

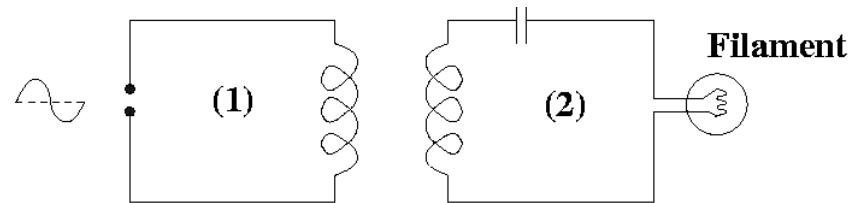
Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
 1. Energie du champ
 2. Impulsion du champ
 3. Moment cinétique du champ
 4. Conclusion sur le champ EM
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

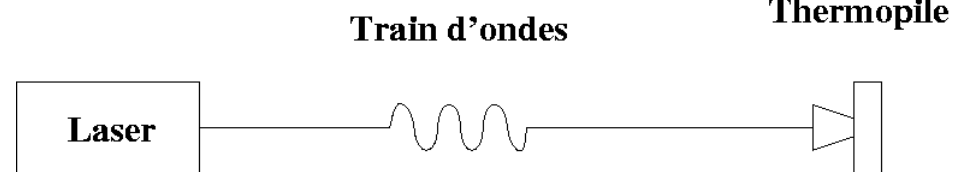
Localisation de l'énergie

- Deux expériences classiques montrent que de l'énergie peut se propager sans support matériel et être associée au champ EM

L'énergie passe d'un circuit à un autre sans support matériel



L'énergie peut être associée au champ



- \Rightarrow Nécessité d'un bilan local de l'énergie

Puissance cédée par un champ EM à des charges

- L'énergie $\delta^2 W$ fournie pendant dt par le champ aux charges contenues dans dV est :

$$\frac{\delta^2 W}{dV} = \frac{d\vec{F}}{dV} \cdot d\vec{l} = \frac{d\vec{F}}{dV} \cdot \vec{v} dt$$

v : vitesse de la particule moyenne
(macroparticule)

dF/dV : densité volumique de force

- Or : $\frac{d\vec{F}}{dV} = \rho \vec{E}$ et $\vec{J} = \rho \vec{v} \Rightarrow \frac{\delta^2 W}{dV} = \rho \vec{E} \cdot \frac{\vec{J}}{\rho} dt = \vec{J} \cdot \vec{E} dt$

- La puissance volumique cédée par le champ aux charges vaut :

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

- Pas de puissance cédée par le champ B . La force magnétique ne travaille pas

Relation locale de conservation de l'énergie (1/2)

- On note u la **densité volumique d'énergie électromagnétique**, \vec{R} son **flux par unité de surface** et σ la **puissance volumique fournie aux charges électriques**
- On note (V) un volume quelconque et (S) la surface qui l'entoure :

Variation de l'énergie électromagnétique pendant dt \longrightarrow $d\varepsilon = -\iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} - \left(\iiint_{(V)} \sigma dV \right) dt$ \longleftarrow Énergie perdue pendant dt

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} + \left(\iiint_{(V)} \sigma dV \right) = 0$$

Relation locale de conservation de l'énergie (2/2)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} + \left(\iiint_{(V)} \sigma dV \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{(V)} u dV \right] = \iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

$$\iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV \quad (\text{Ostrogradski})$$

■ Finalement :

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \sigma \right) dV = 0$$

Valable pour tous
les volumes $V \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = -\sigma$$

Equation locale de
conservation de l'énergie

Identité de Poynting

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})} + \underbrace{\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right)} + \underbrace{\frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right)} = -\mu_0 \vec{J} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) = -\vec{J} \cdot \vec{E}$$

Identité de
Poynting

Densité d'énergie électromagnétique (1/2)

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) = - \vec{J} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} = - \sigma$$

- En identifiant :

$$\sigma = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad \leftarrow \text{vecteur de Poynting}$$

- Le vecteur de Poynting est un vecteur polaire
- La densité volumique u généralise les densités obtenues en électrostatique et magnétostatique
- R et u ne sont pas linéaires. Attention à la notation complexe

Densité d'énergie électromagnétique (2/2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = -\sigma$$

- On obtient une infinité d'autres solutions pour u et R en ajoutant à u un champ scalaire Φ et à R un champ vectoriel h tels que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{h} = 0$$

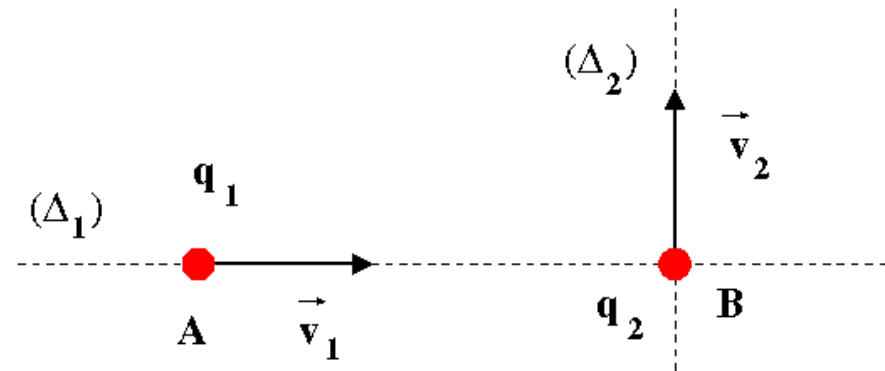
- Ceci est conceptuellement problématique car R et u sont liés à l'énergie
- Des considérations relativistes font que la définition utilisée est unique

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
 1. Energie du champ
 2. Impulsion du champ
 3. Moment cinétique du champ
 4. Conclusion sur le champ EM
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

Problème de l'action instantanée à distance (1/2)

- La composante électrique de la force exercée par les deux charges l'une sur l'autre est dans le plan (Δ_1, Δ_2)



- La charge q_1 , assimilée à l'élément de courant $q_1 v_1$, crée un champ B nul en O . La charge q_2 , crée en A un champ B perpendiculaire au plan de la figure
- La force à laquelle est soumise la charge q_1 dans le champ créé par la charge q_2 n'est pas l'opposée de la force que subit la charge q_2 dans le champ créé par la charge q_1

Problème de l'action instantanée à distance (2/2)

- Quantitativement, on explique ceci par :

$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq \overrightarrow{Cste}$$

- Il ne faut pas considérer les deux charges comme un système isolé, mais il faut ajouter **l'effet du champ**. La loi de conservation de la quantité de mouvement s'applique à :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_{Champ}$$

- Comme pour l'énergie, il est logique d'imaginer que le champ EM cède de l'impulsion aux charges du milieu
- La conservation de la quantité de mouvement dans dV implique que la somme de
 - la quantité de mouvement du champ
 - la quantité de mouvement sortant du volume
 - la quantité de mouvement cédée par le champ aux charges
 est nulle. On introduit le **tenseur des contraintes** (tenseur de rang 2 dont le flux à travers une surface est un vecteur)
- On montre que : **Densité volumique d'impulsion du champ** $\longrightarrow \vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{R}$

Qu'est-ce qu'un tenseur ?

- En physique, un **tenseur** est un objet qui s'exprime dans un espace vectoriel et dont les coordonnées peuvent changer lorsqu'on change de base (au contraire d'une **matrice** qui ne traduit qu'une variation linéaire entre diverses quantités)
- L'**ordre** (ou le **rang**) d'un tenseur est le nombre d'indices nécessaires pour le décrire
 - Un tenseur d'ordre 0 est un scalaire (ex : température, masse) et un tenseur d'ordre 1 est un vecteur (ex : force). Ils sont indépendants du choix de la base
 - Un tenseur d'ordre 2 peut être représenté par une matrice, une fois que la base est fixée (dépend de la base)

Exemple de tenseur
d'ordre 2

$$(T) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
 1. Energie du champ
 2. Impulsion du champ
 3. Moment cinétique du champ
 4. Conclusion sur le champ EM
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

Densités du champ

- On montre que la quantité de mouvement contenue dans dV entourant M , correspond, en O quelconque, à un moment cinétique de densité :

Densité volumique de moment cinétique $\longrightarrow \frac{d\vec{\sigma}_0}{dV} = \vec{d} \times \vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{d} = O\vec{M}$

- La loi de conservation du moment cinétique doit prendre en compte le moment cinétique du champ

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
 1. Energie du champ
 2. Impulsion du champ
 3. Moment cinétique du champ
 4. Conclusion sur le champ EM
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

Le champ EM est vivant

- On ne doit pas parler de « la force que deux charges exercent l'une sur l'autre » mais de « la force qu'une charge subit dans le champ créé par l'autre »
 - Jusqu'à la fin du 19^e siècle, on a considéré les forces exercées à distance par un corps sur un autre
 - Au 20^e siècle, la notion de champ permet de remplacer les forces exercées à distance par leurs actions locales
 - Au 21^e siècle : ??
- En résumé, les lois de conservation (énergie, quantité de mouvement, moment cinétique) s'appliquent en considérant le champ comme une entité à part entière
 - Conséquence de la propagation

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
 1. Régime permanent
 2. Approximation des Régimes Quasi Stationnaires
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- Régime **permanent** : $\delta/\delta t = 0$ (ne pas confondre avec le cas **stationnaire**)
 - E et B sont découplés
- On retrouve quasiment l'électrostatique et la magnétostatique, tels que définis avant la synthèse proposée par Maxwell
- Pas de distinction entre le champ magnétique déduit de ces équations et le champ de la magnétostatique
 - \Rightarrow « **champ magnétostatique** » et « **champ magnétique permanent** » sont synonymes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

■ Champ électrique

- On déduit des équations de Maxwell :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{\text{Espace}} \frac{\rho(P)}{PM^3} P \vec{M} d^3P$$

- Le concept de « **champ électrique permanent** » suppose simplement ρ indépendant du temps
 - ⌘ Plus général que le champ électrostatique
- Exemple classique d'un faisceau cylindrique de particules chargées se déplaçant à vitesse uniforme. Le calcul de E s'effectue avec l'intégrale ci-dessus !

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
 1. Régime permanent
 2. Approximation des Régimes Quasi Stationnaires
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

- ARQS (Régimes) ou AEQS (Etats) selon les auteurs
- Consiste à calculer les champs selon :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

mais néglige les retards, ie utilise les potentiels instantanés en régime non permanent

$$\Phi(M, t) \approx \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \iiint_{\text{Espace}} \frac{\rho(P, t)}{PM} d^3P \qquad \vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4 \pi} \iiint_{\text{Espace}} \frac{\vec{J}(P, t)}{PM} d^3P$$

- De manière équivalente, l'ARQS néglige les phénomènes de propagation

- Champ magnétique : identique à la magnétostatique (puisque le potentiel vecteur a la même forme) :

- D'où les équations locales :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- L'ARQS néglige le courant de déplacement (c'est cohérent car il explique la propagation)
- Le caractère conservatif de l'intensité (flux de \vec{J}) et ses conséquences (loi des mailles, loi des nœuds) sont valables dans l'ARQS (comme en régime permanent)

- Champ électrique : différent du cas statique puisque $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

- D'où les équations locales :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- En résumé, les équations de Maxwell de l'ARQS sont :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

Domaine de validité

- Approximation justifiée si tous **les retards sont négligeables devant un temps caractéristique de l'évolution des champs**
 - Pour un régime sinusoïdal, ceci signifie que le circuit est petit devant $\lambda = c / \nu$
- Exemples « traditionnels » (dimension caractéristique d) :
 - Si $d \approx 1$ m (application courante), l'ARQS sera valable si $\nu \ll 300$ MHz
⇒ Circuits imprimés
 - Si $\nu = 50$ Hz ($\lambda = 6000$ km), l'ARQS sera valable si $d \ll 6000$ km
⇒ Circuits industriels de distribution de l'électricité
 - Si $\nu = 10$ MHz, l'ARQS sera valable si $d \ll 30$ m
⇒ On utilise généralement l'ARQS en TP !

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
 1. Invariances
 2. Symétries
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

Principe de Curie

- Si une cause présente une certaine symétrie ou invariance, alors son effet aura la même symétrie (ou la même invariance), ou une symétrie supérieure, à condition que la solution du problème soit unique
- Noter que les éléments de symétrie agissent sur les directions des grandeurs vectorielles, tandis que les invariances agissent sur les variables dont dépendent ces grandeurs
- Exemples d'application en mécanique :
 - Conservation de $E \Rightarrow$ invariance par translation dans le temps
 - Conservation de $p \Rightarrow$ invariance par translation dans l'espace
 - Conservation de $\sigma \Rightarrow$ invariance par rotation dans l'espace

- Si un système physique possède un certain degré de symétrie, on peut déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point
 - 6 propriétés (notées de P1 à P6) découlant du principe de Curie, valables aussi bien en statique qu'en régime variable tant qu'on néglige le retard
- Valable aussi bien pour les distributions volumiques que surfaciques, linéiques ou ponctuelles

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
 1. Invariances
 2. Symétries
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

- P1 (**Invariance par translation**) : si un système est invariant dans toute translation parallèle à un axe, les effets sont indépendants des coordonnées de cet axe
 - Utiliser les coordonnées cartésiennes !
 - Exemple : invariance de ρ par translation // (Oz) :

$$\Phi(M) = \Phi(x, y) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E_x(x, y) \vec{u}_x + E_y(x, y) \vec{u}_y + E_z(x, y) \vec{u}_z$$

- Exemple : invariance de \mathcal{J} par translation // (Oz) :

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(x, y) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \vec{B}(x, y)$$

- P2 (**Symétrie axiale**) : si un système est invariant dans toute rotation autour d'un axe donné, alors ses effets ne dépendent pas de l'angle qui définit la rotation
 - Utiliser les coordonnées cylindriques !
 - Exemple : invariance de ρ par rotation par rapport à (Oz) :

$$\Phi(M) = \Phi(r, z) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, z) \vec{u}_z$$

- Exemple : invariance de J par rotation par rapport à (Oz) :

$$\begin{cases} \vec{A}(M) = A_r(r, z) \vec{u}_r + A_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + A_z(r, z) \vec{u}_z \\ \vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + B_z(r, z) \vec{u}_z \end{cases}$$

- P3 (**Symétrie cylindrique**) : si un système est invariant par translation et rotation, ses effets ne dépendent que de la distance à l'axe de rotation
 - Utiliser les coordonnées cylindriques !

- P4 (**Symétrie sphérique**) : si un système est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe, ses effets ne dépendent que de la distance à ce point fixe
 - Utiliser les coordonnées sphériques !

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
 1. Invariances
 2. Symétries
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
7. Electromagnétisme hors système MKSA

Qu'est-ce que le « champ magnétique » ?

- On peut définir un champ B à l'aide de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

- La force étant reliée à l'énergie, la définition ne doit pas dépendre de la convention d'orientation de l'espace, ie de la définition du produit vectoriel !
 - B n'a pas la même forme que E (qui ne dépend d'aucune convention)

Une autre façon de dire la même chose (1/2)

- On montre expérimentalement que dans toute région subissant l'influence de courants, la force dF à laquelle un élément de circuit parcouru par I est soumis dépend linéairement de $I d\mathbf{l}$:

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} I dl_x \\ I dl_y \\ I dl_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (B) = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix}$$

- On observe également que dF et $I d\mathbf{l}$ sont perpendiculaires :

$$dF_x dl_x + dF_y dl_y + dF_z dl_z = 0$$

$$\forall I \Rightarrow B_{xx} = B_{yy} = B_{zz} = 0 \quad B_{yx} = -B_{xy} \quad B_{xz} = -B_{zx} \quad B_{yz} = -B_{zy}$$

- La matrice des coefficients est donc antisymétrique. Il suffit de 3 coefficients pour décrire l'action du champ magnétique

Une autre façon de dire la même chose (2/2)

- On pose $B_x = B_{yz}$, $B_y = B_{zx}$ et $B_z = B_{xy}$. Il reste :

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Les coordonnées B_x , B_y et B_z sont les 3 composantes d'un tenseur antisymétrie d'ordre 2 et de rang 3
- Ecrire B sous forme vectorielle permet de le visualiser, mais les composantes de ce vecteur ne sont pas « normales »

$$\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$$

- B est un **pseudo-vecteur** ou **vecteur axial**

- Il est facile de se représenter les champs E et B par des vecteurs
- On appellera **parité** l'opération de symétrie par rapport au point O
- On définit 2 types de vecteurs :
 - un vecteur sera **polaire** (ou vrai vecteur) si $\text{Parité}(V) = -V$
 Exemples $\longrightarrow \vec{E}, \vec{r}, \vec{v}, \vec{p}, \vec{F}, \vec{J}, \vec{A}$
 - un vecteur sera **axial** (ou pseudo vecteur) si $\text{Parité}(V) = V$
 Exemples $\longrightarrow \vec{r} \times \vec{p}, \vec{r} \times \vec{F}, \vec{B}$
- En particulier, B est axial pour que la force s'écrive $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

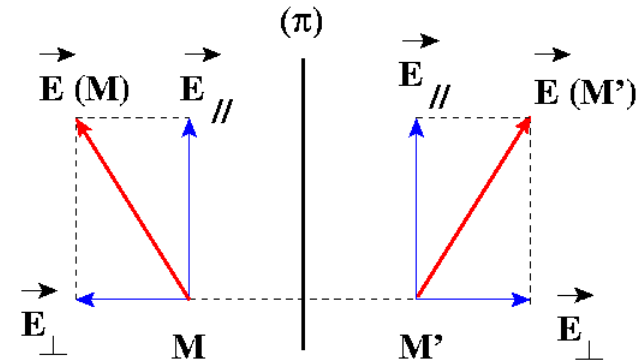
- Principe de Curie : les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits
 - Les propriétés de symétrie ou d'antisymétrie des distributions de charges et de courant se retrouvent dans les champs et les potentiels

- P5 (**plan de symétrie**) : si un système admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan :
 - Un effet vectoriel est contenu dans ce plan
 - Un effet axial est perpendiculaire à ce plan

- P6 (**plan d'antisymétrie**) : si un système admet un plan d'antisymétrie, alors en tout point de ce plan :
 - Un effet vectoriel est perpendiculaire à ce plan
 - Un effet axial est contenu dans ce plan

Symétrie d'une distribution de charge wrt un plan (1/2)

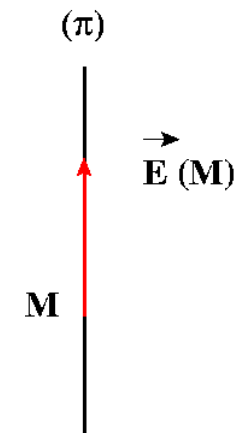
- Une distribution de charge possède un **plan de symétrie** (π) si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent la même charge



- On montre que :

$$\begin{cases} \Phi(M') = \Phi(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M) \quad \text{et} \quad \vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M) \end{cases}$$

- En particulier, si un point appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ électrique en ce point est contenu dans le plan



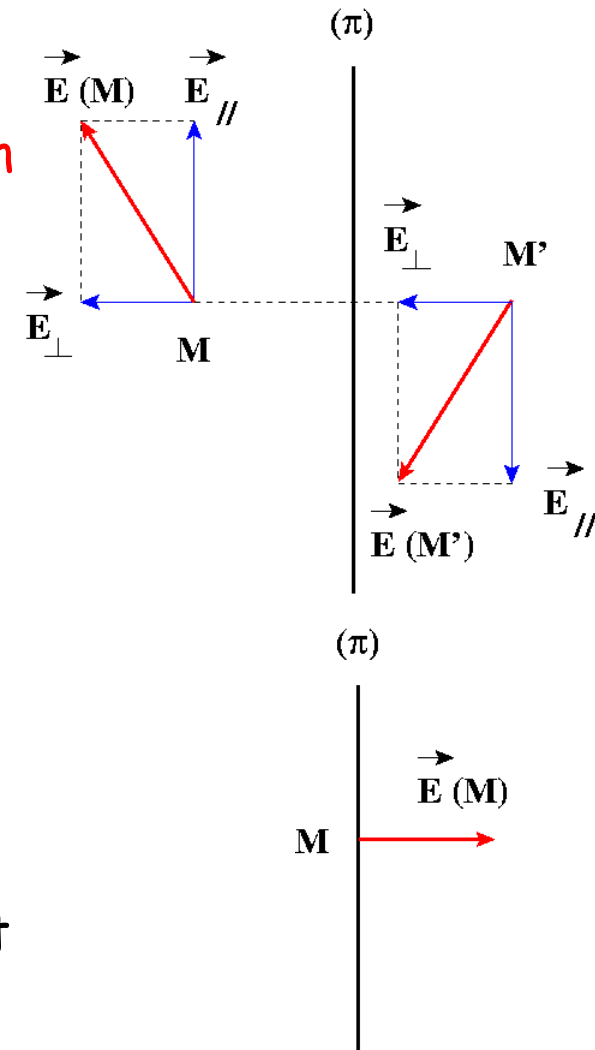
Symétrie d'une distribution de charge wrt un plan (2/2)

- Une distribution de charge possède un **plan d'antisymétrie** (π) si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent des charges opposées

- On montre que :

$$\begin{cases} \Phi(M') = -\Phi(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M) \quad \text{et} \quad \vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M) \end{cases}$$

- En particulier, si un point appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrique en ce point est normal au plan



Symétrie d'une distribution de charge wrt un axe ou un point

- Si une distribution de charge possède un axe de symétrie, E est porté par cet axe
- Si une distribution de charge possède un centre de symétrie, E est nul en ce point
- Si une distribution de charge possède un axe d'antisymétrie, E est perpendiculaire à cet axe

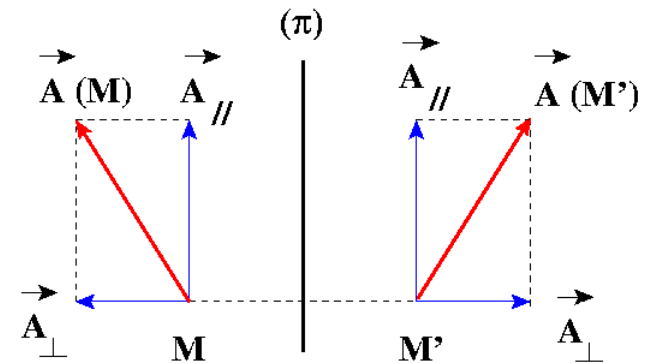
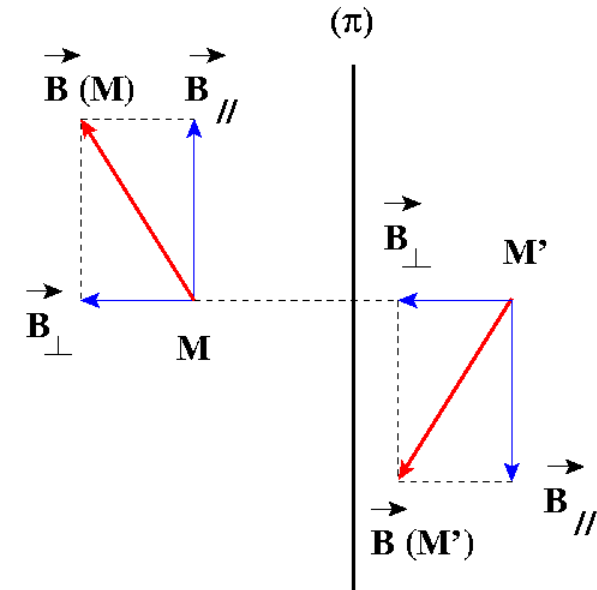
Symétrie d'une distribution de courant wrt un plan (1/4)

- Une distribution de courant possède un **plan de symétrie** (π) si les courants volumiques en deux points P et P' symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes symétriques :

$$\Rightarrow \vec{J}_{\perp}(P') = -\vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = \vec{J}_{//}(P)$$

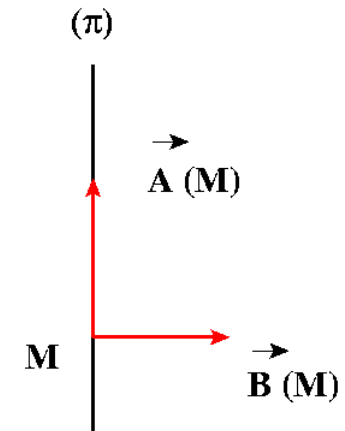
- On montre que :

$$\begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) & \text{et} & \vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = -\vec{A}_{\perp}(M) & \text{et} & \vec{A}_{//}(M') = \vec{A}_{//}(M) \end{cases}$$



Symétrie d'une distribution de courant wrt un plan (2/4)

- En particulier, si un point appartient à un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en ce point est normal au plan tandis que le potentiel vecteur est contenu dans le plan



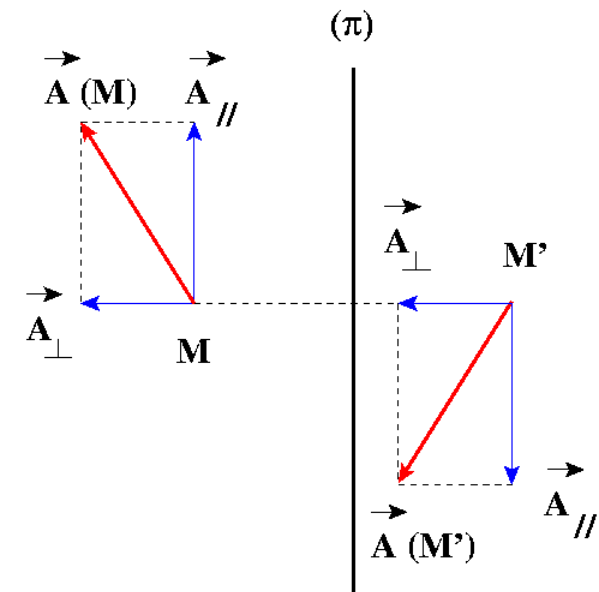
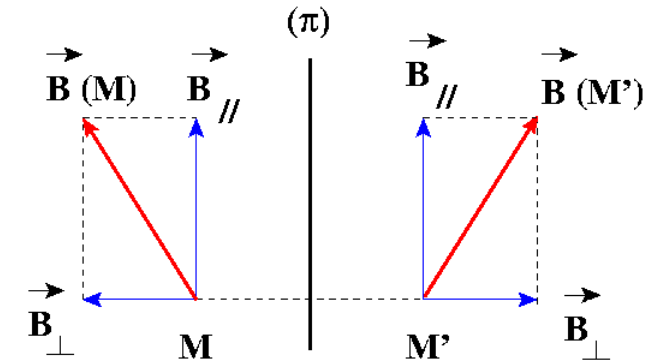
Symétrie d'une distribution de courant wrt un plan (3/4)

- Une distribution de courant possède un **plan d'antisymétrie** (π) si les courants volumiques en deux points P et P' symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes antisymétriques :

$$\Rightarrow \vec{J}_{\perp}(P') = \vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = -\vec{J}_{//}(P)$$

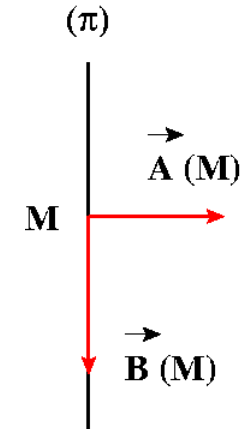
- On montre que :

$$\begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) & \text{et} & \vec{B}_{//}(M') = \vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = \vec{A}_{\perp}(M) & \text{et} & \vec{A}_{//}(M') = -\vec{A}_{//}(M) \end{cases}$$



Symétrie d'une distribution de courant wrt un plan (4/4)

- En particulier, si un point appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en ce point est contenu dans le plan tandis que le potentiel vecteur est normal au plan



Symétrie d'une distribution de courant wrt un axe ou un point

- Si une distribution de courants possède un axe de symétrie, B est nul en tout point de celui-ci
- Si une distribution de courants possède un centre de symétrie, B est nul en ce point
- Si une distribution de courants possède un axe d'antisymétrie, B est porté par cet axe

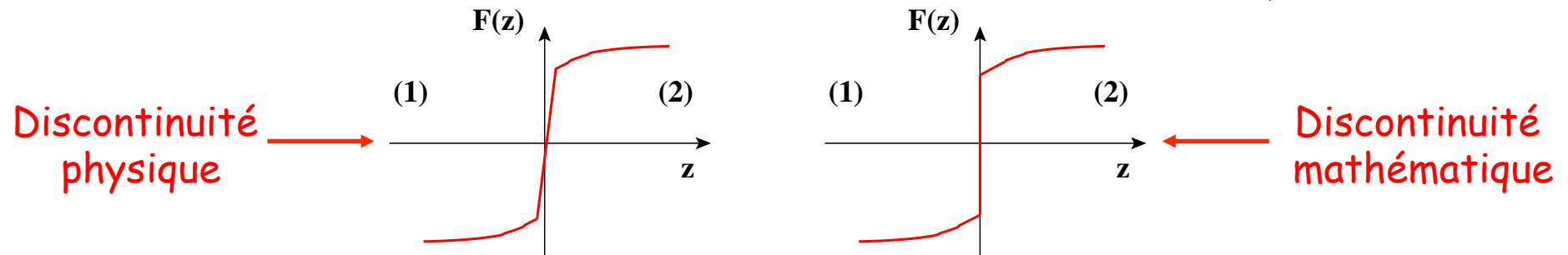
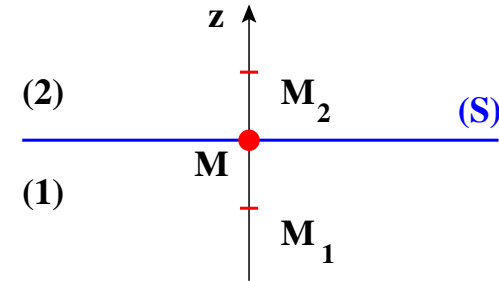
Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
 1. Densités ponctuelles, linéiques et volumiques
 2. Densités surfaciques
7. Electromagnétisme hors système MKSA

- Les propriétés de continuité/discontinuité dépendent de la modélisation des distributions
- Ne pas oublier que l'électromagnétisme classique n'est plus valable dès qu'on se rapproche « trop » des charges
- Reste valable pour des phénomènes dépendant du temps

Qu'est-ce qu'une discontinuité ?

- La discontinuité d'une quantité F est $F(M_2) - F(M_1)$



- Pour une discontinuité mathématique, la dérivée n'est pas définie
- En physique, une discontinuité n'est qu'une variation rapide et

est toujours définie

$$F_2 - F_1 = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

Exemple de discontinuité

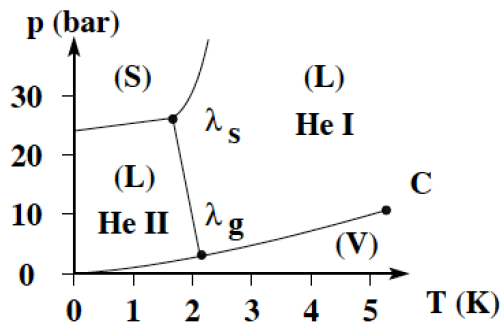


Diagramme de phase de He

Capacité thermique de He liquide

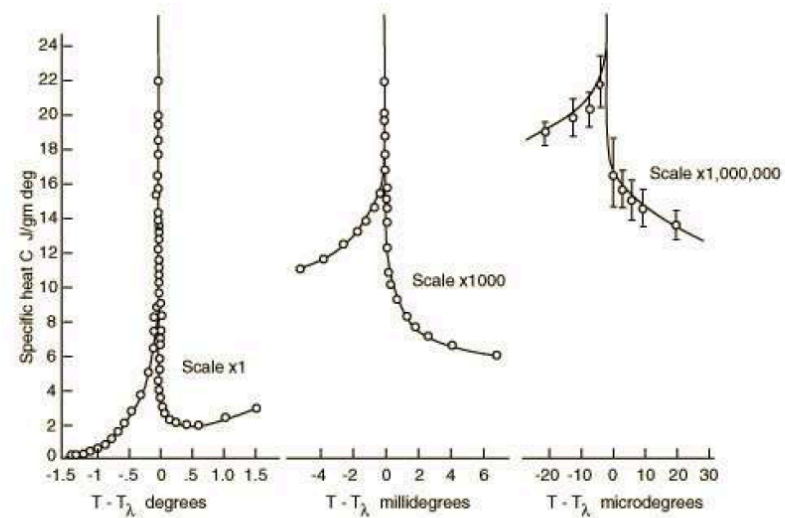


FIGURE 7.30 – Capacité thermique massique de l'hélium ^4He liquide (figure extraite de Buckingham and Fairbank, 1961).

- La capacité thermique massique c de He-I augmente violemment aux alentours de $T \approx 2 \text{ K}$: **discontinuité de c** (transition de phase de 2^e espèce entre He-I et He-II)
- He-II a des propriétés remarquables (ex : absence de viscosité) qui résultent d'un phénomène d'origine quantique, la condensation de Bose-Einstein, se manifestant au niveau macroscopique

Charges ponctuelles

- Champ E et potentiel Φ connus :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ponc}(M) &= \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \\ \vec{E}_{ponc}(M) &= \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{singularité au voisinage des charges} \\ \text{(mais le modèle n'est plus valide)}$$

- E et Φ ne présentent aucune singularité mathématique dans un modèle de charges ponctuelles

Densités linéiques

■ Champ électrique

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{lin}(M) &= \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r \\ \Phi_{lin}(M) &= \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{aligned} \right\}$$

⇒ singularité au voisinage du fil
(mais le modèle n'est plus valide)

■ Champ magnétique

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{u}_\theta \\ \vec{A}(M) &= -\frac{\mu_0 I}{4 \pi} \ln(x^2 + y^2) \vec{u}_z \end{aligned} \right\}$$

⇒ singularité au voisinage du fil
(mais le modèle n'est plus valide)

- E, B, Φ et A ne présentent aucune singularité mathématique dans un modèle de charges linéiques

Densités volumiques

■ Champ électrique :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E}_{vol} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{vol} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \Phi_{vol} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow E$ et Φ sont définis en tout point

$\Rightarrow E$ et Φ sont continus en tout point
(car dérivées partielles bornées)

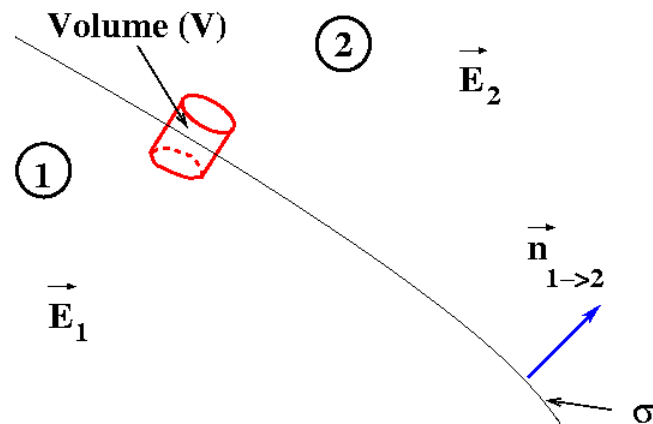
- Champ magnétique :
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \vec{PM}}{PM^3} d^3P$$
 - Le seule singularité est éventuellement en $P = M$. On montre en fait qu'elle n'en est pas une (cf poly § 1.6.1)
- Potentiel vecteur :
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P$$
 - Même raisonnement pour la même conclusion
- E, B, Φ et A ne présentent aucune singularité mathématique dans un modèle volumique

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique
 1. Densités ponctuelles, linéiques et volumiques
 2. Densités surfaciques
7. Electromagnétisme hors système MKSA

Densité surfacique de charges (1/2)

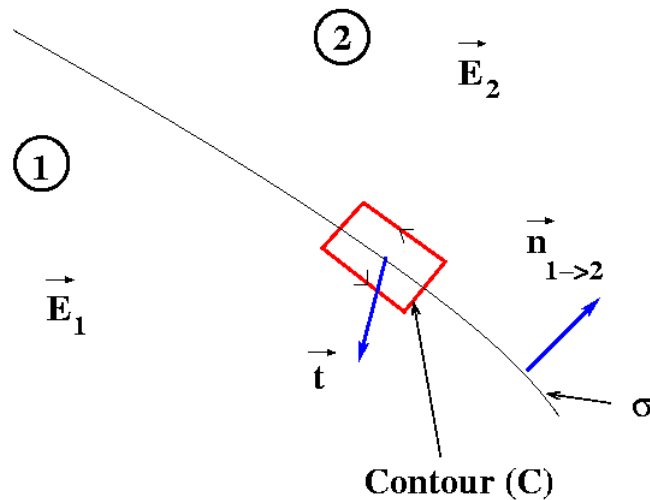
- Physiquement, c'est une densité volumique de charges de petite épaisseur !
- Les champs E_1 et E_2 sont des fonctions de classe C^1 , mais ne sont pas définis sur la surface de séparation



$$\Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- La discontinuité de E vient de l'approximation faite en négligeant l'épaisseur de la surface chargée

Densité surfacique de charges (2/2)



$$\Rightarrow \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

- En résumé, on a :

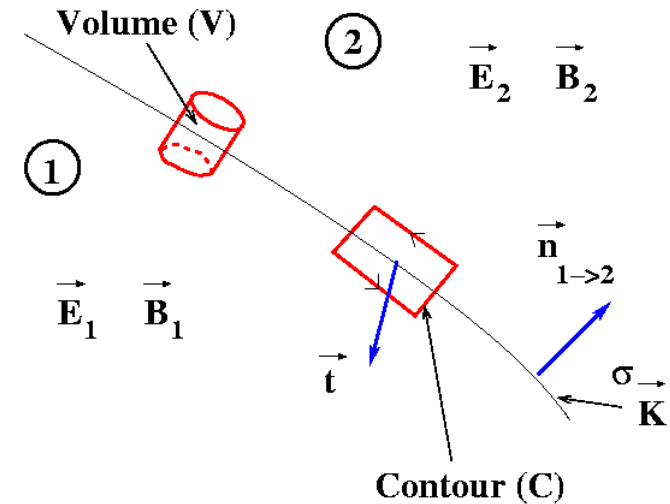
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

- Le potentiel Φ reste continu à la traversée d'une surface chargée

Densité surfacique de courants

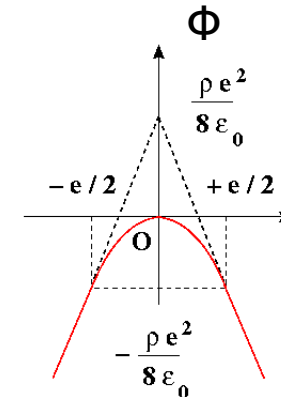
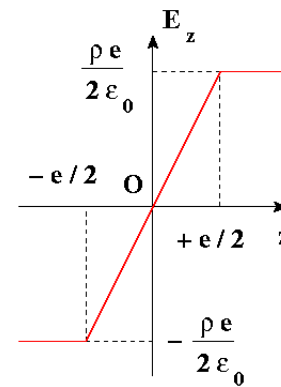
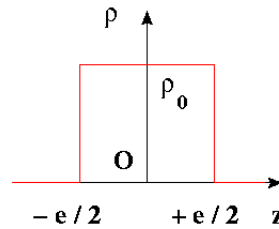
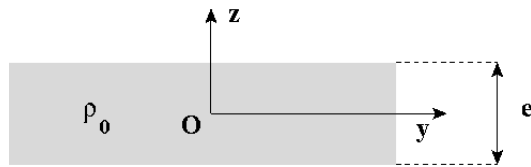
- De même pour B , on montre qu'en présence d'une densité surfacique de courant K , (MA) entraîne :

$$\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K}$$



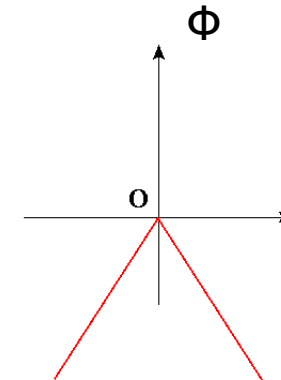
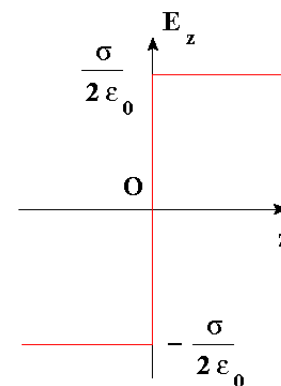
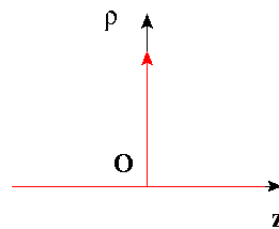
- Alors que (MΦ) entraîne : $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0$
- En résumé : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$
- Le potentiel vecteur A est continu à la traversée d'une surface chargée

Application : champ et potentiel au voisinage d'une plaque de densité uniforme (exercice 1.2)



Plaque d'épaisseur e

En faisant tendre e vers zéro



Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Champ électromagnétique
4. Quelques régimes particuliers de l'électromagnétisme
5. Invariances et symétries du champ électromagnétique
6. Conditions aux limites du champ électromagnétique

7. Electromagnétisme hors système MKSA