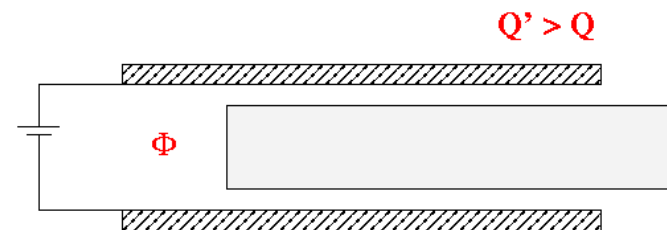


Chapitre 3 : Milieux diélectriques

- On considère pour l'instant des isolants, au sein desquels on ne peut trouver de courant (macroscopique) de charges libres
 - Le champ E peut y être non nul !
- **Expérience de Faraday :**
 - L'introduction d'un isolant entre les armatures d'un condensateur en modifie la capacité : il faut $Q' > Q$ pour maintenir Φ constant



- Dans ce chapitre, on considèrera des champs éventuellement variables dans le temps

- Une molécule peut être assimilée à grande distance à un dipôle
- Un milieu à structure moléculaire sera caractérisé, à grande distance, par sa **densité volumique de moments dipolaires (électriques)**
 - On pose :

Densité volumique de moment dipolaire
ou polarisation

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

Diagram illustrating the units of the electric dipole moment density \vec{P} :

- The unit C/m^2 (Coulombs per square meter) is associated with the numerator $d\vec{p}$.
- The unit m^{-3} (inverse cubic meters) is associated with the denominator dV .
- The unit Cm (Coulomb-meters) is associated with the overall quantity \vec{P} .

- Un **milieu diélectrique** est une substance qui peut acquérir un moment dipolaire électrique sous l'action d'un champ électrique extérieur

- La polarisation peut être **spontanée** ou **induite**
- La polarisation spontanée (très rare) concerne les milieux :
 - **Pyro-électriques** (spontanément polarisés lorsqu'ils sont chauffés)
 - ▲ Exemple : la tourmaline
 - **Ferro-électriques** (une polarisation persiste après qu'ils aient été soumis pendant un temps à un champ électrique extérieur)
 - ▲ Exemple : le titanate de baryum (BaTiO_3)
- La polarisation induite concerne **a priori tous les matériaux**

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
 1. Moments dipolaires des atomes et des molécules
 2. Polarisation électronique
 3. Polarisation ionique
 4. Polarisation dipolaire
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

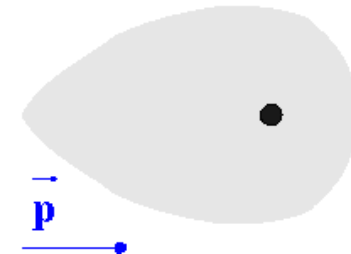
Cas d'un atome

- Un atome isolé dans son état fondamental aura un moment dipolaire nul puisque les barycentres moyens G_+ et G_- seront superposés (principe de Curie)
- Un champ E appliqué va décaler G_- et induire un moment dipolaire (électrique)
- Ceci reste valable tant que $E < \text{seuil d'ionisation}$
- Concerne par exemple He, Ne, Ar, Kr (**gaz nobles**)

$$\vec{E} = \vec{0}$$

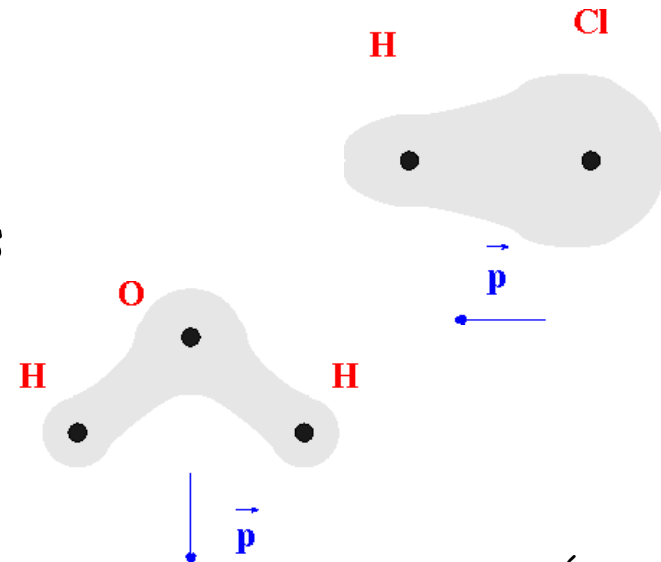


$$\vec{E} \neq \vec{0}$$



Cas d'une molécule

- Il existe deux types de molécules, en fonction des positions relatives des barycentres G_+ et G_- :
 - Les molécules **apolaires** possèdent un centre de symétrie
 - ⤴ Mol. diatomiques constituées du même atome (H_2 , N_2 , O_2)
 - ⤴ Mol. linéaires (CO_2)
 - ⤴ Mol. à symétrie tétragonale ou benzémique (CH_4 , C_6H_6)
 - Les molécules **polaires** ne possèdent pas de centre de symétrie
 - ⤴ Molécules diatomiques constituées de 2 atomes différents (HCl) ou molécules non linéaires (H_2O)
 - ⤴ Molécules plus complexes



Dipôles permanent et induits

- Les molécules polaires possèdent un **moment permanent**
- Les molécules apolaires sont polarisables par un champ E externe : elles se polarisent mutuellement sous l'action du **moment** dipolaire électrique **instantané** de l'autre molécule
- Pour une molécule apolaire, il peut exister les 2 types de moments
 - Entre dipôles permanents : **force de Keesom**
 - Entre dipôles permanents et induits : **force de Debye**
 - Entre dipôles induits : **force de London**

Ordre de grandeur

- Les distances inter-moléculaires sont $\approx 0,1$ nm, les moments dipolaires sont en ordre de grandeur :

$$p \approx e d \approx 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-10} \approx 1,6 \cdot 10^{-29} \text{ Cm}$$

- On exprime souvent les moments dipolaires en **Debye**
 - $1\text{D} = 10^{-18}$ unité CGS de moment dipolaire (10^{-30} C·m)

$$1 \text{ D} \approx 0,3336 \times 10^{-29} \text{ Cm} \approx \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ Cm}$$

- Les moments dipolaires sont alors voisins de l'unité :
 - 1,08 pour HCl ; 1,85 pour H₂O et 1,5 pour NH₃

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

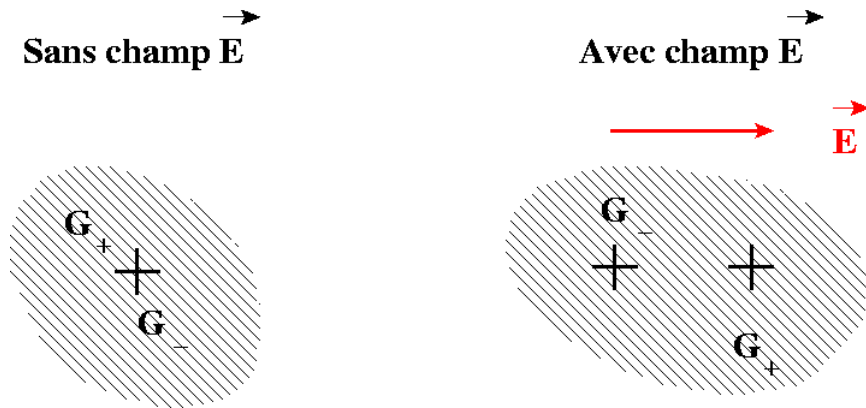
1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
 1. Moments dipolaires des atomes et des molécules
 2. Polarisation électronique
 3. Polarisation ionique
 4. Polarisation dipolaire
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Elle concerne tous les milieux et résulte du déplacement des nuages électroniques autour des atomes sous l'action d'un champ E . On observe expérimentalement que :

- Pour une molécule apolaire

$$\vec{p} = \alpha_e \varepsilon_0 \vec{E}_\ell$$

α_e : polarisabilité de la molécule



G_{+-} : barycentre des charges + et -

- Pour une molécule polaire

$$\delta \vec{p} = \alpha_e \varepsilon_0 \vec{E}_\ell$$

- Dans tous les cas, sous l'action d'un champ E , un milieu va acquérir une polarisation supplémentaire P donnée par :

$$\vec{P} = n \vec{p} = n \alpha_e \varepsilon_0 \vec{E}_\ell$$

- α_e est la **polarisatibilité électronique**

- En chimie, on utilise souvent les unités CGS. On a alors :

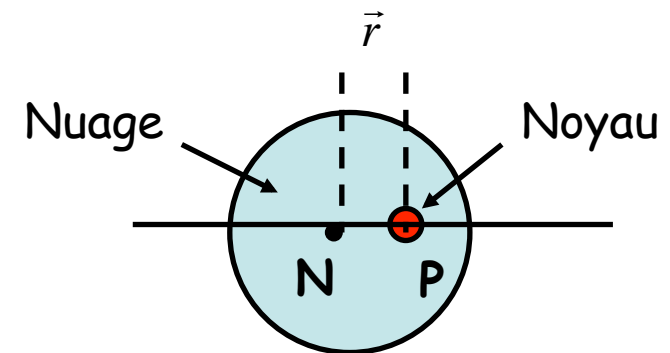
$$\alpha_{Physique} = 4 \pi \alpha_{chimie}$$

Modèle de Mossotti (1/2)

- On assimile un atome à un noyau (charge Ze) et à une distribution de charge électronique uniforme ρ de rayon a . L'application d'un champ \vec{E}_a extérieur déplace le nuage électronique wrt au noyau

- Neutralité électronique : $Ze + \frac{4}{3} \pi a^3 \rho = 0$

- On note r le déplacement du noyau wrt au centre du nuage



- La somme des forces s'exerçant sur le noyau est nulle :
 - Force électrique : $Ze \vec{E}_a$
 - Force exercée par le nuage : $Ze \vec{E}$

Gauss : \Rightarrow le champ E créé par ρ à la distance r s'écrit : $4 \pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \times \rho \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{3 \epsilon_0} \vec{r} = \frac{-Ze}{4 \pi \epsilon_0 a^3} \vec{r}$

(2016-2017)

Modèle de Mossotti (2/2)

- L'équilibre du noyau s'écrit : $Z e \vec{E}_a - \frac{(Z e)^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r} = \frac{4 \pi \epsilon_0 a^3}{Z e} \vec{E}_a$
- Il apparaît un moment dipolaire induit : $\vec{p} = Z e \vec{r}$
- La polarisabilité devient : $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_a \Rightarrow \alpha = 4 \pi a^3$ La polarisabilité a la dimension d'un volume !

- En mécanique quantique, on obtient : $\alpha_{MQ} = 18 \pi a^3$

- Pour H_2 dans son état fondamental, $a = 52.9 \text{ pm}$

$$\alpha_{Exp} = 8.42 \times 10^{-30} \text{ m}^3 \quad \alpha_{Mossotti} = 1.86 \times 10^{-30} \text{ m}^3 \quad \alpha_{MQ} = 8.37 \times 10^{-30} \text{ m}^3$$

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
 1. Moments dipolaires des atomes et des molécules
 2. Polarisation électronique
 3. Polarisation ionique
 4. Polarisation dipolaire
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Si une distribution de charges (globalement neutre) est soumise à un champ E , les charges + et - se séparent légèrement d'où apparition d'un moment dipolaire :
 - Au niveau **moléculaire** (déformation du nuage électronique)
 - ⌘ Polarisation électronique
 - Au niveau du **réseau cristallin** (déformation des mailles)
 - ⌘ Polarisation ionique
 - ⌘ Pour un cristal cubique tel que NaCl, on observe :

$$\vec{P} = n \vec{p} = n \alpha_i \varepsilon_0 \vec{E}_\ell$$

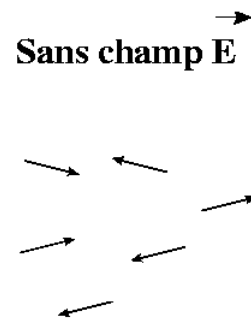
- S'ajoute à la polarisation électronique qui apparaît pour un champ plus faible
- On appelle parfois **polarisation par déformation** les polarisations électronique et ionique

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
 1. Moments dipolaires des atomes et des molécules
 2. Polarisation électronique
 3. Polarisation ionique
 4. Polarisation dipolaire
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

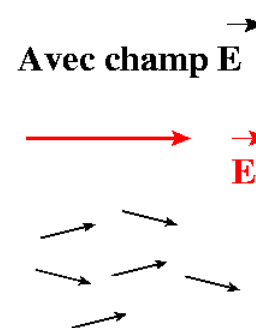
- Concerne les molécules qui possèdent un moment dipolaire électrique permanent (H_2O , HCl).

Les dipôles se répartissent avec une orientation aléatoire



⇒ moyenne nulle car n très élevé

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p} = \vec{0}$$



Les dipôles tendent à minimiser leur énergie potentielle

$$E_p = - \vec{p} \cdot \vec{E}$$

⇒ orientation préférentielle dans le sens du champ

$$\vec{0} \leq \vec{P} \leq n \vec{p}$$

n : densité moléculaire volumique

Lien avec la Physique Statistique

- Langevin a montré par la physique statistique que

$$P(x) = n p L(x) \quad \text{avec} \quad L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad x = \frac{p E}{k_B T}$$

$L(x)$: fonction de Langevin

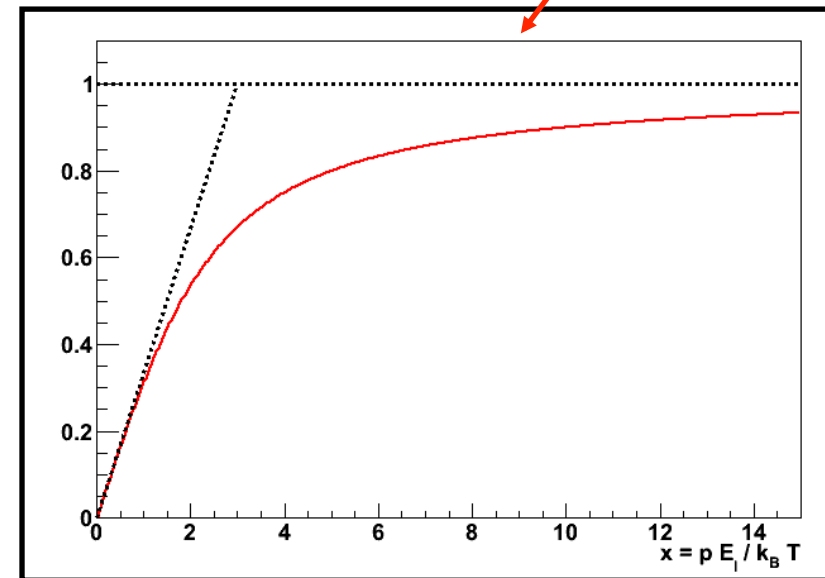
- Si $x \ll 1$ ($T \approx 300$ K) : $P \propto E$

$$\vec{P} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \alpha = \frac{p^2}{3 \epsilon_0 k_B T}$$

▲ Forte variation avec T

- Si $x \gg 1$: $P \approx n p$

▲ Les dipôles sont tous alignés sur le champ : saturation de la polarisation



- Egalement appelée **polarisation par orientation**
- On retiendra que la polarisation dipolaire varie fortement avec la température si E faible :

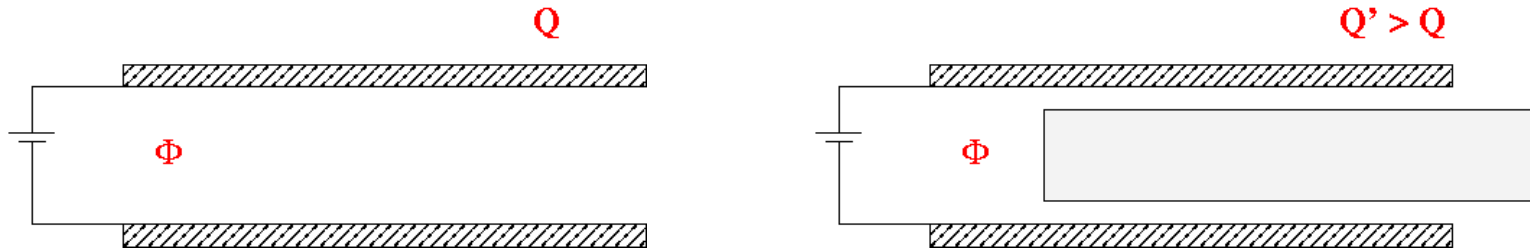
$$\alpha_{or} = \frac{p^2}{3 \varepsilon_0 k_B T}$$

- Ce n'est pas le cas de la polarisation par déformation :
 - La polarisation électronique ne dépend que de la nature de la molécule
 - La polarisation ionique ne dépend que de la structure du cristal

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

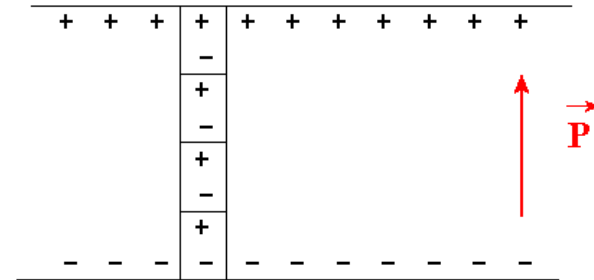
1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu l_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux l_{hi}
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Dans l'expérience de Faraday, la capacité $C = Q/\Phi$ augmente à charge constante :



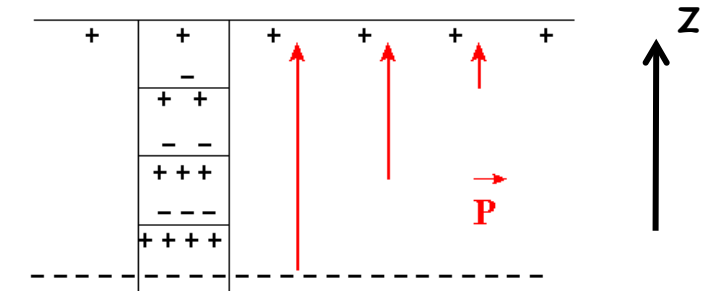
- Le champ E doit donc diminuer : des charges opposées aux charges des armatures doivent apparaître. D'où viennent-elles ?

Plaque diélectrique
uniformément
polarisée



- On remplace (par la pensée) la plaque par un empilement de dipôles :
 - ❑ La charge volumique sera nulle
 - ❑ La charge surfacique sera non nulle
- On appelle **charges de polarisation** les excédents locaux de charges engendrés par la polarisation

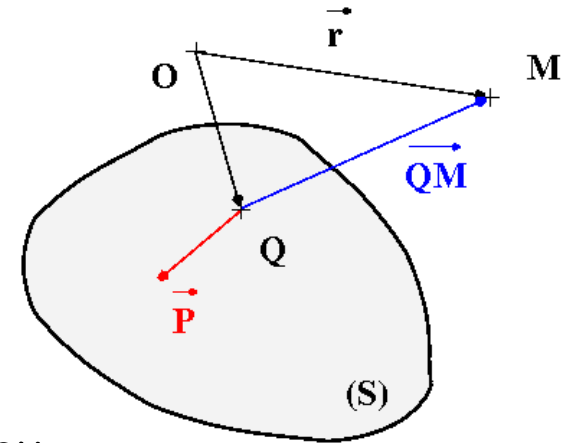
Exemple d'une polarisation
dépendant de la position



- En remplaçant la polarisation par un empilement de dipôles, on observe cette fois que les densités volumiques et surfaciques sont non nulles
- Il apparaît un excédent de charges de polarisation dans le volume, lié à $\partial P / \partial z$

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu l_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux l_{hi}
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques



- On appelle (V) le volume du diélectrique (initialement neutre) et (S) la surface qui l'entoure. Le potentiel scalaire correspondant au diélectrique s'écrit :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \frac{\vec{P} \cdot \overrightarrow{QM}}{QM^3} d^3Q$$

- On a :

$$\vec{\nabla}_Q \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) = \frac{\vec{\nabla}_Q(\vec{P})}{QM} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{QM} \right) = \frac{\vec{\nabla}_Q(\vec{P})}{QM} + \vec{P} \cdot \frac{\overrightarrow{QM}}{QM^3}$$

- D'où :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \left[\vec{\nabla}_Q \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla}_Q(\vec{P}) \cdot \overrightarrow{QM}}{QM^3} \right] d^3Q$$

$$\Phi(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \left[\vec{\nabla}_Q \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla}_Q \cdot (\vec{P})}{QM} \right] d^3Q$$

Théorème de la divergence \longrightarrow

$$\Phi(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \oint_{(S)} \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) \cdot \vec{n} dS + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \left[\frac{-\vec{\nabla}_Q \cdot (\vec{P})}{QM} \right] d^3Q$$

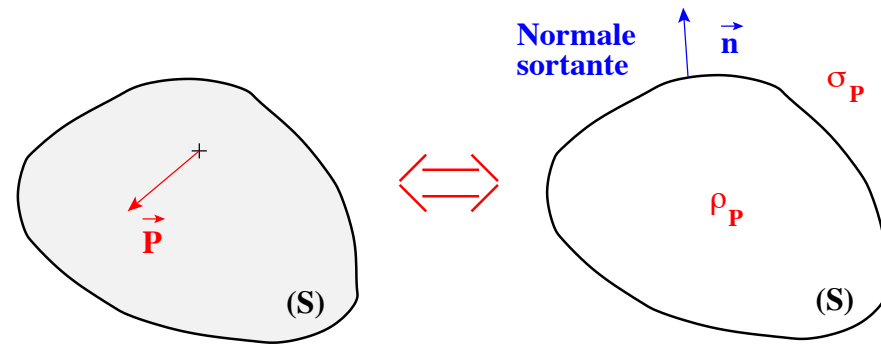
- Le potentiel Φ créé par la distribution de dipôles qui constitue le diélectrique est donc égal au potentiel créé par une distribution surfacique σ_P et une distribution volumique ρ_P telles que :

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Savoir
refaire ce
calcul

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{(S)} \frac{\sigma_P}{QM} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Diélectrique}} \frac{\rho_P}{QM} d^3Q$$

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$



- Tout se passe comme si on pouvait remplacer le diélectrique et sa polarisation par les distributions de charges σ_P et ρ_P dans le vide appelées **charges de polarisation**
- D'un point de vue macroscopique, la polarisation P du diélectrique est équivalente pour Φ (ou E) à une distribution macroscopique de charges de polarisation

- Ces charges ne sont pas des charges « comme les autres ». Ce ne sont pas des charges libres. On les appelle **charges liées**
- La signification physique du terme **charge liée** apparaîtra dans l'étude des régimes variables
- Attention à bien distinguer σ_p et ρ_p des densités de charges libres σ et ρ si le milieu contient les deux types de charge
- Pour un régime statique, les charges de polarisation sont fictives du point de vue macroscopique. Les deux descriptions (en polarisation ou en charges) sont équivalentes

- La charge totale portée par le diélectrique est :

$$Q = \iiint_{(V)} \rho_P dV + \iint_{(S)} \sigma_P dS = - \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV + \iint_{(S)} \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

$$Q = - \iint_{(S)} \vec{P} \cdot \vec{n} dS + \iint_{(S)} \vec{P} \cdot \vec{n} dS \quad \text{d'après le théorème de la divergence}$$

$$Q = 0$$

- On retrouve que le diélectrique est globalement neutre (car constitués de dipôles)

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu l_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux l_{hi}
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Milieu **linéaire** si les composantes de sa polarisation sont des fonctions linéaires des composantes du champ électrique :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$$

- Valable pour E « pas trop fort ». La limite dépend de chaque corps
- $[\chi_e]$ est le **tenseur de susceptibilité diélectrique** (matrice 3x3 sur une base orthonormée). Il existe une base principale sur laquelle :

$$[\chi_e] = \begin{bmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{bmatrix}$$

- Les éléments diagonaux χ_i sont les **susceptibilités diélectriques principales**

- Milieu **homogène** si $[\chi_e]$ est indépendante du point de l'espace considéré
- Milieu **isotrope** si aucune direction n'est privilégiée. Cela signifie en particulier que \vec{P} n'a aucune raison d'être dans une autre direction que \vec{E} :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e(M, \vec{E}) \vec{E} \quad \chi_e : \text{susceptibilité électrique}$$

- χ_e est un nombre réel positif sans dimension
- La susceptibilité électrique χ_e est parfois appelée simplement **susceptibilité** (et notée χ) lorsqu'il n'existe pas de risque de confusion

- Milieu **linéaire, homogène et isotrope** (ou **lhi**) si les valeurs propres de $[\chi_e]$ sont égales (isotropie) et indépendantes de l'espace (homogénéité) et du champ (linéarité) :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

- Quelques valeurs :

Matériau	Phase	χ_e
Air	Gaz	0.0057
H ₂	Gaz	0.228
O ₂	Gaz	0.507
H ₂ O	Liquide polaire	80
Benzène	Liquide non polaire	2.8
NaCl	Solide cristallin	5.8
BaTiO ₃	Solide cristallin	1760 à 120°C

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

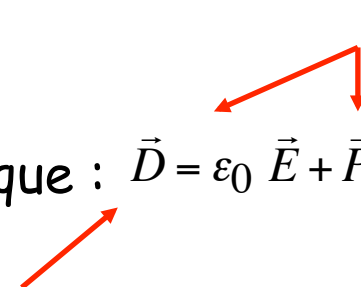
1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu l_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux l_{hi}
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Dans un diélectrique de polarisation P , (MG) s'écrit : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre} + \rho_P}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_{libre} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{P}) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{libre}$$

- On introduit donc naturellement le vecteur D tel que : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

- D est un vecteur polaire
- La définition de D est étendue au vide pour lequel $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$



 Déplacement électrique -
 Induction électrique -
 Excitation électrique -
 Densité de flux électrique -
 Vecteur D

- Le théorème de Gauss s'écrit

- Sous sa forme locale : $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$
- Sous sa forme intégrale : $\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$

Quand utilise-t-on D ou E ?

- Dans le cas général :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_P}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Leftrightarrow \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{libre}} + Q_P}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\epsilon_0}$$

- Les calculs avec E (et donc Φ) utilisent les densités totales. Les calculs avec D utilisent uniquement les densités de charges libres
- Il est possible d'utiliser E ou D indifféremment
- En particulier, si « P est uniforme », alors $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \equiv 0$

Vecteur \vec{D} pour un lhi

- Dans un lhi : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ (P et E de même sens)

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Permittivité relative
(toujours > 1)

Permittivité absolue

- Le théorème de Gauss s'écrit alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}} \Leftrightarrow \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{libre}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q_{\text{libre}}}{\epsilon}$$

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu lhi plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux lhi
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Le champ E_0 d'un système de conducteurs dans le vide vérifie :

$$(MF) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \vec{0}$$

$$(MG) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0}$$

- Par la pensée, on peut remplacer le vide par un lhi. Le champ E vérifie alors :

$$(MF) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$(MG) \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \rho_{libre}$$

- Soit encore :

$$(MF) \quad \vec{\nabla} \times (\epsilon_r \vec{E}) = \vec{0}$$

$$(MG) \quad \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0}$$

- On en déduit que E vérifie :

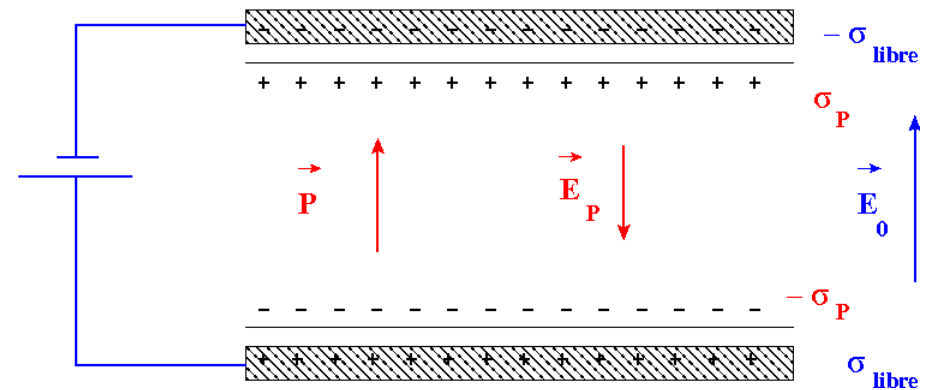
$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} < \vec{E}_0$$

Le champ dans le diélectrique
lhi est toujours plus faible
que dans le vide !!

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu l_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux l_{hi}
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Plaque Ihi insérée dans un condensateur



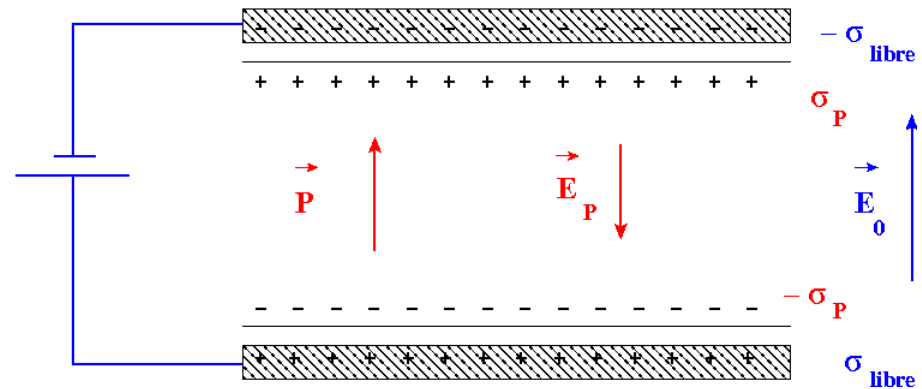
- Les charges libres des armatures créent le champ $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} \vec{u}_z$
- E_0 induit dans le diélectrique une polarisation P de même sens
- Il apparaît sur les faces du diélectrique des densités de charges de polarisation (signe évident pour que E_P soit de sens opposé à E_0)

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = \pm P$$

- Ces charges créent un autre champ dans le diélectrique

$$\vec{E}_P = \frac{-\sigma_P}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_P = - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$



- E_P est de sens opposé à E_0
- Le champ total dans la plaque vaut :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

- Généralisation : le champ E_P créé par la polarisation est toujours de sens opposé à E_0 (loi de modération). On l'appelle **champ dépolarisant** (même s'il n'est associé à aucun mécanisme de dépolarisation)

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu I_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
7. Séparation de deux milieux I_{hi}
8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

Equations de Maxwell

- Pour une polarisation statique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- On en déduit :

□ (MF) : continuité de E_T	→	$\vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1}$
□ (MΦ) : continuité de B_N	→	$\vec{B}_{N_2} = \vec{B}_{N_1}$
□ (MA) : discontinuité de B_T	→	$\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

□ (MG) : discontinuité de D_N

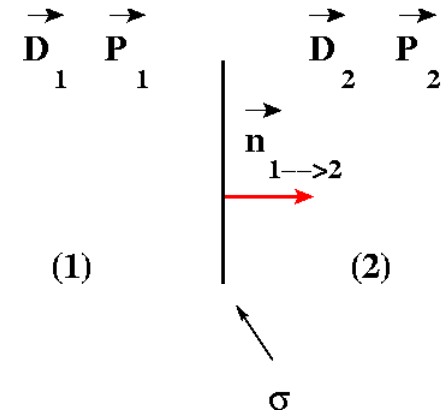


Seule modification par
rapport au vide

Discontinuité de D_N

- σ_{libre} : densité de charges libres sur la surface de séparation dans un modèle surfacique. On a :

$$\sigma_{P1} = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \sigma_{P2} = -\vec{P}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$



- La condition de passage pour la composante normale de E s'écrit :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{libre}} + \sigma_{P1} + \sigma_{P2}}{\epsilon_0}$$

- Ou encore pour D_N :

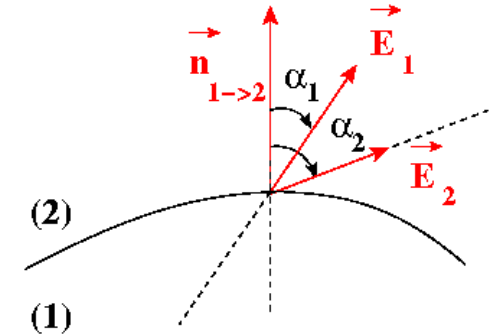
$$(\epsilon_0 \vec{E}_2 + \vec{P}_2) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} - (\epsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \sigma_{\text{libre}} \Leftrightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \sigma_{\text{libre}}$$

$$\vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma_{\text{libre}} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Réfraction des lignes de champ pour 2 lhi

$$\vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1}$$

$$\vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \sigma_{\text{libre}} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$



- Si $\sigma_{\text{libre}} = 0$, on en déduit :

$$E_1 \sin(\alpha_1) = E_2 \sin(\alpha_2) \quad \varepsilon_1 E_1 \cos(\alpha_1) = \varepsilon_2 E_2 \cos(\alpha_2)$$

- D'où :

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\varepsilon_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\varepsilon_2} \Rightarrow \frac{\tan(\alpha_1)}{\varepsilon_{r1}} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\varepsilon_{r2}}$$

- Cette relation caractérise la **réfraction des lignes de champ** à la traversée de la surface (S)
 - En passant dans un milieu de ε_r plus élevé, le champ E s'écarte de la normale

Exemple de la sphère uniformément polarisée

- Les champs internes E_i et externe E_e créés par une polarisation P selon u_z sont (cf TD) :

$$\vec{E}_i = \frac{-\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{E}_e = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} [2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta]$$

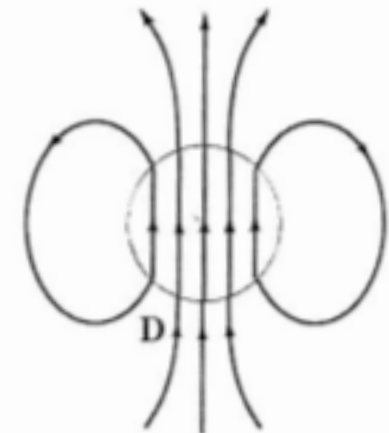
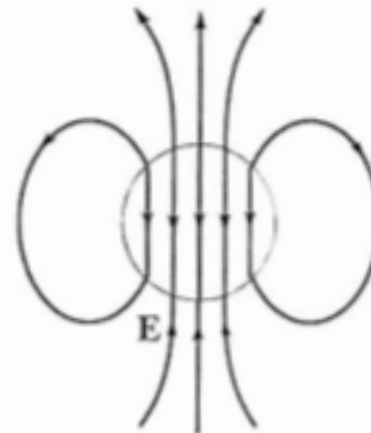
Savoir
refaire ce
calcul

- Le signe « - » est très général et caractérise le **champ dépolarisant**

- A l'extérieur, on retrouve le champ d'un dipôle de moment

$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P}$$

placé au centre de la sphère



P , E et D créés par la sphère
(différents des champs totaux)

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu l_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux l_{hi}
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
 1. Approche intuitive des charges de polarisation
 2. Densités de charges équivalentes
 3. Relations constitutives
 4. Vecteur D
 5. Milieu l_{hi} plongé dans un champ constant
 6. Exemple du condensateur à lame diélectrique : champ dépolarisant
 7. Séparation de deux milieux l_{hi}
 8. Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique
 9. Complément sur les densités de charges équivalentes
3. Susceptibilité électrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Pour passer des densités vraies aux densités nivelées, on utilise une fonction de nivellement continue, centrée sur la charge en r_i et à symétrie sphérique, vérifiant :

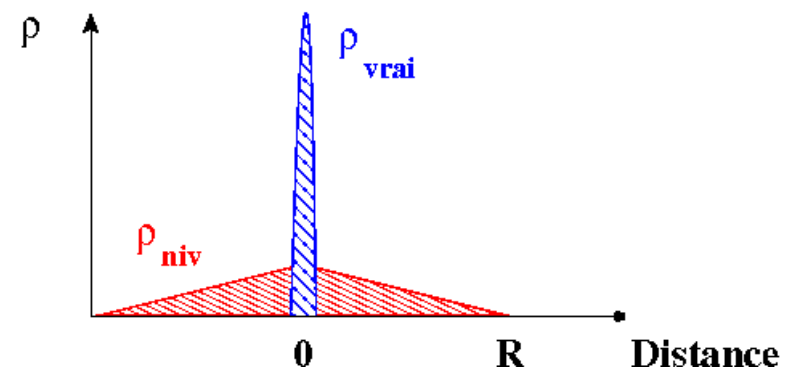
$$\iiint_{\text{Espace}} f(\vec{r}) dV = 1$$

- Une charge ponctuelle q_i en r_i est remplacée par la fonction continue ρ_i :

$$\rho_i = q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- La densité nivelée s'écrit :

$$\rho = \sum_i q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i)$$



- La forme de la fonction f fait que dans la pratique, seules les charges proches de r sont prises en compte

- On extrapole ceci aux charges liées :
 - On coupe le diél. en groupes de particules de charge totale nulle
 - On note r_N la position du centre de masse du groupe N et r_{Nk} les positions relatives par rapport au centre de masse des k charges qui composent le groupe N
 - Comme la charge q_k est située en $\vec{r}_N + \vec{r}_{Nk}$, la densité nivelée devient :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_N \sum_k q_{Nk} f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk})$$

- De la même manière, on peut écrire la polarisation P à partir des moments p_N :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_N \vec{p}_N f(\vec{r} - \vec{r}_N) \quad \text{avec} \quad \vec{p}_N = \sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk}$$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_N \sum_k q_{Nk} f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk})$$

- Par définition, f varie peu à l'échelle des variations de ρ , d'où :

$$f(\vec{r} - \vec{r}_N - \vec{r}_{Nk}) \approx f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \vec{r}_{Nk} \cdot \vec{\nabla}[f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

- On en déduit ρ :

$$\rho(\vec{r}) \approx \sum_N \left(\sum_k q_{Nk} \right) f(\vec{r} - \vec{r}_N) - \sum_N \left(\sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk} \right) \cdot \vec{\nabla}[f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

\nearrow
= 0 car la charge totale de chaque groupe est nulle

\nwarrow
Moment dipolaire du groupe $N \rightarrow$

$$\vec{p}_N = \sum_k q_{Nk} \vec{r}_{Nk}$$

- Finalement :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla}[f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_N \vec{p}_N f(\vec{r} - \vec{r}_N)$$

$$\rho(\vec{r}) \approx - \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} [f(\vec{r} - \vec{r}_N)]$$

- On peut écrire : $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{p}_N) = f \vec{\nabla} \cdot (\vec{p}_N) + \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} (f)$

□ Puisque seul f dépend de r , on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \sum_N \vec{p}_N \cdot \vec{\nabla} (f(\vec{r} - \vec{r}_N))$$

- En comparant avec l'expression de ρ , il reste :

$$\rho(\vec{r}) \approx - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

- Cette expression ne conserve que le caractère dipolaire de la distribution. Les autres termes ne sont pas pris en compte

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
 1. Champ local E_l
 2. Formule de Clausius-Mossotti
 3. Variations de la susceptibilité
 4. Quelques cas particuliers
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

Champs microscopiques et macroscopiques

- Le **champ microscopique** e est le champ dans le vide entre les particules du milieu. Il a une structure très « tourmentée »
 - Dans un solide cristallin, il varie considérablement sur des distances de l'ordre de la maille (quelques Å)
- Le **champ macroscopique** E est la moyenne spatiale de e au voisinage du point M

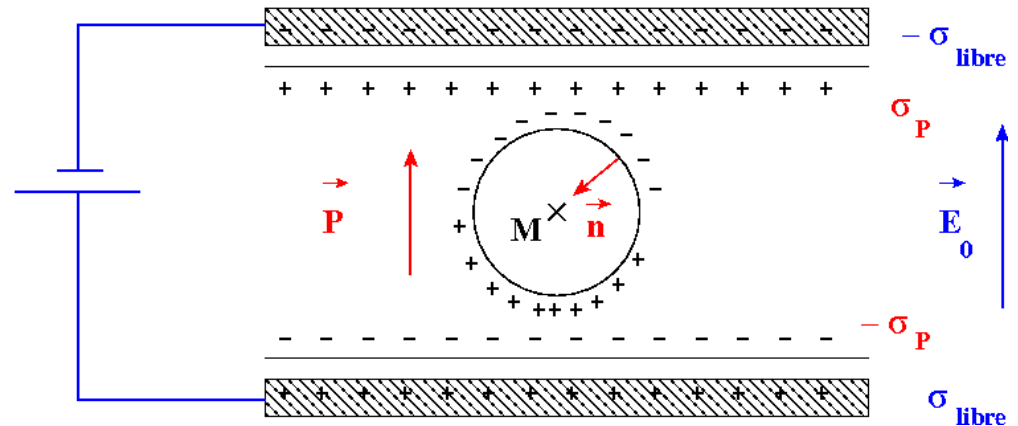
$$\vec{E} = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{e} dV \quad V: \text{volume mésoscopique}$$

- E varie plus lentement que e . C'est E qui est utilisé dans les équations de Maxwell
- **On ne peut plus raisonner ainsi avec la polarisabilité**

- On soumet un diélectrique à un champ E_0 constant créé par un condensateur
- Le champ macroscopique E dans le diélectrique est :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P \quad \text{avec} \quad \vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

E_p : champ dépolarisant dû aux charges de polarisation portées par le diélectrique



- On considère une molécule M du diélectrique. **Le champ qui agit sur M n'est pas E** qui est la moyenne spatiale du champ au voisinage de M . Le champ à considérer est le champ créé en M par toutes les molécules autres que M
 - Ce **champ local** E_l est le champ ressenti par la molécule
 - C'est lui qui intervient dans le moment dipolaire

- Pour les molécules apolaires, on utilise pour E , une expression due à Lorentz (1920)
 - On suppose que la présence ou non de l'élément polarisable ne modifie pas le champ autour de M
 - On obtient alors :

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3 \epsilon_0}$$

E est le champ
macroscopique

- Cette expression n'est qu'une approximation pour les milieux denses (liquides et solides) et est complètement fausse pour les cristaux non cubiques

- Pour les molécules polaires, on utilise pour E , une expression plus complexe due à Onsager (1936)

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
 1. Champ local E_l
 2. Formule de Clausius-Mossotti
 3. Variations de la susceptibilité
 4. Quelques cas particuliers
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

Clausius-Mossotti (1/2)

- On a (en supposant la forme de Lorentz du champ local) :

$$\vec{P} = n \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_l = n \alpha \varepsilon_0 \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3 \varepsilon_0} \right) \Rightarrow \vec{P} = \frac{n \alpha}{1 - n \alpha / 3} \varepsilon_0 \vec{E}$$

Polarisabilité

- Soit pour un milieu lhi :

$$\chi_e = \frac{n \alpha}{1 - n \alpha / 3}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

μ : masse volumique

M : masse molaire

N_0 : nombre d'Avogadro

$$\mu = n \frac{M}{N_0}$$

Savoir
refaire ce
calcul

$$\frac{M}{\mu} \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) = \frac{N_0 \alpha}{3}$$

Formule de
Clausius-Mossotti

$$\frac{M}{\mu} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) = \frac{N_0 \alpha}{3}$$

Clausius-Mossotti (2/2)

- L'énorme intérêt de ce modèle est de permettre une mesure de α (paramètre microscopique) à l'aide de paramètres macroscopiques
- Pour un milieu peu dense ($n\alpha/3 \ll 1$) :

$$\chi \approx n \alpha$$

$$\frac{M}{\mu} (\epsilon_r - 1) \approx N_0 \alpha$$

Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
 1. Champ local E_l
 2. Formule de Clausius-Mossotti
 3. Variations de la susceptibilité
 4. Quelques cas particuliers
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

Variation de la polarisabilité avec la température

- Pour un milieu peu dense : $\chi \approx n \alpha$

- **Milieux apolaires :**

- Uniquement polarisation électronique et ionique qui ne dépendent pas de la température
 - ▲ α ne doit pas dépendre de T

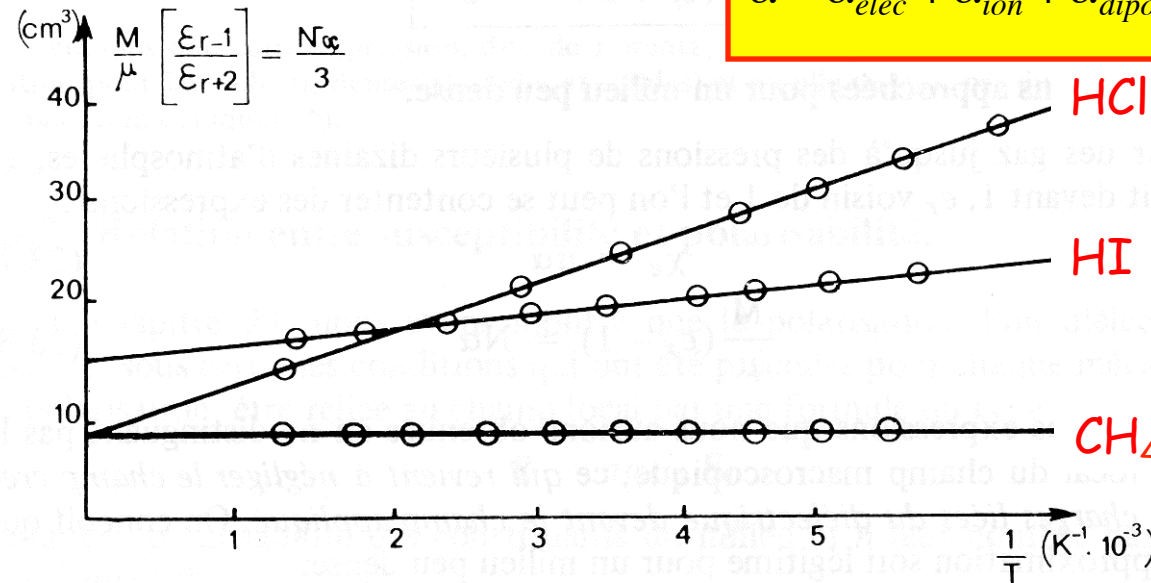
- **Milieux polaires :**

- La polarisation dipolaire dépend de la température :

- Cas général :
$$\alpha = \alpha_{elec} + \alpha_{ion} + \alpha_{dipolaire} = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T}$$

↙
Polarisations
électronique et ionique

Exemple de quelques gaz



$$\alpha = \alpha_{elec} + \alpha_{ion} + \alpha_{dipolaire} = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T}$$

Savoir expliquer

- La pente de ses courbes fournit le moment dipolaire p_0 . L'ordonnée à l'origine fournit α_0
- On en déduit que :
 - HCl a un plus grand moment dipolaire que HI
 - HI a une plus grande polarisabilité électronique et ionique que HCl (HI est plus grosse)
 - CH₄ est apolaire (logique puisque possède un centre de symétrie)

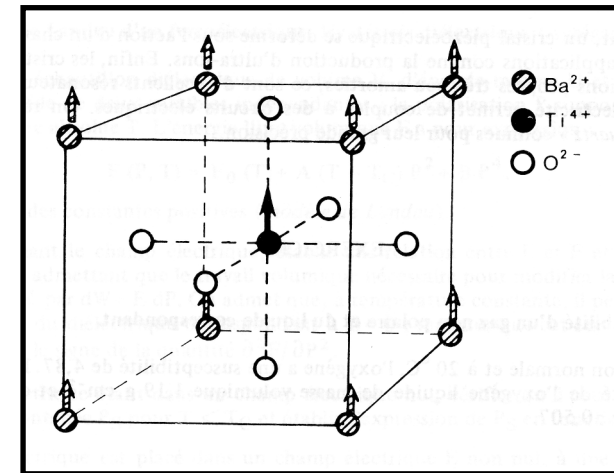
Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
 1. Champ local E_l
 2. Formule de Clausius-Mossotti
 3. Variations de la susceptibilité
 4. Quelques cas particuliers
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

« Catastrophe de polarisation » ou ferroélectricité (1/2)

$$\chi_e = \frac{n \alpha}{1 - n \alpha / 3}$$

- χ_e va diverger pour $n \alpha / 3 = 1$ (en fait, on ne peut plus utiliser Clausius-Mossotti)
- Exemple du titanate de Baryum BaTiO_3
 - A 400°C , diélectrique « ordinaire » ($\chi_e \approx 500$)
 - Si $T \downarrow$, $n \uparrow$ et $\chi_e \approx$ plusieurs milliers
 - Lorsque T atteint sa température de Curie (120°C), apparition d'un **état ferroélectrique**, caractérisé par l'apparition d'une polarisation spontanée en l'absence de champ appliqué ($\chi_e = \infty$)
 - P est alors due à l'existence pour les ions Ti^{4+} et Ba^{2+} de nouvelles positions d'équilibre décalées wrt aux nœuds du réseau initial

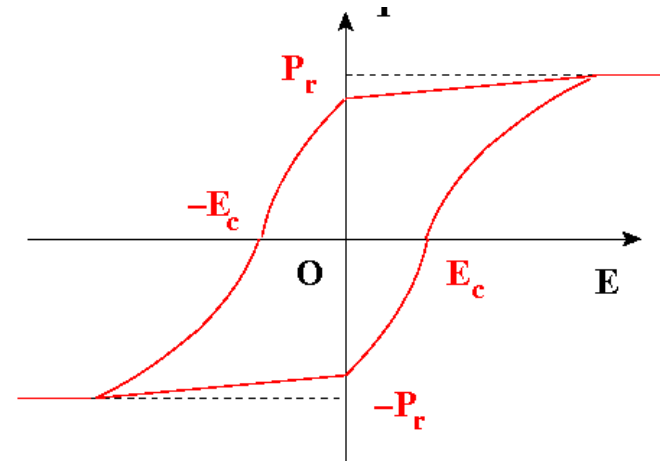
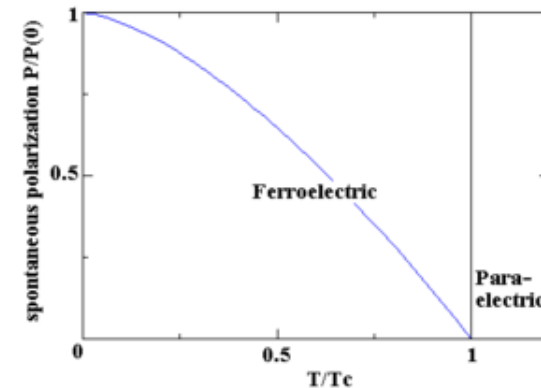


« Catastrophe de polarisation » ou ferroélectricité (2/2)

- La susceptibilité d'un ferroélectrique suit une **loi de Curie** :

$$\chi_e = \frac{Cste}{T - T_c}$$

- La polarisation d'un ferroélectrique dépend de l'histoire du cristal
 - On obtient une **courbe d'hystérésis** en faisant varier lentement E



E_c : champ coercitif
 P_r : polarisation rémanente

Piézoélectricité

- Dans certains cristaux dépourvus de centre de symétrie, un déplacement relatif des ions dû à une contrainte mécanique peut engendrer une polarisation en l'absence de champ appliqué
- Permet de transformer une grandeur mécanique en une grandeur électrique (ex : mesure de force ou de pression)
- Inversement, un cristal piézoélectrique se déforme sous l'action d'un champ E (ex : production d'ultra-sons)
- Les cristaux de quartz ont des vibrations propres très peu amorties. Ce sont donc de très bons résonateurs mécaniques que la piézoélectricité permet de coupler à des circuits électriques
 - Montres à quartz !