## DM2: Solénoïde fini

Soit un solénoïde de longueur $L$, constitué de $N$ spires jointives identiques de rayon $R$ parcourues par un courant $I$. On note $n$ le nombre de spires par unité de longueur. L'origine $O$ est choisie au centre de la bobine et l'axe de la bobine est $Oz$.

1. Quelle est la direction du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'axe de la bobine ?

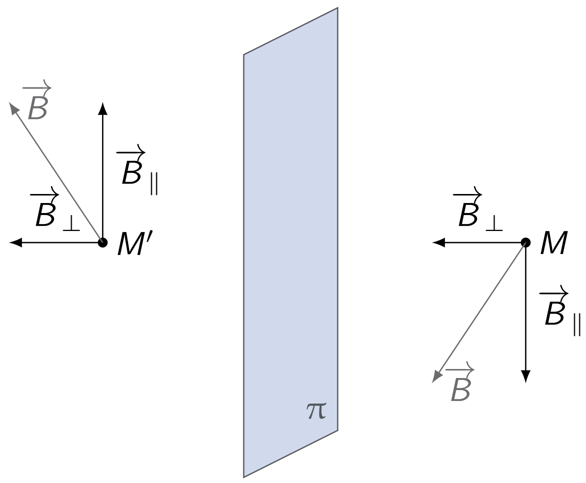
Les plans $(xMz)$ et $(yMz)$ sont tous deux plans d'antisymétrie de la distribution de courant : le champ magnétique pour tout point $M$ appartenant à l'axe $Oz$ est compris dans chacun de ces plans soit $\vec{B}(M \in Oz) \parallel \vec{u}_z$.

2. On se place cette fois en un point quelconque, qui ne se trouve pas nécessairement sur l'axe $Oz$. De par les symétries, quel système de coordonnées serait il judicieux d'employer ? En utilisant ce système, quelles sont les composantes non nulles de $\vec{B}$? De quelles variables dépendent ces composantes ?

En raison des symétries du problème, le système de coordonnées cylindriques est le mieux adapté à la description du problème. En particulier, le système est invariant par rotation d'angle $\theta$ et le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie : $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z$.

3. Montrer que $B_r(r,z)$ est une fonction impaire de $z$, alors que $B_z(r,z)$ est une fonction paire de $z$.

Symétrie du champ magnétique

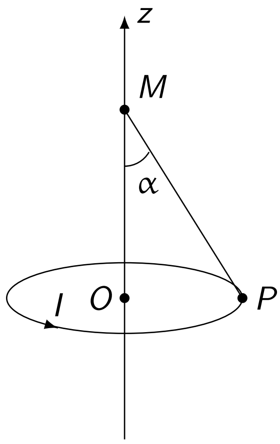



Le plan $(xOy)$ est plan de symétrie de la distribution de courant impliquant

$$B_z(r,z) = B_z(r,-z)$$
$$B_r(r,z) = -B_r(r,-z)$$

4. Calculer le champ en tout point de l'axe $Oz$. Vérifier la parité prévue par la question 3. On suppose $L \gg R$, montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ au point $O$ est le double de celui du point situé à l'extrémité, c'est-à-dire en $z = L/2$.

Calcul du champ magnétique généré par une boucle de courant




Loi de Biot & Savart

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{d\ell} \times \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\text{où} \begin{cases} \vec{d\ell} & = Rd\theta\, \vec{u}_\theta \\ \vec{PM} & = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z \end{cases}$$

$$\text{soit } \vec{d\ell} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} 0 \\ Rd\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ z \end{vmatrix} = Rd\theta z \vec{u}_r + R^2 d\theta \vec{u}_z$$

En raison des symétries invoquées à la question 1), le champ magnétique est colinéaire au vecteur $\vec{u}_z$ d'où

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{PM^3} \int_0^{2\pi} d\theta \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{PM^3} \vec{u}_z \text{ avec } PM = \frac{R}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{R^3}} \sin^3\alpha\, \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha\, \vec{u}_z \end{aligned}$$

Pour calculer le champ magnétique généré par un solénoïde fini, on superpose les champs magnétiques générés par les $N$ spires. En considérant une épaisseur $dz'$ contenant donc $n \times dz = \frac{N}{L} \times dz'$ spires, le champ magnétique ainsi généré a pour expression

$$\begin{aligned} \vec{dB}_{\text{solénoïde}}(M) &= \vec{B}_{\text{spire}}(M) \times n \times dz' \\ \vec{B}_{\text{solénoïde}}(M) &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 n I}{2R} \sin^3\alpha dz' \vec{u}_z \end{aligned}$$

La coordonnée $z$ est reliée à l'angle $\alpha$ par l'expression $\tan\alpha = \frac{R}{z-z'}$ d'où $\frac{dz'}{d\alpha} = \frac{R}{\sin^2\alpha}$ [a].

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{\text{solénoïde}}(M) &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 n I}{2\cancel{R}} \sin^{\cancel{3}}\alpha \frac{\cancel{R}}{\cancel{\sin^2\alpha}} d\alpha\,\vec{u}_z \\
&= \frac{\mu_0 n I}{2}\left[-\cos\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\,\vec{u}_z \\
&= \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)\,\vec{u}_z
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{z+L/2}{\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}} = f(z) \\
\cos\alpha_2 &= \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}} = -f(-z)
\end{aligned}$$

le champ magnétique sur l'axe du solénoïde devient

$$\vec{B}_{\text{solénoïde}}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(f(z)+f(-z)\right)\,\vec{u}_z$$

confirmant la parité de $B_z$ avec $\vec{B}(z) = \vec{B}(-z)$.

- en $z=0$,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(O) &= \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\frac{L/2}{\sqrt{R^2+L^2/4}} + \frac{L/2}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\right)\vec{u}_z \\
&= \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\right)\vec{u}_z \text{ avec } L \gg R \\
&= \frac{\mu_0 n I L}{2}\left(\frac{1}{L/2\times\left(1+4R^2/L^2\right)^{1/2}}\right)\vec{u}_z \\
&\simeq \frac{\mu_0 n I \cancel{L}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{L}}\,\vec{u}_z + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{L^2}\right) \\
&\simeq \mu_0 n I\,\vec{u}_z
\end{aligned}$$

- en $z = L/2$,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(z=L/2) &= \frac{\mu_0 n I}{2} \times \frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}\,\vec{u}_z \\
&\simeq \frac{\mu_0 n I}{2} \times \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}\,\vec{u}_z = \frac{\vec{B}(O)}{2}
\end{aligned}$$

[a] la dérivée de $\frac{1}{\tan\alpha}$ est égale à

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)' &= \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)' \\
&= -\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \\
&= -\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = -\frac{1}{\sin^2\alpha}
\end{aligned}$$

5. On veut maintenant étudier le champ magnétique $\vec{B}$ au voisinage du point $O$, c'est-à-dire lorsque $z$ et $r$ sont tous les deux très inférieurs aux deux grandeurs $L$ et $R$. Établir les approximations suivantes :

$$
\begin{aligned}
B_z(r,z) &= B_z(0,0) + ar + br^2 + cz^2 \\
B_r(r,z) &= drz
\end{aligned}
$$

Calculer les constantes $a, b$ et $d$ en fonction de $c$. Comment peut-on calculer la constante $c$ ? Exprimer $c$ en fonction $N$, $L$ et $R$. En déduire l'expression approximative de $\vec{B}$ au voisinage du point $O$.

Champ magnétique au voisinage de $O$. On réalise un dévelopement limité à l'ordre 2 de $B_z$ et $B_r$ soit

$$
\begin{aligned}
B_z(r\to 0, z\to 0) \simeq B_z(0,0) &+ \left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=0,z=0} r + \left.\frac{\partial B_z}{\partial z}\right|_{r=0,z=0} z \\
&+ \left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0,z=0} \frac{r^2}{2!} + \left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}\right|_{r=0,z=0} \frac{z^2}{2!} \\
&+ \left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial r \partial z}\right|_{r=0,z=0} rz + \mathcal{O}(r^2, z^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_z(r,z) &\simeq B_z(0,0) + \alpha_r\, r + \beta_r\, r^2 + \gamma_z\, z + \delta_z\, z^2 + \eta_{rz}\, rz + \mathcal{O}(r^2, z^2) \\
B_r(r,z) &\simeq B_r(0,0) + \alpha'_r\, r + \beta'_r\, r^2 + \gamma'_z\, z + \delta'_z\, z^2 + \eta'_{rz}\, rz + \mathcal{O}(r^2, z^2)
\end{aligned}
$$

- Calcul de $B_r$ :

  $B_r(0,0) = 0$ et $B_r(r,z) = -B_r(r,-z)$ *i.e.* une fonction impaire en $z$ implique nécessairement que $\delta'_z = 0$. Par ailleurs, la parité de la fonction conduit à l'équation suivante

$$
\begin{aligned}
\alpha'_r\, r + \beta'_r\, r^2 + \cancel{\gamma'_z\, z} + \cancel{\eta'_{rz}\, rz} &= -\alpha'_r\, r - \beta'_r\, r^2 + \cancel{\gamma'_z\, z} + \cancel{\eta'_{rz}\, rz} \\
\alpha'_r = \beta'_r &= 0
\end{aligned}
$$

  L'expression de $B_r$ se réduit à $\gamma'_z\, z + \eta'_{rz}\, rz$ or $B_r(0,z) = 0$ implique que $\gamma'_z = 0$ d'où

$$
B_r(r,z) = \eta'_{rz}\, rz = drz
$$

- Calcul de $B_z$ :

  La parité de $B_z$ *i.e.* $B_z(r,z) = B_z(r,-z)$ implique que les termes "impairs" en $z$, $\gamma_z$ et $\eta_{rz}$, soient nuls. L'expression de $B_z$ se limite à

$$
\begin{aligned}
B_z(r,z) &= B_z(0,0) + \alpha_r\, r + \beta_r\, r^2 + \delta_z\, z^2 \\
&= B_z(0,0) + ar + br^2 + cz^2
\end{aligned}
$$

- Calcul de $a, b, d$ en fonction de $c$ :

  On utilise les équations de Maxwell faisant intervenir le champ magnétique à savoir $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \vec{0}$ (au voisinage de $O$, il n'y a pas de courant ni de variation temporelle d'un champ électrique)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{B} &= 0\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0\\
\frac{1}{r}\times 2dzr + 2cz &= 0\\
d &= -c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} &= \vec{0}\\
\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} &= 0\\
dr - a - 2br &= 0\\
a = 0 \text{ et } b = \frac{d}{2} &= -\frac{c}{2}
\end{aligned}$$

- Calcul de $c$ :

  Pour calculer la constante $c$, on évalue sa valeur pour $r = 0$ *i.e.* sur l'axe du solénoïde où nous avons établi que $B_z = \frac{\mu_0 nI}{2}(f(z) + f(-z))$ avec $f(z) = \frac{L/2+z}{\sqrt{R^2+(L/2+z)^2}}$. On a donc

$$B_z(0,z) = B_z(0,0) + cz^2 = \frac{\mu_0 nI}{2}(f(z) + f(-z))$$

  Sachant que $L \gg z$ et $R \gg r$, il s'agit dès lors de développer l'expression de $f(z)$ au voisinage de zéro. On calcule ainsi

$$\begin{aligned}
\left(R^2 + (L/2+z)^2\right)^{-1/2} &= \left(R^2 + L^2/4 + Lz + z^2\right)^{-1/2}\\
&= \left(R^2 + L^2/4\right)^{-1/2}\left[1 + \underbrace{\frac{z^2}{R^2+L^2/4} + \frac{Lz}{R^2+L^2/4}}_{\epsilon}\right]^{-1/2}
\end{aligned}$$

  or

$$(1+\epsilon)^n = 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

  on obtient finalement

$$\left(R^2 + (L/2+z)^2\right)^{-1/2} = \left(R^2 + L^2/4\right)^{-1/2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{Lz+z^2}{R^2+L^2/4} + \frac{3}{8}\left(\frac{Lz+z^2}{R^2+L^2/4}\right)^2\right]$$

  La fonction $f(z)$ devient au deuxième ordre en $z$

$$f(z) \simeq \frac{L/2\left(1+\frac{2z}{L}\right)}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{Lz}{R^2+L^2/4} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{R^2+L^2/4} + \frac{3}{8}\frac{L^2z^2}{(R^2+L^2/4)^2}\right] + \mathcal{O}(z^2)$$

$$f(z) \simeq \frac{L}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{Lz}{R^2+L^2/4}-\frac{1}{2}\,\frac{z^2}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{8}\,\frac{L^2z^2}{\left(R^2+L^2/4\right)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2z}{L}-\frac{z^2}{R^2+L^2/4}\right]+\mathcal{O}(z^2)$$

$$f(z) \simeq \frac{L}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[1+\frac{2z}{L}-\frac{1}{2}\,\frac{Lz}{R^2+L^2/4}-\frac{3}{2}\,\frac{z^2}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{8}\,\frac{L^2z^2}{\left(R^2+L^2/4\right)^2}\right]+\mathcal{O}(z^2)$$
$$f(-z) \simeq \frac{L}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[1-\frac{2z}{L}+\frac{1}{2}\,\frac{Lz}{R^2+L^2/4}-\frac{3}{2}\,\frac{z^2}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{8}\,\frac{L^2z^2}{\left(R^2+L^2/4\right)^2}\right]+\mathcal{O}(z^2)$$

$$f(z)+f(-z) \simeq \frac{L}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[2-3\,\frac{z^2}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{4}\,\frac{L^2z^2}{\left(R^2+L^2/4\right)^2}\right]+\mathcal{O}(z^2)$$

Le champ magnétique $B_z$ se réduit à l'expression

$$\begin{aligned} B_z(0,z) &\simeq \frac{\mu_0 nI}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left[2-\left(\frac{3}{R^2+L^2/4}-\frac{3}{4}\,\frac{L^2}{\left(R^2+L^2/4\right)^2}\right)z^2\right] \\ &\simeq B_z(0,0)+cz^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} B_z(0,0) &= \frac{\mu_0 nI}{2}\times\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2/4}} \\ c &= \frac{\mu_0 nI}{4}\times\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left(-\frac{3}{R^2+L^2/4}+\frac{3}{4}\,\frac{L^2}{\left(R^2+L^2/4\right)^2}\right) \\ &= \frac{\mu_0 nI}{4}\times\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2/4}}\left(\frac{\cancel{3L^2}-3\times 4\left(R^2+L^2/4\right)}{4\left(R^2+\cancel{L^2/4}\right)^2}\right) \\ &= -B_z(0,0)\times\frac{3R^2}{2\left(R^2+L^2/4\right)^2} \end{aligned}$$

soit finalement

$$\begin{aligned} B_z(r\to 0,z\to 0) &= B_z(0,0)\times\left(1+\frac{3R^2}{4\left(R^2+L^2/4\right)^2}\,r^2-\frac{3R^2}{2\left(R^2+L^2/4\right)^2}\,z^2\right) \\ B_r(r\to 0,z\to 0) &= B_z(0,0)\times\frac{3R^2}{2\left(R^2+L^2/4\right)^2}\,rz \end{aligned}$$