Tareas Modelación y Simulación II

Juan S. Cárdenas R.
David Plazas E.

May 30, 2019

1 Distribuciones de Probabilidad

1.1 Binomial

Demuestre que la media μ y la varianza $Var(x)$ para la distribución binomial están dadas por:

$$\mu = np \tag{1}$$

$$Var(X) = npq \tag{2}$$

1.1.1 Media

La media para la distribución binomial es

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Cuando x=0, se anula la sumatoria. Luego

$$\mu = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Teniendo en cuenta que

$$\binom{i}{j} = \frac{i}{j} \binom{i-1}{j-1}$$

Se tiene

$$\mu = \sum_{x=1}^{n} n \binom{n-1}{x-1} p^x q^{n-x}$$

Sea $x' = x - 1$, $n' = n - 1$, luego

$$\mu = n \sum_{x'=0}^{n} \binom{n'}{x'} p^{x'+1} q^{n'-x'}$$

$$\mu = np \sum_{x'=0}^{n} \binom{n'}{x'} p^{x'} q^{n'-x'}$$

Ahora, el teorema binomial nos dice que

$$(\lambda + \gamma)^{\delta} = \sum_{r=0}^{\delta} \binom{\delta}{r} \lambda^r \gamma^{\delta - r} \tag{3}$$

Luego,

$$\mu = np(p+q)^{n'}$$

Teniendo en cuenta que es una distribución binomial, $p + q = 1$. Por lo tanto, la media está dada por la ecuación

$$\mu = np \tag{4}$$

1.1.2 Varianza

Sabemos que la varianza se puede escribir como:

$$V(X) = E(X^2) - [\mu]^2$$

Además, por propiedades de la esperanza matemática podemos hallar que $E(X^2)$ es igual a:

$$E(X^2 - X) + E(X) = E(X^2)$$

Por otro lado, tenemos estas fórmulas que aplican debido a que son una distribución binomial:

$$P(X = x) = (nCx)p^x q^{n-x}$$

$$\mu = np$$

Para hallar $E(X^2 - X)$ aplicamos la defineión de esperanza obteniendo:

$$E(X^2 - X) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{n-x}$$

Aplicando propiedades del factorial obtenemos que:

$$E(X^2 - X) = \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(n-x)!(x-2)!}p^x q^{n-x}$$

$$E(X^2 - X) = p^2 n(n-1)\sum_{x=2}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!}p^{x-2} q^{n-x}$$

Obsérvese que si hacemos dos cambios de variable $m = n - 2$ y $z = x - 2$ obtenemos la fórmula:

$$E(X^2 - X) = p^2 n(n-1)\sum_{z=0}^{m} \frac{m!}{(m-z)!z!}p^z q^{m-z}$$

Así, el término de la sumatoria es análogo a la suma de todos los términos de una distribución binomial de tamaño m y con una variable aleatoria z. Por lo tanto, dicho término es equivalente a 1. Así, concluimos que:

$$E(X^2) = p^2 n(n-1) + np$$

Por lo tanto, la varianza es:

$$Var(X) = p^2n(n-1) + np - (np)^2$$

$$Var(X) = p^2n^2 - p^2n + np - (np)^2$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

$$Var(X) = npq$$

1.2 Hipergeométrica

Demuestre que la media $\mu(x)$ y la varianza $\sigma^2(x)$ para la distribución hipergeométrica están dadas por:

$$\mu = \frac{nm}{N} \tag{5}$$

$$Var(X) = \left(\frac{N-m}{N-1}\right)\left(\frac{nm}{N}\right)\left(1 - \frac{m}{N}\right) \tag{6}$$

1.2.1 Media

Sabemos que la esperanza se define como:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} xp(x)$$

Así, si sustituimos la probabilidad para algún x dado que es una distribución hipergeométrica llegamos a la ecuación:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} \frac{(dCx)\left([N-d]\,C\,[n-x]\right)}{NCn} x$$

Además, como propiedad de la combinatoria podemos demostrar que:

$$pCq = \frac{p}{q}(p-1)C(q-1)$$

Así, remplazando dicha identidad para el término dCx y para el término NCn llegamos a:

$$E(X) = \frac{nd}{N} \sum_{x=1}^{n-1} \frac{((d-1)C(x-1))\left([N-d]\,C\,[n-x]\right)}{(N-1)C(n-1)}$$

De esta manera, si hacemos un cambio de variable $N' = N-1$, $n' = n-1$, $d' = d-1$, $x' = x-1$ llegamos a que:

$$E(X) = \frac{nd}{N} \sum_{x'=0}^{n'} \frac{(d'Cx')\left([N'-d']\,C\,[n'-x']\right)}{N'Cn'}$$

Y, podemos observar, que el término de la sumatoria es exactamente análogo a la sumatoria de todos los términos de una distribución hipergeométrica con parámetros d', N', n', x'; por lo tanto, esta sumatoria debe ser igual a 1. Así, concluimos que:

$$E(X) = \frac{nd}{N}$$

1.2.2 Varianza

Sabemos que la varianza se puede calcular como

$$Var\left(X\right)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\left[\mathrm{E}\left(X\right)\right]^2 \tag{7}$$

Ya sabemos que $E(X)=\frac{nm}{N}$, calculemos $E(X^2)$

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}x^2$$

Aplicando la siguiente propiedad del coeficiente binomial

$$\binom{i}{j}=\frac{i}{j}\binom{i-1}{j-1}$$

Se tiene

$$E(X^2)=\frac{mn}{N}\sum_{x=1}^{n}\frac{\binom{m-1}{x-1}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}}x$$

Sea $x'=x-1$, $m'=m-1$, $N'=N-1$, $n'=n-1$, reemplazando se obtiene

$$E(X^2)=\frac{mn}{N}\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{m'}{x'}\binom{N'-m'}{n'-x'}}{\binom{N'}{n'}}(x'+1)$$

$$E(X^2)=\frac{mn}{N}\left[\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{m'}{x'}\binom{N'-m'}{n'-x'}}{\binom{N'}{n'}}x+\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{m'}{x'}\binom{N'-m'}{n'-x'}}{\binom{N'}{n'}}\right]$$

El primer término es la media para la distribución hipergeométrica; el segundo es la suma de las probabilidades para la misma distribución. Al ser una distribución de probabilidad, debe dar 1. Luego

$$E(X^2)=\frac{mn}{N}\left(\frac{m'n'}{N'}+1\right)$$

$$E(X^2)=\frac{mn}{N}\left[\frac{(m-1)(n-1)}{N-1}+1\right]$$

Reemplazando en la ecuación 7, se tiene

$$Var(X)=\frac{mn}{N}\left[\frac{(m-1)(n-1)}{N-1}+1\right]-\left(\frac{mn}{N}\right)^2$$

$$Var(X)=\frac{mn}{N}\left[\frac{mnN-mN-nN+N^2-mnN+mn}{N(N-1)}\right]$$

$$Var(X)=\frac{mn}{N}\left[\frac{N^2-(m+n)N+mn}{N(N-1)}\right]$$

$$Var(X)=\frac{mn}{N}\left[\frac{(N-m)(N-n)}{N(N-1)}\right]$$

Entonces, la varianza para la distribución hipergeométrica está dada para por la ecuación

$$Var(X) = \left(\frac{mn}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(1-\frac{m1}{N}\right) \tag{8}$$

1.3 Normal

1.3.1 Varianza

Hallar la varianza para la distribución normal a partir de la fórmula para varianza en distribuciones de probabilidad continuas:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \tag{9}$$

En particular, se tiene que

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Haciendo $z = x - \mu$ y $dz = dx$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz$$

Sustituyendo $z = \sigma\sqrt{2}w$ y $dz = \sigma\sqrt{2}dw$, se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \sigma\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma\sqrt{2}w\right)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma\sqrt{2}w)^2}{2\sigma^2}} dw$$

Luego

$$\sigma\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma\sqrt{2}w\right)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma\sqrt{2}w)^2}{2\sigma^2}} dw = \sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} w^2 e^{-w^2} dw$$

Ahora, sustituyendo $t = x^2$ y $dx = (2\sqrt{t})^{-1}dt$, se tiene

$$\sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} w^2 e^{-w^2} dw = \sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{t}\right)^2 \left(2\sqrt{t}\right)^{-1} e^{-t} dt$$

$$\sigma^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{t}\right)^2 \left(2\sqrt{t}\right)^{-1} e^{-t} dt = \sigma^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt$$

$$\sigma^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt = \sigma^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2$$

Entonces

$$Var(X) = \sigma^2 \tag{10}$$

1.4 Exponencial

1.4.1 Varianza

Demuestre que la varianza de la distribución exponencial es

$$\sigma^2 = \beta^2 \tag{11}$$

Sabemos que la varianza para las distribuciones de probabilidad continuas está dada por la ecuación

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \tag{12}$$

Reemplazando la función de densidad para la exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

en la ecuación 12, se tiene

$$Var(X) = \int_{0}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} dx = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} (x-\mu)^2 \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} dx$$

Integrando por partes con $u = (x-\mu)^2$, $du = 2(x-\mu)dx$, $dv = e^{-\frac{x}{\beta}}dx$ y $v = -\beta e^{-\frac{x}{\beta}}$,

$$Var(X) = \frac{1}{\beta} \lim_{T\to\infty} \left[-\beta e^{-\frac{x}{\beta}}(x-\mu)^2 \Big|_0^T + 2\beta \int_0^T e^{-\frac{x}{\beta}}(x-\mu)dx \right]$$

Evaluando e integrando por partes una vez más con $u = (x-\mu)$, $du = dx$, $dv = e^{-\frac{x}{\beta}}dx$ y $v = -\beta e^{-\frac{x}{\beta}}$, se tiene que

$$Var(X) = \frac{1}{\beta} \lim_{T\to\infty} \left[-\beta e^{-\frac{x}{\beta}}(x-\mu)^2 \Big|_0^T + 2\beta \left(-\beta e^{-\frac{x}{\beta}}(x-\mu) \Big|_0^T + \beta \int_0^T e^{-\frac{x}{\beta}}dx \right) \right]$$

$$Var(X) = \frac{1}{\beta} \lim_{T\to\infty} \left[-\beta e^{-\frac{x}{\beta}}(x-\mu)^2 \Big|_0^T + 2\beta \left(-\beta e^{-\frac{x}{\beta}}(x-\mu) \Big|_0^T - \beta^2 e^{-\frac{x}{\beta}} \Big|_0^T \right) \right]$$

$$Var(X) = \frac{1}{\beta} \left[\beta\mu^2 + 2\beta \left(\beta\mu - \beta^2 \right) \right]$$

Pero como $\mu = \beta$ para la distribución exponencial, entonces se tiene

$$Var(X) = \beta^2$$

1.5 Gamma

1.5.1 Varianza

Retomando la ecuación 12 (varianza para una distribución de probabilidad continua), reemplazando la función de densidad para la función gamma,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \end{cases} \tag{14}$$

Se tiene entonces que

$$Var(X) = \int_0^\infty \frac{(x-\mu)^2}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

Que puede escribirse como

$$Var(X) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{b}} dx - 2\mu \int_{0.}^\infty x^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} dx + \mu^2 \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \right]$$

Si se reemplaza $z = \frac{x}{\beta}$ y $dz = \frac{dx}{\beta}$,

$$Var\left(X\right) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\left[\int_{0}^{\infty}\left(\beta z\right)^{\alpha+1}e^{-z}\beta dz - 2\mu\int_{0.}^{\infty}\left(\beta z\right)^{\alpha}e^{-z}\beta dz + \mu^{2}\int_{0}^{\infty}\left(\beta z\right)^{\alpha-1}e^{-z}\beta dz\right]$$

$$Var\left(X\right) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\left[\beta^{a+2}\int_{0}^{\infty}z^{\alpha+1}e^{-z}dz - 2\mu\beta^{\alpha+1}\int_{0.}^{\infty}z^{\alpha}e^{-z}dz + \mu^{2}\beta^{\alpha}\int_{0}^{\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}dz\right]$$

Utilizando la definición de la función gamma,

$$Var\left(X\right) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\left[\beta^{a+2}\Gamma\left(\alpha+2\right) - 2\mu\beta^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+1\right) + \mu^{2}\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)\right]$$

Aplicando la propiedad de $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, se tiene

$$Var\left(X\right) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\left[\beta^{a+2}\left(\alpha+1\right)\alpha\Gamma\left(\alpha\right) - 2\mu\beta^{\alpha+1}\alpha\Gamma\left(\alpha\right) + \mu^{2}\beta^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)\right]$$

Simplificando,

$$Var\left(X\right) = \beta^{2}\left(\alpha+1\right)\alpha - 2\mu\alpha\beta + \mu^{2}$$

Pero $\mu = \alpha\beta$ para la distribución gamma, luego

$$Var\left(X\right) = \alpha^{2}\beta^{2} + \alpha\beta^{2} - 2\alpha^{2}\beta^{2} + \alpha^{2}\beta^{2}$$

Luego, la varianza está dada por la expresión

$$Var\left(X\right) = \alpha\beta^{2} \tag{15}$$

1.5.2 Adicional

Demuestre que

$$\int_{0}^{x}\frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-y/\beta}dy = 1 - \sum_{m=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{m}}{m!}, \quad \alpha \in \mathbb{N} \tag{16}$$

Sabemos que:

$$\int_{0}^{x}\frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-y/\beta}dy = 1 - \int_{x}^{\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-y/\beta}dy$$

Y, además, como α es un número natural sabemos por propiedad de la distribución gamma que:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$$

Y, además, si sustituimos:

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

Llegamos entonces a, utilizando solo la integral de la derecha:

$$\int_{x}^{\infty}\frac{\lambda}{(\alpha-1)!}(\lambda y)^{\alpha-1}e^{-\lambda y}dy$$

Sustituyendo $t = \lambda$ y $dt = \lambda dy$ entonces llegamos a la ecuación:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(a-1)!}\int_{\lambda x}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \frac{1}{(a-1)!}\lim_{T\to\infty}\int_{\lambda x}^{T}t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{(a-1)!}\lim_{T\to\infty}\left[t^{\alpha-1}e^{-t}\Big|_{\lambda x}^{T} + (\alpha-1)\int_{\lambda x}^{T}t^{\alpha-2}e^{-t}dz\right] \qquad (17) \\
&= \frac{1}{(a-1)!}\lim_{T\to\infty}\left[(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x} + (\alpha-1)\int_{\lambda x}^{T}t^{\alpha-2}e^{-t}dt\right]
\end{aligned}$$

Observamos que la integral sobrante es totalmente análoga a la integral de la cual partimos. Por lo tanto, llegamos a una función recursiva para dicha integral. Con la misma lógica, sabemos que esta integral va a parar de ser recursiva cuando se aplique integración por parte $\alpha - 1$ veces, si $\alpha \geq 1$. Por lo tanto, si hacemos esta integral de forma recursiva llegamos a:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{(a-1)!}\left[(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x} + (\alpha-1)(\lambda x)^{\alpha-2}e^{-\lambda x} + \underbrace{\ldots}_{recursion} + (\alpha-1)!e^{-\lambda x}\right] \\
&= e^{-\lambda x}\left[\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \frac{(\lambda x)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} + \underbrace{\ldots}_{recursion} + 1\right] \\
&= \sum_{m=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^m}{m!}
\end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\int_0^x \frac{y^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-y/\beta} dy = 1 - \sum_{m=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^m}{m!} \tag{19}$$