

## TD n°3, Optique

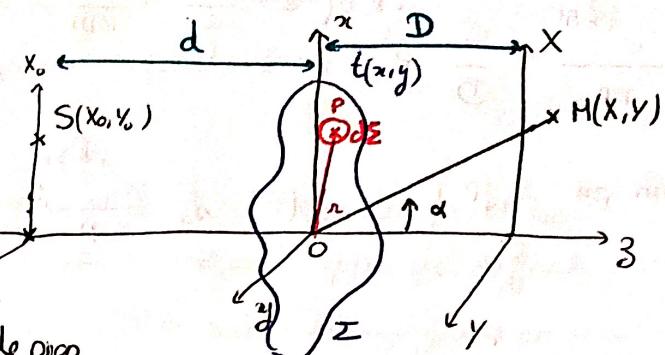
### Diffraction

#### Principe de Huyghens - Fresnel:

- Chaque pt P d'une surface  $\Sigma$  atteint par la lumière peut-être considéré comme une source secondaire qui émet une onde sphérique.

L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de la source incidente en P et à l'élément de surface  $d\Sigma$  entourant P, le coef de prop est  $\sim t(x,y)$ , la "f" de transparence

- Les vibrateurs issuent des sources secondaires interfèrent entre elles.



À un point NM de l'écran, l'état vibratoire ds est:

$$ds(NM) = A(G) \frac{t(x,y)}{PM} \frac{e^{ikPM}}{PM} d\Sigma$$

Produit par

dΣ autour de P

peut prendre en compte une anisotropie du diagramme de rayonnement

Généralement  $|G| \ll 1$  donc  $A(G) \approx A(0)$ . De plus il n'y a pas de diffrac. à l'arrivée

$$ds(NM) = \int_{\Sigma} A(0) t(x,y) \frac{e^{ikPM}}{PM} d\Sigma$$

$$A(|G| > \pi/2) = 0$$

Avec  $\vec{PM} = \begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \\ D \end{pmatrix}$  et  $PM^2 = D^2 \left( 1 + \left(\frac{X-x}{D}\right)^2 + \left(\frac{Y-y}{D}\right)^2 \right)$

$$= D^2 \left( 1 + \left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 + \left(\frac{Y}{D}\right)^2 - \frac{2(xX+yY)}{D^2} \right)$$

or  $x,y \ll D$ , d : petite pupille

$X,Y \ll D$  : rayons peu inclinés p/r à l'axe ) Approx à grande distance

Notons  $\alpha = \frac{x}{D}$  et  $\beta = \frac{y}{D}$  alors  $\vec{PM} = D \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\alpha, \beta$  = angles directs de  $\vec{PM}$

$$PM^2 \approx D^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \alpha^2 + \beta^2 + \frac{x^2+y^2}{D^2} - \frac{2xX+yY}{D^2} \right) \right)$$

$$\text{D'où } \rho_H = \sqrt{\rho_M^2} \approx D \left( 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{n^2}{2D^2} - \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right)$$

Pr  $\frac{e^{ik\rho_H}}{\rho_M}$  on ne garde les termes quadratiques de  $\rho_M$  seulement du terme de phase

$$\frac{e^{ik\rho_H}}{\rho_M} \approx \frac{1}{D} e^{ikD \left( 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{n^2}{2D^2} - \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right)}$$

$$\text{De m}\bar{\text{e}}\text{m pr } S_0(P) : S_0(P) = S_0 \frac{e^{ikSP}}{SP}$$

$$\text{on note } \left| \alpha_0 = -\frac{x_0}{d} \right| \text{ et } \left| \beta_0 = -\frac{y_0}{d} \right| \text{ les angles de } S_0$$

$$\text{donc } S_0(P) = \frac{S_0}{d} e^{ikd \left( 1 + \frac{\alpha_0^2 + \beta_0^2}{2} + \frac{n^2}{2d^2} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{d} \right)}$$

Finalement :

$$S(H) = \frac{A}{dD} S_0 \sum_{\Sigma} \int t(x, y) e^{-ik((\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y)} e^{ikn^2 \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)} e^{ik \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} D + \frac{\alpha_0^2 + \beta_0^2}{2} d \right)} d\Sigma$$

Thème de phase globale

$\Rightarrow$  on l'abrite par la suite

$$S(H) = \frac{A S_0}{dD} \sum_{\Sigma} \int t(x, y) e^{-ik((\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y)} e^{ikn^2 \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)} d\Sigma$$

$\hookrightarrow$  diffraction à grande distance : Fresnel

plus proche de  $\Sigma$  :  $\frac{R^2}{D} \ll 1$  mais

$$\frac{R^2}{\lambda D} \gg 1 \text{ donc } e^{ikn^2 \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right)}$$

### Approximation de Fraunhofer :

Les termes quadratiques en  $n^2 \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)$  sont négligeables.

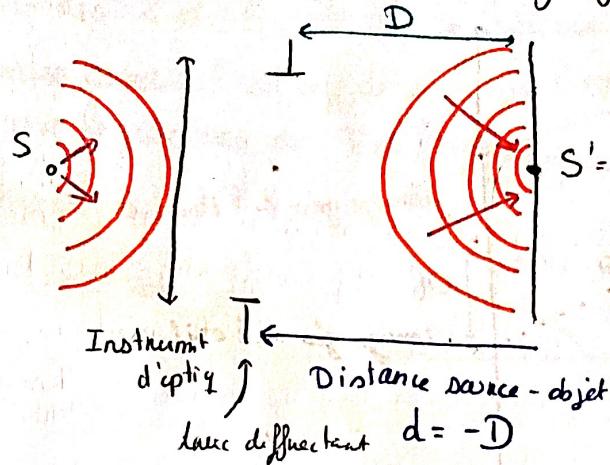
$\rightarrow$  Diffraction d'une onde plane ( $\frac{1}{d} = 0$ ) à l'infini ( $\frac{1}{D} = 0$ ).

Alors si :  $k'_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $k' = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$  on a :

$$S(H) = \frac{A S_0}{dD} \sum_{\Sigma} \int t(x, y) e^{-i(k' - k'_0) \cdot \vec{r}_P} d\Sigma$$

Diffraktion d'une onde plane ( $\frac{1}{d} = 0$ ) à grande distance :  $D \gg \frac{\lambda^2}{2\pi}$

- Diffraktion au voisinage de l'image géométrique :



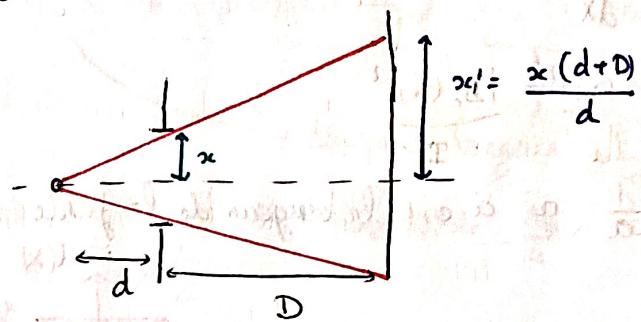
Dans ce cas  $\frac{1}{d} + \frac{1}{D} = 0$  et

pourtant  $\frac{1}{d} \neq 0$  et  $\frac{1}{D} \neq 0$

on fait l'image du pt source  
puis on rejette qqch qui diffracte,

$S' \approx$  source se propagant en sens  
inverse

- Rq :  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$



Diffraktion de Fraunhofer :  $\alpha_x \gg \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right)$  donc  $\frac{\lambda^2}{2d} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right) \ll 1$

or  $\alpha = \frac{x}{D}$  et  $\alpha_x^2 = \alpha^2$  donc

$$\frac{x}{2} \left( \frac{D}{x} - \frac{d+D}{d} \right) \ll 1$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{d+D}{d} \ll x$$

permet de vérifier que l'on est en  
diff de Fraunhofer

taille de la tache de diff.

taille de la tache géo

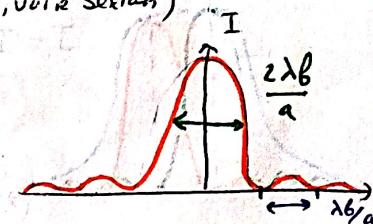
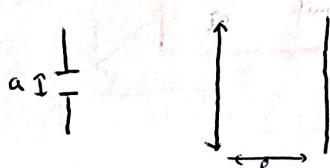
$$S(H) \propto \int k(x,y) e^{-ik((d-d_0)x + (\beta-\beta_0)y)} dx dy$$

transformé de Fourier spatial de  $k(x,y)$

- Pour une fente rectangulaire : ( $\parallel$  laser = faisceau garnien, voir Section)

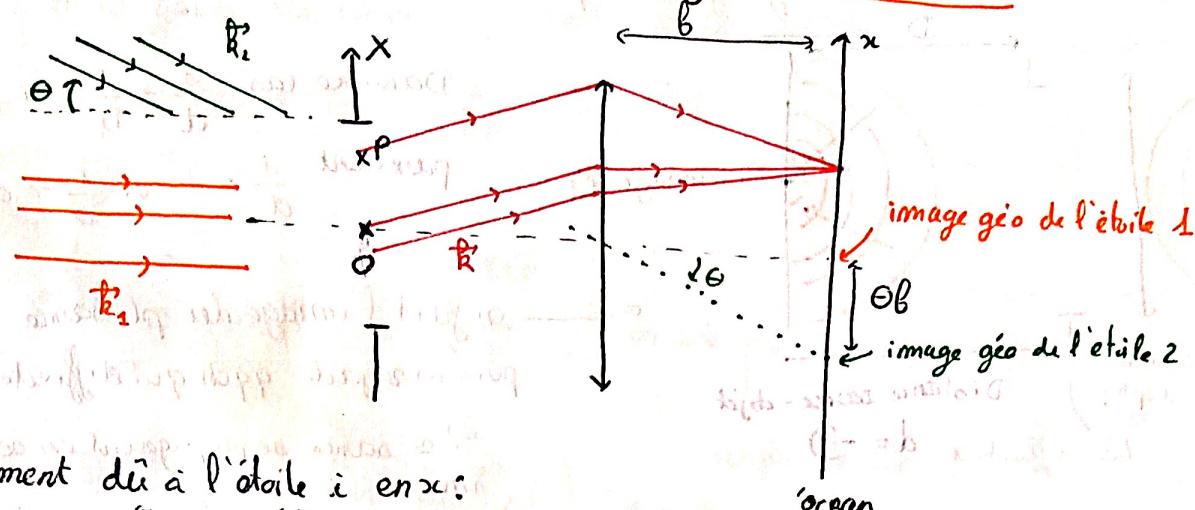
figur de diffrec = sinus cardinal

$$I(x) = I_0 \sin^2 \left( \frac{\pi a x}{\lambda b} \right)$$



## Diffraction (2)

Rôle de la diffraction dans la formation des images - Apodisation:



Eclaircissement dû à l'étoile  $i$  en  $x$ :

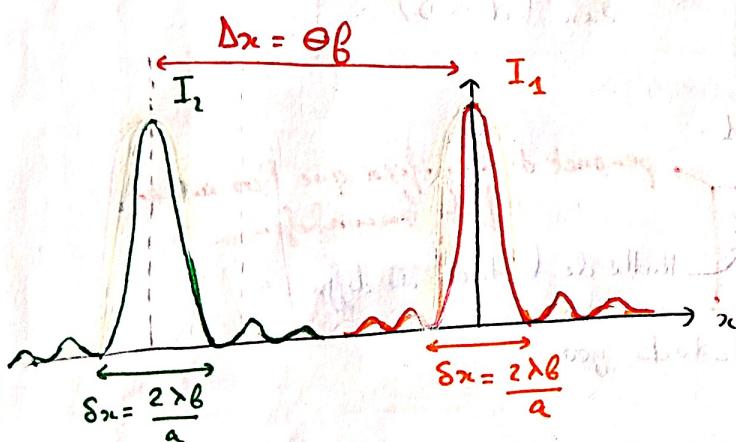
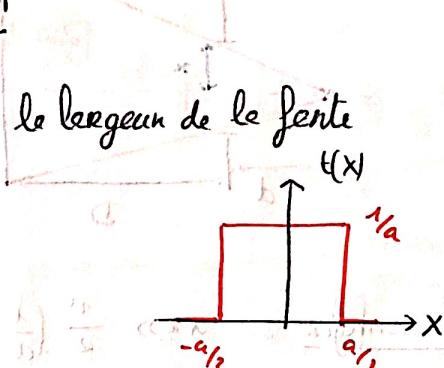
$$S_i(x) = S_i^{(0)} \int_{-a/2}^{a/2} t(x) e^{-i(\vec{R} - \vec{R}_i) \cdot \vec{\phi}} dx$$

Sur l'écran, on observe  $I = \frac{|S_1(x_1)|^2}{I_1} + \frac{|S_2(x_2)|^2}{I_2}$

Fente rectangulaire  $\Rightarrow t(x) = \frac{1}{a}$  où  $a$  est le largeur de la fente

$$I_1 = I_1^{(0)} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda b}\right)$$

$$I_2 = I_2^{(0)} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda b}(x + \theta b)\right)$$



Limite de résolution dû à la diffraction:

• image d'une étoile élargie de  $\frac{2\lambda b}{a}$   
~ erreurs de pointé

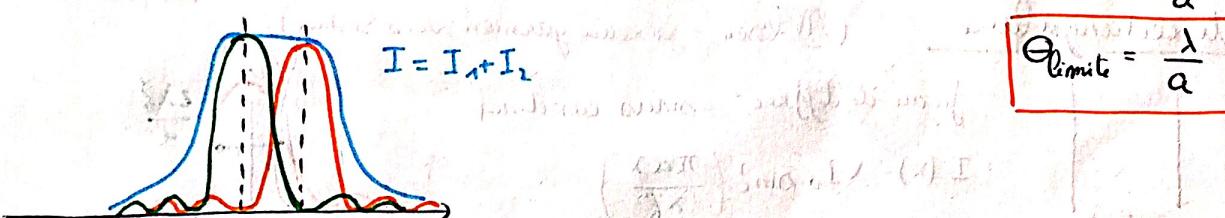
• Si  $a$  est trop petit, on ne peut plus résoudre les deux étoiles :

$$\frac{\Delta x}{a} = \frac{2\lambda}{a}$$

peut résoudre indépendamment du choix de la focale

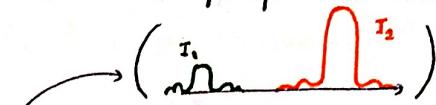
### Critère de Rayleigh:

La limite de résolution est atteinte lorsque le max d'intensité de la tâche d'une étoile élargie correspond à la 1<sup>re</sup> annulation de la seconde étoile:  $\theta b = \frac{\lambda b}{a}$



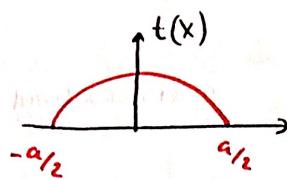
! Ce critère est purement théorique, certains instruments d'optique ont une meilleure résolution.

Si une des 2 étoiles est moins intense que l'autre ( $I_2 \ll I_1$ ), alors les lobes secondaires du sinus cardinal sont suffisants pour limiter la puissance de résolution  $\rightarrow$  la limite de résolution moins bonne que le critère de Rayleigh.



### Apodisation:

$$\text{Soit } t(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

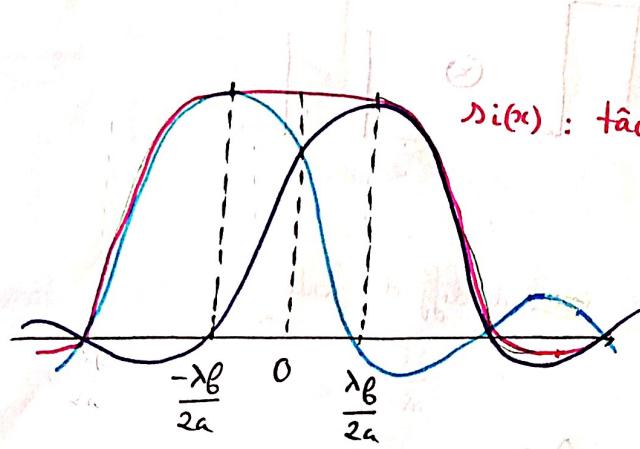


$$\text{alors } D_i(x) = D_i^{(0)} a \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} dx$$

$$D_i(x) = \frac{1}{2} D_i^{(0)} a \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda b} \left(x + b\epsilon - \frac{\lambda b}{2a}\right)\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda b} \left(x + b\epsilon + \frac{\lambda b}{2a}\right)\right) \right]$$

2 tâches de largeur  $\frac{2\lambda b}{a}$   
décalées de  $\frac{\lambda b}{a}$

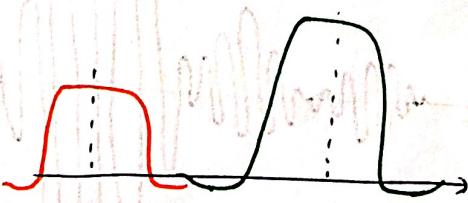
1 étoile donne deux tâches !



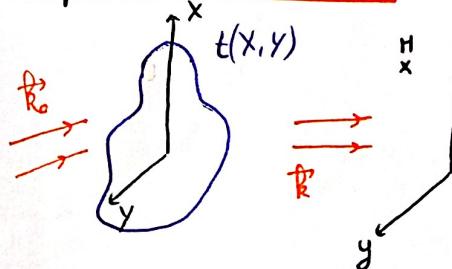
$D_i(x)$ : tâche étroite mais sans lobes secondaires

On distingue ainsi mieux deux étoiles :

Meilleure résolution



### II- Optique de Fourier:



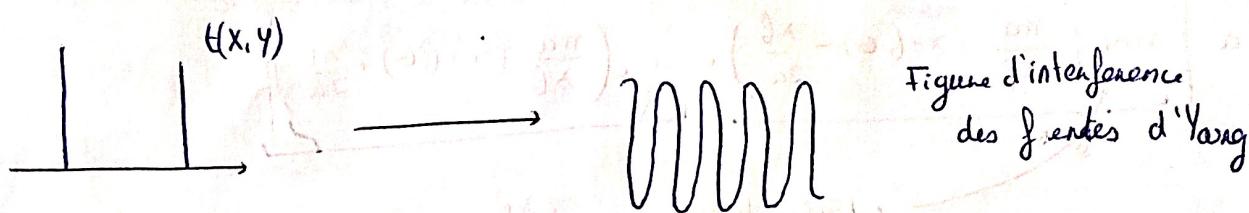
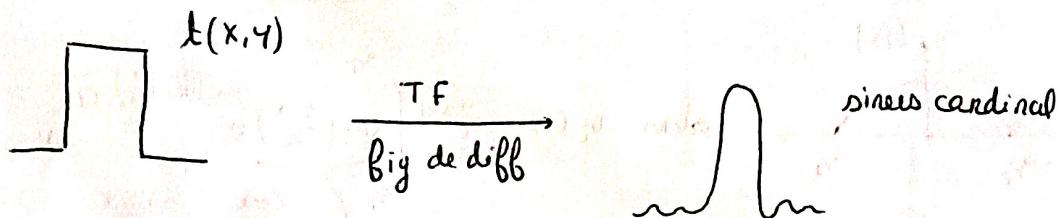
$$D(H) = D_0 \int t(x,y) e^{-\frac{-2i\pi}{\lambda} [(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} dxdy$$

ai |  $\alpha_0, \beta_0$  angles direct "de"  $\vec{k}_o$   
 $\alpha, \beta$  \_\_\_\_\_  $\vec{k}$

En incidence normale  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  et :

$$D(H) = D_0 \int t(x, y) e^{-2\pi i \left( \frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right)} dx dy$$

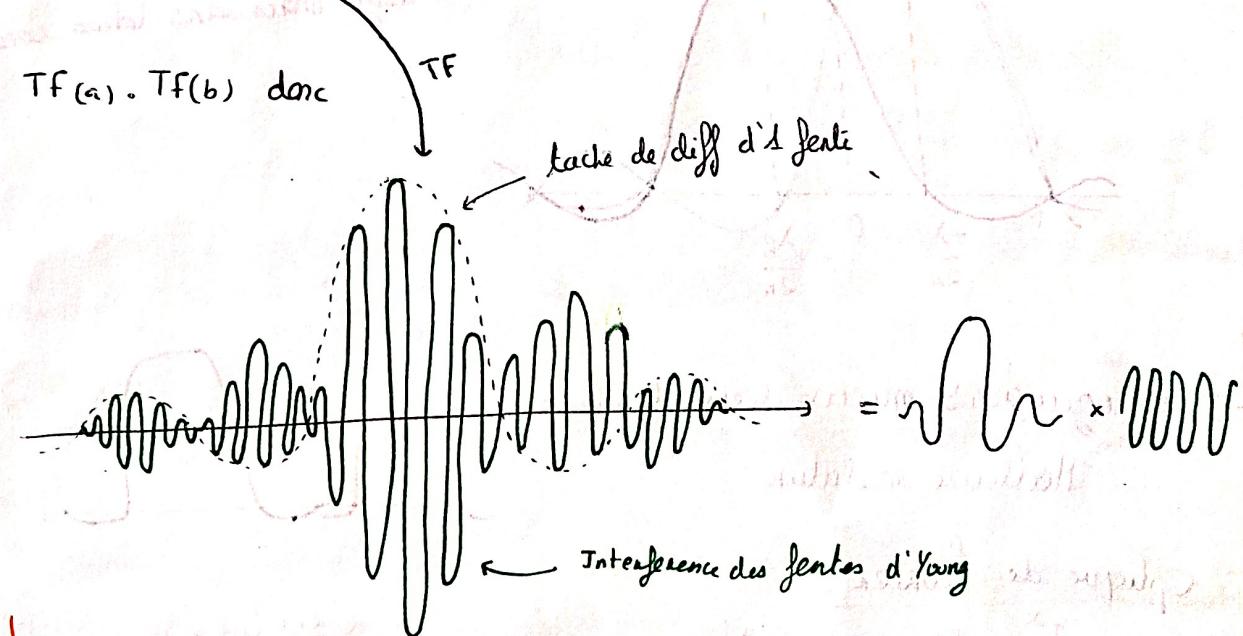
Transformée de Fourier de  $t(x, y)$   
calculée en  $\frac{\alpha}{\lambda}$  et  $\frac{\beta}{\lambda}$



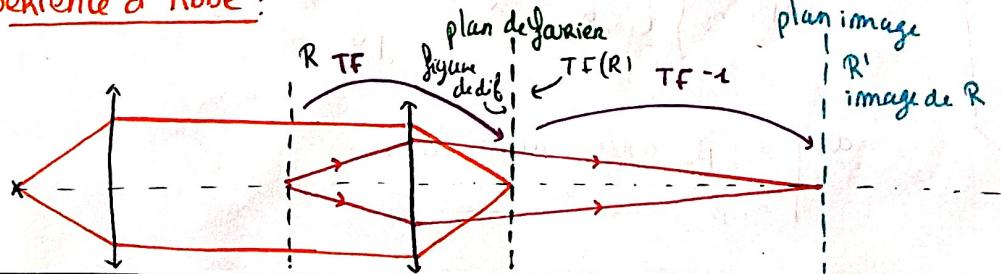
donc PR :

$$\begin{array}{ccc} \text{rectangle} & \xrightarrow{\text{convolu.}} & \text{rectangle} \\ \otimes & = & \otimes \end{array}$$

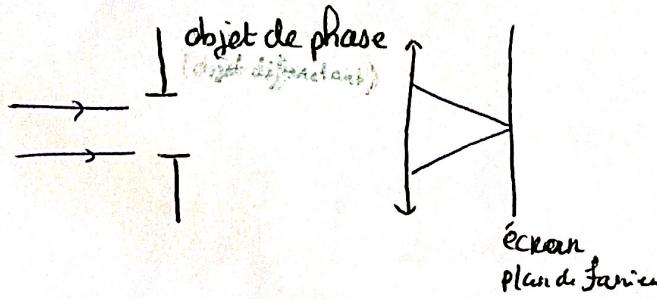
or  $TF(a \otimes b) = TF(a) \cdot TF(b)$  donc



Expérience d'Abbe :



ans le plan image, on observe la TF inverse du plan de Fourier.  
si on place un écran dans le plan de Fourier, on modifie l'image observée sur l'écran.



On observe  $|D_0 e^{i\varphi}|^2 = |D_0|^2$  sur l'écran  
⇒ sur l'écran on ne voit pas l'objet de phase

$$\text{On écrit: } D_0 e^{i\varphi} = D_0 + D_0 (e^{i\varphi} - 1)$$

[sans objet de phase]

On place un cache au centre du plan de Fourier

→ on supprime la contribution des termes  $D_0$  à l'image sur l'écran.

Sans objet de phase, ds le plan de Fourier, figure de diff=1 pt au centre de la figure.

On observe mtr :  $|D_0(e^{i\varphi}-1)|^2 \approx |D_0|^2 \varphi^2$  si  $\varphi \ll 1$

modula° d'intensité due à la modula° de phase  
de l'objet diffractant

Pb: image peu lumineuse.

Autre méthode : au lieu du cache

On rajoute une lame à retard au centre de la figure de diff ⇒ on ajoute un déphasage de  $\pi/2$  à  $D_0$ . SUR l'écran :  $|D_0 e^{-i\pi/2} + D_0 (e^{i\varphi}-1)|^2 \stackrel{\text{DL}}{\Rightarrow} I \approx I_0 (1-2\varphi)$

Image plus lumineuse.

Contraste de la figure = 24

⇒ imagerie par contraste de phase

→ permet de voir les variations de phase dû à une contrainte appliquée à l'objet de phase

