Chap 17 : Le champ electrique constant

I- Le champ électrique

○ Equa° de Maxwell PR $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$\begin{cases} \boxed{\mathrm{div}(\vec{E}(M)) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}} \\ \boxed{\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}(M)) = \vec{0}} \end{cases}$$

○ Th de Gauss :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{E})\, d\tau = \oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\vec{dS}_{\text{sortant}}$$

$$\parallel$$

$$\iiint \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho(M)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{int}(\mathcal{S})$$

Donc :

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}.\vec{dS}_{\text{sortant}} = \frac{Q_{int}(\mathcal{S})}{\varepsilon_0}}$$ Th de Gauss

Le flux du champ elect sortant d'une surface FERMÉE est = à la charge ds cette surface divisée par ε_0

○ Analogie avec la gravita°

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_{1\to 2} \longleftrightarrow \vec{F}_{1\to 2} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{u}_{1\to 2}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{u}_R \longleftrightarrow \vec{g}_m = -G \frac{m}{R^2} \vec{u}_R$$

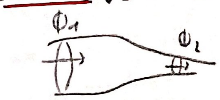
$$q \longleftrightarrow m$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \longleftrightarrow -G$$

$$\oint\!\!\oint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow \boxed{\oint\!\!\oint \vec{g}_m.\vec{dS} = -4\pi G M_{int}(\mathcal{S})}$$

○ Prop :

- $\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$: les lignes de champ $\vec{E}$ "divergent" des sources
- ds une zone sans charge : $\oint\!\!\oint \vec{E}.\vec{dS} = 0$, $\vec{E}$ est à flux conservatif et $\Phi_1 = \Phi_2$



$\boxed{\text{La norme de } E \nearrow \text{ qd les lignes de champs se resserent.}}$

II- Le potentiel electrostatiq

$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = 0$ donc ∃ un champ de scalaire $V(M)$ tq :

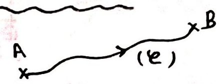
$$\boxed{\vec{E}(M) = -\vec{\mathrm{grad}}(V_{(M)})}$$

$V.m^{-1}$ — à une cst près...

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\mathrm{grad}}(V)$$
$$= -\vec{\mathrm{grad}}(qV)$$

La force electrostatiq est conservative et $\boxed{E_{P,els} = qV(M)}$

○ Circula° de $\vec{E}$:



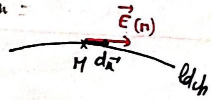
$$\int_A^B \vec{E}.\vec{dr} = \int_A^B -\vec{\mathrm{grad}}(V).\vec{dr}$$
$$= \int_A^B -dV$$
$$= \underline{V(A) - V(B)}$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_A^B -\vec{\mathrm{grad}}(qV)\vec{dr}$$
$$= -\int_A^B d(qV)$$
$$= q(V(A) - V(B))$$
$$= \underline{E_p(A) - E_p(B)}$$

○ Prop :

Le long d'une ligne de champ, ds le sens de $\vec{E}$, $\vec{E}.\vec{dr} > 0$, donc $dV < 0$ et $V \searrow$ car :

$$\vec{E}.\vec{dr} = -\vec{\mathrm{grad}}(V)\vec{dr}$$
$$= -dV$$



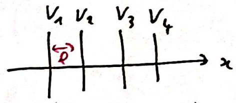
Surface équipotentielle : V y est cst donc $dV = 0$ donc

$-\vec{E}.\vec{dr} = 0$ (M' voisin de M sur equiV)

$-\vec{E}.\vec{MM'} = 0$

Donc : $\boxed{E(M) \text{ est } \perp \text{ à l'equiV en } M. \text{ Les ldch et les équiV sont } \perp}$

Si :



$$\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x \text{ et } \|\vec{E}\| \simeq \frac{DV}{Dx}$$
$$\simeq \frac{|V_2 - V_1|}{\ell}$$

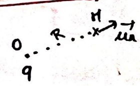
$\boxed{\text{La norme de } E \nearrow \text{ si les equiV se ressereut.}}$

OdG : $E_{Terre} \approx \underline{100 V.m^{-1}}$

$E_{disruptif} \approx \underline{10^6 V.m^{-1}}$

○ Expression de $\vec{E}(M)$ et $V(M)$

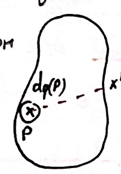
$$\boxed{\text{Loi de Coulomb} : \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{u}_R}$$



$$\vec{E}(M) = -\vec{\mathrm{grad}}(V_{(M)})$$
$$E(M)\vec{u}_R = -\frac{\partial V(M)}{\partial R} \vec{u}_R$$
$$-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{dV(M)}{dR} \Rightarrow \boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + cst}$$

Pour un ens de charge :

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \vec{u}_{P\to M}$$



$$V(M) = \iiint \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

◎ Équation de Poisson

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mathrm{div}(\vec{E}) = \mathrm{div}(-\vec{\mathrm{grad}}(V))$$
$$= -\Delta V$$

Laplacien

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ Équa° de Poisson

(Si les CL st fixées, la solu° est uniq)

III - Invariances et symétries

◎ Principe de Curie (1894)

Ts les élts de sym et d'inv des causes se retrouvent dans les effets

Ici : cause : distrib° de charges
effets : champ électriq (force élect)

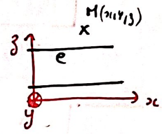
→ Les inv permettent de trouver q'elles variables d'espaces interviennent

→ Les sym permettent de trouver les direc° (du champ élect).

◎ Invariances

* Par transla°

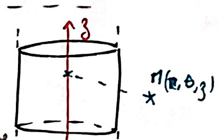
ρ uniforme entre les deux plaq.



La distrib de charge est inv par transla° suivant $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$ donc le champ est indpdt de x et y. $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$

* Par rota° autour d'un axe

ρ uniforme ds le cylindre.



La distrib de charge est inv par rota° autour de Oz et par transla° selon $\vec{u_z}$, donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

◎ Symétries

Il faut trouver un (ou pl^rs) plan de sym qui ne modifie pas la distrib de charge et qui passe par M

En tt pt M d'un plan de sym de la distrib de charge, le champ élec $\vec{E}$ est // à ce plan. $\vec{E}(M) \in \Pi_S(M)$

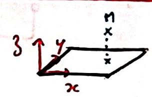
IV - Exemples

Cf le cours pr bien les connaître

◎ Résumé

→ Plan ∞ uniformém^t chargé en surface : σ uniforme

$$\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{u_z}$$

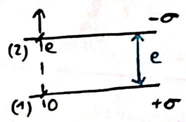


$E(-z) = -E(z)$

$$\boxed{\begin{aligned} E(z) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } z>0 \\ E(z) &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } z<0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{n}_{plan\to M}}$$

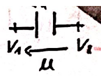
→ Condensat^r plan



$\vec{E}_{ext} = \vec{0}$ $\quad$ $\boxed{\vec{E}_{int} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_z}}$

$$\boxed{U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e \Rightarrow \vec{E}_{int} = \frac{U}{e} \vec{u_z}}$$

$Q_1 = C(V_1 - V_2)$
$Q_1 \to \sigma S$; C : capacité



$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}}$$
F

$$\boxed{\mathcal{E}_{cond} = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{1}{2} C u^2(t)}$$

Densité volumiq d'é élect :

$$\boxed{e_{el}(M,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}(M,t)^2}$$

→ Sphère

Énergie de constitu° d'un noyau atomiq :

$$\boxed{\mathcal{E}_{const} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

À l'ext de la sphère : $r \geq R$

$$\boxed{\vec{E}_{ext}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r}}$$

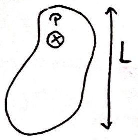
À l'int de la sphère : $r \leq R$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_{int} &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\vec{u_r} \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{OM} \end{aligned}}$$

→ Cylindre

- - -

→ Dipôle électrostatiq



Mmt dipolaire :

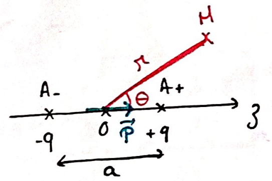
$$\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \, \vec{OP_i}}$$

↳ c.m

ou $\vec{p} = \iiint \vec{OP} \, dq(P)$

Pour un pt M "loin" du dipole, le dipole va générer un champ et un potentiel en M :

* Potentiel :



$\vec{p} = qa\vec{u_z}$

$$\boxed{V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0 \, OM^3}$$

$V \propto \frac{1}{r^2}$

× Champ élect créé

$\vec{E}(M) = -\vec{grad}(V(M))$

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

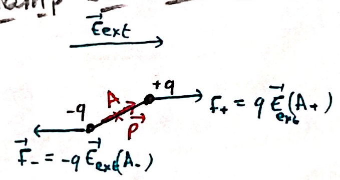
$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= \frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{aligned}}$$

$\|\vec{E}\| \propto \frac{1}{r^3}$

× Equa° des ld ch

⋮

× actions subies par un dipole permanent placé ds un champ élect ext $\vec{E}_{ext}$



$\vec{F_+} = q\vec{E}_{ext}(A_+)$

$\vec{F_-} = -q\vec{E}_{ext}(A_-)$

F_- et F_+ créent un mmt qui fait tourner le dipôle => rota° pour aligner $\vec{p}$ à $\vec{E}_{ext}$. De plus si $\vec{E}_{ext} \neq$ uniforme, translat° du dipôle ↝ les endroit où $\|\vec{E}\|$ est le plus gd

• Energie potentielle du dipole :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext}}$$ ♡ (en A)

$\mathcal{E}_p$ doit décroître pr évolu° spontanée du dipole. → alignemt du dipole → $\vec{p}$ ↗ $\|\vec{E}\|$ plus gde.

• Moment des forces :

$$\boxed{\vec{m} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}(A)}$$ ♡

• Force : $\boxed{\vec{F} = \vec{grad}(\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext})}$

× Interac° moléculaires

→ Dipole permanent

Energie d'intérac° entre 2 dipoles :

$\vec{E}_1$ du champ 1 et $\vec{E}_2$ du champ 2

$\mathcal{E}_{p,1} = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2(A_1) \propto \left(\frac{1}{r^3}\right)$

→ Dipole induit

Dans un champ ext $\vec{E}_{xt}$, forma° d'un mmt dipolaire induit

$\vec{p}_{ind}$ → $\vec{E}_{ext}$

A- A+

On pose :

$$\boxed{\vec{p}_{ind} = \alpha \, \varepsilon_0 \vec{E}_{ext}}$$

↳ polarisabilité (volume, $[\alpha] = L^3$)

* Modèle de Thomson (cf cours)

* Modèle polarisabl ds $\vec{E}_{ext}$

$\vec{p}_{ind} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}_{ext}$ et $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{grad})\vec{E}_{ext}$

$\vec{p}_{ind} = \alpha\varepsilon_0 E_{ext} \vec{u_x}$

$\vec{p}\cdot\vec{grad} = \alpha\varepsilon_0 E_{ext} \frac{\partial}{\partial x}$

$(\vec{p}\cdot\vec{grad})\cdot\vec{E}_{ext} = \alpha\varepsilon_0 E_{ext} \frac{\partial E_{ext}}{\partial x}\vec{u_x}$

$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\alpha\varepsilon_0 \frac{1}{2} E_{ext}^2(x)}\right)$

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0 \vec{E}_{ext}^2(x)}$$

× Distribu° de charges ...