# TD n°4 Optique : Polarisa°
## Milieux anisotrope

## I- Polarisa°

Soit une onde plane de pulsa° $\omega$ et de vect$^r$ d'onde $\vec{k} = k\vec{u_z}$ : $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E_0}\, e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$

où $\vec{E_0} = E_{0x}\, e^{i\varphi_x}\, \vec{u_x} + E_{0y}\, e^{i\varphi_y}$

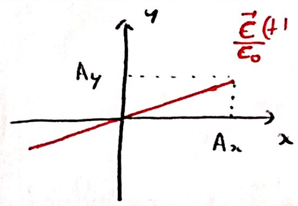
$\in \mathbb{R}$

Polarisa° : $\vec{u}' = \dfrac{\vec{E_0}}{E_0} = A_x\, e^{i\varphi_x}\, \vec{u_x} + A_y\, e^{i\varphi_y}\, \vec{u_y}$ on def $\boxed{\vec{u} = \dfrac{\vec{u}'}{e^{i\varphi_x}} = A_x \vec{u_x} + A_y\, e^{i\Delta\varphi}\, u_y \quad \text{avec } \Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x, \quad \|\vec{u}\| = 1}$

A priori, $\Delta\varphi$ est f° du tps et évolue sur un tps caractéristiq $\tau$. Si
- $\tau \gg T_{detect}$ : polarisa° bien def mais qui change avec le tps
- $\tau \ll T_{detect}$ : polarisa° aleatoire, onde non ou partiellem$^t$ polarisée

- Produc° de lumière polarisée :
  - × materiaux dichroïsme : absorp° ≠ pr 2 polarisa° orthogonales (molécules étirées)
  - × réflexion à l'angle de Brewster : (cubes polariseurs)
  - × diffusion de Rayleigh

Pr $\Delta\varphi = 0$ ou $\pi$ :



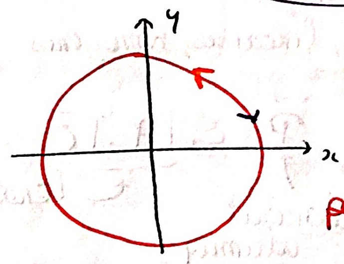

polarisa° rectiligne

$\vec{E} = E_0 \left( A_x \cos(\omega t)\vec{u_x} + A_y \cos(\omega t - \underset{\Delta\varphi}{\pi})\vec{u_y} \right)$ ou 0

en $z=0$

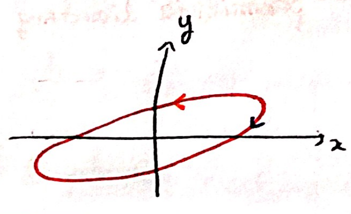
Pr $\Delta\varphi = \pm \pi/2$ et $A_x = A_y$ :

$\vec{E} = E_0 A_x \left( \cos(\omega t)\vec{u_x} \pm \sin(\omega t) \right)$ gch / dte




polarisa° circulaire

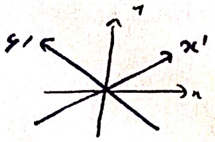
Pr $\Delta\varphi = \pm \pi/2$ et $A_x \neq A_y$ :




polarisa° elliptique

Polarisa° rectiligne : selon $x$ : $\vec{u} = \vec{u}_x$

selon $y$ : $\vec{u} = \vec{u}_y$




selon $x'$ : $\vec{u} = \dfrac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}}$

selon $y'$ : $\vec{u} = \dfrac{\vec{u}_x - \vec{u}_y}{\sqrt{2}}$

circulaire gauche : $\vec{u}_g = \dfrac{u_x + i\vec{u}_y}{\sqrt{2}}$

circulaire dte : $\vec{u}_d = \dfrac{u_x - i\vec{u}_y}{\sqrt{2}}$

$\vec{u}$ est décomposable sur ces vecteurs :
$$\begin{cases} A_x = \vec{u}\cdot\vec{u}_x^{\,*} \\ A_y = \vec{u}\cdot\vec{u}_y^{\,*} \\ A_{x'} = \vec{u}\cdot\vec{u}_{x'}^{\,*} \\ A_{y'} = \vec{u}\cdot\vec{u}_{y'}^{\,*} \\ A_d = \vec{u}\cdot\vec{u}_d^{\,*} \\ A_g = \vec{u}\cdot\vec{u}_g^{\,*} \end{cases}$$
complexe conj car vect$^*$ complexe

$\vec{u}_d\cdot\vec{u}_d^{\,*} = 1$

Vecteur de Stokes : $\vec{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} S_1 = |A_x|^2 - |A_y|^2 \\ S_2 = |A_{x'}|^2 - |A_{y'}|^2 \\ S_3 = |A_d|^2 - |A_g|^2 \end{cases}$$
permet de connaitre l'état de polarisa° grace à la sphère de Point caré

onde polarisée : $\|\vec{S}\| = 1$

onde non-polarisée : $\|\vec{S}\| = 0$

onde partiellem$^t$ polarisée : $\|\vec{S}\| = p$ et $0 \leq p \leq 1$

dg de polarisa°

## II- Milieu anisotrope :

Milieux dielectriques, lineaires, homogènes

$\vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{[\chi_e]}\vec{E}$ ← tenseur de susceptibilité dielectriq (symetriq donc diagonalisable)

polarisa° volumiq

Induction electriq : $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \underbrace{[\varepsilon_R]}_{\text{permittivité dielectriq}} \vec{E}$ où $[\varepsilon_R] = 1 + [\chi_e]$

$\exists$ une base de l'espace $(x, y, z)$

$$[\varepsilon_R] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{Rx} & & 0 \\ & \varepsilon_{Ry} & \\ 0 & & \varepsilon_{Rz} \end{pmatrix}$$

…ieurs cas possibles :

× $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{ry} = \varepsilon_{rz}$ : milieu isotrope d'indice $n = \sqrt{\varepsilon_r}$

× $\varepsilon_{Rx} = \varepsilon_{Ry} \neq \varepsilon_{Rz}$ : milieu uniaxe

indice ordinaire : $n_o = \sqrt{\varepsilon_{Rx}} = \sqrt{\varepsilon_{Ry}}$

indice extraordinaire : $n_e = \sqrt{\varepsilon_{Rz}}$

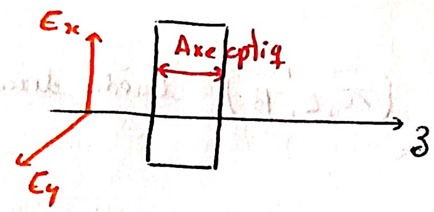
× $\varepsilon_{Rx} \neq \varepsilon_{Ry} \neq \varepsilon_{Rz} \neq \varepsilon_{Rx}$ : milieu biaxe

## Milieu uniaxe :

Axe extraordinaire du milieu ≡ axe optiq du milieu (/!\ ≠ axe optiq du montage)

Plusieurs cas :

• lame à face perpendiculaire : axe optiq du milieu ⊥ face d'entrée du milieu



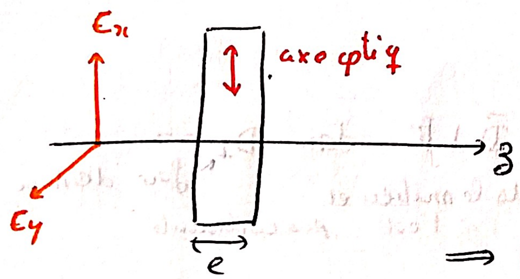

$\vec{E} \perp$ axe optiq : $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon_R = \begin{pmatrix} \varepsilon_{Ro} & & 0 \\ & \varepsilon_{Ro} & \\ 0 & & \varepsilon_{Re} \end{pmatrix}$$

L'onde ne "voit" qu'un seul indice optiq, $n_o$

⟹ la lame se comporte comme une lame isotrope d'indice $n_o$

• lame à face parallèle : axe optiq du milieu // face d'entrée du milieu




Si $\vec{E} \,//\, \vec{e_x}$, l'onde "voit" un indice $n_e$, déphasée de $e^{\frac{2\pi n_e e}{\lambda}}$

Si $\vec{E} \,//\, \vec{e_y}$, $\vec{E} \perp$ axe optiq, l'onde "voit" un indice $n_o$, déphasée de $e^{\frac{2\pi n_o e}{\lambda}}$

⟹ la lame se comporte comme une lame biréfringente de biréfringence $\Delta n = n_e - n_o$

déphasage de l'onde après son passage dans la lame : $\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi \Delta n\, e}{\lambda}}$ déphasage relatif entre $E_x$ et $E_y$

⟹ modificat° de l'état de polarisat°

Si $\Delta\varphi \equiv \pi\ [2\pi]$, $\Delta n \times e \equiv \frac{\lambda}{2}\ [\lambda]$ ⟶ Lame $\frac{\lambda}{2}$

si $\Delta\varphi \equiv \pi/2\ [\pi]$, $\Delta n \times e \equiv \frac{\lambda}{4}\ [\lambda/2]$ ⟶ Lame $\frac{\lambda}{4}$

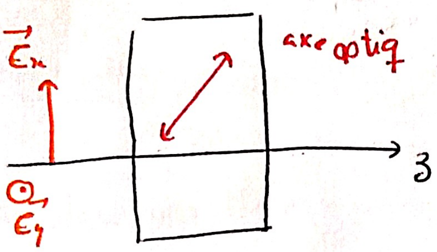
si $\vec{E} \,//\, \vec{e_x}$ ou $\vec{E} \,//\, \vec{e_y}$, l'état de polarisat° n'est pas modifié ⟹ $\boxed{\text{axes neutres de la lame}}$

2

(axe par lesquels l'état de polarisation n'est pas modifié)

axe lent : axe d'indice le plus élevé

axe rapide : ———————— faible




- $\vec{E} \parallel \vec{E}_y \Rightarrow \vec{E} \perp$ axe optq $\Rightarrow \vec{E}$ voit l'indice ordinaire $n_0$
- $\vec{E} \parallel E_x$ : $\vec{E}$ ni $\perp$ ni $\parallel$ à axe optique

$\vec{E}$ n'est pas selon un des axes propres de la lame $\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}$

$\vec{D}$ n'est pas $\parallel$ à $\vec{E}$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}_{i\vec{k} \wedge \vec{B}} = \mu_0 \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{-i\omega \vec{D}} \Rightarrow (\vec{k}, \vec{D}, \vec{B}) \text{ trièdre direct}$$

Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (\vec{\Pi}, \vec{E}, \vec{B}) = \text{trièdre direct}$$

Relaᵒ de passage :

- Discontinuité de la composante normal de $\vec{D}$ : $\vec{D}_{2\perp} - \vec{D}_{1\perp} = \sigma_{libre} \vec{n}_{1\to 2}$

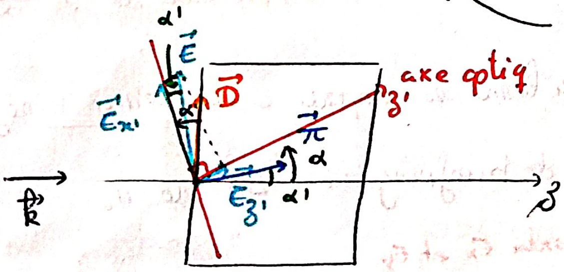
ici $\sigma_{libre} = 0$ donc $\vec{D}_{2\perp} = \vec{D}_{1\perp}$

- continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ : $\vec{E}_{\parallel 1} = \vec{E}_{\parallel 2}$

$\vec{D} \parallel$ face d'entrée en entrée de la lame.

$D_{1\perp} = 0 = D_{2\perp}$ car $\vec{D} \perp \vec{k}$ donc $D_\perp = 0$ .

ds le milieu et à l'ext face d'entrée par continuité




$$\vec{D} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{Rx'} \overset{\varepsilon_{ro}}{''} & & 0 \\ & \varepsilon_{Ry'} \overset{\varepsilon_{ro}}{''} & \\ 0 & & \varepsilon_{R3'} \overset{\varepsilon_{re}}{''} \end{pmatrix} \vec{E} \quad \text{et } \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{x'} \\ 0 \\ E_{3'} \end{pmatrix} \quad \text{donc } \vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \varepsilon_{r_o} E_{x'} \\ 0 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_{re} E_{3'} \end{pmatrix}$$

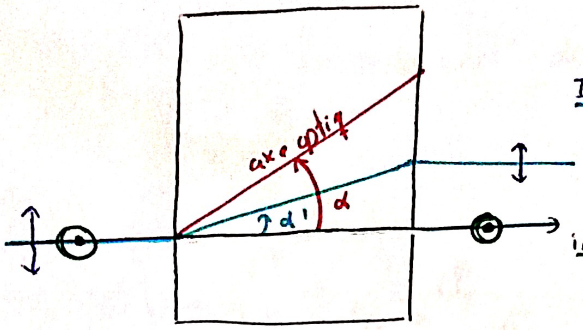
$$\frac{D_{x'}}{D_{3'}} = \frac{\varepsilon_{ro}}{\varepsilon_{re}} \frac{E_{x'}}{E_{3'}} \underset{\text{géo}}{=} \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{E_{x'}}{E_{3'}} = \frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_{ro}} \frac{1}{\tan(\alpha)} = \left(\frac{n_e}{n_o}\right)^2 \frac{1}{\tan(\alpha)} \overset{\text{géo}}{=} \frac{1}{\tan(\alpha')}$$

$$\boxed{\tan(\alpha') = \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 \tan(\alpha)}$$

$\alpha'$ = angle entre $O_z$ et $\vec{\pi}$

→ rayon lumineux incliné d'un angle $\alpha'$ p/r à $O_z$

↕ et ⊙ = axe neutres de la lame




Indice effectif : $n_o \leq n \leq n_e$ ou $n_e \leq n \leq n_o$

} double réfraction

Applica° : polariseur

(3)