Plan de l'annexe « Rappels mathématiques »

1. Formes différentielles
2. Outils mathématiques
3. Systèmes de coordonnées
4. Résolution de l'équation de Bessel
5. Quelques notions sur l'analyse de Fourier

Quelques formules vectorielles utiles

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\psi\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \,.(\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \,.\vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \,.\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \,.\vec{b})\,\vec{c}$$

A savoir

$$\vec{a} \,.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \,.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \,.(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{\nabla} \,.(\psi\,\vec{a}) = \vec{a} \,.\vec{\nabla}\psi + \psi\,\vec{\nabla} \,.\vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\psi\,\vec{a}\right) = \vec{\nabla}\psi \times \vec{a} + \psi\,\vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Pour mémoire

Passage d'une formulation locale à une formulation intégrale (et vice-versa)

- Circulation conservative (contour fermé C) :

$$\oint_{(C)} \vec{h}\,.d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{h} = \vec{\nabla}(f)$$

- Flux conservatif (surface S fermée) :

$$\oiint_{(S)} \vec{g}\,.d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\,.\vec{g} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Formulation intégrale	Formulation différentielle en champ	Formulation différentielle en potentiel

Quelques théorèmes utiles

- Le volume *(V)* est entouré par la surface fermée *(S)* de normale sortante $\vec{n}$

$$\iiint_{(V)} \vec{\nabla}\,.\vec{A}\,dV = \oiint_{(S)} \vec{A}\,.\vec{n}\,dS \longleftarrow$$

Théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski

- Le contour *(C)* délimite la surface ouverte *(S)*. La normale $\vec{n}$ à *(S)* définit le sens positif du parcours sur *(C)* via la règle du tire-bouchon

$$\iint_{(S)} \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right).\vec{n}\,dS = \oint_{(C)} \vec{A}\,.d\vec{l} \longleftarrow$$

Théorème de Stokes

Problème d'unicité : cas d'un champ scalaire

- Soit un champ scalaire *f* vérifiant, en tout point d'un volume (*V*) limité par une surface (*S*) fermée, $\Delta f = \phi(\vec{r})$, où φ est définie en tout point, sans singularité

- La solution *f* est alors unique si :
  - *f* est connue en chaque point de (S) : conditions de Dirichlet
  - $\vec{n}\,.\vec{\nabla}(f)$ est connue en chaque point de (S) : conditions de Neumann
  - *f* est connue sur une partie de (S), et $\vec{n}\,.\vec{\nabla}(f)$ sur la partie complémentaire

- Ceci reste vrai si (*V*) est l'espace entier, à condition que *f* s'annule en dehors d'une portion finie de l'espace et que *φ(r)* tende vers 0 à l'infini au moins comme 1/r

Problème d'unicité : cas d'un champ vectoriel

- Soit un champ vectoriel *A* tel que, en tout point d'un volume (V) limité par une surface (S) fermée, $\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} = D$ et $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{R}$ soient définis sans singularité

- La solution *A* est alors unique si on connaît $\vec{n}\,.\,\vec{A}$ en chaque point de (S) (conséquence du théorème d'Helmholtz)

$$\vec{A} = -\vec{\nabla} v + \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad \text{avec} \quad v(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi} \iiint \frac{D(\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|}\, dV \quad \text{et} \quad \vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi} \iiint \frac{\vec{R}(\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|}\, dV$$

- Ceci reste vrai si (*V*) est l'espace entier, à condition que *D=0* et *R=0* en dehors d'une portion finie de l'espace et que *A(r)* tende vers 0 à l'infini au moins comme $1/r^2$

Dérivation sous le symbole d'intégration

- On considère une fonction *I(x)* : $I(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$

- Si *a* et *b* dépendent de *x* :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x,t)\, dt\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt + f(x,b)\,\frac{db}{dx} - f(x,a)\,\frac{da}{dx}$$

- Si *a* et *b* ne dépendent pas de *x* :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x,t)\, dt\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt$$

  - *I* est continûment dérivable si *f* admet une dérivée partielle continue

Systèmes de coordonnées

- Connaître les expressions des laplaciens, divergence, .. en coordonnées cartésiennes uniquement
  - Dans les autres systèmes de coordonnées, se référer au polycopié de TD/cours

- Le laplacien vectoriel intervient en électromagnétisme. Ces coordonnées ne sont égales au laplacien des coordonnées du vecteur que pour les coordonnées cartésiennes et la coordonnée *z* du système cylindrique. Dans le cas général, on doit utiliser :

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \, . \, \vec{A}\right) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$$

Reprendre l'expression du polycopié de TD !