הצעות לפתרון מבחן במבוא ללוגיקה – מועד א'

8.יולי.2021   מרצה: אורן בן-צבי   מתרגל: חאתם עדוי

שאלה 1:

הוכיחו/ הפריכו (בקצרה):

א) $\forall x(\varphi \to \psi), \forall x(\neg\psi) \vdash^{v} \forall x(\neg\varphi)$ נכון.

ב) $\forall x(\varphi \to \psi), \forall x(\neg\varphi) \vdash^{v} \forall x(\neg\psi)$ לא נכון

ג) $\forall x(\varphi \lor \psi) \vdash^{v} \forall x(\varphi) \lor \forall x(\psi)$ לא נכון

ד) $\forall x(\varphi \lor \psi) \vdash^{v} \exists x(\varphi)$ לא נכון

ה) $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), (\neg\varphi(a)) \vdash^{v} \neg\psi(a)$ לא נכון

ו) $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x(\varphi(x)) \vdash^{v} \exists x(\psi(x))$ נכון

ז) $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)), \exists x(\psi(x)) \vdash^{v} \exists x(\varphi(x))$ לא נכון

ח) $\exists x(\varphi) \lor \exists(\psi) \vdash^{v} \exists x(\varphi \lor \psi)$ נכון

דוגמאות לפתרונות מלאים:

ה) נגדיר מבנה בו φ בתור "מתחלק ב-4" ועל ψ בתור "זוגי", עוד נגדיר $a = 2$. המבנה הוא מודל שלשתי הנוסחאות משמאל אבל לא מודל של הנוסחה מימין.

ו) יהי M מודל של שתי הנוסחאות משמאל, ויהי $d \in D$ כך שמתקיים $\varphi(d)$, הנוסחה השנייה משמאל מבטיחה שיש $d \in D$ כזה. על פי הנוסחה הראשונה משמאל, לכל איבר x מתקיים $\varphi(x) \to \psi(x)$ ובפרט עבור $x = d$ מתקיים $\varphi(d) \to \psi(d)$. אבל עפ"י הגדרת מבנה מספר נוסחה עם $\to$, אם $\varphi(d)$ נכון וגם $\varphi(d) \to \psi(d)$ אז בהכרח $\psi(d)$, ולכן גם $\exists x(\psi(x))$.

שאלה 2:

(אחת הגרסאות של סילוגיזם היפותטי), הטענה הבאה: $(q \to r) \vdash_{HPC} (p \to q) \to (p \to r)$,

בנו סדרת הוכחה סינטקטית – כלומר, הוסיפו או השלימו פסוקים ונימוקים לפי הצורך.

1. $\big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big) \to \Big((q \to r) \to \big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)\Big)$ אקסיומה 1

2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ אקסיומה 2

3. $(q \to r) \to \big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)$ $MP(1,2)$

4. $(q \to r) \to \big((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big) \to \Big(\big((q \to r) \to (p \to (q \to r))\big) \to \big((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)\Big)$ אקסיומה 2

5. $\big((q \to r) \to (p \to (q \to r))\big) \to \big((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))\big)$

$MP(3,4)$

6. $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ אקסיומה 1
7. MP(5,6) $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
8. הנחה $q \to r$
9. MP(7,8) $(p \to q) \to (p \to r)$

שאלה 3:

יהיו φ, ψ נוסחאות, α, β טאוטולוגיות ו - τ סתירה. הוכיחו או הפריכו (בקצרה):

1. אם נציב את α במקום כל משתנה ב - φ נקבל טאוטולוגיה. לא נכון – למשל $\varphi = \neg p$.
2. אם נציב את τ במקום כל משתנה ב - φ נקבל סתירה. לא נכון – למשל $\varphi = \neg p$.
3. אם נציב את α או את β במקום כל משתנה ב - φ או ב – ψ נקבל טאוטולוגיה או סתירה. נכון – נקבל נוסחה ללא משתנים, לכן ערכה לא תלוי בהשמות.
4. אם $\{\alpha, \beta, \neg\tau\} \vdash_{CPL} \varphi$, אז φ טאוטולוגיה. נכון – שלוש ההנחות הן טאוטולוגיות – לכן לא נסתרות עבור שום השמה.
5. $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \neg\tau\} \vdash_{CPL} \varphi \leftrightarrow \Gamma \vdash_{CPL} \varphi$. נכון – מאותה סיבה כמו הסעיף הקודם.

שאלה 4:

בשאלה זו נתייחס לחתימת הגיאומטריה בה קבוצות הקבועים והפונקציות ריקות:

$$L_{Geom} = Predicate\colon\ =^2, Line^1, Point^1, On^2, Between^3$$

נגדיר מבנים:

$$M_1 = \langle \mathbb{N}, I_1 \rangle\colon I_1(=^2) = '=', I_1(Line^1) = \{0\}, I_1(Point^1) = \{1\},$$

$$I_1(On^2) = \{(x,y) | x+1 = y\}, I_1(Between^3) = \{(x,y,z) | xy = z\}$$

$$M_2 = \langle \mathbb{N}, I_2 \rangle\colon I_2(=^2) = '=', I_2(Line^1) = \{0\}, I_2(Point^1) = ODD,$$

$$I_2(On^2) = \{(x,y) | 2x = y\}, I_2(Between^3) = \{(x,y,z) | xy = z\}$$

עבור כל אחת מהנוסחאות הבאות, כתבו האם נכונה או לא בכל אחד מהמבנים.

1. $\forall x \forall y \big(Line(x) \wedge Point(y) \to On(x,y)\big)$ M_1
2. $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \left(\begin{pmatrix} On(x,y) \wedge On(y,z) \wedge Between(x,z,u) \wedge \\ Between(y,y,v) \end{pmatrix} \to \big(On(u,v)\big) \right)$ M_1
3. $\exists p \forall x \forall y \Big(\neg\big(Point(x) \vee Point(y)\big) \to \Big(\neg\big(Between(x,y,p)\big)\Big)\Big)$ M_1, M_2
4. $\forall x \forall y \Big(\big(On(x,y)\big) \to \Big(\neg\big(Point(y)\big)\Big)\Big)$ M_2
5. $\forall x \forall y \forall z \Big(\big(On(x,y) \wedge On(y,z)\big) \to \Big(\neg\big(Point(z)\big)\Big)\Big)$ M_1, M_2