$\downarrow \vec{\sigma}_O(M)$

b) loi des aires :

(Choix de coordonnées : coordonnées cylindriques $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\}$)

On choisit d'appeler $\vec{u}_z$ l'axe $\perp$ au plan du mvt.

On a alors : $\vec{\sigma}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ (mvt tel que $z=0$ et $\dot{z}=0$)

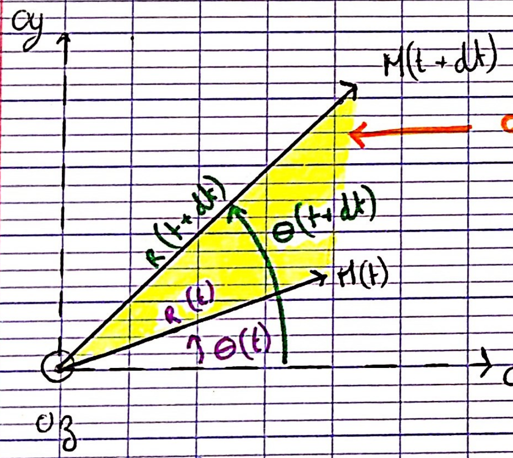
D'où : $\vec{\sigma}_O(M) = (r\vec{u}_r) \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$

$= mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z = \vec{cte}$ (pr mvt à force centrale)

$$\boxed{\text{On en déduit, pour un mvt à force centrale : } \vec{\sigma}_O(M) = mC\vec{u}_z \text{ avec } C = r^2\dot{\theta} \text{ : constante des aires}}$$

Rq : $C>0$ ou $C<0$ selon le signe de $\dot{\theta}$

Interprétation géométrique :



aire dS algébrique ($dS>0$ si $\dot{\theta}>0$, $dS<0$ si $\dot{\theta}<0$)

On s'intéresse à l'aire balayée par le vecteur $\vec{OM}$ entre les instants t et $t+dt$.

Évaluons dS :

$dS = \pm \frac{1}{2}$ A parallélogramme de côté $\vec{OM}(t)$ et $\vec{OM}(t+dt)$

($+$: $\dot{\theta}>0$; $-$: $\dot{\theta}<0$)

$= \pm \frac{1}{2} \| \vec{OM}(t) \wedge \vec{OM}(t+dt) \|$

$= \pm \frac{1}{2} \| \vec{OM}(t) \wedge (\vec{OM}(t) + d\vec{OM}) \|$

$= \pm \frac{1}{2} \| \underbrace{\vec{OM}(t)}_{r\vec{u}_r} \wedge \underbrace{d\vec{OM}}_{dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z} \|$

$dz\,\vec{u}_z$: 0 car mvt plan à z cst.

$= \pm \frac{1}{2} \| r^2 \, d\theta \, \vec{u}_z \|$

Si $\dot{\theta} > 0$, $d\theta > 0$: et si $\dot{\theta} < 0$, $d\theta < 0$:

$dS = + \frac{1}{2} r^2 d\theta$ $\qquad$ $dS = - \frac{1}{2} r^2 (-d\theta) = + \frac{1}{2} r^2 d\theta$

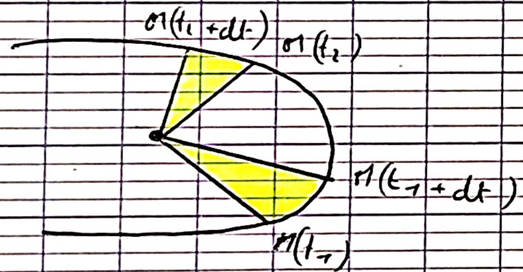
On a donc

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \underbrace{r^2 \dot{\theta}}$$ on reconnait la cst des aires C.

Loi des aires :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$$: l'aire balayée par le vecteur $\vec{OM}$ par unité de temps est cst.

vitesse ARÉOLAIRE (adj dérivé de l'aire)



même aire.

Ce chap pose les bases des 2 prochains chap. de méca : chap 5 et chap 6.