Inspira Crea Transforma

ANÁLISIS DE VARIANZA DE UN SOLO FACTOR PARA $K \geq 2$

Presentado por:
Mateo Restrepo S.
Juan S. Cárdenas R.
David Plazas E.

Prof.: Francisco I. Zuluaga

Estadística I
Ingeniería Matemática
Departamento de Ciencias Matemáticas
Escuela de Ciencias
Universidad EAFIT
2018

CONTENIDO

DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA

1. DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA

- La idea es determinar si hay diferencias significativas entre las medias de las poblaciones, comparando sus varianzas. Este método es una generalización de la *prueba-t* de dos muestras, estudiado en clase [I].
- Sea k el número de poblaciones a ser analizadas, donde Y_{ij} es la j-ésima unidad experimental para la i-ésima muestra, donde $i = 1, ..., k$ y $j = 1, ..., n_i$, donde n_i es el tamaño de la i-ésima muestra.
- **Suposiciones:** Si el tamaño de la muestra es pequeño (i.e $n < 30$), se debe suponer que la población sigue una distribución normal. Además, se supone que las poblaciones son independientes (tanto en muestras grandes como pequeñas) con medias $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ y varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma^2$.

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, "Estadística matemática con aplicaciones," *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

1. DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA

1.1 Prueba de hipótesis

Basados en las pruebas ya mostradas, se requiere construir una prueba de hipótesis para determinar si existe evidencia suficiente para afirmar que $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$[I].

Hipótesis nula

$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$

Hipótesis alterna

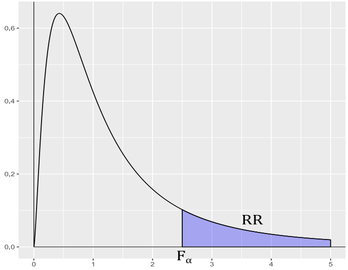
$H_1: \quad (\exists\ i, j)(\mu_i \neq \mu_j) \rightarrow$ Si al menos una de las igualdades no se cumple.

Estadístico de prueba

$$F = \frac{SST \Big/ k-1}{SSE \Big/ n-k} \sim \mathbb{F}_{(k-1, n-k)} \quad \text{, bajo } H_0$$

Región de Rechazo

$$RR : \{F > F_\alpha\}$$



1. DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA

1.2 Preliminares

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \qquad E\left(Y_i\right) = n_i \mu_i \qquad V\left(Y_i\right) = n_i \sigma^2$$

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} Y_i \qquad E\left(\bar{Y}_i\right) = \mu_i \qquad V\left(\bar{Y}_i\right) = \frac{\sigma^2}{n_i}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{Y}_i \qquad \mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_i^2}{n_i} - n\bar{Y}^2 \qquad \mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2$$

Se utilizarán estas variables aleatorias, con sus respectivas medias y varianzas, para calcular la esperanza del SST[I] (Total sum of squares), utilizando

$$E\left(Y^2\right) = V(Y) + E^2\left(Y\right)$$

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, "Estadística matemática con aplicaciones," *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

1.2 Preliminares

$$
\begin{aligned}
E(SST) &= E\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{Y_i^2}{n_i}\right) - E(n\bar{Y}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{E\left(Y_i^2\right)}{n_i} - nE(\bar{Y}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma^2 + (n_i\mu_i)^2}{n_i} - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\sigma^2 + n_i\mu_i^2\right) - \sigma^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i\right)^2 \\
&= (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i\right)^2
\end{aligned}
$$

1. DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA

1.2 Preliminares

En el caso de $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = \mu$[I],

$$E(SST) = (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i\mu^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\mu\right)^2$$

$$= (k-1)\sigma^2 + \mu^2\sum_{i=1}^{k} n_i - \frac{\mu^2}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2$$

$$= (k-1)\sigma^2 + n\mu^2 - n\mu^2$$

$$E\left(\frac{SST}{k-1}\right) = \sigma^2 \tag{1}$$

Nótese que $\frac{SST}{k-1}$ es un estimador insesgado de σ^2. Siguiendo un procedimiento análogo, se puede probar que $\frac{SSE}{n-k}$ es otro estimador insesgado para σ^2.

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, "Estadística matemática con aplicaciones," *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

FORTALEZAS Y DEBILIDADES

2. FORTALEZAS Y DEBILIDADES[II]

Fortalezas

- No importan los tamaños de las muestras o si no son iguales.
- Permite encontrar dos estimadores insesgados para σ^2.
- Permite tener en cuenta cuantas muestras se desee.
- Permite hallar (o no) evidencia suficiente para verificar si $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$.

Debilidades

- Se debe suponer normalidad en las poblaciones ($n < 30$).
- Se debe suponer que las varianzas poblacionales para todas las muestras deben ser iguales.
- Se debe comprobar primero que las muestras sean independientes (podrían utilizarse métodos como el test de Levene[I]).

[I] J. Starkweather, "Homgenety of variances," https://it.unt.edu/sites/default/files/levene_jds_mar2010.pdf. [Online] consultado el 4 de Noviembre, 2018

[II] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, "Estadística matemática con aplicaciones," *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

EJEMPLOS

3. EJEMPLOS

3.1 Para 4 muestras[l]

Cuatro grupos de estudiantes se someten a diferentes técnicas de enseñanza y se examinan al final de un periodo especificado. Como consecuencia de las deserciones de los grupos experimentales (por enfermedad, transferencia, etc.), el número de estudiantes varió de un grupo a otro. ¿Los datos mostrados en la Tabla 1 presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en el éxito medio para las cuatro técnicas de enseñanza?

	1	2	3	4
	65	75	59	94
	87	69	78	89
	73	83	67	80
	79	81	62	88
	81	72	83	
	69	79	76	
		90		
y_i	454	549	425	351
n_i	6	7	6	4
$\bar{y}_i$	75.667	78.429	70.833	87.750

Tabla 1

3. EJEMPLOS

3.1 Para 4 muestras[I]

Para el estadístico de prueba, se requiere el SST y SSE:

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_i^2}{n_i} - n\bar{Y}^2 \approx 712.586$$

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 \approx 1196.631$$

Por lo tanto,

$$F = \frac{SST \Big/ k-1}{SSE \Big/ n-k} \approx 3.771$$

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, “Estadística matemática con aplicaciones,” *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

3. EJEMPLO

3.1 Para 4 muestras[I]

Para un nivel de significancia del 5 % (i.e. $\alpha = 0.05$), se debe calcular F_α. Utilizando el comando

```
F_alpha <- qf(0.05, k-1, n-k, lower.tail = FALSE)
```

Que retorna un valor de $F_\alpha \approx 3.127$. Por lo tanto, la RR es

$$RR : \{F > 3.127\}$$

Como $3.771 > 3.127$, se puede rechazar H_0, ya que hay suficiente evidencia para afirmar esto; por lo tanto, existe una diferencia significativa entre las medias de las 4 poblaciones.

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, "Estadística matemática con aplicaciones," *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

3. EJEMPLOS

3.1 Para 4 muestras[I]

Este resultado también se puede comprobar con el $valor - p$ (V_p); como se rechazó H_0, el V_p debería ser menor o igual al nivel de significancia de la prueba. Para esto, utilizamos los comandos

```
F <- (SST/(k-1))/(SSE/(n-k))
p_value <- pf(F, k-1, n-k, lower.tail = FALSE)
```

Que resulta en $V_p \approx 0.028$, que efectivamente es menor al nivel de la prueba ($\alpha = 0.05$) y se comprueba que el resultado previo.

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, "Estadística matemática con aplicaciones," *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

3. EJEMPLOS

3.2 Para 2 muestras[I]

Los valores codificados para una medida de elasticidad de un plástico preparado por dos procesos diferentes se proporcionan en la Tabla 2. Las muestras independientes, ambas de tamaño 6, se tomaron de la producción de cada uno de los procesos. ¿Los datos presentan suficiente evidencia para indicar una diferencia en elasticidad media en los dos procesos?

	A	B
	6.1	9.1
	7.1	8.2
	7.8	8.6
	6.9	6.9
	7.6	7.5
	8.2	7.9
y_i	43.7	48.2
n_i	6	6
$\bar{y}_i$	7.28	8.03

Tabla 2

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, “Estadística matemática con aplicaciones,” *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

3. EJEMPLOS

3.2 Para 2 muestras[I]

Para el estadístico de prueba, se requiere el SST y SSE:

$$\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_i^2}{n_i} - n\bar{Y}^2 \approx 1.688$$

$$\mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 \approx 5.862$$

Por lo tanto,

$$F = \frac{SST \Big/ k-1}{SSE \Big/ n-k} \approx 2.879$$

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, “Estadística matemática con aplicaciones,” *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

3.2 Para 2 muestras[I]

Para un nivel de significancia del 5 % (i.e. $\alpha = 0.05$), se debe calcular F_{α}. Utilizando el comando

```
F_alpha <- qf(0.05, k-1, n-k, lower.tail = FALSE)
```

Que retorna un valor de $F_{\alpha} \approx 4.964$. Por lo tanto, la RR es

$$RR : \{F > 4.964\}$$

Como $2.879 < 4.964$, no se puede rechazar H_0, ya que no hay suficiente evidencia a favor de H_1; por lo tanto, no existe una diferencia significativa entre las medias de las 2 poblaciones.

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, "Estadística matemática con aplicaciones," *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

3. EJEMPLOS

3.2 Para 2 muestras[I]

Este resultado también se puede comprobar con el *valor* $- p$ (V_p); como se no rechazó H_0, el V_p debería ser mayor al nivel de significancia de la prueba. Para esto, utilizamos los comandos

```
F <- (SST/(k-1))/(SSE/(n-k))
p_value <- pf(F, k-1, n-k, lower.tail = FALSE)
```

Que resulta en $V_p \approx 0.12$, que efectivamente es mayor al nivel de la prueba ($\alpha = 0.05$) y se comprueba que el resultado previo.

[I] D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, “Estadística matemática con aplicaciones,” *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010

BIBLIOGRAFÍA I

- D. Wackerly, W. Mendehall, and R. Scheaffer, “Estadística matemática con aplicaciones,” *CENGAGE Learning*, vol. 7, 2010.
- J. Starkweather, “Homgenety of variances,” https://it.unt.edu/sites/default/files/levene_jds_mar2010.pdf. [Online] consultado el 4 de Noviembre, 2018.

Gracias