Théorème pi et explosion nucléaire

I. Théorème et histoire

Théorème 1 : Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème Pi

> Soit une relation homogène en dimension $u_1 = f(u_2, ..., u_k)$ entre k paramètres physiques : $u_1, ..., u_k$ de r grandeurs dimensionnellement indépendantes. On peut alors écrire $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, ...\Pi_{k-r}$ où les Π_i sont adimensionnés.

Ce théorème porte les noms de l'ingénieur et mathématicien français Aimé Vaschy et du physicien américain Edgar Buckingham.

Ce théorème a cependant été démontré en 1878 par la mathématicien français Joseph Bertrand.

II. Application : explosion nucléaire

1) Histoire

On cherche à reproduire le raisonnement effectué par Geooffrey Taylor (physicien britannique spécialiste de la mécanique des fluides et des solides) en 1950. En effet, il réussit à partir d'un film rendu publique à déterminer l'énergie dégagée par une bombe atomique (confidentielle à l'époque).

2) Paramètres et dimensions

Quatre paramètres sont intéressant pour cette étude :

- Le rayon (R), $[R] = L$
- Le temps (t), $[t] = T$
- L'énergie de l'explosion (E), $[E] = ML^2T^{-2}$
- La masse volumique de l'air (ρ), $[\rho] = ML^{-3}$

3) Application du théorème

D'après le théorème précédemment expliquer, il existe un unique $(4-3)$ nombre adimensionné liant les quatre paramètres physiques du problème.

$$R = Ct^\alpha E^\beta \rho^\gamma \text{ où } C \text{ est une constante}$$

Ainsi, à partir des dimensions de chacune de ces grandeurs,

$$L = CT^\alpha M^\beta L^{2\beta} T^{-2\beta} M^\gamma L^{-3\gamma}$$
$$\Leftrightarrow L = CT^{\alpha-2\beta} M^{\beta+\gamma} L^{2\beta-3\gamma}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 2\beta - 3\gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta = -\gamma \\ 2\beta - 3\gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta = -\gamma \\ 5\beta = 1 \end{cases}$$

De la dernière équation, on sort $\beta = \frac{1}{5}$. Par la deuxième équation on remonte à $\gamma = -\frac{1}{5}$ et grâce à la première équation on trouve $\alpha = \frac{2}{5}$.

Ainsi,

$$R = Ct^{\frac{2}{5}}E^{\frac{1}{5}}\rho^{-\frac{1}{5}}$$

Ainsi par passage au log, on obtient :

$$\log(R) = \log(C) + \frac{2}{5}\log(t) + \frac{1}{5}\log\left(\frac{E}{\rho}\right)$$

En considérant, $C \approx 1$, alors $\log(C) \approx 0$ et on peut donc inverser la relation précédente pour obtenir :

$$\frac{5}{2}\log\left(\frac{\tilde{R}\text{ (en cm)}}{100}\right) = \log(t) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{E}{\rho}\right) \Leftrightarrow \frac{5}{2}\log(\tilde{R}) = 5 + \log(t) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{E}{\rho}\right)$$

4) Exploitation de la courbe de données

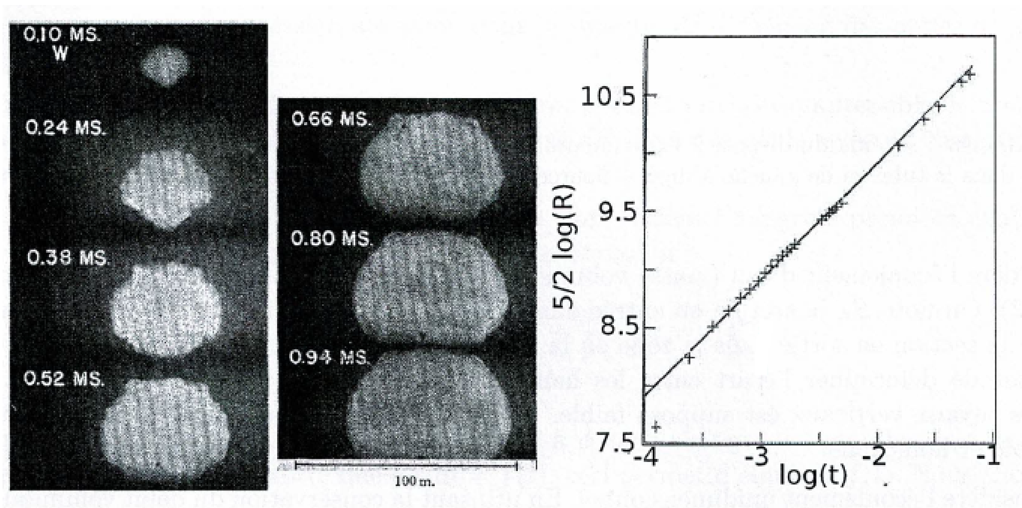

Figure 1 – Gauche : film d'une explosion atomique. Droite : Évolution du rayon R (en cm) de la boule de feu en fonction du temps t (en s) en échelle logarithmique.

Source : The formation of a Blast Wave by a Very Intensive Explosion. II. The Atomic Explosion of 1945, G.Taylor, Proc.Roy.Soc. A, Vol. 201, No. 1065 (Mar. 22,1950), pp. 175-186

En extrapolant la courbe, on trouve une ordonnée à l'origine $11,9$.
Ainsi,

$$11,9 = 5 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{E}{\rho}\right) \Leftrightarrow E = \rho.10^{2(11,9-5)} \approx 7,6.10^{13} J \approx 18 \text{ kilotonnes de TNT}$$

Remarque : 1 kg de TNT produit une énergie de $4,2.10^6$ *J.*