

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma
 1. Mouvement des particules chargées
 2. Pulsation plasma
 3. Propagation d'une onde
7. Propagation guidée

- Un plasma est un gaz ionisé (e^- et ions). Si les ions ne sont ionisés qu'une seule fois, on aura à l'équilibre thermodynamique :

$$n_i = n_e$$

- Exemples

- Gaz à haute température: $k_B T \approx$ potentiel d'ionisation, d'où :

$$T \approx \frac{1 \text{ eV}}{1,28 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} \approx 10^4 \text{ K}$$

- Ionosphère ($50 < h < 500$ km). Les photons du Soleil ionisent les molécules avec $\nu \approx 2 \cdot 10^{15}$ Hz ou $\lambda \approx 1,5 \mu\text{m}$ (visible)

- Forces s'exerçant sur les particules chargées
 - Poids (négligé)
 - Interactions EM avec les autres particules (négligé car la densité est faible dans un plasma)
 - Amortissement (pertes dues au rayonnement) : on réduit le temps d'étude au temps caractéristique du rayonnement (10^{-14} s), très faible devant celui de l'amortissement (supposé constant)
 - Interaction avec le champ de l'onde plane progressive $\exp(-i\omega t)$
 - ↗ Pour des vitesses «< c, la composante magnétique de la force de Lorentz sera toujours négligée
- Le bilan des forces est : $\vec{F} = q \vec{E}$

■ Mouvement des électrons

□ Position de l'électron : $\vec{r} + \vec{a}(t)$

□ Le PFD s'écrit :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E}(\vec{r} + \vec{a}, t)$$

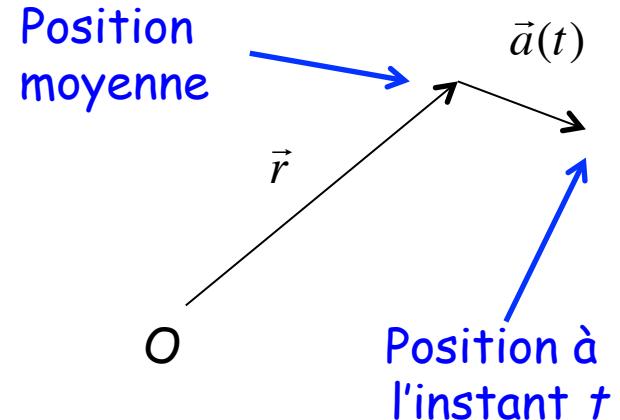
□ Hypothèse simplificatrice : $\lambda \gg |\vec{a}| \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r} + \vec{a}, t) \approx \vec{E}(\vec{r}, t)$

□ En régime harmonique établi, le PFD s'écrit immédiatement :

$$-i\omega m_e \vec{v}_e = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{v}_e = \frac{-i e}{\omega m_e} \vec{E}$$

• De plus : $\lambda \gg |\vec{a}| \Leftrightarrow \frac{2\pi c}{\omega} \gg \frac{2\pi v}{\omega} \Leftrightarrow v \ll c$

Attendu !!



- Mouvement des ions (charge $+e$ et masse M) :

- On a immédiatement :

$$\vec{v}_i = \frac{i e}{\omega M} \vec{E}$$

- Remarque :

$$\frac{v_i}{v_e} = \frac{m_e}{M} \ll 1$$

- ↗ On néglige souvent le mouvement des ions

- ↗ Dans l'absolu, c'est le barycentre qui reste immobile. Pour être plus précis, on pourrait utiliser la **masse réduite** :

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_e} + \frac{1}{M}} = \frac{m_e M}{m_e + M}$$

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma
 1. Mouvement des particules chargées
 2. Pulsation plasma
 3. Propagation d'une onde
7. Propagation guidée

Conductivité

- On a $\vec{J} \approx -n_e e \vec{v}_e$. Comme $n_e \approx n$ $\Rightarrow \vec{J} \approx -n e \vec{v}_e = \frac{i n e^2}{\omega m_e} \vec{E}$
- La loi d'Ohm prend une forme nouvelle avec la complexe conductivité σ :
- Remarque : la puissance perdue par l'onde dans le milieu s'écrit :

$$\sigma = \frac{i n e^2}{\omega m_e}$$

$$\langle P \rangle = \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} R_e (\sigma E E^*) = 0$$

Logique : on a utilisé
un modèle sans
dissipation d'énergie

- Remarque : dans un conducteur ohmique, on a :

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m (1 - i \omega \tau)} \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{n e^2 \tau}{m (1 - i \omega \tau)} \right) = \frac{i n e^2}{m \omega}$$

Pulsation plasma

- En régime harmonique, (MG), la forme locale de la conservation de la charge et la loi d'Ohm s'écrivent respectivement :

$$i \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad -i \omega \rho + i \vec{k} \cdot \vec{J} = 0 \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- En combinant : $i \omega \rho = i \sigma \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma \rho}{\epsilon_0}$
- Ou encore (attention à ne pas simplifier brutalement) :

$$i \rho \left(\omega - \frac{n e^2}{m_e \omega \epsilon_0} \right) = 0 = \frac{i \rho}{\omega} \left(\omega^2 - \frac{n e^2}{m_e \epsilon_0} \right)$$

ou encore, si $\omega \neq 0$:

$$\rho \left(\omega^2 - \omega_p^2 \right) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m_e \epsilon_0}$$

ω_p : Pulsation plasma (ou fréquence plasma, ou fréquence de Langmuir)

$$\rho (\omega^2 - \omega_p^2) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m_e \varepsilon_0}$$

- Numériquement :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m_e \varepsilon_0}} = 56,8 \sqrt{n} \text{ MKSA}$$

- Si $\omega \neq \omega_p$, alors $\rho = 0$ (attention ρ est la densité totale)
- Si $\omega = \omega_p$, on peut avoir $\rho \neq 0$

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma
 1. Mouvement des particules chargées
 2. Pulsation plasma
 3. Propagation d'une onde
7. Propagation guidée

- On se place en régime harmonique dans le cas où $\omega \neq \omega_p$, ie $\rho = 0$. (MF) et (MA) s'écrivent respectivement (en utilisant l'expression de σ) :

$$i \vec{k} \times \vec{E} = i \omega \vec{B} \quad i \vec{k} \times \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} - i \omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -i \omega \varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E}$$

- D'où : $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E} = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E}$

- On en déduit la **relation de dispersion** :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

- On peut reformuler l'équation d'onde sous la forme :

Equation de
Klein-Gordon

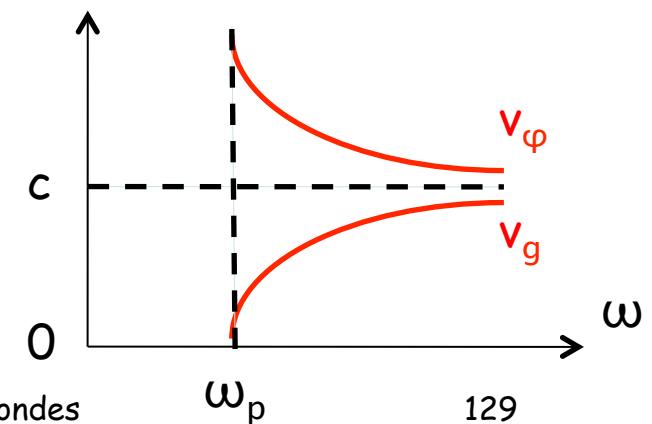
$$\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}$$

Savoir
refaire ces
calculs

1^{er} cas : domaine dispersif ($\omega > \omega_p$)

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

- Si $\omega > \omega_p$, il y a propagation dispersive sans atténuation
- Vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c$
- Vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{d(\text{Re}(k))}$
- En différentiant la relation de dispersion : $k dk = \frac{\omega}{c^2} d\omega \Rightarrow v_\varphi v_g = c^2$
 $\Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} < c$
- L'onde passe à travers le plasma sans atténuation (mais avec v_φ modifié)



$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

2^e cas ($\omega < \omega_p$)

- Si $\omega < \omega_p$, on a :

$$k = i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} = \frac{i}{\delta}$$

puisqu'on ne retient pas la solution < 0

- Le champ dans le milieu s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-x/\delta) \exp(-i\omega t)$$

- Onde évanescante, avec $v_\phi = \infty$ et $v_g = 0$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Oscillation plasma ($\omega = \omega_p$)

- Si $\rho = 0$, alors $k = 0$ et le plasma vibre en bloc. Il n'y a pas propagation
- Par contre, on peut avoir $\rho \neq 0$. Dans ce cas, (MA) et (MF) entraînent toujours :

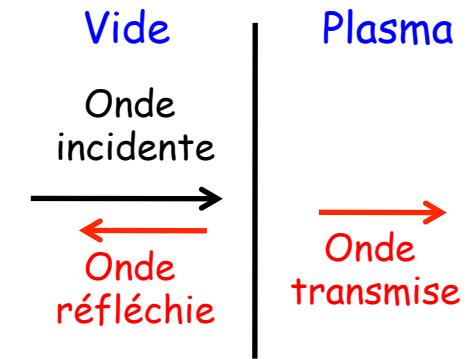
$$(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E} \quad \Rightarrow \quad (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = 0$$

- A l'aide de (MG), on obtient : $i \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Finalement :
$$\vec{E} = -\frac{i \rho}{\epsilon_0 k^2} \vec{k}$$
- Une onde longitudinale se propage dans le plasma

Application : réflexion d'une onde sur un plasma (1/2)

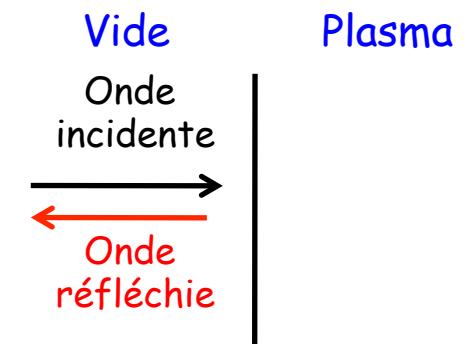
- Si $\omega > \omega_p$, une partie de l'onde est réfléchie, l'autre est propagée sans atténuation
 - A l'interface, par conservation de l'énergie :

$$\langle \vec{R}_i \rangle + \langle \vec{R}_r \rangle = \langle \vec{R}_t \rangle$$

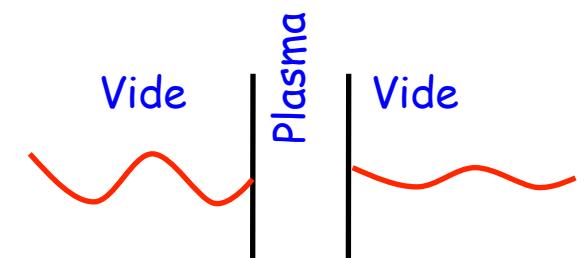


- Si $\omega < \omega_p$, il n'y a pas d'onde transmise mais une réflexion totale
 - A l'interface, par conservation de l'énergie :

$$\langle \vec{R}_t \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{R}_i \rangle = -\langle \vec{R}_r \rangle$$



- Cas particulier : si l'épaisseur est $\approx \delta$, une partie de l'onde peut être propagée au delà du plasma



Application : réflexion d'une onde sur un plasma (2/2)

- Un plasma se comporte donc comme un filtre passe-haut
- La haute atmosphère se comporte comme un plasma :
 - laisse passer les signaux des satellites à haute fréquence
 - réfléchit les ondes radios qui ont des fréquences $< \omega_p$

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

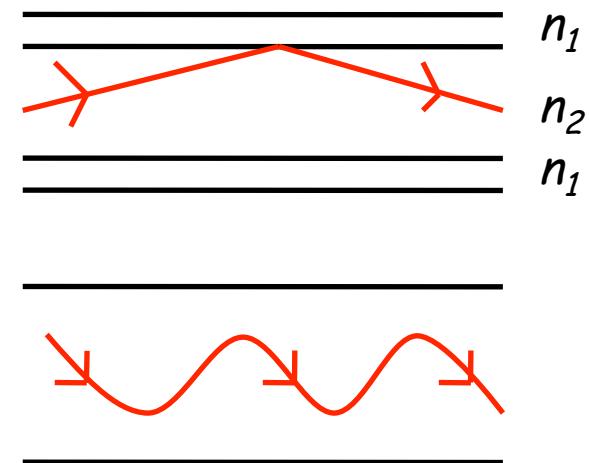
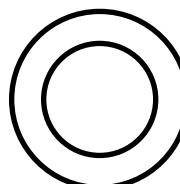
1. Concepts généraux sur les ondes
 2. Ondes électromagnétiques dans le vide
 3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
 4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
 5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
 6. Propagation dans un plasma
-
7. Propagation guidée
 1. Généralités sur les guides d'onde
 2. Guides d'ondes rectangulaires
 3. Cas particulier du mode TE_{10} dans un guide rectangulaire
 4. Cavités résonantes

- Lorsque ω atteint le GHz, les câbles coaxiaux deviennent inutilisables :
 - Les fils tressés du conducteur externe laissent passer le champ : le fil rayonne à l'extérieur
 - Le diélectrique devient absorbant (à cause des bandes d'absorption du CO_2)
- Changement de concept : la **propagation guidée** consiste à transporter un signal EM dans un volume limité par des parois qui peuvent être :
 - isolantes (fibres optiques)
 - métalliques (guides d'ondes)

- Pour les fréquences optiques, on utilise :

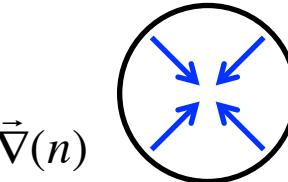
- Fibres à **saut d'indice** :

$$n_1 > n_2$$



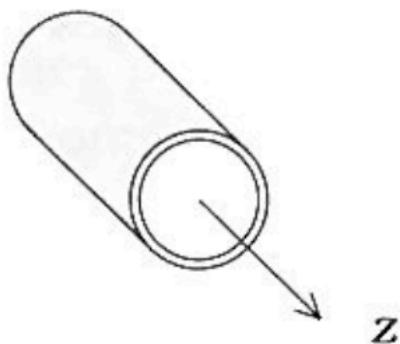
- Fibres à **gradient d'indice** :

$$\vec{\nabla}(n)$$

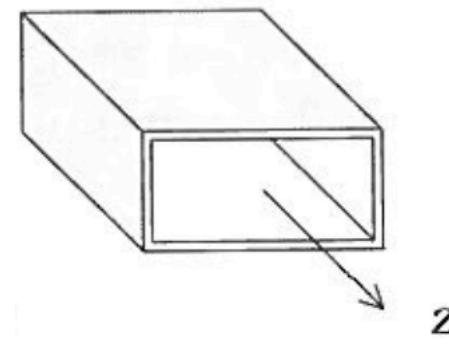


- Les parois sont isolantes

- Pour des fréquences hertziennes ($\lambda = c/v < 1 \text{ m}$ ie $v > 300 \text{ MHz}$), la seule solution pratique fait intervenir des guides d'ondes métalliques dont les dimensions sont comparables à celles des longueurs d'onde mises en jeu
 - Le milieu de propagation est un diélectrique



Guide d'onde circulaire



Guide d'onde rectangulaire

- Ce paragraphe se suit pas le polycopié mais traite les guides d'onde à travers l'exemple du guide rectangulaire
- Remplace deux TD sur le sujet
- On considère des guides de surface parfaitement conductrice, dont la forme et la taille restent constantes selon la direction de propagation Oz . Le guide est rempli d'un diélectrique non dispersif caractérisé par ϵ et μ_0

- En supposant une dépendance en $\exp(-i\omega t)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i \varepsilon \mu_0 \omega \vec{E}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i \omega \vec{B}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- On introduit les composantes transverses du gradient et du laplacien :

$$\vec{\nabla}_t \equiv \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \Delta_t \equiv \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- En calculant $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} \right)$, on montre facilement que :

$$\left(\Delta_t + \varepsilon \mu_0 \omega^2 - k^2 \right) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = \vec{0}$$

Equation d'onde

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

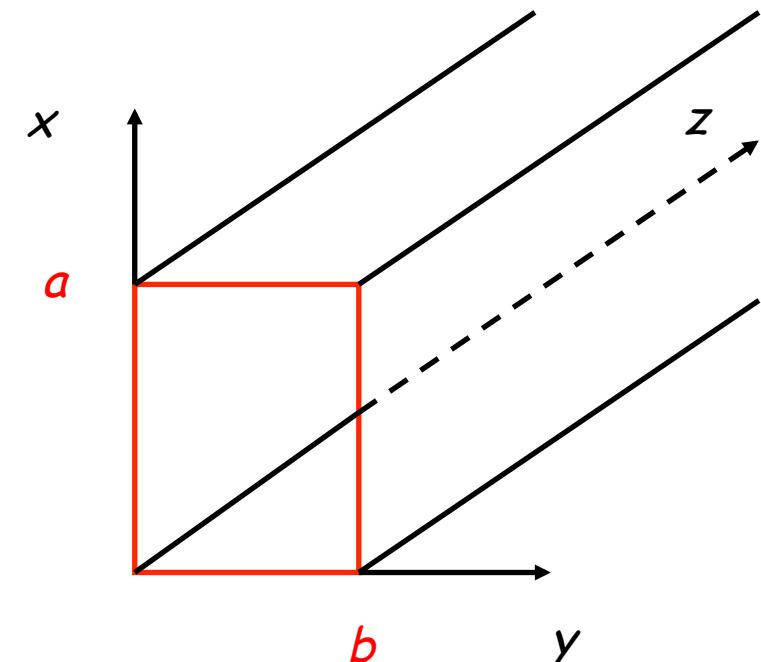
1. Concepts généraux sur les ondes
 2. Ondes électromagnétiques dans le vide
 3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
 4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
 5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
 6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée
1. Généralités sur les guides d'onde
 2. Guides d'ondes rectangulaires
 3. Cas particulier du mode TE_{10} dans un guide rectangulaire
 4. Cavités résonantes

- On va étudier la propagation d'une onde dans un guide rectangulaire aux parois parfaitement conductrices
- Parmi les ondes EM qui peuvent se propager, on étudie à titre d'exemple les ondes particulières :

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y) \exp(i \phi) & \text{avec } \phi = k z - \omega t \\ \vec{B}(x, y) \exp(i \phi) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{E}(x, y) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \\ \vec{B}(x, y) = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z \end{cases}$$

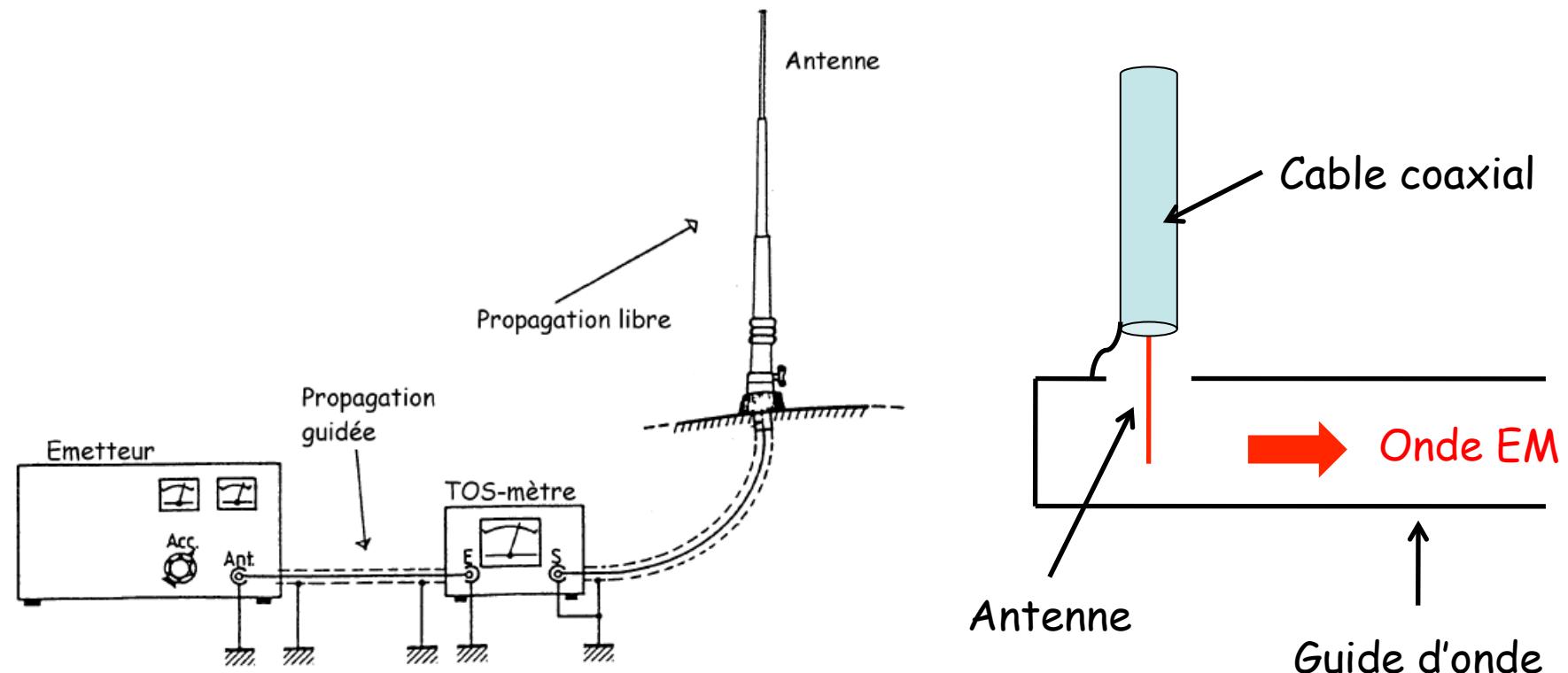


ω est la pulsation imposée par le générateur de puissance

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, y) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \\ \vec{B}(x, y) = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z \end{array} \right.$$

- Ces ondes pour lesquelles $E_z = 0$ sont dites **ondes transverses électriques (TE)**
- Les ondes pour lesquelles $B_z = 0$ sont dites **ondes transverses magnétiques (TM)**
- Les ondes pour lesquelles $E_z = 0$ et $B_z = 0$ sont dites **ondes transverses électriques et magnétiques (TEM)**
- On pourrait montrer que les ondes TE, TM et TEM forment une base sur laquelle on peut projeter tous les modes des guides
- On ne peut pas propager d'onde TEM dans un guide creux possédant une seule surface interne (admis)

Comment imposer une pulsation ω ?



On verra plus tard comment imposer un mode particulier

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = k z - \omega t \\ \vec{E}(x, y) \exp(i \phi) \\ \vec{B}(x, y) \exp(i \phi) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, y) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \\ \vec{B}(x, y) = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z \end{array} \right.$$

- (MF) s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}(x, y) \exp(i \phi)) = - \frac{\partial(\vec{B}(x, y) \exp(i \phi))}{\partial t}$$

- La projection sur l'axe Ox donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i \omega B_x \quad \Rightarrow \quad 0 - i k E_y = i \omega B_x \\ &\Rightarrow \quad E_y = - \frac{\omega}{k} B_x \end{aligned}$$

- La projection sur Oy donne :

$$E_x = \frac{\omega}{k} B_y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = k z - \omega t \\ \vec{E}(x, y) \exp(i \phi) \\ \vec{B}(x, y) \exp(i \phi) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, y) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \\ \vec{B}(x, y) = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z \end{array} \right.$$

- (MA) s'écrit : $\vec{\nabla} \times (\vec{B}(x, y) \exp(i \phi)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\vec{E}(x, y) \exp(i \phi))}{\partial t}$
- La projection sur Ox donne :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c^2} E_x \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - i k B_y = -i \frac{\omega}{c^2} \times \frac{\omega}{k} B_y$$

$$\Rightarrow k \frac{\partial B_z}{\partial y} - i k^2 B_y + i \frac{\omega^2}{c^2} B_y = 0$$
- En posant : $k_t^2 = k_0^2 - k^2$ avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$
 - On obtient finalement : $B_y = \frac{i k}{k_t^2} \frac{\partial B_z}{\partial y}$
 - De même, la projection sur Oy fournirait : $B_x = \frac{i k}{k_t^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}$

- Le champ de l'onde TE ($E_z = 0$) a donc pour composantes :

$$B_y = \frac{i k}{k_t^2} \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

$$B_x = \frac{i k}{k_t^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$E_x = \frac{\omega}{k} B_y = \frac{i \omega}{k_t^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad \text{et} \quad E_y = - \frac{\omega}{k} B_x = \frac{-i \omega}{k_t^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

- La connaissance de B_z suffit à complètement déterminer les champs E et B

- Pour une onde TM ($B_z = 0$), on trouverait que les champs s'expriment uniquement en fonction de E_z

- L'éq. de propagation de B est : $\Delta(\vec{B}(x, y) \exp(i \phi)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\vec{B}(x, y) \exp(i \phi))}{\partial t^2} = \vec{0}$
- En coordonnées cartésiennes et en projetant sur Oz :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} B_z = 0$$

Laplacien transverse 
 $\Delta_t(B_z)$
 $(i k)^2$
 k_0^2

$$\Rightarrow \Delta_t(B_z) + (k_0^2 - k^2) B_z = 0$$


Par définition

- Ou encore : $\Delta_t(B_z) + k_t^2 B_z = 0$ $k_t^2 = k_0^2 - k^2$

- On utilise la méthode de **séparation des variables** : $B_z(x, y) = F(x)G(y)$

$$\Delta_t(B_z) + k_t^2 B_z = 0 \Rightarrow G \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k_t^2 F G = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}_{Cste} + \underbrace{\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}}_{-Cste} + k_t^2 = 0$$

- Par analogie avec des problèmes de corde vibrante, on cherche si on peut choisir une forme telle que :

$$F(x) = A \sin(k'_t x) + B \cos(k'_t x)$$

- On doit résoudre : $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = Cste \times F$

$$\Rightarrow -k_t'^2 F = Cste \times F \Rightarrow Cste = -k_t'^2$$

- Il reste à résoudre : $\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + k_t^2 = k_t'^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + (k_t^2 - k_t'^2) G = 0$
- On cherche également G sous la forme : $G(y) = C \sin(k_t'' y) + D \cos(k_t'' y)$
 $\Rightarrow -k_t''^2 G + (k_t^2 - k_t'^2) G = 0$
- S'il existe une solution sous la forme recherchée de F et G , elle doit vérifier :

$$k_t^2 - k_t'^2 - k_t''^2 = 0$$

$$k_t^2 = k_0^2 - k^2$$

Résumé

$$B_z(x, y) = F(x) G(y)$$

$$F(x) = A \sin(k'_t x) + B \cos(k'_t x)$$

$$G(y) = C \sin(k''_t y) + D \cos(k''_t y)$$

- Si on choisit k'_t et k''_t tels que

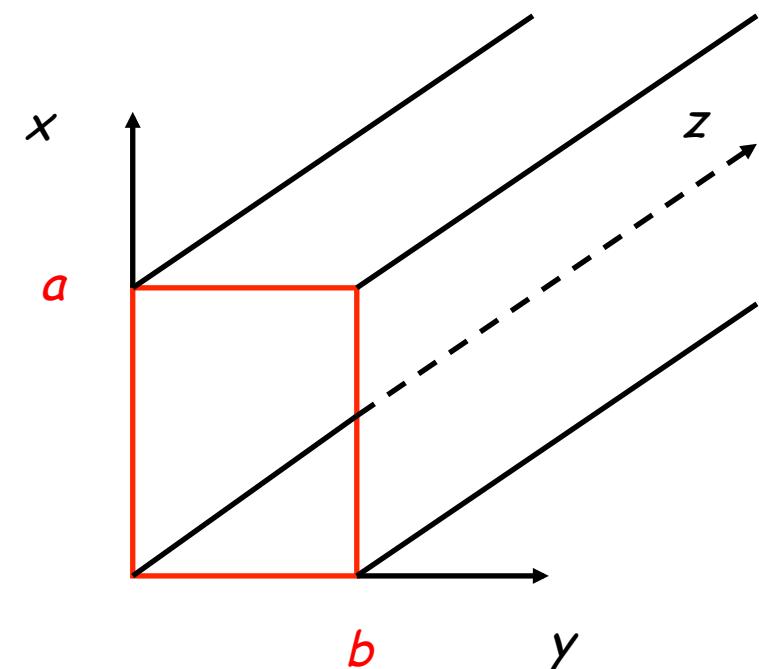
$$k_t^2 - k'^2 - k''^2 = 0 \quad \text{ou} \quad k_0^2 - k^2 - k'^2 - k''^2 = 0$$

alors on peut prendre la forme ci-dessus pour B_z

- Le théorème d'unicité nous dit alors que cette solution est LA solution

Utilisation des conditions aux limites (1/4)

- On doit avoir $E = 0$ dans des parois parfaitement conductrices
- La continuité de la composante tangentielle de E s'écrit ici :
 - $\square E_y = 0$ en $x = 0$ et $x = a$
 - $\square E_x = 0$ en $y = 0$ et $y = b$



Utilisation des conditions aux limites (2/4)

- On a $E_y = 0$ en $x = 0$ et $x = a$ avec :
$$E_y = \frac{-i \omega}{k_t^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad \text{et} \quad B_z(x, y) = F(x) G(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

- Avec la forme de F :

$$F(x) = A \sin(k'_t x) + B \cos(k'_t x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x} = A k'_t \cos(k'_t x) - B k'_t \sin(k'_t x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad k'_t = \frac{m \pi}{a} \quad \leftarrow \quad m : \text{entier quelconque}$$

- Finalement, les CL impliquent que F doit être de la forme :

$$F(x) = B \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right)$$

Utilisation des conditions aux limites (3/4)

- On montrerait de la même façon que la CL sur E_x entraîne que G doit être de la forme :

$$G(y) = D \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \longleftarrow \quad n : \text{entier quelconque}$$

- En résumé, les CL entraînent que $B_z(x, y)$ doit être de la forme :

$$B_0 = B D \quad B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \longleftarrow \quad m, n : \text{entiers quelconques}$$

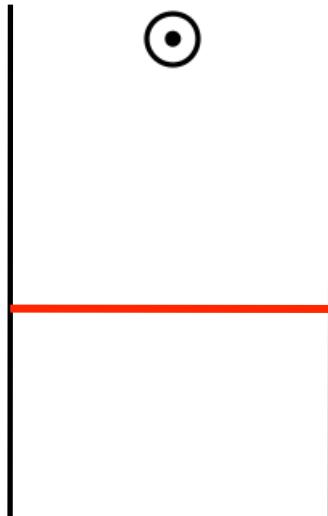
- Chaque couple (m, n) entraîne une onde TE_{mn} différente : $\text{TE}_{01}, \text{TE}_{10}, \text{TE}_{11}, \text{TE}_{21}, \text{TE}_{22}, \dots$
 - On exclut le cas $m = n = 0$ car il ne correspond pas à une propagation

Utilisation des conditions aux limites (4/4)

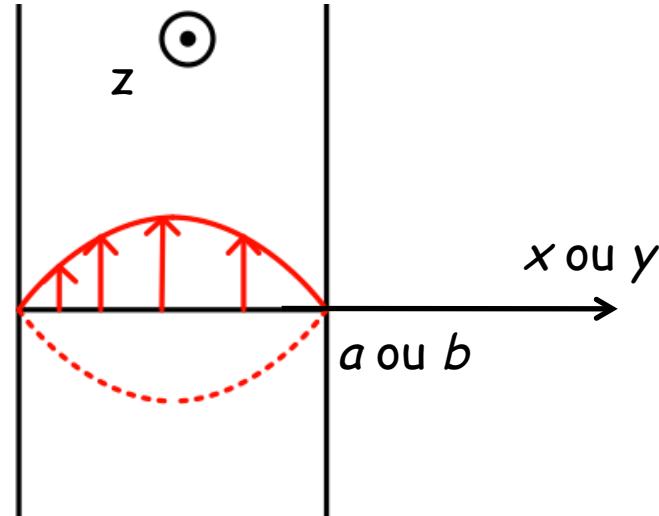
- Pour un guide rectangulaire, on a des ondes TE_{mn} à cause des conditions aux limites dans deux directions différentes
- En généralisant :
 - Pour des plaques parallèles, on aura des ondes TE_m (1 direction)
 - Pour des cavités, on aura des modes TE_{mnp} (3 directions)
- Remarques :
 - Pour une onde TM, on utiliserait la CL sur B orthogonal
 - Pour un guide circulaire, on a également des modes TE_{mn} car il y a deux conditions aux limites ($E_\theta(r=R) = 0$ et $E_z(r=R) = 0$)
 - Tous ces modes TE ont le même comportement si on ne considère qu'une seule dimension (x , y ou z)

Allure des modes TE (forme du champ E)

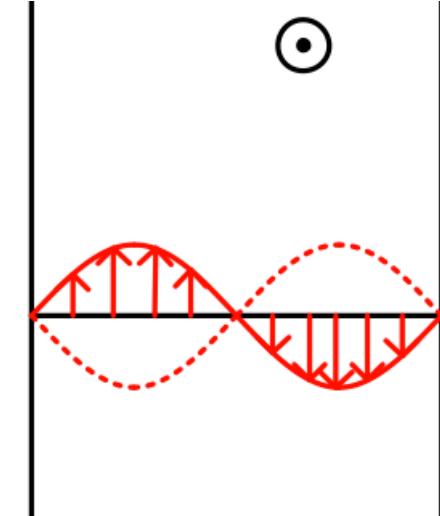
Mode TE_0



Mode TE_1



Mode TE_2

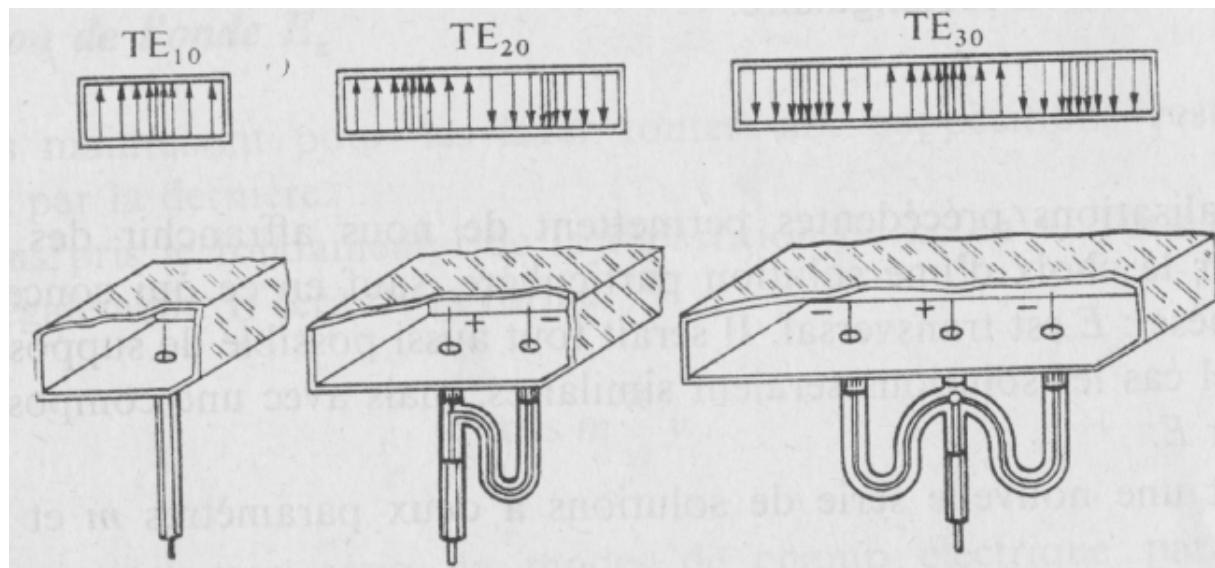


- Mode TE_m

- Un nœud de E sur chacun des plans, et m ventres entre les plans

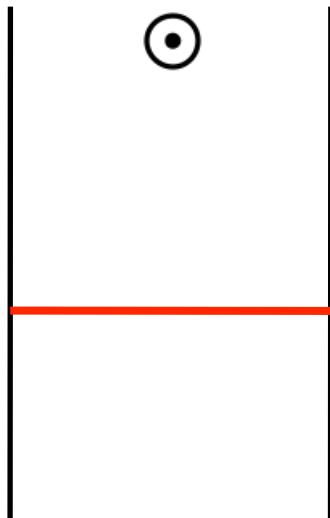
Comment imposer un mode TE ?

- Mode TE_m
 - Un nœud de E sur chacun des plans, et m ventres entre les plans

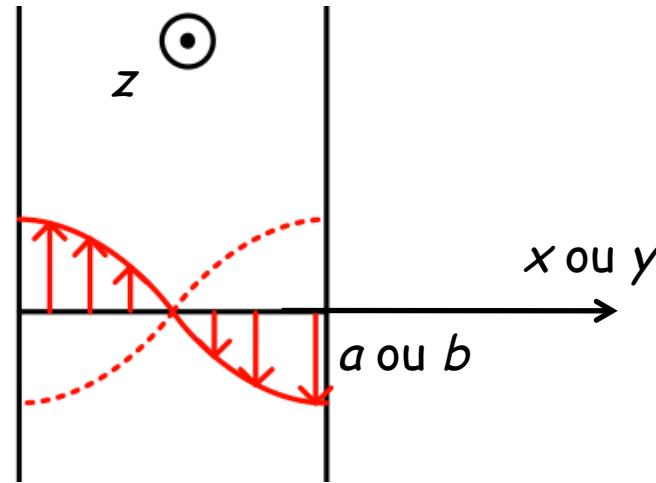


Allure des modes TM (forme du champ B si on avait propagé un tel mode)

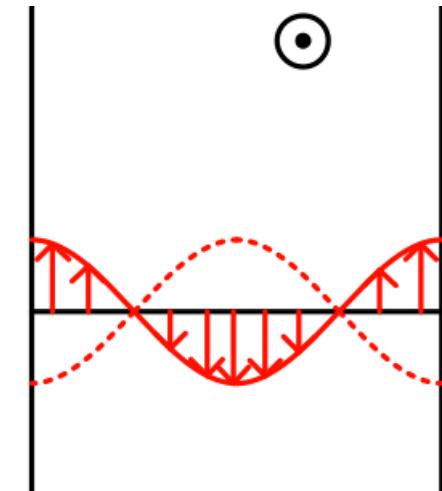
Mode TM_0



Mode TM_1



Mode TM_2



- Mode TM_n :
 - Un ventre de B sur chacun des plans, et n nœuds entre les plans

Condition de propagation (1/3)

- On a :

$$k_t^2 - k_t'^2 - k_t''^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = k_0^2 - k_t'^2 - k_t''^2$$

- La condition de propagation est $k^2 > 0$:

$$\Rightarrow k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

- La condition de propagation est finalement :

$$\omega > \omega_c \quad \text{avec} \quad \omega_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

- Si $\omega < \omega_c$, $k^2 < 0$: il n'y a pas de propagation dans le guide

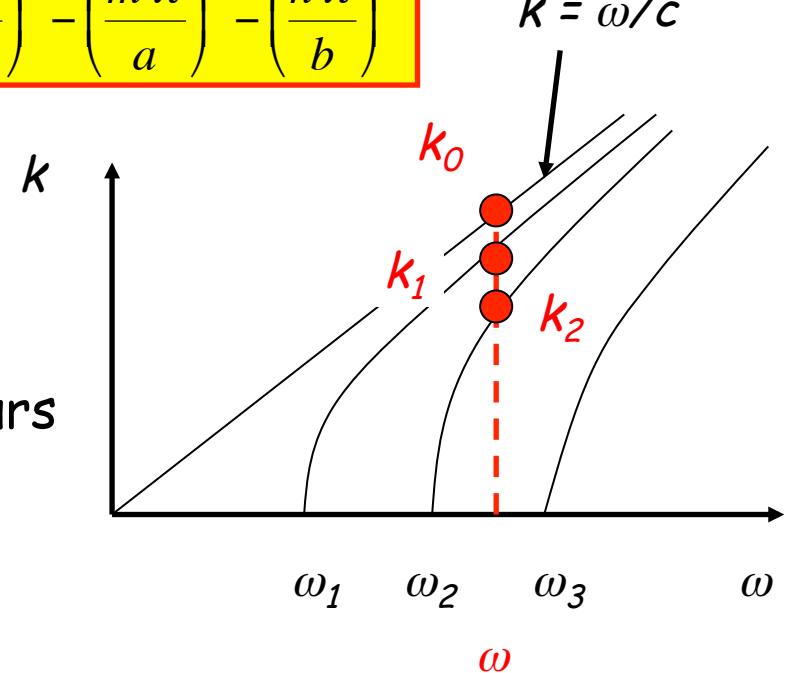
Condition de propagation (2/3)

$$\omega > \omega_c \quad \text{avec} \quad \omega_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$k = \omega/c$$

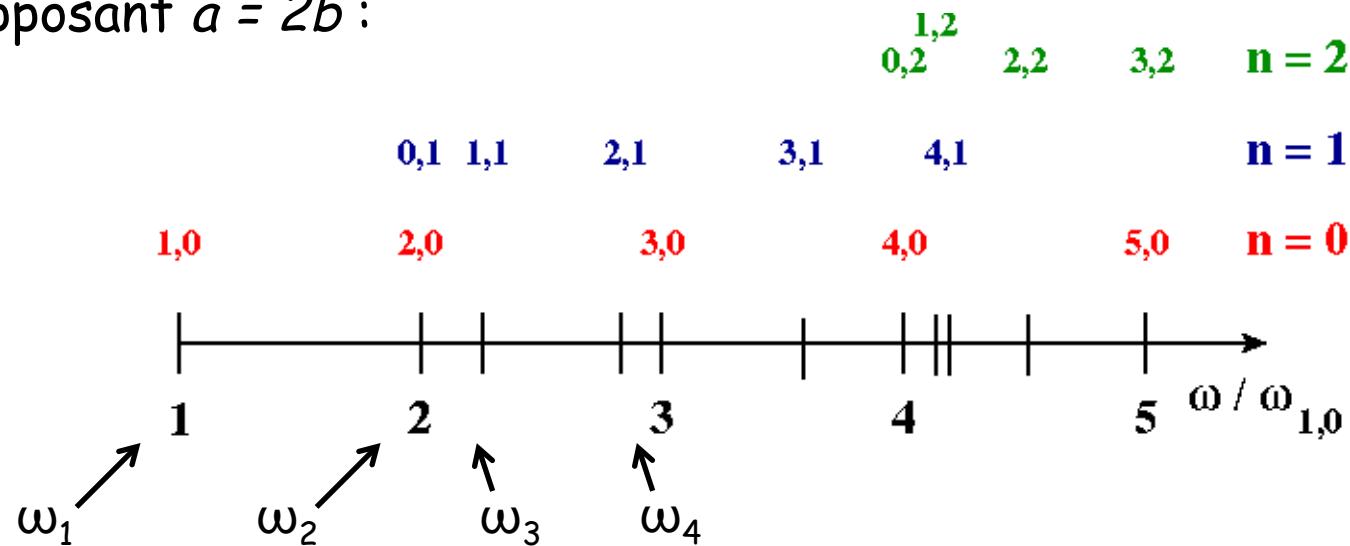
- Une fréquence de coupure ω_i par mode TE_{mn}
- On ordonne les ω_i en fonction des valeurs de m et n (elles dépendent de a et b)
- Sur cet exemple :
 - ω est fixé par le générateur (k_0 serait le mode dans le vide illimité)
 - On propage les modes k_1 et k_2
 - ω_1 est le **1^{er} mode de coupure**
- Noter qu'aucun mode n'est transmis pour $\omega < \omega_1$ (**bande d'arrêt**)



Condition de propagation (3/3)

$$\omega > \omega_c \quad \text{avec} \quad \omega_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

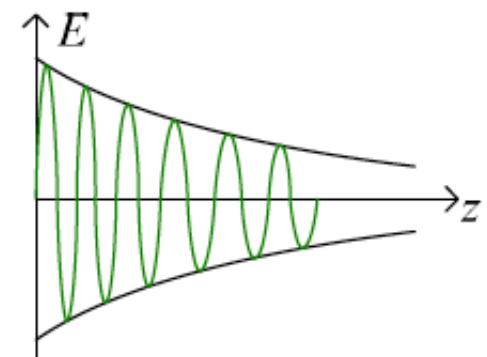
- L'ordre des différents modes de coupure dépend de la géométrie
 - En supposant $a = 2b$:



- On retiendra qu'un guide transmet toujours un nombre fini de modes et agit comme un filtre passe-haut
- On aboutirait aux mêmes conclusions avec les modes TM

Atténuation dans un guide de conductivité finie (1/4)

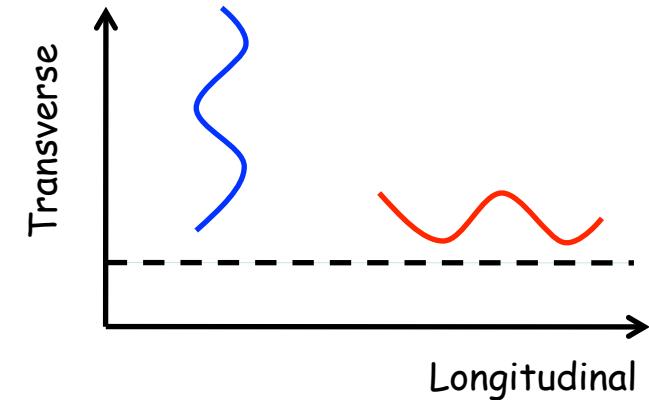
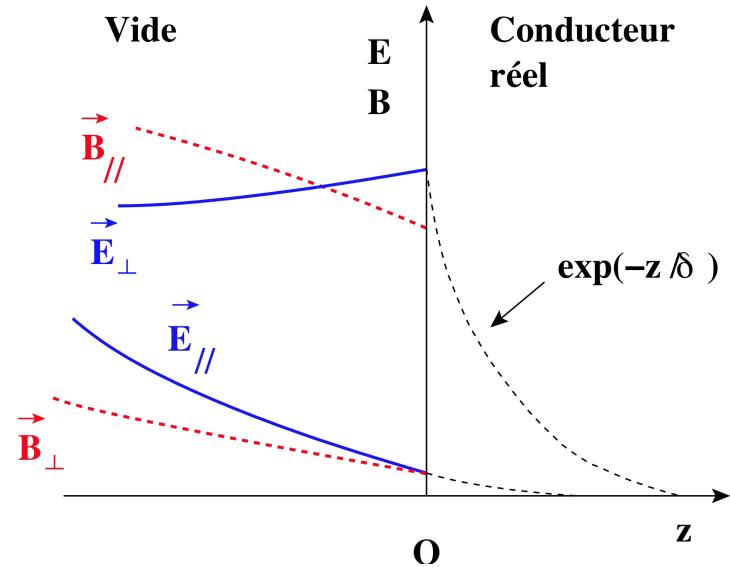
- Dans le guide, l'onde satisfait toujours la même équation d'onde, mais les CL sont différentes
- On aura une onde amortie en $\exp(i(kz - \omega t))$ avec $k = \alpha + i\beta$
- On aura évidemment $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $\beta = \frac{1}{d}$ et pour un bon conducteur, $d \gg \lambda$
- Sur une distance $\Delta z \ll d$, on peut négliger l'amortissement
 - Donc pour $\lambda \ll \Delta z \ll d$, on retrouve le cas de l'absence d'atténuation



Atténuation dans un guide de conductivité finie (2/4)

- Dans le métal, E et B pénètrent un peu
 - On n'a pas forcément un nœud ou un ventre sur la surface
- On peut résumer la propagation dans le métal par :
- Propagation longitudinale :

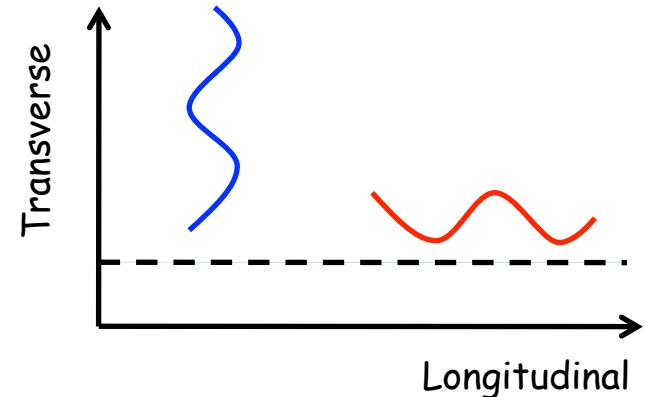
$$k_z = \alpha + i \beta$$



Atténuation dans un guide de conductivité finie (3/4)

- Propagation transverse :

$$k_T = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$



- L'onde se propage selon :

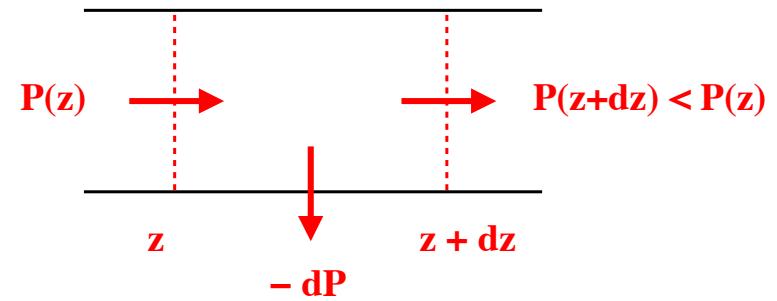
$$\exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)) = \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{z}{d}\right) \exp\left(i\left(\frac{x}{\delta} + \frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t\right)\right)$$

- En ordre de grandeur :

- Pour 1 GHz : $\lambda_0 = 0,3 \text{ m}$
- Cuivre : $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$ donc $\delta = 5 \mu\text{m}$
- Pour le mode TE_{10} (voir plus loin) : $d \approx 400 \text{ m}$
- On a donc $\delta \ll \lambda_0 \ll d$

Atténuation dans un guide de conductivité finie (4/4)

- L'origine de l'atténuation est l'effet Joule dans les parois



- Comme le diélectrique n'absorbe pas, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\oint \vec{R} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Il est naturel de poser que $dP = - K P(z) dz$, soit $P(z) = P_0 \exp(-Kz)$
- Comme $P \propto \vec{E} \times \vec{B} \propto E^2$, E décroît comme $\exp(-Kz/2)$

Choix pratique d'un mode de propagation

- Si on utilise un guide comme ligne de transmission, il faut n'utiliser qu'un seul mode
- TE_{10} est le mode pour lequel la fréquence de coupure est la plus basse. A ω (donc λ) fixé, on choisit donc a de façon à propager TE_{10} , tout en restant en dessous du mode suivant

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
 2. Ondes électromagnétiques dans le vide
 3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
 4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
 5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
 6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée
1. Généralités sur les guides d'onde
 2. Guides d'ondes rectangulaires
 3. Cas particulier du mode TE_{10} dans un guide rectangulaire
 4. Cavités résonantes

- Le mode TE_{10} correspond à $m = 1$ et $n = 0$:

$$k_t^2 = k_t'^2 + k_t''^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \Rightarrow k_t = \frac{\pi}{a}$$

- La longueur d'onde λ de l'onde dans le guide est alors donnée par :

$$k_t^2 = k_0^2 - k^2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_t^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0^2} - \frac{2\pi}{\lambda^2}$$

- Avec : $\lambda_t = \frac{2\pi}{k_t} = 2a$ et $\lambda_0 = 2\pi \frac{c}{\omega} = \frac{c}{v}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_t^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 - \frac{1}{4a^2} \Rightarrow \lambda = \left[\left(\frac{v}{c}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}\right]^{-1/2}$$

Calcul des champs

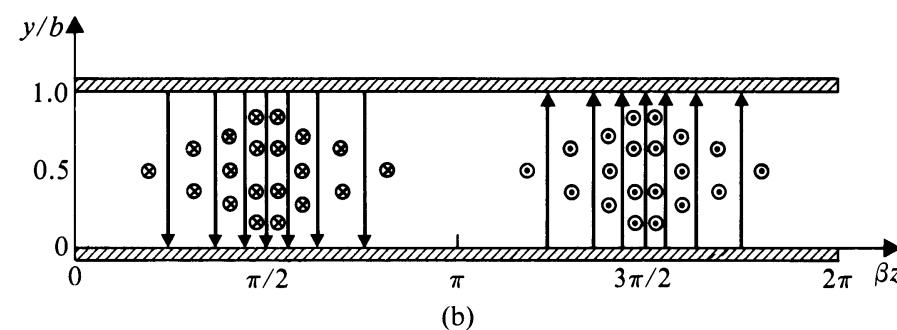
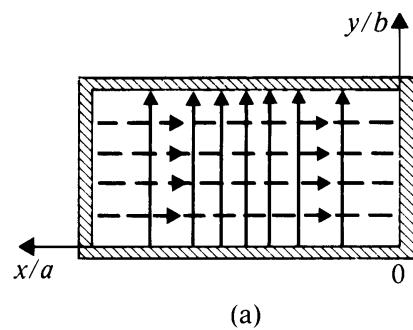
- Pour le mode TE_{10} , on a :

$$B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \Rightarrow B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

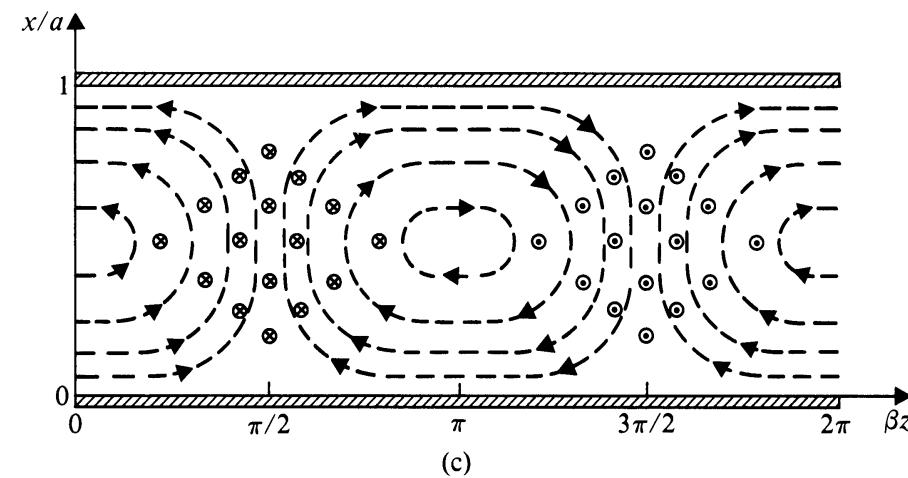
$$\left. \begin{array}{l} B_x = \frac{i k}{k^2 - k_0^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ B_y = \frac{i k}{k^2 - k_0^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B_x = \frac{i k a}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ B_y = 0 \\ B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{cases} \times \exp(i(k z - \omega t))$$

$$\left. \begin{array}{l} E_x = \frac{\omega}{k} B_y \\ E_y = -\frac{\omega}{k} B_x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -i \frac{\omega a}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{cases} \times \exp(i(k z - \omega t))$$

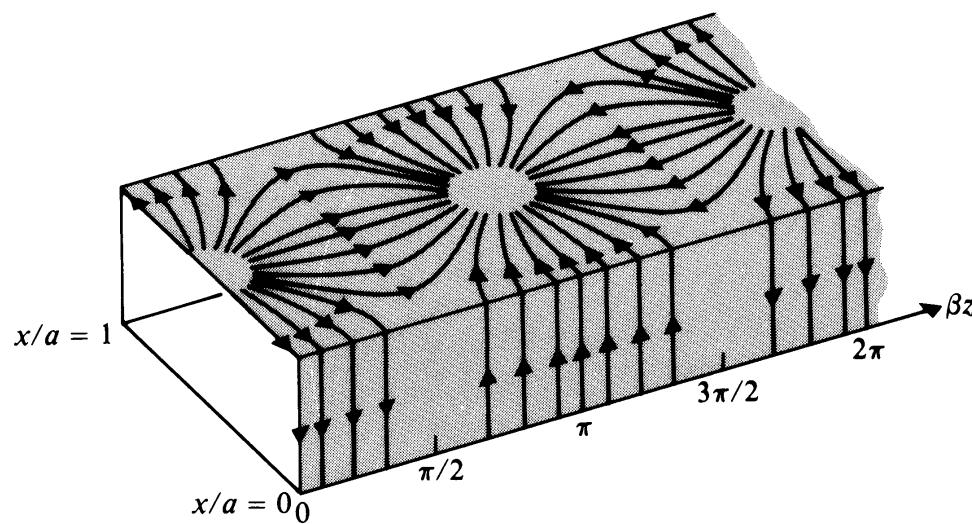
Lignes des champs E et B pour le mode TE_{10}



— Electric field lines
- - - Magnetic field lines



Lignes de courant pour le mode TE_{10}



Puissance transportée par le guide par le mode TE₁₀ (1/2)

- La puissance qui traverse une section transverse du guide s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 & B_x & E_y B_z \\ E_y & 0 & 0 \\ 0 & B_z & -B_x E_y \end{vmatrix}$$

- On ne prend que les parties réelles de B et E . Il reste :

$$\begin{aligned} \vec{R} = & \frac{1}{\mu_0} \frac{\omega a}{\pi} B_0^2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - k z) \cos(\omega t - k z) \vec{u}_x \\ & + \frac{1}{\mu_0} \frac{k a}{\pi} B_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t - k z) \vec{u}_z \end{aligned}$$

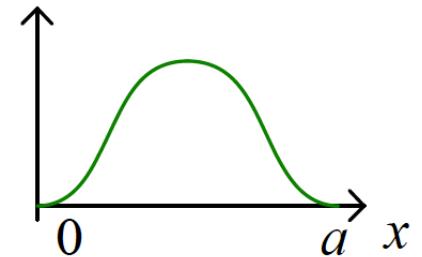
- Le vecteur de Poynting possède une composante transverse, mais sa moyenne temporelle est nulle !

Puissance transportée par le guide par le mode TE₁₀ (2/2)

- En moyennant sur le temps :

Profil de $\langle R \rangle$

$$\langle \vec{R} \rangle_t = \frac{1}{\mu_0} \frac{k a^2 \omega}{2 \pi^2} B_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{u}_z$$



- La puissance transportée devient :

$$P = \int_0^a \int_0^b \langle \vec{R} \rangle_t dx dy = \frac{k a^3 b \omega}{4 \pi^2 \mu_0} B_0^2$$

- Pour TE_{10} , b est moins critique que a , mais intervient néanmoins de deux façons :
 - Dans les pertes par effet de peau dans les parois : le rapport $b/a=1/2$ est un bon compromis
 - Dans la limitation de la puissance maximum transportée : lorsque le champ E devient trop élevé, il y a claquage dans le diélectrique (souvent de l'air) et ceci s'évite en diminuant la puissance par unité de surface, c'est-à-dire en augmentant la surface (donc en augmentant b à a fixé).

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

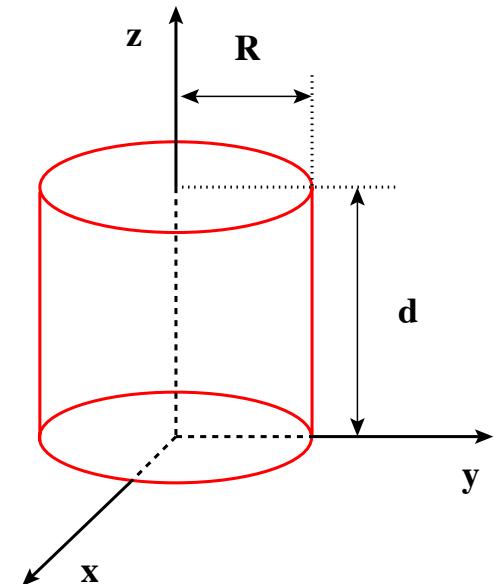
1. Concepts généraux sur les ondes
 2. Ondes électromagnétiques dans le vide
 3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
 4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
 5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
 6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée
1. Généralités sur les guides d'onde
 2. Guides d'ondes rectangulaires
 3. Cas particulier du mode TE_{10} dans un guide rectangulaire
 4. Cavités résonantes

- Une cavité est un guide d'onde fermé à ses extrémités par des surfaces en $z = 0$ et $z = d$, supposées perpendiculaires à l'axe du guide
- On considère une onde TM

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, y) \exp(i \phi) \quad \text{avec} \quad \phi = k z - \omega t \\ \vec{B}(x, y) \exp(i \phi) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, y) = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z \\ \vec{B}(x, y) = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y \end{array} \right.$$

- En utilisant la méthode de séparation des variables, on écrit :

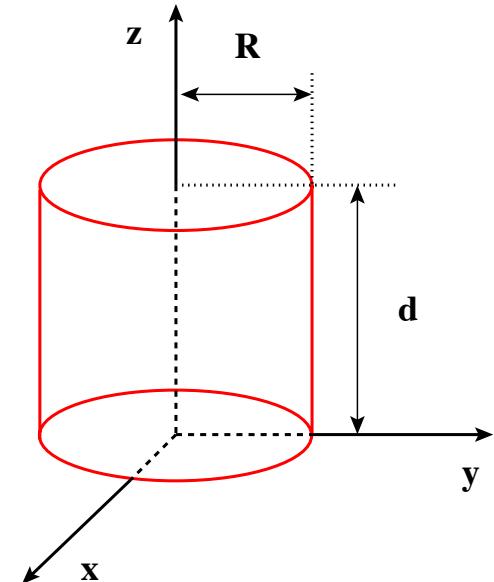
$$E_z(r, \theta, z, t) = F(\theta) G(r) H(z) \exp(-i \omega t)$$



$$E_z(r, \theta, z, t) = F(\theta) G(r) H(z) \exp(-i \omega t)$$

- L'équation se résout en coordonnées cylindriques. On obtient :

$$\frac{G''}{G} + \frac{1}{r} \frac{G'}{G} + \frac{1}{r^2} \frac{F''}{F} + \frac{H''}{H} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$



- Cette équation est la somme de termes dépendants de r et de θ . Elle ne peut être satisfaite que si :

$$\frac{F''}{F} = -m^2 \quad \text{soit} \quad F(\theta) = \exp(\pm i m \theta) \quad \text{ou} \quad F(\theta) = \cos(m \theta + \varphi_m)$$

- Ici, m doit être entier à cause de la symétrie wrt θ
- Comme précédemment, en z : $H(z) = Cste \times \cos\left(\frac{p \pi}{d} z\right)$

$$\frac{G''}{G} + \frac{1}{r} \frac{G'}{G} + \frac{1}{r^2} \frac{F''}{F} + \frac{H''}{H} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

- L'équation en r devient alors :

$$r^2 G'' + r G' - m^2 G + r^2 \gamma^2 G = 0 \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{d^2}$$

- En posant $\xi = \gamma r$:

$$\frac{d^2 G}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dG}{d\xi} + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2}\right) G = 0$$

Equation de Bessel
d'ordre m

- La solution est de la forme :

$$G(\xi) = A J_m(\xi) + B N_m(\xi)$$

- En étudiant la limite $r \rightarrow 0$, on voit qu'on doit avoir $B = 0$, soit :

$$G(\xi) = A J_m(\xi)$$

Résolution des équations de Bessel (1/2)

- Equation de Bessel d'ordre m :

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0$$

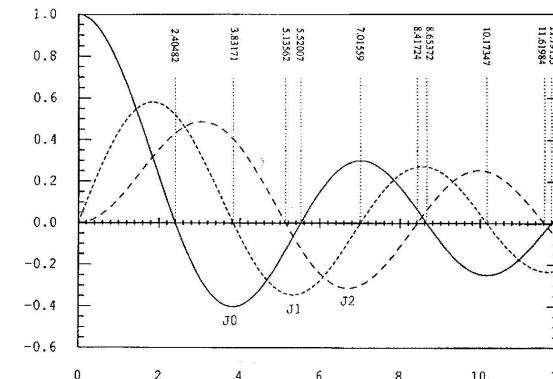
- Lorsque m est entier, la solution est une combinaison linéaire de **fonctions de Bessel** $J_m(x)$ et de **fonctions de Neumann** $N_m(x)$ (fonctions tabulées) :

$$R(x) = A J_m(x) + B N_m(x)$$

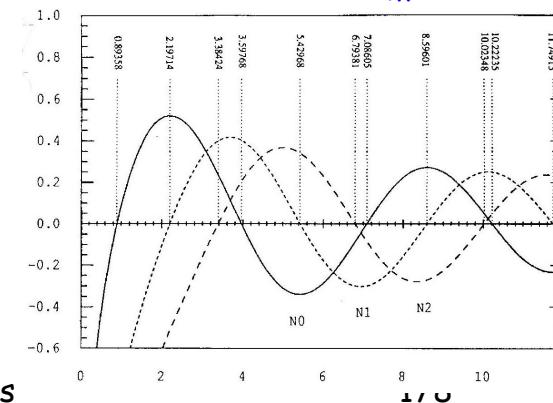
- Lorsque m n'est pas entier, la solution est une combinaison linéaire de $J_m(x)$ et $J_{-m}(x)$:

$$R(x) = A J_m(x) + B J_{-m}(x)$$

Les 1^{res} fonctions de Bessel $J_m(x)$



Les 1^{res} fonctions de Neumann $N_m(x)$



Résolution des équations de Bessel (2/2)

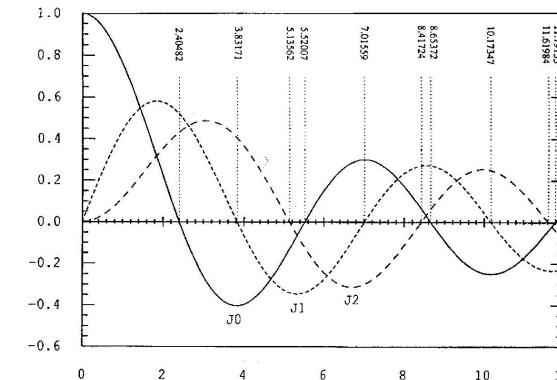
- Les fonctions de Bessel $J_m(x)$ sont régulières à l'origine et ont un nombre infini de racines. Il en est de même pour les fonction $J'_m(x)$:

m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}
0	2,405	5,520	8,654
1	3,832	7,016	10,173
2	5,136	8,417	11,620

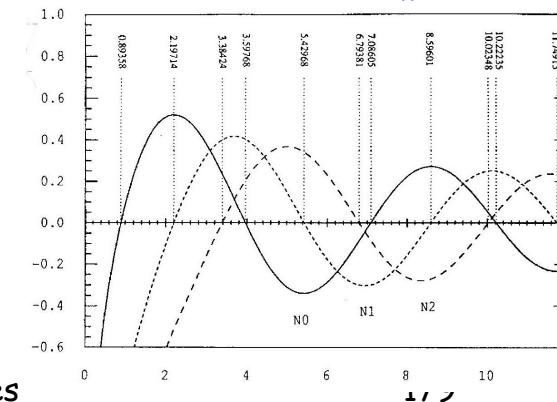
m	$x'^{'}_{m1}$	$x'^{'}_{m2}$	$x'^{'}_{m3}$
0	3,832	7,016	10,173
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,706	9,970

- Les fonctions de Neumann $N_m(x)$ ne sont pas régulières à l'origine

Les 1^{res} fonctions de Bessel $J_m(x)$



Les 1^{res} fonctions de Neumann $N_m(x)$



- La CL est que $E_z(\text{surface}) = 0$, soit $J_m(rR) = 0$
- En notant x_{mn} le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction $J_m(x)$ (ie la $n^{\text{ième}}$ racine de $J_m(x) = 0$), on a :

$$\gamma_{mn} R = x_{mn} \quad \text{soit} \quad \gamma_{mn} = \frac{x_{mn}}{R} \quad \text{ou}$$

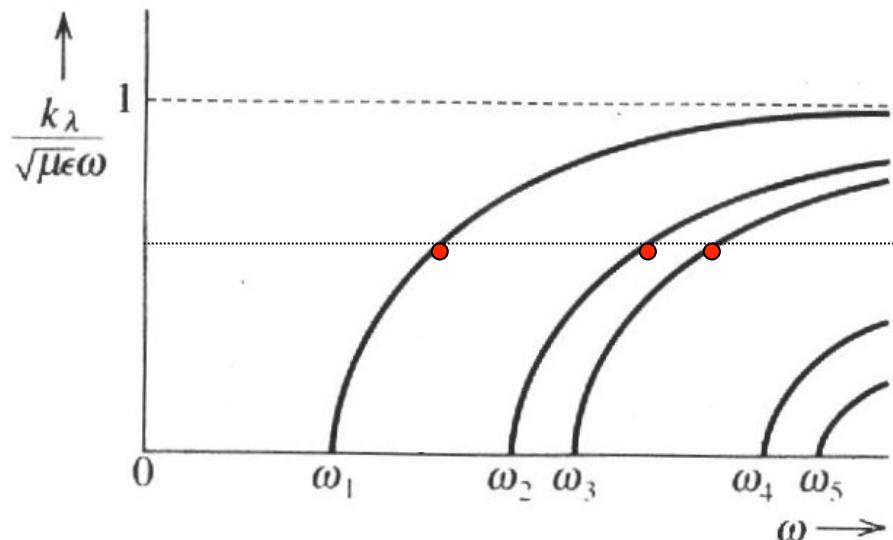
- Finalement :
- $$E_z(r, \theta, z, t) = E_0 J_m\left(\frac{r x_{mn}}{R}\right) \cos(m \theta + \varphi_m) \cos\left(\frac{p \pi}{d} z\right) \exp(-i \omega t)$$
- Les fréquences pouvant exister dans la cavité (**fréquences de résonance**) sont :

$$\frac{\omega_{mnp}}{c} = \sqrt{\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2}}$$

$$\frac{\omega_{mnp}}{c} = \sqrt{\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2}}$$

- Le 1^{er} mode correspond à TM₀₁₀ : $\omega_{010} = c \frac{2,405}{R}$

- Les fréquences de résonance forment un ensemble infini et discret



Cas du mode TE

- On pourrait montrer qu'on a cette fois :

$$B_z(r, \theta, z, t) = B_0 J_m\left(\frac{r x'_{mn}}{R}\right) \cos(m \theta + \varphi_m) \cos\left(\frac{p \pi}{d} z\right) \exp(-i \omega t)$$

en notant x'_{mn} le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction $J'_m(x)$ (ie la $n^{\text{ième}}$ racine de $J'_m(x) = 0$), on

- Les fréquences de résonance s'écrivent : $\frac{\omega_{mnp}}{c} = \sqrt{\frac{x'^2_{mn}}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2}}$
- Et le 1^{er} mode correspond à TE_{111} : $\frac{\omega_{111}}{c} = \frac{1,841}{R} \sqrt{1 + 2,912 \frac{R^2}{d^2}}$
- Pour $d > 2,03 R$, ω_{111} du mode TE est inférieure à ω_{010} du mode TM.
 ω_{111} est donc **l'oscillation fondamentale** de la cavité (réglage ou **accordage** possible en jouant sur d/R)

Facteur Q d'une cavité

- Les cavités résonantes possèdent un spectre discret de fréquences d'oscillation. A chaque fréquence de résonance correspond une configuration bien précise des champs
 - On s'attend donc à ce qu'en tentant d'exciter un mode précis, aucun champ n'apparaîsse dans la cavité tant que la fréquence n'est pas exactement la fréquence de résonance ω_0 choisie
 - On observe dans la pratique une étroite bande centrée autour de la fréquence d'oscillation théorique ω_0 (due à la dissipation dans les parois)
- La mesure qualitative de la sélectivité de la réponse de la cavité à une excitation extérieure est donnée par le **facteur Q** :

$$Q = \frac{\text{Energie emmagasinée}}{\text{Puissance dissipée}}$$

ω_0 : fréquence de résonance
en l'absence de pertes

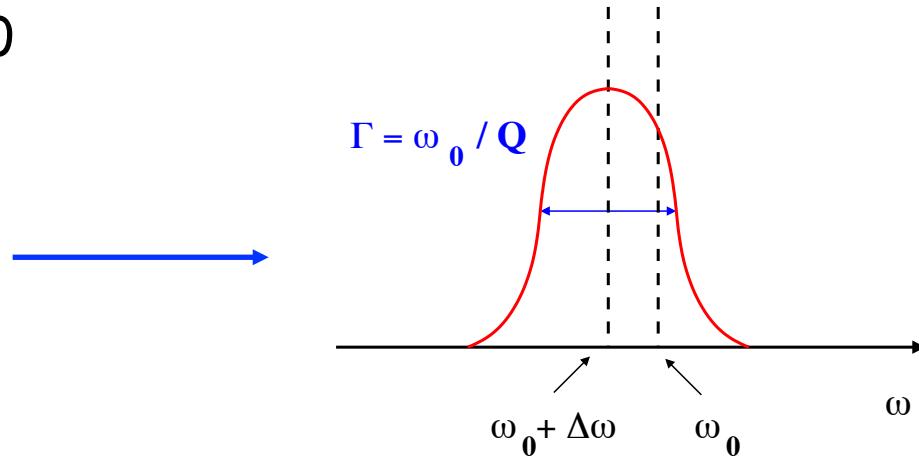
Energie stockée (1/2)

- On note U l'énergie stockée dans la cavité. La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} U \quad \text{ie} \quad U(t) = U_0 e^{-\omega_0 t/Q}$$

- On peut montrer que : $Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$
- Typiquement $Q \approx 100$ à 10000

Courbe de résonance de la puissance stockée en fonction de la fréquence ω



Energie stockée (2/2)

- À un facteur géométrique près, Q est le rapport du volume occupé par le champ sur le volume du conducteur dans lequel pénètrent les champs en raison de la conductivité finie des parois
- Pour les grandes valeurs de ω , on a :

$$\Delta\omega \approx -\frac{\omega_0}{2Q}$$

- Décalage de la fréquence de résonance ω_0 dû aux pertes ohmiques (qui diminuent toujours la fréquence)

