

# Chapitre 5 : « Milieux magnétiques »

- Le moment magnétique total  $d\vec{m}$  d'un petit volume  $dV$  permet de définir l'**aimantation** du milieu :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$A/m$  →

←  $A.m^2$

Aimantation : Densité volumique de moment magnétique

- «  $M$  » car *magnetization*
- L'aimantation  $M$  est une quantité macroscopique nivelée
- Sur le plan calculatoire, l'aimantation  $M$  joue pour les milieux magnétiques un rôle analogue à celui joué pour les milieux diélectriques par la polarisation  $P$

# Hypothèse d'Ampère

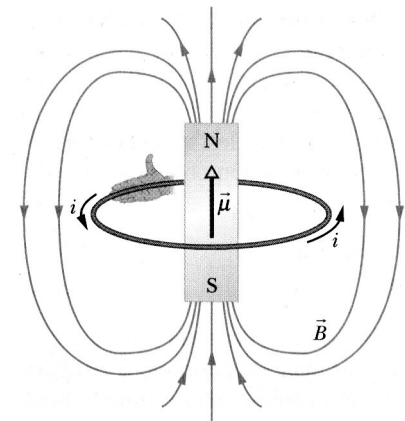
- L'expérience montre que certains milieux (**milieux aimantés**) peuvent être source de champs  $B$  important, au même titre que ceux créés par les courants qui circulent dans un conducteur
  - Par exemple, un barreau aimanté produit un champ  $B$  dont la structure est identique à celle du champ à l'extérieur d'un solénoïde de même forme



- **Hypothèse d'Ampère** : tout volume  $dV$  d'un matériau aimanté se comporte comme une boucle de courant de moment :

$$d\vec{m} = \vec{M} dV \quad \longleftarrow \quad \text{M : aimantation}$$

aussi bien du point de vue du champ  $B$  qu'il créé que des actions mécaniques qu'il subit



# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
  1. Moment magnétique orbital atomique
  2. Moment cinétique orbital atomique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

- Une particule de charge  $q$ , de vitesse  $v$ , décrivant une trajectoire fermée de surface  $S$  crée en tout point de l'espace un champ  $B$  périodique
- Situation analogue à une boucle de courant parcourue par une intensité moyenne  $I = q/T$ , possédant un **moment magnétique** :

$$\vec{m} = I \vec{S} = \frac{q}{T} \vec{S}$$

- Si on note  $\vec{r}$  un point de la trajectoire fermée ( $C$ ), le vecteur surface s'écrit :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \times d\vec{r}$$

$$\vec{m} = I \vec{S} = \frac{q}{T} \vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \times d\vec{r}$$

- On en déduit l'expression de  $m$  :

$$\vec{m} = \frac{q}{2T} \oint_{(C)} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{2T} \oint_{(C)} (\vec{r} \times q \vec{v}) dt$$

- On généralise ceci à tout mouvement, périodique ou non, tant que la particule reste localisée dans une région finie de l'espace
- On écrira finalement que le **moment magnétique orbital**, associé à une particule chargée en mouvement, sera :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \langle \vec{r} \times q \vec{v} \rangle$$

$\langle \rangle$  représente la moyenne temporelle

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
  1. Moment magnétique orbital atomique
  2. Moment cinétique orbital atomique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

- On considère tout d'abord un mouvement à force centrale. Le moment cinétique d'une particule de masse  $m$  par rapport au centre des forces est une constante du mouvement :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times m \vec{v} = \text{Cste}$$

- De même, le moment magnétique associé est constant :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r} \times q \vec{v} = \frac{q}{2m} \vec{r} \times m \vec{v} = \frac{q}{2m} \vec{\sigma}$$

- Il y a **proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique orbital**. Le coefficient de proportionnalité est caractéristique de la particule

# Rapport gyromagnétique

- Pour un atome, la situation est plus délicate mais conduit au même résultat
- Cette propriété est tout à fait générale : les faits expérimentaux associent à tout moment cinétique  $\sigma$  (nucléaire, particulaire, atomique, moléculaire) un moment magnétique  $m$  tel que :

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma} \quad \gamma : \text{rapport gyromagnétique}$$



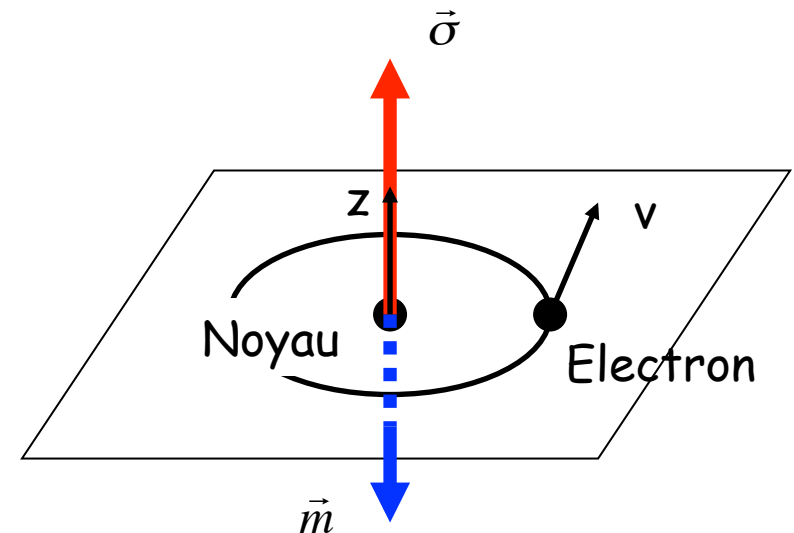
# Modèle de Bohr

- Les électrons de charge  $-e$  et de masse  $m_e$  décrivent une orbite circulaire de rayon  $r$  autour du noyau
- On assimile chaque orbite à une spire parcourue par l'intensité  $i = -e/T = -e\omega/(2\pi)$  et on lui associe un moment magnétique :

$$\vec{m} = i \pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{e\omega r^2}{2} \vec{u}_z$$

- Le mouvement orbital de l'électron est à l'origine d'un moment cinétique :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times m_e \vec{v} = m_e r^2 \omega \vec{u}_z$$



- On a donc :  $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{\sigma} \Rightarrow \gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$

Pour des électrons dans le modèle de Bohr

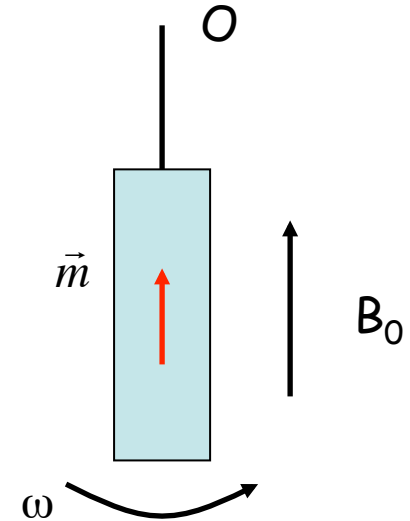
- Quantitativement, on observe plutôt pour des électrons :

$$\vec{m} = \gamma_e \vec{\sigma} = g \left( -\frac{e}{2 m_e} \right) \vec{\sigma}$$

où  $g$  caractérise l'état quantique et est appelé **facteur de Landé**

- L'expérience confirme qualitativement l'existence d'un lien entre les moments cinétiques et magnétiques :
  - Un corps dont on modifie l'aimantation se met en rotation (effet Einstein-De Hass - 1915)
  - Un corps mis en rotation s'aimante (effet Barnett - 1914)

# Effet Einstein-De Haas



- Dispositif : un barreau cylindrique de fer doux (de moment d'inertie  $I$ ) suspendu à un fil de constante de torsion négligeable est soumis à  $B_0$  parallèle à  $m$
- Comme  $B_0 \parallel m$ , le couple reste constant :  $\sigma_{tot} = \sigma_{sol} + \sigma_{el} = Cste$ 
  - $\sigma_{sol}$  : somme des moments cinétiques de chaque atome dû à la rotation autour de l'axe
  - $\sigma_{el}$  : somme des moments électroniques associés à chaque atome
- $\sigma_{tot} = 0$  si initialement le barreau est immobile
- L'apparition de  $B_0$  modifie  $\sigma_{el} = m/\gamma$  et sera compensé par la mise en rotation du barreau avec le couple  $\sigma_{sol} = I \omega = - m/\gamma$
- Expérimentalement, on obtient pour  $\gamma$  le bon signe mais environ le double de la valeur prédite : c'est le facteur de Landé !

# Facteur de Landé

- La MQ permet de calculer  $g$  :
  - Elle prédit  $g = 1$  (comme en physique classique) si les moments orbitaux sont seuls en cause
  - Elle prédit  $g = 2$  si seuls les spins sont en cause
  - Les valeurs observées résultent d'un mélange entre les contributions orbitales et de spin

- L'électrodynamique quantique conduit pour des électrons à :

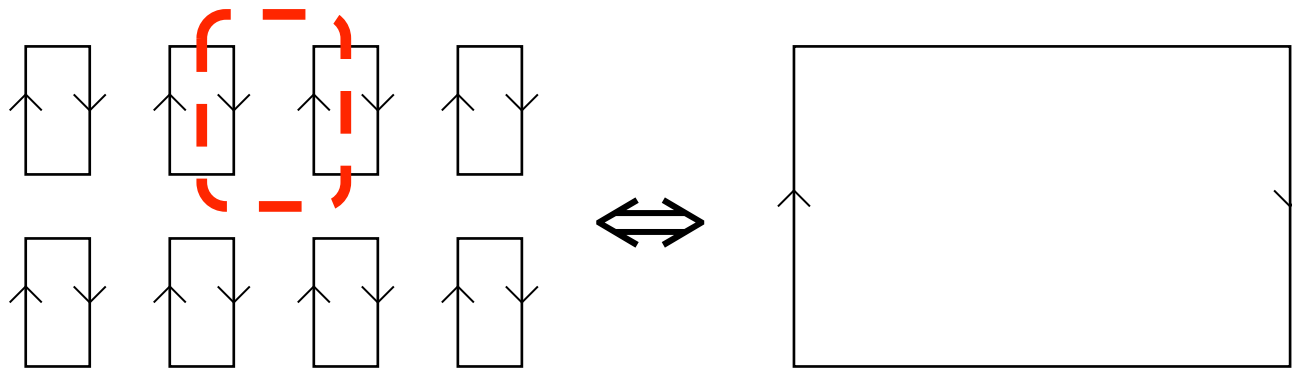
$$g = 2(1 + \varepsilon) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 1,159\,652\,4 \times 10^{-3}$$

en excellent accord avec les résultats expérimentaux. Ce test est à l'heure actuelle le plus précis de toutes les théories fondamentales de la physique moderne

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

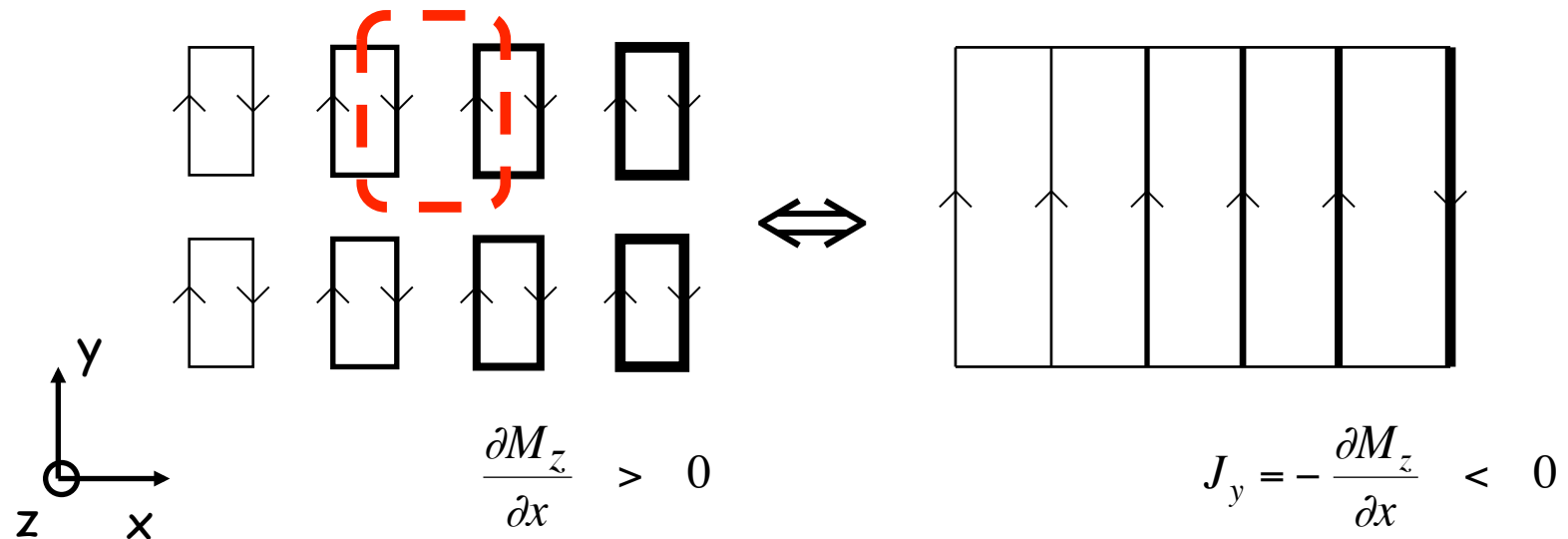
1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Approche intuitive des charges d'aimantation
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère magnétique. Champ démagnétisant
  5. Relations constitutives
  6. Séparation de deux milieux  $I_{hi}$
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

## Aimantation uniforme



- La présence de moments magnétiques identiques est équivalente à un courant surfacique

# Aimantation variable



- La présence de moments magnétiques différents est équivalente à un courant surfacique auquel on superpose un effet volumique

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Approche intuitive des charges d'aimantation
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère magnétique. Champ démagnétisant
  5. Relations constitutives
  6. Séparation de deux milieux  $I_{hi}$
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques



- On utilise une modélisation qui n'est valable que si les distances d'observation sont grandes devant l'épaisseur de la couche sur laquelle les courants se répartissent (**approximation dipolaire !**)
- Traitement analogue à celui des charges de polarisation liées. On considère le potentiel vecteur créé en  $Q$  par une aimantation  $\vec{M}$ . Finalement :

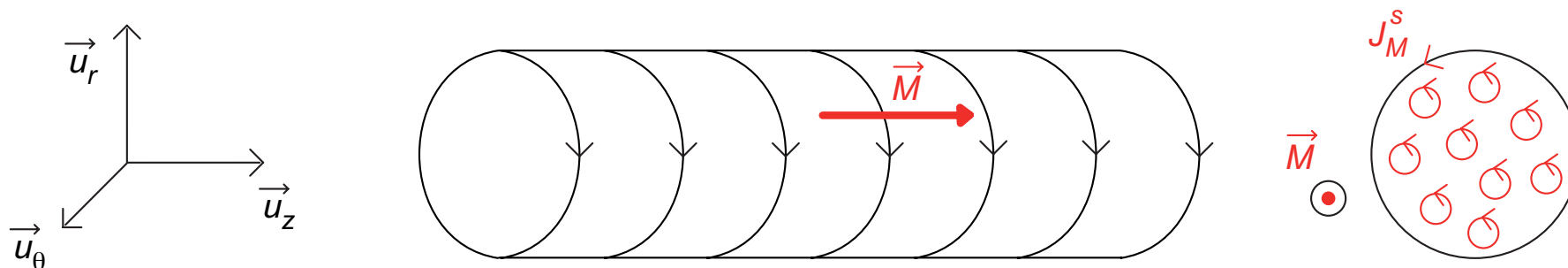
$$\vec{A}(Q) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{\nabla}_P \times \vec{M}}{r} d^3P$$

- Le potentiel vecteur est le même que celui créé par une distribution surfacique et une distribution volumique données par :

$$\vec{J}_m^S = \vec{M} \times \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad \vec{n} \text{ Normale sortante}$$

- Concept de « **courants liés** »

# Exemple d'un barreau cylindrique uniformément aimanté selon son axe



- Aimantation uniforme selon Oz :

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{J}_M^s = \vec{M} \times \vec{u}_r = M \vec{u}_\theta$$

- Interprétation : les éléments adjacents de deux « boucles de courant lié » sont opposés deux à deux. Seuls interviennent comme source de  $B$  les éléments de courant situés sur la surface du barreau qui constituent la nappe de courant surfacique
- Ces courants équivalents sont parfois appelés **courants ampériens**

- Les charges ainsi introduites sont les **charges d'aimantation**
- Ce sont des charges liées, au même titre que les charges de polarisation

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Approche intuitive des charges d'aimantation
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère magnétique. Champ démagnétisant
  5. Relations constitutives
  6. Séparation de deux milieux  $I_{hi}$
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

- Le champ  $B$  engendré par une distribution comportant à la fois des courants libres et des dipôles magnétiques vérifie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{\text{libre}} + \vec{J}_{\text{lié}})$$

avec  $\vec{J}_{\text{lié}} = \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

- On introduit le **vecteur  $H$** :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

$A/m$ 
 $T$ 
 $A/m$

□ Dimension :  $[B] = MT^{-2}A^{-1}$  et  $[H] = [M] = L^{-1}A$

- (MA) s'écrit alors simplement :

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_{\text{libre}} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} \quad \Leftrightarrow \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}}$$

## Quelques remarques sur $B$ et $H$ (1/2)

- On peut décomposer les champs  $B$  et  $H$  en deux termes produits par les courants ( $B_I$  et  $H_I$ ) et par l'aimantation ( $B_M$  et  $H_M$ ) :

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_I + \vec{H}_M$$

avec :

$$\vec{H}_I = \frac{\vec{B}_I}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{H}_M = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{M}$$

- $H_I$  est le champ créé dans le vide par les courants de conduction :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_I = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_I = \vec{J}_{\text{libre}}$$

- $H_M$  vérifie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_M = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{\mu_0 \vec{J}_{\text{lié}}}{\mu_0} - \vec{J}_{\text{lié}} = \vec{0}$$

car pas de courant libre pour  $H_M$  !!

▲  $H_M$  est donc irrotationnel (au contraire de  $H$  et  $H_I$ )

## Quelques remarques sur $B$ et $H$ (2/2)

- Les équations qui déterminent  $H_M$  sont équivalentes aux équations qui déterminent  $\varepsilon_0 E_d$  en fonction de la polarisation  $P$  qui crée  $E_d$
- $H_M$  peut donc parfois être déterminé par transposition d'un problème analogue en électrostatique/diélectrique

## Quand utiliser $B$ ou $H$ ?

- On utilisera plutôt  $H$  quand ne on connaît que les courants libres. Si on peut connaître les courants liés (donc  $M$ ), on pourra utiliser  $B$
- Dans le cas d'une aimantation uniforme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0}$$



# Importance de $H$

- L'importance pratique de  $H$  dans l'étude des milieux aimantés vient de son lien avec  $I_{libre}$ , **mesuré par les ampèremètres**
- Pour les diélectriques, on a :

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

- $D$  est beaucoup moins intéressant que  $H$  car les voltmètres ne mesurent pas  $Q_{libre}$  mais la charge totale qui dépend de  $E$  :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Approche intuitive des charges d'aimantation
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère magnétique. Champ démagnétisant
  5. Relations constitutives
  6. Séparation de deux milieux  $I_{hi}$
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

# Exemple de la sphère uniformément aimantée (1/3)

- On a uniquement un courant superficiel :  $\vec{J}_M^S = \vec{M} \times \vec{n} = M \sin(\theta) \vec{u}_\varphi$
- On peut calculer le champ à partir du potentiel vecteur : 
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{M} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \left( \iiint \frac{\vec{u}_r}{r^2} dV \right)$$
- Analogie électrostatique : on sait que 
$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{u}_r}{r^2} dV$$

est le champ d'une sphère uniformément chargée avec  $\rho$  uniforme.  
Le théorème de Gauss donne :

$$r < a \Rightarrow \vec{E}_i = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad \text{et} \quad r > a \Rightarrow \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r$$

- D'où :

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{A}_e = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r$$

# Exemple de la sphère uniformément aimantée (2/3)

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{A}_e = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r$$

- On sait que le potentiel-vecteur d'un champ  $B$  uniforme est

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

- A l'intérieur de la sphère :

- $B_i$  et  $H_i$  sont uniformes

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} - \vec{M} = -\frac{\vec{M}}{3}$$

- A l'extérieur de la sphère :

- Champ identique à celui d'un moment magnétique  $\vec{m} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{M}$

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}}{r^3} \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_e = \frac{\vec{B}_e}{\mu_0}$$

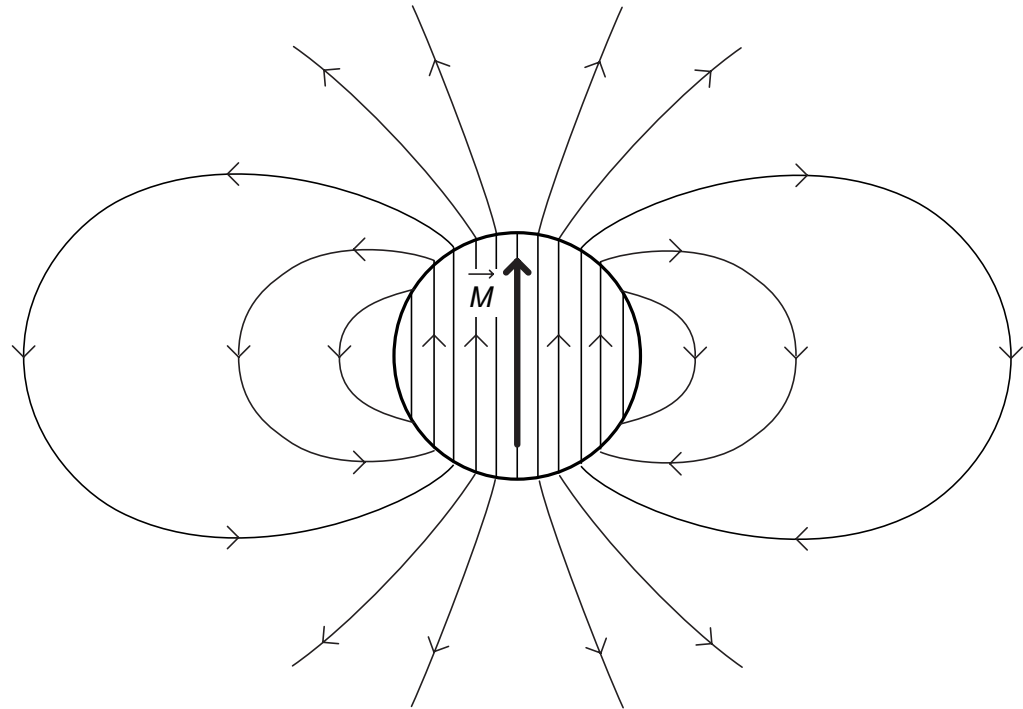
Savoir  
refaire ce  
calcul

## Exemple de la sphère uniformément aimantée (3/3)

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}}{r^3} \right)$$

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{M}$$



- Contrairement au cas d'une sphère uniformément polarisée, ce sont ici les composantes normales de  $B$  qui sont continues

- Attention, l'analogie entre  $E$  et  $H$  est purement mathématique
  - L'analogie avec les milieux diélectriques est une simple astuce mathématique pour remplacer un calcul d'aimantation par un calcul de polarisation parfois plus simple
- D'un point de vue physique, les champs  $E$  et  $B$  sont analogues, de même que les inductions  $D$  et  $H$

- L'existence d'une analogie FORMELLE entre  $E$  et  $H$  a longtemps fait prendre  $H$  pour une grandeur fondamentale, par analogie avec  $E$  ( $D$  et  $B$  étaient mis en parallèle - et appelés **induction électrique** et **induction magnétique**)

# Champ démagnétisant

- Le champ  $H_i$  créé à l'intérieur d'une sphère uniformément aimantée est :

$$\vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{3}$$

- On peut généraliser ceci et montrer que le champ  $H_i$  est toujours de sens opposé à  $M$ . On l'appelle parfois **champ démagnétisant**
  - Expression malheureuse car elle ne supprime pas l'aimantation
  - Eviter d'utiliser cette expression. Malheureusement, on la trouve dans pas mal d'ouvrages
- Attention à garder en mémoire que c'est  $B$  qui agit sur les dipôles magnétiques, et non  $H$  (**qui n'est concerné que par les charges libres**)

# Généralisation à une géométrie ellipsoïdale

Ellipsoïde : surface quelconque de l'espace à 3D

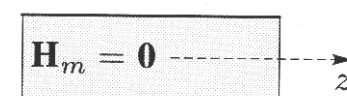
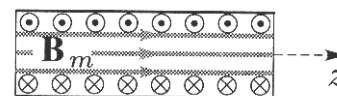
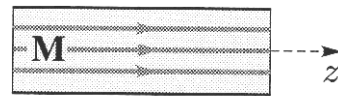
- Le champ  $B$  créé par le milieu sera de la forme  $\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 [N] \vec{M}$  où  $[N]$  est une matrice 3x3. Dans une base dont les axes coïncident avec ceux de l'ellipsoïde,  $[N]$  est diagonale et on a  $N_{xx} + N_{yy} + N_{zz} = 1$

- La sphère correspond à  $N_{xx} = N_{yy} = N_{zz} = 1/3$  d'où  $\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$

- Le cylindre est un ellipsoïde allongé ( $N_{xx} = N_{yy} = 1/2$  et  $N_{zz} = 0$ ) :

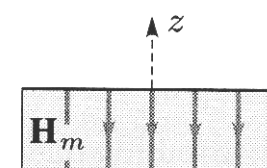
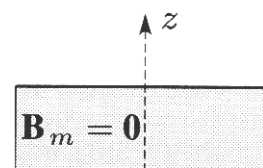
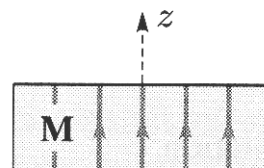
$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{H}_i = \vec{0}$$



- Une feuille est un ellipsoïde infiniment aplati ( $N_{xx} = N_{yy} = 0$  et  $N_{zz} = 1$ ) :

$$\vec{H}_i = -\vec{M} \quad \vec{B}_i = \vec{0}$$





# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Approche intuitive des charges d'aimantation
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère magnétique. Champ démagnétisant
5. Relations constitutives
6. Séparation de deux milieux  $I_{hi}$
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

# Corps diamagnétiques et paramagnétiques (1/3)

- Milieux non aimantés en l'absence de champ  $B$  qui acquièrent une faible aimantation sous l'action d'un champ  $B$  (milieux forcément linéaires) :

- Substance anisotrope

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} [\chi] \vec{B}$$

$[\chi]$  : tenseur de  
susceptibilité magnétique

- Substance homogène et isotrope (SEUL CAS CONSIDERE DANS CE COURS)

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

- ✧  $\chi_m$  (ou  $\chi$  s'il n'y a pas ambiguïté) est la **susceptibilité magnétique** (sans dimension)
- ✧ Homologue de  $P = \epsilon_0 \chi_e E$  pour les diélectriques

## Corps diamagnétiques et paramagnétiques (2/3)

- Dans la (très) grande majorité des cas,  $\chi_m$  est très faible ( $\approx 10^{-5}$  pour les liquides et les solides et  $10^{-9}$  pour les gaz) et négatif

- Corps **diamagnétique**

- Dans quelques cas ( $O_2$ , Na, Al,  $FeCl_3$ ),  $\chi_m$  est un peu moins faible (valeur max  $\approx 3 \times 10^{-3}$  pour les cristaux de  $FeCl_3$ ) et positif

- Corps **paramagnétique**

- Pour ces deux types de corps, on a :  $M \ll \frac{B}{\mu_0}$  et  $H = \frac{B}{\mu_0} - M \approx \frac{B}{\mu_0}$

- On peut donc écrire  $\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  sous la forme  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

## Corps diamagnétiques et paramagnétiques (3/3)

- Le fait que  $|\chi_m|$  soit  $\ll 1$  a une conséquence importante : le champ  $B$  créé par une substance magnétique (dia ou paramagnétique) pourra toujours être négligé devant le champ extérieur appliqué
- Pour les milieux dia et paramagnétiques, on ne fera pas la distinction entre champ appliqué, champ macroscopique et champ local (comme on l'a fait pour les diélectriques avec la correction de Lorentz)

# Corps ferromagnétiques

- Les propriétés magnétiques les plus intenses sont celles de quelques corps tels que le fer, le nickel, le gadolinium, etc..
  - Corps **ferromagnétiques**
- L'aimantation d'un ferromagnétique dépend de manière complexe du champ appliqué mais également du champ antérieur
- Il n'existe pas de relation constitutive simple et unique reliant  $B$  à  $H$  pour un ferromagnétique

# Milieux Ihi (dia ou paramagnétiques)

- Un milieu sera dit **linéaire** si :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{M} \approx \chi_m \vec{H} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \text{avec} \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

Perméabilité absolue      Perméabilité relative

- $\mu_r$  est très légèrement inférieur à 1 pour les diamagnétiques et très légèrement supérieur à 1 pour les paramagnétiques
- Cette relation est le pendant de  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  pour les milieux diélectriques
- Pour les ferromagnétiques, on écrira :  $\vec{B} = \mu(H) \vec{H} = \mu_0 \mu_r(H) \vec{H}$

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Approche intuitive des charges d'aimantation
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère magnétique. Champ démagnétisant
  5. Relations constitutives
  6. Séparation de deux milieux  $I$  et  $H$
3. Aimantation en régime variable
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

# Equations de Maxwell dans les milieux magnétiques (non diélectriques)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Il ne suffit pas de connaître

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = J_{\text{libre}} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

pour déterminer  $H$ . Il faut également connaître la **relation constitutive** entre  $B$  et  $H$

- Attention :  $H$  n'est pas nul en l'absence de « ses » sources, les courants libres ! Pour une sphère uniformément aimantée, on a  $J_{\text{libre}} = 0$  mais  $H_i = -M / 3$



## Conditions aux limites (1/2)

- Surface de séparation entre deux milieux aimantés ou un milieu aimanté et le vide
- On note :
  - Densité superficielle de courant libre sur la surface :  $\vec{K}_{libre}$
  - Normale sortante du milieu magnétique :  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$
- En se basant sur des méthodes identiques à celles des milieux diélectriques ou du vide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B}_{N2} = \vec{B}_{N1} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{libre} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H}_{2T} - \vec{H}_{1T} = \vec{K}_{libre} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right.$$

## Conditions aux limites (2/2)

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \\ \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{En supposant } K_{\text{libre}} = 0$$

- Pour un milieu linéaire :  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{H}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_1 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{H}_2 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{H}_1 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{B}_2 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_1 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right. \quad \text{En supposant } K_{\text{libre}} = 0$$

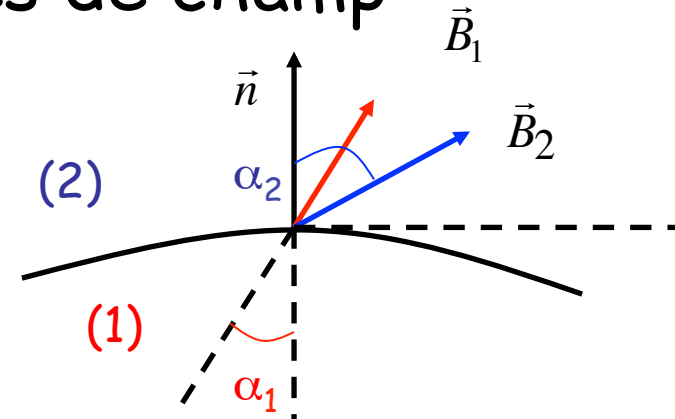
- On a parfois intérêt à utiliser la continuité de  $\vec{A}$  :  $\vec{A}_2 = \vec{A}_1$

- Les conditions de passage sur  $\vec{E}$  restent inchangés wrt au vide :  $\left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \end{array} \right.$

# Réfraction des lignes de champ

- Pour une surface sans courant libre, on introduit les angles

$$\alpha_1 = (\vec{n}, \vec{B}_1) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = (\vec{n}, \vec{B}_2)$$



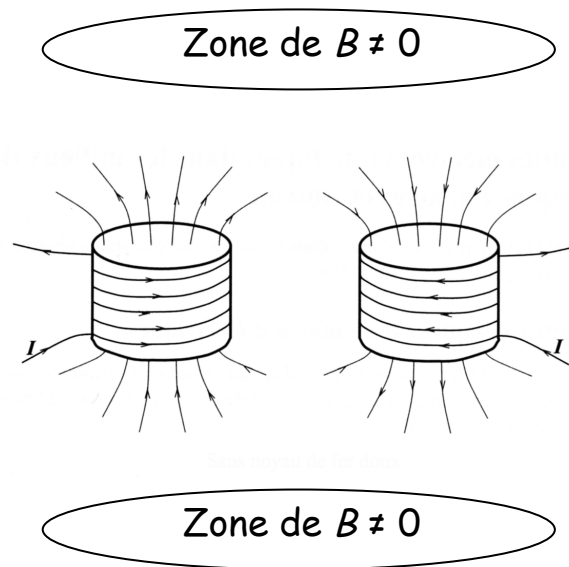
- Les relations de continuité deviennent pour un milieu linéaire :

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_{1N} = \vec{B}_{2N} &\Rightarrow B_1 \cos(\alpha_1) = B_2 \cos(\alpha_2) \\ \vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t} &\Rightarrow \frac{B_1}{\mu_1} \sin(\alpha_1) = \frac{B_2}{\mu_2} \sin(\alpha_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\tan(\alpha_1)}{\mu_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\mu_2}$$

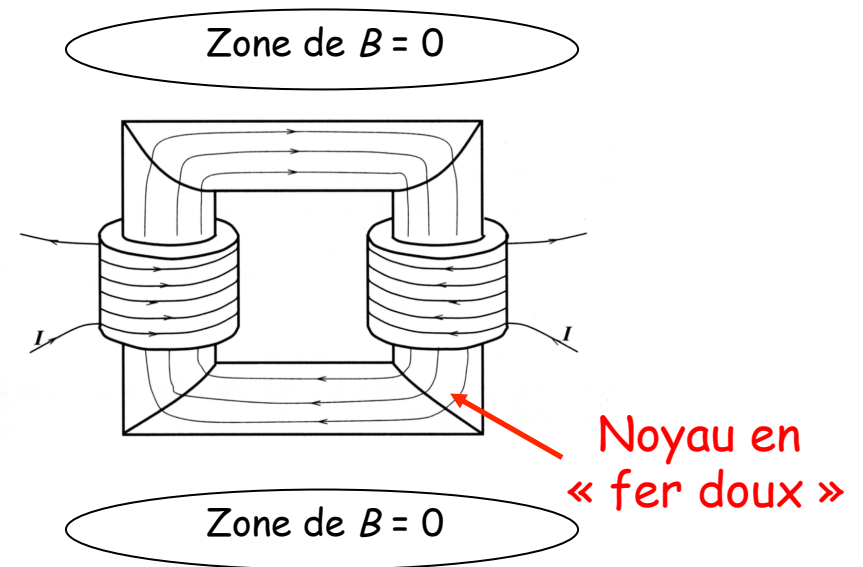
- Caractérise la **réfraction** des lignes de  $B$  : plus  $\mu$  augmente, plus les lignes de champ « se couchent » sur la surface de séparation : elles « préfèrent » passer à travers des milieux de  $\mu$  élevé

# Exemple du champ d'une bobine

- Les milieux de  $\mu$  élevé (parfois  $\gg 1000$  pour les ferromagnétiques) canalisent les lignes du champ



Les lignes de champ se répartissent dans tout l'espace



Les lignes de champ sont canalisées dans le fer doux

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
3. Aimantation en régime variable
  1. Les équations de Maxwell
  2. Une nouvelle forme pour  $\mu$  et  $R$
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

# Cas général d'un milieu quelconque

- Milieux diélectriques

- $P$  : Densité volumique de moment dipolaire (**polarisation**)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

- Charges liées (de polarisation)  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  et  $\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$

- Milieux magnétiques

- $M$  : densité volumique de moment magnétique (**aimantation**)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

- Charges liées (d'aimantation)  $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$  et  $\vec{J}_M^s = \vec{M} \times \vec{n}$

# Relations de Maxwell dans les milieux

- Deux relations intrinsèques au champ EM :  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$        $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- Deux relations reliant les sources aux champs

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} \qquad \rho_{tot} = \rho_{libre} + \rho_P \quad \text{avec} \quad \rho_P = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}_{tot} \qquad \vec{J}_{tot} = \vec{J}_{libre} + \vec{J}_P + \vec{J}_M \quad \text{avec} \quad \vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \end{array} \right.$$

ou de manière équivalente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{libre} \end{array} \right.$$

Savoir  
refaire ce  
calcul

- Les champs fondamentaux sont  $E$  et  $B$  car ils vérifient les relations intrinsèques (aux champs) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Les champs  $D$  et  $H$  rendent compte, en moyenne, des contributions des charges et des courants du milieu par l'intermédiaire de  $\rho$  et  $J$  (grandeurs moyennées)
- Ce système d'équations a un intérêt essentiellement théorique
  - Il n'existe pas (peu ?) de milieux possédant à la fois  $P$  et  $M$



# Conservation de la charge

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- En prenant la divergence de (MA) :  $0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \rho_{libre}}{\partial t}$
- Pour les charges liées :  $\vec{J}_{liée} = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  et  $\rho_{liée} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ 
  - En prenant la divergence de  $\vec{J}_{liée}$  :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{liée} + \frac{\partial \rho_{liée}}{\partial t} = 0$
- L'équation de conservation de la charge est vérifiée aussi bien pour les charges libres que pour les charges liées (donc pour les charges totales également)

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
3. Aimantation en régime variable
  1. Les équations de Maxwell
  2. Une nouvelle forme pour  $\mu$  et  $R$
4. Les divers types de milieux magnétiques
5. Aspects énergétiques des milieux magnétiques

- On cherche une nouvelle expression de  $u$  et  $R$  basée sur le formalisme en  $D$  et  $H$
- Si  $u'$  et  $R'$  existent, ils doivent vérifier la forme locale de la conservation de l'énergie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}' + \frac{\partial u'}{\partial t} = - \vec{J}_{libre} \cdot \vec{E}$$

- Pour un lhi, on peut écrire :

$$u' = \vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

Déjà vu

On verra plus tard

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \Rightarrow \quad u' = d \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}' + \frac{\partial u'}{\partial t} = - \vec{J}_{libre} \cdot \vec{E}$$

$$u' = d \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu} \right)$$

- L'identité de Poynting pour un milieu magnétique devient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \vec{J}_{libre} \cdot \vec{E}$$

- Elle est compatible avec la forme locale de la conservation de l'énergie si on pose :

$$u' = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad \text{et} \quad \vec{R}' = \vec{E} \times \vec{H}$$

- En présence d'un milieu linéaire, on utilise plutôt  $u'$  et  $R'$  que  $u$  et  $R$