El sumatorio cuádruple tiene $n(n-1)(n-2)(n-3)$ sumandos y cada uno de ellos tiene por esperanza matemática

$$E\left[\left(y_i - y_j\right)^2 (y_k - y_m)^2\right] = \left\{E\left[\left(y_i - y_j\right)^2\right]\right\}^2 = (2\sigma^2)^2 = 4\sigma^4,$$

donde la primera igualdad se debe a que los factores del primer miembro dentro de la esperanza matemática son independientes al ser los cuatro índices distintos dos a dos.

Por lo que sustituyendo en la esperanza de s^4 queda

$$E(s^4) = \frac{1}{4n^2(n-1)^2}[2n(n-1)2(\mu_4 + 3\sigma^4) +$$

$$4n(n-1)(n-2)(\mu_4 + 3\sigma^4) + n(n-1)(n-2)(n-3)4\sigma^4]$$

$$= \frac{\mu_4}{n} + \frac{n^2 - 2n + 3}{n(n-1)}\sigma^4.$$

Que es lo que queríamos demostrar para concluir el resultado de la varianza de la cuasivarianza muestral en muestreo aleatorio simple con reemplazamiento de tamaño fijo $n \geq 2$.

El resultado presente demostrado ha sido empleado en los Lemas 4.5, 4.6 y 4.7 y en la Nota (Remark) 4.4 de Ruiz Espejo *et al.* (2013, 2016) y en el resultado de Ruiz Espejo (2015).

3. Aplicación

Un ejemplo de aplicación del resultado anterior es el cálculo de la varianza del estadístico

$$\bar{y} + ks^2,$$

siendo $\bar{y}$ la media muestral, k una constante real, y s^2 la cuasivarianza muestral en el muestreo aleatorio simple con reemplazamiento de tamaño fijo n. Dicho estadístico es un estimador insesgado de la función paramétrica

$$\alpha_1 + k\sigma^2,$$

siendo α_1 la media poblacional, y σ^2 la varianza poblacional.

De los resultados anteriores tenemos que la varianza del estadístico propuesto es

$$V(\bar{y} + ks^2) =$$

$$V(\bar{y}) + k^2 V(s^2) + 2kCov(\bar{y}, s^2) =$$

$$\frac{\sigma^2}{n} + k^2\left[\frac{\mu_4}{n} - \frac{(n-3)\sigma^4}{n(n-1)}\right] + 2k\frac{\mu_3}{n}.$$

En el último sumando, en el que sustituye la covarianza, hemos usado de un resultado demostrado en Ruiz Espejo (2018). El valor obtenido de la varianza del estadístico prueba que el estadístico, por ser insesgado, converge en probabilidad a la función paramétrica $\alpha_1 + k\sigma^2$, ya que la varianza obtenida es un infinitésimo de orden n^{-1} y haciendo uso de la desigualdad de Chebychev. Además dicho estadístico es insesgado y óptimo (uniformemente de mínima varianza) para estimar dicha función paramétrica en el modelo de distribución poblacional libre, ya que el estadístico es invariante ante permutaciones en el orden de las observaciones muestrales (Zacks, 1971, p. 150). Además la varianza del estadístico es estimable insesgadamente por el estimador "suma de los estimadores insesgados óptimos de cada uno de los tres sumandos para distribución poblacional libre" (Ruiz Espejo *et al.*, 2013, 2016; Ruiz Espejo, 2015), y como consecuencia éste es además estimador óptimo o uniformemente de mínima varianza de la función paramétrica $V(\bar{y} + ks^2)$ para distribución poblacional libre.

Otro ejemplo de aplicación del resultado es que la varianza del "estimador insesgado óptimo de la varianza de la media muestral"

$$V(s^2/n) = V(s^2)/n^2 = \frac{\mu_4}{n^3} - \frac{(n-3)\sigma^4}{n^3(n-1)}$$

admite un estimador insesgado óptimo para distribución poblacional libre también deducible de las tres últimas referencias citadas en el párrafo anterior.

4. Conclusión

Hemos presentado una demostración sencilla, de unas dos páginas, a este problema clásico de obtener el valor exacto de la varianza de la cuasivarianza muestral en el muestreo aleatorio simple con reemplazamiento de tamaño fijo $n \geq 2$. El valor de la primera prueba original publicada en forma de libro, entre los que conozco, se debe a Thionet (1953, 1958). También hemos concluido algunos resultados inferenciales de interés como consecuencias de la demostración.

Referencias

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2013). «*Exactitud de la Inferencia en Poblaciones Finitas*». Madrid: Bubok.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2015). «Sobre estimación insesgada óptima del cuarto momento central poblacional». *Estadística Española* 57 (188), 287-290.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2017). «*Ciencia del Muestreo*». Madrid: Bubok.

RUIZ ESPEJO, MARIANO (2018). «Covarianza de la cuasivarianza y la media muestrales». *Estadística Española* 60 (196), 159-163.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; DELGADO PINEDA, MIGUEL; NADARAJAH, SARALEES (2013). «Optimal unbiased estimation of some population central moments». *Metron* 71, 39-62.

RUIZ ESPEJO, MARIANO; DELGADO PINEDA, MIGUEL; NADARAJAH, SARALEES (2016). «Optimal unbiased estimation of some population central moments». *Metron* 74, 139.

THIONET, P. (1953). «*La Théorie des Sondages*». Paris: Imprimerie Nationale.

THIONET, P. (1958). «*La Théorie des Sondages*». Paris: INSEE.

ZACKS, S. (1971). «*The Theory of Statistical Inference*». New York, NY: Wiley.