

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

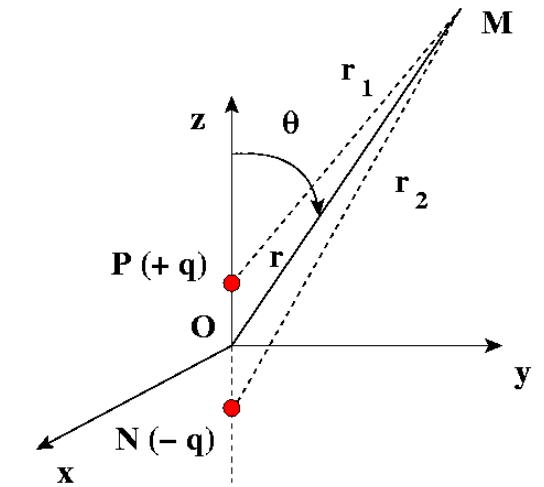
- Jusqu'à maintenant, vous avez étudié la propagation des ondes EM sans vous préoccuper de leur production
 - Production à partir de charges en mouvement
- L'étude du champ rayonné par une charge en mouvement est assez délicate et très calculatoire
- On ne considère que le cas classique

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
 1. Dipôle de Hertz
 2. Calcul des potentiels créés par des charges en mouvement
 3. Calcul des champs créés par des charges en mouvement
 4. Champ de rayonnement
 5. Puissance rayonnée à grande distance
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

- On considère un doublet de charges opposées, séparées d'une distance a petite (devant la distance d'observation)
 - Situation analogue au dipôle électrostatique
- On aura par définition un **dipôle de Hertz** si ces charges varient au cours du temps de manière sinusoïdale :
- Vous verrez en TD que la densité volumique de courant dans l'espace est la même que celle créée par un courant sinusoïdal $I(t)$ parcourant la portion de conducteur NP :

$$q(t) = q_m \cos(\omega t)$$



- Dans un modèle complexe, on écrira :

$$q(t) = q_m \exp(-i \omega t)$$

- Soit : $p(t) = a q(t) = p_m \exp(-i \omega t)$ avec $p_m = a q_m$

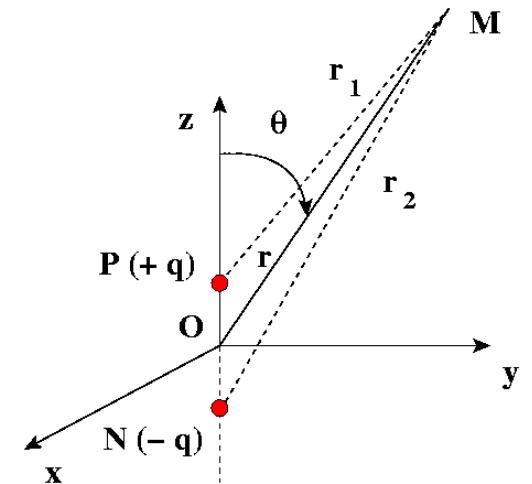


Moment dipolaire complexe

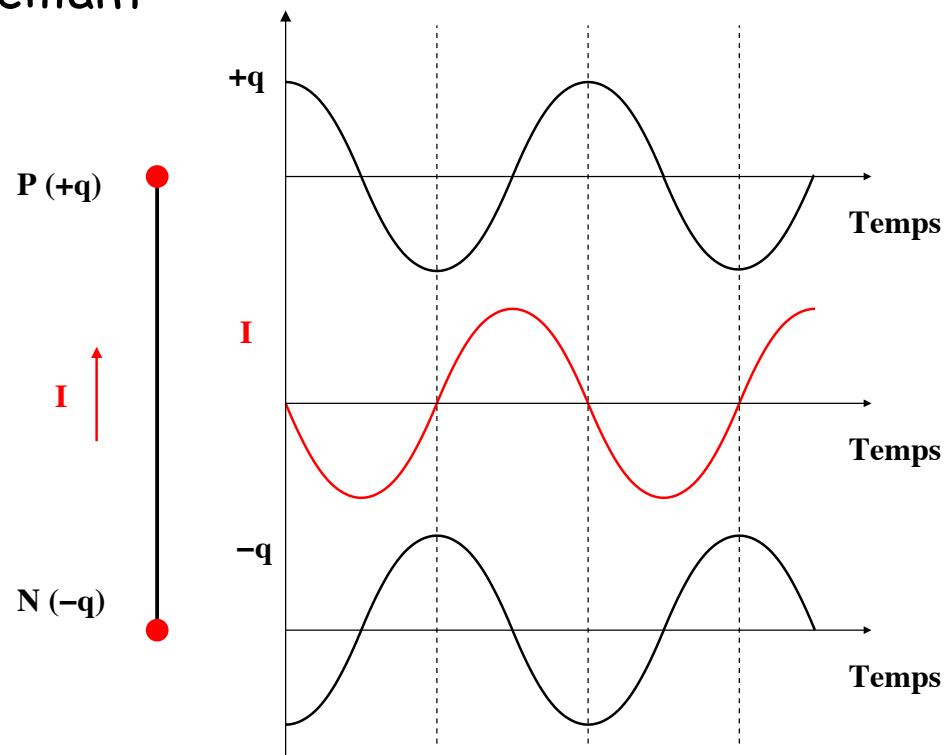
- Le courant sinusoïdal équivalent vaut :

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{a} \frac{dp}{dt} = \frac{-i \omega p(t)}{a} = I_m \exp(-i \omega t) \quad \text{avec} \quad I_m = \frac{-i \omega p_m}{a}$$

- $I(t)$ est déphasé de $3\pi/2$ par rapport à p



- Du point de vue du rayonnement, il sera équivalent de considérer des charges oscillantes ou une portion de conducteur parcourue par un courant oscillant



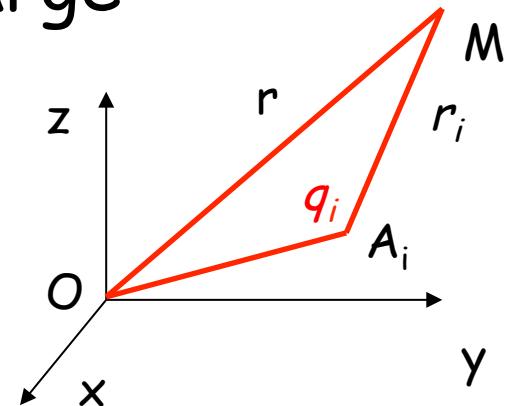
- Ce système simple a de nombreuses applications :
 - Il permet d'interpréter le rayonnement EM à l'aide du mouvement d'oscillation de charges électriques autour de leur position moyenne
 - Le champ rayonné par une antenne peut se ramener au champ créé par la superposition d'un ensemble de dipôles oscillants répartis le long de l'antenne
 - La variation harmonique (ie à ω fixé) du dipôle de Hertz ne restreint pas la généralité de l'étude car toute évolution temporelle peut se décomposer en série de Fourier
- On fera une étude du rayonnement dans le vide. La généralisation à des milieux matériels linéaires et isotropes se fera en remplaçant la vitesse de la lumière par c/n pour un milieu d'indice n

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
 1. Dipôle de Hertz
 2. Calcul des potentiels créés par des charges en mouvement
 3. Calcul des champs créés par des charges en mouvement
 4. Champ de rayonnement
 5. Puissance rayonnée à grande distance
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

Potentiels créés par une charge en mouvement

- Les potentiels des charges ponctuelles en mouvement sont données par les formules de Liénard et Wiechert :



$$\Phi(M, t) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i)/c} \Big|_{t-r_i/c}$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4 \pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{r_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i)/c} \Big|_{t-r_i/c}$$

- La difficulté dans l'emploi de ces formules est que toutes ces quantités doivent être calculées aux instants $t - r_i/c$ et que chaque terme dépend du mouvement individuel de la charge q_i
- Dans le cas de l'**approximation dipolaire**, on supposera : $r \gg OA_i$
- On supposera que O se situe au sein de la distribution de charges

Une approximation supplémentaire (1/2)

- On effectue une hypothèse supplémentaire pour contourner la difficulté d'utilisation des termes en $t-r_i/c$
- On note d l'ordre de grandeur de l'extension spatiale de la distribution (« centrée » sur O) et T le temps d'évolution typique (ie la période pour un mouvement périodique)
- On a alors pour chaque charge q_i :
$$|r_i - r| < d \quad \text{ou encore} \quad |(t - r/c) - (t - r_i/c)| < d/c$$
- Cette expression montre que les différents instants retardés diffèrent entre eux au maximum de d/c . Donc si $d/c \ll T$, on pourra négliger ces décalages et remplacer l'instant retardé propre à chaque charge par l'instant retardé moyen $t - r/c$

Une approximation supplémentaire (2/2)

- Cette nouvelle condition peut s'écrire : $\frac{d}{T} \ll c \Leftrightarrow v_i \ll c$
puisque d/T est l'ordre de grandeur de la vitesse des charges !
- Cette nouvelle condition peut également s'écrire : $d \ll c T$
 - Dans le cas d'une oscillation sinusoïdale : $d \ll \lambda$ Longueur d'onde
- En résumé, on utilisera donc deux conditions spécifiques pour l'étude des systèmes rayonnants :
$$\left\{ \begin{array}{l} r \gg d \\ \frac{d}{c} \ll T \quad \text{ou} \quad v_i \ll c \quad \text{ou} \quad d \ll \lambda \end{array} \right.$$
Approximation dipolaire
Approximation non relativiste

- On peut calculer Φ et A dans le cadre de ses approximations
- On montre que pour un ordre donné de l'approximation en v/c dans le calcul des champs E et B , on doit pousser les développements plus loin pour Φ que pour A
 - Ceci vient du fait que A est du 1^{er} ordre en v/c , au contraire de Φ
 - C'est la raison pour laquelle on commence souvent par calculer A

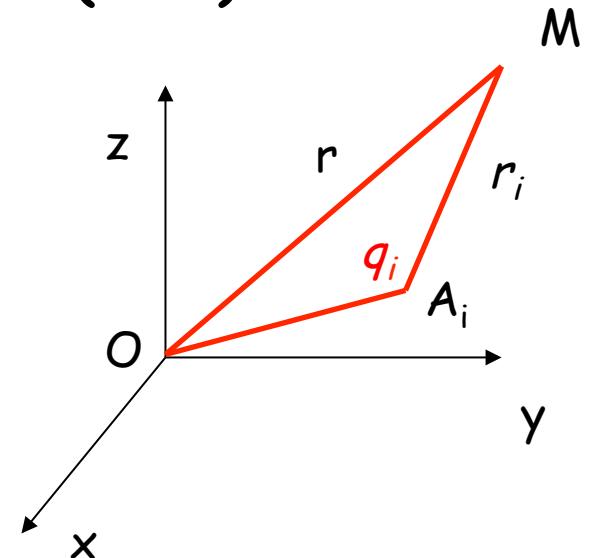
Calcul du potentiel vecteur A (1/2)

Liénard-Wiechert

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{r_i - (\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i)/c} \Big|_{t-r_i/c}$$

- Approximations :
 - On remplace $t-r_i/c$ par $t'=t-r/c$
 - Au dénominateur, on remplace r_i par r et on néglige les termes en v_i/c
- On obtient immédiatement :

$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i(t')}{r}$$



Calcul du potentiel vecteur A (2/2)

- Le moment dipolaire de la distribution de charges (à l'instant t) en O s'écrit :

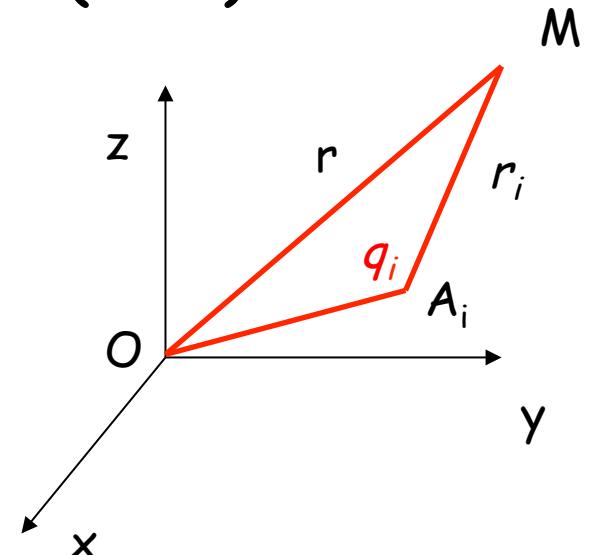
$$\vec{p}(t') = \sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}(t')$$

- On a : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{d\vec{p}}{dt'}$ puisque $t' = t - r/c$

- D'où : $\vec{p}' = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt'} \left(\sum_i q_i \overrightarrow{OA_i}(t') \right) = \sum_i q_i \vec{v}_i$

- Finalement :

$$\Rightarrow \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}'}{r}$$

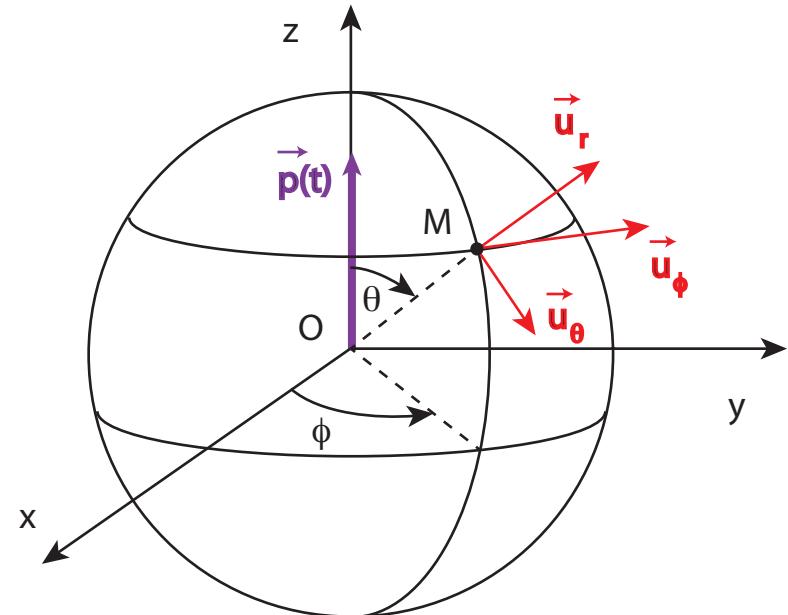


Calcul du potentiel scalaire Φ

- Le calcul de Φ est plus pénible. On obtient :

$$\Phi(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos(\theta) \left[\frac{p}{r^2} + \frac{p'}{rc} \right]_{t'=t-r/c} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$

avec $Q = \sum_i q_i = \text{Cste}$



- Commentaires :
 - Le terme en p correspond au potentiel du dipôle électrostatique
 - Le terme en p' est caractéristique du rayonnement
- A partir de maintenant, on supposera que : $Q = \sum_i q_i = 0$

Dépendance angulaires des potentiels

- La distance entre le centre du dipôle et les sphères marquées $V(+)$ et $V(-)$ est proportionnelle à la valeur de V pour les θ et φ correspondants :

- Le potentiel scalaire est maximum aux pôles et s'annule sur l'équateur (l'effet des charges $-q$ et $+q$ s'y annule)
 - V est positif dans l'hémisphère nord (où l'influence de la charge $+q$ est prédominante) et négatif dans l'hémisphère sud

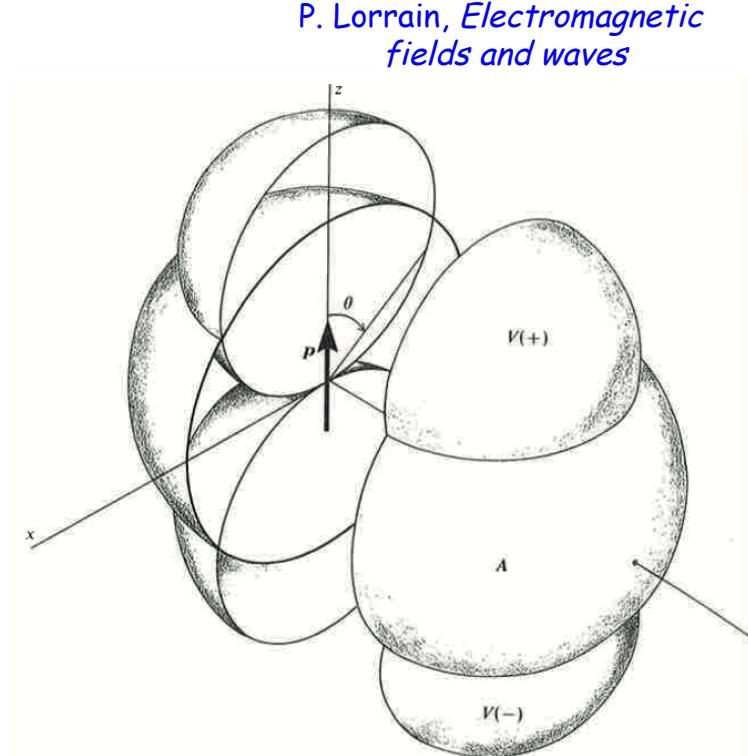


Diagramme de rayonnement des potentiel scalaire et vecteur en fonction de θ et ϕ .

- Le potentiel vecteur A est indépendant de θ et de φ

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
 1. Dipôle de Hertz
 2. Calcul des potentiels créés par des charges en mouvement
 3. Calcul des champs créés par des charges en mouvement
 4. Champ de rayonnement
 5. Puissance rayonnée à grande distance
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

Calcul des champs E et B (1/2)

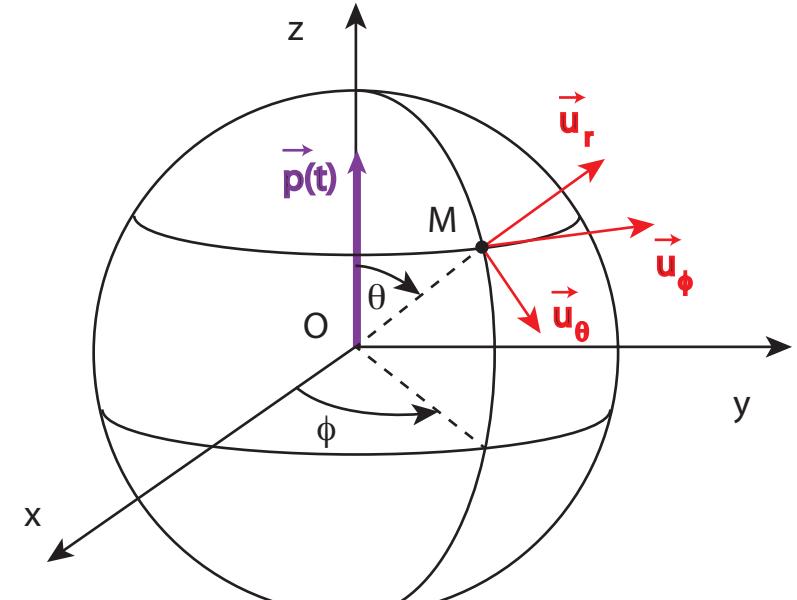
- On obtient B à l'aide de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
et E à l'aide de

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Après calculs, on obtient :

$$\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \left[\frac{p'}{r^2} + \frac{p''}{rc} \right]_{t'=t-r/c} \vec{u}_\varphi$$

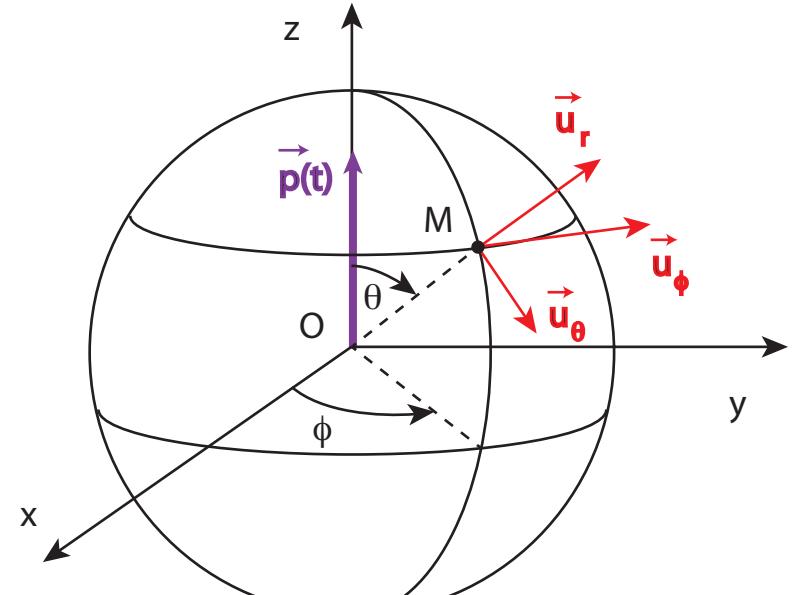
- B est orthogonal au plan (u_z, u_θ)
- B s'exprime à partir de termes en p'/r^2 et p''/rc
- Le 1^{er} terme représente le champ en l'absence de rayonnement,
le 2^e est dû au retard temporel r/c et traduit le rayonnement



Calcul des champs E et B (2/2)

- Pour E , on obtient :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} E_r = \frac{2 \cos(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\theta = \frac{\sin(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} + \frac{p''}{r c^2} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$



- E est dans le plan méridien (défini par Oz et OM) et B est orthogonal à ce plan
- E et B s'expriment à partir des mêmes termes en p/r^3 , p'/r^2c et p''/rc^2

Les différentes zones caractéristiques (1/2)

- On suppose une dépendance sinusoïdale de $p(t')$: $p(t') = p_0 \cos(\omega t')$
- On alors : $p'(t') = -p_0 \omega \sin(\omega t')$ et $p''(t') = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t')$
- L'amplitude des différents termes du champ E est :
 - Pour p/r^3 : $\frac{p_0}{r^3} = \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^0$
 - Pour $p'/r^2 c$: $\frac{p_0 \omega}{r^2 c} = \frac{p_0}{r^2} \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda}\right)$
 - Pour p''/rc^2 : $\frac{p_0 \omega^2}{r c^2} = \frac{p_0}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$

Les termes prépondérants dépendent de la valeur de r/λ

Les différentes zones caractéristiques (2/2)

- On définit trois zones selon les valeurs relatives de r et λ :

$$\begin{cases} E_r = \frac{2 \cos(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\theta = \frac{\sin(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} + \frac{p''}{r c^2} \right]_{t'=t-r/c} \\ B_\varphi = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4 \pi} \left[\frac{p'}{r^2} + \frac{p''}{r c} \right]_{t'=t-r/c} \end{cases}$$

- La **zone statique** : $r \ll \lambda$
 - ✗ Les termes en r/λ et $(r/\lambda)^2$ sont négligeables
 - ✗ De manière équivalente, les termes en p' et p'' sont négligeables
- La **zone de rayonnement** : $r \gg \lambda$
 - ✗ Les termes en $(r/\lambda)^2$ (resp. p'') sont prépondérants
- La **zone intermédiaire** : $r \approx \lambda$
 - ✗ On ne peut pas faire de simplification « évidente »
 - ✗ Zone peu étudiée (mais très petite région de l'espace)

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
 1. Dipôle de Hertz
 2. Calcul des potentiels créés par des charges en mouvement
 3. Calcul des champs créés par des charges en mouvement
 4. Champ de rayonnement
 5. Puissance rayonnée à grande distance
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

- Les termes prépondérants sont les termes en p'' (pour E_θ et B_φ) et p' (pour E_r)
- On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r \approx \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2 p' \cos(\theta)}{r^2 c} \\ B_\varphi \approx \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \end{array} \right.$$

$$E_\theta \approx \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= \frac{2 \cos(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\theta &= \frac{\sin(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} + \frac{p''}{r c^2} \right]_{t'=t-r/c} \\ B_\varphi &= \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4 \pi} \left[\frac{p'}{r^2} + \frac{p''}{r c} \right]_{t'=t-r/c} \end{aligned}}$$

p' et p'' sont calculés au temps retardé $t' = t - r/c$

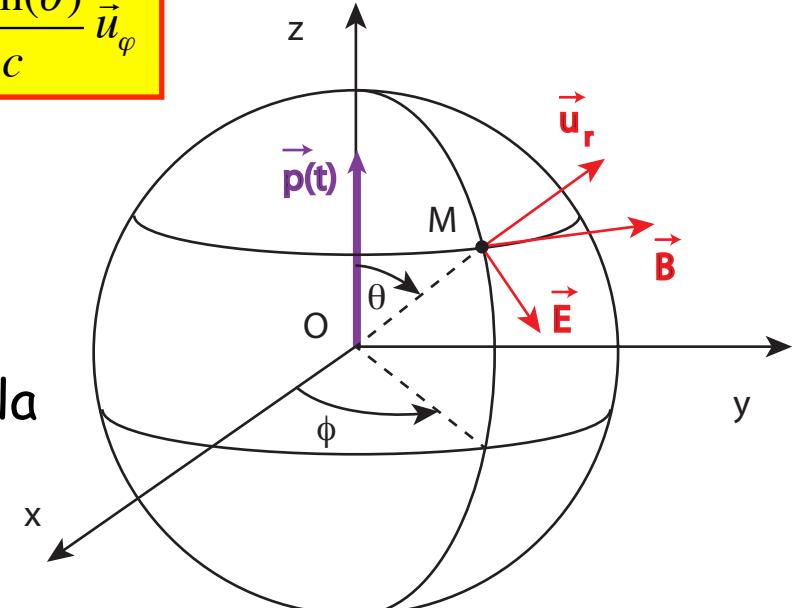
- On remarque que $E_r \ll E_\theta$ (puisque les amplitudes sont en r/λ et r^2/λ^2) dès que θ diffère de 0, soit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\varphi$$

- Ces expressions forment le **champ de rayonnement du dipôle**
- Les champs E et B sont orthogonaux à la direction de propagation et vérifient :

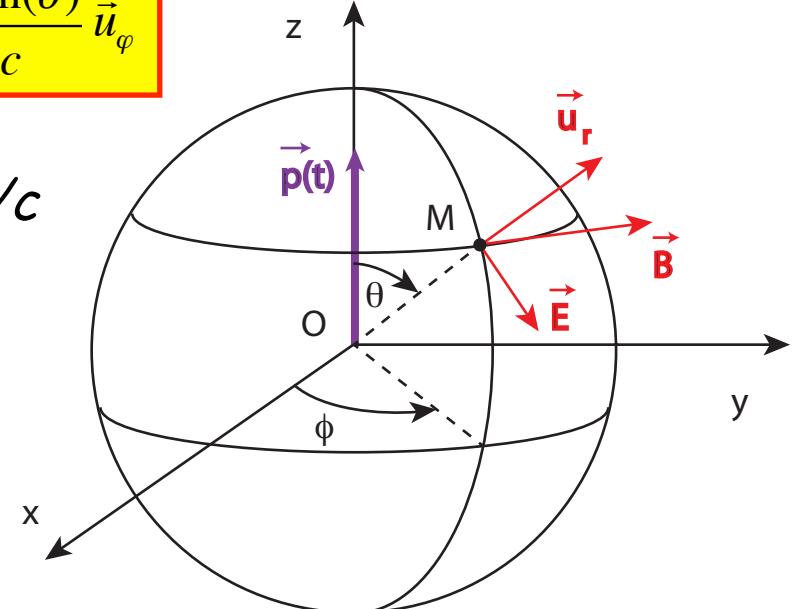
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_r \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{c}$$



- Relation identique à celle de l'onde plane EM : **la structure locale de l'onde émise par un dipôle est celle d'une onde plane transverse**
- $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct
- Contrairement à l'onde sphérique, l'onde rayonnée n'est pas isotrope (dépendance en θ)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\varphi$$

- Comme pour une onde plane, on a $B = E/c$
- E et B sont en phase
- Polarisation rectiligne
- Le champ de rayonnement varie en $1/r$ (alors que le champ du dipôle électrostatique varie en $1/r^3$)
 - Différence fondamentale
 - Explique pourquoi on peut capter une onde électromagnétique à grande distance



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\varphi$$

- Pour une oscillation harmonique ($p(t') = p_0 \cos(\omega t')$), l'amplitude $|E_m|$ du champ électrique à grande distance se met sous la forme :

$$|E_m| = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 |p_m| \frac{|\sin(\theta)|}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} a I_m \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{|\sin(\theta)|}{r} \quad \begin{array}{l} \text{car } |p_m| = a I_m / \omega \\ \text{où } I_m \text{ est l'amplitude} \\ \text{du courant équivalent} \\ \text{au dipôle} \end{array}$$

$$|E_m| = R_{vide} \frac{I_m a |\sin(\theta)|}{2 \lambda r} \quad \text{avec} \quad R_{vide} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \Omega$$

- Finalement :

$$|E_m| = 188 I_m \frac{a}{\lambda} \frac{|\sin(\theta)|}{r}$$

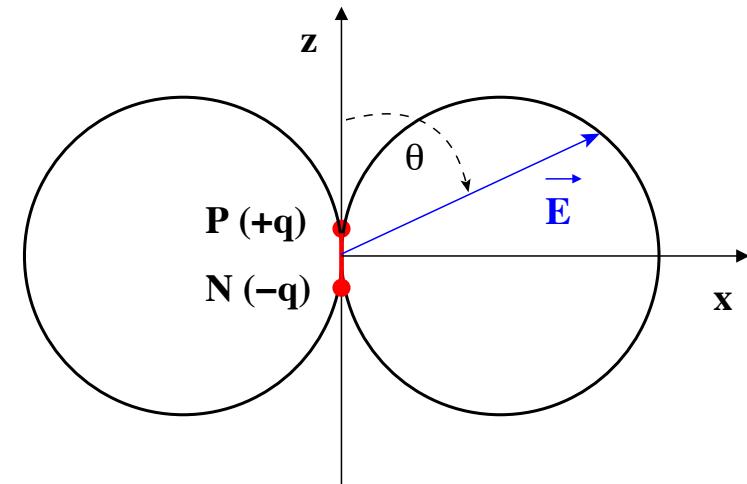
Impédance du vide

Diagramme de rayonnement de E

$$E_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|p'' \sin(\theta)|}{r} \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{c}$$

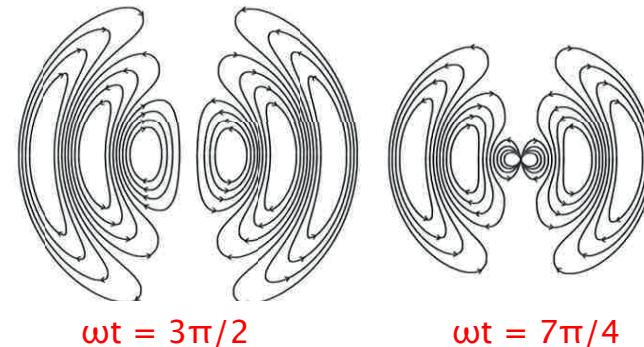
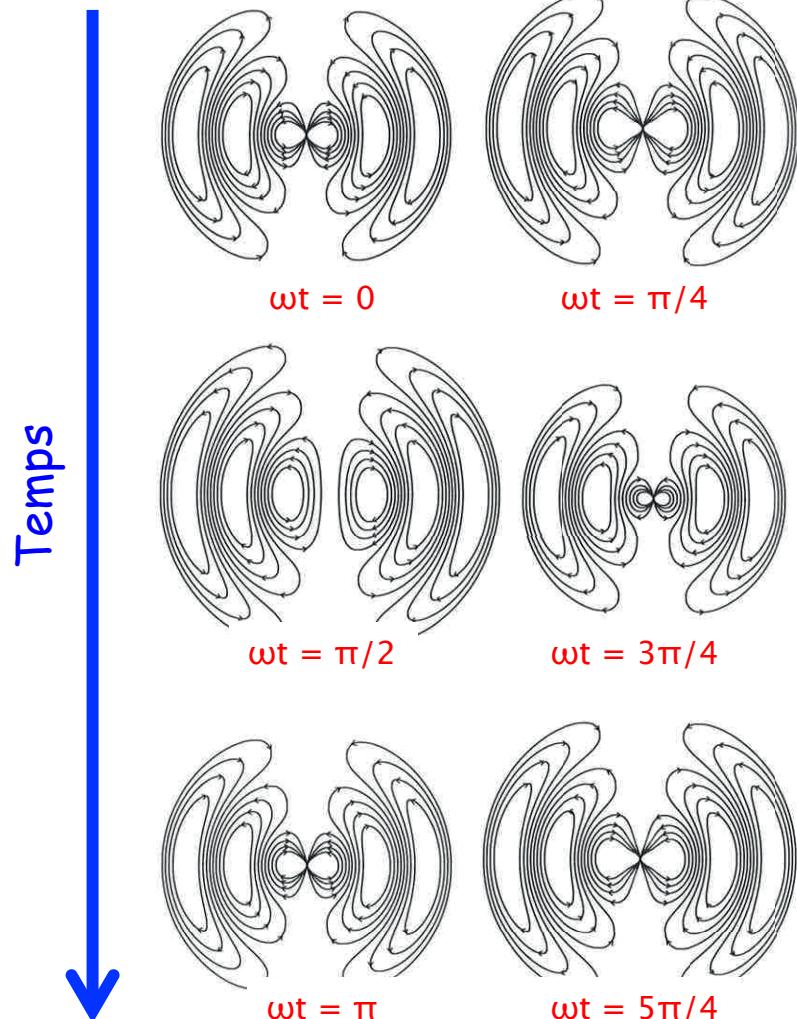
- Par définition, le **diagramme de rayonnement** ou **diagramme polaire du champ** est le lieu des points tels que $E_m = \text{cste}$, ie $r = \text{Cste} \times \sin(\theta)$
- E et B sont nuls sur l'axe du dipôle ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$) et maximaux dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$)
 - Tore de rayon intérieur nul

Indicatrice de
rayonnement



Lignes du champ E

P. Lorrain, *Electromagnetic fields and waves*



Lignes du champ *E* pour un dipôle oscillant situé au centre

- La longueur d'onde décroît avec la distance
- Les lignes de *B* sont des cercles perpendiculaires au plan du tableau et centrés sur l'axe du dipôle

Zone statique : approximation quasi-stationnaire

- L'approximation ($r \ll \lambda$) permet de simplifier E et B :
 - On néglige la durée de propagation devant la période
 - ↳ On prend $t' \approx t$ soit $p(t') \approx p_0 \cos(\omega t)$ et $p'(t') \approx -p_0 \omega \sin(\omega t)$
 - Les termes en p'/r^2c et p''/rc^2 sont négligés pour E . Pour B , on néglige le terme en p''/rc

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{p(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'(t)}{r^2} \sin(\theta) \vec{u}_\varphi$$

- Le champ E est semblable à celui du dipôle permanent
- En modélisant le dipôle par un doublet dont la charge $+q$ est mobile le long de Oz (axe du dipôle) à la vitesse $v(t)$, on aura $p'(t) = q v(t)$. On peut donc assimiler $p'(t)$ à un terme de la forme $J(t) \times V$ (où V est le volume qui entoure la charge q). Le champ B peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} V \times \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{Rayonnement} \quad \text{Biot et Savart !}$$

Cas des régimes stationnaires

- En régime stationnaire ($\omega = 0$ donc p' et p'' s'annulent), on retrouve :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0}$$

- C'est-à-dire le champ créé par un dipôle électrostatique !

$$\begin{cases} E_r = \frac{2 \cos(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\theta = \frac{\sin(\theta)}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} + \frac{p''}{r c^2} \right]_{t'=t-r/c} \\ B_\varphi = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4 \pi} \left[\frac{p'}{r^2} + \frac{p''}{r c} \right]_{t'=t-r/c} \end{cases}$$

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
 1. Dipôle de Hertz
 2. Calcul des potentiels créés par des charges en mouvement
 3. Calcul des champs créés par des charges en mouvement
 4. Champ de rayonnement
 5. Puissance rayonnée à grande distance
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

- On calcule le vecteur de Poynting dans la zone de rayonnement :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{p''^2}{r^2 c} \sin^2(\theta) \vec{u}_r$$

- R est radial et toujours dirigé vers l'extérieur : **le dipôle rayonne de l'énergie**
- Pour une oscillation harmonique en $p_0 \cos(\omega t')$, on montre facilement que :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{p_0 \omega^2 \sin(\theta)}{r} \right)^2 \vec{u}_r$$

Diagramme polaire de E et $\langle R \rangle$

- E et B sont proportionnels à $\sin(\theta)$
- $\langle R \rangle$ est proportionnel à $\sin^2(\theta)$
- Il n'y a pas de puissance émise dans la direction du dipôle

P. Lorrain, *Electromagnetic fields and waves*

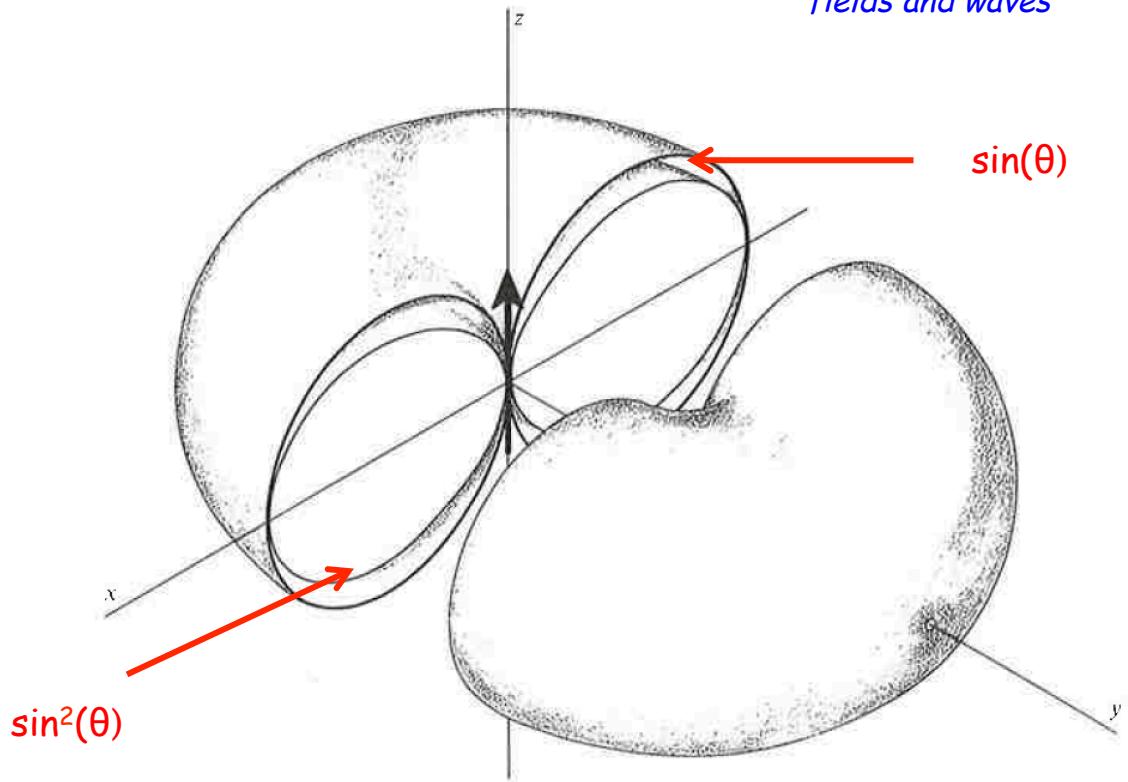


Diagramme polaire de $\sin(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$ en fonction de θ et ϕ : représentation de E et $\langle R \rangle$

- La puissance totale rayonnée $\langle P \rangle$ à grande distance s'obtient à l'aide du flux de $\langle R \rangle$ à travers une sphère de centre O et de rayon r

$$\langle P \rangle = \oint \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

- Après calculs :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3 c^3} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2 \langle p''^2 \rangle}{3 c^3}$$

- La puissance rayonnée ne dépend évidemment pas de r : c'est une caractéristique de l'émetteur !

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3 c^3} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2 \langle p''^2 \rangle}{3 c^3}$$

- Les hautes fréquences sont mieux rayonnées que les basses fréquences :
 - On utilise des hautes fréquences pour les antennes pour lesquelles le rayonnement est souhaité
 - Pour le transport du courant (pour lequel le rayonnement correspond à une perte), il faut $\langle P \rangle$ la plus basse possible, donc une basse fréquence

Cas d'une charge unique (1/2)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\langle p''^2 \rangle}{3c^3}$$

- En appliquant ce résultat à une charge unique en mouvement (au voisinage de 0) : $p = q a \Rightarrow p'' = q a''$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \langle a''^2 \rangle \quad \text{Formule de Larmor}$$

- La puissance rayonnée est proportionnelle au carré de l'accélération de la charge
- Ce résultat est généralisable et on retiendra que **toute charge accélérée/décélérée rayonne une partie de son énergie** (ie perd de l'énergie)
- Par contre, une particule chargée en mouvement rectiligne uniforme ne rayonne pas !

Cas d'une charge unique (2/2)

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3}$$

- On considère une particule chargée (non relativiste) accélérée dans la direction z

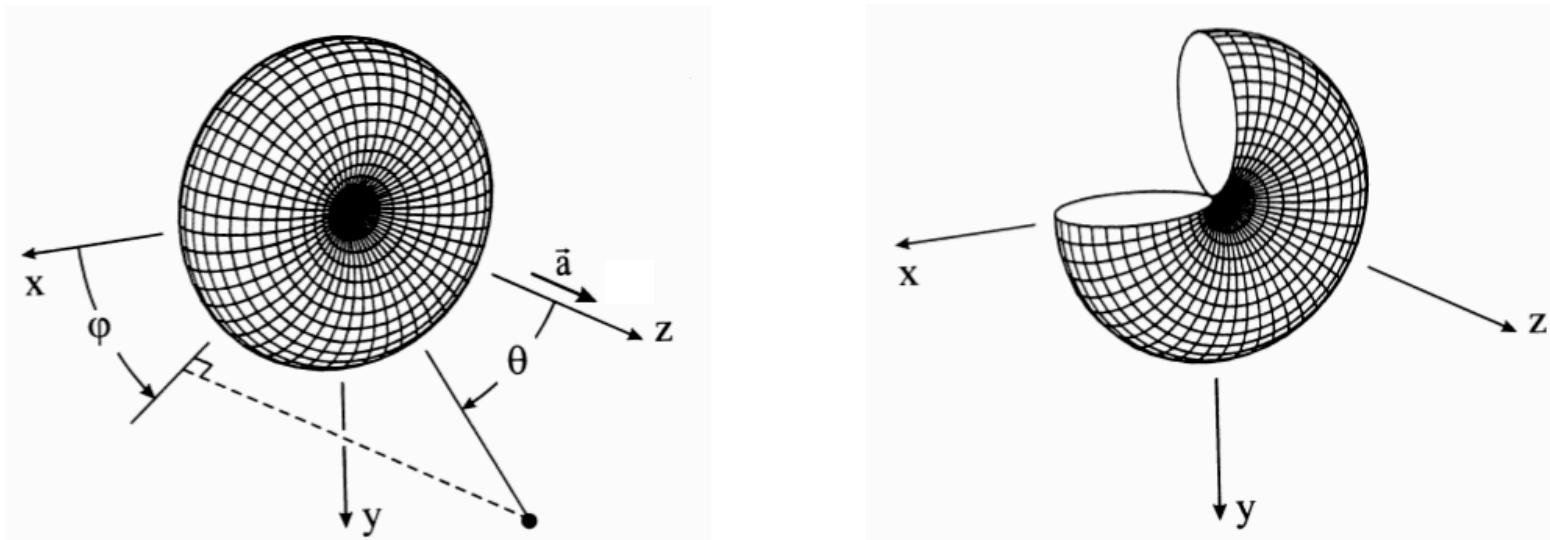


FIGURE 1.8 – Représentation du rayonnement pour une particule se déplaçant à très faible vitesse $\beta \ll 1$. Dans cette représentation, la distance radiale est proportionnelle à la puissance rayonnée dans la direction donnée par θ et ϕ . Un quadrant a été supprimé dans la figure de droite pour mieux visualiser l'enveloppe du tore (figure extraite de [11])

Résistance de rayonnement (1/2)

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}$$

- Comme $I_m a = \omega p_0$, on peut écrire $\langle P \rangle$: $\langle P \rangle = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \frac{I_m^2}{2}$
- La **résistance de rayonnement** est par définition la résistance R_r d'un conducteur ohmique qui dissipera la même puissance par effet Joule s'il était parcouru par le courant I_m :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R_r I_m^2 \Rightarrow R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$$

- Ceci est bien homogène à une résistance car on reconnaît l'**impédance du vide**: $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \sqrt{4\pi 10^{-7} \times 36\pi 10^9} = 120\pi \approx 377\Omega$

Résistance de rayonnement (2/2)

- La résistance R_r traduit le couplage avec l'espace du doublet de charges qui oscillent à la pulsation ω
- Une expression approchée de R_r : $R_r = 80 \pi^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \approx 790 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \Omega$
- Pour $a/\lambda = 1/1000$ (conforme à l'approximation quasi stationnaire), on aura $R_r = 790 \mu\Omega$
 - On voit sur cet exemple que la puissance rayonnée par un dipôle sera extrêmement faible
 - **Une forte puissance rayonnée devra impliquer un grand nombre de dipôles !**

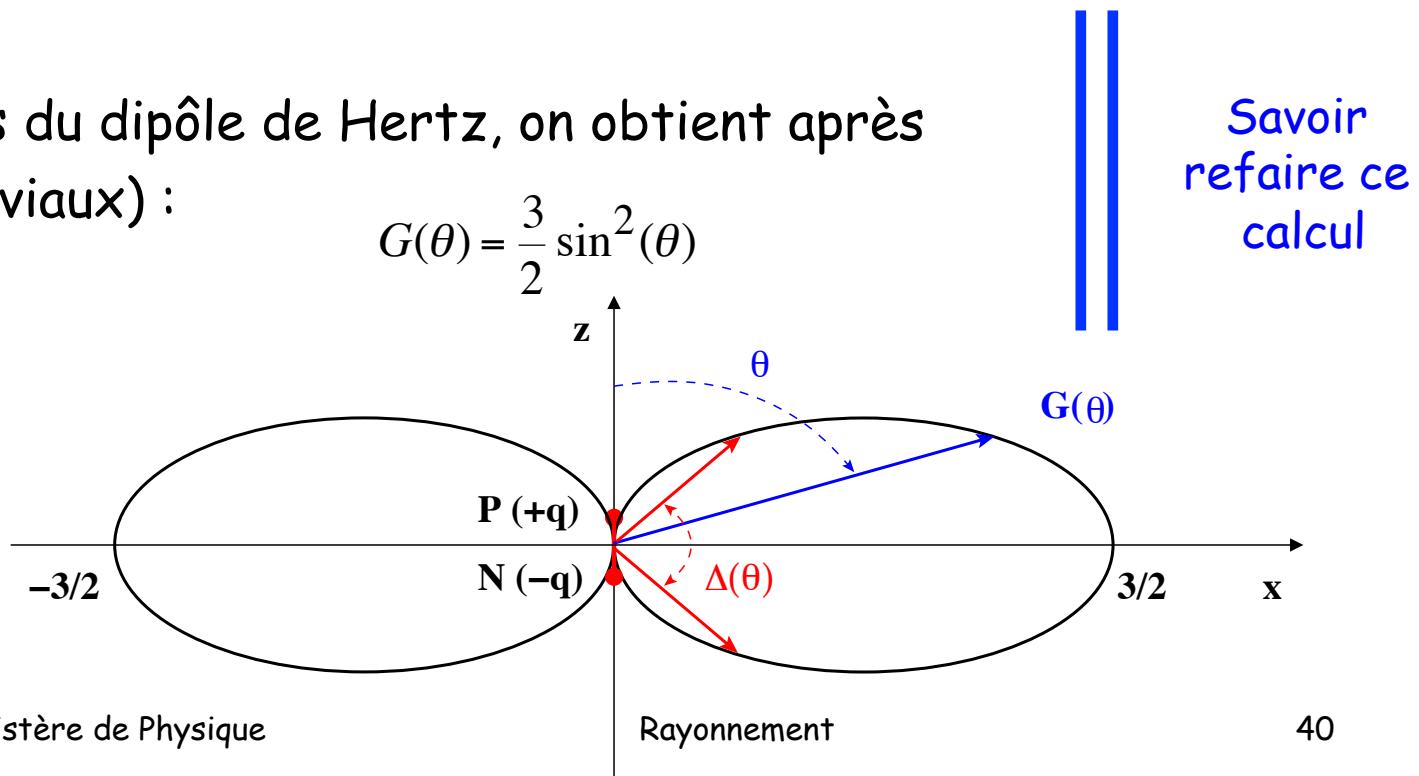
Gain directionnel du rayonnement (1/2)

- Comme $\langle P \rangle$ ne dépend pas de la distance r mais de l'angle θ , on définit le **gain directionnel de rayonnement** $G(\theta)$ par :

$$G(\theta) = 4 \pi r^2 \frac{\langle R \rangle}{\langle P \rangle}$$

- Dans le cas du dipôle de Hertz, on obtient après calculs (triviaux) :

$$G(\theta) = \frac{3}{2} \sin^2(\theta)$$



Gain directionnel du rayonnement (2/2)

- On caractérise le rayonnement par la largeur angulaire $\Delta\theta$ correspondant à la moitié de la puissance maximale
 - Pour le dipôle de Hertz, cela correspond à $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ avec θ_1 et θ_2 tels que :

$$\sin^2(\theta_i) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = 45^\circ \text{ et } \theta_2 = 135^\circ \Rightarrow \Delta\theta = 90^\circ$$

