

Chapitre 2 : Electrostatique

- L'**électrostatique** est l'étude des charges immobiles
 - Les observables physiques seront indépendantes du temps
- La conservation de la charge totale implique que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ mais n'interdit pas a priori $\vec{J} \neq 0$ (**qu'on supposera néanmoins ici**)
- Le domaine spatial de validité de l'électrostatique est très grand :
 - Limite haute : l'infini
 - Limite basse : la prise en compte des effets quantiques (QED) en s'approchant des charges ($d \ll 10^{-10}$ m)
- On doit utiliser des variables nivélées pour les densités continues

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
 1. Champ électrostatique
 2. Potentiel électrostatique
 3. Relations avec les charges
 4. Méthodes de calcul en électrostatique
 5. Conducteurs en régime stationnaire
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique

Loi de Coulomb (1/3)

- Loi expérimentale de 1785 s'exerçant entre 2 charges fixes :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ MKSA}$$

ε_0 : **permittivité du vide**

$$\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

- Si l'espace est isotrope, la seule direction privilégiée est la droite reliant les charges : le système possède donc la symétrie de révolution autour de cet axe
 - La force doit posséder cette symétrie (principe de Curie) et donc être portée par l'axe

Loi de Coulomb (2/3)

- Les forces électrostatiques vérifient le **principe de l'action et de la réaction** :
$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$
- La loi de Coulomb est valide dans le vide. On l'appliquera également dans l'air pour lequel $\varepsilon_r \approx 1,00058$
 - Attention aux milieux matériels ($\varepsilon_r \approx 81$ pour l'eau à basse fréquence) !
- L'étude expérimentale se fait à l'aide de la **balance de torsion de Cavendish** ou de la **balance de Coulomb** : le moment des forces entre deux charges est compensé par un couple de torsion

Loi de Coulomb (3/3)

- On peut montrer qu'il est équivalent de dire que la loi est en $1/r^2$ et que le photon a une masse nulle
 - Cette loi est vérifiée expérimentalement entre 10^7 et 10^{-18} m (on recherche un potentiel - à la Yukawa - de la forme $e^{-\mu r}/r$ où $\mu = m_\gamma c/hbar$ et on place une limite sur m_γ)
 - Limite actuelle : $m_\gamma < 4 \cdot 10^{-51}$ kg ($m_e \approx 9 \cdot 10^{-31}$ kg)
- Expérimentalement, on vérifie $F = k q_1 q_2 / r^2$. Pour éviter les facteurs 4π (géométriques), on prend :

$$k = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0}$$

Illustration : intensités relatives de l'électrostatique et de la gravitation

- On considère 2 particules chargées en interaction

Force électrostatique \longrightarrow $F^{elec} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2}$

Force de gravitation \longrightarrow $F^{grav} = G \frac{m_A m_B}{AB^2}$

$$\Rightarrow \frac{F^{elec}}{F^{grav}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 G} \times \frac{q_A q_B}{m_A m_B}$$

- Pour des électrons : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$$

$$1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$$

$$\frac{F^{elec}}{F^{grav}} \approx 4 \cdot 10^{42}$$

On négligera toujours la force de gravitation

- On observe expérimentalement que pour une distribution discrète de charges (**principe de superposition**) :

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

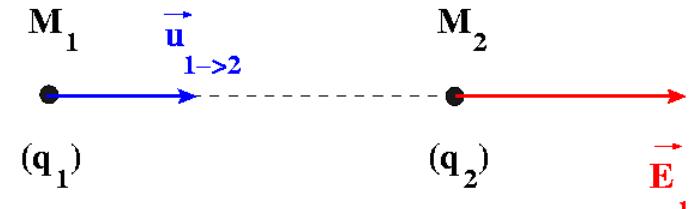
- On en déduit que :
 - On peut ramener l'électrostatique à l'étude de deux charges ponctuelles
 - Les lois de l'électrostatique doivent être linéaires
- Attention à l'influence..

Champ électrostatique

- Par définition pour des charges fixes :

Force de Coulomb

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1 \quad \text{soit} \quad \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$



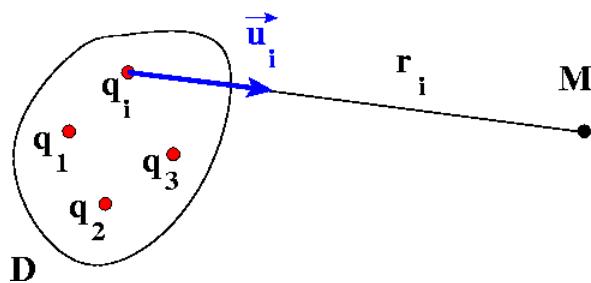
Champ électrostatique créé par la charge (1) à l'endroit où se trouve la charge (2)

- Par abus de langage, on parle souvent de **champ électrique**

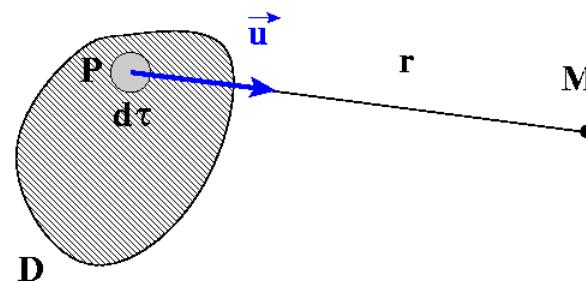
- Quelques ordres de grandeur (V/m) :

| | |
|---|--|
| □ Laser de puissance | $5 \cdot 10^{10}$ |
| □ A proximité d'un atome d'Hydrogène | 10^{10} ($= 1 \text{ V}/\text{\AA}$) |
| □ Claquage dans l'air | 10^6 |
| □ Dans la basse atmosphère | 10^2 |
| □ Intérieur d'un conducteur à l'équilibre | $< 10^{-2}$ |

Distribution de charge discrète



Distribution de charge continue



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \rho(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} d^3P$$

- Le passage d'une distribution de charges ponctuelles à une distribution continue s'effectue sans problème (somme de Riemann)
- Pour une distribution surfacique (de densité $\sigma = dq/dS$) ou une densité linéique (de densité $\lambda = dq/dl$) :

$$\vec{E}_{surf} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

- L'utilisation du champ au lieu de la force revient à remplacer une action à distance (la force) par une action locale (le champ)
 - Ceci est justifié par l'expérience car l'action sur une charge ne dépend que du champ, et non de ses sources
 - Par exemple, si 2 configurations de charges donnent en un lieu le même champ, alors l'action sur une particule en ce lieu sera la même
 - Le champ a une existence propre et n'est pas un simple artifice de calcul

Illustrations : reproduction des fleurs

- Une abeille est chargée positivement (quelques dizaines de fC au maximum)
- En survolant les anthères d'une fleur isolées électriquement, le champ électrique (typiquement 10 V/cm) attire le pollen qui passe sur l'abeille
- En survolant les stigmates (reliées à la terre) d'une autre fleur, le pollen quitte l'abeille et fertilise la fleur



Anthères : partie terminale de l'étamine contenant le pistil

Stigmates : partie du pistil qui reçoit le pollen

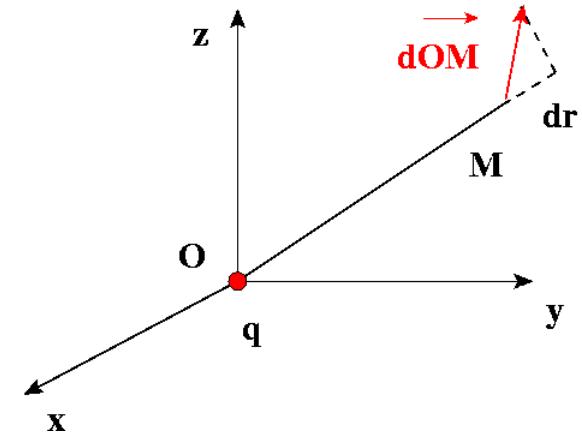
Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
 1. Champ électrostatique
 2. Potentiel électrostatique
 3. Relations avec les charges
 4. Méthodes de calcul en électrostatique
 5. Conducteurs en régime stationnaire
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique

Circulation du champ E - Potentiel (1/2)

- En étudiant la circulation du champ d'une charge ponctuelle, on montre qu'il existe une fonction Φ telle que :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + Cste$$



ou de manière équivalente : $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$

- Propriétés immédiates : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ et $\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
où (C) représente un contour fermé quelconque
- On prend souvent la convention $Cste = 0$

Circulation du champ E - Potentiel (2/2)

- Passage immédiat à des distributions discrètes ou continues (en supposant $\Phi(\infty) = 0$) :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_D \frac{\rho(P)}{PM} d^3P$$

- La convention $\Phi(\infty) = 0$ est valable au minimum si les charges sont réparties dans un volume fini de l'espace
 - Si ce n'est pas le cas, on ne peut plus utiliser ces relations pour calculer Φ (qui reste défini). Il faut revenir à :

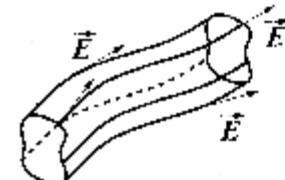
$$\Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Pour une distribution surfacique (de densité $\sigma = dq/dS$) ou pour une densité linéique (de densité $\lambda = dq/dl$) :

$$\Phi_{surf} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r} \quad \text{et} \quad \Phi_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda dl}{r}$$

Equipotentielles - Lignes de champ

- Les **équipotentielles** sont les surfaces pour lesquelles $\Phi = \text{Cste}$
- Les **lignes de champ** sont les courbes tangentes en chaque point au champ E
 - Orientées dans le sens des potentiels décroissants
 - Courbes ouvertes car le potentiel ne cesse de décroître sur une ligne de champ
- Un **tube de champ** est une surface fermée constituée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé



Recette pour trouver les lignes de champ

- Pour trouver les lignes de champ, on écrit souvent que $d\vec{l} \times \vec{E} = \vec{0}$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

Coordonnées cylindriques

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin(\theta) d\phi}{E_\phi}$$

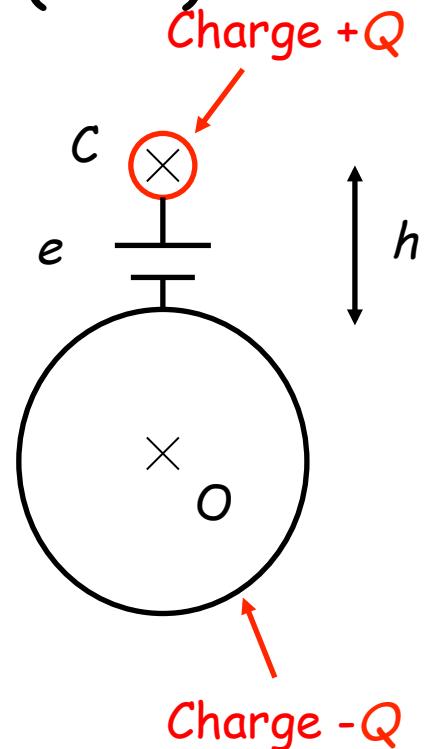
Coordonnées sphériques

Le problème du zéro des potentiels (1/3)

- On utilisera la convention $\Phi(\infty) = 0$ quand la distribution de charges est localisée dans l'espace (pas de charges à l'infini)
- On peut parfois utiliser $\Phi(\infty) = 0$ avec des charges à l'infini, à condition qu'elles n'interviennent pas dans le problème
 - Exemple d'un système baignant dans un champ uniforme
 - Exemple de 2 fils infinis de densités linéiques opposées (mais surtout pas d'un seul fil)
- Question : comment peut-on réaliser **dans la pratique** $\Phi(\infty) = 0$?

Le problème du zéro des potentiels (2/3)

- On assimile la Terre à une sphère conductrice
- Une source de tension e est intercalée entre la Terre et un conducteur sphérique de rayon a à une hauteur $h \gg a$
- Le conducteur porte une charge Q , la terre $-Q$
- On prend la convention $\Phi(\infty) = 0$



Le problème du zéro des potentiels (3/3)

- Après calculs (cf polycopié), on montre que :

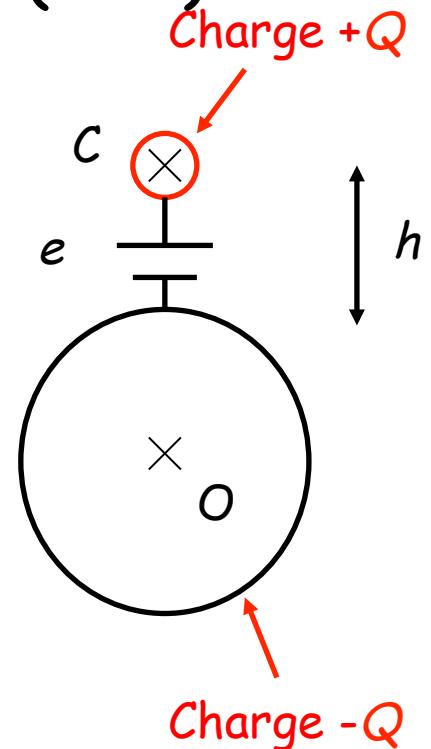
Savoir
refaire ce
calcul

$$\Phi(O) \approx \frac{-e}{1 + \frac{R^2}{ha}} \quad \text{et} \quad \Phi(C) \approx \frac{-e}{1 + \frac{ha}{R^2}}$$

- AN pour $R = 6400 \text{ km}$, $h = 1 \text{ m}$, $a = 10 \text{ cm}$, $e = 10 \text{ kV}$

$$\Phi(O) \approx 2.44 \times 10^{-9} \text{ V} \quad \text{et} \quad \Phi(C) \approx 10^4 \text{ V} = e$$

- On voit donc sur cet exemple qu'il est équivalent de prendre le potentiel nul sur la Terre ou à l'infini tant que $ah/R^2 \ll 1$
- On peut donc porter un conducteur à un potentiel quelconque wrt l'infini en reliant une borne du générateur à la Terre



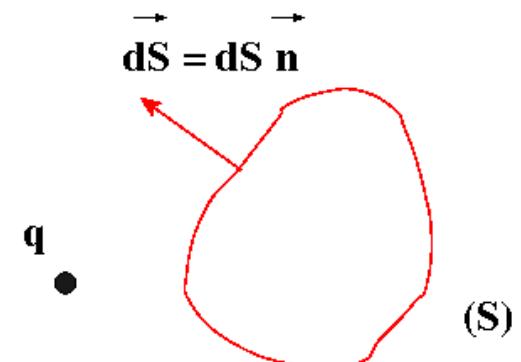
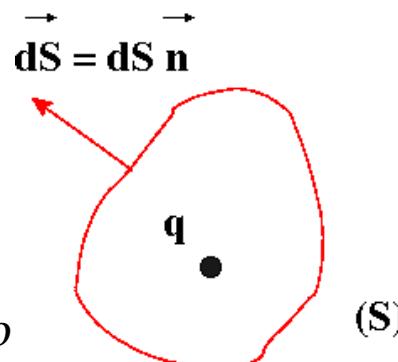
Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
 1. Champ électrostatique
 2. Potentiel électrostatique
 3. Relations avec les charges
 4. Méthodes de calcul en électrostatique
 5. Conducteurs en régime stationnaire
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique

Théorème de Gauss

- Surface fermée (S) délimitant (V) :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



- On utilise le théorème de Gauss sous sa forme intégrale lorsque les symétries sont suffisantes pour simplifier le calcul du flux
 - Tout repose sur un choix judicieux de la **surface de Gauss**

Exemple : champ d'un fil infini de rayon R uniformément chargé

- Les symétries et invariances entraînent : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$
- Le flux total à travers la surface de Gauss (hauteur h) : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L$

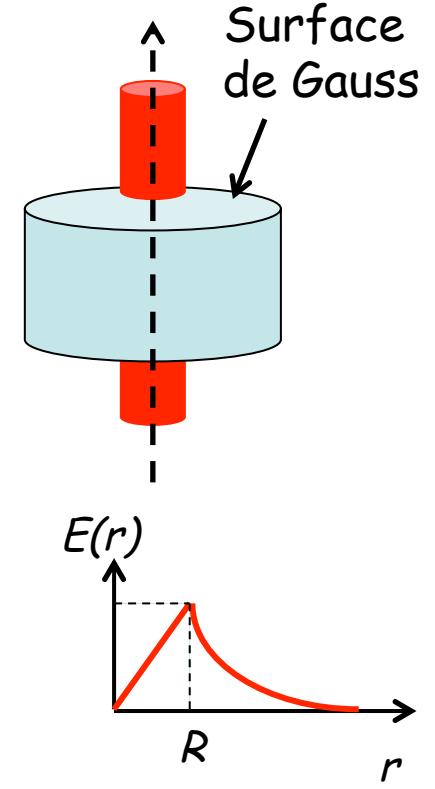
$$\begin{cases} \Phi_1 = \iint_{(1)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \Phi_2 \\ \Phi_L = \int_0^{2\pi} \int_0^h (E_r(r) \vec{u}_r) \cdot (r d\theta dz \vec{u}_r) = 2\pi r h E_r(r) \end{cases}$$

- Théorème de Gauss : $\Phi = 2\pi r h E_r(r) = \frac{\iiint \rho dV}{\epsilon_0}$
- Si $r < R$:

$$\iiint \rho dV = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho dr d\theta dz = \rho \pi r^2 h \Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0}$$

- Si $r > R$:

$$\iiint \rho dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho dr d\theta dz = \rho \pi R^2 h \Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0 r}$$



Poisson - Laplace

- Poisson :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{Equation de Poisson}$$

- En l'absence de charge :

$$\Rightarrow \Delta\Phi = 0 \quad \text{Equation de Laplace}$$

- La solution Φ est unique si :

- Le potentiel est connu sur une surface fermée - un conducteur - (Dirichlet)
- Le champ est connu sur une surface fermée (Neumann)
- Le potentiel est connu sur certains conducteurs, le champ l'est sur les autres

Théorème d'unicité

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
 1. Champ électrostatique
 2. Potentiel électrostatique
 3. Relations avec les charges
 4. Méthodes de calcul en électrostatique
 5. Conducteurs en régime stationnaire
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique

- L'électrostatique se traite à partir d'un ensemble d'équations :
 - Formulation différentielle en champ

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Formulation différentielle en potentiel

$$\Delta \Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

- Formulation intégrée

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Méthodes formelles de calcul de E

- Calcul direct :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \rho(P) \frac{\vec{P}M}{PM^3} d^3P$$

- Calcul indirect à l'aide du potentiel scalaire :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \quad \text{puis} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

- Calcul à l'aide du théorème de Gauss :

$$\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Résolution des équations de Laplace et Poisson

- Les méthodes générales font intervenir les fonctions de Green et imposent des calculs pénibles
 - De nos jours, on utilise généralement une résolution numérique à l'aide de codes de calculs (commerciaux ou non - cf projet info)
- Dans quelques cas particuliers simples, on peut trouver une solution littérale (**méthode des images, méthode de séparation des variables**)
 - L'utilisation du théorème d'unicité permet de dire ensuite que c'est **LA** solution
- Dans d'autres cas, on peut trouver des solutions approchées (**méthodes variationnelles, méthodes numériques**)

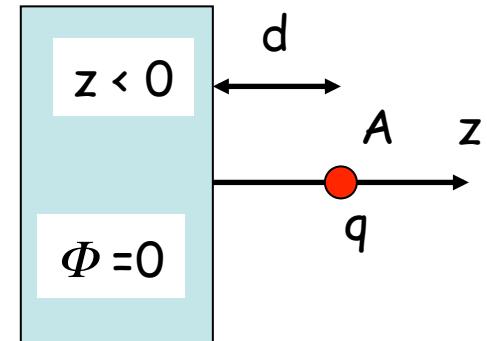
Méthode des images pour résoudre l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

- Lorsque 2 problèmes différents sont décrits par la même distribution volumique de charges et les mêmes CL, ils admettent la même solution de l'équation de Poisson
 - E et Φ sont donc identiques dans tout l'espace
- Cette idée est la base de la **méthode des images** qui consiste à remplacer un problème donné par un problème ayant - dans une partie de l'espace - la même distribution volumique et les mêmes CL, mais un calcul de E ou de Φ plus simple

Exemple : charge ponctuelle devant un plan conducteur

- On cherche à calculer la force exercée par le demi-espace sur la charge q située en A
 - Il faut calculer le champ E exercé par le demi-espace sur q ($\Phi = 0$ sur $z = 0$)



- On considère un dipôle dans le vide. Le potentiel dans le plan médian est nul. Donc le potentiel dans le demi-espace de droite est le même dans les 2 problèmes, puisqu'on résout la même équation avec les mêmes CL

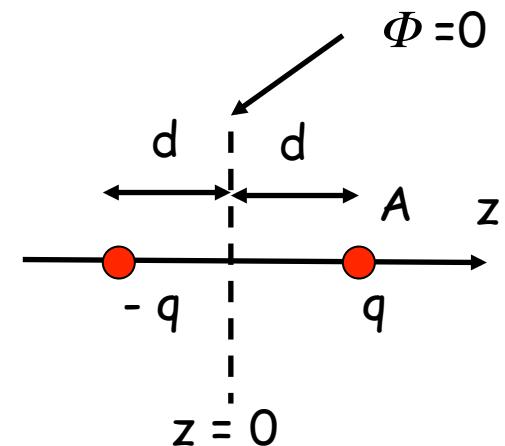
$$\Rightarrow \vec{E}(A) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} \vec{u}_z$$

⇒ La charge est attirée par le demi-espace avec la force

$$\vec{F} = q \vec{E}(A) = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \vec{u}_z$$

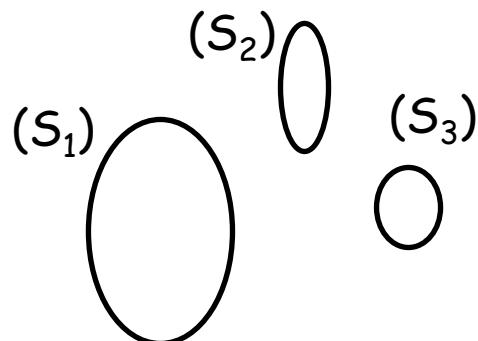
Electrostatique

Problème #1

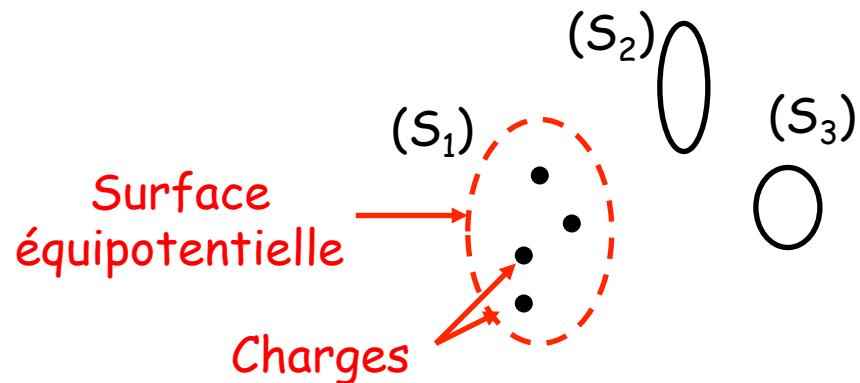


Problème #2

- Plus généralement, on considère un ensemble de conducteurs (problème #1). Dans le problème #2, un ensemble de charges q_i est contenu dans S_1 tel que S_1 soit une équipotentielle



Problème #1



Problème #2

- Dans les deux cas, le potentiel est identique à l'extérieur de S_1 et vérifie $\Delta\Phi = 0$. La solution pour Φ et E à l'extérieur de S_1 est donc la même dans les 2 cas

Méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation de Laplace

$$\Delta\Phi = 0$$

- En coordonnées cartésiennes, on cherche la solution sous la forme $\Phi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$

- On obtient immédiatement : $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$

- On peut donc poser :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\beta^2 \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \alpha^2 + \beta^2$$

où α et β sont réels ou imaginaires purs (α^2 et $\beta^2 > 0$ ou < 0)

- On en déduit :

$$\Phi(x, y, z) = (A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x})(C e^{i\beta y} + D e^{-i\beta y})(E e^{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} + F e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z})$$

les constantes $\alpha, \beta, A, B, C, D, E$ et F sont déterminées par les CL

Méthodes variationnelles

- Le principe de moindre action stipule que la trajectoire réelle du système est telle que l'action est minimale :

$$S = \int L \, dt \quad \text{avec} \quad \delta S = 0$$

- Une **méthode variationnelle** utilise une famille de fonctions d'essai qui représente une approximation d'une quantité physique
 - On en déduit une valeur particulière d'une observable
 - La minimisation de cette valeur par rapport aux paramètres variationnels fournit un résultat qui s'approchera de la réalité physique

Méthodes variationnelles en électrostatique

- Par exemple, en électrostatique, on pourrait montrer que le potentiel électrostatique réel est celui qui minimise :

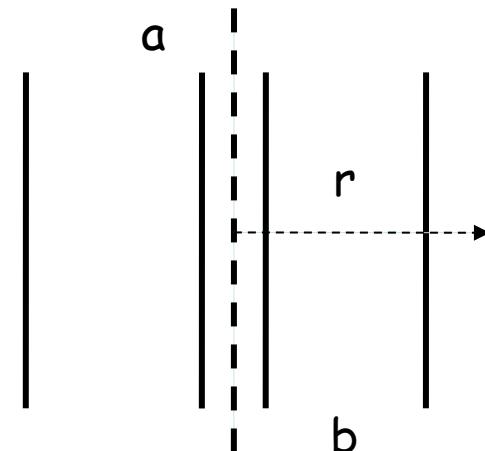
$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\vec{\nabla}\Phi)^2 dV - \iiint \rho \Phi dV$$

($\delta U^* = 0$ au 1^{er} ordre entraîne $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$)

- Le résultat réel est l'équation de Poisson
- Si les seules charges du système sont sur les conducteurs :
- On va chercher faire varier diverses formes de Φ sur un exemple

Exemple du condensateur cylindrique (1/4)

- Rayon interne a et rayon externe b
 - Le conducteur externe est au potentiel nul
 - Le conducteur interne à Φ_0



- La forme de Φ permet de calculer U^* , et donc de remonter à C_0 en écrivant que $U^* = \frac{1}{2} \times C_0 \Phi_0$. On obtient la capacité réelle :

$$C_0 = \frac{2 \pi \epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

- Si on prend une autre forme pour Φ , on obtiendra une valeur de capacité plus élevée que C_0

Exemple du condensateur cylindrique (2/4)

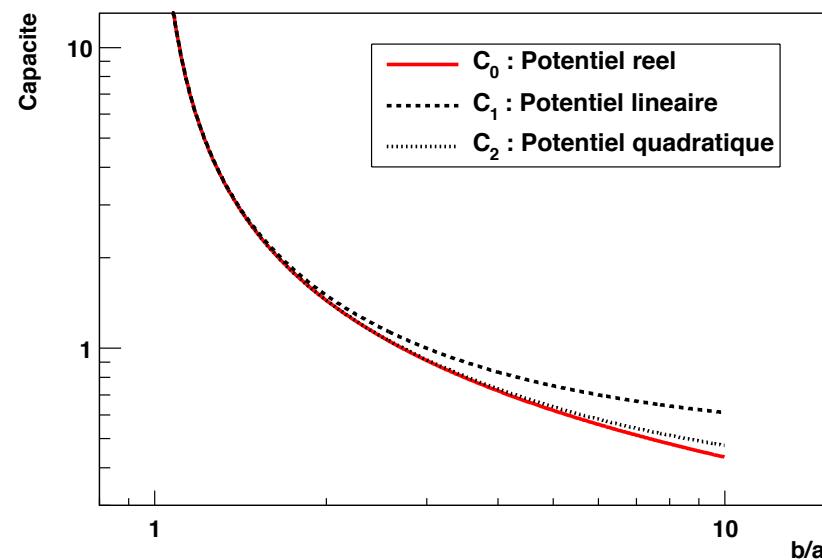
- 1^{re} approximation : on suppose E constant donc Φ linéaire (en réalité, Φ varie en $\ln(1/r)$)
- Les CL s'écrivent : $\Phi(r=a) = \Phi_0$ et $\Phi(r=b) = 0$

- Avec les CL, on doit avoir :

$$\Phi = \Phi_0 \left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right)$$

- On en déduit U^* puis la capacité :

$$C_1 = 2\pi \epsilon_0 \frac{b+a}{2(b-a)}$$



Exemple du condensateur cylindrique (3/4)

- 2^e approximation : E linéaire, donc Φ quadratique
- Pour respecter les CL, on doit avoir : $\Phi = \Phi_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{r-a}{b-a} \right) - (1+\alpha) \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right]$ (α constante arbitraire)
- On en déduit le champ et la capacité :

$$E(\alpha) = -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{\alpha \Phi_0}{b-a} + 2(1+\alpha) \frac{(r-a)\Phi_0}{(b-a)^2}$$

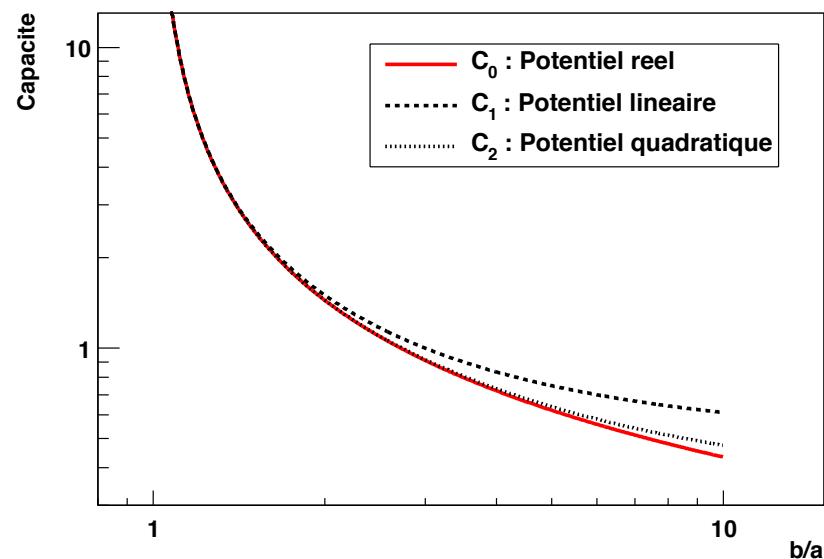
$$C(\alpha) = 2\pi \varepsilon_0 \frac{a}{b-a} \left[\frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{b}{a} \left(1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{6} \right) \right]$$

- La valeur de C la plus proche de la réalité est celle qui va minimiser $C(\alpha)$:

$$C_2 = 2\pi \varepsilon_0 \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}$$

Exemple du condensateur cylindrique (4/4)

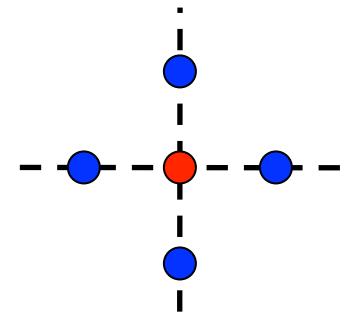
- Finalement :
- On peut généraliser cette approche à tout problème pour lequel on ne connaît pas le potentiel. On introduit une fonction d'essai, et on minimise le résultat obtenu
- Le résultat sera d'autant plus proche de la réalité que la fonction d'essai sera réaliste
- Pour les étudiants intéressés : cf problème d'Agrégation de 2016



Méthodes numériques pour résoudre $\Delta\Phi = 0$

- Développement de Taylor du potentiel (par exemple à 2D) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(x \pm \varepsilon, y) = \Phi(x, y) \pm \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \pm \frac{\varepsilon^3}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + O(4) \\ \\ \Phi(x, y \pm \varepsilon) = \Phi(x, y) \pm \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \pm \frac{\varepsilon^3}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + O(4) \end{array} \right.$$



- D'où : $\Phi(x + \varepsilon, y) + \Phi(x - \varepsilon, y) + \Phi(x, y + \varepsilon) + \Phi(x, y - \varepsilon) = 4 \Phi(x, y) + \varepsilon^2 \Delta\Phi + O(4)$
- Si $\Delta\Phi = 0$, alors :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} [\Phi(x + \varepsilon, y) + \Phi(x - \varepsilon, y) + \Phi(x, y + \varepsilon) + \Phi(x, y - \varepsilon)] + O(4)$$

□ Φ est la moyenne sur les 4 points voisins. Dans la pratique, on procède par itération pour résoudre numériquement $\Delta\Phi = 0$

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
 1. Champ électrostatique
 2. Potentiel électrostatique
 3. Relations avec les charges
 4. Méthodes de calcul en électrostatique
 5. Conducteurs en régime stationnaire
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique

- Un **conducteur** est un corps dans lequel les e- libres peuvent se déplacer (on ne considérera que les métaux)
 - Il faudrait en théorie considérer également des effets thermoélectroniques et électrochimiques liés à des conducteurs inhomogènes de température non uniforme
- Il est en **équilibre électrostatique** lorsque ses porteurs de charges ne subissent pas de mouvement d'ensemble. Cet équilibre doit être évalué sur un volume « significatif »
 - Les grandeurs physiques seront des grandeurs moyennées sur un domaine mésoscopique (100^3 à 1000^3 Angstrom 3)
 - On les associe à des **macroparticules**

- Un **générateur** permet de maintenir une ddp constante entre deux points d'un même circuit. Le conducteur n'est plus alors en équilibre électrostatique puisque les charges libres subissent un mouvement d'ensemble
- En régime permanent, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ avec cette fois $\vec{J} \neq \vec{0}$

Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre (1/2)

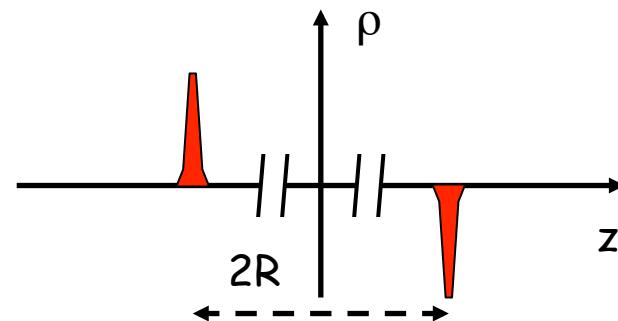
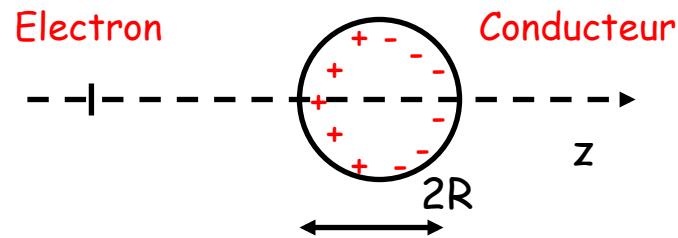
- L'équilibre électrostatique entraîne que la force moyenne sur les **porteurs de charge** est nulle
 - Donc le champ E moyen y est nul et Φ constant

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \Phi_{\text{int}} = \text{Cste}$$

- **Gauss :** $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho_{\text{int}} = 0$
- La densité ρ_{int} est la densité totale. Pour un conducteur métallique, il faut prendre en compte la densité électronique et la densité due aux charges fixes du réseau

Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre (2/2)

- Au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, le champ est fortement inhomogène : E et ρ peuvent y être non nuls
 - Attention : E_{int} et ρ_{int} concernent des quantités moyennées et l'épaisseur de la couche superficielle chargée est inférieure au nanomètre

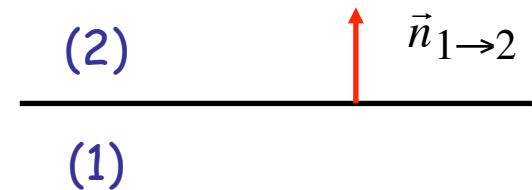


- Le potentiel électrostatique est continu à la traversée d'une surface chargée
 - La surface d'un conducteur est donc une equipotentielle, au même potentiel que l'intérieur du conducteur

Théorème de Coulomb

- Relation de continuité en présence d'une densité surfacique :

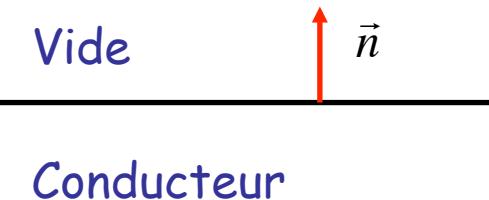
$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



- D'où le champ près de la surface d'un conducteur à l'équilibre (dans le vide) :

Théorème de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

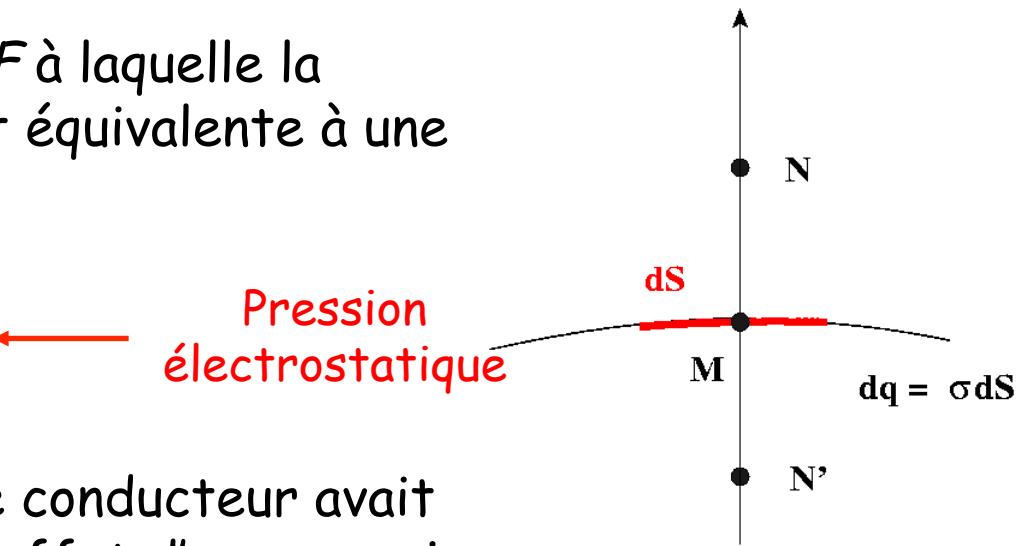


Pression électrostatique

- On montre que la force $d\vec{F}$ à laquelle la charge dq est soumise est équivalente à une pression p :

$$p = \frac{|d\vec{F}|}{dS} = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

← Pression
électrostatique



- Tout se passe comme si le conducteur avait tendance à gonfler sous l'effet d'une pression interne

Potentiel d'équilibre en présence de conducteurs

- On considère un ensemble de conducteurs placés dans le vide. Dans l'espace en dehors des conducteurs, le potentiel vérifie $\Delta\Phi = 0$. La condition d'équilibre de chaque conducteur est $\Phi_i = \text{Cste}$
- Si on connaît les potentiels Φ en tout point, on peut tout calculer sur l'équilibre électrostatique (E puis σ) à l'aide du théorème d'unicité
 - L'état électrostatique d'un système de conducteurs en équilibre est entièrement déterminé par le potentiel Φ
 - En particulier, cela signifie que l'équilibre électrostatique d'un ensemble de n conducteurs est entièrement déterminé par n paramètres imposés de l'extérieur

Loi d'Ohm macroscopique (1/2)

- Les métaux en particulier vérifient la loi d'Ohm microscopique

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad \gamma : \text{conductivité}$$

- Pour une substance homogène ($\gamma = \text{cste}$), on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \rho = 0 \quad (\text{d'après Gauss et l'équation de continuité})$$

- Deux conséquences :
 - L'intérieur d'un conducteur qui vérifie la loi d'Ohm reste neutre en électrocinétique (courant continu) comme en électrostatique
 - Si un conducteur parcouru par un courant continu n'est pas globalement neutre, sa charge totale ne peut être que superficielle

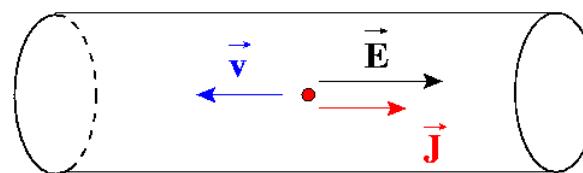
Loi d'Ohm macroscopique (2/2)

- La relation $U = R I$ n'est pas la loi d'Ohm
- La loi d'Ohm n'est pas une loi fondamentale de l'électromagnétisme (idem Coulomb)
- La relation $J = f(E)$ n'est pas linéaire pour les semiconducteurs ou les gaz ionisés
 - Composants électroniques
 - Optique non linéaire

Modélisation microscopique de la loi d'Ohm (1/3)

- On modélise de manière très simplifiée un conducteur par un cylindre dont les 2 bases sont à des potentiels différents. La densité de courant \vec{J} à le même sens que \vec{E} , mais la vitesse des e- est de sens opposé

n : densité volumique de charges mobiles



$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{J}}{n q}$$

- On suppose qu'une des charges q du conducteur (**macroparticule**) est soumise de la part des autres charges (fixes ou mobiles) à des interactions globalement modélisables par une force proportionnelle à sa vitesse (**frottement visqueux**) :

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

Modélisation microscopique de la loi d'Ohm (2/3)

- En régime permanent : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} = q \vec{E} - \alpha \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E}$
- D'où :
$$\vec{J} = n q \vec{v} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{n q^2}{\alpha}$$
- Si le champ a été établi brusquement à $t = 0$ alors que les charges étaient immobiles, on obtient :
$$\vec{v} = \frac{q}{\alpha} \vec{E} (1 - \exp(-t/\tau)) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\alpha}$$
- La constante de temps τ caractérise l'établissement du régime permanent. Les valeurs expérimentales de γ permettent de mesurer α (puis τ) dans le cadre de ce modèle. On obtient par exemple $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$ pour du cuivre à 0°C

Modélisation microscopique de la loi d'Ohm (3/3)

- La vitesse v est la **vitesse d'entraînement** des e-. Pour une densité de courant typique de 1 A/mm^2 , on obtient $v = J/(n q) \approx 0,07 \text{ m/s}$. Il ne faut pas confondre cette vitesse moyenne avec la vitesse individuelle des e- dans le conducteur, ni avec la vitesse à laquelle se propage le champ EM dans le conducteur
- Analogie thermodynamique : la vitesse des molécules dans un gaz ne doit pas être confondue avec leur vitesse d'entraînement ou avec la vitesse de propagation du son dans le gaz
- Un modèle réaliste de la conduction dans les solides doit faire intervenir la mécanique quantique

Temps de relaxation d'un conducteur ohmique (1/2)

- Pour un conducteur ohmique, homogène de conductivité γ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\gamma \vec{E}) = \gamma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- En utilisant la conservation de la charge, l'équation pour ρ s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \exp(-t/\theta) \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

θ : temps de relaxation

- Un excédent local de charge disparaît en quelques θ
 - L'interprétation physique est que s'il existe des charges + et - séparées, leur force de rappel va faire disparaître le déséquilibre dès que le milieu est conducteur

Temps de relaxation d'un conducteur ohmique (2/2)

$$\theta = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

- Comme $\epsilon_0 \approx 1 / (36\pi 10^9)$ MKSA, le phénomène de relaxation est très rapide, même dans les conducteurs très médiocres ($\gamma \approx 1$ S/m)
- Pour les métaux ($\gamma \approx 10^7$ S/m), on obtient $\theta \approx 10^{-19}$ s
 - Dans ce cas, ce modèle devrait prendre en compte des effets quantiques car la forme de ρ cesse d'être valable pour des temps $< 10^{-14}$ s, ie $\lambda = c T \approx 10^{-6}$ m
- Néanmoins, on retiendra qu'à l'intérieur d'un conducteur métallique homogène, ρ est nulle dans tout le domaine des fréquences hertziennes

ARQS et conducteurs

- Le champ magnétique d'une charge en mouvement est environ v/c fois moins intense que le champ électrique
- Comme la densité volumique totale ρ est nulle dans les conducteurs, le champ E_y est nul également. Les effets magnétiques y sont prépondérants si on les traite dans l'ARQS
- L'ARQS correspond à la situation où $E \ll cB$ (sauf à l'intérieur des condensateurs). C'est le domaine typique de l'électrocinétique et de l'électrotechnique

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique

2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

1. Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique
2. Cas de charges ponctuelles dans le vide
3. Cas d'une distribution continue de charges dans le vide
4. Aspect local de l'énergie électrostatique
5. Energie électrostatique d'un condensateur

3. Dipôles électrostatique

L'énergie potentielle en mécanique

- Pour un ensemble de n points matériels, on montre que si la force \vec{f}_k (traduisant l'interaction entre les $n-1$ points et le point k) peut s'écrire :

$$\vec{f}_k = - \vec{\nabla}_{\vec{r}_k} (U_I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{k-1}, \vec{r}_{k+1}, \dots, \vec{r}_n))$$

alors le travail de la force \vec{f}_k lors d'un déplacement du point matériel ne dépend que des positions initiales et finales

- Le travail des forces internes et externes est donné par :

$$dW_{\text{int}} = - dU_I \quad \text{et} \quad dW_{\text{ext}} = d(E_c + U_I)$$

- La fonction U_I est alors **l'énergie potentielle d'interaction des n points matériels**

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique

2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

1. Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique
2. Cas de charges ponctuelles dans le vide
3. Cas d'une distribution continue de charges dans le vide
4. Aspect local de l'énergie électrostatique
5. Energie électrostatique d'un condensateur

3. Dipôles électrostatique

- La force \vec{F}_k représentant l'action des $n-1$ autres charges sur la charge k s'écrit :

$$\vec{F}_k = q_k \vec{E}(\vec{r}_k) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(\vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} (\Phi) \quad \text{et} \quad \Phi = \sum_{i \neq k} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i}{r_{ik}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_k = -q_k \vec{\nabla}_{\vec{r}_k} \left[\sum_{i \neq k} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i}{r_{ik}} \right]$$

Expression peu pratique
car elle fait jouer un rôle particulier à q_k

- On vérifie qu'il existe une relation plus pratique ne faisant pas intervenir q_k : $\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} (U_I)$ avec $U_I = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$
- U_I est l'énergie potentielle d'interaction des n charges dans E , ou l'énergie d'interaction de la charge q_k avec la distribution (D) qui engendre E et Φ

$$\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(U_I) \quad \text{avec} \quad U_I = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

- L'énergie U_I ne dépend que des distances relatives entre les charges
 - Un déplacement 'en bloc' du système de n charges ne modifie pas l'énergie d'interaction
- L'origine de U_I correspond à une énergie d'interaction nulle lorsque toutes les charges sont infiniment éloignées les unes des autres
- U_I peut également se mettre sous la forme : $U_I = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i$
où Φ_i est le potentiel créé au point où se trouve q_i par les $n-1$ autres charges

Travail d'un opérateur pour construire le système

- On suppose que l'opérateur construit la distribution précédente en apportant toutes les charges depuis l'infini dans leur position finale
 - Les charges sont supposées immobiles dans leurs positions initiales et finales
 - $U_I = 0$ lorsque les charges sont infiniment éloignées les unes des autres
- On doit donc avoir $W_{ext} = U_I$. Après calculs :

$$\Rightarrow W = \sum_i \sum_{j < i} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i$$

- L'énergie d'interaction U_I est parfois appelée **énergie de constitution**

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique

2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

1. Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique
2. Cas de charges ponctuelles dans le vide
3. Cas d'une distribution continue de charges dans le vide
4. Aspect local de l'énergie électrostatique
5. Energie électrostatique d'un condensateur

3. Dipôles électrostatique

- On considère une distribution de charges dans le vide, occupant un volume (V), caractérisée par une densité volumique ρ et un potentiel Φ
- On parle **d'énergie d'interaction** U_I pour une distribution de charges discrètes et **d'énergie électrostatique** U_e pour une distribution continue. Fondamentalement, rien ne nous oblige à parler ici de U_e , mais on fera comme tout le monde ...
- Le passage d'une distribution de charges ponctuelles à une distribution de charges continue n'est pas trivial pour l'énergie d'interaction U_I

- On peut considérer la distribution comme la moyenne géométrique d'une distribution de charges ponctuelles. L'énergie d'interaction U_I de n charges discrètes est :

$$U_I = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i$$

Expression non linéaire :

$$q_i \rightarrow q'_i = \alpha q_i \Rightarrow U'_I = \alpha^2 U_I$$

- Il n'est pas évident du tout que l'énergie de la distribution continue soit donnée par la moyenne de l'expression discrète
- Après calculs (cf poly § 2.2.3), on montre que l'énergie électrostatique s'écrit :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \Phi \rho \, dV$$
- U_e est parfois appelée « **énergie de constitution** »
 - On a toujours $U_e > 0$

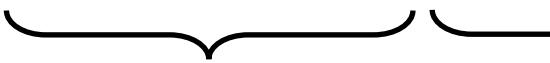
Energie d'interaction de deux distributions (1/2)

- Deux distributions ρ_1 et ρ_2 créent les potentiels Φ_1 et Φ_2 . A la distribution totale $\rho = \rho_1 + \rho_2$, on associe le potentiel $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ et l'énergie électrostatique U_e :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 + \rho_2) (\Phi_1 + \Phi_2) dV$$

- En développant :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(D_1)} \rho_1 \Phi_1 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D_2)} \rho_2 \Phi_2 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV$$

 Energie électrostatique de chacune des distributions prises séparément

 Energie d'interaction entre les deux distributions

Energie d'interaction de deux distributions (2/2)

- On peut vérifier que :

$$U_e(1,2) = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV = \iiint_{(D)} \rho_1 \Phi_2 dV = \iiint_{(D)} \rho_2 \Phi_1 dV$$

- L'énergie potentielle d'interaction de la distribution (1) dans le champ créé par (2) est égale à l'énergie potentielle d'interaction de la distribution (2) dans le champ créé par (1) (**identité de Gauss**)

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Electrostatique

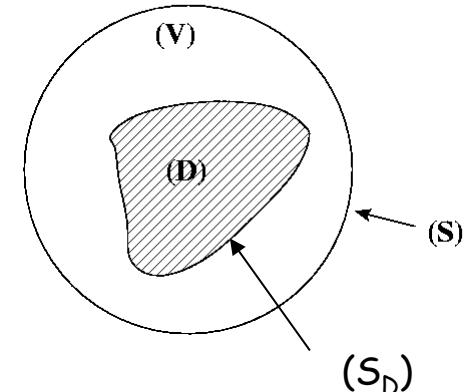
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

1. Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique
2. Cas de charges ponctuelles dans le vide
3. Cas d'une distribution continue de charges dans le vide
4. Aspect local de l'énergie électrostatique
5. Energie électrostatique d'un condensateur

3. Dipôles électrostatique

- Les équations locales permettent de donner une autre formulation à U_e :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \Phi \rho dV = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \Phi \rho dV = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \Phi (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$$



- On utilise : $\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) + \vec{\nabla}(\Phi) \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow \Phi \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) + E^2$$

- D'où :

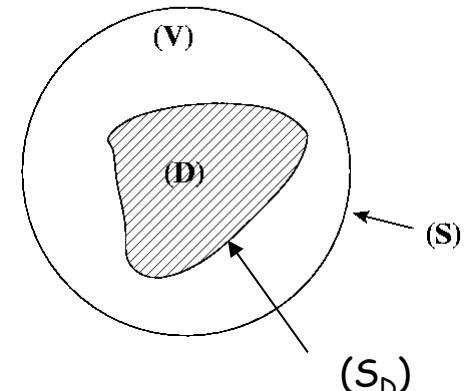
$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) dV + \iiint_{(V)} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{(S)} \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(V)} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{(S)} \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(V)} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

- Ceci est valable pour toute sphère qui englobe (D)
- En particulier, on choisit de faire tendre (S) vers l'infini : (V) est alors l'espace entier
 - Φ décroît au moins comme $1/r$ et E comme $1/r^2$
 - La surface dS d'intégration varie en r^2
 - $\Phi E dS$ décroît au moins comme $1/r$
- Il reste :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{Espace} \epsilon_0 E^2 dV$$



Savoir
refaire ce
calcul

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{Espace} \epsilon_0 E^2 dV$$

- Tout se passe comme si l'énergie électrostatique était répartie dans **l'espace entier** avec la densité volumique
 - U_e est toujours positive !

- En particulier :
 - L'énergie d'une distribution (D) est répartie en partie en dehors de la distribution
 - L'énergie d'un système de conducteurs en équilibre est répartie dans le vide :
 - ✓ Une charge placée dans une région où le champ n'est pas nul est soumise à une force
 - ✓ Le travail de cette force lors d'un déplacement de la charge pourrait fournir du travail, et il est 'logique' de localiser l'énergie là où on peut la recueillir

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

Cas de la charge ponctuelle

- On a alors, en utilisant l'expression de U_e :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad \text{soit} \quad U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_{r=0}^{r=\infty} \frac{4\pi r^2}{r^4} dr$$

$$\Rightarrow U_e = 2\pi\epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{1}{r} \right]_{r=0}^{r=\infty} \quad \text{Diverge !}$$

- On ne peut pas parler de localisation de l'énergie avec des charges ponctuelles. Cette expression de U_e est réservée aux milieux continus !

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Electrostatique

2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

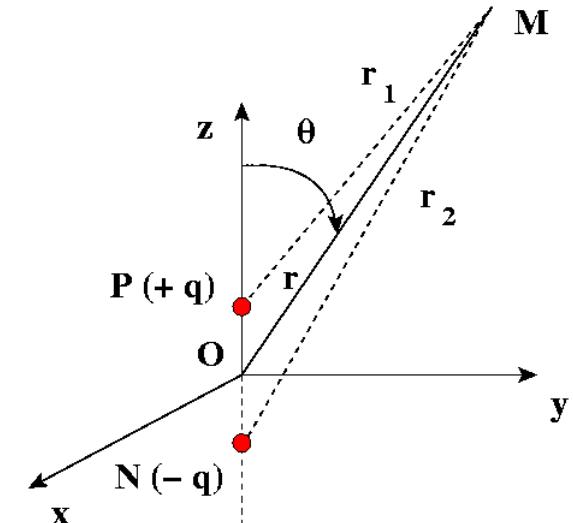
1. Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique
2. Cas de charges ponctuelles dans le vide
3. Cas d'une distribution continue de charges dans le vide
4. Aspect local de l'énergie électrostatique
5. Energie électrostatique d'un condensateur

3. Dipôles électrostatique

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique
 1. Potentiel et champ du dipôle électrostatique
 2. Action mécanique d'un champ E sur un dipôle rigide
 3. Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ
 4. Approximation dipolaire
 5. Illustration : forces à grande distance dans un gaz

- Un dipôle est constitué de 2 charges distantes de d petite devant la distance d'observation ($d \ll r$)
- Grande importance :
 - Apparaît en calculant le champ à grande distance d'une distribution localisée
 - Les molécules peuvent être assimilées à des dipôles (rôle important en chimie)
 - Sous l'action d'un champ E , certains corps se comportent comme une assemblée de dipôles (polarisation des diélectriques)
- Un dipôle sera **rigide** si p n'est pas modifié par un champ E externe
 - Bon modèle pour les molécules polaires (ex : HCl gazeux)



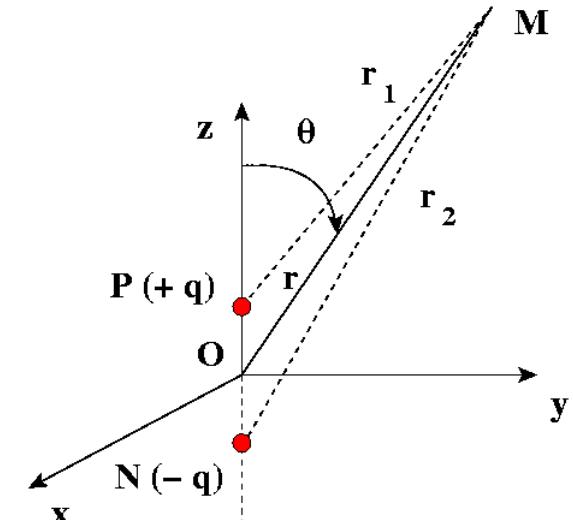
Moment dipolaire électrique (Cm)

$$\vec{p} = q \vec{NP}$$

Potentiel du dipôle

- C'est simplement la somme des potentiels créés en M (à grande distance) par les deux charges
 - Un calcul classique fournit :

$$\Phi(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$



Savoir
refaire ce
calcul

- Un dipôle est entièrement déterminé par son moment dipolaire électrique
- Le potentiel décroît comme $1/r^2$, les termes en $1/r$ s'annulant à cause de la neutralité électrique de l'ensemble

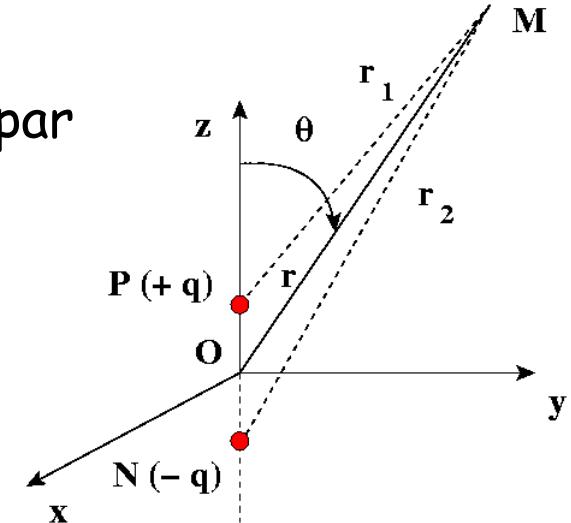
Champ électrique du dipôle

- C'est simplement la somme des champs créés par les deux charges. Un calcul classique fournit :

$$\vec{E}(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

- En projetant sur les axes :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \quad E_\phi = 0$$



- Les termes en $1/r^2$ s'annulent également. Le champ décroît plus rapidement que pour une charge ponctuelle

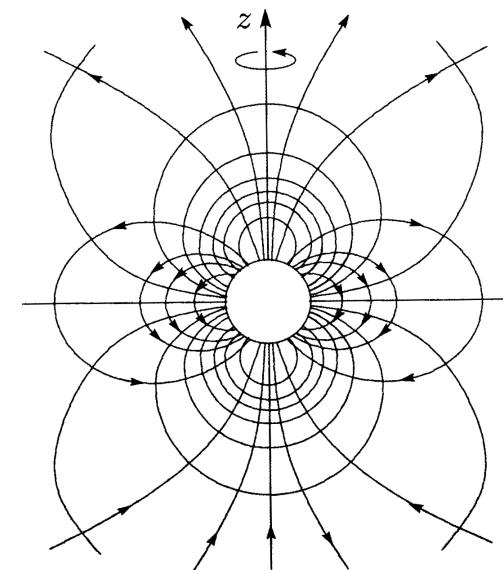
Equipotentielles et lignes de champ

- Equipotentielles :

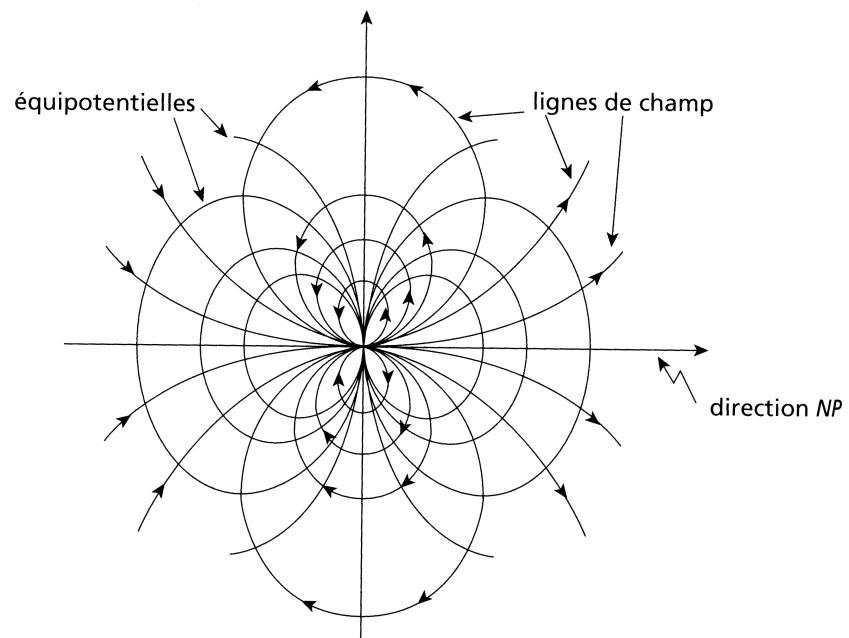
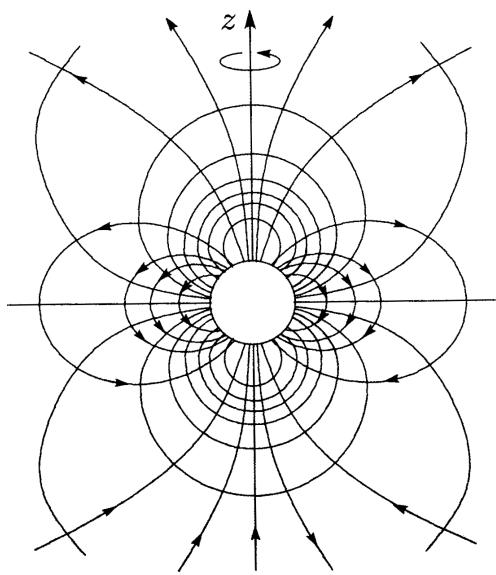
$$\Phi(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} \Rightarrow r^2 = A \cos(\theta)$$

- Lignes de champ :

$$\vec{E} \times d\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow r = B \sin^2(\theta) \quad \text{avec} \quad B > 0$$



- En chaque point, ne passent qu'une seule équipotentielle et une seule ligne de champ



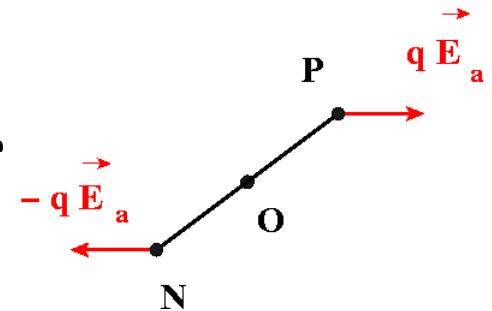
Attention !!

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique
 1. Potentiel et champ du dipôle électrostatique
 2. Action mécanique d'un champ E sur un dipôle rigide
 3. Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ
 4. Approximation dipolaire
 5. Illustration : forces à grande distance dans un gaz

Action mécanique de E constant sur un dipôle rigide (1/2)

- On ne doit pas tenir compte de l'action de N sur P , ni de l'action de P sur N



- Force résultante : $\vec{F} = q \vec{E}_a - q \vec{E}_a = \vec{0}$

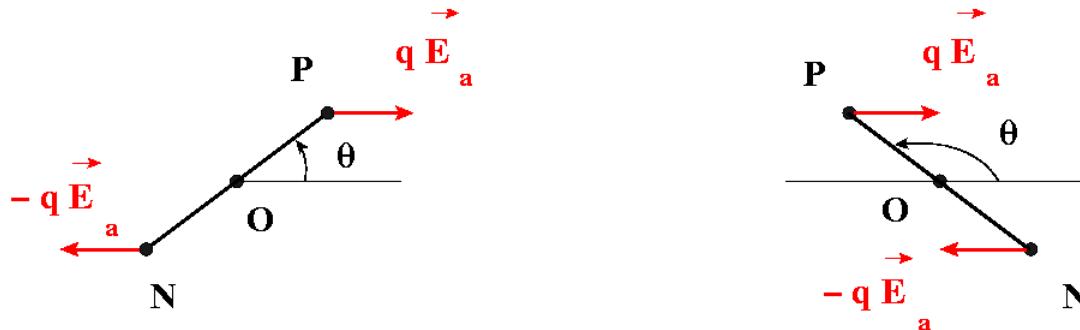
- Moment résultant :

$$\vec{\Gamma} = O\vec{P} \times q \vec{E}_a - O\vec{N} \times q \vec{E}_a = q N\vec{P} \times \vec{E}_a = \vec{p} \times \vec{E}_a = p E_a \sin(\theta) \vec{k}$$

Vecteur unitaire normal
au plan de la figure

- L'action mécanique d'un champ uniforme sur un dipôle rigide se réduit au couple Γ

Action mécanique de E constant sur un dipôle rigide (2/2)



- Il existe deux positions d'équilibre : $\theta = 0$ (p et E parallèles) et $\theta = \pi$ (p et E anti-parallèles)
- Un champ uniforme tend à orienter un dipôle suivant les lignes de champ
- A l'échelle d'un dipôle, un champ externe appliqué est généralement uniforme. Au 1^{er} ordre, l'effet principal d'un champ quelconque sera d'orienter le dipôle dans le sens du champ

Action mécanique de E quelconque sur un dipôle rigide (1/2)

- On peut montrer que la résultante s'écrit cette fois : $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_a$ avec en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \equiv p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- Le calcul du moment montre qu'on a toujours au 1^{er} ordre : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \times \vec{E}$
- Pour un champ inhomogène, il existe une force, en plus du couple qui tend à aligner le dipôle sur les lignes de champ
- Dans le cas particulier où le dipôle est // au champ, la force tend à attirer le dipôle vers les champs intenses (si p et E de même sens) ou vers les champs faibles (si p et E de sens contraire)

Action mécanique de E quelconque sur un dipôle rigide (2/2)

- Dans le cas général, la force n'est pas parallèle au champ
- La relation $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_a$ reste valable pour les dipôles qui ne sont pas rigides
- Un dipôle est entièrement caractérisé par son moment dipolaire p

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique
 1. Potentiel et champ du dipôle électrostatique
 2. Action mécanique d'un champ E sur un dipôle rigide
 3. Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ
 4. Approximation dipolaire
 5. Illustration : forces à grande distance dans un gaz

- Dans un champ E_a , le travail pour apporter les charges depuis l'infini est :

$$W = q \Phi_a(P) - q \Phi_a(N)$$

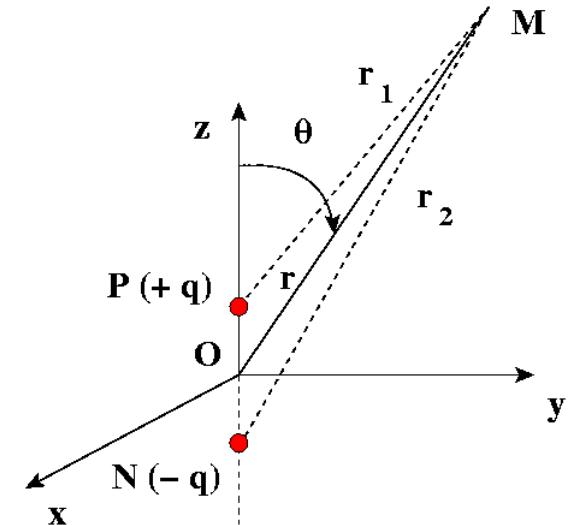
- C'est par définition l'énergie potentielle U_I d'interaction du dipôle rigide dans le champ E_a

- Comme les points N et P sont voisins, on a :

$$\Phi_a(P) - \Phi_a(N) \approx (\vec{\nabla}(\Phi_a)) \cdot \vec{NP} = - \vec{E}_a \cdot \vec{NP}$$

- Au final :

$$U_I = -q \vec{E}_a \cdot \vec{NP} = -p E_a \cos(\theta)$$



Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique
 1. Potentiel et champ du dipôle électrostatique
 2. Action mécanique d'un champ E sur un dipôle rigide
 3. Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ
 4. Approximation dipolaire
 5. Illustration : forces à grande distance dans un gaz

App. dipolaire : potentiel créé par une dist. de charges ponctuelles (1/2)

- Potentiel d'une distribution discrète :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

- On peut développer les $1/r_i$ selon :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{2r} \cos(\theta) + \dots + \left(\frac{a}{2r} \right)^n P_n(\cos(\theta)) + \dots \right]$$

où les P_n sont les **polynômes de Legendre** de 1^{re} espèce :

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

App. dipolaire : potentiel créé par une dist. de charges ponctuelles (2/2)

- Un calcul classique fournit : $\Phi(r) = \Phi_0(r) + \Phi_1(r) + \Phi_2(r) + \dots$
avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_i q_i \\ \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{u}_r \\ \Phi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_i q_i \left[\frac{3}{2} (\vec{r}_i \cdot \vec{u}_r)^2 - \frac{\vec{r}_i^2}{2} \right] \end{array} \right.$$

Contribution unipolaire ←
Contribution dipolaire ←
Contribution quadrupolaire ←

- Ce développement est analogue à celui fait en mécanique dans l'étude du champ de gravitation où les charges sont remplacées par les masses m_i et $1/4\pi\epsilon_0$ par $-G$

Distribution unipolaire

$$\Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_i q_i$$

- Distribution **unipolaire** si $Q = \sum_i q_i \neq 0$
- En plaçant l'origine du référentiel au barycentre électrique des points P_i (affectés de leurs charges q_i), on obtient :

$$\Phi(r) \approx \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

- Au 3^e ordre près, la distribution se comporte comme une charge ponctuelle Q située au barycentre de la distribution

■ En mécanique, le barycentre mécanique n'est jamais nul $\sum_i m_i \neq 0$

Le terme unipolaire est alors toujours prépondérant

— Licence 3 et Magistère de Physique
(2016-2017)

— Electrostatique

— 88

Distribution dipolaire

$$\Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{u}_r$$

- Distribution **dipolaire** si $Q = 0$ et $\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i \neq \vec{0}$ P : **Moment dipolaire de la distribution**
- Comme la charge totale est nulle (ie $\Phi_0(r) = 0$) :

$$\Phi(r) \approx \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i \vec{r}_i \cdot \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$$

- Le **moment dipolaire** P ne dépend pas de l'origine

Plan du chapitre « Electrostatique »

1. Rappels d'électrostatique
2. Aspects énergétiques liés à l'électrostatique
3. Dipôles électrostatique
 1. Potentiel et champ du dipôle électrostatique
 2. Action mécanique d'un champ E sur un dipôle rigide
 3. Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ
 4. Approximation dipolaire
 5. Illustration : forces à grande distance dans un gaz

Le moment dipolaire des molécules

- Il existe deux types de molécules, en fonction des positions relatives des barycentres '+' et '-'
 - Molécules **apolaires** (H_2 , Ar, Kr, Xe)
 - Molécules **polaires** (HCl , H_2O , NH_3)
- Les molécules apolaires sont polarisables par un champ externe
 - Le moment dipolaire induit est $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ (α : **polarisabilité** de la molécule)
- Deux molécules apolaires peuvent se polariser sous l'action de leurs **moments dipolaires électriques instantanés**

Illustration : forces à grande distance dans un gaz (1/2)

- Forces moléculaires attractives (différentes des forces coulombiennes) dues à des interactions entre dipôles
 - Entre dipôles permanents : **force de Keesom**
 - Entre dipôles permanents et induits : **force de Debye**
 - Entre dipôles induits : **force de London**

$$f_K = C_K \frac{p^4}{T} \frac{1}{r^7} \quad f_D = C_D \alpha p^2 \frac{1}{r^7} \quad f_L = C_L \frac{\alpha \alpha'}{r^7}$$

- Remarque : la notion de **dipôle induit instantané** n'est qu'une approximation. Il faudrait faire apparaître une influence retardée, due à la distance entre les molécules (problème d'Agrégation de 2005)

Illustration : forces à grande distance dans un gaz (2/2)

- Toutes ces forces sont en $1/r^7$ et contribuent au terme en a de l'équation de van der Waals qui traduit l'interaction à grande distance entre molécules :

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - n b) = n R T$$

Equation de van der
Waals d'un gaz réel

- Energies :

| | E_K | E_D | E_L | E_{vdw} | |
|------------------|-------------|-------------|-------|-----------|-----------------------|
| Ar | 0 | 0 | 0,486 | 0,486 | $E_L >> E_D$ ou E_K |
| CO | ≈ 0 | ≈ 0 | 0,5 | 0,5 | |
| HCl | 0,189 | 0,057 | 0,962 | 1,208 | |
| NH ₃ | 0,761 | 0,089 | 0,842 | 1,691 | |
| H ₂ O | 2,079 | 0,110 | 0,514 | 2,703 | |

TAB. 1 – Energies de Keesom, Debye, London et van der Waals pour quelques molécules en J/mol (valeurs extraites de G. Dévoré, *Cours de Chimie*, Vuibert, Paris, 1984)

