Ondes de gravité

I. Position du problème

Un vibreur impose une oscillation sinusoïdale de période T et de très faible amplitudes à la surface d'un bassin de grandes dimensions, à fond plat et dont les bords sont transparents. On disperse des traceurs dans le bassin et on prend une photographie avec un temps de pose égal à la période T d'excitation. On constate ainsi que :

- les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques,
- les ellipses sont quasi-circulaires à la surface ($z = h$) et de plus en plus plates lorsqu'on s'enfonce vers le fond ($z = 0$).

Pour interpréter ces observations, on adopte le modèle de l'écoulement incompressible et irrotationnel, associé à un potentiel des vitesses de la forme :

$$\Phi = f(z)\cos(\omega t - kx) \qquad \text{(I . 01)}$$

dont la dépendance en x et t à z fixé décrit une onde plane progressive de vitesse $c = \dfrac{\omega}{k}$ et de longueur d'onde $\lambda = cT$.

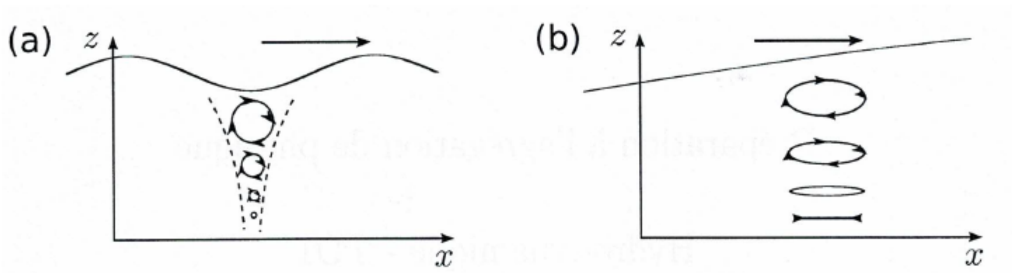

FIGURE 1 – Trajectoires des particules de fluide au passage d'une onde ; (a) en eau profonde et loin du fond ($kz \gg 1$) ; (b) en eau peu profonde ($kz \ll 1$). La flèche donne le sens de propagation de l'onde.

1) Justification de l'existence d'un potentiel

L'écoulement est considéré comme incompressible donc $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$ et irrotationnel donc $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Cette dernière hypothèse implique que l'on peut écrire $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$.

Démonstration :

L'hypothèse d'incompressibilité implique $\dfrac{D\rho}{Dt} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\rho = 0$.

De plus la conservation de la masse impose $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0$.

Donc en développant le terme en divergence de $\rho\vec{v}$*, on peut écrire :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla}.\vec{v} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\rho = 0 \Rightarrow \rho\vec{\nabla};\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

Qed

II. Équation différentielle liée à f

D'après l'incompressibilité du problème et l'expression $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\Phi$, on a :

$$\overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{\nabla}\Phi) = \Delta\Phi = 0$$

Dans le plan (O, x, z) et en coordonnées cartésiennes, l'équation de Laplace précédente donne :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = 0$$

Au vu de l'expression du potentiel (I . 01), l'équation précédente devient :

$$-k^2\Phi + f''(z)\frac{\Phi}{f(z)} = 0 \Leftrightarrow f''(z) - k^2 f(z) = 0 \qquad \text{(II . 01)}$$

De plus, au fond du récipient ($z = 0$), la composante normale de la vitesse doit s'annuler : $v_z(x, y, 0, t) = 0 \Rightarrow f'(z)_{z=0} = 0$.

La solution de l'équation (II . 01) est de la forme :

$$f(z) = A\cosh(kz) + B\sinh(kz) \Rightarrow f'(z) = Ak\sinh(kz) + Bk\cosh(kz)$$

Or, $f'(z = 0) = Bk = 0 \Rightarrow B = 0$.

Ainsi,

$$f(z) = A\cosh(kz)$$

III. Expression du champ de vitesse et lignes de courant

Ainsi, on a :

$$\Phi = A\cosh(kz)\cos(\omega t - kx)$$

Donc,

$$v_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = Ak\cosh(kz)\sin(\omega t - kx)$$
$$v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = Ak\sinh(kz)\cos(\omega t - kx)$$

L'équation des lignes de courant est donnée par :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\cosh(kz)\sin(\omega t - kx)} = \frac{dz}{\sinh(kz)\cos(\omega t - kx)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\tan(\omega t - kx)} = \frac{dz}{\tanh(kz)}$$
$$\Leftrightarrow -d\ln(\sin(\omega t - kx)) = d\ln\sinh(kz)$$
$$\Leftrightarrow d\ln\left(\sin(\omega t - kx)\sinh(kz)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sinh(kz)\sin(\omega t - kx) = c^{te}$$

IV. Coordonnées d'une particule de fluide

On a :

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = v_x(x^*, z^*) = Ak\cosh(kz^*)\sin(\omega t - kx^*) \\ \frac{dz^*}{dt} = v_z(x^*, z^*) = Ak\sinh(kz^*)\cos(\omega t - kx^*) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système non-linéaire couplé qui n'admet pas de solution analytique.

Pour simplifier le problème, on peut mettre à profit une observation supplémentaire : le demi-grand axe et le demi petit-axe de l'ellipse sont petits par rapport à la longueur d'onde λ. On remplace alors kx^* et kz^* par leurs moyennes temporelles $k\overline{x}^*$ et $k\overline{z}^*$ dans le membre de droite du système différentiel.

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{cases} x^*(t) = \overline{x}^* + \delta x^*(t) \\ z^*(t) = \overline{z}^* + \delta z^*(t) \end{cases}$$

De plus, en utilisant les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \cosh(kz^*) &\approx \cosh(k\overline{z}^*) \\ \sinh(kz^*) &\approx \sinh(k\overline{z}^*) \\ \cos(\omega t - kx^*) &\approx \cos(\omega t - k\overline{x}^*) \\ \sin(\omega t - kx^*) &\approx \sin(\omega t - k\overline{x}^*) \end{aligned}$$

On peut réécrire le système initial comme :

$$\begin{cases} \frac{dx^*}{dt} = Ak\cosh(k\overline{z}^*)\sin(\omega t - k\overline{x}^*) \\ \frac{dz^*}{dt} = Ak\sinh(k\overline{z}^*)\cos(\omega t - k\overline{x}^*) \end{cases}$$

Or, $\overline{x}^*$ et $\overline{z}^*$ sont indépendants du temps donc on obtient par intégration :

$$\begin{cases} x^*(t) = \overline{x}^* - \frac{Ak}{\omega} cosh(k\overline{z}^*)\cos(\omega t - k\overline{x}^*) \\ z^*(t) = \overline{z}^* + \frac{Ak}{\omega} sinh(k\overline{z}^*)\sin(\omega t - k\overline{x}^*) \end{cases}$$

1) Détermination de la trajectoire

$$\begin{aligned} &\sin^2(\omega t - k\overline{x}^*) + \cos^2(\omega t - k\overline{x}^*) = 1 \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{\omega(z^* - \overline{z}^*)}{Ak\sinh(h\overline{z}^*}\right)^2 + \left(\frac{\omega(x^* - \overline{x}^*)}{Ak\cosh(h\overline{z}^*}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation d'une ellipse centrée en $(\overline{x}^*, \overline{z}^*)$ de demi grand-axe (sur l'axe x) $a = \dfrac{kA}{\omega}\cosh(k\overline{z}^*)$ et de demi petit-axe (sur l'axe z) $b = \dfrac{kA}{\omega}\sinh(k\overline{z}^*)$.

Proche de la surface, $k\overline{z}^* > 1$, alors $a \approx b$ et les trajectoires sont des cercles.

Proche du fond, $k\overline{z}^* < 1$, alors $b \ll a$ les ellipses sont approximativement des lignes.

V. Relation de dispersion

Lors de l'étude cinématique précédente, nous avons déterminé complètement le champ des vitesses dans le fluide sans avoir écrit en apparence une seule ligne de dynamique : cet écoulement semble indépendant des forces appliquées. Cela semble paradoxal. en réalité il n'en est rien et l'hypothèse selon laquelle les seules forces sont les forces de pression et le poids est "dissimulée" dans l'hypothèse "irrotationnel" que nous avons utilisée.

Dans les *ondes de gravité*, c'est la gravité qui s'oppose à la déviation de la surface par rapport à l'horizontale. C'est la gravité qui sert de force de rappel lorsque l'onde se propage.

Dans l'étude suivante, nous négligerons les effets de la tension superficielle.

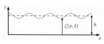

FIGURE 2 – Géométrie de la couche de fluide pour l'étude de la propagation des ondes de gravité

1) Analyse dimensionnelle : une première idée du résultat

Les paramètres pertinents à prendre en compte sont :

- la pulsation ω, $[\omega] = T^{-1}$,
- le vecteur d'onde k, $[k] = L^{-1}$,
- le champ de pesanteur g, $[g] = L.T^{-2}$,
- la hauteur h, $[h] = L$

Il y a donc quatre paramètres pertinents faisant intervenir deux dimensions. Par application du théorème Pi, il y a donc deux nombres adimensionnés :

$$\Pi_1 = hk \text{ et } \Pi_2 = \frac{\omega^2}{kg}$$

Ainsi,

$$\omega^2 = kg\Phi(hk)$$

2) Équation pour un écoulement parfait

L'écoulement étant considéré comme parfait, on peut utiliser l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \underbrace{(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{v})}_{\overrightarrow{0} \text{ irrotationnel}} \times \overrightarrow{v} = -\frac{\overrightarrow{\nabla} p}{\rho} + \overrightarrow{g}$$

En utilisant $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\Phi$, on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\overrightarrow{\nabla}\Phi)^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = \overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\overrightarrow{\nabla}\Phi)^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = f(t) = 0$$

La fonction f est choisie comme étant la fonction identiquement nulle car on peut toujours ajouter une fonction $g(t)$ à Φ sans changer le sens physique $\Delta\Phi = 0$.

3) Condition aux limites : à la surface

Pour des ondes de gravité, la longueur d'onde est considérée comme grande et la surface est peu inclinée donc $\overrightarrow{n_\Sigma} \approx \overrightarrow{u_z}$.

Un point de la surface à une vitesse $\overrightarrow{v_\Sigma} = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t)\overrightarrow{n_\Sigma}$.

La vitesse du fluide est donnée par :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi, au niveau de la surface, on a :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Ak\sinh(kz)\cos(\omega t - kx) \Rightarrow \zeta(x,t) = \frac{Ak}{\omega}\sinh(kz)\sin(\omega t - kx) + \beta(x)$$

Or,

$$\langle \zeta(x,t) \rangle_t = h = \beta(x)$$

Finalement,

$$\zeta(x,t) = h + \frac{Ak}{\omega}\sinh(kz)\sin(\omega t - kx)$$

Ainsi, d'après l'équation d'Euler appliquée au niveau de la surface, on a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\overrightarrow{\nabla}\Phi)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta(x,t) = 0$$

On linéarise l'équation précédente qui se simplifie en :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p_0}{\rho} + g\zeta(x,t) = 0$$

On dérive une fois par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \zeta(x,t)}{\partial t} = 0$$

On utilise la condition $\dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$ pour obtenir finalement :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

Or, on a montré à l'issu de la partie II que :

$$\Phi = A\cosh(kz)\cos(\omega t - kx)$$

L'équation se réécrit au niveau de la surface donc sous la forme :

$$\begin{gathered}-A\omega^2\cosh(kh)\cos(\omega t - kx) + Agk\sinh(kh)\cos(\omega t - kx) = 0\\ \Leftrightarrow -\omega^2\Phi + gk\tanh(kh)\Phi = 0\\ \Leftrightarrow \omega^2 = kg\tanh(kh)\end{gathered}$$

VI. Cas limites de l'équation de dispersion

1) Eau profonde

En eau profonde, $h \gg \lambda \Leftrightarrow hk \gg 1$. On peut donc approximer la tangente hyperbolique par 1. On trouve alors $\omega = \sqrt{gk}$.

Ainsi,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \text{ et } v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_\varphi}{2}$$

2) Eau peu profonde

En eau peu profonde, $h \ll \lambda \Leftrightarrow hk \ll 1$. On peut alors approximer la tangente hyperbolique de hk par hk.

Ainsi, $\omega^2 = ghk^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{gh}k$.

Par définition,

$$v_\varphi = \sqrt{gh} \text{ et } v_g = \sqrt{gh}$$

Dans ce cas, les ondes sont non dispersives car les vitesses de phase et des groupe sont des constantes.