Chap 24 : Ondes sonores dans un fluide acoustique

I - Équations des ondes sonores

Le son :

Les fluides sont | élastiq / compressible, d'où

le coeff de compressibilité :

$$\boxed{\chi_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}}$$

Pr un GP : $pV = nRT$ $\left(p = \rho \frac{RT}{M}\right)$

à T cst : $pV = cst$

différentielle

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dp} = -\frac{V}{p}$$

D'où $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(-\frac{V}{p}\right)$

$\boxed{\chi_T = \frac{1}{p}}$ (pr gaz parfait à T cst)

Pr un gaz à T et p ambiantes :

$$\boxed{\chi_{T,gaz} \sim 10^{-5}\ Pa^{-1}}$$

Pr un liquide : $\chi_{liq} \ll \chi_{gaz}$

$$\boxed{\chi_{eau} \sim 10^{-10}\ Pa^{-1}}$$

Une déforma° peut se propager

$\Rightarrow$ déforma° longitudinale

$\Rightarrow$ propaga° d'une surpression :

$$\boxed{p(M,t) = \underbrace{P_0}_{\text{à l'équilibre}} + \underbrace{p_1(M,t)}_{\text{surpression}}}$$

À savoir :

$$\begin{cases} c_{son,air} \sim 340\ m\,s^{-1} \\ c_{son,eau} \sim 1{,}5\ km.s^{-1} \\ c_{son,solide} \sim 1 \text{ à } 10\ km.s^{-1} \end{cases}$$

Équa° couplées (ds le ref du fluide au repos)

→ Conserva° de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\mathrm{grad}}(\rho)}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho\,\mathrm{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1)$$

→ Équa° du mvt :

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}\right] = -\vec{\mathrm{grad}}(p)$$

$$+ \vec{f}_{ext,vol} + \underbrace{\cancel{\vec{f}_{visq}}}_{\text{negl}} \quad (2)$$

→ Hypothèses thermodynamique

Transforma° isentropiques : adiabatiq et réversibles

Réversible car petits déplacemt

adiab ($\neq$ échange de chal^r) car :

équa° de la chaleur : $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$

Donc pour un signal de période T :

- pdt T, l'onde de chal^r se propage de x_{chal^r} : $\frac{1}{T} = D\frac{1}{x^2}$ donc $x_{ch} = \sqrt{DT}$
- pdt T, l'onde de surpression se propage de $c_{son}.T$

Il n'y a pas transfert de chal^r si :

$$x_{ch} \ll x_{onde}$$

$$\sqrt{DT} \ll c_{son}.T$$

$$DT \ll c_{son}^2 T^2$$

$$T \gg \frac{D}{c_{son}^2}$$

$$f \ll \frac{c_{son}^2}{D}$$

Ds l'air : $D \sim 2.10^{-5}\ m^2.s^{-1}$

$c_{son} \sim 340\ m.s^{-1}$

donc $f \ll 5\,GHz$: tjs valable pr les fréquences audibles

Finalemt : isentropiq $\Rightarrow \chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S$ (3)

Approxima° acoustiq

→ Modèle linéaire :

On pose : $\rho(M,t) = \rho_0 + \rho_1(M,t)$ $\quad |\rho_1| \ll \rho_0$

$p(M,t) = P_0 + p_1(M,t)$ $\quad |p_1| \ll P_0$

$\vec{v}(M,t) = \underbrace{\cancel{\vec{v}_0}}_{\text{fluide à l'éq à t=0}} + \vec{v}_1(M,t)$

→ Linéarisa° à l'ordre 1 : $\rho_0 = cst$

(1) $\frac{\partial(\cancel{\rho_0}+\rho_1)}{\partial t} + \vec{v}_1.\vec{\mathrm{grad}}(\cancel{\rho_0}+\rho_1) + (\rho_0+\rho_1)\mathrm{div}(\vec{v}_1) = 0$

$0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\vec{v}_1.\vec{\mathrm{grad}}(\rho_1)}}_{\text{ordre 2}} + \rho_0\,\mathrm{div}(\vec{v}_1) + \cancel{\rho_1 \mathrm{div}(\vec{v}_1)}$

$$\boxed{0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\,\mathrm{div}(\vec{v}_1)} \quad (1')$$

(1) $(\rho_0 + \cancel{\rho_1})\left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \underbrace{\cancel{(\vec{v}_1.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v}_1}}_{\text{ordre 2}}\right] = -\vec{\mathrm{grad}}(\cancel{P_0}+p_1) + \cancel{\vec{f}_{ext,vol}}$

car à l'éq : $\vec{f}_{ext} = \vec{\mathrm{grad}}(P_0)$

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\mathrm{grad}}(p_1)} \quad (2')$$

(3) $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\rho_0+\rho_1} \times \frac{\rho-\rho_0}{p-P_0} = \frac{1}{\rho_0+\cancel{\rho_1}} \times \frac{\rho_1}{p_1}$

$$\boxed{\rho_1 = \chi_S \rho_0 p_1} \quad (3')$$

Équa° de propaga° (d'Alembert) :

→ Surpression :

$$\Delta p_1 = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}}(p_1))$$

$$= \mathrm{div}\left(-\rho_0\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right)$$

$$= -\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}(\vec{v}_1))$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\chi_S \rho_0 p_1)$$

d'où : $\boxed{\Delta p_1 = \underbrace{\rho_0 \chi_S}_{1/c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}}$ $\quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\chi_S \rho_0}}}$

→ vitesse (modèle unidirectionnel : $\begin{cases}\vec{v}_1(M,t) = v_1(x,t)\vec{u}_x \\ p_1(M,t) = p_1(x,t)\vec{u}_x\end{cases}$)

On reprend les équa° (1'), (2') et (3') et on les met suivant $\vec{u}_x$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \\ \rho_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \dfrac{-\partial p_1}{\partial x} \\ \rho_1 = \chi_s \rho_0 p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial}{\partial t}(\chi_s \rho_0 p_1) + \rho_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \\ \rho_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_s \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial x} \quad (a) \\ \rho_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} \quad (b) \end{cases}$$

$\dfrac{\partial (a)}{\partial x}$: $\chi_s \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t} = -\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$

$\dfrac{\partial (b)}{\partial t} = \rho_0 \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t}$

$\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\chi_s \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial t} = \rho_0 \chi_s \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$

D'où : $\boxed{\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_s \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}}$

→ célérité du son dans un GP

$P_0 = \rho_0 \dfrac{R T_0}{M}$

isentropique : $pV^\gamma = cst$

$\dfrac{dp}{p} + \dfrac{dV}{V}\gamma = 0$

$\chi_s = -\dfrac{1}{V} \dfrac{\partial V}{\partial p}\Big)_s = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{-V}{\gamma p}\right)$

$= \dfrac{1}{\gamma p} \underset{\text{ordre 0}}{=} \dfrac{1}{\gamma p_0}$

donc $c_{son} = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \frac{1}{\gamma p_0}}} = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{\rho_0}}$

donc $\boxed{c_{son} = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}}$

II - Solu° sous forme d'ondes planes : $p_1(x,t) = p_1(x,t)$, $\vec{v}_1(x,t) = v_1(x,t)\vec{u}_x$

Solu° générales

$\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c_{son}^2} \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

Solu° : $\boxed{p_1(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_{son}}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_{son}}\right)}$

On (a) donne :

$\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\chi_s \dfrac{\partial p_1}{\partial t}$

$= -\chi_s \left(f'\left(t - \frac{x}{c_{son}}\right) + g'\left(t + \frac{x}{c_{son}}\right)\right)$

On intègre p/r à x à t fixé.

$v_1 = -\chi_s \left[-c_{son} f\left(t - \frac{x}{c_{son}}\right) + c_{son}\, g\left(t + \frac{x}{c_{son}}\right)\right]$

$v_1 = \chi_s c_{son} \left[f\left(t - \frac{x}{c_{son}}\right) - g\left(t + \frac{x}{c_{son}}\right)\right]$

Cas d'une OPP selon $\vec{u}_x$

$p_1 = f\left(t - \frac{x}{c_{son}}\right)$ donc $v_1 = \chi_s c_0 f\left(t - \frac{x}{c_{son}}\right)$

$\boxed{p_1 = \dfrac{1}{\chi_s c_{son}} v_1}$

Impédance acoustiq : $\boxed{Z_{ac} = \dfrac{p_1(x,t)}{v_1(x,t)}}$

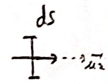
ici $Z_{ac} = \dfrac{1}{\chi_s c_{son}}$ et $c_{son}^2 = \dfrac{1}{\rho_0 \chi_s}$

$Z_{ac} = \rho_0 \cdot c_{son}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pr OPP selon } +\vec{u}_x : p_1(x,t) = \rho_0 c_{son} v_1(x,t) \\ \text{———— } -\vec{u}_x : p_1(x,t) = -\rho_0 c_{son} v_1(x,t) \end{array}}$$

III - Aspect énergetique

Puissance acoustique



puissance traversant dS :

$dP = p(x,t)\, dS\, v(x,t)$

$= (P_0 + p_1(x,t))\, dS \cdot v_1(x,t)$

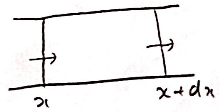
$= \underbrace{P_0 dS v_1(x,t)}_{\text{moyenne nulle}} + p_1(x,t)\, dS\, v_1(x,t)$

$\boxed{\text{Puissance acoustique} : dP_{ac} = \langle p_1 \cdot v_1 \rangle dS}$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Vect}^r \text{ de Poynting acoustiq :} \\ \vec{\Pi}_{ac} = \langle p_1 \cdot \vec{v}_1 \rangle \end{array}}$

$dP_{ac} = \vec{\Pi}_{ac} \cdot \vec{dS}$

Bilan d'ⓔ (en moyenne)



L'ⓔ acoustique reçue par le sys pdt dt vaut :

$d\mathcal{E} = \Pi_{ac}(x,t)\, dS.dt - \Pi_{ac}(x+dx,t)\, dS.dt$

$= -\dfrac{\partial \Pi_{ac}}{\partial x} dx\, dS.dt$

$= -\dfrac{\partial}{\partial x}(p_1 . v_1)\, dx\, dS\, dt$

$= -\left(p_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial x}\right) dx\, dS\, dt$

$= -\left(-p_1 \chi_s \dfrac{\partial p_1}{\partial t} - \rho_0 v_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial t}\right) dS\, dx\, dt$

$= \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\chi_s p_1^2}_{e_{p,vol}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho_0 v_1^2}_{e_{c,vol}}\Big) \underbrace{dS.dx}_{\text{volume}}.dt$

$e_{p,vol}$ ↳ ⓔ potentielle acoustiq volumiq

Intensité sonore

↳ puissance moyenne traversant $dS \perp \vec{u}_x$

$I_{ac} = \langle p_1(x,t)\, v_1(x,t) \rangle$

Pr l'OPP (selon $+\vec{u}_x$) : $p_1 = \rho_0 c_{son} v_1$

Echelle logaritmiq

Pr $f = 1\,kHz$: $\begin{cases} I_{seuil\ audi^\circ} = 10^{-12}\ W.m^{-2} \\ I_{seuil\ douleur} = 1 W.m^{-2} \end{cases}$

$\boxed{I_{ac,dB} = 20 \log\left(\dfrac{I_{ac}}{I_{ref}}\right)}$

$\begin{cases} I_{dB\ aud} : 0 dB \\ I_{dB\ doul^r} = 120\ dB \\ I_{dB,\ danger} : 85\ dB \end{cases}$

cf cours.