Chapitre 8:

États stationnaires rovibrationnels d'une molécule

Pascal Parneix¹

Institut des Sciences Moléculaires d'Orsay Université Paris-Sud 11, Orsay

November 26, 2018

¹pascal.parneix@u-psud.fr

Plan du cours :

- 1 L'atome d'hydrogène et les systèmes hydrogénoïdes
- **2** Structure électronique d'un atome à n_e électrons
- **3** Calcul des énergies propres pour un atome à n_e électrons
- **S**pin-orbite pour un atome à n_e électrons
- 5 Structure électronique d'une molécule à un seul électron
- **S**tructure électronique d'une molécule à plusieurs électrons
- Interaction d'un atome avec un champ extérieur
- États stationnaires rovibrationnels d'une molécule
- Interaction d'une molécule avec un champ électromagnétique

 Repartons de l'hamiltonien général décrivant le mouvement de la molécule :

$$H = H^{(0)} + \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2M_A}\vec{\nabla}_A^2 - \frac{\hbar^2}{2M_B}\vec{\nabla}_B^2\right)}_{T_N} \tag{1}$$

avec $H^{(0)}$ l'hamiltonien électronique.

 En utilisant la masse réduite du système formé par les deux noyaux, nous pouvons transformer cet hamiltonien comme :

$$H = H^{(0)} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_R^2 \tag{2}$$

avec la masse réduite donnée par :

$$\mu = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B} \tag{3}$$

- Les fonctions d'onde, solutions de l'équation de Schrödinger, s'écriront sous la forme d'une fonction d'onde rovibronique $\Psi(\vec{R}, \vec{r_1}, ..., \vec{r_n})$.
- Dans l'approximation B.O., nous allons les écrire comme un produit d'une fonction d'onde électronique $\Psi_e(\vec{r_1},...,\vec{r_n};R)$ et d'une fonction d'onde rovibrationnelle $\Psi_N(\vec{R})$ dépendant des coordonnées nucléaires :

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n) \approx \Psi_e(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n; R) \times \Psi_N(\vec{R})$$
 (4)

 Cette approximation revient à dire que la dynamique des noyaux et des électrons est totalement découplée l'une de l'autre. Nous allons voir que cette approximation simplifie grandement la résolution complète de l'équation de Schrödinger. • Notons $\Psi_e(\vec{r_1},...,\vec{r_n};R)$ la fonction d'onde électronique, solution de l'équation :

$$H^{(0)} \Psi_{e}(\vec{r}_{1},...,\vec{r}_{n};R) = E_{e}(R) \Psi_{e}(\vec{r}_{1},...,\vec{r}_{n};R)$$
 (5)

• Ainsi, nous avons à résoudre :

$$(H^{(0)} + T_N) \Psi_e(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n; R) \Psi_N(\vec{R}) = E \Psi_e(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n; R) \Psi_N(\vec{R})$$
 (6)

• Après intégration sur les coordonnées électroniques, nous trouvons :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_R^2 + E_{\rm e}(R) \right] \Psi_N(\vec{R}) = E \Psi_N(\vec{R}) \tag{7}$$

• Cette derniere équation a été obtenue en négligeant le terme $<\Psi_e\mid -\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_R^2\mid \Psi_e>$ qui est responsable des transitions non-adiabatiques.

- Nous voyons que les propriétés rovibrationnelles dépendront de la masse des noyaux et seront donc affectées lors d'un changement isotopique (par exemple la molécule HD n'aura pas les mêmes caractéristiques que H₂).
- En explicitant l'opérateur d'énergie cinétique $-\frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_R^2$ en coordonnées sphériques (R,θ,φ) , on trouve :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) - \frac{\vec{J}^2}{\hbar^2R^2}\right] + E_{\rm e}(R)\right] \Psi_N(\vec{R}) = E \Psi_N(\vec{R})$$
(8)

avec \vec{J} l'opérateur vectoriel de moment cinétique associé à la rotation des noyaux.

- Nous nous retrouvons formellement sur un problème équivalent à celui rencontré lors de la recherche des états propres dans le cas de l'atome d'hydrogène ou hydrogénoïde.
- Une différence notable est cependant la forme de l'énergie potentielle.
- Alors que dans le cas d'un système hydrogénoïde, l'énergie potentielle était un potentiel coulombien, proportionnel à 1/r, nous avons ici une fonction énergie potentielle $E_{\rm e}(R)$ présentant un minimum pour un état lié.
- Cette fonction énergie potentielle $E_{\rm e}(R)$ dépendra de l'état électronique considéré.

- Comme dans le cas des systèmes hydrogénoïdes, la fonction d'onde va pouvoir se mettre sous la forme d'un produit d'une fonction radiale $\Psi^{(\mathrm{vib})}(R)$ (notation vib pour vibration) et d'une fonction angulaire $\Psi^{(\mathrm{rot})}(\theta,\varphi)$ (notation rot pour rotation). Les angles θ et φ caractérisent l'orientation de la diatomique par rapport à un système d'axes liés au laboratoire.
- On a ainsi:

$$\Psi_{N}(\vec{R}) = \Psi^{\text{(vib)}}(R) \times \Psi^{\text{(rot)}}(\theta, \varphi)$$
(9)

• **S**eul l'opérateur \vec{J}^2 agit sur la partie angulaire. La fonction d'onde $\Psi^{({\rm rot})}(\theta,\varphi)$ doit être état propre de cet opérateur et est donc simplement égale à l'harmonique sphérique $\mathcal{Y}_{JM}(\theta,\varphi)$.

• Pour la partie radiale, nous en déduisons facilement l'équation différentielle qu'elle satisfait, à savoir :

$$-\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\Psi^{(\text{vib})}(R)}{dR} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E_e(R) + \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu R^2} \right] \Psi^{(\text{vib})}(R)$$

$$= E \Psi^{(\text{vib})}(R)$$
(10)

• Cette équation gouverne le mouvement radial de la molécule, c'est-à-dire sa vibration. Considérons le changement de variable $\chi(R) = R \ \Psi^{(\text{vib})}(R)$. L'équation (10) peut s'écrire maintenant :

$$\frac{d^2 \chi(R)}{dR^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - E_e(R) - \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu R^2} \right] \chi(R) = 0$$
 (11)

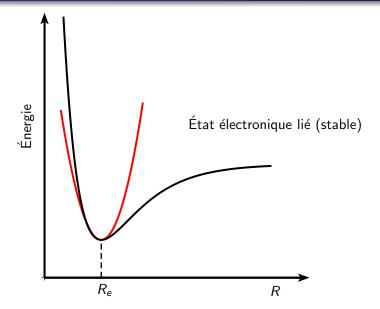
- Notons que les fonctions d'onde vibrationnelles seront affectées par la rotation via le terme centrifuge quadratique en J et que les fonctions vibrationnelles dépendront de l'état électronique à travers la fonction $E_e(R)$.
- Dans le cas général, cette équation n'admet pas de solutions analytiques.
- Considérons tout d'abord le cas d'une vibration pure, c'est-à-dire traitons le problème vibrationnel pour une molécule sans rotation en imposant J=0.

$$\frac{d^2 \chi(R)}{dR^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - E_e(R) \right] \chi(R) = 0 \tag{12}$$

- Dans cette situation, il nous faut maintenant expliciter la fonction $E_e(R)$. Pour simplifier le problème, nous allons tout d'abord utiliser l'approximation harmonique.
- Dans cette approximation, un développement de Taylor est effectué au voisinage de la position d'équilibre R_e en ne retenant que le terme quadratique en $(R-R_e)$. Ainsi, on obtient :

$$E_e(R) = E_e(R_e) + \frac{1}{2} k (R - R_e)^2$$
 (13)

avec $E_e(R_e)$ une constante égale à la valeur de l'énergie potentielle en $R=R_e$, et k la constante de force telle que $k=\frac{d^2E_e(R)}{dR^2}\mid_{R_e}$.



 Les énergies propres vibrationnelles du système sont maintenant analytiques et sont données par :

$$E_{\nu} = \hbar \omega_{\rm e} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \tag{14}$$

avec $\omega_e = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ et v un entier positif ou nul appelé le nombre quantique vibrationnel.

 L'écart d'énergie entre ces niveaux dépend de la forme du potentiel harmonique mais également de la masse réduite de la molécule.
 Les fonctions d'onde vibrationnelles pour l'oscillateur harmonique s'écrivent :

$$\Psi_{\nu}^{(\text{vib})}(R) = N_{\nu} H_{\nu} \left(\sqrt{a} (R - R_{e}) \right) e^{-\frac{a(R - R_{e})^{2}}{2}}$$
 (15)

 N_v est un facteur de normalisation, $a=(\frac{\mu \omega}{\hbar})^2$ et les fonctions H_v sont les polynômes d'Hermite de degré v.

• Les fonctions d'onde vibrationnelles données par l'équation (15) sont orthonormées, c'est-à-dire qu'elles satisfont la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dR \ \Psi_{\nu}^{(\text{vib})}(R) \ \Psi_{\nu'}^{(\text{vib})}(R) = \delta_{\nu\nu'}$$
 (16)

V	$H_{\nu}(x)$
0	1
1	2 <i>x</i>
2	$4x^2 - 2$
3	$8x^3 - 12x$
4	$16x^4 - 48x^2 + 12$
5	$32x^5 - 160x^3 + 120x$

Table: Polynômes d'Hermite pour v=0-5.

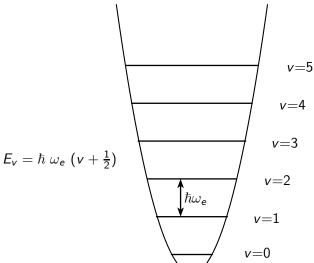


Figure: Potentiel harmonique et niveaux d'énergie vibrationnelle.

- L'approximation harmonique sera d'autant moins bonne que l'énergie vibrationnelle sera importante.
- Pour aller au-delà de l'approximation harmonique, il faut donc effectuer un développement de Taylor en $R=R_e$ à un ordre supérieur à 2:

$$E_{e}(R) = \underbrace{E_{e}(R_{e}) + \frac{1}{2} k (R - R_{e})^{2}}_{V^{(harm.)}(R)} + \underbrace{\sum_{k \geq 3} V^{(k)} (R - R_{e})^{k}}_{V^{(anharm.)}(R)}$$
(17)

avec
$$V^{(k)} = \frac{1}{k!} \frac{d^k E_e(R)}{dR^k} |_{R=R_e}$$
.

• Les courbes de potentiel moléculaire $E_e(R)$ peuvent très souvent être assimilées à un potentiel de Morse donné par :

$$V^{\text{(Morse)}}(R) = D \left[1 - e^{-\alpha(R - R_e)} \right]^2$$
 (18)

D et α sont des paramètres qui peuvent être déterminés pour reproduire au mieux la courbe de potentielle "réelle" $E_e(R)$.

• Ce potentiel admet des solutions analytiques exactes. Les énergies propres sont données par:

$$E_{\nu} = \hbar\omega_{e}(\nu + \frac{1}{2}) - \hbar\omega_{e}\chi_{e}(\nu + \frac{1}{2})^{2}$$
(19)

avec la fréquence $\omega_e = \alpha \sqrt{\frac{2 D}{\mu}}$ et le paramètre sans dimension d'anharmonicité $\chi_e = \frac{\hbar \omega_e}{4D}$ (>0).

- On voit que, pour une masse réduite donnée, ω dépend à la fois de la profondeur du puits de potentiel (D) et de sa portée (α) , ceci étant du au fait que ces deux paramètres influent sur la courbure du potentiel en $R=R_e$.
- La différence d'énergie entre deux états vibrationnels n'est plus constante et est simplement donnée par :

$$E_{\nu+1} - E_{\nu} = \hbar \omega_e \left[1 - 2\chi_e \left(\nu + 1 \right) \right]$$
 (20)

- Comme le paramètre d'anharmonicité χ_e est positif, l'écart d'énergie entre états vibrationnels diminue quand v augmente.
- Les propriétés vibrationnelles ne dépendent pas de la géométrie d'équilibre R_e de la molécule

• Par définition, on appellera la fréquence fondamentale, la fréquence égale à la différence d'énergie entre v = 1 et v = 0.

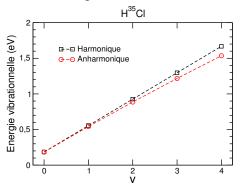


Figure: Énergie vibrationnelle de la molécule H³⁵Cl en fonction du nombre quantique vibrationnel dans les approximations harmonique et anharmonique.

Molécule	ω_e (cm $^{-1}$)	$\omega_e \chi_e \; (\mathrm{cm}^{-1})$	
H ₂	4401	121,3	
D_2	3116	61,8	
H ³⁵ CI	2990	52,8	
D ³⁵ CI	2145	27,2	
H ³⁷ Cl	2988	52,7	
¹² C ¹⁶ O	2170	13,29	

Table: Fréquences harmoniques et paramètres d'anharmonicité de certaines molécules diatomiques dans l'état électronique fondamental.

Sensible à la composition isotopique de la molécule

• Dans le cas général, les états propres vibrationnels et énergies propres vibrationnelles peuvent être calculés numériquement, il suffit en effet de résoudre une équation de Schrödinger à une dimension, connaissant l'énergie potentielle $E_e(R)$ de l'état électronique considéré.

$$\frac{d^2 \chi(R)}{dR^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - E_e(R) \right] \chi(R) = 0$$
 (21)

- Jusqu'à présent, nous n'avons pas pris en compte la rotation de la molécule.
- Nous allons introduire celle-ci en traitant le problème avec $J \neq 0$, le nombre quantique J étant un entier positif ou nul.

Rotateur rigide

$$\frac{d^2 \chi(R)}{dR^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[(E - E_e(R) - \frac{J(J+1)\hbar^2}{2\mu R^2} \right] \chi(R) = 0$$

• Imposons $R=R_{\rm e}$ dans le terme centrifuge. Ainsi, on tient compte de la rotation de la molécule en supposant que l'énergie de rotation est celle d'une molécule diatomique rigide telle que $R=R_{\rm e}$ pour l'état électronique considéré.

Approximation du rotateur rigide.

• L'équation radiale devient :

$$\frac{d^2 \chi(R)}{dR^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[(E - E_e(R) - B_e J(J+1)) \chi(R) = 0 \right]$$
 (22)

avec $B_{\rm e}=rac{\hbar^2}{2\mu R_{\rm e}^2}$, appelée la constante rotationnelle à l'équilibre.

• Cette constante rotationnelle dépend de la masse réduite μ mais également de la distance d'équilibre R_e .

Rotateur rigide

- La constante rotationnelle B_e est homogène à une énergie. Elle est généralement exprimée en nombre d'onde (σ) via la relation $E=hc\sigma$. Donc $B_e(\mathrm{cm}^{-1})=\frac{\hbar^2}{2\mu R_e^2} imes\frac{1}{hc}=\frac{\hbar}{4\pi c\mu R_e^2}$.
- Comme dans l'équation (22) le terme centrifuge est une constante, il n'influera pas sur la détermination des fonctions d'onde vibrationnelles.
- L'énergie rovibrationnelle s'écrira simplement comme la somme d'une énergie vibrationnelle $(E_{\rm vib})$ et d'une energie rotationnelle égale à $B_e J(J+1)$. Dans le cas de l'approximation harmonique, on aura donc :

$$E = \underbrace{\hbar\omega_e\left(v + \frac{1}{2}\right)}_{\text{Vibration}} + \underbrace{B_e J(J+1)}_{\text{Rotation}}$$
(23)

Rotateur rigide

 Pour un potentiel de Morse, l'approximation du rotateur rigide donnerait :

$$E = \underbrace{\hbar\omega\left(v + \frac{1}{2}\right) - \hbar\omega_e \chi\left(v + \frac{1}{2}\right)^2}_{\text{Vibration}} + \underbrace{B_e J(J+1)}_{\text{Rotation}}$$
(24)

- Les états rotationnels, caractérisés par une valeur du moment cinétique de rotation *J*, ne sont pas équidistants.
- La différence d'énergie entre deux valeurs successives de J est donnée par :

$$E_{\text{rot}}(J+1) - E_{\text{rot}}(J) = B_e(J+1)(J+2) - B_eJ(J+1)$$

= $2B_e(J+1)$ (25)

- Les propriétés rotationnelles de la molécule dépendent de sa masse réduite (sensible donc aux effets isotopiques) mais également de sa géométrie.
- Comme cette dernière grandeur est dépendante de l'état électronique, les écarts entre états rotationnels seront sensibles à celui-ci.
- À ce stade du raisonnement, la rotation et la vibration sont totalement découplées l'une de l'autre.
- Nous allons maintenant analyser différents types de couplage apparaissant dans une molécule diatomique.
- En fait la constante rotationnelle d'une molécule va dépendre de la valeur de J. En effet la molécule vibre dans un potentiel effectif $V_{\rm eff}(R)$ donné par :

$$V_{\text{eff}}(R) = E_{e}(R) + \frac{J(J+1)\hbar^{2}}{2\mu R^{2}}$$
 (26)

- Dans le cas général, il faut calculer l'effet de J sur la position d'équilibre du potentiel effectif.
- **S**oit $R_e^{(J)}$ cette nouvelle distance d'équilibre qui dépendra paramétriquement de J. La valeur de $R_e^{(J)}$ est telle que :

$$\frac{dV_{\text{eff}}(R)}{dR} \mid_{R_e^{(J)}} = k \left(R_e^{(J)} - R_e \right) - \frac{J(J+1) \hbar^2}{\mu R_e^{(J)^3}} = 0$$
 (27)

ce qui permet d'écrire :

$$R_e^{(J)} - R_e = \frac{J(J+1)\hbar^2}{\mu k R_e^{(J)^3}}$$
 (28)

et.

$$R_{e}^{(J)} = R_{e} \left(1 + \frac{J(J+1)\hbar^{2}}{\mu k R_{e} R_{e}^{(J)}} \right)$$
 (29)

• On en déduit :

$$\frac{1}{R_e^{(J)_2}} = \frac{1}{R_e^2} \times \left(1 + \frac{J(J+1)\hbar^2}{\mu k R_e R_e^{(J)^3}}\right)^{-2}$$

$$\approx \frac{1}{R_e^2} - \frac{2J(J+1)\hbar^2}{\mu k R_e^6} + \dots \tag{30}$$

• Le potentiel effectif s'écrit :

$$V_{\text{eff}}(R) = V_{\text{eff}}(R_{\text{e}}^{(J)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(R)}{\partial R^2} \mid_{R_{\text{e}}^{(J)}} (R - R_{\text{e}}^{(J)})^2 + \dots$$
 (31)

avec,

$$V_{\text{eff}}(R_{e}^{(J)}) = \frac{J(J+1)\hbar^{2}}{2\mu R_{e}^{(J)}{}^{2}} + \frac{1}{2}k(R_{e}^{(J)} - R_{e})^{2}$$

$$\approx \frac{J(J+1)\hbar^{2}}{2\mu R_{e}^{2}} - \frac{\hbar^{4}}{2\mu^{2}kR_{e}^{6}}[J(J+1)]^{2}$$
(32)

• Ceci correspond à la nouvelle expression pour l'énergie rotationnelle :

$$E_{\text{rot}}(J) = \underbrace{B_e J(J+1)}_{\text{Rot. rigide}} \underbrace{-D_e [J(J+1)]^2}_{\text{Terme centriguge}}$$
(33)

avec les constantes B_e et D_e données par :

$$B_e = \frac{\hbar^2}{2\mu R_e^2} \tag{34}$$

et,

$$D_{e} = \frac{\hbar^{4}}{2k\mu^{2}R_{e}^{6}} = \frac{2}{kR_{e}^{2}} \times B_{e}^{2} = \frac{4B_{e}^{3}}{(\hbar\omega_{e})^{2}}$$
(35)

en utilisant $\omega_e^2 = \frac{k}{\mu}$. Ainsi, on obtient :

$$\frac{D_e}{B_e} = 4 \left(\frac{B_e}{\hbar \, \omega_e}\right)^2 \tag{36}$$

Molécule	$B_{\mathrm{e}}~(\mathrm{cm}^{-1})$	$D_e (10^{-3} \text{ cm}^{-1})$
H ₂	60,85	16,0
D_2	30,44	11,0
H ³⁵ Cl	10,59	0,53
D ³⁵ Cl	5,45	0,14
H ³⁷ Cl	10,57	0,53
¹² C ¹⁶ O	1,931	0,0061

Table: Constantes rotationnelles à l'équilibre B_e et paramètres de distortion centrifuge D_e pour différentes molécules diatomiques dans l'état électronique fondamental.

J	$B_e J(J+1)$	$D_e \left[J(J+1) \right]^2$	$E_{ m rot}$	
	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})	
0	0	0	0	
1	121,700	0,064	121,636	
2	365,100	0,576	364,524	
3	730,200	2,304	727,896	
4	1217,000	6,400	1210,600	
5	1825,500	14,400	1811,100	

Table: Effet de la distortion centrifuge sur l'énergie rotationnelle pour la molécule H_2 dans son état électronique fondamental $X^1\Sigma_g^+$.

Couplage vibration-rotation

 La vibration de la molécule influe également sur la rotation. En effet nous avons :

$$T_{vib}(\propto 1/\omega_e) \ll T_{rot}(\propto \hbar/B_e)$$

• Au cours d'une période de rotation, la molécule a effectué un grand nombre de vibrations, donné par :

$$\frac{\hbar\omega_e}{B_e}\approx 10^2-10^3$$

- À partir de ce petit raisonnement classique, on comprend que les propriétés rotationnelles devront être obtenues en partant de grandeurs radiales moyennes.
- Résolvons tout d'abord le problème vibrationnel pour J=0. Notons $|v\rangle$ les états propres et E_v les énergies propres associées.

Couplage vibration-rotation

Dans une seconde étape, le terme centrifuge est pris en compte dans une approche perturbationnelle au second ordre:

$$E(v,J) = E_v + \langle v \mid \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu R^2} \mid v \rangle$$

$$+ \sum_{v' \neq v} \frac{|\langle v \mid \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\mu R^2} \mid v' \rangle|^2}{E_v - E_{v'}}$$
(37)

On peut en déduire :

$$E = E_{\nu} + [B_{\nu} J(J+1) - D_{\nu} (J(J+1))^{2} + ...]$$
 (38)

 La dépendance de ces constantes par rapport au nombre quantique vibrationnel est donnée sous la forme :

M1 Physique atomique et moléculaire

$$B_{\nu} = B_{\rm e} - \alpha_{\rm e} \times (\nu + \frac{1}{2}) \tag{39}$$

et

$$D_{\mathbf{v}} = D_{\mathbf{e}} + \beta_{\mathbf{e}} \times (\mathbf{v} + \frac{1}{2}) \tag{40}$$

Couplage vibration-rotation

Molécule	B_e	$lpha_{e}$	B_0	B_1	B_2
	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})
H ₂	60,85	3,06	59,32	56,26	53,20
D_2	30,44	1,08	29,90	28,82	27,74
ОН	18,871	0,714	18,514	17,800	17,086
CO	1,931	0,017	1,922	1,905	1,888
O_2	1,446	0,016	1,438	1,422	1,406

Table: Constantes rotationnelles à l'équilibre et paramètres de couplage vibration-rotation pour cinq molécules diatomiques dans l'état électronique fondamental. Les constantes rotationnelles dans les états vibrationnels pour v=0,1 et 2 sont également reportées.

