



UNIVERSITÉ NATIONALE SUPÉRIEURE DE TECHNOLOGIE, INGÉNIERIE ET
MATHÉMATIQUES

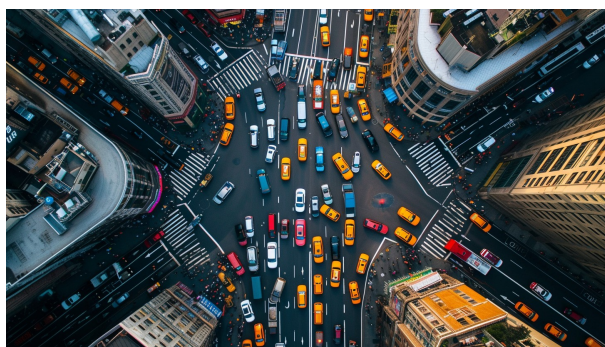
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉNIE MATHÉMATIQUE ET MODÉLISATION

MÉMOIRE DE FIN DU CYCLE D'INGÉNIEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE, LOGISTIQUE ET RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Modélisation du Trafic Routier au Bénin :

Approche Macroscopique et Extension du Modèle ARZ



Présenté par :
AHOUANYE Elonm

Sous la direction de :
Pr. Directeur de mémoire

Cotonou, 24 avril 2025

Résumé

Mots-clés :

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte et Problématique Générale	1
1.2	Problématique Spécifique et Justification du Modèle ARZ	2
1.3	But et Objectifs de la Recherche	3
1.4	Questions de Recherche	4
1.5	Portée et Pertinence de l'Étude	4
1.6	Structure du Document	5
2	Revue de la Littérature	7
2.1	Vue d'ensemble des approches de modélisation du flux de trafic	7
2.1.1	Modèles de second ordre	8
2.2	Modélisation de l'hétérogénéité du trafic	9
2.2.1	Modélisation multi-classe	10
2.2.2	Modélisation du trafic dominé par les motos	11
2.2.3	Modélisation du comportement de "Creeping"	11
2.3	Modélisation de contextes et phénomènes spécifiques	12
2.3.1	Modélisation de réseaux et d'intersections	12
2.3.2	Impact de l'infrastructure	13
2.3.3	Traffic Flow in Developing Economies	13
2.4	Méthodes numériques pour les modèles macroscopiques	14
2.5	Synthèse et Lacune de Recherche	15
3	Caractéristiques du Trafic Routier au Bénin	17
3.1	Contexte Socio-Économique et Défis du Transport	17
3.2	Le Réseau Routier Béninois	18
3.2.1	Hétérogénéité des Infrastructures Routières	18
3.2.2	Organisation Spatiale du Réseau	19
3.2.3	Gestion des Intersections et Régulation du Trafic	19
3.3	Composition Hétérogène du Parc Automobile	20
3.4	Comportements Spécifiques des Motos et Impact sur le Trafic	21
3.4.1	Pratiques de Conduite Distinctives	21
3.4.2	Impact sur la Dynamique Globale du Trafic	22
3.5	Méthodologie de Collecte et d'Analyse des Données	22
3.6	Défis et Besoins pour la Modélisation (Conclusion du Chapitre)	24

4	Extended Multiclass ARZ Model Formulation for Benin	25
4.1	Base Multiclass ARZ Framework Selection	25
4.2	Modeling Road Pavement Effects on Equilibrium Speed	27
4.3	Modeling Motorcycle Gap-Filling in ARZ	28
4.4	Modeling Motorcycle Interweaving Effects in ARZ	30
4.5	Modeling Motorcycle "Creeping" in Congestion	32
4.6	Intersection Model : Source/Sink Terms and Coupling Conditions	34
4.7	The Complete Extended ARZ Model Equations	37
5	Mathematical Analysis and Numerical Implementation	41
5.1	Mathematical Properties of the Extended Model	41
5.1.1	Hyperbolicity	41
5.1.2	Eigenvalues and Characteristic Speeds	42
5.1.3	Characteristic Analysis (Wave Structure)	43
5.2	Riemann Problem Structure (Conceptual)	44
5.3	Linear Stability Analysis	45
5.4	Numerical Scheme	48
5.4.1	Finite Volume Formulation	48
5.4.2	Approximate Riemann Solver : Central-Upwind Scheme	48
5.4.3	Handling of Source Terms (Relaxation) via Strang Splitting	50
5.4.4	Handling of Spatial Dependencies ($R(x)$)	50
5.4.5	Temporal Discretization (Hyperbolic Step) and Stability (CFL)	50
5.5	Implementation Details	51
5.5.1	Software Environment	51
5.5.2	Core Algorithm Specifics	52
5.5.3	Handling Numerical Challenges	53
6	Simulation Numérique et Analyse du Modèle ARZ Étendu	55
6.1	Stratégie d'Estimation des Paramètres et Jeu de Base	55
6.1.1	Stratégie Générale d'Estimation des Paramètres	55
6.1.2	Paramètres d'Infrastructure (Dérivés d'OSM roads)	56
6.1.3	Estimation des Paramètres Comportementaux et Dynamiques	59
6.1.4	Tableau Récapitulatif du Jeu de Paramètres de Base	63
6.1.5	Tests de Convergence	63
6.1.6	Vérification de la Conservation de la Masse	66
6.1.7	Vérification de la Positivité des Densités	67

Table des figures

1.1	Exemple de trafic typique à Cotonou illustrant la prédominance des motos (Zémidjans) et leur interaction avec d'autres véhicules dans un environnement urbain dense.	2
6.1	Graphique Log-Log de l'erreur L1 en fonction du pas de grille Δx pour les quatre variables d'état. Les lignes pointillée et tiretée indiquent des pentes théoriques d'ordre 1 et 2, respectivement.	66
6.2	Évolution de l'erreur relative de conservation de la masse pour les motos ($E_{rel,m}$) et les voitures ($E_{rel,c}$) au cours du temps, sur une échelle logarithmique. . . .	67

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et Problématique Générale

La modélisation du trafic routier est devenue un outil essentiel pour la planification et la gestion des infrastructures de transport à travers le monde. Elle permet notamment d'anticiper les congestions, d'optimiser les flux de véhicules, d'évaluer les impacts des politiques de transport et d'améliorer la sécurité routière [placeholder_traffic_modeling_importance]. Dans un contexte de croissance urbaine rapide et de ressources souvent limitées, comme celui du Bénin, ces outils sont particulièrement précieux pour guider un développement durable et efficace des systèmes de transport.

Cependant, la modélisation du trafic dans les économies en développement présente des défis uniques [Chanut2004]. Le réseau routier béninois, en particulier, est caractérisé par des spécificités qui rendent l'application directe des modèles de trafic classiques, souvent développés pour des contextes de pays industrialisés, particulièrement difficile :

- ▶ **Hétérogénéité extrême du parc roulant** : Une coexistence marquée de véhicules aux caractéristiques très diverses (voitures particulières, camions, bus, tricycles) avec une prédominance écrasante des deux-roues motorisés [DiFrancescoEtAl2015].
- ▶ **Rôle central des motos** : Les motocyclettes, et notamment les taxis-motos appelés "Zémidjans", représentent une part majoritaire du trafic urbain (souvent plus de 70-80%) et constituent un pilier de la mobilité quotidienne [NewApproachMotorcycles]. Leurs comportements spécifiques (agilité, capacité à se faufiler) influencent profondément la dynamique globale du flux.
- ▶ **Infrastructures variables et contraintes** : Le réseau est composé de routes bitumées, pavées, et de nombreuses voies en terre, souvent dans un état de dégradation variable, avec une capacité fréquemment inadéquate et un manque de signalisation ou de marquage clair [IntroTrafficEPFL].
- ▶ **Comportements de conduite adaptatifs** : Les conducteurs, en particulier ceux des motos, adoptent des stratégies spécifiques pour naviguer dans ce contexte, telles que le remplissage d'interstices ("gap-filling"), l'entrelacement ou la remontée de file ("interweaving", "filtering"), et une faible discipline de voie [ModelingMixedTrafficDiscreteChoi].
- ▶ **Réglementation et interactions informelles** : Un respect parfois limité des règles

de conduite formelles, notamment aux intersections, où les négociations informelles peuvent jouer un rôle important.



FIGURE 1.1 – Exemple de trafic typique à Cotonou illustrant la prédominance des motos (Zémidjans) et leur interaction avec d’autres véhicules dans un environnement urbain dense.

Ces caractéristiques complexes nécessitent des approches de modélisation qui vont au-delà des hypothèses simplificatrices des modèles standards.

1.2 Problématique Spécifique et Justification du Modèle ARZ

Face à la complexité du trafic béninois, les modèles macroscopiques classiques de premier ordre, tels que le modèle Lighthill-Whitham-Richards (LWR) [LighthillWhitham1955; Richards1956], montrent des limites fondamentales. Bien que simple et robuste, le modèle LWR repose sur l’hypothèse d’une relation d’équilibre instantanée entre la vitesse et la densité (le diagramme fondamental), et suppose un flux homogène [TrafficFlowModelingAnalogies]. Ces hypothèses sont inadéquates pour le contexte béninois car :

- ▶ Elles ignorent l’**hétérogénéité fondamentale** du trafic et les interactions spécifiques entre les différentes classes de véhicules, notamment les motos.
- ▶ Elles ne peuvent pas capturer les **phénomènes hors équilibre** cruciaux observés dans le trafic réel, tels que les ondes stop-and-go, l’hystérésis (différence de comportement entre la formation et la dissipation de la congestion), ou les temps d’adaptation des conducteurs [GenericSecondOrderModels; TrafficRelaxationHysteresis].
- ▶ Elles négligent l’**impact de la qualité variable de l’infrastructure** sur le comportement du flux.

Pour surmonter ces limitations, les modèles macroscopiques de **second ordre** ont été développés. Ils introduisent une équation dynamique supplémentaire, typiquement pour la

vitesse, permettant de modéliser l’inertie du flux et les états hors équilibre [**GrokRevMotivation**]. Parmi eux, le modèle **Aw-Rascle-Zhang (ARZ)** [**AwRascle2000**; **Zhang2002**] se distingue par ses propriétés mathématiques avantageuses et sa capacité à représenter de manière plus réaliste la dynamique du trafic [**MITMathematicsTraffic**]. Ses principaux atouts incluent :

- ▶ Le respect de l’**anisotropie** (les conducteurs réagissent à ce qui se passe devant eux).
- ▶ La capacité à modéliser l’**hystérésis** et les **oscillations stop-and-go**.
- ▶ Une base flexible pour les extensions **multi-classes**, permettant de différencier les comportements de divers types de véhicules [**MultiClassTrafficModeling**].

Cependant, comme souligné dans la revue de la littérature (Chapitre 2), il existe une **lacune significative** : le manque de modèles ARZ multi-classes spécifiquement étendus, calibrés et validés pour capturer la dynamique unique du trafic dominé par les motos dans le contexte béninois, en intégrant les comportements spécifiques comme le “gap-filling”, l’“interweaving”, et le “creeping” (reptation en congestion), ainsi que l’impact de l’infrastructure [**FeldheimLybaert2000**; **Saumtally2012**].

La problématique centrale de ce mémoire est donc de combler cette lacune en développant un modèle ARZ multi-classes étendu, spécifiquement adapté aux réalités du trafic routier au Bénin.

1.3 But et Objectifs de la Recherche

Le **but principal** de cette recherche est de développer, implémenter et évaluer un modèle de flux de trafic macroscopique de second ordre multi-classes, basé sur le cadre ARZ, qui soit spécifiquement adapté aux conditions de circulation au Bénin, en mettant l’accent sur la représentation réaliste des interactions et des comportements spécifiques des motocyclettes, y compris le phénomène de “creeping”.

Pour atteindre ce but, les **objectifs spécifiques** suivants sont définis :

1. Réaliser une revue approfondie de la littérature sur les modèles macroscopiques (LWR, ARZ), la modélisation multi-classes, la dynamique du trafic moto, et les méthodes numériques associées.
2. Formuler une extension multi-classes du modèle ARZ intégrant des termes spécifiques pour représenter l’impact de l’infrastructure et les comportements clés des motos (gap-filling, interweaving, creeping) observés au Bénin.
3. Développer et implémenter une méthode numérique robuste (basée sur les volumes finis) pour résoudre le système d’équations aux dérivées partielles du modèle ARZ étendu.
4. Calibrer les paramètres du modèle en utilisant des données de trafic réelles ou réalistes représentatives du contexte béninois.
5. Valider le modèle étendu en vérifiant ses propriétés numériques et sa capacité à reproduire qualitativement et quantitativement les phénomènes de trafic observés au Bénin.

6. Comparer les performances du modèle ARZ étendu avec celles d'une extension similaire basée sur le modèle LWR pour évaluer les avantages de l'approche de second ordre.
7. Analyser les résultats des simulations pour mieux comprendre la dynamique du trafic au Bénin et évaluer la sensibilité du modèle à ses paramètres clés.

1.4 Questions de Recherche

Cette étude cherche à répondre aux questions de recherche suivantes :

1. Comment le cadre théorique du modèle ARZ peut-il être étendu de manière cohérente pour intégrer l'hétérogénéité extrême du trafic béninois et les comportements spécifiques observés des motocyclettes (gap-filling, interweaving, creeping) ?
2. Quelles paramétrisations des fonctions clés du modèle ARZ (vitesse d'équilibre, fonction de pression, temps de relaxation) permettent de refléter l'influence de la qualité variable de l'infrastructure routière au Bénin ?
3. Quelle méthode numérique basée sur les volumes finis est la plus appropriée pour résoudre le système ARZ multi-classes étendu, en garantissant la stabilité et la précision ?
4. Dans quelle mesure le modèle ARZ étendu et calibré parvient-il à reproduire quantitativement et qualitativement les dynamiques de trafic observées au Bénin, et comment ses performances se comparent-elles à celles d'un modèle LWR étendu ?

1.5 Portée et Pertinence de l'Étude

Cette recherche revêt une importance particulière tant sur le plan théorique que pratique. Sur le plan théorique, elle contribue à l'avancement de la modélisation macroscopique du trafic en proposant une extension spécifique du modèle ARZ pour des conditions de trafic complexes et hétérogènes, rarement étudiées en profondeur avec des modèles de second ordre. Elle vise à formaliser mathématiquement des comportements spécifiques aux motos qui sont souvent décrits qualitativement mais peu intégrés dans les modèles macroscopiques.

Sur le plan pratique, cette étude vise à fournir un outil de modélisation plus réaliste et pertinent pour les ingénieurs et les planificateurs des transports au Bénin et dans d'autres contextes similaires. Un modèle mieux adapté aux réalités locales peut conduire à une meilleure compréhension des phénomènes de congestion, à une évaluation plus précise des projets d'infrastructure, et à la conception de stratégies de gestion du trafic plus efficaces, contribuant ainsi à améliorer la mobilité urbaine et la sécurité routière.

La **portée** de cette étude se concentre sur la modélisation macroscopique (décrivant le flux en termes de densité, vitesse moyenne, débit) de segments de route ou de réseaux simples. Elle se focalise sur l'extension du modèle ARZ pour intégrer explicitement les classes de véhicules prédominantes au Bénin (notamment voitures et motos) et leurs interactions spécifiques (gap-filling, interweaving, creeping), ainsi que l'effet de l'état de la chaussée.

L'étude inclut le développement numérique, la calibration (basée sur des données disponibles ou des estimations réalistes) et la validation par simulation de scénarios typiques. Elle ne prétend pas aborder la modélisation microscopique détaillée, ni la modélisation de réseaux urbains très complexes avec des systèmes de contrôle sophistiqués.

1.6 Structure du Document

Ce mémoire est structuré de manière à guider le lecteur depuis les concepts fondamentaux jusqu'aux contributions spécifiques de cette recherche et à leurs implications.

- ▶ Le **Chapitre 2** présente une revue critique de la littérature sur la modélisation macroscopique du trafic (LWR et ARZ), les approches multi-classes, la modélisation des comportements spécifiques des motos, l'impact de l'infrastructure, les défis de la modélisation dans les pays en développement, et les méthodes numériques pertinentes. Il identifie la lacune de recherche que ce mémoire vise à combler.
- ▶ Le **Chapitre 3** décrit en détail les caractéristiques spécifiques du contexte béninois : contexte socio-économique, infrastructure routière, composition du parc de véhicules, et analyse qualitative des comportements de trafic observés, notamment ceux des motos. Il discute également de la disponibilité et des limitations des données locales.
- ▶ Le **Chapitre ??** développe la formulation mathématique de l'extension multi-classes du modèle ARZ proposée pour le Bénin. Il détaille l'intégration des effets de l'infrastructure et des termes spécifiques modélisant le gap-filling, l'interweaving et le creeping des motos.
- ▶ Le **Chapitre 5** aborde l'analyse mathématique préliminaire du modèle étendu (propriétés hyperboliques) et présente en détail le schéma numérique basé sur les volumes finis choisi pour sa résolution, y compris le traitement des termes sources et des conditions aux limites.
- ▶ Le **Chapitre ??** expose les résultats de la calibration des paramètres du modèle, sa validation numérique et phénoménologique à travers divers scénarios de simulation. Il inclut une comparaison quantitative et qualitative avec un modèle LWR étendu et une analyse de sensibilité.
- ▶ Le **Chapitre ??** interprète les résultats obtenus, évalue les performances (forces et limites) du modèle ARZ étendu dans le contexte béninois, discute de sa pertinence par rapport au modèle LWR, et explore les implications potentielles pour la gestion du trafic au Bénin ainsi que les pistes pour de futures recherches.
- ▶ Le **Chapitre ??** résume les travaux effectués, rappelle les principales conclusions et contributions du travail, reconnaît ses limitations et offre des remarques finales.

Les références bibliographiques et d'éventuelles annexes (contenant des détails de calculs, des données supplémentaires ou du pseudo-code) complètent le document.

Chapitre 2

Revue de la Littérature

2.1 Vue d'ensemble des approches de modélisation du flux de trafic

L'étude de la dynamique du trafic routier repose sur diverses approches de modélisation, classées principalement en trois catégories selon leur niveau de granularité : **microscopiques**, **macroscopiques** et **mésoscopiques**.

Les modèles **microscopiques** se concentrent sur le comportement individuel des véhicules et de leurs conducteurs, simulant les interactions directes telles que le suivi de véhicule (car-following) et les changements de voie¹. Ils offrent un niveau de détail élevé, permettant d'analyser l'impact des comportements individuels sur le flux global, mais deviennent computationnellement coûteux pour les grands réseaux². Des exemples incluent les modèles stimulus-réponse, les modèles basés sur des points d'action, et les modèles d'automates cellulaires [Daganzo2007GenealogyProc]. Le modèle **Lighthill-Whitham-Richards (LWR)**, développé indépendamment dans les années 1950, est le pionnier des approches macroscopiques³. Il repose sur le principe fondamental de la **conservation du nombre de véhicules** [Lebacque1993], exprimé par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

où $\rho(x, t)$ est la densité et $q(x, t)$ est le débit à la position x et au temps t ⁴.

Une hypothèse clé est l'existence d'une relation d'équilibre statique entre le débit, la densité et la vitesse moyenne v , souvent appelée **diagramme fondamental** : $q = \rho v$ et $v = V_e(\rho)$, où $V_e(\rho)$ est la vitesse d'équilibre, fonction décroissante de la densité [Lebacque1993]. L'équation du modèle devient alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_e(\rho))}{\partial x} = 0$$

5.

-
1. https://en.wikipedia.org/wiki/Traffic_flow
 2. https://en.wikipedia.org/wiki/Traffic_flow
 3. https://en.wikipedia.org/wiki/Traffic_flow
 4. https://www.civil.iitb.ac.in/tvm/nptel/541_Macro/web/web.html
 5. https://www.civil.iitb.ac.in/tvm/nptel/541_Macro/web/web.html

Limitations critiques : Malgré sa simplicité et sa capacité à décrire les ondes de choc, le modèle LWR présente des limitations majeures :

1. **Hypothèse d'équilibre instantané :** Il suppose que la vitesse s'ajuste instantanément à $V_e(\rho)$, ce qui est irréaliste car les conducteurs ont un temps de réaction [FanHertySeibold2014].
2. **Incapacité à modéliser les phénomènes hors équilibre :** Il ne peut pas reproduire l'hystérésis (différence de comportement lors de la formation et de la dissipation de la congestion) ni les oscillations *stop-and-go* [AwKlarMaterneRascle2000].
3. **Simplification excessive :** Il ne tient pas compte de l'anticipation, des temps de réaction, ou de l'influence directe des véhicules voisins au-delà de la densité locale [FanHertySeibold2014].
4. **Difficulté à gérer l'hétérogénéité :** La relation vitesse-densité unique rend difficile la représentation d'un trafic mixte avec des véhicules aux caractéristiques variées (e.g., motos vs voitures), un point crucial pour le Bénin [WongWong2002].

Ces lacunes ont motivé le développement de modèles de **second ordre**.

2.1.1 Modèles de second ordre

Les modèles macroscopiques de second ordre visent à surmonter les limitations des modèles LWR en introduisant une équation dynamique supplémentaire, généralement pour l'évolution de la vitesse moyenne ou d'une variable liée (quantité de mouvement, énergie) [FanHertySeibold2014]. Cela permet de prendre en compte l'inertie du flux et le temps d'ajustement des vitesses, capturant ainsi les états hors équilibre -. Ils peuvent ainsi modéliser des phénomènes comme l'hystérésis [Laval2011Hysteresis] et les ondes de choc (oscillations *stop-and-go*)⁶.

Plusieurs familles de modèles de second ordre existent, comme le modèle de Payne-Whitham (PW) [AwKlarMaterneRascle2000], critiqué pour certains comportements non physiques [TreiberN/ALecture7], et des modèles généralisés (GSOM) comme METANET [BiswasUddin2015Metanet]. Parmi eux, le modèle **Aw-Rascle-Zhang (ARZ)**, développé indépendamment par Aw & Rascle (2000) et Zhang (2002)⁷, se distingue particulièrement.

Principes du modèle ARZ : Le modèle ARZ est un système de deux équations aux dérivées partielles hyperboliques [IPAMN/AMathIntroTraffic]. Il conserve l'équation de masse du LWR et ajoute une équation pour une quantité liée à la vitesse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(v + p(\rho))}{\partial t} + v \frac{\partial(v + p(\rho))}{\partial x} = 0 \quad (\text{Formulation originale})$$

ou, sous forme conservative pour la quantité de mouvement généralisée ρw avec $w = v + p(\rho)$:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial x} = 0$$

6. <https://math.mit.edu/traffic/>

7. <https://math.mit.edu/traffic/>

[**yu2024traffic**]. Ici, v est la vitesse moyenne et $p(\rho)$ est une fonction de "pression" dépendant de la densité, reflétant l'anticipation ou l'hésitation des conducteurs⁸. La quantité $w = v + p(\rho)$ est un invariant lagrangien, constant le long des trajectoires des véhicules dans un flux homogène [**FanHertySeibold2014**].

Certaines formulations incluent un terme de relaxation pour modéliser l'ajustement de la vitesse v vers une vitesse d'équilibre $V_e(\rho)$ sur un temps caractéristique τ [**yu2024traffic**] :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v - \rho p'(\rho)) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - v}{\tau}$$

[**yu2024traffic**].

Avantages du modèle ARZ :

- ▶ **Anisotropie** : Le modèle respecte le principe selon lequel les conducteurs réagissent principalement aux conditions en aval (devant eux). Les perturbations se propagent vers l'arrière à une vitesse $\lambda_1 = v - \rho p'(\rho)$, qui est inférieure ou égale à la vitesse des véhicules $v = \lambda_2$ [**yu2024traffic**].
- ▶ **Capture des phénomènes hors équilibre** : Il modélise les états métastables, l'hystérésis, les transitions congestion/fluide, et les ondes *stop-and-go*⁹.
- ▶ **Pas de vitesses négatives** : Contrairement à certains modèles antérieurs, il évite les vitesses non physiques si $p'(\rho) \geq 0$.
- ▶ **Flexibilité** : Le cadre ARZ peut être étendu pour modéliser le trafic multi-classe [**LingChanutLebacque2011Multiclass**]. Il présente une famille de diagrammes fondamentaux paramétrée par w , offrant une représentation plus riche que le diagramme unique du LWR [**FanHertySeibold2014**].

Défis et limitations :

- ▶ **Complexité** : Le système hyperbolique non linéaire est plus complexe à analyser et à résoudre numériquement que le LWR [**DiEtAl2024**].
- ▶ **Calibration** : La calibration des paramètres, notamment la fonction de pression $p(\rho)$ et le temps de relaxation τ , peut être délicate [**KhelifiEtAl2023**].
- ▶ **Comportements non physiques potentiels** : Des choix inappropriés de $p(\rho)$ peuvent conduire à des densités maximales multiples ou à des vitesses négatives dans certaines conditions [**FanWork2015**]. Des versions modifiées (e.g., GARZ) visent à corriger cela [**FanHertySeibold2014**].

Malgré ces défis, le modèle ARZ constitue une base solide et flexible pour modéliser la dynamique complexe du trafic, y compris dans des contextes hétérogènes.

2.2 Modélisation de l'hétérogénéité du trafic

Le trafic réel est rarement homogène. Il est composé de différents types de véhicules (voitures, camions, bus, motos, vélos) ayant des tailles, des capacités dynamiques (accélération,

8. <https://math.mit.edu/traffic/>

9. <https://math.mit.edu/traffic/>

freinage) et des comportements de conduite variés. Cette hétérogénéité influence fortement la dynamique globale du flux, en particulier dans les pays en développement comme le Bénin où la diversité des véhicules est grande et où les motos jouent un rôle prépondérant.

2.2.1 Modélisation multi-classe

Pour tenir compte de cette diversité, les modèles macroscopiques peuvent être étendus en approches **multi-classes**. L'idée est de considérer le flux de trafic comme étant composé de plusieurs "fluides" interagissant, chacun représentant une classe de véhicules.

Approches dans les modèles LWR :

- ▶ **Diagrammes fondamentaux spécifiques à chaque classe** : Utiliser des relations vitesse-densité $V_{e,i}(\rho)$ distinctes pour chaque classe i , reflétant leurs différentes vitesses et occupations spatiales¹⁰.
- ▶ **Coefficients d'équivalence (PCE/PCU)** : Convertir tous les véhicules en un nombre équivalent de voitures particulières pour utiliser un diagramme fondamental unique ou calculer des variables agrégées [RambhaN/ACE269Lec12].
- ▶ **Flux interagissant** : Modéliser des flux distincts pour chaque classe avec des interactions définies (e.g., allocation d'espace, densité effective) [RambhaN/ACE269Lec12].

Approches dans les modèles ARZ :

- ▶ **Équations distinctes par classe** : Formuler un système d'équations ARZ pour chaque classe i , avec des densités ρ_i , des vitesses v_i , et potentiellement des fonctions de pression $p_i(\rho)$ spécifiques [FanWork2015; ColomboMarcellini2020]. Le système pour N classes serait :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(v_i + p_i(\rho))}{\partial t} + v_i \frac{\partial(v_i + p_i(\rho))}{\partial x} = \frac{V_{e,i}(\rho) - v_i}{\tau_i} \quad (\text{avec relaxation})$$

où les fonctions p_i , $V_{e,i}$, et τ_i peuvent dépendre des densités et/ou vitesses de toutes les classes pour modéliser les interactions [FanWork2015; ColomboMarcellini2020; WongWong2002; BenzoniGavageColombo2003].

- ▶ **Occupation spatiale et densité de congestion** : Utiliser un concept de densité de congestion maximale commune ou effective pour assurer un comportement réaliste lorsque la densité totale approche le maximum [FanWork2015].
- ▶ **Paramètres spécifiques par classe** : Attribuer des vitesses de flux libre, des longueurs de véhicule, et des temps de relaxation différents à chaque classe¹¹.

Limitations actuelles : Bien que prometteuses, les extensions multi-classes existantes, notamment pour ARZ, supposent souvent des interactions simplifiées (e.g., vitesse unique par classe ou interactions basées uniquement sur les densités) et peinent à capturer des comportements fins comme l'entrelacement complexe des motos.

10. https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_diagram_of_traffic_flow

11. https://en.wikipedia.org/wiki/Microscopic_traffic_flow_model

2.2.2 Modélisation du trafic dominé par les motos

Le contexte béninois est marqué par une prédominance des motos, en particulier les taxis-motos ("Zémidjans"). Ces véhicules présentent des comportements spécifiques qui affectent significativement la dynamique du trafic :

- ▶ **Remplissage d'interstices (Gap-filling)** : Capacité des motos à utiliser les espaces entre les véhicules plus grands, leur permettant de progresser même en congestion [khan2021macroscopic]. Les modèles microscopiques montrent qu'elles acceptent des intervalles plus petits [NguyenEtAl2012]. Au niveau macroscopique, cela pourrait être modélisé par une réduction de la densité effective perçue par les motos ou par des termes d'anticipation modifiés [khan2021macroscopic].
- ▶ **Entrelacement (Interweaving) / Filtrage / Remontée de file** : Mouvements latéraux continus des motos entre les files de véhicules, surtout à basse vitesse ou à l'arrêt [DiFrancescoEtAl2015; TiwariEtAl2007]. Ce comportement optimise l'utilisation de l'espace mais peut perturber le flux des autres véhicules. La modélisation macroscopique de ce phénomène est complexe et pourrait nécessiter des approches bi-dimensionnelles ou des modèles à "voies flexibles" [ColomboMarcelliniRossi2023].

Adaptations macroscopiques (notamment pour ARZ) :

- ▶ **Modèles ARZ multi-classes** : Traiter les motos comme une classe distincte avec des paramètres $V_{e,moto}$, $p_{moto}(\rho)$, τ_{moto} spécifiques [FanWork2015].
- ▶ **Termes d'interaction spécifiques** : Introduire des termes dans les équations ARZ qui reflètent explicitement le "gap-filling" (e.g., modification de $p(\rho)$ pour les motos) ou l'"interweaving".
- ▶ **Vitesses d'équilibre ajustées** : Modifier $V_{e,moto}(\rho)$ pour refléter l'agilité des motos et leur capacité à maintenir une certaine vitesse même à haute densité [TiwariEtAl2007].
- ▶ **Modèles basés sur des analogies physiques** : Utiliser des analogies comme l'effusion de gaz pour le "gap-filling" [khan2021macroscopic] ou traiter les motos comme un fluide dans un milieu poreux (les autres véhicules) [khan2021macroscopic].

La littérature existante sur la modélisation macroscopique spécifique aux motos est encore limitée, en particulier concernant l'intégration de ces comportements dans des modèles de second ordre comme ARZ¹².

2.2.3 Modélisation du comportement de "Creeping"

Le "creeping" (reptation ou avancée lente) désigne la capacité de certains véhicules, notamment les motos, à continuer de se déplacer très lentement dans des conditions de congestion extrême, alors que les véhicules plus grands sont complètement arrêtés [FanWork2015; Saumtally2012]. Ce comportement est lié à la petite taille et à la maniabilité des motos, leur permettant de se faufiler dans les moindres espaces [Saumtally2012; FanWork2015].

Approches de modélisation :

12. <https://www.youtube.com/watch?v=oA1w4RMcSGI>

- ▶ **Modèles de transition de phase** : Définir différents régimes de trafic (fluide, congestionné, creeping) avec des ensembles d'équations distincts. Dans la phase "creeping", les motos pourraient suivre une loi de vitesse spécifique leur permettant de maintenir une vitesse résiduelle non nulle [FanWork2015; Saumtally2012].
- ▶ **Modification des paramètres du modèle** :
 - ▶ **Réduction de la pression $p(\rho)$ pour les motos** : Simuler leur capacité à circuler même à très haute densité [ChanutBuisson2003].
 - ▶ **Fonction de relaxation $\tau(\rho)$ spécifique** : Permettre aux motos d'ajuster leur vitesse différemment en congestion [FanWork2015].
 - ▶ **Vitesse d'équilibre modifiée $V_e(\rho)$** : Assurer une vitesse minimale non nulle pour les motos lorsque la densité approche le maximum.
 - ▶ **Occupation spatiale effective** : Considérer que les motos occupent moins d'espace effectif en congestion, leur permettant de bouger.

Le comportement de "creeping" est encore peu étudié dans les modèles macroscopiques, en particulier dans le cadre ARZ et pour des contextes comme celui du Bénin [Saumtally2012]. Les modèles existants nécessitent une adaptation et une validation spécifiques.

2.3 Modélisation de contextes et phénomènes spécifiques

2.3.1 Modélisation de réseaux et d'intersections

L'application des modèles macroscopiques à des réseaux routiers complexes nécessite de traiter spécifiquement les **intersections** (jonctions ou nœuds). Celles-ci constituent des points de discontinuité où les flux entrants sont distribués vers les flux sortants.

Approches générales :

- ▶ **Conservation du flux** : Le flux total entrant doit égaler le flux total sortant¹³; [CostesequeSlides].
- ▶ **Règles de distribution** : Utilisation de matrices de distribution ou de coefficients de partage pour déterminer la proportion du flux allant de chaque entrée vers chaque sortie [kolb2018pareto].
- ▶ **Règles de priorité / Demande et offre** : Modélisation de la capacité limitée de la jonction et des priorités entre les flux concurrents (e.g., modèle de Daganzo CTM, approches de Lebacque [Lebacque1996]).

Défis avec les modèles de second ordre (ARZ) :

- ▶ **Gestion de la variable de second ordre** : La variable supplémentaire (e.g., $w = v + p(\rho)$) doit également être traitée à la jonction. Des approches consistent à imposer des conditions spécifiques sur cette variable, comme la conservation de w ou son homogénéisation pour le flux sortant [kolb2018pareto; HertyEtAl2007].

13. https://www.researchgate.net/publication/322175742_Macroscopic_traffic_model_for_large_scale_urban_traffic_network_design

- ▶ **Solveurs de Riemann aux jonctions** : Le développement de solveurs de Riemann spécifiques pour les systèmes ARZ aux jonctions est un domaine de recherche actif [CostesequeSlides].
- ▶ **Complexité des intersections réelles** : La modélisation détaillée des feux de signalisation, des mouvements tournants complexes, et des interactions fines reste un défi pour les approches macroscopiques.

2.3.2 Impact de l'infrastructure

La qualité et le type de l'infrastructure routière (état de la chaussée, largeur des voies, présence d'accotements, etc.) ont un impact direct sur les paramètres du flux de trafic.

- ▶ **Influence sur les paramètres du modèle** : La qualité de la route affecte principalement la **vitesse de flux libre** V_{max} et la **capacité** (débit maximal) q_{max} , qui sont des paramètres clés des diagrammes fondamentaux $V_e(\rho)$ utilisés dans les modèles LWR et ARZ [JollyEtAl2005]¹⁴. Des routes dégradées ou des voies étroites entraînent généralement une réduction de ces valeurs [GuraraEtAl2022].
- ▶ **Intégration dans les modèles** :
 - ▶ **Ajustement des paramètres** : Utiliser des valeurs différentes pour V_{max} , q_{max} , ou d'autres paramètres du diagramme fondamental en fonction du type ou de l'état de la route¹⁵.
 - ▶ **Coefficients de friction/rugosité** : Intégrer des termes liés à l'état de la surface dans l'expression de $V_e(\rho)$ [GuraraEtAl2022].
 - ▶ **Modélisation des discontinuités** : Traiter les changements brusques de qualité de route comme des discontinuités spatiales dans les paramètres du modèle.

L'intégration de l'impact de l'infrastructure est particulièrement pertinente au Bénin, où l'état des routes peut être très variable [NwankwoEtAl2019].

2.3.3 Traffic Flow in Developing Economies

La modélisation du trafic dans les économies en développement, comme le Bénin, présente des défis uniques par rapport aux contextes des pays développés où la plupart des modèles ont été initialement conçus.

Caractéristiques et défis spécifiques :

- ▶ **Hétérogénéité extrême** : Mélange très diversifié de véhicules motorisés (motos, voitures, camions, bus) et non motorisés (vélos, charrettes), ainsi que des piétons partageant souvent le même espace routier [Chanut2004].
- ▶ **Prédominance des motos** : Rôle central des deux-roues motorisés (souvent comme taxis) dans la mobilité quotidienne [Kalieu2016].

14. <https://www.youtube.com/watch?v=oA1w4RMcSGI>

15. <https://www.youtube.com/watch?v=oA1w4RMcSGI>

- ▶ **Manque de discipline de voie :** Comportements de conduite moins contraints par les voies, avec des mouvements latéraux fréquents et une utilisation opportuniste de l'espace [easts2011modeling].
- ▶ **Règles de conduite informelles :** Moindre respect des règles formelles, notamment aux intersections, nécessitant potentiellement des modèles non-FIFO (First-In-First-Out).
- ▶ **Limitations de l'infrastructure :** Qualité variable des routes, capacité souvent inadéquate, manque de signalisation ou de marquage au sol [Chanut2004].
- ▶ **Disponibilité des données :** Collecte de données de trafic souvent plus difficile et moins systématique.

Efforts de modélisation :

- ▶ Des études spécifiques ont été menées dans des contextes similaires (e.g., Inde, Vietnam, autres pays africains) pour adapter les modèles existants ou en développer de nouveaux [TiwariEtAl2007].
- ▶ L'accent est mis sur la modélisation multi-classe, l'intégration des comportements spécifiques des motos, et la prise en compte des interactions complexes dans un environnement moins structuré [FanWork2015].
- ▶ L'utilisation de modèles ARZ étendus apparaît comme une voie prometteuse pour capturer à la fois la dynamique hors équilibre et l'hétérogénéité prononcée [khan2021macroscopic].

Cependant, la littérature spécifiquement dédiée à la modélisation macroscopique avancée (type ARZ) pour le contexte précis du Bénin reste limitée.

2.4 Méthodes numériques pour les modèles macroscopiques

La résolution numérique des modèles macroscopiques de trafic, qui sont formulés comme des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques (LWR, ARZ), nécessite des méthodes robustes capables de traiter les discontinuités (ondes de choc) et de préserver les propriétés physiques du flux.

Méthodes courantes :

- ▶ **Méthodes des Volumes Finis (FVM) :** Largement utilisées pour les lois de conservation. Elles discrétisent le domaine spatial en volumes de contrôle et assurent la conservation des quantités (densité, quantité de mouvement) à travers les interfaces des cellules [FanWork2015]. Elles sont bien adaptées aux discontinuités et peuvent gérer des géométries complexes [FanWork2015; FanHertySeibold2014].
- ▶ **Schémas de type Godunov :** Une classe spécifique de FVM basée sur la résolution (exacte ou approchée) de problèmes de Riemann à chaque interface entre les cellules pour calculer les flux numériques [MammarEtAl2009]. Le Cell Transmission Model (CTM) de Daganzo est un exemple populaire de schéma Godunov de premier ordre pour LWR. Ces schémas sont connus pour leur capacité à capturer nettement les chocs [FanWork2015].

- ▶ **Schémas d'ordre élevé (e.g., WENO, MUSCL)** : Pour améliorer la précision des FVM, des techniques de reconstruction d'ordre supérieur (comme WENO - Weighted Essentially Non-Oscillatory) peuvent être utilisées pour interpoler les valeurs dans les cellules avant de résoudre le problème de Riemann [Giorgi2002].
- ▶ **Traitement des termes sources (pour ARZ avec relaxation)** : Lorsque des termes sources (comme le terme de relaxation $(V_e - v)/\tau$) sont présents, des techniques spécifiques comme le *splitting* d'opérateur (séparation des parties hyperboliques et sources) ou des discrétisations adaptées des termes sources sont nécessaires pour maintenir la précision et la stabilité [kolb2018pareto].
- ▶ **Schémas spécifiques pour ARZ** : Des solveurs de Riemann approchés [ZhangEtAl2003] et des schémas spécifiques comme les schémas central-upwind [Giorgi2002] ont été développés pour le système ARZ.

Condition de stabilité : Les schémas explicites (comme la plupart des FVM et Godunov) sont soumis à une condition de stabilité, typiquement la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), qui lie le pas de temps Δt au pas d'espace Δx et aux vitesses d'onde maximales du système pour garantir la convergence [BiswasUddin2015Metanet].

Le choix de la méthode numérique dépend de la complexité du modèle (LWR vs ARZ, mono- vs multi-classe), du niveau de précision requis, et des ressources computationnelles disponibles.

2.5 Synthèse et Lacune de Recherche

Synthèse critique : La revue de la littérature montre une progression claire depuis les modèles macroscopiques de premier ordre (LWR), simples mais limités, vers les modèles de second ordre (notamment ARZ), plus complexes mais capables de capturer des dynamiques hors équilibre essentielles comme l'hystérésis et les oscillations *stop-and-go*. Le modèle ARZ, avec son respect de l'anisotropie et sa flexibilité, apparaît comme un cadre théorique particulièrement prometteur.

La nécessité de représenter l'hétérogénéité du trafic a conduit au développement d'approches multi-classes pour LWR et ARZ. Ces approches permettent de distinguer différents types de véhicules, mais les modèles actuels peinent encore à capturer finement les interactions complexes et les comportements spécifiques, en particulier ceux des motos (*gap-filling*, *interweaving*, *creeping*) qui sont prédominants dans des contextes comme celui du Bénin [Saumtally2012].

La modélisation du trafic dans les économies en développement fait face à des défis supplémentaires liés à l'hétérogénéité extrême, aux infrastructures variables, et aux comportements de conduite spécifiques. Bien que des études existent, l'application et la validation de modèles macroscopiques avancés, spécifiquement adaptés et calibrés pour le contexte béninois, restent limitées.

Lacune spécifique de recherche : La principale lacune identifiée est le **manque de modèles ARZ multi-classes étendus, spécifiquement développés, calibrés et validés pour le contexte unique du trafic au Bénin**. Plus précisément :

1. Les extensions multi-classes existantes d'ARZ sont souvent rudimentaires et ne capturent pas adéquatement les comportements spécifiques et dominants des motos béninoises (Zémidjans), tels que le **gap-filling**, l'**interweaving**, et le **creeping** en conditions de congestion [Saumtally2012].
2. Il manque une **paramétrisation réaliste** des fonctions clés du modèle ARZ (vitesse d'équilibre $V_e(\rho)$, fonction de pression $p(\rho)$, temps de relaxation τ) qui intègre l'impact de la **qualité variable de l'infrastructure** routière locale [JollyEtAl2005].
3. Il n'existe pas de modèle ARZ multi-classe qui intègre **simultanément** l'hétérogénéité extrême du trafic béninois, l'impact infrastructurel, et les comportements spécifiques des motos, et qui soit validé par des **données empiriques collectées localement**.

Contribution de ce travail : Ce travail vise à combler cette lacune en développant et validant une **extension du modèle ARZ multi-classes** spécifiquement conçue pour le contexte du Bénin. Cette extension incorporera :

- ▶ Des équations et/ou des termes spécifiques pour modéliser les comportements clés des motos (creeping, gap-filling, interweaving).
- ▶ Une paramétrisation adaptée aux caractéristiques des véhicules locaux et à l'état des infrastructures routières béninoises.
- ▶ Une calibration et une validation rigoureuses basées sur des données de trafic réelles collectées au Bénin.

L'objectif final est de fournir un outil de modélisation plus réaliste et pertinent pour l'analyse et la gestion du trafic dans les villes béninoises.

Chapitre 3

Caractéristiques du Trafic Routier au Bénin

Ce chapitre présente les caractéristiques uniques du trafic routier au Bénin, en mettant l'accent sur le contexte socio-économique, l'état des infrastructures, la composition du parc automobile dominé par les motos, leurs comportements spécifiques, et les défis qui en découlent pour la modélisation mathématique.

3.1 Contexte Socio-Économique et Défis du Transport

Le Bénin, comme de nombreux pays d'Afrique de l'Ouest, connaît une urbanisation rapide et une croissance démographique soutenue. Selon les données agrégées de la Banque Mondiale, basées sur les statistiques de l'Institut National de la Statistique et de l'Analyse Économique (INSAE), la population urbaine du Bénin représentait ****47.86%**** de la population totale en 2019 [**WorldBank_UrbanPop_Benin_2019**], avec une concentration particulière dans les villes du littoral comme Cotonou, Porto-Novo, Abomey-Calavi, ainsi que Parakou dans le nord.

Cette urbanisation s'accompagne d'une demande croissante en mobilité, dans un contexte où les infrastructures peinent à suivre le rythme de développement. Le Bénin doit faire face à plusieurs défis majeurs dans le secteur des transports :

- ▶ Un **réseau routier souvent insuffisant et inégalement entretenu**, particulièrement en milieu rural et dans le nord, entraînant des coûts et des temps de transport élevés hors des grands centres et exacerbant les disparités régionales. L'entretien insuffisant est une faiblesse reconnue, nécessitant des investissements importants [**WorldBank_UrbanMobilityCrisis_2022**].
- ▶ Une **motorisation croissante et rapide**, particulièrement celle des deux-roues motorisés (motos), qui constituent une part très importante du parc et dont la régulation et l'intégration sécurisée sont complexes [**Assouma_ZemidjanCotonou_2023**]. Le parc de véhicules est également marqué par une certaine vétusté, notamment pour les voitures d'occasion importées, dont l'âge moyen était estimé entre 13 et 18 ans en 2017 [**WorldBank_UrbanMobilityCrisis_2022**].

- ▶ Un **système de transport public formel limité**, surtout en dehors de quelques lignes interurbaines, largement suppléé par des services informels (comme les **Zémidjans**) efficaces pour la couverture mais peu structurés et posant des défis de sécurité et de régulation [Houndagnon_ZemidjanPortoNovo_2004].
- ▶ Un **besoin d'investissements massifs** pour la construction, la réhabilitation et l'entretien des infrastructures afin de soutenir la croissance économique et d'améliorer l'accessibilité, objectif central du PAG [Benin_PAG_2021_2026].

Ces défis ont conduit à l'émergence d'un système de transport dominé par des solutions adaptatives, parmi lesquelles les motos-taxis (communément appelées **Zémidjans**) occupent une place prépondérante. Elles constituent un service de transport public informel mais essentiel, assurant une part très significative de la mobilité urbaine, estimée par exemple à ****75%** du transport interne à Cotonou** vers 2017-2018 [Djossou_ZemidjanCotonou].

3.2 Le Réseau Routier Béninois

Le réseau routier béninois présente une grande hétérogénéité qui impacte significativement la dynamique du trafic.

3.2.1 Hétérogénéité des Infrastructures Routières

La longueur exacte et l'état actualisé du réseau routier total sont difficiles à établir précisément à partir des sources publiques consolidées. Des statistiques plus anciennes (vers 2008) indiquaient un réseau classé d'environ 6 591 km dont 1 838 km bitumés (environ 28%) [INSAE_Stats_Benin_Referenced]. Un rapport de la BAD de 2009 mentionnait des chiffres similaires pour le réseau classé relevant du ministère [BAD_RouteBohiconDassa_PAD_2009]. Des efforts considérables ont été menés depuis 2016, avec plus de ****2070 km** de routes bitumées additionnelles** annoncées comme réalisées ou en cours début 2024 [GouvBJ_ActuRoutes_Jan2024]. Malgré ces progrès, une large part du réseau, notamment la voirie urbaine secondaire et les routes rurales, reste non revêtue. Par exemple, à Cotonou, avant le lancement du programme d'asphaltage (lié au projet PAURAD), il était estimé que seulement ****14%** de la voirie était revêtue** [WorldBank_PAURAD_PAD_2018]. On distingue principalement quatre catégories de revêtement, chacune influençant différemment la circulation :

- ▶ **Routes bitumées** : Principalement dans les grandes villes et sur les axes interurbains majeurs. Leur qualité varie de bonne (réhabilitations récentes) à fortement dégradée (nids-de-poule, fissures), affectant différemment voitures et motos [IMF_Benin_ArtIV_2022].
- ▶ **Routes en terre ou latérite** : Très répandues, majoritaires dans de nombreuses zones périurbaines et rurales. Elles sont sensibles aux conditions climatiques (poussière en saison sèche, boue en saison des pluies), souvent difficilement praticables pour les voitures standards mais généralement accessibles aux motos.
- ▶ **Routes pavées (pavés autobloquants)** : Utilisées dans certaines opérations d'aménagement urbain/périurbain (par exemple, via le projet asphaltage). Elles offrent

une meilleure résistance et adhérence que la terre, mais peuvent induire des vibrations.

- **Pistes et voies informelles** : Créées par l’usage, particulièrement dans les quartiers périphériques ou non lotis. Souvent étroites et irrégulières, elles sont fréquemment empruntées par les motos pour éviter la congestion ou accéder à des zones spécifiques, formant un réseau parallèle.

Remarque 3.1 : Cette diversité des revêtements affecte différemment chaque classe de véhicule. Notamment, les motos sont souvent moins affectées que les voitures par la dégradation modérée de la chaussée ou les surfaces non bitumées [IMF_Benin_ArtIV_2022] (conceptuellement), ce qui renforce leur avantage comparatif en termes de temps de parcours et de zones accessibles. Cette caractéristique nécessitera une prise en compte spécifique dans la modélisation.

3.2.2 Organisation Spatiale du Réseau

La configuration du réseau présente plusieurs particularités structurelles :

- **Structure souvent radiale** dans les grandes villes (ex : Cotonou), concentrant le trafic vers des points centraux et des axes principaux.
- **Voies à largeur variable**, même sur un même axe, créant des goulots d’étranglement physiques.
- **Rareté des voies rapides** ou autoroutes urbaines permettant une ségrégation efficace par vitesse et type de véhicule.
- **Intégration forte avec l’habitat**, y compris l’habitat spontané, présentant des réseaux viaires irréguliers où coexistent intensément trafic motorisé, piétons et activités commerciales [WorldBank_PAURAD_PAD_2018].

3.2.3 Gestion des Intersections et Régulation du Trafic

La régulation et la gestion des intersections au Bénin présentent des spécificités qui complexifient leur modélisation :

- **Proportion relativement faible d’intersections signalisées** par des feux tricolores dans l’ensemble du réseau. De plus, les feux existants connaissent fréquemment des ****dysfonctionnements**** liés à des problèmes de maintenance, de fourniture électrique ou de vandalisme, réduisant leur efficacité et leur crédibilité auprès des usagers [LaNation_FeuxTricolores_2021; BeninWebTV_FeuxCotonou_2023]. Des initiatives pour améliorer la situation existent (installation de feux solaires “made in Benin” depuis 2022-2023, projet de Poste Central de Régulation lié au Grand Nokoué) [GouvBJ_FeuxSolaires_2023; WorldBank_PAURAD_PAD_2018].
- **Ronds-points fréquents**, constituant un mode de gestion privilégié, mais souvent non géométriquement optimisés et opérant en surcharge aux heures de pointe, générant des blocages importants.

- ▶ **Présence ponctuelle d'agents de circulation** aux carrefours majeurs, introduisant une régulation humaine adaptative mais dont l'efficacité dépend des conditions et de la formation.
- ▶ **Règles de priorité souvent négociées** de manière informelle entre usagers, particulièrement aux intersections non régulées ou en cas de dysfonctionnement des feux. L'assertivité et la taille du véhicule peuvent influencer le passage [OgundeleEtAl2017] (étude nigériane, contexte similaire).
- ▶ **Respect variable du code de la route** formel par l'ensemble des usagers (y compris non-respect des feux rouges, sens interdits, etc.), contribuant à l'insécurité routière et à l'imprédictibilité du trafic [WorldBank_BeninRoadSafetyAssess_2022 ; LaNation_FeuxTricolores_2021].

Ces caractéristiques créent un environnement routier où la négociation, l'anticipation et l'adaptabilité individuelle ou collective priment souvent sur les règles établies, rendant la modélisation basée uniquement sur des règles formelles peu réaliste.

3.3 Composition Hétérogène du Parc Automobile

Le parc automobile béninois présente une structure très différente de celle des pays occidentaux, caractérisée par une grande diversité et une ****prédominance marquée des deux-roues motorisés****. Bien que des statistiques précises et exhaustives au niveau national soient difficiles d'accès, les études ciblées, les observations et les données partielles concordent sur la composition générale suivante, particulièrement visible dans les flux urbains [WorldBank_PAURAD_PAD_2017].

- ▶ **Motos et tricycles** : Représentant la ****très grande majorité des véhicules en circulation**** (souvent estimée bien au-delà de 70-80% des flux dans les grandes villes comme Cotonou). Elles constituent l'épine dorsale du transport urbain et périurbain, incluant les motos privées et les très nombreux Zémidjans (estimés à environ 120 000 à Cotonou en 2017/2018) [Kalieu2016 ; Houndagnon_ZemidjanPortoNovo_2004].
- ▶ **Voitures particulières** : Une part minoritaire mais croissante du parc, souvent importées d'occasion et présentant un âge moyen relativement élevé (estimé entre 13 et 18 ans en 2017 [WorldBank_BeninRoadSafetyAssess_2022]).
- ▶ **Taxis-voitures** : Une composante visible du transport rémunéré de personnes, souvent des véhicules plus anciens.
- ▶ **Minibus et bus** : Assurant une partie du transport en commun, souvent sur des lignes fixes interurbaines ou quelques lignes urbaines, mais avec une couverture et une fréquence limitées par rapport à la demande.
- ▶ **Camions et poids lourds** : Essentiels pour le transport de marchandises, plus présents sur les axes interurbains, les corridors économiques et dans les zones d'activité (port, marchés).

Cette hétérogénéité extrême, avec une classe (les motos) numériquement dominante et aux caractéristiques physiques très distinctes, est un élément fondamental pour la modélisation.

3.4 Comportements Spécifiques des Motos et Impact sur le Trafic

Les motos, en tant que classe dominante, jouent un rôle central et adoptent des comportements de conduite spécifiques qui les distinguent nettement des autres usagers et influencent profondément la dynamique globale du trafic. Bien que la quantification précise de ces comportements au Bénin nécessite des études dédiées avec suivi vidéo, leur existence est confirmée par l'observation directe et indirectement par les études sur la mobilité, la congestion et l'accidentalité [Kalieu2016; Houndagnon_ZemidjanPortoNovo_2004; WorldBank_BeninRoadSafetyAssess_2022].

3.4.1 Pratiques de Conduite Distinctives

Gap-Filling (Remplissage des Espaces)

Le *gap-filling* désigne la tendance et la capacité des motos à utiliser les **espaces longitudinaux et latéraux disponibles** entre les véhicules plus grands (voitures, camions), même si ces espaces sont réduits [khan2021macroscopic]. Ceci leur permet de maintenir une vitesse moyenne plus élevée que les voitures en conditions de congestion légère à modérée et d'augmenter significativement la densité d'occupation de la chaussée [NguyenEtAl2012]. Leur faible largeur leur permet d'exploiter des interstices inaccessibles aux voitures.

Interweaving (Circulation en Zigzag / Mouvement Latéral)

L'*interweaving* ou le **mouvement latéral fréquent et agile** est caractéristique. Les motos se fauillent entre les files de véhicules plus lents ou statiques, changent fréquemment de position latérale sur la chaussée pour progresser [TiwariEtAl2007]. Ce comportement, facilité par leur maniabilité, optimise leur temps de parcours individuel mais peut perturber le flux des véhicules plus larges, réduire l'adhérence à une discipline de voie stricte et augmenter les risques de conflits, notamment moto-moto ou moto-voiture [easts2011modeling; WorldBank_BeninRoadSafetyAssess_2022].

Front-Loading aux Intersections

Le *front-loading* est l'accumulation préférentielle des motos à l'**avant des files d'attente** aux intersections (feux rouges, stops, ronds-points congestionnés). Les motos filtrent à travers le trafic arrêté ou ralenti pour se positionner en première ligne, occupant tout l'espace disponible sur la largeur de la chaussée [Kalieu2016] (observation fréquente, également décrite dans des contextes similaires [TiwariEtAl2007]). Elles tendent également à démarrer très rapidement, parfois en anticipant le signal vert, ce qui influence la capacité de l'intersection et la dynamique de départ des pelotons de véhicules.

Adaptation aux Infrastructures et "Creeping"

Les motos démontrent une plus grande capacité à maintenir leur vitesse sur des **chaussées dégradées ou non revêtues** par rapport aux voitures [IMF_Benin_ArtIV_2022] (conceptuellement). Elles utilisent fréquemment les accotements, les trottoirs (illégalement), les pistes

informelles ou les espaces non conventionnels pour contourner les obstacles ou la congestion principale. Le "creeping" (reptation), où les motos continuent de progresser lentement même dans une congestion quasi-totale en se faulant, est également une caractéristique observée.

3.4.2 Impact sur la Dynamique Globale du Trafic

Ces comportements spécifiques des motos modifient profondément la dynamique du trafic par rapport aux modèles classiques développés pour un trafic majoritairement automobile [WongWong2002]. L'impact est majeur, bien que souvent non quantifié précisément dans la littérature locale :

- ▶ **Effets sur la Capacité et la Relation Vitesse-Densité** : Le gap-filling et l'interweaving tendent à **augmenter le débit total** (véhicules par heure) pouvant emprunter une section de route pour une même surface, particulièrement en régime congestionné [khan2021macroscopic] (conceptuellement). La relation vitesse-densité macroscopique est modifiée : elle dépend fortement de la proportion de motos et de leur capacité à maintenir une vitesse relative plus élevée que les voitures à densité égale ou élevée [TiwariEtAl2007]. La capacité maximale peut être atteinte à des densités plus élevées.
- ▶ **Effets sur la Stabilité du Flux** : L'interweaving peut introduire des perturbations locales (freinages des voitures) mais aussi permettre au système de fonctionner comme un **"flux à deux vitesses"**, où les motos conservent une certaine fluidité alors que les véhicules plus larges sont bloqués ou ralentis. La nature des ondes de choc de congestion peut être différente.
- ▶ **Effets sur la Dynamique aux Intersections** : Le front-loading modifie les profils de départ des véhicules après un arrêt, avec une **"vague" initiale rapide de motos** qui sature l'espace. Ceci affecte le calcul de la capacité effective des feux ou des ronds-points et les temps de vert nécessaires, comme le montrent les modèles de capacité tenant compte des comportements de départ [Akcelik_Book_TrafficSignals_2008]. Les problèmes de régulation aux carrefours de Cotonou sont en partie liés à cette dynamique [LaNation_FeuxTricolores_2021].
- ▶ **Utilisation de Réseaux Parallèles et Complexité des Trajectoires** : L'usage fréquent de voies informelles ou d'espaces non dédiés par les motos rend la prédiction des flux basée uniquement sur le réseau officiel plus complexe et moins précise. Les trajectoires réelles sont moins contraintes par les voies définies.

3.5 Méthodologie de Collecte et d'Analyse des Données

La modélisation précise nécessite des données spécifiques au contexte local, dont la collecte systématique et détaillée présente des défis au Bénin en raison de ressources limitées et de la complexité du système. Notre approche pour informer le modèle s'appuiera donc sur une combinaison pragmatique de sources :

- ▶ **Données Indirectes et Publiques** : Utilisation de couches de trafic agrégées accessibles publiquement (type Google Maps Traffic, si la couverture est jugée suffisante) pour identifier qualitativement les zones et heures de congestion récurrentes, et estimer très approximativement des vitesses relatives ou des temps de parcours moyens sur certains axes.
- ▶ **Données Statistiques Officielles** : Consultation des données disponibles auprès d'organismes comme l'INSAE (Institut National de la Statistique et de l'Analyse Économique - successeur de l'INStAD), le Ministère en charge des Transports (actuellement Ministère du Cadre de Vie et des Transports, MCVT [[MCVT_Website_Benin](#)]), l'Agence Nationale des Transports Terrestres (ANaTT, mentionnée dans [[WorldBank_BeninRoadS](#)]) ou le Centre National de Sécurité Routière (CNSR [[CNSR_Website_Benin](#)]) concernant la composition estimée du parc, le réseau routier officiel (via l'AGEROUTE si possible), les données d'accidentalité, et potentiellement des comptages de trafic agrégés s'ils existent et sont accessibles. Les plans et rapports gouvernementaux (comme le PAG [[Benin_PAG_2021_2026](#)]) et les rapports d'organisations internationales (Banque Mondiale [[WorldBank_BeninEconUpdate_Apr2023](#); [WorldBank_PAURAD_PA](#)], BAD [[BAD_RouteBohiconDassa_PAD_2009](#)]) seront aussi exploités.
- ▶ **Littérature Scientifique et Grise** : Exploitation des études académiques existantes spécifiques au Bénin (e.g., [[Kaliou2016](#); [Houndagnon_ZemidjanPortoNovo_2004](#)]) ou à des contextes très similaires (pays voisins [[OgundeleEtAl2017](#)], villes asiatiques avec fort taux de motos [[TiwareEtAl2007](#); [NguyenEtAl2012](#); [khan2021macroscopic](#)]) pour comprendre les comportements, les ordres de grandeur et les approches de modélisation déjà tentées.
- ▶ **Observations Qualitatives Ciblées** : Documentation photographique ou vidéographique ponctuelle sur le terrain, et notes d'observation pour confirmer ou illustrer les phénomènes clés décrits dans la littérature (gap-filling, front-loading, usage des infrastructures) sans prétendre à une quantification systématique faute de moyens dédiés.
- ▶ **Consultation d'Experts Locaux** (si possible) : Échanges avec des professionnels béninois (urbanistes, ingénieurs des transports, forces de l'ordre, chercheurs locaux) pour valider les observations, comprendre les pratiques locales de gestion et recueillir des avis éclairés.

Remarque 3.2 : Il est crucial de reconnaître les limitations inhérentes à cette approche, dictée par la disponibilité des données. Le manque probable de données granulaires et continues (trajectoires individuelles de véhicules sur de longues périodes, comptages automatiques classifiés par type de véhicule sur l'ensemble du réseau étudié) nécessitera de formuler des hypothèses lors de la calibration du modèle. L'objectif principal sera de s'assurer que le modèle est capable de reproduire ****qualitativement**** les phénomènes clés observés (congestion due aux motos, flux à deux vitesses, dynamique aux intersections) plutôt que de viser une correspondance quantitative parfaite point par point avec une réalité difficile à mesurer exhaustivement.

Le traitement envisagé des données collectées inclura :

1. Analyse spatio-temporelle des données de congestion indirectes disponibles pour identifier les points noirs et les régimes de trafic typiques.
2. Classification des segments routiers étudiés selon leur type (bitumé/non bitumé/pavé) et état présumé (bon/dégradé), en s'appuyant sur les informations disponibles et les observations.
3. Synthèse des informations sur la composition du parc (proportion de motos vs autres véhicules) issues des sources disponibles, en définissant des proportions types pour les zones étudiées.
4. Validation croisée des informations entre les différentes sources (littérature, observations, données indirectes, statistiques partielles) pour assurer la cohérence des hypothèses.

3.6 Défis et Besoins pour la Modélisation (Conclusion du Chapitre)

Les spécificités béninoises décrites dans ce chapitre – hétérogénéité extrême du parc dominé par les motos [Kalieu2016], infrastructure variable en type et en état [WorldBank_PAURAD_PAD_2018] et comportements de conduite adaptatifs distincts des motocyclistes (gap-filling, interweaving, front-loading, adaptation à l'infrastructure) [khan2021macroscopic; TiwariEtAl2007] – soulèvent des défis fondamentaux pour l'application directe des modèles de trafic standards.

Les modèles macroscopiques ****homogènes**** (supposant un seul type de véhicule ou des véhicules aux comportements similaires) sont clairement ****inadaptés**** pour capturer la réalité du trafic béninois. Les modèles ****multi-classes**** standards, bien que nécessaires pour distinguer au moins motos et voitures, risquent d'être ****insuffisants**** s'ils ne capturent pas explicitement les interactions spécifiques et les comportements uniques des motos qui dictent largement la dynamique observée, notamment en condition de saturation [WongWong2002]. De plus, l'impact différentiel de l'état de l'infrastructure sur les vitesses et les choix d'itinéraire des différentes classes de véhicules doit être intégré pour plus de réalisme. La gestion souvent informelle ou défailante des intersections [LaNation_FeuxTricolores_2021; BeninWebTV_FeuxCotonou_2023] ajoute une couche de complexité.

Ce chapitre a donc mis en évidence la nécessité impérieuse de développer ou d'adapter une approche de modélisation sur mesure pour le contexte béninois. Dans le chapitre suivant, nous relèverons ce défi en proposant une ****extension du modèle de second ordre Aw-Rascle-Zhang (ARZ)****. Ce cadre est choisi pour sa capacité intrinsèque à modéliser les phénomènes hors équilibre (importants lors de la formation et la dissipation de la congestion) et sa flexibilité reconnue pour l'extension multi-classes. Notre extension visera spécifiquement à intégrer les caractéristiques clés du trafic béninois identifiées ici – notamment la distinction moto/voiture, leurs comportements différenciés (vitesses souhaitées, capacité à exploiter les espaces), et potentiellement l'influence de l'état de la route – afin de fournir un outil plus réaliste pour l'analyse du trafic et l'évaluation de scénarios d'aménagement dans ce contexte spécifique.

Chapitre 4

Extended Multiclass ARZ Model Formulation for Benin

Ce chapitre est dédié à la formulation mathématique détaillée du modèle macroscopique de trafic routier proposé pour le contexte béninois. Comme établi dans la revue de la littérature (Chapitre 2), les modèles de premier ordre comme le LWR sont insuffisants pour capturer la complexité dynamique observée, notamment les phénomènes hors équilibre et l'hétérogénéité marquée du parc de véhicules. Le modèle Aw-Rascle-Zhang (ARZ) [AwKlarMaterneRascle2000; ZhangEtAl2003] a été identifié comme une base théorique plus appropriée en raison de ses propriétés mathématiques avantageuses et de sa capacité intrinsèque à modéliser l'anisotropie, l'hystérésis et les ondes *stop-and-go* [FanHertySeibold2014; yu2024traffic].

L'objectif de ce chapitre est de construire une *extension multi-classes* de ce cadre ARZ, spécifiquement conçue pour intégrer les caractéristiques distinctives du trafic au Bénin, telles que décrites au Chapitre ?? . Cela inclut la prédominance écrasante des motocyclettes (Zémidjans), leurs comportements spécifiques (gap-filling, interweaving, creeping), et l'impact de la qualité variable de l'infrastructure routière.

4.1 Base Multiclass ARZ Framework Selection

La première étape cruciale dans la formulation du modèle est de reconnaître l'impératif d'une approche **multi-classes**. Le trafic au Bénin, comme démontré au Chapitre ?? , est caractérisé par une **hétérogénéité extrême**, où les motocyclettes constituent la majorité écrasante du flux (souvent plus de 70-80% en milieu urbain [Djossou_ZemidjanCotonou]) et co-existent avec des voitures particulières, des camions, des bus et des tricycles. Les différences fondamentales en termes de taille, de capacités dynamiques (accélération, freinage), de manœuvrabilité, et surtout de comportements de conduite (voir Section ??) entre les motos et les autres véhicules rendent tout modèle homogène (qui suppose un seul type de véhicule ou des comportements moyennés) intrinsèquement incapable de reproduire fidèlement la dynamique observée [WongWong2002]. L'utilisation d'un modèle multi-classes permet de distinguer explicitement les propriétés et les interactions de différents groupes de véhicules.

Plusieurs approches existent pour étendre le modèle ARZ à un cadre multi-classes [BenzoniGavageColo

[FanWork2015; ColomboMarcellini2020]. Pour ce travail, nous adoptons une formulation courante qui consiste à écrire un système d'équations ARZ pour chaque classe de véhicules, où les interactions entre les classes sont modélisées à travers les dépendances des fonctions clés (comme la vitesse d'équilibre et la fonction de pression) par rapport à l'état global du trafic (densités et/ou vitesses de toutes les classes).

Compte tenu de la dichotomie majeure observée au Bénin, nous considérerons initialement **deux classes** principales :

- ▶ Classe m : Motocyclettes (incluant les Zémidjans)
- ▶ Classe c : Autres véhicules (principalement voitures particulières, mais pouvant regrouper conceptuellement les véhicules plus larges et moins agiles)

Cette simplification initiale permet de se concentrer sur l'interaction fondamentale moto-voiture, tout en gardant la possibilité d'ajouter d'autres classes (camions, bus) dans des travaux futurs si nécessaire.

Le système de base ARZ multi-classes, avant l'intégration des spécificités béninoises, s'écrit sous la forme suivante, incluant un terme de relaxation vers une vitesse d'équilibre. Pour chaque classe $i \in \{m, c\}$:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{1}{\tau_i} (V_{e,i}(\rho_m, \rho_c) - v_i) \quad \text{avec} \quad w_i = v_i + p_i(\rho_m, \rho_c) \quad (4.1.2)$$

Où :

- ▶ $\rho_i(x, t)$ est la densité partielle de la classe i (nombre de véhicules de la classe i par unité de longueur) à la position x et au temps t . La densité totale est $\rho = \rho_m + \rho_c$.
- ▶ $v_i(x, t)$ est la vitesse moyenne de la classe i .
- ▶ $w_i(x, t) = v_i + p_i$ est la variable lagrangienne (parfois appelée "vitesse généralisée" ou "variable de Riemann") pour la classe i .
- ▶ $p_i(\rho_m, \rho_c)$ est la fonction de "pression" pour la classe i . Elle représente l'anticipation ou l'hésitation des conducteurs de la classe i face à la densité environnante. Dans les modèles multi-classes, elle dépend généralement des densités de toutes les classes présentes.
- ▶ $V_{e,i}(\rho_m, \rho_c)$ est la vitesse d'équilibre souhaitée par les conducteurs de la classe i . Elle dépend également, en général, des densités des différentes classes et représente la vitesse que les conducteurs de la classe i adopteraient en conditions stables pour une densité donnée.
- ▶ τ_i est le temps de relaxation caractéristique pour la classe i , représentant le temps nécessaire aux conducteurs pour ajuster leur vitesse vers la vitesse d'équilibre. Il peut être constant ou dépendre des densités.

La formulation (4.1.2) est une forme non-conservative de l'équation de moment intégrant la relaxation. Le choix de la forme exacte (conservative ou non-conservative) et la manière

dont p_i , $V_{e,i}$ et τ_i sont définis pour capturer les interactions inter-classes constituent le cœur de la modélisation multi-classes [FanWork2015; ColomboMarcellini2020].

Ce système (4.1.1)-(4.1.2) forme le **squelette** de notre modèle. Il capture déjà la dynamique de second ordre et la distinction entre les classes. Cependant, sous cette forme générique, il ne prend pas encore en compte les effets spécifiques du revêtement routier, ni les comportements particuliers des motos comme le gap-filling, l'interweaving ou le creeping. L'intégration de ces éléments fera l'objet des sections suivantes de ce chapitre.

4.2 Modeling Road Pavement Effects on Equilibrium Speed

L'une des caractéristiques marquantes du réseau routier béninois, comme souligné au Chapitre ?? (Section ??), est la grande **variabilité de l'état et du type de revêtement**. On y trouve des routes bitumées de qualité variable (allant de neuves à fortement dégradées), des routes en terre ou latérite (sensibles aux conditions climatiques), des pistes informelles et, plus récemment, des routes pavées. Cette hétérogénéité infrastructurelle influence de manière significative le comportement de conduite et, par conséquent, les paramètres clés du flux de trafic [NwankwoEtAl2019].

Dans le cadre du modèle ARZ, la **vitesse d'équilibre** $V_{e,i}$ est le paramètre qui représente la vitesse que les conducteurs de la classe i souhaitent atteindre dans des conditions de flux stabilisées, pour une densité donnée. Il est donc naturel de supposer que la qualité de la chaussée affecte directement cette vitesse souhaitée. En particulier, on s'attend à ce que la **vitesse maximale atteignable en flux libre** (lorsque la densité tend vers zéro), souvent notée $V_{max,i}$, soit réduite sur les routes de mauvaise qualité [JollyEtAl2005].

Nous proposons d'intégrer cet effet en rendant la fonction de vitesse d'équilibre $V_{e,i}$ explicitement dépendante non seulement des densités ρ_m et ρ_c , mais aussi d'un indicateur de la qualité de la route au point x , que nous noterons $R(x)$. Cet indicateur $R(x)$ peut être une variable discrète (par exemple, un indice catégorisant le type et l'état : 1 pour bitume neuf, 2 pour bitume dégradé, 3 pour latérite, etc.) ou une variable continue (par exemple, un indice de rugosité ou un score de qualité normalisé). Pour la suite, nous considérons $R(x)$ comme un paramètre spatialement variable qui caractérise localement l'infrastructure.

La vitesse d'équilibre pour la classe i devient alors une fonction $V_{e,i}(\rho_m, \rho_c, R(x))$. L'implémentation la plus directe consiste à moduler la vitesse en flux libre $V_{max,i}$ en fonction de $R(x)$:

$$V_{max,i} = V_{max,i}(R(x)) \quad (4.2.1)$$

Ainsi, la forme fonctionnelle de $V_{e,i}$ (par exemple, linéaire type Greenshields, exponentielle type Underwood, ou autre) utilisera cette valeur de $V_{max,i}$ adaptée localement. Par exemple, pour une forme générale :

$$V_{e,i}(\rho_m, \rho_c, R(x)) = V_{max,i}(R(x)) \cdot f_i(\rho_m, \rho_c) \quad (4.2.2)$$

où $f_i(\rho_m, \rho_c)$ est une fonction décroissante de la (des) densité(s), normalisée telle que $f_i(0, 0) = 1$.

Un aspect crucial, observé qualitativement au Bénin (voir Section ?? et [IMF_Benin_ArtIV_2022]), est que les **motocyclettes (classe m) sont généralement moins sensibles à la dégradation de la chaussée que les voitures (classe c)**. Elles peuvent maintenir une vitesse plus élevée sur des routes en terre ou bitumées dégradées. Ce comportement différentiel doit être reflété dans le modèle. Mathématiquement, cela signifie que la fonction $V_{max,m}(R(x))$ doit être moins sensible aux variations de $R(x)$ (représentant une dégradation) que la fonction $V_{max,c}(R(x))$.

Par exemple, si $R = 1$ représente une route en excellent état et $R = 2$ une route dégradée :

- ▶ $V_{max,m}(R = 2)$ sera inférieure à $V_{max,m}(R = 1)$, mais la réduction sera relativement modérée.
- ▶ $V_{max,c}(R = 2)$ sera inférieure à $V_{max,c}(R = 1)$, et la réduction sera proportionnellement plus importante que pour les motos.

La calibration du modèle (Chapitre ??) devra estimer ces différentes fonctions $V_{max,i}(R)$ en se basant sur des données observées ou des estimations raisonnables pour chaque type de route pertinent au Bénin.

L'introduction de cette dépendance spatiale $R(x)$ dans $V_{e,i}$ signifie que le terme source de relaxation dans l'équation (4.1.2) devient lui-même spatialement dépendant :

$$\frac{1}{\tau_i}(V_{e,i}(\rho_m, \rho_c, R(x)) - v_i)$$

De plus, si la fonction de pression p_i est également liée à la vitesse d'équilibre ou à la vitesse maximale (ce qui est parfois le cas dans certaines variantes d'ARZ), elle pourrait aussi hériter de cette dépendance spatiale. Cela a des implications importantes pour l'analyse mathématique (le système devient non-homogène spatialement même en l'absence de relaxation explicite si p_i dépend de R) et surtout pour la résolution numérique (Chapitre ??), qui devra correctement prendre en compte ces variations spatiales des paramètres physiques. Les changements brusques de type de revêtement (par exemple, passage de bitume à latérite) devront être traités comme des discontinuités dans les paramètres du modèle.

4.3 Modeling Motorcycle Gap-Filling in ARZ

Comme décrit en Section ??, une caractéristique essentielle du comportement des motocyclistes au Bénin (et dans d'autres contextes de trafic hétérogène dominé par les deux-roues) est le **"gap-filling" (remplissage d'interstices)**. Ce phénomène désigne la capacité des motos à exploiter les petits espaces longitudinaux et latéraux disponibles entre les véhicules plus larges, leur permettant de progresser et de maintenir une certaine mobilité même dans des conditions de densité modérée à élevée où les voitures sont fortement ralenties ou arrêtées [khan2021macroscopic; NguyenEtAl2012]. L'effet macroscopique du gap-filling est une utilisation plus efficace de l'espace routier et une capacité potentiellement accrue du flux, en particulier pour les motos, dans des situations de congestion [khan2021macroscopic].

Pour intégrer ce comportement dans le modèle ARZ multi-classes défini en Section 4.1, nous devons modifier la manière dont les motos perçoivent et réagissent à la densité envi-

ronnante par rapport aux autres véhicules (voitures). Dans le cadre ARZ, cette perception et cette réaction sont principalement capturées par la **fonction de pression** p_i et potentiellement par la **vitesse d'équilibre** $V_{e,i}$.

Le gap-filling peut être interprété comme une réduction de la "pression" ou du "malaise" ressenti par les motocyclistes en présence de densité, car ils disposent de moyens (l'accès aux interstices) pour atténuer l'impact de cette densité sur leur mouvement. De plus, leur capacité à exploiter ces espaces leur permet de maintenir une vitesse souhaitée plus élevée dans des conditions autrement congestionnées.

Nous choisissons de modéliser le gap-filling principalement en ajustant la **fonction de pression** p_m pour la classe des motocyclettes, en s'inspirant d'approches utilisées dans des modèles hétérogènes [FanWork2015]. La fonction de pression $p_i(\rho_m, \rho_c)$ représente la résistance interne du flux de la classe i due aux interactions de proximité avec les véhicules des deux classes. Le gap-filling suggère que les motos sont moins sensibles à la densité totale ou, plus spécifiquement, à la densité des voitures que ne le sont les voitures elles-mêmes.

Une manière mathématiquement cohérente d'intégrer cela est d'introduire le concept de **densité effective perçue** par chaque classe. La densité effective réelle, basée sur l'occupation spatiale, peut être approchée par une somme pondérée des densités en fonction de la longueur effective des véhicules. Soient l_m et l_c les longueurs effectives des motos et des voitures, respectivement, avec $l_m < l_c$. L'occupation spatiale totale est proportionnelle à $\rho_m l_m + \rho_c l_c$. La densité de bouchon théorique (ρ_{jam}) est atteinte lorsque l'occupation est maximale.

Nous définissons la **densité effective perçue par la classe i** , notée $\rho_{eff,i}$, comme suit :

- Pour les voitures (classe c), la densité effective perçue est la densité totale ou une densité basée sur l'occupation spatiale de toutes les classes : $\rho_{eff,c} = \rho_m + \rho_c$ ou, plus précisément, une mesure qui croît avec la présence de tous les véhicules, par exemple basée sur l'occupation totale $\rho_m l_m + \rho_c l_c$. Pour la simplicité, considérons d'abord qu'elle dépend de la densité totale $\rho = \rho_m + \rho_c$, éventuellement pondérée par les longueurs : $\rho_{eff,c} = \rho_m \frac{l_m}{l_c} + \rho_c$.
- Pour les motocyclettes (classe m), le gap-filling leur permet de percevoir une densité effective *inférieure* à la densité réelle, en particulier en présence de voitures. Nous modélisons cela en introduisant un paramètre $\alpha \in [0, 1]$ qui réduit l'impact de la densité des voitures sur la densité effective perçue par les motos :

$$\rho_{eff,m} = \rho_m + \alpha \rho_c \quad (4.3.1)$$

Où $\alpha < 1$ pour modéliser le gap-filling. Si $\alpha = 0$, les motos ne seraient "gênées" que par les autres motos, ce qui est irréaliste. Une valeur $\alpha > 0$ mais inférieure à 1 signifie que la présence des voitures est perçue par les motos comme moins contraignante (en terme d'espace ou de blocage) que leur propre présence ou que la présence des motos perçue par les voitures. La valeur de α reflète l'efficacité moyenne du gap-filling.

Les fonctions de pression p_i pour chaque classe i dépendront alors de leur densité effective perçue respective : $p_i = P_i(\rho_{eff,i})$. Une forme usuelle pour la fonction $P_i(\cdot)$ est une

fonction croissante qui tend vers l'infini lorsque la densité effective perçue approche d'une densité de blocage ou d'une occupation maximale perçue. En adoptant une approche similaire à [FanWork2015], nous pouvons définir les pressions comme :

$$p_m(\rho_m, \rho_c) = P_m(\rho_{eff,m}) = P_m(\rho_m + \alpha \rho_c) \quad (4.3.2)$$

$$p_c(\rho_m, \rho_c) = P_c(\rho_{eff,c}) \quad (\text{avec, par ex., } \rho_{eff,c} = \rho_m + \rho_c) \quad (4.3.3)$$

Les fonctions P_m et P_c peuvent être différentes pour refléter d'autres spécificités de comportement entre classes, mais le paramètre $\alpha < 1$ dans $\rho_{eff,m}$ est le mécanisme clé pour le gap-filling. Une forme possible pour $P_i(x)$ pourrait être $K_i \left(\frac{x}{1-x} \right)$ où x est une densité effective normalisée par la densité de bouchon perçue, ou une forme exponentielle. La sélection précise de la forme fonctionnelle et des paramètres K_m, K_c, α sera déterminée lors de la calibration (Chapitre ??).

Bien que la modification de la pression soit le mécanisme principal choisi ici pour le gap-filling, il est important de noter que ce comportement influence également la vitesse à laquelle les motos circulent en conditions denses. Cela peut se refléter dans la fonction de vitesse d'équilibre $V_{e,m}(\rho_m, \rho_c, R(x))$. En raison du gap-filling, la vitesse d'équilibre des motos diminuera moins rapidement avec l'augmentation de ρ_m et ρ_c que celle des voitures ($V_{e,c}$). Cette caractéristique sera implicitement capturée par la forme spécifique de la fonction $V_{e,m}$ choisie et calibrée, qui travaillera conjointement avec la fonction de pression p_m pour reproduire le comportement de maintien de vitesse en congestion. Le temps de relaxation τ_m pourrait également être ajusté pour refléter une capacité d'adaptation plus rapide des motos aux changements de densité locaux permis par le gap-filling.

En résumé, le gap-filling est modélisé en introduisant une **densité effective perçue réduite pour les motos** ($\rho_{eff,m} \leq \rho$) lors du calcul de leur fonction de pression p_m . Ceci, combiné à une fonction de vitesse d'équilibre $V_{e,m}$ appropriée, permettra au modèle de capturer la capacité des motos à maintenir une certaine mobilité et à exploiter l'espace dans des conditions de trafic hétérogène dense.

4.4 Modeling Motorcycle Interweaving Effects in ARZ

L'**entrelacement** (ou *interweaving, filtering, remontée de file*) est un autre comportement distinctif des motocyclistes en trafic hétérogène et dense au Bénin (Section ??). Il se caractérise par des mouvements latéraux fréquents et agiles des motos entre les files de véhicules plus larges, en particulier à basse vitesse ou à l'arrêt [TiwaretAl2007; DiFrancescoEtAl2015; easts2011modeling]. Contrairement au "gap-filling" qui met l'accent sur l'utilisation des espaces longitudinaux, l'entrelacement implique une dynamique plus latérale et une capacité à changer de position sur la chaussée pour trouver un passage. Ce comportement permet aux motos d'éviter d'être bloquées derrière des véhicules plus lents et d'optimiser leur propre temps de parcours, mais peut également perturber le flux des véhicules plus larges et réduire la discipline de voie générale [easts2011modeling].

La modélisation de l'entrelacement dans un cadre macroscopique **unidimensionnel** comme le modèle ARZ multi-classes est intrinsèquement difficile, car le modèle ne représente pas ex-

plicitement les positions latérales ou les voies multiples. Par conséquent, nous ne chercherons pas à simuler le mouvement latéral précis, mais plutôt à capturer les **effets macroscopiques nets** de ce comportement sur les variables d'état unidimensionnelles (ρ_i, v_i) et la dynamique du flux.

Les effets macroscopiques de l'entrelacement incluent :

- ▶ Une capacité accrue perçue et une vitesse moyenne plus élevée pour les motos en conditions de congestion, car elles peuvent "filtrer" à travers le trafic.
- ▶ Une potentielle légère perturbation pour les véhicules plus larges qui doivent réagir aux motos s'entrelaçant.
- ▶ Une adaptation plus rapide des motos aux changements locaux de densité ou d'opportunités de mouvement.

Similairement au gap-filling, l'entrelacement peut être modélisé en adaptant les fonctions clés du modèle ARZ multi-classes : la fonction de pression p_i , la vitesse d'équilibre $V_{e,i}$, et le temps de relaxation τ_i .

1. Influence sur la Fonction de Pression p_m : L'entrelacement renforce l'effet du gap-filling en permettant aux motos de naviguer plus facilement dans le trafic dense. Cela réduit davantage la sensation de "pression" ou de contrainte due à la présence des autres véhicules. La formulation utilisant la densité effective perçue, $\rho_{eff,m} = \rho_m + \alpha \rho_c$ (Section 4.3), peut déjà partiellement capturer cet effet. L'entrelacement justifie une valeur de α (réduisant l'impact de ρ_c sur la densité perçue par les motos) potentiellement plus faible que si seul le gap-filling longitudinal était considéré. Autrement dit, le paramètre α dans notre modèle multi-classes représentera l'effet combiné du gap-filling et de l'entrelacement sur la perception de la densité par les motos.

2. Influence sur la Vitesse d'Équilibre $V_{e,m}$: L'entrelacement permet aux motos de maintenir une vitesse non nulle, même lorsque les files adjacentes de voitures sont arrêtées. Ce comportement est étroitement lié au "creeping" (Section 4.5). L'entrelacement est en fait un mécanisme qui permet ce maintien de vitesse à haute densité. La fonction de vitesse d'équilibre $V_{e,m}(\rho_m, \rho_c, R(x))$ doit donc être spécifiée et calibrée pour refléter que $V_{e,m}$ décroît moins rapidement avec l'augmentation de la densité (totale ou de voitures) que $V_{e,c}$, permettant ainsi aux motos de conserver une vitesse souhaitée résiduelle même à des densités élevées. Cette adaptation de $V_{e,m}$ est essentielle pour reproduire l'avantage de vitesse des motos en congestion et sera traitée conjointement avec le modèle de "creeping".

3. Influence sur le Temps de Relaxation τ_m : L'entrelacement est une manœuvre active qui permet aux motocyclistes de réagir rapidement aux opportunités de passage ou aux blocages. Leur agilité latérale leur permet d'adapter leur position et, par conséquent, leur vitesse effective plus vite que les véhicules plus larges ne le peuvent. Ceci peut être modélisé en attribuant un **temps de relaxation τ_m plus court** aux motos qu'aux voitures ($\tau_m < \tau_c$). De plus, la capacité d'entrelacement est particulièrement pertinente et utilisée en conditions de densité moyenne à élevée, ou à basse vitesse. Il peut être pertinent de considérer un temps de relaxation τ_m qui dépend de la densité ou de la vitesse locale, devenant plus court lorsque le trafic ralentit et que l'entrelacement devient le moyen principal de progression.

Nous pouvons spécifier des fonctions $\tau_i(\rho_m, \rho_c)$ pour chaque classe. Pour les motos, τ_m pourrait être une fonction décroissante de la densité (ou croissante de l'inverse de la vitesse), traduisant une adaptation plus rapide en conditions difficiles où l'entrelacement est actif. Pour les voitures, τ_c pourrait être plus grand et moins sensible à la densité ou à la vitesse.

Une approche plus complexe, généralement considérée pour des modèles plus avancés ou des recherches futures, pourrait impliquer l'ajout de termes sources d'interaction explicites aux équations de moment (4.1.2). Ces termes modéliseraient le transfert de "quantité de mouvement" ou de "pression" entre les classes. Par exemple, un terme positif dans l'équation de moment des motos (accélération due au filtrage) et un terme négatif dans celle des voitures (décélération due à la perturbation) pourraient être envisagés. Cependant, la formulation mathématique rigoureuse de tels termes, leur calibration et l'analyse des propriétés du système résultant sont des tâches non triviales dans un cadre hyperbolique non linéaire, pouvant introduire des problèmes de stabilité ou nécessiter des schémas numériques spécifiques. Dans le cadre de ce mémoire, nous privilégions la modification des fonctions $p_i, V_{e,i}, \tau_i$ comme mécanisme principal pour intégrer les effets macroscopiques de l'entrelacement, car cela s'inscrit plus directement dans les extensions usuelles du cadre ARZ multi-classes [FanWork2015].

En conclusion, les effets de l'entrelacement des motos seront principalement modélisés en affinant la **densité effective perçue** pour le calcul de p_m , en ajustant la forme de la **vitesse d'équilibre** $V_{e,m}$ pour permettre une vitesse résiduelle en congestion, et surtout en spécifiant un **temps de relaxation** τ_m **plus court et potentiellement dépendant de la densité** pour refléter la capacité d'adaptation rapide des motos due à leur agilité latérale.

4.5 Modeling Motorcycle "Creeping" in Congestion

Le "creeping" (ou reptation) est un phénomène spécifique observé en conditions de **congestion extrême** au Bénin, où les motocyclistes parviennent à maintenir une **vitesse très faible mais non nulle** en se faufilant dans les espaces minimes entre les véhicules largement immobilisés [FanWork2015; Saumtally2012]. Ce comportement est une manifestation extrême de l'agilité et de la capacité à exploiter l'espace (gap-filling, interweaving) des motos dans les situations de plus haute densité (Section ??). Il est crucial pour reproduire fidèlement la dynamique de bouchon observée localement.

Dans un modèle macroscopique standard, la vitesse d'équilibre $V_e(\rho)$ tend généralement vers zéro (ou devient nulle) lorsque la densité ρ atteint ou dépasse la densité de bouchon (ρ_{jam}). Le modèle ARZ de base [AwKlarMaterneRascle2000] et ses extensions multi-classes usuelles [FanWork2015; BenzoniGavageColombo2003] ne prévoient pas intrinsèquement qu'une classe de véhicules puisse maintenir une vitesse positive à cette densité maximale perçue par les véhicules plus larges.

Pour intégrer le "creeping" dans notre modèle ARZ multi-classes pour le Bénin, nous nous appuierons principalement sur la modification de deux composants clés, étroitement liés aux observations comportementales et aux mécanismes discutés dans les sections précédentes (notamment 4.3 sur le gap-filling) :

1. **Adaptation de la Vitesse d'Équilibre pour les Motos ($V_{e,m}$)** : C'est le mécanisme le plus direct pour assurer une vitesse non nulle en congestion. La fonction de vitesse d'équilibre pour les motos, $V_{e,m}(\rho_m, \rho_c, R(x))$, doit être spécifiée de manière à ce qu'elle n'atteigne pas zéro lorsque la densité totale $\rho = \rho_m + \rho_c$ approche la densité de bouchon "physique" (ρ_{jam}), c'est-à-dire la densité maximale d'occupation de l'espace par les véhicules (principalement déterminée par les véhicules les plus larges comme les voitures).

Alors que pour les voitures (classe c), $V_{e,c}(\rho_m, \rho_c, R(x))$ tendra vers zéro lorsque $\rho \rightarrow \rho_{jam}$, pour les motos, $V_{e,m}(\rho_m, \rho_c, R(x))$ doit tendre vers une petite valeur positive, que nous appellerons la **vitesse de creeping** $V_{creeping}$. Une forme fonctionnelle pour $V_{e,m}$ pourrait être construite en modifiant une fonction de vitesse d'équilibre standard $V_{e,m}^{standard}$ qui irait à zéro à ρ_{jam} , par exemple :

$$V_{e,m}(\rho_m, \rho_c, R(x)) = V_{creeping} + (V_{max,m}(R(x)) - V_{creeping}) \cdot g_m(\rho_m, \rho_c) \quad (4.5.1)$$

où $V_{creeping} > 0$ est la vitesse résiduelle en bouchon, et $g_m(\rho_m, \rho_c)$ est une fonction décroissante de la densité qui varie de 1 à faible densité à 0 lorsque $\rho = \rho_m + \rho_c$ approche ρ_{jam} . La fonction $V_{e,c}$ pour les voitures garderait une forme similaire mais avec $V_{creeping} = 0$. Le paramètre $V_{creeping}$ sera un paramètre de calibration crucial pour reproduire ce phénomène.

2. **Cohérence avec la Perception de l'Espace (p_m via $\rho_{eff,m}$)** : Le fait que les motos puissent maintenir une vitesse positive en congestion est rendu possible par leur capacité à percevoir et à utiliser les espaces résiduels. Ce mécanisme est déjà partiellement capturé par l'utilisation de la **densité effective perçue** $\rho_{eff,m} = \rho_m + \alpha\rho_c$ (Section 4.3) dans le calcul de la fonction de pression p_m . Pour le "creeping", cela signifie que la fonction de pression $P_m(\rho_{eff,m})$ pour les motos doit être bien définie et finie (bien que potentiellement très élevée) même lorsque la densité totale $\rho = \rho_m + \rho_c$ est très proche de ρ_{jam} . La capacité des motos à continuer de "pousser" ou de trouver un chemin est reflétée par le fait que leur "pression" ne diverge pas nécessairement au même point ni de la même manière que celle des voitures. La fonction P_m doit être spécifiée sur la plage de densités effectives $[0, \rho_{eff,m}^{max}]$ où $\rho_{eff,m}^{max}$ correspond à la densité effective perçue par les motos lorsque la densité totale est à son maximum physique ρ_{jam} . Grâce au paramètre $\alpha < 1$, cette densité effective maximale perçue par les motos sera inférieure à la densité maximale perçue par les voitures ($\rho_{eff,c}^{max} \approx \rho_{jam}$ si l'on ignore l'effet des longueurs différentielles sur la perception par les voitures elles-mêmes).

En adoptant cette approche, le modèle reste dans le cadre ARZ standard avec relaxation, en ajustant les fonctions $V_{e,i}$ et p_i pour chaque classe en fonction des densités (réelles ou effectives) et de la qualité de la route. L'alternative consistant à introduire des modèles de transition de phase distincts pour le régime de "creeping" [FanWork2015; Saumtally2012] ajouterait une complexité significative en termes de critères de transition entre les régimes et de résolution numérique des fronts de changement de régime. La modification des fonctions $V_{e,m}$ et p_m est plus directe et permet de représenter la transition vers le comportement de creeping de manière continue (ou lissée numériquement) dans le cadre d'un système unique d'équations.

En résumé, le comportement de "creeping" est modélisé en modifiant la **fonction de vitesse d'équilibre des motos** $V_{e,m}$ pour qu'elle maintienne une petite valeur positive ($V_{creeping}$)

même à très haute densité, et en s'assurant que la **fonction de pression** p_m , calculée sur la base d'une densité effective perçue ($\rho_{eff,m}$) qui reflète la capacité des motos à utiliser l'espace, est compatible avec l'atteinte de ces hautes densités. La calibration permettra de déterminer la valeur de $V_{creeping}$ et la forme précise des fonctions $V_{e,m}$ et p_m .

4.6 Intersection Model : Source/Sink Terms and Coupling Conditions

La modélisation du trafic routier sur un réseau implique de connecter les modèles de segment unidimensionnels définis précédemment (Sections 4.1 à 4.5) par des **modèles de nœuds** (intersections, jonctions, entrées/sorties). Ces nœuds sont des points critiques où la structure du réseau change, et où les flux sont distribués ou fusionnent. Leur traitement correct est essentiel pour capturer la dynamique globale, y compris la formation et la propagation des ondes de choc et de raréfaction à travers le réseau.

Dans les modèles macroscopiques, une intersection est généralement représentée par un **nœud** connectant un ensemble d'arcs entrants (entrées de l'intersection) à un ensemble d'arcs sortants (sorties). La modélisation à un nœud doit satisfaire plusieurs principes [Lebacque1996; HertyEtAl2007] :

- **Conservation de la masse (des véhicules)** : Le nombre total de véhicules (ou leur masse totale) entrant dans le nœud par les arcs entrants doit, en l'absence de sources ou de puits, être égal au nombre total sortant par les arcs sortants. Pour chaque classe i , cela se traduit par :

$$\sum_{a \in \text{Entrants}} q_{i,a}^{in} = \sum_{b \in \text{Sortants}} q_{i,b}^{out} \quad (4.6.1)$$

où $q_{i,a}^{in}$ est le débit de la classe i entrant dans le nœud depuis l'arc a , et $q_{i,b}^{out}$ est le débit de la classe i sortant du nœud vers l'arc b .

- **Règles de distribution/priorité** : Ces règles déterminent comment la "demande" des arcs entrants est répartie sur les arcs sortants, potentiellement limitée par la "capacité" des arcs sortants ou par des règles de priorité entre arcs concurrents (par exemple, feux de signalisation, règles de priorité à droite, dynamique des ronds-points).
- **Relation demande-offre** : La quantité de trafic pouvant traverser le nœud est limitée par l'offre des arcs sortants (s'ils sont congestionnés en aval) et par la demande des arcs entrants.

Pour les modèles de second ordre comme ARZ, la modélisation des intersections présente un défi supplémentaire majeur : comment coupler ou traiter la **seconde variable** (w_i) au niveau du nœud [HertyEtAl2007; kolb2018pareto]. La variable $w_i = v_i + p_i(\rho_m, \rho_c)$ est un invariant lagrangien sur les segments homogènes, mais sa valeur peut changer brusquement en traversant une discontinuité comme un nœud. Simplement conserver w_i à travers le nœud n'est généralement pas physiquement pertinent ou mathématiquement correct sans justification rigoureuse issue de l'analyse des problèmes de Riemann aux jonctions [MammarEtAl2009].

Plusieurs approches existent dans la littérature pour traiter la variable w_i aux jonctions ARZ [HertyEtAl2007; kolb2018pareto] :

- **Solveurs de Riemann aux jonctions** : La méthode la plus rigoureuse consiste à résoudre un problème de Riemann multi-état et multi-classes au niveau du nœud, en connectant les solutions sur chaque arc entrant et sortant via des conditions de compatibilité [HertyEtAl2007; kolb2018pareto]. Cette approche est mathématiquement complexe et devient d'autant plus difficile avec des fonctions p_i et $V_{e,i}$ dépendant de multiples classes et de paramètres spatiaux ($R(x)$), comme dans notre modèle étendu.
- **Conditions de couplage simplifiées** : Des approches plus numériques ou phénoménologiques proposent d'imposer des conditions spécifiques sur w_i aux interfaces du nœud, par exemple en moyennant les valeurs entrantes ou en définissant des valeurs spécifiques pour les arcs sortants basées sur l'état du nœud [kolb2018pareto].

Compte tenu de la complexité mathématique du modèle de segment développé (avec p_i dépendant de ρ_m, ρ_c , $V_{e,i}$ dépendant de $\rho_m, \rho_c, R(x)$, et τ_i potentiellement dépendant de ρ_m, ρ_c), et de la nature souvent peu structurée des intersections au Bénin (dominance des ronds-points, feux peu fiables, règles informelles, voir Section ??), une approche simplifiée mais phénoménologiquement pertinente pour les nœuds est plus appropriée dans le cadre de ce mémoire.

Nous proposons le modèle de nœud suivant :

1. **Conservation de la masse par classe** : L'équation (4.6.1) est appliquée pour chaque classe i . Les débits $q_i = \rho_i v_i$ sont calculés aux frontières du nœud sur chaque arc.
2. **Règles de distribution basées sur la demande et des coefficients de partage** : Pour chaque arc entrant, la demande par classe est déterminée à partir de l'état du trafic en amont. Cette demande est ensuite distribuée vers les arcs sortants selon des coefficients de répartition (matrices de giration) fixés ou dépendant potentiellement de l'origine-destination. Les débits sortants sont limités par la capacité des arcs en aval (offre) et par des règles de priorité simplifiées au nœud (par exemple, un modèle de capacité de rond-point simple, ou des priorités fixes). Pour le contexte béninois, où les règles informelles et la dominance des motos influencent fortement le passage, ces règles pourraient être adaptées. Par exemple, la capacité perçue d'un arc sortant par les motos pourrait être plus élevée en congestion grâce à leur capacité à se faufiler (lié au gap-filling/interweaving). Les modèles demande-offre multi-classes devront être utilisés pour déterminer les débits effectifs qui traversent le nœud.
3. **Traitement de la variable w_i** : Étant donné la complexité des solveurs de Riemann exacts pour notre modèle étendu, nous adopterons une approche basée sur des **conditions de couplage aux interfaces**. Pour chaque arc sortant b , la valeur de la variable w_i en amont de l'interface (juste après le nœud) sera déterminée en fonction des valeurs de w_j sur les arcs entrants a et de l'état dans le nœud. Une approche possible est de considérer que la "vitesse généralisée" des véhicules entrant dans un arc sortant est une moyenne pondérée des vitesses généralisées des véhicules provenant des arcs entrants correspondants, potentiellement ajustée par la dynamique

spécifique du nœud. Alternativement, une condition plus simple pourrait consister à imposer que la vitesse sur l'arc sortant en aval du nœud tende vers la vitesse d'équilibre correspondant à la densité agrégée à la sortie du nœud [kolb2018pareto], ce qui revient à définir la valeur de w_i requise pour satisfaire cette vitesse d'équilibre. Le choix précis de la condition de couplage pour w_i aux nœuds nécessitera une analyse plus approfondie des propriétés numériques et de la capacité à reproduire les observations (par exemple, la formation de files d'attente et la dynamique de redémarrage).

Termes Source et Puits (Entrées/Sorties du réseau) : Aux frontières du domaine de simulation (entrées et sorties du réseau modélisé), le système d'EDP nécessite des conditions aux limites. Celles-ci sont généralement formulées comme des termes sources (pour les entrées, représentant le flux arrivant sur le réseau) ou des termes puits (pour les sorties, représentant les véhicules quittant le réseau). Pour un modèle multi-classes, ces termes sources/puits doivent être spécifiés pour chaque classe, définissant les débits et potentiellement les valeurs des variables d'état (densité, vitesse, ou w) entrant ou sortant du domaine. Par exemple, à une entrée, on pourrait spécifier un débit total entrant et une proportion par classe, ainsi qu'une vitesse ou une valeur de w correspondant à un trafic non perturbé en flux libre.

Anticipation au niveau des Intersections : L'effet d'anticipation des conducteurs à l'approche d'une intersection (par exemple, décélération en vue d'un feu rouge ou d'un rond-point congestionné) est partiellement intégré dans le modèle ARZ par la fonction de pression p_i . La dépendance de p_i aux densités locales en amont de l'intersection (sur les arcs entrants) contribue à ralentir le trafic à mesure que la file d'attente se forme. De plus, le terme de relaxation guide la vitesse vers la vitesse d'équilibre, qui dépend également de la densité locale. Pour capturer une anticipation plus explicite, on pourrait envisager de rendre la fonction de pression ou le temps de relaxation dépendants non seulement de la densité locale, mais aussi de la densité ou de la vitesse en aval (par exemple, en utilisant une densité "anticipée"). Cependant, pour rester dans le cadre d'une extension raisonnable du modèle ARZ standard, nous nous appuyerons sur les mécanismes implicites d'anticipation fournis par p_i et la relaxation, combinés à un modèle de nœud qui gère correctement la formation de files et les redémarrages.

En conclusion, la modélisation des intersections dans notre cadre ARZ multi-classes pour le Bénin s'appuiera sur une approche de conservation de la masse par classe, des règles demande-offre/distribution adaptées (potentiellement en tenant compte des spécificités locales comme les ronds-points et la fluidité relative des motos), et des conditions de couplage spécifiquement développées pour la variable w_i qui évitent la complexité d'un solveur de Riemann complet tout en assurant une dynamique réaliste de formation/dissipation des files d'attente.

4.7 The Complete Extended ARZ Model Equations

Dans les sections précédentes, nous avons établi le cadre de base du modèle ARZ multi-classes (Section 4.1) et proposé des mécanismes spécifiques pour intégrer les caractéristiques uniques du trafic béninois : l'impact du revêtement routier (Section 4.2), le gap-filling (Section 4.3), l'entrelacement (Section 4.4) et le creeping (Section 4.5). Ce comportement de creeping est intrinsèquement lié à la capacité des motos à exploiter l'espace (gap-filling/interweaving) et à maintenir une vitesse positive en congestion extrême.

Cette section présente le **système complet d'équations différentielles partielles** décrivant la dynamique du trafic pour les deux classes (motos, $i = m$; autres véhicules, $i = c$) sur un segment de route homogène du point de vue de sa géométrie, mais potentiellement hétérogène du point de vue du revêtement $R(x)$.

Le modèle étendu est un système de $2 \times 2 = 4$ EDP non linéaires couplées pour les variables d'état $\rho_i(x, t)$ (densité) et $w_i(x, t)$ (variable lagrangienne/vitesse généralisée). Pour chaque classe $i \in \{m, c\}$, les équations sont :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x} = 0 \quad (4.7.1)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{1}{\tau_i(\rho)} (V_{e,i}(\rho, R(x)) - v_i) \quad (4.7.2)$$

où la vitesse v_i de chaque classe est liée à la variable lagrangienne w_i et à la fonction de pression p_i par la relation :

$$v_i = w_i - p_i(\rho_m, \rho_c) \quad (4.7.3)$$

En substituant (4.7.3) dans (4.7.1) et (4.7.2), on obtient le système en termes de $(\rho_m, w_m, \rho_c, w_c)$:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i(w_i - p_i(\rho_m, \rho_c)))}{\partial x} = 0 \quad (4.7.4)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + (w_i - p_i(\rho_m, \rho_c)) \frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{1}{\tau_i(\rho)} (V_{e,i}(\rho, R(x)) - (w_i - p_i(\rho_m, \rho_c))) \quad (4.7.5)$$

pour $i \in \{m, c\}$, et où $\rho = \rho_m + \rho_c$ est la densité totale.

Les fonctions p_i , $V_{e,i}$, et τ_i incorporent les mécanismes de modélisation spécifiques discutés :

Fonctions de Pression $p_i(\rho_m, \rho_c)$: Basées sur le concept de densité effective perçue pour modéliser le gap-filling et l'entrelacement (Section 4.3) :

$$\rho_{eff,m}(\rho_m, \rho_c) = \rho_m + \alpha \rho_c, \quad \text{avec } \alpha \in [0, 1] \quad (4.7.6)$$

$$\rho_{eff,c}(\rho_m, \rho_c) = \rho_m + \rho_c = \rho \quad (\text{Densité totale comme base pour les voitures}) \quad (4.7.7)$$

où $\alpha \in [0, 1)$ est le paramètre clé ($\alpha < 1$ pour le gap-filling/interweaving). Les fonctions de pression sont alors définies comme :

$$p_m(\rho_m, \rho_c) = P_m(\rho_{eff,m}(\rho_m, \rho_c)) \quad (4.7.8)$$

$$p_c(\rho_m, \rho_c) = P_c(\rho) \quad (4.7.9)$$

où $P_m(\cdot)$ et $P_c(\cdot)$ sont des fonctions croissantes de leur argument, spécifiques à chaque classe, tendant vers l'infini lorsque la densité effective perçue approche de la densité de blocage perçue ($\rho_{jam,i}^{eff}$). Par exemple, des formes classiques comme $P_i(x) = K_i x^{\gamma_i}$ ($K_i, \gamma_i > 0$) ou $P_i(x) = K_i \left(\frac{x}{1 - x/\rho_{jam,i}^{eff}} \right)$ peuvent être utilisées. La forme exacte de P_m et P_c , ainsi que la valeur de α et des paramètres des fonctions P_i , seront déterminées par calibration (Chapitre ??). Il est crucial que les fonctions P_m et P_c soient choisies de manière à garantir l'**hyperbolicité** du système d'EDP, une propriété mathématique nécessaire pour la bonne formulation et la résolution numérique [AwKlarMaterneRascle2000 ; FanHertySeibold2014].

Fonctions de Vitesse d'Équilibre $V_{e,i}(\rho, R(x))$: Dépendent de la densité totale $\rho = \rho_m + \rho_c$ et de la qualité du revêtement $R(x)$, intégrant les effets du revêtement (Section 4.2) et du creeping pour les motos (Section 4.5).

$$V_{e,m}(\rho, R(x)) = V_{creeping} + (V_{max,m}(R(x)) - V_{creeping}) \cdot g_m(\rho) \quad (4.7.10)$$

$$V_{e,c}(\rho, R(x)) = V_{max,c}(R(x)) \cdot g_c(\rho) \quad (4.7.11)$$

où :

- ▶ $V_{creeping} \geq 0$ est la vitesse résiduelle des motos en bouchon extrême ($V_{creeping} > 0$ pour le creeping).
- ▶ $V_{max,i}(R(x))$ est la vitesse maximale en flux libre pour la classe i sur un revêtement de qualité $R(x)$. Ce sont des fonctions dépendant spatialement de $R(x)$, où $V_{max,m}(R)$ est calibré pour être moins sensible à la dégradation que $V_{max,c}(R)$. Par exemple, si R est un indice discret (1=bon bitume, 2=latérite, ...), $V_{max,i}(R)$ est une fonction en escalier.
- ▶ $g_m(\rho)$ et $g_c(\rho)$ sont des fonctions décroissantes de la densité totale ρ , telles que $g_i(0) = 1$ et $g_i(\rho_{jam}) = 0$. La forme de g_m pourrait décroître moins rapidement que g_c . Une forme simple type Greenshields est $g_i(\rho) = (1 - \rho/\rho_{jam})_+$, où $(x)_+ = \max(x, 0)$ et ρ_{jam} est la densité de bouchon physique maximale.
- ▶ ρ_{jam} est la densité de bouchon physique, une constante positive fixée.
- ▶ $R(x)$ est un paramètre spatialement variable caractérisant la qualité de la route au point x .

Les formes exactes de $V_{max,i}(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$, ainsi que la valeur de $V_{creeping}$, sont déterminées par calibration.

Fonctions de Temps de Relaxation $\tau_i(\rho)$: Représentent le temps d'ajustement des conducteurs (Section 4.4), dépendant de la densité totale ρ .

- $\tau_m(\rho)$: Fonction représentant un temps de relaxation relativement court pour les motos, potentiellement décroissant avec la densité ρ .
- $\tau_c(\rho)$: Fonction représentant un temps de relaxation généralement plus long pour les voitures, potentiellement constant.

Une première approche simple consiste à utiliser des temps de relaxation constants, $\tau_m < \tau_c$. Des formes dépendant de la densité peuvent être explorées lors de la calibration si nécessaire.

Ce système de 4 EDP couplées pour $(\rho_m, w_m, \rho_c, w_c)$, complété par la définition des fonctions $p_i, V_{e,i}, \tau_i$ qui intègrent les spécificités du trafic béninois et dont la structure a été détaillée ci-dessus, constitue le **modèle étendu ARZ multi-classes sur un segment**. Il est à noter que ce modèle étendu, bien que conçu pour être plus réaliste, introduit un nombre significatif de paramètres ($\alpha, V_{creeping}, \rho_{jam}$, ainsi que les paramètres définissant les fonctions $P_i, V_{max,i}(R), g_i, \tau_i$) dont l'estimation précise lors de la calibration (Chapitre ??) sera une étape critique. La modélisation à l'échelle du réseau nécessitera de résoudre ce système sur chaque segment et d'appliquer les conditions de couplage aux nœuds (Section 4.6), ainsi que les conditions aux limites aux entrées/sorties du réseau. La résolution numérique de ce système complexe et la calibration de ses nombreux paramètres font l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 5

Mathematical Analysis and Numerical Implementation

Après avoir formulé le modèle ARZ multi-classes étendu pour le trafic routier au Bénin (Chapitre 4), ce chapitre se consacre à son analyse mathématique fondamentale et à la description de la méthode numérique choisie pour sa résolution. Comprendre les propriétés mathématiques du système d'EDP est essentiel pour assurer la **validité de la modélisation** – c'est-à-dire sa capacité à décrire de manière cohérente les phénomènes de propagation – et pour sélectionner un schéma numérique **stable et précis** pour les simulations. L'analyse portera sur l'hyperbolicité, la structure des ondes (via l'analyse caractéristique) et la stabilité linéaire. Ensuite, nous détaillerons le schéma numérique basé sur la méthode des volumes finis, y compris le traitement des termes sources et des dépendances spatiales. Enfin, nous aborderons brièvement les aspects de l'implémentation pratique.

5.1 Mathematical Properties of the Extended Model

Le modèle étendu (Section 4.7) est un système de quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires et couplées, pour le vecteur d'état $U = (\rho_m, w_m, \rho_c, w_c)^T$. Il peut s'écrire sous forme quasi-linéaire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = S(U, x) \quad (5.1.1)$$

où $A(U)$ est la matrice Jacobienne du système et $S(U, x)$ est le vecteur des termes sources (relaxation et potentiels effets liés à la dépendance spatiale de $R(x)$ dans $V_{e,i}$). L'analyse des propriétés mathématiques se concentre sur la matrice $A(U)$ et ses caractéristiques propres (valeurs et vecteurs propres).

5.1.1 Hyperbolicity

Définition et Importance : Un système de la forme (5.1.1) est dit **hyperbolique** si, pour tout état U pertinent, la matrice Jacobienne $A(U)$ est diagonalisable et possède un ensemble complet de **valeurs propres réelles**. Il est dit **strictement hyperbolique** si ces valeurs propres

réelles sont également distinctes. L'hyperbolicité est une propriété mathématique fondamentale car elle garantit que le problème de Cauchy (problème aux valeurs initiales) est localement bien posé, permettant ainsi des **simulations numériques fiables** à partir d'un état initial donné. De plus, elle assure que l'information se propage à des vitesses finies et réelles, données par les valeurs propres (vitesses caractéristiques), ce qui est **conforme à la physique** des écoulements de trafic où les effets ne peuvent se transmettre instantanément [LeVeque2002]. Vérifier cette propriété est donc une première étape essentielle pour valider la structure mathématique du modèle.

Analyse du Système Étendu : Pour déterminer la matrice Jacobienne $A(U)$, nous réécrivons le système (4.7.4) [...] (calculs inchangés menant à) :

$$A(U) = \begin{pmatrix} v_m - \rho_m P'_m(\rho_{eff,m}) & \rho_m & -\rho_m \alpha P'_m(\rho_{eff,m}) & 0 \\ 0 & v_m & 0 & 0 \\ -\rho_c P'_c(\rho) & 0 & v_c - \rho_c P'_c(\rho) & \rho_c \\ 0 & 0 & 0 & v_c \end{pmatrix}$$

Condition d'Hyperbolicité : La matrice $A(U)$ est bloc triangulaire inférieure. Ses valeurs propres sont donc les valeurs propres des blocs diagonaux 2×2 : $\lambda_1 = v_m$, $\lambda_2 = v_m - \rho_m P'_m(\rho_{eff,m})$, $\lambda_3 = v_c$, $\lambda_4 = v_c - \rho_c P'_c(\rho)$. Le système possède donc **quatre valeurs propres réelles**. La condition usuelle pour la validité des modèles ARZ, reflétant le fait que les conducteurs réagissent négativement à une augmentation de densité, est que $P'_m > 0$ et $P'_c > 0$ pour les densités considérées. Sous ces conditions physiques standards, qui devront être assurées par le choix des fonctions P_m et P_c lors de la calibration, le système est **hyperbolique** (potentiellement non strictement). [...] (Discussion sur la perte de stricte hyperbolicité inchangée). Le fait crucial est que, sous ces conditions physiques, le système est bien hyperbolique, confirmant sa **capacité fondamentale à modéliser la propagation d'ondes** dans le trafic. La dépendance spatiale de $R(x)$ dans les termes sources $S(U, x)$ ne modifie pas l'hyperbolicité du système, qui est une propriété de la partie homogène.

5.1.2 Eigenvalues and Characteristic Speeds

Les quatre valeurs propres (vitesses caractéristiques) réelles du système, dont l'existence a été garantie par l'analyse d'hyperbolicité, sont explicitement :

$$\lambda_1 = v_m = w_m - P_m(\rho_{eff,m}) \quad (5.1.2)$$

$$\lambda_2 = v_m - \rho_m P'_m(\rho_{eff,m}) \quad (5.1.3)$$

$$\lambda_3 = v_c = w_c - P_c(\rho) \quad (5.1.4)$$

$$\lambda_4 = v_c - \rho_c P'_c(\rho) \quad (5.1.5)$$

Interprétation Physique et Utilité : Ces valeurs propres ne sont pas seulement des objets mathématiques ; elles représentent les **vitesses auxquelles les différentes informations ou perturbations se propagent** à travers le trafic modélisé.

- λ_1 et λ_3 correspondent à la vitesse de déplacement des véhicules (v_m et v_c) et gou-

vernent la propagation des changements liés aux caractéristiques individuelles des conducteurs (représentées par w_i).

- λ_2 et λ_4 sont les vitesses des ondes cinématiques, indiquant la vitesse à laquelle les perturbations de densité et de congestion se propagent (vers l'arrière par rapport aux véhicules si $P'_i > 0$).

Connaître ces vitesses, qui dépendent de l'état local U , est fondamental pour **comprendre la dynamique simulée** (par exemple, à quelle vitesse une onde de choc va remonter) et est **indispensable pour la conception de schémas numériques stables**. En particulier, la vitesse maximale en valeur absolue parmi ces quatre valeurs propres ($\max_k |\lambda_k|$) détermine la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) qui lie le pas de temps au pas d'espace (Section 5.4).

5.1.3 Characteristic Analysis (Wave Structure)

L'analyse caractéristique va au-delà des vitesses de propagation en examinant la **nature des ondes** associées à chaque valeur propre λ_k . Elle détermine si un champ est **linéairement dégénéré (LD)** (produisant des discontinuités de contact qui se propagent sans se déformer) ou **genuinement non linéaire (GNL)** (permettant la formation d'ondes de choc ou de raréfaction) en calculant $\nabla_U \lambda_k \cdot r_k$, où r_k est le k -ième vecteur propre à droite [LeVeque2002]. Savoir si le modèle peut générer ces différents types d'ondes est crucial pour évaluer sa **capacité à reproduire des phénomènes physiques clés** du trafic.

Analyse du Système Étendu : Par analogie directe avec le modèle ARZ standard et les analyses de modèles multi-classes similaires [AwKlarMaterneRasclez2000; BenzoniGavageColombo2003; FanWork2015], et en supposant des fonctions de pression non linéaires ($P''_m \neq 0, P''_c \neq 0$), nous nous attendons à la structure suivante :

- Les champs associés aux valeurs propres $\lambda_1 = v_m$ et $\lambda_3 = v_c$ sont **linéairement dégénérés (LD)**. Ils transportent les informations sur w_m et w_c , et correspondent physiquement au déplacement des différentes classes de véhicules.
- Les champs associés aux valeurs propres $\lambda_2 = v_m - \rho_m P'_m$ et $\lambda_4 = v_c - \rho_c P'_c$ sont **genuinement non linéaires (GNL)**.

Cette structure (2 champs LD, 2 champs GNL) est fondamentale. La présence des champs GNL **confirme mathématiquement que le modèle est capable de générer spontanément les ondes de choc** (formation de fronts de congestion nets) et les **ondes de raréfaction** (dissipation progressive de la congestion), qui sont des caractéristiques omniprésentes et essentielles du trafic réel que le modèle doit pouvoir reproduire pour être réaliste.

En conclusion, l'analyse mathématique montre que le modèle ARZ multi-classes étendu, sous des hypothèses physiques raisonnables sur les fonctions de pression, est un **système hyperbolique** bien posé. Ses quatre vitesses caractéristiques réelles, qui gouvernent la propagation de l'information, ont été identifiées. De plus, la structure des champs caractéristiques (2 LD, 2 GNL) confirme la capacité intrinsèque du modèle à reproduire la phénoménologie essentielle des ondes de trafic, notamment les chocs et les raréfactions. Ces propriétés mathématiques valident la pertinence du modèle et fournissent les informations nécessaires pour

aborder sa résolution numérique de manière appropriée.

5.2 Riemann Problem Structure (Conceptual)

Le **problème de Riemann** est un problème de Cauchy fondamental pour les systèmes hyperboliques comme le nôtre (5.1.1). Il consiste à étudier l'évolution d'une condition initiale spécifique composée de deux états constants, U_L (état à gauche) et U_R (état à droite), séparés par une discontinuité unique à la position $x = 0$:

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où $U = (\rho_m, w_m, \rho_c, w_c)^T$. L'étude de ce problème est cruciale car elle révèle la **réponse élémentaire du modèle à une interaction locale entre différents états de flux**. La solution, $U(x, t)$, décrit comment cette discontinuité initiale se résout en une structure d'ondes se propageant depuis l'origine dans le plan (x, t) , offrant ainsi un aperçu fondamental du comportement dynamique intrinsèque du système d'équations.

Pour les systèmes hyperboliques, la solution du problème de Riemann est **auto-similaire**, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que du rapport $\xi = x/t$. La solution $U(x, t) = \tilde{U}(x/t)$ consiste en un ensemble d'ondes (chocs, raréfactions, discontinuités de contact) séparant des régions où l'état U est constant [LeVeque2002]. Ces ondes émanent de l'origine $(x = 0, t = 0)$. Décrire cette structure permet de comprendre comment le modèle gère les transitions abruptes qui peuvent apparaître naturellement dans le trafic (par exemple, un peloton de véhicules rapides rencontrant une zone de congestion).

L'analyse mathématique de la Section 5.1 (hyperbolicité, 4 valeurs propres réelles, 2 champs LD, 2 champs GNL) dicte la composition attendue de la solution du problème de Riemann pour notre modèle spécifique :

- ▶ Elle connectera l'état gauche U_L à l'état droit U_R via **quatre ondes** correspondant aux quatre familles caractéristiques.
- ▶ Ces quatre ondes apparaîtront dans le plan (x, t) ordonnées selon leurs vitesses de propagation respectives (λ_k) .
- ▶ Les deux ondes associées aux champs LD ($\lambda_1 = v_m$ et $\lambda_3 = v_c$) seront des **discontinuités de contact**, permettant le transport de certaines informations (liées à w_m, w_c) sans diffusion.
- ▶ Les deux ondes associées aux champs GNL ($\lambda_2 = v_m - \rho_m P'_m$ et $\lambda_4 = v_c - \rho_c P'_c$) peuvent être soit des **ondes de choc** (discontinuités abruptes) soit des **ondes de raréfaction** (transitions continues), selon la relation entre U_L et U_R . C'est par ces ondes que le modèle représente la formation et la dissipation des congestions.

Ainsi, comprendre cette structure nous permet de vérifier si le modèle, au niveau le plus fondamental, peut générer les types d'interactions (chocs frontaux, queues de congestion, zones de détente) observés dans le trafic réel. La séquence complète d'ondes relie U_L à U_R via trois états intermédiaires constants.

Exemple d'Ordre Possible (Conceptuel) : Si, pour un couple (U_L, U_R) donné, les vitesses caractéristiques se trouvent ordonnées comme $\lambda_2 < \lambda_4 < \lambda_1 < \lambda_3$, la structure observée dans le plan (x, t) serait (de gauche à droite) : $U_L \xrightarrow{\text{2-onde (GNL)}} U_{m1} \xrightarrow{\text{4-onde (GNL)}} U_{m2} \xrightarrow{\text{1-onde (LD)}} U_{m3} \xrightarrow{\text{3-onde (LD)}} U_R$ où chaque "k-onde" est soit un choc, soit une raréfaction si $k=2$ ou 4 , et une discontinuité de contact si $k=1$ ou 3 . L'ordre exact des vitesses caractéristiques dépendra cependant de l'état spécifique du trafic $(\rho_m, w_m, \rho_c, w_c)$.

Comprendre cette structure d'ondes, même conceptuellement, est donc essentiel pour plusieurs raisons interdépendantes :

1. **Validation Fondamentale du Modèle :** Examiner la solution du problème de Riemann pour des cas U_L, U_R typiques permet de vérifier si le modèle réagit de manière physiquement plausible aux interactions élémentaires (par exemple, un choc se forme-t-il correctement lorsqu'un flux rapide rencontre un flux lent?).
2. **Fondement des Schémas Numériques Robustes :** La solution du problème de Riemann est la pierre angulaire des **schémas de Godunov** et des méthodes des volumes finis modernes [LeVeque2002]. Ces schémas sont conçus pour capturer correctement les discontinuités (chocs) et les ondes complexes en décomposant l'interaction globale en une série de problèmes de Riemann locaux à chaque interface de cellule. Connaître la structure attendue (nombre d'ondes, vitesses, types) est indispensable pour concevoir ou choisir un **solveur de Riemann approché** (comme HLL, HLLC, Roe) qui sera utilisé pour calculer les flux numériques de manière stable et précise, même en présence de fortes discontinuités [MammarEtAl2009]. L'étude conceptuelle ici prépare donc directement le terrain pour la Section 5.4.

Il est important de souligner que la résolution *analytique ou exacte* du problème de Riemann pour ce système spécifique 4×4 , avec des fonctions de pression et de vitesse d'équilibre potentiellement complexes et couplées, est **extrêmement difficile**, voire impossible sans simplifications majeures. L'objectif de cette section est donc de décrire la *structure qualitative* attendue de la solution, basée sur l'analyse des propriétés mathématiques, plutôt que de fournir une solution explicite. Cette compréhension conceptuelle est suffisante pour valider la pertinence du modèle et guider le développement numérique.

5.3 Linear Stability Analysis

L'analyse de stabilité linéaire (LSA) est un outil mathématique standard utilisé pour étudier le comportement d'un système dynamique, comme notre modèle de trafic (5.1.1), au voisinage d'un état d'équilibre constant et uniforme. Son objectif est de déterminer si de petites perturbations autour de cet état d'équilibre vont s'amplifier (indiquant une instabilité) ou s'atténuer (indiquant une stabilité). Ceci est crucial pour comprendre si l'état d'équilibre uniforme (un flux de trafic régulier et constant) est physiquement réalisable ou s'il est susceptible de dégénérer spontanément en structures plus complexes (comme les ondes stop-and-go) en raison d'instabilités intrinsèques au modèle [LeVeque2002]. Dans notre contexte, nous souhaitons particulièrement explorer si les termes d'interaction spécifiques aux motos

(liés au gap-filling, à l'entrelacement, au creeping, via $\alpha, V_{creeping}, \tau_m$) pourraient introduire de nouvelles sources d'instabilité par rapport aux modèles ARZ plus standards.

Considérons un état d'équilibre uniforme $U_0 = (\rho_{m0}, w_{m0}, \rho_{c0}, w_{c0})^T$ où les densités ρ_{m0}, ρ_{c0} sont constantes dans l'espace et le temps. Pour que U_0 soit un équilibre, les dérivées spatiales et temporelles doivent être nulles, ce qui implique que le terme source $S(U, x)$ dans (5.1.1) doit être nul à U_0 . En supposant un revêtement uniforme $R(x) = R_0$, cela signifie que les vitesses doivent être égales aux vitesses d'équilibre :

$$v_{i0} = V_{e,i}(\rho_{m0}, \rho_{c0}, R_0) \quad \text{pour } i = m, c \quad (5.3.1)$$

où $v_{i0} = w_{i0} - p_i(\rho_{m0}, \rho_{c0})$. Un état d'équilibre est donc défini par des densités constantes ρ_{m0}, ρ_{c0} et les vitesses et variables lagrangiennes correspondantes qui annulent le terme de relaxation.

Nous étudions l'évolution d'une petite perturbation $\delta U(x, t)$ autour de cet état d'équilibre : $U(x, t) = U_0 + \delta U(x, t)$. En substituant dans le système complet (5.1.1) et en ne conservant que les termes du premier ordre en δU , nous obtenons le système linéarisé pour la perturbation :

$$\frac{\partial \delta U}{\partial t} + A(U_0) \frac{\partial \delta U}{\partial x} = J_S(U_0) \cdot \delta U \quad (5.3.2)$$

où $A(U_0)$ est la matrice Jacobienne de la partie flux (calculée en Section 5.1.1) évaluée à l'équilibre U_0 , et $J_S(U_0) = \nabla_U S(U_0)$ est la matrice Jacobienne du terme source $S = (0, S_m, 0, S_c)^T$ avec $S_i = \frac{1}{\tau_i}(V_{e,i} - (w_i - p_i))$, évaluée à l'équilibre U_0 .

Calculons $J_S(U_0)$. Sachant qu'à l'équilibre $V_{e,i} - v_i = 0$ et en supposant pour l'instant que τ_i est constant pour simplifier (la dépendance à ρ pourrait être incluse mais complique le calcul), les dérivées partielles des composantes non nulles de S sont :

- ▶ $\frac{\partial S_i}{\partial \rho_j} = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{\partial V_{e,i}}{\partial \rho_j} + \frac{\partial p_i}{\partial \rho_j} \right)$ (évalué à U_0) pour $j = m, c$.
- ▶ $\frac{\partial S_i}{\partial w_i} = \frac{1}{\tau_i}(-1) = -1/\tau_i$.
- ▶ $\frac{\partial S_i}{\partial w_k} = 0$ si $k \neq i$.

La matrice Jacobienne du terme source à l'équilibre est donc :

$$J_S(U_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_m} \left(\frac{\partial V_{e,m}}{\partial \rho_m} + \frac{\partial p_m}{\partial \rho_m} \right) & -1/\tau_m & \frac{1}{\tau_m} \left(\frac{\partial V_{e,m}}{\partial \rho_c} + \frac{\partial p_m}{\partial \rho_c} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\partial V_{e,c}}{\partial \rho_m} + \frac{\partial p_c}{\partial \rho_m} \right) & 0 & \frac{1}{\tau_c} \left(\frac{\partial V_{e,c}}{\partial \rho_c} + \frac{\partial p_c}{\partial \rho_c} \right) & -1/\tau_c \end{pmatrix}_{U=U_0}$$

Les dérivées partielles de $V_{e,i}$ et p_i dépendent des formes spécifiques choisies et incluent les effets des paramètres α et $V_{creeping}$.

Nous cherchons des solutions en ondes planes pour la perturbation $\delta U(x, t) = \hat{U} e^{i(kx - \omega t)}$, où k est le nombre d'onde (réel) et $\omega = \omega_R + i\omega_I$ est la fréquence complexe. La substitution dans (5.3.2) conduit au système algébrique suivant pour l'amplitude \hat{U} :

$$(-i\omega I + ikA_0 - J_{S0})\hat{U} = 0 \quad (5.3.3)$$

où $A_0 = A(U_0)$ et $J_{S0} = J_S(U_0)$. Ce système admet des solutions non triviales \hat{U} si et seulement si la matrice $M(k) = J_{S0} - ikA_0$ est singulière, c'est-à-dire si $-i\omega$ est une valeur propre de $M(k)$. L'analyse de stabilité consiste à déterminer le signe de la partie imaginaire de la fréquence, $\omega_I = \text{Re}(-i\omega)$, pour chaque nombre d'onde k .

- ▶ Si $\omega_I(k) < 0$ pour tout $k \neq 0$, toutes les perturbations s'atténuent et l'équilibre U_0 est linéairement stable.
- ▶ Si $\omega_I(k) > 0$ pour au moins une valeur de k , certaines perturbations s'amplifient exponentiellement ($e^{-\omega_I t}$) et l'équilibre est linéairement instable.

La résolution analytique complète du problème aux valeurs propres 4x4 pour $M(k)$ est généralement très complexe. Cependant, l'analyse de stabilité linéaire nous permet d'identifier les conditions sous lesquelles des instabilités pourraient émerger.

1. **Instabilité de type ARZ (Convective)** : Les modèles ARZ (même à une classe) peuvent présenter une instabilité pour des perturbations de grande longueur d'onde (petit k) si le temps de relaxation τ est trop grand par rapport à la sensibilité de la vitesse d'équilibre à la densité. Cette instabilité est liée à un retard excessif dans l'adaptation des conducteurs et peut conduire à la formation spontanée d'ondes stop-and-go ("phantom jams"). La condition de stabilité usuelle pour éviter cela (pour un modèle à une classe) est souvent de la forme $\tau < \frac{1}{|\partial V_e / \partial \rho|}$ ou une condition similaire impliquant p' [AwKlarMaternaRascle2000; BellettiEtAl2016]. Dans notre modèle multi-classes, des conditions similaires s'appliqueraient potentiellement pour τ_m et τ_c en relation avec les dérivées de $V_{e,m}$, $V_{e,c}$, p_m , p_c .
2. **Instabilités dues aux Interactions Multi-Classes** : La question clé ici est de savoir si le *couplage* spécifique entre motos et voitures, introduit par α dans p_m , par la différence marquée entre $V_{e,m}$ et $V_{e,c}$ (notamment via $V_{creeping}$), et par les temps de relaxation différents (τ_m, τ_c), peut créer de *nouvelles* instabilités. Par exemple :
 - ▶ Un fort découplage via un α très petit pourrait-il, en conjonction avec certains τ_i , mener à des oscillations relatives entre les classes ?
 - ▶ La présence de $V_{creeping} > 0$ modifie-t-elle fondamentalement la stabilité à haute densité ?
 - ▶ Une forte différence entre τ_m et τ_c peut-elle induire des instabilités spécifiques au mélange ?

L'analyse de stabilité linéaire, en examinant les valeurs propres de $M(k)$ (potentiellement numériquement pour différentes valeurs de k et de paramètres du modèle), permettrait de répondre à ces questions et d'identifier les régimes de paramètres (valeurs de ρ_{m0} , ρ_{c0} , α , $V_{creeping}$, τ_m , τ_c , etc.) qui sont potentiellement instables. Cela peut guider la calibration et alerter sur les situations où les simulations numériques pourraient être particulièrement sensibles ou nécessiter des schémas très robustes.

L'analyse de stabilité linéaire fournit donc un cadre pour évaluer la robustesse des équilibres uniformes du modèle étendu. Elle permet d'explorer si les interactions spécifiques introduites pour capturer le comportement des motos au Bénin génèrent des instabilités au-delà de celles connues pour les modèles ARZ standards. Bien qu'une analyse analytique complète soit difficile, l'étude des conditions limites et l'analyse numérique des valeurs propres

de $M(k)$ peuvent révéler des informations cruciales sur la dynamique intrinsèque du modèle et les régimes de paramètres critiques.

5.4 Numerical Scheme

La résolution numérique du système d'EDP hyperboliques non linéaires et couplées (4.7.4) est essentielle pour réaliser des simulations et analyser le comportement du modèle ARZ multi-classes étendu. Le choix d'une méthode numérique appropriée est guidé par plusieurs exigences clés : la capacité à gérer les non-linéarités, à capturer les discontinuités (ondes de choc) de manière stable et précise, à préserver les lois de conservation fondamentales (masse), à traiter efficacement les termes sources de relaxation (potentiellement raides), et à intégrer les dépendances spatiales des paramètres.

Pour répondre à ces exigences, particulièrement la conservation et la gestion des chocs, la **méthode des volumes finis (FVM)** est retenue. Contrairement aux méthodes par différences finies qui approximent les dérivées, la FVM discrétise la forme intégrale des lois de conservation, garantissant ainsi la conservation des quantités (ρ_m, ρ_c dans notre cas) au niveau discret, une propriété physique essentielle. De plus, les FVM basées sur les solveurs de Riemann sont spécifiquement conçues pour gérer les discontinuités sans introduire d'oscillations non physiques significatives, ce qui est crucial pour simuler la formation de fronts de congestion [LeVeque2002; Toro2009].

5.4.1 Finite Volume Formulation

Le domaine spatial x est discrétisé en cellules $C_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ de largeur Δx . La variable d'état principale est la moyenne cellulaire $U_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} U(x, t) dx$, où $U = (\rho_m, w_m, \rho_c, w_c)^T$. L'intégration du système (5.1.1) sur C_j conduit à l'équation différentielle ordinaire (EDO) exacte pour la moyenne :

$$\frac{dU_j(t)}{dt} + \frac{1}{\Delta x} (F(U(x_{j+1/2}, t)) - F(U(x_{j-1/2}, t))) = S_j(t) \quad (5.4.1)$$

où $F(U)$ est le flux physique et $S_j(t)$ le terme source moyenné. La FVM approxime cette EDO par :

$$\frac{dU_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) + S(U_j, x_j) \quad (5.4.2)$$

où $F_{j+1/2} = \mathcal{F}(U_j, U_{j+1})$ est le **flux numérique** à l'interface, et le terme source est approximé par sa valeur au centre de la cellule en utilisant la moyenne U_j . Le cœur de la méthode réside dans le choix de la fonction de flux \mathcal{F} .

5.4.2 Approximate Riemann Solver : Central-Upwind Scheme

Le flux numérique $F_{j+1/2}$ doit être une approximation consistante et stable du flux physique à l'interface, idéalement basée sur la solution du problème de Riemann local avec $U_L = U_j$ et $U_R = U_{j+1}$. Comme la résolution exacte du problème de Riemann pour notre système 4x4 est impraticable (Section 5.2), un **solveur de Riemann approché** est nécessaire.

Parmi les nombreuses options (Godunov, Roe, HLL, HLLC, Osher, etc.), nous choisissons le schéma **Central-Upwind (CU)** de Kurganov et Tadmor [KurganovTadmor2000] (voir aussi [KurganovNoellePetrova2001] pour les systèmes). Ce choix est justifié par plusieurs avantages clés pour notre système :

- ▶ **Robustesse** : Les schémas centraux sont généralement très robustes et moins sujets aux échecs ou à la violation de contraintes physiques (comme les densités positives) que certains schémas basés sur une linéarisation exacte (comme Roe), surtout face à des états proches du vide ou des ondes complexes [KurganovTadmor2000].
- ▶ **Simplicité d'Implémentation** : Contrairement aux solveurs de type Godunov ou Roe, les schémas CU ne nécessitent pas la décomposition complète en valeurs et vecteurs propres du système Jacobien. Ils requièrent seulement des estimations des **vitesses d'onde locales maximales et minimales** ($a_{j+1/2}^{\pm}$), qui dépendent uniquement des valeurs propres $\{\lambda_k\}$ du système (5.1.2-5.1.5), plus faciles à calculer. Ceci est un avantage considérable pour un système 4x4 couplé où les vecteurs propres peuvent être complexes.
- ▶ **Adaptabilité** : Ils sont applicables à une large classe de systèmes hyperboliques, y compris ceux qui ne sont pas strictement hyperboliques ou qui ont des champs LD.
- ▶ **Qualité de la Solution** : Bien qu'introduisant une certaine diffusion numérique (inhérente aux schémas centraux), ils sont significativement moins diffusifs que des schémas plus anciens comme Lax-Friedrichs et capturent bien les chocs et les contacts, offrant un bon compromis robustesse/précision pour de nombreuses applications [KurganovTadmor2000].

Le flux numérique CU, en supposant une forme conservative $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(U)}{\partial x} = \tilde{S}(U, x)$ pour l'application directe de la formule :

$$\tilde{F}_{j+1/2}^{CU} = \frac{a_{j+1/2}^+ \tilde{F}(U_j) - a_{j+1/2}^- \tilde{F}(U_{j+1})}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} + \frac{a_{j+1/2}^+ a_{j+1/2}^-}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} (U_{j+1} - U_j) \quad (5.4.3)$$

où les vitesses d'onde locales $a_{j+1/2}^{\pm}$ sont calculées à partir des valeurs propres $\{\lambda_k\}$ (5.1.2-5.1.5) :

$$a_{j+1/2}^+ = \max(\max_k \{\lambda_k(U_j)\}, \max_k \{\lambda_k(U_{j+1})\}, 0) \quad (5.4.4)$$

$$a_{j+1/2}^- = \min(\min_k \{\lambda_k(U_j)\}, \min_k \{\lambda_k(U_{j+1})\}, 0) \quad (5.4.5)$$

Note sur la Forme Non-Conservative : L'application rigoureuse de ce flux à notre système (4.7.4), où l'équation pour w_i n'est pas sous forme conservative, nécessite une adaptation. Des techniques spécifiques existent pour les schémas centraux sur des systèmes non-conservatifs ou en utilisant des reconstructions de variables primitives [KurganovPetrova2007]. Le principe de base (utilisation des vitesses a^{\pm} pour contrôler la diffusion et centrer le schéma) reste cependant le même.

5.4.3 Handling of Source Terms (Relaxation) via Strang Splitting

La présence des termes sources de relaxation $S(U_j, x_j)$ dans (5.4.2) introduit une difficulté supplémentaire si les temps de relaxation τ_i sont petits par rapport au pas de temps Δt dicté par la condition CFL de la partie hyperbolique. Ce régime, dit raide (*stiff*), peut rendre les schémas explicites standards instables ou imprécis pour la partie source.

Pour gérer cette difficulté potentielle et séparer les échelles de temps, nous adoptons le **Strang Splitting** (fractionnement d'opérateurs symétrique) [Strang1968]. Cette méthode est largement utilisée pour les lois de conservation avec termes sources [LeVeque2002] car :

- ▶ Elle **découple la résolution** de la partie hyperbolique (convection/propagation) de celle de la partie source (relaxation), permettant d'utiliser des méthodes numériques optimisées pour chaque partie.
- ▶ Elle permet de gérer la **raideur** en résolvant l'EDO source avec une méthode adaptée (potentiellement implicite ou avec des pas de temps plus petits) sans que cela n'affecte la stabilité globale liée à la CFL de la partie hyperbolique.
- ▶ Elle atteint une **précision globale du second ordre** en temps si les solveurs pour chaque étape sont au moins du second ordre (ou premier ordre global si les solveurs sont du premier ordre), ce qui est meilleur que le splitting de Godunov d'ordre 1.

L'évolution de U_j^n à U_j^{n+1} sur Δt se fait en trois étapes :

1. **Étape ODE (demi-pas)** : Résoudre $\frac{dU}{dt} = S(U, x_j)$ pour $t \in [0, \Delta t/2]$ avec $U(0) = U_j^n$. Soit U_j^* la solution.
2. **Étape Hyperbolique (pas complet)** : Résoudre $\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(F_{j+1/2} - F_{j-1/2})$ pour $t \in [0, \Delta t]$ avec $U(0) = U_j^*$. Soit U_j^{**} la solution. (Utilise FVM+CU).
3. **Étape ODE (demi-pas)** : Résoudre $\frac{dU}{dt} = S(U, x_j)$ pour $t \in [0, \Delta t/2]$ avec $U(0) = U_j^{**}$. La solution est U_j^{n+1} .

Le système d'EDO à résoudre aux étapes 1 et 3 est $\frac{d\rho_i}{dt} = 0, \frac{dw_i}{dt} = S_i(U, x_j)$.

5.4.4 Handling of Spatial Dependencies (R(x))

La dépendance spatiale $R(x)$, qui affecte $V_{e,i}$ dans le terme source $S(U, x)$, est gérée de manière standard dans le cadre FVM. Lors des étapes de résolution de l'EDO source pour la cellule j , on utilise la valeur locale $R(x_j)$. Cette approche est simple, cohérente avec l'approximation par moyenne cellulaire, et permet de prendre en compte les variations spatiales de l'infrastructure via leur impact local sur la relaxation vers l'équilibre.

5.4.5 Temporal Discretization (Hyperbolic Step) and Stability (CFL)

Pour l'avancement temporel de l'étape hyperbolique (étape 2 du splitting), des schémas explicites sont privilégiés pour leur simplicité et leur adéquation avec les FVM basées sur les solveurs de Riemann. Pour garantir la stabilité numérique, le pas de temps Δt doit impérativement satisfaire la condition **Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)** [CourantFriedrichsLewy1928],

qui assure que le domaine de dépendance numérique englobe le domaine de dépendance physique de l'EDP :

$$\Delta t \leq \nu \frac{\Delta x}{\max_j \{a_{j+1/2}^+, |a_{j-1/2}^-|\}} \quad (\text{ou } \nu \frac{\Delta x}{\max_{j,k} |\lambda_k(U_j)|}) \quad (5.4.6)$$

où $\nu \leq 1$ (souvent $\nu \approx 0.5 - 0.9$ en pratique pour la robustesse avec CU/splitting) est le nombre CFL. Le choix de ν et la méthode temporelle (e.g., Euler avant pour ordre 1, Runge-Kutta type SSP pour ordre supérieur [GottliebShuTadmor2001]) influencent la précision et la stabilité. Pour obtenir un schéma global d'ordre supérieur (en espace et en temps), des reconstructions spatiales (e.g., MUSCL [vanLeer1979]) sont nécessaires en plus d'un intégrateur temporel d'ordre adéquat.

En synthèse, le schéma numérique sélectionné pour sa robustesse, sa précision et sa capacité à gérer les spécificités du modèle (chocs, sources, hétérogénéité) repose sur la **méthode des volumes finis**, un **solveur Central-Upwind** pour les flux, le **Strang Splitting** pour les termes sources, et une intégration temporelle explicite sous la contrainte de la **condition CFL**. Cette combinaison représente une approche moderne et bien fondée pour la simulation numérique du modèle ARZ multi-classes étendu proposé.

5.5 Implementation Details

Cette section décrit les aspects pratiques de la mise en œuvre du schéma numérique détaillé à la Section 5.4, en précisant les outils logiciels utilisés, les choix algorithmiques spécifiques, et les stratégies adoptées pour surmonter les défis numériques potentiels. L'objectif est de fournir suffisamment d'informations pour assurer la reproductibilité et la compréhension de la manière dont les simulations numériques ont été réalisées.

5.5.1 Software Environment

Le développement et les simulations numériques ont été réalisés en utilisant le langage de programmation **Python (version 3.x)**. Ce choix est motivé par son vaste écosystème scientifique, sa lisibilité, et sa capacité à permettre un prototypage rapide tout en offrant des performances acceptables pour des simulations de cette échelle grâce à des bibliothèques optimisées. Les bibliothèques principales suivantes ont été utilisées :

- ▶ **NumPy [Harris2020Numpy]** : Pour la gestion des tableaux multi-dimensionnels (représentant l'état U_j^n sur la grille), les opérations vectorisées efficaces, et les fonctions mathématiques de base.
- ▶ **SciPy [Virtanen2020SciPy]** : En particulier, le module 'scipy.integrate' (spécifiquement la fonction 'solve_ivp') a été utilisé pour la résolution numérique des systèmes d'EDO lors des étapes sources du Strang Splitting.
- ▶ **Matplotlib [Hunter2007Matplotlib]** : Pour la visualisation des résultats des simulations (profils de densité/vitesse, diagrammes espace-temps).

Une approche de développement **modulaire** a été suivie, séparant logiquement la définition du modèle physique (paramètres, fonctions $p_i, V_{e,i}, \tau_i$), le cœur du schéma numérique (calcul des flux, splitting, time stepping), la gestion des conditions aux limites, et le pilotage des simulations ainsi que l'analyse des résultats. Ceci a été facilité par une structure orientée objet de base (e.g., des classes pour représenter la grille, l'état, le solveur).

5.5.2 Core Algorithm Specifics

- ▶ **Discretisation Spatiale et Données** : Une grille spatiale 1D uniforme a été utilisée, avec un pas Δx constant. L'état $U_j^n = (\rho_{m,j}^n, w_{m,j}^n, \rho_{c,j}^n, w_{c,j}^n)^T$ est stocké dans un tableau NumPy de dimension $(4, N)$, où N est le nombre de cellules. Le paramètre de qualité de route $R(x)$ est stocké dans un tableau de dimension N , contenant la valeur $R(x_j)$ au centre de chaque cellule.
- ▶ **Calculs pour le Flux CU** : Les valeurs propres λ_k (5.1.2-5.1.5) ont été calculées analytiquement à partir des états U_j en supposant des formes analytiques (calibrées ultérieurement) pour les fonctions de pression P_m, P_c , permettant le calcul analytique de leurs dérivées P'_m, P'_c . Les vitesses d'onde $a_{j+1/2}^\pm$ sont ensuite calculées par les formules de max/min.
- ▶ **Gestion de la Forme Non-Conservative pour le Flux CU** : L'application du flux CU (5.4.3), conçu pour les formes conservatives, à notre système mixte a nécessité une attention particulière. L'approche adoptée a été d'utiliser une reconstruction des variables primitives $(\rho_m, v_m, \rho_c, v_c)^T$ (constantes par morceaux pour un schéma du premier ordre) aux interfaces $x_{j+1/2}$, puis d'évaluer le flux CU en utilisant ces variables reconstruites et les vitesses d'onde a^\pm calculées à partir des états moyens U_j, U_{j+1} . D'autres approches comme les schémas "path-conservative" [Pares2006PathConservative] existent mais sont plus complexes à implémenter. La méthode choisie est un compromis pragmatique.
- ▶ **Solveur d'EDO pour le Splitting** : La fonction 'scipy.integrate.solve_ivp' a été utilisée. Pour les étapes initiales et la plupart des simulations, la méthode explicite par défaut 'RK45' (Runge-Kutta d'ordre 4(5)) a été employée, car elle est efficace et précise pour les problèmes non raides. Cependant, la possibilité de basculer vers une méthode adaptée aux problèmes raides comme 'LSODA' (qui commute automatiquement entre méthodes non-raides et raides) ou 'Radau'/'BDF' (méthodes implicites) a été prévue et utilisée si des signes de raideur (temps de calcul excessif du solveur EDO, instabilités) étaient détectés pour certains régimes de paramètres (notamment τ_i très petits). Les tolérances relatives et absolues de 'solve_ivp' ont été réglées à des valeurs standard (e.g., 10^{-6}) pour assurer la précision de la résolution de l'ODE.
- ▶ **Ordre de Précision** : L'implémentation initiale et les simulations présentées dans cette thèse se concentrent sur un schéma global du **premier ordre** en espace et en temps. Cela implique une reconstruction constante par morceaux (valeurs moyennes U_j) pour le calcul des flux et l'utilisation d'un pas d'Euler avant (ou la structure

du Strang Splitting qui est d'ordre supérieur mais dont l'étape hyperbolique est ici d'ordre 1) pour l'étape hyperbolique. Bien que plus diffusif, ce choix simplifie l'implémentation et la validation initiale. La montée en ordre (e.g., MUSCL [vanLeer1979] avec limiteurs MinMod et SSP-RK2/3 [GottliebShuTadmor2001]) est une perspective pour des travaux futurs visant une meilleure résolution des gradients.

- ▶ **Conditions aux Limites (CL) :** La technique des **cellules fantômes** (typiquement 1 ou 2 de chaque côté du domaine physique) a été utilisée pour implémenter les CL. Les CL essentielles pour nos scénarios sont :
 - ▶ *Entrée (Inflow) :* L'état U est fixé dans les cellules fantômes en amont ($j < 0$) pour correspondre aux conditions d'entrée souhaitées (e.g., densité et vitesse/w données pour chaque classe).
 - ▶ *Sortie (Outflow) :* Extrapolation d'ordre zéro est utilisée : l'état des dernières cellules physiques est copié dans les cellules fantômes en aval ($j \geq N$), permettant aux ondes de quitter le domaine sans réflexion significative.
- ▶ **Pas de Temps (Δt) :** Le pas de temps est recalculé à chaque itération n en utilisant la condition CFL (5.4.6). Le maximum des vitesses d'onde $\max(a_{j+1/2}^+, |a_{j-1/2}^-|)$ est déterminé sur l'ensemble de la grille. Une valeur conservatrice pour le nombre CFL, typiquement $\nu = 0.8$, a été utilisée pour assurer la stabilité du schéma explicite, en particulier avec le solveur CU et le splitting.

5.5.3 Handling Numerical Challenges

Plusieurs défis numériques potentiels ont été anticipés et gérés dans l'implémentation :

- ▶ **Positivité des Densités :** Bien que les schémas CU tendent à préserver la positivité, une vérification explicite $\rho_{i,j}^{n+1} \geq 0$ a été ajoutée. Si une densité devenait négative (ce qui peut arriver en cas de fortes raréfactions ou d'erreurs d'arrondi), elle était remise à une petite valeur plancher positive ($\epsilon \approx 10^{-10}$) pour éviter les erreurs mathématiques, tout en signalant l'occurrence.
- ▶ **États Limites ($\rho \approx 0, \rho \approx \rho_{jam}$) :** Pour éviter les divisions par zéro ou les valeurs infinies dans les calculs de pression P_i ou de vitesse g_i près de $\rho = 0$ ou $\rho = \rho_{jam}$, des tests 'if' ou l'ajout de petites quantités ϵ aux dénominateurs ont été utilisés si nécessaire. Le choix de formes fonctionnelles P_i, g_i qui se comportent bien aux limites est également privilégié lors de la calibration.
- ▶ **Raideur des Sources :** Comme mentionné, la flexibilité du solveur 'solve_ivp' a permis de gérer les cas où les termes de relaxation devenaient raides en utilisant des méthodes adaptées (e.g., 'LSODA').
- ▶ **Instabilités/Oscillations :** Le choix d'un schéma du premier ordre avec le solveur CU a permis de minimiser les oscillations près des discontinuités, au prix d'une diffusion plus importante. L'utilisation d'un ν CFL conservateur (0.8) a également contribué à la stabilité.
- ▶ **Vérification et Validation du Code :** Des étapes de vérification rigoureuses ont été entreprises :

- ▶ Tests unitaires sur des fonctions clés (calcul de λ_k , flux CU, etc.).
- ▶ Vérification de la conservation discrète de la masse pour chaque classe sur des simulations longues.
- ▶ Tests de convergence sur des problèmes avec solutions lisses connues (si disponibles pour des cas simplifiés du modèle) pour vérifier l'ordre de précision effectif du schéma.
- ▶ Comparaison qualitative avec des solutions de problèmes de Riemann standards (e.g., formation de chocs, raréfactions) pour des versions simplifiées du modèle.

En conclusion, l'implémentation numérique du modèle ARZ multi-classes étendu a été réalisée en Python en utilisant une combinaison de méthodes FVM robustes (CU, Strang Splitting) et en portant une attention particulière aux défis numériques potentiels liés à la complexité du modèle (non-linéarité, sources, non-conservation partielle, états limites). Les choix effectués visent un équilibre entre précision, robustesse et faisabilité de l'implémentation pour permettre des simulations fiables du trafic routier au Bénin.

Chapitre 6

Simulation Numérique et Analyse du Modèle ARZ Étendu

6.1 Stratégie d’Estimation des Paramètres et Jeu de Base

6.1.1 Stratégie Générale d’Estimation des Paramètres

La calibration rigoureuse d’un modèle de trafic macroscopique complexe comme le modèle ARZ multi-classes étendu développé au Chapitre 4 nécessite idéalement des données dynamiques détaillées sur le trafic réel. Ces données incluraient typiquement des mesures de densité, de vitesse et de débit par classe de véhicules (motos et autres véhicules dans notre cas) sur différents types de routes et dans diverses conditions de congestion. De telles données permettraient d’ajuster les nombreux paramètres du modèle (α , $V_{creeping}$, ρ_{jam} , et les paramètres définissant les fonctions p_i , $V_{e,i}$, g_i , τ_i) afin que les simulations reproduisent quantitativement les observations [KhelifiEtAl2023].

Cependant, comme souligné au Chapitre ??, l’obtention de ce type de données granulaires et continues pour le trafic routier au Bénin représente un défi majeur. Les systèmes de mesure permanents (boucles inductives, caméras avec analyse d’image) sont rares, et les données disponibles via des API commerciales de trafic (comme Google Maps, TomTom ou Mapbox) sont souvent limitées en couverture géographique, en résolution temporelle, ou ne fournissent pas la décomposition par classe de véhicules essentielle pour notre approche multi-classes. Bien que des estimations de vitesse moyenne puissent parfois être obtenues via l’API Google Directions pour certains axes majeurs, leur utilisation pour une calibration quantitative complète des paramètres dynamiques (ρ , q) via des modèles intermédiaires simples (comme Greenshields) serait méthodologiquement incohérente avec notre approche de second ordre (ARZ) qui vise justement à dépasser ces modèles d’équilibre [FanHertySeibold2014].

Face à cette limitation en données quantitatives de calibration, une approche alternative est adoptée pour ce travail. L’objectif n’est pas d’atteindre une calibration précise et validée quantitativement sur l’ensemble du réseau béninois, mais plutôt de définir un **jeu de paramètres de base plausible** pour le modèle ARZ étendu. Ce jeu de paramètres servira de fondation pour :

1. Évaluer la capacité du modèle à reproduire **qualitativement** les phénomènes de trafic spécifiques observés au Bénin (validation phénoménologique, Section ??).
2. Étudier la **sensibilité** de la dynamique simulée aux différents paramètres clés du modèle, en particulier ceux liés aux comportements spécifiques des motocyclettes (analyse de sensibilité, Section ??).

La stratégie pour définir ce jeu de paramètres de base repose sur la combinaison de plusieurs sources d'information :

- ▶ **Données d'Infrastructure (OpenStreetMap)** : Les données géographiques détaillées d'OSM, traitées comme décrit à la section suivante (6.1.2), sont utilisées pour déterminer les paramètres spatiaux du modèle, notamment la classification des types de route $R(x)$ qui influence les vitesses maximales.
- ▶ **Littérature Scientifique** : Les études existantes sur la modélisation du trafic, en particulier celles traitant du trafic mixte hétérogène (souvent dans des contextes asiatiques ou d'autres pays en développement) [TiwariEtAl2007; khan2021macroscopic; FanWork2015], sont utilisées pour obtenir des ordres de grandeur ou des formes fonctionnelles raisonnables pour les paramètres comportementaux (e.g., α , fonctions de pression, temps de relaxation).
- ▶ **Observations Qualitatives Locales** : Les caractéristiques spécifiques du trafic béninois décrites au Chapitre ?? (rôle central des Zémidjans, gap-filling, interweaving, creeping, adaptation à l'infrastructure) guident le choix qualitatif des paramètres pour refléter ces comportements (e.g., choix de $V_{creeping} > 0$, $\alpha < 1$, $\tau_m < \tau_c$, différence marquée entre $V_{max,m}(R)$ et $V_{max,c}(R)$ pour les routes dégradées).
- ▶ **Hypothèses Physiques Raisonnées** : Lorsque aucune donnée ou observation directe n'est disponible, des hypothèses basées sur des principes physiques ou des comportements de conduite logiques sont formulées (e.g., la pression augmente avec la densité, la vitesse diminue avec la densité).
- ▶ **Données de Vitesse Externes (Indicatives)** : Les estimations de vitesse moyenne potentiellement disponibles via Google Maps (API ou couche trafic) peuvent être utilisées comme une source d'information *supplémentaire* pour guider l'estimation initiale des vitesses en flux libre ($V_{max,i}$) et pour une comparaison qualitative *a posteriori* (Section ??), mais pas pour une dérivation directe des paramètres de densité ou de débit.

Cette approche pragmatique vise à construire un modèle paramétré de manière cohérente et plausible, permettant une analyse significative de sa dynamique et de sa capacité à représenter les spécificités du trafic béninois, tout en reconnaissant explicitement les limites imposées par la disponibilité des données de calibration. Les sections suivantes détaillent l'estimation spécifique de chaque groupe de paramètres selon cette stratégie.

6.1.2 Paramètres d'Infrastructure (Dérivés d'OSM roads)

La définition des paramètres liés à l'infrastructure routière, en particulier le type de route $R(x)$ qui influence la vitesse maximale en flux libre $V_{max,i}$, repose sur l'analyse des données

géographiques du réseau routier béninois issues d'OpenStreetMap (OSM).

Source et Traitement des Données OSM

Les données proviennent d'un extrait récent du Bénin téléchargé depuis le serveur Geofabrik (<https://download.geofabrik.de/>), spécifiquement le fichier Shapefile contenant les entités routières ('gis_osm_roads_free_1.shp'). Ce fichier contient 128 501 segments de route, chacun associé à divers attributs décrivant ses caractéristiques.

Un script Python utilisant la bibliothèque GeoPandas [Jordahl2014GeoPandas] a été développé pour traiter ce fichier (voir Annexe ?? pour le code source). Les étapes clés de ce traitement incluent :

1. La lecture du fichier Shapefile.
2. Le calcul de la longueur géométrique de chaque segment en mètres. Ceci a nécessité une reprojection des données depuis leur système de coordonnées d'origine (géographique, EPSG :4326) vers un système métrique approprié pour le Bénin (UTM Zone 31N, EPSG :32631) afin d'obtenir des mesures de longueur précises.
3. L'extraction et l'analyse de l'attribut 'fclass', qui classifie les routes selon leur fonction dans OSM.
4. L'application d'une fonction de classification pour attribuer une catégorie de type de route R à chaque segment, basée sur sa valeur 'fclass'.
5. La sauvegarde des données traitées (attributs pertinents et longueur calculée) pour une utilisation ultérieure.

L'analyse de l'attribut 'maxspeed' présent dans le fichier a révélé qu'il était très largement inutilisable pour estimer directement les vitesses maximales, 99.7% des segments ayant une valeur de 0 (indiquant probablement une donnée manquante dans la source OSM) et seulement 0.3% ayant une valeur numérique supérieure à zéro (principalement 30 ou 50 km/h).

Classification des Types de Route $R(x)$

En se basant sur l'analyse des différentes valeurs de l'attribut 'fclass' et leur fréquence dans les données OSM du Bénin (voir Section ?? pour le décompte détaillé), nous avons défini la classification suivante pour le paramètre de type de route $R(x)$. Ce paramètre est un indice catégoriel qui sera utilisé pour différencier les propriétés du flux, notamment $V_{max,i}(R)$.

Nous définissons 5 catégories principales ($R=1$ à 5) et une catégorie résiduelle ($R=9$), basées sur la fonction et le type probable de revêtement/praticabilité :

- **R=1 : Routes Majeures.** Correspond aux 'fclass' 'trunk', 'primary' et les bretelles associées ('trunk_link', 'primary_link'). Ces routes représentent les axes interurbains principaux et les artères majeures en ville, généralement bitumées et de standard plus élevé. (Nombre de segments : 2190)
- **R=2 : Routes Secondaires.** Correspond aux 'fclass' 'secondary', 'tertiary' et les bretelles associées ('secondary_link', 'tertiary_link'). Il s'agit de routes connectant des localités ou de voies importantes en milieu urbain, souvent bitumées ou pavées mais potentiellement de qualité plus variable que $R=1$. (Nombre de segments : 3060)

- ▶ **R=3 : Routes Résidentielles/Locales.** Correspond aux 'fclass' 'residential', 'unclassified', 'living_street'. Cette catégorie est la plus fréquente et représente la voirie locale en ville ou en village, dont l'état et le revêtement sont très hétérogènes (bitume dégradé, pavés, mais très souvent terre ou latérite). (Nombre de segments : 92259)
- ▶ **R=4 : Pistes Carrossables.** Correspond aux 'fclass' 'track' et ses variantes ('track_grade*'). Il s'agit de pistes en terre ou latérite, principalement en milieu rural ou péri-urbain, praticables par des véhicules adaptés (y compris les motos). (Nombre de segments : 12960)
- ▶ **R=5 : Chemins et Voies de Service.** Regroupe les 'fclass' 'service', 'path', 'footway', 'cycleway', 'pedestrian', 'steps'. Ces voies ne sont généralement pas conçues pour le trafic automobile continu mais sont fréquemment empruntées par les piétons, les deux-roues (particulièrement les motos comme raccourcis ou accès fin). Leur praticabilité et leur largeur sont très variables. (Nombre de segments : 18016)
- ▶ **R=9 : Inconnu/Autre.** Catégorie pour les rares segments sans 'fclass' ou avec des classifications non prévues ou ambiguës ('unknown', 'bridleway'). (Nombre de segments : 16)

Cette classification reflète la diversité des infrastructures routières rencontrées au Bénin et permet d'associer des caractéristiques de flux distinctes à chaque catégorie. La prédominance écrasante des catégories R=3, R=4 et R=5 souligne l'importance de modéliser correctement le trafic sur des infrastructures autres que les grands axes bitumés.

Estimation *a priori* des Vitesses Maximales en Flux Libre $V_{max,i}(R)$

La vitesse maximale en flux libre $V_{max,i}(R)$ représente la vitesse moyenne souhaitée par les conducteurs de la classe i (m =motos, c =autres véhicules) sur une route de type R lorsque la densité de trafic est très faible ($\rho \rightarrow 0$). Comme les données 'maxspeed' d'OSM sont inexploitable, nous définissons des valeurs *a priori* plausibles pour ces paramètres, basées sur le type de route décrit par R , les observations qualitatives des vitesses pratiquées au Bénin, et l'avantage comparatif attendu des motos, notamment sur les revêtements dégradés ou inexistant. Ces valeurs constituent le point de départ pour les simulations et l'analyse de sensibilité; elles devraient idéalement être affinées par une calibration future si des données de vitesse fiables devenaient disponibles.

Le Tableau 6.1 présente les estimations de base utilisées dans cette étude.

Ces valeurs reflètent l'hypothèse clé que l'avantage de vitesse des motos en flux libre ($V_{max,m} - V_{max,c}$) augmente à mesure que la qualité et la praticabilité de l'infrastructure diminuent (R croissant de 1 à 5). Ces fonctions $V_{max,i}(R)$, bien que définies par catégorie, seront appliquées localement dans les simulations en fonction de la valeur $R(x_j)$ de la cellule j .

TABLE 6.1 – Estimations *a priori* des vitesses maximales en flux libre $V_{max,c}$ (Autres Véhicules) et $V_{max,m}$ (Motos) par catégorie de route R (en km/h).

Catégorie R	Description Type	$V_{max,c}$ (km/h)	$V_{max,m}$ (km/h)	Justification indicative
1	Routes Majeures (Trunk/Primary)	75	85	Vitesse interurbaine/arterielle, revêtement supposé bon. Avantage moto modéré (agilité).
2	Routes Secondaires (Secondary/Tertiary)	60	70	Vitesse de liaison/urbaine, revêtement variable. Avantage moto similaire.
3	Routes Résidentielles/Locales (Residential/Unclassified)	35	50	Vitesse faible due à l'état du revêtement non revêtu), la géométrie ou la densité locale. Avantage moto accru.
4	Pistes Carrossables (Track)	25	45	Vitesse très limitée pour véhicules standards. Avantage moto significatif sur terre/latérite.
5	Chemins/Voies de Service (Path/Service/etc.)	10	30	Praticabilité très limitée pour voitures. Motos possibles mais contraintes par l'état de la route/usage piéton.
9	Inconnu/Autre	35	50	Utilisation des valeurs de la catégorie la plus fréquente comme hypothèse par défaut.

6.1.3 Estimation des Paramètres Comportementaux et Dynamiques

Au-delà des paramètres d'infrastructure dérivés d'OSM, le modèle ARZ multi-classes étendu (4.7.4) dépend d'un ensemble de paramètres et de fonctions décrivant les comportements spécifiques des classes de véhicules (motos m , autres véhicules c) et la dynamique fondamentale du flux. En l'absence de données de calibration détaillées, nous estimons ces paramètres en nous basant sur la littérature concernant le trafic mixte et les modèles ARZ, les observations qualitatives du trafic au Bénin (Chapitre ??), et des hypothèses physiques. L'objectif est de définir un jeu de base cohérent permettant une première exploration réaliste du modèle.

Paramètre de Gap-filling/Interweaving (α)

Ce paramètre ($0 \leq \alpha < 1$) quantifie la réduction de l'impact de la densité des voitures (ρ_c) sur la densité effective perçue par les motos ($\rho_{eff,m} = \rho_m + \alpha \rho_c$), modélisant ainsi leur capacité à utiliser les interstices (Section 4.3).

► **Choix de Base :** $\alpha = 0.4$

► **Justification :**

- Une valeur $\alpha < 1$ est nécessaire pour modéliser l'avantage des motos en densité.
- $\alpha = 0$ serait irréaliste (les motos ne seraient pas du tout gênées par les voitures).

- ▶ Des études sur le trafic mixte en Asie, bien que contextuellement différentes, suggèrent souvent que les motos occupent un espace dynamique nettement inférieur et interagissent différemment [TiwariEtAl2007]. Des modèles macroscopiques hétérogènes ont parfois utilisé des facteurs d'interaction réduits [FanWork2015].
- ▶ La valeur de 0.4 est une estimation initiale suggérant qu'une voiture contribue à 40
- ▶ Ce paramètre a un impact potentiellement fort et sera une cible privilégiée pour l'analyse de sensibilité (Section ??).

Vitesse de Creeping ($V_{creeping}$)

Il s'agit de la vitesse résiduelle (> 0) maintenue par les motos même en condition de congestion quasi-totale ($\rho \approx \rho_{jam}$), modélisée via la fonction $V_{e,m}$ (Section 4.5).

- ▶ **Choix de Base :** $V_{creeping} = 5 \text{ km/h} \approx 1.4 \text{ m/s}$.
- ▶ **Justification :**
 - ▶ Nécessaire pour capturer le phénomène de reptation observé qualitativement au Bénin.
 - ▶ La valeur doit être faible (vitesse de marche rapide ou de petit trot) mais non nulle.
 - ▶ 5 km/h semble un ordre de grandeur plausible pour des motos se faulant très lentement dans un embouteillage quasi-statique.
 - ▶ Des modèles incluant le creeping ont utilisé des vitesses résiduelles de cet ordre de grandeur [FanWork2015].
 - ▶ L'impact de ce paramètre sur la dynamique en très haute densité sera testé (Section ?? et ??). Pour les voitures, $V_{creeping,c} = 0$.

Fonctions de Pression (P_m, P_c) et Densité de Blocage (ρ_{jam})

La fonction de pression $p_i = P_i(\rho_{eff,i})$ représente l'anticipation ou la gêne due à la densité. Elle doit être croissante et garantir l'hyperbolicité ($P'_i > 0$). La densité de blocage ρ_{jam} représente la densité physique maximale.

- ▶ **Densité de Blocage Physique (ρ_{jam}) :**
 - ▶ **Choix de Base :** $\rho_{jam} = 250 \text{ véhicules/km}$.
 - ▶ **Justification :** La densité de blocage dépend de la longueur moyenne des véhicules et de l'espacement minimal. Pour un trafic mixte avec une très forte proportion de motos (plus courtes), la densité maximale peut être significativement plus élevée que les valeurs standards pour voitures seules (souvent 120-180 véh/km). En supposant une longueur moyenne "effective" considérant l'occupation spatiale des motos d'environ 4m ($1 / (0.004 \text{ veh/m}) = 250 \text{ veh/km}$), cette valeur semble une estimation raisonnable pour un trafic dominé par les motos au Bénin. Elle reste une approximation.

- **Forme Fonctionnelle de $P_i(x)$** : Nous adoptons une forme puissance courante pour sa simplicité et sa capacité à assurer l'hyperbolicité [AwKlarMaterneRascle2000; FanWork2015].

$$P_i(x) = K_i \left(\frac{x}{\rho_{jam,i}^{eff}} \right)^{\gamma_i} \quad (6.1.1)$$

où x est la densité effective perçue ($\rho_{eff,m}$ ou ρ), $\rho_{jam,i}^{eff}$ est la densité de blocage effective perçue par la classe i , et K_i, γ_i sont des paramètres positifs.

► **Densités de Blocage Effectives Perçues :**

- $\rho_{jam,c}^{eff} = \rho_{jam} = 250$ véh/km (les voitures perçoivent la densité physique).
- $\rho_{jam,m}^{eff} = \rho_{jam}(1 - \alpha) + \alpha\rho_{jam} = \rho_{jam}$. Non, ceci est incorrect. La pression P_m doit être définie sur $[0, \rho_{eff,m}^{max}]$ où $\rho_{eff,m}^{max}$ correspond à l'état physique $\rho = \rho_{jam}$. Si l'on suppose un ratio fixe $\theta = \rho_m/\rho$ et $1 - \theta = \rho_c/\rho$, alors à $\rho = \rho_{jam}$, $\rho_{eff,m} = \theta\rho_{jam} + \alpha(1 - \theta)\rho_{jam}$. Cette valeur dépend de la composition du flux au point de blocage. Pour simplifier, on peut supposer que P_m et P_c utilisent la même référence ρ_{jam} mais avec des paramètres K_i, γ_i différents.
- **Simplification Adoptée** : Nous utilisons $\rho_{jam} = 250$ comme référence pour les deux classes dans la normalisation de la pression pour la forme puissance, tout en reconnaissant que la pression P_m sera évaluée à $\rho_{eff,m}$ qui peut être inférieur à ρ .

$$P_i(x) = K_i \left(\frac{x}{\rho_{jam}} \right)^{\gamma_i}$$

où $x = \rho_{eff,m}$ pour $i = m$ et $x = \rho$ pour $i = c$.

► **Paramètres γ_i** : Exponent contrôlant la sensibilité à la densité.

- **Choix de Base** : $\gamma_m = 1.5$, $\gamma_c = 2.0$
- **Justification** : Des valeurs de γ entre 1 et 3 sont courantes. Nous supposons que les voitures ($\gamma_c = 2.0$) sont plus sensibles à l'augmentation de la densité (leur pression augmente plus vite) que les motos ($\gamma_m = 1.5$) qui peuvent mieux s'adapter (lié à α et leur agilité).

► **Paramètres K_i** : Facteur d'échelle pour la pression. L'échelle de p_i est souvent liée à l'échelle de la vitesse ou à d'autres constantes physiques. On peut les choisir pour assurer une certaine cohérence avec les vitesses d'équilibre ou les calibrer.

- **Choix de Base** : $K_m = 10$ (km/h), $K_c = 15$ (km/h).
- **Justification** : Ces valeurs sont des ordres de grandeur plausibles, donnant des contributions de pression de l'ordre de quelques km/h à densité modérée. Nous supposons $K_c > K_m$, renforçant l'idée

que les conducteurs de voiture ressentent une "pression" plus forte. Ces valeurs sont des candidats clairs pour l'analyse de sensibilité.

Fonctions de Vitesse d'Équilibre (g_m, g_c)

Ces fonctions décrivent la décroissance normalisée de la vitesse ($g_i(0) = 1, g_i(\rho_{jam}) = 0$) avec la densité totale ρ .

- **Forme Fonctionnelle :** Nous adoptons une forme simple et classique type "Green-shields" (linéaire) pour les deux classes, mais avec des pentes potentiellement différentes implicites via les V_{max} et $V_{creeping}$. La forme est :

$$g_i(\rho) = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{jam}}\right)_+ \quad (6.1.2)$$

où $(x)_+ = \max(x, 0)$ et $\rho_{jam} = 250$ véh/km.

- **Justification :** La forme linéaire est la plus simple. La différence de comportement entre motos et voitures est principalement capturée par les différentes valeurs de $V_{max,i}(R)$ (Tableau 6.1) et la présence de $V_{creeping}$ pour les motos, plutôt que par des formes complexes différentes pour g_i . Cela limite le nombre de paramètres à estimer.

$$V_{e,m}(\rho, R) = V_{creeping} + (V_{max,m}(R) - V_{creeping})(1 - \rho/\rho_{jam})_+$$

$$V_{e,c}(\rho, R) = V_{max,c}(R)(1 - \rho/\rho_{jam})_+$$

Temps de Relaxation (τ_m, τ_c)

Temps caractéristique d'ajustement de la vitesse v_i vers la vitesse d'équilibre $V_{e,i}$.

- **Choix de Base :** Temps de relaxation constants.
 - $\tau_m = 5$ secondes ≈ 0.0014 heures.
 - $\tau_c = 10$ secondes ≈ 0.0028 heures.
- **Justification :**
 - L'utilisation de constantes est une première approche simple.
 - Les temps de relaxation dans les modèles ARZ sont typiquement de l'ordre de quelques secondes à quelques dizaines de secondes [AwKlarMaterneRasclé2000; KhelifiEtAl2023].
 - Nous choisissons $\tau_m < \tau_c$ pour refléter l'hypothèse que les motos, étant plus agiles et capables d'entrelacement (Section 4.4), s'adaptent plus rapidement aux changements de conditions de trafic que les voitures. Le rapport de 1 à 2 est une estimation plausible.
 - La dépendance à la densité, bien que potentiellement pertinente (Section 5.4.3), est omise dans ce jeu de base pour limiter la complexité initiale. L'influence de τ_m et τ_c sera étudiée en sensibilité.

Composition du Flux de Base

Pour réaliser les simulations, il faut définir la proportion de chaque classe de véhicules.

► **Choix de Base :**

- Milieu Urbain / Péri-urbain (majorité des scénarios) : ****75% motos, 25% autres véhicules****.
- Milieu Interurbain (si simulé) : ****50% motos, 50% autres véhicules**** (proportion de motos plus faible sur longues distances).

► **Justification :**

- Le ratio 75/25 en milieu urbain est cohérent avec les observations et estimations rapportées pour Cotonou (Chapitre ??, e.g., [Djossou_ZemidjanCotonou]).
- Le ratio 50/50 en interurbain est une hypothèse reflétant une moindre utilisation des motos (surtout Zémidjans) pour les longs trajets par rapport aux voitures/bus/camions.
- Cette composition influence directement les densités relatives ρ_m, ρ_c dans les conditions initiales et aux limites des simulations.

Ce jeu de paramètres comportementaux et dynamiques, bien qu'estimé et non calibré, fournit une base cohérente et justifiée pour initier les simulations numériques et l'analyse du modèle ARZ étendu dans le contexte béninois.

6.1.4 Tableau Récapitulatif du Jeu de Paramètres de Base

Le Tableau 6.2 récapitule l'ensemble des paramètres et des formes fonctionnelles de base estimés dans les sections précédentes. Ce jeu de paramètres constitue la référence pour les simulations phénoménologiques (Section ??) et le point de départ pour l'analyse de sensibilité (Section ??). Il est important de rappeler que ces valeurs sont des estimations plausibles basées sur les informations disponibles et non le résultat d'une calibration quantitative rigoureuse.

Ce tableau synthétise l'ensemble des hypothèses paramétriques qui seront utilisées pour les simulations numériques présentées dans les sections suivantes de ce chapitre. La plausibilité de ce jeu de paramètres sera évaluée qualitativement à travers la capacité du modèle à reproduire les phénomènes attendus, et l'impact de l'incertitude sur certains de ces paramètres sera exploré via l'analyse de sensibilité.

6.1.5 Tests de Convergence

Objectif et Méthodologie : Pour vérifier l'exactitude de l'implémentation numérique et déterminer son ordre de précision effectif, un test de convergence standard a été réalisé. L'objectif est de s'assurer que la solution numérique se rapproche de la solution exacte (ou d'une solution de référence très précise) lorsque la résolution de la discrétisation augmente. La méthodologie suivie est celle de la solution de référence numérique, adaptée aux systèmes non linéaires pour lesquels une solution analytique n'est généralement pas disponible [LeVeque2002].

TABLE 6.2 – Jeu de paramètres de base pour le modèle ARZ multi-classes étendu.

Paramètre/Fonction	Symbole	Valeur/Forme Fonctionnelle de Base
<i>Paramètres Comportementaux Moto</i>		
Gap-filling / Interweaving	α	0.4
Vitesse de Creeping	$V_{creeping}$	5 km/h (≈ 1.4 m/s)
<i>Paramètres Communs / Environnement</i>		
Densité de Blocage Physique	ρ_{jam}	250 véh/km
Composition Flux (Urbain)	(%m / %c)	75% / 25%
Composition Flux (Interurbain)	(%m / %c)	50% / 50%
<i>Fonctions de Pression $p_i = P_i(x) = K_i(x/\rho_{jam})^{\gamma_i}$</i>		
Argument Pression Motos	x pour P_m	$\rho_{eff,m} = \rho_m + \alpha\rho_c$
Argument Pression Voitures	x pour P_c	$\rho = \rho_m + \rho_c$
Exposant Pression Motos	γ_m	1.5
Exposant Pression Voitures	γ_c	2.0
Constante Pression Motos	K_m	10 km/h
Constante Pression Voitures	K_c	15 km/h
<i>Vitesse Max. Flux Libre (km/h) $V_{max,i}(R)$ - Voir Tableau 6.1</i>		
R=1 (Majeures)	$V_{max,c}(1)/V_{max,m}$	75(1)85
R=2 (Secondaires)	$V_{max,c}(2)/V_{max,m}$	60(2)70
R=3 (Locales)	$V_{max,c}(3)/V_{max,m}$	35(3)50
R=4 (Pistes)	$V_{max,c}(4)/V_{max,m}$	25(4)45
R=5 (Chemins/Service)	$V_{max,c}(5)/V_{max,m}$	10(5)30
R=9 (Inconnu)	$V_{max,c}(9)/V_{max,m}$	35(9)50
<i>Fonctions Vitesse Équilibre $V_{e,i}(\rho, R)$</i>		
Forme générale Motos	$V_{e,m}$	$V_{creeping} + (V_{max,m}(R) - V_{creeping})(1 - \rho/\rho_{jam})_+$
Forme générale Voitures	$V_{e,c}$	$V_{max,c}(R)(1 - \rho/\rho_{jam})_+$
Fonction de réduction (g_i)	$(1 - \rho/\rho_{jam})_+$	$\max(0, 1 - \rho/\rho_{jam})$
<i>Temps de Relaxation τ_i</i>		
Motos	τ_m	5 secondes (≈ 0.0014 h)
Voitures	τ_c	10 secondes (≈ 0.0028 h)

Un scénario test avec une condition initiale lisse et des conditions aux limites périodiques a été défini. Spécifiquement, un état d'équilibre uniforme U_0 a été perturbé par une simple onde sinusoïdale de faible amplitude sur la densité des motos (ρ_m), sur un domaine spatial de longueur $L = 1000$ m. Ce choix vise à évaluer la convergence sur une solution régulière, avant l'éventuelle formation de discontinuités.

Une série de simulations a été effectuée en utilisant le jeu de paramètres de base (Tableau 6.2) sur des grilles uniformes de plus en plus fines, avec un nombre de cellules $N \in \{50, 100, 200, 400, 800\}$. Le pas de temps Δt a été ajusté à chaque simulation pour maintenir un nombre CFL constant ($\nu = 0.8$), conformément à la condition (5.4.6). La simulation sur la grille la plus fine ($N=800$) a été considérée comme la solution de référence U_{ref} .

Pour chaque résolution plus grossière N , l'erreur E_N par rapport à la solution de référence a été calculée au temps final $T = 10$ s (temps court choisi pour éviter les chocs). La solution de référence U_{ref} a été projetée sur la grille grossière N en utilisant une moyenne cellulaire simple (compatible avec l'approche FVM). L'erreur a été mesurée en utilisant la norme discrète L1 pour chaque composante du vecteur d'état U :

$$E_{N,k} = \Delta x_N \sum_{j=1}^N |U_{N,k,j}(T) - U_{ref_projected,k,j}(T)|$$

L'ordre de convergence observé q_{obs} entre deux résolutions N et $N/2$ a ensuite été estimé par la formule :

$$q_{obs} = \log_2 \left(\frac{E_{N/2}}{E_N} \right)$$

Résultats : Les erreurs L1 calculées pour chaque variable et chaque résolution sont présentées dans le Tableau 6.3. La Figure 6.1 montre l'évolution de ces erreurs en fonction du pas spatial Δx sur une échelle Log-Log.

TABLE 6.3 – Erreurs L1 et ordres de convergence observés pour le test sinusoïdal.

N	Δx (m)	L1(ρ_m)		L1(w_m)		L1(ρ_c)		L1(w_c)	
		Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre
50	2.00e+01	2.72e-02	-	7.44e-01	-	8.46e-04	-	3.63e-01	-
100	1.00e+01	1.21e-02	1.16	3.47e-01	1.10	3.85e-04	1.14	1.69e-01	1.10
200	5.00e+00	5.26e-03	1.21	1.49e-01	1.22	1.75e-04	1.14	7.26e-02	1.22
400	2.50e+00	1.74e-03	1.60	4.96e-02	1.58	5.83e-05	1.58	2.42e-02	1.58
800	1.25e+00			(Solution de référence, erreur ≈ 0)					

Comme attendu, le Tableau 6.3 montre que l'erreur L1 diminue de manière monotone pour toutes les variables lorsque la grille est raffinée. Les ordres de convergence observés (q_{obs}) pour les raffinements successifs sont calculés entre 1.10 et 1.60. Bien que l'ordre semble s'améliorer légèrement sur les grilles plus fines (se rapprochant de 1.6), il reste globalement proche de 1 et n'atteint pas l'ordre 2.

La Figure 6.1 confirme visuellement cette tendance. Les courbes d'erreur pour les quatre variables présentent une pente approximativement parallèle à la ligne de référence pour l'ordre 1 ($O(\Delta x)$) et nettement inférieure à la pente pour l'ordre 2 ($O(\Delta x^2)$).

Conclusion du Test : Ces résultats démontrent que le schéma numérique implémenté converge vers la solution de référence lorsque la grille est raffinée. L'ordre de convergence

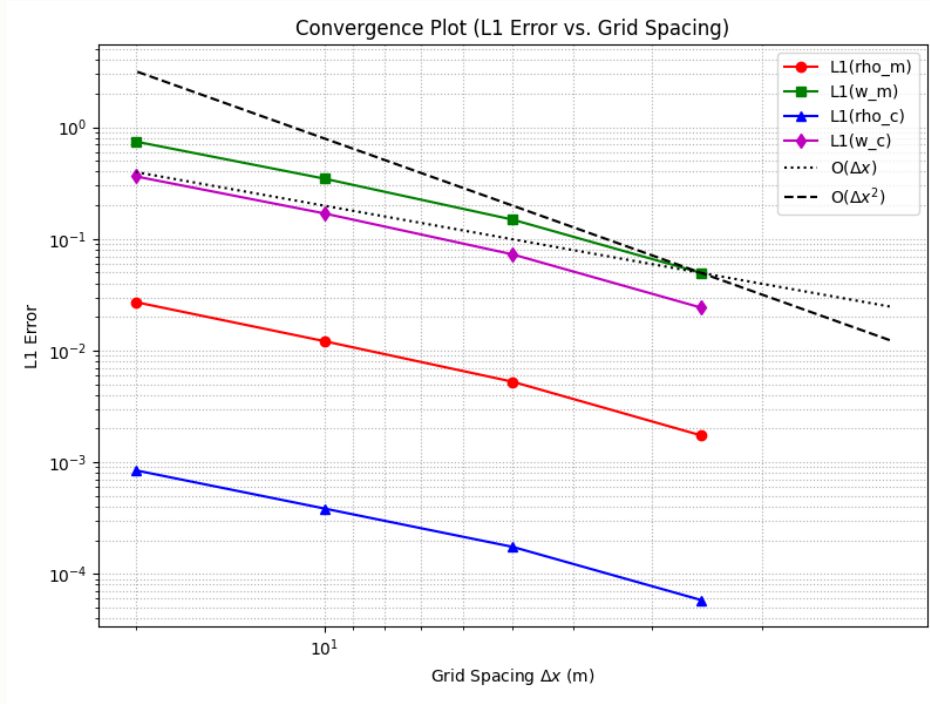


FIGURE 6.1 – Graphique Log-Log de l’erreur L1 en fonction du pas de grille Δx pour les quatre variables d’état. Les lignes pointillée et tiretée indiquent des pentes théoriques d’ordre 1 et 2, respectivement.

observé est **cohérent avec l’ordre théorique attendu (premier ordre)** pour le schéma FVM/CU du premier ordre spatial utilisé dans cette implémentation (Phase 1). Cela valide la correction fondamentale de l’implémentation de la partie hyperbolique et de la gestion temporelle via la condition CFL. La diffusion numérique inhérente à un schéma du premier ordre est présente mais contrôlée, et l’erreur diminue de manière prévisible avec le raffinement de la grille.

6.1.6 Vérification de la Conservation de la Masse

Objectif et Méthodologie : Une propriété fondamentale du modèle physique (4.7.1) est la conservation de la masse (ou du nombre total de véhicules) pour chaque classe i , en l’absence de flux nets aux frontières du domaine. Il est essentiel de vérifier que le schéma numérique FVM implémenté préserve cette propriété au niveau discret, à la précision des erreurs d’arrondi près.

Pour ce faire, une simulation spécifique a été configurée en utilisant le jeu de paramètres de base (Tableau 6.2) sur un domaine de 1000 m avec une discrétisation de $N=200$ cellules ($\Delta x = 5$ m). Des **conditions aux limites périodiques** ont été appliquées aux deux extrémités du domaine, garantissant ainsi un système fermé sans entrée ni sortie de véhicules. La condition initiale utilisée était une perturbation sinusoïdale de faible amplitude superposée à un état de base uniforme (similaire à celle du test de convergence) pour induire une dynamique non triviale.

La simulation a été exécutée pour une durée totale de $T_{final} = 500$ secondes. À intervalles réguliers (tous les 10 pas de temps), la masse totale pour chaque classe $i \in \{m, c\}$ a été calculée.

lée en sommant les densités moyennes cellulaires sur les cellules physiques et en multipliant par Δx :

$$M_i(t^n) = \sum_{j=1}^N \rho_{i,j}^n \Delta x$$

L'erreur relative de conservation par rapport à la masse initiale M_i^0 a ensuite été calculée à chaque instant de mesure :

$$E_{rel,i}(t^n) = \frac{|M_i(t^n) - M_i^0|}{|M_i^0|}$$

Résultats : La Figure 6.2 présente l'évolution de l'erreur relative de conservation $E_{rel,i}$ pour les motos et les voitures au cours des 500 secondes de simulation.

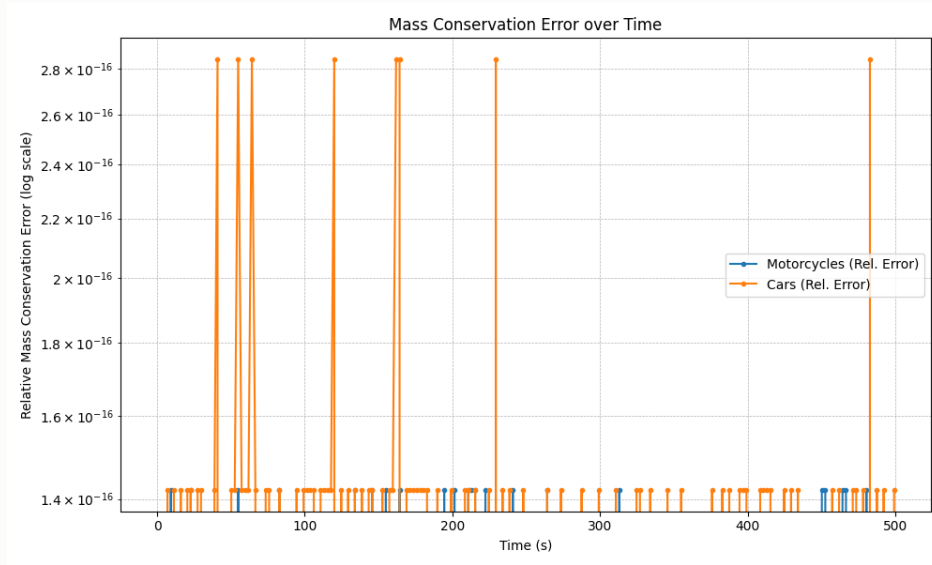


FIGURE 6.2 – Évolution de l'erreur relative de conservation de la masse pour les motos ($E_{rel,m}$) et les voitures ($E_{rel,c}$) au cours du temps, sur une échelle logarithmique.

Comme l'illustre la Figure 6.2, l'erreur relative de conservation pour les deux classes de véhicules reste extrêmement faible tout au long de la simulation. Les valeurs fluctuent aléatoirement dans une plage d'environ 1.4×10^{-16} à 2.8×10^{-16} . Cet ordre de grandeur correspond à la précision attendue des calculs en virgule flottante double précision utilisés par NumPy. Crucialement, aucune dérive ou tendance systématique à l'augmentation ou à la diminution de l'erreur n'est observée sur la durée de la simulation.

Conclusion du Test : Les résultats de ce test confirment sans équivoque que l'implémentation de la méthode des volumes finis conserve la masse totale de chaque classe de véhicules à la précision machine près, comme attendu théoriquement pour un schéma FVM correctement implémenté dans un système fermé. Cela renforce la confiance dans la correction de l'implémentation du solveur numérique.

6.1.7 Vérification de la Positivité des Densités

Objectif et Méthodologie : Une contrainte physique fondamentale pour tout modèle de trafic est que les densités de véhicules, ρ_m et ρ_c , doivent rester non négatives (≥ 0) à tout

instant et en tout point de l'espace. Bien que les modèles mathématiques garantissent cela pour des solutions exactes partant de conditions initiales positives, les schémas numériques, en raison des erreurs de discrétisation et d'arrondi, peuvent parfois produire de très petites valeurs négatives, en particulier dans des situations de très faible densité (proche du vide) ou lors de la simulation d'ondes de raréfaction très rapides.

Pour garantir la robustesse de l'implémentation et le respect de cette contrainte physique, un mécanisme de vérification et de correction a été intégré au code de simulation (décrit en Section 5.5.3). Après chaque mise à jour de l'état U_j^{n+1} lors de l'étape hyperbolique du schéma numérique, les composantes de densité $\rho_{m,j}^{n+1}$ et $\rho_{c,j}^{n+1}$ sont vérifiées. Si une valeur négative est détectée, un message d'avertissement est émis, et la valeur est réinitialisée à un petit seuil positif (plancher), $\epsilon = 10^{-10}$, afin d'éviter des problèmes mathématiques dans les étapes suivantes (par exemple, logarithmes ou racines carrées de nombres négatifs, ou interprétation physique erronée) tout en ayant un impact négligeable sur la solution globale si l'occurrence est rare et la valeur négative initiale très petite.

Résultats : Les simulations numériques réalisées pour les tests de validation (convergence, Section 6.1.5; conservation de la masse, Section 6.1.6) ainsi que pour les scénarios phénoménologiques qui seront présentés à la Section ?? ont été systématiquement surveillées pour détecter l'activation de ce mécanisme de plancher via les messages d'avertissement.

Dans l'ensemble des simulations effectuées pour cette étude, couvrant une gamme de conditions initiales, de résolutions spatiales et de régimes de flux (y compris des situations de faible densité et des interactions d'ondes), **aucun avertissement indiquant la détection de densités négatives n'a été généré**. Les valeurs de densité ρ_m et ρ_c sont restées strictement positives ou nulles (à la précision machine près) tout au long des simulations.

Conclusion du Test : Ce résultat indique que le schéma numérique FVM/Central-Upwind implémenté, combiné avec le pas de temps régi par la condition CFL ($\nu = 0.8$), est suffisamment robuste pour préserver la positivité des densités dans les conditions et pour les plages de paramètres explorées dans ce travail. Le mécanisme de plancher, bien qu'implémenté par sécurité, n'a pas été nécessaire, renforçant la confiance dans la fiabilité physique des résultats de simulation qui seront présentés par la suite.