

# Modèles nucléaires

Modèles nucléaires

# Modèles à particules indépendantes

indépendantes

## Introduction

Dans le **modèle de la goutte liquide** (voir chapitre suivant), le noyau est considéré comme un **ensemble de nucléons, traités collectivement**

→ **c'est une interprétation macroscopique** qui ignore totalement :

- la **nature quantique** des protons et des neutrons, ainsi que du noyau lui-même,
- la plupart des caractéristiques de **l'interaction nucléon-nucléon**

⇒ grâce à sa simplicité et son contenu physique, le modèle de la goutte liquide est toujours abondamment utilisé en physique de la structure nucléaire

**MAIS** il faut utiliser des techniques additionnelles pour obtenir une description quantique fiable du noyau.

On veut reproduire les propriétés nucléaires microscopiques



Spin nucléaire, parité, nombres magiques, moments magnétiques,  
moments quadripolaires électriques, ...

Etudier un noyau  ${}^A_ZX^N$  revient donc à étudier  
un système de  $A$  nucléons en interaction,  
avec  $A$  qui peut être très grand !

## Etude par la résolution de l'équation de Shrödinger

Soit  $\Psi$  la fonction d'onde du noyau, on a :

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \text{ avec } \hat{H} = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i \neq j}^A V_{ij} \longrightarrow$$

Energie cinétique des nucléons

Energie potentielle  
d'interaction  
coulombienne + nucléaire

Les 2 contributions T et V sont antagonistes : plus T est grand, plus V est grand aussi mais négatif, pour empêcher les nucléons de sortir du puits de potentiel nucléaire

Si on s'intéresse aux états stationnaires, en prenant comme fonction d'onde du noyau

$$\Psi = \varphi(r_i, \sigma_i, \tau_i) e^{-i\omega t}$$

dépendant du temps ainsi que des coordonnées d'espace, de spin et d'isospin des A nucléons, alors on se ramène à

$$\hat{H}\varphi = \left( \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i \neq j}^A V_{ij} \right) \varphi = E\varphi$$

## Etude par la résolution de l'équation de Shrödinger

$E$  est l'énergie des états stationnaires, mais l'interaction nucléaire forte est mal connue

⇒ le problème sera difficile à traiter pour  $A > 3$  !

Le libre parcours moyen d'un nucléon est grand par rapport à la taille du noyau, ce qui est une conséquence pratique du principe d'exclusion de Pauli. De ce fait, la probabilité que trois nucléons interagissent simultanément est considérée comme suffisamment faible pour pouvoir être négligée.

⇒ On va pouvoir considérer que les nucléons n'interagissent que suivant une interaction à deux corps.

## Etude par la résolution de l'équation de Shrödinger

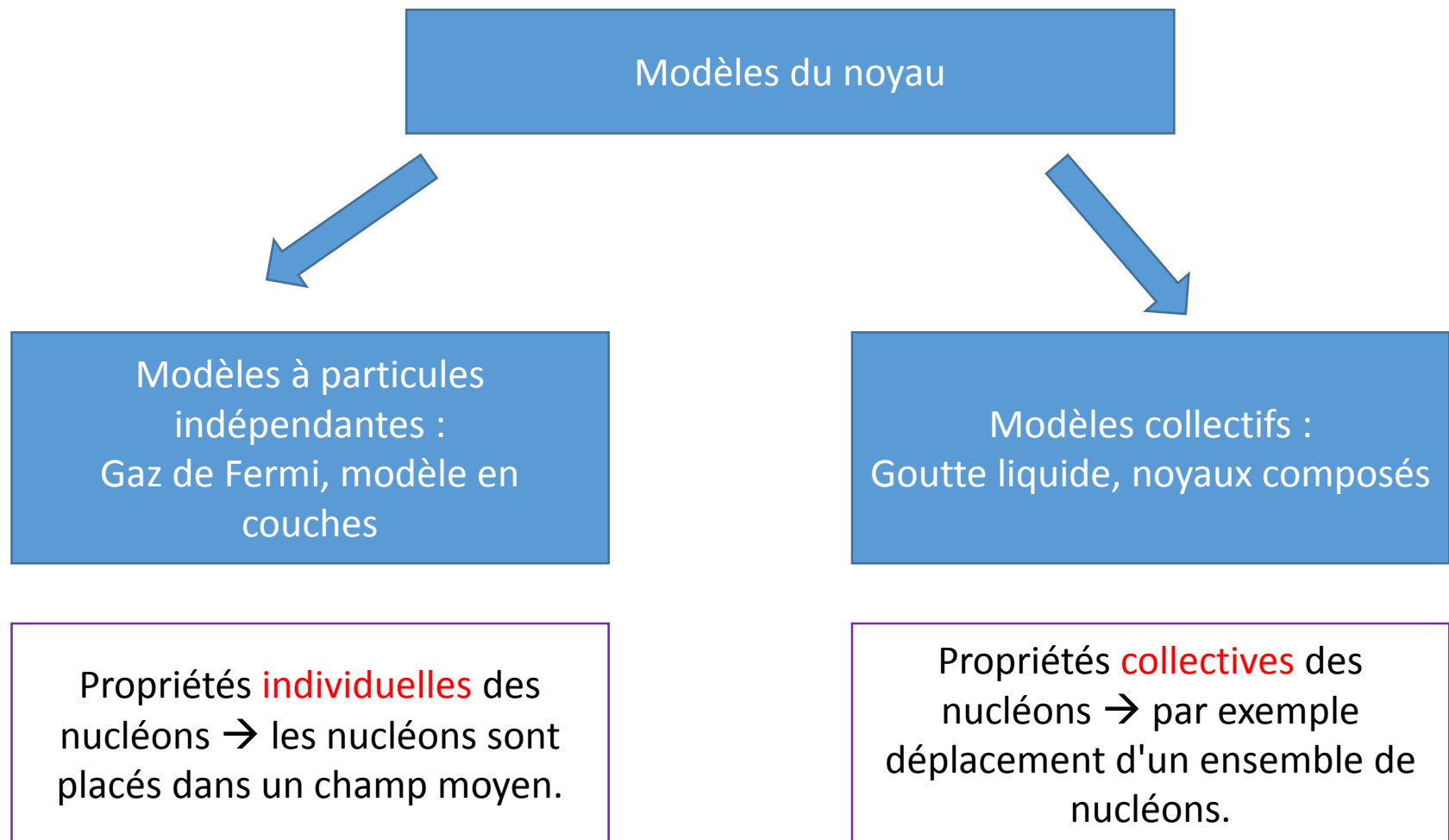
Deux classes de modèles vont permettre d'expliquer les états excités observés dans les noyaux.

⇒ Des « modèles à particules indépendantes », qui rendent compte des propriétés individuelles des nucléons : chaque nucléon est considéré individuellement, comme se déplaçant dans un puits de potentiel moyen, indépendamment des autres particules.

⇒ Des « modèles collectifs » (seulement évoqués dans ce cours), qui rendent compte des propriétés collectives du noyau, qui consistent en des déplacements globaux d'un ensemble de nucléons pouvant regrouper la totalité du noyau.

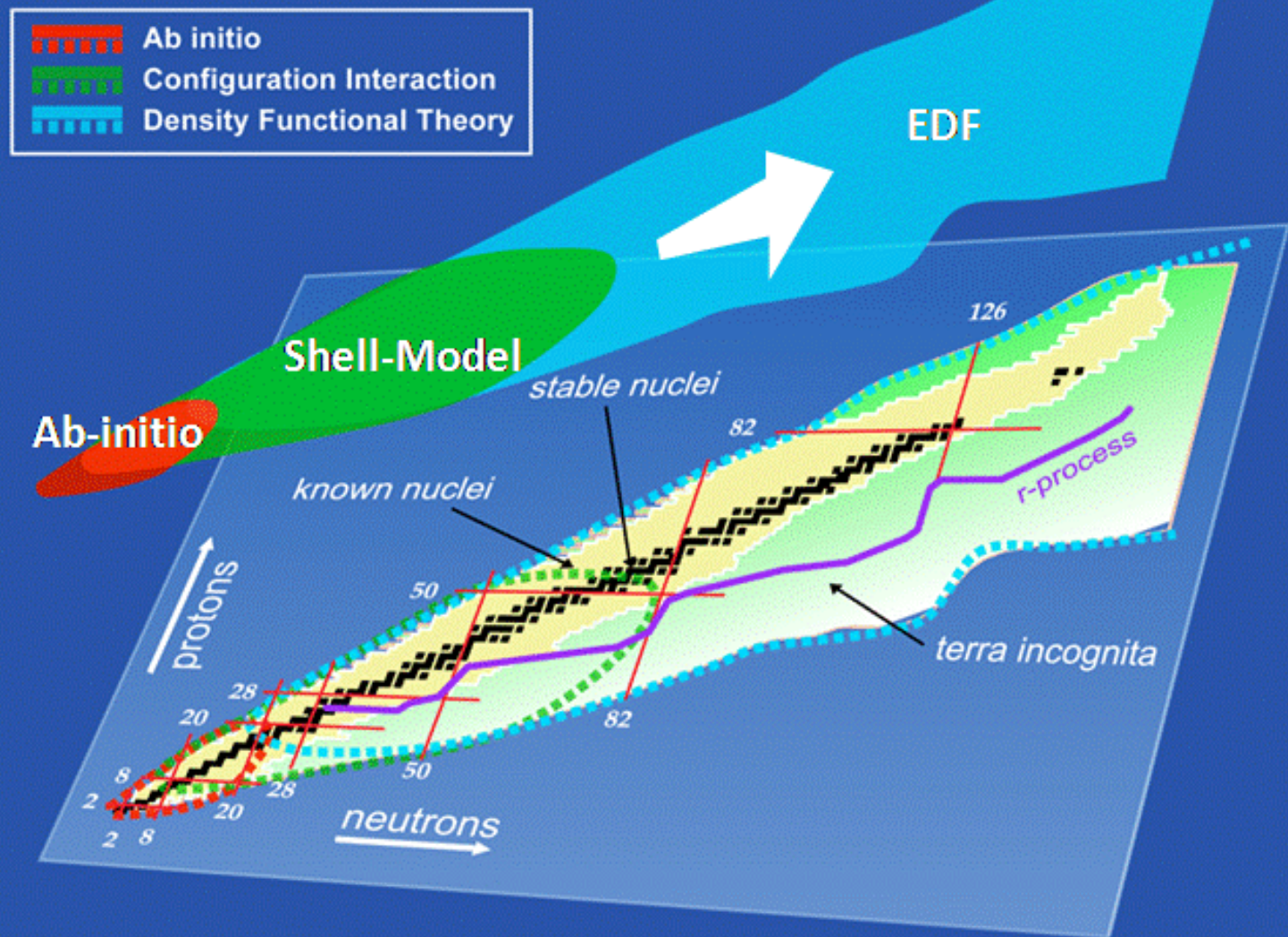
Il y a souvent couplage entre ces deux classes de phénomènes.

Effort actuel → Etude microscopique des propriétés nucléaires, à partir d'une interaction nucléon-nucléon effective, pour décrire l'ensemble de ces propriétés.



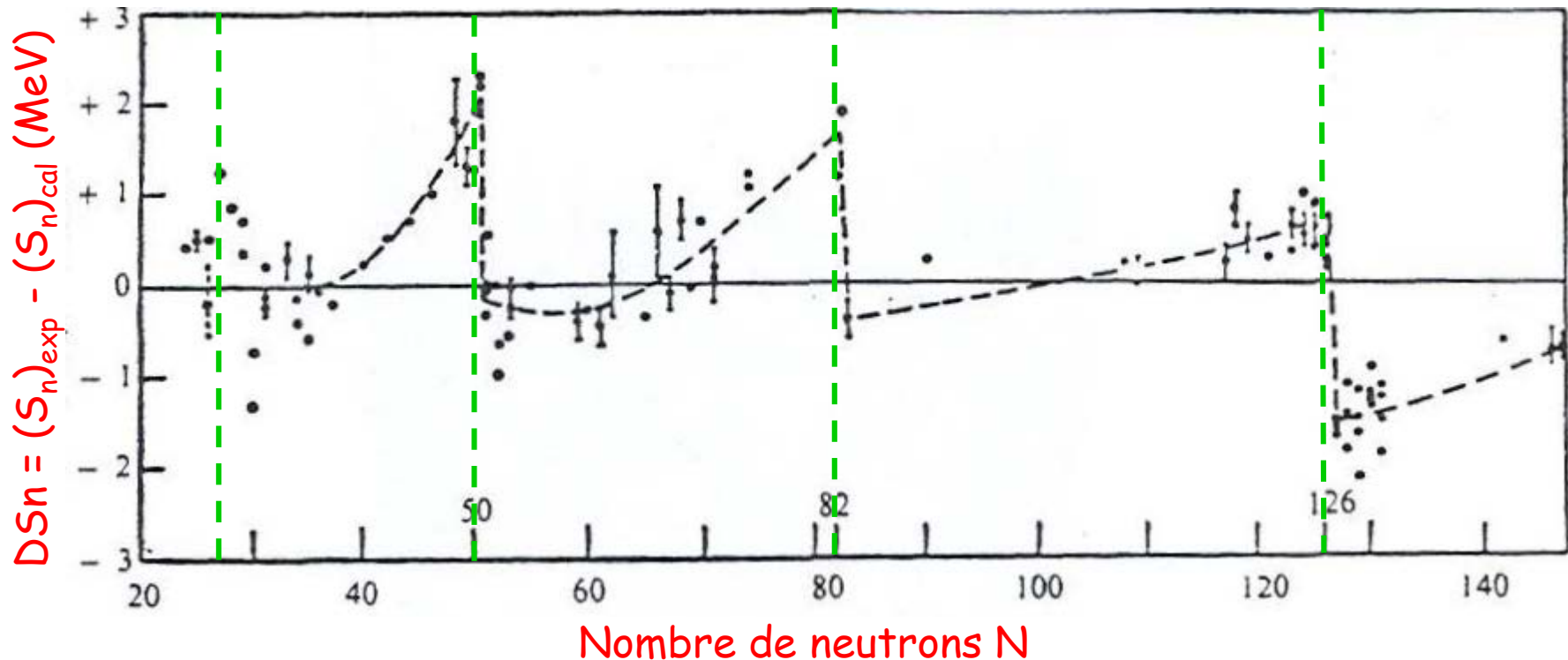


# Nuclear Landscape (from <http://unedf.org/>)



## Observations expérimentales

→ Certains noyaux, qui ont un nombre de nucléons particulier, possèdent une stabilité plus grande que ceux qui les environnent et ont une forme sphérique



Energie de séparation = énergie qu'il faut fournir pour arracher un neutron au noyau

Observations expérimentales

→ Certains noyaux, qui ont un nombre de nucléons particulier, possèdent une stabilité plus grande que ceux qui les environnent et ont une forme sphérique

Ces nombres, appelés **nombres magiques**, sont les mêmes pour les protons et pour les neutrons.

Ils ont pour valeurs :

**2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, 184**

→ Le modèle à développer va s'inspirer du modèle planétaire atomique (les électrons, soumis au principe de Pauli, sont des particules qui se meuvent indépendamment les unes des autres, dans un potentiel central engendré par les constituants eux-mêmes)

L'idée majeure de cette approche est la suivante :  
tout se passe comme si un nucléon se déplaçait dans un certain puits de potentiel (qui le confinerait dans le noyau) indépendamment de la présence des autres nucléons.

Sur le plan théorique, cette hypothèse revient à remplacer le problème à  $N$  corps (avec  $N$  particules en interaction) par  $N$  problèmes à 1 corps (une particule se déplaçant dans un certain potentiel).  
Cette simplification essentielle du problème est la pierre angulaire des théories dites de champ-moyen.

→ On va donc construire le modèle nucléaire par étapes, en expliquant les nombres magiques. Il faut pour cela :

- ★ trouver de « bons » potentiels
- ★ trouver les solutions de l'équation de Schrödinger utilisant ces potentiels
- ★ trouver les niveaux d'énergie du noyau en prenant en compte le principe de Pauli
- ★ comparer aux nombres magiques en modifiant si nécessaire le potentiel

On va considérer

A particules indépendantes se mouvant dans un potentiel moyen  
(ceci suppose que les particules se déplacent dans ce potentiel sans aucune interaction entre elles au 1<sup>er</sup> ordre)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{h}_{ir}$$

Hamiltonien du M.P.I

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i \text{ avec } \hat{h}_i \varphi_i = \epsilon_i \varphi_i$$

$$\hat{h}_i = \hat{T}_i + \hat{V} \text{ et } E = \sum_{i=1}^A \epsilon_i$$

$T_i$  est l'énergie cinétique moyenne des nucléons

$V$  est le potentiel moyen

Interaction résiduelle

↓  
contient en particulier  
l'appariement des nucléons

↓  
voir modèle en couches



Une des grandes difficultés pratiques pour ces MPI est la définition (ou le calcul) du potentiel moyen. On distingue deux approches :

- l'**approche phénoménologique**, qui consiste à paramétriser le potentiel nucléaire par une fonction mathématique appropriée (oscillateur harmonique qui peut être déformé, Woods-Saxon,...).

  - comme dans le modèle en couches (à suivre)

- l'**approche auto-cohérente, ou Hartree-Fock**, qui a pour but de dériver mathématiquement le potentiel nucléaire à partir de l'interaction nucléon-nucléon, qui n'est pas connue analytiquement

  - c'est plus difficile car il faut résoudre l'équation de Schrödinger par une procédure itérative, puisque le potentiel qui y figure dépend des fonctions d'onde que l'on cherche à déterminer.

  - au programme du M2...

## Modèle du gaz de Fermi

- un des premiers essais pour incorporer la mécanique quantique
- c'est le MPI le plus simple : donne des ordres de grandeur

Hypothèse physique : l'interaction d'un nucléon avec les autres est représentée par un potentiel attractif constant (potentiel moyen) limité dans le volume du noyau

Fermions enfermés dans **volume nucléaire**  $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$

Les protons et les neutrons sont libres mais confinés dans un puits de potentiel sphérique

Potentiel vu par ces particules :  $U = \begin{cases} 0 & \text{dans le volume } V \\ \infty & \text{à l'extérieur} \end{cases}$

On distribue les particules sur les niveaux d'énergie compatibles avec ces hypothèses → considérations statistiques → ordres de grandeur de certaines caractéristiques des noyaux



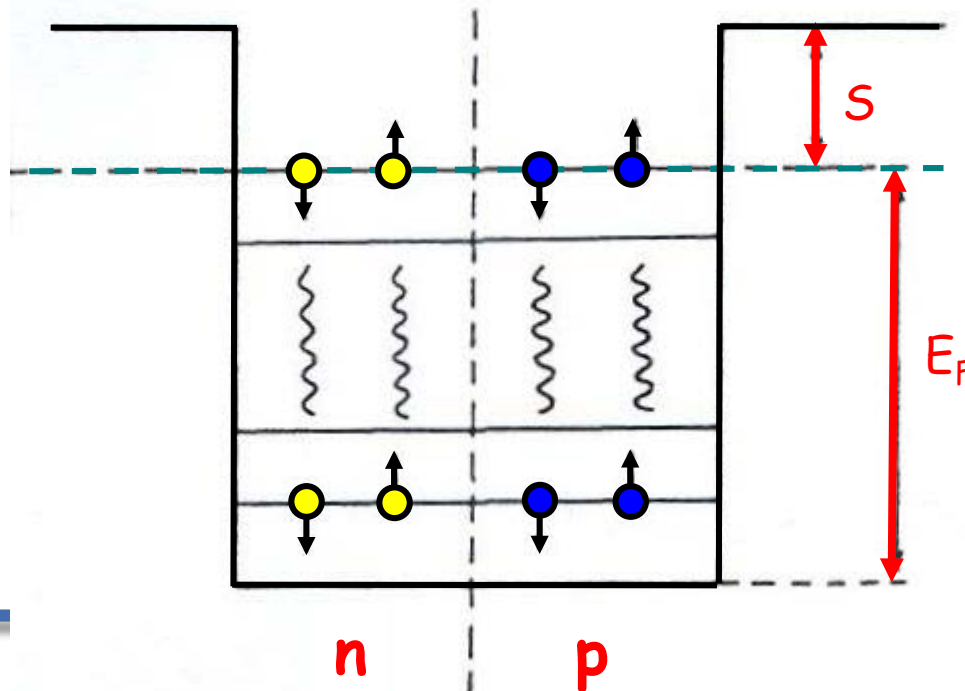
## Energie de Fermi

Energie potentielle nulle au sein du puits → toute l'énergie est sous forme d'énergie cinétique.

On considère des niveaux d'énergie, tous équivalents. Les nucléons se répartissent à partir du niveau le plus bas.

**Principe de Pauli** : chaque niveau peut contenir deux protons et deux neutrons ayant des spins antiparallèles

Niveau de Fermi



# Energie de Fermi

Au voisinage de  $E = \frac{p^2}{2m}$

→ nombre d'états  $dn$  (nombre de nucléons) situés dans l'intervalle d'impulsion  $dp$

$$dn = \frac{\text{volume d'espace de phase} \times (\text{spin} + \text{isospin})}{\text{volume d'une cellule}} = \frac{4V \, 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

→ hypothèses

2 états de spin et 2 d'isospin

★ La densité des niveaux est suffisamment élevée pour que  $p$  varie continûment

★  $N = Z = A/2$

Energie de Fermi → énergie maximale obtenue en remplissant les niveaux à partir du plus bas

→ Quel est le lien avec le nombre de nucléons  $A$  ?

$$A = \int_0^{p_F} dn = \int_0^{p_F} \frac{4V \, 4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp \quad \text{avec} \quad E_F = \frac{p_F^2}{2m}$$

d'où

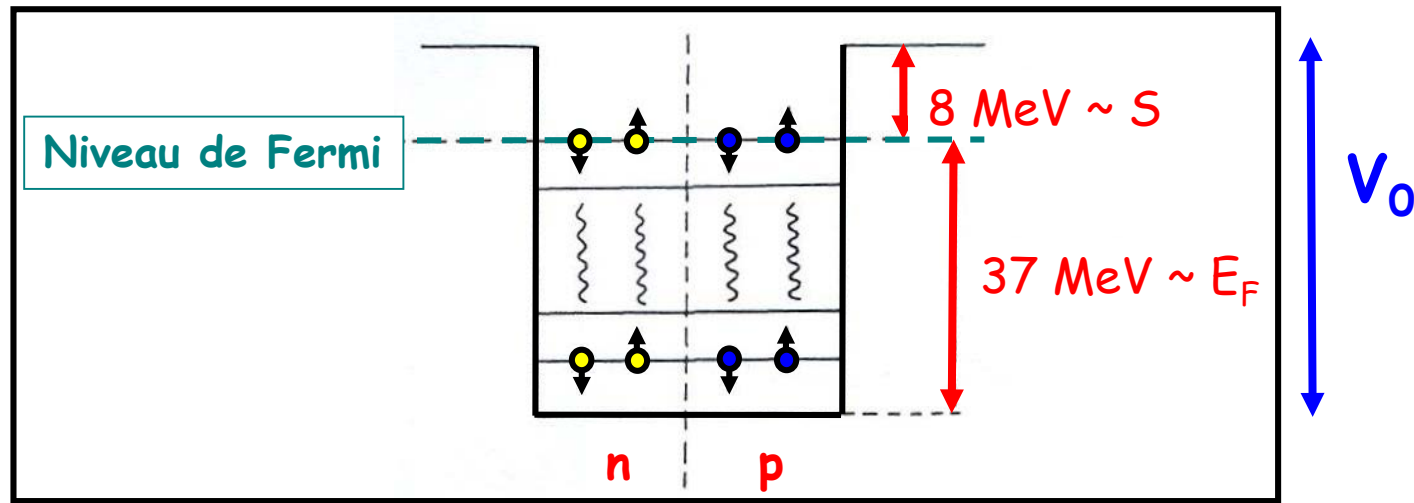
$$p_F = \frac{(9\pi)^{\frac{1}{3}}}{2} \frac{\hbar}{r_0} \quad \text{et} \quad E_F = \frac{(9\pi)^{\frac{2}{3}}}{8} \frac{\hbar^2}{mr_0^2}$$

## Energie de Fermi

$E_F$  et  $p_F$  indépendants de  $A$ , donc du noyau considéré

C'est une conséquence de la saturation nucléaire

Pour  $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ , on obtient  $E_F = 37 \text{ MeV}$   
 $p_F \sim 250 \text{ MeV}/c$

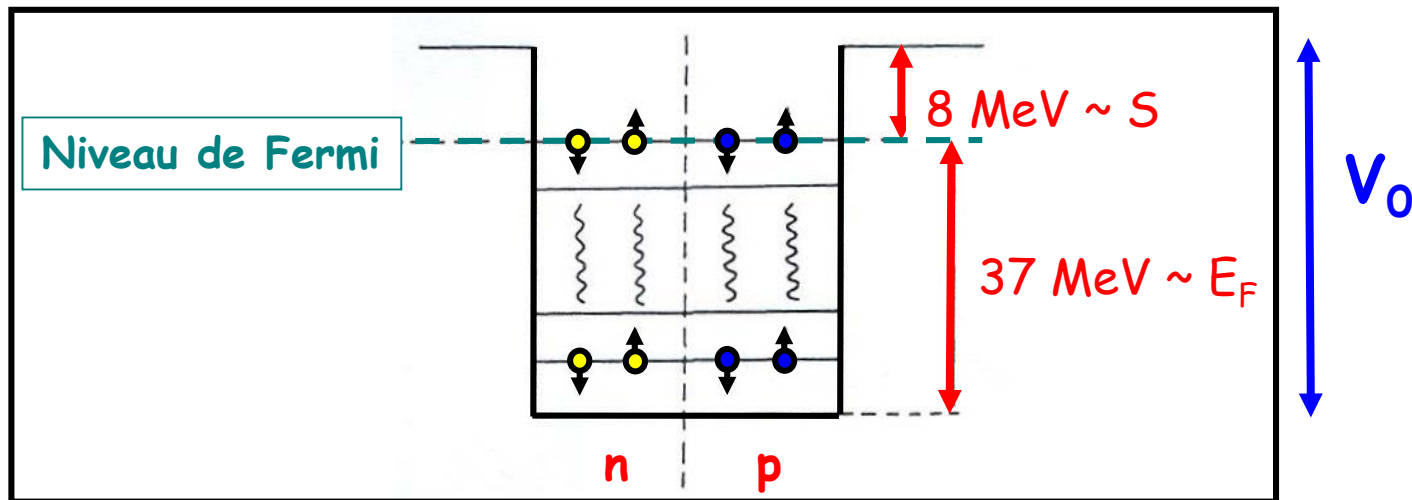


## Profondeur du puits de potentiel

On voit que les nucléons qui occupent le niveau de Fermi sont ceux ayant la plus grande énergie cinétique  $E_F$

Pour que ces nucléons ne sortent pas du puits, il faut que sa profondeur  $V_0$  soit supérieure en valeur absolue à  $E_F = 37 \text{ MeV}$ .

Or, en moyenne il faut fournir une énergie de séparation  $S = B_N/A \sim 8 \text{ MeV}$  pour faire sortir un nucléon du puits

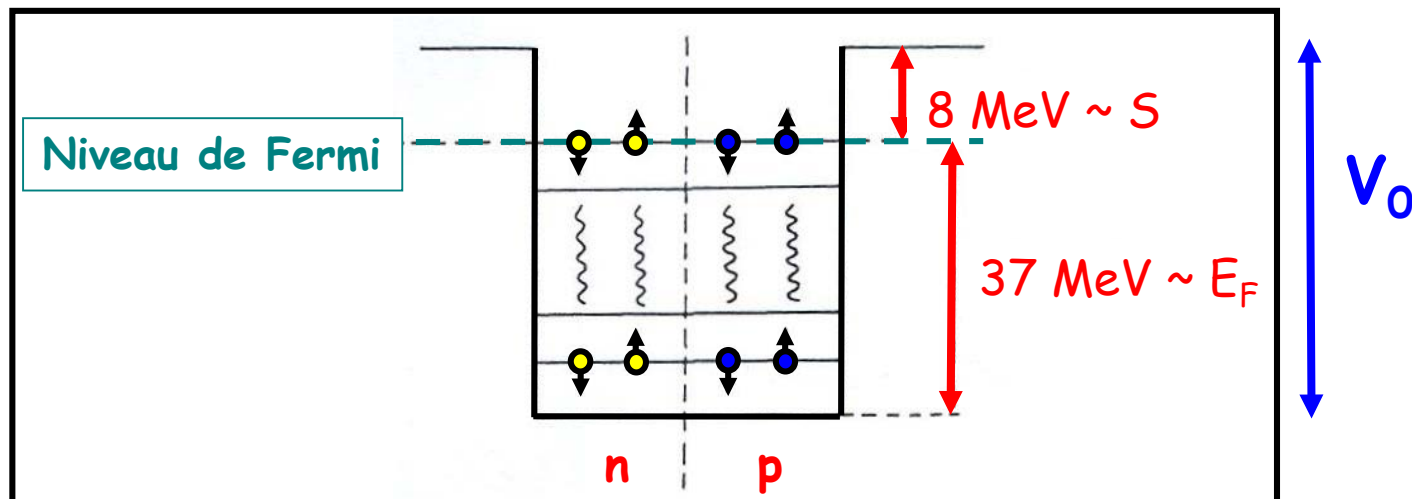


## Profondeur du puits de potentiel

On peut donc estimer la profondeur du puits de potentiel

$$V_0 = E_F + S = 37 + 8 = 45 \text{ MeV}$$

Cette profondeur est aussi indépendante du noyau



## Energie cinétique moyenne par nucléon

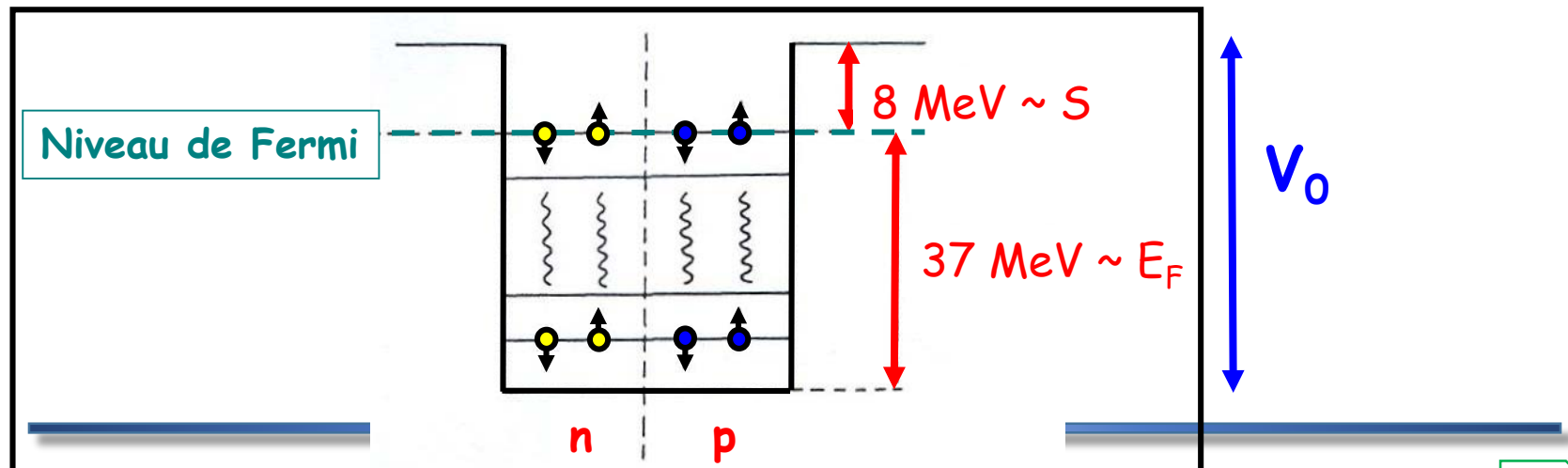
Energie cinétique totale

$$T_{tot} = \int_0^{P_F} \frac{p^2}{2m} dn \rightarrow T_{tot} = \frac{3}{5} A E_F$$

Energie cinétique moyenne par nucléon

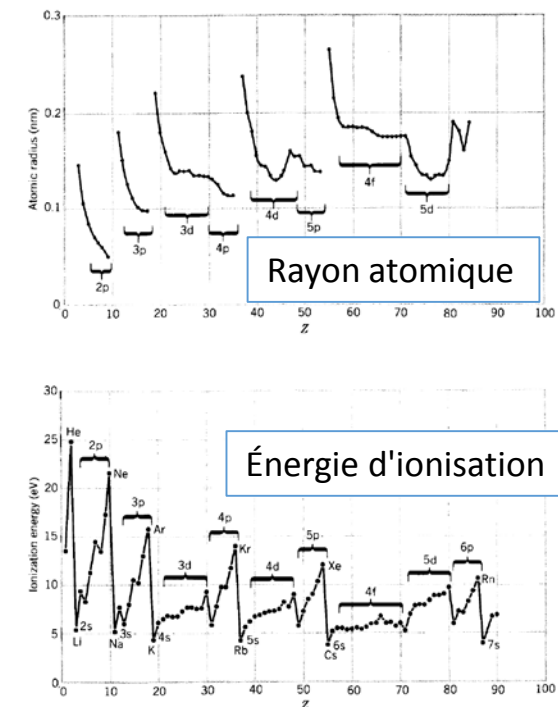
$$\langle T_0 \rangle = \frac{T_{tot}}{A} \rightarrow \langle T_0 \rangle = \frac{3}{5} E_F \sim 22 \text{ MeV}$$

Les calculs sont très simples dans ce modèle mais ne donnent que des ordres de grandeur  
 $\Rightarrow$  Il faut un modèle plus élaboré pour avoir + d'informations

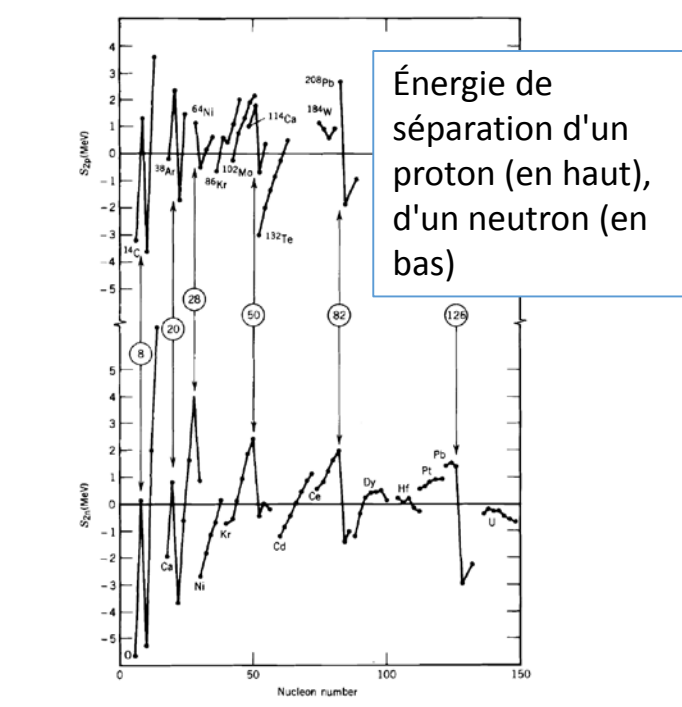


# Modèle en couches - Quelques applications du modèle

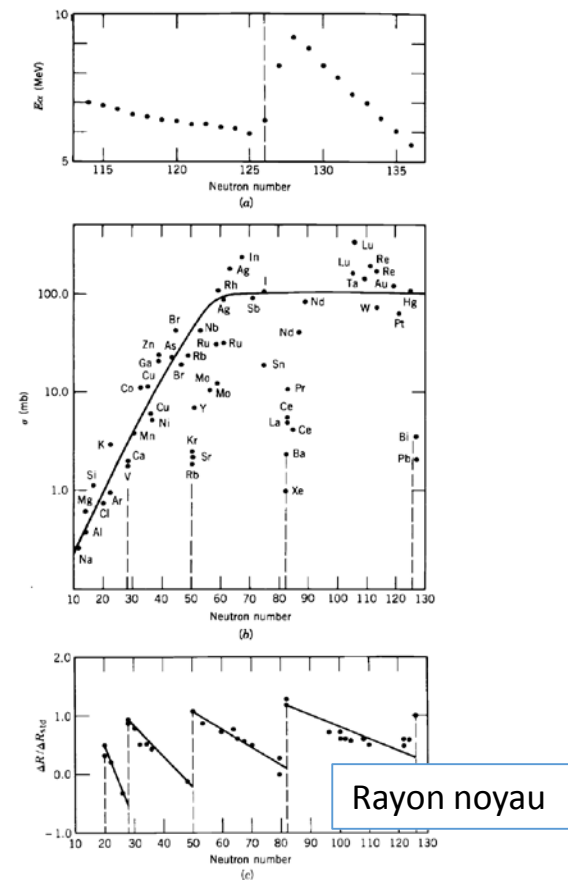
Les discontinuités observées pour les nombres magiques suggèrent des effets de couches. Similitudes avec ce qui est observé en physique atomique.



**Figure 5.1** Atomic radius (top) and ionization energy (bottom) of the elements. The smooth variations in these properties correspond to the gradual filling of an atomic shell, and the sudden jumps show transitions to the next shell.



**Figure 5.2** (Top) Two-proton separation energies of sequences of isotones (constant  $N$ ). The lowest  $Z$  member of each sequence is noted. (Bottom) Two-neutron separation energies of sequences of isotopes. The sudden changes at the indicated "magic numbers" are apparent. The data plotted are differences between the measured values and the predictions of the semiempirical mass formula. Measured values are from the 1977 atomic mass tables (A. H. Wapstra and K. Bos, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **19**, 215 (1977)).



**Figure 5.3** Additional evidence for nuclear shell structure. (a) Energies of  $\alpha$  particles emitted by isotopes of Rn. Note the sudden increase when the daughter has  $N = 126$  (i.e., when the parent has  $N = 128$ ). If the daughter nucleus is more tightly bound, the  $\alpha$  decay is able to carry away more energy. (b) Neutron-capture cross sections of various nuclei. Note the decreases by roughly two orders of magnitude near  $N = 50, 82$ , and  $126$ . (c) Change in the nuclear charge radius when  $\Delta N = 2$ . Note the sudden jumps at 20, 28, 50, 82, and 126 and compare with Figure 5.1. To emphasize the shell effects, the radius difference  $\Delta R$  has been divided by the standard  $\Delta R$  expected from the  $A^{1/3}$  dependence. From E. B. Shera et al., *Phys. Rev. C* **14**, 731 (1976).

## Modèle des couches - Quelques applications du modèle

Etude du **modèle en couches sphériques** (Mayer, Haxel, Jansen et Suess – 1948)



C'est un modèle à particules indépendantes :  
**A particules indépendantes dans un puits de potentiel moyen**

Pour obtenir les états individuels occupés par les nucléons  
⇒ résolution de l'équation

$$\hat{h}_i \varphi_i = \epsilon_i \varphi_i \text{ avec } \hat{h}_i = \hat{T}_i + \hat{V}$$

$T_i$  = énergie cinétique des nucléons  
 $V$  = potentiel moyen

**Pb : il faut connaître le potentiel moyen  $\hat{V}$  qui figure dans  $\hat{h}_i$**



## Quelques exemples de potentiels moyens $V$ utilisés

### le potentiel d'un puits infini

Très simple mais peu réaliste : énergie infinie pour arracher un nucléon ; le potentiel nucléaire n'est pas aussi raide.

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r \geq R \\ 0 & 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

### le potentiel d'un oscillateur harmonique

Potentiel un peu plus évolué, permettant de faire des calculs analytiques. Mais toujours une énergie infinie pour arracher un nucléon ; potentiel pas assez proche de celui du noyau qui suit la distribution de charge et de matière.

$$V(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

### le potentiel de Woods-Saxon

Modèle plus réaliste, qui admet que la forme du potentiel est celle de la distribution de Fermi

→ même variation en  $r$  que pour la répartition radiale de la matière nucléaire

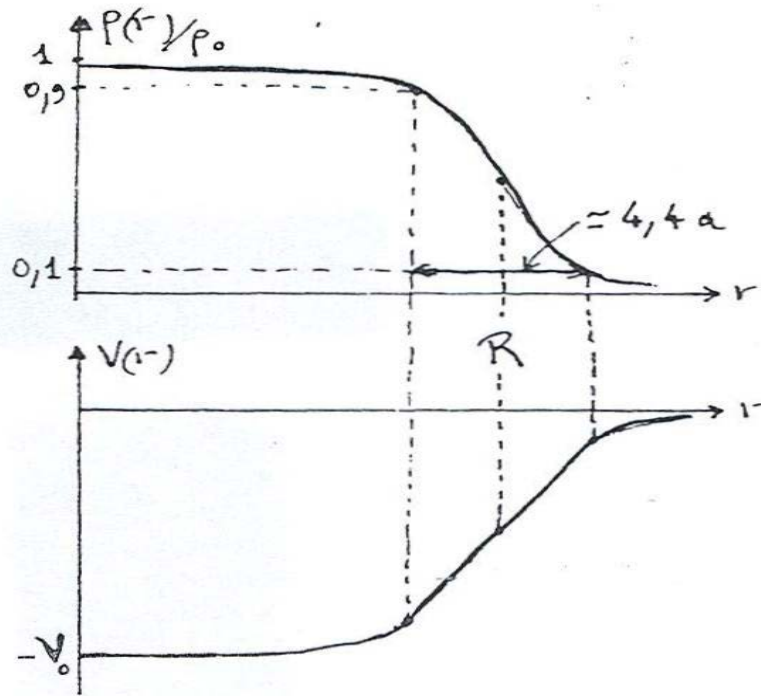
Mais pas de calcul analytique pour le potentiel de Woods-Saxon, les niveaux d'énergie sont trouvés numériquement par ordinateur.

$$V(r) = - \frac{V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R}{a}\right)}}$$

$V_0$  profondeur  
 $R$  rayon  
 $a$  diffusivité

Pb: ces potentiels ne reproduisent que les nombres magiques 2, 8 et 20

## Quelques exemples de potentiels moyens $V$ utilisés



Distribution de matière dans le noyau et potentiel correspondant.

$R$  = le rayon moyen

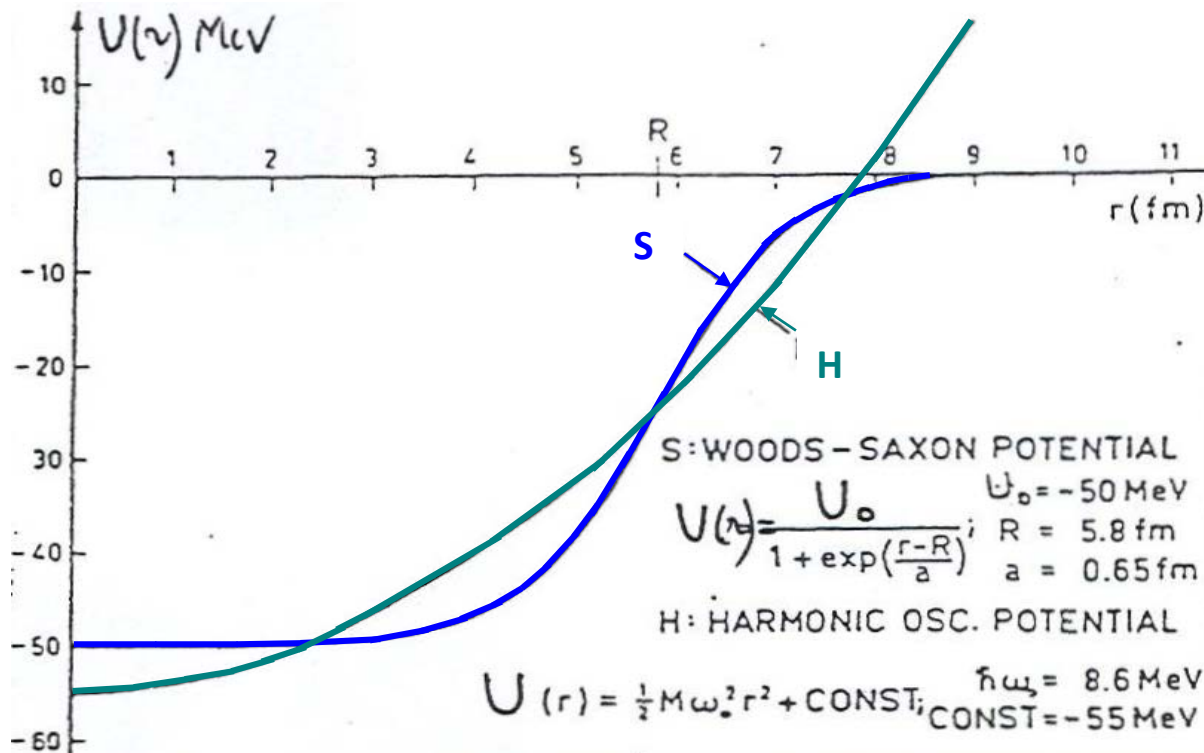
$a$  = épaisseur de peau

### le potentiel de type Hartree-Fock

Un potentiel microscopique, de type Hartree-Fock, est obtenu à partir du potentiel moyen d'interaction nucléon-nucléon et de la distribution de densité de charge.

## Quelques exemples de potentiels moyens $V$ utilisés

Woods-Saxon et potentiel harmonique donnent des résultats voisins



⇒ Même si l'oscillateur harmonique est moins réaliste, l'avantage est que les calculs analytiques sont possibles donc on va partir de ce potentiel