Chap 19 : Conduct^{R} ohmiq

I - Modèle de la loi d'Ohm

Conductivité statiq$_{\sim}$:

→ Modèle de Drude : ds un cond élect solide, charg e- libre (de densité particulaire η) subis 2 forces : → $q\vec{E}$ force élect

→ $\vec{F}_f = -k\vec{v}$ force frottem^t (dû au réseau métalliq)

→ PFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - k\vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E} \text{ fixé}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v}_{lim}}{\tau}\right) \quad \tau = \frac{m}{k}$$

$$\vec{v}_{lim} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

$\vec{v}(t) = \vec{A}e^{-t/\tau} + v_{lim}$

si $\vec{v}(t=0) = \vec{0} \Rightarrow v(t) = \vec{v}_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

si $t \gg \tau \Rightarrow \vec{v}(t) \approx \vec{v}_{lim}$

→ $\vec{j}$: vect^r densité de courant ?

$\boxed{\vec{j} = e_m\vec{v}}$ mobiles

ici : $\vec{j} = \eta q\vec{v}_{lim}$
$= \eta q\dfrac{q\tau}{m}\vec{E}$
$= \eta\dfrac{q^2\tau}{m}\vec{E}$

On pose : $\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$

et $\boxed{\sigma = \dfrac{\eta q^2\tau}{m}}$ loi d'Ohm locale

conductivité élect

et $\boxed{\vec{j} = -\sigma\,\overrightarrow{grad}(V)}$

σ en $\Omega^{-1}.m^{-1}$

OdG : Cuivre (bon conduct^r) :

$\sigma = 6.10^7\ \Omega^{-1}m^{-1}$

$\sigma \approx 10^8\ \Omega^{-1}m^{-1}$

→ τ ? odg :

$$\tau = \frac{\sigma m}{n q^2}$$

$m_e \approx 10^{-30}$ kg

$|q| = 1,6.10^{-19}$ C

si 1 e- libre ds l'atom : $\eta = \eta_{atom} = 10^{29}\ m^{-3}$

$\mu_{Cu} = 10^4\ kg.m^{-3}$

$\mu_{Cu} = \dfrac{m_{tot}}{V} = \dfrac{n^* M}{V}$ q^{té} de mat

nb de part^{s}

$= \dfrac{N M}{N_a . V} = n\dfrac{M}{N_a}$

d'où $\eta = \dfrac{\mu N_a}{M}$

$\Rightarrow \tau \approx 10^{-13}$ s : Régime permanent s'établit rapidement

→ En Régime variable :

$f_{reg} = \dfrac{1}{T}$, régime permanent atteint si $T \gg \tau$ ($\vec{E}$ varie "lentement") $\Rightarrow f \ll \dfrac{1}{\tau} = 10^{13}$ Hz

$\boxed{\text{Loi d'Ohm : } j = \sigma E \text{ si } f \ll 10^{13}\text{ Hz}}$

Régime variable : $\vec{E}(t)$

$\Rightarrow \exists$ champ mg $\vec{B}(t)$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - k\vec{v} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

$$m\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = q\vec{E} - k\vec{v} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$$

→ $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ négligeable ?

$$(1) = \frac{\|(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}\|}{\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\|} = \frac{v\frac{1}{a}v}{\frac{v}{T}} = v\frac{T}{a}$$

$(1) \ll 1$ si $v\dfrac{T}{a} \ll 1$

$f = \dfrac{1}{T} \gg \dfrac{v}{a}$ → $R \approx 1$ mm

v_e ? : Si $I = 1$ A :

$j = \dfrac{I}{\pi R^2} = |e|n v_e = nev$

$\Rightarrow v_e = \dfrac{I}{\pi R^2 ne} \approx 10^{-4}\ m.s^{-1}$

(on peut suivre les e- !)

On a donc $f \gg 0,1$ Hz : peu restrictif, donc on peut négliger $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ p/r $\dfrac{\partial v}{\partial t}$

→ Terme mg négligeable ?

$$(2) = \frac{\|q\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{v.B}{E} \approx \frac{vB}{\frac{j}{\sigma}}$$

$(2) \ll 1$ si : $\dfrac{vB}{j/\sigma} \ll 1$

donc $B \ll \dfrac{j}{\sigma v} = \dfrac{I}{\pi R^2\sigma v}$

$B \ll 10$ T peu restrictif, le champ $\vec{B}$ peut ê négligé devant $\vec{E}$. Il reste :

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = q\vec{E} - k\vec{v}$$

→ Conductivité σ :

PfD en complexe : $\tau = \dfrac{m}{k}$

$m j\omega\underline{\vec{v}} = q\underline{\vec{E}} - k\underline{\vec{v}}$

$\underline{\vec{v}}\left(j\omega + \dfrac{k}{m}\right) = \dfrac{q}{m}\underline{\vec{E}}$

$\underline{\vec{v}}\left(j\omega + \dfrac{1}{\tau}\right) = \dfrac{q}{m}\underline{\vec{E}}$

$$\underline{\vec{v}} = \frac{\frac{q\tau}{m}\underline{\vec{E}}}{1 + j\omega\tau}$$

et $\underline{j} = nq\underline{\vec{v}} = \dfrac{\frac{nq^2\tau}{m}\underline{\vec{E}}}{1 + j\omega\tau} = \dfrac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}\underline{\vec{E}}$ conductivité statique

Donc $\boxed{\underline{\sigma}(\omega) = \dfrac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}}$ σ complexe donc j et $\vec{E}$ non en phase

→ Neutralité électriq.

$$\boxed{\text{Dans un conduc}^{t}\text{ ohmiq : } \rho(M,t)=0 \text{ : localem}^{t}\text{ neutre}}$$

Preuve :

$$0=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\vec{j_v})=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}})$$

$$0=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\underline{\sigma}\operatorname{div}(\vec{E})$$

$$0=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\sigma_0}{1+j\omega\tau}\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$0=j\omega\underline{\rho}+\frac{\sigma_0}{1+j\omega\tau}\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$0=j\omega\underline{\rho}(1+j\omega\tau)+\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\sigma_0$$

On pose $\tau'=\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\simeq 10^{-19}$, $\ll \tau \sim 10^{-13}$

$$0=j\omega\underline{\rho}+(j\omega)^2\rho\tau+\frac{\rho}{\tau'}$$

$$0=\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{1}{\tau}+\frac{\rho}{\tau\tau'}$$

Poly caractéristique :

$$r^2+\frac{1}{\tau}r+\frac{1}{\tau\tau'}=0$$

$$\Delta=\frac{1}{\tau^2}-\frac{4}{\tau\tau'}=\frac{1}{\tau^2}\left(\cancel{1}-4\frac{\tau}{\tau'}\right)<0$$

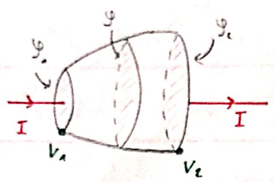
Sol^{o} : $R=\dfrac{-\frac{1}{\tau}\pm j\sqrt{-\Delta}}{2}=-\dfrac{1}{2\tau}\pm j\omega_0$

$$\omega_0=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\boxed{\rho(t)=e^{-t/2\tau}\left(B_1\cos(\omega_0 t)+B_2\sin(\omega_0 t)\right)}$$

qd $t\gg\tau \Rightarrow \rho(t)\approx 0$

⊙ Résistance électrique



$$I=\iint \vec{j_v}\cdot d\vec{S}=\iint \sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

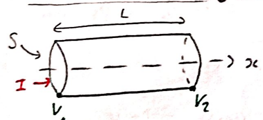
$$V_1-V_2=\int_1^2 -dV=\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Si on multiplie E par λ, I et V_1-V_2 le st aussi $\Rightarrow$ I et V_1-V_2 et σ

On pose $\boxed{R=\dfrac{V_1-V_2}{I}}$ Ω

dépend { du conduc^{t} (par σ) ; de la géométrie du cond }

→ Pour un barreau cylindriq



$$\vec{j_v}=j_v\vec{u_x}$$

$$I=\iint \vec{j_v}\cdot d\vec{S}=\underline{j_v S=I}$$

$$V_1-V_2=\int_1^2 -dV=\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

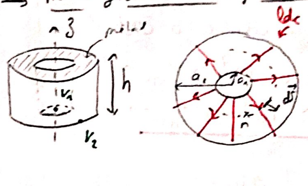
avec $E=\frac{j_v}{\sigma}=\frac{I}{\sigma S}$

$$V_1-V_2=\int_0^L \frac{I}{\sigma S}dx=\frac{I}{\sigma S}\times L$$

Or $RI=V_1-V_2 \Rightarrow \boxed{R=\frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}}$

(Autre démo cf cours)

→ Autre géométrie du cylindre



$$I=\iint \vec{j_v}\,d\vec{S}=j_v\,2\pi r h$$

Donc $\vec{j_v}=\dfrac{I}{2\pi r h}\vec{u_r}$ et $\vec{E}=\dfrac{\vec{j_v}}{\sigma}=\dfrac{I}{2\pi r h\sigma}\vec{u_r}$

Or $V_1-V_2=\int_1^2 -dV=\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l}=\int_1^2 \frac{I}{2\pi r h\sigma}dr$

$$=\frac{I}{2\pi\sigma h}\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

Or $RI=V_1-V_2 \Rightarrow \underline{R=\dfrac{1}{2\pi\sigma h}\ln\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)}$

II - Force de Lorentz

⊙ Expression : sur une charge q de vitesse v :

$$\boxed{\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\wedge\vec{B}}$$

→ Force volumiq

Dans un volume $d\tau$: $dq=\rho\,d\tau$

$\Rightarrow d\vec{F_{el}}=dq\vec{E}=\rho\,d\tau\,\vec{E}$

$\rightarrow d\vec{F_{mg}}$: aux charges mobiles de densité ρ_m :

$$d\vec{F_{mg}}=dq\,\vec{v}\wedge\vec{B}=\rho_m d\tau\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$

Donc $d\vec{F}=\underbrace{\left(\rho\vec{E}+\rho_m\vec{v}\wedge\vec{B}\right)}_{\boxed{\vec{f}_{vol}=\rho\vec{E}+\rho_m\vec{v}\wedge\vec{B}}}d\tau$

→ Puissance reçue

* pr les charges immobiles : $P=0$
* pr les charges mobiles :

$$P=d\vec{F}\cdot\vec{v}=(\rho_m\vec{E}+\underbrace{\rho_m\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}}_{=\vec{0}}\,d\tau$$

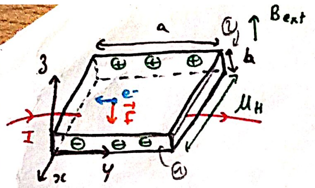
$$P=\rho_m\vec{v}\,\vec{E}\,d\tau=\underline{\vec{j_v}\,\vec{E}\,d\tau}$$

$$\boxed{P_{vol}=\vec{j_v}\cdot\vec{E}=\sigma\vec{E}\cdot\vec{E}=\frac{j_v^2}{\sigma}}$$

Cette puissance est celle de l'effet Joule en régime indpdt du tps.

⊙ Effet Hall

Une plaque où circule un courant I est plongé dans un champ mg $\vec{B}_{ext}$. Les électrons dans la plaque, de vitesse $-\vec{u_y}$ subissent la force de Lorentz, ce qui les déplace suivant $+\vec{u_x}$, polarisant la plaque. On mesure alors la tension de Hall : U_H



$\vec{j_v} = j_v \vec{u_y}$ et $j_v = \frac{I}{ab}$

de plus $\vec{j_v} = \rho_m \vec{v} = \rho_m v \vec{u_y}$ ($v<0$ et $\rho_m<0$)

PFD en régime permanent :

$$0 = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v}\wedge\vec{B} \underbrace{- e\vec{E_H}}_{\text{champ de Hall}} \underbrace{- k\vec{v} - e\vec{E_0}}_{\text{suivant } \vec{u_y}}$$

champ de Hall
(compense la répulsion des e⁻ ⇒ opposé à $\vec{F}$)

$\perp$ à $\vec{u_y}$:

$$0 = -e\vec{v}\wedge\vec{B} - eE_H$$

$$\Rightarrow E_H = -\vec{v}\wedge\vec{B} = -v\,B_{ext}\,\vec{u_x}$$

$$U_H = V_2 - V_1 = \int_1^2 dV = \int_1^2 -\vec{E_H}\cdot\vec{dr}$$

$$= \int_1^2 v\,B_{ext}\,\vec{u_x}\cdot\vec{dr} = \int_1^2 v\,B_{ext}\,\vec{u_x}\,dx\,(-\vec{u_x})$$

$$= \int_1^2 -v\,B_{ext}\,dx = -v\,B_{ext}\,a$$

OR $\frac{I}{ab} = \rho_m v \Rightarrow a = \frac{I}{b\rho_m v}$

Donc : $$\boxed{U_H = -\frac{I\,B_{ext}}{\rho_m\,b}}$$

↳ mesure de B_{ext}

III - Force de Laplace

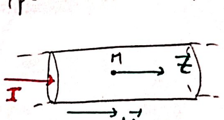
Qu'est ce que c'est ?

La force de Lorentz s'applique sur des particules dans $(\vec{B}_{ext}, \vec{E}_{ext})$

La force de Laplace s'applique à un conducteur, placé dans un champ mg B_{ext}, parcouru par un courant.

Expression :

Pr un morceau de conduct° filiforme élémentaire, placé ds un champ (E_{ext}, B_{ext})



- Charge totale du conduct° : $dq = 0$

donc $d\vec{F}_{el} = q\vec{E} = 0$

- Charges mobiles : $dq_m = \rho_m\,d\tau$

$$d\vec{F}_{mg} = dq\,\vec{v}\wedge\vec{B}_{ext} = \rho_m\,d\tau\,\vec{v}\wedge B_{ext}$$

$$= \vec{j_v}\,d\tau\wedge B_{ext}$$

OR $\vec{j_v} = \frac{I}{S}\vec{t}$

Donc $$d\vec{F}_{mg} = \frac{I}{\cancel{S}}\,\vec{t}\,\cancel{S}.dl\wedge\vec{B}_{ext}$$

$$= I\,\vec{dl}\wedge\vec{B}_{ext}$$

$$\boxed{d\vec{F}_{mg} = I\,\vec{dl}\wedge\vec{B}_{ext}}$$ Force de Laplace

...