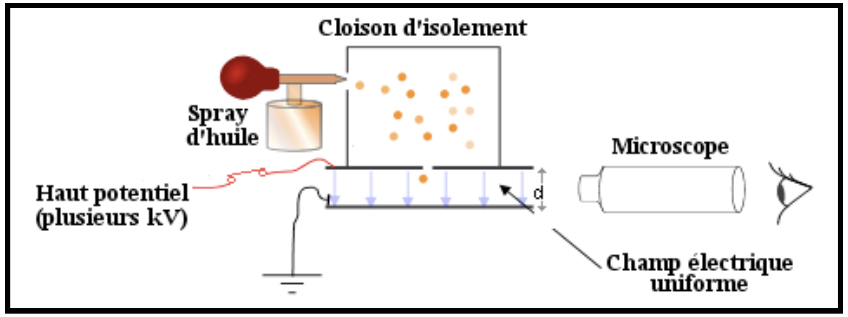
Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

- La charge électrique est localisée dans la matière
  - Expérience de Rutherford

- La charge électrique est quantifiée
  - Expérience de Millikan
  - Forces : poids, qE (vers le haut), poussée d'Archimède due à l'air, résistance de l'air
  - La mesure de la vitesse limite v_l en champ nul et du champ d'inversion E permet de déduire r et q
  - q est multiple de $1.6\ 10^{-19}$ C



$$r = 3\sqrt{\frac{\eta\, v_l}{2\, g\,(\rho_h - \rho_a)}} \qquad q = \frac{6\,\pi\,\eta\, r\, v_l}{E}$$

- On classe les particules en 3 familles ('positive', 'négative', 'neutre')
  - Classification arbitraire (B. Franklin)
    - Du verre frotté par de la soie est chargé « + »
    - De l'ambre frottée avec de la fourrure est chargé « - »
  - Comportements identiques au sein d'une même famille

- Les particules neutres sont quand même sensibles à l'EM
  - Le neutron est sensible à B par l'intermédiaire de son moment dipolaire magnétique

- La charge des quarks est 'fractionnaire', mais pas 'élémentaire'
  - Up, Charm et Top (+2/3), Down, Strange et Bottom (-1/3)
    - Proton (uud) = +1 et Neutron (udd) = 0
  - Impossible d'isoler et d'observer un quark (confinement)

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
   1. La charge électrique
   2. Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées
   3. Equation de continuité
   4. Changement de référentiel
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

- Pour avoir un sens, la densité volumique $\rho=\Delta Q/\Delta V$ ne doit pas dépendre de ΔV et doit rester insensible à un léger déplacement

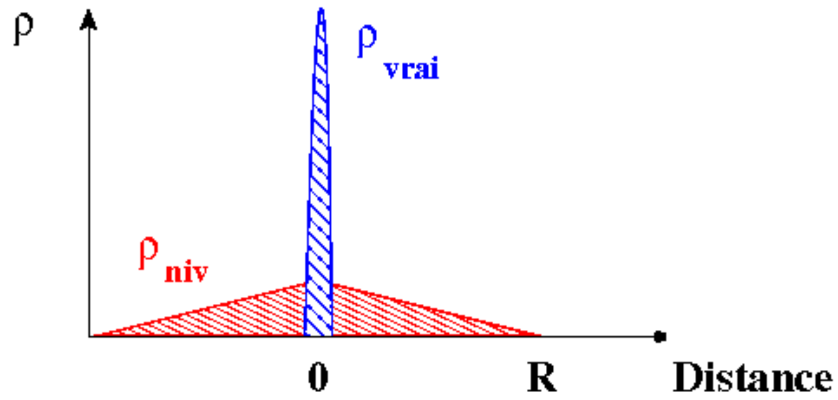
- On peut prendre une sphère de centre M et de rayon R :
  - R grand à l'échelle atomique : $R \gg 10^{-12}$ m
  - R petit à l'échelle macroscopique : $R \ll 10^{-6}$ m
  - Finalement, R doit être de l'ordre de 100 à 1000 10^{-10} m

- Or le champ à la surface d'une sphère de 100 Å = 10^{-8} m contenant une charge élémentaire vaut 1,5 10^{7} V/m

- La situation est différente de la thermodynamique où l'ajout d'une molécule ne modifie pas la pression cinétique

- Le concept de densité de charge est adapté à une échelle où la matière peut être décrite comme un milieu continu en ignorant sa structure atomique

- A plus petite échelle, on doit remplacer la densité « vraie » par une densité nivelée, s'étalant sur une grande distance
  - Théorie des distributions



- La forme de la fonction de distribution n'a pas d'importance, tant qu'elle est continue

- Il est préférable d'utiliser une fonction à symétrie sphérique, centrée sur la charge. Elle doit vérifier :

$$\iiint_{Espace} f(\vec{r})\, dV = 1$$

- Par exemple, une charge ponctuelle q_i en r_i est remplacée par la fonction continue

$$\rho_i = q_i\ f(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

  - La densité totale nivelée s'écrit : $\rho = \sum_i q_i\ f(\vec{r} - \vec{r}_i)$

- La forme de f fait que seules les charges proches de q_i apportent une contribution à ρ

- Idem pour les autres grandeurs à niveler : σ, *E*, *B*, *J*

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
    1. La charge électrique
    2. Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées
    3. Equation de continuité
    4. Changement de référentiel
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

Conservation de la charge totale d'un système isolé (1/2)

- Expérimentalement, on constate que :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dq}{dt} = 0$$

Q : charge totale contenue dans le volume V
q : charge totale sortant du volume

- D'où :

$$Q = \iiint_{(V)} \rho \, dV \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

$$\frac{dq}{dt} = I = \iint_{(\Sigma)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \, dV$$

Ostrogradsky

$$\Rightarrow \quad \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dV = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Equation de continuité

Conservation de la charge totale d'un système isolé (2/2)

- L'équation de continuité s'applique aux grandeurs nivelées

- Lorsqu'il existe plusieurs types de porteurs de charges, on peut observer de la création de paires ou de la recombinaison :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \,.\, \vec{j}_\alpha = \sigma_\alpha \quad \text{avec} \quad \sigma_\alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_\alpha \sigma_\alpha = 0$$

- Des relations analogues à l'équation de continuité sont établies pour toutes les grandeurs conservatives (énergie totale, charge totale d'un système isolé, masse totale en mécanique newtonienne)

- Cf taux de création d'entropie en thermodynamique :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\nabla} \,.\, \vec{J}_s = \sigma_s \quad \text{avec} \quad \sigma_s > 0$$

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

- La charge électrique est invariante par changement de référentiel (postulat)

- On note ρ et J les densités volumiques de charges et de courants dans (R) et ρ' et J' ces densités dans (R'), en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse u par rapport à (R)

- Un traitement relativiste est nécessaire pour une réponse exacte

- Dans le cadre de l'approximation galiléenne, on montre que :

$$\rho' = \rho \quad \text{et} \quad \vec{J}' = \vec{J} - \rho\,\vec{u}$$

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

Les phénomènes dépendant du temps avant Maxwell

- On savait que dans le vide avec une densité de charge ρ et une densité de courant J (lois déduites de l'électrostatique et de la magnétostatique) :

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0$$

Gauss

Ampère

Faraday

Conservation du flux magnétique déduite de Biot et Savart

- 1865 : Maxwell montre que le théorème d'Ampère n'est pas valable pour les phénomènes dépendants du temps :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\,.\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \equiv 0 = \mu_0\,\vec{\nabla}\,.\,\vec{J} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} \equiv 0$$

Ampère n'est valable que pour les densités stationnaires !!

Les phénomènes dépendant du temps selon Maxwell (1/2)

- Maxwell a suggéré de remplacer J dans $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ en partant de l'équation de continuité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

En supposant que Gauss reste valable pour les phénomènes variables dans le temps

Courant de déplacement ou densité volumique de courant de déplacement

- J est remplacé par $\vec{J} + \vec{J}_D$ avec $\vec{J}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

- Th. d'Ampère généralisé (ou Maxwell-Ampère) : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \vec{J}_D\right) = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Les phénomènes dépendant du temps selon Maxwell (2/2)

- Le courant de déplacement est la manière la plus simple de modifier les équations issues des expériences pour les rendre compatibles avec la conservation de la charge

- « Justification logique » uniquement pour Maxwell : il n'existait pas à l'époque d'oscillateurs à une fréquence suffisante pour mettre en évidence J_D, c'est-à-dire pour sortir de l'ARQS
  - 1871 : équations de Maxwell
  - 1879 : décès de Maxwell
  - 1888 : expériences de Hertz : études systématiques des E et B créés par des circuits oscillants avec C et L de plus en plus petites (*résonateur de Hertz*). Mise en évidence d'ondes (électromagnétiques) dont la vitesse était c !

Les phénomènes dépendant du temps après Maxwell

- On parlera désormais des équations de Maxwell dont les expressions locales dans le vide sont pour *E(t)* et *B(t)* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Maxwell-Gauss (MG) — Maxwell-Ampère (MA) — Maxwell-Faraday (MF) — (MΦ)

- De manière implicite, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Remarques :
  - Ne pas sous-estimer la contribution de Maxwell. Il ne disposait pas des mêmes outils que nous (il les a créés !)
  - Maxwell a donné un système de 8 équations à 8 inconnues. Le système qu'on utilise actuellement a été simplifié par Heaviside

Qu'est-ce que le vide selon Maxwell ?

- Un milieu suffisamment dilué pour que la matrice qui permet le transport des charges n'ait pas d'influence
  - On le modélise par « rien + des charges (ponctuelles, volumiques, surfaciques) »

- Ceci n'est plus vrai dans un milieu matériel, au sein duquel on devra distinguer les charges libres des charges liées
  - Les charges libres peuvent se déplacer au contraire des charges liées qui ne le peuvent pas
  - Dans un milieu matériel, il faut faire intervenir d'autres champs pour n'utiliser que les charges libres

- Les équations de Maxwell dans le vide font intervenir les charges libres

Notations et unités

$$\boxed{\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0}$$

- *E* : Champ électrique (V/m)
- ρ : Densité (volumique) de charges (C/m^3)
- ε_0 : Permittivité du vide (F/m)
- *B* : Induction magnétique (T)
- *J* : Densité (volumique) de courants (A/m^2)
- μ_0 : Perméabilité du vide (H/m)

$$\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \approx 9\,10^{9} \quad \text{MKSA}$$

$$\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7} \quad \text{MKSA}$$

$$\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1 \quad \text{MKSA}$$

Impédance du vide $\longrightarrow$ $Z_0 = \mu_0\,c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\,\Omega$

Valeurs exactes !

Quelques remarques (1/4)

$$\boxed{\vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \qquad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad \boxed{\vec{\nabla} . \vec{B} = 0}$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

- (MG) et (MA) traduisent le lien entre le champ et ses sources
  - Attention : (MG) et (MA) ne sont pas suffisants pour calculer le champ à partir de ses sources (théorème d'Helmholtz : un champ vectoriel ne peut être entièrement déterminé que si l'on connaît à la fois sa divergence et son rotationnel)

- On admettra que la solution est unique à ρ et J données
  - *C'est évident sans termes de couplage, « moins évident » avec*

- (MF) et (MΦ) traduisent les propriétés intrinsèques des champs

Quelques remarques (2/4)

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

- *E* et *B* sont couplés par les équations de Maxwell
  - *E* et *B* forment le champ électromagnétique. Séparation entre *E* et *B* uniquement pour les régimes permanents ou stationnaires
  - Le couplage est à l'origine de la propagation du champ EM

- Conséquence : Propagation des ondes EM dans le vide à la vitesse c

- Equations jamais mises en défaut au niveau macroscopique
  - Au niveau atomique, il faut utiliser QED

- Les équations de Maxwell et la force de Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ forment la théorie électromagnétique ou l'électromagnétisme

Quelques remarques (3/4)

$$\boxed{\vec{\nabla}\,.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \quad \boxed{\vec{\nabla}\,.\vec{B} = 0}$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

- On présente parfois les équations de Maxwell sous leurs formes intégrales :

$$\left\{\begin{array}{ll} \oiint_{(S)}\vec{E}\,.d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & \text{Théorème de Gauss généralisé} \\ \oint_{(C)}\vec{B}\,.d\vec{l} = \mu_0\left[i + \iint_{(S)}\vec{J}_D\,.d\vec{S}\right] & \text{Théorème d'Ampère généralisé} \\ \oint_{(C)}\vec{E}\,.d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\left(\iint_{(S)}\vec{B}\,.d\vec{S}\right) & \text{Loi de Faraday} \\ \oiint_{(S)}\vec{B}\,.d\vec{S} = 0 & \text{(M}\Phi\text{) généralisé} \end{array}\right.$$

Quelques remarques (4/4)

- L'utilisation des formes intégrales est parfois commode (symétries). Elle est quasiment indispensable lorsqu'on modélise un champ rapidement variable (dans l'espace ou le temps) par un champ présentant des discontinuités. Certaines dérivées partielles deviennent infinies et les équations locales sont alors inutilisables, tandis que les formes intégrales restent valables

- Attention au terme courant de déplacement : rien ne se déplace

- La non invariance des équations de Maxwell entre deux référentiels galiléens (en utilisant la transformation de Galilée) est à l'origine de la transformation de Lorentz et de la relativité restreinte

$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$

Contenu physique de MΦ (1/2)

- Calcul du flux à travers une surface *S* délimitant un volume *V* quelconque :

Ostrogradsky

$$\Psi_B = \oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0$$

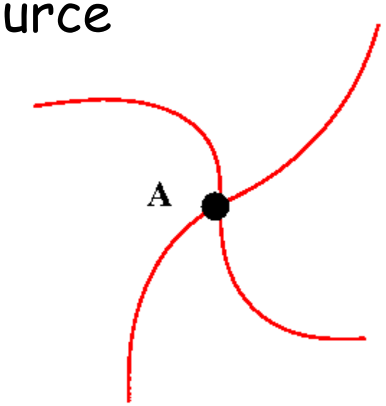
  - Le flux magnétique est conservatif (conservation du flux le long d'un tube de champ)
  - On peut calculer $\Psi_B(t)$ à chaque instant *t* à travers un contour sans préciser la surface utilisée pour le calculer (pour calculer *B* par exemple)

- *Généralisation de la loi de la magnétostatique*

$\vec{\nabla}\,.\vec{B}=0$

Contenu physique de MΦ (2/2)

- (MΦ) traduit l'allure caractéristique des lignes du champ *B* :
  - Elles ne peuvent ni diverger, ni converger à partir d'un point source



Ne peut pas représenter des lignes du champ *B* car le flux à travers une surface fermée entourant *A* ne serait pas nul

- (MΦ) traduit le fait qu'on ne connaît pas de charges magnétiques libres
  - *Ceci est à l'origine de la dissymétrie entre les rôles de E et B :* (MΦ) et (MG) ont une structure mathématique analogue mais (MΦ) ne possède pas de terme de source

Les « monopôles magnétiques »

- Dirac a essayé de symétriser les équations de Maxwell en introduisant des charges magnétiques libres ρ_m et J_m

- En admettant un principe de conservation de la charge magnétique, les équations de Maxwell seraient alors modifiées :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$$

Inchangées   Modifiées

Cette forme étendue des équations de Maxwell n'est évidement pas à retenir !!

- De toute façon, cela ne changerait rien à notre échelle car ces charges sont forcément peu nombreuses

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Contenu physique de MG

- En postulant (MG), on peut calculer le flux électrique Ψ_E à travers une surface S limitant un volume V quelconque :

Ostrogradsky

$$\Psi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \iiint_{(V)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

  - (MG) exprime la validité du théorème de Gauss pour les régimes variables

- *Ceci n'a rien de naturel car en électrostatique, on a obtenu le théorème de Gauss à partir de la loi de Coulomb (expérimentale)*

- *Mais la loi de Coulomb ne s'applique plus dans le cas de charges en mouvement !! Cf exercice 1.1*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Contenu physique de MF

- Circulation (à *t* donné) de *E* le long d'un contour *C* fixe (*S* surface quelconque) :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \,.\, d\vec{l} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \,.\, d\vec{S} = -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,.\, d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \vec{B} \,.\, d\vec{S}\right)$$

  - Dérivée du flux de *B* qui traverse *C* (le flux étant conservatif, on n'a pas besoin de préciser la surface *S*)
  - Un champ *B* dépendant du temps donne naissance à un champ *E* à circulation non conservative
  - Ceci est lié à l'induction EM

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\,\vec{J}+\varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

Contenu physique de MA (1/2)

- On introduit le courant de déplacement J_D : $\vec{J}_D=\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
  - (MA) s'écrit alors : $$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\vec{J}_D\right)$$
- On note l'intensité sous la forme : $i=\iint_{(S)}\vec{J}\,.d\vec{S}$
- Circulation (à t donné) de B le long d'un contour C fixe (S surface quelconque) :

$$\oint_{(C)}\vec{B}\,.d\vec{l}=\iint_{(S)}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\,.d\vec{S}=\mu_0\left[i+\iint_{(S)}\vec{J}_D\,.d\vec{S}\right]$$

  - Un champ E dépendant du temps est une source de champ B, au même titre qu'un courant
  - J_D ne représente ni un courant, ni un déplacement de quoi que ce soit !

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \varepsilon_0 \, \mu_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Contenu physique de MA (2/2)

$$\oint_{(C)} \vec{B} \, .d\vec{l} = \mu_0 \left(i + i_D \right) \quad \text{avec} \quad i_D = \iint_{(S)} \vec{J}_D \, .d\vec{S} = \iint_{(S)} \varepsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \, .d\vec{S}$$

- i et i_D dépendent de la surface S, mais $i+i_D$ n'en dépend pas (uniquement du contour C)
- Il est faux d'interpréter la solution de (MA) comme la superposition de 2 champs de sources J et J_D
- Le terme $J_D = \varepsilon_0 \, \partial E/\partial t$ joue un rôle de source pour le champ B, au même titre qu'un courant libre

- On lit parfois que l'influence de J_D dans (MA) est analogue à l'influence de $\partial B/\partial t$ dans (MF)
  - Cette analogie est limitée. En particulier, dans la limite des champs lentement variables, le terme en J_D disparaît et pas celui en $\partial B/\partial t$

Propagation du champ électromagnétique

- Le couplage est à l'origine de la propagation

- La théorie complète sera faite dans le chapitre sur la physique des ondes

- Modèle « à la main » :
  - Un champ B variable provoque « à coté » un champ E induit (et variable dans le temps)
  - Ce champ E variable dans le temps crée « encore à coté » un champ B variable dans le temps
  - Le champ B s'est donc propagé

Principe de superposition (1/2)

- Soient E_1 et B_1 une solution des équations de Maxwell pour les sources (ρ_1, J_1). Idem pour E_2, B_2, ρ_2 et J_2

- Les équations de Maxwell sont linéaires par rapport à E, B, ρ, J

- On en déduit (théorème de superposition) que ($\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$) est solution de ($\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2$, $\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2$)

- Cette linéarité est exploitée couramment :
  - Transmission de plusieurs conversations téléphoniques sur une fibre optique

Principe de superposition (2/2)

- La limitation pratique du théorème de superposition vient du fait qu'en mettant en présence (ρ_1, J_1) et (ρ_2, J_2), la source résultante n'est pas en général ($\rho_1+\rho_2$, J_1+J_2) - cf l'influence en électrostatique

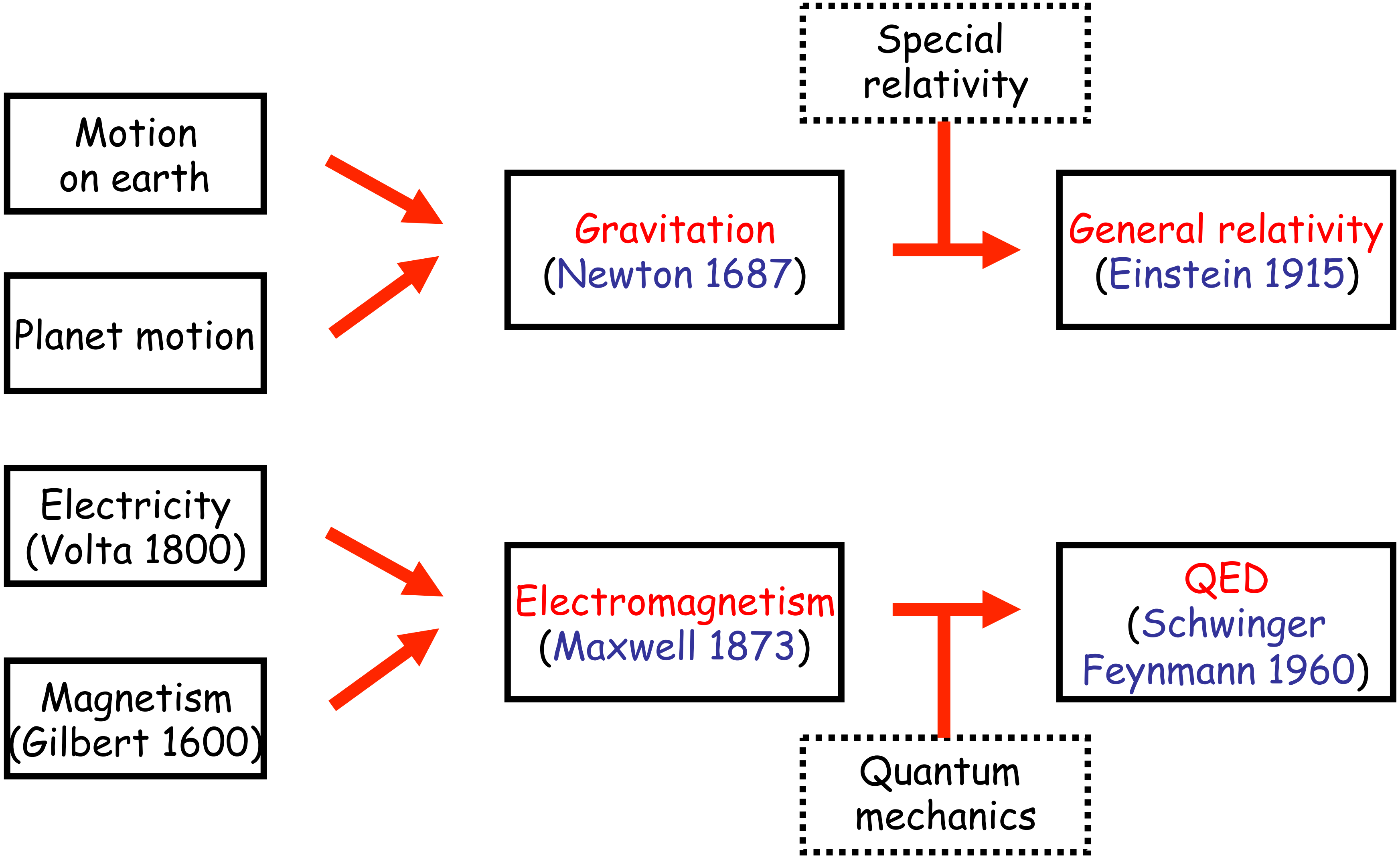
Jackson p 11

- Non linéarités d'origine quantique (diffusion photon-photon et polarisation du vide)

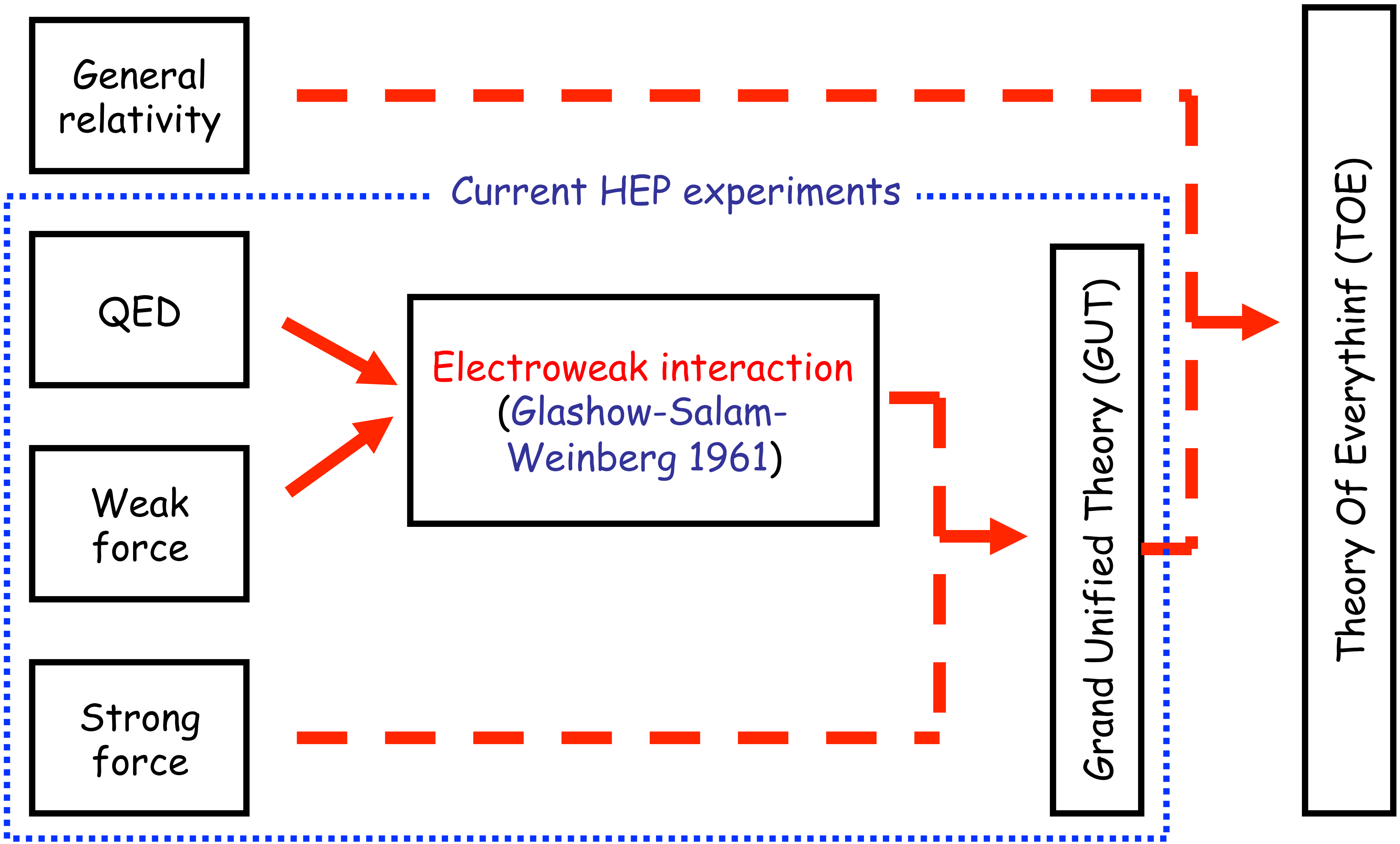
L'interaction électromagnétique et ses consoeurs

- 4 interactions fondamentales :
  - gravitationnelle (fin 18e)
  - électromagnétique (fin 19e)
  - forte et faible (20e)
- La théorie électrofaible combine EM et interaction faible (1970)
- Le modèle standard combine les interactions forte et électrofaible (fin 20e)
- Jusqu'à présent, la gravitation résiste aux tentatives d'unification

First unifications

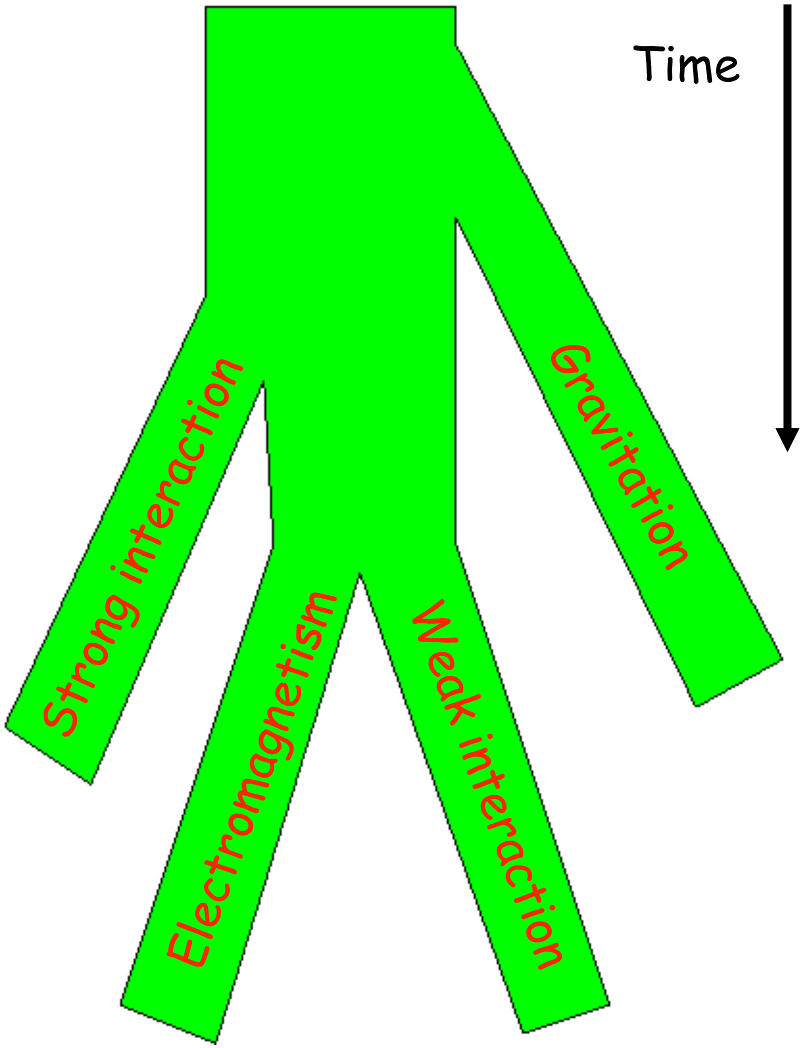


Current status of unification



Interactions splitting: link with cosmology

- $t = 0$ (Big Bang)
  - One single interaction
- $t = 10^{-43}$ s, $T = 10^{32}$ K
  - Gravitation splits
- $t = 10^{-35}$ s, $T = 10^{27}$ K
  - Strong interaction splits
- $t = 10^{-11}$ s, $T = 10^{15}$ K
  - Electroweak interaction splits
- $t = 1.4\ 10^{10}$ years, $T = 2.7$ K
  - 4 interactions



Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

- Il est parfois plus simple d'introduire des potentiels que de résoudre directement les équations de Maxwell (équations différentielles couplées du 1er ordre). On obtient alors moins d'équations, mais d'un ordre plus élevé

- Définition du potentiel vecteur *A* : $\vec{\nabla} \,.\, \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

- Définition du potentiel scalaire Φ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- Ces définitions de *E* et *B* en terme de potentiel satisfont (MF) et (MΦ) par construction

- On montre alors facilement que :

$$(MG) \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \,.\, \vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(MA) \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \,.\, \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\,\mu_0\,\vec{J}$$

Savoir refaire ce calcul

- Que se passe-t-il si on remplace $\vec{A}$ par $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ (avec Λ quelconque) ?

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

- Le champ *B* est inchangé

- Il faut alors que Φ soit modifié selon $\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ pour que *E* reste inchangé
  - Si on modifie *A* et Φ ensemble, les champs *E* et *B* ne sont pas modifiés
  - On peut faire varier Λ tout en gardant des valeurs identiques pour *E* et *B*

Jauge de Lorenz

$$\boxed{\Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 \vec{J}}$$

- On se sert de la latitude offerte par le choix de Λ pour simplifier les équations aux potentiels. On suppose qu'il existe une fonction Λ telle que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Condition de Lorenz

- Les équations aux potentiels deviennent :

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

  - Traitement identique pour Φ et *A* : équation de d'Alembert

- Ces 2 équations $\oplus$ la condition de Lorenz sont équivalentes aux 4 équations de Maxwell dans le vide

- L'ensemble des deux transformations $A \longrightarrow A'$ et $\Phi \longrightarrow \Phi'$ est une transformation de jauge. L'invariance des champs sous cette double transformation est une invariance de jauge

- La condition nécessaire et suffisante pour que A et Φ vérifient la condition de Lorenz est que Λ vérifie :

$$\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = 0$$

- On admettra qu'on peut toujours trouver Φ et A qui satisfont la condition de Lorenz

- En relativité, la condition de Lorenz exprime la nullité de la norme du quadrivecteur potentiel

Jauge de Coulomb

$$\boxed{\Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\,.\vec{A}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\,.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\,\vec{J}}$$

- Phénomènes stationnaires $\vec{\nabla}\,.\vec{A} = 0$

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \Delta\vec{A} = -\mu_0\,\vec{J}$$

Φ et *A* vérifient l'équation de Poisson (d'où le nom de « jauge de Coulomb »)

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} \Phi(M) = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\displaystyle\iiint \frac{\rho(P)}{PM}\,d^3P \\[2ex] \vec{A}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\,\pi}\displaystyle\iiint \frac{\vec{J}(P)}{PM}\,d^3P \end{cases}$$

- Φ et *A* sont les potentiels instantanés dû à ρ et *J*

Autres appellations de la jauge de Coulomb

- Comme tout vecteur, *J* peut être décomposé en deux composantes longitudinales et transverse :

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t$$

densité de courant longitudinale ou irrotationnelle :

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_l = \vec{0}$$

densité de courant transverse ou solénoïdale :

$$\vec{\nabla} . \vec{J}_t = 0$$

- On peut montrer que : $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_t$ d'où le nom de « jauge transverse »

- Egalement appelée « jauge radiative » car les champs de rayonnement sont uniquement donnés par *A*

Lorenz versus Coulomb

- Différence de comportement entre les deux jauges

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{J}$$

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ indiquent que *A* et Φ se propagent à la vitesse *c*

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\iiint \frac{\vec{J}(P)}{PM}\,d^3P$$

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(P)}{PM}\,d^3P$$

$\Rightarrow$ indiquent que *A* et Φ se propagent instantanément

- On utilisera la jauge de Coulomb pour les phénomènes pour lesquels on peut négliger le temps de propagation (dont les phénomènes statiques) et la jauge de Lorenz pour les phénomènes pour lesquels on ne peut pas négliger le temps de propagation

Lorentz ou Lorenz ?

- Ludwig **Lorenz** (1829 - 1891), physicien danois. Il introduit la jauge qui porte désormais son nom et les potentiels retardés en 1867. A ne pas confondre avec **Lorentz**. Ils entretenaient d'ailleurs des relations exécrables...

- Hendrik Antoon **Lorentz** (1853 - 1928), physicien néerlandais, prix Nobel de physique en 1902 pour sa théorie électronique de la matière. Il est également connu pour la transformation et la force qui portent son nom. A ne pas confondre avec **Lorenz**. Ils entretenaient d'ailleurs des relations exécrables...

- La jauge de Lorenz est invariante par transformation de Lorentz

- Equation de Lorenz-Lorentz :

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_i \frac{N_i\,\alpha_i}{3}$$

Remarque : effet Aharonov-Bohm

- Evidence d'une action du potentiel vecteur
  - La figure d'interférence de 2 faisceaux d'électrons est modifiée près d'un solénoïde dans une région où B est nul

A la distance r de l'axe d'un solénoïde de rayon a ($r > a$)

$$\vec{B} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{A} = \frac{a^2}{2\,r} B_0 \, \vec{u}_\theta$$

- En fait, c'est un effet quantique (mise en évidence de la quantité de mouvement potentielle qA où A est le potentiel vecteur)

- En physique classique, on supposera que les potentiels ne sont pas des observables physiques

Théories de jauge (1/2)

- H. Weyl s'intéressa vers 1920 à la construction de théories physiques indépendantes de certaines bases de référence ou de l'amplitude absolue de certains paramètres

- En EM, *E* et *B* peuvent être décrits en terme de Φ et *A*. La théorie de jauge consiste à étudier l'ensemble des transformations de ces potentiels qui laissent inchangés les champs *E* et *B*

- En mécanique quantique, la valeur absolue de la phase de la fonction d'onde n'a aucune importance pour les observables physiques calculées à partir des fonctions d'ondes
  - Une théorie décrivant le mouvement d'un électron doit être la même lorsque l'on change, partout dans l'espace, la phase de la fonction d'onde

Théories de jauge (2/2)

- *U(n)* est le groupe unitaire sur *C* d'ordre *n* i.e. le groupe multiplicatif des matrices *nxn* complexes unitaires (ie $M^*M=I_n$)

- *SU(n)* est le groupe spécial unitaire sur *C* d'ordre *n*, i.e. le groupe multiplicatif des matrices *nxn* complexes unitaires avec *det M=1*

- Les interactions forte, faible et EM obéissent toutes au même principe mathématique de symétrie de jauge :
  - L'électromagnétisme est une théorie de jauge U(1) ⇒ Le photon
  - L'interaction faible se trouve mélangée avec l'EM dans le cadre d'une théorie de jauge SU(2) x U(1)
  - La chromodynamique quantique est une théorie de jauge SU(3) ⇒ W^+, W^-, Z^0

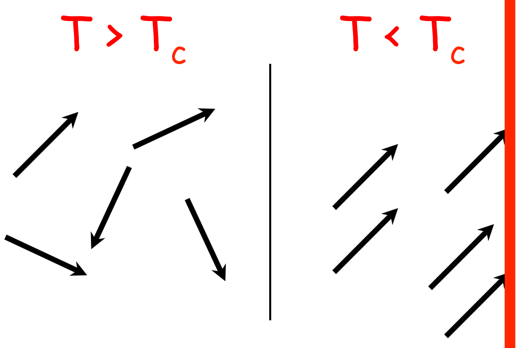
Théories de Grande Unification (GUT) : SU(3) x SU(2) x U(1) ?

Brisure de symétrie

- Comment expliquer que le photon ait une masse nulle (portée infinie de l'EM) et que les $W^{\pm}$ et Z^0 une masse élevée (l'interaction faible est à courte portée) dans la même structure de groupe ?

- La réponse fait intervenir la brisure de symétrie : des phénomènes physiques sont décrits pas des équations qui ont certaines symétries, mais les solutions de ces équations n'ont pas forcément les mêmes symétries

Si $T > T_c$, les dipôles s'orientent dans des directions aléatoires : le système est invariant par rotation.
Si $T < T_c$, ils s'orientent suivant une direction privilégiée, ce qui brise l'invariance par rotation.
Les équations qui décrivent le système sont dans les deux cas invariantes par rotation, leur solution ne l'est que dans le premier



Ferromagnétisme

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

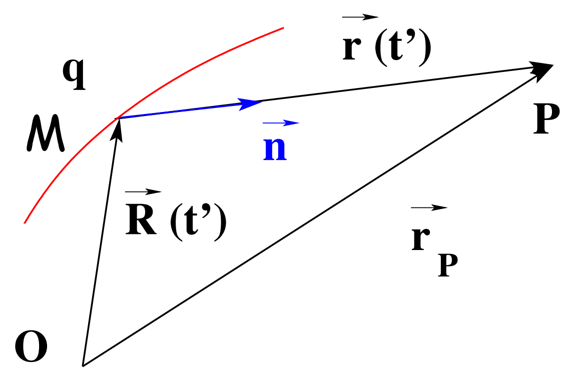
1. Distributions de charges et de courants

2. Equations de Maxwell dans le vide
    1. Equations de Maxwell
    2. Invariances de jauge
    3. Potentiels retardés
    4. Cas d'une charge unique

3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{J}}$$

$$\boxed{\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$



- Charge *q* mobile, observation en P immobile

- On doit résoudre les équations au potentiel qui sont toutes de la forme :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\vec{r}_P, t) = -f(\vec{R}, t)$$

- La résolution de cette équation est délicate (et hors programme) : voir polycopié de cours

Potentiels retardés

- Lorenz 1867 : solution des équations aux potentiels (en jauge de Lorenz) :

$$\Phi(P,t) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_{\text{Espace}} \frac{\rho\left(M, t - \frac{MP}{c}\right)}{MP}\, d^3M \qquad \vec{A}(P,t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \iiint_{\text{Espace}} \frac{\vec{J}\left(M, t - \frac{MP}{c}\right)}{MP}\, d^3M$$

  - Potentiels retardés

- Seule différence wrt aux équations statiques : prise en compte du temps de propagation MP/c

- Rq : les potentiels retardés doivent être connus ..

Les potentiels avancés

- Equation de d'Alembert : $\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,t) = g(x - v\,t) + h(x + v\,t)$

- Les équations au potentiel sont des équations de d'Alembert :

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{J}} \qquad \boxed{\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

- Les potentiels avancés sont mathématiquement solution mais sont rejetés par la causalité
  - Argument contestable (et contesté !) car les potentiels ne sont pas détectables en physique classique
  - Les potentiels retardés sont en fait une solution des eq[ons] de Maxwell dans laquelle on introduit la flèche du temps

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

Potentiels de Lienard-Wiechert

- Application des potentiels retardés à une charge ponctuelle (1898-1900) :

$$\Phi(P,t) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r\left(1-\vec{\beta}\,.\vec{n}\right)}\right]_{t'} \quad \text{et} \quad \vec{A}(P,t) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,c}\left[\frac{\vec{\beta}}{r\left(1-\vec{\beta}\,.\vec{n}\right)}\right]_{t'} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{\beta} = \dfrac{\vec{v}}{c} \\ \vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r} \end{cases}$$

  - Potentiels dits de Lienard-Wiechert. Les [ ] sont évalués à l'instant antérieur $t' = t - r/c$
  - Rq : les potentiels retardés doivent être connus ..

- A la limite des faibles vitesses, on retrouve :

$$\Phi(P,t) \;\rightarrow\; \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(M)}{MP}\,d^3M \quad \text{et} \quad \vec{A}(P,t) \;\rightarrow\; \frac{\mu_0}{4\,\pi}\iiint \frac{\vec{J}(M)}{MP}\,d^3M$$