$S \Rightarrow^{*} w$

Alfabetos,

Σ^{*} $x^{0} = \varepsilon$

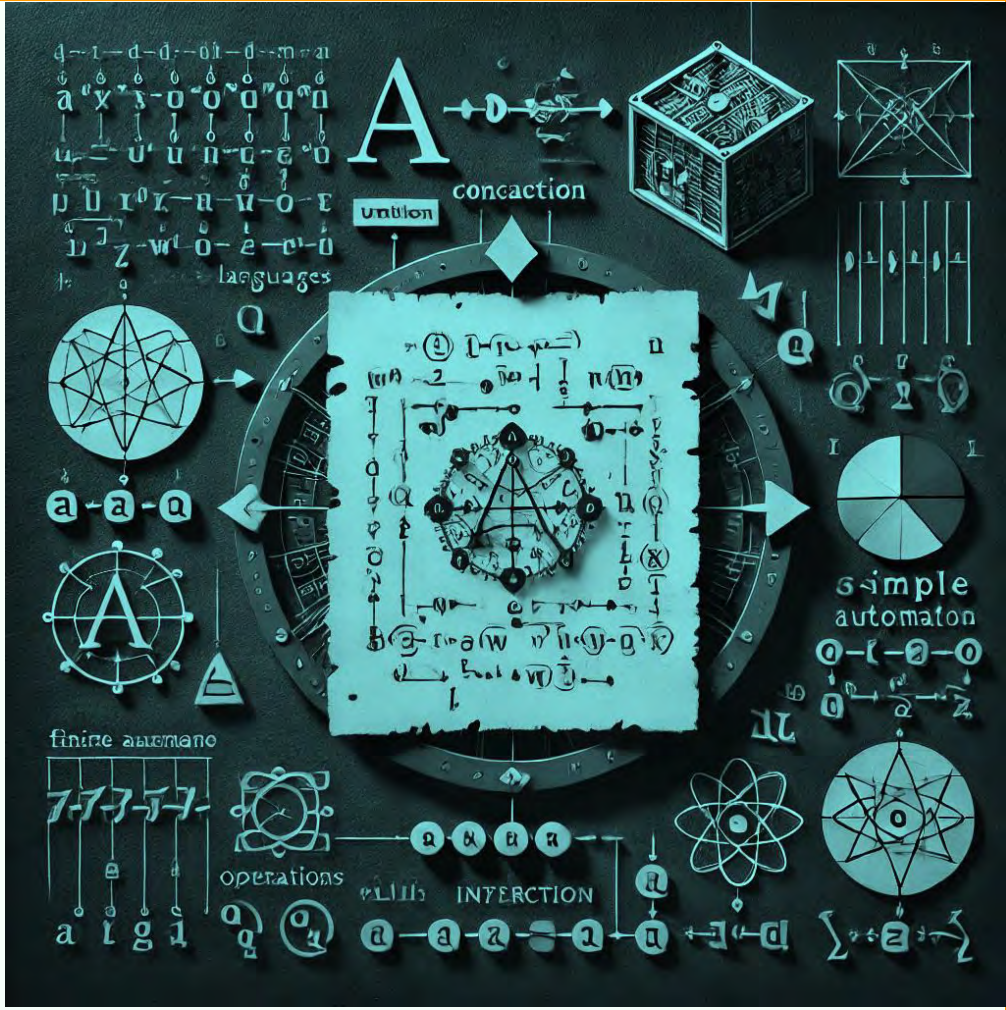
$\cap$ $\cup$

$(\Sigma, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{S})$

lenguajes

$S \Rightarrow^{*} w$

y gramáticas



Alfabetos y cadenas (1)

- **Alfabeto**: Un alfabeto Σ es un conjunto *finito* y *no vacío* de símbolos.
- **Cadena sobre un alfabeto Σ**: Es una sucesión de símbolos tomados de Σ.
- **Cadena vacía**: Cadena sin elementos, se representa por ε
- **Longitud de una cadena *c***: Es el número de caracteres que forman *c*, se denota por $|c|$ o por $long(c)$

$$|\varepsilon| = long(\varepsilon) = 0$$

- **Concatenación de cadenas**: La concatenación de la cadena *x* con la cadena *y* es la cadena que resulta al añadir a la cadena *x* la cadena *y*, se denota por *xy*.

Alfabetos y cadenas (2)

- Propiedades de la concatenación:
  1. Es una operación cerrada
  2. Es asociativa
  3. La cadena vacía es el elemento identidad
  4. La concatenación no es conmutativa
  5. Verifica las leyes de cancelación izquierda y derecha
- Para representar la concatenación repetida se usa una notación de tipo exponencial

$$x^n = \underbrace{xx\cdots x}_{n \text{ veces}} \qquad x^{n+1} = xx^n = x^n x \qquad x^n x^m = x^{n+m} \qquad x^1 = x \qquad x^0 = \varepsilon$$

Lenguajes

- **Lenguaje universal sobre Σ**: Conjunto de todas las posibles cadenas formadas sobre Σ (incluida ε), se denota por Σ*.
- **Lenguaje formal sobre un alfabeto Σ**: Conjunto de cadenas sobre Σ, cualquier subconjunto de Σ*.
- **Lenguaje vacío**: Es aquel lenguaje que no contiene ninguna cadena, ni siquiera la vacía. Se representa por Φ.
- **Ejemplos**: Dado el alfabeto $\Sigma=\{a, b\}$
  - lenguaje de las cadenas con exactamente una b, $L_1=\{b, ab, a^3ba^2, \ldots\}$
  - lenguaje de las cadenas de longitud menor o igual que uno, $L_2=\{\varepsilon, a, \mathrm{b}\}$
  - lenguaje vacío, $L_3=\Phi$
  - lenguaje que solo tiene la cadena vacía, $L_4=\{\varepsilon\}$

Operaciones sobre lenguajes (1)

- **Unión de lenguajes**: La unión $L_1 \cup L_2$ de dos lenguajes L_1 y L_2 es el lenguaje formado por las cadenas que pertenecen bien a L_1 bien a L_2. La unión de lenguajes constituye un *monoide*. https://es.wikipedia.org/wiki/Monoide

$$L_1 \cup L_2 = \{x : x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$

- **Intersección de lenguajes**: La intersección $L_1 \cap L_2$ de dos lenguajes L_1 y L_2 es el lenguaje formado por las cadenas que pertenecen simultáneamente a L_1 y a L_2.

$$L_1 \cap L_2 = \{ x : x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$$

- **Diferencia de lenguajes**: La diferencia $L_1 - L_2$ de dos lenguajes L_1 y L_2 es el lenguaje formado por las cadenas que pertenecen a L_1 y no pertenece a L_2.

$$L_1 - L_2 = \{ x : x \in L_1 \wedge x \notin L_2\}$$

Operaciones sobre lenguajes (2)

- **Complementación de un lenguaje**: La complementación $\overline{L}$ de un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es el lenguaje formado por las cadenas que pertenecen al lenguaje universal sobre Σ (Σ^*) pero que no pertenecen a L. Dicho de otro modo, está formado por las cadenas que pertenecen a Σ^*-L.

$$\overline{L} = \{x\colon x \in \Sigma^* \wedge x \notin L\} = \{x\colon x \in \Sigma^* - L\}$$

- **Concatenación**: La concatenación $L_1 \cdot L_2$ de dos lenguajes L_1 y L_2 es el lenguaje formado por cadenas construidas mediante la concatenación de una cadena de L_1 con una cadena de L_2. La concatenación de lenguajes constituye un *monoide*.

$$L_1 \cdot L_2 = \{\, xy\colon x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

También se define la **exponenciación** como simplificación notacional de la concatenación, con las siguientes propiedades:

- $L^n = L \cdot L^{n-1} = L^{n-1} \cdot L$
- $L^n \cdot L^m = L^{n+m}$
- $L^0 = \{\varepsilon\}$

Operaciones sobre lenguajes (3)

- **Iteración, cierre o clausura de un lenguaje**: El cierre de un lenguaje L (o *cerradura de Kleene*) se representa por L^* y se define como:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup \mathrm{L}^3 \cup \cdots = \bigcup\nolimits^{\infty}_{\mathrm{i}=0} L^{\mathrm{i}}$$

- **Clausura positiva**: Se representa por L^+ y se define como:

$$L^+ = L \cup L^2 \cup \mathrm{L}^3 \cup \cdots = \bigcup\nolimits^{\infty}_{\mathrm{i}=1} L^{\mathrm{i}}$$

- **Ejemplos**: Si $L=\{a, b, \ldots z, A, B, \ldots Z\}$ y $D=\{0, 1, \ldots 9\}$, entonces:

  $L \cdot D$ es el lenguaje $\{a0, a1, \ldots a9, b0, \ldots b9, \ldots Z8, Z9\}$

  $L \cdot (L \cup D)^*$ es el lenguaje de las palabras que comienzan por una letra y pueden tener tanto letras como dígitos, es decir, el formato típico de los identificadores de los lenguajes de programación.

  - ¿lenguaje de las palabras de longitud par?
  - ¿lenguaje de las palabras de longitud impar?
  - ¿lenguaje de los números decimales múltiplos de cinco?
  - ¿lenguaje de los números binarios múltiplos de tres?
  - ¿lenguaje de los números decimales en punto flotante?

Gramáticas (1)

- El estudio de los lenguajes se puede hacer desde tres puntos de vista:
  1. el de la **interpretación:** tiene que ver con la semántica de los lenguajes intenta formalizar el significado de las sentencias de un lenguaje.
  2. la **generación** de lenguajes: consiste en encontrar mecanismos que permitan enumerar las cadenas que pertenecen a un lenguaje. Estos mecanismos son las *gramáticas*.
  3. el del **reconocimiento** del lenguaje: está muy ligado a la teoría de autómatas y es « ...*el estudio de algoritmos o estructuras de máquinas que permiten, dado un lenguaje L y una cadena x, determinar si* $x \in L$ *o* $x \notin L$».

Decir si una palabra o elemento pertenece o no al lenguaje de la expresion regular

Gramáticas (2)

- **Gramática formal**: Es una cuádrupla $(\Sigma,\mathcal{N},\mathcal{P},S)$, donde:
  - Σ es un alfabeto (*conjunto finito* y *no vacío*) de **símbolos terminales** (o **tokens/tókenes**).
  - $\mathcal{N}$ es un alfabeto cuyos elementos se llaman **símbolos no terminales**
  - (Reglas de escritura)
  - $\mathcal{P}$ es un alfabeto de **producciones** de la forma: Finito y no vacio
    $\{u \to v \colon u = xAy \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^+ \wedge A \in \mathcal{N} \wedge v \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*\}$
  - $S \in \mathcal{N}$ es un símbolo especial llamado **axioma** o **símbolo inicial**.

$S \Rightarrow^* w$

Ejemplo de gramática

$$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$$

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad N = \{\underline{S}, A, B\}$$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \quad 3 \quad 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \quad 6 \end{cases}$$

$$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$$

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2\ \ 3\ \ 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5\ \ 6 \end{cases}$$

$$N = \{\underline{S}, A, B\}$$

Escojo los numero / proyecciones que yo quiera, pues para UNA CADENA pueden haber VARIAS DERIVACIONES (según los P que elija)

$$\underline{S} \xRightarrow{1} a\underline{A}\underline{B}b \xRightarrow{3} a\underline{A}\underline{B}cBb \xRightarrow{4} aa\underline{B}cBb \xRightarrow{6} aac\underline{B}b \xRightarrow{6} aacb$$

Ejemplo de derivación más a la izquierda

Usando 3: A --> ABc, y lo demas sigue igual: a A Bb --> a ABc Bb

Usando 4: A --> a

Usando 6: B desaparece

Si por ejemplo se aplica 6 en el lugar donde se aplica 4, se elimina la primer B (TIENE PRIORIDAD)

$$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$$

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad N = \{\underline{S}, A, B\}$$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2\ \ 3\ \ 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5\ \ 6 \end{cases}$$

$$\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

Ejemplo de derivación alternativa

Otra forma de derivar utilizando 6 y 4 en ordenes diferentes (SE OBTIENE EL MISMO RESULTADO)

$$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$N = \{S, A, B\}$$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \quad 3 \quad 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \quad 6 \end{cases}$$

$$S \overset{1}{\Rightarrow} aABb \overset{3}{\Rightarrow} aABcBb \overset{4}{\Rightarrow} aaBcBb \overset{6}{\Rightarrow} aacBb \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAcBb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aABcb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

Ejemplo de derivación más a la derecha

Otra forma

$S \Rightarrow^* w$

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

left most derivation

lmd

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \quad 3 \quad 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \quad 6 \end{cases}$$

$S \Rightarrow^*_l aacb$

derivación más a la izda

$$\boxed{\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb}$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2\ 3\ 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5\ 6 \end{cases}$$

left most derivation
lmd

$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$

$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$

derivación más a la izda

$$\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \quad 3 \quad 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \quad 6 \end{cases}$$

left most derivation

lmd

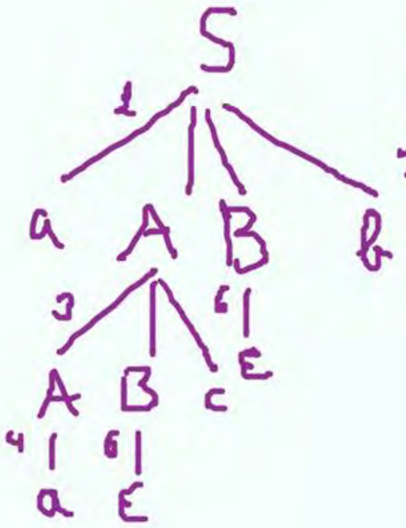
$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$

$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$

derivación más a la izda

$$\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$



$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

Ejemplo de árbol de derivación,
árbol de análisis sintáctico
o árbol de sintaxis abstracta

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \quad 3 \quad 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \quad 6 \end{cases}$$

left most derivation

lmd

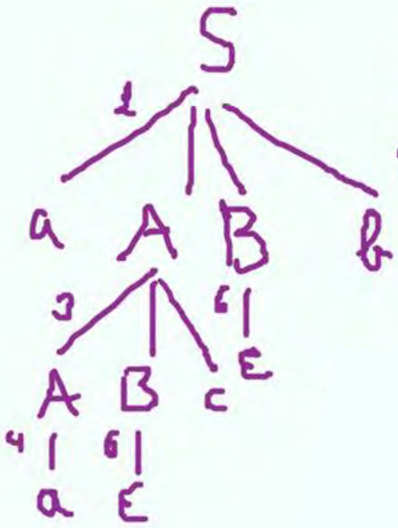
$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$

$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$

derivación más a la izda

$$\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$



$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$L(G_1) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

Definición de lenguaje generado por una gramática

$$G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$$

Definición de equivalencia de gramáticas

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

left most derivation
lmd

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2\ \ 3\ \ 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5\ \ 6 \end{cases}$$

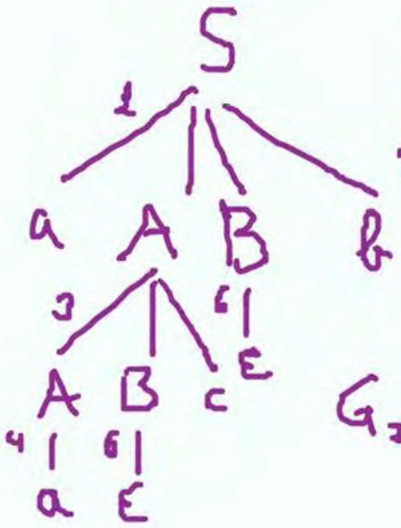
$S \Rightarrow^*_r aacb$

$S \Rightarrow^*_l aacb$

derivación más a la izda

$$S \xRightarrow{1} aABb \xRightarrow{3} aABcBb \xRightarrow{4} aaBcBb \xRightarrow{6} aacBb \xRightarrow{6} aacb$$

$$\xRightarrow{6} aAcBb \xRightarrow{6} aAcb \xRightarrow{4} aacb$$



$$\xRightarrow{6} aAb \xRightarrow{3} aABcb \xRightarrow{6} aAcb \xRightarrow{4} aacb$$

$$L(G_1) = \{w \in \Sigma^* : S \Rightarrow^* w\} \qquad G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$$

$G_2 = (\Sigma, N_2, P_2, S)$

$$P_2 = \begin{cases} S \to aCaCb & 1 \\ S \to aAb & 2 \\ C \to B \mid A & 3\ \ 4 \\ B \to bB & 5 \\ A \to ABc \mid a & 6\ \ 7 \end{cases}$$

Producciones de una gramática equivalente a la que se ha venido usando

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

left most derivation

lmd

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \quad 3 \quad 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \quad 6 \end{cases}$$

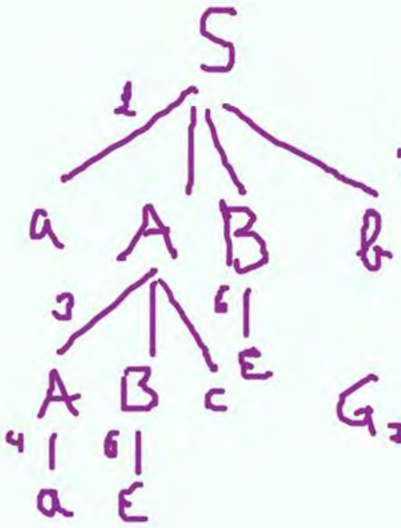
$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$

$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$

derivación más a la izda

$$S \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$



$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$L(G_1) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

$G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$

Algunos tipos de producciones especiales

$B \to \varepsilon$ ÉPSILON

Producción épsilon

$G_2 = (\Sigma, N_2, P_2, S)$

$$P_2 = \begin{cases} S \to aCaCb & 1 \\ S \to aAb & 2 \\ C \to B \mid A & 3 \quad 4 \\ B \to bB & 5 \\ A \to ABc \mid a & 6 \quad 7 \end{cases}$$

$$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$$

left most derivation

lmd

$$\Sigma = \{a, b, c\} \qquad N = \{\underline{S}, A, B\}$$

$$P_1 = \begin{cases} S \rightarrow aABb & 1 \\ A \rightarrow bB \mid ABc \mid a & 2\ 3\ 4 \\ B \rightarrow aA \mid \varepsilon & 5\ 6 \end{cases}$$

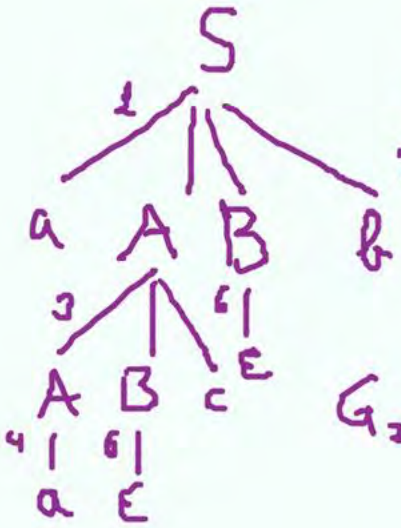
$$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$$

$$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$$

derivación más a la izda

$$\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$



$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$L(G_1) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\} \qquad G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$$

Algunos tipos de producciones especiales

$$G_2 = (\Sigma, N_2, P_2, S)$$

$$P_2 = \begin{cases} S \rightarrow aCaCb & 1 \\ S \rightarrow aAb & 2 \\ C \rightarrow B \mid A & 3\ 4 \\ B \rightarrow bB & 5 \\ A \rightarrow ABc \mid a & 6\ 7 \end{cases}$$

$B \rightarrow \varepsilon$ ÉPSILON

$C \rightarrow B$ NO GENERATIVAS

Producción no generativa

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \;\; 3 \;\; 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \;\; 6 \end{cases}$$

left most derivation

lmd

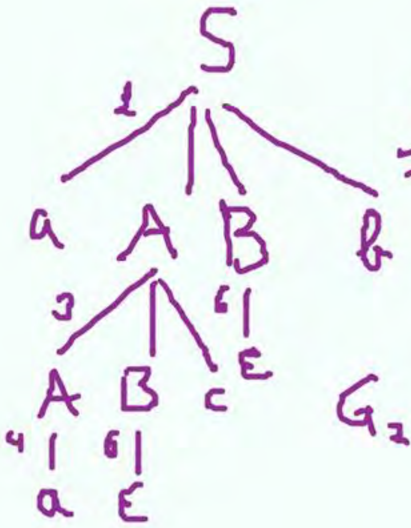
$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$

$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$

derivación más a la izda

$$\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$



$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$L(G_1) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

$$G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$$

Algunos tipos de producciones especiales

$G_2 = (\Sigma, N_2, P_2, S)$

$$P_2 = \begin{cases} S \to aCaCb & 1 \\ S \to aAb & 2 \\ C \to B \mid A & 3 \;\; 4 \\ B \to bB & 5 \\ A \to ABc \mid a & 6 \;\; 7 \end{cases}$$

$B \to \varepsilon$ ÉPSILON

$C \to B$ NO GENERATIVAS

$A \to ABc$

RECURSIVA A IZDA

Producción recursiva a izdas

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

left most derivation
lmd

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2\ \ 3\ \ 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5\ \ 6 \end{cases}$$

$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$

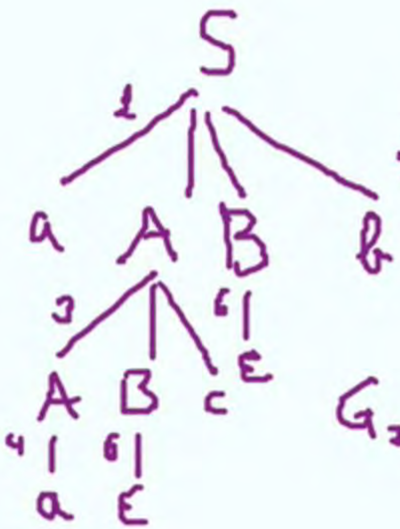
$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$

derivación más a la izda

$$\underline{S} \overset{1}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}b \overset{3}{\Rightarrow} a\underline{A}\underline{B}cBb \overset{4}{\Rightarrow} aa\underline{B}cBb \overset{6}{\Rightarrow} aac\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAc\underline{B}b \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aA\underline{B}cb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$



$L(G_1) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$

$G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$

Algunos tipos de producciones especiales

$G_2 = (\Sigma, N_2, P_2, S)$

$$P_2 = \begin{cases} S \to aCaCb & 1 \\ S \to aAb & 2 \\ C \to B \mid A & 3\ \ 4 \\ B \to bB & 5 \\ A \to ABc \mid a & 6\ \ 7 \end{cases}$$

$B \to \varepsilon$ ÉPSILON

$C \to B$ NO GENERATIVAS

$A \to ABc$ RECURSIVA A IZDA

$A \to cBcA$

Producción recursiva a derchas

$G_1 = (\Sigma, N, P_1, S)$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$N = \{\underline{S}, A, B\}$

$$P_1 = \begin{cases} S \to aABb & 1 \\ A \to bB \mid ABc \mid a & 2 \quad 3 \quad 4 \\ B \to aA \mid \varepsilon & 5 \quad 6 \end{cases}$$

left most derivation
lmd

$S \overset{*}{\Rightarrow}_r aacb$

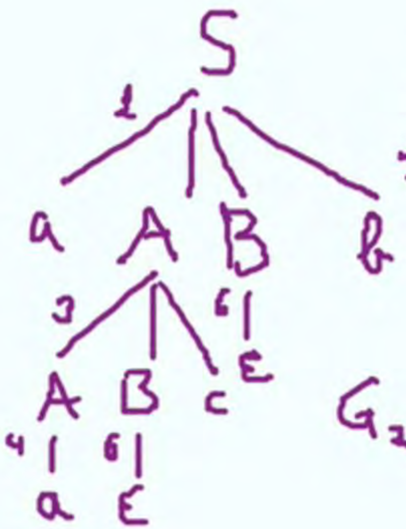
$S \overset{*}{\Rightarrow}_l aacb$

derivación más a la izda

$$S \overset{1}{\Rightarrow} aABb \overset{3}{\Rightarrow} aABcBb \overset{4}{\Rightarrow} aaBcBb \overset{6}{\Rightarrow} aacBb \overset{6}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAcBb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} aAb \overset{3}{\Rightarrow} aABcb \overset{6}{\Rightarrow} aAcb \overset{4}{\Rightarrow} aacb$$



$$L(G_1) = \{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

$$G_1 \equiv G_2 \Leftrightarrow L(G_1) = L(G_2)$$

$G_2 = (\Sigma, N_2, P_2, S)$

$$P_2 = \begin{cases} S \to aCaCb & 1 \\ S \to aAb & 2 \\ C \to B \mid A & 3 \quad 4 \\ B \to bB & 5 \\ A \to ABc \mid a & 6 \quad 7 \end{cases}$$

$B \to \varepsilon$ ÉPSILON

$C \to B$ NO GENERATIVAS

$A \to ABc$ RECURSIVA A IZDA

Recursividad en varios pasos

$A \to cBcA$

$A \to BCa$ 1

$B \to \varepsilon$ 2

$C \to BAb$ 3

Gramáticas (3)

- **Producción**: Una producción (o **regla de reescritura**) es un par ordenado de cadenas sobre un alfabeto ((x,y): $x, y \in \Sigma^*$). Se representa por $x \rightarrow y$. x es la parte izquierda o **antecedente** de la producción e y es la parte derecha o **consecuente**.
- **Derivación directa**: Sea $x \rightarrow y$ una producción y $v, w \in \Sigma^*$. Se dice que w *deriva directamente* de v, y se escribe $v \Rightarrow w$ si y sólo si existen $z, u \in \Sigma^*$ tales que $v = zxu$, $w = zyu$ y $x \rightarrow y$.
- **Derivación (en uno o más pasos)**: w deriva de v y se escribe $v \Rightarrow^+ w$ cuando existen $u_0, u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*$ tales que:

$$
\begin{aligned}
& v = u_0 \\
& u_0 \Rightarrow u_1 \\
& u_1 \Rightarrow u_2 \\
& \vdots \\
& u_{n-1} \Rightarrow u_n \\
& u_n = w
\end{aligned}
$$

> En el contexto de las gramáticas el alfabeto va a estar formado por la unión de los alfabetos de terminales y no terminales. Además, el antecedente de una producción nunca va a poder ser épsilon y ha de contener al menos un no terminal.

A la secuencia $u_0, u_1, \ldots, u_n$ se la llama **cadena de derivación** de longitud n.

Gramáticas (4)

- **Derivación más a la izquierda**: las producciones utilizadas en la derivación se aplican siempre a los símbolos más a la izquierda.
- **Derivación más a la derecha**: las producciones se aplican a los símbolos más a la derecha.
- **Forma sentencial** de una gramática: Dada una gramática $(\Sigma,\mathcal{N},\mathcal{P},S)$. Una cadena $\alpha\in(\Sigma\cup\mathcal{N})^*$ es una *forma sentencial* de esa gramática si existe una derivación que produce α a partir del axioma S, es decir si $S\Rightarrow^*\alpha$.
- **Frase o sentencia** de una gramática: Es una forma sentencial α que sólo contiene símbolos terminales ($\alpha\in\Sigma^*$).
- **Lenguaje generado por una gramática**: El *lenguaje generado por una gramática* $\mathbf{G}$ se representa por $L(\mathbf{G})$ y se define como el conjunto de todas las sentencias de la gramática $\mathbf{G}$.

$$L(\mathbf{G})=\{x\in\Sigma^*: S \Rightarrow^+ x\}$$

Gramáticas (5)

- Dos gramáticas $\boldsymbol{G}_1$ y $\boldsymbol{G}_2$ se dice que son **gramáticas equivalentes**, y se representa por $\boldsymbol{G}_1 \equiv \boldsymbol{G}_2$, si generan el mismo lenguaje $L(\boldsymbol{G}_1)=L(\boldsymbol{G}_2)$.
- Una gramática $\boldsymbol{G}$ se dice que es una **gramática recursiva en un cierto símbolo no terminal** U, cuando existe una forma sentencial de U que contiene a U.

$$U \Rightarrow^+ xUy \text{ con } x, y \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$$

- La **gramática** será **recursiva** si es recursiva para algún no terminal.
  - Si $x=\varepsilon$ se dice que es una **gramática recursiva a izquierdas**.
  - Si $y=\varepsilon$ se dice que es una **gramática recursiva a derechas**.

Árbol de derivación

- Son una forma de representar las derivaciones de algunas gramáticas (las independientes del contexto).
- Se utilizan para representar el análisis sintáctico de los programas fuente, sirviendo de base para la generación de código.
- En los **árboles de derivación** (o **de análisis sintáctico** o **árboles de sintaxis concreta**):
  - el axioma se representa en la raíz del árbol;
  - los nodos hojas del árbol son símbolos terminales de la gramática; y
  - las derivaciones se representan creando tantos sucesores del símbolo no terminal de la izquierda de la producción como símbolos (terminales y no terminales) aparezcan en la parte derecha de las producciones.

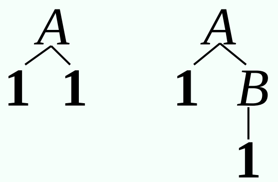
Ambigüedad

La ambigüedad puede surgir a varios niveles: en sentencias, lenguajes, y gramáticas. A la hora de utilizar eficientemente los lenguajes y gramáticas, es conveniente que no exista ambigüedad, pues provoca que el análisis de las sentencias no sea determinista.

- **Sentencia**: una sentencia es ambigua si tiene más de árbol de derivación.

  Ej: En el caso de la gramática G=$(\{\mathbf{1}\},\{A, B\},\{A\rightarrow \mathbf{1}B, A\rightarrow\mathbf{11}, B\rightarrow\mathbf{1}\}, A)$

  la sentencia **11** puede ser obtenida con dos árboles:



- **Gramática**: una gramática es ambigua si tiene al menos una sentencia ambigua.
- **Lenguaje**: un lenguaje es ambiguo si existe una gramática ambigua que lo genera. Si todas las gramáticas que generan un lenguaje son ambiguas, el lenguaje es **inherentemente ambiguo** ($L=\{a^ib^jc^k$: $i=j$ o $j=k\}$).

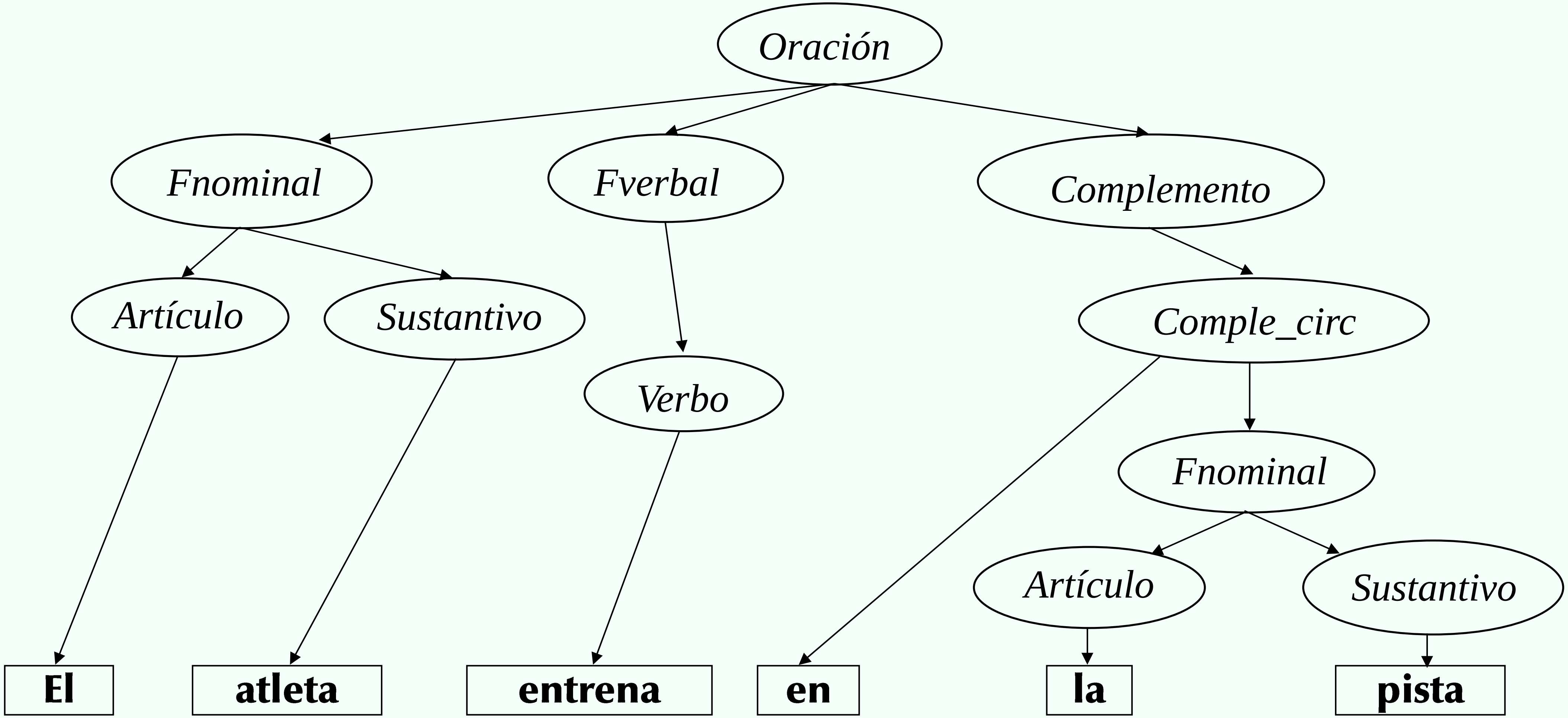
Notación gramatical. Notación BNF.

- **Notación BNF**: es una forma de escribir las producciones. Las reglas son:
  1. Los símbolos terminales se suelen poner en negrita, y los no terminales entre ángulos < >
  2. El nexo para la producción es ::=
  3. La agrupación de reglas mediante |
  4. Cero o una vez mediante corchetes [ ]
  5. Cero o más veces mediante llaves { } $\{\ \}_{n}^{n+k}$
  6. Paréntesis para delimitar casos de duda en el uso de los operadores meta-lingüísticos

https://en.wikipedia.org/wiki/Backus%E2%80%93Naur_form

Una gramática de un subconjunto del castellano en notación BNF

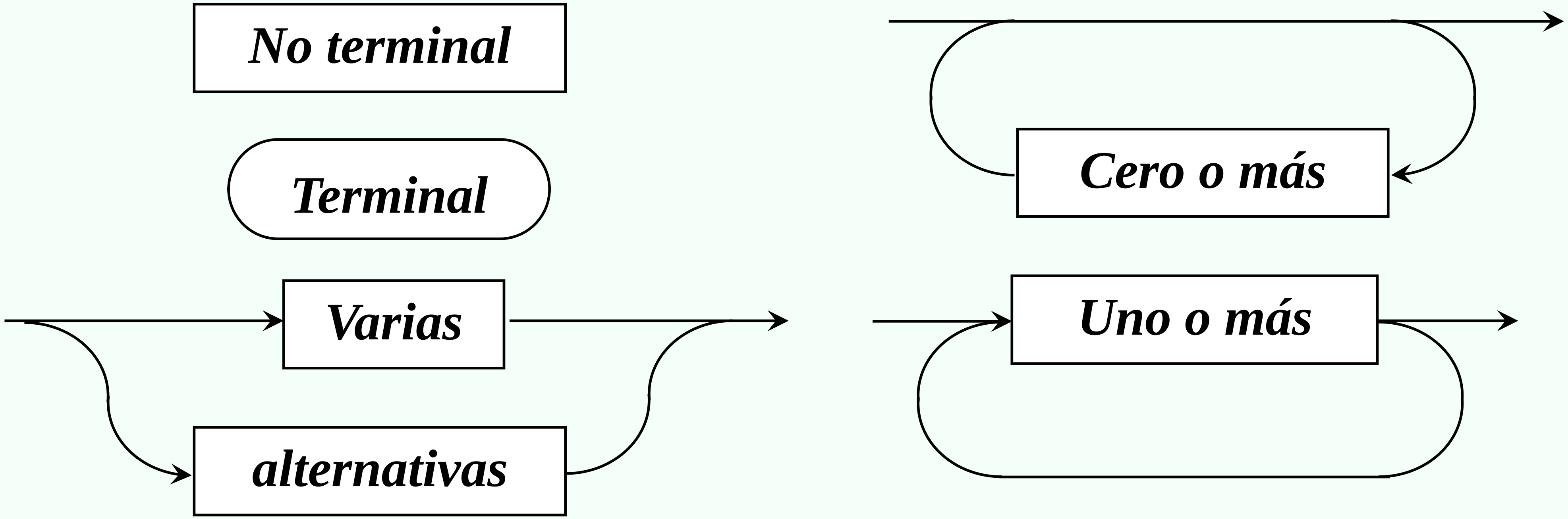
<Oración> ::= *<Fnominal><Fverbal>*
| *<Fnominal><Fverbal><Complemento>*
<Fnominal> ::= *<Sustantivo>* | *<PrNom>* | *<Artículo> <Sustantivo>*
| *<Artículo><Sustantivo><Adjetivo>*
| *<Fnominal>* **de** *<Fnominal>*
<Fverbal> ::= *<Verb>* | *<Verb> <Adverbio>*
<Complemento>::= *<ComDir>* |*<ComIn>* |*<ComCir>* | *<ComDir>*
<ComDir> ::= *<Fnominal>*
<ComIn> ::= **a** *<Fnominal>* | **para** *<Fnominal>* | ….
<ComCir> ::= **en** *<Fnominal>* | **desde** *<Fnominal>*
| **cuando** *<Fnominal>* | ….


Oración
Fnominal
Fverbal
Complemento
Artículo
Sustantivo
Verbo
Comple_circ
Fnominal
Artículo
Sustantivo
El
atleta
entrena
en
la
pista

Notación gramatical. Diagramas sintácticos

- Los **diagramas sintácticos** (**diagramas de trenes**, o **diagramas de Conway**), son construcciones gráficas que permiten presenta la misma información sintáctica que la notación BNF pero de una manera más fácil de interpretar para las personas.

https://en.wikipedia.org/wiki/Syntax_diagram



Clasificación de gramáticas (1)

- **Gramáticas de tipo 0** o **gramáticas de Chomsky**, con reglas de producción de la forma:

  $u \rightarrow v$ con $u = xAy \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^+ \ \wedge \ A \in \mathcal{N} \ \wedge \ x,y,v \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$

- El conjunto de lenguajes de tipo 0 coincide con el de todos los lenguajes gramaticales posibles.
- Puede demostrarse que todo lenguaje generado por una gramática de Chomsky puede generarse también por unas gramáticas más restrictivas llamadas **gramáticas con estructura de frase**, cuyas reglas de producción son de la forma:

  $xAy \rightarrow xvy$ con $x,y,v \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^* \ \wedge \ A \in \mathcal{N}$

Clasificación de gramáticas (2)

- **Gramáticas de tipo 1** o **sensibles al contexto**, con reglas de producción de la forma:

  $$xAy \rightarrow xvy \text{ con } x, y \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^* \wedge A \in \mathcal{N} \wedge v \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^+$$

- En los lenguajes generados por estas gramáticas el significado de las «palabras» depende de su posición en la frase.
- A la x e y se les llama **contexto** (es decir, A sólo puede transformarse en v si va precedido de x y al mismo tiempo seguido de y).
- No tiene *reglas compresoras*, aunque se tolera la regla $S \rightarrow \varepsilon$.
- Las gramáticas de mayor categoría que se suelen utilizar (la mayor parte de los lenguajes de ordenador pertenecen a este grupo, aunque gran parte de las reglas de las gramáticas que los generan pueden reducirse a las de tipo 2).
- La longitud de las formas sentenciales a partir de S es siempre **no decreciente**.

Clasificación de gramáticas (3)

- **Gramáticas de tipo 2** o **independientes del contexto**, con reglas de la forma:

$$A \rightarrow v \text{ con } A \in \mathcal{N} \wedge v \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$$

- Se vuelven a introducir leyes compresoras, pero es fácil demostrar que se puede obtener una gramática equivalente que no las tenga, obteniéndose una definición algo más restrictiva:

$$A \rightarrow v \text{ con } A \in \mathcal{N} \wedge v \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^+$$

  además, es posible que se tenga la regla $S \rightarrow \varepsilon$
- En los lenguajes generados por las gramáticas de este tipo el significado de las «palabras» es independiente de su posición.
- Una última característica de este tipo de gramáticas es que las derivaciones obtenidas al utilizarlas se pueden representar utilizando árboles.

https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

Clasificación de gramáticas (4)

- **Gramáticas de tipo 3** o **gramáticas regulares**, con reglas de la forma:

  $A \to aB \ \wedge \ A \to b$ o de la forma $A \to Ba \ \wedge \ A \to b$

  con $A, B \in \mathcal{N} \ \wedge \ a, b \in \Sigma$
- A las gramáticas regulares del primer tipo se las llama **gramáticas regulares a derechas**, a las del segundo tipo **gramáticas regulares a izquierdas**, en realidad son totalmente equivalentes. Si ε pertenece al lenguaje, se tolera la regla $S \to \varepsilon$.
- Existe una generalización de este tipo de gramáticas llamadas **gramáticas lineales** con reglas de la forma:

  $A \to wB \ \wedge \ A \to v$ o de la forma $A \to Bw \ \wedge \ A \to v$

  con $A, B \in \mathcal{N} \ \wedge \ w, v \in \Sigma^*$

  son totalmente equivalentes a las gramáticas regulares normales, pero en muchos casos su notación es más adecuada.

Máquinas y autómatas

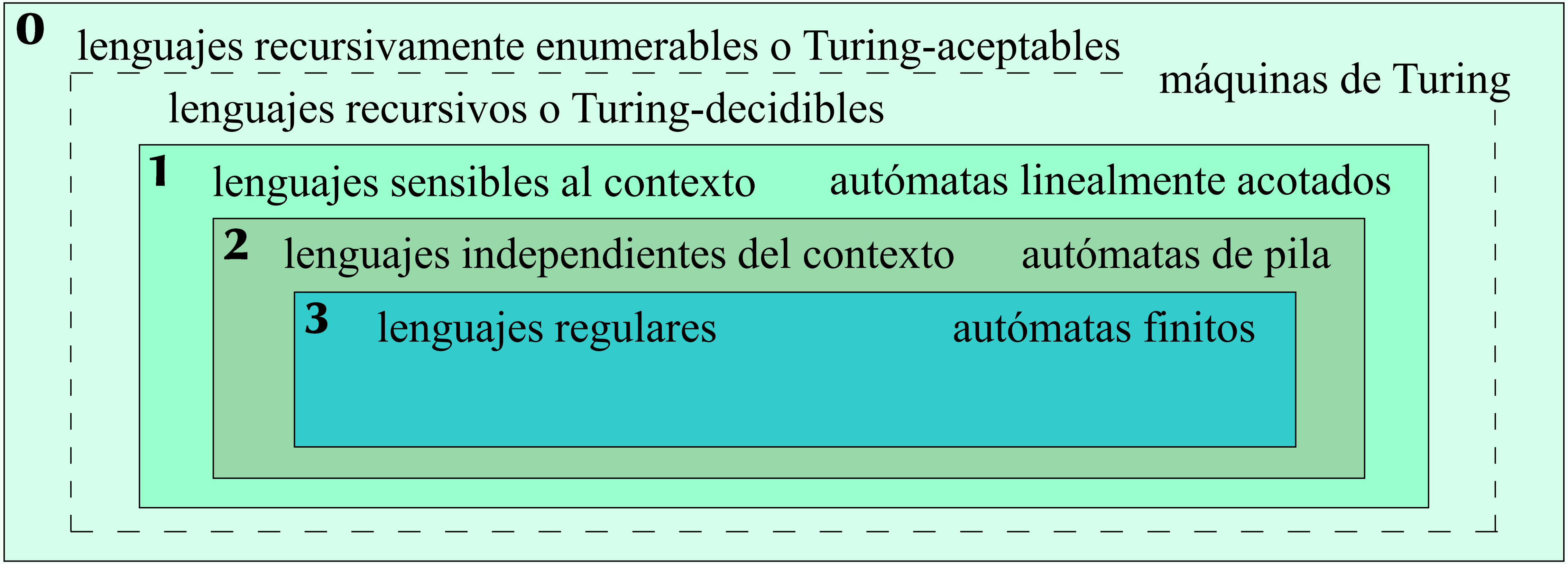
- Máquinas de Turing
  - Dispositivo de cómputo universal consistente en una cinta de E/S de tamaño infinito y una cabeza de lectura y escritura capaz de realizar las siguientes operaciones: leer un símbolo, escribir un símbolo, cambiar de estados, moverse sobre la cinta a izquierda o a derecha.
- Autómata linealmente acotado
  - Máquina de Turing con una cinta de tamaño limitado.

https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_bounded_automaton

- Autómata de pila
  - Se puede ver como una MT que sólo puede leer la cinta en un sentido, aunque puede utilizar una pila para almacenar lo que ha leído.
- Autómata finito
  - Se puede ver como una MT que sólo puede leer la cinta en un sentido y no tiene ningún tipo de dispositivo de almacenamiento (salvo el propio estado interno en el que se encuentra).

Relación entre autómatas y lenguajes

https://en.wikipedia.org/wiki/Turing_machine



https://en.wikipedia.org/wiki/Chomsky_hierarchy