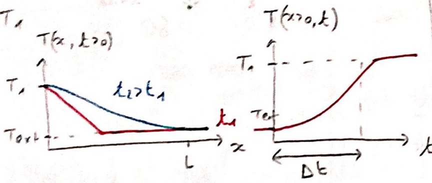
Chap 14 : Diffusion thermique

I- Notion

diffusion : transfert d'ⓔ sans transfert de matière

Bon conducteur thermiq => e- délocalisés

Graphes : à $t = 0^+$, on met un métal à la T° Text en contact en $x = 0$ avec un thermostat à la T°



II- Bilan d'ⓔ

→ Φ_{th} : flux thermiq à travers une surface S orientée

= ⓔ traversant S par unité de tps

= puissance traversant S

$[\Phi_{th}]$ = watts (W)

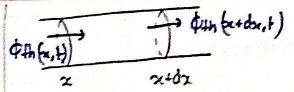
→ $\vec{j}_{th}$ existe tq $\Phi_{th} = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$

→ $\boxed{\underbrace{\delta Q}_{reçu} = \underbrace{\Delta}_{variation}\Phi_{th} \cdot dt}$ (c'est pas exactement la formule mais c'est l'idée)

→ transfert unidirectionnel :

* $\Phi_{th} = j_{th}(x,t) \cdot S$

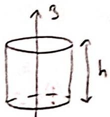
* Pr Sys entre x et $x+dx$ entre t et $t+dt$, le sys reçoit un transf therm :



$$\delta Q_{reçu} = \Phi_{th}(x,t)\,dt - \Phi_{th}(x+dx,t)\,dt$$
$$= -\frac{\partial \Phi_{th}}{\partial x}\,dx\,dt$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(j_{th}(x,t).S\right)dx\,dt$$
$$= -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} \cdot S\,dx\,dt$$

→ Transfert radial p/r à un axe

Coord cylind (R, θ, z)



$\vec{j}_{th} = j_{th}(R,t)\,\vec{u}_R$

* flux thermiq sortant du cylindre de rayon R :

$$\Phi_{th}(R,t) = \iint_{S_{lat}} \vec{j}_{th}(R,t) \cdot d\vec{S} = j_{th}(R,t) 2\pi R h$$

↳ Le flux à travers les surfaces circulaires du haut et du bas est nul car $\vec{j}_{th} \perp d\vec{S}$

* Pr Sys compris entre les rayons R et R+dR :

$$\delta Q_{reçu} = \Phi_{th}(R,t)\,dt - \Phi_{th}(R+dR, t)\,dt$$
$$= -\frac{\partial \Phi_{th}}{\partial R}\,dR\,dt$$
$$= -\frac{\partial}{\partial R}\left(2\pi R h\, j_{th}(R,t)\right) dR\,dt$$
$$= \frac{-\partial}{\partial R}\left(R\, j_{th}(R,t)\right) 2\pi h\,dR\,dt$$

→ transfert radial p/r à un pt O

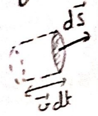
Même principe :

$\Phi_{th} = j_{th}\, 4\pi R^2$

$$\delta Q_{reçu} = -\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 j_{th}(R,t)\right) 4\pi\,dR\,dt$$

→ Cas de la convexion

Part. se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M,t)$, elles traversent dS entre t et $t+dt$ si elles sont ds le cylindre de volume $= \vec{v}(M,t)\,dt\,d\vec{S}$



- $e(M,t)$ = densité volumiq d'ⓔ
- ⓔ traversant dS pdt dt :

$$d\mathcal{E} = \underbrace{e(M,t)\vec{v}(M,t)}_{j_{th}}\,dt\,dS$$

→ Bilan d'ⓔ :

$dU = \delta Q_{reçu} + \delta W$

à p° cst : $dH = \delta Q_{reçu}$ ($+ \delta W$ autre que p°)

III- Loi de Fourier

→ Pas de transfert thermiq ($\vec{j}_{th} = \vec{0}$) si T° uniforme ($\vec{grad}(T) = \vec{0}$)

→ Le transf therm se fait des T° élevées → les plus faibles
↳ d'où le "–"

→ Loi de Fourier : $\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda\,\vec{grad}(T)}$

Dans la suite on suppose $\lambda(M,t) = \lambda$; indpdt de M et de t.

→ λ : conductivité therm

$$\lambda = \frac{[\|\vec{j}_{th}\|]}{[\|\vec{grad}\,T\|]} = \frac{[puissance].L^{-1}}{\Theta.\cancel{L}}$$

λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$

- $\lambda_{métal} \approx 100\,W.m^{-1}.K^{-1}$
- $\lambda_{eau} \approx 1{,}00\,W.m^{-1}.K^{-1}$
- $\lambda_{air} \approx 0{,}03\,W.m^{-1}.K^{-1}$

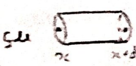
L'air est plus isolant que les matériaux

IV- Régime stationnaire sans source

→ Transfert unidirectionnel

$\vec{j}_{th}(M,t) = j_{th}(x)\,\vec{u}_x$

$\underbrace{dU = 0}_{stationnaire} = \delta Q_{reçu}$



$\Phi_{th}(x)\,dt - \Phi_{th}(x+dx)\,dt = 0$

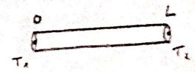
$-\frac{\partial \Phi_{th}}{\partial x}\,dx = 0$

=> Φ_{th} indpdt de x

OR $\Phi_{th} = j_{th} \cdot S = -\lambda \frac{dT}{dx} S$

$$T(x) = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} x + cst$$

⇝ Ex



$T(x) = T_1 - \frac{\Phi_{th}}{\lambda S} x$

condi limite

$T(L) = T_2 = T_1 - \frac{\Phi_{th}}{\lambda S} L$

$T_1 - T_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}\Phi_{th}$

On def la Resistance thermiq $\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{L}{S}}$

$K \cdot W^{-1}$

→ Transfert radial plr à un axe

$\vec{j}_{th} = j_{th}(R)\vec{u}_R$, $T(M) = T(R)$

Entre R et R+dR :

$$0 = dU = \delta Q_{reçu} = dH = 0$$

$$0 = -\frac{\partial \Phi_{th}}{\partial R} \cancel{dt}\, dR$$

donc Φ_{th} indpdt de R

$$\Phi_{th} = j_{th}(R) 2\pi R h = -\lambda \frac{dT}{dR} 2\pi R h$$

$$T(R) = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda 2\pi h} \ln(R) + cst$$

Si $T(R=a_1) = T_1$ et $T(R=a_2) = T_2$

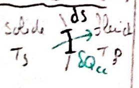
Alors $T_1 - T_2 = \frac{-\Phi_{th}}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

→ Transfert rad plr à un pt

même principe.

→ Transfert conducto-convectif à une paroi



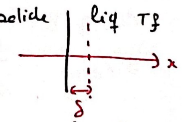
Modèle de Newton :

$$\boxed{\delta Q_{\substack{cc \\ \text{solide} \to \text{liq}}} = h(T_s - T_f)\, dS}$$

h : coeff de transfert conducto-convectif surface liq

$$[h] = \frac{[\delta Q_{cc}]}{\Theta \cdot L^2} = \underline{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}}$$

Rq (1) :



Dans la couche limite δ :

$$\Phi_{th} = -\lambda_{fluide} \frac{dT}{dx} S$$

et $\frac{dT}{dx} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_f - T_s}{\delta}$

donc $\Phi_{th} = \frac{\lambda_{fluide}}{\delta}(T_s - T_f) S$

donc $h = \frac{\lambda_{fluide}}{\delta}$

$\delta \searrow$ si vitesse fluide $\nearrow$

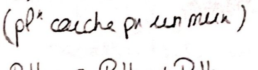
Rq (2) : pour une surface S :

$$\Phi_{cc} = h(T_s - T_f) \cdot S$$

$$\Rightarrow (T_s - T_f) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{hS}}}_{R_{th,cc}} \Phi_{cc}$$

→ Associa° de Rth en

Série :



(plr couche pr un mur)

$$R_{th_{eq}} = R_{th_1} + R_{th_2}$$

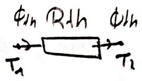
→ Association de Rth en //

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{th_1}} + \frac{1}{R_{th_2}}$$

ex cours du double vitrage dans le cours.

→ Entropie créée

En Régime permanant :



$\underline{T_1 - T_2 = R_{th}\Phi_{th}}$

2nd principe appliqué à R_{th} entre t et t+dt :

$$dS = \underbrace{S(t+dt) - S(t)}_{=0 \text{ car régime permanent}} = \delta S_{éch} + \delta S_{créé}$$

On a $\delta S_{éch} = \frac{\Phi_{th}\, dt}{T_1} + \frac{-\Phi_{th}\, dt}{T_2}$

⚠ 2 sources

On a $\delta S_{éch} = -\delta S_{créé}$

$$\delta S_{créé} = \Phi_{th}\, dt \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$= \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2 T_1}\right) dt$$

Or $\delta S_{créé} = \sigma_{créé}\, dt$

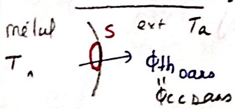
entropie créée par unité de tps

Soit $\sigma_{créé} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2} \frac{1}{R_{th}}$

Si $T_1 \neq T_2 \Rightarrow \sigma_{créé} > 0 \Rightarrow$ diffusion est irréversible

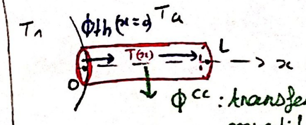
→ ♡ Ailette de Refroidissement ♡

• Sans ailette :



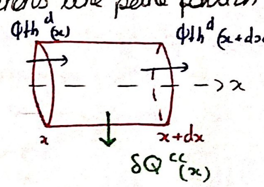
$$\Phi_{th_{sans}} = h(T_1 - T_a) S$$

• Avec ailette



Φ^{cc} : transfert conducto-convectif de coef h

Prenons une petite portion :



En régime permanent :

$$d(\delta H) = 0 = \delta Q_{reçu}$$

$$0 = \Phi_{th}^{d}(x)\cancel{dt} - \Phi_{th}^{d}(x+dx)\cancel{dt} - \delta Q^{cc}(x)\cancel{dt}$$

$$= -\frac{\partial \Phi_{th}^{d}}{\partial x} dx - h(T(x) - T_a) dS$$

$$= -\frac{d}{dx}(j_{th}^{d}(x) \cdot S) dx - h(T(x) - T_a) dS$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(-\lambda \frac{dT}{dx} \cdot S\right) \cancel{dx} - h(T(x) - T_a) \cancel{dx}$$

$$0 = \lambda S \frac{d^2T}{dx^2} - h(T(x) - T_a) P$$

$$\frac{d^2(T(x) - T(a))}{dx^2} - \underbrace{\frac{hP}{\lambda S}}_{\frac{1}{a^2}} (T(x) - T_a) = 0$$

T_a : cst

P = périmètre du cylindre.

$$a = \sqrt{\frac{\lambda S}{hP}} : \text{long}^{R}$$

$$T(x) - T(a) = A e^{-x/a} + B e^{x/a}$$

CL : $T(x=0) = T_1$

...si $L \gg a$:

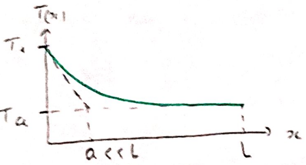
$e^{L/a} \gg 1 \Rightarrow |B|$ petit

$\Rightarrow |B| \ll |A|$

On garde : $T(x) - T_a = A e^{-x/a}$

et grâce à la CL on a :

$$\boxed{T(x) - T_a = (T_1 - T_a) e^{-x/a}}$$



On a aussi : $\phi_{th}^{d}(x=0) = -\lambda S \left.\frac{dT}{dx}\right|_0$

$= -\lambda S \frac{T_1 - T_a}{-a}$

$\phi_{th}^{d}(x=0) = \frac{\lambda S}{a}(T_1 - T_a)$

$\Rightarrow R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{a}{S}$

→ Efficacité : $\eta = \frac{\phi_{th} \text{ avec ailette}}{\phi_{th} \text{ sans ailette}}$

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\lambda P}{h S}}}$$

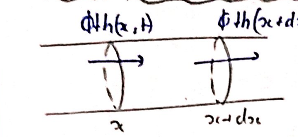
$\eta \uparrow$ si $\lambda \uparrow$ (bon cond)

$P \uparrow$ (surface lat ↑)

$S \searrow$, $h \searrow$ } non intuitif

V - Equation de la diffusion thermiq (sans source int)

→ Transfert unidirectionnel



1er principe au sys fermé :

$d(\delta H) = \delta Q_{reçu} + \cancel{\delta W_{\neq p}}$

avec : $\delta Q_{reçu} = \phi_{th}(x,t)dt - \phi_{th}(x+dx,t)dt$

$\delta Q_{reçu} = -\frac{\partial \phi_{th}}{\partial x} dx\, dt$

$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S\right) dx\, dt$

$= \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx\, dt$

avec :

$d(\delta H) = \delta H(t+dt) - \delta H(t)$

$= \frac{\partial(\delta H)}{\partial t} dt$

$= \frac{\partial(\delta H)}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt$

$= \frac{\partial(dm\, c_{pm}\, \cancel{\partial T})}{\cancel{\partial T}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt$

$= dm\, c_{pm} \frac{\partial T}{\partial t} dt$

$= \rho \underbrace{S\, dx}_{\text{volume}}\, c_{pm} \frac{\partial T}{\partial t} dt$

Donc :

$\rho \cancel{S\, dx}\, c_{pm} \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{dt} = \lambda \cancel{S} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cancel{dx\, dt}$

... do M et de t.

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_{pm}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$ équa° de diffu°

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\rho c_{pm}}}$$

→ $m^2 \cdot s^{-1}$

Vol^R : $c_{pm,eau} = 4{,}18\ 10^3\ J K^{-1} kg^{-1}$

$D_{eau,liq} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ m^2 \cdot s^{-1}$

1 pers consomme $\sim 2\,000$ cal / Jour

$\sim 8 \cdot 10^6$ J / Jour

Puissance $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{8\ 10^6}{24 \times 3600} \approx 100 W$

→ Cas général (admis)

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\, \Delta T}$$

équa° de la diffusion

Laplacien

$$\boxed{D = \frac{\lambda}{\rho c_{pm}}}$$

→ M propriété q≠ p. la diffu° de particules

→ En utilisant l'équa° de diff p. le cas stationnaire on retrouve

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}}$$

→ Approxima° des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Si ds le sys la T° varie lentem^t, le sys a le "tps" d'adopter le profil de T° du régime stationnaire

τ : durée caract d'évol de la T°

τ_{diff} durée caract de la diff

$$\boxed{\text{ARQS} : \tau \gg \tau_{diff}}$$

VI - Régime sinusoïdal forcé

→ Modèle :

$T(x=0,t) = T_0 + \Theta_0 \cos(\omega t)$

$= T_0 + \Theta_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right)$

. annuel :

$\begin{cases} \tau = 1 \text{ ans} \\ \Theta_0 \approx 20°C\ (\sim -10 \to 30) \end{cases}$

. 1 jour :

$\begin{cases} \tau = 1 \text{ jour} \\ \Theta_0 = 99\ °C \end{cases}$

On cherche

$T(x,t) = T_0 + \Theta_x \cos(\omega t + \varphi_x)$

solu° de l'équa° de diff

En représenta° complexe :

$\Theta(x,t) = \Theta(x) \cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \underline{\Theta}(x,t) = \Theta(x) e^{j(\omega t + \varphi)}$

$= \underline{\Theta}(x) e^{j\omega t}$

Donc :

$T(x,t) = T_0 + \Theta(x,t)$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\theta}(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \underline{\theta}(x,t)}{\partial x^2}}$$

→ Solu° de cette équa° :

$$j\omega \underline{\theta}(x) \cancel{e^{j\omega t}} = D \underline{\theta}''(x) \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\underline{\theta}''(x) - j\frac{\omega}{D}\underline{\theta}(x) = 0$$

Equa° caract : $\underline{R}^2 - j\frac{\omega}{D} = 0$

$$\underline{R}^2 = j\frac{\omega}{D} = e^{j\pi/2}\frac{\omega}{D}$$

$$\underline{R} = \pm e^{j\pi/4}\sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$\underline{R} = \pm (1+j)\underbrace{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}_{\frac{1}{\delta}}$$

$\frac{1}{\delta}$: δ long^a

On a donc :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2D\tau}{2\pi}}}$$

$$\underline{\theta}(x) = \underbrace{\underline{A}e^{(1+j)x/\delta}}_{x\to+\infty} + \underline{B}e^{-(1+j)x/\delta}$$

module → +∞
impossible p^t

En $x=0$: $\theta(0,t) = \theta_0\cos(\omega t) = \theta_0 e^{j\omega t}$

et $\underline{\theta}(0,t) = \underline{B}$ $\Rightarrow \underline{B} = \theta_0 e^{j\omega t}$

d'où :

$$\underline{\theta}(x,t) = \theta_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

$$\theta(x,t) = Re(\underline{\theta}(x,t)) = \theta_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

→ Interpréta°

$$\theta(x,t) = \underbrace{\theta_0 e^{-x/\delta}}_{\text{amplitude}} \underbrace{\cos(\omega t - \frac{x}{\delta})}_{\text{onde plane progressive suivant } +\vec{u}_x}$$

*) Amplitude

δ : épaisseur ds la terre où l'amplitude est notable

• $\tau = 1$ jour

$\delta = \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}$ avec $D_T = 6{,}10^{-7}\ m^2.s^{-1}$

$\Rightarrow \delta = 13cm$

et $\theta_0 = 8°C$: $|\theta_0(x,t)| \leq \theta_{max} = 1°C$

$\Rightarrow x \geq \delta \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_{max}}\right) = 27cm$

*) Onde plane

$$\cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) = \cos(\omega t + \varphi(x))$$

$$= \cos[\omega(t - \Delta t)] \text{ avec } \omega\Delta t = \frac{x}{\delta}$$

$\Delta t = \frac{x}{\omega\delta}$: décalage tp"

$$\cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) = \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

vitesse de l'onde

$$\Rightarrow \frac{1}{\delta} = \frac{\omega}{v} \Rightarrow v = \omega\delta = \omega\sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{2D\omega}$$

$$= \sqrt{\frac{2D\,2\pi}{\tau}}$$

→ Exo du fusible

cf cours