomagnétique de la force de Lorentz à laquelle P est soumis, en fonction de R, $B_g = \vec{u}_z \cdot \vec{B}_g$ et de la vitesse angulaire ω de P sur son orbite. À l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer ω en fonction de B_g et de la vitesse angulaire ω_0 obtenue à la question précédente.

17. En supposant à présent que P décrit, à la pulsation ω, une orbite circulaire de rayon R dans le plan équatorial sous l'action combinée de $\vec{E}_g$ et $\vec{B}_g$, on a

$$\begin{aligned}
-m\omega^2 R\vec{u}_r &= m\left(\vec{E}_g + 4\vec{v} \times \vec{B}_g\right) \\
&= m\vec{E}_g + 4m\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \times \vec{B}_g \\
&= m\vec{E}_g + 4m\omega R B_g \vec{u}_\phi \times \vec{u}_z \\
&= m\vec{E}_g + 4m\omega R B\vec{u}_r \\
&= -m\omega_0^2 R\vec{u}_r + 4m\omega R B_g \vec{u}_r
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 4\omega B_g$$

et finalement

$$\omega = -2B_g \pm \sqrt{4B_g^2 + \omega_0^2}.$$

On met ainsi en évidence, sur le cas particulier d'une orbite équatoriale circulaire, une dépendance sans équivalent dans le cadre newtonnien de la période orbitale d'un satellite dans la rotation propre de son astre. Cet effet est connu sous le nom *d'effet d'horloge*.

On considère à présent le champ gravitomagnétique de la Terre dans l'approximation dipolaire, c'est- à-dire qu'en première approximation, on suppose que

$$\vec{B}_g = -\frac{G_N}{2c^2}\frac{3\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{S}) - (\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{S}}{r^5} \qquad (3)$$

où $\vec{S}$ est le moment cinétique de la Terre et équivaut, dans cette approximation dipolaire, au moment dipolaire magnétique $\vec{m}$.

18. Relier $\vec{S}$ à $\vec{\Omega}$, M et R_T, en supposant que le moment principal d'inertie I associé à la rotation propre de la Terre vaut $I = \alpha M R_T^2$ avec $\alpha \simeq 0,33$. Cette dernière hypothèse vous semble-t-elle compatible avec le modèle adopté jusqu'ici pour la Terre ? Justifiez brièvement votre réponse. En déduire la valeur numérique de $S = \vec{u}_z \cdot \vec{S}$.

18. D'après l'énoncé, on a

$$\vec{S} = I\vec{\Omega} = \alpha M R_T^2 \Omega \vec{u}_z,$$

ce qui donne la valeur numérique

$$S = \vec{u}_z \cdot \vec{S} = 0,33 M R_T^2 \Omega = 5,82.10^{33}\,\mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$$

La valeur du moment d'inertie proposée est sensiblement différente de celle qu'on obtiendrait en assimilant la Terre à une boule homogène. Dans ce cas, on aurait en effet $I = 2MR_T^2/5$. Or $\alpha < 2/5$. La valeur proposée par l'énoncé est en fait une valeur expérimentale. Elle diffère donc naturellement de la valeur obtenue pour le modèle de la boule homogène du fait que la Terre n'est ni homogène ni rigoureusement sphérique.

19. A l'aide de (3) et de votre réponse à la question 16, estimer la variation relative $|\omega - \omega_0|/|\omega_0|$ due au champ gravitomagnétique terrestre de la période de révolution d'un satellite terrestre sur une orbite équatoriale d'altitude $h = 642$ km.

19. De l'équation (3) de l'énoncé, on tire que, sur une orbite équatoriale circulaire d'altitude $h = 642$ km,

$$\vec{B}_g = \frac{G_N \vec{S}}{2c^2(R_T+h)^3},$$

soit numériquement

$$B_g = \vec{u}_z \cdot \vec{B}_g = \frac{G_N S}{2c^2(R_T+h)^3} = 7,58.10^{-15}\,\mathrm{s^{-1}}$$

Pour cette même orbite, on a d'après la question 16)

$$\omega_0 = \left(\frac{G_N M}{(R_T+h)^3}\right)^{1/2} = 1,10.10^{-3}\,\mathrm{rad.s^{-1}}$$

Ainsi, $B_g/\omega_0 \sim 10^{-11}$. On a donc

$$\left|\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right| \simeq \frac{2B_g}{\omega_0} \sim 10^{-11}$$