Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant

2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
    1. Généralités
    2. Diffusion du rayonnement électromagnétique
    3. Polarisation du rayonnement par diffusion

3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

- On se base sur le modèle de l'électron élastiquement lié dans lequel l'e- oscille de manière harmonique autour de sa position moyenne à la pulsation ω_0

- On assimile l'e- à un dipôle oscillant de moment :

$$p(t) = -e\,\vec{r} \quad \Rightarrow \quad < p''^2 >= e^2 < a^2 >$$ ← Accélération

- La puissance moyenne rayonnée vaut :

$$< P >= \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{p_0^2\,\omega_0^4}{3\,c^3} = \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{2 < a^2 >}{3\,c^3}$$ ← Formule de Larmor

  - La puissance moyenne rayonnée est proportionnelle au carré de la charge et à la moyenne du carré de l'accélération

- L'énergie mécanique du dipôle est de la forme (m_e : masse de l'e-) :

$$E_{méca} = \frac{1}{2} m_e \, \omega_0^2 \, \frac{p_0^2}{e^2}$$

$|p_0/e|$: extension maximale du dipôle

- La puissance EM rayonnée par le dipôle vient de son énergie mécanique qui diminue au cours du temps. On peut alors écrire :

$$< P > dt = - \, dE_{méca} \quad \text{avec} \quad dt >> T$$

- On peut mettre *<P>* sous la forme :

$$< P > = \frac{E_{méca}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2 \, r_e \, \omega_0^2}{3 \, c} \quad \text{où} \quad r_e = \frac{e^2}{4 \, \pi \, \varepsilon_0 \, m_e \, c^2} = 2{,}8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Rayon classique de l'électron

- Si de plus $dt \ll \tau$:

$$-\frac{dE_{méca}}{E_{méca}} = \frac{dt}{\tau} \quad \Rightarrow \quad E_{méca}(t) = E_{méca}(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

τ : durée de vie de l'oscillateur

  - L'énergie mécanique décroît en fonction du temps
  - On dit parfois que le mouvement du dipôle subit un amortissement de rayonnement de type visqueux

- Un calcul d'ordre de grandeur montre que pour $\lambda \approx 0.5\ \mu$m, $\omega_0 \approx 3\text{x}10^{15}$ rad/s et $\tau \approx 10^{-8}$ s
  - On vérifie bien que $\tau \gg T = 2\pi/\omega_0 \approx 10^{-15}$ s dans le visible
  - L'oscillateur ne perd qu'une très faible partie de son énergie par période

- Le mouvement de l'oscillateur étant amorti, le rayonnement qui en résulte n'est pas monochromatique
  - Il est caractérisé par un élargissement spectral $\Delta\nu$ tel que :

$$\Delta\nu \times \tau \approx 1$$

  - Cette largeur intrinsèque ne doit pas être confondue avec d'autres causes d'élargissement spectral : effet Doppler ou collisions

Les approximations de la théorie du rayonnement dipolaire et le modèle de Bohr

- Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, un e- (charge -e et masse *m*) suit une trajectoire circulaire de rayon *R* autour du proton supposé immobile (charge *+e* et masse *M>>m*)

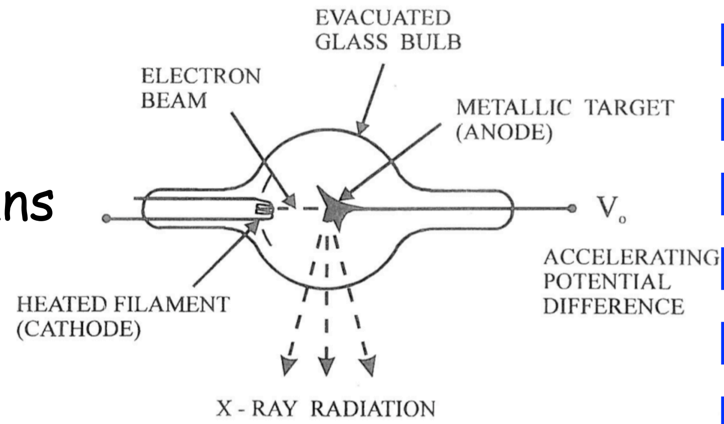
- Force exercée par le noyau sur l'e- : $\vec{f} = -\frac{e^{*2}}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{avec} \quad e^{*2} = \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$

- La quantification du moment cinétique $L_n = n\,\hbar$ entraîne celles du rayon R_n et de la vitesse v_n :

$$R_n = n^2\,R_1 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{v_1}{n} \quad \text{avec} \quad R_1 = \frac{\hbar^2}{m\,e^{*2}} \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{e^{*2}}{\hbar}$$

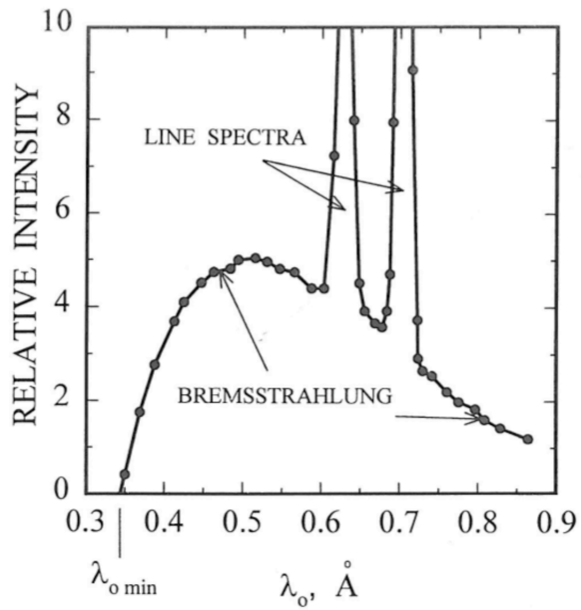
- Pour n = 1, le rayon vaut $R_1 = 0.53\ 10^{-10}$ m (rayon de Bohr) et v_1/c = 1/137. On vérifie donc les conditions d'utilisation de la théorie du rayonnement dipolaire : $r >> d \quad \text{et} \quad v << c$

Rayonnement de freinage (Bremsstrahlung)



- C'est le rayonnement produit par la décélération d'une particule chargée : dans un tube de Coolidge, les e- heurtent la cible métallique et produisent des RX

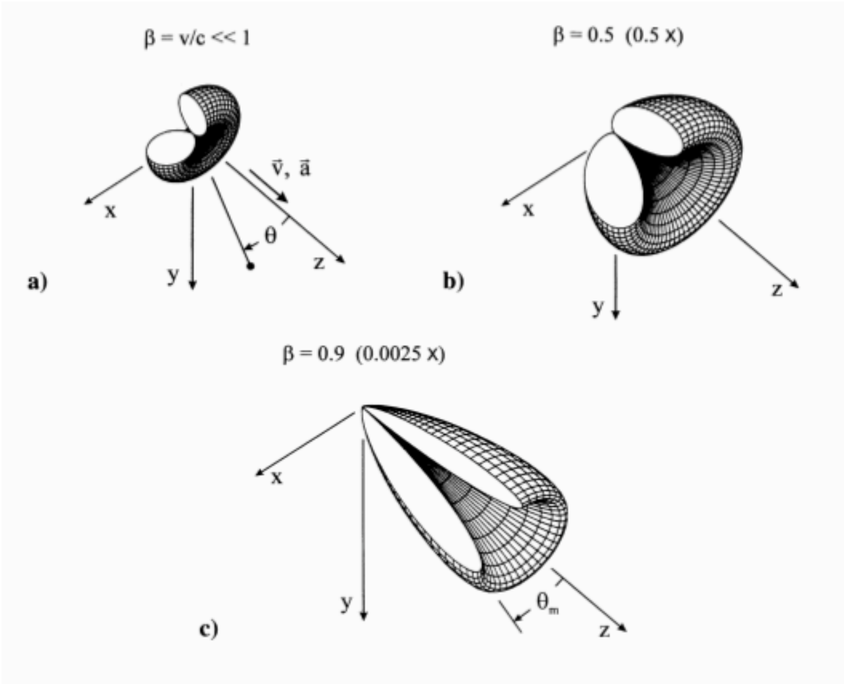
  sous 2 formes :
  - Un spectre discret dont l'explication (quantique) est qu'un e- incident éjecte un e- interne d'un atome de la cible. Un e- externe redescend peupler le niveau libéré en produisant le rayonnement EM
  - Un spectre continu (bremsstrahlung) dû au freinage de l'e- incident dans la cible



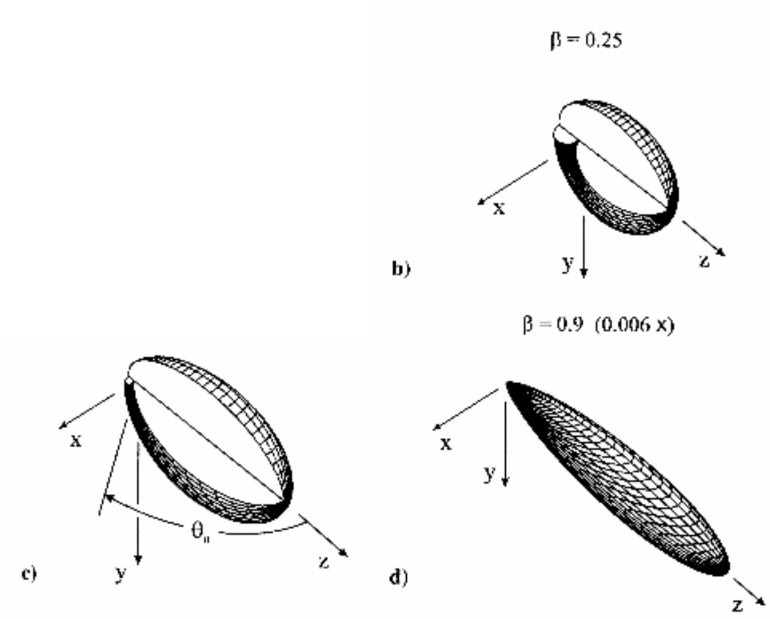
Rayonnement synchrotron

- Le rayonnement synchrotron est une application du rayonnement dû à l'accélération d'une particule chargée. Attention : il fait nécessairement intervenir la relativité !

Smith



Puissance rayonnée lors d'une accélération longitudinale



Puissance rayonnée lors d'une accélération transverse

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant

2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
    1. Généralités
    2. Diffusion du rayonnement électromagnétique
    3. Polarisation du rayonnement par diffusion

3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

- La diffusion d'un rayonnement incident par un électron atomique constitue un exemple important de rayonnement dipolaire :
  - Le champ d'une onde EM (par exemple de la lumière) peut interagir avec un atome ou une molécule qui va absorber une partie de l'énergie du rayonnement incident
  - Les dipôles atomiques induits vont réémettre des ondes EM dans des directions différentes de la direction de l'onde incidente : il y a diffusion

- On va utiliser ici un modèle classique (phénoménologique) pour décrire l'interaction entre le champ d'une onde EM incidente et un atome

Action du champ de l'onde incidente

- Comme les charges de l'atome sont non relativistes, on négligera l'influence du champ *B* de l'onde incidente (supposée plane) puisqu'il est de l'ordre de *E/c*

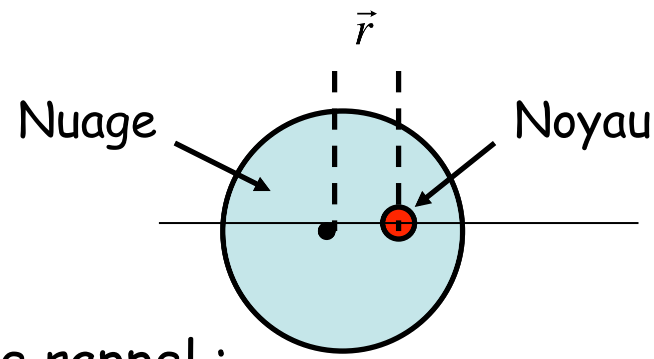
- De même, on négligera le mouvement des ions et on ne considèrera que le mouvement des e- induits par l'onde

- Dans la totalité des cas qu'on étudiera, la longueur d'onde incidente (de 500 μm dans l'IR à 0.5 μm dans le visible) est très supérieure à la dimension caractéristique d'un atome (0.1 nm)
  - Le champ de l'onde incidente sera supposé uniforme à l'échelle d'un atome

- Le champ E de l'onde est généralement (mais pas toujours) < au champ subit par l'électron atomique
  - A 0.1 nm, une charge $\pm e$ crée le champ $E = 10^{11}$ V/m

- On utilisera donc un modèle linéaire de perturbation au 1er ordre

- En l'absence d'onde EM, l'e- décrit une trajectoire contenue dans le volume du nuage électronique



- Si l'e- s'écarte de sa position d'équilibre, le barycentre des positions de l'électron n'est plus en coïncidence avec le noyau
  - L'électron est alors soumis à la force de rappel :

$$\vec{f}_{rap} = -\, m\, \omega_0^2\, \vec{r}$$

- Le mouvement d'oscillation subit toujours un amortissement (en particulier par rayonnement) qu'on modélise par une force de frottement visqueux :

$$\vec{f}_v = -\alpha \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{m}{\tau}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

- On pourrait montrer que dans ce cas, le coefficient d'amortissement visqueux est de la forme :

$$\alpha = m\frac{\omega_0}{Q} \quad \text{soit} \quad \vec{f}_v = -m\frac{\omega_0}{Q}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

où Q désigne le facteur de qualité de l'oscillateur

- L'équation qui régit le mouvement de l'e- est donc :

$$m\,\vec{r}\,'' = -\,e\,\vec{E}(t) - \alpha\,\vec{r}\,' - m\,\omega_0^2\,\vec{r}$$

- En régime sinusoïdal établi et en projetant sur la direction du champ prise suivant Oz :

$$m\,z'' = -\,e\,E_m\,\exp\left(-\,i\,\omega\,t\right) - \alpha\,z' - m\,\omega_0^2\,z$$

ou encore $z'' + \dfrac{1}{\tau}\,z' + \omega_0^2\,z = -\,\dfrac{e\,E_m}{m}\,\exp\left(-\,i\,\omega\,t\right)$ en posant $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\alpha}{m}$

- En régime établi, la solution s'écrit :

$$z(\omega) = \frac{-\,e\,E_m\,\exp(-\,i\,\omega\,t)}{m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\,\dfrac{\omega}{\tau}\right]}$$

- On en déduit le moment dipolaire électrique :

$$\vec{p} = -\, e\, z(\omega)\, \vec{u}_z = p_0(\omega) \exp\left(-\, i\, \omega\, t\right) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad p_0(\omega) = \frac{e^2\, E_m}{m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - i\, \dfrac{\omega}{\tau}\right]}$$

- D'après ce qu'on a vu précédemment, un tel dipôle rayonne une puissance électromagnétique *<P>* telle que :

$$\boxed{< P >= \frac{p_0^2(\omega)\, \omega^4}{12\, \pi\, \varepsilon_0\, c^3}}$$

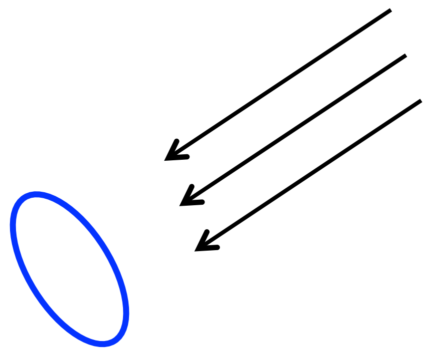
soit après calculs :

$$< P >= \sigma(\omega)\, \frac{\varepsilon_0\, c\, E_m^2}{2} \quad \text{avec} \quad \sigma(\omega) = \frac{8\, \pi\, r_e^2}{3}\, \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 / \tau^2}$$

$$< P > = \sigma(\omega)\,\frac{\varepsilon_0\, c\, E_m^2}{2} \quad \text{avec} \quad \sigma(\omega) = \frac{8\,\pi\, r_e^2}{3}\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

- La puissance rayonnée est le produit de 2 termes :
  - La section efficace de diffusion du rayonnement $\sigma(\omega)$ - probabilité homogène à une surface
  - La puissance prise par unité de surface au champ EM incident $\longrightarrow \dfrac{\varepsilon_0\, c\, E_m^2}{2}$

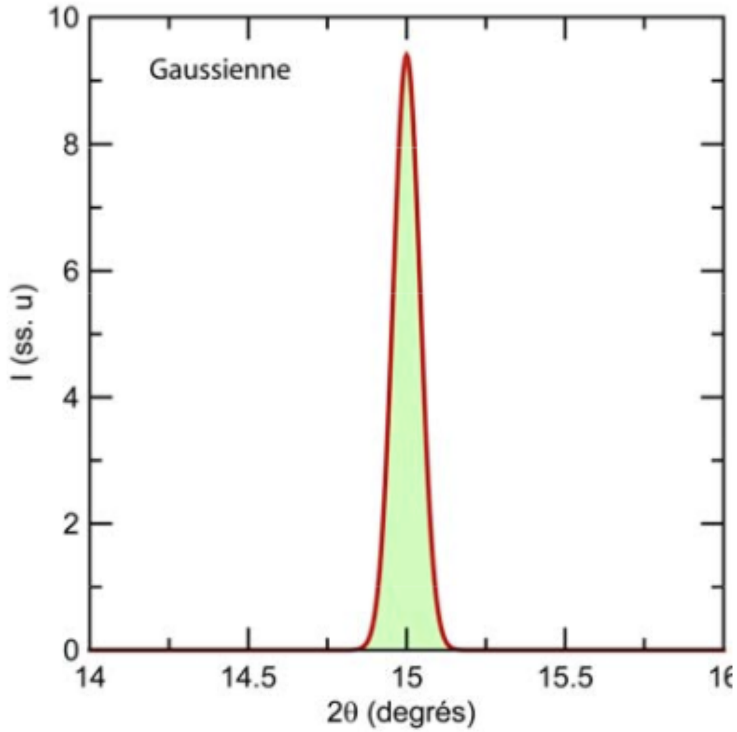
- Description physique de la section efficace :
  la puissance rayonnée est la puissance incidente qui traverse un cercle de surface σ placé perpendiculairement à l'onde

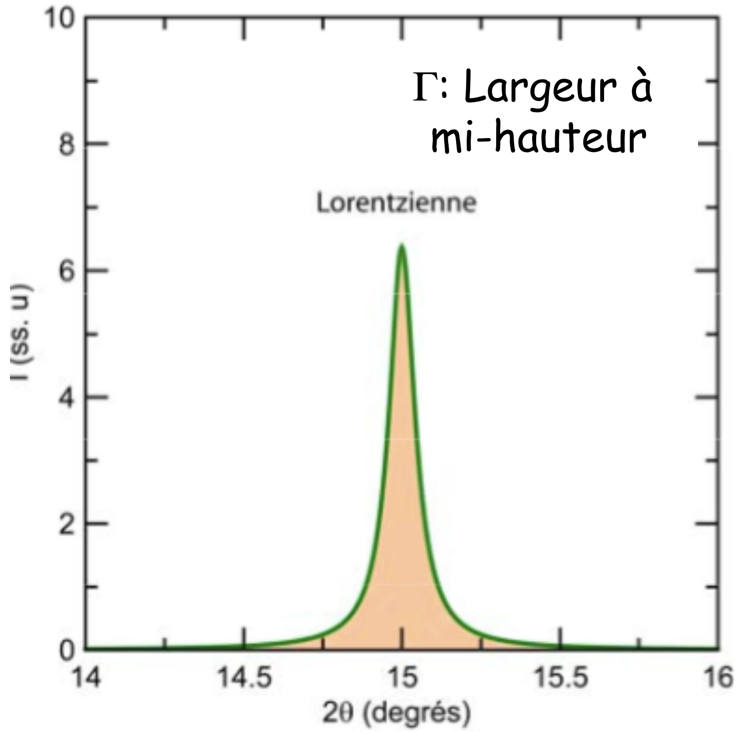


Gaussienne vs lorentzienne

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

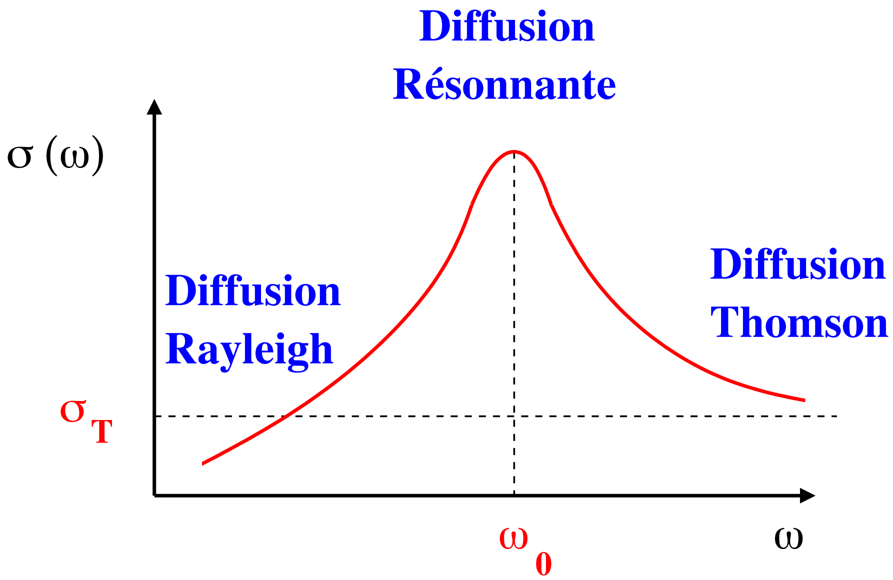
$$\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2+(x-\mu)^2}$$





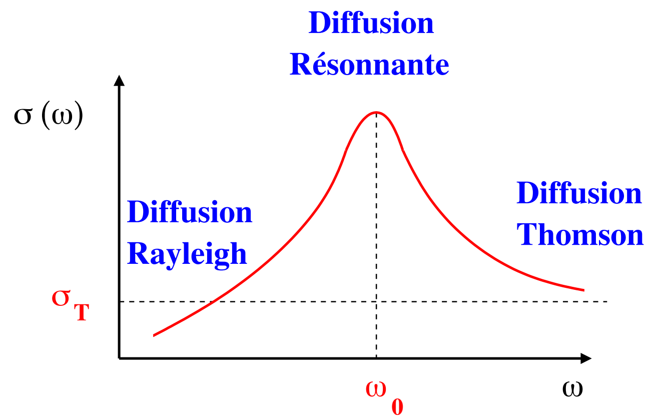
$$< P > = \sigma(\omega)\,\frac{\varepsilon_0\, c\, E_m^2}{2} \quad \text{avec} \quad \sigma(\omega) = \frac{8\,\pi\, r_e^2}{3}\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2/\tau^2}$$

- On distingue 3 domaines dans la section efficace :



$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{8\,\pi\, r_e^2}{3}\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2/\tau^2}}$$

Diffusion résonante



- La diffusion est particulièrement importante lorsque le rayonnement incident est proche d'une fréquence propre de l'atome (ie $\omega \approx \omega_0$)

- En utilisant $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\,\omega_0\,(\omega - \omega_0)$, la section efficace devient :

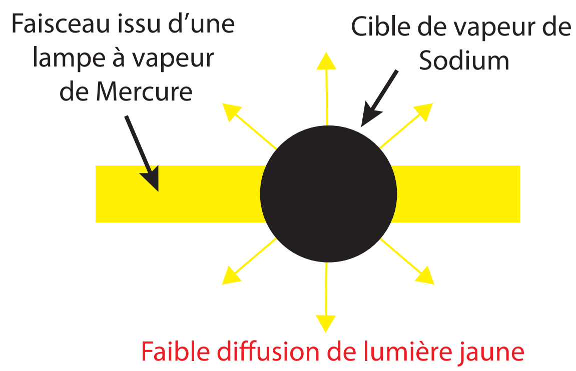
$$\sigma(\omega) \approx \frac{8\,\pi\, r_e^2\,\omega_0^2\,\tau^2}{3}\,L(\omega) \quad \text{avec} \quad L(\omega) = \frac{\omega^2}{1+4\,\tau^2\,(\omega-\omega_0)^2}$$

  - La fonction $L(\omega)$ est une lorentzienne. Son profil symétrique est caractéristique d'une résonance

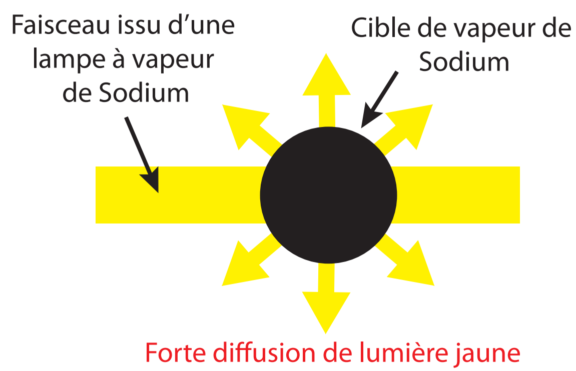
- Cette diffusion est parfois appelée diffusion Rayleigh résonante

Diffusion résonante de vapeur de sodium

- En éclairant du Na atomique avec une lampe à vapeur de mercure (comprenant un doublet jaune à 577 et 579 nm), on observe une très légère émission jaune de la vapeur de Na :
  - ❑ Légère diffusion

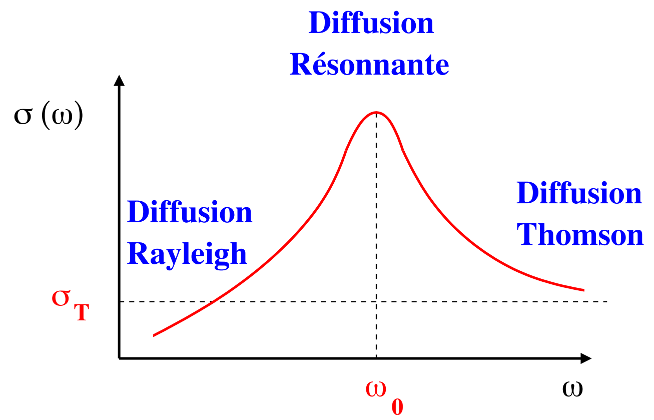


- En remplaçant la lampe par une lampe à vapeur de sodium (comprenant un doublet à 589 et 589,6 nm), on observe une émission jaune très intense :
  - ❑ Forte diffusion
  - ❑ La lumière incidente comprend les longueurs d'onde adaptées à l'excitation des atomes de Na : émission résonante



$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{8\,\pi\,r_e^2}{3}\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2/\tau^2}}$$

Diffusion Rayleigh

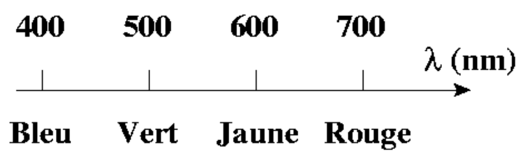


- On suppose cette fois que $\omega \ll \omega_0$
- La section efficace s'écrit alors :

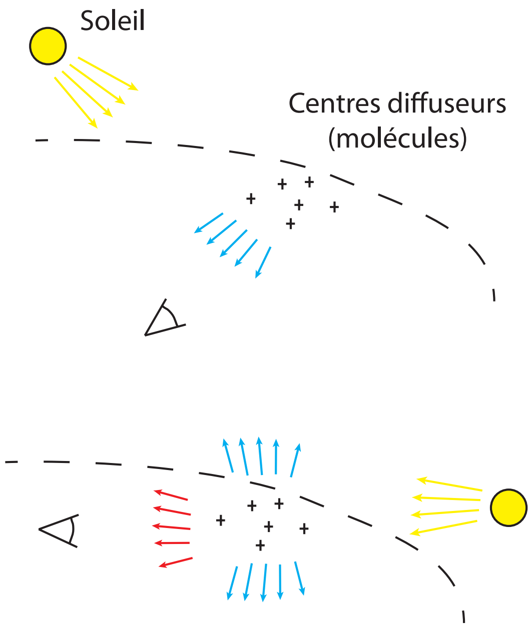
$$\sigma(\omega) \approx \frac{8\,\pi\,r_e^2}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 = \frac{8\,\pi\,r_e^2}{3}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4 = \frac{Cste}{\lambda^4}$$

Diffusion Rayleigh atmosphérique

$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{Cste}{\lambda^4}}$$

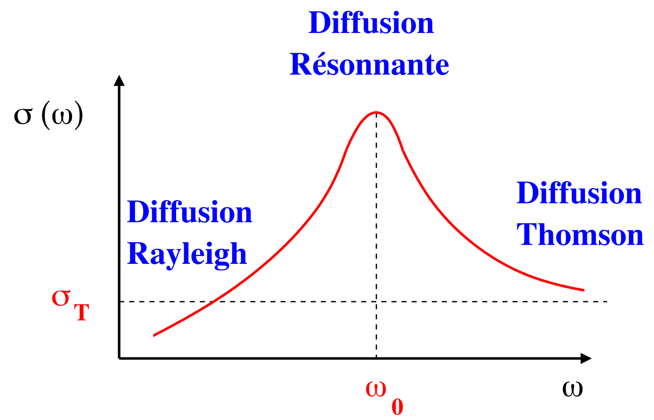


- De nombreuses molécules de l'atmosphère ont un spectre EM dans l'UV ($\omega_0 \approx 10^{17}$ Hz)
  - Le visible ($\omega \approx 10^{15}$ Hz) correspond donc à $\omega \ll \omega_0$
- Dans le spectre visible, l'atmosphère diffuse plus le bleu que le rouge
- En observant dans une autre direction que le Soleil, on est sensible à la lumière diffusée
  - Le ciel est bleu
- Le Soleil (dont le maximum du rayonnement se trouve dans le jaune) verra donc sa lumière directe appauvrie en bleu
  - Le soleil apparaît rouge le soir



$$\boxed{\sigma(\omega) = \frac{8\,\pi\, r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}}$$

Diffusion Thomson



- On suppose cette fois que $\omega \gg \omega_0$

- La section efficace tend vers une valeur constante et vaut :

$$\sigma(\omega) \approx \sigma_T = \frac{8\,\pi\, r_e^2}{3} \approx 0.67 \text{ barn} \quad \text{car} \quad 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

Section efficace Thomson

- Par exemple, pour des X durs ($\nu > \nu_0 \approx 10^{17}$ Hz), la puissance diffusée est indépendante de la pulsation incidente
  - Attention à ne pas utiliser des valeurs de ν trop élevées pour rester dans le cadre de ce cours !!

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

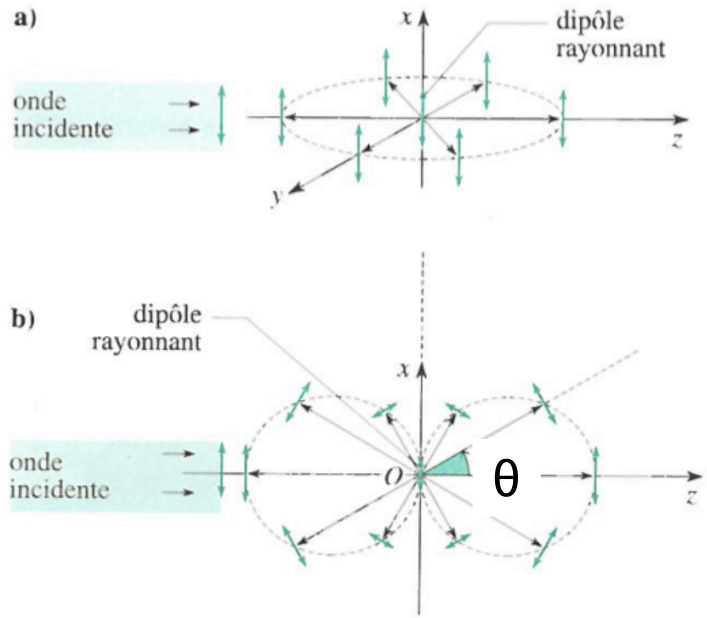
1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant

2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique
    1. Généralités
    2. Diffusion du rayonnement électromagnétique
    3. Polarisation du rayonnement par diffusion

3. Rayonnement à grande distance d'une antenne

Faroux

Cas d'une onde polarisée rectilignement



- On considère une onde se propageant selon Oz et polarisée selon Ox

- Le moment dipolaire induit est dirigé selon Ox (parallèle à la direction de la polarisation incidente)

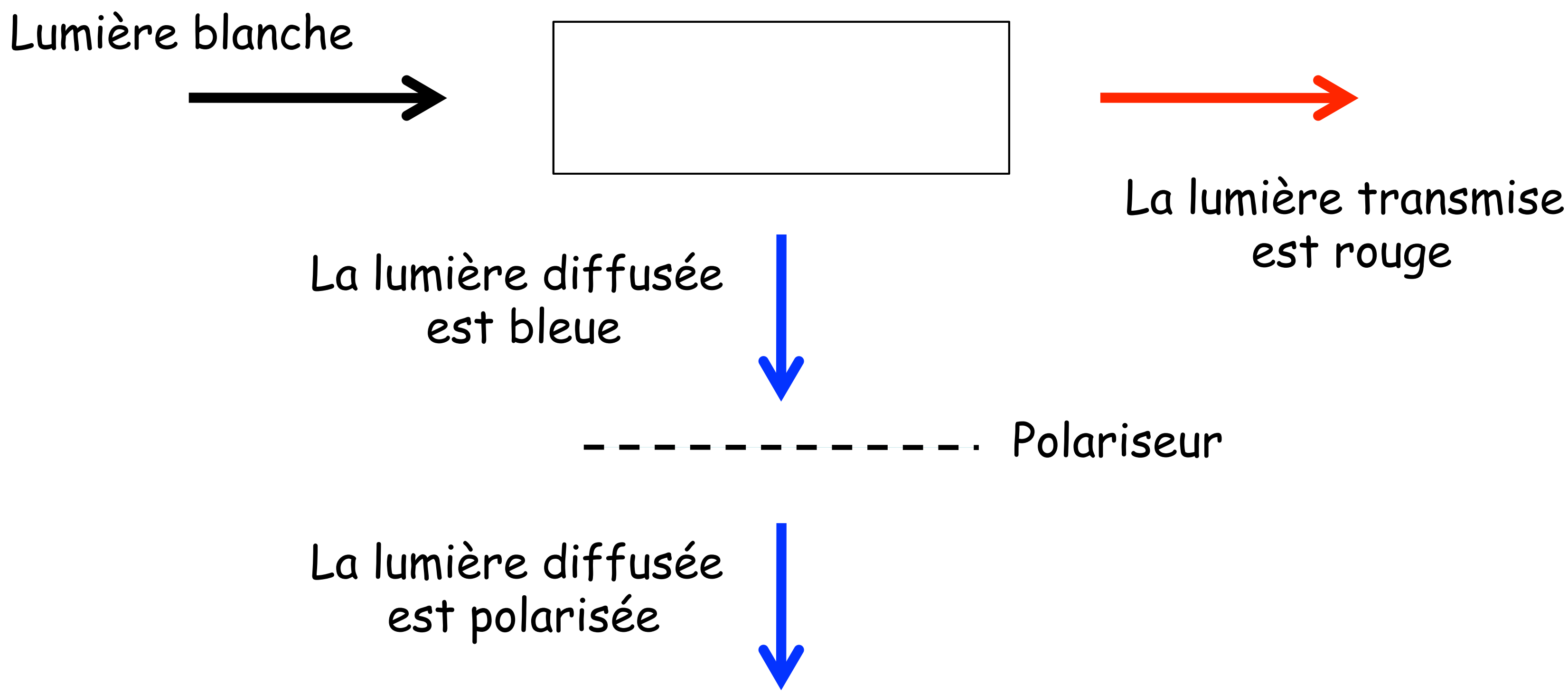
- Dans la zone de rayonnement, le rayonnement diffusé est polarisé rectilignement. Son intensité est maximale dans Oyz (θ pris wrt Ox ici)

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{p''^2 \sin^2(\theta)}{16\,\pi^2\,\varepsilon_0\,c^3}}$$

- Dans Oyz, le dipôle émet isotropiquement des ondes pol. selon Ox. La diffusion est négligeable dans les directions voisines de Ox

Expérience du « coucher du Soleil »

- Un aquarium + du lait en poudre + une lumière blanche intense



Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique

3. Rayonnement à grande distance d'une antenne
    1. Généralités
    2. Antennes rectilignes
    3. Cas particulier d'une antenne demi-onde

- On appelle antenne un dispositif conçu pour rayonner (ou récupérer) de l'énergie EM sous une forme donnée
  - On s'intéressera uniquement au champ de rayonnement (à grande distance)

- Pour émettre de l'énergie EM de manière efficace dans une direction donnée, les charges et les courants doivent être disposés de manière optimale
  - Sans des antennes efficaces, l'énergie EM serait localisée

- Une antenne peut être un simple fil conducteur rectiligne, une boucle excitée par un courant sinusoïdal, un orifice à l'extrémité d'un guide d'onde ou un arrangement sophistiqué de tout ceci

- Il n'existe pas d'antenne qui rayonne uniformément dans toutes les directions. Le rayonnement d'un antenne doit généralement être étudié en 3D, puisqu'il varie selon θ et ϕ en coordonnées sphériques

- On représente souvent le champ normalisé à sa valeur maximale en fonction de θ pour ϕ constant (champ *E*) ou l'amplitude du champ *B* en fonction de ϕ pour $\theta = \pi/2$ (champ *B*)

Diagramme du rayonnement de *E* pour le dipôle de Hertz

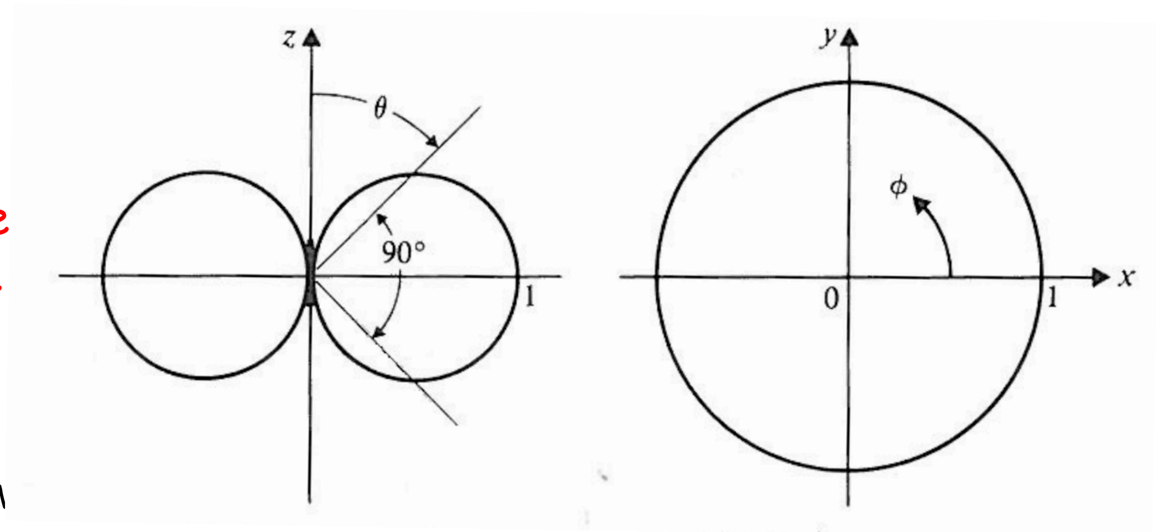
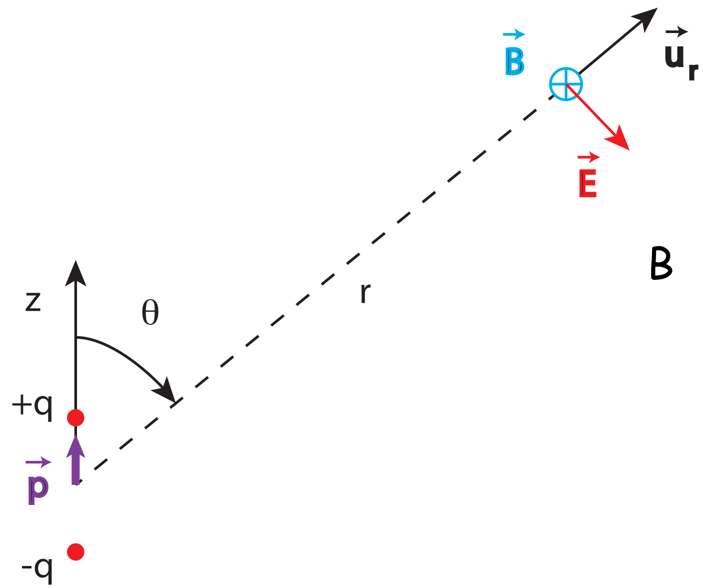


Diagramme du rayonnement de *B* pour le dipôle de Hertz

- On a vu que dans le cas d'un dipôle électrique, les champs de rayonnement s'écrivaient :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{p''\sin(\theta)}{r}\,\vec{u}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{p''\sin(\theta)}{r\,c}\,\vec{u}_\varphi}$$



Dipôle électrique

- Pour le dipôle électrique :

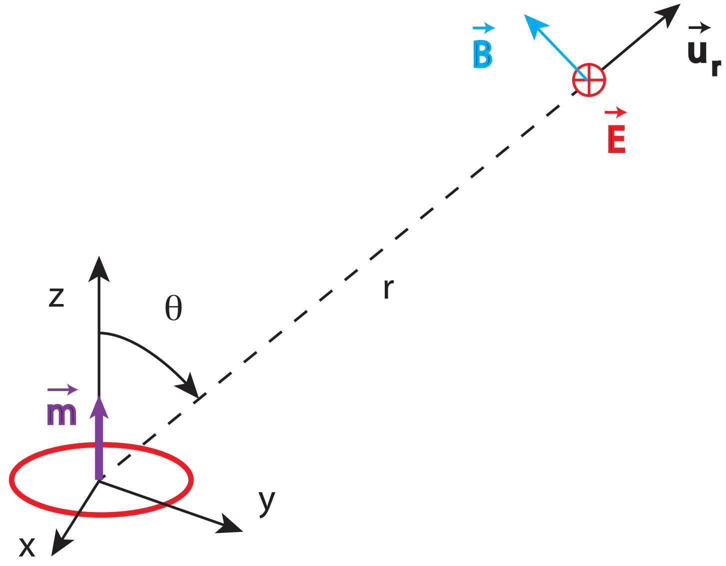
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{p''\sin(\theta)}{r}\,\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{p''\sin(\theta)}{r\,c}\,\vec{u}_\varphi}$$

- On pourrait montrer que le dipôle magnétique rayonne également une onde EM qui ressemble beaucoup à celle du dipôle électrique

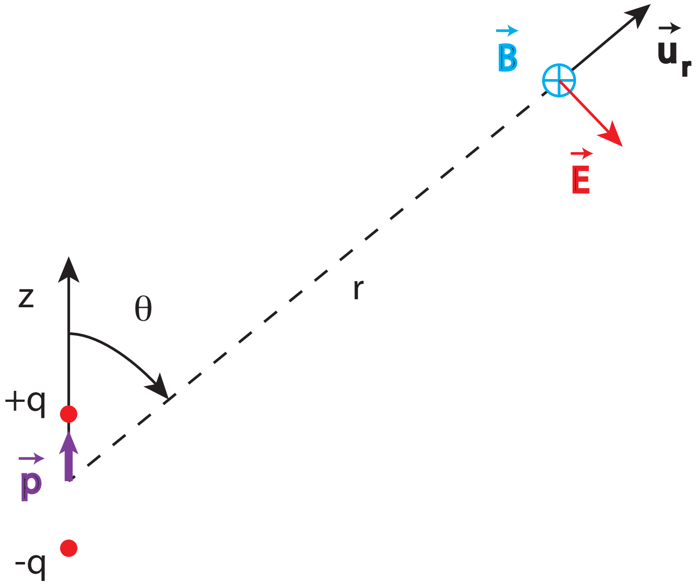
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{m''\sin(\theta)}{r\,c}\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{m''\sin(\theta)}{r\,c^2}\,\vec{u}_\theta$$

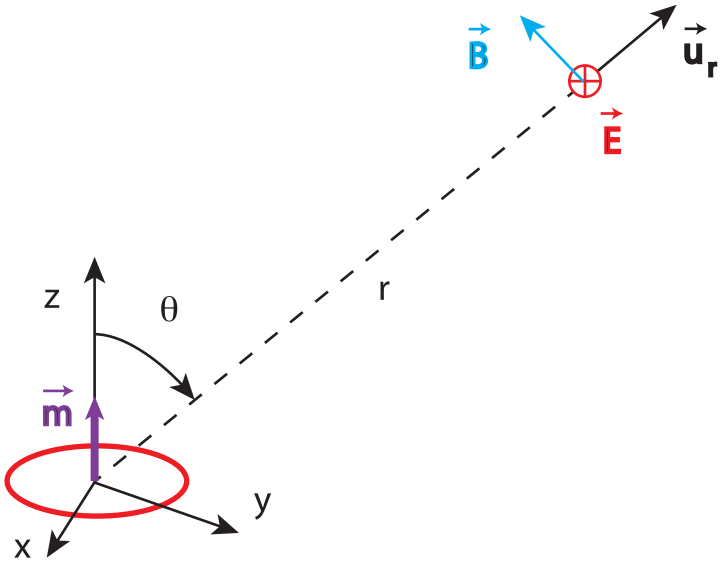
  - *E* et *B* sont simplement permutés wrt au cas du dipôle électrique



Dipôle magnétique



Dipôle électrique



Dipôle magnétique

- On peut donc indifféremment utiliser des dipôles électriques ou magnétiques pour l'émission ou la réception d'ondes !

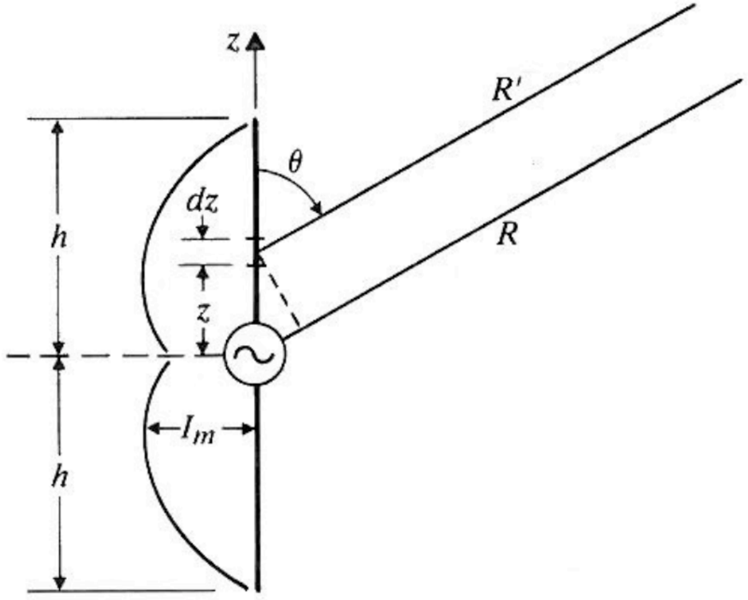
Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique

3. Rayonnement à grande distance d'une antenne
    1. Généralités
    2. Antennes rectilignes
    3. Cas particulier d'une antenne demi-onde

- Une antenne rectiligne peut être considérée comme un ensemble de dipôles oscillants en alignant les dipôles dans la direction de l'antenne
  - On contrebalance alors l'effet des très faibles résistances de rayonnement

- On étudie le cas d'une antenne alimentée en son centre ayant une longueur de l'ordre de la longueur d'onde (appelée antenne linéaire dipolaire)



- Théorie : si la distribution de courant est connue, on obtient le champ en intégrant l'effet d'un dipôle sur tout le volume de l'antenne
    - Ce n'est qu'un simple problème de conditions aux limites sur le conducteur (courant nul aux extrémités et champ E_T nul sur toute la surface)

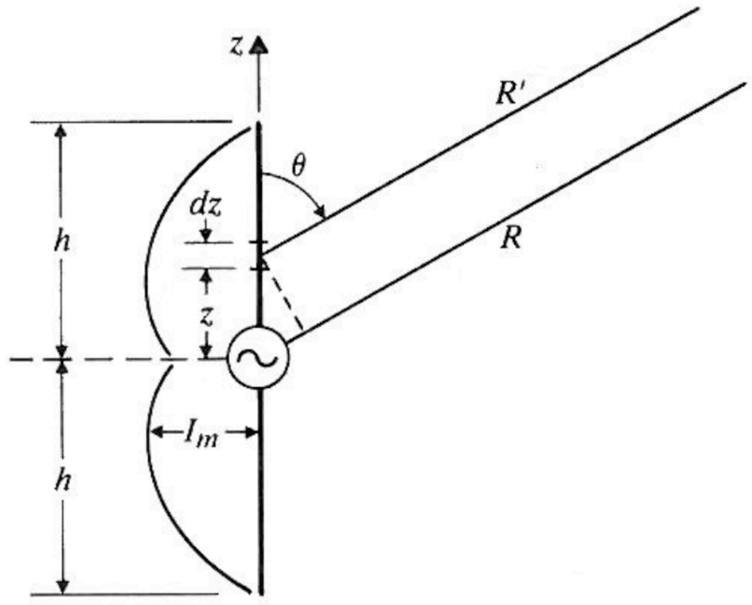
- Dans la pratique :
    - La détermination de la densité de courant réelle est en fait très délicate (même pour des conducteurs parfaits)
    - On simplifie beaucoup en négligeant l'effet de l'épaisseur de l'antenne

Champ EM produit par une antenne rectiligne (1/3)

- On modélise la distribution de courant par :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad I(z) = I_m \sin(\beta(h-|z|)) = \begin{cases} I_m \sin(\beta(h-z)) & \text{si} \quad z>0 \\ I_m \sin(\beta(h+z)) & \text{si} \quad z<0 \end{cases}$$

- Une antenne sera considérée comme un alignement de dipôles de Hertz
  - Permet de déterminer (plus) facilement le champ
  - La décroissance en *1/r* fait qu'à grande distance, on est encore sensible au champ rayonné

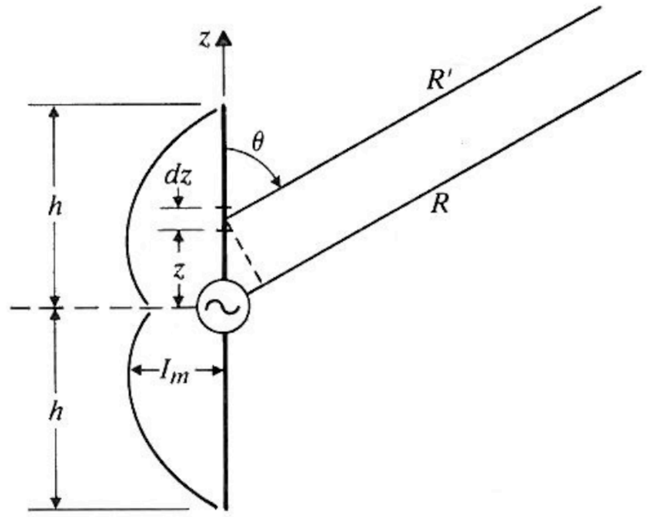


Champ EM produit par une antenne rectiligne (2/3)

- On obtient le champ en superposant les champs créés par les différents éléments de l'antenne, de longueur *dz*

- Le champ *E* produit à grande distance, en un point *M*, par l'un de ces éléments situé en *P* et parcouru par *I(z)*, s'écrit :

$$d\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{\sin(\theta)}{2\,\lambda\,PM}\,I(z)\,dz\,\exp\left(-i\,\omega\left(t-\frac{PM}{c}\right)\right)\vec{u}_\theta$$



- Comme toujours, on pose :

$$PM = \left(R^2 + OP^2 - 2\,\vec{R}\,.\overrightarrow{OP}\right)^{1/2} = R\left(1 + \frac{OP^2}{R^2} - 2\,\vec{u}_r\,.\frac{\overrightarrow{OP}}{R}\right)^{1/2}$$

avec :

$$\vec{R} = \overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

Champ EM produit par une antenne rectiligne (3/3)

- Après des calculs pénibles, on obtient :

$$\vec{E} \approx -i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I_m}{R} \exp\left(i\,\beta\,R\right) F(\theta)\,\vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \frac{\cos\left[\beta\,h\cos(\theta)\right] - \cos(\beta\,h)}{\sin(\theta)}$$

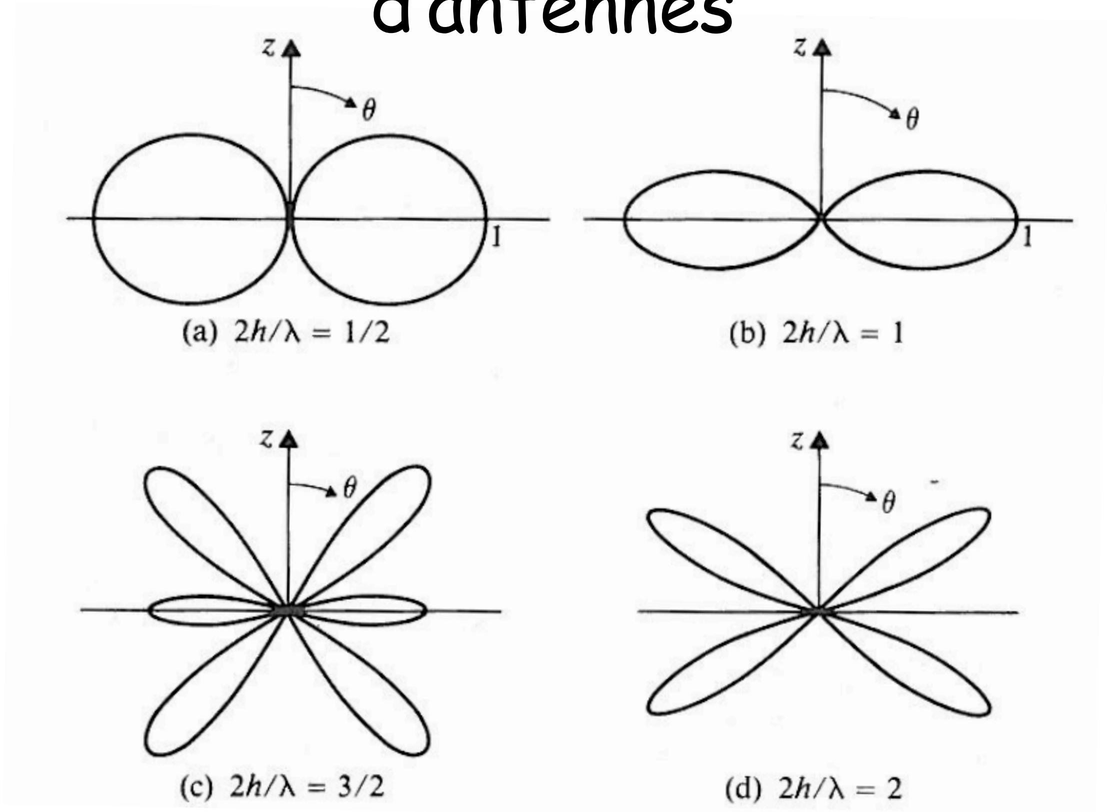
- Le facteur *F*(θ) est le diagramme de rayonnement du champ *E* pour l'antenne linéaire dipolaire

- La forme de *F*(θ) dépend bien sûr de la valeur de $\beta h = 2\pi h/\lambda$ et peut être très différente selon ces valeurs
  - *F*(θ) est toujours symétrique wrt au plan $\theta = \pi/2$

- Les diagrammes de rayonnement de *B* sont des cercles puisque *F*(θ) est indépendant de φ

Fonction $F(\theta)$ pour différentes longueurs d'antennes

Antenne demi-onde



Antenne quart d'onde

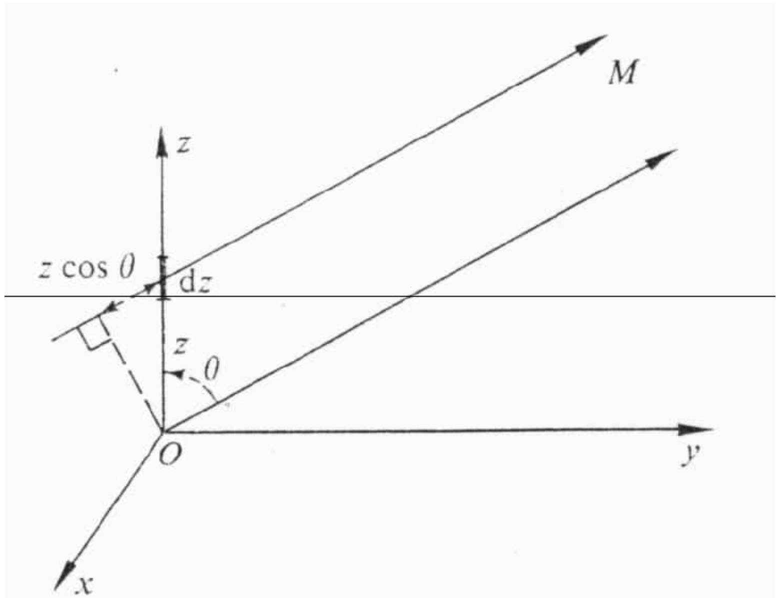
- Le maximum du rayonnement émis s'écarte du plan $\theta = 90°$ quand la longueur de l'antenne se rapproche de $3\lambda/2$
- Pour $2h = 2\lambda$, il n'y a pas de rayonnement dans le plan $\theta = 90°$

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Champ électromagnétique du dipôle oscillant
2. Rayonnement dipolaire de l'électron atomique

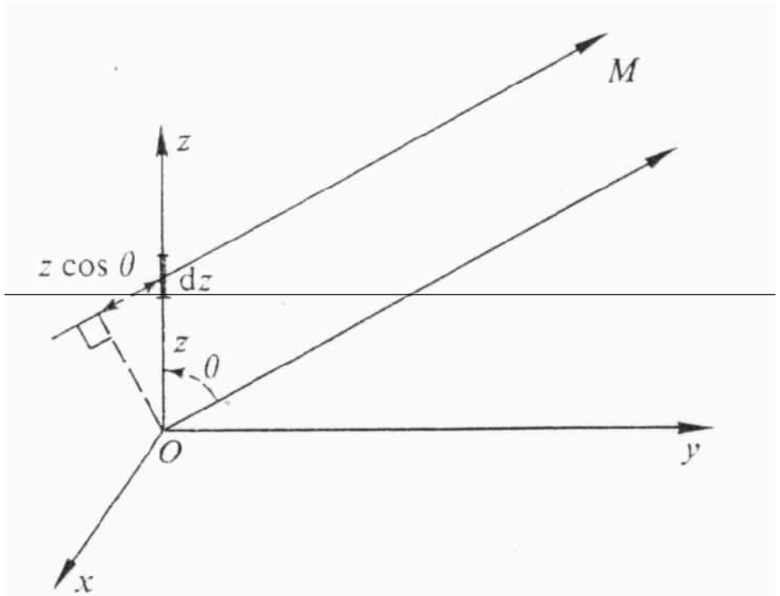
3. Rayonnement à grande distance d'une antenne
   1. Généralités
   2. Antennes rectilignes
   3. Cas particulier d'une antenne demi-onde

- Le calcul effectué dans l'approximation d << λ devient faux
  - La distance r du point M varie suivant la position *z* du point courant sur l'antenne : l'onde résultante est la superposition d'ondes de phase différentes
  - Il y a propagation le long de l'antenne et *I* devient *I(z)*



- On suppose que M est suffisamment long pour que θ reste le même pour toute l'antenne (infini en optique)

- Chaque point dz à l'abscisse z se trouve à la distance r - z cos(θ) de M



- Cette correction sur r ne joue que dans le terme de phase

$$\boxed{\begin{cases} E_\theta = -\,i\,\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\dfrac{I\,l}{2\,\lambda}\,\dfrac{\sin(\theta)}{r}\,\exp\left(-\,i\,\omega\,(t-\dfrac{r}{c})\right) \\ B_\varphi = -\,i\,\mu_0\,\dfrac{I\,l}{2\,\lambda}\,\dfrac{\sin(\theta)}{r}\,\exp\left(-\,i\,\omega\,(t-\dfrac{r}{c})\right) \end{cases}}$$

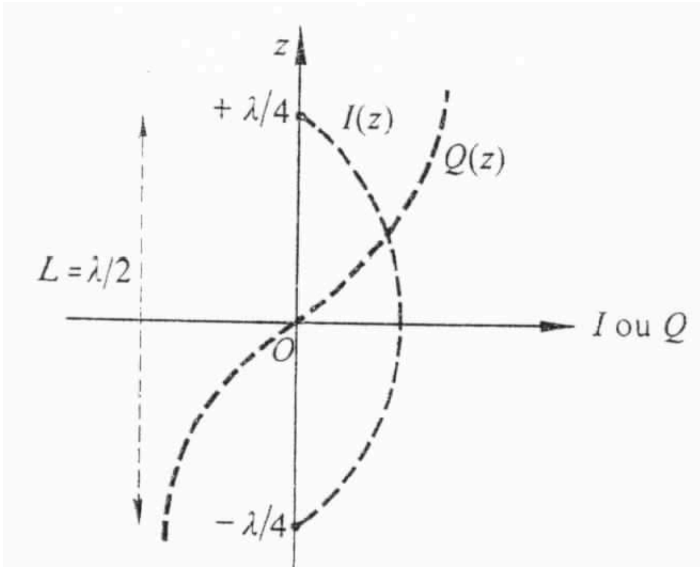
$$dE_\theta = -\,i\,Z_0\,\frac{I(z)}{2\,\lambda}\,\frac{\sin(\theta)}{r}\,\exp\left(-\,i\,\omega\left(t-\frac{r-z\cos(\theta)}{c}\right)\right)dz$$

$$dB_\varphi = -\,i\,\mu_0\,\frac{I(z)}{2\,\lambda}\,\frac{\sin(\theta)}{r}\,\exp\left(-\,i\,\omega\left(t-\frac{r-z\cos(\theta)}{c}\right)\right)dz$$

- Antenne constitué d'un fil accordé sur le fondamental : $L = \lambda / 2$

- Le courant n'est pas constant le long du fil

$$I(z) = I_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$



- La répartition des charges sur l'antenne est donnée par $Q = \int I\, dt$

  - Charges maximales aux extrémités avec des signes opposés
  - Doublet de charges (antenne doublet)

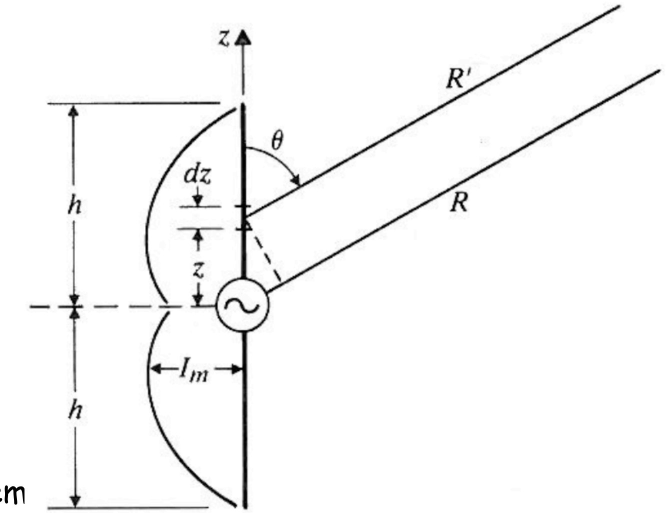
Autre dénomination

- Cette antenne sera parfois dite demi-onde si la longueur L = *2h=* vérifie *2h* = $\lambda/2$

- On a alors : $$\beta h = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad F(\theta) = \frac{\cos\left(\pi/2 \times \cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

- On réalise une antenne demi-onde en maintenant une fem sinusoïdale aux extrémités voisines de l'entrée des 2 conducteurs

- On obtient le même comportement en plantant dans le sol un conducteur de longueur *h/2* (on montre que le sol se comporte comme un réflecteur parfait)



- En exprimant $\exp\left(-i\,\omega\left(t-\frac{r-z\cos(\theta)}{c}\right)\right)$, on obtient :

$$E_\theta = -i\,\frac{I_0\,Z_0}{2\,\lambda}\,\frac{\sin(\theta)}{r}\,\exp\left(-i\,\omega\,(t-\frac{r}{c})\right)\left[\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left(\frac{2\,\pi\,z}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}\,z\cos(\theta)\right)dz\right.$$

$$\left.-\,i\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4}\cos\left(\frac{2\,\pi\,z}{\lambda}\right)\sin\left(\frac{\omega}{c}\,z\cos(\theta)\right)dz\;\right]$$

- Les limites d'intégration sont symétriques donc l'intégrale de la fonction impaire (2e terme) est nulle. Il reste :

$$E_\theta = -i\,\frac{I_0\,Z_0}{\lambda}\,\frac{\sin(\theta)}{r}\,\exp\left(-i\,\omega\,(t-\frac{r}{c})\right)\left[\int_{0}^{+\lambda/4}\cos\left(\frac{2\,\pi\,z}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}\,z\cos(\theta)\right)dz\right]$$

- Pour effectuer le calcul, on utilise $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\left[\cos(p+q) + \cos(p-q)\right]$

- On obtient :

$$E_\theta = -i\,\frac{I_0\,Z_0}{2\,\pi}\,\frac{1}{r}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}\exp\left(-i\,\omega\,(t-\frac{r}{c})\right)$$

- Le diagramme de rayonnement a toujours la même allure :
  - Sur l'axe ($\theta \approx 0$)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right) \approx \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi\,\theta^2}{4}\right) \approx \frac{\pi\,\theta^2}{4} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$$

  - Plan équatorial ($\theta = \pi/2$) : rayonnement maximum

- Le vecteur de Poynting donne :

$$<\vec{R}> \approx \frac{15\, I_m^2}{\pi\, R^2} \frac{\cos^2\left(\pi/2 \times \cos(\theta)\right)}{\sin^2(\theta)} \vec{u}_r$$

- D'où la puissance : $<P> = \oiint <\vec{R}> . d\vec{S} \quad \text{avec} \quad dS = R^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$

- Finalement :

1.218 (numériquement)

$$<P> = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{15\, I_m^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\pi/2 \times \cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)} d\theta = 36{,}54\, I_m^2$$

- Comme pour un dipôle, on peut définir une résistance de rayonnement :

$$R_r = \frac{<P>}{I_m^2/2} = 73{,}1\,\Omega$$

- La résistance de rayonnement est indépendante de la longueur L de l'antenne
  - La seule condition est que l'antenne soit accordée

- La moitié de la puissance est donnée par :

$$\frac{\cos\left(\pi/2\times\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

  - ie $\Delta\theta \approx 78°$

- Ce champ ressemble au champ du dipôle de Hertz (pour lequel $\Delta\theta$= 90°), en étant néanmoins plus allongé dans la direction $\theta/2$
  - La largeur à mi-hauteur du gain directionnel du rayonnement sera donc inférieure à 90°
  - Il existe des méthodes pour l'augmenter en associant plusieurs antennes parallèles en quinconce