La Chaîne Numérique d'un Modèle de Trafic Routier

Du Problème Physique à la Simulation Numérique

Analyse du code source

November 13, 2025

Le Défi : Modéliser le Trafic Routier

Le monde réel :

- Des millions de véhicules
- Comportements complexes (accélération, freinage)
- Interactions entre différents types de véhicules (voitures, motos)
- Formation d'embouteillages, ondes de choc

La question :

- Comment prédire l'évolution du trafic ?
- Comment comprendre la formation des congestions ?

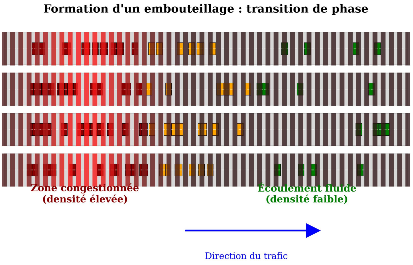


Image conceptuelle

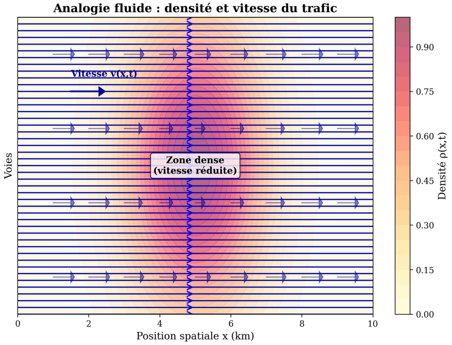
Au lieu de suivre chaque véhicule (approche **microscopique**), nous traitons le trafic comme un fluide continu (approche **macroscopique**).

Variables Clés :

- $\rho(x,t)$: Densité de véhicules (veh/km)
- $v(x,t)$: Vitesse moyenne des véhicules (km/h)

L'Objectif :

- Décrire l'évolution de ρ et v dans l'espace (x) et le temps (t) à l'aide d'équations mathématiques.



Analogie avec un écoulement fluide

Le Modèle ARZ pour Deux Classes de Véhicules

Le code implémente un modèle de type Aw-Rascle-Zhang (ARZ) pour deux classes : motos (m) et voitures (c).

Le système d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m v_m)}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_c v_c)}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial w_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial w_m}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_m}{\tau_m} \\
\frac{\partial w_c}{\partial t} + v_c \frac{\partial w_c}{\partial x} &= \frac{V_e(\rho_m, \rho_c) - v_c}{\tau_c}
\end{aligned}$$

Variables :

- ρ_m, ρ_c: Densités (motos/voitures)
- w_m, w_c: Variables de momentum. $w = v + p(\rho)$
- v_m, v_c: Vitesses réelles
- V_e: Vitesse à l'équilibre

Comprendre les Équations (1/3)

1. Conservation de la Masse (Densité)

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Variation de la densité dans le temps}} + \underbrace{\frac{\partial (\rho v)}{\partial x}}_{\text{Variation du flux dans l'espace}} = 0$$

- C'est une loi de conservation fondamentale.
- **Intuition :** Le nombre de véhicules ne change pas, ils ne font que se déplacer. Si plus de véhicules entrent dans une zone qu'il n'en sort, la densité augmente.
- Le terme ρv est le **flux** de véhicules.

Comprendre les Équations (2/3)

2. Équation de "Momentum"

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{V_e - v}{\tau}$$

- Décrit comment la vitesse évolue.
- Le terme de gauche indique que l'information de vitesse w se propage avec la vitesse du trafic v.
- Le terme de droite est une **source de relaxation** : les conducteurs ajustent leur vitesse v pour tendre vers une vitesse désirée V_e sur un temps caractéristique τ.

Comprendre les Équations (3/4)

Qu'est-ce que la variable $w = v + p(\rho)$ **?**

- v est la vitesse physique du véhicule.
- $p(\rho)$ est un terme de "pression" qui modélise l'anticipation des conducteurs.

Comprendre les Équations (4/5)

Variable de moment (suite)

- **Intuition :** Les conducteurs ne réagissent pas seulement à la densité locale, mais anticipent la densité devant eux.
- C'est la caractéristique principale des modèles ARZ.

Comprendre les Équations (5/5)

Qu'est-ce que la vitesse à l'équilibre $V_e(\rho)$?

- C'est la vitesse que les conducteurs adopteraient dans des conditions de trafic stables.
- Elle dépend de la densité totale : plus il y a de monde, plus V_e est faible.
- Une forme typique est :

$$V_e(\rho) = V_{max}\left(1 - \frac{\rho_{total}}{\rho_{jam}}\right)$$

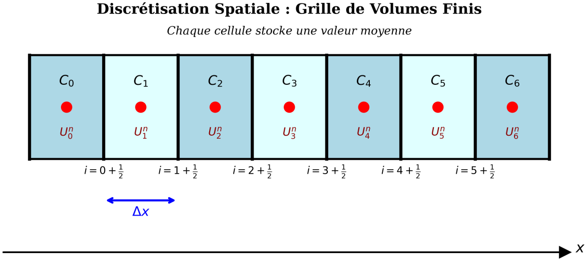
- V_{max} : vitesse maximale (route vide)
- ρ_{jam} : densité maximale (embouteillage complet)

Le Passage du Continu au Discret

Les équations que nous avons vues sont **continues** (définies en tout point x et t). Un ordinateur ne peut pas les gérer directement.

Solution : La Discrétisation

1. **Discrétisation Spatiale :** On découpe la route en segments (cellules) de taille Δx.
2. **Discrétisation Temporelle :** On avance dans le temps par petits pas de durée Δt.



On ne calcule plus la solution exacte partout, mais une **approximation** de

La Méthode des Volumes Finis

Le cœur de la résolution numérique est la méthode des volumes finis. On transforme l'EDP en une simple mise à jour :

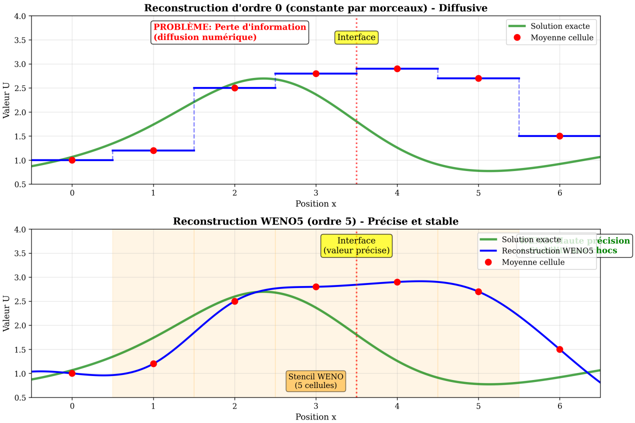
$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right)$$

- U_i^n: La valeur moyenne dans la cellule i au temps n.
- U_i^{n+1}: La nouvelle valeur que l'on cherche à calculer.
- $F_{i+1/2}$: Le **flux numérique** à l'interface entre la cellule i et $i+1$.

Le problème est maintenant réduit à une seule question : Comment calculer le flux F aux interfaces ?

Étape 1 : Reconstruction Spatiale (WENO) - 1/3

À l'intérieur d'une cellule, nous n'avons qu'une valeur moyenne. Mais pour calculer le flux à l'interface, nous avons besoin des valeurs **exactement sur le bord** de la cellule.



Étape 1 : Reconstruction Spatiale (WENO) - 2/3

Le problème :

- Une reconstruction simple (linéaire) crée des oscillations près des chocs (embouteillages).
- Une reconstruction trop simple (constante) "bave" les chocs et les rend flous (diffusion numérique).

Étape 1 : Reconstruction Spatiale (WENO) - 3/3

La solution : WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory)

- Méthode de reconstruction d'ordre élevé (précise).
- Utilise plusieurs "stencils" (groupes de cellules voisines) pour deviner la valeur au bord.
- Attribue des poids à chaque stencil : si un stencil contient un choc, son poids devient quasi nul.
- **Résultat :** Une reconstruction très précise dans les zones fluides, et stable (sans oscillations) près des chocs.

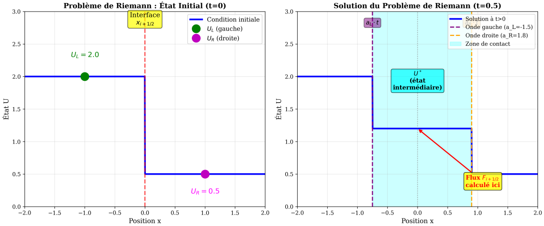
Avantages de WENO5 :

- Ordre 5 de précision en zone lisse
- Pas d'oscillations parasites près des discontinuités
- Préserve la monotonicité de la solution

Étape 2 : Le Problème de Riemann à l'Interface - 1/2

Grâce à WENO, nous avons maintenant deux valeurs à chaque interface :

- U_L (reconstruite depuis la cellule de gauche)
- U_R (reconstruite depuis la cellule de droite)



Le Problème de Riemann : C'est un mini-problème mathématique qui consiste à trouver la solution exacte qui résulte de la "collision" de ces deux états U_L et U_R. La solution nous donne le flux $F_{i+1/2}$ que nous cherchions.

Étape 2 : Le Problème de Riemann à l'Interface - 2/2

La solution du code : Solveur de Riemann "Central-Upwind"

- Un solveur approximatif, mais robuste et efficace.
- Il estime la vitesse de propagation des ondes vers la gauche (a_L) et vers la droite (a_R).
- Il calcule un flux qui est une moyenne pondérée des flux de U_L et U_R, stabilisée par un terme de dissipation basé sur a_L et a_R.

Étape 3 : Intégration Temporelle (SSP-RK3) - 1/2

Maintenant que nous savons calculer la divergence des flux, nous pouvons mettre à jour la solution.
L'équation est devenue une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) en temps :

$$\frac{dU_i}{dt} = L(U_i) \quad \text{où } L(U_i) = -\frac{1}{\Delta x}\left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right)$$

Le problème :

- Une simple mise à jour (méthode d'Euler) n'est pas assez stable pour les schémas d'ordre élevé comme WENO.
- Les oscillations peuvent apparaître et détruire la précision.

Étape 3 : Intégration Temporelle (SSP-RK3) - 2/2

La solution : SSP-RK3 (Strong Stability Preserving Runge-Kutta 3ème ordre)

- C'est une méthode de Runge-Kutta qui effectue 3 sous-étapes pour calculer U_i^{n+1}.
- **SSP** signifie qu'elle préserve la stabilité que WENO a établie.
- C'est le partenaire idéal pour WENO.

Les 3 étapes de SSP-RK3 :

$$
\begin{aligned}
U^{(1)} &= U^n + \Delta t L(U^n) \\
U^{(2)} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}(U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)})) \\
U^{n+1} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}(U^{(2)} + \Delta t L(U^{(2)}))
\end{aligned}
$$

La Chaîne Numérique Complète

1. **Départ :** On a l'état du trafic U^n à un temps n.
2. **Reconstruction (WENO) :** Pour chaque cellule, on calcule les valeurs U_L et U_R aux bords à partir des moyennes des cellules voisines.
3. **Flux (Solveur de Riemann) :** À chaque interface, on résout le problème de Riemann entre U_L et U_R pour obtenir le flux numérique $F_{i+1/2}$.
4. **Divergence :** Dans chaque cellule, on calcule le terme $L(U) = -\frac{1}{\Delta x}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$.
5. **Évolution (SSP-RK3) :** On utilise ce terme $L(U)$ dans les 3 étapes du SSP-RK3 pour calculer le nouvel état U^{n+1}.
6. **Répéter :** On recommence pour le pas de temps suivant.

Le tout est orchestré sur GPU pour une performance maximale, en minimisant les transferts de données entre le CPU et le GPU.

Conclusion

- Nous avons transformé un problème physique complexe (le trafic) en un **modèle mathématique** (système d'EDP hyperboliques).
- Ce modèle continu a été discrétisé pour être résolu par un ordinateur via la **méthode des volumes finis**.
- La précision et la stabilité sont garanties par une combinaison de méthodes numériques avancées :
  - **WENO5** pour la reconstruction spatiale.
  - Un **solveur de Riemann** pour les flux aux interfaces.
  - **SSP-RK3** pour l'intégration temporelle.
- Cette "chaîne numérique" permet de simuler l'évolution du trafic de manière robuste et précise, en capturant des phénomènes complexes comme les ondes de choc.