Chap 23 : Propagation du champ électrostatique

I- Équa° de propaga°

Dans le vide, $e = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les équa° de Maxwell deviennent :

- $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$
- $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$
- $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

→ Équa° de propaga° :

notons que : $\boxed{\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E}}$

OR : * $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = \vec{\mathrm{grad}}(0) - \Delta\vec{E}$

et $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}))$

$= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

On a donc : $-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{E}$

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Équa° de propaga° (de d'Alembert).

avec $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$

* Idem pour $\vec{B}$:

$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})) = \vec{\mathrm{grad}}(\cancel{\mathrm{div}(\vec{B})}) - \Delta\vec{B}$

$\vec{\mathrm{rot}}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{B}$

$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = -\Delta\vec{B}$

$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{B}$

soit $\boxed{\Delta\vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$

II- Onde électromagn plane progressive ds le vide (Oem PPV)

Généralités

Pr une onde plane $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$, $\vec{B} = \vec{B}(x,t)$

d'où $\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(x,t)}{\partial t^2} = \vec{0}}$

Les solu° de cette équa° st de la forme :

$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_+\left(t - \frac{x}{c}\right) + \vec{E}_-\left(t + \frac{x}{c}\right)$

~> Prenons l'OPP selon $+\vec{u}_x$

$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_+\big(\underbrace{t - \frac{x}{c}}_{\alpha}\big)$

* $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \alpha} \frac{\partial (\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \alpha}$
* $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \alpha}$

on a donc : $\boxed{\frac{\partial \cdot}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \cdot}{\partial t}}$

L'opérat° : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \cancel{\frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y} + \dots$

$\vec{\nabla} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \cdot}{\partial t} \vec{u}_x$

~> Pr l'OPP selon $-\vec{u}_x$: $\boxed{\frac{\partial \cdot}{\partial x} = +\frac{1}{c} \frac{\partial \cdot}{\partial t}}$

et $\vec{\nabla} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial t}$

$\vec{\nabla} = -\frac{1}{c}(-\vec{u}_x)\frac{\partial}{\partial t}$

Donc pr l'OPP selon $\vec{u}$:

$$\boxed{\vec{\nabla} = -\frac{1}{c} \vec{u} \frac{\partial \cdot}{\partial t}}$$

(Rappels : $\vec{\mathrm{grad}} = \vec{\nabla}$
$\mathrm{div} = \vec{\nabla} \cdot$
$\vec{\mathrm{rot}} = \vec{\nabla} \wedge$)

Transversalité des champs

→ $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

donc $0 = -\frac{1}{c} \vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial\, \vec{u} \cdot \vec{E}}{dt}$

d'où $\vec{u} \cdot \vec{E} = \mathrm{cst} = 0$ car ondes

alors $\boxed{\vec{E} \perp \vec{u}}$

→ $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{B} = 0$

$\boxed{\vec{B} \perp \vec{u}}$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ st transverses

Rela° entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$

→ $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

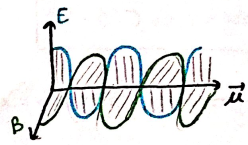
$-\frac{1}{c} \vec{u} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}\right) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

D'où pr une Oem PPV :

$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}}$ $\vec{B} \perp \vec{E}$

$\boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c} \text{ et } (\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}) \text{ trièdre direct !}}$



Rq : $\frac{\|\vec{f}_{mg}\|}{\|\vec{f}_{el}\|} = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \leq \frac{\|\vec{v}\| \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}$

$\leq \frac{\|\vec{v}\|}{c}$

$\boxed{\text{si } \|\vec{v}\| \ll c,\ \|\vec{F}_{mg}\| \ll \|\vec{F}_{el}\|}$

→ $\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}}$ D'où $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$

vecteur d'onde

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Étude énergétique

→ Vecteur de Poynting :

$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}\right)$

$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0 c}\left[(\vec{E} \cdot \vec{E})\vec{u} - \cancel{(\vec{E} \cdot \vec{u})\vec{E}}\right]$

$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2(x,t) \vec{u}$

La puissance est rayonnée suivant le sens de propaga° de l'onde, donc P_{ray} à travers une surface $S \perp \vec{u}$:

$$P_{ray} = \iint_S \vec{\pi} \cdot \vec{dS} = \iint \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2(x,t)\, \vec{u} \cdot dS\, \vec{u}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}^2(x,t) . S$$

$$\boxed{P_{ray} = c\, \varepsilon_0\, \vec{E}^2(x,t) . S}$$ car $\frac{1}{c\mu_0} = c\,\varepsilon_0$

$\langle P_{surf} \rangle = c\,\varepsilon_0 \langle \vec{E}^2(x,t) \rangle$ = intensité

→ Densité volumiq d'ⓔ elmg :

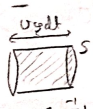
$$e_{elmg} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2(x,t) + \frac{\vec{B}^2(x,t)}{2\mu_0}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2(x,t) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\vec{E}^2}{c^2}$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2$$

$$\boxed{e_{elmg} = \varepsilon_0 \vec{E}^2(x,t)}$$

→ vitesse de l'ⓔ : $v_{\mathcal{E}}$ traversant pdt dt



$d\mathcal{E} = P_{ray}\, dt = c\,\varepsilon_0 \vec{E}^2 S . dt$

$= e_{elmg}\, d\tau = \varepsilon_0 E^2 v_{\mathcal{E}}\, dt\, S$

$$\boxed{c = v_{\mathcal{E}}}$$

⋕ Oem PPHV
monochromatiq / sinusoïdale

→ Structure :

$$* \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_y\right) \\ \quad = E_{0y} \cos(\omega t') \quad \text{chgt d'origines des dates} \\ E_z = E_{0z} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_z\right) \\ \quad = E_{0z} \cos(\omega t' + \varphi) \end{cases}$$

$$* \ \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E}$$

$$= \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge (E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z)$$

$$= \frac{1}{c} (E_y \vec{u}_z - E_z \vec{u}_y)$$

d'où : $$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{E_{0z}}{c} \cos(\omega t' + \varphi) \\ B_z = \frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t') \end{cases}$$

→ Double périodicité :

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, $\boxed{\lambda = c . T}$

→ Représenta° complexe

$E_y = E_{0y} \cos(\omega t' - kx) \longrightarrow \underline{E_y} = \underline{E_{0y}}\, e^{j(\omega t - kx)}$

* opérateurs :

$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \times j\omega$

$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \times(-jk)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{div} = \vec{\nabla} . \longrightarrow -j\vec{k} . \\ \vec{\text{rot}} = \vec{\nabla} \wedge \longrightarrow -j\vec{k} \wedge \end{array}}$$

Ds la suite on prend $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\, \vec{u}$ ($\underline{k}$ complexe)

* Equa° de Maxwell :

$-j\underline{\vec{k}} . \underline{\vec{E}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{k}$ ($\vec{E}$ transv)

$-j\underline{\vec{k}} . \underline{\vec{B}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \perp \vec{k}$ (idem)

$-j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$

$-j\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \varepsilon_0 j\omega \underline{\vec{E}}$

et : (les éventuels "-" se simplifieraient)

$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\underline{\vec{E}})) \approx \underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}})$

$= \cancel{(\underline{\vec{k}} . \underline{\vec{E}})\underline{\vec{k}}} - (\underline{\vec{k}} . \underline{\vec{k}})\underline{\vec{E}} = -\underline{k}^2 \underline{\vec{E}}$ (1)

de plus $\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = \underline{\vec{k}} \wedge \omega \underline{\vec{B}}$

$= \omega j \mu_0 \varepsilon_0 j\omega \underline{\vec{E}}$ (2)

Avec (1) et (2) :

$\underline{k}^2 \underline{E} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \underline{E}$

Donc $\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$ rela° de dispersion (lien entre k et ω)

Exemple : si $\underline{k}$ complexe :

$\underline{k} = k_1 + jk_2 \qquad \text{Re}(\underline{k}) = k_1$

$\qquad\qquad\qquad\quad \text{Im}(\underline{k}) = k_2$

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$

$\underline{\vec{E}} = \underbrace{\underline{\vec{E}_0}\, e^{-k_2 x}}_{\text{amplitude qui } \searrow \text{ si } x \nearrow} \underbrace{e^{j(\omega t - k_1 x)}}_{\text{OPP}}$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Re}(\underline{k}) = \text{propaga°} \\ \text{Im}(\underline{k}) = \left| \begin{array}{l} \text{atténua°} \\ \text{amplifica°} \end{array} \right. \text{de l'onde} \end{array}}$$

En représenta° complexe, pas de produit de f° sinusoïdales (pas $\vec{\pi}$, pas e_{elmg} ...)

mais on peut trouver les moyennes tp" :

$$\boxed{\langle f(t) . g(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}\left(\underline{f}(t) \underset{\cdot \text{ ou } \wedge}{.} \underline{g}^*(t)\right)}$$

→ Exemples et OdG, cf cours

⋕ Modèle corpusculaire

IV - Solu° ds forme d'onde sphériq :

◦ Solu°

$$\begin{cases} p_1(M,t) = p_1(R,t) \\ \vec{v}_1(M,t) = v_1(R,t)\,\vec{u}_R \end{cases}$$

$$\Delta p_1(R,t) = \frac{1}{c_{son}^2}\frac{\partial^2 p_1(R,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(R\,p_1(R,t)\right) = \frac{1}{c_{son}^2}\frac{\partial^2 p_1(R,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(R\,p_1(R,t)\right) = \frac{1}{c_{son}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(R\,p_1(R,t)\right)$$

Solu° : $R\,p_1(R,t) = f\left(t-\frac{R}{c_{son}}\right) + g\left(t+\frac{R}{c_{son}}\right)$

donc

$$\boxed{p_1(R,t) = \underbrace{\frac{1}{R}\,f\left(t-\frac{R}{c_{son}}\right)}_{\text{onde sphériq progressive selon } +\vec{u}_R \text{ (divergente)}} + \underbrace{\frac{1}{R}\,g\left(t+\frac{R}{c_{son}}\right)}_{-\vec{u}_R \text{ (convergente)}}}$$

◦ Cas de l'onde sphériq progressive sinusoïdale

PREPA AGREG

Soit R le référentiel du labo et R' un ref se déplaçant à la vitesse $\vec{u}_{R/R'}$ p/r à R. Alors le champ élec ds R est :

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{u}_{R/R'} \wedge \vec{B}}$$

et on déf le champ électromot^{r} :

$$\boxed{\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{u}_{R/R'} \wedge \vec{B}}$$

chgt de ref ds :

- ARQS mg (courants dominent les charges) : $\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u}_{R/R'} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{array}}$

- ARQS électriq (charges dominent les courants) : $\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}' = \vec{E} \\ \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \end{array}}$

La force électromotrice est

$$\boxed{e_{em} = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{l}}$$