

La Chaîne Numérique d'un Modèle de Trafic Routier

Du Problème Physique à la Simulation Numérique

Analyse du code source

November 13, 2025

Le monde réel :

- Des millions de véhicules
- Comportements complexes (accélération, freinage)
- Interactions entre différents types de véhicules (voitures, motos)
- Formation d'embouteillages, ondes de choc

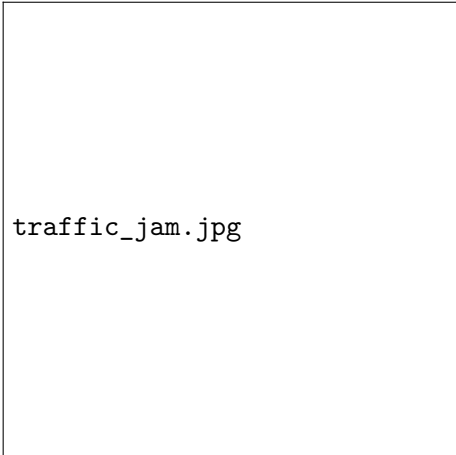
Le Défi : Modéliser le Trafic Routier

Le monde réel :

- Des millions de véhicules
- Comportements complexes (accélération, freinage)
- Interactions entre différents types de véhicules (voitures, motos)
- Formation d'embouteillages, ondes de choc

La question :

- Comment prédire l'évolution du trafic ?
- Comment comprendre la formation des congestions ?



traffic_jam.jpg

Image conceptuelle

L'Approche : Le Trafic comme un Fluide

Au lieu de suivre chaque véhicule (approche **microscopique**), nous traitons le trafic comme un fluide continu (approche **macroscopique**).

Variables Clés :

- $\rho(x, t)$: Densité de véhicules (veh/km)
- $v(x, t)$: Vitesse moyenne des véhicules (km/h)

L'Approche : Le Trafic comme un Fluide

Au lieu de suivre chaque véhicule (approche **microscopique**), nous traitons le trafic comme un fluide continu (approche **macroscopique**).

Variables Clés :

- $\rho(x, t)$: Densité de véhicules (veh/km)
- $v(x, t)$: Vitesse moyenne des véhicules (km/h)

L'Objectif :

- Décrire l'évolution de ρ et v dans l'espace (x) et le temps (t) à l'aide d'équations mathématiques.

fluid_flow.jpg

Le Modèle ARZ pour Deux Classes de Véhicules

Le code implémente un modèle de type Aw-Rascle-Zhang (ARZ) pour deux classes : motos (m) et voitures (c).

Le système d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m v_m)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_c v_c)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial w_m}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_m}{\tau_m} \\ \frac{\partial w_c}{\partial t} + v_c \frac{\partial w_c}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_c}{\tau_c}\end{aligned}$$

Variables :

- ρ_m, ρ_c : Densités des motos et voitures.
- w_m, w_c : Variables de "momentum" ou d'anticipation. $w = v + p(\rho)$.
- v_m, v_c : Vitesses réelles.
- V_e : Vitesse à l'équilibre (le "désir" des conducteurs).

Le Modèle ARZ pour Deux Classes de Véhicules

Le code implémente un modèle de type Aw-Rascle-Zhang (ARZ) pour deux classes : motos (m) et voitures (c).

Le système d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m v_m)}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial w_m}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_m}{\tau_m} \\ \frac{\partial w_c}{\partial t} + v_c \frac{\partial w_c}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_c}{\tau_c}\end{aligned}$$

Variables :

- ρ_m, ρ_c : Densités des motos et voitures.
- w_m, w_c : Variables de "momentum" ou d'anticipation. $w = v + p(\rho)$.
- v_m, v_c : Vitesses réelles.
- V_e : Vitesse à l'équilibre (le "désir" des conducteurs).

Le Modèle ARZ pour Deux Classes de Véhicules

Le code implémente un modèle de type Aw-Rascle-Zhang (ARZ) pour deux classes : motos (m) et voitures (c).

Le système d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m v_m)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w_c}{\partial t} + v_c \frac{\partial w_c}{\partial x} = \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_c}{\tau_c}$$

Variables :

- ρ_m, ρ_c : Densités des motos et voitures.
- w_m, w_c : Variables de "momentum" ou d'anticipation. $w = v + p(\rho)$.
- v_m, v_c : Vitesses réelles.
- V_e : Vitesse à l'équilibre (le "désir" des conducteurs).

Le Modèle ARZ pour Deux Classes de Véhicules

Le code implémente un modèle de type Aw-Rascle-Zhang (ARZ) pour deux classes : motos (m) et voitures (c).

Le système d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m v_m)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_c v_c)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial w_m}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_m}{\tau_m} \\ \frac{\partial w_c}{\partial t} + v_c \frac{\partial w_c}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_c}{\tau_c}\end{aligned}$$

Variables :

- ρ_m, ρ_c : Densités des motos et voitures.
- w_m, w_c : Variables de "momentum" ou d'anticipation. $w = v + p(\rho)$.
- v_m, v_c : Vitesses réelles.

Comprendre les Équations (1/2)

1. Conservation de la Masse (Densité)

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}} = 0$$

Variation de la densité dans le temps Variation du flux dans l'espace

- C'est une loi de conservation fondamentale.
- **Intuition** : Le nombre de véhicules ne change pas, ils ne font que se déplacer. Si plus de véhicules entrent dans une zone qu'il n'en sort, la densité augmente.
- Le terme ρv est le **flux** de véhicules.

Comprendre les Équations (1/2)

1. Conservation de la Masse (Densité)

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}} = 0$$

Variation de la densité dans le temps Variation du flux dans l'espace

- C'est une loi de conservation fondamentale.
- **Intuition** : Le nombre de véhicules ne change pas, ils ne font que se déplacer. Si plus de véhicules entrent dans une zone qu'il n'en sort, la densité augmente.
- Le terme ρv est le **flux** de véhicules.

2. Équation de "Momentum"

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{V_e - v}{\tau}$$

- Décrit comment la vitesse évolue

Comprendre les Équations (2/2)

Qu'est-ce que la variable $w = v + p(\rho)$?

- v est la vitesse physique du véhicule.
- $p(\rho)$ est un terme de "pression" qui modélise l'anticipation des conducteurs.
- **Intuition** : Les conducteurs ne réagissent pas seulement à la densité locale, mais anticipent la densité devant eux. C'est ce qui différencie le trafic humain d'un simple fluide.
- C'est la caractéristique principale des modèles de type ARZ, qui permet d'éviter des comportements irréalistes (comme des accélérations infinies).

Comprendre les Équations (2/2)

Qu'est-ce que la variable $w = v + p(\rho)$?

- v est la vitesse physique du véhicule.
- $p(\rho)$ est un terme de "pression" qui modélise l'anticipation des conducteurs.
- **Intuition** : Les conducteurs ne réagissent pas seulement à la densité locale, mais anticipent la densité devant eux. C'est ce qui différencie le trafic humain d'un simple fluide.
- C'est la caractéristique principale des modèles de type ARZ, qui permet d'éviter des comportements irréalistes (comme des accélérations infinies).

Qu'est-ce que la vitesse à l'équilibre $V_e(\rho)$?

- C'est la vitesse que les conducteurs adopteraient dans des conditions de trafic stables (fluide).
- Elle dépend de la densité totale : plus il y a de monde, plus V_e est faible.

Le Passage du Continu au Discret

Les équations que nous avons vues sont **continues** (définies en tout point x et t). Un ordinateur ne peut pas les gérer directement.

Solution : La Discrétisation

- ① **Discrétisation Spatiale** : On découpe la route en segments (cellules) de taille Δx .

Le Passage du Continu au Discret

Les équations que nous avons vues sont **continues** (définies en tout point x et t). Un ordinateur ne peut pas les gérer directement.

Solution : La Discrétisation

- 1 **Discrétisation Spatiale** : On découpe la route en segments (cellules) de taille Δx .
- 2 **Discrétisation Temporelle** : On avance dans le temps par petits pas de durée Δt .



La Méthode des Volumes Finis

Le cœur de la résolution numérique est la méthode des volumes finis. On transforme l'EDP en une simple mise à jour :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$$

- U_i^n : La valeur moyenne dans la cellule i au temps n .
- U_i^{n+1} : La nouvelle valeur que l'on cherche à calculer.
- $F_{i+1/2}$: Le **flux numérique** à l'interface entre la cellule i et $i + 1$.

Le cœur de la résolution numérique est la méthode des volumes finis. On transforme l'EDP en une simple mise à jour :

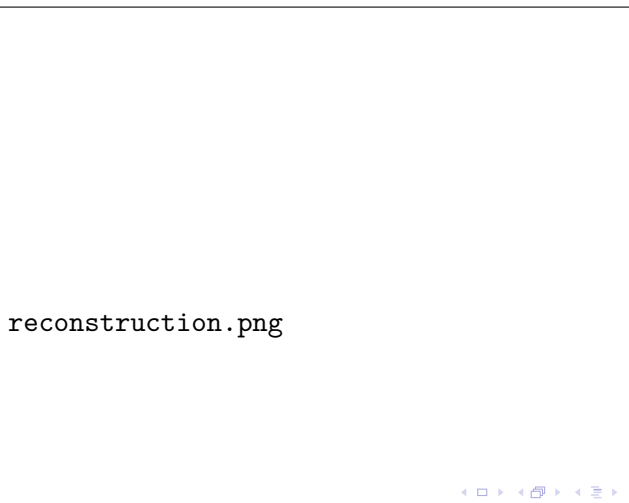
$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$$

- U_i^n : La valeur moyenne dans la cellule i au temps n .
- U_i^{n+1} : La nouvelle valeur que l'on cherche à calculer.
- $F_{i+1/2}$: Le **flux numérique** à l'interface entre la cellule i et $i + 1$.

Le problème est maintenant réduit à une seule question : Comment calculer le flux F aux interfaces ?

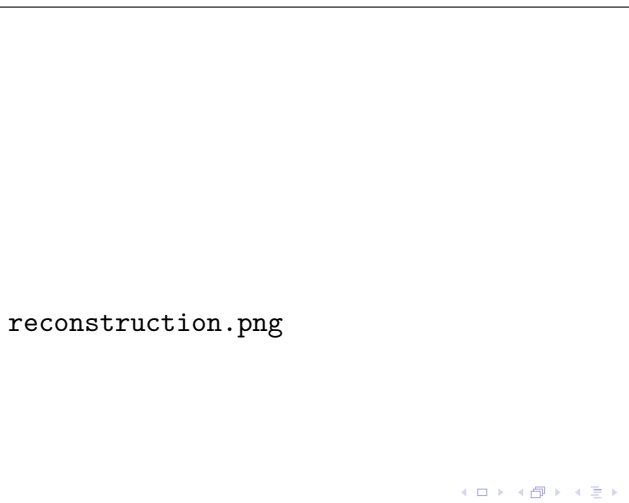
Étape 1 : Reconstruction Spatiale (WENO)

À l'intérieur d'une cellule, nous n'avons qu'une valeur moyenne. Mais pour calculer le flux à l'interface, nous avons besoin des valeurs **exactement sur le bord** de la cellule.



Étape 1 : Reconstruction Spatiale (WENO)

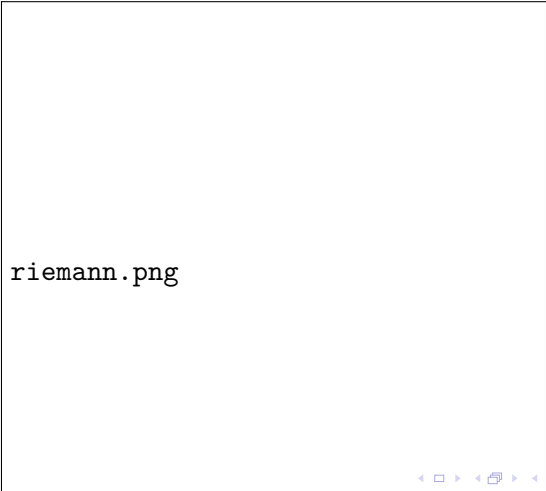
À l'intérieur d'une cellule, nous n'avons qu'une valeur moyenne. Mais pour calculer le flux à l'interface, nous avons besoin des valeurs **exactement sur le bord** de la cellule.



Étape 2 : Le Problème de Riemann à l'Interface

Grâce à WENO, nous avons maintenant deux valeurs à chaque interface :

- U_L (reconstruite depuis la cellule de gauche)
- U_R (reconstruite depuis la cellule de droite)

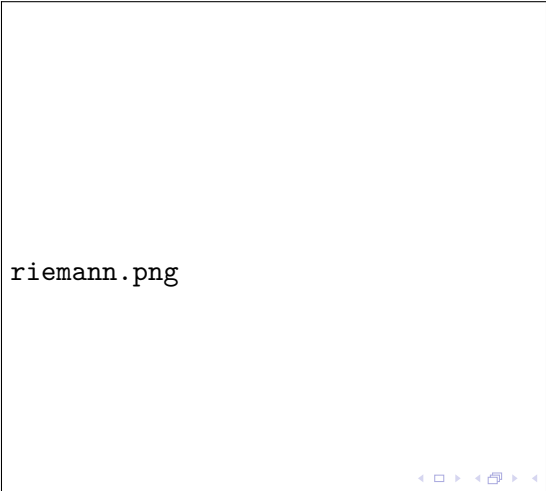


riemann.png

Étape 2 : Le Problème de Riemann à l'Interface

Grâce à WENO, nous avons maintenant deux valeurs à chaque interface :

- U_L (reconstruite depuis la cellule de gauche)
- U_R (reconstruite depuis la cellule de droite)



riemann.png

Étape 3 : Intégration Temporelle (SSP-RK3)

Maintenant que nous savons calculer la divergence des flux $(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$, nous pouvons mettre à jour la solution.

L'équation est devenue une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) en temps :

$$\frac{dU_i}{dt} = L(U_i) \quad \text{où} \quad L(U_i) = -\frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$$

Étape 3 : Intégration Temporelle (SSP-RK3)

Maintenant que nous savons calculer la divergence des flux $(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$, nous pouvons mettre à jour la solution.

L'équation est devenue une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) en temps :

$$\frac{dU_i}{dt} = L(U_i) \quad \text{où} \quad L(U_i) = -\frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$$

Le problème :

- Une simple mise à jour (méthode d'Euler) n'est pas assez stable pour les schémas d'ordre élevé comme WENO.

Étape 3 : Intégration Temporelle (SSP-RK3)

Maintenant que nous savons calculer la divergence des flux $(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$, nous pouvons mettre à jour la solution.

L'équation est devenue une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) en temps :

$$\frac{dU_i}{dt} = L(U_i) \quad \text{où} \quad L(U_i) = -\frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$$

Le problème :

- Une simple mise à jour (méthode d'Euler) n'est pas assez stable pour les schémas d'ordre élevé comme WENO.

La solution : SSP-RK3 (Strong Stability Preserving Runge-Kutta 3ème ordre)

- C'est une méthode de Runge-Kutta qui effectue 3 sous-étapes pour calculer U_i^{n+1} .
- **SSP** signifie qu'elle est conçue pour préserver la stabilité (ne pas créer d'oscillations) que le schéma spatial (WENO) a mis tant d'efforts à obtenir.

La Chaîne Numérique Complète

- 1 **Départ** : On a l'état du trafic U^n à un temps n .

La Chaîne Numérique Complète

- 1 **Départ** : On a l'état du trafic U^n à un temps n .
- 2 **Reconstruction (WENO)** : Pour chaque cellule, on calcule les valeurs U_L et U_R aux bords à partir des moyennes des cellules voisines.

La Chaîne Numérique Complète

- 1 **Départ** : On a l'état du trafic U^n à un temps n .
- 2 **Reconstruction (WENO)** : Pour chaque cellule, on calcule les valeurs U_L et U_R aux bords à partir des moyennes des cellules voisines.
- 3 **Flux (Solveur de Riemann)** : À chaque interface, on résout le problème de Riemann entre U_L et U_R pour obtenir le flux numérique $F_{i+1/2}$.

La Chaîne Numérique Complète

- 1 **Départ** : On a l'état du trafic U^n à un temps n .
- 2 **Reconstruction (WENO)** : Pour chaque cellule, on calcule les valeurs U_L et U_R aux bords à partir des moyennes des cellules voisines.
- 3 **Flux (Solveur de Riemann)** : À chaque interface, on résout le problème de Riemann entre U_L et U_R pour obtenir le flux numérique $F_{i+1/2}$.
- 4 **Divergence** : Dans chaque cellule, on calcule le terme
$$L(U) = -\frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}).$$

La Chaîne Numérique Complète

- ➊ **Départ** : On a l'état du trafic U^n à un temps n .
- ➋ **Reconstruction (WENO)** : Pour chaque cellule, on calcule les valeurs U_L et U_R aux bords à partir des moyennes des cellules voisines.
- ➌ **Flux (Solveur de Riemann)** : À chaque interface, on résout le problème de Riemann entre U_L et U_R pour obtenir le flux numérique $F_{i+1/2}$.
- ➍ **Divergence** : Dans chaque cellule, on calcule le terme
$$L(U) = -\frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}).$$
- ➎ **Évolution (SSP-RK3)** : On utilise ce terme $L(U)$ dans les 3 étapes du SSP-RK3 pour calculer le nouvel état U^{n+1} .

La Chaîne Numérique Complète

- ➊ **Départ** : On a l'état du trafic U^n à un temps n .
- ➋ **Reconstruction (WENO)** : Pour chaque cellule, on calcule les valeurs U_L et U_R aux bords à partir des moyennes des cellules voisines.
- ➌ **Flux (Solveur de Riemann)** : À chaque interface, on résout le problème de Riemann entre U_L et U_R pour obtenir le flux numérique $F_{i+1/2}$.
- ➍ **Divergence** : Dans chaque cellule, on calcule le terme
$$L(U) = -\frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}).$$
- ➎ **Évolution (SSP-RK3)** : On utilise ce terme $L(U)$ dans les 3 étapes du SSP-RK3 pour calculer le nouvel état U^{n+1} .
- ➏ **Répéter** : On recommence pour le pas de temps suivant.

Le tout est orchestré sur GPU pour une performance maximale, en minimisant les transferts de données entre le CPU et le GPU.

Conclusion

- Nous avons transformé un problème physique complexe (le trafic) en un **modèle mathématique** (système d'EDP hyperboliques).

Conclusion

- Nous avons transformé un problème physique complexe (le trafic) en un **modèle mathématique** (système d'EDP hyperboliques).
- Ce modèle continu a été discrétisé pour être résolu par un ordinateur via la **méthode des volumes finis**.

- Nous avons transformé un problème physique complexe (le trafic) en un **modèle mathématique** (système d'EDP hyperboliques).
- Ce modèle continu a été discrétisé pour être résolu par un ordinateur via la **méthode des volumes finis**.
- La précision et la stabilité sont garanties par une combinaison de méthodes numériques avancées :
 - **WENO5** pour la reconstruction spatiale.
 - Un **solveur de Riemann** pour les flux aux interfaces.
 - **SSP-RK3** pour l'intégration temporelle.

- Nous avons transformé un problème physique complexe (le trafic) en un **modèle mathématique** (système d'EDP hyperboliques).
- Ce modèle continu a été discrétisé pour être résolu par un ordinateur via la **méthode des volumes finis**.
- La précision et la stabilité sont garanties par une combinaison de méthodes numériques avancées :
 - **WENO5** pour la reconstruction spatiale.
 - Un **solveur de Riemann** pour les flux aux interfaces.
 - **SSP-RK3** pour l'intégration temporelle.
- Cette "chaîne numérique" permet de simuler l'évolution du trafic de manière robuste et précise, en capturant des phénomènes complexes comme les ondes de choc.