B. Lois du rayonnement thermique

Un corps noir est un système macroscopique : le nombre de photons qu'il contient est énorme. Les mesures que l'on effectue sur le rayonnement du corps noir sont donc essentiellement de nature classique. Les propriétés des gaz de photons établies au paragraphe A permettent de comprendre les résultats de ces mesures.

1. LOI DE PLANCK

La loi fondamentale, dont se déduisent toutes les autres, concerne la *densité spectrale d'énergie électromagnétique* $u(\omega; T)$ dans le corps noir : $u(\omega; T)\mathrm{d}\omega$ représente la densité d'énergie électromagnétique (par unité de volume), située, à la température T, dans la bande de pulsations $(\omega, \omega+\mathrm{d}\omega)$. Max Planck découvrit d'abord cette loi de manière empirique, avant de la démontrer à partir de la notion de *quantification.* Nous verrons effectivement (paragraphe d ci-dessous) que la densité spectrale d'énergie observée dans le corps noir est en contradiction flagrante avec les prédictions de la théorie ondulatoire classique de l'électromagnétisme.

a. Démonstration de la loi de Planck

Dans le volume macroscopique V du corps noir, les énergies individuelles possibles pour chacun des photons du gaz peuvent être considérées comme pratiquement continues (cf. formules (III.6) et (III.3)). Lorsque l'équilibre est établi à la température T du thermostat, le nombre d'occupation moyen d'un état individuel d'énergie ε est donné par (III.18); nous l'écrirons

$$N^P(\varepsilon; T)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\varepsilon/kT}-1}\,. \qquad \text{(III.19)}$$

Nous supposons le système suffisamment grand pour que les fluctuations y soient négligeables *(limite thermodynamique).* Dans ces conditions, le nombre $\mathrm{d}N(\varepsilon; T)$ de photons du gaz qui, à la température T, ont une énergie individuelle comprise entre ε et $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ s'obtient en multipliant le nombre $N^P(\varepsilon; T)$ de photons qui occupent chacun des états individuels de cet intervalle d'énergie par le nombre $\rho(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$ de tels états ($\rho(\varepsilon)$ étant la densité d'états individuels) :

$$\mathrm{d}N(\varepsilon; T)=N^P(\varepsilon; T)\rho(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\,. \qquad \text{(III.20)}$$

Comme chacun d'eux a l'énergie ε (à $\mathrm{d}\varepsilon$ près), l'énergie totale $\mathrm{d}E(\varepsilon; T)$ de cet ensemble de photons vaut

$$\mathrm{d}E(\varepsilon; T)=\varepsilon\ \mathrm{d}N(\varepsilon; T)\,. \qquad \text{(III.21)}$$

Or l'énergie ε d'un photon est simplement proportionnelle à la pulsation ω de l'onde électromagnétique associée (relation de Planck (III.5.b)); l'expression (III.21) représente alors une fraction de l'énergie électromagnétique existant dans le corps noir à la température T, la fraction $\mathrm{d}E(\omega; T)$ portée par les ondes dont la pulsation est comprise entre ω et $\omega+\mathrm{d}\omega$. On calcule facilement $\mathrm{d}E(\omega; T)$ à partir des formules (III.21), (III.20), (III.11) et (III.5.b); on trouve ainsi que *cette énergie est proportionnelle au volume V de l'enceinte :*

$$dE(\omega; T)=Vu(\omega; T)\mathrm{d}\omega\,, \qquad \text{(III.22)}$$

La *densité spectrale par unité de volume* $u(\omega; T)$ ayant pour expression

$$\boxed{u(\omega; T)=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1}} \qquad \text{(III.23)}$$

Ce résultat constitue la *loi de Planck pour le rayonnement du corps noir*[81].

b. Discussion : validité de la loi

Insistons sur le fait que la loi de Planck (III.23) n'est valable que dans les cas où le rayonnement est à l'*équilibre thermique* avec un thermostat de température T.

Cette restriction est importante dans la pratique, car les phénomènes d'émission ou d'absorption de rayonnement par la matière se produisent le plus souvent dans des conditions hors d'équilibre : dans le cas par exemple de l'éclairage par une lampe électrique ou du chauffage électrique par rayonnement infrarouge, il y a transformation irréversible (et donc hors d'équilibre) d'énergie électrique en énergie de rayonnement; de même, le rayonnement solaire est produit par les réactions nucléaires qui ont lieu à l'intérieur du soleil et qui consument peu à peu sa substance; au niveau microscopique également, l'émission d'un photon par un atome excité est très souvent un retour irréversible de l'atome à son état fondamental (émission spontanée hors d'équilibre). Dans le cas du corps noir, au contraire, le rayonnement est confiné à l'intérieur d'une enceinte fermée (on laisse éventuellement une fraction négligeable de ce rayonnement s'échapper à l'extérieur pour y être soumise aux mesures) et peut ainsi parvenir à l'équilibre thermique avec les parois.

La loi de Planck, que nous avons déduite au paragraphe a de considérations théoriques, est *parfaitement vérifiée par l'expérience,* dans tout le domaine de températures accessible.

c. Courbe de répartition spectrale de l'énergie

Traçons la courbe représentative de $u(\omega; T)$ comme fonction de la pulsation ω des ondes, à température T fixée. Aux faibles fréquences, c'est-à-dire pour $\hbar\omega \ll kT$, on peut développer l'exponentielle, et on trouve facilement la *«formule de Rayleigh-Jeans»* (voir paragraphe d ci-dessous) :

$$u(\omega; T) \simeq \frac{kT}{\pi^2 c^3}\,\omega^2 \quad \text{pour } \hbar\omega \ll kT\,. \tag{III.24}$$

La courbe part donc de $\omega = 0$ comme une parabole. A haute fréquence au contraire, le terme 1 du dénominateur devient négligeable devant l'exponentielle, de sorte que

$$u(\omega; T) \simeq \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\,\omega^3\,\mathrm{e}^{-\hbar\omega/kT} \quad \text{pour } \hbar\omega \gg kT\,. \tag{III.25}$$

La fonction décroît donc exponentiellement dans la partie supérieure du spectre (*«loi de Wien»,* découverte empiriquement en 1893). On calcule enfin facilement la pulsation ω_m qui rend $u(\omega)$ maximale[82] :

$$\omega_m = 2{,}821\,\frac{kT}{\hbar}\,. \tag{III.26}$$

---

81. Ce résultat est ici exact, et non pas approché comme pour les fermions et les bosons, car les interactions entre photons sont nulles (cf. notes 73 et 74).

82. Pour T fixée, le maximum de $u(\omega; T)$ s'obtient en calculant par exemple sa dérivée logarithmique :

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial\omega} = \frac{3}{\omega} - \frac{\hbar}{kT}\frac{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1} = \frac{3}{\omega} - \frac{\hbar}{kT}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega/kT}}\,. \tag{1}$$

La valeur ω_m de la pulsation qui annule cette dérivée est donc donnée par l'équation

$$\mathrm{e}^{-x_m} = 1 - \frac{x_m}{3}\,, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$x_m \mathrel{\hat=} \frac{\hbar\omega_m}{kT}\,. \tag{3}$$

.../...

La courbe a alors l'allure représentée sur la figure 13.

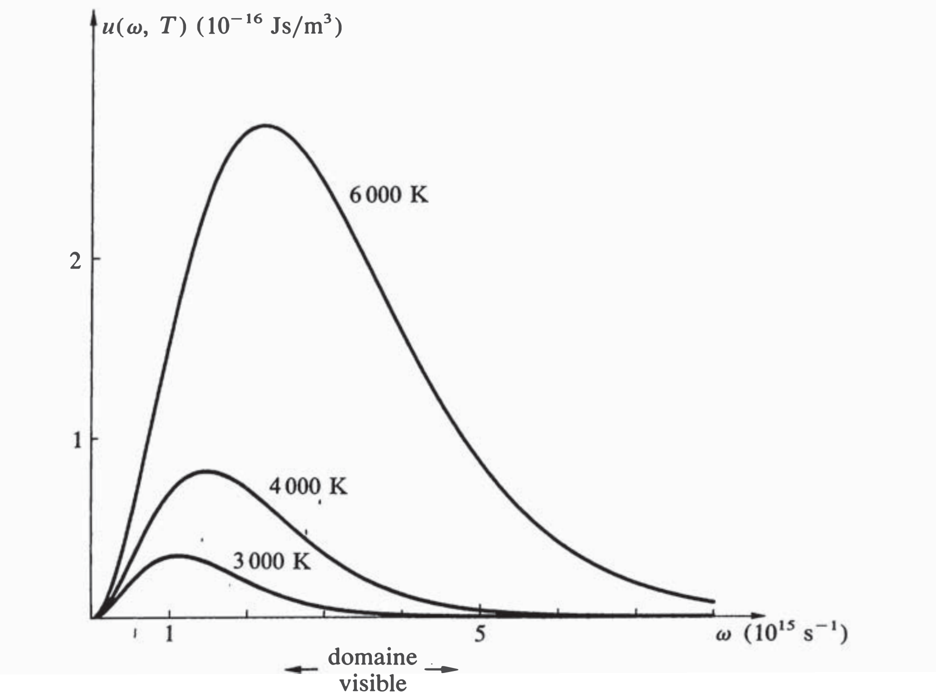

FIGURE 13

Densité spectrale d'énergie (par unité de volume) dans le corps noir, pour trois températures différentes. Outre le déplacement du maximum vers les hautes fréquences, on constate, lorsque T croît, une augmentation rapide de l'énergie totale, représentée par l'aire sous la courbe (l'énergie totale est proportionnelle à T^4. Voir formule (III.35)).

La forme générale de cette courbe est la même quelle que soit la température T, mais ses caractéristiques varient avec T. C'est ainsi que (formule (III.26)) *la position ω_m du maximum se déplace proportionnellement à T;* ce résultat, initialement déduit de l'étude empirique des courbes expérimentales, porte le nom de *«loi du déplacement de Wien»*. Il est facile de calculer par exemple[83] que le maximum de la

L'équation (2) admet une seule racine positive (outre $x_m = 0$), que l'on peut déterminer numériquement ou graphiquement :

$$x_m = 2{,}821\,44\ldots . \tag{4}$$

D'où le résultat (III.26).

83. Le domaine visible s'étend approximativement, en termes de longueurs d'onde λ, de $\lambda_V = 4000$ Å à $\lambda_R = 8\,000$ Å. Les pulsations correspondantes sont

$$\omega_V = \frac{2\pi c}{\lambda_V} \simeq 4{,}7 \times 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1} \tag{1}$$

.../...

courbe atteint la limite inférieure du domaine visible pour $T \simeq 6\,000$ K. Il apparaît immédiatement sur l'expression (III-23) que $u(\omega;\, T)$ croît rapidement avec T pour ω fixée quelconque; en d'autres termes, la courbe associée à une température T_2 est tout entière située au-dessus de celle qui correspond à T_1 si $T_2 > T_1$. De façon plus précise, nous montrerons plus loin que *l'aire située sous la courbe varie comme* T^4 (formule (III-35)).

d. Limite de basse fréquence et formule classique

Dans la *théorie ondulatoire classique* de l'électromagnétisme, chacun des modes propres de la cavité se comporte, du point de vue énergétique et statistique, comme un oscillateur harmonique à une dimension de même pulsation[84]. Or on sait, grâce au *théorème d'équipartition de l'énergie* (III, § V.C), lui aussi valable dans le cadre classique, que l'énergie moyenne d'un tel oscillateur harmonique est égale à kT. La physique classique prédit donc une densité spectrale d'énergie égale au produit de kT par la densité de modes propres :

$$u^{\text{cl}}(\omega;\, T) = kT \frac{1}{V} \tilde{\rho}(\omega)\,. \tag{III.27}$$

---

et $$\omega_R = \frac{2\pi c}{\lambda_R} \simeq 2{,}4 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}\,. \tag{2}$$

On a donc

$$\omega_m \simeq \omega_R \quad \text{pour } T \simeq \frac{\hbar\omega_R}{2{,}821k} \simeq 6\,300\ \text{K}\,. \tag{3}$$

De même, le maximum se situe au milieu du spectre visible ($\lambda \simeq 6\,000$ Å) pour $T \simeq 8\,500$ K.

84. A l'intérieur de la cavité, le champ électrique $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t)$ est solution de l'équation de propagation

$$\Delta\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t) = \vec{0}\,. \tag{1}$$

Il doit en outre vérifier les conditions aux limites imposées par les parois. Un mode propre $\{\vec{K}, \sigma\}$ est caractérisé par une fonction des coordonnées d'espace $\vec{\mathscr{E}}_{\vec{K},\sigma}(\vec{r})$ qui vérifie ces mêmes conditions aux limites et satisfait à l'équation

$$\Delta\vec{\mathscr{E}}_{\vec{K},\sigma}(\vec{r}) + \vec{K}^2\vec{\mathscr{E}}_{\vec{K},\sigma}(\vec{r}) = \vec{0}\,. \tag{2}$$

On peut montrer que le champ $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t)$ le plus général vérifiant les conditions aux limites peut être développé sur l'ensemble des fonctions $\vec{\mathscr{E}}_{\vec{K},\sigma}(\vec{r})$:

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{K},\sigma} q_{\vec{K},\sigma}(t)\vec{\mathscr{E}}_{\vec{K},\sigma}(\vec{r})\,. \tag{3}$$

Si l'on reporte cette expression dans l'équation (1), on voit (les modes propres étant indépendants les uns des autres) que les coefficients $q_{\vec{K},\sigma}(t)$ doivent être solution de

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q_{\vec{K},\sigma}(t) + c^2\vec{K}^2 q_{\vec{K},\sigma}(t) = 0\,. \tag{4}$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'un *oscillateur harmonique à une dimension,* de pulsation $\omega = c|\vec{K}|$ (voir aussi la référence de la note 73).

A chaque mode propre est ainsi associé un oscillateur harmonique à une dimension de même pulsation que lui. Ces divers oscillateurs sont *découplés* les uns des autres. Le corps noir devient donc équivalent à une assemblée d'oscillateurs harmoniques à une dimension, non couplés. La quantification des modes propres maintient l'analogie : l'énergie d'un mode propre de pulsation ω ne peut valoir que $N\hbar\omega$, avec N entier, comme celle d'un oscillateur harmonique quantique à une dimension de même pulsation (à condition toutefois d'éliminer, par le processus dit de « renormalisation », l'« énergie de point zéro » $\hbar\omega/2$, qui serait ici bien gênante).

En utilisant l'expression (III.4) de la densité $\tilde{\rho}(\omega)$, on obtient ainsi la *«formule classique de Rayleigh-Jeans»*

$$u^{\mathrm{cl}}(\omega;\ T)=\frac{kT}{\pi^2c^3}\,\omega^2\ . \tag{III.28}$$

Cette formule donne pour la densité spectrale d'énergie une fonction constamment croissante de la pulsation ω. Elle ne pouvait donc pas, lorsqu'elle constituait la seule prédiction théorique (avant la découverte de la formule de Planck et de la quantification de l'énergie), reproduire même de façon approximative les résultats expérimentaux, qui montraient une décroissance aux hautes fréquences. Elle souffrait d'ailleurs d'un défaut majeur : si l'on cherche à calculer la densité volumique totale d'énergie électromagnétique en intégrant l'expression (III.28) sur toutes les pulsations possibles, c'est-à-dire de 0 à $+\infty$, on trouve une intégrale divergente, ce qui est bien sûr un non-sens du point de vue physique (la densité volumique d'énergie est nécessairement finie. Voir formule (III.35) ci-dessous)[85].

Mais, maintenant que nous connaissons la formule quantique de Planck, nous devons nous attendre à ce qu'elle coïncide avec la formule classique (III.28) dans le domaine où la quantification de l'énergie des modes propres devient inappréciable, c'est-à-dire lorsque le quantum $\hbar\omega$ est très petit devant l'énergie caractéristique kT. Effectivement, si l'on compare (III.24) et (III.28), on voit que

$$u(\omega;\ T)\simeq u^{\mathrm{cl}}(\omega;\ T)\qquad \text{pour } \hbar\omega\ll kT\ . \tag{III.29}$$

La loi de Rayleigh-Jeans apparaît donc comme une loi limite, valable dans le domaine des basses fréquences.

2. PROPRIÉTÉS DU RAYONNEMENT THERMIQUE

Les propriétés thermodynamiques du rayonnement électromagnétique contenu dans l'enceinte du corps noir se déduisent simplement de la formule de Planck (III.23).

a. Énergie totale : loi de Stefan-Boltzmann

L'énergie électromagnétique totale $E(T,\ V)$ présente dans l'enceinte de volume V lorsque celle-ci est maintenue à la température T peut être calculée à partir de (III.22) :

$$E(T,\ V)=V\int_0^{+\infty}u(\omega;\ T)\,\mathrm{d}\omega\ . \tag{III.30}$$

L'énergie totale est bien sûr proportionnelle au volume V, puisque la densité spectrale l'est pour toutes les valeurs de ω :

$$E(T,\ V)=V\,u_{\mathrm{tot}}(T)\ , \tag{III.31}$$

---

85. Le résultat classique (III.28) ne contient bien sûr pas la constante de Planck $\hbar$, qui n'était pas connue lorsque Rayleigh et Jeans écrivirent la formule qui porte leur nom. Soulignons d'ailleurs que, en l'absence de la constante fondamentale $\hbar$, il était *a priori* impossible de comprendre la décroissance exponentielle des courbes expérimentales vers les hautes fréquences («loi de Wien» (III.25)) : avec pour seule grandeur pertinente la température T et en utilisant seulement les constantes fondamentales c (vitesse de la lumière) et k (constante de Boltzmann), on ne peut pas construire une expression ω_0 ayant les dimensions d'une pulsation et donc susceptible de donner l'échelle de variation de l'exponentielle figurant dans la loi de Wien (sous la forme $\exp[-\omega/\omega_0]$). On en conclut que, dans la théorie classique, *«il manque une constante fondamentale»*, sans laquelle on ne peut espérer résoudre la difficulté créée par la divergence de l'intégrale donnant l'énergie totale.