

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
- 4. Polarisation en régime variable**
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- La description (macroscopique) d'un diélectrique à l'aide des charges de polarisation peut s'étendre au cas des polarisations variables dans le temps à condition de considérer des volumes mésoscopiques
- Il faut pour cela que toute dépendance temporelle ait un temps caractéristique inférieur au temps de parcours d'une onde EM sur le volume considéré
- Ceci est correct tant que le temps caractéristique d'évolution du champ est < au temps de parcours du champ EM sur une distance de quelques nm
  - Avec  $d = 5 \text{ nm}$ ,  $\tau = d/c \Rightarrow v = 10^{16} \text{ Hz}$

- Pour un volume de  $5 \text{ nm}^3$ , la fréquence limite est de  $10^{16} \text{ Hz}$  (ie  $\lambda \approx 100 \text{ nm}$ ). On pourra donc utiliser une description continue et moyennée de la matière jusqu'à vers  $10^{15}\text{-}10^{16} \text{ Hz}$  (**EM des milieux continus**)
- La description macroscopique (donc la notion même de permittivité  $\epsilon_r$ ), n'est plus valable dès que  $\lambda$  devient de l'ordre de grandeur des distances interatomiques (ie rayons X pour lesquels  $\lambda < 1 \text{ nm}$ )
  - On ne peut alors plus ignorer la structure discontinue de la matière

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
  
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drude-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
  
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Cas d'une excitation sinusoïdale (1/3)

- Si les variations du champ sont rapides,  $P$  suivra avec un certain retard. La polarisation dépend alors de la valeur du champ en un point, **mais à un instant antérieur**
  - Il n'y a plus proportionnalité entre  $P$  et  $E$
- Néanmoins, en **régime sinusoïdal forcé**,  $P$  et  $E$  varient avec la même pulsation :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

- En développant le cosinus :

Déphasage

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi'(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t) + \varepsilon_0 \chi''(\omega) \vec{E}_0 \sin(\omega t)$$

- Il existe donc des fonctions réelles  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$

## Cas d'une excitation sinusoïdale (2/3)

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi'(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t) + \varepsilon_0 \chi''(\omega) \vec{E}_0 \sin(\omega t)$$

- La polarisation comprend un **terme en phase avec  $E$**  ( $\chi'$ ) et un **terme en quadrature avec  $E$**  ( $\chi''$ )
- De la même façon, on montre qu'il existe des coefficients réels  $\varepsilon'(\omega)$  et  $\varepsilon''(\omega)$  tels que :

$$\vec{D}(t) = \varepsilon'(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t) + \varepsilon''(\omega) \vec{E}_0 \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \quad \text{et} \quad \varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega)$$

- On peut donc décrire la réponse de la matière à un champ variable avec deux fonctions  $\varepsilon'(\omega)$  et  $\varepsilon''(\omega)$ . En particulier, le **déphasage**  $\delta(\omega)$  entre  $D$  et  $E$  vérifie :

$$\tan[\delta(\omega)] = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}$$

## Cas d'une excitation sinusoïdale (3/3)

- La représentation complexe est adaptée à tout système linéaire excité en mode sinusoïdal. On écrira :

$$\vec{E}(t) = \operatorname{Re}[\vec{E}_0 \exp(-i\omega t)] \quad \text{et} \quad \vec{P}(t) = \operatorname{Re}[\vec{P}_0 \exp(-i\omega t)]$$

- On a bien une relation de la forme :

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega) \quad \text{avec} \quad \chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$$

- On introduit « naturellement » une susceptibilité complexe

# Retard à la polarisation

- Un retard à la polarisation signifie que  $P(t)$  dépend de  $E(t)$  à un **instant antérieur** :  $\vec{E}(t-\theta)$  avec  $\theta \geq 0$
- Si on suppose une relation linéaire entre  $E$  et  $P$ , on pourra écrire :
  - Signifie que la contribution à  $P(t)$  de  $E(t-\theta)$  est pondérée par  $F(\theta)$ , caractéristique du diélectrique
- Lien entre  $F(\theta)$  et  $\chi(\omega)$  :  $\vec{P}_\omega(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_\omega(t)$  avec  $\chi(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) e^{i\omega\theta} d\theta$

$$\chi'(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \sin(\omega\theta) d\theta$$

- On attend donc un lien entre  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$  !

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
  
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drude-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
  
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Modèle de Drude-Lorentz (1/2)

- On traduit l'interaction d'un **porteur de charge** avec le reste du milieu matériel par
  - Une force **d'amortissement visqueux**  $- \frac{m}{\tau} \vec{v}$ 
    - ▲  $\tau$  est la **durée de collision**, ou **temps de relaxation des vitesses** : après une excitation électrique, le système des charges retrouve une distribution isotrope des vitesses au bout de quelques  $\tau$
  - Une force de **rappel élastique**  $- m \omega_0^2 \vec{u}$ 
    - ▲  $\omega_0$  est la **pulsation de l'oscillateur** que forme la charge en mouvement autour de sa position d'équilibre

## Modèle de Drude-Lorentz (2/2)

- Modèle extrêmement simple qui recouvre une grande variété de situations :
  - A basse fréquence, on distingue les **charges libres** pour lesquelles la force de rappel est nulle ( $\omega_0 = 0$ ) et les **charges liées** pour lesquelles cette force est non nulle
  - A plus haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ), ceci n'est plus vrai et il devient impossible de distinguer entre charges libres et liées. L'ensemble des charges contribue alors à la polarisation du milieu
  - Possibilité de varier  $\omega_0$  dans une très large gamme de valeurs
  - Egalement appelé **modèle de l'électron élastiquement lié**
  - Le milieu est considéré Ihi

# Equation du mouvement (1/2)

- PFD appliqué à un porteur de charge  $q$  soumis à un champ EM :

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m}{\tau} \vec{v} - m \omega_0^2 \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

- $u$  est la position de l'électron (origine coïncidant avec la position de l'ion)
- Le champ  $E$  est le **champ local** (ie le champ effectivement appliqué à la charge  $q$ )
  - Pour un diélectrique, il faut tenir compte de la correction de champ local dite **correction de Lorentz** (ou de Onsager pour les milieux polaires)
  - Si on ne fait pas cette correction, on suppose implicitement un milieu dilué

## Equation du mouvement (2/2)

- Tant qu'on n'est pas dans un corps ferromagnétique, on aura toujours :

$$\frac{\|\vec{F}_{Magnétique}\|}{\|\vec{F}_{Electrique}\|} < \frac{vB}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

- Finalement :

$$m \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = q \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - m \omega_0^2 \vec{u}$$

# Les bases du modèle de Drude-Lorentz

- Présent modèle : les e- de valence des atomes dont le potentiel d'ionisation est faible sont totalement délocalisés dans tout le volume du métal - Drude (1900) et Lorentz (1905)
- Les e- de conduction remplissent les niveaux énergétiques quantifiés par valeurs croissantes à raison de 2 e- à spin antiparallèle par état (principe de Pauli) - Sommerfeld (1928)
- La prise en compte des interactions entre e- de conduction conduit au modèle de bandes : les énergies possibles sont celles des **bandes permises**, séparées par des **bandes interdites** - Bloch et Brillouin (1930)

# Performances du modèle de Drude-Lorentz

- Le succès de ce modèle vient de sa prédition de quantités thermiques, électriques et mécaniques
- La conduction dans les métaux est assurée par les électrons libres, ce qui explique le lien entre les conductivités thermique ( $\lambda$ ) et électrique ( $\gamma$ ) :

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T = 2.45 \times 10^{-8} T$$

← Loi de Wiedemann et Franz

- S'applique si les e- sont uniquement diffusés par les impuretés (sans changement d'énergie), par exemple à basse température. Ne s'applique plus en cas de collisions inélastiques (e- ou phonons)

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
  
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drude-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
  
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = q \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - m \omega_0^2 \vec{u}$$

- On considère l'action d'un champ  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$
- Le régime établi (ou régime sinusoïdal forcé) correspond à une solution du type  $\vec{u} = \vec{u}_0 e^{-i\omega t}$
- Le PFD entraîne :  $-m\omega^2 \vec{u}_0 = q \vec{E}_0 + i \frac{m}{\tau} \omega \vec{u}_0 - m \omega_0^2 \vec{u}_0$

$$\Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{q}{m \left( \omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \right)} \vec{E}_0$$

Densité volumique des porteurs de charge

- La polarisation devient :

$$\vec{P} = n q \vec{u} = \vec{P}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{avec} \quad \vec{P}_0 = \frac{n q^2}{m \left( \omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \right)} \vec{E}_0$$

Milieux diélectriques

$$\vec{P}_0 = \frac{n q^2}{m \left( \omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau} \right)} \vec{E}_0$$

- On introduit la **susceptibilité complexe**  $\chi(\omega)$  :  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$

- Milieu lhi :  $\Rightarrow \vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_0$

$$\Rightarrow \chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$$



Savoir  
refaire ce  
calcul

$\chi(0)$  : susceptibilité  
électrique statique

- Le caractère complexe de  $\chi(\omega)$  traduit le déphasage de la réponse du milieu par rapport à l'excitation (ie de  $P$  par rapport à  $E$ )

- Il est équivalent pour un lhi de parler de **susceptibilité complexe**  $\chi(\omega)$  ou de **polarisabilité complexe**  $\alpha(\omega)$  puisque :

$$\chi(\omega) = n \alpha(\omega)$$

- Pour un milieu dense pour lequel on peut utiliser l'expression de Lorentz du champ local, on obtient les mêmes équations en remplaçant  $\omega_0$  par  $\omega'_0$  tel que :

$$\omega'^2_0 = \omega^2_0 - \frac{n q^2}{3 m \epsilon_0} = \omega^2_0 - \frac{\omega_p^2}{3}$$

□ L'étude suivante est donc pertinente car générale !

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$$

■ Trois cas limite :

- Basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ )  $\Rightarrow \chi(\omega) \approx \chi(0)$   
 ↳  $P$  est en phase avec  $E$ . On retombe sur le cas des régimes stationnaires pour lesquels  $\chi$  est une constante réelle  $> 0$
  
- Haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ )  $\Rightarrow \chi(\omega) \approx -\chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \exp(i\pi)$   
 ↳  $P$  et  $E$  sont en opposition de phase
  
- Régime intermédiaire ( $\omega \approx \omega_0$ )  $\Rightarrow \chi(\omega) \approx i \omega_0 \tau \chi(0) = \omega_0 \tau \chi(0) \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right)$   
 ↳  $P$  et  $E$  sont en quadrature

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

- On décompose  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$

$$\chi'(\omega) = \chi(0) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad \chi''(\omega) = \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2 / \tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

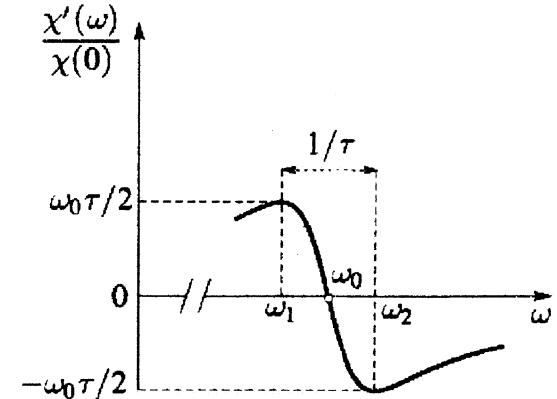
- On supposera toujours des amortissements faibles :  $1/\tau \ll \omega_0$

$$\chi'(\omega) = \chi(0) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

## Etude de $\chi'$

- Dans le cas d'un amortissement faible ( $1/\tau \ll \omega_0$ ) on a au voisinage de  $\omega_0$  :
- $\chi'(\omega)$  s'annule pour  $\omega_0$ . Sa dérivée  $d\chi'/d\omega$  s'annule pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2\tau} \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2\tau} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{1}{\tau}$$



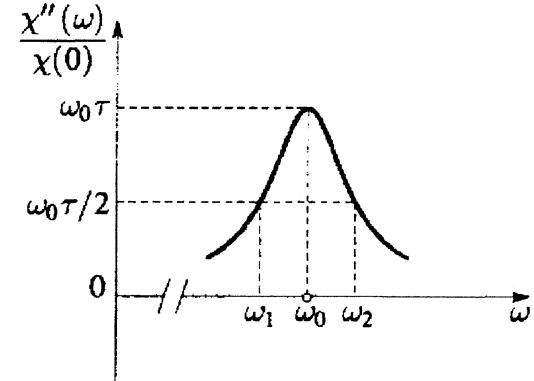
- Le changement de signe de  $\chi'(\omega)$  est très rapide autour de  $\omega_0$

$$\chi''(\omega) = \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2 / \tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

## Etude de $\chi''$

- Dans le cas d'un amortissement faible ( $1/\tau \ll \omega_0$ ) on a au voisinage de  $\omega_0$  :
- $\chi''(\omega)$  est maximale pour  $\omega_0$ . Au voisinage de  $\omega_0$ , on a :

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$



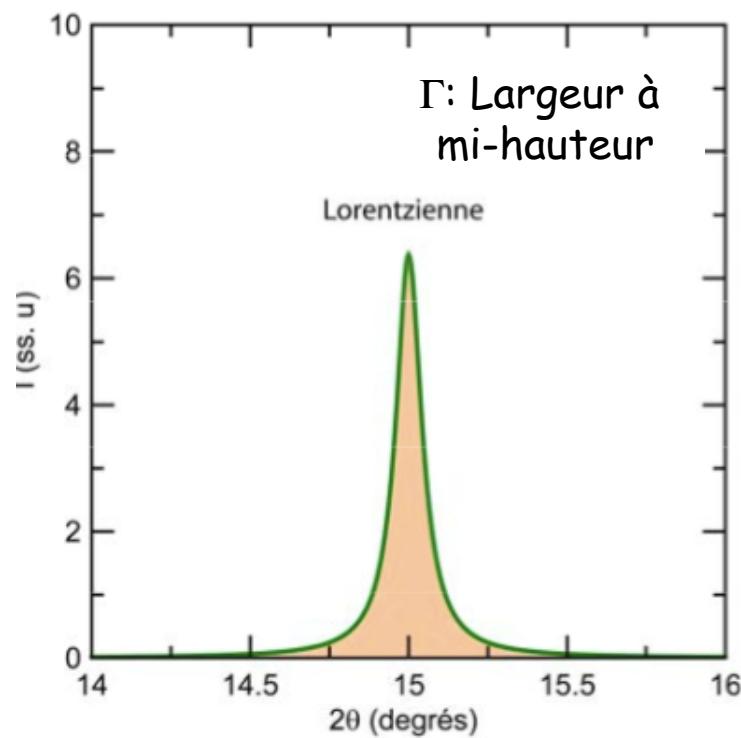
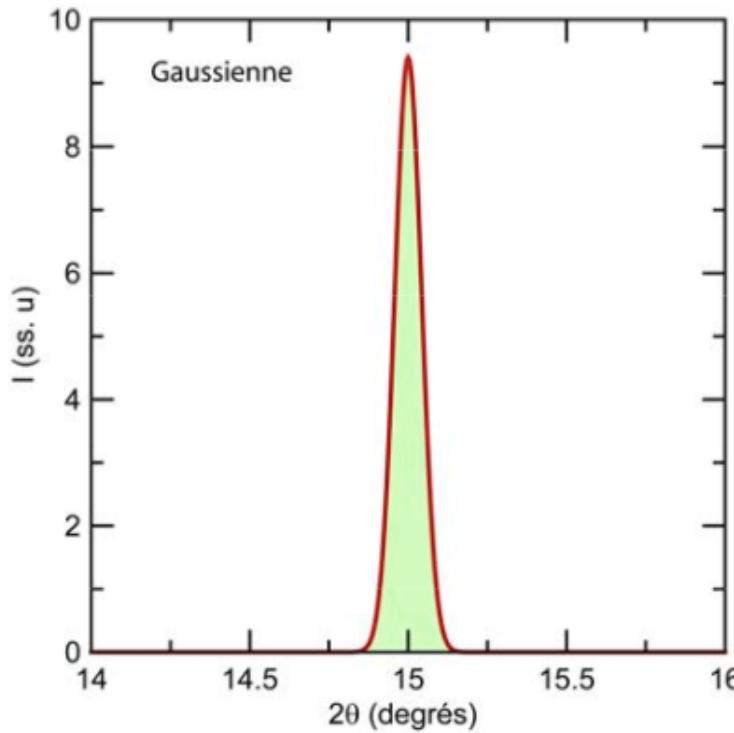
$$\chi''(\omega) \approx \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2 / \tau}{4 \omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \approx \chi(0) \frac{1}{1 + 4 \tau^2 (\omega - \omega_0)^2}$$

Lorentzienne

# Gaussienne vs lorentzienne

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

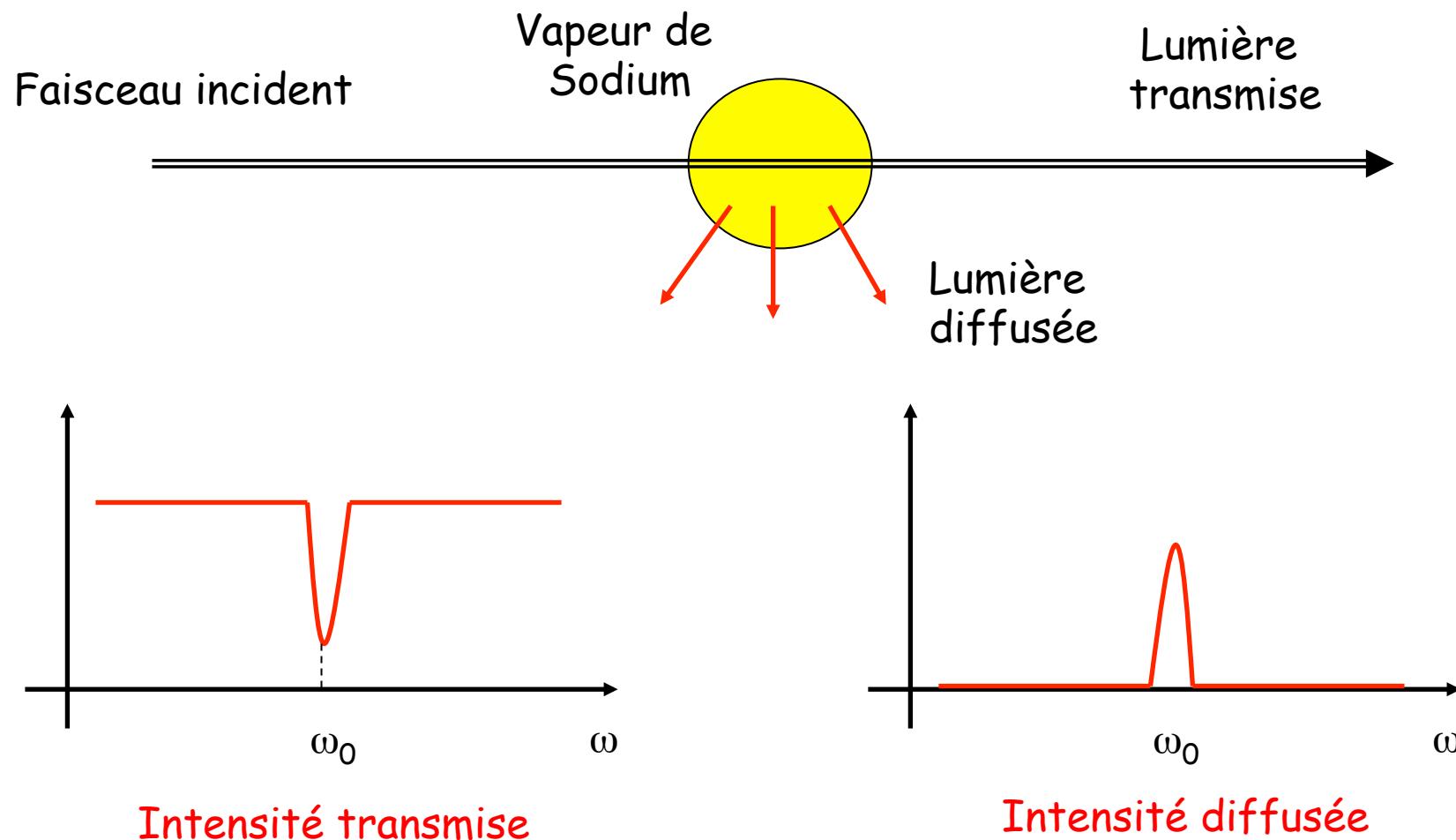
$$\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (x-\mu)^2}$$



# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
  
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drude-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
  
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Modèle qualitatif d'une résonance optique (1/2)



## Modèle qualitatif d'une résonance optique (2/2)

- Expérimentalement, on constate que le rayonnement réémis a toutes les caractéristiques du rayonnement émis par un dipôle oscillant (diagramme d'émission et polarisation)
- On modélise cet effet en disant que le dipôle atomique se met à vibrer pour  $\omega \approx \omega_0$  et qu'il y a **résonance optique**
- Lorsqu'on coupe brutalement le rayonnement de pulsation  $\omega_0$ , on constate que le rayonnement diffusé décroît avec une constante de temps d'environ  $10^{-8}$  s ( $>$  période du rayonnement)
- En résumé, **le dipôle atomique se comporte comme un dipôle harmonique très peu amorti**

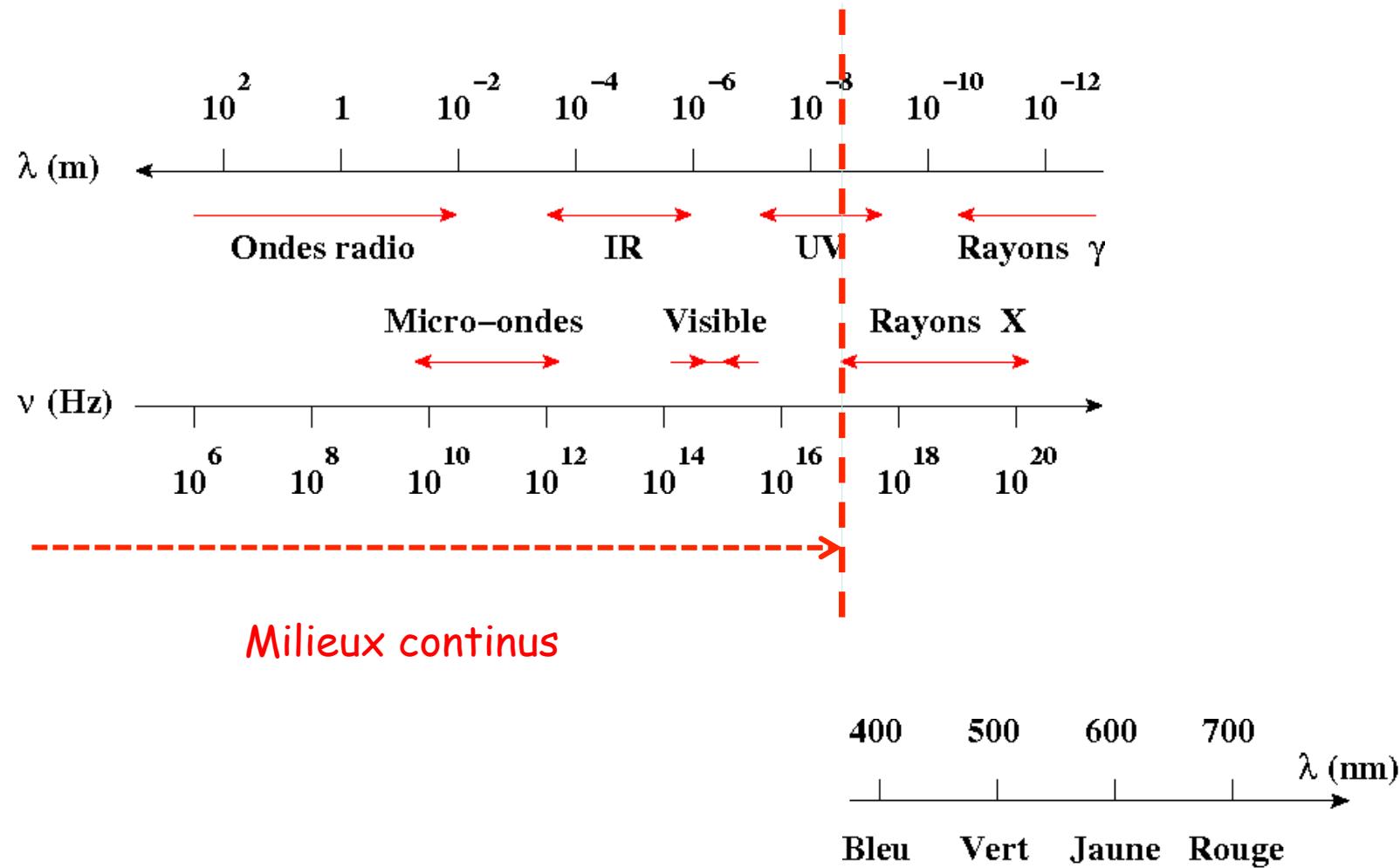
# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
  
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drude-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
  
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Polarisation des diélectriques en régime sinusoïdal

- S'appuie sur le modèle de Drude-Lorentz en considérant les mécanismes de polarisation étudiés dans le cas statique
  - Dans un milieu dense, le terme de frottement est essentiellement dû aux chocs de l'e- avec d'autres particules. Il rend également compte du rayonnement d'accélération
- Divers mécanismes peuvent se rencontrer :
  - La **polarisabilité électronique** concerne tous les milieux
  - La **polarisabilité ionique** concerne les milieux présentant des liaisons ioniques
  - La **polarisabilité d'orientation** peut toucher tous les milieux qui possèdent un moment dipolaire permanent
- La **polarisation totale** représente la somme de toutes ces contributions

# Spectre des UV, IR, ...



# Polarisation électronique (1/5)

- Les électrons étant les particules les plus légères, ils sont les seuls à pouvoir « suivre » les variations du champ électromagnétique à très haute fréquence
- Il faut des fréquences « optiques » ( $10^{14}$  à  $10^{16}$  Hz) pour observer les effets d'inertie qui se manifestent à haute fréquence. Cela correspond à  $0.03 < \lambda < 3 \mu\text{m}$  :
  - Suffisamment grand pour qu'on considère le champ constant sur un atome
  - Traitement à l'aide d'un moment dipolaire induit

## Polarisation électronique (2/5)

- On applique le modèle de Drude-Lorentz aux pulsations caractéristiques  $\omega_{0,e}$  pour lesquelles on avait obtenu :

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{0,e}^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

- Les processus de relaxation électronique étant très rapides, la condition  $\omega_{0,e} \gg 1/\tau_e$  est vérifiée ( $\tau_e$  : durée caractéristique de la polarisation électronique)

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

## Polarisation électronique (3/5)

- Il y a 2 domaines intéressants :
  - Dans le visible (pour lequel  $\omega \ll \omega_{0,e}$  sans être trop faible néanmoins), la susceptibilité électronique s'écrit :

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{0,e}^2 - \omega^2}$$

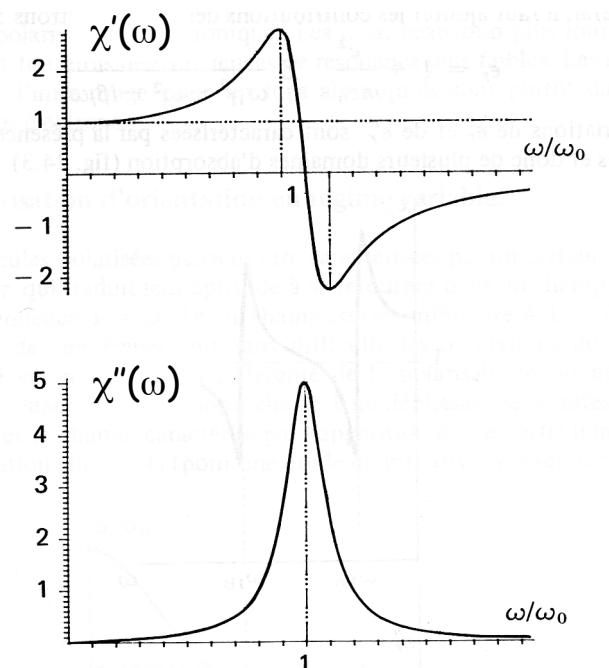
- Dans le domaine des hautes fréquences ( $\omega \gg \omega_{0,e}$ ), la susceptibilité électronique s'écrit :

$$\chi_e(\omega) \approx -\chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

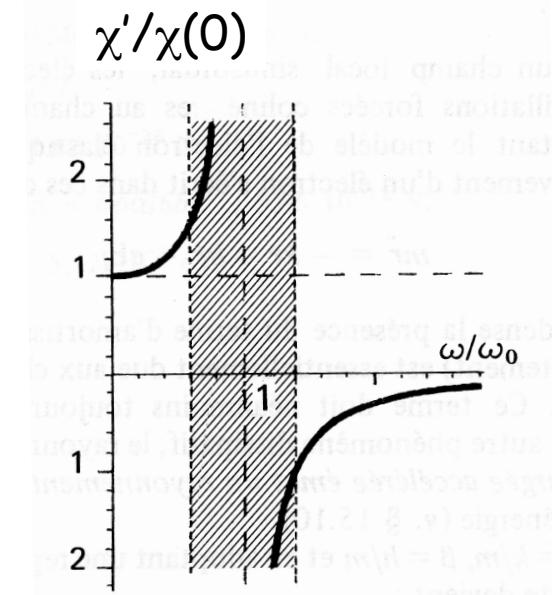
- ↗ Cette susceptibilité est très faible : les électrons ne peuvent plus suivre les variations trop rapides du champ. Le milieu se comporte comme le vide et non plus comme un diélectrique

## Polarisation électronique (4/5)

- On observe donc, au voisinage d'une fréquence de résonance :



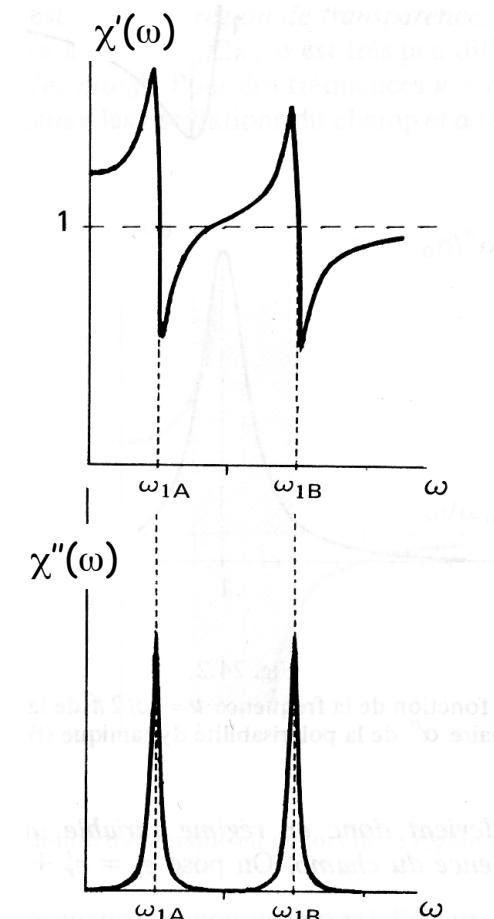
La partie réelle décroît beaucoup plus lentement que la partie imaginaire



Au voisinage de  $\omega_0$ , l'e- effectue des oscillations de grande amplitude et le milieu prélève au champ une énergie importante

## Polarisation électronique (5/5)

- Pour un atome à 2 électrons, le spectre est typiquement
  - Le maximum de chaque résonance décroît avec  $\omega$



- Remarque :  $H_2$  n'a qu'un e- et son spectre comporte néanmoins de nombreuses raies d'absorption
- La MQ précise que chaque e- possède plusieurs fréquences de résonance

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

## Polarisation ionique (1/2)

- Qualitativement, identique à la polarisation électronique
- Les ions d'un cristal forment des oscillateurs qui interagissent avec le champ électromagnétique, mais avec des pulsations propres  $\omega_{0,i}$ , très inférieures aux pulsations électroniques
  - Les fréquences propres de vibration des noyaux des molécules sont plutôt dans l'IR lointain (les masses sont  $10^3$  à  $10^5$  fois plus élevées) tandis qu'on est plutôt dans l'UV pour les e-

- 
- Par exemple, les modes qui modifient le dipôle électrique d'une maille peuvent être importants (ex : cristaux d'halogénures d'alcalins) : vibration du réseau des ions « + » wrt à celui des ions « - » telle que le centre de masse de chaque maille reste identique

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

## Polarisation ionique (2/2)

- Il y a 2 domaines intéressants :
  - Dans le domaine des micro-ondes et en deçà ( $0 \ll \omega \ll \omega_{0,i}$ ), la susceptibilité d'origine ionique est réelle et pratiquement constante :

$$\chi_i(\omega) \approx \chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2} \approx \chi_i(0)$$

- ↗ C'est le domaine des communications hertziennes
  - Dans le visible et au delà ( $\omega \gg \omega_{0,i}$ ), la contribution de la polarisation ionique est très faible :

$$\chi_i(\omega) \approx -\chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega^2} \xrightarrow[\omega \rightarrow \infty]{} 0$$

- ↗ Seuls les effets électroniques sont importants dans le domaine optique

# Polarisation dipolaire (1/4)

- La création d'une polarisation (moyenne) dans les fluides polaires sous l'action d'un champ  $E$  ne peut être instantanée car elle implique la rotation des molécules
  - Cette rotation est perturbée par les chocs entre molécules
  - Son évolution temporelle est donnée par la fonction  $F(\theta)$
- Debye a proposé un retard de la forme  $F(\theta) = a \exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right)$
- On peut montrer que ceci est équivalent à faire dépendre  $P$  de l'**équation de Debye** :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}(t) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\chi_{or}(0)}{\tau}$$

## Polarisation dipolaire (2/4)

- La polarisation d'orientation concerne les matériaux possédant un moment dipolaire permanent. Dans ce cas, on néglige alors souvent le terme lié à l'accélération devant le terme de frottement : les mécanismes d'amortissement sont prépondérants
  - Dans un liquide tel que l'eau, cet amortissement est dû à la viscosité
- Cela revient à écrire  $\omega^2 \ll \omega/\tau$ , ce qui donne pour la susceptibilité d'orientation :

$$\chi_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - i \frac{\omega}{\tau}} = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 - i \omega \tau_D} \quad \text{en posant} \quad \tau_D = \frac{1}{\omega_0^2 \tau}$$



Constante de temps de Debye

## Polarisation dipolaire (3/4)

- La susceptibilité statique est la même qu'en régime stationnaire :

$$\chi_{or}(0) = \frac{n p_0^2}{3 \epsilon_0 k_B T}$$

Moment dipolaire permanent

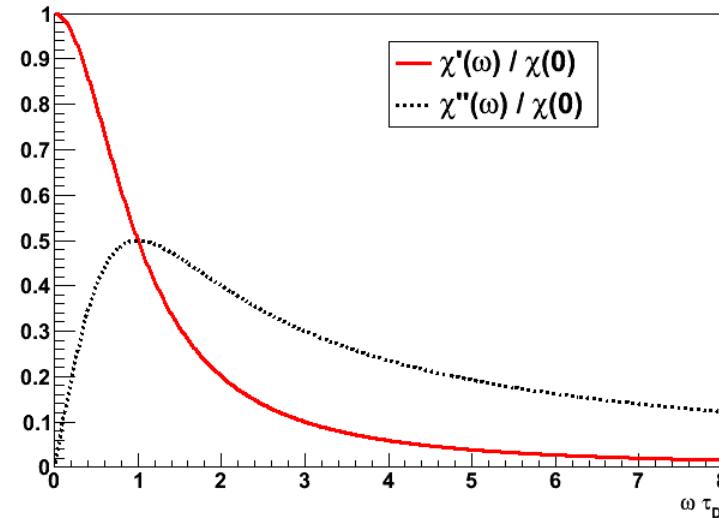
- Les parties réelles et imaginaires de  $\chi_{or}(\omega)$  forment les équations de Debye :

$$\chi'_{or}(\omega) = \epsilon'_r(\omega) - 1 = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \quad \chi''_{or}(\omega) = \epsilon''_r(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega \tau_D}{1 + \omega^2 \tau_D^2}$$

- Fonction universelle de  $\omega \tau_D$

## Polarisation dipolaire (4/4)

Parties réelles et imaginaires de  $\chi_{or}$  dans le modèle de Debye



- On distingue 2 domaines limite
  - $\omega \tau_D \ll 1$  :  $\chi_{or}$  est réelle et égale à sa valeur à basse fréquence
$$\chi'_{or}(\omega) \approx \chi'_{or}(0) \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) \ll \chi''_{or}(0)$$
  - $\omega \tau_D \gg 1$  :  $\chi_{or}$  est négligeable : les moments dipolaires ne peuvent plus suivre les oscillations
$$\chi'_{or}(\omega) \ll \chi'_{or}(0) \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) \ll \chi''_{or}(0)$$

# Polarisation dipolaire : exemple de l'eau

- Deux zones limites :

- Basse fréquence ( $\omega \ll 1/\tau \approx 10^{11}$  rad/s):

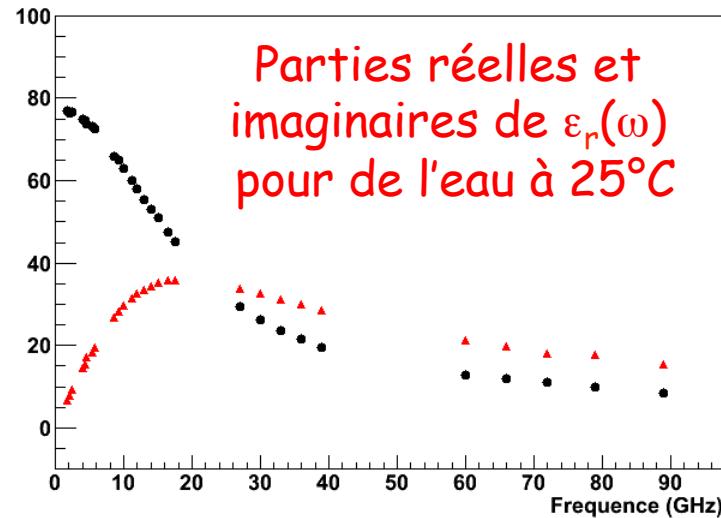
$$\epsilon'_r(0) = 1 + \chi'_{or}(0) \approx 81$$

- ▲ La constante diélectrique est très élevée à cause des moments dipolaires permanents des molécules

- Haute fréquence :

$$\epsilon'_r(\omega \rightarrow \infty) \approx 1,8$$

- ▲ La polarisation d'orientation disparaît et seule la polarisation électronique demeure



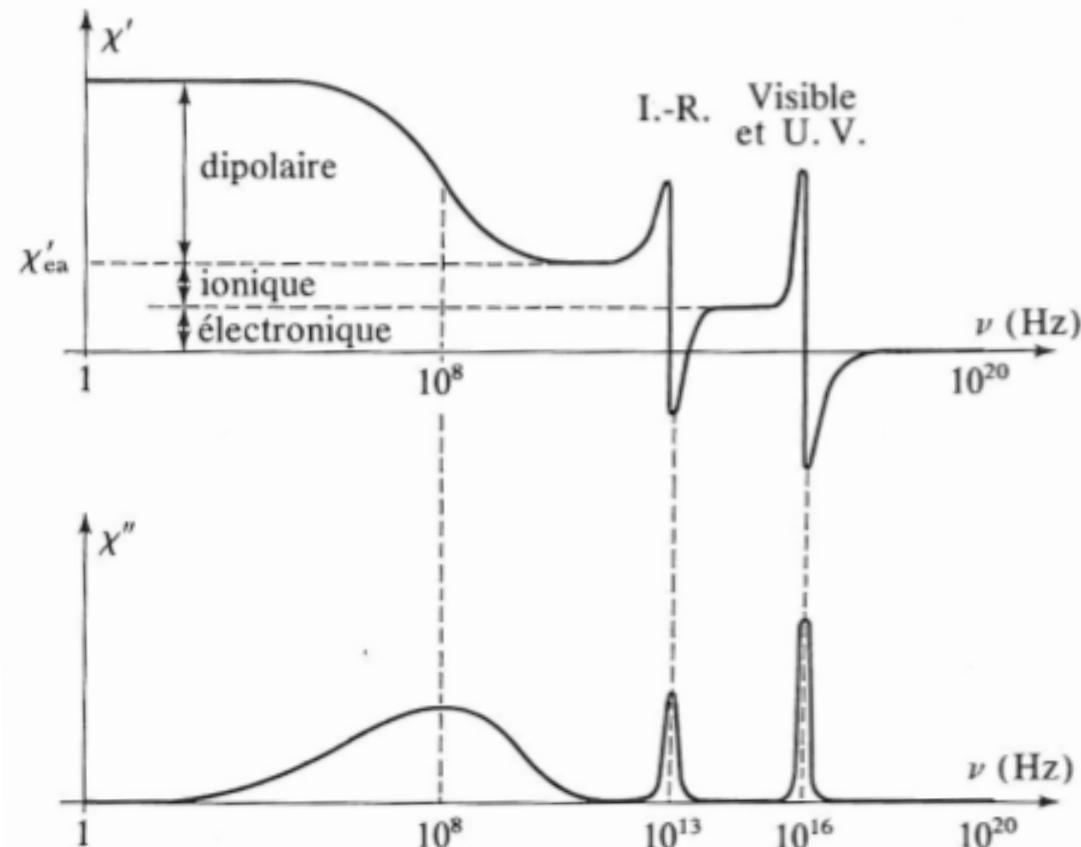
# Polarisation totale d'un diélectrique (1/2)

- Dans un milieu quelconque, tous les mécanismes de polarisation (électronique, ionique et d'orientation) peuvent intervenir
- En régime stationnaire :  $\epsilon_{\text{Stationnaire}} = \epsilon'_r(0) = 1 + \chi_{or}(0) + \chi_i(0) + \chi_e(0)$
- Dans le domaine du visible ( $\omega_{0,i} \ll \omega \ll \omega_{0,e}$ ) :  $\epsilon_{\text{Visible}} = 1 + \chi_e(\omega)$
- A très haute fréquence ( $\omega_0 \ll \omega$ ) :  $\epsilon_{\omega \rightarrow \infty} = 1$ 
  - Il n'y a plus de polarisation ....
  - Attention : la notion de  $P$  macroscopique (donc de  $\epsilon_r$ ) n'a plus de sens pour les RX ( $> 10^{17}$  Hz)

## Polarisation totale d'un diélectrique (2/2)

Pour un système constitué de molécules polaires, avec une fréquence propre électronique et une fréquence propre de vibration (ionique)

Les variations de  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$  permettent de déterminer les divers types de polarisation



# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
  
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drude-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
  
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- Lorsqu'un diélectrique est soumis à  $E$  variable, les dipôles qui le constituent peuvent se mettre à vibrer et engendrer un courant dont il faut tenir compte pour exprimer les équations de Maxwell
- Par exemple, pour l'atome d'hydrogène soumis à un champ  $E$ ,  $p$  et  $P$  s'écrivent ( $r$  : position de l'électron) :

$$\vec{p} = e \times (-\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -n e \vec{r}$$

- La densité de courant  $J_P$  associée au déplacement des e- (liés) s'écrit :
- $$\vec{J}_P = \left( \sum \rho_i \vec{v}_i \right) - n e \dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$
- On généralisera cette expression à tous les milieux diélectriques

- Il existe une densité  $J_P$  dont les effets sur  $B$  s'ajoutent à ceux des courants libres :

$$(MA) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{libre} + \vec{J}_P) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{libre} + \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J}_{libre} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Savoir  
refaire ce  
calcul

- Ceci fournit la signification des « charges liées » : charges dont il faut tenir compte dans le calcul de  $B$  mais qui ne peuvent pas trop (!) s'éloigner de leur position d'équilibre et qui ne peuvent donc pas participer à un courant « libre »
- Comme en électrostatique, on admettra qu'on utilise (MG) en dynamique comme dans le cas statique

# Équations de Maxwell dans un diélectrique

- Les équations de Maxwell indépendantes des densités de charges et de courants restent inchangées par rapport au vide
- Finalement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- $E$  : Champ électrique (V/m)
- $D$  : Induction électrique ( $C/m^2$ )
- $\rho$  : Densité volumique de charge ( $C/m^3$ )
- $\epsilon_0$  : Permittivité du vide ( $F/m$ )
- $B$  : Induction magnétique (T)
- $J$  : Densité volumique de courant ( $A/m^2$ )
- $\mu_0$  : Perméabilité du vide ( $H/m$ )

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité électrique
  
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drude-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur - Hors programme
  
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Milieu conducteur ou isolant (1/4)

- En régime harmonique :  $\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -i \omega \vec{P}$
- Si  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}$ ,  $J_P$  est lié au champ  $E$  total (incluant l'effet des charges libres). Par analogie avec la forme locale de la loi d'Ohm en régime stationnaire, on définit la **conductivité complexe**  $\gamma(\omega)$  par :

$$\vec{J}_P = -i \omega \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E} = \gamma(\omega) \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma(\omega) = -i \epsilon_0 \omega \chi(\omega)$$

- Dans le cadre d'une modélisation complexe, adaptée aux effets linéaires :  
 $\gamma(\omega) = \gamma'(\omega) + i \gamma''(\omega)$  et  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$   
 $\Rightarrow \gamma'(\omega) = \epsilon_0 \omega \chi''(\omega)$  et  $\gamma''(\omega) = -\epsilon_0 \omega \chi'(\omega)$
- Il est équivalent de décrire les propriétés électriques d'un milieu par sa susceptibilité complexe ou par sa conductivité complexe

## Milieu conducteur ou isolant (2/4)

$$\gamma'(\omega) = \epsilon_0 \omega \chi''(\omega) \quad \text{et} \quad \gamma''(\omega) = -\epsilon_0 \omega \chi'(\omega)$$

- En régime quasi stationnaire, on caractérisera :
  - Les métaux par leur conductivité qui est alors une constante réelle :
$$\gamma(\omega) \approx \gamma(0)$$
  - Les isolants par leur permittivité relative qui est une constante réelle :
$$\epsilon_r(\omega) \approx \epsilon'_r(\omega) = 1 + \chi(0)$$
- Les autres matériaux (semiconducteurs, mauvais isolants) se situent entre ces 2 cas limite

## Milieu conducteur ou isolant (3/4)

- On écrira :  $\vec{J}_{tot} = \gamma(\omega) \vec{E} = \gamma'(\omega) \vec{E} + i \gamma''(\omega) \vec{E}$  (MA)  $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_c + \vec{J}_d$ 
    - où :
    - $$\begin{cases} \vec{J}_c = \gamma'(\omega) \vec{E} & \text{Courant volumique de conduction} \\ \vec{J}_d = (1 + \chi'(\omega)) \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \epsilon'(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \omega \epsilon'(\omega) \vec{E} & \text{Courant volumique de déplacement} \end{cases}$$
  - Le rapport  $J_c/J_d$  permet, à  $\omega$  donné, de qualifier le milieu d'isolant ou de conducteur
  - Définitions :
    - **Isolant** : quelque soit la valeur de  $E$  (pas trop élevé), les e- restent liés
    - **Conducteur** : il existe des e- libres de se déplacer dans le milieu
    - **Semi-conducteur** : idem isolant mais largeur de bande plus faible : conduction pour quelques e- ou trous
- Licence 3 et Magistère de Physique  
(2016-2017) Milieux diélectriques
- 119

## Milieu conducteur ou isolant (4/4)

$$\frac{\|\vec{J}_c\|}{\|\vec{J}_d\|} = \frac{1}{\omega} \frac{\gamma'(\omega)}{\epsilon'(\omega)}$$

- On cherche le comportement limite de  $J_c/J_d$

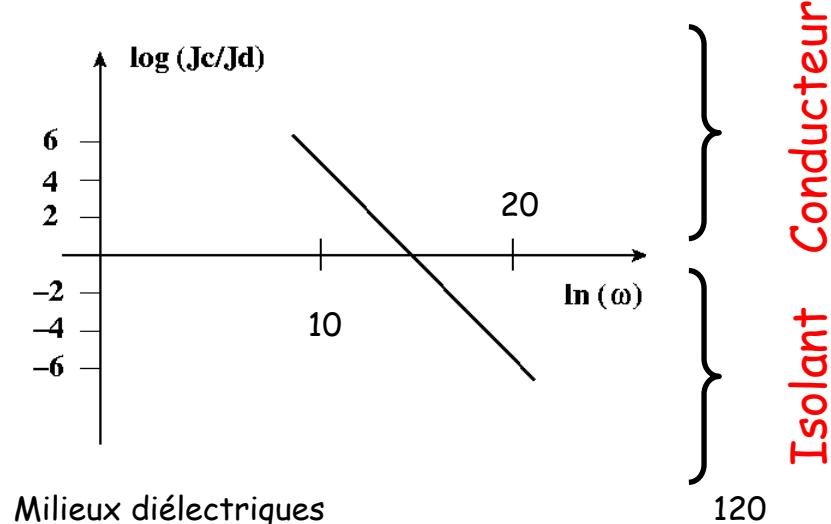
□ si  $\|\vec{J}_c\| \gg \|\vec{J}_d\| \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0 \gamma'(\omega) \vec{E}$

Le milieu se comporte comme un conducteur caractérisé par sa conductivité réelle  $\gamma'$

□ si  $\|\vec{J}_c\| \ll \|\vec{J}_d\| \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0 \epsilon'(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Le milieu se comporte comme un isolant caractérisé par sa constante diélectrique réelle  $\epsilon'$

- Selon la fréquence, tout milieu peut être isolant ou conducteur
  - Exemple du Cu : bon conducteur à faible fréquence et isolant à haute fréquence (visible)

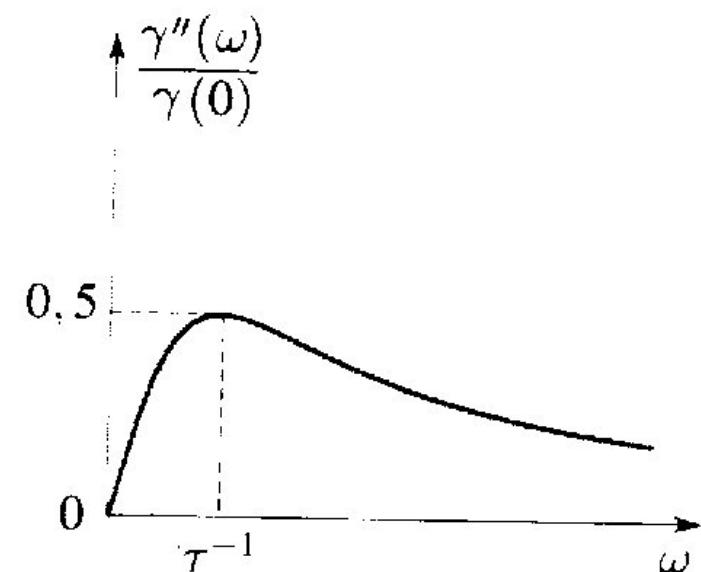
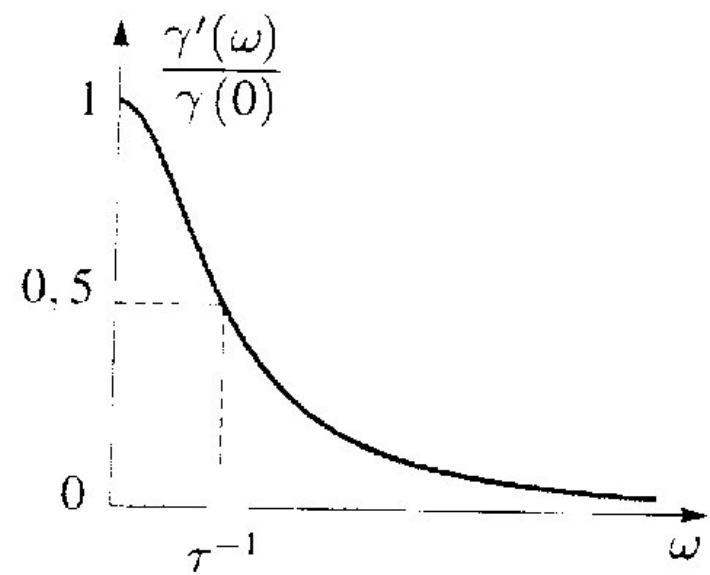


- Dans un conducteur, les charges sont libres et ne sont soumises à aucune force de rappel ( $\omega_0 = 0$  dans le modèle de Drude-Lorentz)
  - Concerne les conducteurs (e- de conduction) et les milieux partiellement conducteur

- On avait : 
$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$$

- Après simplification :  $\gamma(\omega) = -i \epsilon_0 \omega \chi(\omega) = \gamma(0) \frac{1}{1 - i \omega \tau} \quad \text{avec} \quad \gamma(0) = \frac{n q^2 \tau}{m}$ 
  - où  $\gamma(0)$  est la **conductivité en régime stationnaire**

$$\gamma(\omega) = \gamma'(\omega) + i \gamma''(\omega) \Rightarrow \gamma'(\omega) = \gamma(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \gamma''(\omega) = \gamma(0) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$



# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
  2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
  3. Susceptibilité électrique
  4. Polarisation en régime variable
- 5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques**

- Sans doute un des points les plus compliqués vus cette année
- Très mal traité dans les livres. Beaucoup d'approximations non triviales
- Les notes de cours sont très (trop) succinctes

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
  2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
  3. Susceptibilité électrique
  4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques
1. Cas d'un milieu lhi en régime sinusoïdal
  2. Travail de polarisation (cas général)
  3. Travail de polarisation (cas des faibles couplages)
  4. Lien avec l'énergie électrostatique

- La puissance totale volumique cédée par le champ EM à la matière est :

$$\frac{d\text{Puissance}}{dV} = \vec{J}_{tot} \cdot \vec{E} = (\vec{J}_{libre} + \vec{J}_P) \cdot \vec{E}$$

- En supposant un milieu vide de charges libres :  $\frac{d\text{Puissance}}{dV} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E}$
- Pour un lhi placé dans un champ  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i \omega t)$

$$\Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0 (\epsilon'_r - 1 + i \epsilon''_r) \exp(-i \omega t)$$

- Pour calculer la puissance, on doit passer aux notations réelles :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}_0 [(\epsilon'_r - 1) \cos(\omega t) + \epsilon''_r \sin(\omega t)]$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 [(\varepsilon'_r - 1) \cos(\omega t) + \varepsilon''_r \sin(\omega t)]$$

- Donc à l'instant  $t$  :

$$\frac{d\text{Puissance}}{dV} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \omega \varepsilon_0 E_0^2 \left[ \varepsilon''_r \cos^2(\omega t) - (\varepsilon'_r - 1) \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right]$$

- En moyennant sur le temps :

$$\left\langle \frac{d\text{Puissance}}{dV} \right\rangle = \varepsilon''_r(\omega) \omega \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

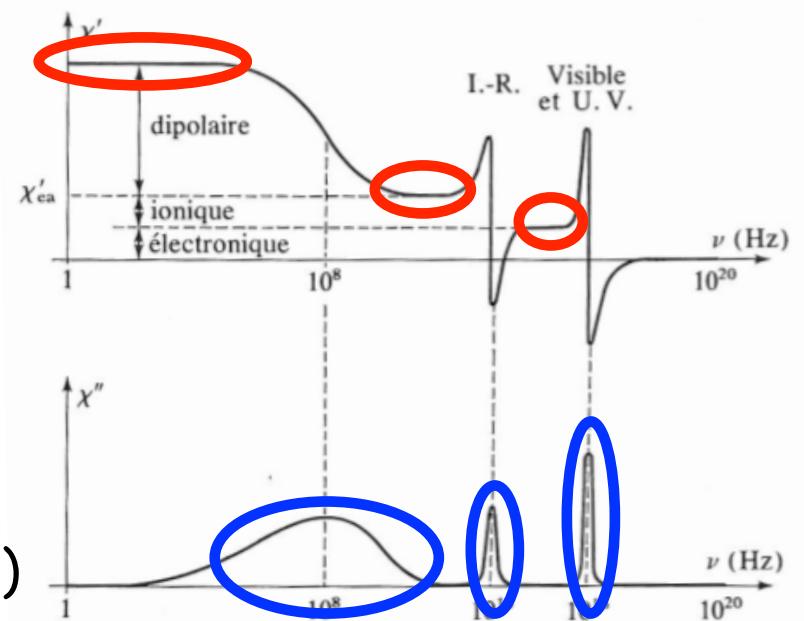


Savoir  
refaire ce  
calcul

- L'existence d'une partie imaginaire de la permittivité se traduit par un transfert d'énergie entre le champ EM et le milieu diélectrique

$$\left\langle \frac{d\text{Puissance}}{dV} \right\rangle = \varepsilon_r'' \omega \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

- En particulier, il n'y a pas de prélèvement d'énergie lorsque  $\varepsilon_r''(\omega) = 0$
- L'étude des courbes  $\varepsilon_r''(\omega)$  nous renseigne sur l'énergie absorbée par le milieu
  - Zones de transparence ( $\varepsilon_r''(\omega) \approx 0$ )
  - Zones d'absorption ( $\varepsilon_r''(\omega) \gg 0$ )



- La partie imaginaire d'un indice de réfraction  $n^2 = \varepsilon_r$  complexe représente l'absorption

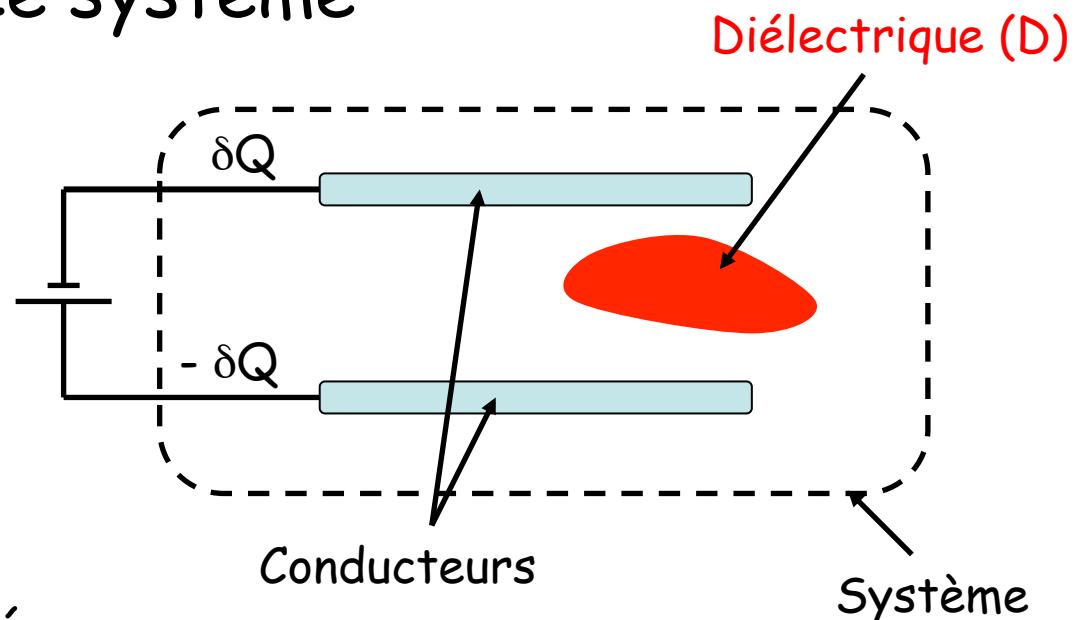
# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
  2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
  3. Susceptibilité électrique
  4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques
1. Cas d'un milieu lhi en régime sinusoïdal
  2. Travail de polarisation (cas général) - Hors programme
  3. Travail de polarisation (cas des faibles couplages)
  4. Lien avec l'énergie électrostatique

- Dans ce paragraphe, on ne considère que des champs statiques
- Créer une distribution de charges nécessite une énergie (énergie de constitution) qui est différente s'il existe ou non un milieu diélectrique dans le système
- Tout diélectrique peut recevoir de l'énergie sous forme de
  - Chaleur
  - Travail dû aux forces de pression, de déplacement, ..
  - Travail « électrique »

# Le système

- On ne considérera que des diélectriques sans charge libre
  - Les seules charges libres sont sur des conducteurs
- Le système sera constitué
  - du diélectrique
  - des conducteurs qui portent les charges libres
  - de tout l'espace où  $E$  est non nul
- Par hypothèse, les générateurs qui permettent de faire varier les charges  $Q$ , des conducteurs sont **à l'extérieur** du système



- Une petite modification  $\delta Q_i$  des charges nécessite un travail  $\delta W_e$  fourni par les générateurs (externes) donc reçu par le système

- Électrostatique : en négligeant les effets Joule dans les conducteurs :

$$\delta W_e = \sum_i \Phi_i \delta Q_i$$

- Si tout est immobile (aucun travail mécanique), alors  $\delta W_e$  est l'opposé du travail des forces électrostatiques qui s'exercent sur les charges libres du système

- Une modification  $\delta\rho_{libre}$  de la densité  $\rho_{libre}$  en un point de potentiel  $\Phi$  nécessite un travail reçu  $\Phi \delta\rho_{libre}$  d'où au final :

Travail : Produit d'une variable intensive par la variation élémentaire de la variable extensive associée  $\Rightarrow \delta W_e = \iiint_{(D)} \Phi \delta\rho_{libre} dV$

- Le domaine d'intégration peut être limité à la région de l'espace où se situent les charges libres

- La modification de l'équilibre électrostatique des charges libres se produit à des échelles de temps très courtes, et plus courtes que les échelles de temps caractéristiques d'établissement de la polarisation
  - L'expression ci-dessus ne nécessite pas l'équilibre interne des diélectriques

# Expression du travail $\delta W_e$ en fonction des champs (1/2)

$$\delta W_e = \iiint_{(D)} \Phi \delta \rho_{libre} dV = \iiint_{(D')} \Phi \delta \rho_{libre} dV$$

- On considère  $(D')$  domaine sphérique de rayon  $R$  englobant  $(D)$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} + \delta \vec{D}) = \rho_{libre} + \delta \rho_{libre} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} = \delta \rho_{libre}$$

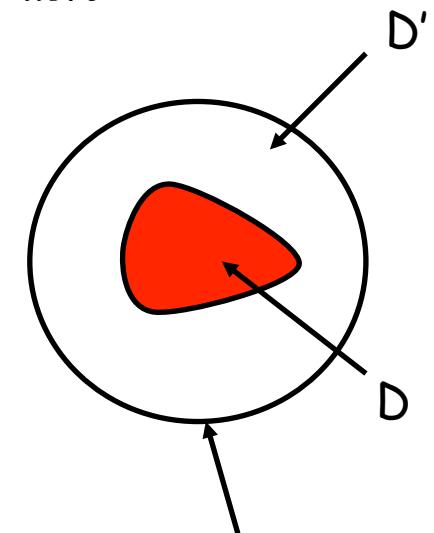
- On en déduit donc :

$$\delta W_e = \iiint_{(D')} \Phi (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D}) dV$$

- En utilisant :  $\vec{\nabla} \cdot (\Phi \delta \vec{D}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{D} + \vec{\nabla} \Phi \cdot \delta \vec{D}$

puis Ostrogradsky, on obtient :

$$\delta W_e = \oint_{(S)} \Phi \delta \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(D')} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV \quad (S)$$



## Expression du travail $\delta W_e$ en fonction des champs (2/2)

$$\delta W_e = \oint_{(S)} \Phi \delta \vec{D} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(D')} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

- A grande distance,  $\Phi \delta D$  décroît au moins comme  $1/R^3$  dans l'ARQS. Finalement :

$$\delta W_e = \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

- L'intégrale porte sur tout l'espace où  $E$  n'est pas nul. Ce résultat très général ne préjuge en rien du lien entre  $E$  et  $D$ , ie entre  $E$  et  $P$

- On introduit parfois la **densité volumique de travail**  $E \delta D$ . En fait, il n'est pas évident que le travail fourni au volume  $dV$  soit  $E \delta D$  : pour être complet, le bilan local doit prendre en compte les échanges d'énergie interne au système, dont nous ignorons l'expression généralement
- **Seule l'intégrale a une signification physique non ambiguë**

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
  2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
  3. Susceptibilité électrique
  4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques
1. Cas d'un milieu lhi en régime sinusoïdal
  2. Travail de polarisation (cas général)
  3. Travail de polarisation (cas des faibles couplages)
  4. Lien avec l'énergie électrostatique

## Une 2<sup>e</sup> expression du travail $\delta W_e$ en fonction des champs

$$\delta W_e = \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

- On écrit :  $\delta \vec{D} = \epsilon_0 \delta \vec{E} + \delta \vec{P} \Rightarrow \vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \vec{E} \cdot \delta \vec{P}$
- Il est tentant d'associer l'intégrale (sur tout l'espace) du 1<sup>er</sup> terme à un travail fourni au champ macroscopique  $E$  et celle du 2<sup>e</sup> terme (sur le diélectrique) à un travail fourni au diélectrique
- Ceci est faux dans le cas général car  $\delta W_e$  est fourni à l'ensemble (conducteur+diélectrique) et ces deux sous-systèmes sont couplés : l'énergie d'interaction (ou de couplage) ne peut être négligée et est inconnue :
  - Le champ et la matière sont couplés :  $E$  dépend de  $\rho_{\text{libre}}$  et de  $\rho_P$  alors que  $P$  (ou  $\rho_P$ ) dépend de  $E$

- Si la polarisation est faible, alors le couplage sera faible
  - Ceci revient à supposer que la présence du diélectrique ne modifie pas la répartition des charges libres
    - ▲ Faible couplage entre le diélectrique et les charges libres
    - ▲ Exemple d'un gaz peu polarisé
- Dans ce cas, on pourra séparer les deux contributions

# Résumé : travail électrique en l'absence de couplage entre un milieu lhi et les charges libres

- Le travail électrique s'écrit de 3 façons différentes :

□ **Energie électrostatique du vide** (externe au diélectrique)

$$W_1 = \iiint_{Espace} \int_E \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{E} dV$$

Séparation uniquement en cas de faible couplage

□ **Energie fournie au diélectrique** introduit dans le champ (interne au diélectrique)

$$W_2 = \iiint_{Espace} \int_P \vec{E} \cdot d\vec{P} dV$$

□ **Energie fournie par le générateur** lorsqu'on introduit le diélectrique dans le champ

$$W_e = \iiint_{Espace} \int_D \vec{E} \cdot d\vec{D} dV$$

Dans tous les cas

- Avec évidemment :  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow W_e = W_1 + W_2$

## Exercice 3.2

- La loi de Debye s'écrit :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}(t)$$

- C'est une loi linéaire. Sa solution est la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière
  - La solution de l'équation homogène est proportionnelle à  $\exp(-t/\tau)$ . Elle va s'annuler au bout de quelques  $\tau$
  - En se plaçant à des temps  $t \gg \tau$ , la solution est simplement la solution particulière
- On pose :

$$\vec{P} = \vec{P}_0 \exp(-i \omega t)$$

- En remplaçant dans l'équation de Debye :

$$\vec{P} (1 - i \omega \tau) = \varepsilon_0 \chi(0) \vec{E}$$

- Milieu Ihi :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E} \Rightarrow \chi(\omega) = \chi(0) \frac{1 + i \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

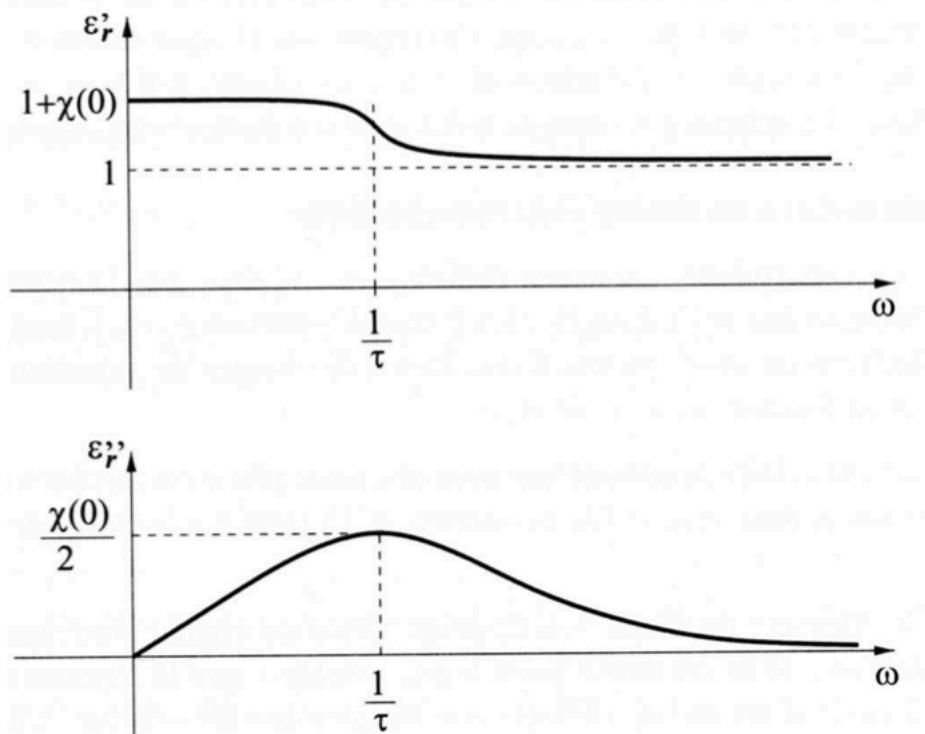
$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon'_r(\omega) + i \varepsilon''_r(\omega) \Rightarrow \varepsilon'_r(\omega) = 1 + \frac{\chi(0)}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon''_r(\omega) = \frac{\chi(0) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\varepsilon'_r(\omega) = 1 + \frac{\chi(0)}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon''_r(\omega) = \frac{\chi(0) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

- Si le temps de réponse des dipôles est « temps caractéristique de variation de  $E$  ( $\omega \ll 1/\tau$ ), on a :

$$\varepsilon'_r(\omega) = 1 + \chi(0)$$

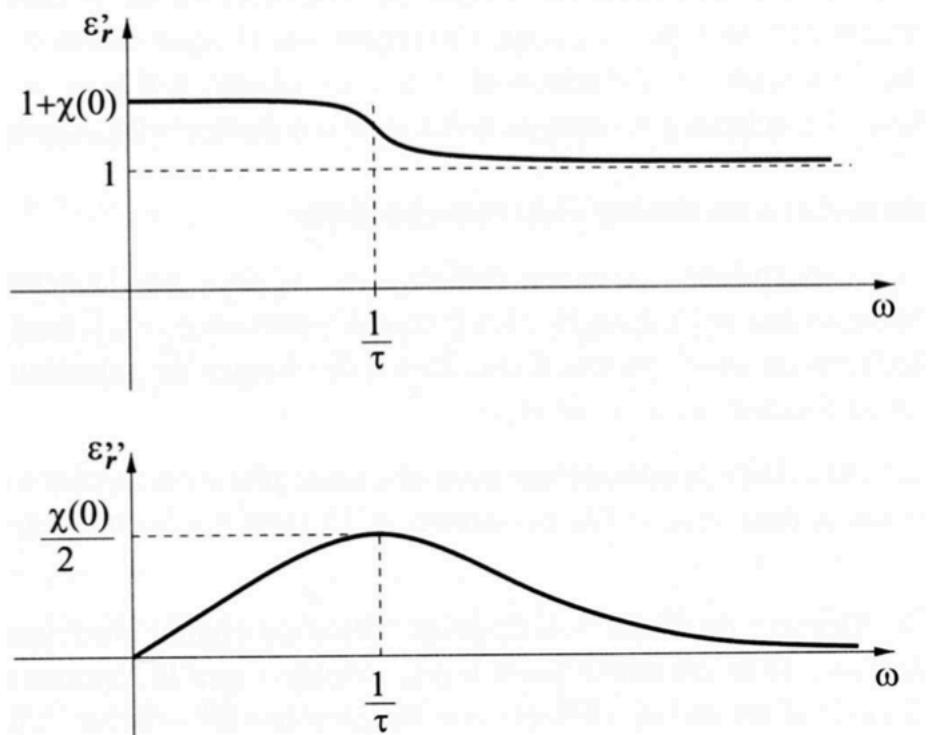
- $P$  suit  $E$  de manière instantanée
- Si  $\omega \approx 1/\tau$ , les dipôles n'ont plus le temps de suivre les variations de  $E$  et répondent avec un retard (déphasage entre  $E$  et  $P$ )
  - La partie imaginaire  $\varepsilon''_r(\omega)$  devient  $\neq 0$
  - Dissipation maximale pour  $\omega \approx 1/\tau$



$$\varepsilon'_r(\omega) = 1 + \frac{\chi(0)}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon''_r(\omega) = \frac{\chi(0) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

- Si  $\omega \gg 1/\tau$ , les dipôles n'ont plus le temps de réagir aux variations de  $E$ . On retrouve les conditions du vide :

$$\varepsilon'_r(\omega) \approx 1$$



# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
  2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
  3. Susceptibilité électrique
  4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques
1. Cas d'un milieu lhi en régime sinusoïdal
  2. Travail de polarisation (cas général)
  3. Travail de polarisation (cas des faibles couplages)
  4. Lien avec l'énergie électrostatique - Hors programme

# Fonctions énergétiques volumiques des diélectriques (1/2)

- On néglige les variations de volume (rajouter  $-p dV$  sinon). Pour un système ouvert (formé du diélectrique et du champ) :

$$dU = T dS + \iiint_{(D)} \vec{E} \cdot d\vec{D} dV + \mu dN$$

$$F = U - T S \Rightarrow dF = -S dT + \iiint_{(D)} \vec{E} \cdot d\vec{D} dV + \mu dN$$

- En utilisant les variables volumiques ( $u = U/V$ ;  $s = S/V$ ;  $\rho = N/V$ ) :

$$\Rightarrow du = T ds + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \mu d\rho \quad \text{et} \quad df = -s dT + \vec{E} \cdot d\vec{D} + \mu d\rho$$

- Une transformation de Legendre permet de remplacer  $D$  par  $E$  :

$$\tilde{u} = u - \vec{E} \cdot \vec{D} \quad \text{et} \quad \tilde{f} = f - \vec{E} \cdot \vec{D} = \tilde{u} - T s$$

$$\Rightarrow d\tilde{u} = T ds - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu d\rho \quad \text{et} \quad d\tilde{f} = -s dT - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu d\rho$$

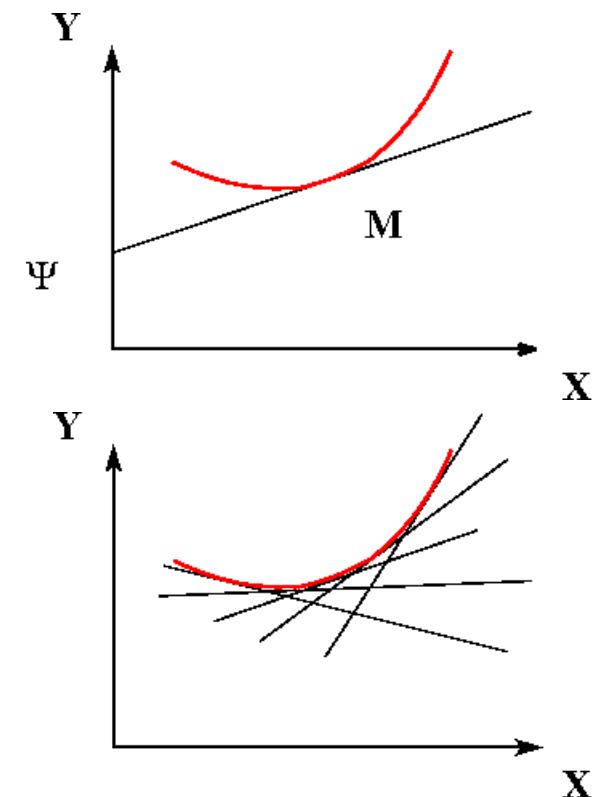
# Transformations de Legendre (1/2)

- Dans le cas d'une fonction d'une seule variable  $Y = Y(X)$ :

$$P = \frac{dY}{dX} \quad \text{et} \quad \Psi = Y - P X$$

- Une TL remplace chaque  $(X, Y)$  par  $(P, \Psi)$
- Une TL revient à remplacer une courbe par la famille de ses tangentes
- Généralisation :

$$\Psi(X_1, \dots, X_{i-1}, P_i, X_{i+1}, \dots, X_n) = Y(X_1, \dots, X_n) - P_i X_i \quad \text{avec} \quad P_i = \frac{dY}{dX_i}$$



## Transformations de Legendre (2/2)

- On appelle transformation de Legendre une transformation qui permet de changer d'ensemble de variables
- Si par exemple on a  $\delta W = Y dX$ , on aura  $dU = T dS + Y dX$  qui décrit le système à l'aide des variables extensives  $S$  et  $X$
- Pour décrire le système à l'aide de  $S$  et  $Y$ , il faut utiliser :  
$$d(U - XY) = T dS + Y dX - X dY - Y dX = T dS - X dY$$
- Pour décrire le système à l'aide des variables intensives  $T$  et  $Y$ , il faut utiliser :  
$$d(U - TS - XY) = T dS + Y dX - T dS - S dT - X dY - Y dX = - S dT - X dY$$
- La fonction thermodynamique  $U - TS - XY$  permet de décrire le système à l'aide des variables intensives  $T$  et  $Y$ , ce qui est parfois utile dans la pratique

## Fonctions énergétiques volumiques des diélectriques (2/2)

$$d\tilde{u} = T \, ds - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu \, d\rho \quad \text{et} \quad d\tilde{f} = -s \, dT - \vec{D} \cdot d\vec{E} + \mu \, d\rho$$

- On travaille plutôt avec  $f$  qu'avec  $u$  car il est plus simple de travailler à  $T$  constant qu'à  $s$  constant
- Les nouvelles fonctions d'état sont donc pour un lhi ( $D = \epsilon E$ ) :

$$\tilde{u}(s, \rho, \vec{E}) = u_0(s, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(T, \rho, \vec{E}) = f_0(T, \rho) - \frac{\epsilon E^2}{2}$$

# Energie électrostatique (1/2)

- On suppose le système dépourvu de sources d'irréversibilité
  - En particulier, ceci suppose l'absence d'hystérésis électrique
- A l'équilibre, l'état du système est déterminé lorsque toutes les contraintes sont connues (mécanique, thermique, électrique externe) :
  - Le système est entièrement déterminé par la connaissance des charges totales des conducteurs (ou la connaissance des potentiels)
  - La répartition des charges sur les conducteurs ou le diélectrique est une « variable interne » pour ajuster l'équilibre

## Energie électrostatique (2/2)

- On considère un système fermé composé de conducteurs rigides et d'un diélectrique lhi de volume  $V$  soumis à une pression uniforme  $p$ . Pour une transformation réversible à  $T$  et  $V$  constants, la variation de l'énergie libre  $F$  du système va s'écrire :

$$dF = -S \, dT - p \, dV + \delta W_e \quad \Rightarrow \quad dF = \delta W_e = \iiint_{Espace} (\vec{E} \cdot d\vec{D}) \, dV$$

- Par intégration :  $\delta W_e$  : travail reçu par le système

$$F_e = F(T, V, \Phi_i) - F(T, V, 0) = \iiint_{Espace} \left( \int_{D=0}^{D=D_{final}} \vec{E} \cdot d\vec{D} \right) dV$$

- Energie nécessaire pour augmenter le champ de 0 à sa valeur finale dans le diélectrique : c'est l'énergie électrostatique
- L'énergie électrostatique est une énergie libre ( $T$  et  $V$  constants)

- L'énergie interne (au sens de la thermodynamique) est :

$$dU = T dS - p dV + \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot d\vec{D} dV$$

- Attention :  $E$  et  $D$  sont couplés et ne forment pas des variables conjuguées (au sens de la thermodynamique)
- Pour un milieu lhi,  $\epsilon_r$  dépend a priori de  $S$  (et de  $V$  pour un gaz). Mais à  $S$  et  $V$  constants :

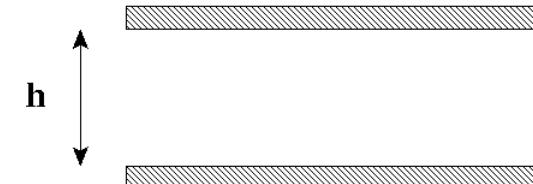
$$U_e = \iiint_{Espace} (\int_{D=0}^{D=D_{Final}} \vec{E} \cdot d\vec{D}) dV$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2} \iiint_{Espace} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \iiint_{Espace} \frac{\epsilon E^2}{2} dV$$

- C'est l'énergie électrostatique du système complet (conducteur + diélectrique)

# Force d'attraction des armatures du condensateur plan, à vide (1/2)

- A vide, ce système ne peut pas rester à l'équilibre sous l'action des seules forces électrostatiques
- On note  $X$  la force qui s'exerce sur l'armature du haut (orientation positive vers le haut)



- La variation isotherme de l'énergie libre du condensateur peut s'écrire :

$$dF = \delta W \quad \Rightarrow \quad dF = \Phi \delta Q + X \delta h \quad \Rightarrow \quad X = \left( \frac{\partial F}{\partial h} \right)_Q$$

$\Phi \delta Q$  est le travail du générateur,  
 $X \delta h$  est le travail fourni par l'opérateur

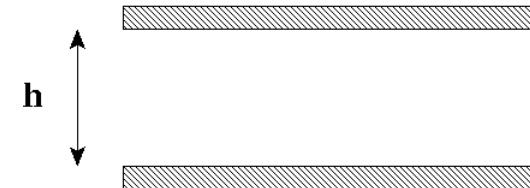
- L'énergie électrique totale du condensateur est  $Q^2/2C$  d'où :

$$F = F_0 + \frac{Q^2}{2C} = F_0 + \frac{Q^2 h}{2 \epsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad X = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S}$$

# Force d'attraction des armatures du condensateur plan, à vide (2/2)

- La pression  $p$  s'écrit :

$$p = \frac{X}{S} = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S^2}$$



- La relation de continuité au niveau de l'armature entraîne :

$$D = \pm \sigma \Rightarrow D^2 = Q^2 / S^2$$

- On en déduit la pression  $p$  qui s'exerce sur les armatures du condensateur à vide :

$$p = \frac{D^2}{2 \epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{CQFD !!}$$

- NB :  $X$  est la force exercée par l'opérateur. La force exercée par le milieu est l'opposé, c'est-à-dire que le condensateur à tendance à s'écraser sur lui-même si on ne maintient pas ses armatures

# Effet thermique dans le diélectrique d'un condensateur (1/2)

- **Problématique** : dans un condensateur plan d'épaisseur  $d$ , le volume intérieur est occupé par un diélectrique de volume constant et dont la permittivité  $\varepsilon(T)$  ne varie qu'avec la température. Au cours d'un processus quasi statique isotherme, on augmente le champ de  $0$  à  $E_0$
- Le seul travail est celui des forces électriques. Le générateur fournit :  
$$\delta W = V E dD \quad \text{avec} \quad D = \varepsilon(T) E \quad \Rightarrow \quad W = V \int_0^{E_0} E \varepsilon dE = V \varepsilon \frac{E_0^2}{2}$$
- L'échange de chaleur entre le diélectrique et le milieu extérieur se traduit par :  
$$\delta Q = T dS = T \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_T dE$$
- La fonction thermodynamique adaptée au problème est :

$$F^* = U - T S - V E D \quad \Rightarrow \quad dF^* = -S dT - V D dE$$

## Effet thermique dans le diélectrique d'un condensateur (2/2)

$$\delta Q = T \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_T dE$$

$$dF^* = -S dT - V D dE$$

- Pour intégrer  $\delta Q$ , on utilise  $F^*$  pour calculer  $(\delta S / \delta E)_T$  à l'aide d'une « relation de Maxwell » :

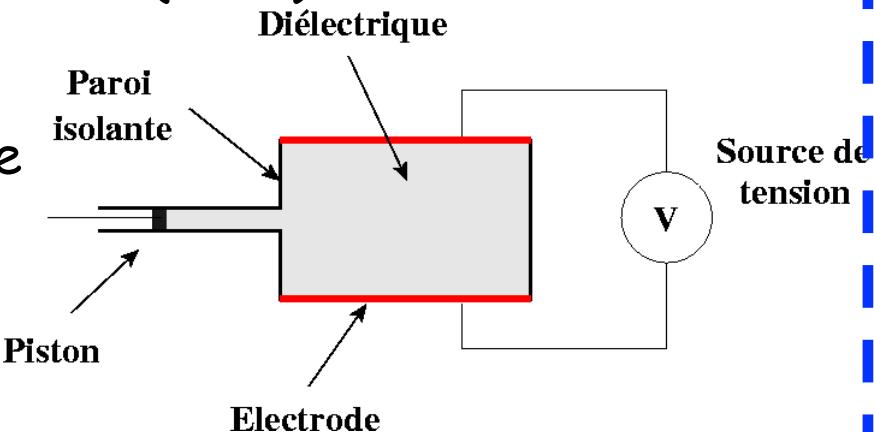
$$\left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_T = V \left( \frac{\partial D}{\partial T} \right)_E = V E \frac{d\varepsilon}{dT} \Rightarrow Q = T V \int_0^{E_0} E \frac{d\varepsilon}{dT} dE = T V \frac{E_0^2}{2} \frac{d\varepsilon}{dT}$$

- Finalement :  $\Delta U = W + Q = \frac{V E_0^2}{2} \left( \varepsilon + T \frac{d\varepsilon}{dT} \right)$
- Le 1<sup>er</sup> terme est :  $\frac{\varepsilon V E_0^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \times (s d) \times \frac{\phi^2}{d^2} = \frac{\varepsilon s}{d} \frac{\phi^2}{2} = \frac{C_0 \phi^2}{2}$

où  $C_0$  est la **capacité du condensateur plan en électrostatique** et  $\phi$  la **différence de potentiel entre les armatures**. En électrostatique, on a  $C_0 \phi^2 / 2$ . On ajoute ici un terme dû à l'effet thermique

# Electrostriction (1/3)

- On considère un diélectrique liquide emplissant tout l'espace entre les armatures d'un condensateur plan



- L'énergie interne et la charge  $q$  s'écrivent :

$$dU = T dS - p dV + \Phi dq \quad q = \epsilon_r(T, p) C_0 \Phi \quad \text{avec} \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{l}$$

- On associe à  $U$  une **fonction enthalpie libre généralisée** (à l'aide d'une transformation de Legendre)

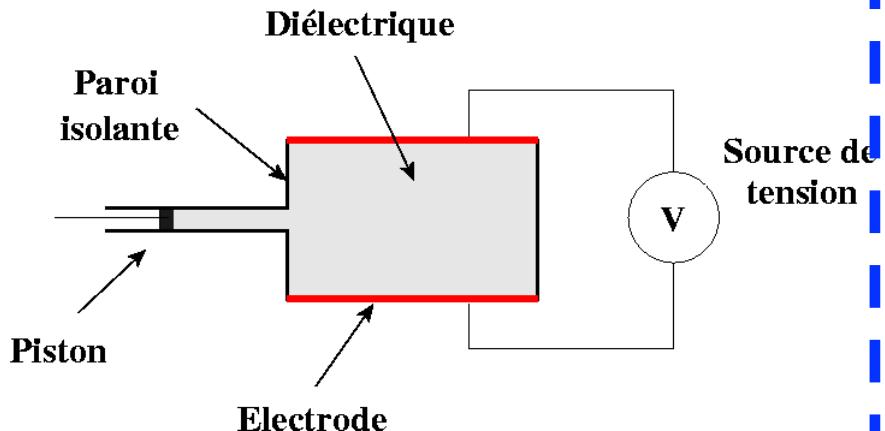
$$\tilde{G} = U - T S + p V - \Phi q \Rightarrow d\tilde{G} = -S dT + V dp - q d\Phi$$

- On en déduit une équation mécanique et une équation électrique :

$$V = \left( \frac{\partial \tilde{G}}{\partial p} \right)_{T, \Phi} \quad \text{et} \quad q = - \left( \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \Phi} \right)_{T, p}$$

## Electrostriction (2/3)

$$V = \left( \frac{\partial \tilde{G}}{\partial p} \right)_{T, \Phi} \quad \text{et} \quad q = - \left( \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \Phi} \right)_{T, p}$$



- Ces 2 équations ne sont pas indépendantes car  $G$  est une fonction d'état :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial p \partial \Phi} = \frac{\partial^2 G}{\partial \Phi \partial p} \Rightarrow - \left( \frac{\partial q}{\partial p} \right)_{T, \Phi} = \left( \frac{\partial V}{\partial \Phi} \right)_{T, p}$$

- Une variation de potentiel entraîne une variation de volume : c'est le phénomène **d'électrostriction**

- Comme  $q = \epsilon_r(T, p) C_0 \Phi$  avec  $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{l}$   $\Rightarrow \left( \frac{\partial V}{\partial \Phi} \right)_{T, p} = - C_0 \Phi \left( \frac{\partial \epsilon_r}{\partial p} \right)_{T, \Phi}$

## Electrostriction (3/3)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \Phi}\right)_{T,p} = -C_0 \Phi \left(\frac{\partial \epsilon_r}{\partial p}\right)_{T,\Phi}$$

- Soit en intégrant :

$$\Delta V = -\frac{1}{2} C_0 \Phi^2 \left(\frac{\partial \epsilon_r}{\partial p}\right)_{T,\Phi}$$

- On en déduit la variation de volume en fonction du champ électrique  
 $E = \Phi/l$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V}{S l} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \left(\frac{\partial \epsilon_r}{\partial p}\right)_{T,\Phi}$$

- Remarques :

- Effet quadratique en  $E$ , alors que la piézoélectricité est linéaire en  $E$
- L'électrostriction n'est pas symétrique (une contrainte n'entraîne pas une polarisation), alors que la piézoélectricité l'est

