Minimización de AFD

César Ignacio García Osorio

5 de octubre de 2016

Equivalencia de estados

Definición

Sean $q, q' \in Q$, *para un AF*$=(\Sigma, q_0, f, F)$. *Decimos que un estado* q *es equivalente a otro estado* q' *(representado por* $q \equiv q'$*) si*

$$\forall x \in \Sigma^* \; X_F\big(\widetilde{f}(q,x)\big) = X_F\big(\widetilde{f}(q',x)\big)$$

donde $\widetilde{f}$ *es la extensión de* f *a palabras, y* X_F *es la función característica de* F*, definida como:*

$$X_F(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \in F \\ 0 & \text{si } q \notin F \end{cases}$$

La relación $\equiv$ así definida es una relación de equivalencia compatible con la función f en el sentido siguiente:

Lema

$q \equiv q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma \;\; f(q,a) \equiv f(q'a)$

Utilizando la relación de equivalencia $\equiv$ vamos a poder definir un nuevo autómata, en el que, al agrupar estados equivalentes, reduciremos el número de estados a los realmente diferentes. Así, se define:

$$A_m = \big(Q/\!\equiv, \Sigma, [q_0], [f], \mathcal{F}\big)$$

- $Q/\!\equiv$ es el conjunto cociente respecto a la relación de equivalencia considerada (conjunto de las clases de equivalencia respecto a $\equiv$)
- $[q_0]$ es la clase de equivalencia de q_0
- $\mathcal{F}$ es el conjunto de clases formadas por elementos de F
- $[f] : Q/\!\equiv \times \Sigma \longrightarrow Q/\!\equiv$ viene dada por

$$[f]\big([q], a\big) = \big[f(q, a)\big]$$

Problema

Comprobar que dos estados son equivalentes supone, teóricamente, comprobar que se comportan de igual forma para todas *las cadenas posibles, que constituyen un* conjunto infinito*.*

Veremos a continuación una serie de resultados que permitirán resolver el problema mediante un algoritmo (finito por definición).

Definición

Sea $k \in \mathbb{N}$, y sean $q, q' \in Q$. Decimos que q es equivalente de orden k a q' (representado por $q \equiv_k q'$) si

$$\forall x \in \Sigma^* \wedge |x| \leq k \Rightarrow X_F\big(\widetilde{f}(q,x)\big) = X_F\big(\widetilde{f}(q',x)\big)$$

Con esta definición, se verifican una serie de proposiciones

Propiedades

1. $q \equiv q' \Leftrightarrow q \equiv_k q' \quad \forall k$
2. $q \equiv_0 q' \Leftrightarrow (q, q' \in F) \vee (q, q' \in Q - F)$
3. $[q]_0 = F \Leftrightarrow q \in F;\ [q]_0 = Q - F \Leftrightarrow q \notin F$
4. Si $k > 0$, $q \equiv_k q' \Rightarrow q \equiv_{k-1} q'$
5. Si $k > 0$, $[q]_k \subseteq [q]_{k-1}$
6. Si $k>0$, $q \equiv_k q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma\ f(q,a) \equiv_{k-1} f(q',a)$
7. Si $k > 0$,

$$q \equiv_k q' \Leftrightarrow \begin{array}{l} q \equiv_{k-1} q' \\ \wedge \\ \forall a \in \Sigma\ f(q,a) \equiv_{k-1} f(q',a) \end{array}$$

8. Al formar $P_k = Q/\equiv_k$, si $P_k = P_{k+1}$ para algún $k > 0$, entonces $P_k = P_m\ \forall m \geq k$.

Teorema

$\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ *es finito y de cardinalidad menor que* n *(donde* n *es el número de estados del AFD inicial)*

Algoritmo

Dado un AFD $\left(Q, \Sigma, q_0, f, F\right)$*, el AFD mínimo asociado se puede construir mediante el siguiente algoritmo:*

- $k = 0$. *Construir la partición* P_0 *de* Q *constituida por por las clases* F *y* $Q - F$.
- **repetir**
  - *incrementar* k
  - *construir* P_k*, partiendo de* P_{k-1} *y manteniendo en la misma clase dos estados* q *y* q' *si y solamente si* $\forall a \in \Sigma$ *los estados* $f(q, a)$ *y* $f(q', a)$ *están en la misma clase de* P_{k-1}
- **hasta** *que* $P_{k-1} = P_k$ *(lo cual ocurrirá antes de que* $k = n - 1$*)*
- P_{k-1} *es* $Q/\equiv$