Construcción Formal de Programas en Teoría de Tipos

Gustavo Betarte

Carlos Luna

Instituto de Computación (InCo)

2017

Objetivos

- Generales:

  Iniciación al uso de métodos formales para la producción de software correcto por construcción

- Particulares:
  - **presentación de laTeoría de Tipos como lógica de programación**
  - **familiarización con ambientes de desarrollo de programas basados en ese formalismo**

Certificación de Calidad de Software

- **Normas internacionales de calidad**
  (ISO9001, CC (ITSEC, TCSEC), etc.)
- **Diferentes niveles/criterios de calidad que involucran evaluación de**
  - **el proceso de producción**
  - **el producto**
- **Niveles altos de garantía exigen la aplicación de métodos formales en:**
  - **la especificación**
  - **la verificación del código fuente**
  - **la verificación del código objeto**

Métodos Formales y Desarrollo Industrial de Software

Métodos formales

- Verificación de modelos
- Lenguajes para sistemas comunicantes
- Lógicas de programación

  - Lógica de Hoare

  - Lógicas de orden superior

  - Teorías de tipos

  ...

Aplicaciones Industriales Críticas

- Transporte
- Aeronáutica
- Centrales nucleares
- Software embebido
- Comercio electrónico

  ...

Aplicación de métodos formales en el desarrollo de software

- **Sigue teniendo un costo elevado, pero mucho menor comparado con 10, 20 años.**

- **Es rentable a largo plazo**
  - **desarrollo incremental y descubrimiento temprano de incoherencias entre los requerimientos**
  - **calidad del diseño**
  - **mantenimiento**
  - **documentación fiable**
  - **comunicación no ambigua (posibilita la terciarización de servicios y la verificación de la funcionalidad)**
  - **evaluación de los planes de calidad (en particular, de los protocolos de test)**

Costrucción Formal de Programas en Teoría de Tipos

Métodos formales:

- Lógicas de Programación
  - Teorías de Tipos
    - Asistentes de Pruebas
      - Coq

- Lenguaje formal para la especificación de programas (Teoría de Tipos)
- Razonamiento sobre la especificación y demostración propiedades
- Asistentes mecánicos

Programa

- **Asistentes de pruebas para lógicos y matemáticos**
  - **Una presentación formal de la lógica proposicional y de primer orden**
- **Asistentes de pruebas para programadores**
  - **Cálculo lambda con definiciones inductivas como lenguaje de programación funcional**
- **Pruebas y programas. Especificaciones y Tipos**
  - **Isomorfismo de Curry-Howard**
  - **Extracción de programas a partir de pruebas**
  - **Caso de estudio: Modelado y verificación de políticas de seguridad en VirtualCert**

Capítulo 1: Asistentes de Pruebas para Lógicos y Matemáticos

1. Lógica Proposicional

0. Motivación

Ejemplo: División

Sean *a* y *b* $\in$ N**, b≠0.**

Calculamos *a* div ***b* y a** mod ***b***
***simultáneamente* haciendo recursión en *a*:**

- **0** divmod ***b* = <0,0>**
- **(n+1)** divmod ***b* = let <q,r> = n** divmod ***b***

```
in   if r < b-1
     then <q,r+1>
     else <q+1,0>
```

División: especificación y prueba

- **Especificación: Para todos *a,b* $\in$ N tq. b≠0 existen *q* y *r* tq. *a=b.q+r* y *r < b.***
- **Prueba de que el programa es correcto: por inducción en *a:***

- 0 divmod *b* = <0,0> ➔ **0 = *b*.0 + 0 y 0 < *b***
- (n+1) divmod *b* =

  let <q,r> = n divmod *b*

  in if r < b-1

  then <q,r+1> ➔

  else <q+1,0>

supongamos ***n=b.q+r* y *r < b.***

luego, si ***r < b - 1***

entonces ***n+1 = b.q+(r+1) y***

r+1<b

sino ***n+1 = b.(q+1)+0* y *0<b***

1. Cálculo proposicional

Lógica como herramienta para especificar y probar corrección de programas.

Cálculo proposicional

Sintaxis

- **variables de proposición: A,B,C,....**
- **conectivos: $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ~, $\leftrightarrow$**

Semántica

- **noción de verdad: existencia de prueba (lógica constructivista)**

Cálculo proposicional en Coq

- **Prop** es la familia de proposiciones
- **Declaración de variables de proposición:**

  Variable A B C: Prop

- **Conectivos:**
  - $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$ **son *primitivos*** **(/\, \/,->, False)**
  - $\sim$ **y** $\leftrightarrow$ **son *definidos***:

    $\sim\alpha$ **:=** $(\alpha \rightarrow \perp)$

    $\forall\alpha \leftrightarrow \beta$ **:=** $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Construcción de pruebas en Coq

Para comenzar:

- Queremos probar cierta ***fórmula objetivo*** (***goal***)
- Para ello, utilizaremos diferentes ***tácticas*** que transforman al objetivo original e introducen hipótesis adicionales

Desarrollo de pruebas lógicas

Situación general:

- existen varios objetivos a probar, cada uno a partir de ciertas hipótesis:

$$\left.\frac{\Gamma_1}{\alpha_1} \quad \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\Gamma_n}{\alpha_n}\right\} \text{secuentes}$$

donde:

- cada Γ_i es un conjunto de fórmulas (hipótesis) de la forma:
  H0: γ_0, H1: γ_1,... Hk: γ_k.
- α_i es una fórmula
- cada α_i debe ser probada a partir de Γ_i

Tácticas = Reglas de inferencia

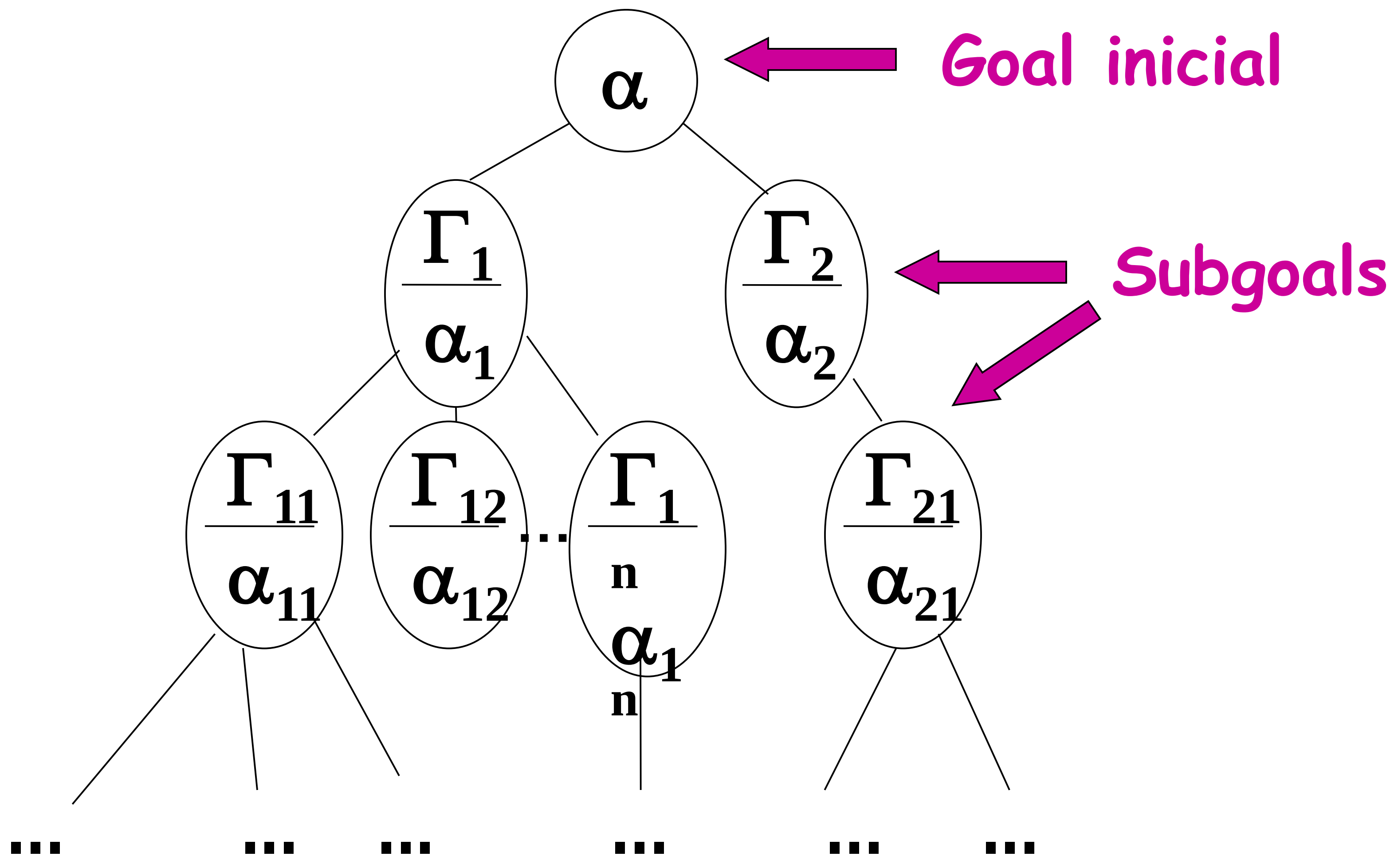
Una táctica **transforma un secuente de la forma:**

$$\frac{\Gamma_i}{\alpha_i}$$

en *cero o más* secuentes: $\frac{\Gamma_{i1}}{\alpha_{i1}} \quad \frac{\Gamma_{i2}}{\alpha_{i2}} \quad \ldots \quad \frac{\Gamma_{in}}{\alpha_{in}}$

tales que probar los últimos es *suficiente* para construir una prueba del secuente original

Prueba completa = Árbol



Tácticas

caso trivial

$$\dfrac{\begin{array}{l}\Gamma \\ \mathbf{H:}\ \alpha\end{array}}{\alpha}$$

assumption

Probado!

Tácticas (II)
Reglas de introducción

introducción →

$$\frac{\Gamma}{\alpha \to \beta} \qquad \texttt{intro H} \qquad \frac{\Gamma \quad H: \alpha}{\beta}$$

- el identificador `H` es opcional
- variantes: `intros`, `intros` $H_1 \ldots H_n$

Tácticas (III)
Reglas de introducción (cont.)

introducción $\vee$ (Izq.)

$$\frac{\Gamma}{\alpha \vee \beta} \qquad \text{left} \qquad \frac{\Gamma}{\alpha}$$

introducción $\vee$ (Der.)

$$\frac{\Gamma}{\alpha \vee \beta} \qquad \text{right} \qquad \frac{\Gamma}{\beta}$$

Tácticas (IV)
Reglas de introducción (cont.)

introducción $\wedge$

$$\frac{\Gamma}{\alpha\wedge\beta} \quad \textbf{split} \quad \frac{\Gamma}{\alpha} \quad \frac{\Gamma}{\beta}$$

“introducción” $\perp$

$$\frac{\Gamma}{\textbf{False}} \quad \textbf{absurd } \alpha \quad \frac{\Gamma}{\alpha} \quad \frac{\Gamma}{\sim\alpha}$$

Tácticas (V)
Reglas de eliminación

eliminación →

$$\frac{\Gamma \quad H: \alpha \to \beta}{\beta}$$

apply H

$$\frac{\Gamma \quad H: \alpha \to \beta}{\alpha}$$

en general:

$$\frac{\Gamma \quad H: \alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \beta}{\beta}$$

apply H

$$\frac{\Gamma \quad H: \ldots}{\alpha_1} \qquad \frac{\Gamma \quad H: \ldots}{\alpha_2} \qquad \ldots$$

Tácticas (VI)
Reglas de eliminación (cont.)

eliminación ∨

$$\frac{\Gamma \quad H: \alpha\vee\beta}{\sigma} \quad \textbf{elim H} \quad \frac{\Gamma \quad H: \alpha\vee\beta}{\alpha\to\sigma} \quad \frac{\Gamma \quad H: \alpha\vee\beta}{\beta\to\sigma}$$

eliminación ∧

$$\frac{\Gamma \quad H: \alpha\wedge\beta}{\sigma} \quad \textbf{elim H} \quad \frac{\Gamma \quad H: \alpha\wedge\beta}{\alpha\to\beta\to\sigma}$$

Tácticas (VII)
Reglas de eliminación (cont.)

eliminación ⊥

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \\ \textbf{H: False}\end{array}}{\sigma}$$

elim H

Probado!

Tácticas (VIII)

Otras tácticas

Utilización de lema intermediario

$$\frac{\Gamma}{\alpha} \qquad \texttt{cut } \beta \qquad \frac{\Gamma}{\beta \rightarrow \alpha} \qquad \frac{\Gamma}{\beta}$$

Explicitación de la prueba:

$$\frac{\Gamma}{\alpha} \qquad \texttt{exact } t \qquad \textbf{Probado!}$$

donde: **t debe ser una prueba de α (figura en las hipótesis de Γ o es el nombre de un lema ya probado)**

Tácticas (IX)
Eliminación de definiciones

Eliminación de definición

$$\frac{\Gamma}{\sim\alpha} \qquad \texttt{unfold not} \qquad \frac{\Gamma}{\alpha \rightarrow \text{False}}$$

Eliminación de definición

$$\frac{\Gamma}{\alpha \leftrightarrow \beta} \qquad \texttt{unfold iff} \qquad \frac{\Gamma}{(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)}$$

unfold las hipótesis: unfold *nom* in *h*

Observaciones

- **En general:**
  - **si *term* es una prueba de una proposición α (que figura en las hipótesis o es el nombre de un lema ya probado), entonces** elim *term***, aplica la regla de eliminación del conectivo principal de α.**
  - apply **y** elim **no se aplican solamente a hipótesis sino también a lemas previamente demostrados.**

Esquemas de proposición

Si demostramos

```
Variable A:Prop.
    Lemma L1 : A→ A.
Proof. … Qed.
```

La prueba es análoga para *cualquier* **proposición *A*.**

Un *esquema de proposición* se expresa como:

Para toda proposición *A*, se cumple *A*→ *A*.

En Coq este esquema se expresa:

```
forall A:Prop, A→ A
```

Esquemas de proposición
Instanciación

Ejemplo:

Si ya demostramos en Coq

```
Lemma Lid : forall A:Prop, A→ A
Proof.
…
Qed.
```

Para demostrar ~False → ~False

podemos utilizar exact (Lid ~False).

2. Cálculo proposicional clásico

Principio del tercero excluído:

Para toda proposición P, se cumple $P \vee \sim P$

En lógica constructiva, una proposición es <u>verdadera</u> *si y sólo si* podemos <u>exhibir una prueba.</u>

- **Sabemos probar instancias de este axioma, pero no sabemos probar el esquema pues para cada proposición deberíamos exhibir una prueba de ella o de su negación ¿como haríamos con las conjeturas y resultados indecidibles?**

<u>Ejemplo</u>: sabemos probar $1=0 \vee \sim 1=0$

no sabemos (hoy) probar $P=NP \vee \sim P=NP$

Cálculo proposicional clásico

El principio del tercero excluído no se puede demostrar en la lógica constructiva

→ puede agregarse como un AXIOMA

En Coq este axioma está declarado en el módulo Classical y se llama classic.

```
Require Import Classical.
      ...
check (classic A).
      (classic A) : (A \/ ~A)
```

3. Razonamiento automatizado

Tautologías constructivas

$$\frac{\Gamma}{\alpha}$$ **tauto** **Probado!**

tauto implementa una estrategia de construcción de pruebas de tautologías constructivas.

Esta estrategia tiene éxito cuando α es una *tautología* cuya prueba *no usa* *el tercero excluído*.

Construye una prueba.

Táctica (Semi)Automática

Aplicación (hacia atrás) de lemas e hipótesis

$$\frac{\Gamma}{\alpha} \quad \texttt{auto} \quad \textbf{Probado!}$$

O bien

$$\frac{\Gamma}{\alpha} \quad \texttt{auto} \quad \frac{\Gamma}{\alpha}$$

auto implementa una estrategia de construcción de pruebas similar a la de Prolog (razonamiento hacia atrás) aplicando lemas e hipótesis. Considera únicamente aquellos lemas declarados como Hint. Construye una prueba.