

LEHRBUCH



Paul A. Tipler
Gene Mosca
Jenny Wagner *Hrsg.*

Physik

für Wissenschaftler und Ingenieure

7. Auflage

Der
Begleiter
bis zum
Bachelor

EBOOK INSIDE

 Springer Spektrum

Physik

Paul A. Tipler · Gene Mosca
Jenny Wagner (Hrsg.)

Physik

für Wissenschaftler und
Ingenieure

7. deutsche Auflage

Aus dem Amerikanischen übersetzt von
Michael Basler, Renate Dohmen, Carsten Heinisch,
Anna Schleitzer und Michael Zillgitt

Unter Mitarbeit von Christoph Kommer



Springer Spektrum

Paul A. Tipler

Gene Mosca

Jenny Wagner
Institut für Theoretische Astrophysik
Philosophenweg 12
69120 Heidelberg, Deutschland

ISBN 978-3-642-54165-0
DOI 10.1007/978-3-642-54166-7

ISBN 978-3-642-54166-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

Aus dem Amerikanischen übersetzt von Michael Basler, Renate Dohmen, Carsten Heinisch, Anna Schleitzer und Michael Zillgitt unter Berücksichtigung der von Dietrich Peltz herausgegebenen Voraufage von 2004. Übersetzung und deutsche Adaption der amerikanischen Ausgabe: Physics for Scientists and Engineers. With Modern Physics. Sixth Edition. By Paul A. Tipler und Gene Mosca. First published in the United States by W.H. Freeman and Company, New York. Copyright © 2008 by W.H. Freeman and Company. All rights reserved. Alle Rechte vorbehalten.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1994, 2004, 2009, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Dr. Vera Spillner, Stefanie Adam

Redaktion: Regine Zimmerschied, Dr. Michael Zillgitt, Margit Maly

Einbandabbildung: Kristin Riebe

Einbandentwurf: deblik Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

www.springer-spektrum.de

Vorwort des Verlages

Warum soll ich mich für dieses Buch entscheiden?

Der *Tipler* – Physik für Wissenschaftler und Ingenieure von Paul A. Tipler und Gene Mosca – ist seit Jahren eines der meistgelesenen Physikbücher in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Der Grund dafür ist sicherlich, dass das Buch alle wesentlichen physikalischen Inhalte des Bachelorstudiums der Physiker und Ingenieure in einem Band beinhaltet und diese Inhalte besonders anschaulich und gut verständlich erklärt. Daraüber hinaus bietet der *Tipler* eine große Menge an ausführlichen Rechenbeispielen im Text und viele Übungen mit Lösungen, mit denen Sie das Gelernte unmittelbar vertiefen können. Wer danach noch mehr Aufgaben lösen möchte, kann das ergänzende Übungsbuch erwerben (Mills et al., Bachelor-Trainer Physik), in dem sich weitere Aufgaben und die Lösungen der Aufgaben des vorliegenden Buches befinden.

Was kann ich vom *Tipler* erwarten?

Damit der *Tipler* auch weiterhin das Lieblingsbuch der Studierenden bleibt, haben wir uns für die deutschsprachige Neuauflage einiges einfallen lassen: das Buch wurde grundlegend aktualisiert, es wurde noch genauer als zuvor auf die modernen Bachelormodule ausgerichtet – und nicht zuletzt freuen wir uns sehr, dass wir eine große Zahl von Wissenschaftlern und Wissenschaftlerinnen an Universitäten und Instituten in Deutschland, Österreich und der Schweiz gewinnen konnten, ihre Forschung und ihr Team in diesem Buch kurz vorzustellen. Der Leser findet daher in entsprechend gekennzeichneten Bereichen immer auch Hinweise darauf, wo das gerade Gelernte Anwendung findet. An dieser Stelle einen herzlichen Dank an alle, die sich hier so engagiert beteiligt haben!

Für wen ist der *Tipler* geeignet?

Der *Tipler* holt die Studierenden bei Abiturkenntnissen im Fach Physik ab – dabei ist das Buch aber nicht nur für Schüler und Schülerinnen geeignet, die Physik als ein Vertiefungs- oder Leistungsfach belegt hatten, sondern insbesondere auch für diejenigen, die aus einem Grundkurs kommen und nun rasch Grundlagen und physikalische Zusammenhänge aufholen müssen. Durch klug gewählte Erklärungen und Beispiele gelangt der Studierende so rasch vom Schulwissen auf das von den Universitäten in den Bachelormodulen geforderte Wissensniveau.

Was gibt es an Zusatzinhalten?

Im Anhang des *Tipler* findet sich einen Crashkurs zur Wiederholung der benötigten mathematischen Grundlagen und zum Nachschlagen. Und nicht zuletzt findet man auf der Produktseite des *Tipler* unter www.springer.com eine Liste zusammengestellter Fehler, die uns engagierte Leser und Leserinnen zuschicken.

Ein Dankeschön an das *Tipler*-Team!

Das Lektorat dankt an dieser Stelle Frau Dr. Jenny Wagner, der Herausgeberin der 7. Auflage des *Tiplers*, die viel zur Anpassung des Inhalts an die Bachelormodule beigetragen hat. Ferner danken wir unserer engagierten Redaktion – Herrn Christoph Kommer und Frau Margit Maly –, die mit ihrem großen Einsatz die Neuauflage um viele neue Bilder, Beiträge und Inhalte ergänzt und bereichert haben.

Wir wünschen Ihnen nun viel Freude beim Lernen!

So bleibt uns nur noch, Ihnen beim Lesen dieser neuen Auflage viel Freude und viel Erfolg zu wünschen – aus eigener erfolgreicher Studienerfahrung ist die Lektorin dieses Buches ein erklärter Fan vom Stil des vorliegenden Buches und den verständlichen Erklärungen – und ist überzeugt, dass der *Tipler* auch Ihr Lernen in bester Weise unterstützen und Sie zum Erfolg führen wird.

Dr. Vera Spillner, Lektorin Physik & Astronomie, Springer Spektrum

Vorwort

Physik kennt keine Landesgrenzen. Es gibt keine amerikanische, deutsche oder skandinavische Physik. Menschen aus vielen verschiedenen Nationen haben gemeinsam zur Weiterentwicklung der theoretischen und experimentellen Physik beigetragen. Doch der kulturelle Hintergrund, das mathematische Vorwissen und der Wissensstand der Studenten variiert stark, wenn sie ihren ersten Physikkurs an der Universität belegen. Einige haben einen umfangreichen Physikunterricht in der Schule genossen, andere nicht. Manche verfügen über Kenntnisse in Analysis, andere nicht. Der Lehrplan in Deutschland ist nicht der gleiche wie in den Vereinigten Staaten und er ist auch nicht mehr der gleiche wie noch vor ein paar Jahren. Aus diesem Grund ist das vorliegende Buch keine reine Übersetzung der englischen Version mehr, sondern eine Neuauflage, die sich den Besonderheiten der Lehrpläne im deutschsprachigen Raum anpasst. Jenny Wagner hat ihr umfangreiches Wissen der Physik und der deutschsprachigen Lehrpläne eingesetzt, um das Buch neu zu strukturieren, die Reihenfolge der Kapitel zu ändern, Themen, die nicht zum Lehrplan gehören wegzulassen und dafür andere Themen auszubauen oder neu einzufügen. Ich bedanke mich daher bei Jenny Wagner für ihre harte Arbeit, dieses Projekt zu verwirklichen und ich freue mich, dass der Springer-Verlag es veröffentlicht.

Paul Tipler

Vorwort zur 7. deutschsprachigen Auflage

Seit 1994 ist die *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure* von Paul A. Tipler und Gene Mosca bei Spektrum Akademischer Verlag erschienen, als Übersetzung des bereits damals international eingeführten amerikanischen Lehrbuchs für Bachelor- und Masterstudiengänge. Das Besondere an diesem Lehrbuchklassiker ist die ausgefeilte Didaktik einer einfachen Formelsprache und einer konzeptorientierten Argumentation, die Leser zum autonomen Arbeiten mit dem klassischen Lehrbuchstoff der Physik anregt und ein sicheres Grundverständnis der wichtigsten Formeln und ihrer experimentellen und theoretischen Grundlagen vermittelt.

Zu den didaktischen Elementen gehören:

- *Eine klare mathematische Sprache*, die auf Abitur-Grundkursniveau beginnt und in einem mathematischen Crashkurs die nötigen Wissensgrundlagen rekapituliert. Im Verlauf des Buches wird der einfach gehaltene mathematische Apparat weiter ausgebaut, insbesondere was die Vektorrechnung betrifft.
- *Ein mathematisch beschreibender Ansatz* – die Physik wird aus der Frage entwickelt, welche Veränderung eintritt, wenn Messungen zu verschiedenen Zeiten unter unterschiedlichen Bedingungen stattfinden.
- *Instruktive Abbildungen, Warnhinweise* zu schwierigen und leicht misszuverstehenden Begriffen oder Gesetzmäßigkeiten und allgemein gültige *Vorgehensweisen*, die dazu anleiten, eine gewisse Kategorie an Aufgaben auf eine bestimmte Art zu lösen. Außerdem enthält jedes Kapitel eine *Zusammenfassung* der wichtigsten Begriffe, Formeln, Gleichungen und Definitionen.
- *Übungen und Verständnisfragen*, deren Lösungen am Ende des Kapitels gegeben sind, sowie weiterführende *Aufgaben*, die nach Schwierigkeitsgrad sortiert auf die Zusammenfassung am Ende jedes Kapitels folgen.
- Vier verschiedene *Beispielkategorien*, die jeweils eine einführende Aufgabenstellung enthalten, die den Sachverhalt beschreibt, gefolgt von der Problembeschreibung, die das physikalische Modell aufstellt und die relevanten Formeln angibt. Anschließend wird eine Schritt-für-Schritt-Lösung präsentiert, bevor eine Plausibilitätsprüfung zeigt, dass die Ergebnisse mathematisch konsistent und physikalisch sinnvoll sind. Beispiele aus der Kategorie der blau hinterlegten Standardbeispiele mit ihren ausführlichen Lösungsschritten dienen der Vertiefung des Gelernten, während die Beispiele aus der grün hinterlegten Kategorie kürzere Erklärungen beinhalten, da man sie nach der Lektüre des Lernstoffes selbstständig durchrechnen können sollte. Die rot hinterlegten Beispiele haben einen starken Bezug zur technischen Praxis oder einer Alltagssituation, die sich mit Hilfe des Gelernten beschreiben lässt. Oft enthält die Aufgabenstellung redundante Angaben oder es ist notwendig, zur Lösung der Aufgabe zusätzliche Informationen heranzuziehen, die nicht gegeben sind. Dadurch führt diese Art Beispiel an die Problemlösung von praktischen Aufgaben in der Wissenschaft und Technik heran. Die Kategorie der lila hinterlegten Beispiele erfordert gewöhnlich keine Rechnungen, sondern möchte grundlegende Begriffe und Gesetzmäßigkeiten miteinander in einen Sinnzusammenhang bringen.
- Weiterführende Beispiele aus dem Kontext der wissenschaftlichen Forschungspraxis, die am Ende jedes Kapitels historische oder neue Aspekte des in diesem Kapitel behandelten Themas vorstellen oder eine praktische Anwendung beschreiben. Diese Abschnitte sind optional und dienen zur Motivation und Verdeutlichung, in welchen Bereichen der Wissenschaft und des Alltags physikalische Phänomene eine Rolle spielen.
- Um die Kapitel für Studierende in Haupt- und Nebenfach klar zu gliedern, wurden Abschnitte, die über den Umfang eines Studiums von Physik als Nebenfach hinausgehen mit einem Stern (*)

X Vorwort zur 7. deutschsprachigen Auflage

gekennzeichnet. Diese Abschnitte und Kapitel sind fakultativ für Studierende mit Nebenfach Physik und können von ihnen übersprungen werden.

Im Gegensatz zu früheren Auflagen, die nur wenig vom amerikanischen Original abwichen, wurde diese 7. Auflage eigens an die Bachelorlehrpläne im deutschsprachigen Raum angepasst. Als Grundlage dienten die frei zugänglichen Curricula für Physik als Haupt- und Nebenfach mehrerer Universitäten in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Der Großteil des Inhalts der 6. Auflage konnte zwar beibehalten werden, erfuhr jedoch eine grundlegende Umstrukturierung. Insbesondere die klassische Mechanik wurde neu gegliedert, so dass die Reihenfolge der Kapitel in diesem Teil nun auch der Einführung der jeweiligen Konzepte in einer Mechanik-Vorlesung entspricht. Durch die Umstrukturierung werden allgemeine Konzepte, wie z. B. die gleichförmige Bewegung eines Massenpunkts, anhand von Spezialfällen eingeführt und im selben Kapitel auch auf komplexere, allgemeinere Situationen angewandt. So führt dieses induktive Vorgehen zu einer wesentlich verständlicheren Darstellung, die einen systematischen Überblick über einen physikalischen Sachverhalt erlaubt und zur besseren Festigung des Gelernten beiträgt. Die Eingliederung der Gravitation in die Anwendungsbeispiele der Newton'schen Gesetze wurde ebenfalls aus diesem Grund vorgenommen. Neu hinzugefügt wurde das Kapitel über Teilchensysteme, um alle Eigenschaften von Ensembles zusammenhängend zu betrachten. Das Kapitel über statisches Gleichgewicht und Elastizität, das nicht explizit in den aktuellen Bachelorlehrplänen enthalten ist, wurde ebenfalls grundlegend geändert und um eine ausführliche Beschreibung der Biegetheorie von Balken erweitert, die in der Art bis jetzt in keinem Lehrbuch enthalten ist, obwohl es sich dabei um ein grundlegendes Thema des Curriculums handelt. Das Kapitel der Fluidik wurde um die Grundlagen der Navier-Stokes-Gleichung erweitert, um einen allgemeinen Ansatz zur Beschreibung von fließenden Substanzen zu erhalten. Auch die Begriffe der Adhäsion und Kohäsion, die in der letzten Auflage fehlten, wurden wieder aufgenommen.

Der thermodynamische Teil wurde zur Herstellung eines besseren Sinnzusammenhangs neu gegliedert, so dass die mikroskopischen Ursachen der makroskopischen Phänomene ein eigenes Kapitel erhielten, genauso wie die Anwendungen des Wärmetransports.

Die Kapitel über Elektrizität und Magnetismus konnten von der 6. Auflage vollständig übernommen werden, da sie in ihrem Inhalt und der Darstellungsform mit den aktuellen Bachelorlehrplänen konform sind. Auch der Optik-Teil wurde bis auf kleinere Details beibehalten.

Da die moderne Physik in den neuen Bachelorprogrammen auch im Nebenfach immer mehr an Bedeutung gewinnt, wurde der als „moderne Physik“ in der 6. Auflage bezeichnete Abschnitt des Buches in mehrere Teile aufgespalten, wobei die Kapitel über Einsteins Relativitätstheorien zu einem Teil zusammengefasst wurden. Des Weiteren ergaben sich gesonderte Teile zu den Themenkomplexen „Quantenmechanik“, „Atom- und Molekülephysik“, „Festkörperphysik“ und „Kern- und Teilchenphysik“.

Die vorhandenen beiden Kapitel zur Quantenmechanik wurden in ein Theorie- und ein Anwendungskapitel mit Beispielen umgewandelt und eine ausführliche Diskussion zum Übergang zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik eingefügt. Sie dienen als Grundlage für die folgenden Teile, die man ebenfalls als Anwendungen der Quantenmechanik auffassen kann.

Während die Atom- und Molekülephysik sich wenig änderte, wurden die Kristallgitterstrukturen der Festkörperphysik zum ersten Mal in dieses Lehrbuch eingefügt und Experimente zur Bestimmung der Struktur von festen Stoffen erklärt. Auch die Kern- und Teilchenphysik musste an den aktuellen Forschungsstand angepasst werden, da sich vor allem in der Teilchenphysik in den letzten Jahren erhebliche Neuerungen, wie z. B. die Entdeckung des Higgs-Bosons durch den Large Hadron Collider, ergaben. Zudem wurde ein Unterkapitel über moderne Teilchenbeschleuniger und -detektoren hinzugefügt, um den experimentellen Nachweismethoden, die zu diesen Entdeckungen führten, mehr Gewicht beizumessen. Besonderes Augenmerk wurde in dieser Auflage auch auf die Auswirkungen von radioaktiver Strahlung auf den menschlichen Körper gelegt und daher im Kapitel zur Kernphysik ein Abschnitt über Dosimetrie ergänzt.

Ich wünsche allen Lesern nun viel Freude mit diesem Buch und hoffe, dass die Neugestaltung Studierenden aller Fachrichtungen einen guten Einstieg in die Welt der Physik gibt. Paul Tipler und Gene Mosca haben auf internationaler Ebene ein einzigartiges Werk für Wissenschaftler und Ingenieure vorgelegt, dessen Grundidee, Phänomene der Physik in einfacher Form verständlich zu erklären, auch in

dieser deutschsprachigen Auflage weiterleben soll. Es war eine schmale Gratwanderung mit Kompromissen, einerseits alle wichtigen Grundlagen für das Hauptstudium zu thematisieren und gleichzeitig die nötige Übersichtlichkeit und Kürze beizubehalten, die Studierende mit Physik als Nebenfach seit langem an diesem Buch schätzen. Ich hoffe, die Mischung zwischen Ausführlichkeit und Anschaulichkeit ist gut gelungen, um einerseits Studierenden der Physik die Anwendungsgebiete näher zu bringen und andererseits Studierende mit Physik als Nebenfach zu motivieren, die physikalischen Zusammenhänge über ihr eigenes Fachgebiet hinaus verstehen zu wollen.

Heidelberg, im Februar 2014

Jenny Wagner

Danksagungen

Ohne die Unterstützung zahlreicher Dozenten, Studierender, Kollegen und Freunde wäre es nie möglich gewesen, dieses umfassende Werk in der 7. deutschsprachigen Auflage herauszugeben, wofür ich mich ganz herzlich bei allen bedanken möchte, die in irgendeiner Form zu diesem Buch beigetragen haben.

Besonderer Dank für diese Auflage gebührt in erster Linie den beiden Autoren **Paul Tipler** und **Gene Mosca**, die es ermöglichen, ihr Buch so umzugestalten, dass es auch für die neuen Bachelorstudiengänge in Deutschland, Österreich und der Schweiz gut geeignet ist. Beide standen mir stets mit hilfreichen Kommentaren und Anregungen zur Seite und erwiesen mir die Ehre, mich zu in den Kreis der Autoren aufzunehmen.

Auch bei den zahlreichen Dozenten möchte ich mich ganz herzlich dafür bedanken, dass sie mir ihre wertvolle Zeit widmeten, Informationen schnell lieferten und oft auch Bildmaterial kostenfrei zur Verfügung stellten. Ein ganz herzliches Dankeschön geht an **Philip Pearle** vom Hamilton College, Clinton, USA für die Hilfe bei der Zusammenstellung des Bildmaterials zur Brown'schen Bewegung, an **Klaus Hornberger** von der Universität Duisburg-Essen für die ausführlichen Informationen zum Übergang der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik und an **Heribert Lorenz**, **Paul Koza** und das gesamte Team der experimentellen Vorlesungsvorbereitung der LMU München, die den Versuch zum Fadenstrahlrohr extra für unsere Bilder durchgeführt und aufgenommen haben.

Für die gute Zusammenarbeit und den unermüdlichen Elan, dieses Buch in Struktur und Layout neu zu gestalten, gilt mein großer Dank dem Team vom Springer-Verlag, **Stefanie Adam** stellvertretend für Layout, Satz und Organisation und **Vera Spillner** für das Lektorat und ihre inhaltlichen Beiträge.

Schließlich möchte ich meinen Freunden und meiner Familie, die mich während dieser schwierigen Zeit nicht nur fachlich, sondern auch moralisch unterstützt haben, meinen Dank aussprechen.

Jenny Wagner

Danksagungen

Wir haben uns bei vielen Dozenten, Studenten, Kollegen und Freunden zu bedanken, die zu dieser und auch zu den früheren Auflagen beigetragen haben.

Anthony J. Buffa, emeritierter Professor an der California Polytechnic State University, überprüfte und redigierte die Aufgaben am Ende der einzelnen Kapitel. Außerdem verfasste er hierzu etliche neue Aufgaben. Laura Runkle verdanken wir die Schlaglichter, die in vielen Kapiteln der Zusammenfassung vorangestellt sind. Richard Mickey erweiterte den Anhang „Mathematische Grundlagen“ zu einem eigenen Kapitel. David Mills, emeritierter Professor am College of the Redwoods in Kalifornien, überarbeitete sehr gründlich das Arbeitsbuch mit den Lösungen aller Aufgaben am Ende der einzelnen Kapitel.

Die nachfolgend genannten Professoren ließen uns beim Erstellen sowie bei der Prüfung auf Fehlerfreiheit des Texts und der Aufgaben ihre unschätzbare Hilfe zuteil werden:

Thomas Foster Southern Illinois University
Karamjeet Arya San Jose State University
Mirley Bala Texas A&M University, Corpus Christi
Michael Crivello San Diego Mesa College
Carlos Delgado Community College of Southern Nevada
David Faust Mt. Hood Community College
Robin Jordan Florida Atlantic University
Jerome Licini Lehigh University
Dan Lucas University of Wisconsin
Laura McCullough University of Wisconsin, Stout
Jeannette Myers Francis Marion University
Marian Peters Appalachian State University
Todd K. Pedlar Luther College
Paul Quinn Kutztown University
Peter Sheldon Randolph-Macon Woman's College
Michael G. Strauss University of Oklahoma
Brad Trees Ohio Wesleyan University
George Zober Youth Senior High School
Patricia Zober Ringgold High School

Viele Dozenten und Studenten haben umfangreiche und hilfreiche Kritiken zu einem oder mehreren Kapiteln geliefert. Für diese wichtigen Beiträge zur Qualität der vorliegenden Auflage danken wir:

Ahmad H. Abdelhadi James Madison University
Edward Adelson Ohio State University
Royal Albridge Vanderbilt University
J. Robert Anderson University of Maryland, College Park
Toby S. Anderson Tennessee State University
Wickram Ariyasinghe Baylor University
Yildirim Aktas University of North Carolina, Charlotte
Eric Ayars California State University
James Battat Harvard University
Eugene W. Beier University of Pennsylvania
Peter Beyersdorf San Jose State University

Richard Bone Florida International University
Juliet W. Brosing Pacific University
Ronald Brown California Polytechnic State University
Richard L. Cardenas St. Mary's University
Troy Carter University of California, Los Angeles
Alice D. Churukian Concordia College
N. John DiNardo Drexel University
Jianjun Dong Auburn University
Fivos R. Drymiotis Clemson University
Mark A. Edwards Hofstra University
James Evans Broken Arrow Senior High
Nicola Fameli University of British Columbia
N. G. Fazleev University of Texas at Arlington
Thomas Furtak Colorado School of Mines
Richard Gelderman Western Kentucky University
Yuri Gershtein Florida State University
Paolo Gondolo University of Utah
Benjamin Grinstein University of California, San Diego
Parameswar Hari University of Tulsa
Joseph Harrison University of Alabama, Birmingham
Patrick C. Hecking Thiel College
Kristi R. G. Hendrickson University of Puget Sound
Linnea Hess Olympic College
Mark Hollabaugh Normandale Community College
Daniel Holland Illinois State University
Richard D. Holland II Southern Illinois University
Eric Hudson Massachusetts Institute of Technology
David C. Ingram Ohio University
Colin Inglefield Weber State University
Nathan Israeloff Northeastern University
Donald J. Jacobs California State University, Northridge
Erik L. Jensen Chemeketa Community College
Colin P. Jessop University of Notre Dame
Ed Kearns Boston University
Alice K. Kolakowska Mississippi State University
Douglas Kurtze Saint Joseph's University
Eric T. Lane University of Tennessee at Chattanooga
Christie L. Larochelle Franklin & Marshall College
Mary Lu Larsen Towson University
Clifford L. Laurence Colorado Technical University
Bruce W. Liby Manhattan College
Ramon E. Lopez Florida Institute of Technology
Ntungwa Maasha Coastal Georgia Community College and University Center
Jane H. MacGibbon University of North Florida
A. James Mallmann Milwaukee School of Engineering
Rahul Mehta University of Central Arkansas
R. A. McCorkle University of Rhode Island
Linda McDonald North Park University
Kenneth McLaughlin Loras College
Eric R. Murray Georgia Institute of Technology
Jeffrey S. Olafsen University of Kansas
Richard P. Olenick University of Dallas
Halina Opyrchal New Jersey Institute of Technology
Russell L. Palma Minnesota State University, Mankato
Todd K. Pedlar Luther College
Daniel Phillips Ohio University
Edward Pollack University of Connecticut

Michael Politano Marquette University
Robert L. Pompi SUNY Binghamton
Damon A. Resnick Montana State University
Richard Robinett Pennsylvania State University
John Rollino Rutgers University
Daniel V. Schroeder Weber State University
Douglas Sherman San Jose State University
Christopher Sirola Marquette University
Larry K. Smith Snow College
George Smoot University of California at Berkeley
Zbigniew M. Stadnik University of Ottawa
Kenny Stephens Hardin-Simmons University
Daniel Stump Michigan State University
Jorge Talamantes California State University, Bakersfield
Charles G. Torre Utah State University
Brad Trees Ohio Wesleyan University
John K. Vassiliou Villanova University
Theodore D. Violett Western State College
Hai-Sheng Wu Minnesota State University, Mankato
Anthony C. Zable Portland Community College
Ulrich Zurcher Cleveland State University

Auch zahlreiche kritische Anmerkungen zu früheren Auflagen dieses Buchs waren äußerst hilfreich.
Hierfür danken wir:

Edward Adelson The Ohio State University
Michael Arnett Kirkwood Community College
Todd Averett The College of William and Mary
Yildirim M. Aktas University of North Carolina at Charlotte
Karamjeet Arya San Jose State University
Alison Baski Virginia Commonwealth University
William Bassichis Texas A&M University
Joel C. Berlinghieri The Citadel
Gary Stephen Blanpied University of South Carolina
Frank Blatt Michigan State University
Ronald Brown California Polytechnic State University
Anthony J. Buffa California Polytechnic State University
John E. Byrne Gonzaga University
Wayne Carr Stevens Institute of Technology
George Cassidy University of Utah
Lay Nam Chang Virginia Polytechnic Institute
I. V. Chivets Trinity College, University of Dublin
Harry T. Chu University of Akron
Alan Cresswell Shippensburg University
Robert Coakley University of Southern Maine
Robert Coleman Emory University
Brent A. Corbin UCLA
Andrew Cornelius University of Nevada at Las Vegas
Mark W. Coffey Colorado School of Mines
Peter P. Crooker University of Hawaii
Jeff Culbert London, Ontario
Paul Debevec University of Illinois
Ricardo S. Decca Indiana University, Purdue University
Robert W. Detenbeck University of Vermont
N. John DiNardo Drexel University
Bruce Doak Arizona State University
Michael Dubson University of Colorado at Boulder
John Elliott University of Manchester, England

William Ellis University of Technology, Sydney
Colonel Rolf Enger U.S. Air Force Academy
John W. Farley University of Nevada at Las Vegas
David Faust Mount Hood Community College
Mirela S. Fetea University of Richmond
David Flammer Colorado School of Mines
Philip Fraundorf University of Missouri, Saint Louis
Tom Furtak Colorado School of Mines
James Garland in Pension
James Garner University of North Florida
Ian Gatland Georgia Institute of Technology
Ron Gautreau New Jersey Institute of Technology
David Gavenda University of Texas at Austin
Patrick C. Gibbons Washington University
David Gordon Wilson Massachusetts Institute of Technology
Christopher Gould University of Southern California
Newton Greenberg SUNY Binghamton
John B. Gruber San Jose State University
Huidong Guo Columbia University
Phuoc Ha Creighton University
Richard Haracz Drexel University
Clint Harper Moorpark College
Michael Harris University of Washington
Randy Harris University of California at Davis
Tina Harriott Mount Saint Vincent, Canada
Dieter Hartmann Clemson University
Theresa Peggy Hartsell Clark College
Kristi R. G. Hendrickson University of Puget Sound
Michael Hildreth University of Notre Dame
Robert Hollebeek University of Pennsylvania
David Ingram Ohio University
Shawn Jackson The University of Tulsa
Madya Jalil University of Malaya
Monwhea Jeng University of California, Santa Barbara
James W. Johnson Tallahassee Community College
Edwin R. Jones University of South Carolina
Ilon Joseph Columbia University
David Kaplan University of California, Santa Barbara
William C. Kerr Wake Forest University
John Kidder Dartmouth College
Roger King City College of San Francisco
James J. Kolata University of Notre Dame
Boris Korsunsky Northfield Mt. Hermon School
Thomas O. Krause Towson University
Eric Lane University of Tennessee, Chattanooga
Andrew Lang University of Missouri
David Lange University of California, Santa Barbara
Donald C. Larson Drexel University
Paul L. Lee California State University, Northridge
Peter M. Levy New York University
Jerome Licini Lehigh University
Isaac Leichter Jerusalem College of Technology
William Lichten Yale University
Robert Lieberman Cornell University
Fred Lipschultz University of Connecticut
Graeme Luke Columbia University
Dan MacIsaac Northern Arizona University

Robert R. Marchini The University of Memphis
Peter E. C. Markowitz Florida International University
Daniel Marlow Princeton University
Fernando Medina Florida Atlantic University
Howard McAllister University of Hawaii
John A. McClelland University of Richmond
Edward McCliment University of Iowa
Laura McCullough University of Wisconsin at Stout
M. Howard Miles Washington State University
Matthew Moelter University of Puget Sound
Eugene Mosca U.S. Naval Academy
Carl Mungan U.S. Naval Academy
Taha Mzoughi Mississippi State University
Charles Niederriter Gustavus Adolphus College
John W. Norbury University of Wisconsin at Milwaukee
Aileen O'Donughue St. Lawrence University
Jack Ord University of Waterloo
Jeffry S. Olafsen University of Kansas
Melvyn Jay Oremland Pace University
Richard Packard University of California
Antonio Pagnamenta University of Illinois at Chicago
George W. Parker North Carolina State University
John Parsons Columbia University
Dinko Pocanic University of Virginia
Edward Pollack University of Connecticut
Robert Pompi The State University of New York at Binghamton
Bernard G. Pope Michigan State University
John M. Pratte Clayton College and State University
Brooke Pridmore Clayton State College
Yong-Zhong Qian University of Minnesota
David Roberts Brandeis University
Lyle D. Roelofs Haverford College
R. J. Rollefson Wesleyan University
Larry Rowan University of North Carolina at Chapel Hill
Ajit S. Rupaal Western Washington University
Todd G. Ruskell Colorado School of Mines
Lewis H. Ryder University of Kent, Canterbury
Andrew Scherbakov Georgia Institute of Technology
Bruce A. Schumm University of California, Santa Cruz
Cindy Schwarz Vassar College
Mesgun Sebhatu Winthrop University
Bernd Schuttler University of Georgia
Murray Scureman Amdahl Corporation
Marllin L. Simon Auburn University
Scott Sinawi Columbia University
Dave Smith University of the Virgin Islands
Wesley H. Smith University of Wisconsin
Kevork Spartalian University of Vermont
Zbigniew M. Stadnik University of Ottawa
G. R. Stewart University of Florida
Michael G. Strauss University of Oklahoma
Kaare Stegavik University of Trondheim, Norway
Jay D. Strieb Villanova University
Dan Styer Oberlin College
Chun Fu Su Mississippi State University
Jeffrey Sundquist Palm Beach Community College, South
Cyrus Taylor Case Western Reserve University

Martin Tiersten City College of New York
Chin-Che Tin Auburn University
Oscar Vilches University of Washington
D J Wagner Grove City College
George Watson University of Delaware
Fred Watts College of Charleston
David Winter John A. Underwood Austin Community College
John Weinstein University of Mississippi
Stephen Weppner Eckerd College
Suzanne E. Willis Northern Illinois University
Frank L. H. Wolfe University of Rochester
Frank Wolfs University of Rochester
Roy C. Wood New Mexico State University
Ron Zammit California Polytechnic State University
Yuriy Zhestkov Columbia University
Dean Zollman Kansas State University
Fulin Zuo University of Miami

Natürlich wird eine solche Arbeit niemals fertig. Wir hoffen daher, dass wir von unseren Lesern auch weiterhin Vorschläge und Anregungen erhalten, um nicht nur Fehler beseitigen, sondern den Text und die Darstellung auch anderweitig verbessern zu können. Wir werden jegliche Hinweise, Anmerkungen oder Fragen, die uns über den Verlag oder per EMail (asktipler@freeman.com) zugehen, entsprechend bearbeiten und bedanken uns dafür im Voraus.

Schließlich möchten wir uns beim Verlag W. H. Freeman and Company für jegliche Hilfestellung und Ermutigung bedanken. Hier seien Susan Brennan, Clancy Marshall, Kharissia Pettus, Georgia Lee Hadler, Susan Wein, Trumbull Rogers, Connie Parks, John Smith, Dena Digilio Betz, Ted Szczepanski und Liz Geller genannt. Ihre Kreativität und ihr Engagement in jeder Phase der Zusammenarbeit verdienen besonderen Dank.

Für etliche Beiträge sind wir auch unseren Kollegen Larry Tankersley, John Ertel, Steve Montgomery und Don Treacy zu Dank verpflichtet.

Paul Tipler, Gene Mosca

Kurzinhalt

Die Autoren XXXV

Teil I Physikalische Größen und Messungen

1	Physikalische Größen und Messungen	3
---	------------------------------------	---

Teil II Mechanik

2	Mechanik von Massepunkten	27
3	Die Newton'schen Axiome	77
4	Weitere Anwendungen der Newton'schen Axiome	111
5	Energie und Arbeit	159
6	Der Impuls	211
7	Teilchensysteme	245
8	Drehbewegungen	281
9	Mechanik deformierbarer Körper	351
10	Fluide	371

Teil III Schwingungen und Wellen

11	Schwingungen	413
12	Wellen	455

Teil IV Thermodynamik

13	Temperatur und der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik	529
14	Die kinetische Gastheorie	545
15	Wärme und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik	567
16	Der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik	599
17	Wärmeübertragung	631

Teil V Elektrizität und Magnetismus

18	Das elektrische Feld I: Diskrete Ladungsverteilungen	651
19	Das elektrische Feld II: Kontinuierliche Ladungsverteilungen	687
20	Das elektrische Potenzial	725
21	Die Kapazität	761
22	Elektrischer Strom – Gleichstromkreise	799
23	Das Magnetfeld	845
24	Quellen des Magnetfelds	873
25	Die magnetische Induktion	913
26	Wechselstromkreise	947
27	Die Maxwell'schen Gleichungen – Elektromagnetische Wellen	979

Teil VI Optik	
28 Eigenschaften des Lichts	1007
29 Geometrische Optik	1041
30 Interferenz und Beugung	1085
Teil VII Einsteins Relativitätstheorien	
31 Die Relativitätstheorien	1121
Teil VIII Quantenmechanik	
32 Einführung in die Quantenphysik	1161
33 Anwendungen der Schrödinger-Gleichung	1183
Teil IX Atome und Moleküle	
34 Atome	1211
35 Moleküle	1251
Teil X Festkörperphysik	
36 Festkörper	1277
37 Elektrische Eigenschaften von Festkörpern	1287
Teil XI Kern- und Teilchenphysik	
38 Kernphysik	1319
39 *Teilchenphysik	1349
Teil XII Anhänge	
40 Tabellen	1381
41 Mathematische Grundlagen	1391
Sachverzeichnis	1421

Inhaltsverzeichnis

Die Autoren	XXXV
--------------------------	------

Teil I Physikalische Größen und Messungen

1 Physikalische Größen und Messungen	3
1.1 Vom Wesen der Physik	4
1.2 Maßeinheiten	5
1.3 Dimensionen physikalischer Größen	7
1.4 Signifikante Stellen und Größenordnungen	9
1.5 Messgenauigkeit und Messfehler	14
Zusammenfassung	20
Aufgaben	22

Teil II Mechanik

2 Mechanik von Massenpunkten	27
2.1 Verschiebung	28
2.2 Geschwindigkeit	30
2.3 Beschleunigung	39
2.4 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension	45
2.5 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in mehreren Dimensionen	54
Zusammenfassung	67
Aufgaben	69
3 Die Newton'schen Axiome	77
3.1 Das erste Newton'sche Axiom: Das Trägheitsgesetz	78
3.2 Kraft und Masse	79
3.3 Das zweite Newton'sche Axiom	82
3.4 Gravitationskraft und Gewicht	85
3.5 Kräftevektoren und ihre Anwendung	86
3.6 Das dritte Newton'sche Axiom	93
3.7 Kräfte bei der Kreisbewegung	95
Zusammenfassung	103
Aufgaben	105

4	Weitere Anwendungen der Newton'schen Axiome	111
4.1	Reibung	112
4.2	Widerstandskräfte	124
4.3	Trägheits- oder Scheinkräfte	126
4.4	Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze	131
4.5	Das Gravitationsfeld	140
	Zusammenfassung	149
	Aufgaben	151
5	Energie und Arbeit	159
5.1	Arbeit	160
5.2	Leistung	167
5.3	Kinetische Energie	168
5.4	Potenzielle Energie	174
5.5	Energieerhaltung	183
	Zusammenfassung	201
	Aufgaben	203
6	Der Impuls	211
6.1	Impulserhaltung	212
6.2	Stoßarten	218
6.3	Kraftstoß und zeitliches Mittel der Kraft	219
6.4	Inelastische Stöße	225
6.5	Elastische Stöße	231
	Zusammenfassung	237
	Aufgaben	239
7	Teilchensysteme	245
7.1	Mehrkörperprobleme	246
7.2	Der Massenmittelpunkt	249
7.3	Massenmittelpunktsbewegung und Impulserhaltung	255
7.4	Massenmittelpunktsarbeit und Energieerhaltung	259
7.5	*Stöße im Schwerpunktsystem	266
7.6	Systeme mit veränderlicher Masse und Strahlanztrieb	268
	Zusammenfassung	274
	Aufgaben	276

8	Drehbewegungen	281
8.1	Kinematik der Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung	282
8.2	Die kinetische Energie der Drehbewegung	286
8.3	Berechnung von Trägheitsmomenten	287
8.4	Das Drehmoment	296
8.5	Gleichgewicht und Stabilität	307
8.6	Der Drehimpuls	312
8.7	Die Drehimpulserhaltung	318
8.8	Rollende Körper	326
8.9	Der Kreisel	333
	Zusammenfassung	340
	Aufgaben	343
9	Mechanik deformierbarer Körper	351
9.1	Spannung und Dehnung	352
9.2	Kompression	355
9.3	Scherung	356
9.4	Zusammenhang zwischen E , K , G und μ	357
9.5	Elastische Energie und Hysterese	358
9.6	Biegung	359
	Zusammenfassung	366
	Aufgaben	368
10	Fluide	371
10.1	Dichte	372
10.2	Druck in einem Fluid	374
10.3	Auftrieb und archimedisches Prinzip	380
10.4	Molekulare Phänomene	386
10.5	Bewegte Fluide ohne Reibung	387
10.6	Bewegte Fluide mit Reibung	394
10.7	*Turbulenz	398
	Zusammenfassung	402
	Aufgaben	405
Teil III Schwingungen und Wellen		
11	Schwingungen	413
11.1	Harmonische Schwingungen	414
11.2	Energie des harmonischen Oszillators	421

11.3	Beispiele für schwingende Systeme	424
11.4	Gedämpfte Schwingungen	435
11.5	Erzwungene Schwingungen und Resonanz	440
	Zusammenfassung	447
	Aufgaben	449
12	Wellen	455
12.1	Einfache Wellenbewegungen	456
12.2	Periodische Wellen, harmonische Wellen	464
12.3	Energietransport und Intensität	468
12.4	Der Doppler-Effekt	474
12.5	Wellenausbreitung an Hindernissen	481
12.6	Überlagerung von Wellen	488
12.7	Stehende Wellen	496
12.8	*Harmonische Zerlegung und Wellenpakete	505
	Zusammenfassung	513
	Aufgaben	518
Teil IV Thermodynamik		
13	Temperatur und der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik	529
13.1	Temperatur und der Nullte Hauptsatz	530
13.2	Temperaturmessgeräte und Temperaturskalen	530
13.3	Thermische Ausdehnung	535
	Zusammenfassung	542
	Aufgaben	543
14	Die kinetische Gastheorie	545
14.1	Die Zustandsgleichung für das ideale Gas	546
14.2	Druck und Teilchengeschwindigkeit	551
14.3	Der Gleichverteilungssatz	555
14.4	Die mittlere freie Weglänge	556
14.5	*Die Van-der-Waals-Gleichung und Flüssigkeits-Dampf-Isothermen	558
	Zusammenfassung	562
	Aufgaben	563

15	Wärme und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik	567
15.1	Wärmekapazität und spezifische Wärmekapazität	568
15.2	Phasenübergänge und latente Wärme	571
15.3	Phasendiagramme	574
15.4	Joules Experiment und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik	575
15.5	Die innere Energie eines idealen Gases	577
15.6	Volumenarbeit und das p - V -Diagramm eines Gases	578
15.7	Wärmekapazitäten von Festkörpern	582
15.8	Wärmekapazitäten von Gasen	583
15.9	Die reversible adiabatische Expansion eines Gases	588
	Zusammenfassung	594
	Aufgaben	596
16	Der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik	599
16.1	Wärmekraftmaschinen und der Zweite Hauptsatz	600
16.2	Kältemaschinen und der Zweite Hauptsatz	605
16.3	Der Carnot'sche Kreisprozess	608
16.4	*Wärmepumpen	613
16.5	Irreversibilität, Unordnung und Entropie	614
16.6	Entropie und die Verfügbarkeit der Energie	620
16.7	Entropie und Wahrscheinlichkeit	621
16.8	*Der Dritte Hauptsatz	623
	Zusammenfassung	625
	Aufgaben	627
17	Wärmeübertragung	631
17.1	Wärmeübertragungsarten	632
17.2	Wärmeleitung	632
17.3	Konvektion	638
17.4	Wärmestrahlung	638
	Zusammenfassung	644
	Aufgaben	646

Teil V Elektrizität und Magnetismus

18	Das elektrische Feld I: Diskrete Ladungsverteilungen	651
18.1	Die elektrische Ladung	652
18.2	Leiter und Nichtleiter	654
18.3	Das Coulomb'sche Gesetz	656
18.4	Das elektrische Feld	662
18.5	Elektrische Feldlinien	668
18.6	Wirkung von elektrischen Feldern auf Ladungen	672
	Zusammenfassung	680
	Aufgaben	682

19 Das elektrische Feld II: Kontinuierliche Ladungsverteilungen	687
19.1 Das Konzept der Ladungsdichte	688
19.2 Berechnung von E mit dem Coulomb'schen Gesetz	688
19.3 Das Gauß'sche Gesetz	699
19.4 Berechnung von E mit dem Gauß'schen Gesetz	704
19.5 Diskontinuität von E_n	711
19.6 Ladung und Feld auf Leiteroberflächen	711
19.7 *Die Äquivalenz des Gauß'schen und des Coulomb'schen Gesetzes	714
Zusammenfassung	717
Aufgaben	719
20 Das elektrische Potenzial	725
20.1 Die Potenzialdifferenz	726
20.2 Das Potenzial eines Punktladungssystems	728
20.3 Die Berechnung des elektrischen Felds aus dem Potenzial	733
20.4 Die Berechnung des elektrischen Potenzials ϕ kontinuierlicher Ladungsverteilungen	735
20.5 Äquipotenzialflächen	742
20.6 Die elektrische Energie	749
Zusammenfassung	754
Aufgaben	756
21 Die Kapazität	761
21.1 Die Kapazität	762
21.2 Speicherung elektrischer Energie	766
21.3 Kondensatoren, Batterien und elektrische Stromkreise	770
21.4 Dielektrika	778
21.5 Molekulare Betrachtung von Dielektrika	785
Zusammenfassung	791
Aufgaben	793
22 Elektrischer Strom – Gleichstromkreise	799
22.1 Elektrischer Strom und die Bewegung von Ladungsträgern	800
22.2 Widerstand und Ohm'sches Gesetz	804
22.3 Energetische Betrachtung elektrischer Stromkreise	808
22.4 Zusammenschaltung von Widerständen	813
22.5 Die Kirchhoff'schen Regeln	820
22.6 RC-Stromkreise	829
Zusammenfassung	836
Aufgaben	838

23	Das Magnetfeld	845
23.1	Die magnetische Kraft	846
23.2	Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld	851
23.3	Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment	858
23.4	*Der Hall-Effekt	863
	Zusammenfassung	868
	Aufgaben	870
24	Quellen des Magnetfelds	873
24.1	Das Magnetfeld bewegter Punktladungen	874
24.2	Das Magnetfeld von Strömen: Das Biot-Savart'sche Gesetz	875
24.3	Der Gauß'sche Satz für Magnetfelder	889
24.4	Das Ampère'sche Gesetz	889
24.5	Magnetismus in Materie	894
	Zusammenfassung	905
	Aufgaben	907
25	Die magnetische Induktion	913
25.1	Der magnetische Fluss	914
25.2	Induktionsspannung und Faraday'sches Gesetz	915
25.3	Die Lenz'sche Regel	919
25.4	Induktion durch Bewegung	923
25.5	Wirbelströme	928
25.6	Induktivität	929
25.7	Die Energie des Magnetfelds	931
25.8	<i>RL</i> -Stromkreise	933
	Zusammenfassung	939
	Aufgaben	941
26	Wechselstromkreise	947
26.1	Wechselspannung an einem Ohm'schen Widerstand	948
26.2	Wechselstromkreise	951
26.3	Der Transformator	954
26.4	<i>LC</i> - und <i>RLC</i> -Stromkreise ohne Wechselspannungsquelle	957
26.5	*Zeigerdiagramme	960
26.6	*Erzwungene Schwingungen in <i>RLC</i> -Stromkreisen	961
	Zusammenfassung	971
	Aufgaben	973

27 Die Maxwell'schen Gleichungen – Elektromagnetische Wellen	979
27.1 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	980
27.2 Die Maxwell'schen Gleichungen	983
27.3 Die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen	984
27.4 Elektromagnetische Strahlung	988
Zusammenfassung	999
Aufgaben	1001

Teil VI Optik

28 Eigenschaften des Lichts	1007
28.1 Die Lichtgeschwindigkeit	1008
28.2 Die Ausbreitung des Lichts	1011
28.3 Reflexion und Brechung	1011
28.4 *Herleitung des Reflexions- und des Brechungsgesetzes	1022
28.5 Polarisation	1024
28.6 Lichtspektren	1029
Zusammenfassung	1035
Aufgaben	1037
29 Geometrische Optik	1041
29.1 Spiegel	1042
29.2 Linsen	1053
29.3 Abbildungsfehler	1066
29.4 Optische Instrumente	1067
Zusammenfassung	1078
Aufgaben	1081
30 Interferenz und Beugung	1085
30.1 Phasendifferenz und Kohärenz	1086
30.2 Interferenz an dünnen Schichten	1087
30.3 Interferenzmuster beim Doppelspalt	1089
30.4 Beugungsgitter	1093
30.5 Fraunhofer'sche und Fresnel'sche Beugung	1096
30.6 Beugungsmuster beim Einzelspalt	1097
30.7 *Vektoraddition harmonischer Wellen	1100
30.8 Beugung und Auflösung	1106
Zusammenfassung	1112
Aufgaben	1114

Teil VII Einsteins Relativitätstheorien

31 Die Relativitätstheorien	1121
31.1 Das Newton'sche Relativitätsprinzip	1122
31.2 Die Einstein'schen Postulate	1123
31.3 Die Lorentz-Transformation	1124
31.4 Uhrensynchronisation und Gleichzeitigkeit	1131
31.5 Die Geschwindigkeitstransformation	1137
31.6 *Der relativistische Impuls	1140
31.7 *Die relativistische Energie	1142
31.8 *Minkowski-Diagramme	1147
31.9 *Die allgemeine Relativitätstheorie	1149
Zusammenfassung	1154
Aufgaben	1156

Teil VIII Quantenmechanik

32 Einführung in die Quantenphysik	1161
32.1 Wellen und Teilchen	1162
32.2 Licht als Teilchen: Photonen	1162
32.3 Teilchen als Materiewellen	1167
32.4 Die Schrödinger-Gleichung	1170
32.5 Der Welle-Teilchen-Dualismus	1172
32.6 *Erwartungswerte und klassischer Grenzfall	1173
Zusammenfassung	1179
Aufgaben	1181
33 Anwendungen der Schrödinger-Gleichung	1183
33.1 Ein Teilchen im Kasten mit unendlich hohem Potenzial	1184
33.2 Ein Teilchen im Kasten mit endlich hohem Potenzial	1187
33.3 Der harmonische Oszillator	1189
33.4 Reflexion und Transmission von Elektronenwellen an Potenzialbarrieren	1192
33.5 *Die Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen	1197
33.6 Die Schrödinger-Gleichung für zwei identische Teilchen	1200
Zusammenfassung	1205
Aufgaben	1207

Teil IX Atome und Moleküle

34 Atome	1211
34.1 Das Atom und die Atomspektren	1212
34.2 Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms	1213
34.3 Quantentheorie der Atome	1217
34.4 Quantentheorie des Wasserstoffatoms	1219
34.5 *Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur	1224
34.6 Das Periodensystem der Elemente	1226
34.7 Spektren im sichtbaren und im Röntgenbereich	1233
34.8 Laser	1237
Zusammenfassung	1244
Aufgaben	1247
35 Moleküle	1251
35.1 Die chemische Bindung	1252
35.2 *Mehratomige Moleküle	1258
35.3 *Energieniveaus und Spektren zweiatomiger Moleküle	1260
35.4 *Freiheitsgrade und der Gleichverteilungssatz	1266
Zusammenfassung	1270
Aufgaben	1272

Teil X Festkörperphysik

36 Festkörper	1277
36.1 Die Struktur von Festkörpern	1278
36.2 Kristallgitter	1278
36.3 Streuung an periodischen Strukturen	1282
Zusammenfassung	1285
Aufgaben	1286
37 Elektrische Eigenschaften von Festkörpern	1287
37.1 Eine mikroskopische Betrachtung der elektrischen Leitfähigkeit	1288
37.2 Freie Elektronen im Festkörper	1290
37.3 Die Quantentheorie der elektrischen Leitfähigkeit	1295
37.4 Das Bändermodell der Festkörper	1297
37.5 Halbleiter	1299
37.6 *Halbleiterübergangsschichten und Bauelemente	1301
37.7 *Supraleitung	1305
37.8 *Die Fermi-Dirac-Verteilung	1308
Zusammenfassung	1312
Aufgaben	1315

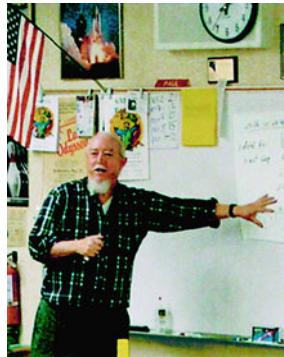
Teil XI Kern- und Teilchenphysik

38	Kernphysik	1319
38.1	Eigenschaften der Kerne	1320
38.2	Radioaktivität	1323
38.3	Kernreaktionen	1329
38.4	Kernspaltung und Kernfusion	1331
38.5	Dosimetrie	1339
	Zusammenfassung	1343
	Aufgaben	1345
39	*Teilchenphysik	1349
39.1	*Hadronen und Leptonen	1350
39.2	*Spin und Antiteilchen	1351
39.3	*Erhaltungssätze	1355
39.4	*Quarks	1359
39.5	*Feldquanten	1361
39.6	*Die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung	1361
39.7	*Das Standardmodell	1362
39.8	*Moderne Teilchenbeschleuniger und Detektoren	1363
	Zusammenfassung	1374
	Aufgaben	1376

Teil XII Anhänge

40	Tabellen	1381
40.1	Einheiten, Symbole und Umrechnungsfaktoren	1382
40.2	Wichtige physikalische Größen und Konstanten	1385
40.3	Die chemischen Elemente	1388
41	Mathematische Grundlagen	1391
41.1	Signifikante Stellen	1392
41.2	Gleichungen	1393
41.3	Direkte und umgekehrte Proportionalität	1394
41.4	Lineare Gleichungen	1395
41.5	Quadratische Gleichungen und Zerlegung in Linearfaktoren	1397
41.6	Potenzen und Logarithmen	1398
41.7	Geometrie	1400
41.8	Trigonometrie und Vektoren	1402
41.9	Die Binomialentwicklung	1408
41.10	Komplexe Zahlen	1409
41.11	Differentialrechnung	1411
41.12	Integralrechnung	1417
	Sachverzeichnis	1421

Die Autoren



Paul A. Tipler, geboren in Antigo, Wisconsin, promovierte an der University of Illinois über die Struktur von Atomkernen. Seine ersten Lehrerfahrungen sammelte er an der Wesleyan University of Connecticut. Anschließend wurde er Physikprofessor an der Oakland University, wo er maßgeblich an der Weiterentwicklung des Studienlehrplans für Physik beteiligt war. Hier entstanden auch die ersten Ausgaben seiner Lehrbücher. Heute lebt er als Emeritus in Berkeley, Kalifornien, und wirkt weiterhin an den Bearbeitungen dieses Physiklehrbuchs für Naturwissenschaftler und Ingenieure mit. Daneben widmet er sich mehreren Hobbys, darunter Musik (er ist ein ausgezeichneter Jazzpianist), Pokern sowie Wandern und Camping.



Gene Mosca wurde in New York City geboren und wuchs in Shelter Island, New York, auf. Er studierte an der Villanova University, der University of Michigan und der University of Vermont, wo er promovierte. Bis zu seiner Emeritierung lehrte er an der U.S. Naval Academy. Seit der fünften amerikanischen Auflage (der zweiten, die ins Deutsche übersetzt worden war) ist er Mitautor dieses Physiklehrbuchs.

Die Herausgeberin



Jenny Wagner (Hrsg.) schloss ihr Studium der Physik, Mathematik und Informatik mit Schwerpunkt Bildverarbeitung und Modellierung mit einem Diplom über Teilchenphysik am CERN ab. Danach promovierte sie in Biophysik und beschäftigt sich heute mit der Modellierung von Gravitationslinsen in der Astrophysik.

Physikalische Größen und Messungen

Teil I



1	Physikalische Größen und Messungen	3
---	----------------------------------------------	---

Physikalische Größen und Messungen

1



Die Anzahl der Sandkörner an einem Strand kann man nicht abzählen. Mit geeigneten Annahmen und einfachen Berechnungen lässt sie sich aber schätzen. (*Mit freundlicher Genehmigung von Anja Groth.*)

?

Wie viele Sandkörner liegen an Ihrem Lieblingsstrand? (Siehe Beispiel 1.6.)

1.1	Vom Wesen der Physik	4
1.2	Maßeinheiten	5
1.3	Dimensionen physikalischer Größen	7
1.4	Signifikante Stellen und Größenordnungen	9
1.5	Messgenauigkeit und Messfehler	14
	Zusammenfassung	20
	Aufgaben	22

Der Mensch war schon immer neugierig darauf, die ihn umgebende Welt zu ergründen, und sucht nach Wegen, die verwirrende Vielfalt von Ereignissen, die er beobachtet, zu ordnen, beispielsweise das Blau des Himmels, die Änderung des Klangs, wenn ein Auto vorüberfährt, das Wiegen der Bäume im Wind, den Sonnenauf- und -untergang oder den Flug eines Vogels. Bei der Suche nach Erkenntnis gibt es verschiedene Herangehensweisen: Eine davon ist die Religion, eine andere die Kunst und eine dritte die Wissenschaft. In der Wissenschaft unterscheidet man zwischen Naturwissenschaften wie der Physik und Geisteswissenschaften wie der Philosophie. Die Physik hat es sich zum Ziel gesetzt, die Grundgesetze des Universums und ihre Wirkungsweise zu beschreiben. Sie behandelt Kategorien wie Materie und Energie, Raum und Zeit.

Wie andere Wissenschaften auch, ist die Physik auf eine ganz spezifische und rationale Weise organisiert. Der Physiker will die Realität beschreiben, erklären und voraussagen, indem er Modelle aufstellt, diese überprüft und miteinander verknüpft. Dabei bedient er sich Hypothesen, reproduzierbarer Experimente, Beobachtungen und wieder neuer Hypothesen. Das Ergebnis ist eine Reihe von Grundprinzipien und Gesetzmäßigkeiten, die die Erscheinungen in der uns umgebenden Welt beschreiben. Mithilfe dieser Gesetzmäßigkeiten können sowohl exotische Phänomene wie die dunkle Energie als auch ganz alltägliche Dinge beschrieben werden. Wie wir bald sehen werden, lassen sich mit Grundkenntnissen der Physik zahlreiche Fragen beantworten, mit denen wir häufig konfrontiert sind: Weshalb ist der Himmel blau? Wie schweben Astronauten im Weltraum? Wie funktioniert ein CD-Spieler? Weshalb klingt eine Oboe anders als eine Flöte? Warum benötigt ein Hubschrauber zwei Rotoren? Weshalb fühlen sich Metallgegenstände bei gleicher Temperatur kälter an als solche aus Holz?

In diesem Buch werden wir zeigen, wie sich diese und viele weitere Fragen ausgehend von physikalischen Prinzipien beantworten lassen. Dabei werden Sie die bekannten Gebiete der Physik wie Mechanik (die Untersuchung der Bewegung von Körpern), Schall, Licht, Wärme, Elektrizität, Magnetismus, Atom- und Kernphysik wiederfinden. Darüber hinaus werden Sie nützliche Vorgehensweisen zur Lösung physikalischer Aufgabenstellungen erlernen.

In diesem Kapitel wollen wir einige vorbereitende Themen behandeln, auf die wir im Verlauf des Buchs immer wieder zurückkommen werden. Zunächst wollen wir kurz betrachten, worin das Wesen der Physik besteht. Anschließend werden wir verschiedene Grundlagen definieren, das internationale Maßeinheitensystem einführen und seine Verwendung kennenlernen. Weitere Themen sind Messgenauigkeit und Messfehler, signifikante Stellen von Zahlen und die Schätzung von Größenordnungen.

1.1 Vom Wesen der Physik

Das Wort „Physik“ leitet sich vom griechischen Wort *physis* für die Beschaffenheit der Körper ab und bedeutet Kenntnis der natürlichen Welt. Somit ist es sicher nicht verwunderlich, dass die ersten überlieferten Versuche, systematisch Wissen über Bewegungen zusammenzutragen, aus der griechischen Antike stammen. In der Naturphilosophie des Aristoteles (384–322 v. Chr.) wurden Erklärungen für physikalische Erscheinungen nicht aus Experimenten, sondern aus Annahmen über die Welt und aus dem Allgemeinwissen der Gelehrten abgeleitet. Eine Grundannahme besagte z. B., dass jeder Stoff einen „natürlichen Ort“ im Universum besitzt und dass Materie eine natürliche Ausdehnung hat. Die Bewegung eines Körpers war der Versuch, diesen natürlichen Ort zu erreichen. Das entsprechende griechische

Weltbild hielt sich fast 2000 Jahre, denn die in der Natur beobachteten Bewegungen stimmten mit der Aristotelischen Physik überein, und Experimente, die die Vorstellungen der antiken Griechen hätten widerlegen können, gab es noch nicht. Erst im 16. Jahrhundert erforderten Experimente zur Bewegung neue Beobachtungs- und Messmethoden. Vor allem Galileo Galilei (1564–1642) wurde mit seinen fortschrittlichen theoretischen Beschreibungen und Experimenten zum freien Fall und zur Planetenbewegung berühmt. 100 Jahre später hatte Isaac Newton die Ergebnisse von Galileis Experimenten zu seinen drei Axiomen, den Newton'schen Axiomen, verallgemeinert und damit das Zeitalter der Aristotelischen Naturphilosophie endgültig beendet.

Die Experimente während der nächsten 200 Jahre brachten eine Flut neuer Erkenntnisse – warfen aber gleichzeitig auch eine Fülle neuer Fragen auf. Einige dieser Entdeckungen betrafen elektrische und magnetische Erscheinungen, andere die Expansion und Kompression von Gasen. Somit mussten neue Modelle entwickelt werden, um diese Entdeckungen und Fragen zu klären. Ende des 19. Jahrhunderts existierten neben den Newton'schen Axiomen für die Bewegung mechanischer Systeme die nicht minder erfolgreichen Gesetze von James Maxwell, James Joule, Sadi Carnot und anderen zur Beschreibung des Elektromagnetismus und der Thermodynamik. Die Gebiete, mit denen sich die Physiker und deutschen Lehrbuchautoren wie Ernst Mach und Heinrich Hertz Ende des 19. Jahrhunderts vorrangig beschäftigten – Mechanik, Licht, Wärme, Schall, Elektrizität und Magnetismus – werden üblicherweise als *klassische Physik* bezeichnet. Die klassische Physik ist unumgänglich für das Verständnis der makroskopischen Welt, in der wir leben. Sie wird vorwiegend in Teil I bis V dieses Buchs behandelt.

Der bemerkenswerte Erfolg der klassischen Physik führte viele Wissenschaftler zu dem Glauben, die Beschreibung des physikalischen Universums sei damit abgeschlossen. Die Entdeckung der Röntgenstrahlen durch Wilhelm Röntgen im Jahre 1895 und der Radioaktivität durch Antoine Becquerel sowie Marie und Pierre Curie in den nächsten Jahren passten jedoch überhaupt nicht in diesen Rahmen. Die von Albert Einstein 1905 veröffentlichte spezielle Relativitätstheorie erweiterte schließlich die von Galilei und Newton begründeten klassischen Vorstellungen von Raum und Zeit. Zudem schlug Albert Einstein im gleichen Jahr die Lichtquantenhypothese vor, der zufolge die Lichtenergie quantisiert sein sollte. Licht sollte also nicht, wie in der klassischen Physik angenommen, wellenförmig und kontinuierlich sein, sondern aus diskreten Lichtpaketen bestehen. Die Verallgemeinerung dieser Erkenntnis zur Quantisierung aller Arten von Energie ist die Grundidee der Quantenmechanik. Sie führt zu zahlreichen verblüffenden und bedeutsamen Folgerungen. Die Anwendung der speziellen Relativitätstheorie und insbesondere der Quantentheorie auf extrem kleine Systeme wie Atome, Moleküle und Atomkerne hat zu einem tiefgreifenden Verständnis von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen geführt. Diese Gebiete werden als *moderne Physik* bezeichnet, die Gegenstand von Teil VI bis X dieses Buchs ist.

1.2 Maßeinheiten

Die physikalischen Gesetze bringen Beziehungen zwischen physikalischen Größen zum Ausdruck. **Physikalische Größen** sind Zahlen, die durch die Messung physikalischer Erscheinungen erhalten werden. Beispiele für physikalische Größen sind die Dicke dieses Buchs, die Zeit, die Sie zum Lesen dieses Satzes brauchen, oder die Lufttemperatur in Ihrer Umgebung.

Die Messung jeder physikalischen Größe erfordert den Vergleich mit einem genau definierten Standard, einer **Maßeinheit** dieser Größe. So benötigt man eine Standardmaßeinheit der Länge wie etwa einen Meter oder einen Kilometer, um beispielsweise den Abstand zweier Punkte zu messen. Die Aussage, eine Strecke sei 25 Meter lang, bedeutet, dass sie 25-mal so lang ist wie die Maßeinheit Meter. Da zur Längenmessung unterschiedliche Maßeinheiten verwendet werden können, ist es bei der Angabe einer Strecke wichtig, zusammen mit der Maßzahl, in diesem Fall also 25, die Maßeinheit, d. h. Meter, anzugeben. Die Aussage, eine Strecke sei 25, ist demnach sinnlos.

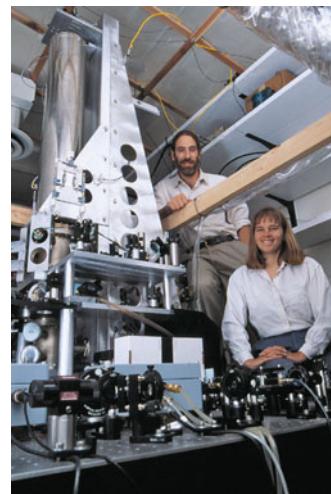
Einige der wichtigsten physikalischen Größen – die Zeit, die Länge und die Masse – sind durch das Verfahren definiert, mit dem sie gemessen werden. So ist die Länge einer Stange dadurch definiert, wie oft man eine Maßeinheit der Länge aneinanderfügen muss, um die Länge der Stange zu erhalten. Häufig werden physikalische Größen unter Verwendung einer **operationalen Definition** definiert, d. h. durch die Operation, die ausgeführt werden muss, um die physikalische Größe zu messen. Andere physikalische Größen sind durch eine Beschreibung definiert, wie sie aus diesen Grundgrößen berechnet werden können. So ist die Geschwindigkeit eines Körpers der Quotient aus einer Länge und einer Zeit. Viele Größen, mit denen wir in diesem Buch umgehen werden, etwa die Geschwindigkeit, die Kraft, der Impuls, die Arbeit, die Energie und die Leistung, lassen sich durch Zeit, Länge und Masse ausdrücken. Offenbar reicht eine kleine Anzahl der entsprechenden Grundeinheiten aus, um alle physikalischen Größen durch sie auszudrücken. Die Wahl dieser Grundeinheiten bestimmt das Einheitensystem.

Das internationale Einheitensystem

In der Physik muss ein einheitliches Einheitensystem verwendet werden. Ein internationales Komitee hat 1960 einen SI (*Système International*) genannten Satz von Standardmaßeinheiten aufgestellt. Im SI-System gibt es sieben Grundgrößen: die Länge, die Masse, die Zeit, den elektrischen Strom, die thermodynamische Temperatur, die Stoffmenge und die Lichtstärke. Jede Grundgröße hat eine Grundeinheit. Die SI-Grundeinheit für die Zeit ist die Sekunde, die für die Länge das Meter und die für die Masse das Kilogramm. Bei der Behandlung der Thermodynamik und der Elektrizität werden wir noch die SI-Grundeinheiten für die Temperatur (das Kelvin, K), für die Stoffmenge (das Mol, mol) und für den elektrischen Strom (das Ampere, A) benötigen. Die



Wasseruhr, wie sie im 13. Jahrhundert zur Messung von Zeitintervallen genutzt wurde. (© Ullsteinbild-Granger Collection.)



Cäsiumuhr und ihre Entwickler Steve Jefferts und Dawn Meekhof. (© National Institute of Standards and Technology, Boulder, Colorado, USA.)

siebte SI-Grundeinheit, das Candela (cd), werden wir in diesem Buch nicht benötigen. Für die Definition der Standards jeder Grundgröße wird derzeit angestrebt, alle SI-Grundgrößen über Naturkonstanten festzulegen. Eine vollständige Liste der Definitionen der SI-Einheiten sowie oft verwendeter daraus abgeleiteter Einheiten finden Sie in Anhang 40.1.

Zeit Die Maßeinheit der Zeit t , die **Sekunde** (Abkürzung s), war früher über die Drehung der Erde definiert und entsprach $(1/60) \cdot (1/60) \cdot (1/24)$ eines mittleren Sonnentags von 24 Stunden à 60 Minuten à 60 Sekunden. Allerdings haben Wissenschaftler beobachtet, dass sich die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde allmählich verringert. Heute ist die Sekunde über eine charakteristische Strahlungsfrequenz des Cäsiumatoms definiert. Atome, die Energie absorbiert haben, emittieren Licht, dessen Frequenzen bzw. Wellenlängen für das betreffende Element charakteristisch sind. Jedes Element hat eine gewisse



Das Urkilogramm ist ein Zylinder aus einer Platin-Iridium-Legierung, der im Internationalen Büro für Gewichte und Maße in Sèvres, Frankreich, aufbewahrt wird.
© BIPM; www.bipm.org)

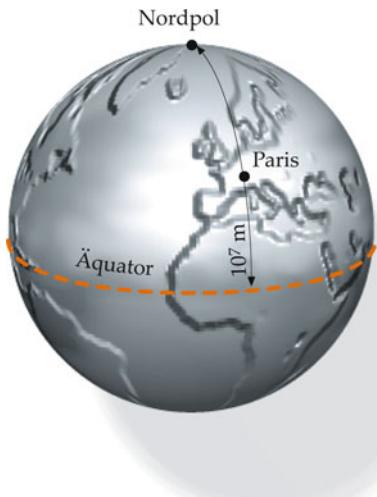


Abbildung 1.1 Das Meter war ursprünglich so gewählt, dass der Abstand vom Äquator zum Nordpol entlang des Meridians durch Paris genau 10^7 m (10 000 km) beträgt.

Anzahl von charakteristischen Frequenzen, wobei jedem Energieübergang in dem Atom eine bestimmte Frequenz und damit auch eine Wellenlänge und die entsprechende Dauer einer Schwingung zugeordnet sind. Nach unserem derzeitigen Kenntnisstand sind diese Frequenzen konstant. Heute definiert man eine Sekunde als das 9 192 631 770-fache der Schwingungsdauer eines bestimmten Energieübergangs im Cäsiumatom.

Länge Das **Meter** (m) ist die SI-Standardmaßeinheit der Länge. Früher war diese Länge als ein Zehnmillionstel des Abstands vom Äquator zum Nordpol entlang des Meridians durch Paris definiert (Abbildung 1.1). Allerdings ließ sich dieser Abstand nur schwer genau messen. So wurde 1889 der Abstand zweier Kerben auf einem Stab aus einer Platin-Iridium-Legierung, der auf einer festen Temperatur gehalten wurde, als neuer Stan-

dard angenommen. Aber auch hier zeigte sich mit der Zeit, dass dieses *Urmeter* zu ungenau war, sodass andere Definitionen herangezogen werden mussten. Gegenwärtig ist das Meter über die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bestimmt, die als exakt 299 792 458 m/s definiert ist. Das Meter ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in 1/299 792 458 Sekunden zurücklegt. Über diese Definitionen sind die Grundeinheiten der Länge und der Zeit jedem Labor der Welt zugänglich.

Masse Die SI-Einheit der Masse, das **Kilogramm** (kg), war früher als die Masse eines Liters Wasser bei 4 °C definiert. (Das Volumen eines Liters ist gleich dem eines Würfels mit einer Kantenlänge von 10 cm.) Die Definition des Kilogramms unterlag ebenso wie die der Zeit und der Länge im Laufe der Jahrhunderte Änderungen. Heute ist das Kilogramm als Masse eines Zylinders aus einer Platin-Iridium-Legierung definiert. Dieser Zylinder, das sogenannte *Urkilogramm*, wird im Internationalen Büro für Gewichte und Maße in Sèvres, Frankreich, aufbewahrt. Ein Duplikat dieses Körpers befindet sich in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig. Da das Pariser Urkilogramm gegenüber den Kopien einen messbaren Masseverlust aufweist, werden in Braunschweig für ein neues Urkilogramm aus Silicium 28 seit 2008 zwei Siliciumkügelchen vermessen, um einen Massenstandard auf atomarer Basis von ^{28}Si entwickeln zu können. Das Konzept der Masse wird in Kapitel 3 näher erläutert.

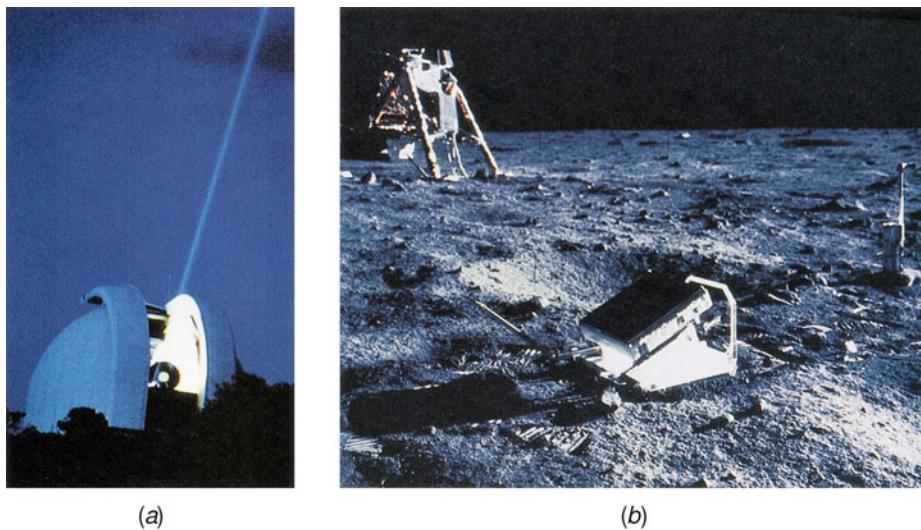
Maßeinheitsvorsätze

Häufig muss man mit Maßeinheiten umgehen, die sehr viel kleiner oder größer als die SI-Standardeinheiten sind. In diesen Fällen empfiehlt es sich, auf Zehnerpotenzen der SI-Einheiten zurückzugreifen. Die verschiedenen Zehnerpotenzen werden durch Vorsätze bezeichnet. So bedeutet der Vorsatz „Kilo“ 1000 oder 10^3 , während „Mikro“ für 0,000 001 bzw. 10^{-6} steht. In Tabelle 1.1 sind häufig vorkommende Vorsätze von SI-Einheiten zusammengestellt. Diese Vorsätze können auf jede SI-Einheit angewendet werden. Zum Beispiel sind 0,001 Sekunden 1 Millisekunde (ms) und 1 000 000 Watt 1 Megawatt.

Übung 1.1: Beschreiben Sie die folgenden Größen durch geeignete Vorsätze: a) Die Verzögerung durch die Verwurfung von etwa 0,000 000 3 s bei einer Kabelfernsehsendung und b) den Erdumfang von 40 000 000 m. ◀

Umrechnen von Maßeinheiten

Gelegentlich kommt es vor, dass im Verlauf einer Rechnung von einer Maßeinheit in eine andere umgerechnet werden muss. In der Praxis muss man dabei, etwa bei Zeiteinheiten, auch mit anderen als den in Tabelle 1.1 genannten Vorsätzen umgehen. Zum Beispiel kann der Weg gesucht sein, den ein Auto, das mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h fährt, in drei



a) Hier wird ein Laserstrahl vom McDonald Observatory in Texas, USA, verwendet, um die Entfernung zum Mond zu messen. Diese Entfernung lässt sich auf den Zentimeter genau ermitteln, indem die Zeit gemessen wird, die der Laserstrahl bis zum Mond und zurück benötigt. b) Der hierfür benötigte Spiegel wurde von den Astronauten von Apollo 14 aufgestellt. (a) © McDonald Observatory; b) © Bruce Coleman.)

Tabelle 1.1 Vorsätze für Zehnerpotenzen.

Vielfaches	Vorsatz	Abkürzung
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^2	Hekto [†]	h
10^1	Deka [†]	da
10^{-1}	Dezi [†]	d
10^{-2}	Zenti [†]	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Piko	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a

† Die zu Hekto (h), Deka (da) und Dezi (d) gehörenden Vielfachen sind keine Potenzen von 10^3 oder 10^{-3} und werden kaum noch verwendet. Eine weitere Ausnahme macht der Vorsatz Zenti (c), der bei der Längeneinheit $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ üblich ist. Bitte beachten Sie, dass die Abkürzungen für Vorsätze ab 10^6 groß-, alle anderen hingegen kleingeschrieben werden.

Stunden zurücklegt. Dieser Weg ist das Produkt aus Geschwindigkeit und Zeit:

$$x = v t = \frac{80 \text{ km}}{\text{h}} \cdot 3 \text{ h} = 240 \text{ km.}$$

Die Zeiteinheit Stunde (h) kann hier wie eine Zahl behandelt und gekürzt werden, sodass die Maßeinheit Kilometer stehen bleibt.

Ähnlich lassen sich viele weitere Maßeinheiten ineinander umrechnen. Häufig müssen z. B. Angaben von Stunden in Minuten umgerechnet werden. Hierzu nutzt man **Umrechnungsfaktoren**. Zunächst schreibt man dafür die Beziehung zwischen Stunden und Minuten, also $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$, auf. Anschließend dividiert man beide Seiten durch 60 min, was den entsprechenden Umrechnungsfaktor

$$\frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 1$$

ergibt. Mit ihm lassen sich nun Minuten beliebig in Stunden umrechnen:

$$180 \text{ min} = 180 \cancel{\text{min}} \frac{1 \text{ h}}{60 \cancel{\text{min}}} = 3 \text{ h.}$$

Eine solche Umrechnung wird im späteren Beispiel 1.4 genutzt.

1.3 Dimensionen physikalischer Größen

Eine physikalische Größe enthält sowohl eine Maßzahl als auch eine Maßeinheit. Die Maßeinheit gibt den für die Messung verwendeten Standard an und die Maßzahl, wie oft der Standard in der gemessenen Größe enthalten ist. Um zu charakterisieren, was man misst, muss man die **Dimension** der physikalischen Größe angeben. Länge, Zeit und Masse sind Dimensionen. Der Abstand d zweier Körper hat die Dimension einer Länge. Wir

Tabelle 1.2 Dimensionen physikalischer Größen.

Größe	Zeichen	Dimension	
Flächeninhalt	A	$[A] = l^2$	m^2
Volumen	V	$[V] = l^3$	m^3
Geschwindigkeit	v	$[v] = l/t$	m/s
Beschleunigung	a	$[a] = l/t^2$	m/s^2
Kraft	F	$[F] = m l/t^2$	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Druck (F/A)	p	$[p] = m/(l t^2)$	$\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Dichte (m/V)	ρ	$[\rho] = m/l^3$	kg/m^3
Energie	E	$[E] = m l^2/t^2$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$

schreiben hierfür $[d] = l$, wobei $[d]$ die Dimension des Abstands d bedeutet und l für die Dimension der Länge steht. Entsprechend bezeichnen t und m die Dimensionen der Zeit bzw. der Masse. Die Dimensionen verschiedener anderer Größen lassen sich durch diese Grunddimensionen ausdrücken. So ergibt sich der Flächeninhalt A einer Fläche, indem man eine Länge mit einer zweiten Länge multipliziert. Da der Flächeninhalt das Produkt zweier Längen ist, sagt man, er habe die Dimension „Länge mal Länge“ oder „Länge zum Quadrat“, was als $[A] = l^2$ geschrieben werden kann. In dieser Gleichung bedeuten $[A]$ die Dimension der Größe A und l die Dimension der Länge. Die Geschwindigkeit hat die Dimension Länge durch Zeit, l/t . Die Dimensionen anderer Größen wie Kraft oder Energie können durch die Dimensionen von Grundgrößen wie Länge, Zeit und Masse ausgedrückt werden.

Zwei physikalische Größen lassen sich nur dann sinnvoll addieren oder subtrahieren, wenn sie die gleiche Dimension besitzen. So ergibt es keinen Sinn, einen Flächeninhalt und eine Geschwindigkeit zu addieren. Bei einer Gleichung wie

$$A = B + C$$

müssen alle Größen, A , B und C , die gleiche Dimension besitzen. Außerdem erfordert die Addition von B und C , dass diese Größen die gleiche Einheit haben. Wenn B ein Flächeninhalt von 500 m^2 und C ein Flächeninhalt von 4 km^2 ist, muss entweder B in die Einheit von C umgerechnet werden oder umgekehrt, um die Summe zu ermitteln.

Oft entdeckt man Fehler in Gleichungen, indem man die Dimensionen oder Einheiten der Größen überprüft. Dieses Vorgehen heißt Dimensionsanalyse. Nehmen wir an, wir wollten irrtümlich die Formel $A = 2\pi r$ verwenden, um den Flächeninhalt eines Kreises zu berechnen. Da $2\pi r$ die Dimension einer Länge hat, während der Flächeninhalt die Dimension einer Länge zum Quadrat haben muss, sieht man sofort, dass diese Gleichung nicht richtig sein kann. In Beispiel 1.1 ist eine Dimensionsbeachtung für den Druck p ausgeführt.

Beispiel 1.1: Die Dimension des Drucks

Der Druck p in einer bewegten Flüssigkeit hängt von ihrer Dichte ρ und von ihrer Geschwindigkeit v ab. Gesucht ist eine einfache Kombination von Dichte und Geschwindigkeit, die die richtige Dimension des Drucks ergibt.

Problembeschreibung: Aus Tabelle 1.2 lässt sich ableSEN, dass der Druck die Dimension $m/(l t^2)$, die Dichte die Dimension m/l^3 und die Geschwindigkeit die Dimension l/t haben. Sowohl bei der Dimension des Drucks als auch bei der Dichte steht die Masse im Zähler. In der Geschwindigkeit kommt die Masse dagegen nicht vor. Daher müssen die Dichte und die Geschwindigkeit so multipliziert oder dividiert werden, dass in der Dimension des Drucks die Masse steht. Um den genauen Zusammenhang zu ermitteln, können wir zunächst die Dimension des Drucks durch die Dichte dividieren. Anschließend betrachten wir das Ergebnis, um zu sehen, wie daraus die Dimension einer Geschwindigkeit gebildet werden kann.

Lösung: 1. Dividieren Sie die Dimension des Drucks durch die Dichte, sodass ein Ausdruck entsteht, der die Dimension der Masse m nicht enthält:

$$\frac{[p]}{[\rho]} = \frac{m/(l t^2)}{m/l^3} = \frac{l^2}{t^2}$$

2. Wie man sieht, hat das Ergebnis die Dimension von v^2 . Damit hat der Druck die gleiche Dimension wie das Produkt aus Dichte und Geschwindigkeit zum Quadrat:

$$[p] = [\rho] [v^2] = \frac{m}{l^3} \left(\frac{l}{t} \right)^2 = \frac{m}{l^3} \cdot \frac{l^2}{t^2} = \boxed{\frac{m}{l t^2}}$$

Plausibilitätsprüfung: Division der Dimension des Drucks durch die Dimension des Geschwindigkeitsquadrats ergibt wieder die Dimension der Dichte:

$$[p]/[v^2] = (m/l t^2) / (l^2/t^2) = m/l^3 = [\rho].$$

Nur Größen gleicher Dimension und Einheit können miteinander verrechnet werden. Eine Dimensionsanalyse liefert nur eine Aussage darüber, ob die Dimensionen korrekt sind. Sie kann jedoch *nicht* entscheiden, ob der richtige Ausdruck bei einer Berechnung verwendet wird (beispielsweise ob der Flächeninhalt eines Kreises πr^2 oder $2\pi r^2$ ist).

1.4 Signifikante Stellen und Größenordnungen

Das Ergebnis einer Messung sollten immer der Messwert und der Messfehler Δx mit der Einheit [x] sein, wobei der Messfehler in Bezug auf einen statistisch ermittelten mittleren Messwert $\langle x \rangle$ (siehe Abschnitt 1.5) bezogen wird:

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x) [x].$$

Oft stellt man allerdings fest, dass nur der Messwert mit der Einheit angegeben wird, nicht aber der Messfehler. Dann liefert die Anzahl der verwendeten Stellen einen groben Hinweis darauf, wie groß die Unsicherheit in einer Messung ist. Wenn z. B. auf dem Etikett eines Tisches im Möbelgeschäft steht, dass er 2,50 m lang ist, bedeutet das meist, dass seine Länge ungefähr, aber nicht genau 2,50 m beträgt. Die letzte Ziffer, die 0, ist unsicher. Mithilfe eines Bandmaßes mit Millimeterteilung könnten wir die Länge vielleicht bis auf $\pm 0,6$ mm der tatsächlichen Länge genau messen. Diese Genauigkeit könnten wir angeben, indem wir die Länge mit vier Stellen als 2,503 m angeben. Jede zuverlässig bekannte Stelle mit Ausnahme der Nullen, die die Position des Kommas angeben, wird **signifikante Stelle** genannt. Die Zahl 2,50 besitzt drei signifikante Stellen, 2,503 dagegen vier. Die Zahl 0,001 30 besitzt drei signifikante Stellen; die ersten drei Nullen sind keine, da sie lediglich die Lage des Kommas zeigen. Die Zahl 2300,0 hat vier signifikante Stellen, während die Zahl 2300 (d. h. ohne das Komma) nur zwei, aber ebenso gut auch vier signifikante Stellen haben könnte. Die Anzahl signifikanter Stellen in Zahlen mit nachstehenden Nullen und ohne Komma ist unbestimmt.

Ein häufig vorkommender Fehler besteht darin, mehr Dezimalstellen anzugeben, als die Messgenauigkeit rechtfertigt. Stellen Sie sich vor, Sie möchten den Flächeninhalt eines kreisförmigen Spielfelds ermitteln. Hierzu schreiben Sie seinen Radius ab und erhalten 8 m. Anschließend verwenden Sie einen zehnstelligen Taschenrechner, mit dem Sie über die Formel $A = \pi r^2 = \pi(8\text{ m})^2$ den Flächeninhalt ermitteln. Sie erhalten 201,061 929 8 m². Die Nachkommastellen vermitteln einen völlig falschen Eindruck von der Genauigkeit, mit der Sie den Flächeninhalt bestimmt haben. Um in Rechnungen mit Multiplikations- und Divisionsoperationen die richtige Anzahl signifikanter Stellen zu ermitteln, ist die folgende allgemeine Faustregel nützlich:

Die Anzahl der signifikanten Stellen im Ergebnis einer Multiplikation oder Division ist nie größer als die der Größe mit den wenigsten signifikanten Stellen.

FAUSTREGEL FÜR SIGNIFIKANTE STELLEN

Im Beispiel des Spielfelds ist der Radius nur auf eine signifikante Stelle genau bekannt. Damit ist auch die Fläche nur mit einer signifikanten Stelle bekannt und beträgt 200 m². Diese Zahl besagt, dass die Fläche irgendwo zwischen 150 m² und 250 m² liegt.

1.4 Signifikante Stellen und Größenordnungen

Bei einer Summe oder Differenz mehrerer Messwerte ist die Genauigkeit nur so hoch wie die Genauigkeit des *ungenauesten* Messwerts. Eine allgemeine Faustregel besagt:

Die Anzahl der Dezimalstellen bei der Addition oder Subtraktion mehrerer Größen entspricht der des Terms mit der kleinsten Anzahl von Dezimalstellen.

FAUSTREGEL FÜR SIGNIFIKANTE STELLEN

Frage 1.1

Wie viele signifikante Stellen hat die Zahl 0,010 456 7?

!

Exakte Werte haben unendlich viele signifikante Stellen. Ein durch Abzählen bestimmter Wert wie etwa *zwei Tische* hat keine Unbestimmtheit und ist exakt. Da 1 m exakt gleich 100 cm ist, betrifft dies auch den Umrechnungsfaktor 1 m/100 cm.

!

Beim Rechnen mit Zahlen, die mit einer Unsicherheit behaftet sind, ist darauf zu achten, dass nicht mehr Stellen mitgeführt werden, als durch die Messung sichergestellt sind.

Beispiel 1.2 zeigt eine Anwendung dieser Faustregeln.

Beispiel 1.2: Signifikante Stellen

Subtrahieren Sie 1,040 von 1,213 42.

Problembeschreibung: Die erste Zahl, 1,040, besitzt nur drei signifikante Stellen nach dem Komma, wogegen die zweite, 1,213 42, fünf besitzt. Nach der oben genannten Faustregel für die Addition und Subtraktion kann die Differenz nur drei signifikante Stellen nach dem Komma besitzen.

Lösung: Subtrahieren Sie die Zahlen und runden Sie auf drei Stellen nach dem Komma:

$$1,213\,42 - 1,040 = 0,173\,\cancel{42} = \boxed{0,173}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis kann nicht genauer sein als die ungenauere der beiden Zahlen, also 1,040, und hat daher die gleiche Anzahl signifikanter Stellen nach dem Komma wie diese.

Weitergedacht: In diesem Beispiel haben die gegebenen Größen drei bzw. fünf signifikante Stellen nach dem Komma und damit vier bzw. sechs signifikante Stellen insgesamt. In den meisten Beispielen und Aufgaben in diesem Buch haben die Daten zwei, drei oder gelegentlich auch vier signifikante Stellen. ■

Übung 1.2: Berechnen Sie unter Verwendung der zutreffenden Faustregel für die signifikanten Stellen a) $1,58 \cdot 0,03$, b) $1,4 + 2,53$, c) $2,456 - 2,453$. ◀

Die Exponentialschreibweise

Beim Umgang mit sehr großen oder sehr kleinen Zahlen lassen sich signifikante Stellen leichter mithilfe der Exponentialschreibweise zum Ausdruck bringen. In dieser Schreibweise wird jede Zahl als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz (z. B. $10^2 = 100$ oder $10^3 = 1000$)

geschrieben. So wird beispielsweise die Zahl 12 000 000 als $1,2 \cdot 10^7$ ausgedrückt; die Entfernung von der Erde zur Sonne, etwa 150 000 000 000 m, schreibt man als $1,5 \cdot 10^{11}$ m. Dabei wird davon ausgegangen, dass keine der nachstehenden Nullen signifikant wären, könnte dies dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass $1,500 \cdot 10^{11}$ m geschrieben wird. Dabei ist die „1“ in 10^{11} der **Exponent**. Bei Zahlen kleiner als 1 ist dieser Exponent negativ. So ist $0,1 = 10^{-1}$ und $0,0001 = 10^{-4}$. Der Durchmesser eines Virus von ungefähr 0,000 000 01 m lautet dann $1 \cdot 10^{-8}$ m. Wenn die Zahlen in dieser Form geschrieben werden, kann die Anzahl signifikanter Stellen leicht abgelesen werden.

Vorgehensweise: Berechnungen in der Exponentialschreibweise

Wenn die in einer Berechnung vorkommenden Zahlen sehr groß oder sehr klein sind, werden sie zweckmäßig in der Exponentialschreibweise dargestellt. Diese ermöglicht oft eine leichtere Bestimmung der signifikanten Stellen und vereinfacht darüber hinaus die Berechnungen.

Lösung: Verwenden Sie bei der Lösung solcher Aufgabenstellungen die folgenden Regeln:

- Bei der Multiplikation von Zahlen in Exponentialschreibweise werden die Exponenten addiert; bei ihrer Division werden sie subtrahiert:

$$\text{Beispiel: } 10^2 \cdot 10^3 = 100 \cdot 1000 = 100000 = 10^5,$$

$$\text{Beispiel: } \frac{10^2}{10^3} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} = 10^{-1}.$$

- In der Exponentialschreibweise ist 10^0 definitionsgemäß 1. Zur Begründung betrachten wir die Division von 1000 durch 1000:

$$\text{Beispiel: } \frac{1000}{1000} = \frac{10^3}{10^3} = 10^{3-3} = 10^0 = 1.$$

- Bei der Addition oder Subtraktion von Zahlen in Exponentialschreibweise muss man achtgeben, wenn ihre Exponenten nicht übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } & (1,200 \cdot 10^2) + (8 \cdot 10^{-1}) \\ & = 120,0 + 0,8 = 120,8. \end{aligned}$$

- Um die Summe zu ermitteln, ohne beide Zahlen in gewöhnliche Dezimalzahlen umzurechnen, muss eine der Zahlen so umgewandelt werden, dass die Zehnerpotenzen beider Zahlen übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } & (1200 \cdot 10^{-1}) + (8 \cdot 10^{-1}) \\ & = 1208 \cdot 10^{-1} = 120,8. \end{aligned}$$

- Beim Potenzieren einer Zehnerpotenz werden die Exponenten multipliziert:

$$\text{Beispiel: } (10^2)^4 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^8.$$

Plausibilitätsprüfung: Beachten Sie, dass der Exponent nach der Umrechnung von Zahlen kleiner als eins in die Exponentialschreibweise negativ ist. Bei jeder Addition, Subtraktion oder Multiplikation von Exponenten ist besonders achtzugeben – das Ergebnis wird sonst um ganze Zehnerpotenzen zu groß oder zu klein.

Weitergedacht: Geben Sie bei Berechnungen keine Zwischenergebnisse von Hand mit der Tastatur ein. Speichern Sie diese stattdessen im Speicher des Rechners. Wenn es sich dennoch nicht vermeiden lässt, sollten Sie eine oder zwei zusätzliche (nicht signifikante) Ziffern als sogenannte *Schutzziffern* eingeben. Dadurch werden Rundungsfehler klein gehalten.

werden. So besitzt die Zahl $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ zwei signifikante Stellen (nämlich 1,5).

Übung 1.3: Wenden Sie die passende Faustregel für signifikante Stellen auf die Berechnung von $2,34 \cdot 10^2 + 4,93$ an. ◀

Bei Berechnungen mit Zahlen in der Exponentialschreibweise hat sich folgende Vorgehensweise bewährt:

!

Alle Exponenten sind dimensionslos und haben keine Maßeinheiten.

Die Beispiele 1.3 und 1.4 zeigen, wie sich Berechnungen anhand der Exponentialschreibweise vorteilhaft ausführen lassen.

Beispiel 1.3: Wasser im Bauch

Ein Liter (l) ist das Volumen eines Würfels mit einer Kantenlänge von 10 cm mal 10 cm mal 10 cm. Sie trinken (genau) 1 l Wasser. Welches Volumen in Kubikzentimetern und in Kubikmetern nimmt dieses Wasser in Ihrem Magen ein?

Problembeschreibung: Das Volumen eines Würfels der Kantenlänge a ist $V = a^3$. Das Volumen in Kubikzentimetern ergibt sich direkt aus $a = 10 \text{ cm}$. Um das Volumen in Kubikmetern zu ermitteln, werden mit dem Umrechnungsfaktor $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ die cm^3 in m^3 umgerechnet.

Lösung: 1. Berechnen Sie das Volumen in cm^3 :

$$V = a^3 = (10 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3 = [10^3 \text{ cm}^3]$$

2. Wandeln Sie dieses Ergebnis in m^3 um:

$$\begin{aligned} 10^3 \text{ cm}^3 &= (10^3 \text{ cm}^3) \cdot \left(\frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ cm}} \right)^3 \\ &= (10^3 \text{ cm}^3) \cdot \left(\frac{10^{-6} \text{ m}^3}{1 \text{ cm}^3} \right) = [10^{-3} \text{ m}^3] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie es bei einem Volumen mit der Dimension einer Länge hoch drei sein sollte, sind die Maßeinheiten der Ergebnisse Kubikzentimeter bzw. Kubikmeter. Außerdem ist die Maßzahl 10^3 größer als 10^{-3} , da 1 m länger als 1 cm ist. ■

Beispiel 1.4: Atome zählen

12,0 g Kohlenstoff enthalten $6,02 \cdot 10^{23}$ Kohlenstoffatome (dies ist die Avogadro-Konstante n_A). Wie viele Jahre würden Sie benötigen, um die Atome in 1,00 g

1.4 Signifikante Stellen und Größenordnungen

Kohlenstoff zu zählen, wenn es 1 s dauert, ein Atom zu zählen?

Problembeschreibung: Zuerst muss die Gesamtzahl der zuzählenden Atome n berechnet werden. Anschließend wird die Tatsache ausgenutzt, dass diese Zahl gleich der Zählrate R mal der Zeit t ist.

Lösung: 1. Die Zeit zum Zählen steht mit der Anzahl der Atome n und der Zählrate $R = 1 \text{ Atom/s}$ in folgendem Zusammenhang:

$$n = R t$$

2. Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Kohlenstoffatome in 1,00 g:

$$n = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ Atome}}{12,0 \text{ g}} \cdot (1 \text{ g}) = 5,02 \cdot 10^{22} \text{ Atome}$$

3. Ermitteln Sie nun die Anzahl der Sekunden, die es bei 1 Atom pro Sekunde dauert, diese Menge zu zählen:

$$t = \frac{n}{R} = \frac{5,02 \cdot 10^{22} \text{ Atome}}{1 \text{ Atom} \cdot \text{s}^{-1}} = 5,02 \cdot 10^{22} \text{ s}$$

4. Berechnen Sie die Anzahl k der Sekunden in einem Jahr ($a = \text{Jahre}$, $d = \text{Tage}$, $h = \text{Stunden}$):

$$k = \left(\frac{365 d}{1,00 a} \right) \cdot \left(\frac{24 h}{1 d} \right) \cdot \left(\frac{3600 s}{1 h} \right) = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \cdot a^{-1}$$

5. Nutzen Sie den auf diese Weise gewonnenen Umrechnungsfaktor von $3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \cdot a^{-1}$ (den Sie sich für spätere Aufgaben merken sollten), um das Ergebnis aus Schritt 3 in Jahre umzurechnen:

$$\begin{aligned} t &= (5,02 \cdot 10^{22} \text{ s}) \cdot \frac{1,00 a}{3,15 \cdot 10^7 \text{ s}} \\ &= \frac{5,02}{3,15} \cdot 10^{22-7} a = [1,59 \cdot 10^{15} \text{ a}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis kann anhand einer Schätzung überprüft werden. Wenn es etwa 10^{22} s dauert, die Atome in 1 g Kohlenstoff zu zählen und ein Jahr etwa 10^7 s hat, braucht man $10^{22}/10^7 = 10^{15}$ Jahre.

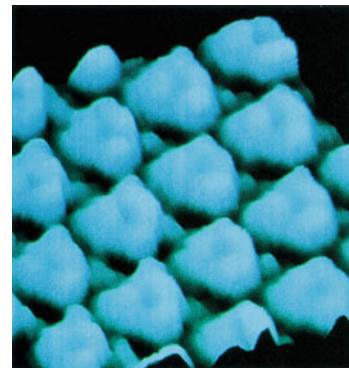
Weitergedacht: Die Zeit, die Sie benötigen würden, entspricht dem 100 000-fachen des Alters unseres Universums. ■

Übung 1.4: Wie lange brauchen 5 Milliarden Menschen, um die Atome in 1 g Kohlenstoff zu zählen? ◀

1 Physikalische Größen und Messungen

Tabelle 1.3 Größenordnungen im Universum.

Länge oder Größe	(m)
Protonradius	10^{-15}
Atomradius	10^{-10}
Virus	10^{-7}
Riesenamöbe	10^{-4}
Walnuss	10^{-2}
Mensch	10^0
Höchster Berg	10^4
Erde	10^7
Sonne	10^9
Abstand Erde–Sonne	10^{11}
Sonnensystem	10^{13}
Abstand zum nächsten Stern	10^{16}
Milchstraße/Galaxis	10^{21}
Sichtbares Universum	10^{26}
Massen	(kg)
Elektron	10^{-30}
Proton	10^{-27}
Aminosäure	10^{-25}
Hämoglobin	10^{-22}
Grippevirus	10^{-19}
Riesenamöbe	10^{-8}
Regentropfen	10^{-6}
Ameise	10^{-2}
Mensch	10^2
Saturn-V-Rakete	10^6
Pyramide	10^{10}
Erde	10^{24}
Sonne	10^{30}
Milchstraße/Galaxis	10^{41}
Universum	10^{52}
Zeitintervall	(s)
Licht durchquert den Atomkern	10^{-23}
Schwingungsperiode des sichtbaren Lichts	10^{-15}
Schwingungsperiode von Mikrowellenstrahlung	10^{-10}
Halbwertszeit eines Myons	10^{-6}
Schwingungsperiode der höchsten noch hörbaren Töne	10^{-4}
Periode des menschlichen Herzschlags	10^0
Halbwertszeit freier Neutronen	10^3
Umdrehungszeit der Erdrotation	10^5
Umlaufzeit der Erde um die Sonne	10^7
Lebensdauer eines Menschen	10^9
Halbwertszeit von Plutonium-239	10^{12}
Lebenszeit eines Gebirges	10^{15}
Alter der Erde	10^{17}
Alter des Universums	10^{18}



Benzolmoleküle mit einem Durchmesser in der Größenordnung von 10^{-10} m in einem Rasterelektronenmikroskop. (© IBM Research, Almaden Research Center.)



Der Durchmesser der Andromeda-Galaxie liegt in der Größenordnung von 10^{21} m. (© NASA.)

Größenordnungen

Bei groben Schätzungen werden wir gelegentlich eine Zahl auf die nächste Zehnerpotenz runden. Eine derart gerundete Zahl heißt **Größenordnung**. So könnte die Größe einer Ameise beispielsweise $8 \cdot 10^{-4}$ m oder näherungsweise 10^{-3} m betragen. Wir würden dann sagen, dass die Größe der Ameise in der Größenordnung von 10^{-3} m liegt. Auch wenn die meisten Menschen fast 2 m groß sind, können wir dies runden und sagen, dass die Größe eines Menschen $h \sim 10^0$ m beträgt, wobei das Zeichen \sim „liegt in der Größenordnung von“ bedeutet. $h \sim 10^0$ m heißt nicht, dass die übliche Größe eines Menschen 1 m beträgt, sondern dass sie näher bei 1 m als bei 10 m oder 10^{-1} m = 0,1 m liegt. Damit stellen wir fest: Ein typischer Mensch ist um drei Größenordnungen größer als eine typische Ameise, d.h., ihr Größenverhältnis beträgt 1000 : 1. Eine Größenordnung besitzt keine zuverlässig bekannten Stellen und damit auch keine signifikanten Stellen. Tabelle 1.3 zeigt einige typische Größenordnungen für Größen, Massen und Zeitintervalle, denen man in der Physik begegnet.

Die Beispiele 1.5 und 1.6 zeigen, wie ohne viel Rechenaufwand Aussagen über Größenordnungen möglich sind.

Beispiel 1.5: Reifenabrieb

Wie dick ist die Gummiprofilschicht, die während einer 1 km langen Autofahrt durchschnittlich von einem Autoreifen abgerieben wird?



(© GLP/Pitopia.)

Problembeschreibung: Wir gehen davon aus, dass ein neuer Reifen eine Ausgangsprofiltiefe von 1 cm besitzt. Dieser Schätzwert ist etwas zu hoch, da Profiltiefen von 8–5 mm üblich sind, genügt jedoch für die Lösung dieser Aufgabe. Da Autoreifen nach ca. 60 000 km gewechselt werden müssen, nehmen wir an, dass das Profil nach 60 000 km abgefahren ist.

Lösung: Verwenden Sie den Abrieb von 1 cm auf 60 000 km, um den Abrieb nach 1 km Fahrt zu berechnen:

$$\frac{1 \text{ cm Abrieb}}{60\,000 \text{ km Fahrt}} = \frac{1,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm Abrieb}}{1 \text{ km Fahrt}}$$

$$\approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ m Abrieb pro km Fahrt}$$

Plausibilitätsprüfung: Multiplikation von $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm/km}$ mit 60 000 km ergibt näherungsweise 1 cm, also die Dicke des Ausgangsprofils auf einem neuen Reifen.

Weitergedacht: Atome haben einen Durchmesser von etwa $2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Damit nimmt die Dicke bei jedem gefahrenen Kilometer um 1000 Atomlagen ab. ■

Beispiel 1.6: Sandkörner am Strand

Schätzen Sie die Anzahl der Sandkörner an einem Strand.

Problembeschreibung: Zunächst muss man Schätzwerte für die Größe des Strands und für die Größe jedes

1.4 Signifikante Stellen und Größenordnungen

Sandkorns annehmen. Wir betrachten einen Strand, der 500 m lang, 100 m breit und 3 m tief ist. Eine Suche im Internet ergibt, dass der Durchmesser eines Sandkorns zwischen 0,04 mm und 2 mm schwankt. Damit können wir ein Sandkorn als eine Kugel mit einem Durchmesser von 1 mm behandeln. Weiterhin nehmen wir an, dass die Sandkörner so dicht gepackt sind, dass das Volumen des Zwischenraums zwischen ihnen im Vergleich zum Volumen des Sandkorns selbst vernachlässigbar ist.

Lösung: 1. Das Volumen V_S des Strands ist das Produkt aus der Anzahl n der Sandkörner und dem Volumen V_K eines Korns:

$$V_S = n V_K$$

2. Die Formel für das Kugelvolumen liefert das Volumen eines einzelnen Sandkorns:

$$V_K = \frac{4}{3} \pi r^3$$

3. Dies können Sie einsetzen und die Formel anschließend nach n umstellen. Da die Zahlenwerte der Aufgabenstellung nur eine signifikante Stelle haben, trifft dies auch auf das Ergebnis zu:

$$V_S = n V_K = n \frac{4}{3} \pi r^3$$

und damit

$$n = \frac{3 V_S}{4 \pi r^3} = \frac{3 \cdot (500 \text{ m}) \cdot (100 \text{ m}) \cdot (3 \text{ m})}{4 \pi (0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^3}$$

$$= 2,9 \cdot 10^{14} \approx 3 \cdot 10^{14}$$

Plausibilitätsprüfung: Um das Ergebnis zu überprüfen, kann man das Volumen des Strands durch die Anzahl der Sandkörner dividieren. Dies ergibt $1,5 \cdot 10^5 \text{ m}^3 / 3 \cdot 10^{14} \text{ Sandkörner} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 / \text{Sandkorn}$. Dieser Wert ist das geschätzte Volumen eines Sandkorns, $4/3 \pi (5 \cdot 10^{-4} \text{ m})^3$.

Weitergedacht: Das Volumen des Zwischenraums zwischen den Körnern lässt sich ermitteln, indem man einen 1-l-Behälter zunächst mit trockenem Sand füllt und anschließend langsam Wasser hineingießt, bis der Sand mit Wasser gesättigt ist. Wenn wir einmal davon ausgehen, dass der Sand in dem Behälter nach der Zugabe von 1/101 Wasser vollständig gesättigt ist, beträgt das tatsächlich mit Sand gefüllte Volumen nur 9/10 l. Damit ist unser Schätzwert der Anzahl der Sandkörner am Strand zu hoch. Wenn der Sand nur 90 % des Volumens des Behälters einnimmt, beträgt die Anzahl der Sandkörner am Strand auch nur 90 % des Ergebnisses aus Schritt 3. ■

Übung 1.5: Wie viele Sandkörner befinden sich in einem 2 km langen, 500 m breiten und 3,00 m tiefen Sandstreifen? Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein Sandkorn einen Durchmesser von 1,00 mm hat. ◀

1.5 Messgenauigkeit und Messfehler

Viele Zahlen, mit denen wir es in der Wissenschaft zu tun haben, sind das Resultat einer Messung und damit nur bis zu einer bestimmten Messgenauigkeit bekannt. Das Ausmaß der Ungenauigkeit hängt sowohl von der Geschicklichkeit des Experimentators als auch von dem verwendeten Apparat ab und kann häufig nur geschätzt werden. Wir wollen uns hier etwas eingehender mit dem Messvorgang und den möglichen Ursachen für Messfehler beschäftigen.

Das Ergebnis einer Messung entsteht durch den Vergleich der zu messenden Größe mit der zugehörigen Maßeinheit. Die Messung selbst ist naturgemäß immer mit Fehlern verbunden. Daran ändert der verstärkte Einsatz der Elektronik bei der Aufnahme, Umwandlung und Verarbeitung von Messwerten auch nichts – er führt lediglich zu einer deutlichen Erhöhung der Messgenauigkeit und reduziert häufig das Auftreten einfacher Ablesefehler. Messungen sind daher immer fehlerbehaftet. Wir unterscheiden prinzipiell zwischen zwei verschiedenen Arten von Fehlern: systematischen Fehlern und statistischen Fehlern.

Systematische Fehler zeichnen sich dadurch aus, dass sie bei wiederholten Messungen unter gleichen Bedingungen in gleicher Weise auftreten. Es gibt viele Ursachen für derartige Fehler, etwa ein unvollkommenes Messgerät oder eine mangelhafte Kalibrierung der Geräte. Häufig gelingt es, durch Kontrollmessungen den Anteil der systematischen Fehler zu bestimmen und die Werte der darauf folgenden Messungen entsprechend zu korrigieren. Das bedeutet, systematische Fehler können im Prinzip durch eine Verbesserung des Messverfahrens reduziert bzw. vermieden werden.

Statistische Fehler werden verursacht durch unkontrollierbare äußere Einflüsse auf das Messverfahren. Sie machen sich dadurch bemerkbar, dass sich der Messwert bei jeder Wiederholung der Messung etwas von den Messwerten aller vorangegangenen Messungen unterscheidet, d. h., der Messwert unterliegt statistischen Schwankungen. Die daraus resultierende Messwertverteilung ergibt sich aus den allgemeinen Aussagen der mathematischen Statistik, die wir jetzt anhand einiger einfacher Beispiele aus der täglichen Erfahrung diskutieren wollen. Nehmen wir an, ein Professor hat in seinem Kurs mit n Studenten eine Klausur schreiben lassen. Maximal konnten 25 Punkte erreicht werden. Um das Gesamtergebnis zu beschreiben, könnte der Professor den Durchschnitt aller erreichten Punktzahlen angeben. Das wäre jedoch wenig aussagekräftig, denn bei einem Mittelwert von beispielsweise 12,5 Punkten könnte in einem Extremfall jeder Student 12,5 Punkte erreicht haben, im anderen Extremfall die eine Hälfte der Studenten null Punkte und die andere Hälfte 25 Punkte. Viel besser ist es daher, der Professor gibt

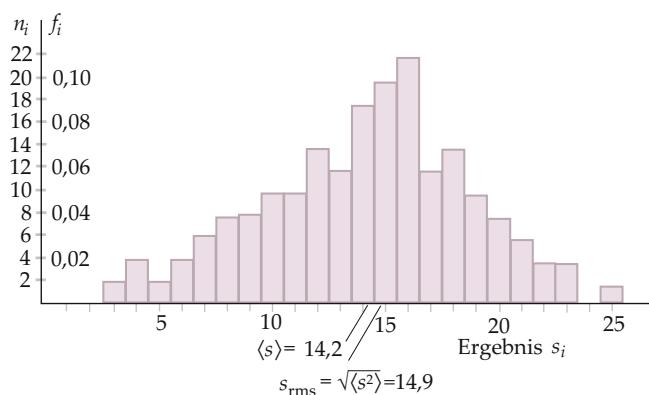


Abbildung 1.2 Eine mögliche Verteilung der Klausurergebnisse von $n = 200$ Studenten, wobei maximal 25 Punkte erreicht werden konnten. n_i ist die Anzahl der Studenten mit dem jeweiligen Klausurergebnis s_i , und $f_i = n_i/n$ ist der Anteil der Studenten mit dem Ergebnis s_i . Am wahrscheinlichsten ist ein Ergebnis von 16 Punkten.

für jedes Ergebnis s_i jeweils die Anzahl n_i der Studenten an, die dieses Ergebnis erzielt haben (Abbildung 1.2). Alternativ könnte er auch jeweils den Anteil $f_i = n_i/n$ der Studenten mit dem Ergebnis s_i angeben. Sowohl n_i als auch f_i , die Funktionen der Variablen s sind, nennt man dabei **Verteilungsfunktionen**. Oft ist es günstiger, die Form mit der Angabe des Anteils zu verwenden. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendeiner der insgesamt n Studenten das Ergebnis s_i erzielt hat, ist gleich der Anzahl n_i der Studenten mit diesem Ergebnis, dividiert durch die Gesamtzahl n der Studenten. Diese Wahrscheinlichkeit ist gleich f_i . Dabei gilt

$$\sum_i f_i = \sum_i \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_i n_i. \quad (1.1)$$

Wegen $\sum n_i = n$ ist dabei

$$\sum_i f_i = 1. \quad (1.2)$$

DEFINITION DER NORMIERUNGSBEDINGUNG

Das ist die **Normierungsbedingung** für Verteilungen, die als Anteile angegeben werden.

Um den Mittelwert der Ergebnisse aller Studenten zu ermitteln, sind sämtliche Ergebnisse zu addieren und die Summe ist durch n zu dividieren. Jedes Ergebnis s_i wurde von $n_i = n f_i$ Studenten erzielt, was gleichbedeutend ist mit

$$\langle s \rangle = \frac{1}{n} \sum_i n_i s_i = \sum_i s_i f_i. \quad (1.3)$$

In ähnlicher Weise ist der Mittelwert einer beliebigen Funktion $g(s)$ definiert durch

$$\langle g(s) \rangle = \frac{1}{n} \sum_i g(s_i) n_i = \sum_i g(s_i) f_i. \quad (1.4)$$

MITTELWERT VON $g(s)$

Das Quadrat des durchschnittlichen Ergebnisses im Beispiel mit der Klausur ist

$$\langle s^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_i s_i^2 n_i = \sum_i s_i^2 f_i. \quad (1.5)$$

Die Größe $\langle s^2 \rangle$ heißt **mittleres Ergebnisquadrat** und die Wurzel daraus **quadratisch gemitteltes Ergebnis**:

$$s_{\text{rms}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}. \quad (1.6)$$

DEFINITION DES QUADRATISCH GEMITTELTELEN ERGEBNISSES VON s

Eine mögliche Verteilung der Klausurergebnisse ist in Abbildung 1.2 dargestellt. Bei dieser Verteilung beträgt das wahrscheinlichste (also von den meisten Studenten erreichte) Ergebnis 16 Punkte, das mittlere Ergebnis 14,2 Punkte und das quadratisch gemittelte Ergebnis 14,9 Punkte. Beispiel 1.7 zeigt die praktische Berechnung des Mittelwerts und des quadratisch gemittelten Ergebnisses anhand solcher Klausurergebnisse.

Beispiel 1.7: Klausurergebnisse

15 Schüler schrieben eine Klausur, bei der maximal 25 Punkte zu erreichen waren. Ihre Ergebnisse sind folgende: 25, 22, 22, 20, 20, 20, 18, 18, 18, 18, 18, 15, 15, 15 bzw. 10 Punkte. Wie lauten das mittlere Ergebnis $\langle s \rangle$ und das quadratisch gemittelte Ergebnis s_{rms} ?

Problembeschreibung: Die Verteilungsfunktion ist hier gegeben durch $n_{25} = 1, n_{22} = 2, n_{20} = 3, n_{18} = 5, n_{15} = 3$ und $n_{10} = 1$. Zum Ermitteln von s_{rms} ist $\langle s \rangle = n^{-1} \sum_i n_i s_i$ (Gleichung 1.3) zu verwenden. Um das quadratisch gemittelte Ergebnis zu erhalten, verwenden wir $\langle s^2 \rangle = n^{-1} \sum_i s_i^2 n_i$ (Gleichung 1.5) und ziehen anschließend die Wurzel.

Lösung: 1. Nach Definition ist:

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \frac{1}{n} \sum_i n_i s_i \\ &= \frac{1}{15} ((1 \cdot 25) + (2 \cdot 22) + (3 \cdot 20) \\ &\quad + (5 \cdot 18) + (3 \cdot 15) + (1 \cdot 10)) \\ &= \frac{1}{15} \cdot 274 = 18,27 = \boxed{18,3} \end{aligned}$$

1.5 Messgenauigkeit und Messfehler

2. Zum Berechnen von s_{rms} ermitteln wir zunächst den Mittelwert von s^2 :

$$\begin{aligned} \langle s^2 \rangle &= \frac{1}{n} \sum_i n_i s_i^2 \\ &= \frac{1}{15} ((1 \cdot 25^2) + (2 \cdot 22^2) + (3 \cdot 20^2) \\ &\quad + (5 \cdot 18^2) + (3 \cdot 15^2) + (1 \cdot 10^2)) \\ &= \frac{1}{15} \cdot 5188 = 345,9 \end{aligned}$$

3. Wir ziehen nun die Wurzel aus $\langle s^2 \rangle$:

$$s_{\text{rms}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \boxed{18,6}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Mittelwert und das quadratisch gemittelte Ergebnis unterscheiden sich nur um 1–2 %. Außerdem ist das quadratisch gemittelte Ergebnis größer als der Mittelwert. Wir werden später wieder darauf zurückkommen und erläutern, weshalb das quadratisch gemittelte Ergebnis stets größer oder gleich dem Mittelwert ist. ■

Jetzt betrachten wir eine kontinuierliche Verteilung. Als Beispiel soll dabei die Verteilung der Körpergröße in der Bevölkerung dienen. Unter n Personen (wobei die Anzahl n endlich ist) hat niemand eine Größe von *exakt* 2 m. Angenommen, wir könnten die Körpergröße beliebig genau messen; dann gäbe es unendlich viele verschiedene Körpergrößen, und die Wahrscheinlichkeit wäre praktisch null, dass jemand ganz genau eine bestimmte Größe hat. Daher unterteilen wir die Körpergröße in gleich große Intervalle Δh , wobei Δh beispielsweise 1 cm oder 0,5 cm groß sein kann. Dann ermitteln wir den Anteil der Personen, deren Körpergröße im betreffenden Intervall liegt. Bei einer sehr großen Gesamtzahl n von Personen ist dieser Anteil proportional zur Größe des Intervalls, sofern dieses ausreichend klein ist. Wir definieren nun die Verteilungsfunktion $f(h)$ als den Anteil aller Personen, deren Körpergröße zwischen h und $h + \Delta h$ liegt. Bei insgesamt n Personen ist $n f(h) \Delta h$ die Anzahl der Personen mit einer Körpergröße zwischen h und $h + \Delta h$. Abbildung 1.3 zeigt die Verteilungsfunktion der Größen für den Fall, dass die Größen allein statistische Schwankungen aufweisen.

Der Anteil der Personen mit einer Größe, die in einem bestimmten Intervall Δh liegt, ist gleich der Fläche $f(h) \Delta h$. Wenn n sehr groß ist, können wir Δh sehr klein wählen, und das Histogramm nähert sich einer glatten Kurve an. Dann können wir die Verteilungsfunktion $f(h)$ durch eine kontinuierliche Funktion ersetzen. Diese kontinuierliche Verteilungsfunktion tritt sehr häufig in der Physik auf, z. B. bei der Verteilung der Geschwindigkeiten von Molekülen in einem Gasvolumen. Sie ist glockenförmig (Abbildung 1.4) und wird **Normal-** oder **Gauß-**

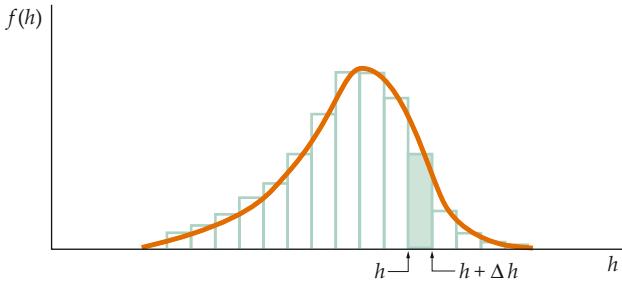


Abbildung 1.3 Eine mögliche Verteilung von Körpergrößen. Der Anteil der Personen mit einer Größe zwischen h und $h + \Delta h$ entspricht der farbigen Fläche $f(h) \Delta h$. Das Histogramm kann bei kleiner Intervallgröße, wie angedeutet, durch eine glatte Kurve angenähert werden.

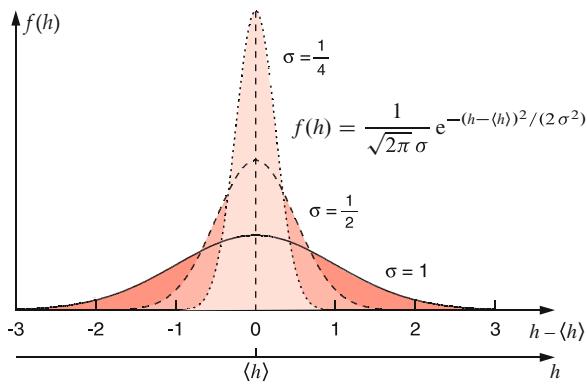


Abbildung 1.4 Beispiel für eine Gauß-Verteilung.

Verteilung genannt. Ihre mathematische Form lautet

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(h-\langle h \rangle)^2/(2\sigma^2)}. \quad (1.7)$$

Sie ist daher symmetrisch um den Wert $h = \langle h \rangle$. Lässt sich die Messwertverteilung der Körpergrößen mithilfe einer Normalverteilung beschreiben, können wir die Summen in Gleichung 1.1 bis 1.5 durch **Integrale** ersetzen und für das Intervall dh schreiben. Für diesen Grenzfall gilt:

$$\int f(h) dh = 1, \quad (1.8)$$

NORMIERUNGSBEDINGUNG

$$\langle h \rangle = \int h f(h) dh, \quad (1.9)$$

$$\langle g(h) \rangle = \int g(h) f(h) dh. \quad (1.10)$$

MITTELWERT VON $g(h)$

Darin ist $g(h)$ eine beliebige Funktion von h , und es folgt

$$\langle h^2 \rangle = \int h^2 f(h) dh. \quad (1.11)$$

Mit der kontinuierlichen Verteilungsfunktion ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich herausgegriffene Person eine Körpergröße zwischen h und $h + dh$ hat, gegeben durch $f(h) dh$ integriert zwischen h und $h + dh$.

Wir wollen jetzt wieder zu unserem Problem der Verteilung von Messwerten x zurückkehren, von denen wir annehmen können, dass sie normalverteilt sind. Die Größe, die die Breite der Normalverteilung $f(x)$ charakterisiert, ist die **Varianz** σ^2 , die folgendermaßen definiert ist:

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle. \quad (1.12a)$$

Ausmultiplizieren des Quadrats auf der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle x^2 - 2x \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle \\ &= \langle x^2 \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \end{aligned}$$

Als Fehler einer Messung ergibt sich die Quadratwurzel σ aus der Varianz, die man als **Standardabweichung** bezeichnet. Für sie gilt

$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (1.12b)$$

STANDARDABWEICHUNG σ

Die Standardabweichung einer Verteilung ist ein Maß dafür, wie weit die einzelnen Messwerte um den Mittelwert „gespreizt“ sind. Bei vielen Verteilungen liegen nur wenige Werte vor, die von $\langle x \rangle$ um ein Mehrfaches von σ abweichen.

In Beispiel 1.7 haben wir gesehen, dass das quadratisch gemittelte Ergebnis größer als der Mittelwert war. Dies ist ein allgemeines Merkmal aller Verteilungen (es sei denn, die Werte sind alle gleich, sodass $\sigma = 0$ und $x_{rms} = \langle x \rangle$ ist). Anhand der Definition des quadratisch gemittelten Ergebnisses (Gleichung 1.6) ist $x_{rms}^2 = \langle x^2 \rangle$. Einsetzen von x_{rms}^2 für $\langle x^2 \rangle$ in Gleichung 1.12b ergibt

$$\sigma^2 = x_{rms}^2 - \langle x \rangle^2.$$

Da sowohl σ^2 als auch x_{rms} stets positiv sind, muss x_{rms} immer größer als $|\langle x \rangle|$ sein.

Im Fall der Normalverteilung liegen 68,3 % aller Werte innerhalb des Intervalls $\langle x \rangle \pm \sigma$, 95,5 % liegen innerhalb des Intervalls $\langle x \rangle \pm 2\sigma$, und 99,7 % liegen innerhalb des Intervalls $\langle x \rangle \pm 3\sigma$.

Messwertverteilungen Bei der n -maligen Wiederholung der selben Messung einer beliebigen physikalischen Größe ergeben sich n Messwerte x_1, x_2, \dots, x_n , die man auch als **Stichprobe vom Umfang n** bezeichnet. Da der wahre Wert der physikalischen Größe im Allgemeinen unbekannt bleibt, berechnet man nun das arithmetische Mittel

1.5 Messgenauigkeit und Messfehler

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \quad (1.13)$$

ARITHMETISCHES MITTEL

der Stichprobenmessungen. Der so berechnete Mittelwert $\langle x \rangle$ stellt die unter den Umständen beste Schätzung des wahren Werts der physikalischen Größe dar. Für größer werdende n nähert sich der Mittelwert aus Gleichung 1.13 dem wahren Wert der Messgröße, unter der Annahme, dass die Fehler rein statistischer Natur sind und alle systematischen Fehler korrigiert wurden.

Wie gut die Annäherung des Mittelwerts an den wahren Wert ist, kann man aus der Breite der Verteilung ablesen, die durch die Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (1.14)$$

STANDARDABWEICHUNG σ (DER EINZELMESSUNG)

gegeben ist. Sie ist ein Schätzwert für den Fehler, mit dem jede Einzelmessung der Stichprobe behaftet ist. Die Herleitung von Gleichung 1.14 erfolgt mithilfe der mittleren quadratischen Abweichung der Einzelmessungen (Gleichung 1.5) vom Mittelwert $\langle x \rangle$ – einer Größe, die im Gegensatz zur Abweichung der Einzelmessung vom wahren Wert bekannt ist.

Um den Messfehler der gesamten Stichprobe zu charakterisieren, benutzt man die sogenannte **Standardabweichung des Mittelwerts** (oft auch **mittlerer Fehler des Mittelwerts** genannt):

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (1.15)$$

STANDARDABWEICHUNG DES MITTELWERTS

Sie ist im Allgemeinen kleiner als die Standardabweichung der Einzelmessung, da n stets eine natürliche Zahl größer eins ist.

Beispiel 1.8: Pendelschwingungen

Sie beobachten, wie das Pendel einer Pendeluhr hin und her schwingt und stoppen mit Ihrer Digitalarmbanduhr die Zeit, die das Pendel benötigt, um von einer Seite auf die andere und wieder zurück zu schwingen. Nach zehn Messungen der Schwingungsdauer erhalten Sie folgende Werte: $T_1 = 2,05 \text{ s}$, $T_2 = 1,99 \text{ s}$, $T_3 = 2,06 \text{ s}$, $T_4 = 1,97 \text{ s}$, $T_5 = 2,01 \text{ s}$, $T_6 = 2,00 \text{ s}$, $T_7 = 2,03 \text{ s}$, $T_8 = 1,97 \text{ s}$, $T_9 = 2,02 \text{ s}$, $T_{10} = 1,96 \text{ s}$. Wie groß ist die mittlere Schwingungsdauer $\langle T \rangle$, die Standardabweichung σ_T und die Standardabweichung des Mittelwerts ΔT ?

Problembeschreibung: Es handelt sich hier um eine Stichprobe vom Umfang 10. Zur Berechnung des Mittelwerts der Schwingungsdauer für diese Stichprobe ist Gleichung 1.13 zu verwenden. Anschließend berechnet man die Standardabweichung nach Gleichung 1.14 und den mittleren Fehler des Mittelwerts nach Gleichung 1.15.

Lösung: 1. Nach Definition (Gleichung 1.13) ist:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{1}{n} \sum_i T_i = \\ &= \frac{1}{10} (2,05 + 1,99 + 2,06 + 1,97 + 2,01 + 2,00 \\ &\quad + 2,03 + 1,97 + 2,02 + 1,96) \text{ s} \\ &= \frac{1}{10} \cdot 20,06 \text{ s} = 2,006 \text{ s} = \boxed{2,01 \text{ s}} \end{aligned}$$

2. Zum Berechnen der Standardabweichung benutzen wir den Mittelwert aus Schritt 1. Einsetzen in Gleichung 1.14 ergibt:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^n (T_i - 2,01 \text{ s})^2} = \boxed{0,03 \text{ s}}$$

3. Analog zu Schritt 2 lässt sich die Standardabweichung des Mittelwerts mit Gleichung 1.15 berechnen:

$$\Delta T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} = \boxed{0,01 \text{ s}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Standardabweichung des Mittelwerts ΔT ist kleiner als die Standardabweichung der Einzelmessung σ_T . ■

Fehlerfortpflanzung Oft besteht ein Experiment aus der Messung mehrerer Größen, deren Messwerte X_1, X_2, \dots, X_m in eine Formel eingesetzt werden, die zu einem Ergebnis Y führt:

$$Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_m).$$

Da alle Messwerte fehlerbehaftet sind, stellt sich die Frage, wie die Fehler der Messwerte X_j in den Fehler des Ergebnisses Y eingehen. Während sich systematische Fehler im schlimmsten Fall aufaddieren, können wir bei statistischen Fehlern davon ausgehen, dass sie sich zum Teil gegenseitig aufheben. Der Messfehler des Ergebnisses ΔY lässt sich nach dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß** wie folgt über die Messfehler der

einzelnen Größen berechnen:

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y}{\partial X_j} \Delta X_j \right)^2}. \quad (1.16)$$

Dabei ist $\partial Y / \partial X_j$ die (partielle) Ableitung der Größe Y nach der Größe X_j . Auf den Begriff der Ableitung gehen wir im Anhang näher ein.

Beispiel 1.9: Fehlerfortpflanzung

Gegeben ist die Formel für die Zentripetalbeschleunigung bei einer Kreisbewegung als

$$a_{ZP} = -\frac{v^2}{r}.$$

Wie lautet die Formel für die Standardabweichung der Zentripetalbeschleunigung in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v und des Radius r , und wie berechnet man die Standardabweichung bei gegebenen Stichprobenmessungen für v und r ?

Problembeschreibung: Da die Zentripetalbeschleunigung eine Funktion der Geschwindigkeit v und des Radius r ist, muss man hier das Fehlerfortpflanzungsgesetz (Gleichung 1.16) für $Y = a_{ZP}$ und die beiden Messgrößen $X_1 =$

v und $X_2 = r$ anwenden, d. h. $m = 2$ in Gleichung 1.16. Die Messfehler der beiden Messgrößen erhält man aus Gleichung 1.14. Zusammen mit den Ableitungen der Beschleunigung nach der jeweiligen Größe und dem Einsetzen in Gleichung 1.16 ergibt sich dann das Ergebnis.

Lösung: 1. Man berechnet aus den Stichproben für v und r mit Gleichung 1.14 jeweils die beiden Standardabweichungen:

$$\boxed{\sigma_v} \quad \boxed{\sigma_r}$$

2. Nun bestimmt man die Ableitungen der Beschleunigung nach den beiden Messgrößen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{ZP}}{\partial v} &= \boxed{-2 \frac{v}{r}} \\ \frac{\partial a_{ZP}}{\partial r} &= \boxed{\frac{v^2}{r^2}} \end{aligned}$$

3. Durch Einsetzen der Ergebnisse von Schritt 1 und 2 in das Fehlerfortpflanzungsgesetz (Gleichung 1.16) erhält man schließlich:

$$\boxed{\Delta a_{ZP} = \sqrt{\left(\frac{2v}{r} \Delta v \right)^2 + \left(\frac{v^2}{r^2} \Delta r \right)^2}}$$

■

⌚ Im Kontext: Planck und das Kilogramm

Das Gramm wurde ursprünglich vom Meter des 1795 in Frankreich geschlossenen dezimalen Einheitensystems abgeleitet. Es sollte der Masse eines Kubikzentimeters Wasser bei der Temperatur schmelzenden Eises entsprechen. Ein 1799 gefertigter Platinzyylinder, das sogenannte „Kilogramme des Archives“ war bezogen auf einen Kubikdezimeter Wasser bei 4 °C. Der Handhabbarkeit wegen wurde die Masse dieses Prototyps gegenüber der ursprünglichen Definition „vertausendfacht“. Deshalb führt diese Grundeinheit den Vorsatz „Kilo“ im Namen. 1889 erklärt die „Meter-Konvention“ (www.bipm.org/en/convention) einen Platin-Iridium-Zylinder mit einem Durchmesser und einer Höhe von etwa 39 mm zum „Internationalen Kilogramm-Prototyp“. Die zugehörige Definition wird 1901 zur heute noch gültigen Fassung präzisiert: „Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des internationalen Kilogramm-Prototyps.“¹



Kilogrammprototyp und „Avogadrokugel“ (© PTB/Stork.)

Die Masse dieses Urkilogramms ist damit genau 1 kg und hat keine Unsicherheit. Kopien des Prototyps werden allen interessierten Mitgliedsländern der Meterkonvention zur Verfügung gestellt. Die deutsche Prototypkopie (No. 52) ist auch das nationale Normal für das Kilogramm und befindet sich in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB), die nach dem Einheiten- und Zeitgesetz in der Bundesrepublik Deutschland für die nationalen Normale zuständig ist. Über Vergleiche wird die Einheit „weitergegeben“, d. h. Gewichtstücke bekommen durch Vergleiche mit genaueren Gewichtstücken (Massenormale, zuallererst natürlich das Urkilogramm) Werte und Unsicherheiten zugewiesen, die aber schlussendlich mit dem Urkilogramm „verbunden“ sind. Diese Verbindung nennt man Rückführung. Über eine je nach Genauigkeit unterschiedlich lange, ununterbrochene Vergleichskette erhalten so alle im Handel (Eichung durch die Eichämter der Länder) und der Technik (meist Kalibrierung durch akkreditierte Kalibrierlaboratorien) verwendeten Gewichtstücke einen auf den internationalen Kilogrammprototypen rückführbaren Wert und eine entsprechende Unsicherheit zugewiesen bzw. werden einer vorgegebenen Genauigkeitsklasse zugeordnet.² In der PTB wird die sogenannte Masseskala vom nationalen Normal abgeleitet, zu der hochgenaue Gewichtstücke zwischen 1 mg und 5 t zählen.³

Die Rückführung der Einheit auf ein Artefakt sorgt für die Einheitlichkeit dieses Maßes überall auf der Welt. Was aber passiert, wenn sich

das Artefakt verändert? Würde das Urkilogramm um die Hälfte leichter, dann würden aufgrund der Definition die Dinge überall auf der Welt das Doppelte wiegen – jedenfalls dem Zahlenwert nach. Das ist metrologisch nicht befriedigend. Noch dazu legen Vergleiche der nationalen Prototypkopien mit dem Urkilogramm den Schluss nahe, dass sich der internationale Prototyp tatsächlich verändert, etwa 50 µg in 100 Jahren. Deshalb gibt es seit geraumer Zeit Bemühungen, auch die Einheit der Masse auf der Grundlage einer Naturkonstanten zu definieren.

Ein möglicher Kandidat ist die Planck-Konstante h . Was hat nun Planck mit dem Kilogramm zu tun? Die Planck-Konstante bietet die Möglichkeit die Quanteneffekte elektrischer Messungen mit den makroskopischen Messgrößen der Mechanik zu verbinden. Für die Realisierung dieses Zusammenhangs existieren zurzeit zwei unabhängige Experimente. Das eine ist die Wattwaage, bei der mechanische und elektrische Leistungen verglichen werden⁴, und das zweite ist das Avogadro-Projekt oder auch *x-ray crystal density*-Experiment⁵, an dem die PTB maßgeblich beteiligt ist. Dabei wird die Planck-Konstante indirekt über die Avogadro-Konstante (Teilchenzahl je Stoffmenge) abgeleitet. Für deren Ermittlung werden die Atome in einer fast perfekt runden, monokristallinen Siliciumkugel mit möglichst genau bekanntem Volumen „gezählt“. Zurzeit gibt es noch Abweichungen zwischen den bestehenden Experimenten, die von den Metrologen nicht eindeutig erklärt werden können. Für eine Neudeinition des Kilogramms müssen ihre Ergebnisse aber mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit übereinstimmen. Wenn die Wissenschaft die Daten mit der nötigen Genauigkeit liefert, soll das Kilogramm durch die exakte Festlegung des Zahlenwerts der Planck-Konstante definiert werden. Das ist zugegebenermaßen nicht so gut vorstellbar wie ein Artefakt, beinhaltet aber die Möglichkeit, alle SI-Basiseinheiten auf der Grundlage eines geschlossenen Satzes von Naturkonstanten zu definieren – in der Hoffnung, dass diese auch wirklich konstant sind.

1. „Das internationale Einheitensystem“, *PTB Mitteilungen*, Sonderdruck aus 117. Jahrgang, Heft 2, Juni 2007, doi:10.7795/310.20070299, www.ptb.de.
2. OIML R111; International Recommendation OIML R111 R111 Weights of classes E1, E2, F1, F2, M1, M1-2, M2, M2-3 and M3; www.oiml.org.
3. Darstellung der Masseskala, Borys, Scholz, Firlus, *PTB Mitteilungen*, 118. Jahrgang, Heft 2, Februar 2008, doi:10.7795/310.20080203.
4. Watt balance experiments for the determination of the Planck constant and the redefinition of the kilogram, M Stock, 2013, *Metrologia* 50 R1 doi:10.1088/0026-1394/50/1/R1.
5. International Avogadro-Project, <http://www.bipm.org/en/scientific/mass/avogadro/> (Stand 01/2014).

Dr. Dorothea Knopf studierte Elektrotechnik mit der Vertiefung Prozessmess- und Sensortechnik an der TU Ilmenau und promovierte dort 1997 in diesem Fach. Seit 1993 ist die Physikalisch-Technische Bundesanstalt ihre berufliche Heimat. Zuerst beschäftigte sie sich mit der Herstellung von hochgenauen Gasgemischen und der Atemalkoholmessung. Zurzeit leitet sie ein Team von 19 Frauen und Männern im Bereich Masse und Wägetechnik.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen	
1. Maßeinheiten	Physikalische Größen sind Zahlen, die man durch Messungen an physikalischen Objekten erhält. Operationale Definitionen geben die Operationen an, die befolgt werden müssen, um die physikalischen Größen zu definieren. Der Wert jeder physikalischen Größe wird durch Maßzahl mal Maßeinheit ausgedrückt.	
2. Grundeinheiten	Die Grundeinheiten des SI-Systems sind das Meter (m), die Sekunde (s), das Kilogramm (kg), das Kelvin (K), das Ampere (A), das Mol (mol) und die Candela (cd). Die Einheiten aller physikalischen Größen können durch diese Grundgrößen ausgedrückt werden.	
3. Gleichungen	Einheiten in Gleichungen Dimensionen	Einheiten in Gleichungen werden wie jede andere algebraische Größe behandelt. Beide Seiten einer Gleichung müssen die gleiche Dimension besitzen.
4. Signifikante Stellen	Multiplikation und Division Addition und Subtraktion	Die Anzahl der signifikanten Stellen im Ergebnis einer Multiplikation oder Division ist <i>nie größer</i> als die kleinste Anzahl der signifikanten Stellen aller Faktoren. Das Ergebnis einer Addition oder Subtraktion zweier Zahlen hat so viele Dezimalstellen wie der Term mit der kleinsten Anzahl signifikanter Dezimalstellen.
5. Umrechnung	Umrechnungsfaktoren besitzen stets den Wert 1. Sie bieten eine einfache Möglichkeit, von einer Einheit in eine andere umzurechnen.	
6. Exponentialschreibweise	Zur Vereinfachung werden sehr kleine und sehr große Zahlen im Allgemeinen als Produkt einer Zahl und einer Zehnerpotenz geschrieben.	
7. Exponenten	Multiplikation Division Potenzierung	Bei der Multiplikation zweier Zahlen werden die Exponenten addiert. Bei der Division zweier Zahlen werden die Exponenten subtrahiert. Wird eine Zahl, die einen Exponenten enthält, selbst potenziert, werden die Exponenten multipliziert.
8. Größenordnungen	Eine Zahl, die auf die nächstgelegene Zehnerpotenz gerundet wurde, wird Größenordnung genannt. Die Größenordnung einer Größe lässt sich oft schon durch sinnvolle Annahmen und einfache Berechnungen ermitteln.	
9. Messfehler	Gauss'sche Verteilungsfunktion Statistische Größen	Die Gauss'sche Verteilungsfunktion von Messwerten x um den wahren Wert $\langle x \rangle$ lautet $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\langle x \rangle)^2/(2\sigma^2)}. \quad (1.7)$ Der Schätzwert für den wahren Messwert bei n Messungen einer Messgröße x , auch Mittelwert der Stichprobe vom Umfang n genannt, ist $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.13)$ Der Schätzwert für den statistischen Fehler einer Einzelmessung, auch Standardabweichung genannt, ist $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (1.14)$ Der Schätzwert für den statistischen Fehler der gesamten Stichprobe, auch Standardabweichung des Mittelwerts genannt, ist $\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (1.15)$

Antwort auf die Verständnisfrage

1.1 6

Lösungen der Übungen

- 1.1 a) 300 ns, b) 40 Mm
- 1.2 a) 0,05, b) 3,9, c) 0,003
- 1.3 $2,39 \cdot 10^2$
- 1.4 $3,2 \cdot 10^5$ a
- 1.5 $\approx 6 \cdot 10^{15}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

1.1 • Welche der folgenden physikalischen Größen ist keine Grundgröße des SI-Systems? a) Masse, b) Länge, c) Energie, d) Zeit, e) alle genannten sind physikalische Grundeinheiten.

1.2 • Am Ende einer Berechnung erhalten Sie m/s im Zähler und m/s² im Nenner. Wie lautet die endgültige Maßeinheit? a) m²/s³, b) 1/s, c) s³/m², d) s, e) m/s.

1.3 • Wie viele signifikante Stellen hat die Zahl 0,000 513 0? a) eine, b) drei, c) vier, d) sieben, e) acht.

1.4 • Richtig oder falsch? Zwei Größen müssen die gleiche Dimension besitzen, um multipliziert werden zu können.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

1.5 • Die Annahme, dass der menschliche Körper im Wesentlichen aus Wasser besteht, ermöglicht einige gute Schätzungen. Ein Wassermolekül hat eine Masse von $29,9 \cdot 10^{-27}$ kg. Schätzen Sie die Anzahl der Wassermoleküle eines Menschen mit einer Masse von 60 kg.

1.6 •• a) Schätzen Sie, wie viele Liter Benzin die Autos in den USA jeden Tag verbrauchen sowie den Geldwert dieser Benzinmenge. b) Aus einem Barrel Rohöl können 73,43 l Benzin gewonnen werden. Wie viele Barrel Rohöl müssen die USA demnach zur Benzingewinnung jährlich importieren? Wie vielen Barrel pro Tag entspricht das? (1 Barrel $\hat{=} 158,76$ l)

1.7 •• Das sogenannte „Megabyte“ (MB) ist eine Maßeinheit für die Kapazität bzw. das Fassungsvermögen von Computerspeichern, CD-ROMs oder Musik- bzw. Sprach-CDs. Beispielsweise kann eine Musik-CD mit ihrer Speicherkapazität von 700 MB etwa 70 min Musik in HiFi-Qualität speichern. a) Wie viele MB werden für einen 5 min langen Musiktitel benötigt? b) Schätzen Sie, wie viele Romane auf einer CD-ROM gespeichert werden können, wenn pro Druckseite Text durchschnittlich 5 KB an Speicherplatz benötigt werden.

Maßeinheiten

1.8 • Drücken Sie die folgenden Werte mithilfe der in Tabelle 1.1 aufgeführten Vorsätzen aus. Beispiel: 10 000 Meter = 10 km. a) 1 000 000 Watt, b) 0,002 Gramm, c) $3 \cdot 10^{-6}$ Meter, d) 30 000 Sekunden.

1.9 •• In den folgenden Gleichungen werden die Strecke x in Metern, die Zeit t in Sekunden und die Geschwindigkeit v in Metern pro Sekunde angegeben. Welche SI-Einheiten besitzen die folgenden Konstanten C_1 und C_2 ? a) $x = C_1 + C_2 t$, b) $x = \frac{1}{2} C_1 t^2$, c) $v^2 = 2 C_1 x$, d) $x = C_1 \cos C_2 t$, e) $v^2 = 2 C_1 v - (C_2 x)^2$.

Umrechnen von Einheiten

1.10 • Die Schallgeschwindigkeit in Luft beträgt 340 m/s. Sie wird in der Luft- und Raumfahrt nach Ernst Mach als Mach 1 bezeichnet. Wie hoch ist die Geschwindigkeit in km/h eines Überschallflugzeugs, das mit Mach 2, also doppelter Schallgeschwindigkeit, fliegt?

1.11 •• Im Folgenden seien x in Metern, t in Sekunden, v in Metern pro Sekunde und die Beschleunigung a in Metern pro Sekunde zum Quadrat gegeben. Gesucht sind die SI-Einheiten für die Kombinationen a) v^2/x , b) $\sqrt{x/a}$, c) $\frac{1}{2} a t^2$.

Dimensionen physikalischer Größen

1.12 • Das Gesetz für den radioaktiven Zerfall lautet $n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$, wobei n_0 die Anzahl der radioaktiven Kerne zur Zeit $t = 0$, $n(t)$ die Anzahl der davon zum Zeitpunkt t verbliebenen Kerne und λ die sogenannte Zerfallskonstante ist. Welche Dimension hat λ ?

1.13 •• Die SI-Einheit der Kraft ($\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$) wird Newton (N) genannt. Gesucht sind die Dimension und die SI-Einheit der Konstanten Γ im Newton'schen Gravitationsgesetz $F = \Gamma m_1 m_2/r^2$.

1.14 •• Der Impuls eines Körpers ist das Produkt aus seiner Geschwindigkeit und seiner Masse. Zeigen Sie, dass der Impuls die Dimension Kraft mal Zeit besitzt.

1.15 •• Wenn ein Gegenstand in der Luft fällt, gibt es eine Widerstandskraft, die vom Produkt der Querschnittsfläche des Gegenstands und vom Quadrat seiner Geschwindigkeit abhängt. Somit ist $F_{\text{Luft}} = CA v^2$, wobei C eine Konstante ist. Bestimmen Sie die Dimension von C .

Exponentialschreibweise und signifikante Stellen

1.16 • Drücken Sie folgende Zahlen in der Exponentialschreibweise aus: a) 1 345 100 m = __ km, b) 12 340,0 kW = __ MW, c) 54,32 ps = __ s, d) 3,0 m = __ mm.

Allgemeine Aufgaben

1.17 •• Ein Eisenatomkern hat einen Radius von $5,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ und eine Masse von $9,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. a) Wie groß ist das Verhältnis der Masse zum Volumen in kg/m^3 ? b) Angenommen, die Erde hätte das gleiche Masse-Volumen-Verhältnis. Wie groß wäre dann ihr Radius? (Die Masse der Erde beträgt $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.)

1.18 •• Wenn die durchschnittliche Dichte des Universums mindestens $6 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$ beträgt, wird seine Expansion eines Tages aufhören und es zu kontrahieren beginnen. a) Wie viele Elektronen pro Kubikmeter sind notwendig, um die kritische Dichte zu erzeugen? b) Wie viele Protonen pro Kubikmeter würden die kritische Dichte erzeugen? ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

1.19 •• Eine astronomische Einheit (1 AE) ist als der mittlere Abstand der Mittelpunkte der Erde und der Sonne definiert. Sie beträgt $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Ein Parsec (1 pc) ist der Radius eines Kreises, dessen Kreisbogen bei einem Zentriwinkel von einer Bogensekunde ($= \frac{1}{3600}^\circ$) genau 1 AE lang ist (Abbildung 1.5). Ein Lichtjahr ist die Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. a) Wie viele Parsec bilden eine astronomische Einheit? b) Wie viele Meter entsprechen einem Parsec? c) Wie viele Meter umfasst ein Lichtjahr? d) Wie viele astronomische Einheiten enthält ein Lichtjahr? e) Wie viele Lichtjahre bilden ein Parsec?

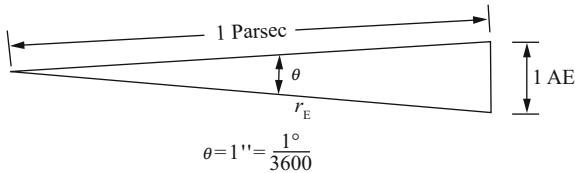


Abbildung 1.5 Zu Aufgabe 1.19.

1.20 •• In der folgenden Tabelle stehen die Umlaufzeiten T und die Radien r der Umlaufbahnen für die Bewegungen von vier Satelliten, die einen schweren Asteroiden mit hoher Dichte umkreisen. a) Die Daten lassen sich durch die Formel $T = C r^n$ beschreiben. Ermitteln Sie die Werte der Konstanten C und n . b) Es wird ein fünfter Satellit mit einer Umlaufzeit von 6,20 a entdeckt. Bestimmen Sie ausgehend von der Formel den Radius der Umlaufbahn dieses Satelliten.

Umlaufzeit T , a	0,44	1,61	3,88	7,89
Radius r , Gm	0,088	0,208	0,374	0,600

1.21 ••• Die Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels hängt von seiner Länge l und von der Erdbeschleunigung g (Dimension l/T^2) ab. a) Ermitteln Sie eine einfache Kombination von l und g , die die Dimension der Zeit hat. b) Überprüfen Sie durch Messen der Schwingungsdauer (der Dauer für ein vollständiges Hin- und Herschwingen) eines Pendels mit zwei verschiedenen Pendellängen l die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T von der Länge l . c) Die richtige Formel für T , l und g enthält eine Konstante, die ein Vielfaches von π ist und sich nicht aus der Dimensionsbetrachtung in Aufgabe a ergibt. Sie kann aber experimentell wie in Teilaufgabe b ermittelt werden, wenn g bekannt ist. Berechnen Sie für $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ und mithilfe Ihrer experimentellen Ergebnisse aus Teilaufgabe b die genaue Beziehung zwischen T , l und g .

Mechanik

Teil

II



Mechanik

2	Mechanik von Massenpunkten	27
3	Die Newton'schen Axiome	77
4	Weitere Anwendungen der Newton'schen Axiome	111
5	Energie und Arbeit	159
6	Der Impuls	211
7	Teilchensysteme	245
8	Drehbewegungen	281
9	Mechanik deformierbarer Körper	351
10	Fluide	371

Mechanik von Massepunkten

2



Wenn ein Auto von seinem Ausgangspunkt zu seinem Zielort fährt, beschleunigt es beim Anfahren, bewegt sich eine Zeit lang mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Vorfahrtsstraße, biegt rechts oder links ab, bremst an einer roten Ampel und fährt gegebenenfalls rückwärts.
(© *Liona Toussaint/Pitopia*.)

?

Wie kann der Fahrer seine Ankunftszeit abschätzen?
(Siehe Beispiel 2.3.)

Mechanik
von Massepunkten

2.1	Verschiebung	28
2.2	Geschwindigkeit	30
2.3	Beschleunigung	39
2.4	Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension	45
2.5	Gleichförmig beschleunigte Bewegung in mehreren Dimensionen	54
	Zusammenfassung	67
	Aufgaben	69

Die Grundmerkmale jeder Bewegung, die Verschiebung, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung, spielen in der Physik eine ganz wichtige Rolle. Tatsächlich war das Bestreben, die Bewegung von Körpern zu beschreiben, vor mehr als 400 Jahren die Geburtsstunde der Physik.

Die Bewegung und die damit zusammenhängenden Konzepte der Kraft und der Masse bilden den Gegenstand der **Mechanik**. Im Rahmen der Mechanik werden wir uns zunächst der **Kinematik** zuwenden, die sich mit der Charakterisierung der Bewegung beschäftigt. Die Kinematik ist eine wesentliche Grundlage für das Verständnis des vorliegenden Buchs. Die Bewegung zieht sich durch die gesamte Physik. Die Kinematik bildet die Grundlage, um zu verstehen, in welcher Weise die Bewegung durch Kräfte und Massen beeinflusst wird. Ab Kapitel 3 werden wir uns dann der **Dynamik** zuwenden, die sich mit Bewegung, Kraft und Masse beschäftigt.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Kinematik einfacher Bewegungen beschäftigen. In diesem Zusammenhang werden wir die exakten Definitionen von Begriffen wie Verschiebung, Geschwindigkeit, Geschwindigkeitsbetrag und Beschleunigung einführen, die umgangssprachlich zur Beschreibung von Bewegungen herangezogen werden. Insbesondere werden wir den wichtigen Spezialfall der gleichförmig beschleunigten Bewegung betrachten und als Anwendungsbeispiele den schrägen Wurf und die Kreisbewegung näher untersuchen.

2.1 Verschiebung

Beim Pferderennen gilt das Pferd als Sieger, dessen Nase zuerst die Ziellinie überschreitet. Das legt die Vorstellung nahe, dass es bei dem gesamten Rennen nur auf die Bewegung dieses einen Punkts des Pferds ankommt, während Größe, Gestalt und Bewegung des restlichen Pferds keine Rolle spielen. Es zeigt sich, dass diese Vereinfachung in der Physik auch beim Studium der Bewegung anderer Körper nützlich ist. Häufig lässt sich die Bewegung eines Körpers anhand der Bewegung eines einzigen Punkts dieses Körpers beschreiben. Stellen Sie sich ein Auto vor, das auf einer geraden Straße fährt. Sie können dann seine Bewegung dadurch beschreiben, dass Sie die Bewegung eines einzelnen Punkts auf einer Seite des Autos betrachten. Ein Körper, der idealisiert auf diese Weise dargestellt werden kann, wird **Massenpunkt** oder auch **Teilchen** genannt. In der Mechanik kann jeder **Körper** als Massenpunkt betrachtet werden, solange man sich nicht für seine Größe, Form oder innere Bewegung interessiert. Somit können Autos, Eisenbahnzüge und Raketen unabhängig von ihrer Größe als Massenpunkt gelten. Selbst die Erde und die anderen Planeten auf ihrem Weg um die Sonne, aber auch Menschen oder Galaxien können als Massenpunkt bzw. Teilchen angesehen werden.



(© André Bonn/Pitopia.)

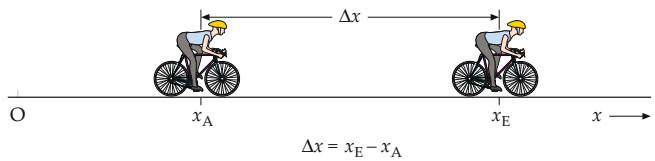


Abbildung 2.1 Ein Fahrradfahrer fährt auf einer geraden Straße. Eine Koordinatenachse besteht aus einer Linie entlang des Wegs, auf dem der Radfahrer fährt. Ein Punkt entlang dieser Geraden ist als Ursprung 0 gewählt. Anderen Punkten auf der Geraden ist eine Zahl x zugeordnet, deren Wert proportional zu ihrem Abstand vom Koordinatenursprung ist. Punkte rechts vom Koordinatenursprung sind positiv, Punkte links von ihm negativ. Wenn das Fahrrad vom Punkt x_A zum Punkt x_E fährt, ist seine Verschiebung $\Delta x = x_E - x_A$.

Ort und Verschiebung

Um die Bewegung eines Teilchens beschreiben zu können, müssen wir seinen **Ort** angeben und charakterisieren können, wie er sich ändert. Bei der eindimensionalen Bewegung wird oft die x -Achse als diejenige Linie gewählt, entlang derer sich das Teilchen bewegt. Abbildung 2.1 zeigt einen Fahrradfahrer zum Zeitpunkt t_A am Ort x_A . Zu einem späteren Zeitpunkt t_E ist er beim Ort x_E . Die Ortsänderung des Fahrradfahrers $x_E - x_A$ wird **Verschiebung** genannt. Änderungen wollen wir mit dem griechischen Buchstaben Δ (großes Delta) bezeichnen. Somit kann die Änderung von x als Δx geschrieben werden:

$$\Delta x = x_E - x_A. \quad (2.1)$$

DEFINITION DER ORTSVERSCHEIBUNG

In diesem Fall kann auf die Vektorschreibweise verzichtet werden; es genügt ein Plus- oder Minuszeichen zur Charakterisierung der Richtung.

Die Schreibweise Δx (gesprochen „Delta x“) bezeichnet eine Größe, die die Änderung von x ist. „ Δx “ ist genauso wenig das Produkt von Δ und x wie $\cos \theta$ das Produkt von \cos und θ ist. Vereinbarungsgemäß ist die Änderung einer Größe stets ihr Endwert minus ihrem Anfangswert.

Es ist wichtig, sich den Unterschied zwischen Verschiebung und zurückgelegter Strecke vor Augen zu halten. Die zurückgelegte Strecke ist die Länge des Wegs, den ein Teilchen vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt zurücklegt. Die Strecke ist eine skalare Größe und immer eine positive Zahl. Die Verschiebung ist dagegen die **Ortsänderung** des Teilchens. Wenn sich der Ort in Richtung von zunehmendem x (in der $+x$ -Richtung) ändert, ist sie positiv, während sie negativ ist, wenn er sich in $-x$ -Richtung ändert. In zwei oder mehr Dimensionen muss man den Ort und die Verschiebung eines Teilchens mithilfe von Vektoren angeben.

Der **Ortsvektor** eines Teilchens ist ein Vektor vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort des Teilchens. Ein Teilchen in der x - y -Ebene mit den Koordinaten (x, y) besitzt den Ortsvektor

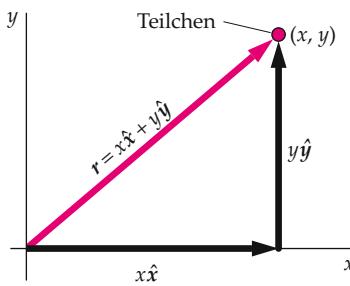


Abbildung 2.2 Die x - und die y -Komponente des Ortsvektors \mathbf{r} für ein Teilchen sind seine kartesischen Koordinaten.

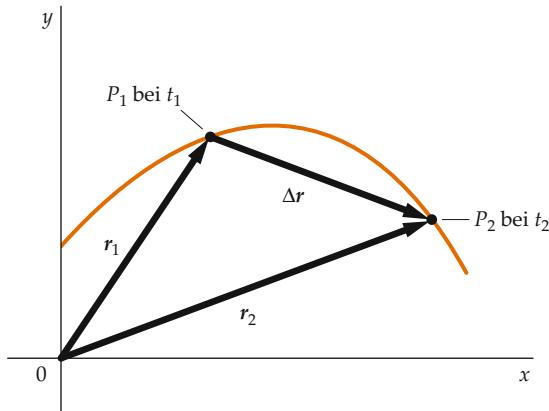


Abbildung 2.3 Der Verschiebungsvektor $\Delta\mathbf{r}$ ist die Differenz der Ortsvektoren $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Mit anderen Worten, $\Delta\mathbf{r}$ ist derjenige Vektor, der bei Addition zum Anfangsortsvektor \mathbf{r}_1 den Endortsvektor \mathbf{r}_2 ergibt. Damit ist $\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}. \quad (2.2)$$

DEFINITION DES ORTSVEKTORS

Dabei sind die x - und die y -Komponente die kartesischen Koordinaten \mathbf{r} des Teilchens (Abbildung 2.2).

Abbildung 2.3 zeigt die auch als Trajektorie bezeichnete Bahnkurve eines Teilchens. Zum Zeitpunkt t_1 ist das Teilchen am Ort P_1 , wobei es den Ortsvektor \mathbf{r}_1 besitzt. Zum Zeitpunkt t_2 hat sich das Teilchen zum Ort P_2 bewegt, wobei es den Ortsvektor \mathbf{r}_2 besitzt. Die Ortsänderung des Teilchens ist gegeben durch den Verschiebungsvektor $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (2.3)$$

DEFINITION DES VERSCHIEBUNGSVEKTORS

Unter Verwendung von Einheitsvektoren kann die Verschiebung auch als

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} = \Delta x\hat{\mathbf{x}} + \Delta y\hat{\mathbf{y}} \quad (2.4)$$

geschrieben werden.

Beispiel 2.1 verdeutlicht den Unterschied zwischen Strecke und Verschiebung.

Beispiel 2.1: Strecke, Verschiebung und Verschiebungsvektor am Beispiel eines laufenden Hunds

Stellen Sie sich vor, Sie spielen Fangen mit einem Hund. Zunächst steht der Hund bei Fuß. Anschließend läuft er 20 m in positive y -Richtung, um einen Stock zu apportieren, den Sie ihm hingeworfen haben. Nachdem der Hund den Stock aufgenommen hat, läuft er 15 m in positive x -Richtung und legt sich auf den Boden, um an dem Stock zu kauen. Als Sie ihn rufen, um wieder nach Hause zu gehen, läuft er direkt auf Sie zu und bringt Ihnen den Stock zurück. a) Welche Gesamtstrecke hat der Hund zurückgelegt? b) Wie groß ist die Gesamtverschiebung, die der Hund gelau- fen ist? c) Zeigen Sie, dass die Gesamtverschiebung die Vektorsumme der aufeinanderfolgenden Verschiebungsvektoren auf seinem Weg ist.

Problembeschreibung: Die Gesamtstrecke l ist die Summe der einzelnen Strecken, die der Hund nacheinander zurücklegt. Die Komponenten des Verschiebungsvektors berechnet man als Differenz der Koordinaten des Endpunkts und des Anfangspunkts der Bewegung. Der Hund läuft zum Zeitpunkt 0 los, nimmt den Stock zum Zeitpunkt 1 auf, legt ihn zum Zeitpunkt 2 ab und gibt ihn Ihnen zum Zeitpunkt 3 wieder zurück.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Zeichnen Sie ein Diagramm der Bewegung (Abbildung 2.4). Zeichnen Sie dabei auch die Koordinatenachsen ein und wählen Sie einen geeigneten Ursprung des Koordinatensystems.

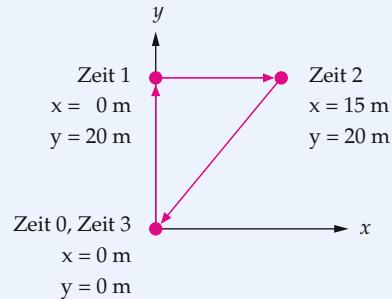


Abbildung 2.4 Die roten Punkte bezeichnen den Ort des Hunds zu verschiedenen Zeitpunkten.

- Berechnen Sie die zurückgelegte Gesamtstrecke. Benutzen Sie dabei den Satz des Pythagoras, um die dritte Teilstrecke auszurechnen:

$$\begin{aligned} s_{03} &= s_{01} + s_{12} + s_{23} = s_{01} + s_{12} + \sqrt{s_{01}^2 + s_{12}^2} \\ &= 20 \text{ m} + 15 \text{ m} + \sqrt{(20 \text{ m})^2 + (15 \text{ m})^2} = [60 \text{ m}] \end{aligned}$$

(Die Indizes bezeichnen die Zeitintervalle, z. B. ist s_{01} die zwischen den Zeitpunkten 0 und 1 zurückgelegte Strecke.)

Teilaufgabe b

Da der Hund am Ende seiner Bewegung wieder bei Ihnen, also an seinem Startpunkt, steht, hat er eine Gesamtverschiebung von 0 im Zeitintervall zwischen Zeitpunkt 0 und Zeitpunkt 3: $\Delta\mathbf{r}_{03} = \boxed{0\text{ m}}$

Teilaufgabe c

Alternativ ergibt sich die Gesamtverschiebung als Vektorsumme der Verschiebungen der drei Teilabschnitte der Bewegung:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r}_{01} &= (x_1 - x_0)\hat{\mathbf{x}} + (y_1 - y_0)\hat{\mathbf{y}} \\ &= (0\text{ m} - 0\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (20\text{ m} - 0\text{ m})\hat{\mathbf{y}} = (20\text{ m})\hat{\mathbf{y}} \\ \Delta\mathbf{r}_{12} &= (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{y}} \\ &= (15\text{ m} - 0\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (20\text{ m} - 20\text{ m})\hat{\mathbf{y}} = (15\text{ m})\hat{\mathbf{x}} \\ \Delta\mathbf{r}_{23} &= (x_3 - x_2)\hat{\mathbf{x}} + (y_3 - y_2)\hat{\mathbf{y}} \\ &= (0\text{ m} - 15\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (0\text{ m} - 20\text{ m})\hat{\mathbf{y}} \\ &= -(15\text{ m})\hat{\mathbf{x}} - (20\text{ m})\hat{\mathbf{y}} \\ \Delta\mathbf{r}_{03} &= \Delta\mathbf{r}_{01} + \Delta\mathbf{r}_{12} + \Delta\mathbf{r}_{23} \\ &= (20\text{ m})\hat{\mathbf{y}} + (15\text{ m})\hat{\mathbf{x}} - (15\text{ m})\hat{\mathbf{x}} - (20\text{ m})\hat{\mathbf{y}} \\ &= \boxed{(0\text{ m})\hat{\mathbf{x}} + (0\text{ m})\hat{\mathbf{y}}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die beiden Ergebnisse aus Teilaufgabe b und Teilaufgabe c stimmen miteinander überein.

Weitergedacht: Die zurückgelegte Gesamtstrecke ist stets gleich der Summe der auf den einzelnen Teilstücken zurückgelegten Strecken. Die Gesamtverschiebung ist immer die Vektorsumme der Verschiebungsvektoren auf den einzelnen Teilstücken. ■

2.2 Geschwindigkeit

Oft interessiert man sich nicht nur für die Verschiebung eines Körpers von einem Ort zu einem anderen, sondern man möchte auch wissen, innerhalb welcher Zeit diese Strecke zurückgelegt wird. Dazu definiert man die **Geschwindigkeit** eines Objekts als den Quotienten aus der Verschiebung $\Delta\mathbf{r}$ und der Zeit, die es zum Zurücklegen dieser Strecke benötigt:

$$v = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Die Verschiebung $\Delta\mathbf{r}$ ist im Allgemeinen ein Vektor, zu dem die Geschwindigkeit proportional ist. Daher ist die Geschwindigkeit ebenfalls ein Vektor und zeigt in dieselbe Richtung wie

der Verschiebungsvektor. Besteht eine Verschiebung aus mehreren Teilverschiebungen, muss man die Verschiebungsvektoren der einzelnen Teile mithilfe der Vektoraddition summieren. Der resultierende Vektor zeigt dann in die Richtung der Gesamtverschiebung, zu der auch der Geschwindigkeitsvektor parallel ist. Für den einfachen Fall, dass sich ein Körper geradlinig, z. B. in x -Richtung, bewegt, benötigt man keine Vektorschreibweise, und Gleichung 2.5 wird zu

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.6)$$

DEFINITION DER EINDIMENSIONALEN GESCHWINDIGKEIT

Interessiert man sich nicht für die Richtung der Bewegung, betrachtet man nur den **Geschwindigkeitsbetrag** eines Teilchens. Er ist der Quotient aus der Gesamtstrecke, die das Teilchen zurücklegt, und der Gesamtzeit vom Anfang bis zum Ende. Da sowohl die Gesamtstrecke als auch die Gesamtzeit immer positiv sind, ist der Geschwindigkeitsbetrag ebenfalls immer positiv. Besteht die Verschiebung aus mehreren Teilstücken in verschiedene Richtungen, ergibt sich die Gesamtstrecke als Summe der Beträge der Vektoren der Teilstücke.

Analog zur grafischen Darstellung von Verschiebungen in einem Koordinatensystem mit x -, y - und z -Achsen kann man sich die Geschwindigkeit mithilfe eines sogenannten **Weg-Zeit-Diagramms** veranschaulichen. Abbildung 2.5 zeigt ein solches Diagramm für eine eindimensionale Bewegung entlang der x -Achse. Jeder Punkt auf der Kurve beschreibt, an welchem Ort x sich der bewegte Körper zur Zeit t aufhält. Bewegt sich ein Körper vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 entlang der blau eingezeichneten Geraden, so muss die Funktion $x(t)$ die Geradengleichung $x(t) = m \cdot (t - t_0) + x_0$ erfüllen, wobei m die Steigung der Geraden und (x_0, t_0) der Startpunkt der Bewegung am Ort x_0 zum Zeitpunkt t_0 ist. Meist setzt man hierfür den Ort x_0 ein, an dem sich der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet. Die Steigung der Geraden ergibt sich, wie in Abbildung 2.5 gezeigt, als Quotient aus der Verschiebung $\Delta x = x_2 - x_1$ und dem dafür benötigten Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$. Diesen Quotienten haben wir in Gleichung 2.6 bereits als die Geschwindigkeit der eindimensionalen Bewegung definiert. Daraus ergibt sich für den Ort in Abhängigkeit der Zeit

$$x(t) = v_x \cdot (t - t_0) + x_0. \quad (2.7)$$

ORT IN ABHÄNGIGKEIT DER ZEIT

Ist die Geschwindigkeit v für jeden Zeitpunkt t dieselbe, wie in Gleichung 2.7, bezeichnet man diese Bewegung auch als **gleichförmige** Bewegung, d.h. eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Für den Fall, dass sich der Körper in Abbildung 2.5 gleichförmig von P_1 zu P'_2 bewegt, ergibt sich eine höhere Geschwindigkeit, da die Steigung dieser Geraden höher ist als die Steigung der Geraden, die P_1 und P_2 miteinander verbindet.

Bewegt sich der Körper nicht entlang einer der blauen Geraden, sondern gemäß der eingezeichneten Kurve von P_1 über P'_2

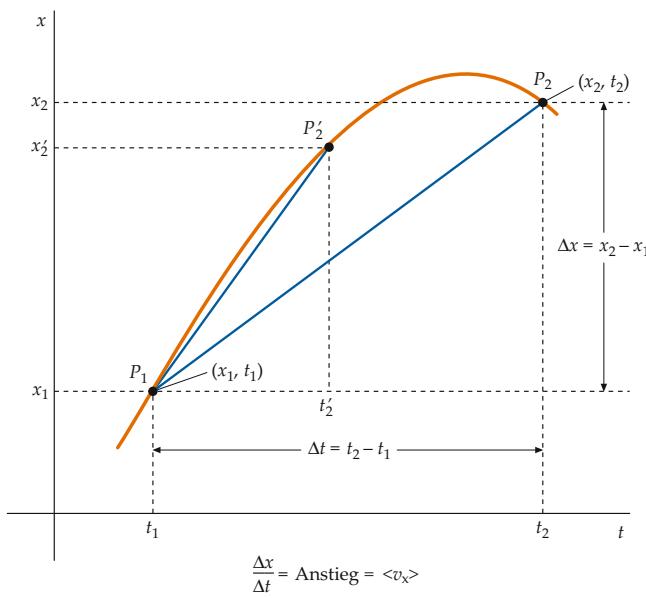


Abbildung 2.5 Grafische Darstellung der Strecke x als Funktion der Zeit t (Weg-Zeit-Diagramm) für die Bewegung eines Teilchens in einer Dimension. Jeder Punkt der Kurve repräsentiert den Ort x zur dazugehörigen Zeit t . Die Punkte (x_1, t_1) und (x_2, t_2) sind durch eine Gerade verbunden. Wir haben die Verschiebung $\Delta x = x_2 - x_1$ und das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ zwischen diesen Punkten eingezeichnet. Die Gerade zwischen P_1 und P_2 ist die Hypotenuse des Dreiecks mit den Katheten Δx und Δt . Der Quotient $\Delta x / \Delta t$ ist ihr Anstieg.

zu P_2 , so ändert sich seine Geschwindigkeit mit der Zeit. Der Start- und Zielpunkt der Bewegung sind jedoch dieselben. Wie in der Abbildung gezeigt, sind die dafür benötigte Zeit und die Verschiebung ebenfalls gleich geblieben, auch wenn die zurückgelegte Gesamtstrecke entlang der Kurve länger wurde. Daher kann man für die ungleichförmige, eindimensionale Bewegung die **mittlere Geschwindigkeit**

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.8)$$

EINDIMENSIONALE MITTLERE GESCHWINDIGKEIT

definieren. Im mehrdimensionalen Fall ergibt sich der Vektor der mittleren Geschwindigkeit analog als Quotient aus dem Vektor der Gesamtverschiebung und der für diese Verschiebung benötigten Zeit

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (2.9)$$

MITTLERER GESCHWINDIGKEITSVEKTOR

Die mittlere Geschwindigkeit ist somit die durchschnittliche Geschwindigkeit, mit der der Körper sich zwischen den beiden betrachteten Punkten bewegt. Die Beispiele 2.2 und 2.3 zeigen

zwei Alltagssituationen, anhand derer die Begriffe noch einmal verdeutlicht werden.

Beispiel 2.2: Auf der Autobahn

Sie fahren auf einer Autobahn, auf der die nächsten 4,0 km eine lange Gerade bilden. a) Da Sie spät abends losgefahren sind, befinden sich keine weiteren Autos auf der Geraden, und Sie können Ihren Tempomat auf 130 km/h einstellen. Wie lange benötigen Sie, um die 4,0 km zurückzulegen? b) Im Berufsverkehr bildet sich ein Stau. Nach 15 min stockendem Verkehr haben Sie die 4,0 km hinter sich gebracht. Wie groß ist Ihre mittlere Geschwindigkeit in diesem Fall?

Problembeschreibung: Die Fahrt auf der Autobahn kann als eine eindimensionale Bewegung betrachtet werden. Stellt man den Tempomat auf 130 km/h, bleibt die Geschwindigkeit über die gesamte Wegstrecke von 4,0 km konstant, und es handelt sich um eine gleichförmige Bewegung. Bei stockendem Verkehr ändert sich die Geschwindigkeit bei jedem Anfahr- und Bremsvorgang, sodass sich hier nur noch die mittlere Geschwindigkeit angeben lässt.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Stellen Sie die Funktion des Wegs in Abhängigkeit der Zeit mithilfe von Gleichung 2.7 auf. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beginnen Sie mit dem 4 km langen Streckenabschnitt, der bei $x_0 = 0$ m beginnt:

$$x(t) = v_x \cdot (t - t_0) + x_0 = v_x \cdot t$$

2. Formen Sie die Gleichung aus Schritt 1 nach der gesuchten Zeit t um und berechnen Sie das Ergebnis:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x(t)}{v_x} = \frac{4,0 \text{ km}}{130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = \frac{4,0 \text{ km}}{130 \text{ km}} \cdot 1 \text{ h} \\ &= \frac{4,0 \text{ km}}{130 \text{ km}} \cdot 60 \text{ min} = \boxed{1,8 \text{ min}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit mit Gleichung 2.8:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4,0 \text{ km}}{15 \text{ min}} = \frac{4,0 \text{ km}}{0,25 \text{ h}} = \boxed{16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten war, ist die mittlere Geschwindigkeit in einem Stau wesentlich geringer als bei einer freien Autobahn. ■

Beispiel 2.3: Mit dem Taxi quer durch die Quadratstadt

Bei der Stadtplanung von Mannheim wurde die historische Innenstadt in Häuserblöcken, den „Quadranten“, angelegt. Sie befinden sich zwischen P3 und P4 und steigen dort in ein Taxi. Da Sie es eilig haben, bitten Sie den Taxifahrer, Sie so schnell wie möglich zur Nordostecke von S1 zu bringen. Er behauptet, dass Sie Ihr Ziel spätestens in 3 min erreichen, und rast mit konstanten 60 km/h die 200 m zu P1. An der Ecke schaltet die Ampel gerade auf Rot, sodass Sie 30 s Wartezeit haben, bevor das Taxi in die Kurpfalzstraße einbiegt. Nach 360 m gleichförmiger Fahrt mit 55 km/h biegt das Taxi um die Ecke von S1. Der Fahrer fährt 150 m mit einer Geschwindigkeit von 30 km/h, merkt jedoch erst zu spät, dass er am Ziel vorbeigefahren ist, und fährt daher die 100 m von S3 zum Ziel im Rückwärtsgang mit 10 km/h zurück.



Abbildung 2.6 Taxifahrt durch die Quadratstadt.

- a) Zeichnen Sie die Weg-Zeit-Diagramme für die Bewegungen in x - und y -Richtung. Berechnen Sie dazu jeweils die Zeit, die für die einzelnen Teilstrecken benötigt wird und nehmen Sie an, dass alle Teilabschnitte mit gleichförmiger Geschwindigkeit gefahren werden.
 b) Hat der Taxifahrer die Fahrtzeit richtig eingeschätzt? c) Wie hoch ist die mittlere Geschwindigkeit in den ersten 30 s? d) Wie hoch ist die mittlere Geschwindigkeit in den letzten 50 s der Fahrt?

Problembeschreibung: Die Taxifahrt setzt sich aus vier Teilabschnitten zusammen, für die jeweils die benötigte Zeit mithilfe von Gleichung 2.7 berechnet werden kann. Da sich jeder Teilabschnitt als eindimensionale, gleichförmige Bewegung beschreiben lässt, benötigen wir die Vektorschreibweise nicht.

Lösung:
Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie die vier Teilabschnitte in ein Koordinatensystem ein. Wählen Sie den Ursprung dabei so, dass keine negativen Ortskoordinaten auftreten, und bestimmen Sie anhand der Darstellung die Vorzeichen der Geschwindigkeiten.

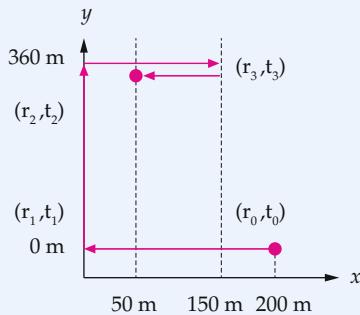


Abbildung 2.7 Die roten Punkte bezeichnen den Start- und Endpunkt des Taxis.

$$\begin{aligned}v_1 &= -(60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) \hat{x} \\v_2 &= +(55 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) \hat{y} \\v_3 &= +(30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) \hat{x} \\v_4 &= -(10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) \hat{x}\end{aligned}$$

2. Formen Sie Gleichung 2.7 nach $t - t_0$ um und berechnen Sie daraus die Zeitdauern für die einzelnen Abschnitte:

$$\begin{aligned}\Delta t_{01} &= t_1 - t_0 = \frac{x_1 - x_0}{v_1} = \frac{0 \text{ m} - 200 \text{ m}}{-60000 \text{ m}} \cdot 3600 \text{ s} \\&= [12 \text{ s}] \\ \Delta t_{12} &= t_2 - t_1 = \frac{y_2 - y_1}{v_2} = \frac{360 \text{ m} - 0 \text{ m}}{55000 \text{ m}} \cdot 3600 \text{ s} \\&= [24 \text{ s}] \\ \Delta t_{23} &= t_3 - t_2 = \frac{x_3 - x_2}{v_3} = \frac{150 \text{ m} - 0 \text{ m}}{30000 \text{ m}} \cdot 3600 \text{ s} \\&= [18 \text{ s}] \\ \Delta t_{34} &= t_4 - t_3 = \frac{x_4 - x_3}{v_4} = \frac{50 \text{ m} - 150 \text{ m}}{-10000 \text{ m}} \cdot 3600 \text{ s} \\&= [36 \text{ s}]\end{aligned}$$

3. Zeichnen Sie mit den Ergebnissen aus Schritt 2 die Weg-Zeit-Diagramme in x - und in y -Richtung.

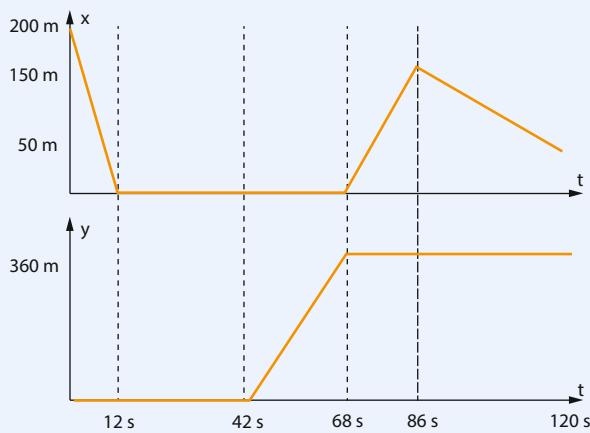


Abbildung 2.8 Weg-Zeit-Diagramme für die x - und die y -Richtung.

Teilaufgabe b

Summieren Sie die Zeitintervalle aus Teilaufgabe a unter Berücksichtigung der Wartezeit an der Ampel:

$$\begin{aligned}\Delta t_{04} &= \Delta t_{01} + \Delta t_{\text{Ampel}} + \Delta t_{12} + \Delta t_{23} + \Delta t_{34} \\ &= 12 \text{ s} + 30 \text{ s} + 24 \text{ s} + 18 \text{ s} + 36 \text{ s} = 120 \text{ s} \\ &= [2 \text{ min}]\end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit in x -Richtung in den ersten 30 s mithilfe von Gleichung 2.8:

$$\langle v_{0 \text{ s} - 30 \text{ s}} \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200 \text{ m}}{30 \text{ s}} = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = [24 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}]$$

Teilaufgabe d

1. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit in x -Richtung in den letzten 50 s mithilfe von Gleichung 2.8:

$$\langle v_{70 \text{ s} - 120 \text{ s}} \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2. Die letzten 50 s der Fahrt setzen sich aus 14 s Fahrtzeit mit 30 km/h in positive x -Richtung und 36 s Fahrtzeit in negative x -Richtung zusammen. Berechnen Sie jeweils die zurückgelegten Verschiebungen:

$$\Delta x_{14 \text{ s}} = v_3 \cdot \Delta t = +30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot 14 \text{ s} = 117 \text{ m}$$

$$\Delta x_{36 \text{ s}} = v_4 \cdot \Delta t = -10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot 36 \text{ s} = -100 \text{ m}$$

3. Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus Schritt 2 die Gesamtverschiebung:

$$\Delta x = \Delta x_{14 \text{ s}} + \Delta x_{36 \text{ s}} = 117 \text{ m} - 100 \text{ m} = 17 \text{ m}$$

4. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 3 in die Gleichung aus Schritt 1 ein:

$$\langle v_{70 \text{ s} - 120 \text{ s}} \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{17 \text{ m}}{50 \text{ s}} = [1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn Sie mit 3 km/h die Gesamtstrecke von 0,61 km gleichförmig zu Fuß laufen, benötigen Sie dafür 0,2 h, also 12 min. Daher erscheint die zweiminütige Taxifahrt mit den wesentlich höheren Geschwindigkeiten ein realistisches Ergebnis. Auch die Vorzeichen der Geschwindigkeiten sind richtig gewählt, da alle in Teilaufgabe a berechneten Zeitintervalle positiv sind. Die mittleren Geschwindigkeiten in den Teilaufgaben c und d können mithilfe des gewichteten Mittelwerts noch einmal berechnet werden. Demnach ist $\langle v_{0 \text{ s} - 30 \text{ s}} \rangle = 12 \text{ s} / (30 \text{ s}) \cdot v_1 + 18 \text{ s} / (30 \text{ s}) \cdot 0 \text{ km/h} = 24 \text{ km/h}$ und $\langle v_{70 \text{ s} - 120 \text{ s}} \rangle = 14 \text{ s} / (50 \text{ s}) \cdot v_3 + 36 \text{ s} / (50 \text{ s}) \cdot v_4 = 1 \text{ km/h}$, was in beiden Fällen mit den berechneten Ergebnissen in den Teilaufgaben übereinstimmt.

Weitergedacht: Anstatt der mittleren Geschwindigkeit der ersten 30 und letzten 50 s könnte man auch den mittleren Geschwindigkeitsbetrag dieser beiden Zeitintervalle berechnen. Für diese Rechnung muss man nun die Beträge der zurückgelegten Strecken addieren, d. h. alle Längen ohne ihr Vorzeichen aufsummieren. Damit ergibt sich für $|\langle v_{0 \text{ s} - 30 \text{ s}} \rangle|$ das gleiche Ergebnis wie in Teilaufgabe c. Für $|\langle v_{70 \text{ s} - 120 \text{ s}} \rangle|$ jedoch: $|\langle v_{70 \text{ s} - 120 \text{ s}} \rangle| = (117 \text{ m} + 100 \text{ m}) / (50 \text{ s}) = 16 \text{ km/h}$. ■

Momentangeschwindigkeit

Stellen Sie sich vor, Ihre mittlere Geschwindigkeit bei einer langen Autofahrt war 60 km/h. Da es sich um einen Mittelwert handelt, sagt er nichts darüber aus, wie sich die Geschwindigkeit während der Fahrt geändert hat. So kann es Stellen geben, an denen Sie bei einer Verkehrsampel anhalten mussten, aber auch Strecken, auf denen Sie schneller gefahren sind, um wieder etwas Zeit gutzumachen. Um die Bewegung genauer zu beschreiben, muss man die Geschwindigkeit also in jedem Zeitpunkt der Fahrt betrachten. Auf den ersten Blick scheint es ganz unmöglich, die Geschwindigkeit für einen bestimmten Zeitpunkt zu definieren. Schließlich ist jedes Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt nur an genau einem Punkt. Wenn es nur an einem Punkt ist, wie kann es sich dann bewegen? Und, wenn es sich nicht bewegt, wie kann es dann eine Geschwindigkeit besitzen? Dieses uralte Paradoxon wird nur durch die Erkenntnis aufgelöst, dass man stets mehr als einen Zeitpunkt heranziehen muss, um die Geschwindigkeit eines Körpers zu beobachten und zu definieren. Betrachten Sie z. B. Abbildung 2.9. Wählt man von t_p aus immer kürzere Zeitintervalle, nähert sich die mittlere Geschwindigkeit für diese Intervalle an die Tangente bei t_p an. Wir definieren den Anstieg dieser Tangente als die **Momentangeschwindigkeit** $v_x(t)$ zum Zeitpunkt t_p . Diese Tangente ist der Grenzwert des Quotienten $\Delta x / \Delta t$, wenn Δt und damit auch Δx gegen 0 strebt. Somit können wir definieren:

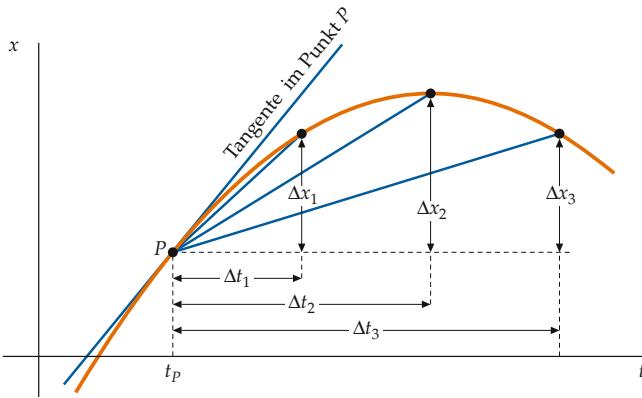


Abbildung 2.9 Weg-Zeit-Kurve wie in Abbildung 2.5. Beachten Sie die Folge immer kleiner werdender Intervalle $\Delta t_3, \Delta t_2, \Delta t_1, \dots$. Die mittlere Geschwindigkeit jedes Intervalls ist der Anstieg der Geraden für dieses Intervall. Wird das Zeitintervall kleiner, nähern sich diese Ansteige der Tangente an den Anstieg der Kurve im Punkt t_P an. Den Anstieg dieser Geraden definiert man als die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_P .

Die Momentangeschwindigkeit in x -Richtung v_x ist der Grenzwert des Quotienten $\Delta x / \Delta t$ für Δt gegen null.

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.10)$$

= Anstieg der Tangente an die Funktion $x(t)$.

DEFINITION DER EINDIMENSIONALEN MOMENTANGESCHWINDIGKEIT

Oft wird der oben erwähnte Anstieg einer Tangente an eine Funktion auch einfach als „Steigung der Funktion“ bezeichnet. Dieser Grenzwert wird als **Ableitung** von x nach t bezeichnet. In der üblichen Differenzialschreibweise wird diese Ableitung als

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \quad (2.11)$$

geschrieben.

Der Anstieg einer Geraden kann positiv, negativ oder null sein; folglich kann auch die Momentangeschwindigkeit (bei eindimensionaler Bewegung) positiv (x wird größer), negativ (x wird kleiner) oder null (keine Bewegung) sein. Die Momentangeschwindigkeit eines Körpers, der sich gleichförmig geradlinig bewegt, ist gleich seiner mittleren Geschwindigkeit. Die Weg-Zeit-Kurve für diese Bewegung ist eine Gerade, deren Anstieg gleich der Geschwindigkeit ist.

In Beispiel 2.4 sollen Sie die Momentangeschwindigkeit eines Teilchens anhand eines x - t -Diagramms selbst ermitteln.

Zum schnelleren Ermitteln von Ableitungen gibt es verschiedene Regeln, welche auf der oben beschriebenen Grenzwertbildung beruhen (siehe im mathematischen Anhang Tabelle 41.4). Eine häufig verwendete Regel lautet:

$$\text{Für } x = C t^n \text{ gilt } \frac{dx}{dt} = C n t^{n-1} \quad (2.12)$$

mit beliebigen Konstanten C und n , wobei n eine Zahl ohne Einheit sein muss.

Wenn sich das Teilchen auf keiner Geraden bewegt oder seine Richtung umkehrt, ist der Betrag des Verschiebungsvektors kleiner als der entlang der Bahnkurve zurückgelegte Weg. Werden allerdings immer kürzere Zeitintervalle betrachtet, nähert sich der Betrag des Verschiebungsvektors an den Abstand der Punkte entlang der Kurve an (Abbildung 2.11). Gleichzeitig geht der Winkel zwischen Δr und der Tangente an die Kurve am Anfang des Intervalls gegen null. Der Grenzwert des Vektors der mittleren Geschwindigkeit für Δt gegen null wird als **Vektor der Momentangeschwindigkeit** definiert:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (2.13)$$

DEFINITION DES VEKTORES DER MOMENTANGESCHWINDIGKEIT

Der Vektor der Momentangeschwindigkeit ist die Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit. Sein Betrag ist der Geschwindigkeitsbetrag und seine Richtung die der Tangente an die Kurve in Bewegungsrichtung des Teilchens.

Zur Berechnung der Ableitung in Gleichung 2.13 werden die Ortsvektoren nach Gleichung 2.4 in ihren Komponenten geschrieben. Somit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \hat{x} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \hat{y} \end{aligned}$$

oder

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}, \quad (2.14)$$

wobei $v_x = dx/dt$ und $v_y = dy/dt$ die x - und die y -Komponente der Geschwindigkeit sind.

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors ist

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.15)$$

und seine Richtung

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}. \quad (2.16)$$

Die Momentangeschwindigkeit ist ein Vektor; sein Betrag ist der **Momentangeschwindigkeitsbetrag**. Wenn nicht besonders betont werden soll, dass es sich um die Momentanwerte handelt, wird im Weiteren anstelle von Momentangeschwindigkeit immer von der Geschwindigkeit und anstelle von Momentangeschwindigkeitsbetrag immer vom Geschwindigkeitsbetrag gesprochen.

Beispiel 2.5 zeigt, wie man die momentane Geschwindigkeit eines Segelboots mithilfe dieser Gleichungen bestimmt.

Beispiel 2.4: Der Ort eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit

ZUR ÜBUNG

Der Ort eines Teilchens als Funktion der Zeit sei durch die Kurve in Abbildung 2.10 gegeben. Gesucht ist die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1,8\text{ s}$. Wann ist die Geschwindigkeit am größten? Wann ist sie null? Ist sie irgendwann negativ?

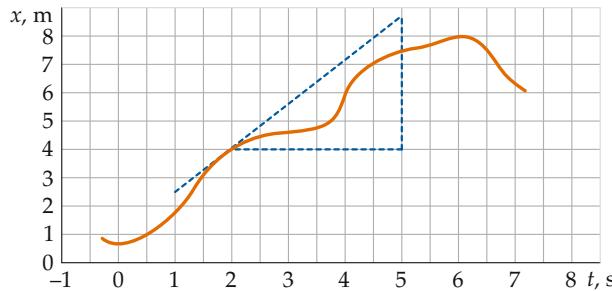


Abbildung 2.10 Der Ort eines Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit.

Problembeschreibung: In Abbildung 2.10 wurde die Tangente an die Kurve bei $t = 1,8\text{ s}$ eingezzeichnet. Der Anstieg dieser Tangente ist die Momentangeschwindigkeit des Teilchens zu dem betreffenden Zeitpunkt. Sie können die Abbildung nutzen, um den Anstieg zu messen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung

- Suchen Sie auf der Tangente diejenigen Werte x_1 und x_2 , die zu den Zeiten $t_1 = 2,0\text{ s}$ und $t_2 = 5,0\text{ s}$ gehören.
- Berechnen Sie aus diesen Werten den Anstieg der Tangente. Dieser Anstieg ist die Momentangeschwindigkeit bei $t = 2,0\text{ s}$.

- Finden Sie (x, t) , so dass die Tangente die größtmögliche Steigung aufweist.
- Finden Sie (x, t) , für die die Tangente parallel zur t -Achse ist.
- Finden Sie (x, t) , so dass das Steigungsdreieck spiegelverkehrt zu dem in Abbildung 2.10 ist.

Ergebnisse der Lösungsschritte

- $x_1 \approx 4,0\text{ m}, x_2 \approx 8,5\text{ m}$
- $v_x = \text{Anstieg} \approx \frac{8,5\text{ m} - 4,0\text{ m}}{5,0\text{ s} - 2,0\text{ s}} = [1,5\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$

- Bei $t = 4,0\text{ s}$ ist der Anstieg und damit die Geschwindigkeit am größten.
- Bei $t = 0,0\text{ s}$ und $t = 6,0\text{ s}$ sind Anstieg und Geschwindigkeit null.
- Für $t < 0,0\text{ s}$ und $t > 6,0\text{ s}$ ist die Steigung und damit die Geschwindigkeit negativ.

Plausibilitätsprüfung: Der Ort des Teilchens ändert sich von $1,8\text{ m}$ bei $1,0\text{ s}$ auf $4,0\text{ m}$ bei $2,0\text{ s}$. Damit ist die mittlere Geschwindigkeit für das Zeitintervall von $1,0\text{ s}$ bis $2,0\text{ s}$ gleich $2,2\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dies liegt in derselben Größenordnung wie die Momentangeschwindigkeit von $1,8\text{ s}$, sodass das Ergebnis aus Schritt 2 plausibel erscheint.

Übung 2.1: Schätzen Sie die mittlere Geschwindigkeit dieses Teilchens zwischen $t = 2,0\text{ s}$ und $t = 5,0\text{ s}$. ◀

Beispiel 2.5: Die Geschwindigkeit eines Segelboots

Ein Segelboot besitzt zum Zeitpunkt $t_1 = 60,0\text{ s}$ die Koordinaten $(x_1, y_1) = (130\text{ m}, 205\text{ m})$. Nach 2 min , zum Zeitpunkt t_2 , besitzt es die Koordinaten $(x_2, y_2) = (110\text{ m}, 218\text{ m})$. a) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ während dieser 2 min . Drücken Sie $\langle v \rangle$ durch kartesische Koordinaten aus. b) Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der mittleren Geschwindigkeit. c) Der Ort eines anderen Segelboots als Funktion der Zeit für $t \geq 20,0\text{ s}$ sei $x(t) = b_1 + b_2 t$ und $y(t) = c_1 + c_2/t$ mit $b_1 = 100\text{ m}$, $b_2 = 0,500\text{ m/s}$, $c_1 = 200\text{ m}$ und $c_2 = 360\text{ m} \cdot \text{s}$. Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit für $t \geq 20,0\text{ s}$.

Problembeschreibung: Der Anfangs- und der Endpunkt des ersten Bootes sind gegeben. Da die Bewegung des Bootes in zwei Dimensionen abläuft, müssen Verschiebung, mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit durch Vektoren ausgedrückt werden. Damit können dann aus den Gleichungen 2.5, 2.6 und 2.14 bis 2.16 die gesuchten Werte berechnet werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Zeichnen Sie den Verschiebungsvektor des Segelboots in ein Koordinatensystem ein (Abbildung 2.12). Zeichnen

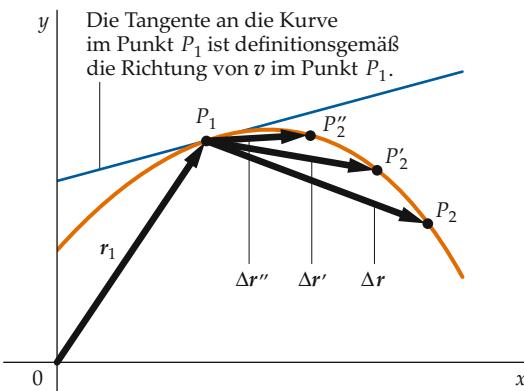


Abbildung 2.11 Wenn das Zeitintervall verringert wird, geht der Winkel zwischen der Richtung von Δr und der Tangente an die Kurve gegen null.

Sie den Vektor der mittleren Geschwindigkeit ein (der dieselbe Richtung wie der Verschiebungsvektor hat).

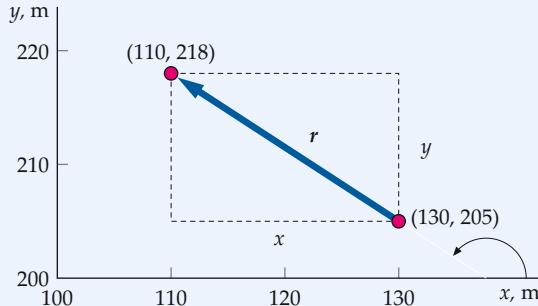


Abbildung 2.12 Verschiebungsvektor des Segelboots.

2. Die x - und die y -Komponente der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ werden unmittelbar aus ihren Definitionen berechnet:

$$\langle v \rangle = \langle v_x \rangle \hat{x} + \langle v_y \rangle \hat{y}$$

mit

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{110 \text{ m} - 130 \text{ m}}{120 \text{ s}} = -0,167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\langle v_y \rangle = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{218 \text{ m} - 205 \text{ m}}{120 \text{ s}} = 0,108 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

und somit

$$\langle v \rangle = -(0,167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \hat{x} + (0,108 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \hat{y}$$

Teilaufgabe b

1. Der Betrag von $\langle v \rangle$ ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$|\langle v \rangle| = \sqrt{\langle v_x \rangle^2 + \langle v_y \rangle^2} = 0,199 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Der Quotient von $\langle v_y \rangle$ und $\langle v_x \rangle$ ist der Tangens des Winkels θ zwischen dem Vektor $\langle v \rangle$ und der x -Achse (da v_x negativ ist, muss zu dem vom Taschenrechner ausgegebenen Wert $-33,0^\circ$ ein Winkel von 180° addiert werden):

$$\tan \theta = \frac{\langle v_y \rangle}{\langle v_x \rangle}$$

und somit

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{\langle v_y \rangle}{\langle v_x \rangle} = \arctan \frac{0,108 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{-0,167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \\ &= -33,0^\circ + 180^\circ = 147^\circ \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die Momentangeschwindigkeit v ergibt sich durch Berechnen von dx/dt und dy/dt :

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} = b_2 \hat{x} - c_2 t^{-2} \hat{y} \\ &= (0,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \hat{x} - (360 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} t^{-2}) \hat{y} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Betrag der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ ist größer als der Absolutwert seiner x - und seiner y -Komponente. Wenn t in Sekunden angegeben wird, ist die Maßeinheit der y -Komponente der Geschwindigkeit v in Teilaufgabe c $\text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ und damit eine Maßeinheit der Geschwindigkeit. ■

Die Relativgeschwindigkeit

Wenn Sie in einem Flugzeug sitzen, das mit 750 km/h nach Osten fliegt, haben Sie offenbar dieselbe Geschwindigkeit wie das Flugzeug. Diese Geschwindigkeit könnte Ihre Geschwindigkeit relativ zur Erdoberfläche oder relativ zur Luft außerhalb des Flugzeugs sein (wobei sich beide deutlich unterscheiden können, wenn das Flugzeug in einem Jet-Stream fliegt).

Sowohl die Erdoberfläche als auch die Luft außerhalb des Flugzeugs und das Flugzeug selbst sind Beispiele für Bezugssysteme. Ein **Bezugssystem** ist ein ausgedehntes Objekt oder eine Menge von Objekten, die relativ zueinander ruhen. Bei der Angabe der Geschwindigkeit eines Körpers muss also stets auch das Bezugssystem genannt werden, auf das sich die Geschwindigkeit bezieht.

Um Ortsmessungen vorzunehmen, verwenden wir Koordinatenachsen, die an Bezugssystemen „angeheftet“ sind. (Man sagt, dass eine Koordinatenachse an ein Bezugssystem „angeheftet“ ist, wenn sie relativ zu diesem Bezugssystem ruht.) Gegenüber einer an dem Flugzeug angehefteten horizontalen Koordinatenachse bleibt Ihr Ort (zumindest solange Sie auf Ihrem Platz

Vorgehensweise: Die Relativgeschwindigkeit

Der erste Schritt bei der Lösung einer Aufgabe mit Relativgeschwindigkeiten besteht darin, die jeweiligen Bezugssysteme zu ermitteln und zu bezeichnen. Im Folgenden werden wir diese Bezugssystem A und Bezugssystem B nennen.

1. Formulieren Sie über $v^{(B)} = v^{(A)} + v_A^{(B)}$ (Gleichung 2.17) den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des bewegten Körpers relativ zum Bezugssystem A und zum Bezugssystem B.
2. Zeichnen Sie ein Vektoradditionsdiagramm für die Gleichung $v^{(B)} = v^{(A)} + v_A^{(B)}$, in dem Sie die Spitze des einen Vektors mit dem Ende des anderen verbinden. Zeichnen Sie die Koordinatenachsen ein.
3. Stellen Sie nach der gesuchten Größe um. Wenden Sie bei Bedarf trigonometrische Formeln an.

Plausibilitätsprüfung: Vergewissern Sie sich, dass Sie die Geschwindigkeit oder den Ort des bewegten Objekts relativ zum richtigen Bezugssystem ermittelt haben.

sitzen) konstant. Demgegenüber ändert sich Ihr Ort gegenüber einer an der Erdoberfläche angehefteten horizontalen Koordinatenachse ständig.

Wenn sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $v^{(A)}$ relativ zum Bezugssystem A bewegt, das sich seinerseits mit der Geschwindigkeit $v_A^{(B)}$ relativ zum Bezugssystem B bewegt, ist die Geschwindigkeit des Teilchens relativ zum Bezugssystem B:

$$v^{(B)} = v^{(A)} + v_A^{(B)}. \quad (2.17)$$

RELATIVGESCHWINDIGKEIT

Stellen Sie sich eine Person auf einem Eisenbahnwagen W vor (Abbildung 2.13a). Der Wagen bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_W^{(B)}$ relativ zum Boden B, während die Person mit der Geschwindigkeit $v^{(W)}$ relativ zum Wagen läuft (Abbildung 2.13b). Ihre Relativgeschwindigkeit zum Boden ist dann die Vektorsumme dieser beiden Geschwindigkeiten: $v^{(B)} = v^{(W)} + v_W^{(B)}$ (Abbildung 2.13c).

Die Geschwindigkeit des Körpers A relativ zum Körper B ist betragsmäßig gleich der Geschwindigkeit von B relativ zu A, aber entgegengesetzt zu ihr gerichtet. So ist beispielsweise $v_P^{(W)} = -v_W^{(P)}$, wobei $v_P^{(W)}$ die Geschwindigkeit der Person relativ zum Wagen und $v_W^{(P)}$ die Geschwindigkeit des Wagens relativ zur Person ist. Beispiel 2.6 veranschaulicht die Vorgehensweise bei Relativgeschwindigkeiten noch einmal.

!

Bei der Angabe von Relativgeschwindigkeitsvektoren muss genau auf die Reihenfolge der Indizes geachtet werden.

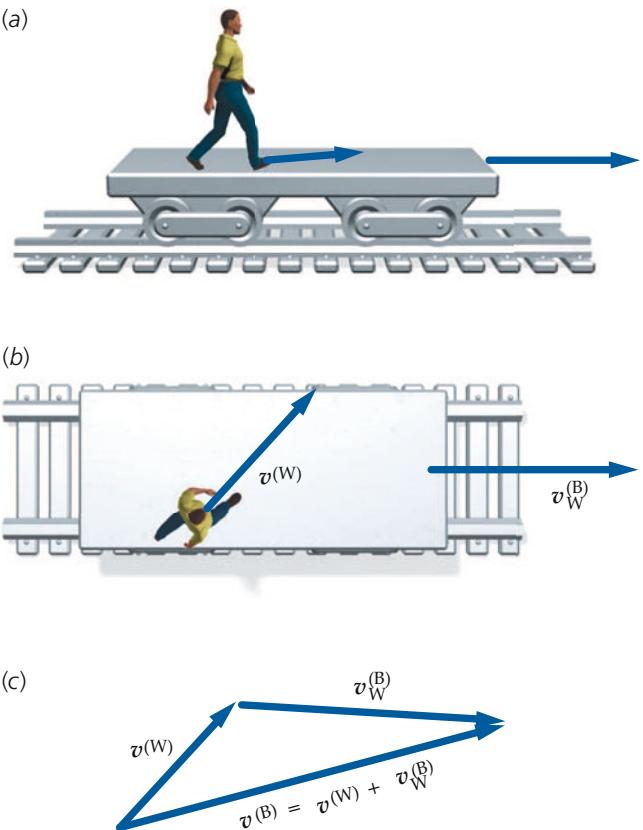


Abbildung 2.13 Die Geschwindigkeit der Person relativ zum Boden ist gleich der Summe der Geschwindigkeit der Person relativ zum Wagen und der Geschwindigkeit des Wagens relativ zum Boden.

Beispiel 2.6: Am Flughafen

Achilles und die Schildkröte machen einen Ausflug zum Flughafen. Die Schildkröte entscheidet sich auf eines der 100 m langen Transportbänder zu klettern, um genauso schnell wie Achilles voranzukommen. Achilles jedoch humpelt wegen einer verwundeten Ferse mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1,00 m/s neben dem Transportband her, während das Band die Schildkröte mit 1,50 m/s befördert. Die Schildkröte selbst läuft mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1 cm/s auf dem Band weiter. Mit welcher Geschwindigkeit sieht der humpelnde Achilles die Schildkröte auf dem Band vorwärts laufen?

Problembeschreibung: Die beiden sich relativ zueinander bewegenden Bezugssysteme sind das von Achilles (A) und das des Transportbands (B). Ihre Geschwindigkeiten sind relativ zum Bezugssystem des Flughafens (F) angegeben. Die Geschwindigkeit der Schildkröte (S) ist relativ zum Transportband angegeben. Da es sich bei allen Bewegungen um eindimensionale Bewegungen handelt, benötigt man die Vektorschreibweise nicht.

Lösung: 1. Formulieren Sie den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der Schildkröte im Bezugssystem F, der Geschwindigkeit von Achilles im selben Bezugssystem und der Geschwindigkeit der Schildkröte von Achilles aus gesehen mithilfe von Gleichung 2.17:

$$v_S^{(F)} = v_S^{(A)} + v_A^{(F)}$$

2. Formen Sie die Gleichung aus Schritt 1 nach der gesuchten Geschwindigkeit um:

$$v_S^{(A)} = v_S^{(F)} - v_A^{(F)}$$

3. Wandeln Sie die Geschwindigkeit der Schildkröte in m/s um:

$$v_S^{(B)} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{m}}{100 \text{cm}} = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Schildkröte im Bezugssystem F mithilfe von Gleichung 2.17:

$$\begin{aligned} v_S^{(F)} &= v_S^{(B)} + v_B^{(F)} = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + 1,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 1,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

5. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 4 und die Geschwindigkeit von Achilles im Bezugssystem F ($v_A^{(F)} = 1 \text{ m/s}$) in die Gleichung aus Schritt 2 ein:

$$\begin{aligned} v_S^{(A)} &= v_S^{(F)} - v_A^{(F)} = 1,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 1,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 0,51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die ermittelte Relativgeschwindigkeit der Schildkröte zu Achilles ist wie erwartet kleiner als 1 m/s, da Achilles und das Band nur eine Geschwindigkeitsdifferenz von 0,5 m/s haben. Sie ist positiv, d. h., Achilles sieht, dass die Schildkröte schneller ist als er selbst, was ebenfalls zu erwarten war, da schon die Geschwindigkeit des Transportbands größer als seine eigene ist. ■

Beispiel 2.7: Ein Flugzeug im Seitenwind

Ein Pilot soll relativ zum Boden mit einem Flugzeug genau nach Norden fliegen. Das Flugzeug hat gegenüber der Luft eine Geschwindigkeit von 200 km/h; es weht ein Westwind mit 90 km/h. a) In welcher Richtung muss das Flugzeug fliegen? b) Wie hoch ist die Bodengeschwindigkeit des Flugzeugs?

Problembeschreibung: Da der Wind von Westen weht, kommt ein Flugzeug, das genau nach Norden fliegt, nach Osten vom Kurs ab. Um den Seitenwind auszugleichen, muss das Flugzeug nach Nordwesten gelenkt werden. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zum Boden $v^{(B)}$ ist die Summe der Relativgeschwindigkeit des Flugzeugs zur Luft $v^{(L)}$ und der Relativgeschwindigkeit der Luft zum Boden $v_L^{(B)}$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zum Boden ist durch Gleichung 2.17 gegeben:

$$v^{(B)} = v^{(L)} + v_L^{(B)}$$

2. Konstruieren Sie ein Geschwindigkeitsadditionsdiagramm (Abbildung 2.14), das die Addition der Vektoren in Schritt 1 zeigt. Zeichnen Sie die Achsen ein.

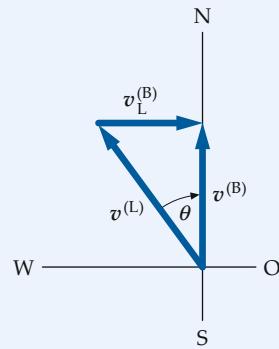


Abbildung 2.14 Geschwindigkeitsadditionsdiagramm.

2.3 Beschleunigung

3. Der Sinus des Winkels θ zwischen der Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zur Luft und der Nordrichtung ist der Quotient von $|v_L^{(B)}|$ und $|v^{(L)}|$:

$$\sin \theta = \frac{|v_L^{(B)}|}{|v^{(L)}|} = \frac{90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = \frac{9}{20}$$

und damit

$$\theta = \arcsin \frac{9}{20} = 27^\circ \text{ westlich gegen Norden}$$

Teilaufgabe b

Da $|v_L^{(B)}|$ und $|v^{(B)}|$ senkrecht aufeinander stehen, können wir den Betrag von $|v^{(B)}|$ mit dem Satz des Pythagoras ermitteln:

$$|v^{(L)}|^2 = |v^{(B)}|^2 + |v_L^{(B)}|^2$$

und somit

$$\begin{aligned} |v^{(B)}| &= \sqrt{|v^{(L)}|^2 - |v_L^{(B)}|^2} \\ &= \sqrt{(200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})^2 - (90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})^2} \\ &= 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Würde das Flugzeug mit 90 km/h direkt in den Wind fliegen, hätte es eine Bodengeschwindigkeit von $200 \text{ km/h} - 90 \text{ km/h} = 110 \text{ km/h}$. Erwartungsgemäß liegt das Ergebnis von $180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ aus Teilaufgabe b zwischen diesen 110 km/h und den 200 km/h.

2.3 Beschleunigung

Wenn man das Gaspedal eines Autos niederdrückt, erwartet man, dass sich die Geschwindigkeit des Autos erhöht. Wenn sich wie in diesem Fall die Geschwindigkeit des Körpers ändert, so wird er beschleunigt. Die **Beschleunigung** ist demnach die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit. Ist diese zeitliche Änderung konstant, spricht man von einer **gleichförmigen** Beschleunigung. Betrachten wir diesen Fall am Beispiel einer eindimensionalen Bewegung in x -Richtung. Zur Veranschaulichung zeichnen wir ein **Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm** wie in Abbildung 2.15 gezeigt. Analog zum Weg-Zeit-Diagramm beschreibt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Zeit. Zum Zeitpunkt t_1 soll der bewegte Körper die Geschwindigkeit v_1 haben, und seine Geschwindigkeit soll sich linear bis zum Zeitpunkt t_2 auf v_2 erhöhen. Dann ist, analog zur Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit, die Beschleunigung für jeden Zeitpunkt t die-

selbe und gegeben durch das eingezeichnete Steigungsdiagramm:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \quad (2.18)$$

Die Beschleunigung hat damit die Dimension einer Geschwindigkeit (l/t) dividiert durch die Zeit t , also l/t^2 . Ihre SI-Einheit ist Meter pro Sekunde zum Quadrat (m/s^2).

Vergrößert man die Steigung der Geraden, desto höher wird die gleichförmige Beschleunigung, wie man an der zweiten Geraden ablesen kann, bei der von t_1 nach t'_2 die Geschwindigkeit von v_1 auf v'_2 ansteigt. Ist die Beschleunigung nicht konstant über die Zeit, kann man wieder eine **mittlere Beschleunigung** definieren, indem man die Geschwindigkeiten für den Start- und den Endpunkt des betrachteten Zeitintervalls ermittelt:

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (2.19)$$

DEFINITION DER EINDIMENSIONALEN MITTLEREN BESCHLEUNIGUNG

In Abbildung 2.15 kann man so z.B. die mittlere Beschleunigung für die Bewegung entlang der orangefarbenen Kurve berechnen, bei der sich die Beschleunigung über die Zeit ändert, die Anfangs- und Endpunkte im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm jedoch dieselben sind wie für die gleichförmig

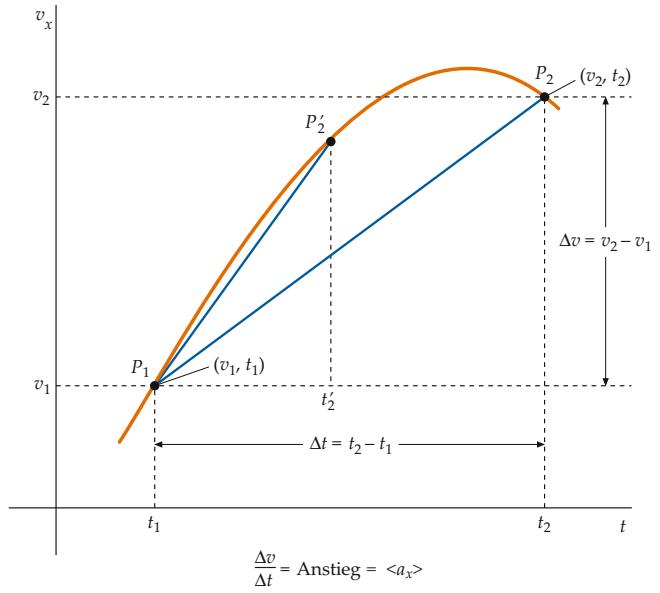


Abbildung 2.15 Grafische Darstellung der Geschwindigkeit v_x als Funktion der Zeit t für die Bewegung eines Teilchens in einer Dimension. Jeder Punkt der Kurve repräsentiert die Geschwindigkeit v_x zur dazugehörigen Zeit t . Die Punkte $(v_{1,x}, t_1)$ und $(v_{2,x}, t_2)$ sind durch eine Gerade verbunden. Wir haben die Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta v_x = v_{2,x} - v_{1,x}$ und das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ zwischen diesen Punkten eingezeichnet. Die Gerade zwischen P_1 und P_2 ist die Hypotenuse des Dreiecks mit den Katheten Δv_x und Δt . Der Quotient $\Delta v_x/\Delta t$ ist ihr Anstieg.

beschleunigte Bewegung von t_1 nach t_2 entlang der blauen Geraden.

Momentanbeschleunigungen

Die **Momentanbeschleunigung** in x -Richtung ist der Grenzwert des Quotienten $\Delta v_x / \Delta t$ für Δt gegen null. In einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t gleich dem Anstieg der Tangente an die Kurve zu diesem Zeitpunkt:

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.20)$$

= Anstieg der Tangente an die Funktion $v_x(t)$.

DEFINITION DER EINDIMENSIONALEN MOMENTANBESCHLEUNIGUNG

Frage 2.1

Stellen Sie sich vor, Sie fahren mit hoher Geschwindigkeit hinter einem anderen Auto her, das plötzlich vor einem spielenden Kind auf der Straße bremst und stehen bleibt. Drei Zehntelsekunden, nachdem Sie das Bremslicht des vorausfahrenden Autos gesehen haben, nehmen Sie ebenfalls eine Notbremse vor. Wir wollen annehmen, dass beide Autos die gleiche Anfangsgeschwindigkeit haben und ihre Geschwindigkeit nach dem plötzlichen Bremsen genauso schnell abnimmt. Bleibt der Abstand zwischen beiden Autos während der Notbremsung konstant?

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, wofür man auch $\dot{v} = dv/dt$ schreibt. Da die Geschwindigkeit ihrerseits die Ableitung des Orts x nach der Zeit t ist, ist die Beschleunigung die zweite Ableitung von x nach t , also $\ddot{x} = d^2x/dt^2$. Die Begründung für diese Schreibweise erkennt man, wenn man die Beschleunigung als dv_x/dt schreibt und anschließend v_x durch dx/dt ersetzt:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}. \quad (2.21)$$

Wird das Zeitintervall sehr kurz, werden die mittlere Beschleunigung und die Momentanbeschleunigung gleich. Wir werden daher den Begriff „Beschleunigung“ in der Bedeutung von „Momentanbeschleunigung“ verwenden.

Aus dem Vorzeichen der Beschleunigung eines Körpers kann nicht geschlossen werden, ob der Körper schneller oder langsamer wird. Um dies zu ermitteln, muss man das Vorzeichen der Geschwindigkeit mit dem der Beschleunigung vergleichen. Sind v_x und a_x beide positiv, ist v_x positiv und wird stärker positiv, sodass der Geschwindigkeitsbetrag zunimmt. Ist sowohl v_x als auch a_x negativ, ist v_x negativ und wird stärker negativ, sodass der Geschwindigkeitsbetrag ebenfalls zunimmt. Haben v_x und a_x entgegengesetzte Vorzeichen, wird

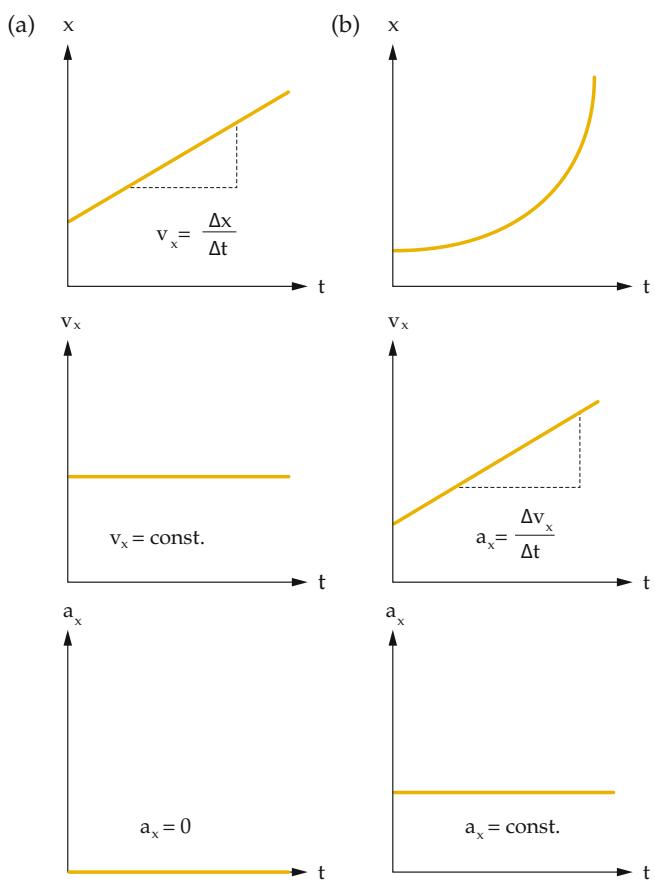


Abbildung 2.16 a) Weg-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm für eine geradlinig gleichförmige Bewegung. b) Weg-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm für eine geradlinig gleichförmig beschleunigte Bewegung.

der Körper langsamer. Ist v_x positiv und a_x negativ, ist v_x zwar positiv, wird aber immer weniger positiv, sodass der Geschwindigkeitsbetrag abnimmt. Ist v_x negativ und a_x positiv, ist v_x negativ, wird aber immer weniger negativ, sodass der Geschwindigkeitsbetrag wiederum abnimmt. Zusammengefasst: Wenn v_x und a_x dasselbe Vorzeichen haben, nimmt der Geschwindigkeitsbetrag zu; haben sie entgegengesetzte Vorzeichen, nimmt er ab. Wird ein Körper langsamer, bezeichnet man seine Bewegung auch als „negativ beschleunigte Bewegung“ oder Bremsvorgang. Bleibt die Beschleunigung null, gibt es keine Geschwindigkeitsänderung während der Zeit – die Geschwindigkeit ist konstant, und die zurückgelegte Wegstrecke hängt linear von der Zeit ab, d.h. folgt einer Geraden im Weg-Zeit-Diagramm. Ist die Beschleunigung dagegen von null verschieden und konstant, ändert sich die Geschwindigkeit linear mit der Zeit, während sich der Weg quadratisch mit der Zeit ändert. Abbildung 2.16 zeigt die Beschleunigung-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Weg-Zeit-Diagramme für diese beiden eindimensionalen Bewegungen.

Beispiel 2.8 vergleicht die mittleren Beschleunigungen eines Geparden mit der eines leistungsstarken Autos. In Beispiel 2.9 wird eine allgemeine Weg-Zeit-Funktion gegeben und gezeigt, wie Sie daraus die Geschwindigkeit und die Beschleunigung als Funktion der Zeit berechnen können.

Beispiel 2.8: Eine flinke Katze

Der Gepard kann in nur 2,0 s von 0 km/h auf 96 km/h beschleunigen, während die Corvette, eines der leistungsstärksten Autos, 4,5 s benötigt. Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung für den Gepard und für die Corvette und vergleichen Sie sie mit der Erdbeschleunigung g , die an der Erdoberfläche $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ beträgt.



(© Lothar Henke/pixelio.)

Problembeschreibung: Da die Anfangs- und die Endgeschwindigkeit sowie die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit sowohl für den Gepard als auch für das Auto gegeben sind, brauchen wir diese nur in Gleichung 2.19 einzusetzen, um jeweils die Beschleunigung zu erhalten.

Lösung: 1. Wandeln Sie die 96 km/h in m/s um:

$$96 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) = 26,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Die mittlere Beschleunigung erhalten Sie direkt aus den Angaben der Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} \text{Gepard : } \langle a_x \rangle &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{26,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,0 \text{ s}} \\ &= 13,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Auto : } \langle a_x \rangle &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{26,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{4,5 \text{ s}} \\ &= 5,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

3. Für einen direkten Vergleich mit der Erdbeschleunigung multiplizieren Sie die Ergebnisse mit dem Umrechnungsfaktor $1 \text{ g} / (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})$:

$$\begin{aligned} \text{Gepard : } & (13,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \frac{1 \text{ g}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \\ & = 1,36 \text{ g} \approx 1,4 \text{ g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Auto : } & (5,93 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \frac{1 \text{ g}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \\ & = 0,604 \text{ g} \approx 0,60 \text{ g} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Da das Auto etwas mehr als doppelt so lange wie der Gepard braucht, um auf dieselbe Geschwindigkeit zu beschleunigen, ist es sinnvoll, dass die Beschleunigung des Autos etwas weniger als halb so groß wie die des Gepard ist.

Weitergedacht: Auch wenn die Ergebnisse nur mit zwei signifikanten Stellen angegeben sind, wurden die Berechnungen an Variablen mit wenigstens drei Stellen ausgeführt, um Rundungsfehler zu vermeiden. Diese zusätzlichen Stellen heißen *Schutzziffern*.

Übung 2.2: Ein Auto fährt zum Zeitpunkt $t = 0$ mit 45 km/h. Es beschleunigt mit einer konstanten Beschleunigung von $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. a) Wie schnell fährt es bei $t = 2 \text{ s}$? b) Zu welchem Zeitpunkt fährt das Auto mit 70 km/h?



Beispiel 2.9: Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktionen der Zeit

Der Ort eines Teilchens ist durch die Funktion $x = C t^3$ gegeben, wobei C eine Konstante ist. Welche Dimension hat C ? Gesucht sind außerdem die Geschwindigkeit und die Beschleunigung als Funktionen der Zeit.

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit ergibt sich durch Anwenden von $\frac{dx}{dt} = C n t^{n-1}$ (Gleichung 2.12) auf den Ort des Teilchens, wobei in diesem Fall $n = 3$ ist. Anschließend leiten wir noch einmal ab, um die Beschleunigung zu erhalten.

Lösung: 1. Die Dimensionen von x ist l und die von t ist t . Damit ergibt sich:

$$C = \frac{x}{t^3} \Rightarrow [C] = \frac{[x]}{[t]^3} = \frac{l}{t^3}$$

2. Durch Anwenden der Regel $dx/dt = C n t^{n-1}$ (Gleichung 2.12) erhält man die Geschwindigkeit:

$$x = C t^n = C t^3$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C n t^{n-1} = C 3 t^2 = 3 C t^2$$

3. Deren Zeitableitung der Geschwindigkeit ergibt die Beschleunigung:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(C n t^{n-1})}{dt} = 3 C 2 t^{2-1} = 6 C t$$

Plausibilitätsprüfung: Wir überprüfen die Dimensionen unserer Lösungen. Für die Geschwindigkeit ergibt sich $[v_x] = [C][t^2] = (l/t^3) \cdot (t^2) = l/t$. Für die Beschleunigung gilt $[a_x] = [C][t] = (l/t^3) \cdot (t) = l/t^2$.

Übung 2.3: Wenn ein Auto aus dem Stand bei $x = 0$ mit konstanter Beschleunigung a_x anfährt, hängt seine Geschwindigkeit v_x von a_x sowie von dem zurückgelegten Weg x ab. Welche der folgenden Gleichungen hat die richtigen Dimensionen, um als Beziehung zwischen x , a_x und v_x infrage zu kommen: a) $v_x = 2 a_x x$, b) $v_x^2 = 2 a_x/x$, c) $v_x = 2 a_x x^2$, d) $v_x^2 = 2 a_x x$? □

Beschleunigungsvektoren

Der **Vektor der mittleren Beschleunigung** ist der Quotient der Änderung des Vektors der Momentangeschwindigkeit Δv und des verstrichenen Zeitintervalls Δt :

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.22)$$

DEFINITION DES VEKTORS DER MITTLEREN BESCHLEUNIGUNG

Der **Vektor der Momentanbeschleunigung** ist der Grenzwert dieses Quotienten für Δt gegen null, d. h. die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (2.23)$$

DEFINITION DES VEKTORS DER MOMENTANBESCHLEUNIGUNG

Um die Momentanbeschleunigung zu berechnen, drücken wir v in kartesischen Koordinaten aus:

$$v = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv_x}{dt} \hat{x} + \frac{dv_y}{dt} \hat{y} + \frac{dv_z}{dt} \hat{z} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{z} \\ &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Also lauten die Komponenten des Beschleunigungsvektors a :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Diese Vektorgleichungen sind in Beispiel 2.10 nützlich.

Beispiel 2.10: Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Baseballs

Der Ort eines geschlagenen Baseballs ist durch $r = [1,5 \text{ m} + (12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})t] \hat{x} + [(16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})t - (4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t^2] \hat{y}$ gegeben. Berechnen Sie seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit.

Problembeschreibung: Es ist $r = x \hat{x} + y \hat{y}$ (Gleichung 2.2). Die x - und die y -Komponente der Geschwindigkeit und der Beschleunigung können durch Ableiten nach x und y berechnet werden.

Lösung: 1. Ermitteln Sie die x - und die y -Komponente von r :

$$\begin{aligned} x &= 1,5 \text{ m} + (12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})t \\ y &= (16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})t - (4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t^2 \end{aligned}$$

2. Die x - und die y -Komponente der Geschwindigkeit ergeben sich durch Ableiten von x und y nach t :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 2 \cdot (4,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t \end{aligned}$$

3. Nochmaliges Ableiten von v_x und v_y ergibt die Komponenten der Beschleunigung:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

4. Damit erhalten wir für die Geschwindigkeit und für die Beschleunigung in Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned} v &= [(12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \hat{x} + (16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - (9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t) \hat{y}] \\ a &= (-9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \hat{y} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die in Schritt 4 erhaltenen Ergebnisse für die Geschwindigkeit bzw. für die Beschleunigung tragen die richtigen Maßeinheiten $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ und $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. □

Damit ein Vektor konstant ist, müssen sowohl sein Betrag als auch seine Richtung konstant sein. Sobald sich der Betrag *oder* die Richtung ändert, ändert sich auch der Vektor. Auch ein Auto, das – wie in Beispiel 2.11 – mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag durch eine Kurve fährt, wird beschleunigt: Da sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändert, ändert sich auch der Geschwindigkeitsvektor selbst.

Beispiel 2.11: Ein Auto in der Kurve

Ein Auto fährt zunächst mit 60 km/h nach Osten, anschließend durch eine Kurve und 5,0 s später mit 60 km/h nach Norden weiter. Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Autos.

Problembeschreibung: Die mittlere Beschleunigung ergibt sich aus der Definition $\langle \mathbf{a} \rangle = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$. Hierfür berechnen wir zunächst $\Delta \mathbf{v}$, d.h. denjenigen Vektor, der bei Addition zu \mathbf{v}_A den Vektor \mathbf{v}_E ergibt.

Lösung: 1. Die mittlere Beschleunigung ist der Quotient der Geschwindigkeitsänderung und des verstrichenen Zeitintervalls. Um $\langle \mathbf{a} \rangle$ zu berechnen, ermitteln wir zunächst die Geschwindigkeitsänderung:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_A}{\Delta t}$$

2. Um $\Delta \mathbf{v}$ zu erhalten, müssen Sie zunächst \mathbf{v}_A und \mathbf{v}_E bestimmen. Wir stellen \mathbf{v}_A und \mathbf{v}_E dar (Abbildung 2.17a) und zeichnen das Vektoradditionsdiagramm für $\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_A + \Delta \mathbf{v}$ (Abbildung 2.17b).

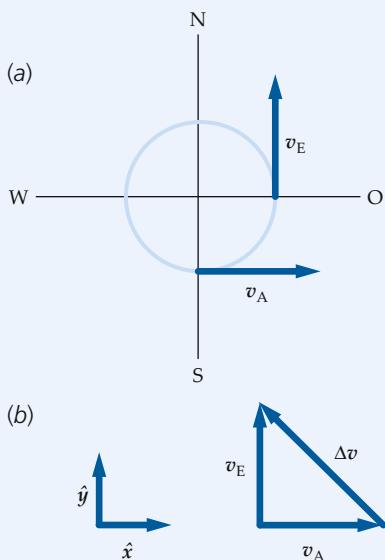


Abbildung 2.17 a) 2-dimensionale Ortsdarstellung der Geschwindigkeitsvektoren. b) Geschwindigkeitsvektoradditionsdiagramm.

3. Die Geschwindigkeitsänderung ergibt sich aus der Anfangs- und aus der Endgeschwindigkeit:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_A + \Delta \mathbf{v}$$

4. Durch Einsetzen ergibt sich die mittlere Beschleunigung:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_A}{\Delta t} = \frac{60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \hat{y} - 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \hat{x}}{5,0 \text{ s}}$$

5. Rechnen Sie die 60 km/h in m/s um:

$$60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 16,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

6. Drücken Sie die Beschleunigung in $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ aus:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \rangle &= \frac{\mathbf{v}_E - \mathbf{v}_A}{\Delta t} = \frac{16,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \hat{y} - 16,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \hat{x}}{5,0 \text{ s}} \\ &= \boxed{-(3,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \hat{x} + (3,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \hat{y}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die nach Osten gerichtete Geschwindigkeitskomponente nimmt von 60 km/h auf null ab, sodass in x -Richtung eine negative Beschleunigungs komponente zu erwarten ist. Dagegen nimmt die nach Norden gerichtete Geschwindigkeitskomponente von null auf 60 km/h zu, sodass wir in y -Richtung eine positive Beschleunigungs komponente erwarten. Das Ergebnis aus Schritt 6 entspricht beiden Erwartungen.

Weitergedacht: Ist Ihnen aufgefallen, dass das Auto beschleunigt, obwohl sein Geschwindigkeitsbetrag konstant bleibt?

Übung 2.4: Ermitteln Sie den Betrag und die Richtung des Vektors der mittleren Beschleunigung. ◀ ■

Die Bewegung eines Körpers mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf einem Kreis ist ein Beispiel, bei dem sich zwar die Richtung der Geschwindigkeit, nicht aber ihr Betrag ändert.

Daraus, dass sich ein Körper mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag bewegt, folgt keineswegs, dass seine Beschleunigung null ist. Damit die Beschleunigung null ist, dürfen sich weder der Betrag noch die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändern.

Häufig soll aus einer gegebenen Beschreibung der Bewegung die Richtung des Beschleunigungsvektors bestimmt werden.

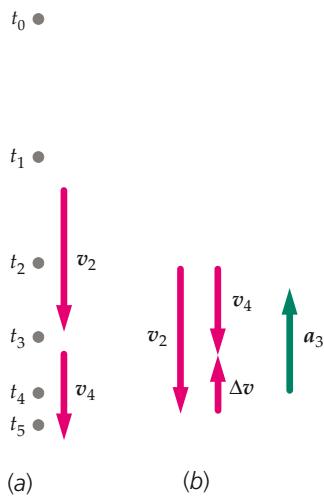


Abbildung 2.18 a) Bewegungsdiagramm eines Bungee-Springers bei der verzögerten Bewegung während des Fallens. Die Punkte sind zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten in den gleichen Zeitabständen eingezeichnet. b) Die Vektoren v_2 und v_4 werden ausgehend vom gleichen Anfangspunkt eingezeichnet. Damit kann der Vektor Δv konstruiert werden, der von der Spitze von v_4 zur Spitze von v_2 verläuft. Dies ist die grafische Darstellung der Beziehung $v_2 + \Delta v = v_4$. Die Beschleunigung a_3 zeigt in Richtung von Δv .

t_0 ● t_{12}

t_1 ● t_{11}

t_2 ● t_{10}

t_3 ● t_9

t_4 ● t_8

t_5 ● t_7

t_6

Abbildung 2.19 Die Punkte für die Abwärts- bzw. Aufwärtsbewegung eines Bungee-Springers sind der Übersichtlichkeit halber nebeneinander gezeichnet. Die tatsächliche Bewegung verläuft natürlich genau senkrecht.

Dabei kann ein sogenanntes **Bewegungsdiagramm** hilfreich sein. In einem solchen Bewegungsdiagramm ist der bewegte Körper in einer Abfolge äquidistanter Zeitintervalle dargestellt. Stellen Sie sich einen Bungee-Springer vor, der beim Fallen immer langsamer wird, bis sich seine Bewegungsrichtung am tiefsten Punkt umkehrt. Um die Richtung der abnehmenden Beschleunigung (Verzögerung) gegen Ende seines Falls zu ermitteln, zeichnen wir eine Reihe von Punkten, die den Ort des Springers zu Zeitpunkten in den gleichen Zeitabständen darstel-

len (Abbildung 2.18a). Je schneller sich der Springer bewegt, desto größer ist der Abstand, den er zwischen den Zeitpunkten zurücklegt, und desto größer ist demzufolge auch der Abstand zwischen den Punkten in dem Diagramm. Wir wollen die Punkte durchnummieren, wobei wir mit null beginnen und die Nummern in Bewegungsrichtung zunehmen sollen. Zum Zeitpunkt t_0 befindet sich der Springer beim Punkt 0, zum Zeitpunkt t_1 ist er beim Punkt 1 usw. Um die Beschleunigungsrichtung zum Zeitpunkt t_3 zu bestimmen, zeichnen wir die Vektoren ein, die die Geschwindigkeit des Springers zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 darstellen. Die mittlere Beschleunigung während des Zeitintervalls von t_2 bis t_4 ist gleich $\Delta v / \Delta t$ mit $\Delta v = v_4 - v_2$ und $\Delta t = t_4 - t_2$. Dies verwenden wir als Abschätzung für die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_3 , d.h. $a_3 \approx \Delta v / \Delta t$. Da a_3 und Δv in die gleiche Richtung zeigen, kann man die Richtung von a_3 über die Richtung von Δv ermitteln. Die Richtung von Δv erhalten wir über die Beziehung $v_2 + \Delta v = v_4$, die wir in dem entsprechenden Vektorfelddiagramm darstellen (Abbildung 2.18b). Da sich der Springer zum Zeitpunkt t_2 schneller als zum Zeitpunkt t_4 bewegt (d.h. die Punkte zum Zeitpunkt t_2 weiter entfernt sind), zeichnen wir v_2 länger als v_4 . Die Abbildung zeigt, dass Δv und somit auch a_3 nach oben gerichtet sind.

Frage 2.2

Abbildung 2.19 ist ein Bewegungsdiagramm des Bungee-Springers vor, während und nach dem Zeitpunkt t_6 , in dem er im untersten Punkt momentan zur Ruhe kommt. Anschließend bewegt er sich mit zunehmender Geschwindigkeit wieder nach oben. Ermitteln Sie anhand dieses Diagramms die Beschleunigungsrichtung des Bungee-Springers a) zum Zeitpunkt t_6 und b) zum Zeitpunkt t_9 .

Beispiel 2.12 zeigt eine weitere Anwendung von Bewegungsdiagrammen.

Beispiel 2.12: Die Kanonenkugel

Eine Kanonenkugel wird unter einem Winkel von 60° zur Horizontalen abgeschossen. Ermitteln Sie mithilfe eines Bewegungsdiagramms die Richtung ihrer Beschleunigung beim Steigen.

Problembeschreibung: Während die Kugel steigt, bewegt sie sich mit abnehmendem Geschwindigkeitsbetrag auf einem gekrümmten Weg. Um die Beschleunigungsrichtung zu schätzen, kann $\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t$ herangezogen und die Richtung von Δv geschätzt werden. Diese ergibt sich aus einem Bewegungsdiagramm, in das die Beziehung $v_A + \Delta v = v_E$ eingezeichnet wird.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein Bewegungsdiagramm für die Bewegung der Kugel, während diese steigt (Abbildung 2.20a). Da sie während des Steigens langsamer wird, nimmt der Abstand zwischen benachbarten Punkten beim Steigen ab.

2.4 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension

2. Greifen Sie einen Punkt im Bewegungsdiagramm heraus und zeichnen Sie sowohl für den vorausgehenden als auch für den nachfolgenden Punkt den Geschwindigkeitsvektor als Tangente an den Weg der Kugel ein.

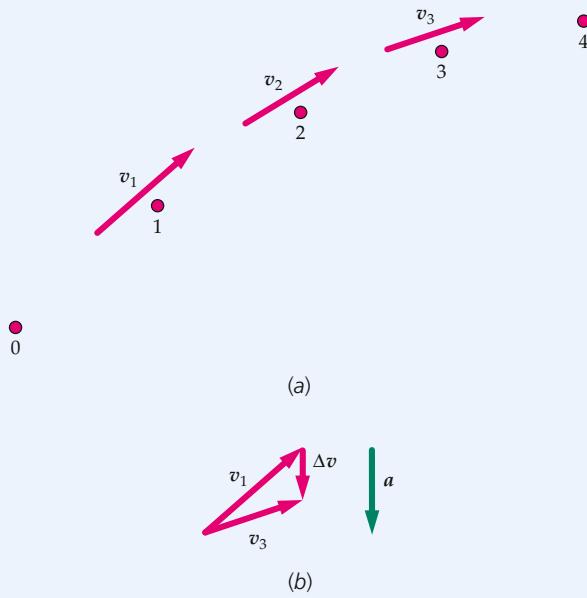


Abbildung 2.20 a) Bewegungsdiagramm für die Kugelbewegung.
b) Zugehöriges Vektoradditionsdiagramm.

3. Stellen Sie das Vektoradditionsdiagramm $v_A + \Delta v = v_E$ grafisch dar (Abbildung 2.20b). Zeichnen Sie zunächst ausgehend vom selben Anfangspunkt die beiden Geschwindigkeitsvektoren. Die Vektoren haben den gleichen Betrag und die gleiche Richtung wie in Schritt 2. Zeichnen Sie anschließend den Vektor Δv von der Spitze von $v_A = v_1$ zur Spitze von $v_E = v_3$.

4. Abschließend zeichnen Sie den Beschleunigungsvektor ein. Dieser hat wegen $a \approx \Delta v / \Delta t$ die gleiche Richtung, aber nicht notwendig die gleiche Länge wie Δv .

der Rollbahn beschleunigt, und die Bewegung eines Autos, das an einer roten Ampel bremst oder bei einer grünen beschleunigt. Bei einem bewegten Teilchen ist die Endgeschwindigkeit v_x gleich der Summe der Anfangsgeschwindigkeit und der Geschwindigkeitsänderung, die gleich dem Produkt der mittleren Beschleunigung und der Zeit ist. Damit gilt:

$$v_x = v_{0,x} + \Delta v_x = v_{0,x} + \langle a_x \rangle \Delta t. \quad (2.25)$$

Die Momentanbeschleunigung und die mittlere Beschleunigung eines Teilchens, das mit der konstanten Beschleunigung a_x beschleunigt wird, sind gleich, d.h.

$$a_x = \langle a_x \rangle \quad (a_x \text{ konstant}). \quad (2.26)$$

Da Situationen mit nahezu gleichförmig beschleunigter Bewegung häufig anzutreffen sind, wollen wir aus den Gleichungen für die Beschleunigung und für die Geschwindigkeit einen speziellen Satz **kinematischer Gleichungen** für Aufgabenstellungen mit eindimensionaler gleichförmig beschleunigter Bewegung ableiten.

Ableitung der kinematischen Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung

Das Problem, bei gegebener Funktion $a_x(t)$ und den Anfangswerten x_0 und $v_{0,x}$ die Funktion $x(t)$ zu ermitteln, nennt man das **Anfangswertproblem**. Da die Beschleunigung eines Teilchens durch die Kräfte bestimmt ist, die auf das Teilchen einwirken, ist dieses Problem in der Physik von besonderer Bedeutung. Wir können nämlich den Ort eines Teilchens für alle Zeiten berechnen, wenn wir die auf das Teilchen einwirkenden Kräfte sowie seinen Ort und seine Geschwindigkeit zu einem gegebenen Zeitpunkt kennen. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als das *Lösen der Bewegungsgleichungen*.

Wir betrachten ein Teilchen, das sich mit der konstanten Beschleunigung a_x bewegt, zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Geschwindigkeit $v_{0,x}$ und zu einem späteren Zeitpunkt die Geschwindigkeit v_x besitzt. Die Kombination der beiden Gleichungen 2.25 und 2.26 ergibt

$$v_x = v_{0,x} + a_x t \quad (a_x \text{ konstant}). \quad (2.27)$$

Dies ist die Gleichung für eine Gerade in einem v_x - t -Diagramm (Abbildung 2.15). Der Anstieg dieser Geraden ist die Beschleunigung a_x .

Um eine Gleichung für den Ort x als Funktion der Zeit zu erhalten, wollen wir zunächst den Spezialfall der gleichförmig geradlinigen Bewegung $v_x = v_{0,x}$ betrachten (Abbildung 2.21). Die Ortsänderung Δx im Zeitintervall Δt ist

$$\Delta x = v_{0,x} \Delta t \quad (a_x = 0).$$

Die Fläche des farbigen Bereichs unter der v_x - t -Kurve (Abbildung 2.21a) ist das Produkt seiner Höhe $v_{0,x}$ mit seiner Breite

2.4 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension

Gleichförmig beschleunigte Bewegungen in einer Dimension sind in der Natur häufig anzutreffen. Zum Beispiel fallen in der Nähe der Erdoberfläche alle nicht festgehaltenen Körper (bei Vernachlässigung des Luftwiderstands) nahezu gleichförmig beschleunigt, d.h. mit konstanter Beschleunigung, senkrecht zu Boden. Weitere Beispiele für die nahezu gleichförmig beschleunigte Bewegung sind ein Flugzeug, das beim Start auf

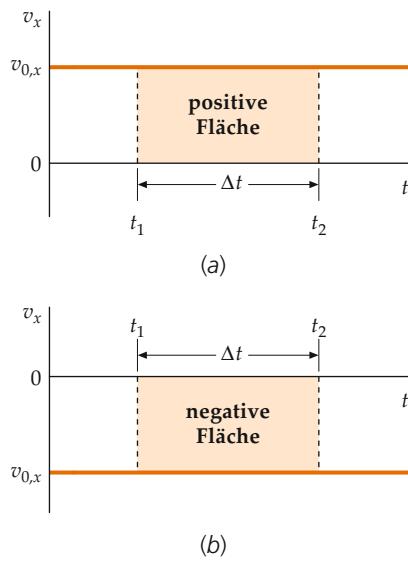
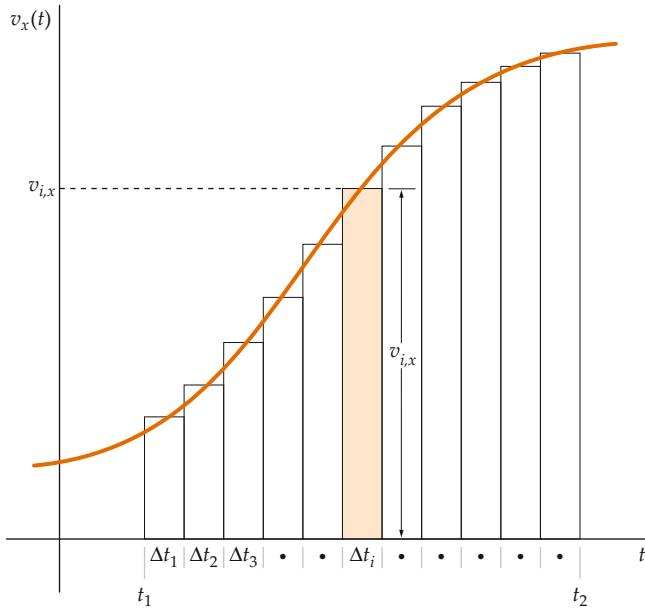


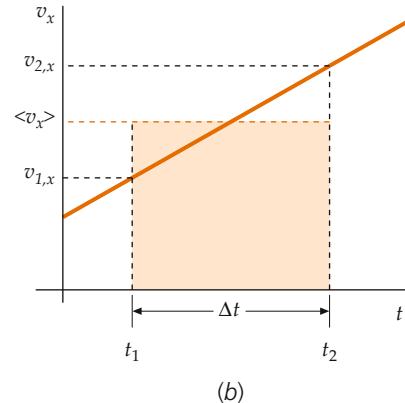
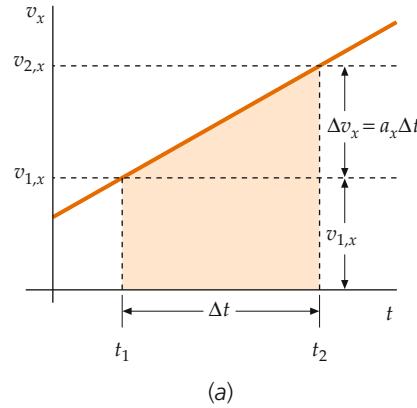
Abbildung 2.21 Gleichförmig geradlinige Bewegung.

Abbildung 2.22 Eine allgemeine v_x -t-Kurve. Die Gesamtverschiebung vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 ist die Fläche unter der Kurve für dieses Zeitintervall. Sie kann durch Addieren der Flächen unter den Rechtecken genähert werden.

Δt . Die Fläche unter der Kurve ist also die Verschiebung Δx . Wenn $v_{0,x}$ negativ ist (Abbildung 2.21b), sind sowohl die Verschiebung Δx als auch die Fläche unter der Kurve negativ. Normalerweise stellt man sich vor, dass eine Fläche nicht negativ sein kann. In unserem Fall ist das anders. Wenn $v_{0,x}$ negativ ist, ist die „Höhe“ der Kurve negativ und damit auch die „Fläche unter der Kurve“ $v_{0,x}\Delta t$.

Wie Abbildung 2.22 zeigt, ist die geometrische Interpretation der Verschiebung als Fläche unter der v_x -t-Kurve nicht nur für den Fall konstanter Geschwindigkeit, sondern allgemein gültig. Um dies nachzuweisen, teilen wir das Zeitintervall zunächst in mehrere kleine Intervalle $\Delta t_1, \Delta t_2$ usw. Daraufhin zeichnen wir wie in der Abbildung gezeigt eine Menge von Rechtecken ein. Die Fläche des dem i -ten Zeitintervall Δt_1 (in der Abbildung farbig hervorgehoben) entsprechenden Rechtecks ist $v_{i,x} \Delta t_i$ und damit näherungsweise gleich der Verschiebung Δx_i während des Intervalls Δt_i . Somit ist die Summe der Rechteckgebiete näherungsweise gleich der Summe der Verschiebungen während der Zeitintervalle und damit näherungsweise gleich der Gesamtverschiebung vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 . Dabei kann man die Näherung so genau wie möglich machen – man braucht dazu lediglich einen hinreichend kleinen Wert für Δt zu wählen. Für den Grenzwert von immer kleineren Intervallen (und gleichzeitig immer mehr Rechtecken) nähert sich die resultierende Summe der Fläche unter der Kurve an, die wiederum gleich der Verschiebung ist. Daher ist die Verschiebung Δx die Fläche unter der v_x -t-Kurve.

Bei gleichförmig beschleunigter Bewegung (Abbildung 2.23a) ist Δx gleich der Fläche des farbigen Bereichs. Dieser Bereich

Abbildung 2.23 v_x -t-Diagramm der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

2.4 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension

Vorgehensweise: Eindimensionale gleichförmig beschleunigte Bewegung

Ermitteln Sie, ob die Zeit, die Strecke, die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung eines Körpers bestimmt werden soll.

Orientieren Sie sich bei der Lösung von Aufgabenstellungen mit gleichförmig beschleunigter eindimensionaler Bewegung an den folgenden Punkten.

1. Zeichnen Sie eine Abbildung des Teilchens an seinem Anfangs- und an seinem Endort. Zeichnen Sie eine Koordinatenachse ein und bezeichnen Sie die Koordinaten des Anfangs- und des Endorts. Bezeichnen Sie außerdem die Anfangs- und die Endgeschwindigkeit sowie die Beschleunigung.
2. Wählen Sie eine der kinematischen Gleichungen 2.27, 2.29, 2.30 und 2.31 für die gleichförmig beschleunigte Bewegung aus. Setzen Sie die gegebenen Werte in die ausgewählte Gleichung ein und berechnen Sie, wenn möglich, den gesuchten Wert.
3. Wählen Sie bei Bedarf eine weitere kinematische Gleichung für die gleichförmig beschleunigte Bewegung aus, setzen Sie die gegebenen Werte in sie ein und berechnen Sie den gesuchten Wert.

Plausibilitätsprüfung: Abschließend sollten Sie sich davon überzeugen, dass Ihre Ergebnisse die richtige Dimension haben und dass die Maßeinheiten der Ergebnisse stimmen. Überzeugen Sie sich außerdem davon, dass die Größenordnungen und die Vorzeichen der Lösungen Ihren Erwartungen entsprechen.

setzt sich aus einem Rechteck mit der Fläche $v_{1,x} \Delta t$ und aus einem Dreieck mit der Fläche $\frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$ zusammen, wobei $\Delta t = t_2 - t_1$ ist. Damit ist

$$\Delta x = v_{1,x} \Delta t + \frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2. \quad (2.28)$$

Mit $t_1 = 0$ und $t_2 = t$ wird Gleichung 2.28 zu

$$x - x_0 = v_{0,x} t + \frac{1}{2}a_x t^2. \quad (2.29)$$

GLEICHFÖRMIG BESCHLEUNIGTE BEWEGUNG: $x(t)$

Dabei sind x_0 und $v_{0,x}$ der Ort und die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. Außerdem ist $x = x(t)$ der Ort zur Zeit t . Der erste Term rechts, $v_{0,x} t$, ist die Verschiebung, die das Teilchen auch erfahren würde, wenn a_x null wäre. Der zweite Term, $\frac{1}{2}a_x t^2$, ist die zusätzliche Verschiebung durch die konstante Beschleunigung.

Mithilfe der Gleichungen 2.27 und 2.29 lassen sich zwei weitere kinematische Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung ableiten. Umstellen von Gleichung 2.27 nach t und Einsetzen in Gleichung 2.29 führt zu

$$\Delta x = v_{0,x} \frac{v_x - v_{0,x}}{a_x} + \frac{1}{2}a_x \left(\frac{v_x - v_{0,x}}{a_x} \right)^2.$$

Durchmultiplizieren der Gleichung mit $2a_x$ ergibt

$$2a_x \Delta x = 2v_{0,x}(v_x - v_{0,x}) + (v_x - v_{0,x})^2.$$

Zusammenfassen und Umstellen liefert schließlich

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x. \quad (2.30)$$

GLEICHFÖRMIG BESCHLEUNIGTE BEWEGUNG: $v_x^2(x)$

Die Definition der mittleren Geschwindigkeit (Gleichung 2.8) lautete

$$\Delta x = \langle v_x \rangle \Delta t.$$

Dabei ist $\langle v_x \rangle \Delta t$ die Fläche unter der waagerechten Linie in der Höhe $\langle v_x \rangle$ in Abbildung 2.23b und Δx die Fläche unter der v_x -t-Kurve in Abbildung 2.23a. Wie man sieht, sind die Fläche unter der Geraden in der Höhe $\langle v_x \rangle$ in Abbildung 2.23b und die Fläche unter der v_x -t-Kurve in Abbildung 2.23a für $\langle v_x \rangle = \frac{1}{2}(v_{1,x} + v_{2,x})$ gleich. Damit ist also

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{2}(v_{1,x} + v_{2,x}). \quad (2.31)$$

DIE MITTLERE GESCHWINDIGKEIT BEI GLEICHFÖRMIG BESCHLEUNIGTER BEWEGUNG

Daher ist bei gleichförmig beschleunigter Bewegung die mittlere Geschwindigkeit der Mittelwert der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit.

Wir wollen ein Beispiel betrachten, in dem Gleichung 2.31 nicht anwendbar ist: die Bewegung eines Läufers, der 10,0 km in 40,0 min läuft. Seine mittlere Geschwindigkeit ergibt sich aus der Definition $\langle v_x \rangle = \Delta x / \Delta t$ zu 0,250 km/min. Der Läufer startet aus der Ruhe ($v_{1,x} = 0$) heraus. In den ersten 1–2 s nimmt seine Geschwindigkeit rasch zu. Anschließend erreicht sie einen konstanten Wert $v_{2,x}$, den der Läufer für den Rest der Strecke im Wesentlichen beibehält. Der Wert von $v_{2,x}$ liegt nur wenig über den 0,250 km/min. Somit würde Gleichung 2.31 für die mittlere Geschwindigkeit einen Wert von etwa 0,125 km/min ergeben, also fast 50 % weniger als die Definition der mittleren Geschwindigkeit. Da die Beschleunigung nicht während des gesamten Laufs gleichförmig ist, ist Gleichung 2.31 nicht anwendbar.

Anhand der Gleichungen 2.27, 2.29, 2.30 und 2.31 lassen sich Aufgabenstellungen aus der Kinematik lösen, die die eindimensionale gleichförmig beschleunigte Bewegung behandeln. Die Frage, welche Gleichung oder Gleichungen bei der Lösung einer speziellen Aufgabe heranzuziehen sind, hängt davon ab, welche Angaben in der Aufgabenstellung gegeben und welche

Größen gesucht sind. So kann z. B. auf Gleichung 2.30 zurückgegriffen werden, wenn die Endgeschwindigkeit eines Balls gesucht ist, der aus einer gewissen Höhe x aus der Ruhe losgelassen wird, und die Fallzeit nicht von Interesse ist.

Anwendungen der kinematischen Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung

Überlegen Sie sich zunächst das allgemeine Vorgehen bei der Lösung von Aufgaben mithilfe der kinematischen Gleichungen. Betrachten Sie anschließend die folgenden Beispiele für die eindimensionale gleichförmig beschleunigte Bewegung. Beispiel 2.13 beschäftigt sich mit dem **freien Fall**, einer sehr häufig vorkommenden Bewegung in der Natur. Die folgenden Beispiele 2.14 und 2.15 zeigen im Anschluss, wie man mithilfe der Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung den Bremsweg von Autos ausrechnen kann.

Beispiel 2.13: Der freie Fall

Angeblich hatte Isaac Newton die fundamentale Idee für seine Beschreibung der Himmelsmechanik, als er im Garten von Woolsthorpe Manor einen vom Baum fallenden Apfel sah. Nehmen Sie an, der Baum hat eine Höhe von 4,00 m und in einer Höhe von 2,50 m über dem Boden sitzt ein Vogel auf einem Ast. Der Apfel wiegt 200 g, und die konstante Beschleunigung, die der Apfel während des Falls erfährt, ist $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ in Richtung des Bodens. a) Welche Zeit benötigt der Apfel, bis er auf dem Boden auftrifft? b) Mit welcher Geschwindigkeit sieht der Vogel den Apfel an sich vorbeifliegen? c) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Apfel auf dem Boden auf?

Problembeschreibung: Da die Ortskoordinaten des Apfels gegeben sind, ist Gleichung 2.29 der Ausgangspunkt für die Lösung von Teilaufgabe a und Gleichung 2.30 für die Teilaufgaben b und c.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit allen gegebenen Koordinaten und legen Sie die Richtung des Beschleunigungsvektors fest.

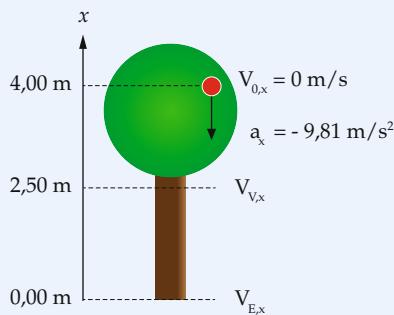


Abbildung 2.24 Koordinatensystem für Baum und Apfel.

2. Gehen Sie davon aus, dass der Apfel aus der Ruhe heraus mit $v_{x,0} = 0$ bei $t = 0$ seinen Fall beginnt. Formen Sie Gleichung 2.29 unter diesen Bedingungen nach der gesuchten Fallzeit um:

$$\Delta x = v_{0,x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \Delta x}{a_x}}$$

3. Setzen Sie die gegebenen Werte in die Gleichung von Schritt 2 ein, um das Endergebnis zu erhalten:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot (2,50 \text{ m} - 4,00 \text{ m})}{-9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = \boxed{0,90 \text{ s}}$$

Teilaufgabe b

Benutzen Sie Gleichung 2.30 unter den in Schritt 2 von Teilaufgabe a festgelegten Bedingungen, um die Geschwindigkeit in 2,50 m Höhe auszurechnen:

$$v_{V,x}^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x = 2 a_x \Delta x$$

$$v_{V,x} = -\sqrt{2 a_x \Delta x}$$

$$= -\sqrt{2 \cdot (-9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (2,50 \text{ m} - 4,00 \text{ m})}$$

$$= \boxed{-5,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Teilaufgabe c

Benutzen Sie wieder Gleichung 2.30 unter den in Schritt 2 von Teilaufgabe a festgelegten Bedingungen, um die Geschwindigkeit auszurechnen, die der Apfel hat, wenn er die gesamten 4,00 m gefallen ist:

$$v_{E,x} = -\sqrt{2 a_x \Delta x}$$

$$= -\sqrt{2 \cdot (-9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (0,00 \text{ m} - 4,00 \text{ m})}$$

$$= -8,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -8,86 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}}$$

$$= \boxed{-31,89 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: Da sowohl der Beschleunigungsvektor als auch die Höhendifferenzen im gewählten Koordinatensystem negativ sind, ergeben sich für die Terme unter den Wurzeln jeweils positive Werte. Beim Lösen von quadratischen Gleichungen der Form $x^2 = y$ ergeben sich mathematisch immer zwei mögliche Lösungen, wenn $y \geq 0$ ist: eine positive $x = \sqrt{y}$ und eine negative mit gleichem Betrag $x = -\sqrt{y}$. Welche dieser beiden Lösungen die physikalisch richtige ist, entscheiden Sie anhand des von Ihnen gewählten Koordinatensystems. Das Zeitintervall in Teilaufgabe a muss positiv sein (da es keine Bewegung gibt, die in der Zeit rückwärts läuft), während der Vektor der beiden Geschwindigkeiten in den Teilaufgaben b und c jeweils in Richtung des Erdbodens, also in negative x -Richtung, zeigt.

Weitergedacht: Alle Gleichungen sind unabhängig von der Masse oder der Form des fallenden Objekts, d.h., die Masse des Apfels wird für die Lösung dieser Aufgabe nicht benötigt. In der Realität jedoch fällt der Apfel nicht ganz so schnell zu Boden, da auf ihn die Luftreibung eine bremsende Wirkung hat. Diese hängt, wie wir in Kapitel 4 und Kapitel 10 noch genauer untersuchen werden, von der Beschaffenheit des fallenden Objekts ab.

Beispiel 2.14: Der Bremsweg eines Autos I

Stellen Sie sich vor, Sie fahren nachts auf der Autobahn. Sie bemerken auf dem Randstreifen ein Fahrzeug mit Motorschaden und halten mit einem gleichförmigen Beschleunigungsbetrag von $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ an. Wie lang ist der Bremsweg Ihres Autos bei einer Anfangsgeschwindigkeit von a) $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ oder b) $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?

Problembeschreibung: Wir wenden die oben erwähnte Vorgehensweise an. Das Auto wird als Punkt eingezeichnet, der für ein Teilchen bzw. für einen Massenpunkt steht. Wir wählen die Fahrtrichtung als $+x$ -Richtung und den Anfangsort als $x_0 = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt $v_{0,x} = +15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, die Endgeschwindigkeit ist $v_x = 0$. Da die Geschwindigkeit abnimmt, ist die Beschleunigung negativ. Sie beträgt $a_x = -5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Gesucht ist die zurückgelegte Strecke, d.h. der Betrag der Verschiebung Δx . Da die Zeit weder gegeben noch gesucht ist, lässt sich die Lösung in einem Schritt aus Gleichung 2.30, $v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$, ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie am Anfangs- und am Endort einen Punkt für das Auto ein (Abbildung 2.25). Zeichnen Sie auch die Koordinatenachse ein und tragen Sie die gegebenen kinematischen Größen ein.

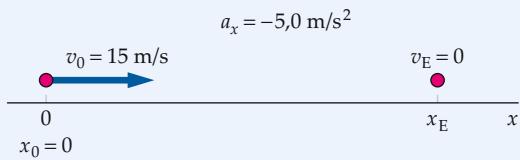


Abbildung 2.25 Bewegungsdiagramm des Autos.

2. Berechnen Sie aus Gleichung 2.30 die Verschiebung Δx :

$$\begin{aligned} v_x^2 &= v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x \\ 0 &= (15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 + 2(-5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})\Delta x \\ \Delta x &= 22,5 \text{ m} \approx \boxed{23 \text{ m}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Setzen Sie nun die Anfangsgeschwindigkeit von $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ in den Ausdruck für Δx aus Teilaufgabe a ein:

$$\begin{aligned} v_x^2 &= v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x \\ 0 &= (30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 + 2(-5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})\Delta x \\ \Delta x &= \boxed{90 \text{ m}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Geschwindigkeit des Autos nimmt in jeder Sekunde um $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ab. Wenn es eine Anfangsgeschwindigkeit von 15 m/s hat, kommt es nach $3,0 \text{s}$ zur Ruhe. Während dieser $3,0 \text{s}$ beträgt seine mittlere Geschwindigkeit die Hälfte von $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, sodass es $\frac{1}{2}(15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})(3,0 \text{s}) = 22,5 \text{ m}$ zurücklegt. Die Lösung von Teilaufgabe a ist also richtig. Die Lösung der Teilaufgabe b lässt sich ähnlich überprüfen.

Beispiel 2.15: Der Bremsweg eines Autos II**ZUR ÜBUNG**

- a) Wie lange würde das Bremsen des Autos aus Beispiel 2.14 bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dauern? b) Wie weit fährt es in der letzten Sekunde, bevor es zum Stillstand kommt?

Problembeschreibung Wenden Sie wieder die oben entwickelte allgemeine Vorgehensweise an. a) In dieser Teilaufgabe sollen Sie die Zeit ermitteln, die das Auto zum Bremsen braucht. Gegeben ist die Anfangsgeschwindigkeit von $v_{0,x} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Aus Beispiel 2.14 wissen wir bereits, dass das Auto eine Beschleunigung $a_x = -5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ hat. Gleichung 2.27 verknüpft die Zeit, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung. b) Da sich die Geschwindigkeit mit $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pro Sekunde verringert, beträgt sie $1,0 \text{ s}$ vor dem Anhalten $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit während der letzten Sekunde und daraus die zurückgelegte Strecke.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung**Teilaufgabe a**

1. Zeichnen Sie das Auto als kleinen Punkt an seinem Anfangs- und an seinem Endort ein (Abbildung 2.26). Zeichnen Sie auch eine Koordinatenachse ein und tragen Sie die kinematischen Größen ein.
2. Berechnen Sie aus Gleichung 2.27 die Gesamtbremszeit Δt .

Teilaufgabe b

1. Zeichnen Sie das Auto als kleinen Punkt an seinem Anfangs- und an seinem Endort ein (Abbildung 2.27). Zeichnen Sie auch die Koordinatenachse ein.
2. Ermitteln Sie aus $\langle v_x \rangle = \frac{1}{2}(v_{A,x} + v_{E,x})$ die mittlere Geschwindigkeit während der letzten Sekunde.
3. Berechnen Sie über $\Delta x = \langle v_x \rangle \Delta t$ die zurückgelegte Strecke.

Ergebnisse der Lösungsschritte**Teilaufgabe a**

1.

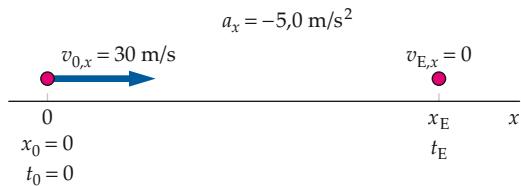


Abbildung 2.26 Bewegungsdiagramm des Autos am Anfangs- und Endpunkt.

2.

$$\Delta t = 6 \text{ s}$$

Teilaufgabe b

1.

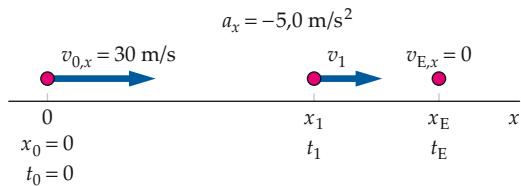


Abbildung 2.27 Bewegungsdiagramm mit der Geschwindigkeit 1 s vor Erreichen des Endpunkts.

2.

$$\langle v_x \rangle = [2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

3.

$$\Delta x = \langle v_x \rangle \Delta t = [2,5 \text{ m}]$$

Plausibilitätsprüfung: Da das Auto in der letzten Sekunde sehr langsam fährt, ist nicht zu erwarten, dass es in dieser Zeit noch sehr weit kommt. Das Ergebnis von Teilaufgabe b leuchtet also ein.

Manchmal lassen sich aus den Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung auch dann wertvolle Erkenntnisse über die Bewegung eines Körpers gewinnen, wenn die Beschleunigung tatsächlich gar nicht konstant ist. Die Ergebnisse sind in diesen Fällen nicht genau gültig, sondern nur Schätzwerte. In Beispiel 2.16 zeigen wir so einen Fall und nutzen die Gleichungen für die Beschreibung eines Crashtests, um die dabei auftretende nicht konstante Beschleunigung abzuschätzen. Anschließend beschäftigen wir uns in den Beispielen 2.17 bis 2.20 mit den Relativbewegungen gleichförmig beschleunigter Körper.

Beispiel 2.16: Der Crashtest

Bei einem Crashtest trifft ein Auto mit 100 km/h auf eine fest stehende Betonmauer. Wie groß ist die Beschleunigung des Autos?



(© DaimlerChrysler AG.)

Problembeschreibung: Sicher haben nicht alle Teile des Autos die gleiche Geschwindigkeit, während es zum Stillstand kommt und dabei zusammengedrückt wird. Die vordere Stoßstange bleibt praktisch sofort an ihrem Ort, während die hintere erst später zur Ruhe kommt. Wir wollen die Beschleunigung für ein Autoteil betrachten, das sich im Fahrgastraum außerhalb der Knautschzone befindet. Ein solches Teil ist z.B. der Bolzen, mit dem der Fahrersitz am Boden befestigt ist. Es ist nicht zu erwarten, dass dieser Bolzen gleichförmig verzögert wird. Um die Aufgabenstellung exakt zu lösen, brauchen wir weitere Informationen wie etwa den Bremsweg oder die Bremszeit. Allerdings können wir den Bremsweg mit dem gesunden Menschenverstand abschätzen. Beim Aufprall wird sich die Mitte des Autos wahrscheinlich weniger als seine halbe Länge nach vorn bewegen. Wir nehmen dafür 0,75 m als sinnvollen Schätzwert an. Da in der Aufgabenstellung die Zeit weder gegeben noch gesucht ist, verwenden wir die Gleichung $v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$.

Lösung: 1. Zeichnen Sie den Bolzen (als einen kleinen Kreis) in der Mitte des Autos am Anfangs- und am Endort

ein (Abbildung 2.28). Zeichnen Sie auch eine Koordinatenachse ein und tragen Sie die kinematischen Größen ein.

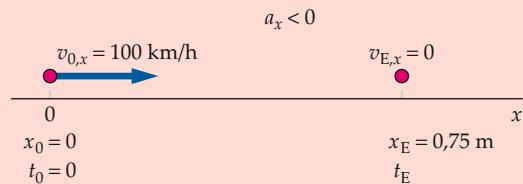


Abbildung 2.28 Bewegungsdiagramm des Autos.

2. Rechnen Sie die Geschwindigkeit von km/h in m/s um:

$$\left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot \left(\frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}\right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) = 27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. Stellen Sie die Formel $v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$ nach der Beschleunigung um:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$$

also

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0,x}^2}{2 \Delta x} = \frac{(0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 - (27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot (0,75 \text{ m})}$$

4. Schließen Sie damit die Berechnung ab:

$$a_x = -\frac{(27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{1,5 \text{ m}} = -514 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx -500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Betrag der Beschleunigung ist etwa 50-mal höher als der der Beschleunigung beim Bremsen eines Autos auf einer trockenen Betonstraße. Da beim Frontalaufprall eines Autos auf einen unbewegten Körper hohe Beschleunigungen zu erwarten sind, ist das Ergebnis plausibel.

Übung 2.5: Schätzen Sie die Bremszeit des Autos. ▶

Beispiel 2.17: Jagd auf den Raser

Ein Auto durchquert mit $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($\approx 90 \text{ km/h}$) die verkehrsberuhigte Zone vor einer Schule. Ein Polizeiwagen beginnt mit konstant $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ aus dem Stand zu beschleunigen, als der Raser an ihm vorüberfährt. a) Wann holt die Polizei den Raser ein? b) Wie schnell

fährt der Polizeiwagen in dem Moment, in dem er den Raser überholt?

Problembeschreibung: Um zu ermitteln, wann die beiden Autos auf gleicher Höhe sind, schreiben wir die Orte des Rasers x_R und des Polizeiwagens x_P als Funktionen der Zeit und ermitteln den Zeitpunkt t_F , zu dem $x_R = x_P$ ist. Nachdem wir wissen, wann der Polizeiwagen den Raser eingeholt hat, können wir aus der Gleichung $v_x = a_x t$ die Geschwindigkeit des Polizeiwagens in diesem Moment berechnen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie die beiden Autos an ihren Anfangsorten (bei $t = 0$) und an ihren Endorten (bei $t = t_F$) ein (Abbildung 2.29). Zeichnen Sie auch eine Koordinatenachse ein und bezeichnen Sie die kinematischen Größen.

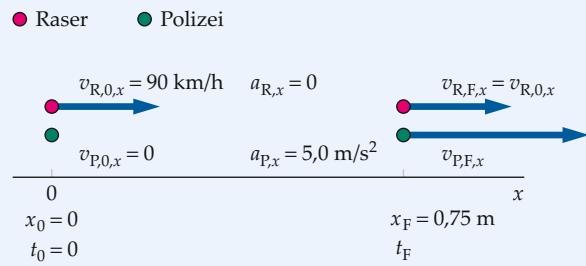


Abbildung 2.29 Der Raser und der Polizeiwagen sind bei $t = 0$ und dann wieder bei $t = t_F$ am selben Ort.

2. Schreiben Sie die Ortsfunktionen des Rasers und des Polizeiwagens auf:

$$x_R = v_{R,x} t \quad \text{und} \quad x_P = \frac{1}{2} a_{P,x} t^2$$

3. Setzen Sie $x_R = x_P$ und stellen Sie die entstehende Gleichung nach der Zeit t_F um. Dabei muss $t_F > 0$ sein:

$$v_{R,x} t_F = \frac{1}{2} a_{P,x} t_F^2 \Leftrightarrow v_{R,x} = \frac{1}{2} a_{P,x} t_F, \quad t_F \neq 0$$

$$t_F = \frac{2 v_{R,x}}{a_{P,x}} = \frac{2 \cdot (25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \boxed{10 \text{ s}}$$

Teilaufgabe b

Die Geschwindigkeit des Polizeiwagens ist durch die Gleichung $v_x = v_{0,x} + a_x t_F$ mit $v_{0,x} = 0$ gegeben:

$$v_{P,x} = a_{P,x} t_F = (5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (10 \text{ s}) = \boxed{50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: Beachten Sie, dass die Endgeschwindigkeit des Polizeiwagens in Teilaufgabe b genau doppelt so hoch ist wie die des Rasers. Da die beiden Autos die gleiche Strecke in der gleichen Zeit zurückgelegt haben, ist ihre mittlere Geschwindigkeit dieselbe. Die mittlere Geschwindigkeit des Rasers beträgt $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Damit der Polizeiwagen, der aus dem Stand losfährt, gleichförmig beschleunigt und eine mittlere Geschwindigkeit von $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ erreicht, muss seine Endgeschwindigkeit $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ betragen.

Übung 2.6: Wie weit sind beide Autos gefahren, wenn die Polizei den Raser einholt? ◀

Beispiel 2.18: Der Polizeiwagen

ZUR ÜBUNG

Wie schnell fährt der Polizeiwagen aus Beispiel 2.17, wenn er noch 25 m hinter dem Raser ist?

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit berechnet sich durch $v_p = a_{p,x} t_1$, wobei für den Zeitpunkt t_1 die Gleichung $l = x_R - x_p = 25 \text{ m}$ gilt.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Zeichnen Sie die Orte der beiden Autos in ein x - t -Diagramm ein (Abbildung 2.30). Ermitteln Sie in der grafischen Darstellung den Abstand $l = x_R - x_p$ beider Autos zu einem bestimmten Zeitpunkt.

2. Berechnen Sie aus den Gleichungen für x_p und x_R aus Beispiel 2.17 sowie aus $x_R - x_p = 25 \text{ m}$ den Zeitpunkt t_1 . Wir erwarten zwei Lösungen: eine kurz nach der Anfangszeit und die andere, kurz bevor die Polizei den Raser erreicht hat.

3. Berechnen Sie über $v_{p,1,x} = a_{p,x} t_1$ die Geschwindigkeit des Polizeiwagens bei $x_R - x_p = 25 \text{ m}$.

Ergebnisse der Lösungsschritte

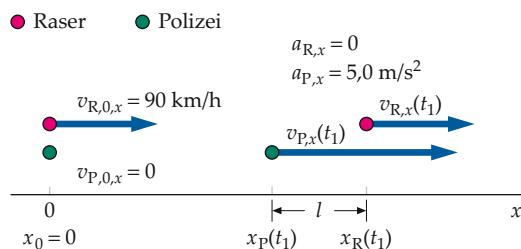


Abbildung 2.30 Bewegungsdiagramm des Rasers und der Polizei, wobei die Polizei bei t_1 noch 25 m hinter dem Raser ist.

$$t_1 = (5 \pm \sqrt{15}) \text{ s}$$

$$v_{p,1,x} = [5,64 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}] \quad \text{und} \quad [44,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

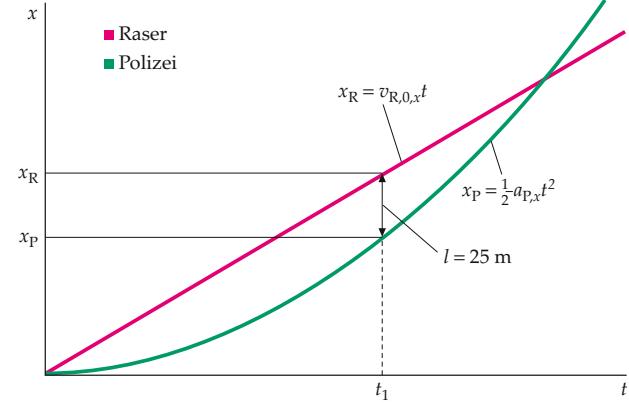


Abbildung 2.31 x - t -Diagramm der beiden Autos.

Plausibilitätsprüfung: Abbildung 2.31 zeigt, dass der Abstand zwischen den beiden Autos ursprünglich null ist, dann auf einen Maximalwert wächst und anschließend wieder abnimmt. Bei einem gegebenen Abstand sind zwei Geschwindigkeiten zu erwarten.

Weitergedacht: Der Abstand zu einem beliebigen Zeitpunkt berechnet sich aus $l = x_R - x_p = v_{R,x} t - \frac{1}{2} a_{P,x} t^2$. Bei Erreichen des maximalen Abstands zum Zeitpunkt $t = 5,0 \text{ s}$ ist $dl/dt = 0$. Im gleichen zeitlichen Abstand vor bzw. nach $t = 5,0 \text{ s}$ ist der räumliche Abstand zwischen den beiden Autos jeweils gleich.

Beispiel 2.19: Die Schraube im Fahrstuhl I

Während Sie in einem Fahrstuhl stehen, sehen Sie, wie sich eine Schraube von der 3,00 m hohen Decke löst und herabfällt. Wie lange fällt die Schraube, bis sie auf den Boden des Fahrstuhls auftrifft, wenn der Fahrstuhl in dem Moment, in dem sich die Schraube löst, gerade nach oben abfährt und dabei mit $a_B = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ beschleunigt?

Problembeschreibung: Wenn die Schraube auf den Boden auftrifft, sind die Schraube und der Boden am glei-

chen Ort. Setzen Sie ihre Orte gleich und stellen Sie nach der Zeit um.

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Skizze des Anfangs- und des Endorts des Fahrstuhlbodens und der Schraube an (Abbildung 2.32). Diese sollte die Koordinatenachse mit den Orten von Schraube und Boden enthalten. Die Schraube und der Boden haben dieselbe Anfangsgeschwindigkeit, jedoch unterschiedliche Beschleunigungen. Wählen Sie den Koordinatenursprung als den Anfangsort des Bodens und „nach oben“ als die positive y -Richtung. Die Schraube trifft zum Zeitpunkt t_E auf den Boden auf.

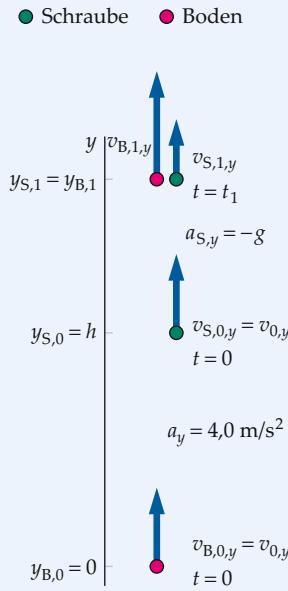


Abbildung 2.32 Die y -Achse ist am Gebäude befestigt.

2. Schreiben Sie Gleichungen für den Ort y_B des Fahrstuhlbodens und für den Ort der Schraube y_S in Abhängigkeit von der Zeit auf. Die Schraube und der Fahrstuhl haben dieselbe Anfangsgeschwindigkeit $v_{0,y}$:

$$\begin{aligned} y_B - y_{B,0} &= v_{B,0,y} t + \frac{1}{2} a_{B,y} t^2 \\ y_B - 0 &= v_{0,y} t + \frac{1}{2} a_{B,y} t^2 \\ y_S - y_{S,0} &= v_{S,0,y} t + \frac{1}{2} a_{S,y} t^2 \\ y_S - h &= v_{0,y} t + \frac{1}{2} (-g) t^2 \end{aligned}$$

3. Setzen Sie die Ausdrücke für y_S und y_B bei $t = t_E$ gleich und fassen Sie zusammen:

$$\begin{aligned} y_S &= y_B \\ h + v_{0,y} t_E - \frac{1}{2} g t_E^2 &= v_{0,y} t_E + \frac{1}{2} a_{B,y} t_E^2 \\ h - \frac{1}{2} g t_E^2 &= \frac{1}{2} a_{B,y} t_E^2 \end{aligned}$$

4. Stellen Sie nach der Zeit um und setzen Sie die gegebenen Werte ein:

$$h = \frac{1}{2} (a_B + g) t_E^2$$

und damit

$$\begin{aligned} t_E &= \sqrt{\frac{2h}{a_B + g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (3,0 \text{ m})}{4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} + 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} \\ &= 0,659 \text{ s} \approx [0,66 \text{ s}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn der Fahrstuhl feststehen würde, würde die Schraube die Strecke $h = \frac{1}{2} g t_E^2$ fallen. Bei $h = 3,0 \text{ m}$ ergäbe sich eine Fallzeit von $t_E = 0,78 \text{ s}$. Da der Fahrstuhl nach oben beschleunigt wird, ist zu erwarten, dass die Schraube in weniger als 0,78 s zu Boden fällt – was in Einklang mit unserem Ergebnis steht. ■

2.5 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in mehreren Dimensionen

Der schräge Wurf als Überlagerung aus zwei eindimensionalen Bewegungen

Beim Handball folgt der geworfene Ball im Flug einem bestimmten gekrümmten Weg. Dieser **schräger Wurf** oder auch **schiefer Wurf** genannte Bewegungstyp tritt immer dann auf, wenn ein Körper in die Luft geworfen wird und sich anschließend frei bewegen kann. Der Körper könnte ein Ball, ein Pfeil, das Wasser in einem Springbrunnen oder auch ein menschlicher Körper beim Weitsprung sein. Ist der Luftwiderstand vernachlässigbar, spricht man vom freien Fall. Auf frei fallende Körper in der Nähe der Erdoberfläche wirkt als Beschleunigung die nach unten gerichtete Erdbeschleunigung.

Abbildung 2.33 zeigt einen Körper, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel θ_0 zur Horizontalen geworfen wird. Der Abwurfpunkt sei (x_0, y_0) ; die y -Achse zeige nach oben und die x -Achse nach rechts. Die Anfangsgeschwindigkeit besitzt dann die Komponenten

$$v_{0,x} = |v_0| \cos \theta_0, \quad (2.32a)$$

$$v_{0,y} = |v_0| \sin \theta_0. \quad (2.32b)$$

Ohne Luftwiderstand ist die Beschleunigung a konstant. Weil der Körper horizontal nicht beschleunigt wird, wirkt lediglich die nach unten gerichtete Erdbeschleunigung:

$$a_x = 0, \quad (2.33a)$$

$$a_y = -g. \quad (2.33b)$$

Da die Beschleunigung konstant ist, können wir die in Abschnitt 2.4 erörterten kinematischen Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung anwenden. Wegen der fehlenden Beschleunigung in horizontaler Richtung ist die x -Komponente der Geschwindigkeit v konstant:

$$v_x = v_{0,x}. \quad (2.34a)$$

Die zeitliche Änderung der y -Komponente der Geschwindigkeit lautet gemäß $v_y = v_{0,y} + a_y t$ (Gleichung 2.27) mit $a_y = -g$:

$$v_y = v_{0,y} - g t. \quad (2.34b)$$

Beispiel 2.20: Die Schraube im Fahrstuhl II

ZUR ÜBUNG

Betrachten Sie nochmals Beispiel 2.19 mit der Schraube im Fahrstuhl. Wir wollen nun annehmen, dass dieser mit einer Geschwindigkeit von $16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ nach oben fährt, wenn sich die Schraube von der Decke löst. a) Wie weit steigt der Fahrstuhl, während die Schraube frei fällt? Wie groß ist die Verschiebung der Schraube, während sie frei fällt? b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Schraube und des Fahrstuhls, wenn die Schraube auf den Boden auftrifft?

Problembeschreibung Die Flugzeit der Schraube ist aus der Lösung in Beispiel 2.19 bekannt. Lösen Sie mit ihrer Hilfe die Teilaufgaben a und b.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung

Teilaufgabe a

1. Ermitteln Sie mithilfe der Gleichung 2.28 die Strecke, die der Boden zwischen $t = 0$ und $t = t_E$ gestiegen ist. Die Fallzeit t_E hatten wir in Schritt 4 in Beispiel 2.19 berechnet.

2. Die Verschiebung der Schraube zwischen $t = 0$ und $t = t_E$ ist um 3,0 m kleiner als die des Bodens.

Teilaufgabe b

Ermitteln Sie nun mit $v_y = v_{0,y} + a_y t$ (Gleichung 2.27) die Geschwindigkeiten der Schraube und des Bodens beim Auftreffen.

Ergebnisse der Lösungsschritte

Teilaufgabe a

1.

$$\Delta y_B = v_{B,0} t_E + \frac{1}{2} a_B t_E^2 = [11,4 \text{ m}]$$

2.

$$\Delta y_S = [8,4 \text{ m}]$$

Teilaufgabe b

$$v_{S,y} = v_{0,S,y} - g t_E = [9,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$v_{B,y} = v_{0,B,y} + a_{B,y} t_E = [19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

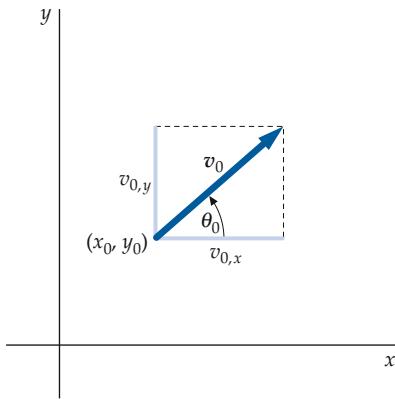


Abbildung 2.33 Die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit v_0 eines Teilchens sind $v_{0,x} = |v_0| \cos \theta_0$ und $v_{0,y} = |v_0| \sin \theta_0$, wobei θ_0 der Winkel von v_0 über der Horizontalen ist.

Beachten Sie, dass v_x nicht von v_y abhängt und v_y nicht von v_x : *Die horizontale Komponente und die vertikale Komponente der Wurfbewegung sind unabhängig.* (Wie in Abbildung 2.34 gezeigt ist, kann man die Unabhängigkeit von v_x und v_y veranschaulichen, indem man eine Kugel senkrecht vom Tisch fallen lässt und gleichzeitig eine zweite Kugel horizontal abstößt, so dass sie in einem Bogen von der Tischkante fällt. Beide treffen gleichzeitig auf dem Boden auf.)

Nach Gleichung 2.29 sind die Verschiebungen x und y durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$x(t) = x_0 + v_{0,x} t, \quad (2.35a)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2.35b)$$

GLEICHUNGEN FÜR DEN SCHRÄGEN WURF

Die Bezeichnungen $x(t)$ und $y(t)$ sollen lediglich betonen, dass x und y Funktionen der Zeit sind. Bei bekannter y -Komponente der Anfangsgeschwindigkeit kann der Zeitpunkt t , zu dem das Teilchen die Höhe y hat, aus Gleichung 2.35b bestimmt werden. Seine horizontale Lage zu diesem Zeitpunkt kann dann mithilfe von Gleichung 2.35a bestimmt werden.

Die allgemeine Gleichung für den Weg $y(x)$ bei der Wurfbewegung ergibt sich, wenn wir in Gleichung 2.35a und 2.35b t eliminieren. Mit $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ erhält man aus Gleichung 2.35a $t = x/v_{0,x}$. Wenn wir dies in Gleichung 2.35b einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x) &= v_{0,y} \left(\frac{x}{v_{0,x}} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0,x}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{v_{0,y}}{v_{0,x}} \right) x - \left(\frac{g}{2 v_{0,x}^2} \right) x^2. \end{aligned}$$

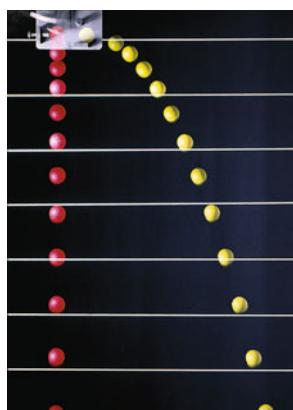


Abbildung 2.34 Die rote Kugel wird im gleichen Moment losgelassen, in dem die gelbe Kugel vom Tisch gestoßen wird. Die Orte beider Kugeln sind zu gleichen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten im gleichen zeitlichen Abstand gezeigt. Die vertikale Bewegung der gelben Kugel stimmt mit der der roten überein, was zeigt, dass die vertikale Bewegung der gelben Kugel unabhängig von ihrer horizontalen Bewegung ist. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

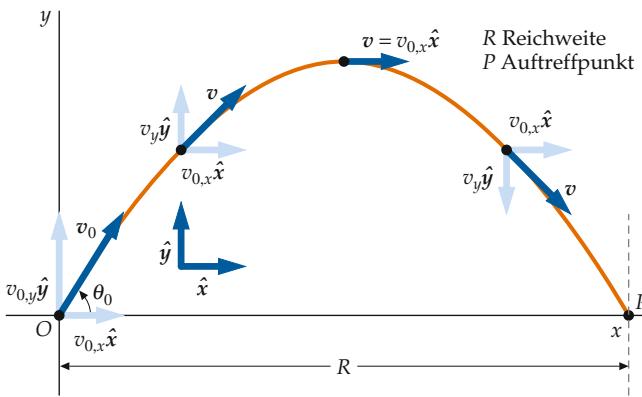


Abbildung 2.35 Der Weg mit den Geschwindigkeitsvektoren zu verschiedenen Zeiten beim schrägen Wurf.

Ersetzen der Geschwindigkeitskomponenten mit $v_{0,x} = |v_0|\cos\theta_0$ und $v_{0,y} = |v_0|\sin\theta_0$ ergibt für den Weg des Teilchens

$$y(x) = (\tan\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}\right)x^2. \quad (2.36)$$

DIE PARABELGLEICHUNG BEIM SCHRÄGEN WURF

Diese Gleichung hat die Form $y = ax + bx^2$ einer Parabel durch den Koordinatenursprung. Abbildung 2.35 zeigt den Verlauf des Wegs beim schrägen Wurf, wobei an mehreren Punkten der Geschwindigkeitsvektor und seine Komponenten eingezeichnet sind. Dieser Weg betrifft einen Gegenstand, der beim Punkt P aufkommt. Die horizontale Entfernung $|\Delta x|$ zwischen Abwurf- und Auftreffpunkt in der gleichen Höhe ist die **Reichweite R** .

Die Beispiele 2.21 und 2.22 zeigen eine Anwendung des schrägen Wurfs.

Beispiel 2.21: Abwurf eines Versorgungspakets I

Ein Hubschrauber wirft ein Versorgungspaket für Hochwasseropfer ab, die auf einem Floß auf einem See treiben, der Hochwasser führt. Beim Abwurf des Pakets ist der Hubschrauber in einer Höhe von 100 m direkt über dem Floß, wobei er mit 25,0 m/s unter einem Winkel von $\theta_0 = 36,9^\circ$ zur Horizontalen steigt. a) Wie lange ist das Paket in der Luft? b) In welcher Entfernung vom Floß kommt das Paket auf? c) Wo befindet sich der Hubschrauber beim Auftreffen des Pakets, wenn er mit konstanter Geschwindigkeit weiterfliegt? (Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.)

Problembeschreibung: Wie lange das Paket in der Luft ist, hängt lediglich von der vertikalen Bewegung ab. Wir lösen die Gleichung $y(t) = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2$ (Gleichung 2.35b) nach der Zeit auf. Als Koordinatenursprung verwenden wir den Ort des Pakets beim Abwurf. Die Anfangsgeschwindigkeit des Pakets ist gleich der Geschwindigkeit des Hubschraubers beim Abwurf. Die horizontale Strecke, die das Paket zurücklegt, ist durch die Gleichung $x(t) = v_{0,x}t$ (Gleichung 2.35a) gegeben, wobei t die Flugdauer des Pakets ist.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Skizzieren Sie die Trajektorie des Pakets während des Flugs. Legen Sie dabei die Koordinatenachsen so wie in Abbildung 2.36 gezeigt.

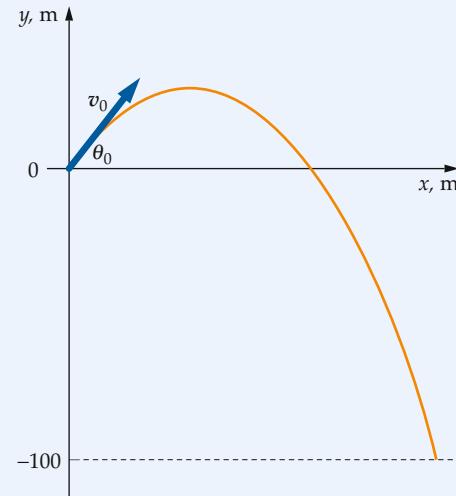


Abbildung 2.36 Die Parabel schneidet die Gerade $y = -100$ m zweimal, aber nur eine der Lösungen ist größer als null.

2.5 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in mehreren Dimensionen

2. Schreiben Sie zur Bestimmung der Flugzeit die Formel für $y(t)$ für die gleichförmig beschleunigte Bewegung auf und setzen darin $y_0 = 0$ und $a_y = -g$:

$$y = y_0 + v_{0,y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y = 0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 = v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

3. Die Lösung der quadratischen Gleichung $a x^2 + b x + c = 0$ lautet:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Wenden Sie dies auf die quadratische Gleichung aus Schritt 2 für t an:

$$y = v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{oder} \quad 0 = \frac{1}{2} g t^2 - v_{0,y} t + y$$

und damit

$$t = \frac{v_{0,y} \pm \sqrt{v_{0,y}^2 - 2gy}}{g}$$

4. Ermitteln Sie die Lösung für $y(t) = -100 \text{ m}$. Berechnen Sie dazu zunächst $v_{0,y}$ und damit dann die Landezeit t :

$$v_{0,y} = |\mathbf{v}_0| \sin \theta_0 = (25,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \sin 36,9^\circ$$

$$= 15,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

damit ergibt sich

$$t = \frac{15,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

$$\pm \frac{\sqrt{(15,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 - 2 \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (-100 \text{ m})}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

und somit

$$t = -3,24 \text{ s} \quad \text{oder} \quad t = 6,30 \text{ s}$$

Da das Paket bei $t = 0$ abgeworfen wird, kann die Landezeit nicht negativ sein, d. h.:

$$t = [6,30 \text{ s}]$$

Teilaufgabe b

1. Bei der Landung hat das Paket eine horizontale Strecke x zurückgelegt, die gleich dem Produkt der horizontalen Geschwindigkeit mit der Flugdauer ist. Berechnen Sie zunächst die horizontale Geschwindigkeit:

$$v_{0,x} = |\mathbf{v}_0| \cos \theta_0 = (25,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \cos 36,9^\circ$$

$$= 20,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Setzen Sie dies nun in $x = x_0 + v_{0,x} t$ (Gleichung 2.35a) ein und berechnen Sie x :

$$x = v_{0,x} t = (20,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (6,30 \text{ s}) = [126 \text{ m}]$$

Teilaufgabe c

Die Koordinaten des Hubschraubers bei der Landung des Pakets lauten:

$$x_H = v_{0,x} t = (20,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (6,30 \text{ s}) = [126 \text{ m}]$$

$$y_H = y_{H,0} + v_{H,0,y} t = 0 + (15,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (6,30 \text{ s}) \\ = [94,5 \text{ m}]$$

Damit befindet sich der Hubschrauber bei der Landung des Pakets in einer Höhe von *194 m direkt über dem Paket*.

Plausibilitätsprüfung: Wenn das Paket auf das Floß auftrifft (und auch die ganze Zeit dazwischen), ist der Hubschrauber direkt über dem Paket. Dies folgt daraus, dass die horizontalen Geschwindigkeiten des Pakets und des Hubschraubers im Moment des Abwurfs gleich sind und beide konstant bleiben.

Weitergedacht: Die positive Zeit wird gewählt, da das Paket aufkommen muss, nachdem es (bei $t = 0$) abgeworfen wurde. Wie Abbildung 2.37 zeigt, wäre das Paket bei der negativen Lösung $-3,24 \text{ s}$ bei $y = -100 \text{ m}$ gewesen, wenn seine Bewegung vor $t = 0 \text{ s}$ begonnen hätte.

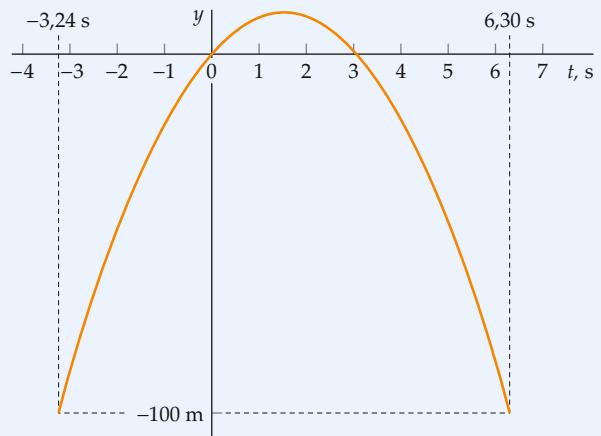


Abbildung 2.37 Darstellung der gesamten Wurfparabel, vorausgesetzt das Paket wäre zu einer Zeit vor $t = 0$ losgeworfen worden.

Beispiel 2.22: Abwurf eines Versorgungspakets II**ZUR ÜBUNG**

Berechnen Sie ausgehend von Beispiel 2.21 a) die Zeit t_1 , nach der sich das Paket am höchsten Punkt h der Flugbahn befindet, b) den Abstand h zur Wasseroberfläche an diesem Punkt und c) die Zeit t_2 von diesem höchsten Punkt, bis es auf dem Floß aufkommt.

Problembeschreibung Die Zeit t_1 ist der Zeitpunkt, bei dem die vertikale Geschwindigkeitskomponente null ist. Diese Zeit können Sie aus der Gleichung $v_y(t) = v_{0,y} - g t$ (Gleichung 2.34b) berechnen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung**Teilaufgabe a**

1. Schreiben Sie $v_y(t)$ für das Paket auf.
2. Setzen Sie $v_y(t_1) = 0$ und lösen Sie nach t_1 auf.

Teilaufgabe b

1. Bestimmen Sie $\langle v_y \rangle$, während das Paket steigt.
2. Berechnen Sie mithilfe von $\langle v_y \rangle$ die Höhendifferenz. Errechnen Sie daraus h .

Teilaufgabe c

Ermitteln sie die Fallzeit in Abhängigkeit vom Weg h .

Ergebnisse der Lösungsschritte**Teilaufgabe a**

1.

$$v_y(t) = v_{0,y} - g t$$

2.

$$t_1 = [1,53 \text{ s}]$$

Teilaufgabe b

1.

$$\langle v_y \rangle = 7,505 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.

$$\Delta y = 11,48 \text{ m}, \quad h = [111,5 \text{ m}]$$

Teilaufgabe c

$$t_2 = [4,77 \text{ s}]$$

Plausibilitätsprüfung: In Übereinstimmung mit Beispiel 2.21 beträgt die gesamte Fallzeit $t_1 + t_2 = 6,30 \text{ s}$. Außerdem ist t_1 kleiner als t_2 . Dies war zu erwarten, da das Paket 12 m steigt, aber 112 m fällt.

Übung 2.7: Lösen Sie Teilaufgabe b in Beispiel 2.22 mittels $y(t)$ (Gleichung 2.35b) anstatt über $\langle v_y \rangle$. ◀

Die horizontale Reichweite beim Wurf

Die horizontale Reichweite R beim Wurf kann durch die Anfangsgeschwindigkeit und durch den Wurfwinkel ausgedrückt werden. Wie in den vorangehenden Beispielen ergibt sich die horizontale Reichweite, indem wir die x -Komponente der Geschwindigkeit mit der Gesamtdauer multiplizieren, die der Gegenstand in der Luft ist. Die gesamte Flugdauer T erhält man, indem in der Gleichung $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (Gleichung 2.35b) $y = 0$ und $t = T$ gesetzt wird:

$$0 = v_{0,y} T - \frac{1}{2} g T^2 = 0, \quad T > 0.$$

Division durch T ergibt

$$v_{0,y} - \frac{1}{2} g T = 0.$$

Damit beträgt die Flugdauer des Körpers

$$T = \frac{2 v_{0,y}}{g} = \frac{2 |v_0|}{g} \cdot \sin \theta_0.$$

Um die horizontale Reichweite R zu ermitteln, setzen wir dieses T für t in $x(t) = v_{0,x} t$ (Gleichung 2.35a) ein:

$$\begin{aligned} R &= v_{0,x} T = (|v_0| \cos \theta_0) \left(\frac{2 |v_0|}{g} \cdot \sin \theta_0 \right) \\ &= \frac{2 v_0^2}{g} \cdot \sin \theta_0 \cos \theta_0. \end{aligned}$$

Zur weiteren Vereinfachung nutzen wir die trigonometrische Formel

$$\sin(2\theta_0) = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0.$$

Somit ist

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0). \quad (2.37)$$

HORIZONTALE REICHWEITE BEIM SCHRÄGEN WURF

Gleichung 2.37 kann genutzt werden, um die Reichweite für mehrere Körper mit dem gleichen Anfangsgeschwindigkeitsbetrag zu ermitteln. Für diesen Fall zeigt die Gleichung die

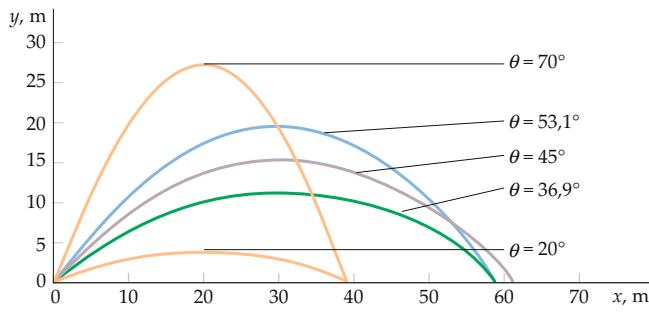


Abbildung 2.38 Verschiedene Flugbahnen für verschiedene Anfangswinkel bei gleichem Anfangsgeschwindigkeitsbetrag.

Abhängigkeit der Reichweite vom Winkel θ_0 . Da der Maximalwert von $\sin(2\theta_0)$ gleich 1 ist und da $\sin(2\theta_0) = 1$ für $\theta_0 = 45^\circ$ erreicht wird, ist die Reichweite für $\theta_0 = 45^\circ$ am größten. Abbildung 2.38 zeigt die x - y -Diagramme für Teilchen, die alle die gleiche Anfangsgeschwindigkeit von 24,5 m/s, aber verschiedene Anfangswinkel besitzen. Gezeigt sind der Winkel von 45° bei dem die maximale Reichweite erzielt wird, sowie Paare von Winkeln, die genauso weit über wie unter 45° liegen. Beachten Sie, dass bei den Winkelpaaren jeweils die gleiche Weite erreicht wird. Beispiel 2.23 verdeutlicht die Rolle des Anfangswinkels.

Beispiel 2.23: Haltet den Dieb!

Ein Polizeibeamter verfolgt einen Schmuckräuber über die Hausdächer. Beim Rennen kommen sie an eine Stelle, an der ein Zwischenraum zum nächsten Dach klappt. Die beiden Dächer haben einen Abstand von 4,00 m, wobei das zweite Dach 3,00 m tiefer als das erste liegt (Abbildung 2.39). Der Dieb springt mit einer Geschwindigkeit von 5,00 m/s und unter einem Winkel von 45° ab und kommt gut über den Zwischenraum. Der Polizeibeamte meint, dass er seine horizontale Geschwindigkeit möglichst hoch wählen sollte, und springt mit 5,00 m/s horizontal ab. a) Schafft er es über den Zwischenraum? b) Um wie viel springt der Dieb weiter als der Zwischenraum breit ist?

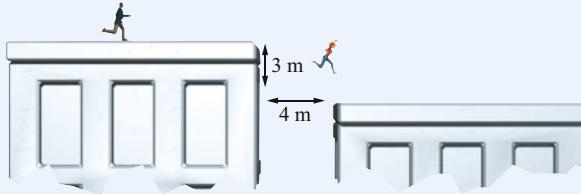


Abbildung 2.39 Skizze der Verfolgungsjagd.

Problembeschreibung: Wenn wir davon ausgehen, dass beide über den Zwischenraum kommen, hängt die Ge-

samtzeit, die beide in der Luft sind, nur von der Vertikalbewegung ab. Legen Sie den Koordinatenursprung an die Absprungstelle und zählen Sie die Richtung nach oben positiv, sodass die Gleichungen 2.35a und 2.35b angewendet werden können. Setzen Sie in Gleichung 2.35b für $y(t)$ den Höhenunterschied $y = -3,00 \text{ m}$ sowie $\theta_0 = 0^\circ$ bzw. $\theta_0 = 45^\circ$ ein und ermitteln Sie die Lösungen für t . Die horizontal zurückgelegten Strecken sind jeweils die x -Werte zu diesem Zeitpunkt.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Schreiben Sie $y(t)$ für den Polizeibeamten auf und ermitteln Sie die Sprungzeit t für $y = -3,00 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 = -3,00 \text{ m} \\ &= 0 + 0 - \frac{1}{2}(9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) t^2 \\ t &= 0,782 \text{ s} \end{aligned}$$

- Setzen Sie die erhaltene Sprungzeit in die Gleichung für $x(t)$ ein und ermitteln Sie die währenddessen zurückgelegte Entfernung:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0,x} t \\ x &= 0 + (5,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (0,782 \text{ s}) \\ x &= 3,91 \text{ m} \end{aligned}$$

Da 3,91 m kleiner 4 m ist, scheint der Polizeibeamte nicht über den Zwischenraum zu kommen.

Teilaufgabe b

- Schreiben Sie $y(t)$ für den Dieb auf und ermitteln Sie die Sprungzeit für $y = -3,00 \text{ m}$. Dies führt auf eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen, von denen jedoch nur eine sinnvoll ist:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ -3,00 \text{ m} &= 0 + (5,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \sin 45,0^\circ \cdot t \\ &\quad - \frac{1}{2}(9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) t^2 \\ t &= -0,500 \text{ s} \quad \text{oder} \quad t = 1,22 \text{ s} \end{aligned}$$

Da der Dieb erst nach dem Absprung landen kann, ist $t = 1,22 \text{ s}$.

- Ermitteln Sie für den positiven t -Wert die zurückgelegte horizontale Strecke:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0,x} t \\ &= 0 + (5,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \cos 45,0^\circ (1,22 \text{ s}) = 4,31 \text{ m} \end{aligned}$$

- Subtrahieren Sie von der Strecke 4,0 m:

$$4,31 \text{ m} - 4,00 \text{ m} = 0,31 \text{ m}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Polizeibeamte hat während des gesamten Sprungs eine konstante Horizontalgeschwindigkeit von 5,00 m/s. Er legt damit die 4,00 m bis zum nächsten Gebäude in $4,00 \text{ m} / (5,00 \text{ m/s}) = 0,800 \text{ s}$ zurück. Da das Ergebnis aus Teilaufgabe a, Schritt 1, kleiner als 0,800 s ist, wissen wir, dass er unter das zweite Dach fällt, bevor er dessen Kante erreicht. Dies stimmt mit dem Ergebnis von Teilaufgabe a, Schritt 2, überein.

Weitergedacht: Wir hatten den Polizeibeamten als Teilchen modelliert. Dabei zeigte sich, dass er in der Entfernung des zweiten Dachs bereits etwas unter diesem ist. Da er tatsächlich kein Teilchen ist, kann er verhindern, dass er herunterfällt. Wahrscheinlich wird er hierzu während des Sprungs in die Hocke gehen und damit seine Füße so weit anheben, dass er die Dachkante gerade erreicht. ■

In vielen praktischen Anwendungen stimmt die Anfangshöhe nicht mit der Endhöhe überein. So kommt die Kugel beim Kugelstoßen auf dem Boden auf, wird aber aus einer Anfangshöhe von etwa 2 m über dem Boden abgeworfen. Abbildung 2.40 zeigt, dass die maximale Reichweite deshalb bei einem etwas kleineren Winkel als 45° erzielt wird. Untersuchungen der besten Kugelstoßer haben ergeben, dass die maximale Reichweite bei einem Anfangswinkel von etwa 42° erzielt wird.

Der schräge Wurf in Vektorform

Beim schrägen Wurf ist $a_x = 0$ und $a_y = -g$ (Gleichung 2.33a und b), wobei die positive y-Richtung nach oben weist. Diese Gleichungen lassen sich auch in Vektorform ausdrücken. Multipliziert man $a_x = 0$ (Gleichung 2.33a) mit \hat{x} und $a_y = -g$ (Gleichung 2.33b) mit \hat{y} und addiert beide Ergebnisse, ergibt sich

$$\mathbf{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} = -g \hat{y} \quad (2.33c)$$

mit der Erdbeschleunigungskonstanten g , die auf der Höhe des Meeresspiegels und bei einer geografischen Breite von 45°

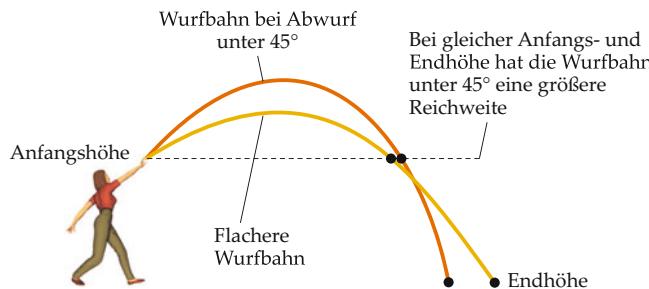


Abbildung 2.40 Wenn ein Körper beim Wurf unter dem Abwurfpunkt aufkommt, wird die maximale horizontale Verschiebung bei einem etwas kleineren Wurfwinkel als 45° erreicht.

einen Wert von $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ besitzt. Obwohl die Erdbeschleunigung vom Ort abhängt, wird g häufig wie eine Konstante behandelt, um bequemer rechnen zu können.

Auch die Gleichungen $v_x = v_{0,x}$ und $v_y = v_{0,y} - g t$ lassen sich in Vektorform ausdrücken:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - g t \hat{y} \quad \text{oder} \quad \Delta \mathbf{v} = -g t \hat{y}, \quad (2.34c)$$

wobei $\mathbf{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$ und $\mathbf{v}_0 = v_{0,x} \hat{x} + v_{0,y} \hat{y}$ ist. Wiederholt man dieses Verfahren für die Gleichungen $x(t) = x_0 + v_{0,x} t$ und $y(t) = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$, erhält man

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y} \quad \text{oder} \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}. \quad (2.35c)$$

VEKTORGLEICHUNGEN FÜR DEN SCHRÄGEN WURF

mit $\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$ und $\mathbf{r}_0 = x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y}$. Für verschiedene Aufgabenstellungen wie in Beispiel 2.24 ist die Vektordarstellung der Bewegungsgleichungen (2.34c) und (2.35c) zweckmäßiger.

Übung 2.8: Ein Eishockey-Puck wird von der Eisfläche aus geschlagen. Er verfehlt das Netz und fliegt in einer Höhe von $h = 2,80 \text{ m}$ über die Plexiglasscheibe. In dem Moment, in dem er die Plexiglasscheibe überfliegt, beträgt die Flugzeit $t_1 = 0,650 \text{ s}$. Die horizontale Entfernung ist $x_1 = 12,0 \text{ m}$. a) Ermitteln Sie die Anfangsgeschwindigkeit und -richtung des Pucks. b) Wann erreicht der Puck seine maximale Höhe? c) Wie groß ist die maximale Höhe des Pucks? ◀

Beispiel 2.24: Der Wildhüter und der Affe

Ein Wildhüter mit einem Betäubungsgewehr möchte einen Affen schießen, der an einem Ast hängt. Der Wildhüter richtet den Gewehrlauf direkt auf den Affen. Dabei beachtet er nicht, dass der Pfeil eine Parabelbahn beschreibt und daher unterhalb der jetzigen Lage des Affen vorbeifliegen würde. Der Affe sieht, wie der Pfeil abgeschossen wird. Er lässt sich sofort fallen – in der Hoffnung, so dem Pfeil zu entgehen. a) Zeigen Sie, dass der Affe unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit des Pfeils getroffen wird, solange diese ausreicht, damit der Pfeil die horizontale Entfernung bis zum Baum überwindet. Die Reaktionszeit des Affen ist zu vernachlässigen. b) $v_{P,0}$ sei die Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf den Affen beim Verlassen des Gewehrs. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf den Affen zu einem beliebigen Zeitpunkt t während der Flugzeit des Pfeils?

Problembeschreibung: Sowohl der Affe als auch der Pfeil bewegen sich entsprechend einem schrägen Wurf. Um zu zeigen, dass der Pfeil den Affen trifft, müssen beide unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit des Pfeils zu irgendeinem Zeitpunkt t dieselben Koordinaten

haben. Wir wenden Gleichung 2.35c sowohl auf den Affen als auch auf den Pfeil an. Für Teilaufgabe b können wir Gleichung 2.34c unter Berücksichtigung der jeweiligen Bezugssysteme heranziehen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Wenden Sie Gleichung 2.35c zum Zeitpunkt t auf den Affen an:

$$\Delta r_A = -\frac{1}{2} g t^2 \hat{y}$$

(Die Anfangsgeschwindigkeit des Affen ist null.)

2. Wenden Sie Gleichung 2.35c zum Zeitpunkt t auf den Pfeil an:

$$\Delta r_P = v_{P,0} t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}$$

wobei $v_{P,0}$ die Abschussgeschwindigkeit des Pfeils ist.

3. Fertigen Sie eine Skizze mit dem Affen, dem Gewehr und dem Pfeil ähnlich Abbildung 2.41 an. Zeichnen Sie Pfeil und Affe in ihrer Anfangslage und an ihren Orten zu einem späteren Zeitpunkt t . Zeichnen Sie die Vektoren der einzelnen Glieder in den Ergebnissen der Schritte 1 und 2 ein.

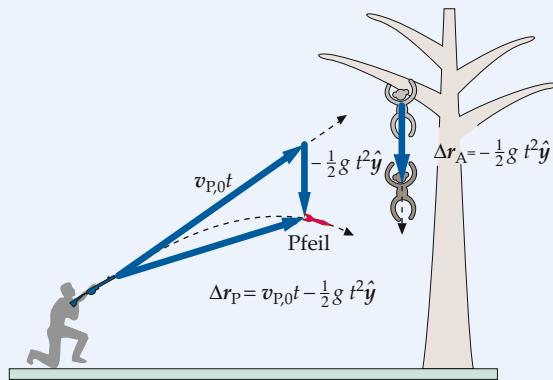


Abbildung 2.41 Skizze des Problems mit den verschiedenen Vektoren.

4. Zum Zeitpunkt t befinden sich sowohl der Pfeil als auch der Affe eine Strecke $\frac{1}{2}gt^2$ unterhalb der Schusslinie des Gewehrs. Wenn der Pfeil die Gerade erreicht, auf der der Affe fällt, wird der Affe getroffen.

Teilaufgabe b

1. Die Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf den Affen ist gleich der Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf das Gewehr plus der Geschwindigkeit des Gewehrs in Bezug auf den Affen:

$$v_P^{(A)} = v_P^{(G)} + v_G^{(A)}$$

2. Die Geschwindigkeit des Gewehrs in Bezug auf den Affen ist betragsmäßig gleich, aber entgegengesetzt gerichtet

der Geschwindigkeit des Affen in Bezug auf das Gewehr:

$$v_P^{(A)} = v_P^{(G)} - v_A^{(G)}$$

3. Drücken Sie mittels $v = v_0 - g t \hat{y}$ (Gleichung 2.34c) die Geschwindigkeit des Pfeils in Bezug auf das Gewehr und die Geschwindigkeit des Affen in Bezug auf das Gewehr aus:

$$v_P^{(G)} = v_{P,0}^{(G)} - g t \hat{y}$$

$$v_A^{(G)} = -g t \hat{y}$$

4. Setzen Sie diese Terme in das Ergebnis aus Schritt 2 der Teilaufgabe b ein:

$$v_P^{(A)} = (v_{P,0}^{(G)} - g t \hat{y}) + (g t \hat{y}) = \boxed{v_{P,0}^{(G)}}$$

Plausibilitätsprüfung: Teilaufgabe a, Schritt 4, und Teilaufgabe b, Schritt 4, stehen in Einklang. Beide besagen, dass der Pfeil den Affen trifft, wenn er die Falllinie des Affen erreicht, bevor dieser auf dem Boden aufkommt.

Weitergedacht: Relativ zum fallenden Affen bewegt sich der Pfeil mit der konstanten Geschwindigkeit $|v_{P,0}^{(G)}|$ auf einer Geraden. Er erreicht den Affen zur Zeit $t = l/|v_{P,0}^{(G)}|$, wobei l der Abstand von der Gewehrmündung zum Anfangsort des Affen ist. Bei einer hohen Anfangsgeschwindigkeit $|v_{P,0}^{(G)}|$ wird der Affe ganz in der Nähe seiner Anfangshöhe getroffen, bei kleinem $|v_{P,0}^{(G)}|$ dagegen erst kurz vor dem Auftreffen auf den Boden. ■

Die Kreisbewegung

Abbildung 2.43 zeigt ein Pendel, das in einer vertikalen Ebene schwingt. Der Weg des Pendelkörpers ist Teil einer Kreisbahn. Die Bewegung entlang einer Kreisbahn oder eines Teils davon wie in Beispiel 2.25 wird **Kreisbewegung** genannt.

In Beispiel 2.25 wird erläutert, dass der Beschleunigungsvektor im tiefsten Punkt der Pendelschwingung (Abbildung 2.44) direkt nach oben, d. h. zum Mittelpunkt P des Kreises, gerichtet ist. Dort, wo der Geschwindigkeitsbetrag zunimmt (wo der Körper sinkt), hat der Beschleunigungsvektor eine Komponente in Richtung des Geschwindigkeitsvektors sowie eine in Richtung zum Mittelpunkt P . Dagegen hat er dort, wo der Geschwindigkeitsbetrag abnimmt, eine Komponente, die dem Geschwindigkeitsvektor entgegengerichtet ist, sowie ebenfalls eine in Richtung zum Mittelpunkt P .

Die Richtung zum Bewegungszentrum wird die **Zentripetalrichtung** genannt und die Richtung des Geschwindigkeitsvektors die **Tangentialrichtung**. In Abbildung 2.44 zeigt der

Beispiel 2.25: Pendelschwingungen**ZUM VERSTÄNDNIS**

Wir betrachten die Bewegung des Pendelkörpers in Abbildung 2.43. Ermitteln Sie mithilfe eines Bewegungsdiagramms (siehe Beispiel 2.12) die Richtung des Beschleunigungsvektors, wenn der Pendelkörper von links nach rechts schwingt, a) während er sinkt, b) beim Durchgang durch den tiefsten Punkt und c) während er steigt.

Problembeschreibung: Während der Pendelkörper sinkt, steigt sein Geschwindigkeitsbetrag; gleichzeitig ändert er seine Richtung. Die Beschleunigung ergibt sich über $\mathbf{a} \approx \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ aus der Geschwindigkeitsänderung. Die Richtung der Beschleunigung an einem Punkt kann abgeschätzt werden, indem grafisch eine Vektoraddition $\mathbf{v}_A + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_E$ durchgeführt und so die Richtung von $\Delta \mathbf{v}$ – und damit die des Beschleunigungsvektors – ermittelt wird.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Bewegungsdiagramm für eine volle Schwingung von links nach rechts (Abbildung 2.42a). Der Abstand zwischen den Punkten, also der Geschwindigkeitsbetrag, ist am tiefsten Punkt am größten.

2. Wählen Sie den Punkt bei t_2 in dem Teil des Bewegungsdiagramms, in dem der Körper sinkt, und zeichnen Sie einen Geschwindigkeitsvektor für den vorhergehenden und für den nächsten Punkt (also die Punkte bei t_1 und t_3) des Diagramms. Diese Geschwindigkeitsvektoren sind tangential zum Weg einzuziehen, wobei ihre Länge proportional zum Geschwindigkeitsbetrag zu wählen ist (Abbildung 2.42a).

3. Stellen Sie das Vektoradditionsdiagramm (Abbildung 2.42b) für die Beziehung $\mathbf{v}_A + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_E$ dar. Zeichnen Sie nun den Beschleunigungsvektor ein. Da $\mathbf{a} \approx \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ ist, zeigt \mathbf{a} in die gleiche Richtung wie $\Delta \mathbf{v}$.

Teilaufgabe b

Wiederholen Sie die Schritte 2 und 3 (Abbildung 2.42c) für den Punkt bei t_4 am tiefsten Punkt der Bahn.

Teilaufgabe c

Wiederholen Sie die Schritte 2 und 3 (Abbildung 2.42d) für den Punkt bei t_6 , während der Körper steigt.

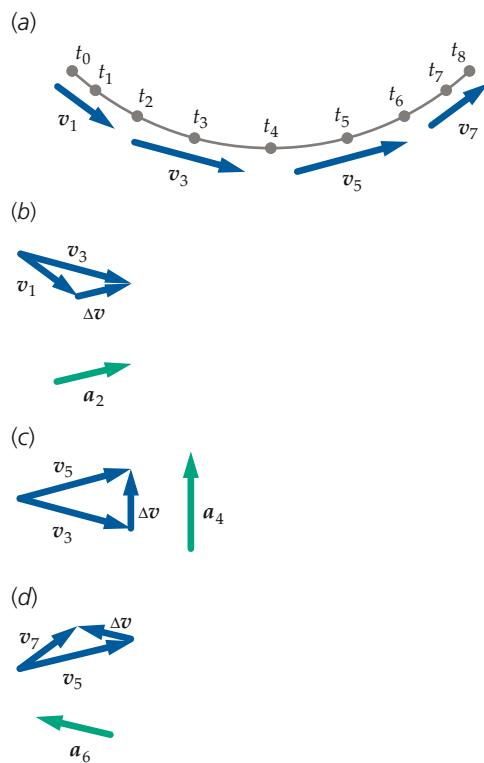


Abbildung 2.42 a) Bewegungsdiagramm für eine vollständige Schwingung. b)-d) Vektoradditionsdiagramme für t_2 , t_4 und t_6 .

Plausibilitätsprüfung: Am tiefsten Punkt (bei t_4) ist die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit v maximal, sodass wir erwarten, dass die Horizontalkomponente der Beschleunigung \mathbf{a} null ist. Weiter ist am tiefsten Punkt die nach oben weisende Komponente von v unmittelbar vor $t = t_4$ negativ und unmittelbar nach $t = t_4$ positiv. Damit nimmt die nach oben weisende Komponente von v bei $t = t_4$ zu. Somit ist zu erwarten, dass die nach oben weisende Komponente der Beschleunigung \mathbf{a} bei $t = t_4$ positiv ist. Der in Abbildung 2.42c gezeigte Beschleunigungsvektor entspricht beiden Erwartungen.

Die gleichförmige Kreisbewegung

Die Bewegung entlang eines Kreises mit konstanter Geschwindigkeit wird – im Gegensatz zur ungleichförmigen Pendelbewegung – **gleichförmige Kreisbewegung** genannt. Auch wenn der Geschwindigkeitsbetrag eines Teilchens, das sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt, konstant ist, wird das Teilchen beschleunigt, denn es ändert ständig seine Geschwindigkeitsrichtung.

Beschleunigungsvektor am tiefsten Punkt der Bewegung in die Zentripetalrichtung. In den meisten anderen Punkten hat der Beschleunigungsvektor bei diesem Pendel sowohl eine zentripetale als auch eine tangentielle Komponente. Wenn das Gewicht gleichförmig im Kreis geschleudert wird, also die Geschwindigkeit den gleichen Betrag beibehält, zeigt die Zentripetalbeschleunigung jedoch stets zum Zentrum und ist damit proportional zu $-\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{a}}_{ZP} \propto -\hat{\mathbf{r}}$.



Abbildung 2.43 Der Pendelkörper eines starren Pendels schwingt auf einer Kreisbahn, in deren Mittelpunkt das Seil befestigt ist.

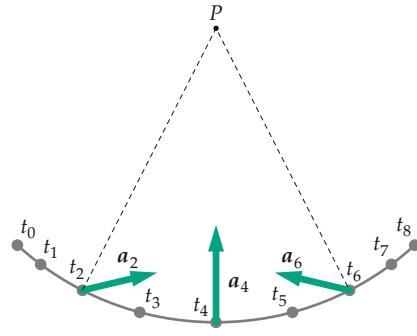


Abbildung 2.44 Richtungen der Beschleunigungsvektoren zu verschiedenen Zeiten t_i beim Pendel.

richtung. Um einen Ausdruck für die Beschleunigung eines Teilchens zu erhalten, das sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Kreisbahn bewegt, werden wir das Verfahren aus Beispiel 2.25 erweitern und eine Beziehung zwischen der Beschleunigung einerseits und dem Geschwindigkeitsbetrag und dem Radius des Kreises andererseits ableiten. Die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren für ein solches Teilchen sind in Abbildung 2.45 gezeigt. Der Orts- und der Geschwindigkeitsvektor müssen sich bei einer gleichförmigen Kreisbewegung in gleichen Zeiten um den gleichen Winkel drehen. Damit ist der Winkel $\Delta\varphi$ zwischen $v(t)$ und $v(t + \Delta t)$ der gleiche wie der zwischen $r(t)$ und $r(t + \Delta t)$. Die beiden Geschwindigkeitsvektoren bilden mit Δv ein gleichschenkliges Dreieck. Ein zweites gleichschenkliges Dreieck wird von den beiden Ortsvektoren und Δr gebildet. Um die Richtung des Beschleunigungsvektors zu ermitteln, betrachten wir das von den beiden Geschwindigkeitsvektoren und von dem Vektor Δv gebildete Dreieck. Die Summe der Innenwinkel jedes Dreiecks beträgt 180° ; außerdem sind die Basiswinkel im gleichschenklichen Dreieck gleich.

Wenn Δt gegen null geht, strebt $\Delta\varphi$ ebenfalls gegen null; damit gehen beide Basiswinkel gegen 90° . Entsprechend steht Δv im Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ senkrecht auf der Geschwindigkeit. Wenn die Geschwindigkeitsänderung Δv ausgehend vom Ort des Teil-

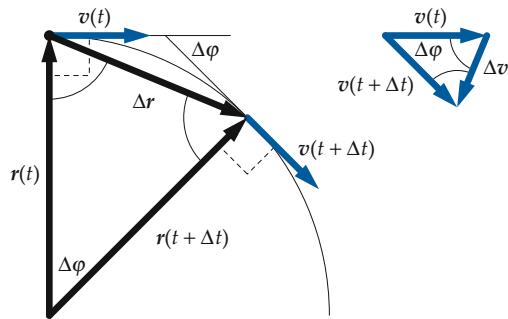


Abbildung 2.45 Orts- und Geschwindigkeitsvektoren eines Teilchens, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt.

chens eingezeichnet wird, zeigt sie also im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$ in die Zentripetalrichtung.

Da die beiden Dreiecke ähnlich sind und einander entsprechende Längen ähnlicher geometrischer Figuren zueinander proportional sind, gilt:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}.$$

Division beider Seiten durch Δt und Umstellen ergibt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v \Delta r}{r \Delta t}. \quad (2.38)$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ geht der Term $\Delta v / \Delta t$ gegen a , die Komponente der Momentanbeschleunigung $a = a \hat{a}$. Gleichzeitig geht der Term $\Delta r / \Delta t$ gegen v , die Komponente der Momentangeschwindigkeit $v = v \hat{v}$. Mit diesen Substitutionen ergibt sich für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung

$$|a_{ZP}| = \frac{v^2}{r}.$$

Da die Richtung der Zentripetalbeschleunigung dem Einheitsvektor \hat{r} des Radiusvektors entgegengesetzt ist, gilt für die Zentripetalbeschleunigung

$$a_{ZP} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}. \quad (2.39)$$

VEKTORGLEICHUNG FÜR DIE ZENTRIPETALBESCHLEUNIGUNG

Häufig wird die Bewegung eines Teilchens entlang eines Kreises mit gleichförmiger Geschwindigkeit über die für einen vollständigen Umlauf benötigte Zeit T , die **Periode**, beschrieben. Während einer Periode legt das Teilchen eine Strecke von $2\pi r$ (mit r als Kreisradius) zurück. Somit ist seine Geschwindigkeit mit r und T über

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (2.40)$$

verknüpft.

Beispiel 2.26 behandelt eine wichtige Anwendung der Kreisbewegung auf Satelliten auf einer Umlaufbahn um die Erde.

Beispiel 2.26: Die Satellitenbewegung

Ein Satellit bewegt sich in der Nähe der Erdoberfläche mit konstanter Geschwindigkeit auf einer kreisförmigen Umlaufbahn um den Erdmittelpunkt. Seine Beschleunigung ist $a_G = -g\hat{r}$ mit $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Wie groß sind a) sein Geschwindigkeitsbetrag und b) die Zeit für einen vollständigen Umlauf?

Problembeschreibung: Da die Umlaufbahn in der Nähe der Erdoberfläche liegt, nehmen wir für ihren Radius den Erdradius von $r = 6370 \text{ km}$ an. Anhand von Gleichung 2.39 und 2.40 können dann der Geschwindigkeitsbetrag und die Zeit für eine vollständige Erdumkreisung berechnet werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Fertigen Sie zunächst eine Skizze eines Satelliten an, der die Erde auf einer erdnahen Umlaufbahn umkreist (Abbildung 2.46). Zeichnen Sie den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor ein.

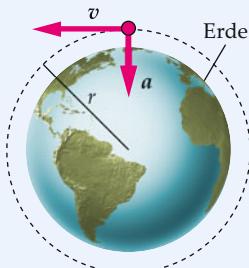


Abbildung 2.46 Ein Satellit auf einer erdnahen Kreisbahn.

- Die Beschleunigung des Satelliten und die Zentripetalbeschleunigung haben dieselbe Richtung. Daher ist $a = a_{ZP}$. Stellen Sie diese Gleichung nach der Geschwindigkeit v um. Beachten Sie dabei, dass der Radius der Satellitenbahn gleich dem Erdradius r ist:

$$a = \frac{v^2}{r} = g \quad \text{oder}$$

$$v = \sqrt{rg}$$

$$= \sqrt{(6370 \text{ km}) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = [7,91 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Teilaufgabe b

Ermitteln Sie anhand von Gleichung 2.40 die Periode T :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot (6370 \text{ km})}{7,91 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$= [5060 \text{ s} = 84,3 \text{ min}]$$

Plausibilitätsprüfung: Es ist allgemein bekannt, dass die Umlaufzeit von Satelliten um die Erde etwa 90 min beträgt. Das Ergebnis von Teilaufgabe b steht damit in Einklang.

Kommentar: Tatsächlich liegt die Umlaufbahn bei Satelliten einige Hundert Kilometer über der Erdoberfläche, sodass der Umlaufradius r etwas größer als 6370 km ist. Wegen der geringeren Schwerkraft in größerer Entfernung vom Erdmittelpunkt bedeutet dies eine Zentripetalbeschleunigung von etwas weniger als $9,81 \text{ m/s}^2$. Umlaufbahnen in der Nähe der Erdoberfläche heißen „erdnahe Umlaufbahnen“. Auf solchen Umlaufbahnen fliegen viele Satelliten, darunter auch das Hubble-Teleskop und die Internationale Raumstation ISS. Informationen über diese und andere Satelliten finden Sie auf den Webseiten der NASA, der ESO oder des DLR.

Übung 2.9: Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 48 km/h durch eine Kurve mit einem Radius von 40 m . Wie groß ist seine Zentripetalbeschleunigung? ◀ ■

Die Tangentialbeschleunigung

Ein Teilchen, das sich mit *veränderlicher Geschwindigkeit* auf einer Kreisbahn bewegt, besitzt eine normal nach innen gerichtete Beschleunigungskomponente $a_n = v^2/r$ und eine Beschleunigungskomponente tangential zur Kreisbahn $a_t = dv/dt$. Bei einer allgemeinen Bewegung entlang einer Kurve können wir ein kurzes Kurvenstück als Kreisbogen mit dem Krümmungsradius r behandeln (Abbildung 2.47). Das Teilchen besitzt dann die Normalbeschleunigung a_n zum Krümmungsmittelpunkt; ändert sich gleichzeitig seine Geschwindigkeit v , besitzt es zudem die Tangentialbeschleunigung a_t . Es gilt

$$a_n = \frac{v^2}{r} \hat{n}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} \hat{t}, \quad (2.41)$$

NORMAL- UND TANGENTIALBESCHLEUNIGUNG

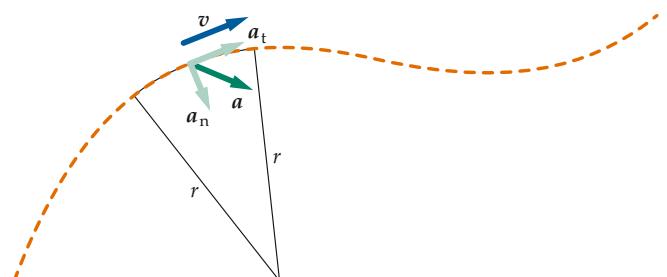


Abbildung 2.47 Die Tangential- und die Zentripetalbeschleunigungskomponente eines Teilchens auf einer gekrümmten Bahn.

2.5 Gleichförmig beschleunigte Bewegung in mehreren Dimensionen

wobei \hat{n} der Einheitsvektor zum Krümmungsmittelpunkt und \hat{t} der Einheitsvektor in Tangentialrichtung der Bewegung ist. Die entsprechenden *Normal-* und *Tangentialkomponenten* werden häufig in diesem Buch als Lösungsansatz verwendet.

Übung 2.10: Ein Wagen einer Achterbahn fährt gerade in einen Looping ein. In dem Moment, in dem der Wagen den ersten Viertelkreis des Looping durchfahren hat, fährt der Wagen mit $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ direkt nach oben und verzögert mit $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Der Looping hat einen Krümmungsradius von 25 m. Wie groß sind in diesem Moment seine Zentripetal- und Tangentialbeschleunigung? ◀

🔍 Im Kontext: GPS: Vektorrechnung in Bewegung

Viele moderne Autos verfügen heute über ein eingebautes oder nachgerüstetes GPS-Navigationssystem. Den meisten Nutzern dieser Geräte ist sicher nicht bewusst, dass diese Computer ständig Vektoren für sie berechnen.

Um die Erde kreisen 24 GPS-Satelliten in einer Höhe von ca. 18 000 km.¹ Meistens sind mindestens drei, oft sogar vier Satelliten sichtbar (d. h. über dem Horizont). Jeder Satellit sendet ununterbrochen eine Zeichenfolge mit seiner Kennung, Informationen über seine Umlaufbahn und einer auf 10^{-9} s genauen Zeitmarke.² Eine Bodenstation prüft die Uhren in den Satelliten und ihre Umlaufbahnen und kann gegebenenfalls Korrekturinformationen an sie senden.

Ein GPS-Empfänger versucht, Signale von diesen Satelliten zu empfangen. Gelingt es ihm, sich auf drei oder mehr Satellitensignale aufzuschalten, berechnet er jeweils anhand der Differenz zwischen der Zeitmarke des Satelliten und der Uhrzeit des Empfängers zum Zeitpunkt der Erfassung der Marke, wie weit jeder Satellit weg ist. Aus der bekannten Umlaufbahn jedes Satelliten und der Entfernung bis zu jedem Satelliten kann der Empfänger seinen Ort triangulieren. Eine Berechnung anhand von drei Satelliten ergibt die geografische Länge und Breite des Empfängers. Vier Satelliten gestatten, gleichzeitig die Höhe zu berechnen.



Das Fahrzeugnavigationssystem erhält Informationen von GPS-Satelliten und berechnet daraus Ort und Geschwindigkeit des Autos. Unter bestimmten Voraussetzungen ermittelt es mittels *Koppelnavigation* den Verschiebungsvektor. (© Andrew Fox/Corbis.)

Doch wo kommen hier Vektoren ins Spiel? Der Empfänger trianguliert seinen Ort nicht nur ein Mal – dies würde nur einen einzigen Punkt liefern. Vielmehr „lauscht“ der Empfänger ständig auf Signale von den

Satelliten und berechnet aus Änderungen der Triangulationsergebnisse Ortsänderungen des Empfängers. Auf diese Weise bestimmt er jede Entferungs- und Richtungsänderung gegenüber dem letzten bekannten Ort. Schon nach kurzer Zeit hat er genug Werte zur Verfügung, um die Geschwindigkeit zu berechnen. Im Ergebnis liefert der Empfänger als Bestandteil der Berechnungen stets einen Geschwindigkeitsbetrag und eine Richtung und somit einen Geschwindigkeitsvektor.

Dieser Vektor dient nicht nur dazu, eine Linie für den Fahrverlauf auf den Bildschirm zu zeichnen. Es gibt Zeiten, zu denen der Empfänger keinen guten Wert empfangen kann. Dies kann z. B. unter einer Brücke oder in einem Tunnel der Fall sein. Wenn sich der GPS-Empfänger auf kein sinnvolles Signal aufschalten kann, geht er vom letzten bekannten Ort aus. Er verwendet dann die letzte bekannte Geschwindigkeit, d. h. deren Betrag und deren Richtung, um eine *Koppelnavigation* zu berechnen. Bis der Empfänger von ausreichend vielen Satelliten ein zuverlässiges Signal empfangen kann, nimmt er an, dass das Auto in der gleichen Richtung und mit der gleichen Geschwindigkeit weiterfährt. Sobald er wieder gute Signale empfangen kann, nimmt er Korrekturen am Ort und am Kurs vor.

In der Frühzeit des GPS wurden die von den Satelliten gesendeten Zeitsignale mit einer künstlichen Verfälschung, der *selektiven Verfügbarkeit*, codiert, die nur mit Decodierungsempfängern für die Landesverteidigung decodiert werden konnte. Auf diese Weise konnte das Militär Orte auf 6 m genau verfolgen, während dies für zivile Anwendungen nur auf 45 m genau möglich war.³ Im Jahr 2000 wurde diese Codierung abgeschaltet. Theoretisch ist ein GPS-Empfänger mit den richtigen Signalen in der Lage, den Ort auf Fingerbreite anzugeben⁴ und ebenso genaue Messwerte für Betrag und Richtung der Geschwindigkeit zu ermitteln – und dies alles aus einer Entfernung von 18 000 km!

1. Die tatsächliche Anzahl der aktiven Satelliten schwankt. Um für den Fall einer Störung gewappnet zu sein, gibt es mehr als 24 Satelliten. „Block II Satellite Information.“ <ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>. United States Naval Observatory (Stand: März 2009).
2. „GPS: The Role of Atomic Clocks – It Started with Basic Research.“ <http://www.beyonddiscovery.org/content/view.page.asp?I=464>. Beyond Discovery. The National Academy of Sciences (Stand: März 2009).
3. „Comparison of Positions With and Without Selective Availability: Full 24 Hour Data Sets.“ http://www.ngs.noaa.gov/FGCS/info/sans_SA/compare/ERLA.htm. National Geodetic Survey (Stand: März 2009).
4. „Differential GPS: Advanced Concepts.“ <http://www.trimble.com/gps/dgps-advanced.shtml>. Trimble (Stand: März 2009).

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Verschiebung	<p>Die eindimensionale Verschiebung ist definiert durch</p> $\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2.1)$
Ortsvektor	Der Ortsvektor \mathbf{r} zeigt vom Ursprung des Koordinatensystems zum Ort des Teilchens.
Verschiebungsvektor	$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} \quad (2.4)$
Grafische Interpretation	Die Verschiebung ist grafisch gleich der Fläche unter der Funktion $v_x(t)$. Diese Fläche ist das Integral der Funktion $v_x(t)$ über die Zeit im Zeitabschnitt von t_1 bis t_2 und wird geschrieben.
2. Geschwindigkeit	
Mittlere Geschwindigkeit	$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ oder $\langle v_x \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} v_x dt \quad (2.8)$
Vektor der mittleren Geschwindigkeit	$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ oder $\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt \quad (2.9)$
Momentangeschwindigkeit	$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \quad (2.10)$
Vektor der Momentangeschwindigkeit	Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} bezeichnet die zeitliche Änderung des Ortsvektors. Sein Betrag ist der Geschwindigkeitsbetrag. Der Geschwindigkeitsvektor zeigt in Bewegungsrichtung:
	$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}(t). \quad (2.13)$
3. Geschwindigkeitsbetrag	
Mittlerer Geschwindigkeitsbetrag	$ \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\text{Gesamtstrecke } \Delta s}{\text{Gesamtzeit } \Delta t}$
Momentangeschwindigkeitsbetrag	Der Momentangeschwindigkeitsbetrag ist der Betrag der Momentangeschwindigkeit $= \mathbf{v} $.
4. Relativgeschwindigkeit	Bewegt sich ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{(A)}$ in Bezug auf das Bezugssystem A, welches sich selbst mit $\mathbf{v}_A^{(B)}$ in Bezug auf das Bezugssystem B bewegt, beträgt die Geschwindigkeit des Teilchens in Bezug auf B:
	$\mathbf{v}^{(B)} = \mathbf{v}^{(A)} + \mathbf{v}_A^{(B)}. \quad (2.17)$
5. Beschleunigung	
Mittlere Beschleunigung	$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (2.19)$
Momentanbeschleunigung	$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) \quad (2.20)$
Vektor der Momentanbeschleunigung	$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad (2.23)$
Grafische Interpretation	Eine Geschwindigkeitsänderung kann grafisch als die Fläche unter der Funktion $a_x(t)$ dargestellt werden:
	$\Delta v_x = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \left(\sum_i a_{i,x} \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} a_x dt. \quad (2.24)$
Die Erdbeschleunigung (Fallbeschleunigung)	Die Beschleunigung eines Körpers in der Nähe der Erdoberfläche ist beim freien Fall senkrecht nach unten gerichtet und besitzt den Betrag $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
6. Kinematische Gleichungen für gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension	
Geschwindigkeit	$v_x = v_{0,x} + a_x t$ (2.27)
Mittlere Geschwindigkeit	$\langle v_x \rangle = \frac{1}{2}(v_{0,x} + v_x)$ (2.31)
Verschiebung, ausgedrückt durch $\langle v_x \rangle$	$\Delta x = x - x_0 = \langle v_x \rangle t = \frac{1}{2} (v_{0,x} + v_x) t$
Verschiebung, ausgedrückt durch a_x	$\Delta x = x - x_0 = v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ (2.29)
Geschwindigkeit v_x , ausgedrückt durch a_x und Δx	$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$ (2.30)
7. Der schräge Wurf ohne Luftwiderstand	In diesem Abschnitt verläuft die positive x -Richtung horizontal, während die positive y -Richtung nach oben weist.
Unabhängigkeit der Bewegungen	Beim schrägen Wurf sind die horizontale und die vertikale Bewegung unabhängig.
Beschleunigung	$a_x = 0$ und $a_y = -g$ (2.33)
Zeitabhängigkeit von Ort und Geschwindigkeit	$v_x(t) = v_{0,x} + a_x t$ und $v_y(t) = v_{0,y} + a_y t$, $x(t) = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$, $y(t) = y_0 + v_{0,y} + \frac{1}{2} a_y t^2$ (2.29) mit $a_x = 0$, $a_y = -g$, $v_{x,0} = v_0 \cos \theta_0$ und $v_{y,0} = v_0 \sin \theta_0$, wobei θ_0 der Wurfwinkel gegen die x -Achse ist. Vektorformulierung: $\Delta v = -g t \hat{y}$, $\Delta r = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}$. (2.34c, 2.35c)
Horizontale Verschiebung	Die horizontale Verschiebung erhält man durch Multiplikation von $v_{0,x}$ mit der gesamten Flugzeit der Körpers.
8. Kreisbewegung	
Zentripetalbeschleunigung	$a_{ZP} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$, (2.39) wobei v die Kreisbahngeschwindigkeit oder genauer die (skalare) Komponente des Geschwindigkeitsvektors v ist und r der Radius.
Periode	$v = \frac{2\pi r}{T}$ (2.40), wobei T die Umlaufzeit auf dem Kreis ist.
9. Krummlinige Bewegung	
Tangential- und Normalbeschleunigung	$a_n = \frac{v^2}{r} \hat{n}$, $a_t = \frac{dv}{dt} \hat{t}$, (2.41) wobei die Bahngeschwindigkeit oder genauer die (skalare) Komponente des Geschwindigkeitsvektors v , \hat{n} der Einheitsvektor zum Krümmungsmittelpunkt und \hat{t} der Einheitsvektor der Tangente zur Bahn ist.

Antwort auf die Verständnisfragen

2.1 Nein, der Abstand zwischen den Autos bleibt nicht konstant, sondern nimmt allmählich ab. In dem Moment, in dem Sie zu bremsen beginnen, hat Ihr Auto noch eine höhere Geschwindigkeit als das vorausfahrende. Das liegt daran, dass das vorausfahrende Auto bereits 0,3 s eher zu bremsen begonnen hat. Da die Geschwindigkeit beider Autos genauso schnell abnehmen soll, wird Ihr Auto während des gesamten Bremsvorgangs immer schneller als das vorausfahrende Auto sein.

2.2 a) nach oben, b) nach oben

Lösungen der Übungen

2.1 1,2 m/s

2.2 a) 65 km/h, b) 2,5 s

- 2.3 Nur bei d steht auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Dimension. Wenn man anhand einer Dimensionsanalyse auch nicht die genaue Gleichung ermitteln kann, lässt sich häufig wenigstens die funktionale Abhängigkeit bestimmen.
- 2.4 $\langle |\alpha| \rangle = 4,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ westlich von Norden
- 2.5 54 ms
- 2.6 250 m
- 2.7 $y(t) = y_0 + v_{0,y} - \frac{1}{2} g t^2$
 $= 0 + (25,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \sin 36,9^\circ \cdot (1,43 \text{ s})$
 $+ \frac{1}{2} (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (1,43 \text{ s})^2 = 11,48 \text{ m}, h = 111 \text{ m}$
- 2.8 a) $|v_0| = 20,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ bei $\theta_0 = 22,0^\circ$,
b) $t = 0,764 \text{ s}$, c) $\langle v_y \rangle t = 2,86 \text{ m}$
- 2.9 $4,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- 2.10 $a_n = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ und $a_t = -5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Aufgaben

Bei allen Aufgaben sei die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

2.1 • Nennen Sie ein Beispiel aus dem Alltag für eine eindimensionale Bewegung, bei der a) die Geschwindigkeit von Osten nach Westen und die Beschleunigung von Westen nach Osten gerichtet ist bzw. b) sowohl die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung von Süden nach Norden gerichtet ist.

2.2 • Kann der Betrag der Ortsveränderung (Ortsverschiebung) eines Teilchens kleiner als die entlang seiner Bahn zurückgelegte Strecke sein? Kann der Betrag der Ortsveränderung größer als die zurückgelegte Strecke sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.3 • Gegeben sind die Ortsvektoren eines Teilchens an zwei Orten seines Wegs, einem früheren und einem späteren. Außerdem wissen Sie, wie lange es dauert, bis sich das Teilchen von einem Punkt zum anderen bewegt. Lässt sich daraus a) der Vektor der mittleren Geschwindigkeit zwischen den beiden Punkten, b) der Vektor der mittleren Beschleunigung zwischen den beiden Punkten, c) die Momentangeschwindigkeit, d) die Momentanbeschleunigung berechnen?

2.4 • Stellen Sie sich die Bewegung eines Teilchens auf einer Bahn vor. a) Wie hängt der Geschwindigkeitsvektor geometrisch mit der Bahn des Teilchens zusammen? b) Skizzieren Sie eine gekrümmte Bahn und zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren für einige vom Teilchen durchlaufene Punkte ein.

2.5 • Nennen Sie Beispiele für eine Bewegung, bei der der Geschwindigkeits- und der Beschleunigungsvektor a) in die entgegengesetzte Richtung zeigen, b) in die gleiche Richtung zeigen, c) senkrecht aufeinander stehen.

2.6 • Ein Strom hat eine Breite von 0,76 km. Seine Ufer sind gerade und parallel (Abbildung 2.48). Die Strömung beträgt 4,0 km/h und verläuft parallel zu den Ufern. In dem Strom schwimmt ein Boot mit einer Höchstgeschwindigkeit von (in ruhigem Wasser) 4,0 km/h. Der Kapitän möchte den Fluss auf direktem Wege von A nach B überqueren, wobei die Strecke AB senkrecht zu den Ufern verläuft. Sollte der Kapitän a) sein Boot direkt zum gegenüberliegenden Ufer steuern, b) sein Boot 53° stromaufwärts der Strecke AB steuern, c) sein Boot 37° stromaufwärts der Strecke AB steuern, d) aufgeben, da die Geschwindigkeit des Boots nicht ausreicht, oder e) etwas anderes tun?

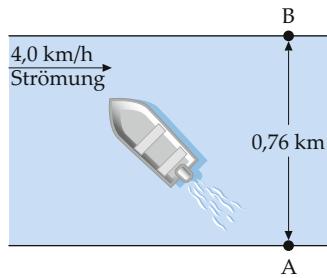


Abbildung 2.48 Zu Aufgabe 2.6.

2.7 • Beantworten Sie für jedes der vier x - t -Diagramme aus Abbildung 2.49 folgende Fragen: a) Ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_2 größer, kleiner oder gleich der zum Zeitpunkt t_1 ? b) Ist der Geschwindigkeitsbetrag zum Zeitpunkt t_2 größer, kleiner oder gleich dem zum Zeitpunkt t_1 ?

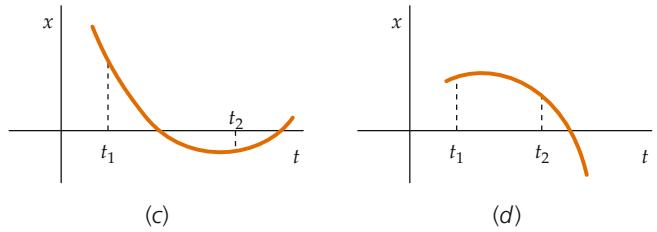
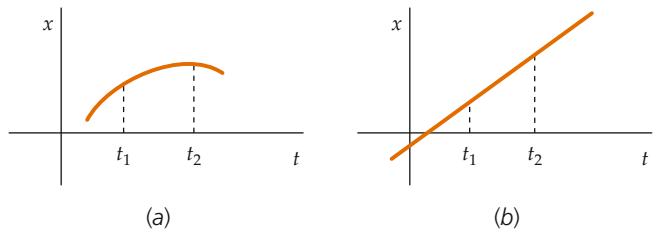


Abbildung 2.49 Zu Aufgabe 2.7.

2.8 •• Welche der Weg-Zeit-Kurven aus Abbildung 2.50 zeigt am besten die Bewegung eines Körpers a) mit positiver Beschleunigung, b) mit konstanter positiver Geschwindigkeit, c) der ständig ruht und d) mit negativer Beschleunigung? (Es kann jeweils mehr als eine richtige Antwort geben.)

2.9 •• Ein Körper bewegt sich auf einer Geraden. Seine Weg-Zeit-Kurve ist in Abbildung 2.51 gezeigt. Zu welcher Zeit bzw. zu welchen Zeiten ist a) sein Geschwindigkeitsbetrag am kleinsten, b) seine Beschleunigung positiv und c) seine Geschwindigkeit negativ?

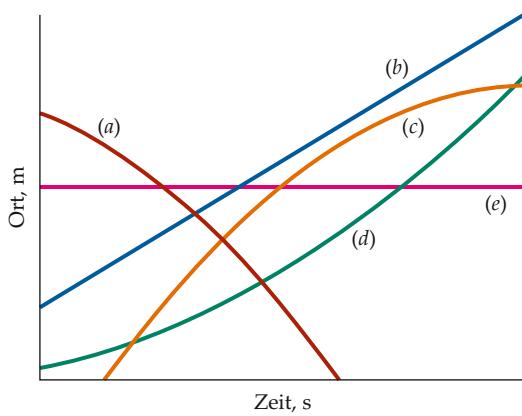


Abbildung 2.50 Zu Aufgabe 2.8.

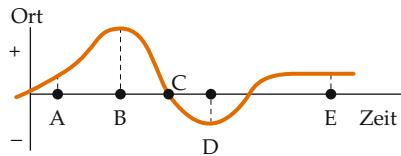


Abbildung 2.51 Zu Aufgabe 2.9.

2.10 •• Welches der v - t -Diagramme aus Abbildung 2.52 beschreibt die Bewegung eines Teilchens mit a) positiver Geschwindigkeit und zunehmendem Geschwindigkeitsbetrag, b) positiver Geschwindigkeit und der Beschleunigung null, c) konstanter, von null verschiedener Beschleunigung und d) abnehmendem Geschwindigkeitsbetrag am besten?

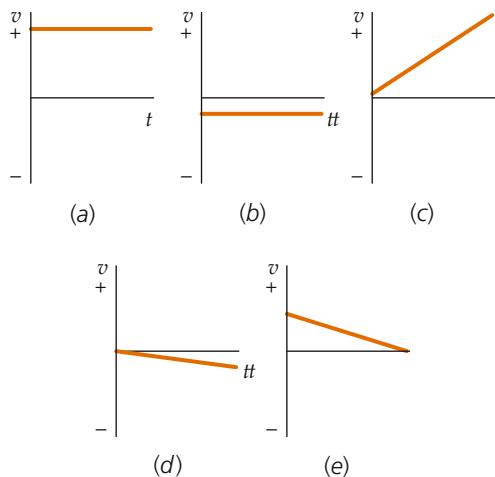


Abbildung 2.52 Zu Aufgabe 2.10.

2.11 •• Welche der Geschwindigkeit-Zeit-Kurven aus Abbildung 2.53 beschreibt am besten die Bewegung eines Körpers a) mit konstanter positiver Beschleunigung, b) mit zeitlich

abnehmender positiver Beschleunigung, c) mit zeitlich zunehmender positiver Beschleunigung und d) ohne Beschleunigung? (Es kann jeweils mehr als eine richtige Antwort geben.)

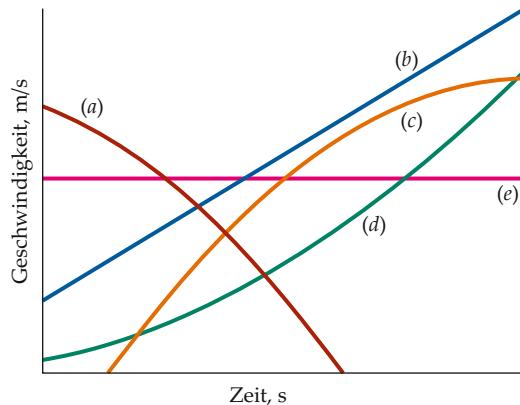


Abbildung 2.53 Zu Aufgabe 2.11.

2.12 •• Zeichnen Sie während der Zeitspanne $0 \leq t \leq 30$ s genaue Diagramme für den Ort, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Wagens, der in der Zeitspanne $0 \leq t \leq 30$ s nacheinander die folgenden Bewegungen ausführt: Zunächst bewegt er sich während 5,0 s mit 5,0 m/s gleichförmig geradlinig in $+x$ -Richtung, wobei er bei $t = 0,0$ s am Koordinatenursprung beginnt. Daraufhin wird er 10,0 s lang gleichförmig pro Sekunde um 0,50 m/s schneller. Schließlich verzögert er während der folgenden 15,0 s gleichförmig pro Sekunde um 0,50 m/s.

2.13 •• Ein Porsche beschleunigt gleichförmig von 80,5 km/h bei $t = 0$ s auf 113 km/h bei $t = 9,00$ s. a) Welches Diagramm aus Abbildung 2.54 beschreibt seine Geschwindigkeit am besten? b) Skizzieren Sie ein Weg-Zeit-Diagramm, das den Ort des Autos in diesen 9 s zeigt; nehmen Sie dabei an, dass der Ort x zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich null ist.

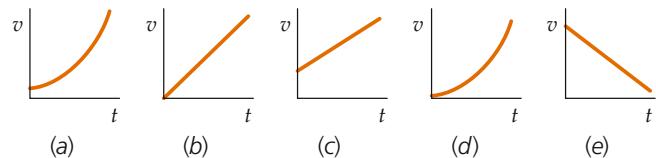


Abbildung 2.54 Zu Aufgabe 2.13.

2.14 •• Ein senkrecht nach oben geworferner Gegenstand fällt zurück und wird an der Abwurfstelle wieder aufgefangen. Seine Flugzeit beträgt t und seine Maximalhöhe h . Sein mittlerer Geschwindigkeitsbetrag für den gesamten Flug ist dann a) h/t , b) 0, c) $h/(2t)$ oder d) $2h/t$?

2.15 •• Ein Ball wird senkrecht nach oben geworfen. a) Wie groß ist die Geschwindigkeit an seinem höchsten Punkt? b) Wie

groß ist in diesem Punkt die Beschleunigung des Balls? c) Wie unterscheiden sich die Geschwindigkeit und die Beschleunigung im höchsten Punkt, wenn der Ball stattdessen hart auf eine horizontale Decke aufprallt und daraufhin zurückfliegt. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

2.16 •• Ein Pfeil wird nach oben geworfen und bleibt in der Decke stecken. Nachdem er sich aus der Hand gelöst hat, wird er beim Steigen immer langsamer. a) Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsvektor des Pfeils zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 , nachdem der Pfeil die Hand verlassen hat, jedoch bevor er in der Decke steckengeblieben ist. Die Differenz $t_2 - t_1$ soll klein sein. Entnehmen Sie aus Ihrer Zeichnung die Richtung der Geschwindigkeitsänderung $\Delta v = v_2 - v_1$ und somit die Richtung des Beschleunigungsvektors. b) Nachdem der Pfeil eine Weile in der Decke gesteckt hat, fällt er zu Boden. Dabei wird er beschleunigt, bis er auf dem Boden aufkommt. Wiederholen Sie das Vorgehen aus Teilaufgabe a), um die Richtung des Beschleunigungsvektors beim Fallen zu ermitteln. c) Jetzt wird der Pfeil horizontal geworfen. Welche Richtung hat der Beschleunigungsvektor nun, nachdem sich der Pfeil aus der Hand gelöst hat, jedoch bevor er auf dem Boden aufgekommen ist?

2.17 •• Abbildung 2.55 zeigt die Orte von zwei Autos auf parallelen Fahrspuren auf der Autobahn in Abhängigkeit von der Zeit. Die positive x-Achse zeigt nach rechts. Beantworten Sie qualitativ folgende Fragen: a) Sind beide Autos irgendwann gleichauf? Wenn ja, geben Sie den entsprechenden Zeitpunkt bzw. die entsprechenden Zeitpunkte auf der Achse an. b) Fahren sie immer in dieselbe Richtung, oder gibt es Zeiten, zu denen sie entgegengerichtet fahren? Wenn ja, wann? c) Fahren sie irgendwann mit derselben Geschwindigkeit? Wenn ja, wann? d) Wann sind beide Autos am weitesten voneinander entfernt? e) Skizzieren Sie (ohne Zahlenwerte) für jedes Auto das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

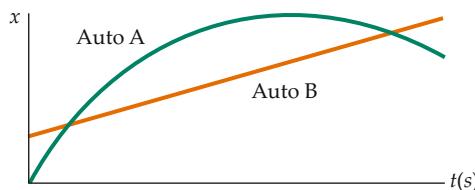


Abbildung 2.55 Zu Aufgabe 2.17.

2.18 •• Bestimmen Sie mithilfe eines Bewegungsdiagramms die Beschleunigungsrichtung eines Pendelkörpers, der sich gerade an einem Umkehrpunkt befindet.

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

2.19 •• Gelegentlich überleben Menschen einen tiefen Sturz, wenn die Fläche, auf die sie fallen, weich genug ist. Während der Besteigung der berüchtigten Eiger-Nordwand löste sich der Felsanker des Bergsteigers Carlos Ragone, sodass er etwa 150 m

in die Tiefe fiel. Dank einer Landung im weichen Schnee erlitt er lediglich ein paar Prellungen und renkte sich die Schulter aus. Wir wollen annehmen, dass das durch den Aufschlag verursachte Loch im Schnee 1,20 m tief gewesen ist. Mit welcher – als konstant angenommenen – mittleren Beschleunigung wurde er durch den Schnee abgebremst?

Orts- und Verschiebungsvektor

2.20 • Eine Wanduhr hat einen 0,50 m langen Minutenzeiger und einen 0,25 m langen Stundenzeiger. Drücken Sie den Ortsvektor a der Spitze des Stundenzeigers und den Ortsvektor b der Spitze des Minutenzeigers durch die Einheitsvektoren \hat{x} und \hat{y} aus, wenn die Uhr folgende Zeiten anzeigt: a) 12:00 Uhr, b) 3:00 Uhr, c) 6:00 Uhr, d) 9:00 Uhr. Legen Sie dazu den Koordinatenursprung in die Mitte der Uhr und verwenden Sie ein kartesisches Koordinatensystem, dessen positive x-Achse in die 3-Uhr-Richtung und dessen positive y-Achse in die 12-Uhr-Richtung zeigt.

2.21 • Ein kurz aus dem Winterschlaf erwachter Bär trotzt 12 m direkt nach Nordosten und anschließend 12 m genau nach Osten. Stellen Sie die beiden Ortsverschiebungen grafisch dar und ermitteln Sie grafisch, wie der Bär danach durch eine einzige Verschiebung wieder in die Höhle zurückkommt, um den Winterschlaf fortzusetzen.

2.22 • Ein Schiff auf See empfängt Funksignale von zwei Sendern A und B, wobei sich der eine genau 100 km südlich des anderen befindet. Der Peilempfänger zeigt an, dass sich der Sender A um einen Winkel $\theta = 30^\circ$ südlich der Ostrichtung befindet, wogegen der Sender B genau im Osten liegt. Gesucht ist die Entfernung des Schiffs zum Sender B.

Geschwindigkeit

2.23 • a) Ein Elektron in einer Fernsehbildröhre fliegt die 16 cm zwischen Gitter und Bildschirm mit einer mittleren Geschwindigkeit von $4,0 \cdot 10^7$ m/s. Wie lange dauert dies? b) Ein Elektron in einem stromführenden Kabel bewegt sich lediglich mit einer mittleren Geschwindigkeit von $4,0 \cdot 10^{-5}$ m/s. Wie lange braucht es, um 16 cm zurückzulegen?

2.24 • Eine der viel beflogenen Transatlantikflugrouten ist ungefähr 5500 km lang. Für diese Routen wurde ein Überschallverkehrsflugzeug, die inzwischen außer Betrieb genommene Concorde, eingesetzt, die mit doppelter Schallgeschwindigkeit fliegen konnte. a) Wie lange dauerte der Flug in einer Richtung ungefähr? Verwenden Sie 343 m/s als Schallgeschwindigkeit. b) Vergleichen Sie die Zeit mit der, die ein normales Unterschallflugzeug, das mit 0,9-facher Schallgeschwindigkeit fliegt, für die Strecke braucht.

2.25 • Proxima Centauri, derjenige Stern, der unserer Erde abgesehen von der Sonne am nächsten ist, liegt $4,1 \cdot 10^{13}$ km von uns entfernt. Ein Bewohner eines Planeten von Proxima Centauri beschließt, mithilfe von Lichtsignalen eine Pizza auf der Erde zu bestellen. Das schnellste Lieferraumschiff des irdischen Pizzahändlers fliegt mit $1,00 \cdot 10^{-4} c$. a) Wie lange dauert es, bis die Bestellung bei der Erde eingeht? b) Wie lange muss er warten, bis er die Pizza in den Händen hält? Muss er etwas bezahlen, wenn der Händler eine Geld-zurück-Garantie für Lieferzeiten über 1000 Jahre übernimmt?

2.26 •• Es wurde festgestellt, dass sich alle Galaxien mit einer Geschwindigkeit von der Erde weg bewegen, die im Mittel proportional zu ihrer Entfernung von der Erde ist. Nach seinem Entdecker, dem Astrophysiker Edwin Hubble, ist dies als das Hubble-Gesetz bekannt. Hubble hatte erkannt, dass die Fluchtgeschwindigkeit v einer Galaxie in der Entfernung r von der Erde $v = Hr$ ist, wobei H die Hubble-Konstante $H = 1,58 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ ist. Welche Fluchtgeschwindigkeiten haben demnach Galaxien in einer Entfernung von a) $5,00 \cdot 10^{22} \text{ m}$ bzw. b) $2,00 \cdot 10^{25} \text{ m}$ von der Erde? c) Wann waren diese Galaxien am gleichen Ort wie die Erde? (Nehmen Sie dabei an, dass sie sich gleichförmig geradlinig bewegt haben.)

2.27 •• Zwei Autos fahren auf einer geraden Straße. Das Auto A fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h, das Auto B mit einer ebenfalls konstanten Geschwindigkeit von 110 km/h. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Auto B 45 km hinter dem Auto A zurück. a) Wie weit fährt das Auto A, bis es vom Auto B überholt wird? b) Wie weit vor dem Auto A ist das Auto B 30 s, nachdem es das Auto A überholt hat?

2.28 •• Ein Kleinflugzeug startet von A und möchte zum Zielflughafen B, welcher 520 km genau nördlich von A liegt. Das Flugzeug besitzt eine Fluggeschwindigkeit von 240 km/h gegenüber der Luft, und es weht ein ständiger Nordwestwind von 50 km/h. Bestimmen Sie den anzusteuernden Kurs und die Flugdauer.

2.29 •• Der Pilot eines Kleinflugzeugs fliegt mit einer Fluggeschwindigkeit von 280 km/h gegenüber der Luft und möchte genau nach Norden (000°) fliegen. a) Welche Richtung (Azimut) muss er bei einem direkten Ostwind (090°) von 55,5 km/h ansteuern? b) Wie hoch ist bei dieser Richtung seine Bodengeschwindigkeit?

Beschleunigung

2.30 • Ein Sportwagen beschleunigt im dritten Gang innerhalb von 3,70 s von 48,3 km/h auf 80,5 km/h. a) Wie hoch ist die mittlere Beschleunigung in m/s^2 in diesem Fall? b) Wie schnell würde das Auto werden, wenn es mit der gleichen Beschleunigung noch 1 s länger beschleunigen würde?

2.31 •• Gegeben ist ein Teilchen, dessen Ort gemäß der Gleichung $x(t) = (1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})t^2 - 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}t + 1,0 \text{ m}$ von der Zeit abhängt. a) Gesucht sind die Verschiebung und die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $3,0 \text{ s} \leq t \leq 4,0 \text{ s}$. b) Ermitteln Sie eine allgemeine Formel für die Verschiebung im Zeitintervall von t bis $t + \Delta t$. c) Bilden Sie den entsprechenden Grenzwert, um die Momentangeschwindigkeit für einen beliebigen Zeitpunkt t zu ermitteln.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension

2.32 • Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben abgeschossener Körper erreicht eine Höhe h über dem Ausgangspunkt. Ein weiterer Körper, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $2v_0$ abgeschossen wird, erreicht dann eine maximale Höhe von a) $4h$, b) $3h$, c) $2h$ oder d) h ?

2.33 • Ein Stein wird von einem 200 m hohen Felsvorsprung senkrecht hinabgeworfen. Während der letzten halben Sekunde legt der Stein 45 m zurück. Wie groß ist seine Anfangsgeschwindigkeit?

2.34 • Ein Auto mit dem Anfangsort $x = 50 \text{ m}$, das entlang der x -Achse fährt, beschleunigt mit $8,0 \text{ m/s}^2$ gleichförmig aus dem Stand. a) Wie schnell fährt es nach 10 s? b) Wie weit ist es nach 10 s gekommen? c) Wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit im Zeitraum $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$?

2.35 •• Eine Ladung Steine wird von einem Kran mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von $5,0 \text{ m/s}$ angehoben, wobei sich $6,0 \text{ m}$ über dem Erdboden einer der Steine löst und zu Boden fällt. a) Zeichnen Sie den Ort $y(t)$ des Steins von dem Moment, in dem er sich löst, bis er auf den Boden auftrifft. b) Welche maximale Höhe über dem Boden erreicht der Stein dabei? c) Nach welcher Zeit trifft er auf den Boden auf? d) Welche Geschwindigkeit hat er, kurz bevor er auf den Boden auftrifft?

2.36 •• Stellen Sie sich vor, Sie haben eine Rakete zur Untersuchung der Verschmutzung der Erdatmosphäre konstruiert. Sie wird mit einer Beschleunigung von 20 m/s^2 senkrecht gestartet. Nach 25 s schalten sich die Triebwerke ab, wonach die Rakete (durch die Erdbeschleunigung verzögert) noch eine Weile weiter steigt. Schließlich hört ihr Steigflug auf, und sie fällt zur Erde zurück. Sie benötigen eine Luftprobe aus einer Höhe von 20 km über dem Boden. a) Hat die Rakete diese Höhe erreicht? Wenn nicht, was müssten Sie ändern, damit sie bis in diese Höhe kommt? b) Ermitteln Sie die Gesamtflugzeit der Rakete. c) Wie hoch ist die Geschwindigkeit der Rakete, unmittelbar bevor sie auf den Boden auftrifft?

2.37 •• Bei einem Schulexperiment bewegt sich ein Luftkissengleiter auf einer schrägen Bahn. Er besitzt eine konstante Beschleunigung und wird bereits mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit am unteren Ende der Schräge gestartet.

Nachdem 8,00 s vergangen sind, ist der Gleiter 100 cm von seinem Anfangspunkt entfernt und besitzt eine Geschwindigkeit von -15 cm/s . Gesucht sind die Anfangsgeschwindigkeit sowie die Beschleunigung.

2.38 •• Ein Schnellkäfer kann sich mit der Beschleunigung $a = 400 \text{ g}$ in die Luft katapultieren. Das ist eine Größenordnung mehr als ein Mensch überhaupt aushält. Der Käfer springt, indem er seine $d = 0,60 \text{ cm}$ langen Beine „ausklappt“. a) Wie hoch kann der Käfer springen? b) Wie lang dauert dieser Sprung? Nehmen Sie während des Absprungs eine konstante Beschleunigung an und vernachlässigen Sie den Luftwiderstand.

2.39 •• Ein Physikprofessor springt, ausgestattet mit einer kleinen Rucksackrakete, in einer Höhe von 575 m ohne senkrechte Startgeschwindigkeit aus einem Hubschrauber. Er verbringt $8,0 \text{ s}$ im freien Fall. Anschließend zündet er die Rakete und verringert damit seine Geschwindigkeit mit 15 m/s^2 bis auf $5,0 \text{ m/s}$. Bei Erreichen dieser Geschwindigkeit stellt er die Raketentreibwerke so ein, dass er nun mit konstanter Geschwindigkeit weiter sinkt. a) Skizzieren Sie in demselben Diagramm seine Beschleunigung-Zeit-Funktion und seine Geschwindigkeit-Zeit-Funktion. (Die positive Richtung zeigt nach oben.) b) Wie hoch ist seine Geschwindigkeit nach den ersten $8,0 \text{ s}$ des Flugs? c) Wie lange verliert er an Geschwindigkeit? d) Wie weit fällt er, während er langsamer wird? e) Wie lange dauert sein gesamter Absprung vom Hubschrauber bis zum Boden? f) Wie hoch ist dabei seine mittlere Geschwindigkeit?

2.40 •• Zwei Eisenbahnzüge stehen sich im Abstand von 40 m auf benachbarten Gleisen gegenüber. Nun beschleunigt der linke Zug mit $1,0 \text{ m/s}^2$ nach rechts, und der rechte Zug beschleunigt gleichzeitig mit $1,3 \text{ m/s}^2$ nach links. a) Wie weit fährt der linke Zug, bevor die Stirnseiten der Loks aneinander vorbeifahren? b) Beide Züge sind jeweils 150 m lang und beschleunigen gleichförmig. In welcher Zeit nach dem Anfahren sind sie vollständig aneinander vorbeigefahren?

2.41 •• Ein Raser fährt mit konstant 125 km/h an einer mobilen Verkehrskontrolle vorbei. Ein Streifenwagen beschleunigt aus dem Stand mit konstanter Beschleunigung ($8,0 \text{ km/h/s}$), um die Verfolgung aufzunehmen, und erreicht schließlich seine Höchstgeschwindigkeit von 190 km/h . Diese Geschwindigkeit behält er bei, bis er den Raser eingeholt hat. a) Wie lange braucht der Streifenwagen, um den Raser einzuholen, wenn er genau in dem Moment losfährt, in dem der Raser vorbeifährt? b) Wie weit fährt jedes der beiden Autos? c) Zeichnen Sie $x(t)$ für beide Autos.

Der schräge Wurf

2.42 •• Eine Kanonenkugel wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel von 30° über der Horizontalen aus einer Höhe von 40 m abgeschossen. Sie trifft den Boden mit einer Geschwindigkeit von $1,2 \cdot v_0$. Gesucht ist v_0 .

2.43 •• In Abbildung 2.56 sei $x = 50 \text{ m}$ und $h = 10 \text{ m}$. Der Affe lässt sich genau in dem Moment fallen, in dem der Pfeil abgeschossen wird. Welche Abschussgeschwindigkeit muss der Pfeil mindestens haben, damit er den anfangs $11,2 \text{ m}$ hoch sitzenden Affen erreicht, bevor dieser auf den Boden auftrifft?

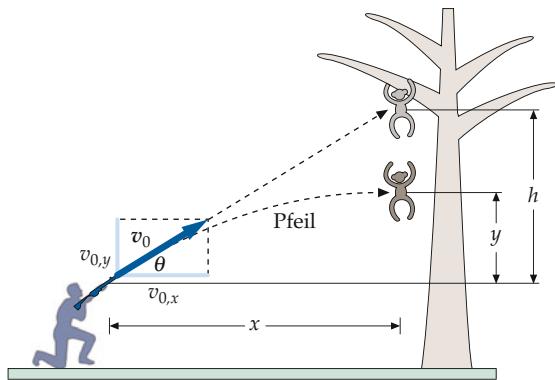


Abbildung 2.56 Zu Aufgabe 2.43.

2.44 •• Ein Ball werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel θ_0 über der Horizontalen geworfen. Es sei $|v|$ sein Geschwindigkeitsbetrag bei der Höhe h über dem Boden. Zeigen Sie, dass $|v|$ für eine gegebene Höhe h unabhängig von θ_0 ist.

2.45 •• Eine Kanone wird auf einen Abschusswinkel von 45° über der Horizontalen eingestellt. Sie feuert eine Kugel mit einer Geschwindigkeit von 300 m/s ab. a) Welche Höhe erreicht die Kugel? b) Wie lange fliegt sie? c) Welche horizontale Reichweite besitzt die Kanone?

2.46 •• Die Reichweite einer horizontal von einer Felskuppe abgeschossenen Kanonenkugel sei genauso groß wie die Höhe der Felskuppe. In welche Richtung zeigt der Geschwindigkeitsvektor, wenn die Kugel auf dem Boden auftrifft?

2.47 •• Ermitteln Sie aus $R = (|v_0|^2/g) \sin(2\theta_0)$ die Ableitung $dR/d\theta_0$ und zeigen Sie, dass sich aus $dR/d\theta_0 = 0$ für die maximale Reichweite $\theta = 45^\circ$ ergibt.

2.48 ••• Im Text wurde die Reichweite eines Geschosses berechnet, das auf der gleichen Höhe landet, auf der es abgeschossen wird. Das Ergebnis lautete $R = (|v_0|^2/g) \sin(2\theta_0)$. Ein Golfball, der von einem erhöhten Abschlag mit $45,0 \text{ m/s}$ unter einem Winkel von $35,0^\circ$ geschlagen wird, landet auf einem Grün $20,0 \text{ m}$ unter dem Abschlag (Abbildung 2.57). a) Ermitteln Sie aus der Gleichung $R = (|v_0|^2/g) \sin(2\theta_0)$ die Reichweite, wenn zunächst davon abgesehen wird, dass der Ball von dem erhöhten Abschlag aus geschlagen wird. b) Zeigen Sie, dass die Reichweite für die allgemeinere Aufgabenstellung der Abbildung 2.57 durch

$$R = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2gy}{|v_0|^2 \sin^2 \theta_0}} \right) \cdot \frac{|v_0|^2}{2g} \cdot \sin(2\theta_0)$$

gegeben ist, wobei y die Höhe des Grüns über dem Abschlag ist (d. h. $y = -h$). c) Ermitteln Sie die Reichweite anschließend mit dieser Formel. Wie hoch ist der prozentuale Fehler, wenn der Höhenunterschied vernachlässigt wird?

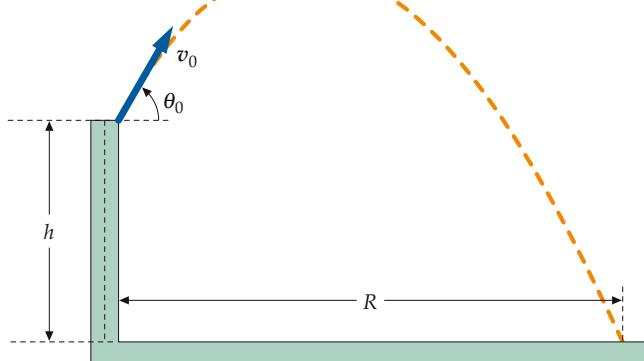


Abbildung 2.57 Zu Aufgabe 2.48.

2.49 ••• Ein Geschoss wird unter einem Winkel θ gegenüber dem Boden abgeschossen. Ein Beobachter, der an der Abschussstelle steht, beobachtet das Geschoss an seinem höchsten Punkt und misst den in Abbildung 2.58 eingezeichneten Winkel ϕ zwischen Geschoss und Boden. Zeigen Sie, dass

$$\tan \phi = \frac{1}{2} \tan \theta$$

gilt.

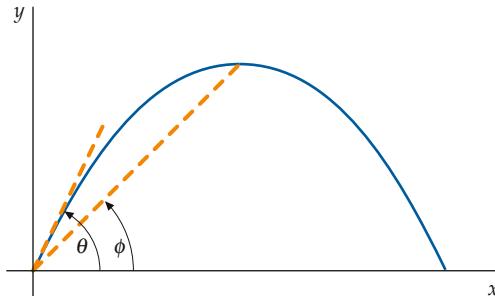


Abbildung 2.58 Zu Aufgabe 2.49.

2.50 ••• Eine Spielzeugkanone wird auf einer Rampe mit einem Neigungswinkel ϕ aufgestellt. Die Kanonenkugel wird bergauf mit einer Mündungsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel θ_0 über der Horizontalen abgeschossen (Abbildung 2.59). Zeigen Sie, dass die Reichweite R der Kanonenkugel (auf der Rampe gemessen) gegeben ist durch

$$R = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0 (\tan \theta_0 - \tan \phi)}{g \cos \phi} .$$

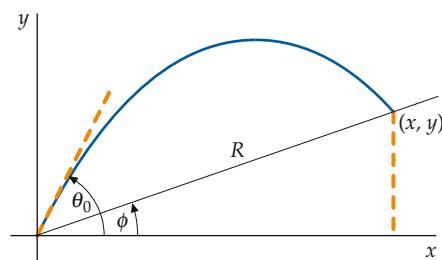


Abbildung 2.59 Zu Aufgabe 2.50.

2.51 ••• Eine Kugel verlässt die Gewehrmündung in 1,7 m Höhe über dem Boden mit 250 m/s. Sie soll ein auf der gleichen Höhe liegendes, 100 m von der Mündung entferntes Ziel treffen. a) Wie weit oberhalb des eigentlichen Zielpunkts liegt der Punkt, den man dabei anpeilen muss? b) Wie weit hinter dem Ziel trifft die Kugel auf dem Boden auf?

Kreisbewegung und Zentripetalbeschleunigung

2.52 • Mit welchem Beschleunigungsbetrag wird die Spitze des Minutenzeigers der Uhr aus Aufgabe 2.20 beschleunigt? Drücken Sie den Betrag als Bruchteil der Erdbeschleunigung g aus.

2.53 • Eine Zentrifuge dreht sich mit 15 000 U/min. a) Berechnen Sie die Zentripetalbeschleunigung, die eine Reagenzglasprobe in einer Entfernung von 15 cm von der Rotationsachse an dem Arm aushalten muss. b) Erst nach 1 min und 15 s erreicht die Zentrifuge aus der Ruhe ihre maximale Rotationsgeschwindigkeit. Berechnen Sie unter der Annahme einer konstanten Tangentialbeschleunigung deren *Betrag* während der Anlaufphase.

Allgemeine Aufgaben

2.54 •• Eine kleine Stahlkugel rollt horizontal mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 3,0 m/s von der obersten Stufe einer langen Treppe herab. Jede Stufe ist 0,18 m hoch und 0,30 m breit. Auf welche Stufe trifft die Kugel zuerst auf?

2.55 •• Galileo Galilei zeigte, dass die Reichweite von zwei Geschossen, die den Abschusswinkel von 45° um den gleichen Betrag über- und unterschreiten, auf ebenem Feld unter Vernachlässigung der Luftreibung jeweils gleich ist. Beweisen Sie Galileis Aussage.

2.56 ••• Zur Bestimmung der Fallbeschleunigung in einem Physikexperiment wird ein Aufbau mit zwei Lichtschranken verwendet. (Lichtschranken sind Ihnen sicher schon im Alltag aufgefallen. Sie sind am Eingang mancher Geschäfte angebracht. Wenn jemand hindurchgeht und den Strahl unterbricht,

ertönt eine Klingel.) Beim Experiment befindet sich eine Lichtschranke an einer 1,00 m hohen Tischkante und die zweite genau darunter unmittelbar über dem Boden. Eine Murmel, die Sie in einer Höhe von 0,50 m über der oberen Lichtschranke aus der Ruhe loslassen, soll durch diese Lichtschranken fallen. Beim Durchgang der Kugel durch die obere Lichtschranke startet diese eine Stoppuhr. Die zweite Lichtschranke hält die Stoppuhr an, wenn die Kugel ihren Strahl passiert. a) Beweisen Sie, dass der experimentelle Wert der Fallbeschleunigung $g_{\text{exp}} = (2\Delta y)/(\Delta t)^2$ ist, wobei Δy die vertikale Strecke zwischen den Lichtschranken und Δt die Fallzeit ist. b) Welchen Wert von Δt erwarten Sie als Messergebnis, wenn für g_{exp} der Standardwert von $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ angenommen wird? c) Bei den Experimenten geschieht ein kleiner Irrtum. Ein unachtsamer Student bringt die erste Lichtschranke nicht genau an der Tischkante an, sondern 0,50 cm tiefer. Die zweite Lichtschranke befestigt er aber in der richtigen Höhe. Welchen Wert für g_{exp} werden Sie dann erhalten? Welcher prozentualen Abweichung gegenüber dem auf den Meeresspiegel bezogenen üblichen Wert entspricht das?

2.57 ••• Der Ort eines Körpers, der an einer Feder schwingt, ist durch $x = A \sin(\omega t)$ gegeben, wobei A und ω (kleiner griechischer Buchstabe omega) Konstanten mit den Werten $A = 5,0 \text{ cm}$ und $\omega = 0,175 \text{ s}^{-1}$ sind. a) Zeichnen Sie x als Funktion von t für $0 \leq t \leq 36 \text{ s}$. b) Messen Sie die Steigung der Kurve bei $t = 0$, um die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt zu ermitteln. c) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit für Zeitintervalle, die jeweils bei $t = 0$ beginnen und bei

$t = 6,0, 3,0, 2,0, 1,0, 0,50$ und $0,25 \text{ s}$ enden. d) Ermitteln Sie dx/dt und berechnen Sie die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. e) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben c und d und erläutern Sie, weshalb sich die Ergebnisse von Teilaufgabe c an die von Teilaufgabe d annähern.

2.58 ••• Die Beschleunigung eines Teilchens sei folgende Funktion von x : $a_x(x) = (2,0 \text{ s}^{-2})x$. a) Welche Geschwindigkeit hat das Teilchen bei $x = 3,0 \text{ m}$, wenn seine Geschwindigkeit bei $x = 1,0 \text{ m}$ null ist? b) Wie lange dauert es, bis das Teilchen von $x = 1,0 \text{ m}$ zu $x = 3,0 \text{ m}$ gelangt?

2.59 ••• Sie fahren mit dem Auto in der Stadt mit $40,0 \text{ km/h}$ auf eine Kreuzung zu. Sie sehen, dass die Ampel an der Kreuzung 65 m vor Ihnen auf Gelb schaltet. Sie wissen, dass die Ampel an dieser Kreuzung genau 5,0 s gelb bleibt, bevor sie auf Rot schaltet. Zunächst brauchen Sie 1,0 s, um nachzudenken. Anschließend beschleunigen Sie das Auto gleichförmig. Sie schaffen es gerade, mit dem 4,5 m langen Auto über die 15,0 m breite Kreuzung zu kommen, da wird die Ampel auch schon rot. So entgehen Sie gerade einem Strafzettel für das Überfahren der Kreuzung bei Rot. Unmittelbar nachdem Sie über die Kreuzung sind, nehmen Sie beruhigt den Fuß vom Gaspedal. Kurze Zeit später werden Sie wegen überhöhter Geschwindigkeit angehalten. Sie nehmen an, dass Sie für zu schnelles Überfahren der Kreuzung bestraft werden sollen. Berechnen Sie diese Geschwindigkeit und entscheiden Sie, ob es sich lohnt, den Bußgeldbescheid anzufechten, wenn Sie davon ausgehen, dass eine Höchstgeschwindigkeit von $50,0 \text{ km/h}$ gilt.

Die Newton'schen Axiome

3



Das erste Newton'sche Axiom setzt die Beschleunigung eines Körpers mit seiner Masse und den auf den Körper wirkenden Kräften in Beziehung. Hier beschleunigt ein Flugzeug auf der Startbahn. (© Stuelper/pixelfoto.)

Wie können Sie als Passagier mithilfe der Newton'schen Axiome die Beschleunigung des Flugzeugs abschätzen? (Siehe Beispiel 3.7.)

Newton'sche Axiome

3.1	Das erste Newton'sche Axiom: Das Trägheitsgesetz	78
3.2	Kraft und Masse	79
3.3	Das zweite Newton'sche Axiom	82
3.4	Gravitationskraft und Gewicht	85
3.5	Kräftediagramme und ihre Anwendung	86
3.6	Das dritte Newton'sche Axiom	93
3.7	Kräfte bei der Kreisbewegung	95
	Zusammenfassung	103
	Aufgaben	105

Fragen wie „Warum bewegen sich Körper?“ oder „Was beschleunigt sie und warum ändern sie ihre Richtung?“ bewegten Isaac Newton, der 1642 geboren wurde. Als Student in Cambridge studierte er die Werke von Galilei und Kepler. Ihn interessierte, warum sich die Planeten auf elliptischen Bahnen bewegen und weshalb ihre Geschwindigkeit vom Abstand zur Sonne abhängen. Dies führte zu der Frage, welche Kräfte das Sonnensystem zusammenhalten. Im Laufe seines Lebens entwickelte er die Gravitationsgesetze und die drei nach ihm benannten Grundgesetze der Bewegung, die bis heute die Grundlage der klassischen Mechanik bilden.

Die Newton'schen Axiome stellen einen Zusammenhang zwischen der Bewegungsänderung eines Körpers und den auf ihn einwirkenden Kräften her: Mit ihrer Hilfe lassen sich eine Vielzahl mechanischer Erscheinungen beschreiben.

In diesem Kapitel werden wir die drei Newton'schen Axiome der Bewegung behandeln und an verschiedenen Beispielen zeigen, wie wir mit ihrer Hilfe unsere intuitive Vorstellung über Kräfte präzisieren können.

3.1 Das erste Newton'sche Axiom: Das Trägheitsgesetz

Stoßen Sie einen Eiswürfel auf der Theke an. Er gleitet ein Stück, wird währenddessen immer langsamer und bleibt schließlich liegen. Wenn die Theke nass ist, wird er weiter gleiten, bevor er liegen bleibt. Ein Stückchen Trockeneis (gefrorenes Kohlendioxid), das quasi auf einem Kissen aus Kohlendioxiddampf schwiebt, gleitet viel weiter, ohne dass sich seine Geschwindigkeit wesentlich ändert. Vor Galilei glaubte man, dass ständig eine Kraft, ein Zug oder Druck, vorhanden sein muss, damit sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegen kann. Galilei und später Newton erkannten dagegen, dass das aus dem Alltag bekannte Abbremsen von Körpern auf die Reibungskraft zurückzuführen ist. Wird die Reibung verringert, nimmt gleichzeitig die Bremswirkung ab. Ein Wasserfilm oder ein Gaskissen vermindert die Reibung besonders wirksam und ermöglicht, dass Körper ohne große Geschwindigkeitsänderung über lange Strecken gleiten können. Galilei folgerte daraus, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers nie ändern würde, wenn man ihn von allen äußeren Kräften einschließlich der Reibung befreien würde. Diese Eigenschaft der Materie beschrieb er als **Trägheit**. Deshalb wird diese Aussage, die Newton später als das heute nach ihm benannte erste Newton'sche Axiom umformulierte, auch das **Trägheitsgesetz** genannt.

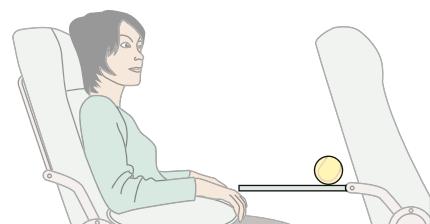
Eine heute verwendete Formulierung des ersten Newton'schen Axioms lautet:

Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn *keine* resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt.

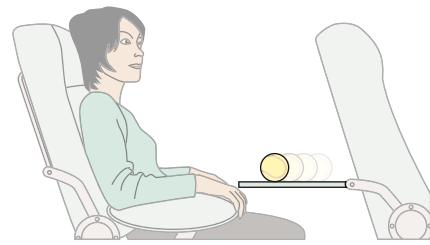
ERSTES NEWTON'SCHES AXIOM (TRÄGHEITSGESETZ)

Inertialsysteme

Das erste Newton'sche Axiom kennt keinen Unterschied zwischen einem ruhenden Körper und einem Körper, der sich mit konstanter, aber von null verschiedener Geschwindigkeit bewegt. Ob ein Körper in Ruhe bleibt oder sich mit unveränderlicher Geschwindigkeit weiterbewegt, hängt vom Bezugssystem ab, von dem aus der Körper betrachtet wird. Stellen Sie sich



(a)



(b)

Abbildung 3.1 Das Flugzeug fliegt horizontal mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Strecke. Die Passagierin legt einen Tennisball auf den Klappenschreibtisch. a) Hier fliegt das Flugzeug mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum Boden weiter. Der Ball bleibt ruhig auf dem Tisch liegen. b) Plötzlich verstärkt der Pilot den Schub, sodass das Flugzeug relativ zum Boden schnell beschleunigt wird. Der Ball kann nicht so schnell folgen und beginnt, relativ zum Flugzeug nach hinten zu rollen.

vor, Sie sind ein Passagier in einem Flugzeug, das in einer konstanten Höhe geradeaus fliegt. Sie legen vorsichtig einen Tennisball auf ihren (horizontalen) Klappenschreibtisch. Solange das Flugzeug gegenüber dem Boden mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, bleibt der Ball relativ zum Flugzeug in Ruhe. Relativ zum Boden bewegt sich der Ball mit derselben Geschwindigkeit wie das Flugzeug (Abbildung 3.1a).

Wir wollen nun annehmen, dass der Pilot den Schub verstärkt und das Flugzeug plötzlich (relativ zum Boden) beschleunigt. Sie werden dann beobachten, dass der Ball nach hinten zu rollen beginnt, also relativ zum Flugzeug beschleunigt wird, obwohl keine horizontale Kraft auf ihn wirkt (Abbildung 3.1b). In diesem beschleunigten Bezugssystem ist das erste Newton'sche Axiom nicht gültig. Es besitzt *ausschließlich* Gültigkeit in Bezugssystemen, die Inertialsysteme heißen. Tatsächlich gibt uns das erste Newton'sche Axiom ein Kriterium in die Hand, um zu bestimmen, ob es sich bei einem Bezugssystem um ein Inertialsystem handelt.

Jedes Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig gleichförmig bewegt, ist ein **Inertialsystem**.

DEFINITION EINES INERTIALSYSTEMS

Sowohl das mit konstanter Geschwindigkeit fliegende Flugzeug als auch der Boden sind in guter Näherung Inertialsysteme.

Auch jedes andere Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem.

Ein Bezugssystem, das am Erdboden befestigt ist, ist genau genommen kein Inertialsystem, da hier zwei – wenn auch kleine – Beschleunigungen wirken: die Beschleunigung des Bodens durch die Erdrotation und die Beschleunigung der Erde selbst auf ihrem Umlauf um die Sonne. Allerdings liegen diese beiden Beschleunigungen in der Größenordnung von $0,01 \text{ m/s}^2$ oder darunter. Somit ist jedes an der Erdoberfläche befestigte Bezugssystem in guter Näherung ein Inertialsystem.

3.2 Kraft und Masse

Das erste Newton'sche Axiom gestattet zusammen mit dem Konzept des Inertialsystems, die Kraft zu definieren. Eine **Kraft** ist ein äußerer Einfluss oder eine äußere Einwirkung auf einen Körper, infolgedessen sich die Geschwindigkeit des Körpers ändert, d. h., infolgedessen der Körper relativ zu einem Inertialsystem beschleunigt wird. (Dabei wird angenommen, dass keine weiteren Kräfte auf den Körper wirken.) Da die Kraft eine vektorielle Größe ist und somit sowohl einen Betrag (die Größe oder Stärke der Kraft) als auch eine Richtung besitzt, kann sie den Betrag oder auch die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ändern.

Kräfte können auf Körper durch andere Körper ausgeübt werden. Kräfte, die daher kommen, dass ein Körper physikalisch von einem anderen Körper berührt wird, heißen **Kontaktkräfte**. Bekannte Beispiele für Kontaktkräfte umfassen dass Schlagen eines Tennisballs mit dem Schläger, das Ziehen an einer Angelschnur mit der Hand, das Schieben eines Einkaufswagens mit der Hand und die Reibungskraft zwischen Schuhen und Boden. Wichtig ist dabei, dass es in jedem Fall einen direkten Kontakt zwischen dem Körper, der die Kraft ausübt, und dem, auf den die Kraft ausgeübt wird, gibt. Andere Kräfte wirken dagegen auf einen Körper, ohne dass es einen direkten Kontakt mit einem zweiten Körper gibt. Zu diesen als **Fernwirkungskräfte** bezeichneten Kräften zählen die Gravitationskraft, die magnetische Kraft und die elektrische Kraft.

Die Grundkräfte der Natur

Man kann Kräfte zwischen Teilchen auch als Ausdruck von Wechselwirkungen auffassen. In diesem Sinn werden in der Physik alle in der Natur beobachteten Kräfte auf vier fundamentale Wechselwirkungen – die „Grundkräfte“ der Natur – zurückgeführt, die zwischen Elementarteilchen wirken (Abbildung 3.2):

1. Die **gravitative Wechselwirkung** ist die sehr langreichweite Wechselwirkung zwischen Teilchen aufgrund ihrer Massen. Einige Forscher nehmen an, dass die gravitative Wechselwirkung durch den Austausch hypothetischer Teilchen, sogenannter Gravitonen, vermittelt wird.

2. Die **elektromagnetische Wechselwirkung** ist die langreichweite Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Teilchen durch den Austausch von Lichtquanten (Photonen).
3. Die **schwache Wechselwirkung** ist die äußerst kurzreichweite Wechselwirkung zwischen subatomaren Teilchen, die insbesondere beim radioaktiven (Beta-)Zerfall beteiligt ist, und umfasst den Austausch oder die Erzeugung von sogenannten Weakonen, d. h. W- und Z-Bosonen. Die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung werden inzwischen als eine vereinheitlichte Wechselwirkung angesehen, die elektroschwache Wechselwirkung heißt.
4. Die **starke Wechselwirkung** ist die kurzreichweite Wechselwirkung zwischen den Teilchen im Inneren eines Atomkerns, die sich aus sogenannten Quarks zusammensetzen und wie alle aus Quarks aufgebauten Hadronen wechselwirken, indem zwischen den Quarks Gluonen ausgetauscht werden. Einige Forscher gehen davon aus, dass die starke und die elektroschwache Wechselwirkung eine einzige vereinheitlichte Wechselwirkung sind.

Die Kräfte, die wir im Alltag bei makroskopischen Körpern beobachten können, werden entweder durch die gravitative oder durch die elektromagnetische Wechselwirkung hervorgerufen. Kontaktkräfte haben z. B. tatsächlich einen elektromagnetischen Ursprung. Sie werden zwischen den Molekülen an der Oberfläche der Körper ausgeübt, die in Kontakt sind. Fernwirkungs Kräfte beruhen auf den fundamentalen Wechselwirkungen der Schwerkraft und des Elektromagnetismus. Diese beiden Kräfte wirken auch zwischen Teilchen, die räumlich weit entfernt sind. Newton konnte zu seiner Zeit noch nicht erklären, wie Kräfte über einen leeren Raum wirken können. Später wurde hierfür der Begriff des Felds geprägt, das als ein Vermittler wirkt. So wird die Anziehung der Erde auf die Sonne in zwei Schritten betrachtet. Die Sonne erzeugt im Raum einen Zustand, den wir Gravitationsfeld nennen. Dieses Feld übt dann eine Kraft auf die Erde aus. Ähnlich erzeugt die Erde ein Gravitationsfeld, das eine Kraft auf die Sonne ausübt. Das Gewicht einer Person ist die Kraft, die die Erde durch das Gravitationsfeld auf die Person ausübt. Bei der Betrachtung der Elektrizität und des Magnetismus in Kapitel 18 bis 27 werden wir elektrische Felder untersuchen, die durch elektrische Ladungen hervorgerufen werden, und magnetische Felder, die von bewegten elektrischen Ladungen erzeugt werden. Die starke und die schwache Wechselwirkung werden in den Kapiteln 38 und 39 erörtert.

Kraftarten

Reibungskräfte Betrachten wir nur die mechanischen Kontaktkräfte, kann man diese nach Anwendungsart wieder in einzelne Gruppen unterteilen. **Reibungskräfte** bilden eine der größten Untergruppen, da sie bei vielen Prozessen eine Rolle spielen. So sorgt z. B. die Haftreibungskraft dafür, dass Gegenstände an ihrem Ort stehen bleiben und sich nicht weg bewegen. Am besten kann man sich dies verdeutlichen, wenn man den Baucontainer auf der stark abschüssigen Straße in Abbildung 3.3 betrachtet:



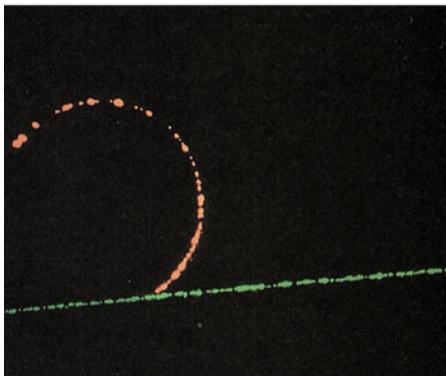
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 3.2 a) Die Stärke der Gravitationskraft zwischen der Erde und einem Körper in der Nähe der Erdoberfläche entspricht dem Gewicht des Körpers. Die gravitative Wechselwirkung zwischen der Sonne und den Planeten ist dafür verantwortlich, dass die Planeten auf ihren Umlaufbahnen um die Sonne gehalten werden. Ähnlich hält die gravitative Wechselwirkung zwischen Erde und Mond den Mond auf seiner nahezu kreisförmigen Bahn um die Erde. Die Gravitationskräfte, die sowohl vom Mond als auch von der Sonne auf die Ozeane der Erde wirken, führen zu den Gezeiten. Das Bild zeigt Mont-Saint-Michel in Frankreich, eine Stadt, die bei Flut zu einer Insel werden kann. b) Die elektromagnetische Wechselwirkung umfasst sowohl die elektrische als auch die magnetische Kraft. Ein vertrautes Beispiel für die elektrische Wechselwirkung ist die Anziehung zwischen kleinen Papierschnipseln und einem Kamm, der zuvor durch die Reibung an den Haaren aufgeladen wurde. Auch die abgebildeten Blitze über dem Kitt-Peak-Observatorium sind das Ergebnis der elektromagnetischen Wechselwirkung. c) Die starke Wechselwirkung tritt zwischen bestimmten Elementarteilchen, den Hadronen, auf; dazu zählen beispielsweise die Bestandteile der Atomkerne, die Neutronen und Protonen. Diese Wechselwirkung bewirkt, dass die Kerne zusammengehalten werden. Sie entsteht durch die Wechselwirkung von Quarks, aus denen die Hadronen aufgebaut sind. Die abgebildete Wasserstoffbombeexplosion illustriert diese starke Wechselwirkung der Atomkerne. d) Die schwache Wechselwirkung tritt sowohl zwischen Leptonen (wie Elektronen und Myonen) als auch zwischen Hadronen (wie Protonen und Neutronen) auf. Die Falschfarben-Nebelkammeraufnahme zeigt die schwache Wechselwirkung zwischen einem Myon aus der kosmischen Strahlung (grün) und einem Elektron (rot), das aus einem Atom herausgeschlagen wird (rot). (a) © Cotton Coulson/Woodfin Camp and Assoc.; b) © Gary Ladd 1972; c) © Los Alamos National Lab; d) © Science Photo Library/Photo Researchers.)

Die Schwerkraft zieht den Container nach unten, die Haftreibung zwischen Straße und Container verhindert dies jedoch, wenn ihr Betrag größer als der der Schwerkraft ist. Bei Regen werden (mikroskopische) Unebenheiten in der Straße, die einen großen Beitrag zur Haftreibung leisten, mit Wasser gefüllt, und der Container beginnt, den Hang hinabzugeilen, sobald die Schwerkraft betragsmäßig die Reibungskraft übersteigt. Die nun wirkende Reibung zwischen Container und Straße ist geringer als die der Haftreibung und wird auch als Gleitreibung bezeichnet. Wie wir in Kapitel 4 noch genauer behandeln werden, gibt es neben Haft- und Gleitreibung zusätzlich noch die Rollreibung.

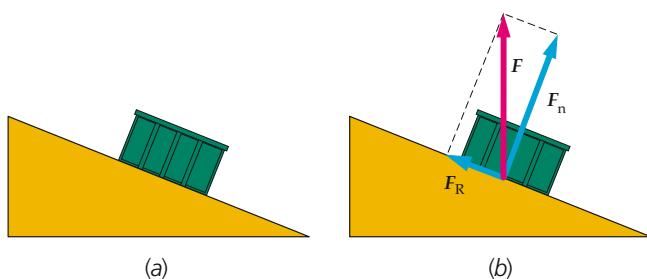


Abbildung 3.3 a) Ein Baucontainer ist auf einer stark abschüssigen Straße abgestellt. b) Die Kontaktkraft, die die Straße auf den Container ausübt, ist entweder als eine einzelne Kraft F oder als Superposition aus Normalkraft F_n und Reibungskraft F_R dargestellt.

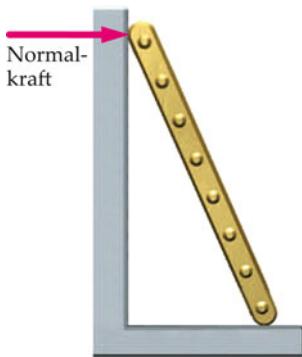


Abbildung 3.4 Die Wand hält die Leiter, indem sie auf diese eine senkrecht zur Wand gerichtete Normalkraft ausübt.

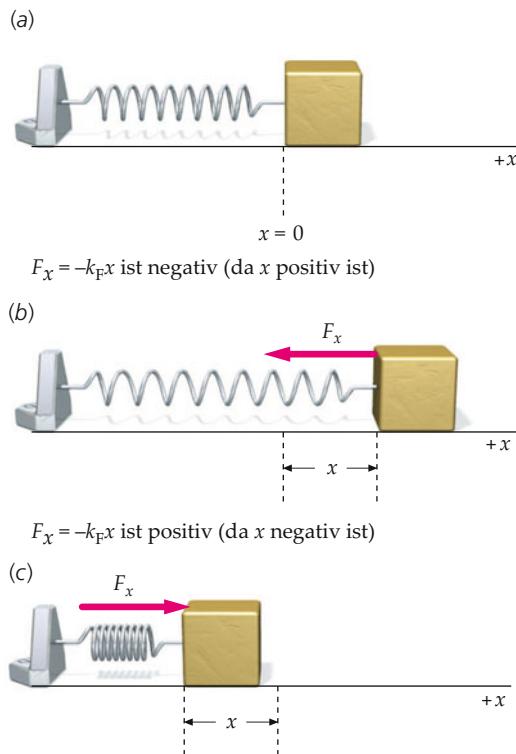


Abbildung 3.5 Eine horizontale Feder. a) Ist die Feder entspannt, erzeugt sie auch keine Kraft auf den Quader. b) Ist die Feder gedehnt, sodass x positiv ist, übt sie eine Kraft $F_x = -k_F x$ in die $-x$ -Richtung aus. c) Ist die Feder zusammengedrückt und damit x negativ, übt sie eine Kraft $F_x = -k_F x$ in die $+x$ -Richtung aus.

Normalkräfte Neben den Reibungskräften, die *parallel* zur Kontaktfläche wirken, gibt es auch Kräfte, die *senkrecht* auf ihr stehen. Solche Kräfte nennt man **Normalkräfte**. Im Beispiel des Containers aus Abbildung 3.3 wirkt neben der Reibungskraft hangaufwärts eine Normalkraft, die den Container auf die Straße drückt. Auch auf eine an die Wand gelehnte Leiter wirkt

eine Normalkraft, die senkrecht auf der Kontaktfläche zwischen Wand und Leiter steht (Abbildung 3.4).

Federn Verbindet man eine Feder mit einer Masse wie in Abbildung 3.5a und zieht die Masse in positive x -Richtung, so übt man eine Kraft auf die Masse aus, und die Feder dehnt sich. Lässt man das Massestück aus dieser Position heraus los, wirkt eine sogenannte **Rückstellkraft**, die bestrebt ist, die Masse wieder in ihre Ausgangslage zurück zu bringen (Abbildung 3.5b). Umgekehrt wird eine zusammengedrückte Feder wie in Abbildung 3.5c sich nach dem Loslassen wieder zur Ruhelage hin dehnen. Für kleine Auslenkungen der Masse findet man eine Kraft, die der Auslenkung proportional ist und die in die Richtung der Ruhelage zeigt. Mit der positiven Federkonstanten k_F ergibt sich das Kraftgesetz:

$$F_x = -k_F x. \quad (3.1)$$

DAS HOOKE'SCHE GESETZ

Gleichung 3.1 ist auch als das **Hooke'sche Gesetz** bekannt. Wir werden es und weitere Anwendungen in Kapitel 11 näher behandeln. In den Kapiteln 36 und 37 bei der Behandlung von Festkörpern werden wir sehen, dass man die Anziehungskräfte zwischen Atomen in einem Festkörper sehr gut als Federn zwischen den Atomen modellieren kann.

Zugkräfte und Spannung Seile und Täue werden zum Ziehen von Gegenständen verwendet. Man kann sich ein Seil als eine Feder vorstellen, deren Federkonstante so groß ist, dass ihre Längenänderung vernachlässigt werden kann. Seile sind jedoch biegsam, sodass man mit ihnen keine Gegenstände schieben kann. Stattdessen biegen sie sich durch. Die Kraft, die ein Seilabschnitt pro Querschnittsfläche A auf einen angrenzenden Seilabschnitt ausübt, wird mechanische **Spannung** genannt: $\sigma = F/A$. Sie ist bei straff gespanntem Seil der Zugkraft proportional. Anwendungen für die Zugkraft werden wir in diesem Kapitel zeigen; die Spannung wird in Kapitel 9 im Zusammenhang mit deformierbaren Körpern genauer behandelt.

Kräfteaddition

Wenn auf einen Körper zwei oder mehr Einzelkräfte gleichzeitig wirken, ist das Ergebnis das gleiche, wie wenn anstelle der Einzelkräfte nur eine Kraft wirkt, die die Vektorsumme der Einzelkräfte ist. Diese Eigenschaft von Kräften wird als **Superpositionsprinzip** bezeichnet. Die Vektorsumme der Einzelkräfte wird die auf den Körper wirkende Gesamtkraft genannt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$$

Dabei sind $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ die Einzelkräfte. Allgemein gilt für die Superposition von n Einzelkräften \mathbf{F}_i also

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}.$$

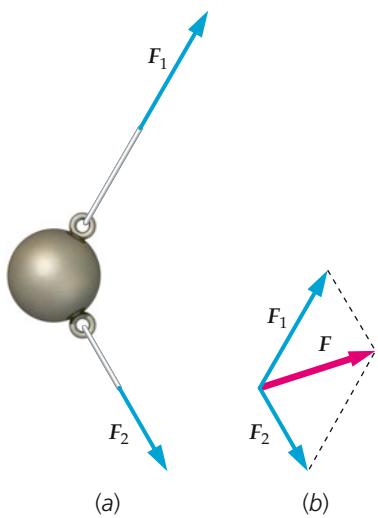


Abbildung 3.6 a) An der Kugel ziehen zwei Kräfte F_1 und F_2 . b) Die Wirkung der beiden Kräfte ist dieselbe, wie wenn auf die Kugel anstelle der beiden verschiedenen Kräfte nur eine Kraft $F = F_1 + F_2$ wirken würde.

Abbildung 3.6 zeigt einen Körper, der durch Seile in zwei Richtungen gezogen wird. Die Wirkung ist die gleiche, wie wenn auf den Körper nur eine Kraft wirkt, die gleich der Gesamtkraft ist.

Frage 3.1

Ist die Gesamtkraft eine reale Kraft?

Die SI-Einheit der Kraft ist das Newton (N). Die genaue Definition werden wir in Abschnitt 3.3 betrachten. Ein Newton ist das Gewicht eines mittelgroßen Apfels.

Masse

Körper besitzen einen inneren Widerstand gegen jegliche Art von Beschleunigung. Vergleichen Sie den Widerstand, wenn Sie gegen einen Fußball oder eine Kegelkugel treten. Ihre blauen Fußspitzen werden Sie schnell lehren, dass die Kegelkugel wesentlich schwerer als der Fußball zu beschleunigen ist. Diese innere Eigenschaft des Körpers wird seine **Masse** genannt. Sie ist ein Maß für die Trägheit des Körpers. Je größer sie ist, desto mehr Widerstand setzt der Körper einer Beschleunigung entgegen.

Wir hatten bereits in Kapitel 1 erwähnt, dass der als internationaler Massestandard gewählte Körper ein Zylinder aus einer Platin-Iridium-Legierung ist, der im Internationalen Büro für Gewichte und Maße in Sèvres aufbewahrt wird. Dieser Standardkörper hat eine Masse von 1 **Kilogramm** (kg), also gerade so viel, wie die SI-Einheit für die Masse beträgt.

Eine zweckmäßige Maßeinheit für die Masse, die in der Atom- und Kernphysik häufig verwendet wird, ist die **atomare Masseneinheit** (u), die als ein Zwölftel der Masse eines neutralen

Kohlenstoff-12-Atoms ^{12}C definiert ist. Sie kann über

$$1 \text{ u} = 1,660\,540 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

in die Einheit Kilogramm umgerechnet werden.

Um die Masse eines Körpers zu messen, muss sie mit einer Standardmasse wie dem 1-kg-Zylinder aus Sèvres verglichen werden. Bei diesem Vergleich wird das zweite Newton'sche Axiom herangezogen, in das die Masse als Proportionalitätskonstante eingeht, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

Die Masse im zweiten Newton'schen Axiom nennt man auch die **träge** Masse, da sie ein Maß für den Widerstand ausdrückt, den ein Körper einer beliebigen beschleunigenden Kraft entgegengesetzt. Da man die Gravitationskraft bis Anfang des 20. Jahrhunderts als eine besondere Kraft ansah, nannte man die im Gravitationsgesetz auftretende Masse die **schwere** Masse. Erst durch die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie setzte man träge und schwere Masse gleich (siehe Kapitel 4).

3.3 Das zweite Newton'sche Axiom

Das erste Newton'sche Axiom macht eine Aussage darüber, was geschieht, wenn auf einen Körper *keine* Kraft wirkt. Was aber geschieht, wenn Kräfte auf den Körper wirken? Wir betrachten noch einmal einen Eisklotz, der mit konstanter Geschwindigkeit eine glatte, *reibungsfreie* Fläche entlanggleitet. Wenn man an den Eisklotz stößt, übt man auf ihn eine Kraft \mathbf{F} aus, die bewirkt, dass sich seine Geschwindigkeit ändert. Je stärker man stößt, desto höher ist seine Beschleunigung \mathbf{a} . Die Beschleunigung \mathbf{a} eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn ausgeübten Gesamtkraft, wobei die Masse die Proportionalitätskonstante ist. Darüber hinaus weisen der Beschleunigungsvektor und der Vektor der Gesamtkraft in dieselbe Richtung. Newton hat diese Beobachtungen in seinem zweiten Axiom zusammengefasst:

Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn wirkenden Gesamtkraft, wobei die Proportionalitätskonstante der Kehrwert der Masse ist. Somit gilt:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i. \quad (3.2)$$

ZWEITES NEWTON'SCHES AXIOM (AKTIONSPRINZIP)

Eine Gesamtkraft, die auf einen Körper wirkt, veranlasst, dass er beschleunigt wird. Die Gesamtkraft ist die Ursache und die Beschleunigung die Wirkung. (Newton selbst sah die Kraft nur als mathematische Beschreibung, nicht als Kausalursache für die Bewegung. Seine Theorie befasst sich daher nicht mit den Problemen, die Fernwirkungen oder Scheinkräfte in diesem Modell verursachen können.)

Wie das erste Newton'sche Axiom kann auch das zweite Axiom *nur* auf Inertialsysteme angewendet werden.

Gleichung 3.2 wird häufig in der Form

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

geschrieben. Die Einheit der Kraft ist das **Newton**. Die Einheit der Masse ist das Kilogramm, und \mathbf{a} hat, wie in Kapitel 2 bereits gezeigt, die Einheit m/s^2 . Damit ist 1 Newton definiert als die Gesamtkraft, die einer Masse von 1 kg eine Beschleunigung von 1 m/s^2 erteilt:

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (3.3)$$

Eine Kraft von 2 N beschleunigt also eine Masse von 2 kg auf $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ usw.

Frage 3.2

Ist $m\mathbf{a}$ eine Kraft?

Beispiel 3.1 behandelt eine einfache Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms.

Beispiel 3.1: Eine gleitende Eiscremepackung

Ein Gummiband übt eine Kraft auf eine Eiscremepackung aus (Abbildung 3.7). Die Eiscremepackung hat eine Masse von $m_1 = 1,0 \text{ kg}$ und wird durch das Gummiband mit $5,0 \text{ m/s}^2$ beschleunigt. Auf eine zweite Eiscremepackung mit der Masse m_2 wird durch ein genau gleiches Gummiband, das um den gleichen Betrag gedehnt wird, ebenfalls eine Kraft ausgeübt. Dadurch erfährt diese eine Beschleunigung von 11 m/s^2 . a) Wie groß ist die Masse der zweiten Eiscremepackung? b) Wie groß ist die Kraft, die das Gummiband auf die Packung ausübt?

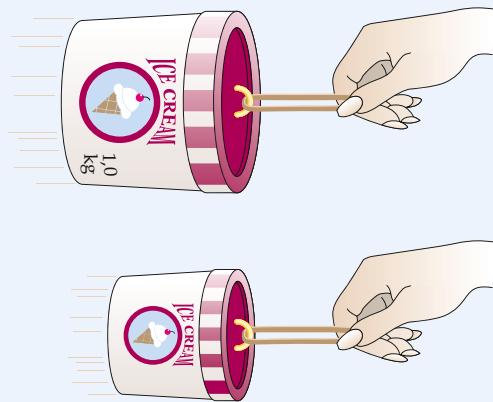


Abbildung 3.7 Schematische Darstellung der Eiscremepackung inklusive Gummiband.

Problembeschreibung: Wir können auf jede Packung das zweite Newton'sche Axiom $\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$ anwenden und daraus die Masse der Packung und die Stärke der Kraft berechnen. Die Beträge der Kräfte, die die Gummibänder auf die Packungen ausüben, sind gleich.

3.3 Das zweite Newton'sche Axiom

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Wenden Sie auf jeden Körper $\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$ an. In diesem Fall wirkt auf jeden Körper nur eine Kraft, sodass die Aufgabe eindimensional behandelt werden kann:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_2 = m_2 \mathbf{a}_2$$

2. Da die ausgeübten Kräfte den gleichen Betrag haben, ist das Verhältnis der Massen umgekehrt proportional zum Verhältnis der Beschleunigungen:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 \Rightarrow m_1 \mathbf{a}_1 = m_2 \mathbf{a}_2, \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2}$$

3. Stellen Sie nach m_2 um und setzen Sie für $m_1 1,0 \text{ kg}$ ein:

$$m_2 = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2} m_1 = \frac{5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} (1,0 \text{ kg}) = [0,45 \text{ kg}]$$

Teilaufgabe b

Die Kraft \mathbf{F}_1 kann aus der Masse und Beschleunigung einer der beiden Körper ermittelt werden:

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 = (1,0 \text{ kg}) (5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) = [5,0 \text{ N}]$$

Plausibilitätsprüfung: Eine Masse von $0,45 \text{ kg}$ scheint für eine Eiscremepackung ein realistischer Wert zu sein.

Übung 3.1: Eine Gesamtkraft von $3,0 \text{ N}$ bewirkt bei Anwendung auf einen Körper unbekannter Masse eine Beschleunigung von $2,0 \text{ m/s}^2$. Wie groß ist die Masse des Körpers? □

Um die Masse quantitativ zu beschreiben, können auf zwei Massen gleiche Kräfte ausgeübt und ihre Beschleunigungen verglichen werden. Wenn eine Kraft mit dem Betrag $|\mathbf{F}|$ bei Anwendung auf eine Masse m_1 eine Beschleunigung vom Betrag $|\mathbf{a}_1|$ erzeugt und die gleiche Kraft bei Anwendung auf eine Masse m_2 eine Beschleunigung vom Betrag $|\mathbf{a}_2|$ erzeugt, ist $m_1 \mathbf{a}_1 = m_2 \mathbf{a}_2$ (oder $m_2/m_1 = a_1/a_2$). Also gilt:

Für $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$ ist

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2}. \quad (3.4)$$

MASSENVERGLEICH

Diese Definition stimmt mit unserer intuitiven Vorstellung von der Masse überein. Wenn auf zwei verschiedene Körper eine gleich große Kraft angewendet wird, wird der Körper mit der

größeren Masse weniger beschleunigt. Das Verhältnis der Beschleunigungen a_1/a_2 , die dadurch hervorgerufen werden, dass auf zwei Körper gleiche Kräfte wirken, ist unabhängig von Betrag, Richtung und Art der Kraft. Außerdem ist die Masse eine innere Eigenschaft eines Körpers, die unabhängig von seinem Ort ist – sie ist immer gleich, unabhängig davon, ob sich der Körper auf der Erde oder auf dem Mond befindet oder im fernen Weltraum schwert.

Beispiel 3.2 zeigt, wie sich aus kinematischen Angaben Kräfte ermitteln lassen. Beispiel 3.3 behandelt die Bewegung eines Teilchens, auf das zwei Kräfte einwirken.

Beispiel 3.2: Weltraumspaziergang

Bei einem Weltraumspaziergang hat ein Astronaut den Halt am Raumschiff verloren und schwebt nun in einem Abstand davon im Weltall. Glücklicherweise hat er eine Rückstoßdüse, die 3,0 s lang eine konstante Gesamtkraft \mathbf{F} liefert. Nach den 3,0 s hat er sich 2,25 m auf das Raumschiff zu bewegt. Seine Masse ist 68 kg. Gesucht ist die Kraft \mathbf{F} .



Durch die im Bild nicht sichtbare Rückstoßdüse bewegt sich der Astronaut nach rechts. (© NASA/Science Source/Photo Researchers.)

Problembeschreibung: Die Kraft, die auf den Astronauten wirkt, ist konstant. Damit ist auch seine Beschleunigung konstant, sodass wir die kinematischen Gleichungen aus Kapitel 2 heranziehen können, um \mathbf{a} und daraus über $\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$ die Kraft zu berechnen. Wählen Sie als $+x$ -Richtung die Richtung der Kraft \mathbf{F} (Abbildung 3.8), sodass $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}}$ und $F_x = m a_x$ ist.

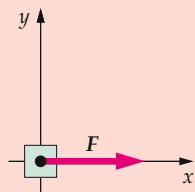


Abbildung 3.8 Ortsdiagramm mit der auf den Astronauten wirkenden Kraft \mathbf{F} .

Lösung: 1. Ermitteln Sie die Beschleunigung aus Gleichung 2.29 mit $v_{0,x} = 0$:

$$\Delta x = v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 0 + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$a_x = \frac{2 \Delta x}{t^2} = \frac{2 \cdot (2,25 \text{ m})}{(3,0 \text{ s})^2} = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \hat{\mathbf{x}}$$

2. Da \mathbf{F} die *Gesamtkraft* ist, wird $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$. Einsetzen von $\mathbf{a} = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \hat{\mathbf{x}}$ und $m = 68 \text{ kg}$ in diese Gleichung ergibt die Kraft:

$$\mathbf{F} = m a_x \hat{\mathbf{x}} = (68 \text{ kg}) \cdot (0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \hat{\mathbf{x}} = [34 \text{ N} \hat{\mathbf{x}}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Beschleunigung beträgt $0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ und damit etwa 5 % von $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dies erscheint plausibel. Wäre sie gleich g gewesen, hätte sich der Astronaut in den 3 s wesentlich weiter als nur 2,25 m bewegen müssen. ■

Beispiel 3.3: Ein Teilchen unter der Einwirkung zweier Kräfte

Ein Teilchen der Masse 0,400 kg ist gleichzeitig zwei Kräften $\mathbf{F}_1 = -2,00 \text{ N} \hat{\mathbf{x}} - 4,00 \text{ N} \hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{F}_2 = -2,60 \text{ N} \hat{\mathbf{x}} + 5,00 \text{ N} \hat{\mathbf{y}}$ ausgesetzt (Abbildung 3.9). Das Teilchen soll zunächst am Koordinatenursprung ruhen und ab $t = 0$ beschleunigt werden. Gesucht sind a) sein Ortsvektor \mathbf{r} und b) seine Geschwindigkeit \mathbf{v} zum Zeitpunkt $t = 1,60 \text{ s}$.

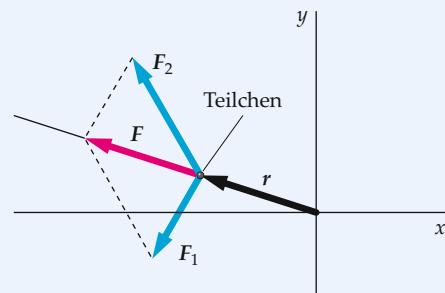


Abbildung 3.9 Die Beschleunigung weist in Richtung der Gesamtkraft. Das Teilchen wird am Koordinatenursprung aus der Ruhe heraus losgelassen. Anschließend bewegt es sich in Richtung der Gesamtkraft, die mit der Richtung des Beschleunigungsvektors übereinstimmt.

Problembeschreibung: Wir berechnen über $\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$ die Beschleunigung. Wenn diese bekannt ist, können wir die kinematischen Gleichungen aus Kapitel 2 anwenden, um den Ort und die Geschwindigkeit als Funktionen der Zeit zu ermitteln.

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Schreiben Sie die allgemeine Gleichung für den Ortsvektor \mathbf{r} als Funktion der Zeit t für eine konstante Beschleunigung \mathbf{a} in Abhängigkeit von \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 und \mathbf{a} auf. Setzen Sie $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

2. Drücken Sie die Beschleunigung \mathbf{a} über $\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$ durch die resultierende Kraft $\sum \mathbf{F}_i$ und die Masse m aus:

$$\mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}_i}{m}$$

3. Berechnen Sie aus den gegebenen Kräften $\sum \mathbf{F}_i$:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_i &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ &= (-2,00 \text{ N} \hat{\mathbf{x}} - 4,00 \text{ N} \hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad + (-2,60 \text{ N} \hat{\mathbf{x}} + 5,00 \text{ N} \hat{\mathbf{y}}) \\ &= -(4,60 \text{ N}) \hat{\mathbf{x}} + (1,00 \text{ N}) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

4. Ermitteln Sie die Beschleunigung \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}_i}{m} = -(11,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \hat{\mathbf{x}} + (2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \hat{\mathbf{y}}$$

5. Ermitteln Sie den Ort \mathbf{r} in Abhängigkeit von t :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = \frac{1}{2} a_x t^2 \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} a_y t^2 \hat{\mathbf{y}} \\ &= (-5,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \hat{\mathbf{x}} + 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \hat{\mathbf{y}}) t^2 \end{aligned}$$

6. Berechnen Sie \mathbf{r} bei $t = 1,60 \text{ s}$:

$$\mathbf{r}(1,60 \text{ s}) = \boxed{-(14,7 \text{ m}) \hat{\mathbf{x}} + (3,20 \text{ m}) \hat{\mathbf{y}}}$$

Teilaufgabe b

Bilden Sie die Geschwindigkeit \mathbf{v} als Zeitableitung des Ergebnisses aus Schritt 5 der Teilaufgabe a. Berechnen Sie die Geschwindigkeit bei $t = 1,6 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2(-5,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \hat{\mathbf{x}} + 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \hat{\mathbf{y}}) t \\ \mathbf{v}(1,6 \text{ s}) &= \boxed{-(18,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \hat{\mathbf{x}} + (4,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \hat{\mathbf{y}}} \end{aligned}$$

3.4 Gravitationskraft und Gewicht

Lässt man einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche fallen, wird er nach unten, zur Erde beschleunigt. Wenn der Luftwiderstand vernachlässigbar ist, ist diese Beschleunigung für alle Körper gleich. Ihr Betrag hat den durch die Erdbeschleunigungskonstante g gegebenen Wert. Die Beschleunigung selbst wird Fallbeschleunigung \mathbf{a}_G genannt. Die Kraft, die diese Gravitationsbeschleunigung erzeugt, ist die **Gravitationskraft** oder **Schwerkraft** \mathbf{F}_G , die die Erde auf den Körper ausübt. Der Körper erfährt durch die Erdanziehung eine Gewichtskraft \mathbf{F}_G – er hat ein Gewicht vom Betrag $|\mathbf{F}_G|$. Ist die Gravitationskraft \mathbf{F}_G die *einige* Kraft, die auf einen Körper wirkt, sagt man, dieser Körper sei im **freien Fall**. Die Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms ($\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$) auf einen frei fallenden Körper der Masse m unter der Beschleunigung \mathbf{a}_G ergibt:

$$\mathbf{F}_G = m \mathbf{a}_G. \quad (3.5)$$

DIE GRAVITATIONSKRAFT BEIM FREI FALLENDEN KÖRPER

Da \mathbf{a}_G für alle Körper gleich ist, ist die auf einen Körper wirkende Gravitationskraft proportional zu seiner Masse. In der Nähe der Erdoberfläche ist der Vektor \mathbf{a}_G ein Maß für die pro Masseneinheit auf einen Körper ausgeübte Schwerkraft der Erde. In der Nähe der Erdoberfläche hat \mathbf{a}_G den Betrag

$$|\mathbf{a}_G| = g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (3.6)$$

Genaue Messungen haben gezeigt, dass sich der Wert von \mathbf{a}_G an verschiedenen Orten etwas unterscheidet. Der Vektor \mathbf{a}_G zeigt überall zum Erdmittelpunkt, und an Punkten über der Erdoberfläche nimmt der Betrag von \mathbf{a}_G umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt ab. Das heißt, ein und derselbe Körper wiegt in großer Höhe etwas weniger als in Höhe des Meeresspiegels. In Bezug auf beliebige Punkte in der Umgebung der Erde lässt sich \mathbf{a}_G als Feldvektor des **Gravitations-** oder **Schwerefelds** der Erde auffassen. Da die Erde nicht genau eine Kugel, sondern zu den Polen hin abgeflacht ist, hängt das Gravitationsfeld zudem von der geografischen Breite ab. Somit hängt auch die Gewichtskraft \mathbf{F}_G , die auf einen Körper wirkt, von seinem Ort ab – das Gewicht ist im Unterschied zur Masse keine innere Eigenschaft eines Körpers. Es kann sich also aufgrund der Änderung von \mathbf{a}_G mit dem Ort beim Transport eines Körpers ändern, aber diese Änderung ist so klein, dass sie bei den meisten praktischen Anwendungen auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe nicht wahrgenommen wird.

Das Gewicht ist keine innere Eigenschaft eines Körpers.

Ein Beispiel soll den Unterschied zwischen Masse und Gewicht verdeutlichen. Stellen Sie sich vor, Sie nehmen eine schwere Kegelkugel mit auf den Mond. Ihr Gewicht ist so stark wie die auf sie auf dem Mond wirkende Gravitationskraft. Diese Kraft beträgt dort nur ein Sechstel der Gravitationskraft auf der Erde – die Kugel lässt sich auf dem Mond daher viel einfacher hochheben. Um die Kugel allerdings mit einer bestimmten Geschwindigkeit in horizontaler Richtung zu werfen, ist auf dem Mond dieselbe Kraft erforderlich wie auf der Erde, da die Masse der Kugel gleich ist und die Gravitationskraft in horizontaler Richtung nicht wirkt.

Obwohl das Gewicht eines Körpers ortsabhängig ist, ist es für jeden einzelnen Ort proportional zur Masse des Körpers. Damit können wir die Massen verschiedener Körper vergleichen, indem wir ihre Gewichte vergleichen.

Gravitationskräfte nehmen wir meist über Kräfte wahr, die mit ihnen im Gleichgewicht sind. Wenn Sie auf einem Stuhl sitzen, spüren Sie die Kraft, die der Stuhl ausübt und die mit der auf Sie wirkenden Gravitations- bzw. Schwerkraft im Gleichgewicht ist, sodass Sie nicht zu Boden fallen. Wenn Sie auf einer Personenwaage stehen, spüren Ihre Füße die Kraft, die die Waage auf Sie ausübt. Die Waage ist so geeicht, dass sie die Gegenkraft anzeigt, die sie aufbringt, um die auf Sie wirkende Gravitationskraft zu kompensieren. Diese Kraft wird auch **scheinbares Gewicht** genannt. Wenn wie etwa beim freien Fall keine Kraft vorhanden ist, die dem Gewicht entgegenwirkt, ist das scheinbare Gewicht null. Diesen Zustand, die sogenannte **Schwerelosigkeit**, erfahren Astronauten in ihren Raumschiffen. Stellen Sie sich ein Raumschiff vor, das sich auf einer kreisförmigen Erdumlaufbahn bewegt und somit ständig zur Erde beschleunigt wird. Die einzige Kraft, die auf das Raumschiff wirkt, ist die der Gravitation, sodass es frei fällt. Auch die Astronauten in dem Raumschiff sind im freien Fall. Die einzige Kraft, die auf sie ausgeübt wird, ist die auf sie wirkende Gravitationskraft, die für die Beschleunigung a_G verantwortlich ist. Da es unter diesen Bedingungen keine Kraft gibt, die den freien Fall in der Umlaufbahn aufhält, ist das scheinbare Gewicht der Astronauten null.

3.5 Kräftediagramme und ihre Anwendung

Stellen Sie sich einen Schlitten vor, den ein Hund an einer Leine über das Eis zieht (Abbildung 3.10a). Dabei zieht er mit solcher Kraft, dass der Schlitten beschleunigt wird. Wir können uns Schlitten und Leine als ein einzelnes Teilchen vorstellen. Welche Kräfte wirken dann auf dieses Schlitten-Leine-Teilchen?

Sowohl der Hund als auch das Eis berühren das Schlitten-Leine-System, sodass sowohl der Hund als auch das Eis Kontaktkräfte auf es ausüben. Weiter wissen wir, dass die Erde eine Gravitationskraft auf den Schlitten und auf die Leine ausübt (die sich als Gewicht von Schlitten und Leine äußert). Somit greifen insge-

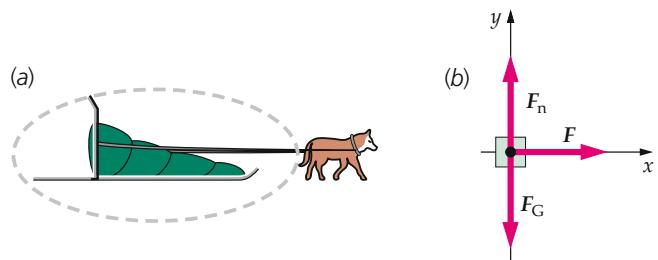


Abbildung 3.10 a) Ein Hund zieht einen Schlitten. Der erste Schritt zur Lösung der Aufgabe besteht darin, den zu analysierenden Körper zu isolieren. In diesem Fall zeigt die gestrichelte Ellipse die Grenze zwischen dem als Teilchen betrachteten Körper aus Schlitten und Leine und seiner Umgebung an. b) Das Kräftediagramm der auf den Schlitten aus Abbildung 3.10a wirkenden Kräfte.

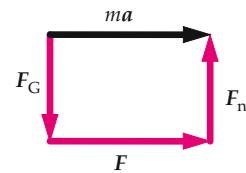


Abbildung 3.11 Die Vektorsumme aller Kräfte im Kräftediagramm ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigungsvektor.

samt (wenn man die Reibung als vernachlässigbar ansieht) drei Kräfte an dem Teilchen an:

1. die Gravitationskraft F_G , die auf den Schlitten und auf die Leine wirkt,
2. die Kontaktkraft F_n , die das Eis auf die Kufen ausübt (ohne die Reibung wirkt diese senkrecht zum Eis),
3. die Kontaktkraft F , die der Hund auf die Leine ausübt.

Ein Diagramm wie das in Abbildung 3.10b, das schematisch alle an einem System angreifenden Kräfte zeigt, heißt **Kräfte-Diagramm**. Neben den Kräften ist darin nur der Körper, nicht aber dessen Umgebung dargestellt.

Um alle Kräfte maßstabsgerecht in das Diagramm einzuziehen, muss zunächst mithilfe kinematischer Betrachtungen die Richtung des Beschleunigungsvektors bestimmt werden. Wir wissen, dass sich der Körper mit zunehmender Geschwindigkeit nach rechts bewegt. Also zeigt der Beschleunigungsvektor in die Richtung der Geschwindigkeitsänderung, d. h. in die Vorrwärtssrichtung. Weiter ist zu beachten, dass F_n und F_G in dem Diagramm die gleiche Länge besitzen. Dass ihre Beträge gleich sein müssen, wissen wir, da die Beschleunigung keine vertikale Komponente besitzt. Als qualitative Plausibilitätsprüfung unseres Kräftediagramms zeichnen wir ein Vektoradditionsdiagramm (Abbildung 3.11), das bestätigt, dass die Vektorsumme der Kräfte in Richtung des Beschleunigungsvektors wirkt.

Wir wenden nun das zweite Newton'sche Axiom an, um die x - und die y -Komponente der Gesamtkraft auf das System aus Schlitten und Leine zu bestimmen. Die x -Komponente der Gesamtkraft ergibt sich dann aus der Summe der x -Komponenten

Vorgehensweise:

Zur Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms

Ermitteln Sie alle auf ein Teilchen wirkenden Kräfte. Bestimmen Sie anschließend, soweit möglich, die Richtung des Beschleunigungsvektors des Teilchens. Dessen Kenntnis hilft Ihnen bei der Wahl des besten Koordinatensystems zur Lösung der Aufgabenstellung.

1. Zeichnen Sie eine Übersichtsskizze, die alle wichtigen Angaben der Aufgabe zeigt.
2. Isolieren Sie den zu betrachtenden Körper (das Teilchen) und kennzeichnen Sie alle auf ihn wirkenden Kräfte.
3. Stellen Sie diese Kräfte alle in einem Kräftediagramm dar.
4. Wählen Sie ein zweckmäßiges Koordinatensystem. Ist Ihnen die Richtung des Beschleunigungsvektors bekannt, sollten Sie eine Koordinatenachse in diese Richtung legen. Für Körper, die auf einer Fläche gleiten, empfiehlt es sich, eine Koordinatenachse parallel zu dieser Oberfläche und die andere senkrecht zu ihr zu legen.
5. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom $\sum F_i = m a$ (meist in Komponentenschreibweise) an.
6. Lösen Sie die daraus resultierenden Gleichungen für die gesuchten Größen.

Plausibilitätsprüfung: Überzeugen Sie sich, dass die Ergebnisse die richtigen Maßeinheiten tragen und plausibel sind. Das probeweise Einsetzen von Grenzwerten in die allgemeine Lösungen ist eine gute Möglichkeit, um Fehler zu erkennen.

aller drei beteiligten Kräfte nach dem zweiten Newton'schen Axiom zu

$$\sum_{i=1}^3 F_{i,x} = F_{n,x} + F_{G,x} + F_x = m a_x,$$

$$0 + 0 + F_x = m a_x$$

oder

$$a_x = \frac{F_x}{m}.$$

Die y-Komponente des zweiten Newton'schen Axioms liefert

$$\sum_{i=1}^3 F_{i,y} = F_{n,y} + F_{G,y} + F_y = m a_y,$$

$$F_{n,y} + F_{G,y} + 0 = 0$$

oder

$$F_{n,y} = -F_{G,y}.$$

Somit erfährt das Schlitten-Leine-Teilchen eine Beschleunigung in $+x$ -Richtung von F_x/m und die vertikale, durch das Eis erzeugte Kraft F_n mit $F_{n,y} = -F_{G,y} = -mg$.

Beispiel 3.4 betrachtet einen Fall mit schräger Zugkraft und zeigt ein allgemeineres Verfahren zum Lösen von Aufgaben mithilfe der Newton'schen Axiome, das auch in den nachfolgenden Beispielen 3.5 bis 3.8 Anwendung findet. Insbesondere betrifft Beispiel 3.8 die Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms auf Körper, die relativ zu einem Bezugssystem in Ruhe sind, das selbst beschleunigt wird.

Beispiel 3.4: Schlittenrennen

Bei einem Schlittenrennen sollen Studenten die Schlitten ziehen. Dabei tragen sie Schuhe mit Spikes, die besser am Boden haften. Beim Start des Rennens zieht ein Student den Schlitten mit einer Kraft von 150 N unter einem Winkel von 25° gegen die Horizontale an der Leine. Das System aus Schlitten und Leine wird als ein Teilchen betrachtet. Seine Masse beträgt 80 kg ; seine Reibung am Boden kann vernachlässigt werden. Gesucht sind a) die Beschleunigung des Schlittens und b) die Stärke der Normalkraft, die der Boden auf den Schlitten ausübt.

Problembeschreibung: Auf das Teilchen wirken drei Kräfte: sein nach unten gerichtetes Gewicht F_G , die nach oben gerichtete Normalkraft F_n sowie die unter einem Winkel von 25° nach oben gerichtete Kraft F , mit der der Student an der Leine zieht. Da diese Kräfte nicht alle gleich gerichtet sind, werten wir das zweite Newton'sche Axiom für die x - und für die y -Richtung getrennt aus.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für das Schlitten-Leine-Teilchen (Abbildung 3.12b). Vergessen Sie dabei nicht, ein Koordinatensystem einzuziehen, dessen eine Achse in Richtung der Beschleunigung des Schlittens zeigt. Da sich der Schlitten mit zunehmender Geschwindigkeit nach rechts bewegt, muss auch die Beschleunigung in dieser Richtung wirken.

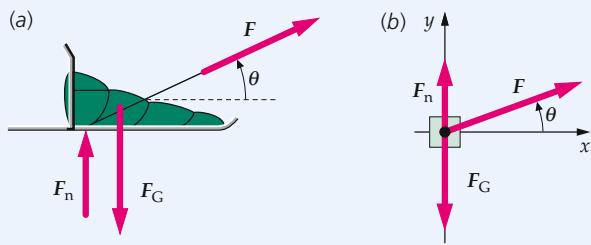


Abbildung 3.12 Schlitten-Leine-System mit Kräftebild

2. Addieren Sie die Vektoren in einem Kräftebild (Abbildung 3.13), indem Sie jeweils die Spitze eines Vektors an das Ende eines anderen anfügen, um zu sehen, ob ihre Summe in Richtung der Beschleunigung zeigt.

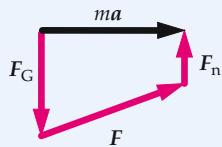


Abbildung 3.13 Die Vektorsumme der Kräfte im Kräftebild ist gleich dem Produkt aus der Masse und dem Beschleunigungsvektor.

3. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf das Teilchen an. Schreiben Sie dazu die Formel sowohl in Vektor- als auch in Komponentenschreibweise auf:

$$\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_G + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

oder

$$F_{n,x} + F_{G,x} + F_x = m a_x$$

$$F_{n,y} + F_{G,y} + F_y = m a_y$$

4. Schreiben Sie die x -Komponenten von \mathbf{F}_n , \mathbf{F}_G und \mathbf{F} auf:

$$F_{n,x} = 0, \quad F_{G,x} = 0 \quad \text{und} \quad F_x = |\mathbf{F}| \cos \theta$$

5. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 4 in die Gleichung für die x -Komponente aus Schritt 3 ein. Stellen Sie anschließend nach der Beschleunigung a_x um:

$$\sum F_{i,x} = 0 + 0 + |\mathbf{F}| \cos \theta = m a_x$$

$$a_x = \frac{|\mathbf{F}| \cos \theta}{m} = \frac{(150 \text{ N}) \cdot \cos 25^\circ}{80 \text{ kg}} = [1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$$

Teilaufgabe b

1. Schreiben Sie die y -Komponente von \mathbf{a} auf:

$$a_y = 0$$

2. Schreiben Sie die y -Komponenten von \mathbf{F}_n , \mathbf{F}_G und \mathbf{F} auf:

$$F_{n,y} = |\mathbf{F}_n|, \quad F_{G,y} = -mg \quad \text{und} \quad F_y = |\mathbf{F}| \sin \theta$$

3. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 1 und 2 der Teilaufgabe b in die Gleichung für die y -Komponente aus Schritt 3 der Teilaufgabe a ein. Stellen Sie anschließend nach der Normalkraft $|\mathbf{F}_n|$ um:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,y} &= |\mathbf{F}_n| - mg + |\mathbf{F}| \sin \theta = 0 \\ |\mathbf{F}_n| &= mg - |\mathbf{F}| \sin \theta \\ &= (80 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) - (150 \text{ N}) \cdot \sin 25^\circ \\ &= [7,2 \cdot 10^2 \text{ N}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Beachten Sie, dass nur die x -Komponente von \mathbf{F} , d. h. $|\mathbf{F}| \cos \theta$, zur Beschleunigung des Körpers beiträgt. Es entspricht unseren Erwartungen, dass die Beschleunigung kleiner ist, wenn die Leine nicht horizontal verläuft. Außerdem erwarten wir, dass die vom Eis ausgeübte Normalkraft betragsmäßig kleiner als das volle Gewicht des Schlittens ist, da die Leine einem Teil des Gewichts entgegenwirkt.

Übung 3.2: Welche maximale Kraft \mathbf{F} kann bei $\theta = 25^\circ$ an der Leine ziehen, ohne dass sich der Schlitten vom Boden löst? ◀

Beispiel 3.5: Entladen eines LKWs

Stellen Sie sich vor, Sie arbeiten bei einer Speditionsfirma und müssen mit einer Entladerampe (Abbildung 3.14) ein großes Paket mit zerbrechlichen Gütern aus Ihrem LKW ausladen. Die Rampe ist 1,00 m hoch und besitzt Rollen, sodass sie nahezu reibungsfrei ist. Sie ist mit einem Winkel θ gegen die Horizontale aufgestellt. Wenn die senkrechte Geschwindigkeitskomponente des Pakets beim Auftreffen auf den Boden am Ende der Rampe größer als 2,50 m/s ist (was einem Fall aus 30 cm Höhe entspricht), zerbricht die empfindliche Fracht. Wie groß darf der Winkel θ maximal sein, um eine Beschädigung des Pakets auszuschließen?

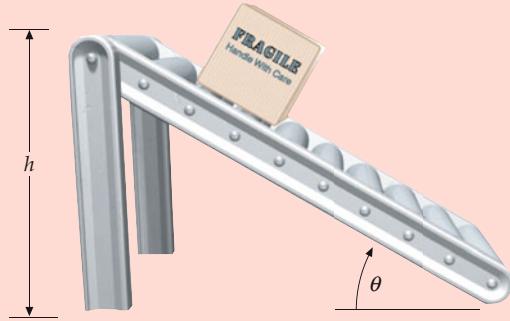


Abbildung 3.14 Schematische Darstellung der Entladerampe mit Paket.

Problembeschreibung: Auf das Paket wirken zwei Kräfte, die Gravitationskraft F_G und die Normalkraft F_n der Rampe. Da die beiden Kräfte nicht genau entgegengesetzt gerichtet sind, kann ihre Summe nicht null sein. Somit gibt es eine resultierende Kraft, die das Paket die Rampe hinab beschleunigt. Die Rampe stellt eine Zwangsbedingung dar, aufgrund derer sich das Paket nur auf ihrer Oberfläche bewegen kann. Aus diesem Grund legen wir die $+x$ -Richtung auf der Rampenoberfläche so, dass sie entlang der Rampe nach unten zeigt. Zur Bestimmung der Beschleunigung wenden wir das zweite Newton'sche Axiom auf das Paket an. Ist die Beschleunigung bekannt, kann mithilfe kinematischer Betrachtungen der maximale Winkel bestimmt werden, bei dem das Paket unbeschädigt unten ankommt.

Lösung: 1. Wir zeichnen zunächst ein Kräftebild (Abbildung 3.15). An dem Paket greifen zwei Kräfte an, die Gravitationskraft und die Normalkraft. Wir wählen die Beschleunigungsrichtung, die auf der Rampenoberfläche nach unten zeigt, als die $+x$ -Richtung. (*Hinweis:* Aus dem Kräftebild kann man ablesen, dass der Winkel zwischen der Gravitationskraft F_G und der $-y$ -Richtung mit dem Winkel zwischen der Horizontalen und der Rampenoberfläche übereinstimmt.) Außerdem gilt offensichtlich $F_{G,x} = |F_G| \sin \theta$.

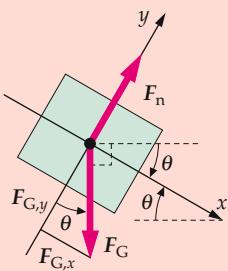


Abbildung 3.15 Kräftebild des Pakets

2. Um die Beschleunigungskomponente a_x zu erhalten, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom an (*Hinweis:*

3.5 Kräftediagramme und ihre Anwendung

F_n ist senkrecht zur x -Achse und $|F_G| = m g$):

$$F_{n,x} + F_{G,x} = m a_x$$

mit

$$F_{n,x} = 0 \quad \text{und} \quad F_{G,x} = |F_G| \sin \theta = m g \sin \theta$$

3. Einsetzen und Umstellen nach der Beschleunigung ergibt:

$$0 + m g \sin \theta = m a_x \quad \text{und somit} \quad a_x = g \sin \theta$$

4. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen der nach unten gerichteten, senkrechten Geschwindigkeitskomponente v_s des Pakets und dessen Geschwindigkeitskomponente v_x in $+x$ -Richtung auf:

$$v_s = v_x \sin \theta$$

5. Die Geschwindigkeitskomponente v_x hängt mit der Verschiebung Δx entlang der Rampe über folgende kinematische Gleichung zusammen:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$$

6. Nach dem Einsetzen von a_x in die kinematische Gleichung (Schritt 5) und dem Nullsetzen von $v_{0,x}$ ergibt sich:

$$v_x^2 = 2 g \sin \theta \Delta x$$

7. Aus Abbildung 3.14 ist ersichtlich, dass $\Delta x \sin \theta = h$ gilt, wobei Δx die Länge der Rampe und h ihre Höhe ist:

$$v_x^2 = 2 g h$$

8. Aus der Gleichung aus Schritt 4 ergibt sich zusammen mit dem Ausdruck für v_x aus Schritt 7:

$$v_s = \sqrt{2 g h} \sin \theta$$

9. Berechnen Sie nun den maximalen Winkel:

$$\begin{aligned} 2,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} &= \\ \sqrt{2 \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (1,00 \text{ m}) \cdot \sin \theta_{\max}} \\ \theta_{\max} &= [34,4^\circ] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Unter einem Winkel von $34,4^\circ$ ist die abwärts gerichtete Geschwindigkeitskomponente etwas mehr als die halbe Geschwindigkeit, die das Paket hätte, wenn es aus einer Höhe von 1,00 m fallen gelassen würde.

Weitergedacht: Die Beschleunigung auf der geneigten Ebene ist konstant und gleich $g \sin \theta$. Dagegen hängt die Geschwindigkeit v_x am Ende der Rampe nicht vom Winkel θ ab.

Übung 3.3: Zeigen Sie durch Anwendung von $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf das Paket, dass $F_{n,y} = m g \cos \theta$ ist. ◀ ■

Beispiel 3.6: Zur Aufhängung eines Bilds

ZUR ÜBUNG

Ein Bild mit einem Gewicht von 8,0 N wird wie in Abbildung 3.16 von zwei Drähten gehalten, in denen die Zugkräfte $F_{S,1}$ bzw. $F_{S,2}$ wirken. Ermitteln Sie diese beiden Zugkräfte.

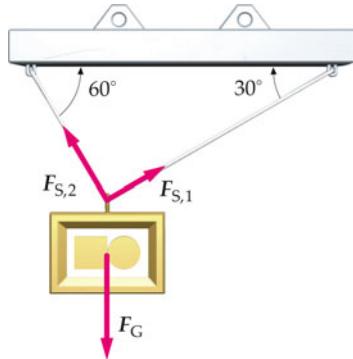


Abbildung 3.16 Kräftediagramm der Bildaufhängung.

Problembeschreibung Da das Bild nicht beschleunigt wird, muss die resultierende Gesamtkraft darauf null sein. Die drei Kräfte, die auf das Bild wirken, sind die Gravitationskraft \mathbf{F}_G und die beiden Zugkräfte $\mathbf{F}_{S,1}$ und $\mathbf{F}_{S,2}$ der Drähte.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung 1. Fertigen Sie ein Kräftediagramm für das Bild an (Abbildung 3.17). Zeichnen Sie auch die x - und y -Komponenten der beiden Zugkräfte ein.

2. Wenden Sie $\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$ in Vektorform auf das Bild an.

3. Zerlegen Sie beide Kräfte in ihre x - und y -Komponenten. Sie erhalten so zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $|F_{S,1}|$ und $|F_{S,2}|$, wobei $F_{G,x} = 0$ und $F_{G,y} = |F_G| = 8 \text{ N}$ sind. Die Beschleunigung ist null.

4. Stellen Sie die Gleichung für die x -Komponenten nach $|F_{S,2}|$ um.

5. Setzen Sie die resultierende Formel für $|F_{S,2}|$ aus Schritt 4 in die Gleichung für die y -Komponente ein und stellen Sie sie nach $|F_{S,1}|$ um.

6. Berechnen Sie aus $|F_{S,1}|$ nun noch $|F_{S,2}|$.

Ergebnisse der Lösungsschritte

1.

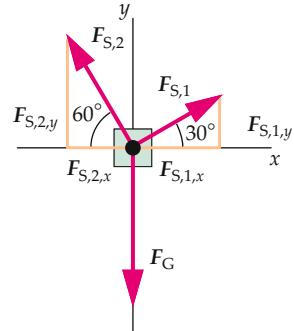


Abbildung 3.17 Kräftediagramm

2.

$$\mathbf{F}_{S,1} + \mathbf{F}_{S,2} + \mathbf{F}_G = m\mathbf{a}$$

3.

$$F_{S,1,x} + F_{S,2,x} + F_{G,x} = 0$$

$$|F_{S,1}| \cos 30^\circ - |F_{S,2}| \cos 60^\circ + 0 = 0$$

und

$$F_{S,1,y} + F_{S,2,y} + F_{G,y} = 0$$

$$|F_{S,1}| \sin 30^\circ + |F_{S,2}| \sin 60^\circ - |F_G| = 0$$

4.

$$|F_{S,2}| = |F_{S,1}| \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$$

5.

$$|F_{S,1}| \sin 30^\circ + \left(|F_{S,1}| \cdot \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \right) \sin 60^\circ - |F_G| = 0$$

$$|F_{S,1}| = -0,50 |F_G| = [4,0 \text{ N}]$$

6.

$$|F_{S,2}| = |F_{S,1}| \cdot \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = [6,9 \text{ N}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten, trägt der steilere der beiden Drähte den größeren Anteil der Last des Bilds. Außerdem ist $|F_{S,1}| + |F_{S,2}| > 8 \text{ N}$. Der zusätzliche Kraftanteil entsteht dadurch, dass die Drähte nach links und nach rechts ziehen.

Beispiel 3.7: Ein Düsenflugzeug beim Start

Während Ihr Düsenflugzeug die Startbahn entlangrollt, um für den Start zu beschleunigen, wollen Sie seine Beschleunigung messen. Dazu packen Sie Ihr Yo-Yo aus, lassen es nach unten hängen und messen, dass es einen Winkel von $22,0^\circ$ gegen die Vertikale bildet (Abbildung 3.18a). a) Wie stark beschleunigt das Flugzeug? b) Wie groß ist die Zugkraft im Faden, wenn das Yo-Yo eine Masse von 40,0 g hat?

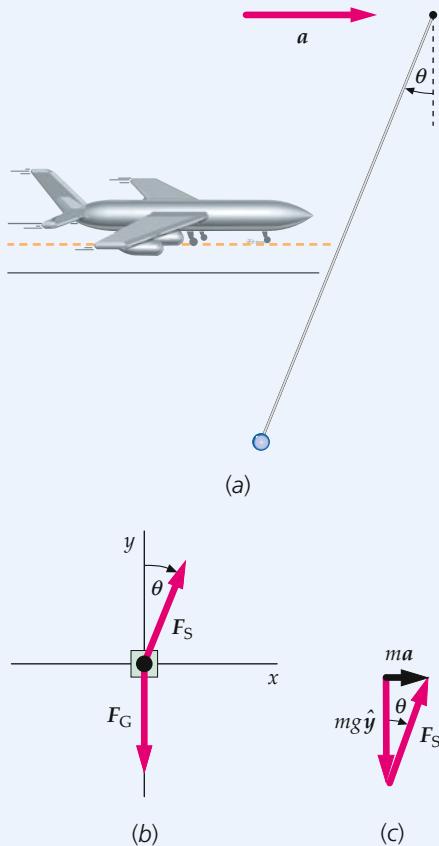


Abbildung 3.18 Schematische Darstellung der Yo-Yo-Auslenkung relativ zum Flugzeug und das zugehörige Kräftediagramm.

Problembeschreibung: Yo-Yo und Flugzeug besitzen die gleiche Beschleunigung. Die resultierende Kraft auf das Yo-Yo zeigt in Richtung seiner Beschleunigung, also nach rechts. Diese Kraft wird von der horizontalen Komponente der Zugkraft F_S geliefert. Die vertikale Komponente von F_S ist mit der Gravitationskraft F_G auf das Yo-Yo im Gleichgewicht. Wir wählen ein Koordinatensystem, in dem die $+x$ -Richtung in Richtung des Beschleunigungsvektors a und die $+y$ -Richtung vertikal nach oben weist. Wenn man das zweite Newton'sche Axiom für die x - und für die y -Richtung aufschreibt, erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten a_x und $|F_S|$.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für das Yo-Yo (Abbildung 3.18b). Wählen Sie als $+x$ -Richtung die Richtung des Beschleunigungsvektors.
- Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf das Yo-Yo an und drücken Sie $F_{S,x}$ mithilfe einer trigonometrischen Beziehung durch $|F_S|$ aus:

$$F_{S,x} + F_{G,x} = m a_x$$

$$|F_S| \sin \theta + 0 = m a_x$$

oder

$$|F_S| \sin \theta = m a_x$$

- Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf das Yo-Yo an. Vereinfachen Sie die Formel wieder mit einer trigonometrischen Beziehung (Abbildung 3.18c) und $F_{G,y} = -mg$. Da die Beschleunigung in die positive x -Richtung wirkt, ist $a_y = 0$:

$$F_{S,y} + F_{G,y} = m a_y$$

$$|F_S| \cos \theta - mg = 0$$

oder

$$|F_S| \cos \theta = mg$$

- Dividieren Sie das Ergebnis aus Schritt 2 durch das aus Schritt 3 und stellen Sie die entstehende Gleichung nach der Beschleunigung um. Da der Beschleunigungsvektor in die $+x$ -Richtung zeigt, ist $a = a_x$:

$$\frac{|F_S| \sin \theta}{|F_S| \cos \theta} = \frac{m a_x}{mg}$$

und damit

$$\tan \theta = \frac{a_x}{g}$$

und

$$a_x = g \tan \theta = (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \tan 22^\circ = 3,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie anhand des Ergebnisses aus Schritt 3 der Teilaufgabe a die Zugkraft F_S :

$$|F_S| = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{(0,0400 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})}{\cos 22,0^\circ} = 0,423 \text{ N}$$

Plausibilitätsprüfung: Bei $\theta = 0$ ist $\cos \theta = 1$ und $\tan \theta = 0$. Einsetzen dieser Werte in die Ausdrücke der beiden letzten Lösungsschritte ergibt, wie es sein sollte, $a_x = 0$ und $|F_S| = mg$.

Weitergedacht: Offenbar ist $|F_S|$ für Teilaufgabe b größer als die auf das Yo-Yo wirkende Gravitationskraft ($mg = 0,392 \text{ N}$), da der Faden das Yo-Yo nicht nur vor dem Herunterfallen bewahren muss, sondern es zusätzlich auch noch horizontal beschleunigt. Im obigen Fall haben wir für g (anstelle von N/kg) die Einheit m/s^2 verwendet, da wir eine Beschleunigung berechnen wollten.

Übung 3.4: Bei welchem Beschleunigungsbetrag a wäre die Zugkraft im Faden gleich $3,00 mg$? Wie groß wäre θ in diesem Fall? ■

Beispiel 3.8: Die Waage im Fahrstuhl

Eine Person mit einer Masse von 80 kg steht auf einer am Boden angebrachten Waage in einem Fahrstuhl. Die Waage misst Kräfte und ist in Newton geeicht. Was zeigt die Waage an, wenn der Fahrstuhl a) mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt wird, b) mit der Beschleunigung $-a'$ nach unten beschleunigt wird und c) mit 20 m/s steigt, dabei aber mit $8,0 \text{ m/s}^2$ abgebremst wird?

Problembeschreibung: Die Waage zeigt stets die Normalkraft an, die sie auf die Person ausübt (Abbildung 3.19). Da die Person dem Fahrstuhl gegenüber in Ruhe ist, besitzt sie dieselbe Beschleunigung wie er. Auf die Person wirken daher zwei Kräfte: die nach unten gerichtete Gravitationskraft $F_G = -ma_G$ und die nach oben gerichtete Normalkraft der Waage F_n . Die Summe dieser beiden Kräfte liefert die beobachtete Beschleunigung. Wir legen die $+y$ -Richtung so, dass sie nach oben weist.

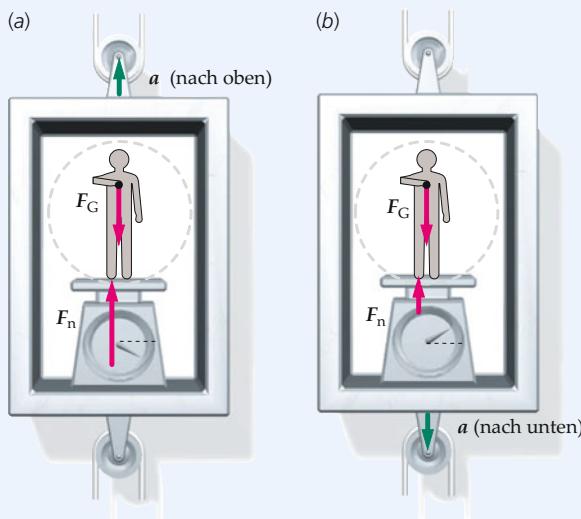


Abbildung 3.19 Kräftediagramme der Waage im Fahrstuhl für den Fall a), dass der Fahrstuhl nach oben fährt und für den Fall b), dass der Fahrstuhl nach unten fährt.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie das Kräftediagramm für die Person im Fahrstuhl (Abbildung 3.20).

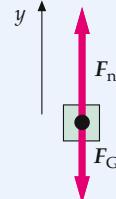


Abbildung 3.20 Kräftediagramm für die Person im Fahrstuhl.

2. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = ma_y$ an:

$$F_{n,y} + F_{G,y} = ma_y$$

$$|F_n| - mg = ma_y$$

3. Stellen Sie nach $|F_n|$ um. Diese Kraft wird an der Waage angezeigt und ist das scheinbare Gewicht der Person:

$$|F_n| = mg + ma_y = m(g + a_y)$$

4. Wegen $a_y = +|a|$ ist:

$$|F_n| = \boxed{m(g + |a|)}$$

Teilaufgabe b

- Es ist $a_y = -a'$. Setzen Sie dies nun für a_y in Schritt 3 von Teilaufgabe a ein:

$$|F_n| = m(g + a_y) = \boxed{m(g - a')}$$

Teilaufgabe c

- Die Geschwindigkeit ist positiv, nimmt aber ab, sodass die Beschleunigung negativ ist. Somit ist $a_y = -8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Setzen Sie dies in das Ergebnis aus Schritt 3 von Teilaufgabe a ein:

$$\begin{aligned} |F_n| &= m(g + a_y) \\ &= (80 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} - 8,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \\ &= 144,8 \text{ N} = \boxed{1,40 \cdot 10^2 \text{ N}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Unabhängig davon, ob sich der Fahrstuhl gerade nach oben oder nach unten bewegt, „fühlt man sich schwerer“, wenn er nach oben beschleunigt, sodass zu erwarten ist, dass das scheinbare Gewicht größer als mg ist. Dies steht in Einklang mit dem Ergebnis von Teilaufgabe a. Ist die Beschleunigung nach unten gerichtet, „fühlt man sich leichter“, sodass das scheinbare Gewicht kleiner als mg sein sollte. Die Ergebnisse der Teilaufgaben b und c entsprechen diesen Erwartungen.

Übung 3.5: Ein nach unten fahrender Fahrstuhl hält mit einer Beschleunigung von $4,00 \text{ m/s}^2$ an. Dieses Mal steht eine Person mit einer Masse von $70,0 \text{ kg}$ auf einer in Newton geeichten Waage im Fahrstuhl. Was zeigt die Waage an, während der Fahrstuhl anhält? ◀ ■

3.6 Das dritte Newton'sche Axiom

Das dritte Newton'sche Axiom beschreibt, dass Kräfte stets paarweise auftreten. Wird beispielsweise auf einen Körper A eine Kraft ausgeübt, muss es einen anderen Körper B geben, der diese Kraft ausübt. Im Gegenzug dazu übt Körper A auch eine Kraft auf Körper B aus. Das dritte Newton'sche Axiom besagt, dass diese Kräfte den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung haben. Das heißt: Wenn der Körper A eine Kraft auf den Körper B ausübt, übt der Körper B auf den Körper A eine Kraft aus, die betragsmäßig gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist.

Wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, ist die Kraft $\mathbf{F}_A^{(B)}$, die der Körper B auf den Körper A ausübt, gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet der Kraft $\mathbf{F}_B^{(A)}$, die der Körper A auf den Körper B ausübt. Somit gilt:

$$\mathbf{F}_A^{(B)} = -\mathbf{F}_B^{(A)}. \quad (3.7)$$

DRITTES NEWTON'SCHES AXIOM (REAKTIONS-PRINZIP)

Ein solches Kräftepaar wird als ein „Aktions-Reaktions-Paar“ bezeichnet. Häufig spricht man in diesem Fall bei der einen Kraft von der „Aktion“ und bei der anderen von der „Reaktion“. Diese Formulierung sollte man jedoch nicht so auffassen, dass die zweite Kraft erst als Reaktion auf die erste auftritt, was nicht der Fall ist. Beide Kräfte treten gleichzeitig auf, d. h., man kann jede der beiden als Aktionskraft bezeichnen und die andere dementsprechend als Reaktionskraft. Wenn wir eine äußere Kraft, die auf einen Körper wirkt, als eine Aktionskraft bezeichnen, muss die zugehörige Reaktionskraft stets auf einen anderen Körper wirken. Zwei äußere Kräfte, die auf ein und denselben Körper wirken, können nie ein „Aktions-Reaktions-Paar“ bilden.

Aktions-Reaktions-Paare sind *immer* betragsmäßig gleich und entgegengesetzt gerichtet. Zwei äußere Kräfte, die auf *denselben* Körper wirken, können nie ein Aktions-Reaktions-Paar bilden.

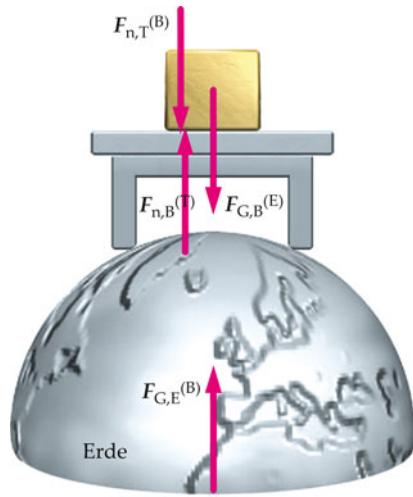


Abbildung 3.21 Verdeutlichung des dritten Newton'schen Axioms mithilfe eines Blocks, der auf einem Tisch liegt. Dies zeigt anschaulich den Zusammenhang zwischen actio und reactio beziehungsweise zwischen Kraft und Gegenkraft.

In Abbildung 3.21 liegt ein Block auf einem Tisch. Die Kraft, die den Block nach unten zieht, ist die Gravitationskraft $\mathbf{F}_{G,B}^{(E)}$, die die Erde auf den Block ausübt. Der Block übt eine gleich große, aber entgegengesetzt wirkende Gravitationskraft $\mathbf{F}_{G,E}^{(B)}$ auf die Erde aus. Diese Kräfte bilden ein Aktions-Reaktions-Paar. Wären sie die einzigen vorhandenen Kräfte, würde der Block nach unten beschleunigt, da in diesem Fall nur die Gravitationskraft an ihm angreifen würde (während gleichzeitig die Erde in Richtung Block nach oben beschleunigt würde). Allerdings übt der Tisch eine nach oben gerichtete Kraft $\mathbf{F}_{n,B}^{(T)}$ auf den Block aus, die mit der auf ihn wirkenden Gravitationskraft im Gleichgewicht ist. Gleichzeitig übt der Block auch eine Kraft $\mathbf{F}_{n,T}^{(B)}$ nach unten auf den Tisch aus, die mit der Anziehungs- kraft der Erde im Gleichgewicht ist. Die Kräfte $\mathbf{F}_{n,T}^{(B)}$ und $\mathbf{F}_{n,B}^{(T)}$ bilden ein Aktions-Reaktions-Paar und sind somit gleich und entgegengesetzt gerichtet.

Frage 3.3

Bilden die Kräfte $\mathbf{F}_{G,B}^{(E)}$ und $\mathbf{F}_{n,B}^{(T)}$ aus Abbildung 3.21 ein Aktions-Reaktions-Paar?

Frage 3.4

Stellen Sie sich vor, Sie stehen einem Freund gegenüber und drücken mit Ihren Handflächen gegen seine. Kann Ihr Freund auf Sie eine Kraft ausüben, ohne dass Sie eine auf ihn ausüben? Probieren Sie es aus!

Beispiel 3.9 verdeutlicht verschiedene Aktions-Reaktions-Paare beim Ziehen eines Pferdewagens.

Beispiel 3.9: Das Pferd vor dem Wagen

ZUM VERSTÄNDNIS

Ein Pferd weigert sich, seinen Wagen zu ziehen (Abbildung 3.22a). Dabei überlegt es sich: „Aus dem dritten Newton'schen Axiom folgt, dass für jede Kraft, die ich auf den Wagen ausübe, dieser Wagen auch eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft auf mich ausübt. Damit ist die Gesamtkraft gleich null, und ich werde den Wagen niemals beschleunigen können.“ Welchen Denkfehler hat das Pferd gemacht?

Problembeschreibung: Da uns die Bewegung des Wagens interessiert, fertigen wir eine Skizze von ihm an (Abbildung 3.22b). Die Kraft, die das Pferd auf den Wagen erzeugt, sei $F_W^{(P)}$. (Tatsächlich greift diese Kraft am Geschirr an. Da dieses fest mit dem Wagen verbunden ist, kann es als Teil von ihm betrachtet werden.) Weitere auf den Wagen wirkende Kräfte sind die Gravitationskraft der Erde auf den Wagen $F_{G,W}^{(E)}$, die Normalkraft des Asphalt auf den Wagen $F_{n,W}^{(A)}$ sowie die Reibungskraft durch den Asphalt auf den Wagen $F_{R,W}^{(A)}$.

Lösung:

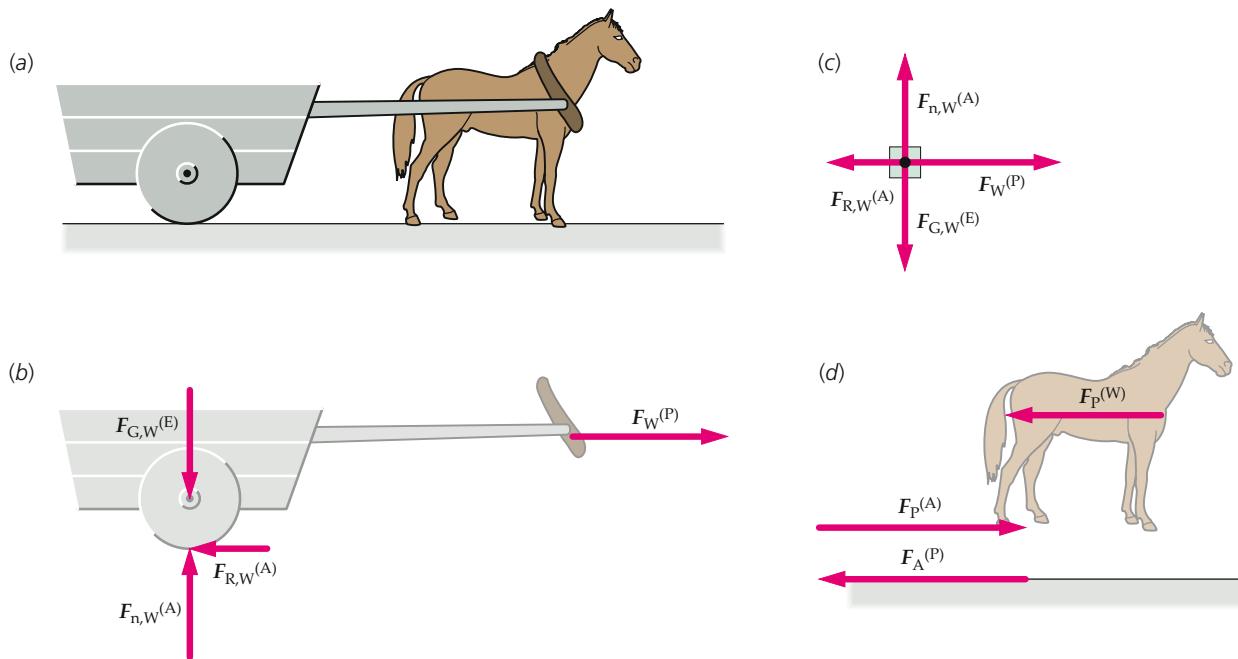


Abbildung 3.22 Kräftediagramme für Wagen und Pferd.

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für den Wagen (Abbildung 3.22c). Da der Wagen vertikal nicht beschleunigt wird, müssen die vertikalen Kräfte insgesamt null ergeben. Von den horizontalen Kräften wirkt $F_W^{(P)}$ nach rechts und $F_{R,W}^{(A)}$ nach links. Wenn $|F_W^{(P)}|$ größer als $|F_{R,W}^{(A)}|$ ist, wird der Wagen nach rechts beschleunigt.

2. Die Reaktionskraft zur Kraft $F_W^{(P)}$, die wir $F_P^{(W)}$ nennen wollen, wirkt auf das Pferd und nicht auf den Wagen (Abbildung 3.22d). Sie hat keinen Einfluss auf die Bewegung des Wagens, wohl aber auf die des Pferds: Soll das Pferd nach rechts beschleunigen, muss der Asphalt auf die Hufe eine Kraft $F_P^{(A)}$ nach rechts ausüben, die betragsmäßig grö-

ßer ist als $F_P^{(W)}$. Da die Reaktionskraft zu $F_W^{(P)}$ auf das Pferd ausgeübt wird, hat sie keinen Einfluss auf die Bewegung des Wagens. Darin liegt der Denkfehler des Pferds.

Plausibilitätsprüfung: Alle auf den Wagen wirkenden Kräfte tragen einen unteren Index W und alle auf das Pferd wirkenden einen unteren Index P. Weder auf den Wagen noch auf das Pferd wirkt daher ein Aktions-Reaktions-Paar.

Weitergedacht: Dieses Beispiel zeigt, wie wichtig eine Skizze für die Lösung von Aufgaben aus der Mechanik sein kann. Hätte das Pferd sich eine solche gezeichnet, hätte es gesehen, dass es nur stark gegen den Asphalt zu drücken braucht, um vorwärtszukommen.

3.7 Kräfte bei der Kreisbewegung

Wie wir bereits in Kapitel 2 gesehen haben, können Beschleunigungen nicht nur in Bewegungsrichtung, sondern auch senkrecht dazu wirken. Ein Beispiel dafür ist die gleichförmige Kreisbewegung, bei der der Beschleunigungsvektor zu jedem Zeitpunkt senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht und in Richtung des Kreismittelpunkts zeigt (siehe Gleichung 2.39). In Beispiel 2.26 hatten wir die Beschleunigung und die Umlaufdauer eines Satelliten in der Nähe der Erdoberfläche berechnet. Betrachten wir nun noch einmal einen solchen Satelliten bei seiner Umlaufbahn in Erdnähe (Abbildung 3.23) und analysieren die auf ihn wirkenden Kräfte, die diese Beschleunigung hervorufen mithilfe der Newton'schen Axiome.

In einer Höhe von 200 km ist die auf den Satelliten wirkende Gravitationskraft nur geringfügig kleiner als auf der Erdoberfläche. Weshalb fällt dann der Satellit nicht auf die Erde herunter? Tatsächlich „fällt“ er durchaus; er kommt der Erdoberfläche dabei nur deshalb nicht näher, weil sie gekrümmt ist. Würde der Satellit nicht zur Erde hin beschleunigt, würde er sich nach dem ersten Newton'schen Axiom in einem Zeitraum t vom Punkt P_1 geradlinig zum Punkt P_2 bewegen. Stattdessen gelangt er aufgrund der Gravitationskraft zum Punkt P'_2 auf der Erdumlaufbahn. In gewissem Sinn „fällt“ der Satellit daher um die in Abbildung 3.23 gezeigte Strecke h . Für einen kleinen Zeitraum t liegen P_2 und P'_2 nahezu auf derselben radialen Geraden. In diesem Fall ergibt sich h aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten vt , r und $r + h$. Da $r + h$ die Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks ist, folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$(r + h)^2 = (vt)^2 + r^2,$$

$$r^2 + 2hr + h^2 = v^2 t^2 + r^2$$

bzw.

$$h(2r + h) = v^2 t^2.$$

Für sehr kurze Zeiten ist h klein gegen r und kann somit gegenüber $2r$ vernachlässigt werden. Damit ist

$$2rh \approx v^2 t^2$$

oder

$$h \approx \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{r} \right) t^2.$$

Ein Vergleich mit der Formel $h = \frac{1}{2} at^2$ für die gleichförmig beschleunigte Bewegung zeigt, dass die Beschleunigung des Satelliten

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

beträgt. Dies ist der in Kapitel 2 hergeleitete Ausdruck für die Zentripetalbeschleunigung. Abbildung 3.23 zeigt, dass die Beschleunigung zur Mitte der Kreisbahn hin gerichtet ist, sodass

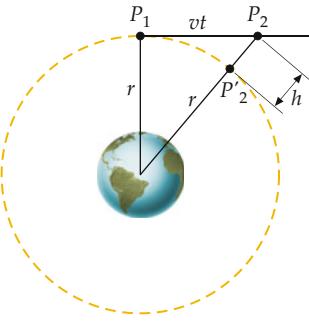


Abbildung 3.23 Ein Satellit bewegt sich mit dem Geschwindigkeitsbetrag v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um die Erde. Würde der Satellit nicht auf die Erde zu bewegen werden, würde er sich geradlinig vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 bewegen. Da er beschleunigt wird, fällt er stattdessen die Strecke h auf die Erde zu. Für einen hinreichend kleinen Zeitraum t ist die Beschleunigung im Wesentlichen konstant, sodass $h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(v^2/r)t^2$ ist.

die Beschleunigung dem Radialvektor entgegen gerichtet ist, wenn die radiale Richtung vom Kreismittelpunkt nach außen zeigt. (Weist die positive Richtung in einigen der folgenden Aufgaben nach innen, kehrt sich das Vorzeichen demzufolge um.) Durch Anwenden des zweiten Newton'schen Axioms entlang der Beschleunigungsrichtung ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Betrag der Gesamtkraft, die die Beschleunigung verursacht, und dem Beschleunigungsbeitrag zu

$$\mathbf{F}_{ZP} = -m \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}.$$

Da die auf einen Körper wirkende Gesamtkraft stets dieselbe Richtung wie seine Beschleunigung hat, weist die Gesamtkraft auf einen Körper, der sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v auf einem Kreis bewegt, ebenfalls in Zentripetalrichtung (Abbildung 3.24a). Eine solche Gesamtkraft in Zentripetalrichtung heißt **Zentripetalkraft**. Sie ist keine neue Kraft oder eine neue Art von Kräften, sondern lediglich der Name für die Komponente der resultierenden Kraft, die senkrecht zur Kreisbewegung steht und zum Mittelpunkt weist. Sie kann durch einen Faden oder durch eine andere Kontaktkraft wie etwa eine Normalkraft oder eine Reibungskraft hervorgerufen werden. Genauso gut kann es sich aber um eine Fernwirkungskraft wie etwa die Gravitationskraft oder um eine Kombination von Kontakt- und Fernwirkungskräften handeln. In allen Fällen ist sie stets nach innen – zur Mitte der Krümmung des Wegs – gerichtet.

Abbildung 3.24 zeigt eine Kugel, die am Ende eines Fadens aufgehängt ist, dessen anderes Ende an einem festen Halter angebracht ist. Die Kugel bewegt sich gleichförmig mit dem konstanten Geschwindigkeitsbetrag v auf einem horizontalen Kreis mit dem Radius r . Aus der Zugkraft des Fadens und der Gravitationskraft resultiert in der Kreisebene eine Beschleunigung der Kugel vom Betrag v^2/r .

Vorgehensweise: Aufgabenstellungen mit krummliniger Bewegung

Beachten Sie, dass die Zentripetalkraft nicht extra ins Kräftediagramm einzulegen ist. Stattdessen muss die jeweilige Kraft eingetragen werden, die sie verursacht, also die Zugkraft, die Normalkraft oder die Gravitationskraft usw.

1. Konstruieren Sie ein Kräftediagramm des Körpers. Zeichnen Sie auch Kordinatenachsen ein. Legen Sie eine Koordinatenachse in tangentiale Richtung und die andere in radiale Richtung.
2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom in Komponentenschreibweise $\sum F_{ZP} = m a_{ZP}$ und $\sum F_t = m a_t$ an.
3. Setzen Sie $a_{ZP} = -v^2/r$ und $a_t = dv/dt$, wobei v der Geschwindigkeitsbetrag ist.
4. Wenn sich der Körper mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v auf einem Kreis mit dem Radius r bewegt, können Sie $v = 2\pi r/T$ verwenden, wobei T die Zeit für eine Umdrehung ist.

Plausibilitätsprüfung: Überzeugen Sie sich, dass in Ihren Ergebnissen die Richtung der Zentripetalbeschleunigung immer zum Krümmungsmittelpunkt weist und senkrecht zur Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist.

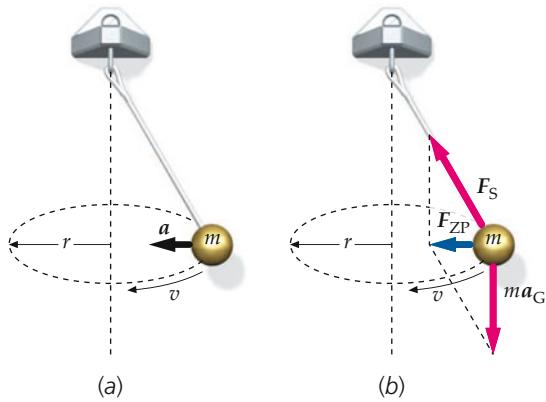


Abbildung 3.24 Eine Kugel, die an einem Faden aufgehängt ist, bewegt sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf einem horizontalen Kreis. a) Der Beschleunigungsvektor weist in Zentripetalrichtung (zur Mitte des kreisförmigen Wegs hin). Die Beschleunigung in Zentripetalrichtung wird Zentripetalbeschleunigung genannt. b) Auf die Kugel wirken zwei Kräfte: die Zugkraft des Fadens und die Gravitationskraft. Diese beiden Kräfte addieren sich so, dass die Gesamtkraft in Zentripetalrichtung weist. Eine solche Gesamtkraft in Zentripetalrichtung heißt Zentripetalkraft.

Die Zentripetalkraft ist eine Bezeichnung für die zum Krümmungsmittelpunkt gerichtete Komponente der Gesamtkraft – also keine eigenständige Kraft, die zusätzlich wirkt. Somit ist die Zentripetalkraft ebenso wie die Gesamtkraft nicht extra ins Kräftediagramm einzulegen.

Die Beispiele 3.10 bis 3.12 veranschaulichen das Vorgehen bei Aufgabenstellungen, bei denen sich Körper auf Kreisbahnen oder als Kreisbahnen annäherbaren krummlinigen Bahnen be-

wegen. Wie bereits in Kapitel 2 erläutert, kann bei einer beliebigen Bewegung entlang einer gekrümmten Bahn zusätzlich eine Tangentialbeschleunigung in Bewegungsrichtung auftreten, deren verursachende Kraft beim Zeichnen des Kräftediagramms ebenfalls berücksichtigt werden muss.

Beispiel 3.10: Der kreisende Wassereimer

Stellen Sie sich vor, Sie schwingen einen Wassereimer, der Wasser mit der Masse m enthält, auf einem vertikalen Kreis mit dem Radius r (Abbildung 3.25). Die Geschwindigkeit des Eimers im höchsten Punkt sei v_0 . a) Ermitteln Sie die Kraft $F_W^{(E)}$, die der Eimer am Scheitelpunkt des Kreises auf das Wasser ausübt. b) Welche Mindestgeschwindigkeit v_0 muss der Eimer haben, damit das Wasser im Eimer bleibt? c) Welche Kraft übt der Eimer am niedrigsten Punkt des Kreises auf das Wasser aus, wenn er dort die Geschwindigkeit v_u besitzt?

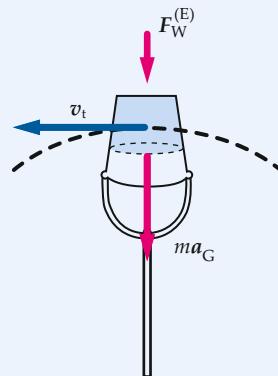


Abbildung 3.25 Schematische Darstellung des Wassereimers.

Problembeschreibung: Wenn der Eimer am höchsten Punkt der Kreisbahn ist, wirken sowohl die Gravitationskraft als auch die Kontaktkraft des Eimers auf das Wasser in Zentripetalrichtung nach unten. Am tiefsten Punkt der Kreisbahn muss die Kontaktkraft des Eimers auf das Wasser größer als die auf das Wasser wirkende Gravitationskraft sein, damit sich eine nach oben gerichtete Gesamtkraft in Zentripetalrichtung ergibt. Wir wenden das zweite Newton'sche Axiom an, um an diesen Punkten die Kraft des Eimers auf das Wasser zu ermitteln. Da sich das Wasser auf einer Kreisbahn bewegt, besitzt es stets eine resultierende Beschleunigungskomponente v^2/r , die zur Mitte der Kreisbahn gerichtet ist.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie je ein Kräftebild für das Wasser am höchsten und am niedrigsten Punkt der Kreisbahn (Abbildung 3.26). Die $+r$ -Achse soll dabei jeweils in Richtung des Kreismittelpunkts zeigen.

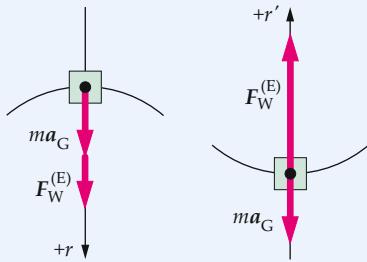


Abbildung 3.26 Kräftebild am höchsten und am niedrigsten Punkt der Kreisbahn.

2. Wenden Sie $\sum F_{ZP} = m a_{ZP}$ auf das Wasser an, wenn es den Scheitel des Kreises mit der Geschwindigkeit v_o durchläuft. Stellen Sie die Gleichung nach der Kraft $F_W^{(E)}$ um, die der Eimer auf das Wasser ausübt. Beachten Sie beim Vorzeichen, dass die radiale Richtung hier nach innen zeigt:

$$\begin{aligned}\sum F_r &= m a_r \\ F_W^{(E)} + m g &= m \frac{v_o^2}{r} \Rightarrow F_W^{(E)} = m \left(\frac{v_o^2}{r} - g \right)\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Der Eimer kann auf das Wasser drücken, aber nicht an ihm ziehen. Die kleinste Kraft, die er ausüben kann, ist

null. Setzen Sie $F_W^{(E)} = 0$ und ermitteln Sie die Geschwindigkeit, die der Eimer mindestens haben muss, damit das Wasser darin bleibt:

$$0 = m \left(\frac{v_{o,\min}^2}{r} - g \right) \Rightarrow v_{o,\min} = \boxed{\sqrt{rg}}$$

Teilaufgabe c

Wenden Sie $\sum F_r = m a_r$ auf das Wasser an, wenn es den tiefsten Punkt der Kreisbahn mit v_u durchläuft. Stellen Sie die Gleichung nach der Kraft $F_W^{(E)}$ um:

$$\begin{aligned}\sum F_r &= m a_r \\ F_W^{(E)} - m g &= m \frac{v_u^2}{r} \Rightarrow F_W^{(E)} = \boxed{m \left(\frac{v_u^2}{r} + g \right)}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn am tiefsten Punkt $v = 0$ ist, ist $F_W^{(E)} = m g$, wie es sein sollte.

Weitergedacht: Ist Ihnen aufgefallen, dass für die Zentripetalkraft kein Vektor im Kräftebild eingezeichnet ist? Die Zentripetalkraft ist keine Kraft, die durch irgend einen Gegenstand ausgeübt wird, sondern lediglich ein anderer Name für die Komponente der Gesamtkraft in Zentripetalrichtung.

Übung 3.6: Schätzen Sie a) die Mindestgeschwindigkeit am höchsten Punkt des Kreises und b) die maximale Umlaufdauer des Eimers, bei denen man nicht nass wird, wenn man einen Wassereimer an einem 1 m langen Seil mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag in einem vertikalen Kreis schwingt. □

Beispiel 3.11: Der schwingende Affe

Ein Affe, der auf einem hohen Baum sitzt, erfassst ein 30 m langes Seil, das in einer Entfernung von 30 m an einem anderen Baum befestigt ist. Sobald der Affe den Ast, auf dem er ursprünglich saß, loslässt, beginnt er an dem Seil zu schwingen. Wie schnell ändert sich sein Geschwindigkeitsbetrag, wenn er einen Winkel von 25° gegen die Senkrechte erreicht hat? Der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen.

Problembeschreibung: Modellieren Sie die Situation als Seil mit einer vernachlässigbaren Masse, dessen eines Ende an einem Baum befestigt ist und an dessen anderem

Ende ein Teilchen der Masse m hängt. Wenden Sie darauf das zweite Newton'sche Axiom an. Die Änderungsrate des Geschwindigkeitsbetrags ist die Tangentialbeschleunigung, die die gesuchte Größe ist.

Lösung: 1. Konstruieren Sie ein Kräftediagramm des Teilchens (Abbildung 3.27). Die $+r$ -Richtung soll zum Mittelpunkt der Bahn zeigen und die tangentiale $+t$ -Richtung in Richtung der Geschwindigkeit.

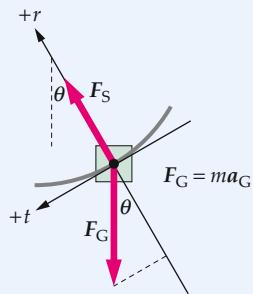


Abbildung 3.27 Kräftediagramm des Affen

2. Wenden Sie $\sum F_t = m a_t$ an und lesen Sie die Kraftkomponenten aus dem Kräftediagramm ab:

$$\begin{aligned}\sum F_t &= m a_t \\ F_{S,t} + F_{G,t} &= m a_t \\ 0 + m g \sin \theta &= m a_t\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie hieraus a_t :

$$a_t = g \sin \theta = (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \sin 25^\circ = \boxed{4,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Plausibilitätsprüfung: Da die Geschwindigkeit beim Schwingen nach unten zunimmt, sollte die Änderungsrate des Geschwindigkeitsbetrags positiv sein. Außerdem sollte sie nicht höher als $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ sein. Das Ergebnis entspricht diesen Erwartungen.

Übung 3.7: Wie hoch ist die Änderungsrate des Geschwindigkeitsbetrags in dem Moment, in dem das Seil vertikal ist und der Affe durch den tiefsten Punkt schwingt? ◀

Beispiel 3.12: Tetherball

ZUR ÜBUNG

Tetherball ist ein in Amerika verbreitetes Spiel, bei dem ein an einem Seil an der Decke befestigter Ball so geschlagen werden muss, dass er sich um eine vertikal von der Decke abstehende, in der Mitte befindliche Stange wickelt. Ein solcher Tetherball mit der Masse m hängt an einem Seil der Länge l und bewegt sich wie gezeigt mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v auf einer horizontalen Kreisbahn mit dem Radius r . Der Winkel zwischen dem Seil und der Vertikalen ist θ . Ermitteln Sie a) die Richtung der Beschleunigung, b) die Zugkraft des Seils und c) die Geschwindigkeit des Balls.

Problembeschreibung: An dem Ball greifen zwei Kräfte an: die Gravitationskraft und die Zugkraft im Seil (Abbildung 3.28). Die Vektorsumme der beiden Kräfte zeigt in Richtung des Beschleunigungsvektors.

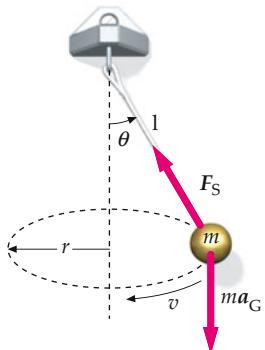


Abbildung 3.28 Schematische Darstellung des Aufbaus.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

Der Ball bewegt sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf einem horizontalen Kreis. Die Beschleunigung wirkt demnach in Zentripetalrichtung.

Teilaufgabe b

- Zeichnen Sie ein Kräftebild für den Ball (Abbildung 3.29). Wählen Sie die Beschleunigungsrichtung des Balls (die zur Mitte der Kreisbahn weist) als $+x$ -Richtung.
- Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf den Ball an und stellen Sie die Gleichung nach der Zugkraft $|F_S|$ um.

Teilaufgabe c

- Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf den Ball an.
- Ersetzen Sie $|F_S|$ durch $m g / \cos \theta$ und stellen Sie die Gleichung nach v um.

Ergebnisse der Lösungsschritte

Teilaufgabe a

Die Beschleunigung wirkt horizontal und weist vom Ball zum Mittelpunkt des Kreises, auf dem sich der Ball bewegt.

Teilaufgabe b

1.

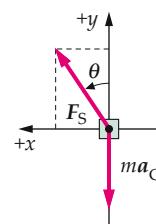


Abbildung 3.29 Kräftebild des Balls.

2.

$$\sum F_{i,y} = m a_y \Rightarrow |F_S| \cos \theta - m g = 0$$

und demnach

$$|F_S| = \frac{m g}{\cos \theta}$$

Teilaufgabe c

1.

$$\sum F_{i,x} = m a_x \Rightarrow |F_S| \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

2.

$$\frac{m g}{\cos \theta} \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow g \tan \theta = \frac{v^2}{r}$$

und somit

$$v = \sqrt{r g \tan \theta}$$

Plausibilitätsprüfung: Für $\theta \rightarrow 90^\circ$ gehen $\cos \theta \rightarrow 0$ und $\tan \theta \rightarrow \infty$. Damit gehen die Ausdrücke für $|F_S|$ und v in Teilaufgabe b und c für $\theta \rightarrow 90^\circ$ beide gegen unendlich. Wer schon einmal Tetherball gespielt hat, wird das erwarten: Schon um den Ball in die Nähe von 90° zu bringen, muss dieser sehr schnell kreisen.

Kommentar: Ein Körper, der an einem Faden hängt und sich auf einem horizontalen Kreis bewegt, sodass der Faden einen Winkel θ zur Senkrechten bildet, wird **Kegelpendel** oder **konisches Pendel** genannt.

Nicht überhöhte und überhöhte Kurven

Wenn ein Auto auf einer horizontalen Straße durch eine Kurve fährt, röhren sowohl die Kraftkomponente in Zentripetalrichtung als auch die in Tangentialrichtung (Vorwärtsrichtung) von der Haftreibungskraft her, die die Straße auf die Reifen ausübt. Wenn das Auto mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag fährt, ist die Komponente der Reibungskraft in Fahrtrichtung mit den beiden entgegen der Fahrtrichtung wirkenden Kräften des Luftwiderstands und der Rollreibung im Gleichgewicht (siehe Kapitel 4). Wenn sowohl die Widerstandskraft als auch die Rollreibung vernachlässigbar sind und das Auto mit dem konstanten Geschwindigkeitsbetrag v fährt, bleibt die nach vorn gerichtete Komponente der Haftreibungskraft null.



Während das Auto durch die Kurve fährt, wird der Reifen durch die von der Straße auf ihn ausgeübte Reibungskraft verformt. (© Mit freundlicher Genehmigung von Dirk Weinbörner.)



Im Jahr 1993 tauchte eine Sonde mit Instrumenten tief in die Atmosphäre des Jupiterplaneten Io ein und erreichte schließlich die Jupiteroberfläche. In dieser großen Zentrifuge der Sandia National Laboratories wurde die komplett montierte Sonde unter einer Beschleunigung von 200 g getestet. (© Sandia National Laboratory.)

Ist eine Straßenkurve nicht horizontal, sondern nach innen geneigt (man sagt dazu **überhöht**), besitzt die Normalkraft der Straße eine Komponente in Zentripetalrichtung. In der Regel wird der **Überhöhungswinkel** so gewählt, dass ein Auto bei einer gegebenen Geschwindigkeit überhaupt keine Reibung benötigt, um durch die Kurve zu fahren.

Beispiel 3.13 veranschaulicht das Zusammenspiel von Kurvenüberhöhung und maximaler Geschwindigkeit, mit der ein Auto durch eine Kurve fahren kann.

Beispiel 3.13: Überhöhte Kurven

Eine Kurve mit einem Radius von $30,0\text{ m}$ besitzt einen Überhöhungswinkel θ . Das heißt, die Normale auf der Straße bildet mit der Senkrechten einen Winkel von $30,0^\circ$. Wie groß muss θ sein, damit ein Auto mit $40,0\text{ km/h}$ durch die Kurve fahren kann, selbst wenn darauf Glatteis herrscht und die Straße daher im Wesentlichen reibungsfrei ist?

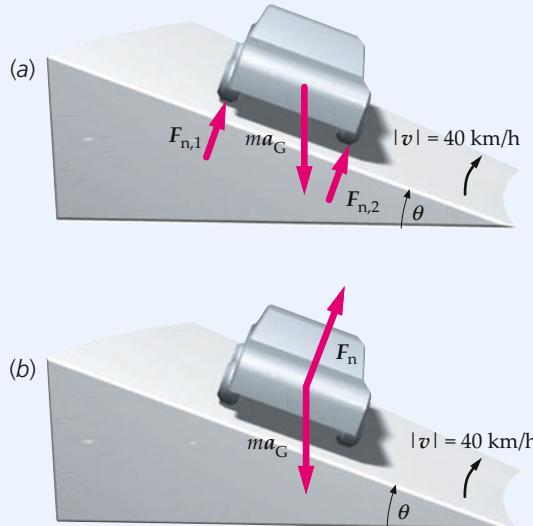


Abbildung 3.30 Schematische Darstellung des Autos in der überhöhten Kurve und die zugehörigen Kraftvektoren.

Problembeschreibung: Wenn keine Reibung wirkt, greifen nur zwei Kräfte an dem Auto an: die Gravitationskraft und die Normalkraft F_n (Abbildung 3.30). Da die Kurve überhöht ist, hat die Normalkraft eine horizontale Komponente, die eine Zentripetalbeschleunigung bewirkt. Die Vektorsumme beider Kräfte zeigt in diese Beschleunigungsrichtung. Wir können das zweite Newton'sche Axiom anwenden und anschließend nach θ umstellen.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein Kräfediagramm für das Auto (Abbildung 3.31).

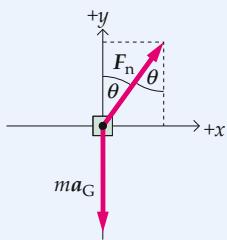


Abbildung 3.31 Kräftediagramm des Autos.

2. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf das Auto an:

$$\sum F_{i,y} = m a_y$$

$$|F_n| \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow |F_n| \cos \theta = mg$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf das Auto an:

$$\sum F_{i,x} = m a_x \Rightarrow |F_n| \sin \theta = m \frac{v^2}{r}$$

4. Dividieren Sie das Ergebnis aus Schritt 3 durch das aus Schritt 2 und stellen Sie die Gleichung nach θ um:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{m v^2}{r m g} \Rightarrow \tan \theta = \frac{v^2}{r g}$$

$$\theta = \text{atan} \frac{(40,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})^2}{(30,0 \text{ m}) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = \boxed{22,8^\circ}$$

Plausibilitätsprüfung: Es ergibt sich ein Überhöhungswinkel von $22,8^\circ$. Dies ist einleuchtend, da 30,0 m für eine Autobahnkurve ein sehr kleiner Krümmungsradius ist. Zum Vergleich: Die Kurven auf dem Daytona International Speedway haben einen Radius von 300 m und einen Überhöhungswinkel von 31° .

Weitergedacht: Der Überhöhungswinkel θ hängt von v und r , jedoch nicht von der Masse m ab. Bei höherem Geschwindigkeitsbetrag v steigt der Winkel θ , bei größerem Radius r wird er dagegen kleiner. Wenn Überhöhungswinkel, Geschwindigkeitsbetrag und Radius so gewählt werden, dass $\tan \theta = v^2/r g$ ist, fährt das Auto problemlos durch die Kurve, ohne zu versuchen, nach innen oder außen auszubrechen. Fährt es schneller als $\sqrt{r g \tan \theta}$, muss die Straße eine Reibungskraft ausüben, die parallel zur Straßenoberfläche nach innen und unten wirkt, damit das Auto auf der Straße bleibt. Diese Kraft besitzt eine horizontale Komponente, die die zusätzliche Zentripetalkraft liefert, welche verhindert, dass r zunimmt. Fährt das Auto dagegen langsamer als $\sqrt{r g \tan \theta}$, muss die Straße eine Reibungskraft ausüben, die parallel zur Straßenoberfläche nach außen und oben wirkt, damit das Auto auf der Straße bleibt.

Übung 3.8: Wie groß ist die Beschleunigungskomponente normal zur Straßenoberfläche? ◀ ■

🔍 Im Kontext: Achterbahnen auf Geschwindigkeitsjagd

Seit der Eröffnung der ersten Achterbahn „Promenades Aériennes“ (übersetzt etwa „Luftweg“) im Jahr 1817 in Paris üben diese Fahrzeuge auf viele Menschen eine magische Faszination aus.¹ Noch vor Kurzem mussten die Konstrukteure eine wesentliche Einschränkung beachten: Die Fahrt musste immer mit einem steilen Anstieg beginnen.

Es war Anton Schwartzkopf, ein deutscher Architekt von Vergnügungsparks, der sich in den 1970er-Jahren eine Anregung beim Start von Flugzeugen von Flugzeugträgern holte. Im Jahr 1976 wurde die Achterbahn „Shuttle Loop“ eröffnet. In der Nähe der Achterbahn wurde ein Gewicht mit einer Masse von mehreren Tonnen an die Spitze eines Turms hochgezogen. Ein Ende eines Kabels wurde an dem Gewicht befestigt, das andere an dem Achterbahnwagen eingehakt, um ihn zu ziehen. Dann wurde das Gewicht fallen gelassen und zog den daran befestigten Wagen nach oben. Der Wagen wurde in weniger als 3 s auf fast 100 km/h beschleunigt.

Gleichzeitig hatte Schwartzkopf eine weitere Idee für ein Katapultstartverfahren. Ein Schwungrad mit einer Masse von 5 t wurde in schnelle Umdrehung versetzt. Ein Kabel verband die Wagen und das Schwungrad. Auch hier wurde der Wagenzug – in dem bis zu 28 Passagiere saßen – in weniger als 3 s auf fast 100 km/h beschleunigt. Beide Verfahren waren Wegbereiter auf dem Gebiet der Katapultstarts von Achterbahnen.²

Zwei neue Achterbahnstartverfahren ermöglichen inzwischen noch höhere Geschwindigkeiten. Die Intamin AG hat ein *hydraulisches* (flüssigkeitgetriebenes) System entwickelt, um das Kabel zu ziehen. Allein der Wagen für den „Top Thrill Dragster“ hat eine Masse von 5 t und bietet Platz für 18 Passagiere. Der Wagen fährt über Sensoren, wo er gewogen wird. Ein Computer berechnet, wie schnell das Kabel angezogen werden muss, damit der Wagen mit den darin sitzenden Passagieren den 128 m hohen ersten Gipfel erreicht. Anschließend stellen die Flüssigkeitsmotoren rasch eine Leistung von 7500 Watt bereit, um das Kabel mit bis zu 500 min^{-1} aufzuwickeln und den Wagen innerhalb von 4 s auf fast 200 km/h zu beschleunigen.³

Stan Checketts erfand die erste *pneumatische* (druckluftgetriebene) Achterbahn. Die „Thrust Air 2000™“ wird durch einen einzigen starken Druckluftstoß angetrieben. Der acht Passagiere fassende Wagen fährt über Sensoren und wird gewogen. Daraufhin laufen vier Kompressoren an, um Luft in einen Speicherbehälter am Fuß eines Turms zu pumpen. Diese Druckluft wird je nach dem Gewicht des Wagens in einen Abschussbehälter dosiert. Schließlich wird die Luft durch ein Ventil oben am Turm schnell entspannt, wobei sie auf einen Kolben drückt, der das Katapultrollensystem antreibt. Der vollbesetzte Wagen wird in 1,8 s auf fast 130 km/h beschleunigt. Um diese Beschleunigung zu erreichen, ist eine Schubkraft von 178 kN erforderlich. Zum Vergleich: Ein einziges Strahltriebwerk des Düsenjägers F-15 hat einen Nennschub von 128 kN.⁴ Inzwischen werden Achterbahnen also mit einer stärkeren Schubkraft als Düsenjäger angetrieben.



Die erste pneumatische Achterbahn der Welt, die „Hypersonic XLC“ im Vergnügungspark King's Dominion von Paramount in Virginia, beschleunigt in 1,8 s von 0 auf 130 km/h. (Mit freundlicher Genehmigung von King's Dominion Amusement Park.)

1. Cartmell, R., *The Incredible Scream Machine: A History of the Roller Coaster*. Bowling Green State University Popular Press, Bowling Green Ohio, 1987.
2. „The Tidal wave“, <http://www.greatamericanparks.com/tidalwave.html>. Marriott Great America Parks (Stand: März 2009). Cartmell a.a.O.
3. Hitchcox, A. L., „Want Thrills? Go with Hydraulics“, *Hydraulics and Pneumatics*, Juli 2005.
4. Goldman, L., „Newtonian Nightmare“, *Forbes*, 23. 7. 2001, Bd. 168, Ausgabe 2: „The F-100 Engine“, <http://www.pw.ute.com/vgn-ext-template/v/index.jsp?vnextrefresh=1&vgnextoid=227f07b06f5eb010VgnVCM100000881000aRCRD>. Pratt & Whitney (Stand: März 2009).

Zusammenfassung

1. Die Newton'schen Axiome sind grundlegende Naturgesetze, die die Grundlage für unser Verständnis der Mechanik bilden.
2. Die Masse ist eine *innere* Eigenschaft eines Körpers.
3. Die Kraft ist eine wichtige *abgeleitete* dynamische Größe.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Die Grundkräfte der Natur	Alle in der Natur beobachtbaren Kräfte lassen sich durch vier fundamentale Wechselwirkungen erklären: 1. die gravitative Wechselwirkung, 2. die elektromagnetische Wechselwirkung, 3. die schwache Wechselwirkung (inzwischen zusammen mit der elektromagnetischen Wechselwirkung als elektroschwache Wechselwirkung betrachtet), 4. die starke Wechselwirkung (auch <i>hadronische</i> Wechselwirkung genannt).
2. Newton'sche Axiome	<p>Erstes Axiom Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt. (Bezugssysteme, auf die diese Aussage zutrifft, werden Inertialsysteme genannt.)</p> <p>Zweites Axiom Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn wirkenden Gesamtkraft, wobei die Proportionalitätskonstante der Kehrwert der Masse ist. Somit gilt</p> $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i. \quad (3.2)$
Drittes Axiom	Wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, ist die Kraft $\mathbf{F}_A^{(B)}$, die der Körper B auf den Körper A ausübt, gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet der Kraft $\mathbf{F}_B^{(A)}$, die der Körper A auf den Körper B ausübt. Somit gilt
	$\mathbf{F}_A^{(B)} = -\mathbf{F}_B^{(A)}. \quad (3.7)$
3. Inertialsysteme	Die Newton'schen Axiome gelten nur in Inertialsystemen. Jedes Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem. Jedes Bezugssystem, das gegenüber einem Inertialsystem beschleunigt wird, ist selbst kein Inertialsystem. Die Erdoberfläche ist in guter Näherung ein Inertialsystem.
4. Kraft, Masse und Gewicht	<p>Kraft Die Kraft ist über die Beschleunigung definiert, die sie an einem gegebenen Körper bewirkt. Eine Kraft von 1 Newton (N) ist die Kraft, die einen Körper mit einer Masse von 1 kg mit 1 m/s^2 zu beschleunigen vermag.</p> <p>Masse Die Masse ist eine innere Eigenschaft jedes Körpers. Sie ist ein Maß für seinen Trägheitswiderstand gegenüber einer Beschleunigung. Die Masse eines Körpers hängt nicht von seinem Ort ab. Die Massen zweier Körper lassen sich vergleichen, indem man die gleiche Kraft auf zwei Körper ausübt und ihre jeweiligen Beschleunigungen misst. Das Verhältnis der beiden Massen steht im umgekehrten Verhältnis der erzeugten Beschleunigungen:</p> $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (3.4)$ <p>Gravitationskraft Die Gravitationskraft \mathbf{F}_G, die auf einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche wirkt, ist die Kraft, die die Gravitationsanziehung der Erde auf diesen Körper ausübt. Sie ist proportional zum Gravitationsfeld \mathbf{a}_G, das gleich der Fallbeschleunigung ist, wobei die Masse m des Körpers die Proportionalitätskonstante ist:</p> $\mathbf{F}_G = m\mathbf{a}_G. \quad (3.5)$ <p>Das Gewicht eines Körpers ist die Stärke der auf den Körper wirkenden Gravitationskraft.</p>

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
5. Krummlinige Bewegung	<p>Ein Teilchen, das sich entlang einer beliebigen Kurve bewegt, kann während eines sehr kurzen Zeitabschnitts so behandelt werden, als ob es sich auf einem Kreis bewegt. Sein Momentanbeschleunigungsvektor besitzt eine Komponente $a_{ZP} = -v^2/r$ zum Zentrum des Kreisabschnitts und eine Komponente $a_t = dv/dt$ tangential zur Kurve. Bewegt sich das Teilchen mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r, ist $a_t = 0$, wobei Geschwindigkeitsbetrag, Radius und Umlaufzeit T durch $2\pi r = vT$ verknüpft sind.</p>
Zentripetalkraft	<p>Die Zentripetalkraft</p> $\mathbf{F}_{ZP} = -m \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$ <p>ist eine Bezeichnung für die zum Krümmungsmittelpunkt gerichtete Komponente der Gesamtkraft, die auf ein Teilchen wirkt. Sie ist daher keine eigenständige Kraft, die zusätzlich wirkt, und wird somit nicht in KräfteDiagramme eingezeichnet.</p>

Antworten auf die Verständnisfragen

- 3.1 Nein, die Gesamtkraft ist keine reale Kraft. Sie ist die Vektorsumme der realen Kräfte.
- 3.2 Nein, es ist die Gesamtkraft, die die Beschleunigung der Masse hervorruft.
- 3.3 Nein, denn diese Kräfte wirken auf denselben Körper, nämlich auf den Block. Aktions-Reaktions-Kräftepaare des dritten Newton'schen Axioms wirken stets auf verschiedene Körper.
- 3.4 Nein, denn dies würde dem dritten Newton'schen Axiom widersprechen.

Lösungen der Übungen

- 3.1 1,5 kg
- 3.2 1,9 kN
- 3.3 Unter Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms (auf die y -Komponenten) lesen wir aus dem KräfteDiagramm (Abbildung 3.18) ab, dass $\sum F_{i,y} = ma_y$ und damit $|\mathbf{F}_n| - |\mathbf{F}_G| \cos \theta = 0$ ist. Dabei haben wir $a_y = 0$ verwendet. So mit ist $|\mathbf{F}_n| = |\mathbf{F}_G| \cos \theta$.
- 3.4 $a = 27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\theta = 70,5^\circ$
- 3.5 967 N
- 3.6 a) Es ergibt sich $v_{t,\min} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, b) $T = 2\pi r/v = 2 \text{ s}$
- 3.7 In diesem Moment nimmt die Geschwindigkeit nicht weiter zu, aber auch noch nicht ab. Damit ist die Änderungsrate des Geschwindigkeitsbetrags momentan null.
- 3.8 1,60 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Aufgaben

Bei allen Aufgaben sei die Fallbeschleunigung $|a_G| = g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

3.1 • Sie sitzen im Flugzeug auf einem Interkontinentalflug, haben die Reiseflughöhe erreicht und fliegen nun horizontal. Vor Ihnen steht der Kaffeebecher, den Ihnen die Stewardess gerade gebracht hat. Wirken Kräfte auf diesen Becher? Wenn ja, wie unterscheiden sie sich von den Kräften, die auf ihn wirken würden, wenn er zu Hause auf Ihrem Küchentisch stehen würde?

3.2 • Von einem Inertialsystem aus betrachtet bewegt sich ein Körper auf einer Kreisbahn. Welche der folgenden Aussagen trifft bzw. treffen zu: a) Auf den Körper wirkt eine von null verschiedene Gesamtkraft. b) Auf den Körper kann keine radial nach außen gerichtete Kraft wirken. c) Mindestens eine der auf den Körper wirkenden Kräfte muss direkt zum Mittelpunkt der Kreisbahn zeigen.

3.3 •• Auf einen Handball wirkt eine einzelne nicht verschwindende Kraft. Wissen Sie allein anhand dieser Aussage, in welche Richtung sich der Handball relativ zu einem Bezugssystem bewegt? Erläutern Sie Ihre Aussage.

3.4 •• Stellen Sie sich vor, Sie sitzen in einem Zug, der mit konstanter Geschwindigkeit relativ zur Erdoberfläche fährt. Einige Sitze vor Ihnen sitzt ein Freund, dem Sie einen Ball zuwerfen. Erläutern Sie anhand des zweiten Newton'schen Axioms, weshalb Sie aus Ihrer Beobachtung des fliegenden Balls nicht die Geschwindigkeit des Zugs relativ zur Erdoberfläche ermitteln können.

3.5 •• Ein 2,5 kg schwerer Körper hängt ruhig an einem Seil, das an der Decke befestigt ist. a) Zeichnen Sie ein Kräfediagramm des Körpers, benennen Sie die Reaktionskraft zu jeder eingezeichneten Kraft und sagen Sie, auf welchen Körper diese jeweils wirkt. b) Zeichnen Sie ein Kräfediagramm des Seils, benennen Sie die Reaktionskraft zu jeder eingezeichneten Kraft und sagen Sie, auf welchen Körper diese jeweils wirkt. Die Masse des Seils ist hier nicht zu vernachlässigen.

3.6 •• a) Welches der Kräfediagramme in Abbildung 3.32 stellt einen Körper dar, der eine reibungsfreie geneigte Ebene hinuntergleitet? b) Benennen Sie für das zutreffende Diagramm die Kräfte und geben Sie an, welche davon Kontaktkräfte und welche Fernwirkungskräfte sind. c) Benennen Sie für jede Kraft in dem zutreffenden Diagramm die Reaktionskraft, sagen Sie, auf welchen Körper sie wirkt und welche Richtung sie hat.

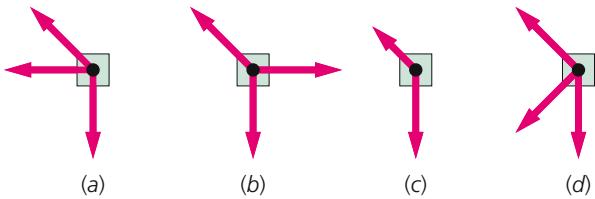


Abbildung 3.32 Zu Aufgabe 3.6.

3.7 •• Stellen Sie sich vor, Sie sitzen auf einem Rollstuhl am Schreibtisch. Die Reibungskräfte zwischen dem Sessel und dem Fußboden sollen vernachlässigbar sein. Dagegen sind die Reibungskräfte zwischen dem Tisch und dem Fußboden nicht vernachlässigbar. Um aufzustehen, drücken Sie horizontal gegen den Tisch, sodass der Stuhl nach hinten wegrollt. a) Zeichnen Sie ein Kräfediagramm der auf Sie wirkenden Kräfte, während Sie gegen den Tisch drücken, und benennen Sie exakt diejenige Kraft, die dafür verantwortlich ist, dass Sie beschleunigt werden. b) Welches ist die Reaktionskraft zu der Kraft, die zu Ihrer Beschleunigung führt? c) Zeichnen Sie das Kräfediagramm der auf den Schreibtisch wirkenden Kräfte und erläutern Sie, weshalb er nicht beschleunigt wird. Verletzt dies nicht das dritte Newton'sche Axiom? Erläutern Sie Ihre Aussage.

3.8 •• Ein Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeitsbetrag auf einer vertikalen Kreisbahn. Die Beträge welcher Größen sind dabei konstant: a) der Geschwindigkeit, b) der Beschleunigung, c) der Gesamtkraft, d) des scheinbaren Gewichts?

3.9 ••• Auf zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 mit $m_1 > m_2$, die auf einer ebenen, reibungsfreien Oberfläche liegen, werde während eines festen Zeitintervalls Δt dieselbe horizontale Gesamtkraft $|F|$ ausgeübt. a) In welchem Verhältnis stehen ihre Beschleunigungen während dieses Zeitintervalls, ausgedrückt durch $|F|, m_1$ und m_2 , wenn beide Körper anfangs ruhen? b) In welchem Verhältnis stehen ihre Geschwindigkeitsbeträge $|v_1|$ und $|v_2|$ am Ende des Zeitintervalls? c) Wie weit entfernt sind die beiden Körper am Ende des Zeitintervalls? Welcher ist dem anderen voraus?

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

3.10 •• Ein Rennwagen, über den der Fahrer die Gewalt verloren hat, kann auf 90 km/h abgebremst werden, bevor er frontal auf eine Ziegelmauer auffährt. Zum Glück trägt der Fahrer einen Sicherheitsgurt. Schätzen Sie unter der Annahme sinnvoller Werte für die Masse des Fahrers und für den Bremsweg die (als

konstant angenommene) durchschnittliche Kraft, die der Sicherheitsgurt auf den Fahrer ausübt, einschließlich deren Richtung. Wirkungen der Reibungskräfte, die der Sitz auf den Fahrer ausübt, sind zu vernachlässigen.

Das erste und das zweite Newton'sche Axiom: Masse, Trägheit und Kraft

3.11 • Ein Körper besitzt eine Beschleunigung von $3,0 \text{ m/s}^2$, wobei nur eine Kraft mit dem Betrag $|F_0|$ auf ihn wirkt. a) Wie groß ist betragsmäßig seine Beschleunigung, wenn der Betrag der Kraft verdoppelt wird? b) Ein zweiter Körper erhält unter dem Einfluss einer einzelnen Kraft vom Betrag $|F_0|$ eine Beschleunigung mit einem Betrag von $9,0 \text{ m/s}^2$. Wie groß ist das Verhältnis der Masse des zweiten Körpers zu der des ersten Körpers? c) Wie groß ist der Betrag der Beschleunigung, die die einzelne Kraft vom Betrag $|F_0|$ auf den Gesamtkörper erzeugt, der entsteht, wenn man beide Körper zusammenklebt?

3.12 • Auf einen Körper der Masse $1,5 \text{ kg}$ wirkt eine Gesamtkraft $(6,0 \text{ N})\hat{x} - (3,0 \text{ N})\hat{y}$. Berechnen Sie die Beschleunigung a .

3.13 •• Eine Kugel mit der Masse $1,80 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, die mit 500 m/s fliegt, trifft auf einen Baumstumpf und bohrt sich $6,00 \text{ cm}$ weit in ihn hinein, bevor sie zum Stillstand kommt. a) Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Beschleunigung der Kugel konstant ist, die Kraft (einschließlich der Richtung), die das Holz auf die Kugel ausübt. b) Auf die Kugel soll dieselbe Kraft wirken, und sie soll mit derselben Geschwindigkeit auftreffen, allerdings soll die Kugel nur die halbe Masse haben. Wie weit bohrt sie sich dann in das Holz?

Masse und Gewicht

3.14 • Auf dem Mond beträgt die Beschleunigung durch die Gravitation nur ein Sechstel der Erdbeschleunigung. Ein Astronaut, dessen Gewicht auf der Erde 600 N beträgt, reist zur Mondoberfläche. Dort wird seine Masse gemessen. Beträgt seine dort gemessene Masse a) 600 kg , b) 100 kg , c) $61,2 \text{ kg}$, d) $9,81 \text{ kg}$ oder e) 360 kg ?

Kräftediagramme: Statisches Gleichgewicht

3.15 •• Eine Kugel mit einem Gewicht von 100 N ist wie in Abbildung 3.33 abgebildet an mehreren Seilen aufgehängt. Welche Zugkräfte wirken in dem horizontalen Seil und in dem schrägen Seil?

3.16 •• Eine Verkehrsampel mit einer Masse von $35,0 \text{ kg}$ ist, wie in Abbildung 3.34 gezeigt, an zwei Drähten aufgehängt. a) Zeichnen Sie das Kräftediagramm und beantworten Sie anhand dessen qualitativ die folgende Frage: Ist die Zugkraft im Draht 2 größer als die im Draht 1? b) Überprüfen Sie Ihre Antwort unter Anwendung der Newton'schen Axiome und durch Berechnen der beiden Zugkräfte.

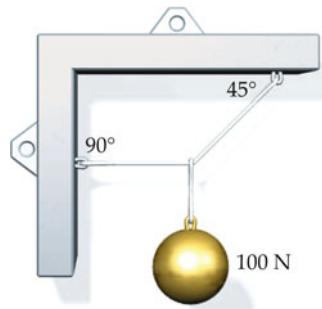


Abbildung 3.33 Zu Aufgabe 3.15.

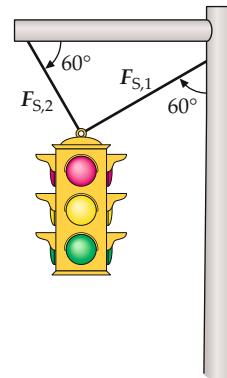


Abbildung 3.34 Zu Aufgabe 3.16.

3.17 •• In Abbildung 3.35a ist ein $0,500 \text{ kg}$ Gewicht in der Mitte eines $1,25 \text{ m}$ langen Seils aufgehängt. Die Enden des Seils sind an zwei Punkten im Abstand von $1,00 \text{ m}$ an der Decke befestigt. a) Welchen Winkel bildet das Seil mit der Decke? b) Wie groß ist die Zugkraft in dem Seil? c) Das $0,500 \text{ kg}$ Gewicht wird entfernt, und an dem Seil werden zwei $0,250 \text{ kg}$ Gewichte so befestigt, dass die Längen der drei Seilabschnitte gleich sind (Abbildung 3.35b). Wie groß ist die Zugkraft in jedem Seilabschnitt?

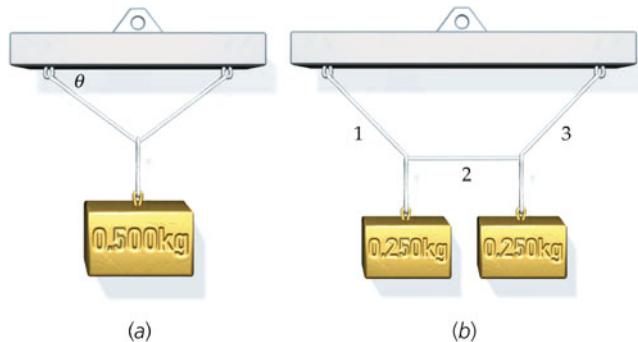


Abbildung 3.35 Zu Aufgabe 3.17.

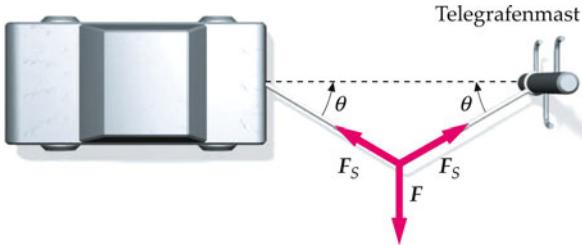


Abbildung 3.36 Zu Aufgabe 3.18.

3.18 •• Ihr Auto ist in einem Schlammloch stecken geblieben. Sie sind zwar allein, haben zum Glück aber ein Abschleppseil dabei. Ein Ende davon befestigen Sie am Auto und das andere an einem Telefonmast. Anschließend ziehen Sie das Seil wie in Abbildung 3.36 gezeigt zur Seite. a) Wie groß ist die Kraft, die das Seil auf das Auto ausübt, wenn der Winkel $\theta = 3,00^\circ$ ist und Sie mit einer Kraft von 400 N ziehen, ohne dass sich das Auto bewegt? b) Wie stark muss das Seil sein, wenn Sie 600 N brauchen, um das Auto bei $\theta = 4,00^\circ$ zu bewegen?

3.19 •• Ermitteln Sie für die Systeme aus den Abbildungen 3.37a, b und c, die im Gleichgewicht sind, die unbekannten Zugkräfte und Massen.

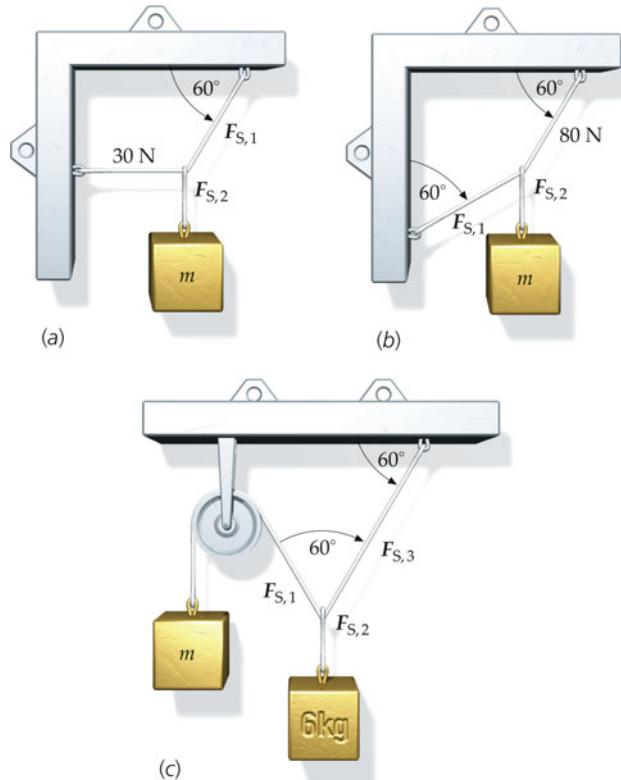


Abbildung 3.37 Zu Aufgabe 3.19.

Kräftediagramme: Geneigte Ebenen und Normalkräfte

3.20 • Die Körper in Abbildung 3.38 sind an Federwaagen befestigt, die in Newton geeicht sind. Geben Sie für jeden Fall den Messwert der Waage bzw. die Messwerte der Waagen an. Die Waagen selbst und die Seile werden als masselos angenommen.

3.21 •• Ein Block wird auf einer reibungsfreien Neigung durch ein Kabel gehalten (Abbildung 3.39). a) Wie groß sind die Zugkraft im Kabel und die von der Neigung ausgeübte Normalkraft, wenn $\theta = 60^\circ$ und $m = 50 \text{ kg}$ sind? b) Ermitteln Sie die Zugkraft als Funktion von θ und m und überprüfen Sie ihr Ergebnis für die Spezialfälle $\theta = 0^\circ$ und $\theta = 90^\circ$ auf Plausibilität.

3.22 •• Ein Block der Masse m gleitet auf einem reibungsfreien Boden und anschließend eine reibungsfreie Rampe hinauf (Abbildung 3.40). Der Winkel der Rampe sei θ und die Geschwindigkeit des Blocks, bevor er die Rampe hinaufgleitet, v_0 . Der Block gleitet bis zu einer bestimmten maximalen Höhe h über dem Boden hinauf, bevor er anhält. Leiten Sie einen Ausdruck für h in Abhängigkeit von v_0 und g her und zeigen Sie, dass h unabhängig von m und θ ist.

Kräftediagramme: Fahrstühle

3.23 • Ein 10,0 kg Block hängt an einer Schnur, die eine Nennzugkraft von 150 N aushalten soll, an der Decke eines

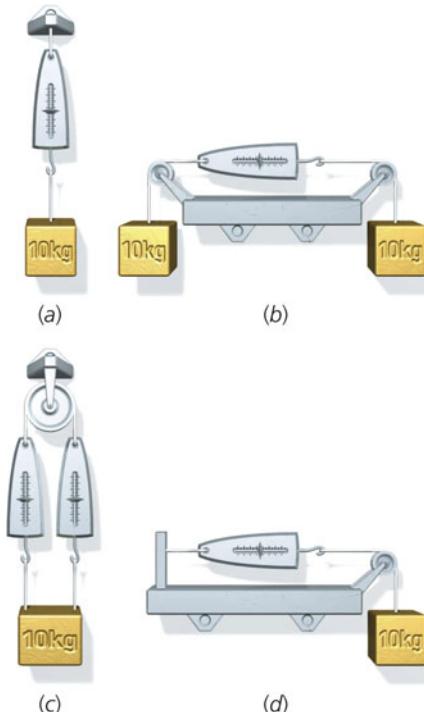


Abbildung 3.38 Zu Aufgabe 3.20.

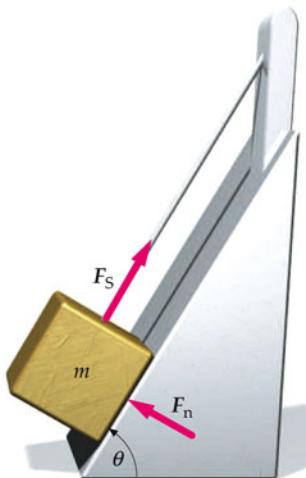


Abbildung 3.39 Zu Aufgabe 3.21.

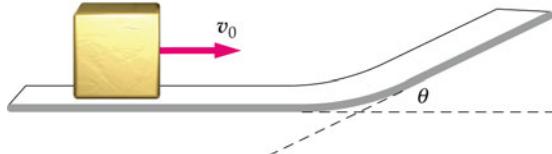


Abbildung 3.40 Zu Aufgabe 3.22.

Fahrstuhls. Kurz nachdem der Fahrstuhl zu steigen beginnt, reißt die Schnur. Wie hoch war die Beschleunigung des Fahrstuhls mindestens, als die Schnur gerissen ist?

Krummlinige und Kreisbewegung

3.24 • Ein Stein mit der Masse $m = 95\text{ g}$ wird am Ende eines 85 cm langen Fadens auf einem horizontalen Kreis herumgewirbelt. Eine vollständige Umdrehung des Steins dauert 1,2 s. Ermitteln Sie den Winkel, den der Faden mit der Horizontalen bildet.

3.25 • Der Krümmungsradius der Bahn im Scheitel des Loopings einer Achterbahn beträgt 12,0 m. An diesem Punkt übt der Sitz auf einen Mitfahrer mit der Masse m eine Kraft von $0,40\text{ m} \cdot g$ aus. Wie schnell fährt der Achterbahnwagen durch diesen höchsten Punkt?

3.26 •• Ein Kunstflugpilot mit einer Masse von 50 kg vollführt einen Sturzflug und zieht das Flugzeug kurz vor dem Boden auf einer vertikalen Kreisbahn in die Horizontale. Am tiefsten Punkt dieser Kreisbahn wird der Pilot mit $3,5\text{ g}$ nach oben beschleunigt. a) Vergleichen Sie den Betrag der von dem Flugzeugsitz auf den Piloten ausgeübten Kraft mit seinem Gewicht. b) Erläutern Sie anhand der Newton'schen Axiome, weshalb der Pilot kurz bewusstlos werden kann. Dabei sammelt sich gegenüber

dem Normalfall ein Überdruck an Blut in seinen unteren Gliedmaßen an. Wie würde ein Beobachter in einem Inertialsystem die Ursache für die Blutansammlung erklären?

3.27 •• Ein Mann wirbelt wie in Abbildung 3.41 gezeigt sein Kind auf einem Kreis mit einem Radius von 0,75 m herum. Das Kind hat eine Masse von 25 kg, und eine Umdrehung dauert 1,5 s. a) Ermitteln Sie den Betrag und die Richtung der Kraft, die der Mann auf das Kind ausübt. (Stellen Sie sich das Kind vereinfacht als ein punktförmiges Teilchen vor.) b) Welchen Betrag und welche Richtung hat die Kraft, die das Kind auf den Mann ausübt?



Abbildung 3.41 Zu Aufgabe 3.27.

3.28 •• Ein Automobilclub möchte auf einer örtlichen Rennbahn ein Rennen mit Autos mit einer Masse von 750 kg durchführen. Die Autos sollen mit 90 km/h durch mehrere Kurven mit einem Krümmungsradius von 160 m fahren. In welchem Winkel sollten die Kurven überhöht sein, damit die Kraft des Straßenbelags auf die Reifen parallel zur Normalkraft ist? (Hinweis: Was kann man aus dieser Bedingung für die Reibungskraft schließen?)

3.29 •• Ein Modellflugzeug mit einer Masse von 0,400 kg ist an einer horizontalen Schnur befestigt. Das Flugzeug soll auf einem horizontalen Kreis mit einem Radius von 5,70 m fliegen. (Das Gewicht ist dabei mit der nach oben gerichteten Auftriebskraft, die die Luft auf die Flügel ausübt, im Gleichgewicht.) Das Flugzeug legt in 4,00 s 1,20 Runden zurück. a) Gesucht ist der Geschwindigkeitsbetrag, mit dem das Flugzeug fliegen muss. b) Berechnen Sie die Kraft, die auf die Hand ausgeübt wird, die die Schnur hält. (Die Schnur kann als masselos angenommen werden.)

- 3.30 ••** Wie in Abbildung 3.42 gezeigt ist, wirken auf einen Körper im Gleichgewicht drei Kräfte. a) Ihre Beträge seien $|F_1|$, $|F_2|$ und $|F_3|$. Zeigen Sie, dass $|F_1|/\sin \theta_{2,3} = |F_2|/\sin \theta_{3,1} = |F_3|/\sin \theta_{1,2}$ gilt. b) Zeigen Sie, dass außerdem $|F_1|^2 = |F_2|^2 + |F_3|^2 + 2|F_2||F_3|\cos \theta_{2,3}$ gilt.

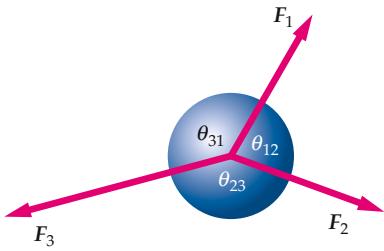


Abbildung 3.42 Zu Aufgabe 3.30.

- 3.31 •••** Eine kleine Perle mit einer Masse von 100 g (Abbildung 3.43) gleitet reibungsfrei auf einem halbkreisförmigen Draht mit einem Radius von 10 cm, der sich mit einer Drehzahl von 2,0 Umdrehungen pro Sekunde um die vertikale Achse dreht. Ermitteln Sie denjenigen Wert von θ , bei dem die Perle in Bezug auf den rotierenden Draht an der gleichen Stelle bleibt.

- 3.32 •••** Der Ortsvektor eines Teilchens mit der Masse $m = 0,80 \text{ kg}$ lautet als Funktion der Zeit

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} = (R \sin \omega t)\hat{\mathbf{x}} + (R \cos \omega t)\hat{\mathbf{y}},$$

wobei $R = 4,0 \text{ m}$ und $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$ ist. a) Zeigen Sie, dass der Weg des Teilchens eine Kreisbahn mit dem Radius R ist, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung der x - y -Ebene liegt. b) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und zeigen Sie,

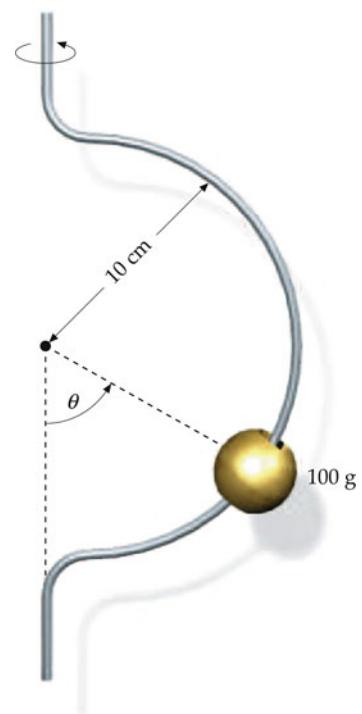


Abbildung 3.43 Zu Aufgabe 3.31.

dass $v_x/v_y = -y/x$ gilt. c) Berechnen Sie den Beschleunigungsvektor und zeigen Sie, dass er zum Koordinatenursprung hin gerichtet ist und den Betrag v^2/R besitzt. d) Ermitteln Sie Richtung und Betrag der Gesamtkraft, die auf das Teilchen wirkt.

Weitere Anwendungen der Newton'schen Axiome

4



Die Haftreibung, die die Straße auf die Räder ausübt, verhindert, dass das Auto in der Kurve radial nach außen wegrutscht. (© DaimlerChrysler AG.)

Wie funktioniert das Anti-blockiersystem (ABS)? (Siehe Beispiel 4.6.)

4.1 Reibung	112
4.2 Widerstandskräfte	124
4.3 Trägheits- oder Scheinkräfte	126
4.4 Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze	131
4.5 Das Gravitationsfeld	140
Zusammenfassung	149
Aufgaben	151

In diesem Kapitel wollen wir die in Kapitel 3 eingeführten Newton'schen Axiome auch auf Reibungskräfte und Planetenbewegungen anwenden. Es war ein großer Verdienst von Newton zu erkennen, dass die Gleichungen, die Bewegungen von Gegenständen auf der Erde beschreiben, auch für die Beschreibung der Planetenbewegungen und Vorgänge im Weltall allgemein gültig sein müssen. Außerdem werden wir uns mit sogenannten Scheinkräften befassen, die auftreten, wenn man die Bewegung eines Objekts in einem Inertialsystem von einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem aus betrachtet.

Als Erstes wenden wir uns in diesem Kapitel den Grundlagen der Reibungskräfte zu. Dabei betrachten wir nicht nur die Haft-, Gleit- und Rollreibung, die auf dem Kontakt zweier fester Körper beruht, sondern beschäftigen uns auch mit der Reibung als Widerstandskraft gegen eine Bewegung in Luft oder Flüssigkeiten. Weiterhin untersuchen wir, wie die Bewegung eines Objekts in einem Inertialsystem von einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem aus wahrgenommen wird. Als Beispiel diskutieren wir die Coriolis-Kraft auf einer rotierenden Scheibe.

4.1 Reibung

Wenn Sie kräftig an ein Buch stoßen, das auf Ihrem Schreibtisch liegt, wird das Buch wahrscheinlich über den Schreibtisch rutschen. Ist der Schreibtisch lang genug, hält es irgendwann an und bleibt liegen. Das liegt daran, dass der Schreibtisch auf das Buch eine Reibungskraft ausübt, deren Richtung der der Geschwindigkeit des Buchs entgegengesetzt ist. Diese Kraft, die auf die Oberfläche des Buchs ausgeübt wird, die den Schreibtisch berührt, heißt **Reibungskraft**. Solche Reibungskräfte sind ein notwendiger Bestandteil unseres Lebens. Ohne Reibung würden all unsere Transportsysteme – angefangen beim Laufen bis hin zu Autos – nicht funktionieren. Man könnte nicht einmal auf einer horizontalen Fläche einfach loslaufen. Genauso wenig könnte man beim Laufen die Geschwindigkeit oder die Richtung ändern. Die Reibung nutzen wir beim Anfahren, Lenken und Anhalten eines Autos. Sie hält eine Mutter auf einer Schraube, einen Nagel im Holz und einen Knoten in einem Stück Tau. So wichtig die Reibung auch ist – in vielen Fällen ist sie schlicht unerwünscht: Überall, wo bewegliche Maschinenteile einander berühren, gibt es einen Verschleiß, sodass ein hoher zeitlicher und finanzieller Aufwand betrieben wird, um sie herabzusetzen.

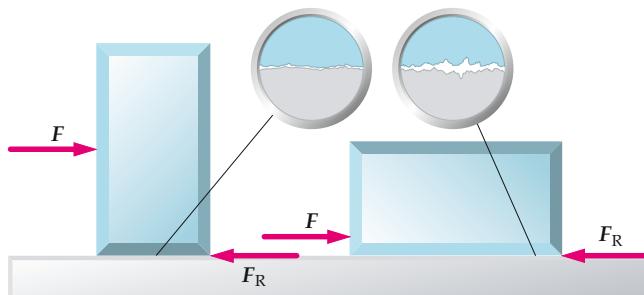
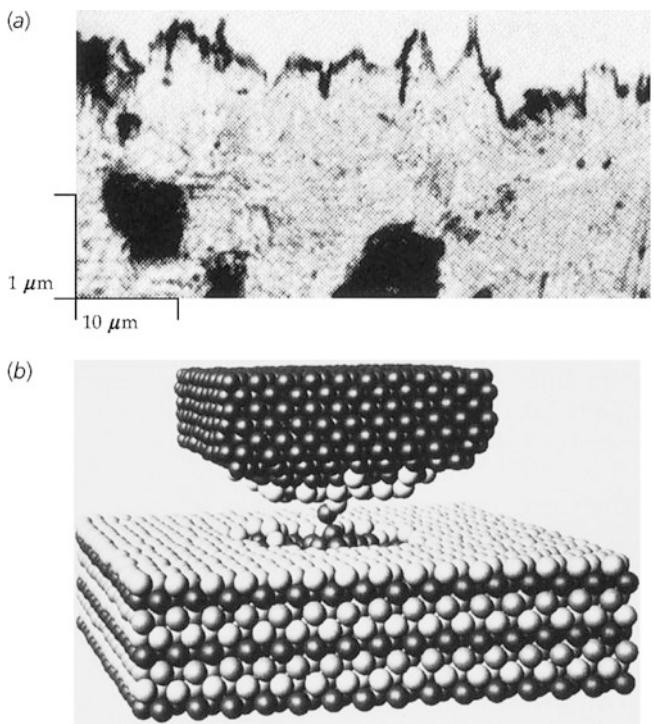


Abbildung 4.1 Die mikroskopische Kontaktfläche zwischen einem Körper und dem Boden ist nur ein Bruchteil der makroskopischen Bodenfläche des Körpers. Dieser Bruchteil ist proportional zur Normalkraft zwischen den beiden Flächen. Liegt der Körper wie rechts gezeigt flach auf dem Boden, ist seine makroskopische Kontaktfläche größer als links im Bild, während die Kraft pro Flächeneinheit rechts kleiner ist. Im Ergebnis ist die mikroskopische Kontaktfläche die gleiche. Unabhängig davon, ob der Körper steht oder liegt, wird die gleiche horizontale Kraft F benötigt, um ihn mit konstanter Geschwindigkeit gleiten zu lassen.



a) Der vergrößerte Ausschnitt einer polierten Stahloberfläche zeigt starke Unregelmäßigkeiten. Die Höhenunterschiede in der Oberfläche betragen ca. $5 \cdot 10^{-5}$ cm, was mehreren Tausend Atomdurchmessern entspricht. (© F. P. Bowden und D. Tabor, *Lubrication of Solids*, Oxford University Press, 2000.) b) Die Computergrafik zeigt Goldatome (unten), die an der feinen Spitze einer Nickelsonde (oben) hängen, die die Goldoberfläche zuvor berührte. (© Uzi Landman und David W. Leudtke, Georgia Institute of Technology.)

Die Reibung ist eine komplizierte und bis heute nicht vollständig verstandene Erscheinung, die ihren Ursprung darin hat, dass die Moleküle einer Oberfläche die Moleküle einer nahe gelegenen weiteren Oberfläche anziehen. Diese Anziehung ist – ebenso wie die Molekularkräfte, die jeden Körper zusammenhalten – elektrischer Natur. Schon bei Abständen, die größer als wenige Atomdurchmesser sind, wird diese kurzreichweite Anziehungskraft vernachlässigbar.

Wie Abbildung 4.1 zeigt, sind Oberflächen, die auf den ersten Blick glatt aussehen und sich auch so anfühlen, im mikroskopischen (atomaren) Maßstab tatsächlich rau und uneben. Das gilt sogar für hochpolierte Oberflächen. Wenn Flächen in Kontakt gelangen, berühren sie sich nur an weit herausragenden Vorsprüngen, sogenannten *Oberflächenunebenheiten*, wie sie in Abbildung 4.1 zu sehen sind. Die Normalkraft, die von einer Oberfläche ausgeübt wird, wird genau genommen auf die Spitzen dieser Oberflächenunebenheiten ausgeübt, da dort das Verhältnis von Kraft zu Flächeneinheit besonders hoch ist, sodass diese Spitzen abgeflacht werden. Wenn die beiden Oberflächen stärker zusammengepresst werden, nimmt die Normalkraft und damit auch die Abflachung zu, was zu einer größeren mikroskopischen Kontaktfläche führt. Unter den meisten Bedingungen

ist die mikroskopische Kontaktfläche proportional zur Normalkraft. Da die Reibungskraft proportional zur mikroskopischen Kontaktfläche ist, ist sie auch proportional zur Normalkraft.

Hafreibung

Stellen Sie sich vor, Sie üben auf eine große Kiste, die auf dem Boden steht, eine horizontale Kraft F aus (Abbildung 4.2). Solange Sie wenig Kraft aufwenden, ist die vom Boden auf die Kiste ausgeübte Hafreibungskraft $F_{R,h}$ mit Ihrer Kraft im Gleichgewicht, sodass sich die Kiste nicht merklich bewegt. Die **Hafreibungskraft** wirkt immer dann, wenn zwei Oberflächen, die sich berühren, nicht aneinandergleiten. Sie verhindert auch hier, dass die Kiste rutscht. Je nachdem, mit welcher Kraft man drückt, kann die Hafreibungskraft, die der auf die Kiste einwirkenden Kraft entgegenwirkt, zwischen null und $|F_{R,h,max}|$ liegen. Das heißt, während Sie immer stärker an die Kiste drücken, bleibt die Gegenkraft der Hafreibung betragsmäßig so lange gleich der ausgeübten Kraft, bis der Betrag der ausgeübten Kraft größer als $|F_{R,h,max}|$ wird. Messungen haben ergeben, dass $|F_{R,h,max}|$ proportional zum Betrag der Kräfte ist, die die beiden Oberflächen zusammenpressen. Daher ist $|F_{R,h,max}|$ proportional zum Betrag der Normalkraft, die eine der beiden Flächen auf die andere ausübt:

$$|F_{R,h,max}| = \mu_{R,h} |F_n|. \quad (4.1)$$

DIE GLEICHUNG FÜR DIE HAFTREIBUNG

Dabei ist die Proportionalitätskonstante $\mu_{R,h}$ der **Hafreibungs-koeffizient**. Er hängt von den Materialien, aus denen die einander berührenden Oberflächen bestehen, und außerdem von deren Temperaturen ab. Wird eine horizontale Kraft auf die Kiste ausgeübt, die kleiner als $|F_{R,h,max}|$ ist, ist die Hafreibungskraft mit dieser horizontalen Kraft gerade im Gleichgewicht, sodass die Kiste in Ruhe liegen bleibt. Dagegen beginnt die Kiste zu gleiten, sobald die ausgeübte Kraft etwas größer als $|F_{R,h,max}|$ ist. Damit kann Gleichung 4.1 als

$$|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} |F_n| \quad (4.2)$$

geschrieben werden. Die Hafreibungskraft ist so gerichtet, dass sie dem Bestreben der Kiste zu gleiten entgegenwirkt.

Gleitreibung

Wenn man stark genug auf die Kiste aus Abbildung 4.2 drückt, gleitet sie über den Boden. Während sie gleitet, übt der Boden eine **Gleitreibungskraft** $F_{R,g}$ auf sie aus, deren Richtung der, in die die Kiste gleitet, entgegengesetzt ist. Damit eine Kiste mit konstanter Geschwindigkeit gleitet, muss auf sie eine Kraft wirken, die den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung wie die Gleitreibungskraft besitzt, die der Boden auf sie ausübt.

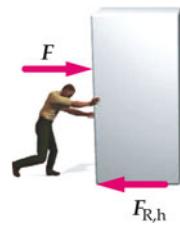


Abbildung 4.2 Die Beziehung zwischen der horizontalen Kraft F und der Haftreibungskraft $F_{R,h} = -\mu_{R,h}$.

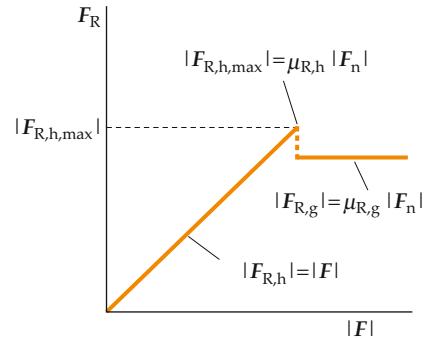


Abbildung 4.3 Der Übergang von Hafreibung zu Gleitreibung tritt ein, wenn die einwirkende Kraft größer wird als die maximale Hafreibung.

Der Betrag der Gleitreibungskraft $|F_{R,g}|$ ist ebenso wie der maximalen Hafreibungskraft proportional zur mikroskopischen Kontaktfläche und zur Stärke der Kräfte, die die beiden Oberflächen zusammenpressen. Damit ist auch der Betrag der Gleitreibungskraft $|F_{R,g}|$ proportional zur Normalkraft $|F_n|$, die eine Oberfläche auf die andere ausübt:

$$|F_{R,g}| = \mu_{R,g} |F_n|. \quad (4.3)$$

DIE GLEICHUNG FÜR DIE GLEITREIBUNG

Die Proportionalitätskonstante $\mu_{R,g}$ ist der **Gleitreibungskoeffizient**. Auch er hängt von den Materialien, aus denen die einander berührenden Oberflächen bestehen, sowie von deren Temperaturen ab. Im Unterschied zur Hafreibung ist die Gleitreibungskraft unabhängig vom Betrag der angewendeten horizontalen Kraft. Experimente zeigen, dass $\mu_{R,g}$ über einen weiten Bereich von Geschwindigkeiten annähernd konstant ist.

Abbildung 4.3 zeigt den Betrag der Reibungskraft, die der Boden auf einen Körper ausübt, in Abhängigkeit vom Betrag der Kraft, die horizontal auf den Körper einwirkt. Die Reibungskraft ist so lange mit der einwirkenden Kraft im Gleichgewicht, bis die Kiste zu gleiten beginnt. Dies ist der Fall, sobald die einwirkende Kraft geringfügig größer als $\mu_{R,h} |F_n|$ ist. Während die Kiste gleitet, bleibt die Gleitreibungskraft konstant gleich $\mu_{R,g} |F_n|$. Der Gleitreibungskoeffizient $\mu_{R,g}$ ist für beliebige Kontaktflächen stets kleiner als der Hafreibungs-koeffizient $\mu_{R,h}$. Mit anderen Worten, die Kraft, mit der man gegen die Kiste drücken muss, damit sie zu gleiten beginnt, ist höher als die,

Vorgehensweise: Aufgabenstellungen mit Reibung

Ermitteln Sie zunächst, welche Arten von Reibung in der Aufgabe wirksam sind. Wenn die Oberflächen der Körper, die einander berühren, nicht gleiten, herrscht Haftreibung. Die Haftreibungskraft wirkt dem Bestreben der Oberflächen aneinanderzugleiten entgegen. Der Betrag der maximalen Haftreibungskraft $F_{R,h,\max}$ ist gleich dem Produkt aus dem Betrag der Normalkraft und aus dem Haftreibungskoeffizienten. Wenn zwei Oberflächen aneinandergleiten, erfahren sie Gleitreibungskräfte (sofern in der Aufgabenstellung nicht erwähnt ist, dass eine der Flächen reibungsfrei sein soll). Rollreibung tritt auf, da sich ein rollender Körper und die Oberfläche, auf der er rollt, ständig verformen und sich beide fortwährend voneinander ablösen.

1. Konstruieren Sie ein Kräfediagramm. Legen Sie die y -Achse normal (senkrecht) zur Kontaktfläche und die x -Achse parallel zu ihr. Die Richtung der Reibungskraft ist so, dass sie dem Gleiten oder dem Bestreben zu gleiten entgegengesetzt ist.
2. Wenden Sie das 2. Newton'sche Axiom $\sum F_{i,y} = m a_y$ an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft $|F_n|$ um. Handelt es sich um *Gleitreibung* oder *Rollreibung*, lautet die Beziehung zwischen der Reibungskraft und der Normalkraft $|F_{R,g}| = \mu_{R,g} |F_n|$ bzw. $|F_{R,r}| = \mu_{R,r} |F_n|$. Geht es dagegen um *Haftreibung*, lautet die Beziehung zwischen der Reibungskraft und der Normalkraft $|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} |F_n|$ bzw. $|F_{R,h,\max}| = \mu_{R,h} |F_n|$.
3. Wenden Sie auf den Körper $\sum F_{i,x} = m a_x$ an und berechnen Sie daraus die gesuchte Größe.

Plausibilitätsprüfung: Um zu sehen, ob das Ergebnis sinnvoll ist, kann geprüft werden, ob die Reibungskoeffizienten wirklich dimensionslos sind und alle Kräfte (z. B. Zugkräfte in Seilen) berücksichtigt worden sind.

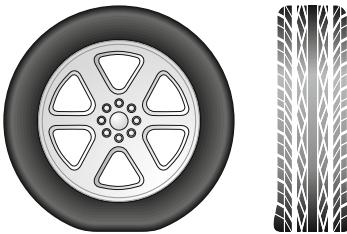


Abbildung 4.4 Während das Rad auf der Autobahn rollt, wird der Gummi dort, wo die Lauffläche den Straßenbelag zu berühren beginnt, radial nach innen gebogen und dort, wo sie sich von ihm löst, radial nach außen gebogen. Da der Reifen nicht ideal elastisch ist, sind die Kräfte, die die Straße auf die Lauffläche ausübt und die die Lauffläche nach innen biegen, größer als jene, die die Straße auf die Lauffläche ausübt, während sich die Lauffläche beim Ablösen von der Straße zurückbiegt. Diese Kräfte differenz führt zu einer Kraft, die dem Rollen des Reifens entgegenwirkt. Je stärker sich die Reifen biegen, desto größer ist auch die Rollreibungskraft.

die man aufwenden muss, damit sie danach mit konstanter Geschwindigkeit weitergleitet. In Tabelle 4.1 sind einige ungefähre Werte für $\mu_{R,h}$ und $\mu_{R,g}$ für verschiedene Oberflächenkombinationen aufgeführt.

Rollreibung

Wenn eine ideales, starres Rad mit *konstanter Geschwindigkeit* auf einer ideal starren, horizontalen Straße rollt und dabei nicht rutscht, wird es durch keine Reibungskraft abgebremst. Reale

Tabelle 4.1 Ungefährre Werte für Reibungskoeffizienten.

Material	$\mu_{R,h}$	$\mu_{R,g}$
Stahl auf Stahl	0,7	0,6
Messing auf Stahl	0,5	0,4
Kupfer auf Gusseisen	1,1	0,3
Glas auf Glas	0,9	0,4
Teflon auf Teflon	0,04	0,04
Teflon auf Stahl	0,04	0,04
Gummi auf trockenem Beton	1,0	0,80
Gummi auf nassem Beton	0,30	0,25
Gewachste Ski auf Schnee (0 °C)	0,10	0,05

Reifen und Straßen verformen sich beim Rollen jedoch ständig (Abbildung 4.4) und der Reifen löst sich gelegentlich von der Oberfläche der Straße ab. In der Realität übt die Straße daher auf den Reifen eine **Rollreibungskraft** $F_{R,r}$ aus, die der Bewegung entgegenwirkt. Damit ein rollendes Rad mit konstanter Geschwindigkeit weiterrollt, muss man demnach eine zusätzliche Kraft auf das Rad ausüben, die den gleichen Betrag und die entgegengesetzte Richtung wie die Rollreibungskraft besitzt, die von der Straße auf das Rad ausgeübt wird.

Der **Rollreibungskoeffizient** $\mu_{R,r}$ ist das Verhältnis des Betrags der Rollreibungskraft $|F_{R,r}|$ und der Normalkraft $|F_n|$:

$$|F_{R,r}| = \mu_{R,r} |F_n|. \quad (4.4)$$

DIE GLEICHUNG FÜR DIE ROLLREIBUNG

Der Rollreibungskoeffizient $\mu_{R,r}$ hängt von der Beschaffenheit der Kontaktflächen und vom Aufbau des Rads und der Straße ab. Typische Werte für $\mu_{R,r}$ sind 0,01 bis 0,02 für Gummireifen auf Beton und 0,001 bis 0,002 für Stahlräder auf Stahlschienen. In der Regel sind Rollreibungskoeffizienten um eine oder zwei Größenordnungen kleiner als Gleitreibungskoeffizienten. Wenn nicht besonders betont wird, dass sie von Bedeutung ist, werden wir die Rollreibung in diesem Buch als vernachlässigbar betrachten.

Die Beispiele 4.1 bis 4.5 veranschaulichen das Vorgehen bei Aufgabenstellungen mit Haft-, Gleit- und Rollreibung.

Beispiel 4.1: Das Beikespel

Das Beikespel ähnelt auf den ersten Blick dem Curling und wird gern auf Schiffsdecks gespielt. Ein Passagier schiebt mit seinem Queue eine Scheibe mit einer Masse von 0,40 kg horizontal über das Schiffsdeck. Wenn die Scheibe vom Queue abgestoßen wird, beträgt ihre Geschwindigkeit 8,5 m/s. Die Scheibe gleitet 8,0 m weit, bevor sie zum Stillstand kommt. Wie groß ist der Gleitreibungskoeffizient zwischen Scheibe und Deck?

Problembeschreibung: Die Gleitreibungskraft ist die einzige horizontale Kraft, die auf die Scheibe wirkt, nachdem sie den Queue verlassen hat. Da die Reibungskraft konstant ist, ist die Beschleunigung ebenfalls konstant. Man kann diese Beschleunigung berechnen, indem man die Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung aus Kapitel 2 unter Verwendung von $\sum F_{i,x} = ma_x$ so verknüpft, dass sich der Gleitreibungskoeffizient $\mu_{R,g}$ ergibt.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein Kräftebild für die Scheibe, nachdem sie vom Queue abgestoßen wurde (Abbildung 4.5). Wählen Sie als $+x$ -Richtung die Richtung der Geschwindigkeit der Scheibe.

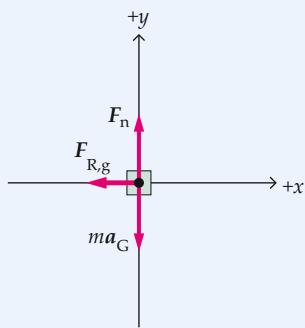


Abbildung 4.5 Kräftebild der Scheibe.

2. Der Gleitreibungskoeffizient beschreibt den Zusammenhang zwischen den Beträgen der Reibungskraft und

der Normalkraft:

$$|F_{R,g}| = \mu_{R,g} |F_n|$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = ma_y$ auf die Scheibe an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um. Setzen Sie das Ergebnis in die Formel für die Reibungskraft aus Schritt 2 ein:

$$\sum F_{i,y} = ma_y$$

$$|F_n| - mg = 0 \Rightarrow |F_n| = mg$$

und so

$$|F_{R,g}| = \mu_{R,g} mg$$

4. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = ma_x$ auf die Scheibe an. Mit dem Ergebnis aus Schritt 3 erhalten Sie eine Gleichung für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,x} &= ma_x \\ -|F_{R,g}| &= ma_x \end{aligned}$$

und so

$$-\mu_{R,g} mg = ma_x \Rightarrow a_x = -\mu_{R,g} g$$

5. Die Beschleunigung ist konstant. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Beschleunigung, der zurückgelegten Gesamtstrecke und der Anfangsgeschwindigkeit $v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x \Delta x$ auf (Gleichung 2.30). Berechnen Sie mithilfe des Ergebnisses aus Schritt 4 den Reibungskoeffizienten $\mu_{R,g}$:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow 0 = v_{0,x}^2 - 2\mu_{R,g} g \Delta x$$

und somit

$$\mu_{R,g} = \frac{v_{0,x}^2}{2g \Delta x} = \frac{(8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2(9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})(8,0 \text{ m})} = [0,46]$$

Plausibilitätsprüfung: Der für $\mu_{R,g}$ erhaltene Wert ist dimensionslos und liegt innerhalb des Bereichs der Werte für andere in Tabelle 4.1 aufgeführte Materialien. Damit ist das Ergebnis plausibel.

Weitergedacht: Die Beschleunigung und der Reibungskoeffizient sind unabhängig von der Masse m . Je größer die Masse der Scheibe ist, desto schwerer ist die Scheibe anzuhalten. Andererseits bedeutet eine größere Masse aber auch eine stärkere Normalkraft und somit eine stärkere Reibungskraft. Insgesamt hat die Masse daher keine Wirkung auf die Beschleunigung (bzw. auf den Bremsweg).

Beispiel 4.2: Die Münze auf dem Buchrücken

Ein Buch mit festem Umschlag (Abbildung 4.6) liegt mit der Titelseite nach oben auf dem Tisch. Auf den Bucheinband wird eine Münze gelegt. Anschließend wird das Buch sehr langsam geöffnet, bis die Münze zu rutschen beginnt. θ_{\max} (der Reibungswinkel) sei derjenige Winkel zwischen dem Bucheinband und der Horizontalen, bei dem sich die Münze gerade in Bewegung setzt. Berechnen Sie den Haftreibungskoeffizienten $\mu_{R,h}$ zwischen dem Bucheinband und der Münze in Abhängigkeit von θ_{\max} .

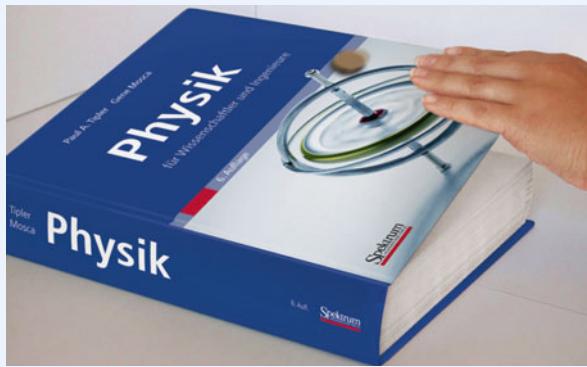


Abbildung 4.6 Illustration der Münze auf dem Buchrücken.

Problembeschreibung: Auf die Münze wirken die Gravitationskraft $F_G = ma_G$, die Normalkraft F_n und die Reibungskraft F_R . Da die Münze zwar unmittelbar davorsteht zu gleiten, aber gerade noch nicht gleitet, ist die Reibungskraft die Haftreibungskraft, die entlang der Ebene nach oben gerichtet ist. Da die Münze ruht, ist ihre Beschleunigung null. Wir verwenden das zweite Newton'sche Axiom, das die Beschleunigung mit den auf die Münze wirkenden Kräften verknüpft, und stellen die Gleichung nach der Reibungskraft um.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein Kräftebild für die Münze, wenn der Bucheinband unter einem Winkel θ mit $\theta \leq \theta_{\max}$ geneigt ist (Abbildung 4.7).

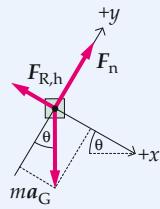


Abbildung 4.7 Kräftebild der Münze.

2. Die Reibungskraft und die Normalkraft sind über den Haftreibungskoeffizienten verknüpft:

$$|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} |F_n|$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf die Münze an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um:

$$\sum F_{i,y} = m a_y$$

$$|F_n| - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow |F_n| = mg \cos \theta$$

4. Setzen Sie das Ergebnis für $|F_n|$ in $|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} |F_n|$ (Gleichung 4.2) ein:

$$|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} |F_n| \Rightarrow |F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} mg \cos \theta$$

5. Wenden Sie auf die Münze $\sum F_{i,x} = m a_x$ an und stellen Sie die Gleichung nach der Reibungskraft um:

$$\sum F_{i,x} = m a_x$$

$$-|F_{R,h}| + mg \sin \theta = 0 \Rightarrow |F_{R,h}| = mg \sin \theta$$

6. Einsetzen von $mg \sin \theta$ für $|F_{R,h}|$ in das Ergebnis aus Schritt 4 ergibt:

$$mg \sin \theta \leq \mu_{R,h} mg \cos \theta \Rightarrow \tan \theta \leq \mu_{R,h}$$

7. Der größte Winkel, der der Bedingung $\tan \theta \leq \mu_{R,h}$ genügt, bei dem die Münze also gerade noch nicht gleitet, ist θ_{\max} :

$$\mu_{R,h} = \boxed{\tan \theta_{\max}}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Reibungskoeffizient ist dimensionslos, da der Tangens dimensionslos ist. Außerdem liegt $\tan \theta_{\max}$ für $0 < \theta_{\max} < 45^\circ$ zwischen null und eins. Es ist zu erwarten, dass die Münze ins Rutschen kommt, bevor ein Winkel von 45° erreicht ist. Außerdem sollte der Haftreibungskoeffizient zwischen null und eins liegen. Das Ergebnis aus Schritt 7 ist daher plausibel.

Übung 4.1: Der Haftreibungskoeffizient zwischen einem Autoreifen und der Straße sei an einem bestimmten Tag gleich 0,70. Wie steil darf die Straße maximal sein, damit ein Auto auf ihr parken kann, wenn alle vier Bremsen angezogen sind, ohne dass das Auto das Gefälle hinabrutscht? ◀

Beispiel 4.3: Kräfte am Schlitten

Zwei Kinder, die auf einem Schlitten im Schnee sitzen, bitten darum, gezogen zu werden. Die Eltern ziehen die beiden an einem Seil, das einen Winkel von 40° zur Horizontalen bildet (Abbildung 4.8). Die Kinder haben zusammen eine Masse von 45 kg, und der Schlitten hat eine Masse von 5,0 kg. Der Haftreibungskoeffizient beträgt $\mu_{R,h} = 0,20$, während der Gleitreibungs-

koeffizient $\mu_{R,g} = 0,15$ ist. Anfangs ruht der Schlitten. Gesucht sind der Betrag der Reibungskraft, die der Schnee auf den Schlitten ausübt, sowie die Beschleunigung der Kinder und des Schlittens, wenn die Zugkraft im Seil a) 100 N und b) 140 N beträgt.

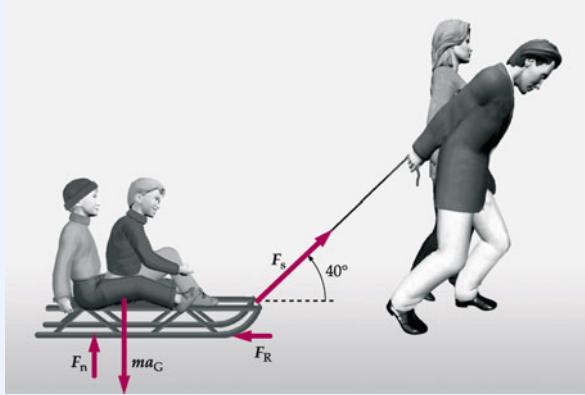


Abbildung 4.8 Illustration des Systems und der wirkenden Kräfte.

Problembeschreibung: Als Erstes müssen wir ermitteln, ob die Haftreibung oder die Gleitreibung wirkt. Dazu untersuchen wir, ob die gegebenen Zugkräfte der Beziehung $|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} |F_n|$ genügen. Im Anschluss daran können wir den richtigen Ausdruck für die Reibungskraft auswählen und daraus die Reibungskraft $|F_R|$ berechnen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für den Schlitten (Abbildung 4.9).

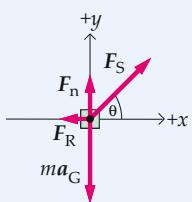


Abbildung 4.9 Kräftediagramm für den Schlitten.

2. Schreiben Sie die Gleichung für die Haftreibung auf. Solange diese erfüllt ist, beginnt der Schlitten nicht zu gleiten:

$$|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h} |F_n|$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf den Schlitten an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um:

$$\sum F_{i,y} = m a_y$$

$$|F_n| + |F_S| \sin \theta - m g = 0 \Rightarrow |F_n| = m g - |F_S| \sin \theta$$

4. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ mit $a_x = 0$ auf den Schlitten an und stellen Sie die Gleichung nach der Haftreibungskraft um:

$$\sum F_{i,x} = m a_x$$

$$-|F_{R,h}| + |F_S| \cos \theta = 0 \Rightarrow |F_{R,h}| = |F_S| \cos \theta$$

5. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 3 und 4 in das Ergebnis aus Schritt 2 ein:

$$|F_S| \cos \theta \leq \mu_{R,h} (m g - |F_S| \sin \theta)$$

6. Prüfen Sie anhand der Ungleichung aus Schritt 5, ob der Schlitten bei der gegebenen Zugkraft von 100 N noch nicht gleitet:

$$(100 \text{ N}) \cos 40^\circ \leq 0,20 [(50 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) - (100 \text{ N}) \sin 40^\circ]$$

$$77 \text{ N} \leq 85 \text{ N}$$

Da die Ungleichung *erfüllt ist*, gleitet der Schlitten *nicht*. 7. Da der Schlitten nicht gleitet, ist die Reibungskraft die Haftreibungskraft. Ihr Betrag kann aus dem Ausdruck für $|F_{R,h}|$ aus Schritt 4 berechnet werden:

$$a_x = 0$$

$$|F_{R,h}| = |F_S| \cos \theta = (100 \text{ N}) \cos 40^\circ = \boxed{77 \text{ N}}$$

Teilaufgabe b

1. Nehmen Sie nun eine ähnliche Prüfung wie in Schritt 5 von Teilaufgabe a mit $|F_S| = 140 \text{ N}$ vor. Wenn die Beziehung erfüllt ist, gleitet der Schlitten nicht:

$$(140 \text{ N}) \cos 40^\circ \leq 0,20 [(50 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) - (140 \text{ N}) \sin 40^\circ]$$

$$107 \text{ N} \leq 80 \text{ N}$$

Da die Ungleichung nun *nicht* erfüllt ist, *gleitet* der Schlitten.

2. Da der Schlitten gleitet, ist die Reibungskraft nun eine Gleitreibungskraft, bei der $|F_{R,g}| = \mu_{R,g} |F_n|$ gilt. In Schritt 3 der Teilaufgabe a haben wir die Formel $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf den Schlitten angewendet und dabei festgestellt, dass $|F_n| = m g - |F_S| \sin \theta$ ist. Berechnen Sie damit die Gleitreibungskraft:

$$|F_{R,g}| = \mu_{R,g} |F_n|$$

$$|F_{R,g}| = \mu_{R,g} (m g - |F_S| \sin \theta)$$

$$= 0,15 [(50 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) - (140 \text{ N}) \sin 40^\circ]$$

$$= \boxed{60 \text{ N}}$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf den Schlitten an und stellen Sie die Gleichung nach der Reibungskraft um. Setzen Sie anschließend das Ergebnis aus Schritt 2 von Teilaufgabe b für $|F_{R,g}|$ ein und berechnen Sie daraus die Beschleunigung:

$$\sum F_{i,x} = m a_x$$

$$-|F_{R,g}| + |F_S| \cos \theta = m a_x \Rightarrow \\ a_x = \frac{-|F_{R,g}| + |F_S| \cos \theta}{m}$$

und somit

$$a_x = \frac{-60 \text{ N} + (140 \text{ N}) \cos 40^\circ}{50 \text{ kg}} \\ = [0,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten eine Beschleunigungskomponente a_x größer oder gleich null und damit, dass die Reibungskraft betragsmäßig kleiner oder gleich der x -Komponenten der Zugkraft ist. In Teilaufgabe a sind der Betrag der Reibungskraft und die x -Komponente der Zugkraft beide gleich 77 N, während in Teilaufgabe b der Betrag der Reibungskraft gleich 60 N ist und die x -Komponente der Zugkraft $(140 \text{ N}) \cos 40^\circ = 107 \text{ N}$ beträgt.

Weitergedacht: Wir halten zwei wichtige Punkte fest:
1) Die Normalkraft ist kleiner als die auf die Kinder und auf den Schlitten wirkende Gravitationskraft. Das liegt daran, dass die vertikale Komponente der Zugkraft mithilft, der Gravitationskraft entgegenzuwirken. 2) In Teilaufgabe a ist die Haftreibungskraft kleiner als $\mu_{R,h} |F_n|$.

Übung 4.2: Mit welcher maximalen Kraft können die Eltern bei dem angegebenen Winkel an dem Seil ziehen, ohne dass der Schlitten zu gleiten beginnt? ◀ ■

Beispiel 4.4: Der gleitende Block

Der Block mit der Masse m_2 aus Abbildung 4.10 wurde so ausgewählt, dass der linke Block mit der Masse m_1 gerade noch nicht gleitet. a) Es sei $m_1 = 7,0 \text{ kg}$ und $m_2 = 5,0 \text{ kg}$. Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient zwischen Träger und Block? b) Nach einem leichten Anstoß bewegen sich beide Blöcke mit dem Beschleunigungsbetrag $|a|$. Wie groß ist $|a|$, wenn der Gleitreibungskoeffizient zwischen Träger und Block $\mu_{R,g} = 0,54$ beträgt?

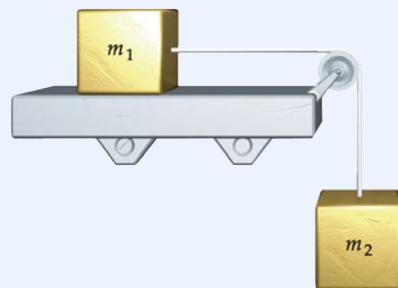


Abbildung 4.10 Zwei miteinander durch ein Seil verbundene Blöcke, welche über eine Rolle geleitet wird.

Problembeschreibung: Wenden Sie auf jeden Block für sich das zweite Newton'sche Axiom an. Wenn Sie die Massen von Seil und Rolle sowie die Reibung im Rollenlager vernachlässigen, ist die Zugkraft des Seils $|F_{S,1}| = |F_{S,2}| = |F_S|$. Da sich das Seil nicht dehnt, sind die Beschleunigungen beider Körper betragsmäßig gleich; es gilt also $|a_1| = |a_2| = |a|$.

Um den in Teilaufgabe a gesuchten Haftreibungskoeffizienten $\mu_{R,h}$ zu ermitteln, setzen Sie die auf m_1 wirkende Haftreibungskraft gleich ihrem Maximalwert $|F_{R,h,max}| = \mu_{R,h} |F_n|$ und die Beschleunigung null.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie für jeden Block ein eigenes Kräftediagramm (Abbildung 4.11). Legen Sie die $+x$ - und die $+x'$ -Richtung so, dass diese in Richtung der Beschleunigungen der Blöcke 1 und 2 zeigen. Damit muss die $+x$ -Richtung nach rechts und die $+x'$ -Richtung vertikal nach unten zeigen.

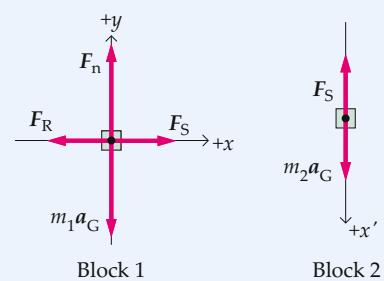


Abbildung 4.11 Kräftediagramm der beiden Blöcke.

2. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf Block 1 an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um. Ermitteln Sie daraus die Haftreibungskraft:

$$\sum F_{i,y} = m_1 a_{1,y}$$

$$|F_n| - m_1 g = 0 \Rightarrow |F_n| = m_1 g$$

somit ist

$$|\mathbf{F}_{R,h,\max}| = \mu_{R,h} |\mathbf{F}_n|$$

also

$$|\mathbf{F}_{R,h,\max}| = \mu_{R,h} m_1 g$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf Block 1 an und stellen Sie die Gleichung nach der Reibungskraft um. Setzen Sie die Gleichung in das Ergebnis aus Schritt 2 ein:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,x} &= m_1 a_{1,x} \\ |\mathbf{F}_S| - |\mathbf{F}_{R,h,\max}| &= 0 \Rightarrow |\mathbf{F}_S| = |\mathbf{F}_{R,h,\max}| \end{aligned}$$

und deswegen

$$|\mathbf{F}_S| = \mu_{R,h} m_1 g$$

4. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf Block 2 an und stellen Sie die Gleichung nach der Zugkraft um. Setzen Sie die Gleichung in das Ergebnis aus Schritt 3 ein:

$$\sum F_{i,x'} = m_2 a_{2,x'} \Rightarrow m_2 g - |\mathbf{F}_S| = 0$$

demnach ist

$$|\mathbf{F}_S| = m_2 g \quad \text{und} \quad m_2 g = \mu_{R,h} m_1 g$$

5. Berechnen Sie aus dem Ergebnis aus Schritt 4 $\mu_{R,h}$:

$$\mu_{R,h} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5,0 \text{ kg}}{7,0 \text{ kg}} = \boxed{0,71}$$

Teilaufgabe b

1. Während der Block gleitet, wirkt die Gleitreibung und haben die Beschleunigungen denselben Betrag $|\mathbf{a}|$. Schreiben Sie die Gleichung zur Berechnung der Gleitreibungskraft $|\mathbf{F}_{R,g}|$ aus der Normalkraft auf. Die Normalkraft ist bereits aus Schritt 2 der Teilaufgabe a bekannt:

$$|\mathbf{F}_{R,g}| = \mu_{R,g} |\mathbf{F}_n|$$

also

$$|\mathbf{F}_{R,g}| = \mu_{R,g} m_1 g$$

$$|\mathbf{a}_1| = a_{1,x} = |\mathbf{a}| \quad \text{und} \quad |\mathbf{a}_2| = a_{2,x'} = |\mathbf{a}|$$

2. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf Block 1 an. Ersetzen Sie anschließend die Reibungskraft durch das Ergebnis aus Schritt 1 der Teilaufgabe b:

$$\sum F_{i,x} = m_1 a_{1,x} \Rightarrow |\mathbf{F}_S| - |\mathbf{F}_{R,g}| = m_1 |\mathbf{a}|$$

und damit

$$|\mathbf{F}_S| - \mu_{R,g} m_1 g = m_1 |\mathbf{a}|$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,x'} = m a_x$ auf Block 2 an:

$$\sum F_{i,x'} = m_2 a_{2,x'} \Rightarrow m_2 g - |\mathbf{F}_S| = m_2 |\mathbf{a}|$$

4. Addieren Sie die Gleichungen aus Schritt 2 und 3 der Teilaufgabe b und berechnen Sie $|\mathbf{a}|$:

$$|\mathbf{a}| = \frac{m_2 - \mu_{R,g} m_1}{m_1 + m_2} g = \boxed{1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten ist, ergibt sich für $m_1 = 0$ die Beschleunigung $|\mathbf{a}| = g$.

Übung 4.3: Welche Zugkraft herrscht im Seil, während die Blöcke gleiten? □

Frage 4.1

Das Auto in Übung 4.1 soll unter dem steilsten Neigungswinkel geparkt werden, wobei alle vier Bremsen angezogen sind. Würde das Auto das Gefälle hinabrutschen, wenn nur zwei Bremsen angezogen wären?



Reibungskräfte sind *nicht immer* einer Bewegung entgegengesetzt. Dagegen sind Reibungskräfte zwischen Kontaktflächen *stets* der Relativbewegung oder dem Bestreben einer Relativbewegung entgegengerichtet.

Reibung, Autos und das Antiblockiersystem (ABS)

Abbildung 4.12 zeigt die Kräfte, die auf ein Auto mit Vorderradantrieb wirken, das gerade auf einer horizontalen Straße aus dem Stand beschleunigt. Die Gravitationskraft auf das Auto $|\mathbf{F}_G|$ ist dabei im Gleichgewicht mit den auf die Reifen wirkenden Normalkräften $|\mathbf{F}_n|$ und $|\mathbf{F}'_n|$. Damit das Auto losfahren kann, überträgt der Motor seine Antriebsleistung auf die Achse, die die Vorderräder dreht. Wenn die Straße ideal reibungsfrei wäre, würden die Räder lediglich durchdrehen. Wenn aber zwischen Rädern und Straße Reibung vorhanden ist, ist die Reibungskraft, die die Straße auf die Räder ausübt, nach vorn gerichtet. Damit wirkt sie dem Bestreben des Rads, rückwärts durchzudrehen, entgegen. Diese Reibungskraft liefert die Beschleunigung, die notwendig ist, um das Auto in Bewegung zu setzen. Ist die von dem Motor zugeführte Leistung nicht so groß,

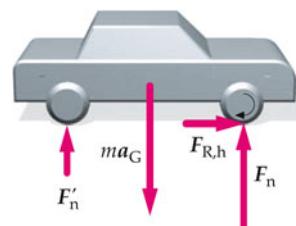


Abbildung 4.12 Kräfte, die auf ein Auto mit Vorderradantrieb wirken, das aus dem Stand beschleunigt. Meist ist die Normalkraft $|\mathbf{F}_n|$ auf die Vorderreifen größer als die Normalkraft $|\mathbf{F}'_n|$ auf die Hinterreifen, da darüber, im vorderen Teil des Autos, der Motor liegt. Da das Auto gerade erst anfährt, ist keine Luftwiderstandskraft eingezeichnet. Außerdem gibt es noch eine nach hinten gerichtete Rollreibungskraft auf alle Räder, die aber vernachlässigt wird.

Beispiel 4.5: Das Kind auf dem Schlitten**ZUR ÜBUNG**

Ein Kind mit der Masse m_K sitzt auf einem kufenlosen Rodelschlitten mit der Masse m_S , der auf einem gefrorenen und daher reibungsfreien See gleitet (Abbildung 4.13). Der Schlitten wird wie abgebildet von einer horizontalen Kraft $|F_Z|$ gezogen. Der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Kind und dem Schlitten beträgt $\mu_{R,h}$, während der Gleitreibungskoeffizient $\mu_{R,g}$ ist. a) Bis zu welcher maximalen Kraft $|F_Z|$ rutscht das Kind nicht auf dem Schlitten? b) Ermitteln Sie die Beschleunigung des Schlittens und die des Kindes, wenn $|F_Z|$ größer als dieser Wert ist.



Abbildung 4.13 Schematische Darstellung des Beispiels.

Problembeschreibung Die einzige Kraft, die das Kind in Fahrtrichtung beschleunigt, ist die Reibungskraft, die der Schlitten auf es ausübt. In Teilaufgabe a soll der Betrag der Kraft $|F_Z|$ bei der maximalen Haftreibungskraft ermittelt werden. Wenden Sie hierzu $\sum F_i = m a$ auf das Kind an und errechnen Sie die Beschleunigung bei maximaler Haftreibungskraft. Wenden Sie anschließend $\sum F_i = m a$ auf den Schlitten an und bestimmen Sie die Kraft $|F_Z|$. In Teilaufgabe b gehen Sie ähnlich vor. Allerdings ist in diesem Fall der Mindestwert von $|F_Z|$ gegeben und die Beschleunigung des Schlittens gesucht.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Zeichnen Sie für das Kind und für den Schlitten jeweils ein eigenes Kräftediagramm (Abbildung 4.14).
 - Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf den Schlitten an.
 - Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_x$ auf das Kind an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um. Verwenden Sie anschließend $|F_{R,max}| = \mu_{R,h} |F_n|$ und berechnen Sie daraus die Reibungskraft.
 - Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf das Kind an und berechnen Sie die Beschleunigung.
 - Setzen Sie die Beträge der Kräfte in jedem Aktions-Reaktions-Paar des Kräftediagramms gleich.
- Schreiben Sie ferner die Beziehung zwischen den Beschleunigungen auf, wenn das Kind in Bezug auf den Schlitten nicht gleitet.

- Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 4 und 5 in das aus Schritt 2 ein und stellen Sie nach $|F_Z|$ um.

Teilaufgabe b

- Setzen Sie wieder die Beträge der Kräfte jedes Aktions-Reaktions-Paars gleich. Formulieren Sie die Beziehung zwischen den Beschleunigungen, wenn das Kind auf dem Schlitten rutscht.
- Ermitteln Sie aus dem Ergebnis für die Normalkraft aus Schritt 3 der Teilaufgabe a den Betrag der Gleitreibungskraft.
- Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf das Kind an und stellen Sie nach seiner Beschleunigung um.
- Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf den Schlitten an. Berechnen Sie aus dem Ergebnis aus Schritt 2 der Teilaufgabe b dessen Beschleunigung.

Ergebnisse der Lösungsschritte**Teilaufgabe a**

1.

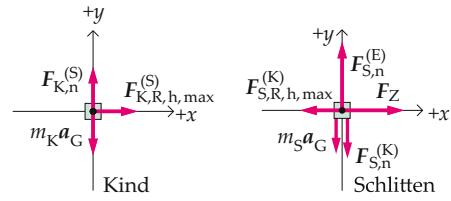


Abbildung 4.14 Kräftediagramm für das Kind und den Schlitten.

2.

$$\sum F_{i,S,x} = m_S a_{S,x} \Rightarrow |F_Z| - |F_{S,R,h,max}^{(K)}| = m_S a_{S,x}$$

3.

$$\sum F_{i,K,y} = m_K a_{K,y} \Rightarrow |F_{K,n}^{(S)}| - m_K g = 0$$

und somit

$$|F_{K,n}^{(S)}| = m_K g$$

$$|F_{R,h,max}| = \mu_{R,h} |F_n| \Rightarrow |F_{K,R,h,max}^{(S)}| = \mu_{R,h} |F_{K,n}^{(S)}|$$

und somit

$$|F_{K,R,h,max}^{(S)}| = \mu_{R,h} m_K g$$

4.

$$\sum F_{i,K,x} = m_K a_{K,x} \Rightarrow |\mathbf{F}_{K,R,h,\max}^{(S)}| = m_K a_{K,x}$$

und somit

$$\mu_{R,h} m_K g = m_K a_{K,x} \Rightarrow a_{K,x} = \mu_{R,h} g$$

5.

$$|\mathbf{F}_{K,n}^{(S)}| = |\mathbf{F}_{S,n}^{(K)}|$$

und

$$|\mathbf{F}_{K,R,h,\max}^{(S)}| = |\mathbf{F}_{S,R,h,\max}^{(K)}|$$

außerdem ist

$$a_{K,x} = a_{S,x} = a_x$$

6.

$$|\mathbf{F}_Z| - \mu_{R,h} m_K g = m_S \mu_{R,h} g$$

und somit

$$|\mathbf{F}_Z| = \boxed{(m_K + m_S) \mu_{R,h} g}$$

Teilaufgabe b

1.

$$|\mathbf{F}_{K,n}^{(S)}| = |\mathbf{F}_{S,n}^{(K)}| = |\mathbf{F}_n| \text{ und } |\mathbf{F}_{K,R,g}^{(S)}| = |\mathbf{F}_{S,R,g}^{(K)}| = |\mathbf{F}_{R,g}|$$

und

$$a_{K,x} < a_{S,x}$$

2.

$$|\mathbf{F}_{R,g}| = \mu_{R,g} |\mathbf{F}_n|$$

und darum

$$|\mathbf{F}_{R,g}| = \mu_{R,g} m_K g$$

3.

$$\sum F_{i,K,x} = m_K a_{K,x} \Rightarrow |\mathbf{F}_{R,g}| = m_K a_{K,x}$$

und damit

$$\mu_{R,g} m_K g = m_K a_{K,x} \Rightarrow a_{K,x} = \boxed{\mu_{R,g} g}$$

dass die Reifenoberfläche auf der Straße rutscht, rollen die Reifen, ohne zu gleiten, wobei der Teil der Reifenlauffläche, der die Straße berührt, in Bezug auf die Straße in Ruhe bleibt. (Nacheinander berührt ständig ein anderer Teil des Reifens die Straße, während der Reifen rollt.) Zwischen Straße und Reifenlauffläche besteht daher Haftreibung. Die größte Reibungskraft, die der Reifen auf die Straße (und die Straße auf den Reifen) ausüben kann, ist demnach $\mu_{R,h} |\mathbf{F}_n|$.

Wie Abbildung 4.15 zeigt, bewegt sich bei einem Auto, das geradlinig mit der Geschwindigkeit v relativ zur Straße fährt, die Radnabe jedes Rads ebenfalls mit der Geschwindigkeit v . Wenn ein Rad schlupffrei rollt, bewegt sich sein oberer Teil schneller als v , sein unterer Teil hingegen langsamer als v . Dagegen bewegen sich *relativ zum Auto* alle Punkte entlang des Umfangs des Rads mit der gleichen Geschwindigkeit v im Kreis. Darüber hinaus ist derjenige Punkt des Reifens, der gerade die Straße be-

4.

$$\sum F_{i,S,x} = m_S a_{S,x} \Rightarrow |\mathbf{F}_Z| - |\mathbf{F}_{R,g}| = m_S a_{S,x}$$

und somit

$$|\mathbf{F}_Z| - \mu_{R,g} m_K g = m_S a_{S,x}$$

$$\Rightarrow a_{S,x} = \boxed{\frac{|\mathbf{F}_Z| - \mu_{R,g} m_K g}{m_S}}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Teilaufgabe a ist zu erwarten, wenn das Kind nicht auf dem Schlitten gleitet. Modelliert man das Kind und den Schlitten als ein einzelnes Teilchen und wendet das zweite Newton'sche Axiom darauf an, ergibt sich $|\mathbf{F}_Z| = (m_K + m_S)a_x$. Ersetzt man $|\mathbf{F}_Z|$ durch $\mu_{R,g}(m_K + m_S)g$ (Schritt 6 von Teilaufgabe a), erhält man $\mu_{R,g}(m_K + m_S)g = (m_K + m_S)a_x$. Dividiert man beide Seiten durch die Summe der Massen, ergibt sich das Ergebnis $a_x = \mu_{R,g}g$ aus Schritt 3 von Teilaufgabe a. Damit steht die Behandlung in Teilaufgabe a nicht im Widerspruch zur Betrachtung von Schlitten und Kind als ein Teilchen.

Weitergedacht: In diesem Beispiel wirkt die Reibung nicht der Bewegung des Kindes entgegen, sondern ermöglicht sie erst. Ohne Reibung würde das Kind hinten vom Schlitten herunterrutschen. Während sich das Kind zwar *in Bezug auf den Schlitten* nach hinten (links) bewegt bzw. dies versucht, bewegt es sich *in Bezug auf das Eis* nach vorn. Reibungskräfte wirken der Relativbewegung oder dem Bestreben einer Relativbewegung zwischen zwei Kontaktflächen entgegen. Außerdem gleitet der Schlitten in Bezug auf das Kind nach vorn bzw. ist bestrebt, dies zu tun. Die Reibungskraft auf den Schlitten ist nach hinten gerichtet und wirkt seiner Vorwärtsbewegung oder seinem Bestreben, sich vorwärts zu bewegen, entgegen.

röhrt, *relativ zur Straße* in Ruhe. (Andernfalls würde der Reifen auf der Straße rutschen.)

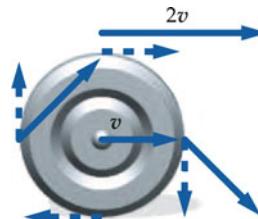


Abbildung 4.15 Die Strichlinien bezeichnen die Geschwindigkeiten relativ zur Autokarosserie, während die durchgezogenen Linien die Geschwindigkeiten relativ zur Straße zeigen.

Wenn die Motorleistung zu groß wird, haben die Reifen Schlupf, und die Räder drehen durch. Die Kraft, die das Auto beschleunigt, röhrt dann lediglich von der Gleitreibungskraft her, die geringer als die maximale Haftreibungskraft ist. Deshalb ist es sinnvoll, das Gaspedal behutsam zu betätigen, wenn man im Schnee feststeckt oder auf einer glatten Fahrbahn fährt, um dadurch ein Durchdrehen der Räder zu vermeiden. Je nachdem, wie man bremst, kann auch beim Abbremsen eines Autos zwischen der Straße und den Reifen entweder die Haftreibung oder die Gleitreibung wirken, um es anzuhalten. Tritt man so stark auf das Bremspedal, dass die Räder blockieren, gleiten die Reifen über die Straße, wobei die Bremskraft nur der Gleitreibungskraft entspricht. Bremst man dagegen schwächer, sodass die Räder nicht ins Rutschen kommen, wirkt die Haftreibungskraft als Bremskraft.

Wenn die Räder blockieren und die Reifen rutschen, hat dies gleich zwei nachteilige Auswirkungen: Zum einen steigt der Mindestbremsweg, und zum anderen lässt sich das Auto immer schlechter lenken. Ist das Fahrzeug einmal außer Kontrolle geraten, kann dies fatale Folgen haben. Antiblockiersysteme (ABS) sollen verhindern, dass die Räder beim scharfen Bremsen durchdrehen. Diese Systeme besitzen am Rad Geschwindigkeitssensoren. Erkennt das daran angeschlossene Steuergerät, dass das Rad kurz vor dem Blockieren steht, sendet es Signale, die die Bremse veranlassen, den Bremsdruck für dieses Rad bis zu 15-mal pro Sekunde auf- bzw. wieder abzubauen. Dieser veränderliche Bremsdruck wirkt ganz so, wie wenn man mit der Bremse „pumpt“. Allerdings wird beim ABS nur das Rad „gepumpt“, bei dem die Gefahr besteht, dass es blockiert. Bei dieser *Schwellwertbremsung* wird die maximale Reibungskraft zum Bremsen eingesetzt. In Beispiel 4.6 berechnen Sie, um wie viel Prozent das ABS den Bremsweg verkürzen kann, während Beispiel 4.7 eine Anwendung zeigt, um den Haftreibungskoeffizienten von Autoreifen zu bestimmen.

Beispiel 4.6: Die Wirkung des ABS

Ein Auto fährt mit 30 m/s auf einer horizontalen Straße. Die Reibungskoeffizienten zwischen der Straße und den Reifen betragen $\mu_{R,h} = 0,50$ und $\mu_{R,g} = 0,40$. Wie lang ist der Bremsweg des Autos, a) wenn das Auto mit einem Antiblockiersystem (ABS) ausgestattet ist und die Schwellwertbremsung wirkt oder b) wenn das Auto ohne ABS eine Vollbremsung durchführt, bei der die Räder blockieren? (Hinweis: Rutschende Reifen erwärmen sich, wobei sich die Reibungskoeffizienten ändern. Von solchen Temperatureffekten soll in diesem Beispiel jedoch abgesehen werden.)

Problembeschreibung: Die Kraft, durch die ein Auto, das bremst, zum Stehen kommt, ohne dass es dabei rutscht, ist die Haftreibungskraft, die die Straße auf die Reifen ausübt (Abbildung 4.16). Wir wenden das zweite Newton'sche Axiom an, um die Reibungskraft und die

Beschleunigung des Autos zu ermitteln. Der Bremsweg ergibt sich dann aus kinematischen Berechnungen.

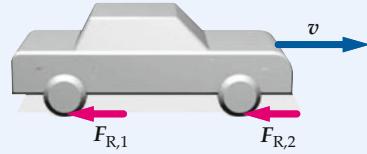


Abbildung 4.16 Bremsendes Auto.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für das Auto (Abbildung 4.17). Dabei sind alle vier Räder so zu behandeln, als wären sie ein einziger Berührungsrand mit dem Boden. Weiterhin wird angenommen, dass die Bremsen auf alle vier Räder wirken und dass F_R im Kräftediagramm die Summe der auf die einzelnen Räder wirkenden Reibungskräfte ist.

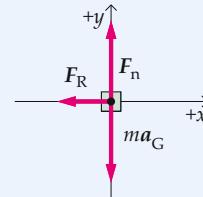


Abbildung 4.17 Kräftediagramm des Autos.

2. Unter der Annahme, dass die Beschleunigung konstant ist, nutzen wir Gleichung 2.30, um den Zusammenhang zwischen dem Bremsweg Δx und der Anfangsgeschwindigkeit $v_{0,x}$ auszudrücken:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$$

wenn

$$v_x = 0,$$

gilt also

$$\Delta x = -\frac{v_{0,x}^2}{2 a_x}$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m a_y$ auf das Auto an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um. Verwenden Sie daraufhin $|F_{R,max}| = \mu_{R,h} |F_n|$ und stellen Sie nach der Reibungskraft um:

$$\sum F_{i,y} = m a_y \Rightarrow |F_n| - m g = 0 \text{ und so } |F_n| = m g$$

$$|F_{R,h,max}| = \mu_{R,h} |F_n|$$

und

$$|F_{R,h,max}| = \mu_{R,h} m g$$

4. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m a_x$ auf das Auto an. Stellen Sie die Gleichung anschließend nach der Beschleunigung um:

$$\sum F_{i,x} = m a_x \Rightarrow -|F_{R,h,max}| = m a_x$$

ersetzt man

$$|F_{R,h,max}|$$

durch

$$\mu_{R,h} m g,$$

ergibt sich

$$-\mu_{R,h} m g = m a_x \Rightarrow a_x = -\mu_{R,h} g$$

5. Einsetzen in die Gleichung für Δx aus Schritt 2 ergibt den Bremsweg:

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\frac{v_{0,x}^2}{2 a_x} = \frac{v_{0,x}^2}{2 \mu_{R,h} g} \\ &= \frac{(30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot (0,50) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = [0,92 \cdot 10^2 \text{ m}]\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Wenn die Räder blockieren, übt die Straße auf die Räder eine Gleitreibungskraft aus. Auf ähnliche Weise wie in Teilaufgabe a erhalten wir für die Beschleunigung:

$$a_x = -\mu_{R,g} g$$

2. Somit beträgt der Bremsweg:

$$\begin{aligned}\Delta x &= -\frac{v_{0,x}^2}{2 a_x} = \frac{v_{0,x}^2}{2 \mu_{R,g} g} \\ &= \frac{(30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot (0,40) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = [1,1 \cdot 10^2 \text{ m}]\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß sind beide Verschiebungen positiv. Wie es sein sollte, verkürzt das Antiblockiersystem wesentlich den Bremsweg des Autos.

Weitergedacht: Wie Sie sehen, ist der Bremsweg mit blockierten Rädern um mehr als 20 % länger. Außerdem ist bemerkenswert, dass der Bremsweg unabhängig von der Masse des Autos ist. Mit anderen Worten, der Bremsweg für einen Kleinwagen ist genauso groß wie der für einen Schwerlasttransport – dies natürlich nur, solange die Reibungskoeffizienten gleich sind. Allerdings heizen sich die Reifen bei einem schweren LKW beim Rutschen stark auf, was den Gleitreibungskoeffizienten $\mu_{R,g}$ wesentlich ändert – dieser Effekt wurde hier außer Acht gelassen. ■

Beispiel 4.7: Der Reifentest

Ein Student hat einen Ferienjob bei der NASCAR, einer bekannten Motorsportliga der USA, und soll in deren Auftrag Autoreifen testen. Dabei soll er einen neuen Rennreifentyp prüfen, um zu entscheiden, ob der Haftreibungskoeffizient zwischen den Reifen und dem Betonbelag wie vom Hersteller angegeben 0,90 beträgt. Bei einem Rutschtest kann ein Rennwagen mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag einen Vollkreis mit einem Radius von 45,7 m in 15,2 s zurücklegen, ohne dass er ins Rutschen kommt. Nehmen Sie an, dass der Luftwiderstand und die Rollreibung vernachlässigbar sind und dass die Straßenoberfläche horizontal ist. Bei einem Rutschtest fährt ein Auto mit der höchstmöglichen Geschwindigkeit, bei der es noch nicht rutscht, auf einer ebenen, horizontalen Fläche im Kreis. a) Wie hoch war dabei sein Geschwindigkeitsbetrag v ? b) Wie hoch war die Beschleunigung? c) Wie groß war der Haftreibungskoeffizient zwischen den Reifen und der Straße mindestens?

Problembeschreibung: Abbildung 4.18 zeigt die am Auto angreifenden Kräfte. Die Normalkraft F_n ist im Gleichgewicht mit der durch die Gravitationskraft $F_G = m a_G$ bedingten Kraft, die nach unten wirkt. Horizontal wirkt die Haftreibungskraft, die zur Zentripetalbeschleunigung führt. Sie ist umso größer, je schneller das Auto fährt. Der Geschwindigkeitsbetrag lässt sich aus dem Kreisumfang und aus der Umlaufzeit T ermitteln. Dieser Geschwindigkeitsbetrag bestimmt die untere Grenze für den maximalen Haftreibungskoeffizienten.

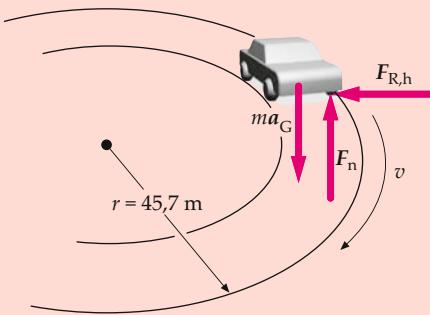


Abbildung 4.18 Darstellung der am Auto angreifenden Kräfte, während es sich auf einer Kreisbahn bewegt.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftebild für das Auto (Abbildung 4.19). Die $+r$ -Richtung zeigt vom Kreismittelpunkt nach außen.

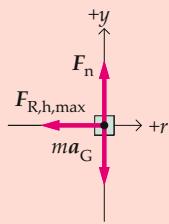


Abbildung 4.19 Kräftediagramm des Autos.

2. Der Geschwindigkeitsbetrag v ist der Quotient aus dem Kreisumfang und der pro Runde zurückgelegten Zeit:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot (45,7 \text{ m})}{15,2 \text{ s}} = [18,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie aus v die Zentripetal- und die Tangentialbeschleunigung:

$$a_{ZP} = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(18,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{45,7 \text{ m}} = [-7,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = [0]$$

Die Beschleunigung beträgt $7,81 \text{ m/s}^2$ und weist in zentripetale Richtung.

Teilaufgabe c

1. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = ma_y$ auf das Auto an. Stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um und berechnen Sie daraus die maximale Reibungskraft:

$$\sum F_{i,y} = ma_y$$

$$|F_n| - mg = 0 \text{ und so } |F_n| = mg$$

und

$$|F_{R,h,max}| = \mu_{R,h} |F_n| = \mu_{R,h} mg$$

2. Wenden Sie $\sum F_{ZP} = ma_{ZP}$ auf das Auto an:

$$\sum F_r = ma_r$$

$$-|F_{R,h,max}| = m \left(-\frac{v^2}{r} \right) \Rightarrow |F_{R,h,max}| = m \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

3. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 1 der Teilaufgabe c in die Gleichung ein und berechnen Sie $\mu_{R,h}$:

$$\mu_{R,h} mg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu_{R,h} g = \frac{v^2}{r}$$

$$\mu_{R,h} = \frac{v^2}{rg} = \frac{(18,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{(45,7 \text{ m}) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = [0,796]$$

Plausibilitätsprüfung: Wäre $\mu_{R,h}$ gleich 1,00, wäre die nach innen gerichtete Kraft betragsmäßig gleich mg und die Zentripetalbeschleunigung betragsmäßig gleich g . In unserem Fall ist $\mu_{R,h}$ rund 0,80, wobei der Betrag der Zentripetalbeschleunigung etwa $0,80 g$ ist.

Weitergedacht: Entspricht das Ergebnis des Reifentests der Angabe des Herstellers, dass der Haftreibungskoeffizient 0,90 beträgt? Dies trifft zu: Bei der Berechnung des Betrags der Reibungskraft hatten wir die Reibungskraft berücksichtigt, die notwendig ist, um das Auto zum Kreismittelpunkt zu beschleunigen. Reibungskräfte, die der Widerstandskraft und der Rollreibung entgegenwirken, hatten wir dagegen vernachlässigt. Bei einer Geschwindigkeit von $18,9 \text{ m/s}$, also 68 km/h , ist der Luftwiderstand mit Sicherheit erheblich. ■

4.2 Widerstandskräfte

Flüssigkeiten und Gase besitzen verschiedene gemeinsame Eigenschaften und werden deshalb gelegentlich unter dem Sammelbegriff **Fluid** zusammengefasst. Wenn sich ein Körper durch ein Fluid wie Wasser oder Luft bewegt, erzeugt dieses eine **Widerstandskraft**, die der Bewegung des Körpers entgegenwirkt. Diese Widerstandskraft ist abhängig von der Form des Körpers, von den Eigenschaften des Fluids und von der Geschwindigkeit des Körpers relativ zum Fluid. Im Gegensatz zur bisher behandelten Reibung steigt diese Widerstandskraft mit der Geschwindigkeit des Körpers an. Bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten ist sie ungefähr proportional zur Geschwindigkeit, bei höheren Geschwindigkeiten dagegen eher proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

Wir betrachten einen Körper, der unter dem Einfluss der als konstant angenommenen Gravitation aus der Ruhe nach unten fällt. Der Betrag der Widerstandskraft ist dann

$$F_W = b |v|^n, \quad (4.5)$$

DIE GLEICHUNG FÜR DIE WIDERSTANDSKRAFT

wobei b und n Konstanten sind.

Wie in Abbildung 4.20 gezeigt ist, wirken auf einen in der Luft fallenden Körper die konstante, nach unten gerichtete Gravitationskraft mg und eine nach oben gerichtete Kraft $b|v|^n$. Legt man die $+y$ -Richtung so, dass sie nach **oben** zeigt, erhält man aus dem zweiten Newton'schen Axiom

$$-mg + b|v|^n = ma_y. \quad (4.6)$$

Umstellen nach der Beschleunigung ergibt

$$a_y = -g + \frac{b}{m} |v|^n. \quad (4.7)$$

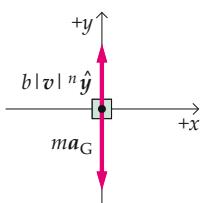


Abbildung 4.20 Kräftediagramm für einen in der Luft fallenden Körper.



(© qay/pixelio.)

Bei $t = 0$, zu dem Zeitpunkt, zu dem der Körper losgelassen wird, ist seine Geschwindigkeit null. Damit ist auch die Widerstandskraft null, sodass die Beschleunigung g nach unten wirkt. Während die Geschwindigkeit des Körpers steigt, steigt auch die Widerstandskraft, sodass die Beschleunigung abnimmt. Schließlich wird die Geschwindigkeit so hoch, dass der Betrag der Widerstandskraft $b|v|^n$ gegen den der Gravitationskraft mg geht. In diesem Grenzwert geht die Beschleunigung gegen null, wobei die dann erreichte Geschwindigkeit die sogenannte **Endgeschwindigkeit** v_E ist. Bei der Endgeschwindigkeit sind Widerstandskraft und Gravitationskraft gerade im Gleichgewicht, sodass die Beschleunigung null ist. Setzt man in Gleichung 4.6 $v = v_E$ und $a_y = 0$, erhält man:

$$b|v_E|^n = mg.$$

Löst man diese Gleichung nach der Endgeschwindigkeit auf, ergibt sich:

$$|v_E| = \left(\frac{mg}{b} \right)^{1/n}. \quad (4.8)$$

Je größer die Konstante b ist, desto kleiner ist die Endgeschwindigkeit. Beim Entwurf von Kraftfahrzeugen wird versucht, die

Konstante b und damit den Luftwiderstand so klein wie möglich zu machen. Ein Fallschirm ist dagegen so konstruiert, dass er b möglichst groß und die Endgeschwindigkeit dadurch möglichst klein macht. So beträgt z. B. die Endgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers vor Öffnen des Fallschirms ungefähr 200 km/h, also rund 60 m/s. Welcher Widerstandskraft und Beschleunigung er dabei ausgesetzt ist, zeigt Beispiel 4.8. Beim Öffnen des Fallschirms nimmt der Luftwiderstand schnell zu und wird bald größer als die Gravitationskraft. Dadurch erfährt der Fallschirmspringer während des Fallens eine Beschleunigung nach oben, sodass seine Bewegung abgebremst wird. In dem Maße, in dem sich die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers verringert, nimmt auch die Widerstandskraft ab, bis er eine Endgeschwindigkeit von rund 20 km/h erreicht.

Beispiel 4.8: Die Endgeschwindigkeit

Ein Fallschirmspringer mit einer Masse von 64,0 kg fällt mit einer Endgeschwindigkeit von 180 km/h, wenn er seine Arme und Beine ausgestreckt hat. a) Wie groß ist der Betrag der nach oben gerichteten Widerstandskraft F_W auf den Fallschirmspringer? b) Wie groß ist die Konstante b , wenn sich der Betrag der Widerstandskraft gemäß $b|v|^2$ berechnet?

Problembeschreibung: In Teilaufgabe a verwenden wir das zweite Newton'sche Axiom, um die Widerstandskraft zu berechnen. Anschließend berechnen wir mit den gegebenen Werten in Teilaufgabe b die Konstante b .

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm (Abbildung 4.21).

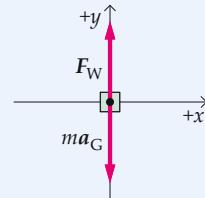


Abbildung 4.21 Kräftediagramm des Fallschirmspringers.

2. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = ma_y$ an. Da sich der Fallschirmspringer mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist seine Beschleunigung null:

$$\sum F_{i,y} = ma_y \Rightarrow F_W - mg = 0$$

und damit

$$F_W = mg = (64,0 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) = 628 \text{ N}$$

Teilaufgabe b

1. Wir setzen $F_W = b|v|^2$, um die Konstante b zu ermitteln:

$$F_W = mg = b|v|^2$$

und so

$$b = \frac{mg}{|v|^2}$$

2. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit in m/s und berechnen Sie anschließend b :

$$\begin{aligned} 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} &= \frac{180 \text{ km}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \\ &= 50,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$b = \frac{(64,0 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})}{(50,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = [0,251 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}]$$

Plausibilitätsprüfung: Für die Konstante b ergibt sich die Maßeinheit kg/m . Wir multiplizieren sie mit $(\text{m}/\text{s})^2$. Dabei entsteht die als $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ definierte Krafteinheit Newton, wie es sein sollte, da die Widerstandskraft eine Kraft ist.

Auf Reibung in Fluiden werden wir in Kapitel 10 näher eingehen und die Rollen der Konstanten b und n anhand von Beispielen genauer erläutern.

4.3 Trägheits- oder Scheinkräfte

Damit ein Auto durch eine Kurve fährt, muss auf dieses Auto eine radial *nach innen* gerichtete Zentripetalbeschleunigung a_{ZP} resultieren. Sitzen wir in diesem Auto, spüren wir jedoch eine Beschleunigung a_{ZF} , die uns radial *nach außen* treibt. Die Beschleunigung a_{ZF} heißt **Zentrifugalbeschleunigung**, die auf uns wirkende Kraft $F_{ZF} = ma_{ZF}$ heißt **Zentrifugalkraft**. Diese Kraft zählt zu den **Trägheits- oder Scheinkräften**, die immer dann auftreten, wenn wir uns in einem beschleunigten Bezugssystem – wie dem des durch eine Kurve fahrenden Autos – befinden. Ein System ohne Scheinkräfte, das entsprechend dem Trägheitssatz seine (geradlinig gleichförmige) Bewegung beibehält, nennt man ein **Inertialsystem**. In Kapitel 31 werden wir uns ausführlich mit den Eigenschaften von solchen Inertialsystemen beschäftigen.

Scheinkräfte entstehen bei der Transformation der Bewegungsgleichungen von einem Inertialsystem I in ein beschleunigtes System B. Dies ist leicht einzusehen, wenn wir zunächst den einfachen Fall betrachten, dass sich die Beschleunigung zeitlich nicht verändert, wie es z. B. beim Anfahren eines Autos aus dem Ruhezustand der Fall ist. Die Geschwindigkeit eines Körpers im

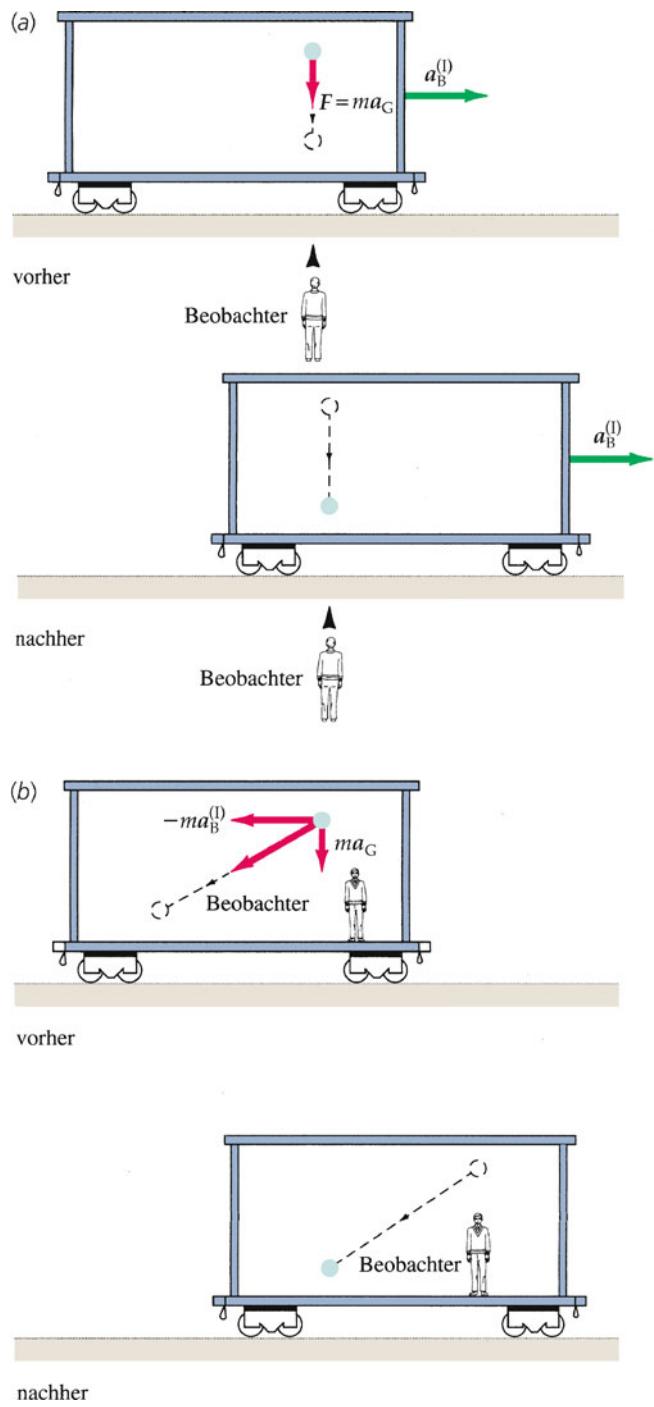


Abbildung 4.22 Ein Ball wird in einem Eisenbahnwaggon losgelassen, der aus der Ruhelage mit konstanter Beschleunigung $a_B^{(I)}$ nach rechts abfährt. a) Für einen ruhenden Beobachter neben den Schienen, der sich in einem Inertialsystem befindet, fällt der Ball geradlinig nach unten. b) Für einen Beobachter im beschleunigten Waggon bewegt sich der Ball zusätzlich nach hinten. Der Beobachter führt diese nach hinten gerichtete Beschleunigung auf eine Scheinkraft $F_{tr} = -m a_B^{(I)}$ zurück.

4.3 Trägheits- oder Scheinkräfte

System des Autos $v^{(B)}$ ergibt sich aus der Geschwindigkeit $v^{(I)}$ im Ruhe- bzw. Inertialsystem aus Gleichung 2.17

$$v^{(B)} = v^{(I)} - v_B^{(I)}. \quad (4.9)$$

Dabei ist $v_B^{(I)}$ die Geschwindigkeit, die das Auto im Ruhe- system besitzt. Wird das Auto beschleunigt, ist also $a_B^{(I)} = dv_B^{(I)}/dt \neq 0$, dann folgt aus Gleichung 4.9

$$a^{(B)} = a^{(I)} - a_B^{(I)}. \quad (4.10)$$

Das bedeutet, dass selbst dann auf den Körper im beschleunigten System eine Kraft wirkt, wenn im Ruhesystem keine Kräfte auf ihn wirken und damit $a^{(I)} = 0$ gilt. Diese Kraft nennt man eine Schein- oder Trägheitskraft F_{Tr} im beschleunigten System. In unserem Beispiel vom anfahrenden Auto ergibt sie sich zu

$$F_{Tr} = m a^{(B)} = -m a_B^{(I)}.$$

Die Kraft F_{Tr} heißt zwar Scheinkraft, aber sie ist für einen Beobachter in dem beschleunigten System genauso real zu spüren, wie alle anderen Kräfte auch.

Wir betrachten zunächst einen Eisenbahnwaggon, der sich auf horizontal angeordneten Schienen geradlinig mit konstanter Beschleunigung $a_B^{(I)}$ relativ zur Umgebung bewegt. Dabei wollen wir die Umgebung (und damit die Schienen) als Inertialsystem ansehen, sodass ein mit dem Waggon verbundenes Bezugssystem ein beschleunigtes System bildet. Wenn im Waggon ein Ball frei fällt, wird ein Beobachter am Bahngleis, der sich im Inertialsystem befindet, den Ball senkrecht herunterfallen sehen, wie in Abbildung 4.22a gezeigt, da der freie Fall des Balls unabhängig von der Bewegung des Waggons stattfindet. Jedoch wird sich der Waggon, während der Ball fällt, mit $a_B^{(I)}$ unter ihm weiterbewegen. Ein im Waggon mitfahrender Beobachter sieht den Ball entlang der in Abbildung 4.22b eingezeichneten Trajektorie fliegen, da der Ball von ihm aus gesehen nicht senkrecht zu Boden fällt, sondern ans hintere Ende des Waggons abgelenkt wird. Der Beobachter im Waggon wird diese Ablenkung dadurch erklären, dass der Ball von ihm aus gesehen in horizontale Richtung mit $-a_B^{(I)}$ wegbeschleunigt wird, während er mit a_G senkrecht nach unten fällt. Für beide Beobachter trifft der Ball an derselben Stelle im Waggon auf dem Boden auf, auch wenn sie unterschiedliche auf den Ball wirkende Kräfte zur Beschreibung der Bewegung benutzen. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom lautet die Bewegungsgleichung des Körpers im Bezugssystem des Waggons allgemein

$$m a^{(B)} = m (a_G - a_B^{(I)}).$$

Betrachten wir als weiteres Beispiel eine Lampe, die an einer Schnur von der Decke des Waggons herabhängt. Der Waggon erfährt im Inertialsystem eine Beschleunigung $a_B^{(I)}$. Die Beschleunigung der Lampe und die Kräfte, die auf sie wirken, sind in Abbildung 4.23 sowohl für das Inertialsystem als auch für

das beschleunigte System eingezeichnet. Für beide Beobachter gleicht die Vertikalkomponente der Zugkraft in der Schnur die Gewichtskraft der Lampe aus. Im Inertialsystem der Schienen wird die Lampe beschleunigt. Die resultierende Kraft für diese Beschleunigung ist die Horizontalkomponente der Zugkraft in der Schnur. Im Bezugssystem des Waggons ist die Lampe in Ruhe und erfährt keine Beschleunigung. Dies lässt sich damit erklären, dass die Horizontalkomponente der Zugkraft durch die Scheinkraft $F_{Tr} = -m a_B^{(I)}$ ausgeglichen wird, die ein Beobachter im Waggon auf alle Körper innerhalb des Waggons wirken sieht.

Abbildung 4.24 zeigt ein weiteres beschleunigtes Bezugssystem, eine rotierende Scheibe, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Jeder Punkt auf der Scheibe bewegt sich auf einer Kreisbahn und besitzt daher eine Zentripetalbeschleunigung $a_B^{(I)} = a_{ZP}$. Ein Bezugssystem, das mit der Scheibe verbunden ist, ist somit ein beschleunigtes Bezugssystem. In der Abbildung ist ein Körper, der relativ zur Scheibe ruht, über ein Seil der Länge r mit dem Mittelpunkt der Scheibe verbunden. Für einen Beobachter im Inertialsystem dreht sich der Körper mit einer Geschwindigkeit $v_B^{(I)} = \omega r$ im Kreis und wird zum Kreismittelpunkt hin beschleunigt. Diese Zentripetalbeschleunigung

$$a_{ZP} = -\left(v_B^{(I)}\right)^2/r = -\omega^2 r$$

wird von der Zugkraft im Seil verursacht. Für einen Beobachter auf der Scheibe ist der Körper dagegen in Ruhe, d. h., er ist nicht beschleunigt. Auf ihn wirkt eine Scheinkraft $F_{ZF} = -F_{ZP} = m \omega^2 r$ radial nach außen, die von der Zugkraft im Seil ausgeglichen wird. Diese Zentrifugalkraft erscheint dem Beobachter auf der Scheibe durchaus real. Wenn er selbst auf der Scheibe stehen bleiben und nicht nach außen gedrückt werden will, muss eine nach innen gerichtete Kraft vom Boden auf ihn übertragen werden, die die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft kompensiert. Diese Kraft ist die Haftreibung zwischen dem Beobachter und der Scheibe.

!

Die Zentrifugalkraft ist eine Scheinkraft, die nur Beobachter in rotierenden Bezugssystemen zur Beschreibung von Bewegungen benutzen können. In Inertialsystemen treten hingegen nur Zentripetalkräfte auf. Diese sind betragsgleich, ihr Vektor zeigt jedoch in die entgegengesetzte Richtung.

Stellen Sie sich einen Satelliten nahe der Erdoberfläche vor, den wir von der Erde aus beobachten. Die Erde bildet das Zentrum der Kreisbewegung des Satelliten. (Wir vernachlässigen hier die Tatsache, dass die Erde aufgrund ihrer Eigendrehung genau genommen kein Inertialsystem ist.) Auf den Satelliten wirken daher einmal die durch die Erde hervorgerufene Gravitationskraft F_G und die durch seine Kreisbewegung hervorgerufene Scheinkraft F_{ZF} . Beide sind radial, aber entgegengesetzt gerichtet und müssen sich ausgleichen, damit der Satellit auf einer stabilen Umlaufbahn mit $F_G + F_{ZF} = 0$ um die Erde kreist.

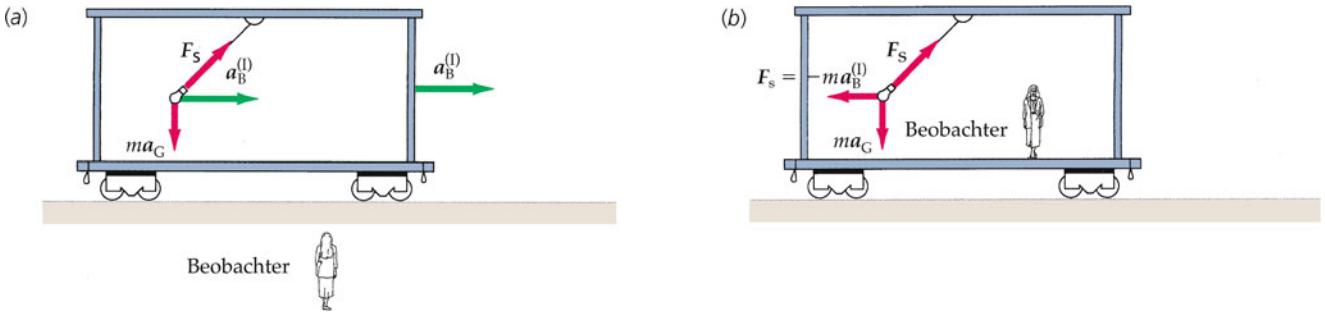


Abbildung 4.23 Eine Lampe hängt an einer Schnur von der Decke eines beschleunigten Eisenbahnwaggons herab. a) Für einen Beobachter in einem Inertialsystem wird die Lampe nach rechts beschleunigt, weil die Horizontalkomponente der Zugkraft als resultierende Kraft nach rechts gerichtet ist. b) Im beschleunigten Bezugssystem bleibt die Lampe in Ruhe, wird also nicht beschleunigt. Die Zugkraft, die auch hier nach rechts wirkt, wird von einer Scheinkraft $F_{tr} = -m a_B^{(I)}$ ausgeglichen.

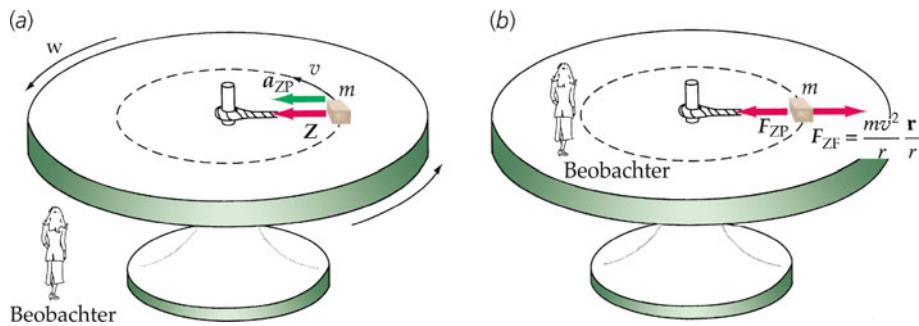


Abbildung 4.24 Ein Körper ist über ein Seil mit dem Mittelpunkt einer rotierenden Scheibe verbunden. a) Für einen Beobachter in einem Inertialsystem neben der Scheibe bewegt sich der Körper auf einer Kreisbahn mit einer Zentripetalbeschleunigung, die von der Zugkraft im Seil aufgebracht wird. b) Für einen Beobachter auf der Scheibe befindet sich der Körper in Ruhe, er wird also nicht beschleunigt. Dazu muss die Scheinkraft $F_{ZF} = m \omega^2 r$ durch die Zugkraft des Seils ausgeglichen werden.

Neben der Zentrifugalkraft, die auf alle Körper in einem rotierenden Bezugssystem B wirkt, tritt in diesem System eine weitere Scheinkraft auf, wenn sich der Körper mit der Geschwindigkeit $v^{(B)}$ in B bewegt, also in B nicht in Ruhe ist. Diese Scheinkraft wird **Coriolis-Kraft** genannt. Betrachten wir den einfachen Fall, dass $v^{(B)}$ radial gerichtet ist, also $v^{(B)} = v^{(B)} \hat{r}$ gilt. Dann ergibt sich die Coriolis-Kraft zu

$$F_{Cor} = -2 m \omega v^{(B)}. \quad (4.11)$$

Stellen wir uns die in Abbildung 4.25 dargestellte Situation vor. Wird der Ball auf der rotierenden Scheibe von innen nach außen geworfen, so ist die Coriolis-Kraft auf den Ball entgegengesetzt gerichtet zur Drehrichtung der Scheibe, d. h. entgegengesetzt gerichtet zu $v_B^{(I)}$. Wird der Ball aber von außen nach innen geworfen, dann kehrt sich die Richtung der Coriolis-Kraft auf den Ball um, sie hat jetzt die gleiche Richtung wie $v_B^{(I)}$. Auf diesen Sachverhalt weist das Vorzeichen in Gleichung 4.11 hin.

Die beiden Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen – die Zentrifugalkraft und die Coriolis-Kraft – treten aufgrund der Erddrehung in allen Bezugssystemen auf, die starr mit der Erde verbunden sind. Coriolis-Kräfte sind vor allem für das Verständ-

nis des Wetters von großer Bedeutung (Abbildung 4.26). Diese Kräfte sind beispielsweise dafür verantwortlich, dass sich die Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel linksherum (gegen den Uhrzeigersinn) und auf der Südhalbkugel rechtsherum (im Uhrzeigersinn) drehen, wenn man sie von oben betrachtet (so wie wir es von Satellitenbildern her gewohnt sind).

Um die Erdrotation zu demonstrieren, baute Léon Foucault (1819–1868) im Jahre 1851 ein Pendel auf, das aus einer 28 kg schweren Kupferkugel bestand, die an einem 67 m langen Draht frei über dem Boden schwingen konnte. Selbst bei der sehr langsamen Erdrotation konnte Foucault beobachten, wie sich die Schwingungsebene des Pendels aufgrund der Coriolis-Kraft unter dem Pendel wegdrehte, genau wie die rotierende Scheibe aus Abbildung 4.25. Daher beschrieb die Pendelkugel in der Schwingungsebene eine rosettenförmige Bahnkurve, anstatt sich hin und her zu bewegen, wie man es erwartet hätte. Beispiel 4.9 zeigt, wie die Coriolis-Kraft aufgrund der Erdrotation von der geografischen Breite abhängt. Wie das Beispiel zeigt, darf die Richtung der Geschwindigkeit in der Schwingungsebene nicht parallel zur Richtung der Winkelgeschwindigkeit orientiert sein, da sonst keine Coriolis-Kraft auftritt. Somit können wir Gleichung 4.11 durch die in Beispiel 4.9 gewonnenen Erkenntnisse zu

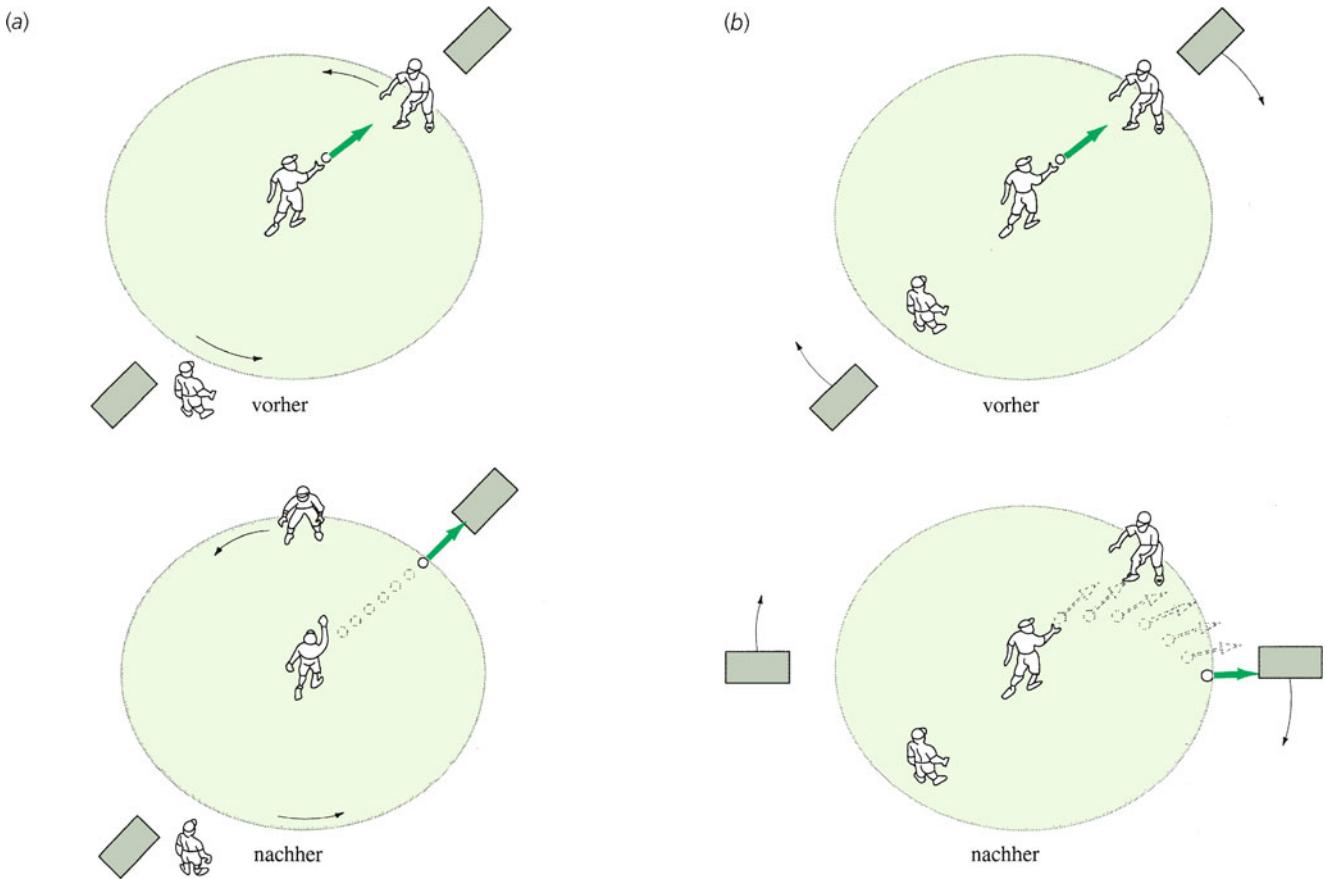


Abbildung 4.25 Ein Junge steht in der Mitte einer rotierenden Scheibe und wirft seinem Freund am Rand der Scheibe einen Ball zu. a) In einem Inertialsystem bewegt sich der Ball geradlinig und verpasst den zweiten Jungen, weil sich dieser mit der Scheibe weggedreht hat. b) Im Bezugssystem der rotierenden Scheibe ist der zweite Junge in Ruhe, und der Ball wird nach rechts abgelenkt. Die Scheinkraft, die den Ball von seiner geradlinigen Bahn ablenkt, heißt Coriolis-Kraft.

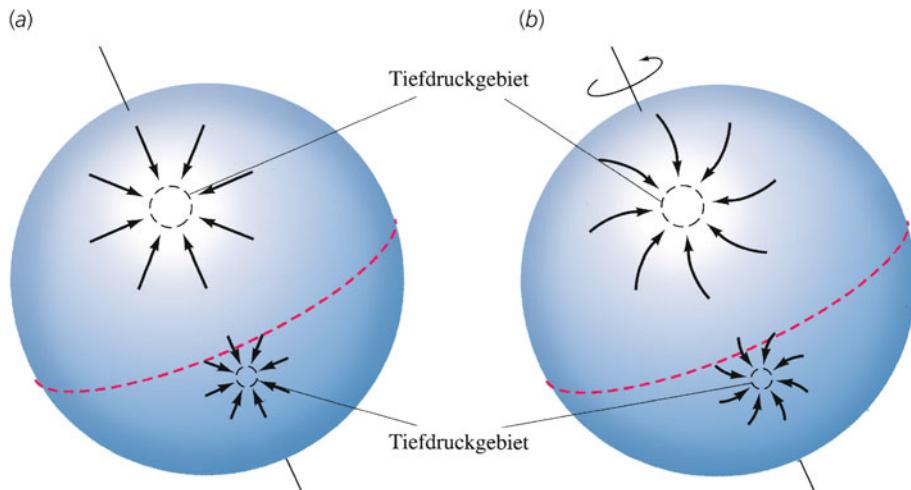


Abbildung 4.26 a) Wenn sich die Erde nicht drehen würde, liefern die Winde geradlinig in die Tiefdruckgebiete hinein. b) Da sich die Erde aber dreht, lenkt die Coriolis-Kraft die Winde auf der Nordhalbkugel nach rechts ab, sodass sie ein Tiefdruckgebiet linksdrehend umströmen. Auf der Südhalbkugel erfolgt die Ablenkung nach links, und die Winde laufen rechtsdrehend um das Tiefdruckgebiet herum.

$$F_{\text{Cor}} = -2 \cdot m \cdot \omega \times v^{(B)} \quad (4.12)$$

DEFINITION DER CORIOLIS-KRAFT

verallgemeinern, wobei \times das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren ausdrückt. Anders formuliert ist

$$F_{\text{Cor}} = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot v^{(B)} \cdot \sin \phi, \quad (4.13)$$

wobei ϕ der von ω und $v^{(B)}$ eingeschlossene Winkel ist. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ω wird in Kapitel 8 noch eingehend betrachtet werden.

Beispiel 4.9: Das Foucault'sche Pendel

Berechnen Sie die Coriolis-Kraft, die auf die 28 kg schwere Kugel des Foucault'schen Pendels wirkt, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit von 0,4 m/s in radiale Richtung bewegt und sich das Pendel a) in Paris (11° N), b) am Nordpol, c) am Äquator befindet.



Abbildung 4.27 Das Foucault'sche Pendel an der Universität Louisville. (Mit freundlicher Genehmigung von John Kielkopf/University of Louisville.)

Problembeschreibung: Um die Coriolis-Kraft zu berechnen, benutzen wir Gleichung 4.11. Die Masse und die Geschwindigkeit des Pendels sind gegeben. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde muss noch in Abhängigkeit des Breitengrads bestimmt werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Benutzen Sie Gleichung 4.11, um die Coriolis-Kraft zu berechnen:

$$F_{\text{Cor}} = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot v^{(B)}$$

2. Zeichnen Sie eine Skizze der Erde und zerlegen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω für einen Punkt auf der nördlichen Hemisphäre mit geografischer Breite ϕ in ihre einzelnen Komponenten.

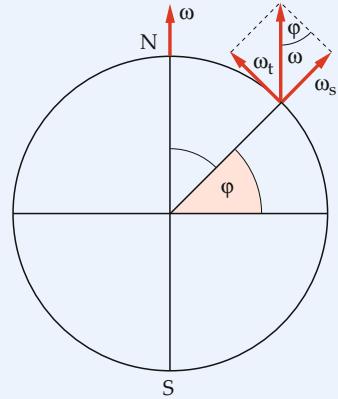


Abbildung 4.28 Skizze zur Berechnung der Coriolis-Kraft auf der Nordhalbkugel.

3. Für die Coriolis-Kraft in der Schwingungsebene des Pendels ist nur die Komponente ω_s relevant:

$$\omega_s = \omega \cdot \sin \phi$$

4. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 3 für die Winkelgeschwindigkeit ein und berechnen Sie das Endergebnis mit der Gleichung aus Schritt 1:

$$\begin{aligned} F_{\text{Cor}} &= -2 \cdot m \cdot \omega_s \cdot v^{(B)} = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot \sin \phi \cdot v^{(B)} \\ &= -2 \cdot 28 \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \cdot \sin 11^\circ \cdot 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= \boxed{-3 \cdot 10^{-4} \text{ N}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie mit der in Teilaufgabe a hergeleiteten Formel die Coriolis-Kraft für $\phi = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} F_{\text{Cor}} &= -2 \cdot m \cdot \omega_s \cdot v^{(B)} = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot \sin \phi \cdot v^{(B)} \\ &= -2 \cdot 28 \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \cdot \sin 90^\circ \cdot 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= \boxed{-2 \cdot 10^{-3} \text{ N}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Berechnen Sie mit der in Teilaufgabe a hergeleiteten Formel die Coriolis-Kraft für $\phi = 0^\circ$:

$$\begin{aligned} F_{\text{Cor}} &= -2 \cdot m \cdot \omega_s \cdot v^{(B)} = -2 \cdot m \cdot \omega \cdot \sin \phi \cdot v^{(B)} \\ &= -2 \cdot 28 \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \cdot \sin 0^\circ \cdot 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= \boxed{0 \text{ N}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Aufgrund der sehr langsamen Erdrotation sind die berechneten Coriolis-Kräfte sehr klein. Da 1 Newton definiert ist als $1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, stimmen auch die berechneten Einheiten mit den zu erwartenden überein. Die in Teilaufgabe a berechnete Kraft ist kleiner als die maximale Coriolis-Kraft, die am Pol auftritt, da die Schwingungsebene am Pol senkrecht auf dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit steht. Die Coriolis-Kraft am Äquator ist null, da die Schwingungsebene und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit parallel zueinander stehen.

4.4 Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze

Der Nachthimmel mit seinen Myriaden von Sternen und leuchtenden Planeten hat uns Erdbewohner schon immer fasziniert. Gegen Ende des 16. Jahrhunderts – noch vor Erfindung des Teleskops – untersuchte der dänische Astronom Tycho Brahe (1546–1601) die Planetenbewegungen und stellte Beobachtungen mit bis dahin unerreichter Präzision an. Mit Brahes Daten erkannte der deutsche Astronom Johannes Kepler (1571–1630) um 1619, dass die Bahnen der Planeten um die Sonne nicht – wie seit der Antike angenommen – Kreise, sondern Ellipsen sind (Abbildung 4.29). Kepler zeigte auch, dass die Planeten sich schneller bewegen, wenn ihre Bahn sie dicht an die Sonne heranführt, und langsamer, wenn sie weiter von der Sonne entfernt sind. Schließlich entdeckte Kepler einen exakten Zusammenhang zwischen der Umlaufzeit eines Planeten und seiner Entfernung von der Sonne (Tabelle 4.2). Er fasste diese Erkenntnisse in drei empirischen Regeln über die Planetenbewegung zusammen. Diese drei Kepler'schen Gesetze waren die Grundlage für Isaac Newton, als er sein Gravitationsgesetz entwickelte. Wir werden diese Gesetze nun im Einzelnen vorstellen.

Die Umlaufbahnen aller Planeten haben die Form einer Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

1. KEPLER'SCHES GESETZ

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Entfernungen zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist (Abbildung 4.30). Diese beiden Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse. Abbildung 4.31 zeigt eine solche elliptische Bahn mit der Sonne in einem Brennpunkt der Ellipse. Die Umlaufbahn der Erde um die Sonne ist nur sehr schwach elliptisch und fast kreisförmig: Die Entfernung zur Sonne beträgt im Perihel, dem sonnennächsten Punkt der Bahn, $1,48 \cdot 10^{11} \text{ m}$, im Aphel, dem sonnenfernsten Punkt, sind es $1,52 \cdot 10^{11} \text{ m}$. (Die Bezeichnungen leiten sich vom griechischen *helios* für „Sonne“, *peri* für „um ... herum“ und *apo* für „von ... weg“ ab.) Das Mittel dieser beiden Werte, die Hauptachse der elliptischen

4.4 Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze

Tabelle 4.2 Mittlere Bahnradien und Umlaufzeiten für die Planeten unseres Sonnensystems.

Planet	Mittlerer Radius r (in 10^{10} m)	Umlaufzeit T (in a)
Merkur	5,79	0,241
Venus	10,8	0,615
Erde	15,0	1,00
Mars	22,8	1,88
Jupiter	77,8	11,9
Saturn	143	29,5
Uranus	287	84
Neptun	450	165
(Pluto)	590	248



Abbildung 4.29 Die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne (nicht maßstabsmäßig). Im August 2006 beschloss die Internationale Astronomische Union (IAU) eine neue Definition für Planeten; nach dieser Definition ist Pluto kein Planet mehr, sondern fällt in die neue Kategorie der „Zwergplaneten“.

Bahn, beträgt $1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Diese mittlere Entfernung der Erde zur Sonne definiert die sogenannte Astronomische Einheit (AE, im internationalen Sprachgebrauch AU):

$$1 \text{ AE} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}. \quad (4.14)$$

Die Astronomische Einheit wird häufig zur Angabe von Entfernungen innerhalb des Sonnensystems verwendet.

Die Verbindungsgeraden von der Sonne zu einem Planeten überstreichen in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen.

2. KEPLER'SCHES GESETZ (FLÄCHENSATZ)

Abbildung 4.32 illustriert das zweite Kepler'sche Gesetz, den sogenannten Flächensatz. Ein Planet bewegt sich in der Nähe der Sonne rascher als in größerer Entfernung zur Sonne. Allerdings bleibt die Fläche, die der Radiusvektor (in älterer Literatur oft auch Leitstrahl oder Fahrstrahl genannt) in einem festen Zeitintervall überstreicht, während des gesamten Umlaufs gleich. Der Flächensatz folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses, den wir in Kapitel 8 noch näher untersuchen werden.

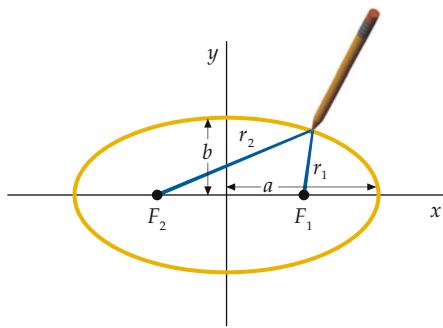


Abbildung 4.30 Eine Ellipse ist definiert als der geometrische Ort aller Punkte P , für die die Entfernung zwischen einem festen Punkt F_1 und P plus die Entfernung von P zu einem zweiten festen Punkt F_2 konstant ist: $r_1 + r_2 = \text{konstant}$. Die beiden festen Punkte heißen die Brennpunkte der Ellipse. Die Strecke a ist die große Halbachse oder *Hauptachse*, die Strecke b die kleine Halbachse oder *Nebenachse*. Man erhält eine Ellipse, indem man einen Faden fester Länge in den beiden Brennpunkten befestigt und damit die Spitze eines Bleistifts führt (sogenannte Gärtnerkonstruktion). Der Kreis ist ein Spezialfall der Ellipse, bei dem die beiden Brennpunkte zusammenfallen.

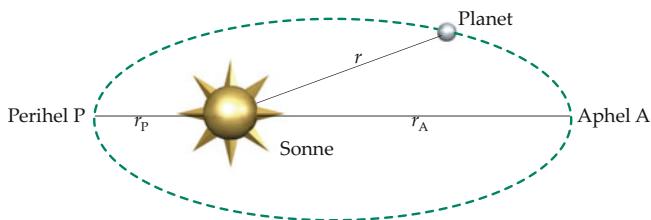


Abbildung 4.31 Die elliptische Bahn eines Planeten um die Sonne, die in einem Brennpunkt der Ellipse steht. Der Punkt P , in dem der Planet der Sonne am nächsten ist, heißt Perihel; in Punkt A , dem Aphel, ist die Entfernung zur Sonne maximal. Die mittlere Entfernung zur Sonne, definiert durch $(r_P + r_A)/2$, ist genauso lang wie die Hauptachse der Bahn. (Die Bahn der bekannten Planeten sieht jedoch eher wie ein Kreis aus als die hier gezeigte Ellipse.)

Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz der Hauptachse von seiner Umlaufbahn.

3. KEPLER'SCHES GESETZ

Das dritte Kepler'sche Gesetz verknüpft die Umlaufzeit eines beliebigen Planeten mit seiner mittleren Entfernung zur Sonne, d. h. der Länge der Hauptachse der elliptischen Bahn. Wenn wir mit r den mittleren Bahnradius (d. h. das Mittel aus der Entfernung zum Perihel und zum Aphel) und mit T die Umlaufzeit des Planeten um die Sonne bezeichnen, dann nimmt das dritte Kepler'sche Gesetz in algebraischer Schreibweise die Form

$$T^2 = C r^3 \quad (4.15)$$

an; dabei ist C eine Konstante, die für alle Planeten denselben Wert hat. Das Gesetz ist eine Folge davon, dass die Gravitationskraft der Sonne auf den Planeten umgekehrt proportional zum Quadrat seiner Entfernung von der Sonne abnimmt. In

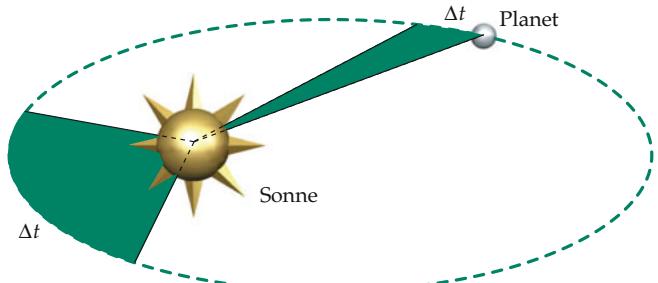


Abbildung 4.32 Wenn ein Planet der Sonne nah ist, bewegt er sich schneller als in größerer Entfernung zur Sonne. Die vom Radiusvektor überstrichenen Flächen sind jedoch in gleichen Zeitintervallen stets gleich.

Beispiel 4.10 berechnen wir mithilfe des dritten Kepler'schen Gesetzes die Umlaufzeit des Jupiter.

Beispiel 4.10: Die Umlaufbahn von Jupiter

Die mittlere Entfernung von Jupiter zur Sonne beträgt 5,20 AE. Wie lange dauert ein Umlauf von Jupiter um die Sonne?

Problembeschreibung: Der mittlere Bahnradius und die Umlaufzeit von Jupiter sind über das dritte Kepler'sche Gesetz miteinander verknüpft. Die Konstante C lässt sich aus der bekannten mittleren Entfernung der Erde zur Sonne und ihrer Umlaufzeit berechnen. Mit $T_E = 1,00 \text{ a}$ (1 Jahr) und $r_E = 1,00 \text{ AE}$ bezeichnen wir die Umlaufzeit und die mittlere Entfernung der Erde zur Sonne, T_J und r_J sind die entsprechenden Werte für Jupiter.

Lösung: 1. Das dritte Kepler'sche Gesetz verknüpft die Umlaufzeit T_J von Jupiter und seine mittlere Entfernung r_J zur Sonne:

$$T_J^2 = C r_J^3$$

2. Wenden Sie das dritte Kepler'sche Gesetz auf die Werte der Erde an; damit erhalten Sie eine zweite Gleichung, in der dieselbe Konstante C sowie T_E und r_E vorkommen:

$$T_E^2 = C r_E^3$$

3. Teilen Sie die beiden Gleichungen durcheinander, eliminieren Sie die unbekannte Konstante C und lösen Sie nach T_J auf:

$$\frac{T_J^2}{T_E^2} = \frac{r_J^3}{r_E^3}$$

und damit

$$T_J = T_E \left(\frac{r_J}{r_E} \right)^{3/2} = (1 \text{ a}) \left(\frac{5,20 \text{ AE}}{1 \text{ AE}} \right)^{3/2} = [11,9 \text{ a}]$$

4.4 Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze

Plausibilitätsprüfung: Das in Schritt 3 berechnete Ergebnis stimmt mit der in Tabelle 4.2 aufgeführten Umlaufzeit überein.

Kommentar: Abbildung 4.33 zeigt die Umlaufzeiten der Planeten Erde, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun in Abhängigkeit von ihrer mittleren Entfernung zur Sonne. In Teilabbildung a sind die Umlaufzeiten gegen die mittleren Entfernungen zur Sonne direkt aufgetragen, in Teilabbildung b die Quadrate der Umlaufzeiten gegen die dritte Potenz der Entfernungen. In dieser Darstellung liegen die Punkte auf einer Geraden.

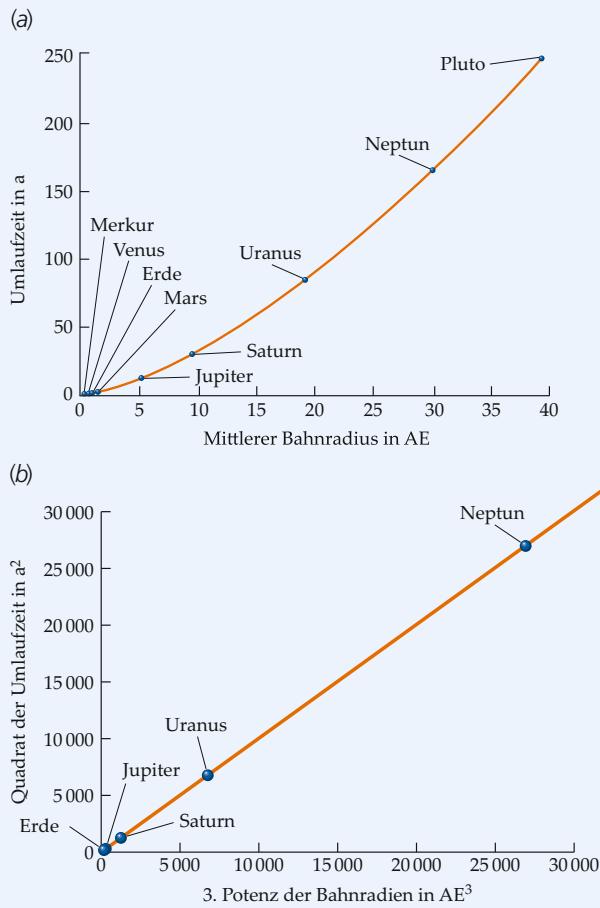


Abbildung 4.33 Umlaufzeit und mittlere Entfernung einiger Planeten zur Sonne. In a sind die Werte direkt aufgetragen, in b sind die Quadrate der Umlaufzeiten und die Kuben der Bahnradien aufgetragen. Bei dieser Darstellung liegen die Punkte auf einer Geraden.

Übung 4.4: Die Umlaufzeit von Neptun ist 164,8 a. Wie groß ist seine mittlere Entfernung zur Sonne? ◀

Übung 4.5: Wenn man die Logarithmen der Umlaufzeiten für die Planeten Erde, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun gegen die Logarithmen ihrer mittleren Entfernung

zur Sonne aufträgt, liegen alle Punkte auf einer Kurve. Welche Form hat diese Kurve? ◀

Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Obwohl die Kepler'schen Gesetze viel zum Verständnis der Planetenbewegungen beitragen, waren sie doch nur einfache empirische Regeln, die Kepler aus Brahes genauen astronomischen Beobachtungen abgeleitet hatte. Erst Isaac Newton gelang um 1666 der gedankliche Schritt, die Bewegung eines Planeten auf eine bestimmte, durch die Sonne auf ihn ausgeübte Kraft zurückzuführen. Mithilfe seines zweiten Bewegungsgesetzes konnte Newton zeigen, dass eine anziehende Kraft, die umgekehrt proportional mit dem Abstand zwischen der Sonne und dem Planeten abnimmt, zu einer elliptischen Umlaufbahn führt, wie Kepler sie nachgewiesen hatte. Darauf behauptete Newton, eine solche Kraft würde zwischen zwei beliebigen Körpern im Universum wirken (z. B. auch zwischen einem fallenden Apfel und der Erde).

Vor Newton war es keineswegs allgemein akzeptiert anzunehmen, dass die Gesetze der Physik, wie man sie auf der Erde beobachten konnte, auch auf die Himmelskörper anwendbar wären. Newton änderte unsere Sichtweise auf die himmlischen Sphären, indem er zeigte, dass die physikalischen Gesetze sowohl für irdische Objekte als auch für die Himmelsobjekte gelten. Das **Newton'sche Gravitationsgesetz** besagt, dass zwei punktförmig gedachte Körper oder Teilchen sich mit einer Kraft wechselseitig anziehen, die proportional zum Produkt ihrer Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands ist.

Bezeichnen wir die Massen der beiden punktförmigen Teilchen mit m_1 und m_2 und ihre Orte mit \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 , so ist $\mathbf{r}_{1,2}$ der Vektor, der von Teilchen 1 zu Teilchen 2 geht (Abbildung 4.34a). Dann übt das Teilchen 1 auf das Teilchen 2 eine Gravitationskraft $\mathbf{F}_2^{(1)}$ aus, für die gilt:

$$\mathbf{F}_2^{(1)} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2}. \quad (4.16)$$

DAS NEWTON'SCHE GRAVITATIONSGESETZ

Dabei ist $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/r_{1,2}$ ein Einheitsvektor, der von Teilchen 1 zu Teilchen 2 weist, und Γ ist die **Gravitationskonstante** mit dem Wert

$$\Gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2. \quad (4.17)$$

Die Kraft $\mathbf{F}_1^{(2)}$, die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübt wird, ist gemäß dem dritten Newton'schen Axiom der Kraft $\mathbf{F}_2^{(1)}$ entgegengesetzt gleich (Abbildung 4.34b). Die Gravitationskraft, die eine Punktmasse m_1 auf eine im Abstand r befindliche andere Punktmasse m_2 ausübt, hat daher den Betrag

$$F_G = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (4.18)$$

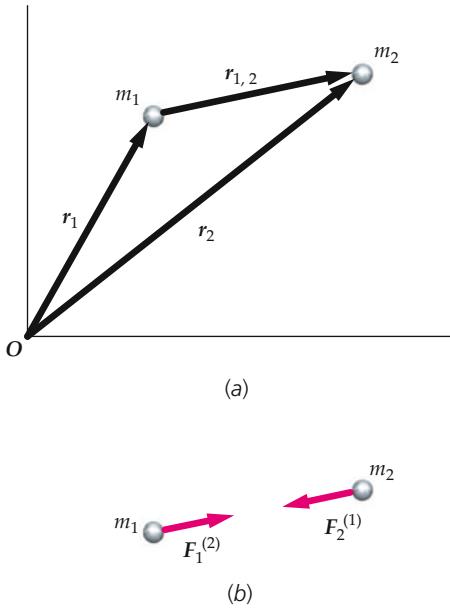


Abbildung 4.34 a) Zwei punktförmige Teilchen an den Orten r_1 und r_2 . b) Die beiden Teilchen üben eine anziehende Kraft auf das jeweils andere Teilchen aus. Diese Kräfte sind entgegengesetzt gleich.

Newton veröffentlichte seine Gravitationstheorie im Jahr 1686, aber erst über ein Jahrhundert später gelang dem britischen Naturforscher Henry Cavendish die erste Präzisionsbestimmung von Γ ; in Abschnitt 4.5 werden wir näher darauf eingehen.

Mit dem bekannten Wert von Γ lässt sich die Gravitationsanziehung zwischen zwei beliebigen Körpern bestimmen.

Übung 4.6: Zeigen Sie, dass die Gravitationskraft, mit der ein Mann von 65 kg eine Frau von 50 kg anzieht, wenn sie 0,5 m voneinander entfernt sind, gerade $8,67 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ beträgt. (Betrachten Sie beide Personen für diese Rechnung als punktförmig.) ◀

Die obige Rechnung zeigt, dass die Gravitationskraft zwischen Körpern alltäglicher Größe so gering ist, dass man sie kaum messen kann. Zum Vergleich: Die Gewichtskraft einer Stechmücke liegt bei etwa 10^{-7} N , die Anziehungskraft entspricht damit der Gewichtskraft von neun Mücken. Die Gewichtskraft der 50-kg-Frau ist etwa 490 N – rund *eine halbe Milliarde Mal* mehr als die Anziehungskraft, die in der Übung berechnet wurde. Üblicherweise spielt die Gravitationsanziehung zwischen zwei Körpern erst dann eine Rolle, wenn mindestens einer der beiden astronomische Ausmaße und eine entsprechend hohe Masse hat. Wenn auch die (physikalische) Anziehungskraft zwischen einem Mann und einer Frau nur sehr gering ist, so ist die Anziehungskraft beispielsweise zwischen der Frau und der Erde recht deutlich zu spüren.

Um die Gültigkeit des $1/r^2$ -Gesetzes für die Gravitationskraft zu überprüfen, verglich Newton die Beschleunigung des Monds

auf seiner Bahn mit der Beschleunigung von Objekten nahe der Erdoberfläche. Er macht die bis dahin nie in Betracht gezogene Annahme, dass die Kraft, die den Mond auf seiner Umlaufbahn um die Erde hält, dieselbe Kraft ist, die einen Apfel zu Boden fallen lässt: die Anziehungskraft der Erde. Er war der Erste, der die Erde und den Mond als punktförmige Teilchen betrachtete, deren gesamte Masse in ihrem Mittelpunkt konzentriert sein sollte. Die Kraft auf ein Teilchen der Masse m in einer Entfernung r vom Erdmittelpunkt ist dann

$$F_G = -\Gamma \frac{m_E m}{r^2} \quad (4.19)$$

(m_E ist die Erdmasse). Wenn dies die einzige Kraft auf das Teilchen ist, erfährt es die Fallbeschleunigung

$$a_G = \frac{F_G}{m} = -\frac{\Gamma m_E}{r^2}. \quad (4.20)$$

Für Körper in der Nähe der Erdoberfläche gilt $r \approx r_E$. Für sie nimmt die Fallbeschleunigung den Wert der Erdbeschleunigung g an:

$$a_G = -g = -\frac{\Gamma m_E}{r_E^2}. \quad (4.21)$$

Die Entfernung zum Mond beträgt etwa das 60-fache des Erdradius ($r = 60 r_E$). Setzt man dies in Gleichung 4.20 ein, so erhält man für die Beschleunigung $|a_G| = g/60^2 = g/3600$; die Beschleunigung a_{Mond} , die der Mond auf seiner nahezu kreisförmigen Umlaufbahn durch die Erde erfährt, ist die Fallbeschleunigung g nahe der Erdoberfläche, geteilt durch 60^2 . Ihr Zahlenwert beträgt $|a_{\text{Mond}}| = (9,81 \text{ m/s}^2)/3600$. Dieser Wert lässt sich auch aus dem bekannten Wert für die Entfernung des Monds vom Erdmittelpunkt ($r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$) und seiner Umlaufzeit $T = 27,3 \text{ d} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$ berechnen:

$$\begin{aligned} |a_{\text{Mond}}| &= \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \\ &= \frac{4\pi^2 (3,84 \cdot 10^8 \text{ m})}{(2,36 \cdot 10^6 \text{ s})^2} = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

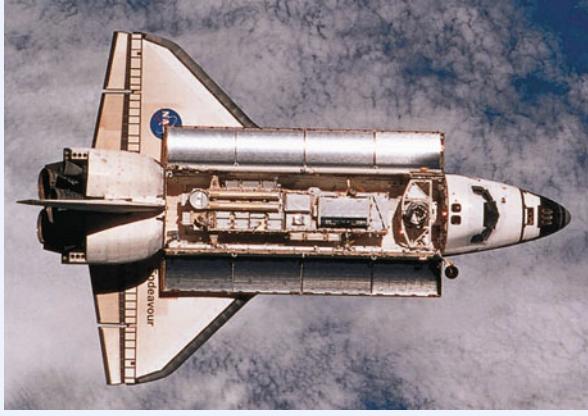
Dann gilt

$$\frac{g}{|a_{\text{Mond}}|} = \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2} = 3607 \approx 3600.$$

Newton schrieb dazu: „Ich verglich dabei die Kraft, die nötig ist, um den Mond auf seiner Bahn zu halten, mit der Gravitationskraft auf der Erde und fand heraus, dass sie beide sich ziemlich gut entsprechen.“ Beispiel 4.11 illustriert die Rechnung anhand eines künstlichen Himmelskörpers. Beispiel 4.12 zeigt, wie man das Gravitationsgesetz mit dem dritten Kepler'schen Gesetz in Verbindung bringen kann.

Beispiel 4.11: Der Fall zur Erde

Wie hoch ist die Fallbeschleunigung eines Körpers in einer Höhe von 400 km über der Erdoberfläche, etwa in der Umlaufbahn des Spaceshuttles?



Der Spaceshuttle mit geöffneten Ladeluken. (© NASA.)

Problembeschreibung: Die einzige Kraft, die auf einen Körper im freien Fall wirkt, ist die Gravitationskraft.

Lösung: 1. Die Beschleunigung ergibt sich aus $a_G = F_G/m$:

$$a_G = \frac{F_G}{m} = -\Gamma \frac{m m_E / r^2}{m} = -\frac{\Gamma m_E}{r^2}$$

2. Die Entfernung r ist die Summe aus dem Erdradius r_E und der Höhe h :

$$r = r_E + h = 6370 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6770 \text{ km}$$

3. Damit ergibt sich für die Fallbeschleunigung:

$$\begin{aligned} |a_G| &= \frac{\Gamma m_E}{r^2} \\ &= \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(6,77 \cdot 10^6 \text{ m})^2} \\ &= \boxed{8,70 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Höhe von 400 km beträgt 6 % des Erdradius (6370 km). Die berechnete Fallbeschleunigung von $8,70 \text{ m/s}^2$ ist 11 % geringer als der Wert $9,81 \text{ m/s}^2$ auf der Erdoberfläche und erscheint daher plausibel. ■

4.4 Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze

Beispiel 4.12: Die Raumstation in der Umlaufbahn

Die Internationale Raumstation ISS bewegt sich auf einer etwa kreisförmigen Umlaufbahn in rund 385 km Höhe um die Erde. Manchmal ist sie von der Erde aus sichtbar. Wie lange muss man zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sichtungen warten? (Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden.)



Die Internationale Raumstation ISS. (© NASA.)

Problembeschreibung: Die Sichtung ist nur bei Nacht und selbst dann nur möglich, wenn die Raumstation oberhalb des Horizonts Ihres Standorts fliegt. Daher entspricht die Zeit zwischen zwei Sichtungen etwa der Umlaufzeit. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom an, um die Umlaufzeit zu berechnen; nutzen Sie auch den Zusammenhang „Entfernung ist gleich Geschwindigkeit mal Zeit“.

Lösung: 1. Für eine kreisförmige Umlaufbahn sind die Umlaufzeit T und die Bahngeschwindigkeit v mit dem Bahnradius über den Zusammenhang „Entfernung ist gleich Geschwindigkeit mal Zeit“ verbunden:

$$2\pi r = v T$$

2. Um einen zweiten Zusammenhang zwischen v und r herzuleiten, müssen wir das zweite Newton'sche Axiom auf die Raumstation der Masse m anwenden:

$$F_G = m a$$

$$\Gamma \frac{m_E m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

3. Wir setzen $2\pi r/T$ für v ein (das ist das Ergebnis von Schritt 1) und erhalten:

$$\Gamma \frac{m_E}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

4. Wir lösen nach T^2 auf und erhalten:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\Gamma m_E} r^3$$

5. Bei einer Höhe von $h = 385$ km gilt $r = r_E + h = 6760$ km. Setzen Sie $r = r_E + h$ ein und lösen Sie nach der Umlaufzeit T auf:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2}{\Gamma m_E} (r_E + h)^3 \\ &= \frac{4\pi^2}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})} \\ &\quad \cdot (6,76 \cdot 10^6 \text{ m})^3 \\ &= 30,56 \cdot 10^6 \text{ s}^2 \end{aligned}$$

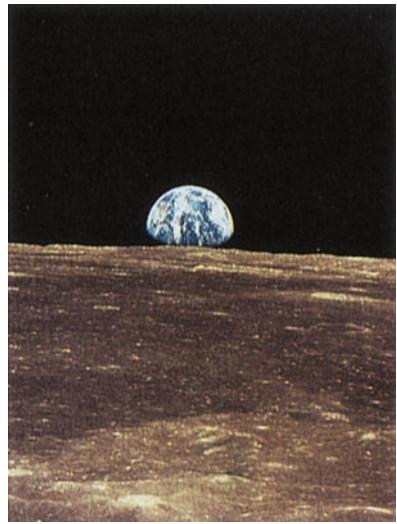
also

$$T = 5528 \text{ s} = \boxed{92,1 \text{ min}}$$

Plausibilitätsprüfung: Eine Internetrecherche mit den Schlüsselbegriffen ISS, NASA und *orbital period* (bzw. Umlaufzeit) ergibt, dass die Umlaufzeit bei etwa 92 Minuten liegt (die Angaben variieren bei den verschiedenen Quellen). Unser Ergebnis liegt daher in der richtigen Größenordnung. Das Ergebnis von Schritt 3 ist das dritte Kepler'sche Gesetz (vgl. Gleichung 4.15 mit $C = 4\pi^2/(\Gamma m_E)$) für einen die Erde umkreisenden Satelliten.

Weitergedacht: Die Ebene der nahezu kreisförmigen Umlaufbahn der Internationalen Raumstation ist um etwa 52° gegen die Äquatorialebene geneigt und rotiert nicht mit der Erde. Wenn Sie zu einem Zeitpunkt t die Raumstation direkt über sich sehen, dann wird sie 92,1 min später 23° genau in westlicher Richtung von Ihrem Standort zu sehen sein. Beispielsweise ist Kansas City genau 23° westlich von New York. Wenn die ISS also New York um Mitternacht (Eastern Time) überfliegt, dann können Sie Ihrem Freund in Kansas City sagen, dass er die Raumstation um 0.32 Uhr Central Time erwarten kann (dieser Zeitpunkt entspricht 1.32 Uhr Eastern Time). In Europa liegen beispielsweise Luxemburg und Kiew, Madrid und Tirana (Albanien) oder Kopenhagen und Moskau auf gleicher Breite und 23 Längengrade auseinander. ■

Der Ansatz, Erde und Mond als Punktteilchen zu betrachten, ist plausibel, da die Entfernung zum Mond – verglichen mit den Radien von Erde und Mond – recht groß ist. Der Ansatz wird jedoch fragwürdig, wenn man ihn zur Berechnung der Kraft verwendet, die ein Körper nahe der Erdoberfläche erfährt, selbst wenn er zu richtigen Ergebnissen führt. Erst nach erheblichen Anstrengungen konnte Newton mathematisch beweisen, dass die Kraft von einem kugelförmigen Körper auf eine Punktmasse – egal ob sich diese auf der Oberfläche oder jenseits davon



Erdaufgang, beobachtet beim Umkreisen des Mondes am 16. Juli 1969 von Apollo 11 aus. (© NASA.)

befindet – tatsächlich die gleiche ist wie diejenige, die sich ergibt, wenn die gesamte Masse im Kugelmittelpunkt konzentriert wäre. Für den Beweis ist die Integralrechnung notwendig, die Newton für die Lösung dieses Problems entwickelte. Auf Newtons Beweis werden wir in Abschnitt 4.5 näher eingehen.

Da die Fallbeschleunigung auf der Erde (auch Erdbeschleunigung genannt) mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ leicht zu messen und der Erdradius bekannt ist, lässt sich Gleichung 4.21 dazu verwenden, den Wert des Produkts Γm_E zu berechnen. Newton schätzte die Erdmasse anhand einer Schätzung der mittleren Erddichte und kam so auf einen Näherungswert für Γ . Als Cavendish über hundert Jahre später die Gravitationskonstante Γ durch die Messung der Kraft zwischen zwei Kugelpaaren mit bekannter Masse und Entfernung voneinander experimentell bestimmte, nannte er sein Experiment „Die Wägung der Erde“. Wenn man den Wert der Gravitationskonstante kennt, lassen sich die Masse der Sonne und die Masse jedes Planeten aus der Umlaufbahn eines Satelliten mit bekannter Masse bestimmen. Das dabei angewandte Verfahren wird in Abschnitt 4.5 erläutert.

Frage 4.2

Wie kann es sein, dass die Astronauten im Spaceshuttle bei ihren Erdumkreisungen als „schwerelos“ gelten, obwohl doch die Gravitationskraft, wie in Beispiel 4.11 berechnet, nur 11 % geringer ist als auf der Erdoberfläche?

Die Rechnung in Beispiel 4.11 lässt sich vereinfachen, wenn man mithilfe von Gleichung 4.21 das Produkt Γm_E aus Gleichung 4.20 eliminiert. Dann gilt für die Fallbeschleunigung a_G in einer Entfernung r vom Erdmittelpunkt

$$a_G = \frac{F_G}{m} = -\frac{\Gamma m_E}{r^2} = -g \frac{r_E^2}{r^2}. \quad (4.22)$$

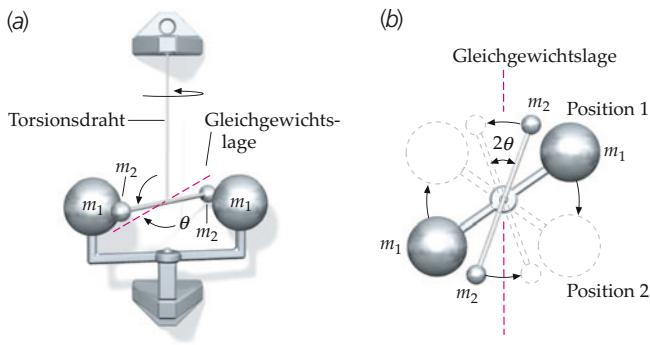


Abbildung 4.35 a) Schema der Drehwaage, die Cavendish zur Messung der Gravitationskonstanten Γ benutzte. Sie besteht aus zwei an einem leichten Stab befestigten kleinen Kugeln, jeweils mit der Masse m_2 , die an einem dünnen Torsionsdraht hängen. Durch sorgfältige Messung kann man das Drehmoment bestimmen, mit dem sich der Draht um einen bestimmten Winkel verdreht lässt. Dann werden zwei große Kugeln, jeweils mit der Masse m_1 , in die Nähe der kleinen Kugeln gebracht. Wegen der Gravitationsanziehung der kleinen durch die großen Kugeln dreht sich der Draht um einen sehr kleinen Winkel θ aus der Gleichgewichtslage (der Winkel ist hier stark überzeichnet). b) Dieselbe Drehwaage von oben betrachtet. Nachdem die Anordnung ihre Gleichgewichtslage eingenommen hat (das kann wegen der extrem geringen Kräfte unter Umständen mehrere Stunden dauern), werden im zweiten Teil des Experiments die beiden großen Kugeln so gedreht, dass ihr Abstand von der Gleichgewichtslage der Waage der gleiche ist wie auf der anderen Seite (gestrichelte Linien). Hat die Waage in dieser Anordnung wieder ihre Gleichgewichtslage eingenommen, hat sich der Draht um den Winkel 2θ verdreht, entsprechend der Umkehrung des Drehmoments. Ist die Torsionskonstante des Drahts bekannt, kann man die Kraft zwischen den Massen m_1 und m_2 aus der Messung des Torsionswinkels bestimmen. Da die Massen und die Abstände zwischen ihnen bekannt sind, lässt sich daraus die Gravitationskonstante Γ berechnen. Cavendish erhielt einen Wert für Γ , der nur um etwa 1 % vom heute akzeptierten, in Gleichung 4.17 angegebenen Wert abwich.

Übung 4.7: In welcher Höhe h über der Erdoberfläche ist die Fallbeschleunigung nur noch halb so groß wie auf Meeressniveau? ◀

Messung der Gravitationskonstanten Γ

Die erste Präzisionsmessung der Gravitationskonstanten Γ führte erstmals 1798 der britische Naturforscher Henry Cavendish (1731–1810) durch. Er benutzte dabei die in Abbildung 4.35 gezeigte Apparatur, eine sogenannte Torsions- oder Drehwaage. Cavendishes direkte Bestimmung der Gravitationskonstanten wurde später von anderen Experimentatoren mit etlichen Verbesserungen und Verfeinerungen wiederholt. Dennoch ist jede direkte Messung der Gravitationskonstanten wegen der extrem geringen Gravitationsanziehung sehr schwierig. Daher ist ihr Wert auch heute nur mit einer Genauigkeit von 1:10 000 bekannt. Obwohl Γ eine der ersten physikalischen Konstanten war, die jemals gemessen wurden, bleibt sie noch heute eine der am wenigsten exakt bestimmten Größen.

4.4 Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze

Schwere und träge Masse

Die Eigenschaft eines Körpers, die für dessen Gravitationskraft auf einen anderen Körper verantwortlich ist, heißt die **schwere Masse** des Körpers, die seinen Widerstand gegenüber einer Beschleunigung kennzeichnet, wird die **träge Masse** genannt. Wir haben für beide Eigenschaften ein und dasselbe Zeichen m verwendet, da sie, wie zahlreiche Experimente zeigen, identisch sind. Damit ist die Gravitationskraft, die ein Körper ausübt, zu seiner *trägen* Masse proportional. Dies ist ein einzigartiges Kennzeichen der Gravitationskraft, das sie von allen anderen fundamentalen Wechselwirkungen unterscheidet. Eine wichtige Folge der Identität von schwerer und träger Masse ist, dass – bei Vernachlässigung des Luftwiderstands – nahe der Erdoberfläche alle Körper mit derselben Beschleunigung fallen. Diese Tatsache ist immer wieder überraschend, denn sie scheint der Lebenswirklichkeit und dem Augenschein zu widersprechen, da man bei fallenden Körpern im Alltag den Luftwiderstand oft nicht vernachlässigen kann.

Nehmen wir an, die schwere und die träge Masse eines Körpers wären *nicht* gleich. Schreiben wir m_s für die schwere Masse und m für träge Masse, so gilt für die Kraft, die die Erde auf einen Körper nahe der Erdoberfläche ausübt:

$$F_G = -\Gamma \frac{m_E m_s}{r_E^2}, \quad (4.23)$$

wobei m_E die schwere Masse der Erde ist. Die Fallbeschleunigung desselben Körpers nahe der Erdoberfläche wäre dann

$$a_G = \frac{F_G}{m} = -\left(\frac{\Gamma m_E}{r_E^2}\right) \frac{m_s}{m}. \quad (4.24)$$

Wäre die Gewichtskraft nur eine weitere Eigenschaft der Materie, vergleichbar etwa der Porosität oder der Härte, dann sollte man für das Verhältnis m_s/m eine Abhängigkeit beispielsweise von der chemischen Zusammensetzung des Körpers, seiner Temperatur oder einer anderen physikalischen Größe erwarten. Die Fallbeschleunigung a_G wäre dann für verschiedene Körper unterschiedlich. Alle Experimente zeigen jedoch, dass die Fallbeschleunigung für alle Körper gleich ist. Damit hat auch das Verhältnis m_s/m für jeden Körper denselben Wert. Daher brauchen wir die Unterscheidung zwischen schwerer und träger Masse nicht länger aufrechtzuerhalten und können $m_s = m$ setzen. (Damit sind gleichzeitig Betrag und Einheiten von Γ im Gravitationsgesetz festgelegt.) Wir dürfen dabei nicht außer Acht lassen, dass die Äquivalenz von schwerer und träger Masse nur eine experimentelle Erkenntnis ist, deren Aussagekraft durch die experimentelle Genauigkeit begrenzt wird. Die ersten Experimente zur Überprüfung dieser Äquivalenz wurden von Simon Stevin um das Jahr 1580 durchgeführt. Galileo machte die Ergebnisse bekannt, und schon seine Zeitgenossen verbesserten die Genauigkeit der Messungen von m_s/m deutlich.



Ein Apfel und eine Feder, die gleichzeitig aus der Ruhelage losgelassen werden, fallen im Vakuum gleich. (© James Sugar/Black Star.)

Allen Experimenten zufolge ist im freien Fall die Fallbeschleunigung für alle Körper gleich.

Die genauesten der frühen Experimente zum Vergleich von schwerer und träger Masse stammen von Newton. Er arbeitete dabei statt mit fallenden Körpern mit einfachen Pendeln und konnte so eine Messgenauigkeit von bis zu einem Promille erreichen. Dank immer ausgeklügelterer Experimente kann man heute die Äquivalenz von schwerer und träger Masse bis auf einen relativen Fehler von $1 : 5 \cdot 10^{13}$ angeben. Sie ist damit eines der am besten gesicherten physikalischen Gesetze überhaupt. Die Gleichheit von schwerer und träger Masse bildet die Grundlage für das Äquivalenzprinzip, auf dem Einsteins allgemeine Relativitätstheorie beruht.

Frage 4.3

Was ist der Unterschied zwischen der schweren und der trägen Masse?

Die kosmischen Geschwindigkeiten

Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, wirkt auf einen Körper, der eine Kreisbahn beschreibt, eine Zentripetalkraft zum Kreismittelpunkt hin. Als Folge davon wird der Körper, sofern keine weiteren Kräfte auf ihn wirken, in Richtung des Mittelpunkts beschleunigt. Vom beschleunigten Bezugssystem des kreisenden Körpers aus gesehen, wirkt die Zentrifugalkraft als Scheinkraft nach außen. Umkreist er eine größere Masse, wirkt auf ihn zusätzlich die Gravitationskraft zum Mittelpunkt dieser Masse. Sind Zentrifugal- und Gravitationskraft betragsmäßig gleich groß, bewegt sich der Körper auf einer Kreisbahn um die ihn anziehende Masse. Die Bahngeschwindigkeit, die zur kleinstmöglichen Kreisbahn um die Erde als anziehende Masse gehört, bezeichnet man auch als **erste kosmische Geschwindigkeit** v_1 oder als **Kreisbahngeschwindigkeit**. Für sie gilt:

$$|F_G| = \Gamma \frac{m \cdot m_E}{r^2} = \frac{m \cdot v_1^2}{r} = |F_Z|.$$

Da der kleinstmögliche Kreis um die Erde den Erdradius r_E als Radius hat, setzen wir ihn für r ein und erhalten:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\Gamma m_E}{r_E}} \approx 7,91 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 30\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (4.25)$$

DEFINITION DER ERSTEN KOSMISCHEN GE SCHWINDIGKEIT

Die uralte Idee, die Erde zu verlassen und ihrer Anziehungskraft zu entfliehen, wurde erst in der Mitte des letzten Jahrhunderts verwirklicht. Seither sind Raumsonden in die entlegensten Winkel unseres Sonnensystems geschickt worden. Einige dieser Sonden umkreisen die Sonne, andere sind auf dem Weg in die Tiefen des interstellaren Raums. Damit ein Körper die Gravitationsbindung an die Erde überwinden und ihrer Anziehungskraft entfliehen kann, ist eine minimale Anfangsgeschwindigkeit notwendig, die wir nun herleiten werden. Man nennt sie die **zweite kosmische Geschwindigkeit** oder auch **Fluchtgeschwindigkeit**.

Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz bzw. Gleichung 4.22 gilt:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\Gamma \frac{m_E}{r^2}.$$

Wenden wir die Kettenregel für die Geschwindigkeitsänderung an, so erhalten wir

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot v = -\Gamma \frac{m_E}{r^2}.$$

Multiplikation mit dr auf beiden Seiten und Integration liefern:

$$\int_{v_0}^{v(t)} v \cdot dv = - \int_{r_0}^{r(t)} \Gamma \frac{m_E \cdot dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}(v(t)^2 - v_0^2) = \Gamma m_E \left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (4.26)$$

Gehen wir davon aus, dass die Geschwindigkeit beim Start auf der Erdoberfläche $r_0 = r_E$ der Fluchtgeschwindigkeit v_2 entspricht und man nach der Zeit t sehr weit weg von der Erde die Geschwindigkeit $v(t) = 0$ erreicht hat, dann geht der erste Term der rechten Seite im Limes gegen 0 und wir erhalten für die zweite kosmische Geschwindigkeit den Ausdruck

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\Gamma m_E}{r_E}} = \sqrt{2} v_1 \approx 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 40\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (4.27)$$

DEFINITION DER ZWEITEN KOSMISCHEN GE SCHWINDIGKEIT

Die Fluchtgeschwindigkeit eines Planeten oder eines Monds ist keine Größe, die erst im Raketenzeitalter wichtig geworden ist. So hat beispielsweise ihr Betrag im Vergleich zu den thermischen Geschwindigkeiten von Gasmolekülen einen wesentlichen Einfluss auf die Zusammensetzung der Atmosphäre, die ein Planet oder Mond aufweist. Auf der Erdoberfläche sind die Geschwindigkeiten der relativ schweren Sauerstoff- und Stickstoffmoleküle wesentlich kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit (plausible Schätzungen liefern eine mittlere Geschwindigkeit von etwa 630 m/s). Daher können sich diese Gase in unserer Atmosphäre „halten“. Bei den leichteren Gasen wie Wasserstoff oder Helium bewegt sich bei der Durchschnittstemperatur der Erde von ungefähr 0 °C ein erheblicher Anteil der Moleküle wesentlich schneller als mit Fluchtgeschwindigkeit. Aus diesem Grund enthält unsere Atmosphäre kein Wasserstoffgas und kein Helium.

Auch die Fluchtgeschwindigkeit auf der Mondoberfläche lässt sich mit Gleichung 4.27 berechnen, wenn man statt m_E und r_E die entsprechenden Werte für Mondmasse und Mondradius verwendet ($m_M = 0,012 m_E$, $r_M = 0,27 r_E$). Die Fluchtgeschwindigkeit auf dem Mond beträgt etwa 2,3 km/s und damit erheblich weniger als auf der Erde. Das erklärt, weshalb sich auf dem Mond – selbst wenn man von einer sehr niedrigen Durchschnittstemperatur der Oberfläche ausgeht, die die Geschwindigkeit der Moleküle gering hält (siehe Kapitel 14) – kein Gas halten kann, sodass der Mond keinerlei Atmosphäre aufweist.

Übung 4.8: Berechnen Sie die Fluchtgeschwindigkeit auf der Merkuroberfläche. Die Merkurmasse beträgt $m_M = 3,31 \cdot 10^{23}$ kg, sein Radius $r_M = 2440$ km. ◀

Um das Sonnensystem zu verlassen, wird eine minimale Anfangsgeschwindigkeit benötigt, die sich ebenfalls mit Gleichung 4.26 berechnen lässt, jedoch setzt man hier statt der Masse der Erde die Masse der Sonne m_S und für den Radius der Erde die astronomische Einheit ein, also die mittlere Distanz zwischen der Erde und der Sonne.

4.4 Die Gravitationskraft und die Kepler'schen Gesetze

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot \frac{\Gamma m_S}{1 \text{ AE}}} \approx 42,1 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 150\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (4.28)$$

DEFINITION DER DRITTEN KOSMISCHEN GE SCHWINDIGKEIT

Diese Geschwindigkeit bezeichnet man auch als **dritte kosmische Geschwindigkeit**. Wie auch die zweite kosmische Geschwindigkeit geht die dritte von einer ruhenden, nicht rotierenden Erde aus. In Wirklichkeit verringern sich die beiden Geschwindigkeiten bei günstigem Abschusswinkel.

Frage 4.4

An welchen Punkten und in welche Richtung sollte man Körper starten lassen, die man von der Erde oder aus dem Sonnensystem schießen möchte, sodass die Körper minimale Fluchtgeschwindigkeiten von der Erde oder aus dem Sonnensystem haben?

Die **vierte kosmische Geschwindigkeit** ist die Anfangsgeschwindigkeit, die ein Körper haben muss, um unsere Milchstraße zu verlassen. Diese Fluchtgeschwindigkeit von einer ruhenden Sonne aus der Milchstraße mit der Masse $m_M = 2 \cdot 10^{41}$ kg und dem Radius $r_M = 3 \cdot 10^{20}$ m ergibt sich zu

$$v_4 = \sqrt{2 \frac{\Gamma m_M}{r_M}} = 320 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 10^6 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \quad (4.29)$$

DEFINITION DER VIERTEN KOSMISCHEN GE SCHWINDIGKEIT

Die Beispiele 4.13 und 4.14 veranschaulichen die gerade eingeführten Definitionen der kosmischen Geschwindigkeiten noch einmal.

Beispiel 4.13: Höhenflug eines Geschoßes

Ein Geschoß der Masse m wird vom Südpol der Erde aus mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 8,0 \text{ km/s}$ senkrecht nach oben abgefeuert. Berechnen Sie die maximale Höhe von dem Geschoß; vernachlässigen Sie dabei alle durch den Luftwiderstand verursachten Effekte.

Problembeschreibung: Die maximale Höhe finden wir mithilfe von Gleichung 4.26 unter den Voraussetzungen, dass das Geschoß bei $t = 0$ an der Erdoberfläche mit v_0 startet ($r_0 = r_E$) und seine maximale Höhe h über dem Südpol zum Zeitpunkt t erreicht, wenn die Geschwindigkeit $v(t) = 0$ ist.

Lösung: 1. Setzen Sie alle bekannten Größen in Gleichung 4.26 ein.

$$\frac{1}{2}(v(t)^2 - v_0^2) = \Gamma m_E \left(\frac{1}{r_E + h} - \frac{1}{r_E} \right)$$

$$\frac{1}{2}(0 - v_0^2) = \Gamma m_E \left(\frac{1}{r_E + h} - \frac{1}{r_E} \right)$$

2. Multiplizieren Sie mit $1/(\Gamma m_E)$ und lösen Sie nach $r_E + h$ auf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_E + h} &= -\frac{v_0^2}{2\Gamma m_E} + \frac{1}{r_E} \\ &= \frac{-(8000 \text{ m/s})^2}{2(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg})} \\ &\quad + \frac{1}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} \\ &= 7,68 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

und damit

$$r_E + h = 1/(7,68 \cdot 10^{-8} \text{ m}^{-1}) = 1,30 \cdot 10^7 \text{ m}$$

3. Lösen Sie nach h auf:

$$h = 1,30 \cdot 10^7 \text{ m} - 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Schritt 3 ist näherungsweise so groß wie der Erdradius. Da die Anfangsgeschwindigkeit über 70 % der Fluchtgeschwindigkeit beträgt erscheint es plausibel, dass das Geschoss sich relativ weit von der Erde entfernen kann. ■

4.5 Das Gravitationsfeld

Die Gravitationskraft, die eine Punktmasse m_1 auf eine zweite Punktmasse m_2 in der Entfernung $r_{1,2}$ ausübt, ist gegeben durch

$$\mathbf{F}_2^{(1)} = -\frac{\Gamma m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2}.$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/|\mathbf{r}_{1,2}|$ ein Einheitsvektor, der von Teilchen 1 auf Teilchen 2 weist. Das Gravitationsfeld in einem Punkt P wird bestimmt, indem man ein Punktteilchen der Masse m in

den Punkt P bringt und die Gravitationskraft \mathbf{F} berechnet, die von allen anderen Teilchen auf das Teilchen in P ausgeübt wird. Die Gravitationskraft \mathbf{F}_G , dividiert durch die Masse m , nennt man das **Gravitationsfeld** \mathbf{G} in P :

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}_G}{m}. \quad (4.30)$$

DEFINITION DES GRAVITATIONSFELDFS

Der Punkt P , in dem sich die Probemasse befindet, heißt **Aufpunkt**. Das Gravitationsfeld in einem Aufpunkt, das durch eine Anzahl von Punktmassen verursacht wird, ist die Vektorsumme der Felder, die durch die einzelnen Massen in diesem Punkt hervorgerufen werden:

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{G}_i. \quad (4.31a)$$

Die Punkte, in denen die das Feld verursachenden Punktmassen lokalisiert sind, heißen die **Quellpunkte** des Felds. Um das Gravitationsfeld eines *ausgedehnten* Körpers in einem Aufpunkt zu berechnen, muss man das Feld $d\mathbf{G}$ bestimmen, das durch ein infinitesimales Volumenelement der Masse dm verursacht wird, und dann über die gesamte Massenverteilung des Körpers (oder die gesamte Menge der Quellpunkte) integrieren:

$$\mathbf{G} = \int d\mathbf{G}. \quad (4.31b)$$

Das Gravitationsfeld der Erde in einer Entfernung $r \geq r_E$ vom Erdmittelpunkt ist zum Erdmittelpunkt hin gerichtet; sein Betrag $|\mathbf{G}(r)|$ ist gegeben durch

$$|\mathbf{G}(r)| = \frac{|\mathbf{F}_G(r)|}{m} = \frac{\Gamma m_E}{r^2}. \quad (4.32)$$

GRAVITATIONSFELDSTÄRKE DER ERDE

Die nachfolgend beschriebene Vorgehensweise und die beiden Beispiele 4.15 und 4.16 zeigen, wie sich die Gravitationsfeldstärken auch von recht willkürlich festgelegten Massenverteilungen berechnen lassen. Wir gehen auf solche Fälle ein, weil die für diese Rechnungen vorausgesetzten Fähigkeiten auch in vielen anderen Gebieten der Physik benötigt werden. Insbesondere werden wir diese Kenntnisse in Kapitel 18 und 19 umfassend nutzen; dort wird es darum gehen, das elektrische Feld zu berechnen, das von gegebenen elektrischen Ladungsverteilungen erzeugt wird. Beispiel 4.17 beschreibt, wie eine Messung des irdischen Gravitationsfelds vorgenommen werden kann.

Beispiel 4.14: Geschwindigkeit eines Geschosses

ZUR ÜBUNG

Ein Geschoss wird vom Südpol der Erde aus senkrecht nach oben abgefeuert; seine Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = 15 \text{ km/s}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Geschosses, wenn es sich sehr weit von der Erde entfernt hat. Vernachlässigen Sie dabei alle durch den Luftwiderstand verursachten Effekte.

Problembeschreibung: Die maximale Höhe lässt sich wieder mit Gleichung 4.26 berechnen. Die Anfangsgeschwindigkeit von 15 km/s ist größer als die Fluchtgeschwindigkeit von 11,2 km/s, daher erwarten wir, dass die Endgeschwindigkeit größer als null ist.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Weit weg von der Erde ist $r(t) \rightarrow \infty$ und $v(t) = v_\infty$. Setzen Sie den Grenzwert und die Bezeichnung für die Endgeschwindigkeit in Gleichung 4.26 ein:

2. Lösen Sie nach v_∞^2 auf.

3. Berechnen Sie v_∞ .

Ergebnisse der Lösungsschritte

1.

$$\frac{1}{2}(v_\infty^2 - v_0^2) = \Gamma m_E \left(0 - \frac{1}{r_E}\right)$$

2.

$$v_\infty^2 = v_0^2 - \frac{2 \Gamma m_E}{r_E}$$

3.

$$v_\infty = \boxed{1,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}}$$

Plausibilitätsprüfung: Um zu überprüfen, ob das Ergebnis plausibel ist, berechnen wir die tatsächliche Position des Geschosses $r_\infty < \infty$ für diese Endgeschwindigkeit mithilfe von Gleichung 4.26. Daraus ergibt sich, dass $r_\infty = 3,4 \cdot 10^9 \text{ m}$ beträgt. Somit ist $r_\infty \approx 538 \cdot r_E \approx 0,02 \text{ AE}$, was im Vergleich zum Erdradius als große Distanz angesehen werden kann, jedoch noch klein genug ist, dass wir Effekte aufgrund der Bewegung um die Sonne vernachlässigen können.

Weitergedacht: In Abbildung 4.36 ist die Geschwindigkeit des Geschosses (in Kilometern pro Sekunde) gegen h/r_E aufgetragen, wobei h die Höhe über dem Erdboden ist. Bei sehr großen Werten von h/r_E geht die Geschwindigkeit asymptotisch gegen den Wert $v = 10 \text{ km/s}$.

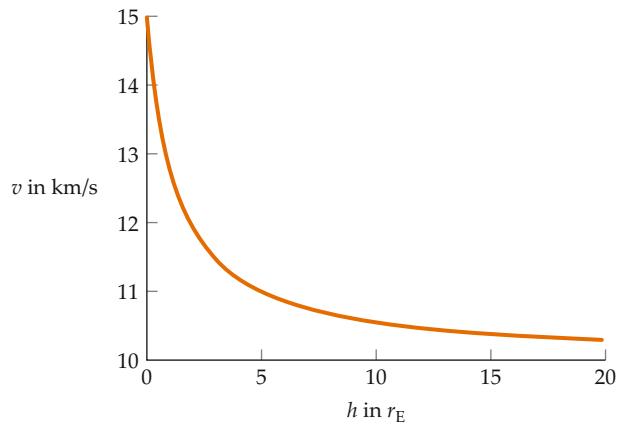


Abbildung 4.36 Geschwindigkeit v des Geschosses in Abhängigkeit von h/r_E .

Vorgehensweise: Berechnung eines Gravitationsfelds

Entscheidend für die Bestimmung von Aufpunkt und Quellpunkten eines Gravitationsfelds ist es, eine Zeichnung der in der Aufgabenstellung beschriebenen Masse bzw. der Massenverteilung anzufertigen. Die Lage dieser Punkte wird benötigt, um Betrag und Richtung des Gravitationsfelds bestimmen zu können.

1. Fertigen Sie eine Skizze der in der Aufgabenstellung gegebenen Situation an. Bezeichnen Sie den Aufpunkt und die Quellpunkte. Arbeiten Sie sorgfältig und zeichnen Sie die Punkte genau ein, denn aus ihrer Lage können Sie hilfreiche Hinweise für die Lösung ziehen.
2. Bestimmen Sie r oder den Abstand zwischen Aufpunkt und den Quellpunkten. Unter Umständen müssen Sie geometrische oder trigonometrische Formeln anwenden, um r zu bestimmen.
3. Mit der Gleichung $|G(r)| = (\Gamma m/r^2)$ können Sie den Betrag des Gravitationsfelds berechnen. Die Richtung des Felds können Sie anhand Ihrer Skizze bestimmen.

Plausibilitätsprüfung: Denken Sie daran, dass Gravitationsfelder vektorielle Größen sind. Ihre Antwort muss also immer den Betrag der Felder *und* die zugehörigen Richtungen umfassen.

Beispiel 4.15: Das Gravitationsfeld von zwei Punktmassen

Zwei Punktteilchen, jeweils mit der Masse m , befinden sich auf der y -Achse bei $y = +a$ und bei $y = -a$ (Abbildung 4.37). Berechnen Sie die Gravitationsfeldstärke für alle Punkte auf der x -Achse als eine Funktion von x .

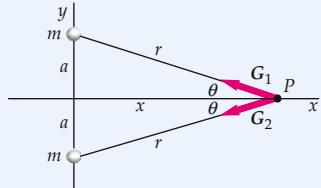


Abbildung 4.37 Die Punktmassen befinden sich jeweils in einem Quellpunkt; P ist ein Aufpunkt.

Problembeschreibung: Fertigen Sie eine Skizze der beiden Punktmassen im Koordinatensystem an (Abbildung 4.37). Die beiden Punktmassen m verursachen jeweils ein Gravitationsfeld im Punkt P , der sich an der Stelle x_P befindet. Der Abstand zwischen P und den beiden Quellpunkten beträgt $r = \sqrt{x_P^2 + a^2}$. Das resultierende Feld \mathbf{G} ergibt sich als die Vektorsumme der Felder \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 , die von jeder einzelnen Punktmasse hervorgerufen werden.

Lösung: 1. Berechnen Sie die Feldstärke von \mathbf{G}_1 bzw. \mathbf{G}_2 :

$$|\mathbf{G}_1| = |\mathbf{G}_2| = \frac{\Gamma m}{r^2}$$

2. Die y -Komponente des resultierenden Feldes, die Summe $G_{1,y} + G_{2,y}$, ist null. Die x -Komponente ist die Summe aus $G_{1,x}$ und $G_{2,x}$.

$$G_y = G_{1,y} + G_{2,y} = G_1 \sin \theta - G_2 \sin \theta = 0$$

$$\begin{aligned} G_x &= G_{1,x} + G_{2,x} = 2 G_{1,x} = 2 |\mathbf{G}_1| \cos \theta \\ &= \frac{2 \Gamma m}{r^2} \cos \theta \end{aligned}$$

3. Drücken Sie $\cos \theta$ durch x und r aus (siehe Abbildung 4.37). Achten Sie auf die richtige Zuordnung der Minuszeichen!

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{x}{r} \rightarrow \cos \theta = -\frac{x}{r}$$

4. Wenn Sie die Ergebnisse aus Schritt 2 und 3 kombinieren, erhalten Sie \mathbf{G} . Um \mathbf{G} als Funktion von x_P zu schreiben, setzen Sie $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_x \hat{x} = -2 \frac{\Gamma m}{r^2} \frac{x_P}{r} \hat{x} = -\frac{2 \Gamma m x_P}{r^3} \hat{x} \\ &= -\frac{2 \Gamma m x_P}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{x} \end{aligned}$$

5. x_P ist ein beliebiger Punkt auf der x -Achse. Damit können wir im Ergebnis von Schritt 4 x anstelle von x_P einsetzen:

$$\mathbf{G} = -\frac{2 \Gamma m x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{x}$$

Plausibilitätsprüfung: Für $x < 0$ zeigt \mathbf{G} in die positive x -Richtung, für $x > 0$ dagegen in die negative x -Richtung, wie zu erwarten war. Für $x = 0$ ergibt sich $\mathbf{G} = 0$; die Felder, die durch m_1 und m_2 hervorgerufen werden, sind für $x = 0$ entgegengesetzt gleich und heben sich dort gegenseitig auf.

Weitergedacht: Für $x \gg a$ ergibt sich $\mathbf{G} \approx -(2 \Gamma m / x^2) \hat{x}$. Das Feld ist dann das gleiche, als ob es durch eine einzelne Masse von $2m$ im Ursprung hervorgerufen würde. ■

Beispiel 4.16: Das Gravitationsfeld eines gleichförmigen Stabs

Ein gleichförmiger Stab der Masse m und der Länge l liegt auf der x -Achse; sein Mittelpunkt befindet sich im Ursprung (Abbildung 4.38). Berechnen Sie das durch den Stab hervorgerufene Gravitationsfeld für alle Punkte auf der x -Achse mit $x > l/2$.

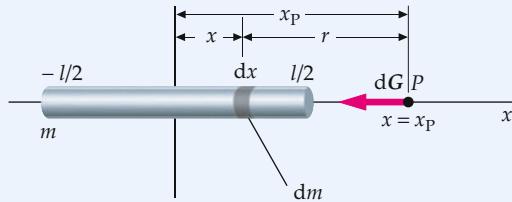


Abbildung 4.38 Alle Punkte auf der x -Achse im Bereich $-l/2 < x < l/2$ sind Quellpunkte; der Punkt P ist ein Aufpunkt.

Problembeschreibung: Fertigen Sie eine Skizze des Stabs an (Abbildung 4.38). Wählen Sie ein Massenelement dm der Länge dx am Ort x mit $-l/2 < x < l/2$ und legen Sie einen Aufpunkt P auf der x -Achse im Bereich $x > l/2$ fest. Jedes so definierte Massenelement des Stabs ruft in P ein Gravitationsfeld hervor, das in die negative x -Richtung zeigt. Wir können das Gesamtfeld in P berechnen, indem wir über die x -Komponente des Felds integrieren, das durch das Massenelement dm hervorgerufen wird. Die Integration läuft von $x = -l/2$ bis $x = +l/2$.

Lösung: 1. Berechnen Sie die x -Komponente des Felds in P , das durch das Massenelement dm hervorgerufen wird.

$$dG_x = -\frac{\Gamma dm}{r^2}$$

2. Da der Stab gleichförmig ist, ist die Massenbelegung pro Einheitslänge λ konstant; ihr Wert ergibt sich, wenn man die Gesamtmasse des Stabs durch die Gesamtlänge teilt. Die Masse eines Massenelement dm ist gleich der Massenbelegung pro Einheitslänge mal der Größe des Elements dx .

$$dm = \lambda dx$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{m}{l}$$

3. Drücken Sie den Abstand r zwischen dem Massenelement dm und dem Aufpunkt P mithilfe von x und x_P aus.

$$r = x_P - x$$

4. Setzen Sie diese Ergebnisse ein und drücken Sie dG_x mithilfe von x aus:

$$dG_x = -\frac{\Gamma dm}{r^2} = -\frac{\Gamma \lambda dx}{(x_P - x)^2}$$

5. Durch Integration erhalten Sie die x -Komponente des Gesamtfelds:

$$\begin{aligned} G_x &= \int dG_x = -\Gamma \lambda \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{(x_P - x)^2} \\ &= -\frac{\Gamma m}{x_P^2 - (l/2)^2} \end{aligned}$$

6. Drücken Sie das sich ergebende Feld in Vektorschreibweise aus.

$$\mathbf{G} = G_x \hat{x} = -\frac{\Gamma m}{x_P^2 - (l/2)^2} \hat{x}$$

7. Hier ist x_P ein beliebiger Punkt auf der x -Achse im Bereich $x > l/2$. Daher können wir dafür x schreiben:

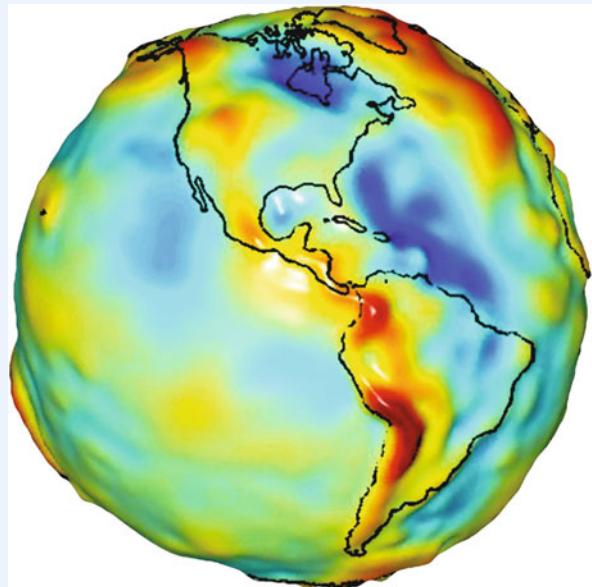
$$\boxed{\mathbf{G} = -\frac{\Gamma m}{x^2 - (l/2)^2} \hat{x} \quad x > l/2}$$

Plausibilitätsprüfung: Für $x \gg l/2$ nähert sich das Feld dem einer Punktmasse der Masse m an, nämlich $\mathbf{G} = -(\Gamma m/x^2) \hat{x}$. ■

Beispiel 4.17: Eine Gravitationskarte der Erde

Im März 2002 wurden die beiden Satelliten des Gravity Recovery And Climate Experiment (GRACE) gestartet, die gemeinsam das Schwerkraftfeld der Erde genau vermessen sollen. Die beiden Satelliten umkrei-

sen die Erde auf derselben niedrigen Umlaufbahn im Abstand von etwa 220 km. Der Abstand zwischen den Satelliten wird mithilfe von Mikrowellenstrahlung kontinuierlich auf wenige Mikrometer genau überwacht. Wie ändert sich der Abstand zwischen den beiden Satelliten, wenn sie sich einem Bereich mit erhöhter Masse nähern?



Die Gravitationskarte der westlichen Hemisphäre gibt in einer Farbcodierung die Stärke des lokalen Gravitationsfelds an. Die Werte variieren leicht von Ort zu Ort. Blaue Farbtöne deuten auf niedrigere Werte, gelbliche und bräunliche Farbtöne auf hohe Werte der Gravitation hin. Die Variationen sind auf dieser Karte zudem überhöht dargestellt. (© NASA/University of Texas Center for Space Research.)

Problembeschreibung: Die Stärke des Gravitationsfelds der Erde ändert sich von Ort zu Ort, da die Masse der Erde nicht gleichförmig verteilt ist. Beispielsweise ist Fels dichter als Wasser, und dadurch ist das Gravitationsfeld über einer dichten Gebirgsregion stärker als über einer ausgedehnten Wasserfläche.

Lösung: Wenn die beiden Satelliten sich einem Bereich mit erhöhter Masse nähern, werden sie von dem durch die zusätzliche Masse erhöhten Gravitationsfeld stärker angezogen. Dabei ist die Anziehungskraft auf den vorderen der beiden Satelliten größer, weil er der anziehenden Masse näher ist. Folglich gewinnt der vordere der beiden Satelliten schneller Geschwindigkeit als der nachfolgende Satellit. Das führt zu einem größeren Abstand zwischen den beiden Satelliten.

Der Abstand zwischen den Satelliten nimmt zu, wenn sie einen Bereich erhöhter Masse überfliegen.

Weitergedacht: Aus einer Karte des Gravitationsfelds der Erde lässt sich auch die Massenverteilung oberhalb und unterhalb der Erdoberfläche ableiten. Beispielsweise kann mithilfe der Messungen des Gravitationsfelds der Erde auch dargestellt werden, wie sich die Wasserströmung im westlichen Pazifik während eines El-Niño-Ereignisses aufbaut. Gravitationskarten liefern auch Informationen, die bei der Suche nach Bodenschätzungen wie Wasser oder Mineralöl helfen können.

Frage 4.5

Die beiden Satelliten befinden sich über einem Bereich erhöhter Masse, und zwar so, dass der vordere Satellit den Bereich bereits verlässt und der hintere Satellit gerade über dem Bereich ankommt. Ändert sich dann der Abstand zwischen den Satelliten? Nimmt er zu, oder nimmt er ab?

Gravitationsfeld einer Kugelschale und einer Vollkugel

Einer der Beweigründe Newtons, die Integralrechnung zu entwickeln, war sein Wunsch zu beweisen, dass das Gravitationsfeld einer Vollkugel (d. h. einer massiven Kugel) in einem beliebigen Punkt außerhalb der Kugel das gleiche ist, wie wenn die gesamte Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre. (Diese Aussage gilt jedoch nur, wenn die Massendichte der Kugel gleichförmig ist oder sich nur mit dem Abstand vom Kugelmittelpunkt ändert.) Wir werden den Beweis am Ende dieses Abschnitts vorstellen, daher wollen wir an dieser Stelle nur die wichtigsten Folgerungen zeigen. Dazu betrachten wir eine homogene Kugelschale mit der Masse m_K und dem Radius r_K (Abbildung 4.39). Wir werden zeigen, dass das durch die Kugelschale verursachte Gravitationsfeld in einer Entfernung r von ihrem Mittelpunkt gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(r) = -\frac{\Gamma m_K}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{für } r > r_K, \quad (4.33a)$$

$$\mathbf{G}(r) = 0 \quad \text{für } r < r_K \quad (4.33b)$$

GRAVITATIONSFELD EINER KUGELSCHALE

Befindet sich eine Punktmasse außerhalb der Kugelschale, so bewirkt die Kugelschale ein Gravitationsfeld, als ob ihre gesamte Masse in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre; befindet sich die Probemasse dagegen im Inneren der Kugelschale, so erfährt die Punktmasse kein Gravitationsfeld durch die Kugelschale. Dieses Ergebnis lässt sich verstehen, wenn wir Abbildung 4.40 betrachten, die eine Punktmasse m_0 an einem beliebigen Ort im Inneren einer Kugelschale zeigt (nicht notwendigerweise im Mittelpunkt). Bei der gezeigten Anordnung sind die Kugelschalensegmente mit den Massen m_1 bzw. m_2 proportional zu den

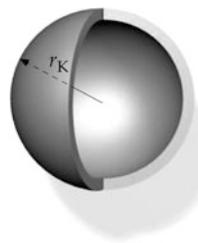


Abbildung 4.39 Eine homogene Kugelschale mit der Masse m_K und dem Radius r_K . Die Dicke der Kugelschale wird als verschwindend angenommen.

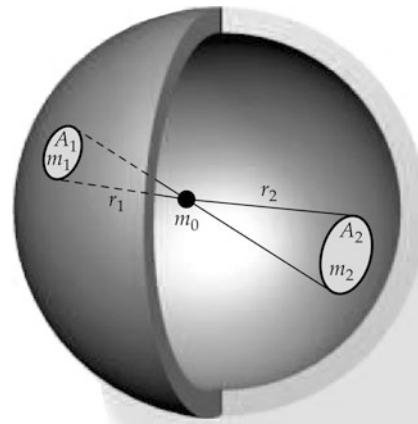


Abbildung 4.40 Eine Punktmasse m_0 innerhalb einer homogenen Kugelschale erfährt keine resultierende Gravitationskraft. Die Anziehung des Kugelschalensegments mit der Masse m_1 wird durch die Anziehung des Massenelements mit der Masse m_2 , das zwar größer, aber weiter entfernt ist, ausgeglichen.

Flächen A_1 bzw. A_2 auf der Kugelschale, und die Flächen wiederum sind proportional zum Quadrat der Radien r_1 bzw. r_2 . Es folgt

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

und damit

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}.$$

Da das Gravitationsfeld, das durch die Masse von einem der Segmente verursacht wird, und damit auch die entsprechende Gravitationskraft mit $1/r^2$ abfällt, wird die Gravitationskraft der kleineren Masse m_1 auf der linken Seite durch die Gravitationskraft der größeren, aber weiter entfernt liegenden Masse m_2 auf der rechten Seite ausgeglichen.

Das Gravitationsfeld außerhalb einer Vollkugel ergibt sich, indem man Gleichung 4.33 erweitert. Dazu stellt man sich vor, die

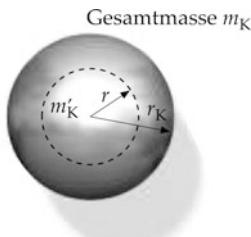


Abbildung 4.41 Eine Vollkugel vom Radius r_K und der Masse m_K mit homogener Massenverteilung. Zum Gravitationsfeld an einem Ort im Abstand r vom Zentrum im Inneren der Kugel trägt nur der Anteil m'_K der Gesamtmasse bei, der sich innerhalb einer Kugel mit dem Radius r befindet.

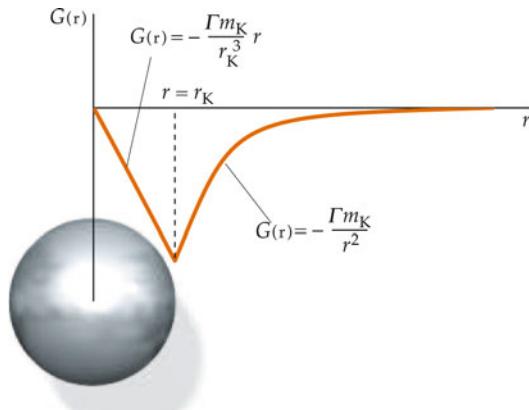


Abbildung 4.42 Verlauf der Gravitationsfeldstärke $G(r)$ für eine homogene Vollkugel mit der Masse m_K und dem Radius r_K . Der Betrag des Gravitationsfelds nimmt innerhalb der Kugel linear mit r zu und außerhalb mit $1/r^2$ ab.

Kugel sei aus einem Kontinuum von Kugelschalen zusammengesetzt. Da jede einzelne Kugelschale ein Feld hat, als ob ihre Masse im Mittelpunkt der Schale konzentriert wäre, ist auch das Feld der Vollkugel dasselbe, als befände sich die gesamte Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt:

$$G(r) = -\frac{\Gamma m}{r^2} \quad \text{für } r > r_K. \quad (4.34)$$

Dieses Ergebnis gilt, ganz gleich, ob die Kugel eine konstante Dichte hat oder nicht, solange die Dichte kugelsymmetrisch ist, d.h. solange die Dichte nur von der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt, nicht aber von einem Winkel abhängt.

Gravitationsfeld innerhalb einer Vollkugel

Wir verwenden nun die Gleichungen 4.33a und 4.33b, um das Gravitationsfeld im Inneren einer Vollkugel mit konstanter Dichte zu bestimmen. Wir betrachten einen Aufpunkt in einer Entfernung r vom Mittelpunkt der Kugel, für den $r < r_K$ gilt.

Eine mögliche Anwendung hierfür wäre zum Beispiel die Messung der Gewichtskraft am Fuß eines tiefen Bergwerkschachts. Wie wir gesehen haben, ist das Gravitationsfeld innerhalb einer Kugelschale oder einer Hohlkugel null. Folglich übt die Masse einer Kugelschale mit einem Radius größer r keine Kraft auf Massenpunkte aus, die sich im Abstand r oder kleiner vom Kugelmittelpunkt befinden (Abbildung 4.41). Nur die Masse m'_K innerhalb einer Kugel vom Radius r trägt zum Gravitationsfeld am Ort r bei. Diese Masse erzeugt ein Feld, das gleich dem einer Punktmasse m'_K im Zentrum der Kugel ist. Bei einer gleichförmigen Massenverteilung ist der Anteil der Masse innerhalb einer Kugel vom Radius r an der Gesamtmasse der Vollkugel mit Radius r_K gleich dem Volumenverhältnis der betrachteten Kugeln mit den Radien r und r_K . Bei einer gleichförmigen Vollkugel mit einer Gesamtmasse m_K ist dann m'_K gegeben durch

$$m'_K = m_K \frac{4/3 \pi r^3}{4/3 \pi r_K^3} = m_K \frac{r^3}{r_K^3}. \quad (4.35)$$

Das Gravitationsfeld im Abstand r vom Kugelmittelpunkt ist folglich

$$G(r) = -\frac{\Gamma m'_K}{r^2} = -\frac{\Gamma m_K}{r^2} \frac{r^3}{r_K^3} \quad \text{für } r \leq r_K$$

bzw.

$$G(r) = -\frac{\Gamma m_K}{r_K^3} r \quad \text{für } r \leq r_K. \quad (4.36)$$

Die Gravitationsfeldstärke ist im Mittelpunkt der Kugel null und nimmt innerhalb der Kugel mit wachsendem Abstand r zum Mittelpunkt linear zu. Außerhalb der Kugel folgt sie dem bekannten $1/r^2$ -Gesetz. Abbildung 4.42 zeigt den Verlauf der Gravitationsfeldstärke als Funktion von r für eine Vollkugel mit homogener Massendichte.

In Beispiel 4.18 berechnen wir das Gravitationsfeld einer Hohlkugel mit *inhomogener* Massenverteilung.

Beispiel 4.18: Ein Hohlplanet

In einem fernen Sonnensystem befindet sich ein Planet mit einem hohlen Kern. Man kann diesen Hohlplaneten als eine gleichförmige, dicke Kugelschale mit der Masse m_K , dem Außenradius r_K und dem Innenradius $r_K/2$ auffassen. a) Welcher Teil der Gesamtmasse ist näher als $\frac{3}{4}r_K$ am Mittelpunkt des Planeten? b) Welches Gravitationsfeld herrscht in der Entfernung $\frac{3}{4}r_K$ vom Mittelpunkt des Planeten?

Problembeschreibung: Die Masse m'_K des Teils der dicken Kugelschale, der dichter am Mittelpunkt liegt als $\frac{3}{4}r_K$, lässt sich mithilfe von Gleichung 4.35 berechnen. Man muss dabei jedoch beachten, dass die Gesamtmasse m_K sich nur im Bereich von $\frac{1}{2}r_K$ bis r_K befindet und das Volumen um den Mittelpunkt keine Masse enthält.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Formulieren Sie analog zu Gleichung 4.35 die Formel für die Masse, die sich bis zum Radius $\frac{3}{4}r_K$ im Hohlplaneten befindet:

$$m'_K = m_K \cdot \frac{V'_{\frac{3}{4}r_K}}{V'_{r_K}}$$

2. Berechnen Sie die in Schritt 1 eingeführten Volumina. Beachten Sie dabei, dass Sie das Volumen $V_{r_K/2}$ jeweils abziehen, da es keine Masse enthält:

$$V'_{r_K} = V_{r_K} - V_{r_K/2} = \frac{4}{3} \pi r_K^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{7}{8} V_{r_K}$$

$$V'_{\frac{3}{4}r_K} = V_{r_K} - V_{r_K/2} = \frac{4}{3} \pi r_K^3 \cdot \left(\frac{3^3}{4^3} - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{19}{64} V_{r_K}$$

3. Setzen Sie die in Schritt 2 erhaltenen Volumenanteile in die Gleichung aus Schritt 1 ein, um das Endergebnis zu erhalten:

$$m'_K = m_K \cdot \frac{19/64 V_{r_K}}{7/8 V_{r_K}} = \boxed{\frac{19}{56} m_K}$$

Teilaufgabe b

Das Gravitationsfeld bei $r = 3/4 r_K$ wird nur durch die Masse m'_K hervorgerufen:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= -\frac{\Gamma m'_K}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\Gamma 19/56 m_K}{(3/4 r_K)^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &= \boxed{-\frac{38}{63} \frac{\Gamma m_K}{r_K^2} \hat{\mathbf{r}}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In der Schale bis zum Radius $3/4 r_K$ befindet sich ungefähr 34 % der Gesamtmasse des Hohlplaneten, was 30 % der Gesamtmasse eines homogen mit Masse befüllten Planeten ausmacht. Da das mit Masse ausgestattete Volumen des Hohlplaneten 87 % des Volumens eines komplett mit Masse befüllten Planeten darstellt, erscheint das Endergebnis plausibel. ■

Berechnung des Gravitationsfelds einer Kugelschale durch Integration

Wir werden die Gleichung für das durch eine Kugelschale erzeugte Gravitationsfeld in zwei Schritten herleiten und damit beweisen, dass das Gravitationsfeld außerhalb der Kugelschale tatsächlich dasselbe ist, wie wenn die gesamte Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre. Die Rechnung sieht schwierig aus (ist es aber nicht), da die Geometrie etwas

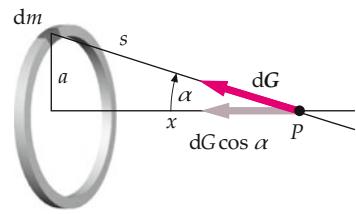


Abbildung 4.43 Ein dünner homogener Ring mit der Gesamtmasse m erzeugt im Aufpunkt P auf seiner Achse ein Gravitationsfeld \mathbf{G} . Das Feld $d\mathbf{G}$, das durch ein Massenelement dm des Rings verursacht wird, ist zum Element hin gerichtet. Das Gesamtfeld des Rings zeigt in Richtung der Ringachse.

kompliziert erscheint und die Verwendung von Kugelkoordinaten ungewohnt sein mag.

Zunächst berechnen wir die Feldstärke auf der Achse eines homogenen Rings. Dann wenden wir dieses Ergebnis auf eine Kugelschale an, die wir als aus koaxialen Ringen zusammengesetzt betrachten.

Abbildung 4.43 zeigt einen Ring mit der Gesamtmasse m und dem Radius a . Der Aufpunkt P liegt im Abstand x von der Ringebene auf der Symmetriechse. Auf dem Ring wählen wir ein differenzielles Massenelement dm , das so klein ist, dass wir es als punktförmig betrachten können. Dieses Element befindet sich im Abstand s vom Aufpunkt P ; die Verbindungsgeraden zwischen P und dem Massenelement bildet den Winkel α mit der Ringachse.

Das Feld im Aufpunkt, das durch das Massenelement dm verursacht wird, ist zu dem Massenelement hin gerichtet; die Feldstärke ist gegeben durch

$$dG = -\frac{\Gamma dm}{s^2}.$$

Aus der Symmetrie der Anordnung lässt sich schließen, dass das Gesamtfeld entlang der Achse des Rings verläuft, wenn über alle Massenelemente des Rings integriert wird. Alle Feldkomponenten senkrecht zu der Achse kompensieren sich gegenseitig. Beispielsweise wird die in der Abbildung gezeigte, senkrecht auf der Ringachse stehende Feldkomponente durch die senkrechte Komponente des Felds kompensiert, das auf ein dem abgebildeten Massenelement direkt gegenüberliegendes Massenelement zurückgeht. Das Gesamtfeld verläuft in negativer x -Richtung. Die x -Komponente des durch das Massenelement dm verursachten Felds ist

$$dG_x = dG \cos \alpha = -\frac{\Gamma dm}{s^2} \cos \alpha.$$

Das gesamte Gravitationsfeld erhalten wir durch Integration über alle Massenelemente des Rings:

$$G_x = -\int \frac{\Gamma \cos \alpha}{s^2} dm.$$

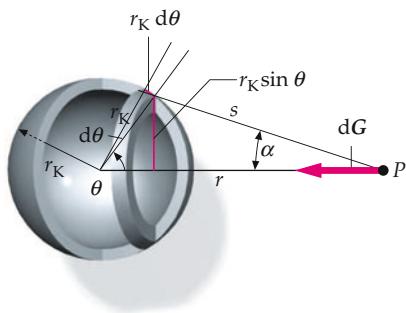


Abbildung 4.44 Eine homogene dünne Kugelschale mit dem Radius r_K und der Masse m_K . Den eingezeichneten Streifen kann man als einen Ring mit der Breite $r_K d\theta$ und dem Umfang $2\pi r_K \sin \theta$ betrachten. Das Gravitationsfeld der Kugelschale erhält man, indem man über alle Streifen auf der Kugelschale summiert; dazu führt man eine Integration über θ von $\theta = 0$ bis $\theta = 180^\circ$ durch.

Da s und α für alle Punkte auf dem Ring denselben Wert haben, sind sie für die Integration konstant. Daher gilt:

$$G_x = -\frac{\Gamma \cos \alpha}{s^2} \int dm = -\frac{\Gamma m}{s^2} \cos \alpha. \quad (4.37)$$

Dabei ist $m = \int dm$ die Gesamtmasse des Rings.

Dieses Ergebnis verwenden wir nun, um das Gravitationsfeld einer Kugelschale mit der Masse m_K und dem Radius r_K in einer Entfernung r zum Mittelpunkt der Kugelschale zu bestimmen. Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Aufpunkt P sich außerhalb der Kugelschale befindet (Abbildung 4.44). Wegen der Symmetrie der Anordnung muss das Feld kugelsymmetrisch sein. Als Massenelement wählen wir den gezeigten Streifen auf der Kugelschale, den man als einen Ring mit der Masse dm_K betrachten kann. Das Gravitationsfeld, das ein solcher Streifen erzeugt, kann man mit Gleichung 4.37 berechnen, wenn man dort die Masse m durch dm_K ersetzt:

$$dG = -\frac{\Gamma dm_K}{s^2} \cos \alpha. \quad (4.38)$$

Die Masse dm_K ist proportional zur Fläche dA des Streifens, die sich aus dem Umfang mal der Breite berechnet. Der Radius des Streifens ist $r_K \sin \theta$, der Umfang beträgt daher $2\pi r_K \sin \theta$; die Breite des Streifens ist $r_K d\theta$. Mit der Gesamtmasse m_K der Kugelschale und der Fläche $A = 4\pi r_K^2$ ergibt sich die Masse eines Streifens mit der Fläche dA zu

$$dm_K = \frac{m_K}{A} dA = \frac{m_K}{4\pi r_K^2} 2\pi r_K^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} m_K \sin \theta d\theta. \quad (4.39)$$

Setzt man dies in Gleichung 4.38 ein, erhält man schließlich für das Gravitationsfeld dG eines Rings

$$dG = -\frac{\Gamma dm_K}{s^2} \cos \alpha = -\frac{\Gamma m_K \sin \theta d\theta}{2 s^2} \cos \alpha. \quad (4.40)$$

Der Term auf der rechten Seite von Gleichung 4.40 enthält drei Variablen (s , θ und α). Bevor wir diesen Term über die gesamte Kugelschale integrieren können, müssen wir zwei der drei

abhängigen Variablen eliminieren und alles als Funktion einer einzigen Variablen ausdrücken. Es zeigt sich, dass es am einfachsten ist, alles als Funktion von s zu schreiben; dabei soll s von $r - r_K$ (bei $\theta = 0$) bis $r + r_K$ (bei $\theta = 180^\circ$) laufen. Nach dem Kosinussatz haben wir den Zusammenhang

$$s^2 = r^2 + r_K^2 - 2 r r_K \cos \theta.$$

Differenziation ergibt

$$2 s ds = +2 r r_K \sin \theta d\theta$$

bzw.

$$\sin \theta d\theta = \frac{s ds}{r r_K}.$$

Einen Ausdruck für $\cos \alpha$ erhalten wir, indem wir nochmals den Kosinussatz auf das gleiche Dreieck anwenden. Dann gilt

$$r_K^2 = s^2 + r^2 - 2 s r \cos \alpha$$

bzw.

$$\cos \alpha = \frac{s^2 + r^2 - r_K^2}{2 s r}.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung 4.40 ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} dG &= -\frac{\Gamma m_K \sin \theta d\theta}{2 s^2} \cos \alpha \\ &= -\frac{\Gamma m_K}{2 s^2} \left(\frac{s ds}{r r_K} \right) \frac{s^2 + r^2 - r_K^2}{2 s r} \\ &= -\frac{\Gamma m_K ds}{4 s^2 r^2 r_K} (s^2 + r^2 - r_K^2) \\ &= -\frac{\Gamma m_K}{4 r^2 r_K} \left(1 + \frac{r^2 - r_K^2}{s^2} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Das Feld der gesamten Kugelschale im Aufpunkt P erhält man durch Integration über s . Die Integrationsgrenzen in diesem Schritt hängen davon ab, ob sich P außerhalb der Kugelschale oder im Inneren befindet. Liegt P außerhalb der Kugelschale, läuft s von $r - r_K$ (bei $\theta = 0$) bis $r + r_K$ (bei $\theta = 180^\circ$). Für die Integration über die Kugelschale lässt man s von $s = r - r_K$ bis $s = r + r_K$ laufen und erhält

$$\begin{aligned} G &= -\frac{\Gamma m_K}{4 r^2 r_K} \int_{r-r_K}^{r+r_K} \left(1 + \frac{(r - r_K)(r + r_K)}{s^2} \right) ds \\ &= -\frac{\Gamma m_K}{4 r^2 r_K} \left[s - \frac{(r - r_K)(r + r_K)}{s} \right]_{r-r_K}^{r+r_K}. \end{aligned}$$

Setzen wir die obere und die untere Grenze für s ein, ergibt sich für den Ausdruck in eckigen Klammern der Wert $4 r_K$. Damit folgt für das Gravitationsfeld der Kugelschale

$$G = -\frac{\Gamma m_K}{r^2} \quad \text{für } r > r_K.$$

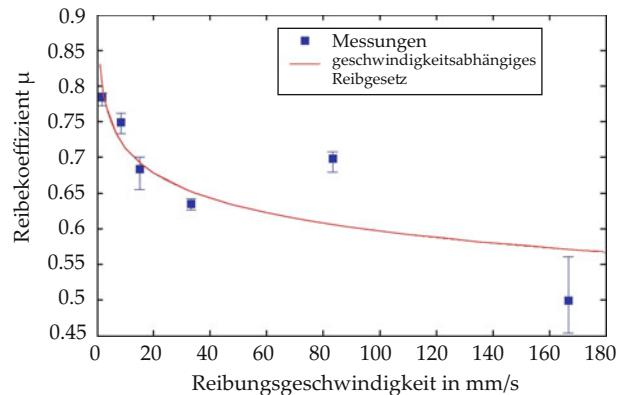
Das entspricht betragsmäßig genau Gleichung 4.33a.

🔍 Im Kontext: Bremsenquietschen und Erdbeben – Probleme von Reibungsinstabilitäten

Reibung ist ein Phänomen, das uns überall begegnet: egal ob wir „zu wenig“ Reibung haben, wenn die Autoreifen durchdrehen oder „zu viel“ Reibung, wenn wir eine Schraube nicht gelöst bekommen. Auch im industriellen Bereich gibt es unzählige Problemfelder, bei denen Reibungs- und Kontaktkräfte eine zentrale Rolle spielen: Lagerreibung, Schmierung, Verschleiß, Traktion und elektrische Schalter sind dabei einige Beispiele¹. Typische Arbeitsfelder sind hier die Untersuchung von Gummireibegenschaften für Reifenhersteller, der Kontakt zwischen Eisenbahnrad und Schiene oder Schmier- und Verschleißanalysen von Getrieben.

Reibungsphysik hat noch einiges mehr zu bieten als das Coulomb'sche Reibungsgesetz, das besagt, dass die Reibungskraft sich immer proportional zur Normalkraft verhält, so z. B. Reibungsinstabilitäten wie das plötzliche Losbrechen bestehender Reibungsverbindungen.

Diese Instabilitäten haben ihren Ursprung in der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibungskraft: In Ruhe ist die Reibungskraft in der Regel größer als bei einer Relativbewegung der Kontaktkörper.



Messung des Reibungskoeffizienten zwischen Gesteinen bei verschiedenen Relativgeschwindigkeiten sowie Fit mithilfe eines geschwindigkeitsabhängigen Reibungsgesetzes. (© Birthe Grzembra)

Dadurch kann sich eine zyklische Bewegung einstellen, die Schwingungen am Bauteil oder in der Maschine auslöst. Genau das kann bei Bremsprozessen passieren, bei denen durch Reibungsinstabilitäten die Bremsscheiben zum Schwingen angeregt werden, was sich auch akustisch äußert: Die Bremsen quietschen. Wir am deutschlandweit einzigen Lehrstuhl für Reibungsprozesse an der TU Berlin arbeiten an einem Projekt, in dem durch eine Anregung des Bremskontakts mit Ultraschallschwingungen die Instabilität und damit das Quietschen verhindert werden sollen².

Solche Phänomene treten auch bei viel größeren Systemen auf: Erdbeben sind Ereignisse, die sehr plötzlich nach einer langen Ruhephase

vermeintlich unvermittelt auftreten. Sie werden ausgelöst durch mechanische Spannungen, die sich zwischen den tektonischen Platten aufbauen und sich plötzlich und ruckartig durch Abgleiten lösen. Aus der Sicht eines Reibungsphysikers ist dieser Prozess eine Reibungsinstabilität, ein sogenannter Stick-Slip-Prozess, da er aus periodisch wechselnden Haft- und Gleitphasen besteht.

Um in Zukunft bessere Frühwarnsysteme für Erdbeben zu ermöglichen, forschen wir auch an der Vorhersagbarkeit von Reibungsinstabilitäten. Wir nutzen elementare Labormodelle, die sich sehr regulär verhalten und genau vermessen lassen, um daraus Methoden zu entwickeln, die den Zeitpunkt des Losbrechens der Instabilität vorhersagen können. Dabei interessiert uns im Besonderen der langsame Kriechprozess, der der Reibungsinstabilität vorausgeht und als Vorbote verwendet werden kann³. Wir hoffen, dass daraus in der Zukunft Methoden entwickelt werden können, die auch für die Anwendung auf größere, natürliche Systeme, wie Erdbeben oder Erdrutsche geeignet sind.

1. Popov, V. L., *Kontaktmechanik und Reibung – von der Nanotribologie bis zur Erdbebedynamik*, Springer, Heidelberg/New York, 2011
2. Teidlert, E., Starcevic J., Popov, V. L., „Influence of Ultrasonic Oscillation on Static and Sliding Friction“, *Tribology Letters* **48**, Issue 1, October 2012, 51–62
3. Popov, V. L., Grzembra, B., Starcevic, J., Popov, M., „Rate and state dependent friction laws and the prediction of earthquakes: What can we learn from laboratory models?“, *Tectonophysics*, 2012, 532–535, 291–300.



Dipl.-Ing. Birthe Grzembra studierte Physikalische Ingenieurwissenschaften in Berlin und Stockholm. 2009 schloss sie das Diplomstudium mit Auszeichnung ab und arbeitet seitdem am Fachgebiet für Systemdynamik und Reibungsphysik an der TU Berlin. Ihr Forschungsschwerpunkt sind Reibungsinstabilitäten und ihre Vorhersagbarkeit.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Reibung	Zwei Körper, die in direktem Kontakt stehen, üben Reibungskräfte aufeinander aus. Diese Kräfte sind parallel zu den Kontaktflächen der Körper und wirken deren Gleiten oder Bestreben zu gleiten entgegen.
Hafreibung	$ F_{R,h} \leq \mu_{R,h} F_n ,$ (4.2) wobei $ F_n $ die Normalkraft und $\mu_{R,h}$ der Hafreibungscoefficient ist.
Gleitreibung	$ F_{R,g} = \mu_{R,g} F_n ,$ (4.3) wobei $\mu_{R,g}$ der Gleitreibungskoeffizient ist. Der Gleitreibungskoeffizient ist etwas kleiner als der Hafreibungscoefficient.
Rollreibung	$ F_{R,r} = \mu_{R,r} F_n ,$ (4.4) wobei $\mu_{R,r}$ der Rollreibungskoeffizient ist. Rollreibungskoeffizienten sind in der Regel um ein bis zwei Größenordnungen kleiner als die Gleitreibungskoeffizienten vergleichbarer Materialkombinationen.
2. Widerstandskräfte	Bewegt sich ein Körper durch ein Fluid, also durch eine Flüssigkeit oder ein Gas, erfährt er eine Widerstandskraft, die seiner Bewegung entgegengewirkt. Die Widerstandskraft steigt mit wachsender Geschwindigkeit. Wenn ein Körper aus der Ruhe fallen gelassen wird, wächst seine Geschwindigkeit. Dabei geht der Betrag der Widerstandskraft gegen den der Gravitationskraft, wobei die Gesamtkraft und damit auch die Beschleunigung null werden. Die dann erreichte konstante Geschwindigkeit wird Endgeschwindigkeit genannt. Sie hängt von der Gestalt des Körpers und von dem Medium, durch das er fällt, ab.
3. Scheinkräfte	Trägheits- oder Scheinkräfte treten auf, wenn sich der Beobachter in einem beschleunigten System befindet. Ein Beispiel dafür ist ein rotierendes System.
Coriolis-Kraft	Sie wird von einem Beobachter in einem rotierenden System wahrgenommen und hängt von der Winkelgeschwindigkeit der Rotation ω , der Geschwindigkeit des bewegten Körpers $v^{(B)}$ und der Richtung ab, in die der Körper sich relativ zum Beobachter und zur rotierenden Scheibe bewegt. Ruht der Beobachter im rotierenden System, gilt: $F_{Cor} = -2m \cdot \omega \times v^{(B)} = -2m \cdot \omega \cdot v^{(B)} \cdot \sin \phi,$ (4.12) wobei ϕ der Winkel zwischen ω und $v^{(B)}$ ist.
4. Die Kepler'schen Gesetze	Die Kepler'schen Gesetze sind aus Beobachtungen abgeleitete <i>empirische</i> Aussagen. Sie lassen sich zudem auch aus den Newton'schen Bewegungsgesetzen und dem Newton'schen Gravitationsgesetz herleiten.
1. Kepler'sches Gesetz	Alle Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse steht.
2. Kepler'sches Gesetz (Flächensatz)	Die Verbindungsstrecke zwischen der Sonne und einem Planeten überstreicht in gleichen Zeitabständen jeweils die gleiche Fläche.
3. Kepler'sches Gesetz	Das Quadrat der Umlaufzeiten eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz des mittleren Abstands dieses Planeten von der Sonne: $T^2 = C r^3.$ (4.15)
	C hat für alle Planeten nahezu denselben Wert. Aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz lässt sich der Wert von C herleiten: $C = 4\pi^2 / (\Gamma(m_S + m_P))$. Ist die Sonnenmasse wesentlich größer als die Planetenmasse ($m_S \gg m_P$), lässt sich das dritte Kepler'sche Gesetz schreiben als $T^2 = \frac{4\pi^2}{\Gamma m_S} r^3.$

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
5. Das Newton'sche Gravitationsgesetz	Das Newton'sche Gravitationsgesetz ist ein <i>grundlegendes Naturgesetz</i> . Es besagt, dass jeder punktförmige Körper auf jeden anderen punktförmigen Körper eine anziehende Kraft ausübt, die proportional zu den Massen der beiden Körper und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen ihnen ist: $\mathbf{F} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.18)$
Universelle Gravitationskonstante	Die im Newton'schen Gravitationsgesetz auftretende Gravitationskonstante Γ ist eine grundlegende <i>universelle physikalische Naturkonstante</i> . Ihr Wert ist gegeben durch $\Gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2. \quad (4.17)$
6. Das Gravitationsfeld	Das Gravitationsfeld ist ein <i>grundlegendes physikalisches Konzept</i> . Es beschreibt die Kraft \mathbf{F}_G , die eine Massenverteilung auf eine Probemasse m an einem beliebigen Punkt im Raum ausübt: $\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}_G}{m}. \quad (4.30)$
Gravitationsfeld der Erde	$\mathbf{G}(r) = \frac{\mathbf{F}_G}{m} = -\frac{\Gamma m_E}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{für} \quad r \geq r_E \quad (4.34)$
Gravitationsfeld einer dünnen Kugelschale	Außerhalb der Kugelschale ist das Feld dasselbe, als wäre die Gesamtmasse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkt konzentriert. Das Feld im Inneren der Kugelschale ist null: $\mathbf{G} = -\frac{\Gamma m_K}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{für} \quad r > r_K, \quad (4.33a)$ $\mathbf{G} = 0 \quad \text{für} \quad r < r_K. \quad (4.33b)$

Antworten auf die Verständnisfragen

- 4.1 Ja, das Auto würde das Gefälle hinabgleiten.
- 4.2 Ein Astronaut in der Umlaufbahn heißt schwerelos, da er und das Raumschiff auf der Umlaufbahn im freien Fall sind und dieselbe Beschleunigung erfahren. Wenn der Astronaut auf einer Waage stünde, die an dem Raumschiff befestigt wäre, wäre die Anzeige null. Der Astronaut ist jedoch nicht gewichtslos, denn wir haben das Gewicht als Betrag der Gravitationskraft definiert.
- 4.3 Die Eigenschaft eines Körpers, die für die Gravitationskraft verantwortlich ist, die dieser Körper auf andere Körper ausübt oder durch einen anderen Körper erfährt, ist die *schwere* Masse. Die *träge* Masse hingegen ist die Eigenschaft eines Körpers, mit der man den trägen Widerstand gegen eine Beschleunigung beschreibt.
- 4.4 Auf der Erde sollte man einen Körper am Äquator tangential Richtung Osten starten lassen, da man so die Rotationsgeschwindigkeit der Erde von ca. 465 m/s in diese Richtung
- ausnutzen kann. Die Bahngeschwindigkeit der Erde ist im Perihel nach dem dritten Kepler'schen Gesetz am größten, d.h. um das Sonnensystem zu verlassen, startet man den Körper am besten parallel zu diesem Geschwindigkeitsvektor, der einen Betrag von ca. 29,8 km/s hat.
- 4.5 Der Abstand zwischen den Satelliten nimmt ab.

Lösungen der Übungen

- 4.1 35°
- 4.2 $1,1 \cdot 10^2 \text{ N}$
- 4.3 $|\mathbf{F}_S| = m_2 (g - a) = 44 \text{ N}$
- 4.4 30,1 AE
- 4.5 Es ist eine Gerade.
- 4.6 $8,67 \cdot 10^{-7} \text{ N}$
- 4.7 2640 km
- 4.8 $v_F = \sqrt{2 \Gamma m_M / r_M} = 4,25 \text{ km/s}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

4.1 • Auf der Ladefläche eines LKW, der auf einer geraden, horizontalen Straße fährt, liegen verschiedene Gegenstände. Der LKW beschleunigt allmählich. Welche Kraft wirkt auf die Körper und führt dazu, dass sie ebenfalls beschleunigt werden? Erläutern Sie, weshalb einige Gegenstände auf dem Boden liegen bleiben könnten, während andere nach hinten rutschen.

4.2 • Ein Block mit der Masse m liegt auf einer unter einem Winkel θ zur Horizontalen geneigten Ebene. Welche Aussagen gelten dann für den Haftreibungskoeffizienten zwischen Block und Ebene? a) $\mu_{R,h} \geq g$, b) $\mu_{R,h} = \tan \theta$, c) $\mu_{R,h} \leq \tan \theta$ oder d) $\mu_{R,h} \geq \tan \theta$.

4.3 • Richtig oder falsch? a) Damit das zweite Kepler'sche Gesetz (in gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen) gilt, muss die Gravitationskraft umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung zwischen einem gegebenen Planeten und der Sonne sein. b) Der am dichtesten an der Sonne gelegene Planet hat die kürzeste Umlaufdauer. c) Die Bahngeschwindigkeit der Venus ist größer als die Bahngeschwindigkeit der Erde. d) Aus der Umlaufzeit eines Planeten lässt sich die Planetenmasse genau bestimmen.

4.4 • Die Masse eines die Erde umkreisenden Satelliten wird verdoppelt, der Radius seiner Umlaufbahn soll jedoch gleich bleiben. Dazu muss sich die Geschwindigkeit des Satelliten a) um den Faktor 8 erhöhen, b) um den Faktor 2 erhöhen, c) nicht verändern, d) um den Faktor 8 verringern, e) um den Faktor 2 verringern.

4.5 • Zwei Sterne, die ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt umkreisen, werden als *Doppelsternsystem* bezeichnet. Was müsste mit ihrem Abstand geschehen, wenn die Masse jedes der beiden Planeten verdoppelt würde, aber dieselbe Gravitationskraft herrschen soll? Ihr Abstand müsste a) gleich bleiben, b) sich verdoppeln, c) sich vervierfachen, d) sich halbieren, e) mit den Angaben ist eine Antwort nicht möglich.

4.6 •• An einem Wintertag mit Glatteis ist der Haftreibungskoeffizient zwischen den Autoreifen und der Fahrbahn nur ein Viertel so groß wie an einem Tag, an dem die Fahrbahn trocken ist. Dadurch verringert sich die Maximalgeschwindigkeit $v_{\max,tr}$, mit der ein Auto sicher durch eine Kurve mit dem Radius r fahren kann gegenüber dem Wert von $v_{\max,tr}$ bei trockener Fahrbahn. Die Maximalgeschwindigkeit v_{\max} ist dann: a) $v_{\max,tr}$, b) $0,71v_{\max,tr}$, c) $0,50v_{\max,tr}$, d) $0,25v_{\max,tr}$, e) je nach der Masse des Autos unterschiedlich stark verringert?

4.7 •• Das folgende interessante Experiment können Sie auch zu Hause ausführen: Nehmen Sie einen Holzklotz und legen Sie ihn auf den Boden oder auf eine andere ebene Fläche.

Befestigen Sie ein Gummiband an dem Klotz und ziehen Sie in horizontaler Richtung behutsam an dem Band. Bewegen Sie die Hand dabei mit konstanter Geschwindigkeit. Zu einem bestimmten Zeitpunkt beginnt sich der Klotz zu bewegen. Allerdings bewegt er sich nicht gleichmäßig, sondern beginnt sich zu bewegen, hält wieder an, beginnt sich erneut zu bewegen, hält wieder an usw. Erläutern Sie, weshalb sich der Klotz auf diese Weise bewegt. (Gelegentlich wird diese Art der Bewegung „Ruckgleiten“ genannt.)

4.8 •• Jemand möchte einen Rekord für die Endgeschwindigkeit beim Fallschirmspringen aufstellen. Bei der Planung des Vorhabens informiert er sich zunächst über die physikalischen Grundlagen. Danach beschließt er Folgendes: Er will (ausgerüstet mit einem Sauerstoffgerät) an einem warmen Tag aus so großer Höhe wie möglich abspringen. Dabei will er eine Stellung einnehmen, in der sein Körper mit den Händen voran senkrecht nach unten zeigt. Außerdem will er einen glatten Spezialhelm und einen abgerundeten Schutzanzug tragen. Erläutern Sie, inwiefern die einzelnen Faktoren das Vorhaben unterstützen.

4.9 •• Stellen Sie sich vor, Sie sitzen als Beifahrer in einem Rennauto, das mit hoher Geschwindigkeit auf einer kreisförmigen horizontalen Rennstrecke seine Runden dreht. Dabei „spüren“ Sie deutlich eine „Kraft“, die Sie zur Außenseite der Rennstrecke drückt. In welche Richtung zeigt die Kraft, die auf Sie wirkt, tatsächlich? Woher kommt sie? (Es wird angenommen, dass sie auf Ihrem Sitz nicht rutschen.) Erläutern Sie aus Sicht der Newton'schen Axiome das *Gefühl*, dass auf Sie eine nach außen gerichtete Kraft wirkt.

4.10 •• Versetzen Sie sich in die 1960er-Jahre, als die NASA die Apollo-Mission zum Mond plante. Zeigen Sie, dass es einen bestimmten Punkt zwischen Erde und Mond gibt, an dem ein Raumschiff für einen kurzen Moment wirklich schwerelos ist. (Betrachten Sie für Ihre Rechnungen nur den Mond, die Erde und das Apollo-Raumschiff; alle anderen Gravitationskräfte werden vernachlässigt.) Erläutern Sie dieses Phänomen und bestimmen Sie, ob dieser Punkt – der Librationspunkt – näher am Mond, in der Mitte zwischen beiden Himmelskörpern oder näher an der Erde liegt.

4.11 •• Erläutern Sie, warum das Gravitationsfeld innerhalb einer massiven gleichförmigen Kugel direkt proportional zu r und nicht umgekehrt proportional zu r ist.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

4.12 • Schätzen Sie die Masse unserer Galaxis (der Milchstraße). Die Sonne umkreist das galaktische Zentrum mit einer

Umlaufzeit von 250 Millionen Jahren in einer mittleren Entfernung von 30 000 Lichtjahren. Drücken Sie die Masse der Galaxis in Vielfachen der Sonnenmasse m_S aus. (Vernachlässigen Sie die Massen, die weiter vom galaktischen Zentrum entfernt sind als die Sonne; nehmen Sie außerdem an, dass die Massen, die näher am galaktischen Zentrum sind, ihre Gravitationskraft so ausüben, als wären sie im Zentrum in einem Punktteilchen derselben Masse vereint.)

4.13 •• Bestimmen Sie über eine Dimensionsanalyse die Einheiten und Dimensionen der Konstanten b in der Gleichung für die Widerstandskraft $b|v|^n$ für a) $n = 1$ und b) $n = 2$. c) Newton zeigte, dass der Luftwiderstand eines fallenden Körpers mit einer runden Querschnittsfläche (Fläche quer zur Bewegungsrichtung) ungefähr $\frac{1}{2}\rho\pi r^2 v^2$ ist, wobei die Luftdichte $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$ beträgt. Zeigen Sie, dass dies mit der Dimensionsbetrachtung aus Aufgabenteil b in Einklang steht. d) Wie groß ist die Endgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers mit einer Masse von 56,0 kg? Nehmen Sie dabei näherungsweise seine Querschnittsfläche als eine Scheibe mit einem Radius von ca. 0,30 m an. Die Luftdichte in der Nähe der Erdoberfläche sei $1,20 \text{ kg/m}^3$. e) Die Luftdichte über der Erdoberfläche nimmt nach oben hin ab; in 8,0 km Höhe beträgt sie nur noch $0,514 \text{ kg/m}^3$. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit in dieser Höhe?

4.14 •• Schätzen Sie, in welchem Winkel man die Beine, ohne Kraftaufwand und ohne in einen „Spagat“ zu rutschen, auf einer trockenen Eisfläche spreizen kann. Der Haftreibungskoeffizient von Gummi auf Eis beträgt ungefähr 0,25.

Reibung

4.15 • Ein Holzklotz wird mit konstanter Geschwindigkeit an einem horizontalen Seil über eine horizontale Fläche gezogen. Dabei wird eine Kraft von 20 N aufgewendet. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen den Oberflächen beträgt 0,3. Ist die Reibungskraft a) ohne Kenntnis der Masse des Klotzes nicht zu bestimmen, b) ohne die Geschwindigkeit des Klotzes nicht zu bestimmen, c) 0,30 N, d) 6,0 N oder e) 20 N?

4.16 • Ein Block mit einem Gewicht von 20 N ruht auf einer horizontalen Oberfläche. Der Haftreibungskoeffizient ist $\mu_{R,h} = 0,80$, während der Gleitreibungskoeffizient $\mu_{R,g} = 0,60$ ist. Nun wird an dem Block ein horizontaler Faden befestigt und daran mit einer konstanten Zugkraft $|F_S|$ gezogen. Wie groß ist der Betrag der auf den Block wirkenden Reibungskraft bei a) $|F_S| = 15 \text{ N}$, b) $|F_S| = 20 \text{ N}$?

4.17 • Eine Kiste mit einer Masse von 100 kg steht auf einem dicken Florteppich. Ein Arbeiter beginnt, mit einer horizontalen Kraft von 500 N dagegenzudrücken. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Kiste und Teppich beträgt 0,600, während der Gleitreibungskoeffizient 0,400 beträgt. Berechnen Sie den Betrag der Reibungskraft, die der Teppich auf die Kiste ausübt.

4.18 • Der Haftreibungskoeffizient zwischen den Reifen eines Autos und einer horizontalen Straße beträgt 0,60. Der Luftwiderstand und die Rollreibung sollen vernachlässigbar sein. a) Wie hoch ist die maximal mögliche Beschleunigung, wenn das Auto bremst? b) Wie groß ist der Bremsweg des Autos mindestens, wenn es zunächst mit 30 m/s fährt?

4.19 •• Ein schon mit verschiedenen Dingen vollbepackter Student versucht noch, ein dickes Physikbuch unter seinem Arm geklemmt zu halten (Abbildung 4.45). Die Masse des Buchs beträgt 3,2 kg, der Haftreibungskoeffizient zwischen Buch und Arm 0,320 und der zwischen Buch und T-Shirt 0,160. a) Welche horizontale Kraft muss der Student mindestens aufbringen, um zu verhindern, dass das Buch herunterfällt? b) Der Student kann nur eine Kraft von 61 N aufbringen. Wie groß ist in diesem Fall die Beschleunigung des Physikbuchs, während es unter dem Arm wegrutscht? Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Buch und Arm beträgt 0,200 und der zwischen Buch und T-Shirt 0,090.

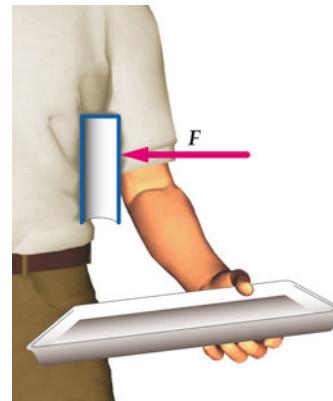


Abbildung 4.45 Zu Aufgabe 4.19.

4.20 •• An einem Tag, an dem bei Temperaturen um den Gefrierpunkt Schnee fällt, findet ein Autorennen statt. Der Haftreibungskoeffizient zwischen den Autoreifen und der vereisten Straße beträgt 0,080. Der Rennleiter ist besorgt wegen einiger Hügel auf der Bahn und empfiehlt, Reifen mit Spikes zu verwenden. Um die Sache genauer zu betrachten, möchte er prüfen, welche der tatsächlich auf der Bahn vorkommenden Neigungswinkel ein Rennwagen schaffen kann. a) Welche maximale Steigung kann ein Auto mit Allradantrieb unter diesen Bedingungen mit konstanter Geschwindigkeit hinauffahren? b) Wie groß ist der steilste Neigungswinkel, den dieses Auto mit Allradantrieb mit konstanter Geschwindigkeit hinabfahren kann, wenn die Strecke vereist ist?

4.21 •• Eine 50-kg-Kiste, die auf ebenem Boden liegt, soll verschoben werden. Der Haftreibungskoeffizient zwischen der Kiste und dem Boden beträgt 0,60. Eine Möglichkeit, die Kiste zu verschieben, besteht darin, unter dem Winkel θ zur Horizontalen schräg nach unten auf die Kiste zu drücken. Eine andere

Möglichkeit besteht darin, unter dem gleichen Winkel θ zur Horizontalen schräg nach oben an der Kiste zu ziehen. a) Erklären Sie, weshalb eines der Verfahren weniger Kraft erfordert als das andere. b) Berechnen Sie die Kraft, die bei dem jeweiligen Verfahren mindestens aufgewendet werden muss, um den Block zu verschieben. Dabei sei $\theta = 30^\circ$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen, die Sie in beiden Fällen für $\theta = 0^\circ$ erhalten.

4.22 •• Das Gewicht eines Autos mit Hinterradantrieb liegt zu 40 % auf seinen beiden getriebenen Rädern. Das Auto hat auf einer horizontalen geraden Straße einen Haftreibungskoeffizienten von 0,70. a) Ermitteln Sie die maximal mögliche Beschleunigung des Autos. b) In welcher kürzestmöglichen Zeit kann das Auto eine Geschwindigkeit von 100 km/h erreichen? (Gehen Sie davon aus, dass der Motor eine unbeschränkte Leistung abgeben kann.)

4.23 •• Eine Schildkröte mit einer Masse von 12 kg liegt im LKW einer Zoohandlung auf der Ladefläche. Der LKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h auf einer Landstraße. Als der Zoohändler auf der Straße ein Reh erblickt, bremst er und hält nach gleichförmiger Verzögerung innerhalb von 12 s an. Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient zwischen der Schildkröte und dem LKW-Boden mindestens sein, damit sie nicht zu rutschen beginnt?

4.24 •• Ein Auto fährt mit 30 m/s eine unter 15° geneigte, gerade Straße hinauf. Der Haftreibungskoeffizient zwischen den Reifen und der Straße beträgt 0,70. a) Wie lang ist mindestens der Bremsweg? b) Wie lang wäre der Bremsweg mindestens, wenn das Auto bergab fahren würde?

4.25 •• Zwei durch ein Seil miteinander verbundene Blöcke (Abbildung 4.46) gleiten eine um 10° geneigte Ebene hinab. Der Block 1 besitzt eine Masse $m_1 = 0,80 \text{ kg}$ und der Block 2 eine Masse $m_2 = 0,25 \text{ kg}$. Außerdem betragen die Gleitreibungskoeffizienten zwischen den Blöcken und der geneigten Ebene 0,30 für Block 1 und 0,20 für Block 2. Ermitteln Sie a) den Beschleunigungsbetrag der Blöcke und b) die Zugkraft des Seils.



Abbildung 4.46 Zu den Aufgaben 4.25 und 4.26.

4.26 •• Zwei miteinander verbundene Blöcke mit den Massen m_1 und m_2 , die durch einen masselosen Stab verbunden sind, gleiten eine geneigte Ebene hinab (Abbildung 4.46). Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Block und Oberfläche beträgt für Block 1 $\mu_{R,g,1}$, während der für Block 2 gleich $\mu_{R,g,2}$ ist. a) Bestimmen Sie die Beschleunigung der beiden Blöcke.

b) Ermitteln Sie die Kraft, die der Stab auf die beiden Blöcke ausübt. Zeigen Sie, dass diese Kräfte für $\mu_{R,g,1} = \mu_{R,g,2}$ beide 0 sind, und geben Sie eine einfache, nichtmathematische Begründung hierfür.

4.27 •• Der Haftreibungskoeffizient zwischen einem Gummirifen und dem Straßenbelag sei 0,85. Welche maximale Beschleunigung kann ein allradgetriebener LKW mit einer Masse von 1000 kg maximal erreichen, wenn er eine Steigung unter einem Winkel von 12° a) hinauffährt bzw. b) hinabfährt?

4.28 ••• Ein Block mit einer Masse von 10,0 kg liegt wie in Abbildung 4.47 gezeigt auf einem Winkelträger mit einer Masse von 5,0 kg. Der Winkelträger liegt auf einer reibungsfreien Fläche. Die Reibungskoeffizienten zwischen dem Block und dem Winkelträger sind $\mu_{R,h} = 0,40$ und $\mu_{R,g} = 0,30$. a) Wie hoch ist die maximale Kraft $|F|$, die auf den Block ausgeübt werden kann, damit er nicht auf dem Winkelträger gleitet? b) Wie hoch ist die ihr entsprechende Beschleunigung des Winkelträgers?



Abbildung 4.47 Zu Aufgabe 4.28.

4.29 ••• Ein Block mit einer Masse von 100 kg auf einer Rampe ist wie in Abbildung 4.48 gezeigt über ein Seil mit einem weiteren Block mit der Masse m verbunden. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Block und Rampe beträgt $\mu_{R,h} = 0,40$, während der Gleitreibungskoeffizient $\mu_{R,g} = 0,20$ beträgt. Der Rampenwinkel beträgt 18° gegen die Horizontale. a) Ermitteln Sie den Wertebereich für die Masse m , bei dem sich der Block auf der Rampe nicht von selbst bewegt, während er nach einem kleinen Stoß die Rampe hinabgleitet. b) Ermitteln Sie den Wertebereich für die Masse m , bei dem sich der Block auf der Rampe nicht von selbst bewegt, während er nach einem kleinen Stoß die Rampe hinaufgleitet.



Abbildung 4.48 Zu Aufgabe 4.29.

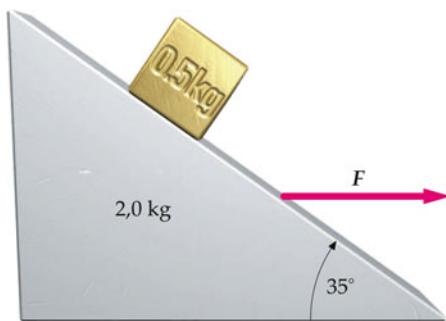


Abbildung 4.49 Zu Aufgabe 4.30.

4.30 ••• Ein Block mit einer Masse von 0,50 kg liegt auf der schrägen Seite eines Keils mit einer Masse von 2,0 kg (Abbildung 4.49). Der Keil gleitet auf einer reibungsfreien Oberfläche, da auf ihn eine horizontale Kraft F wirkt. a) Der Hafreibungs-koeffizient zwischen dem Keil und dem Block betrage $\mu_{R,h} = 0,80$ und der Neigungswinkel gegen die Horizontale 35° . Zwischen welchem Mindest- und Höchstwert muss die ausgeübte Kraft liegen, wenn der Block nicht rutschen soll? b) Wiederholen Sie den Aufgabenteil a mit $\mu_{R,h} = 0,40$.

4.31 ••• Um den Gleitreibungskoeffizienten eines Holzklotzes auf einem horizontalen Holztisch zu bestimmen, wird Ihnen folgende Aufgabe gestellt: Nehmen Sie den Holzklotz und erteilen Sie ihm eine Anfangsgeschwindigkeit über die Oberfläche des Tisches. Messen Sie mit einer Stoppuhr die Zeit Δt , die der Klotz gleitet, bis er zur Ruhe kommt, sowie die Gesamt-verschiebung Δx , die der Klotz nach dem Loslassen gleitet. a) Zeigen Sie ausgehend von den Newton'schen Axiomen und einem Kräfte-diagramm des Klotzes, dass der Ausdruck für den Gleitreibungskoeffizienten $\mu_{R,g} = 2 \Delta x / [(\Delta t)^2 g]$ lautet. b) Ermitteln Sie $\mu_{R,g}$, wenn der Klotz bis zum Anhalten 1,37 m in 0,97 s zurückgelegt hat. c) Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit des Klotzes?

Widerstandskräfte

4.32 • Ein Schadstoffpartikel fällt bei Windstille mit einer Endgeschwindigkeit von $0,30 \text{ mm/s}$ zu Boden. Die Masse des Partikels beträgt $1,0 \cdot 10^{-10} \text{ g}$, und die auf es wirkende Widerstands-kraft hat die Form $b v$. Wie groß ist b ?

4.33 • Ein Tischtennisball besitzt eine Masse von $2,3 \text{ g}$ und eine Endgeschwindigkeit von $9,0 \text{ m/s}$. Die Widerstands-kraft be-sitzt die Form $b v^2$. Welchen Wert hat b ?

4.34 ••• Kleine kugelförmige Teilchen erfahren bei langsamem Bewegung in einem Fluid eine Widerstands-kraft, die durch das Stokes'sche Gesetz $|F_w| = 6 \pi \eta r v$ gegeben ist. Dabei ist r der Radius des Teilchens, v seine Geschwindigkeit und η die Viskosität des fluiden Mediums. a) Schätzen Sie in Luft (Viskosität

$\eta = 1,80 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$) die Endgeschwindigkeit eines kugelförmigen Schadstoffteilchens mit dem Radius $1,00 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ und der Dichte 2000 kg/m^3 . b) Schätzen Sie, wie lange ein solches Teilchen braucht, um bei Windstille 100 m weit zu fallen.

4.35 ••• Bei einem Praktikum in Umweltchemie erhält der Praktikant eine Luftprobe mit Schadstoffpartikeln, die die gleiche Größe und Dichte wie in Aufgabe 4.34 haben. Die Probe wird in einem $8,0 \text{ cm}$ langen Reagenzglas aufgefangen. Der Student setzt das Reagenzglas in eine Zentrifuge ein, wobei der Mittelpunkt des Reagenzglases 12 cm vom Drehpunkt entfernt ist. Dann stellt er die Zentrifuge auf eine Drehzahl von 800 Umdrehungen pro Minute ein. a) Schätzen Sie, in welcher Zeit sich nahezu alle Schadstoffpartikel am Ende des Reagenzglases abgesetzt haben. b) Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Zeit, die es dauert, bis ein Schadstoffpartikel unter dem Einfluss der Schwerkraft und der in Aufgabe 4.34 gegebenen Widerstands-kraft $8,0 \text{ cm}$ fällt.

Die Kepler'schen Gesetze

4.36 • Der Radius der Erdbahn beträgt $1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, der Radius der Uranusbahn $2,87 \cdot 10^{12} \text{ m}$. Welche Umlaufzeit hat der Uranus?

4.37 •• Im Apogäum, dem erdfernsten Punkt seiner Bahn, ist der Mittelpunkt des Monds $406\,395 \text{ km}$ vom Mittelpunkt der Erde entfernt, im Perigäum, dem erdnächsten Punkt, dagegen $357\,643 \text{ km}$. Welche Bahngeschwindigkeit hat der Mond im Perigäum und welche im Apogäum? Die Umlaufzeit beträgt $27,3 \text{ d}$.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz

4.38 • Die Saturnmasse beträgt $5,69 \cdot 10^{26} \text{ kg}$. a) Berechnen Sie die Umlaufzeit des Saturnmonds Mimas, dessen mittlerer Bahnradius $1,86 \cdot 10^8 \text{ m}$ beträgt. b) Berechnen Sie den mittleren Bahnradius des Saturnmonds Titan, der den Saturn innerhalb von $1,38 \cdot 10^6 \text{ s}$ umrundet.

4.39 •• Sie haben ein Gravimeter, das Änderungen des Gravitationsfelds mit einer Empfindlichkeit $\Delta G/G = 1,00 \cdot 10^{-11}$ bestimmen kann. a) Sie verstecken sich mit dem Gerät hinter einem Baum, während Ihr 80 kg schwerer Freund von der anderen Seite auf Sie zu kommt. Wie nah kann Ihr Freund an Sie herankommen, bevor das Messgerät durch seine Anwesenheit eine Änderung von G feststellt? b) Sie fahren in einem Heißluftballon und benutzen das Gerät, um Ihre Steiggeschwindigkeit zu messen (es wird angenommen, dass der Ballon eine konstante Beschleunigung erfährt). Welches ist die kleinste Höhenänderung, die Sie mit Ihrem Gerät im Gravitationsfeld der Erde bestimmen können?

4.40 •• Der Erdradius beträgt 6370 km , der Mondradius ist 1738 km . Die Fallbeschleunigung auf der Mondoberfläche ist $1,62 \text{ m/s}^2$. In welchem Verhältnis steht die mittlere Monddichte zur mittleren Dichte der Erde?

Schwere Masse und träge Masse

- 4.41 •** Ein Probekörper, dessen Masse zu exakt 1,00 kg definiert ist, hat ein messbares Gewicht von 9,81 N. In demselben Labor hat ein zweiter Körper mit unbekannter Masse ein Gewicht von 56,6 N. a) Welche Masse hat der zweite Körper? b) Haben Sie in Teilaufgabe a die schwere oder die träge Masse bestimmt?

Das Gravitationsfeld

- 4.42 •** Das Gravitationsfeld in einem bestimmten Punkt ist gegeben durch $G = 2,5 \cdot 10^{-6} \hat{y}$ N/kg. Welche Kraft wirkt in diesem Punkt auf eine Masse von 0,0040 kg?

- 4.43 •** Eine gleichförmige dünne Kugelschale hat einen Radius von 2,0 m und eine Masse von 300 kg. Wie groß ist das Gravitationsfeld bei folgenden Entfernungen vom Mittelpunkt der Kugelschale: a) 0,50 m, b) 1,9 m, c) 2,5 m?

- 4.44 ••** Zeigen Sie, dass $a_{G,x}$ bei dem Feld aus Beispiel 4.15 in den Punkten $x = \pm a\sqrt{2}$ seinen Maximalwert annimmt.

- 4.45 ••** Zwei konzentrische, gleichförmige dünne Kugelschalen haben die Massen m_1 und m_2 , ihre Radien sind a und $2a$ (Abbildung 4.50). Welchen Betrag hat die Gravitationskraft auf ein punktförmiges Teilchen der Masse m , das sich in einer Entfernung von a) $3a$, b) $1,9a$ bzw. c) $0,9a$ vom Mittelpunkt der Kugelschalen befindet?

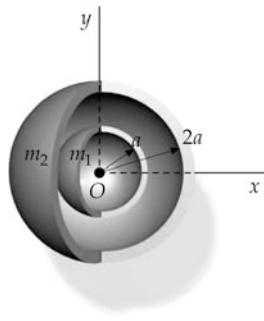


Abbildung 4.50 Zu den Aufgaben 4.45 und 4.46.

- 4.46 ••** Die innere Kugelschale aus Aufgabe 4.45 wird so verschoben, dass sich ihr Mittelpunkt auf der x -Achse bei $x = 0,8a$ befindet. Welchen Betrag hat die Gravitationskraft auf eine Punktmasse m , die sich auf der x -Achse bei a) $x = 3a$, b) $x = 1,9a$ bzw. c) $x = 0,9a$ befindet?

- 4.47 ••** Sie stehen auf einer Federwaage in einem Fahrstuhl, der mit konstanter Geschwindigkeit im senkrechten, tiefen Schacht einer Mine am Äquator hinabfährt. Fassen Sie die Erde als homogene Kugel auf. a) Zeigen Sie, dass die Kraft, die auf Sie allein aufgrund der Gravitation der Erde wirkt, proportional

zur Ihrer Entfernung vom Erdmittelpunkt ist. b) Wiederholen Sie die Aufgabe, berücksichtigen Sie aber nun auch die Rotationsbewegung der Erde. Zeigen Sie, dass die Anzeige auf der Federwaage proportional zu Ihrer Entfernung zum Erdmittelpunkt ist.

- 4.48 ••** Ein Sternhaufen ist eine etwa kugelförmige Ansammlung von bis zu mehreren Millionen Sternen, die durch ihre gegenseitige Gravitation zusammengehalten werden. Die Astronomen können die Geschwindigkeiten der Sterne in dem Haufen messen, um eine Vorstellung von der Zusammensetzung und der Massenverteilung innerhalb des Haufens zu gewinnen. Nehmen Sie an, dass alle diese Sterne etwa dieselbe Masse haben und gleichmäßig in dem Haufen verteilt sind. Zeigen Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit eines Sterns auf einer kreisförmigen Bahn um den Mittelpunkt des Haufens linear mit seiner Entfernung vom Mittelpunkt zunehmen sollte.

- 4.49 ••** Der Mittelpunkt einer gleichförmigen massiven Kugel mit dem Radius r_0 befindet sich im Ursprung. Die Kugel hat eine gleichförmige Dichte ρ_0 , außer in einem kugelförmigen Loch mit dem Radius $r = \frac{1}{2} r_0$, dessen Mittelpunkt auf der x -Achse bei $x = \frac{1}{2} r_0$ liegt (Abbildung 4.51). Berechnen Sie das Gravitationsfeld für Punkte auf der x -Achse mit $|x| > r_0$. (Hinweis: Betrachten Sie das Loch als eine Kugel mit der Masse $m = (4/3) \pi r^3 \rho_0$ plus einer Kugel mit der „negativen“ Masse $-m$.)



Abbildung 4.51 Zu Aufgabe 4.49.

- 4.50 •••** Die Dichte einer Kugel ist durch $\rho(r) = C/r$ definiert. Die Kugel hat einen Radius von 5,0 m und eine Masse von $1,0 \cdot 10^{11}$ kg. a) Bestimmen Sie die Konstante C . b) Leiten Sie Ausdrücke für die Gravitationsfelder in den Bereichen 1) $r > 5,0$ m und 2) $r < 5,0$ m her.

- 4.51 •••** In die Kugel aus Aufgabe 4.50 wird ein dünnes, 2,0 m tiefes Loch gebohrt, das in Richtung auf den Mittelpunkt der Kugel weist. Sie lassen von der Oberfläche der Kugel aus eine kleine Masse in das Loch fallen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der die kleine Masse auf dem Boden des Lochs aufschlägt.

Allgemeine Aufgaben

4.52 • Berechnen Sie die Masse der Erde aus den bekannten Werten von Γ , g und r_E .

4.53 •• Ein Flugkörper mit einer Masse von 100 kg umkreist die Erde auf einer kreisförmigen Bahn in einer Höhe $h = 2 r_E$.
a) Welche Umlaufzeit hat der Flugkörper?

4.54 •• Eine Münze mit einem Gewicht von 100 g liegt auf einer horizontalen Drehscheibe, die sich mit genau 1,00 Umdrehungen pro Sekunde um ihre Achse dreht. Die Münze liegt 10 cm vom Drehpunkt der Scheibe entfernt. a) Wie groß ist die Reibungskraft, die auf die Münze wirkt? b) Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient zwischen der Münze und der Drehscheibe, wenn die Münze bei einer Entfernung von mehr als 16,0 cm vom Drehpunkt heruntergeschleudert wird?

4.55 •• Stellen Sie sich vor, Sie fahren auf einer horizontalen Fläche mit dem Fahrrad auf einer Kreisbahn mit einem Radius von 20 m. Die Gesamtkraft, die die Straße auf das Fahrrad ausübt und die sich aus Normalkraft und Reibungskraft zusammensetzt, bildet einen Winkel von 15° gegen die Vertikale. a) Wie hoch ist Ihr Geschwindigkeitsbetrag? b) Die Reibungskraft auf das Fahrrad ist halb so groß wie der maximal mögliche Wert. Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient?

4.56 •• Eine Spedition soll eine Bücherkiste mithilfe einiger Bohlen, die eine Neigung von 30° haben, auf einen LKW verladen. Die Masse der Kiste beträgt 100 kg und der Gleitreibungskoeffizient zwischen Kiste und Bohlen 0,500. Die Spediteure drücken *horizontal* mit einer Kraft F gegen die Kiste. Wie groß muss $|F|$ sein, damit die Kiste mit konstanter Geschwindigkeit weitergeschoben wird, nachdem sie erst einmal in Bewegung versetzt wurde?

4.57 •• Sally behauptet, Flughörnchen würden gar nicht richtig fliegen, sondern nur springen und die Hautfalten, die ihre Vorder- und Hinterbeine verbinden, wie einen Fallschirm einsetzen, um von Ast zu Ast gleiten zu können. Liz glaubt dies nicht recht und möchte Sallys Behauptung nachprüfen und berechnet dazu die Endgeschwindigkeit eines ausgestreckten fallenden Flughörnchens. Verwenden Sie die Ergebnisse aus Beispiel 4.8 sowie sinnvolle Annahmen über die Größe des Flughörnchens, um seine (nach unten gerichtete) Endgeschwindigkeit zu schätzen. Die Konstante b in der Widerstandskraft soll proportional zur Fläche des Körpers sein, auf den der Luftwiderstand wirkt. Unterstützt die Berechnung von Liz Sallys Behauptung?

4.58 •• Ein *Neutronenstern* ist der hochverdichtete Überrest eines schweren Sterns in der letzten Phase seiner Entwicklung. Er besteht aus Neutronen (daher der Name), denn die Gravitationskraft des Sterns ist so hoch, dass Elektronen und Protonen zu Neutronen „verschmolzen“ sind. Nehmen Sie hypothetisch an, unsere Sonne werde zum Ende ihrer Lebenszeit zu einem Neutronenstern mit 12,0 km Radius kollabieren, ohne bei dem Prozess Masse zu verlieren. (Dieser Prozess wird tatsächlich

nicht auftreten, da die Sonne dafür nicht genug Masse hat.) a) Berechnen Sie das Verhältnis aus der Fallbeschleunigung auf der Oberfläche nach diesem Kollaps und dem Wert auf der heutigen Sonnenoberfläche. b) Berechnen Sie das Verhältnis aus der Fluchtgeschwindigkeit für die „Neutronensonne“ und für die heutige Sonne.

4.59 •• Ein Satellit umkreist den Mond (Radius 1700 km) unmittelbar über der Oberfläche mit der Geschwindigkeit v . Ein Geschoss wird mit derselben Anfangsgeschwindigkeit v von der Mondoberfläche senkrecht nach oben geschossen. Wie hoch wird das Geschoss steigen?

4.60 •• Uranus, der siebte Planet des Sonnensystems, wurde erst 1781 von dem deutschstämmigen britischen Astronomen Friedrich Wilhelm (William) Herschel (1738–1822) entdeckt. Die Umlaufbahn des Planeten wurde mithilfe der Kepler'schen Gesetze untersucht. Zu Beginn der 1840er Jahre wurde aus den Beobachtungen klar, dass seine wahre Umlaufbahn so stark von den Berechnungen abweicht, dass sich die Fehler nicht durch die Beobachtungsunsicherheit erklären ließen. Man schloss daran, dass über den Einfluss der Sonne und der im Inneren der Uranusbahn liegenden Planeten hinaus noch eine weitere Kraft auf Uranus wirken müsse. Diese Kraft sollte auf einen hypothetischen achten Planeten zurückgehen, dessen Bahn 1845 von zwei Personen unabhängig berechnet und angegeben wurde: von dem englischen Astronomen John Couch Adams (1819–1892) und dem französischen Mathematiker Urbain Le Verrier (1811–1877). Im September 1846 suchte der deutsche Astronom Johann Gottfried Galle (1812–1910) in dem von ihnen angegebenen Bereich und entdeckte den Planeten Neptun. Uranus und Neptun umrunden die Erde innerhalb von 84,0 bzw. 164,8 Jahren. Um den Effekt von Neptun auf Uranus anzugeben, bestimmen Sie das Verhältnis der Gravitationskräfte zwischen Neptun und Uranus sowie zwischen Uranus und Sonne, und zwar für den Zeitpunkt der dichtesten Annäherung von Neptun und Uranus (d. h. wenn sie von der Sonne gesehen aus auf einer Linie hintereinander liegen). Die Massen von Sonne, Uranus und Neptun sind 333 000, 14,5 bzw. 17,1 Erdmassen.

4.61 •• Eine dicke Kugelschale mit der Masse m_K und einer homogenen Dichte hat den Innenradius r_1 und den Außenradius r_2 . Geben Sie das Gravitationsfeld G der Kugelschale als Funktion von r für $0 < r < \infty$ an. Skizzieren Sie den Verlauf von $G(r)$.

4.62 ••• Ein Bauingenieur soll einen Kurvenabschnitt einer Straße planen. Er erhält folgende Vorgaben: Bei vereister Straße, d. h. bei einem Haftreibungskoeffizienten von 0,080 zwischen Straße und Gummi, darf ein stehendes Auto nicht in den Straßengraben im Inneren der Kurve rutschen. Andererseits dürfen Autos, die mit bis zu 60 km/h fahren, nicht aus der Kurve getragen werden. Luftwiderstand und Rollreibung sind zu vernachlässigen. Welchen Radius muss die Kurve mindestens besitzen, und unter welchem Winkel sollte sie überhöht sein?

4.63 ••• Bei einer Attraktion in einem Freizeitpark stehen die Fahrgäste mit dem Rücken zur Wand in einer Trommel, die sich dreht. Plötzlich wird der Boden abgesenkt, wobei die Reibung verhindert, dass die Fahrgäste hinabfallen. a) Zeichnen Sie ein Kräftediagramm eines Fahrgasts. b) Bestimmen Sie anhand dieses Kräftediagramms sowie der Newton'schen Axiome die auf einen Fahrgast mit einer Masse von 75 kg wirkende Reibungskraft. c) Der Zylinder hat einen Radius von 4,0 m, und der Haftreibungskoeffizient zwischen Fahrgast und Wand beträgt 0,55. Mit wie vielen Umdrehungen pro Minute muss sich der Zylinder drehen, damit die Fahrgäste nicht herunterfallen? Fallen schwerere Fahrgäste schon eher herunter?

4.64 ••• Eine wichtige Frage in der frühen Planetologie ist, ob die einzelnen Ringe um den Saturn massiv sind oder aus vielen kleinen Teilen bestehen, die sich jeweils auf ihrer eigenen Umlaufbahn bewegen. Man kann dies mit einer einfachen Be-

obachtung entscheiden, indem man die Geschwindigkeiten des inneren Teilrings und des äußeren Teilrings misst. Ist der innere Teilring langsamer als der äußere, dann ist der Ring massiv; trifft das Gegenteil zu, dann besteht er aus vielen Einzelteilen. Wir wollen hier von einem theoretischen Standpunkt aus beurteilen, warum das so ist. Die radiale Breite eines bestimmten Rings (es gibt viele) ist Δr , der mittlere Abstand dieses Rings vom Mittelpunkt des Saturn ist r_R , die mittlere Geschwindigkeit des Rings ist v_m . a) Zeigen Sie, dass für einen massiven Ring die Geschwindigkeitsdifferenz Δv zwischen den äußersten und den innersten Teilen durch den Ausdruck $\Delta v = v_a - v_i \approx v_m(\Delta r/r_R)$ gegeben ist. Dabei ist v_a die Geschwindigkeit des äußersten und v_i die Geschwindigkeit des innersten Ringteils. b) Sollte der Ring jedoch aus vielen kleinen Einzelteilen bestehen, gilt der Zusammenhang $\Delta v \approx -\frac{1}{2}v_m(\Delta r/r_R)$. Zeigen Sie dies. (Nehmen Sie an, dass $\Delta r \ll r_R$ ist.)

Energie und Arbeit

5



Während der Achterbahnwagen durch Loopings rast und in die Tiefe stürzt, finden zahlreiche Energieumwandlungen statt. Wenn der Wagen mit den Mitfahrern an den höchsten Punkt der Bahn gezogen wird, wird vom Elektrizitätswerk bezogene Elektroenergie in potenzielle Energie der Gravitation umgewandelt. Wenn er anschließend die steile Abfahrt herunterrast, wird diese potenzielle Energie der Gravitation in kinetische Energie und in Wärmeenergie umgewandelt. Dabei steigen sowohl die Temperatur des Wagens als auch die der Umgebung etwas an. (© C. Lettan/pixelio.)

5.1	Arbeit	160
5.2	Leistung	167
5.3	Kinetische Energie	168
5.4	Potenzielle Energie	174
5.5	Energieerhaltung	183
	Zusammenfassung	201
	Aufgaben	203

Wie lässt sich aus einer Betrachtung der Energieumwandlungen darauf schließen, wie hoch die Wagen zu Beginn gezogen werden müssen, damit sie die Fahrt durch den Looping schaffen? (Siehe Beispiel 5.18.)

Bisher haben wir die Bewegung von Körpern anhand ihres Orts, ihrer Geschwindigkeit, ihrer Beschleunigung und der auf sie wirkenden Kräfte untersucht. Manche Bewegungsformen lassen sich jedoch mit den Newton'schen Axiomen nur schwer beschreiben. Halten Sie sich z. B. die Bewegung eines Körpers im Gravitationsfeld noch einmal vor Augen. Daher werden wir in diesem Kapitel alternative Verfahren zur Behandlung der Bewegung kennenlernen, die auf zwei weiteren physikalischen Größen, der Energie und der Arbeit beruhen. Anders als die Kraft, die eine vektorielle Größe ist, sind die Energie und die Arbeit skalare Größen, durch die Teilchen und Teilchensysteme charakterisiert werden können. Oft wird zur Bewegungsbeschreibung der Energieerhaltungssatz genutzt. Er ist eines der wichtigsten Grundprinzipien in der Wissenschaft überhaupt und besagt, dass die Gesamtenergie eines Systems einschließlich seiner Umgebung immer konstant bleibt.

In diesem Kapitel untersuchen wir den Begriff der Arbeit und den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie. Außerdem werden wir verschiedene Formen der Energie wie die potentielle und kinetische Energie kennenlernen und ein fundamentales Grundgesetz der Physik, den Energieerhaltungssatz, formulieren.

5.1 Arbeit

Normalerweise denkt man bei Arbeit zunächst an etwas, das eine körperliche oder geistige Anstrengung erfordert, etwa das Tragen eines Rucksacks, Fahrradfahren oder das Lernen für eine Prüfung. In der Physik ist die Arbeit dagegen genau definiert: Arbeit ist die Übertragung von Energie durch eine Kraft. Wenn man eine Feder dehnt (Abbildung 5.1), wird Energie von der Hand auf die Feder übertragen. Diese Energie ist gleich der Arbeit, die die Hand an der Feder verrichtet. Die dabei auf die Feder übertragene Energie wird sichtbar, wenn man die Feder wieder loslässt, sodass sie sich schnell wieder zusammenzieht und anschließend noch kleine Schwingungen um die Ruhelage ausführt.

Die Arbeit ist eine skalare Größe, die positiv, negativ oder null sein kann. Die von einem Körper A an einem Körper B verrichtete Arbeit ist positiv, wenn Energie von A auf B übertragen wird. Wird hingegen Energie von B auf A übertragen, ist die Arbeit negativ. Wird gar keine Energie übertragen, ist die verrichtete Arbeit null. Wenn Sie eine Feder spannen, ist die Arbeit, die Sie an der Feder verrichten, positiv, da Energie von Ihrer Hand auf die Feder übertragen wird. Stellen Sie sich andererseits vor, dass Sie Ihre Hand so bewegen, dass sich die Feder langsam in den entspannten Zustand zusammenzieht. Die Feder verliert während des Zusammenziehens Energie, die von der Feder auf Sie übertragen wird, sodass die Arbeit, die Sie an der Feder verrichten, negativ ist.

Frage 5.1

Ist die von der Feder an der Person verrichtete Arbeit in dem eben erwähnten Beispiel positiv oder negativ?

Die von einer konstanten Kraft verrichtete Arbeit

Üblicherweise heißt es, dass Arbeit Kraft mal Weg ist. Diese Aussage ist jedoch zu sehr vereinfacht und missverständlich. Eine Kraft verrichtet an einem Körper dann eine Arbeit, wenn sich

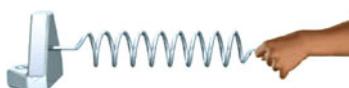


Abbildung 5.1 Während sich die Feder dehnt, wird Energie von der Person auf sie übertragen. Diese Energie ist gleich der von der Person an der Feder verrichteten Arbeit

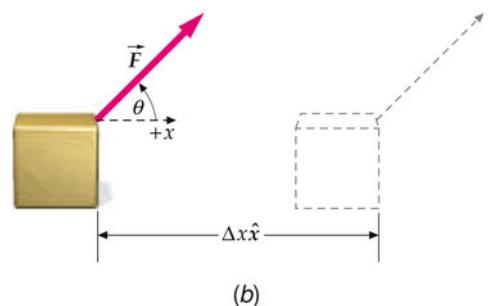
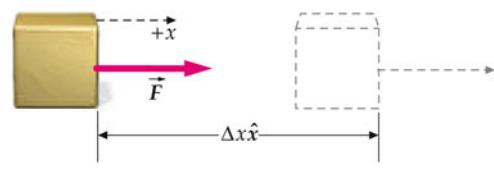


Abbildung 5.2 Die beim Verschieben einer Kiste verrichtete Arbeit, wenn die Kraft a) genau in Bewegungsrichtung der Kiste wirkt, b) unter einem Winkel zur Bewegungsrichtung wirkt

der Angriffspunkt der Kraft über eine bestimmte Verschiebung bewegt. Bei konstanter Kraft ist die verrichtete Arbeit gleich dem Produkt aus der Kraftkomponente in Verschiebungsrichtung und dem Verschiebungsbetrag. Stellen Sie sich vor, Sie schieben eine Kiste mit der konstanten horizontalen Kraft \mathbf{F} in Richtung der Verschiebung $\Delta x\hat{x}$ über den Boden (Abbildung 5.2a). Da die Kraft auf die Kiste in derselben Richtung wie deren Verschiebung wirkt, ist die von der Kraft an der Kiste verrichtete Arbeit

$$W = |\mathbf{F}| |\Delta x|.$$

Nun soll an der Kiste ein Seil befestigt sein, an dem Sie ziehen. Dabei wirkt die Kraft wie in Abbildung 5.2b gezeigt unter einem bestimmten Winkel. In diesem Fall ist die von der Kraft an der Kiste verrichtete Arbeit gleich dem Produkt aus der Kraftkomponente *in Richtung* der Verschiebung und dem Verschiebungsbetrag:

$$W = F_x \Delta x = |\mathbf{F}| \cos\theta |\Delta x|. \quad (5.1)$$

ARBEIT EINER KONSTANTEN KRAFT

Dabei ist \mathbf{F} der Betrag der konstanten Kraft, $|\Delta x|$ der Betrag der Verschiebung des Angriffspunkts der Kraft und θ der Winkel zwischen der Krafrichtung und der Richtung des Verschiebungsvektors. Da die Kiste starr ist und sich bei der Bewegung nicht dreht, stimmt die Verschiebung des Angriffspunkts der Kraft mit der Verschiebung aller anderen Punkte der Kiste überein.

Wenn Sie eine Kiste anheben oder absenken, indem Sie eine Kraft \mathbf{F} auf sie ausüben, verrichten Sie ebenfalls Arbeit an ihr. Die positive y -Richtung soll nach oben zeigen, und die Verschiebung der Kiste soll $\Delta y\hat{y}$ sein. Die von Ihnen an der Kiste

verrichtete Arbeit ist dann positiv, wenn Δy und F_y dasselbe Vorzeichen tragen, und negativ, wenn sich ihre Vorzeichen unterscheiden. Halten Sie die Kiste dagegen nur in einer Stellung fest, verrichten Sie *an der Kiste* der Definition der Arbeit folgend überhaupt keine Arbeit, da $\Delta y = 0$ ist. Selbst wenn Sie eine Kraft anwenden müssen, um die Kiste zu halten, ist die an ihr verrichtete Arbeit in diesem Fall null.

Die SI-Einheit der Arbeit ist das **Joule** (J), das gleich dem Produkt aus Newton und Meter ist:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (5.2)$$

Abweichend davon wird in der Atom- und Kernphysik häufig das Elektronenvolt (eV) verwendet:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (5.3)$$

Häufig genutzte davon abgeleitete Maßeinheiten sind das keV ($= 10^3 \text{ eV}$) und das MeV ($= 10^6 \text{ eV}$). Die Arbeit, die verrichtet werden muss, um ein Elektron von einem Atom abzulösen, liegt in der Größenordnung von einigen eV; um ein Proton oder Neutron aus einem Atomkern herauszulösen, werden hingegen größenordnungsmäßig mehrere MeV benötigt.

Übung 5.1: Eine Kraft von 12 N greift wie in Abbildung 5.2b unter einem Winkel von $\theta = 20^\circ$ an einer Kiste an. Wie viel Arbeit verrichtet die Kraft an der Kiste, während sich diese 3,0 m auf dem Tisch bewegt? ◀

Wenn *an einem System* mehrere Kräfte Arbeit verrichten, ergibt sich die Gesamtarbeit, indem zunächst die von jeder Kraft verrichtete Arbeit für sich berechnet wird und die einzelnen Arbeiten dann addiert werden:

$$W = F_{1,x} \Delta x_1 + F_{2,x} \Delta x_2 + F_{3,x} \Delta x_3 + \dots \quad (5.4)$$

Dabei können wir ein System als ein **Teilchen** behandeln, wenn sich alle seine Teile so bewegen, dass ihre Verschiebungen gleich sind. Wenn an einem solchen *Teilchen* mehrere Kräfte Arbeit verrichten, sind die Verschiebungen der Angriffspunkte dieser Kräfte gleich. Die Verschiebung des Angriffspunkts einer dieser Kräfte sei Δx . Dann ist

$$\begin{aligned} W &= F_{1,x} \Delta x + F_{2,x} \Delta x + \dots \\ &= (F_{1,x} + F_{2,x} + \dots) \Delta x = F_x \Delta x. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Bei einem Teilchen, dessen Bewegung auf die x -Achse beschränkt ist, besitzt die Gesamtkraft nur eine x -Komponente. Damit ist $\mathbf{F} = F_x \hat{x}$. Somit ist die an einem Körper verrichtete Gesamtarbeit für ein Teilchen gleich dem Produkt aus der x -Komponente der Gesamtkraft und der Verschiebung eines beliebigen Teils dieses Körpers.

Beispiel 5.1 zeigt, wie die Arbeit praktisch berechnet wird.

Beispiel 5.1: Verladung mit einem Kran

Ein LKW mit einer Masse von 3000 kg soll mit einem Kran, der auf ihn eine Kraft von 31 kN nach oben ausübt, auf ein Schiff verladen werden. Diese Kraft, die stark genug ist, um die auf den LKW wirkende Gravitationskraft zu überwinden und den LKW nach oben zu ziehen, wird über eine Strecke von 2,0 m angewendet. Ermitteln Sie a) die Arbeit, die der Kran an dem LKW verrichtet, b) die Arbeit, die die Gravitationskraft an dem LKW verrichtet, und c) die an dem LKW verrichtete Gesamtarbeit.

Problembeschreibung: In den Teilaufgaben a und b ist die auf den LKW wirkende Kraft konstant. Die Verschiebung erfolgt auf einer Geraden. Wir können daher Gleichung 5.1 anwenden, wobei wir die $+y$ -Richtung als die Verschiebungsrichtung wählen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Skizzieren Sie den LKW in seiner Anfangs- und in seiner Endlage. Legen Sie dabei die $+y$ -Richtung in Richtung der Verschiebung (Abbildung 5.3).

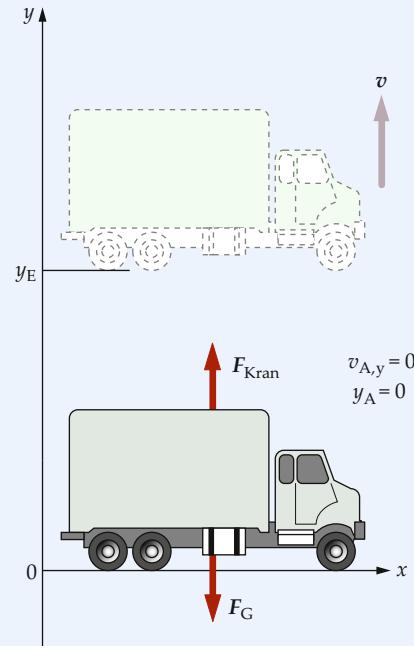


Abbildung 5.3 Diagrammatische Darstellung der LKW Bewegung.

2. Berechnen Sie die Arbeit, die die auf den LKW ausgeübte Kraft verrichtet:

$$\begin{aligned} W_{\text{Kran}} &= F_{\text{Kran},y} \Delta y \\ &= (31 \text{ kN}) \cdot (2,0 \text{ m}) = [62 \text{ kJ}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie die Arbeit, die die Gravitationskraft (Gewichtskraft) an ihm verrichtet (*Hinweis:* Der Vektor \mathbf{a}_G ist nach unten gerichtet, während die $+y$ -Richtung nach oben zeigt):

$$\begin{aligned} W_G &= m a_{G,y} \Delta y \\ &= (3000 \text{ kg}) \cdot (-9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) \cdot (2,0 \text{ m}) \\ &= \boxed{-59 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die an dem LKW verrichtete Gesamtarbeit ist die Summe der von den Einzelkräften verrichteten Arbeiten:

$$\begin{aligned} W &= W_{\text{Kran}} + W_G = 62 \text{ kJ} + (-59 \text{ kJ}) \\ &= \boxed{3 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In Teilaufgabe a hat die angewandte Kraft dieselbe Richtung wie die Verschiebung, sodass zu erwarten ist, dass die an dem LKW verrichtete Arbeit positiv ist. Dagegen wirkt die ausgeübte Kraft in Teilaufgabe b in der zur Verschiebungsrichtung entgegengesetzten Richtung, sodass die an dem LKW verrichtete Arbeit negativ sein sollte. Unsere Ergebnisse entsprechen dem.

Weitergedacht: In Teilaufgabe c kann man die Gesamtarbeit auch ermitteln, indem man zuerst die Gesamtkraft auf den LKW berechnet und anschließend Gleichung 5.5 anwendet. ■

Die von einer ortsabhängigen Kraft bei geradliniger Bewegung verrichtete Arbeit

Viele Kräfte sind selbst ortsabhängig. So übt beispielsweise eine gedehnte Feder eine Kraft aus, die proportional zur Länge ihrer Dehnung ist. Die Gravitationskraft der Erde auf ein Raumschiff ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands der Mittelpunkte von Erde und Raumschiff. Wie lässt sich die Arbeit berechnen, die solche Kräfte verrichten?

Abbildung 5.4 zeigt die grafische Darstellung einer *konstanten* Kraft F_x als Funktion des Orts x . Offenbar ist die von der Kraft an einem Teilchen über die Verschiebung Δx verrichtete Arbeit die Fläche unter der Kraft-Weg-Kurve, die in Abbildung 5.4 farbig hervorgehoben ist. Eine ortsabhängige Kraft kann durch eine Folge im Wesentlichen konstanter Kräfte angenähert werden (Abbildung 5.5). In jedem kleinen Verschiebungsintervall Δx_i ist die Kraft annähernd konstant. Somit ist die verrichtete Arbeit näherungsweise gleich der *Fläche* des Rechtecks mit

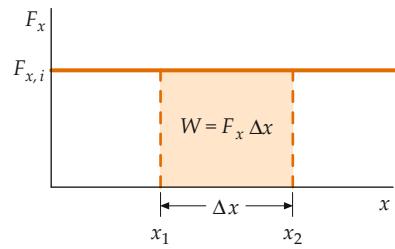


Abbildung 5.4 Die Arbeit, die eine konstante Kraft verrichtet, kann grafisch als Fläche unter der Kurve $F_x(x)$ dargestellt werden.

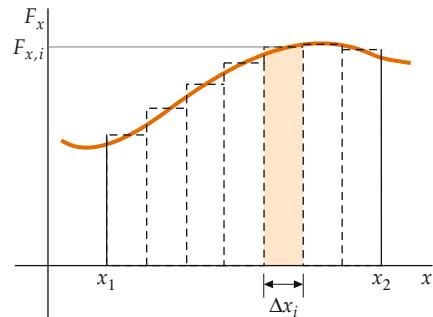


Abbildung 5.5 Eine ortsabhängige Kraft kann durch eine Folge von Kräften angenähert werden, die jeweils in kurzen Intervallen konstant sind. Die Arbeit jeder konstanten Kraft ist in ihrem Intervall die Fläche des jeweiligen Rechtecks unter der Kraftfunktion. Die Summe dieser Rechteckflächen ist die Summe der Arbeiten, die diese konstanten Kräfte – als Näherung an die ortsabhängige Kraft – verrichten. Im Grenzwert unendlich kleiner Wegabschnitte Δx_i ist die Summe der Rechteckflächen gleich der Fläche unter der gesamten Kraftfunktion.

der Höhe $F_{x,i}$ und der Breite Δx_i . Insgesamt ist dann die von einer ortsabhängigen Kraft verrichtete Arbeit W im Grenzwert, in dem die Breite jedes einzelnen Rechtecks gegen null geht, gleich der Summe der Flächen einer zunehmend großen Anzahl dieser Rechtecke:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i F_{x,i} \Delta x_i \\ &= \text{Fläche unter der Kurve } F_x(x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dieser Grenzwert ist das Integral von F_x über x . Damit ist die Arbeit einer ortsabhängigen Kraft F_x , die auf ein Teilchen wirkt, das sich von x_1 nach x_2 bewegt, gegeben durch

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx = \text{Fläche unter der Kurve } F_x(x). \quad (5.7)$$

ARBEIT EINER ORTSABHÄNGIGEN KRAFT

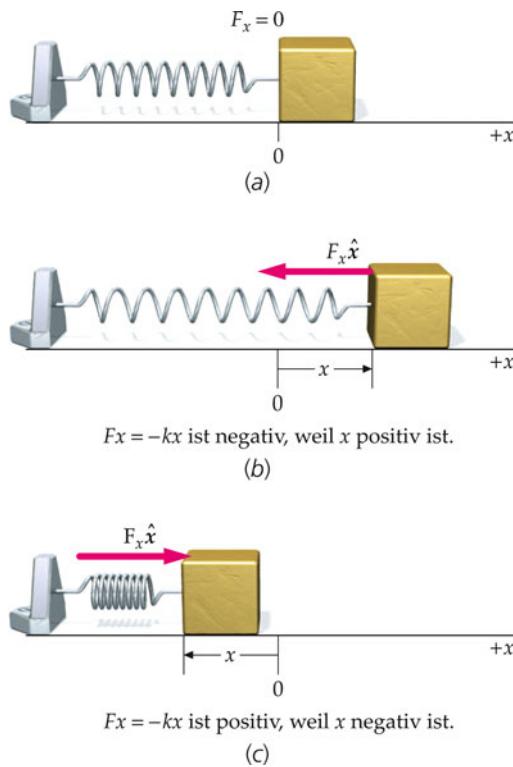


Abbildung 5.6 Eine horizontale Feder. a) Wenn die Feder entspannt ist, übt sie keine Kraft auf den Block aus. b) Wenn die Feder gedehnt und x somit positiv ist, übt sie auf ihn eine Kraft vom Betrag $k_F x$ in der $-x$ -Richtung aus. c) Wenn die Feder zusammengedrückt und x somit negativ ist, übt sie auf ihn eine Kraft vom Betrag $k_F |x|$ in der $+x$ -Richtung aus.

Die Arbeit einer Feder, die dem Hooke'schen Gesetz genügt

Abbildung 5.6 zeigt einen Block auf einer horizontalen reibungsfreien Fläche, der mit einer Feder verbunden ist. Wenn die Feder gedehnt oder zusammengedrückt wird, übt sie eine Kraft auf den Block aus. Aus Gleichung 3.1 wissen wir, dass die Kraft, die die Feder auf den Block ausübt, durch

$$F_x = -k_F x \quad (\text{das Hooke'sche Gesetz}) \quad (5.8)$$

gegeben ist. Dabei ist k_F eine positive Konstante und x die Dehnung der Feder. Wenn die Feder gedehnt wird, ist x positiv und die Kraftkomponente F_x daher negativ. Wird die Feder dagegen zusammengedrückt, ist x negativ und die Kraftkomponente F_x positiv.

Da die Kraft von x abhängt, können wir die Arbeit, die die Federkraft an dem Block verrichtet, während er von $x = x_A$ zu $x = x_E$ verschoben wird, aus Gleichung 5.7 berechnen. (Neben der Federkraft wirken auf den Block zwei weitere Kräfte, die Gravitationskraft ma_G und die Normalkraft des Tisches F_n . Da beide keine Komponente in Bewegungsrichtung haben, verrichten sie jedoch beide keine Arbeit. Die einzige Kraft, die an dem

Block Arbeit verrichtet, ist die Federkraft.) Einsetzen von F_x aus Gleichung 5.8 in Gleichung 5.7 ergibt

$$\begin{aligned} W_{\text{Feder}} &= \int_{x_A}^{x_E} F_x \, dx = \int_{x_A}^{x_E} (-k_F x) \, dx \\ &= -k_F \int_{x_A}^{x_E} x \, dx = -k_F \left(\frac{x_E^2}{2} - \frac{x_A^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Vertauschen der beiden letzten Terme ergibt

$$W_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} k_F x_A^2 - \frac{1}{2} k_F x_E^2. \quad (5.10)$$

DIE VON EINER FEDER VERRICHTETE ARBEIT

Beispiel 5.2 zeigt eine Anwendung für diese Gleichungen.

Beispiel 5.2: Die von einer ortsabhängigen Kraft verrichtete Arbeit

Eine Kraft $F = F_x \hat{x}$ hängt wie in Abbildung 5.7 gezeigt von x ab. Gesucht ist die Arbeit, die diese Kraft an einem Teilchen verrichtet, das sich vom Ort $x = 0,0 \text{ m}$ zum Ort $x = 6,0 \text{ m}$ bewegt.

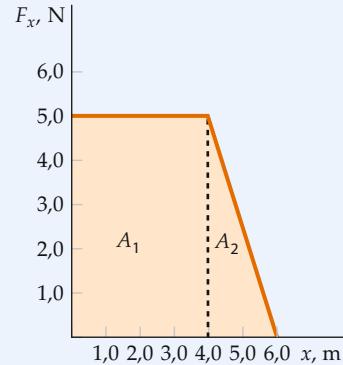


Abbildung 5.7 Abhängigkeit F von x und Darstellung der Flächen unter der Kurve.

Problembeschreibung: Die Arbeit ist die Fläche unter der Kurve von $x = 0,0 \text{ m}$ bis $x = 6,0 \text{ m}$. Da die Kurve Geradenabschnitte aufweist, besteht der einfachste Zugang darin, die Fläche in zwei Teileflächen, ein Rechteck mit der Fläche A_1 und ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fläche A_2 , zu zerlegen. (Alternativ könnte man eine Integration durchführen, die zum selben Ergebnis führt, was bei diesem einfachen Problem jedoch nicht nötig ist.)

Lösung: 1. Die verrichtete Arbeit ergibt sich durch Berechnen der Fläche unter der Kurve $F_x(x)$:

$$W = A$$

2. Diese Fläche ist die Summe der beiden gezeigten Teilflächen. Die Dreiecksfläche ist die Hälfte des Produkts aus Höhe und Basislänge:

$$\begin{aligned} W &= A = A_1 + A_2 \\ &= (5,0 \text{ N}) \cdot (4,0 \text{ m}) + \frac{1}{2} \cdot (5,0 \text{ N}) (2,0 \text{ m}) \\ &= 20 \text{ J} + 5,0 \text{ J} = \boxed{25 \text{ J}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn die Kraft über die gesamten 6,0 m konstant gleich 5,0 N wäre, wäre die verrichtete Arbeit $(5,0 \text{ N}) \cdot (6,0 \text{ m}) = 30 \text{ J}$. Erwartungsgemäß liegt das Ergebnis von 25 J etwas darunter.

Übung 5.2: Die gezeigte Kraft sei die einzige, die auf ein Teilchen mit einer Masse von 3,0 kg wirkt. Das Teilchen beginnt, sich vom Ort $x = 0,0 \text{ m}$ aus zu bewegen. Wie schnell ist es, wenn es bei $x = 6,0 \text{ m}$ ankommt? ◀ ■

Auf einem anderen Weg kann das Integral in Gleichung 5.9 geometrisch über die Fläche unter der Kurve berechnet werden (Abbildung 5.8a):

$$W_{\text{Feder}} = A_1 + A_2 = |A_1| - |A_2| = \frac{1}{2} k_F x_1^2 - \frac{1}{2} k_F x_2^2.$$

Das Ergebnis stimmt mit Gleichung 5.10 überein.

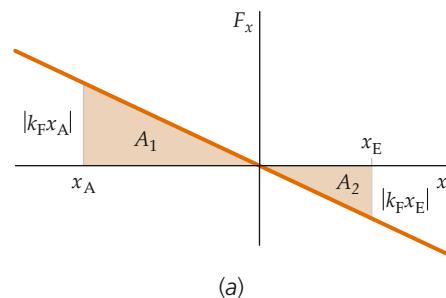
Übung 5.3: Berechnen Sie geometrisch die Fläche unter der in Abbildung 5.8b gezeigten Geraden und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit dem übereinstimmt, das sich aus Gleichung 5.10 ergibt. ◀

Wir betrachten nun eine anfangs entspannte Feder (Abbildung 5.9), die auf eine Enddehnung x_E gespannt wird. Wie groß ist die Arbeit, die die Hand mit der Kraft $F_F^{(\text{H})}$ an der Feder verrichtet? Die Kraft, die die Hand auf die Feder ausübt, ist gleich $k_F x$ (und damit gleich groß, aber entgegengerichtet der Kraft, die die Feder auf die Hand ausübt). Während x von 0 auf x_E zunimmt, wächst die Kraft auf die Feder von $F_{F,x} = 0$ auf $F_{F,x}^{(\text{H})} = k_F x_E$ linear an. Somit ist ihr Mittelwert $\frac{1}{2} k_F x_E$. (Dies ist ein räumlicher Mittelwert, während die meisten Mittelwerte in diesem Buch zeitliche Mittelwerte sind.) Die von der Kraft verrichtete Arbeit ist gleich dem Produkt dieses Mittelwerts mit x_E . Damit ist die von der Hand an der Feder verrichtete Arbeit W

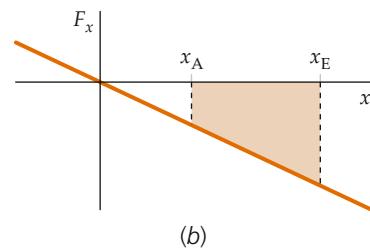
$$W = \frac{1}{2} k_F x_E^2.$$

Die Arbeit bei krummliniger Bewegung

Die Arbeit beruht auf der Stärke der Kraft in Richtung der Verschiebung eines Körpers. Bei geradliniger Bewegung lässt sich die Kraftkomponente in Richtung der Verschiebung leicht



(a)



(b)

Abbildung 5.8 a) Zur Berechnung der von einer Feder verrichteten Arbeit über die Fläche unter der Kurve. b) Zu Übung 5.3.

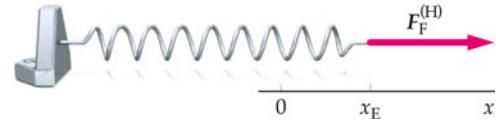


Abbildung 5.9 Zur Berechnung der Arbeit, die eine Hand beim Spannen einer Feder verrichtet.

berechnen. Dagegen können sowohl die Kraft als auch die Verschiebung in ganz unterschiedliche Richtungen weisen, wenn sich ein Körper auf einer krummlinigen Bahn bewegt. In solchen Fällen bedient man sich der mathematischen Operation des **Skalarprodukts**, um zu bestimmen, wie groß die in Verschiebungsrichtung wirkende Kraftkomponente ist.

Wir wollen ein Teilchen betrachten, das sich wie in Abbildung 5.10a auf einer beliebigen Kurve bewegt. Die Komponente F_t in Abbildung 5.10b hängt über $F_t = |F| \cos \phi$ vom Winkel ϕ zwischen den Richtungen der Kraft F und der Verschiebung ds ab.

In der Schreibweise mit dem Skalarprodukt ist die über eine infinitesimale Strecke ds von einer Kraft F an einem Teilchen verrichtete Arbeit dW daher gleich

$$dW = F_s |ds| = |F| \cos \phi |ds| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5.11)$$

DIFFERENZIAL DER ARBEIT

Dabei sind $|ds|$ der Betrag des Vektors ds und F_s die Komponente von F in Richtung von ds . Die Arbeit, die an einem Teilchen verrichtet wird, das sich von Punkt 1 zu Punkt 2 bewegt, ist

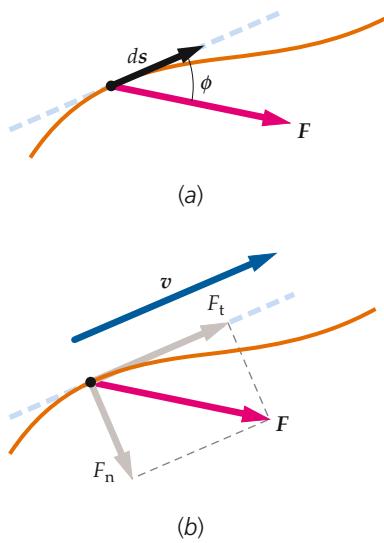


Abbildung 5.10 a) Ein Teilchen bewegt sich auf einer beliebigen Bahn im Raum. b) Die Komponente der Kraft F senkrecht zur Bewegungsrichtung (F_n) ändert die Bewegungsrichtung des Teilchens, nicht aber seine Geschwindigkeit. Die tangentiale Komponente F_t hingegen ändert seine Geschwindigkeit, nicht jedoch seine Richtung. F_t ist gleich dem Produkt aus Masse m und Tangentialbeschleunigung dv/dt . Arbeit verrichtet lediglich die tangentiale Komponente F_t der Kraft, nicht aber die senkrechte F_n .

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5.12)$$

DEFINITION DER ARBEIT

Falls die Kraft konstant ist, vereinfacht sich dies zu $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, wobei \mathbf{s} die Verschiebung ist. (In Kapitel 2 hatten wir die hier Δs genannte Verschiebung $\Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y}$ mit $\Delta \mathbf{r}$ bezeichnet. Es handelt sich jedoch um dieselbe Größe, die im Zusammenhang mit Wegstrecken und -integralen häufig nur anders bezeichnet wird.)

Wirken auf ein Teilchen, das um $d\mathbf{s}$ verschoben wird, mehrere Kräfte \mathbf{F}_i , ergibt sich die Gesamtarbeit

$$dW = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s} + \dots = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) \cdot d\mathbf{s} = (\sum_i \mathbf{F}_i) \cdot d\mathbf{s}. \quad (5.13)$$

Beispiel 5.3 zeigt, wie das Skalarprodukt in einer zweidimensionalen Aufgabenstellung zur Berechnung der Arbeit herangezogen werden kann. In Beispiel 5.4 sollen Sie mithilfe des Skalarprodukts die Arbeit einer Kraft selbst berechnen.

Beispiel 5.3: Verschieben einer Kiste

Ein Spediteur schiebt mit einer horizontal wirkenden konstanten Kraft F von 100 N eine Kiste eine Rampe hinauf. Auf jeweils 5,00 m entlang der Rampe gewinnt

die Kiste 3,00 m an Höhe. Berechnen Sie die Arbeit, die von der Kraft F verrichtet wird, wenn die Kiste 5,00 m weit die Rampe hinaufgeschoben wird. Wählen Sie dabei die folgenden vier Lösungswege: a) Berechnen Sie direkt das Skalarprodukt der Komponenten der Kraft F und der Verschiebung der Kiste s . b) Multiplizieren Sie das Produkt der Beträge von F und s mit $\cos \phi$, wobei ϕ der Winkel zwischen den Richtungen von F und s ist. c) Ermitteln Sie F_s (die Komponente der Kraft F in Richtung s) und multiplizieren Sie sie mit s , dem Betrag der Verschiebung s . d) Ermitteln Sie s_F , die Komponente der Verschiebung s in Richtung der Kraft F , und multiplizieren Sie diese mit dem Betrag der Kraft.

Problembeschreibung: Fertigen Sie eine Skizze der Kiste in ihrer Anfangs- und in ihrer Endlage an. Zeichnen Sie die Koordinatenachsen ein, wobei die x -Achse horizontal verlaufen soll. Drücken Sie den Kraft- und den Verschiebungsvektor in Komponentenschreibweise aus und berechnen Sie das Skalarprodukt. Ermitteln Sie anschließend die Komponente der Kraft parallel zur Verschiebung sowie die Komponente der Verschiebung parallel zur Kraft.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Fertigen Sie eine Skizze an (Abbildung 5.11).

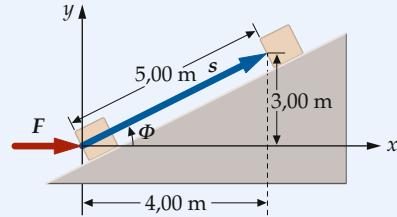


Abbildung 5.11 Schematische Darstellung der Kiste auf der schiefen Ebene

2. Drücken Sie \mathbf{F} und \mathbf{s} in Komponentenschreibweise aus und berechnen Sie das Skalarprodukt: $\mathbf{F} = (100 \hat{x} + 0 \hat{y}) \text{ N}$ $\mathbf{s} = (4,00 \hat{x} + 3,00 \hat{y}) \text{ m}$

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_x \Delta x + F_y \Delta y \\ &= (100 \text{ N}) \cdot (4,00 \text{ m}) + (0 \text{ N}) \cdot (3,00 \text{ m}) \\ &= \boxed{4,00 \cdot 10^2 \text{ J}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie $|F| |s| \cos \phi$, wobei ϕ wie abgebildet der Winkel zwischen den Richtungen der beiden Vektoren ist. Werten Sie diesen Ausdruck unter Zuhilfenahme der

Beispiel 5.4: Die Arbeit bei der Verschiebung eines Teilchens

ZUR ÜBUNG

Ein Teilchen wird um $s = (2,00\hat{x} - 5,00\hat{y}) \text{ m}$ verschoben. Währenddessen wirkt auf das Teilchen eine konstante Kraft $F = (3,00\hat{x} + 4,00\hat{y}) \text{ N}$. a) Wie groß ist die von der Kraft verrichtete Arbeit? b) Wie groß ist die Kraftkomponente parallel zur Verschiebung?

Problembeschreibung: Da die Kraft konstant ist, kann die Arbeit W aus $W = F \cdot s = F_x \Delta x + F_y \Delta y$ berechnet werden. Verknüpft man das mit der Beziehung $F \cdot s = F_s |s|$, erhält man die Komponente von F parallel zur Verschiebung.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Fertigen Sie eine Skizze von F , s und $|F_s|$ an (Abbildung 5.12).

2. Berechnen Sie die verrichtete Arbeit W .

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie $s \cdot s$ und daraus die Strecke $|s|$.

2. Stellen Sie die Gleichung $F \cdot s = F_s |s|$ nach F_s um.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

1.

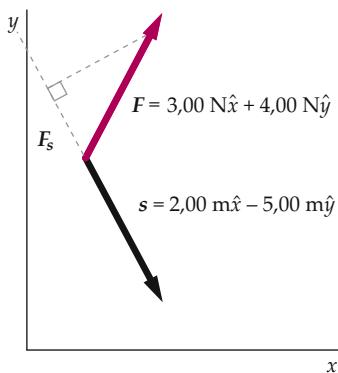


Abbildung 5.12 Ortsdiagramm des Teilchens.

2.

$$W = F \cdot s = \boxed{-14,0 \text{ J}}$$

Teilaufgabe b

1.

$$s \cdot s = 29,0 \text{ m}^2$$

und somit

$$|s| = \sqrt{29,0} \text{ m}$$

2.

$$F_s = F \cdot s / |s| = \boxed{-2,60 \text{ N}}$$

Plausibilitätsprüfung: Abbildung 5.12 zeigt, dass der Winkel zwischen F und s zwischen 90° und 180° liegt, sodass sowohl F_s als auch die Arbeit negativ sein sollten. Das erhaltene Ergebnis entspricht dem.

Weitergedacht: Weder in der Aufgabenstellung noch in der Lösung wird etwas darüber gesagt, auf welchem Weg sich das Teilchen genau bewegt. Da die Kraft konstant ist, hängt die Lösung zwar von der Gesamtverschiebung s , nicht aber von dem Weg, den das Teilchen genommen hat, ab. Ob sich das Teilchen geradlinig oder auf einem gekrümmten Weg bewegt – an der Aufgabe ändert sich nichts (Abbildung 5.13).

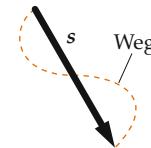


Abbildung 5.13 Verschiedene Möglichkeiten zum Zurücklegen des Wegs.

Übung 5.4: Ermitteln Sie den Betrag von F und den Winkel ϕ zwischen F und s . ◀

Teilergebnisse aus Teilaufgabe a aus und stellen Sie die Gleichung nach $\cos \phi$ um. Berechnen Sie anschließend die Arbeit:

$$F \cdot s = |F| |s| \cos \phi \quad \text{und} \quad F \cdot s = F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

und somit

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{F_x \Delta x + F_y \Delta y}{|F| |s|} \\ &= \frac{(100 \text{ N}) \cdot (4,00 \text{ m}) + 0,0 \text{ N} \cdot \text{m}}{(100 \text{ N}) \cdot (5,00 \text{ m})} = 0,800 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} W &= |\mathbf{F}| |s| \cos \phi \\ &= (100 \text{ N}) \cdot (5,00 \text{ m}) \cdot 0,800 = [4,00 \cdot 10^2 \text{ J}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Ermitteln Sie die Kraftkomponente F_s und multiplizieren Sie sie mit der Strecke $|s|$:

$$F_s = |\mathbf{F}| \cos \phi = (100 \text{ N}) \cdot 0,800 = 80,0 \text{ N}$$

$$W = F_s |s| = (80,0 \text{ N}) \cdot (5,00 \text{ m}) = [4,00 \cdot 10^2 \text{ J}]$$

Teilaufgabe d

Multiplizieren Sie $|\mathbf{F}|$ und s_F , wobei s_F die Komponente von s parallel zu \mathbf{F} ist:

$$s_F = |s| \cos \phi = (5,00 \text{ m}) \cdot 0,800 = 4,00 \text{ m}$$

$$W = |\mathbf{F}| s_F = (100 \text{ N}) \cdot (4,00 \text{ m}) = [4,00 \cdot 10^2 \text{ J}]$$

Plausibilitätsprüfung: Auf allen vier Wegen ergibt sich das gleiche Ergebnis für die Arbeit.

Weitergedacht: In dieser Aufgabe ist der Lösungsweg a der einfachste. Bei anderen Aufgabenstellungen können aber durchaus die Wege b, c oder d einfacher sein. Sie sollten alle vier Ansätze beherrschen. Je mehr Verfahren man beherrscht, desto flexibler kann man das am besten geeignete auswählen. ■

5.2 Leistung

Die Definition der Arbeit macht keine Aussage darüber, wie lange es dauert, diese Arbeit zu verrichten. Wenn Sie beispielsweise eine Kiste mit konstanter Geschwindigkeit eine bestimmte Strecke bergauf schieben, verrichten Sie unabhängig davon, wie lange Sie dafür benötigen, dieselbe Arbeit an der Kiste. Die Rate, mit der eine Kraft Arbeit verrichtet, wird die **Leistung** P genannt. Da die Arbeit das Maß für die durch eine Kraft übertragene Energie ist, ist die Leistung die Rate der Energieübertragung.

Stellen Sie sich ein Teilchen vor, das sich mit der Momentangeschwindigkeit v bewegt. In einem kurzen Zeitintervall dt erfährt das Teilchen eine Verschiebung $ds = v dt$. Die Arbeit, die eine an dem Teilchen angreifende Kraft in diesem Zeitintervall \mathbf{F}

verrichtet, ist

$$dW = \mathbf{F} \cdot ds = \mathbf{F} \cdot v \, dt.$$

Die Leistung ist dann

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot v. \quad (5.14)$$

DIE VON EINER KRAFT VERRICHTETE LEISTUNG

Beachten Sie den Unterschied zwischen Leistung und Arbeit. Zwei Motoren, die das gleiche Gewicht über die gleiche Strecke anheben, benötigen dafür die gleiche Energie. Der Motor, der dies schneller erledigt, hat jedoch eine höhere Leistung.

Die Leistung ist ebenso wie die Arbeit und die Energie eine skalare Größe. Die SI-Einheit der Leistung, das **Watt** (W), ist ein Joule pro Sekunde:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Die im Alltag noch gelegentlich verwendete Nicht-SI-Einheit der Leistung, die Pferdestärke (PS), ist in Deutschland definiert als

$$1 \text{ PS} = 735,5 \text{ W}.$$

Das Produkt aus einer Leistungseinheit und einer Zeiteinheit ist eine Energieeinheit. Energiedienstleister stellen Energie, nicht Leistung in Rechnung, die meist in Kilowattstunden (kWh) abgerechnet wird. Eine Kilowattstunde ist die Energie, die in einer Stunde bei einer konstanten Rate von einem Kilowatt übertragen wird:

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W}) \cdot (3600 \text{ s}) = 3,6 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 3,6 \text{ MJ}.$$

Beispiel 5.5 zeigt, wie die Leistung eines Motors berechnet wird.

Beispiel 5.5: Die Leistung eines Motors

Für den Antrieb eines Seilzugs, der eine Ladung Steine mit einem Gewicht von 500 N mit konstanter Geschwindigkeit anhebt, wird ein kleiner Motor eingesetzt (Abbildung 5.14). Dieser kann die Steine in 20 s um 10 m heben. Der Seilzug wiegt 300 N. Wie hoch ist die Leistungsabgabe des Motors? (Zur Erinnerung: Das Gewicht ist der Betrag der auf die Steine wirkenden Gravitationskraft.)

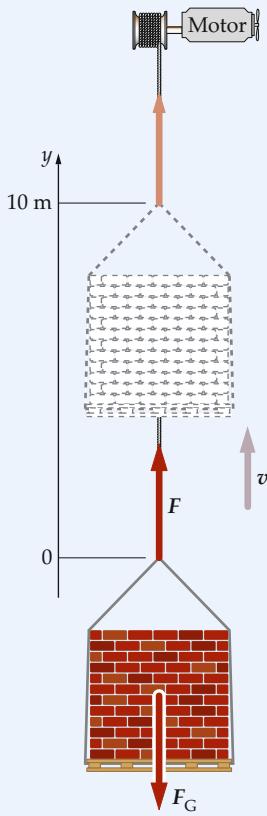


Abbildung 5.14 Diagrammatische Darstellung des Seilzugs.

Problembeschreibung: Da die Beschleunigung null ist, ist der Betrag der nach oben gerichteten Kraft F , die der Motor aufbringt, gleich der Summe aus dem Gewicht des Seilzugs und dem Gewicht der Steine. Die Rate, mit der der Motor die Arbeit verrichtet, ist die Leistung.

Lösung Die Leistung errechnet sich aus $F \cdot v$:

$$\begin{aligned} P &= F \cdot v = |F| |v| \cos \theta = |F| |v| \cos 0^\circ = |F| |v| \\ &= (800 \text{ N}) \cdot \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ s}} = [4,00 \cdot 10^2 \text{ W}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die von der Kraft verrichtete Arbeit beträgt $(800 \text{ N}) \cdot (10 \text{ m}) = 8000 \text{ J}$. Da dies 20 s gedauert hat, ist zu erwarten, dass die Leistung $8000 \text{ J}/20 \text{ s} = 4,0 \cdot 10^2 \text{ W}$ beträgt. Dies stimmt genau mit unserem Ergebnis überein.

Weitergedacht: 1) Tatsächlich kann der Seilzug unmöglich mit konstanter Geschwindigkeit arbeiten. Da die Steine und der Seilzug zu Beginn ruhen, müssen sie zunächst beschleunigt werden. Während des Beschleunigungsintervalls muss die abgegebene Leistung höher als 400 N sein. Dagegen wird die abgegebene Leistung kleiner als 400 N

sein, während der Lift vor dem Stehenbleiben abbremst. Die 400 N sind also die durchschnittlich von dem Motor abgegebene Leistung. Die von der Gravitationskraft gelieferte Leistung beträgt demgegenüber -400 N . 2) Eine Leistung von 400 W ist etwas mehr als 1/2 PS.

Übung 5.5: a) Wie groß muss die von dem Motor abgegebene mittlere Leistung mindestens sein, um die Steine und den Seilzug in 40 s auf eine Höhe von 10 m anzuheben? b) Welche Arbeit verrichtet die Motorkraft? Welche Arbeit verrichtet die Gravitationskraft? ▶ ■

5.3 Kinetische Energie

Die Energie ist eine der wichtigsten vereinheitlichenden Begriffsbildungen in der Wissenschaft überhaupt. Die **Energie** eines Systems ist seine Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Je nach den herrschenden Bedingungen bzw. Zuständen gibt es verschiedene Arten Energie. Die **kinetische Energie** ist die der Bewegung zugeordnete Energie. Die **potenzielle Energie** hängt mit der Lage des Systems zusammen, also etwa mit dem Abstand zwischen zwei Körpern, die sich anziehen. Die **Wärmeenergie** ist der zufälligen Bewegung der Atome, Moleküle und Ionen in einem System zugeordnet und hängt eng mit der Temperatur des Systems zusammen. In diesem Abschnitt werden wir uns auf die kinetische Energie konzentrieren. Die potenzielle Energie und die Wärmeenergie werden in Abschnitt 5.4 erörtert.

Kinetische Energie und konstante Kraft

Wenn Kräfte an einem Teilchen Arbeit verrichten, ändert sich im Ergebnis die der Bewegung des Teilchens zugeordnete Energie, also die kinetische Energie. Um den Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Arbeit abzuleiten, betrachten wir ein Teilchen der Masse m unter der Wirkung einer konstanten Gesamtkraft F , das sich entlang der x -Achse bewegt. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom gilt

$$F_x = m a_x.$$

Bei konstanter Gesamtkraft ist auch die Beschleunigung konstant. Damit lässt sich die Verschiebung über die kinematische Gleichung für die konstante Beschleunigung

$$v_{E,x}^2 = v_{A,x}^2 + 2 a_x \Delta x$$

(Gleichung 2.30) durch die Anfangsgeschwindigkeit $v_{A,x}$ und durch die Endgeschwindigkeit $v_{E,x}$ ausdrücken. Wird diese Gleichung nach a_x umgestellt, ergibt sich:

$$a_x = \frac{1}{2 \Delta x} (v_{E,x}^2 - v_{A,x}^2).$$

Vorgehensweise: Aufgabenstellungen zu Arbeit und kinetischer Energie

Durch geeignete Wahl der $+y$ -Richtung oder der $+x$ -Richtung kann die Lösung von Aufgaben zu Arbeit und kinetischer Energie oft vereinfacht werden.

1. Zeichnen Sie das Teilchen zuerst in seiner Anfangslage und dann in seiner Endlage ein. Vereinfacht kann der Körper als Punkt oder Kasten eingezeichnet werden. Bezeichnen Sie Anfangs- und Endlage des Körpers.
2. Tragen Sie eine oder mehrere Koordinatenachsen in die Zeichnung ein.
3. Zeichnen Sie Vektorpfeile für die Anfangs- und für die Endgeschwindigkeit ein und benennen Sie diese.
4. Zeichnen Sie am Anfangsort des Teilchens für jede darauf wirkende Kraft einen Vektor ein. Benennen Sie auch diese Vektoren geeignet.
5. Berechnen Sie die Gesamtarbeit, die die Kräfte an dem Teilchen verrichten, und setzen Sie sie gleich der Änderung von dessen kinetischer Energie.

Plausibilitätsprüfung: Achten Sie bei der Berechnung auf die Vorzeichen. Je nach der Richtung der Verschiebung relativ zur Kraftrichtung können die Werte für die Arbeit z. B. positiv oder negativ sein.

Setzt man das für a_x in die Gleichung $F_x = m a_x$ ein und multipliziert beide Seiten mit Δx , erhält man:

$$F_x \Delta x = \frac{1}{2} m v_{E,x}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,x}^2.$$

Der Term $F_x \Delta x$ auf der linken Seite ist die an dem Teilchen verrichtete Gesamtarbeit. Somit gilt:

$$W = \frac{1}{2} m v_{E,x}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,x}^2. \quad (5.15)$$

$\frac{1}{2} m v_x^2$ ist eine Größe, die die Energie repräsentiert, die ein Teilchen im Zusammenhang mit der Bewegung hat und die die **kinetische Energie** E_{kin} des Teilchens heißt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (5.16)$$

DEFINITION DER KINETISCHEN ENERGIE

Dabei haben wir berücksichtigt, dass bei geradliniger Bewegung längs der x -Achse für die Geschwindigkeit $v^2 = v_x^2$ gilt. Die kinetische Energie ist eine skalare Größe, die nur vom Geschwindigkeitsbetrag und von der Masse eines Teilchens, nicht aber von seiner Bewegungsrichtung abhängt. Zudem kann die kinetische Energie nie negativ sein; null ist sie nur dann, wenn das Teilchen ruht.

Die Größe auf der rechten Seite von Gleichung 5.15 ist die Änderung der kinetischen Energie des Teilchens. Damit ist Gleichung 5.15 ein Zusammenhang zwischen der an einem Teilchen verrichteten Gesamtarbeit und der kinetischen Energie des Teilchens. Die an einem Teilchen verrichtete Gesamtarbeit ist gleich der Änderung seiner kinetischen Energie:

$$W = \Delta E_{\text{kin}}. \quad (5.17)$$

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN GESAMTARBEIT UND KINETISCHER ENERGIE

Dieser Zusammenhang besagt, dass die kinetische Energie zunimmt, wenn W positiv ist. In diesem Fall bewegt sich das Teilchen am Ende der Verschiebung schneller als zu Beginn. Ist W dagegen negativ, nimmt die kinetische Energie ab. Für $W = 0$ ändert sich die kinetische Energie nicht, sodass auch der Geschwindigkeitsbetrag des Teilchens konstant bleibt.

! Die kinetische Energie hängt vom *Betrag* der Geschwindigkeit eines Teilchens und nicht von seiner Richtung ab. Ändert sich die Richtung der Geschwindigkeit, während ihr Betrag gleich bleibt, bleibt auch die kinetische Energie dieselbe.

Wenn die in Abbildung 5.5 dargestellte Kraft die Gesamtkraft auf das Teilchen ist, repräsentiert jeder einzelne Term $F_{x,i} \Delta x_i$ die Gesamtarbeit, die an dem Teilchen von einer konstanten Kraft verrichtet wird, während es sich über die inkrementelle Verschiebung Δx_i bewegt. Damit ist $F_{x,i} \Delta x_i$ gleich der Änderung der kinetischen Energie $\Delta E_{\text{kin},i}$ des Teilchens während dieser inkrementellen Verschiebung Δx_i (Gleichung 5.17). Darüber hinaus ist die Gesamtänderung der kinetischen Energie ΔE_{kin} des Teilchens während der Gesamtverschiebung gleich der Summe der inkrementellen Änderungen der kinetischen Energie. Somit ist die bei der Gesamtverschiebung an dem Teilchen verrichtete Gesamtarbeit W gleich der Änderung der kinetischen Energie für die Gesamtverschiebung. Damit ist die Aussage $W = \Delta E_{\text{kin}}$ (Gleichung 5.17) nicht nur für konstante, sondern auch für ortsabhängige Kräfte gültig.

Da die an einem Teilchen verrichtete Gesamtarbeit gleich der Änderung seiner kinetischen Energie ist, hat die Energie dieselben Maßeinheiten wie die Arbeit. Zwei häufig verwendete Energieeinheiten sind das Joule (J) und das Elektronenvolt (eV).

Beispiel 5.6: Die Ableitung eines Skalarprodukts

Zeigen Sie, dass $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$ gilt, wobei \mathbf{a} die Beschleunigung, \mathbf{v} die Geschwindigkeit und v^2 deren Quadrat ist.

Problembeschreibung: Es ist $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Somit können wir die Regel für das Differenzieren von Skalarprodukten anwenden.

Lösung: Wenden Sie auf das Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ die Ableitungsregel an:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} v^2 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2$$

Plausibilitätsprüfung: Die Geschwindigkeit hat die Dimension eines Quotienten aus Länge und Zeit, sodass $d(v^2)/dt$ die Dimension eines Quotienten aus dem Quadrat einer Länge und der dritten Potenz der Zeit hat. Die Beschleunigung \mathbf{a} hat die Dimension eines Quotienten aus einer Länge und dem Quadrat der Zeit. Damit hat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ die Dimension eines Quotienten aus dem Quadrat einer Länge und der dritten Potenz der Zeit. Somit haben beide Seiten von $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$ dieselbe Dimension.

Weitergedacht: Dieses Beispiel umfasst ausschließlich kinematische Parameter, sodass auch die resultierende Beziehung rein kinematischer Natur ist. Anders als einige bisher betrachtete kinematische Gleichungen, die nur im Fall der gleichförmig beschleunigten Bewegung gültig sind, ist die Gleichung $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$ ohne Einschränkungen gültig. Multipliziert man beide Seiten der letzten Gleichung mit der Masse m , erhält man auf der rechten Seite den Term $\frac{dE_{kin}}{dt}$, worauf wir in Beispiel 5.9 näher eingehen werden. ■

In Beispiel 5.6 hatten wir die kinematische Beziehung

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (5.18)$$

erhalten. Auf diese Gleichung werden wir in Beispiel 5.9 zurückkommen, wenn wir den Zusammenhang zwischen Leistung und kinetischer Energie für krummlinig bewegte Teilchen unter der Wirkung von ortsabhängigen Kräften herleiten werden.

Beispiel 5.7 und Beispiel 5.8 zeigen, wie diese Vorgehensweise auf ganz unterschiedliche Aufgabenstellungen angewendet werden kann.

Beispiel 5.7: Die Kraft auf ein Elektron

Ältere Fernsehgeräte erzeugen das Bild mit speziellen Kathodenstrahlröhren, sogenannten Bildröhren. In einer solchen Bildröhre werden Elektronen mit einer Elektronenkanone beschleunigt. Die Kraft, die das Elektron beschleunigt, ist eine elektrische Kraft, die von dem elektrischen Feld in der Elektronenkanone herrührt. In dieser Elektronenkanone wird ein Elektron aus der Ruhe heraus über eine Strecke von 2,5 cm auf eine kinetische Energie von 2,5 keV beschleunigt. Berechnen Sie die Kraft auf das Elektron unter der Annahme, dass sie konstant ist und in Bewegungsrichtung des Elektrons wirkt.

Problembeschreibung: Das Elektron kann als Teilchen modelliert werden. Seine kinetische Energie zu Beginn und am Ende sind gegeben. Auf das Teilchen wirkt lediglich die elektrische Kraft. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie an und stellen Sie die Gleichung nach der Kraft um.

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Skizze des Elektrons in seiner Anfangs- und in seiner Endlage an. Zeichnen Sie die Verschiebung, die Anfangs- und die Endgeschwindigkeit und die Kraft ein (Abbildung 5.15).

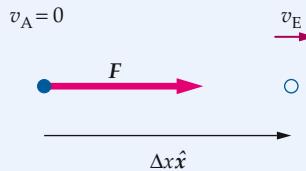


Abbildung 5.15 Bewegungsdiagramm des Elektrons.

2. Setzen Sie die verrichtete Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie:

$$W = \Delta E_{kin}$$

$$F_x \Delta x = E_{kin,E} - E_{kin,A}$$

3. Berechnen Sie mit dem Umrechnungsfaktor $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,0 \text{ eV}$ die Kraft:

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{E_{kin,E} - E_{kin,A}}{\Delta x} \\ &= \left(\frac{2500 \text{ eV} - 0 \text{ eV}}{0,025 \text{ m}} \right) \cdot \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,0 \text{ eV}} \right) \\ &= \boxed{1,6 \cdot 10^{-14} \text{ N}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Ein Elektron hat nur eine Masse von $9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Insofern ist es plausibel, dass ihm bereits eine kleine Kraft eine hohe Geschwindigkeit erteilen und damit seine kinetische Energie so stark ändern kann.

Weitergedacht: 1) Es ist $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ und daher $1 \text{ J/m} = 1 \text{ N}$. 2) 1 eV ist die kinetische Energie, die ein Teilchen mit der Ladung $-e$ (z. B. ein Elektron) erlangt, wenn es im Vakuum vom negativen Anschluss zum positiven Anschluss einer 1-V-Batterie beschleunigt wird. ■

Beispiel 5.8: Schlittenrennen

Ein Student nimmt an den Winterferien an einem Schlittenrennen auf einem zugefrorenen See teil. Beim Start zieht er den reibungsfrei gleitenden Schlitten, der eine Gesamtmasse von 80 kg hat, aus dem Stand mit einer Kraft von 180 N unter einem Winkel von 40° gegen die Horizontale. Gesucht sind für die ersten $\Delta x = 5,0 \text{ m}$ des Rennens a) die Arbeit, die der Student verrichtet, und b) die Endgeschwindigkeit des Schlittens.

Problembeschreibung: Die Arbeit, die der Student verrichtet, ist $F_x \Delta x$, wobei wir die Verschiebungsrichtung als die positive x -Richtung festgelegt haben. Da die anderen Kräfte, ma_G und F_n , keine x -Komponente besitzen, ist diese Arbeit zugleich die *Gesamtarbeit*, die am Schlitten verrichtet wird. Die Endgeschwindigkeit des Schlittens wird über den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie ermittelt. Berechnen Sie die von jeder Kraft am Schlitten verrichtete Arbeit (Abbildung 5.16) und setzen Sie die Gesamtarbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie des Schlittens.

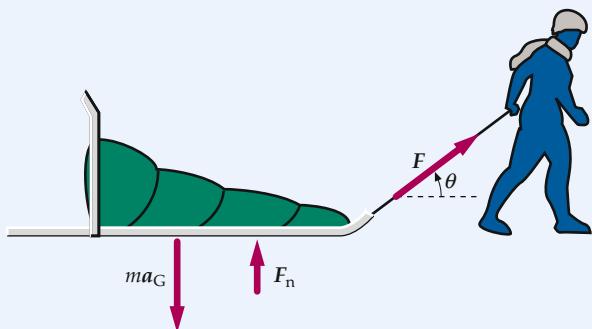


Abbildung 5.16 Problemskizze und wirkende Kräfte.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie den Schlitten in seiner Anfangslage sowie in seiner Endlage, nachdem er 5,0 m gezogen wurde.

Legen Sie die x -Achse in die Bewegungsrichtung (Abbildung 5.17).

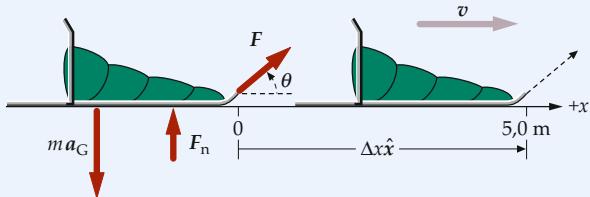


Abbildung 5.17 Bewegungsdiagramm des Schlittens.

2. Die Arbeit, die der Student an dem Schlitten verrichtet, beträgt $F_x \Delta x$. Da die beiden anderen Kräfte senkrecht zur x -Richtung wirken (Abbildung 5.17) und somit die Arbeit null verrichten, ist dies auch die Gesamtarbeit:

$$\begin{aligned} W &= W_{\text{Stud}} = F_x \Delta x = |\mathbf{F}| \cos \theta \Delta x \\ &= (180 \text{ N}) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (5,0 \text{ m}) = 689 \text{ J} \\ &= [6,9 \cdot 10^2 \text{ J}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie auf den Schlitten an und lösen Sie die Gleichung nach der Endgeschwindigkeit auf: $W = \frac{1}{2} m v_{E,x}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,x}^2$

$$\begin{aligned} v_{E,x}^2 &= v_{A,x}^2 + \frac{2W}{m} \\ &= 0 + \frac{2 \cdot (689 \text{ J})}{80 \text{ kg}} = 17,2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \\ v_{E,x} &= \sqrt{17,2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = 4,151 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ &= [4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In Teilaufgabe b hatten wir von $1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ Gebrauch gemacht. Dies gilt wegen

$$1 \text{ J/kg} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/kg} = (1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \text{m/kg} = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Weitergedacht: Die Quadratwurzel aus 17,2 ist 4,147, gerundet also 4,1. Das richtige Ergebnis von Teilaufgabe b lautet dagegen 4,2 m/s. Das liegt daran, dass dieses unter Verwendung der Quadratwurzel aus 17,235 999 970 (dem nach Berechnen von v_E im Taschenrechner gespeicherten Wert) berechnet wurde.

Übung 5.6: Wie groß ist die Kraft, die der Student ausübt, wenn der Schlitten mit einer Masse von 80 kg bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 2,0 m/s eine Geschwindigkeit von 4,5 m/s hat, nachdem er 5,0 m gezogen wurde? Der Winkel soll ständig 40° betragen. ■

In Beispiel 5.9 wird nachgewiesen, dass die einem Teilchen zugeführte Leistung gleich der Änderungsrate seiner kinetischen Energie ist.

Beispiel 5.9: Leistung und kinetische Energie

Zeigen Sie, dass die Leistung, die einem Teilchen durch die auf es wirkende Gesamtkraft zugeführt wird, gleich der Rate ist, mit der sich seine kinetische Energie ändert.

Problembeschreibung: Die von der Gesamtkraft \mathbf{F} zugeführte Leistung ist $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = dE_{\text{kin}}/dt$ mit $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$ ist.

Lösung: 1. Ersetzen Sie die Gesamtkraft \mathbf{F} nach dem zweiten Newton'schen Axiom:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$$

2. Das Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ kann wegen $2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = d(v^2)/dt$ (Gleichung 5.18) durch die Zeitableitung von v^2 ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$$

3. Setzen Sie die Formel aus Schritt 2 in die aus Schritt 1 ein:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2$$

4. Da die Masse m und der Faktor $\frac{1}{2}$ konstant sind, können sie in das Argument der Ableitung genommen werden:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

5. Das Argument der Ableitung ist die kinetische Energie:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt}$$

Plausibilitätsprüfung: Da die Maßeinheit der Energie das Joule ist, ist die Maßeinheit von dE_{kin}/dt Joule pro Sekunde bzw. Watt. Da Watt die Einheit der Leistung ist, stimmen die Dimensionen auf beiden Seiten von $P = dE_{\text{kin}}/dt$ überein. ■

Nach Beispiel 5.9 gilt zwischen der von der Gesamtkraft zugeführten Leistung und der Änderungsrate der kinetischen Energie eines Körpers, der als Teilchen modelliert werden kann, die Beziehung

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt}. \quad (5.19)$$

Gesamtarbeit und kinetische Energie bei krummliniger Bewegung

Der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie bei krummliniger Bewegung kann hergeleitet werden, indem beide Seiten der Gleichung $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = dE_{\text{kin}}/dt$ (Gleichung 5.19) über die Zeit integriert werden. So ergibt sich

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_1^2 \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} dt. \quad (5.20)$$

Wegen $ds = \mathbf{v} dt$, wobei ds die Verschiebung in der Zeit dt ist, sowie wegen $(dE_{\text{kin}}/dt) dt = dE_{\text{kin}}$ kann Gleichung 5.20 auch wie folgt geschrieben werden:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot ds = \int_1^2 dE_{\text{kin}}.$$

Dabei stellt das Integral auf der linken Seite die am Teilchen verrichtete Gesamtarbeit W dar. Das Integral auf der rechten Seite kann leicht berechnet werden und ergibt:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot ds = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} \quad (\text{oder } W = \Delta E_{\text{kin}}). \quad (5.21)$$

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN GESAMTARBEIT UND KINETISCHER ENERGIE

Gleichung 5.21 ist eine direkte Folge des zweiten Newton'schen Axioms. Beispiel 5.10 zeigt, wie über die beim Skilauf verrichtete Arbeit und den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie auf die Geschwindigkeit geschlossen werden kann.

Beispiel 5.10: Skilauf als Arbeit

Ein Ehepaar macht Skiurlaub in einem Skigebiet mit zwei Skipisten, einer Strecke für Anfänger und einer für Fortgeschrittene. Beide Abfahrten beginnen an der Spitze des Skilifts und enden an der Ziellinie nahe der Talstation des Skilifts. Es sei h der Höhenunterschied für beide Pisten. Die Abfahrt für Anfänger ist länger, aber nicht so steil wie die Piste für Fortgeschrittene. Das Ehepaar, bei dem die Frau besser Ski fährt, soll neue, reibungsfreie Skier testen. Um die Sache etwas spannender zu machen, bietet der Mann seiner Frau eine Wette an: Sie soll die Abfahrt für Fortgeschrittene nehmen, während er die Anfängerpiste wählt. Trotzdem, so wettet er, wird ihre Geschwindigkeit an der Ziellinie nicht höher sein als seine. Die Frau nimmt die Wette an. Die Bedingungen besagen, dass beide aus dem Stand heraus an der Spitze der Abfahrten beginnen und ohne Drehung den Abhang hinunterfahren.

Wer gewinnt die Wette? (Der Luftwiderstand sei vernachlässigbar.)



(Mit freundlicher Genehmigung der Rossignol Ski Company.)

Problembeschreibung: Da beide Personen ohne Körperdrehung direkt den Abhang hinabfahren (das heißt, die Ski zeigen immer in die gleiche Richtung), können sie als Teilchen angesehen werden. (Der oben formulierte Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie gilt nur für Teilchen.) Auf beide wirken jeweils zwei Kräfte: die Gravitationskraft und die Normalkraft.

Lösung: 1. Fertigen Sie für einen der Skiläufer eine Skizze an und zeichnen Sie beide Vektoren ein (Abbildung 5.18a). Vergessen Sie die Koordinatenachsen nicht. Wegen $v_A = 0$ verknüpft der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie die Endgeschwindigkeit v_E mit der Gesamtarbeit.

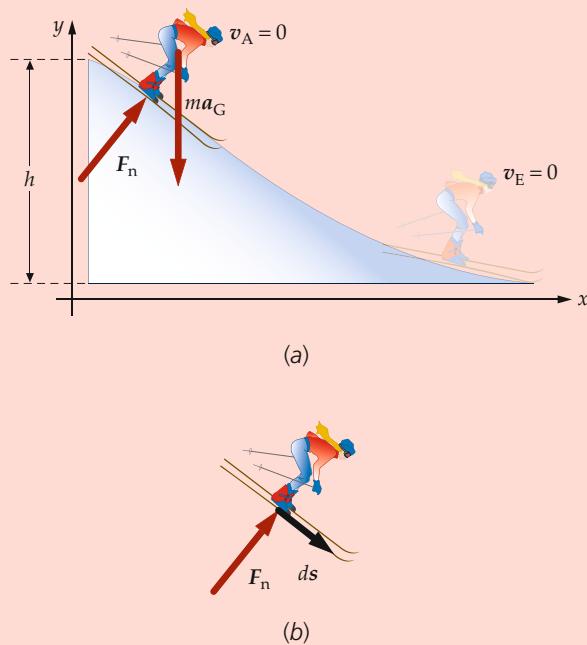


Abbildung 5.18 Ortsdiagramm des Skiläufers mit Darstellung der wirkenden Kräfte.

2. Die Endgeschwindigkeit hängt von der kinetischen Energie im Endzustand ab und diese wiederum über den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie von der Gesamtarbeit:

$$W = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

3. Die Gesamtarbeit setzt sich für jeden Ehepartner jeweils aus der Arbeit der Normalkraft und aus der Arbeit der Gravitationskraft zusammen:

$$W = W_n + W_G$$

4. Während die Kraft $m a_G$ auf einen Skiläufer konstant ist, trifft dies auf die Normalkraft F_n nicht zu, da diese vom Neigungswinkel abhängt. Berechnen Sie zuerst die von F_n verrichtete Arbeit und danach die Arbeit dW_n , die die Kraft F_n an irgendeinem Ort entlang der Strecke bei einer unendlich kurzen Verschiebung ds auf einen Skiläufer ausübt (Abbildung 5.18b):

$$dW_n = F_n \cdot ds = F_n \cos \phi \, ds$$

5. Berechnen Sie den Winkel ϕ zwischen der Richtung der Kraft F_n und der des Wegs ds . Die Verschiebung ds erfolgt tangential zum Hang:

$$\phi = 90^\circ$$

6. Berechnen Sie die von der Kraft F_n auf der gesamten Abfahrt verrichtete Arbeit:

$$W_n = \int F_n \cos 90^\circ \, ds = \int (0) \, ds = 0$$

7. Die Gravitationskraft F_G ist konstant. Damit berechnet sich die von ihr verrichtete Arbeit einfach über $W_G = F_G \cdot s$, wobei s , wie Abbildung 5.19 zeigt, die Gesamtverschiebung vom Start bis zum Ziel der Skipiste darstellt:

$$\begin{aligned} W_G &= m a_G \cdot s = -m g \hat{\mathbf{y}} \cdot (\Delta x \hat{\mathbf{x}} + \Delta y \hat{\mathbf{y}}) \\ &= -m g \Delta y \end{aligned}$$

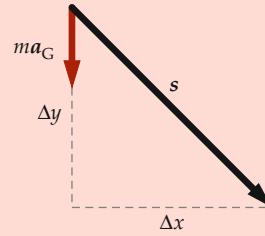


Abbildung 5.19 Ortsdiagramm des Skiläufers mit Darstellung der wirkenden Kräfte.

8. Da die Skiläufer den Hang hinabfahren, ist Δy negativ. Nach Abbildung 5.18a ist $\Delta y = -h$:

$$\Delta y = -h$$

9. Einsetzen in das Ergebnis aus Schritt 7 ergibt:

$$W_G = m g h$$

10. Ermitteln Sie nun aus dem Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie die Geschwindigkeit v_E :

$$W_n + W_G = \Delta E_{\text{kin}}$$

11. Die Endgeschwindigkeit hängt nur von der Höhe h ab, die für beide Abfahrten gleich ist. Somit haben beide Ehepartner im Ziel die gleiche Geschwindigkeit:

$$0 + m g h = \frac{1}{2} m v_E^2 - 0$$

$$\text{und damit } v_E = \sqrt{2 g h}$$

Der Mann gewinnt die Wette (die darin bestand, dass seine Frau im Ziel nicht schneller sein würde als er).

Plausibilitätsprüfung: Die für die Bewegung verantwortliche Kraft ist die Gravitationskraft. Diese ist proportional zur Masse, sodass auch die verrichtete Arbeit proportional zur Masse ist. Da die kinetische Energie ebenfalls proportional zur Masse ist, fällt die Masse aus dem Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie heraus. Somit sollte die Endgeschwindigkeit unabhängig von der Masse sein, was bei unserem Ergebnis der Fall ist.

Weitergedacht: Die Frau wird die Ziellinie dank ihrer steileren Abfahrt zuerst überqueren, aber darum ging es bei der Wette nicht. Stattdessen zeigt das Beispiel: Die von der Schwerkraft verrichtete Arbeit ist unabhängig vom Verlauf oder von der Länge der Strecke gleich $m g h$. Was zählt, ist lediglich der Höhenunterschied h zwischen Anfangs- und Endpunkt. ■

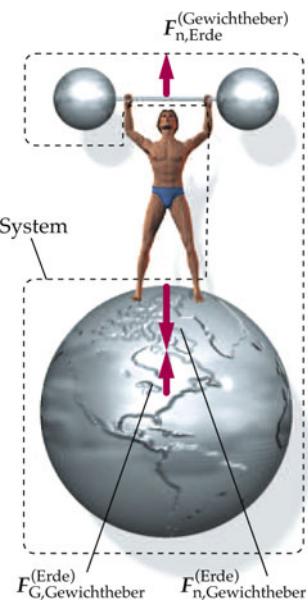


Abbildung 5.20 Das System soll aus dem Gewicht und der Erde, jedoch nicht aus dem Gewichtheber bestehen, der das Gewicht hält. Wenn der Gewichtheber das Gewicht anhebt, verrichtet er Arbeit an dem System.

elle Energie gespeichert, d. h. als Energie, die mit den relativen Lagen verschiedener Teile des Systems zusammenhängt. Die potentielle Energie hängt daher mit der Lage der Teile des Systems, die kinetische Energie dagegen mit ihrer Bewegung zusammen.

Wir wollen dazu als Beispiel einen Gewichtheber betrachten, der ein Gewicht mit der Masse m auf die Höhe h hebt. Da das Gewicht sowohl zu Beginn als auch am Schluss ruht, ist die Gesamtänderung seiner kinetischen Energie null. Da das Gewicht beim Heben als Teilchen modelliert werden kann, ist der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie anwendbar, dem zufolge die an dem Gewicht verrichtete Gesamtarbeit ebenfalls null sein muss. Auf das Gewicht wirken zwei Kräfte: die Gravitationskraft und die Kraft, die die Hände des Gewichthebers auf das Gewicht ausüben. Die Gravitationskraft auf das Gewicht ist $m a_G$ und die von dieser Kraft an dem Gewicht verrichtete Arbeit beim Heben $-m g h$. Da die an dem Gewicht verrichtete Gesamtarbeit null ist, muss die von der Kraft der Hände an dem Gewicht verrichtete Arbeit $+m g h$ sein.

Wir wollen das Gewicht und die Erde als ein *System* zweier Teilchen ansehen (Abbildung 5.20), zu dem der Gewichtheber jedoch nicht dazugehört. Auf das *Gesamtsystem aus Erde und Gewicht* wirken drei äußere Kräfte, die der Gewichtheber darauf ausübt: die Kontaktkraft der Hände *auf das Gewicht*, die Kontaktkraft seiner Füße *auf den Boden* und die Gravitationskraft des Gewichthebers (sein Gewicht) *auf die Erde*. Die Gravitationskraft des Gewichthebers auf die Erde ist betragsmäßig gleich, aber entgegengerichtet der Gravitationskraft der Erde auf den Gewichtheber. (Die Gravitationskräfte, mit denen sich Ge-

5.4 Potenzielle Energie

In Abschnitt 5.3 hatten wir gesehen, dass die an einem *Teilchen* verrichtete Gesamtarbeit gleich der Änderung seiner kinetischen Energie ist. Allerdings kann das Teilchen Teil eines *Systems* zweier oder mehrerer Teilchen sein, wie sie eingehender in Kapitel 7 behandelt werden. In diesem Zusammenhang kann die an dem System von außen verrichtete Arbeit von Interesse sein. Häufig führt die Energie, die auf ein solches System übertragen wird, wenn äußere Kräfte an ihm Arbeit verrichten, nicht zu einer Zunahme der kinetischen Gesamtenergie des *Systems*. Stattdessen wird die übertragene Energie als **potenzielle Energie** gespeichert.

wichtheber und Gewicht anziehen, sind vernachlässigbar). Da das Gewicht vom Boden in die Höhe h gehoben wird, während die Verschiebungen des Bodens und der Erde vernachlässigbar sind, verrichtet an dem System aus Erde und Gewicht effektiv nur die Kraft der Hände auf das Gewicht eine Arbeit. Damit ist die von allen äußeren Kräften an dem betrachteten System verrichtete Gesamtarbeit $+mgh$ (die Arbeit, die von den Händen am Gewicht verrichtet wird). Die durch diese Arbeit auf das System übertragene Energie wird als *potenzielle Energie der Gravitation* gespeichert – Energie, die der Lage des Gewichts in Bezug auf die Erde (nämlich der Höhe des Gewichts über dem Boden) zugeordnet ist.

Ein weiteres System, das in Abhängigkeit von seiner Lage Energie speichert, ist eine Feder. Wenn man eine Feder dehnt oder zusammendrückt, wird die Energie, die mit der Länge der Feder zusammenhängt, als *elastische potenzielle Energie* gespeichert. Wir betrachten dazu die in Abbildung 5.21 gezeigte Feder, die durch zwei gleich große, aber entgegengerichtete Kräfte F_1 und F_2 zusammengedrückt wird, als System. Da die Summe beider Kräfte null ist, ist die auf die Feder wirkende Gesamtkraft ebenfalls null. Demzufolge ändert sich die kinetische Energie der Feder nicht. Die durch die Arbeit beim Zusammendrücken übertragene Energie wird nicht als kinetische Energie, sondern als elastische potenzielle gespeichert. Die Änderung der Länge der Feder zeigt, dass sich die Lage ihrer beiden Enden geändert hat. Da F_1 und F_2 positive Arbeit verrichten, ist die an der Feder verrichtete Gesamtarbeit positiv. (Die von beiden Kräften verrichtete Arbeit ist positiv, da die Kraft und die Verschiebung in beiden Fällen in dieselbe Richtung zeigen.)

Konservative und nichtkonservative Kräfte

Wenn ein Skiläufer mit einem Skilift auf einen Hügel mit der Höhe h fährt, beträgt die Arbeit, die die Gravitationskraft an dem Skiläufer verrichtet, $-mgh$, wobei m die Masse des Skiläufers ist. Dagegen ist die Arbeit, die die Gravitationskraft beim Abfahren an ihm verrichtet, unabhängig von der Form des Hügels immer $+mgh$ (siehe Beispiel 5.10). Somit ist die Gesamtarbeit, die die Gravitationskraft an dem Skiläufer während einer vollen Runde hinauf und hinab verrichtet, unabhängig vom Weg null. In Situationen wie dieser, in denen die an einem Körper verrichtete Gesamtarbeit allein von der Anfangs- und von der Endlage des Körpers abhängt, nicht aber von dem Weg, auf dem er sich bewegt, heißt die Kraft, die die Arbeit verrichtet, **konservative Kraft**.

Eine Kraft ist konservativ, wenn die Arbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich von einem Punkt zu einem anderen bewegt, unabhängig von dem Weg des Teilchens zwischen diesen beiden Punkten ist.

DEFINITION EINER KONSERVATIVEN KRAFT

Aus Abbildung 5.22 geht hervor, dass diese Definition auch folgendermaßen formuliert werden kann:

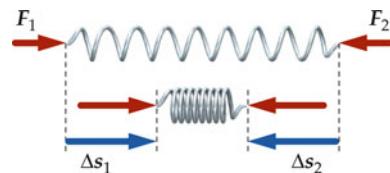


Abbildung 5.21 Die Feder wird durch die beiden äußeren Kräfte F_1 und F_2 zusammengedrückt. Beide Kräfte verrichten beim Zusammendrücken der Feder positive Arbeit, wodurch die potenzielle Energie der Feder steigt.

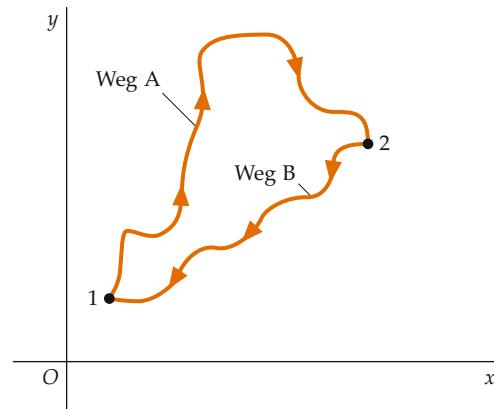


Abbildung 5.22 Zwei Wege im Raum verbinden die Punkte 1 und 2. Die Arbeit einer konservativen Kraft zwischen Punkt 1 und 2 auf dem Weg A sei $+W$. Da die Arbeit bei einem vollen Umlauf null ist, muss die Arbeit für den Rückweg entlang des Wegs B gleich $-W$ sein. Wird der Weg B in entgegengesetzter Richtung, also von Punkt 1 zu Punkt 2, durchlaufen, ist die Kraft an jedem Punkt genauso groß wie bei der Bewegung von 2 nach 1, während die Verschiebung entgegengesetzt gerichtet ist. Damit ist die Arbeit von Punkt 1 zu Punkt 2 entlang des Wegs B ebenfalls W . Allgemein gilt also, dass die Arbeit auf jedem Weg, der die beiden Punkte 1 und 2 verbindet, gleich ist.

Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich auf einer *beliebigen geschlossenen Bahn* bewegt, null ist.

DEFINITION EINER KONSERVATIVEN KRAFT

Im Beispiel des Skilifts ist die Gesamtarbeit, die die Gravitationskraft an dem Skiläufer verrichtet, während er zunächst mit dem Lift heraufgezogen wird und anschließend den Abhang hinunterfährt, unabhängig vom gewählten Weg null. Somit ist die Gravitationskraft, die die Erde auf den Skifahrer ausübt, eine konservative Kraft. Sowohl die auf einen Körper wirkende Gravitationskraft als auch die Kraft, die eine Feder mit vernachlässigbarer Masse auf einen Körper ausübt, sind konservative Kräfte. (Bei einer Feder mit vernachlässigbarer Masse kann auch die kinetische Energie vernachlässigt werden. Wenn nichts anderes gesagt ist, wird dies bei allen Federn im Buch angenommen.)

Nicht alle Kräfte sind konservativ. Eine Kraft, die der Definition konservativer Kräfte nicht genügt, heißt **nichtkonservativ**. Wir betrachten dazu einen Block, der geradlinig auf dem Tisch erst



Ein einfacher Mühlstein. Der Esel übt am Angriffspunkt P eine Kraft F auf die Stange aus. (© O. Alamany und E. Vicens/Corbis.)

von einem Punkt A zu einem Punkt B und anschließend wieder zurück verschoben wird, sodass er am Schluss wieder bei A ist. Während er sich bewegt, wirkt auf ihn die Reibungskraft, die seiner Bewegung entgegengesetzt ist. Damit wirkt die Kraft, mit der der Block geschoben wird, in Bewegungsrichtung. Demzufolge ist die beim Schieben verrichtete Arbeit sowohl auf der Hinrichtung als auch auf der Rückrichtung positiv. Diese Schubkraft ist daher ein Beispiel für eine nichtkonservative Kraft.

Ein weiteres Beispiel ist die Kraft F , die ein Esel auf eine Stange ausübt, während er sie mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag im Kreis zieht. Während der Esel läuft, verrichtet die Kraft F unentwegt positive Arbeit. Immer wenn der Esel einmal im Kreis gelaufen ist, kehrt der Angriffspunkt der Kraft F (der Punkt P) an dieselbe Stelle zurück. Da die Kraft F bei einem Umlauf auf dem Kreis stets in Bewegungsrichtung des Esels wirkt, ist die von ihr verrichtete Arbeit verschieden von null. Damit ist F eine nichtkonservative Kraft.

Falls die Arbeit auf *einem beliebigen* geschlossenen Weg von null verschieden ist, können wir folgern, dass die Kraft nichtkonservativ ist. Dass eine Kraft konservativ ist, kann dagegen nur dann geschlossen werden, wenn die Arbeit auf *allen* möglichen geschlossenen Wegen null ist. Da es unendlich viele mögliche geschlossene Wege gibt, kann unmöglich die verrichtete Arbeit für jeden von ihnen berechnet werden. Während bereits ein einziger geschlossener Weg, entlang dessen die Arbeit einer betrachteten Kraft nicht null ist, ausreicht, um zu zeigen, dass die Kraft nichtkonservativ ist, nützt er wenig beim Nachweis, dass eine gegebene Kraft konservativ ist. Allerdings kann in der theoretischen Physik mittels anspruchsvollerer mathematischer Verfahren auch nachgewiesen werden, dass eine gegebene Kraft konservativ ist.

In Beispiel 5.11 wird das Wegintegral für eine spezielle Kraft in x -Richtung berechnet.

Beispiel 5.11: Integral auf einem geschlossenen Weg

Um die Arbeit zu berechnen, die eine Kraft F auf einem geschlossenen Weg C verrichtet, muss das Integral $\oint_C F \cdot ds$ berechnet werden. (Der Kreis über dem Integralzeichen bedeutet, dass es sich um ein sogenanntes Zirkelintegral handelt, bei dem die Integration für einen vollständigen Umlauf auf der geschlossenen Kurve C berechnet werden soll.) Berechnen Sie dieses Integral für die Kraft $F = kx\hat{x}$ (die parallel zur x -Richtung wirkt) auf dem in Abbildung 5.23 gezeigten Weg.

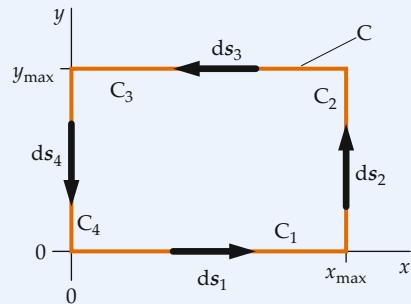


Abbildung 5.23 Darstellung des Kurvenintegrals mit den unterschiedlichen Wegabschnitten.

Problembeschreibung: Der Weg C setzt sich aus vier geraden Segmenten zusammen. Wir ermitteln auf jedem dieser Segmente das Wegelement $ds = dx\hat{x} + dy\hat{y}$ und berechnen jeweils das zugehörige Integral $\int F \cdot ds$.

Lösung: 1. Das Integral auf dem Weg C ist gleich der Summe der Integrale auf den vier Segmenten:

$$\oint_C F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds_1 + \int_{C_2} F \cdot ds_2 \\ + \int_{C_3} F \cdot ds_3 + \int_{C_4} F \cdot ds_4$$

2. Auf C_1 ist $dy = 0$ und somit $ds_1 = dx\hat{x}$:

$$\int_{C_1} F \cdot ds_1 = \int_0^{x_{\max}} kx\hat{x} \cdot dx\hat{x} = k \int_0^{x_{\max}} x \, dx \\ = \frac{1}{2} k x_{\max}^2$$

3. Auf C_2 ist $dx = 0$ und $x = x_{\max}$ und damit $ds_2 = dy\hat{y}$ sowie $F = kx_{\max}\hat{x}$:

$$\int_{C_2} F \cdot ds_2 = \int_0^{y_{\max}} kx_{\max}\hat{x} \cdot dy\hat{y} \\ = kx_{\max} \int_0^{y_{\max}} \hat{x} \cdot \hat{y} \, dy = 0$$

$(\hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \text{ da } \hat{x} \text{ und } \hat{y} \text{ senkrecht aufeinander stehen})$

4. Auf C_3 ist $dy = 0$ und somit $ds_3 = dx\hat{x}$:

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot ds_3 = \int_{x_{\max}}^0 kx\hat{x} \cdot dx\hat{x} = -k \int_0^{x_{\max}} x \, dx \\ = -\frac{1}{2} k x_{\max}^2$$

5. Auf C_4 ist $dx = 0$ und $x = 0$ und damit $ds_4 = dy\hat{y}$ sowie $\mathbf{F} = \mathbf{0}$:

$$\int_{y_{\max}}^0 0\hat{x} \cdot dy\hat{y} = 0$$

6. Addition der Ergebnisse aus Schritt 2 bis 5 ergibt:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot ds = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 + 0 - \frac{1}{2} k x_{\max}^2 + 0 = \boxed{0}$$

Plausibilitätsprüfung: Die angegebene Kraft wird durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben und ist eine Federkraft. Da wir wissen, dass Federkräfte konservativ sind, sollte das Integral auf einem geschlossenen Weg null sein.

Kommentar: Das negative Vorzeichen in Schritt 4 kommt von der Vertauschung der Integrationsgrenzen.

Übung 5.7: Berechnen Sie das Integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot ds$ für die Kraft $\mathbf{F} = Bxy\hat{x}$ auf dem in Abbildung 5.23 gezeigten Weg C. □

Die Arbeit, die eine konservative Kraft an einem Teilchen verrichtet, hängt zwar nicht vom Weg selbst, aber von den Endpunkten des Wegs ab. Diese Eigenschaft können wir nutzen, um die **potenzielle Energie** E_{pot} einer konservativen Kraft zu definieren. Wir wollen dazu noch einmal den Skiläufer als Beispiel heranziehen. Der Skiläufer und die Erde sollen jetzt als ein *Zweiteilchensystem* betrachtet werden (zu dem der Skilift nicht dazugehört). Wenn der Skiläufer von einem Skilift auf einen Berg gezogen wird, verrichtet er an dem System aus Skiläufer und Erde die Arbeit mgh . Diese Arbeit wird als potenzielle Energie der Gravitation des Systems aus Skiläufer und Erde gespeichert. Wenn der Skiläufer danach den Abhang hinabfährt, wird diese potenzielle Energie in kinetische Energie seiner Bewegung umgewandelt. Beim Hinabfahren nimmt die potenzielle Energie des Systems durch die von der Gravitation verrichtete Arbeit wieder ab. Wir definieren die potenzielle Energie E_{pot} so, dass die von einer konservativen Kraft verrichtete Arbeit gleich

der Abnahme der potenziellen Energie ist:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot ds = -\Delta E_{\text{pot}}$$

oder

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot ds. \quad (5.22a)$$

DEFINITION DER POTENZIELLEN ENERGIE

Diese Gleichung beschreibt die Änderung der potenziellen Energie wegen einer Lageänderung des Systems, bei der sich ein Körper von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 bewegt.

Die Änderung der potenziellen Energie bei einer unendlich kleinen Verschiebung ds ist

$$dE_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \cdot ds. \quad (5.22b)$$

Potenzielle Energie der Gravitation

Die potenzielle Energie der Gravitationskraft nahe der Erdoberfläche ergibt sich aus Gleichung 5.22b, indem man $\mathbf{F} = -mg\hat{y}$ einsetzt:

$$dE_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \cdot ds = -(-mg\hat{y}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ = +mg \, dy.$$

Dabei haben wir $\hat{y} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$ sowie $\hat{y} \cdot \hat{y} = 1$ verwendet. Nach der Integration erhält man

$$E_{\text{pot}} = \int mg \, dy = mg y + E_{\text{pot},0}$$

und daher

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},0} + mg y. \quad (5.23)$$

POTENZIELLE ENERGIE DER GRAVITATIONSKRAFT IN DER NÄHE DER ERDOBERFLÄCHE

Dabei ist $E_{\text{pot},0}$, die willkürliche Integrationskonstante, der Wert der potenziellen Energie bei der Höhe $y = 0$. Da über das Integral in Gleichung 5.22a nur eine Änderung der potenziellen Energie definiert ist, ist der absolute Wert von E_{pot} unerheblich.

Wir können E_{pot} an einem beliebigen Bezugspunkt null wählen. Würde man z. B. die potentielle Energie der Gravitationskraft des Systems aus dem Skiläufer und aus der Erde null setzen, wenn der Skiläufer am Fuß des Skihügels ist, wäre die Energie des Systems gleich $m g h$, wenn sich der Skiläufer auf der Höhe h über dem Fuß befindet. Allerdings könnte man die potentielle Energie ebenso gut gleich null definieren, wenn sich der Skiläufer am Punkt P auf halber Strecke auf dem Weg nach unten befindet. In diesem Fall wäre die Energie für jeden anderen Ort des Skiläufers $m g y$, wobei y dann die Höhe des Skiläufers über dem Punkt P wäre. Folglich wäre die potentielle Energie im unteren Abschnitt des Hangs negativ. Die Differenz der potentiellen Energie, die der Skiläufer während der Abfahrt durchläuft, ist jedoch immer dieselbe.

Die potentielle Energie E_{pot} kann an einem beliebigen Bezugspunkt null gesetzt werden.

Übung 5.8: Ein Fensterreiniger mit einer Masse von 55 kg steht auf einer Hebebühne 8,0 m über dem Boden. Wie groß ist die potentielle Energie E_{pot} des Systems aus dem Fensterreiniger und aus der Erde, wenn a) E_{pot} am Boden null gesetzt wird, b) E_{pot} in 4,0 m Höhe null gesetzt wird und c) E_{pot} in 10 m Höhe null gesetzt wird. ◀

Beispiel 5.12 veranschaulicht die Umwandlung von potentieller in kinetische Energie.

Beispiel 5.12: Die fallende Flasche

Eine Flasche mit einer Masse von 0,350 kg fällt aus dem Stand aus einem Regal, das in einer Höhe von 1,75 m angebracht ist. Wie groß war die potentielle Energie des Systems aus der Flasche und aus der Erde, als die Flasche noch auf dem Regal stand? Wie groß ist sie kurz vor dem Auftreffen auf dem Boden? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die kinetische Energie?

Problembeschreibung: Die Arbeit, die die Erde während des Fallens an der Flasche verrichtet, ist das Negative der Änderung der kinetischen Energie des Systems aus der Flasche und aus der Erde. Ist die Arbeit bekannt, können wir mit der Beziehung zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie die gesuchte kinetische Energie ermitteln.

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Skizze an, die die Flasche auf dem Regal sowie kurz vor dem Auftreffen auf dem Boden zeigt (Abbildung 5.24). Definieren Sie die potentielle Energie des Systems aus der Flasche und aus der Erde so, dass sie null ist, wenn sich die Flasche auf dem Boden befindet. Zeichnen Sie dazu in Ihre Skizze eine y -Achse ein, deren Ursprung in Höhe des Bodens ist.

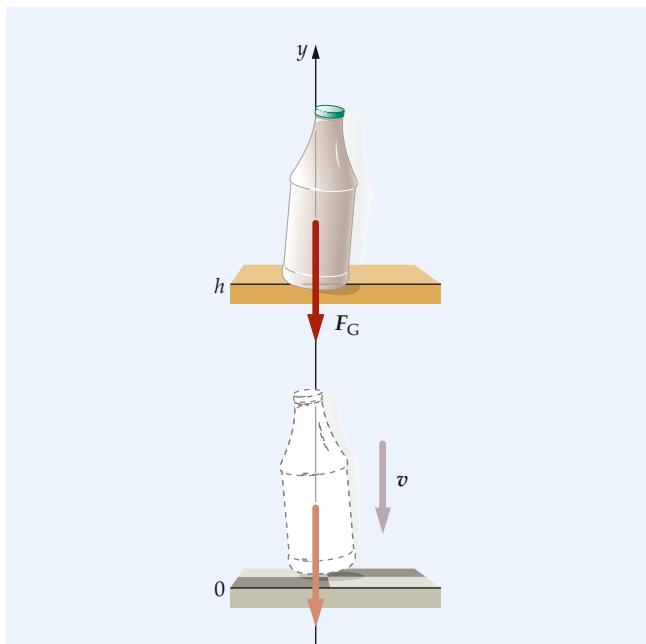


Abbildung 5.24 Bewegungsdiagramm der Flasche.

2. Die einzige Kraft, die an der fallenden Flasche Arbeit verrichtet, ist die Gravitationskraft. Damit ist $W = W_G$. Wenden Sie auf die Flasche den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie an:

$$W = W_G = \Delta E_{\text{kin}}$$

3. Die Gravitationskraft der Erde auf die fallende Flasche ist im System aus Flasche und Erde eine innere Kraft. Da sie außerdem konservativ ist, ist die von dieser Kraft verrichtete Arbeit gleich der Änderung der potentiellen Energie des Systems:

$$\begin{aligned} W_G &= -\Delta E_{\text{pot}} = -(E_{\text{pot},E} - E_{\text{pot},A}) \\ &= -(m g y_E - m g y_A) \\ &= m g (y_A - y_E) = m g (h - 0) = m g h \end{aligned}$$

4. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 3 in die Gleichung aus Schritt 2 ein und stellen Sie die Gleichung nach der kinetischen Energie am Ende um. Die kinetische Energie am Anfang ist null:

$$\begin{aligned} m g h &= \Delta E_{\text{kin}} \\ m g h &= E_{\text{kin},E} - E_{\text{kin},A} \\ E_{\text{kin},E} &= E_{\text{kin},A} + m g h \\ &= 0 + (0,350 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) \cdot (1,75 \text{ m}) \\ &= 6,01 \text{ N} \cdot \text{m} = \boxed{6,01 \text{ J}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wegen $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$ ist die in Schritt 4 erhaltene Maßeinheit, wie es sein sollte, eine Energieeinheit.

Weitergedacht: Die potenzielle Energie hängt von der Lage eines *Systems von Teilchen* ab. Wenn sich wie hier in dem System aus Flasche und Erde nur eines der Teilchen bewegt (da von der Bewegung der Erde abgesehen werden kann), spricht man der Kürze halber oft auch nur von der potenziellen Energie dieses Teilchens, in diesem Fall der Flasche. ■

Nahe der Erdoberfläche ist die Gravitationskraft, die die Erde auf einen Körper ausübt, nahezu gleichförmig; dies hängt damit zusammen, dass die Entfernung $r = r_E + h$ zum Erdmittelpunkt für nicht zu große Höhen ($h \ll r_E$) nur wenig vom Erdradius r_E abweicht. Erst bei größerer Entfernung von der Erdoberfläche muss man berücksichtigen, dass die Gravitationskraft nicht gleichförmig ist, sondern mit $1/r^2$ (Gleichung 4.18) abnimmt. Für die radiale Gravitationskraft \mathbf{F}_G aus Gleichung 4.18 ergibt sich (siehe Abbildung 5.25)

$$\begin{aligned} dE_{\text{pot}} &= -\mathbf{F}_G \cdot ds = -F_G \hat{\mathbf{r}} \cdot ds = -F_G dr \\ &= -\left(-\Gamma \frac{m_E m}{r^2}\right) dr = \Gamma \frac{m_E m}{r^2} dr \end{aligned} \quad (5.24)$$

mit $\mathbf{F}_G = -F_G \hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{r}} \cdot ds = ds \cos \varphi = dr$.

Durch Integration beider Seiten von Gleichung 5.24 erhalten wir

$$E_{\text{pot}} = \Gamma m_E m \int r^{-2} dr = -\Gamma \frac{m_E m}{r} + E_{\text{pot},0}. \quad (5.25)$$

Dabei ist $E_{\text{pot},0}$ eine Integrationskonstante. Da es nur auf Änderungen der potenziellen Energie ankommt, kann man diese Konstante so wählen, dass die potenzielle Energie für eine beliebige Lage null ist. Algebraisch am einfachsten wird der Ausdruck für E_{pot} , wenn wir $E_{\text{pot},0} = 0$ setzen. Dann haben wir

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{\Gamma m_E m}{r}. \quad (5.26)$$

Die Wahl $E_{\text{pot},0} = 0$ bedeutet, dass E_{pot} für $r \rightarrow \infty$ gegen null geht und demnach für alle $r < \infty$ negativ ist. Damit ist die potenzielle Energie maximal, wenn der Körper mit der Masse m unendlich weit von der Erde entfernt ist. Nähert sich der Körper aus dem Unendlichen der Erdoberfläche, wird seine potenzielle Energie immer negativer, d.h. geringer. Im Allgemeinen wird diese Konvention nicht nur bei der Erde angewendet, sondern man wählt $E_{\text{pot},0} = 0$ für beliebige Zweikörpersysteme, wenn die beiden Teilchen unendlich weit voneinander entfernt sind. Bringt man die beiden Teilchen wieder näher zusammen, sinkt die potenzielle Energie. Die Energiedifferenz wird dann frei. In Kapitel 34 werden wir sehen, dass man die Energie, die frei wird, wenn man ein Elektron näher an den Atomkern heranbringt, in Form von Lichtquanten beobachten kann, um Informationen über den Aufbau von Atomen zu gewinnen.

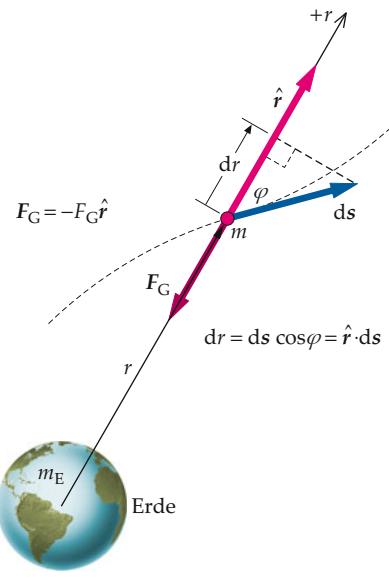


Abbildung 5.25 Die Entfernung r des Teilchens von der Erde nimmt um dr zu, wenn das Teilchen eine Verschiebung ds erfährt. In der Abbildung ist die Länge ds überzeichnet.

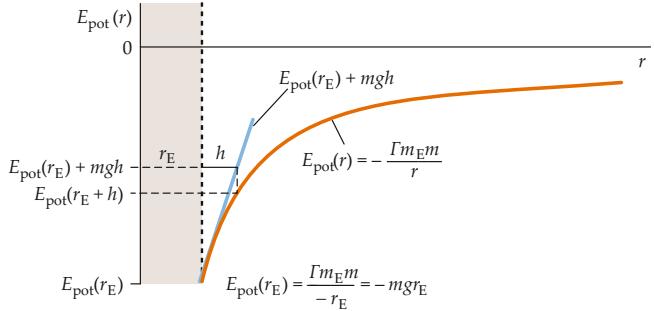


Abbildung 5.26 Potenzielle Energie eines Körpers der Masse m , der der Gravitation durch die Erde unterliegt, als Funktion des Abstands vom Erdmittelpunkt. Der Nullpunkt der potenziellen Energie ist so gewählt, dass $E_{\text{pot}}(r) = 0$ für $r \rightarrow \infty$.

Abbildung 5.26 zeigt die potenzielle Energie $E_{\text{pot}}(r)$ eines Systems aus einer Masse m und der Erdmasse m_E als Funktion des Abstands r vom Erdmittelpunkt, wenn $E_{\text{pot}} = 0$ für $r \rightarrow \infty$ gewählt wird ($r_E \leq r < \infty$). Diese Funktion beginnt bei dem negativen Wert $E_{\text{pot}}(r) = -\Gamma m_E m / r_E = -m g r_E$ auf der Erdoberfläche, nimmt mit wachsendem r zu und nähert sich ihrem Maximalwert null, wenn r gegen unendlich geht. Die Steigung dieser Kurve bei $r = r_E$ ist $\Gamma m_E m / r_E^2 = m g$ (wegen $g = \Gamma m_E / r_E^2$). Die blaue eingezeichnete Tangente in diesem Punkt hat also die Geradengleichung $f(h) = E_{\text{pot}}(r_E) + m g h$; dabei ist $h = r - r_E$ die Höhe des Körpers über der Erdoberfläche. Aus der Abbildung liest man ab, dass die potenzielle Energie für kleine Höhen h nahezu linear zunimmt: $E_{\text{pot}}(r_E) + m g h \approx E_{\text{pot}}(r)$ (Gleichung 5.23).

Mithilfe der Energiebetrachtungen lässt sich auch die Flughgeschwindigkeit sehr einfach berechnen. Abbildung 5.27 illustriert dies am Beispiel der Erde. Die kinetische Energie eines Teilchens im Gravitationsfeld der Erde ist der Anteil seiner Gesamtenergie, die nicht in Form von potenzieller Energie gespeichert ist. Wenn die Gesamtenergie, wie die Energie E_1 , negativ ist, gibt es eine Entfernung r_{\max} vom Erdmittelpunkt, bei der die kinetische Energie null, die potenzielle Energie des Teilchens maximal und gleich der Gesamtenergie ist. Da E_1 kleiner als null ist, bleibt das Teilchen an die Erde gebunden und kann sie nicht verlassen. Dies ist erst möglich, wenn die Gesamtenergie größer als null ist und das Teilchen so die maximale potenzielle Energie $E_{\text{pot}} = 0$ annehmen kann und gleichzeitig noch kinetische Energie übrig behält. Die Geschwindigkeit nach Verlassen des Gravitationsfelds der Erde berechnet man nach Gleichung 5.16.

Elastische potenzielle Energie

Ein anderes Beispiel einer konservativen Kraft ist das einer gedehnten oder zusammengedrückten Feder, deren Masse vernachlässigt werden kann. Wenn man beispielsweise einen Block, der mit einer Feder verbunden ist, aus seiner Gleichgewichtslage $x = 0$ in eine neue Lage bei x_1 zieht (Abbildung 5.28), verrichtet die Feder an dem Block negative Arbeit, da die Kraft, die sie auf den Block ausübt, der Verschiebung des Blocks genau entgegengesetzt gerichtet ist. Lässt man den Block danach los, verrichtet die Feder positive Arbeit am Block, während dieser beschleunigt zu seinem Ausgangspunkt zurückgleitet. Die Gesamtarbeit, die die Feder an dem Block verrichtet, während sich dieser von seinem Ursprungsort $x = 0$ zum Ort $x = x_1$ und zurück zu $x = 0$ bewegt, ist null. Solange die Feder nicht überdehnt wird und ihre Elastizität verliert, gilt dies unabhängig von der Strecke x_1 . Somit ist auch die Federkraft eine konservative Kraft.

Die potenzielle Energie dieser Kraft können wir aus Gleichung 5.22b berechnen:

$$dE_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F_x dx = -(-k_F x) dx = +k_F x dx.$$

Damit ist

$$E_{\text{pot}} = \int k_F x dx = \frac{1}{2} k_F x^2 + E_{\text{pot},0},$$

wobei $E_{\text{pot},0}$ die potenzielle Energie bei $x = 0$ ist, wenn die Feder entspannt ist. Setzt man $E_{\text{pot},0}$ gleich null, ergibt sich

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F x^2. \quad (5.27)$$

POTENZIELLE ENERGIE EINER FEDER

Dabei wurde angenommen, dass der Ort, an dem die Feder entspannt ist, $x = 0$ ist. Ist die Feder an einem Ort $x_0 \neq 0$ in ihrer Gleichgewichtslage, muss man x in Gleichung 5.27 durch $(x - x_0)$ ersetzen.

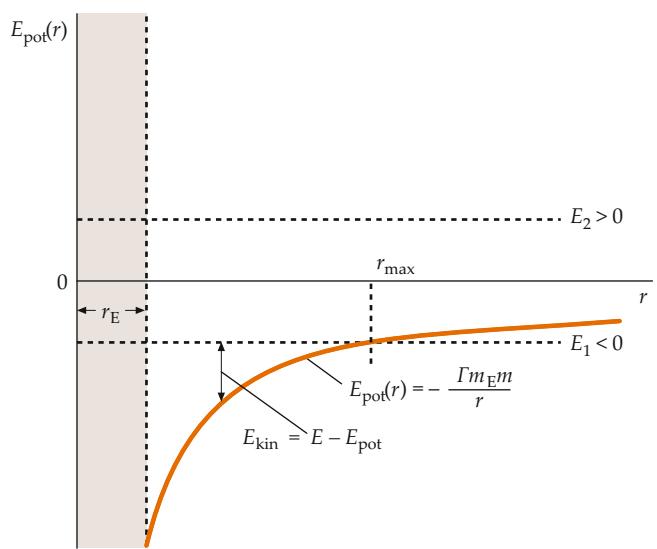


Abbildung 5.27 Die kinetische Energie eines Körpers in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt ist $E_{\text{kin}} = E - E_{\text{pot}}(r)$. Wenn die Gesamtenergie kleiner als null ist (in der Abbildung mit E_1 bezeichnet), ist die kinetische Energie bei $r = r_{\max}$ null – der Körper ist dann an die Erde gebunden. Ist dagegen die Gesamtenergie größer als null (in der Abbildung E_2), kann der Körper die Erde verlassen.

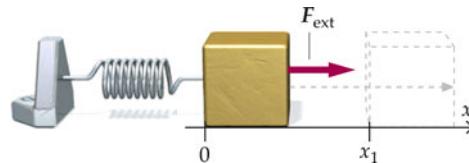


Abbildung 5.28 Die am Block angreifende Kraft \mathbf{F}_{ext} zieht den Block nach rechts und dehnt dabei die Feder um die Länge x_1 .

Um den Block vom Ort $x = 0$ an den Ort $x = x_1$ zu ziehen, muss auf ihn eine äußere Kraft wirken. Wenn der Block am Punkt $x = 0$ aus der Ruhe beschleunigt wird und am Punkt $x = x_1$ wieder zur Ruhe kommt, ist die Änderung seiner kinetischen Energie null. Der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie besagt in diesem Fall, dass die Gesamtarbeit am Block null sein muss. Mit anderen Worten, es ist $W_{\text{ext}} + W_{\text{Feder}} = 0$ oder

$$W_{\text{ext}} = -W_{\text{Feder}} = \Delta E_{\text{pot,Feder}} = \frac{1}{2} k_F x_1^2 - 0 = \frac{1}{2} k_F x_1^2.$$

Die beim Ziehen auf das System aus Block und Feder von außen übertragene Energie ist gleich W_{ext} und wird in Form von potenzieller Energie in der Feder gespeichert.

Übung 5.9: Eine Feder der Federung eines Toyota Prius hat eine Federkonstante von 11 000 N/m. Wie viel Energie wird auf eine solche Feder übertragen, wenn sie ausgehend von ihrer Ruhelänge auf 30,0 cm zusammengedrückt wird? ◀

Potenzielle Energie und Gleichgewicht

Aus der Betrachtung der grafischen Darstellung der potenziellen Energie eines Teilchens in Abhängigkeit vom Ort lassen sich wertvolle Erkenntnisse über die Bewegung des Systems gewinnen, zu dem das Teilchen gehört. Der Einfachheit halber wollen wir uns auf ein Teilchen beschränken, das sich geradlinig auf der x -Achse bewegt. Um eine solche grafische Darstellung zeichnen zu können, benötigen wir zunächst den Zusammenhang zwischen der potenziellen Energie und der auf das Teilchen wirkenden Kraft. Wir betrachten dazu eine auf das Teilchen wirkende konservative Kraft $\mathbf{F} = F_x \hat{x}$. Setzen wir diese in Gleichung 5.22b ein, ergibt sich

$$dE_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \cdot ds = -F_x dx.$$

Die Kraftkomponente F_x ist das Negative der Ableitung der potenziellen Energie:

$$F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx}. \quad (5.28)$$

(Wenn die Bewegung nicht auf die x -Achse beschränkt ist, ist die Ableitung in Gleichung 5.28 durch die partielle Ableitung zu ersetzen.) Wir wollen diese allgemeine Beziehung anhand eines Systems aus einem Massestück und einer Feder veranschaulichen, indem wir die Ableitung der Funktion $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F x^2$ bilden:

$$F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} k_F x^2 \right) = -k_F x.$$

Abbildung 5.29a zeigt die Darstellung von $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F x^2$ in Abhängigkeit von x für ein Massestück an einer Feder. Die Ableitung dieser Funktion ist grafisch als Anstieg der Tangente an die Funktion abzulesen. Somit ist die Kraft gleich dem Negativen des Anstiegs der Tangente an die Kurve. Bei $x = 0$ ist die Kraft $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx$ gleich null und das Massestück – sofern keine anderen Kräfte darauf wirken – im **Gleichgewicht**.

Wenn x in Abbildung 5.29a positiv ist, ist der Anstieg ebenfalls positiv und die Kraft F_x negativ. Wenn x negativ ist, ist der Anstieg negativ und die Kraft F_x positiv. In beiden Fällen ist die Kraft so gerichtet, dass sie das Massestück in Richtung niedrigerer potenzieller Energie beschleunigt. Wird das Massestück geringfügig aus der Gleichgewichtslage $x = 0$ ausgelenkt, ist die Kraft zurück zu $x = 0$ gerichtet. Da eine geringfügige Verschiebung eine Rückstellkraft bewirkt, die das Teilchen zurück in seine Gleichgewichtslage beschleunigt, ist das Gleichgewicht bei $x = 0$ ein **stabiles Gleichgewicht**.

In einem stabilen Gleichgewicht bewirkt eine geringfügige Verschiebung aus der Gleichgewichtslage in beliebiger Richtung eine Rückstellkraft, die das Teilchen zurück in seine Gleichgewichtslage beschleunigt.

BEDINGUNG FÜR STABILES GLEICHGEWICHT

Abbildung 5.30 zeigt eine Funktion für die potenzielle Energie, die in der Gleichgewichtslage $x = 0$ ein Maximum anstelle

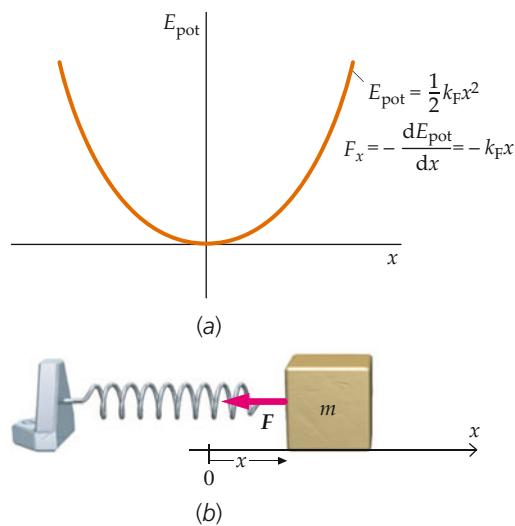


Abbildung 5.29 a) Grafische Darstellung der potenziellen Energie E_{pot} in Abhängigkeit von x für einen Körper an einer Feder. Ein Minimum der potenziellen Energie bedeutet einen Punkt mit stabilem Gleichgewicht: Eine Verschiebung von diesem Punkt aus in eine beliebige Richtung führt stets zu einer Kraft, die zur Gleichgewichtslage hin gerichtet ist. b) Die ausgeübte Kraft F_{ext} zieht das Massestück nach rechts und dehnt dabei die Feder um x .

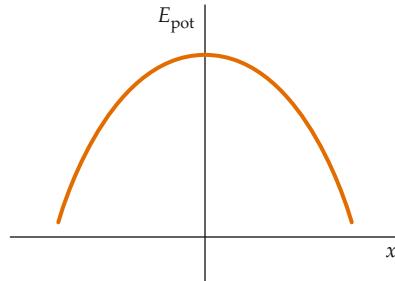


Abbildung 5.30 Ein Teilchen mit dieser potenziellen Energie ist bei $x = 0$ in einem labilen Gleichgewicht, da eine Verschiebung weg von diesem Punkt zu einer Kraft führt, die von der Gleichgewichtslage weg gerichtet ist.

eines Minimums hat. Diese potenzielle Energie könnte beispielsweise die potenzielle Energie eines Raumschiffs an einem Punkt zwischen Erde und Mond darstellen, an dem das Raumschiff von der Erde genauso stark angezogen wird wie vom Mond. (Von der Gravitationskraft der Sonne wollen wir dabei absehen.) Wenn bei dieser Kurve x positiv ist, ist der Anstieg negativ und die Kraft F_x positiv. Ist x dagegen negativ, ist der Anstieg positiv und die Kraft F_x negativ. Auch hier zeigt die Kraft in die Richtung, in der das Teilchen zur niedrigeren potenziellen Energie hin beschleunigt wird, nur dass sie in diesem Fall von der Gleichgewichtslage weg gerichtet ist. Da eine geringfügige Auslenkung zu einer Kraft führt, die das Teilchen von der Gleichgewichtslage weg beschleunigt, ist das Maximum bei dem Punkt $x = 0$ in Abbildung 5.30 ein **labiles Gleichgewicht**.

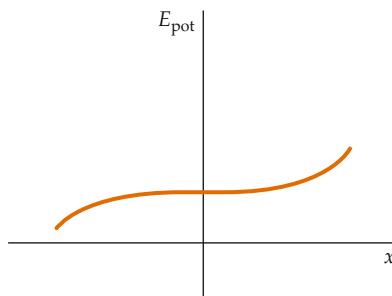


Abbildung 5.31 Ein indifferentes Gleichgewicht. Die Kraft $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx$ ist bei $x = 0$ und in unmittelbarer Nähe davon gleich null. Eine Verschiebung von diesem Punkt weg erzeugt keine Kraft, sodass das System im Gleichgewicht bleibt.

In einem labilen Gleichgewicht bewirkt eine geringfügige Verschiebung aus der Gleichgewichtslage in beliebiger Richtung eine Kraft, die das Teilchen von seiner Gleichgewichtslage weg beschleunigt.

BEDINGUNG FÜR LABILES GLEICHGEWICHT

Abbildung 5.31 zeigt eine Funktion für die potentielle Energie, die in dem Bereich um $x = 0$ horizontal verläuft. Auf ein Teilchen am Punkt $x = 0$ wirkt keine Kraft – es ist somit im Gleichgewicht. Darüber hinaus wirkt auf das Teilchen aber auch dann keine Kraft, wenn es geringfügig in einer beliebigen Richtung verschoben wird. Dies ist ein Beispiel für ein **indifferentes Gleichgewicht**.

In einem indifferenten Gleichgewicht bewirkt eine geringfügige Verschiebung aus der Gleichgewichtslage in beliebiger Richtung keine Kraft, sodass das Teilchen im Gleichgewicht bleibt.

BEDINGUNG FÜR INDIFFERENTES GLEICHGEWICHT

In Beispiel 5.13 sind ausgehend von der gegebenen potentiellen Energie die Kraft und die Art des Gleichgewichtszustands zu ermitteln.

Beispiel 5.13: Kraft und potentielle Energie

Die Kraft auf ein Teilchen ist im Bereich $-a < x < a$ durch die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = -b \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

gegeben, wobei a und b positive Konstanten sind. a) Ermitteln Sie die Kraft F_x im Bereich $-a < x < a$. b) Bei welchem x -Wert ist diese Kraft null? c) Handelt es sich bei diesem Punkt um ein stabiles oder um ein labiles Gleichgewicht?

Problembeschreibung: Die Kraft ist gleich dem Negativen der Ableitung der potentiellen Energie. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn die potentielle Energie am gesuchten Punkt ein Minimum besitzt. Bei einem Maximum ist das Gleichgewicht dagegen labil.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx$:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{d}{dx} \left[-b \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \right] \\ &= -b \left(\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2} \right) \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Setzen Sie F_x gleich null und stellen Sie die Gleichung nach x um:

$$F_x = 0 \quad \text{bei} \quad x = 0$$

Teilaufgabe c

Berechnen Sie d^2E_{pot}/dx^2 . Ist das Ergebnis am Gleichgewichtspunkt positiv, handelt es sich bei E_{pot} um ein Minimum, und das Gleichgewicht ist stabil. Ist das Ergebnis negativ, besitzt E_{pot} ein Maximum, sodass das Gleichgewicht labil ist:

$$\frac{d^2E_{\text{pot}}}{dx^2} = -2b \left(\frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(a-x)^3} \right)$$

Bei

$$x = 0 \quad \text{ist} \quad \frac{d^2E_{\text{pot}}}{dx^2} = \frac{-4b}{a^3} < 0$$

Damit ist das Gleichgewicht **labil**.

Plausibilitätsprüfung: Wenn E_{pot} in Joule und x und a in Metern angegeben werden, muss b in J·m angegeben werden, damit sich F_x in Newton ergibt. Entsprechend dem Ergebnis aus Teilaufgabe a hat F_x dieselben Maßeinheiten wie der Quotient aus der Konstanten b und m^2 , also J · m/m². Wegen 1 J = 1 N · m, trägt das Ergebnis für F_x die Einheit Newton und ist somit dimensionsmäßig richtig.

Weitergedacht: Die in dieser Aufgabe verwendete potentielle Energie beschreibt ein Teilchen unter dem Einfluss der Gravitationskraft zweier gleicher Massen bei $x = -a$ und bei $x = +a$. Das Teilchen bewegt sich auf der Geraden, die beide Massen verbindet. In der Mitte zwischen den beiden Massen ist die Gesamtkraft auf das Teilchen null. An allen anderen Orten wird das Teilchen zur näher gelegenen Masse hin angezogen. ■

5.5 Energieerhaltung

Die Erhaltung der mechanischen Energie

Im Folgenden wollen wir uns dem Zusammenhang zwischen kinetischer und potenzieller Energie zuwenden. Wie wir in Abschnitt 5.3 gesehen haben, ist die Gesamtarbeit, die an jedem Teilchen eines Systems verrichtet wird, gleich der Änderung der kinetischen Energie $\Delta E_{\text{kin},i}$ des Teilchens. Demnach ist die Gesamtarbeit W aller Kräfte gleich der Änderung der gesamten kinetischen Energie ΔE_{kin} des Systems:

$$W = \sum \Delta E_{\text{kin},i} = \Delta E_{\text{kin}}. \quad (5.29)$$

An dem System können sowohl äußere als auch innere Kräfte Arbeit verrichten. Jede Kraft ist entweder konservativ oder nichtkonservativ. Die Gesamtarbeit aller Kräfte ist die Summe der Arbeit W_{ext} aller äußeren Kräfte, der Arbeit W_{nk} aller inneren nichtkonservativen Kräfte und der Arbeit W_k aller inneren, konservativen Kräfte:

$$W = W_{\text{ext}} + W_{\text{nk}} + W_k.$$

Durch Umstellen erhält man

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{nk}} = W - W_k.$$

Das Negative der von allen konservativen, inneren Kräften verrichteten Gesamtarbeit ($-W_k$) ist gleich der Änderung der potenziellen Energie ΔE_{pot} des Systems:

$$-W_k = \Delta E_{\text{pot}}. \quad (5.30)$$

Setzt man die Gleichungen 5.29 und 5.30 in die Formel für $W_{\text{ext}} + W_{\text{nk}}$ ein, ergibt sich:

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{nk}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}}. \quad (5.31)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lautet zusammengefasst:

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = \Delta(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}). \quad (5.32)$$

Die Summe der kinetischen Energie E_{kin} und der potenziellen Energie E_{pot} wird die **mechanische Gesamtenergie** E_{mech} genannt:

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}. \quad (5.33)$$

DEFINITION DER MECHANISCHEN GESAMTENERGIE

Verknüpft man die Gleichungen 5.32 und 5.33 und setzt das Ergebnis in Gleichung 5.31 ein, ergibt sich:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}. \quad (5.34)$$

DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN GESAMTARBEIT UND MECHANISCHER ENERGIE FÜR SYSTEME

Diese Formel zeigt, dass die mechanische Energie eines Systems erhalten bleibt ($E_{\text{mech}} = \text{konstant}$), wenn die Gesamtarbeit aller äußeren und aller inneren nichtkonservativen Kräfte zusammen null ist:

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konstant}. \quad (5.35)$$

ERHALTUNG DER MECHANISCHEN ENERGIE

Dies ist das **Gesetz der Erhaltung der mechanischen Energie**, auf das auch der Begriff „konservative Kraft“ zurückgeht.

Wenn $E_{\text{mech},A} = E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A}$ die mechanische Energie des Systems im Anfangszustand und $E_{\text{mech},E} = E_{\text{kin},E} + E_{\text{pot},E}$ die mechanische Energie des Systems im Endzustand ist, folgt aus der Erhaltung der mechanischen Energie

$$E_{\text{mech},E} = E_{\text{mech},A} \quad (5.36) \\ (\text{oder: } E_{\text{kin},E} + E_{\text{pot},E} = E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A}).$$

Wenn die mechanische Energie eines Systems erhalten bleibt, kann man sich den Zusammenhang zwischen der mechanischen Energie am Ende und der mechanischen Energie am Anfang zunutze machen, ohne die Bewegung dazwischen und die von den wirkenden Kräften verrichteten Arbeiten zu betrachten. Auf diese Weise lassen sich mithilfe der Erhaltung der mechanischen Energie Aufgabenstellungen lösen, die mit den Newton'schen Axiomen nur schwer zu behandeln wären.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel des Skiläufers. Dieser beginnt seine Abfahrt aus dem Stand in einer Höhe h_A über dem Fuß des Hügels. Wie hoch ist seine Geschwindigkeit, wenn er durch ein Tor fährt, das die Höhe h über dem Fuß des Hügels hat? Reibung und Luftwiderstand sollen vernachlässigbar sein.

Da die einzige wirkende Kraft die Gravitationskraft, eine innere konservative Kraft ist, bleibt die mechanische Energie des Systems aus der Erde und dem Skiläufer konstant. Wenn man am Fuß des Skihügels $E_{\text{pot}} = 0$ setzt, ist die potenzielle Energie am Anfang gleich mgh_A . Da die kinetische Energie anfangs null ist, trifft dies auch auf die mechanische Gesamtarbeit zu. Somit gilt:

$$E_{\text{mech},A} = E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A} = 0 + mgh_A.$$

Wenn der Skiläufer über die Ziellinie fährt, hat er die potenzielle Energie mgh und die Geschwindigkeit v . Damit ergibt sich:

$$E_{\text{mech},E} = E_{\text{kin},E} + E_{\text{pot},E} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh.$$

Aus $E_{\text{mech},E} = E_{\text{mech},A}$ folgt

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_A.$$

Umstellen nach v führt auf

$$v = \sqrt{2g(h_A - h)}.$$

Damit ist der Geschwindigkeitsbetrag des Skiläufers so groß, als ob er die Strecke $h_A - h$ im freien Fall zurückgelegt hätte. Beim

Vorgehensweise: Aufgabenstellungen zur Erhaltung der mechanischen Energie

Ermitteln Sie zunächst ein System, das den bzw. die betrachteten Körper enthält. Ermitteln Sie andere Körper, die mit dem betrachteten Körper entweder durch konservative Kräfte oder durch Gleitreibungskräfte wechselwirken.

1. Fertigen Sie eine Skizze des Systems an und beschriften Sie diese. Zeichnen Sie eine Koordinatenachse ein und stellen Sie das System im Anfangs- und im Endzustand dar. (Gelegentlich kann auch ein Zwischenzustand nützlich sein.) Dabei können die Körper wie in Kräftediagrammen als Punkte dargestellt werden.
2. Bestimmen Sie alle auf das System wirkenden äußeren Kräfte, die Arbeit verrichten, sowie alle nichtkonservativen inneren Kräfte, die Arbeit verrichten.
3. Wenden Sie Gleichung 5.34 (den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie) an. Stellen Sie für jede konservative innere Kraft, die Arbeit verrichtet, die verrichtete Arbeit anhand der potenziellen Energie dar.

Plausibilitätsprüfung: Überzeugen Sie sich, dass Sie die Arbeit aller konservativen und nichtkonservativen Kräfte berücksichtigt haben.

Skifahren legt er jedoch eine längere Strecke zurück, wofür er eine längere Zeit benötigt.

Im Folgenden wollen wir einige Beispiele zur Erhaltung der mechanischen Energie betrachten. In Beispiel 5.14 wird anhand der Bewegung eines Fußballs die Umwandlung kinetischer in potenzielle Energie berechnet. Beispiel 5.15 betrifft die Bewegung eines Pendels, bei der ausgehend von der Anfangshöhe die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt ermittelt wird. Im darauffolgenden Beispiel 5.16 eines Blocks an einer Feder sollen Sie selbst ermitteln, wie hoch die potenzielle Energie einer Feder einen Block auf einer geneigten Ebene zu treiben vermag. In Beispiel 5.17 wird gezeigt, wie ein Bungee-Springer als Federschwinger modelliert werden kann. Das darauffolgende komplexere Beispiel 5.18 untersucht verschiedene Energieumwandlungen, wenn ein Wagen durch einen Looping fährt.

Beispiel 5.14: Fußball auf dem Dach

Ein Fußballspieler steht am Rand auf dem Dach eines 12 m hohen Gebäudes. Er schießt den Ball mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_A = 16 \text{ m/s}$ unter einem Winkel von 60° zur Horizontalen. Berechnen Sie unter Vernachlässigung des Luftwiderstands, a) wie hoch der Ball über das Gebäude steigt und b) welche Geschwindigkeit er kurz vor dem Auftreffen auf den Boden hat.

Problembeschreibung: Wir denken uns Ball und Erde als System und betrachten dieses im Zeitintervall von kurz nach dem Abschuss des Balls bis kurz vor dem Auftreffen auf dem Boden. Da auf das System keine äußeren Kräfte einwirken und zudem keine nichtkonservativen inneren Kräfte in ihm wirken und Arbeit verrichten, bleibt die mechanische Energie des Systems erhalten. Im Scheitelpunkt seiner Flugbahn bewegt sich der Ball horizontal

mit der Geschwindigkeit v_{Scheitel} , die gleich der horizontalen Komponente der Anfangsgeschwindigkeit $v_{A,x}$ ist.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Fertigen Sie eine Skizze der Trajektorie an (Abbildung 5.32). Zeichnen Sie Koordinatenachsen sowie die Anfangslage des Balls und seinen Ort im Scheitelpunkt seiner Flugbahn ein. Wählen Sie $y = 0$ ist.

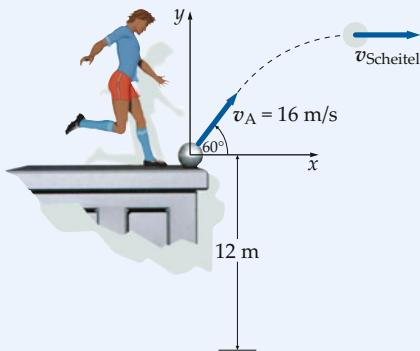


Abbildung 5.32 Skizze der Balltrajektorie.

2. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und Energie für Systeme an. Wählen Sie Ball und Erde als betrachtetes System. Nachdem der Ball angetretenen worden ist, gibt es bis zum Aufprall auf den Boden keine äußeren Kräfte, die an ihm Arbeit verrichten (vom Luftwiderstand soll abgesehen werden):

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}$$

$$0 = \Delta E_{\text{mech}} - 0$$

$$E_{\text{mech,E}} = E_{\text{mech,A}}$$

3. Die Gravitationskraft verrichtet Arbeit an dem System. Diese Arbeit ergibt sich aus der potenziellen Energie der Gravitation $m g y$:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech,Scheitel}} &= E_{\text{mech,A}} \\ \frac{1}{2} m v_{\text{Scheitel}}^2 + m g y_{\text{Scheitel}} &= \frac{1}{2} m v_A^2 + m g y_A \\ \frac{1}{2} m v_{\text{Scheitel}}^2 + m g y_{\text{Scheitel}} &= \frac{1}{2} m v_A^2 + 0 \end{aligned}$$

4. Stellen Sie nach y_{Scheitel} um:

$$y_{\text{Scheitel}} = \frac{v_A^2 - v_{\text{Scheitel}}^2}{2 g}$$

5. Die Geschwindigkeit im Scheitel der Flugbahn ist gleich der x -Komponente der Anfangsgeschwindigkeit:

$$v_{\text{Scheitel}} = v_{A,x} = v_A \cos \theta$$

6. Setzen Sie die Formel aus Schritt 5 in die aus Schritt 4 ein und berechnen Sie y_{Scheitel} :

$$\begin{aligned} y_{\text{Scheitel}} &= \frac{v_A^2 - v_{\text{Scheitel}}^2}{2 g} = \frac{v_A^2 - v_A^2 \cos^2 \theta}{2 g} \\ &= \frac{v_A^2 (1 - \cos^2 \theta)}{2 g} \\ &= \frac{(16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot (1 - \cos^2 60^\circ)}{2 \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = [9,8 \text{ m}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Es sei v_E die Geschwindigkeit des Balls kurz vor dem Auftreffen auf dem Boden. An diesem Punkt gilt $y = y_E = -12 \text{ m}$. Die Energie des Balls ist demzufolge:

$$E_{\text{mech,E}} = \frac{1}{2} m v_E^2 + m g y_E$$

2. Setzen Sie die mechanische Energie am Ende gleich der mechanischen Energie am Anfang:

$$\frac{1}{2} m v_E^2 + m g y_E = \frac{1}{2} m v_A^2 + 0$$

3. Stellen Sie nach v_E um, setzen Sie $y_E = -12 \text{ m}$ ein und berechnen Sie die Endgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_E &= \sqrt{v_A^2 - 2 g y_E} \\ &= \sqrt{(16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 - 2 \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (-12 \text{ m})} \\ &= [22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Je höher das Gebäude ist, desto größer sollte die Geschwindigkeit sein, mit der der Ball aufprallt. Die Endgeschwindigkeit v_E aus Schritt 3 der Teilaufgabe b erfüllt dies.

Beispiel 5.15: Ein Pendel

Ein Pendel besteht aus einem Pendelkörper mit der Masse m , der an einem Faden der Länge l hängt. Der Pendelkörper wird zur Seite gezogen, sodass der Faden einen Winkel θ_0 mit der Vertikalen bildet, und aus der Ruhe losgelassen. Ermitteln Sie a) die Geschwindigkeit des Pendelkörpers und b) die Zugkraft im Faden, während sich der Pendelkörper durch den tiefsten Punkt der Bahn bewegt. Die Luftreibung sei vernachlässigbar.

Problembeschreibung: Als System wählen wir das Pendel und die Erde. Die Zugkraft F_S ist eine innere nichtkonervative Kraft, die auf den Pendelkörper wirkt. Die Rate, mit der F_S Arbeit verrichtet, ist $F_S \cdot v$. Weiterhin wirkt auf den Pendelkörper die Gravitationskraft $m a_G$, eine innere konservative Kraft. Ermitteln Sie aus dem Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie (Gleichung 5.34) die Geschwindigkeit am tiefsten Punkt der Bahn. Die Zugkraft im Faden ergibt sich aus dem zweiten Newton'schen Axiom.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Fertigen Sie eine Skizze des Systems in seinem Anfangs- und in seinem Endzustand an (Abbildung 5.33). Wählen Sie am tiefsten Punkt der Pendelbahn $y = 0$ und am Anfangspunkt $y = h$.

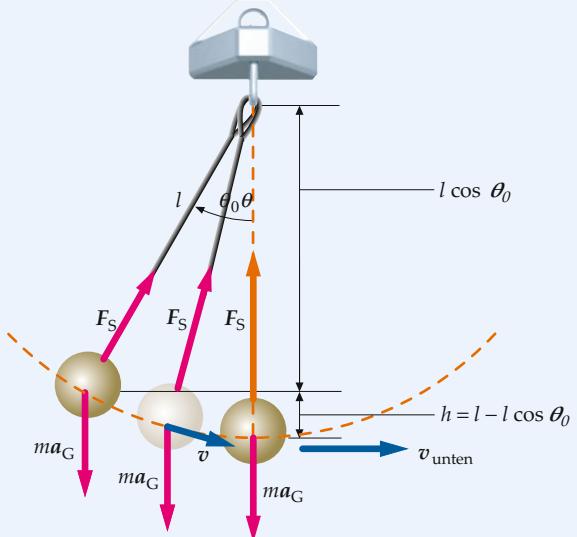


Abbildung 5.33 Skizze des Pendels.

2. Die an dem System verrichtete äußere Arbeit ist gleich der Differenz aus der Änderung seiner mechanischen

5 Energie und Arbeit

Energie und der von den inneren nichtkonservativen Kräften verrichteten Arbeit (Gleichung 5.34):

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}$$

3. Auf das System wirken keine äußeren Kräfte. Die Zugkraft ist eine innere nichtkonservative Kraft:

$$W_{\text{ext}} = 0 \quad \text{und} \quad W_{\text{nk}} = \int_1^2 \mathbf{F}_S \cdot d\mathbf{s}$$

4. Das Verschiebungsinkrement $d\mathbf{s}$ ist gleich dem Produkt aus Geschwindigkeit und Zeitinkrement dt . Dies können Sie in das Ergebnis aus Schritt 3 einsetzen. Da die Zugkraft senkrecht auf der Geschwindigkeit steht, ist $\mathbf{F}_S \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$ds = v dt$$

und somit

$$W_{\text{nk}} = \int_1^2 \mathbf{F}_S \cdot ds = \int_1^2 \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

5. Setzen Sie W_{ext} und W_{nk} in das Ergebnis aus Schritt 2 ein:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}$$

$$0 = \Delta E_{\text{mech}} - 0$$

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0$$

6. Wenden Sie die Erhaltung der mechanischen Energie an. Anfangs ist der Pendelkörper in Ruhe:

$$E_{\text{mech,E}} = E_{\text{mech,A}}$$

$$\frac{1}{2} m v_E^2 + m g y_E = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g y_A$$

$$\frac{1}{2} m v_{\text{unten}}^2 + 0 = 0 + m g h$$

7. Die Erhaltung der mechanischen Energie liefert eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v_{unten} und der Höhe $y_A = h$:

$$\frac{1}{2} m v_{\text{unten}}^2 = m g h$$

8. Berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit v_{unten} :

$$v_{\text{unten}} = \sqrt{2 g h}$$

9. Um die Geschwindigkeit durch den Anfangswinkel θ_0 auszudrücken, benötigen wir den Zusammenhang zwischen h und θ_0 , den man aus Abbildung 5.33 ablesen kann:

$$l = l \cos \theta_0 + h$$

und deswegen

$$h = l - l \cos \theta_0 = l(1 - \cos \theta_0)$$

10. Setzen Sie diesen Wert für h in die Formel aus Schritt 8 ein und drücken Sie so die Geschwindigkeit durch θ_0 aus:

$$v_{\text{unten}} = \boxed{\sqrt{2 g l (1 - \cos \theta_0)}}$$

Teilaufgabe b

1. Wenn der Pendelkörper am tiefsten Punkt des Kreises ist, wirken auf ihn die Kräfte $m a_G$ und \mathbf{F}_S . Wenden Sie $\sum F_y = m a_y$ an:

$$F_S - m g = m a_y$$

2. An diesem tiefsten Punkt wirkt auf den Pendelkörper eine Beschleunigung v_{unten}^2/l in Zentripetalrichtung (in Richtung des Kreismittelpunkts), also nach oben:

$$a_y = \frac{v_{\text{unten}}^2}{l} = \frac{2 g l (1 - \cos \theta_0)}{l} \\ = 2 g (1 - \cos \theta_0)$$

3. Setzen Sie a_y in die Formel aus Schritt 1 der Teilaufgabe b ein und berechnen Sie F_S :

$$F_S = m g + m a_y = m (g + a_y) \\ = m [g + 2 g (1 - \cos \theta_0)] \\ = \boxed{(3 - 2 \cos \theta_0) m g}$$

Plausibilitätsprüfung: 1) Da der Pendelkörper zusätzlich nach oben beschleunigt wird, ist die Zugkraft beim Durchgang durch den tiefsten Punkt größer als das Gewicht des Pendelkörpers. 2) Aus Schritt 3 von Teilaufgabe b folgt, dass $\theta_0 = 0$ die Zugkraft $F_S = m g$ ergibt. Dies war für einen ruhend an einem Faden hängenden Pendelkörper zu erwarten.

Weitergedacht: 1) Die Rate, mit der eine Kraft Arbeit verrichtet, ist $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ (Gleichung 5.19). Schritt 4 aus Teilaufgabe a zeigt, dass die Rate, mit der die Zugkraft Arbeit verrichtet, null ist. Dies trifft auf jede Kraft zu, die senkrecht auf der Geschwindigkeit steht. 2) Schritt 8 von Teilaufgabe a zeigt, dass der Geschwindigkeitsbetrag im tiefsten Punkt derselbe ist, wie wenn der Pendelkörper in der Höhe h losgelassen wird und frei fällt. 3) Die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt der Bahn kann auch direkt aus dem zweiten Newton'schen Axiom ermittelt werden. Allerdings ist die Rechnung recht aufwendig. Da die Tangentialbeschleunigung a_t ortsabhängig und somit auch zeitabhängig ist, sind die Gleichungen für die gleichförmig beschleunigte Bewegung nicht anwendbar. 4) Würde der Faden nicht zum System gerechnet, wäre W_{ext} gleich der Arbeit der Zugkraft und W_{nk} null, da es keine inneren nichtkonservativen Kräfte gäbe. Die Ergebnisse wären dieselben. ■

Beispiel 5.16: Ein Block zwischen Feder und geneigter Ebene**ZUR ÜBUNG**

Ein Block mit einer Masse von 2,0 kg liegt auf einer reibungsfreien, horizontalen Oberfläche. Anfangs wird er gegen eine Feder mit einer Federkonstanten von 500 N/m gedrückt, sodass die Feder 20 cm zusammengedrückt ist. Nun wird der Block losgelassen. Während sich die Feder entspannt, beschleunigt die Federkraft den Block. Daraufhin gleitet der Block auf der Oberfläche und anschließend eine reibungsfreie, um 45° geneigte Rampe hinauf. Wie weit bewegt sich der Block auf der Rampe, bis er (momentan) zur Ruhe kommt?

Problembeschreibung: Wir definieren den Block, die Feder, die Erde, die horizontale Oberfläche, die Rampe und die Verankerung der Feder als Teile des Systems. Nachdem der Block losgelassen wurde, wirken keine äußeren Kräfte mehr auf das System. Die einzigen Kräfte, die Arbeit verrichten, sind die Federkraft auf den Block und die Gravitationskraft. Beide sind konservativ. Somit bleibt die mechanische Gesamtenergie des Systems erhalten, woraus man die maximale Höhe h ermitteln kann. Die Strecke s auf der Rampe berechnet sich dann aus $\sin 45^\circ = h/s$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Wählen Sie den Block, die Feder, die Erde, die horizontale Oberfläche, die Rampe und die Verankerung der Feder als System. Zeichnen Sie das System in seinem Anfangs- und in seinem Endzustand (Abbildung 5.34).

2. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie für Systeme an. Wenn die Feder erst einmal losgelassen wurde, wirken auf das System keine äußeren Kräfte und verrichten keine nichtkonservativen Kräfte Arbeit an ihm.

3. Schreiben Sie die mechanische Energie am Anfang in Abhängigkeit von der Länge x_A auf, um die die Feder zusammengedrückt ist.

4. Schreiben Sie die mechanische Energie am Ende in Abhängigkeit von der Höhe h auf.

5. Setzen Sie dies in die Formel aus Schritt 2 ein und stellen Sie die Gleichung nach h um.

6. Berechnen Sie aus der Höhe h und aus dem Neigungswinkel die Strecke s (Abbildung 5.35).

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

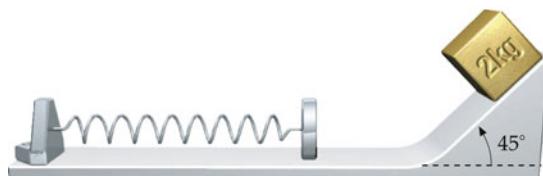
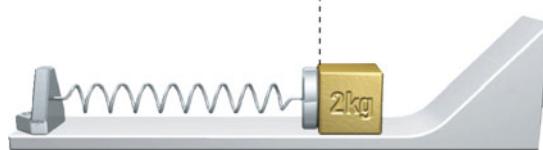
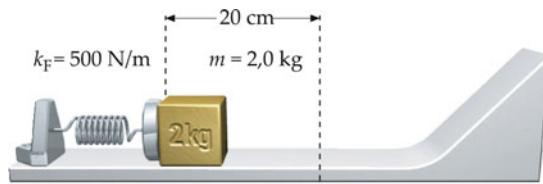


Abbildung 5.34 Skizze der Entwicklung des Systems.

2.

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}$$

$$0 = \Delta E_{\text{mech}} - 0$$

$$E_{\text{mech,E}} = E_{\text{mech,A}}$$

3.

$$\begin{aligned} E_{\text{mech,A}} &= E_{\text{pot,F,A}} + E_{\text{pot,G,A}} + E_{\text{kin,A}} \\ &= \frac{1}{2} k_F x_A^2 + 0 + 0 \end{aligned}$$

4.

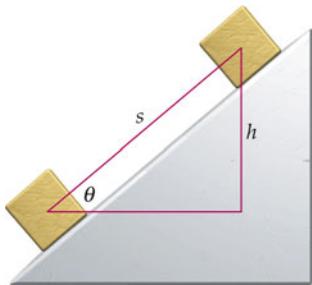
$$\begin{aligned} E_{\text{mech,E}} &= E_{\text{pot,F,E}} + E_{\text{pot,G,E}} + E_{\text{kin,E}} \\ &= 0 + mgh + 0 \end{aligned}$$

5.

$$mgh = \frac{1}{2} k_F x_A^2$$

$$h = \frac{k_F x_A^2}{2mg} = 0,51 \text{ m}$$

6.

Abbildung 5.35 Konstruktion der Strecke s .

$$h = s \cdot \sin \theta$$

$$s = \boxed{0,72 \text{ m}}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Ausdruck für h in Schritt 5 ist plausibel. Er besagt, dass ein größeres x_A zu einer größeren maximalen Höhe und eine größere Masse zu einer kleineren maximalen Höhe führt.

Weitergedacht: 1) In diesem Beispiel ist die mechanische Energie des Systems am Anfang die potentielle Energie der Feder. Diese Energie wird zunächst in kinetische Energie und anschließend in potentielle Energie der Gravitation umgewandelt. 2) Die Normalkraft F_n auf den Block wirkt immer rechtwinklig zur Geschwindigkeit, sodass stets $\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{v} = 0$ ist.

Übung 5.10: Wie groß ist die Geschwindigkeit des Blocks in dem Moment, in dem er sich von der Feder löst? ◀

Übung 5.11: Welche Arbeit verrichtet die Normalkraft an dem Block? ◀

Beispiel 5.17: Bungee-Springen

Ein Bungee-Springer stürzt sich von einer 134 m hohen Plattform auf einer Brücke in die Tiefe. Da das an seinem Knöchel befestigte Bungee-Seil im entspannten Zustand 40 m lang ist, beginnt es sich nach den ersten 40 m im freien Fall zu dehnen. Der Springer fällt weitere 80 m, bevor er schließlich zur Ruhe kommt. Er hat eine Masse von 100 kg. Das Seil hat eine vernachlässigbare Masse und genügt dem Hooke'schen Gesetz. Der Luftwiderstand ist ebenfalls vernachlässigbar. Wie hoch ist die Beschleunigung des Springers in dem Moment, in dem er am tiefsten Punkt kurzzeitig zur Ruhe kommt?

Problembeschreibung: Betrachten Sie alle in der Aufgabenstellung erwähnten Körper sowie die Erde als System. Beim Fallen nimmt die Geschwindigkeit zunächst zu, erreicht danach einen Maximalwert und nimmt anschließend wieder ab, bis sie am tiefsten Punkt erneut null wird. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie für Systeme an. Die Beschleunigung am tiefsten Punkt ergibt sich aus dem zweiten Newton'schen Axiom $\sum F_y = m a_y$ zusammen mit dem Hooke'schen Gesetz $F_y = -k_F y$.

Lösung: 1. Zum System gehören Bungee-Springer, Erde und Seil. Skizzieren Sie das System in der Anfangs- und in der Endlage nach den ersten 40 m freien Falls und danach nach den nächsten 80 m verzögerten Falls (Abbildung 5.36). Zeichnen Sie die y -Achse so ein, dass die positive y -Richtung nach oben weist und der Koordinatenursprung am Endpunkt (tiefsten Punkt) liegt. Die Länge des entspannten Seils bezeichnen wir mit $l_1 = 40 \text{ m}$ und die des maximal gedehnten mit $l_2 = 80 \text{ m}$.

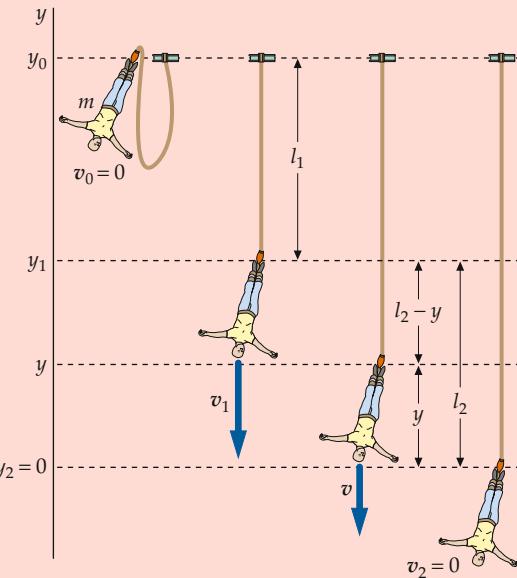


Abbildung 5.36 Bewegungsdiagramm des Bungee-Springers.

2. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie für Systeme an. Es wirken keine externen Kräfte und keinen inneren nichtkonservativen Kräfte, die Arbeit verrichten könnten:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}$$

$$0 = \Delta E_{\text{mech}} - 0$$

$$E_{\text{mech,E}} = E_{\text{mech,A}}$$

3. Wenden Sie das Ergebnis aus Schritt 2 auf den Zeitraum an, in dem sich das Seil dehnt. Die Dehnung des Seils beträgt am Ausgangspunkt y_1 und hat am Endpunkt y_2 den Betrag $(y_2 - y_1)$:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech},2} &= E_{\text{mech},1} \\ E_{\text{pot,G},2} + E_{\text{pot,F},2} + E_{\text{kin},2} &= E_{\text{pot,G},1} + E_{\text{pot,F},1} + E_{\text{kin},1} \\ m g y_2 + \frac{1}{2} k_F (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 &= m g y_1 + \frac{1}{2} k_F (y_1 - y_0)^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \\ 0 + \frac{1}{2} k_F l_2^2 + 0 &= m g l_2 + 0 + \frac{1}{2} m v_1^2 \\ \frac{1}{2} k_F l_2^2 &= m g l_2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \end{aligned}$$

4. Um k_F zu berechnen, benötigen wir die kinetische Energie am Ende des freien Falls. Wir wenden nochmals das Ergebnis aus Schritt 2 an und stellen nach der kinetischen Energie um:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech},1} &= E_{\text{mech},0} \\ E_{\text{pot,G},1} + E_{\text{kin},1} &= E_{\text{pot,G},0} + E_{\text{kin},0} \\ m g y_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 &= m g y_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 \\ m g l_2 + \frac{1}{2} m v_1^2 &= m g (l_1 + l_2) + 0 \\ \frac{1}{2} m v_1^2 &= m g l_1 \end{aligned}$$

5. Setzen Sie nun das Ergebnis aus Schritt 4 in das aus Schritt 3 ein und stellen Sie die Formel dann nach k_F um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} k_F l_2^2 &= m g l_2 + m g l_1 \\ k_F &= \frac{2 m g (l_2 + l_1)}{l_2^2} \end{aligned}$$

6. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf den Moment an, in dem der Bungee-Springer am tiefsten Punkt ist. Konstruieren Sie dazu zunächst ein Kräfediagramm (Abbildung 5.37):

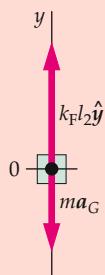


Abbildung 5.37 Kräfediagramm am tiefsten Punkt.

7. Schreiben Sie nun das zweite Newton'sche Axiom auf und stellen Sie die Gleichung nach der Beschleunigung um. Verwenden Sie den Ausdruck, den wir in Schritt 5 für k_F erhalten hatten:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m a_y \\ -m g + k_F l_2 &= m a_y \\ a_y = -g + k_F \frac{l_2}{m} &= -g + \frac{2 m g (l_2 + l_1)}{l_2^2} \cdot \frac{l_2}{m} \\ &= g \left(1 + 2 \frac{l_1}{l_2} \right) = g \left(1 + 2 \frac{40}{80} \right) = \boxed{2,0 g} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Beschleunigung am tiefsten Punkt sollte nach oben (in $+y$ -Richtung) gerichtet sein, was bei unserem Ergebnis auch der Fall ist. Jedes Mal, wenn sich die Geschwindigkeitsrichtung umkehrt, trägt der Geschwindigkeitsvektor unmittelbar nach der Umkehr das gleiche Vorzeichen wie der Beschleunigungsvektor.

Übung 5.12: Der Springer wird beim Fallen so lange schneller, bis der nach oben gerichtete Zug des Seils genauso groß wie der nach unten gerichtete Zug der Gravitationskraft ist. In welcher Höhe über dem tiefsten Punkt hat der Bungee-Springer die maximale Geschwindigkeit? ◀

Beispiel 5.18: Achterbahn vor 100 Jahren

Bereits im ausgehenden 19. Jahrhundert konnte man in Coney Island, einem Vergnügungspark in Brooklyn, New York, auf einem Vorläufer der Achterbahnen fahren: dem Flip-Flap-Railway. Diese Attraktion besaß einen kreisförmigen Looping. Stellen Sie sich vor, der Achterbahnwagen ist kurz vor der Einfahrt in den Looping. Plötzlich fällt ein Sandsack mit einer Masse von 45 kg von einem Baugerüst herunter und genau in den Rücksitz des Wagens. Zum Glück wird niemand verletzt, aber durch den Aufprall verliert der Achterbahnwagen 25 % seiner Geschwindigkeit. Ursprünglich war dieser von einem Punkt losgefahren, der doppelt so hoch wie der Scheitel des Loopings liegt. Vernachlässigen Sie sowohl Reibung als auch Luftwiderstand. Schafft es der Wagen trotzdem, durch den Looping zu fahren, ohne herunterzufallen?

Problembeschreibung: Das System soll aus dem Wagen, seinem Inhalt, der Bahn (einschließlich des Loopings) und der Erde bestehen. Der Wagen muss im Scheitel des Loopings noch so viel Geschwindigkeit besitzen, dass er mit dem Gleis in Kontakt bleibt. Mit dem Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie

für Systeme können wir die Geschwindigkeit des Wagens ermitteln, kurz bevor der Sandsack darauffällt. Danach können wir diesen Zusammenhang erneut anwenden, um die Geschwindigkeit zu bestimmen, die der Wagen im Scheitelpunkt des Loopings hat. Nun können wir mit dem zweiten Newton'schen Axiom den Betrag der Normalkraft ermitteln, die die Bahn auf den Wagen ausübt.

Lösung: 1. Wählen Sie den Wagen, seinen Inhalt, die Bahn und die Erde als System. Zeichnen Sie eine Skizze der Achterbahnstrecke und des Wagens an dessen Startpunkt, kurz vor dem Looping und im Scheitel des Loopings (Abbildung 5.38).

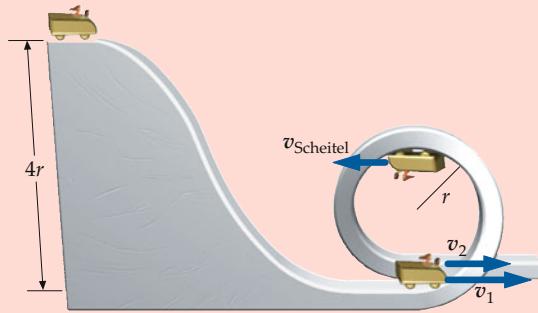


Abbildung 5.38 Skizze der Achterbahnstrecke mit den zugehörigen relevanten Größen.

2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom an und stellen Sie eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit im Scheitelpunkt des Loopings und der Normalkraft auf (die positive Richtung weist nach innen):

$$F_n + m g = m \frac{v_{\text{Scheitel}}^2}{r}$$

3. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie auf die Zeit vor Auftreffen des Sandsacks an. Es gibt keine äußeren Kräfte und keine inneren nichtkonservativen Kräfte, die Arbeit verrichten. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit kurz vor dem Auftreffen des Sandsacks. Höhen werden vom Fuß des Loopings aus gemessen. Die Starthöhe von $4r$, wobei r der Radius des Loopings ist, ist dann doppelt so hoch wie die Höhe des Scheitelpunkts des Loopings:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}$$

$$0 = \Delta E_{\text{mech}} - 0$$

$$E_{\text{mech,E}} = E_{\text{mech,A}}$$

$$E_{\text{pot,0}} + E_{\text{kin,0}} = E_{\text{pot,1}} + E_{\text{kin,1}}$$

$$m g 4r + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

und somit

$$v_1 = \sqrt{8r g}$$

4. Der Aufprall des Sandsacks führt zu einem Geschwindigkeitsverlust von 25 %. Die Geschwindigkeit nach dem Zwischenfall ist dann:

$$v_2 = 0,75 v_1 = 0,75 \cdot \sqrt{8r g}$$

5. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und mechanischer Energie auf die Zeit nach Auftreffen des Sandsacks an. Berechnen Sie die Geschwindigkeit im Scheitelpunkt des Loopings:

$$E_{\text{pot,Scheitel}} + E_{\text{kin,Scheitel}} = E_{\text{pot,2}} + E_{\text{kin,2}}$$

$$m g 2r + \frac{1}{2} m v_{\text{Scheitel}}^2 = 0 + \frac{1}{2} m (0,75^2 \cdot 8r g)$$

und damit

$$v_{\text{Scheitel}}^2 = (0,75^2 \cdot 8 - 4) \cdot r g = 0,5 r g$$

6. Setzt man diese Geschwindigkeit v_{Scheitel}^2 in das Ergebnis aus Schritt 2 ein, ergibt sich:

$$F_n + m g = m \frac{0,5 r g}{r}$$

$$F_n + m g = 0,5 m g$$

7. Damit ist F_n :

$$F_n = -0,5 m g$$

8. F_n ist die auf den Wagen wirkende Normalkraft. Wenn keine Lösung mit positiver Normalkraft existiert, bedeutet das:

Der Wagen würde aus den Schienen fallen.

Plausibilitätsprüfung: Ein Geschwindigkeitsverlust von 25 % bedeutet einen Verlust an kinetischer Energie von 44 %. Dieser Energie entspricht eine Geschwindigkeit, die der Wagen erhalten hätte, wenn er aus der Ruhe aus einer Höhe von $0,56 \cdot 4r = 1,12 \cdot 2r$ (12 % höher als die Scheithöhe des Loopings) abgefahren wäre. Insofern ist es nicht ganz unerwartet, dass der Wagen aus den Schienen fällt.

Weitergedacht: Glücklicherweise gab es schon damals Sicherheitsvorrichtungen, die verhinderten, dass sich der Wagen vom Gleis lösen konnte. Die Mitfahrenden hätten den Zwischenfall vermutlich überlebt. Ein viel größeres Risiko für die Fahrgäste der Flip-Flap-Railway bestand darin, sich das Genick zu brechen. In dem damaligen runden Looping wurden sie einer Kraft von 12 g ausgesetzt. Der Looping in Coney Island war daher der letzte mit einer kreisförmigen Ausführung. Die heutigen Loopings besitzen im unteren Teil einen größeren Krümmungsradius als im oberen. ■

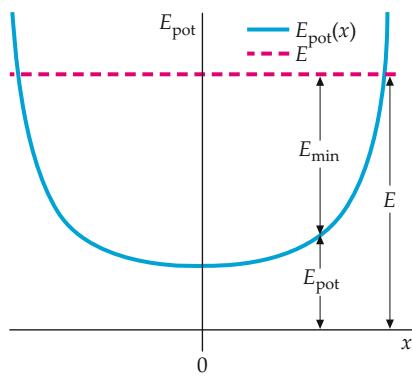


Abbildung 5.39 Potenzielle Energie E_{pot} und mechanische Gesamtenergie E in Abhängigkeit von x . Die Summe aus kinetischer Energie E_{kin} und potenzieller Energie E_{pot} ist gleich der mechanischen Gesamtenergie und somit $E_{\text{kin}} = E - E_{\text{pot}}$.

Bei der Untersuchung von Systemen, deren mechanische Energie konstant bleibt, sind häufig grafische Darstellungen der potenziellen Energie E_{pot} und der mechanischen Energie E von Nutzen. Abbildung 5.39 zeigt eine solche grafische Darstellung der potenziellen Energie, die durch die Gleichung

$$E_{\text{pot}} = b \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

beschrieben wird. Diese ist gerade das Negative der in Beispiel 5.13 betrachteten Funktion. In Abbildung 5.39 sind die Funktionsverläufe der potenziellen Energie und der mechanischen Gesamtenergie E eingezeichnet. Da $E_{\text{kin}} = E - E_{\text{pot}}$ gilt, ist die kinetische Energie E_{kin} bei einem gegebenen x -Wert gleich dem Abstand zwischen der mechanischen Gesamtenergie und der potenziellen Energie.

Der Energieerhaltungssatz

In der makroskopischen Welt wirken in gewissem Umfang stets dissipative, nichtkonservative Kräfte wie z. B. die Gleitreibungskraft. Diese Kräfte sind bestrebt, die mechanische Energie eines Systems zu verringern. Allerdings geht jeder dieser Verluste mit einem entsprechenden Anstieg an Wärmeenergie einher. Beispielsweise kann sehr häufiges Bremsen im Auto dazu führen, dass die Temperatur der Bremstrommeln so stark ansteigt, dass sich das Metall verzieht. Eine andere nichtkonservative Kraft wirkt bei der Verformung von Körpern. Wenn man einen Metallkleiderbügel mehrmals hin- und herbiegt, verrichtet man Arbeit an ihm, ohne dass sich die mechanische Energie des Kleiderbügels ändert. Stattdessen erwärmt sich der Kleiderbügel. Die beim Verbiegen des Kleiderbügels verrichtete Arbeit wird in Form von Wärmeenergie abgegeben. Auch eine Knetmassekugel, die auf den Boden fällt und sich verformt, wird wärmer. Dabei wird kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Somit ist die Gesamtenergie für das System aus Kugel,

Boden und Erde die Summe aus Wärmeenergie und mechanischer Energie. Obwohl weder die mechanische Gesamtenergie noch die gesamte Wärmeenergie für sich erhalten bleibt, bleibt die Gesamtenergie des Systems stets erhalten.

Ein dritter Typ nichtkonservativer Kräfte hängt mit chemischen Reaktionen zusammen. Wenn wir Systeme betrachten, in denen chemische Reaktionen stattfinden, bleibt die Summe aus mechanischer Energie und Wärmeenergie nicht mehr erhalten. Wenn beispielsweise jemand aus dem Stand heraus zu rennen beginnt, besitzt er anfangs keine kinetische Energie. Beim Start wird in bestimmten Molekülen seiner Muskeln gespeicherte chemische Energie in kinetische Energie und in Wärmeenergie umgewandelt. Die in kinetische Energie und in Wärmeenergie umgewandelte chemische Energie lässt sich angeben und messen. In diesem Beispiel bleibt die Summe aus mechanischer, thermischer und chemischer Energie erhalten.

Doch selbst wenn man Wärmeenergie und chemische Energie mit einbezieht, bleibt die Gesamtenergie eines Systems nicht immer erhalten. Energie kann nämlich auch in Strahlungsenergie, beispielsweise in Form von Schallwellen oder elektromagnetischen Wellen, umgewandelt werden. *Die Zunahme oder Abnahme der Gesamtenergie eines Systems kann jedoch immer dadurch erklärt werden, dass dieser Energiebetrag an anderer Stelle entzogen oder hinzugefügt wird.* Diese experimentelle Beobachtung ist der **Energieerhaltungssatz**, eines der wichtigsten Gesetze der Wissenschaft überhaupt. Es sei E die Gesamtenergie eines gegebenen Systems, E_{ein} die Energie, die dem System zugeführt wird, und E_{aus} die Energie, die vom System abgegeben wird. Der Energieerhaltungssatz besagt dann:

$$E_{\text{ein}} - E_{\text{aus}} = \Delta E. \quad (5.37)$$

ENERGIEERHALTUNGSSATZ

Für das größte denkbare System, das wir als Universum bezeichnen, lautet der Energieerhaltungssatz in Worten:

Die Gesamtenergie des Universums ist konstant. Energie kann von einer Form in eine andere umgewandelt und von einem Ort an einen anderen übertragen, jedoch nie erzeugt oder vernichtet werden.

ENERGIEERHALTUNGSSATZ

Die Gesamtenergie E vieler Systeme, die wir aus dem täglichen Leben kennen, setzt sich lediglich aus mechanischer Energie E_{mech} , Wärmeenergie $E_{\text{Wärme}}$ und chemischer Energie E_{chem} zusammen. Um andere Energieformen wie z. B. die elektromagnetische Energie oder die Kernenergie zu berücksichtigen, fügen wir noch E_{andere} hinzu und schreiben:

$$E = E_{\text{mech}} + E_{\text{Wärme}} + E_{\text{chem}} + E_{\text{andere}}. \quad (5.38)$$

Eine Möglichkeit, einem System Energie zuzuführen oder zu entziehen, besteht darin, von außen Arbeit an ihm zu verrichten. In Situationen, in denen es nur diese eine Art der Energieübertragung in das bzw. aus dem System gibt, kann der Energieerhaltungssatz wie folgt ausgedrückt werden:

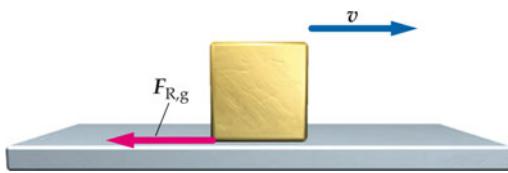


Abbildung 5.40 Ein Block gleitet auf einer Platte. Die Reibungskraft verringert die mechanische Energie des Systems aus Block und Platte.

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E \\ &= \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}} + \Delta E_{\text{andere}}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ARBEIT UND ENERGIE

Dabei ist W_{ext} die Arbeit, die äußere Kräfte an dem System verrichten, und ΔE die Änderung der Gesamtenergie des Systems. Der hier für Systeme formulierte **Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie** ist ein mächtiges Werkzeug, mit dem sich eine Vielzahl von Systemen untersuchen lassen. Ein System, das aus einem einzigen Teilchen besteht, kann nur kinetische Energie besitzen. In diesem Fall entspricht Gleichung 5.39 dem einfacheren Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie, wie wir ihn in Gleichung 5.17 kennengelernt haben.

Eine andere Möglichkeit, Energie in das bzw. aus dem System zu übertragen, ist die des Wärmeaustauschs. Wärme ist die Übertragung von Energie infolge einer Temperaturdifferenz. Der Energieaustausch wegen einer Temperaturdifferenz zwischen dem System und der Umgebung wird in Kapitel 17 behandelt. Im vorliegenden Kapitel wird dagegen angenommen, dass der Wärmeenergieaustausch vernachlässigbar ist.

Beispiel 5.19 veranschaulicht die Umwandlung von mechanischer Energie und Wärmeenergie.

Aufgabenstellungen mit Gleitreibung

Wenn Oberflächen aufeinandergleiten, verringert die Gleitreibung die mechanische Energie des Systems und erhöht seine Wärmeenergie. Wir betrachten dazu einen Block, der mit der Anfangsgeschwindigkeit v_A auf einer Platte zu gleiten beginnt, die wiederum auf einer reibungsfreien Unterlage liegen soll (Abbildung 5.40).

Zu Beginn ist die Platte in Ruhe. Wir wählen den Block und die Platte als unser System, sodass $\Delta E_{\text{chem}} = \Delta E_{\text{andere}} = 0$ ist. Darüber hinaus wird an dem System keine äußere Arbeit verrichtet. Damit ergibt der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie

$$0 = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}}. \quad (5.40)$$

Die Änderung der mechanischen Energie ist

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{mech}} &= \Delta E_{\text{kin},B} + \Delta E_{\text{kin},P} \\ &= \left(\frac{1}{2} m_B v_{B,E,x}^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B,A,x}^2 \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} m_P v_{P,E}^2 - 0 \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Dabei ist m_B die Masse des Blocks, m_P die der Platte, v_B die Geschwindigkeit des Blocks und v_P die Geschwindigkeit der Platte. Die Änderung der mechanischen Energie ist durch die Gleitreibungskraft bedingt. Wenn $F_{R,g}$ der Betrag der Reibungskraft auf den Block oder auf die Platte ist, ergibt die Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms auf den Block

$$-|F_{R,g}| = m_B a_{B,x},$$

wobei $a_{B,x}$ die Beschleunigung des Blocks ist. Wir multiplizieren beide Seiten mit der Verschiebung Δx_B :

$$-|F_{R,g}| \Delta x_B = m_B a_{B,x} \Delta x_B. \quad (5.42)$$

Umstellen der Gleichung $2 a_{B,x} \Delta x_B = v_{B,E,x}^2 - v_{B,A,x}^2$ nach $a_{B,x} \Delta x_B$ und Einsetzen in Gleichung 5.42 ergibt

$$\begin{aligned} -|F_{R,g}| \Delta x_B &= m_B a_{B,x} \Delta x_B \\ &= m_B \left(\frac{1}{2} v_{B,E,x}^2 - \frac{1}{2} v_{B,A,x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_B v_{B,E,x}^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B,A,x}^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Gleichung 5.43 ist gerade der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie der Translation (siehe Gleichung 5.17). Anwenden derselben Beziehung auf die Platte liefert:

$$\begin{aligned} |F_{R,g}| \Delta x_P &= m_P a_{P,x} \Delta x_P = m_P \left(\frac{1}{2} v_{P,E,x}^2 - \frac{1}{2} v_{P,A,x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m_P v_{P,E,x}^2 - 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dabei sind Δx_P und $a_{P,x}$ die Verschiebung und die Beschleunigung der Platte. Addieren der Gleichungen 5.43 und 5.44 führt auf

$$\begin{aligned} -|F_{R,g}| (\Delta x_B - \Delta x_P) &= \left(\frac{1}{2} m_B v_{B,E,x}^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B,A,x}^2 \right) + \frac{1}{2} m_P v_{P,E,x}^2. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dabei ist $\Delta x_B - \Delta x_P$ die Strecke s_{rel} , die der Block relativ zur Platte gleitet. Die rechte Seite von Gleichung 5.45 ist die Änderung der mechanischen Energie ΔE_{mech} des Gesamtsystems aus Block und Platte. Setzt man dies in Gleichung 5.45 ein, ergibt sich

$$-|F_{R,g}| s_{\text{rel}} = \Delta E_{\text{mech}}. \quad (5.46)$$

Während die mechanische Energie des Systems aus Block und Platte abnimmt, nimmt die Wärmeenergie des Systems dementsprechend zu. Diese Wärmeenergie tritt sowohl auf der Unterseite des Blocks als auch auf der Oberseite der Platte auf. Einsetzen von $\Delta E_{\text{Wärme}}$ für $-\Delta E_{\text{mech}}$ (Gleichung 5.40) ergibt

Beispiel 5.19: Eine fallende Knetmassekugel

Eine Knetmassekugel der Masse m wird aus der Ruhe heraus aus einer Höhe h fallen gelassen und trifft auf einen ideal starren Boden. Diskutieren Sie die Anwendung des Energieerhaltungssatzes a) auf das System, das nur aus der Knetmassekugel besteht, und b) auf das System aus Erde, Boden und Knetmassekugel.

Problembeschreibung: Nachdem die Knetmassekugel losgelassen wurde, wirken zwei Kräfte auf sie: die Gravitationskraft und die Kontaktkraft des Bodens. Da der Boden sich nicht bewegt (er starr ist), verrichtet die Kontaktkraft des Bodens keine Arbeit an der Kugel. Chemische oder „andere“ Energieumwandlungen finden nicht statt, sodass wir ΔE_{chem} und ΔE_{andere} weglassen können. Auch die Schallenergie, die beim Auftreffen der Kugel auf den Boden entsteht, vernachlässigen wir. Somit ist die einzige Energie, die von oder zu der Kugel übertragen wird, die Arbeit der Gewichtskraft.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie für die Knetmassekugel auf:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}} + \Delta E_{\text{andere}}$$

$$W_{\text{ext}} = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}}$$

2. Die beiden äußeren Kräfte, die am System (an der Knetmassekugel) angreifen, sind die Gravitationskraft und die Normalkraft, die der Boden darauf ausübt. Da sich der Teil der Kugel, der den Boden berührt, nicht bewegt, verrichtet die Normalkraft des Bodens jedoch keine Arbeit an der Kugel. Daher ist die einzige an der Kugel verrichtete Arbeit die der Gravitationskraft:

$$W_{\text{ext}} = m g h$$

3. Da das System allein aus der Kugel besteht, besitzt diese ausschließlich kinetische Energie, die sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand null ist. Damit ist die Änderung der mechanischen Energie insgesamt null:

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0$$

4. Wir ersetzen in der Gleichung aus Schritt 1 W_{ext} durch $m g h$ und ΔE_{mech} durch 0:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}}$$

$$m g h = 0 + \Delta E_{\text{Wärme}}$$

damit ist

$$\boxed{\Delta E_{\text{Wärme}} = m g h}$$

ZUM VERSTÄNDNIS

Hinweis: Wenn der Boden nicht ideal starr wäre, würde sich die Zunahme der Wärmeenergie auf Kugel und Boden verteilen.

Teilaufgabe b

1. Auf das System aus Knetmassekugel, Boden und Erde wirken keine äußeren Kräfte. Die Gravitationskraft und die Kraft des Bodens sind nun innere Kräfte des Systems. Daher wird auch keine äußere Arbeit verrichtet:

$$W_{\text{ext}} = 0$$

2. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie mit $W_{\text{ext}} = 0$ auf:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} \\ &= \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} \end{aligned}$$

3. Die mechanische Energie des Systems aus Kugel und Erde am Anfang ist die potenzielle Energie der Gravitationskraft am Anfang. Im Endzustand ist die mechanische Energie null:

$$E_{\text{mech,A}} = m g h$$

$$E_{\text{mech,E}} = 0$$

4. Somit beträgt die Änderung der mechanischen Energie des Systems aus Kugel und Erde:

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 - m g h = -m g h$$

5. Schließlich führt der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie zum gleichen Ergebnis wie in Teilaufgabe a:

$$\boxed{\Delta E_{\text{Wärme}} = -\Delta E_{\text{mech}} = m g h}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten, stimmt das Ergebnis aus Teilaufgabe a, dass die Wärmeenergie des Systems um $m g h$ zunimmt, mit dem aus Teilaufgabe b überein.

Weitergedacht: In Teilaufgabe a wird der Kugel durch die an ihr verrichtete Gravitationsarbeit Energie zugeführt. Bevor die Kugel auf den Boden auftrifft, erscheint diese Energie in Form kinetischer Energie der Kugel; danach wird sie in Wärmeenergie umgewandelt. Die Kugel erwärmt sich etwas, und die Energie wird schließlich an die Umgebung abgegeben. In Teilaufgabe b wird dem System aus Kugel, Erde und Boden keinerlei Energie zugeführt. Die ursprüngliche potenzielle Energie des Systems wird in kinetische Energie umgewandelt, die die Kugel unmittelbar vor dem Auftreffen besitzt, und geht anschließend in Wärmeenergie über.

$$|\mathbf{F}_{\text{R,g}}| s_{\text{rel}} = \Delta E_{\text{Wärme}}. \quad (5.47)$$

DURCH REIBUNG UMGEWANDELTE ENERGIE

Die Strecke s_{rel} , die eine Kontaktfläche relativ zur anderen gleitet, ist in allen Bezugssystemen gleich. Damit ist Gleichung 5.47 in allen Bezugssystemen gültig, unabhängig davon, ob sie Inertialsysteme sind oder nicht.

Setzt man dies in den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie (mit $E_{\text{chem}} = E_{\text{andere}} = 0$) ein, ergibt sich

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} = \Delta E_{\text{mech}} + |\mathbf{F}_{\text{R,g}}| s_{\text{rel}}. \quad (5.48)$$

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ARBEIT UND ENERGIE FÜR AUFGABENSTELLUNGEN MIT REIBUNG

Im Folgenden werden wir verschiedene Beispiele für Energieumwandlungen betrachten, an denen die Reibung beteiligt ist. Beispiel 5.20 behandelt eine Kiste, die über eine Platte geschoben wird. Das darauffolgende Beispiel 5.21 eines Schlittens sollen Sie selbst lösen. In Beispiel 5.22 wird berechnet, welche Geschwindigkeit ein Kind auf einer Rutsche unter der Wirkung der Gleitreibung erreicht.

Beispiel 5.20: Die Arbeit beim Schieben einer Kiste

Eine 4,0-kg-Kiste wird mit einer Kraft von 25 N aus dem Stand 3,0 m weit auf einem horizontalen Tisch geschoben. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Tisch und Kiste beträgt 0,35. Berechnen Sie a) die äußere Arbeit, die an dem System aus Kiste und Tisch verrichtet wird, b) die Energie, die durch die Reibung umgewandelt wird, c) die kinetische Energie der Kiste nach den 3 m und d) die Geschwindigkeit, die die Kiste dann hat.

Problembeschreibung Die Kiste und der Tisch bilden das System (Abbildung 5.41). Die Person, die die Kiste schiebt, gehört nicht zum System, sodass ihre Schubkraft eine äußere Kraft ist. Die Endgeschwindigkeit der Kiste ergibt sich aus ihrer kinetischen Energie am Ende, die sich wiederum aus dem Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie mit $\Delta E_{\text{chem}} = 0$ und $\Delta E_{\text{Wärme}} = |\mathbf{F}_{\text{R,g}}| s_{\text{rel}}$ ermitteln lässt. Durch die äußere Arbeit wird die Energie des Systems erhöht. Ein Teil dieses Energiezuwachses wird in kinetische Energie, ein anderer in Wärmeenergie umgewandelt.

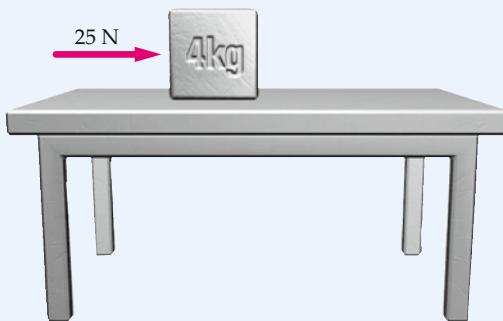


Abbildung 5.41 Skizze des Systems.

Lösung:

Teilaufgabe a

Auf das System wirken vier äußere Kräfte, von denen jedoch nur eine Arbeit verrichtet. Die gesamte äußere Arbeit ist das Produkt der Schubkraft und der zurückgelegten Strecke:

$$\begin{aligned} \sum W_{\text{ext}} &= W_{\text{Druck auf Kiste}} + W_{\text{Gravitationskraft auf Kiste}} \\ &\quad + W_{\text{Gravitationskraft auf Tisch}} + W_{\text{Boden auf Tisch}} \\ &= F_{\text{Druck},x} \Delta x + 0 + 0 + 0 = (25 \text{ N}) \cdot (3,0 \text{ m}) \\ &= \boxed{75 \text{ J}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die Energie, die durch die Reibung umgewandelt wird, ist $|\mathbf{F}_{\text{R,g}}| \Delta x$. Dabei ist der Betrag der Normalkraft gleich $m g$:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{Wärme}} &= |\mathbf{F}_{\text{R,g}}| \Delta x = \mu_{\text{R,g}} |\mathbf{F}_n| \Delta x = \mu_{\text{R,g}} m g \Delta x \\ &= (0,35) \cdot (4,0 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) \cdot (3,0 \text{ m}) \\ &= \boxed{41 \text{ J}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie an und berechnen Sie die kinetische Energie am Ende:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}}$$

2. Da keine inneren konservativen Kräfte wirken, die Arbeit verrichten, ist die Änderung der potenziellen Energie ΔE_{pot} null. Damit ist die Änderung der mechanischen Energie gleich der Änderung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mech}} &= \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} \\ &= 0 + (E_{\text{kin},E} - 0) = E_{\text{kin},E}\end{aligned}$$

3. Setzen Sie dies in den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie ein und verwenden Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a und b:

$$W_{\text{ext}} = E_{\text{kin},E} + \Delta E_{\text{Wärme}}$$

damit ist

$$\begin{aligned}E_{\text{kin},E} &= W_{\text{ext}} - \Delta E_{\text{Wärme}} \\ &= 75 \text{ J} - 41 \text{ J} = [34 \text{ J}]\end{aligned}$$

Teilaufgabe d

Die Endgeschwindigkeit der Kiste ergibt sich aus der kinetischen Energie. Stellen Sie die Formel nach der Endgeschwindigkeit um:

$$E_{\text{kin},E} = \frac{1}{2} m v_E^2$$

damit ist

$$v_E = \sqrt{\frac{2 E_{\text{kin},E}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (34 \text{ J})}{4,0 \text{ kg}}} = [4,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Plausibilitätsprüfung: Ein Teil der Energie, die beim Schieben auf die Kiste übertragen wird, geht in kinetische Energie und ein weiterer Teil in Wärmeenergie über. Wie es sein sollte, ist die Änderung der Wärmeenergie (Teilaufgabe b) positiv und kleiner als die von der äußeren Kraft verrichtete Arbeit (Teilaufgabe a). ■

Beispiel 5.21: Ein gleitender Schlitten

Ein Schlitten gleitet, ohne gezogen zu werden, mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $4,0 \text{ m/s}$ auf einer horizontalen, schneedeckten Fläche. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Schlitten und Schnee sei $0,14$. Wie weit gleitet der Schlitten, ehe er zum Stillstand kommt?

Problembeschreibung: Wir wählen den Schlitten und den Schnee als das System und wenden den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie an.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Zeichnen Sie den Schlitten in seinem Anfangs- und in seinem Endzustand (Abbildung 5.42).

2. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie an. Drücken Sie die Änderung der Wärmeenergie durch die Reibungskraft aus.

3. Stellen Sie die Gleichung nach $|F_{R,g}|$ um. Die Normalkraft ist gleich $m g$.

4. Es gibt keine äußeren Kräfte, die Arbeit am System verrichten, und auch keine inneren konservativen Kräfte, die Arbeit verrichten. Damit entfallen zwei Terme in der Formel aus Schritt 2.

5. Drücken Sie die Änderung der kinetischen Energie durch die Masse und durch die Anfangsgeschwindigkeit aus und stellen Sie die Gleichung nach s_{rel} um.

ZUR ÜBUNG

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

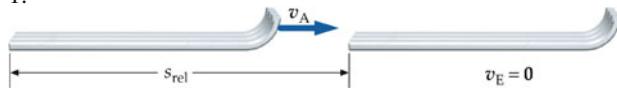


Abbildung 5.42 Skizze der Schlittenbewegung.

2.

$$\begin{aligned}W_{\text{ext}} &= \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} \\ &= (\Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}}) + |F_{R,g}| s_{\text{rel}}\end{aligned}$$

3.

$$|F_{R,g}| = \mu_{R,g} |F_n| = \mu_{R,g} m g$$

4.

$$W_{\text{ext}} = 0 \text{ und } \Delta E_{\text{pot}} = 0$$

und somit wird

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} + |F_{R,g}| s_{\text{rel}}$$

zu

$$0 = 0 + \Delta E_{\text{kin}} + \mu_{R,g} m g s_{\text{rel}}$$

5.

$$s_{\text{rel}} = \frac{v_A^2}{2 \mu_{R,g} g} = [5,8 \text{ m}]$$

Plausibilitätsprüfung: Da der Reibungskoeffizient $\mu_{R,g}$ dimensionslos ist und v_A^2/g die Dimension einer Länge hat, ist das Ergebnis dimensionsmäßig richtig.

5 Energie und Arbeit

Beispiel 5.22: Die Rutsche auf dem Spielplatz

Ein Kind mit einer Masse von 40 kg rutscht aus der Ruhe heraus eine 8,0 m lange Rutsche hinunter, die einen Winkel von 30° zur Horizontalen bildet. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Kind und Rutsche beträgt 0,35. Welche Geschwindigkeit hat das Kind am Ende der Rutsche?

Problembeschreibung: Während das Kind die Rutsche hinunterrutscht, wird ein Teil der potenziellen Energie, die es zu Beginn hat, in kinetische Energie und ein anderer Teil durch die Reibung in Wärmeenergie umgewandelt. Wir wählen Kind, Rutsche und Erde als System und wenden den Energieerhaltungssatz an.

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Skizze des Systems aus Kind, Rutsche und Erde an, die sowohl den Anfangs- als auch den Endzustand zeigt (Abbildung 5.43).

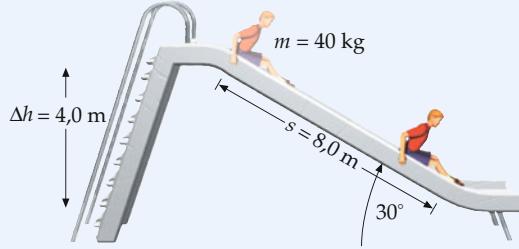


Abbildung 5.43 Bewegungsskizze des Kindes auf der Rutsche.

2. Schreiben Sie die Gleichung für die Energieerhaltung auf:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} \\ &= (\Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}}) + |\mathbf{F}_{\text{R,g}}| s_{\text{rel}} \end{aligned}$$

3. Die kinetische Energie am Anfang ist null. Die Geschwindigkeit am Ende der Rutsche ergibt sich aus der kinetischen Energie am Ende:

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,E}} - 0 = \frac{1}{2} m v_E^2$$

4. Auf das System wirken keine äußeren Kräfte:

$$W_{\text{ext}} = 0$$

5. Die Änderung der potenziellen Energie hängt von der Höhendifferenz Δh ab (die negativ ist):

$$\Delta E_{\text{pot}} = m g \Delta h$$

6. Um die Gleitreibungskraft $F_{\text{R,g}}$ zu berechnen, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom auf das Kind an. Dazu zeichnen wir das entsprechende Kräftediagramm (Abbildung 5.44).

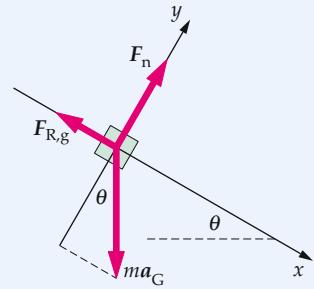


Abbildung 5.44 Kräftediagramm des Kindes.

7. Nun wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom an. Die Normalkomponente der Beschleunigung ist null. Zur Berechnung von $|F_n|$ ermitteln Sie die Komponente in Normalenrichtung. Anschließend berechnen Sie unter Verwendung von $|\mathbf{F}_{\text{R,g}}| = \mu_{\text{R,g}} |\mathbf{F}_n|$ den Betrag der Reibungskraft $\mathbf{F}_{\text{R,g}}$:

$$|F_n| - m g \cos \theta = 0$$

und damit

$$|\mathbf{F}_{\text{R,g}}| = \mu_{\text{R,g}} |F_n| = \mu_{\text{R,g}} m g \cos \theta$$

8. Die Strecke $s = s_{\text{rel}}$ und Δh sind über den Sinus verknüpft:

$$|\Delta h| = s \sin \theta$$

9. Setzt man dies alles in die Formel aus Schritt 2 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= m g \Delta h + \frac{1}{2} m v_E^2 + |\mathbf{F}_{\text{R,g}}| s \\ &= -m g s \sin \theta + \frac{1}{2} m v_E^2 + \mu_{\text{R,g}} m g \cos \theta s \end{aligned}$$

10. Umstellen nach v_E ergibt:

$$\begin{aligned} v_E^2 &= 2 g s \cdot (\sin \theta - \mu_{\text{R,g}} \cos \theta) \\ &= 2 \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (8,0 \text{ m}) \\ &\quad \cdot (\sin 30^\circ - 0,35 \cos 30^\circ) \\ &= 30,9 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

und damit

$$v_E = \boxed{5,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Weitergedacht: Das Ergebnis für v_E^2 in Schritt 10 hängt nicht von der Masse des Kindes ab. Dies sollte auch so sein, da alle auf das Kind wirkenden Kräfte proportional zur Masse m sind. ■

Beispiel 5.23: Treppen steigen

Eine Person mit der Masse m geht einen Treppenabsatz der Höhe h hinauf. Diskutieren Sie die Energieerhaltung für ein System, das nur aus dieser einen Person besteht.



(© Carmen Pilsak/Pitopia.)

Problembeschreibung: Auf die Person wirken zwei Kräfte: die Gravitationskraft und die Kraft, die die Treppenstufen auf die Füße ausüben. Wenden Sie auf dieses System (die Person) den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie an.

Lösung: 1. Die Person ist das System. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie (Gleichung 5.39) für das System auf:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}}$$

2. Auf das System wirken zwei äußere Kräfte: die Gravitationskraft und die Kontaktkraft, die die Treppenstufen auf die Füße ausüben. Die Gravitationskraft verrichtet negative

ZUM VERSTÄNDNIS

Arbeit, da die Komponente der Verschiebung der Person in Kraftrichtung $-h$, also negativ ist. Die Kraft der Stufen auf die Füße verrichtet keine Arbeit, da sich der Angriffspunkt dieser Kraft (die Schuhsohle) nicht bewegt, solange die Kraft wirkt:

$$W_{\text{ext}} = -m g h$$

3. Da sich die Lage der Person nicht ändert (sie in der aufrechten Lage bleibt), führt jede Änderung mechanischer Energie ausschließlich zu einer Änderung der kinetischen Energie. Diese ist jedoch am Ende des Hinaufgehens genauso groß wie zu Beginn:

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0$$

4. Setzen Sie diese Ergebnisse in den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie ein:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}} + \Delta E_{\text{andere}}$$

und somit

$$-m g h = 0 + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}} + 0$$

oder

$$\Delta E_{\text{chem}} = -(m g h + \Delta E_{\text{Wärme}})$$

Plausibilitätsprüfung: Es war zu erwarten, dass die chemische Energie, wie im Ergebnis aus Schritt 4, abnimmt.

Weitergedacht: Ohne Änderung der Wärmeenergie würde die chemische Energie der Person um $m g h$ abnehmen. Da der menschliche Körper jedoch relativ ineffizient ist, ist der Zuwachs an Wärmeenergie bedeutend größer als $m g h$. Damit ergibt sich der „Verlust“ gespeicherter chemischer Energie aus $m g h$ plus der erzeugten Wärmeenergie, die der Körper schließlich an die Umgebung abgibt.

Aufgabenstellungen mit chemischer Energie

Gelegentlich wird die innere chemische Energie eines Systems in mechanische Energie und in Wärmeenergie umgewandelt, ohne dass dabei äußere Kräfte Arbeit verrichten. Betrachten wir als Beispiel die Energieumwandlung, die stattfindet, wenn ein Läufer startet. Um sich vorwärtszubewegen, drückt dieser den Boden nach hinten, während der Boden ihn mit seiner Haftreibungskraft nach vorn drückt. Diese Kraft führt dazu, dass der Läufer beschleunigt wird, verrichtet aber keine Arbeit, da sich der Angriffspunkt der Kraft nicht bewegt (die Verschiebung null ist), solange der Schuh auf dem Boden nicht rutscht. Da keine Arbeit verrichtet wird, wird auch keine Energie vom Boden auf den Körper übertragen. Die Zunahme der kinetischen Energie

des Läufers röhrt lediglich von der Umwandlung chemischer Energie her – und damit letztlich von den Nahrungsmitteln, die er zu sich nimmt. Wir betrachten hierzu die beiden Beispiele 5.23 und 5.24.

Beispiel 5.24: Ein Auto am Berg

Ein Benzinauto mit einer Masse von 1000 kg fährt mit konstant 100 km/h (= 27,8 m/s) eine 10,0 %ige Steigung hinauf (Abbildung 5.45). (Eine 10,0 %ige Steigung bedeutet, dass die Straße pro 10,0 m horizontaler Strecke um 1,00 m ansteigt; für den Neigungswinkel gilt dem-

5 Energie und Arbeit

nach $\tan \theta = 0,100$.) a) Der Wirkungsgrad des Autos sei 15,0 %. Er gibt an, welchen Anteil der verbrauchten chemischen Energie der Motor tatsächlich als mechanische Energie wieder abgibt. Mit welcher Rate ändert sich die chemische Energie des Systems aus Auto, Erde und Atmosphäre? b) Mit welcher Rate wird Wärmeenergie erzeugt?

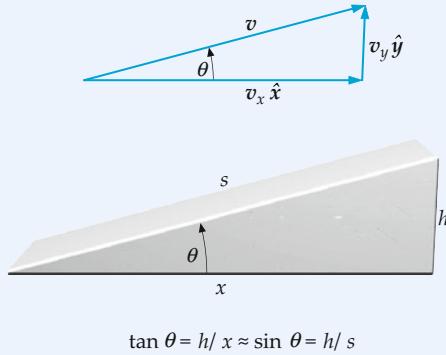


Abbildung 5.45 Skizze der Straßenneigung.

Problembeschreibung: Ein Teil der chemischen Energie erhöht die potentielle Energie des Autos, während es den Berg hinauffährt. Ein anderer Teil wird in Wärmeenergie umgewandelt und gelangt größtenteils über die Abgase ins Freie. Zur Lösung betrachten wir ein System, das aus Auto, Berg, Atmosphäre und Erde besteht. Zuerst müssen wir die Rate ermitteln, mit der die chemische Energie abnimmt. Anschließend können wir den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie anwenden, um die Rate zu bestimmen, mit der Wärmeenergie erzeugt wird.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Verlustrate der chemischen Energie ist der Absolutwert der Änderung der chemischen Energie pro Zeiteinheit:

$$\text{Verlustrate an chemischer Energie} = \frac{|\Delta E_{\text{chem}}|}{\Delta t}$$

2. Die Zunahme der mechanischen Energie beträgt 15,0 % des Verlusts an chemischer Energie:

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0,150 |\Delta E_{\text{chem}}|$$

3. Stellen Sie nach der Verlustrate der chemischen Energie um:

$$\frac{|\Delta E_{\text{chem}}|}{\Delta t} = \frac{1}{0,150} \frac{\Delta E_{\text{mech}}}{\Delta t}$$

4. Das Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit. Somit ist $\Delta E_{\text{kin}} = 0$ und $\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_{\text{pot}}$. Formulieren Sie

den Zusammenhang zwischen der Änderung der mechanischen Energie und der Höhenänderung Δh und setzen Sie das Ergebnis in die Formel aus Schritt 3 ein (die chemische Energie nimmt ab):

$$\Delta E_{\text{mech}} = m g \Delta h$$

somit ist

$$\frac{\Delta E_{\text{chem}}}{\Delta t} = -\frac{1}{0,150} \frac{m g \Delta h}{\Delta t}$$

5. Überführen Sie die Differenzen in Ableitungen. Bilden Sie dazu auf beiden Seiten den Limes für Δt gegen null:

$$\frac{dE_{\text{chem}}}{dt} = -\frac{1}{0,150} \frac{m g dh}{dt}$$

6. Die Rate h der Höhenänderung ist gleich der vertikalen Geschwindigkeit v_y . Der Zusammenhang zwischen v_y und dem Geschwindigkeitsbetrag $|v|$ geht aus Abbildung 5.45 hervor:

$$\frac{dh}{dt} = v_y = |v| \sin \theta$$

7. Da der Winkel θ klein ist, ist $\sin \theta$ näherungsweise gleich $\tan \theta$:

$$\sin \theta \approx \tan \theta = 0,100$$

8. Setzen Sie alles in die Verlustrate der chemischen Energie ein und berechnen Sie diese:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{chem}}}{dt} &= -\frac{m g}{0,15} |v| \sin \theta \\ &\approx -\frac{(1000 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1})}{0,15} \\ &\quad \cdot (27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot 0,100 \\ &\approx -182 \text{ kW} \\ -\frac{dE_{\text{chem}}}{dt} &\approx \boxed{182 \text{ kW}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie auf:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}}$$

2. Setzen Sie W_{ext} null, dividieren Sie beide Seiten durch Δt , bilden Sie den Grenzwert für Δt gegen null und stellen Sie die Gleichung nach $dE_{\text{Wärme}}/dt$ um:

$$0 = \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} + \frac{dE_{\text{Wärme}}}{dt} + \frac{dE_{\text{chem}}}{dt}$$

und somit

$$\begin{aligned}\frac{dE_{\text{Wärme}}}{dt} &= -\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} - \frac{dE_{\text{chem}}}{dt} \\ &= 0,150 \cdot \frac{dE_{\text{chem}}}{dt} - \frac{dE_{\text{chem}}}{dt} \\ &= -0,850 \cdot \frac{dE_{\text{chem}}}{dt} = 0,850 \cdot (182 \text{ kW}) \\ &= \boxed{154 \text{ kW}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die relativen Größen der Ergebnisse aus Teilaufgabe a und b waren zu erwarten, da der Wirkungsgrad nur 15 % beträgt.

Weitergedacht: Höher als 15 % ist der Wirkungsgrad von Benzinautos üblicherweise nicht. Ungefähr 85 % der chemischen Energie des Benzin werden in Wärmeenergie umgewandelt und gehen zum größten Teil durch den Auspuff. Durch die Rollreibung und durch den Luftwiderstand wird weitere Wärmeenergie erzeugt. Der Energiegehalt von Benzin liegt bei etwa 31,8 MJ/l. ■

Frage 5.2

Diskutieren Sie die Energieerhaltung für ein System, das aus der Person und der Erde besteht.

🔍 Im Kontext: Achterbahnen, Gepäck und Arbeit

Die Gepäcktransporteinrichtungen auf einigen Großflughäfen haben viel mit Achterbahnen gemeinsam. Lang anhaltende hohe Beschleunigungsänderungen sind sowohl für Achterbahnfahrer als auch für Gepäck schädlich. In beiden Fällen soll die Bewegung zwar schnell erfolgen, aber nicht schlagartig anziehen oder anhalten.

Einige Achterbahnwagen beziehen – ebenso wie einige Gepäcktransportwagen – ihre kinetische Energie durch elektromagnetische Antriebskräfte, wie sie ähnlich auch beim Transrapid zum Einsatz kommen. Diese Kräfte werden von Anordnungen von Linearinduktionsmotoren (LIM) erzeugt. Ein LIM erzeugt eine Kraft auf elektromagnetischem Weg, ohne bewegliche Teile zu besitzen.¹ Der Hauptgrund für die Verwendung von Linearinduktionsmotoren ist die Flexibilität, mit der während der Fahrt an zuvor berechneten Orten Kraft auf den Achterbahn- bzw. Gepäcktransportwagen angewendet werden kann. Beide fahren auf Schienen, die mit Sensoren zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Wagen ausgestattet sind. Die Sensoren übermitteln diese Geschwindigkeit an die Steuereinheiten für die Motoren. Wenn das Fahrzeug die Sollgeschwindigkeit erreicht hat, können die LIMs abgeschaltet werden. In beiden Fällen sind außerdem einige LIMs so angeschlossen, dass sie die Fahrzeuge abbremsen, indem sie auf sie Kräfte ausüben, die entgegengesetzt zu ihrer Bewegungsrichtung wirken.

„Speed – The Ride“ heißt eine Achterbahn, die vom NASCAR-Café im Hotel und Casino Sahara in Las Vegas abfährt. Die Konstruktionsfirma, die Ingenieurbüro Stengel GmbH, hat an drei Stellen an der Bahn 88 Motoren angebracht. Die erste Motoranordnung startet den Wagenzug, der aus sechs Einzelwagen besteht und in dem 24 Mitfahrer Platz nehmen können. Dabei wird er in 2,0 s stetig auf 72 km/h beschleunigt. Anschließend fährt er um eine Kurve und stürzt 7,5 m unter das Bodenniveau, bevor er zu steigen beginnt und schließlich durch einen spiralförmigen Looping fährt.² Nachdem er den Looping verlassen hat, wirken auf ihn die Kräfte des zweiten LIM, sodass sich seine kinetische Energie in 2,0 s vervierfacht.³ Nun fährt der Wagen den Las Vegas Boulevard entlang und rast schließlich 61 m eine fast senkrechte Ebene hinauf. Zur Sicherheit kann der Wagenzug am Gipfel durch eine Reihe von LIMs bei Bedarf abgebremst werden. Anschließend fährt er die gesamte Strecke zurück. Wenn er wieder in der Station ankommt, wirken die dort angebrachten LIMs als Bremsen, die ihn zum Stehen bringen.

Außer den Kräften der LIMs wirken auf den Achterbahnzug die Gravitationskraft, die Reibungskraft und die Normalkraft. Auch wenn der Anfangs- und der Endpunkt nicht für jeden Wagen dieselben sind, fährt jeder Wagen auf derselben Bahn. Die maximale Beschleunigung eines Mitfahrers beträgt 3,5 g. Dies ist gar nicht so viel: Die Momentanbeschleunigung, wenn man am Kopf von einem Kissen getroffen wird, kann mehr als 20 g betragen.⁴

Am Londoner Großflughafen Heathrow International Airport muss häufig Gepäck zwischen den beiden Terminals 1 und 4 transportiert werden. Die beiden Terminals sind mehr als 1,0 km voneinander entfernt, und dazwischen liegt zudem eine Startbahn. Jedes Gepäckstück wird auf ein

kleines Wägelchen geladen, das auf Schienen fährt. Die Geschwindigkeiten dieser Wägelchen werden durch an den Schienen angebrachte LIMs gesteuert. Zunächst fahren diese Wägelchen eine steile Neigung hinab und erreichen schließlich die Ebene eines Tunnels 20 m unter der Erde. Durch diesen Tunnel fahren sie mit 30 km/h, wobei sie durch äquidistante LIMs auf dieser Geschwindigkeit gehalten werden. Am Ende des Tunnels steigen die Wägelchen bis zum richtigen Geschoss des anderen Terminals.



Die Geschwindigkeiten der Wägelchen, die das Gepäck zwischen den Terminals am Heathrow International Airport transportieren, werden durch Linearinduktionsmotoren gesteuert. (© Vanderlande Industries.)

1. „Whoa! Linear motors blast Vegas Coaster straight up“, *Machine Design*, 4. Mai 2000, Bd. 28; „Sectors“ EI-WHS, <http://machinedesign.com/ContentItem/70509/WhoaLinearMotorsBlastVegasCoasterStraightUp.aspx> (Stand: April 2006); „Baggage Handling Case Study“, Force Engineering, <http://www.force.co.uk/bagcase.htm> (Stand: April 2006); „Leisure Rides“ Force Engineering, <http://www.force.co.uk/leishome.htm> (Stand: April 2006).
2. „Roller coaster constructor Werner Stengel receives honorary doctorate at Göteborg University“, Göteborg University, Faculty of Science, http://www2.science.gu.se/english/werner_stengel.shtml (Stand: April 2006).
3. „Speed Facts“, Sahara Hotel and Casino, <http://www.saharavegas.com/NASCAR/SPEED-facts/> (Stand: August 2008).
4. Exponent Failure Analysis Associates, *Investigation of Amusement Park and Roller Coaster Injury Likelihood and Severity*: 48. <http://www.emerson-associates.com/safety/articles/ExponentReport.pdf> (Stand: April 2006).

Zusammenfassung

- Arbeit, kinetische Energie und Leistung sind wichtige abgeleitete dynamische Größen.
- Der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie und der Energieerhaltungssatz sind grundlegende Naturgesetze. Sie finden in allen Teilgebieten der Physik Anwendung.
- Die Erhaltung der mechanischen Energie ist eine wichtige Beziehung, die aus den Newton'schen Axiomen für konservative Kräfte gewonnen wurde. Sie hilft bei der Lösung vieler Aufgabenstellungen.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen	
1. Arbeit	$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 F_s ds$	(5.12)
Bei konstanter Kraft	$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_s s = \mathbf{F} s_F = \mathbf{F} s \cos \theta$	
Bei konstanter Kraft und geradliniger Bewegung	$W = F_x \Delta x = \mathbf{F} \Delta x \cos \theta$	(5.1)
Bei ortsabhängiger Kraft und geradliniger Bewegung	$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \text{Fläche unter der Kurve } F_x(x)$	(5.7)
2. Leistung	$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$	(5.14)
3. Kinetische Energie	Die kinetische Energie eines Körpers oder Systems ist die Energie, die mit der Geschwindigkeit des Körpers oder Systems zusammenhängt.	
Definition	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	(5.16)
Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie	$W = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$	(5.17)
4. Konservative Kräfte	Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich entlang eines beliebigen Wegs wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückbewegt, null ist. Alternativ ist eine Kraft konservativ, wenn die Arbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich von einem Punkt zu einem anderen bewegt, unabhängig vom Weg des Teilchens zwischen diesen beiden Punkten ist.	
5. Potenzielle Energie	Die potenzielle Energie eines Systems ist die Energie, die mit der Lage des Systems zusammenhängt. Die Änderung der potenziellen Energie ist gleich dem Negativen der Arbeit, die alle auf das System wirkenden inneren, konservativen Kräfte verrichten.	
Definition	$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	(5.22a)
	$dE_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	(5.22b)
Potenzielle Energie der Gravitation	$E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},0} + mg y \quad \text{nahe der Erdoberfläche}$	(5.23)
	$E_{\text{pot}} = -G \frac{m_E m}{r} + E_{\text{pot},0} \quad \text{weit von der Erde entfernt}$	(5.25)
Potenzielle Energie einer elastischen Verformung (Feder)	$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F x^2$	(5.27)
Konservative Kraft	$F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx}$	(5.28)
Funktionsverlauf der potenziellen Energie	An einem Minimum der potenziellen Energie ist die Kraft null und das System in einem stabilen Gleichgewicht. An einem Maximum ist die Kraft ebenfalls null, das System aber in einem labilen Gleichgewicht. Eine konservative Kraft ist stets bestrebt, ein Teilchen zu dem Ort mit geringerer potenzieller Energie zu beschleunigen.	

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
6. Mechanische Energie	Die Summe der kinetischen und der potenziellen Energie wird mechanische Gesamtenergie genannt: $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}. \quad (5.33)$
Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie für Systeme	Die an einem System von äußeren Kräften verrichtete Gesamtarbeit ist gleich der Differenz zwischen der Änderung der mechanischen Energie des Systems und der von inneren nichtkonservativen Kräften verrichteten Gesamtarbeit: $W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}. \quad (5.34)$
Erhaltung der mechanischen Energie	Wenn an einem System keine äußeren Kräfte Arbeit verrichten und alle inneren Kräfte, die Arbeit verrichten, konservativ sind, bleibt die mechanische Gesamtenergie eines Systems konstant: $E_{\text{kin,E}} + E_{\text{pot,E}} = E_{\text{kin,A}} + E_{\text{pot,A}}. \quad (5.35)$
7. Gesamtenergie eines Systems	Die Energie eines Systems besteht aus der mechanischen Energie E_{mech} , aus der Wärmeenergie $E_{\text{Wärme}}$, aus der chemischen Energie E_{chem} und aus anderen Energieformen E_{andere} wie der Energie von Schallwellen oder elektromagnetischen Wellen: $E = E_{\text{mech}} + E_{\text{Wärme}} + E_{\text{chem}} + E_{\text{andere}}. \quad (5.36)$
8. Energieerhaltung	<p>Universum Die Gesamtenergie des Universums ist konstant. Energie kann von einer Form in eine andere umgewandelt werden oder von einem Ort an einen anderen übertragen werden. Energie kann nie erzeugt oder vernichtet werden.</p> <p>System Die Energie eines Systems kann sich einerseits durch eine am System verrichtete Arbeit und andererseits durch eine Energieübertragung durch Wärme ändern (hierzu gehört auch die Emission oder Absorption von Strahlung). Diese Zunahme oder Abnahme der Energie des Systems geht stets mit der Abnahme bzw. Zunahme von Energie an anderer Stelle einher:</p> $E_{\text{ein}} - E_{\text{aus}} = \Delta E. \quad (5.37)$
Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie	$W_{\text{ext}} = \Delta E = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}} + \Delta E_{\text{andere}} \quad (5.38)$
Energieumwandlung durch Reibung	Bei einem System, das aneinandergeriebene Oberflächen enthält, wird ein bestimmter Betrag der Energie durch die Reibung der beiden Oberflächen in Wärmeenergie des Systems umgesetzt. Dieser Betrag ist gleich $ \mathbf{F}_{\text{R,g}} s_{\text{rel}} = \Delta E_{\text{Wärme}}, \quad (5.39)$ wobei s_{rel} die Strecke ist, entlang der die beiden Oberflächen aneinandergerieben.

Antworten auf die Verständnisfragen

- 5.1 Die von der Kraft verrichtete Arbeit ist negativ.
 5.2 An dem System aus Person und Erde wird keine äußere Arbeit verrichtet, sodass die Gesamtenergie, nun einschließlich der potenziellen Energie der Gravitation, konstant ist. Die Änderung der mechanischen Energie ist $m g h$, sodass der Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie wieder $\Delta E_{\text{chem}} = -(m g h + \Delta E_{\text{Wärme}})$ ergibt.

Dreiecks ist das halbe Produkt“ aus Höhe und Basislänge. Somit gilt

$$\begin{aligned} W_{\text{Feder}} &= -(|A_1| - |A_2|) \\ &= -\left(\frac{1}{2} \cdot k_F x_E \cdot x_E - \frac{1}{2} \cdot k_F x_A \cdot x_A\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} k_F x_E^2 - \frac{1}{2} k_F x_A^2}, \end{aligned}$$

was mit Gleichung 5.10 übereinstimmt.

- 5.4 $|\mathbf{F}| = 5,00 \text{ N}$, $\phi = 121^\circ$
 5.5 $P = 2,0 \cdot 10^2 \text{ W}$, $W = 8,0 \cdot 10^3 \text{ J}$, $W = -8,0 \cdot 10^3 \text{ J}$
 5.6 $1,7 \cdot 10^2 \text{ N}$
 5.7 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} B x_{\max} y_{\max} (y_{\max} - x_{\max})$
 5.8 a) 4,3 kJ, b) 2,2 kJ, c) -1,1 kJ
 5.9 495 J
 5.10 $3,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 5.11 Keine.
 5.12 27 m

Lösungen der Übungen

- 5.1 34 J
 5.2 $4,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 5.3 Da das betrachtete Gebiet unter der x -Achse liegt, ist die „Fläche unter der Kurve negativ und damit gleich $-(|A_1| - |A_2|)$, wobei A_1 und A_2 die in Abbildung 5.8 eingezeichneten Flächen sind. Die von der Feder verrichtete Arbeit ist gleich der „Fläche unter der Kurve“, und die Fläche eines

Aufgaben

Bei allen Aufgaben sei die Fallbeschleunigung $|a_G| = g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

5.1 • Richtig oder falsch? a) Nur die Gesamtkraft, die an einem Körper angreift, kann Arbeit verrichten. b) An einem Teilchen, das ruht, wird keine Arbeit verrichtet. c) Eine Kraft, die stets senkrecht zur Geschwindigkeit eines Teilchens steht, verrichtet an ihm keine Arbeit.

5.2 • Um welchen Faktor ändert sich die kinetische Energie eines Teilchens, wenn seine Geschwindigkeit verdoppelt, seine Masse aber halbiert wird?

5.3 • Nennen Sie ein Beispiel für ein Teilchen, das konstante kinetische Energie hat, aber dennoch beschleunigt wird. Kann sich die kinetische Energie eines Teilchens, das nicht beschleunigt wird, ändern? Nennen Sie ein Beispiel, falls dies zutrifft.

5.4 • Vergleichen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um eine entspannte Feder 2,0 cm zu dehnen, mit der Arbeit, die erforderlich ist, um sie 1,0 cm zu dehnen.

5.5 • Richtig oder falsch? a) Da die Gravitationskraft keine Kontaktkraft ist, kann sie an einem Körper keine Arbeit verrichten. b) Die Haftreibungskraft kann nie an einem Körper Arbeit verrichten. c) Wenn ein (negativ geladenes) Elektron von einem (positiv geladenen) Atomkern weiter entfernt wird, verrichtet die auf das Elektron nach außen wirkende Kraft eine positive Arbeit. d) Die Arbeit, die an einem Teilchen verrichtet wird, das sich auf einer Kreisbahn bewegt, ist notwendig null.

5.6 • Richtig oder falsch? a) Nur konservative Kräfte können Arbeit verrichten. b) Solange nur konservative Kräfte wirken, ändert sich die kinetische Energie eines Teilchens nicht. c) Die Arbeit, die eine konservative Kraft verrichtet, ist gleich der von dieser Kraft hervorruhenden Änderung der potenziellen Energie. d) Falls die potentielle Energie einer konservativen Kraft für ein Teilchen, dessen Bewegung auf die x -Achse beschränkt ist, abnimmt, während sich das Teilchen nach rechts bewegt, zeigt die Kraft nach links. e) Falls eine konservative Kraft für ein Teilchen, dessen Bewegung auf die x -Achse beschränkt ist, nach rechts zeigt, nimmt die potentielle Energie dieser konservativen Kraft zu, wenn sich das Teilchen nach links bewegt.

5.7 • Abbildung 5.46 zeigt einen Verlauf der potenziellen Energie E_{pot} in Abhängigkeit von x . a) Geben Sie für alle gezeigten Punkte an, ob die x -Komponente der Kraft, die zu dieser potenziellen Energie gehört, positiv, negativ oder null ist. b) An

welchem der Punkte besitzt die Kraft den größten Betrag? c) Ermitteln Sie alle Gleichgewichtslagen und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein stabiles, ein labiles oder ein indifferentes Gleichgewicht handelt.

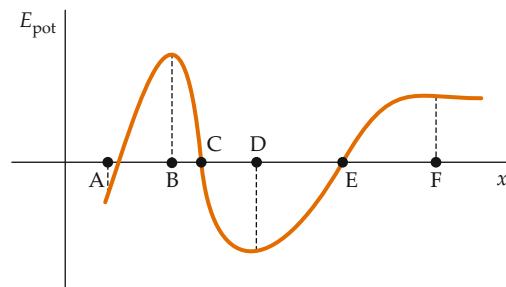


Abbildung 5.46 Zu Aufgabe 5.7.

5.8 • Zwei Steine werden gleichzeitig und gleich schnell vom Dach eines Gebäudes geworfen, der eine davon unter einem Winkel von 30° nach oben und der andere genau horizontal. Welche Aussage trifft zu? a) Beide Steine treffen zugleich und mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag auf dem Boden auf. b) Die Steine treffen zugleich, aber mit unterschiedlichen Geschwindigkeitsbeträgen auf. c) Die Steine treffen nacheinander mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag auf. d) Die Steine treffen nacheinander mit unterschiedlichen Geschwindigkeitsbeträgen auf.

5.9 • Wir nehmen an, dass die Straße beim Bremsen eine konstante Reibungskraft auf die Räder eines Autos ausübt. Welche Aussage trifft dann zwangsläufig zu? a) Der Bremsweg ist proportional zur Geschwindigkeit, die das Auto hatte, bevor die Bremsung eingeleitet wurde. b) Die kinetische Energie des Autos nimmt mit einer konstanten Rate ab. c) Die kinetische Energie ist umgekehrt proportional zu der Zeit, die seit Beginn des Bremsens vergangen ist. d) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

5.10 •• Ein Auto wird auf ebener Straße aus dem Stand beschleunigt, ohne dass die Räder durchdrehen. Erläutern Sie anhand des Zusammenhangs zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie der Translation sowie von Kräftediagrammen genau, welche Kraft bzw. welche Kräfte direkt für den Zuwachs an kinetischer Energie der Translation des Autos und des Fahrers verantwortlich sind. (Hinweis: Der Zusammenhang betrifft nur äußere Kräfte, sodass „der Motor“ nicht die richtige Antwort ist. Wählen Sie in jedem Fall das richtige „System“).

5.11 •• Wenn ein Stein, der mit einem masselosen, starren Stab verbunden ist, mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf einem vertikalen Kreis gedreht wird (Abbildung 5.47), ist die

mechanische Gesamtenergie des Systems aus Stein und Erde nicht konstant. Während die kinetische Energie des Steins konstant ist, ändert sich die potentielle Energie der Gravitation ständig. Ist die an dem Stein verrichtete Gesamtarbeit während aller Zeitintervalle null? Hat die Kraft, die der Stab auf den Stein ausübt, jemals eine von null verschiedene Tangentialkomponente?

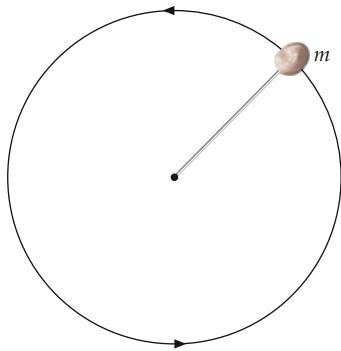


Abbildung 5.47 Zu Aufgabe 5.11.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

5.12 • In der Nacht sind 25 cm Schnee gefallen, den Sie auf der 15 m langen Zufahrt zur Garage wegschippen müssen (Abbildung 5.48). Schätzen Sie, welche Arbeit Sie dabei an dem Schnee verrichten müssen. Machen Sie für alle dafür notwendigen Größen (etwa für die Breite der Zufahrt) sinnvolle Annahmen und begründen Sie diese jeweils.

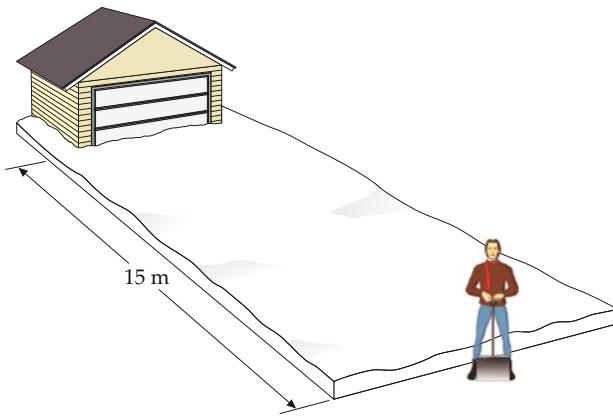


Abbildung 5.48 Zu Aufgabe 5.12.

5.13 • Eine Seiltänzerin mit einer Masse von 50 kg läuft über ein Seil, das zwischen zwei 10 m voneinander entfernten Pfeilern gespannt ist. Wenn die Seiltänzerin genau in der Mitte des Seils steht, beträgt die Zugkraft darin 5 000 N. a) Schätzen Sie, wie stark das Seil durchhängt, wenn die Seiltänzerin genau in

der Mitte des Seils steht. b) Schätzen Sie die Änderung ihrer potentiellen Energie der Gravitation zwischen dem Moment, in dem sie das Seil betritt, und dem Moment, in dem sie genau in der Mitte des Seils steht.

5.14 •• Die Masse eines Spaceshuttles beträgt ca. $8 \cdot 10^4$ kg und seine Umlaufzeit 90 min. Schätzen Sie die kinetische Energie des Spaceshuttles und die Arbeit, die die Gravitationskraft an ihm zwischen Start und Erreichen des Orbits verrichtet. (Die Gravitationskraft nimmt zwar mit der Höhe ab, bei einer niedrigen Umlaufbahn können Sie davon aber absehen. Machen Sie auf dieser Grundlage eine sinnvolle Näherungsannahme. Eine Integration brauchen Sie dabei nicht auszuführen.) Die Umlaufbahnen verlaufen in einer Höhe von ca. 400 km über der Erdoberfläche.

5.15 •• Der *Stoffwechselumsatz* ist als die Rate definiert, mit der ein Lebewesen chemische Energie umsetzt, um damit seine Lebensfunktionen aufrechtzuerhalten. Experimentell wurde ermittelt, dass der durchschnittliche Stoffwechselumsatz beim Menschen proportional zur gesamten Hautoberfläche des Körpers ist. Bei einem 1,78 m großen und 80 kg schweren Mann beträgt die Körperoberfläche etwa $2,0 \text{ m}^2$, während sie bei einer 1,63 m großen und 50 kg schweren Frau etwa $1,5 \text{ m}^2$ beträgt. Je 1,5 kg Gewichtsabweichung oder 2,54 cm Größenabweichung von den angegebenen Werten ändert sich die Körperoberfläche um rund 1 %. a) Schätzen Sie den durchschnittlichen Stoffwechselumsatz eines Mannes während eines Tages anhand der folgenden Werte für die verschiedenen Tätigkeiten (pro Quadratmeter Hautfläche): Schlafen: 40 W/m^2 , Sitzen: 60 W/m^2 , Gehen: 160 W/m^2 , mittelschwere körperliche Tätigkeit: 175 W/m^2 , mittelschwere Aerobicübung: 300 W/m^2 . Vergleichen Sie dies mit der Leistung einer 100-W-Glühbirne. b) Drücken Sie Ihr Ergebnis in kcal/Tag aus ($1 \text{ kcal} = 4,19 \text{ kJ}$; dies ist die Einheit, die die Ernährungswissenschaftler zur Charakterisierung des Nahrungsbedarfs verwenden). c) Eine Faustregel von Ernährungswissenschaftlern besagt, dass ein „Durchschnittsmensch“ 25–30 kcal pro kg Körpermasse und Tag essen sollte, um sein Gewicht zu halten. Erscheint diese Abschätzung ausgehend von den Berechnungen in Teil b vernünftig?

5.16 •• Die bei der Verbrennung von 3,78 l Benzin freigesetzte chemische Energie beträgt $1,3 \cdot 10^5 \text{ kJ}$. Schätzen Sie die von allen Autos in Deutschland in einem Jahr verbrauchte Gesamtenergie. Welchem Bruchteil des gesamten jährlichen Energieverbrauchs in Deutschland (derzeit $1,49 \cdot 10^{19} \text{ J}$) entspricht das?

5.17 •• Der maximale Wirkungsgrad von Solarzellen zur Umwandlung von Sonnenenergie in Strom beträgt gegenwärtig ca. 12 %. Es ist bekannt, dass von der Sonnenenergie nur $1,0 \text{ kW/m}^2$ die Erdoberfläche erreichen. Welche Fläche müsste man mit Solarzellen auslegen, um den jährlichen Energieverbrauch Deutschlands ($1,49 \cdot 10^{19} \text{ J}$) zu decken? Nehmen Sie dazu an, dass über Deutschland stets wolkenloser Himmel herrscht.

Arbeit, kinetische Energie und Anwendungen

5.18 • Eine Kiste mit der Masse von 6,0 kg wird aus dem Stand durch eine vertikal wirkende Kraft von 80 N um 3,0 m angehoben. a) Welche Arbeit verrichtet die angreifende Kraft an der Kiste? b) Welche Arbeit verrichtet die Gravitationskraft an der Kiste? c) Welche kinetische Energie besitzt die Kiste am Schluss?

5.19 •• Ein Paar läuft um die Wette. Zunächst haben beide die gleiche kinetische Energie, wobei die Frau schneller läuft. Wenn der Mann seine Geschwindigkeit um 25 % erhöhen würde, wären beide gleich schnell. Der Mann hat eine Masse von 85 kg. Wie groß ist die Masse seiner Partnerin?

5.20 •• Auf ein Teilchen mit einer Masse von 1,5 kg wirkt eine Kraft F_x , die gemäß $F_x = Cx^3$ mit $C = 0,50 \text{ N/m}^3$ vom Ort x des Teilchens abhängt. a) Welche Arbeit verrichtet die Kraft, während sich das Teilchen von $x = 3,0 \text{ m}$ nach $x = 1,5 \text{ m}$ bewegt? b) Bei $x = 3,0 \text{ m}$ hat die Kraft die entgegengesetzte Richtung zur Geschwindigkeit des Teilchens und der Geschwindigkeitsbetrag beträgt $12,0 \text{ m/s}$. Wie groß ist der Geschwindigkeitsbetrag bei $x = 1,5 \text{ m}$? Können Sie allein anhand des Zusammenhangs zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie seine Bewegungsrichtung bei $x = 1,5 \text{ m}$ herleiten? Erläutern Sie Ihre Aussage.

5.21 •• Ein Mann besitzt ein Wochenendhaus mit einem nahe gelegenen schwarzen Wasserbehälter, den die Sonne erwärmt und mit dessen Wasser eine Warmwasseraußendusche betrieben werden kann. Leider ist nun die Pumpe ausgefallen, sodass der Mann das Wasser selbst vom Teich in den 4,0 m hohen Behälter bringen muss. Der Eimer hat eine Masse von 5,0 kg und ein Fassungsvermögen von 15,0 kg Wasser. Allerdings hat er ein Loch. Während der Mann den Eimer mit konstanter Geschwindigkeit v senkrecht hochträgt, fließt mit einer konstanten Rate Wasser aus. Wenn der Mann oben angekommen ist, sind nur noch 5,0 kg übrig. a) Formulieren Sie einen Ausdruck für die Summe der Massen von Eimer und Wasser in Abhängigkeit von der Höhe über dem Teich. b) Wie viel Arbeit muss der Mann für je 5,0 kg Wasser in den Behälter geschüttetes Wasser an dem Eimer verrichten?

5.22 •• Ein Teilchen A mit der Masse m befindet sich zu Beginn bei $x = x_0$ auf der positiven x -Achse. Auf das Teilchen wirkt eine Abstoßungskraft F_x vom Teilchen B , das sich fest am Koordinatenursprung befindet. Die Kraft F_x ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands x beider Teilchen, d. h., es gilt $F_x = c/x^2$ mit einer positiven Konstanten c . Nun wird das Teilchen A aus der Ruhe losgelassen und kann sich unter dem Einfluss der Kraft ungehindert bewegen. Ermitteln Sie eine Formel für die Arbeit, die die Kraft in Abhängigkeit von x am Teilchen A verrichtet. Ermitteln Sie für x gegen unendlich die kinetische Energie und die Geschwindigkeit des Teilchens A .

5.23 •• Abbildung 5.49 zeigt zwei Seilrollen, die so angeordnet sind, dass sie das Heben eines schweren Gewichts erleichtern. Ein Seil läuft um zwei masselose, reibungsfreie Seilrollen,

wobei an einer von ihnen ein Gewicht hängt, auf das die Gravitationskraft F_G wirkt. Ein Arbeiter zieht nun mit der Kraft F an dem losen Ende des Seils. a) Das Gewicht wird eine Strecke h angehoben. Über welche Strecke muss die Kraft wirken? b) Wie viel Arbeit verrichtet das Seil am Gewicht? c) Wie viel Arbeit verrichtet der Arbeiter an dem Seil?

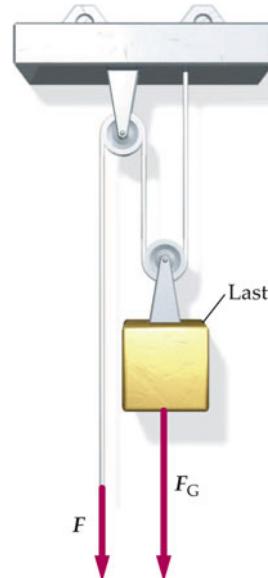


Abbildung 5.49 Zu Aufgabe 5.23.

Leistung

5.24 • Die Kraft F_A verrichtet in 10 s eine Arbeit von 5,0 J. Die Kraft F_B verrichtet in 5,0 s eine Arbeit von 3,0 J. Liefert F_A oder F_B die größere Leistung? Begründen Sie Ihre Antwort.

5.25 • Auf einen 8,0-kg-Körper wirkt eine einzelne Kraft von 5,0 N in $+x$ -Richtung. a) Der Körper beginnt sich zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Ort $x = 0$ aus aus der Ruhe heraus zu bewegen. Formulieren Sie einen Ausdruck für die von dieser Kraft gelieferte Leistung als Funktion der Zeit. b) Wie groß ist die von dieser Kraft gelieferte Leistung zum Zeitpunkt $t = 3,0 \text{ s}$?

5.26 •• Ein Teilchen der Masse m bewegt sich aus der Ruhe (bei $t = 0$) unter dem Einfluss einer einzigen, konstanten Kraft F . Zeigen Sie, dass die Leistung der Kraft zum Zeitpunkt t gleich $P = F^2 t/m$ ist.

Die Erhaltung der mechanischen Energie

5.27 • Ein mathematisches Pendel der Länge l mit einem Pendelkörper der Masse m wird so weit zur Seite gezogen, dass der Pendelkörper eine Höhe $l/4$ über der Gleichgewichtslage hat. Daraufhin wird der Pendelkörper losgelassen. Mit welcher Geschwindigkeit schwingt der Pendelkörper durch die Gleichgewichtslage?

5.28 • Der in Abbildung 5.50 gezeigte Körper mit einer Masse von 3,00 kg wird in einer Höhe von 5,00 m losgelassen und gleitet eine gewölbte, reibungsfreie Rampe hinab. Am Fuß der Rampe befindet sich eine Feder mit einer Federkonstanten von 400 N/m. Nachdem der Körper hinab- und herübergeglitten ist, drückt er die Feder um eine Strecke x zusammen, bevor er vorübergehend zur Ruhe kommt. a) Wie groß ist x ? b) Beschreiben Sie die Bewegung des Körpers, nachdem er kurzzeitig zur Ruhe gekommen ist.



Abbildung 5.50 Zu Aufgabe 5.28.

5.29 •• Gegeben ist eine Kraft F_x , zu der die potenzielle Energie $E_{\text{pot}} = C/x$ gehört, wobei C eine positive Konstante ist. a) Ermitteln Sie die Kraft F_x als Funktion des Orts x . b) Zeigt die Kraft im Gebiet $x > 0$ zum Koordinatenursprung hin oder von ihm weg? Wiederholen Sie die Aufgabe für $x < 0$. c) Steigt oder fällt die potenzielle Energie E_{pot} bei wachsendem x in dem Gebiet mit $x > 0$? d) Beantworten Sie die Fragen b und c für den Fall, dass C negativ ist.

5.30 •• Die Kraft, die auf einen Körper wirkt, ist durch $F_x = a/x^2$ gegeben. Es ist bekannt, dass die Kraft bei $x = 5,0 \text{ m}$ in die $-x$ -Richtung weist und einen Betrag von 25 N hat. Bestimmen Sie die potenzielle Energie dieser Kraft als Funktion von x . Legen Sie -10 J als Bezugspunkt der potenziellen Energie bei $x = 2,0 \text{ m}$ fest.

5.31 •• Das in Abbildung 5.51 gezeigte System ist anfangs in Ruhe. Nun wird der untere Faden zerschnitten. Wie schnell sind beide Gewichte, wenn sie kurzzeitig die gleiche Höhe haben? Die Rolle sei reibungsfrei und ihre Masse vernachlässigbar.

5.32 •• Ein Ball am Ende eines Fadens bewegt sich mit der konstanten mechanischen Energie E auf einer vertikalen Kreisbahn. Wie groß ist der Unterschied zwischen der Zugkraft des Fadens im tiefsten und im höchsten Punkt der Kreisbahn?

5.33 •• Ein Achterbahnwagen mit einer Masse von 1500 kg beginnt seine Fahrt in einer Höhe $h = 23,0 \text{ m}$ über dem Boden (Abbildung 5.52) vor einem Looping mit einem Durchmesser von 15,0 m. Die Reibung sei vernachlässigbar. Wie groß ist die nach unten gerichtete Kraft der Schienen auf den Wagen im höchsten Punkt des Loopings?

5.34 •• Ein Stein wird in einem Winkel von 53° zur Horizontalen nach oben geworfen. Er erreicht eine maximale Höhe von 24 m über dem Abwurfpunkt. Mit welcher Geschwindigkeit wurde er abgeworfen?

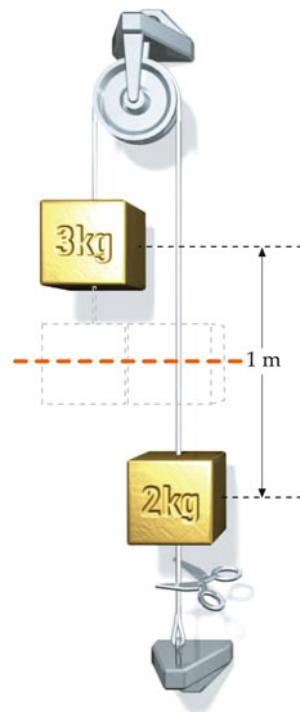


Abbildung 5.51 Zu Aufgabe 5.31.



Abbildung 5.52 Zu Aufgabe 5.33.

5.35 •• Ein Handball mit einer Masse von 0,17 kg wird vom Dach eines 12 m hohen Gebäudes geworfen. Sein Abwurf erfolgt mit 30 m/s in einem Winkel von 40° über der Horizontalen. a) Welche Höhe erreicht der Ball? b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Ball auf den Boden auf?

5.36 •• Ein Pendel besteht aus einem Pendelkörper mit einer Masse von 2,0 kg, der an einer leichten, 3,0 m langen Schnur befestigt ist. Der ruhig an der senkrechten Schnur hängende Pendelkörper wird schnell horizontal so angestoßen, dass er eine horizontale Geschwindigkeit von 4,5 m/s erhält. Betrachten Sie den Moment, in dem die Schnur einen Winkel von 30° zur Vertikalen bildet. Wie groß sind dort a) der Geschwindigkeitsbetrag, b) die potenzielle Energie der Gravitation des Körpers (in Bezug auf den tiefsten Punkt) und c) die Zugkraft in der

Schnur? d) Welchen Winkel zur Vertikalen erreicht der Pendelkörper in seinem höchsten Punkt?

5.37 ••• Abbildung 5.53 zeigt eine neu entwickelte Designerwanduhr. Allerdings sind sich die Designer nicht sicher, ob sie schon marktreif ist – eventuell könnte sie in einem labilen Gleichgewicht sein. Dies soll anhand der potenziellen Energie und der Gleichgewichtsbedingungen untersucht werden. Die Uhr mit der Masse m_U wird von zwei dünnen Drähten gehalten, die jeweils über eine reibungsfreie Rolle mit vernachlässigbarem Durchmesser laufen und jeweils mit einem Gegengewicht der Masse m_G verbunden sind. a) Ermitteln Sie die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit von der Strecke y . b) Für welchen y -Wert ist die potentielle Energie des Systems am kleinsten? c) Wenn die potentielle Energie am kleinsten ist, ist das System im Gleichgewicht, d. h. die Summe aller Kräfte null. Beweisen Sie anhand des zweiten Newton'schen Axioms, dass dies für den in Teilaufgabe b erhaltenen y -Wert tatsächlich der Fall ist. d) Schließlich die entscheidende Frage: Handelt es sich dabei um ein stabiles oder um ein labiles Gleichgewicht?

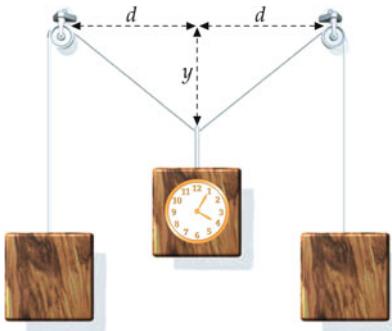


Abbildung 5.53 Zu Aufgabe 5.37.

5.38 ••• An der Decke hängt ein Pendelkörper, der über eine Feder direkt unter der Pendelaufhängung mit dem Boden verbunden ist (Abbildung 5.54). Die Masse des Pendelkörpers sei m , die Länge des Fadens l und die Federkonstante k_F . Die Feder ist entspannt $l/2$ lang, und der Abstand zwischen Decke und Boden beträgt $1,5l$. Das Pendel wird zur Seite gezogen, sodass es einen Winkel θ zur Vertikalen bildet, und losgelassen. Geben Sie eine Formel für den Geschwindigkeitsbetrag des Pendelkörpers in dem Punkt direkt unter der Aufhängung an.

Energieerhaltung

5.39 • Ein Student, der am Abend eine Portion Pizza verzehrt hat, möchte am nächsten Morgen als Ausgleich einen 120 m hohen Hügel besteigen. a) Berechnen Sie unter der Annahme eines sinnvollen Werts für die Masse, um wie viel dabei seine potentielle Energie der Gravitation steigt. b) Woher kommt diese Energie? c) Der menschliche Körper besitzt durchschnittlich einen Wirkungsgrad von 20 %. Wie viel Energie wurde dabei in Wärmeenergie umgewandelt? d) Wie viel chemische Energie

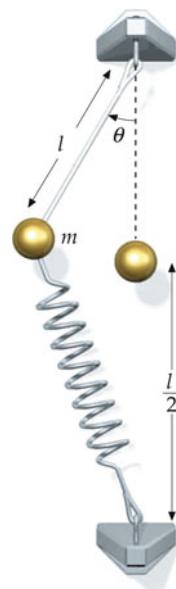


Abbildung 5.54 Zu Aufgabe 5.38.

muss der Student beim Aufstieg aufwenden? Reicht es aus, einmal auf den Hügel zu steigen, wenn davon ausgegangen wird, dass die Verdauung der Portion Pizza 1,0 MJ (knapp 250 kcal) Energie freisetzt?

5.40 • Ein Auto mit einer Masse von 2000 kg fährt anfangs mit 25 m/s auf einer horizontalen Straße. Plötzlich bremst der Fahrer heftig, wobei das Auto ins Rutschen kommt und schließlich 60 m weiter stehen bleibt. a) Wie viel Energie wird durch die Reibung umgewandelt? b) Berechnen Sie den Gleitreibungskoeffizienten zwischen den Reifen und der Straße. (Hinweis: Beim Bremsen mit herkömmlichen Bremsen wird die kinetische Energie durch Reibung in den Bremsen zu 100 % freigesetzt, wenn das Auto nicht rutscht. Dagegen werden bei der Rückgewinnungsbremse in Hybridfahrzeugen nur 70 % der kinetischen Energie freigesetzt.)

5.41 •• Ein Mädchen mit einer Masse von 20 kg rutscht eine 3,2 m hohe Rutsche auf einem Spielplatz hinunter. Unten angekommen, ist es 1,3 m/s schnell. a) Wie viel Energie ist durch die Reibung umgewandelt worden? b) Wie groß war der Gleitreibungskoeffizient zwischen dem Mädchen und der Rutsche, wenn die Rutsche eine Neigung von 20° gegen die Horizontale hat?

5.42 ••• Ein Block mit der Masse m ruht auf einer Rampe, die einen Winkel θ zur Horizontalen bildet. Der Block ist gemäß Abbildung 5.55 mit einer Feder mit der Federkonstanten k_F verbunden. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Block und Rampe sei $\mu_{R,h}$ und der Gleitreibungskoeffizient $\mu_{R,g}$. Wenn die Feder sehr langsam nach oben gezogen wird, beginnt sich der Block zu einem bestimmten Zeitpunkt plötzlich zu bewegen. a) Geben Sie einen Ausdruck für die Dehnung d der Feder

in dem Moment an, in dem sich der Block in Bewegung setzt.
 b) Angenommen, der Block kommt genau an dem Punkt wieder zum Stillstand, an dem die Feder entspannt (also weder gedehnt noch gestaucht) ist. Geben Sie hierfür einen Ausdruck für $\mu_{R,g}$ an.

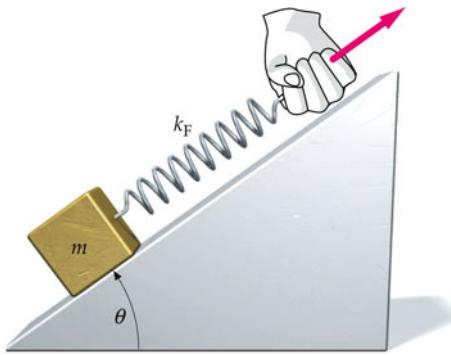


Abbildung 5.55 Zu Aufgabe 5.42.

Allgemeine Aufgaben

5.43 • In Österreich gab es einmal einen Skilift mit 5,6 km Länge. Die Gondeln benötigten 60 min für die Fahrt nach oben. Man nehme an, dass zwölf Gondeln jeweils mit einer Nutzlast von 550 kg den Berg hochfahren, während zwölf leere Gondeln hinabfahren. Der Lift habe außerdem eine Steigung von 30° . Schätzen Sie ab, welche Leistung P der Motor haben musste, um den Skilift anzutreiben.

5.44 • Ein Block mit der Masse m gleitet mit konstanter Geschwindigkeit v eine Ebene hinab, die um den Winkel θ gegen die Horizontale geneigt ist. Leiten Sie einen Ausdruck für die Energie ab, die während des Zeitintervalls Δt durch Reibung abgegeben wird.

5.45 • Eine Farm soll mit einer Solarenergieanlage ausgestattet werden. Am Standort der Farm erreichen an einem wolkenlosen Tag tagsüber im Mittel $1,0 \text{ kW/m}^2$ die Erdoberfläche. Wie groß müsste die Sonnenkollektorfläche ausgelegt werden, um tagsüber eine Bewässerungspumpe mit einer Leistung von 3 kW zu betreiben, wenn die Sonnenenergie mit einem Wirkungsgrad von 25 % in Elektroenergie umgewandelt werden kann?

5.46 •• Ein Geschoss mit einer Masse von $0,0200 \text{ kg}$ erhält beim Abschuss eine kinetische Energie von 1200 J . a) Das Geschoss wird in einem $1,00 \text{ m}$ langen Gewehrlauf beschleunigt. Wie groß ist die durchschnittliche Leistung, die im Lauf an das Geschoss abgegeben wird? b) Wie groß ist unter Vernachlässigung des Luftwiderstands die Reichweite des Geschosses, wenn es unter einem Winkel abgeschossen wird, bei dem die Reichweite genau gleich der maximalen Höhe der Flugbahn ist?

5.47 •• Eine Kiste mit der Masse m ruht am Fuß einer reibungsfreien geneigten Ebene (Abbildung 5.56). An der Kiste ist ein Seil angebracht, das sie mit der konstanten Zugkraft F_s zieht. a) Ermitteln Sie die Arbeit, die die Zugkraft F_s verrichtet, während die Kiste eine Strecke x die geneigte Ebene hinaufgezogen wird. b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Kiste als Funktion von x . c) Welche Leistung führt die Zugkraft im Seil in Abhängigkeit von x und θ zu?

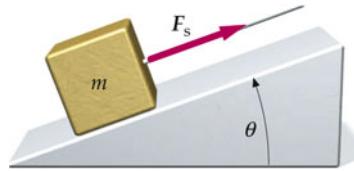


Abbildung 5.56 Zu Aufgabe 5.47.

5.48 •• In einem neuen Skigebiet wird ein Schlepplift geplant. Er soll jederzeit bis zu 80 Skiläufer einen 600 m langen und 15° zur Horizontalen geneigten Hang hinaufziehen können. Seine Geschwindigkeit beträgt $2,50 \text{ m/s}$. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Skiläufern und Schnee beträgt üblicherweise $0,060$. Für welche Leistung muss der Motor des Skilifts mindestens ausgelegt werden, wenn die Masse eines Skiläufers mit durchschnittlich $75,0 \text{ kg}$ angenommen wird? Sicherheitshalber soll dabei ein Motor verwendet werden, dessen Nennleistung 50% über der notwendigen Mindestleistung liegt.

5.49 •• Bei einem Vulkanausbruch wird ein poröses Vulkansteinstück, das eine Masse von 2 kg besitzt, mit einer Geschwindigkeit von 40 m/s senkrecht in die Luft geschleudert. Es erreicht eine Höhe von 50 m und fällt anschließend wieder zu Boden. a) Wie groß ist die kinetische Energie des Steins am Anfang? b) Wie stark steigt die Wärmeenergie des Steins durch die Reibung während des Aufstiegs? c) Beim Fallen beträgt der Anstieg der Wärmeenergie durch den Luftwiderstand nur 70% der Änderung beim Steigen des Gesteinsstücks. Mit welcher Geschwindigkeit schlägt das Gesteinsstück wieder auf den Boden auf?

5.50 •• a) Berechnen Sie die kinetische Energie eines Autos mit einer Masse von 1200 kg , das mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h fährt. Welche Energie ist mindestens notwendig, um das Auto mit konstanter Geschwindigkeit von 50 km/h über eine Strecke von 300 m zu fahren, wenn die Reibung (in Form von Rollreibung und Luftwiderstand) zu einer Bremskraft von 300 N führt?

5.51 •• Abbildung 5.57 zeigt ein gern vorgeführtes Hörsaalexperiment, mit dem die Energieerhaltung und die Newton'schen Axiome demonstriert werden können. Auf einem geraden Luftkissen gleitet ein Gleitkörper, an dem eine Schnur befestigt ist. Die Schnur läuft über eine masselose und reibungsfreie Rolle, und an ihrem Ende hängt ein Gewicht. Der Gleitkörper hat die Masse m_{GI} , während das Gewicht an der Schnur die Masse m_{Ge} hat. Wenn die Luftzufuhr zu dem Luftkissen eingeschaltet

wird, kann sich der Gleitkörper im Wesentlichen reibungsfrei bewegen. Nun wird das hängende Gewicht losgelassen und die Geschwindigkeit gemessen, die der Gleitkörper besitzt, nachdem das Gewicht über eine bestimmte Strecke y gefallen ist. a) Wenden Sie die Erhaltung der mechanischen Energie an und ermitteln Sie die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von y , um nachzuweisen, dass die gemessene Geschwindigkeit mit der Theorie übereinstimmt. b) Wenden Sie das zweite und das dritte Newton'sche Axiom direkt an, um die Rechnung zu überprüfen. Zeichnen Sie dazu für jede der beiden Massen ein KräfteDiagramm und ermitteln Sie über die Newton'schen Axiome ihre Beschleunigungen. Ermitteln Sie anschließend anhand kinematischer Beziehungen die Geschwindigkeit des Gleitkörpers als Funktion von y .



Abbildung 5.57 Zu Aufgabe 5.51.

5.52 •• In einem Modell für das Jogging wird angenommen, dass die verausgabte Energie dazu verwendet wird, die Füße und die Unterschenkel zu beschleunigen und abzubremsen. Wenn die Geschwindigkeit, mit der der Läufer joggt, v ist, ist die Maximalgeschwindigkeit der Füße und der Unterschenkel ungefähr $2v$. (Von dem Zeitpunkt an, zu dem sich ein Fuß vom Boden löst, bis zu dem Moment, zu dem er ihn wieder berührt, legt der Fuß etwa die doppelte Strecke wie der Rumpf zurück, sodass er im Mittel die doppelte Geschwindigkeit wie dieser haben muss.) Die Masse eines Fußes und Unterschenkels sei m . Die Energie, die benötigt wird, um Fuß und Unterschenkel eines Beins aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit $2v$ zu beschleunigen, ist $\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$; die gleiche Energie wird benötigt, um die Masse wieder abzubremsen, sodass sie für den nächsten Schritt zur Ruhe kommt. Nehmen Sie die Masse des Fußes und Unterschenkels des Beins eines Läufers mit 5,0 kg an. Er läuft mit einer Geschwindigkeit von 3,0 m/s, und seine Schrittweite beträgt 1,0 m. Die Energie, die er jedem Bein jeweils auf 2,0 m zuführen muss, beträgt $2mv^2$, sodass er beiden Beinen in jeder Sekunde, die er läuft, die Energie $6mv^2$ zuführen muss. Ermitteln Sie unter Zugrundelegung dieses Modells die Rate, mit der der Jogger Energie verbraucht, wenn seine Muskeln einen Wirkungsgrad von 20 % besitzen.

5.53 ••• Eine Kraft, die auf ein Teilchen mit den Koordinaten (x, y) in der x - y -Ebene wirkt, ist durch die Gleichung $\mathbf{F} = (F_0/r)(y\hat{x} - x\hat{y})$ gegeben, wobei F_0 eine positive Konstante und r der Abstand des Teilchens vom Koordinatenursprung ist. a) Zeigen Sie, dass der Betrag dieser Kraft F_0 ist und dass die Kraft senkrecht auf dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ steht. b) Welche Arbeit verrichtet die Kraft an einem Teilchen, das sich auf einem Kreis mit einem Radius von 5,0 m einmal um den Koordinatenursprung dreht?

5.54 ••• Ein Pendel besteht aus einem kleinen Pendelkörper mit der Masse m , der an einem Faden der Länge l befestigt ist. Der Pendelkörper wird seitlich ausgelenkt, wobei der Faden horizontal ist (Abbildung 5.58). Anschließend wird er aus dieser Ruhelage losgelassen. Am tiefsten Punkt seiner Bahn schlägt der Faden gegen einen kleinen Nagel, der sich in einem Abstand r_N über diesem tiefsten Punkt befindet. Zeigen Sie, dass r_N kleiner als $\frac{2}{5}l$ sein muss, damit der Faden straff bleibt und sich der Pendelkörper im Kreis um den Nagel dreht.

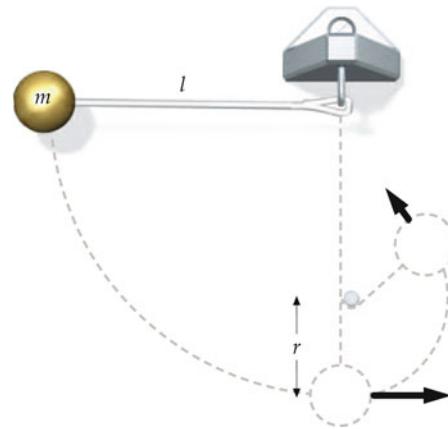


Abbildung 5.58 Zu Aufgabe 5.54.

5.55 ••• Der Pendelkörper eines Pendels der Länge l wird um einen Winkel θ_0 gegen die Senkrechte ausgelenkt und anschließend losgelassen. In Beispiel 5.15 wurde die Energieerhaltung ausgenutzt, um die Geschwindigkeit des Pendelkörpers am tiefsten Punkt seiner Bahn zu berechnen. Versuchen Sie nun, das gleiche Ergebnis mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms zu berechnen: a) Zeigen Sie, dass die Anwendung des Newton'schen Axioms in tangentialer Richtung $\frac{dv_t}{dt} = -g \sin \theta$ ergibt, wobei v_t die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit und θ der Winkel zwischen dem Faden und der Vertikalen ist. b) Zeigen Sie nun, dass $v_t = l \frac{d\theta}{dt}$ gilt. c) Verwenden Sie diese Relation sowie die Kettenregel der Ableitung, um die Formel

$$\frac{dv_t}{dt} = \frac{dv_t}{d\theta} \frac{v_t}{l}$$

herzuleiten. d) Verknüpfen Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben a und c zu der Formel $v_t \, dv_t = -g l \sin \theta \, d\theta$. e) Integrieren Sie die linke Seite dieser Formel von $v_t = 0$ bis zur Endgeschwindigkeit v_t und die rechte Seite von $\theta = \theta_0$ bis

$\theta = 0$. Zeigen Sie, dass das Ergebnis $v_t = \sqrt{2gh}$ lautet, wobei h die Anfangshöhe des Pendelkörpers über der Gleichgewichtslage seiner Schwingung ist.

Der Impuls

6



Während des kurzen Moments, in dem der Golfschläger mit dem Ball in Kontakt ist, übt er eine sehr große Kraft auf den Ball aus, aufgrund derer der Ball durch die Luft fliegt. Diese Kraft kann etwa 10 000-mal so groß sein wie die Gewichtskraft des Balls und führt für die Dauer von etwa einer halben Millisekunde zu einer mittleren Beschleunigung von rund 10 000 g. (© Joe McNally/Getty Images.)

Der Impuls

Welche Kraft übt der Schläger auf den Golfball aus, wenn der Golfspieler einen 200-m-Schlag führt? (Siehe Beispiel 6.7.)

6.1	Impulserhaltung	212
6.2	Stoßarten	218
6.3	Kraftstoß und zeitliches Mittel der Kraft	219
6.4	Inelastische Stoße	225
6.5	Elastische Stoße	231
	Zusammenfassung	237
	Aufgaben	239

Wenn ein Golfschläger auf den Golfball trifft, steigt die Kraft auf den Ball bis zu einem Maximalwert und wird wieder zu null, sobald der Ball den Schläger verlässt. Um zu beschreiben, wie eine solche zeitabhängige Kraft die Bewegung des Körpers beeinflusst, auf den sie wirkt, müssen wir zwei neue Begriffe einführen: den Kraftstoß und den Impuls eines Körpers. Wie die Energie bleibt auch der Impuls erhalten. Eines der wichtigsten Prinzipien in der Physik ist der *Impulserhaltungssatz*, nach dem sich der Gesamtimpuls eines Systems und seiner Umgebung nicht ändert. Wo immer sich der Impuls eines Systems ändert, können wir dafür das Auftreten oder das Verschwinden von Impuls an anderer Stelle verantwortlich machen. Damit können wir Stoße zwischen einem Golfschläger und Golfball, zwischen Fahrzeugen oder zwischen den subatomaren Teilchen in einem Kernreaktor untersuchen.

In diesem Kapitel werden wir die Vorstellung von Kraftstoß und Impuls einführen und zeigen, wie man durch die Integration des zweiten Newton'schen Axioms den wichtigen Zusammenhang zwischen Impulsänderung und Kraftstoß erkennt. Wir bestimmen ferner, wann der Impuls eines Systems konstant bleibt und wie man die Impulserhaltung ausnutzt, um Stöße zwischen Körpern zu behandeln.

6.1 Impulserhaltung

Als Newton sein zweites Axiom ausarbeitete, betrachtete er das Produkt von Masse und Geschwindigkeit als ein Maß für die „Bewegungsgröße“ eines Körpers. Heute nennen wir dieses Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Teilchens den **Impuls p** des Teilchens:

$$p = m v. \quad (6.1)$$

DEFINITION FÜR DEN IMPULS EINES TEILCHENS

Die Größe p wird manchmal ausdrücklich als *linearer Impuls* eines Teilchens bezeichnet, um sie von dem *Drehimpuls* zu unterscheiden, den wir in Kapitel 8 behandeln. Wenn klar ist, dass der lineare Impuls gemeint ist, werden wir das Beiwort *linear* weglassen und abkürzend nur vom *Impuls* sprechen. Im Rest dieses Kapitels werden wir nur Impuls schreiben, wenn vom linearen Impuls die Rede ist.

Der Impuls ist eine Vektorgröße, d. h. das Produkt eines Vektors (nämlich der Geschwindigkeit) mit einem Skalar (der Masse des Teilchens). Sein Betrag ist $m v$ und hat dieselbe Richtung wie v . Die Dimension des Impulses ist Masse mal Geschwindigkeit, die SI-Einheit des Impulses ist daher $\text{kg} \cdot \text{m/s}$.

Man kann sich den Impuls als ein Maß für die Schwierigkeit vorstellen, ein Teilchen zum Stillstand zu bringen. Beispielsweise hat ein schwerer Sattelschlepper bei einer bestimmten Geschwindigkeit einen weit höheren Impuls als ein Kleinwagen, der mit derselben Geschwindigkeit fährt. Man muss eine größere Kraft aufwenden, um den LKW in einer bestimmten Zeit zu stoppen als um einen PKW zum Stillstand zu bringen.

Mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms für ein Teilchen lässt sich der Impuls des Teilchens mit der auf das Teilchen wirkenden Kraft verbinden. Durch Ableitung von Gleichung 6.1 erhalten wir

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma.$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Masse konstant ist. Das ist normalerweise (auch in den folgenden Beispielen) immer der Fall (vgl. hierzu Abschnitt 7.6, in dem explizit mit veränderlichen Massen gerechnet wird). Ersetzen von ma durch die Kraft F ergibt

$$F = \frac{dp}{dt}. \quad (6.2)$$

Mit anderen Worten: Die auf ein Teilchen wirkende Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des Teilchenimpulses. (Dies ist die Form, in der Newton in seinem berühmten Werk *Principia* von 1687 das Axiom ursprünglich ausdrückte, die Form $F = ma$ wurde erst später hergeleitet.)

Der Gesamtimpuls p eines Teilchensystems ist die Summe der Impulse der einzelnen Teilchen:

$$p = \sum_i m_i v_i = \sum_i p_i.$$

Dementsprechend verursacht eine äußere Kraft auf das System, bzw. auf seine Teile, eine Änderung des Impulses über die Zeit:

$$\sum_i F_{\text{ext},i} = F_{\text{ext}} = \frac{dp}{dt}. \quad (6.3)$$

Wenn die äußeren Kräfte auf ein System in ihrer Summe null ergeben, so ist auch die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses null, und der Gesamtimpuls des Systems bleibt konstant:

$$p = \sum_i m_i v_i = \text{konstant, wenn } F_{\text{ext}} = 0. \quad (6.4)$$

IMPULSERHALTUNG

Das Ergebnis ist als **Impulserhaltungssatz** bekannt:

Wenn die Summe aller äußeren Kräfte auf ein System null ist, dann bleibt der Gesamtimpuls des Systems konstant.

IMPULSERHALTUNGSSATZ IN WORTEN

Dieser Satz ist einer der wichtigsten in der ganzen Physik. Er ist weiter anwendbar als der Satz von der Erhaltung der *mechanischen Energie*, weil die inneren Kräfte, die von einem Teilchen des Systems auf ein anderes ausgeübt werden, oft nicht konservativ sind. Daher können solche inneren Kräfte die mechanische Gesamtenergie des Systems ändern, obwohl sie den Gesamtimpuls des Systems nicht beeinflussen. Der Impulserhaltungssatz ist eine Vektorbeziehung, er ist daher auch für jede einzelne Komponente gültig. Wenn beispielsweise die x -Komponente der resultierenden äußeren Kraft null ist, so bleibt die x -Komponente des Gesamtimpulses konstant. Es gilt somit:

$$\text{Wenn } F_{\text{ext},x} = 0, \text{ dann gilt } p_x = \text{konstant.} \quad (6.5)$$

KOMPONENTENWEISE IMPULSERHALTUNG

Die Beispiele 6.1 bis 6.4 illustrieren Anwendungen des Impulserhaltungssatzes.

Vorgehensweise:

Berechnung von Geschwindigkeiten mithilfe der Impulserhaltung (Gleichung 6.4)

Stellen Sie fest, ob die äußere Kraft $\sum \mathbf{F}$ (oder $\sum F_x$) auf das System für ein bestimmtes Zeitintervall vernachlässigbar ist. Wenn das nicht so sein sollte, hören Sie hier auf.

1. Zeichnen Sie eine Skizze, die das System vor und nach dem Zeitintervall zeigt. Zeichnen Sie Koordinatenachsen ein und kennzeichnen Sie die Vektoren der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit.
2. Setzen Sie Anfangs- und Endimpuls gleich, schreiben Sie dafür die Gleichung $m_1 v_{1A} + m_2 v_{2A} = m_1 v_{1E} + m_2 v_{2E}$ (oder $m_1 v_{1A,x} + m_2 v_{2A,x} = m_1 v_{1E,x} + m_2 v_{2E,x}$) auf.
3. Setzen Sie die gegebenen Informationen in die Gleichung(en) von Schritt 2 ein und lösen Sie nach der gesuchten Größe auf.

Plausibilitätsprüfung: Stellen Sie sicher, dass Sie alle Minuszeichen berücksichtigt haben, die mit den Geschwindigkeitskomponenten verbunden sind; sie beeinflussen Ihre Lösung.



Die zwei Pucks bewegen sich auf einer ebenen Luftkissenbahn. (Die Leitungen sind in diesem Bild nicht gezeigt.) Die Geschwindigkeiten der beiden Pucks ändern sich beim Stoß sowohl in ihrem Betrag als auch in ihrer Richtung, aber der Gesamtimpuls des Systems bestehend aus den beiden Pucks bleibt konstant und wird durch die inneren Kräfte beim Stoß nicht geändert. (Mit freundlicher Genehmigung der Daedalon Corporation.)

Beispiel 6.1: Reparatur im Weltraum

Während der Reparatur des Hubble-Weltraumteleskops ersetzt die Astronautin Lucy ein Sonnensegel, dessen Rahmen verbogen ist. Während sie das beschädigte Sonnensegel in den Raum stößt, wird sie in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt. Die Masse der Astronautin beträgt 60 kg, die Masse des Sonnensegels 80 kg. Lucy und das Segel befinden sich

bezüglich des Raumschiffs in Ruhe. Lucy stößt dann das Segel mit einer Geschwindigkeit von 0,3 m/s bezüglich des Raumschiffs weg. Wie schnell bewegt sich Lucy daraufhin bezüglich des Raumschiffs? (Während der Operation ist die Astronautin angeleint; für die Rechnung kann man jedoch annehmen, dass die Leine nicht gespannt ist.)



(© NASA.)

Problembeschreibung: Wählen Sie als System die Astronautin und das Sonnensegel. Das Sonnensegel soll sich in die negative x -Richtung bewegen. Auf dieses System wirken keine äußeren Kräfte, und der Gesamtimpuls des Systems bleibt erhalten. Da die Masse der Astronautin und des Sonnensegels bekannt sind, lässt sich die

Geschwindigkeit der Astronautin mithilfe des Impulserhaltungssatzes aus der Geschwindigkeit des Sonnensegels bestimmen. Da der Impuls des Systems anfangs null ist, bleibt er null.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine Skizze des Systems vor und nach dem Stoß; kennzeichnen Sie dabei die die Astronautin Lucy betreffenden Größen mit dem Index L, die das Sonnensegel betreffenden Größen mit dem Index S. Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren ein (Abbildung 6.1).

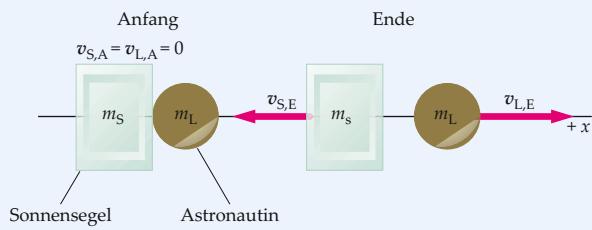


Abbildung 6.1 Skizze der Stoßbewegung der Astronautin und des Segels.

2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf das System an. Es wirken keine äußeren Kräfte auf das System, daher bleibt der Impuls des Systems konstant:

$$\sum_i \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$0 = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Rightarrow \mathbf{p} = \text{const}$$

3. Setzen Sie den Anfangsimpuls des Systems und den Impuls am Ende des Vorgangs gleich. Da der Gesamtmpuls anfangs null ist, bleibt er null:

$$\mathbf{p}_E = \mathbf{p}_A$$

$$m_S v_{S,E} + m_L v_{L,E} = m_S v_{S,A} + m_L v_{L,A}$$

$$m_S v_{S,E} + m_L v_{L,E} = 0 + 0$$

4. Lösen Sie nach der Geschwindigkeit der Astronautin auf:

$$v_{L,E} = -\frac{m_S}{m_L} v_{S,E} = -\frac{80 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} (-0,30 \text{ m/s}) \hat{x}$$

$$= [0,40 \text{ m/s}] \hat{x}$$

Plausibilitätsprüfung: Es war zu erwarten, dass sich die Astronautin in positive x-Richtung bewegt. Da ihre Masse geringer ist als die des Sonnensegels, erwarten wir auch, dass ihre Geschwindigkeit größer ist als die des Sonnensegels. Das Ergebnis stimmt mit diesen Erwartungen überein.

Weitergedacht: Obwohl der Impuls erhalten bleibt, steigt die mechanische Energie des Systems, weil chemische Energie in den Muskeln der Astronautin in kinetische Energie umgesetzt wurde.

Übung 6.1: Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems Astronautin-Sonnensegel am Ende des Vorgangs. □

Beispiel 6.2: Waggon im Rangierbahnhof

Auf einem Rangierbahnhof wird ein Eisenbahnwaggon mit einer Masse von 14 000 kg auf 4 m/s beschleunigt und rollt auf ebener Strecke auf eine Ladeeinrichtung zu. Als er die Ladeeinrichtung passiert, fallen schlagartig 2000 kg Getreide auf den fahrenden Waggon. Wie lange braucht der Wagen für die 500 m bis zu seinem Ziel? Nehmen Sie an, dass das Getreide senkrecht nach unten fällt und dass die Bremsung des Waggons durch Luft- oder Rollwiderstand zu vernachlässigen ist.

Problembeschreibung: Berechnen Sie die gesuchte Zeit aus der Entfernung und der Geschwindigkeit des Waggons. Dabei bilden der Waggon und das Getreide das betrachtete System (Abbildung 6.2). Der Waggon bewegt sich in positiver x-Richtung. Es wirkt keine äußere Kraft in x-Richtung auf das System, und die x-Komponente des Impulses bleibt erhalten. Die Endgeschwindigkeit des gefüllten Waggons lässt sich aus seinem Impuls nach dem Beladen berechnen. Er ist gleich dem Impuls vor dem Beladen. (Das Getreide hat beim Aufladen keinen Impuls in x-Richtung.) m_W und m_G sind die Massen von Waggon bzw. Getreide.

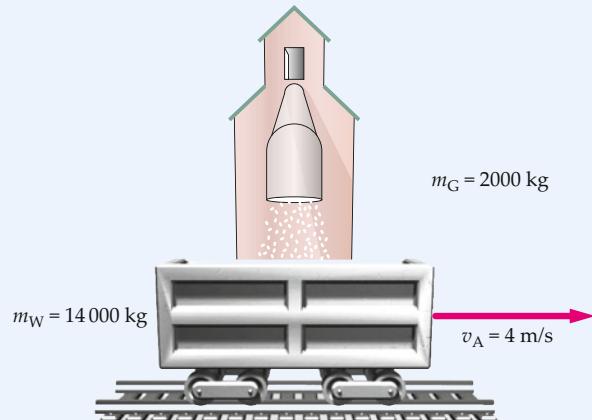


Abbildung 6.2 Skizze des Waggon-Getreide Systems.

Lösung: 1. Die Zeit, die der Waggon von der Verladeeinrichtung zu seinem Ziel benötigt, ist folgendermaßen mit der Entfernung d bis zum Ziel und der Endgeschwindigkeit v_E des Waggons nach dem Beladen verknüpft:

$$d = v_{E,x} \Delta t$$

2. Zeichnen Sie ein Kräftebild des Systems, bestehend aus dem Waggon, dem bereits im Waggon befindlichen Getreide und dem Getreide, das in den Waggon geladen wird (Abbildung 6.3). Zeichnen Sie Koordinatenachsen ein.

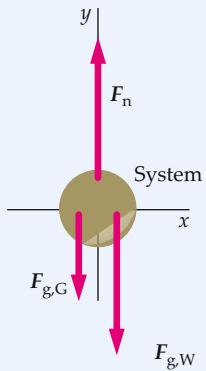


Abbildung 6.3 Drei Kräfte wirken auf das System: Die Gravitationskräfte $F_{g,G}$ und $F_{g,W}$ auf das Getreide bzw. auf den Waggon sowie die Normalkraft F_n auf den Waggon.

3. Die Summe der äußeren Kräfte auf das System von Getreide und Waggon ist gleich der zeitlichen Änderung des Systemimpulses:

$$\sum \mathbf{F}_{A,ext} = \mathbf{F}_{g,G} + \mathbf{F}_{g,W} + \mathbf{F}_n = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

4. Alle äußeren Kräfte sind vertikal, daher sind die x -Komponenten der einzelnen Kräfte jeweils null. Gehen Sie von der x -Komponente jedes Terms in dem Ergebnis von Schritt 3 aus. Die x -Komponente der gesamten äußeren Kraft ist null, daher ist p_x konstant:

$$\begin{aligned} F_{g,Gx} + F_{g,Wx} + F_{nx} &= \frac{dp_x}{dt} \\ 0 + 0 + 0 &= \frac{dp_x}{dt} \end{aligned}$$

Damit gilt $p_{E,x} = p_{A,x}$.

5. Zeichnen Sie eine Skizze des Systems im Zustand vor und nach dem Aufladen des Getreides (Abbildung 6.4).

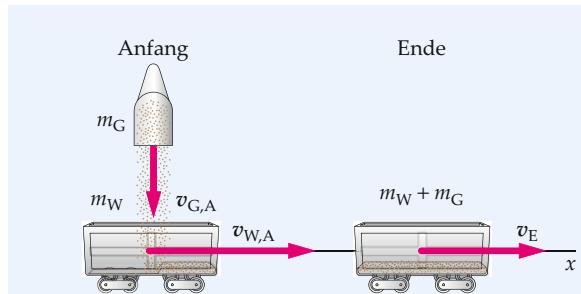


Abbildung 6.4 Bewegungsdiagramm des Systems mit den jeweils zugehörigen Massen.

6. Wenden Sie die Impulserhaltung an, um das Verhältnis von Endgeschwindigkeit $v_{E,x}$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_{A,x}$ zu bestimmen. Die x -Komponente des Systemimpulses bleibt erhalten:

$$\begin{aligned} p_{E,x} &= p_{A,x} \\ (m_W + m_G) v_{E,x} &= m_W v_{A,x} + m_G(0) \end{aligned}$$

7. Auflösen nach $v_{E,x}$ ergibt:

$$v_{E,x} = \frac{m_W}{m_W + m_G} v_{A,x}$$

8. Setzen Sie das Ergebnis für $v_{E,x}$ in Schritt 1 ein und lösen Sie nach der Zeit auf:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{d}{v_{E,x}} = \frac{(m_W + m_G)d}{m_W v_{A,x}} \\ &= \frac{(14\,000 \text{ kg} + 2\,000 \text{ kg})(500 \text{ m})}{(14\,000 \text{ kg})(4,00 \text{ m/s})} \\ &= [143 \text{ s}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Masse des leeren Waggons ist siebenmal so groß wie die Masse des aufgeladenen Getreides; es ist daher nicht zu erwarten, dass die Geschwindigkeit des Waggons durch das Getreide wesentlich geändert wird. Wenn der Waggon mit seiner Anfangsgeschwindigkeit von 4,00 m/s weiterfahren würde, benötigte er für die 500 m lange Strecke $(500 \text{ m})/(4,00 \text{ m/s}) = 125 \text{ s}$. Das in Schritt 8 berechnete Ergebnis von gut 140 s ist, wie erwartet, nur unwesentlich länger als 125 s. ■

Beispiel 6.3: Training auf dem Skateboard

Eine 40,0 kg schwere Skateboarderin trainiert mit zwei Hanteln von je 5,00 kg. Aus dem Stillstand beginnend, wirft sie die Hanteln nacheinander horizontal fort. Die Hanteln bewegen sich nach dem Wurf mit einer Geschwindigkeit von 7,00 m/s relativ zu ihr. Das

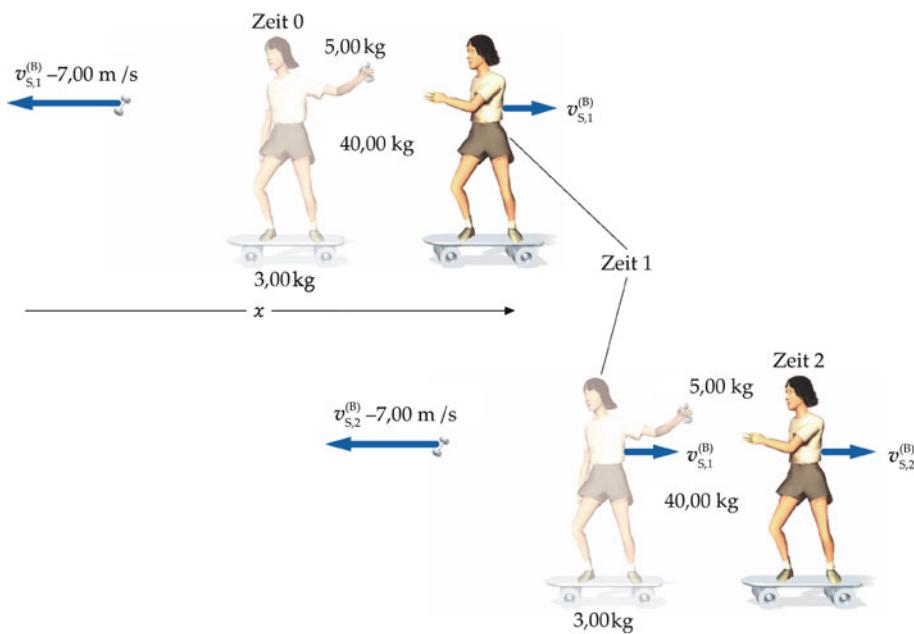


Abbildung 6.5 Die Zahlen im Index geben die Zeit an: Zeit 0 ist vor dem ersten Wurf, Zeit 1 zwischen den beiden Würfen und Zeit 2 nach dem zweiten Wurf.

Board wiegt 3,00 kg und soll sich reibungsfrei bewegen. a) Wie schnell wird die Skateboarderin nach dem ersten Wurf in die entgegengesetzte Richtung getrieben? b) Wie schnell ist sie nach dem zweiten Wurf?

Problembeschreibung: Betrachten Sie das System Skateboarderin–Skateboard–Hanteln; die Hanteln werden in negativer x -Richtung geworfen. Da nur vernachlässigbare äußere Kräfte mit horizontalen Komponenten entlang der x -Richtung wirken, bleibt die x -Komponente des Impulses erhalten. Zu bestimmen ist die Geschwindigkeit der Skateboarderin nach den jeweiligen Würfen der Hanteln (Abbildung 6.5). Dazu verwendet man den Impulserhaltungssatz, die Masse m_H der Hantel beträgt jeweils 5,00 kg, die Masse m_S von Skateboarderin plus ihrem Board ist 43,0 kg. Die Rechnung wird in dem mit dem Boden verbundenen Inertialssystem durchgeführt.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. $v_{S,1,x}^{(B)}$ und $v_{H,1,x}^{(B)}$ sind die x -Komponenten der Geschwindigkeit von Skateboarderin bzw. von den geworfenen Hanteln bezüglich des Bodens. Wenden Sie die Impulserhaltung für den ersten Wurf an:

$$\sum F_x = \frac{dp_x}{dt}$$

$$0 = \frac{dp_x}{dt} \Rightarrow p_x = \text{const}$$

Somit gilt $p_{1,x} = p_{0,x}$ und

$$(m_S + m_H) v_{S,1,x}^{(B)} + m_H v_{H,1,x}^{(B)} = 0.$$

2. Die Geschwindigkeit der geworfenen Hanteln bezüglich des Bodens ist gleich der Geschwindigkeit der Hantel bezüglich der Skateboarderin plus der Geschwindigkeit der Skateboarderin bezüglich des Bodens:

$$v_{H,1,x}^{(B)} = v_{H,1,x}^{(S)} + v_{S,1,x}^{(B)}$$

3. Setzen Sie $v_{H,1,x}^{(B)}$ in das Ergebnis von Schritt 1 ein und lösen Sie nach $v_{S,1,x}^{(B)}$ auf:

$$(m_S + m_H) v_{S,1,x}^{(B)} + m_H (v_{H,1,x}^{(S)} + v_{S,1,x}^{(B)}) = 0$$

sodass

$$\begin{aligned} v_{S,1,x}^{(B)} &= -\frac{m_H}{m_S + 2m_H} v_{H,1,x}^{(S)} \\ &= -\frac{5,00 \text{ kg}}{43,0 \text{ kg} + 10,0 \text{ kg}} (-7,00 \text{ m/s}) \\ &= \boxed{0,66 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Wiederholen Sie Schritt 1 aus Teilaufgabe a für den zweiten Wurf. Mit $v_{S,2,x}^{(B)}$ und $v_{H,2,x}^{(B)}$ bezeichnen wir die

x-Komponenten der Geschwindigkeit von Skateboarderin und von der zweiten geworfenen Hantel bezüglich des Bodens:

$$p_{2,x}^{(B)} = p_{1,x}^{(B)}$$

$$m_S v_{S,2,x}^{(B)} + m_H v_{H,2,x}^{(B)} = (m_S + m_H) v_{S,1,x}^{(B)}$$

2. Wiederholen Sie Schritt 2 aus Teilaufgabe a für den zweiten Wurf:

$$v_{H,2,x}^{(B)} = v_{H,2,x}^{(S)} + v_{S,2,x}^{(B)}$$

3. Setzen Sie $v_{H,2,x}^{(B)}$ in das Ergebnis von Schritt 1 aus Teilaufgabe b ein und lösen Sie nach $v_{S,2,x}^{(B)}$ auf:

$$m_S v_{S,2,x}^{(B)} + m_H \left(v_{H,2,x}^{(S)} + v_{S,2,x}^{(B)} \right) = (m_S + m_H) v_{S,1,x}^{(B)}$$

sodass

$$\begin{aligned} v_{S,2,x}^{(B)} &= \frac{(m_S + m_H) v_{S,1,x}^{(B)} - m_H v_{H,2,x}^{(S)}}{m_S + m_H} \\ &= v_{S,1,x}^{(B)} - \frac{m_H}{m_S + m_H} v_{H,2,x}^{(S)} \\ &= 0,660 \text{ m/s} - \frac{5,00 \text{ kg}}{48,0 \text{ kg}} (-7,00 \text{ m/s}) = [1,39 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Nach dem zweiten Wurf beträgt die Masse von Skateboard und dessen Last (Skateboarderin plus noch eines der Gewichte) nur noch 48,0 kg, also 5,00 kg weniger als nach dem ersten Wurf. Da die Masse nun geringer ist, war zu erwarten, dass die Geschwindigkeit der Skateboarderin nach dem zweiten Wurf stärker zunimmt als nach dem ersten Wurf. Die Ergebnisse zeigen, dass ihre Geschwindigkeit mit dem ersten Wurf um 0,660 m/s zunimmt, mit dem zweiten Wurf 1,39 m/s – 0,660 m/s = 0,73 m/s, was in der Tat eine Steigerung ist.

Weitergedacht: Das Beispiel illustriert das Raketenprinzip. Eine Rakete bewegt sich vorwärts, indem sie ihren Treibstoff in Form von verbranntem Gas nach hinten austößt. Wenn die Masse einer Rakete abnimmt, nimmt ihre Beschleunigung zu, so wie auch die Skateboarderin mit dem zweiten Wurf ihre Geschwindigkeit mehr steigern konnte als mit dem ersten. Zum Raketenantrieb siehe auch Abschnitt 7.6.

Übung 6.2: Wie schnell ist die Skateboarderin, wenn sie aus dem Stand beide Hanteln gleichzeitig wirft und die Hanteln *unmittelbar nach dem Abwurf* eine Geschwindigkeit von 7,00 m/s bezüglich des Skateboards haben? ▶ ■

Beispiel 6.4: Radioaktiver Zerfall

Ein ruhender Kern von Thorium-227 (Masse 227 u) zerfällt in einen Kern von Radium-223 (Masse 223 u) und emittiert dabei ein Alphateilchen mit der Masse 4,00 u (Abbildung 6.6). Die kinetische Energie des Alphateilchens wird mit 6,00 MeV gemessen. Wie hoch ist die kinetische Energie des entstehenden Radiumkerns?



Abbildung 6.6 Schematische Darstellung des Zerfalls mit den resultierenden Geschwindigkeiten.

Problembeschreibung: Der Zerfall eines Teilchens in zwei Partikel lässt sich als ein zeitlich rückwärts laufender Stoß auffassen. Es treten keine äußeren Kräfte auf, daher bleibt der Gesamtimpuls des Systems erhalten. Die kinetische Energie eines Teilchens ist $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$. Weil der Thoriumkern vor dem Zerfall in Ruhe ist, ist sein Gesamtimpuls null. Mithilfe der Impulserhaltung können wir dann einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Radiumkerns und der des Alphateilchens herstellen.

Lösung: 1. Schreiben Sie die kinetische Energie des Radiumkerns $E_{\text{kin,Ra}}$ mithilfe seiner Masse m_{Ra} und Geschwindigkeit v_{Ra} :

$$E_{\text{kin,Ra}} = \frac{1}{2} m_{\text{Ra}} v_{\text{Ra}}^2$$

2. Schreiben Sie die kinetische Energie $E_{\text{kin},\alpha}$ des Alphateilchens mithilfe seiner Masse m_α und Geschwindigkeit v_α :

$$E_{\text{kin},\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

3. Stellen Sie mithilfe der Impulserhaltung einen Zusammenhang zwischen v_{Ra} und v_α her. Da der Thoriumkern anfangs in Ruhe war, ist der Impuls des Systems null:

$$m_\alpha v_\alpha = -m_{\text{Ra}} v_{\text{Ra}}$$

4. Lösen Sie in Schritt 1 und 2 nach den Geschwindigkeiten v_{Ra} und v_α auf und setzen Sie diese Ausdrücke in das Ergebnis von Schritt 3 ein:

$$E_{\text{kin,Ra}} = \frac{1}{2} m_{\text{Ra}} v_{\text{Ra}}^2 \quad E_{\text{kin},\alpha} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$v_{\text{Ra}} = \left(\frac{2 E_{\text{kin,Ra}}}{m_{\text{Ra}}} \right)^{1/2} \quad v_\alpha = \left(\frac{2 E_{\text{kin},\alpha}}{m_\alpha} \right)^{1/2}$$

und somit

$$m_\alpha \left(\frac{2 E_{\text{kin},\alpha}}{m_\alpha} \right)^{1/2} = -m_{\text{Ra}} \left(\frac{2 E_{\text{kin,Ra}}}{m_{\text{Ra}}} \right)^{1/2}$$

5. Lösen Sie das Ergebnis von Schritt 4 nach $E_{\text{kin,Ra}}$ auf:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,Ra}} &= \frac{m_\alpha}{m_{\text{Ra}}} E_{\text{kin},\alpha} = \frac{4,00 \text{ u}}{223 \text{ u}} (6,00 \text{ MeV}) \\ &= \boxed{0,107 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir überprüfen das Ergebnis $E_{\text{kin,Ra}} = (m_\alpha/m_{\text{Ra}})E_{\text{kin},\alpha}$ aus Schritt 5 für verschiedene Werte des Massenverhältnisses m_α/m_{Ra} . Wenn die beiden Massen gleich sind, liest man aus dem Ergebnis wie erwartet $E_{\text{kin,Ra}} = E_{\text{kin},\alpha}$ ab; für $m_\alpha \ll m_{\text{Ra}}$ folgt $E_{\text{kin,Ra}} \ll E_{\text{kin},\alpha}$, d.h., die kinetische Energie des Alphateilchens ist viel größer als die des Radiumkerns. Das bedeutet auch, dass die Geschwindigkeit des Alphateilchens – wie zu erwarten – viel größer ist als die der Radiumkerne. ■

6.2 Stoßarten

Zwei Autos rasen frontal ineinander. Ein Schläger trifft auf einen Baseball. Ein Wurfpfeil landet mit einem lauten „Zong“ im Zentrum der Dartscheibe: All das sind Beispiele für einen Stoß, bei dem sich zwei Körper aufeinander zu bewegen und für eine sehr kurze Zeit stark aufeinander einwirken – sei es, indem sie einander verformen oder einen Rückstoß erteilen oder beides. Selbst wenn ein Komet um die Sonne herumgeschleudert wird, kann man das als einen Stoß bezeichnen, obwohl sich hier keine Körper berühren. Auch im Labor können solche „berührungslosen“ Stöße auftreten, etwa zwischen zwei Wagen mit magnetischen Kupplungen, die sich abstoßen, ohne sich zu berühren. Man spricht bei dieser Art von Stößen auch von *Streuung* (z.B. Neutronenstreuung; Beispiel 6.14).

Je nach Lage der stoßenden Körper und ihrer Bewegungen zueinander unterscheidet man verschiedene Stoßarten. Wenn sich die beiden Körper berühren, definiert man die Ebene, die alle Berührpunkte einschließt, als die *Berührebene*, die Gerade, die senkrecht auf dieser Ebene steht, nennt man die *Stoßlinie*.

Ein **gerader Stoß**, wie in Abbildung 6.7a gezeigt, liegt vor, wenn die beiden Geschwindigkeitsvektoren parallel zur Stoßlinie verlaufen. Ist dies nicht der Fall, liegt ein **schiefer Stoß** (Abbildung 6.7b) vor. Alle eindimensionalen Stöße sind gerade Stöße. Außerdem sind sie **zentrale Stöße**. Bei den zentralen Stößen handelt es sich um Stöße, bei denen die Verbindungsgerade zwischen den Zentren der stoßenden Massen auf der Stoßlinie liegt, wie in Abbildung 6.7b am Beispiel eines schiefen Stößes dargestellt. Im eindimensionalen Fall reicht es, wie bereits in Kapitel 2 bei der Behandlung von eindimensionalen Bewegungen eingeführt wurde, dass man auf die Vektorschreibweise verzichtet und das Symbol v für eine Geschwindigkeit in einer Dimension oder für die sich ändernde Geschwindigkeitskomponente verwendet. Die Richtung der sich bewegenden Körper wird dann allein durch das Vorzeichen eindeutig bestimmt.

Das Symbol „ v “ kann sowohl eine Geschwindigkeitskomponente als auch eine Geschwindigkeit in einer Dimension bezeichnen. In einer Dimension ist die Geschwindigkeit vorzeichenbehaftet.

Bei nichtzentralen Stößen, die sich nur in zwei oder mehr Dimensionen ereignen können, liegt die Gerade durch die beiden Massezentren nicht auf der Stoßlinie. Den minimalen Abstand zwischen den Zentren der beiden Massen, den sie bei einer geradlinigen Bewegung in ihre anfängliche Bewegungsrichtung hätten, nennt man auch den **Stoßparameter b** . Abbildung 6.7c zeigt ein Beispiel für einen geraden, nichtzentralen Stoß.

Man geht davon aus, dass während der kurzen Zeit des Stößes alle äußeren Kräfte auf die beiden Körper viel schwächer sind als die Wechselwirkungskräfte der Stoßpartner aufeinander. Somit kann man die Stoßpartner für die Zeit des Stößes

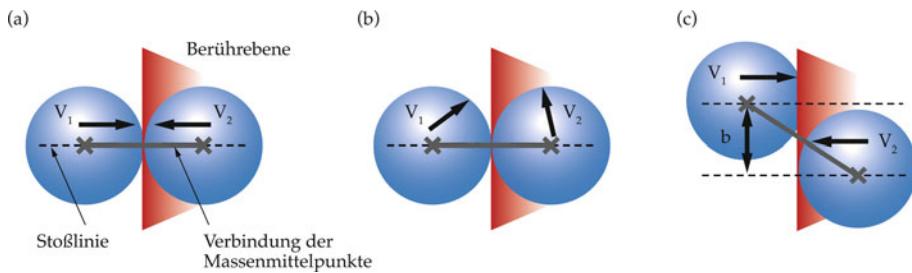


Abbildung 6.7 a) Gerader, zentraler Stoß. Die beiden Geschwindigkeitsvektoren sind parallel zur Stoßlinie, und die Verbindung der Massezentren liegt auf der Stoßlinie. b) Schiefer, zentraler Stoß. Die beiden Geschwindigkeitsvektoren sind nicht parallel zur Stoßlinie, die Verbindungsgerade der Massezentren liegt jedoch auf ihr. c) Gerader, nichtzentraler Stoß. Die Geschwindigkeitsvektoren sind parallel zur Stoßlinie, die Verbindungsgerade der Massezentren liegt jedoch nicht auf der Stoßlinie.

als isoliertes System betrachten. Während des Stoßes sind die einzigen wichtigen Kräfte die inneren Wechselwirkungskräfte; sie sind entgegengesetzt gleich, sodass der Gesamtimpuls erhalten bleibt, d. h., der Gesamtimpuls im Augenblick unmittelbar vor dem Stoß ist genauso groß wie der Gesamtimpuls im Augenblick unmittelbar nach dem Stoß. Außerdem ist die Stoßzeit normalerweise so kurz, dass die Bewegung der Körper *während des Stoßes* vernachlässigt werden kann.

Wenn die kinetische Gesamtenergie des Zweikörpersystems nach dem Stoß dieselbe ist wie davor, spricht man von einem **elastischen Stoß**, andernfalls von einem **inelastischen Stoß**. Ein Extremfall ist der **vollständig inelastische Stoß**, in dem die gesamte kinetische Energie der am Stoß beteiligten Körper in thermische oder innere Energie des Systems umgewandelt wird und die beiden Körper nach dem Stoß eine gemeinsame Geschwindigkeit haben (meist weil sie aneinanderhaften). Wir werden diese verschiedenen Arten von Stößen in den folgenden Abschnitten genauer untersuchen.

6.3 Kraftstoß und zeitliches Mittel der Kraft

Wenn zwei Körper zusammenstoßen, üben sie normalerweise sehr große Kräfte aufeinander aus, jedoch nur für eine sehr kurze Zeit. Die Kraft beispielsweise, die ein Baseballschläger auf den Ball ausübt, kann mehrere Tausend Mal größer sein als dessen Gewichtskraft, sie wirkt jedoch nur für eine Millisekunde oder ähnlich kurze Zeiträume. Eine solche Kraft wird manchmal **stoßartig** genannt. Abbildung 6.8 zeigt den zeitlichen Verlauf einer typischen Kraft, wie sie während eines Stoßes von einem Körper auf einen anderen ausgeübt wird. Während der Stoßzeit $\Delta t = t_E - t_A$ ist die Kraft groß, für alle anderen Zeiten ist sie vernachlässigbar klein. Der sogenannte **Kraftstoß** Δp der Kraft ist eine Vektorgröße, die allgemein als

$$\Delta p = \int_{t_A}^{t_E} F \, dt \quad (6.6)$$

DEFINITION EINES KRAFTSTOSES

definiert ist¹. Der Kraftstoß gibt ein Maß sowohl für die Stärke als auch die Dauer der beim Stoß auftretenden Kraft. Die x -Komponente des Kraftstoßes ist die Fläche unter der Kraft-Zeit-Kurve, die Einheit des Kraftstoßes ist die Newtonsekunde ($N \cdot s$).

Die Kraft F_i auf ein Teilchen i und die Impulsänderung dieses Teilchens hängen über das zweite Newton'sche Axiom zusammen: $F_i = dp_i/dt$. Bildet man das zeitliche Integral, so erhält man:

¹ Vorsicht beim Lesen englischsprachiger Texte: Der Begriff „Kraftstoß“ wird im Englischen als *impulse* bezeichnet, während das deutsche Wort „Impuls“ im Englischen *momentum* heißt. (Anm. d. Red.)

6.3 Kraftstoß und zeitliches Mittel der Kraft

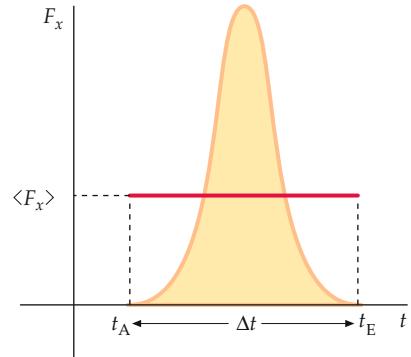


Abbildung 6.8 Typischer zeitlicher Verlauf der Kraft während eines Stoßes. Die Fläche unter der Kurve $F_x(t)$ ist die x -Komponente des Kraftstoßes Δp_x . $\langle F_x \rangle$ ist die mittlere Kraft während des Intervalls Δt . Die rechteckige Fläche $\langle F_x \Delta t \rangle$ ist genauso groß wie die Fläche unter der Kurve $F_x(t)$.

$$(\Delta p)_i = \int_{t_A}^{t_E} F_i \, dt = \int_{t_A}^{t_E} \frac{dp_i}{dt} \, dt = p_{i,E} - p_{i,A}. \quad (6.7)$$

KRAFTSTOSS UND IMPULSÄNDERUNG FÜR EIN TEILCHEN

Der Kraftstoß *auf ein Teilchen* ist gleich der gesamten Änderung des Teilchenimpulses während des Zeitintervalls Δt . Dieser Zusammenhang gilt auch für ein Teilchensystem, das einer äußeren Kraft ausgesetzt ist. Dann ist der Kraftstoß auf das System gleich der Impulsänderung, die das Gesamtsystem erfährt:

$$\Delta p = \int_{t_A}^{t_E} F_{\text{ext}} \, dt. \quad (6.8)$$

KRAFTSTOSS UND IMPULSÄNDERUNG FÜR EIN TEILCHENSYSTEM

Für eine beliebige Kraft F hängt der Kraftstoß von den Zeiten t_A und t_E ab. In Stoßprozessen sind jedoch die wirkenden Kräfte (außer in einem sehr kurzen Zeitintervall) null, wie in Abbildung 6.8 dargestellt. Für diese Kräfte hängt der Kraftstoß nicht von der genauen Wahl der Intervallgrenzen ab, solange nur t_A irgendein Zeitpunkt vor dem Stoß und t_E irgendein Zeitpunkt nach dem Stoß ist. Genau für diese Art von Kräften ist das Konzept des Kraftstoßes sehr nützlich.

Die **mittlere Kraft** (genauer: das **zeitliche Mittel einer Kraft**) während des Zeitintervalls $\Delta t = t_E - t_A$ ist definiert als

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_A}^{t_E} F \, dt = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (6.9)$$

DEFINITION DES ZEITLICHEN MITTELS EINER KRAFT

Vorgehensweise: Stöße

- Bestimmen Sie, ob das Problem eindimensional oder mehrdimensional ist und ob es sich um einen elastischen oder inelastischen Stoß handelt und fertigen Sie eine Skizze an, die die Stoßpartner kurz vor und kurz nach dem Stoß zeigt.
- Stellen Sie fest, ob der Impulserhaltungssatz anwendbar ist und formulieren Sie ihn für das Problem. Bei eindimensionalen Problemen können Sie auf die Vektorschreibweise verzichten, bei mehrdimensionalen Problemen müssen Sie die Impulserhaltung für jede Vektorkomponente einzeln prüfen. Vollkommen inelastische Stöße sind dadurch charakterisiert, dass beide Stoßpartner nach dem Stoß miteinander verbunden sind und sich mit derselben Geschwindigkeit in die gleiche Richtung bewegen.
- Sind zwei Größen gesucht, prüfen Sie, ob der Energieerhaltungssatz anwendbar ist und formulieren Sie ihn für das Problem, z. B. sind bei vollständig elastischen Stößen die kinetischen Energien des Systems vor und nach dem Stoß gleich.
- Lösen Sie den Impulserhaltungssatz nach der gesuchten Größe bzw. einer der gesuchten Größen auf. Ist nur eine Größe gesucht, können Sie damit direkt das Ergebnis berechnen.
- Sind zwei Größen gesucht, setzen Sie Ihr Ergebnis aus Schritt 4 in die Gleichung des Energieerhaltungssatzes ein und berechnen damit die zweite gesuchte Größe.
- Setzen Sie die zweite gesuchte Größe, die Sie aus Schritt 5 erhalten haben in die Gleichung, die Sie in Schritt 4 für die erste gesuchte Größe erhalten haben, ein und berechnen Sie diese.

Plausibilitätsprüfung: Schätzen Sie anhand der gegebenen Massen die Richtungen und Geschwindigkeitsbeträge für die Stoßpartner ab und vergleichen Sie sie mit Ihren berechneten Ergebnissen. Überprüfen Sie die Dimensionen der berechneten Größen und prüfen Sie, ob sie mit den zu erwartenden Dimensionen übereinstimmen.

Durch Umordnen erhält man

$$\Delta p = \langle F \rangle \Delta t. \quad (6.10)$$

KRAFTSTOSS UND MITTLERE KRAFT

Die mittlere Kraft ist diejenige konstante Kraft, die den gleichen Kraftstoß liefert wie die tatsächlich im Intervall Δt wirkende Kraft. $\langle F \Delta t \rangle$ ist als Rechteck in Abbildung 6.8 eingezeichnet. Die mittlere Kraft lässt sich aus der Impulsänderung bestimmen, wenn die Stoßzeit bekannt ist. Diese Zeit kann man oft aus der Strecke abschätzen, die einer der beiden Stoßpartner während des Stoßes zurücklegt.

Wie man das Konzept des Kraftstoßes bei Stößen anwenden kann, zeigen die Beispiele 6.5 bis 6.7.

Beispiel 6.5: Ein Karateschlag

Mit einem gut geführten Karateschlag können Sie einen Betonblock zerschlagen. Nehmen wir an, Ihre Hand hat eine Masse von 0,70 kg; Sie schlagen mit einer Geschwindigkeit von 5,0 m/s auf den Block und stoppen Ihre Hand innerhalb von 6,0 mm nach dem Kontakt. a) Welchen Kraftstoß übt der Block auf Ihre Hand aus? b) Wie groß sind näherungsweise die Stoßzeit und die mittlere Kraft, die der Block auf Ihre Hand ausübt?



(© Robert R. Edwards/BOB-E.)

Problembeschreibung: Der Kraftstoß ist so groß wie die Impulsänderung Δp . Diesen Wert berechnen wir aus Masse und Geschwindigkeit Ihrer Hand. Die Stoßzeit in Teilaufgabe b lässt sich aus der gegebenen Strecke Ihrer Hand während des Stoßes und der mittleren Geschwindigkeit bestimmen, die sich bei Annahme einer konstanten Beschleunigung abschätzen lässt.

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Fertigen Sie eine Skizze von Hand und Block vor und nach dem Stoß. In dem „Vorher-Bild“ soll Ihre Handkante gerade den Betonblock erreichen. Fügen Sie eine vertikale Koordinatenachse ein (Abbildung 6.9).

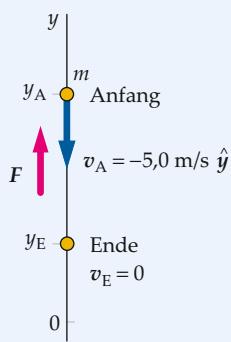


Abbildung 6.9 Bewegungsdiagramm der Hand und des Blocks.

2. Der Kraftstoß entspricht der Impulsänderung:

$$\Delta p = p_E - p_A = m(v_E - v_A) = m \Delta v$$

3. Die Anfangsgeschwindigkeit v_A ist die Geschwindigkeit der Hand, unmittelbar bevor sie auf den Block auftrifft; die Endgeschwindigkeit ist null:

$$v_A = -5,0 \text{ m/s} \hat{y}$$

$$v_E = 0$$

4. Setzen Sie die Werte aus Schritt 3 in die Gleichung von Schritt 2 ein und berechnen Sie den Kraftstoß, den der Block auf die Hand ausübt:

$$\begin{aligned} \Delta p &= m \Delta v = (0,70 \text{ kg}) [0 - (-5,0 \text{ m/s} \hat{y})] \\ &= (3,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) \hat{y} = \boxed{(3,5 \text{ N} \cdot \text{s}) \hat{y}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Die während des Stoßes von der Hand zurückgelegte Strecke ist gleich der mittleren Geschwindigkeit mal der Stoßzeit. Schätzen Sie die mittlere Geschwindigkeit ab, indem Sie eine konstante Beschleunigung annehmen. Für konstantes a_y ist $\langle v_y \rangle \approx \frac{1}{2}(v_{A,y} + v_{E,y})$:

$$\Delta y = \langle v_y \rangle \Delta t \approx \frac{1}{2}(v_{A,y} + v_{E,y}) \Delta t$$

2. Da die positive y -Achse nach oben zeigt, sind Δy und $\langle v_y \rangle$ beide negativ. Berechnen Sie Δt mit:

$$\begin{aligned} \Delta t &\approx \frac{\Delta y}{\frac{1}{2}(v_{A,y} + v_{E,y})} = \frac{-0,006 \text{ m}}{-2,5 \text{ m/s}} \\ &= 0,0024 \text{ s} = 2,4 \text{ ms} \end{aligned}$$

3. Nach Gleichung 6.9 ergibt sich die mittlere Kraft aus dem Kraftstoß, dividiert durch die Stoßzeit:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{3,5 \text{ N} \cdot \text{s}}{0,0024 \text{ s}} \hat{y} \\ &= (1458 \text{ N}) \hat{y} = \boxed{(1,5 \text{ kN}) \hat{y}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die mittlere Kraft auf Ihre Hand ist nach oben gerichtet (positive y -Richtung). Dies ist dieselbe Richtung wie die Änderung im Geschwindigkeitsvektor, wie zu erwarten war. (Die mittlere Kraft Ihrer Handkante auf den Betonblock ist der mittleren Kraft des Blocks auf Ihre Hand entgegengesetzt gleich.)

Weitergedacht: Die mittlere Kraft ist sehr groß: Nehmen wir an, dass Ihre Hand etwa 1 kg wiegt, so ist die mittlere Kraft auf die Hand etwa 150-mal so groß wie die Gewichtskraft der Hand. Die mittlere Stoßkraft ist während des Stoßes wesentlich größer als die wirkenden Gravitationskräfte. ■

Vorgehensweise: Abschätzen der mittleren Kraft

Um die mittlere Kraft $\langle \mathbf{F} \rangle$ abzuschätzen, schätzen wir zunächst den Kraftstoß Δp_s . Dabei betrachten wir alle Kräfte außer der Stoßkraft als vernachlässigbar. Der Kraftstoß ergibt sich als die Änderung des Impulses, die man als Produkt aus der Masse m und der Geschwindigkeitsänderung $v_E - v_A$ berechnen kann. Eine Abschätzung für die Geschwindigkeitsänderung erhält man aus den (geschätzten) Werten für die Stoßzeit Δt und die während des Stoßes zurückgelegte Strecke Δr .

1. Berechnen (oder schätzen) Sie den Kraftstoß Δp und die Stoßzeit Δt . Für diese Schätzung müssen die Stoßkräfte auf den Körper wesentlich größer sein als alle anderen auf den Körper wirkenden Kräfte. Dieser Weg ist *nur* gangbar, wenn man die während des Stoßes zurückgelegte Strecke bestimmen kann.
2. Zeichnen Sie eine Skizze mit der Lage des Körpers vor und nach dem Stoß. Fügen Sie Koordinatenachsen ein und kennzeichnen Sie die Geschwindigkeiten v_A bzw. v_E nach dem Stoß. Kennzeichnen Sie ferner die Strecke Δr , die der Körper während des Stoßes zurücklegt.
3. Berechnen Sie die Impulsänderung des Körpers durch den Stoß ($\Delta p = m \Delta v$).
4. Durch kinematische Überlegungen können Sie die Stoßzeit abschätzen. Aus $\langle v \rangle \approx \frac{1}{2}(v_A + v_E)$ und $\Delta r = \langle v \rangle \Delta t$ erhalten Sie $\Delta r \approx \frac{1}{2}(v_A + v_E) \Delta t$; lösen Sie dann nach Δt auf.
5. Berechnen Sie mit $\langle \mathbf{F} \rangle = \Delta p / \Delta t = m \Delta v / \Delta t$ die mittlere Kraft (Gleichung 6.9).

Plausibilitätsprüfung: Die mittlere Kraft ist ein Vektor. Ihr Ergebnis für die mittlere Kraft sollte dieselbe Richtung haben wie der Vektor der Geschwindigkeitsänderung.

Beispiel 6.6: Ein Crashtest

ZUR ÜBUNG

Ein Auto mit einem Dummy von 80 kg (Abbildung 6.10) fährt mit 25 m/s (90 km/h) gegen eine Wand. Dabei wird der Dummy um 1 m nach vorn geschleudert. Berechnen Sie die mittlere Kraft, die der Sicherheitsgurt bei dem Aufprall des Autos auf den Dummy ausübt.



Abbildung 6.10 Dummy beim Crashtest. (© Daimler AG.)

Problembeschreibung: Um die Kraft zu finden, berechnen Sie den Kraftstoß Δp und teilen Sie durch die Stoßzeit Δt .

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Stellen Sie eine Beziehung zwischen der mittleren Kraft und dem Kraftstoß her und bestimmen Sie so die Impulsänderung.

2. Zeichnen und beschriften Sie eine Skizze mit dem Dummy vor und nach dem Crash (Abbildung 6.11). Die Vorwärtsrichtung des Wagens soll dabei in positive x -Richtung zeigen.

3. Berechnen Sie die Änderung des Dummy-Impulses.

4. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Stoßzeit und der Verzögerungsstrecke des Dummies her (konstante Beschleunigung vorausgesetzt).

5. Verwenden Sie den Wert für die Verschiebung des Dummies aus der Aufgabenstellung.

6. Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit und setzen Sie die Ergebnisse in Schritt 4 ein, um die Verzögerungszeit zu berechnen.

7. Setzen Sie nun die Ergebnisse aus Schritt 3 und 6 in das Ergebnis aus Schritt 1 ein und lösen Sie nach der Kraft auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\langle \mathbf{F} \rangle \Delta t = \Delta \mathbf{p}, \text{ somit } \langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}$$

2.

**Abbildung 6.11** Bewegungsdiagramm des Dummies.

3.

$$\Delta \mathbf{p} = m \mathbf{v}_E - m \mathbf{v}_A = (-2000 \text{ N} \cdot \text{s}) \hat{x}$$

4.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\langle v \rangle}$$

5.

$$\Delta x = 1,0 \text{ m}$$

6.

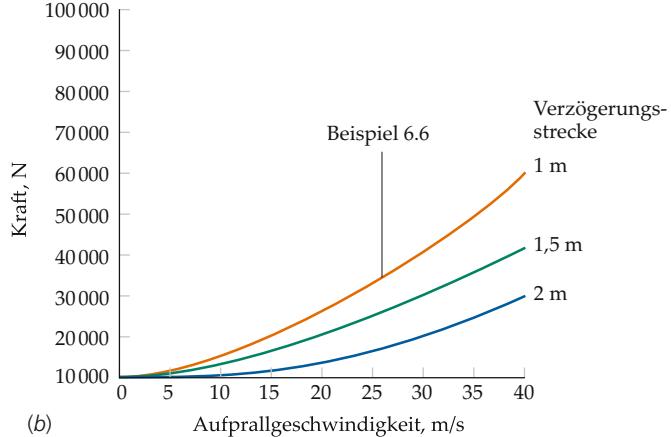
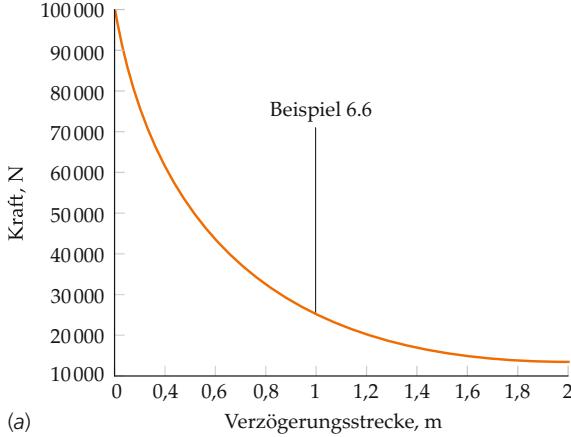
$$\langle v \rangle \approx \frac{1}{2} (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_A) = (12,5 \text{ m/s}) \hat{x}$$

sodass

$$\Delta t = 0,008 \text{ s} = 8,0 \text{ ms}$$

7.

$$\langle \mathbf{F} \rangle = [(-25 \text{ kN}) \hat{x}]$$

**Abbildung 6.12** a) Die mittlere Kraft in Abhängigkeit der Verzögerungsstrecke sowie b) in Abhängigkeit von der Aufprallgeschwindigkeit für verschiedene Verzögerungsstrecken.

Beispiel 6.7: Ein Schlag auf den Golfball

Sie schlagen einen Golfball mit Ihrem Schläger ab. Geben Sie plausible Abschätzungen für a) den Kraftstoß Δp , b) die Stoßzeit Δt und c) die mittlere Kraft $\langle F \rangle$ an. Ein typischer Golfball hat eine Masse von $m = 45\text{ g}$ und einen Radius von $r = 2,0\text{ cm}$. Die Reichweite R für einen kräftigen Schlag liegt bei etwa 200 m (Abbildung 6.13). Der Ball wird in einem Winkel von $\theta_0 = 13^\circ$ gegen die Horizontale abgeschlagen.

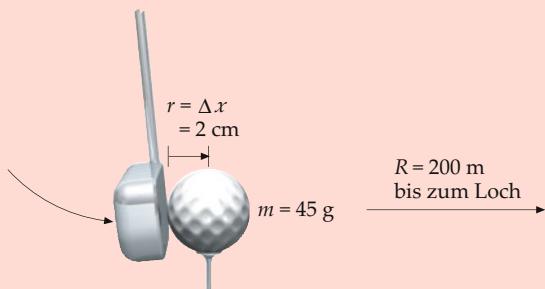


Abbildung 6.13 Skizze des Systems Schläger-Golfball.

Problembeschreibung: v_0 ist die Geschwindigkeit des Balls beim Abschlag. Der Kraftstoß auf den Ball ist gleich der Änderung seines Impulses $m v_0$ beim Abschlag. Wir schätzen v_0 aus der Reichweite R und dem Abschlagswinkel θ_0 ab. Die Stoßzeit lässt sich aus der beim Stoß zurückgelegten Strecke Δx und der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(v_{A,x} + v_{E,x})$ während des Stoßes bestimmen, wenn man konstante Beschleunigung annimmt. Mit $\Delta x = 2,0\text{ cm}$ (d. h. dem gegebenen Radius des Golfballs) erhält man dann die mittlere Kraft aus dem Kraftstoß Δp und der Stoßzeit Δt .

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Der Kraftstoß ist gleich der Impulsänderung des Golfballs:

$$\langle F_x \rangle \Delta t = \Delta p_x$$

2. Zeichnen Sie eine Skizze, die die Lage des Balls unmittelbar vor und nach dem Schlag zeigt (Abbildung 6.14).

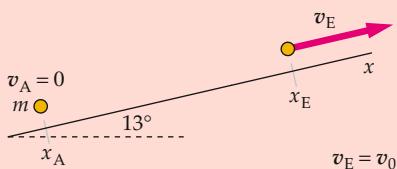


Abbildung 6.14 Bewegungsdiagramm des Golfballs.

3. Die Geschwindigkeit v_E unmittelbar nach dem Abschlag hängt gemäß Gleichung 2.37 mit der Reichweite

R zusammen. R berechnet man nach $R = (v_0^2/g) \sin 2\theta_0$ (v_0 ist dabei die Geschwindigkeit v_E unmittelbar nach dem Abschlag):

$$R = \frac{v_E^2}{g} \sin 2\theta_0$$

4. Nehmen Sie einen Abschlagswinkel von $\theta_0 = 13^\circ$ an und berechnen Sie die Geschwindigkeit des Golfballs nach dem Stoß:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{R g}{\sin 2\theta_0}} \\ &= \sqrt{\frac{(200\text{ m})(9,81\text{ m/s}^2)}{\sin 26^\circ}} = 66,9\text{ m/s} \end{aligned}$$

5. Berechnen Sie mit dem erhaltenen Wert von v_0 den Kraftstoß:

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= m(v_{0,x} - 0) = (0,045\text{ kg})(66,9\text{ m/s}) \\ &= 3,01\text{ kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{3,0\text{ N} \cdot \text{s}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie die Stoßzeit Δt mit $\Delta x = 2,0\text{ cm}$ und $\langle v_x \rangle = \frac{1}{2}(v_{A,x} + v_{E,x})$:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta x}{\langle v_x \rangle} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(0 + v_0)} \\ &= \frac{0,020\text{ m}}{\frac{1}{2}(66,9\text{ m/s})} = 0,598 \cdot 10^{-3}\text{ s} = \boxed{6,0 \cdot 10^{-4}\text{ s}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Berechnen Sie die mittlere Kraft mit den erhaltenen Werten von Δp_x und Δt :

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \langle F_x \rangle = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \\ &= \frac{3,01\text{ N} \cdot \text{s}}{5,98 \cdot 10^{-4}\text{ s}} = 5033\text{ N} = \boxed{5,0\text{ kN}} \end{aligned}$$

Kommentar: Auch in diesem Beispiel sehen wir, dass die Kräfte während des Stoßes sehr groß sind: Die vom Schläger auf den Ball ausgeübte Kraft ist etwa 10 000-mal so groß wie die Gewichtskraft mg des Balls von $(0,045\text{ kg})(9,81\text{ N/kg}) \approx 0,50\text{ N}$.

Weitergedacht: In unserer Abschätzung haben wir vernachlässigt, dass sich der Golfball in der Luft bewegt. Für einen professionellen Golfspieler sind die Wirkungen der Luft (vor allem der Luftwiderstand und die seitliche Ablenkung aufgrund des Magnus-Effekts, den wir in Kapitel 10 behandeln) jedoch nicht vernachlässigbar. ■

6.4 Inelastische Stöße

Wir betrachten einen Körper der Masse m_1 , der sich mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_{1,A}$ bewegt, und einen zweiten Körper mit der Masse m_2 und Anfangsgeschwindigkeit $v_{2,A}$, der mit dem ersten zusammenstoßen wird. Der Gesamtimpuls am Anfang ist die Vektorsumme der Anfangsimpulsvektoren aller an dem Stoß beteiligter Körper. Da der Stoß vollständig inelastisch ablaufen soll, werden die beiden Stoßpartner nach dem Stoß miteinander verbunden sein und dieselbe Geschwindigkeit haben. Daher gilt:

$$m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} = (m_1 + m_2) v_E \quad (6.11)$$

Aus Gleichung 6.11 kann man ablesen, dass die drei Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene liegen müssen, nämlich in der Ebene, in der der Stoß stattfindet.

Es ist manchmal sinnvoll, die kinetische Energie E_{kin} eines Teilchens mithilfe seines Impulses auszudrücken. Für eine Masse m , die sich mit dem Geschwindigkeitsbetrag v geradlinig in eine Richtung bewegt, gilt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \quad (6.12)$$

Wir können diesen Zusammenhang für einen vollständig inelastischen zentralen Stoß anwenden, bei dem einer der beiden Stoßpartner, z. B. der Körper mit der Masse m_2 , anfangs in Ruhe ist. Der Impuls des Systems ist dann der Impuls des auftreffenden Körpers

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{1,A} = m_1 \mathbf{v}_{1,A},$$

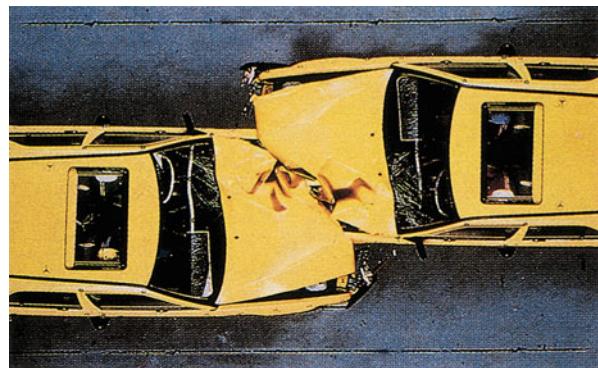
und die anfängliche kinetische Energie ist

$$E_{\text{kin},A} = \frac{p^2}{2m_1}. \quad (6.13)$$

Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Stoßpartner wie ein Körper der Masse $m_1 + m_2$ mit v_E . Der Impuls bleibt erhalten,



Die Lokomotive stößt den Wagon an, wodurch die automatische Kupplung die beiden Stoßpartner verbindet – ein Beispiel für einen vollständig inelastischen Stoß. (© Mit freundlicher Genehmigung von Dick Tinder.)



Völlig inelastischer Stoß beim Zusammenprall zweier Autos (© Romilly Lockyer/The Image Bank.)

daher ist der Impuls nach dem Stoß $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{1,A}$. Die kinetische Energie nach dem Stoß ist für vollständig inelastische Stöße

$$E_{\text{kin},E} = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (6.14)$$

Beim Vergleich der Gleichungen 6.13 und 6.14 sieht man, dass die kinetische Energie nach dem Stoß geringer ist als die anfängliche kinetische Energie.

Beispiel 6.8 illustriert einen eindimensionalen vollständig inelastischen Stoß in einer ansonsten kräftefreien Umgebung. Die Beispiele 6.9 und 6.10 zeigen, wie man bei eindimensionalen inelastischen Stößen die kinetische Energie für den Lösungsansatz heranzieht. Beispiel 6.11 zeigt anschließend einen inelastischen, schiefen, zentralen Stoß zwischen einem Auto und einem LKW an einer Kreuzung, Beispiel 6.12 berechnet die Richtung der Stoßpartner bei einem geraden, nichtzentralen inelastischen Stoß.

Beispiel 6.8: Auffangen im Weltall

Die Astronautin Lucy mit einer Masse von 60 kg unternimmt einen Weltraumpaziergang, um einen Kommunikationssatelliten zu reparieren. Plötzlich will sie etwas in ihrem Handbuch nachschlagen. Sie hat das Buch zufällig nicht dabei, daher werfen sie ihr das Buch mit einer Geschwindigkeit von 4,0 m/s relativ zum Raumschiff zu. Bevor sie das 3,0 kg schwere Buch auffängt, ist Lucy bezüglich des Raumschiffs in Ruhe (Abbildung 6.15). Berechnen Sie a) die Geschwindigkeit von Lucy unmittelbar nachdem sie das Buch aufgefangen hat, b) die kinetische Energie des Systems Buch–Astronautin am Anfang und am Ende des Vorgangs sowie c) den Kraftstoß, den das Buch auf Lucy ausgeübt hat.

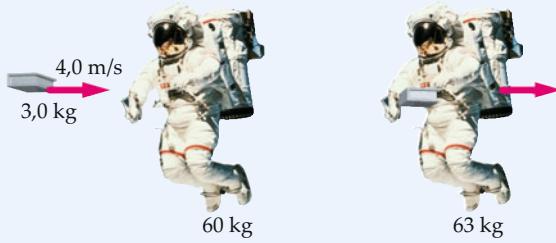


Abbildung 6.15 Skizze des Systems Astronautin–Buch.

Problembeschreibung: Es handelt sich hier um einen vollständig inelastischen Stoß. Nach dem Auffangen haben das Buch und die Astronautin dieselbe Geschwindigkeit. a) Die Endgeschwindigkeit von Buch und Astronautin erhalten wir aus dem Impulserhaltungssatz nach Gleichung 6.11. b) Die kinetischen Energien des Buchs und der Astronautin lassen sich direkt aus ihren Massen und Geschwindigkeiten berechnen. c) Der Kraftstoß, den das Buch auf Lucy ausübt, ist gleich ihrer Impulsänderung.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie eine Skizze, die die Körper unmittelbar vor und nach dem Auffangen zeigt (Abbildung 6.16). Bezeichnen Sie die Größen, die sich auf das Buch beziehen, mit dem Index B und die Größen, die sich auf die Astronautin Lucy beziehen, mit dem Index L. Legen Sie die Koordinaten so, dass das Buch in die positive x-Richtung geworfen wurde.

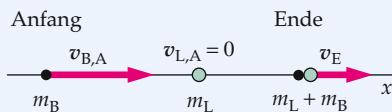


Abbildung 6.16 Bewegungsdiagramm der beiden Massen.

2. Wenden Sie den Impulserhaltungssatz an, um den Zusammenhang zwischen der Endgeschwindigkeit v_E des Systems und den Anfangsgeschwindigkeiten $v_{B,A}$ und $v_{L,A}$ herzustellen:

$$m_B v_{B,A} + m_L v_{L,A} = (m_B + m_L) v_E$$

3. Lösen Sie nach v_E auf:

$$\begin{aligned} v_E &= \frac{m_B v_{B,A} + m_L v_{L,A}}{m_B + m_L} \\ &= \frac{(3,0 \text{ kg}) (4,0 \text{ m/s}) + (60 \text{ kg}) (0 \text{ m/s})}{3,0 \text{ kg} + 60 \text{ kg}} \\ &= 0,190 \text{ m/s} = \boxed{0,19 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Da sich die Astronautin anfangs in Ruhe befindet, ist die kinetische Anfangsenergie des Systems Buch–Astronautin die kinetische Anfangsenergie des Buchs:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},A} &= E_{\text{kin},B,A} = \frac{1}{2} m_B v_{B,A}^2 \\ &= \frac{1}{2} (3,0 \text{ kg}) (4 \text{ m/s})^2 = \boxed{24 \text{ J}} \end{aligned}$$

2. Die kinetische Endenergie des Systems ist die kinetische Energie von Buch und Astronautin, die sich zusammen mit der Geschwindigkeit v_E bewegen:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},E} &= \frac{1}{2} (m_B + m_L) v_E^2 \\ &= \frac{1}{2} (63 \text{ kg}) (0,19 \text{ m/s})^2 = 1,14 \text{ J} = \boxed{1,1 \text{ J}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Setzen Sie den Kraftstoß auf die Astronautin mit ihrer Impulsänderung gleich:

$$\begin{aligned} \Delta p_L &= m_L \Delta v_L \\ &= (60 \text{ kg}) (0,190 \text{ m/s} - 0) \\ &= 11,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{11 \text{ N} \cdot \text{s}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten war, ist die kinetische Gesamtenergie gesunken.

Weitergedacht: Der größte Teil der kinetischen Energie in diesem Stoß geht durch Umwandlung in Wärme verloren. Ferner ist der Kraftstoß auf das Buch entgegengesetzt gleich zu dem Kraftstoß, den das Buch auf die Astronautin ausgeübt hat; die Änderung des Gesamtpulses in dem System Buch–Astronautin ist daher null. ■

Beispiel 6.9: Ein ballistisches Pendel

Bei einer öffentlichen Vorführung Ihrer Treffsicherheit schießen Sie eine Gewehrkugel in einen von der Decke hängenden Holzblock (Abbildung 6.17); diese Anordnung nennt man *ballistisches Pendel*. Die Kugel bleibt in dem Block stecken, und der Block beginnt zu schwingen. Sie messen die Höhe, die der Block erreicht, und können der staunenden Menge sofort die Geschwindigkeit der Kugel mitteilen. Wie schnell war die Kugel?

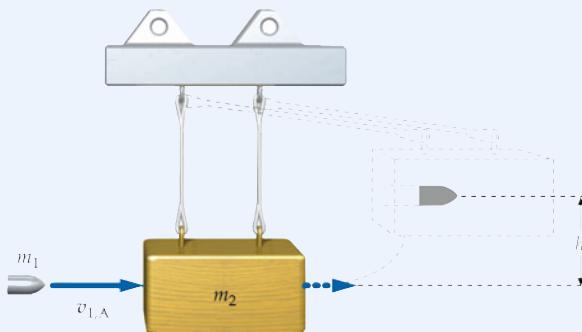


Abbildung 6.17 Skizze der Bewegung des ballistischen Pendels.

Problembeschreibung: Obwohl sich der Block nach dem Stoß hebt, können wir trotzdem von einer eindimensionalen Bewegung ausgehen, da die Bewegungsrichtung der in dem Block steckenden Kugel unmittelbar nach dem Stoß mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung der Kugel übereinstimmt. Die Geschwindigkeit $v_{1,A}$ der Kugel vor dem Stoß hängt mit der Geschwindigkeit v_E nach dem Stoß über den Impulserhaltungssatz zusammen. Die Geschwindigkeit v_E ist mit der Höhe h über den Energie-

erhaltungssatz verbunden. Die Kugel hat die Masse m_1 und der Holzblock die Masse m_2 .

Lösung: 1. Mithilfe des Erhaltungssatzes für die mechanische Energie *nach* dem Stoß erhalten Sie den Zusammenhang der Geschwindigkeit v_E nach dem Stoß mit der maximalen Auslenkung h :

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_E^2 = (m_1 + m_2) g h \\ v_E = \sqrt{2 g h}$$

2. Mithilfe des Impulserhaltungssatzes *während* des Stoßes erhalten Sie den Zusammenhang von $v_{1,A}$ mit v_E :

$$m_1 v_{1,A} = (m_1 + m_2) v_E \\ v_{1,A} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_E$$

3. Setzen Sie das Ergebnis für v_E aus Schritt 1 in Schritt 2 ein; dann können Sie nach $v_{1,A}$ auflösen:

$$v_{1,A} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_E = \boxed{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 g h}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Masse des Blocks ist wesentlich größer als die Masse der Kugel. Wir erwarten daher, dass die Geschwindigkeit der Kugel erheblich größer ist als die Geschwindigkeit des Blocks nach dem Stoß. Das Ergebnis aus Schritt 2 entspricht dieser Erwartung.

Weitergedacht: Wir haben angenommen, dass die Stoßzeit so kurz ist, dass sich der Block während des Aufpralls der Kugel praktisch nicht bewegt. Damit hat der Block unmittelbar nach dem Aufprall der Kugel, also am tiefsten Punkt seiner Bahn, seine maximale Geschwindigkeit. ■

Beispiel 6.10: Schuss auf eine leere Kiste

Sie wiederholen das Kunststück aus Beispiel 6.9, dieses Mal mit einer leeren Holzkiste als Ziel. Die Kugel durchschlägt die Kiste und tritt auf der anderen Seite wieder aus der Kiste aus. Ein Lasermessinstrument zeigt an, dass die Kugel hinter der Kiste mit der halben Anfangsgeschwindigkeit weiterfliegt. Mit diesem Messwert können Sie korrekt angeben, wie hoch die Kiste geschwungen sein muss. Wie hoch war die maximale Auslenkung?

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Die Höhe h hängt mit der Geschwindigkeit der Kiste v_2 nach dem Aufprall über den Erhaltungssatz der mechanischen Energie zusammen (Abbildung 6.18). Diese Geschwindigkeit lässt sich mithilfe des Impulserhaltungssatzes bestimmen.

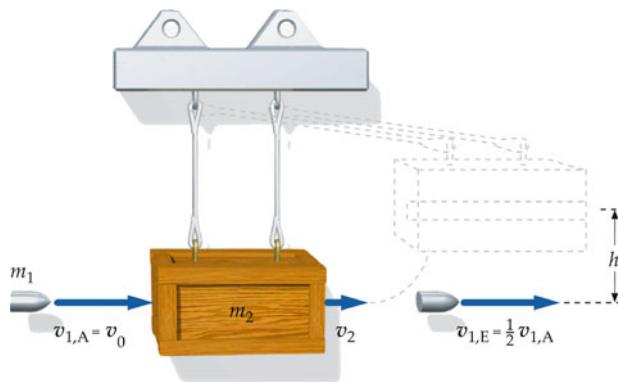


Abbildung 6.18 Bewegungsskizze des Systems.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Geben Sie mithilfe des Energieerhaltungssatzes den Zusammenhang zwischen der Schwinghöhe h und der Geschwindigkeit v_2 der Kiste unmittelbar nach dem Aufprall an.

2. Wenden Sie den Impulserhaltungssatz an und stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $v_{1,A}$ der Kugel vor und der Geschwindigkeit v_2 der Kiste nach dem Aufprall her.

3. Eliminieren Sie v_2 und lösen Sie nach h auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

2.

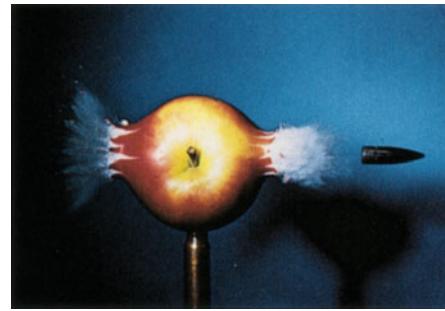
$$m_1 v_{1,A} = m_2 v_2 + m_1 \left(\frac{1}{2} v_{1,A} \right)$$

3.

$$h = \frac{m_1^2 v_{1,A}^2}{8 m_2^2 g}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir führen eine Dimensionsbetrachtung durch. Der Quotient v^2/g hat die physikalische Dimension Länge²/Zeit² geteilt durch Länge/Zeit², was sich zur Dimension Länge kürzen lässt. Das Ergebnis aus Schritt 3 hat daher die richtige Dimension.

Weitergedacht: Der Aufprall der Kugel auf die Kiste ist ein inelastischer Stoß, allerdings kein vollständig inelastischer Stoß, weil die beiden Körper nach dem Stoß nicht dieselbe Geschwindigkeit haben. Solche inelastischen Stöße treten auch in mikroskopischen Systemen auf. Wenn beispielsweise ein Elektron mit einem Atom zusammenstößt, wird dabei das Atom manchmal in einen höheren inneren Energiezustand gebracht. Die kinetische Energie von Atom und Elektron ist dann nach dem Stoß geringer als vor dem Stoß.



Eine Kugel durchschlägt mit 850 m/s einen Apfel. Nach diesem inelastischen Stoß wird der Apfel Bruchteile von Sekunden später völlig auseinandergesprengt. Die Belichtungszeit des Fotos liegt unter einer millionstel Sekunde. (© Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press Inc.)

Frage 6.1

Kann Beispiel 6.9 auch gelöst werden, wenn man die kinetische Anfangsenergie der Kugel und die potentielle Energie des Systems Kugel–Block auf maximaler Höhe gleichsetzt? Mit anderen Worten: Bleibt die kinetische Energie erhalten, während die Kugel inelastisch auf den Block stößt und das ballistische Pendel nach oben schwingt?

Beispiel 6.11: Zusammenstoß von PKW und LKW

Sie sitzen am Steuer eines PKW von 1200 kg und passieren ostwärts eine Kreuzung. Dort fährt ein aus Süden kommender LKW mit einer Masse von 3000 kg in Ihren Wagen (Abbildung 6.19). Ihr Auto und der LKW

verkeilen sich beim Zusammenprall ineinander. Der LKW-Fahrer behauptet, Sie seien zu schnell gefahren und daher schuld. Sie suchen Beweise, diese Behauptung zu entkräften. Sie finden folgende Indizien: Es gibt erstens keine Bremsspuren, was darauf hindeutet, dass weder Sie noch der LKW-Fahrer den Unfall vorhergesehen und hart gebremst haben; zweitens galt an Ihrer Straße eine Geschwindigkeitsbegrenzung von 80 km/h; drittens zeigt der Fahrtenschreiber des Lasters, dass er beim Aufprall 50 km/h schnell war; und viertens hat sich der LKW bei dem Unfall etwas gedreht, seine Fahrtrichtung bildet einen Winkel von 59° mit der Ostrichtung. Untermauern oder widerlegen diese Indizien die Behauptung des LKW-Fahrers, Sie seien zu schnell gefahren?

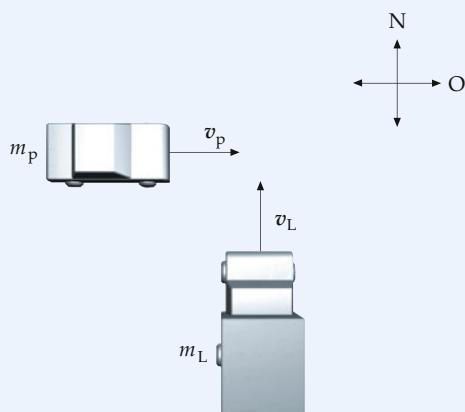


Abbildung 6.19 Darstellung der Bewegung des PKW und des LKW.

Problembeschreibung: Gegeben sind die Massen der Fahrzeuge und die Geschwindigkeit des LKW beim Zusammenstoß. Es handelt sich um einen vollständig inelastischen Stoß, da die beiden Fahrzeuge ineinander verkeilt sind. Wenden Sie den Impulserhaltungssatz an und bestimmen Sie die Geschwindigkeit Ihres Wagens beim Aufprall.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine Skizze der beiden Fahrzeuge vor und nach dem Zusammenprall. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass Ihr PKW P anfangs in positiver x-Richtung und der LKW L in positiver y-Richtung fuhr (Abbildung 6.20).

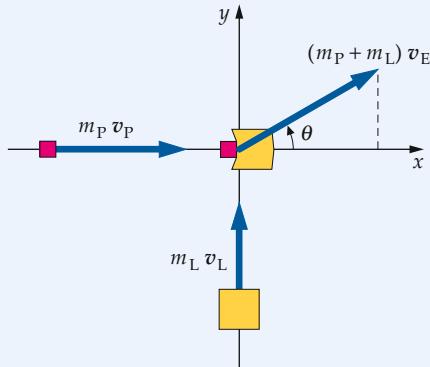


Abbildung 6.20 Stoßdiagramm der beiden Stoßpartner.

2. Schreiben Sie mithilfe der Massen und Geschwindigkeiten den Impulserhaltungssatz in vektorieller Form:

$$m_P v_P + m_L v_L = (m_P + m_L) v_E$$

3. Setzen Sie die x-Komponenten der Impulse vor und nach dem Stoß gleich:

$$m_P v_P + 0 = (m_P + m_L) v_E \cos \theta$$

4. Setzen Sie die y-Komponenten der Impulse vor und nach dem Stoß gleich:

$$0 + m_L v_L = (m_P + m_L) v_E \sin \theta$$

5. Eliminieren Sie die Endgeschwindigkeit v_E , indem Sie die Gleichung für die y-Komponente des Impulses durch die Gleichung für die x-Komponente teilen:

$$\frac{m_L v_L}{m_P v_P} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

und daher

$$\begin{aligned} v_P &= \frac{m_L v_L}{m_P \tan \theta} \\ &= \frac{(3000 \text{ kg}) (50 \text{ km/h})}{(1200 \text{ kg}) \tan 59^\circ} \\ &= [75 \text{ km/h}] \end{aligned}$$

6. Untermauert oder widerlegt das die Behauptung des LKW-Fahrers, Sie seien zu schnell gefahren?

Ihre Geschwindigkeit 75 km/h liegt innerhalb der Geschwindigkeitsbegrenzung von 80 km/h; die Behauptung des LKW-Fahrers ist daher durch die sorgfältige Anwendung der physikalischen Gesetze widerlegt.

Plausibilitätsprüfung: Die Masse des LKW ist zweieinhalbmal so groß wie die Masse Ihres Wagens. Wenn Sie 80 km/h fahren würden, wäre die Geschwindigkeit des LKW $5/8$ davon; das Verhältnis der Impulsbeträge von LKW und PKW wäre dann $2,5 \cdot \frac{5}{8} = 1,56$. Wegen $\tan^{-1} 1,56 = 57^\circ$ und weil 57° etwas geringer ist als 59° , scheint das Ergebnis von Schritt 6 plausibel. ■

Beispiel 6.12: Nichtzentraler Stoß

Ein Körper der Masse m_1 mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s stößt nicht zentral auf einen ruhenden Körper der Masse m_2 . Durch den Stoß wird der erste Körper um 25° aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s weiter. In welche Richtung bewegt sich der zweite Körper?

Problembeschreibung: Der Impuls bleibt während des Stoßes erhalten. Es handelt sich um einen zweidimensionalen Stoß, daher setzen wir die Summen der Impulsvektoren vor und nach dem Stoß gleich und lösen nach der gewünschten Richtung auf. In der Aufgabenstellung wird nicht angegeben, ob es sich um einen elastischen Stoß handelt oder nicht; daher können wir die Gleichungen, die explizit nur für elastische Stöße gelten, nicht anwenden.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine Skizze mit den beiden Körpern vor und nach dem Stoß (Abbildung 6.21). Wählen Sie die positive x -Richtung so, dass sie mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung von Körper 1 zusammenfällt. Zeichnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren ein und beschriften Sie sie.

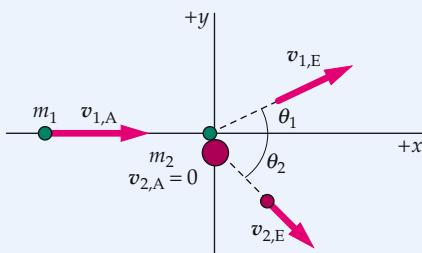


Abbildung 6.21 Stoßdiagramm der beiden Körper.

2. Schreiben Sie die Gleichungen für die Impulserhaltung nieder, sowohl in vektorieller Form als auch nach Komponenten:

$$m_1 v_{1,A} + 0 = m_1 v_{1,E} + m_2 v_{2,E}$$

oder

$$m_1 v_{1,A,x} = m_1 v_{1,E,x} + m_2 v_{2,E,x}$$

$$m_1 v_{1,A,y} = m_1 v_{1,E,y} + m_2 v_{2,E,y}$$

3. Drücken Sie die Komponentengleichungen mithilfe der Beträge und der Winkel aus:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,A} &= m_1 v_{1,E} \cos \theta_1 + m_2 v_{2,E} \cos \theta_2 \\ 0 &= m_1 v_{1,E} \sin \theta_1 + m_2 v_{2,E} \sin \theta_2 \end{aligned}$$

4. Um nach θ_2 aufzulösen, nutzen Sie den Zusammenhang $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ aus. Zuerst lösen Sie die Ergebnisse aus Schritt 3 nach dem Verhältnis $\sin \theta_2 / \cos \theta_2$ auf:

$$\begin{aligned} m_2 v_{2,E} \sin \theta_2 &= -m_1 v_{1,E} \sin \theta_1 \\ m_2 v_{2,E} \cos \theta_2 &= m_1 v_{1,A} - m_1 v_{1,E} \cos \theta_1 \end{aligned}$$

somit

$$\frac{m_2 v_{2,E} \sin \theta_2}{m_2 v_{2,E} \cos \theta_2} = \frac{-m_1 v_{1,E} \sin \theta_1}{m_1 v_{1,A} - m_1 v_{1,E} \cos \theta_1}$$

und

$$\tan \theta_2 = \frac{-\sin \theta_1}{\frac{v_{1,A}}{v_{1,E}} - \cos \theta_1}$$

5. Setzen Sie die Zahlenwerte ein und lösen Sie nach θ_2 auf:

$$\begin{aligned} \tan \theta_2 &= \frac{-\sin 25^\circ}{\frac{20}{15} - \cos 25^\circ} = -0,990 \\ \theta_2 &= \boxed{-45^\circ} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In Schritt 1 hatten wir das Koordinatensystem so gewählt, dass $\theta_1 = +25^\circ$. Es war daher zu erwarten, dass θ_2 zwischen 0 und -90° liegt. Unser Ergebnis $\theta_2 = -45^\circ$ liegt im erwarteten Bereich.

Weitergedacht: In der Aufgabenstellung sind weder m_2 noch $v_{2,E}$ explizit angegeben. Sie könnten daher überrascht sein, dass es überhaupt möglich ist, nach θ_2 aufzulösen. Beide Impulsvektoren vor und ein Impulsvektor nach dem Stoß waren in der Aufgabenstellung angegeben, sodass der Impulserhaltungssatz in Schritt 2 auch den anderen Impulsvektor nach dem Stoß eindeutig festlegt. Da damit alle vier Impulsvektoren bekannt sind, war es möglich, nach dem Impuls von Körper 2 nach dem Stoß aufzulösen. ■

6.5 Elastische Stöße

Bei vollkommen elastischen Stößen, die wir im Folgenden vereinfacht als elastische Stöße bezeichnen wollen, sind die kinetischen Energien der Stoßpartner vor und nach dem Stoß gleich. Solche vollkommenen elastischen Stöße sind jedoch eine idealisierte Vorstellung. In reiner Form treten sie in der makroskopischen Welt nicht auf. Würde ein auf den Betonboden gefallener Ball nach dem Aufprall wieder auf seine ursprüngliche Höhe zurückspringen, wäre der Stoß zwischen Ball und Boden vollkommen elastisch. Dies wird in der Natur jedoch nie beobachtet. Auf mikroskopischem Niveau findet man dagegen sehr wohl vollkommen elastische Stöße. Beispielsweise sind die Stöße zwischen den Luftmolekülen bei Temperaturen, die auf der Erdoberfläche herrschen, fast immer vollkommen elastisch.

Betrachten wir zunächst einen einfachen, eindimensionalen Fall. Abbildung 6.22 zeigt zwei Körper vor und nach einem eindimensionalen Stoß. Der Impuls bleibt während des Stoßes erhalten, und es gilt

$$m_1 v_{1,E} + m_2 v_{2,E} = m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A}. \quad (6.15)$$

Dieser Stoß soll elastisch sein. Nur für elastische Stöße bleibt auch die kinetische Energie während des Stoßes erhalten, sodass gilt

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,E}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,E}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2. \quad (6.16)$$

Die Gleichungen 6.15 und 6.16 reichen aus, um die Endgeschwindigkeiten der beiden Stoßpartner zu berechnen, wenn die Massen und die Anfangsgeschwindigkeiten gegeben sind. Da die Geschwindigkeiten in Gleichung 6.16 jedoch in quadratischer Form vorkommen, kann die gleichzeitige Lösung von Gleichung 6.15 und 6.16 recht kompliziert werden. Solche Probleme lassen sich leichter lösen, wenn man die Geschwindigkeit der beiden Körper relativ zueinander nach dem Stoß mithilfe

ihrer Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß ausdrückt. Durch Umstellen von Gleichung 6.16 ergibt sich

$$m_2 (v_{2,E}^2 - v_{2,A}^2) = m_1 (v_{1,A}^2 - v_{1,E}^2).$$

Wegen $(v_E^2 - v_A^2) = (v_E - v_A)(v_E + v_A)$ folgt

$$\begin{aligned} m_2 (v_{2,E} - v_{2,A}) (v_{2,E} + v_{2,A}) \\ = m_1 (v_{1,A} - v_{1,E}) (v_{1,A} + v_{1,E}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Wegen der Impulserhaltung wissen wir (Gleichung 6.15):

$$m_1 v_{1,E} + m_2 v_{2,E} = m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A}.$$

Eine Umordnung der Terme ergibt

$$m_2 (v_{2,E} - v_{2,A}) = m_1 (v_{1,A} - v_{1,E}). \quad (6.18)$$

Teilen wir nun Gleichung 6.17 durch 6.18, so erhalten wir

$$v_{2,E} + v_{2,A} = v_{1,A} + v_{1,E}.$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$v_{1,A} - v_{2,A} = v_{2,E} - v_{1,E}. \quad (6.19)$$

RELATIVGESCHWINDIGKEITEN BEI EINEM ELASTISCHEN STOSS

!

Gleichung 6.19 gilt nur dann, wenn die kinetische Energie vor und nach dem Stoß gleich ist, also *nur* für elastische Stöße.

Die Geschwindigkeit, mit der die beiden Körper sich nähern kommen, ist die Annäherungsgeschwindigkeit $v_{1,A} - v_{2,A}$, deren Richtung positiv oder negativ sein kann. Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Stoßpartner mit der Relativgeschwindigkeit $v_{2,E} - v_{1,E}$ in der umgekehrten Richtung voneinander fort. In Worten beschreibt Gleichung 6.19 somit das folgende wichtige Ergebnis:

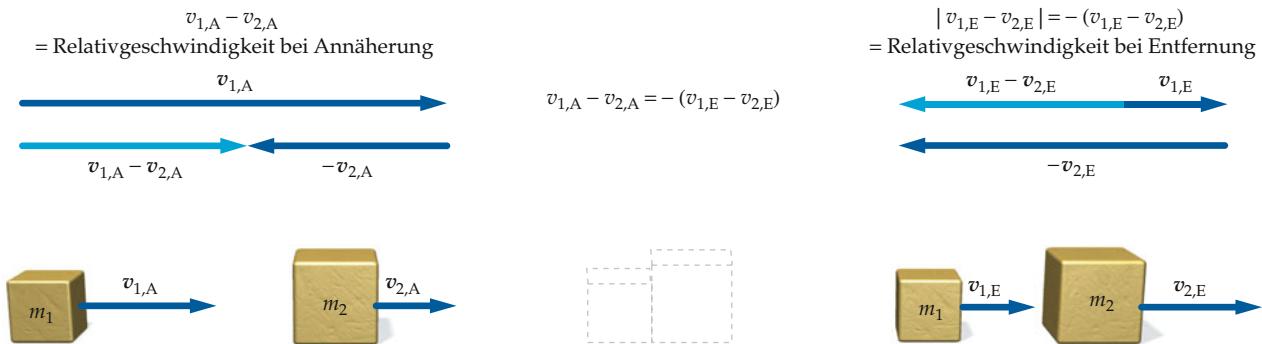


Abbildung 6.22 Annäherung und Trennung bei einem elastischen Stoß.

Bei einem elastischen Stoß ist der Betrag der Relativgeschwindigkeit, mit der sich die Körper nach dem Stoß voneinander entfernen, gleich dem Betrag der Relativgeschwindigkeit, mit der sie sich vor dem Stoß angenähert haben.

RELATIVGESCHWINDIGKEITEN BEI EINEM ELASTISCHEN STOß

Bei elastischen Stößen ist es *immer* leichter, die Impulserhaltung (Gleichung 6.15) in Verbindung mit Gleichung 6.19 für die Relativgeschwindigkeiten anzuwenden, als den Energiesatz von Gleichung 6.16 heranzuziehen. Zwei exemplarische Rechnungen für elastische Stöße werden in Beispiel 6.13 und 6.14 gezeigt.

Beispiel 6.13: Elastischer Stoß von zwei Blöcken

Ein Block von 4,0 kg, der sich mit 6,0 m/s nach rechts bewegt, stößt elastisch auf einen Block von 2,0 kg, der sich mit 3,0 m/s ebenfalls nach rechts bewegt (Abbildung 6.23). Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Blöcke nach dem Stoß.

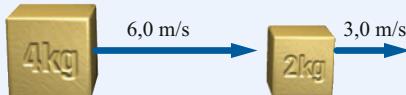


Abbildung 6.23 Skizze der Bewegung der Blöcke.

Problembeschreibung: Mit dem Impulserhaltungssatz und der Gleichheit von kinetischer Energie vor und nach dem Stoß (ausgedrückt durch die Relativgeschwindigkeiten der Blöcke) erhält man zwei Gleichungen für die zwei unbekannten Geschwindigkeiten nach dem Stoß. In den Formeln bezeichnet der Index 1 den 4,0-kg-Block und der Index 2 den 2,0-kg-Block.

Lösung: 1. Wenden Sie die Impulserhaltung an und vereinfachen Sie, dann erhalten Sie eine Gleichung für die zwei gesuchten Endgeschwindigkeiten:

$$m_1 v_{1,E} + m_2 v_{2,E} = m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A}$$

$$\begin{aligned}(4,0 \text{ kg}) (6,0 \text{ m/s}) + (2,0 \text{ kg}) (3,0 \text{ m/s}) \\ = (4,0 \text{ kg}) v_{1,E} + (2,0 \text{ kg}) v_{2,E}\end{aligned}$$

sodass

$$2 v_{1,E} + v_{2,E} = 15 \text{ m/s}$$

2. Da es sich um einen elastischen Stoß handelt, können Sie mit Gleichung 6.19 eine zweite Gleichung herleiten:

$$\begin{aligned}v_{2,E} - v_{1,E} &= (v_{1,A} - v_{2,A}) \\ &= (6,0 \text{ m/s} - 3,0 \text{ m/s}) = 3,0 \text{ m/s}\end{aligned}$$

3. Ziehen Sie das Ergebnis aus Schritt 2 von dem Ergebnis in Schritt 1 ab und lösen Sie nach $v_{1,E}$ auf:

$$2 v_{1,E} + v_{1,E} = 12 \text{ m/s}$$

sodass

$$v_{1,E} = 4,0 \text{ m/s}$$

4. Setzen Sie dies in das Ergebnis von Schritt 2 ein und lösen Sie nach $v_{2,E}$ auf:

$$v_{2,E} - 4,0 \text{ m/s} = 3,0 \text{ m/s}$$

sodass

$$v_{2,E} = 7,0 \text{ m/s}$$

Plausibilitätsprüfung: Um die Ergebnisse auf Plausibilität zu prüfen, berechnen wir die kinetische Energie vor und nach dem Stoß:

$$\begin{aligned}E_{\text{kin},A} &= \frac{1}{2} (4,0 \text{ kg}) (6,0 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} (2,0 \text{ kg}) (3,0 \text{ m/s})^2 \\ &= 72 \text{ J} + 9,0 \text{ J} = 81 \text{ J}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{\text{kin},E} &= \frac{1}{2} (4,0 \text{ kg}) (4,0 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} (2,0 \text{ kg}) (7,0 \text{ m/s})^2 \\ &= 32 \text{ J} + 49 \text{ J} = 81 \text{ J} = E_{\text{kin},A}.\end{aligned}$$

Die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind wie erwartet gleich. ■

Beispiel 6.14: Neutronenstreuung – elastischer Stoß von einem Neutron und einem Atomkern

Ein Neutron der Masse m_n und der Geschwindigkeit $v_{n,A}$ stößt elastisch mit einem ruhenden Kohlenstoffkern der Masse m_C zusammen (Abbildung 6.24). Man spricht bei einem solchen Vorgang auch von Neutronenstreuung. a) Welche kinetische Energie haben die beiden Teilchen nach dem Stoß? b) Welchen Bruchteil f seiner kinetischen Anfangsenergie verliert das Neutron beim Stoß?

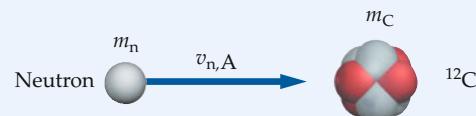


Abbildung 6.24 Darstellung der Neutronenstreuung an einem ^{12}C -Atomkern.

Problembeschreibung: Wir finden die Geschwindigkeiten nach dem Stoß mithilfe des Impuls- und des Energieerhaltungssatzes. Da die kinetische Energie des Kohlenstoffkerns anfangs null ist, muss seine kinetische Energie

nach dem Stoß gleich dem Energieverlust des Neutrons sein.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Mit dem Impulserhaltungssatz bekommen Sie eine Gleichung für die gesuchten Geschwindigkeiten:

$$m_n v_{n,A} = m_n v_{n,E} + m_C v_{C,E}$$

- Setzen Sie mit Gleichung 6.19 die Relativgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß gleich:

$$v_{C,E} - v_{n,E} = (v_{n,A} - v_{C,A}) = v_{n,A} - 0$$

sodass

$$v_{C,E} = v_{n,A} + v_{n,E}$$

- Um $v_{C,E}$ zu eliminieren, setzen Sie den Ausdruck für $v_{C,E}$ aus Schritt 2 in das Ergebnis von Schritt 1 ein:

$$m_n v_{n,A} = m_n v_{n,E} + m_C (v_{n,A} + v_{n,E})$$

- Lösen Sie nach $v_{n,E}$ auf:

$$v_{n,E} = \boxed{-\frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{n,A}}$$

- Setzen Sie das Ergebnis von Schritt 4 in Schritt 2 ein und lösen Sie nach $v_{C,E}$ auf:

$$v_{C,E} = v_{n,A} - \frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{n,A} = \boxed{\frac{2 m_n}{m_n + m_C} v_{n,A}}$$

Teilaufgabe b

- Der Stoß ist elastisch, daher ist die kinetische Energie, die das Neutron beim Stoß verloren hat, gleich der kinetischen Energie des Kohlenstoffkerns nach dem Stoß:

$$\begin{aligned} f &= \frac{-\Delta E_{kin,n}}{E_{kin,n,A}} = \frac{E_{kin,C,E}}{E_{kin,n,A}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} m_C v_{C,E}^2}{\frac{1}{2} m_n v_{n,A}^2} = \frac{m_C}{m_n} \left(\frac{v_{C,E}}{v_{n,A}} \right)^2 \end{aligned}$$

- Bilden Sie aus dem Ergebnis von Schritt 5 in Teilaufgabe a das Verhältnis der Geschwindigkeiten, setzen Sie dies in Schritt 1 aus Teilaufgabe b ein und lösen Sie nach dem anteiligen Energieverlust des Neutrons auf:

$$f = \frac{m_C}{m_n} \left(\frac{2 m_n}{m_n + m_C} \right)^2 = \boxed{\frac{4 m_n m_C}{(m_n + m_C)^2}}$$

Plausibilitätsprüfung: Beachten Sie, dass unser berechneter Wert für $v_{n,E}$ negativ ist. Das Neutron mit der Masse m_n prallt vom viel schwereren Kohlenstoffkern m_C zurück. Dieses Ergebnis ist stets zu erwarten, wenn ein leichtes Teilchen elastisch mit einem wesentlich schwereren, anfänglich ruhenden Teilchen zusammenstößt.

Weitergedacht: Der anteilige Energieverlust bei elastischen Stößen hängt vom Massenverhältnis der Stoßpartner ab (Abbildung 6.25).

Übung 6.3: Betrachten Sie einen elastischen Stoß zwischen zwei bewegten Körpern gleicher Masse (Körper 1 und Körper 2). Zeigen Sie mit Gleichung 6.15 und 6.19, dass die beiden Körper ihre Geschwindigkeit „tauschen“, d. h. dass die Geschwindigkeit von Körper 2 nach dem Stoß genauso groß ist wie die Anfangsgeschwindigkeit von Körper 1 und umgekehrt. ▶

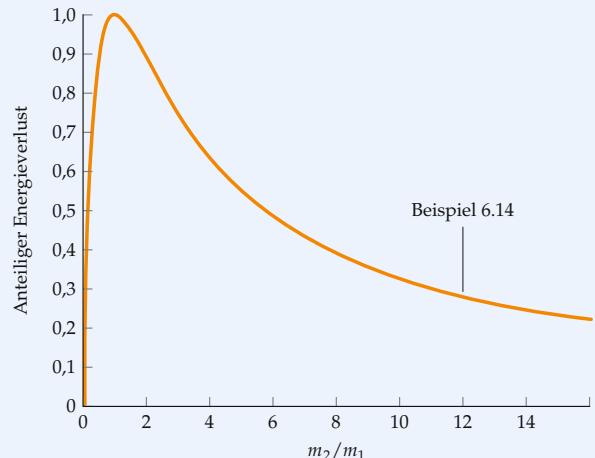


Abbildung 6.25 Anteiliger Energieverlust als Funktion des Massenverhältnisses der Stoßpartner. Der Energieverlust ist maximal für $m_1 = m_2$. ■

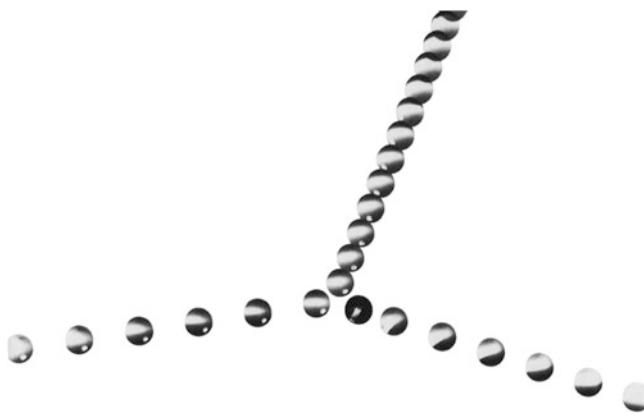
Die Endgeschwindigkeit $v_{1,E}$ des ankommenen Teilchens und die Geschwindigkeit $v_{2,E}$ des anfangs ruhenden Teilchens hängen mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_{1,A}$ des ankommenen Teilchens gemäß

$$v_{1,E} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,A} \quad (6.20a)$$

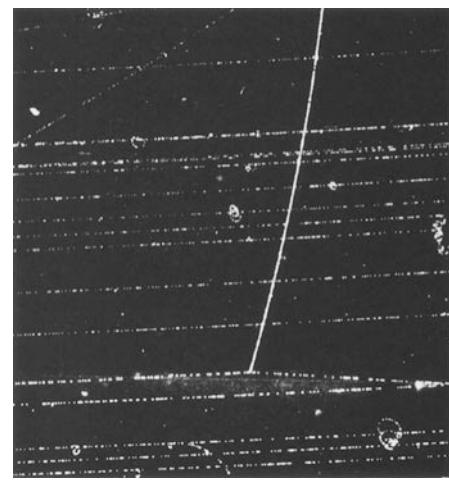
bzw.

$$v_{2,E} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A} \quad (6.20b)$$

zusammen. Diese Gleichungen wurden in Beispiel 6.14 hergeleitet. Um sie etwas plausibler zu machen, wollen wir einige



Stroboskopische Aufnahme eines nichtzentralen elastischen Stoßes zwischen zwei Kugeln gleicher Masse. Die mit einem Punkt gekennzeichnete Kugel tritt von links ein und stößt auf die anfangs ruhende gestreifte Kugel. Die Vektoren der Endgeschwindigkeiten für die beiden Kugeln stehen senkrecht aufeinander. (© Berenice Abbot/Photo Researchers.)



Proton-Proton-Stoß in einer Blasenkammer. Ein Proton tritt von links ein und wechselwirkt mit einem anfangs ruhenden Proton. Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Protonen rechtwinklig voneinander fort. Die leichte Krümmung der Bahnen wird durch ein Magnetfeld verursacht. (© Brookhaven National Laboratory.)

Grenzfälle für die Massen betrachten. Wenn ein sehr schwerer Körper (z. B. eine Bowlingkugel) mit einem leichten ruhenden Körper (z. B. einem Tischtennisball) zusammenstößt, dann beeinflusst der Stoß den schweren Körper praktisch nicht. Vor dem Stoß beträgt die relative Annäherungsgeschwindigkeit $v_{1,A}$. Wenn aber der schwere Körper sich nach dem Stoß mit einer praktisch unveränderten Geschwindigkeit $v_{1,A}$ weiterbewegt, dann muss die Geschwindigkeit des leichteren Körpers $2v_{1,A}$ betragen, damit die Relativgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß gleich sind. Dies folgt auch aus Gleichung 6.20a und 6.20b, wenn m_2 viel kleiner ist als m_1 . In diesem Fall ergibt sich wie erwartet $v_{1,E} \approx v_{1,A}$ und $v_{2,E} \approx 2v_{1,A}$.

Elastische Stöße in zwei oder drei Raumrichtungen sind komplizierter als die bislang behandelten eindimensionalen Fälle, da man zunächst feststellen muss, ob der Stoß zentral oder nichtzentral stattfand. Betrachten wir nun einen nichtzentralen Stoß, wie er in Abbildung 6.26a dargestellt ist. Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 stoßen mit ihren beiden Anfangsgeschwindigkeiten $v_{1,A}$ und $v_{2,A}$ nichtzentral zusammen. Nach dem Stoß bewegt sich der erste Körper mit der Geschwindigkeit $v_{1,E}$ unter einem Winkel von θ_1 zur ursprünglichen Richtung weg, während der zweite Körper sich mit der Geschwindigkeit $v_{2,E}$ unter einem Winkel θ_2 zu $v_{1,A}$ weiterbewegt.

Der Impulserhaltungssatz ergibt

$$\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_{1,A} = m_1 \mathbf{v}_{1,E} + m_2 \mathbf{v}_{2,E}. \quad (6.21)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass der Vektor $\mathbf{v}_{2,E}$ in der Ebene liegen muss, die durch die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{1,A}$ und $\mathbf{v}_{1,E}$ aufgespannt wird. Diese Ebene soll unsere xy -Ebene sein. Wenn wir die Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{1,A}$ kennen, haben wir vier Unbekannte zu bestimmen: die x - und die y -Komponenten der beiden Endgeschwindigkeiten $\mathbf{v}_{1,E}$ bzw. $\mathbf{v}_{2,E}$; oder gleichwertig die Beträge der beiden Endgeschwindigkeiten $v_{1,E}$ und $v_{2,E}$ und die beiden Ablenkungswinkel θ_1 und θ_2 .

Zwei der benötigten Gleichungen erhalten wir aus der x - bzw. der y -Komponente des in Komponenten geschriebenen Impulserhaltungssatzes:

$$m_1 v_{1,A} = m_1 v_{1,E} \cos \theta_1 + m_2 v_{2,E} \cos \theta_2, \quad (6.22)$$

$$0 = m_1 v_{1,E} \sin \theta_1 + m_2 v_{2,E} \sin \theta_2. \quad (6.23)$$

Da der Stoß elastisch ist, können wir mithilfe des Energieerhaltungssatzes eine dritte Gleichung herleiten:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,E}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,E}^2. \quad (6.24)$$

Um aber nach allen vier Unbekannten auflösen zu können, benötigen wir eine weitere Gleichung. Diese vierte Beziehung hängt von dem Stoßparameter b und dem Charakter der Kraft ab, die die beiden Stoßpartner aufeinander ausüben. In der Praxis findet man die vierte Beziehung oft experimentell durch Messung des Ablenk- bzw. des Rückstoßwinkels. Aus solchen Messungen kann man Rückschlüsse über den Charakter der Wechselwirkung zwischen den beiden Körpern ziehen.

Die Beziehung $v_{1,A} - v_{2,A} = v_{2,E} - v_{1,E}$ (Gleichung 6.19) ist sehr nützlich, wenn Sie eindimensionale elastische Stöße behandeln wollen. Diese Gleichung lässt sich im Allgemeinen jedoch nicht auf zwei- oder dreidimensionale Stöße anwenden. Die Ergebnisse wären falsch.

Wir betrachten hier nur einen wichtigen Spezialfall, nämlich den nichtzentralen Stoß zwischen zwei Körpern *gleicher Masse* m , von denen einer sich anfangs in Ruhe befindet (Abbildung 6.26a). Wenn wir mit $v_{1,A}$ bzw. $v_{1,E}$ die Anfangs- und

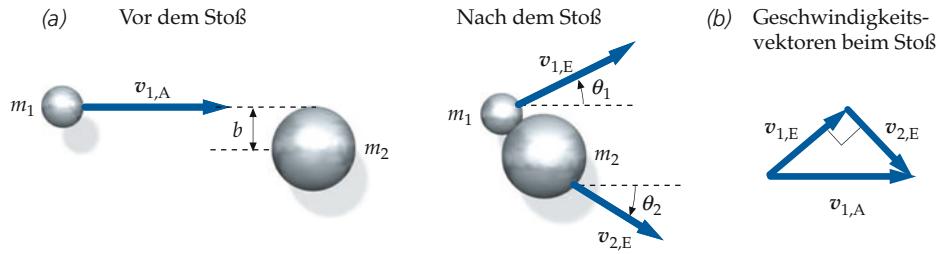


Abbildung 6.26 a) Nichtzentraler elastischer Stoß zwischen zwei Kugeln gleicher Masse, von denen sich eine anfangs in Ruhe befindet. Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Kugeln im rechten Winkel voneinander fort. b) Die Geschwindigkeitsvektoren bei diesem Stoß bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

Endgeschwindigkeit des stoßenden Körpers 1 und mit $v_{2,E}$ die Endgeschwindigkeit des getroffenen Körpers 2 bezeichnen, dann ergibt der Impulserhaltungssatz

$$m v_{1,A} = m v_{1,E} + m v_{2,E}$$

oder

$$v_{1,A} = v_{1,E} + v_{2,E}.$$

Diese Vektoren bilden ein rechtwinkliges Dreieck wie in Abbildung 6.26b. Da der Stoß elastisch ist, bleibt die Energie erhalten:

$$\frac{1}{2} v_{1,A}^2 = \frac{1}{2} v_{1,E}^2 + \frac{1}{2} v_{2,E}^2$$

und damit

$$v_{1,A}^2 = v_{1,E}^2 + v_{2,E}^2. \quad (6.25)$$

Gleichung 6.25 ist der Satz des Pythagoras für das rechtwinklige Dreieck aus den Vektoren $v_{1,A}$, $v_{1,E}$ und $v_{2,E}$ mit dem Vektor $v_{1,A}$ als Hypotenuse. In diesem speziellen Fall stehen die Geschwindigkeitsvektoren $v_{1,E}$ und $v_{2,E}$ der beiden Körper nach dem Stoß senkrecht aufeinander (Abbildung 6.26b).

Übung 6.4: In einem Billardspiel trifft eine Kugel mit der Geschwindigkeit v_0 nicht zentral auf eine zweite Kugel. Der Stoß ist elastisch, die zweite Kugel ruht vor dem Stoß, und die erste Kugel wird durch den Stoß um 30° aus ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt. Welche Geschwindigkeit hat die zweite Kugel nach dem Stoß? (Beide Kugeln sollen dieselbe Masse haben.) ◀

Die Elastizitätszahl

Die meisten realen Stoße sind weder rein elastische Stoße (bei denen sich die Relativgeschwindigkeiten umkehren) noch vollständig inelastische Stoße (bei denen die Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß null ist), sondern liegen irgendwo dazwischen. Um ein Maß für die Elastizität eines Stoßes zu haben, definiert man eine Hilfsgröße. Sie heißt **Elastizitätszahl** oder

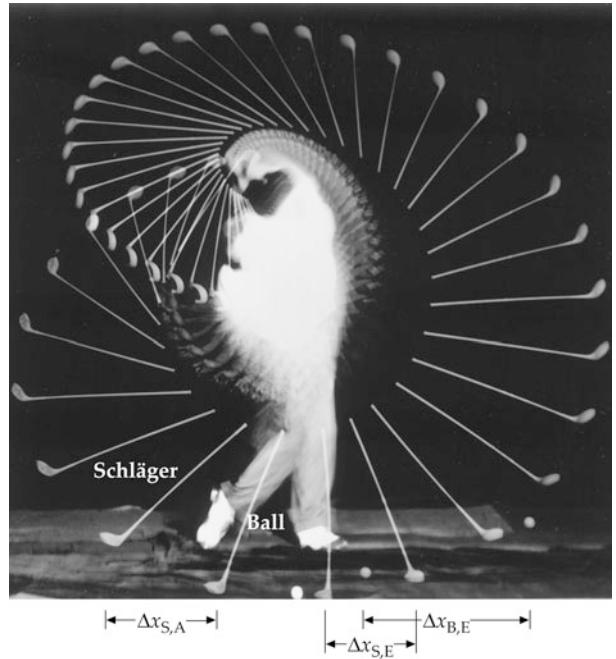


Abbildung 6.27 Stroboskopische Aufnahme eines Golfschlägers, der auf einen Golfball trifft. (© Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press Inc.)

Elastizitätskoeffizient e und ist definiert als das Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten nach und vor dem Stoß:

$$e = \frac{v_{\text{rel,nach}}}{v_{\text{rel,vor}}} = \frac{v_{1,E} - v_{2,E}}{v_{2,A} - v_{1,A}}. \quad (6.26)$$

DEFINITION DER ELASTIZITÄTSZAHL

Für einen vollständig elastischen Stoß ist $e = 1$, für einen vollständig inelastischen Stoß ist $e = 0$.

Übung 6.5: Schätzen Sie anhand von Abbildung 6.27 die Elastizitätszahl für den Stoß zwischen Schläger und Ball. ◀

🔍 Im Kontext: Stöße beim Billard

Egal welche der ca. 35 Varianten beim Billard man spielt, stets muss man der weißen Kugel mit seinem Queue einen Kraftstoß der richtigen Stärke und Richtung geben, damit diese Kugel mit einer anderen zusammenstößt, welche ihrerseits danach in die gewünschte Zielrichtung rollt. Beim sehr populären Poolbillard sind beispielsweise alle 16 Kugeln aus Phenolharz, haben einen Durchmesser von 5,72 cm und eine Masse von 170 g.¹



Ein Set Billardkugeln. (© beermedia - Fotolia.com.)

Nach dem Eröffnungsstoß, dem sogenannten *Break*, erfordert es meist viel Geschicklichkeit, die Kugeln, die danach zufällig über dem Tisch verteilt sind, in die *Taschen* am Rand des Tisches einzulochen. Dazu bedient sich ein Spieler den Gesetzen der Physik.² Liegen die weiße und die zu spielende Kugel auf einer Geraden, auf der sich auch eine Ta-

sche befindet und gibt es keine weiteren Kugeln in der Nähe dieser Geraden, so kann der Spieler einen geraden zentralen Stoß ausführen, der die weiße Kugel zentral auf die Zielkugel zu spielt. Aufgrund der Impulserhaltung wird sich die getroffene Kugel nach dem Stoß in die Zielrichtung weiterbewegen und, bei genügend hohem Geschwindigkeitsübertrag von der weißen Kugel, auch in die Tasche fallen. Je nach Stärke des auf eine Kugel wirkenden Kraftstoßes rutscht sie zunächst über das Tuch, bevor sie aufgrund der Reibung in eine Rollbewegung übergeht. Die meisten Stöße beim Billard finden jedoch schief und nichtzentral statt, da die weiße und die Zielkugel selten auf einer Geraden direkt vor einer Tasche liegen. Da beide gespielten Kugeln gleich schwer sind und die Zielkugel vor dem Stoß in Ruhe ist, kann man mithilfe der in diesem Kapitel hergeleiteten Formeln für den schiefen, nichtzentralen Stoß die Geschwindigkeiten und die Richtungen der beiden Kugeln nach dem Stoß bestimmen. Es ist im Allgemeinen auch wichtig, die Richtung und Geschwindigkeit der weißen Kugel nach dem Stoß zu bestimmen, da sie nicht in eine Tasche fallen darf.

Spielt man die weiße Kugel mit dem Queue nicht zentral an, so erfolgt bereits dieser Stoß nichtzentral. Solche Stöße bezeichnet man im Fachjargon als *Effetstöße*. Sie versetzen die Kugel nicht nur in eine Vorförwärtsbewegung, sondern gleichzeitig auch in Rotation. Analog zur Impulserhaltung ergibt sich für diesen Fall eine Drehimpulserhaltung, die dafür sorgt, dass ein Teil der Rotationsenergie beim Stoß mit der Zielkugel auf diese abgegeben wird. Hauptsächlich nutzt man Effetstöße, um die weiße Kugel nach dem Stoß gut zu positionieren. Beispielsweise verhindert ein Anspielen unterhalb des Kugeläquators, dass die weiße Kugel sich nach dem Stoß in die gleiche Richtung wie die angespielte Kugel bewegt. Dieser *Rückläufertoß* ist nützlich, wenn die Zielkugel sehr nahe an einer Tasche liegt und man verhindern will, dass die weiße Kugel hinter der Zielkugel eingelocht wird. Spielt man die weiße Kugel umgekehrt oberhalb des Äquators an, folgt sie der Zielkugel in die gespielte Richtung. Dieser Stoß wird auch als *Nachläufer* bezeichnet.

1. <http://de.wikipedia.org/wiki/Poolbillard>
2. <http://www.paulkowski.homepage.t-online.de/physik1.html>

Zusammenfassung

Die Impulserhaltung für ein abgeschlossenes System ist ein grundlegendes Naturgesetz mit Anwendungen in allen Gebieten der Physik.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Impuls	
Impuls eines Teilchens	$p_i = m_i v_i$ (6.1)
Gesamtmpuls eines Systems	$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$ (6.4)
Zweites Newton'sches Axiom für ein System	$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ (6.3)
Impulserhaltungssatz	Wenn die resultierende Kraft auf ein System null ist, bleibt der Gesamtmpuls des Systems erhalten.
Kinetische Energie eines Teilchens	$E_{\text{kin},i} = \frac{p_i^2}{2 m_i}$ (6.12)
2. Stoße	
Kraftstoß	Der Kraftstoß einer Kraft ist definiert als das Integral der Kraft über das Zeitintervall, während dessen die Kraft wirkt.
	$\Delta \mathbf{p} = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F} dt. \quad (6.6)$
Zusammenhang von Kraftstoß und Impulsänderung bei einem System von Teilchen	$\Delta \mathbf{p} = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F}_{\text{ext}} dt \quad (6.8)$
Zeitliches Mittel einer Kraft (mittlere Kraft)	$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F} dt = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \quad \text{und damit} \quad \Delta \mathbf{p} = \langle \mathbf{F} \rangle \Delta t \quad (6.9)$
Vollständig inelastischer Stoß	Bei einem vollständig inelastischen Stoß bleiben die beiden Stoßpartner aneinander haften und bewegen sich gemeinsam mit der Endgeschwindigkeit v_E in die gleiche Richtung: $m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} = (m_1 + m_2) v_E. \quad (6.11)$
Elastische Stöße	Ein Stoß zwischen zwei Partnern heißt elastisch, wenn die Summe der kinetischen Energien der beiden Stoßpartner vor und nach dem Stoß gleich ist. Es gilt: $m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} = m_1 v_{1,E} + m_2 v_{2,E}, \quad (6.15)$ $\frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,E}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,E}^2. \quad (6.16)$
Endgeschwindigkeiten der beiden Stoßpartner	Die Endgeschwindigkeiten der beiden Stoßpartner bei einem eindimensionalen zentralen Stoß sind $v_{1,E} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,A}, \quad (6.20a)$ $v_{2,E} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A}, \quad (6.20b)$ wenn anfänglich der zweite Körper in Ruhe war.
Relativgeschwindigkeiten bei einem elastischen Stoß	Bei einem elastischen Stoß ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Stoßpartner nach dem Stoß voneinander entfernen, genauso groß wie die Geschwindigkeit, mit der sie sich vor dem Stoß einander genähert haben. Bei einem <i>zentralen</i> Stoß gilt $v_{2,E} - v_{1,E} = -(v_{2,A} - v_{1,A}). \quad (6.19)$
*Elastizitätszahl	Die Elastizitätszahl e ist ein Maß für die Elastizität des Stoßes. Sie ist definiert als das Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten nach und vor dem Stoß: $e = -\frac{v_{2,E} - v_{1,E}}{v_{2,A} - v_{1,A}}. \quad (6.26)$ Bei einem vollständig elastischen Stoß ist $e = 1$, bei einem vollständig inelastischen Stoß ist $e = 0$.

Antwort auf die Verständnisfrage

6.1 Nein.

Lösungen der Übungen

6.1 8,4 J

6.2 1,32 m/s. Wenn sie die Hanteln nacheinander wirft, gewinnt sie mehr Tempo, als wenn sie die Hanteln gleichzeitig von sich wirft.

6.3 Wegen der Impulserhaltung folgt $v_{1,A} + v_{2,A} = v_{1,E} + v_{2,E}$. Bei einem elastischen Stoß ist $v_{1,A} - v_{2,A} = v_{2,E} - v_{1,E}$. Zusammen folgt daraus: $v_{2,E} = v_{1,A}$ und $v_{1,E} = v_{2,A}$.

6.4 $\frac{1}{2} v_0$

6.5 0,73

Aufgaben

Bei allen Aufgaben ist die Fallbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

6.1 • Zeigen Sie: Wenn zwei Teilchen gleiche kinetische Energien haben, dann sind die Beträge ihrer Impulse nur dann gleich, wenn sie auch dieselbe Masse haben.

6.2 • Richtig oder falsch? a) Der Gesamtimpuls eines Systems kann auch dann erhalten bleiben, wenn die Energie des Systems nicht erhalten bleibt. b) Damit der Gesamtimpuls eines Systems erhalten bleibt, dürfen keine äußeren Kräfte auf das System wirken.

6.3 • Ein Kind springt von einem kleinen Boot an Land. Warum muss es mit mehr Energie springen, als es bräuchte, wenn es dieselbe Strecke von einem Felsen auf einen Baumstumpf springen würde?

6.4 • Zwei identische Kegelkugeln bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit, aber die eine gleitet, ohne zu rollen, die andere rollt die Bahn entlang. Welche der Kugeln hat mehr kinetische Energie? Welche der Kugeln hat einen höheren Impuls? Wegen des Zusammenhangs zwischen kinetischer Energie und Impuls eines Teilchens ($E_{\text{kin}} = p^2/(2m)$) mag es aussehen, als sei Ihre Antwort falsch. Erläutern Sie, warum Ihre Antwort trotzdem richtig ist.

6.5 • Richtig oder falsch? a) Nach einem vollständig inelastischen Stoß ist die kinetische Energie des Systems in allen Inertialsystemen null. b) Bei einem zentralen elastischen Stoß entfernen sich die Stoßpartner genauso schnell voneinander, wie sie sich einander angenähert haben.

6.6 •• Ein Großteil der frühen Raketenforschung geht auf Robert H. Goddard (1882–1945) zurück, der als Physikprofessor am Clark College in Massachusetts arbeitete. Ein Leitartikel der *New York Times* aus dem Jahr 1920 belegt, was die Öffentlichkeit von seinen Arbeiten hielt: „Zu sagen, dass Professor Goddard, sein ‚Lehrstuhl‘ am Clark College und seine Genossen an der Smithsonian Institution den Zusammenhang zwischen Aktion und Reaktion nicht kennen, nach dem eine Rakete etwas mehr als nur das Vakuum braucht, um sich daran abzustoßen – das alles zu sagen, wäre absurd. Offenbar fehlt es ihm einfach an dem Wissen, das schon an unseren Highschools gelehrt wird.“ Die Ansicht, dass eine Rakete sich an einem Medium abstoßen muss, war damals ein weit verbreiteter Irrglaube. Erläutern Sie, warum die Ansicht falsch ist. (Übrigens brauchte die *New York Times* ein halbes Jahrhundert, um sich zu entschuldigen: Erst am 17. Juli 1969, drei Tage vor der ersten Mondlandung, berichtigte die Zeitung den Fehler.)

6.7 •• Betrachten Sie einen vollständig inelastischen Stoß zwischen zwei Körpern gleicher Masse. a) Wann ist der Verlust an kinetischer Energie größer: wenn die zwei Körper sich mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten von jeweils $v/2$ einander nähern oder wenn einer der beiden Körper in Ruhe ist und der andere die Geschwindigkeit v hat? b) In welcher der beiden Situationen ist der prozentuale Verlust an kinetischer Energie am größten?

6.8 •• Ein Teilchen der Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v stößt elastisch zentral mit einem ruhenden Teilchen der Masse m_2 zusammen. In welchem Fall wird am meisten Energie auf m_2 übertragen? a) $m_2 < m_1$, b) $m_2 = m_1$, c) $m_2 > m_1$, d) in keinem der angegebenen Fälle.

6.9 •• Die Düse an einem Gartenschlauch ist oft rechtwinklig geformt (Abbildung 6.28). Wenn Sie eine solche Düse anschließen und den Hahn öffnen, werden Sie feststellen, dass die Düse ziemlich stark gegen Ihre Hand drückt – jedenfalls viel stärker, als wenn Sie eine nicht gebogene Düse verwenden. Warum ist das so?



Abbildung 6.28 Zu Aufgabe 6.9.

6.10 •• Dass selbst wirklich gut ausgebildete und intelligente Personen Fehler machen können, zeigt die folgende Aufgabe, die einem Einführungskurs am Caltech gestellt wurde: „Ein Segelboot treibt bei einer Flaute auf dem Wasser. Um das Boot zu bewegen, baut ein physikalisch unbedarfter Matrose im Heck des Schiffs einen Ventilator auf, der die Segel anblasen und so das Boot bewegen soll. Erläutern Sie, warum das Boot sich nicht bewegt.“ Die Vorstellung war, dass die resultierende Kraft des Windes, der das Segel nach vorn treibt, durch die Kraft ausgeglichen wird, die den Ventilator nach hinten treibt (drittes

Newton'sches Axiom). Wie ein Student dem Prüfer nachwies, konnte das Boot sich aber *doch* vorwärtsbewegen. Wie das?

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

6.11 •• Ein Auto von 2000 kg rast mit 90 km/h gegen eine unangiebige Betonwand. a) Schätzen Sie die Stoßzeit. Nehmen Sie an, dass die vordere Hälfte des Wagens auf die Hälfte zusammengeknautscht wird, wobei der Mittelpunkt des Wagens eine konstante Verzögerung erfährt. (Rechnen Sie mit vernünftigen Werten für die Wagenlänge.) b) Schätzen Sie die mittlere Kraft, die von der Betonwand auf das Auto ausgeübt wird.

Impulserhaltung

6.12 • Abbildung 6.29 zeigt das Verhalten eines Geschosses unmittelbar nach dem Zerbrechen in drei Stücke. Wie schnell war das Geschoss in dem Moment, bevor es zerbrochen ist?
a) v_3 , b) $v_3/3$, c) $v_3/4$, d) v_3 , e) $(v_1 + v_2 + v_3)/4$.

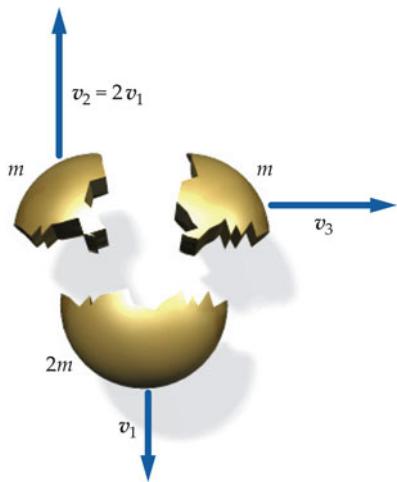


Abbildung 6.29 Zu Aufgabe 6.12.

6.13 ••• Ein Keil der Masse m_K liegt auf einer horizontalen, reibungsfreien Oberfläche. Auf die ebenfalls reibungsfreie geneigte Ebene des Keils wird ein kleiner Block der Masse m gelegt (Abbildung 6.30). Während der Block aus seiner Ausgangslage bis zur horizontalen Ebene hinabgleitet, bewegt sich der Massenmittelpunkt des Blocks um die Strecke h nach unten. a) Welche Geschwindigkeiten haben der Block und der Keil, sobald sich die beiden nicht mehr berühren? b) Überprüfen Sie die Plausibilität Ihrer Rechnung anhand des Grenzfalls $m_K \gg m$.

Kraftstoß und zeitliches Mittel einer Kraft

6.14 • Sie treten einen Fußball der Masse 0,43 kg. Der Ball verlässt Ihren Fuß mit einer Geschwindigkeit von 25 m/s. a) Welchen Betrag hat der Kraftstoß, den Sie auf den Ball übertragen

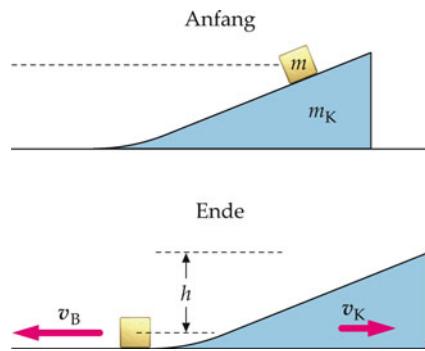


Abbildung 6.30 Zu Aufgabe 6.13.

haben? b) Nehmen Sie an, Ihr Fuß ist für 8 ms mit dem Ball in Kontakt. Wie groß ist dann der mittlere Kraftstoß, den Ihr Fuß auf den Ball ausübt?

6.15 •• Ein Handball von 60 g, der sich mit 5,0 m/s bewegt, trifft in einem Winkel von 40° gegen die Normale auf eine Wand und prallt von ihr in gleichem Winkel wieder ab. Er ist für 2 ms mit der Wand in Kontakt. Welche mittlere Kraft übt der Ball auf die Wand aus?

6.16 •• Das Polster, auf dem ein Stabhochspringer nach seinem Sprung landet, ist im Wesentlichen ein Luftkissen mit einer „Ruhehöhe“ von 1,2 m, das auf etwa 0,20 m gepresst wird, wenn der Springer darauf zur Ruhe kommt. a) In welchem Zeitraum wird ein Springer, der gerade die Latte bei 6,40 m überwunden hat, bis zum Stillstand gestoppt? b) Wie groß wäre der Zeitraum, wenn man nicht ein Luftkissen verwenden würde, sondern eine 20 cm dicke Schicht von Sägespänen, die sich beim Aufprall auf 5,0 cm komprimiert? c) Diskutieren Sie qualitativ, wie sich die mittleren Kräfte auf den Springer bei diesen beiden Landungsmatten unterscheiden. Mit anderen Worten: Welche der Matten übt die geringere Kraft auf den Springer aus, und warum?

6.17 ••• Große Kalksteinhöhlen wurden durch heruntertropfendes Wasser gebildet. a) Nehmen Sie an, pro Minute fallen zehn Wassertropfen von je 0,030 ml aus einer Höhe von 5,0 m zu Boden. Wie hoch ist die mittlere Kraft, die während 1,0 min von den Wassertropfen auf den Kalksteinboden ausgeübt wird? (Nehmen Sie dabei an, dass sich auf dem Boden keine Pfütze bildet.) b) Vergleichen Sie diese Kraft mit der Gewichtskraft eines Tropfens.

Stöße in einer Raumrichtung

6.18 • Ein Auto von 2000 kg fährt nach rechts und verfolgt mit 30 m/s ein zweites Auto derselben Masse, das mit 10 m/s in dieselbe Richtung fährt. a) Die beiden Autos stoßen zusammen und bleiben aneinander haften. Wie hoch ist ihre Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß? b) Welcher Anteil der kinetischen Energie geht bei diesem Stoß verloren? Wohin geht er?

6.19 • Ein 5,0 kg schwerer Körper stößt mit 4,0 m/s frontal auf einen 10 kg schweren zweiten Körper, der ihm mit 3,0 m/s entgegenkommt. Der schwerere Körper kommt durch den Stoß zum Stillstand. a) Wie hoch ist die Geschwindigkeit des 5,0 kg schweren Körpers nach dem Stoß? b) Ist der Stoß elastisch?

6.20 •• In einem elastischen zentralen Stoß trifft ein Proton der Masse m zentral auf einen ruhenden Kohlenstoffkern der Masse $12m$. Die Geschwindigkeit des Protons ist 300 m/s. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des Protons und des Kohlenstoffkerns nach dem Stoß.

6.21 •• Ein Proton der Masse m bewegt sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf ein ruhendes Alphateilchen der Masse $4m$ zu. Da beide Teilchen positive Ladung tragen, stoßen sie einander ab. (Die abstößenden Kräfte sind so groß, dass die beiden Teilchen nicht in direkten Kontakt treten.) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_α des Alphateilchens, a) wenn die Entfernung zwischen den beiden Teilchen minimal ist, und b) für einen späteren Zeitpunkt, wenn die beiden Teilchen weit voneinander entfernt sind.

6.22 •• Eine Kugel von 16 g wird auf den Pendelkörper eines ballistischen Pendels mit einer Masse von 1,5 kg gefeuert (siehe Abbildung 6.17). Wenn der Pendelkörper seine maximale Höhe erreicht hat, bilden die Schnüre einen Winkel von 60° mit der Vertikalen. Die Schnüre sind 2,3 m lang. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Einschlag.

6.23 •• Bei einem eindimensionalen elastischen Stoß sind die Masse und die Geschwindigkeit des ersten Körpers durch m_1 und $v_{1,A}$ gegeben, die des zweiten Körpers durch m_2 und $v_{2,A}$. Zeigen Sie, dass dann für die Endgeschwindigkeiten $v_{1,E}$ und $v_{2,E}$ gilt:

$$v_{1,E} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,A} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,A}$$

und

$$v_{2,E} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,A} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,A}.$$

6.24 •• Eine Kugel der Masse m_1 trifft horizontal mit der Geschwindigkeit v_0 auf den Pendelkörper eines ballistischen Pendels der Masse m_2 . Der Pendelkörper ist an einem Ende einer sehr leichten Stange der Länge l befestigt, die am anderen Ende um eine horizontale Achse frei drehbar aufgehängt ist. Die Kugel bleibt in dem Pendelkörper stecken. Welchen Wert muss die Geschwindigkeit v_0 der Kugel mindestens haben, damit der Pendelkörper eine komplette Umdrehung ausführt?

6.25 •• Das Berylliumisotop ^{8}Be ist instabil und zerfällt in zwei Alphateilchen der Masse $m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27}$ kg, wobei eine Energie von $1,5 \cdot 10^{-14}$ J frei wird. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der beiden Alphateilchen, die aus dem Zerfall des anfangs ruhenden Berylliumkerns hervorgehen; nehmen Sie an, dass sämtliche Energie als kinetische Energie der Teilchen frei wird.

*Stöße in mehr als einer Raumrichtung

6.26 •• In Abschnitt 6.5 wurde auf geometrische Weise bewiesen, dass die Geschwindigkeitsvektoren zweier Teilchen gleicher Masse, von denen eines anfangs in Ruhe ist, nach einem elastischen Stoß im rechten Winkel zueinander stehen. In dieser Aufgabe sollen Sie diese Aussage auf einem anderen Weg beweisen, bei dem der Nutzen der Vektorschreibweise deutlich wird. a) Gegeben sind drei Vektoren $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, für die gilt: $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ (A, B und C sind die Beträge der Vektoren). Quadrieren Sie beide Seiten dieser Gleichung (d. h. bilden Sie das Skalarprodukt jeder Seite mit sich selbst) und zeigen Sie, dass $A^2 = B^2 + C^2 + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$. b) Der Impuls des sich anfänglich bewegenden Teilchens ist \mathbf{p} , die Impulse der Teilchen nach dem Stoß sind \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 . Schreiben Sie die Vektorgleichung für die Impulserhaltung auf und quadrieren Sie beide Seiten (d. h. bilden Sie das Skalarprodukt jeder Seite mit sich selbst). Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der Gleichung, die Sie aus der Bedingung für den elastischen Stoß erhalten (die kinetische Energie bleibt erhalten), und zeigen Sie, dass aus diesen beiden Gleichungen $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$ folgt.

6.27 •• Bei einer Billardpartie stößt der Spielball mit 5,0 m/s elastisch auf eine ruhende andere Kugel. Nach dem Stoß bewegt sich die andere Kugel nach rechts in einem Winkel von 30° von der ursprünglichen Richtung des Spielballs fort. Beide Kugeln sollen dieselbe Masse haben. a) Geben Sie die Bewegungsrichtung des Spielballs unmittelbar nach dem Stoß an. b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln unmittelbar nach dem Stoß.

6.28 •• Ein Puck der Masse 5,0 kg und der Geschwindigkeit 2,0 m/s stößt auf einen identischen Puck, der auf einer reibungsfreien Eisfläche liegt. Nach dem Stoß entfernt sich der erste Puck mit der Geschwindigkeit v_1 im Winkel von 30° zu seiner ursprünglichen Richtung; der zweite Puck entfernt sich mit v_2 im Winkel von 60° (Abbildung 6.31). a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 . b) War der Stoß elastisch?

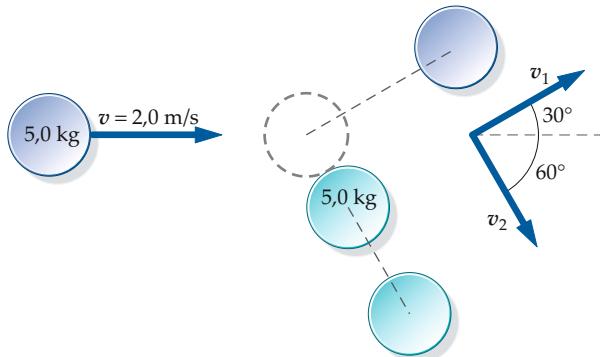


Abbildung 6.31 Zu Aufgabe 6.28.

6.29 •• Ein Teilchen hat eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Es stößt mit einem ruhenden Teilchen derselben Masse zusammen

und wird um einen Winkel ϕ abgelenkt. Seine Geschwindigkeit nach dem Stoß ist v . Das zweite Teilchen erlebt einen Rückstoß, und seine Richtung bildet einen Winkel θ mit der ursprünglichen Richtung des ersten Teilchens. a) Zeigen Sie, dass $\tan \theta = (v \sin \phi) / (v_0 - v \cos \phi)$ gilt. b) Zeigen Sie, dass für den Fall eines elastischen Stoßes $v = v_0 \cos \phi$ gilt.

6.30 ••• Das Borisotop ^9B ist instabil und zerfällt in ein Proton und zwei Alphateilchen. Dabei werden $4,4 \cdot 10^{-14} \text{ J}$ als kinetische Energie der Zerfallsprodukte frei. Bei einem solchen Zerfall wird die Geschwindigkeit des Protons mit $6,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ gemessen, wenn der Borkern anfangs in Ruhe ist. Nehmen Sie an, dass beide Alphateilchen gleiche Energien haben. Berechnen Sie, wie schnell und in welche Richtungen bezüglich der Richtung des Protons sich die beiden Alphateilchen bewegen.

Elastizitätszahl

6.31 • Sie haben die Aufgabe, die Elastizitätszahl einer neuen Stahllegierung zu messen. Sie überzeugen Ihre Kollegen, den Wert einfach dadurch zu bestimmen, dass sie aus der Legierung eine Kugel und eine Platte fertigen und die Kugel einfach auf die Platte fallen lassen. Die Kugel fällt aus 3,0 m Höhe und springt bis in eine Höhe von 2,5 m zurück. Wie hoch ist dann die Elastizitätszahl?

6.32 •• Ein Block von 2,0 kg bewegt sich mit 5,0 m/s nach rechts und stößt mit einem Block von 3,0 kg zusammen, der sich mit 2,0 m/s in derselben Richtung bewegt. Nach dem Stoß bewegt sich der schwerere Block mit 4,2 m/s nach rechts. Berechnen Sie a) die Geschwindigkeit des leichteren Blocks nach dem Stoß und b) die Elastizitätszahl zwischen den beiden Blöcken.

Allgemeine Aufgaben

6.33 • Ein Auto von 1500 kg fährt mit 70 km/h nach Norden. An einer Kreuzung stößt es mit einem Auto von 2000 kg zusammen, das mit 55 km/h nach Westen fährt. Die beiden Autos verkeilen sich ineinander und bleiben aneinander haften. a) Wie groß ist der Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoß? b) Berechnen Sie Betrag und Richtung der Geschwindigkeit der beiden verkeilten Wracks unmittelbar nach dem Stoß.

6.34 •• Eine Frau von 60 kg steht auf einem 6,0 m langen Floß von 120 kg auf einem stehenden Gewässer. Das Floß kann sich reibungsfrei auf der ruhigen Wasseroberfläche bewegen, jetzt aber ruht es in 0,50 m Entfernung von einem festen Pier (Abbildung 6.32). a) Die Frau geht zum Ende des Floßes und hält an. Wie weit ist sie jetzt von dem Pier entfernt? b) Während die Frau läuft, hat sie eine konstante Geschwindigkeit von 3,0 m/s relativ zum Floß. Berechnen Sie die kinetische Gesamtenergie des Systems (Frau + Floß) und vergleichen Sie diesen Wert mit der kinetischen Energie, die sich ergibt, wenn die Frau mit

3,0 m/s auf einem am Pier vertäuten Floß laufen würde. c) Woher kommt die Energie und wohin geht sie, wenn die Frau am Ende des Floßes stoppt? d) An Land kann die Frau einen Beutel mit Bleischrot 6,0 m weit werfen. Sie steht jetzt am hinteren Ende des Floßes, zielt über das Floß und wirft den Schrot so, dass er ihre Hand mit derselben Geschwindigkeit verlässt wie bei einem Wurf an Land. Geben Sie näherungsweise an, wo der Schrot landet.

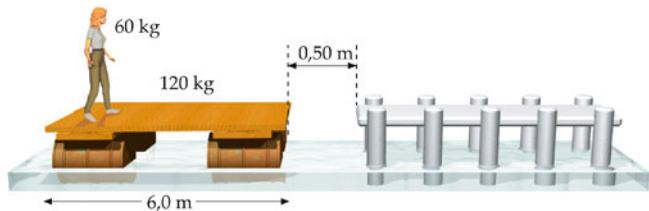


Abbildung 6.32 Zu Aufgabe 6.34.

6.35 ••• Bei der sogenannten Swing-by-Technik wird die Energieübertragung bei einem elastischen Stoß ausgenutzt, um die Energie einer Raumsonde so stark zu erhöhen, dass sie das Sonnensystem verlassen kann. Alle Geschwindigkeiten sind in einem Inertialsystem angegeben, bei dem der Sonnenmittelpunkt in Ruhe ist. Abbildung 6.33 zeigt eine Raumsonde, die sich mit 10,4 km/s dem Planeten Saturn nähert, der ihr mit Näherungsweise 9,6 km/s entgegenkommt. Wegen der Anziehungskraft zwischen Saturn und der Sonde schwingt die Sonde um den Planeten herum und rast mit einer Geschwindigkeit v_E in etwa entgegengesetzter Richtung weiter. a) Fassen Sie diesen Vorgang als elastischen Stoß in einer Dimension auf, wobei die Saturnmasse sehr viel größer ist als die Masse der Raumsonde. Berechnen Sie v_E . b) Um welchen Faktor nimmt die kinetische Energie der Raumsonde zu? Wo kommt die Energie her?

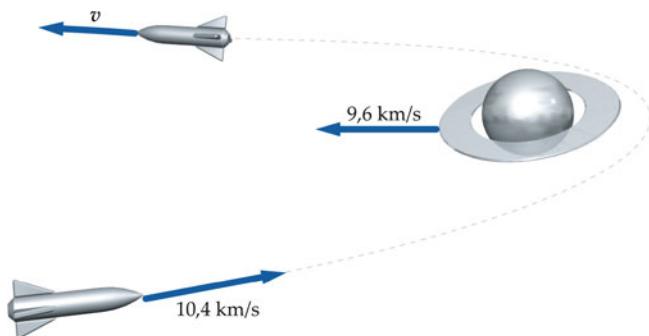


Abbildung 6.33 Zu Aufgabe 6.35.

6.36 ••• Ein Neutron der Masse m_n stößt zentral elastisch mit einem ruhenden Atomkern der Masse m_K zusammen. a) Zeigen Sie, dass für die kinetische Energie des Kerns $E_{\text{kin},K} = (4m_n m_K / (m_n + m_K)^2) E_{\text{kin},n}$ gilt, wobei $E_{\text{kin},n}$ die kinetische Anfangsenergie des Neutrons angibt. b) Zeigen Sie, dass für den

anteiligen Energieverlust des Neutrons bei diesem Stoß gilt:

$$\frac{-\Delta E_{\text{kin},n}}{E_{\text{kin},n}} = \frac{4 (m_n/m_K)}{(1 + [m_n/m_K])^2}.$$

c) Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck sowohl für $m_n \ll m_K$ als auch für $m_n = m_K$ plausible Ergebnisse liefert. Welche Art von ruhenden Kernen sollte man verwenden, wenn es das Ziel ist, dass die Neutronen bei dem Stoß möglichst viel ihrer kinetischen Energie verlieren?

6.37 ••• Die Masse eines Kohlenstoffkerns ist etwa zwölfmal so groß wie die eines Neutrons. a) Zeigen Sie mithilfe des Ergebnisses aus der vorangegangenen Aufgabe, dass die kinetische Energie eines Neutrons nach n zentralen Stößen mit einem ruhenden Kohlenstoffkern nur noch etwa $0,716^n$ seiner anfänglichen kinetischen Energie $E_{\text{kin},0}$ beträgt. b) Die Neutronen, die bei der Spaltung eines Urankerns frei werden, haben eine kinetische Energie von etwa 2,0 MeV. Damit ein solches Neutron in einem Reaktor einen weiteren Urankern spalten kann, muss seine kinetische Energie auf etwa 0,020 eV verringert werden. Wie viele zentrale Stöße mit ruhenden Kohlenstoffkernen braucht man für diesen Energieverlust?

Teilchensysteme

7



Die Schubkraft, die eine Rakete abheben lässt, ergibt sich aus der Brennrate und der Geschwindigkeit, mit der die Verbrennungsgase ausgestoßen werden. Dabei verliert die Rakete durch die Verbrennung des Treibstoffs ständig an Masse. (© NASA.)

? Welche Beschleunigungen wirken bei einem Raketenstart und welche Endgeschwindigkeit kann eine Rakete erreichen? (Siehe Beispiel 7.14.)

7.1 Mehrkörperprobleme	246
7.2 Der Massenmittelpunkt	249
7.3 Massenmittelpunktsbewegung und Impulserhaltung	255
7.4 Massenmittelpunktsarbeit und Energieerhaltung	259
7.5 *Stöße im Schwerpunktsystem	266
7.6 Systeme mit veränderlicher Masse und Strahltrieb	268
Zusammenfassung	274
Aufgaben	276

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir bereits einige Situationen kennengelernt, in denen die Bewegungen von zwei oder mehr Körpern voneinander abhängig waren. Beispiele hierfür sind die zwei durch ein Seil verbundenen Massen, die eine Schräge hinunterrutschen oder die beiden zusammenstoßenden Autos beim inelastischen Stoß. In diesem Kapitel wollen wir diese Beispiele noch einmal aufgreifen und eine allgemeine Vorgehensweise aufstellen, wie man Aufgabenstellungen mit mehreren Körpern löst. Damit lassen sich nicht nur Stöße zwischen zwei Körpern einfacher als in Kapitel 6 gezeigt beschreiben, sondern auch Systeme mit variabler Masse bzw. Teilchenzahl. Als Beispiel hierfür werden wir den Raketenantrieb betrachten.

In diesem Kapitel werden wir eine allgemeine Vorgehensweise für Aufgabenstellungen mit zwei oder mehr Körpern herleiten und die physikalischen Gesetze der vorangegangenen Kapitel auf diese Teilchensysteme anwenden. Mit den sich daraus ergebenden Gleichungen lassen sich Anwendungsbeispiele wie die Bewegung einer Rakete oder Stöße beschreiben.

7.1 Mehrkörperprobleme

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir uns hauptsächlich mit der Beschreibung von Bewegungen einzelner, isolierter Körper beschäftigt und einfache Fallbeispiele mit zwei Körpern behandelt. Nun wollen wir untersuchen, wie wir die Newton'schen Axiome, den Energie- und den Impulserhaltungssatz auf Teilchensysteme mit zwei oder mehr Körpern anwenden können. Beginnen wir unsere Analyse bei der Anwendung der Newton'schen Axiome auf ein System, bei dem zwei Körper durch ein Seil oder Tau verbunden sind, das ihre Bewegungen miteinander koppelt.

Die Zugspannung in einem Seil oder Tau ist die Stärke der Kraft, die ein Seilabschnitt pro Flächeneinheit des Querschnitts auf den daran angrenzenden Abschnitt ausübt. Diese kann sich über die Länge des Seils ändern. Bei einem Tau, das an einem Balken einer Turnhalle hängt, ist die Zugspannung in der Nähe der Decke am höchsten – dort muss ein kurzer Seilabschnitt das (durch die Gravitationskraft bedingte) Gewicht des gesamten Taus darunter tragen. Allerdings können Sie für die Aufgabenstellungen in diesem Buch fast immer davon ausgehen, dass die Massen der Seile und Täue und damit die Änderungen der Zugspannung wegen des Gewichts des Seils oder Taus vernachlässigt werden können. Zweckmäßigerweise können daher Änderungen der Zugspannung wegen der Beschleunigung des Seils oder Taus ebenfalls vernachlässigt werden – kurzum: Wir nehmen an, dass die Zugspannung über das gesamte Seil konstant bleibt und die Zugkraft F_S des Seils so behandelt werden kann, als würde sie wie eine Kontaktkraft an einer Masse m ziehen.

Betrachten Sie z.B. die Bewegung von Steve und Paul aus Abbildung 7.1. Die Geschwindigkeit, mit der sich Paul nach unten bewegt, ist genauso groß wie die, mit der Steve über den Gletscher rutscht. Somit bleiben ihre Geschwindigkeiten gleich. Wenn Paul schneller wird, wird Steve ebenfalls schneller. Damit bleiben ihre Tangentialbeschleunigungen gleich. (Die Tangentialbeschleunigung eines Teilchens ist die zum Bewegungsweg des Teilchens tangentiale Beschleunigungskomponente.)

Abbildung 7.2 zeigt das Kräftediagramm eines Abschnitts des an Steve befestigten Seils, wobei Δm_s die Masse dieses Abschnitts ist. Wendet man das zweite Newton'sche Axiom auf das Seilstück an, ergibt sich $F_S + F'_S = \Delta m_s a_x \hat{x}$. Wenn die Masse des Seilstücks vernachlässigbar ist, gilt $F_S = -F'_S$. Eine beliebig kleine Gesamtkraft, d.h. ein beliebig kleiner Unterschied der Zugkraft im Seil, reicht somit bereits aus, um dem Seilabschnitt mit vernachlässigbarer Masse eine endliche Beschleunigung zu erteilen.

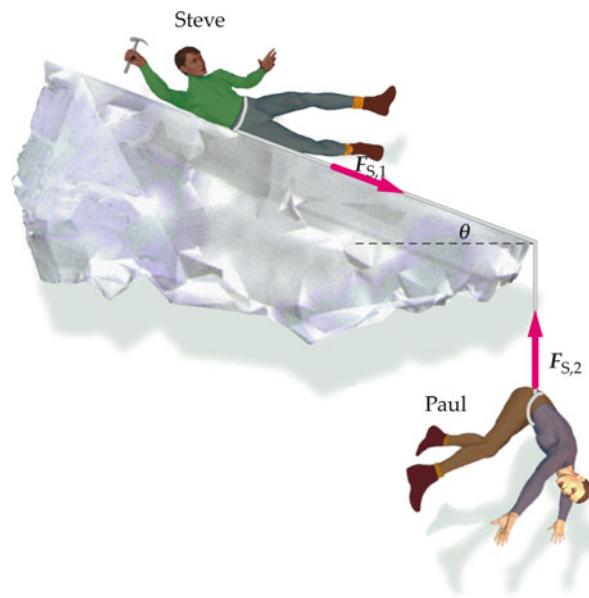


Abbildung 7.1 Die Bewegung zweier gekoppelter Teilchen lässt sich recht gut mit dem hier dargestellten System der beiden mit einem Seil verbundenen Bergsteiger illustrieren.

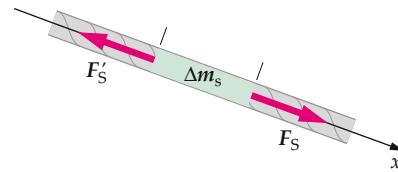


Abbildung 7.2 Kräftediagramm eines Seilausschnitts zwischen den Bergsteigern.

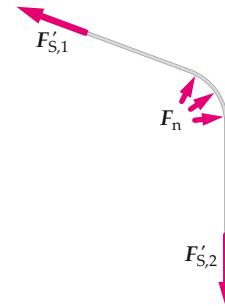


Abbildung 7.3 Kräftediagramm des kompletten Seils.

Als Nächstes betrachten wir das Seil, mit dem Steve und Paul verbunden sind, als Ganzes. Vernachlässigt man die Gravitation, wirken drei Kräfte auf das Seil: Steve und Paul erzeugen jeweils eine Kraft, aber auch das Eis an der Gletscherkante erzeugt eine solche. Bei Vernachlässigung der Reibung zwischen Eis und Seil ist die Kraft, die das Eis auf das Seil ausübt, immer eine Normalkraft (Abbildung 7.3). Eine Normalkraft hat jedoch

Vorgehensweise:**Anwendung der Newton'schen Axiome auf Aufgabenstellungen mit zwei oder mehr Körpern**

Denken Sie daran, für jeden Körper ein eigenes Kräftediagramm zu zeichnen. Die gesuchten Größen können durch Lösen eines Gleichungssystems bestimmt werden.

1. Zeichnen Sie für jeden Körper ein eigenes Kräftediagramm. Verwenden Sie auch für jeden Körper ein eigenes Koordinatensystem. Berücksichtigen Sie, dass die Kräfte, die zwei sich berührende Körper aufeinander ausüben, gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind (drittes Newton'sche Axiom).
2. Wenden Sie auf jeden Körper das zweite Newton'sche Axiom an.
3. Berechnen Sie aus den erhaltenen Gleichungen zusammen mit allen Gleichungen, die Wechselwirkungen und Nebenbedingungen beschreiben, die gesuchten Größen.

Plausibilitätsprüfung: Prüfen Sie nach, dass die Lösung mit den gezeichneten Kräftediagrammen vereinbar ist.

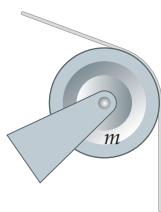


Abbildung 7.4 Zu Verständnisfrage 7.1.

keine Komponente tangential zum Seil und kann daher keine Seilspannungsänderung hervorrufen. Demnach ist die Seilspannung und mit ihr die Zugkraft über die gesamte Länge des Seils gleich. Zusammenfassend gilt: In einem Seil mit vernachlässigbarer Masse, dessen Richtung dadurch geändert wird, dass es über eine reibungsfreie Oberfläche gleitet, hat die Zugkraft im ganzen Seil den gleichen Betrag.

Frage 7.1

Wir nehmen nun an, das Seil sei nicht über die Gletscherkante, sondern über eine reibungsfrei gelagerte Rolle geleitet (Abbildung 7.4). Wäre die Zugkraft auch dann im ganzen Seil gleich?

Die Beispiele 7.1 und 7.2 veranschaulichen die Anwendung der Newton'schen Axiome auf Aufgabenstellungen mit zwei und mehr Körpern.

Beispiel 7.1: Bergsteiger auf Eis

Paul (mit der Masse m_P) fällt, wie in Abbildung 7.1 gezeigt, von der Kante eines Gletschers. Glücklicherweise ist er mit einer Sicherungsleine mit Steve (mit der Masse m_S) verbunden, der eine Bergsteigeraxt mit sich führt. Bevor Steve seine Axt einschlagen kann, damit beide anhalten, gleitet er ohne Reibung über das

Eis. Dabei ist er über das Seil mit Paul verbunden. Berechnen Sie Pauls und Steves Beschleunigung sowie die Zugkraft des Seils unter der Annahme, dass keine Reibung zwischen Eis und Seil auftritt.

Problembeschreibung: Da das Seil als masselos und das Gletschereis als reibungsfrei angesehen werden, besitzen die Zugkräfte $F_{S,1}$ und $F_{S,2}$ den gleichen Betrag. Das Seil dehnt sich nicht, ist aber immer straff gespannt. Somit haben Paul und Steve stets dieselbe Geschwindigkeit. Damit haben auch ihre Beschleunigungen a_S und a_P stets den gleichen Betrag, während deren Richtungen verschieden sind: Steve wird parallel zur Gletscheroberfläche beschleunigt, Paul hingegen vertikal nach unten. Wir können die Aufgabe lösen, indem wir auf jeden Bergsteiger das zweite Newton'sche Axiom $\sum F_i = m \cdot a$ anwenden und anschließend nach den Beschleunigungen und nach der Zugkraft auflösen.

Lösung: 1. Zeichnen Sie für Steve und Paul zwei getrennte Kräftediagramme (Abbildung 7.5). Zeichnen Sie in Steves Kräftediagramm eine x - und eine y -Achse ein, wobei sie Steves Beschleunigungsrichtung als $+x$ -Achse wählen. Wählen Sie Pauls Beschleunigungsrichtung als $+x'$ -Achse.

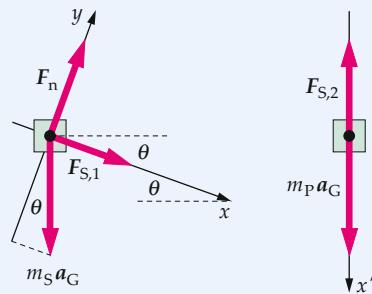


Abbildung 7.5 Kräftediagramme der beiden Bergsteiger.

2. Wenden Sie auf Steve $\sum F_{i,x} = m a_x$ in x -Richtung an:

$$F_{n,x} + F_{S,1,x} + m_S a_{G,x} = m_S a_{S,x}$$

3. Wenden Sie auf Paul $\sum F_{i,x'} = m a_{x'}$ in x' -Richtung an:

$$F_{S,2,x'} + m_P a_{G,x'} = m_P a_{P,x'}$$

4. Da beide durch ein straffes, nicht dehnbares Seil verbunden sind, hängen ihre Beschleunigungen voneinander ab. Drücken Sie diese Abhängigkeit aus:

$$a_{P,x'} = a_{S,x} = a_t$$

wobei a_t die Beschleunigungskomponente in Tangentialrichtung (in Bewegungsrichtung) bezeichnet.

5. Da die Seilmasse vernachlässigt werden kann und das Eis eine vernachlässigbare Reibung auf das Seil ausübt, hängen $F_{S,1}$ und $F_{S,2}$ ebenfalls voneinander ab. Drücken Sie diese Abhängigkeit aus:

$$F_{S,1,x} = -F_{S,2,x'} = F_S$$

6. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 4 und 5 in die Gleichungen aus Schritt 2 und 3 ein:

$$\begin{aligned} F_S + m_S g \sin \theta &= m_S a_t \\ -F_S + m_P g &= m_P a_t \end{aligned}$$

7. Lösen Sie die Gleichung für die Beschleunigung aus Schritt 6, indem Sie F_S ersetzen und nach a_t umstellen:

$$a_t = \frac{m_S \sin \theta + m_P}{m_S + m_P} g$$

8. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 7 in eine Gleichung aus Schritt 6 ein und stellen Sie nach F_S um:

$$F_S = \frac{m_S m_P}{m_S + m_P} (1 - \sin \theta) g$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn $m_P \gg m_S$ ist, sollte die Beschleunigung ungefähr g sein und die Zugkraft des Seils gegen null gehen. Bilden des Grenzwerts für m_S gegen 0 ergibt tatsächlich $a_t = g$ und $F_S = 0$. Wenn $m_P \ll m_S$ ist, sollte die Beschleunigung etwa $g \sin \theta$ betragen (siehe Beispiel 3.5) und die Zugkraft auch in diesem Fall null sein. Bilden des Grenzwerts für m_P gegen 0 in Schritt 7 und 8 ergibt $a_t = g \sin \theta$ und $F_S = 0$. Außerdem überprüfen wir unsere Ergebnisse für die maximale Neigung ($\theta = 90^\circ$): Verwendet man in Schritt 7 und 8 den Winkel $\theta = 90^\circ$, ergibt sich $a_t = g$ und $F_S = 0$. Dies scheint richtig zu sein, da Steve und Paul dann frei fallen.

Weitergedacht: Um die Lösung so einfach wie möglich zu halten, haben wir die $+x'$ -Achse in Schritt 1 senkrecht nach unten gelegt. Durch diese Wahl haben wir erreicht, dass sich Paul in die $+x'$ -Richtung (nach unten) bewegt, während sich Steve in die $+x$ -Richtung (die Gleitscheroberfläche entlang) bewegt.

Übung 7.1: a) Ermitteln Sie die Beschleunigung, wenn $\theta = 15^\circ$ ist und die Massen $m_S = 78 \text{ kg}$ und $m_P = 92 \text{ kg}$ betragen. b) Ermitteln Sie die Beschleunigung, wenn die genannten Massen vertauscht sind. ▲ ■

Beispiel 7.2: Wir bauen eine Raumstation

Stellen Sie sich vor, Sie sind ein Astronaut, der am Aufbau einer Raumstation mitarbeitet. Sie „schieben“ mit der Kraft $F_1^{(A)}$ einen Kasten mit der Masse m_1 . Der Kasten steht in direktem Kontakt mit einem zweiten Kasten der Masse m_2 (Abbildung 7.6). a) Wie groß ist die Beschleunigung der Kästen? b) Welche Kraft übt ein Kasten auf den anderen Kasten aus?

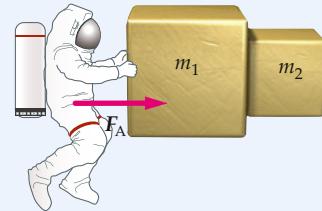


Abbildung 7.6 Darstellung des Systems aus dem Astronauten und den beiden Kästen.

Problembeschreibung: Die Kraft $F_1^{(A)}$ ist eine Kontaktkraft, die lediglich auf den Kasten 1 wirkt. $F_1^{(2)}$ sei die Kraft, die Kasten 2 auf Kasten 1 ausübt, $F_2^{(1)}$ die Kraft, die Kasten 1 auf Kasten 2 ausübt. Nach dem dritten Newton'schen Axiom sind diese Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet ($F_1^{(2)} = -F_2^{(1)}$), sodass $F_{1,x}^{(2)} = -F_{2,x}^{(1)}$ ist. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf jeden Kasten einzeln an. Die Bewegungen der beiden Kästen sind gleich, sodass die Beschleunigungen a_1 und a_2 ebenfalls gleich sind.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie für die beiden Kästen Kräftediagramme (Abbildung 7.7).

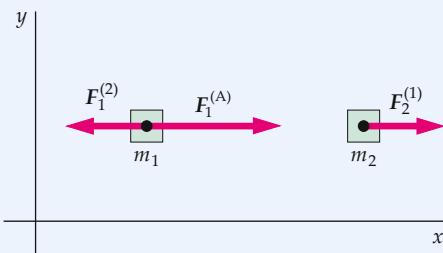


Abbildung 7.7 Kräftediagramm der beiden Kästen.

2. Wenden Sie $\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$ auf den Kasten 1 an:

$$F_{1,x}^{(A)} + F_{1,x}^{(2)} = m_1 a_{1,x}$$

3. Wenden Sie $\sum \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}$ auf den Kasten 2 an:

$$F_{2,x}^{(1)} = m_2 a_{2,x}$$

4. Schreiben Sie die Beziehung zwischen den beiden Beschleunigungen sowie die Beziehung zwischen den Kräften, die die beiden Kästen aufeinander ausüben, auf. Die Beschleunigungen sind gleich, da die Geschwindigkeiten zu allen Zeitpunkten und damit die Änderungsraten der Geschwindigkeiten gleich sind. Die Kräfte sind betragsmäßig gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, da sie ein Aktions-Reaktions-Paar bilden:

$$a_{2,x} = a_{1,x} = a_x$$

$$F_{1,x}^{(2)} = -F_{2,x}^{(1)} = F_x$$

5. Setzen Sie dies in die Ergebnisse aus Schritt 2 und 3 ein und stellen Sie nach a_x um:

$$a_x = \frac{F_{1,x}^{(A)}}{m_1 + m_2}$$

Teilaufgabe b

Setzen Sie Ihr Ergebnis für a_x in Schritt 2 oder Schritt 3 ein und stellen Sie nach F_x um:

$$F_x = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} F_{1,x}^{(A)}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Schritt 5 ist das gleiche, das Sie erhalten würden, wenn $F_1^{(A)}$ an nur einem Kasten mit dem Gesamtgewicht beider Kästen angreifen würde. Da beide Kästen die gleiche Beschleunigung erfahren, kann man sie in diesem Fall als einen gemeinsamen Körper mit der Masse $m_1 + m_2$ betrachten.

7.2 Der Massenmittelpunkt

Ein geworfener Ball bewegt sich auf einer stetigen Parabelbahn. Wirft man dagegen einen Taktstock (Abbildung 7.8), vollführt dieser eine kompliziertere Bewegung. Jedes Ende des Taktstocks bewegt sich in eine andere Richtung, und beide bewegen sich außerdem auf andere Weise als der Mittelpunkt. Allerdings stellt sich bei näherer Betrachtung der Bewegung heraus, dass sich ein Punkt des Taktstocks parabelförmig bewegt, selbst wenn das für den Rest nicht zutrifft. Dieser Punkt, der sogenannte **Massenmittelpunkt**, bewegt sich so, als ob die gesamte Masse des Taktstocks in diesem Punkt konzentriert wäre und alle äußeren Kräfte auf ihn wirken würden.

Um die Bewegung des Massenmittelpunkts eines Körpers zu ermitteln, stellt man sich den Körper zweckmäßig als ein System von Teilchen vor. Wir wollen als Beispiel ein einfaches System betrachten, das aus zwei punktförmigen Teilchen besteht, die sich auf der x -Achse an den Orten x_1 und x_2 befinden (Abbildung 7.9).

Wenn die Teilchen die Massen m_1 und m_2 haben, befindet sich der Massenmittelpunkt auf der x -Achse am Ort x_S , der durch

$$m x_S = m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad (7.1)$$

definiert ist. Dabei bezeichnet $m = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse des Systems. Wählen wir den Ort des Koordinatenursprungs und die $+x$ -Richtung so, dass m_1 im Ursprung und m_2 auf der positiven x -Achse liegt, dann ist $x_1 = 0$ und $x_2 = d$, wobei d den Abstand zwischen den beiden Teilchen angibt. Der Ma-

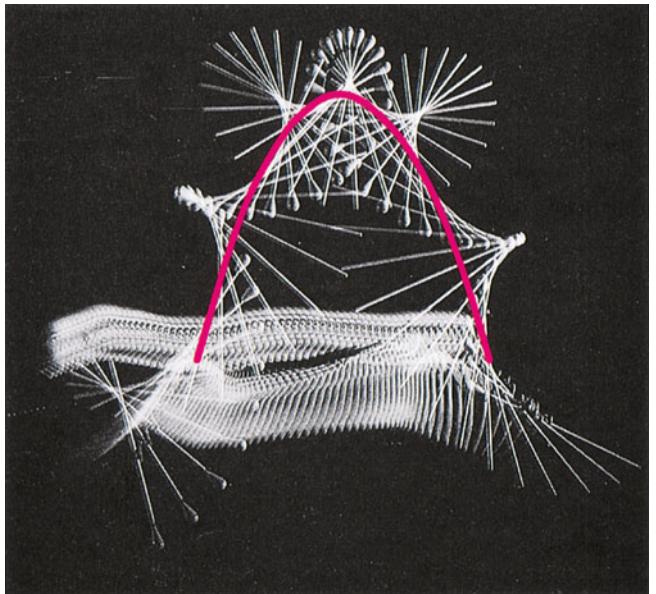


Abbildung 7.8 Stroboskopaufnahme eines geworfenen Taktstocks. (© Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press.)

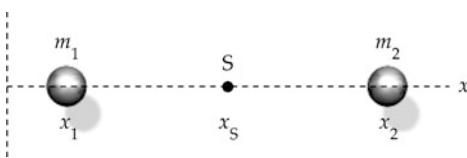


Abbildung 7.9 Der Massenmittelpunkt S liegt auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei Massen; sind die Massen gleich groß, liegt der Massenmittelpunkt genau auf der halben Strecke zwischen ihnen.

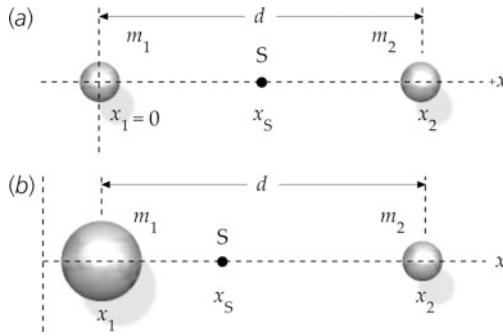


Abbildung 7.10 a) Um die Koordinate des Massenmittelpunkts S von zwei Massen zu berechnen, legt man zweckmäßigerweise eine Masse in den Ursprung. b) Sind die Massen verschieden groß, liegt der Massenmittelpunkt S näher an der größeren Masse.

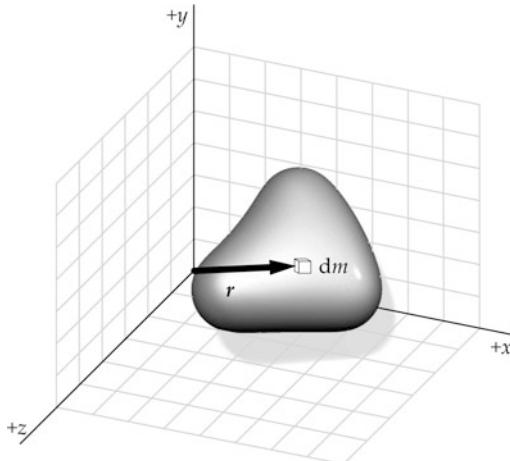


Abbildung 7.11 Ein Massenelement dm am Ort r ; durch Integration über alle dm lässt sich der Massenmittelpunkt bestimmen.

Massenmittelpunkt ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} mx_S &= m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1(0) + m_2 d, \\ x_S &= \frac{m_2}{m} d = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Im Fall nur zweier Teilchen liegt der Massenmittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der beiden Teilchen; haben beide Teilchen die gleiche Masse, liegt er genau in der Mitte zwischen ihnen (Abbildung 7.10a). Sind die Massen der beiden Teilchen

verschieden, liegt er näher bei dem mit der größeren Masse (Abbildung 7.10b).

Übung 7.2: Eine Masse von 4,0 kg befindet sich im Koordinatenursprung und eine Masse von 2,0 kg auf der x-Achse bei $x = 6,0$ cm. Wie lautet die Koordinate x_S des Massenmittelpunkts? ◀

Wir können von zwei Teilchen in einer Dimension auf ein System aus vielen Teilchen in drei Dimensionen verallgemeinern. Für n Teilchen in drei Dimensionen gilt für die x -Komponenten

$$mx_S = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n.$$

Kürzer kann dies als

$$mx_S = \sum_i m_i x_i \quad (7.3)$$

geschrieben werden. Dabei ist $m = \sum_i m_i$ die Gesamtmasse des Systems. In gleicher Weise sind in der y - und in der z -Richtung

$$my_S = \sum_i m_i y_i \quad (7.4)$$

und

$$mz_S = \sum_i m_i z_i \quad (7.5)$$

definiert.

In Vektorschreibweise ist $\mathbf{r}_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z}$ der Ortsvektor des i -ten Teilchens. Der **Ortsvektor \mathbf{r}_S des Massenmittelpunkts** ist durch

$$m\mathbf{r}_S = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (7.6)$$

DEFINITION DES MASSENMITTELPUNKTS

definiert. Dabei gilt $\mathbf{r}_S = x_S \hat{x} + y_S \hat{y} + z_S \hat{z}$.

Im Folgenden wollen wir ausgedehnte Körper, z. B. Bälle, Baseball-Keulen oder Autos betrachten. Solche Körper kann man sich als ein System vorstellen, das eine große Anzahl von Teilchen enthält, deren Masse kontinuierlich verteilt ist. Für Systeme mit hoher Symmetrie ist der Massenmittelpunkt der **Symmetriemittelpunkt**. So befindet sich z. B. der Massenmittelpunkt einer homogenen Kugel oder eines homogenen Zylinders jeweils im *geometrischen Mittelpunkt*. Für einen Körper mit einer linearen oder ebenen Symmetrie liegt der Massenmittelpunkt auf der jeweiligen Symmetrielinie oder -ebene. Um den Ort des Massenmittelpunkts eines Körpers zu ermitteln, ersetzen wir die Summe in Gleichung 7.6 durch ein Integral:

$$m\mathbf{r}_S = \int \mathbf{r} dm, \quad (7.7)$$

MASSENMITTELPUNKT EINES AUSGEDEHNNTEN KÖRPERS

wobei dm wie in Abbildung 7.11 gezeigt ein Massenelement am Ort \mathbf{r} ist. Bevor wir uns ausführlicher mit diesem Integral beschäftigen, wollen wir in den Beispielen 7.3 und 7.4 zwei einfache Fälle für die Berechnung des Massenmittelpunkts behandeln.

Vorgehensweise:

Aufgabenstellungen zum Massenmittelpunkt

Anhand einer Betrachtung der Massenmittelpunktsbewegung lässt sich die Bewegung eines Körpers oder eines Systems von Körpern häufig leichter bestimmen. Zur Bestimmung des Massenmittelpunkts ist es nützlich, eine Skizze des Körpers oder Systems von Körpern anzufertigen.

- Prüfen Sie, ob die Massenverteilung Symmetriearchsen aufweist. Wenn das der Fall ist, liegt der Massenmittelpunkt auf ihnen. Verwenden Sie vorhandene Symmetriearchsen nach Möglichkeit als Koordinatenachsen.
- Prüfen Sie, ob die Massenverteilung aus Teilsystemen mit hoher Symmetrie zusammengesetzt ist. Wenn das der Fall ist, können Sie zunächst die Massenmittelpunkte der einzelnen Teilsysteme berechnen. Anschließend erhalten Sie den Massenmittelpunkt des Gesamtsystems, indem Sie jedes Teilsystem als ein Punktteilchen an seinem jeweiligen Massenmittelpunkt betrachten.
- Wenn das System eines oder mehrere Punktteilchen enthält, kann man den Koordinatenursprung an den Ort eines Massenpunkts legen. (Wenn das i . Teilchen im Koordinatenursprung liegt, ist $\mathbf{r}_i = 0$.)

Plausibilitätsprüfung: Überzeugen Sie sich, dass der ermittelte Massenmittelpunkt sinnvoll ist. In vielen Fällen befindet sich der Massenmittelpunkt eines Körpers in der Nähe des massereicheren und größeren Teils eines Körpers. Der Massenmittelpunkt eines Systems aus mehreren Körpern oder etwa eines Reifens kann sich auch in der Mitte des Körpers befinden.

Beispiel 7.3: Der Massenmittelpunkt eines Wassermoleküls

Ein Wassermolekül besteht aus einem Sauerstoff- und aus zwei Wasserstoffatomen. Ein Sauerstoffatom hat eine Masse von 16,0 atomaren Masseneinheiten (u), und jedes Wasserstoffatom hat die Masse 1 u. Die Wasserstoffatome haben jeweils einen mittleren Abstand von 96,0 pm ($96,0 \cdot 10^{-12}$ m) vom Sauerstoffatom und bilden mit ihm einen Winkel von $104,5^\circ$. Bestimmen Sie den Massenmittelpunkt eines Wassermoleküls.

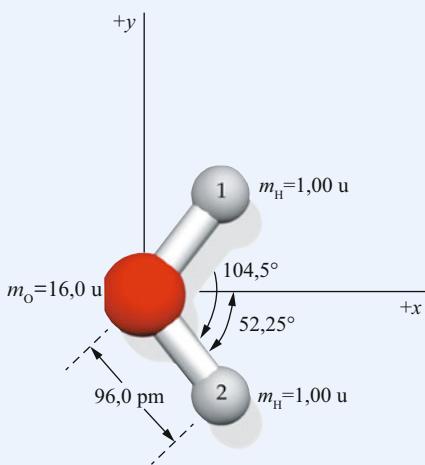


Abbildung 7.12 Darstellung des Wassermoleküls.

Problembeschreibung: Die Rechnung wird einfacher, wenn wir ein Koordinatensystem wählen, dessen Ursprung sich in dem Sauerstoffatom befindet und dessen

x -Achse die Winkelhalbierende zwischen den Wasserstoffatomen ist (Abbildung 7.12). Wegen der Symmetrie des Moleküls liegt dann der Massenmittelpunkt auf der x -Achse, und die Verbindungslien zwischen dem Sauerstoffatom und den Wasserstoffatomen bilden mit ihr jeweils einen Winkel von $52,25^\circ$.

Lösung: 1. Der Ort des Massenmittelpunkts ist durch seine Koordinaten x_S und y_S gegeben (Gleichung 7.3 und 7.4):

$$x_S = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_S = \frac{\sum m_i y_i}{m}$$

2. Schreibt man dies aus, erhält man:

$$x_S = \frac{m_{H,1} x_{H,1} + m_{H,2} x_{H,2} + m_O x_O}{m_{H,1} + m_{H,2} + m_O}$$

$$y_S = \frac{m_{H,1} y_{H,1} + m_{H,2} y_{H,2} + m_O y_O}{m_{H,1} + m_{H,2} + m_O}$$

3. Wir haben den Ursprung so gewählt, dass er im Sauerstoffatom liegt; daher sind die x - und die y -Koordinate des Sauerstoffatoms beide null. Die x - und die y -Koordinaten der Wasserstoffatome lassen sich mithilfe des Winkels von $52,25^\circ$ berechnen, den sie mit der x -Achse bilden:

$$x_O = y_O = 0$$

$$x_{H,1} = (96,0 \text{ pm}) \cos 52,25^\circ = 58,8 \text{ pm}$$

$$x_{H,2} = (96,0 \text{ pm}) \cos (-52,25^\circ) = 58,8 \text{ pm}$$

$$y_{H,1} = (96,0 \text{ pm}) \sin 52,25^\circ = 75,9 \text{ pm}$$

$$y_{H,2} = (96,0 \text{ pm}) \sin (-52,25^\circ) = -75,9 \text{ pm}$$

4. Setzt man die Koordinaten- und Massenwerte in die Formeln aus Schritt 2 ein, so ergeben sich die Koordinaten x_S und y_S des Massenmittelpunkts:

$$x_S = \frac{(1,00 \text{ u}) \cdot (58,8 \text{ pm}) + (1,00 \text{ u}) \cdot (58,8 \text{ pm})}{1,00 \text{ u} + 1,00 \text{ u} + 16,0 \text{ u}} + \frac{(16,0 \text{ u}) \cdot 0}{1,00 \text{ u} + 1,00 \text{ u} + 16,0 \text{ u}} = 6,53 \text{ pm}$$

$$y_S = \frac{(1,00 \text{ u}) \cdot (75,9 \text{ pm}) + (1,00 \text{ u}) \cdot (-75,9 \text{ pm})}{1,00 \text{ u} + 1,00 \text{ u} + 16,0 \text{ u}} + \frac{(16 \text{ u}) \cdot 0}{1,00 \text{ u} + 1,00 \text{ u} + 16,0 \text{ u}} = 0,00 \text{ pm}$$

5. Der Massenmittelpunkt liegt daher auf der x -Achse:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= x_S \hat{x} + y_S \hat{y} \\ &= [6,53 \text{ pm}] \hat{x} + [0,00 \text{ pm}] \hat{y} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Dass die y -Koordinate des Massenmittelpunkts null ist ($y_S = 0$), lässt sich auch aus der Symmetrie der Massenverteilung folgern. Ferner liegt der Massenmittelpunkt wie zu erwarten sehr dicht beim Sauerstoffatom mit seiner verhältnismäßig hohen Masse. ■

Beispiel 7.4: Massenmittelpunkt einer Sperrholzplatte

Bestimmen Sie den Massenmittelpunkt der gleichförmigen Sperrholzplatte aus Abbildung 7.13a.

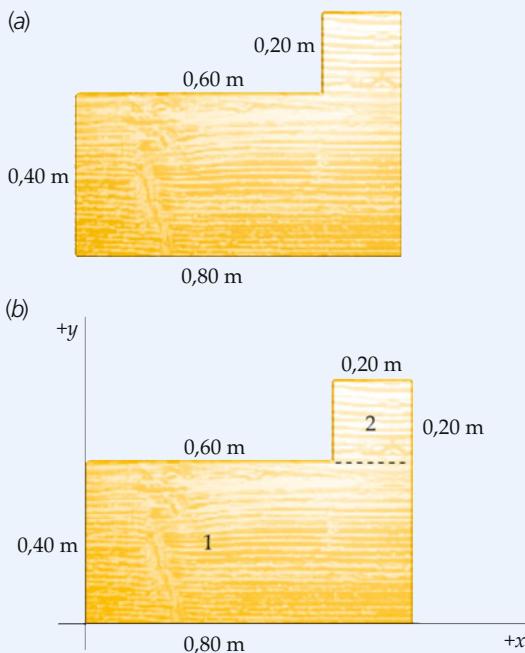


Abbildung 7.13 a) Sperrholzplatte und b) deren symmetrische Zerlegung in zwei Teile.

Problembeschreibung: Die Platte kann in zwei symmetrische Teile zerlegt werden (Abbildung 7.13b). Der Massenmittelpunkt für jeden der Teile liegt in dessen geometrischem Mittelpunkt. Wir bezeichnen mit m_1 die Masse von Teil 1 und mit m_2 die Masse von Teil 2. Die Gesamtmasse ist $m = m_1 + m_2$. Die Massen sind proportional zu den Flächen, wobei A_1, A_2 und A die Flächen der Stücke mit den Massen m_1, m_2 und m sind.

Lösung: 1. Schreiben Sie die x - und y -Koordinaten der Massenmittelpunkte mithilfe der Massen m_1 und m_2 :

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{m} (m_1 x_{1,S} + m_2 x_{2,S}) \\ y_S &= \frac{1}{m} (m_1 y_{1,S} + m_2 y_{2,S}) \end{aligned}$$

2. Ersetzen Sie die Massenverhältnisse durch die Flächenverhältnisse:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{A_1}{A} x_{1,S} + \frac{A_2}{A} x_{2,S} \\ y_S &= \frac{A_1}{A} y_{1,S} + \frac{A_2}{A} y_{2,S} \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie unter Verwendung der Werte aus Abbildung 7.13b die Flächen und die Flächenverhältnisse:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,32 \text{ m}^2, & A_2 &= 0,040 \text{ m}^2, \\ \frac{A_1}{A} &= \frac{8,0}{9,0}, & \frac{A_2}{A} &= \frac{1,0}{9,0} \end{aligned}$$

4. Ermitteln Sie aus der Abbildung die x - und die y -Koordinaten des Massenmittelpunkts für jeden der beiden Teile:

$$\begin{aligned} x_{1,S} &= 0,40 \text{ m}, & y_{1,S} &= 0,20 \text{ m} \\ x_{2,S} &= 0,70 \text{ m}, & y_{2,S} &= 0,50 \text{ m} \end{aligned}$$

5. Setzen Sie diese Ergebnisse in das Resultat aus Schritt 2 ein und berechnen Sie x_S und y_S :

$$x_S = 0,43 \text{ m}, \quad y_S = 0,23 \text{ m}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten war, liegt der Massenmittelpunkt der gesamten Platte sehr dicht am Massenmittelpunkt von Teil 1: Teil 1 ist achtmal so schwer wie Teil 2 ($m_1 = 8 m_2$). ■

Weitergedacht: Wenn man den Ursprung in den geometrischen Mittelpunkt von Teil 1 der Platte legt und die x -Achse so festlegt, dass sie durch den Mittelpunkt von Teil 2 verläuft, könnte man die Berechnung des Massenmittelpunkts wesentlich vereinfachen. ■

Alternativ hätten wir Beispiel 7.3 auch lösen können, indem wir zunächst den Massenmittelpunkt der beiden Wasserstoffatome bestimmt hätten. Für ein System aus drei Teilchen ergibt Gleichung 7.6

$$m \mathbf{r}_S = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 .$$

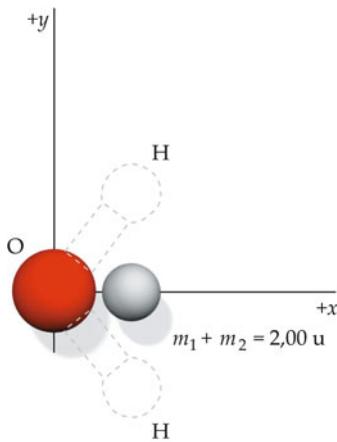


Abbildung 7.14 Skizze zu Beispiel 7.3, wobei die beiden Wasserstoffatome (H) durch ein einziges Teilchen ersetzt sind, das die Masse $m_1 + m_2 = 2,00 \text{ u}$ hat und sich auf der x-Achse am Ort des Massenmittelpunkts der beiden H-Atome befindet. Der Massenmittelpunkt des Moleküls liegt dann zwischen dem Sauerstoffatom im Ursprung und dem berechneten Massenmittelpunkt der beiden Wasserstoffatome.

Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung können durch den Massenmittelpunkt \mathbf{r}'_S der beiden ersten Teilchen ausgedrückt werden:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{r}'_S.$$

Den Massenmittelpunkt des Drei-Teilchen-Systems kann man dann als

$$m \mathbf{r}_S = (m_1 + m_2) \mathbf{r}'_S + m_3 \mathbf{r}_3$$

schreiben. So können wir zunächst den Massenmittelpunkt für zwei der Teilchen bestimmen, etwa für die beiden Wasserstoffatome, und diese beiden dann durch ein einziges Teilchen mit der Gesamtmasse $m_1 + m_2$ am Ort ihres Massenmittelpunkts ersetzen (Abbildung 7.14).

Dasselbe Verfahren erlaubt uns auch, den Massenmittelpunkt für kompliziertere Systeme zu berechnen, beispielsweise für zwei gleichförmige Stäbe (Abbildung 7.15). Der Massenmittelpunkt für jeden der beiden Stäbe allein liegt im Zentrum des jeweiligen Stabs. Den Massenmittelpunkt des Gesamtsystems erhält man, indem man jeden Stab so behandelt, als wäre er ein Massenpunkt am Ort seines jeweiligen Massenmittelpunkts.

Bestimmung des Massenmittelpunkts durch Integration

In diesem Abschnitt werden wir den Massenmittelpunkt durch Integration gemäß Gleichung 7.7 bestimmen:

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm.$$

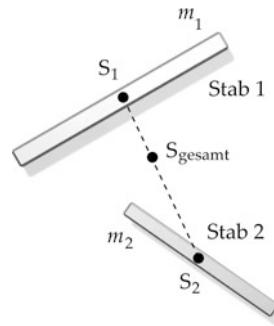


Abbildung 7.15 Den Massenmittelpunkt komplizierterer Systeme kann man berechnen, indem man zunächst den Massenmittelpunkt für jeden Bestandteil des Systems bestimmt. Dann behandelt man das System so, als bestehe es nur aus Punktmassen am Ort der Teilmassenpunkte.

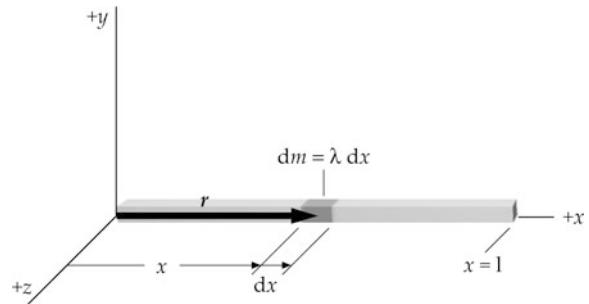


Abbildung 7.16 Zur Berechnung des Massenmittelpunkts eines Stabs durch Integration.

Zunächst wollen wir die Integrationstechnik anhand der Bestimmung des Massenmittelpunkts eines dünnen Stabs der Länge l mit gleichmäßiger Massenverteilung veranschaulichen.

Stab mit gleichmäßiger Massenverteilung

Zunächst legen wir ein Koordinatensystem fest. Eine gute Wahl ist es, die x-Achse so zu bestimmen, dass sie durch den Stab verläuft und ein Ende des Stabs im Ursprung liegt (Abbildung 7.16). In der Abbildung sieht man ein Massenelement dm der Länge dx in einer Entfernung x vom Ursprung. Gleichung 7.7 ergibt dann

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \int \mathbf{r} dm = \frac{1}{m} \int x \hat{\mathbf{x}} dm.$$

Die Masse ist entlang der x-Achse im Intervall $0 \leq x \leq l$ verteilt. Integration über die Masse dm entlang der Massenverteilung bedeutet eine Integration zwischen den Grenzen 0 und l . (Die Integration verläuft in Richtung wachsender x-Werte.) Das Verhältnis dm/dx ist die Masse pro Einheitslänge λ ; es gilt $dm = \lambda dx$ und damit

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \hat{\mathbf{x}} \int x dm = \frac{1}{m} \hat{\mathbf{x}} \int_0^l x \lambda dx, \quad (7.8)$$

wobei

$$m = \int dm = \int_0^l \lambda dx \quad (7.9)$$

ist. Da der Stab eine gleichmäßige Massenverteilung hat, ist λ konstant und kann aus jedem der Integrale in den Gleichungen 7.8 und 7.9 herausgezogen werden. Dies ergibt

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \lambda \hat{x} \int_0^l x dx = \frac{1}{m} \lambda \hat{x} \frac{l^2}{2} \quad (7.10)$$

und

$$m = \lambda \int_0^l dx = \lambda l. \quad (7.11)$$

Nach Gleichung 7.11 ist $\lambda = m/l$. Somit ist für einen gleichmäßigen Stab die Masse pro Längeneinheit gleich dem Quotienten aus Gesamtmasse und Gesamtlänge. Ersetzen von m in Gleichung 7.10 durch λl ergibt schließlich das zu erwartende Ergebnis

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{\lambda l} \lambda \hat{x} \frac{l^2}{2} = \left(\frac{1}{2} l\right) \hat{x}.$$

Halbring

Bei der Berechnung des Massenmittelpunkts eines gleichförmigen Halbrings mit dem Radius r ist es vorteilhaft, die Koordinatenachsen so zu wählen, dass der Ursprung im Mittelpunkt des Halbrings liegt und die y -Achse den Halbkreis halbiert (Abbildung 7.17).

Um den Massenmittelpunkt zu ermitteln, verwenden wir $m \mathbf{r}_S = \int \mathbf{r} dm$ (Gleichung 7.7) mit $\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$. Die halbkreisförmige Massenverteilung legt nahe, Polarkoordinaten zu verwenden, in denen die Koordinaten eines Punkts r und θ sind. Dabei ist r der Betrag des Vektors mit den Koordinaten $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$. Die Punkte auf dem Halbkreis haben vom Koordinatenursprung die Entfernung $r = r_R$. Mit diesen Substitutionen ergibt sich

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \int (x \hat{x} + y \hat{y}) dm = \frac{1}{m} \int r_R (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) dm.$$

Als Nächstes müssen wir dm mithilfe von $d\theta$ ausdrücken. Wenn $\lambda = dm/ds$ die Masse pro Einheitslänge ist, dann hat das Massenelement dm die Länge $ds = r_R d\theta$, daher gilt

$$dm = \lambda ds = \lambda r_R d\theta.$$

So erhalten wir

$$\mathbf{r}_S = \frac{1}{m} \int r_R (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \lambda r_R d\theta.$$

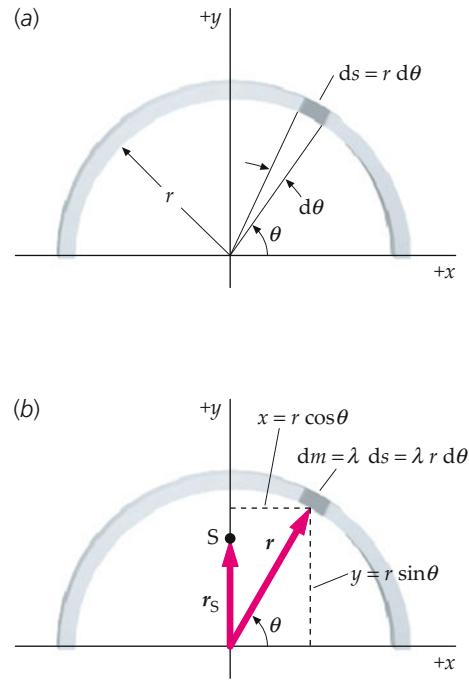


Abbildung 7.17 Geometrie bei der Berechnung des Massenmittelpunkts eines Halbrings durch Integration.

Bei der Auswertung dieses Integrals ist dm entlang der halbkreisförmigen Massenverteilung zu integrieren; somit ist $0 \leq \theta \leq \pi$. Bei Integration in Richtung von zunehmendem θ sind die Integrationsgrenzen 0 und π . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \frac{1}{m} \int_0^\pi r_R (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \lambda r_R d\theta \\ &= \frac{\lambda r_R^2}{m} \left(\hat{x} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + \hat{y} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir Gebrauch davon gemacht, dass das Integral einer Summe die Summe der Integrale ist. Da der Ring eine gleichmäßige Massenverteilung hat, gilt $m = \lambda \pi r_R$, wobei πr_R die Länge des Halbrings ist. Ersetzen von λ durch $m/(\pi r_R)$ und Integrieren ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \frac{r_R}{\pi} \left(\hat{x} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + \hat{y} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \\ &= \frac{r_R}{\pi} \left(\hat{x} \sin \theta \Big|_0^\pi - \hat{y} \cos \theta \Big|_0^\pi \right) = \left(\frac{2}{\pi} r_R \right) \hat{y}. \end{aligned}$$

Der Massenmittelpunkt liegt auf der y -Achse in einer Entfernung $2 r_R/\pi$ vom Koordinatenursprung – und damit außerhalb des Halbrings selbst.



Hammerwerfen. Während sich die Kugel mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf einem horizontalen Kreis bewegt, zeigt ihr Beschleunigungsvektor in Zentripetalrichtung (in die Mitte des Kreises). Die Gesamtkraft auf die Kugel wirkt in Richtung des Beschleunigungsvektors. Die Zentripetalkomponente der Gesamtkraft liefert der Hammerwerfer, der den Griff nach innen zieht. (Mit freundlicher Genehmigung des LAZ Rhede.)

7.3 Massenmittelpunktsbewegung und Impulserhaltung

Die Bewegung eines Körpers oder eines Teilchensystems lässt sich beschreiben, indem man die Bewegung des Massenmittelpunkts als Bezug wählt und die Bewegung der einzelnen Teilchen des Körpers oder Systems relativ zur Bewegung des Massenmittelpunkts beschreibt. Das Stroboskopfoto in Abbildung 7.18 zeigt einen in die Luft geworfenen Hammer. Solange der Hammer fliegt, folgt sein Massenmittelpunkt – ebenso wie ein Punktteilchen – einer Parabelbahn. Währenddessen drehen sich die anderen Teile des Hammers um diesen Punkt.



Abbildung 7.18 Der Massenmittelpunkt (der schwarze Punkt) eines Hammers bewegt sich auf einer stetigen Parabelbahn. (© Loren Winters/Visual Unlimited.)

7.3 Massenmittelpunktsbewegung und Impulserhaltung

Die Bewegung des Massenmittelpunkts eines Teilchensystems hängt von der Gesamtkraft auf das System als Ganzes ab. Um dies nachzuweisen, untersuchen wir die Bewegung eines Systems von n Teilchen mit der Masse m . Zunächst ermitteln wir die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktsystems, indem wir beide Seiten von Gleichung 7.6 ($m\mathbf{r}_S = \sum m_i \mathbf{r}_i$) nach der Zeit differenzieren:

$$m \frac{d\mathbf{r}_S}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}.$$

Da die zeitliche Ableitung des Orts die Geschwindigkeit ist, ergibt sich

$$m\mathbf{v}_S = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots = \sum_i m_i \mathbf{v}_i. \quad (7.12)$$

Durch nochmalige Differenziation erhalten wir die Beschleunigungen

$$m\mathbf{a}_S = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots = \sum_i m_i \mathbf{a}_i. \quad (7.13)$$

Dabei ist \mathbf{a}_i die Beschleunigung des i -ten Teilchens und \mathbf{a}_S die Beschleunigung des Massenmittelpunkts. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ist $m_i \mathbf{a}_i$ gleich der Summe der Kräfte auf das i -te Teilchen und damit

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

Die Summe auf der rechten Seite ist die Summe aller Kräfte, die auf jedes einzelne Teilchen in dem System wirken. Einige dieser Kräfte sind *interne* oder *innere Kräfte*, die die Teilchen des Systems aufeinander ausüben, andere Kräfte sind *externe* oder *äußere Kräfte*, die von Teilchen außerhalb des Systems auf Teilchen im System ausgeübt werden. So ergibt sich

$$m\mathbf{a}_S = \sum_i \mathbf{F}_{i,int} + \sum_i \mathbf{F}_{i,ext}. \quad (7.14)$$

Nach dem dritten Newton'schen Axiom treten Kräfte stets in Paaren zweier gleich großer, aber entgegengerichteter Kräfte auf. Zu jeder inneren Kraft auf ein Teilchen eines Systems gibt es daher immer eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete innere Kraft auf ein anderes Teilchen des Systems. Summieren wir alle inneren Kräfte, ergänzt sich jedes Aktions-Reaktions-Paar zu null, sodass $\sum \mathbf{F}_{i,int} = 0$ ist. Auf das System wirken demnach nur externe Kräfte. Aus Gleichung 7.14 wird so

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_{i,ext} = m\mathbf{a}_S. \quad (7.15)$$

ZWEITES NEWTON'SCHES AXIOM FÜR SYSTEME

Die Gleichung besagt, dass die resultierende äußere Kraft auf ein System gleich dem Produkt aus Gesamtmasse m des Systems und der Beschleunigung des Massenmittelpunkts \mathbf{a}_S des Systems ist. Es gilt:

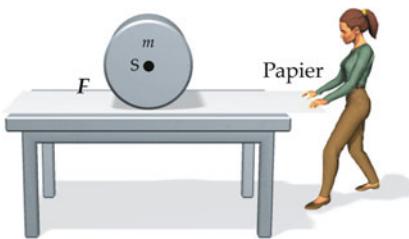


Abbildung 7.19 Zu Verständnisfrage 7.2.

Der Massenmittelpunkt eines Systems von Teilchen bewegt sich unter dem Einfluss der resultierenden äußeren Kraft, die auf das System wirkt, wie ein einziges Teilchen der Masse $m = \sum m_i$.

MASSENMITTELPUNKTSBEWEGUNG EINES TEILCHENSYSTEMS

Dieser Satz ist wichtig, da er die Bewegung des Massenmittelpunkts für ein *beliebiges* Teilchensystem beschreibt: Der Massenmittelpunkt bewegt sich genau wie ein einzelnes Punktteilchen der Masse m , das nur den äußeren Kräften unterliegt. Die individuelle Bewegung der einzelnen Teilchen in dem System ist dagegen in der Regel erheblich komplizierter und wird durch Gleichung 7.15 nicht erfasst. Ein gutes Beispiel dafür ist der in die Luft geworfene Hammer aus Abbildung 7.18. Die einzige wirkende äußere Kraft ist die Schwerkraft, sodass sich der Massenmittelpunkt genau wie ein punktförmiges Teilchen auf einer Parabelbahn bewegt. Dagegen beschreibt Gleichung 7.15 nicht die Rotationsbewegung des Hammerkopfs um den Massenmittelpunkt.

Frage 7.2

Ein Zylinder liegt auf einem Bogen Papier auf einem Tisch (Abbildung 7.19). Jemand zieht an dem Bogen, sodass das Papier nach rechts gleitet. Dies führt dazu, dass der Zylinder *in Bezug auf das Papier* nach links gleitet. Wie bewegt sich der Massenmittelpunkt des Zylinders *in Bezug auf den Tisch*?

Wenn auf ein System die Gesamtkraft null wirkt, ist $\mathbf{a}_S = 0$. In diesem Fall bleibt der Massenmittelpunkt entweder in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Zwar können die inneren Kräfte durchaus kompliziert sein – die Bewegung des Massenmittelpunkts ist dennoch sehr einfach. Auch dann, wenn die Komponente der Gesamtkraft in einer gegebenen Richtung, etwa in der x -Richtung, null ist, ist $a_{S,x} = 0$ und bleibt damit $v_{S,x}$ konstant. Ein Beispiel hierfür ist ein Geschoss ohne Luftwiderstand. Die auf das Geschoss wirkende Gesamtkraft ist die Gravitationskraft. Diese Kraft wirkt senkrecht nach unten, sodass ihre Komponente in einer beliebigen horizontalen Richtung null ist. Folglich bleibt die horizontale Komponente der Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts konstant. Die Beispiele 7.5 bis 7.7 zeigen, wie die Bewegung zusammengesetzter Systeme mithilfe des Massenmittelpunkts behandelt werden kann.

Beispiel 7.5: Ein explodierendes Geschoss

Ein Geschoss wird von einer Ebene aus auf einer Bahn in die Luft abgeschossen, auf der es in einer Entfernung von 55 m landen soll. Allerdings explodiert es am höchsten Punkt der Flugbahn und teilt sich dabei in zwei Bruchstücke mit gleicher Masse. Unmittelbar nach der Explosion hat eines der beiden Bruchstücke die Momentangeschwindigkeit null und fällt senkrecht zu Boden. Wo landet das andere Bruchstück? Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden.

Problembeschreibung: Wir betrachten das Geschoss als das System. Dann sind alle bei der Explosion auftretenden Kräfte innere Kräfte. Da die einzige *äußere* Kraft auf das System die Schwerkraft ist, bewegt sich der Massenmittelpunkt – er befindet sich genau in der Mitte zwischen den beiden Bruchstücken – weiterhin auf einer Parabelbahn, als ob es keine Explosion gegeben hätte (Abbildung 7.20).

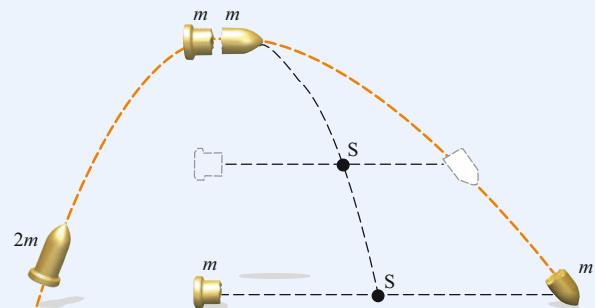


Abbildung 7.20 Bewegungsdiagramm des Geschosses.

Lösung: 1. Der Anfangsort des Geschosses sei $x = 0$. Die Landeorte x_1 und x_2 der Bruchstücke sind mit dem Endort des Massenmittelpunkts über die folgenden Gleichungen verbunden:

$$(2m)x_S = mx_1 + mx_2 \\ \text{oder } 2x_S = x_1 + x_2$$

2. Beim Aufprall gilt $x_S = R$ und $x_1 = 0,5R$, wobei $R = 55\text{ m}$ die horizontale Reichweite für das nicht explodierte Geschoss angibt. Für x_2 ergibt sich dann:

$$x_2 = 2x_S - x_1 = 2R - 0,5R = 1,5R \\ = 1,5(55\text{ m}) = \boxed{83\text{ m}}$$

Plausibilitätsprüfung: Da das Bruchteil 1 durch die bei der Explosion wirkenden Kräfte nach hinten geschleudert wurde, wurde das Bruchteil 2 mit einer gleich großen, aber entgegengerichteten Kraft nach vorn geschossen. Erwartungsgemäß trifft das Bruchteil 2 in einer größeren Entfernung vom Startpunkt auf, als sie das komplette Geschoss erreicht hätte, wenn es nicht explodiert wäre.

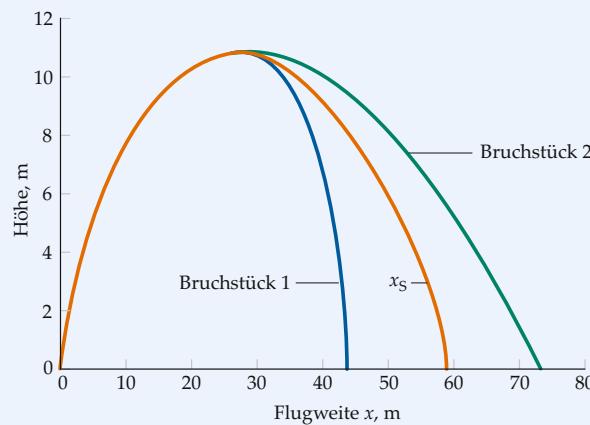


Abbildung 7.21 Höhe und Reichweite des explodierenden Geschosses.

Weitergedacht: In Abbildung 7.21 sind Höhe und Reichweite für ein explodierendes Geschoss für den Fall eingezeichnet, dass die horizontale Geschwindigkeit des Bruchstücks 1 halb so groß wie die horizontale Anfangsgeschwindigkeit des Gesamtgeschosses ist. Wie bei dem ursprünglichen Beispiel, in dem wir angenommen hatten, das Bruchstück 1 würde senkrecht nach unten fallen, folgt der Massenmittelpunkt der normalen Parabelbahn. Wenn beide Bruchstücke nach der Explosion die gleiche vertikale Geschwindigkeitskomponenten besitzen, schlagen sie gleichzeitig auf. Wenn unmittelbar nach der Explosion die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten der beiden Bruchstücke verschieden sind, wird das Bruchstück mit der kleineren vertikalen Geschwindigkeitskomponente zuerst aufschlagen. Sobald dies der Fall ist, übt der Boden eine Kraft auf das System aus, und die resultierende äußere Kraft ist nicht mehr nur die Schwerkraft. Von diesem Moment an gelten unsere Überlegungen nicht mehr.

Übung 7.3: Wie groß ist die Reichweite des leichteren Teils, wenn das Bruchstück, das senkrecht nach unten fällt, eine doppelt so große Masse wie das andere Bruchstück hat? □

Beispiel 7.6: Platzwechsel im Ruderboot

Pete (Masse 80 kg) und Dave (Masse 120 kg) fahren in einem Ruderboot (Masse 60 kg) auf einem stillen See. Dave sitzt in der Nähe des Bugs und rudert, Pete sitzt 2,0 m von ihm entfernt im Heck. Dave wird müde und hört auf zu rudern. Pete will weiterrudern, und nachdem das Boot zum Stillstand gekommen ist, wechseln die beiden ihre Plätze. Wie weit bewegt sich das Boot beim Platzwechsel? (Vernachlässigen Sie alle horizontalen Kräfte, die durch das Wasser ausgeübt werden.)

Problembeschreibung: Das System besteht aus Dave, Pete und dem Boot. Es gibt keine äußeren Kräfte in horizontaler Richtung, sodass sich der Massenmittelpunkt in Bezug auf das Wasser nicht horizontal bewegt. Werten Sie Gleichung 7.3 ($m x_S = \sum m_i x_i$) aus, bevor und nachdem Pete und Dave die Plätze wechseln.

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Zeichnung des Systems in seinem Anfangs- und Endzustand (Abbildung 7.22). Es sei $l = 2,0 \text{ m}$ und $d = \Delta x_B$ die Strecke, die sich das Boot bewegt, während Pete und Dave die Plätze wechseln.

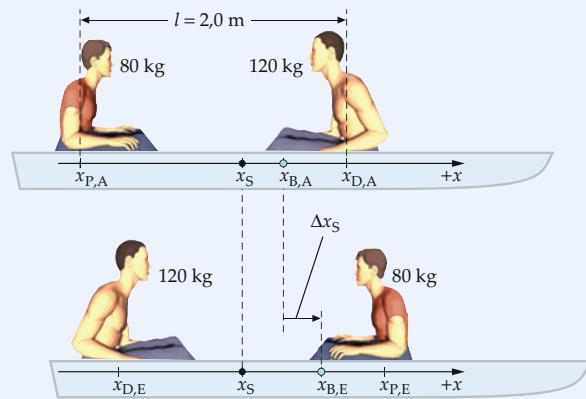


Abbildung 7.22 Platzwechsel von Pete und Dave, im Bezugssystem des Wassers beobachtet. Der blaue Punkt ist der Massenmittelpunkt des Boots und der schwarze der des Systems von Pete, Dave und dem Boot zusammen.

2. Werten Sie $m x_S = \sum m_i x_i$ aus, bevor und nachdem Pete und Dave die Plätze wechseln. Die Koordinatenachsen sind Maße für die Orte im Bezugssystem des Wassers:

$$m x_{S,A} = m_P x_{P,A} + m_D x_{D,A} + m_B x_{B,A}$$

und

$$m x_{S,E} = m_P x_{P,E} + m_D x_{D,E} + m_B x_{B,E}$$

3. Subtrahieren Sie die erste Gleichung aus Schritt 2 von der zweiten. Ersetzen Sie dann Δx_S durch 0, Δx_P durch $d + l$, Δx_D durch $d - l$ und Δx_B durch d :

$$\begin{aligned} m \Delta x_S &= m_P \Delta x_P + m_D \Delta x_D + m_B \Delta x_B \\ 0 &= m_P (d + l) + m_D (d - l) + m_B d \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie hieraus d :

$$\begin{aligned} d &= \frac{m_D - m_P}{m_D + m_P + m_B} l \\ &= \frac{120 \text{ kg} - 80 \text{ kg}}{120 \text{ kg} + 80 \text{ kg} + 60 \text{ kg}} (2,0 \text{ m}) = [0,31 \text{ m}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Dave hat eine größere Masse als Pete, daher bewegt sich der Massenmittelpunkt der beiden beim Platzwechsel zum Heck des Bootes. Damit der Massenmittelpunkt des Gesamtsystems aus Boot, Dave und Pete fest bleibt, muss sich der Massenmittelpunkt des Bootes in die entgegengesetzte Richtung bewegen. Das Ergebnis aus Schritt 4 ist die Verschiebung des Bootes, die erwartungsgemäß positiv ist.

Beispiel 7.7: Ein rutschender Klotz

Ein Keil der Masse m_2 ruht auf einer Waagschale (Abbildung 7.23). Ein kleiner Klotz der Masse m_1 rutscht reibungsfrei die geneigte Seite des Keils herunter. Was zeigt die Waage an, während der Klotz herunterrutscht? Der Keil soll nicht auf der Waagschale gleiten.

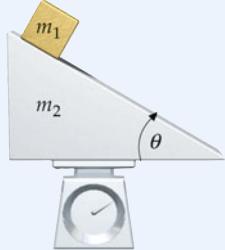


Abbildung 7.23 Skizze der Waage mitsamt Klotz und Keil.

Problembeschreibung: Wir wählen den Keil und den Klotz als betrachtetes System. Da der Klotz beim Rutschen beschleunigt wird, erfährt auch der Massenmittelpunkt des Systems eine Beschleunigung mit einer Komponente nach rechts und mit einer nach unten. Die äußeren Kräfte auf das System sind die Gravitationskraft auf den Klotz und auf den Keil, die Hafreibungs Kraft $F_{R,h}$, die die Waage auf den Keil ausübt, sowie die Normalkraft F_n , die die Waage nach oben ausübt. Die Waage zeigt den Betrag von F_n an.

Lösung: 1. Zeichnen sie ein Kräftediagramm für das System aus Keil und Klotz (Abbildung 7.24).

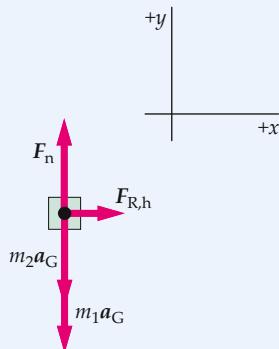


Abbildung 7.24 Kräftediagramm des Keil-Klotz Systems.

2. Schreiben Sie die senkrechte Komponente aus dem zweiten Newton'schen Axiom für das System auf und lösen Sie nach $|F_n|$ auf:

$$|F_n| - m_1 g - m_2 g = m a_{S,y} = (m_1 + m_2) a_{S,y}$$

$$|F_n| = (m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2) a_{S,y}$$

3. Drücken Sie mithilfe von Gleichung 7.13 die Beschleunigung des Massenmittelpunkts $a_{S,y}$ durch die Beschleunigung des Blocks $a_{1,y}$ aus:

$$m a_{S,y} = m_1 a_{1,y} + m_2 a_{2,y}$$

$$(m_1 + m_2) a_{S,y} = m_1 a_{1,y} + 0$$

$$a_{S,y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_{1,y}$$

4. Der Klotz, der den Keil hinabrutscht, erfährt eine Beschleunigung $g \sin \theta$ entlang der Ebene. Mithilfe trigonometrischer Formeln (Abbildung 7.25) lässt sich die y-Komponente dieser Beschleunigung ermitteln und damit $a_{S,y}$ ausdrücken:

Somit ist $a_{1,y} = -a_1 \sin \theta$, wobei $a_1 = g \sin \theta$

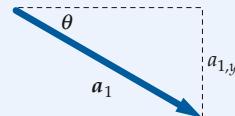
$$a_{1,y} = -(g \sin \theta) \sin \theta = -g \sin^2 \theta$$


Abbildung 7.25 Trigonometrische Zerlegung von $a_{1,y}$.

5. Setzen Sie $a_{1,y}$ in das Ergebnis aus Schritt 3 ein:

$$a_{S,y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_{1,y}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} g \sin^2 \theta$$

6. Setzen Sie $a_{S,y}$ in das Ergebnis aus Schritt 2 ein und lösen Sie nach $|F_n|$ auf:

$$|F_n| = (m_1 + m_2) g + (m_1 + m_2) a_{S,y}$$

$$= (m_1 + m_2) g - m_1 g \sin^2 \theta$$

$$= [m_1(1 - \sin^2 \theta) + m_2] g$$

$$= \boxed{(m_1 \cos^2 \theta + m_2) g}$$

Plausibilitätsprüfung: Für $\theta = 0$ und damit $\cos \theta = 1$ ist das Ergebnis aus Schritt 6 wie zu erwarten gleich der Summe der beiden Gewichte. Für $\theta = 90^\circ$ und $\cos \theta = 0$ ist das Ergebnis aus Schritt 6 erwartungsgemäß gleich dem Gewicht des Keils allein.

Übung 7.4: Ermitteln Sie die Kraftkomponente F_x , die die Waage auf den Keil ausübt. ■

Impulserhaltung für ein Teilchensystem

Der Gesamtimpuls \mathbf{p} eines Teilchensystems ist die Summe der Impulse der einzelnen Teilchen:

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i.$$

Nach Gleichung 7.12 ist $\sum m_i \mathbf{v}_i$ gerade die Gesamtmasse m , multipliziert mit der Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts:

$$\mathbf{p}_S = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_S. \quad (7.16)$$

GESAMTIMPULS EINES SYSTEMS

Differenzieren wir diese Gleichung nach t , so erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{p}_S}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_S}{dt} = m \mathbf{a}_S.$$

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom für ein Teilchensystem ist $m \mathbf{a}_S$ genau die äußere Kraft auf das System. Daher gilt

$$\sum_i \mathbf{F}_{ext,i} = \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{p}_S}{dt}. \quad (7.17)$$

Wenn die äußeren Kräfte auf ein System in ihrer Summe null ergeben, so ist auch die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses null, und der Gesamtimpuls des Systems bleibt konstant (wir schreiben, der Konvention folgend, den Gesamtimpuls ohne Index S):

$$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_S = \text{konstant, wenn } \mathbf{F}_{ext} = 0. \quad (7.18)$$

IMPULSERHALTUNG

7.4 Massenmittelpunktsarbeit und Energieerhaltung

Ist \mathbf{F}_{ext} nicht null, d. h. ist der Impuls des Gesamtsystems nicht konstant, kann Gleichung 7.17 integriert werden, um eine nützliche Gleichung für Arbeit und kinetische Energie zu erhalten, die auf Systeme angewendet werden kann, die nicht als Teilchen modelliert werden können. (Zur Erinnerung: Ein Teilchen ist ein System, dessen Teile alle dieselbe Verschiebung erfahren.) Zunächst bilden wir dazu das Skalarprodukt beider Seiten von Gleichung 7.17 mit \mathbf{v}_S :

$$\mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{v}_S = m \mathbf{a}_S \cdot \mathbf{v}_S = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_S^2 \right) = \frac{dE_{kin,trans}}{dt}, \quad (7.19)$$

7.4 Massenmittelpunktsarbeit und Energieerhaltung

wobei $E_{kin,trans} = \frac{1}{2} m v_S^2$ die **kinetische Energie der Translation** ist, die der Bewegung des Massenmittelpunkts des Körpers zugeordnet ist. Multiplikation beider Seiten von Gleichung 7.19 mit dt und anschließende Integration ergeben

$$\int_1^2 \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{s}_S = \Delta E_{kin,trans}, \quad (7.20)$$

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN GESAMTMASSENMITTELPUNKTSARBEIT UND KINETISCHER ENERGIE DER TRANSLATION

wobei $d\mathbf{s}_S = \mathbf{v}_S dt$ ist. Das Integral $\int_1^2 \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{s}_S$ wird als die **Massenmittelpunktsarbeit** bezeichnet; sie ist die Arbeit, die die auf ein Teilchensystem wirkende Gesamtkraft an ihm verrichtet. Das Differenzial $d\mathbf{s}_S = \mathbf{v}_S dt$ ist die inkrementelle Verschiebung des Massenmittelpunkts.

Gleichung 7.20 besagt: „Die von einer externen Gesamtkraft an einem System verrichtete Massenmittelpunktsarbeit ist gleich der Änderung der kinetischen Energie der Translation des Systems.“ Auch wenn Gleichung 7.20 formal genauso wie Gleichung 5.21 für den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie aussieht, gibt es einige wichtige Unterschiede. Der Zusammenhang zwischen Gesamtmassemittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation macht lediglich eine Aussage über die Verschiebung und die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts des Systems. Von der Bewegung irgendeines Teils des Systems in Bezug auf das Massenmittelpunktsystem wird dabei abgesehen. (Ein Massenmittelpunktsystem ist ein in Bezug auf ein Inertialsystem nicht rotierendes Bezugssystem, das sich mit dem Massenmittelpunkt mitbewegt.) Dies ermöglicht, die Bewegung des Systems als Ganzes zu berechnen, ohne dass alle Details des inneren Aufbaus des Systems bekannt sein müssen.

Für ein System, das sich wie ein einzelnes Teilchen bewegt (dessen Teile alle dieselbe Geschwindigkeit haben), reduziert sich der Zusammenhang zwischen Gesamtmassemittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation auf den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie (Gleichung 5.21).

Gelegentlich ist es auch zweckmäßig, die von einer einzelnen Kraft verrichtete Massenmittelpunktsarbeit zu betrachten. Die von einer bestimmten Kraft \mathbf{F} verrichtete Massenmittelpunktsarbeit W_S ist durch

$$W_S = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_S \quad (7.21)$$

gegeben.

In Beispiel 7.8 wird gezeigt, wie die auf den ersten Blick recht kompliziert erscheinende Bewegung zweier Körper mithilfe des Zusammenhangs zwischen Gesamtmassemittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation relativ leicht be-

7 Teilchensysteme

rechnet werden kann. In Beispiel 7.9 wird die praktisch oft interessante Frage der Länge des Bremswegs eines Autos wieder betrachtet.

Beispiel 7.8: Zwei Pucks an einem Faden

Zwei gleiche Hockeypucks auf einem Luftkissentisch sind mit einem Faden verbunden (Abbildung 7.26). Zu Beginn liegen die beiden Pucks, die jeweils die Masse m haben, ruhend in der gezeigten Anordnung auf dem Tisch. Nun wird das System von einer konstanten Kraft mit dem Betrag $|F|$ nach rechts beschleunigt. Nachdem sich der Angriffspunkt P der Kraft eine Strecke d bewegt hat, stoßen die Pucks zusammen und bleiben aneinanderhaften. Welchen Geschwindigkeitsbetrag haben die Pucks unmittelbar nach dem Zusammenstoß?

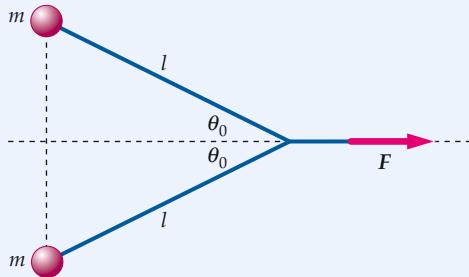


Abbildung 7.26 Skizze des Systems aus den beiden Pucks und dem Faden.

Problembeschreibung: Wir betrachten die beiden Pucks und den Faden als das System. Auf dieses System wenden wir den Zusammenhang zwischen Gesamtmassenmittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation an. Der Geschwindigkeitsbetrag jedes Pucks nach dem Zusammenstoß ist gleich dem Geschwindigkeitsbetrag des Massenmittelpunktsystems. (Die beiden Pucks sollen sich reibungsfrei auf dem Luftkissentisch bewegen können.)

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Skizze des Systems im Anfangszustand an und eine weitere, nachdem es sich die Strecke d bewegt hat (Abbildung 7.27).

2. Wenden Sie auf das System den Zusammenhang zwischen Gesamtmassenmittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation an. Die auf das System wirkende Gesamtkraft ist $\mathbf{F} = |F|\hat{x}$:

$$\int_A^E \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{s}_S = \Delta E_{\text{kin,trans}}$$

$$\int_A^E |F| \hat{x} \cdot dx_S \hat{x} = E_{\text{kin,trans,E}} - E_{\text{kin,trans,A}}$$

$$|F| \int_A^E dx_S = E_{\text{kin,trans,E}} - 0$$

$$|F| \Delta x_S = \frac{1}{2}(2m) v_S^2 = m v_S^2$$

3. Berechnen Sie Δx_S als Funktion von d und l . Anhand von Abbildung 7.27 ist die Berechnung recht einfach:

$$\Delta x_S + l = l \cos \theta_0 + d$$

und somit

$$\Delta x_S = d - l(1 - \cos \theta_0)$$

4. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 3 in das aus Schritt 2 ein und stellen Sie nach v_S um:

$$|F| \Delta x_S = m v_S^2$$

$$|F| [d - l(1 - \cos \theta_0)] = m v_S^2$$

und somit

$$v_S = \sqrt{\frac{|F| [d - l(1 - \cos \theta_0)]}{m}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn der Anfangswinkel $\theta_0 = 0$ ist, kann das System als ein Teilchen modelliert werden, auf das der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie angewendet werden kann. Dieser würde $|F|d = \frac{1}{2}(2m)v^2 = m v^2$ oder $v = \sqrt{|F|d/m}$ ergeben. Das Ergebnis aus Schritt 4 stimmt für $\theta_0 = 0$ damit überein.

Weitergedacht: 1) Im vorliegenden Beispiel ist die Verschiebung des Massenmittelpunkts Δx_S kleiner als die Verschiebung des Angriffspunkts der Kraft F . Infogedessen ist die von der Kraft verrichtete Massenmittelpunktsarbeit kleiner als die von der Kraft verrichtete Arbeit $|F|d$. 2) Wenn die Pucks zusammenstoßen und aneinanderhaften bleiben, verlieren sie kinetische Energie. Diese Energie erscheint als eine andere Energieform wieder, nämlich als Wärmeenergie. ■

Beispiel 7.9: Bremsweg

Ein Auto mit einer Masse von 1000 kg fährt mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h auf einer geraden, ebenen Straße. Um einen Unfall zu vermeiden, bremst der Fahrer plötzlich mit der maximal möglichen Kraft. Das Antiblockiersystem (ABS) versagt, sodass die Räder blockieren und die Reifen rutschen, bis der Wagen schließlich zum Stillstand kommt. Der Gleitreibungs-koefizient zwischen Straße und Reifen ist 0,80. Wie weit rutscht das Auto beim Bremsen?

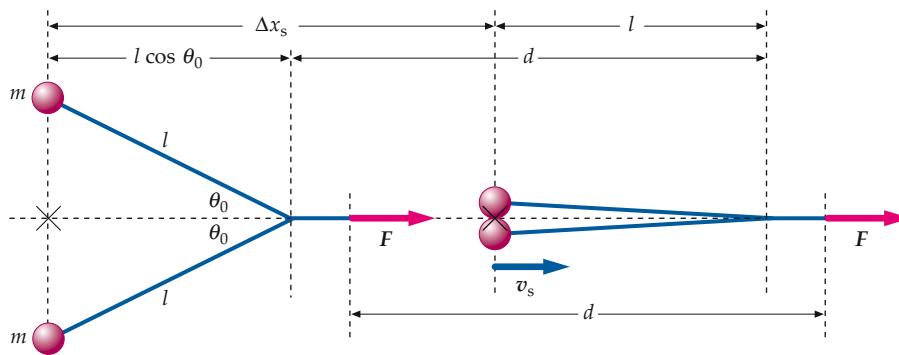


Abbildung 7.27 Bewegungsdiagramm des Systems vor und nach der Krafteinwirkung.

Problembeschreibung: Das Auto kann nicht als Teilchen modelliert werden. Die Angriffspunkte der Gleitreibungs Kräfte sind die jeweiligen Punkte der Reifen, die gerade die Straße berühren. Die vorstehenden Punkte der Berührungsflächen bleiben abwechselnd aneinanderhaften bzw. gleiten aneinander. Dennoch können wir den Bremsweg berechnen, indem wir den Zusammenhang zwischen Massenmittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation auf das Auto anwenden.

Lösung: 1. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen Massenmittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation auf. Aus ihm muss die Verschiebung des Massenmittelpunkts des Autos ermittelt werden:

$$\int_1^2 \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{s}_S = \Delta E_{\text{kin,trans}}$$

2. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm des Autos, während es rutscht (Abbildung 7.28).

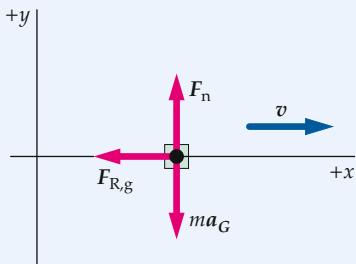


Abbildung 7.28 Kräftediagramm des rutschenden Autos.

3. Die vertikale Beschleunigung ist null. Daher ist die Summe aus Normalkraft und Gravitationskraft null und somit die auf das Auto wirkende externe Gesamtkraft gleich der Reibungskraft. Bestimmen Sie die auf das Auto wirkende Gesamtkraft:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + m\mathbf{a}_G + \mathbf{F}_{R,g} = \mathbf{F}_{R,g}$$

und somit

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}_{R,g}| = \mu_{R,g} |\mathbf{F}_n| = \mu_{R,g} mg$$

$$\mathbf{F} = (-\mu_{R,g} mg) \hat{\mathbf{x}}$$

4. Wenden Sie auf das Auto den Zusammenhang zwischen Massenmittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation an:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_S = \Delta E_{\text{kin,trans}}$$

$$\int_1^2 -\mu_{R,h} mg \hat{\mathbf{x}} \cdot dx_S \hat{\mathbf{x}} = E_{\text{kin,trans},2} - E_{\text{kin,trans},1}$$

$$-\mu_{R,h} mg \int_1^2 dx_S = 0 - E_{\text{kin,trans},1}$$

$$-\mu_{R,h} mg (x_{S,2} - x_{S,1}) = -\frac{1}{2} m v_{S,1}^2$$

5. Berechnen Sie hieraus die Verschiebung. Zuvor müssen Sie dazu die Anfangsgeschwindigkeit von km/h in m/s umrechnen:

$$v_{S,1} = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ h}}{(3600 \text{ s})} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

und somit

$$\Delta x_S = x_{S,2} - x_{S,1} = \frac{v_{S,1}^2}{2 \mu_{R,g} g}$$

$$\Delta x_S = \frac{(25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot (0,80) \cdot (9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = \boxed{40 \text{ m}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir würden erwarten, dass der Bremsweg mit der Anfangsgeschwindigkeit zunimmt und mit zunehmendem Reibungskoeffizienten abnimmt. Der Ausdruck aus Schritt 5 entspricht dem.

Weitergedacht: 1) Die kinetische Energie der Translation des Autos wird als Wärmeenergie der Reifen und des Straßenbelags abgegeben. 2) Im Gegensatz zu den Beispielen in Kapitel 2 haben wir das Auto hier nicht als ein punktförmiges Teilchen betrachtet, sondern sind vom wesentlich komplizierteren Fall ausgegangen, in dem wir das Auto als Teilchensystem modelliert haben.

Kinetische Energie eines Teilchensystems

Wenn die äußere Kraft auf ein Teilchensystem null ist, muss der Gesamtimpuls des Systems konstant bleiben; dennoch kann sich die mechanische Gesamtenergie des Systems ändern. Wie in den Beispielen in Kapitel 6 gezeigt, gibt es nichtkonservative innere Kräfte, die zwar den Gesamtimpuls nicht ändern können, jedoch die resultierende mechanische Energie des Systems beeinflussen. Mit dem wichtigen Satz über die kinetische Energie eines Teilchensystems können wir die Energie eines komplizierten Systems einfacher behandeln und Energieänderungen innerhalb des Systems besser verstehen:

Die kinetische Energie eines Teilchensystems lässt sich als Summe von zwei Termen beschreiben: 1) der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m v_S^2$, die mit der Bewegung des Massenmittelpunkts zusammenhängt (m ist die Gesamtmasse des Systems); und 2) der kinetischen Energie $\sum \frac{1}{2} m_i (v_i^{(S)})^2$ der einzelnen Teilchen, die sich relativ zum Massenmittelpunkt bewegen (dabei ist $v_i^{(S)}$ die Geschwindigkeit des i -ten Teilchens relativ zum Massenmittelpunkt).

SATZ ÜBER DIE KINETISCHE ENERGIE EINES TEILCHENSYSTEMS

In Formeln ausgedrückt haben wir so

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_S^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^{(S)})^2 = \frac{1}{2} m v_S^2 + E_{\text{kin,rel}}. \quad (7.22)$$

KINETISCHE ENERGIE EINES TEILCHENSYSTEMS

Dabei ist m die Gesamtmasse des Systems, $E_{\text{kin,rel}}$ ist die kinetische Energie der Teilchen *relativ zum Massenmittelpunkt*.

Der Satz lässt sich mit der Überlegung beweisen, dass sich die kinetische Energie E_{kin} eines Teilchensystems als Summe der kinetischen Energien der einzelnen Teilchen ergibt:

$$E_{\text{kin}} = \sum_i E_{\text{kin},i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i).$$

Dabei haben wir das Ergebnis $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ verwendet. Die Geschwindigkeit des i -ten Teilchens lässt sich schreiben als die Summe aus der Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts \mathbf{v}_S

und der Geschwindigkeit $v_i^{(S)}$ des i -ten Teilchens relativ zum Massenmittelpunkt:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_i^{(S)}. \quad (7.23)$$

Dann ist die kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_i^{(S)}) \cdot (\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_i^{(S)}) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_S^2 + (v_i^{(S)})^2 + 2 \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_i^{(S)}). \end{aligned}$$

Dies können wir als Summe von drei Termen schreiben:

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_S^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^{(S)})^2 + \mathbf{v}_S \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i^{(S)}.$$

Dabei konnten wir im letzten Term die Schwerpunktgeschwindigkeit \mathbf{v}_S aus der Summe herausziehen, weil sie für alle Teilchen gleich groß ist: \mathbf{v}_S bezieht sich auf das System, nicht auf ein einzelnes Teilchen. Die Größe $\sum m_i \mathbf{v}_i^{(S)}$ ist der Gesamtimpuls $m \mathbf{v}_S^{(S)}$ des Systems *bezogen auf den Massenmittelpunkt bzw. Schwerpunkt*. Da die Geschwindigkeit des Schwerpunkts relativ zum Schwerpunkt null ist, ist auch der Gesamtimpuls $m \mathbf{v}_S^{(S)}$ null, sodass gilt

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_S^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^{(S)})^2 = \frac{1}{2} m v_S^2 + E_{\text{kin,rel}},$$

womit der Beweis von Gleichung 7.22 abgeschlossen ist.

Wenn die äußere Kraft null ist, bleibt \mathbf{v}_S konstant, und die mit der Bewegung des Massenmittelpunkts verbundene kinetische Energie ($\frac{1}{2} m v_S^2$) ändert sich nicht. In einem abgeschlossenen System kann sich nur die kinetische Energie bezüglich des Schwerpunkts ändern.

Übung 7.5: Ein Gleiter A bewegt sich auf einer reibungsfreien ebenen Luftpinnenbahn mit 1,0 m/s in positiver x -Richtung. Auf der Luftpinnenbahn befindet sich vor dem Gleiter A ein identischer Gleiter B. Beide Gleiter haben eine Masse von je 1,0 kg. Wir betrachten das System aus den beiden Gleitern. a) Welche Geschwindigkeit hat der Massenmittelpunkt, und welche Geschwindigkeit haben die Gleiter bezüglich des Massenmittelpunkts? b) Welche kinetische Energie hat jeder der beiden Gleiter bezüglich des Massenmittelpunkts? c) Wie groß ist die kinetische Gesamtenergie bezüglich des Massenmittelpunkts? d) Die Gleiter stoßen zusammen und bleiben aneinander haften. Wie groß ist dann die kinetische Gesamtenergie bezüglich des Massenmittelpunkts? ◀

Potenzielle Energie eines Teilchensystems

Die potenzielle Energie der Gravitation eines Teilchensystems in einem homogenen Gravitationsfeld ist dieselbe, wie wenn

die gesamte Energie im Massenmittelpunkt des Systems konzentriert wäre. Wir wollen ein solches System betrachten und nennen die Höhe des i . Teilchens über der Bezugshöhe h_i . Die potenzielle Energie der Gravitation des Systems ist dann

$$E_{\text{pot,G}} = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i.$$

Dabei läuft die Summe über alle Teilchen des Systems. Laut Definition des Massenmittelpunkts ist die Höhe des Massenmittelpunkts des Systems

$$m h_S = \sum_i m_i h_i, \quad \text{mit } m = \sum_i m_i.$$

Ersetzen von $\sum_i m_i h_i$ durch $m h_S$ in der potenziellen Energie ergibt

$$E_{\text{pot,G}} = m g h_S. \quad (7.24)$$

POTENZIELLE ENERGIE DER GRAVITATION EINES SYSTEMS

In Beispiel 7.10 wird die potenzielle Energie eines am Korbrand hängenden Basketballspielers berechnet, auf den die Federkraft des Korbs und die Schwerkraft wirken.

Beispiel 7.10: Die potenzielle Energie eines Basketballspielers

Wir betrachten ein System, das aus einem Basketballspieler mit einer Masse von 110 kg, aus dem Ring des Basketballkorbs und aus der Erde besteht. Die potenzielle Energie des Systems sei null, wenn der Spieler auf dem Boden steht und der Ring des Basketballkorbs in der Horizontallage ist. Wie groß ist die potenzielle Energie des Systems insgesamt, wenn der Basketballspieler wie in Abbildung 7.29 vorn am Korbring hängt? Nehmen Sie dazu an, dass der Massenmittelpunkt des Spielers, wenn er steht, eine Höhe von 0,80 m über dem Boden hat, und wenn er am Korb hängt, eine Höhe von 1,30 m über dem Boden hat. Die Federkonstante des Korbrings beträgt 7,2 kN/m, und das vordere Ende des Korbrings sei $s = 15 \text{ cm}$ nach unten gezogen.



Abbildung 7.29 (© Hans-Joachim Bittner – Bad Reichenhall.)

7.4 Massenmittelpunktsarbeit und Energieerhaltung

Problembeschreibung: Der Spieler, der anfangs auf dem Boden stand, hängt nun am Basketballkorb. Die gesamte Änderung der potenziellen Energie setzt sich dabei aus der potenziellen Energie der Gravitationskraft und aus der potenziellen Energie des wie eine Feder wirkenden Rings des Basketballkorbs $E_{\text{pot,F}} = \frac{1}{2} k_F s^2$ zusammen. Den Referenzpunkt, an dem $E_{\text{pot,G}} = 0$ ist, legen wir 0,80 m über den Boden.

Lösung: 1. Skizzieren Sie das System zunächst im Anfangszustand und anschließend im Endzustand (Abbildung 7.30).

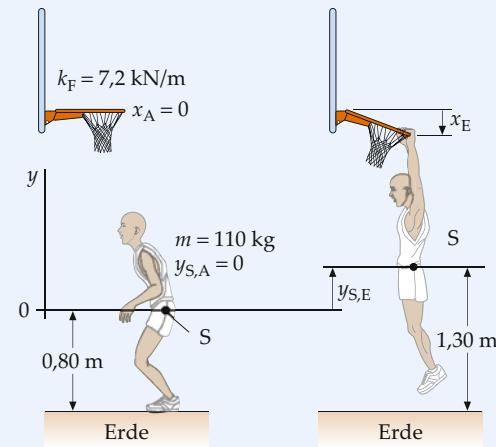


Abbildung 7.30 Ein Basketballspieler springt hoch, bekommt den Ring des Korbs zu fassen und hängt sich mit den Händen daran.

2. Der Bezugspunkt der potenziellen Energie der Gravitation, an dem $E_{\text{pot,G}} = 0$ ist, liegt 0,80 m über dem Boden. Damit ist $E_{\text{pot,G,A}} = 0$. Somit ist die gesamte potenzielle Energie am Anfang null:

$$E_{\text{pot,G,A}} = m g y_{S,A} = m g (0) = 0$$

$$E_{\text{pot,F,A}} = \frac{1}{2} k_F s_A^2 = \frac{1}{2} k_F (0)^2 = 0$$

$$E_{\text{pot,A}} = E_{\text{pot,G,A}} + E_{\text{pot,F,A}} = 0$$

3. Die gesamte potenzielle Energie am Schluss ist die Summe der potenziellen Energie der Gravitationskraft und der potenziellen Energie des Korbrings:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot,E}} &= E_{\text{pot,G,E}} + E_{\text{pot,F,E}} = m g y_{S,E} + \frac{1}{2} k_F s_E^2 \\ &= (110 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) \cdot (0,50 \text{ m}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (7,2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}) \cdot (0,15 \text{ m})^2 \\ &= 540 \text{ N} \cdot \text{m} + 81 \text{ N} \cdot \text{m} = \boxed{6,2 \cdot 10^2 \text{ J}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Unter Berücksichtigung der Definition des Joule, $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$, ergeben sich die richtigen Einheiten.

Weitergedacht: Unmittelbar nachdem sich der Spieler vorn an den Ring des Korbs gehängt hat, schwingen Ring und Spieler zusammen vertikal auf und ab. Schließlich kommen beide zur Ruhe, wobei der Ring 15 cm tiefer als zu Beginn ist. Da die potenzielle Energie dort minimal ist (Abbildung 7.31), ist das System dort im Gleichgewicht.

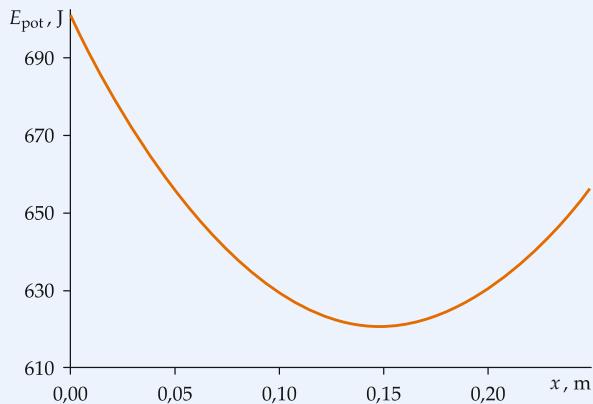


Abbildung 7.31 Die Kurve zeigt die gesamte potentielle Energie $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot,G}} + E_{\text{pot,F}}$ als Funktion der Auslenkung des Rings.

Ausgehend von der Tatsache, dass eine stabile Gleichgewichtslage ein Minimum der potenziellen Energie ist, lässt sich der Massenmittelpunkt experimentell ermitteln. So sind z. B. zwei mit einem leichten Stab verbundene Körper im Gleichgewicht, wenn der Drehpunkt im Massenmittelpunkt liegt (Abbildung 7.32). Wenn das System in einem anderen Punkt gelagert wird, dreht es sich so lange, bis die potenzielle Energie der Gravitation minimal ist. Wegen $E_{\text{pot,G}} = m g h_S$ (Gleichung 7.24) trifft dies dann zu, wenn sich der Massenmittelpunkt an seinem tiefsten möglichen Punkt unter dem Schwerpunkt befindet (Abbildung 7.33).

Ein an einem Drehpunkt gelagerter unregelmäßig geformter Körper dreht sich also so, dass sein Massenmittelpunkt auf der Senkrechten liegt, die von diesem Drehpunkt aus nach unten

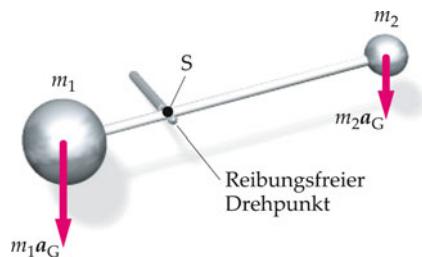


Abbildung 7.32 Zwei mit einem leichten Stab verbundene Körper sind im Gleichgewicht, wenn der Drehpunkt im Massenmittelpunkt liegt.

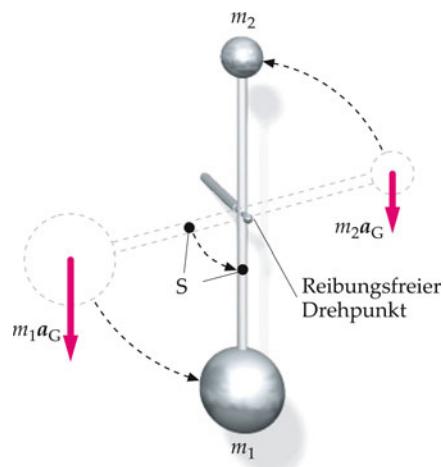


Abbildung 7.33 Liegt der Drehpunkt außerhalb des Massenmittelpunkts, dreht sich das System so lange, bis der Massenmittelpunkt unter dem Drehpunkt liegt.



Abbildung 7.34 Der Massenmittelpunkt eines unregelmäßig geformten Körpers lässt sich ermitteln, indem man ihn nacheinander an zwei Punkten drehbar lagert und den Schnittpunkt der Senkrechten ermittelt.

zeigt. Lagert man den Körper nun in einem anderen Punkt und zieht wiederum die Senkrechten durch den Drehpunkt, liegt der Massenmittelpunkt auf dem Schnittpunkt beider Linien (Abbildung 7.34).

Energiebilanz eines Teilchensystems

Wie bereits in Kapitel 5 gezeigt, ist die Energiebilanz eines Teilchensystems gegeben durch Gleichung 5.39.

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E \\ &= \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} + \Delta E_{\text{chem}} + \Delta E_{\text{andere}}. \end{aligned}$$

Beispiel 7.11 zeigt für ein System bestehend aus zwei Blöcken und einer Feder, wie man die Bewegung eines Systems mithilfe der Energieerhaltung beschreiben kann.

Beispiel 7.11: Ein Block, ein weiteres Gewicht und eine Feder

Ein 4,0-kg-Gewicht hängt an einem leichten Seil, das über eine masselose, reibungsfreie Rolle mit einem 6,0-kg-Block verbunden ist, der auf einer horizontalen Fläche liegt. Der Gleitreibungskoeffizient ist 0,20. Zunächst wird der 6,0-kg-Block gegen eine Feder mit einer Federkonstanten von 180 N/m gedrückt, wodurch diese 30 cm zusammengedrückt wird. Wie schnell bewegen sich der Block und das Gewicht, nachdem der Block losgelassen wurde und das Gewicht 40 cm gesunken ist? (Der 6,0-kg-Block soll anfangs mindestens 40 cm von der Rolle entfernt sein.)

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit der beiden Blöcke ergibt sich aus ihrer kinetischen Energie am Ende. Das System bestehe aus allen in Abbildung 7.35 gezeigten Elementen sowie aus der Erde. Dieses System besitzt sowohl potentielle Energie der Gravitationskraft als auch potentielle Federenergie. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie an. Berechnen Sie anschließend aus der kinetischen Energie der Blöcke ihre Geschwindigkeit.

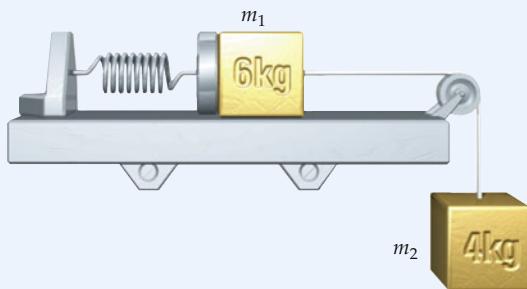


Abbildung 7.35 Skizze des Systems.

Lösung: 1. Zum System gehören alles in der Abbildung Dargestellte sowie die Erde. Schreiben Sie die Gleichung für die Energieerhaltung des Systems auf:

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} \\ &= (\Delta E_{\text{pot,Feder}} + \Delta E_{\text{pot,G}} + \Delta E_{\text{kin}}) \\ &\quad + |\mathbf{F}_{\text{R,g}}| s_{\text{rel}} \end{aligned}$$

7.4 Massenmittelpunktsarbeit und Energieerhaltung

2. Skizzieren Sie das System sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand (Abbildung 7.36).

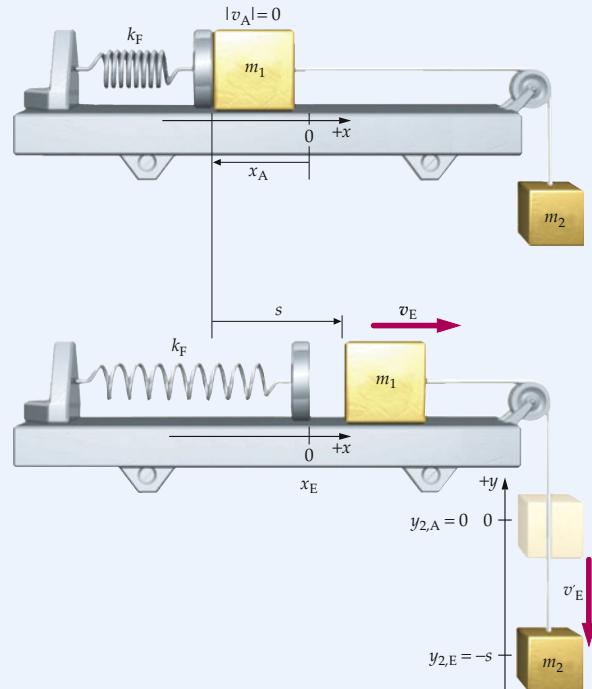


Abbildung 7.36 Zum System gehören alles in der Abbildung Dargestellte sowie die Erde. Das System ist in seinem Anfangs- und in seinem Endzustand gezeigt.

3. Am System greifen keine äußeren Kräfte an:

$$W_{\text{ext}} = 0$$

4. Die potentielle Energie der Feder $E_{\text{pot,Feder}}$ hängt von der Federkonstanten k_F und von ihrer Dehnung x ab. (Wenn die Feder zusammengedrückt ist, ist x negativ.) Die potentielle Energie der Gravitation hängt von der Höhe des Gewichts ab:

$$E_{\text{pot,Feder}} = \frac{1}{2} k_F x_A^2$$

$$E_{\text{pot,G}} = m g y_2$$

5. Fertigen Sie eine Tabelle der mechanischen Energie für den Anfangszustand (mit der 30 cm zusammengedrückten Feder) und für den Endzustand an. Im Endzustand haben sich beide Blöcke jeweils um $s = 40$ cm bewegt, und die Feder ist entspannt. Die potentielle Energie der Gravitation sei anfangs gleich null. Tragen Sie in die Tabelle außerdem jeweils die Änderung, d.h. die Differenz zwischen dem Wert im Endzustand und dem im Anfangszustand, ein.

	Ende	Anfang	Differenz
$E_{\text{pot,Feder}}$	0	$\frac{1}{2} k_F x_A^2$	$-\frac{1}{2} k_F x_A^2$
$E_{\text{pot,G}}$	$-m_2 g s$	0	$-m_2 g s$
E_{kin}	$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_E^2$	0	$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_E^2$

6. Schreiben Sie die Formel für die Gleitreibungskraft $|F_{R,g}|$ mit $\mu_{R,g}$ auf:

$$|F_{R,g}| = \mu_{R,g} m_1 g$$

7. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 3 bis 6 in das Ergebnis aus Schritt 1 ein:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} k_F x_A^2 - m_2 g s + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_E^2 \\ &\quad + \mu_{R,g} m_1 g s \end{aligned}$$

8. Stellen Sie das Ergebnis aus Schritt 7 nach v_E^2 um. Setzen Sie die Zahlenwerte ein und berechnen Sie v_E :

$$v_E^2 = \frac{k_F x_A^2 + 2 (m_2 - \mu_{R,g} m_1) g s}{m_1 + m_2}$$

und somit

$$v_E = \boxed{2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: Für $m_2 = 0$ und $\mu_{R,g} = 0$ hängt die Endgeschwindigkeit weder von g noch von $\mu_{R,g}$ ab (siehe Schritt 8). Dies ist zu erwarten, da $m_2 g$ die Gravitationskraft auf die Masse m_2 ist, die das System vorwärtszieht, während $\mu_{R,g} m_1 g$ die auf m_1 wirkende Reibungskraft ist, die der Vorwärtsbewegung entgegengesetzt ist. Wenn die Summe beider Kräfte null ist, haben Gravitation und Reibung keinen Einfluss auf die Endgeschwindigkeit.

Weitergedacht: Bei dieser Lösung wurde angenommen, dass das Seil ständig straff ist. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn die Beschleunigung des Blocks immer kleiner als g ist, d. h. wenn die Gesamtkraft auf den Block kleiner als $m_1 g = (6,0 \text{ kg}) (9,81 \text{ N/kg}) = 59 \text{ N}$ ist. Anfangs übt die Feder eine Kraft $k x_1 = (180 \text{ N/m}) (0,30 \text{ m}) = 54 \text{ N}$ auf den Block aus. Die Reibungskraft beträgt $|F_{R,g}| = \mu_{R,g} m_1 g = 0,20 (59 \text{ N}) = 12 \text{ N}$. Beide Kräfte zusammen ergeben eine Gesamtkraft von 42 N , die nach rechts gerichtet ist. Da die Federkraft abnimmt, wenn der Block nach rechts gleitet, wird seine Beschleunigung niemals größer als g , sodass das Seil stets straff bleibt. ■

7.5 *Stöße im Schwerpunktsystem

Nachdem wir nun die Energie- und Impulserhaltung für ein System von Teilchen mithilfe des Massenmittelpunkts hergeleitet haben, betrachten wir die Stoßprobleme aus Kapitel 6 noch einmal und beschreiben die Bewegungen der Stoßpartner mithilfe des Massenmittelpunkts des Zweiteilchensystems.

Wenn keine äußere Kraft auf ein System wirkt, bleibt die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts in einem beliebigen Bezugssystem konstant. Für viele Untersuchungen ist es praktisch, ein Koordinatensystem zu verwenden, dessen Ursprung im Massenmittelpunkt des Systems liegt und sich mit dem Massenmittelpunkt bewegt. Dann bewegt sich dieses neue Koordinatensystem relativ zu dem ursprünglichen Bezugssystem – dem sogenannten Laborsystem – mit der konstanten Geschwindigkeit v_S . Das Bezugssystem, das sich mit dem Massenmittelpunkt bewegt, wird **Massenmittelpunktsystem** oder **Schwerpunktsystem** genannt. Wir werden hier beide Begriffe gleichwertig nebeneinander verwenden, obwohl genau genommen Massenmittelpunkt und Schwerpunkt nur in homogenen Kraftfeldern mit konstanter Beschleunigung und verschwindendem Drehmoment zusammenfallen (Kapitel 9).

Wenn ein Teilchen im Laborsystem die Geschwindigkeit v hat, dann ist seine Geschwindigkeit im Schwerpunktsystem $v^{(S)} = v - v_S$. Gemäß seiner Definition ist im Schwerpunktsystem die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts immer null. Daher ist auch der Gesamtimpuls des Systems – also das Produkt von Gesamtmasse und der Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts – im Schwerpunktsystem null. Es wird daher auch **Null-Impuls-Bezugssystem** genannt.

Die mathematische Untersuchung von Stoßproblemen wird wesentlich erleichtert, wenn man sie im Schwerpunktsystem behandelt. Die Geschwindigkeiten der Teilchen im Schwerpunktsystem sind $v_1^{(S)}$ und $v_2^{(S)}$. Die Impulse $m_1 v_1^{(S)}$ und $m_2 v_2^{(S)}$ der beiden zusammenstoßenden Teilchen sind entgegengesetzt gleich:

$$m_1 v_1^{(S)} + m_2 v_2^{(S)} = 0.$$

Nach einem vollständig inelastischen Stoß sind die beiden Teilchen im Schwerpunktsystem in Ruhe. Bei einem rein elastischen Stoß in einer Dimension zwischen zwei Objekten kehrt sich die Richtung der beiden Geschwindigkeitsvektoren genau um, ohne dass sich der Betrag der Geschwindigkeiten ändert, wir haben daher beim eindimensionalen Stoß:

$$v_{1,A}^{(S)} = -v_{1,E}^{(S)} \quad \text{und} \quad v_{2,A}^{(S)} = -v_{2,E}^{(S)}$$

Betrachten wir beispielsweise ein einfaches Zweikörperproblem im Schwerpunktsystem, in dem sich ein Teilchen der Mas-

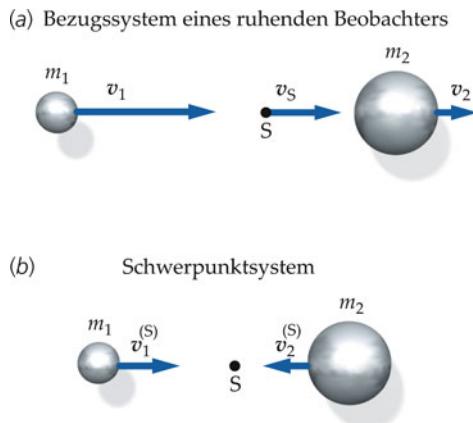


Abbildung 7.37 a) Zwei Teilchen bewegen sich in einem Bezugssystem, in dem der Massenmittelpunkt die Geschwindigkeit v_S hat. b) Dieselben beiden Partikel im Schwerpunktsystem, bei dem der Massenmittelpunkt sich nicht bewegt. Die Impulse der beiden Teilchen sind entgegengesetzt gleich.

se m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 und ein zweites Teilchen der Masse m_2 mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt (Abbildung 7.37). Im ruhenden Bezugssystem hat der Massenmittelpunkt die Geschwindigkeit

$$v_S = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Um die Geschwindigkeit v_1 und v_2 der beiden Teilchen im ursprünglichen Bezugssystem in die Geschwindigkeiten $v_1^{(S)}$ und $v_2^{(S)}$ im Schwerpunktsystem zu transformieren, muss man die Geschwindigkeit v_S des Massenmittelpunkts subtrahieren. Dann gilt

$$v_1^{(S)} = v_1 - v_S \quad (7.25a)$$

und

$$v_2^{(S)} = v_2 - v_S. \quad (7.25b)$$

Da der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem null ist, müssen die Impulse der beiden Teilchen in diesem Bezugssystem entgegengesetzt gleich sein. Beispiel 7.12 zeigt das Vorgehen beim Übergang zum Schwerpunktsystem anhand von Beispiel 6.13.

Beispiel 7.12: Elastischer Stoß zweier Blöcke

Untersuchen Sie den elastischen Stoß aus Beispiel 6.13 (ein Block von 4,0 kg bewegt sich mit 6,0 m/s nach rechts und stößt auf einen Block von 2,0 kg mit einer Geschwindigkeit von 3,0 m/s), indem Sie die Geschwindigkeiten in das Schwerpunktsystem transformieren.

Problembeschreibung: Wir transformieren in das Schwerpunktsystem, indem wir zunächst die Geschwindigkeit v_S des Massenmittelpunkts berechnen und sie von den Geschwindigkeiten der beiden Blöcke abziehen. Dann lösen wir das Stoßproblem, indem wir die Geschwindigkeiten umkehren, und transformieren zurück in das ursprüngliche Bezugssystem.

Lösung: 1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_S des Massenmittelpunkts (Abbildung 7.38):

Anfangsbedingungen

$$|v_S| = 5,0 \text{ m/s}$$

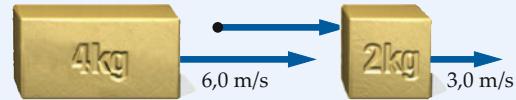


Abbildung 7.38 Darstellung der Bewegung der zwei Blöcke und ihres Massenmittelpunkts im Laborsystem.

$$\begin{aligned} v_S &= \frac{m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(4,0 \text{ kg})(6,0 \text{ m/s}) + (2,0 \text{ kg})(3,0 \text{ m/s})}{(4,0 \text{ kg}) + (2,0 \text{ kg})} \\ &= 5,0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2. Transformieren Sie die Anfangsgeschwindigkeiten in das Schwerpunktsystem, indem Sie v_S von den Anfangsgeschwindigkeiten abziehen (Abbildung 7.39):

Übergang zum Schwerpunktsystem, indem v_S abgezogen wird

$$v_S = 0$$



Abbildung 7.39 Darstellung der Bewegung der zwei Blöcke im Schwerpunktsystem.

$$\begin{aligned} v_{1,A}^{(S)} &= v_{1,A} - v_S \\ &= 6,0 \text{ m/s} - 5,0 \text{ m/s} = 1,0 \text{ m/s} \\ v_{2,A}^{(S)} &= v_{2,A} - v_S \\ &= 3,0 \text{ m/s} - 5,0 \text{ m/s} = -2,0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3. Beim elastischen Stoß kehren sich im Schwerpunktsystem die Geschwindigkeiten der beiden Blöcke um (Abbildung 7.40):

Lösung der Stoßaufgabe

$$v_S = 0$$



Abbildung 7.40 Darstellung der Bewegung der beiden Blöcke im Schwerpunktsystem nach dem Stoß.

$$v_{1,E}^{(S)} = -v_{1,A}^{(S)} = -1,0 \text{ m/s}$$

$$v_{2,E}^{(S)} = -v_{2,A}^{(S)} = +2,0 \text{ m/s}$$

4. Um die Endgeschwindigkeiten im ursprünglichen Bezugssystem zu finden, muss man v_S zu den Geschwindigkeiten der Blöcke addieren (Abbildung 7.41):

Übergang zum Ursprungssystem, indem v_S addiert wird

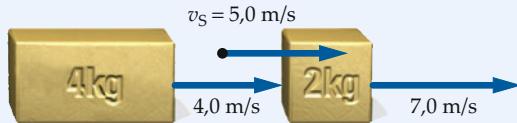


Abbildung 7.41 Darstellung der Bewegung der beiden Blöcke im Laborsystem nach dem Stoß.

$$v_{1,E} = v_{1,E}^{(S)} + v_S \\ = -1,0 \text{ m/s} + 5,0 \text{ m/s} = \boxed{4,0 \text{ m/s}}$$

$$v_{2,E} = v_{2,E}^{(S)} + v_S \\ = 2,0 \text{ m/s} + 5,0 \text{ m/s} = \boxed{7,0 \text{ m/s}}$$

Kommentar: Wie zu erwarten war, erhalten wir das gleiche Endergebnis wie in Beispiel 6.13.

Übung 7.6: Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls des Systems im Schwerpunktsystem sowohl vor als auch nach dem Stoß null ist. ▀



Abbildung 7.42 Betrachten wir nur den unteren Teil der Sanduhr als unser physikalisches System, so liegt hier ein Beispiel für ein System mit kontinuierlich steigender Masse vor. (© Uwe Steinbrich/pixelio.)

solchen Systems ist eine Rakete. In diesem Fall definieren wir das System als die eigentliche Rakete plus dem darin enthaltenen, unverbrannten Treibstoff. Da der Treibstoff verbraucht und nach und nach als „Düsenträhl“ ausgestoßen wird, nimmt die Masse des Systems ab. Ein anderes Beispiel ist der Sand, der in den unteren Teil einer Sanduhr fällt (Abbildung 7.42). Wenn wir als System das untere Glas der Sanduhr ansehen, dann nimmt die Masse des Systems kontinuierlich zu, während sich der Sand im unteren Glas sammelt.

Ein weiteres Beispiel für ein System mit kontinuierlich steigender Masse findet man in der Nähe des Planeten Jupiter: Auf dem Jupitertmond Io gibt es einen großen Vulkan. Wenn er ausbricht, stößt er Material mit einer Geschwindigkeit aus, die über der Fluchtgeschwindigkeit von Io liegt. So wird ein Materiestrom ins All ausgestoßen, der auf einen vorbeifliegenden Planetoiden treffen und auf dessen Oberfläche haften bleiben kann. Wir betrachten nun den Einfluss dieses Materials auf die Bewegung des Planetoiden. Dazu müssen wir eine Gleichung entwickeln, mit der wir das zweite Newton'sche Axiom für Systeme mit kontinuierlich veränderlicher Masse ausdrücken können.

Wir betrachten einen kontinuierlichen Materiestrom, der mit der Geschwindigkeit $v_{\Delta m}$ auf einen Körper der Masse m trifft; der Körper selbst soll sich mit der Geschwindigkeit v bewegen (Abbildung 7.43). Die eintreffenden Teilchen bleiben auf dem Körper haften und erhöhen dessen Masse in der Zeit Δt um Δm . Gleichzeitig ändert sich während der Zeit Δt die Geschwindigkeit v des Körpers um Δv , wie in der Abbildung zu sehen ist. Wir definieren das System zum Zeitpunkt t als den Körper (zuzüglich aller Materie, die vor dem Zeitpunkt t aufgetroffen ist) plus aller Materie, die während den Zeiten t und $t+\Delta t$ auftreffen wird. Mit dem Zusammenhang von Kraftstoß und Impulsänderung ergibt sich für das System (wir lassen zur Vereinfachung

7.6 Systeme mit veränderlicher Masse und Strahlanztrieb

Ein wichtiger und manchmal sehr anspruchsvoller Schritt beim Lösen eines physikalischen Problems ist es, das zu untersuchende System genau festzulegen. In diesem Abschnitt werden wir uns mit Situationen befassen, in denen sich die Masse des untersuchten Systems kontinuierlich ändert. Ein Beispiel eines

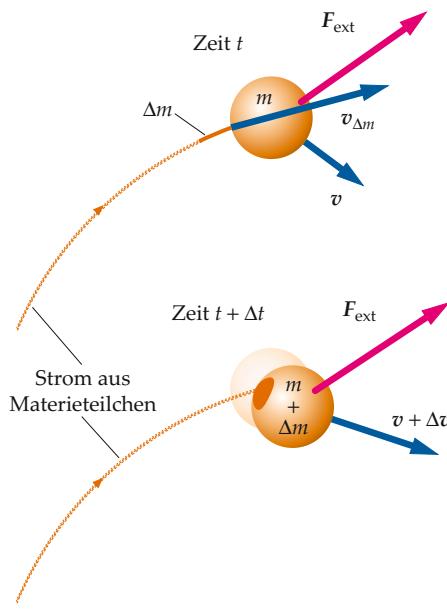


Abbildung 7.43 Teilchen bewegen sich in einem kontinuierlichen Strom mit der Geschwindigkeit $v_{\Delta m}$; sie unterliegen einem vollständig inelastischen Stoß mit einem Körper der Masse m und der Geschwindigkeit v . Zusätzlich wirkt eine äußere Kraft F_{ext} auf den Körper. Die Abbildung zeigt das System zum Zeitpunkt t (oben) und zu einem späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$.

den Index S der Geschwindigkeit v weg)

$$\begin{aligned} F_{\text{ext}} \Delta t &= \Delta p = p_E - p_A \\ &= ((m + \Delta m)(v + \Delta v)) - [mv + \Delta m v_{\Delta m}] . \end{aligned}$$

Dabei gibt der erste Term den Impuls zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ und der zweite Term den Impuls zum Zeitpunkt t an. Umstellen ergibt

$$F_{\text{ext}} \Delta t = m \Delta v + \Delta m (v - v_{\Delta m}) + \Delta m \Delta v . \quad (7.26)$$

Teilt man Gleichung 7.26 durch Δt , so ergibt sich

$$F_{\text{ext}} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} (v - v_{\Delta m}) + \frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v .$$

Wenn wir den Grenzwert für $\Delta t \rightarrow 0$ bilden (woraus dann auch $\Delta m \rightarrow 0$ und $\Delta v \rightarrow 0$ folgt), erhalten wir

$$F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt} (v - v_{\Delta m}) + \frac{dm}{dt} (0) .$$

Eine neuerliche Umordnung ergibt

$$F_{\text{ext}} + \frac{dm}{dt} v_{\text{rel}} = m \frac{dv}{dt} . \quad (7.27)$$

ZWEITES NEWTON'SCHES AXIOM FÜR KONTINUIERLICH VERÄNDERLICHE MASSEN

7.6 Systeme mit veränderlicher Masse und Strahlantrieb

Hierbei gibt die Relativgeschwindigkeit $v_{\text{rel}} = v_{\Delta m} - v$ die Geschwindigkeit von dm bezüglich m an. Beachten Sie, dass Gleichung 7.27 bis auf den Term $(dm/dt)v_{\text{rel}}$ mit dem zweiten Newton'schen Axiom für konstante Massen übereinstimmt. Wie man ein System mit kontinuierlich veränderlicher Masse behandelt, zeigt Beispiel 7.13.

Beispiel 7.13: Ein fallendes Seil

Ein gleichförmiges Seil der Masse m_S und der Länge l_0 wird so gehalten, dass sein unteres Ende gerade die Waagschale (Masse m_W) berührt. Dann lässt man das Seil los, und es beginnt zu fallen. Berechnen Sie die Kraft, die die Waage auf das Seil ausübt, wenn der Mittelpunkt des Seils gerade auf der Waagschale auftrifft.

Problembeschreibung: Wir wählen als das zu betrachtende System die Waagschale und den Teil des Seils, der zum Zeitpunkt t auf der Waagschale liegt. Wenden Sie Gleichung 7.27 auf dieses System an. Auf das System wirken zwei äußere Kräfte, nämlich die Gravitationskraft und die Normalkraft, die von der Waagschale ausgeübt wird. Die Geschwindigkeiten, mit der die verschiedenen Punkte des Seils auf der Waagschale aufschlagen, hängen von deren Anfangshöhe über der Waage ab. Die durch die Waagschale ausgeübte Normalkraft muss sowohl den Impuls des auftreffenden Seils ändern als auch die Gewichtskraft von Waagschale und dem bereits auf der Waagschale liegenden Teil des Seils ausgleichen.

Lösung: 1. Machen Sie sich das Problem mithilfe einer Zeichnung klar (Abbildung 7.44). Zeichnen Sie die Situation am Anfang und zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt. Legen Sie eine Koordinatenachse fest.

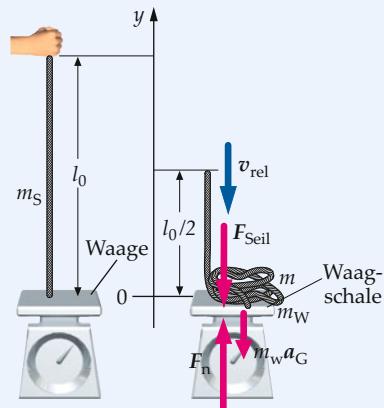


Abbildung 7.44 Ein sehr flexibles Seil der Länge l_0 und der Masse m_S wird aus dem Ruhezustand fallen gelassen und fällt auf eine Waagschale.

2. Schreiben Sie Gleichung 7.27 in Komponentenform. m soll die Masse des Systems sein (von der Waagschale

plus dem Teil des Seils, der auf der Waagschale liegt). Die Geschwindigkeit des Systems bleibt null, daher ist auch $\frac{dv_y}{dt} = 0$:

$$F_{\text{ext},y} + \frac{dm}{dt} v_{\text{rel},y} = m \frac{dv_y}{dt}$$

$$F_n - mg + \frac{dm}{dt} v_{\text{rel},y} = 0$$

3. Mit dm wird die Masse des kurzen Seilstücks der Länge dl bezeichnet, das während der Zeit dt auf die Waagschale fällt. Weil es sich um ein gleichförmiges Seil handelt, gilt zwischen dm und dl der Zusammenhang:

$$\frac{dm}{dl} = \frac{m_s}{l_0}$$

4. Lösen Sie nach dm/dt auf, indem Sie beide Seiten von Schritt 3 mit dl/dt multiplizieren:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_s}{l_0} \frac{dl}{dt}$$

5. Das Seil trifft mit der Geschwindigkeit dl/dt auf die Waagschale auf, daher ist $v_{\text{rel},y} = -dl/dt$. ($v_{\text{rel},y}$ ist negativ, weil die y -Richtung nach oben zeigt und das Seil nach unten fällt.) Setzen Sie dies in Schritt 4 ein:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_s}{l_0} v_{\text{rel},y}$$

6. Setzen Sie das Ergebnis von Schritt 5 in Schritt 2 ein und lösen Sie nach der Normalkraft F_n auf:

$$F_n = mg + \frac{m_s}{l_0} v_{\text{rel},y}^2$$

7. Bis er die Waagschale berührt, fällt jeder Punkt des Seils mit der konstanten Beschleunigung g . Mit $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y \Delta y$ (Gleichung 2.30) und $\Delta y = -l_0/2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{\text{rel},y}^2 &= v_{\text{rel},y,0}^2 + 2a_y \Delta y \\ &= 0 + 2(-g)(-l_0/2) = gl_0 \end{aligned}$$

8. Nun setzen Sie das Ergebnis von Schritt 7 in Schritt 6 ein (mit $m = mw + \frac{3}{2}m_s$):

$$F_n = \left(mw + \frac{m_s}{2}\right) g + \frac{m_s}{l_0} gl_0 = mw g + \frac{3}{2}m_s g$$

9. Die Normalkraft der Wage auf die Waagschale ist gleich dem Gewicht der Waagschale plus der Gewichtskraft des Seils, das auf der Waagschale liegt:

$$F_n = mw g + F_{\text{Seil}}$$

und damit

$$F_{\text{Seil}} = F_n - mw g$$

10. Ziehen Sie nun $mw g$ von beiden Seiten des Ergebnisses in Schritt 8 ab und setzen Sie in das Ergebnis von Schritt 9 ein:

$$F_{\text{Seil}} = \boxed{\frac{3}{2}m_s g}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn der Mittelpunkt des Seils auf der Waagschale aufruft, ist die Kraft auf das in dem Moment schon auf der Schale liegende Seil größer als $\frac{1}{2}m_s g$ (d.h. das Gewicht des in diesem Moment auf der Waagschale liegenden Seils). Wir erwarten, dass die Kraft auf das Seil, das auf der Waagschale liegt, größer als $\frac{1}{2}m_s g$ ist, weil die Waagschale sowohl das Gewicht des deraufliegenden Seils tragen als auch den Impuls des auftreffenden Seils stoppen muss.

Übung 7.7: Berechnen Sie die Kraft, die von der Waagschale auf das Seil ausgeübt wird, a) unmittelbar bevor das obere Ende des Seils die Waagschale erreicht und b) für den Moment unmittelbar danach. ◀ ■

Der Strahlanztrieb

Ein beeindruckendes Beispiel für die Wirkung der Impulserhaltung ist der **Raketen-** oder **Strahlanztrieb**. Wir werden nun die sogenannte Raketengleichung als Spezialfall der Gleichung 7.27 herleiten. Die Masse einer Rakete ändert sich kontinuierlich, während sie den Treibstoff verbrennt und das Abgas ausstößt. Wir betrachten eine Rakete, die sich mit der Geschwindigkeit v relativ zur Erde senkrecht nach oben bewegt (Abbildung 7.45).

Wir nehmen an, dass der Treibstoff mit konstanter Rate R verbrannt wird (die sogenannte **Brennrate**); dann ist die Masse der Rakete zur Zeit t

$$m = m_0 - R t, \quad (7.28)$$

wobei m_0 die Anfangsmasse der Rakete ist. Sie stößt einen Gasstrahl mit der Geschwindigkeit v_{rel} relativ zur Rakete aus, und mit der gleichen Rate, mit der Treibstoff verbrannt wird, nimmt auch die Masse m ab. Als unser System bezeichnen wir die Rakete und den noch enthaltenen unverbrannten Treibstoff. Wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen, ist die einzige äußere Kraft auf die Rakete die Gravitationskraft. Mit $F_{\text{ext}} = -mg\hat{y}$ und $dm/dt = -R$ wird Gleichung 7.27 zur **Raketengleichung**:

$$(-mg)\hat{y} - R v_{\text{rel}} = m \frac{dv}{dt}. \quad (7.29)$$

RAKETENGLIEICHUNG



Abbildung 7.45 Die Schubkraft, die eine Rakete abheben lässt, ergibt sich aus der Brennrate und der Geschwindigkeit, mit der die Verbrennungsgase aus dem Motor ausgestoßen werden. (© NASA/Superstock.)

Die Größe $-R v_{\text{rel}}$ ist die Kraft, die das ausgestoßene Gas auf die Rakete ausübt. Man nennt sie **Schubkraft** oder kürzer **Schub** F_{Sch} :

$$F_{\text{Sch}} = -R v_{\text{rel}} = - \left| \frac{dm}{dt} \right| v_{\text{rel}}. \quad (7.30)$$

DEFINITION DES SCHUBS EINER RAKETE

Die Rakete bewegt sich geradewegs nach oben, daher wählen wir zweckmäßigerweise die positive y -Richtung aufwärts und können dann die Raketengleichung 7.29 in Komponenten angeben:

$$-m g - R v_{\text{rel},y} = m \frac{dv_y}{dt}.$$

Da v_{rel} nach unten gerichtet ist, gilt $v_{\text{rel},y} = -v_{\text{rel}}$. Einsetzen ergibt

$$-m g + R v_{\text{rel}} = m \frac{dv_y}{dt}. \quad (7.31)$$

7.6 Systeme mit veränderlicher Masse und Strahlantrieb

Dies kann man nach dv_y/dt (der Beschleunigung) auflösen, und man erhält

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{R v_{\text{rel}}}{m} - g.$$

Dabei ist $R v_{\text{rel}}$ der Beitrag des Schubs zur Beschleunigung, $-g$ ist der Beitrag der Gravitationskraft zur Beschleunigung. Setzt man nun für m den Ausdruck aus Gleichung 7.28 ein, so erhält man

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{R v_{\text{rel}}}{m} - g = \frac{R v_{\text{rel}}}{m_0 - R t} - g. \quad (7.32)$$

Gleichung 7.32 wird gelöst, indem man beide Seiten bezüglich der Zeit integriert. Für eine Rakete, die zur Zeit $t = 0$ aus dem Stillstand startet, ergibt sich dabei (konstante Gravitation vorausgesetzt)

$$\begin{aligned} v_y &= \int_0^{t_E} \left(\frac{R v_{\text{rel}}}{m_0 - R t} - g \right) dt = v_{\text{rel}} \int_0^{t_E} \frac{dt}{b - t} - \int_0^{t_E} g dt \\ &= -v_{\text{rel}} \ln \frac{b - t_E}{b} - g t_E \end{aligned}$$

mit $b = m_0/R$. Wir ordnen die Terme um und setzen t für t_E und m_0/R für b ein; dann erhalten wir

$$v_y = v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R t} \right) - g t. \quad (7.33)$$

In Worten: Die Geschwindigkeit einer Rakete im konstanten Gravitationsfeld lässt sich beschreiben als Funktion der Ausstoßgeschwindigkeit, der Zeit und des Verhältnisses von Anfangs- zu Endmasse. Die Brenndauer ist zu Ende, wenn der Treibstoff verbrannt ist; bei $t = t_B$ spricht man dann vom **Brennschluss**. Die Masse einer Rakete ohne Treibstoff heißt **Nutzlast**, wobei dieser Begriff hier entgegen der alltäglichen Verwendung beispielsweise im Zusammenhang mit Autos nicht die „Zuladung“ bedeutet, sondern die Gesamtmasse ohne Treibstoff. (Die „Zuladung“ macht nur einen Bruchteil der Nutzlast aus.) Die Nutzlast ist in der Regel recht klein. Beträgt die Nutzlast 10 % der Gesamtmasse (bestehen also 90 % der Startmasse aus Treibstoff), dann ist das Massenverhältnis beim Brennschluss $m_0/(m_0 - R t_B) = 10$. Eine Rakete, die ohne weitere äußere Kräfte aus dem Stillstand startet, erreicht unter diesen Voraussetzungen eine Endgeschwindigkeit von

$$v_E = v_{\text{rel}} \ln 10 = 2,3 v_{\text{rel}}.$$

Der Logarithmus in diesen Gleichungen begrenzt die maximal erreichbare Endgeschwindigkeit: Selbst wenn man die Menge an Treibstoff so erhöht, dass die Nutzlast nur noch 1 % der Startmasse beträgt, beträgt die Endgeschwindigkeit (bei Abwesenheit äußerer Kräfte) nur $4,6 v_{\text{rel}}$ und ist damit gerade doppelt so hoch wie bei einer Nutzlast von 10 %. Aus diesem Grund verwendet man fast ausschließlich mehrstufige Raketen; bei ihnen

werden die ausgebrannten Teile abgeworfen, um das Massenverhältnis zu verbessern.

Zum Abschluss dieses Kapitels wendet Beispiel 7.14 die Raketeleichung auf die Saturn-Rakete der Apollo-Mission an.

Beispiel 7.14: Eine Rakete hebt ab

Die Saturn-V-Rakete, die beim Apollo-Mondprogramm verwendet wurde, hatte eine Anfangsmasse m_0 von $2,85 \cdot 10^6$ kg (davon 73 % Treibstoff), eine Brennrate R von $13,84 \cdot 10^3$ kg/s und einen Schub F_{Sch} von $34 \cdot 10^6$ N. Berechnen Sie a) die Ausstoßgeschwindigkeit, b) die Brenndauer t_B bis zum Brennschluss, c) die Beschleunigung beim Abheben und d) die Beschleunigung beim Brennschluss sowie e) die Endgeschwindigkeit der Rakete.

Problembeschreibung: a) Die Ausstoßgeschwindigkeit lässt sich aus dem Schub und der Brennrate berechnen. b) Die Nutzlast der Rakete beträgt 27 %. Um die Brenndauer zu berechnen, müssen Sie die Gesamtmasse des verbrannten Treibstoffs berechnen, d.h. die Startmasse minus die Nutzlast. c) und d) Die Beschleunigung lässt sich mit Gleichung 7.32 berechnen. e) Die Endgeschwindigkeit berechnet man mit Gleichung 7.33.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie die Ausstoßgeschwindigkeit v_{rel} aus dem gegebenen Schub und der Brennrate:

$$F_{\text{Sch}} = \left| \frac{dm_0}{dt} \right| v_{\text{rel}}$$

und damit

$$v_{\text{rel}} = \frac{F_{\text{Sch}}}{\left| \frac{dm_0}{dt} \right|} = \frac{34,0 \cdot 10^6 \text{ N}}{13,84 \cdot 10^3 \text{ kg/s}} = [2,46 \text{ km/s}]$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie zunächst die Endmasse m_E der Rakete beim Brennschluss:

$$m_E = (0,27) m_0 = 7,70 \cdot 10^5 \text{ kg}$$

2. Die Masse m_T des verbrannten Treibstoffs ist gleich der Brennrate R mal der Brennzeit t_B :

$$m_T = R t_B$$

und damit

$$t_B = \frac{m_T}{R} = \frac{m_0 - m_E}{R} = [150 \text{ s}]$$

Teilaufgabe c

Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 7.32 die Beschleunigung dv_y / dt für $t = 0$: Anfangs ist

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{v_{\text{rel}}}{m_0} \left| \frac{dm}{dt} \right| - g \\ &= \frac{2,46 \text{ km/s}}{2,85 \cdot 10^6 \text{ kg}} (13,84 \cdot 10^3 \text{ kg/s}) - 9,81 \text{ m/s}^2 \\ &= [2,14 \text{ m/s}^2] \end{aligned}$$

Teilaufgabe d

Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 7.32 die Beschleunigung dv_y / dt für $t = t_B$: Bei Brennschluss ist

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{v_{\text{rel}}}{m_0} \left| \frac{dm}{dt} \right| - g \\ &= \frac{2,46 \text{ km/s}}{7,70 \cdot 10^5 \text{ kg}} (13,84 \cdot 10^3 \text{ kg/s}) - 9,81 \text{ m/s}^2 \\ &= [34,3 \text{ m/s}^2] \end{aligned}$$

Teilaufgabe e

Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 7.33 die Endgeschwindigkeit bei Brennschluss ($t = t_B$):

$$v_{y,E} = v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - R t} \right) - g t = [1,75 \text{ km/s}]$$

Plausibilitätsprüfung: Bei Brennschluss ist die beschleunigte Masse 73 % geringer als die Masse, die beim Abheben beschleunigt wurde. Daher können wir erwarten, dass die Beschleunigung bei Brennschluss wesentlich größer ist als die Anfangsbeschleunigung. Dies wird in den Ergebnissen der Teilaufgaben c und d auch gezeigt.

Weitergedacht: 1) Die anfängliche Beschleunigung ist sehr gering – nur $2,14 \text{ m/s}^2$ oder $0,21 \text{ g}$. Bei Brennschluss hat die Beschleunigung der Rakete bis auf $3,5 \text{ g}$ zugenommen. Unmittelbar nach dem Brennschluss hat die Rakete keine eigene Beschleunigung mehr, es wirkt nur noch die Erdbeschleunigung $-g$. Die Geschwindigkeit der Rakete bei Brennschluss zweieinhalb Minuten nach dem Start beträgt ungefähr $1,75 \text{ km/s} = 6300 \text{ km/h}$. 2) Bei den Berechnungen in den Teilaufgaben d und e haben wir vorausgesetzt, dass die Rakete sich vertikal nach oben bewegt und dass g sich mit der Höhe nicht verändert. In der Praxis hebt eine Rakete zwar anfangs tatsächlich vertikal ab, bewegt sich dann aber immer mehr in östliche Richtung (vgl. Kapitel 4.4). Außerdem nimmt in größerer Höhe die Fallbeschleunigung ab. ■

ⓘ Im Kontext: PDE-Triebwerke: Schneller (und lauter)

Raketenantriebe, die mit Flüssigtreibstoff arbeiten, benötigen teure, empfindliche Pumpen, um den Brennstoff unter sehr hohem Druck in der Brennkammer des Schubrohrs zu zünden. Die meisten Strahltriebe sind Gasturbinen mit vielen beweglichen Teilen, die sehr engen Toleranzen genügen müssen und einen entsprechenden Wartungsaufwand verursachen. Raumfahrt- und Luftfahrtgenieure wünschen sich Antriebe mit weniger bewegten Teilen, die ihren Brennstoff effizienter ausnützen und sich in einem weiten Geschwindigkeitsbereich einsetzen lassen.

Diese Anforderungen können PDE-Triebwerke (*pulse detonation engines*) vielleicht erfüllen, die den Schub durch Detonation erzeugen und nicht, wie die Verpuffungs- oder Pulssstrahltriebwerke, durch Deflagration.

In beiden Fällen wird durch die schlagartige Verbrennung des Treibstoff-Luft-Gemischs Schub erzeugt. *Deflagrationen* sind Verpuffungen, bei denen sich im Treibstoff-Luft-Gemisch die Luft auf Zündtemperatur erhitzt und die Flammenfront sich im Gemisch langsamer als der Schall ausbreitet. Beispiele für Deflagrationen treten bei Feuerwerk, in richtig eingestellten Verbrennungsmotoren oder bei einem Holzkohlegrill mit zu viel flüssigem Anzünder auf. *Detonationen* dagegen sind mit einem Explosionsknall verbunden und breiten sich schneller als der Schall aus – manchmal sogar erheblich schneller –, indem eine Stoßwelle die Luft komprimiert und das Medium zündet. Sprengstoffe detonieren. Sie werden beispielsweise im Bergbau oder bei Abbruchunternehmen eingesetzt; auch bei „Fehlzündungen“ in einem nicht richtig eingestellten Verbrennungsmotor handelt es sich um Detonationen.



Experimentelles PDE-Triebwerk in einem sogenannten Entenflugzeug, dem von Burt Rutan entworfenen Modell Vari-Eze. (© Tim Anderson.)

Das PDE-Triebwerk besteht aus einem einseitig geschlossenen Rohr. Luft und Treibstoff werden in die Brennkammer am geschlossenen Ende geleitet und durch einen Funken gezündet. Dadurch beginnt eine Deflagration. Während sich die Deflagration über die komplizierte innere Oberfläche¹ des Schubrohrs ausbreitet, wird das Treibstoff-Luft-Gemisch an der Flammenfront rasch komprimiert und setzt eine Detonation in Gang. Im Zuge der Explosion breitet sich die Stoßfront

erheblich schneller als der Schall aus. In verschiedenen Laboratorien hat man Detonationsfronten mit bis zu fünffacher Schallgeschwindigkeit (Mach 5) gemessen.² Die Abgase verlassen das offene Ende des Schubrohrs mit sehr hoher Geschwindigkeit. Dadurch haben sie einen höheren Schubimpuls als bei einer Deflagration derselben Treibstoffmenge. Der Kraftstoß bei einer Detonation kann doppelt so hoch sein wie bei einer Deflagration.³

Die einzigen bewegten Teile in einem PDE-Triebwerk sind die Ventile, durch die die Treibstoff-Luft-Mischung eingelassen wird. Für die Zündung kann man beispielsweise eine Zündkerze wie in einem Automotor verwenden, und der Rest des Triebwerks besteht nur aus dem Schubrohr. Damit sieht das Triebwerk auf den ersten Blick ganz einfach aus. Aber Verbrennungsprozesse sind schwierig zu kontrollieren, und die Verbrennung in einem PDE-Triebwerk läuft dazu extrem schnell ab. Um ein Flugzeug oder eine Rakete anzutreiben, müssten im Triebwerk viele Detonationen pro Sekunde ablaufen, so wie ein Automotor auch viele Verbrennungstakte pro Sekunde benötigt, um den Wagen anzutreiben. In Belastungstests wurden für mehrere Minuten oder Stunden etwa 80 Detonationen pro Sekunde erreicht, ideal wären dagegen mehrere Hundert pro Sekunde⁴ – und das über einen langen Zeitraum. Diese hohe Zahl von Detonationen pro Sekunde steuert man bei PDE-Triebwerken ohne Ventile durch eine Art Einlass-Jalousie und die Geometrie des Rohrs, die für schnell pulsierende Zündfronten sorgen.

Doch eine Detonation ist ein gewaltiger Explosionsknall; sie ist extrem laut und lässt das Triebwerk noch mehr vibrieren als die bekannten Strahl- und Raketentriebwerke.⁵ Diese zusätzlichen Schwingungen können gefährlich für Raketen und Flugzeuge sein. Durch den erzeugten Lärm sind die PDE-Triebwerke nicht für Fahrzeuge mit Menschen an Bord geeignet. Schließlich wurden bislang immer schwere Schubrohre eingesetzt, in deren Brennkammer die Detonationen ablaufen. Für Flugzwecke müssen die Rohre jedoch leichtgewichtig sein und dabei doch stabil genug, um den Detonationen standzuhalten.

Bislang sind keine Flugzeuge mit PDEs geflogen, doch die Idee eines preiswerten Triebwerks für Flugzeuge und Raketen, das Schub über einen weiten Bereich produziert und dabei den Treibstoff effizienter ausnützt als vorhandene Triebwerke, ist reizvoll genug für weitere Forschungen.

1. Paxson, D. E., Rosenthal, B. N., Sgondea, A., Wilson, J., „Parametric Investigation of Thrust Augmentation by Ejectors on a Pulsed Detonation Tube“, Vortrag auf der 41st Joint Propulsion Conference, 2005, Tucson, AZ.
2. Borisov, A. A., Frolov, S. M., Netzer, D. W., Roy, G. D., „Pulse Detonation Propulsion: Challenges, Current Status, and Future Perspective.“ *Progress in Energy and Combustion Science* **30** (2004) 545–672.
3. „Detonation Initiation and Impulse Measurement.“ Explosion Dynamics Laboratory: Pulse Detonation Engines, <http://www.galcit.caltech.edu/EDL/projects/pde/pde.html> (Stand: März 2009).
4. Kandebo, Stanley W., „Taking the Pulse.“ *Aviation Week and Space Technology*, 160:10 (8. März 2004), 32–33.
5. Borisov et al., a. a. O.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Massenmittelpunkt	
Massenmittelpunkt für ein Teilchensystem	Der Massenmittelpunkt eines Teilchensystems ist als der Punkt mit den folgenden Koordinaten definiert: $m x_S = \sum_i m_i x_i,$ (7.3) $m y_S = \sum_i m_i y_i,$ (7.4) $m z_S = \sum_i m_i z_i.$ (7.5)
Massenmittelpunkt in ausgedehnten Körpern	Wenn die Masse kontinuierlich verteilt ist, ist der Massenmittelpunkt durch $m r_S = \int r dm$ (7.7) gegeben.
Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung für den Massenmittelpunkt eines Teilchensystems	$m r_S = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots$ (7.6) $m v_S = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots$ (7.12) $m a_S = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots$ (7.13)
Zweites Newton'sches Axiom für Systeme	$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = m \mathbf{a}_S$ (7.15)
2. Gesamtimpuls eines Systems	$\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = m \mathbf{v}_S$ (7.16)
Impulserhaltungssatz	Wenn die resultierende Kraft auf ein System null ist, bleibt der Gesamtimpuls des Systems erhalten.
3. Massenmittelpunktsarbeit und kinetische Energie der Translation	$\int_1^2 \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{s}_S = \Delta E_{\text{kin,trans}}$ (7.20)
Massenmittelpunktsarbeit	Dieser Zusammenhang kann bei der Lösung von Aufgabenstellungen für Systeme herangezogen werden, die nicht als Teilchen modelliert werden können.
Kinetische Energie der Translation	$W_S = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{s}_S$
	$E_{\text{kin,trans}} = \frac{1}{2} m v_S^2$ mit $m = \sum_i m_i$
4. Energie eines Systems	
Kinetische Energie	Die kinetische Energie, die mit der Bewegung der Teilchen eines Systems bezüglich des Massenmittelpunkts verbunden ist, ist $E_{\text{kin,rel}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i^{(S)})^2$, wobei $v_i^{(S)}$ die Geschwindigkeit des i -ten Teilchens relativ zum Massenmittelpunkt ist:
	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + E_{\text{kin,rel}}.$ (7.22)
Potenzielle Energie	$E_{\text{pot,G}} = g \sum_i m_i h_i = m g h_S.$ (7.24)
5. Stöße im Schwerpunktsystem	
Definition	Das Bezugssystem, das sich mit dem Massenmittelpunkt bewegt, wird Massenmittelpunktsystem oder Schwerpunktsystem genannt. Die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts und der Gesamtimpuls sind darin null.
Transformationen	Die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen im ursprünglichen Bezugssystem v_1 und v_2 transformieren sich ins Schwerpunktsystem als $v_1^{(S)} = v_1 - v_S$ (7.25a) und $v_2^{(S)} = v_2 - v_S.$ (7.25b)

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen	
6. Kontinuierlich veränderliche Masse		
Zweites Newton'sches Axiom	$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{dm}{dt} v_{\text{rel}} = m \frac{dv}{dt}$	(7.27)
Raketengleichung	$-mg\hat{\mathbf{y}} - Rv_{\text{rel}} = m \frac{dv}{dt}$	(7.29)
	Dabei ist $R = \frac{dm}{dt} $ die Brennrate.	
Schubkraft einer Rakete	$\mathbf{F}_{\text{Sch}} = -Rv_{\text{rel}} = -\left \frac{dm}{dt} \right v_{\text{rel}}$	(7.30)

Antworten auf die Verständnisfragen

- 7.1 Nein. Selbst wenn die Lagerreibung beseitigt wird, hat die Rolle immer noch eine Masse. Um die Rotationsgeschwindigkeit ihrer Welle zu ändern, muss eine unterschiedliche Zugkraft vorhanden sein. Rollen mit nicht vernachlässigbarer Masse werden in Kapitel 8 betrachtet.
- 7.2 Da die auf den Zylinder wirkende Gesamtkraft die nach rechts auf das Papier ausgeübte Reibungskraft ist, würde der Zylinder nach rechts beschleunigt. Es könnte so aussehen, als ob sich der Zylinder nach links bewegt, da er in Bezug auf das Papier nach links rollt. In Bezug auf den Tisch, der ein Inertialsystem ist, bewegt er sich allerdings nach rechts. Wenn Sie die ursprüngliche Lage des Zylinders am Tisch markieren, werden Sie beobachten, dass sich der Massenmittelpunkt während der Zeit, in der der Zylinder das gezogene Papier berührt, nach rechts bewegt.

Lösungen der Übungen

- 7.1 (a) $a_t = 0,66 \text{ g}$, (b) $a_t = 0,60 \text{ g}$
 7.2 $x_S = 2,0 \text{ cm}$
 7.3 $2R = 1,1 \cdot 10^2 \text{ m}$
 7.4 $F_x = m_1 g \sin \theta \cos \theta$
 7.5 a) $v_S = 0,50 \text{ m/s}$, $v_A = +0,50 \text{ m/s}$, $v_B = -0,50 \text{ m/s}$,
 b) $E_{\text{kin,A,rel}} = E_{\text{kin,B,rel}} = 0,125 \text{ J}$,
 c) $E_{\text{kin,rel}} = 0,25 \text{ J}$,
 d) $E_{\text{kin,rel}} = 0$
 7.6 Vorher:
 $p_A^{(S)} = (4,0 \text{ kg})(1,0 \text{ m/s}) + (2,0 \text{ kg})(-2,0 \text{ m/s}) = 0,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 Nachher:
 $p_E^{(S)} = (4,0 \text{ kg})(-1,0 \text{ m/s}) + (2,0 \text{ kg})(2,0 \text{ m/s}) = 0,0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
 7.7 a) $3 m_S \text{ g}$, b) $m_S \text{ g}$

Aufgaben

Bei allen Aufgaben ist die Fallbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

7.1 •• Ein 2,5 kg schwerer Körper hängt ruhig an einem Seil, das an der Decke befestigt ist. a) Zeichnen Sie ein KräfteDiagramm des Körpers, benennen Sie die Reaktionskraft zu jeder eingezeichneten Kraft und sagen Sie, auf welchen Körper diese jeweils wirkt. b) Zeichnen Sie ein KräfteDiagramm des Seils, benennen Sie die Reaktionskraft zu jeder eingezeichneten Kraft und sagen Sie, auf welchen Körper diese jeweils wirkt. Die Masse des Seils ist hier nicht zu vernachlässigen.

7.2 •• Nennen Sie jeweils ein Beispiel für folgende Konfigurationen: a) einen dreidimensionalen Körper, in dessen Massenmittelpunkt sich keine Masse befindet, b) einen Festkörper, dessen Massenmittelpunkt außerhalb des Körpers liegt, c) eine Vollkugel, deren Massenmittelpunkt nicht in ihrer geometrischen Mitte liegt, d) einen langen Holzstock, dessen Massenmittelpunkt nicht in der Mitte liegt.

7.3 •• Ein geworfener Bumerang „fliegt“ eine Weile gleichförmig geradlinig horizontal, wobei er sich im Flug rasch dreht. Zeichnen Sie mehrere Skizzen des Bumerangs in der Draufsicht in verschiedenen Drehstellungen auf seinem Weg parallel zur Erdoberfläche. Zeichnen Sie in jede Skizze den Ort des Massenmittelpunkts des Bumerangs ein und verbinden Sie diese Punkte, um die Trajektorie seines Massenmittelpunkts zu verfolgen. Wie wird der Massenmittelpunkt während dieses Abschnitts des Flugs beschleunigt?

7.4 •• Ein Auto wird auf ebener Straße aus dem Stand beschleunigt, ohne dass die Räder durchdrehen. Erläutern Sie anhand des Zusammenhangs zwischen Gesamtmassemittelpunktsarbeit und kinetischer Energie der Translation sowie von KräfteDiagrammen genau, welche Kraft bzw. welche Kräfte direkt für den Zuwachs an kinetischer Energie der Translation des Autos und des Fahrers verantwortlich sind. (*Hinweis:* Der Zusammenhang betrifft nur äußere Kräfte, sodass „der Motor“ nicht die richtige Antwort ist. Wählen Sie in jedem Fall das richtige „System“.)

7.5 •• Ein fleißiger Student stolpert über die Frage: „Wenn nur äußere Kräfte den Massenmittelpunkt eines Teilchensystems beschleunigen können, wie kann sich dann ein Auto bewegen? Normalerweise glauben wir, dass der Motor des Wagens die Beschleunigungskraft liefert, aber ist das auch wahr?“ Erläutern Sie, welche äußere Ursache die Kraft zur Beschleunigung des Wagens liefert, und erklären Sie, was der Motor mit dieser Ursache zu tun hat.

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

7.6 •• Ein Holzklotz und ein Revolver werden an den entgegengesetzten Enden eines langen Gleiters befestigt, der sich reibungsfrei auf einer Luftpumpe bewegen kann (Abbildung 7.46). Der Holzklotz und der Revolver sind die Strecke l voneinander entfernt. Das System ist anfangs in Ruhe. Wenn der Revolver abgefeuert wird, verlässt die Kugel den Lauf mit der Geschwindigkeit v_K , trifft auf den Holzklotz und bleibt darin stecken. Die Kugel hat die Masse m_K , das Gesamtsystem aus Holzklotz, Revolver und Gleiter die Masse m_G . a) Welche Geschwindigkeit hat der Gleiter unmittelbar nachdem die Kugel den Lauf verlassen hat? b) Welche Geschwindigkeit hat der Gleiter unmittelbar nachdem die Kugel in dem Holzklotz stecken geblieben ist? c) Wie weit bewegt sich der Gleiter in der Zeit, in der die Kugel sich zwischen dem Revolverlauf und dem Holzklotz befindet?

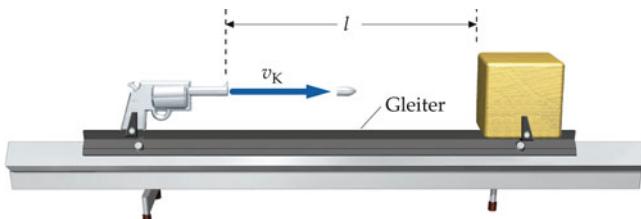


Abbildung 7.46 Zu Aufgabe 7.6.

Mehrkörperprobleme

7.7 •• Zwei Blöcke der Massen m_1 und m_2 sind durch ein masseloses Seil miteinander verbunden. Sie werden, wie in Abbildung 7.47 gezeigt, beide gleichmäßig durch die Zugkraft in einem weiteren horizontalen Seil auf einer reibungsfreien Fläche gezogen. a) Zeichnen Sie das KräfteDiagramm beider Blöcke einzeln und zeigen Sie, dass $|F_{S,1}|/|F_{S,2}| = m_1/(m_1 + m_2)$ ist. b) Ist dieses Ergebnis plausibel? Erläutern Sie Ihre Auffassung. Prüfen Sie, dass Ihre Antwort sowohl im Fall $m_2/m_1 \gg 1$ als auch im Fall $m_2/m_1 \ll 1$ sinnvoll ist, und erläutern Sie, weshalb.



Abbildung 7.47 Zu Aufgabe 7.7.

7.8 •• Ein Block der Masse $m_2 = 3,5 \text{ kg}$ liegt auf einem reibungsfreien, horizontalen Brett und ist über zwei Seile mit zwei

Blöcken der Massen $m_1 = 1,5 \text{ kg}$ und $m_3 = 2,5 \text{ kg}$ verbunden (Abbildung 7.48). Beide Rollen seien reibungsfrei und masselos. Das System wird aus der Ruhe losgelassen. Ermitteln Sie anschließend a) die Beschleunigung der beiden Blöcke und b) die Zugkraft in den beiden Seilen.

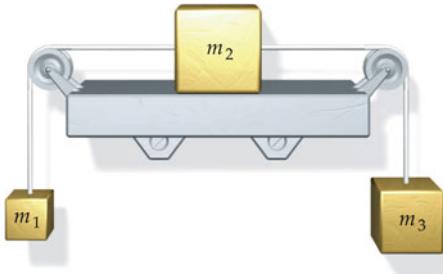


Abbildung 7.48 Zu Aufgabe 7.8.

7.9 •• Ein Block der Masse m wird durch ein homogenes Seil der Masse m_s und der Länge l_s vertikal angehoben. Das Seil wird durch eine Kraft an seinem oberen Ende nach oben gezogen, wobei das Seil und der Block zusammen mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt werden. Zeigen Sie, dass der Betrag der Zugkraft im Seil in einer Höhe x (mit $x < l_s$) über dem Block durch $(a + g)[m + (x/l_s)m_s]$ gegeben ist.

7.10 •• Zwei Körper sind, wie in Abbildung 7.49 gezeigt, über ein masseloses Seil miteinander verbunden. Die geneigte Ebene und die Rolle seien reibungsfrei. Ermitteln Sie die Beschleunigung der Körper und die Zugkraft im Seil a) allgemein für beliebige θ , m_1 und m_2 und b) für $\theta = 30^\circ$ und $m_1 = m_2 = 5,0 \text{ kg}$.



Abbildung 7.49 Zu Aufgabe 7.10.

7.11 •• Der Apparat in Abbildung 7.50 wird *Atwood'sche Fallmaschine* genannt und dient zur Ermittlung der Erdbeschleunigung g . Dazu wird die Beschleunigung der beiden durch ein Seil über einer Rolle verbundenen Gewichte gemessen. Dabei geht man von einer masselosen, reibungsfreien Rolle sowie von einem masselosen Seil aus. a) Zeichnen Sie das KräfteDiagramm jedes Blocks. b) Zeigen Sie unter Verwendung der KräfteDiagramme beider Körper und des zweiten Newton'schen Axioms,

dass sich die Beträge der Beschleunigung der Körper und der Zugkraft des Seils wie folgt berechnen:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad \text{und} \quad F_S = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

c) Prüfen Sie, dass diese Ergebnisse für $m_1 = m_2$, im Grenzwert $m_1 \gg m_2$ und im Grenzwert $m_1 \ll m_2$ sinnvolle Ergebnisse liefern, und erläutern Sie, weshalb.



Abbildung 7.50 Zu Aufgabe 7.11 bis 7.13.

7.12 •• Eine der Massen in der Atwood'schen Fallmaschine aus Abbildung 7.50 sei $1,2 \text{ kg}$. Wie groß muss die andere Masse sein, damit die Verschiebung einer der beiden Massen in der ersten Sekunde nach dem Loslassen $0,30 \text{ m}$ beträgt?

7.13 ••• Die Schwerbeschleunigung g kann dadurch bestimmt werden, dass die Zeit t gemessen wird, die es dauert, bis die Masse m_2 in der in Aufgabe 7.11 beschriebenen Atwood'schen Fallmaschine aus der Ruhe eine Strecke l fällt. a) Ermitteln Sie anhand der Ergebnisse aus Aufgabe 7.11 einen Ausdruck für g als Funktion von l, t, m_1 und m_2 . Beachten Sie, dass die Beschleunigung konstant ist. b) Zeigen Sie, dass ein kleiner Fehler in der Zeitmessung dt zu einem Fehler $dg/g = -2 dt/t$ in g führt. c) Wir nehmen an, dass die einzige wichtige Unsicherheit der experimentellen Messwerte die Fallzeit ist. Es sei $l = 3,00 \text{ m}$ und $m_1 = 1,00 \text{ kg}$. Ermitteln Sie denjenigen Wert von m_2 , bei dem g mit einer Genauigkeit von $\pm 5\%$ gemessen werden kann, wenn die Zeitmessung auf $\pm 0,1 \text{ s}$ genau ist.

7.14 ••• Abbildung 7.51 zeigt einen 20-kg -Block, der auf einem 10-kg -Block gleitet. Alle Oberflächen seien reibungsfrei und die Rolle sei masselos und ebenfalls reibungsfrei. Gesucht sind die Beschleunigungen beider Blöcke sowie die Zugkraft des Seils, das die Blöcke verbindet.

Massenmittelpunktsystem

7.15 • Drei Kugeln A, B und C mit Massen von $3,0 \text{ kg}$, $1,0 \text{ kg}$ und $1,0 \text{ kg}$ sind wie in Abbildung 7.52 gezeigt durch masselose Stäbe miteinander verbunden. Welche Koordinaten hat der Massenmittelpunkt?

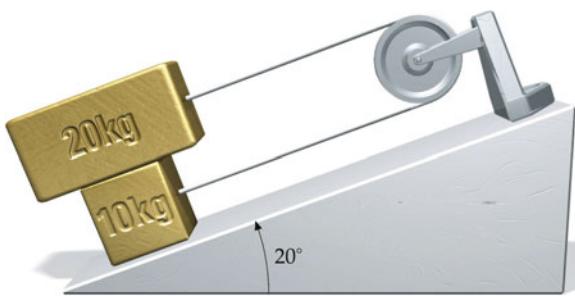


Abbildung 7.51 Zu Aufgabe 7.14.

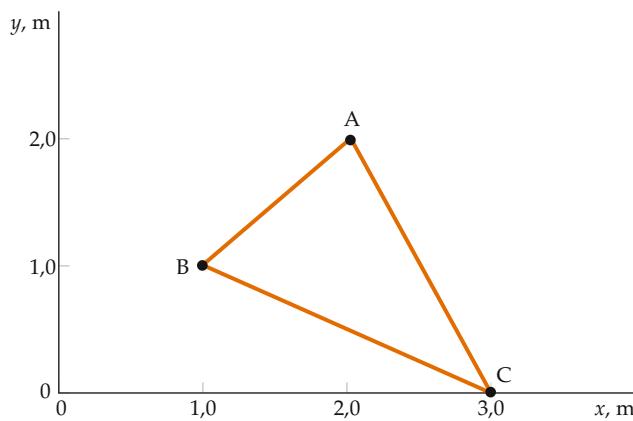


Abbildung 7.52 Zu Aufgabe 7.15.

7.16 • Bestimmen Sie mithilfe von Symmetrieverlegungen den Massenmittelpunkt einer homogenen Platte in Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a . Ein Eckpunkt des Dreiecks befindet sich auf der y -Achse, und die beiden anderen Eckpunkte sind bei $(-a/2, 0)$ und $(+a/2, 0)$.

7.17 • Zwei Teilchen von je 3,0 kg haben die Geschwindigkeiten $v_1 = (2,0 \text{ m/s})\hat{x} + (3,0 \text{ m/s})\hat{y}$ und $v_2 = (4,0 \text{ m/s})\hat{x} - (6,0 \text{ m/s})\hat{y}$. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor für den Massenmittelpunkt des Systems.

7.18 • Beschreiben Sie einen vollständig inelastischen zentralen Stoß zwischen zwei Autos im Schwerpunktsystem.

7.19 •• Eine zylinderförmige Dose der Masse m und der Höhe h ist mit Wasser gefüllt. Anfangs hat das Wasser in der Dose ebenfalls die Masse m . Jetzt wird ein Loch in den Boden geschlagen, und das Wasser tropft heraus. a) In welcher Höhe liegt der Massenmittelpunkt der mit dem restlichen Wasser gefüllten Dose, wenn der Wasserspiegel die Höhe x hat? b) Welche Höhe unterschreitet der Massenmittelpunkt nicht, wenn das Wasser herausläuft?

7.20 •• Ein Auto fährt nachts auf einer Landstraße. Gera-de als das Auto aus einer 90 km/h-Zone in eine 80 km/h-Zone fährt, springt plötzlich ein Reh aus dem Wald und bleibt mitten

auf der Fahrbahn stehen. Direkt beim Geschwindigkeitsbegrenzungszeichen bremst der Fahrer scharf, sodass die Bremsen blockieren, und kommt wenige Zentimeter vor dem erschrockenen Reh zum Stehen. Als er sich von seinem Schreck erholt hat, hört er die Sirene eines Polizeiwagens. Der Polizeibeamte verpasst dem Fahrer einen Strafzettel, da er mit 92 km/h in einer 80 km/h-Zone gefahren sein soll. Der Fahrer, der sich etwas mit Physik auskennt, verweist auf die 25 m langen Bremsspuren seines Autos und bestreitet, mit überhöhter Geschwindigkeit gefahren zu sein. Wie geht er dabei vor? (Sie benötigen den Gleitreibungskoeffizienten zwischen den Autoreifen und trockenem Beton aus Tabelle 4.1).

7.21 •• Ein Block von 3,0 kg bewegt sich mit 5,0 m/s nach rechts (in positive x -Richtung), ein zweiter Block von 3,0 kg mit 2,0 m/s nach links. a) Berechnen Sie die kinetische Gesamtenergie der beiden Blöcke. b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts des Systems aus den beiden Blöcken. c) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Blöcke bezüglich des Massenmittelpunkts. d) Berechnen Sie die kinetischen Energien für die Bewegungen der beiden Blöcke bezüglich des Massenmittelpunkts. e) Zeigen Sie, dass der Wert bei Aufgabenteil a größer ist als der Wert bei Aufgabenteil d, und zwar um einen Beitrag, der gleich der kinetischen Energie ist, die mit der Bewegung des Massenmittelpunkts zusammenhängt.

7.22 •• Wiederholen Sie die vorstehende Aufgabe; der zweite Block soll nun jedoch eine Masse von 5,0 kg haben und sich mit 3,0 m/s nach rechts bewegen.

7.23 •• Im Schwerpunktsystem stößt ein Teilchen mit der Masse m_1 und dem Impuls p_1 elastisch zentral mit einem zweiten Teilchen zusammen, das die Masse m_2 und den Impuls $p_2 = -p_1$ hat. Nach dem Stoß hat das erste Teilchen den Impuls p'_1 . Geben Sie die anfängliche kinetische Gesamtenergie in Abhängigkeit von m_1 , m_2 und p_1 sowie die kinetische Gesamtenergie nach dem Stoß in Abhängigkeit von m_1 , m_2 und p'_1 an; zeigen Sie, dass $p'_1 = \pm p_1$. Für $p'_1 = -p_1$ kehrt sich für das Teilchen nur die Richtung um, aber der Betrag seiner Geschwindigkeit bleibt gleich. Welche Situation liegt für die Lösung mit $p'_1 = +p_1$ vor?

7.24 ••• In der Atwood'schen Fallmaschine aus Abbildung 7.53 gleitet das Seil reibungsfrei über die Oberfläche eines festen Zylinders der Masse m_Z , sodass sich der Zylinder nicht dreht. a) Ermitteln Sie die Beschleunigung des Massenmittelpunkts für das Gesamtsystem aus den zwei Klötzen und dem Zylinder. b) Ermitteln Sie mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms für Systeme die Kraft F , die von dem Träger ausgeübt wird. c) Ermitteln Sie die Zugkraft $|F_S|$ auf das Seil zwischen den beiden Klötzen und zeigen Sie, dass $|F| = m_Z g + 2 F_S$ ist.

Raketen- und Strahlantrieb

7.25 •• Ein frei rollender Eisenbahnwaggon passiert eine Getreideverladeeinrichtung, die mit konstanter Rate (Masse pro

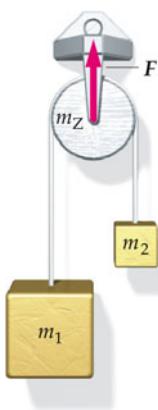


Abbildung 7.53 Zu Aufgabe 7.24.

Zeiteinheit) Korn in den Waggon befördert. a) Wird der Waggon wegen der Impulserhaltung langsamer, während er die Ladeeinrichtung passiert? Das Gleis soll reibungsfrei und völlig eben sein, das Getreide soll vertikal auf den Waggon fallen. b) Wenn der Waggon langsamer wird, muss es eine äußere Kraft geben, die ihn abbremst. Woher kommt diese Kraft? c) Nachdem der Waggon beladen ist, entsteht im Waggonboden ein Loch, und das Getreide fällt mit konstanter Rate aus dem Waggon heraus. Wird der Waggon schneller, während er seine Ladung verliert?

7.26 •• Eine Rakete verbrennt 200 kg Treibstoff pro Sekunde und stößt die Gase mit einer Geschwindigkeit von 6,00 km/s relativ zur Rakete aus. Wie hoch ist der Schub der Rakete?

7.27 •• Eine Rakete hat eine Startmasse von 30 000 kg, von 80 % Treibstoff sind. Sie verbrennt den Treibstoff mit einer Rate von 200 kg/s und stößt die Gase mit einer relativen Geschwindigkeit von 1,80 km/s aus. Berechnen Sie a) den Schub der Rakete, b) die Zeitdauer bis zum Brennschluss und c) die Geschwindigkeit beim Brennschluss unter der Voraussetzung, dass die Rakete senkrecht nach oben fliegt und so dicht an der Erdoberfläche bleibt, dass die Erdbeschleunigung g konstant ist.

Allgemeine Aufgaben

7.28 •• An einer 1,5 m langen homogenen Kette, die an der Decke befestigt ist, hängt ein Block mit einer Masse von 50 kg. Die Eigenmasse der Kette beträgt 20 kg. Bestimmen Sie die Zugkraft in der Kette a) an dem Punkt, an dem die Kette an dem Block befestigt ist, b) in der Mitte der Kette und c) am Befestigungspunkt an der Decke.

7.29 •• Eine reibungsfreie Fläche ist unter einem Winkel von $30,0^\circ$ gegen die Horizontale geneigt. Ein 270-g-Block auf der geneigten Ebene ist über ein Seil und eine Rolle mit einem frei hängenden Gewicht mit einer Masse von 75,0 g verbunden (Abbildung 7.54). a) Zeichnen Sie zwei Kräftediagramme, je eines

für den 270-g-Block und für das 75,0-g-Gewicht. b) Berechnen Sie die Zugkraft im Seil und die Beschleunigung des 270-g-Blocks. c) Der 270-g-Block, der anfangs ruht, wird plötzlich losgelassen. Wie lange dauert es, bis er eine Strecke von 1,00 m gerutscht ist? Gleitet er auf der geneigten Ebene nach oben oder nach unten?



Abbildung 7.54 Zu Aufgabe 7.29.

7.30 •• Ein 2,0 kg-Block ruht auf einem reibungsfreien Keil mit einer Neigung von 60° . Der Keil wird mit einer Beschleu-

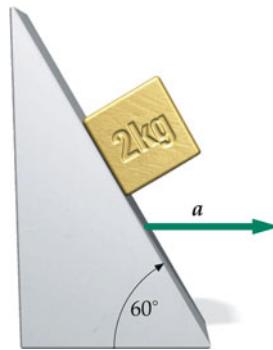


Abbildung 7.55 Zu Aufgabe 7.30.

nigung a nach rechts beschleunigt, deren Betrag so groß ist, dass der Block seine Lage relativ zum Keil beibehält (Abbildung 7.55). a) Zeichnen Sie das Kräftediagramm des Blocks und bestimmen Sie mit seiner Hilfe den Betrag der Beschleunigung. b) Was würde passieren, wenn der Keil stärker beschleunigt würde? Was würde geschehen, wenn er schwächer beschleunigt würde?

7.31 •• Eine kleine Kugel mit der Masse m_1 bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r auf einer reibungsfreien horizontalen Tischplatte (Abbildung 7.56). Über einen Faden, der durch ein Loch in der Tischplatte verläuft, ist sie mit einem Gewicht m_2 verbunden. Wie hängt r von m_1 , m_2 und der Zeit für einen Umlauf T ab?

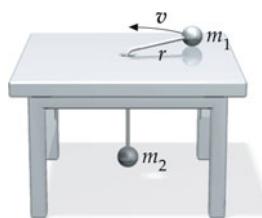


Abbildung 7.56 Zu Aufgabe 7.31.

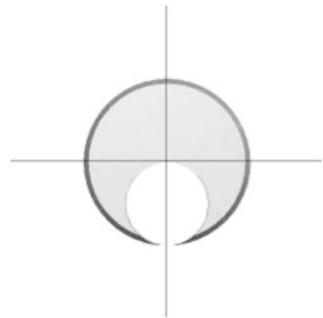


Abbildung 7.57 Zu Aufgabe 7.32.

7.32 •• In einer kreisförmigen Platte vom Radius r ist ein kreisförmiges Loch vom Radius $r/2$ ausgeschnitten (Abbildung 7.57). Ermitteln Sie den Massenmittelpunkt der Platte. (*Hinweis:* Die Platte kann als zwei übereinandergelegte Scheiben modelliert werden, wobei das Loch als eine Scheibe mit negativer Masse betrachtet wird.)

7.33 ••• Die Rolle einer idealen Atwood'schen Fallmaschine wird mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt (Abbildung 7.58). Ermitteln Sie die Beschleunigung der Gewichte und die Zugkraft des Verbindungsseils. In dieser Situation sind die Geschwindigkeiten beider Blöcke nicht gleich.



Abbildung 7.58 Zu Aufgabe 7.33.

Drehbewegungen

8



Das im Jahr 2000 in Betrieb gegangene „London Eye“ ist mit einer Höhe von 135 m das größte Riesenrad Europas. Es kann bis zu 800 Passagiere befördern. (© Ian Britton/Free-Foto.com.)

?

Welches Drehmoment braucht man zum Stoppen des Rads, wenn die Passagiere beim Stoppen des Rads noch 10 m zurücklegen sollen? (Siehe Beispiel 8.15.)

8.1	Kinematik der Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung	282
8.2	Die kinetische Energie der Drehbewegung	286
8.3	Berechnung von Trägheitsmomenten	287
8.4	Das Drehmoment	296
8.5	Gleichgewicht und Stabilität	307
8.6	Der Drehimpuls	312
8.7	Die Drehimpulserhaltung	318
8.8	Rollende Körper	326
8.9	Der Kreisel	333
	Zusammenfassung	340
	Aufgaben	343

Drehbewegungen sind allgegenwärtig: Die Erde rotiert um ihre Achse, genauso wie Propeller, Antriebswellen in Autos und Eisläufer bei einer Pirouette sich um ihre Achsen drehen. In diesem Kapitel werden wir Gesetze für die Drehbewegung entwickeln, die den Gesetzen der vorangegangenen Kapiteln ähnlich sind.

In diesem Kapitel werden wir Dreh- und Rollbewegungen untersuchen und die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu linearen Bewegungen aufzeigen. Zunächst behandeln wir die Rotation um eine feststehende Achse, anschließend Rotationen um Punkte. Danach beschäftigen wir uns mit den Rollbewegungen mit und ohne Schlupf. Zum Schluss behandeln wir den Kreisel als Anwendung einer allgemeinen Drehbewegung, bei der sich die Drehachse im Raum bewegt.

8.1 Kinematik der Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Jeder Punkt eines Körpers, der um eine feste Achse gleichförmig rotiert, bewegt sich auf einer Kreisbahn, deren Mittelpunkt auf der Drehachse liegt und deren Radius durch die Entfernung des Punkts von der Drehachse gegeben ist. Eine Linie, die man von der Achse zu einem beliebigen Punkt zieht, überstreicht in gleichen Zeiten stets gleiche Winkel. Wir betrachten eine Kreisscheibe, die sich um eine senkrecht zu ihr stehende feste Achse durch ihren Mittelpunkt dreht. r_i bezeichnet den Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe zu ihrem i -ten Massenpunkt P_i (Abbildung 8.1), und θ_i ist der gegen den Uhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen einer im Raum festgelegten Bezugslinie und einer Linie vom Drehpunkt zum i -ten Massenpunkt. Wenn sich die Scheibe um den Winkel $d\theta$ dreht, bewegt sich dieser Massenpunkt auf einem Kreisbogen der Länge ds_i , sodass gilt:

$$ds_i = r_i d\theta. \quad (8.1)$$

Dabei wird der Winkel $d\theta$ im Bogenmaß in der Hilfsseinheit Radian (Einheitenzeichen rad) angegeben. Üblicherweise wird die Drehrichtung gegen den Uhrzeigersinn als positiv bezeichnet; daher sind die in Abbildung 8.1 gezeigten Größen $d\theta$, θ_i und ds_i alle positiv. (Definiert man den Uhrzeigersinn als positive Drehrichtung, wären sie alle negativ.) Der Winkel θ_i , die gerichtete Länge ds_i und die Entfernung r_i hängen vom jeweils betrachteten Punkt ab, aber das Verhältnis ds_i/r_i , der sogenannte **Drehwinkel** $d\theta$, ist für alle Massenpunkte der Kreisscheibe gleich. Bei einer kompletten Umdrehung gilt für die Bogenlänge $\Delta s_i = 2\pi r_i$. Der Drehwinkel $\Delta\theta$ beträgt dann

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s_i}{r_i} = \frac{2\pi r_i}{r_i} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ U}.$$

(Das U steht hier für Umdrehung.) Die zeitliche Änderung des Drehwinkels ist für alle Punktmassen der Scheibe gleich. Man nennt sie die **Dreh- oder Winkelgeschwindigkeit** der Scheibe und bezeichnet sie mit dem kleinen griechischen Buchstaben ω (omega) (bzw. bei vektorieller Notation als $\boldsymbol{\omega}$). Die momentane Winkelgeschwindigkeit ist eine Winkeländerung während einer kurzen Zeit, geteilt durch die Zeit, d. h.

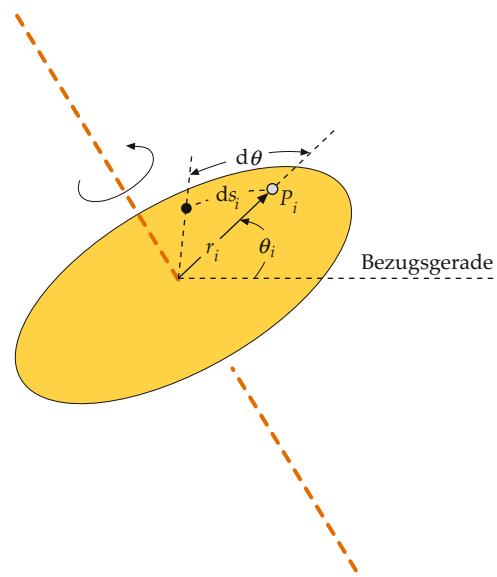


Abbildung 8.1 Eine Scheibe rotiert um eine Achse durch ihren Mittelpunkt. Ein Punkt P_i auf der Scheibe legt in der Zeit dt eine Strecke ds_i zurück, die von seinem Abstand r_i von der Drehachse abhängt. Der Drehwinkel θ_i wird gegen die Bezugslinie gemessen und ist für alle Punkte auf der Scheibe gleich.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \quad (8.2)$$

DEFINITION DER WINKELGESCHWINDIGKEIT

Alle Massenpunkte der Scheibe erfahren während derselben Zeit dieselbe Winkeländerung, sie haben daher alle dieselbe Winkelgeschwindigkeit. Bei Drehungen um eine raumfeste Achse kann ω nur zwei mögliche Orientierungen annehmen: ω ist positiv, wenn $d\theta$ positiv ist (d. h. bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn), und negativ für ein negatives $d\theta$ (für eine Drehung im Uhrzeigersinn). Dies ist ganz analog zu einer linearen Bewegung in einer Dimension, bei der man den Vektorcharakter der Geschwindigkeit vernachlässigen kann und es ausreicht, der Geschwindigkeit positive oder negative Werte zuzuschreiben. Im allgemeinen Fall aber, insbesondere wenn die Drehachse nicht im Raum fixiert ist, muss man die Winkelgeschwindigkeit als Vektorgröße $\boldsymbol{\omega}$ behandeln.

Die SI-Einheit von ω ist $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Da die Hilfsseinheit Radian keine Dimension hat, ist die Dimension der Winkelgeschwindigkeit die einer reziproken Zeit (T^{-1}). Oft wird daher die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ω als s^{-1} angegeben. In der Praxis verwendet man auch die Einheiten Umdrehungen pro Sekunde, $\text{U} \cdot \text{s}^{-1}$ (manchmal auch Umdrehungen pro Minute, $\text{U} \cdot \text{min}^{-1}$). Zur Umrechnung benutzt man den Zusammenhang

$$1 \text{ U} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ.$$

Übung 8.1: Eine CD rotiert mit $3000 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$. Wie hoch ist die Winkelgeschwindigkeit in Radian pro Sekunde? ◀

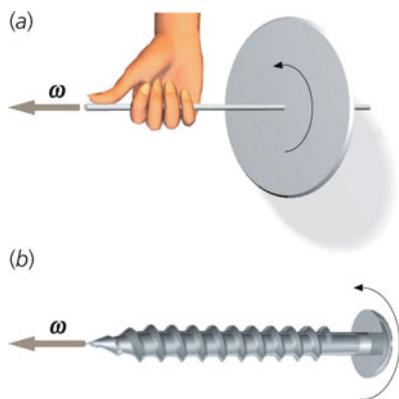


Abbildung 8.2 a) Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ω : Wenn die Finger der rechten Hand in Drehrichtung zeigen, zeigt der Daumen in Richtung von ω . b) Die Richtung von ω stimmt auch mit der Vorschubrichtung einer gewöhnlichen Schraube mit Rechtsgewinde überein – man bezeichnet das als Schraubenregel.

Wenn die Richtung der Drehachse im Raum *nicht* mehr fest steht, reichen Vorzeichen nicht aus, um die Richtung der Winkelgeschwindigkeit zu beschreiben. Diese Unzulänglichkeit lässt sich überwinden, indem wir die Winkelgeschwindigkeit als einen Vektor ω in Richtung der Drehachse ansehen. Betrachten Sie als Beispiel die rotierende Scheibe in Abbildung 8.2a. Bei der abgebildeten Drehrichtung der Scheibe nimmt ω die gezeigte Richtung an; kehrt man die Drehrichtung um, so kehrt sich auch ω um. Allgemein lässt sich die Richtung von ω durch eine Konvention bestimmen, die man als **Rechte-Hand-Regel** bezeichnet und die in Abbildung 8.2a illustriert ist: Wenn Sie die Finger Ihrer rechten Hand in Drehrichtung zeigen lassen, weist der Daumen entlang der Drehachse in die Richtung von ω .

Die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit wird **Winkelbeschleunigung α** genannt. Auch die Winkelbeschleunigung ist im allgemeinen Fall eine Vektorgröße. Analog zur Einführung der (mittleren) Beschleunigung als Geschwindigkeitsänderung pro Zeitintervall definieren wir nun die **mittlere Winkelbeschleunigung** als

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \quad (8.3)$$

DEFINITION DER MITTLEREN WINKELBESCHLEUNIGUNG

Somit ist der Vektor der mittleren Winkelbeschleunigung parallel zum Vektor der Änderung der Winkelgeschwindigkeit. Ändert die Drehachse ihre Richtung nicht, sind ω und $\Delta\omega$ zueinander ebenfalls parallel, und es ändert sich nur der Betrag der Winkelgeschwindigkeit $|\omega|$. Nimmt die Drehgeschwindigkeit zu, d. h. ist $\Delta\omega$ positiv, zeigen $\langle \alpha \rangle$, $\Delta\omega$ und ω in dieselbe Richtung. (Zunehmendes $|\omega|$ bedeutet bei einer Drehung im Uhrzeigersinn, d. h. bei einer Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn, dass auch die Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ im Uhrzeigersinn ist.) Wenn die Drehgeschwindigkeit ab-

nimmt, sind $\Delta\omega$ und $\langle \alpha \rangle$ der Winkelgeschwindigkeit ω beide entgegengesetzt.

Auch die *momentane* Änderung der Winkelgeschwindigkeit heißt Winkelbeschleunigung. Sie ist – wie die momentane Beschleunigung aus Kapitel 2 – als Grenzfall für infinitesimal kleine Änderungen der Winkelgeschwindigkeit definiert:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (8.4)$$

DEFINITION DER (MOMENTANEN) WINKELBESCHLEUNIGUNG

Sie ist stets parallel zum Vektor $d\omega$, lässt sich bei raumfester Drehachse jedoch auch aus der Ableitung der Winkeländerung bestimmen. Die Einheit der Winkelbeschleunigung ist Radian pro Sekunde zum Quadrat ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$).

Drehungen um eine raumfeste Drehachse

Die Größen Drehwinkel θ , Drehgeschwindigkeit ω und Winkelbeschleunigung α entsprechen den bei der eindimensionalen Bewegung verwendeten Größen Verschiebung Δx , Geschwindigkeit v und Beschleunigung a . Da die Größen der linearen Bewegung und der Drehbewegung ganz ähnlich definiert sind, lässt sich vieles aus Kapitel 2 auf die Bewegung sich drehender starrer Körper übertragen. So können wir z. B. bei konstanter Winkelbeschleunigung α beide Seiten von $d\omega = \alpha dt$ (Gleichung 8.4) über die Zeit t integrieren und erhalten

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \quad (8.5)$$

WINKELGESCHWINDIGKEIT UND KONSTANTE
WINKELBESCHLEUNIGUNG

Dabei ist die Integrationskonstante ω_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit. Gleichung 8.5 ist das Analogon zur Gleichung $v_x = v_{0,x} + a_x t$ der geradlinigen Bewegung. Setzt man $d\theta/dt$ in Gleichung 8.5 ein, so erhält man $d\theta = (\omega_0 + \alpha t) dt$. Bei erneuter Integration ergibt sich daraus

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (8.6)$$

DREHWINKEL UND KONSTANTE WINKELBESCHLEUNIGUNG

Dies entspricht der Gleichung $x = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ der linearen Bewegung. Entsprechend ergibt sich, wenn man die Zeit t aus Gleichung 8.5 und 8.6 eliminiert, eine Gleichung, die Drehwinkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung miteinander verknüpft:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \quad (8.7)$$

ZUSAMMENHANG VON DREHWINKEL, WINKELGESCHWINDIGKEIT
UND KONSTANTER WINKELBESCHLEUNIGUNG



In dieser Langzeitaufnahme des nächtlichen Himmels bewegen sich die Sterne auf Kreisbahnen. (© David Malin/Anglo-Australian Telescope Board.)

Insgesamt haben damit die kinematischen Gleichungen für die Drehbewegung mit konstanter Winkelbeschleunigung genau dieselbe Form wie die in Kapitel 2 hergeleiteten Gleichungen für die geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung. Beispiel 8.1 illustriert eine Anwendung.

Beispiel 8.1: Ein CD-Player

Eine CD, die in den Player eingelegt wird, wird in 5,5 s aus dem Stillstand auf $500 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$ beschleunigt. a) Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung unter der Annahme, dass sie konstant ist. b) Wie viele Umdrehungen vollführt die CD in diesen 5,5 s? c) Welche Strecke hat ein Punkt auf dem Rand der CD (6 cm vom Mittelpunkt entfernt) in den 5,5 s zurückgelegt, während die CD beschleunigt wird?

Problembeschreibung: Teilaufgabe a entspricht der Aufgabe, bei einer geradlinigen Bewegung die Beschleunigung zu berechnen, wenn Zeit und Endgeschwindigkeit gegeben sind. Um α in $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ anzugeben, muss man die Winkelgeschwindigkeit ω in $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ umrechnen. Teilaufgabe b entspricht der Aufgabe, bei einer linearen Bewegung die zurückgelegte Entfernung zu berechnen, wenn Zeit und Endgeschwindigkeit gegeben sind. In Teilaufgabe c wird – anders als in den Teilen a und b – nach einer linearen Größe (nämlich der zurückgelegten Strecke) und einer Winkelgröße (nämlich dem Drehwinkel)

gefragt. Teilaufgabe c entspricht damit nicht einem eindimensionalen Problem.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Winkelbeschleunigung hängt folgendermaßen mit der Anfangs- und Endwinkelgeschwindigkeit zusammen:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$$

2. Auflösen nach α ergibt:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega}{t} \\ &= \frac{500 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}}{5,5 \text{ s}} \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ U}} \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \\ &= 9,52 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2} = \boxed{9,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}}\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Der Drehwinkel hängt mit der Zeit gemäß Gleichung 8.6 zusammen:

$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2}(9,52 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2})(5,5 \text{ s})^2 \\ &= 144 \text{ rad}\end{aligned}$$

2. Rechnen Sie das in Radiant angegebene Bogenmaß in Umdrehungen um:

$$\theta - \theta_0 = 144 \text{ rad} \frac{1 \text{ U}}{2\pi \text{ rad}} = 22,9 \text{ U} = \boxed{23 \text{ U}}$$

Teilaufgabe c

Die zurückgelegte Entfernung Δs ist r -mal der Drehwinkel:

$$\Delta s = r \Delta \theta = (6,0 \text{ cm})(144 \text{ rad}) = 8,65 \text{ m} = \boxed{8,7 \text{ m}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die mittlere Winkelgeschwindigkeit in Umdrehungen pro Minute ist $250 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$. In 5,5 s vollführt die CD $(250 \text{ U}/60 \text{ s})(5,5 \text{ s}) = 23$ Umdrehungen.

Weitergedacht: Eine CD wird von einem Laserstrahl von innen nach außen abgetastet (in umgekehrter Richtung wie eine Schallplatte). Der minimale Radius beträgt 2,4 cm, der Radius der CD ist 6 cm. Während sich der Laser nach außen bewegt, nimmt die Umdrehungsgeschwindigkeit der CD von $500 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$ auf $200 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$ ab, damit die lineare (d. h. tangentiale) Geschwindigkeit der CD an dem Punkt, wo der Laser die CD trifft, konstant bleibt.

Übung 8.2: a) Rechnen Sie $500 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$ in rad/s um. b) Überprüfen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe b in Beispiel 8.1 mithilfe der Beziehung $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$.



Die lineare Geschwindigkeit $v_{t,i}$ eines Massenpunkts der Scheibe ist tangential zur Kreisbahn des Punkts gerichtet und hat den Betrag ds_i/dt . Mithilfe von Gleichung 8.1 und 8.2 können wir die „Tangentialgeschwindigkeit“ des i -ten Massenpunkts folgendermaßen mit der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe verknüpfen:

$$v_{t,i} = \frac{ds_i}{dt} = \frac{r_i d\theta}{dt} = r_i \frac{d\theta}{dt},$$

sodass gilt:

$$v_{t,i} = r_i \omega. \quad (8.8)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich die tangentiale Beschleunigung $d v_{t,i}/dt$ eines Massenpunkts auf der Scheibe zu

$$a_{t,i} = \frac{dv_{t,i}}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt},$$

sodass für die tangentiale Beschleunigung insgesamt gilt:

$$a_t = r \alpha. \quad (8.9)$$

Jeder Massenpunkt auf der Scheibe erfährt gleichfalls eine radiale Beschleunigung, die sogenannte **Zentripetalbeschleunigung** a_{ZP} , die sich auch durch die **Normalbeschleunigung** $a_n = -a_{ZP}$ ausdrücken lässt. Die Normalbeschleunigung ist immer nach innen zur Drehachse hin gerichtet und hat den Betrag

$$a_{n,i} = \frac{v_{t,i}^2}{r_i} = \frac{(r_i \omega)^2}{r_i}$$

und damit

$$a_{n,i} = r_i \omega^2. \quad (8.10)$$

!

Ausdrücke wie Gleichung 8.1 und 8.8 bis 8.10, die sowohl lineare als auch Winkelgrößen enthalten, sind nur gültig, wenn die Winkel im Bogenmaß (d. h. in der Einheit Radian) angegeben sind.

Übung 8.3: Ein Punkt auf dem Rand einer CD ist 6,00 cm von der Drehachse entfernt. Berechnen Sie die Tangentialgeschwindigkeit v_t , die Tangentialbeschleunigung a_t und die Normalbeschleunigung a_n dieses Punkts, wenn die CD mit konstanter Winkelgeschwindigkeit von $300 \text{ U} \cdot \text{s}^{-1}$ rotiert. ◀

Übung 8.4: Berechnen Sie die tangentiale Geschwindigkeit eines Punkts auf der CD in Beispiel 8.1 für a) $r = 2,40 \text{ cm}$ und eine Rotationsgeschwindigkeit von $500 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$ und für b) $r = 6,00 \text{ cm}$ und eine Rotationsgeschwindigkeit von $200 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$. ◀

Vektorformulierung für allgemeine Drehungen

In den folgenden Abschnitten wird es sich als nützlich erweisen, den Zusammenhang zwischen den Vektoren der Winkelgeschwindigkeit ω , der Bahngeschwindigkeit v_t und dem

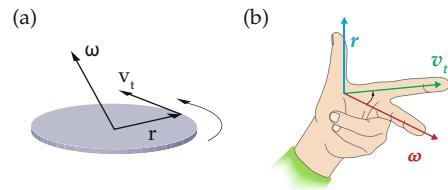


Abbildung 8.3 a) Vektoren bei der Kreisbewegung: r , v_t und ω stehen jeweils paarweise senkrecht aufeinander. b) Drei-Finger-Regel zur Bestimmung der Richtungen der Vektoren

Ortsvektor eines Punktes r auf der sich drehenden Scheibe herzustellen. Zur Vereinfachung der Schreibweise, verzichten wir hier auf den Index i für den Massenpunkt auf der Scheibe.

Gleichung 8.8 beschreibt die Beziehung zwischen den Beträgen der tangentialen Geschwindigkeit, dem Ort des Massenpunkts auf der Scheibe und der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit. Nun wollen wir uns veranschaulichen, in welche Richtung diese Größen zeigen: Der Ortsvektor r zeigt stets vom Koordinatenursprung zum Ort des Massenpunkts. Den Koordinatenursprung legen wir in den Punkt, in dem die Drehachse die Schreibe durchsößt. Dann zeigt der Ortsvektor von diesem Punkt zum Ort des Massenpunkts wie in Abbildung 8.3a gezeigt. Die tangentiale Geschwindigkeit v_t zeigt, wie ihr Name ausdrückt, in die gleiche Richtung wie die Tangente an den den Ortsvektor in Bewegungsrichtung. r und v_t liegen in der sogenannten **Rotationsebene**, d. h. in der Ebene, in der sich die Scheibe dreht.

Die Richtung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit bestimmen wir gemäß der Rechten-Hand-Regel, er zeigt in Abbildung 8.3a nach oben. Somit stehen r , v_t und ω jeweils paarweise senkrecht aufeinander. Man sagt auch, r , v_t und ω bilden (in der Reihenfolge) ein **Rechtssystem**, denn, zeigt r in x -Richtung und v_t in y -Richtung, dann zeigt ω in z -Richtung. Man kann sich auch, wie in Abbildung 8.3b gezeigt, die Richtungen mithilfe der **Drei-Finger-Regel** verdeutlichen. Zeigt der abgespreizte Daumen in r -Richtung, der abgespreizte Zeigefinger in v_t -Richtung, dann zeigt der nach oben abgespreizte Mittelfinger der rechten Hand in ω -Richtung.

Mathematisch kann man diese Beziehung der drei Vektoren durch das Vektorprodukt ausdrücken. Gleichung 8.8 lautet dann

$$v_t = \omega \times r. \quad (8.11)$$

DIE TANGENTIALGESCHWINDIGKEIT ALS VEKTORPRODUKT

Wenn r und ω den Winkel φ einschließen, gilt außerdem für die Beträge

$$|v_t| = |r| \cdot |\omega| \cdot \sin \varphi, \quad (8.12)$$

BETRAG DER TANGENTIALGESCHWINDIGKEIT

was sich für $\varphi = 90^\circ$ zu Gleichung 8.8 vereinfacht.

Das Vektorprodukt wird in den folgenden Abschnitten bei der Einführung des Drehimpulses und des Drehmoments eine große

8.2 Die kinetische Energie der Drehbewegung

Die kinetische Energie eines starren Körpers, der um eine feste Achse rotiert, ist die Summe der kinetischen Energien aller Massenpunkte, die zusammen den Körper bilden. Die kinetische Energie des i -ten Massenpunkts mit der Masse m_i ist

$$E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Durch Summation über alle Massenpunkte und mit $v_i = r_i \omega$ ergibt sich

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2 \omega^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2.$$

Die eingeklammerte Summe in dem Term auf der rechten Seite nennt man das **Trägheitsmoment** I des Körpers bezüglich der Drehachse:

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \quad (8.13)$$

DEFINITION DES TRÄGHEITSMOMENTS

In der älteren Literatur findet man für das Trägheitsmoment auch die Bezeichnung Drehmasse, da das Trägheitsmoment bei der Drehbewegung etwa die Rolle spielt wie die träge Masse bei der linearen Bewegung (Abschnitt 8.3).

Die kinetische Energie berechnet sich nach der Formel

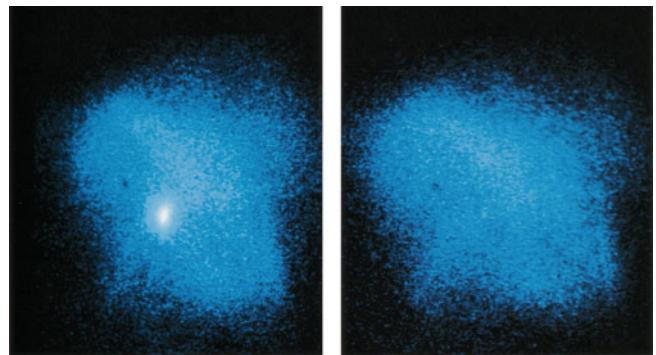
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (8.14)$$

KINETISCHE ENERGIE EINES ROTIERENDEN KÖRPER

Sie ist ein Skalar, sodass es genügt, den Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ zu kennen. Beispiel 8.2 illustriert anhand eines Vierteilchensystems den Zusammenhang zwischen den Einzelmassen, dem Trägheitsmoment und der kinetischen Rotationsenergie des Systems.

Beispiel 8.2: Ein rotierendes Teilchensystem

Ein Körper besteht aus vier punktförmigen Teilchen, jedes von der Masse $m_i = m_0$, die durch starre masselose Stäbe zu einem Rechteck mit den Kantenlängen



Der Krebspulsar ist einer der am schnellsten rotierenden Neutronensterne, die wir kennen. Er scheint aufzuleuchten (links) und wieder auszugehen (rechts) wie das Licht in einem Leuchtturm; er blinkt allerdings weit schneller: etwa 30-mal pro Sekunde. Seine Drehgeschwindigkeit verlangsamt sich jedoch, wie man aus der Blinkgeschwindigkeit ablesen kann, die pro Jahr um 10^{-5} s abnimmt. Die so verloren gehende Rotationsenergie, die der Energieabgabe von 100 000 Sonnen entspricht, wird von den im magnetischen Feld des Pulsars beschleunigten Elektronen in Form von Licht emittiert. (© David Malin/Anglo-Australian Telescope Board.)

2a und 2b verbunden sind (Abbildung 8.4). Das System rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, die wie gezeigt durch den Mittelpunkt in der Ebene der Figur verläuft. a) Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 8.13 und 8.14 die kinetische Energie dieses Systems. b) Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die kinetische Energie für jeden einzelnen der vier Massenpunkte berechnen und dann summieren.

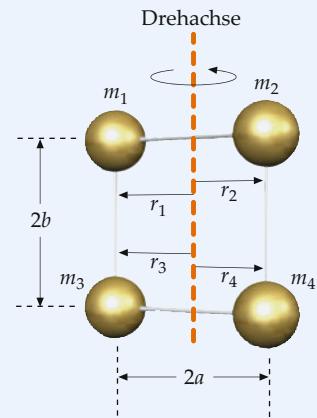


Abbildung 8.4 Schematische Darstellung der Drehbewegung des Körpers bestehend aus vier punktförmigen Teilchen.

Problembeschreibung: Da der Körper aus vier punktförmigen Massen besteht, können wir mit Gleichung 8.13 das Trägheitsmoment I berechnen und dann in Gleichung 8.14 einsetzen.

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Wenden Sie die Definition des Trägheitsmoments (Gleichung 8.13) an. r_i bezeichnet dabei die radiale Entfernung der i -ten Masse von der Drehachse:

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_i^2 \\ &= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 \end{aligned}$$

2. Die Massen m_i und die Entfernungen r_i sind gegeben:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m_3 = m_4 = m_0 \\ r_1 &= r_2 = r_3 = r_4 = a \end{aligned}$$

3. Durch Einsetzen erhalten Sie das Trägheitsmoment:

$$I = m_0 a^2 + m_0 a^2 + m_0 a^2 + m_0 a^2 = 4 m_0 a^2$$

4. Mit Gleichung 8.14 berechnen Sie daraus die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 4 m_0 a^2 \omega^2 = [2 m_0 a^2 \omega^2]$$

Teilaufgabe b

1. Um die kinetische Energie des i -ten Massenpunkts zu berechnen, benötigen Sie seine Geschwindigkeit:

$$E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

2. Die Massenpunkte bewegen sich alle auf Kreisbahnen vom Radius a . Ihre Geschwindigkeit ist damit:

$$v_i = r_i \omega = a \omega \quad (i = 1, \dots, 4)$$

3. Setzen Sie dies in das Ergebnis von Schritt 1 ein:

$$E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_0 a^2 \omega^2$$

4. Jeder der Massenpunkte hat dieselbe kinetische Energie. Durch Summation über alle Massenpunkte erhalten Sie die kinetische Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \sum_{i=1}^4 E_{\text{kin},i} \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} m_0 a^2 \omega^2 \right) = 2 m_0 a^2 \omega^2 \end{aligned}$$

5. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Teilaufgabe a:

Beide Rechnungen ergeben dasselbe Resultat.

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet stimmen die Ergebnisse aus Teilaufgabe a und b miteinander überein.

8.3 Berechnung von Trägheitsmomenten

Weitergedacht: Beachten Sie, dass das Trägheitsmoment I unabhängig von der Länge b ist. Das Trägheitsmoment hängt nur vom Abstand der Massen von der Rotationsachse ab, nicht aber davon, auf welcher Höhe der Rotationsachse sie sich befinden.

Übung 8.5: Berechnen Sie für dasselbe System von Massenpunkten das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, die parallel zu der ursprünglichen Drehachse durch zwei der Massenpunkte verläuft (Abbildung 8.5). ◀

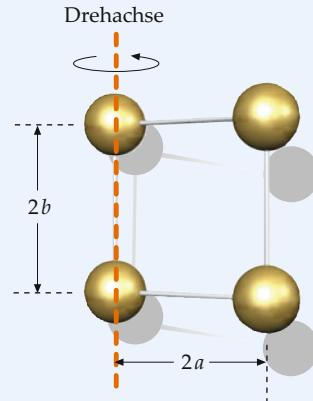


Abbildung 8.5 Alternative Wahl der Drehachse. ■

8.3 Berechnung von Trägheitsmomenten

Das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse ist ein Maß für den Widerstand, den ein Körper einer Änderung seiner Drehbewegung um diese Achse entgegensetzt. Es beschreibt damit für eine Rotationsbewegung eine Eigenschaft von Körpern, die für eine Translationsbewegung durch die träge Masse eines Körpers beschrieben wird. (Zur Erinnerung: Die träge Masse gibt den Widerstand gegen die Änderung des linearen Bewegungszustands an; Abschnitt 3.2).

Je weiter ein Massenelement von der Drehachse entfernt ist, umso größer ist sein Beitrag zum Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse. Anders als die Masse, die eine innere Eigenschaft des Körpers – und zwar *nur* des Körpers – ist, hängt das Trägheitsmoment von der Lage der Drehachse wie auch der Massenverteilung des Körpers bezüglich der Drehachse ab.

Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse hängt sowohl von der Masse des Körpers als auch von der Massenverteilung bezüglich der Drehachse ab.

Systeme aus diskreten Teilchen

Für Teilchensysteme aus einzelnen (diskreten) Teilchen können wir das Trägheitsmoment bezüglich einer gegebenen Achse direkt aus der Definitionsgleichung 8.13 berechnen. Wie in Beispiel 8.3 gezeigt, können wir mithilfe von Gleichung 8.13 aber auch einen Schätzwert für das Trägheitsmoment einer kontinuierlichen Massenverteilung gewinnen.

Beispiel 8.3: Abschätzung des Trägheitsmoments

Schätzen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen dünnen Stabs der Länge l und der Masse m_0 bezüglich einer zu dem Stab senkrechten Achse, die durch ein Stabende verläuft. Betrachten Sie für diese Schätzung den Stab als aus drei Punktmasse bestehend, von denen jede ein Drittel der Gesamtmasse darstellt.

Problembeschreibung: Teilen Sie den Stab in drei gleiche Abschnitte, jeweils von der Masse $\frac{1}{3}m_0$ und der Länge $\frac{1}{3}l$, und betrachten Sie jeden der Abschnitte als eine Punktmasse, die im jeweiligen Massenmittelpunkt lokalisiert ist. Wenden Sie Gleichung 8.13 ($I = \sum m_i r_i^2$) an und leiten Sie damit einen Näherungswert für I her.

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Skizze von dem in drei Abschnitte zerlegten Stab an und zeichnen Sie in die Mitte jedes Abschnitts die Punktmasse mit den jeweiligen Abmessungen (Abbildung 8.6).

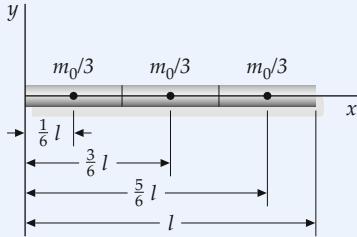


Abbildung 8.6 Unterteilung des Stabs inklusive der Einführung der drei Punktmasse.

2. Wenden Sie die Gleichung 8.13 auf das Näherungssystem (die Konstruktion der Punktmasse) an:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \approx m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$

3. Die Masse jeder Punktmasse ist $\frac{1}{3}m_0$, die Abstände der Punktmasse von der Drehachse sind $\frac{1}{6}l$, $\frac{3}{6}l$ und $\frac{5}{6}l$:

$$\begin{aligned} I &\approx (\frac{1}{3}m_0)(\frac{1}{6}l)^2 + (\frac{1}{3}m_0)(\frac{3}{6}l)^2 + (\frac{1}{3}m_0)(\frac{5}{6}l)^2 \\ &= \frac{1}{3}m_0 \left(\frac{1+3^2+5^2}{6^2} \right) l^2 = \boxed{\frac{35}{108}m_0 l^2} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der exakte Wert für das Trägheitsmoment des Stabs bezüglich dieser Drehachse beträgt, wie wir in Beispiel 8.4 berechnen werden, $\frac{1}{3}m_0 l^2$ bzw. $\frac{36}{108}m_0 l^2$. Unser Näherungswert stimmt somit bis auf 1 % mit dem exakten Wert überein. ■

Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung

Um das Trägheitsmoment eines Körpers mit kontinuierlicher Massenverteilung zu bestimmen, betrachten wir den Körper als aus sehr kleinen Massenelementen zusammengesetzt. Die Summe $\sum m_i r_i^2$ aus Gleichung 8.13 geht dann in ein Integral über:

$$I = \int r^2 dm. \quad (8.15)$$

r bezeichnet hier den radialen Abstand des Massenelements dm von der Drehachse. Um das Integral zu bestimmen, drücken wir zunächst dm als eine Dichte mal ein Längen-, Flächen- oder Volumenelement aus. In Beispiel 8.4 wird das Vorgehen erläutert.

Beispiel 8.4: Trägheitsmoment eines homogenen Stabs

Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Stabs der Länge l und der Masse m_0 bezüglich einer Achse, die senkrecht zum Stab durch eines der Enden verläuft. Der Stab soll eine vernachlässigbare Dicke haben.

Problembeschreibung: Wenden Sie Gleichung 8.15 an ($I = \int r^2 dm$), um das Trägheitsmoment bezüglich der angegebenen Achse zu berechnen. Da der Stab homogen sein soll, ist die Gesamtmasse m_0 entlang der Länge l gleichmäßig verteilt, d.h., die Masse pro Einheitslänge (die lineare Massendichte) ist gegeben durch $\lambda = m_0/l$.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine Skizze (Abbildung 8.7). Der Stab soll entlang der positiven x -Achse ausgerichtet sein; sein Ende befindet sich im Ursprung. Um I bezüglich der y -Achse zu berechnen, wählen Sie ein Massenelement dm in einer Entfernung x von der y -Achse.

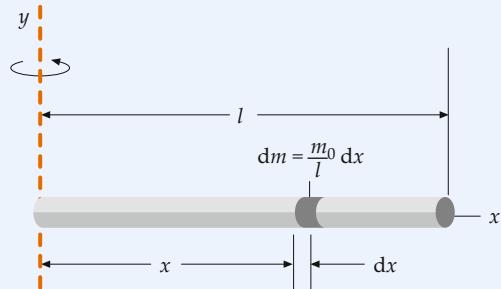


Abbildung 8.7 Skizze des Stabes mitsamt seiner Drehachse.

2. Das Trägheitsmoment bezüglich der y -Achse ist gegeben durch das Integral:

$$I = \int x^2 dm$$

3. Um das Integral zu berechnen, brauchen wir einen Zusammenhang von dm und dx . Drücken Sie dm mithilfe der Massendichte λ und von dx aus:

$$dm = \lambda dx = \frac{m_0}{l} dx$$

4. Setzen Sie ein und berechnen Sie das Integral. Wählen Sie die Integralgrenzen so, dass das Massenelement dm entlang der Massenverteilung in Richtung von zunehmendem x verschoben wird:

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{m_0}{l} dx = \frac{m_0}{l} \int_0^l x^2 dx \\ &= \frac{m_0}{l} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^l = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3} m_0 l^2} \end{aligned}$$

Kommentar: Das Ergebnis steht in guter Übereinstimmung mit dem Näherungswert aus Beispiel 8.3.

Weitergedacht: Das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse ist ebenfalls $\frac{1}{3} m_0 l^2$; das Trägheitsmoment bezüglich der x -Achse ist null, da wir angenommen hatten, dass der Stab eine vernachlässigbare Dicke hat, die gesamte Masse also in vernachlässigbarer Entfernung von der x -Achse konzentriert ist. ■

Mit Gleichung 8.15 lässt sich das Trägheitsmoment weiterer Körper in verschiedenen anderen Formen berechnen. Die Kunst ist stets, eine passende Formel für die Massenverteilung zu finden und sie zu integrieren. Eine Übersicht über verschiedene einfache Körperformen bietet Tabelle 8.1.

Trägheitsmoment eines Rings bezüglich einer Achse senkrecht durch seinen Mittelpunkt

Wir betrachten einen Ring mit der Masse m_0 und dem Radius r_R . Die Drehachse steht senkrecht zur Ebene des Rings und geht durch den Mittelpunkt des Rings (Abbildung 8.8). Die Gesamtmasse ist im Abstand $r = r_R$ von der Drehachse konzentriert. Das Trägheitsmoment ist dann

$$I = \int r^2 dm = \int r_R^2 dm = r_R^2 \int dm = m_0 r_R^2 .$$

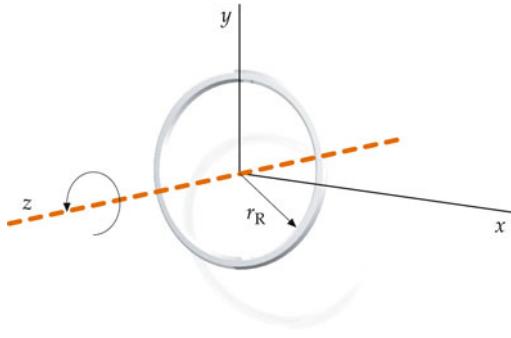


Abbildung 8.8 Ein Ring der Masse m_0 rotiert um eine feste Achse, die senkrecht zu seiner Ebene steht und durch seinen Mittelpunkt verläuft. Da sich seine gesamte Masse im Abstand r_R von der Drehachse befindet, beträgt sein Trägheitsmoment $m_0 r_R^2$.

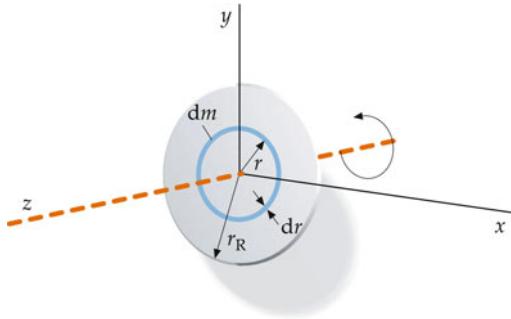


Abbildung 8.9 Zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Scheibe der Masse m_0 mit dem Radius r_R , die sich um eine senkrecht zu ihrer Ebene stehende Achse dreht. Als Massenelement mit der Masse dm betrachten wir einen Ring mit dem Radius dr .

Trägheitsmoment einer Scheibe

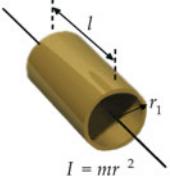
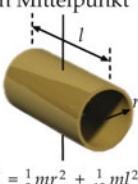
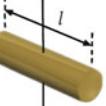
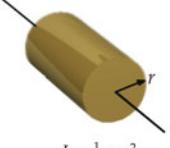
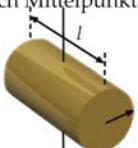
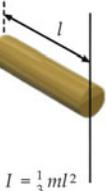
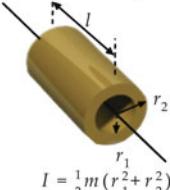
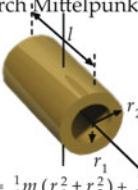
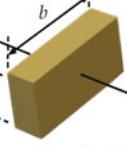
Wir betrachten eine homogene Scheibe der Masse m_0 mit dem Radius r_R , die sich um eine zur Scheibenebene senkrechte Achse durch ihren Mittelpunkt dreht. Für die Scheibe kann man erwarten, dass das Trägheitsmoment kleiner ist als bei einem gleich großen Ring, für den wir $I = m_0 r_R^2$ errechnet hatten; Grund dafür ist, dass bei der Scheibe die Masse gleichmäßig zwischen $r = 0$ und $r = r_R$ verteilt ist, anders als beim Ring, wo alle Masse bei $r = r_R$ konzentriert war.

In Abbildung 8.9 ist jedes Massenelement ein Ring vom Radius r und der Dicke dr . Das Trägheitsmoment eines jeden einzelnen Massenelements ist $r^2 dm$. Da die Scheibe homogen ist, ist die Massenbelegung σ (Masse pro Einheitsfläche) konstant. Die Fläche eines Massenelements errechnet man gemäß $dA = 2\pi r dr$. Demnach ist die Masse eines Massenelements

$$dm = \sigma dA = \frac{m_0}{A} 2\pi r dr .$$

8 Drehbewegungen

Tabelle 8.1 Trägheitsmomente homogener Körper bezüglich verschiedener Drehachsen

Zylinder mit dünnem Mantel Drehachse = Körperachse	Zylindermantel Drehachse \perp Körperachse durch Mittelpunkt	Dünner Stab Drehachse \perp Körperachse durch Mittelpunkt	Dünne Kugelschale Drehachse durch Mittelpunkt
 $I = mr^2$	 $I = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$	 $I = \frac{1}{12}ml^2$	 $I = \frac{2}{3}mr^2$
Massiver Zylinder Drehachse = Körperachse	Massiver Zylinder Drehachse \perp Körperachse durch Mittelpunkt	Dünner Stab Drehachse \perp Körperachse durch ein Ende	Massive Kugel Drehachse durch Mittelpunkt
 $I = \frac{1}{2}mr^2$	 $I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$	 $I = \frac{1}{3}ml^2$	 $I = \frac{2}{5}mr^2$
Hohlzylinder Drehachse = Körperachse	Hohlzylinder Drehachse \perp Körperachse durch Mittelpunkt		Massiver Quader Drehachse \perp Oberfläche durch Mittelpunkt
 $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$	 $I = \frac{1}{4}m(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{12}ml^2$		 $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

Eine Scheibe ist ein Zylinder mit vernachlässigbarer Länge l . Mit $l = 0$ gelten die angegebenen Formeln für Zylinder auch für Scheiben.

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} I &= \int r^2 dm = \int_0^{r_R} r^2 \sigma 2\pi r dr = 2\pi\sigma \int_0^{r_R} r^3 dr \\ &= \frac{2\pi m_0}{A} \frac{r_R^4}{4} = \frac{\pi m_0}{2\pi r_R^2} r_R^4 = \frac{1}{2} m_0 r_R^2. \end{aligned}$$

Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders

Wir betrachten einen Zylinder mit dem Radius r_R , der sich um seine Körperachse dreht. Wir können den Zylinder als ein System von übereinander angeordneten Scheiben betrachten, von denen jede die Masse dm und das Trägheitsmoment $\frac{1}{2} dm r_R^2$ hat (Abbildung 8.10). Das Trägheitsmoment des gesamten Zylinders ergibt sich dann als

$$I = \int \frac{1}{2} r_R^2 dm = \frac{1}{2} r_R^2 \int dm = \frac{1}{2} m_0 r_R^2.$$

Dabei ist m_0 die Gesamtmasse des Zylinders.

Frage 8.1

Betrachten Sie zwei identische homogene Scheiben A und B mit einem Durchmesser von 10 cm. Sie nehmen einen Bohrer und

bohren ein Loch mit einem Durchmesser von 1 cm durch die Mitte von Scheibe B. Welche der beiden Scheiben hat nun das größere Trägheitsmoment? (Betrachten Sie für beide Scheiben nur das Trägheitsmoment bezüglich der Achse, die durch den Mittelpunkt der Scheibe verläuft und senkrecht auf ihr steht.)

Frage 8.2

Betrachten Sie zwei homogene Scheiben A und B mit einem Radius von 10 cm. Beide Scheiben sind identisch bis auf das Material: Die Dichte von Scheibe B ist etwas größer als die von Scheibe A. Sie nehmen einen Bohrer und bohren ein Loch von 1 cm Durchmesser durch die Mitte von Scheibe B. Beide Scheiben haben nun dieselbe Masse. Welche der beiden Scheiben hat dann das größere Trägheitsmoment? (Betrachten Sie für beide Scheiben nur das Trägheitsmoment bezüglich der Achse, die durch den Mittelpunkt der Scheibe verläuft und senkrecht auf ihr steht.)

Der Steiner'sche Satz

Die Berechnung des Trägheitsmoments lässt sich in vielen Fällen durch einen Satz vereinfachen, der das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt mit dem

8.3 Berechnung von Trägheitsmomenten

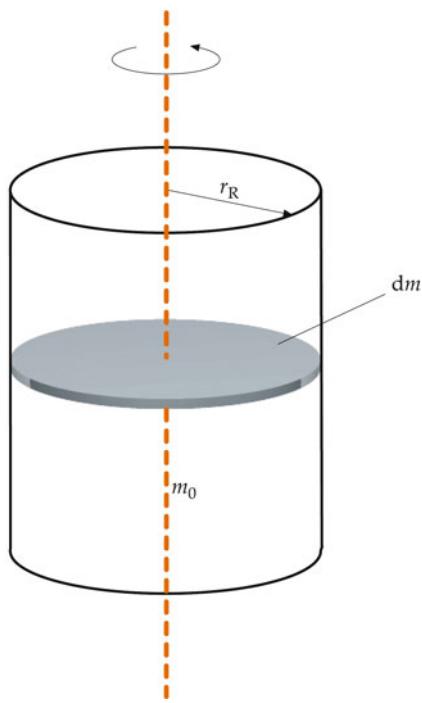


Abbildung 8.10 Einen Zylinder der Masse m_0 , der um seine Achse rotiert, kann man als Stapel von mehreren Scheiben mit den Massen dm betrachten. Da jede dieser Scheiben das Trägheitsmoment $\frac{1}{2} dm r_R^2$ hat, ist das Trägheitsmoment des Zylinders $\frac{1}{2} m_0 r_R^2$.

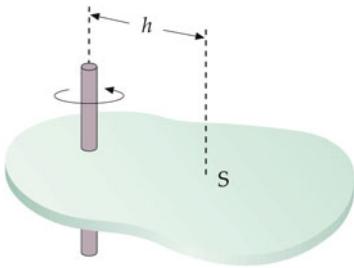


Abbildung 8.11 Zum Steiner'schen Satz: Ein Körper rotiert um eine Achse, die parallel zu einer Achse durch den Massenmittelpunkt S verläuft und von ihr einen Abstand h hat.

Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen anderen, zur ersten parallelen Achse verknüpft (Abbildung 8.11). Dieser Satz heißt im Deutschen nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1796–1863) der **Steiner'sche Satz**, in der englischsprachigen Literatur findet man ihn unter der Bezeichnung „Parallel-Axis Theorem“. Wenn ein Körper der Masse m das Trägheitsmoment I_S bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt hat, dann ist das Trägheitsmoment I bezüglich einer parallelen Achse im Abstand h von der ersten Achse gegeben durch

$$I = I_S + mh^2. \quad (8.16)$$

STEINER'SCHER SATZ

Beispiel 8.2 und die zugehörige Übung haben bereits einen speziellen Fall dieses Satzes mit $h = a$, $m = 4m_0$ und $I_S = 4m_0 a^2$ vorgestellt. Wir wollen den Steiner'schen Satz zunächst anwenden (Beispiel 8.5), bevor wir den Satz beweisen. Der Abschnitt endet mit drei weiteren Beispielen (Beispiele 8.6 bis 8.8) zur Anwendung des Trägheitsmoments auf verschiedene physikalische Sachverhalte.

*Beweis des Steiner'schen Satzes

Um den Steiner'schen Satz zu beweisen, betrachten wir einen Körper, der sich um eine feste Achse A dreht, die nicht durch den Massenmittelpunkt verläuft (Abbildung 8.12).

Die kinetische Energie E_{kin} eines solchen Körpers ist nach Gleichung 8.14 gegeben durch $\frac{1}{2} I \omega^2$, wobei I das Trägheitsmoment bezüglich der festen Achse angibt. In Kapitel 7 (Gleichung 7.22) hatten wir gesehen, dass die kinetische Energie eines Systems sich als Summe aus der kinetischen Energie der Bewegung des Massenmittelpunkts ($\frac{1}{2} m v_S^2$) und der kinetischen Energien aller Bewegungen relativ zum Massenmittelpunkt schreiben lässt. Für einen rotierenden Körper ist die kinetische Energie bezüglich des Massenmittelpunkts $\frac{1}{2} I_S \omega^2$; dabei ist I_S das Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Massenmittelpunkt (genauer: bezüglich eines Inertialsystems, in dem sich der Massenmittelpunkt wenigstens zeitweise in Ruhe befindet). Damit beträgt die gesamte kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2.$$

Der Massenmittelpunkt bewegt sich auf einer kreisförmigen Bahn vom Radius h , daher gilt $v_S = h \omega$. Setzen wir nun $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ und $v_S = h \omega$, so wird die obige Gleichung zu

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m h^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2.$$

Erweitern mit $2/\omega^2$ ergibt

$$I = m h^2 + I_S,$$

und das ist genau der Steiner'sche Satz.

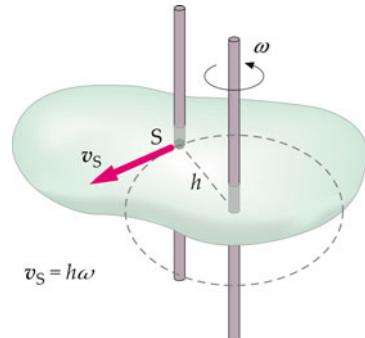


Abbildung 8.12 Zum Beweis des Steiner'schen Satzes

Beispiel 8.5: Anwendung des Steiner'schen Satzes

Ein dünner homogener Stab der Masse m_0 und der Länge l_0 liegt auf der x -Achse, sein Ende befindet sich im Ursprung. Berechnen Sie mithilfe des Steiner'schen Satzes sein Trägheitsmoment I_S bezüglich der Achse y' , die durch den Massenmittelpunkt verläuft (Abbildung 8.13).

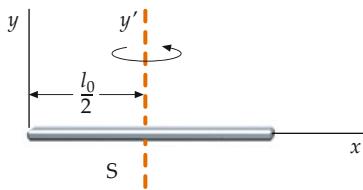


Abbildung 8.13 Skizze des um die Achse durch den Massenmittelpunkt rotierenden Stabs.

Problembeschreibung: Aus Beispiel 8.4 kennen wir das Trägheitsmoment $I = \frac{1}{3}m_0 l_0^2$ des Stabs bezüglich einer Achse, die durch ein Ende des Stabs verläuft. Mithilfe des Steiner'schen Satzes ist nun das Trägheitsmoment I_S bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt zu berechnen. In diesem Fall ist $h = \frac{1}{2}l_0$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Wenden Sie den Steiner'schen Satz an, um das Trägheitsmoment I bezüglich eines Stabendes mithilfe von I_S auszudrücken.

2. Setzen Sie $I_y = \frac{1}{3}m_0 l_0^2$ (das Trägheitsmoment bezüglich eines Stabendes) und $I_S = I_{y'}$ und lösen Sie nach I_S auf.

ZUR ÜBUNG

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$I = I_S + m_0 h^2$$

$$I_y = I_{y'} + m_0 \left(\frac{1}{2}l_0\right)^2$$

2.

$$\begin{aligned} I_S &= I_y - m_0 h^2 = \frac{1}{3}m_0 l_0^2 - m_0 \left(\frac{1}{2}l_0\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{12}m_0 l_0^2} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Berechnen Sie das Trägheitsmoment durch direkte Integration. Die Rechnung ist dieselbe wie in Beispiel 8.4, allerdings laufen die Integrationsgrenzen hier von $-\frac{1}{2}l_0$ bis $+\frac{1}{2}l_0$. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 dm = \frac{m_0}{l_0} \int_{-l_0/2}^{+l_0/2} x^2 dx \\ &= \frac{m_0}{l_0} \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-l_0/2}^{+l_0/2} \\ &= \frac{m_0}{3l_0} \left(\frac{l_0^3}{8} + \frac{l_0^3}{8} \right) \\ &= \frac{1}{12}m_0 l_0^2, \end{aligned}$$

und das ist genau das Ergebnis aus Schritt 2.

Weitergedacht: Das Ergebnis hier beträgt nur ein Viertel von dem Ergebnis aus Beispiel 8.4, in dem der Stab um eine Achse durch ein Stabende rotierte.

Beispiel 8.6: Auto mit Schwungrad

Sie fahren ein Hybridfahrzeug, das speziell für den Stop-and-go-Verkehr entwickelt wurde und das neben einem Elektromotor einen normalen Verbrennungsmotor und ein sehr schweres Schwungrad enthält. Während in einem normalen Auto bei jedem Bremsen die kinetische Energie als Wärme abgegeben bzw. dissipiert wird, wandelt der Bremsmechanismus hier die kinetische Energie der Linearbewegung in die Rotationsenergie des schweren Schwungrads um. Diese Rotationsenergie wird vom Schwungrad in den Antriebsstrang eingespeist, sodass sie beim Anfahren wieder in Bewegungsenergie zurückverwandelt werden kann. Das Schwungrad hat eine Masse von 100 kg und besteht aus einem Hohlzylinder (Innendurchmesser $r_1 = 25,0$ cm, Außendurchmesser $r_2 = 40,0$ cm).

Die maximale Drehzahl ist $30\,000 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$. In einer trüben, dunklen Nacht, noch 25 km von zu Hause entfernt, geht Ihnen der Sprit aus. Das Schwungrad dreht sich mit Maximaldrehzahl. Hat es genug Energie gespeichert, um Sie nach Hause zu bringen? (Wenn Sie auf der Landstraße mit 70,0 km/h fahren, werden durch Luftwiderstand und Reibung 10,0 kW dissipiert.)

Problembeschreibung: Die kinetische Energie berechnet man direkt aus der Formel $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I\omega^2$. Die durch Reibung und Luftwiderstand dissipierte Energie berechnen Sie aus der angegebenen Dissipationsleistung von 10,0 kW mal der Zeit, die Sie benötigen, die 25 km zurückzulegen. Ein Vergleich der beiden Energien beantwortet dann die Frage.

Lösung: 1. Die kinetische Energie der Rotation ist:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

2. Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Hohlzylinders. Verwenden Sie dazu einen Ausdruck aus Tabelle 8.1:

$$I = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2) = 11,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

3. Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit ω in $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ an:

$$\omega = 30000 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1} = 3142 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. Setzen Sie diese Werte ein, um die kinetische Energie zu berechnen:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = 54,9 \text{ MJ}$$

5. Bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h wird die Leistung 10 kW dissipiert. Um die Energie zu berechnen, die während der Strecke von 25 km dissipiert wird, brauchen Sie die Zeit, in der diese Strecke zurückgelegt wird:

$$\Delta x = v \Delta t, \quad \text{also} \quad \Delta t = \frac{25}{70} \text{ h} = 1285 \text{ s}$$

6. Es wird während 1285 s die Leistung 10 kW dissipiert, d. h. 10 kJ pro Sekunde. Die dissipierte Gesamtenergie ist dann:

$$12,85 \text{ MJ} \approx 13 \text{ MJ}$$

7. Reicht die Energie für die Heimfahrt? 54,9 MJ sind gespeichert, 13 MJ werden dissipiert.

Ja, die gespeicherte Energie ist mehr als ausreichend.

Plausibilitätsprüfung: In 11 Treibstoff sind etwa 35 MJ Energie enthalten. Bei einem Gesamtwirkungsgrad von 10 % im Stadtverkehr werden effektiv nur 3,5 MJ für die Fortbewegung eingesetzt. Die in dem Schwungrad enthaltene Anfangsenergie von 54,9 MJ entspräche damit einem Tankinhalt von über 15 l Benzin, was mehr als genug für Ihren Heimweg von 25 km ist. ■

Beispiel 8.7: Einseitig aufgehängter Stab I

Ein gleichförmiger dünner Stab der Länge l_0 und der Masse m_0 ist an einem Ende drehbar aufgehängt, wie in Abbildung 8.14 gezeigt. Er wird horizontal gehalten und dann losgelassen. Nehmen Sie an, die Lagerung wäre reibungsfrei und der Luftwiderstand zu vernachlässigen. Berechnen Sie a) die Winkelgeschwindigkeit des Stabs, wenn er die vertikale Lage erreicht, und b) die Kraft, die dann auf die Lagerung ausgeübt wird.

8.3 Berechnung von Trägheitsmomenten

c) Welche Anfangswinkelgeschwindigkeit müsste der Stab haben, damit er bis in die vertikale Lage nach oben schwingt?

Problembeschreibung: Unser System ist die Erde und alles weitere aus Abbildung 8.14. a) Während der Stab nach unten schwingt, nimmt seine potentielle Energie ab, und die kinetische Energie nimmt zu. Da die Lagerung reibungsfrei ist, bleibt die mechanische Energie erhalten. Die Winkelgeschwindigkeit des Stabs lässt sich aus seiner kinetischen Rotationsenergie bestimmen. b) Um die Kraft auf die Lagerung zu berechnen, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom für ein System auf den Stab an. c) Wie in Teil a wenden wir den Erhaltungssatz für die mechanische Energie an.

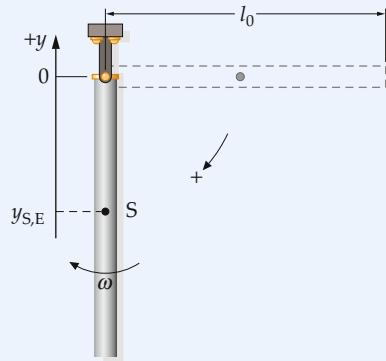


Abbildung 8.14 System des drehbar aufgehängten Stabs.

Lösung:

Teilaufgabe a)

1. Zeichnen Sie ein Diagramm mit der Anfangs- und Endstellung des Stabs (Abbildung 8.14). Fügen Sie eine vertikale Koordinatenachse ein; die positive y-Achse soll nach oben zeigen und der Koordinatenursprung im Drehpunkt liegen.

2. Wenden Sie die Erhaltungssätze für die mechanische Energie (E_{kin} und E_{pot}) an, um den Zusammenhang von Anfangs- und Endenergie zu bestimmen:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},E} + E_{\text{pot},E} &= E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A} \\ \frac{1}{2} I \omega_E^2 + m_0 g y_{S,E} &= \frac{1}{2} I \omega_A^2 + m_0 g y_{S,A} \\ \frac{1}{2} I \omega_E^2 + m_0 g \left(-\frac{l_0}{2} \right) &= 0 + 0 \end{aligned}$$

3. Lösen Sie nach ω_E auf:

$$\omega_E = \sqrt{\frac{m_0 g l_0}{I}}$$

8 Drehbewegungen

4. Entnehmen Sie der Tabelle 8.1 das Trägheitsmoment I und setzen Sie es in das Ergebnis von Schritt 3 ein:

$$\omega_E = \sqrt{\frac{m_0 g l_0}{\frac{1}{3} m_0 l_0^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{l_0}}}$$

Teilaufgabe b

1. Zeichnen Sie das Kräftediagramm für den Stab, wenn er beim Herunterschwingen durch die vertikale Lage geht (Abbildung 8.15).

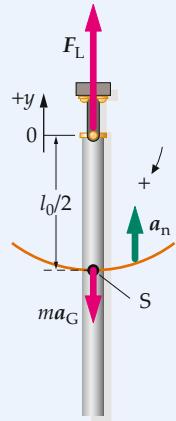


Abbildung 8.15 Kräftediagramm des Stabs im tiefsten Punkt der Schwingungsbewegung.

2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für Systeme auf den Stab an. Wenn sich der Stab durch den tiefsten Punkt bewegt, erfährt der Massenmittelpunkt eine Beschleunigung a_n in zentripetaler (nach oben weisender) Richtung. Mit F_{ext} bezeichnen wir die äußeren Kräfte auf den Stab, die auf die Lagerung ausgeübt Kraft ist F_L :

$$\sum F_{ext,y} = m_0 a_n$$

$$F_L - m_0 g = m_0 a_n$$

3. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Beschleunigung des Massenmittelpunkts und der Winkelgeschwindigkeit her, indem Sie die Formel $a_S = a_n = r \omega_E^2$ anwenden. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 4 der Teilaufgabe a für ω_E ein und lösen Sie nach a_n auf:

$$a_n = r \omega_E^2$$

$$a_n = \frac{l_0}{2} \frac{3g}{l_0} = \frac{3}{2} g$$

4. Setzen Sie das Ergebnis in Schritt 2 der Teilaufgabe b ein und berechnen Sie die Kraft F_L auf die Lagerung:

$$\begin{aligned} F_L &= m_0 g + m_0 a_n = m_0 g + m_0 \frac{3}{2} g \\ &= \boxed{\frac{5}{2} m_0 g} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Zeichnen Sie den Stab in seiner Anfangs- und Endlage (Abbildung 8.16). Fügen Sie dieselbe Koordinatenachse wie in Aufgabenteil a ein (die positive y-Achse zeigt nach oben, der Koordinatenursprung liegt im Drehpunkt).

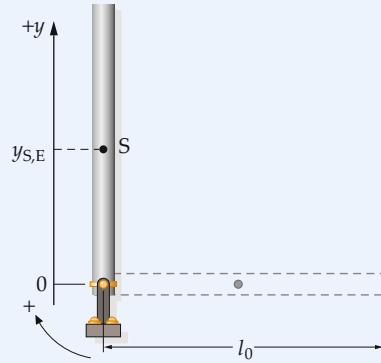


Abbildung 8.16 Skizze des Stabs mit vertikal nach oben gerichteter Endlage.

2. Die Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_A hängt folgendermaßen mit der kinetischen Anfangsenergie zusammen:

$$E_{kin,A} = \frac{1}{2} I \omega_A^2$$

3. Wenden Sie den Energieerhaltungssatz mit $E_{kin,E} = 0$ und $E_{pot,A} = 0$ an, um einen Zusammenhang zwischen der kinetischen Anfangs- und Endenergie herzustellen:

$$E_{kin,E} + E_{pot,E} = E_{kin,A} + E_{pot,A}$$

$$\frac{1}{2} I \omega_E^2 + m_0 g y_{S,E} = \frac{1}{2} I \omega_A^2 + m_0 g y_{S,A}$$

$$0 + m_0 g \frac{l_0}{2} = \frac{1}{2} I \omega_A^2 + 0$$

4. Lösen Sie nach der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit auf:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{m_0 g l_0}{I}} = \sqrt{\frac{m_0 g l_0}{\frac{1}{3} m_0 l_0^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{l_0}}}$$

Kommentar: Es ist kein Zufall, dass die Lösungen für die Teilaufgaben a und c identisch sind. Die Abnahme der potenziellen Energie in Teil a ist genauso groß wie die Zunahme der potenziellen Energie in Teil c. Daher sind auch die Zunahme der kinetischen Energie in Teil a und die Abnahme der kinetischen Energie in Teil c gleich. ■

Beispiel 8.8: Die Seilwinde

ZUR ÜBUNG

Über einem tiefen Brunnen befindet sich eine Seilwinde, mit der man einen Eimer herablassen und wieder hochziehen kann. Ihre Trommel hat die Masse m_{Trommel} und den Radius r ; sie ist geformt wie ein Hohlzylinder, d. h., die gesamte Masse scheint in einem Abstand r von der Drehachse konzentriert. Um die Trommel ist ein Seil gewunden, an dem ein Eimer mit der Masse m_{Eimer} hängt. Das Seil hat die Masse m_{Seil} und die Länge l_0 . Gerade als Sie den Eimer ganz nach oben gezogen haben, rutschen Sie ab, und der Eimer fällt wieder in die Tiefe. Dabeiwickelt sich das Seil bis zum Schluss von der Trommel ab. Wie schnell bewegt sich der Eimer nach einer Strecke d , wenn d kleiner ist als die Seillänge l_0 ? (Nehmen Sie an, dass Sie die Wirkung von Reibung und Luftwiderstand vernachlässigen können.)

Problembeschreibung: Während der Eimer nach unten fällt, bleibt die mechanische Energie des Systems Seilwinde–Seil–Eimer–Erde erhalten. Die anfängliche potentielle Energie soll null sein. Wenn der Eimer die Strecke d gefallen ist, dann ist der Massenmittelpunkt des hängenden Seils um die Strecke $d/2$ gefallen. Da der hängende Teil des Seils sich mit der Geschwindigkeit v bewegt und das Seil sich weder dehnt noch schlaff wird, muss sich das gesamte Seil mit der Geschwindigkeit v bewegen. Der Betrag von v lässt sich mithilfe der Energieerhaltung berechnen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Zeichnen Sie das System in seinem Anfangs- und in seinem Endzustand (Abbildung 8.17). Fügen Sie eine y -Achse ein; der Ursprung liegt im Mittelpunkt der Winde (Drehachse).

2. Wenden Sie den Energieerhaltungssatz an. Die potentielle Energie E_{pot} soll null sein, wenn sich der Wassereimer in seinem höchsten Punkt befindet.

3. Berechnen Sie die gesamte potentielle Energie, wenn der Wassereimer die Höhe d gefallen ist. Mit m'_{Seil} bezeichnen wir die Masse des von der Winde abgewickelten, herunterhängenden Teils des Seils.

4. Geben Sie die kinetische Gesamtenergie an, wenn der Eimer mit der Geschwindigkeit v fällt. Das gesamte Seil und die gesamte Masse der Trommel bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit v wie der Eimer.

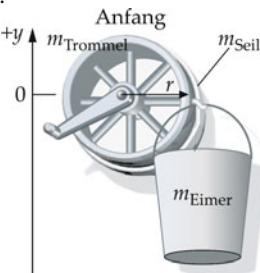
5. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 3 und 4 in den Energieerhaltungssatz (Schritt 2) ein und lösen Sie nach v auf.

6. Nehmen Sie an, das Seil sei gleichförmig; drücken Sie dann m'_{Seil} mithilfe von m_{Seil} , d und l_0 aus.

7. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 6 in das aus Schritt 5 ein.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.



2.

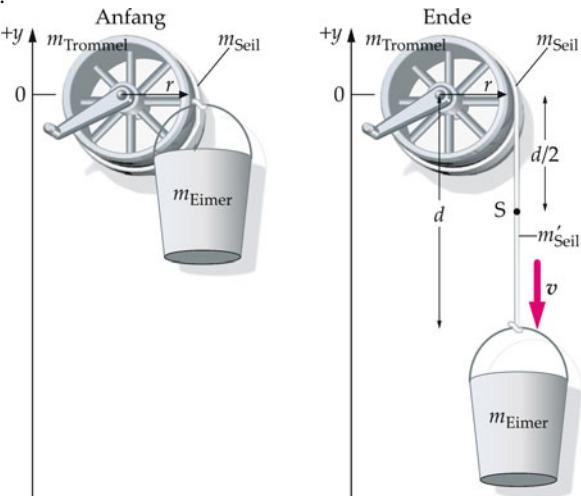


Abbildung 8.17 Anfangs- und Endlage des Systems.

3.

$$\begin{aligned} E_{\text{pot,E}} &= E_{\text{pot,Eimer}} + E_{\text{pot,Seil}} + E_{\text{pot,Trommel}} \\ &= m_{\text{Eimer}} g (-d) + m'_{\text{Seil}} g \left(-\frac{d}{2} \right) + 0 \\ &= -(m_{\text{Eimer}} + \frac{1}{2} m'_{\text{Seil}}) g d \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,E}} &= E_{\text{kin,Eimer}} + E_{\text{kin,Seil}} + E_{\text{kin,Trommel}} \\ &= \frac{1}{2} m_{\text{Eimer}} v^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Seil}} v^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Trommel}} v^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_{\text{Eimer}} + m_{\text{Seil}} + m_{\text{Trommel}}) v^2 \end{aligned}$$

5.

$$-(m_{\text{Eimer}} + \frac{1}{2} m'_{\text{Seil}}) g d + \frac{1}{2} (m_{\text{Eimer}} + m_{\text{Seil}} + m_{\text{Trommel}}) v^2 = 0$$

sodass

$$v = \sqrt{\frac{(2m_{\text{Eimer}} + m'_{\text{Seil}}) g d}{(m_{\text{Eimer}} + m_{\text{Seil}} + m_{\text{Trommel}})}}$$

6.

$$\frac{m'_{\text{Seil}}}{d} = \frac{m_{\text{Seil}}}{l_0} \Rightarrow m'_{\text{Seil}} = \frac{d}{l_0} m_{\text{Seil}}$$

7.

$$v = \sqrt{\frac{(2m_{\text{Eimer}} l_0 + m_{\text{Seil}} d) g d}{(m_{\text{Eimer}} + m_{\text{Seil}} + m_{\text{Trommel}}) l_0}}$$

Plausibilitätsprüfung: Zur Überprüfung führen wir eine Dimensionsbetrachtung durch. Das Ergebnis in Schritt 7 hat die richtige Dimension für eine Geschwindigkeit, denn Beschleunigung mal Länge hat die Dimension einer Länge zum Quadrat geteilt durch Zeit zum Quadrat.

Weitergedacht: Da sich die gesamte Masse der Seiltrommel ebenfalls mit der Geschwindigkeit v bewegt, lässt sich ihre kinetische Energie als $\frac{1}{2}m_{\text{Trommel}}v^2$ ausdrücken. Die kinetische Energie ist aber auch $\frac{1}{2}I_{\text{Trommel}}\omega^2$ mit $I_{\text{Trommel}} = m_{\text{Trommel}}r^2$ und $\omega = v/r$. Setzt man dies ein, so ergibt sich die kinetische Energie zu $E_{\text{kin,Trommel}} = \frac{1}{2}I_{\text{Trommel}}\omega^2 = \frac{1}{2}m_{\text{Trommel}}r^2(v^2/r^2) = \frac{1}{2}m_{\text{Trommel}}v^2$.

8.4 Das Drehmoment

Um einen Kreisel zum Rotieren zu bringen, muss man ihn „an-drehen“. Abbildung 8.18 zeigt, wie eine Scheibe durch zwei Kräfte F_1 und F_2 in Drehung versetzt wird, die am Rand der Scheibe in tangentialer Richtung angreifen. Die Richtung der Kräfte ist wesentlich: Wirken die beiden Kräfte in radialer Richtung (Abbildung 8.19a), dreht sich die Scheibe nicht. Wenn dieselben Kräfte zwar in tangentialer Richtung, aber an Punkten nahe dem Scheibenmittelpunkt angreifen (Abbildung 8.19b), wird sich die Scheibe zwar drehen, allerdings nicht so schnell.

Drehmoment bezüglich einer Achse

Abbildung 8.20 zeigt ein Teilchen der Masse m , das an der Spitze eines masselosen starren Stabs der Länge r angebracht ist. Der Stab kann um eine Achse am anderen Ende des Stabs rotieren. Dann muss sich das Teilchen auf einer Kreisbahn vom Radius r bewegen. Wenn eine einzige Kraft F in der gezeigten Weise auf das Teilchen wirkt, dann können wir das zweite Newton'sche Axiom auf das Teilchen anwenden. Eine Komponentenbetrachtung ergibt

$$F_t = m a_t .$$

Dabei ist $F_t = F \sin \varphi$ die Tangentialkomponente von F , a_t ist die Tangentialkomponente der Beschleunigung. Wir wollen nun

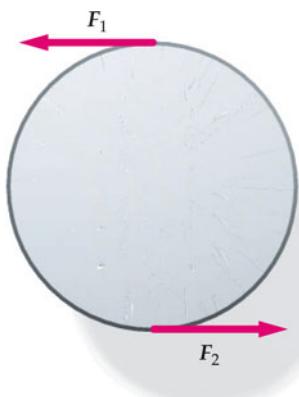


Abbildung 8.18 Eine Scheibe wird durch zwei tangential angreifende Kräfte in Drehung versetzt.

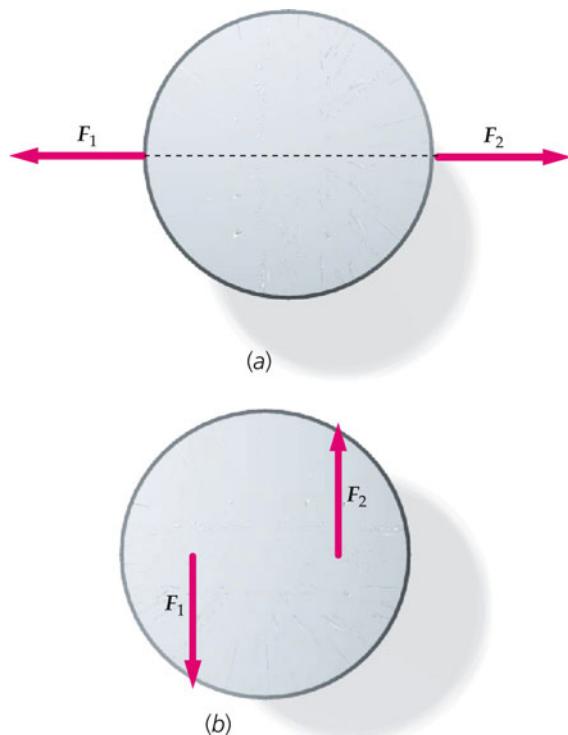


Abbildung 8.19 a) Zwei radial angreifende Kräfte versetzen die Scheibe nicht in Drehung. b) Greifen die Kräfte tangential dicht am Scheibenmittelpunkt an, dreht sich die Scheibe langsamer, als wenn sie am Rand der Scheibe angreifen.

eine Gleichung ableiten, in der die Drehgrößen mitenthalten sind. Ersetzen wir a_t durch $r\alpha$ (Gleichung 8.9) und multiplizieren beide Seiten mit r , ergibt sich

$$r F_t = m r^2 \alpha . \quad (8.17)$$

Das Produkt $r F_t$ heißt das mit der Kraft verbundene **Drehmoment** M :

$$M = F_t r . \quad (8.18)$$

DREHMOMENT BEZÜGLICH EINER ACHSE

Solange das Drehmoment, wie in diesem Abschnitt, sich auf eine Achse bezieht und daher nur eine Komponente besitzt, gilt

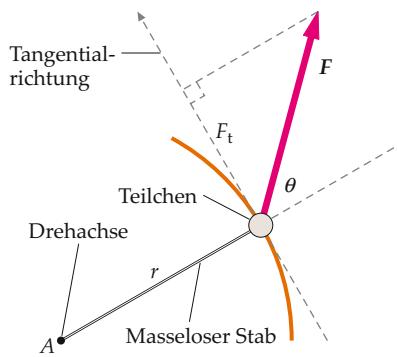


Abbildung 8.20 Ein Teilchen mit der Masse m ist durch einen masselosen Stab in seiner Bewegung auf eine Kreisbahn mit dem Radius r beschränkt. Wirkt eine Kraft F auf das Teilchen, so kann man für die Tangentialkomponente der Kraft das zweite Newton'sche Axiom anwenden.



Abbildung 8.21 Die Kraft F erzeugt ein Drehmoment $F_t r$ bezüglich der Drehachse.

Mit einem Drehmomentschlüssel kann man beim Eindrehen von Rohrverbindungen ein vorgegebenes Drehmoment exakt einhalten und läuft nicht Gefahr, die Verbindung zu überdrehen. (© akatz66 - Fotolia.com.)

$M = r F_t = F_t r$. Im allgemeinen Fall für das Drehmoment bezüglich eines Punkts, den wir in diesem Abschnitt auch noch behandeln werden, ist die Reihenfolge von r und F_t von großer Bedeutung. Das Drehmoment *bezüglich eines Punkts* ist wie die Winkelgeschwindigkeit ein Vektor. Das an dieser Stelle definierte Drehmoment *bezüglich einer Achse* ist die Komponente des Drehmomentvektors, die parallel zur Achse liegt.

Setzt man die Definition des Drehmoments in Gleichung 8.17 ein, erhält man

$$M = m r^2 \alpha. \quad (8.19)$$

Einen starren Körper, der um eine feste Achse rotiert, kann man sich als eine Ansammlung von einzelnen Teilchen denken, von denen sich jedes auf einer Kreisbahn bewegt. Alle Teilchen haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω und dieselbe Winkelbeschleunigung α . Mit Gleichung 8.19 gilt für das i -te dieser Teilchen

$$M_i = m_i r_i^2 \alpha.$$

Dabei ist M_i das Drehmoment, das mit der Gesamtkraft auf das i -te Teilchen verbunden ist. Summiert man beide Seiten dieser

Gleichung über alle Teilchen, ergibt sich

$$\sum M_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \alpha = I \alpha. \quad (8.20)$$

In Kapitel 7 haben wir gesehen, dass die resultierende Kraft auf ein Teilchensystem gleich der Summe der resultierenden äußeren Kräfte ist, die auf das System wirken, da die inneren Kräfte sich paarweise neutralisieren. Die Behandlung von inneren Drehmomenten, die die Teilchen des Systems aufeinander ausüben, führt zu einem ähnlichen Ergebnis: Das resultierende Drehmoment auf ein System ist gleich der Summe der resultierenden äußeren Drehmomente, die auf das System wirken. Gleichung 8.20 lautet dann

$$M_{\text{ext}} = \sum M_{\text{ext},i} = I \alpha. \quad (8.21)$$

ZWEITES NEWTON'SCHES AXIOM FÜR DREHBEWEGUNGEN

Das ist für die Drehbewegung das Analogon für das zweite Newton'sche Axiom der Linearbewegung: $\sum F_{\text{ext}} = m a$.

Eine Kraft F wirkt auf eine Scheibe, die in ihrem Mittelpunkt O drehbar gelagert ist (Abbildung 8.21). Die Drehachse A (in der Abbildung nicht sichtbar) verläuft durch O und steht senkrecht zur Zeichenebene. Die Kraft lässt sich zerlegen in eine radiale und eine tangentielle Komponente. Die positive tangentielle Richtung ist im Angriffspunkt der Kraft eingezeichnet; r ist der radiale Abstand zwischen diesem Punkt und der Drehachse.

Das Drehmoment M bezüglich der Achse A , das durch die Kraft verursacht wird, ist $M = F_t r$ (Gleichung 8.18). Im Prinzip reicht der Ausdruck $F_t r$ aus, um das Drehmoment zu berechnen. In der Praxis lässt sich die Rechnung jedoch oft vereinfachen, wenn man andere Ausdrücke für das Drehmoment verwendet. Aus der Abbildung liest man ab:

$$F_t = F \sin \theta.$$

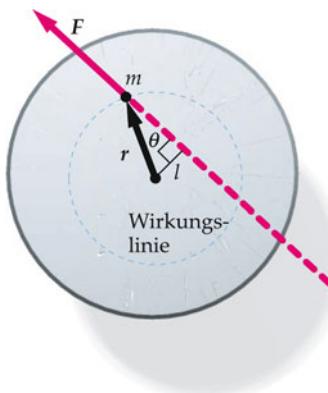


Abbildung 8.22 Die Kraft F erzeugt ein Drehmoment M bezüglich der Drehachse. Die sogenannte Wirkungslinie der Kraft verläuft parallel zur Kraftrichtung durch den Angriffspunkt der Kraft. Der Abstand l zwischen der Drehachse und der Wirkungslinie heißt Hebelarm.

Hierbei ist θ der Winkel zwischen der radialen Richtung und der Kraftrichtung. Damit lässt sich das Drehmoment ausdrücken als $M = F_t r = (F \sin \theta) r$. Die **Wirkungslinie** einer Kraft ist eine Parallelle zur Kraftrichtung, die durch den Angriffspunkt der Kraft verläuft (Abbildung 8.22).

Es gilt der Zusammenhang $r \sin \theta = l$, wobei der **Hebelarm** l der senkrecht gemessene Abstand zwischen der Drehachse A und der Wirkungslinie der Kraft ist. Drehmoment und Hebelarm hängen gemäß $M = Fl$ zusammen. Damit haben wir drei gleichwertige Ausdrücke für das Drehmoment:

$$M = F_t r = Fr \sin \theta = Fl. \quad (8.22)$$

GLEICHWERTIGE AUSDRÜCKE FÜR DAS DREHMOMENT

Das Drehmoment einer Kraft bezüglich einer Achse wird auch als **Kraftmoment** bezeichnet.

Drehmoment bezüglich eines Punkts

Bisher haben wir nur Drehmomente bezüglich bestimmter Achsen berechnet. Der Zusammenhang zwischen dem Drehmoment bezüglich einer Achse und dem Drehmoment bezüglich eines Punkts ist jedoch sehr einfach herzustellen: Wenn eine Kraft F ein Drehmoment M bezüglich des Ursprungs O ausübt, dann ist das entsprechende Drehmoment bezüglich der z -Achse gerade M_z , also die z -Komponente von M . Dabei bezeichnet man M_z als die SkalarKomponente in z -Richtung und $M_z = M_z \hat{z}$ als VektorKomponente in z -Richtung, wobei \hat{z} der Einheitsvektor in diese Richtung ist.

! Verwechseln Sie nicht das Drehmoment bezüglich eines Punkts mit dem Drehmoment bezüglich einer Achse. Das Drehmoment einer Kraft bezüglich der z -Achse ist die z -Komponente des

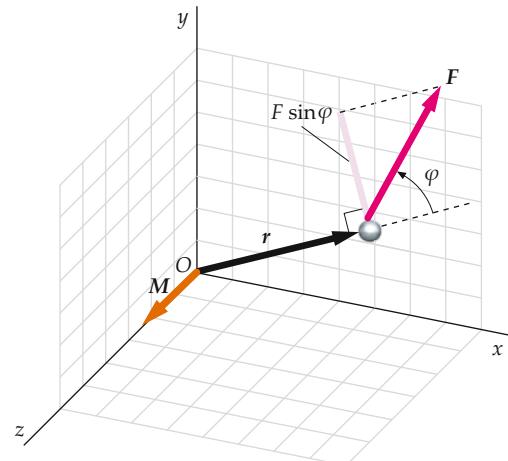


Abbildung 8.23 Das Drehmoment M bezüglich des Ursprungs O , das durch die Kraft F auf ein Teilchen am Ort r ausgeübt wird, steht senkrecht sowohl auf F als auch auf r . Im hier gezeigten Fall liegen r und F in der x - y -Ebene, das Drehmoment M ist also parallel zur z -Achse. Der Betrag des Drehmoments ist $|r| |F| \sin \varphi$.

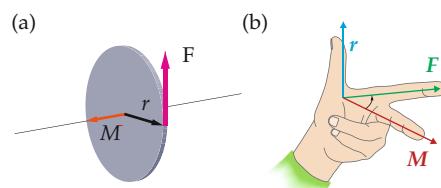


Abbildung 8.24 a) Für den Fall, dass eine Kraft F tangential am Rand einer Scheibe angreift, hat das Drehmoment den maximal möglichen Betrag $|r| |F|$. b) Drei-Finger-Regel zur Bestimmung der Richtung von M .

Drehmoments dieser Kraft bezüglich eines beliebigen Punkts auf der z -Achse.

Während man die Richtung eines Drehmoments bezüglich einer Achse mithilfe von Plus- und Minuszeichen eindeutig festlegen kann, benötigt man für das Drehmoment bezüglich eines Punkts eine vektorielle Größe, deren Richtung genau wie die von v_t durch eine Drei-Finger-Regel festgelegt werden kann: Abbildung 8.23 zeigt eine Kraft F , die auf ein Teilchen am Ort r bezüglich des Ursprungs O wirkt. Das durch diese Kraft verursachte Drehmoment M bezüglich des Ursprungs O ist definiert als ein Vektor, der senkrecht auf der durch r und F definierten Ebene steht und den Betrag $|r| |F| \sin \varphi$ hat; dabei ist φ der Winkel zwischen r und F . Wenn r und F in der x - y -Ebene liegen (wie in Abbildung 8.23), verläuft der Drehmomentvektor entlang der z -Achse. Wenn F tangential auf den Rand einer Scheibe vom Radius r wirkt (Abbildung 8.24a), dann hat der Drehmomentvektor den Betrag $|r| |F|$, da der Winkel φ zwischen r und F 90° beträgt. Er verläuft daher, wie zu sehen, entlang der Drehachse. Seine Richtung kann mit der Drei-Finger-Regel aus Abbildung 8.24b bestimmt werden.

Analog zu Gleichung 8.11, in der die Tangentialgeschwindigkeit sich als Vektorprodukt zwischen \mathbf{r} und $\boldsymbol{\omega}$ formulieren ließ, kann man das Drehmoment bezüglich eines Punkts ebenfalls als Vektorprodukt ausdrücken:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (8.23)$$

DREHMOMENT BEZÜGLICH EINES PUNKTS

Der Betrag des Drehmoments ist dann, ähnlich zu Gleichung 8.12, gegeben als

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \varphi. \quad (8.24)$$

BETRAG DES DREHMOMENTS BEZÜGLICH EINES PUNKTS

Wir haben gesehen, dass sich ein Satz mehrerer paralleler Kräfte durch eine einzelne Kraft ersetzen lässt, für die gilt: Sie muss gleich der Summe der einzelnen Kräfte sein, und sie muss an einem ganz bestimmten Punkt angreifen, sodass sie bezüglich eines beliebigen anderen Punkts dasselbe Drehmoment erzeugt wie die parallelen Kräfte. Wenn zwei an verschiedenen Punkten angreifende Kräfte aber betragsmäßig gleich sind, jedoch in entgegengesetzte Richtungen wirken und damit unterschiedliche Wirkungslinien haben, dann kann man sie nicht durch eine einzelne Kraft ersetzen. Sie verursachen eine Drehbewegung, obwohl die Summe der Kräfte null ergibt. Zwei solche Kräfte nennt man ein **Kräftepaar**.

Betrachten wir das Kräftepaar in Abbildung 8.25. Die beiden Kräfte \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 sind entgegengesetzt gleich, aber nicht kollinear. Ihre Wirkungslinien haben den Abstand d . Dieses Kräftepaar erzeugt ein Drehmoment bezüglich eines beliebigen Punkts O , nämlich

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}_1) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_2 \end{aligned}$$

mit

$$|\mathbf{M}| = d |\mathbf{F}| = d |\mathbf{F}_1| = d |\mathbf{F}_2|.$$

Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl des Punkts O ab:

Das Drehmoment, das von einem Kräftepaar erzeugt wird, ist bezüglich jedes Punkts im Raum gleich.

Immer wenn sich ein Körper unter dem Einfluss von drei nicht parallelen Kräften im Gleichgewicht befindet, müssen sich die Wirkungslinien dieser Kräfte in demselben Punkt schneiden.

Das Drehmoment bezüglich einer Achse lässt sich aus Gleichung 8.23 als Spezialfall formulieren, indem man nur diese

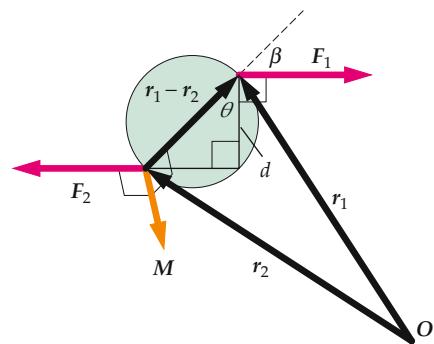


Abbildung 8.25 Zwei gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte von dem Betrag $|\mathbf{F}|$ bilden ein Kräftepaar. Das Drehmoment \mathbf{M} , das von dem gezeigten Kräftepaar erzeugt wird, zeigt in die Zeichenebene hinein, steht also senkrecht zu der durch die beiden Kräfte definierten Ebene. d ist der (senkrecht gemessene) Abstand zwischen den Wirkungslinien der Kräfte.

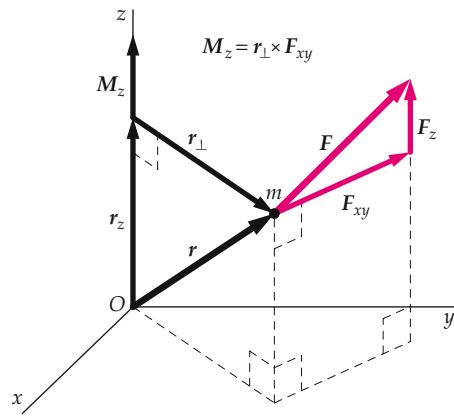


Abbildung 8.26 Die Kraft \mathbf{F} übt ein Drehmoment auf den Körper der Masse m bezüglich des Ursprungs O aus. Um das Drehmoment bezüglich der z -Achse zu berechnen, muss man Kraft- und Ortsvektor so zerlegen, dass die Komponenten in z -Richtung abgespalten werden.

Komponente des Vektorprodukts betrachtet. So ergibt sich z. B. für das Drehmoment bezüglich der z -Achse:

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{F}_{xy}. \quad (8.25)$$

Dabei sind, wie in Abbildung 8.26 gezeigt, \mathbf{M}_z , \mathbf{r}_{\perp} und \mathbf{F}_{xy} die Vektorkomponenten von \mathbf{M} , \mathbf{r} und \mathbf{F} . Hier ist \mathbf{r}_{\perp} die Komponente von \mathbf{r} in positiver radialer Richtung (d. h. radial von der z -Achse fortweisend), und \mathbf{F}_{xy} ist die Komponente, die zur z -Richtung senkrecht steht und damit in der x - y -Ebene liegt. Es gilt dann $\mathbf{F}_{xy} = \mathbf{F} - F_z \hat{z}$.

Anwendungsbeispiele

Zur Veranschaulichung und Übung zeigen die Beispiele 8.9 bis 8.13 Anwendungen. In Beispiel 8.9 vertiefen wir den Zusammenhang zwischen Drehmoment, Trägheitsmoment und Win-

kelgeschwindigkeit, Beispiel 8.10 greift Beispiel 8.7 wieder auf und beschreibt die Bewegung des Stabs mithilfe der Gleichungen des Drehmoments. Die Beispiele 8.11 und 8.12 beschäftigen sich mit den sogenannten **schlupffreien Drehungen**. Diese kommen in der Praxis oft vor, wenn ein Seil um ein rotierendes Rad oder einen Zylinder mit dem Radius r gewickelt ist. Das Seil muss sich dann mit einer tangentialen Geschwindigkeit bewegen, die gleich der tangentialen Geschwindigkeit des Radrands ist – vorausgesetzt, das Seil bleibt straff gespannt und „rutscht“ nicht durch. Man spricht dann von einer schlupffreien Bewegung:

$$v_t = r \omega . \quad (8.26)$$

ZUSAMMENHANG VON v_t UND ω BEI SCHLUPFFREIER DREHUNG:
ROLLBEDINGUNG

Dabei ist v_t die Tangentialgeschwindigkeit des Seils und $r \omega$ die Tangentialgeschwindigkeit des Radrands. Das Rad hat den Radius r und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Differenziation beider Seiten dieser Gleichung nach der Zeit ergibt

$$a_t = r \alpha . \quad (8.27)$$

ZUSAMMENHANG VON a_t UND α BEI SCHLUPFFREIER DREHUNG

Hier ist a_t die Tangentialbeschleunigung des Seils und α die Winkelbeschleunigung des Rads.

Gehen Sie nicht davon aus, dass die Zugkräfte in einem über eine Rolle laufenden Seil auf beiden Seiten der Rolle gleich sind. Wenn das so wäre, würde das Seil kein Drehmoment auf die Rolle ausüben, und damit könnte sich die Drehgeschwindigkeit der Rolle nicht ändern. Benutzen Sie daher stets zwei unterschiedliche Bezeichnungen für die Seilkräfte auf den beiden Seiten der Rolle.

Beispiel 8.9: Indoor-Biking

Um sich körperlich zu ertüchtigen, ohne durch die Gegend fahren zu müssen, montieren Sie ihr Fahrrad auf einen Ständer, sodass sich das Hinterrad in der Luft drehen kann. (Diese Art Fahrrad zu fahren, bezeichnet man auch als Indoor-Biking.) Beim Treten übt die Kette eine Kraft von 18 N auf den Zahnkranz aus, der einen Radius von $r_Z = 7,0$ cm hat. Betrachten Sie das Hinterrad als einen Ring ($I = m r^2$) mit einem Radius von $r = 35$ cm und einer Masse von 2,4 kg. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des Rads nach 5,0 s?

Problembeschreibung: Es handelt sich um eine Drehung um eine Achse. Diese steht senkrecht auf der Ebene, in der sich das Rad dreht. Die Winkelgeschwindigkeit erhält man aus der Winkelbeschleunigung, die sich mithilfe des

zweiten Newton'schen Axioms für Drehbewegungen berechnen lässt. Da die Kräfte konstant sind, sind auch die Drehmomente konstant, und wir können die Gleichungen für konstante Winkelbeschleunigung anwenden. Beachten Sie, dass F in Richtung der Kette wirkt. Die Wirkungslinie der Kraft verläuft daher tangential zum Zahnkranz, dessen Radius r_Z zugleich den Hebelarm angibt (Abbildung 8.27).

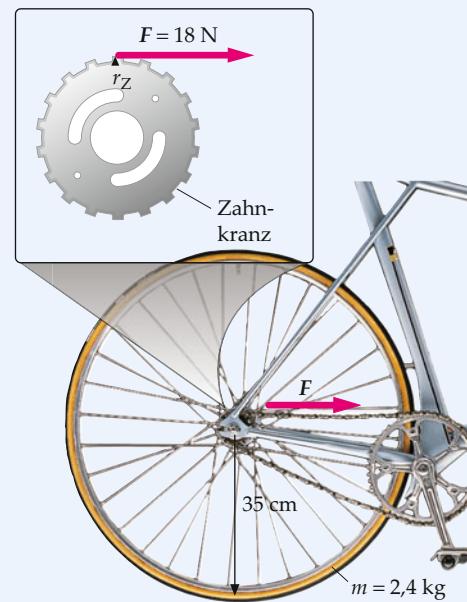


Abbildung 8.27 Darstellung des Kraftverlaufs am Zahnkranz.

Lösung 1. Die Winkelgeschwindigkeit hängt folgendermaßen mit der Winkelbeschleunigung und der Zeit zusammen:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$$

2. Das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen stellt einen Zusammenhang zwischen der Winkelbeschleunigung α , dem Drehmoment M_{ext} und dem Trägheitsmoment I her:

$$M_{\text{ext}} = I \alpha$$

3. Das einzige auf das System wirkende Drehmoment wird von der durch die Kette übertragenen Kraft F mit dem Hebelarm r_Z erzeugt:

$$M_{\text{ext}} = F r_Z$$

4. Lösen Sie die Formel von Schritt 2 nach α auf und setzen Sie die Werte für das Drehmoment und für das Trägheitsmoment $I = m r^2$ ein:

$$\alpha = \frac{M_{\text{ext}}}{I} = \frac{F r_Z}{m r^2}$$

Vorgehensweise: Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms für Drehbewegungen

Winkelbeschleunigungen für starre Körper lassen sich mithilfe von Kräftediagrammen und dem zweiten Newton'schen Axiom für Drehbewegungen berechnen (d.h. $M_{\text{ext}} = \sum M_{\text{ext},i} = I \alpha$). Ist M_{ext} konstant, dann können die Gleichungen für konstante Winkelbeschleunigung (Gleichung 8.5 bis 8.7) angewendet werden. Die Zeiten und Drehwinkel, Geschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen kann man dann mithilfe dieser Gleichungen bestimmen. Gleichung 8.22 gibt zudem die Möglichkeit, die wirkende Kraft, den Hebelarm oder den Radius der Kreisbewegung des betrachteten Teilchens auszurechnen.

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm und zeichnen Sie die Körper darin grundsätzlich so, wie sie in den Abbildungen erscheinen, und nicht einfach nur als Punkt.
2. Zeichnen Sie jeweils die Angriffspunkte aller auftretenden Kräfte ein und bestimmen Sie, ob es sich um eine Drehung bezüglich eines Punkts oder einer Achse handelt.
3. Erfolgt die Drehung um einen Punkt, bestimmen Sie mithilfe der Drei-Finger-Regel die Richtung der Winkelgeschwindigkeit oder des Drehmoments und benutzen Sie die Vektorrelationen, um die gesuchten Größen zu bestimmen. Handelt es sich um eine Drehung um eine bestimmte Achse, genügen Vorzeichen, um die Drehrichtung festzulegen. Die Drehrichtung ist positiv bei einer Drehung im Uhrzeigersinn, wenn Sie in Richtung der Drehachse schauen, und negativ entgegen dem Uhrzeigersinn.

Plausibilitätsprüfung: Stellen Sie sicher, dass die Vorzeichen Ihrer Ergebnisse mit Ihrer Festlegung der positiven Drehrichtung übereinstimmen, bzw. überprüfen Sie am Ende noch einmal die Richtung der Vektoren (\mathbf{r} , \mathbf{v}_t und $\boldsymbol{\omega}$ bilden ein Rechtssystem, genauso wie \mathbf{r} , \mathbf{F} und \mathbf{M}).

5. Setzen Sie dies in Schritt 1 ein und lösen Sie nach der Winkelgeschwindigkeit nach 5,0 s auf:

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha t = \frac{Fr_Z}{mr^2} t = \frac{(18 \text{ N})(0,070 \text{ m})}{(2,4 \text{ kg})(0,35 \text{ m})^2} 5,0 \text{ s} \\ &= 21,4 \text{ rad/s} = [21 \text{ rad/s}]\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Für die Tangentialgeschwindigkeit an der Felge des Rads ergibt sich $r\omega = (0,35 \text{ m}) \cdot (21 \text{ rad/s}) = 7,4 \text{ m/s}$, eine durchaus plausible Geschwindigkeit (ein Weltklassesprinter erreicht Geschwindigkeiten über 10 m/s). ■

Beispiel 8.10: Einseitig aufgehängter Stab II

Ein gleichförmiger dünner Stab der Länge l_0 und der Masse m_0 ist an einem Ende reibungsfrei gelagert. Er wird horizontal gehalten und dann losgelassen. Berechnen Sie a) die Winkelbeschleunigung des Stabs unmittelbar nach dem Loslassen und b) den Betrag der Kraft F_A , die von dem Stab in diesem Augenblick auf die Aufhängung ausgeübt wird.

Problembeschreibung: Die Winkelbeschleunigung lässt sich mit dem zweiten Newton'schen Axiom für Rotationsbewegungen

berechnen (Gleichung 8.21). Die Kraft F_A findet man mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms für Systeme (Gleichung 7.15). Die tangentiale Beschleunigung a_t des Massenmittelpunkts hängt mit der Winkelbeschleunigung (Gleichung 8.6) und die Zentripetalbeschleunigung des Massenmittelpunkts mit der Winkelgeschwindigkeit (Gleichung 8.7) zusammen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm des Stabs (Abbildung 8.28).

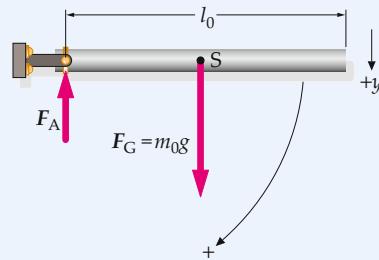


Abbildung 8.28 Kräftediagramm des einseitig aufgehängten Stabs.

2. Geben Sie das zweite Newton'sche Axiom für Rotationsbewegungen an:

$$M_{\text{ext}} = I \alpha$$

3. Berechnen Sie das Drehmoment aufgrund der Gravitation bezüglich der gegebenen Achse. Der Stab ist gleichförmig, sodass sich sein Massenmittelpunkt in seinem geometrischen Mittelpunkt, in der Entfernung $l_0/2$ von der Achse, befindet:

$$M_{\text{ext}} = M_G = m_0 g \frac{l_0}{2}$$

4. Schlagen Sie das Trägheitsmoment bezüglich eines Stabendes in Tabelle 8.1 nach:

$$I = \frac{1}{3} m_0 l_0^2$$

5. Setzen Sie diese Werte in die Gleichung aus Schritt 2 ein und lösen Sie nach der Winkelbeschleunigung α auf:

$$\alpha = \frac{M_G}{I} = \frac{m_0 g (l_0/2)}{(1/3) m_0 l_0^2} = \boxed{\frac{3g}{2l_0}}$$

Teilaufgabe b

1. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für Systeme auf den Stab an:

$$\sum F_{\text{ext}} = m_0 a_t \\ m_0 g + F_A = m_0 a_t$$

2. Berechnen Sie mit der Beziehung $a_n = r_S \omega^2$ die Zentripetalbeschleunigung a_n . Unmittelbar nach dem Loslassen ist $\omega = 0$:

$$a_n = r_S \omega^2 = \frac{l_0}{2} \omega^2 = 0$$

3. Damit haben Sie zwei Gleichungen für drei Unbekannte, nämlich α , a_t und F_A . Mit der Beziehung $a_t = r\alpha$ zwischen Tangentialbeschleunigung und Winkelbeschleunigung haben Sie einen weiteren Zusammenhang zwischen a_t und α :

$$a_t = r\alpha \\ a_t = r_S \alpha = \frac{l_0}{2} \frac{3g}{2l_0} = \frac{3}{4} g$$

4. Setzen Sie nun die Ergebnisse aus Schritt 3 in das Ergebnis von Schritt 1 ein und lösen Sie nach F_A auf:

$$\frac{m_0 g + F_A}{m_0} = a_t = \frac{3}{4} g$$

und damit

$$F_A = \boxed{-\frac{1}{4} m_0 g}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Drehachse übt eine aufwärts gerichtete Kraft auf den Stab aus. Folglich können wir erwarten, dass die Beschleunigung unmittelbar nach dem Loslassen etwas geringer ist als die Beschleunigung im freien Fall. Das Ergebnis von Schritt 3 im Aufgabenteil b erfüllt diese Erwartung.

Weitergedacht: Unmittelbar nachdem der Stab losgelassen wird, ist die Beschleunigung des Massenmittelpunkts direkt nach unten gerichtet. Da die resultierende äußere Kraft und die Beschleunigung in dieselbe Richtung gehen, kann F_A zu diesem Zeitpunkt keine horizontale Komponente haben und muss der Gewichtskraft $F_G = m g$ entgegengesetzt sein.

Übung 8.6: Ein Kieselstein mit einer viel kleineren Masse als der Stab ($m_K \ll m_0$) wird auf den Mittelpunkt des Stabs gelegt. Berechnen Sie a) die Beschleunigung des Kieselsteins unmittelbar nach dem Loslassen und b) die Kraft, die er dann auf den Stab ausübt. ◀ ■

Beispiel 8.11: Zugkraft in einem Seil

Ein Körper der Masse m ist an einem leichten Seil befestigt, das um eine Umlenkrolle mit dem Trägheitsmoment I , der Masse m_R und dem Radius r läuft. Die Rolle ist reibungsfrei gelagert, und das Seil läuft schlupffrei über die Rolle. Die Rolle steht anfangs still und wird beschleunigt, während der Körper nach unten sinkt und das Seil sich abwickelt. Berechnen Sie die Zugkraft in dem Seil und die Beschleunigung des Körpers.

Problembeschreibung: In diesem System bewegt sich der Körper durch eine abwärts gerichtete Beschleunigung a nach unten, während die Rolle sich mit der Winkelbeschleunigung α bewegt (Abbildung 8.29). Wir wenden das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen auf die Rolle an, um die Winkelbeschleunigung α zu berechnen, und bestimmen a mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms. Über die Rollbedingung lässt sich ein Zusammenhang zwischen a_t und α herstellen.



Abbildung 8.29 Darstellung der Umlenkrolle mitsamt des Körpers.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein KräfteDiagramm der Umlenkrolle; zeichnen Sie alle Kraftvektoren so ein, dass sie vom Angriffspunkt der Kraft ausgehen. Bezeichnen Sie alle vorkommenden Größen und wählen Sie die positive Drehrichtung wie in Abbildung 8.30 gezeigt.

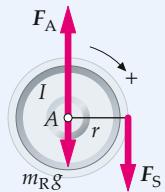


Abbildung 8.30 KräfteDiagramm der Umlenkrolle.

2. Die Kraft F_A , die die Lagerung auf die Rolle ausübt, und die Gewichtskraft $m_R g$ der Rolle üben kein Drehmoment auf die Rolle aus. Die einzige Kraft, die ein Drehmoment auf die Rolle ausübt, ist die Seilspannung F_S mit dem Hebelarm r . Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen an, um die Zugkraft F_S mit der Winkelbeschleunigung α zu verknüpfen:

$$\begin{aligned} M_{\text{ext}} &= I \alpha \\ F_S r &= I \alpha \end{aligned}$$

3. Zeichnen Sie ein KräfteDiagramm für den hängenden Körper und wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom an, um einen Zusammenhang zwischen der Zugkraft F_S und der Tangentialbeschleunigung a_t herzustellen (Abbildung 8.31):

$$\begin{aligned} \sum F_{\text{ext}} &= m a_t \\ m g - F_S &= m a_t \end{aligned}$$

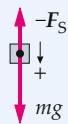


Abbildung 8.31 KräfteDiagramm des hängenden Körpers.

4. Damit haben wir zwei Gleichungen für die drei Unbekannten F_S , a_t und α . Eine dritte Gleichung ist die Rollbedingung, die einen Zusammenhang zwischen a_t und α herstellt (die Tangentialbeschleunigungen des Körpers, des Seils und des Umfangs der Rolle sind alle gleich):

$$a_t = r \alpha$$

5. Mit den nunmehr drei Gleichungen lassen sich F_S , a_t und α bestimmen. Um nach F_S aufzulösen, verwenden Sie das Ergebnis aus Schritt 2, mit dem sie einen Ausdruck für α erhalten, und das Ergebnis aus Schritt 3, das einen Ausdruck für a_t angibt. Setzen Sie diese Ausdrücke in das Ergebnis von Schritt 4 ein und lösen Sie nach F_S auf:

$$\frac{m g - F_S}{m} = r \frac{F_S r}{I}$$

und damit

$$F_S = \boxed{\frac{m g}{1 + (m r^2 / I)}}$$

6. Setzen Sie das Ergebnis für F_S in das Ergebnis von Schritt 3 ein und lösen Sie nach a_t auf. Der Körper und der Umfang der Rolle gewinnen jeweils mit derselben Rate an Geschwindigkeit. Daher ist a_t die Beschleunigung des Umfangs der Rolle:

$$m g - \frac{m g}{1 + (m r^2 / I)} = m a_t$$

und damit

$$a_t = \boxed{g \frac{1}{1 + \frac{I}{m r^2}}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir schauen uns unser Ergebnis für einige Extremfälle an. Für $I = 0$ fällt der Körper frei nach unten, und das Seil bleibt schlaff; unsere Rechnung ergibt wie erwartet $F_S = 0$ und $a_t = g$. Für sehr große Werte des Trägheitsmoments I erwarten wir, dass die Rolle still stehen bleibt. Für $I \rightarrow \infty$ ergeben unsere Gleichungen wie erwartet $F_S \rightarrow mg$ und $a_t \rightarrow 0$. ■

Beispiel 8.12: Beschleunigung über eine Umlenkrolle

ZUM VERSTÄNDNIS

Das in Abbildung 8.32 gezeigte System wird aus dem Ruhezustand losgelassen. Die Masse der Umlenkrolle ist nicht zu vernachlässigen, die Lagerung der Rolle ist allerdings reibungsfrei. Das Seil gleitet nicht auf der Rolle. Es soll $m_1 > m_2$ gelten. Was kann man dann über die Zugkräfte $F_{S,1}$ und $F_{S,2}$ in dem Seil sagen?

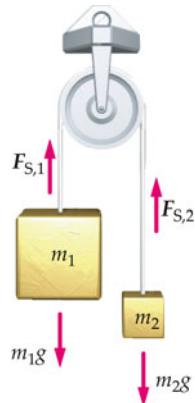


Abbildung 8.32 Umlenkrolle mit zwei unterschiedlichen Massen.

Problembeschreibung: Nach dem Loslassen aus dem Stillstand wird die Masse m_1 nach unten und die Masse m_2 nach oben beschleunigt, die Umlenkrolle erfährt eine Winkelbeschleunigung gegen den Uhrzeigersinn. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf jede der beiden Massen und

das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen auf die Rolle an.

Lösung: 1. Da m_1 nach unten beschleunigt wird, muss die Gesamtkraft auf diese Masse ebenfalls nach unten gerichtet und der Betrag der Gewichtskraft größer als die Zugkraft sein:

$$m_1 g > F_{S,1}$$

2. Da m_2 nach oben beschleunigt wird, muss die Gesamtkraft auf diese Masse ebenfalls nach oben gerichtet sein:

$$F_{S,2} > m_2 g$$

3. Da die Rolle eine Winkelbeschleunigung entgegen dem Uhrzeigersinn erfährt, muss das Gesamtdrehmoment auf die Rolle gegen den Uhrzeigersinn wirken. Beide Hebelarme sind gleich lang. Ein größeres Drehmoment bedeutet eine größere Zugkraft:

$$M_1 > M_2 \text{ sodass } F_{S,1} > F_{S,2}$$

4. Durch eine Kombination dieser drei Ergebnisse erhält man:

$$m_1 g > F_{S,1} > F_{S,2} > m_2 g$$

Plausibilitätsprüfung: Wäre $F_{S,1}$ nicht größer als $F_{S,2}$, wäre die Winkelbeschleunigung der Rolle nicht entgegen dem Uhrzeigersinn.

Beispiel 8.13: Beschleunigung über eine Umlenkrolle

ZUR ÜBUNG

Zwei Blöcke sind durch ein Seil miteinander verbunden, das über eine Umlenkrolle mit dem Radius r , der Masse m_R und dem Trägheitsmoment I verläuft. Der Block mit der Masse m_1 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Fläche, der Block mit der Masse m_2 hängt frei an dem Seil (Abbildung 8.33). Bestimmen Sie die Beschleunigung $a = a_t$ der Blöcke sowie die Zugkräfte in dem Seil (d.h. die Seilspannungen $F_{S,1}$ und $F_{S,2}$). Nehmen Sie dabei an, dass das Seil schlupffrei über die Umlenkrolle läuft.

Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf jeden der beiden Blöcke und das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen auf die Rolle an. Mit der Rollbedingung können Sie einen Zusammenhang zwischen α und a herstellen.

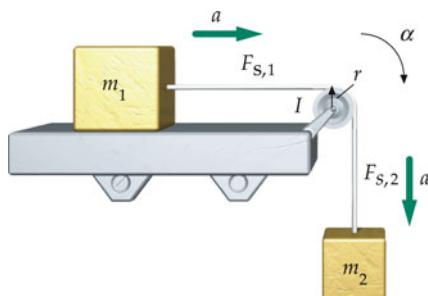


Abbildung 8.33 Darstellung des Systems aus Umlenkrolle und Blöcken.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein KräfteDiagramm für jeden der beiden Blöcke und für die Rolle, wie in Abbildung 8.34 gezeigt. Beachten Sie, dass der Massenmittelpunkt der Rolle nicht beschleunigt wird; daher muss die Lagerung der Rolle eine Kraft F_L auf die Achse ausüben, durch die die Resultierende aus der Gravitationskraft und den durch das Seil auf die Rolle übertragenen Kräften ausgeglichen wird.

2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf jeden der beiden Blöcke an.

3. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen auf die Umlenkrolle an.

4. Damit haben Sie drei Gleichungen und vier Unbekannte. Um die vierte Gleichung zu erhalten, wenden Sie die Rollbedingung an. Die Beschleunigung a der Blöcke ist gleich der tangentialen Beschleunigung a_t des Seils und des Rands der Rolle.

5. Nunmehr haben Sie vier Gleichungen und vier Unbekannte, sodass Sie alle Unbekannten berechnen können. Führen Sie die Rechnungen aus und geben Sie die Ausdrücke für a , $F_{S,1}$ und $F_{S,2}$ an. (Hinweis: Um a zu finden, müssen Sie die Ausdrücke für $F_{S,1}$ und $F_{S,2}$ aus den Ergebnissen für Schritt 2 benutzen. Wenn Sie dies in das Ergebnis von Schritt 3 einsetzen, erhalten Sie eine Gleichung für die Unbekannten a und α . Mit dem Ergebnis von Schritt 4 können Sie α eliminieren und nach a auflösen.)

Ergebnisse der Lösungsschritte:
1.

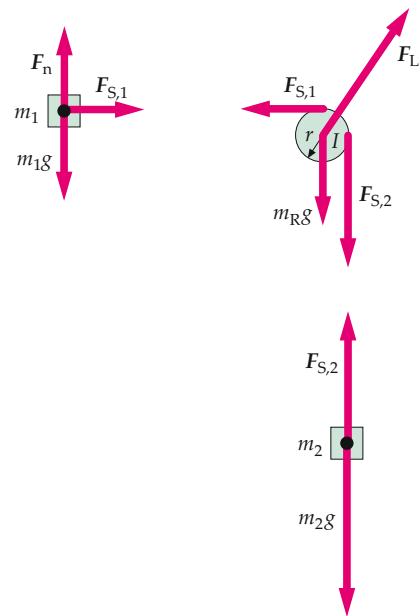


Abbildung 8.34 KräfteDiagramme der beiden Blöcke und der Rolle.

2. $F_{S,1} = m_1 a ; \quad m_2 g - F_{S,2} = m_2 a$
3. $F_{S,2} r - F_{S,1} r = I \alpha$
4. $a_t = r \alpha$
 $a = a_t = r \alpha$
- 5.

$$a_t = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + I/r^2} g$$

$$F_{S,1} = m_1 a_t = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + (I/r^2)} m_1 g$$

$$F_{S,2} = m_2 (g - a_t) = \frac{m_1 + (I/r^2)}{m_1 + m_2 + (I/r^2)} m_2 g$$

Plausibilitätsprüfung: Für $I = 0$ ergibt sich wie erwartet $F_{S,1} = F_{S,2}$ und die Beschleunigung $a_t = m_2 g / (m_1 + m_2)$. Ist I sehr groß ($I \rightarrow \infty$), dann findet man wie zu erwarten $a \rightarrow 0$, $F_{S,1} \rightarrow 0$ und $F_{S,2} \rightarrow m_2 g$.

Arbeit und Leistung eines Drehmoments

Wenn man einen Körper in Drehung versetzt, verrichtet man Arbeit an ihm, und seine kinetische Energie nimmt zu. Betrachten Sie eine auf einen rotierenden Körper wirkende Kraft \mathbf{F} . Während der Körper sich um den Winkel $d\theta$ dreht, bewegt sich der Angriffspunkt der Kraft um eine Strecke $ds = r d\theta$, und die Kraft verrichtet die Arbeit

$$dW = F_t ds = F_t r d\theta = M d\theta.$$

Dabei ist M das Drehmoment, das durch die Kraft \mathbf{F} verursacht wird, und F_t ist die Tangentialkomponente von \mathbf{F} . Da die Arbeit eine skalierende Größe ist, gilt allgemein

$$dW = M d\theta. \quad (8.28)$$

ARBEIT DURCH EIN DREHMOMENT

Die zeitliche Änderung der das Drehmoment verrichtenden Arbeit ist die Leistung P des Drehmoments:

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt}$$

oder

$$P = M \omega. \quad (8.29)$$

LEISTUNG DURCH EIN DREHMOMENT

Die Gleichungen 8.28 und 8.29 entsprechen den Gleichungen $dW = F_{\parallel} ds$ und $P = F_{\parallel} v$ für die lineare Bewegung, wobei F_{\parallel} die Kraftkomponente ausdrückt, die parallel zur Verschiebung ds ist.

Die Beispiele 8.14 und 8.15 zeigen zwei Anwendungen für diese beiden Gleichungen.

Beispiel 8.14: Drehmoment eines Automotors

ZUR ÜBUNG

Ein VW Golf mit turbogeladenem Direkteinspritzer-Dieselmotor (TDI) produziert aus 2,0 l Hubraum bei $1750 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$ ein maximales Drehmoment von $350 \text{ N} \cdot \text{m}$. Berechnen Sie die Leistung des Motors für die Drehzahl des maximalen Drehmoments.

Problembeschreibung: Die Leistung ergibt sich als Produkt von Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit, die beide gegeben sind. Die Winkelgeschwindigkeit ω muss in Radian pro Sekunde umgerechnet werden, um die Leistung in Watt zu erhalten.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Geben Sie die Leistung P mithilfe des Drehmoments M und der Winkelgeschwindigkeit ω an:

2. Rechnen Sie $\text{U} \cdot \text{min}^{-1}$ in $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ um:

3. Berechnen Sie die Leistung:

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$P = M \omega$$

2.

$$\omega = 183 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

3.

$$P = \boxed{64 \text{ kW}}$$

Kommentar: Die Leistung entspricht knapp 87 PS.

Weitergedacht: Das Drehmoment bei einer bestimmten Drehzahl gibt das maximale bei Vollast vom Motor an der Kurbelwelle abgegebene Drehmoment an. Dieser Wert ist nicht über den gesamten Drehzahlbereich des Motors konstant, sondern hat innerhalb des nutzbaren Drehzahlbands ein Maximum. Wenn der Fahrer das maximale Drehbeschleunigungsvermögen des Motors ausschöpfen möchte, muss er den Motor bei der vom Hersteller angegebenen Drehzahl des maximalen Drehmoments mit Vollast betreiben. Ein hohes Drehmoment ist erforderlich, wenn man das Fahrzeug möglichst rasch beschleunigen will oder wenn – beispielsweise bei einem Wohnwagengespann am Berg – eine möglichst hohe Zugkraft gewünscht wird. Die Leistung eines Fahrzeugs ist hingegen nur für den Wert der Endgeschwindigkeit ausschlaggebend.

Übung 8.7: Die maximale Leistung des genannten Motors beträgt 125 PS bei $4200 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$. Wie groß ist das Drehmoment bei dieser Leistung? ◀

Beispiel 8.15: Ein Riesenrad hält an

Das zu den Millenniumsfeierlichkeiten in London errichtete „London Eye“ ist mit seinem Durchmesser von 135 m das größte Riesenrad Europas. Ein Bild des Rads ist auf dem Eröffnungsbild dieses Kapitels zu sehen. Nach den Spezifikationen sind die Bremsen stark genug, dass sich die Passagiergondeln beim Stoppen des Rads nicht mehr als 10 m weiterbewegen. Das Rad mit seiner Masse von 1600 t dreht sich zweimal pro Stunde. a) Schätzen Sie das benötigte Drehmoment, um das Rad so zu stoppen, dass der Umfang sich beim Bremsen nur noch um 10 m bewegt. b) Nehmen Sie an, dass die Bremskraft am Umfang des Rads wirkt. Wie groß muss die Kraft dann sein?

Problembeschreibung: Die an dem Rad verrichtete Arbeit ist gleich der Änderung seiner kinetischen Energie. Berechnen Sie mit Gleichung 8.28 ($dW = M d\theta$) die Arbeit mithilfe des Drehmoments. Praktisch die gesamte Masse des Rads ist in seinem Umfang konzentriert (siehe die Abbildung zu Beginn dieses Kapitels). Dies legt einen Weg zur Abschätzung des Trägheitsmoments nahe. Die Bremskraft lässt sich aus dem Drehmoment berechnen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Setzen Sie die verrichtete Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie beim Abbremsen des Rads:

$$W = \Delta E_{\text{kin}}$$

2. Stellen Sie mithilfe von Gleichung 8.28 ($dW = M d\theta$) einen Zusammenhang zwischen dem Drehmoment und dem Drehwinkel her:

$$W = M \Delta \theta$$

3. Den Zusammenhang zwischen dem Drehwinkel und dem Bremsweg gibt Gleichung 8.1 ($ds = r d\theta$) an:

$$s = r \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = \frac{s}{r} = \frac{10 \text{ m}}{67,5 \text{ m}} = 0,148 \text{ rad}$$

4. Die Masse konzentriert sich auf den Umfang des Rads, für das Trägheitsmoment gilt daher $I \approx mr^2$:

$$\begin{aligned} I &= mr^2 = (1,6 \cdot 10^6 \text{ kg}) (67,5 \text{ m})^2 \\ &= 7,29 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

5. Setzen Sie die Rotationsenergie $\frac{1}{2}I\omega_0^2$ mit I aus Schritt 4 für ΔE_{kin} aus Schritt 1 ein und lösen Sie nach dem Drehmoment auf. Die Anfangsgeschwindigkeit ist $2 \text{ U/h} = 3,49 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$M \Delta \theta = 0 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

und damit

$$\begin{aligned} M &= -\frac{I \omega_0^2}{2 \Delta \theta} \\ &= -\frac{(7,29 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (3,49 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 (0,148 \text{ rad})} \\ &= [-3,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die Wirkungslinie der Bremskraft liegt tangential zum Umfang des Rads, der Kraftarm ist somit gleich dem Radius des Rads.

$$|M| = Fr$$

$$F = \frac{|M|}{r} = \frac{3,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}}{67,5 \text{ m}} = [1,3 \cdot 10^6 \text{ N}]$$

Plausibilitätsprüfung: Anhand des Ausdrucks für das Drehmoment in Schritt 5 von Aufgabenteil a können wir erkennen, dass M negativ ist, wenn $\Delta\theta$ positiv ist, und umgekehrt. Dieses Ergebnis war zu erwarten, weil beim Bremsen das Drehmoment der Bewegung entgegengerichtet ist.

Weitergedacht: Die Bremskraft von $1,3 \cdot 10^6 \text{ N}$ entspricht der Gewichtskraft von zehn VW Golf. ■

8.5 Gleichgewicht und Stabilität

Der Schwerpunkt

Abbildung 8.35a zeigt einen starren Körper im Gleichgewicht. Ein beliebiger, aber fester Punkt O ist markiert. Wir betrachten den Körper als aus vielen kleinen Massenelementen zusammengesetzt. Die Gewichtskraft des i -ten kleinen Massenelements ist $\mathbf{F}_{G,i}$, und die gesamte Gewichtskraft ergibt sich als $\mathbf{F}_G = \sum_i \mathbf{F}_{G,i}$. Wenn das i -te Massenelement bezüglich des Punkts O den Ortsvektor \mathbf{r}_i hat, dann erfährt es durch die Gewichtskraft ein Drehmoment $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{G,i}$ bezüglich des Punkts O . Das resultierende Drehmoment bezüglich O ist dann $\mathbf{M} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{G,i})$. Das resultierende Drehmoment bezüglich eines beliebigen Punkts lässt sich durch Betrachtung eines bestimmten Punkts S berechnen. Er ist dadurch ausgezeichnet, dass die in ihm angreifende gesamte Gewichtskraft \mathbf{F}_G des Körpers dasselbe Drehmoment erzeugt wie das Drehmoment, das die einzelnen Bestandteile des starren Körpers mit ihren jeweiligen Gewichtskräften verursachen (Abbildung 8.35b). Dieser Punkt heißt **Schwerpunkt**, (manchmal auch **Gravitationszentrum**) und ist definiert durch

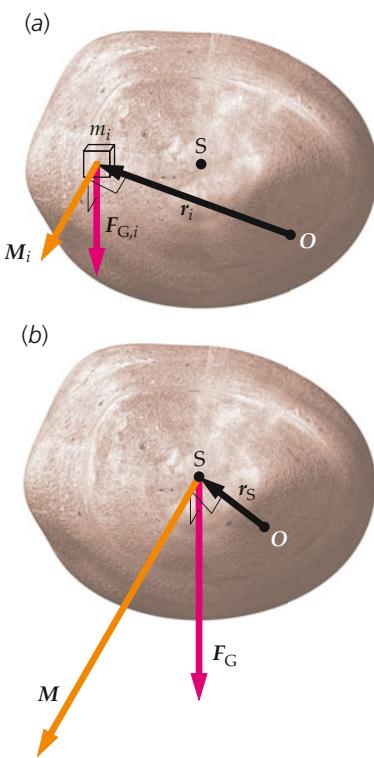


Abbildung 8.35 Man kann sich einen starren Körper als aus vielen kleinen Massenelementen zusammengesetzt denken. Auf jedes von ihnen wirkt die Gewichtskraft, die ein Drehmoment erzeugt. a) Auf das i -te dieser Massenelemente mit der Masse m_i am Ort r_i wirkt die Gewichtskraft $F_{G,i}$, die das Drehmoment M_i bezüglich des beliebigen Punkts O erzeugt. b) Es gibt für jeden starren Körper einen ausgezeichneten Punkt S , den man als Schwerpunkt bezeichnet. Die gesamte Gewichtskraft F_G greift in ihm dargestellt an, dass das dadurch verursachte Drehmoment M bezüglich des beliebigen Punkts O gleich dem Drehmoment ist, das die einzelnen Massenelemente mit ihren jeweiligen Gewichtskräften verursachen.

$$M = r_S \times F_G. \quad (8.30)$$

DEFINITION DES SCHWERPUNKTS

Dabei gibt r_S den Ort des Schwerpunkts bezüglich O an.

Für Körper nahe der Erdoberfläche ist das Gravitationsfeld mit der Gravitationskonstanten \mathbf{g} über den gesamten Körper homogen, sodass sich die Gewichtskraft des i -ten Massenelements schreiben lässt als $\mathbf{F}_{G,i} = m_i \mathbf{g}$. Summieren über beide Seiten ergibt $\mathbf{F}_G = m \mathbf{g}$ mit der Gesamtmasse $m = \sum_i m_i$ des Körpers. Das resultierende Drehmoment ist die Summe der einzelnen Drehmomente. Damit ergibt sich

$$M = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{G,i}) = \sum_i (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) = \sum_i (m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{g}).$$

Klammert man \mathbf{g} aus dem Term auf der rechten Seite aus, so erhält man

$$M = \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g}.$$

Mit der Definition des Massenmittelpunkts M (Gleichung 7.6) lässt sich nun $\sum_i m_i \mathbf{r}_i$ durch $m \mathbf{r}_M$ ersetzen, und man erhält

$$M = m (\mathbf{r}_M \times \mathbf{g}) = \mathbf{r}_M \times m \mathbf{g} = \mathbf{r}_M \times \mathbf{F}_G.$$

Vergleicht man dies mit Gleichung 8.30, so stellt man fest, dass der Massenmittelpunkt und der Schwerpunkt zusammenfallen ($\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_S$), wenn sich der Körper in einem homogenen Gravitationsfeld befindet. Mit dieser Feststellung wird auch die Unterscheidung zwischen Massenmittelpunkt (*center of mass*) und Schwerpunkt (*center of gravity*) deutlich, die im Deutschen meist verwischt wird: Der Massenmittelpunkt M wird durch eine *Massenverteilung* definiert, der Schwerpunkt S durch die angreifenden *Kräfte* und die daraus resultierenden Drehmomente. Nur im gleichförmigen Gravitationsfeld, wenn die Fallbeschleunigung a_G konstant ist, fallen Massenmittelpunkt und Schwerpunkt zusammen. Im Deutschen benutzt man üblicherweise den Begriff „Schwerpunkt“ für beide Punkte; dieses Buch benutzt die unterschiedlichen Begrifflichkeiten, setzt aber in Formeln das Kürzel S auch für Massenmittelpunkt.

!

Für einen Körper in einem gleichförmigen Gravitationsfeld fallen Schwerpunkt und Massenmittelpunkt zusammen.

Der Schwerpunkt lässt sich daher experimentell auf dieselbe Art bestimmen wie in Abschnitt 7.4 für den Massenmittelpunkt gezeigt: Wenn man einen Körper an einem beliebigen Punkt aufhängt, wird so lange ein Drehmoment auf ihn wirken, bis er den Gleichgewichtszustand eingenommen hat. Der Schwerpunkt befindet sich dann direkt unterhalb des Aufhängepunkts, d. h. auf einer vertikalen Linie vom Aufhängepunkt nach unten. Wird der Körper nun an einem anderen Punkt aufgehängt, so ergibt sich eine andere vertikale Linie. Der Schwerpunkt liegt im Schnittpunkt der beiden Linien.

Gleichgewichtsbedingungen

Damit ein Teilchen im Ruhezustand bleibt, muss als notwendige Bedingung die resultierende äußere Kraft auf das Teilchen null sein. In ähnlicher Weise gilt die notwendige Bedingung, dass die resultierende äußere Kraft auf den Massenmittelpunkt eines starren Körpers null sein muss, damit der Körper im Ruhezustand bleibt. Ein starrer Körper kann jedoch, obwohl sein Massenmittelpunkt in Ruhe ist, rotieren. Dann befindet er sich jedoch nicht im **statischen Gleichgewicht**. Daher ist die zweite notwendige Bedingung dafür, dass ein starrer Körper sich im statischen Gleichgewicht befindet, dass das auf den Körper wirkende resultierende Drehmoment bezüglich einer *beliebigen* Achse null ist. Diese Bedingung gibt uns die Möglichkeit, für die Berechnung von Drehmomenten eine günstige Achse bzw. einen günstigen Punkt auszuwählen, was die Rechnungen in vielen statischen Problemen erheblich vereinfachen kann.

Die zwei notwendigen Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper sind damit:

1. Die resultierende äußere Kraft auf den Körper muss null sein:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0. \quad (8.31)$$

2. Das resultierende äußere Drehmoment bezüglich eines beliebigen Punkts muss null sein:

$$\sum_i \mathbf{M}_i = 0. \quad (8.32)$$

GLEICHGEWICHTSBEDINGUNGEN

Betrachtet man die Gleichgewichtsbedingungen für ein beschleunigtes Bezugssystem, ist die resultierende Kraft auf einen Körper, der im beschleunigten Bezugssystem in Ruhe bleibt, nicht null, wenn man ihn von einem Inertialsystem aus beobachtet. (Als beschleunigt gilt jedes Bezugssystem, das gegenüber einem Inertialsystem eine Beschleunigung erfährt und nicht rotiert.) Der Körper erfährt nämlich dieselbe Beschleunigung wie das Bezugssystem selbst. Die zwei Gleichgewichtsbedingungen für das statische Gleichgewicht in einem beschleunigten Bezugssystem sind:

1. $\sum_i \mathbf{F}_i = m \mathbf{a}_S$. Dabei gibt \mathbf{a}_S die Beschleunigung des Massenmittelpunkts an. Sie ist gleichzeitig die Beschleunigung des Bezugssystems.
2. $\sum_i \mathbf{M}_{S,i} = 0$. Die Summe aller Drehmomente bezüglich des Massenmittelpunkts muss null sein.

Die zweite dieser Bedingungen folgt daraus, dass das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen ($\sum_i \mathbf{M}_{S,i} = I_S \boldsymbol{\alpha}$) natürlich auch für die Drehmomente bezüglich des Massenmittelpunkts gilt, und zwar unabhängig davon, ob der Massenmittelpunkt beschleunigt wird oder nicht.

Das folgende Beispiel 8.16 illustriert die Vorgehensweise bei Aufgaben mit statischem Gleichgewicht.

Beispiel 8.16: Kraft auf den Ellbogen

Sie halten ein Massestück der Masse 6,0 kg in der Hand. Dabei bildet der Oberarm mit dem Unterarm einen rechten Winkel (Abbildung 8.36), und Ihr Bizepsmuskel übt eine aufwärts gerichtete Kraft F_B aus, die in einem Abstand von 3,4 cm vom Drehpunkt O im Ellbogengelenk angreift. Betrachten Sie bei der Rechnung den Unterarm und die Hand als einen 30,0 cm langen gleichförmigen Stab mit einer Masse von $m_H = 1,0 \text{ kg}$. a) Wie groß ist die Kraft F_B , wenn das Massestück 30 cm vom Drehpunkt O im Ellbogengelenk entfernt ist? b) Welche Kraft F_A übt der Oberarm auf das Ellbogengelenk aus? In welche Richtung zeigt sie? (Die positive z-Achse zeige aus der Bildebene heraus auf Sie zu.)

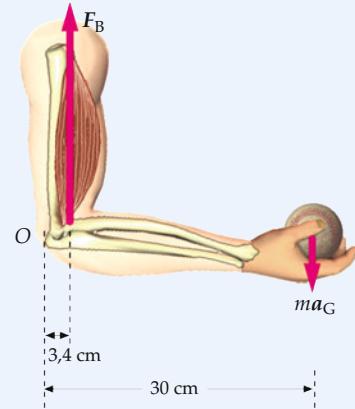


Abbildung 8.36 Darstellung des Systems aus Ober- und Unterarm sowie des Massestücks.

Problembeschreibung: Um die zwei Kräfte zu berechnen, wenden Sie die beiden Gleichgewichtsbedingungen ($\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ und $\sum_i \mathbf{M}_i = 0$) auf den Unterarm an.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm des Unterarms (Abbildung 8.37). Der Unterarm ist darin ein gleichförmiger horizontaler Stab.

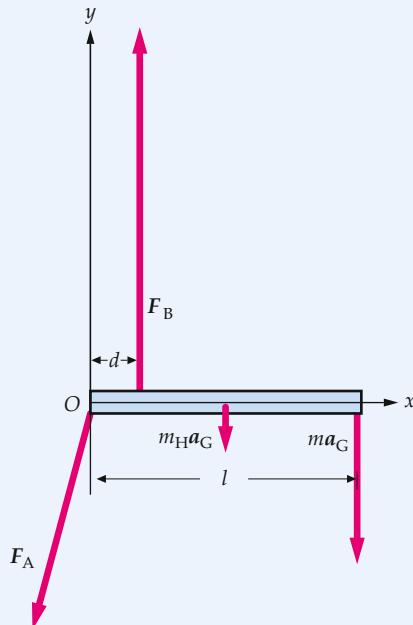


Abbildung 8.37 Kräftediagramm des Unterarms.

2. Die Kraft, über die wir am wenigsten wissen, ist die Kraft F_A , die der Oberarm auf das Ellbogengelenk ausübt

(wir kennen weder den Betrag noch die Richtung). Wenden Sie die Bedingung $\sum M_z = 0$ für die Drehmomente bezüglich der Achse an, die aus der Papierebene herauszeigt und durch den Angriffspunkt von F_A verläuft:

$$0 \cdot F_A - \frac{l}{2} m_H g + d F_B - l (m g) = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} F_B &= \left(\frac{1}{2} m_H + m \right) g \frac{l}{d} \\ &= \left(\frac{1}{2} (1,0 \text{ kg}) + (6,0 \text{ kg}) \right) (9,81 \text{ N/kg}) \frac{30 \text{ cm}}{3,4 \text{ cm}} \\ &= 563 \text{ N} = [5,6 \cdot 10^2 \text{ N}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Wenden Sie die Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$ an und bestimmen Sie damit F_A :

$$F_{A,x} + 0 + 0 + 0 = 0$$

und

$$F_{A,y} + F_B - m_H g - m g = 0$$

also

$$F_{A,x} = 0$$

und

$$\begin{aligned} F_{A,y} &= (m + m_H) g - F_B \\ &= (7,0 \text{ kg}) (9,81 \text{ N/kg}) - 563 \text{ N} \\ &= -[494 \text{ N}] \end{aligned}$$

damit ist

$$F_A = [- (4,9 \cdot 10^2 \text{ N}) \hat{y}, \text{ abwärts}]$$

Plausibilitätsprüfung: Man kann F_A auch in einem Schritt finden, wenn man die Drehachse in den Angriffspunkt des Bizeps an den Unterarm legt. Wenn man die resultierenden Drehmomente null setzt, ergibt sich $-F_A (3,4 \text{ cm}) + F_B (0) + (6,0 \text{ kg}) (9,81 \text{ N/kg}) (30,0 \text{ cm} - 3,4 \text{ cm}) + (1,0 \text{ kg}) (9,81 \text{ N/kg}) (15,0 \text{ cm} - 3,4 \text{ cm}) = 0$. Damit ergibt sich wie in Teilaufgabe b $F_A = -4,9 \cdot 10^2 \text{ N}$.

Weitergedacht: 1) Die Kraft, die der Bizepsmuskel aufbringen muss, ist fast zehnmal so groß wie die Gewichtskraft des Massestücks! Ferner muss, wenn der Muskel nach oben zieht, der Oberarm eine nach unten gerichtete Kraft ausüben, um den Unterarm im Gleichgewicht zu halten. Diese Kraft ist über achtmal größer als die

Gewichtskraft des Massestücks. 2) Dieses Beispiel und die Plausibilitätsprüfung machen deutlich, dass man die Drehachse beliebig wählen kann, sodass die Rechnung möglichst einfach wird. ■

Stabilität des Gleichgewichts

Dreht man einen starren Körper im Gleichgewicht um eine kleine Winkelverschiebung, so gibt es drei verschiedene Möglichkeiten für seine resultierende Lage: Die entsprechenden Gleichgewichtszustände nennt man stabiles, instabiles oder indifferentes Gleichgewicht (Kapitel 5). Stabiles Gleichgewicht liegt vor, wenn das bei einer kleinen Winkelverschiebung des starren Körpers auftretende Drehmoment so gerichtet ist, dass es den Körper wieder in die Gleichgewichtslage zurückversetzt. Ein Beispiel für stabiles Gleichgewicht ist in Abbildung 8.38a zu sehen. Wenn der dort gezeigte Kegel leicht gekippt wird, treibt das resultierende Drehmoment bezüglich des Kippunkts ihn in seine ursprüngliche Lage zurück. Beachten Sie, dass beim leichten Kippen des Kegels der Schwerpunkt angehoben wird, sodass sich seine potenzielle Energie erhöht.

Ein Beispiel für instabiles Gleichgewicht, manchmal auch als labiles Gleichgewicht bezeichnet, wird in Abbildung 8.38b gezeigt. Das Gleichgewicht ist labil, wenn ein Körper bei einer kleinen Winkelverschiebung das Bestreben hat, sich weiter aus seiner Gleichgewichtslage herauszubewegen: Wird der Kegel etwas gekippt, fällt er um, weil seine Gewichtskraft ein Drehmoment erzeugt, das ihn aus der ursprünglichen Lage herausdreht. Bei einer solchen Drehung senkt sich der Schwerpunkt, und die potenzielle Energie des Kegels sinkt.

Der Kegel auf einer horizontalen Fläche in Abbildung 8.38c zeigt ein Beispiel für indifferentes Gleichgewicht, manchmal auch als neutrales Gleichgewicht bezeichnet. Rollt man den Kegel etwas, tritt kein Drehmoment auf, das ihn in seine ursprüngliche Lage zurückdrehen oder noch weiter aus dieser Lage herausdrehen könnte. Bei der Drehung ändert sich die Höhe des Schwerpunkts nicht, die potenzielle Energie bleibt daher gleich.

Was aber ist eine „kleine“ Störung, die ein System „leicht“ aus seiner Gleichgewichtslage herausbewegt? Es handelt sich hier um relative Begriffe, folglich muss man auch ein Gleichgewicht als etwas Relatives betrachten. Betrachten wir als weiteres Beispiel einen Stab, der auf seiner Schmalseite steht (Abbildung 8.39a). Ist die Störung sehr klein, so bewegt sich der Stab in seine ursprüngliche Lage zurück (Abbildung 8.39b), solange der Schwerpunkt oberhalb der Grundfläche liegt. Bei einer nur unwesentlich größeren Störung dagegen liegt der Schwerpunkt nicht mehr über der Grundfläche (Abbildung 8.39c), und der Stab kippt um.

Die Stabilität eines Systems lässt sich erhöhen, indem man entweder den Schwerpunkt tiefer legt oder die Grundfläche vergrößert. Betrachten wir dazu den nichthomogenen Stab in

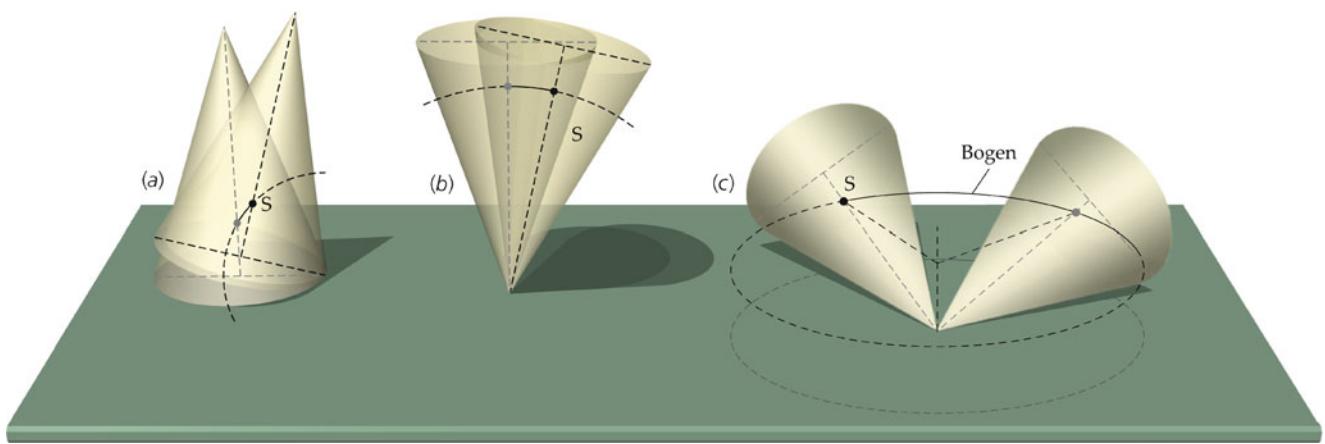


Abbildung 8.38 a) Wird der Schwerpunkt des Kegels bei einer leichten Winkelverschiebung etwas angehoben, liegt stabiles Gleichgewicht vor. b) Wenn sich der Schwerpunkt bei einer Winkelverschiebung senkt, dann ist das Gleichgewicht instabil. c) Ändert die Winkelverschiebung die Höhe des Schwerpunkts dagegen nicht, spricht man von einem indifferenten Gleichgewicht.

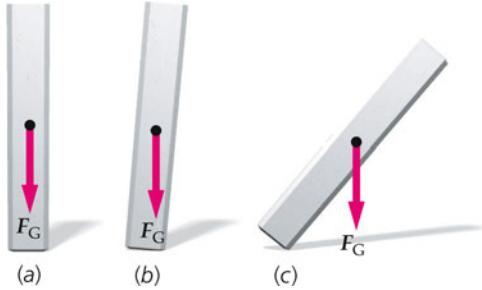


Abbildung 8.39 Die Stabilität einer Gleichgewichtslage ist relativ: a) Der Stab befindet sich im stabilen Gleichgewicht. b) Dreht man den Stab leicht, so wird er in seine Ausgangslage zurückkehren, solange der Schwerpunkt noch oberhalb der Grundfläche liegt. c) Wird die Drehung jedoch so groß, dass der Schwerpunkt nicht mehr oberhalb der Grundfläche liegt, kippt der Stab um.

Abbildung 8.40, dessen Schwerpunkt dicht an einem der Enden liegt. Steht der Stab auf seinem schweren Ende, sodass der

Schwerpunkt tief liegt (Abbildung 8.40a), so ist das Gleichgewicht stabiler als im anderen Fall, bei dem der Schwerpunkt wesentlich höher liegt (Abbildung 8.40b). Liegt der Schwerpunkt dagegen unterhalb des Drehpunkts wie bei dem an einem Ende aufgehängten Stab in Abbildung 8.41, so ist das Gleichgewicht bei jeder Drehung stabil, weil es immer ein Drehmoment gibt, das den Stab in seine Gleichgewichtslage zurücktreibt.

Im aufrechten Stand oder Gang des Menschen ist ein instabiles Gleichgewicht realisiert: Der Schwerpunkt, etwa in Höhe des Bauchnabels, liegt relativ hoch, und die Grundfläche – die Füße – sind relativ klein. Das Gleichgewicht bleibt nur durch Korrekturen erhalten, die der Muskelapparat ständig (und zum größten Teil unbewusst) ausführt. Das ist der Grund, warum das Kleinkind stehen und laufen *lernen* muss und man bei einer Ohnmacht umfällt. Sicherer sind dagegen Stand und Gang eines Tiers auf vier Beinen, da hier der Schwerpunkt tiefer liegt und die Grundfläche im Verhältnis zur Körpergröße viel größer ist als beim Menschen. Viele Jungtiere können praktisch unmittelbar nach der Geburt schon laufen.

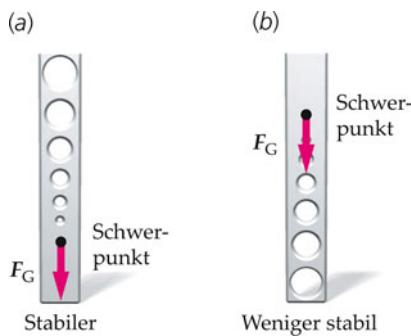


Abbildung 8.40 a) Wenn ein nichthomogener Stab auf seinem schweren Ende steht, sodass der Schwerpunkt tief liegt, ist das Gleichgewicht stabiler, als wenn b) der Schwerpunkt höher liegt.

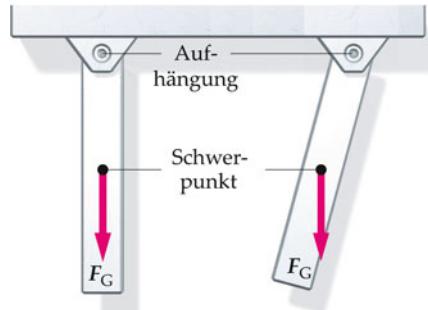


Abbildung 8.41 Hängt man einen Stab so auf, dass sein Schwerpunkt unterhalb des Drehpunkts liegt, dann ist das Gleichgewicht stabil. Egal wie weit man den Stab aus der Gleichgewichtslage auslenkt, er kehrt immer wieder in seine Ausgangslage zurück.

8.6 Der Drehimpuls

Analog zum Impuls einer linearen Bewegung gibt es für die Drehbewegung die Definition eines **Drehimpulses**. Abbildung 8.42 zeigt ein Teilchen mit der Masse m , das sich an einem Ort \mathbf{r} bezüglich des Ursprungs mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt. Der Impuls des Teilchens ist $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Dann hat das Teilchen einen **Drehimpuls \mathbf{L}** bezüglich des Ursprungs, den man als das Vektorprodukt von \mathbf{r} und \mathbf{p} definiert:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (8.33)$$

DEFINITION FÜR DEN DREHIMPULS EINES TEILCHENS

Wie auch der Vektor des Drehmoments ist der Drehimpulsvektor immer *bezüglich eines bestimmten Punkts im Raum* definiert, in diesem Fall bezüglich des Ursprungs. Wenn \mathbf{r} und \mathbf{p} wie in Abbildung 8.42 beide senkrecht zur z -Achse sind (d. h. in der x - y -Ebene liegen), dann ist der Drehimpuls \mathbf{L} parallel zur z -Achse; er ist in dem Fall gegeben durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m|\mathbf{r}||\mathbf{v}| \sin \varphi \hat{\mathbf{z}}$. Für den Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls bezüglich einer Achse und dem Drehimpuls bezüglich eines Punkts gilt: Der Drehimpuls eines punktförmigen Teilchens bezüglich des Ursprungs ist $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Dann ist der Drehimpuls des Teilchens bezüglich der z -Achse

$$\mathbf{L}_z = \mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{p}_{xy}. \quad (8.34)$$

DREHIMPULS BEZÜGLICH DER z -ACHSE

Dabei ist \mathbf{p}_{xy} die Komponente des linearen Impulses \mathbf{p} senkrecht zur z -Achse ($\mathbf{p}_{xy} = \mathbf{p} - p_z \hat{\mathbf{z}}$). Man spricht auch von der *Projektion* des linearen Impulses \mathbf{p} auf die x - y -Ebene.

Abbildung 8.43 zeigt ein Teilchen der Masse m , das an einer Kreisscheibe von vernachlässigbarer Masse befestigt ist; ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung. Die Scheibe dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse. Die Geschwindigkeit v des Teilchens und seine Winkelgeschwindigkeit hängen über die Gleichung $v = r\omega$ zusammen. Dann hat das Teilchen bezüglich des Mittelpunkts der Scheibe einen Drehimpuls gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m|\mathbf{r}||\mathbf{v}| \sin 90^\circ \hat{\mathbf{z}} \\ &= m|\mathbf{r}||\mathbf{v}|\hat{\mathbf{z}} = m r^2 \omega \hat{\mathbf{z}} = m r^2 \omega. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass in diesem Fall der Drehimpulsvektor dieselbe Richtung wie der Vektor der Winkelgeschwindigkeit hat.

Da $m r^2$ das Trägheitsmoment für ein einzelnes Teilchen bezüglich der z -Achse ist, erhält man damit

$$\mathbf{L} = m r^2 \omega = I \omega.$$

Dieses Ergebnis gilt jedoch nicht für den Drehimpuls bezüglich eines *beliebigen* Punkts auf der z -Achse. Abbildung 8.44 zeigt den Drehimpulsvektor \mathbf{L}' für dasselbe Teilchen an derselben Scheibe, allerdings bezüglich eines Punkts auf der z -Achse,

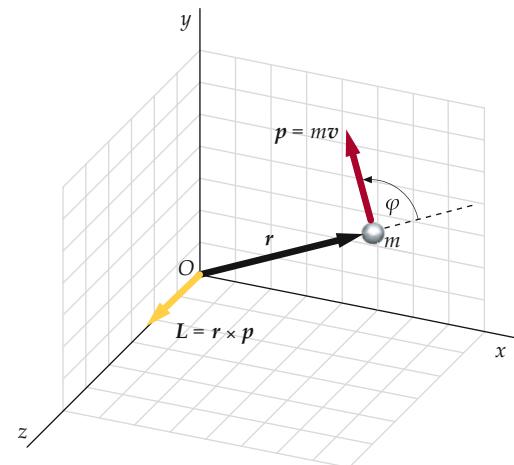


Abbildung 8.42 Ein Teilchen mit dem Impuls \mathbf{p} am Ort \mathbf{r} hat relativ zum Ursprung O einen Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Liegen wie hier gezeigt \mathbf{r} und \mathbf{p} in der x - y -Ebene, dann verläuft \mathbf{L} auf der z -Achse.

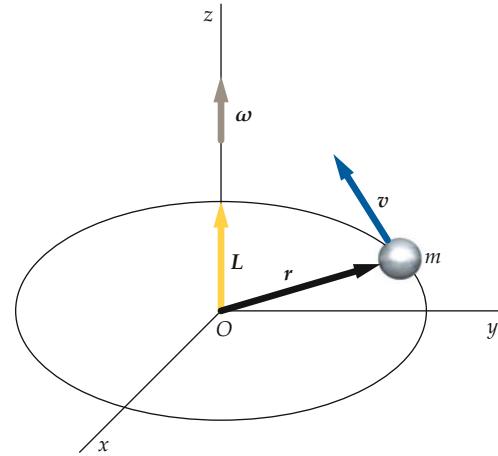


Abbildung 8.43 Ein Teilchen, das sich auf einer Kreisbahn bewegt, hat bezüglich des Kreismittelpunkts einen Drehimpuls $\mathbf{L} = I\omega$ parallel zur Winkelgeschwindigkeit ω .

der nicht im Mittelpunkt der Kreisscheibe liegt. In diesem Fall ist der Drehimpulsvektor *nicht* parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit ω , der seinerseits weiterhin in z -Richtung zeigt.

Betrachten wir nun ein zweites Teilchen mit gleicher Masse, das sich genau gegenüber dem ersten Teilchen auf der rotierenden Kreisscheibe befindet (Abbildung 8.45). Beide Teilchen bewegen sich auf derselben Kreisbahn. Die Drehimpulsvektoren \mathbf{L}'_1 und \mathbf{L}'_2 bezüglich desselben Punkts O' sind eingezeichnet. Der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}' = \mathbf{L}'_1 + \mathbf{L}'_2$ dieses Zweiteilchensystems ist wieder parallel zum Vektor ω der Winkelgeschwindigkeit und dieser parallel zur z -Achse. In diesem Fall verläuft die Drehachse, die z -Achse, durch den Massenmittelpunkt des Zweiteilchensystems, dessen Massenverteilung bezüglich dieser Achse symmetrisch ist. Eine solche Achse heißt **Symmetriearchse**. Für jedes System, das um eine Symmetriearchse rotiert, ist der

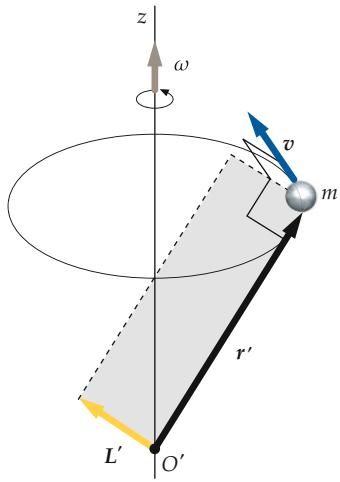


Abbildung 8.44 Bezieht sich der Drehimpuls eines Teilchens *nicht* auf den Mittelpunkt der Kreisbahn, sondern auf einen anderen Punkt O' auf der Drehachse, dann ist der Drehimpuls L' bezüglich O' *nicht* parallel zur Winkelgeschwindigkeit ω .

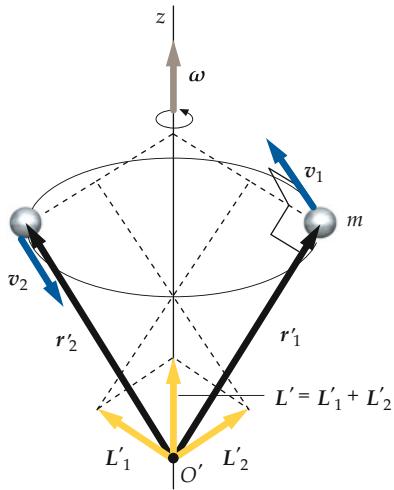


Abbildung 8.45 Drehimpulsvektoren eines Systems aus zwei Teilchen, die sich auf einer gemeinsamen Kreisbahn bewegen. Der Bezugspunkt für die Drehimpulse liegt auf einer Achse, um die sich die Masse des Systems symmetrisch verteilt. Der Gesamtdrehimpuls $L'_1 + L'_2$ ist parallel zur Winkelgeschwindigkeit ω .

Gesamtdrehimpuls (die Summe der Drehimpulse aller Einzelteilchen des Systems) parallel zur Winkelgeschwindigkeit; dann ist der Gesamtdrehimpuls gegeben durch

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}. \quad (8.35)$$

DREHIMPULS EINES SYSTEMS, DAS UM EINE SYMMETRIEACHSE ROTIERT

Dabei bezeichnet I das Trägheitsmoment der Anordnung. Beispiel 8.17 illustriert die Anwendung dieser Gleichung auf die Kurvenfahrt eines Autos.

Beispiel 8.17: Drehimpuls bezüglich des Ursprungs

Berechnen Sie den Drehimpuls bezüglich des Ursprungs für die folgenden Fälle: a) Ein Auto der Masse 1200 kg fährt mit 15 m/s auf einer Kreisbahn mit dem Radius 20 m. Die Kreisbahn liegt in der x - y -Ebene mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Von einem Punkt auf der positiven z -Achse aus gesehen bewegt sich das Auto entgegen dem Uhrzeigersinn. b) Dasselbe Auto bewegt sich in der x - y -Ebene mit der Geschwindigkeit $v = (-15\hat{x})$ m/s entlang einer geradlinigen Bahn mit $y = y_0 = 20$ m parallel zur x -Achse. c) Eine Scheibe in der x - y -Ebene mit dem Radius $r_0 = 20$ m und der Masse 1200 kg rotiert mit 0,75 rad/s um ihre Achse, die z -Achse. Von einem Punkt auf der positiven z -Achse aus gesehen rotiert die Scheibe entgegen dem Uhrzeigersinn. Betrachten Sie in dieser Aufgabe das Auto als punktförmiges Teilchen und die Scheibe als starren Körper mit gleichförmiger Massenbelegung.

Problembeschreibung: Für die Teilaufgaben a und b lässt sich der Zusammenhang $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ anwenden, da wir das Auto als punktförmiges Teilchen ansehen. Für Teilaufgabe c verwenden wir den Zusammenhang $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$, da wir die Scheibe als ausgedehnten starren Körper betrachten.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Diagramm mit allen Größen und bestimmen Sie die Richtung von \mathbf{L} mithilfe der Dreifinger-Regel für Vektorprodukte.

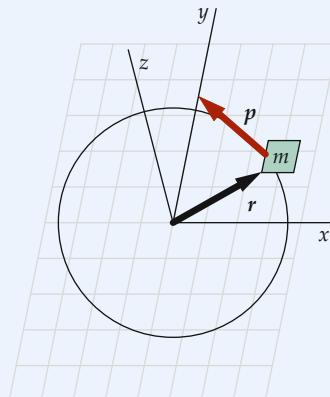


Abbildung 8.46 Diagramm der verfügbaren Größen.

2. \mathbf{r} und \mathbf{p} stehen senkrecht aufeinander, $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ zeigt damit in Richtung der z -Achse (Abbildung 8.46):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m |\mathbf{r}| |\mathbf{v}| \sin 90^\circ \hat{z} \\ &= (1200 \text{ kg})(20 \text{ m})(15 \text{ m/s}) \hat{z} \\ &= (3,6 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \hat{z} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Für das Auto, das sich in Richtung abnehmender x -Werte entlang der Linie $y = 20 \text{ m}$ bewegt, lassen sich \mathbf{r} und \mathbf{p} mithilfe der Einheitsvektoren folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} = x\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{p} &= m\mathbf{v} = -mv\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

2. Nun berechnen Sie $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (Abbildung 8.47):

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (x\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}}) \times (-mv\hat{\mathbf{x}}) \\ &= -mxv(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}}) - my_0v(\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{x}}) \\ &= -my_0v(-\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (1200 \text{ kg})(20 \text{ m})(15 \text{ m/s})\hat{\mathbf{z}} \\ &= [3,6 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

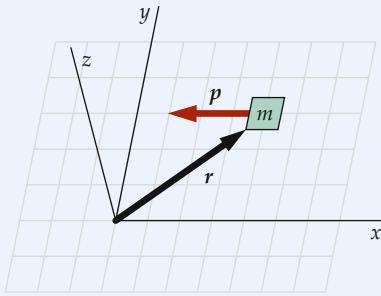


Abbildung 8.47 Darstellung von \mathbf{r} und \mathbf{p} .

Teilaufgabe c

1. Benutzen Sie die Beziehung $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ (Abbildung 8.48):

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= I\boldsymbol{\omega} = I\omega\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}mr_0^2\omega\hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{2}(1200 \text{ kg})(20 \text{ m})^2(0,75 \text{ rad/s})\hat{\mathbf{z}} \\ &= [1,8 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

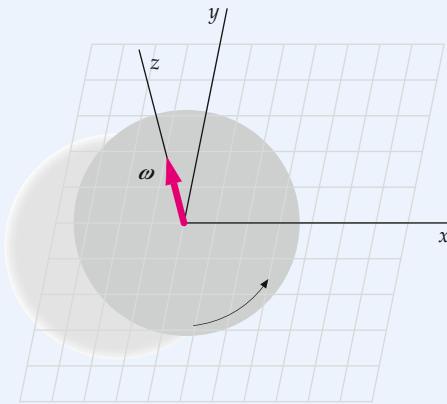


Abbildung 8.48 Darstellung von $\boldsymbol{\omega}$.

Plausibilitätsprüfung: In Teilaufgabe c beträgt die Geschwindigkeit eines Punkts auf dem Rand der Drehscheibe $v = r_0\omega = (20 \text{ m})(0,75 \text{ rad/s}) = 15 \text{ m/s}$ und ist damit genauso hoch wie die des Wagens in den Teilaufgaben a und b. Das Trägheitsmoment der rotierenden Scheibe ist jedoch geringer als das des gleich schweren Autos, weil sich bei der Scheibe der größte Teil der Masse näher als 20 m an der Drehachse befindet.

Weitergedacht: Der Drehimpuls des Wagens aus Teilaufgabe a, der auf einer kreisförmigen Bahn fährt, ist genauso groß wie der Drehimpuls des Wagens, der in Teilaufgabe b auf einer geraden Linie fährt. ■

In vielen Fällen ist es sinnvoll, den Gesamtdrehimpuls eines Systems bezüglich eines beliebigen Punkts O in zwei Summanden zu zerlegen. Beispielsweise hat die Erde einen Eigendrehimpuls, auch Spin genannt, aufgrund ihrer Drehung um die eigene Achse und einen Bahndrehimpuls bezüglich des Sonnenmittelpunkts aufgrund ihrer Bahnbewegung um die Sonne (Abbildung 8.49). Der Gesamtdrehimpuls der Erde relativ zur Sonne ist die Vektorsumme des Bahn- \mathbf{L}_{Bahn} und Eigendrehimpulses \mathbf{L}_{Spin} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{Bahn}} + \mathbf{L}_{\text{Spin}}. \quad (8.36)$$

BAHNDREHIMPULS UND EIGENDREHIMPULS

\mathbf{L}_{Spin} ist der Drehimpuls eines Systems bezüglich seines Massenmittelpunkts. \mathbf{L}_{Bahn} ist der Drehimpuls, den ein punktförmiges Teilchen der Masse m hätte, das sich im Massenmittelpunkt befindet und mit der Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts bewegt. Demnach gilt

$$\mathbf{L}_{\text{Bahn}} = mr_S \times v_S. \quad (8.37)$$

DEFINITION DES BAHNDREHIMPULSES

Im Allgemeinen ist der Gesamtdrehimpuls eines Teilchensystems gleich der (Vektor-)Summe aller Drehimpulse der Teilchen. Dies gilt sowohl für den Gesamtdrehimpuls bezüglich eines Punkts als auch einer Achse.

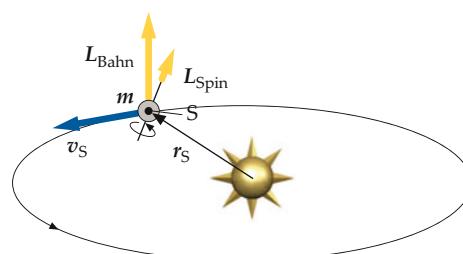


Abbildung 8.49 Der Drehimpuls der Erde bezüglich des Sonnenmittelpunkts ist die Summe von ihrem Bahn- und ihrem Eigendrehimpuls.

Drehimpuls und Drehmoment

In Kapitel 6 haben wir gesehen, dass eine externe Kraft \mathbf{F}_{ext} , die an einem System angreift, eine zeitliche Ableitung des linearen Impulses bewirkt (Gleichung 6.3):

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Analog dazu werden wir nun zeigen, dass gilt:

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (8.38)$$

Das Drehmoment, das von außen auf ein System wirkt, ist gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses des Systems.

ZWEITES NEWTON'SCHES AXIOM FÜR DREHBEWEGUNGEN

Die zeitliche Änderung $d\mathbf{L}/dt$ berechnet man, indem man die Produktregel für Ableitungen anwendet:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right).$$

Mit $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ist und $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ist der erste Term auf der rechten Seite null:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0,$$

da das Vektorprodukt zweier Vektoren mit gleicher Richtung immer null ist. Somit ergibt sich Gleichung 8.38.

Betrachtet man nun in Gleichung 8.38 die Vektorkomponenten beider Seiten in z -Richtung, so erhält man

$$\mathbf{M}_{\text{ext},z} = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt}. \quad (8.39)$$

Für einen symmetrischen starren Körper, der um die z -Achse rotiert, ist $\mathbf{L}_z = I_z \boldsymbol{\omega}$, wobei I_z das Trägheitsmoment bezüglich der z -Achse angibt. Mit Gleichung 8.39 ergibt sich

$$\mathbf{M}_{\text{ext},z} = \frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \boldsymbol{\omega}) = I_z \boldsymbol{\alpha}. \quad (8.40)$$

Hierbei ist der Vektor der Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}$ definiert durch $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$. (Gleichung 8.40) ist somit die vektorielle Form von Gleichung. 8.21) Eine Anwendung zeigt Beispiel 8.18.

Beispiel 8.18: Die Atwood'sche Fallmaschine

An einer Atwood'schen Fallmaschine hängen zwei Blöcke mit den Massen m_1 und m_2 ($m_1 > m_2$), die durch ein Seil von vernachlässigbarer Masse verbunden sind.

Das Seil läuft schlupffrei über eine Rolle mit reibungsfreier Lagerung. Als Rolle dient eine gleichförmige Scheibe mit der Masse m_R und dem Radius r_R . Wenden Sie Gleichung 8.38 auf das System aus den beiden Blöcken, dem Seil und der Rolle an und berechnen Sie die Winkelbeschleunigung der Rolle und die lineare Beschleunigung der Blöcke.

Problembeschreibung: Wählen Sie Ihr Koordinatensystem so, dass sich die Mitte der Rolle und der Blöcke in der x - y -Ebene befinden. Die z -Achse steht senkrecht auf der Zeichenebene und geht durch den Mittelpunkt O der Rolle (Abbildung 8.50). Wir berechnen die Drehmomente und die Drehimpulse bezüglich der z -Achse und wenden das zweite Newton'sche Axiom für die Drehbewegung an (Gleichung 8.38). Da m_1 größer ist als m_2 , dreht sich die Scheibe gegen den Uhrzeigersinn. $\boldsymbol{\omega}$ steht senkrecht auf der Zeichenebene und weist in die positive z -Richtung. Alle Geschwindigkeiten liegen in der x - y -Ebene, sodass alle Drehimpulsvektoren parallel zur z -Achse stehen. Da die Vektoren für Drehmoment, Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls alle parallel zur z -Achse stehen, können wir die Aufgabe als eindimensionales Problem auffassen, bei dem der positive Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn und der negative Drehsinn im Uhrzeigersinn gerechnet wird. Die Beschleunigung a der Blöcke hängt mit der Winkelbeschleunigung α der Rolle über die Rollbedingung $a = r_R \alpha$ zusammen.

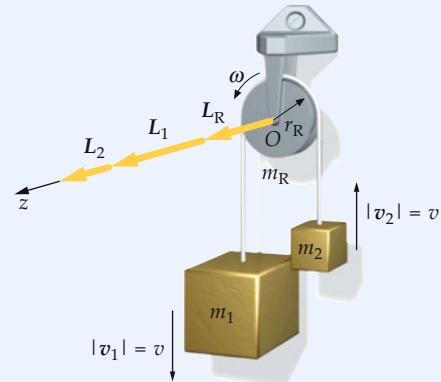


Abbildung 8.50 Skizze der Atwood'schen Fallmaschine und Darstellung der Drehimpulse.

Lösung: 1. Als System wählen wir alle beweglichen Teile aus Abbildung 8.50. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm des Systems (Abbildung 8.51). Das Einzige, was das System mit der Außenwelt verbindet, ist die Lagerung der Rolle. Die externen Kräfte auf das System sind die Normalkraft auf die Lagerung und die Schwerkraft auf die beiden Blöcke und die Rolle:

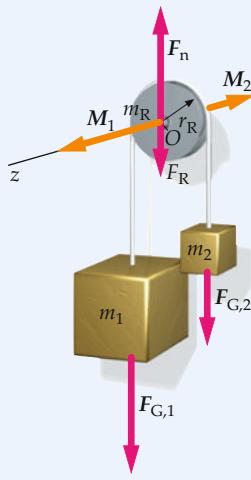


Abbildung 8.51 Kräftediagramm und Wirkungsrichtungen der Drehmomente.

2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen (Gleichung 8.38) an. Da sich die Aufgabe als eindimensionales Problem behandeln lässt, betrachten Sie nur die z -Komponenten:

$$\sum M_{\text{ext},z} = \frac{dL_z}{dt}$$

3. Das äußere Drehmoment bezüglich der z -Achse ist die Summe aller Drehmomente, die durch die äußeren Kräfte ausgeübt werden. Der Hebelarm für die Kräfte $F_{G,1}$ und $F_{G,2}$ ist jeweils r_R , die Hebelarme der anderen beiden Kräfte F_n und F_R sind jeweils null. Mit $F_{G,1} = m_1 g$ und $F_{G,2} = m_2 g$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sum M_{\text{ext},z} &= M_n + M_{G,R} + M_{G,1} + M_{G,2} \\ &= 0 + 0 + m_1 g r_R - m_2 g r_R\end{aligned}$$

4. Der gesamte Drehimpuls bezüglich der z -Achse ist gleich dem Drehimpuls L_R der Rolle plus den Drehimpulsen der beiden Blöcke (L_1 und L_2), jeweils in positive z -Richtung gerechnet. Die Rolle hat einen Eigendrehimpuls, aber keinen Bahndrehimpuls, wohingegen die beiden Blöcke jeweils einen Bahndrehimpuls, aber keinen Eigen-drehimpuls haben:

$$\begin{aligned}L_z &= L_R + L_1 + L_2 \\ &= I\omega + m_1 r_R v + m_2 r_R v\end{aligned}$$

5. Setzen Sie diese Ergebnisse in das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen (Schritt 2) ein:

$$\begin{aligned}\sum M_{\text{ext},z} &= \frac{dL_z}{dt} \\ m_1 g r_R - m_2 g r_R &= \frac{d}{dt}(I\omega + m_1 r_R v + m_2 r_R v) \\ m_1 g r_R - m_2 g r_R &= I\alpha + (m_1 + m_2) r_R a\end{aligned}$$

6. Stellen Sie eine Beziehung zwischen I einerseits sowie m_R und r_R andererseits her. Nutzen Sie die Rollbedingung für einen Zusammenhang zwischen α und a . Lösen Sie nach a und nach α auf:

$$\begin{aligned}m_1 g r_R - m_2 g r_R &= \frac{1}{2} m_R r_R^2 \frac{a}{r_R} + (m_1 + m_2) r_R a \\ &= \left(\frac{1}{2} m_R + m_1 + m_2\right) r_R a\end{aligned}$$

sodass

$$a = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{2} m_R + m_1 + m_2} g$$

und

$$\alpha = \frac{a}{r_R} = \frac{m_1 - m_2}{\frac{1}{2} m_R + m_1 + m_2} \frac{g}{r_R}$$

Plausibilitätsprüfung: Eine Dimensionsrechnung zeigt, dass die Antworten die richtige Dimension haben: Sowohl Zähler als auch Nenner enthalten Faktoren mit der Dimension einer Masse, sodass diese Faktoren nicht zur Dimension der Brüche beitragen. In der ersten Antwort haben a und g die Dimension l/t^2 , in der zweiten Antwort haben α und g/r_R die Dimension t^{-2} . In beiden Fällen haben wir diese Dimension erwartet.

Weitergedacht: 1) Diese Aufgabe könnten Sie lösen, indem Sie die Seilkräfte $F_{S,1}$ auf der linken und $F_{S,2}$ auf der rechten Seite notieren und den Zusammenhang $M = I\alpha$ (Gleichung 8.21) für die Rolle und $\sum F_y = m a_y$ für jeden der beiden Blöcke benutzen. Allerdings ist die Lösung mithilfe des Drehimpulses (Gleichung 8.38) einfacher. Hat man die Beschleunigung, kann man auch die beiden Seilkräfte leicht herleiten. 2) Wegen $L_2 = m_2 \mathbf{r}_R \times \mathbf{v}_2$ (Abbildung 8.52) erhält man die Richtung von L_2 mithilfe der Drei-Finger-Regel für Vektorprodukte. Wegen $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{G,2}$ erhält man auch die Richtung von \mathbf{M}_2 mithilfe dieser Regel.

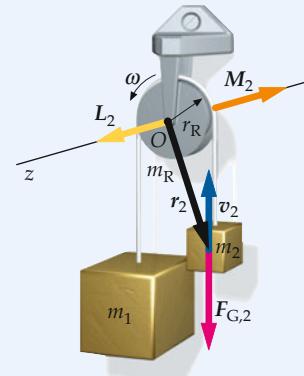


Abbildung 8.52 Die Richtung von L_2 und von \mathbf{M}_2 erhält man mithilfe der Drei-Finger-Regel für Vektorprodukte.

Es gibt eine ganze Reihe von Problemen, in denen Kräfte, Ortsvektoren und Geschwindigkeiten allesamt senkrecht zu einer bestimmten Achse bleiben; dann verlaufen die Vektoren der Drehmomente, Winkelgeschwindigkeiten und Drehimpulse parallel zu einer Drehachse, die sich im Raum nicht bewegt. In diesen Fällen kann man der Drehung gegen bzw. im Uhrzeigersinn positive bzw. negative Werte zuschreiben, und dann lässt sich das Problem – so wie wir es in Beispiel 8.18 getan haben – als Problem in einer Dimension auffassen. Es gibt jedoch andere Fälle, etwa bei der Bewegung eines Kreisels (Abschnitt 8.9), bei denen man Drehmoment, Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls als mehrdimensionale Vektoren auffassen muss.

Der Drehstoß

In Gleichung 8.38 ist das äußere Drehmoment gleich der Vektorsumme aller Drehmomente, die von außen auf das System wirken. Integriert man beide Seiten bezüglich der Zeit, so ergibt sich eine Größe, die formal wie ein Kraftstoß aussieht und als **Drehstoß** bezeichnet wird:

$$\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} M_{\text{ext}} \, dt. \quad (8.41)$$

ZUSAMMENHANG VON DREHSTOSS UND DREHMOMENT

Gleichung 8.41 ist damit das Analogon zu $\Delta p_s = \int_{t_A}^{t_E} F_{\text{ext}} \, dt$ (Gleichung 6.8) für Drehbewegungen.

Es gibt eine Reihe von Analogien zwischen der eindimensionalen linearen Bewegung und der Drehbewegung um eine feste Achse. Die Ähnlichkeit der Formeln zeigt Tabelle 8.2.



Tellerrad und Kegelrad aus dem Differentialgetriebe eines Autos. Diese Ausgleichsgetriebe erfüllen zwei Aufgaben: Das Drehmoment der Antriebswelle muss auf die dazu senkrechte Radachse übertragen werden. Die Übersetzung entspricht dabei $|M_2| = (r_2/r_1)|M_1|$, wobei r_1 und r_2 die Radien der beiden Zahnräder sind. Die zweite Funktion besteht darin, unterschiedliche Umlaufgeschwindigkeiten der Antriebsräder bei Kurvenfahrten oder unterschiedlichem Schlupf auszugleichen. Dazu dient die hier nicht gezeigte Lagerung der beiden Radachsen im Differenzialkorb. (© Dick Luria/Science Source/Photo Researchers.)

Tabelle 8.2 Vergleich von Drehbewegung und linearer Bewegung

Drehbewegung		Lineare Bewegung	
Drehwinkel	$\Delta\theta$	Verschiebung	Δx
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt}$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = \langle\omega\rangle \Delta t$ $\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \Delta\theta$	Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung	$v = v_0 + at$ $\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$ $\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$
Drehmoment	M	Kraft	F
Trägheitsmoment	I	Masse	m
Arbeit	$dW = M d\theta$	Arbeit	$dW = F ds$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2$	Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$
Leistung	$P = M \omega$	Leistung	$P = F v$
Drehimpuls	$L = I \omega$	Impuls	$p = m v$
Zweites Newton'sches Axiom	$M_{\text{ext}} = I \alpha = \frac{dL}{dt}$	Zweites Newton'sches Axiom	$F_{\text{ext}} = m a = \frac{dp}{dt}$

8.7 Die Drehimpulserhaltung

Wenn das äußere Drehmoment auf ein System null ist, dann gilt

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

das bedeutet, der Drehimpuls ist über die Zeit konstant:

$$\mathbf{L} = \text{konstant}. \quad (8.42)$$

Gleichung 8.42 ist der **Erhaltungssatz für den Drehimpuls**.

Wenn das gesamte auf ein System wirkende äußere Drehmoment bezüglich eines Punkts null ist, dann ist der Drehimpuls des Systems bezüglich dieses Punkts konstant.

DREHIMPULSERHALTUNGSSATZ

Dieser Erhaltungssatz entspricht der Impulserhaltung bei der Translationsbewegung. Für ein abgeschlossenes System, d. h. ein System, das von seiner Umgebung völlig getrennt ist, kennen wir damit schon Erhaltungssätze für drei Größen: die Energie, den linearen Impuls und den Drehimpuls. Der Drehimpulserhaltungssatz ist wie die anderen beiden Erhaltungssätze eines der grundlegenden Naturgesetze. Es gibt viele alltägliche Beispiele für die Drehimpulserhaltung, so beispielsweise beim Turmspringen (Abbildung 8.53) und beim Eislauen (Abbildung 8.54). In Beispiel 8.19 wird die Drehimpulserhaltung bei zwei aneinandergepressten rotierenden Scheiben (wie bei der Kupplung eines Fahrzeugs) behandelt.

Der Drehimpulserhaltungssatz gilt auch auf mikroskopischer Ebene und in der Atom- und Kernphysik, wo die Newton'sche Mechanik nicht mehr gültig ist: Auch dort bleibt der Drehimpuls eines abgeschlossenen Systems über die Zeit erhalten.



Abbildung 8.53 Mehrfachbelichtung eines Turmspringers. Der Massenmittelpunkt des Springers bewegt sich entlang einer parabolischen Bahn, sobald der Springer das Brett verlassen hat. Der Drehimpuls stammt von dem anfänglichen äußeren Drehmoment, das durch die Kraft des Sprungbretts ausgeübt wird; wenn der Springer sich beim Absprung vorüber beugt, verläuft diese Kraft nicht durch seinen Massenmittelpunkt. Wenn der Springer in der Luft einen oder mehrere Saltos machen will, zieht er die Arme und Beine an; so verringert er sein Trägheitsmoment und erhöht damit die Drehgeschwindigkeit. (© The Harold E. Edgerton 1992 Trust.)



Abbildung 8.54 Beim Eiskunstlauf ist das Drehmoment, das vom Eis auf die Eisläuferin ausgeübt wird, nur gering; daher bleibt der Drehimpuls bei einer Pirouette nahezu konstant. Wenn die Eisläuferin ihr Trägheitsmoment verringert, indem sie die Arme an den Körper drückt, steigt ihre Drehgeschwindigkeit. (© Mike Powell/Getty.)

Beispiel 8.19: Eine rotierende Scheibe

Scheibe 1 rotiert mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_A reibungsfrei um ihre vertikale Symmetrieachse (Abbildung 8.55). Ihr Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse ist I_1 . Sie fällt auf eine Scheibe 2 mit dem Trägheitsmoment I_2 , die auf derselben Welle montiert ist, sich anfangs jedoch in Ruhe befindet. Wegen der Gleitreibung der Oberflächen drehen sich die beiden Scheiben nach einiger Zeit mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω_E . Berechnen Sie ω_E .

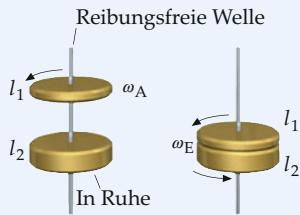


Abbildung 8.55 System der beiden um ihre vertikale Symmetrieachse rotierenden Scheiben vor und nach dem Zusammentreffen.

Problembeschreibung: Wir berechnen die Winkelgeschwindigkeit ω_E am Ende mithilfe des Drehimpulses, der sich nicht ändert, denn es wirken keine äußeren Drehmomente auf das System aus den zwei Scheiben. Die Winkelgeschwindigkeit der oberen Scheibe verringert sich, wenn sie auf die untere Scheibe fällt, während deren Winkelgeschwindigkeit sich durch die Gleitreibung erhöht. Weil die Richtung der Drehachse festgelegt ist, können wir die Drehrichtung durch ein Plus- oder Minuszeichen charakterisieren. Da bei der Gleitreibung mechanische Energie dissipiert wird, ist damit zu rechnen, dass die mechanische Energie abnimmt.

Lösung: 1. Die Winkelgeschwindigkeit am Ende hängt mit der Anfangswinkelgeschwindigkeit über die Drehimpulserhaltung zusammen:

$$\begin{aligned} L_E &= L_A \\ (I_1 + I_2) \omega_E &= I_1 \omega_A \end{aligned}$$

2. Lösen Sie nach der Endwinkelgeschwindigkeit auf:

$$\omega_E = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_A = \boxed{\frac{1}{1 + (I_2/I_1)} \omega_A}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn das Trägheitsmoment der zweiten Scheibe wesentlich geringer ist als das der ersten ($I_2 \ll I_1$), sollte der Stoß nur einen geringen Einfluss auf die erste Scheibe haben. Das liest man auch aus unserem Ergebnis ab, denn für $(I_2/I_1) \rightarrow 0$ erhält man $\omega_E \rightarrow \omega_A$. Ist andererseits das Trägheitsmoment der zweiten Scheibe wesentlich größer als das der ersten ($I_2 \gg I_1$), dann

sollte Scheibe 1 fast augenblicklich stoppen, ohne dass sich Scheibe 2 nach dem Stoß noch wesentlich weiter dreht. Auch dies liest man aus unserem Ergebnis ab, denn $(I_2/I_1) \rightarrow \infty$ ergibt $\omega_E \rightarrow 0$, wie erwartet.

Weitergedacht: Ähnliche mit verschiedener Geschwindigkeit rotierende Scheiben treten beispielsweise in dem Schaltgetriebe eines LKW oder PKW auf. Das Foto zeigt solche Scheiben in einem LKW-Getriebe.



Die Kupplung in einem LKW-Getriebe trennt beim Auskuppeln die vom Motor angetriebene Schwungscheibe (hinten) vom Getriebe. Die Kupplungsscheibe (Mitte) wird beim eingekuppelten Fahren von der Druckplatte des Automaten (vorn) auf die Schwungscheibe gepresst. Dabei wird die kinetische Energie der Schwungscheibe auf die Antriebsachse übertragen. (© Dick Luria/Science Source/Photo Researchers.) ■

Obwohl sich der Drehimpulserhaltungssatz aus den experimentellen Befunden und unabhängig von den Newton'schen Bewegungsgesetzen ergibt, kann man den Umstand, dass sich die inneren Drehmomente eines Systems gegenseitig aufheben, aus dem dritten Newton'schen Axiom ableiten. Betrachten wir die zwei Teilchen in Abbildung 8.56. Mit $\mathbf{F}_1^{(2)}$ bezeichnen wir die Kraft, die Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausübt, $\mathbf{F}_2^{(1)}$ ist entsprechend die von Teilchen 1 auf Teilchen 2 ausgeübte Kraft. Nach dem dritten Newton'schen Axiom gilt $\mathbf{F}_2^{(1)} = -\mathbf{F}_1^{(2)}$. Die Summe der Drehmomente, die von diesen Kräften bezüglich des Punkts O ausgeübt werden, ist

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 &= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{(2)}) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2^{(1)}) \\ &= (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1^{(2)}) - (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1^{(2)}) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Der Vektor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ verläuft entlang der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Teilchen. Wenn auch die Kraft $\mathbf{F}_1^{(2)}$ parallel zu der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Teilchen wirkt, sind $\mathbf{F}_1^{(2)}$ und $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ entweder parallel oder antiparallel. Dann gilt für

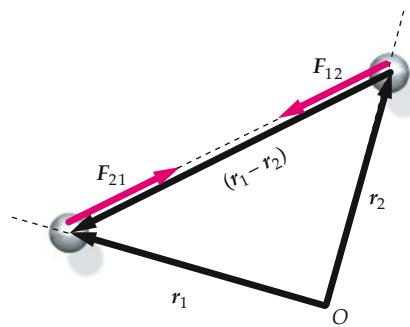


Abbildung 8.56 Die inneren Kräfte $F_1^{(2)}$ und $F_2^{(1)}$ erzeugen kein Drehmoment bezüglich des Punkts O , wenn sie entlang der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Teilchen wirken.

ihr Vektorprodukt

$$(r_1 - r_2) \times F_1^{(2)} = 0.$$

Wenn dies auf alle inneren Kräfte zutrifft, heben sich die inneren Drehmomente gegenseitig auf. Allerdings treten nicht alle Kräfte in entgegengesetzte gleichen Paaren auf. Ein Beispiel für sich nicht aufhebende innere Kräfte sind die magnetischen Kräfte, die bewegte geladene Teilchen aufeinander ausüben.

Beim Stoß der beiden Scheiben in Beispiel 8.19 lässt sich der Energieerhaltungssatz nicht anwenden, denn es wird mechanische Energie dissipiert. Dies lässt sich nachprüfen, indem man die Energie mithilfe des Drehimpulses ausdrückt. Ein Körper, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, hat die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{(I \omega)^2}{2 I}.$$

Mit $L = I \omega$ ergibt sich

$$E_{\text{kin}} = \frac{L^2}{2 I}. \quad (8.43)$$

(Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ausdruck für die kinetische Energie bei einer linearen Bewegung: $E_{\text{kin}} = p^2/2m$; Gleichung 6.12.) Die kinetische Anfangsenergie in Beispiel 8.19 ist damit

$$E_{\text{kin,A}} = \frac{L_A^2}{2 I_1},$$

und die kinetische Endenergie ist

$$E_{\text{kin,E}} = \frac{L_E^2}{2(I_1 + I_2)}.$$

Wegen $L_E = L_A$ ergibt sich das Verhältnis von kinetischer End- und Anfangsenergie zu

$$\frac{E_{\text{kin,E}}}{E_{\text{kin,A}}} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}.$$

Dieser Wert ist immer kleiner als eins, daher kann man die Wechselwirkung zwischen den Scheiben mit einem vollständig inelastischen Stoß zweier Objekte in einer Dimension vergleichen.

Beispiel 8.20 illustriert den Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Trägheitsmoment für ein System, dessen Massenverteilung sich während der Drehung ändert.

Beispiel 8.20: Der Sturz des Tyrannen

Auf dem Schulhof steht ein kleines Karussell, bestehend aus einer Scheibe mit 3,0 m Durchmesser und einem Trägheitsmoment von $130 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ (Abbildung 8.57). Am Anfang stehen Sie zu fünf auf dem Karussell, während es sich mit 20 Umdrehungen pro Minute dreht. Auf ein Signal hin werden Sie und Ihre Freunde sich schnell an die Achse des Karussells herandrücken, während der ahnungslose Kevin, der Sie seit Jahren tyrannisiert und ebenfalls mitfährt, nahe am Rand bleibt. Daraufhin wird das Karussell schneller, Kevin wird heruntergeschleudert und landet im Dreck. Kevin ist schnell und kräftig, daher rechnen Sie damit, dass die Zentripetalbeschleunigung kleiner als $-4g$ sein muss, damit er sich nicht mehr halten kann und vom Karussell fliegt. Kann dieser Plan funktionieren? (Nehmen Sie an, dass jede Person 60 kg wiegt.)



Abbildung 8.57 Schülergruppe auf Karussell.

Problembeschreibung: Indem Sie sich eng an die Drehachse des Karussells drücken, verringern Sie das Trägheitsmoment des Systems aus Karussell und fünf Mitfahrern. Da keinerlei externe Drehmomente bezüglich der Drehachse auf das System wirken, bleibt der Drehimpuls bezüglich der Achse konstant. Der Drehimpuls lässt sich als Produkt von Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit ausdrücken, daher bedeutet eine Verringerung des Trägheitsmoments eine Zunahme der Winkelgeschwindigkeit. Mithilfe der Winkelgeschwindigkeit lässt sich dann die Zentripetalbeschleunigung am Rand berechnen.

Lösung: 1. Die Zentripetalbeschleunigung a_{ZP} hängt von der Winkelgeschwindigkeit ω_E nach der Bewegung von Ihnen und Ihren Freunden und dem Radius r ab:

$$a_{\text{ZP}} = -\omega_E^2 r$$

2. Der Drehimpuls bleibt erhalten. Für Drehungen um eine feste Achse gilt $L = I \omega$:

$$\begin{aligned} L_E &= L_A \\ I_E \omega_E &= I_A \omega_A \end{aligned}$$

3. Das Trägheitsmoment des Systems ergibt sich als Summe der Trägheitsmomente der Schüler plus dem Trägheitsmoment des Karussells selbst. Jeder Schüler hat die Masse $m = 60\text{ kg}$. Am Anfang befinden sich alle fünf Personen direkt am Rand der Drehscheibe ($r_1 = 1,5\text{ m}$):

$$\begin{aligned} I_A &= 5m r_1^2 + I_{\text{Karussell}} \\ &= 5(60\text{ kg})(1,5\text{ m})^2 + 130\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= 805\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

4. Um das Trägheitsmoment am Ende auszurechnen, nehmen Sie an, dass Sie und Ihre Freunde bis auf $r_2 = 30\text{ cm}$ an die Achse des Karussells herankommen:

$$\begin{aligned} I_E &= m r_1^2 + 4m r_2^2 + I_{\text{Karussell}} \\ &= (60\text{ kg})(1,5\text{ m})^2 + 4(60\text{ kg})(0,3\text{ m}) + 130\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ &= 287\text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

5. Lösen Sie das Ergebnis aus Schritt 2 nach ω_E auf und setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 3 und 4 ein:

$$\begin{aligned} \omega_E &= \frac{I_A}{I_E} \omega_A = \frac{805\text{ kg} \cdot \text{m}^2}{287\text{ kg} \cdot \text{m}^2} 20\text{ min}^{-1} \\ &= 56,2\text{ min}^{-1} = 5,88\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

6. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 5 in Schritt 1 ein:

$$a_{ZP} = -\omega_E^2 r = -(5,88\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 (1,5\text{ m}) = -51,9\text{ m/s}^2$$

7. Drücken Sie diesen Wert in Vielfachen der Erdbeschleunigung g aus:

$$a_{ZP} = -51,9\text{ m/s}^2 \cdot \frac{1\text{ g}}{9,81\text{ m/s}^2} = -5,29\text{ g} = \boxed{-5,3\text{ g}}$$

8. Reicht dieser Wert, um Kevin vom Karussell zu schleudern?

Ja, da die Beschleunigung kleiner als -4 g ist.

Plausibilitätsprüfung: Am Rand des Karussells sind Sie und Ihre Freunde fünfmal so weit von der Drehachse entfernt, wie wenn Sie sich dicht an die Drehachse drücken. Damit beträgt Ihr Beitrag zum Trägheitsmoment des Systems nahe der Drehachse nur $1/25$ des Werts am Anfang. Wegen der Drehimpulserhaltung geht diese starke Abnahme des Trägheitsmoments mit einer entsprechenden Zunahme der Winkelgeschwindigkeit einher. Unser Ergebnis aus Schritt 5 zeigt, dass die Winkelgeschwindigkeit von 20 min^{-1} auf 56 min^{-1} steigt.

Weitergedacht: Die Umlaufgeschwindigkeit eines Punkts auf einem sich drehenden Karussell ist für einen Punkt am Rand am größten und nimmt für einen Punkt in der Mitte auf null ab. Die Schüler auf dem Rand bewegen sich auf einer Kreisbahn. Wenn sie sich in die Mitte des Karussells begeben, laufen sie auf einen Teil des Karussells zu, der sich langsamer als sie bewegt. Daher hat die Haftreibungskraft, die von den Sohlen ihrer Schuhe auf das Karussell ausgeübt wird, eine Komponente in tangentialer Richtung, die das Karussell beschleunigt. In gleicher Weise übt aber auch das Karussell eine entgegengesetzt gleiche Kraft auf die Füße der Schüler aus, die ihre Bewegung in tangentialer Richtung verlangsamt. Die Haftreibungskräfte zwischen den Füßen und dem Karussell führen zu einem Gesamtdrehmoment auf das Karussell, das den Drehimpuls bezüglich der Drehachse erhöht. Die entgegengesetzt gleichen Haftreibungskräfte der Füße führen zu einem Drehmoment entgegen der Bewegungsrichtung der „Versetzung“; die mit diesen Kräften verbundenen Drehmomente verringern ihren Drehimpuls bezüglich der Achse. Die zwei Drehmomente sind entgegengesetzt gleich, ebenso die damit verbundenen Änderungen der Drehimpulse. Daher bleibt der Drehimpuls des Systems aus Karussell und den darauf mitfahrenden Schülern konstant. ■

Beispiel 8.21: Noch eine Karusselfahrt

ZUR ÜBUNG

Ein 25 kg schweres Kind rennt auf einem Spielplatz mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 2,5 m/s *tangential* auf ein stehendes Karussell mit einem Radius von $r = 2,0 \text{ m}$ und einem Trägheitsmoment von $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ zu. Dann springt es auf (Abbildung 8.58). Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das Kind und das Karussell am Ende bewegen.

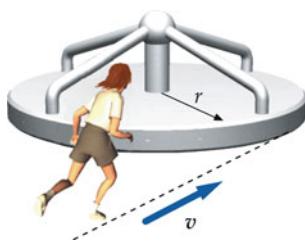


Abbildung 8.58 Skizze des Systems aus Karussell und Kind.

Problembeschreibung: Wenn die Füße des Kindes den Boden verlassen haben, wirken keine äußeren Drehmomente auf das System aus Kind und Karussell, daher bleibt der Gesamtdrehimpuls des Systems bezüglich der Karussellachse erhalten. Die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Karussells ist null. Weil die Richtung der Drehachse fest steht, lässt sich die Richtung der Drehbewegung durch ein Plus- oder Minuszeichen charakterisieren.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Das Beispiel 8.20 zeigt, wie das Trägheitsmoment des Systems aus Karussell und den Schülern abnimmt, wenn die „Verschwörer“ sich in die Mitte bewegen, während der Drehimpuls konstant bleibt. Aus Gleichung 8.43 lesen wir ab, dass dann die Rotationsenergie des Systems zunimmt. Der Energiezuwachs stammt aus der inneren Energie der Schüler. Um radial zur Mitte zu laufen, muss man – wie beim Hinauflaufen auf einer geneigten Ebene – innere Energie aufbringen.

Die Beispiele 8.21 bis 8.23 behandeln verschiedene Aspekte von Drehbewegungen: Beispiel 8.21 zeigt, wie der Drehimpuls bezüglich eines Punkts bei einer geradlinigen Bewegung sich in einer Drehbewegung fortsetzt. Beispiel 8.22 illustriert den Zusammenhang zwischen Drehimpuls und kinetischer Energie, und Beispiel 8.23 zeigt, wie eine Änderung der mechanischen Energie mit dem Drehimpuls verknüpft ist.

Lösung: 1. Schreiben Sie einen Ausdruck für den Anfangsdrehimpuls des Systems aus dem rennenden Kind und dem Karussell (bezüglich der Drehachse des Karussells) auf. Der Anfangsdrehimpuls des Karussells ist null. Das Kind hat die Masse m und unmittelbar vor dem Aufsprung eine Geschwindigkeit v tangential zum Karussell. Betrachten Sie das Kind als eine Punktmasse.

2. Drücken Sie den Gesamtdrehimpuls des Systems aus Kind und Karussell am Ende mithilfe der Endwinkelgeschwindigkeit ω_E aus:

3. Setzen Sie die in Schritt 1 und 2 erhaltenen Ausdrücke gleich und lösen Sie nach ω_E auf:

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$L_A = |\mathbf{r}_{\text{Kind}} \times m \mathbf{v}_A| = r m v_A$$

2.

$$L_E = I \omega_E = (m r^2 + I_{\text{Karussell}}) \omega_E$$

3.

$$\omega_E = \frac{m r v}{m r^2 + I_{\text{Karussell}}} = 0,21 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Endgeschwindigkeit des Kindes ist $\omega_E r = (0,21 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}) (2,0 \text{ m}) = 0,42 \text{ m/s}$. Wie zu erwarten ist diese Geschwindigkeit deutlich geringer als die Anfangsgeschwindigkeit des Kindes beim Aufspringen (2,5 m/s).

Übung 8.8: Berechnen Sie die kinetische Anfangs- und Endenergie des Systems aus Karussell und mitfahrendem Kind.

◀

Beispiel 8.22: Der Zug nach unten

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich auf einem reibungsfreien Tisch mit der Geschwindigkeit v_A auf einer Kreisbahn vom Radius r_A . Das Teilchen ist an einem Faden befestigt, der durch ein Loch im Tisch nach unten geführt wird (Abbildung 8.59). Jetzt wird der Faden langsam nach unten gezogen, sodass sich das Teilchen auf einem kleineren Kreis mit dem Radius r_E bewegt. a) Drücken Sie die Endgeschwindigkeit mithilfe von r_A , v_A und r_E aus. b) Berechnen Sie die Zugkraft F_S in dem Faden, wenn das Teilchen sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt, und drücken Sie F_S mithilfe von m , r und dem Drehimpuls L aus. c) Berechnen Sie die durch die Zugkraft F_S an

dem Teilchen verrichtete Arbeit, indem Sie $F_S \cdot dr$ integrieren. Drücken Sie Ihre Antwort mithilfe von r und L_A aus.

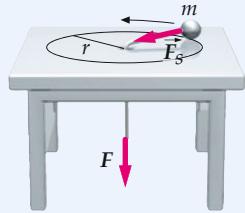


Abbildung 8.59 Skizze des Systems aus Tisch, Teilchen und Faden, der nach unten gezogen wird.

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit des Teilchens hängt mit seinem Drehimpuls zusammen. Das Gesamtdrehmoment ist gleich der Änderungsrate des Drehimpulses. Da die einzige resultierende Kraft auf das Teilchen die Zugkraft F_S ist, die stets zu dem Loch hin gerichtet ist, ist das Drehmoment bezüglich der Achse durch dieses Loch gleich null. Damit bleibt der Drehimpuls bezüglich dieser Achse konstant.

Lösung:

Teilaufgabe a

Durch die Drehimpulserhaltung sind die Anfangs- und Endgeschwindigkeit sowie der Anfangs- und Endradius folgendermaßen miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} L_E &= L_A \\ mr_E v_E &= mr_A v_A \end{aligned}$$

und damit

$$v_E = \left[\frac{r_A}{r_E} v_A \right]$$

Teilaufgabe b

1. Stellen Sie mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms einen Zusammenhang zwischen F_S , v und r her:

$$F_S \approx -m \frac{v^2}{r}$$

2. Stellen Sie mithilfe der Definition des Drehimpulses einen Zusammenhang zwischen L , r und v her. Da das Teilchen nur langsam gezogen wird, gilt $\beta \ll 1$ und damit $\cos \beta \approx 1$ (Abbildung 8.60a):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} \\ L &= m |\mathbf{r}| |\mathbf{v}| \cos \beta \approx m r v \end{aligned}$$

3. Eliminieren Sie v , indem Sie das Ergebnis aus Schritt 2 nach v auflösen und dann in die Gleichung von Schritt 1 einsetzen:

$$F_S = -m \frac{v^2}{r} = -\frac{m}{r} \left(\frac{L}{mr} \right)^2 = \left[-\frac{L^2}{mr^3} \right]$$

Teilaufgabe c

1. Skizzieren Sie, wie das Teilchen immer näher an das Loch kommt (Abbildung 8.60b). Dabei haben die Zugkraft F_S und die Abstandsverkürzung dr dieselbe Richtung.

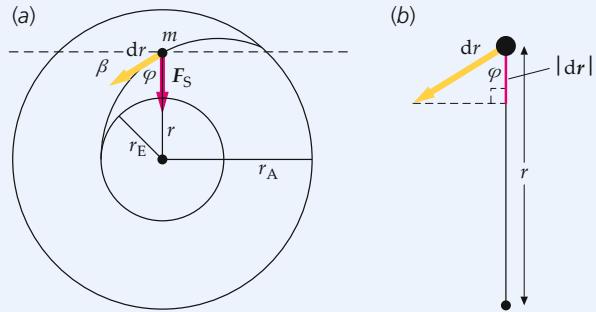


Abbildung 8.60 Darstellung der Teilchenbewegung in Richtung des Lochs. Außerdem ist der Radialbetrag des überstrichenen Wegelements dr illustriert.

2. Verwenden Sie das Ergebnis aus Schritt 1 und schreiben Sie $dW = F_S \cdot dr$ mithilfe von F_S und dr :

$$dW = F_S \cdot dr = F_S dr$$

3. Integrieren Sie nun von r_A bis r_E und setzen Sie für F_S das Ergebnis aus Schritt 3 von Teilaufgabe b ein:

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_A}^{r_E} F_S dr = - \int_{r_A}^{r_E} \frac{L^2}{mr^3} dr \\ &= -\frac{L^2}{m} \int_{r_A}^{r_E} r^{-3} dr = \frac{L^2}{m} \frac{r^{-2}}{2} \Big|_{r_A}^{r_E} \\ &= \left[\frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_E^2} - \frac{1}{r_A^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Beachten Sie, dass man Arbeit verrichten muss, um die Schnur nach unten zu ziehen. Da r_E kleiner ist als r_A , ist die Arbeit positiv; sie ist gleich dem Zuwachs der kinetischen Energie des Teilchens. Die Änderung der kinetischen Energie lässt sich direkt ausrechnen. Mit dem Zusammenhang $E_{kin} = L^2/2I$ (wobei $L_A = L_E = L$ und $I = mr^2$ gilt) ergibt sich für die Änderung der kinetischen Energie $E_{kin,E} - E_{kin,A} = L^2/(2mr_E^2) - L^2/(2mr_A^2) = (L^2/(2m))(r_E^{-2} - r_A^{-2})$. Dies ist dasselbe Ergebnis, das in Schritt 3 von Teilaufgabe c bei der direkten Integration ergeben hat.

Übung 8.9: Bei welchem Radius r_n ist die Zugkraft n -mal größer als beim Radius r_A ? ◀

Beispiel 8.23: Drehimpulserhaltung beim ballistischen Pendel

Ein dünner Stab der Masse m_{Stab} und der Länge d ist an seinem oberen Ende frei drehbar aufgehängt. Ein Kaugummi der Masse m mit der Geschwindigkeit v trifft den Stab in einer Entfernung x von der Aufhängung und bleibt an ihm haften (Abbildung 8.61). Berechnen Sie, in welchem Verhältnis die kinetischen Energien des Systems Kaugummi-Stab unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Stoß stehen.

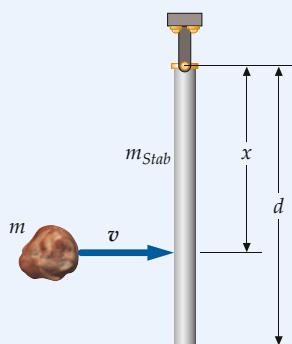


Abbildung 8.61 Drehbar aufgehängter Stab und auftreffendes Kaugummi.

Problembeschreibung: Der Stoß ist inelastisch, die mechanische Energie bleibt demnach bei dem Stoß nicht erhalten. Während des Stoßes übt die Aufhängung eine große Kraft auf den Stab aus, der Impuls bleibt daher ebenfalls nicht erhalten. Es gibt jedoch keine äußeren Drehmomente bezüglich einer senkrecht zur Zeichenebene stehenden Achse durch die Aufhängung, daher bleibt der Drehimpuls bezüglich dieser Achse erhalten. Die kinetische Energie nach dem inelastischen Stoß lässt sich durch den Drehimpuls L und das Trägheitsmoment I des Systems aus Kaugummi und Stab ausdrücken. Mit dem Drehimpulserhaltungssatz kann man einen Zusammenhang zwischen L einerseits sowie Masse m und Geschwindigkeit v des Kaugummis andererseits herstellen. Behandeln Sie das Kaugummi als Punktmasse.

Lösung: 1. Die kinetische Energie des Systems vor dem Stoß ist die Bewegungsenergie des Kaugummis:

$$E_{\text{kin},\text{A}} = \frac{1}{2} m v^2$$

2. Die kinetische Energie nach dem Stoß ist die Rotationsenergie des Systems aus Kaugummi und Stab. Drücken Sie diese Energie durch den Drehimpuls L und das Trägheitsmoment I des Systems aus Kaugummi und Stab aus:

$$E_{\text{kin},\text{E}} = \frac{L^2}{2I}$$

3. Während des Stoßes bleibt der Drehimpuls erhalten. Schreiben Sie den Drehimpuls L mithilfe von m , v und x . Vor dem Stoß ist der Drehimpuls des Stabs null. \mathbf{r} ist der Vektor von der Drehachse zum Kaugummi, v ist die Geschwindigkeit des Kaugummis vor dem Stoß:

$$L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = mxv$$

4. Geben Sie I mithilfe von m , x , m_{Stab} und d an. Das ursprüngliche Trägheitsmoment des Stabs finden Sie in Tabelle 8.1.

$$I = mx^2 + \frac{1}{3}m_{\text{Stab}}d^2$$

5. Setzen Sie die Ausdrücke für L und I in die Gleichungen für $E_{\text{kin},\text{E}}$ ein:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},\text{E}} &= \frac{L^2}{2I} = \frac{(mxv)^2}{2(mx^2 + \frac{1}{3}m_{\text{Stab}}d^2)} \\ &= \frac{3}{2} \frac{m^2 x^2 v^2}{(3mx^2 + m_{\text{Stab}}d^2)} \end{aligned}$$

6. Teilen Sie den Ausdruck für die kinetische Energie nach dem Stoß durch den Ausdruck für die kinetische Energie des Kaugummis:

$$\frac{E_{\text{kin},\text{E}}}{E_{\text{kin},\text{A}}} = \frac{\frac{3}{2} \frac{m^2 x^2 v^2}{(3mx^2 + m_{\text{Stab}}d^2)}}{\frac{1}{2} m v^2} = \boxed{\frac{1}{1 + \frac{m_{\text{Stab}}d^2}{3mx^2}}}$$

Plausibilitätsprüfung: $m_{\text{Stab}}d^2$ und mx^2 haben offensichtlich dieselbe Dimension. Das Ergebnis von Schritt 6 ist somit dimensionslos, wie wir es für das Verhältnis zweier Energien erwarten würden. Das Verhältnis $E_{\text{kin},\text{E}}/E_{\text{kin},\text{A}}$ liegt zudem zwischen 1 und 0, wie es für einen inelastischen Stoß zu erwarten ist. Im Grenzwert $m_{\text{Stab}}/m \rightarrow \infty$ geht das Verhältnis $E_{\text{kin},\text{E}}/E_{\text{kin},\text{A}}$ gegen null, im Grenzwert $m_{\text{Stab}}/m \rightarrow 0$ haben wir $E_{\text{kin},\text{E}}/E_{\text{kin},\text{A}} \rightarrow 1$. Auch dieses Verhalten trifft unsere Erwartungen.

Weitergedacht: Diese Behandlung eines ballistischen Pendels mit einer Drehbewegung entspricht dem Vorgehen in Beispiel 6.9. Darin hatten wir die Impulserhaltung verwendet, um die Energie des Pendels nach dem Stoß zu berechnen. ■

Abbildung 8.62 zeigt einen Eishockey-Puck, dem auf einer reibungsfreien Fläche eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben wird. Der Puck ist an einem Faden befestigt, der sich um einen vertikalen Pfosten wickelt. Diese Beschreibung klingt ähnlich wie die Aufgabenstellung in Beispiel 8.22, unterscheidet sich aber ganz wesentlich von ihr: Es gibt nichts, was

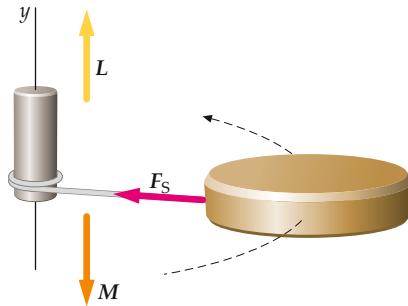


Abbildung 8.62 Ein Puck ist an einem Faden befestigt, der sich um einen Pfosten wickelt. Dabei wird keine Arbeit verrichtet.

Arbeit an dem Puck verrichten könnte, und es gibt keinen Mechanismus zur Dissipation von Energie. Daher muss die mechanische Energie erhalten bleiben. Wir bezeichnen den Betrag des Drehimpulses von dem Puck bezüglich des Pfostens mit L . Da $E_{\text{kin}} = L^2/2I$ konstant bleibt und I abnimmt, während der Abstand r des Pucks zum Pfosten abnimmt, muss auch der Drehimpuls L abnehmen. Daher erzeugt die Änderung von L ein ihm entgegengerichtetes Drehmoment. Des weiteren wirkt die Zugkraft F_S in Richtung Faden. Da sie parallel zur radialen Richtung ist, erzeugt sie kein Drehmoment.

Zentralkraft und Drehimpulserhaltung

Bewegt sich ein Teilchen nur unter dem Einfluss einer Zentralkraft, so bewegt es sich auf einer Kreisbahn, und der Kraftvektor zeigt zum Kreismittelpunkt. Allgemein bezeichnet man eine solche Kraft, die stets zu einem festen Punkt zeigt, zum sogenannten Zentrum der Kraft, als **Zentralkraft**. Eine solche Kraft hat die Form $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$, wobei $\hat{\mathbf{r}}$ der Einheitsvektor in Richtung des Kraftzentrums ist, d.h., \mathbf{F} hängt nur vom Abstand des Teilchens zum Kraftzentrum ab. Wirkt auf ein Teilchen in einem Abstand r vom Kraftzentrum eine derartige Kraft, dann gilt für das Drehmoment bezüglich des Kraftzentrums:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = F \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = 0,$$

da $\hat{\mathbf{r}}$ und \mathbf{r} in dieselbe Richtung zeigen. Mit Gleichung 8.38 ergibt sich daraus, dass der Drehimpuls des Systems erhalten ist:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = 0. \quad (8.44)$$

Beispiele für Zentralkräfte sind die Gravitationskraft und die Coulomb-Kraft, die wir in Kapitel 18 noch kennenlernen. Streng genommen ist die Gravitation nur in einem Bezugssystem, das relativ zum Schwerpunktsystem ruht, eine Zentralkraft. Bei den folgenden Überlegungen gehen wir jedoch davon aus, dass die Massen der Planeten gegenüber der Sonnenmasse vernachlässigbar sind und die Sonne in einem Brennpunkt der ellipsenförmigen Umlaufbahn eines Planeten ruht.

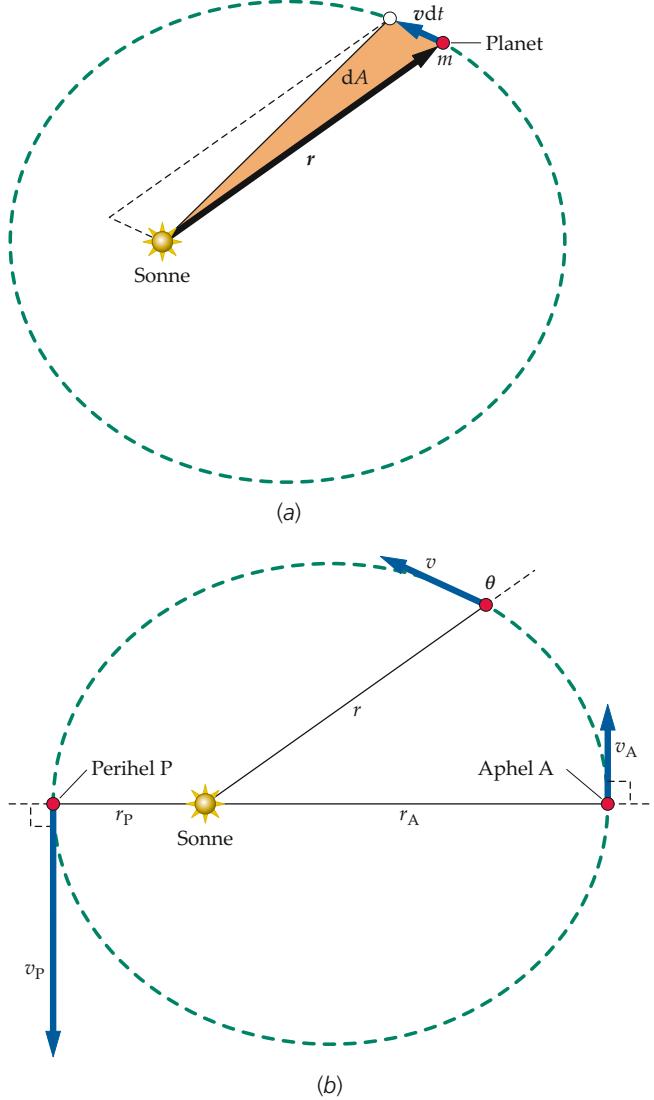


Abbildung 8.63 a) Die Fläche, die der Ortsvektor eines Planeten in dem Zeitintervall dt überstrichen, ist gleich der halben Fläche des eingezeichneten Parallelogramms. Dessen Größe wird durch das Kreuzprodukt $\mathbf{r} \times v dt$ bestimmt und ist somit proportional zum Bahndrehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$ des Planeten bezüglich der Sonne. Da der Bahndrehimpuls \mathbf{L} konstant bleibt, bleibt auch die vom Ortsvektor überstrichene Fläche A konstant, d.h. $dA/dt = \text{const.}$ b) Der Wert des Bahndrehimpulses, gegeben durch $L = m v r \sin \theta$, bleibt konstant; somit bleibt auch $r \sin \theta$ konstant. Sowohl im Aphel als auch im Perihel gilt $\theta = 90^\circ$. Damit folgt $r_{\text{Aphel}} v_{\text{Aphel}} = r_{\text{Perihel}} v_{\text{Perihel}}$, sodass die Bahngeschwindigkeit des Planeten im Perihel maximal und im Aphel minimal ist.

Abbildung 8.63a zeigt einen Planeten, der sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne bewegt. Im Zeitintervall dt bewegt sich der Planet um die Strecke $v dt$ weiter, und der Radiusvektor \mathbf{r} von der Sonne zu dem Planeten überstreich in dieser Zeit die in der Abbildung farbig gekennzeichnete Fläche. Sie ist genau halb so groß wie das durch die Vektoren \mathbf{r} und $v dt$ gebildete Parallelogramm mit der Fläche $\mathbf{r} \times v dt$. Deshalb gilt für die Flä-

8 Drehbewegungen

che dA , die vom Radiusvektor im Zeitintervall dt überstrichen wird,

$$dA = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dt = \frac{1}{2m} \mathbf{r} \times m \mathbf{v} dt,$$

und damit folgt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{L}. \quad (8.45)$$

Dabei ist $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$ der Bahndrehimpuls des Planeten relativ zur Sonne. Die in einem bestimmten Zeitintervall dt überstrichene Fläche dA ist damit proportional zum Betrag L des Bahndrehimpulses. In dem Zentrafeld wirkt nur eine Kraft entlang der Verbindungslinie von dem Planeten zur Sonne; es gibt daher kein Drehmoment bezüglich der Sonne, sodass der Betrag des Drehimpulses erhalten bleibt. Daraus folgt, dass die in einem bestimmten Zeitintervall überstrichene Fläche für alle Teile der Planetenbahn gleich groß ist, was genau der Inhalt des zweiten Kepler'schen Gesetzes ist. Insbesondere folgt aus der Drehimpulserhaltung, dass auch $r v \sin \theta$ konstant bleibt. Im Aphel und im Perihel ist $\theta = 90^\circ$ (Abbildung 8.63b), und damit gilt $r_{\text{Aphel}} v_{\text{Aphel}} = r_{\text{Perihel}} v_{\text{Perihel}}$.

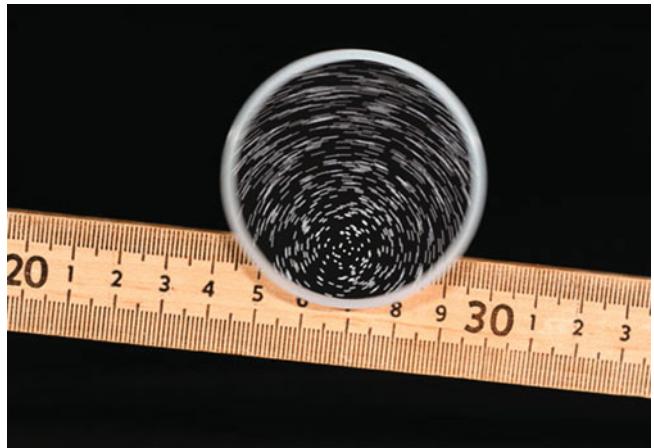


Abbildung 8.64 Bei einem rollenden Körper ist der Berührpunkt des Körpers mit seiner Auflagefläche in Ruhe. Bei diesem Foto einer rollenden Garnspule sind alle bewegten Punkte unscharf abgebildet, nur der Berührpunkt ist scharf. (© Loren Winters/Visuals Unlimited.)

8.8 Rollende Körper

Rollen, ohne zu gleiten

Bis jetzt haben wir nur rotierende Körper betrachtet, deren Drehachse fest im Raum stand. In diesem Abschnitt geht es um rotierende Körper, deren Drehachse im Raum verschoben wird, wobei sich ihre Richtung nicht ändern soll. Diese Kombination aus einer Drehbewegung und einer linearen Bewegung nennt man **Rollen**. Rollt ein Körper reibungsfrei, so gilt ein einfacher Zusammenhang zwischen der linearen und der Drehbewegung: Der Berührpunkt zwischen dem Körper und seiner Auflagefläche ist nämlich momentan in Ruhe, und der Körper rotiert um eine Drehachse durch den Berührpunkt. Man erkennt das sehr schön an dem Foto einer Garnspule in Abbildung 8.64, die ohne zu gleiten eine geneigte Ebene hinunterrollt: Die sich schnell bewegenden Teile der Spule sind unscharf und verwischt, und die Teile der Spule, die sich am langsamsten bewegen, sind auf dem Foto scharf zu sehen.

In Abbildung 8.65 rollt ein Rad mit dem Radius r , ohne zu gleiten, über eine glatte Fläche. Der Punkt P auf dem Rad bewegt sich wie gezeigt mit der Geschwindigkeit

$$v = r_p \omega. \quad (8.46)$$

ROLLBEDINGUNG FÜR DIE GE SCHWINDIGKEIT

Dabei gibt r_p die radial gemessene Entfernung von P zur Rotationsachse an. Der Massenmittelpunkt des Rads bewegt sich mit der Geschwindigkeit

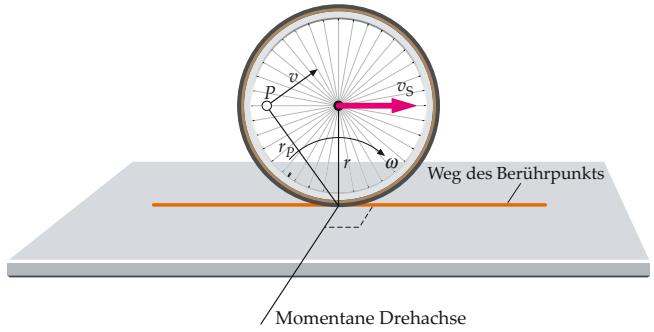


Abbildung 8.65 Ein rollendes Rad rollt nicht um seine Achse, sondern um den momentanen Berührpunkt mit der Auflagefläche. Wenn das Rad nach rechts rollt, bewegt sich der Punkt P nach oben und nach rechts. Der Punkt P erreicht seine maximale Höhe, wenn er direkt über dem Mittelpunkt des Rads ist.

$$v_S = r \omega. \quad (8.47)$$

ROLLBEDINGUNG FÜR DIE GE SCHWINDIGKEIT DES MASSENMITTELPUNKTS

Für einen Punkt auf der Oberseite des Rads gilt $r_p = 2r$, d.h., die Oberseite des Rads bewegt sich doppelt so schnell wie der Massenmittelpunkt.

Differenziert man beide Seiten der Gleichung 8.47 nach der Zeit, so ergibt sich

$$a_S = r \alpha. \quad (8.48)$$

ROLLBEDINGUNG FÜR DIE BESCHLEUNIGUNG



Abbildung 8.66 Bei einem rollenden Rad hängen der Drehwinkel θ und die zurückgelegte Entfernung s des Massenmittelpunkts gemäß $s = r\theta$ zusammen.

Diese Rollbedingung gilt für ein fallendes Yo-Yo, das sich von einer Schnur abwickelt, deren oberes Ende festgehalten wird, genauso wie für ein Rad.

Ein Rad vom Radius r rollt, ohne zu gleiten, entlang eines geraden Wegs. Wenn das Rad sich um einen Winkel θ dreht (Abbildung 8.66), bewegt sich der Berührpunkt zwischen dem Rad und der Unterlage um eine Entfernung s , die mit θ über die Beziehung

$$s = r\theta \quad (8.49)$$

ROLLBEDINGUNG FÜR DIE ENTFERNUNG

zusammenhängt. Wenn das Rad auf einer ebenen Fläche rollt, bleibt der Massenmittelpunkt immer direkt über dem Berührpunkt des Rads mit der Fläche. Er bewegt sich daher ebenfalls um die Strecke $r\theta$.

In Kapitel 7 (Gleichung 7.22) haben wir gesehen, dass die kinetische Energie eines Systems sich als Summe von zwei Teilen schreiben lässt: der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m v_S^2$, die mit der Bewegung des Massenmittelpunkts verbunden ist, und der kinetischen Energie aus der Bewegung der Teile bezüglich des Massenmittelpunkts. Für einen um eine Achse durch den Massenmittelpunkt rotierenden Körper beträgt die Energie bezüglich eines Bezugssystems, das sich mit dem Massenmittelpunkt bewegt, gerade $\frac{1}{2}I_S \omega^2$. Dann ist die kinetische Gesamtenergie eines rollenden Körpers

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m v_S^2 + \frac{1}{2}I_S \omega^2. \quad (8.50)$$

KINETISCHE ENERGIE EINES ROLLENDEN KÖRPERS

!

Machen Sie sich klar, dass ein rollender Körper sowohl kinetische Energie einer Translationsbewegung als auch kinetische Energie einer Drehbewegung enthält.

Mithilfe dieser Gleichung können wir in Beispiel 8.24 berechnen, wie hoch eine Bowlingkugel in der Kugelrückführung steigt. Beispiel 8.25 verdeutlicht die Rollbedingung.

Beispiel 8.24: Eine Bowlingkugel

Eine Bowlingkugel hat den Radius 11 cm und die Masse 7,2 kg. Sie rollt, ohne zu gleiten, mit 2,0 m/s in eine horizontale Kugelrückführung. Dann rollt sie, ohne zu gleiten, auf einer Steigung bis zu der Höhe h hinauf, wo ihre Bewegung stoppt, bevor sie die Steigung wieder hinunterrollt. Berechnen Sie h .

Problembeschreibung: Die Kugel rollt, ohne zu gleiten. Es geht keine mechanische Energie durch Gleitreibung verloren, und es wirken keine äußeren Kräfte auf das System Kugel–Steigung–Erde; damit wird auch keine äußere Arbeit an der Kugel verrichtet, und die kinetische Energie bleibt erhalten. Die kinetische Anfangsenergie, zusammengesetzt aus der Energie $\frac{1}{2}m v_S^2$, die mit der linearen Bewegung des Massenmittelpunkts verbunden ist, und der Rotationsenergie $\frac{1}{2}I_S \omega^2$ um eine Achse durch den Massenmittelpunkt, wird in potenzielle Energie mgh umgewandelt. Da die Kugel rollt, ohne zu gleiten, gilt für den Zusammenhang von anfänglicher linearer Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit die Rollbedingung $v_S = r\omega$.

ZUR ÜBUNG

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Skizzieren Sie in einer Zeichnung die Kugel mit ihrer Anfangs- und Endlage und tragen Sie die wichtigen Größen ein (Abbildung 8.67).

2. Da keine äußeren Kräfte auf das System wirken, ist die durch äußere Kräfte verrichtete Arbeit null. Da die Kugel schlupffrei rollt, wird keine Energie durch Gleitreibung dissipiert. Die mechanische Arbeit ist daher konstant:

3. Wenden Sie den Energieerhaltungssatz für die mechanische Energie an; es ist $E_{\text{pot},A} = 0$ und $E_{\text{kin},E} = 0$. Schreiben Sie die anfängliche kinetische Gesamtenergie $E_{\text{kin},A}$ mithilfe der anfänglichen linearen Schwerpunktsgeschwindigkeit $v_S = v_A$ und der Winkelgeschwindigkeit ω_A :

4. Setzen Sie $\omega_A = v_A/r$ und $I_S = \frac{2}{5}mr^2$ ein und lösen Sie nach h auf:

8 Drehbewegungen

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

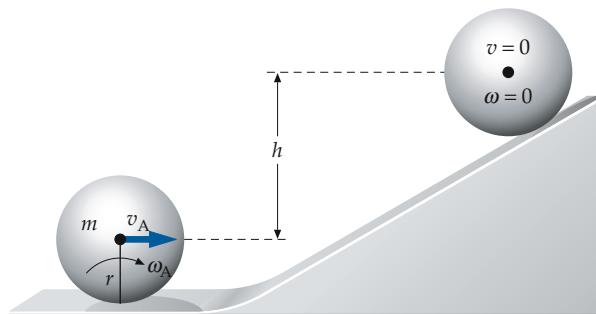


Abbildung 8.67 Skizze der Anfangs- und Endlage der Kugel mitsamt den relevanten Größen.

2.

$$E_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{therm}}$$

$$0 = \Delta E_{\text{mech}} + 0$$

3.

$$E_{\text{pot,E}} + E_{\text{kin,E}} = E_{\text{pot,A}} + E_{\text{kin,A}}$$

$$mg h + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_S \omega_A^2$$

4.

$$\begin{aligned} mg h &= \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} m r^2 \right) \frac{v_A^2}{r^2} \\ &= \frac{7}{10} m v_A^2 \end{aligned}$$

sodass gilt

$$h = \frac{7 v_A^2}{10 g} = 0,2854 \text{ m} = [29 \text{ cm}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Höhe h ist unabhängig von der Masse oder dem Radius der Kugel. Sie hängt, wie zu erwarten, nur von der Anfangsgeschwindigkeit ab, denn kinetische und potentielle Energie sind beide proportional zur Masse, wodurch sich die Masse aus der Rechnung herauskürzt.

Weitergedacht: Die Höhe h ist auch vom Radius r der Kugel unabhängig. Dieses Ergebnis folgt wegen $I_S = \frac{2}{5} m r^2$ und $\omega_A = v_A/r$. In dem Produkt $I_S \omega_A^2$ fällt damit r heraus.

Übung 8.10: Berechnen Sie die anfängliche kinetische Energie der Bowlingkugel. ◀

Beispiel 8.25: Eine Partie Billard

Beim Billard trifft ein Queue eine Kugel horizontal in einer Entfernung d oberhalb des Massenmittelpunkts der Kugel (Abbildung 8.68). Bestimmen Sie den Wert für d , bei dem die Billardkugel von Beginn an rollt, ohne zu gleiten. Drücken Sie Ihre Antwort mithilfe des Kugelradius r aus.

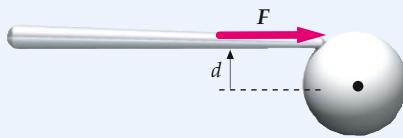


Abbildung 8.68 Darstellung der Kollision von Queue und Billardkugel.

Problembeschreibung: Die Wirkungslinien der Gewichtskraft und der Normalkräfte verlaufen durch den Massenmittelpunkt und üben daher kein Drehmoment auf die Kugel aus. Die Reibungskraft ist erheblich kleiner als die durch den Queue übertragene Stoßkraft und kann daher vernachlässigt werden. Wenn der Queue die Kugel auf Höhe des Massenmittelpunkts trifft, bewegt sich die Kugel rein linear ohne Rotation. Trifft der Queue die Kugel unterhalb des Zentrums, so hat sie anfangs einen Rückwärtsspin, der Billardspieler spricht von Effet und nennt die Kugel „angespielt“. Bei einem bestimmten Wert von d oberhalb des Massenmittelpunkts erhält die

Kugel gerade die richtige Kombination aus Vorwärtsspin und linearer Beschleunigung, um die Rollbedingung zu erfüllen. Dieser Wert von d bestimmt das Verhältnis des auf die Kugel ausgeübten Drehmoments zur Kraft und legt damit auch das Verhältnis von Winkelbeschleunigung α und linearer Beschleunigung a_S fest. Die lineare Beschleunigung ist $a_S = F_{\text{ext}}/m$, unabhängig von d . Damit die Kugel von Anfang an rollt, ohne zu gleiten, müssen wir α und a_S bestimmen und dann in die Rollbedingung $a_S = r\alpha$ einsetzen. Damit können wir d berechnen.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein Kräftebild der Kugel (Abbildung 8.69). Nehmen Sie an, dass die Reibungskraft zwischen der Kugel und dem Billardtisch vernachlässigbar ist. Zeichnen Sie deshalb diese Reibungskraft nicht ein.

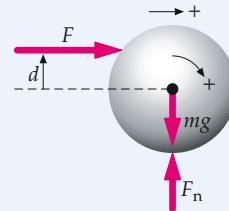


Abbildung 8.69 Kräftebild der Billardkugel.

2. Das Drehmoment bezüglich der Achse durch den Kugelmittelpunkt berechnet sich als Produkt aus äußerer

Kraft F_{ext} und d :

$$M_{\text{ext}} = F_{\text{ext}} d$$

3. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für ein System und das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen bezüglich des Kugelmittelpunkts an:

$$F_{\text{ext}} = m a_S \quad \text{und} \quad M_{\text{ext}} = I_S \alpha$$

4. Die Rollbedingung stellt einen Zusammenhang zwischen a_S und α her:

$$a_S = r \alpha$$

5. Setzen Sie die Ergebnisse von Schritt 2 und 3 in Schritt 4 ein:

$$\frac{F_{\text{ext}}}{m} = r \frac{F_{\text{ext}} d}{I_S}$$

6. Entnehmen Sie Tabelle 8.1 das Trägheitsmoment für die Kugel und lösen Sie nach d auf:

$$d = \frac{I_S}{m r} = \frac{\frac{2}{5} m r^2}{m r} = \boxed{\frac{2}{5} r}$$

Plausibilitätsprüfung: Das in Schritt 6 erhaltene Ergebnis ist, wie zu erwarten, größer als null und kleiner als r .

Kommentar: Trifft man die Kugel in irgendeiner anderen Höhe, unterhalb oder oberhalb von $2r/5$ vom Mittelpunkt, dann wird die Kugel rollen *und* gleiten: Die Kugel heißt dann „angespielt“. Beim Billard ist das Anspielen oft gewünscht. Rollen *mit* Gleiten werden wir im nächsten Abschnitt behandeln. ■

Wenn ein Körper eine geneigte Ebene hinunterrollt, wird sein Massenmittelpunkt beschleunigt. Die Untersuchung eines solchen Problems wird durch einen wichtigen Satz über den Massenmittelpunkt erheblich vereinfacht:

Das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen ($M = I \alpha$) gilt in einem beliebigen Inertialsystem. Es gilt insbesondere in einem Bezugssystem, das sich linear mit dem Massenmittelpunkt bewegt, und zwar selbst dann, wenn der Massenmittelpunkt beschleunigt wird. Dabei müssen alle Trägheitsmomente und alle Drehmomente bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt berechnet werden. Es gilt

$$M_{\text{ext}}^{(S)} = I_S \alpha. \quad (8.51)$$

ZWEITES NEWTON'SCHES AXIOM FÜR DREHBEWEGUNGEN

Das ist dieselbe Gleichung wie 8.21, allerdings mit dem Unterschied, dass hier die Drehmomente und das Trägheitsmoment in



Beim Billardspiel entscheidet die Anspielhöhe, ob die Kugel ohne Gleiten rollt.
(© Ralf Pickenhahn, 2006/Pitopia.)

einem Bezugssystem berechnet werden, das sich mit dem Massenmittelpunkt bewegt. Auf den Beweis dieses Satzes wollen wir hier verzichten.

Wenn der Massenmittelpunkt beschleunigt wird (z. B. bei einer Kugel, die eine geneigte Ebene hinunterrollt), dann ist das Schwerpunktsystem kein Inertialsystem und man kann daher nicht erwarten, dass die Gleichungen für das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen gelten. Da sie in diesem speziellen Fall jedoch gültig sind, verzichten wir auf die Kennzeichnung des Systems im Folgenden. Beispiel 8.26 zeigt die Anwendung des obigen Satzes über Drehmomente im Schwerpunktsystem.

Beispiel 8.26: Beschleunigte Kugel, die rollt, ohne zu gleiten

Eine gleichförmige Kugel mit der Masse m und dem Radius r rollt, ohne zu gleiten, eine um den Winkel θ zur Horizontalen geneigte Ebene hinab. Berechnen Sie die Beschleunigung des Massenmittelpunkts und die Reibungskraft.

Problembeschreibung: Auf die Kugel wirken die Gewichtskraft \mathbf{F}_G nach unten, die Normalkraft \mathbf{F}_n , die die Normalkomponente der Gewichtskraft ausgleicht, und eine Reibungskraft \mathbf{F}_R entlang der geneigten Ebene nach oben (Abbildung 8.70). Da die Kugel rollt, ohne zu gleiten, muss diese Reibungskraft eine statische Kraft (Haftreibungskraft $\mathbf{F}_{R,h}$) sein. Die Kugel wird auf der geneigten Ebene beschleunigt, daher muss ihre Winkelgeschwindigkeit zunehmen, damit die Rollbedingung erfüllt bleibt. Die Winkelbeschleunigung setzt ein resultierendes externes Drehmoment bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt voraus. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen an, um α zu erhalten. Über die Rollbedingung sind α und a_S miteinander verknüpft.

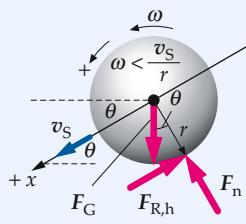


Abbildung 8.70 Darstellung sämtlicher relevanter Größen der rollenden Kugel.

Lösung: 1. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für ein System in seiner Komponentenform an; betrachten Sie nur die Komponenten entlang der x -Achse:

$$\sum F_{\text{ext},x} = m a_s$$

$$mg \sin \theta + F_{R,h} + 0 = m a_s$$

2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen an. Betrachten Sie Rotationen um eine Achse, die parallel zur momentanen Drehachse durch den Massenmittelpunkt verläuft und senkrecht auf v_S steht. Die Kraftarme für die Normal- und die Gravitationskraft sind jeweils gleich, sie üben daher kein Drehmoment auf die Kugel aus:

$$\sum M_{\text{ext},i} = I_s \alpha$$

$$0 - F_{R,h} r + 0 = I_s \alpha$$

3. Stellen Sie über die Rollbedingung einen Zusammenhang zwischen a_s und α her:

$$a_s = r \alpha$$

4. Damit gibt es drei Gleichungen für drei Unbekannte. Lösen Sie das Ergebnis von Schritt 1 nach $F_{R,h}$ und das Ergebnis von Schritt 3 nach α auf, setzen Sie diese Größen in das Ergebnis von Schritt 2 ein und lösen Sie nach a_s auf:

$$-F_{R,h} r = I_s \frac{a_s}{r}$$

$$(mg \sin \theta - m a_s) r = I_s \frac{a_s}{r}$$

sodass gilt

$$a_s = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I_s}{m r^2}}$$

5. Setzen Sie das Ergebnis von Schritt 4 in Schritt 1 ein und lösen Sie nach $F_{R,h}$ auf:

$$\begin{aligned} F_{R,h} &= m a_s - mg \sin \theta \\ &= \frac{mg \sin \theta}{1 + \frac{I_s}{m r^2}} - mg \sin \theta = -\frac{mg \sin \theta}{1 + \frac{m r^2}{I_s}} \end{aligned}$$

6. Eine massive Kugel hat das Trägheitsmoment $I_s = \frac{2}{5} m r^2$ (siehe Tabelle 8.1). Setzen Sie diesen Wert in die Ergebnisse von Schritt 4 und 5 ein:

$$a_s = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \boxed{\frac{5}{7} g \sin \theta}$$

$$F_{R,h} = -\frac{mg \sin \theta}{1 + \frac{2}{5}} = \boxed{-\frac{2}{7} mg \sin \theta}$$

Plausibilitätsprüfung: Würde die Kugel eine reibungsfreie Ebene hinabrollen, würde sie nicht rotieren, und die Beschleunigung wäre $g \sin \theta$. Liegt eine Reibung vor, muss die Beschleunigung kleiner sein als $g \sin \theta$, wie in Schritt 6 auch berechnet.

Kommentar: Da der Ball rollt, ohne zu gleiten, sind die Reibungskräfte statisch, d. h. Haftreibungskräfte. Das Vorzeichen der Haftreibung ist negativ, weil sie die Bewegung des Balls abbremst. Beachten Sie, dass das Ergebnis vom Haftreibungskoeffizienten unabhängig zu sein scheint. Es ist jedoch vorausgesetzt, dass der Haftreibungskoeffizient groß genug ist, um das Gleiten zu verhindern. ■

Die Ergebnisse in Schritt 5 und 6 von Beispiel 8.26 gelten für jeden runden Körper mit dem Massenmittelpunkt im geometrischen Mittelpunkt, der rollt, ohne zu gleiten. Für solche Körper gilt in allgemeiner Form $I_s = \beta m r^2$, wobei der Parameter β von der Form des Körpers abhängt: $\beta = \frac{2}{5}$ für eine Kugel, $\beta = \frac{1}{2}$ für einen massiven Zylinder, $\beta = 1$ für einen Zylindermantel usw. (Die Werte für β kann man aus den Ausdrücken für I in Tabelle 8.1 herleiten.) Für solche Körper lassen sich die Ergebnisse von Schritt 5 und 6 in folgender Form ausdrücken:

$$F_{R,h} = -\frac{mg \sin \theta}{1 + \beta^{-1}}, \quad (8.52)$$

$$a_s = \frac{g \sin \theta}{1 + \beta}. \quad (8.53)$$

Die lineare Beschleunigung für einen beliebigen Körper, der ohne zu gleiten eine geneigte Ebene hinabrollt, ist geringer als $g \sin \theta$ wegen der Reibungskräfte, die entlang der geneigten Ebene nach oben wirken. Man beachte, dass diese Beschleunigungen sowohl von der Masse als auch vom Radius des Körpers unabhängig sind. Damit erfahren alle massiven Kugeln, die dieselbe geneigte Ebene hinabrollen, ohne zu gleiten, dieselbe Beschleunigung.

Rollen jedoch verschiedene Körper – z. B. eine Kugel, ein Zylinder oder ein Ring – eine geneigte Ebene ohne Gleiten hinab, so wird die Kugel das Ende der Ebene zuerst erreichen, weil sie die größte Beschleunigung erfährt. Der Zylinder wird Zweiter, der Ring Letzter (Abbildung 8.71). Ein Block, der die Ebene reibungsfrei hinabgleitet, wird jedoch noch vor allen rollenden



Abbildung 8.71 Eine Kugel, ein Zylinder und ein Ring starten gleichzeitig aus dem Stillstand am oberen Ende einer geneigten Ebene. Alle Körper rollen, ohne zu gleiten. Unabhängig von Radius und Masse der Körper kommt die Kugel zuerst unten an, es folgen der Zylinder und dann der Ring.

Körpern das Ende der Ebene erreichen. Überraschenderweise erreicht eine volle Getränkedose beim Hinabrollen, ohne zu gleiten, das Ende der Ebene fast genauso schnell wie ein hin-abgleitender Block. Dies liegt daran, dass die Flüssigkeit in der Dose nicht mit der Dose rotiert; das effektive Trägheitsmoment der vollen Dose ist dann gerade das Trägheitsmoment der Dose selbst.

Da nur Haftreibung auftritt, wird keine mechanische Energie dissipiert, denn die Haftreibung verrichtet keine Arbeit an dem rollenden Körper. Daher können wir mithilfe des Energieerhaltungssatzes die Geschwindigkeit eines Körpers berechnen, der eine geneigte Ebene hinabrollt, ohne zu gleiten. Am oberen Ende der geneigten Ebene ist die Gesamtenergie nur die potenzielle Energie mgh . Am unteren Ende ist die Gesamtenergie kinetische Energie. Damit ergibt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 = mgh.$$

Mithilfe der Rollbedingung lässt sich hier entweder v_S oder ω eliminieren. Mit $I_S = \beta mr^2$ und $\omega = v_S/r$ erhält man $\frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\beta mr^2(v_S^2/r^2) = mgh$. Löst man dies nach v_S auf, so ergibt sich

$$v_S^2 = \frac{2gh}{1+\beta}. \quad (8.54)$$

Für einen Zylinder ($\beta = 1/2$) erhält man $v_S = \sqrt{(4/3)gh}$. Interessanterweise ist die Geschwindigkeit unabhängig von Masse und Radius des Zylinders, und sie ist geringer als $\sqrt{2gh}$, die Geschwindigkeit eines Körpers, der die geneigte Ebene reibungsfrei hinabgleitet.

Für einen Körper, der die Ebene hinunterrollt, ohne zu gleiten, ist die Reibungskraft $|F_{R,h}|$ kleiner oder gleich einem Maximalwert, der von der Normalkraft $|F_n|$ abhängt: $|F_{R,h}| \leq \mu_{R,h}|F_n|$ mit $|F_n| = mg \cos \theta$. Setzt man dies in Gleichung 8.52 für die Reibungskraft ein, so ergibt sich

$$\frac{mg \sin \theta}{1+\beta^{-1}} \leq \mu_{R,h} mg \cos \theta$$

oder

$$\tan \theta \leq (1+\beta^{-1}) \mu_{R,h}. \quad (8.55)$$

Beispielsweise ist das Trägheitsmoment für einen homogenen Zylinder $I_S = \frac{1}{2}mr^2$, $\beta = \frac{1}{2}$. Damit liest man aus Gleichung 8.55 ab, dass $\tan \theta \leq 3\mu_{R,h}$. Wenn der Tangens des Steigungswinkels größer ist als $(1+\beta^{-1})\mu_{R,h}$, so wird der Körper zu gleiten beginnen, wenn er sich die Ebene hinunterbewegt.

Übung 8.11: Ein homogener Zylinder rollt eine Ebene mit dem Steigungswinkel $\phi = 50^\circ$ hinab. Welchen Minimalwert hat der Haftreibungskoeffizient, für den der Zylinder rollt, ohne zu gleiten? ◀

Übung 8.12: Ein Ring rollt eine Ebene mit dem Steigungswinkel ϕ hinab. a) Wie groß ist die Reibungskraft? b) Welchen Maximalwert hat die Steigung (genauer: der Tangens des Steigungswinkels, $\tan \theta$), für den der Ring rollt, ohne zu gleiten? ◀

Rollen mit Gleiten

Wenn ein Körper beim Rollen zusätzlich noch gleitet, „schliddert“ oder sich mit „Schlupf“ bewegt, gilt die Rollbedingung $v_S = r\omega$ nicht. Betrachten Sie beispielsweise eine Bowlingkugel, die so geworfen wird, dass sie sich anfangs nicht dreht. Wenn die Kugel entlang der Kegelbahn gleitet, ist $v_S > r\omega$. Allerdings verringert die Gleitreibungskraft die lineare Geschwindigkeit v_S (Abbildung 8.72) und erhöht die Winkelgeschwindigkeit ω , bis die Rollbedingung $v_S = r\omega$ gilt. Ab dann rollt die Kugel, ohne zu gleiten. Diese Situation wird in Beispiel 8.27 durchgerechnet.

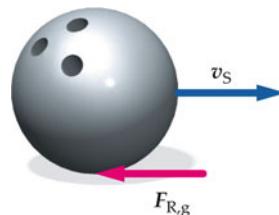


Abbildung 8.72 Eine Bowlingkugel wird so geworfen, dass sie sich anfangs nicht dreht. Die Gleitreibungskraft $F_{R,g}$, die vom Boden ausgeübt wird, verringert die lineare Geschwindigkeit v_S und erhöht die Winkelgeschwindigkeit ω , bis die Rollbedingung $v_S = r\omega$ gilt.

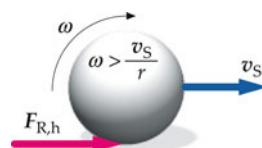


Abbildung 8.73 Billardkugel mit Topspin. Die Reibungskraft beschleunigt den Ball in Bewegungsrichtung.

8 Drehbewegungen

Beispiel 8.27: Eine gleitende Bowlingkugel

Eine Bowlingkugel mit der Masse m und dem Radius r wird so geworfen, dass sie die Bowlingbahn mit der horizontalen Geschwindigkeit $v_0 = 5,0 \text{ m/s}$ trifft und dabei nicht rotiert. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Bahn und Kugel ist $\mu_{R,g} = 0,080$. Berechnen Sie a) die Zeit, in der die Kugel gleitet (danach beginnt die Kugel zu rollen, ohne zu gleiten), und b) die Entfernung, die die Kugel bis dahin zurücklegt.

Problembeschreibung: Während des Gleitens gilt $v_S > r\omega$. Wir berechnen v_S und ω als Funktion der Zeit, setzen in die Rollbedingung $v_S = r\omega$ ein und lösen nach t auf. Die lineare Beschleunigung und die Winkelbeschleunigung ergeben sich aus $\sum F_{\text{ext}} = ma$ bzw. $\sum M_S = I_S \alpha$. Wir nehmen die Bewegungsrichtung als positiv an. Da in diesem Problem Gleiten und Gleitreibung auftreten, wird mechanische Energie dissipiert. Daher lässt sich der Energieerhaltungssatz hier nicht anwenden.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Zeichnen Sie ein Kräftebild der Kugel (Abbildung 8.74).

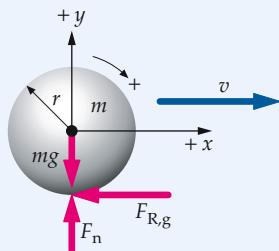


Abbildung 8.74 Kräftebild der Bowlingkugel.

- Die resultierende äußere Kraft auf die Kugel ist die Gleitreibungskraft $F_{R,g}$, die in negativer x -Richtung wirkt. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom an:

$$\begin{aligned}\sum F_{\text{ext}} &= ma_{S,x} \\ -F_{R,g} &= ma_{S,x}\end{aligned}$$

- Es wirkt damit eine Beschleunigung in negativer x -Richtung, die Beschleunigung in y -Richtung ist $a_{S,y} = 0$. Berechnen Sie die Reibungskraft mithilfe der Normalenkraft F_n :

$$\sum F_y = ma_{S,y} = 0 \Rightarrow |F_n| = mg$$

sodass

$$F_{R,g} = -\mu_{R,g} |F_n| = -\mu_{R,g} mg$$

- Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus Schritt 2 und 3 die Beschleunigung:

$$-\mu_{R,g} mg = ma_{S,x} \Rightarrow a_{S,x} = -\mu_{R,g} g$$

- Eine Bewegungsgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen der Beschleunigung und der Zeit her:

$$v_{S,x} = v_0 + a_{S,x} t = v_0 - \mu_{R,g} g t$$

- Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung α , indem Sie das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen auf die Kugel anwenden. Berechnen Sie die Drehmomente bezüglich der Achse durch den Massenmittelpunkt. Im Kräftebild wurde der Uhrzeigersinn als positive Drehrichtung festgelegt.

$$\sum M_{\text{ext}} = I_S \alpha$$

$$\mu_{R,g} mg r + 0 + 0 = \frac{2}{5} m r^2 \alpha$$

sodass

$$\alpha = \frac{5}{2} \frac{\mu_{R,g} g}{r}$$

- Stellen Sie mit einer Bewegungsgleichung einen Zusammenhang zwischen der Winkelbeschleunigung und der Zeit her:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \frac{5}{2} \frac{\mu_{R,g} g}{r} t$$

- Lösen Sie dies nach der Zeit t auf, für die die Rollbedingung erfüllt ist:

$$v_S = r\omega$$

$$(v_0 - \mu_{R,g} g t) = \left(\frac{5}{2} \mu_{R,g} g t \right)$$

sodass

$$t = \frac{2 v_0}{7 \mu_{R,g} g} = \frac{2 (5,0 \text{ m/s})}{7 (0,080) (9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{1,8 \text{ s}}$$

Teilaufgabe b

Der während des Gleitens zurückgelegte Weg ist:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_0 t + \frac{1}{2} a_S t^2 \\ &= v_0 \frac{2 v_0}{7 \mu_{R,g} g} + \frac{1}{2} (-\mu_{R,g} g) \left(\frac{2 v_0}{7 \mu_{R,g} g} \right)^2 \\ &= \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu_{R,g} g} \\ &= \frac{12}{49} \frac{(5,0 \text{ m/s})^2}{(0,080) (9,81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{7,8 \text{ m}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Eine Bowlingbahn ist etwa 18 m lang. Dass die Kugel etwa die Hälfte dieser Länge gleitet, scheint plausibel.

Kommentar: In einer gut gepflegten Bowlinganlage sind die Bahnen leicht geölt und daher sehr glitschig, sodass die Kugel über eine große Entfernung gleiten kann. Auf diese Weise hat der Spieler mehr Möglichkeiten, den Lauf der Kugel zu beeinflussen.

Übung 8.13: Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Bowlingkugel, wenn sie beginnt zu rollen, ohne zu gleiten. Hängt die Geschwindigkeit vom Wert des Gleitreibungskoeffizienten $\mu_{R,g}$ ab? ■

Ein anderes Beispiel von Rollen mit Gleiten zeigt eine Billardkugel mit Topspin (Abbildung 8.73). Die Kugel muss dazu vom Queue in einer Höhe oberhalb $\frac{2}{5}r$ über dem Zentrum getroffen werden (siehe Beispiel 8.26); dann ist $v_S < r\omega$. In diesem Fall erhöht die Gleitreibungskraft $F_{R,g}$ die lineare Geschwindigkeit v_S und verringert die Winkelgeschwindigkeit ω , bis die Rollbedingung $v_S = r\omega$ erreicht ist. Eine solche Kugel heißt „angespielt“.

8.9 Der Kreisel

Ein Kreisel im physikalischen Sinn ist ein Körper, der sich um eine freie Achse dreht und dessen Achse in einem Punkt unterstützt wird. Wir betrachten hier nur Kreisel, die bezüglich ihrer Drehachse symmetrisch sind, sogenannte **symmetrische Kreisel**. Ist der Massenmittelpunkt des Kreisels der Punkt, in dem die Drehachse unterstützt wird, spricht man von einem **kräftefreien Kreisel**, sonst von einem **schweren Kreisel**.

Um Kreiselbewegungen zu beschreiben, werden wir die drei folgenden Achsen verwenden: die Figuren- oder auch Symmetriechse, deren Vektor f vom Unterstützungspunkt weg parallel zur Symmetriechse des Kreisels verläuft, die Achse des Drehimpulses, die parallel zum Drehimpulsvektor L liegt, und die Rotationsachse, die parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit ω orientiert ist. Je nach Lage dieser Achsen relativ zueinander ergeben sich verschiedene Bewegungen der Symmetriechse, die wir nun betrachten wollen.

Beim kräftefreien, symmetrischen Kreisel, der um seine Figurenachse rotiert, wirken keine äußeren Kräfte, sodass der Drehimpuls erhalten bleibt. Außerdem fallen die Figurenachse, die Rotationsachse und die Drehimpulsachse zusammen, wie in Abbildung 8.75 gezeigt.

Dreht der symmetrische Kreisel aus Abbildung 8.75 sich weiterhin um seine Figurenachse und wirkt gleichzeitig eine äußere Kraft auf ihn, z. B. die Gravitation (da er nicht im Schwerpunkt unterstützt wird), so ist er nicht mehr kräftefrei. Die in Abbildung 8.76 gezeigte äußere Gravitationskraft auf den Kreisel



Abbildung 8.75 Beim kräftefreien, symmetrischen Kreisel fallen die Figurenachse, die Drehimpulsachse und die Rotationsachse zusammen.

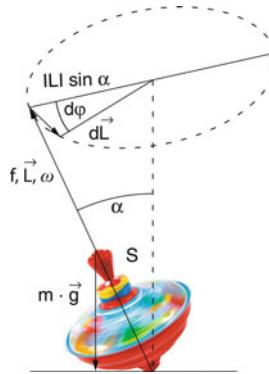


Abbildung 8.76 Präzession der Figuren- und Drehimpulsachse um die Vertikale, wenn am Kreisel äußere Kräfte angreifen und ein Drehmoment induzieren. Der Kreisel selbst dreht sich dabei um seine Rotationsachse, die ebenfalls mit der Figurenachse zusammenfällt.

verursacht ein Drehmoment, sodass der Drehimpuls sich gemäß

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (\text{oder} \quad \Delta\mathbf{L} \approx \mathbf{M}_{\text{ext}} \Delta t) \quad (8.56)$$

ändert. Zudem gilt

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = m\mathbf{r}_S \times \mathbf{a}_G$$

(mit der Gravitationsbeschleunigung \mathbf{a}_G) und

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}.$$

Dabei ist m die Masse des Kreisels (alle bewegten Teile), \mathbf{r}_S ist der Ortsvektor des Massenmittelpunkts bezüglich des Unterstützungspunkts O , und I und $\boldsymbol{\omega}$ sind das Trägheitsmoment bzw. die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der körpereigenen Drehachse.

Bildet die Figurenachse mit der Vertikalen den Winkel α , dann ist der Betrag des angreifenden Drehmoments $|\mathbf{M}_{\text{ext}}| = m\mathbf{r}_S \mathbf{a}_G \sin \alpha$, und seine Richtung kann mit der Drei-Finger-Regel für Vektorprodukte ermittelt werden. Sie zeigt aus der Bildebene heraus und steht senkrecht auf \mathbf{r}_S und $m\mathbf{a}_G$ und dadurch auch senkrecht auf dem Drehimpulsvektor, der mit der Figurenachse und der Rotationsachse zusammenfällt. Die dadurch induzierte Änderung des Drehimpulses $\Delta\mathbf{L}$ zeigt aufgrund von Gleichung 8.56 in die Richtung von \mathbf{M}_{ext} und somit

8 Drehbewegungen

ebenfalls aus der Bildebene hinaus. Der Betrag der Drehimpulsänderung lässt sich aus Abbildung 8.76 auch als $|d\mathbf{L}| = |\mathbf{L}| \sin \alpha d\varphi$ schreiben. Da \mathbf{M}_{ext} senkrecht auf \mathbf{L} steht, kann sich nur die Richtung des Drehimpulses, nicht aber sein Betrag durch das Drehmoment ändern. Daraus folgt, dass die Figurennachse und damit auch die Drehimpulsrichtung sich unter der Einwirkung der Gravitationskraft auf einer Kreisbahn um die Vertikale drehen. Diese „horizontale Ausweichbewegung“ der Figurennachse als Reaktion auf eine vertikale Kraft bezeichnet man auch als **Präzession**.

Während der Kreisel um seine Figurennachse rotiert, bewegt sich diese mit der Präzessionswinkelgeschwindigkeit ω_p um die Vertikale. Der Betrag von ω_p lässt sich mithilfe von Gleichung 8.56 berechnen:

$$M_{\text{ext}} = r_S m a_G \sin \alpha = L \sin \alpha \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{dt},$$

woraus folgt:

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_S m a_G}{L} = \frac{r_S m a_G}{I \omega}. \quad (8.57)$$

PRÄZESSIOWSWINKELGESCHWINDIGKEIT ω_p

Gleichung 8.57 zeigt, dass die Präzession unabhängig vom Winkel α ist und nur vom Drehmoment und dem Drehimpuls abhängt. Für große Trägheitsmomente oder hohe Winkelgeschwindigkeiten des Kreisels ist ω_p klein, d. h., der Drehimpulsvektor dreht sich sehr langsam um die Vertikale.

Bisher waren Drehimpuls, Symmetriechse und Winkelgeschwindigkeit stets parallele Vektoren. Betrachten wir nun den Fall, dass die Rotations- und die Drehimpulsachse nicht mehr parallel zueinander stehen. Diese Konfiguration kann man erreichen, indem man dem Kreisel aus Abbildung 8.75 einen seitlichen Stoß versetzt, sodass die Figurennachse aus der Vertikalen kippt. Durch den Stoß wird ein zusätzlicher Drehimpuls in der Ebene senkrecht zur Vertikalen auf den Kreisel übertragen. Der neue Gesamtdrehimpuls setzt sich nun aus den beiden Komponenten

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_{xy} = I_z \boldsymbol{\omega}_z + I_{xy} \boldsymbol{\omega}_{xy} \quad (8.58)$$

zusammen, wobei \mathbf{L}_z der Drehimpuls vor dem Stoß war, der in z -Richtung zeigte, und \mathbf{L}_{xy} der durch den Stoß übertragene Drehimpuls ist. Da der Anteil des Drehimpulses \mathbf{L}_{xy} eine Achse in der x - y -Ebene als Rotationsachse hat, muss man das dazugehörige Trägheitsmoment I_{xy} bezüglich dieser Achse bestimmen. Aus Tabelle 8.1 können wir ablesen, dass die Trägheitsmomente I_z und I_{xy} im Allgemeinen nicht gleich groß sind. Daraus folgt, dass der Drehimpulsvektor nicht mehr parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{\omega}_{xy}$ ist. Abbildung 8.77 zeigt die einzelnen Komponenten des Drehimpuls- und Winkelgeschwindigkeitsvektors und die daraus resultierenden Summenvektoren, die nicht mehr parallel zueinander sind. In einem Koordinatensystem, in dem der Gesamtdrehimpuls raumfest ist, rotiert der Vektor der Winkelgeschwindigkeit und damit auch die Figurennachse um den Drehimpulsvektor. Diese Bewegung nennt man auch die **Nutation** eines Kreisels.

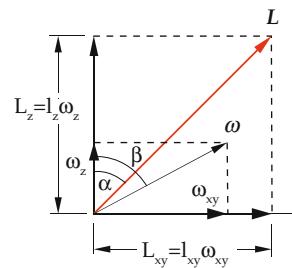


Abbildung 8.77 Aufgrund eines seitlichen Stoßes erhält der Kreisel eine zusätzliche Drehimpulskomponente L_{xy} , die bewirkt, dass der Gesamtdrehimpuls nicht mehr parallel parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{\omega}_{xy}$ ist, wenn die beiden Trägheitsmomente I_z und I_{xy} nicht gleich sind.

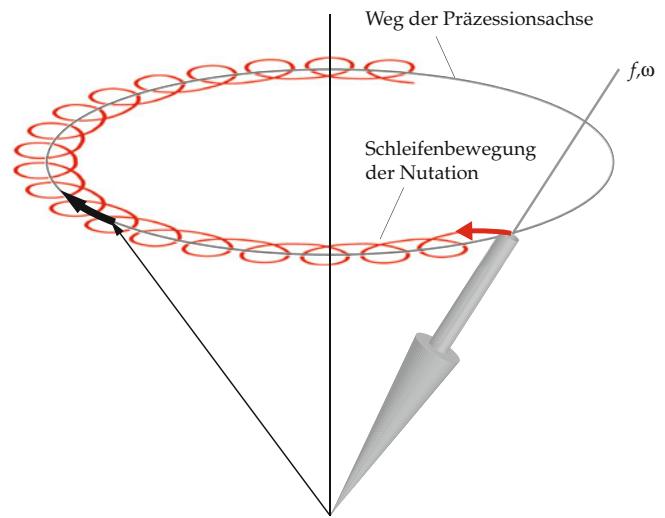


Abbildung 8.78 Überlagerung von Nutation und Präzession beim symmetrischen Kreisel.

In einem Bezugssystem außerhalb des Kreisels wird der Drehimpulsvektor aufgrund des Stoßes ebenfalls aus der Vertikalen gekippt, sodass die Drehimpulsachse dem Drehmoment durch die Schwerkraft unterliegt und zusätzlich um die Vertikale präzidiert. Abbildung 8.78 veranschaulicht die Überlagerung von Nutation und Präzession für diesen Fall. Die Trajektorie, die die Figurennachse beim Kreiseln beschreibt, wenn die Nutation schneller als die Präzession ist, nennt man auch eine **Zykloide**. Es ist die gleiche Bahn, die ein Punkt auf einem Reifen beschreibt, wenn der Reifen geradlinig auf einer Ebene rollt.

Verwechseln Sie nicht Nutation und Präzession: Unter der Präzession versteht man die Ausweichbewegung der Drehimpulsachse aufgrund eines äußeren Drehmoments, während die Nutation die Rotation der Winkelgeschwindigkeit um den Drehimpulsvektor beschreibt.

Beispiel 8.28 demonstriert die Erhaltung des Drehimpulses eines Kreisels. Beispiel 8.29 führt vor Augen, wie eine Änderung der Drehachse eines Kreisels zu einem Drehmoment führt.

Beispiel 8.28: Ein Kreisel dreht sich

Sie sitzen auf einem reibungsfrei gelagerten Drehhocker und halten einen Kreisel in der Hand (Abbildung 8.79). Anfangs drehen sich weder der Kreisel noch der Drehhocker. Nun folgen Sie den Anweisungen Ihres Übungsleiters und halten den Kreisel so in einer Hand, dass die Drehachse senkrecht steht. Mit der anderen Hand versetzen Sie den Kreisel in eine rasche Drehung (von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn). Sobald sich der Kreisel in eine Richtung dreht, werden sich der Drehhocker (und damit auch Sie) in die andere Richtung drehen. Nach einigen Sekunden bremsen Sie den Kreisel mit Ihrer freien Hand. Der Drehhocker hört auf, sich zu drehen, sobald der Kreisel zum Stillstand kommt. Erklären Sie dieses Phänomen.



Abbildung 8.79 Darstellung des Systems Drehhocker-Mensch-Kreisel.

Problembeschreibung: Da der Drehhocker reibungsfrei gelagert ist, erfährt das System Drehhocker–Mensch–Kreisel keinerlei Drehmomente bezüglich der Achse des Drehhockers. Daher bleibt der Drehimpuls des Systems bezüglich der Achse des Drehhockers konstant.

Lösung: Anfangs ist das gesamte System in Ruhe und damit der Drehimpuls null. Wenn Sie den Kreisel anstoßen, erhält er einen nach oben gerichteten Eigendrehimpuls. Der Gesamtdrehimpuls des Systems bleibt null. Demnach ist die Summe aus dem Bahndrehimpuls, den der Kreisel bezüglich der Achse des Drehhockers erhält, und dem Drehimpuls, den Sie und der Drehhocker erhalten, im Betrag genauso groß wie der Eigendrehimpuls des Kreisels; allerdings ist er nach unten gerichtet. Ein nach unten gerichteter Drehimpuls gehört zu einer Drehung im Uhrzeigersinn (von oben betrachtet). Wenn Sie den Kreisel anhalten, geht dessen nach oben gerichteter Eigendrehimpuls auf null zurück. Damit der Gesamtdrehimpuls des Systems null bleibt, während der

ZUM VERSTÄNDNIS

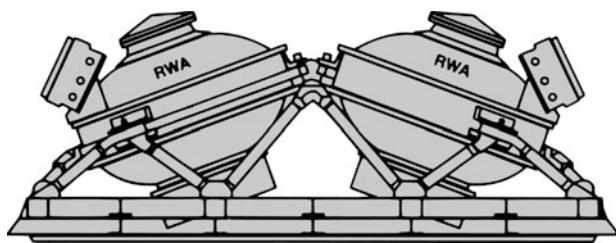
Kreisel immer langsamer wird, muss das System ebenfalls bis zum Stillstand abbremsen.

Plausibilitätsprüfung: Die Situation ist vergleichbar mit der einer Person, die auf einem reibungsfrei gelagerten Schlitten auf einer glatten Ebene läuft. Sobald die Person vorwärts schreitet, bewegt sich der Schlitten nach hinten, und sobald die Person stehen bleibt, stoppt auch die Rückwärtsbewegung des Schlittens, so wie der Impulserhaltungssatz es voraussagt.

Weitergedacht: Die Lage des Hubble-Weltraumteleskops wird mithilfe von vier Schwungrädern auf dem Satelliten geregelt. Die Schwungräder werden durch computergesteuerte Elektromotoren beschleunigt oder verlangsamt. Im Ergebnis kann das Teleskop auf die gewünschten Ziele ausgerichtet werden.



Ein Mitarbeiter in Reinraumkleidung untersucht ein Schwungrad des Hubble-Weltraumteleskops. (© NASA/Goddard Space Flight Center.)



Das Hubble-Weltraumteleskop wird ausgerichtet, indem man die Umdrehungszahl der vier Schwungräder verändert, die jeweils 45 kg wiegen und deren Drehachsen in verschiedene Richtungen weisen. Sie drehen sich mit bis zu 3000 min^{-1} . Mithilfe einer Softwareregelung kann man die Drehzahlen ändern; dadurch wird Drehimpuls zwischen den Schwungrädern und dem Rest des Satelliten ausgetauscht. Die Drehimpulsänderungen für den Satelliten lassen das gesamte System langsam in die gewünschte Lage schwenken. Mit dieser Methode der Ausrichtung kann man ein Ziel bis auf 0,005 Bogensekunden genau anpeilen und halten. Eine solche Genauigkeit entspricht der Aufgabe, eine Taschenlampe in Heidelberg auf eine Münze in Hamburg auszurichten. (© NASA/Goddard Space Flight Center.)

Beispiel 8.29: Ein Kreisel kippt

ZUM VERSTÄNDNIS

Eine Studentin sitzt auf einem Drehhocker, der sich reibungsfrei um eine vertikale Achse drehen kann, sich aber vorerst nicht bewegt. In der Hand hält sie einen schnell rotierenden Kreisel, dessen Achse waagerecht steht (Abbildung 8.80a). Der Betrag des Eigendrehimpulsvektors des Kreisels ist $L_{K,A}$. Was passiert, wenn die Studentin, wie in Abbildung 8.80b gezeigt, den Kreisel plötzlich hebt, bis er zum Schluss senkrecht steht? (Der Kreisel soll sich dann, von oben betrachtet, gegen den Uhrzeigersinn drehen.)

Problembeschreibung: Das System Drehhocker-Studentin-Kreisel kann sich reibungsfrei um eine vertikale Achse durch die Mitte des Drehhockers drehen. Da die Drehung reibungsfrei ist, treten keine Drehmomente bezüglich dieser Achse auf. Der Drehimpuls des Systems bleibt daher erhalten.

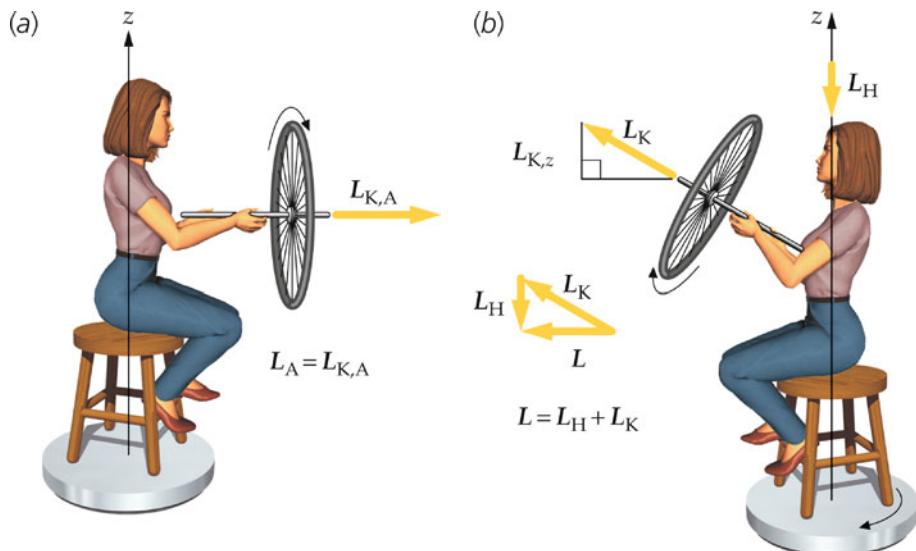


Abbildung 8.80 Darstellung des Systems Drehhocker-Mensch-Kreisel, wobei der Kreisel von einer waagerechten in eine senkrechte Position gehoben wird.

Lösung: Eine Veränderung der Drehachse des Kreisels ändert zwar die Richtung, aber nicht den Betrag des Eigendrehimpulses von dem Kreisel. Der Drehimpuls des Kreisels nach dem Hochheben ist aufwärts gerichtet. Der Anfangsdrehimpuls des Systems Drehhocker–Studentin–Kreisel bezüglich der vertikalen Achse ist null. Nachdem die Drehachse des Kreisel verändert wurde, hat der Kreisel einen (von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn gerichteten) Eigendrehimpuls, dessen Betrag gleich $L_{K,A}$ ist. Nach dem Drehimpulserhaltungssatz muss der verbliebene Drehimpuls des Systems bezüglich der vertikalen Achse des Drehhockers mit dem Uhrzeigersinn gerichtet sein und denselben Betrag haben wie $L_{K,A}$. Der Drehhocker und die Studentin werden sich im Uhr-

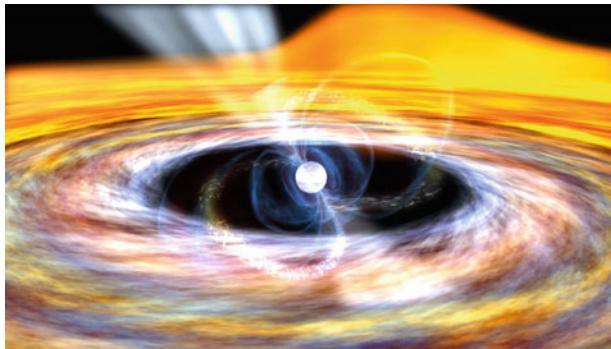
zeigersinn drehen. Der Drehimpuls bezüglich der vertikalen Achse des Drehhockers hat den Betrag $L_{K,A}$.

Plausibilitätsprüfung: Die Studentin übt ein nach oben gerichtetes Drehmoment auf den rotierenden Kreisel aus, wenn sie dessen Drehachse senkrecht stellt. (Aufgrund der Definition des Drehmoments als Vektorprodukt sind für ein aufwärts gerichtetes Drehmoment horizontale Kräfte erforderlich.) Der Kreisel übt ein entgegengesetzt gleiches Drehmoment (d. h. horizontale Kräfte) auf die Studentin aus, weswegen sie auf ihrem Drehhocker in eine Drehung im Uhrzeigersinn gerät.

🔍 Im Kontext: Die Kunst, Pulsare zu recyceln

Neutronensterne sind kompakte Objekte, die sich bei Supernovaexplosionen bilden, wenn der Eisenkern eines massiven Sterns nach Beendigung seiner Kernfusion kollabiert. Mittels Drehimpulserhaltung ist es möglich, die Spinperiode bei der Entstehung eines Neutronensterns abzuschätzen. Wir nehmen an, dass der Radius des Eisenkerns ungefähr die Hälfte des Erdradius (3200 km) beträgt und seine Spinperiode ungefähr 30 min ist. Nimmt man für den Neutronenstern nun einen Radius von 12 km an, so hat dieser direkt nach der Supernovaexplosion eine Spinperiode von ungefähr 25 ms.

Radiopulsare sind stark magnetisierte rotierende Neutronensterne mit typischen Spinperioden zwischen 0,2 und 10 s. Der erste Pulsar wurde im Jahre 1967 entdeckt¹, und wir wissen heute von über 2000 solcher Pulsare in unserer Galaxie. Pulsare emittieren Radiowellen und können dann entdeckt werden (z. B. vom 100-m-Effelsberg-Radioteleskop bei Bonn²), wenn ihr Emissionsstrahl die Sichtlinie der Erde kreuzt. Dies bezeichnet man auch als Leuchtturmeffekt. 1982 wurde der erste Millisekundenpulsar (MSP) entdeckt.³ Diese Objekte haben extrem schnelle Spinperioden von nur 1,4–10 ms. Seit ihrer Entdeckung stellen sie eine interessante Herausforderung für theoretische Astrophysiker dar: Wie gelang es der Natur, solch exotische Objekte zu erschaffen?



Künstlerische Darstellung eines akkretierenden Millisekundenpulsars. Das vom Begleitstern fließende Material formt eine Scheibe um den Neutronenstern, die am Rand der Pulsarmagnetosphäre abgeschnitten wird. (©NASA/Goddard Space Flight Center/Dana Berry.)

Nach allgemeiner Auffassung sind MSPs alte Neutronensterne, die zu hohen Rotationsfrequenzen durch Massen- und Drehimpulsakkretion eines Begleitsterns in einem engen Binärsystem^{4,5} gelangt sind. Die starke gravitative Anziehung des Neutronensterns führt zum Abfluss von Gas aus den äußeren Bezirken des Begleitsterns („stellarer Kannibalismus“). Aufgrund seines hohen Bahndrehimpulses bildet das einfallende Gas eine Akkretionsscheibe um den Neutronenstern. Sobald das Gas schließlich in den tiefen Gravitationspotenzialtopf dieses kompakten Objekts fällt, wird es aufgeheizt und emittiert Röntgenstrahlung. Während dieser Phase kann das System als ein Röntgenbinärsystem beobachtet werden (z. B. vom deutschen Satelliten eROSITA, der 2016 starten soll). Sobald der Primärstern seine gesamte Hülle abgegeben hat, endet der Massentransfer und zurück bleibt ein Weißen Zwerg (der Kern des früheren Begleitsterns).⁶ Zu diesem Zeitpunkt kann der Neutronenstern als Radio-MSP beobachtet werden.

Wenn man den Massentransfer betrachtet (das sogenannte Recycling von Pulsaren), ist es wichtig, detaillierte Berechnungen der Sternentwicklung in Verbindung mit der Physik der Wechselwirkung zwischen den beiden Sternen zu berücksichtigen. Dies beinhaltet z. B. den Verlust von Bahndrehimpuls aufgrund von Gravitationswellenabstrahlung, magnetischem Sternwind und Massenabnahme des Systems. Daher bleibt der Bahndrehimpuls unter diesen Bedingungen nicht erhalten. Die Spinperiode, die man schließlich für einen MSP erhält, wird durch das Drehmoment bestimmt, das durch den Akkretionsprozess hervorgerufen wird, sowie durch die Dauer des Massentransferprozesses. Dieses Drehmoment wird aus dem Drehimpulsaustausch am inneren Rand der Akkretionsscheibe, der zwischen dem einfallenden Gas und der mitrotierenden Magnetosphäre des MSP besteht, berechnet.^{7,8}

Es ist äußerst bemerkenswert, dass allein durch die Kenntnis der Spinperiode P Randbedingungen bezüglich grundlegender physikalischer Eigenschaften des MSP bestimmt werden können. Die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator, v_{eq} , muss kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sein. Daher ergibt sich für den Radius des MSP, $R < cP/2\pi$ (unter Verwendung von $v_{\text{eq}} = 2\pi R/P < c$). Für einen MSP mit $P = 1,4$ ms impliziert dies eine strenge Obergrenze für den Radius von $R < 65$ km. Theoretische Modelle sagen sogar einen Wert von $R = 10\text{--}15$ km vorher. Die mittlere Massendichte eines MSP wird durch die Forderung begrenzt, dass am Äquator die nach innen gerichtete Gravitationsbeschleunigung größer sein muss als die nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung. Andernfalls wäre der Stern ungebunden. Die Masse eines MSP und seines Begleitsterns, des Weißen Zwergs, kann aus der Bahnbewegung durch Messung der dopplerverschobenen Spinperiode des MSP und der optischen Spektrallinien des Weißen Zwergs bestimmt werden. In einigen Fällen können die Massen durch die Messung der Verzögerung der Reisezeiten des emittierten Radiopulses, die durch die lokale Krümmung der Raumzeit in der Nähe des Begleitsterns entsteht, gemessen werden (dies ist die sogenannte Shapiro-Verzögerung oder auch Shapiro-Effekt). Es stellt sich heraus, dass MSPs einen Massenbereich zwischen 1,2 und 2,0 Sonnenmassen abdecken. In Verbindung mit ihren kleinen Radien verrät uns dies, dass MSPs im Grunde genommen als sich schnell drehende, gigantische Atomkerne (mit einer Baryonenzahl von 10^{57}) betrachtet werden können. Deswegen sind MSPs auch für die Kern- und Teilchenphysik äußerst interessante Objekte.

Manche MSPs besitzen Weiße Zwerge mit engen Umlaufbahnen, deren Umlaufperiode nur wenige Stunden beträgt. Diese Systeme verlieren Bahnenergie aufgrund der Emission von Gravitationswellen und verschmelzen daher nach einigen Hundert Millionen Jahren miteinander.⁹ Dieses Ereignis kann die Bildung eines Schwarzen Lochs zur Folge haben. In anderen Binärsystemen kann ein Neutronenstern auch mit einem anderen Neutronenstern oder auch mit einem Schwarzen Loch verschmelzen. Derartige Kollisionen resultieren in einem kurzen Ausbruch von Gravitationswellen (oder auch Gammastrahlung). Selbst wenn solche Ereignisse in entfernten Galaxien auftreten, besteht die Hoffnung, dass sie durch Gravitationswellendetektoren wie LIGO, VIRGO und GEO600 (in Hannover) innerhalb der nächsten fünf Jahre entdeckt werden. Dies wird ein komplett neues Fenster zu unserem Universum öffnen.

1. Hewish, A. et al., „Observation of a rapidly pulsating radio source“, *Nature* **217**, 1968, 709–713.
2. <http://www.mpifr-bonn.mpg.de/effelsberg> (Stand: Mai 2013).
3. Backer, D. C. et al., „A millisecond pulsar“, *Nature* **300**, 1982, 615–618.
4. Alpar, M. A. et al., „A new class of radio pulsars“, *Nature* **300**, 1982, 728–730.
5. Tauris, T. M., van den Heuvel, E. P. J., „Formation and evolution of compact stellar X-ray sources“, in: Lewin, W., van der Klis, M. (Hrsg.), *Compact Stellar X-Ray Sources*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 623–665.
6. Tauris, T. M., Savonije, G. J., „Formation of millisecond pulsars. I. Evolution of low-mass X-ray binaries with $P_{\text{orb}} > 2$ days“, *A&A* **350**, 1999, 928–944.
7. Tauris, T. M., „Spin-down of radio millisecond pulsars at genesis“, *Science* **335**, 2012, 561–563.
8. Tauris, T. M., Langer, N., Kramer, M., „Formation of millisecond pulsars with CO white dwarf companions. II. Accretion, spin-up, true ages and comparison to MSPs with He white dwarf companions“, *MNRAS* **425**, 2012, 1601–1627.
9. Antoniadis, J. et al., „A massive pulsar in a compact relativistic orbit“, *Science* **340**, 2013, 1233232, <http://www.eso.org/public/videos/eso1319a/> (Stand: Mai 2013).



Dr. Thomas M. Tauris machte seinen Doktor in Astrophysik an der Universität Aarhus/ATNF-CSIRO Sydney. Er forschte unter anderem am Niels-Bohr-Institut in Kopenhagen und am NORDITA (Nordic Institute for Theoretical Physics). Zurzeit arbeitet er am Argelander Institut für Astronomie der Universität Bonn und am Max-Planck-Institut für Radioastronomie in Bonn. Seine Forschungsschwerpunkte sind die Bildung und Evolution von Binär- und Röntgenpulsaren, kompakte Sterne, Stellarphysik und Supernovae.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Kinematik der Drehbewegung	<p>Drehwinkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung sind in der Kinematik der Drehbewegung grundlegend definierte Größen.</p> <p>Winkelgeschwindigkeit Sie ist stets parallel zur Drehachse ausgerichtet, und ihr Betrag ergibt sich aus</p> $\omega = \frac{d\theta}{dt} . \quad (8.2)$ <p>Zeigt der nach oben abgespreizte Daumen der rechten Hand in die Richtung des Vektors der Winkelgeschwindigkeit, dann zeigen die gekrümmten übrigen Finger in Drehrichtung.</p>
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (\text{Definition}) \quad (8.4)$
Tangentialgeschwindigkeit	<p>Sie steht senkrecht auf dem Ortsvektor des betrachteten Punkts, der von der Drehachse zum Ort des betrachteten Punkts zeigt, und ebenfalls senkrecht auf dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit:</p> $v_t = \omega \times r = r \omega \sin \varphi . \quad (8.11)$ <p>Ihre Richtung lässt sich durch die Drei-Finger-Regel für Vektorprodukte ermitteln: Zeigt der nach oben abgespreizte Daumen in r-Richtung und der abgespreizte Zeigefinger in v_t-Richtung, dann zeigt der senkrecht zu beiden abgespreizte Mittelfinger in ω-Richtung.</p>
Tangentialbeschleunigung	$a_t = r\alpha \quad (8.9)$
Normalbeschleunigung	$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (8.10)$
2. Drehbewegungen mit konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (8.5)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (8.6)$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (8.7)$
3. Trägheitsmoment	<p>Das Trägheitsmoment ist ein Maß für den tragen Widerstand, den ein Körper einer Winkelbeschleunigung entgegensetzt. Sein Betrag hängt von der Masseverteilung bezüglich der Drehachse ab.</p>
Teilchensystem	$I = \sum m_i r_i^2 \quad (\text{Definition}) \quad (8.13)$
Kontinuierliche Massenverteilung	$I = \int r^2 dm \quad (8.15)$
Steiner'scher Satz	<p>Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse, die im Abstand h von einer parallelen Achse durch den Massenmittelpunkt verläuft, ist</p> $I = I_S + m h^2 . \quad (8.16)$ <p>Dabei ist I_S das Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch den Massenmittelpunkt und m die Gesamtmasse des Körpers.</p>
4. Drehmoment	<p>Das Drehmoment ist ein Maß für die Wirkung einer Kraft, die einen Körper zum Drehen bringt oder eine Drehung beendet.</p>
Bezüglich einer Achse	<p>Das von einer Kraft verursachte Drehmoment ist das Produkt aus der Tangentialkomponente dieser Kraft und der radialen Entfernung seiner Wirkungslinie von der Drehachse:</p> $M = F_t r = F r \sin \theta = F \ell . \quad (8.22)$
Bezüglich eines Punkts	$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \mathbf{F} \sin \varphi \quad (8.23)$
Leistung	$P = M \omega \quad (8.29)$
5. Zweites Newton'sches Axiom für Drehbewegungen	$M_{\text{ext}} = \sum_i M_{\text{ext},i} = I \alpha \quad (8.21)$ <p>Wenn die Trägheitsmomente und Drehmomente bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt in einem Bezugssystem berechnet werden, das sich mit dem Massenmittelpunkt bewegt, gilt das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen für alle Rotationen bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt, auch wenn das Bezugssystem beschleunigt wird, also kein Inertialsystem ist.</p>

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
6. Schwerpunkt	<p>Der Schwerpunkt r_S ist dadurch ausgezeichnet, dass die in ihm angreifende gesamte Gewichtskraft F_G des Körpers dasselbe Drehmoment erzeugt wie das Drehmoment, das die einzelnen Bestandteile des starren Körpers mit ihren jeweiligen Gewichtskräften verursachen:</p> $\mathbf{M} = r_S \times \mathbf{F}_G = \sum_i r_i \times \mathbf{F}_{G,i}. \quad (8.30)$ <p>Im homogenen Gravitationsfeld fallen Massenmittelpunkt und Schwerpunkt zusammen.</p>
7. Bedingungen für schlupffreie Drehungen	<p>Wenn eine Schnur schlupffrei über eine Rolle oder eine Scheibe vom Radius r läuft, gelten für die linearen und die Winkelgrößen folgende Zusammenhänge, die man auch als Rollbedingung bezeichnet:</p> $v_t = r\omega, \quad (8.26)$ $a_t = r\alpha. \quad (8.27)$
8. Rollende Körper	<p>Rollen, ohne zu gleiten</p> $v_S = r\omega \quad (8.47)$ <p>Rollen mit Gleiten</p> <p>Wenn ein Körper rollt und dabei gleitet, gilt die Rollbedingung nicht, d. h. $v_S \neq r\omega$. Die Gleitreibung übt eine Kraft aus, die die lineare Geschwindigkeit v_S verringert, und verursacht ein Drehmoment, das die Winkelgeschwindigkeit ω so lange verändert, bis die Rollbedingung erfüllt ist ($v_S = r\omega$) und der Körper rollt, ohne zu gleiten.</p>
9. Drehimpuls	<p>Der Drehimpuls ist eine wichtige abgeleitete Bewegungsgröße der makroskopischen Physik. In der mikroskopischen Physik ist der Eigendrehimpuls (Spin) eine intrinsische, grundlegende Eigenschaft von Elementarteilchen.</p> <p>Für ein einzelnes Punktteilchen</p> $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (8.33)$ <p>Für ein System, das um eine Symmetrieachse rotiert</p> $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (8.35)$ <p>Für ein beliebiges System</p> <p>Der Drehimpuls bezüglich eines beliebigen Punkts O lässt sich schreiben als Summe aus dem Drehimpuls bezüglich des Massenmittelpunkts S (Eigendrehimpuls) und dem Drehimpuls, der mit der Bewegung des Massenmittelpunkts bezüglich O (Bahndrehimpuls) verbunden ist:</p> $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{Bahn}} + \mathbf{L}_{\text{Spin}} = m(r_S \times v_S) + \sum_i m_i(\mathbf{r}_i^{(S)} \times \mathbf{v}_i^{(S)}). \quad (8.36)$
Zweites Newton'sches Axiom für Drehbewegungen	$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (8.38)$
Drehimpulserhaltung	<p>Wenn das äußere Drehmoment auf ein System null ist, bleibt der Drehimpuls des Systems erhalten. Das gilt auch komponentenweise: Wenn die Komponente des äußeren Drehmoments auf ein System in einer beliebigen Richtung null ist, bleibt die Drehimpulskomponente des Systems in dieser Richtung erhalten. Die Drehimpulserhaltung ist ein grundlegendes Naturgesetz.</p>
Kinetische Energie eines um eine feste Achse rotierenden Körpers (Rotationsenergie)	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{L^2}{2I} \quad (8.43)$
10. Kreisel	<p>Ein Kreisel ist ein Körper, der sich um eine freie Achse dreht und dessen Achse in einem Punkt unterstützt wird. Symmetrische Kreisel sind Kreisel, die rotationssymmetrisch um ihre Drehachse sind. Wird der Kreisel im Massenmittelpunkt unterstützt, heißt er kräftefreier Kreisel. Figurenachse, Winkelgeschwindigkeits- und Drehimpulsvektor fallen in diesem Fall alle zusammen.</p>
Präzession	<p>Unter der Präzession eines symmetrischen Kreisels versteht man die Rotation des Drehimpulsvektors um eine raumfeste Achse senkrecht zum verursachenden Drehmoment und zum Drehimpulsvektor selbst. Die Präzessionswinkelgeschwindigkeit ist dabei unabhängig von der Neigung des Kreisels von der Vertikalen.</p>
Nutation	<p>Unter der Nutation eines symmetrischen Kreisels versteht man die Rotation des Vektors der Winkelgeschwindigkeit um den Drehimpulsvektor, für den Fall, dass der Drehimpulsvektor und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit nicht mehr parallel zueinander sind.</p>

Antworten auf die Verständnisfragen

- 8.1 Scheibe A hat ein größeres Trägheitsmoment. Teilen Sie Scheibe A in Gedanken in zwei Teile, nämlich einen Teil von 1 cm dicht an der Achse durch den Mittelpunkt (Teil 1) und einen Teil außerhalb des Bereichs von 1 cm um den Mittelpunkt (Teil 2). Dann hat Teil 2 für sich schon dieselbe Masse und dasselbe Trägheitsmoment wie Scheibe B mit ihrem Loch. Durch das zusätzliche Trägheitsmoment von Teil 1 hat Scheibe A ein größeres Trägheitsmoment als B.
- 8.2 Scheibe B hat ein größeres Trägheitsmoment. Die beiden Scheiben haben zwar dieselbe Masse, aber die Masse von Scheibe B ist weiter von der Drehachse verteilt als die Masse von Scheibe A.

Lösungen der Übungen

- 8.1 $314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 8.2 a) $500 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1} = 52,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 8.3 $v_t = 188 \text{ cm/s}, a_t = 0, a_n = 5,92 \cdot 10^3 \text{ cm/s}^2$
 8.4 a) 126 cm/s, b) 126 cm/s
 8.5 $I = 8 m_0 a^2$
 8.6 a) $a = 3 g/4$ nach unten, b) $F = m_K g/4$ nach unten
 8.7 284 N · m
 8.8 $E_{\text{kin},A} = 78,2 \text{ J}, E_{\text{kin},E} = 13,0 \text{ J}$
 8.9 $r_n = r_A / \sqrt[3]{n}$
 8.10 20,2 J
 8.11 0,40
 8.12 a) $F_{R,h} = -\frac{1}{2} m g \sin \theta$, b) $\tan \theta \leq 2 \mu_{R,h}$
 8.13 $v_S = \frac{5}{7} v_0$. Nein

Aufgaben

Bei allen Aufgaben ist die Fallbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

8.1 • Eine Scheibe rotiert mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse durch den Mittelpunkt senkrecht zur Scheibe. Auf ihr sind zwei Punkte markiert, einer auf dem Rand und einer auf der Mitte zwischen dem Rand und der Drehachse. a) Welcher der Punkte bewegt sich in einer bestimmten Zeit über die größere Entfernung? b) Welcher der beiden Punkte dreht sich um den größeren Winkel? c) Welcher Punkt hat die höhere (tangentielle) Geschwindigkeit? d) Welcher Punkt hat die höhere Winkelgeschwindigkeit? e) Welcher Punkt hat die größere (tangentielle) Beschleunigung? f) Welcher Punkt hat die größere Winkelbeschleunigung? g) Welcher Punkt hat die größere Zentripetalbeschleunigung?

8.2 • Eine Scheibe kann frei um eine feste Achse rotieren. Eine tangentiale Kraft, die im Abstand d von der Achse angreift, verursacht eine Winkelbeschleunigung α . Welche Winkelbeschleunigung erfährt die Scheibe, wenn dieselbe Kraft im Abstand $2d$ von der Achse angreift? a) α , b) 2α , c) $\alpha/2$, d) 4α , e) $\alpha/4$.

8.3 • Füllen Sie die Lücke im Satz aus: Das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse, die nicht durch seinen Massenmittelpunkt verläuft, ist ... Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Massenmittelpunkt. a) immer geringer als das, b) manchmal geringer als das, c) manchmal gleich dem, d) immer größer als das.

8.4 • Bei den meisten Türen befindet sich der Griff auf der Seite der Tür, die den Angeln gegenüberliegt (und nicht wie beispielsweise bei einer Schublade in der Mitte). Warum ist das Öffnen der Tür dadurch leichter?

8.5 • Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v entlang einer geraden Bahn, die durch einen Punkt P verläuft. Wie groß ist der Drehimpuls des Teilchens bezüglich des Punkts P ? a) Sein Betrag ist $m v$. b) Sein Betrag ist null. c) Sein Betrag ändert das Vorzeichen, wenn das Teilchen durch P geht. d) Sein Betrag nimmt zu, wenn sich das Teilchen dem Punkt P nähert.

8.6 • Ein Teilchen bewegt sich auf einer geraden Bahn mit konstanter Geschwindigkeit. Wie verändert sich der Drehimpuls bezüglich eines beliebigen festen Punkts mit der Zeit?

8.7 •• Ein massiver, gleichförmiger Zylinder und eine massive, gleichförmige Kugel haben dieselbe Masse. Beide rollen, ohne zu gleiten, auf einer horizontalen Ebene. Berechnen Sie für welche Radien der beiden Körper folgende Aussagen richtig sind, wenn ihre kinetischen Energien gleich sind: a) Die Translationsgeschwindigkeit des Zylinders ist größer als die der Kugel. b) Die Translationsgeschwindigkeit des Zylinders ist kleiner als die der Kugel. c) Die Translationsgeschwindigkeit des Zylinders und die der Kugel sind gleich.

8.8 •• Ein Ring der Masse m mit dem Radius r rollt, ohne zu gleiten. Was ist größer, seine kinetische Translationsenergie oder seine kinetische Rotationsenergie relativ zum Massenmittelpunkt? a) Die kinetische Translationsenergie ist größer. b) Die kinetische Rotationsenergie relativ zum Massenmittelpunkt ist größer. c) Beide Energien sind gleich groß. d) Die Antwort hängt vom Radius des Rings ab. e) Die Antwort hängt von der Masse des Rings ab.

8.9 •• Eine vollständig starre Kugel rollt, ohne zu gleiten, auf einer vollständig starren horizontalen Oberfläche. Zeigen Sie, dass die Reibungskraft auf die Kugel null sein muss. (*Hinweis:* Überlegen Sie, in welcher Richtung die Reibungskraft angreifen kann und welche Wirkung eine solche Kraft auf die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts und auf die Winkelgeschwindigkeit hätte.)

8.10 •• In einem System bleibt der Drehimpuls bezüglich eines festen Punkts P konstant. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig? a) Auf kein Teil des Systems wirkt ein Drehmoment bezüglich P . b) Auf jeden Teil des Systems wirkt ein konstantes Drehmoment bezüglich P . c) Auf jeden Teil des Systems wirkt bezüglich P ein resultierendes äußeres Drehmoment von null. d) Auf das System wirkt ein konstantes äußeres Drehmoment bezüglich P . e) Auf das System wirkt bezüglich P ein resultierendes äußeres Drehmoment von null.

8.11 •• Ein Block, der reibungsfrei auf einem Tisch gleitet, ist an einer Schnur befestigt, die durch ein kleines Loch in der Tischplatte verläuft. Anfangs gleitet der Block mit der Geschwindigkeit v_0 auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 um das Loch. Ein Student unter dem Tisch zieht nun langsam an der Schnur. Was passiert, während der Block sich auf einer Spiralfahrt nach innen bewegt? (Der Begriff „Drehimpuls“ soll in diesem Zusammenhang den Drehimpuls bezüglich einer vertikalen, durch das kleine Loch verlaufenden Achse bezeichnen.) a) Energie und Drehimpuls des Blocks bleiben erhalten. b) Der Drehimpuls des Blocks bleibt erhalten, seine Energie nimmt zu. c) Der Drehimpuls des Blocks bleibt erhalten, seine Energie nimmt ab. d) Die Energie des Blocks bleibt erhalten, der Drehimpuls nimmt zu. e) Die Energie des Blocks bleibt erhalten, der Drehimpuls nimmt ab. Geben Sie Argumente an, um Ihre Antwort zu stützen.

8.12 •• Der Drehimpulsvektor für ein sich drehendes Rad verläuft entlang dessen Achse und zeigt nach Osten. Um den Vektor in die südliche Richtung zu drehen, lässt man eine Kraft am östlichen Ende der Achse wirken. In welche Richtung muss die Kraft wirken? a) aufwärts, b) abwärts, c) nach Norden, d) nach Süden, e) nach Osten.

8.13 •• Sie haben ein Auto konstruiert, das durch die Energie angetrieben wird, die in einem Einzelschwungrad mit dem Eigendrehimpuls \mathbf{L} gespeichert ist. Über Nacht schließen Sie den Wagen an eine Steckdose an, ein Elektromotor bringt dann das Schwungrad auf Touren und führt ihm Rotationsenergie zu, die Sie tagsüber nutzen und in kinetische Energie des Fahrzeugs umwandeln. Diskutieren Sie, bei welchen Fahrmanövern Probleme durch diese Bauweise auftreten können. Nehmen Sie beispielsweise an, dass das Schwungrad so montiert ist, dass \mathbf{L} vertikal nach oben weist, wenn der Wagen auf einer ebenen Strecke fährt. Was passiert, wenn der Wagen über einen Hügel oder durch eine Senke fährt? Nehmen Sie nun an, dass das Schwungrad so montiert ist, dass \mathbf{L} auf ebener Strecke nach vorn oder auf eine Seite weist. Was passiert, wenn das Auto eine Links- oder Rechtskurve fahren soll? Berücksichtigen Sie in jedem der Fälle, die Sie untersuchen, die Richtung des Drehmoments, das die Straße auf den Wagen ausübt.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

8.14 •• Warum landet eine Toastbrotscheibe, die vom Tisch fällt, immer mit der Marmeladenseite auf dem Teppich? Die Frage klingt albern, ist aber ernsthaft wissenschaftlich untersucht worden. Die Theorie ist zu kompliziert, als dass man sie hier detailliert wiedergeben könnte, aber Ron D. Edge und Darryl Steinert zeigten, dass eine (als quadratisch angenommene) Scheibe Toastbrot, die man vorsichtig über den Rand einer Tischplatte schiebt, bis sie kippt, typischerweise dann herunterfällt, wenn der Winkel gegen die Horizontale größer ist als 30° (Abbildung 8.81). In diesem Moment hat die Scheibe eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 0,956\sqrt{g/l}$, wobei l die Kantenlänge der Toastscheibe ist. Die Marmeladenseite ist natürlich oben. Auf welche Seite fällt die Scheibe, wenn der Tisch $0,500\text{ m}$ hoch ist? Wie sieht es bei einem $1,00\text{ m}$ hohen Tisch aus? Setzen Sie für die Kantenlänge $l = 10,0\text{ cm}$ an und vernachlässigen Sie alle Effekte durch den Luftwiderstand. (Diese und zahlreiche weitere verblüffende Aufgaben finden sich in dem sehr lesenswerten Buch *Why Toast Lands Jelly-Side Down: Zen and the Art of Physics Demonstrations* von Robert Ehrlich.)

8.15 •• Betrachten Sie das Trägheitsmoment eines durchschnittlichen Erwachsenen bezüglich einer Achse, die vertical mitten durch seinen Körper verläuft. Unterscheiden Sie die Fälle, dass er die Arme eng an den Körper presst und dass er die Arme seitlich waagerecht ausstreckt. Schätzen Sie das Verhältnis dieser beiden Trägheitsmomente.

8.16 •• Die polaren Eiskappen der Erde enthalten etwa $2,3 \cdot 10^{19}\text{ kg}$ Eis. Diese Masse trägt kaum zum Trägheitsmoment

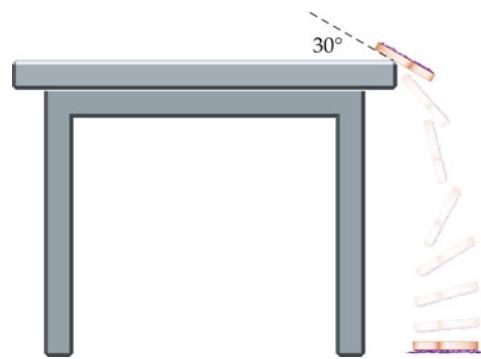


Abbildung 8.81 Zu Aufgabe 8.14.

der Erde bei, weil sie an den Polen, d.h. dicht an der Rotationsachse, konzentriert ist. Schätzen Sie den Einfluss auf die Tageslänge ab, wenn das gesamte Polareis abschmelzen und sich gleichmäßig auf die Erdoberfläche verteilen würde. (Das Trägheitsmoment einer Kugelschale mit der Masse m und dem Radius r ist $2mr^2/3$.)

8.17 •• Das Trägheitsmoment der Erde bezüglich ihrer Drehachse beträgt etwa $8,03 \cdot 10^{37}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$. a) Da die Erde annähernd kugelförmig ist, lässt sich das Trägheitsmoment in der Form $I = Cmr^2$ schreiben; dabei ist C eine dimensionslose Konstante, $m = 5,98 \cdot 10^{24}\text{ kg}$ ist die Erdmasse, und $r = 6370\text{ km}$ ist der Erdradius. Berechnen Sie C . b) Wäre die Massenverteilung in der Erde gleichförmig, hätte C den Wert $2/5$. Vergleichen Sie ihn mit dem in berechneten Wert. Wo ist die Dichte der Erde größer – nahe beim Erdkern oder eher an der Erdkruste? Erläutern Sie Ihre Argumentation.

Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

8.18 • Ein Rad beginnt sich aus dem Stillstand zu drehen, die Winkelbeschleunigung ist $2,6\text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$. Wir warten $6,0\text{ s}$ ab. a) Wie hoch ist dann die Winkelgeschwindigkeit? b) Um welchen Winkel hat sich das Rad gedreht? c) Wie viele Umdrehungen hat es ausgeführt? d) Welche tangentiale Geschwindigkeit und welche lineare Beschleunigung finden wir für einen Punkt in $0,30\text{ m}$ Abstand von der Drehachse?

8.19 • Wie hoch ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde in Radiant pro Sekunde bei der Rotation um ihre eigene Achse?

Berechnung von Trägheitsmomenten

8.20 • Ein Tennisball ist 57 g schwer und hat $7,0\text{ cm}$ Durchmesser. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich des Durchmessers. Fassen Sie den Ball als eine Kugelschale auf.

8.21 • Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer massiven Kugel mit der Masse m und dem Radius r bezüglich einer Achse, die tangential zur Kugeloberfläche verläuft (Abbildung 8.82).

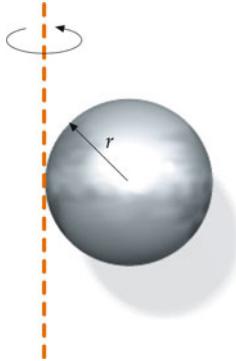


Abbildung 8.82 Zu Aufgabe 8.21.

8.22 •• Zwei Punktmassen m_1 und m_2 sind durch einen masselosen Stab der Länge l getrennt. a) Geben Sie einen Ausdruck für das Trägheitsmoment I bezüglich einer Achse an, die senkrecht zu dem Stab im Abstand x von der Masse m_1 verläuft. b) Berechnen Sie dI/dx und zeigen Sie, dass I minimal ist, wenn die Achse durch den Massenmittelpunkt des Systems verläuft.

8.23 •• Eine gleichförmige rechteckige Platte hat die Masse m und die Kantenlängen a und b . a) Zeigen Sie durch Integration, dass bezüglich einer Achse, die senkrecht auf der Platte steht und durch eine der Ecken verläuft, die Platte das Trägheitsmoment $I = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ hat. b) Geben Sie einen Ausdruck für das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse an, die senkrecht auf der Platte steht und durch den Massenmittelpunkt verläuft.

8.24 •• Das Methanmolekül (CH_4) besteht aus vier Wasserstoffatomen, die in den Eckpunkten eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge $0,18\text{ nm}$ angeordnet sind, und einem Kohlenstoffatom im Mittelpunkt des Tetraeders (Abbildung 8.83). Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Moleküls bezüglich einer Achse a) durch den Mittelpunkt des Kohlenstoffatoms, b) durch den Mittelpunkt eines der Wasserstoffatome.

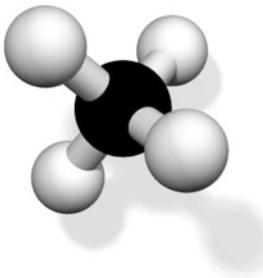


Abbildung 8.83 Zu Aufgabe 8.24.

8.25 ••• Zeigen Sie durch Integration, dass das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale vom Radius r und der Masse m bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt durch $I = 2mr^2/3$ gegeben ist.

Drehmoment

8.27 • Ein Unternehmen möchte bestimmen, welches Drehmoment beim Schleifen auf die von ihm produzierte Serie von Schleifsteinen wirkt, um ggf. die Konstruktion zu ändern und energieeffizienter zu machen. Dazu sollen Sie das bestverkaufte Modell untersuchen, das im Wesentlichen aus einem scheibenförmigen Schleifstein von der Masse $1,70\text{ kg}$ mit dem Radius $8,00\text{ cm}$ besteht und das mit einer Nenndrehzahl von $730\text{ U}\cdot\text{min}^{-1}$ arbeitet. Nachdem der Motor abgeschaltet wird, stoppen Sie die Zeit, bis der Stein zum Stillstand kommt, mit $31,2\text{ s}$.
a) Wie hoch ist die Winkelbeschleunigung des Schleifsteins?
b) Welches Drehmoment wird auf den Schleifstein ausgeübt? (Nehmen Sie an, dass die Winkelbeschleunigung konstant ist, und vernachlässigen Sie alle anderen Reibungskräfte.)

8.28 • Ein Zylinder mit dem Radius 11 cm und der Masse $2,5\text{ kg}$ ist um die Zylinderachse drehbar gelagert. Anfangs ist der Zylinder in Ruhe. Ein Seil von vernachlässigbarer Masse ist um ihn geschlungen, an ihm wirkt eine Zugkraft von 17 N . Das Seil soll schlupffrei über den Zylinder laufen. Berechnen Sie a) das Drehmoment, das das Seil auf den Zylinder ausübt, b) die Winkelbeschleunigung des Zylinders und c) die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders nach $0,50\text{ s}$.

8.29 •• Ein Fadenpendel der Länge l und der Pendelmasse m schwingt in einer vertikalen Ebene. Wenn der Faden einen Winkel θ mit der Vertikalen bildet, a) wie hoch ist dann die Tangentialkomponente der auf den Pendelkörper wirkenden Beschleunigung? (Verwenden Sie die Gleichung $\sum F_t = m a_t$.) b) Welches Drehmoment wird bezüglich der Aufhängung ausgeübt? c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sum M = I \alpha$ mit $a_t = l \alpha$ dieselbe Tangentialbeschleunigung ergibt wie in Teil a ermittelt.

8.30 ••• Ein gleichförmiger Stab der Länge l und der Masse m ist an einem Ende reibungsfrei drehbar aufgehängt (Abbildung 8.84). Er wird von einer horizontalen Kraft in einer Entfernung x unterhalb der Aufhängung angestoßen. a) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts unmittelbar nach dem Stoß gegeben ist durch $v_0 = 3x F_0 \Delta t / (2ml)$ (dabei ist F_0 die mittlere Kraft und Δt die Dauer der Krafteinwirkung). b) Berechnen Sie die Horizontalkomponente der Kraft, die die Aufhängung auf den Stab ausübt, und zeigen Sie, dass diese Kraft für $x = \frac{2}{3}l$ null wird. Der Punkt $x = \frac{2}{3}l$ wird das *Schlagzentrum* des Systems Stab–Aufhängung genannt. Dieser Punkt spielt eine besondere Rolle bei Ballspielen, die mit einem Schläger gespielt werden (z. B. Tennis oder Baseball): Wenn man den Schläger so führt, dass der Ball genau mit dem Schlagzentrum getroffen wird, erhält der Ball die höchstmögliche

Beschleunigung, und der Schläger wird geringstmöglich vibrieren. Außerdem sind Ballaufprallwinkel und -abprallwinkel exakt gleich.

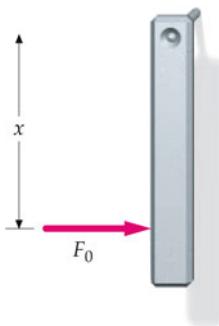


Abbildung 8.84 Zu Aufgabe 8.30.

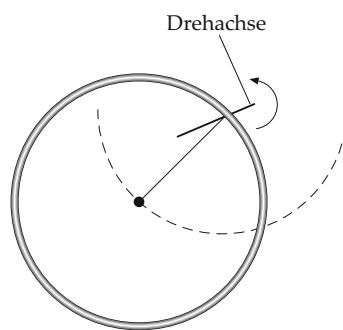


Abbildung 8.85 Zu Aufgabe 8.33.

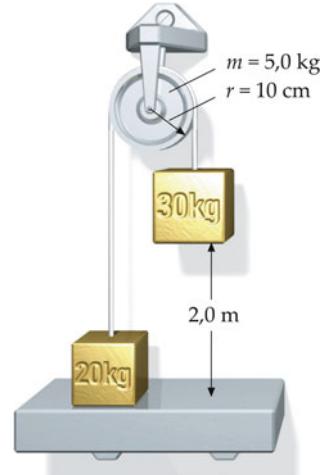


Abbildung 8.86 Zu Aufgabe 8.34.

Kinetische Energie der Rotation

8.31 • Eine massive Kugel hat eine Masse von 1,4 kg und einen Durchmesser von 15 cm; sie rotiert um ihre Achse mit $70 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$. a) Wie hoch ist die kinetische Energie? b) Die Rotationsenergie wird um 5,0 mJ erhöht. Wie hoch ist dann die Winkelgeschwindigkeit der Kugel?

8.32 •• Berechnen Sie die kinetische Rotationsenergie der Erde bezüglich ihrer Drehachse und vergleichen Sie diesen Wert mit der kinetischen Energie aufgrund der Bahnbewegung des Massenmittelpunkts der Erde um die Sonne. Betrachten Sie die Erde als eine gleichförmige Kugel mit einer Masse von $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und einem Radius von $6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$. Der Radius der als kreisförmig angenommenen Erdbahn beträgt $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

8.33 •• Ein gleichförmiger Ring mit 1,5 m Durchmesser ist so an einem Punkt seines Außendurchmessers aufgehängt, dass er frei um eine horizontale Achse rotieren kann. Anfangs ist die Verbindungsleitung zwischen der Aufhängung und dem Mittelpunkt des Rings horizontal (Abbildung 8.85). a) Welche maximale Winkelgeschwindigkeit erreicht der Ring, wenn er aus der Anfangslage losgelassen wird? b) Welche anfängliche Winkelgeschwindigkeit muss der Ring erhalten, damit er einmal um 360° rotiert?

Rollen, Fallmaschinen und herabhängende Teile

8.34 •• Das System in Abbildung 8.86 wird aus dem Stillstand losgelassen. Der 30-kg-Block hängt 2,0 m über der Platte. Als Rolle dient eine gleichförmige Scheibe mit einem Radius von 10 cm und einer Masse von 5,0 kg. Berechnen Sie, jeweils unmittelbar vor dem Auftreffen: a) die Geschwindigkeit des 30-kg-Blocks, b) die Winkelgeschwindigkeit der Rolle und c) die Zugkräfte in den Seilen. d) Berechnen Sie ferner die Fallzeit des 30-kg-Blocks. Das Seil soll schlupffrei über die Rolle laufen.

8.35 •• Abbildung 8.87 zeigt eine Anordnung zur Messung von Trägheitsmomenten. An einem Drehteller ist ein konzentrischer Zylinder mit einem Radius r , um den eine Schnur gewunden ist. Drehteller und Zylinder können sich reibungsfrei um eine vertikale Achse drehen. Die Schnur läuft über eine reibungsfreie und masselose Rolle zu einem Gewicht der Masse m . Das Gewichtsstück wird aus dem Stillstand losgelassen, und man misst die Zeit t_1 , in der es um eine Höhe d fällt. Dannwickelt man die Schnur wieder auf, legt den Körper, dessen Trägheitsmoment I zu messen ist, auf den Drehteller und lässt das Gewichtsstück von Neuem fallen. Mit der Zeit t_2 , die es nun für dieselbe Fallstrecke braucht, lässt sich I berechnen. Mit $r = 10 \text{ cm}$, $m = 2,5 \text{ kg}$ und $d = 1,8 \text{ m}$ werden die Fallzeiten $t_1 = 4,2 \text{ s}$ und $t_2 = 6,8 \text{ s}$ gemessen. a) Berechnen Sie das Gesamtrträgheitsmoment des Systems aus Drehteller und Zylinder. b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment für das System aus Drehteller, Zylinder und zu vermessendem Körper. c) Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus den Teilen a und b das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse des Drehtellers.

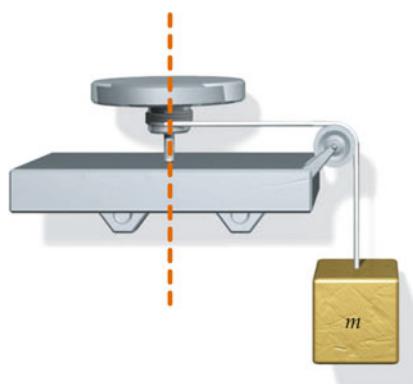


Abbildung 8.87 Zu Aufgabe 8.35.

Drehimpuls und Drehimpulserhaltung

8.36 • Ein Planet läuft auf elliptischer Bahn um die Sonne, die in einem Brennpunkt der Ellipse steht (Abbildung 8.88).
a) Welches Drehmoment bezüglich des Mittelpunkts der Sonne übt die Gravitationsanziehung der Sonne auf den Planeten aus? b) In Stellung A ist der Planet r_1 von der Sonne entfernt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_1 senkrecht zu der Verbindungslinie zwischen der Sonne und dem Planeten. In Stellung B beträgt die Entfernung r_2 und die Geschwindigkeit v_2 , auch hier senkrecht zu der Verbindungslinie zwischen der Sonne und dem Planeten. Geben Sie das Verhältnis v_1/v_2 mithilfe von r_1 und r_2 an.

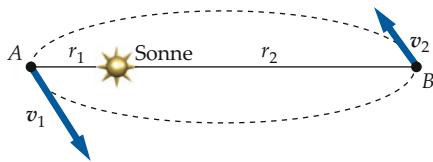


Abbildung 8.88 Zu Aufgabe 8.36.

8.37 •• a) Ein Teilchen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, hat bezüglich eines bestimmten Punkts keinen Drehimpuls. Zeigen Sie anhand der Definition des Drehimpulses, dass sich das Teilchen dann entweder direkt auf den bestimmten Punkt zu oder direkt von ihm fort bewegt. b) Sie sind Rechtshänder und spielen als Schlagmann beim Baseball. Ein schneller Ball kommt in Hüfthöhe auf Sie zu. Sie lassen den Ball passieren, ohne sich zu bewegen. Welche Richtung hat der Drehimpuls des Balls bezüglich Ihres Bauchnabels? (Nehmen Sie an, dass der Ball sich entlang einer geraden horizontalen Bahn bewegt, wenn er an Ihnen vorbeifliegt.)

8.38 •• Eine auf einem Tisch aufrecht stehende Münze mit einer Masse von 15 g und einem Durchmesser von 1,5 cm dreht sich mit $10 \text{ U} \cdot \text{s}^{-1}$ um eine vertikale, fest stehende Achse durch

den Mittelpunkt der Münze. Beim Blick von oben auf den Tisch dreht sich die Münze im Uhrzeigersinn. a) Wie groß ist der Drehimpuls der Münze bezüglich ihres Massenmittelpunkts, und welche Richtung hat er? (Das Trägheitsmoment der Münze entnehmen Sie Tabelle 8.1.) Betrachten Sie die Münze dabei als Zylinder mit der Länge l und wählen Sie den Grenzwert für $l \rightarrow 0$. b) Welchen Drehimpuls (Betrag und Richtung) hat die Münze bezüglich eines Punkts auf dem Tisch, der 10 cm von der Drehachse entfernt ist? c) Nun soll sich die Münze mit 5,0 cm/s entlang einer geraden Linie in östlicher Richtung über den Tisch bewegen, während sie sich wie in Teil a um eine vertikale Achse dreht. Welchen Drehimpuls (Betrag und Richtung) hat die Münze dann bezüglich eines Punkts, der auf der Bewegungslinie des Massenmittelpunkts der Münze liegt? d) Welchen Drehimpuls (Betrag und Richtung) hat die sich drehende und gleitende Münze bezüglich eines Punkts, der 10 cm nördlich von der Bewegungslinie des Massenmittelpunkts entfernt liegt?

8.39 •• Bei einer Drehbank wird die Kraft über ein exakt ausgewuchtetes zylinderförmiges Schwungrad übertragen, das eine Masse von 90 kg und einen Radius von 0,40 m hat; der (homogene) Zylinder rotiert reibungsfrei um eine raumfeste Achse und wird von einem Riemen angetrieben, der ein konstantes Drehmoment ausübt. Zur Zeit $t = 0$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders null, zur Zeit $t = 25 \text{ s}$ dreht er sich mit $500 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$. a) Welchen Betrag hat der Drehimpuls bei $t = 25 \text{ s}$? b) Mit welcher Rate nimmt der Drehimpuls zu? c) Wie groß ist das Drehmoment, das auf den Zylinder einwirkt? d) Wie groß ist die Reibungskraft, die zwischen dem Treibriemen und dem Mantel des Zylinders wirkt?

8.40 •• Ein drehbares Serviertablett besteht aus einem schweren Kunststoffzylinder, der sich reibungsfrei um seine senkrecht stehende Symmetriechse drehen kann. Der Zylinder hat einen Durchmesser von $r_0 = 15 \text{ cm}$ und eine Masse von $m_0 = 0,25 \text{ kg}$. Auf dem Tablett befindet sich 8,0 cm von der Achse entfernt eine Küchenschabe ($m = 0,015 \text{ kg}$). Sowohl das Tablett als auch die Schabe sind anfangs in Ruhe. Dann beginnt die Schabe auf einem Kreis mit dem Durchmesser 8,0 cm zu laufen; der Mittelpunkt der Kreisbahn liegt auf der Drehachse des Tabletts. Die Geschwindigkeit der Schabe bezüglich des Tabletts ist $v = 0,010 \text{ m/s}$. Wie hoch ist dann die Geschwindigkeit der Schabe bezüglich des Raums?

8.41 •• Ein Block der Masse m gleitet reibungsfrei auf einem Tisch; er ist an einer Schnur befestigt, die durch ein kleines Loch in der Tischplatte verläuft. Anfangs bewegt sich der Block mit der Geschwindigkeit v_0 auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 . Geben Sie Ausdrücke für a) den Drehimpuls des Blocks, b) die kinetische Energie des Blocks und c) die Zugkraft in der Schnur an. d) Ein Student unter dem Tisch zieht nun die Schnur langsam nach unten. Welche Arbeit muss er verrichten, um den Radius der Kreisbahn von r_0 auf $r_0/2$ zu reduzieren?

Rollen ohne Schlupf

8.42 •• Um einen gleichförmigen Zylinder mit der Masse m und dem Radius r ist eine Schnur gewickelt. Die Schnur wird festgehalten, und der Zylinder fällt senkrecht nach unten, wie in Abbildung 8.89 gezeigt. a) Zeigen Sie, dass die Beschleunigung des Zylinders den Betrag $a = 2g/3$ hat und nach unten gerichtet ist. b) Geben Sie einen Ausdruck für die Zugkraft in der Schnur an.



Abbildung 8.89 Zu Aufgabe 8.42.

8.43 •• Ein gleichförmiger Zylindermantel und ein gleichförmiger massiver Zylinder rollen horizontal, ohne zu gleiten. Die Geschwindigkeit des Zylindermantels ist v . Die Zylinder treffen auf eine geneigte Ebene, die sie hinaufrollen, ohne zu gleiten. Beide Zylinder erreichen dieselbe Höhe. Welche Geschwindigkeit v' hatte der massive Zylinder?

8.44 ••• Abbildung 8.90 zeigt zwei große Zahnräder als Teil einer größeren Maschine. Jedes der Zahnräder ist um eine feste Achse durch seinen Mittelpunkt frei drehbar. Die Räder haben einen Radius von $0,50\text{ m}$ bzw. $1,0\text{ m}$, die Trägheitsmomente $1,0\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ bzw. $16\text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Der an dem kleineren Zahnräder befestigte Hebel ist $1,0\text{ m}$ lang und hat eine vernachlässigbare Masse. a) Ein Arbeiter übt typischerweise eine Kraft von $2,0\text{ N}$ auf das Ende des Hebels aus, wie dargestellt. Wie hoch sind dann die Winkelbeschleunigungen der beiden Zahnräder? b) Ein anderes (in der Abbildung nicht sichtbares) Teil der Maschine übt eine Tangentialkraft auf den Außenrand des größeren Zahnrads aus, um das Getriebe zeitweise am Rotieren zu hindern. Welchen Betrag und welche Richtung (im oder gegen den Uhrzeigersinn) sollte die Kraft haben?

8.45 •• Eine ruhende Billardkugel mit dem Radius r wird mit einem Queue scharf angestoßen, sodass sie mit Schlupf rollt. Die Kraft wirkt horizontal und wird in einer Höhe von $2r/3$ unterhalb der Mittellinie aufgebracht, wie in Abbildung 8.91 gezeigt. Die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel ist v_0 , der Gleitreibungskoeffizient ist $\mu_{R,g}$. a) Welche Winkelgeschwindigkeit ω_0 hat die Kugel unmittelbar nach dem Stoß? b) Welche Geschwindigkeit hat die Kugel, wenn sie beginnt zu rollen, ohne

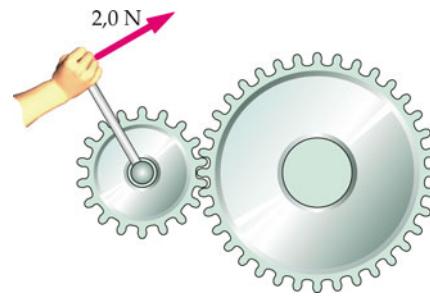


Abbildung 8.90 Zu Aufgabe 8.44.

zu gleiten? c) Welche kinetische Energie hat die Kugel unmittelbar nach dem Stoß?

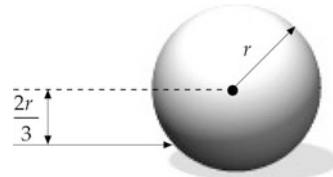


Abbildung 8.91 Zu Aufgabe 8.45.

Kreisel

8.46 •• Ein Speichenrad mit dem Radius 28 cm steckt auf der Mitte einer 50 cm langen Achse. Der Reifen und die Felge wiegen 30 N . Das Rad wird mit $12\text{ U} \cdot \text{s}^{-1}$ gedreht; die Achse wird dann in waagerechter Lage mit einem Ende in einem Gelenk befestigt. a) Welchen Drehimpuls hat das Rad aufgrund seiner Drehung? (Betrachten Sie das Rad als einen Ring.) b) Welche Winkelgeschwindigkeit hat die Präzessionsbewegung? c) Wie lange dauert es, bis die Achse eine 360° -Bewegung um das Gelenk ausgeführt hat? d) Welchen Drehimpuls hat das Rad aufgrund der Bewegung des Massenmittelpunkts, also aufgrund der Präzessionsbewegung? In welche Richtung zeigt dieser Drehimpuls?

Allgemeine Aufgaben

8.47 • Ein gleichförmiger Stab der Länge $2,00\text{ m}$ wird in einem Winkel von 30° zur Horizontalen über einer Eisfläche gehalten, wobei das untere Ende des Stocks das Eis berührt. Wenn man den Stock loslässt, bleibt das Stockende immer in Kontakt mit dem Eis. Wie weit wird sich der Kontaktpunkt während des Falls bewegen? Nehmen Sie die Eisfläche als reibungsfrei an.

8.48 • Der Ortsvektor eines Teilchens mit der Masse $3,0\text{ kg}$ ist $\mathbf{r} = (4,0\hat{\mathbf{x}})\text{ m} + (3,0t^2\hat{\mathbf{y}})\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; dabei ist t in Sekunden anzugeben. Bestimmen Sie den Drehimpuls und das auf das Teilchen wirkende Drehmoment bezüglich des Ursprungs.

8.49 •• Ein Geschoss mit der Masse m wird mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel θ abgefeuert. Betrachten Sie das Drehmoment und den Drehimpuls bezüglich des Startpunkts und zeigen Sie, dass $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$ ist. Vernachlässigen Sie alle Einflüsse des Luftwiderstands.

8.50 •• Ein Karussell auf einem Spielplatz besteht aus einer 240 kg schweren Holzscheibe mit 4,00 m Durchmesser. Vier Kinder schieben das anfangs still stehende Karussell tangential entlang des Rands an, bis es sich mit $2,14 \text{ U} \cdot \text{min}^{-1}$ um die eigene Achse dreht. a) Jedes Kind übt beim Antrieben eine andauernde Kraft von 26 N aus. Wie weit muss dann jedes Kind rennen? b) Wie hoch ist die Winkelbeschleunigung des Karussells? c) Welche Arbeit verrichtet jedes Kind? d) Welche kinetische Energie erhält das Karussell?

8.51 •• Eine Kugel von 2,0 kg ist an einer Schnur der Länge 1,5 m befestigt und bewegt sich von oben gesehen gegen den Uhrzeigersinn auf einer horizontalen Kreisbahn. Eine solche Anordnung nennt man konisches Pendel (Abbildung 8.92). Die Schnur bildet mit der Vertikalen einen Winkel $\theta = 30^\circ$. a) Bestimmen Sie die horizontale und die vertikale Komponente des Drehimpulses \mathbf{L} der Kugel bezüglich der Aufhängung im Punkt P . b) Berechnen Sie den Betrag von $d\mathbf{L}/dt$ und zeigen Sie, dass er genauso groß ist wie der Betrag des Drehmoments, das durch die Schwerkraft bezüglich des Aufhängungspunkts ausgeübt wird.

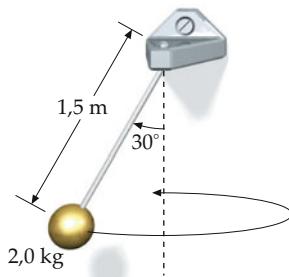


Abbildung 8.92 Zu Aufgabe 8.51.

8.52 •• Abbildung 8.93 zeigt einen Hohlzylinder mit der Masse m_H , der Länge l_H und dem Trägheitsmoment $m_H l_H^2/10$. Im Inneren des Hohlzylinders befinden sich im Abstand l voneinander zwei zylindrische Scheiben jeweils mit der Masse m und dem Radius r ; sie sind mit einer dünnen Schnur an einer Halterung in der Mitte der Anordnung befestigt. Das System kann – angetrieben durch einen Motor – um eine vertikale Achse durch den Mittelpunkt des Hohlzylinders rotieren. Sie sollen nun dieses System durch einen elektronischen Schalter ergänzen,

der den Motor abschaltet, sobald die Schnur zwischen den Scheiben reißt und die Scheiben das jeweilige Ende des Hohlzylinders erreichen. Bei der Arbeit bemerken Sie, dass bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ω des Systems die Schnur reißt, die Scheiben nach außen geschleudert werden und an den Verschlusskappen des Hohlzylinders haften bleiben. Geben Sie Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeit zum Schluss sowie für die kinetische Anfangs- und die kinetische Endenergie des Systems an. Nehmen Sie dazu an, dass die Innenwände des Hohlzylinders reibungsfrei sind.

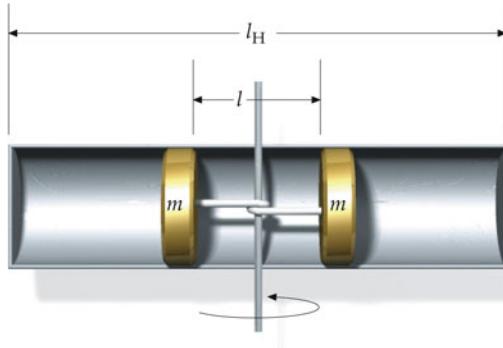


Abbildung 8.93 Zu Aufgabe 8.52.

8.53 ••• Abbildung 8.94 zeigt einen massiven Zylinder mit der Masse m_1 und dem Radius r_1 , an dem ein zweiter massiver Zylinder mit der Masse m und dem Radius r befestigt ist. Um den kleineren Zylinder ist eine Schnur gewunden. Der größere Zylinder ruht auf einer horizontalen Fläche. Der Haftreibungskoeffizient zwischen dem großen Zylinder und der Fläche ist $\mu_{R,h}$. Wenn an der Schnur mit geringer Zugkraft nach oben gezogen wird, bewegen sich die Zylinder nach links; wirkt die Kraft in horizontaler Richtung nach rechts, bewegen sich auch die Zylinder nach rechts. Bestimmen Sie den Winkel, den die Schnur mit der Horizontalen bilden muss, damit die Zylinder bei einer geringen Zugkraft in Ruhe bleiben.

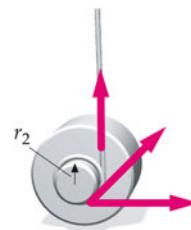


Abbildung 8.94 Zu Aufgabe 8.53.

Mechanik deformierbarer Körper

9



Götterspeise, Wackelpudding oder Wackelpeter – die gelatinehaltige Süßspeise hat viele Namen. Durch Zugabe von Farbstoffen erhält sie zudem viele Farben. Die Lebensmittelfarben E100 bis E180 decken das gesamte Farbspektrum ab und erlauben es so, Kunstwerke wie z. B. die Skyline von San Francisco aus Wackelpudding aufzubauen. Bebt die Erde unter der Gelatine-Stadt, vibrieren die bunten Häuser und verbiegen sich die Türme, stürzen im Gegensatz zu den realen Bauten jedoch nicht ein. (© Detail from View from Alcatraz, San Francisco in Jell-O/Liz Hickok.)

Mechanik deformierbarer Körper

9.1	Spannung und Dehnung	352
9.2	Kompression	355
9.3	Scherung	356
9.4	Zusammenhang zwischen E , K , G und μ	357
9.5	Elastische Energie und Hysterese	358
9.6	Biegung	359
	Zusammenfassung	366
	Aufgaben	368



Warum biegt sich der schmale hohe Turm rechts im Bild wesentlich stärker als das daneben stehende, fast genauso hohe Gebäude mit größerer Grundfläche? (Siehe Beispiel 9.4.)

Seile und Täue, die wir bereits in den vergangenen Kapiteln benutzt haben, sind nur zwei Beispiele für deformierbare Körper. Auch andere Festkörper wie z. B. Holzbalken oder sogar Stahlträger können sich aufgrund äußerer Krafeinwirkungen verformen. Je nach Richtung der Krafeinwirkung, können sie gedehnt, gestaucht, gedreht oder gebogen werden. Wie man die Auswirkungen dieser Verformungen physikalisch beschreibt, werden wir in diesem Kapitel untersuchen.

Im Folgenden werden wir Verformungen und elastische Kräfte betrachten, die auftreten, wenn reale Körper unter mechanischer Spannung stehen.

9.1 Spannung und Dehnung

Wenn auf einen realen Körper Zugkräfte, Druckkräfte oder Scherkräfte wirken, ändert er seine Form. Abbildung 9.1 zeigt einen massiven Metallstab, der einer Normalkraft F_n nach links und einer gleich großen Kraft nach rechts ausgesetzt ist. Der Stab ist zwar im Gleichgewicht, tendenziell verlängern die Kräfte jedoch den Stab, da sie die Atome aus ihren Ursprungslagen ziehen, sodass sich ihre Abstände vergrößern. In Kapitel 36 werden wir auf die molekularen Grundlagen, die dieses Verhalten verursachen, noch näher eingehen.

Der Bruchteil $\Delta l/l$, um den sich ein Element des Stabs verlängert, heißt **relative Längenänderung** oder **Dehnung** ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (9.1)$$

Im Englischen verwendet man dafür den Ausdruck *strain*. Das Verhältnis der Normalkraft F_n zur Querschnittsfläche A nennt man **Zugspannung** oder kurz **Spannung** σ :

$$\sigma = \frac{F_n}{A}. \quad (9.2)$$

Im Englischen wird dafür der Ausdruck *stress* gebraucht.

Nimmt der Körper seine ursprüngliche Form wieder an, nachdem die Kräfte nicht mehr wirken, nennt man den Körper **elastisch**. Die meisten Körper sind nur elastisch, solange die Zugkräfte einen Maximalwert nicht überschreiten. Dieser Maximalwert heißt **elastische Grenze** oder **Elastizitätsgrenze**.

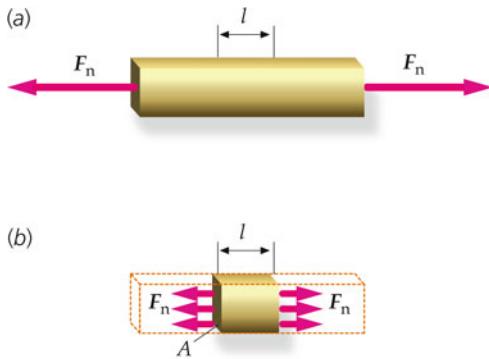


Abbildung 9.1 a) Massiver Metallstab, an dessen beiden Enden eine Zugkraft vom Betrag $|F_n|$ angreift. b) Ein kleiner Abschnitt des Stabs mit der Länge l . Auf diesen Abschnitt üben die Elemente rechts und links des Abschnitts eine Kraft aus. Wenn der Abschnitt nicht zu dicht am Ende des Stabs liegt, sind die Kräfte gleichmäßig über die Querschnittsfläche verteilt. Die auf die Einheitsfläche bezogene Kraft heißt Spannung.

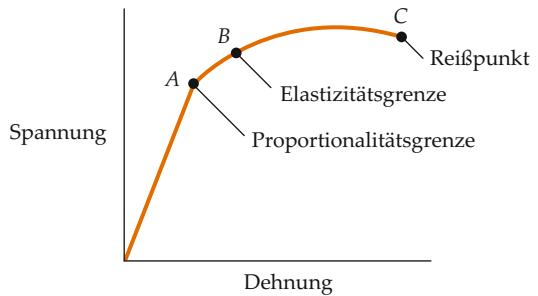


Abbildung 9.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines typischen Metallstabs. Bis zum Punkt A ist die Dehnung proportional zur Spannung. Wird die Elastizitätsgrenze in Punkt B überschritten, bleibt der Stab dauerhaft dehnt, auch wenn kein Zug mehr ausgeübt wird. Am Punkt C reißt der Stab.

Werden die Kräfte zu groß, nimmt der Körper seine ursprüngliche Form nicht mehr an und bleibt dauerhaft verformt.

Abbildung 9.2 zeigt den Zusammenhang von Spannung und Dehnung für einen typischen massiven Metallstab. Bis zu einem Punkt A, der sogenannten Proportionalitätsgrenze, findet man einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Dieses Verhalten nennt man das **Hooke'sche Gesetz**. Wir haben es bereits in Kapitel 3 (Gleichung 3.1) kennengelernt. Es gilt z. B. für Spiralfedern, die man nur wenig dehnt. Jenseits der Proportionalitätsgrenze folgt die Dehnung der Spannung nicht mehr linear. Die Verformung geht trotzdem zurück, solange man unter der Elastizitätsgrenze in Punkt B bleibt. Wird der Stab jedoch über diese Grenze hinaus dehnt, bleibt er dauerhaft verformt. Erhöht man die Spannung weiter, erreicht die Dehnung ihren Maximalwert und sinkt bei weiter erhöhter Spannung sogar ein wenig. Man führt diesen Effekt auf eine Umordnung auf molekularer Ebene zurück, die eine ähnliche Auswirkung hat wie der Übergang von der Haft- zur Gleitreibung. Man sagt, der Stab beginnt zu „fließen“. Beim Erreichen der Reißdehnung im Reißpunkt C reißt der Stab.

Der Elastizitätsmodul

Das Verhältnis von Spannung zu Dehnung im Proportionalbereich (also im Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes) entspricht der Steigung der Geraden in Abbildung 9.2 bis zum Punkt A. Die Steigung ist in diesem Bereich konstant, und ihr Betrag hängt vom untersuchten Material ab. Man bezeichnet sie mit dem Buchstaben E und nennt sie Dehnungsmodul, **Elastizitätsmodul** oder kurz **E-Modul**. (Mitunter wird der E-Modul entsprechend der englischen Bezeichnung *Young's modulus* auch *Young'scher Modul* genannt.) Der E-Modul ist definiert durch

$$E = \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_n/A}{\Delta l/l}. \quad (9.3)$$

DEFINITION DES ELASTIZITÄTSMODULS

Die Dimension des E -Moduls ist Kraft pro Fläche, die Einheit ist daher Newton pro Quadratmeter ($\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$). Um große Zahlenwerte zu vermeiden, gibt man den E -Modul in der Praxis aber meist in Meganewton (10^6 N) pro Quadratmeter ($\text{MN} \cdot \text{m}^{-2}$) oder Giganewton (10^9 N) pro Quadratmeter ($\text{GN} \cdot \text{m}^{-2}$) an.

Beispiel 9.1 zeigt eine Anwendung von Gleichung 9.3 und untersucht die Längenänderung des Tragseils für eine Fahrstuhlkabine unter Zugbelastung.

Beispiel 9.1: Sicherheit eines Fahrstuhls

Sie sollen die Sicherheit eines Fahrstuhlsystems überprüfen, das in ein neues Bürogebäude eingebaut wird. Der Fahrstuhl darf mit 1000 kg (einschließlich seiner eigenen Masse) belastet werden. Er hängt an einem Stahlseil mit 3,0 cm Durchmesser, das voll ausgerollt 300 m lang ist. Eine Dehnung des Stahlseils von mehr als 3,0 cm ist aus Sicherheitsicht bedenklich. Sie sollen überprüfen, ob der Fahrstuhl so sicher ist wie geplant, wenn die maximale Beschleunigung des Systems bei $1,5 \text{ m/s}^2$ liegt und der E -Modul von Stahl $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ beträgt.

Problembeschreibung: Mit l bezeichnen wir die Länge des ungedehnten Stahlseils, mit F_n die darauf wirkende Normalkraft und mit A die Querschnittsfläche des Stahlseils. Die Dehnung des Stahlseils Δl hängt mit dem Elastizitätsmodul über $E = (F_n/A)/(\Delta l/l)$ zusammen.

Lösung: 1. Die Dehnung Δl des Kabels berechnet man mit dem E -Modul:

$$E = \frac{F_n/A}{\Delta l/l}$$

und damit

$$\Delta l = \frac{F_n l}{A E}$$

2. Um die auf das Stahlseil wirkende Kraft zu berechnen, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom auf den Fahrstuhl an. Es treten zwei Kräfte auf, nämlich die Kraft F_n auf das Kabel und die Gewichtskraft:

$$F_n - m g = m a_y$$

und damit

$$\begin{aligned} F_{n,\max} &= m(g + a_{y,\max}) \\ &= (1000 \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg} + 1,5 \text{ N/kg}) \\ &= 1,13 \cdot 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

3. Setzen Sie dies in das Ergebnis aus Schritt 1 ein und berechnen Sie damit die maximale Dehnung:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{F_{n,\max} l}{A E} = \frac{F_{n,\max} l}{\pi r^2 E} \\ &= \frac{(1,13 \cdot 10^4 \text{ N})(300 \text{ m})}{\pi(0,015 \text{ m})^2(2,0 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2})} \\ &= 2,40 \text{ cm} \end{aligned}$$

4. Berichten Sie Ihre Ergebnisse: Nach meinen Berechnungen dehnt sich das Stahlseil um 2,4 cm, gerade 20 % unterhalb der Sicherheitsgrenze. Jedoch ist der Wert des E -Moduls nur ein typischer Wert, die tatsächlichen Werte können von Probe zu Probe variieren. Ich empfehle daher, ein Ingenieurbüro mit einer professionellen Überprüfung zu beauftragen.

Plausibilitätsprüfung: Ist der Ausdruck für Δl in Schritt 3 in seinen Dimensionen korrekt? Der E -Modul hat die Dimension einer Kraft pro Einheitsfläche, das Produkt $A E$ hat demnach die Dimension einer Kraft. Damit hebt sich die Dimension von $F_{n,\max}$ im Zähler gerade gegen die Dimension von $A E$ im Nenner hinweg. Der Gesamtausdruck hat die Dimension einer Länge und ist in seiner Dimension korrekt.

Übung 9.1: Der Bizepsmuskel eines durchschnittlichen Mannes hat eine maximale Querschnittsfläche von $12 \text{ cm}^2 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Wie groß ist die Spannung in dem Muskel, wenn er eine Kraft von 300 N ausübt? ◀

Übung 9.2: Ein 1,5 m langer Draht hat einen Querschnitt von $2,4 \text{ mm}^2$. Er ist vertikal aufgehängt und dehnt sich um 0,32 m, wenn man eine Masse von 10 kg daran befestigt. Berechnen Sie a) die Spannung, b) die relative Längenänderung und c) den Elastizitätsmodul des Drahts. ◀

Die Querkontraktion

Eine Zugspannung bewirkt nicht nur eine Längenzunahme in Richtung der wirkenden Kraft. Gleichzeitig nimmt auch die Dicke d des Stabs in dazu senkrechter Richtung um einen Betrag Δd ab, wie Abbildung 9.3 zeigt. Dieses Phänomen, das Sie am besten an einem Gummiband beobachten können, das Sie in die Länge ziehen, bezeichnet man als **Querkontraktion**. Bei elastischer Deformation, kann man in erster Näherung annehmen, dass die relative Querkontraktion $\Delta d/d$ linear zur Dehnung $\Delta l/l$ erfolgt. Die Proportionalitätskonstante ist wie der E -Modul materialabhängig und heißt **Poisson'sche Zahl** μ :

$$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}. \quad (9.4)$$

DEFINITION DER POISSON'SCHEN ZAHL

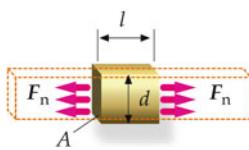


Abbildung 9.3 Massiver Metallstab, an dessen beiden Enden eine Zugkraft vom Betrag $|F_n|$ angreift. Dadurch wird der Stab nicht nur um Δl in Richtung der Zugkraft gedehnt, sondern auch um Δd in der Breite kontrahiert.

Das negative Vorzeichen ist notwendig, da $\Delta d / \Delta l$ immer negativ ist.

Im Allgemeinen hängt die Poisson'sche Zahl auch noch von der Richtung der Querkontraktion ab, wie wir in Kapitel 36 noch genauer sehen werden, doch gehen wir in diesem Kapitel vereinfacht davon aus, dass sie richtungsunabhängig ist. Dann erfährt ein Stab mit quadratischem Querschnitt, der Kantenlänge d und der Länge l unter einer Zug- oder Druckbelastung eine Volumenänderung ΔV :

$$\begin{aligned}\Delta V &= (d + \Delta d)^2 \cdot (l + \Delta l) - d^2 l \\ &= (d^2 + 2d\Delta d + \Delta d^2) \cdot (l + \Delta l) - d^2 l \\ &\approx d^2 \Delta l + 2\Delta d l d.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Produkte von Δd und Δl vernachlässigt, da wir von kleinen Änderungen $\Delta l \ll l$ und $\Delta d \ll d$ ausgegangen sind. Die *relative Volumenänderung* $\Delta V/V$ beträgt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta V}{d^2 l} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta l}{l} \left(1 + 2 \frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta l}\right) \\ &= \frac{\Delta l}{l} (1 - 2\mu) = \epsilon (1 - 2\mu).\end{aligned}\quad (9.5)$$

Damit das Volumen unter Einwirkung einer Zugspannung nicht abnimmt, muss $\mu \leq 0,5$ gelten, sodass $\Delta V/V \geq 0$ ist. Eine Anwendung der Gleichung zeigt Beispiel 9.2.

Beispiel 9.2: Querkontraktion eines Gummibands

Sie ziehen ein 30 cm langes Gummiband mit rechteckigem Querschnitt und einer Dicke von 6 mm um weitere 5 cm in die Länge. Dabei beobachten Sie, dass sich seine Dicke um 0,5 mm verringert. a) Berechnen Sie die Poisson'sche Zahl von Gummi. b) Wie groß ist die relative Volumenänderung?

Problembeschreibung: Die Lösung zu Teilaufgabe a erhalten Sie, indem Sie die gegebenen Werte für die relative Längenänderung und die Kontraktion der Dicke in Gleichung 9.4 einsetzen. Das Ergebnis aus Teilaufgabe a und der gegebenen Dehnung können Sie dann in Gleichung 9.5 einsetzen, um die relative Volumenänderung zu berechnen.



Dehnt man ein Gummiband, verringert sich gleichzeitig seine Dicke, wie der obere Teil des Gummibands im Foto veranschaulicht, wenn man ihn mit dem unteren, nicht dehnten Teil des Bands vergleicht. (© Kitty – Fotolia.com.)

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie μ durch Einsetzen der gegebenen Werte in Gleichung 9.4:

$$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} = -\frac{(-0,5 \text{ mm})/(6 \text{ mm})}{(5 \text{ cm})/(30 \text{ cm})} = [0,5]$$

Teilaufgabe b

Setzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a und die gegebene Dehnung in Gleichung 9.5 ein:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta l}{l} (1 - 2\mu) = \frac{5 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} (1 - 2 \cdot 0,5) = [0]$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis für μ in Teilaufgabe a ist größer als null und kleiner gleich 0,5 und liegt somit im zu erwartenden Intervall. Da $\mu = 0,5$ ist, ist die relative Volumenänderung gleich null, d.h., das Gummiband behält während der Dehnung sein Volumen bei. Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man die Werte für die Dehnung und die Querkontraktion in $\Delta V/V = \Delta l/l + 2(\Delta d/d)$ einsetzt. ■

9.2 Kompression

Umgekehrt zu den Zugkräften kann man die Druckkräfte vom Betrag $|F_p|$ betrachten, die normal zur Querschnittsfläche auf die beiden Enden des massiven Metallstabs in Abbildung 9.4 wirken. Analog zur Spannung definiert man den **Druck** p als Quotient aus der Druckkraft pro Querschnittsfläche:

$$p = \frac{F_p}{A} = -\frac{F_n}{A} = -\sigma. \quad (9.6)$$

Die Druckkraft bewirkt eine Stauchung der Länge und eine Ausdehnung des Querschnitts, d. h., Δl ist negativ und Δd positiv. Insgesamt nimmt das Volumen ab, sodass auch ΔV negativ ist. Die durch die Druckkraft bewirkte relative Volumenabnahme ist daher gerade das Negative von Gleichung 9.5. Bei vielen (aber nicht bei allen) Materialien ist der Elastizitätsmodul für eine Druckspannung genauso groß wie für eine Zugspannung. Bei zu großer Zug- oder Druckbelastung wird der Stab zerstört. Die zugehörige Spannung heißt **Zugfestigkeit** bzw. im Fall einer Druckbelastung **Druckfestigkeit**. Untersuchungen der Zug- und Druckfestigkeit zeigen, dass die Druckfestigkeit beispielsweise für Knochen größer ist als die Zugfestigkeit und dass der E -Modul von Knochen für Zugbelastung erheblich größer ist als für Druckbelastung. Diese Unterschiede haben biologische Bedeutung, da es die Hauptaufgabe eines Knochens ist, der Druckbelastung durch kontrahierende Muskeln zu widerstehen.

Der Kompressionsmodul

Wirkt die Druckkraft gleichmäßig verteilt auf die beiden Längsseiten des Metallstabs, so verkürzt sich die Länge aufgrund des Drucks auf die Querschnittsflächen, gleichzeitig jedoch tritt Querkontraktion auf, die die Dicke vergrößert. Umgekehrt bewirkt der Druck parallel zu d und die daraus folgende Querkontraktion eine Stauchung der Querschnittsfläche und damit eine Verlängerung von l . Geht man wieder von kleinen Änderungen aus, ergibt sich in der Summe eine relative Volumenänderung

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3\Delta p}{E} (1 - 2\mu), \quad (9.7)$$

wenn der Druck auf den Körper um Δp zunimmt. Gleichung 9.7 zeigt, dass die relative Volumenänderung proportional zur

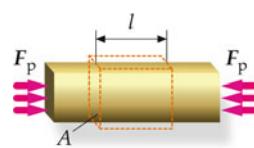


Abbildung 9.4 Massiver Metallstab, an dessen beiden Enden eine Druckkraft vom Betrag $|F_p|$ angreift. Dadurch wird der Stab zusammengedrückt, seine Länge l nimmt um Δl ab, während sich die Dicke d um Δd vergrößert.



Um seine Zugfestigkeit zu messen, wird ein Stab gedehnt, bis er zerreiht. (© Vincent Streano/Corbis.)

Druckzunahme ist. Wir bezeichnen die Proportionalitätskonstante mit K und nennen sie den **Kompressionsmodul** oder kurz **K-Modul**. Damit können wir Gleichung 9.7 umschreiben als

$$\Delta p = -\frac{E}{3(1-2\mu)} \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{\Delta V}{V} \quad (9.8)$$

und definieren damit den Kompressionsmodul als

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (9.9)$$

DEFINITION DES KOMPRESSIONSMODULS

Statt des Kompressionsmoduls wird in der Literatur oft die **Kompressibilität** κ angegeben. Sie ist definiert als der Kehrwert des Kompressionsmoduls

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3(1-2\mu)}{E}. \quad (9.10)$$

DEFINITION DER KOMPRESSIBILITÄT

Je größer die Kompressibilität eines Körpers ist, umso leichter lässt er sich komprimieren, d. h. wiederum, dass der Kompressionsmodul eine Materialkonstante ist, die ausdrückt, welchen Widerstand ein Körper einer Kompression entgegenbringt. Beispiel 9.3 vergleicht die Kompressionsmodule und die Kompressibilität zweier Materialien miteinander.

Beispiel 9.3: Das härteste Material der Welt

Aggregierte Diamantnanostäbchen (aggregated diamond nanorods, ADNR) sind das härteste heute bekannte Material. Ihr Kompressionsmodul beträgt $491 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$. Wasser hat im Vergleich dazu einen Kompressionsmodul von $2 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$. a) Welche Druckzunahme ist nötig, um das Volumen eines aggregierten Diamant-Nanostäbchens um ein Tausendstel zu verkleinern? b) Welche relative Volumenänderung bewirkt die gleiche Druckzunahme bei Wasser?

Problembeschreibung: Benutzen Sie Gleichung 9.8, um die Druckzunahme in Teilaufgabe a auszurechnen, da sowohl den Kompressionsmodul als auch die Volumenabnahme gegeben sind. Anschließend wenden Sie Gleichung 9.8 erneut an und benutzen die in Teilaufgabe a errechnete Druckzunahme und den Kompressionsmodul von Wasser, um die relative Volumenabnahme von Wasser zu bestimmen.

Lösung:**Teilaufgabe a**

Verwenden Sie Gleichung 9.8 und setzen Sie die gegebenen Größen für die ADNR ein. Da das Volumen um 0,001 abnimmt, ist das Endvolumen V_E das 0,999-fache des Anfangsvolumens V_A :

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} = -491 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2} \frac{(0,999V_A - V_A)}{V_A} \\ = -491 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2} (-0,001) = [4,91 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}]$$

Teilaufgabe b

1. Stellen Sie Gleichung 9.8 nach der gesuchten relativen Volumenabnahme um:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{K}$$

2. Setzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe a und den Kompressionsmodul für Wasser in Schritt 1 ein:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{4,91 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}}{2 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}} = [-0,246]$$

Plausibilitätsprüfung: Da der Druck als Druckkraft pro Querschnittsfläche definiert ist, stimmen die in Teilaufgabe a erhaltenen Einheiten mit der Definition überein. Da die Kompressionsmodule sich um zwei Größenordnungen unterscheiden, erwarten wir auch, dass sich die relative Volumenabnahme um zwei Größenordnungen unterscheiden sollte, wenn der Druck der gleiche ist. Daher ist das Ergebnis in Teilaufgabe b, das eine Volumenabnahme um 25 % angibt, plausibel. ■

9.3 Scherung

Abbildung 9.5 zeigt eine Tangentialkraft F_t , die an einem Buchdeckel mit der Fläche A angreift. Im Unterschied zu den bisher behandelten Druck- und Zugkräften wirkt sie in *tangentialer* Richtung zu der Oberfläche, an der sie angreift. Eine solche Kraft heißt **Scherkraft**. Das Verhältnis der Scherkraft F_t zur Fläche A ist die **Scherspannung** τ :

$$\tau = \frac{F_t}{A}. \quad (9.11)$$

Die Scherspannung bewirkt die in Abbildung 9.5 gezeigte Verformung. Ein Maß dafür ist der Scherwinkel θ . Der Tangens dieses Winkels heißt die **Scherung** γ . Man berechnet sie aus dem Verhältnis der Verschiebung Δx und der Höhe l :

$$\gamma = \frac{\Delta x}{l} = \tan \theta. \quad (9.12)$$

Der Schubmodul

Das Verhältnis von Scherspannung zu Scherwinkel ist für kleine Scherwinkel eine materialabhängige Konstante, die man den **Schubmodul** oder **Torsionsmodul** G nennt:

$$G = \frac{\text{Scherspannung}}{\text{Scherung}} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_t/A}{\Delta x/l} = \frac{F_t/A}{\tan \theta}. \quad (9.13)$$

DEFINITION DES SCHUBMODULS

Die Einheit des Schubmoduls ist – wie die der anderen Module auch – Newton pro Quadratmeter ($\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$); aus praktischen Gründen verwendet man aber auch hier meist die Einheiten Meganewton (10^6 N) pro Quadratmeter ($\text{MN} \cdot \text{m}^{-2}$) oder Giganeutron pro Quadratmeter ($\text{GN} \cdot \text{m}^{-2}$).

G ist ein Maß für die Formelastizität eines Körpers. Die Proportionalität von Scherspannung und Scherung nennt man das Hooke'sche Gesetz für Torsionsspannung, das wir nun nutzen wollen, um die Bewegung eines Drehpendels zu beschreiben.

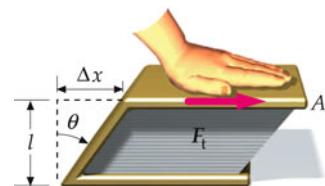


Abbildung 9.5 Lässt man eine tangentielle Kraft F_t auf einen Buchdeckel wirken, so erzeugt sie eine Scherspannung, die als Kraft pro Fläche definiert ist. Das Verhältnis $\Delta x/l = \tan \theta$ ist die Scherung.

9.4 Zusammenhang zwischen E , K , G und μ

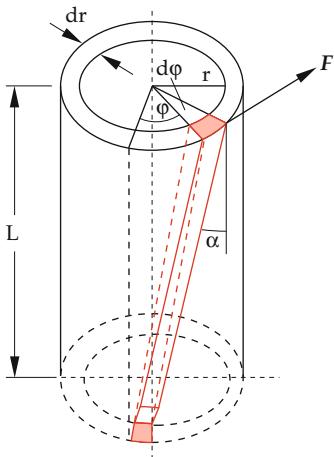


Abbildung 9.6 Torsion eines zylinderförmigen Drahts mit kreisförmigem Querschnitt.

Das Drehpendel

Verdrillt man einen zylinderförmigen Draht der Länge l , wie in Abbildung 9.6 gezeigt, so muss eine tangentiale Kraft F_t an der Oberfläche des Drahts angreifen, um ihn um den Winkel γ aus seiner Ausgangsposition zu drehen. Die sich daraus ergebende Scherspannung für kleine Verdrillungen beträgt

$$\tau = G \gamma = G \tan \theta = G \frac{r \cdot \varphi}{l}. \quad (9.14)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass die Verschiebung Δx aus Gleichung 9.12 in diesem Fall der Bogenlänge $\Delta s = r\varphi$ entspricht, die ein Punkt im Abstand r vom Drahtmittelpunkt wegen der Verdrillung zurücklegt.

Alle Punkte des Drahts, die sich im Zylindermantel der Dicke dr befinden, dessen Querschnittsfläche, wie in Abbildung 9.6 gezeigt ist, durch $dA = 2\pi r dr$ gegeben ist, werden um denselben Winkel φ verdrillt. Damit können wir mithilfe von $F_t = \tau A$ und Gleichung 9.14 den Betrag der tangentialen Scherkraft bestimmen, die auf diesen Zylindermantel wirkt:

$$dF_t = \tau \cdot dA = \tau \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi r^2 \cdot G \cdot \varphi}{l} dr. \quad (9.15)$$

Integration von Gleichung 9.15 vom Radius $r = 0$ bis zum Radius R des Drahts liefert dann für die Tangentialkraft, die den Draht um den Winkel φ verdreht,

$$F_t = \frac{2\pi \cdot G \cdot \varphi}{l} \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi \cdot G \cdot \varphi \cdot R^3}{3l}. \quad (9.16)$$

Da die Kraft F_t tangential an den Draht angreift, verursacht sie ein Drehmoment bezüglich der Symmetriechse des Drahts,

dessen Betrag nach Gleichung 8.18 gegeben ist als

$$M = \int r dF = \frac{2\pi \cdot G \cdot \varphi}{l} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \cdot G \cdot \varphi \cdot R^4}{2l}. \quad (9.17)$$

Lässt man den Draht los, so kann das rücktreibende Drehmoment, das gerade das Negative des Drehmoments aus Gleichung 9.17 ist, den Draht wieder in die Ausgangslage zurückdrehen. Das rücktreibende Drehmoment des Drehpendels ist analog zur Rückstellkraft einer gedeckten Feder. Da ein Massestück an einer ausgedehnten Feder durch seine Trägheit über die Ruhelage hinaus in die andere Richtung ausgelenkt wird, wird auch der verdrillte Draht über den Punkt, an dem er torsionsfrei hängt, hinaus in die andere Richtung verdreht. Seine Bewegung nennt man **Drehschwingung**. Hängt man an das untere Ende des Drahts einen Körper mit dem Trägheitsmoment I und fixiert das obere Ende des Drahts, erhält man ein **Drehpendel** dessen Schwingungsdauer T

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{(\pi \cdot G \cdot R^4)/(2l)}} = \frac{2\pi}{R^2} \sqrt{\frac{2lI}{\pi G}} \quad (9.18)$$

man messen kann. Ist das Schubmodul G unbekannt, kann man es durch die Messung der Schwingungsdauer bestimmen. Bei bekanntem Schubmodul, kann man stattdessen auch das Trägheitsmoment des angehängten Körpers bestimmen. Cavendish nutzte ein solches Drehpendel zur Bestimmung der Gravitationskonstanten Γ (Kapitel 4). Dazu konstruierte er sein Drehpendel so, dass das rücktreibende Drehmoment proportional zur Gravitationskraft war, wie in Abbildung 4.35 veranschaulicht.

Übung 9.3: An einem 1 m langen Draht mit einem Durchmesser von 4 cm hängt ein Gegenstand mit einem Trägheitsmoment von $I = 770,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Versetzt man den Gegenstand in Drehschwingungen, misst man eine Schwingungsdauer von 1,2 s. Wie groß ist der Torsionsmodul des Drahts, und um welches Material handelt es sich dabei? ◀

9.4 Zusammenhang zwischen E , K , G und μ

Tabelle 9.1 zeigt einige Beispielmaterialien und ihre typischen Modulwerte. Wie wir in Kapitel 36 sehen werden, sind alle Module makroskopische Materialkonstanten für mikroskopische Phänomene und daher nur Näherungswerte. Der genaue Wert eines Moduls kann für ein Material von Probe zu Probe erheblich abweichen. Zudem kann der Wert von der Temperatur oder dem Druck abhängen.

Wie wir bereits in Gleichung 9.9 festgestellt haben, lässt sich der Kompressionsmodul mithilfe des Elastizitätsmoduls und der Querkontraktionszahl ausdrücken. Daher wollen wir nun untersuchen, welche Zusammenhänge allgemein zwischen den

Tabelle 9.1 Module und Festigkeiten verschiedener Materialien

Material	E [GN · m ⁻²]	K [GN · m ⁻²]	G [GN · m ⁻²]	μ	Zugfestigkeit [MN · m ⁻²]	Druckfestigkeit [MN · m ⁻²]
Aluminium	70		30	0,34	90	
Beton	23			0,20	2	17
Blei	16	7,7	5,6	0,44	12	
Eis (-4 °C)	10	9	3,6	0,33		
Eisen (verarbeitet)	190	100	70	0,23	390	
Knochen	16		9		200	270
Kupfer	110	140	42	0,35	230	
Messing	90	61	36		370	
Quarzglas	75	38	32	0,17		
Stahl	200	160	84	0,28	520	520
Wolfram	407	323	158	0,29		

*Bei den Werten handelt es sich um typische Werte. Die Werte einer einzelnen Probe können erheblich abweichen.

Konstanten E , K , G und μ bestehen. Gehen wir wieder von richtungsunabhängigen (isotopen) Modulwerten aus, liefert das Umformen von Gleichung 9.9

$$\frac{E}{3K} = 1 - 2\mu. \quad (9.19)$$

Analog dazu existiert eine Verbindung zwischen dem Elastizitäts- und dem Torsionsmodul:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \mu. \quad (9.20)$$

Teilt man die beiden Gleichungen durcheinander, erhält man eine Relation, die G , K und μ verknüpft:

$$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}. \quad (9.21)$$

Abbildung 9.7 zeigt die Verhältnisse von K und G zu E in Abhängigkeit von μ .

Übung 9.4: Berechnen Sie den K - und den G -Modul für Beton, die Werte für E und μ können Sie Tabelle 9.1 entnehmen. ▶

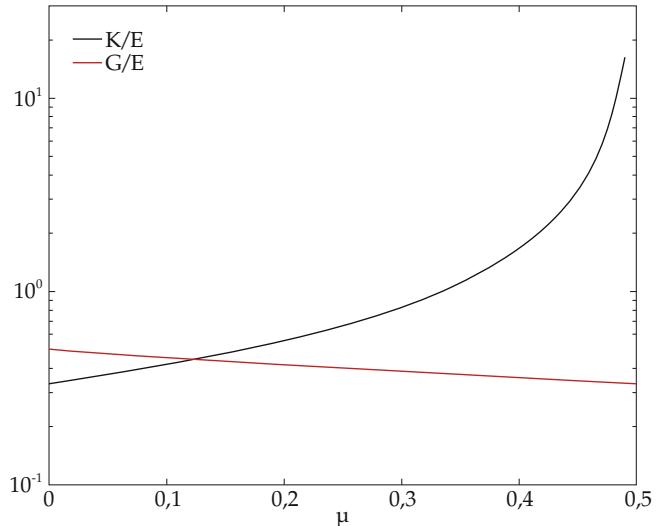


Abbildung 9.7 Verlauf von K/E und G/E in Abhängigkeit von μ . Für kleine μ ist der Schubmodul größer als der Kompressionsmodul und beide sind kleiner als der E -Modul. Für $\mu \rightarrow 0,5$ wird der K -Modul sogar größer als der E -Modul.

9.5 Elastische Energie und Hysterese

Beim Dehnen eines Metallstabs, wie in Abbildung 9.1 gezeigt, wirkt die Normalkraft in Ausdehnungsrichtung. Von Gleichung 9.3 wissen wir, dass $F_n = EA \Delta l/l = EA \epsilon$ und damit proportional zur Dehnung ist. Daher verrichtet die Normalkraft die Arbeit

$$W = \int F_n dl = l \cdot \int F_n(\epsilon) \cdot d\epsilon.$$

Einsetzen von F_n und Division der Arbeit durch das Volumen $A \cdot l$ ergibt die pro Volumen geleistete Arbeit an dem Metallstab, die im Stab in potenzielle Energie umgewandelt wird. Diese Energie pro Volumen, d. h. die **Energiedichte**, ist damit

$$\rho_E = \frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} E \epsilon^2. \quad (9.22)$$

ENERGIEDICHTE EINES GEDEHNENTEN STABS

Eine ähnliche Überlegung für die Scherbewegung liefert die Energiedichte der Torsion:

$$\rho_E = \frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} G \gamma^2. \quad (9.23)$$

ENERGIEDICHTE EINES GEDREHTEN STABS

Für den elastischen Bereich, in dem das Hooke'sche Gesetz gültig ist, gelten Gleichung 9.22 und 9.23. In diesem Bereich bilden sich die Verformungen sehr schnell wieder zurück. Bei

starken periodischen Belastungen kann es jedoch auch vorkommen, dass die Verformung eine gewisse Zeit benötigt, um sich wieder vollständig zurückzubilden. Betrachten wir dazu das Spannungs-Dehnung-Diagramm in Abbildung 9.8.

Verwechseln Sie nicht die Energie E mit dem Elastizitätsmodul E . Eine Dimensionsanalyse kann Ihnen bei der Unterscheidung helfen, da die Energie die Einheit Joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{s}$) hat, während die Einheit des E -Moduls $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ist.

Gilt das Hooke'sche Gesetz, zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine Gerade, deren Steigung den E -Modul angibt. Bei einer elastischen Nachwirkung ist die Kurve im Spannungs-Dehnungs-Diagramm jedoch die, die in Abbildung 9.8 gezeigt ist. Nach der Dehnung bis zum Punkt A behält der Körper, auch wenn keine Spannung mehr an ihm angreift, eine Restdehnung (Punkt C). Staucht man den Körper anschließend bis zum Punkt B und lässt ihn sich wieder ausdehnen, wird er seine volle Länge im spannungsfreien Zustand nicht wieder erreichen, sondern eine Restkontraktion behalten (Punkt D). In diesem Fall gilt Gleichung 9.22 nicht mehr. Man muss stattdessen die Fläche unter der Kurve $\sigma(\epsilon)$ durch Integration ermitteln, um die Energiedichte zu bestimmen. Durchläuft man einen Spannungs-Stauchungs-Zyklus stellt man fest, dass die mechanische Energie des Systems nicht erhalten ist. Die fehlende Differenz ist die in Abbildung 9.8 farbig markierte Fläche. Diese Energie geht demnach als mechanische Energie verloren und wird in Wärmeenergie umgewandelt.

9.6 Biegung

Die ersten Ansätze, die Verformung von Holzbalken unter der Einwirkung der Schwerkraft zu beschreiben, finden sich schon bei Leonardo Da Vinci und Galileo Galilei. Die Theorie, wie wir sie heute kennen, geht jedoch auf Leonard Euler und Jacob Bernoulli zurück, die Ende des 18. Jahrhunderts die korrekten Gesetze herleiten konnten. Daher spricht man auch oft von der **Euler-Bernoulli-Balkentheorie**.

Unter einem Balken verstehen wir ein stabförmiges Trageglied, das mit Lasten längs und quer zu seiner Symmetrieebene belastet werden kann. Durch die daraus resultierenden Kräfte kann der Balken sich verformen. Er muss außerdem **biegsteif** sein, d.h. der Krafteinwirkung einen Widerstand entgegenbringen. Die **Biegsteifigkeit** eines Körpers hängt von seiner Geometrie und dem Elastizitätsmodul ab, wie wir im Folgenden noch sehen werden. Seile und Tauen, wie wir sie bereits in den vergangenen Kapiteln betrachtet hatten, sind dagegen **bieggeschlaff** und haben daher eine geringe Biegsteifigkeit.

Als zusätzliche Voraussetzung für die Beschreibung des Biegens nahm Bernoulli an, dass der Balken *schmal* ist, d.h. dass die Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als

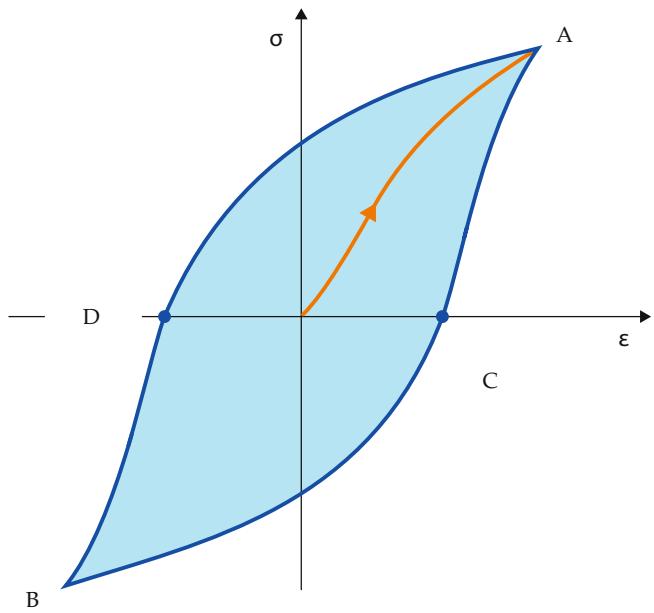


Abbildung 9.8 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für ein Material, bei dem sich die Verformung nach der Krafteinwirkung nicht instantan zurückbildet.



Gebogener Balken, bei dem die Spannung im unteren Teil schon zu einem Riss im Holz führte. (© Johannes Vielhaber.)

seine Länge. Zudem soll gelten, dass die (gedachten) Querschnittsebenen, die im entspannten Zustand senkrecht zur Symmetrieebene des Balkens stehen, nach der Biegung senkrecht zur gebogenen Symmetrieebene stehen. Diese Voraussetzung bedeutet, dass wir eine reine Biegung quer zur Symmetrieebene betrachten, bei der kein Schub in Bewegungsrichtung auftritt. Als letzte Voraussetzung forderte Bernoulli, dass die Längsschnitte des Balkens, also die Flächen senkrecht zur Biegerichtung, während des Verbiegens eben bleiben. Mit dieser Voraussetzung erreichte Bernoulli, dass die Krümmung jedes

Teilabschnitts des Balkens durch ein Kreissegment angenähert werden kann. Die Längsschnittsfläche, die durch die Symmetriechse verläuft, nennt man auch **neutrale Faser**.

Abbildung 9.9 fasst diese Voraussetzungen noch einmal grafisch zusammen. Zur einfachen Beschreibung der Bewegung legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in die linke obere Kante des Balkens. Die x -Achse soll von links nach rechts verlaufen, sodass der Balken zwischen $x = 0$ und $x = l$ liegt. Da die y -Achse nach oben zeigt, wirkt die am Balkenende angreifende Kraft in negative y -Richtung.

Wichtig beim Biegen sind nicht nur der genaue Angriffspunkt und die Richtung der biegenden Kraft, sondern auch die Bewegungsmöglichkeiten des Balkens. Beispielsweise kann eines der Enden – oder auch beide – fest eingespannt sein, oder der Balken wird an den Enden oder anderen Stellen nur unterstützt.

Einseitig eingespannter Balken

Wir wollen nun den Fall betrachten, dass der Balken wie in Abbildung 9.9 an einer Seite fest an einer Wand montiert ist und das andere Ende sich frei bewegen kann. Durch die am Balkenende bei $x = l$ angreifende Kraft wirkt am Balken ein Drehmoment, dessen Vektor in die Bildebene hinein zeigt und den Betrag

$$M = (l - x) F \quad (9.24)$$

bei einer x -Koordinate $0 \geq x \geq l$ hat. Gleichzeitig sehen wir in Abbildung 9.9, dass durch die Kraft F alle Längsschnitte unterhalb der neutralen Faser gestaucht und die Längsschnitte oberhalb der neutralen Faser gedehnt werden. Die neutrale Faser selbst, die bei $y = 0$ liegt, ändert ihre Ausdehnung nicht. Für die Spannung im Balken, die mit der Dehnung einhergeht, machen wir den linearen Ansatz

$$\sigma_b = C \cdot y, \quad (9.25)$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten C . Dieser Ansatz des Spannungsverlaufs über die y -Koordinate ist für schmale Balken gültig. Da wir den Nullpunkt der y -Koordinate auf die neutrale Faser gelegt haben, kommt damit auch zum Ausdruck, dass die obere Hälfte gedehnt wird (für positives y ist auch σ_b positiv), während die untere Hälfte gestaucht wird (für negatives y ist $\sigma_b < 0$).

Aufgrund der Spannung σ_b im Balken wirkt eine Kraft dF_b parallel zu den Längsschnitten auf einen kleinen Teilabschnitt des Balkens mit Querschnittsfläche dA ,

$$dF_b = \sigma_b dA. \quad (9.26)$$

Diese Kraft bewirkt ihrerseits ein Drehmoment dM_b , das wie in Abbildung 9.10 dargestellt aus der Bildebene heraus zeigt und dessen Betrag für eine beliebige y -Koordinate gegeben ist durch

$$M_b = \int y dF_b = \int \sigma_b y dA = C \int y^2 dA. \quad (9.27)$$

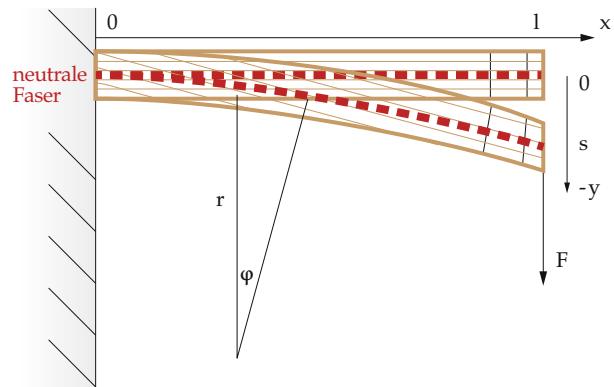


Abbildung 9.9 Biegen eines Balkens. Unter den von Bernoulli gemachten Voraussetzungen soll sich das Balkenende durch eine biegende Kraft F um die Strecke s aus der Ruhelage heraus nach unten wölben. Die gewölbten Längsschnittslinien, die parallel zur neutralen Faser verlaufen, sollen dabei alle näherungsweise auf Kreisbögen liegen, mithilfe derer man ihre Spannung und Stauchung beschreiben kann.

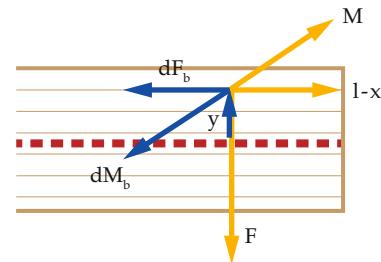


Abbildung 9.10 Drehmomente beim Biegen eines einseitig eingespannten Balkens. Die am Ende angreifende Kraft bewirkt ein Drehmoment M in die Bildebene hinein, während die Spannung in einem kleinen Teil des Balkens ein entgegengesetztes Drehmoment dM_b verursacht.

Dabei haben wir im letzten Schritt σ_b durch Gleichung 9.25 ersetzt.

Der Balken wird sich nun so lange verbiegen, bis sich die Drehmomente M und M_b gerade kompensieren:

$$M = (l - x) F = C \int y^2 dA = M_b, \quad (9.28)$$

woraus sich die Konstante C ausdrücken lässt als

$$C = \frac{(l - x) F}{\int y^2 dA}. \quad (9.29)$$

Der Term $\int y^2 dA$ im Nenner, der nur von der Querschnittsfläche, also der Geometrie des Balkens, abhängt, erinnert stark an die Formel für das Trägheitsmoment eines ausgedehnten Körpers $I = \int r^2 dm$, doch statt über die Masse integrieren wir nun über den Querschnitt. In Analogie dazu bezeichnet man den Term $\int y^2 dA$ daher auch als **Flächenträgheitsmoment** I_F . Um

zu kennzeichnen, dass wir das Flächenträgheitsmoment für eine Kraft in y -Richtung berechnen, schreiben wir kurz $I_{F,y}$. Die allgemeine Definition für ein Flächenträgheitsmoment bezüglich einer Kraft in a -Richtung lautet

$$I_{F,a} = \int a^2 dA, \quad (9.30)$$

DEFINITION DES FLÄCHENTRÄGHEITSMOENTS

wobei das Integral über die Querschnittsfläche A senkrecht zu a berechnet wird. Aus der Gleichung liest man ab, dass das Flächenträgheitsmoment die Einheit m^4 hat. In Beispiel 9.4 werden wir ein Flächenträgheitsmoment eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt berechnen.

Damit ergibt sich für die Spannung

$$\sigma_b = \frac{(l-x)F}{I_{F,y}} y. \quad (9.31)$$

Um nun die Auslenkung des rechten Balkenendes s zu berechnen, müssen wir die Auslenkungskurve $y(x)$ für den gesamten Balken bestimmen. Dazu benutzen wir zuerst die Annahme, dass die Längsschnitte sich in guter Näherung auf Kreissegmenten befinden. Dann gilt für die Dehnung dx/x eines Segments, das sich in der Höhe y über der neutralen Faser befindet, nach dem Strahlensatz in Abbildung 9.11:

$$\frac{x+dx}{x} = \frac{r+y}{r} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{y}{r}.$$

Per Konvention ist die Krümmung des in Abbildung 9.11 gezeigten Balkenstücks negativ, sodass sich aus dieser Relation zusammen mit $\sigma = E dx/x$ (Gleichung 9.3) für die Spannung

$$\sigma_b = E \cdot \frac{dx}{x} = -E \cdot \frac{y}{r} \quad (9.32)$$

ergibt.

Setzt man Gleichung 9.31 mit Gleichung 9.32 gleich, erhält man den Ausdruck für die Krümmung $1/r$ der Auslenkungskurve

$$\frac{1}{r} = -\frac{(l-x) \cdot F}{E \cdot I_{F,y}}. \quad (9.33)$$

Verwenden wir nun die Voraussetzung, dass die Auslenkung klein im Vergleich zur Länge des Balkens ist, so kann man die zweite Ableitung der Kurve $y(x)$ nach x gleich der Krümmung der Kurve setzen,

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r} = -\frac{F}{E \cdot I_{F,y}} \cdot (l-x), \quad (9.34)$$

und zweimal integrieren um $y(x)$ zu erhalten:

$$y'(x) = -\frac{F \cdot l}{E \cdot I_{F,y}} \cdot x + \frac{1}{2} \frac{F}{E \cdot I_{F,y}} \cdot x^2 + c_1, \quad (9.35)$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{F \cdot l}{E \cdot I_{F,y}} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \frac{F}{E \cdot I_{F,y}} \cdot x^3 + c_1 \cdot x + c_0. \quad (9.36)$$

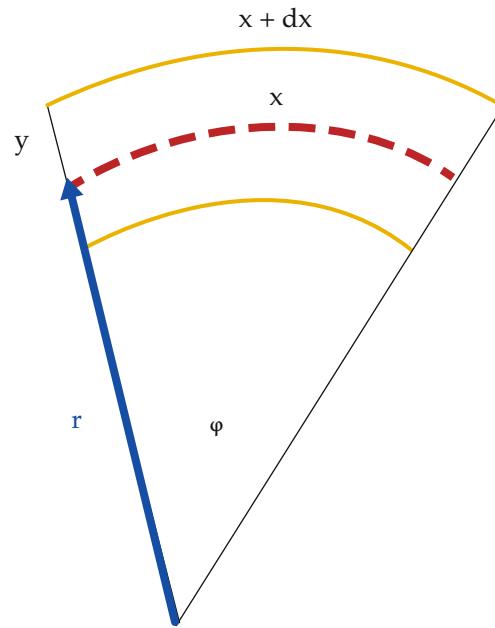


Abbildung 9.11 Strahlensatz zur Berechnung der Dehnung an einem Teilstück des Balkens, dessen neutrale Faser die Länge x hat.

Durch die Randbedingungen, dass der Stab bei $x = 0$ fest eingespannt ist, gilt $y'(0) = 0$, d.h., die neutrale Faser bleibt bei $x = 0$ senkrecht zur Mauer orientiert und $y(0) = 0$, was bedeutet, dass er bei $x = 0$ nicht ausgelenkt wird. Einsetzen dieser beiden Randbedingungen in Gleichung 9.35 und 9.36 liefert die Auslenkungskurve

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{F \cdot L}{E \cdot I_{F,y}} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \frac{F}{E \cdot I_{F,y}} \cdot x^3. \quad (9.37)$$

Daraus ergibt sich für die maximale Auslenkung s bei $x = l$

$$s = y(l) = -\frac{1}{3} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_{F,y}}. \quad (9.38)$$

In Beispiel 9.4 berechnen Sie, wie die Auslenkung von der Geometrie des Balkens abhängt, indem Sie zwei Balken mit rechteckigem Querschnitt, aber unterschiedlicher Querschnittsfläche miteinander vergleichen.

Beispiel 9.4: Auslenkung zweier Balken mit unterschiedlichem Querschnitt

Zwei Balken mit rechteckigem Querschnitt haben die gleiche Länge l und Breite b , unterscheiden sich jedoch in ihrer Dicke d . Der eine Balken soll doppelt so dick sein wie der andere. Gehen Sie außerdem davon aus, dass beide Balken aus demselben Material hergestellt wurden und daher den gleichen E -Modul

haben. Wenn beide wie in Abbildung 9.9 gezeigt an eine Wand montiert und durch die gleiche Kraft gebogen werden, werden die Auslenkungen ihrer freien Enden sich aufgrund ihrer unterschiedlichen Dicken unterscheiden. Welcher der Balken wird stärker nach unten ausgelenkt, und wie groß ist das Verhältnis der beiden Auslenkungen zueinander?

Problembeschreibung: Um die maximale Auslenkung des freien Balkenendes zu berechnen, benutzen Sie Gleichung 9.38. Da die Querschnittsfläche als Rechteck mit den Kantenlängen b und d bzw. $2d$ gegeben ist, können Sie das Flächenträgheitsmoment berechnen und in Gleichung 9.38 einsetzen. Die so entstandene Gleichung hängt nun explizit von der Dicke des Balkens ab, sodass Sie das Verhältnis der Auslenkungen der beiden Balken daraus berechnen können.

Lösung: 1. Stellen Sie Gleichung 9.38 für beide Balken auf:

$$s = -\frac{1}{3} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_{F,y}}$$

2. Fertigen Sie eine Skizze des Querschnitts der Balken an (Abbildung 9.12).

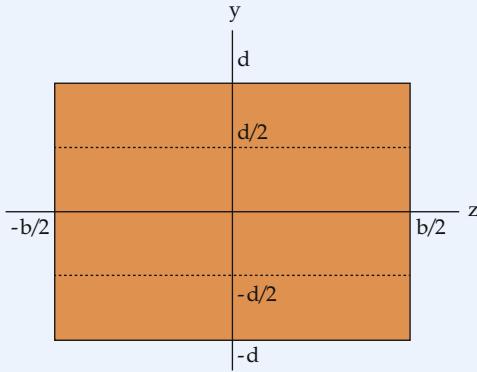


Abbildung 9.12 Skizze des Balkenquerschnitts.

3. Berechnen Sie mithilfe von Abbildung 9.12 das Flächenträgheitsmoment des Balkens mit den Kantenlängen b und d :

$$\begin{aligned} I_{F,y,1} &= \int y^2 dA = \int_{-d/2}^{+d/2} \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dz dy \\ &= b \int_{-d/2}^{+d/2} y^2 dy = \frac{1}{12} bd^3 \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie analog zu Schritt 3 das Flächenträgheitsmoment des Balkens mit den Kantenlängen b und $2d$:

$$I_{F,y,2} = \int_{-d}^{+d} \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 dz dy = \frac{2}{3} bd^3$$

5. Setzen Sie die Ergebnis von Schritt 3 und Schritt 4 in Schritt 1 ein und berechnen Sie damit die Auslenkungen der beiden Balken in Abhängigkeit von ihrer Dicke:

$$s_1 = -\frac{1}{3} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot 1/12 \cdot b \cdot d^3} = -\frac{4 \cdot F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot d^3}$$

$$s_2 = -\frac{1}{3} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot 2/3 \cdot b \cdot d^3} = -\frac{1}{2} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot b \cdot d^3}$$

6. Vergleichen Sie die beiden Auslenkungen s_1 und s_2 miteinander:

Der dünneren Balken wird weiter nach unten ausgelenkt.

7. Bilden Sie den Quotienten der beiden Ergebnisse aus Schritt 5, um das Verhältnis der Auslenkungen zu erhalten:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{I_{F,y,2}}{I_{F,y,1}} = [8]$$

Plausibilitätsprüfung: Aus der Erfahrung heraus hatten wir erwartet, dass der dünneren Balken sich weiter nach unten biegt, was wir in Schritt 6 auch rechnerisch bestimmen konnten. Da die Auslenkung proportional zu d^{-3} ist, sollte das Verhältnis der beiden Auslenkungen vom dünnen zum dickeren Balken proportional zu $2^3 = 8$ sein. Das Ergebnis aus Schritt 7 entspricht damit unseren Abschätzungen. ■

Frage 9.1

Wie ändert sich die maximale Auslenkung am freien Ende eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt, wenn Sie gleichzeitig die Länge und die Dicke verdoppeln und alle anderen Größen konstant halten?

Wie wir in Beispiel 9.4 gesehen haben, biegt sich ein dünnerer Balken weiter nach unten als ein dickerer, wenn alle anderen Größen für beide Balken dieselben sind. Der dicke Balken ist damit biegesteifer als der dünne. Aus der Formel für die Auslenkung, Gleichung 9.37, können wir die Biegesteifigkeit B definieren als

$$B = E \cdot I_F. \quad (9.39)$$

DEFINITION DER BIEGESTEIFIGKEIT

Der E -Modul hat die Einheit $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ und das Flächenträgheitsmoment die Einheit m^4 , sodass die Biegesteifigkeit in $\text{N} \cdot \text{m}^2$ gemessen wird.

Nachdem wir nun die maximale Auslenkung des Balkens kennen, können wir außerdem noch den Teil des Balkens bestimmen, an dem die Spannung im Balken maximal wird, und diese berechnen. Wie wir aus Gleichung 9.31 ablesen können, wird die Spannung für $x = 0$ und $y = d/2$, also an der Oberkante des fixierten Balkenendes, maximal. Ist die an dieser Stelle vorliegende Spannung

$$\sigma_{b,\max} = \frac{l F}{I_{F,y}} \frac{d}{2}$$

größer als die Spannung am Reißpunkt (siehe Abbildung 9.2), wird der Balken an diesem Ende reißen.

Beidseitig unterstützter Balken

Als zweites Beispiel einer Biegung betrachten wir einen Balken beliebigen Querschnitts, der an seinen beiden Enden unterstützt wird und an dem in der Mitte eine Kraft F angreift, wie in Abbildung 9.13 dargestellt ist. Aus Symmetriegründen legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in das Symmetriezentrum in der Mitte des Balkens, d. h. in seinen Schwerpunkt. Wie beim einseitig eingespannten Balken setzen wir wieder Bernoullis Annahmen voraus und dürfen daher wieder annehmen, dass die Spannung σ_b proportional zur Höhe über der neutralen Faser ist. Die Herleitung der Gleichung für die Spannung und die maximale Auslenkung erfolgen dann analog zum vorangegangenen Abschnitt.

Durch die Krafteinwirkung in der Mitte wird die Unterseite des Balkens gedeckt, die obere gestreckt. Mithilfe der Drei-Finger-Regel für das von der Kraft induzierte Drehmoment, findet man, dass sich die Balkenenden nach oben drehen (Abbildung 9.14).

Den Betrag des äußeren Drehmoments

$$M = |x| \cdot F$$

setzt man, wie zuvor beim einseitig eingespannten Balken erläutert, gleich dem Drehmoment, das durch die innere Balkenspannung hervorgerufen wird (Gleichung 9.27)

$$M = |x| \cdot F = C \int y^2 \, dA = M_b,$$

und bestimmt dadurch die Konstante C in Gleichung 9.25. Da das obere Ende in diesem Fall gestaucht und nicht gedeckt wird, müssen wir jedoch ein Minuszeichen auf der rechten Seite von Gleichung 9.25 einfügen, da sonst die obere Hälfte mit positiven y -Werten gedeckt statt gestaucht würde. Die Spannung, die an einem bestimmten Punkt im Balken vorherrscht, ist dann gegeben als

$$\sigma_b = -\frac{|x| \cdot F}{I_{F,y}} y. \quad (9.40)$$

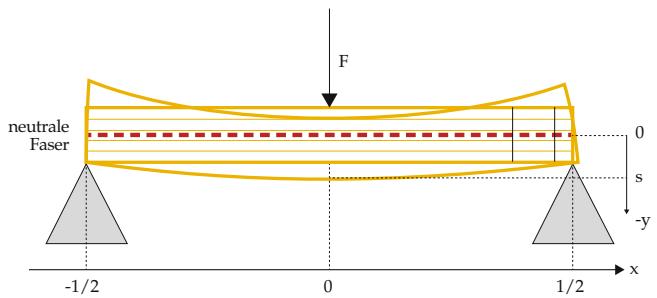


Abbildung 9.13 Biegen eines an beiden Enden unterstützten Balkens, auf den eine Kraft wirkt, die in seiner Mitte angreift.

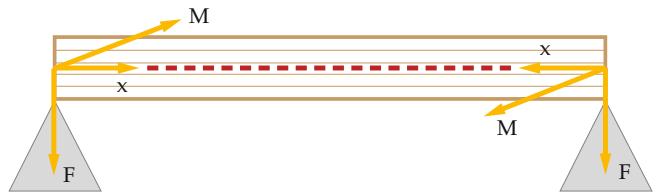


Abbildung 9.14 Drehmomente beim Biegen eines beidseitig unterstützten Balkens. Die in der Mitte des Balkens angreifende Kraft F bewirkt am linken Ende ein Drehmoment M in die Bildebene hinein, während das Drehmoment am rechten Ende aus der Bildebene herauszeigt.

Über den Strahlensatz, der die Stauchung an der Oberkante zum Krümmungsradius und der Höhe über der neutralen Faser in Beziehung setzt, $-dx/x = y/r$, erhalten wir für die Krümmung des Balkens

$$\frac{1}{r} = \frac{|x| \cdot F}{E \cdot I_{F,y}}. \quad (9.41)$$

Diese ist im Gegensatz zum einseitig eingespannten Balken positiv. Setzen wir für kleine Auslenkungen Gleichung 9.41 wieder gleich der Krümmung der Auslenkungskurve, erhalten wir durch zweimaliges Integrieren die Auslenkungskurve:

$$y(x) = \frac{1}{6} \frac{F}{E \cdot I_{F,y}} |x|^3 + c_1 \cdot x + c_0.$$

Die Integrationskonstanten c_1 und c_0 bestimmen wir aus den Randbedingungen, dass sich die beiden Balkenenden beim Biegen nicht bewegen sollen, d. h. $y(-L/2) = 0$ und $y(L/2) = 0$, woraus sich ergibt:

$$y(x) = \frac{1}{6} \frac{F}{E \cdot I_{F,y}} |x|^3 - \frac{1}{48} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_{F,y}}. \quad (9.42)$$

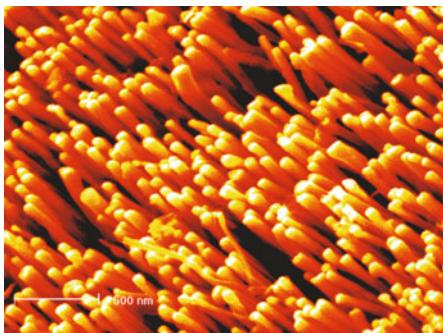
Die maximale Auslenkung s erhalten wir für $x = 0$:

$$s = y(0) = -\frac{1}{48} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_{F,y}}. \quad (9.43)$$

Vergleichen wir diese maximale Auslenkung mit der eines einseitig eingespannten Balkens (Gleichung 9.38), sehen wir, dass die Auslenkung bei einem beidseitig unterstützten Balken 16-mal kleiner ist als die eines einseitig eingespannten Balkens.

🔍 Im Kontext: Kohlenstoffnanoröhrchen: Klein und kräftig

Die häufigste Modifikation von reinem Kohlenstoff ist Grafit, der in einlagigen, doch festen, leicht aufeinander gleitenden Schichten kommt. Die Kohlenstoffatome im Graftgitter sind in einem wabenartigen Sechseckmuster angeordnet, vergleichbar mit Bienenwaben oder Maschendraht. Kohlenstoffgitter können aber auch Röhrchen mit ein paar Nanometern Durchmesser und einigen Mikrometern Länge bilden. Wegen ihrer geringen Abmessungen werden sie *Nanoröhrchen* genannt, die englische Abkürzung ist *CNT* (*carbon nanotubes*). Ein Nanoröhrchen kann aus einer einzigen Lage von Kohlenstoffatomen bestehen. Es gibt aber auch Röhrchen, die wie eine russische Puppe ineinandergesteckt sind und eine mehrlagige Wand haben.



Kohlenstoffnanoröhrchen werden in großer Zahl hergestellt. (Mit freundlicher Genehmigung von Prof. Zhong Lin Wang, Georgia Tech.)

Nanoröhrchen können – je nach Durchmesser und Orientierung des Kohlenstoffgitters – ganz verschiedene Eigenschaften haben. Bislang sind über 300 verschiedene Typen von Kohlenstoffnanoröhrchen identifiziert worden. Je nach Herstellungsmethode¹ entstehen zwischen zehn und 50 verschiedene Typen auf einmal.² Die Isolierung einer größeren Menge von Nanoröhrchen eines einzigen Typs ist ein anspruchsvoller Prozess.^{3,4} Die meisten Nanoröhrchen werden grammweise mit einem Nanoröhrchenanteil zwischen 65 und 95 % verkauft. (Die verbleibenden Verunreinigungen sind verschiedene Formen von Kohlenstoff.) Reinere Typen sind erheblich teurer (bis ca. 500 Euro pro Gramm).⁵ Die Eigenschaften der Nanoröhrchen weichen erheblich von Kohlenstofffasern ab⁶, wie sie in Faserverbundwerkstoffen verwendet werden. Kohlenstofffasern sind ein spezieller Typ von industriell erzeugtem Grafit, aber sie sind keine hohen Röhren.

Da Nanoröhrchen so winzig sind, mussten besondere Messverfahren entwickelt werden, um ihre Zugfestigkeit und ihren Elastizitätsmodul zu bestimmen.^{7,8} Nach den Messergebnissen liegt der *E*-Modul für einwandige Nanoröhrchen⁹ im Mittel bei $1,25 \text{ TN} \cdot \text{m}^{-2}$, die Bandbreite¹⁰ liegt zwischen 0,32 und $1,47 \text{ TN} \cdot \text{m}^{-2}$. Auf das Volumen gerechnet ist die Elastizität damit fünfmal höher als bei Stahl, auf das Gewicht gerechnet sogar noch erheblich höher. Bei mehrwandigen Kohlenstoffnanoröhrchen ist die Variation des *E*-Moduls noch höher¹¹ (zwischen $270 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$ und $950 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$), und ihre Zugfestigkeit liegt zwischen $11 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$ und $63 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$. Kohlenstoffnanoröhrchen haben damit eine höhere Zugfestigkeit und einen weit höheren Elastizitätsmodul als Aramidfasern wie Kevlar¹² von entsprechendem Gewicht. Nanoröhrchen sind das steifste bekannte Material überhaupt mit der höchsten bekannten Zugfestigkeit.

Kohlenstoff-Nanoröhrchen ertragen nicht nur Spannungen bei geringer Dehnung, sondern sie können auch selbst starke Spannungen erzeugen. Kürzlich wurde gezeigt, dass die Röhrchen auf darin eingeschlossene Metallkristalle einen Druck von $40,53 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$ ausüben, wenn sie bestrahlt und wärmebehandelt werden¹³ – das ist etwa ein Zehntel des Drucks, der im Erdkern herrscht! Wenn die Röhrchen schrumpfen, pressen sie das Metall in haarartige feine Fasern.

Obwohl Nanoröhrchen selbst eine extreme Festigkeit zeigen¹⁴, sind daraus gesponnene Garne¹⁵, Fasern¹⁶ und Bänder¹⁷ weit weniger fest. Doch selbst diese Erzeugnisse haben noch eine hohe Zugfestigkeit und einen hohen Elastizitätsmodul. Ein großer Teil der Festigkeit von Nanoröhrchen resultiert aus dem regelmäßigen Gitter der Kohlenstoffatome. Bei einem Gitterfehler wird das Nanoröhrchen geschwächt.¹⁸ (Das erklärt auch die starke Streuung der Festigkeitswerte bei Nanoröhrchen.) Da schon für Anwendungen moderater Abmessungen einige Milliarden von Nanoröhrchen erforderlich sind, können diese makroskopischen Anwendungen schon aus statistischen Gründen nicht dieselbe Festigkeit pro Einheitsvolumen (oder Einheitsmasse) haben wie einzelne Röhrchen.¹⁹ Doch selbst eine kleine Zugabe von relativ reinen Nanoröhrchen kann die Festigkeit und Steifigkeit von bestehenden Materialien verbessern. Schon fünf Gewichtsprozent Nanoröhrchen in einem Verbundwerkstoff können die Festigkeit und Steifigkeit des Werkstoffs verdoppeln. Überall, wo feste und doch leichte Materialien benötigt werden, haben Kohlenstoffnanoröhrchen eine glänzende Zukunft.

1. Guice, C., „Dynamics of Nanotube Synthesis“, *Penn State McNair Journal* 2003, S. 115–119.
2. Kumar, Satish, in Goho, Alexandra, „Nice Threads: The Golden Secret Behind Spinning Carbon-Nanotube Fibers“, *Science News*, 5. Juni 2004, S. 363 f.
3. Benavides, J. M., „Method for Manufacturing of High Quality Carbon Nanotubes“, U.S.-Patent 7 008 605, 7. März 2006.
4. Harutyunyan et al., „Method of Purifying Nanotubes and Nanofibers Using Electromagnetic Radiation“, U.S.-Patent 7 014 737, 21. März 2006.
5. Katalog des Forschungsschemikalienlieferanten alfa-aesar. www.alfa-chemcat.com, (Stand: März 2009).
6. Ajayan, P. M., Charlier, J.-C. und Rinzler, A. G., „Carbon Nanotubes: From Macromolecules to Nanotechnology“, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 7. Dez. 1999, S. 14 199–14 200.
7. Pasquali et al., „Method for Determining the Length of Single-Wall Carbon Nanotubes“, U.S.-Patent 6 962 092, 8. Nov. 2005.
8. Yu, M.-F., Lourie, O., Dyer, M., Motini, K., Kelly, T. und Ruoff, R., „Strength and Breaking Mechanisms of Multiwalled Carbon Nanotubes Under Tensile Load“, *Science*, 28. Jan. 2000, S. 637–640.
9. Krishan, A., Dujardin, E., Ebbesen, T. W., Treacy, M. M. J. und Yianilos, P. N., „Young’s Modulus of Single-Walled Nanotubes“, *Physical Review Letters B*, 15. Nov. 1998, S. 14 013–14 019.
10. Yu, M.-F., Files, B., Arepalli, S. und Ruoff, R., „Tensile Loading of Ropes of Single Wall Carbon Nanotubes and Their Mechanical Properties“, *Physical Review Letters*, 12. Jun. 2000, S. 5552–5555.
11. Yu et al., wie in 8.

Im Kontext: Kohlenstoffnanoröhrchen: Klein und kräftig

12. Tang, B., „Fiber Reinforced Composites Applications in USA DOT – Federal Highway Administration“, *First Korea/USA Road Workshop Proceedings*, 28.–29. Jan. 1997. <http://www.fhwa.dot.gov/bridge/frp/frp197.doc> (Stand: März 2009).
13. Sun, L., Bahhart, F., Krasheninnikov, A. V., Rodriguez-Manzo, J. A., Terrones, M. und Ajayan, P. M., „Carbon Nanotubes as High-Pressure Cylinders and Nanoextruders“, *Science*, 26. Mai 2006, S. 1199–1202.
14. Ericsson et al., „Macroscopic, Neat, Single-Walled Carbon Nanotube Fibers“, *Science*, 19. Aug. 2005, S. 1215–1219.
15. Li, Y.-L., Kinloch, I. A. und Windle, A. H., „Direct Spinning of Carbon Nanotube Fibers from Chemical Vapor Deposition Synthesis“, *Science*, 9. April 2004, S. 276–278.
16. Zhang et al., „Strong, Transparent, Multifunctional Carbon Nanotube Sheets“, *Science*, 19. Aug. 2005, S. 1215–1219.
17. Mielke, S., Diego, T., Zhang, S., Li, J.-L., Xiao, S., Car, R., Ruoff, R., Schatz, G. und Belytschko, T., „The Role of Vacancy Defects and Holes in the Fracture of Carbon Nanotubes“, *Chemical Physical Letters*, 16. Apr. 2004, S. 413–420.
18. Pugno, N., „On the Strength of the Carbon Nanotube-Based Space Elevator Cable: From Nano- to Mega-Mechanics“, *Journal of Physics: Condensed Matter, Special Issue: Nanoscience and Nanotechnology*, Juli 2006 (Preprint).
19. Andrews, D., Jacques, D., Rao, A. M., Rantell, T., Derbyshire, F., Chen, Y., Chen, J. und Haddon, R. C., „Nanotube Composite Carbon Fibers“, *Applied Physics Letters*, 30. Aug. 1999, S. 1329–1331.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Spannung und Dehnung	<p>Spannung ist der Quotient aus an einer Querschnittsfläche A angreifenden Kraft F_n, die normal zu A steht und der Querschnittsfläche A selbst:</p> $\sigma = \frac{F_n}{A}. \quad (9.2)$ <p>Dehnung ist der Quotient aus der Längenzunahme Δl und der ursprünglichen Länge l vor der Dehnung.</p>
Der Elastizitätsmodul	$E = \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_n/A}{\Delta l/l} \quad (9.3)$
Die Querkontraktion	$\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} \quad (9.4)$
Energiedichte	$\rho_E = \frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} E \epsilon^2 \quad (9.22)$
2. Kompression	
Druck	$p = \frac{F_p}{A} = -\frac{F_n}{A} = -\sigma \quad (9.6)$
Der Kompressionsmodul	$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (9.9)$
Die Kompressibilität	$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3(1-2\mu)}{E} \quad (9.10)$
3. Scherung	
Scherspannung	<p>Die Scherspannung ist der Quotient aus der an einer Querschnittsfläche A angreifenden, tangential zu ihr wirkenden Kraft F_t und der Querschnittsfläche A:</p> $\tau = \frac{F_t}{A}. \quad (9.11)$
Der Schubmodul	$G = \frac{\text{Scherspannung}}{\text{Scherung}} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_t/A}{\Delta x/l} = \frac{F_t/A}{\tan \theta} \quad (9.13)$
Energiedichte	$\rho_E = \frac{E_{\text{pot}}}{V} = \frac{1}{2} G \gamma^2 \quad (9.23)$
4. Zusammenhang zwischen den Modulen	$\frac{E}{3K} = 1 - 2\mu \quad (9.19)$ $\frac{E}{2G} = 1 + \mu \quad (9.20)$ $\frac{2G}{3K} = \frac{1 - 2\mu}{1 + \mu} \quad (9.21)$

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
5. Biegung	
Flächenträgheitsmoment	Das Flächenträgheitsmoment einer Fläche A bezüglich einer Kraft, die in a -Richtung wirkt, lautet: $I_{F,a} = \int a^2 dA. \quad (9.30)$
Spannung	Die Spannung an einem einseitig eingespannten Balken der Länge l , an dem am freien Ende die Kraft F angreift, ist an einem Punkt (x, y) im Balken gegeben durch $\sigma_b = \frac{(l-x)F}{I_{F,y}} y, \quad (9.31)$ <p>wobei x den Abstand zum eingespannten Ende bezeichnet und y die Höhe über der neutralen Faser. Bei einem beidseitig unterstützten Balken der Länge l, auf den in der Mitte die Kraft F drückt, ist die Spannung im Balken an einem Punkt (x, y) gegeben durch $\sigma_b = -\frac{ x \cdot F}{I_{F,y}} y. \quad (9.40)$</p>
Auslenkungskurve	Bei einem einseitig eingespannten Balken ist die Auslenkungskurve der neutralen Faser gegeben durch $y(x) = -\frac{1}{2} \frac{F \cdot L}{E \cdot I_{F,y}} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \frac{F}{E \cdot I_{F,y}} x^3, \quad (9.37)$ <p>wobei x den Abstand zum eingespannten Ende bezeichnet. Bei einem beidseitig unterstützten Balken ist die Auslenkungskurve beschrieben durch $y(x) = \frac{1}{6} \frac{F}{E \cdot I_{F,y}} x ^3 - \frac{1}{48} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I_{F,y}}, \quad (9.42)$ <p>wobei x den Abstand von der Mitte des Balkens zum betrachteten Punkt angibt.</p></p>

Antwort auf die Verständnisfrage

9.1 Sie ändert sich nicht, da beide in gleicher Potenz in den Zähler und Nenner eingehen, sodass die Faktoren sich herauskürzen.

Die maximal erreichbare Spannung ist für alle Muskeln des Menschen näherungsweise gleich. Größere Kräfte können nur durch Muskeln mit höherer Querschnittsfläche ausgeübt werden.

9.2 a) $4,1 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, b) $2,1 \cdot 10^{-4}$, c) $190 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$

9.3 $G = (8\pi \cdot l \cdot I) / (R^4 \cdot T^2) = 8,4 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Es handelt sich um Stahl.

9.4 $K = E / (3(1-2\mu)) = 13 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, $G = E / (2(1+\mu)) = 10 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$

Lösungen der Übungen

9.1 Nach unserer Definition gilt für die Spannung $\sigma = F_n/A$. Mit den gegebenen Werten ergibt sich $\sigma = 2,5 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Aufgaben

Bei allen Aufgaben ist die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

die „atomare Federkonstante“ k_F in einem Metall. Benutzen Sie dazu Tabelle 9.1 und nehmen Sie $a \approx 1,0 \text{ mm}$ an.

Verständnisaufgaben

- 9.1 • Wie ändert sich die Spannung in einem Draht, wenn Sie seine Querschnittsfläche verdoppeln und die Kraft vervierfachen?
- 9.2 • Ein Stab mit einer Querkontraktionszahl $\mu = 0,2$ wird um 5 % gedehnt. Um wie viel Prozent ändert sich seine Dicke?
- 9.3 • Benennen Sie die Deformationsvorgänge in Abbildung 9.15.

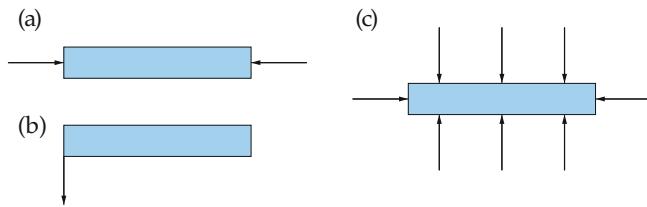


Abbildung 9.15 Zu Aufgabe 9.3.

- 9.4 •• Man verbindet einen Aluminium- und einen Stahldraht von derselben Länge l und demselben Durchmesser d so, dass ein Draht der Länge $2l$ entsteht. Ein Ende dieses Drahts wird an der Decke befestigt, am unteren Ende hängt man einen Körper der Masse m an. Vernachlässigen Sie die Masse der beiden Drähte. Welche Aussagen sind richtig, welche falsch? a) Der Aluminiumteil dehnt sich um denselben Betrag wie der Stahlteil. b) Die Spannungen im Aluminium- und im Stahlteil sind gleich. c) Die Spannung im Aluminiumteil ist größer als im Stahlteil. d) Keine dieser Aussagen trifft zu.

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

- 9.5 •• Betrachten Sie ein atomares Modell für den Elastizitätsmodul: Eine große Anzahl von Atomen ist in einem kubischen Gitter angeordnet, d.h., jedes Atom sitzt in einer Ecke eines Würfels und hat die Entfernung a zu seinen sechs nächsten Nachbarn (Abbildung 9.16). Stellen Sie sich vor, jedes Atom sei durch kleine Federn mit der Federkonstanten k_F mit seinen sechs nächsten Nachbarn verbunden. (Dieses Bild liefert ein brauchbares Modell, da die zwischen den Atomen wirkenden Kräfte sich so ähnlich wie Federn verhalten.) a) Zeigen Sie, dass ein so aufgebautes Material beim Dehnen den Elastizitätsmodul $E = k_F/a$ hat. b) Schätzen Sie einen typischen Wert für

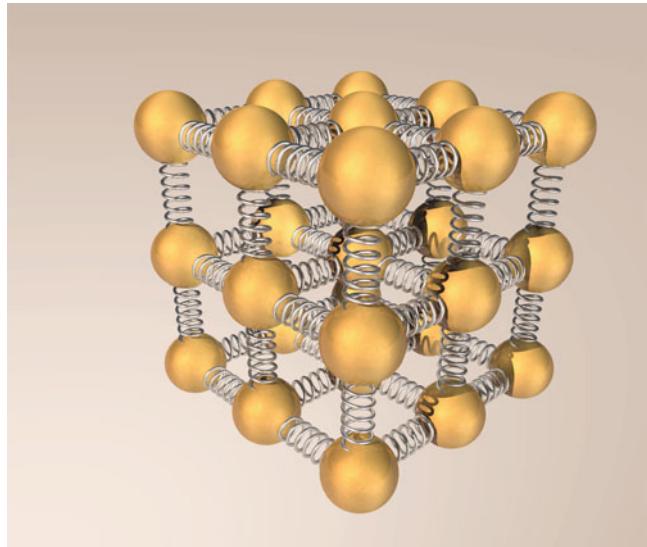


Abbildung 9.16 Zu Aufgabe 9.5.

Spannung und Dehnung

- 9.6 • Eine Masse von 50 kg hängt an einem 5,0 m langen Stahldraht mit einem Radius von 2,0 mm. Um wie viel dehnt sich der Draht?

- 9.7 • Kupfer hat eine Zugfestigkeit von $3,0 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. a) Wie groß ist die maximale Last, die man an einem Kupferdraht von 0,42 mm Durchmesser befestigen kann? b) Eine Last von der Hälfte der Maximallast hängt an dem Kupferdraht. Um welchen prozentualen Anteil dehnt sich der Draht?

- 9.8 •• Auf die beiden Enden eines dünnen Drahts der Länge l mit der Querschnittsfläche A wirken entgegengesetzt gerichtete, gleich große Kräfte vom Betrag F . Zeigen Sie, dass man den Draht als eine „Feder“ mit der Federkonstanten $k_F = A E/l$ betrachten kann und dass die im Draht gespeicherte potentielle Energie $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} F \Delta l$ ist; dabei ist E der Elastizitätsmodul und Δl die Dehnung des Drahts.

- 9.9 •• Während eines werkstoffkundlichen Versuchs zum Elastizitätsmodul von Gummi erhalten Sie von Ihrer Tutorin ein Gummiband mit rechteckigem Querschnitt. Sie lässt Sie zunächst die Abmessungen des Querschnitts bestimmen, Sie erhalten dabei die Werte von 3,0 mm und 1,5 mm. Nach der Anleitung lassen Sie das Band nun senkrecht von der Decke

herabhängen und belasten das untere Ende mit verschiedenen (bekannten) Massen. In einer Messreihe finden Sie folgenden Zusammenhang zwischen der Länge und der angehängten Masse:

Masse (kg)	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
Länge (cm)	5,0	5,6	6,2	6,9	7,8	8,8

- a) Berechnen Sie mithilfe eines grafischen Taschenrechners oder eines Tabellenkalkulationsprogramms den Elastizitätsmodul des Gummibands für den angegebenen Massenbereich. (*Hinweis:* Es ist wohl am besten, F/A gegen $\Delta l/l$ aufzutragen. Warum?) b) Berechnen Sie die im Gummiband gespeicherte potentielle Energie, wenn die Masse 0,15 kg beträgt. c) Berechnen Sie die im Gummiband gespeicherte Energie für eine Masse von 0,30 kg. Ist sie doppelt so hoch wie in Teilaufgabe b? Erläutern Sie.

9.10 •• Ein Tragkabel für einen Fahrstuhl soll aus einem neuartigen Verbundmaterial hergestellt werden. Im Labor ist eine 2,00 m lange Probe mit einer Querschnittsfläche von $0,200 \text{ mm}^2$ bei einer Last von 1000 N gerissen. Das geplante Kabel für den Fahrstuhl soll 20,0 m lang sein und eine Querschnittsfläche von $1,20 \text{ mm}^2$ haben. Es soll eine Last von 20 000 N sicher tragen. Ist das Material geeignet?

9.11 ••• Bei den meisten in Tabelle 9.1 aufgeführten Materialien ist die Zugfestigkeit um zwei bis drei Größenordnungen geringer als der Elastizitätsmodul. Daher reißen die meisten dieser Materialien, bevor die Dehnung 1 % übersteigt. Unter den synthetischen Materialien hat Nylon die höchste Dehnbarkeit – es kann um bis zu 20 % gedehnt werden, bevor es reißt. Aber die Spinnenfäden übertreffen die synthetischen Materialien bei Weitem: Bestimmte Spinnenfäden können, ohne zu reißen, auf das Zehnfache gedehnt werden! a) Ein Spinnenfaden soll einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Radius r_0 haben und ungedehnt l_0 lang sein. Berechnen Sie seinen Radius, wenn er auf die Länge $l = 10 l_0$ gedehnt ist. (Die Dichte des Fadens soll bei der Dehnung konstant bleiben.) b) Der Elastizitätsmodul des Spinnenfadens ist E . Drücken Sie die Zugkraft beim Reißen mithilfe von E und r_0 aus.

Kompression

9.12 • Um wie viel N/m^2 muss man den Druck erhöhen, damit ein kleiner Würfel aus Quarzglas der Kantenlänge 1 cm auf einen Würfel mit der Kantenlänge 0,99 cm komprimiert wird?

9.13 •• Ein Elefant der Masse 5 t tritt mit einem Fuß auf einen Quader aus Beton. Der Quader ist 5 cm lang, 5 cm breit, 4 cm hoch und wird vom Elefantenfuß gerade vollständig überdeckt. Gehen Sie davon aus, dass er mit einem Viertel seiner Gesamtmasse auf das Stück Beton tritt, und berechnen Sie, um wie viel das Volumen des Betonquaders dadurch verringert wird. Um wie viel würde das Volumen eines Quaders aus Stahl mit gleichen Ausmaßen verringert? Halten die Materialien dem Elefantentritt stand, oder gehen sie dabei zu Bruch?

Scherung

9.14 • Während sich der Fuß eines Läufers vom Boden abdrückt, übt er auf die Sohle des Schuhs eine Scherkraft aus (Abbildung 9.17). Die Sohle soll 8,0 mm dick sein. Berechnen Sie den Scherwinkel θ , wenn die Kraft von 25 N über eine Fläche von 15 cm^2 verteilt ist. Der Schubmodul der Sohle beträgt $1,9 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.



Abbildung 9.17 Zu Aufgabe 9.14.

9.15 • Berechnen Sie die potentielle Energie, die bei der Scherung eines Eiswürfels gespeichert wird, wenn er eine Kantenlänge von 5 cm hat und seine Oberseite um einen halben Zentimeter verschoben wird. Welche Scherspannung wirkt an dem Eiswürfel?

9.16 •• Ein 50 cm langer Draht wird an der Decke und eine Kugel an seinem herunterhängenden Ende befestigt. Die Kugel hat den Radius $r_K = 15 \text{ cm}$ und eine Masse von $m_K = 1 \text{ kg}$, während der Draht einen kreisförmigen Querschnitt mit Radius $R = 2 \text{ mm}$ hat. Gehen Sie davon aus, dass Sie das Trägheitsmoment der Kugel, die Länge und den Radius des Drahts ohne Fehler messen können. Wird die Kugel in Drehschwingungen versetzt, messen Sie eine Schwingungsdauer von 0,38 s mit einem statistischen relativen Fehler von 2,5 %. Wie groß sind das sich daraus ergebende Schubmodul des Drahts und der Fehler? Können Sie im Rahmen der Messgenauigkeit eindeutig feststellen, um welches Material es sich bei dem Draht handelt? Nehmen Sie Tabelle 9.1 zu Hilfe.

Biegung

9.17 • Berechnen Sie die Formeln für das Flächenträgheitsmoment a) eines Stabs mit kreisrundem Querschnitt vom Radius r , an dem eine Kraft senkrecht zu seiner Symmetrieachse angreift, b) eines Balkens mit der Querschnittsfläche in Form eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge a , der ebenfalls in eine Richtung senkrecht zu seiner Symmetrieachse und senkrecht zu einer Kante gebogen wird.

9.18 • Hans steht auf einem quaderförmigen Balken, der an beiden Enden aufliegt genau zwischen den beiden Auflagepunkten. Er wiegt 80 kg. Wie weit wird der Balken durch das

Gewicht von Hans nach unten gedrückt, wenn der Balken 2 m lang, 10 cm breit und 5 cm dick ist?

9.19 •• An einen Ast eines Weihnachtsbaums wird ganz am Ende eine Kugel mit einer Masse von 50 g gehängt. Der Baum ist eine Fichte mit einem E -Modul von $E = 10 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$. Der Ast hat einen annähernd kreisförmigen Querschnitt mit einem Durchmesser von 2,8 cm und eine Länge von 30 cm. Berechnen Sie die Auslenkung des Astendes durch das Gewicht der Kugel. Welche Masse darf eine Kugel höchstens haben, damit der Ast

nicht unter der Last zusammenbricht? (Gehen Sie davon aus, dass die maximale Spannung an der Astgabel höchstens $70 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ betragen sollte.)

9.20 ••• Berechnen Sie die Gleichung für die Spannung und die Auslenkungskurve für einen beidseitig fest montierten Balken mit beliebigem Querschnitt und einer festen Länge l . Zudem soll der E -Modul des Balkens bekannt sein. Gehen Sie wieder von Bernoullis Voraussetzungen aus.



Ein weltweit einmaliges Rota-tionsschiffshebewerk ist das „Falkirk Wheel“ in Schott-land. Es ist aufgebaut wie ein Riesenrad mit zwei wasser-gefüllten Gondeln, die von Schiffen mit bis zu 20 m Länge befahren werden können. Die Schiffe werden an dieser Ver-bindung zwischen dem „Forth and Clyde Canal“ und dem „Union Canal“ über eine Höhe von 35 m gehoben und kön-nen im Kanal auf der Brücke weiterfahren. Trotz der großen Massen von 300 t Gondelge-wicht plus dem Gewicht von 300 m³ Wasser ist der Ener-gieverbrauch beim Heben der Schiffe sehr gering, weil die Konstruktion nach dem archi-medischen Prinzip arbeitet und für den Betrieb nur ein kleines Drehmoment benö-tigt. (© Powered by Light/Alan Spencer/Alamy.)

10.1 Dichte	372
10.2 Druck in einem Fluid	374
10.3 Auftrieb und archimedisches Prinzip	380
10.4 Molekulare Phänomene	386
10.5 Bewegte Fluide ohne Reibung	387
10.6 Bewegte Fluide mit Reibung	394
10.7 *Turbulenz	398
Zusammenfassung	402
Aufgaben	405



Warum ist kein großes Drehmoment erforderlich, und warum kann man die massiven Räder mit so we-nig Energieaufwand drehen? (Siehe Beispiel 10.8.)

Fließende und strömende Substanzen wie Luft, Blut oder Wasser bezeichnet man als Fluide. Bauingenieure nutzen ihr Wissen von den Fluiden, um Staudämme zu konstruieren, die am Fuß dicker sind als an der Krone. Fahrzeug- und Flugzeugingenieure können mit-hilfe von Windkanälen den Strömungsverlauf der Luft rund um das Auto oder Flugzeug beobachten und anhand der Ergebnisse deren Aerodynamik verbessern. Blutdruckmesser werden von Ärzten und Fachpersonal verwendet, um unseren Blutdruck zu messen und daraus Hinweise auf mögliche Erkrankungen abzuleiten.

Wir beginnen dieses Kapitel mit einer Untersuchung von ruhenden Fluiden, bei der wir insbesondere die Dichte von und den Druck in Fluiden, aber auch den Auftrieb und das archimedische Prinzip betrachten wollen. Danach untersuchen wir die wichtigsten molekularen Phänomene unbewegter Flüssigkeiten, bevor wir stationäre Strömungen untersuchen; dabei werden wir uns besonders den laminaren Strömungen widmen.

10.1 Dichte

In einem Gas ist die mittlere Entfernung zwischen zwei Molekülen verglichen mit der Größe eines Moleküls recht groß. Die Moleküle üben kaum einen Einfluss aufeinander aus, außer während der kurzen Zeitspanne ihrer Stöße. In einer Flüssigkeit oder einem Feststoff sind die Moleküle dagegen dicht beieinander und üben Kräfte aufeinander aus, deren Stärke in der Größenordnung der molekularen Bindungskräfte ist. Moleküle in einer Flüssigkeit bilden kurzreichweitige Bindungen aus, die permanent gebrochen und neu formiert werden, da die Moleküle innerhalb der Flüssigkeit frei verschiebbar sind. Dies hat zur Folge, dass – im Gegensatz zum Festkörper – an der Oberfläche keine Tangentialkräfte angreifen können und die Flüssigkeit beliebig ihre Form ändern kann. Sie erreicht einen Zustand der Stabilität, wenn die Oberfläche senkrecht auf der auf die Flüssigkeit wirkenden Gesamtkraft steht.

Die Stärke der Bindungen in einer Flüssigkeit hängt von der Art der Moleküle ab, aus denen die Flüssigkeit besteht. Beispielsweise sind die Bindungen zwischen Heliummolekülen nur sehr schwach. Daher lässt sich Helium bei normalem Druck erst bei einer Temperatur von 4,2 K oder darunter verflüssigen. Ursache dafür ist die von der Temperatur abhängige kinetische Energie der Moleküle. Diese Bindungen halten die Flüssigkeit zusammen; wären sie nicht vorhanden, würde die Flüssigkeit sofort verdunsten, und die Moleküle würden sich als Dampf verflüchtigen.

Das Verhältnis von der Masse eines Körpers zu seinem Volumen nennt man die *mittlere Dichte*:

$$\text{mittlere Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} = \frac{m}{V}.$$

DEFINITION DER MITTLEREN DICHTE

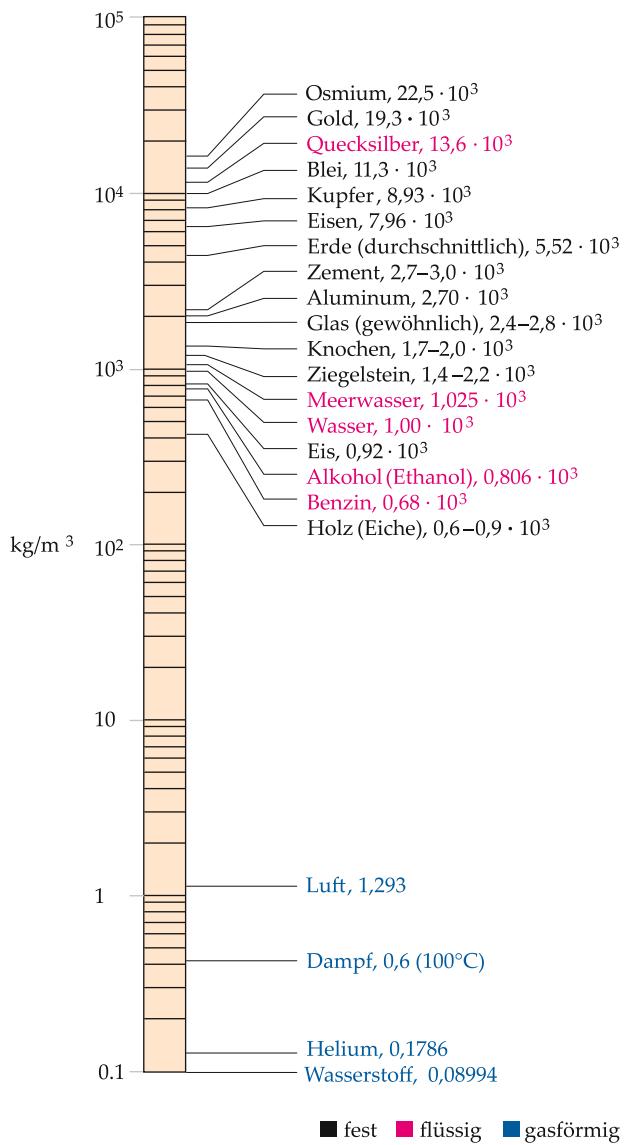
Bezeichnen wir die Masse einer Substanz innerhalb eines kleinen Volumenelements dV mit dm , dann ist die Dichte dieser Substanz am Ort des Volumenelements

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (10.1)$$

DEFINITION DER DICHTE

Als Formelzeichen für die Dichte verwendet man den griechischen Buchstaben ρ (rho). Weil das Gramm ursprünglich als die

Tabelle 10.1 Dichte ausgewählter Substanzen*



■ fest ■ flüssig ■ gasförmig

*Die Werte beziehen sich, wenn nicht anders angegeben, auf Normalbedingungen mit $T = 0^\circ\text{C}$ und $p = 1,01 \text{ bar}$.

Masse von einem Kubikzentimeter flüssigen Wassers definiert war, ist die Dichte von flüssigem Wasser in den sogenannten cgs-Einheiten (das Einheitensystem, das auf den Basiseinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde aufbaut) genau 1 g/cm^3 . Im heute üblichen Internationalen Einheitensystem (SI) ergibt sich für die Dichte von Wasser

$$\rho(\text{Wasser}) = \frac{1 \text{ g}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} \cdot \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right)^3 = 1000 \text{ kg/m}^3. \quad (10.2)$$

Bei Präzisionsmessungen der Dichte muss man auch die Temperatur angeben, da die Dichte der meisten Materialien – auch

von Wasser – sich mit der Temperatur ändert. Gleichung 10.2 gibt den Maximalwert für die Dichte von Wasser an. Er bezieht sich auf eine Temperatur von 4°C . In Tabelle 10.1 ist die Dichte für eine Reihe verschiedener Materialien aufgeführt. Beachten Sie die logarithmische Einteilung der Achse: Die Werte überstreichen fünf Größenordnungen.

Eine praktische Volumeneinheit für Flüssigkeiten ist der **Liter** mit dem Einheitenzeichen l. Wo es zu Verwechslungen des kleinen l mit der Zahl 1 kommen kann, ist auch das Einheitenzeichen L zulässig:

$$1\text{l} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

In dieser Einheit beträgt die Dichte von Wasser bei 4°C $1,00 \text{ kg/l} = 1,00 \text{ g/ml}$. Die Einheit Liter ist laut Einheitengesetz nur für Messungen auf fünf geltende Stellen zulässig.

Ist die mittlere Dichte eines Körpers größer als die von Wasser, versinkt er im Wasser. Ist sie kleiner, dann schwimmt er auf dem Wasser. Das Verhältnis der Dichte einer Substanz zu der einer Referenzsubstanz – meist von Wasser – nennt man die Dichtezahl oder **relative Dichte**. (Die traditionelle Bezeichnung „spezifische Dichte“ soll in diesem Buch nicht mehr verwendet werden, weil die Dichte einer spezifischen Masse pro Volumeneinheit entspricht.) Aluminium hat beispielsweise eine relative Dichte von 2,7, d. h., ein bestimmtes Volumen von Aluminium hat die 2,7-fache Masse des gleichen Volumens Wasser. Die relative Dichte von Materialien, die in Wasser versinken, reicht von 1 (der relativen Dichte von Wasser) bis etwa 22,5 (der relativen Dichte des dichtesten Elements Osmium; manchmal spricht man ungenau auch von Osmium als dem „schwersten“ Element).

Die meisten Feststoffe und Flüssigkeiten dehnen sich bei Erhitzung nur wenig aus und ziehen sich auch nur wenig zusammen, wenn man sie einem erhöhten Druck aussetzt. Da die Volumenänderungen relativ gering sind, kann man die Dichte von Festkörpern und Flüssigkeiten als näherungsweise unabhängig von Temperatur und Druck ansehen. Beispiel 10.1 verdeutlicht, wie gering die temperaturbedingten Dichteunterschiede bei Wasser sind. Die Dichte eines Gases dagegen hängt sehr stark von Temperatur und Druck ab; gibt man die Dichte an, so muss man auch diese Variablen angeben. Üblicherweise sind die Standardbedingungen für die Messung von physikalischen Eigenschaften der Luftdruck auf Meereshöhe und eine Temperatur von 0°C . Die Dichte der in Tabelle 10.1 aufgeführten Substanzen bezieht sich auf diese Bedingungen. Beachten Sie, dass die Dichte der Flüssigkeiten und Feststoffe erheblich höher ist als die Dichte von Gasen (aus diesem Grund wird in der Tabelle eine logarithmische Teilung verwendet). Beispielsweise ist die Dichte von Wasser etwa 800-mal größer als die von Luft unter Standardbedingungen.

Beispiel 10.1: Berechnung der Dichte

Ein 200-ml-Kolben ist bis zum Rand mit Wasser von $4,0^{\circ}\text{C}$ gefüllt. Wenn der Kolben auf $80,0^{\circ}\text{C}$ erhitzt wird, laufen 6,0 g Wasser über. Welche Dichte hat Wasser von 80°C ? (Nehmen Sie an, dass die Ausdehnung des Kolbens selbst vernachlässigbar ist.)

Problembeschreibung: Die Dichte von warmem Wasser bei 80°C beträgt $\rho'_W = m'/V$; dabei gibt $V = 200 \text{ ml} = 200 \text{ cm}^3$ das Volumen des Kolbens und m' die Masse der in dem Kolben verbleibenden Wassermenge an. Man bestimmt m' , indem man zunächst die Masse des Wassers m berechnet, die anfangs im Kolben war.

Lösung: 1. Mit ρ'_W bezeichnen wir die Dichte von Wasser bei 80°C , mit m' die Masse des Wassers, das in dem Kolben mit dem Volumen $V = 200 \text{ ml}$ verbleibt. Stellen Sie mithilfe der Definition der Dichte einen Zusammenhang zwischen ρ'_W und m' her:

$$\rho'_W = \frac{m'}{V}$$

2. Berechnen Sie die Ausgangsmasse m des Wassers in dem Kolben bei 4°C . Verwenden Sie die Dichte $\rho_W = 1,00 \text{ kg/l}$ und die Definition der Dichte:

$$m = \rho_W V = (1,00 \text{ g/l}) (0,200 \text{ l}) = 0,200 \text{ kg}$$

3. Berechnen Sie die Masse m' des in dem Kolben verbleibenden Wassers, nachdem 6 g Wasser übergelaufen sind:

$$m' = m - 6 \text{ g} = 0,200 \text{ kg} - 0,006 \text{ kg} = 0,194 \text{ kg}$$

4. Setzen Sie den erhaltenen Wert von m' ein, um die Dichte von Wasser bei 80°C zu berechnen:

$$\rho'_W = \frac{m'}{V} = \frac{0,194 \text{ kg}}{0,200 \text{ l}} = \boxed{0,970 \text{ kg/l}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wasser hat bei $4,0^{\circ}\text{C}$ die maximale Dichte. Also muss ρ'_W bei 80°C kleiner sein als $\rho_W = 1,00 \text{ g/l}$.

Übung 10.1: Ein massiver Metallwürfel mit der Kantenlänge 8,00 cm hat eine Masse von 4,08 kg. a) Welche Dichte hat der Würfel? b) Der Würfel ist aus einem einzigen chemischen Element gefertigt. Schlagen Sie in Tabelle 10.1 nach und geben Sie an, aus welchem. ▶

Übung 10.2: Ein Goldbarren misst $5,0 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Welche Masse hat er? ▶

10.2 Druck in einem Fluid

Wenn ein Körper in ein Fluid (z. B. Wasser) eintaucht, übt das Fluid eine Kraft auf die Körperoberfläche aus, die in jedem Punkt senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist. Diese Kraft, bezogen auf die Einheitsfläche, nennt man den **Druck** p des Fluids. Er wurde bereits allgemein in Kapitel 9 definiert:

$$p = \frac{F}{A}. \quad (10.3)$$

!

Beachten Sie, dass die Kraft wie auch die Fläche eine Vektorgröße ist, der Druck aber eine skalare Größe: Der Druck ist in Gleichung 10.3 anhand der skalaren Normalkomponente definiert als die Kraft, die senkrecht auf die Einheitsfläche einwirkt.

Die SI-Einheit des Drucks ist Newton pro Quadratmeter (N/m^2). Diese zusammengesetzte Einheit trägt den Namen **Pascal** (Einheitenzeichen Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2. \quad (10.4)$$

Als spezieller Name für das 10^5 -fache eines Pascals ist die Bezeichnung **Bar** (Einheitenzeichen bar) zulässig; in der Meteorologie verwendet man meist die kleinere Einheit Millibar (mbar). Es gilt somit

$$1 \text{ bar} = 10^3 \text{ mbar} = 100 \text{ kPa}. \quad (10.5)$$

Damit ist $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa}$ (Hektopascal, 100 Pa).

Eine ältere, gesetzlich nicht mehr zulässige Druckeinheit ist die Atmosphäre (Einheitenzeichen atm), die den normalen Luftdruck (Normaldruck) auf Meereshöhe angibt. Hier gilt die Umrechnung

$$1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}. \quad (10.6)$$

Ein Druck von 1 atm ist damit etwa 1,3 % höher als ein Druck von 1 bar. Weitere gebräuchliche Druckeinheiten werden im Verlauf dieses Kapitels vorgestellt.

Durch den wirkenden Druck in einem Fluid wird der Körper komprimiert, wobei das Maß der Kompression durch den in Gleichung 9.9 definierten Kompressionsmodul oder die Kompressibilität (Gleichung 9.10) angegeben wird. Da Flüssigkeiten und Feststoffe sich nur schwer komprimieren lassen, weisen sie relativ hohe K -Werte auf, die nur wenig von der Temperatur und vom Druck abhängen. Gase sind dagegen leicht komprimierbar, und der Wert ihres Kompressionsmoduls hängt stark von Temperatur und Druck ab.

Betrachten wir nun ein Beispiel dafür, wie sich der Druck in einer Flüssigkeit verhält: Wie jeder Sporttaucher weiß, nimmt der Wasserdruk mit steigender Tiefe zu. Bei einer Flüssigkeit wie Wasser, dessen Dichte näherungsweise konstant bleibt, nimmt der Druck linear mit der Tiefe zu. Dies lässt sich herleiten, indem man eine Wassersäule mit der Querschnittsfläche

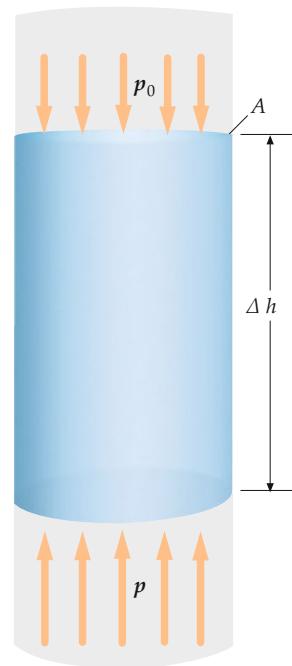


Abbildung 10.1 In einer Wassersäule mit der Höhe Δh und der Querschnittsfläche A muss der Druck p am Boden größer sein als der Druck p_0 am oberen Ende, um die Gewichtskraft des darüber lastenden Wassers auszugleichen.

A betrachtet (Abbildung 10.1). Auf dem Boden lastet die Gewichtskraft der Wassersäule mit der Höhe Δh . Daher muss am Boden der Druck größer sein als am oberen Ende der Wassersäule. Die Wassersäule übt die Gewichtskraft

$$F_G = m g = (\rho V) g = \rho A \Delta h g$$

aus. Wenn der Druck oben als p_0 und am Boden als p bezeichnet wird, entsteht durch den Druckunterschied eine nach oben gerichtete resultierende Kraft $p A - p_0 A$. Setzen wir diese Kraft mit der Gewichtskraft der Wassersäule gleich, so ergibt sich

$$p A - p_0 A = \rho A \Delta h g$$

oder

$$p = p_0 + \rho g \Delta h \quad (\rho \text{ konstant}). \quad (10.7)$$

Übung 10.3: Wie tief muss man in einem See tauchen, damit der Druck 2,00 atm beträgt? (An der Oberfläche soll der Druck 1,00 atm betragen.) ◀

In Beispiel 10.2 betrachten wir den Zusammenhang zwischen Kraft und Druck für infinitesimale Kräfte dF , die integriert die Gesamtkraft F ergeben.



Taucher. (© clemense/pixelio.)

Beispiel 10.2: Die Kraft auf einen Staudamm

Ein rechteckiger Staudamm ist 30 m breit. Der Wasserspiegel im Stausee misst 25 m. Berechnen Sie die horizontale Gesamtkraft auf den Damm, die durch Wasser- und Luftdruck hervorgerufen wird.

Problembeschreibung: Da der Druck sich mit der Wassertiefe ändert, kann man nicht einfach den Druck mit der Fläche des Staudamms multiplizieren, um die von den Wassermassen ausgeübte Kraft zu berechnen. Wir betrachten stattdessen die Kraft auf einen $l = 30 \text{ m}$ breiten Streifen mit der Höhe dh und der Fläche $dA = l dh$, der sich in der Höhe h unterhalb der Wasseroberfläche befindet (Abbildung 10.2), und integrieren dann von $h = 0$ bis $h = h_0 = 25 \text{ m}$. Der Wasserdruk in der Tiefe h beträgt $p_{\text{at}} + \rho g h$ mit dem atmosphärischen Druck p_{at} . Vernachlässigen Sie Änderungen des atmosphärischen Drucks oberhalb des Damms.

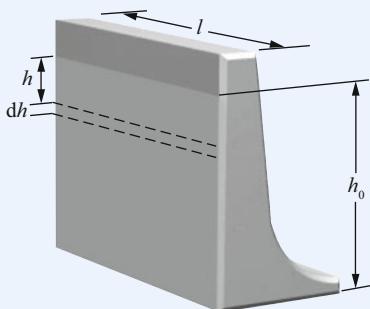


Abbildung 10.2 Darstellung des Staudamms.

Lösung: 1. Drücken Sie die Kraft dF auf einen Streifen der Breite l mit der Höhe dh mithilfe des Drucks $p_{\text{at}} + \rho h g$ aus, den die Wassermassen auf den Damm ausüben:

$$dF = p dA = (p_{\text{at}} + \rho g h)l dh$$

2. Integrieren Sie von $h = 0$ bis $h = h_0$. Damit erhalten Sie die Horizontalkomponente der Kraft, die das Wasser auf den Damm ausübt:

$$\begin{aligned} F &= \int_{h=0}^{h=h_0} dF = \int_0^{h_0} (p_{\text{at}} + \rho g h)l dh \\ &= p_{\text{at}} l h_0 + \frac{1}{2} \rho g l h_0^2 \end{aligned}$$

3. Der Fuß des Damms ist auf seiner Außenseite nicht vertikal. Fertigen Sie eine Querschnittsskizze (Abbildung 10.3) eines horizontalen Streifens durch den Fuß des Damms mit der Länge l und der Breite ds . Die Höhe des Streifens soll dh sein.

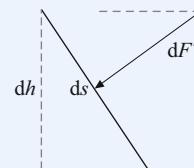


Abbildung 10.3 Querschnittsskizze des Staudammfußes.

4. Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Kraft dF' , die durch den Luftdruck auf diesen Streifen ausgeübt wird, und der Fläche des Streifens an:

$$dF' = p_{\text{at}} dA = p_{\text{at}} l ds$$

5. Drücken Sie die Horizontalkomponente von dF'_x mithilfe von dh aus:

$$dF'_x = dF' \cos \theta = p_{\text{at}} l ds \cos \theta = p_{\text{at}} l dh$$

6. Integrieren Sie von $h = 0$ bis $h = h_0$. Damit berechnen Sie die Horizontalkomponente der Kraft, die aufgrund des Luftdrucks am Fuß auf die Außenseite des Damms ausgeübt wird:

$$F' = \int_{h=0}^{h=h_0} dF' = \int_0^{h_0} p_{\text{at}} l dh = p_{\text{at}} l h_0$$

7. Die horizontale Gesamtkraft auf den Damm ist $F - F'_x$:

$$\begin{aligned} F - F'_x &= (p_{\text{at}} l h_0 + \frac{1}{2} \rho g l h_0^2) - p_{\text{at}} l h_0 \\ &= \frac{1}{2} \rho g l h_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (1000 \text{ kg/m}^3) (9,81 \text{ N/kg}) (30 \text{ m})(25 \text{ m})^2 \\ &= 9,20 \cdot 10^7 \text{ N} = \boxed{9,2 \cdot 10^7 \text{ N}} \end{aligned}$$

Kommentar: Staudämme sind typischerweise am Fuß dicker als an der Krone, weil der Wasserdruk auf den Damm mit der Tiefe des gestauten Wassers wächst. ■

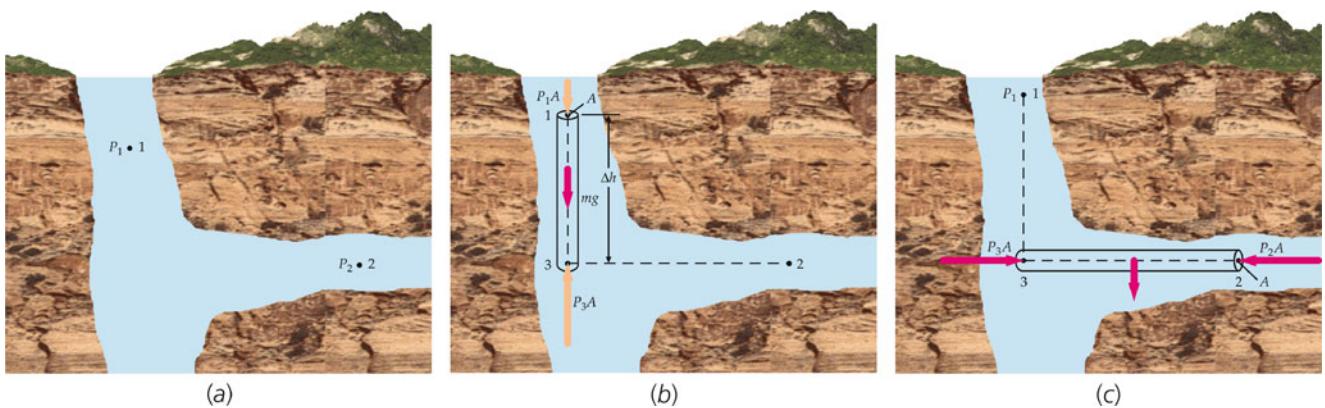


Abbildung 10.4 In einer Flüssigkeit ist der Druck in allen Punkten in derselben Tiefe gleich

Die Aussage, dass der Druck in einer Flüssigkeit in einem Behältnis linear mit der Tiefe zunimmt, ist unabhängig von der Form des Behältnisses. Außerdem ist der Druck an allen Punkten in derselben Tiefe gleich. Man erkennt dies, wenn man den Druck in Punkt 1 von Abbildung 10.4a mit dem Druck von Punkt 2 vergleicht, der sich in einer Unterwasserhöhle befindet. Vergleichen Sie zunächst den Druck in den Punkten 1 und 3: Punkt 3 befindet sich direkt unterhalb von Punkt 1 in derselben Tiefe wie Punkt 2 (Abbildung 10.4b). Betrachten Sie nun die vertikalen Kräfte auf eine senkrechte Wassersäule der Höhe Δh und der Querschnittsfläche A , die die Punkte 1 und 3 verbindet. Die nach oben gerichtete Kraft $p_3 A$ gleicht die abwärts gerichteten Kräfte $p_1 A$ und mg aus. Dabei ist $m = \rho A \Delta h$ die Masse des Wassers in der Säule und $A \Delta h$ ist das Volumen der Säule. Dann ist $p_3 A = p_1 A + \rho A \Delta h g$. Teilt man dies durch A , so ergibt sich

$$p_3 = p_1 + \rho g \Delta h.$$

Betrachten Sie nun die Kräfte auf die horizontale Wassersäule, ebenfalls mit der Querschnittsfläche A , die die Punkte 2 und 3 verbindet (Abbildung 10.4c). Es gibt zwei Kräfte, die Komponenten entlang der Wassersäule aufweisen, nämlich $p_3 A$ und $p_2 A$. Da sich diese Kräfte ausgleichen, müssen die Drücke gleich sein: $p_3 = p_2$. Dann gilt

$$p_2 = p_1 + \rho g \Delta h.$$

Wenn man den Druck in einem Wassergefäß erhöht, indem man mit einem Kolben auf die Oberfläche drückt, dann nimmt der Druck in der gesamten Flüssigkeit gleichmäßig zu. Dies ist die Aussage des **Pascal'schen Prinzips** (wie auch die Druckeinheit benannt nach dem französischen Mathematiker, Philosophen und Naturforscher Blaise Pascal, 1623–1662):

Die Druckänderung eines in einem Behältnis eingeschlossenen Fluids teilt sich unverändert jedem Punkt innerhalb des Fluids und den Wänden des Behältnisses mit.

PASCAL'SCHES PRINZIP



Abbildung 10.5 Prinzip einer hydraulischen Hebebühne. Wirkt eine kleine Kraft F_1 auf den kleinen Kolben, so erzeugt sie eine Druckänderung F_1/A_1 , die auf den großen Kolben übertragen wird. Da die Druckänderung bei dem kleinen und bei dem großen Kolben gleich ist, hängen die Kräfte über die Beziehung $F_2/A_2 = F_1/A_1$ zusammen. Weil die Fläche des großen Kolbens viel größer ist als die Fläche des kleinen Kolbens, ist die Kraft $F_2 = (A_2/A_1) F_1$ auf den großen Kolben viel größer als F_1 .

Das Pascal'sche Prinzip wird beispielsweise in hydraulischen Anlagen wie in Abbildung 10.5 oder in Beispiel 10.3 ausgenutzt.

Beispiel 10.3: Hydraulische Hebebühne

Der große Kolben in einer hydraulischen Hebebühne hat einen Radius $r_2 = 20 \text{ cm}$. Welche Kraft muss auf den kleinen Kolben mit dem Radius $r_1 = 2,0 \text{ cm}$ wirken, damit ein Wagen von 1500 kg gehoben wird?

Problembeschreibung: Der Druck p , multipliziert mit der Fläche A_2 des großen Kolbens, muss die Gewichtskraft mg des Wagens ausgleichen. Die Kraft F_1 auf den

kleinen Kolben berechnet man aus diesem Druck mal der Fläche A_1 des kleinen Kolbens (Abbildung 10.5).

Lösung: 1. Die Kraft F_1 auf den kleinen Kolben ist der Druck p , multipliziert mit der Fläche A_1 :

$$F_1 = p A_1$$

2. Der Druck p , multipliziert mit der Fläche A_2 , gleicht die Gewichtskraft des Wagens aus:

$$p A_2 = m g ,$$

sodass

$$p = \frac{m g}{A_2}$$

3. Setzen Sie dieses Ergebnis für p in das Ergebnis aus Schritt 1 ein und berechnen Sie F_1 :

$$\begin{aligned} F_1 &= p A_1 \\ &= \frac{m g}{A_2} A_1 = m g \frac{A_1}{A_2} = m g \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} \\ &= (1500 \text{ kg}) (9,81 \text{ N/kg}) \left(\frac{2,0 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} \right)^2 \\ &= 147 \text{ N} = \boxed{150 \text{ N}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Radien der beiden Kolben unterscheiden sich um einen Faktor 10, die Flächen der Kolben also um einen Faktor $10^2 = 100$. Damit unterscheiden sich auch die Kräfte um einen Faktor 100. ■

Abbildung 10.6 zeigt eine Anordnung von mehreren unterschiedlich geformten, oben offenen Röhren, die miteinander verbunden sind. Man spricht hier von **kommunizierenden Röhren**. Auf den ersten Blick könnte man annehmen, dass der Druck am Boden von Röhre 3 am größten und am Boden von Röhre 2 am kleinsten wäre. Denkt man diese Annahme aber zu Ende, dann müsste das Wasser in Röhre 2 höher stehen als in den anderen Röhren. Das ist offensichtlich nicht der Fall, der Wasserspiegel in allen kommunizierenden Röhren ist gleich hoch. Diesen Effekt nennt man das **hydrostatische Paradoxon**. Der Druck hängt nur von der Wasserhöhe ab, nicht von der Form des Gefäßes. Daher ist der Druck – wie sich experimentell leicht überprüfen lässt – in derselben Tiefe in jedem Teil des Gefäßes gleich. Natürlich enthalten die verschiedenen Abschnitte des Gefäßes in Abbildung 10.6 unterschiedlich viel Wasser, und somit ist auch ihre Gewichtskraft unterschiedlich (beispielsweise wiegt das Wasser in Röhre 4 mehr als in Röhre 2). Aber der Teil des Wassers, der sich nicht direkt über dem Grund von Röhre 4 befindet, wird von dem horizontalen Gefäßrand „getragen“. In gleicher Weise wiegt beispielsweise das Wasser oberhalb der Bodenöffnung von Röhre 5 weniger als das Wasser oberhalb einer gleich großen Bodenöffnung von Röhre 1. Aber der hori-

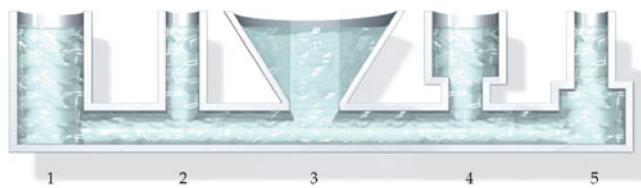


Abbildung 10.6 Das hydrostatische Paradoxon bei kommunizierenden Röhren. Der Wasserspiegel ist in allen Teilen der Anordnung gleich hoch, unabhängig von der unterschiedlichen Form der Röhren. Die Gewichtskraft von dem Teil des Wassers über den Gefäßwänden in Röhre 3 und 4 (dunkler schattiert) wird durch die Gefäßwände ausgeglichen.

zontale Gefäßrand von Röhre 5 übt eine nach unten gerichtete Kraft auf das Wasser aus, die das geringere Gewicht genau ausgleicht.

Der Druck in einem wassergefüllten Gefäß hängt nur von der Höhe des Wasserspiegels, nicht von der Form des Behälters ab. Auf gleicher Höhe im Gefäß ist der Wasserdruck daher gleich.

Man kann die Erscheinung, dass die Druckdifferenz der Tiefe in einer Flüssigkeit proportional ist, zum Messen von unbekannten Drücken ausnutzen. Abbildung 10.7 zeigt ein einfaches Druckmessgerät, das offene Manometer, wegen seiner Form auch U-Rohr-Manometer genannt.

Am oben offenen Ende des Messrohrs herrscht der Atmosphärendruck p_{at} . Das andere Ende des Rohrs ist geschlossen, an ihm herrscht der zu messende Druck p . Die Differenz zwischen „absolutem“ Druck p und dem atmosphärischen Druck p_{at} nennt man atmosphärische Druckdifferenz oder Überdruck p_e (der Index e kommt vom lateinischen *excedere* für „überschreiten“).

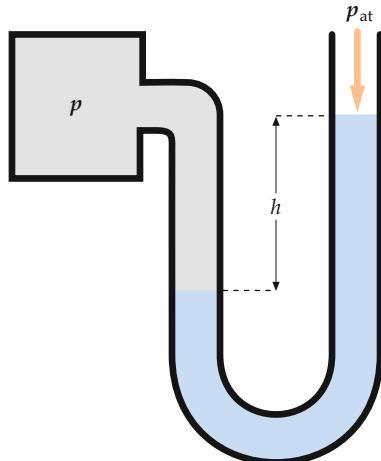


Abbildung 10.7 Offenes Manometer zur Messung des unbekannten Drucks p . Die Differenz $p - p_{at}$ ist gleich $\rho g h$.

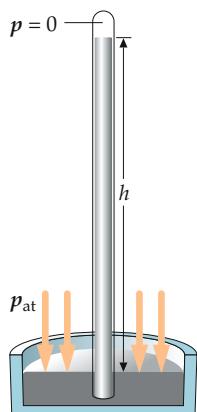


Abbildung 10.8 Geschlossenes Quecksilberbarometer nach Torricelli. Der Raum über der Quecksilbersäule ist – bis auf den Quecksilberdampf – leer. Bei Raumtemperatur liegt der Dampfdruck von Quecksilber unter 10^{-5} atm.

Der Überdruck hängt mit dem Gewicht der überstehenden Flüssigkeitssäule gemäß $p_e = p - p_{at} = \rho g h$ zusammen; dabei ist ρ die Dichte der im Rohr stehenden Flüssigkeit. Den Überdruck misst man beispielsweise an einem Autoreifen: Ist der Reifen völlig platt, so ist der Überdruck null, aber der absolute Druck im Reifen ist der Atmosphärendruck. Für $p_e < p_{at}$ soll man laut DIN übrigens nicht von einem Unterdruck sprechen, sondern von einem negativen Überdruck. Den absoluten Druck p erhält man aus dem Überdruck, indem man den Atmosphärendruck addiert:

$$p = p_e + p_{at}. \quad (10.8)$$

In der älteren Literatur und im Sprachgebrauch findet man manchmal noch die besondere Einheit „atü“ zur Messung eines Überdrucks. Diese Bezeichnung soll jedoch nicht mehr verwendet werden.

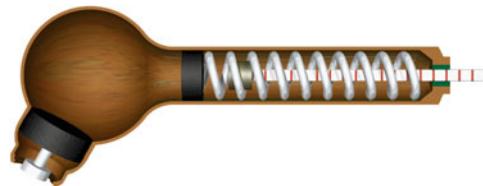
Abbildung 10.8 zeigt ein einfaches Quecksilberbarometer zur Messung des atmosphärischen Drucks. (Ein Barometer ist eine spezielle Bauform eines Manometers zur Messung des Luftdrucks.) Das Messprinzip wurde von dem italienischen Naturforscher Evangelista Torricelli (1608–1647) angegeben: Das obere Ende der Röhre ist versiegelt und evakuiert, sodass dort (bis auf kleine Korrekturen) der Druck null herrscht. Das untere Ende der Röhre taucht in ein Quecksilberbad, das dem Atmosphärendruck p_{at} ausgesetzt ist. Der Atmosphärendruck ergibt sich dann als $p_{at} = \rho g h$, wobei ρ die Dichte des Quecksilbers angibt.

Übung 10.4: Bei 0°C beträgt die Dichte von Quecksilber $13,595 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Wie hoch steht dann die Quecksilbersäule in einem Barometer bei einem Atmosphärendruck von genau 1 atm = 101 325 Pa? ◀

In früheren Zeiten wurde der Druck häufig in Millimeter Quecksilbersäule (mmHg) angegeben. Diese Einheit hieß zu Ehren von Torricelli auch **Torr** (Einheitenzeichen Torr). Diese Einheit ist heute gesetzlich nicht mehr zulässig, die einzige Ausnahme gilt bei der Messung des Drucks von Körperflüssigkeiten (z. B.



Reifendruckmessung. (© Vanessa Vick/Photo Researchers, Inc.)



In einem Reifendruckmesser wird der Messstab gegen die Kraft einer Feder so weit herausgedrückt, bis die Federkraft plus die Kraft aufgrund des äußeren Luftdrucks die Kraft aufgrund des Reifendrucks genau ausgleicht. An einer Skala auf dem Messstab lässt sich dann der Reifendruck ablesen.

bei Blutdruckmessungen; Beispiel 10.4). Eine andere, ebenfalls nicht mehr zulässige Druckeinheit ist Meter Wassersäule (mWs). Im angelsächsischen Raum verbreitet sind noch die Einheiten *inches of mercury* (Zoll Quecksilbersäule, Einheitenzeichen inHg) und *pound per square inch* (Pound pro Quadratzoll, Einheitenzeichen psi oder lb/in²). Die verschiedenen Druckeinheiten hängen folgendermaßen miteinander zusammen:

$$\begin{aligned} 1,00 \text{ atm} &= 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ Torr} = 29,9 \text{ inHg} \\ &= 10,0 \text{ mWs} = 14,7 \text{ lb/in}^2 = 101\,325 \text{ Pa} \\ &= 1013,25 \text{ mbar}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Beispiel 10.4: Blutdruck in der Schlagader

Der mittlere Blutdruck in einer Schlagader des Menschen beträgt rund 100 mmHg. Rechnen Sie diesen Wert in Pascal um.

Problembeschreibung: Aus Gleichung 10.9 ergibt sich, dass 760 mmHg 101 kPa entsprechen. Bei der Umrechnung von mmHg in Pascal muss man daher lediglich den gegebenen Wert in mmHg mit dem Umrechnungsfaktor 101 kPa/760 mmHg multiplizieren, um den gesuchten Wert zu erhalten..

Lösung: Wir verwenden den Umrechnungsfaktor aus Gleichung 10.9:

$$p = 100 \text{ mmHg} \cdot \frac{101 \text{ kPa}}{760 \text{ mmHg}} = [13,3 \text{ kPa}]$$

Plausibilitätsprüfung: Es war zu erwarten, dass der Druck ein Bruchteil von 1,00 atm beträgt. Ein Druck von 13,3 kPa genügt dieser Erwartung, denn 1,00 atm = 101 kPa.

Übung 10.5: Rechnen Sie einen Druck von 45,0 kPa in die Einheiten a) mmHg und b) Atmosphäre um. ▶ ■

In einem Gas ist der Zusammenhang zwischen Druck und Höhe (oder Tiefe) komplizierter als bei einer Flüssigkeit. In einer Flüssigkeit ist die Dichte im Wesentlichen konstant, in einem Gas hingegen ist die Dichte näherungsweise proportional zum Druck. In zunehmender Höhe über der Meereshöhe (beispielsweise auf einem Berg oder in einem Flugzeug) nimmt der Luftdruck ab, ähnlich wie auch der Druck abnimmt, wenn man vom Boden eines Wasserbehälters nach oben steigt. Allerdings nimmt der Gasdruck nicht linear mit der Höhenzunahme ab. Beispiel 10.5 zeigt, wie der atmosphärische Druck mit der Höhe zusammenhängt.

Beispiel 10.5: Die barometrische Höhenformel

Wenn man annimmt, dass die Dichte von Luft proportional zum Druck ist, muss der Druck mit der Höhe exponentiell abnehmen. Leiten Sie aus dieser Annahme den exponentiellen Zusammenhang von Druck und Höhe her und berechnen Sie die Höhe, in der der Luftdruck nur noch halb so groß ist wie auf Meereshöhe.

Problembeschreibung: Geben Sie einen Ausdruck für die Änderung des Luftdrucks bei einer Änderung dh der Höhe über dem Erdboden an. Zur Herleitung wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf ein Volumenelement Luft an, das eine vertikale Dicke dh hat und sich in der Höhe h befindet. Integrieren Sie diesen Ausdruck und berücksichtigen Sie dabei, dass die Dichte proportional zum Druck ist.

Lösung: 1. Zeichnen Sie ein horizontales, scheibenförmiges Volumenelement Luft mit der vertikalen Dicke dh , der Querschnittsfläche A und der Masse dm , das sich in der Höhe h über der Meereshöhe befindet. Zeichnen Sie alle Kräfte auf dieses Element ein und benennen Sie sie (Abbildung 10.9). Der Betrag der Fallbeschleunigung a_G ist g .

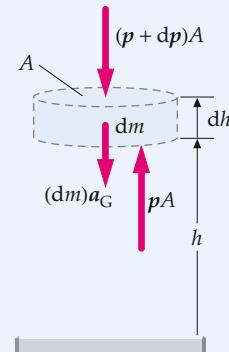


Abbildung 10.9 Der Druck unter dem scheibenförmigen Volumenelement Luft ist größer als der Druck oberhalb. Diese Druckdifferenz führt zu einer aufwärts gerichteten Kraft auf die Scheibe, die die nach unten gerichtete Gewichtskraft auf die Scheibe ausgleicht.

2. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf die Scheibe an. Die Beschleunigung ist null, somit muss auch die Summe aller Kräfte null sein:

$$pA - (p + dp)A - (dm)g = 0$$

3. Vereinfachen Sie die Gleichung und setzen Sie $dm = \rho A dh$:

$$-A dp - \rho g A dh = 0$$

und damit

$$dp = -\rho g dh$$

4. Wir nehmen an, dass die Dichte proportional zum Druck ist, und wir kennen die Dichte ρ_0 und den Druck p_0 auf Meereshöhe ($h = 0$):

$$\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0}$$

5. Setzen das Ergebnis für ρ in das Ergebnis aus Schritt 3 ein. Teilen Sie beide Seiten durch p , um die Variablen zu trennen:

$$dp = -p \frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

und damit

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh$$

6. Integrieren Sie von $h = 0$ bis $h = h_E$. Der Druck in Höhe h_E ist $p = p_E$:

$$\int_{p_0}^{p_E} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^{h_E} dh$$

und damit

$$\ln \frac{p_E}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g h_E$$

7. Lösen Sie nach p_E auf. Setzen Sie dann anstelle von p_E und h_E die Größen p und h ein:

$$p = p_0 e^{-(\rho_0/p_0)gh}$$

8. Lösen Sie nach der Höhe h auf, bei der $p = \frac{1}{2}p_0$ gilt. Den Wert für die Dichte von Luft bei 1 atm entnehmen Sie der Tabelle 10.1:

$$\frac{1}{2}p_0 = p_0 e^{-(\rho_0/p_0)gh} \Rightarrow h = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln 2$$

daher

$$h = \frac{1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \ln 2}{(1,29 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ N/kg})} = [5,5 \text{ km}]$$

Plausibilitätsprüfung: Eine Höhe von 5,5 km über dem Meeresspiegel liegt etwas unterhalb der Höhe des Kilimandscharo oder einiger Andengipfel. Man weiß, dass in diesen Höhen viele Menschen an Atemnot leiden. Das ist kaum überraschend, wenn man sich klarmacht, dass in dieser Höhe nur der halbe Luftdruck verglichen mit der Meereshöhe herrscht.

Kommentar: Die in Schritt 7 hergeleitete Formel ist die barometrische Höhenformel für den isothermen Fall, d. h. bei konstanter Temperatur. Die volle Gleichung berücksichtigt auch den Einfluss der Temperatur. ■

Die in Schritt 7 von Beispiel 10.5 hergeleitete Formel zeigt, dass der Luftdruck mit der Höhe exponentiell abfällt. Das bedeutet, dass der Luftdruck für eine bestimmte Höhensteigerung nicht um einen bestimmten Betrag, sondern um einen bestimmten Faktor sinkt (Abbildung 10.10). In einer Höhe von 5,5 km ist der Luftdruck nur halb so hoch wie auf Meereshöhe. Nimmt die Höhe noch einmal um 5,5 km auf 11 km zu (die typische Flughöhe für Verkehrsflugzeuge), so sinkt der Luftdruck noch einmal um die Hälfte auf ein Viertel des Drucks auf Meereshöhe, usw. In den großen Höhen, in denen Verkehrsflugzeuge fliegen, muss der Druck in der Kabine eines Flugzeugs daher ausgeglichen werden. Auch die Lufdichte nimmt mit der Höhe ab, denn sie ist näherungsweise proportional zum Luftdruck. Folglich nimmt auch der Sauerstoffgehalt der Luft mit wachsender Höhe ab. In gewissen Grenzen kann sich der Körper an das verringerte Sauerstoffangebot anpassen („akklimatisieren“), indem er vermehrt rote Blutkörperchen bildet, die den Sauerstoff im Blut aufnehmen und transportieren. Dies erfordert jedoch eine gewisse Zeit. Als die Olympischen Spiele 1968 in Mexiko-Stadt abgehalten wurden (die Stadt liegt rund 2300 m hoch), mussten die Athleten wochenlang vorher anreisen, um sich an die Umgebung zu akklimatisieren. Die exponentielle Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe beeinflusst auch das Bergsteigen: Bei Höhen bis etwa 4500 m, wie man sie in den Alpen findet,

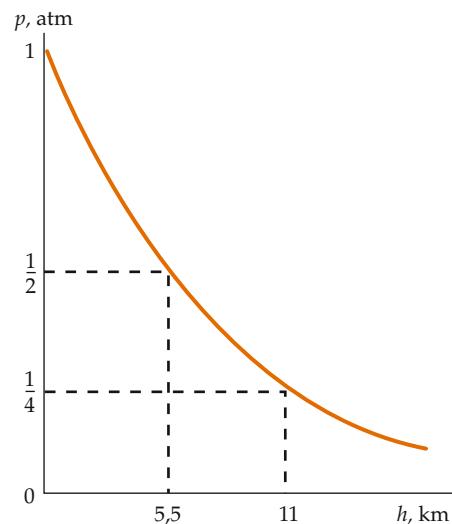


Abbildung 10.10 Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe über der Erdoberfläche (genauer: über Meereshöhe). Nimmt die Höhe um 5,5 km zu, so nimmt der Luftdruck um die Hälfte ab.

lässt sich der Sauerstoffmangel durch Akklimatisieren ausgleichen; in größeren Höhen – etwa im Himalaya – ist Bergsteigen dagegen in der Regel nur mit Sauerstoffmaske möglich.

10.3 Auftrieb und archimedisches Prinzip

Wenn ein schwerer Körper an einer Feder aufgehängt und in Wasser eingetaucht wird (Abbildung 10.11a), dann zeigt die Skala an der Federwaage eine geringere Gewichtskraft an, als wenn der Körper in Luft gewogen wird. Ursache dafür ist eine nach oben gerichtete Kraft, die von dem Wasser auf den Körper ausgeübt wird und die einen Teil der Gewichtskraft kompensiert. Dieses Phänomen heißt **Auftrieb**. Der Auftrieb ist noch besser sichtbar, wenn man beispielsweise einen Korken in Wasser eintaucht. Wenn er vollständig eingetaucht ist, erfährt der Korken aufgrund des Wasserdrucks eine aufwärts gerichtete Kraft, die sogar größer ist als seine Gewichtskraft, sodass er nach oben beschleunigt wird. Diese Kraft, die jedes Fluid auf einen ganz oder teilweise eingetauchten Körper ausübt, wird als **Auftriebskraft F_A** bezeichnet. Sie hängt nicht von der Form oder der Zusammensetzung des Körpers ab, sondern nur von der Dichte des ihn umgebenden Fluids. Ihr Betrag ist gleich der Gewichtskraft der durch den Körper verdrängten Fluidmenge.

Ein Körper, der ganz oder teilweise in ein Fluid eintaucht, erfährt eine Auftriebskraft, deren Betrag gleich der Gewichtskraft der durch den Körper verdrängten Fluidmenge ist.

ARCHIMEDISCHES PRINZIP

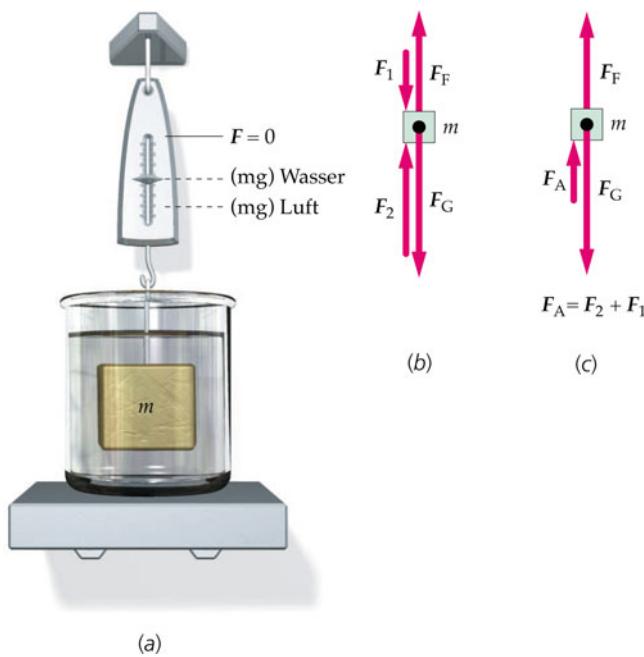


Abbildung 10.11 a) Beim Wiegen eines Körpers, der in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, zeigt die Federwaage eine geringere Gewichtskraft als beim Wiegen in Luft. b) Kräftediagramm: Auf den Körper wirken die Gewichtskraft F_G , die Federkraft F_F sowie die Kräfte F_1 und F_2 , die von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübt werden. c) Die Auftriebskraft $F_A = F_2 + F_1$ ist die resultierende Kraft, die von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübt wird.

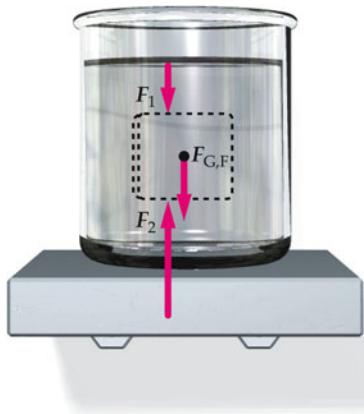


Abbildung 10.12 Die gleiche Anordnung wie in Abbildung 10.11, allerdings ist hier der Körper ersetzt durch eine Flüssigkeitsmenge vom gleichen Volumen wie der Körper. Die Kräfte F_1 und F_2 aufgrund des Flüssigkeitsdrucks sind dieselben wie in Abbildung 10.11. Der Betrag der Auftriebskraft ist daher gleich dem der Gewichtskraft $F_{G,F}$ der verdrängten Flüssigkeit.

Das archimedische Prinzip lässt sich aus den Newton'schen Axiomen ableiten (Archimedes selbst benutzte jedoch eine andere Herleitung; dazu später). Dazu betrachten wir die Kräfte, die in einem Teil der Flüssigkeit wirken. Im statischen Gleichgewicht muss die resultierende Kraft null sein. Abbildung 10.11b

zeigt die senkrechten Kräfte auf einen Körper, der beim Wiegen in eine Flüssigkeit eintaucht. Dies sind die nach unten gerichtete Gewichtskraft F_G , die nach oben weisende Kraft F_F der Federwaage, eine nach unten gerichtete Kraft F_1 aufgrund des Flüssigkeitsdrucks auf die Oberseite des Körpers und die nach oben weisende Kraft F_2 aufgrund des Flüssigkeitsdrucks auf die Unterseite des Körpers. Da die Skala der Federwaage eine geringere Gewichtskraft anzeigt als beim Wiegen des selben Körpers in Luft, muss die Kraft F_2 einen größeren Betrag haben als die Kraft F_1 . Die Vektorsumme der beiden Kräfte wird als Auftriebskraft $F_A = F_2 + F_1$ bezeichnet (Abbildung 10.11c), der Betrag der Auftriebskraft ist die Differenz der beiden Kraftbeträge. Ursache der Auftriebskraft ist, dass der Flüssigkeitsdruck an der Unterseite des Körpers größer ist als der Druck an der Oberseite.

Bei der in Abbildung 10.12 gezeigten Anordnung ist die Federwaage weggelassen und der eingetauchte Körper durch ein gleich großes Volumen Flüssigkeit (angedeutet durch die gestrichelten Linien) ersetzt worden, die wir als Flüssigkeitsprobe bezeichnen wollen. Die Auftriebskraft $F_A = F_2 + F_1$ auf dieses Flüssigkeitsvolumen ist dieselbe wie zuvor auf den Körper, weil die Flüssigkeit, die den Körper bzw. die Flüssigkeitsprobe umgibt, dieselbe ist. Es gibt keinen Grund anzunehmen, dass der Druck in der umgebenden Flüssigkeit in entsprechenden Punkten der beiden Behälter voneinander abweicht. Da sich das Flüssigkeitsvolumen im Gleichgewicht befindet, muss die resultierende Kraft null sein. Damit ist die nach oben weisende Auftriebskraft betragsmäßig gleich der nach unten gerichteten Gewichtskraft des Flüssigkeitsvolumens:

$$|F_A| = |F_{G,F}|. \quad (10.10)$$

Beachten Sie, dass dieses Ergebnis nicht von der Form des eingetauchten Körpers abhängt. Wenn wir nämlich irgendeine unregelmäßig geformte Menge Flüssigkeit nehmen, dann muss es eine Auftriebskraft geben, die von der umgebenden Flüssigkeit auf dieses unregelmäßig geformte Volumen ausgeübt wird; der Betrag dieser Auftriebskraft muss gleich der Gewichtskraft dieses Volumens sein. Damit haben wir das archimedische Prinzip hergeleitet.

Der große Naturforscher und Philosoph Archimedes (287–212 v. Chr.) hatte den Auftrag bekommen zu bestimmen, ob die für König Hieron II. von Syrakus angefertigte Krone (in der Form eines Lorbeerkränzes) wirklich aus reinem Gold bestand oder ob dazu auch billigere Materialien wie z. B. Silber verwendet worden waren. Dabei sollte die Krone jedoch nicht zerstört werden. Für Archimedes stellte sich damit das Problem zu bestimmen, ob die Dichte der unregelmäßig geformten Krone dieselbe war wie die Dichte von Gold. Nach der Überlieferung kam Archimedes die Erleuchtung beim Baden, als der Zuber überlief, nachdem er hineingestiegen war. Nackt wie er war lief er durch die Straßen von Syrakus, laut „Heureka“ („Ich hab's gefunden“) rufend. Dieser Gedankenblitz ging den Newton'schen Axiomen, mit denen wir das archimedische Prinzip hergeleitet haben, um rund 1900 Jahre voraus. Was Archimedes gefunden hatte, war eine einfache und genaue Möglichkeit,

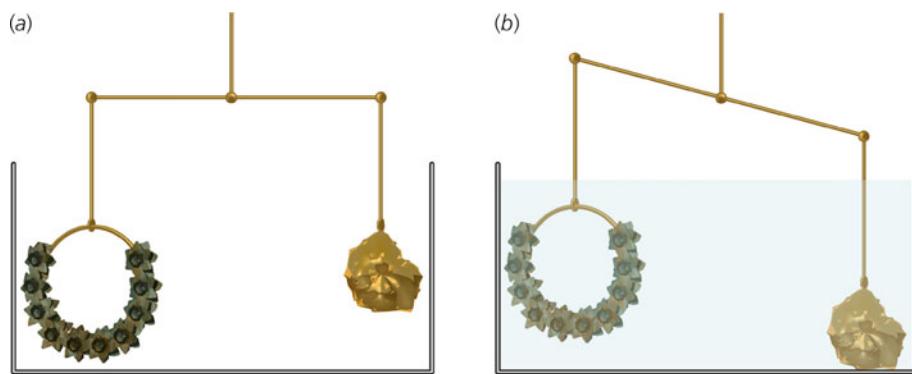


Abbildung 10.13 a) Die Krone und der Goldklumpen haben gleiches Gewicht. b) Die Krone verdrängt mehr Wasser als der Goldklumpen.



Wie ein Boot durch den Auftrieb auf der Wasseroberfläche bleibt, braucht auch ein Heißluftballon Auftrieb für seine Fahrt. (© Peter Blüm/pixelio.)

die Dichte der Krone mithilfe einer Balkenwaage mit der Dichte von Gold zu vergleichen. Er stellte die Waage in ein Becken und legte die Krone auf die eine Schale, einen Goldklumpen gleicher Masse auf die andere Waagschale. Damit war die Waage im Gleichgewicht (Abbildung 10.13a). Als er das Becken aber mit Wasser füllte, neigte sich die Waage, und die Schale mit der Krone stieg nach oben (Abbildung 10.13b). Die Auftriebs-

kraft auf die Krone war größer als die auf den Klumpen reinen Goldes, weil die Krone ein größeres Wasservolumen verdrängte als der Goldklumpen. Damit war klar, dass die Dichte der Krone geringer war als die Dichte des Goldklumpens, das Material war daher mit einem weniger dichten Metall „verlängert“ worden. In Beispiel 10.6 wird ein ähnliches Problem durchgerechnet.

Beispiel 10.6: Ist es wirklich Gold?

Ihre Freundin hat auf einer Auslandreise bei einem Straßenhändler einen teuren goldenen Ring gekauft und zweifelt jetzt, ob er wirklich aus Gold besteht. Mit Ihren physikalischen Kenntnissen können Sie ihr helfen. Sie wiegen den Ring und finden ein Gewicht von 0,158 N. Nun befestigen Sie den Ring an einem Fäddchen an der Waage und wiegen ihn erneut, während er in ein Wasserglas hineintaucht. Bei dieser Wägung finden Sie ein Gewicht von 0,150 N. Besteht der Ring aus reinem Gold?

Problembeschreibung: Wenn der Ring aus reinem Gold besteht, hat er eine relative Dichte (d. h. eine Dichte relativ zu der von Wasser) von 19,3 (siehe Tabelle 10.1). Mit dem archimedischen Prinzip als Anleitung können Sie die relative Dichte des Rings bestimmen.

Lösung: 1. Die Gewichtskraft $|F_G|$ des Rings ist das Produkt aus dessen Dichte ρ_R , seinem Volumen V und der Fallbeschleunigung g . Wenn der Ring in das Wasser mit der Dichte ρ_W eintaucht, erfährt er die Auftriebskraft $|F_A| = \rho_W V g$:

$$|F_G| = \rho_R V g$$

$$|F_A| = \rho_W V g$$

2. Teilen Sie die erste Gleichung durch die zweite; damit erhalten Sie einen Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Gewichts- zur Auftriebskraft und dem Verhältnis

Vorgehensweise:**Lösung von Aufgaben zum Auftrieb mithilfe des archimedischen Prinzips**

Lesen Sie die Problembeschreibung sorgfältig, um sich über die Situation klar zu werden. Oft ist auch eine Skizze nützlich.

- Wenden Sie das archimedische Prinzip an und stellen Sie so einen Zusammenhang zwischen der Auftriebskraft und der Gewichtskraft des verdrängten Fluids her.
- Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf den Körper an und lösen Sie nach der gewünschten Größe auf.

Plausibilitätsprüfung: Überprüfen Sie mit einer Abschätzung, ob Ihre Antwort plausibel ist.

der Dichten:

$$\frac{|\mathbf{F}_G|}{|\mathbf{F}_A|} = \frac{\rho_R V g}{\rho_W V g} = \frac{\rho_R}{\rho_W}$$

3. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ist die Auftriebskraft $|\mathbf{F}_A|$ gleich dem Gewicht minus dem scheinbaren Gewicht:

$$F'_G = |\mathbf{F}_G| - |\mathbf{F}_A| \Rightarrow |\mathbf{F}_A| = |\mathbf{F}_G| - F'_G$$

4. Setzen Sie diesen Ausdruck für $|\mathbf{F}_A|$ in Schritt 2 ein und berechnen Sie das Verhältnis ρ_R / ρ_W :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_R}{\rho_W} &= \frac{|\mathbf{F}_G|}{|\mathbf{F}_G| - F'_G} \\ &= \frac{0,158 \text{ N}}{0,158 \text{ N} - 0,150 \text{ N}} = \frac{0,158 \text{ N}}{0,008 \text{ N}} \end{aligned}$$

5. Der Nenner hat eine signifikante Stelle, das Verhältnis der beiden Dichten ist daher auf eine signifikante Stelle anzugeben:

$$\frac{\rho_R}{\rho_W} = \frac{0,158 \text{ N}}{0,008 \text{ N}} = 19,3 = 20$$

6. Vergleichen Sie das Verhältnis der Dichten mit der relativen Dichte von Gold (nach Tabelle 10.1 beträgt dieser Wert 19,3): Nach dieser Messung beträgt das Verhältnis der Dichten $2 \cdot 10^1$.

Der Ring könnte aus reinem Gold bestehen, die Messung ist aber nicht genau genug, um sicher zu sein.

Plausibilitätsprüfung: Die Unsicherheit des Ergebnisses ist wie erwartet recht hoch. Wenn in einem Bruch zwei fast gleich große Zahlen voneinander abgezogen werden, sind weniger signifikante Stellen anzugeben als bei den Ausgangszahlen.

Weitergedacht: Wie empfindlich das Ergebnis gegen kleine Messfehler ist, zeigt folgende Überschlagsrechnung: Wenn Sie das scheinbare Gewicht des Rings statt mit 0,150 N mit 0,149 N gemessen hatten (das ist eine Abweichung von nur 0,7 %), dann erhalten Sie für die relative Dichte einen Wert von 17,5 – und daraus lässt sich kaum darauf schließen, dass der Ring aus reinem Gold besteht. Um verlässlichere Angaben zu erhalten, benötigt man somit eine genauere Waage.

Übung 10.6: Ein massiver Block aus einem unbekannten Material hat ein Gewicht von 3 N und ein scheinbares Gewicht von 1,89 N, wenn er in Wasser eintaucht. Woraus besteht der Block? ◀

Das *scheinbare Gewicht* F'_G eines in ein Fluid eintauchenden Körpers ist die Differenz zwischen dem Gewicht $|\mathbf{F}_G|$ und der Auftriebskraft $|\mathbf{F}_A|$:

$$F'_G = |\mathbf{F}_G| - |\mathbf{F}_A|. \quad (10.11)$$

Daraus lassen sich für $|\mathbf{F}_G|$ folgende Fälle ableiten:

Für $F'_G > 0$ sinkt der Körper in dem Fluid.

Für $F'_G = 0$ schwimmt der Körper in dem Fluid.

Für $F'_G < 0$ schwimmt der Körper auf dem Fluid.

Die folgenden Beispiele illustrieren weitere Aspekte des archimedischen Prinzips: In Beispiel 10.7 wird anhand der Dichte einer Person ihr Körperfettanteil bestimmt, Beispiel 10.8 zeigt ein scheinbares Paradoxon, und in Beispiel 10.9 bestimmt man die Eintauchtiefe eines Eisbergs.

Wenn wir in der Rechnung in Beispiel 10.9 ρ_{SW} durch die Dichte ρ_F eines beliebigen Fluids austauschen, können wir den eintauchenden Teil eines Körpers bestimmen, der in einem beliebigen Fluid treibt. Nach Beispiel 10.9 ist der eintauchende Bruchteil eines schwimmenden Körpers gleich dem Verhältnis aus der Dichte des Körpers und der Dichte des Fluids:

$$\frac{V_u}{V} = \frac{\rho}{\rho_F}. \quad (10.12)$$

Beispiel 10.7: Messung des Körperfetts

Sie wollen sich an einem Fitnessprogramm beteiligen. Um Ihre Ausgangsfitness zu bestimmen, wird bei Ihnen der prozentuale Anteil an Fett im Körpergewebe gemessen. Dieser Anteil lässt sich schätzen, indem man die mittlere Dichte des Körpers bestimmt. Fett ist weniger dicht als Muskeln oder Knochen. Die Dichte von Fett (ca. $0,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) ist geringer als die Dichte des sonstigen Körpergewebes (d.h. alles außer Fett), die etwa $1,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ beträgt. Bei der Dichtebestimmung misst man das scheinbare Gewicht des Körpers, während er vollständig in Wasser eingetaucht ist. Dabei muss man komplett ausatmen, sodass die Lunge keine Luft mehr enthält (in der Praxis wird das Volumen der noch in der Lunge verbliebenen Luft geschätzt und die Rechnung entsprechend korrigiert). Nehmen Sie an, dass Ihr scheinbares Gewicht beim Eintauchen in Wasser 5 % Ihres Gewichts beträgt. Welchen prozentualen Anteil an Körperfett können Sie damit berechnen?

Problembeschreibung: Das Gesamtvolumen der Person setzt sich aus dem Volumen des Fettgewebes plus dem Volumen des sonstigen Körpergewebes zusammen, die Gesamtmasse ist die Summe aus der Masse des Fettgewebes plus der Masse des sonstigen Körpergewebes. Volumen und Dichte hängen über $m = \rho V$ zusammen. Der Fettanteil f_{Fett} ist gleich der Masse des Fetts, geteilt durch die Gesamtmasse, und der Anteil des sonstigen Körpergewebes ist gleich dessen Masse, geteilt durch die Gesamtmasse. Die Summe der beiden Anteile muss 1 ergeben.

Lösung: 1. Mit den Gleichungen 10.2 und 10.11 lässt sich die relative Dichte Ihres Körpers (im Verhältnis zur Dichte ρ_W von Wasser) bestimmen:

$$\frac{\rho}{\rho_W} = \frac{F_G}{F_G - F'_G} = \frac{F_G}{F_G - 0,05 F_G} = 1,05$$

2. Ihr Gesamtkörpervolumen ist gleich dem Volumen des Fetts plus dem Volumen des sonstigen Körpergewebes:

$$V_{\text{ges}} = V_{\text{Fett}} + V_{\text{sonst}}$$

3. Da die Masse das Produkt von Dichte und Volumen ist, ergibt sich das Volumen als Quotient von Masse und Dichte. Setzen Sie die entsprechenden Verhältnisse von Masse

zu Dichte für jedes Volumen in das Ergebnis aus Schritt 2 ein:

$$\frac{m_{\text{ges}}}{\rho} = \frac{m_{\text{Fett}}}{\rho_{\text{Fett}}} + \frac{m_{\text{sonst}}}{\rho_{\text{sonst}}}$$

4. Die Masse des Fetts ist $f_{\text{Fett}} m_{\text{ges}}$ (mit dem Fettanteil f_{Fett}), die Masse des sonstigen Körpergewebes ist $f_{\text{sonst}} m_{\text{ges}}$ (mit dem Anteil f_{sonst} des sonstigen Körpergewebes). Setzen Sie die daraus erhaltenen Ausdrücke für m_{Fett} und m_{sonst} in das Ergebnis aus Schritt 3 ein:

$$\frac{m_{\text{ges}}}{\rho} = \frac{f_{\text{Fett}} m_{\text{ges}}}{\rho_{\text{Fett}}} + \frac{f_{\text{sonst}} m_{\text{ges}}}{\rho_{\text{sonst}}}$$

5. Der Fettanteil plus der Anteil an sonstigem Gewebe muss 1 ergeben:

$$f_{\text{Fett}} + f_{\text{sonst}} = 1$$

6. Teilen Sie beide Seiten des Ergebnisses aus Schritt 4 durch die Gesamtmasse m_{ges} und setzen Sie $1 - f_{\text{Fett}}$ für f_{sonst} ein:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f_{\text{Fett}}}{\rho_{\text{Fett}}} + \frac{(1 - f_{\text{Fett}})}{\rho_{\text{sonst}}}$$

7. Lösen Sie das Ergebnis aus Schritt 6 nach f_{Fett} auf:

$$f_{\text{Fett}} = \frac{1 - (\rho_{\text{sonst}}/\rho)}{1 - (\rho_{\text{sonst}}/\rho_{\text{Fett}})}$$

8. Setzen Sie das Ergebnis für ρ aus Schritt 1 in das Ergebnis aus Schritt 7 ein und lösen Sie nach f_{Fett} auf:

$$f_{\text{Fett}} = \frac{1 - (\rho_{\text{sonst}}/1,05 \rho_W)}{1 - (\rho_{\text{sonst}}/\rho_{\text{Fett}})} = \frac{1 - (1,1/1,05)}{1 - (1,1/0,9)} = 0,21$$

9. Wandeln Sie die Zahl in eine Prozentangabe um:

$$100 \% \cdot 0,21 = \boxed{21 \%}$$

Kommentar: Die Körperfettmessung bei elektronischen Personenwaagen funktioniert nach einem anderen, aber weniger genauen Verfahren. Dabei nutzt man aus, dass sich die elektrische Leitfähigkeit von wasserhaltigem Gewebe, Fett und Knochen unterscheidet. Unter Berücksichtigung verschiedener Modellannahmen lässt sich dann aus dem über die Fußsohlen gemessenen Körperwiderstand der Fettanteil berechnen.

Übung 10.7: Das scheinbare Gewicht von Max beim Eintauchen in das Wasserbecken beträgt null. Wie hoch ist dann sein Körperfettanteil? ◀ ■

Beispiel 10.8: Was wiegt am meisten?

Betrachten Sie die in Abbildung 10.14 gezeigten Becher. Alle Becher sind bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Auf der Wasseroberfläche von Becher A schwimmt ein Spielzeugboot. Auf dem Grund von Becher B befindet sich ein zweites Spielzeugboot, das gekentert und gesunken ist. Auf der Wasseroberfläche von Becher C schwimmt ein Eiswürfel. Im Wasser von Becher D schwimmt ein Holzklotz, der mit einem Fäddchen und etwas Superkleber am Boden des Bechers befestigt ist. In Becher E befindet sich nur Wasser. Die beiden Spielzeugboote, der Eiswürfel und der Holzklotz haben jeweils die gleiche Masse. Die Dichte des gesunkenen Boots ist doppelt so hoch wie die von Wasser, die Dichte des Holzklotzes ist halb so groß wie die von Wasser. Jeder der Becher ist auf einer Waage platziert. Ordnen Sie die Waagen nach ihrer Anzeige (die schwerste zuerst).

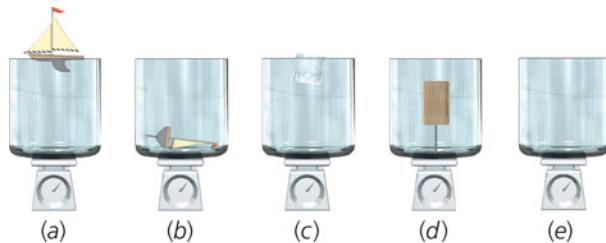


Abbildung 10.14 Alle Becher sind bis zum Rand mit Wasser gefüllt. In Becher A schwimmt ein Spielzeugboot, in Becher B ist ein gleiches Boot gesunken, in Becher C schwimmt ein Eiswürfel, in Becher D ist ein Holzklotz am Boden befestigt. Becher E enthält nur Wasser.

Problembeschreibung: Jede Waage zeigt das Gesamtgewicht des auf ihr platzierten Systems an. In jedem der Fälle besteht das System aus dem Becher, dem darin enthaltenen Wasser und dem Objekt, das sich in dem Wasser befindet oder auf seiner Oberfläche schwimmt. Becher E enthält das meiste Wasser. Die Auftriebskraft auf ein Objekt ist gleich der Gewichtskraft des Fluids, das durch das Objekt verdrängt wird; ein untergetauchtes Objekt verdrängt sein eigenes Gewicht an Wasser, ein schwimmendes Objekt verdrängt sein eigenes Gewicht an Wasser. Die Wassermenge in jedem Becher ist so groß wie die Wassermenge in Becher E abzüglich der Menge, die durch das schwimmende oder untergetauchte Objekt verdrängt wird.

Lösung: 1. Wir bezeichnen mit $F_{G,A}$ die von Waage A, mit $F_{G,B}$ die von Waage B angezeigte Gewichtskraft usw. Mit $F_{G,O}$ bezeichnen wir die Gewichtskraft der einzelnen Objekte (sie ist jeweils gleich). Ein schwimmendes Objekt verdrängt sein eigenes Gewicht an Wasser. Berechnen Sie das Gewicht des Wassers, das durch die einzeln schwimmenden Objekte verdrängt wird: Das Gewicht des durch das schwimmende Boot verdrängten Wassers ist $F_{G,O}$, das Gewicht des durch den schwimmenden Eiswürfel verdrängten Wassers ist ebenfalls $F_{G,O}$.

ZUM VERSTÄNDNIS

2. Ein untergetauchtes Objekt verdrängt sein eigenes Gewicht an Wasser. Berechnen Sie das Gewicht des Wassers, das durch die einzelnen untergetauchten Objekte verdrängt wird: Das Gewicht des durch den untergetauchten Holzklotz verdrängten Wassers ist $2F_{G,O}$, das Gewicht des durch das untergetauchte Boot verdrängten Wassers ist $\frac{1}{2}F_{G,O}$.

3. In jedem der Fälle besteht das System auf der Waage aus einem Becher, dem darin befindlichen Wasser und eventuell dem Objekt, das darauf schwimmt oder darin eingetaucht ist. Das Gewicht des Wassers in jedem der Becher ist gleich dem Gewicht $F_{G,E}$ des Wassers in Becher E abzüglich des Gewichts des durch das Objekt verdrängten Wassers. Berechnen Sie das Gesamtgewicht eines jeden Systems:

Becher	Gewicht
A	$F_{G,ges} = (F_{G,E} - F_{G,O}) + F_{G,O} = F_{E,O}$
B	$F_{G,ges} = (F_{G,E} - \frac{1}{2}F_{G,O}) + F_{G,O} = F_{E,O} + \frac{1}{2}F_{G,O}$
C	$F_{G,ges} = (F_{G,E} - F_{G,O}) + F_{G,O} = F_{E,O}$
D	$F_{G,ges} = (F_{G,E} - 2F_{G,O}) + F_{G,O} = F_{E,O} - F_{G,O}$
E	$F_{G,ges} = (F_{G,E} - 0) + 0 = F_{E,O}$

4. Auf den Waagen wird das Gesamtgewicht des Systems angezeigt:

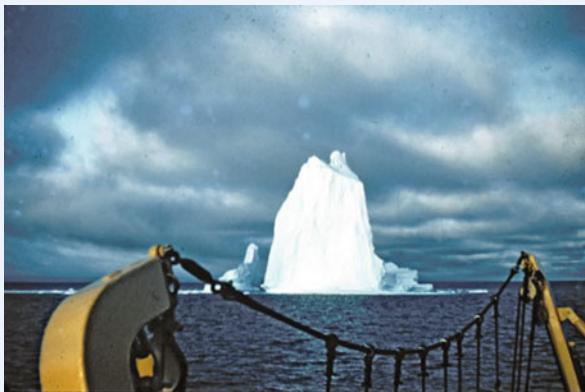
Die Waage mit dem gesunkenen Boot (B) hat die höchste, die Waage mit dem am Becherboden befestigten Holzklotz (D) die niedrigste Anzeige. Die Anzeigen der anderen drei Waagen sind gleich.

Plausibilitätsprüfung: Der Wasserdruk am Boden der einzelnen Becher ist jeweils gleich, weil der Wasserstand in den Bechern jeweils gleich hoch ist. Das Wasser drückt mit gleicher Kraft auf den Boden der Becher A, C, D und E. Daher müssen die Waagen unter den Bechern A, C und E den gleichen Wert anzeigen. Für Becher D gibt es neben der nach unten gerichteten Kraft des Wassers eine nach oben gerichtete Kraft, die von dem Fäddchen ausgeübt wird; die Anzeige von Waage D ist daher geringer als die der Waagen A, C und E. In Becher B drückt das versunkene Boot mit einer Kraft pro Einheitsfläche auf den Boden, die den herrschenden Wasserdruk übertrifft. Daher hat Waage B die höchste Anzeige von allen.

Weitergedacht: Das Rotationsschiffshebewerk in Schottland, das „Falkirk Wheel“, ist aus demselben Grund perfekt ausbalanciert, aus dem auch die Waagen A, C und E jeweils den gleichen Wert anzeigen. Solange die Wassertiefe in den beiden Kammern gleich ist und die Boote in den Kammern schwimmen (wenn denn ein Boot darin ist), bleibt das Hebwerk vollständig ausbalanciert. Daher ist auch nur ein geringer Energieaufwand nötig, um das Rad zu drehen.

Beispiel 10.9: Ein Eisberg

Bestimmen Sie den Anteil eines Eisbergs, der sich unterhalb der Meeressoberfläche befindet. (Der größte im Nordatlantik gesichtete Eisberg erhab sich etwa 168 m über den Meeresspiegel, also noch 10 m höher als die Türme des Kölner Doms. Er wurde 1957 in der Melville-Bucht vor Nordgrönland gesichtet.)



(© Mit Genehmigung der U.S. Coast Guard International Ice Patrol.)

Problembeschreibung Wir bezeichnen das Gesamtvolumen des Eisbergs mit V , das Volumen unterhalb des Meeresspiegels mit V_u . Das Gewicht des Eisbergs ist $\rho_{EB} V g$, die Auftriebskraft im Salzwasser ist $\rho_{SW} V_u g$. Die Dichten von Eis und Salzwasser können Sie in Tabelle 10.1 nachschlagen.

Lösung 1. Da der Eisberg sich im Gleichgewicht befindet, gleicht die Auftriebskraft seine Gewichtskraft genau aus:

$$F_G = F_A \quad \leftrightarrow \quad \rho_{EB} V g = \rho_{SW} V_u g$$

2. Lösen Sie nach V_u/V auf:

$$\begin{aligned} f &= \frac{V_u}{V} = \frac{\rho_{EB}}{\rho_{SW}} = \frac{0,92 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{1,025 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} \\ &= 0,898 = \boxed{0,90} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir haben alle schon einmal einen Eiswürfel in Süßwasser schwimmen sehen. Der größte Teil des Eiswürfels ist eingetaucht. Wir können im Wesentlichen dasselbe Ergebnis für einen Eisberg erwarten, der im Meer schwimmt. Das Ergebnis aus Schritt 2 erfüllt diese Erwartung. Da die Dichte von Salzwasser etwa 2 bis 3 % höher ist als die Dichte von Süßwasser, taucht Eis in Meerwasser nicht ganz so tief ein wie in Süßwasser.

10.4 Molekulare Phänomene

Bisher haben wir Fluide in diesem Kapitel als kontinuierliche Entitäten betrachtet. In diesem Abschnitt wollen wir nun die Kräfte auf einzelne Moleküle in Fluiden und an Grenzflächen zwischen Fluiden und ihrer Umgebung näher untersuchen. In einem beliebigen Fluid, das sich in einem zylinderförmigen Gefäß befindet, wie in Abbildung 10.15 gezeigt, wirken auf jedes Molekül des Fluids von allen Seiten Kräfte. Im Inneren des Fluids ist ein Fluidmolekül nur von Molekülen umgeben, die ebenfalls zum Fluid gehören, sodass sich die Kräfte im Gleichgewichtszustand gegenseitig aufheben. Diese Kräfte zwischen den Molekülen des Fluids beruhen auf elektrischen Anziehungskräften zwischen den einzelnen Atomen und Molekülen und bedingen so den Zusammenhalt des Fluids. Diese die Moleküle eines Fluids zusammenhaltende Kraft wird auch als **Kohäsionskraft** bezeichnet. An der Grenzfläche zwischen Fluid und seiner Umgebung, z. B. der Luft oberhalb des Gefäßes oder der Innenwand des Gefäßes, werden die Kräfte auf die Fluidmoleküle an den Rändern des Fluids nicht mehr durch andere Fluidmoleküle kompensiert (Abbildung 10.15).

Um ein Molekül an den Rand des Fluids zu bringen, muss eine Kraft gegen die Kohäsionskraft aufgewendet werden, d. h., zur Vergrößerung der Oberfläche des Fluids wird eine Arbeit verrichtet. Den Quotienten aus der benötigten Arbeit pro Oberflächenzuwachs bezeichnet man auch als **Oberflächenenergie** oder **Oberflächenspannung**. Der Gleichgewichtszustand stellt sich ein, wenn das Fluid bei vorgegebenem Volumen die Form eingenommen hat, die die Oberflächenspannung minimiert. Diesem Gesetz folgend sind z. B. Regentropfen kugelförmig, da die Kugelform bei gegebenem Wasservolumen die kleinste Oberfläche hat.

Auch zwischen Molekülen auf beiden Seiten einer Grenzfläche wirken Kräfte. Die anziehenden Kräfte zwischen diesen Molekülen können durch atomare, elektrische Wechselwirkungen

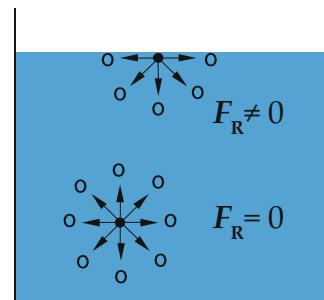


Abbildung 10.15 Auf einzelne Moleküle in einem Fluid wirken unterschiedliche Kräfte je nachdem, an welcher Position im Fluid sie sich befinden. Bei allen Molekülen innerhalb des Fluids gleichen sich diese Kräfte durch die isotropen Wechselwirkungen zwischen den Molekülen aus, bei Molekülen am Rand des Fluids ist dies aufgrund der fehlenden benachbarten Fluidmoleküle nicht möglich.

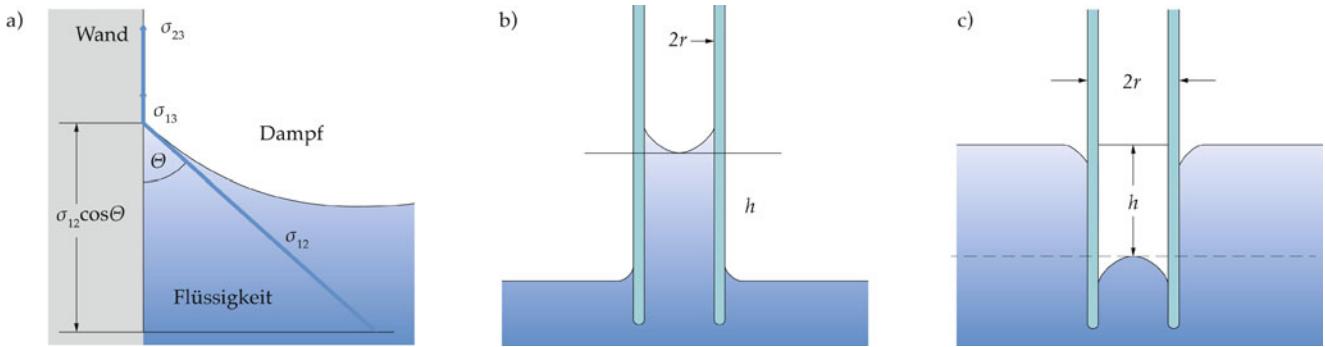


Abbildung 10.16 a) Durch die Adhäsion an der Wand steigt das Fluid bis zur Höhe h in der Kapillare und bildet an der Wand den Kontaktwinkel θ aus. b) Bei benetzenden Fluiden bildet sich ein Meniskus aus, die sogenannte Kapillarasension. c) Bei nicht benetzenden Fluiden krümmt sich die Oberfläche genau entgegengesetzt, es kommt zur Kapillardepression.

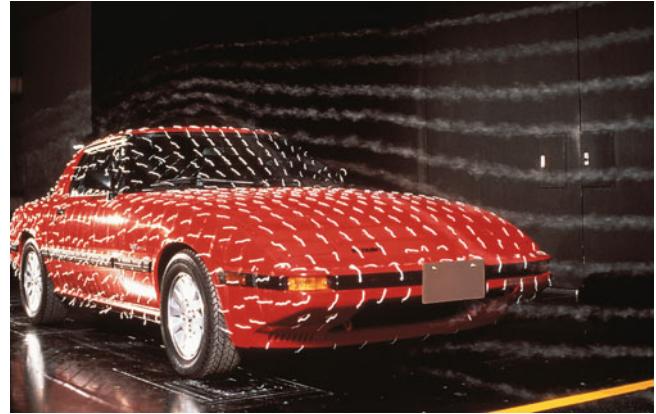
oder auch durch die Oberflächenrauigkeit eines Festkörpers an der Grenzfläche bedingt sein. Die anziehenden Kräfte zwischen einem Fluid und einer anderen Substanz an ihrer gemeinsamen Grenzfläche werden **Adhäsionskräfte** genannt. Ähnlich wie bei der Kohäsionskraft muss man demnach Arbeit am Fluid verrichten, um es von der anderen Substanz abzutrennen.

Das Zusammenspiel von Kohäsion und Adhäsion kann man sehr gut an einer Kapillare, einem dünnen zylinderförmigen Röhrchen mit Radius r , beobachten: Taucht man ein Ende dieser Kapillare in das Gefäß aus Abbildung 10.16, so steigt die Flüssigkeit in der Kapillare bis zu einer bestimmten Höhe h an, die sich einstellt, wenn die potentielle Energie der Flüssigkeitssäule aufgrund ihres Gewichts gerade so groß ist wie die Oberflächenspannung:

$$h = \frac{\sigma \cdot \cos \theta}{r \cdot g \cdot \rho}, \quad (10.13)$$

wobei σ die Oberflächenspannung des Fluids, θ der Kontaktwinkel wie in Abbildung 10.16a dargestellt, g die Gravitationskonstante und ρ die Dichte der Flüssigkeit sind.

Überwiegen die Adhäsionskräfte zwischen der Kapillarwand und der Flüssigkeit, nennt man die Flüssigkeit eine *benetzende* Flüssigkeit. Ihre Oberfläche in der Kapillare ist dann gekrümmt, wie in Abbildung 10.16b gezeigt, und es bildet sich eine Kapillarasension. Ein typisches Beispiel ist Wasser. Sind die Kohäsionskräfte zwischen den Flüssigkeitsmolekülen stärker, ist die Flüssigkeit *nicht benetzend*, und es bildet sich eine sogenannte Kapillardepression aus, wie in Abbildung 10.16c dargestellt. Dies kann man z. B. bei flüssigem Quecksilber beobachten.



Windkanaluntersuchung an einem Auto. Die an die Karosserie angeklebten Fäden und die Rauchspuren in der Luft zeigen die Strömung der Luft um die Karosserie. Der anhand solcher Untersuchungen bestimmte Luftwiderstand von bewegten Objekten wie Autos oder Flugzeugen kann oft durch kleine Formänderungen erheblich reduziert werden. (© Takeshi Takahara/Photo Researchers, Inc.)

der Rauch beginnt zu verwirbeln. Turbulente Strömung ist sehr schwierig zu beschreiben, selbst wenn man sich auf rein qualitative Abschätzungen beschränkt. Tritt keine Turbulenz auf, fließt das Fluid stationär entlang von sich gegenseitig nicht schneidenden Stromlinien. Diese Strömung nennt man auch **laminare Strömung**. Leistungsfähige Computerprogramme, mit denen man die Stromlinien beispielsweise von Luft simulieren kann, die einen Körper umströmt, sind von großem Wert beispielsweise für Automobildesigner.

10.5 Bewegte Fluide ohne Reibung

Die Strömung eines Fluids kann sehr kompliziert sein. Betrachten wir zum Beispiel den aufsteigenden Rauch von einer Zigarette. Zunächst steigt der Rauch in einer gleichmäßigen Strömung nach oben, sehr bald aber setzen Turbulenzen ein, und

Die Kontinuitätsgleichung

Zunächst gehen wir davon aus, dass ein Fluid keinen Reibungskräften ausgesetzt ist. Abbildung 10.17 zeigt eine mit einem Fluid gefüllte Röhre, deren Querschnitt sich langsam verengt. Das Fluid strömt nichtturbulent und reibungsfrei von links nach rechts, und zwar so, dass in ein Volumen auf der linken Sei-

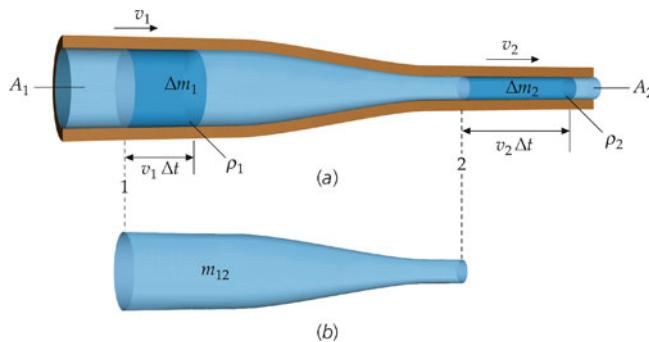


Abbildung 10.17 Ein Fluid fließt durch eine Röhre mit variablem Querschnitt. Die schattierten Flächen entsprechen gleichen Volumina.

te pro Zeiteinheit das gleiche Flüssigkeitsvolumen eintritt, wie rechts wieder ausfließt. Der schattierte Teil links zeigt die Fluidmenge, die in der Zeit Δt den Querschnitt 1 durchfließt. Wenn das Fluid auf dieser Fläche die Geschwindigkeit v_1 hat und die Querschnittsfläche der Röhre an dieser Stelle A_1 beträgt, dann wird sich in der Zeit Δt das Volumen

$$\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$$

durch die Querschnittsfläche bewegen. Entsprechend fließt während derselben Zeit Δt das Volumen ΔV_2 durch den Querschnitt A_2 :

$$\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t.$$

Wenn $\Delta V_1 = \Delta V_2$, dann folgt

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$

Man bezeichnet die Größe $I_V = A v$ als **Volumenstrom**. Der Volumenstrom hat die Dimension eines Volumens pro Zeit. Bei der Strömung eines inkompressiblen Fluids (d. h. eines Fluids, das sich nicht verdichten lässt) ist der momentane Volumenstrom durch jede Querschnittsfläche senkrecht zur Strömung des Fluids gleich; in einer stationären Strömung ist der Volumenstrom auch zeitlich konstant:

$$I_V = A v. \quad (10.14)$$

VOLUMENSTROM

In einem inkompressiblen Fluid ist die Dichte im gesamten Volumen des Fluids gleich. Dies trifft für die allermeisten Flüssigkeiten zu, denn ihre Dichte variiert in guter Näherung nicht. Deshalb ist analog zum Volumenstrom ein **Massenstrom** definiert:

$$I_M = \rho A V.$$

Für (inkompressible) Flüssigkeiten gilt $A_1 v_1 = A_2 v_2$ oder

$$I_V = A v = \text{konstant}. \quad (10.15)$$

KONTINUITÄTSGEGLICHUNG

Gleichung 10.15 heißt **Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten**. Sie taucht in ähnlicher Form auch in der Elektrodynamik auf (Abschnitt 22.1). Die Kontinuitätsgleichung lässt sich für *kompressible* Fluide anhand der räumlichen Unterschiede des Massenstroms zwischen den Querschnitten beschreiben:

$$I_{M,1} - I_{M,2} = \frac{dm_{12}}{dt}.$$

Bleibt die Bewegung eines Fluids bei allen Punkten konstant (d. h. ändern sich die Strömungsverhältnisse in dem Fluid nicht mit der Zeit), spricht man von einer **stationären Strömung**. In einer stationären Strömung ist dm_{12}/dt null. In einer stationären Strömung sind Massen- und Volumenstromdichte jeweils in allen Querschnittsflächen gleich und zeitlich konstant.

Übung 10.8: Das Blut fließt in einer Schlagader mit einem Radius von 1,0 cm mit einer Geschwindigkeit von 30 cm/s. Wie groß ist der Volumenstrom? ◀

Übung 10.9: Das Blut fließt von einer großen Arterie mit dem Radius 0,30 cm, in der die Strömungsgeschwindigkeit 10 cm/s beträgt, in eine Ader, deren Radius aufgrund von Ablagerungen auf den Gefäßwänden (Arteriosklerose) auf 0,20 cm verengt ist. Wie schnell fließt das Blut im Bereich der Verengung? ◀

Beispiel 10.10: Wasserversorgung

Ein großes Rohr mit einem Radius r_1 wird in einer Straße verlegt und soll fünf Häuser mit Wasser aus der nahe gelegenen Quelle versorgen. Zu jedem Haus zweigt von dem Hauptrohr ein Rohr mit dem Radius r_2 ab. a) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 muss das Wasserwerk das Wasser ins Hauptrohr strömen lassen, damit die Häuser mit Wasser mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit v_2 versorgt werden? b) Welches Verhältnis müssen die beiden Radien haben, damit $v_2 > v_1$?

Problembeschreibung: Gehen Sie davon aus, dass es sich um einen stationären Wasserstrom handelt und benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Zeichnen Sie eine Skizze mit dem einströmenden Fluss und dem Fluss aus einem der fünf Rohre (Abbildung 10.18).



Abbildung 10.18 Flussskizze.

2. Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung auf:

$$I_{\text{ein}} = A_1 v_1 = 5 \cdot (A_2 v_2) = 5 \cdot I_{\text{aus}}$$

3. Setzen Sie die gegebenen Querschnittsflächen und Geschwindigkeiten ein und lösen Sie nach v_1 auf:

$$A_1 v_1 = \pi r_1^2 v_1 = 5 \cdot \pi r_2^2 v_2 = 5 \cdot (A_2 v_2)$$

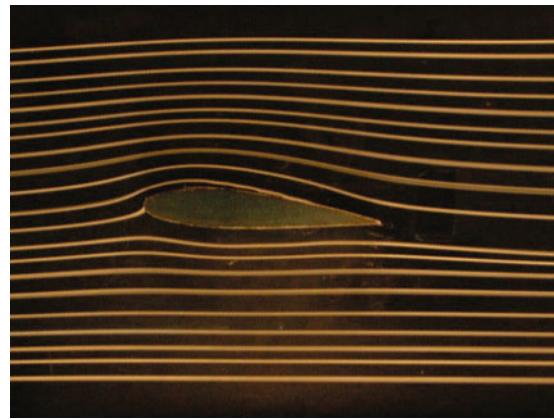
$$v_1 = \boxed{5 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot v_2}$$

Teilaufgabe b

Wenn $v_2 > v_1$ sein soll, kann man anhand des Ergebnisses von Schritt 3 aus Teilaufgabe a das Verhältnis der Radien ablesen, für das $5 \cdot (r_2/r_1)^2 < 1$ ist:

$$\boxed{v_1 < v_2, \quad \text{wenn} \quad \frac{r_1}{r_2} > \sqrt{5}}$$

Plausibilitätsprüfung: Man erwartet, dass der Rohrdurchmesser und damit auch der Radius vom zweiten Rohr kleiner sein muss als der des ersten Rohrs, da der Volumenstrom konstant sein muss und sich daher bei einem kleineren Querschnitt die Fließgeschwindigkeit vergrößert.



Stromlinien in Luft lassen sich beispielsweise mit Rauchspuren sichtbar machen. Bei einer laminaren Strömung bewegen sich die Teilchen eines Fluids entlang der Stromlinien. (© Holger Babinsky. 2003 Phys. Educ. 38, 497–503.)

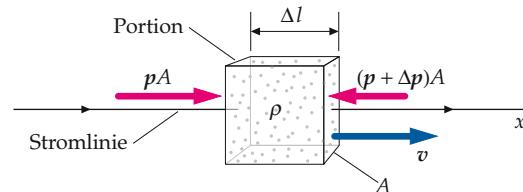


Abbildung 10.19 Eine Fluidportion bewegt sich entlang einer Stromlinie in einen Bereich mit geringerem Druck.

Die Bernoulli-Gleichung

Die Bernoulli-Gleichung, aufgestellt von dem Schweizer Mathematiker und Physiker Daniel Bernoulli (1700–1782), verknüpft Druck, Höhe und Strömungsgeschwindigkeit eines *nichtviskosen, inkompressiblen* Fluids in laminarer Strömung. „Inkompressibel“ bedeutet, dass der Druck nicht in Verdichtung der Flüssigkeit, sondern in Bewegung umgesetzt wird; „nichtviskos“ bedeutet, dass kein Strömungswiderstand aufgrund innerer Reibung (Viskosität) des Fluids auftritt. Bei einer laminaren Strömung bewegen sich die Teilchen des Fluids entlang von **Stromlinien**, d. h. geraden oder nur wenig gekrümmten Linien, die sich nicht schneiden. Die Bernoulli-Gleichung lässt sich herleiten, indem man das zweite Newton'sche Axiom auf eine infinitesimal kleine Fluidmenge anwendet. Wenn eine solche „Fluidportion“ einen Bereich mit geringerem Druck erreicht, wird sie schneller, da der Druck hinter der Fluidportion (in Strömungsrichtung betrachtet), der die Portion vorwärts drückt, größer ist als der Druck vor der Fluidportion, der ihrer Bewegung entgegenwirkt.

Wenden wir das zweite Newton'sche Axiom auf eine Luftportion mit der Masse m an (Abbildung 10.19), die sich entlang einer horizontalen Stromlinie bewegt, so erhalten wir

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Das Fluid hat die Dichte ρ , die würfelförmige Portion hat die Fläche A senkrecht zur Strömungsrichtung und die Dicke Δl . Damit ist das Volumen der Fluidportion $V = A \Delta l$, ihre Masse durch $m = \rho A \Delta l$ gegeben. Die Kraft F entsteht durch den Druck p hinter und den leicht abweichenden Druck $p + \Delta p$ vor der Portion. Für die Kraftkomponente F in x -Richtung gilt

$$F = p A - (p + \Delta p) A = -A \Delta p.$$

Da die Fluidportion klein ist, lässt sich der Druckunterschied mithilfe des Differenzials ausdrücken:

$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{dp}{dx}$$

und damit

$$\Delta p = \frac{dp}{dx} \Delta l.$$

Setzt man dies für F und m im zweiten Newton'schen Axiom ein, so ergibt sich

$$-A \frac{dp}{dx} \Delta l = \rho A \Delta l \frac{dv}{dt}.$$

Dies lässt sich vereinfachen zu

$$-dp = \rho \frac{dv}{dt} dx.$$

Wegen $dx/dt = v$ wird daraus

$$dp = -\rho v dv.$$

Eine Integration beider Seiten ergibt

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho \int_{v_1}^{v_2} v dv.$$

Bei diesem Ausdruck haben wir die Dichte als Faktor vor das Integral gezogen. Dieser Ausdruck und die weitere Herleitung gelten daher nur für die Fälle, in denen die Dichte konstant bleibt. Die Berechnung der Integrale ergibt

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Eine Umordnung ergibt die Bernoulli-Gleichung für die Strömung entlang einer horizontalen Stromlinie:

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2. \quad (10.16)$$

Die Bernoulli-Gleichung für eine beliebige (nicht horizontale) Stromlinie wird in Aufgabe 10.28 hergeleitet. Es ergibt sich:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2. \quad (10.17a)$$

BERNOULLI-GLEICHUNG

Darin sind h_1 und h_2 die Anfangs- bzw. Endhöhe der Stromlinie. Die Bernoulli-Gleichung lässt sich auch in folgender Form angeben:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}. \quad (10.17b)$$

Die Bernoulli-Gleichung besagt, dass diese Kombination von Druck, Höhe und Strömungsgeschwindigkeit für jeden Punkt entlang einer stationären Strömung denselben Wert hat. Die Gleichung gilt für die stationäre Strömung eines inkompressiblen, nichtviskosen Fluids.

Bis zu einem gewissen Grad lässt sich die Bernoulli-Gleichung auch auf kompressible Fluide wie Gase anwenden. Für viskose Flüssigkeiten, bei denen die innere Reibung nicht vernachlässigbar ist, muss man die Gleichung jedoch modifizieren. Wir kommen darauf in Abschnitt 10.6 zurück.

Die Gleichung hat zahlreiche Folgerungen, von denen wir im Folgenden einige besprechen werden. Eine besondere Anwendung gilt für Fluide in Ruhe. Dann ist nämlich $v_1 = v_2 = 0$, und man erhält

$$p_1 - p_2 = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g \Delta h.$$

Dabei gibt Δh den Höhenunterschied zwischen den beiden betrachteten Punkten an. Dieser Zusammenhang ist uns schon als Gleichung 10.7 begegnet.

In Beispiel 10.11 tritt das Wasser aus dem Loch eines Wassertanks mit derselben Austrittsgeschwindigkeit aus, die es beim freien Fall aus der Höhe h hätte. Dieser Zusammenhang wurde von Torricelli bereits 1640 durch Anwendung der Fallgesetze auf die auslaufende Flüssigkeit hergeleitet. Diese Erkenntnis wird daher als *Gesetz von Torricelli* oder Torricelli'sche Ausflussformel bezeichnet. Die Austrittsgeschwindigkeit ist unabhängig davon, ob das Wasser an der Seite oder am Boden austritt, wenn nur der Wasserspiegel die gleiche Höhe Δh über dem Loch hat.

Beispiel 10.11: Die Torricelli'sche Ausflussformel

Ein großer, oben offener Wassertank hat an einer Seite ein kleines Loch in einer Höhe Δh unterhalb der Wasseroberfläche. Mit welcher Geschwindigkeit strömt das Wasser aus dem Loch heraus?

Problembeschreibung: Die Stromlinien beginnen an der Wasseroberfläche und verlaufen durch das Loch. Wir wenden die Bernoulli-Gleichung auf die Querschnittsflächen des Tanks in der Höhe h_a und h_b in Abbildung 10.20 an. Da der Durchmesser des Lochs viel kleiner ist als der Durchmesser des Tanks, können wir die Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche (also in Höhe h_a) vernachlässigen.

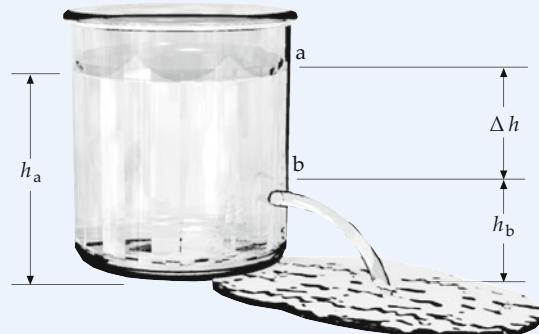


Abbildung 10.20 Skizze des Tanks mit der Wasserhöhe h_a und der Höhe des Lochs h_b .

Lösung: 1. Die Bernoulli-Gleichung mit $v_a = 0$ ergibt:

$$p_a + \rho g h_a + 0 = p_b + \rho g h_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2$$

2. Die Flächen beim Wasserstand a und b sind gegen die Atmosphäre hin offen, daher ist entlang beider Flächen der Druck gleich dem Luftdruck p_{at} :

$$p_a = p_{at} \quad \text{und} \quad p_b = p_{at}$$

und damit

$$p_{at} + \rho g h_a + 0 = p_{at} + \rho g h_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2$$

3. Lösen Sie das Ergebnis aus Schritt 2 nach der Geschwindigkeit v_b des ausfließenden Wassers auf:

$$v_b^2 = 2g(h_a - h_b) = 2g\Delta h$$

und damit

$$v_b = \sqrt{2g\Delta h}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir können diese Aufgabe auch direkt lösen, indem wir die mechanische Energieerhaltung anwenden (mit dem Wasser und der Erde als System). Die Masse m des Wassers, das innerhalb des kurzen Zeitraums Δt aus dem Loch des Wassertanks herausläuft, ist gleich der Masse, die im oberen Teil des Tanks „verschwunden“ ist. Damit haben wir für die Abnahme der potentiellen Energie $m g \Delta h$ und für die Zunahme der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m v^2$. Gleichsetzen dieser Ausdrücke und Auflösen nach v ergibt das in Schritt 3 erhaltene Ergebnis.

Übung 10.10: Das aus dem Tank ausfließende Wasser wird sofort vertikal nach oben geleitet. Wie hoch spritzt es dann? ◀

Weitergedacht: Einen Springbrunnen, der von einem höher gelegenen Reservoir gespeist wird, nennt man einen artesischen Brunnen. Der Name leitet sich von der französischen Gegend Artois ab, wo durch besondere geologische Gegebenheiten eine solche natürliche Springquelle gefunden wurde. ■

Frage 10.1

In einem olympischen Schwimmbecken wird das Wasser kontinuierlich umgewälzt und gereinigt. Das Wasser tritt durch Unterwasserdüsen wieder in das Becken ein. Die Strömung aus den Düsen verläuft fast durch die gesamte Beckenlänge, bevor sie dissipiert. Da das einströmende Wasser immer mehr an Geschwindigkeit verliert, scheint die Bernoulli-Gleichung (Gleichung 10.16) nahezulegen, dass der Druck in der Wassерströmung steigt. Ist das so?

Der Venturi-Effekt

Abbildung 10.21 zeigt eine horizontale Röhre mit einer Verengung, die von einem Fluid durchflossen wird. Da beide Teile der Röhre sich auf derselben Höhe befinden, gilt $h_1 = h_2$ in Gleichung 10.17a. Dann hat die Bernoulli-Gleichung die Form

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}. \quad (10.18)$$

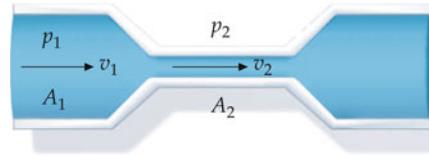


Abbildung 10.21 Verengung in einer Röhre, in der sich ein Fluid bewegt. Der Druck ist in der Verengung geringer als im weiten Teil der Röhre. Das Fluid bewegt sich dort schneller.



Die Luftströmung über dem Spoiler des Formel-1-Rennwagens erzeugt einen größeren Druck auf den Spoiler. Damit erhöht sich das effektive Gewicht des Fahrzeugs und somit die Bodenhaftung bei hohen Geschwindigkeiten. Zusätzlich führt der Venturi-Effekt zu einer Druckreduzierung auf der Unterseite des Fahrzeugs. Die damit verbundene abwärts gerichtete Kraft wird als Bodeneffekt bezeichnet. (© Schlegelmilch/Corbis)

In der Verengung ist die Querschnittsfläche A kleiner, daher muss die Geschwindigkeit v des strömenden Fluids zunehmen, damit der Volumenstrom $A v$ konstant bleibt. Wenn die Geschwindigkeit zunimmt, dann muss – entgegen der Intuition – der Druck abnehmen, damit auch $p + \frac{1}{2} \rho v^2$ konstant bleibt. Aus diesem Grund ist der Druck in der Engstelle geringer.

Wenn ein Fluid durch eine Verengung strömt, nimmt die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids zu und der Druck ab.

VENTURI-EFFEKT

Dieses Ergebnis wird oft als **Venturi-Effekt** bezeichnet, ein Rohr mit einer speziell geformten Verengung nennt man auch *Venturi-Düse* (nach dem italienischen Physiker Giovanni Battista Venturi, 1746–1822). Dieser durch Gleichung 10.18 beschriebene Effekt tritt in zahlreichen Situationen auf, bei denen keine Höhenunterschiede berücksichtigt werden müssen. Beispielsweise wird durch entsprechend geformte Spoiler bei einem Auto die Kraft erhöht, mit der das Fahrzeug an die Straße gepresst wird. Dies führt zu höheren Reibungskräften („Bodenhaftung“) und damit zu höheren möglichen Kurvengeschwindigkeiten. Wie man den Venturi-Effekt zur Geschwindigkeitsmessung von Fluiden ausnutzen kann, zeigt Beispiel 10.12.

Beispiel 10.12: Das Venturi-Rohr

Ein **Venturi-Rohr** dient zur Messung der Durchflussgeschwindigkeit eines inkompressiblen Fluids. Den prinzipiellen Aufbau zeigt Abbildung 10.22. Das Fluid mit der Dichte ρ_F fließt durch ein Rohr mit dem Querschnitt A_1 , das eine Verengung mit dem Querschnitt A_2 hat. Da das Fluid in dem verengten Bereich schneller strömt, ist dort der Druck geringer als in den anderen Bereichen des Rohrs. Die beiden Teile des Rohrs sind durch ein U-Rohr-Manometer verbunden, das teilweise mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ_U gefüllt ist. Die Druckdifferenz erzeugt eine Höhendifferenz Δh in den beiden Schenkeln des U-Rohr-Manometers, die man messen kann. Drücken Sie die Strömungsgeschwindigkeit v_1 des Fluids mithilfe der gemessenen Höhendifferenz Δh und den bekannten Größen ρ_F , ρ_U und $f = A_1/A_2$ aus.

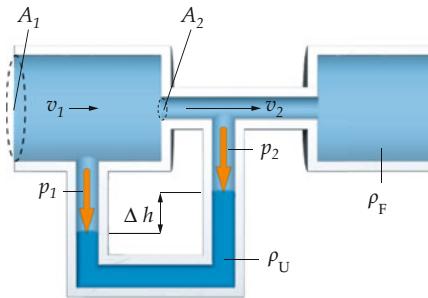


Abbildung 10.22 Aufbau des Venturi-Rohrs.

Problembeschreibung: Die Drücke p_1 und p_2 in den beiden Abschnitten des Rohrs hängen mit den Strömungsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 über die Bernoulli-Gleichung zusammen. Die Druckdifferenz in den beiden Abschnitten und die Höhendifferenz Δh hängen gemäß $p_1 - p_2 = \rho_U g \Delta h$ zusammen. Damit lässt sich v_2 nach der Kontinuitätsgleichung mithilfe von v_1 und den beiden Querschnittsflächen A_1 und A_2 ausdrücken.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

1. Die beiden Abschnitte des Rohrs befinden sich auf gleicher Höhe. Damit können Sie die Bernoulli-Gleichung anwenden.
2. Schreiben Sie die Kontinuitätsgleichung für die beiden Abschnitte auf. Lösen Sie nach v_2 auf.
3. Setzen Sie Ihr Ergebnis für v_2 in die Gleichung aus Schritt 1 ein. Damit erhalten Sie eine Gleichung für die Druckdifferenz $p_1 - p_2$.

ZUR ÜBUNG

4. Schreiben Sie die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ mithilfe der Höhendifferenz Δh der Flüssigkeit in dem U-Rohr-Manometer. Die Druckdifferenz ist gleich dem Druckabfall in einer Flüssigkeitssäule der Höhe Δh und dem Druckabfall in dem Fluid mit gleicher Höhendifferenz.

5. Setzen Sie die beiden Ausdrücke für $p_1 - p_2$ gleich und lösen Sie nach v_1 auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_F v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_F v_2^2$$

2.

$$v_2 A_2 = v_1 A_1$$

und damit

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = f v_1$$

3.

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{1}{2} \rho_F (v_2^2 - v_1^2) \\ &= \frac{1}{2} \rho_F (f^2 - 1) v_1^2 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \rho_U g \Delta h - \rho_F g \Delta h \\ &= (\rho_U - \rho_F) g \Delta h \end{aligned}$$

5.

$$\frac{1}{2} \rho_F (f^2 - 1) v_1^2 = (\rho_U - \rho_F) g \Delta h$$

und damit

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 (\rho_U - \rho_F) g \Delta h}{\rho_F (f^2 - 1)}}$$

Plausibilitätsprüfung: Zur Überprüfung unseres Ergebnisses betrachten wir die Dimensionen in dem Ausdruck für v_1 in Schritt 5. Das Verhältnis der beiden Dichten ist dimensionslos, ebenso das Verhältnis f der beiden Querschnittsflächen. Daher ist die Dimension des Ausdrucks für v_1 dieselbe wie in dem Ausdruck $\sqrt{2 g \Delta h}$. Die Dimension von g ist Länge durch (Zeit)², die Dimension von $g h$ ist daher (Länge)² durch (Zeit)². Die Dimension der Wurzel aus $g h$ ist somit Länge durch Zeit – die Dimension einer Geschwindigkeit. Nach der Dimensionsbetrachtung ist das Ergebnis aus Schritt 5 also korrekt.

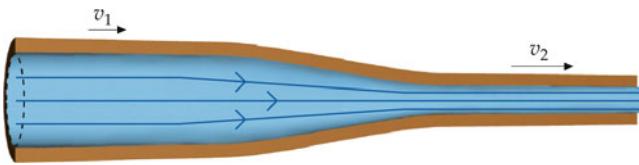


Abbildung 10.23 Die Stromlinien in einem Fluid geben die Richtung der Strömung an, ihr Abstand die Strömungsgeschwindigkeit.

Bei der in Abbildung 10.23 gezeigten Röhre deuten die eingezeichneten Linien eine Strömung an. Man nennt sie daher **Stromlinien**. Ihre Richtung gibt die Richtung der Strömung an, ihr Abstand symbolisiert die Strömungsgeschwindigkeit. Je enger die Stromlinien beisammenliegen, umso schneller strömt das Fluid; je weiter die Linien auseinanderliegen, umso geringer ist die Strömungsgeschwindigkeit. Da bei einer horizontalen Strömung der Druck zurückgeht, wenn die Geschwindigkeit steigt, gibt die Abnahme des Stromlinienabstands eine Druckabnahme an. Eine praktische Anwendung ist der Zerstäuber (Abbildung 10.24).

Frage 10.2

In dem Zerstäuber von Abbildung 10.24 ist das horizontale Röhrchen an dem Punkt verengt, an dem das senkrechte Röhrchen in den Flüssigkeitsbehälter abzweigt. Ist diese Verengung konstruktiv notwendig, oder ist das Röhrchen nur deshalb verengt, weil das senkrechte Röhrchen dünner ist als das horizontale? Erläutern Sie Ihre Antwort.

Mit dem Venturi-Effekt lässt sich auch das Fliegen eines Flugzeugs qualitativ verstehen. Die Form eines Flugzeugflügels (Abbildung 10.25) ist als Tragfläche ausgebildet: Unter normalen Umständen verlaufen die Stromlinien leicht gebogen entlang der Oberflächen des Flügels. (Beim unerwünschten „Abreißen“ der Luftströmung kann das Flugzeug abstürzen.) Wir wollen

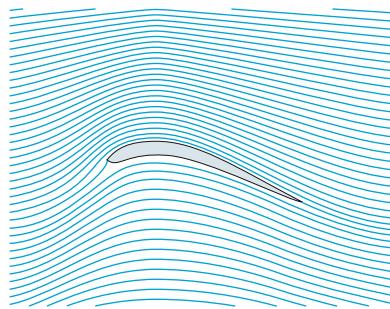


Abbildung 10.25 Die Tragfläche eines Flugzeugs ist so geformt, dass die Stromlinien sich biegen. Unter normalen Umständen folgen die Stromlinien der Krümmung der Tragfläche. Der im Bild gezeigte Flügel ist sehr dünn, wie der Flügel eines Raubvogels. Bei einer solchen Form entsteht besonders viel Auftrieb.

herleiten, wie die gebogenen Stromlinien einen „dynamischen Auftrieb“ erzeugen (d. h. eine nach oben gerichtete Kraft auf die Tragflächen). Dabei werden wir alle Druckänderungen vernachlässigen, die durch die Wirkung der Gravitation auf die Luft entstehen. Für die Herleitung verwenden wir ein Bezugssystem, das sich mit dem Flügel bewegt.

Eine Luftportion, die sich entlang einer gekrümmten Stromlinie bewegt, erfährt eine Zentripetalbeschleunigung in Richtung auf den Krümmungsmittelpunkt der Stromlinie. Bei den Stromlinien auf der Oberseite des Flügels ist diese Beschleunigung mehr oder weniger nach unten gerichtet. Die Gesamtkraft auf die Luftportion ist daher ebenfalls nach unten gerichtet. Man kann das so interpretieren, dass der Luftdruck unmittelbar oberhalb der Luftportion größer ist als der Luftdruck unmittelbar unterhalb der Luftportion. Insgesamt ist der Luftdruck in einem Punkt weit oberhalb des Flügels größer als in einem Punkt unmittelbar über der Oberseite des Flügels. Da der Druck weit oberhalb des Flügels der Umgebungsluftdruck ist, können wir folgern, dass der Druck auf der Oberseite des Flügels kleiner ist als der Umgebungsdruck. Eine Luftportion in einer Stromlinie unterhalb des Flügels erfährt ebenfalls eine abwärts gerichtete Beschleunigung. Der Druck weit unterhalb des Flügels ist damit geringer als der Druck direkt auf der Flügelunterseite. Da der Druck in einem Punkt weiter unterhalb des Flügels der Umgebungsluftdruck ist, können wir folgern, dass der Druck auf der Unterseite des Flügels größer ist als der Luftdruck. Der Auftrieb auf den Flügel wird dadurch verursacht, dass der Druck unmittelbar unterhalb des Flügels größer ist als unmittelbar oberhalb des Flügels.

Wir wenden nun das zweite Newton'sche Axiom ($F = ma$) auf eine Luftportion mit der Querschnittsfläche A und der Dicke Δr an, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt (Abbildung 10.26). Damit erhalten wir

$$(p + \Delta p)(A) - pA = (\rho A \Delta r) \frac{v^2}{r}.$$

Dabei ist r der Abstand der Luftportion vom Krümmungsmittelpunkt der Stromlinie, ρ ist die Luftdichte, p ist der Druck auf

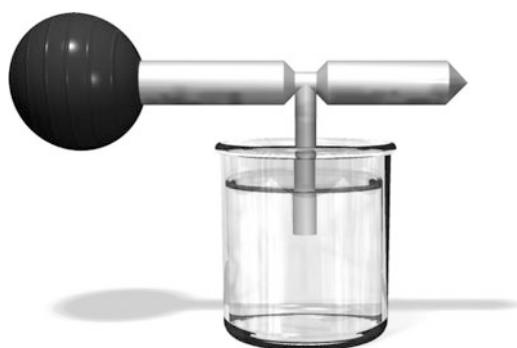


Abbildung 10.24 Wenn der Gummibalg an dem Zerstäuber gedrückt wird, wird Luft durch die Verengung des horizontalen Röhrchens gepresst. Dadurch sinkt dort der Druck bis unterhalb des gewöhnlichen Luftdrucks. Durch die entstehende Druckdifferenz wird die Flüssigkeit im Inneren des Zerstäubers in die Verengung gedrückt, gerät in den Luftstrom und wird in feine Tröpfchen zerstäubt. Ein ähnlicher Effekt tritt im Vergaser eines Verbrennungsmotors auf.

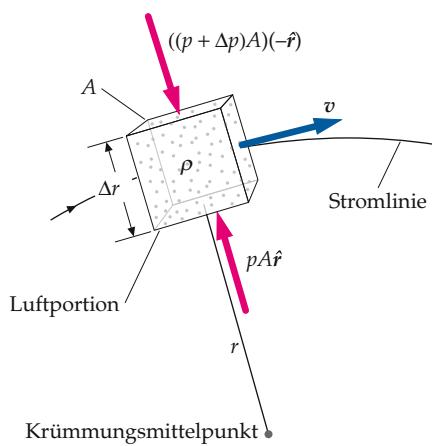


Abbildung 10.26 Die Zentripetalkraft auf eine Luftportion, die sich entlang einer gekrümmten Stromlinie bewegt, wird durch die Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Luftportion verursacht.

der dem Krümmungsmittelpunkt zugewandten Seite der Luftportion, und $p + \Delta p$ ist der Druck auf der gegenüberliegenden Seite der Luftportion. Durch Vereinfachung und Neuordnung der Gleichung ergibt sich

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = \rho \frac{v^2}{r}.$$

Für $\Delta r \rightarrow 0$ wird daraus

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r}. \quad (10.19)$$

Die Ableitung in dieser Gleichung ist eine partielle Ableitung, denn sie beschreibt nur die Änderung des Drucks senkrecht zu den Stromlinien bezüglich der r -Komponente. Der Druck variiert jedoch auch entlang der Stromlinien, d.h. entlang einer zweiten Raumkomponente.

Wir werden nun untersuchen, wie sich der Druck entlang einer Stromlinie verändert. Dazu betrachten wir eine kleine Luftportion, die sich entlang einer Stromlinie oberhalb des Flügels bewegt. Wenn die Luftportion sich vor dem Flügel befindet, erfährt sie den normalen Umgebungsluftdruck. Sobald die Luftportion sich in den Bereich oberhalb des Flügels hineinbewegt, so bewegt sie sich auch in einen Bereich verringerten Luftdrucks. Die Luftportion wird dann beschleunigt, da der Druck hinter der Portion, der sie nach vorne drückt, größer ist als der Druck vor der Portion, der sie nach hinten drückt. Bezeichnen wir einen Punkt weit vor dem Flügel mit 1 und einen Punkt auf derselben Stromlinie direkt oberhalb des Flügels mit 2. Dann sind die Drücke in diesen beiden Punkten durch die Bernoulli-Gleichung (Gleichung 10.16) miteinander verknüpft. (Die Bernoulli-Gleichung ist in diesem Zusammenhang jedoch nur näherungsweise gültig, weil Luft kein ideales, sondern ein kompressibles und viskoses Fluid ist.) Da Punkt 1 weit vor dem Flügel liegt, ist dort der Druck p_1 gleich dem Umgebungsluftdruck. Mit v_1 bezeichnen wir die Strömungsgeschwindigkeit der Luft in Punkt 1. Im letzten Absatz hatten wir gezeigt, dass der

Druck p_2 über dem Flügel kleiner sein muss als der Umgebungsdruck. Nach Gleichung 10.16 gilt für $p_2 < p_1$ $v_1 < v_2$. Damit besagt die Bernoulli-Gleichung, dass die Luftteilchen schneller werden, wenn sie den Bereich niedrigeren Drucks oberhalb des Flügels passieren. Außerdem werden die Luftteilchen, die in den Bereich höheren Drucks unterhalb des Flügels geraten, langsamer – wie von der Bernoulli-Gleichung vorhergesagt.

10.6 Bewegte Fluide mit Reibung

Obwohl die Bernoulli-Gleichung für die qualitative Beschreibung vieler Eigenschaften von Fluidströmungen sehr nützlich ist, stimmen mit dieser Gleichung hergeleitete Beschreibungen oft nur sehr ungenau mit den Messergebnissen aus Experimenten überein. Dies liegt daran, dass Gase wie Luft eben nicht inkompressibel sind und Flüssigkeiten wie Wasser immer eine – wenn möglicherweise auch sehr kleine – Viskosität aufweisen, sodass die Voraussetzungen für die Herleitung der Bernoulli-Gleichung nicht streng gelten. In diesem Abschnitt wollen wir uns daher mit den Reibungseffekten in Fluiden beschäftigen und damit eine genauere Beschreibung von bewegten Fluiden erhalten.

Der Strömungswiderstand

Bringt man einen beliebig geformten, massiven Körper in ein ihn umströmendes Fluid, so hindert er die Fluidteilchen daran, geradlinig entlang der Stromlinien zu fließen. Daher wird das Fluid vom Körper abgelenkt und an ihm vorbeifließen, so wie die Luft den Flügel in Abbildung 10.25 umströmt. In Kapitel 4 hatten wir die Bewegung eines Fluids um einen Körper bzw. die Bewegung eines Körpers in einem Fluid durch eine allgemeine Widerstandskraft (Gleichung 4.5)

$$F_W = b |v|^n \quad (10.20)$$

beschrieben mit den Konstanten b und n . Wir wollen nun die beiden Konstanten näher bestimmen. Beachten Sie dabei, dass die Beschreibung einer Strömung von links nach rechts um einen ruhenden Körper gleich der Beschreibung eines Körpers ist, der sich in einem ruhenden Fluid von rechts nach links bewegt, sodass dieselben Gleichungen auf beide Ausgangssituationen angewendet werden können.

Auf das Fluid wirken je nach seiner Geschwindigkeit unterschiedliche Kräfte, die durch die Wechselwirkung mit dem Körper entstehen. Für sehr kleine Geschwindigkeiten wirkt nur eine Reibungskraft parallel zur Stromrichtung, die das Fluid abbremst. Diese Kraft wird auch die **Stokes'sche Reibungskraft** genannt und beruht auf Schubspannungen, die das Fluid an der Oberfläche des Körpers beim Vorbeiströmen erfährt. Bei höheren Geschwindigkeiten baut sich zusätzlich ein Staudruck auf der Stirnfläche des Körpers auf, wenn das Fluid auf ihn trifft. Die dazugehörige Widerstandskraft bezeichnet man auch

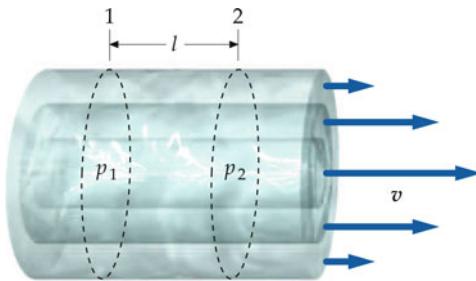


Abbildung 10.27 Wenn ein viskoses Fluid durch eine Röhre fließt, ist die Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte der Röhre am größten. An der Wandung der Röhre ist die Strömungsgeschwindigkeit nahezu null.

als **Newton'sche Reibung**. Wir werden beide in diesem Abschnitt noch behandeln.

Zunächst betrachten wir jedoch die Reibung, die innerhalb eines Fluids wirkt, das stationär durch eine lange gerade Röhre mit konstantem Querschnitt fließt. Ist das Fluid ideal, wie in Abschnitt 10.5 behandelt, gilt die Bernoulli-Gleichung, und der Druck in der Röhre bleibt über die gesamte Länge konstant. In der Praxis beobachtet man jedoch einen Druckabfall entlang der Strömungsrichtung. Man kann daraus schließen, dass eine Druckdifferenz nötig ist, um ein Fluid durch eine horizontale Röhre zu bewegen. Diese Druckdifferenz zur Kompensation der inneren Reibung wird benötigt, da das Fluid in sehr dünnen Schichten strömt. Die Schicht im unmittelbaren Kontakt zu der Wandung wird durch von der Wandung ausgeübte Kräfte gebremst. Geht man von der Wandung zum Inneren der Röhre, so erfährt jede der Strömungsschichten eine bremsende Kraft, die von der zur einen Seite benachbarten, etwas langsameren Schicht auf sie ausgeübt wird (ebenso erfährt jede Schicht eine vorwärts treibende Kraft durch die auf der anderen Seite liegende, sich etwas schneller bewegende Schicht). Diese Kräfte zwischen benachbarten Schichten sind letztlich Reibungskräfte der Fluidteilchen aneinander und verursachen die Zähigkeit oder *Viskosität* des Fluids. Als Folge der Viskosität ist die Geschwindigkeit des Fluids über den Querschnitt der Röhre nicht konstant: Sie ist in der Mitte der Röhre am größten und am kleinsten – im Extremfall nahezu null – dort, wo das Fluid mit der Wandung der Röhre in Kontakt ist (Abbildung 10.27). Wir bezeichnen mit p_1 den Druck an Fläche 1 und mit p_2 den Druck an Fläche 2, die sich die Strecke l stromabwärts von Fläche 1 befindet. Der Druckabfall $\Delta p = p_1 - p_2$ zwischen den beiden Ebenen ist proportional zum Volumenstrom:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = I_V R. \quad (10.21)$$

STRÖMUNGSWIDERSTAND

Dabei bezeichnet $I_V = vA$ den Volumenstrom und die Konstante R den Strömungswiderstand, der von der Länge l der Röhre, ihrem Radius r und der Viskosität des Fluids abhängt. Gleichung 10.21 wird in Beispiel 10.13 auf den Blutkreislauf angewendet.

Beispiel 10.13: Strömungswiderstand des Bluts

Wenn das Blut von der Aorta aus durch die Hauptgeschlagader, die kleineren Arterien, die Kapillargefäße und die Venen zum rechten Vorhof zurückfließt, dann fällt der Blutdruck von 100 Torr auf null ab. Der Volumenstrom soll 0,800 l/s betragen. Wie groß ist dann der Gesamtströmungswiderstand des Kreislaufsystems?



Die großen Arterien verzweigen sich zu kleineren Adern, diese wiederum zu noch kleineren Blutgefäßen usw. (© P. Motta/Photo Researchers, Inc.)

Problembeschreibung: Der Strömungswiderstand hängt über Gleichung 10.21 mit dem Druckabfall und dem Volumenstrom zusammen. Mithilfe von Gleichung 10.9 lässt sich zwischen den Druckeinheiten Torr und Pascal umrechnen.

Lösung: Schreiben Sie den Strömungswiderstand mithilfe des Druckabfalls und des Volumenstroms und geben Sie alle Terme in SI-Einheiten an:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Delta p}{I_V} \\ &= \frac{100 \text{ Torr}}{0,800 \text{ l/s}} \cdot \frac{101 \text{ kPa}}{760 \text{ Torr}} \cdot \frac{1 \text{ l}}{10^3 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ cm}^3}{10^{-6} \text{ m}^3} \\ &= 16,61 \text{ kPa} \cdot \text{s/m}^3 = \boxed{16,6 \text{ kPa} \cdot \text{s/m}^3} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Mit $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ hätten wir das Ergebnis auch als $16,6 \text{ kN} \cdot \text{s/m}^5$ schreiben können. Die Dimension des Strömungswiderstands ist gleich der Dimension eines Drucks durch die Dimension eines Volumenstroms. Die Dimension eines Drucks ist Kraft durch $(\text{Länge})^2$, die Dimension des Volumenstroms ist $(\text{Länge})^3$ durch Zeit. Damit ist die Dimension des Strömungswiderstands gleich Zeit durch $(\text{Länge})^5$. Die Einheiten des Ergebnisses haben die korrekte Dimension, das Ergebnis ist daher plausibel. ■

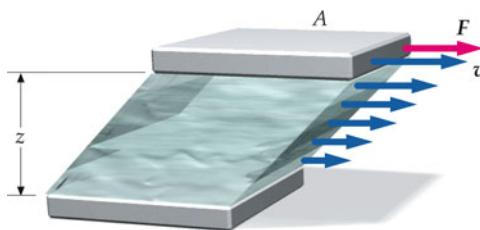


Abbildung 10.28 Zwischen zwei parallelen Platten mit gleicher Fläche A befindet sich ein viskoses Fluid. Wenn die obere Platte mit der Geschwindigkeit v relativ zur unteren bewegt wird, übt jede der Fluidschichten eine Reibungskraft auf die jeweils benachbarte Schicht aus. Die Kraft, die benötigt wird, um die obere Platte zu bewegen, ist direkt proportional zu v und A und umgekehrt proportional zum Plattenabstand z .

Um eine Kenngröße für die Viskosität eines Fluids zu definieren, betrachten wir ein Fluid zwischen zwei parallelen Platten im Abstand z , die jeweils die Fläche A aufweisen (Abbildung 10.28). Die obere Platte wird durch eine horizontal wirkende Kraft F mit konstanter Geschwindigkeit v gezogen, die untere Platte dagegen bleibt in Ruhe. Für die Bewegung der oberen Platte ist eine Kraft nötig, weil zwischen der Platte und der angrenzenden Fluidschicht Reibungskräfte wirken, die der Bewegung entgegengesetzt sind. In einem solchen Fall spricht man von einer **laminaren Strömung** (vom lateinischen *lamina* für „Blatt“), weil man die Gesamtbewegung des Fluids in die Bewegung einzelner Fluidschichten zerlegt. (Man kann den Vorgang daher als Scherung auffassen.)

Die Geschwindigkeit des Fluids zwischen den Platten hängt vom Abstand zur bewegten Platte ab: In der Nähe der oberen Platte beträgt die Geschwindigkeit annähernd v , nahe der unteren Platte dagegen fast null. Es zeigt sich, dass die Kraft F direkt proportional zu v und A und umgekehrt proportional zum Plattenabstand z ist. Die Proportionalitätskonstante η ist die **Viskosität** η oder Zähigkeit:

$$F_w = \eta \frac{vA}{z}. \quad (10.22)$$

Die SI-Einheit der Viskosität hat keinen eigenen Namen, sie ist $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa} \cdot \text{s}$. In der älteren Literatur findet man noch die cgs-Einheit **Poise** mit dem Einheitenzeichen P (nach dem französischen Arzt und Physiologen Jean-Louis Marie Poiseuille, 1799–1869). Die Einheiten sind verknüpft durch die Beziehung

$$1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P}. \quad (10.23)$$

Vergleichen wir die beiden Gleichungen 10.20 und 10.22, so gilt

$$b = \frac{\eta A}{z} \quad \text{und} \quad n = 1$$

für die Widerstandskraft zwischen dem Fluid und den Platten.

Tabelle 10.2 führt die Viskosität mehrerer Fluide bei verschiedener Temperatur auf. Typischerweise steigt die Viskosität einer

Tabelle 10.2 Viskosität verschiedener Fluide

Fluid	T in °C	η in $\text{mPa} \cdot \text{s}$
Wasser	0	1,8
	20	1,00
	60	0,65
Blut	37	4,0
Motoröl (SAE 10W)	30	200
Glycerin	0	10 000
	20	1410
	60	81
Luft	20	0,018

Flüssigkeit, wenn die Temperatur abnimmt. Aus diesem Grund musste man im Winter früher ein weniger viskoses Motoröl verwenden, um auch bei großer Kälte eine ausreichende Schmierung des Motors zu gewährleisten. Heute werden den Motorölen Additive zugesetzt, d. h. spezielle Polymere, deren Viskosität mit sinkender Temperatur abnimmt. Auf diese Weise bleibt die Viskosität eines modernen Motoröls über einen weiten Temperaturbereich näherungsweise konstant.

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Für den Strömungswiderstand R einer stationären, laminaren Strömung durch eine Röhre der Länge l mit dem Radius r (Gleichung 10.21) lässt sich zeigen, dass

$$R = \frac{8 \eta l}{\pi r^4}. \quad (10.24)$$

Kombiniert man Gleichung 10.21 und 10.24, so erhält man den Druckabfall über eine runde Röhre der Länge l mit dem Radius r :

$$\Delta p = \frac{8 \eta l}{\pi r^4} I_V. \quad (10.25)$$

GESETZ VON HAGEN-POISEUILLE

Gleichung 10.25 ist im deutschen Sprachraum als das **Gesetz von Hagen-Poiseuille** bekannt. Es wurde von dem deutschen Wasserbauingenieur Gotthilf H. L. Hagen (1797–1884) aufgestellt, als er Poiseuilles Arbeiten weiterentwickelte. Im englischen Sprachraum wird es als *Poiseuille's Law* bezeichnet.

Beachten Sie die $1/r^4$ -Abhängigkeit des Druckabfalls: Wenn der Radius der Röhre halbiert wird, dann fällt der Druck für einen gegebenen Volumenstrom um den Faktor 16 ab.

Man benötigt demnach den 16-fachen Druck, um ein Fluid mit dem gleichen Volumenstrom durch die engere Röhre zu pumpen. Dies ist der Grund, warum beispielsweise bei Verengungen der Blutgefäße der Blutdruck extrem ansteigen kann – mit allen bekannten schädlichen Folgen für Organe, Herz- und Kreislaufsystem. Für Wasser, das durch einen langen Gartenschlauch

oder ein langes Rohr fließt, ist der Druckabfall unter laminaren Strömungsbedingungen fest, nämlich gleich der Differenz zwischen dem Wasserdruk an der Quelle und dem Luftdruck an der anderen Seite. Der Volumenstrom ist dann proportional zu vierten Potenz des Radius. Deshalb nimmt bei einer Halbierung des Radius der Volumenstrom um den Faktor 16 ab.

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille gilt nur für die laminare (d. h. nichtturbulente) Strömung eines Fluids mit konstanter Viskosität. In einigen Fluiden ändert sich jedoch die Viskosität mit der Strömungsgeschwindigkeit. Zu diesen Fluiden gehört auch Blut, ein komplexes Gemisch aus festen Bestandteilen mit verschiedenen Formen, die im flüssigen Blutplasma suspendiert sind. Die roten Blutkörperchen beispielsweise sind scheibenförmig; bei niedriger Strömungsgeschwindigkeit nehmen sie im Blut eine zufällige Orientierung ein, bei höheren Geschwindigkeiten dagegen orientieren sie sich gleichsam nach dem Prinzip des geringsten Widerstands. Daher nimmt die Viskosität von Blut ab, wenn die Strömungsgeschwindigkeit steigt, sodass das Gesetz von Hagen-Poiseuille streng genommen auf den Blutfluss nicht anwendbar ist. Das Gesetz bietet jedoch eine gute Näherungsbeschreibung, mit dem sich die Gesetzmäßigkeiten des Blutflusses qualitativ sehr gut verstehen lassen.

In Kapitel 22 über den elektrischen Strom I durch einen metallischen Leiter werden wir das Ohm'sche Gesetz $U = RI$ kennenlernen, das den Zusammenhang zwischen der elektrischen Spannung U (d.h. der elektrischen Potenzialdifferenz $\Delta\phi$) und dem elektrischen Widerstand R eines Leiterdrahts angibt. Wie sich zeigen wird, ist das Ohm'sche Gesetz ein Analogon zum Gesetz von Hagen-Poiseuille $\Delta p = RI_v$.

Die Stokes'sche Reibung

Die Widerstandskraft, die durch die Reibung zwischen dem Fluid und den Platten in Gleichung 10.22 hervorgerufen wird, ist ein Beispiel für die Stokes'sche Reibungskraft (benannt nach dem britischen Physiker und Mathematiker Sir Gabriel Stokes, 1819–1903). Sie zeichnet sich dadurch aus, dass sie bei geringen Geschwindigkeiten relevant und stets proportional zur Strömungsgeschwindigkeit des Fluids ist, d.h. für $n = 1$ in Gleichung 10.20 gilt. Je nachdem, an welchem Körper das Fluid vorbeiströmt, ergeben sich jedoch unterschiedliche Werte für b . Zum Beispiel ist die Widerstandskraft für eine Kugel vom Radius r , die von einem Fluid mit Viskosität η umströmt wird, gegeben durch

$$F_W = 6\pi \eta r v. \quad (10.26)$$

STOKES'SCHE REIBUNGSKRAFT EINER KUGEL

Kennt man die Dichte der Kugel und die Dichte des umströmenden Fluids, kann man mithilfe eines Kugelfall-Viskosimeters die Viskosität des Fluids bestimmen, wie wir in Beispiel 10.14 zeigen.

10.6 Bewegte Fluide mit Reibung

Beispiel 10.14: Das Kugelfall-Viskosimeter

In einem Behälter befindet sich eine Flüssigkeit, deren Dichte ρ_F bekannt ist und deren Viskosität η bestimmt werden soll. Dazu tauchen Sie eine kleine massive Kugel mit dem Radius r und der Dichte ρ_K vollständig in die Flüssigkeit ein und lassen die Kugel aus der Ruhe heraus in der Flüssigkeit sinken (Abbildung 10.29). Hat sie eine gewisse Strecke in der Flüssigkeit zurückgelegt, sinkt sie mit einer konstanten Geschwindigkeit v , die Sie durch eine Messung von zurückgelegter Strecke Δs und dafür benötigter Zeit Δt bestimmen können. Erklären Sie, warum die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit nach unten sinkt, und berechnen Sie aus den gegebenen Größen die Viskosität η .

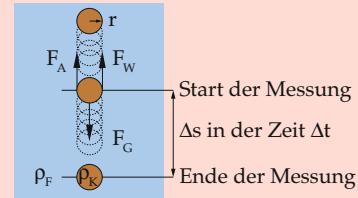


Abbildung 10.29 Darstellung der sinkenden Kugel. Hierbei sind F_A die Auftriebskraft, F_W die Reibungskraft, F_G die Gewichtskraft, ρ_F die Dichte der Flüssigkeit und ρ_K die Dichte der Kugel.

Problembeschreibung: Die Gewichtskraft wird die Kugel nach unten beschleunigen, während die Auftriebskraft und die Stokes'sche Reibung dieser Bewegung entgegenwirken. Im Gleichgewicht wird die Gewichtskraft von der Auftriebs- und der Reibungskraft kompensiert, sodass man aus der Gleichgewichtsbedingung die Viskosität berechnen kann.

Lösung: 1. Stellen Sie die Gleichgewichtsbedingung mithilfe der Gewichtskraft F_G , der Auftriebskraft F_A und der Stokes'schen Reibungskraft F_W auf:

$$F_G = F_A + F_W$$

2. Drücken Sie die Kräfte aus Schritt 1 mithilfe der gegebenen Größen aus. Beachten Sie dabei, dass die Auftriebskraft dem Gewicht des Fluidvolumens entspricht, das durch die vollständig eingetauchte Kugel verdrängt wird:

$$F_G = m_K g = \rho_K \frac{4}{3} \pi r^3 g$$

$$F_A = m_F g = \rho_F \frac{4}{3} \pi r^3 g$$

$$F_W = 6\pi \eta r v = 6\pi \eta r \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

3. Setzen Sie alle Kräfte aus Schritt 2 in das Ergebnis aus Schritt 1 ein und lösen Sie nach η auf:

$$\rho_K \frac{4}{3} \pi r^3 g = \rho_F \frac{4}{3} \pi r^3 g + 6\pi \eta r \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

sodass

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{(\rho_K - \rho_F) g r^2}{\Delta s / \Delta t}$$

4. Lösen Sie die Gleichung aus Schritt 3 nach v statt η auf und begründen Sie, warum die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit sinkt:

$$v = \frac{2}{9} \frac{(\rho_K - \rho_F) g r^2}{\eta}$$

Da im Gleichgewicht alle Größen, von denen v abhängt, Konstanten sind, fällt die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit.

Plausibilitätsprüfung: Eine Dimensionsanalyse liefert auf der linken Seite des Ergebnisses in Schritt 3 für η Kraft mal Zeit geteilt durch (Länge)², was man auch als Masse geteilt durch (Länge mal Zeit) ausdrücken kann. Für die rechte Seite erhält man für die Dichte Masse geteilt durch (Länge)³, was mit Länge durch (Zeit)² mal (Länge)² der beiden anderen Größen im Zähler insgesamt Masse geteilt durch (Zeit)² ergibt, was sich zusammen mit dem Nenner, der die Einheit Länge durch Zeit hat, zu Masse geteilt durch (Länge mal Zeit) vereinfacht. Damit stimmen die Einheiten auf beiden Seiten überein.

Weitergedacht: Experimentell findet man, dass diese Näherung nur für kleine Produkte aus Kugelradius mal Geschwindigkeit gültig ist, da dieses Produkt den Bereich definiert, in dem die Stokes'sche Reibungskraft eine gute Beschreibung der Bewegung ist. Für Geschwindigkeiten im Bereich von wenigen Zentimetern pro Sekunde und Kugelradien von mehreren Millimetern liefert die Näherung jedoch sehr gute Ergebnisse. ■

Die Newton'sche Reibung

Wie in Beispiel 10.14 diskutiert wurde, beginnt die Stokes'sche Beschreibung der Fluidbewegung schon bei Geschwindigkeiten von wenigen Metern pro Sekunde ungenau zu werden. In diesem Fall stellt nicht die Scherspannung in Stromrichtung, sondern der Staudruck auf den Stirnflächen den Hauptanteil des Widerstands. Die dazugehörige Widerstandskraft können wir mithilfe der Bernoulli-Gleichung herleiten: Wir nehmen an, dass der umströmte Körper die Geschwindigkeit des Fluids, das horizontal eine Röhre entlang fließt, direkt hinter ihm auf null absenkt. Damit gilt dann für die Druckdifferenz zwischen den Stirnflächen des Körpers, die senkrecht zur Strömungsrichtung liegen,

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v^2,$$

Tabelle 10.3 Widerstandsbeiwerte verschiedener Profile

Profil	c
Stromlinienprofil	0,06
Tragfläche mit gewölbter Unterseite	0,1
Tragfläche mit gerader Unterseite	0,2
Kugel	0,4
Halbkugel	0,8
Scheibe	1,2

wobei v die Geschwindigkeit ist, mit der das Fluid auf den Körper zu strömt. Da Druck Kraft pro Fläche ist, können wir daraus die Widerstandskraft F_W aufgrund des Staudrucks berechnen. Weil die Stirnfläche A des Körpers beliebig geformt sein kann, schreiben wir allgemein für die Newton'sche Widerstandskraft:

$$F_W = \frac{1}{2} c A \rho v^2 \quad (10.27)$$

NEWTON'SCHE WIDERSTANDSKRAFT

Wir definieren dabei den **Widerstandsbeiwert** c als einen vom Profil des umströmten Körpers abhängigen Parameter und bezeichnen mit A die Querschnittsfläche des Körpers, die senkrecht zur Stromrichtung liegt. Für eine Kugel mit Radius r würde man beispielsweise $A = \pi r^2$ ansetzen. Da in den Widerstandsbeiwert nicht nur die Geometrie der Stirnfläche, sondern die gesamte Form des umströmten Körpers eingeht, wird c meist experimentell bestimmt. Tabelle 10.3 zeigt einige Beispiele verschiedener Profile und ihrer c -Werte.

Gleichung 10.27 liefert durch einen Vergleich mit Gleichung 10.20 die beiden Konstanten

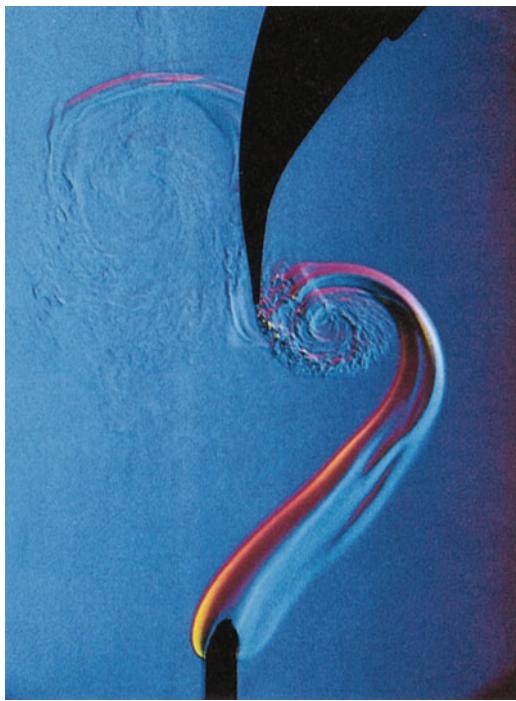
$$b = \frac{1}{2} c A \rho \quad \text{und} \quad n = 2.$$

Übung 10.11: Berechnen Sie die Stokes'sche und die Newton'sche Reibungskraft für eine Kugel mit Radius 5,0 cm, wenn sie sich mit $v_1 = 1,0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ und mit $v_2 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ bewegt.



10.7 *Turbulenz

Laminare Strömungen zeichnen sich dadurch aus, dass es in ihnen keine Verwirbelungen der einzelnen Strömungsschichten gibt. Geht eine laminare Strömung in eine turbulente über, bilden sich Wirbel, wie z. B. in der Luft über einem Spiritusbrenner an der Spitze eines Ventilatorflügels, wie das Foto zeigt. Dabei ist der Übergangsbereich von laminar zu turbulent ein heute noch sehr aktives Forschungsfeld der modernen nicht-linearen Physik, die sogenannte *Chaosforschung*. Wir wollen uns in diesem Abschnitt jedoch nur mit den beiden Grenzfällen befassen, in denen rein laminare oder turbulente Strömung vorliegen.



Wirbel bei turbulenter Strömung von heißer Luft über einem Spiritusbrenner an der Spitze eines Ventilatorflügels (oben im Bild). (© Estate of Harald E. Edgerton/Palm Press Inc.)

Die Reynolds-Zahl

Um eine stationäre Strömung als laminar oder turbulent charakterisieren zu können, experimentierte der Physiker und Ingenieur **Osborne Reynolds** (1842–1912) mit gefärbten Wasserströmungen in einem zylindrischen Rohr. Er fand dabei heraus, dass ab einer gewissen Fließgeschwindigkeit Verwirbelungen eintreten. Die kritische Geschwindigkeit, über der die Strömung durch eine Röhre turbulent wird, hängt jedoch auch von der Dichte ρ und der Viskosität η des Fluids sowie vom Radius r der Röhre ab. Reynolds definierte daher zur Charakterisierung von Fluidströmungen durch ein zylindrisches Rohr die dimensionslose **Reynolds-Zahl** Re

$$Re = \frac{2 r \rho v}{\eta} \quad (10.28)$$

Dabei ist v die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Fluids.

Experimente haben gezeigt, dass die Strömung durch ein Rohr bis zu einer Reynolds-Zahl von etwa 2000 meist laminar ist, bei $Re > 3000$ wird die Strömung meist turbulent. Im Zwischenbereich ist die Strömung instabil und kann von einem Typ zum anderen übergehen. Die genaue Ausbildung der Strömung hängt von den Anfangsbedingungen und von technischen Details (z. B. der Oberflächenrauigkeit der Röhre) ab. Daher ist der kritische Wert der Reynolds-Zahl nicht zu berechnen, sondern muss für jedes Strömungsproblem experimentell bestimmt werden. Eine exemplarische Rechnung zeigt Beispiel 10.15.

Beispiel 10.15: Blutfluss in der Aorta

Berechnen Sie die Reynolds-Zahl für Blut, das mit einer Geschwindigkeit von 30 cm/s durch eine Aorta mit dem Radius 1,0 cm fließt. Nehmen Sie an, dass Blut eine Viskosität von 4,0 mPa · s und eine Dichte von 1060 kg/m³ hat.



Falschfarbenbild der Turbulenz von Blut, das in das Herz hinein- und wieder herausfließt. Der systolische Ausstoß des Bluts aus der linken Herzkammer in die Aorta ist rot, die diastolische Füllung der rechten Herzkammer ist blau abgebildet. Die Aufnahme entstand mit einem bildgebenden Magnetresonanzverfahren (NMR). (© Pickler International.)

Problembeschreibung: Da Re eine dimensionslose Zahl ist, können wir mit einem beliebigen Satz Einheiten rechnen, solange er in sich konsistent ist.

Lösung: Schreiben Sie in Gleichung 10.28 für die Reynolds-Zahl jede der verwendeten Größen in SI-Einheiten:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{2 r \rho v}{\eta} \\ &= \frac{2 (0,010 \text{ m}) (1060 \text{ kg/m}^3) (0,3 \text{ m/s})}{4,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} \\ &= 1590 = \boxed{1,6 \cdot 10^3} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Da die Reynolds-Zahl deutlich unter 2000 liegt, wird diese Strömung eher laminar sein als turbulent. Da wir für den Blutfluss eine nichtturbulente Strömung erwarten können, ist das Ergebnis plausibel. ■

Gleichung 10.28 gilt in dieser Form nur für den Fluss durch eine zylindrische Röhre, jedoch kann man sie auch auf andere Geometrien verallgemeinern, indem man die **charakteristische Länge** l_c einführt. Sie hat die Dimension einer Länge und repräsentiert die Geometrie des Gegenstands. Für eine kegelförmige Röhre mit dem maximalen Radius r_{\max} und dem minimalen Radius r_{\min} ist sie beispielsweise definiert als das arithmetische

Mittel dieser beiden Radien: $l_c = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min})$. Die Gleichung für die Reynolds-Zahl bei beliebiger Röhrenform lautet

$$Re = \frac{2 l_c \rho v}{\eta}. \quad (10.29)$$

Beachten Sie, dass eine Verdoppelung der Geschwindigkeit in Gleichung 10.29 bei gleichzeitiger Halbierung der charakteristischen Länge dieselbe Reynolds-Zahl liefert. Diese Ähnlichkeiten nutzt man bei der Konstruktion von Flugzeugen aus, wenn man verkleinerte Modelle im Windkanal auf ihre Verhaltensweisen bei unterschiedlichen Luftströmungen testen will.

Die Navier-Stokes-Gleichung

Nachdem wir in den vorhergehenden Abschnitten jedes Strömungsphänomen einzeln behandelt haben, können wir nun diese Spezialfälle zusammenfügen, um die allgemeine Form einer Strömungsgleichung zu erhalten. Diese Gleichung wird die Navier-Stokes-Gleichung genannt, nach Claude Navier (1785–1836) und George Stokes. Wir beginnen zunächst damit, das zweite Newton'sche Axiom für ein kleines Fluidvolumen dV aufzustellen:

$$d\mathbf{F} = dm\mathbf{a} = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (10.30)$$

Die Zeitableitung der Geschwindigkeit ist dabei gegeben durch

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}, \quad (10.31)$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit selbst beschreibt. Da \mathbf{v} für stationäre Strömungen zeitunabhängig ist, entfällt dieser Term für diesen Fall, da $\mathbf{v} = \text{konstant}$ impliziert, dass $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ist. Die folgenden Terme auf der rechten Seite beschreiben, wie sich die Strömungsgeschwindigkeit ändert, wenn eine Fluidportion von einem Ort zu einem anderen fließt. Diese Terme fasst man auch unter dem Namen **Konvektionsbeschleunigung** zusammen. Die verkürzte Schreibweise mit dem Nabla-Operator ($\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$) wird uns in den folgenden Kapiteln noch öfter begegnen.

Gleichung 10.31 drückt die Beschleunigung der betrachteten Fluidportion als Zeit- und Ortsableitungen der Geschwindigkeit aus. Nun benötigen wir noch die auf diese Fluidportion wirkenden äußeren Kräfte, um das zweite Newton'sche Axiom komplett zu formulieren. Aus Abschnitt 10.6 wissen wir, dass innere und äußere Reibungskräfte angreifen. Diese sind, wie Gleichung 10.22 bereits zeigte, proportional zur Viskosität des Fluids. Allgemein findet man in drei Dimensionen, dass die Reibungskraft, die durch Scherspannungen entsteht, als

$$d\mathbf{F}_R = \eta dV \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \eta dV \Delta \mathbf{v} \quad (10.32)$$

beschrieben werden kann. Mit dem hier verwendeten Laplace-Operator Δ erhält man die zweiten Ortsableitungen der

Geschwindigkeitskomponenten. Er ist genau wie der Nabla-Operator eine verkürzte Schreibweise für diese Operation.

Die Widerstandskraft aufgrund des Staudrucks (Gleichung 10.21) ist gegeben durch

$$d\mathbf{F}_p = - \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) dV = -\nabla p dV. \quad (10.33)$$

Außerdem wirkt auf die Fluidportion ihre Gewichtskraft

$$d\mathbf{F}_G = dm\mathbf{a}_G = \rho dV \mathbf{a}_G. \quad (10.34)$$

Damit ergibt sich durch Gleichsetzen von Gleichung 10.30 mit Gleichung 10.32, 10.33 und 10.34

$$\rho dV \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = \eta dV \Delta \mathbf{v} - \nabla p dV + \rho dV \mathbf{a}_G.$$

Vereinfacht man beide Seiten, erhält man die **Navier-Stokes-Gleichung**:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \right) \mathbf{v} = \eta \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{a}_G. \quad (10.35)$$

NAVIER-STOKES-GLEICHUNG

Um uns zu vergewissern, dass die bisher behandelten Spezialfälle in dieser Gleichung enthalten sind, werden wir nun als Beispiel Gleichung 10.16 aus Gleichung 10.35 herleiten. Dazu benötigen wir eine andere Formulierung des Konvektionsterms in Gleichung 10.35:

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Änderung des Geschwindigkeitsbetrags in Abhängigkeit des Orts, der zweite Term beschreibt die Änderung der Richtung und damit die Wirbelbildung. Dass der letzte Term Wirbel beschreibt, kann man auch anhand der Konstruktion mit dem Kreuzprodukt sehen: Durch das Kreuzprodukt entstehen Terme wie z. B. $\partial v_y / \partial x$ oder $\partial v_z / \partial x$, die bei einer laminaren Strömung alle wegfallen, da eine Komponente der Geschwindigkeit in dem Fall höchstens von der dazugehörigen Koordinate, jedoch nicht von den beiden anderen Koordinaten abhängt. Somit entfällt der zweite Term auf der rechten Seite für eine laminare Strömung. Zusätzlich hatten wir in Abschnitt 10.5 die Annahme gemacht, dass die Strömung stationär und reibungsfrei in einem horizontalen Rohr fließt. Daraus ergeben sich $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, $\eta = 0$ und $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i}$. Da die Gravitation nicht in Fließrichtung wirkt, erhalten wir

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial x} = - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Bringen wir beide Terme auf eine Seite und klammern die Ableitung aus, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p = \text{konstant},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Ableitung des Terms in Klammern nur dann null ist, wenn der Ausdruck in der Klammer eine Konstante ist. Daraus ergibt sich dann Gleichung 10.16.

🔗 Im Kontext: Aerodynamik im Autobau: Luftwiderstand und dynamischer Auftrieb

Form und Oberfläche einer Autokarosserie beeinflussen den Luftwiderstand und den Kraftstoffverbrauch. Zum Design moderner Autos gehört deshalb eine Karosserielinie, die wie ein halber Tropfen geformt ist, um den Luftwiderstand gering zu halten. Die Krümmung der Stromlinien über der Oberseite des Wagens führt jedoch zu einem Bereich geringeren Luftdrucks über dem Auto. Dadurch entsteht ein dynamischer Auftrieb, der die Bodenhaftung reduziert, und beim Kurvenfahren bringt das Fahrzeug leichter aus. Der dynamische Auftrieb ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Bei höheren Geschwindigkeiten, wie sie beispielsweise bei Autorennen erzielt werden, spielt der Auftrieb daher eine wichtige Rolle und kann bei kurvigen Strecken über den Ausgang des Rennens entscheiden.

Die Autoingenieure setzen in den verschiedenen Rennställen unterschiedliche Methoden ein, um den Auftrieb ihrer Fahrzeuge durch eine entgegengesetzte Andruckkraft zu kompensieren. In der Formel 1 benutzt man große Spoiler, die gleichsam wie umgedrehte Tragflächen eines Flugzeugs funktionieren und einen nach unten gerichteten Druck erzeugen. Als solche Spoiler in der IndyCar-Klasse (Rennwagen, die für die Hochgeschwindigkeitsrennstrecke von Indianapolis zugelassen sind) 1972 erstmals eingeführt wurden, führte das sofort zu einer um über 30 km/h höheren Rundengeschwindigkeit.¹ Bei den IndyCars ist auch die Unterseite des Fahrzeugs speziell geformt, um die Bodenhaftung zu erhöhen. Bei Renngeschwindigkeit kann die dynamisch erzeugte Anpresskraft die Gewichtskraft des Wagens übersteigen.^{2, 3} Bei einigen Rennwagen wurden sogar Gebläse benutzt, um die Luft schnell unter das Fahrzeug zu ziehen⁴, die meisten Reglements lassen das jedoch heute nicht mehr zu.

Die sichtbarsten Änderungen bei Rennwagen betreffen die Aerodynamik. Es gibt steife Schürzen an den Seiten und einen sehr niedrigen Spoiler an der Front. Ein Spoiler erhöht die Breite des Fahrzeugs, und auf manchen Strecken ist ein Abdeckspoiler erforderlich. Da die Spoiler den Luftwiderstand erhöhen, kann die Fahrzeuggeschwindigkeit eine gewisse durch Sicherheitsüberlegungen bestimmte Grenze nicht übersteigen. In seltenen Fällen kommen auch Luftklappen auf dem Dach des Fahrzeugs zum Einsatz, wenn der Wagen sehr schnell seitwärts oder rückwärts driftet. Seit der Einführung solcher Luftklappen im Jahr 1994 ist eine Vielzahl von Unfällen damit verhindert worden.⁵

Im selben Jahr 1994 verbot die Formel 1 die Ausformung der Fahrzeugunterseite und verlangte einen glatten Unterboden. Nachdem zwei Fahrer bei Unfällen ums Leben gekommen waren, wollte man durch diese Anordnung die Geschwindigkeit der Wagen reduzieren.⁶ Den Teams wurden zwei Wochen Zeit gegeben, in denen diese Regeländerung umgesetzt und herausgefunden werden sollte, wie man trotzdem so viel „Anpresskraft“ wie möglich erzielen könnte.⁷ Alle Rennställe benutzten CFD-Programme (Computational Fluid Dynamics, Computerprogramme zur numerischen Strömungssimulation) sowie Windkanäle zum Test der Ideen, bevor sie real umgesetzt wurden.

Rennställe sind nicht die einzigen Gruppen, die Windkanäle und CFD-Programme zum Testen von Entwürfen einsetzen. Eine Forschungsgruppe am Georgia Tech Research Institute, einer Einrichtung des Georgia Institute of Technology, modellierte damit die Turbulenzen hinter einem Lastkraftwagen und testete die Modelle in einem Miniaturwindkanal. Durch ein System von Schlitzen und Luftkompressoren konnten sie den Luftwiderstand eines LKW bei Autobahngeschwindigkeit um bis zu 35 % reduzieren.⁸ Bei Straßentests⁹ führte das System zu Kraftstoffeinsparungen von 8 bis 9 %.¹⁰ Die Senkung des Kraftstoffverbrauchs durch diese und ähnliche Verbesserungen der Aerodynamik um nur 1 % führt

allein für die Lastwagenflotte der USA zu Einsparungen von 200 Millionen Tonnen Kraftstoff pro Jahr.



Selbst bei den relativ niedrigen Geschwindigkeiten eines Lastkraftwagens spielt der Luftwiderstand eine Rolle. Bei diesem Prototyp wird der Luftwiderstand durch die Luftströmung an den speziell abgerundeten Kanten des Anhängers reduziert. (Mit freundlicher Genehmigung des Georgia Institute of Technology.)

1. Katz, J., *Race Car Aerodynamics: Designing for Speed*, 2. Aufl., Cambridge, Mass.: Bentley, 2006, S. 4.
2. Simanaitis, D., „Technology Update: Automotive Aerodynamics“, *Road and Track*, Juni 2002, S. 84 ff.
3. Robertson, C., zitiert in „Fast Cars“, *Nova*, PBS, 19. August 1997. <http://www.pbs.org/wgbh/nova/transcripts/2208fast.html> (Stand: Juli 2008).
4. Fuller, M. J., „A Brief History of Sports Car Racing“, *Mulsanne's Corner*. <http://www.mulsannescorner.com/history.htm>, 1996 (Stand: März 2009).
5. Katz, J., a. a. O., S. 191.
6. Butler, R., „Not So Fast!“, *Professional Engineering*, 9. Nov. 2005, S. 37 f.
7. Zeimelis, K. und Wenz, C., „Science in the Fast Lane“, *Nature*, 14. Okt. 2004, S. 736–738.
8. Weiss, P., „Aircraft Trick May Give Big Rigs a Gentle Lift“, *Science News*, 28. Okt. 2000, S. 279.
9. Toon, J., „Low-Drag Trucks: Aerodynamics Improvements and Flow Control System Boost Fuel Efficiency in Heavy Trucks“, *Georgia Institute of Technology Research News*, 5. Jan. 2004, <http://gtresearchnews.gatech.edu/newsrelease/truckfuel.htm> (Stand: März 2009).
10. Weiss, P., „Thrifty Trucks Go with the Flow“, *Science News*, 29. Jan. 2005, S. 78.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Dichte	<p>Die Dichte einer Substanz ist der Quotient ihrer Masse und ihres Volumens:</p> $\rho = \frac{m}{V}. \quad (10.1)$ <p>Die Dichte der meisten Feststoffe und Flüssigkeiten ist annähernd unabhängig von Temperatur und Druck, wohingegen die Dichte von Gasen sehr stark von diesen Größen abhängt.</p>
Relative Dichte	<p>Die relative Dichte einer Substanz ist das Verhältnis ihrer Dichte zu der Dichte einer anderen Substanz, üblicherweise von Wasser. Ein Körper sinkt (oder schwimmt) in einem Fluid, wenn seine Dichte größer (oder kleiner) als die Dichte des Fluids ist.</p>
2. Druck	<p>Der Druck eines Fluids ist die auf die Fläche bezogene Kraft, die von dem Fluid ausgeübt wird:</p> $p = \frac{F}{A}. \quad (10.3)$ <p>Die SI-Einheit des Drucks ist das Pascal mit</p> $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (10.4)$ <p>Weitere noch gebräuchliche Druckeinheiten sind das Bar, die Atmosphäre und das Torr:</p> $1 \text{ bar} = 10^3 \text{ mbar} = 100 \text{ kPa}, \quad (10.5)$ $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 101\,325 \text{ kPa}. \quad (10.9)$
Überdruck	<p>Der Überdruck p_e ist die Druckdifferenz zwischen dem gemessenen Druck p und dem Atmosphärendruck p_{at}:</p> $p = p_e + p_{at}. \quad (10.8)$
In einer statischen Flüssigkeit	<p>In einer unbewegten Flüssigkeit mit konstanter Dichte ρ nimmt der Druck linear mit der Tiefe zu:</p> $p = p_0 + \rho g \Delta h \quad (\rho \text{ konstant}). \quad (10.7)$
In einem Gas	<p>In einem Gas nimmt der Druck gemäß der barometrischen Höhenformel exponentiell mit der Höhe ab,</p> $p = p_0 e^{-(\rho_0/p_0) g h},$ <p>da die Dichte in einem Gas proportional zum Druck ist.</p>
3. Pascal'sches Prinzip	<p>Der Druck, der in einem geschlossenen Behälter auf ein Fluid wirkt, pflanzt sich unverändert an jeden Ort des Fluids und die Wände des Behälters fort.</p>
4. Archimedisches Prinzip	<p>Ein Körper, der ganz oder teilweise in ein Fluid eintaucht, erfährt eine Auftriebskraft, die gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Fluidmenge ist.</p>
5. Molekulare Kräfte	<p>Innerhalb eines Fluids wirken auf die einzelnen Fluidmoleküle Kohäsionskräfte. Sie sind elektrische Anziehungskräfte, die für den Zusammenhalt des Fluids verantwortlich sind. An der Grenzfläche zwischen einem Fluid und einem Festkörper wirken Adhäsionskräfte. Sie bewirken, dass das Fluid von dieser Oberfläche angezogen wird. In einer Kapillare bewirken Adhäsion und Kohäsion, dass die Flüssigkeit so hoch steigt, dass die Gewichtskraft des Fluids die Oberflächenspannung ausgleicht.</p>
6. Strömungen ohne Reibung	<p>Volumenstrom</p> <p>Als Volumenstrom bezeichnet man das pro Zeiteinheit durch eine Fläche vom Querschnitt A fließende Volumen eines Fluids:</p> $I_V = A v. \quad (10.14)$ <p>Kontinuitätsgleichung</p> <p>Für die stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluids ist der Volumenstrom an jedem Punkt des Fluids konstant:</p> $I_V = A v = \text{konstant}. \quad (10.15)$ <p>Bernoulli-Gleichung</p> <p>Entlang einer Stromlinie in einer stationären Strömung eines inkompressiblen, nichtviskosen Fluids ohne Turbulenz gilt:</p> $p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}. \quad (10.17b)$ <p>Venturi-Effekt</p> <p>Wenn ein strömendes Fluid (z. B. Luft) eine Engstelle passiert, steigt die Strömungsgeschwindigkeit, und der Druck fällt. Der Effekt ist ein Spezialfall der Bernoulli-Gleichung für horizontal fließende Strömungen (d. h. $h = 0$).</p>

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Strömungen mit Reibung	
Strömungswiderstand	Bei der Strömung eines viskosen Fluids durch eine Röhre ist der Druckabfall proportional zum Volumenstrom. Die Proportionalitätskonstante ist der Strömungswiderstand R : $\Delta p = I_V R. \quad (10.21)$
Viskosität (innere Reibung)	Die Viskosität beschreibt den Widerstand eines Fluids gegen eine Schubspannung F/A : $\eta = \frac{F/A}{v/z}. \quad (10.22)$
Gesetz von Hagen-Poiseuille	Das Gesetz von Hagen-Poiseuille verknüpft den Strömungswiderstand R eines in einer Röhre der Länge l fließenden viskosen, inkompressiblen Fluids mit dem auftretenden Druckabfall Δp . Der Strömungswiderstand selbst ist umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Radius r der Röhre: $\Delta p = R I_V = \frac{8 \eta l}{\pi r^4} I_V. \quad (10.25)$
Stokes'sche Reibung	Bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten treten Scherspannungen auf der Oberfläche eines umflossenen Körpers auf, die einen Strömungswiderstand darstellen. Die Stokes'sche Reibungskraft, die daraus resultiert und die Strömung bremst, ist für eine Kugel vom Radius r gegeben durch $F_W = 6 \pi \eta r v, \quad (10.26)$ wobei η die Viskosität des Fluids und v seine mittlere Geschwindigkeit ist.
Newton'sche Reibung	Der Staudruck auf den Stirnflächen eines umflossenen Körpers bedingt ebenfalls eine Widerstandsreaktion, die die Strömung bremst: $F_W = \frac{1}{2} c \rho A v^2, \quad (10.27)$ wobei c ein von der Geometrie und Beschaffenheit des Körpers abhängiger Parameter ist, den man auch den Widerstandsbeiwert nennt.
8. Turbulenz	
Reynolds-Zahl	Sie ist eine dimensionslose Größe, die bestimmt, ob eine Strömung laminar oder turbulent ist. Der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung hängt stark von den geometrischen Randbedingungen und technischen Details des Rohrs ab, die durch die charakteristische Länge l_c beschrieben werden: $Re = \frac{2 l_c \rho v}{\eta}. \quad (10.29)$ Eine Strömung in einer zylindrischen Röhre ist in der Regel laminar, wenn die Reynolds-Zahl kleiner als etwa 2000 ist. Bei einem Wert von über 3000 ist sie turbulent. Diese Werte werden im Allgemeinen jedoch experimentell ermittelt und sind nicht aus der Theorie ableitbar.
Navier-Stokes-Gleichung	Die Bewegungsgleichung für allgemeine Strömungen ist durch $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) \mathbf{v} = \eta \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{a}_G, \quad (10.35)$ gegeben, wobei der erste Term auf der linken Seite die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit darstellt und der zweite die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Ort (auch Konvektionsbeschleunigung genannt). Auf der rechten Seite stehen die äußeren Kräfte: die Reibungskraft, die Widerstandsreaktion aufgrund des Staudrucks und die Gewichtskraft des Fluids.

Antworten auf die Verständnisfragen

- 10.1 Nein. Das auströmende Wasser verlangsamt sich nicht, weil es in einen Bereich mit höherem Druck hineinfließt würde, sondern weil es durch die Viskosität des Wassers gebremst wird. Die Bernoulli-Gleichung gilt nur, wenn die Viskosität vernachlässigbar ist.
- 10.2 Die Verengung ist konstruktiv notwendig. Bei der Anordnung handelt es sich um eine Venturi-Düse. Wenn der Gummibalg des Zerstäubers kräftig gedrückt wird, sinkt der Druck in dem verengten Bereich aufgrund des Venturi-Effekts unter den Atmosphärendruck. Dadurch sinkt auch der Druck in dem senkrechten Röhrchen, und der Luftdruck im Behälter oberhalb des Flüssigkeitsspiegels kann die Flüssigkeit durch das Röhrchen nach oben drücken, sodass sie mit dem horizontalen Luftstrom aus der Düse austritt.

Lösungen der Übungen

- 10.1 a) 7,97 kg/l, b) Eisen
- 10.2 19 kg
- 10.3 Mit $p_0 = 1,00 \text{ atm} = 101 \text{ kPa}$, $p = 2,00 \text{ atm}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ und $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ erhält man $\Delta h = \Delta p / \rho g = 10,3 \text{ m}$. In einer Tiefe von 10,3 m ist der Druck doppelt so hoch wie an der Oberfläche.
- 10.4 $h = p / \rho g = 0,760 \text{ m} = 760 \text{ mm}$
- 10.5 a) 338 mmHg, b) 0,444 atm
- 10.6 Mit der in Schritt 4 angegebenen Formel ergibt sich eine relative Dichte von 2,7. Der Block besteht daher aus Aluminium.
- 10.7 45 %
- 10.8 $I_V = vA = 9,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. Es ist üblich, die Pumpleistung des Herzens in Litern pro Minute anzugeben. Mit $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$ und $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ ergibt sich $I_V = 5,7 \text{ l/min}$. Innerhalb einer Minute wird daher etwa das gesamte Blutvolumen des Körpers umgewälzt.
- 10.9 Wenn wir die Anfangs- und Endgeschwindigkeit mit v_1 bzw. v_2 und die Querschnittsflächen der Blutgefäße mit A_1 und A_2 bezeichnen, ergibt sich

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi(0,30 \text{ cm})^2}{\pi(0,20 \text{ cm})^2} (10 \text{ cm/s}) = 23 \text{ cm/s}$$
. Eine Abnahme des Radius um ein Drittel erhöht die Fließgeschwindigkeit auf mehr als das Doppelte.
- 10.10 Das Wasser spritzt bis in die Höhe h , bis zur selben Höhe wie die Wasseroberfläche im Tank.
- 10.11 Die Stokes'sche Reibung beträgt $F_W(v_1) = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ N}$, $F_W(v_2) = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ N}$. Die Newton'sche Reibung beträgt $F_W(v_1) = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ und $F_W(v_2) = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. An diesen Werten kann man deutlich die quadratische Abhängigkeit der Reibung von der Geschwindigkeit ablesen.

Aufgaben

Bei allen Aufgaben ist die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

- 10.1 •** Die Masse eines kugelförmigen Körpers A ist achtmal so groß wie die Masse von Kugel B, der Radius von A ist doppelt so groß wie der Radius von B. Was gilt für ihre Dichten?
a) $\rho_A > \rho_B$, b) $\rho_A < \rho_B$, c) $\rho_A = \rho_B$, d) es liegen nicht genug Informationen vor, um die Dichten zu vergleichen.

- 10.2 •** In Abenteuerfilmen kann man manchmal sehen, wie der Held und seine Begleiterin den Bösewichten im Dschungel entkommen, indem sie sich für einige Zeit unter Wasser verstecken. Dazu atmen sie durch ein Schilfröhrchen. In einem Film ist das Wasser so klar, dass man bis in eine Tiefe von 15 m tauchen muss, damit man von oben nicht zu sehen ist. Als wissenschaftlicher Berater des Filmstudios sagen Sie dem Produzenten, dass eine solche Tiefe nicht realistisch ist und der kundige Zuschauer bei dieser Szene anfangen wird zu lachen. Erläutern Sie, warum.

- 10.3 ••** Ein massiver Bleibarren von 200 g und ein massiver Kupferbarren, ebenfalls von 200 g, sind komplett in ein wasser gefülltes Aquarium eingetaucht. Jeder Barren hängt an einem Fäden unmittelbar über dem Boden des Aquariums. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? a) Die Auftriebskraft auf den Bleibarren ist größer als die Auftriebskraft auf den Kupferbarren. b) Die Auftriebskraft auf den Kupferbarren ist größer als die Auftriebskraft auf den Bleibarren. c) Die Auftriebskräfte auf beide Barren sind gleich. d) Für eine korrekte Antwort sind mehr Daten nötig.

- 10.4 ••** Beantworten Sie dieselben Fragen wie in Aufgabe 10.3, betrachten Sie nun aber einen massiven Blei- und einen massiven Kupferbarren von jeweils 20 cm^3 .

- 10.5 ••** Abbildung 10.30 zeigt einen sogenannten kartesischen Taucher. Er besteht aus einem kleinen, unten offenen Röhrchen, das oben geschlossen ist und eine Luftblase enthält. Das Röhrchen befindet sich in einer teilweise mit Wasser gefüllten Kunststoffflasche. Normalerweise schwebt der Taucher in der Flasche; wenn man die Flasche kräftig drückt, sinkt er. a) Erläutern Sie, warum der kartesische Taucher sinkt. b) Erläutern Sie die Vorgänge bei einem an der Oberfläche schwimmenden U-Boot, das ohne jeden Antrieb zu sinken beginnt, wenn einfach Wasser in leere Tanks beim Kiel eingelassen wird. c) Erläutern Sie, warum eine auf dem Wasser schwimmende Person sich auf der Wasseroberfläche auf- und abbewegt, wenn sie ein- und ausatmet.

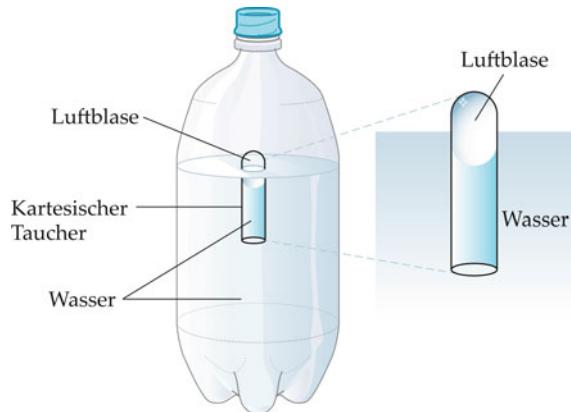


Abbildung 10.30 Zu Aufgabe 10.5.

- 10.6 ••** Ein Fluid wird beschleunigt, wenn es die Verengung in einer Röhre passiert. Benennen Sie die Kräfte, die am Beginn der Verengung auf das Fluid wirken und diese Beschleunigung verursachen.

- 10.7 ••** Sie sitzen in einem Boot, das auf einem sehr kleinen See treibt. Sie nehmen den Anker aus dem Boot und werfen ihn ins Wasser. Erhöht sich der Wasserspiegel des Sees, sinkt er, oder bleibt er gleich? Erläutern Sie Ihre Antwort.

- 10.8 ••** Eine horizontale Röhre verengt sich von $10,0 \text{ cm}$ Durchmesser am Ort A auf $5,0 \text{ cm}$ Durchmesser am Ort B. Betrachten Sie ein nichtviskoses, inkompressibles Fluid, das ohne Turbulenz von A nach B fließt. Was können Sie über die Fließgeschwindigkeiten (in m/s) an den beiden Orten sagen? a) $v_A = v_B$, b) $v_A = \frac{1}{2} v_B$, c) $v_A = \frac{1}{4} v_B$, d) $v_A = 2 v_B$, e) $v_A = 4 v_B$.

- 10.9 ••** Abbildung 10.31 zeigt schematisch den Tunnelbau eines Präriehunds. Die beiden Eingänge sind so beschaffen, dass Eingang 1 von einem Erdwall umgeben ist, Eingang 2 hingegen von flachem Terrain. Erläutern Sie, wie der Tunnel belüftet wird, und geben Sie an, in welche Richtung die Luft durch den Tunnel strömt.

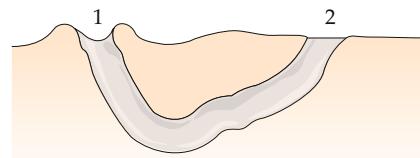


Abbildung 10.31 Zu Aufgabe 10.9.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

10.10 •• Im Rahmen Ihres Fortgeschrittenenpraktikums sollen Sie Luftproben aus verschiedenen Höhen nehmen. Die Sammelleinheit hat eine Masse von 25,0 kg. Schätzen Sie den Durchmesser eines heliumgefüllten Ballons, der die Sammelleinheit tragen kann. Vernachlässigen Sie die Masse der Ballon „haut“ und die (geringe) Auftriebskraft auf die Sammelleinheit selbst.

10.11 •• Ein Freund von Ihnen möchte kommerzielle Fahrten mit einem Heißluftballon anbieten. Der leere Ballon, der Korb und die Insassen haben eine Gesamtmasse von maximal 1000 kg. Der Ballon hat voll gefüllt einen Durchmesser von 22,0 m. Schätzen Sie die erforderliche Dichte der heißen Luft. Vernachlässigen Sie die Auftriebskraft auf den Korb und auf die Insassen.

Dichte

10.12 • Betrachten Sie einen Raum von $4,0 \text{ m} \times 5,0 \text{ m} \times 4,0 \text{ m}$. Der Raum befindet sich auf der Erdoberfläche, es herrschen normale atmosphärische Bedingungen. Welche Masse hat die Luft in diesem Raum?

10.13 •• Ein 60-ml-Kolben ist bis zum Rand gefüllt mit Quecksilber bei 0°C (Abbildung 10.32). Wenn die Temperatur auf 80°C steigt, laufen 1,47 g Quecksilber über. Nehmen Sie an, dass das Volumen des Kolbens gleich bleibt. Geben Sie die Änderung der Dichte des Quecksilbers bei der Erwärmung an. Bei 0°C hat Quecksilber eine Dichte von $13\,645 \text{ kg/m}^3$.

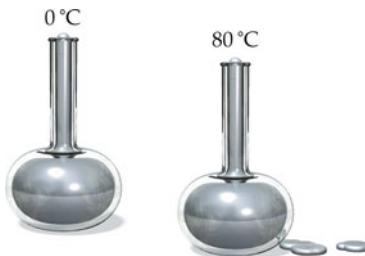


Abbildung 10.32 Zu Aufgabe 10.13.

Druck

10.14 • Über der Oberfläche eines Sees herrscht ein Luftdruck von $p_{\text{at}} = 101 \text{ kPa}$. a) In welcher Tiefe ist der Druck doppelt so hoch wie der Luftdruck? b) Über einem Quecksilbergefäß herrscht der Druck p_{at} . In welcher Tiefe ist der Druck $2p_{\text{at}}$?

10.15 •• Wenn eine Frau in hochhackigen Schuhen läuft, lastet ihr gesamtes Gewicht für einen kurzen Moment auf dem Absatz von einem ihrer Schuhe. Ihre Masse soll 56,0 kg, die Absatzfläche $1,00 \text{ cm}^2$ betragen. Welchen Druck übt sie damit auf den Boden aus? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Druck, den

ein Elefantenfuß auf den Boden ausübt. Nehmen Sie die Masse des Elefanten mit 5000 kg und die Fläche eines Fußes mit 400 cm^2 an; alle vier Füße des Elefanten sind gleichmäßig belastet.

10.16 •• Im 17. Jahrhundert führte Blaise Pascal das folgende, in Abbildung 10.33 gezeigte Experiment durch: Auf ein wasser gefülltes Weinfass wurde eine lange Röhre aufgesetzt. Dann schüttete man Wasser in die Röhre, bis das Fass geborsten war. Der Fassdeckel hatte einen Radius von 20 cm, die Wassersäule in der Röhre war 12 m hoch. a) Berechnen Sie die Kraft, die aufgrund der Druckerhöhung auf den Fassinhalt wirkt. b) Der Innendurchmesser der Röhre betrug 3,00 mm. Welche Masse an Wasser hat dann den Druck verursacht, der das Fass zum Bersen brachte?



Abbildung 10.33 Zu Aufgabe 10.16.

10.17 •• Viele Leute glauben, dass sie unter Wasser atmen können, wenn sie das Ende eines flexiblen Schnorchels aus dem Wasser herausragen lassen (Abbildung 10.34). Sie ziehen im Allgemeinen nicht in Betracht, dass der Wasserdruk der Ausdehnung des Brustkorbs beim Einatmen und somit der Aufblähung der Lunge entgegenwirkt. Nehmen Sie an, dass Sie gerade noch atmen können, wenn Sie auf dem Boden liegen und auf Ihrem Brustkorb ein Gewicht von 400 N liegt. Wie weit dürfte sich dann Ihr Brustkorb unterhalb der Wasseroberfläche befinden, damit Sie dann noch atmen können? Ihr Brustkorb soll eine Fläche von $0,090 \text{ m}^2$ haben.

10.18 •• In Beispiel 10.3 konnte eine Kraft von 150 N, die auf einen kleinen Kolben wirkt, ein Auto von 1500 kg heben. Weisen Sie nach, dass dies nicht den Energieerhaltungssatz verletzt, indem Sie zeigen, dass die von der 150-N-Kraft an dem kleinen Kolben verrichtete Arbeit gleich der Arbeit ist, die der große Kolben am Auto verrichtet.

Auftrieb

10.19 • Ein 500-g-Stück Kupfer mit der relativen Dichte 8,96 hängt an einer Federwaage und taucht vollständig in ein wasser gefülltes Gefäß ein. Welche Gewichtskraft zeigt die Federwaage an?



Abbildung 10.34 Zu Aufgabe 10.17.

10.20 • Ein Block aus unbekanntem Material wiegt in Luft 5,00 N und 4,55 N, wenn er in Wasser eingetaucht ist. a) Welche Dichte hat das Material? b) Nehmen Sie an, dass der Block massiv und homogen ist; aus welchem Material besteht er vermutlich?

10.21 •• Ein homogener, massiver Körper schwimmt auf Wasser, 80 % seines Volumens befinden sich unterhalb der Wasseroberfläche. Wenn derselbe Körper auf einer anderen Flüssigkeit schwimmt, befinden sich 72 % seines Volumens unterhalb der Oberfläche. Berechnen Sie die Dichte des Körpers und die relative Dichte der Flüssigkeit.

10.22 •• Ein Becher der Masse 1,00 kg enthält 2,00 kg Wasser; der Becher steht auf einer Waage. Ein Aluminiumblock von 2,00 kg (Dichte von Aluminium: $2,70 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) hängt an einer Federwaage und ist in das Wasser eingetaucht (Abbildung 10.35). Welche Werte zeigen die beiden Waagen an?

10.23 •• Ein Forschungsteam soll einen großen heliumgefüllten Wetterballon starten lassen. Der kugelförmige Ballon hat einen Radius von 2,5 m und eine Gesamtmasse von 15 kg (Ballon plus Helium plus Messausstattung). a) Welche Anfangsbeschleunigung nach oben erfährt der Ballon, wenn man ihn aus Meereshöhe starten lässt? b) Die Reibungskraft auf den Ballon ist $F_R = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho v^2$ mit dem Ballonradius r , der Luftdichte ρ und der Steiggeschwindigkeit v des Ballons. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit des steigenden Ballons.

Kontinuitäts- und Bernoulli-Gleichung

Hinweis: Wenn nicht anders angegeben, nehmen Sie für alle Aufgaben in diesem Abschnitt eine laminare stationäre Strömung eines nichtviskosen Fluids an.



Abbildung 10.35 Zu Aufgabe 10.22.

10.24 •• Durch eine Aorta mit 9,0 mm Radius fließt Blut mit einer Geschwindigkeit von 30 cm/s. a) Berechnen Sie den Volumenstrom in Litern pro Minute. b) Obwohl der Querschnitt eines kapillaren Blutgefäßes wesentlich kleiner ist als der der Aorta, ist der Gesamtquerschnitt der Kapillaren größer, weil es so viele davon gibt. Nehmen Sie an, dass alles Blut aus der Aorta in die Kapillaren fließt und dass es sich dort mit einer Geschwindigkeit von 1,0 mm/s bewegt. Berechnen Sie den Gesamtquerschnitt der Kapillaren.

10.25 •• Mit einem Staurohr, nach seinem Erfinder Henri de Pitot (1695–1771) auch Pitot-Rohr genannt (Abbildung 10.36), kann man die Strömungsgeschwindigkeit eines Gases messen. Die innere Röhre steht senkrecht zum strömenden Fluid, der Ring mit den Löchern in der äußeren Röhre dagegen wird parallel umströmt. Zeigen Sie, dass für die Strömungsgeschwindigkeit gilt: $v^2 = 2 g h (\rho - \rho_G)/\rho_G$; dabei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit im Manometer und ρ_G die Dichte des Gases.

10.26 •• Ein Saugheber oder Siphon ist eine Anordnung, mit der man Flüssigkeiten von einem Behälter in einen anderen transportieren kann. Der Schlauch in Abbildung 10.37 muss mit Flüssigkeit gefüllt sein, damit der Saugheber beginnt zu arbeiten. Wenn das geschehen ist, fließt die Flüssigkeit so lange durch den Schlauch, bis der Flüssigkeitsspiegel in beiden Behältern gleich ist. a) Zeigen Sie mithilfe der Bernoulli-Gleichung, dass sich die Flüssigkeit in dem Schlauch mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2 g d}$ bewegt. b) Geben Sie einen Ausdruck für den Druck am höchsten Punkt des Schlauchs an.

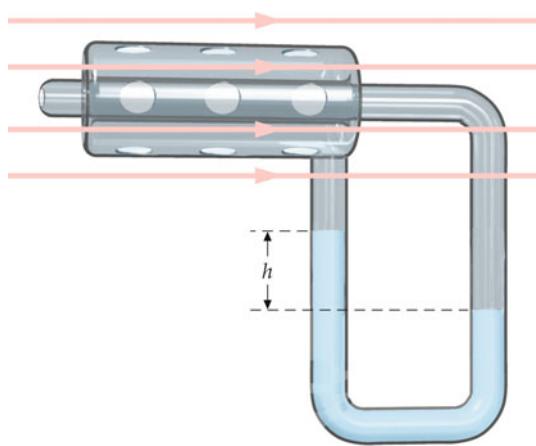


Abbildung 10.36 Zu Aufgabe 10.25.

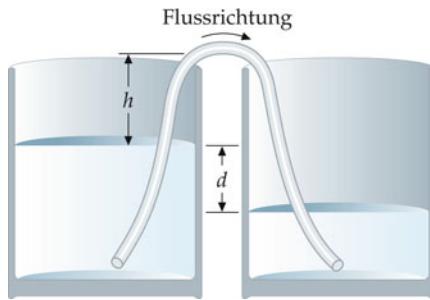


Abbildung 10.37 Zu Aufgabe 10.26.

10.27 •• Ein Springbrunnen soll eine Fontäne 12 m hoch in die Luft spritzen. Die Düse am Boden der Brunnenschale hat einen Durchmesser von 1,0 cm. Die Pumpe befindet sich 3,0 m unterhalb der Brunnenschale. Das Rohr zur Düse hat einen Durchmesser von 2,0 cm. Berechnen Sie den notwendigen Pumpdruck.

10.28 •• Leiten Sie eine allgemeinere Form der Bernoulli-Gleichung her als die Form von Gleichung 10.16, indem Sie auch mögliche Höhenunterschiede des Fluids bei seiner Bewegung berücksichtigen. Anders ausgedrückt: Zeigen Sie mit dem Zusammenhang von Arbeit und Energie, dass aus Gleichung 10.16 die im Text verwendete Gleichung 10.17a folgt, wenn man Höhenänderungen zulässt.

Strömung viskoser Flüssigkeiten

10.29 •• Wir nehmen an, das Blut braucht 1,00 s, um durch eine 1,00 mm lange Kapillare des menschlichen Gefäßsystems zu fließen. Der Durchmesser der Kapillare ist 7,00 μm , der Druckabfall beträgt 2,60 kPa. Nehmen Sie eine laminare Strömung an und berechnen Sie damit die Viskosität von Blut.

10.30 ••• Berechnen Sie mithilfe der Stokes'schen Reibung die Aufstiegsgeschwindigkeit einer Kohlendioxidblase von 1,0 mm Durchmesser in einem Glas Limonade (Dichte 1,1 kg/l und $\eta = 1,8 \text{ mPa} \cdot \text{s}$). Wie lange dauert demnach der Aufstieg in einem 20 cm hohen Limonadenglas? Verträgt sich dieser Wert mit Ihren Alltagserfahrungen?

Allgemeine Aufgaben

10.31 • Eine Gruppe von Teenagern schwimmt zu einem rechteckigen Holzfloß mit 3,00 m Breite und 2,00 m Länge. Das Floß ist 9,00 cm dick. Wie viele Teenager (mittlere Masse 75,0 kg) können auf dem Floß stehen, ohne dass es völlig ins Wasser eintaucht? Die Dichte des Holzes soll 650 kg/m^3 betragen.

10.32 • Meerwasser hat einen Kompressionsmodul von $K = 2,30 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Berechnen Sie die Dichte von Meerwasser in einer Tiefe, in der ein Druck von 800 bar herrscht. Die Dichte von Meerwasser an der Oberfläche beträgt 1025 kg/m^3 . Vernachlässigen Sie alle Auswirkungen von Temperatur und Salzgehalt des Wassers.

10.33 •• Ein halb mit Wasser gefüllter 200-ml-Becher steht auf der linken Schale einer Balkenwaage; auf der rechten Waagschale liegt eine ausreichende Menge Sand, sodass die Waage sich im Gleichgewicht befindet. Ein an einem Fäddchen hängender Würfel mit 4,0 cm Kantenlänge wird so tief in das Wasser getaucht, dass er komplett untertaucht, aber den Boden des Bechers nicht berührt. Um die Waage wieder ins Gleichgewicht zu bringen, muss man auf die rechte Waagschale ein Massestück m auflegen. Wie groß ist m ?

10.34 •• Angenommen, Rohöl hat bei Normaltemperatur eine Viskosität von $0,800 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Zwischen einem Ölfeld und dem Tankerterminal soll eine 50,0 km lange, horizontal verlaufende Pipeline gebaut werden. Sie soll am Terminal Öl mit einer Rate von 500 l/s anliefern. Die Strömung in der Pipeline soll laminar sein, um den Druck, mit dem das Öl durch die Pipeline gepresst wird, zu minimieren. Nehmen Sie an, dass Rohöl eine Dichte von 700 kg/m^3 hat, und schätzen Sie, welchen Durchmesser die Pipeline haben sollte.

10.35 •• Ein Heliumballon kann eine Last von 750 N und vernachlässigbarem Volumen tragen. Die Hülle des Ballons hat eine Masse von 1,5 kg. a) Welches Volumen hat der Ballon? b) Nehmen Sie an, der Ballon hätte das doppelte Volumen wie in Teilaufgabe a berechnet. Welche Anfangsbeschleunigung erfährt der Ballon, wenn er eine Last von 900 N trägt und aus Meereshöhe startet?

10.36 •• Im Zusammenhang mit der Diskussion um die Beziehung zwischen Luftdruck und Höhe über dem Meeresspiegel (Beispiel 10.5) hatten wir hergeleitet, dass die relative Abnahme des Luftdrucks proportional zur Höhenzunahme ist. Dies lässt sich in einer Differenzialgleichung der Form $dp/p = -C dh$ mit einer positiven Konstanten C ausdrücken. a) Zeigen Sie,

dass diese Differenzialgleichung durch $p(h) = p_0 e^{-Ch}$ gelöst wird, wobei p_0 der Luftdruck bei $h = 0$ ist. b) Der Druck in einer Höhe von $h = 5,5$ km beträgt nur die Hälfte des Drucks auf Meereshöhe. Berechnen Sie damit die Konstante C .

10.37 ••• Die meisten Fischarten haben eine sogenannte Schwimmblase. Indem der Fisch diese dehnbare Blase mit Sauerstoff aus den Kiemen füllt, kann er im umgebenden Wasser

steigen, und wenn er die Blase wieder leert, kann er absinken. Ein Süßwasserfisch hat eine mittlere Dichte von $1,05 \text{ kg/l}$, wenn seine Schwimmblase leer ist. Welches Volumen muss der Sauerstoff in der Schwimmblase haben, damit der Fisch im Wasser schwebt? Der Fisch soll eine Masse von $0,825 \text{ kg}$ haben. Nehmen Sie an, dass die Dichte des Sauerstoffs in der Schwimmblase gleich der Luftpumpe bei Standardbedingungen ist.

Schwingungen und Wellen

Teil
III



11	Schwingungen	413
12	Wellen	455

Schwingungen
und Wellen

Schwingungen

11



Monstertrucks können sich über nahezu alles hinwegwälzen. Aber warum werden die Fahrer dieser riesigen Wagen dabei nicht aus dem Sitz geschleudert? Wie das Foto zeigt, sind auch die Stoßdämpfer im Monsterformat. Sie dämpfen die Schwingungen des Fahrzeugs und sorgen so für eine gleichmäßige Fahrt, wenn der Fahrer durch unebenes Gelände oder auch über andere Wagen hinwegfährt. (© Jeff Greenberg/Photoedit.)

Wie kann ein Automechaniker beim Einbau der Stoßdämpfer an einem Monstertruck die richtigen Modelle bestimmen? (Siehe Beispiel 11.13.)

11.1	Harmonische Schwingungen	414
11.2	Energie des harmonischen Oszillators	421
11.3	Beispiele für schwingende Systeme	424
11.4	Gedämpfte Schwingungen	435
11.5	Erzwungene Schwingungen und Resonanz	440
	Zusammenfassung	447
	Aufgaben	449

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Kinematik und Dynamik von Bewegungen beschäftigen, bei denen die Beschleunigung proportional zur Auslenkung aus einer Gleichgewichtslage ist. Solche Bewegungen nennt man Schwingungen oder auch Oszillationen. Es gibt viele bekannte Beispiele dafür: Surfer bewegen sich beim Warten auf die passende Welle auf und nieder, die Pendel von Uhren gehen hin und her, und die Saiten und Zungen der Musikinstrumente schwingen. Andere, weniger bekannte Beispiele sind die Schwingungen der Luftmoleküle in einer Schallwelle oder die Schwingungen des elektrischen Stroms in Radios, Fernsehgeräten oder Metalldetektoren. Allen diesen Schwingungsprozessen liegt das gleiche Prinzip zugrunde, das wir im Folgenden vorstellen werden.

Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit den harmonischen Schwingungen befassen, der grundlegendsten Art der Schwingungsbewegung. Außerdem befassen wir uns mit gedämpften und mit erzwungenen Schwingungen.

11.1 Harmonische Schwingungen

Eine häufig auftretende, grundlegende Schwingungsbewegung ist die **harmonische Schwingung**. Harmonisch heißen diese Schwingungen, weil sie wie die Tonabstände bei musikalischen Harmonien durch sogenannte harmonische Funktionen beschrieben werden, deren bekannteste Vertreter die Sinus- und Kosinusfunktion sind. Beispielsweise vollführt ein Körper, der an einer Feder befestigt ist und reibungsfrei auf einer Unterlage schwingt, eine harmonische Schwingung (Abbildung 11.1). Im Gleichgewicht übt die Feder keine Kraft auf den Körper aus. Wenn der Körper um die Länge x aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, übt die Feder eine Kraft auf ihn aus, die proportional zu seiner Auslenkung x ist. Ein solcher Körper heißt **harmonischer Oszillator**. Der Betrag der Federkraft ist durch das Hooke'sche Gesetz gegeben (Gleichung 3.1):

$$F_x = -k_F x. \quad (11.1)$$

LINEARE RÜCKSTELLKRAFT

Darin ist k_F die **Federkonstante**, auch als Kraftkonstante der harmonischen Schwingung bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Elastizität der Feder. Das Minuszeichen in der Gleichung zeigt an, dass die Kraft eine rücktreibende Kraft ist, d. h., sie ist der Auslenkungsrichtung aus der Gleichgewichtslage entgegengerichtet. Kombiniert man Gleichung 11.1 mit dem zweiten Newton'schen Axiom ($F_x = m a_x$), so erhält man

$$-k_F x = m a_x$$

oder

$$a_x = -\frac{k_F}{m} x \quad \left(\text{bzw. } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_F}{m} x \right). \quad (11.2)$$

Die Beschleunigung ist proportional zur Auslenkung, das Minuszeichen zeigt an, dass sie ihr entgegengesetzt gerichtet ist.

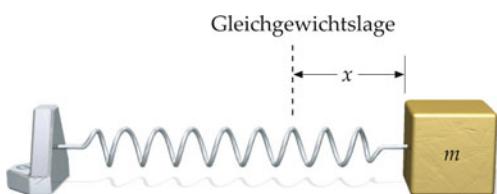


Abbildung 11.1 Ein Körper an einer Feder auf einer reibungsfreien Unterlage. Die Verschiebung x aus der Gleichgewichtslage ist positiv, wenn die Feder gedehnt, und negativ, wenn sie zusammengedrückt wird.

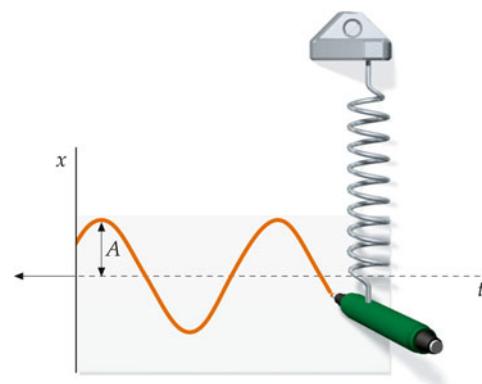


Abbildung 11.2 Eine Masse schwingt an einer vertikal aufgehängten Feder (sog. Federschwinger). Zur Markierung ihrer Bahn ist ein Stift am Ende der Feder angebracht. Wenn man das Papier mit konstanter Geschwindigkeit nach links zieht, zeichnet der Bleistift die Verschiebung x als Funktion der Zeit t auf. (Hier wurde x positiv gewählt, wenn die Feder zusammengedrückt wird.)

Jede Bewegung, die dieser Bewegungsgleichung genügt, beschreibt eine harmonische Schwingung. Daher kann man mit diesem Zusammenhang auch Systeme identifizieren, die eine harmonische Schwingung ausführen:

Bei einer harmonischen Schwingung ist die Beschleunigung (und damit auch die resultierende Kraft) auf einen Körper proportional zu dessen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage und stets zu dieser hin gerichtet.

BEDINGUNGEN FÜR EINE HARMONISCHE SCHWINGUNG

Die Zeit, die der Körper benötigt, um eine vollständige Schwingung (von einer extremen Auslenkung aus der Ruhelage zur anderen und wieder zurück) auszuführen, wird als **Schwingungsdauer T** oder **Schwingungsperiode** bezeichnet. Der Kehrwert der Schwingungsdauer heißt **Frequenz ν** . Sie gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (11.3)$$

Die Einheit der Frequenz ist Schwingungen pro Sekunde und wird **Hertz (Hz)** genannt:

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}.$$

Beträgt die Dauer einer Schwingung beispielsweise 0,25 s, so hat die Schwingung eine Frequenz von 4 Hz.

Abbildung 11.2 zeigt, wie man für einen Federschwinger den Ort der schwingenden Masse experimentell als Funktion der Zeit aufzeichnen kann. Die allgemeine Gleichung einer solchen Kurve $x(t)$ lautet

$$x(t) = A \cos (\omega t + \delta). \quad (11.4)$$

ORT-ZEIT-FUNKTION DER HARMONISCHEN SCHWINGUNG

Darin sind A , ω und δ Konstanten. Die maximale Auslenkung x_{\max} aus dem Gleichgewicht wird **Amplitude** A genannt. Das Argument der Kosinusfunktion ($\omega t + \delta$) heißt **Phase** der Schwingung und δ die **Phasenkonstante**. Die Konstante δ ist die Phase bei $t = 0$. (Beachten Sie den Zusammenhang $\cos(\omega t + \delta) = \sin(\omega t + \delta + \pi/2)$; daher kann man die Schwingungsgleichung als Sinus- oder als Kosinusfunktion ausdrücken, abhängig jeweils von der Schwingungsphase bei $t = 0$.) Wenn nur ein schwingendes System vorliegt, kann man für $t = 0$ immer $\delta = 0$ wählen. Liegen zwei schwingende Systeme mit derselben Frequenz, aber unterschiedlicher Phase vor, kann man $\delta = 0$ nur für eines von ihnen wählen. Die Gleichungen für die zwei Systeme lauten dann

$$x_1 = A \cos(\omega t)$$

und

$$x_2 = A \cos(\omega t + \delta).$$

Wenn die Phasendifferenz $\delta = 0$ beträgt oder ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, dann ist $x_2(t) = x_1(t)$, und beide Systeme sind *in Phase*. Bei einer Phasendifferenz von $\delta = \pi$ oder einem ungeraden Vielfachen von π gilt $x_2(t) = -x_1(t)$, und die Systeme sind um 180° gegeneinander *phasenverschoben*.

Man kann zeigen, dass Gleichung 11.4 eine Lösung der Bewegungsgleichung 11.2 ist, indem man $x = x(t)$ zweimal nach der Zeit differenziert. Die erste Ableitung ergibt die Geschwindigkeit v_x der harmonischen Bewegung:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta). \quad (11.5)$$

GESCHWINDIGKEIT-ZEIT-FUNKTION DER HARMONISCHEN SCHWINGUNG

Die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ergibt die Beschleunigung der harmonischen Bewegung:

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta). \quad (11.6)$$

Ersetzt man $A \cos(\omega t + \delta)$ (Gleichung 11.4) durch x , so ergibt sich

$$a_x = -\omega^2 x. \quad (11.7)$$

BESCHLEUNIGUNGSGESETZ DER HARMONISCHEN SCHWINGUNG

Vergleichen wir Gleichung 11.7 und Gleichung 11.2, so erkennen wir, dass $x = A \cos(\omega t + \delta)$ auch Gleichung 11.2 löst, wenn man sie als Differenzialgleichung $d^2x/dt^2 = -(k_F/m)x$ schreibt und

$$\omega = \sqrt{\frac{k_F}{m}} \quad (11.8)$$



Dieses Tilgungspendel in einem der oberen Stockwerke des Citicorp Building in New York dämpft die Schwingungen des Gebäudes, die durch den Wind entstehen. Es besteht aus einem Gleitstein mit einer Masse von 400 t, der mit dem Gebäude durch eine Feder verbunden ist. Die Federkonstante ist so gewählt, dass das System aus Feder und Gleitstein dieselbe Eigenfrequenz hat wie das Gebäude. Gerät das Gebäude durch heftige Winde ins Schwanken, so schwingen Gebäude und Dämpfungssystem mit 180° Phasenverschiebung gegeneinander, was die Amplitude der Schwankung signifikant reduziert. (© Citibank.)

setzt. Die Amplitude A und die Phasenkonstante δ lassen sich aus den Anfangsbedingungen (für $t = t_0$ sei $x = x_0$ die Anfangslage und $v_x = v_{x,0}$ die Anfangsgeschwindigkeit) bestimmen. Setzt man beispielsweise $t = 0$ in $x = A \cos(\omega t + \delta)$ ein, so erhält man die Anfangslage

$$x_0 = A \cos \delta. \quad (11.9)$$

Entsprechend erhält man mit $t = 0$ in $v_x = dx/dt = -A \omega \sin(\omega t + \delta)$ für die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_{x,0} = -A \omega \sin \delta. \quad (11.10)$$

Damit haben wir zwei Bestimmungsgleichungen, aus denen wir A und δ in Abhängigkeit von x_0 und $v_{x,0}$ berechnen können.

Die Schwingungsdauer (oder Schwingungsperiode) T ist die kürzeste Zeit ($T > 0$), die die Relation

$$x(t) = x(t + T)$$

für alle t erfüllt. Mit Gleichung 11.4 und $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \delta) &= A \cos[\omega(t + T) + \delta] \\ &= A \cos(\omega t + \delta + \omega T). \end{aligned}$$

Kosinus- und Sinusfunktion haben die Periode 2π . Somit wiederholen sich Ort und Geschwindigkeit des harmonischen Oszillators, wenn sich die Phase der Schwingung um 2π ändert:

$$\omega(t + T) + \delta = 2\pi + \omega t + \delta.$$

Daraus folgt $\omega T = 2\pi$ oder

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T}.$$

Vorgehensweise: Lösung von Aufgaben zur harmonischen Schwingung

Legen Sie den Ursprung auf die x -Achse und in die Gleichgewichtslage. Wählen Sie bei einer Feder die x -Richtung so, dass x positiv ist, wenn man die Feder dehnt. Verwenden Sie nicht die kinematischen Gleichungen für konstante Beschleunigung, sondern die Gleichungen der harmonischen Schwingung.

Plausibilitätsprüfung: Stellen Sie bei Ihrem Taschenrechner den Winkelmodus passend ein (Gradmaß oder Bogenmaß), wenn Sie trigonometrische Funktionen und ihre Argumente berechnen.

Die Größe ω heißt **Kreisfrequenz**. Ihre Dimension ist – genau wie bei der Winkelgeschwindigkeit, die ebenfalls ω genannt wird – der Quotient Winkel durch Zeit. Da der Winkel keine Dimension hat, kann man als Dimension die reziproke Zeit verwenden. Die Einheit der Kreisfrequenz ist $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ bzw. s^{-1} . Setzt man für ω in Gleichung 11.4 den Ausdruck $2\pi/T$ ein, so ergibt sich

$$x = A \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \delta \right).$$

Man erkennt durch Vergleichen, dass bei Zunahme von t um T das Verhältnis t/T um 1 und die Phase um 2π zunimmt und dass ein vollständiger Bewegungszyklus abgeschlossen ist.

Kreisfrequenz ω und Frequenz v der harmonischen Schwingung hängen demnach gemäß

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi v \quad (11.11)$$

zusammen. Wegen $\omega = \sqrt{k_F/m}$ folgt daraus für einen Federschwinger mit der Federkonstanten k_F und der Masse m

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m}}. \quad (11.12)$$

Die Frequenz des Federschwingers nimmt mit wachsender Federkonstante zu und mit zunehmender Masse ab. Damit bietet Gleichung 11.12 einen Weg, die (träge) Masse durch Messung der Schwingungsdauer zu bestimmen. Dies setzt man z. B. ein, um die Masse eines Astronauten bei „Schwerelosigkeit“ zu bestimmen.

Übung 11.1: Ein Körper von 0,80 kg ist an einer Feder mit der Federkonstanten $k_F = 400 \text{ N/m}$ befestigt. a) Geben Sie Frequenz und Schwingungsdauer für die Bewegung des Körpers an, wenn er aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt und dann losgelassen wird. b) Wiederholen Sie die Rechnung aus Teilaufgabe a, für einen Körper mit 1,6 kg Masse. ◀

Beispiel 11.1 zeigt, wie man aus der Grundgleichung der harmonischen Schwingung bestimmte Werte berechnen kann.

Beispiel 11.1: Wellenreiten

Sie sitzen auf Ihrem Surfbrett und bewegen sich auf den Wogen auf und nieder. Die vertikale Auslenkung y des Bretts ist gegeben durch

$$y(t) = (1,2 \text{ m}) \cos \left(\frac{1}{2,0 \text{ s}} t + \frac{\pi}{6} \right).$$

a) Bestimmen Sie die Amplitude, Kreisfrequenz, Phasenkonstante, Frequenz und Schwingungsdauer der Bewegung. b) Wo befindet sich das Surfbrett bei $t = 1 \text{ s}$? c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung als Funktion der Zeit t . d) Bestimmen Sie die Anfangswerte für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Surfbretts.



In Erwartung der richtigen Welle. (© David Pu'u/Corbis.)

Problembeschreibung: Wir bestimmen die in Teilaufgabe a verlangten Größen durch Vergleich der Bewegungsgleichung

$$y(t) = (1,2 \text{ m}) \cos \left(\frac{1}{2,0 \text{ s}} t + \frac{\pi}{6} \right)$$

mit der Grundgleichung 11.4 für die harmonische Schwingung. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung erhält man durch Ableitung von $y(t)$ nach der Zeit.

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Durch Vergleich der Bewegungsgleichung mit $y = A \cos(\omega t + \delta)$ können Sie A , ω und δ bestimmen:

$$y(t) = (1,2 \text{ m}) \cos\left(\frac{1}{2,0 \text{ s}} t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A = \boxed{1,2 \text{ m}} \quad \omega = \boxed{0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} \quad \delta = \boxed{\pi/6 \text{ rad}}$$

2. Frequenz und Schwingungsdauer bestimmt man aus der Gleichung für ω :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi} = 0,0796 \text{ Hz} = \boxed{0,080 \text{ Hz}}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0,0796 \text{ Hz}} = 12,6 \text{ s} = \boxed{13 \text{ s}}$$

Teilaufgabe b

Wenn man $t = 1 \text{ s}$ setzt, so ist die Position des Surfbretts über dem mittleren Meeresspiegel gegeben durch:

$$y = (1,2 \text{ m}) \cos\left(0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} (1,0 \text{ s}) + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{0,62 \text{ m}}$$

Teilaufgabe c

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung erhält man durch Ableitung der Ortsfunktion nach der Zeit:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cos(\omega t + \delta))$$

$$= -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

$$= -(0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})(1,2 \text{ m})$$

$$\cdot \sin\left((0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{-(0,6 \text{ m/s}) \cdot \sin\left((0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega A \sin(\omega t + \delta))$$

$$= -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

$$= -(0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 (1,2 \text{ m})$$

$$\cdot \cos\left((0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \boxed{-(0,3 \text{ m/s}^2) \cdot \cos\left((0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Teilaufgabe d

Setzt man $t = 0$, kann man y_0 , $v_{y,0}$ und $a_{y,0}$ bestimmen:

$$y_0 = (1,2 \text{ m}) \cos\frac{\pi}{6} = 1,04 \text{ m} = \boxed{1,0 \text{ m}}$$

$$v_{y,0} = -(0,60 \text{ m/s}) \sin\frac{\pi}{6} = \boxed{-0,30 \text{ m/s}}$$

$$a_{y,0} = -(0,30 \text{ m/s}^2) \cos\frac{\pi}{6} = \boxed{-0,26 \text{ m/s}^2}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir können die Plausibilität der Lösung von Teilaufgabe d mithilfe von Gleichung 11.7 für $t = 0$ überprüfen (mit $y = 1,04 \text{ m}$ und $\omega = 0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Setzt man diese Werte ein, so erhält man $a_{0,y} = -\omega^2 y_0 = -(0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 (1,04 \text{ m}) = -0,26 \text{ m/s}^2$, was dem letzten Ergebnis von Teilaufgabe d entspricht. ■

Abbildung 11.3 zeigt zwei gleiche Massen, die an gleichartigen Federn befestigt sind und auf einer horizontalen reibungsfreien Oberfläche ruhen. Die Feder an Masse 2 ist um 10 cm, die Feder an Masse 1 um 5 cm gedehnt. Welche Masse erreicht die Gleichgewichtslage zuerst, wenn beide Objekte zur gleichen Zeit losgelassen werden?

Nach Gleichung 11.12 hängt die Schwingungsdauer nur von k_F und m ab, nicht hingegen von der Amplitude. Da k_F und m für beide Systeme gleich sind, gilt das auch für die Schwingungsperioden. Daher erreichen beide Massen die Gleichgewichtslage zur selben Zeit. Die zweite Masse hat zwar im Vergleich zur ersten den doppelten Weg bis zur Gleichgewichtslage zurückzulegen, aber sie hat auch zu jedem Zeitpunkt die doppelte Geschwindigkeit. Abbildung 11.4 zeigt schematisch die Ort-Zeit-Funktionen der beiden Massen. Die Skizze veranschaulicht eine wichtige allgemeine Eigenschaft der harmonischen Schwingung:

Frequenz und Schwingungsdauer einer harmonischen Schwingung sind unabhängig von der Amplitude.

BEZIEHUNG VON FREQUENZ UND SCHWINGUNGSDAUER

Die Unabhängigkeit der Schwingungsfrequenz von der Amplitude bei der harmonischen Schwingung hat wichtige Konse-

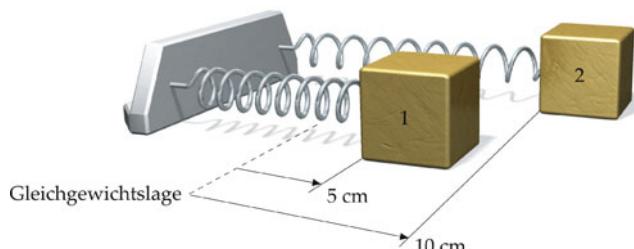


Abbildung 11.3 Ein System mit zwei identischen Federschwingern.

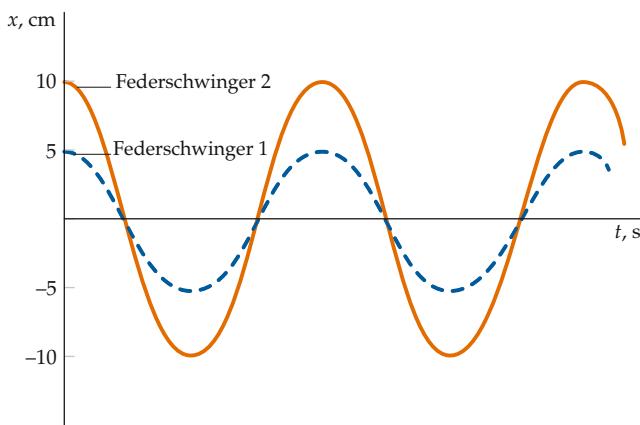


Abbildung 11.4 Ort-Zeit-Funktion der beiden Federschwinger aus Abbildung 11.3. Beide Massen erreichen die Gleichgewichtsposition zu derselben Zeit.

quenzen in verschiedenen Bereichen. In der Musik bedeutet sie, dass sich die Tonhöhe nicht ändert, wenn man einen Ton beispielsweise auf einem Klavier kräftig oder zart anschlägt, also den Ton laut (mit hoher Amplitude) oder leise (mit kleiner Amplitude) spielt. Wenn die Amplitude einen großen Einfluss auf die Frequenz des Tons hätte, dann wären die Musikinstrumente unbrauchbar. Allerdings erzeugt kein Musikinstrument exakte harmonische Schwingungen. Daher tritt bei vielen Instrumenten eine (wenn auch geringe) Abhängigkeit der Tonhöhe von der Lautstärke auf. So sind etwa die Schwingungen des Rohrblatts bei einer Oboe nicht exakt harmonisch. Die Abweichung hängt von der Lautstärke des geblasenen Tons (geringfügig auch von dem Frequenzbereich) ab. Ein erfahrener Musiker kann diesen Effekt durch Veränderung des Lippendrucks korrigieren.

In den Beispielen 11.2 bis 11.4 werden die Zusammenhänge der Bestimmungsgrößen bei einer harmonischen Schwingung untersucht.

Beispiel 11.2: Ein schwingender Körper

Ein Körper schwingt mit der Kreisfrequenz $\omega = 8,0 \text{ s}^{-1}$. Bei $t = 0$ befindet sich der Körper bei $x = 4,0 \text{ cm}$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_{x,0} = -25 \text{ cm/s}$. a) Bestimmen Sie die Amplitude und die Phasenkonstante der Bewegung. b) Geben Sie x als Funktion der Zeit an.

Problembeschreibung: Die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit liefern zwei Gleichungen, aus denen die Amplitude A und die Phasenkonstante δ bestimmt werden können.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit hängen mit der Amplitude und der Phasenkonstanten zusammen. Der Ort $x(t)$ ist durch Gleichung 11.4 gegeben, die Geschwindigkeit erhält man durch die Ableitung des Orts nach der Zeit:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$$

2. Für $t = 0$ sind Ort und Geschwindigkeit:

$$x_0 = A \cos \delta$$

$$v_{x,0} = -\omega A \sin \delta$$

3. Teilen Sie diese Gleichungen durcheinander, um A zu eliminieren:

$$\frac{v_{x,0}}{x_0} = \frac{-\omega A \sin \delta}{A \cos \delta} = -\omega \tan \delta$$

4. Setzen Sie die Zahlenwerte ein und bestimmen Sie δ :

$$\tan \delta = -\frac{v_{x,0}}{\omega x_0}$$

$$\delta = \arctan\left(-\frac{v_{x,0}}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(-\frac{-25 \text{ cm/s}}{(8,0 \text{ s}^{-1})(4,0 \text{ cm})}\right)$$

$$= 0,663 \text{ rad} = \boxed{0,66 \text{ rad}}$$

5. Die Amplitude bestimmt man entweder aus der Beziehung für x_0 oder für $v_{x,0}$. Hier wird x_0 verwendet:

$$A = \frac{x_0}{\cos \delta} = \frac{4,0 \text{ cm}}{\cos 0,663} = \boxed{5,1 \text{ cm}}$$

Teilaufgabe b

Durch Vergleich mit Gleichung 11.4 erhält man:

$$x(t) = \boxed{(5,1 \text{ cm}) \cdot \cos((8,0 \text{ s}^{-1})t + 0,66)}$$

Plausibilitätsprüfung: Um die Plausibilität des Ergebnisses aus Teilaufgabe b zu untersuchen, setzt man $t = 0$ und rechnet nach, ob sich $x = 4,0 \text{ cm}$ ergibt. In der Tat erhält man $x = (5,1 \text{ cm}) \cdot \cos(0 + 0,66) = 4,0 \text{ cm}$. Das Ergebnis von Teilaufgabe b ist daher plausibel. ■

Beispiel 11.3: Schwingender Körper an einer Feder

ZUR ÜBUNG

Ein Körper von $2,00 \text{ kg}$ ist an einer Feder befestigt, wie in Abbildung 11.1 gezeigt. Die Kraftkonstante der Feder beträgt $k_F = 196 \text{ N/m}$. Der Körper wird $5,00 \text{ cm}$ aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt und bei $t = 0$ losgelassen. a) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω , die Frequenz v und die Schwingungsdauer T . b) Geben Sie x als Funktion der Zeit an.

Problembeschreibung: Verwenden Sie Gleichung 11.8 und 11.12 für Teilaufgabe a, gehen Sie für Teilaufgabe b von Gleichung 11.4 aus.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie ω aus $\omega = \sqrt{k_F/m}$.
2. Bestimmen Sie mit diesem Ergebnis v und T .
3. Berechnen Sie A und δ aus den Anfangsbedingungen.

Teilaufgabe b

1. Schreiben Sie $x(t)$ mit den Ergebnissen für A , ω und δ auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

1.

$$\omega = [9,90 \text{ s}^{-1}]$$

2.

$$v = [1,58 \text{ Hz}] \quad T = [0,635 \text{ s}]$$

3.

$$A = [5,00 \text{ cm}] \quad \delta = [0,00]$$

Teilaufgabe b

1.

$$x(t) = [(5,00 \text{ cm}) \cdot \cos((9,90 \text{ s}^{-1})t)]$$

Plausibilitätsprüfung: Der Körper wurde aus der Ruhe heraus losgelassen, wir erwarten daher eine Geschwindigkeit von null bei $t = 0$. Um zu prüfen, ob das Ergebnis von Teilaufgabe b richtig ist, leiten wir den Ausdruck $x = (5,00 \text{ cm}) \cdot \cos((9,90 \text{ s}^{-1})t)$ nach t ab und bestimmen den Wert für $t = 0$. Die Ableitung ergibt $v_x(t) = dx/dt = -(4,95 \text{ cm/s}) \cdot \sin((9,90 \text{ s}^{-1})t)$. Für $t = 0$ ergibt sich wie erwartet $v_x(0) = -(4,95 \text{ cm/s}) \cdot \sin(0) = 0$.

Beispiel 11.4: Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Federschwingers

Wir betrachten einen an einer Feder befestigten Körper, dessen Position durch $x(t) = (5,00 \text{ cm}) \cos(9,90 \text{ s}^{-1} t)$ gegeben ist. a) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit des Objekts? b) Wann tritt diese maximale Geschwindigkeit nach $t = 0$ zum ersten Mal auf? c) Wie groß ist die maximale Beschleunigung des Gegenstands? d) Wann tritt die maximale Beschleunigung nach $t = 0$ zum ersten Mal auf?

Problembeschreibung: Da der Körper aus dem Stillstand losgelassen wird, beginnt die Schwingung bei ($t = 0$) mit der Phasenkonstanten $\delta = 0$. Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind durch Gleichung 11.13a, 11.13b und 11.13c gegeben.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Gleichung 11.13a liefert mit $\delta = 0$ den Ort des Körpers. Mithilfe der ersten Ableitung des Orts nach der Zeit ergibt

sich die Geschwindigkeit:

$$x = A \cos \omega t$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

2. Die maximale Geschwindigkeit tritt auf für $|\sin \omega t| = 1$:

$$|v_x| = \omega A |\sin \omega t|$$

$$|v_x|_{\max} = \omega A = (9,90 \text{ s}^{-1})(5,00 \text{ cm})$$

$$= [49,5 \text{ cm/s}]$$

Teilaufgabe b

1. $|\sin \omega t| = 1$ tritt das erste Mal für $\omega t = \pi/2$ auf:

$$|\sin \omega t| = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

2. Berechnen Sie t für $\omega t = \pi/2$:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(9,90 \text{ s}^{-1})} = [0,159 \text{ s}]$$

Teilaufgabe c

1. Durch Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit erhält man die Beschleunigung:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t$$

2. Die maximale Beschleunigung gehört zu $\cos \omega t = -1$:

$$a_{x,\max} = \omega^2 A = (9,90 \text{ s}^{-1})^2 (5,00 \text{ cm})$$

$$= 490 \text{ cm/s}^2 \approx \frac{1}{2} g$$

Teilaufgabe d

Die maximale Beschleunigung tritt bei $|\cos \omega t| = 1$ auf, d. h. für $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$:

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{9,90 \text{ s}^{-1}} = [0,317 \text{ s}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten, dass $|a_x|$ nach $t = 0$ erstmals maximal wird, wenn x seinen Minimalwert erreicht, und wir erwarten das erste Minimum für x einen halben Bewegungszyklus nach dem Start. $|a_x|$ muss also für $t = \frac{1}{2} T$ (mit der Schwingungsdauer T) erstmals maximal werden. Nach Gleichung 11.11 hängen die Schwingungsdauer und die Kreisfrequenz gemäß $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ zusammen. Setzen wir in dem Ergebnis von Teilaufgabe d für ω den Wert $2\pi/T$ ein, so erhalten wir wie erwartet $t = \pi/(2\pi/T) = \frac{1}{2} T$. ■

Setzt man die Phasenkonstante δ in Gleichung 11.4, 11.5 und 11.6 gleich null, so erhält man die Bewegungsgleichungen

$$x = A \cos \omega t, \quad (11.13a)$$

$$v_x = -\omega A \sin \omega t \quad (11.13b)$$

und

$$a_x = -\omega^2 A \cos \omega t. \quad (11.13c)$$

Diese Funktionen sind in Abbildung 11.5 dargestellt.

Harmonische Schwingung und Kreisbewegung

Zwischen der harmonischen Schwingung und einer Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit gibt es eine einfache mathematische Beziehung. Abbildung 11.6a zeigt die Bewegung eines Teilchens, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit dem Radius A bewegt. Seine Winkelgeschwindigkeit ist mit der Bahngeschwindigkeit v durch $\omega = v/A$ verknüpft. Wir nehmen an, dass sich das Teilchen zur Zeit

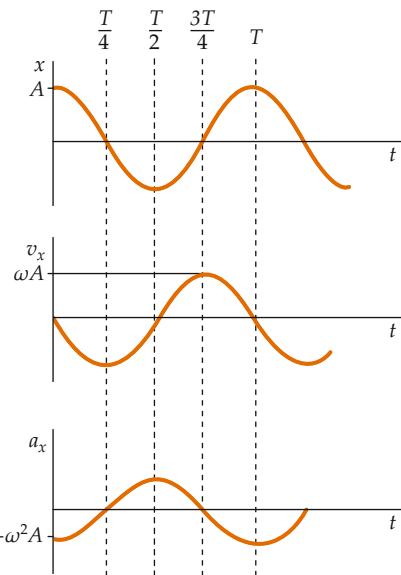
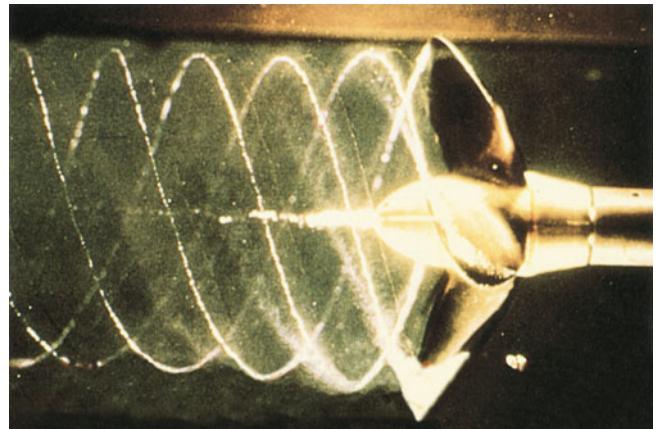


Abbildung 11.5 Darstellung von x , v_x und a_x als Funktionen der Zeit t für $\delta = 0$. Bei $t = 0$ zeigt die Auslenkung ein Maximum, die Geschwindigkeit ist null; die Beschleunigung ist negativ und beträgt $-\omega^2 A$. Die Geschwindigkeit wird negativ, wenn sich der Schwinger zurück zu seiner Gleichgewichtslage bewegt. Nach einer Viertelperiode ($t = T/4$) ist der Schwinger im Gleichgewicht ($x = 0$, $a_x = 0$), und die Geschwindigkeit hat einen Maximalwert von ωA . Bei $t = T/2$ beträgt die Auslenkung $-A$, die Geschwindigkeit ist wieder null, und die Beschleunigung ist $+\omega^2 A$. Bei $t = 3T/4$ ist $x = 0$, $a_x = 0$ und $v_x = +\omega A$.



Bei der Drehbewegung eines Propellers in Wasser entsteht ein sinusförmiges Blasenmuster. (© NRC Institute for Ocean Technology.)

$t = 0$ in einem Bahnpunkt befindet, der durch den Winkel δ bezüglich der x -Achse gegeben ist. Zur Zeit t hat der Radiusvektor des Teilchens dann den Winkel ωt überstrichen, und das Teilchen befindet sich an einem Punkt, der durch den Winkel θ gegeben ist. Entsprechend Abbildung 11.6a gilt dann

$$\theta = \omega t + \delta. \quad (11.14)$$

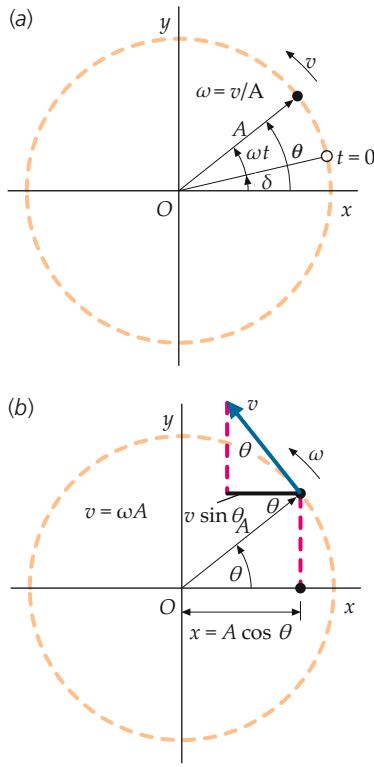


Abbildung 11.6 Ein Teilchen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreis. a) Seine x-Koordinate des Orts beschreibt eine harmonische Schwingung. b) Die x-Koordinate der Geschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit dieser harmonischen Schwingung.

Differenzieren wir beide Seiten dieser Gleichung nach der Zeit t , so folgt $d\theta/dt = \omega$, eine Beziehung, die nur für die gleichförmige Kreisbewegung gilt.

Die x -Koordinate des Teilchenorts (Abbildung 11.6a) ist

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \delta).$$

Dieser Zusammenhang ist gerade das Bewegungsgesetz der harmonischen Schwingung (Gleichung 11.4) mit ω als Kreisfrequenz.

Da die x -Koordinate des Teilchenorts die Projektion des Teilchenradius auf eine Achse durch den Kreismittelpunkt ist, gilt:

Die Projektion der Kreisbewegung eines Teilchens mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf eine Achse durch den Kreismittelpunkt ist eine harmonische Bewegung (Abbildung 11.6).

KREISBEWEGUNG UND HARMONISCHE SCHWINGUNG

Die Ort-Zeit-Gesetze einer Komponente der Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit und der harmonischen Schwingung stimmen überein. Durch Differenziation nach der Zeit

ergeben sich die gleichen Aussagen für die Geschwindigkeit-Zeit-Gesetze. In Abbildung 11.6b sind diese Beziehungen geometrisch hergeleitet. In dem Bahnpunkt mit dem Winkel θ zur x-Achse sind der Geschwindigkeitsvektor v und seine x -Koordinate gezeichnet. Der Abbildung entnimmt man, dass $v_x = -v \sin \theta$ ist. Setzt man $v = A \omega$, so erhält man mit Gleichung 11.14

$$v_x = -v \sin \theta = -A \omega \sin(\omega t + \delta),$$

was mit Gleichung 11.5 für die harmonische Bewegung übereinstimmt.

11.2 Energie des harmonischen Oszillators

Wenn ein an einer Feder befestigter Körper eine harmonische Bewegung ausführt, dann spricht man von einem *harmonischen Oszillator*. In diesem System sind die kinetische und potentielle Energie des Systems zeitabhängig. Ihre Summe, die mechanische Gesamtenergie $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$, ist jedoch konstant. Wir betrachten die Bewegung eines schwingenden Körpers mit der Masse m , der sich im Abstand x von der Gleichgewichtslage befindet und auf den eine rücktreibende Kraft $-k_F x$ wirkt. Die potentielle Energie des Systems ist

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F x^2,$$

wie wir in Gleichung 5.27 bereits gezeigt hatten.

Für eine harmonische Schwingung ist $x = x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$. Damit folgt für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} k_F A^2 \cos^2(\omega t + \delta). \quad (11.15)$$

POTENZIELLE ENERGIE DER HARMONISCHEN SCHWINGUNG

Die kinetische Energie des Systems ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_x^2.$$

Dabei ist m die Masse und v_x die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers. Für die harmonische Schwingung gilt nach Gleichung 11.5 $v_x = -\omega A \sin(\omega t + \delta)$. Dann folgt

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta),$$

und mit $\omega^2 = k_F/m$ (Gleichung 11.8) erhalten wir

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} k_F A^2 \sin^2(\omega t + \delta). \quad (11.16)$$

KINETISCHE ENERGIE DER HARMONISCHEN SCHWINGUNG

Die mechanische Gesamtenergie E_{mech} ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}}(t) &= E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \\ &= \frac{1}{2} k_F A^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} k_F A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2} k_F A^2 (\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta)). \end{aligned}$$

Wegen $\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) = 1$ ergibt sich für die Gesamtenergie

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} k_F A^2. \quad (11.17)$$

MECHANISCHE GESAMTENERGIE DER HARMONISCHEN SCHWINGUNG

Da t auf der rechten Seite von Gleichung 11.17 nicht mehr auftaucht, ist E_{mech} zeitunabhängig und damit eine Erhaltungsgröße. Außerdem gilt:

Die mechanische Gesamtenergie der harmonischen Schwingung ist proportional dem Amplitudenquadrat.

GESAMTENERGIE UND AMPLITUDE

Ist der schwingende Körper maximal ausgelenkt, dann ist die Gesamtenergie gleich seiner potenziellen Energie. Wenn sich der Körper zu seiner Gleichgewichtslage hin bewegt, nimmt die kinetische Energie des Systems zu und die potenzielle Energie ab. Bewegt er sich durch seine Gleichgewichtslage hindurch, hat die kinetische Energie ein Maximum, die potenzielle Energie des Systems ist null, und seine Gesamtenergie ist gleich seiner kinetischen Energie. Wenn sich der schwingende Körper über seine Gleichgewichtslage hinaus bewegt, nimmt seine kinetische Energie wieder ab, und die potenzielle Energie des Systems nimmt zu, bis der Körper wieder seine maximale Auslenkung (nun in der anderen Richtung) erreicht. Zu jeder Zeit ist die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie konstant. Abbildung 11.7 zeigt den Verlauf von E_{pot} und E_{kin} als Funktionen der Zeit.

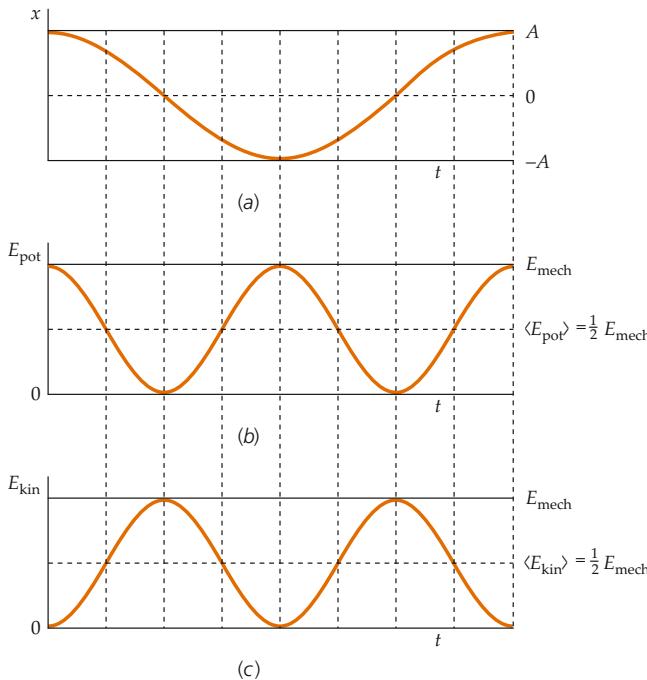


Abbildung 11.7 Auslenkung x , potentielle Energie E_{pot} und kinetische Energie E_{kin} der harmonischen Schwingung in Abhängigkeit der Zeit.

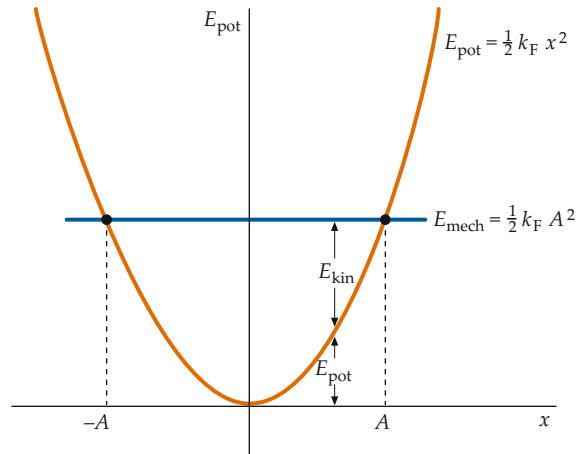


Abbildung 11.8 Potentielle Energie $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F x^2$ für einen Körper der Masse m an einer (masselosen) Feder mit der Federkonstanten k_F . Die horizontale blaue Linie gibt die mechanische Gesamtenergie E_{mech} für eine Amplitude A an. Die kinetische Energie E_{kin} wird durch den vertikalen Abstand $E_{\text{kin}} = E_{\text{mech}} - E_{\text{pot}}$ dargestellt. Wegen $E_{\text{mech}} \geq E_{\text{pot}}$ ist die Bewegung des Körpers auf das Intervall $-A \leq x \leq +A$ beschränkt.

Die Kurven in Abbildung 11.7b und 11.7c sind gleich, aber um $T/2$ gegeneinander verschoben, sodass jeweils das Maximum der einen mit dem Minimum der anderen Kurve zusammenfällt. Ihre Mittelwerte über eine oder mehr Perioden sind gleich, und wegen $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ betragen die Mittelwerte der potenziellen und kinetischen Energie

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} E_{\text{mech}}. \quad (11.18)$$

Abbildung 11.8 zeigt eine grafische Darstellung der potenziellen Energie E_{pot} als Funktion von x . Die Gesamtenergie E_{mech} ist konstant und daher eine Parallele zur x -Achse. Diese Linie schneidet die Kurve der potenziellen Energie bei $x = A$ und $x = -A$. Das sind die Punkte, in denen der schwingende Körper seine Richtung umkehrt und zur Gleichgewichtslage zurückkehrt. Daher werden diese Punkte **Umkehrpunkte** genannt. Wegen $E_{\text{pot}} \leq E_{\text{mech}}$ ist die Bewegung auf $-A \leq x \leq +A$ beschränkt. Energie und Geschwindigkeit eines schwingenden Körpers werden in Beispiel 11.5 genauer untersucht.

Beispiel 11.5: Energie und Geschwindigkeit eines schwingenden Körpers

Ein Körper von $3,00 \text{ kg}$ ist an einer Feder befestigt und schwingt mit einer Amplitude von $4,0 \text{ cm}$ und einer Periode von 2 s . a) Wie groß ist die Gesamtenergie? b) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit des Körpers? c) Bei welchem Ort x_1 beträgt die Geschwindigkeit die Hälfte ihres Maximalwerts?

Problembeschreibung: Die Gesamtenergie bestimmt man aus der Amplitude und der Federkonstanten, deren Wert man aus der Masse und der Schwingungsdauer erhält. Die Geschwindigkeit ist maximal, wenn die kinetische Energie gleich der Gesamtenergie ist. Ort und Geschwindigkeit hängen über die Energieerhaltung zusammen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Drücken Sie die Gesamtenergie E_{mech} durch die Federkonstante k_F und die Amplitude A aus:

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} k_F A^2$$

2. Die Federkonstante k_F ist mit der Schwingungsdauer T und der Masse m verbunden:

$$k_F = m \omega^2 = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

3. Setzen Sie die gegebenen Werte ein, um E_{mech} zu bestimmen:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}} &= \frac{1}{2} k_F A^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3,00 \text{ kg}) \cdot \left(\frac{2\pi}{2,0 \text{ s}} \right)^2 \cdot (0,040 \text{ m})^2 \\ &= 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ J} = [2,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Um die maximale Geschwindigkeit $v_{x,\text{max}}$ zu bestimmen, setzt man die kinetische Energie gleich der Gesamtenergie und löst nach v_x auf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{x,\text{max}}^2 &= E_{\text{mech}} \\ v_{x,\text{max}} &= \sqrt{\frac{2 E_{\text{mech}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 (2,37 \cdot 10^{-2} \text{ J})}{3,0 \text{ kg}}} \\ &= 0,126 \text{ m/s} = [0,13 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Die Energieerhaltung stellt einen Zusammenhang zwischen Ort x und der Geschwindigkeit v_x her:

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k_F x^2$$

2. Setzen Sie in die obige Gleichung $v_x = \frac{1}{2} v_{x,\text{max}}$ ein und lösen Sie nach x_1 auf. Es ist zweckmäßig, x in Abhängigkeit von E_{mech} zu bestimmen. Danach schreibt man

11.2 Energie des harmonischen Oszillators

$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} k_F A^2$ und kann so x mithilfe von A ausdrücken:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}} &= \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} v_{x,\text{max}} \right)^2 + \frac{1}{2} k_F x_1^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} m v_{x,\text{max}}^2 \right) + \frac{1}{2} k_F x_1^2 \\ &= \frac{1}{4} E_{\text{mech}} + \frac{1}{2} k_F x_1^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} k_F x_1^2 = E_{\text{mech}} - \frac{1}{4} E_{\text{mech}} = \frac{3}{4} E_{\text{mech}}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{\frac{3 E_{\text{mech}}}{2 k_F}} = \pm \sqrt{\frac{3}{2 k_F} \left(\frac{1}{2} k_F A^2 \right)} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} A \\ &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4,0 \text{ cm}) = [\pm 3,5 \text{ cm}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet hat das Ergebnis von Schritt 2 in Teilaufgabe c zwei Werte – einen für die gedehnte Feder, einen für die komprimierte Feder. Beide Werte sind, wie erwartet, bis auf das Vorzeichen gleich. Ferner musste der positive Wert kleiner sein als 4,0 cm, da die Amplitude, also der Maximalwert der Auslenkung, schon 4,0 cm betrug.

Übung 11.2: Berechnen Sie für dieses Beispiel ω und bestimmen Sie $v_{x,\text{max}}$ mithilfe von $v_{x,\text{max}} = \omega A$. ◀

Übung 11.3: Ein Körper mit einer Masse von 2,00 kg ist mit einer Feder verbunden, deren Federkonstante 40,0 N/m beträgt. Der Körper bewegt sich mit 25,0 cm/s durch seine Gleichgewichtslage. a) Wie groß ist die Gesamtenergie des Körpers? b) Wie groß ist die Amplitude der Schwingung? ◀

*Allgemeine Bewegung in der Nähe des Gleichgewichts

Eine einfache harmonische Bewegung tritt auf, wenn ein Teilchen etwas aus seiner stabilen Gleichgewichtslage verschoben wird. Abbildung 11.9 zeigt einen Graphen der potenziellen Energie E_{pot} in Abhängigkeit von x für eine stabile und eine instabile Gleichgewichtslage. Wie in Kapitel 5 diskutiert, entspricht dem Maximum der potenziellen Energie bei x_2 in Abbildung 11.9 ein instabiles Gleichgewicht und dem Minimum der potenziellen Energie bei x_1 ein stabiles Gleichgewicht. Viele glatte (stetig differenzierbare) Kurven mit einem Minimum wie in Abbildung 11.9 können in der Nähe des Minimums durch eine Parabel angenähert werden. Die gestrichelte Kurve in dieser Abbildung ist eine solche Parabel, die das Potenzial E_{pot} in der Nähe des stabilen Gleichgewichtspunkts passend annähert. Die allgemeine Gleichung für eine Parabel mit einem Minimum im

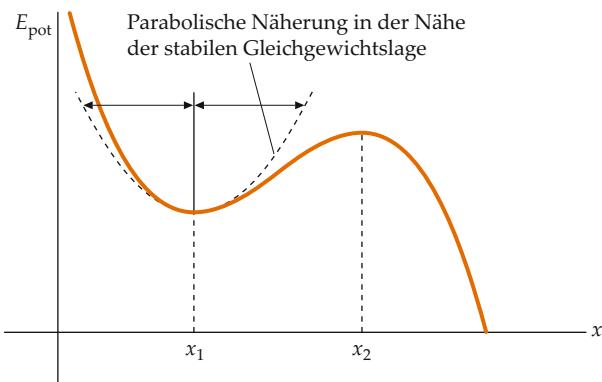


Abbildung 11.9 Graph der potentiellen Energie E_{pot} als Funktion von x für ein System mit einer stabilen Gleichgewichtslage bei x_1 und einer instabilen Gleichgewichtslage bei x_2 .

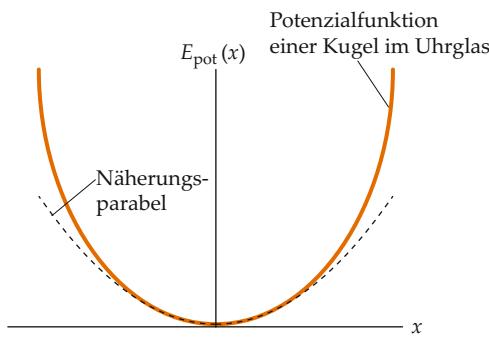


Abbildung 11.10 Graph der potentiellen Energie E_{pot} als Funktion von x für eine Kugel, die auf dem Boden einer kugelförmigen Schale rollt (durchgezogene Linie) und parabelförmige Annäherung daran (gestrichelte Linie).

Punkt x_1 lässt sich als

$$E_{\text{pot}} = A + B(x - x_1)^2 \quad (11.19)$$

schreiben (mit den Konstanten A und B). Die Konstante A ist der Wert von E_{pot} an der Gleichgewichtslage $x = x_1$.

Da die potentielle Energiefunktion E_{pot} mit der Kraft F_x durch $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx$ verbunden ist, gilt nach Einsetzen von Gleichung 11.19

$$F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = -2B(x - x_1).$$

Mit $2B = k_F$ vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = -k_F(x - x_1). \quad (11.20)$$

Nach Gleichung 11.20 ist die Kraft proportional zur Auslenkung und ihr entgegengesetzt gerichtet, also ist die Bewegung harmonisch. In Abbildung 11.9 ist das lokale Minimum der potentiellen Energiefunktion $E_{\text{pot}}(x)$ bei $x = x_1$, das die stabile

Gleichgewichtslage des Systems angibt. Abbildung 11.10 zeigt eine potentielle Energiefunktion mit einer stabilen Gleichgewichtslage bei $x = 0$. Die durchgezogene Kurve ist die potentielle Energiefunktion eines Teilchens, das sich reibungsfrei auf dem Boden einer kugelförmigen Schale um die Gleichgewichtslage bewegt. Die gestrichelte Kurve ist die Parabolennäherung, d. h. eine quadratische potentielle Energiefunktion, die zu einer Kraft gehört, bei der die Verschiebung proportional zur Auslenkung des Teilchens aus der Ruhelage ist. Für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage stimmen die beiden Kurven überein.

11.3 Beispiele für schwingende Systeme

Vertikale Bewegung des Federschwingers

Wenn eine Masse m an einer vertikalen Feder hängt, wirkt zusätzlich zur Federkraft F die nach unten gerichtete Gewichtskraft ma_G vom Betrag $m|a_G| = mg$ (Abbildung 11.11). Wählt man die positive y -Richtung nach unten, so ist die Federkraft auf die Masse $-k_F y$. Darin ist y die Ausdehnung der Feder. Die Gesamtkraft auf die Masse ist dann

$$\sum F_y = -k_F y + mg. \quad (11.21)$$

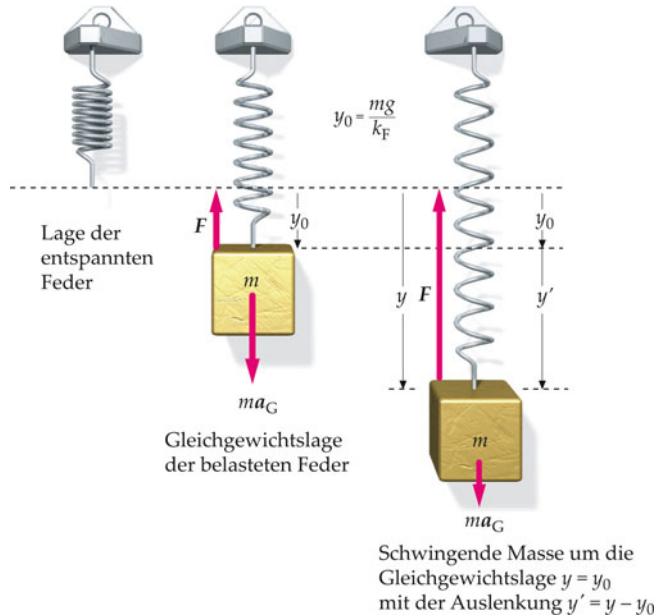


Abbildung 11.11 Die Newton'sche Bewegungsgleichung für die vertikale Schwingungsbewegung einer Masse m an einer vertikalen Feder wird erheblich vereinfacht, wenn man die Auslenkung (y') von der Gleichgewichtslage der belasteten Feder aus bestimmt.

Beispiel 11.6: Federschwinger mit Papierfedern

Sie zeigen Ihren Nichten, wie man Papierpartydekorationen aus Papierfedern bastelt. Eine Nichte bastelt eine Papierfeder und hängt ein einzelnes Blatt buntes Papier daran. Dadurch wird die Feder um 8 cm gedehnt. Sie möchten, dass die Dekorationen etwa eine Schwingung pro Sekunde vollführen. Wie viele Blatt buntes Papier müssen Sie an diese Feder hängen, damit sie mit 1 Hz schwingt?



Papierfeder. (© Rhoda Peacher.)

Problembeschreibung: Die Frequenz hängt von dem Verhältnis aus Federkonstante und angehängter Masse ab (Gleichung 11.12), allerdings sind weder die Federkonstante noch die Masse bekannt. Jedoch lässt sich das gesuchte Verhältnis aus den gegebenen Informationen mithilfe des Hooke'schen Gesetzes (Gleichung 11.1) bestimmen.

Lösung: 1. Schreiben Sie die Frequenz in Abhängigkeit von der Federkonstanten k_F und der Masse m_n auf (Gleichung 11.12); darin ist m_n die Masse der n Blätter. Sie sollen n bestimmen:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m_n}}$$

2. Die Feder dehnt sich um eine Strecke von $y_0 = 8 \text{ cm}$ aus, wenn ein einzelnes Blatt der Masse m angehängt wird:

$$k_F y_0 = m g \Rightarrow \frac{k_F}{m} = \frac{g}{y_0}$$

3. Die Masse m_n von n Blättern ist n -mal die Masse m eines einzelnen Blatts:

$$m_n = n m$$

4. Berechnen Sie k_F/m_n mit den Ergebnissen aus Schritt 2 und 3:

$$\frac{k_F}{m_n} = \frac{k_F}{n m} = \frac{1}{n} \frac{g}{y_0}$$

5. Setzen Sie das Ergebnis von Schritt 4 in das Ergebnis von Schritt 1 ein und berechnen Sie damit n :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m_n}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{n} \frac{g}{y_0}} \\ n &= \frac{g}{(2\pi \nu)^2 y_0} \\ &= \frac{9,81 \text{ m/s}^2}{4\pi^2 (1,0 \text{ Hz})^2 (0,080 \text{ m})} = 3,1 \end{aligned}$$

Drei Blatt Papier sind erforderlich.

Plausibilitätsprüfung: Etwa drei Blatt Papier für die bewegliche Dekoration scheint als Ergebnis plausibel. 50 oder 100 Blatt würden eine Papierfeder wohl zerstören.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass in diesem Beispiel nicht der Wert von m oder k_F selbst benötigt wird, da die Frequenz nur von dem Verhältnis k_F/m abhängt, das gleich g/y_0 ist. Die Einheiten kürzen sich heraus. Das Ergebnis aus Schritt 5 ist jedoch nur eine Näherung, da wir die Masse der Feder vernachlässigt haben. Diese Masse ist im Vergleich zu einigen Blatt Papier nicht vernachlässigbar.

Übung 11.4: Um wie viel dehnt sich die Papierfeder, wenn eine Dekoration aus drei Blatt Papier an ihr hängt und das Papier im Gleichgewicht ist? ◀

Gleichung 11.21 lässt sich durch Einführung der Koordinate $y' = y - y_0$ vereinfachen. Dabei bezeichnet $y_0 = m g / k_F$ die Gleichgewichtslage der Feder bei Belastung mit der Masse m . Mit $y = y_0 + y'$ erhält man

$$\sum F_y = -k_F (y' + y_0) + m g ,$$

und wegen $k_F y_0 = m g$ folgt

$$\sum F_y = -k_F y' . \quad (11.22)$$

Das zweite Newton'sche Axiom ($\sum F_y = m a_y$) ergibt dann

$$-k_F y' = m \frac{d^2 y'}{dt^2} .$$

Wegen $y = y' + y_0$ mit $y_0 = m g / k_F = \text{konstant}$ gilt $d^2 y / dt^2 = d^2 y' / dt^2$. Somit haben wir

$$-k_F y' = m \frac{d^2 y'}{dt^2} .$$

Auflösung nach der zweiten Ableitung ergibt

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k_F}{m} y'.$$

Dies entspricht Gleichung 11.2, wenn man dort x durch y' ersetzt. Die Gleichung hat die mittlerweile schon vertraute Lösung

$$y'(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

mit $\omega = \sqrt{k_F/m}$.

Die Gravitationskraft mg auf den vertikalen Federschwinger bewirkt lediglich eine Verschiebung der Gleichgewichtslage von $y = 0$ nach $y = y_0$. Wenn die Masse m aus dieser Gleichgewichtslage um den Betrag y' ausgelenkt wird, dann ist die Gesamtkraft $-k_F y'$. Die Masse schwingt um diese Gleichgewichtslage mit einer Kreisfrequenz von $\omega = \sqrt{k_F/m}$, also mit der gleichen Kreisfrequenz, wie sie bei einem horizontalen Federschwinger auftritt.

Eine Kraft ist konservativ, wenn die durch sie verrichtete Arbeit unabhängig vom Weg ist. Die Federkraft und die Gravitationskraft sind konservative Kräfte, und auch die Summe dieser Kräfte (Gleichungen 11.21 und 11.22) ist konservativ. Die potentielle Energiefunktion E_{pot} , die mit der Summe dieser Kräfte verbunden ist, ist das Negative der verrichteten Arbeit plus einer beliebigen Integrationskonstanten. So gilt

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F y'^2 + E_{\text{pot},0}. \quad (11.23)$$

Die Beispiele 11.6 und 11.7 behandeln vertikale Federschwingungen.

Beispiel 11.7: Perle auf einem schwingenden Block

Ein Holzklotz ist an einer Feder befestigt und schwingt vertikal mit einer Frequenz von 4,00 Hz und einer Amplitude von 7,00 cm. Eine kleine Perle wird oben auf den schwingenden Block gelegt, wenn dieser gerade seinen untersten Punkt erreicht. Die Masse der Perle soll so klein sein, dass ihr Einfluss auf die Bewegung des Blocks vernachlässigbar ist. In welchem Abstand zur Gleichgewichtslage des Blocks verliert die Perle den Kontakt mit dem Block?

Problembeschreibung: Auf die Perle wirken ihre Gewichtskraft mg nach unten und die nach oben gerichtete Normalkraft, die durch den Block ausgeübt wird. Die Größe dieser Normalkraft ändert sich mit der Beschleunigung des Blocks. Wenn sich der Block *aus der Gleichgewichtslage nach oben* bewegt, nimmt die nach unten gerichtete Beschleunigung auf den Block und auf die Perle zu, d. h.,

der Betrag der Normalkraft auf die Perle nimmt ab. Wenn die Beschleunigung nach unten den Wert g erreicht, ist die Normalkraft null. Wird der Betrag der abwärts gerichteten Beschleunigung des Blocks ein wenig größer als g , hebt die Perle von dem Block ab.

Lösung: 1. Skizzieren Sie das System (Abbildung 11.12). Zeichnen Sie eine nach unten gerichtete y -Achse ein, deren Nullpunkt in der Gleichgewichtslage des Systems liegt.

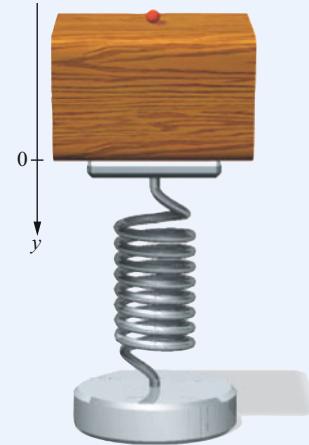


Abbildung 11.12 Skizze des Systems aus Feder, Block und Perle.

2. Bestimmen Sie den Wert für y , wenn die nach unten gerichtete Beschleunigung gleich g ist. Verwenden Sie Gleichung 11.7:

$$a_y = -\omega^2 y$$

$$g = -\omega^2 y$$

3. Ersetzen Sie ω durch $2\pi\nu$ und lösen Sie nach y auf:

$$g = -(2\pi\nu)^2 y$$

und damit

$$y = -\frac{g}{(2\pi\nu)^2} = -\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{(2\pi \cdot (4,00 \text{ Hz}))^2}$$

$$= -0,0155 \text{ m} = \boxed{-1,55 \text{ cm}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Perle hebt von dem Block ab, wenn y negativ ist. Da wir abwärts als die positive y -Richtung gewählt haben, ist das wie erwartet dann der Fall, wenn sich die Perle oberhalb der Gleichgewichtslage befindet. ■

Das mathematische Pendel

Ein Pendel besteht im einfachsten Fall aus einem Körper mit der Masse m , der an einem Faden der Länge l hängt. Das mathematische Pendel ist eine Idealisierung, bei dem der Pendelkörper als Punktmasse und der Faden als masselos betrachtet wird. Lenkt man den Pendelkörper aus seiner Ruhelage um den Winkel θ_0 (Anfangswinkel) aus und überlässt ihn dann sich selbst, führt er Schwingungen mit einer Periode T aus.

Frage 11.1

Man könnte meinen, dass die Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels von der Masse m des Pendelkörpers, der Länge l des Pendels, der Gravitationsbeschleunigung g und dem Anfangswinkel θ_0 abhängt. Geben Sie eine einfache Kombination einiger oder aller dieser Größen an, mit der Sie die korrekte Dimension für die Schwingungsdauer erhalten.

Die Einheiten von Länge l , Masse m und Erdbeschleunigung g sind m, kg und m/s². Wenn man l durch g dividiert, kürzt sich die Längeneinheit heraus, als Einheit für den Quotienten bleibt s² übrig. Dies legt für die Schwingungsdauer eine Abhängigkeit der Form $\sqrt{l/g}$ nahe. Wenn der Ausdruck für die Schwingungsdauer die Masse enthalten würde, dann müsste die Masseneinheit kg gegen eine andere Größe gekürzt werden. Es gibt jedoch keine Kombination von l und g , bei der das vorkommt. Daher kann die Schwingungsdauer nicht von der Masse des Pendelkörpers abhängen. Da der Anfangswinkel θ_0 dimensionslos ist, kann man nicht sagen, ob er als Faktor in der Schwingungsdauer auftaucht oder nicht. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Schwingungsdauer für kleine θ_0 durch $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ gegeben ist.

Die Kräfte auf eine Pendelmasse m sind ihr Gewicht ma_G mit $|a_G| = g$ und die Zugkraft F_S des Fadens (Abbildung 11.13). F_S ist eine radiale Kraft, die die Pendelmasse auf der Kreisbahn hält. Bildet der Faden mit der Vertikalen einen Winkel θ , so wirkt die Komponente $-mg \sin \theta$ auf die Punktmasse tangential beschleunigend und $-mg \cos \theta$ in Fadenrichtung zum Aufhängepunkt. (Wir vermerken, dass der Betrag der Fadenkraft bei der Schwingungsbewegung $mg \cos \theta + m l (\frac{d\theta}{dt})^2$ ist. Darin ist $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ die Winkelgeschwindigkeit der Punktmasse.) Um die Schwingungsgleichung des Pendels herzuleiten, benutzen wir wieder das zweite Newton'sche Axiom und erhalten mit s als Bogenlänge bezogen auf die Ruhelage (tiefster Punkt des Pendels) für die Tangentialkomponenten

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (11.24)$$

Die Bogenlänge s hängt mit dem Winkel θ über die Beziehung $s = l\theta$ zusammen. Die zweite Zeitableitung davon ist

$$\frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

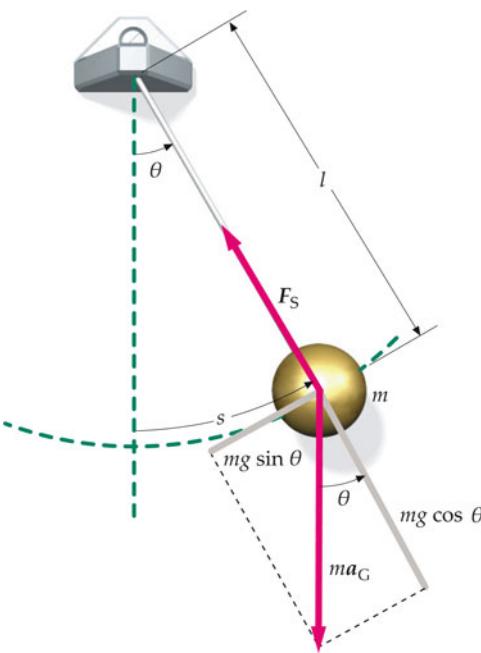


Abbildung 11.13 Kräfte auf eine Pendelmasse.

Setzen wir dies in Gleichung 11.24 für d^2s/dt^2 ein, so folgt als Bewegungsgleichung für das mathematische Pendel

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (11.25)$$

In dieser Gleichung tritt die Masse des Pendelkörpers nicht auf. Die Pendelschwingungen des mathematischen Pendels sind unabhängig von der Masse des Pendelkörpers.

Gleichung 11.25 ist eine nichtlineare Differenzialgleichung zweiten Grads. Sie besitzt im Bereich der elementaren Funktionen keine geschlossene Lösung. Nur für kleine Winkelabsenkungen θ , wenn $\sin \theta \approx \theta$ gesetzt werden kann, wird die Differenzialgleichung linear und hat eine einfache Lösung in der Form einer harmonischen Schwingung. In dieser Näherung folgt aus Gleichung 11.25

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta. \quad (11.26)$$

Dies ist die Differenzialgleichung des harmonischen Oszillators für kleine Winkelabsenkungen θ (siehe Gleichung 11.2 für den Federschwinger). Für kleine Winkelabsenkungen sind die Schwingungen des mathematischen Pendels harmonische Schwingungen. Dem (positiven) Quotienten k_F/m beim Federschwinger entspricht dabei der stets positive Quotient g/l des mathematischen Pendels. Die Kreisfrequenz der Pendelschwingung ist dann wie in Gleichung 11.8 durch $\omega^2 = g/l$ definiert, und die Grundgleichung der Pendelschwingung bei kleiner Am-

Beispiel 11.8: Wie schnell ist der Gleitwagen?

ZUM VERSTÄNDNIS

In einem Praktikumslabor zur eindimensionalen Kinematik sollen zwei Studenten die Zeit bestimmen, die ein Gleitwagen auf einer Luftpissenbahn für verschiedene Strecken benötigt. Dazu sollen sie den Gleitwagen aus dem Stillstand die 2,00 m lange geneigte Bahn herabfahren lassen. Die Studenten neigen die Luftpissenbahn, indem sie ein 2,0 cm dickes Notebook unter ein Ende der Bahn legen. Sie lassen den Wagen vom Mittelpunkt der Bahn aus dem Stillstand starten. Bis zum unteren Ende braucht er 4,8 s. Dann lassen sie ihn vom oberen Ende der Bahn starten. Bis zum unteren Ende braucht er ebenfalls 4,8 s, also genauso lange wie zuvor für die Hälfte der Strecke. Die Studenten glauben, dass die Zeiten für die beiden Strecken nicht gleich sein können. Sie wiederholen daher ihre Messung, kommen aber zum selben Ergebnis. Verwirrt fragen sie den Praktikumsleiter nach einer Erklärung. Können Sie den beiden weiterhelfen?

Problembeschreibung: Wenn die Bahn genau gerade wäre, wäre die Beschleunigung entlang der Bahn an jedem Punkt gleich. In diesem Fall wäre die Zeit, die der aus dem Stillstand startende Gleitwagen für die gesamte Bahnlänge benötigt, größer als für die halbe Strecke. Wenn die Bahn sich aber durchbiegt, wird die Beschleunigung am oberen Ende der Bahn größer sein, weil dort die Neigung am steilsten ist. Nehmen Sie an, dass die Bahn sich tatsächlich

durchbiegt. Welche Schlussfolgerung würden Sie daraus ziehen?

Lösung: 1. Nehmen Sie an, dass sich die Luftpissenbahn ein wenig durchbiegt, sodass sie eine kreisförmige Bahn bildet; der Krümmungsmittelpunkt soll senkrecht über dem unteren Ende der Luftpissenbahn liegen: Wenn sich die Luftpissenbahn wie beschrieben durchbiegt, bewegt sich der Gleiter wie der Pendelkörper eines mathematischen Pendels der Länge $l = r$. Dabei ist r der Krümmungsradius der Luftpissenbahn.

2. Die Schwingungsdauer T eines Pendels hängt für kleine Auslenkungen nicht von der Amplitude ab: Die von den Studenten gemessene Zeit beträgt $\frac{1}{4}$ der Schwingungsdauer T des Pendels gemäß Gleichung 11.28. Da die Periode eines Pendels für kleine Auslenkungen nicht von der Amplitude abhängt, kann man erwarten, dass die gemessene Zeit in beiden Fällen gleich ist.

Plausibilitätsprüfung: Ist die Auslenkung wirklich klein, wenn man den Gleiter vom oberen Ende der Luftpissenbahn aus starten lässt? Das ist der Fall, wenn der Krümmungsradius r erheblich größer ist als die Bahnlänge von 2,00 m. Nach Gleichung 11.28 hat ein Pendel mit der Schwingungsdauer T die Länge $l = g T^2 / (4\pi^2)$. Setzen wir die Schwingungsdauer $T = 4 \cdot (4,8 \text{ s})$, so erhalten wir $r = l = 92 \text{ m}$. Die Annahme, dass die Auslenkung nur gering ist, war daher berechtigt.

plitude lautet

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (11.27)$$

Beachten Sie, dass ω die Kreisfrequenz ist, nicht die Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung. Aus der Kreisfrequenz erhalten wir die Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (11.28)$$

SCHWINGUNGSDAUER DES MATHEMATISCHEN PENDELS

Die Lösungsfunktion der Bewegungsgleichung 11.27 beschreibt eine harmonische Schwingung:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta).$$

Dabei ist θ_0 die maximale Winkelauslenkung des Pendels.

Nach Gleichung 11.28 ist die Schwingungsdauer eines Pendels umso größer, je länger das Pendel ist, was mit der experimentellen Beobachtung übereinstimmt. Die Schwingungsdauer und

daher auch die Frequenz hängen nicht von der Amplitude der Schwingung ab (solange die Winkelauslenkung insgesamt klein bleibt).

Übung 11.5: Bestimmen Sie die Schwingungsdauer eines 1,00 m langen Pendels, das kleine Schwingungen vollführt.

◀

Nach Gleichung 11.28 kann man mit einem mathematischen Pendel, das nur kleine Schwingungen vollführt, die Fallbeschleunigung messen. Dazu sind lediglich die Pendellänge l und die Schwingungsdauer T des Pendels zu bestimmen. Man berechnet dann g gemäß

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

l wird durch eine einfache Längenmessung bestimmt. Um die Messgenauigkeit für die Schwingungsdauer, die quadratisch in der Gleichung für g auftritt, zu erhöhen, misst man die Zeit für n Schwingungen und teilt dann das Ergebnis durch die Anzahl der Schwingungen.

Wie sich eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung unter bestimmten Voraussetzungen auf eine Pendelbewegung zurückführen lässt, zeigt Beispiel 11.8.

*Pendel in einem beschleunigten Bezugssystem

Abbildung 11.14a zeigt ein mathematisches Pendel in einem Eisenbahnwaggon, der sich mit der Beschleunigung $a_B^{(I)}$ relativ zu den Schienen nach rechts bewegt. Die Beschleunigung des im Waggon aufgehängten schwingenden Pendelkörpers ist $\mathbf{a}^{(I)}$ in Bezug auf die Schienen. Wenn der Pendelkörper relativ zum Waggon ruht, wird $\mathbf{a}^{(I)} = \mathbf{a}_B^{(I)}$. Wir leiten die Bewegungsgleichung des Pendels im Waggon mit dem zweiten Newton'schen Axiom her. Bezogen auf das System der Schienen (Inertialssystem) erhalten wir

$$\mathbf{F}_S + m\mathbf{a}_G = m\mathbf{a}^{(I)}. \quad (11.29)$$

(\mathbf{F}_S ist die Zugkraft im Faden, $m\mathbf{a}_G$ die Gewichtskraft des Pendelkörpers.) Falls der Pendelkörper in der Gleichgewichtslage ruht, ist $\mathbf{a}^{(I)} = \mathbf{a}_B^{(I)}$, und aus Gleichung 11.29 folgt

$$\mathbf{F}_S + m\mathbf{a}_G = m\mathbf{a}_B^{(I)}.$$

Da wir die Beschleunigung $\mathbf{a}_B^{(I)}$ horizontal nach rechts angenommen haben, ergibt die Komponentenzerlegung

$$\begin{aligned}\sum F_x &= |\mathbf{F}_S| \sin \theta = m a_B^{(I)}, \\ \sum F_y &= |\mathbf{F}_S| \cos \theta - m g = 0.\end{aligned}$$

Hier ist θ die Winkelauslenkung des Pendels im beschleunigten Waggon in der Gleichgewichtslage. Es gilt $\tan \theta = a_B^{(I)} / g$.

Wir gehen nun zu dem Fall über, dass sich der Pendelkörper in dem Waggon bewegt. Dann ist $\mathbf{a}^{(I)} \neq \mathbf{a}_B^{(I)}$, und die Differenz $\mathbf{a}^{(B)} = \mathbf{a}^{(I)} - \mathbf{a}_B^{(I)}$ ist die Beschleunigung des Pendelkörpers bezüglich des Waggons, also im beschleunigten Bezugssystem. Eliminieren wir damit aus Gleichung 11.29 die Beschleunigung $\mathbf{a}^{(I)}$, dann können wir ein Bewegungsgesetz für die Pendelschwingung im beschleunigten Bezugssystem herleiten:

$$\mathbf{F}_S + m\mathbf{a}_G = m (\mathbf{a}^{(B)} + \mathbf{a}_B^{(I)})$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_S + m\mathbf{a}_G - m\mathbf{a}_B^{(I)} &= m\mathbf{a}^{(B)}, \\ \mathbf{F}_S + m (\mathbf{a}_G - \mathbf{a}_B^{(I)}) &= m\mathbf{a}^{(B)}.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\mathbf{a}_G^{(B)} = \mathbf{a}_G - \mathbf{a}_B^{(I)},$$

so folgt die Bewegungsgleichung des Pendelkörpers im beschleunigten Bezugssystem

$$\mathbf{F}_S + m\mathbf{a}_G^{(B)} = m\mathbf{a}^{(B)}.$$

Hier sind $\mathbf{a}^{(B)}$ und $\mathbf{a}_G^{(B)}$ die Beschleunigung des Pendelkörpers und die Erdbeschleunigung im Waggon. Die Vektoren \mathbf{F}_S und

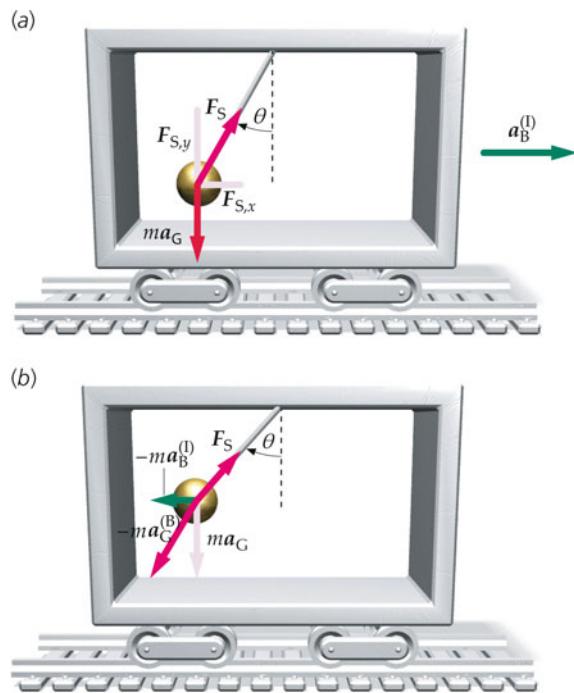


Abbildung 11.14 a) Ein mathematisches Pendel befindet sich in einem beschleunigten Waggon in der Gleichgewichtslage. Die eingezeichneten Kräfte beziehen sich auf das Bezugssystem der Schiene. b) In beschleunigten Bezugssystemen tritt zusätzlich zu der Federkraft \mathbf{F}_S und dem Gewicht $m\mathbf{a}_G$ noch die Trägheitskraft $-m\mathbf{a}_B^{(I)}$ auf. Gewicht und Trägheitskraft ergeben zusammen die resultierende Kraft $m\mathbf{a}_G^{(B)}$.

$m\mathbf{a}_G^{(B)}$ sind in Abbildung 11.14b gezeichnet. Für $\mathbf{F}_S = 0$ (gerissener Pendelfaden) erfährt der Pendelkörper im beschleunigten Waggon die Kraft $m\mathbf{a}^{(B)} = m\mathbf{a}_G^{(B)}$, d. h., der Pendelkörper würde im Waggon mit der Fallbeschleunigung $\mathbf{a}_G^{(B)} = \mathbf{a}_G - \mathbf{a}_B^{(I)}$ unter einem Winkel zur Vertikalen fallen.

Bringt man im Fall $\mathbf{F}_S \neq 0$ den Pendelkörper etwas aus seiner Gleichgewichtslage heraus, wird er Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführen. Die Schwingungsdauer kann für kleine Winkel wieder nach Gleichung 11.28 berechnet werden, jedoch jetzt mit der Erdbeschleunigung $\mathbf{a}_G^{(B)}$ im fahrenden Waggon. Dieser Effekt der geänderten Schwingungsdauer eines Pendels im beschleunigten System trifft nicht nur auf lineare Beschleunigungen zu. Wegen der Erdrotation ist die Erde für Pendelbewegungen auf ihrer Oberfläche ein beschleunigtes Bezugssystem, und die Schwingungsdauer wird von der geografischen Breite des Orts, auf dem sich das Pendel befindet, abhängig, wie Beispiel 4.9 demonstriert.

Übung 11.6: Ein mathematisches Pendel der Länge 1,00 m ist in einem Waggon aufgehängt, der sich mit einer Beschleunigung von $|a_B^{(I)}| = 3,00 \text{ m/s}^2$ bewegt. Berechnen Sie $|a_G^{(B)}|$ und die Schwingungsdauer T . ◀

*Pendelschwingungen mit großer Amplitude

Die Schwingungen des mathematischen Pendels sind keine harmonischen Schwingungen, denn die bisher benutzte Gleichung 11.26 ist eine Näherung, bei der $\sin \theta \approx \theta$ vorausgesetzt wurde. Bis zu welchen Amplituden diese Näherung sinnvoll ist, wird durch den gewünschten Genauigkeitsgrad bestimmt, ist aber für jeden Winkel eine Näherung. Die nichtlineare Bewegungsgleichung 11.25 des mathematischen Pendels führt für die Berechnung der Schwingungsdauer auf ein elliptisches Integral (erster Gattung), dessen Reihenentwicklung durch

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2(\frac{1}{2} \theta_0) + \frac{1}{2^2} \left(\frac{3}{4} \right)^2 \sin^4(\frac{1}{2} \theta_0) + \dots \right) \quad (11.30)$$

SCHWINGUNGSDAUER BEI GROSSER AUSLENKUNG

gegeben ist. $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$ ist darin die Schwingungsdauer für die harmonische Schwingung, also für kleine Auslenkung. Nach Gleichung 11.30 ist die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels von der Amplitude θ_0 der Schwingung abhängig. Abbildung 11.15 zeigt für einen Winkelbereich zwischen 0 und etwa 46° das Verhältnis T/T_0 . Man entnimmt dieser Kurve, dass das Verhältnis sich bis zu einem Winkel von 23° um höchstens 1 % ändert. Um bei der Pendelschwingung die harmonische Näherung für eine gegebene Amplitude θ_0 abschätzen zu können, reicht es aus, das zweite Glied der Reihenentwicklung in Gleichung 11.30 für diesen Winkel θ_0 zu berechnen. In Beispiel 11.9 werden die Schwingungsperioden einer Pendeluhr für kleine und große Ausschläge miteinander verglichen.

*Das Drehpendel

Ein System, das Drehschwingungen in einer Variation einer harmonischen Schwingung durchführt, heißt **Drehpendel** oder **Torsionspendel**. Abbildung 11.16 zeigt ein Drehpendel, das aus einer an einem Stahldraht aufgehängten massiven Scheibe aufgehängt ist. Wenn die Winkelauslenkung der Scheibe aus der Gleichgewichtslage θ beträgt, dann übt der Draht ein der Drehrichtung entgegengesetztes Drehmoment M auf die Scheibe aus:

$$M = -\kappa \theta. \quad (11.31)$$

Darin ist κ die **Torsionskonstante** des Drahts. Setzen wir diesen Ausdruck für M in das zweite Newton'sche Axiom für Drehbewegungen ein ($M = I \alpha$), so ergibt sich

$$-\kappa \theta = I \alpha$$

(mit dem Trägheitsmoment I und der Winkelbeschleunigung $\alpha = d^2\theta/dt^2$). Mit diesem Ausdruck für α erhalten wir

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I} \theta. \quad (11.32)$$

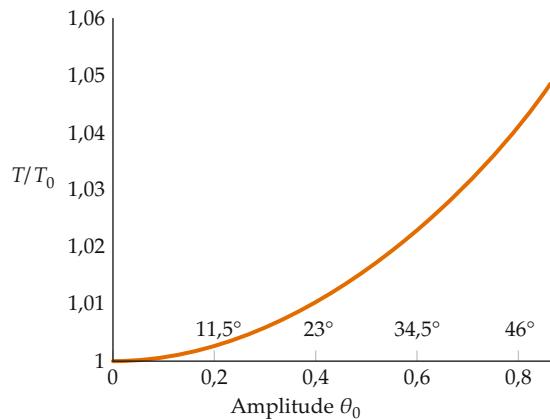


Abbildung 11.15 Das Verhältnis T/T_0 ist über der Amplitude θ_0 abgetragen. Über eine Winkelauslenkung von 0 bis etwa 46° ändern sich die Ordinatenwerte von 1 bis 1,05. Für diesen Bereich verändert sich die Schwingungsdauer um etwa 5 %.

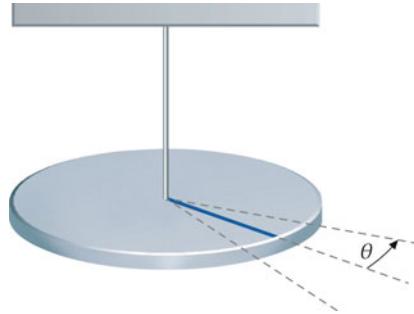


Abbildung 11.16 Dieses Drehpendel besteht aus einer massiven Scheibe, die an einem Stahldraht aufgehängt ist.

Dieser Ausdruck stimmt mit Gleichung 11.2 überein, nur dass hier anstelle von m das Trägheitsmoment I , anstelle von k_F die Torsionskonstante κ und anstelle von x die Winkelauslenkung θ verwendet wird. Wir können daher die Lösung zu Gleichung 11.32 angeben:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta). \quad (11.33)$$

Hier gibt $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ die Kreisfrequenz – nicht die Winkelgeschwindigkeit – der Bewegung an. Die Schwingungsdauer ist daher

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \quad (11.34)$$

SCHWINGUNGSDAUER EINES DREHPENDELS

*Das physikalische Pendel

Ein ausgedehnter starrer Körper, der sich frei um eine horizontale Achse drehen kann, die nicht durch seinen Schwerpunkt S

Beispiel 11.9: Eine Pendeluhr**ZUR ÜBUNG**

Eine Pendeluhr ist so eingestellt, dass sie die genaue Zeit bei einer Winkelamplitude von $\theta_0 = 10^\circ$ anzeigt. Geht die Uhr bei einer kleineren Pendelamplitude dann vor oder nach? Um wie viele Minuten geht die Uhr pro Tag falsch, wenn die Amplitude sehr klein ist?

Problembeschreibung: Wir berechnen die Schwingungsdauer bei einer Winkelamplitude von 10° mithilfe von Gleichung 11.30. Dabei berücksichtigen wir nur die ersten beiden Glieder der Reihenentwicklung:

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2^2} \sin^2(\frac{1}{2} \theta_0) \right).$$

Diese Gleichung liefert ein hinreichend genaues Ergebnis, weil eine Winkelamplitude von 10° noch recht klein ist. Durch Reibungskräfte nimmt die Winkelamplitude des Pendels langsam ab.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Mit der Reihenentwicklung in Gleichung 11.30 können Sie sagen, ob T_0 größer oder kleiner als T ist:

2. Mit Gleichung 11.30 können Sie auch die relative Änderung $\{(T - T_0)/T\} \cdot 100\%$ für $\theta = 10^\circ$ bestimmen. Verwenden Sie dazu nur den ersten Korrekturterm:

3. Geben Sie die Anzahl der Minuten pro Tag an:

4. Kombinieren Sie die Ergebnisse aus Schritt 2 und 3 und geben Sie die Änderung pro Tag an:

Ergebnisse der Lösungsschritte: 1. T wird kleiner, wenn θ_0 abnimmt, also geht die Uhr vor.

2. 0,190 %

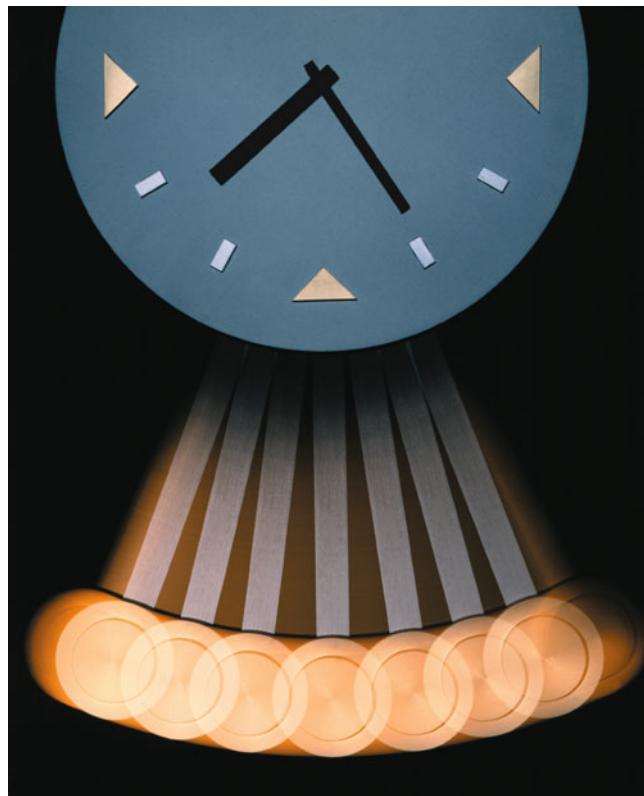
3. Ein Tag hat 1440 Minuten.

4. Die Uhr geht um 2,73 min/Tag vor.

Plausibilitätsprüfung: Der erste Korrekturterm in Gleichung 11.30 ist $\frac{1}{4} \sin^2(10,0^\circ/2) = 1,90 \cdot 10^{-3}$. Wir kommen

damit auf $T = 1,000190 T_0$ und $(T - T_0)/T = (1,00190 T_0 - T_0)/1,00190 T_0 = 0,00190$. Dieser Wert stimmt gut mit dem Ergebnis aus Schritt 2 überein.

Weitergedacht: Die Ganggenauigkeit von mechanischen Uhren beruht darauf, dass die Schwingungsdauer des schwingenden Teils konstant gehalten wird. Bei einer Pendeluhr beispielsweise erreicht man das dadurch, dass bei einer bestimmten Auslenkung eine Hemmung wirksam wird, die die Amplitude bei einem konstanten Wert hält.



(© Richard Megna/Fundamental Photographs.)



Der Gang dieser mechanischen Kaminuhr wird mit einem Drehpendel geregelt.
(Mit freundlicher Genehmigung von Bill Master/Alibaba)

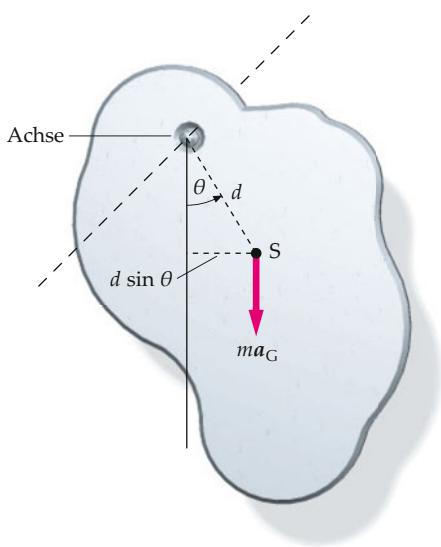


Abbildung 11.17 Ein physikalisches Pendel.

verläuft, beginnt nach einer Auslenkung aus seiner Gleichgewichtslage zu schwingen. Ein solches System bezeichnet man als **physikalisches Pendel**. In Abbildung 11.17 ist ein Flächenstück gezeichnet, das sich um eine senkrecht zur Zeichenebene liegende Achse drehen kann. Der Schwerpunkt S hat von der Achse den Abstand d , und der Winkel θ gibt die Winkelauslenkung aus der Gleichgewichtslage an. Ist m die Gesamtmasse des Flächenstücks, dann hat das der Auslenkung entgegengesetzte Drehmoment bezüglich der Drehachse M den Betrag $m g d \sin \theta$. Für genügend kleine Werte von θ können wir diesen Ausdruck mithilfe der Kleinwinkelnäherung $\sin \theta = \theta$ vereinfachen. Somit haben wir für kleine Winkel auslenkungen ein davon linear abhängendes Rückstellmoment

$$M = -m \cdot g \cdot d \cdot \theta. \quad (11.35)$$

Durch Vergleich mit Gleichung 11.31 wird klar, dass ein physikalisches Pendel für kleine Winkel auslenkungen ein Drehpendel ist, dessen Torsionskonstante gegeben ist durch

$$\kappa = m g d.$$

Demnach wird die Bewegung eines physikalischen Pendels durch Gleichung 11.33 mit $\kappa = m g d$ beschrieben. Die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels ist daher in harmonischer Näherung (mit dem Trägheitsmoment I)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}. \quad (11.36)$$

SCHWINGUNSDAUER DES PHYSIKALISCHEN PENDELS

Für große Amplituden ist auch bei dem physikalischen Pendel die Reihenentwicklung von Gleichung 11.30 zu berücksichtigen, für T_0 ist Gleichung 11.36 zu verwenden.

Die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels hängt nur von der Masseverteilung, nicht von der Gesamtmasse m ab, denn das Trägheitsmoment I ist proportional zu m , sodass I/m unabhängig von m ist.

Aus den Grundgleichungen des physikalischen Pendels lassen sich die Bewegungsgleichungen des mathematischen Pendels herleiten. Das Trägheitsmoment des mathematischen Pendels mit der Punktmasse m und dem Abstand d vom Drehpunkt ist bezüglich des Drehpunkts $I = m d^2$. Setzen wir das und $d = l$ in Gleichung 11.36 ein, so ergibt sich $T = 2\pi \sqrt{I/(m g d)} = 2\pi \sqrt{m l^2/(m g l)} = 2\pi \sqrt{l/g}$, also Gleichung 11.28.

Die Beispiele 11.10 bis 11.12 behandeln die Schwingungsdauer eines Stabs für verschiedene Drehpunkte.

Beispiel 11.10: Komfortable Marschgeschwindigkeit

Sie behaupten, man könne die Geschwindigkeit für einen komfortablen Spaziergang berechnen, wenn man die Beine als physikalisches Pendel modelliert. Ihr Dozent ist skeptisch und fordert Sie auf, Belege zu bringen. Ist Ihre Behauptung zu halten?

Problembeschreibung: Ein ganz einfaches Modell für ein Bein ist ein gleichförmiger Stab, der an einem Ende drehbar aufgehängt ist. Jedes Bein schwingt alle zwei Schritte einmal vor und zurück. Die Zeit für zehn Schritte ist $5 T$, wobei T die Schwingungsdauer des „Pendels“ angibt. Welche Zeit brauchen Sie Ihrer Behauptung zu folge für zehn Schritte in gemäßigtem Tempo? Welcher

Geschwindigkeit in km/h entspricht das, wenn Sie eine mittlere Schrittlänge von 0,90 m annehmen? Modellieren Sie Ihre Beine für diese Rechnung als 0,90 m lange, gleichförmige Stäbe, die sich bezüglich einer Achse durch das obere Ende drehen können.

Lösung: 1. Skizzieren Sie einen gleichförmigen dünnen Stab, der am oberen Ende drehbar aufgehängt ist (Abbildung 11.18).

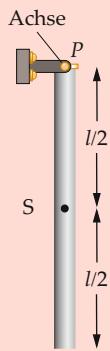


Abbildung 11.18 Der Abstand zwischen der Drehachse und dem Schwerpunkt beträgt $l/2$.

2. Die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels war in Gleichung 11.36 hergeleitet worden:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

3. Mit dem Trägheitsmoment $I = \frac{1}{3}ml^2$ (Kapitel 8) und $d = \frac{1}{2}l$ ergibt sich:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg(\frac{1}{2}l)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

4. Die Länge ist $l = 0,90 \text{ m}$, die Zeit für zehn Schritte ist $5T$:

$$5T = 5 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 10\pi \sqrt{\frac{2(0,90 \text{ m})}{3(9,81 \text{ m/s}^2)}} = [7,8 \text{ s}]$$

5. Um die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde zu berechnen, bestimmen Sie, wie viele Schritte Sie in einer Stunde machen, und nehmen mit der mittleren Schrittlänge mal:

$$\frac{3600 \text{ s} \cdot 10 \text{ Schritte}}{7,8 \text{ s}} = 4615 \text{ Schritte}$$

Das entspricht pro Stunde einer Strecke von $4615 \cdot 0,90 \text{ m} = 4,15 \text{ km} = [4,2 \text{ km}]$

Plausibilitätsprüfung: Die Hypothese scheint haltbar zu sein: Langbeinige Tiere wie Elefanten oder Giraffen laufen in einem langsamem, schwerfälligen Trott, kurzbeinige Tiere wie Mäuse oder Strandläufer dagegen trappeln sehr schnell. Diese Beobachtung wird durch das Modell gestützt, weil die Schwingungsdauer eines langen Pendels größer ist als die eines kurzen Pendels.

Weitergedacht: Messen Sie einmal die Höhe Ihres Hüftknochens und Ihre Schrittlänge und Schrittfolge und überprüfen Sie das Modell damit. Da die obere Hälfte der Beine gewöhnlich dicker ist als die untere, ist die Modellierung der Beine als gleichförmige Stäbe nicht völlig korrekt. Außerdem lässt die Angabe „in gemächlichem Tempo“ durchaus Raum für Interpretationen. Die in dem Beispiel berechnete Geschwindigkeit von 4,2 km/h könnte man jedenfalls als gemächlich bezeichnen. ■

Beispiel 11.11: Schwingungsdauer eines homogenen Stabs I

Ein homogener Stab der Masse m und der Länge l kann frei um eine horizontale Achse rotieren, die in einer Entfernung d vom Massenmittelpunkt des Stabs durch den Drehpunkt P verläuft und senkrecht zum Stab gerichtet ist (Abbildung 11.19). Bestimmen Sie die Schwingungsdauer für kleine Winkel auslenkungen des Stabs.

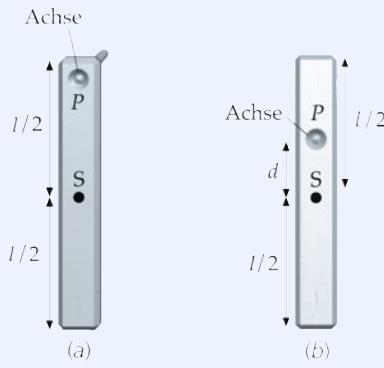


Abbildung 11.19 Skizze des Stabs.

Problembeschreibung: Die Schwingungsdauer ist durch Gleichung 11.36 gegeben. Der Massenmittelpunkt ist der geometrische Mittelpunkt des Stabs, und der Abstand vom Massenzentrum zur Drehachse ist damit d (Abbildung 11.19). Das Trägheitsmoment eines gleichförmigen

Stabs berechnet man mit dem Steiner'schen Satz $I = I_S + m d^2$, das Trägheitsmoment bezüglich des Massenmittelpunkts ist $I_S = \frac{1}{12} m l^2$, wie in Kapitel 8 gezeigt.

Lösung: 1. Die Schwingungsdauer ist durch Gleichung 11.36 gegeben:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}}$$

2. Das Trägheitsmoment I berechnet man mit dem Steiner'schen Satz:

$$I = I_S + m d^2$$

3. Setzen Sie diese Werte ein und bestimmen Sie T :

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g d}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{12} m l^2 + m d^2\right)}{m g d}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{12} l^2 + d^2\right)}{g d}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet, geht für $d \rightarrow 0$ die Schwingungsdauer $T \rightarrow \infty$. (Wenn die Drehachse des Stabs durch den Massenmittelpunkt geht, tritt kein rückstellendes Drehmoment aufgrund der Gravitationskraft auf.) Für $d = l/2$ erhält man $T = 2\pi \sqrt{2l/3g}$, dasselbe Ergebnis wie in Schritt 3 von Beispiel 11.10. Für $d \gg l$ nähert sich der Ausdruck für die Schwingungsdauer $T = 2\pi \sqrt{d/g}$; das ist die Formel für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge d (Gleichung 11.28).

Weitergedacht: Abbildung 11.20 zeigt die Schwingungsdauer als Funktion des Abstands d vom Massenmittelpunkt für einen Stab der Länge 1,00 m. Die Schwingungsdauer des Stabs ist stets kleiner als bei einem gleich langen mathematischen Pendel, da bei gleicher Gesamtmasse das Trägheitsmoment des Pendels größer ist als das Trägheitsmoment des Stabs.

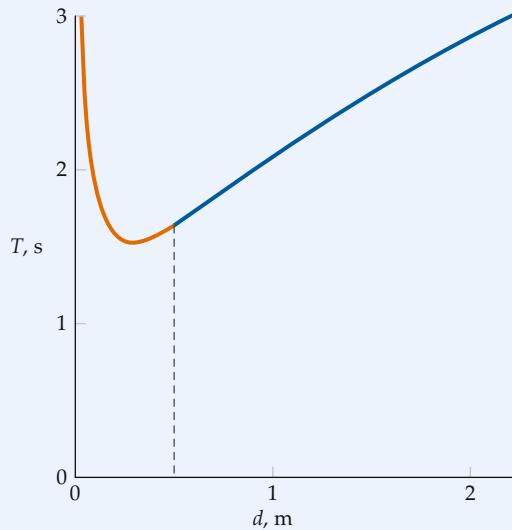


Abbildung 11.20 Schwingungsdauer eines 1,00 m langen Stabs als Funktion des Abstands d vom Schwerpunkt zum Drehpunkt. Für $d > 0,5$ m befindet sich der Drehpunkt außerhalb des Stabs.

Übung 11.7: Zeigen Sie, dass der Ausdruck für die Schwingungsdauer aus Schritt 3 für $d = l/6$ denselben Wert ergibt wie für $x = l/2$. ◀

Beispiel 11.12: Schwingungsdauer eines homogenen Stabs II**ZUR ÜBUNG**

Bestimmen Sie den Wert von x in Beispiel 11.11, für den die Schwingungsdauer minimal wird.

Problembeschreibung: An der Stelle x , an der T ein Minimum hat, gilt $dT/dx = 0$ (notwendige Bedingung eines Extremwerts).

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Die Schwingungsdauer ist nach dem Ergebnis von Beispiel 11.11 gleich $T = 2\pi\sqrt{z/g}$ mit $z = (\frac{1}{12}l^2 + x^2)/x$. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$.

2. Für x gegen null und für x gegen unendlich geht die Schwingungsdauer gegen unendlich. Irgendwo in dem Bereich $0 < x < \infty$ muss die Schwingungsdauer minimal werden. Um das Minimum zu bestimmen, berechnet man dT/dx , setzt diese Ableitung null und löst nach x auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(\frac{1}{12}l^2 + x^2)}{gx}} = 2\pi \sqrt{\frac{z}{g}}$$

mit $z = (\frac{1}{12}l^2 + x^2)/x$.

Für $x \rightarrow 0$ gilt: $z \rightarrow \infty$ und $T \rightarrow \infty$

Für $x \rightarrow \infty$ gilt: $z \rightarrow \infty$ und $T \rightarrow \infty$

2.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} z^{-1/2} \frac{dz}{dx}$$

Da im gesamten Bereich $0 < x < \infty$ stets $z > 0$ gilt, wird

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 0.$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow x = \boxed{\frac{l}{\sqrt{12}} = 0,289l}$$

Plausibilitätsprüfung: Es war ein Wert zwischen 0 und $0,5l$ zu erwarten. Das Ergebnis aus Schritt 2 mit $x = 0,289l$ genügt dieser Erwartung.

11.4 Gedämpfte Schwingungen

Überlässt man ein schwingendes System – beispielsweise einen Federschwinger oder ein Pendel – sich selbst, dann kommt es nach einiger Zeit zur Ruhe. Dem schwingenden System wird durch Reibungskräfte mechanische Energie entzogen und in Wärmeenergie dissipiert. Ein solches schwingungsfähiges System nennt man einen *gedämpften Oszillator*, seine periodische Bewegung, bei der die mechanische Energie nicht erhalten bleibt, sondern abnimmt, heißt eine **gedämpfte Schwingung**.

Wenn die Dämpfung groß genug ist, beispielsweise bei einem Pendel, das in eine zähe Flüssigkeit (z. B. Sirup) eingetaucht ist, kann der Oszillator keine volle Schwingungsperiode durchführen. Stattdessen bewegt er sich nach der Auslenkung langsam zur Gleichgewichtslage hin, dabei geht seine Geschwindigkeit gegen null, je näher er der Gleichgewichtslage kommt. Diese Art der Bewegung nennt man **stark gedämpft** oder **über-dämpft**. Da sich der Oszillator der Gleichgewichtslage nur sehr langsam nähert, spricht man auch vom *Kriechfall*. Ist die Dämpfung hingegen klein, sodass das System mit einer Amplitude schwingt, die allmählich mit der Zeit abnimmt – wie ein Kind auf einer Spielplatzschaukel, wenn es nicht mehr bei jeder Schwingung einen Schubs bekommt –, nennt man diese Bewegung **schwach gedämpft (unterdämpft)**. Da trotz der abnehmenden Amplitude eine Schwingung auftritt, spricht man

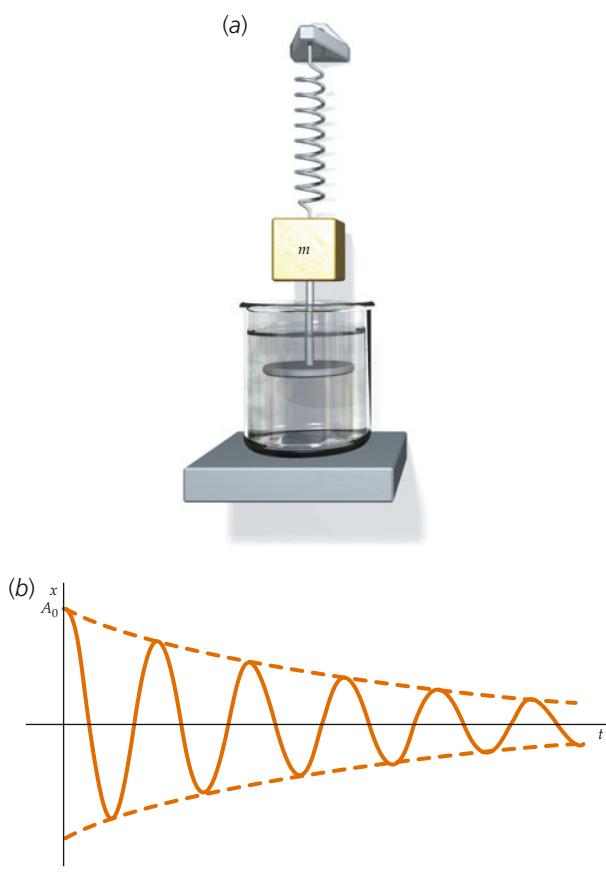
vom *Schwingfall*. Ist die Dämpfung gerade so stark, dass der Oszillator sich zur Gleichgewichtslage hin bewegt und dann die Bewegung abgeklungen ist, nennt man die Bewegung **kritisch gedämpft** und spricht vom *aperiodischen Grenzfall*. Bei einer etwas geringeren Dämpfung als der kritischen liegt eine unterdämpfte, bei einer etwas stärkeren Dämpfung eine überdämpfte Bewegung vor.

Die technische Bedeutung der kritischen Dämpfung liegt darin, dass die Gleichgewichtslage in der kürzestmöglichen Zeit erreicht wird. So sind beispielsweise Stoßdämpfer von Autos, Zeiger von analogen Messinstrumenten oder die Resonanzkörper von Musikinstrumenten so ausgelegt, dass sie möglichst rasch zur Ruhe kommen. Sie sind auf eine kritische Dämpfung konstruiert. In der Praxis ist das Auffinden des aperiodischen Grenzfalls jedoch schwierig. Man wählt daher die Dämpfungs-konstante der Stoßdämpfer meist so, dass ein bis zwei Nachschwingungen auftreten können.

Der gedämpfte Oszillator

Abbildung 11.21a zeigt ein gedämpftes schwingungsfähiges System, für das die Reibungskraft F_R linear von der Geschwindigkeit des gedämpften Körpers abhängt:

$$F_R = -b v.$$



Darin ist b eine Konstante (Dämpfungskonstante). Sie hängt für laminare Bewegungen linear von der Zähigkeit der Flüssigkeit und von der Geometrie des Körpers ab. Für die nachfolgenden Überlegungen betrachten wir sie als eine empirische Konstante.

Ein Schwingungssystem mit einer solchen geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft heißt *linear gedämpft*. Da die Reibungskraft der Bewegungsrichtung entgegengesetzt gerichtet ist, wird die von ihr verrichtete Arbeit negativ, und die mechanische Energie des Systems verringert sich mit der Zeit. Für eine schwache Dämpfung nimmt die Amplitude der Schwingung ab (Abbildung 11.21b).

Nach Gleichung 11.17 ist die Energie des schwingenden Systems dem Amplitudenquadrat der Schwingung proportional. Für eine lineare Dämpfung nimmt das Amplitudenquadrat exponentiell mit der Zeit ab, d.h.

$$A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau}. \quad (11.37)$$

DEFINITION DER ZEITKONSTANTEN (ZERFALLSZEIT)

Darin ist A die Amplitude, A_0 die Amplitude zur Zeit $t = 0$, und τ wird als **Zeitkonstante** oder **Zerfallszeit** der Schwingung bezeichnet. Die Zeitkonstante ist die Zeit, bei der die Energie auf 1/e des Ausgangswert abfällt.

Die Bewegungsgleichung eines gedämpften Oszillators lässt sich aus dem zweiten Newton'schen Axiom herleiten. Ein Federschwinger mit der Masse m und der Federkonstanten k_F , auf den eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft $-b v$ wirkt, erfährt die Gesamtkraft $-k_F x - b(dx/dt)$. Damit genügt er für eine lineare Schwingung in x -Richtung der Bewegungsgleichung

$$-k_F x - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

bzw.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + k_F x = 0. \quad (11.38)$$

DIFFERENTIALGLEICHUNG FÜR EINEN GEDÄMPFTEN OSZILLATOR

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie hat für beliebige Dämpfungen geschlossene Lösungen, die man mit einem Exponentialansatz $x = e^{\lambda t}$ berechnen kann. Dabei ergibt sich λ als Lösung der quadratischen Bestimmungsgleichung $\lambda^2 + (b/m)\lambda + (k_F/m) = 0$:

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

mit $\omega_0^2 = k_F/m$. Die Struktur der Lösung wird durch den Ausdruck unter der Wurzel festgelegt. Wir können drei Fälle der gedämpften Bewegung unterscheiden:

$$\frac{b}{2m} > \omega_0, \quad \frac{b}{2m} = \omega_0, \quad \frac{b}{2m} < \omega_0.$$

1. Fall: Starke Dämpfung (überdämpft). Für $(b/2m) > \omega_0$ erreicht der Oszillatator eine maximale Amplitude ($A \leq A_0$) und geht dann asymptotisch in die Ruhelage zurück.

2. Fall: Aperiodischer Grenzfall (kritische Dämpfung). Hier ist $(b/2m) = \omega_0$, also $b_k = 2m\omega_0$. Der Oszillatator geht von dem Anfangswert A_0 asymptotisch in die Ruhelage über.

Diese beiden Fälle sind in Abbildung 11.22 dargestellt.

3. Fall: Schwache Dämpfung (unterdämpft). Hier ist $(b/2m) < \omega_0$. Diese Lösung der Bewegungsgleichung entspricht den in Abbildung 11.21b gezeigten Verhältnissen. Mit diesem Fall wollen wir uns im Folgenden ausführlicher beschäftigen. Beispiel 11.13 verdeutlicht eine technische Anwendung der kritischen Dämpfung.

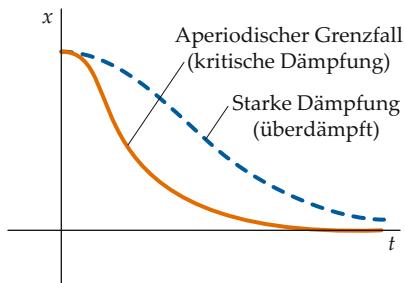


Abbildung 11.22 Beispiele für eine stark gedämpfte Bewegung (überdämpft) und den aperiodischen Grenzfall (kritische Dämpfung).

Beispiel 11.13: Gefederte Masse eines Autos

Die gefederte Masse eines Autos wird von der Federung getragen. Sie ist die Gesamtmasse des Autos, abzüglich der Masse der Räder, der Achsen, der Bremsen usw., die man die ungefederte Masse nennt. Ein PKW hat eine gefederte Masse von 1100 kg und eine ungefederte Masse von 250 kg. Wenn man die vier Stoßdämpfer ausbaut, rumpelt das Auto mit einer Frequenz von 1,0 Hz auf und ab. Welche Dämpfungskonstante sollen die vier Stoßdämpfer haben, wenn das Auto (mit den Stoßdämpfern) nach dem Überfahren einer Rüttelschwelle schnellstmöglich in die Gleichgewichtslage zurückkehren soll, ohne dass die Federung die Gleichgewichtslage überschwingt?



Beim Auswuchten der Räder werden an den Felgen kleine Ausgleichsgewichte angebracht. Sie sollen verhindern, dass kleine Unwuchten die Räder zum Schwingen bringen. (© David Wrobel/Visuals Unlimited.)

Problembeschreibung: Das Auto soll schnellstmöglich in die Gleichgewichtslage zurückkehren, ohne darüber hinaus zu schwingen. Seine Schwingung muss daher kritisch gedämpft sein. Mit dem Zusammenhang $b_k = 2m\omega_0$ können Sie nach der Dämpfungskonstante für die kritische Dämpfung auflösen.

Lösung: 1. Geben Sie die Beziehung zwischen der Dämpfungskonstante b_k bei kritischer Dämpfung und der Eigenfrequenz ω_0 an:

$$b_k = 2m\omega_0$$

2. Wenn die Reifen in Kontakt mit der Straße sind, geht nur die gefederte Masse in die Rechnung ein. Außerdem ist die Eigenfrequenz ω_0 gegeben:

$$m = 1100 \text{ kg} \quad \omega_0 = 1,0 \text{ Hz}$$

3. Berechnen Sie die Dämpfungskonstante:

$$b = b_k = \frac{2(1100 \text{ kg})}{1,0 \text{ Hz}} = \boxed{2,2 \cdot 10^3 \text{ kg/s}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Dämpfungskraft ist gegeben durch $F = -bv$, daher muss $b v$ die SI-Einheit Newton haben. Unser Ergebnis aus Schritt 3 hat die Einheit kg/s, damit hat $b v$ die Einheit (kg/s)(m/s) = kg·m/s². Dies sind die SI-Einheiten für das Produkt von Masse und Beschleunigung. Wir haben mit kg/s die passende Einheit für b berechnet.

Weitergedacht: Bei einem optimalen Stoßdämpfer für ein Fahrzeug ist die Dämpfungskonstante so gewählt, dass die Schwingungen kritisch gedämpft sind. Die optimale Dämpfungskonstante b_k wird anhand der gefederten Masse des Fahrzeugs und der Federkonstante k_F der Federung bestimmt. Da die gefederte Masse aber von der Zuladung abhängt, wird die kritische Dämpfung nur für einen bestimmten Beladungszustand erreicht. Daher werden vereinzelt einstellbare Stoßdämpfer angeboten, deren Dämpfungskonstante man an die Zuladung anpassen kann.

Schwach gedämpfter Oszillatator (unterdämpfte Bewegung)

Bei schwacher Dämpfung des oszillierenden Systems hat die Bewegungsgleichung 11.38 die Lösung

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \delta). \quad (11.39)$$

Dabei ist

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} \quad (11.40)$$

die Kreisfrequenz des gedämpften und $\omega_0 = \sqrt{k_F/m}$ die Kreisfrequenz des ungedämpften Federschwingers. ω_0 wird auch als *Eigenfrequenz* des Systems bezeichnet.

Für *schwache Dämpfung*, d. h. $(b/2m\omega_0) \ll 1$, wird $\omega' \approx \omega_0$, und die Kreisfrequenz des gedämpften Oszillators stimmt näherungsweise mit der des ungedämpften Oszillators überein. Nimmt in dem anderen Grenzfall die Dämpfungskonstante b zu, dann wird der Radikand in Gleichung 11.40 kleiner, und die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung nimmt ab, bis der Fall der kritischen Dämpfung oder des aperiodischen Grenzfalls erreicht ist und $\omega' = 0$ wird.

Die Exponentialfunktion in Gleichung 11.39,

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t}, \quad (11.41)$$

bestimmt die Amplitudenabnahme für wachsendes t und ergibt die Hüllkurven der gedämpften Schwingung (gestrichelte Kurven in Abbildung 11.21b).

Wenn wir beide Seiten von Gleichung 11.41 quadrieren, dann erhalten wir aus einem Vergleich mit Gleichung 11.37 für die Exponenten die Beziehung

$$\tau = \frac{m}{b}. \quad (11.42)$$

Nimmt die Dämpfungskonstante b zu, nimmt die Kreisfrequenz ω' ab. Wird die kritische Dämpfung erreicht, gilt für die Dämpfungskonstante b bzw. für die Zeitkonstante τ

$$b_k = 2m\omega_0 \quad \text{und} \quad \tau_k = \frac{m}{b_k} = \frac{1}{2\omega_0}. \quad (11.43)$$

Die Zeitkonstante (Zerfallszeit) kann Werte im Bereich $\tau_k < \tau < \infty$ annehmen. Der kleinstmögliche Wert tritt bei kritischer Dämpfung auf, große Zeitkonstanten gehören zu schwacher Dämpfung; der Grenzfall der ungedämpften Schwingung entspricht $\tau \rightarrow \infty$.

Energie und Gütfaktor des gedämpften Oszillators

Nach Gleichung 11.17 ist die Energie beim harmonischen Oszillator proportional dem Amplitudenquadrat. Benutzt man diese Beziehung auch für den gedämpften Oszillator und setzt in die Gleichung 11.17 des harmonischen Oszillators die Amplitudewerte des gedämpften Oszillators nach Gleichung 11.41 ein, so erhält man für schwache Dämpfung

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}} &= \frac{1}{2} m \omega'^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega'^2 (A_0 e^{-(b/2m)t})^2 \\ &\approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2 e^{-(b/m)t} = E_{\text{mech},0} e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (11.44)$$

mit $E_{\text{mech},0} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2$, $\omega' \approx \omega_0$ und $\tau = m/b$.

Der gedämpfte Oszillator wird häufig durch einen sogenannten **Gütfaktor** (nach der englischen Bezeichnung *quality factor* auch als Q -Faktor bezeichnet) charakterisiert:

$$Q = \omega_0 \tau. \quad (11.45)$$

DEFINITION DES Q -FAKTORES

Da ω_0 die Dimension einer reziproken Zeit hat, ist der Gütfaktor als Produkt aus Eigenfrequenz und Zeitkonstante τ dimensionslos. Die Bedeutung des Gütfaktors erkennt man aus den nachfolgenden energetischen Überlegungen. Die Differen-

ziation von Gleichung 11.44 nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} &= -\frac{1}{\tau} E_{\text{mech},0} e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau} E_{\text{mech}} \quad \text{bzw.} \\ \frac{dE_{\text{mech}}}{E_{\text{mech}}} &= -\frac{dt}{\tau}. \end{aligned}$$

$|dE_{\text{mech}}|$ ist der Energieverlust in der Zeit dt . Ist die Dämpfung so schwach, dass der Energieverlust über eine ganze Schwingungsdauer nur einen kleinen Teil der Gesamtenergie beträgt, kann man anstelle von dE_{mech} auch ΔE_{mech} und anstelle von dt die Schwingungsdauer T setzen. Dann ergibt sich für die relative Energieabnahme $|\Delta E_{\text{mech}}|/E_{\text{mech}}$ während einer Schwingungsperiode T

$$\left(\frac{|\Delta E_{\text{mech}}|}{E_{\text{mech}}} \right)_{\text{Periode}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{2\pi}{Q} \quad (11.46)$$

bzw.

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E_{\text{mech}}|/E_{\text{mech}})_{\text{Periode}}} \quad \text{für} \quad \frac{|\Delta E_{\text{mech}}|}{E_{\text{mech}}} \ll 1. \quad (11.47)$$

PHYSIKALISCHE INTERPRETATION DES Q -FAKTORES
FÜR SCHWACHE DÄMPFUNG

Der Q -Faktor ist umgekehrt proportional zu dem relativen Energieverlust während einer Schwingung.

Ersetzt man in der Beziehung zwischen den Kreisfrequenzen der gedämpften Schwingung und der zugehörigen ungedämpften Schwingung die Dämpfungskonstante b durch den Q -Faktor, so folgt aus Gleichung 11.40 und 11.45

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0} \right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (11.48)$$

Für $b \rightarrow 0$ (schwache Dämpfung) geht $Q \rightarrow \infty$ und $\omega' \rightarrow \omega_0$. Beispiel 11.14 enthält dazu numerische Werte.

Beispiel 11.14: Musik machen

Wenn ein mittleres c (Frequenz 262 Hz) auf dem Klavier angeschlagen wird, ist die Schwingungsenergie des Tons nach 4,00 s auf die Hälfte gesunken. a) Wie groß ist die Zeitkonstante τ ? b) Wie groß ist der Q -Faktor für die Klaviersaite? c) Wie groß ist der relative Energieverlust für eine Schwingung?

Problembeschreibung: a) Wir verwenden den Zusammenhang $E_{\text{mech}} = E_{\text{mech},0} e^{-t/\tau}$ und setzen E_{mech} gleich $\frac{1}{2} E_{\text{mech},0}$. b) Der Q -Faktor lässt sich aus der Zeitkonstante und der Frequenz bestimmen. c) Der relative Energieverlust während einer Schwingungsperiode ist durch Gleichung 11.46 gegeben.

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Setzen Sie die Energie zur Zeit $t = 4,00 \text{ s}$ gleich der Hälfte der ursprünglichen Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{mech}} &= E_{\text{mech},0} e^{-t/\tau} \\ \frac{1}{2} E_{\text{mech},0} &= E_{\text{mech},0} e^{-(4,00 \text{ s})/\tau} \\ \frac{1}{2} &= e^{-(4,00 \text{ s})/\tau} \end{aligned}$$

2. Zur Berechnung von τ bilden Sie den natürlichen Logarithmus von beiden Seiten:

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{2} &= -\frac{4,00 \text{ s}}{\tau} \\ \tau &= \frac{4,00 \text{ s}}{\ln 2} = 5,771 \text{ s} = \boxed{5,77 \text{ s}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie Q aus τ und ω_0 :

$$\begin{aligned} Q &= \omega_0 \tau = 2\pi \nu \tau \\ &= 2\pi (262 \text{ Hz}) \cdot (5,771 \text{ s}) \\ &= 9,500 \cdot 10^3 = \boxed{9,50 \cdot 10^3} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Der relative Energieverlust während einer Schwingung ist durch Gleichung 11.46 gegeben; die Frequenz ist $\nu = 1/T$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{|\Delta E_{\text{mech}}|}{E_{\text{mech}}} \right)_{\text{Periode}} &= \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} = \frac{1}{\nu \tau} \\ &= \frac{1}{(262 \text{ Hz}) \cdot (5,771 \text{ s})} \\ &= 6,6614 \cdot 10^{-4} = \boxed{6,61 \cdot 10^{-4}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Q lässt sich auch aus $Q = 2\pi / (|\Delta E_{\text{mech}}| / E_{\text{mech}})_{\text{Periode}} = 2\pi / (6,61 \cdot 10^{-4}) = 9,50 \cdot 10^3$ berechnen. Beachten Sie, dass man den relativen Energieverlust nach 4,00 s nicht einfach aus der Zahl der Schwingungen (4 s) (262 Hz) multipliziert mit dem relativen Energieverlust pro Schwingung berechnen kann, da die Energie exponentiell und nicht linear abnimmt.

Weitergedacht: Abbildung 11.23 zeigt die relative Amplitude A/A_0 und die relative Energie $E_{\text{mech}}/E_{\text{mech},0}$ in Abhängigkeit von der Zeit für die Schwingung einer Klaviersaite, nachdem ein mittleres c angeschlagen wurde. Nach 4,00 s hat die Amplitude auf das 0,7-fache ihres Anfangswerts abgenommen, und die Energie, die proportional dem Quadrat der Amplitude ist, ist auf die Hälfte

ihres Anfangswerts gesunken. Beachten Sie, dass Q im betrachteten Fall der Klaviersaite recht groß ist. Sie können τ und Q von verschiedenen schwingungsfähigen Systemen prüfen. Schlagen Sie ein Kristallweinglas an und prüfen Sie, wie lange es nachklingt. Je länger es klingt, umso größer sind die Werte von τ und Q und umso geringer ist die Dämpfung. Auch Laboratoriumsglasbecher können ein hohes Q haben. Schlagen Sie im Vergleich an eine Plastiktasse. Wie ist die Dämpfung der Plastiktasse im Vergleich zu der des Weinglases?

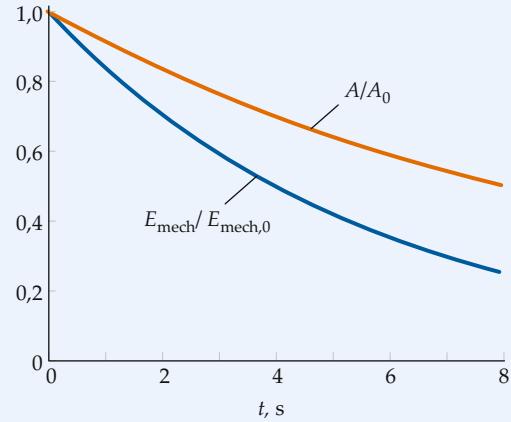


Abbildung 11.23 Verlauf der relativen Amplitude A/A_0 und der relativen Energie $E_{\text{mech}}/E_{\text{mech},0}$ für eine angeschlagene Klaviersaite.

Wir wenden uns abschließend energetischen Betrachtungen zu. Bei der harmonischen Schwingung bleibt die mechanische Gesamtenergie E_{mech} (Summe aus der kinetischen E_{kin} und potentiellen Energie E_{pot}) erhalten; es gilt $dE_{\text{mech}}/dt = 0$, und im zeitlichen Mittel ist $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{2} E_{\text{mech}}$. Das Vorhandensein einer Reibungskraft F_R entzieht dem Schwingungssystem mechanische Energie und wandelt sie z. B. über sogenannte dissipative Prozesse in eine andere Energieform (Wärme) um. Bei der Dissipation wird Energie von einem System mit einer niedrigen Zahl an Freiheitsgraden (z. B. eindimensionale Schwingungsenergie) durch den Dämpfungsprozess an ein System mit einer sehr großen Zahl von Freiheitsgraden abgegeben und führt zu einer Erhöhung der inneren Energie des umgebenden Systems durch Erwärmung. Die Energieabnahme eines Federschwingers in der Zeit dt ist gleich der Leistung der Reibungskraft:

$$P = \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = F_R \cdot v = -b v \cdot v = -b v^2. \quad (11.49)$$

Diese Leistung ist bei einem gedämpften Oszillatator immer größer als null, sodass die mechanische Gesamtenergie mit der Zeit langsam abnimmt. Die mechanische Gesamtenergie lässt sich

durch die mittlere kinetische Energie ausdrücken:

$$E_{\text{mech}} = 2 \langle E_{\text{kin}} \rangle = 2 \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle.$$

Somit folgt

$$\langle v^2 \rangle = \frac{E_{\text{mech}}}{m}.$$

Damit kann man v^2 aus der Leistungsbilanz (Gleichung 11.49) eliminieren und erhält in der Näherung $v^2 \approx \langle v^2 \rangle$

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{dt} = -b v^2 \approx -b \langle v^2 \rangle = -\frac{b}{m} E_{\text{mech}}. \quad (11.50)$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für die zeitliche Änderung der mechanischen Gesamtenergie $E_{\text{mech}}(t)$. Eine Lösung erhält man durch den Ansatz

$$\frac{dE_{\text{mech}}}{E_{\text{mech}}} = -\frac{b}{m} dt.$$

Nach Integration ergibt sich

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{mech},0} e^{-(b/m)t} = E_{\text{mech},0} e^{-t/\tau}.$$

Diese Lösung stimmt mit Gleichung 11.44 überein, wurde aber hier ohne die Näherung $\omega' \approx \omega_0$ hergeleitet. Offenbar ist sie äquivalent zur Näherung $v^2 \approx \langle v^2 \rangle$.



11.5 Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Damit ein gedämpftes System über längere Zeit in Bewegung bleibt, muss man ihm mechanische Energie zuführen. In einem solchen Fall spricht man von einer angeregten oder **erzwungenen Schwingung**. Wenn ein Spielkamerad oder ein Elternteil die Schaukel auf dem Spielplatz angeschubst hat, hat er eine erzwungene Schwingung angeregt. Auch beim „Pumpen“, d. h. dem regelmäßigen Bewegen von Oberkörper und Beinen auf einer Schaukel, regt man einen Oszillatoren an. Wird dem System mehr mechanische Energie zugeführt als dissipiert wird, dann nehmen die mechanische Energie und ebenso die Amplitude der Schwingung mit der Zeit zu. Ist die zugeführte mechanische Energie gleich der dissipierten Energie, bleibt die Amplitude zeitlich konstant. Der Oszillatator befindet sich dann in einem stationären Zustand.

Abbildung 11.24 zeigt einen vertikal schwingenden Federschwinger. Durch eine periodische Auf- und Abwärtsbewegung des Aufhängepunkts der Feder mit einer Frequenz ω wird der Federschwinger angetrieben. Zunächst ist die Bewegung kompliziert, doch schließlich wird der stationäre Zustand erreicht, in dem das System mit derselben Frequenz wie der Treiber schwingt, und die Amplitude – und damit auch die Energie – konstant bleibt. Im stationären Zustand ist die Energie, die dem

Durch „Pumpen“ wird beim Schaukeln innere Energie in mechanische Energie der schwingenden Schaukel umgewandelt. (© Elvira Schäfer/Pitopia.)

System durch die treibende Kraft pro Schwingung zugeführt wird, gleich der durch die Dämpfung dissipierten Energie, die pro Schwingung verloren geht.

Im stationären Zustand hängt die Amplitude – und damit die Energie – des Schwingungssystems nicht nur von der Amplitude der anregenden Kraft ab, sondern auch von seiner Frequenz. Es gibt Frequenzbereiche der treibenden Kraft, die das Schwingungssystem kaum anregen, und andere Frequenzen ω der treibenden Kraft, bei denen viel Energie auf das Schwingungssystem übertragen wird. Diesen Bereich starker Anregung des Schwingers durch die treibende Kraft, der als Resonanzbereich bezeichnet wird, wollen wir näher behandeln.

Die **Eigenfrequenz** ω_0 eines Oszillators ist dessen Frequenz, wenn keine treibenden Kräfte oder Reibungskräfte wirken. (Für einen Federschwinger beispielsweise ist $\omega_0 = \sqrt{k_F/m}$). Ist die Frequenz ω der treibenden Kraft näherungsweise gleich der Eigenfrequenz des Systems ($\omega \approx \omega_0$), schwingt das angelegte System mit einer relativ großen Amplitude. Wenn sich beispielsweise die Aufhängung in Abbildung 11.24 mit einer Frequenz nahe der Eigenfrequenz des Federschwingers bewegt,



Abbildung 11.24 Ein vertikaler Federschwinger kann zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden, wenn die Aufhängung der Feder sich auf- und abbewegt.

schwingt die Masse mit einer viel größeren Amplitude als in den Fällen, in denen die Frequenz der Aufhängung deutlich höher oder niedriger ist als ω_0 . Dieses Phänomen nennt man **Resonanz**. Resonanzerscheinungen können bei allen gekoppelten Schwingungssystemen auftreten und haben ein breites Anwendungsfeld bei mechanischen Schwingungen in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern, in der Akustik (Musikinstrumente), bei elektromagnetischen und optischen Schwingungs- und Wellenerscheinungen. Wenn die anregende Frequenz ω gleich der Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators ist, hat die Energie, die pro Schwingung auf den Oszillator übertragen wird, ein Maximum. Die Eigenfrequenz des Systems wird daher als **Resonanzfrequenz** bezeichnet. (Mathematisch ist die Kreisfrequenz ω bequemer zu nutzen als die Frequenz $v = \omega/(2\pi)$. Da ω und v zueinander proportional sind, gelten die meisten Darstellungen, die die Kreisfrequenz betreffen, auch für die Frequenz. In der verbalen Beschreibung wird gewöhnlich das Wort „Kreis“ weggelassen, wenn dies nicht zu Verwirrungen führt.)

Abbildung 11.25 zeigt Kurven der mittleren aufgenommenen Leistung eines Oszillators als Funktion der treibenden Frequenz für zwei unterschiedliche Dämpfungswerte. Diese Kurven werden Resonanzkurven genannt. Wenn die Dämpfung schwach ist (großes Q), ist die Breite der Resonanzkurve entsprechend schmal; man spricht von einer scharfen Resonanz. Für starke Dämpfung ist die Resonanzkurve breit. Die in der Abbildung markierte Größe $\Delta\omega$ gibt die Breite der Resonanzkurve bei der halben Maximalhöhe an und heißt **Halbwertsbreite**. Man kann zeigen, dass für schwache Dämpfung das Verhältnis der Halbwertsbreite zur Resonanzfrequenz gerade der Kehrwert des Q -Faktors ist (siehe Aufgabe 11.50):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (11.51)$$

HALBWERTSBREITE DER RESONANZKURVE FÜR SCHWACHE DÄMPFUNG

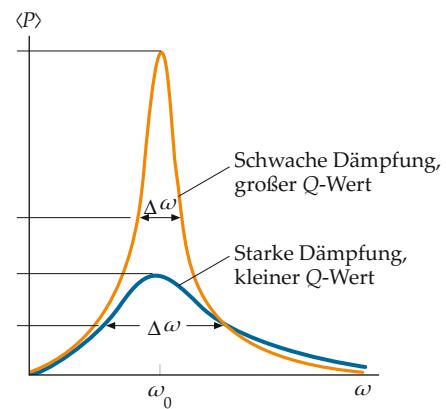
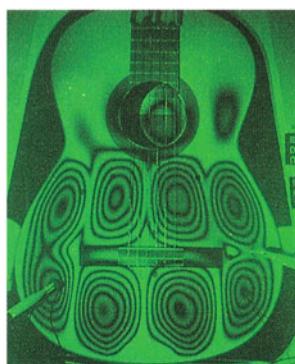
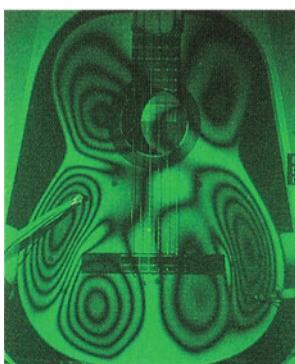
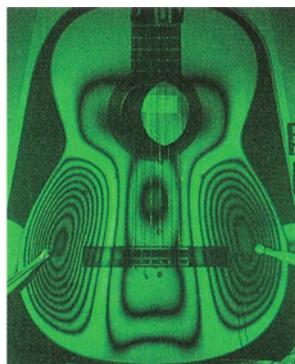
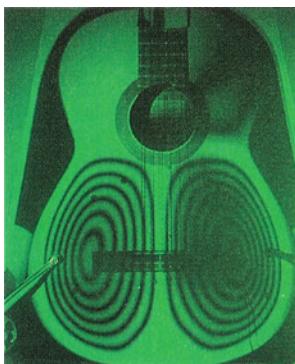


Abbildung 11.25 Resonanzkurven für einen Oszillator durch eine periodische Anregung mit der Frequenz ω zugeführte mittlere Leistung. Resonanz liegt vor, wenn die Frequenz des anregenden Systems in die Nähe der Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators kommt. Die dargestellten Kurven nennt man Resonanzkurven. Die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ der Resonanzkurve ist ein Maß für die Dämpfung des Systems bzw. für dessen Gütefaktor. Schwache Dämpfung zeigt eine scharfe Resonanzkurve.

Damit ist der Q -Faktor ein geeignetes Maß für die Resonanzschärfe.

Man kann die Resonanz mit einem einfachen Experiment demonstrieren. Halten Sie einen Meterstab an einem Ende zwischen zwei Fingern, sodass er wie ein Pendel schwingen kann. Lassen Sie nun den Stab aus einer beliebigen Anfangsauslenkung frei, so können Sie die Eigenfrequenz seiner Bewegung beobachten. Bewegen Sie die Hand horizontal vor und zurück, wird der Stab zu Schwingungen angeregt. Wenn Sie die Hand mit einer Frequenz nahe der Eigenfrequenz bewegen, reicht schon eine kleine Anregungsamplitude, um den Stab mit einer beträchtlichen Amplitude schwingen zu lassen. Bewegen Sie nun die Hand mit der zweifachen Eigenfrequenz vor und zurück, so werden Sie feststellen, dass die Amplitude des schwingenden Stabs abnimmt.

Es gibt viele bekannte Beispiele zu Resonanzschwingungen im Alltag. Wenn man auf einer Schaukel sitzt, muss man zur Aufrechterhaltung der Amplitude von außen periodisch (mit der Eigenfrequenz der Schaukel) angeschubst werden, oder man lernt intuitiv, die Schaukel durch rhythmische Körperverlagerung mit der doppelten Eigenfrequenz von innen zu „pumpen“. Viele Maschinen vibrieren, wenn die rotierenden Teile nicht gut ausgewuchtet sind (z. B. eine Waschmaschine beim Schleudern der Wäsche). Die Vibrationen können auf andere Maschinenteile übertragen werden und zu unerwünschten Schwingungen oder Geräuschen führen. So können bei Großanlagen mit niedrigen Rotationsgeschwindigkeiten der Maschinen oder periodisch arbeitenden Hammerwerken Fundamentalschwingungen angeregt werden, die Gebäude (auch in großer Entfernung) zum Einsturz bringen. Deshalb müssen die Ingenieure viel Mühe darauf verwenden, um solche unerwünschten Resonanzen durch zusätzliche Dämpfungsglieder bzw. Isolierung der Anlagen von den Gebäuden zu vermeiden.



Ausgedehnte Objekte haben mehr als eine Resonanzfrequenz. Wenn eine Gitarrensaita gezupft wird, überträgt sie ihre Energie auf den Gitarrenboden. Die Bodenschwingungen, gekoppelt mit denen der eingeschlossenen Luftmasse, erzeugen die in den Abbildungen gezeigten Resonanzmuster (Klangfiguren). (© Königlich Schwedische Akademie der Musik.)

Wird ein Kristallglas leicht angeschlagen, erzeugt es einen Ton in der Eigenfrequenz des Glases, der in Abhängigkeit von der Dämpfung mehr oder weniger lang zu hören ist. Ein Glas mit geringer Dämpfung kann durch eine intensive Schallwelle bei einer Frequenz, die sehr nahe oder gleich der Eigenfrequenz des Glases ist, durch die auftretenden Resonanzschwingungen zerbrechen. In physikalischen Demonstrationen wird dieses Experiment mithilfe eines Tonfrequenzgenerators und Verstärkers vorgeführt. Viele Körper haben mehr als eine Eigenfrequenz. Ein schwingfähiges System, das auf eine (oder mehrere) Resonanzfrequenzen so abgestimmt ist, dass es bei Anregung mit dieser Frequenz zu schwingen beginnt, nennt man einen *Resonator*. Mechanische Resonatoren sind beispielsweise die zur Schwingungsdämpfung eingesetzten Tilgungspendel oder eine Stimmgabel, ein elektrischer Resonator ein Schwingkreis aus Spule und Kondensator (elektromagnetische Resonatoren sind Resonanzräume für elektromagnetische Wellen). Solche Resonatoren finden beispielsweise in der Hochfrequenztechnik oder bei der Erzeugung und Verstärkung von Laserlicht breite Anwendung.

*Mathematische Behandlung der Resonanz

Man kann einen erzwungenen Oszillatoren mathematisch behandeln, indem man annimmt, dass zusätzlich zur rücktreibenden Kraft und einer Reibungskraft noch eine äußere treibende Kraft auf den Oszillatoren einwirkt, die sich harmonisch mit der Zeit ändert:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{a,0} \cos(\omega t). \quad (11.52)$$

Darin ist $\mathbf{F}_{a,0}$ die Amplitude und ω die Kreisfrequenz der treibenden Kraft. Diese Frequenz ist im Allgemeinen nicht mit der Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators verknüpft.

Das zweite Newton'sche Axiom, angewendet auf einen gedämpften Federschwinger mit der Masse m , der Federkonstanten k_F und einer Reibungskraft $-b v_x$, der durch eine äußere Kraft $F_{a,0} \cos \omega t$ angeregt wird, liefert für die lineare Bewegung in x -Richtung

$$F_x + F_{R,x} + F_{a,x} = m a_x, \\ -k_F x - b v_x + F_{a,0} \cos \omega t = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Dabei wurde statt der Beschleunigung a_x die zweite Ableitung $d^2 x / dt^2$ geschrieben. Setzt man $m \omega_0^2$ anstelle von k_F ein (Gleichung 11.8) und ordnet die Größen um, dann erhält man

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m \omega_0^2 x = F_{a,0} \cos \omega t. \quad (11.53)$$

DIFFERENTIALGLEICHUNG FÜR DEN ERZWUNGENEN OSZILLATOR

Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Schwingungsbewegung $x(t)$ des erzwungenen Oszillators. Wir wollen die allgemeine Lösung der Gleichung 11.53 qualitativ diskutieren. Sie besteht aus zwei Teilen, nämlich der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist mit der des gedämpften Oszillators (Gleichung 11.39) identisch. Die Konstanten in diesem Teil der Lösung hängen von den Anfangsbedingungen ab. Nach entsprechend langer Zeit kann dieser Teil der Lösung wegen der exponentiellen Abnahme der Amplitude für starke und schwache Dämpfung vernachlässigt werden. Er wird deshalb als **Einschwingvorgang** des erzwungenen Oszillators bezeichnet. Der zweite Lösungsanteil von Gleichung 11.53, die partikuläre Lösung, ist der für den erzwungenen Oszillator interessante Schwingungsanteil, nämlich die **stationäre Lösung**. Sie kann als

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (11.54)$$

ORTSFUNKTION FÜR DEN ERZWUNGENEN OSZILLATOR

geschrieben werden. Darin ist ω die Kreisfrequenz der anregenden Kraft. Die Amplitude A ist gegeben durch

$$A = \frac{F_{a,0}}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad (11.55)$$

AMPLITUDE DES ERZWUNGENEN OSZILLATORS

die Phasenkonstante δ ist

$$\tan \delta = \frac{b \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (11.56)$$

PHASENCONSTANTE DES ERZWUNGENEN OSZILLATORS

Beim Vergleich von Gleichung 11.52 und 11.54 kann man sehen, dass die Auslenkung des Oszillators und die anregende Kraft dieselbe Frequenz haben, sich aber in der Phase um δ unterscheiden. Geht die anregende Frequenz ω gegen null, so geht, wie Gleichung 11.56 zeigt, auch δ gegen null. Im Resonanzfall ist $\omega = \omega_0$; dann ist $\delta = \pi/2$, d. h., treibende Kraft und Oszillator sind um 90° phasenverschoben. Wird schließlich ω viel größer als ω_0 , dann ist $\delta \approx \pi$, d. h., die treibende Kraft eilt der Oszillatorschwingung um 180° voraus. Zu Beginn dieses Kapitels wurde die Auslenkung eines Teilchens, das eine harmonische Schwingung ausführt, in der Form $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ angegeben (Gleichung 11.4). Vergleicht man dies mit Gleichung 11.54, so erkennt man, dass beide Gleichungen bis auf das Vorzeichen der Phasenkonstanten übereinstimmen. Die Phasenkonstante δ der erzwungenen Schwingung liegt, wie eben gezeigt, stets zwischen 0 und π . Somit bleibt die Phase des erzwungenen Oszillators immer hinter der Phase der anregenden Kraft zurück. Das Minuszeichen in Gleichung 11.54

stellt sicher, dass die Phasenkonstante stets positiv ist. Mit einem Lösungsansatz $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ für die erzwungene Schwingung würde δ negativ werden. (Die Aussagen über die Phasen der Treiberkraft und erzwungenen Schwingung ändern sich dadurch jedoch nicht.)

In dem Handexperiment, einen Meterstab durch periodisches Bewegen der Hand zu Pendelschwingungen anzuregen (siehe die Diskussion nach Gleichung 11.51), ist im Resonanzfall die Schwingung der Hand weder in Phase mit der Schwingung des Meterstabs noch um 180° dagegen phasenverschoben. Erst wenn Sie die Hand mit einer Frequenz bewegen, die ein Vielfaches der Eigenfrequenz des Stabs beträgt, hat die Phasenverschiebung faktisch den Wert 180° .

Die Geschwindigkeit des erzwungenen Oszillators im statischen Zustand erhält man durch Ableitung von Gleichung 11.54 nach der Zeit t :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta).$$

Bei Resonanz ist $\delta = \pi/2$, und die Geschwindigkeit ist in Phase mit der treibenden Kraft:

$$v_x = -\omega A \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +\omega A \cos \omega t.$$

Im Resonanzfall bewegt sich der Oszillator immer in der Richtung der treibenden Kraft, wie man es für die maximale Leistungsaufnahme erwartet. Die Geschwindigkeitsamplitude ωA ist bei $\omega = \omega_0$ maximal. Beispiel 11.15 behandelt einen erzwungenen Federschwinger mit geringer Dämpfung und folglich ausgeprägter Resonanz.

Beispiel 11.15: Ein Federschwinger

Ein Federschwinger mit einer Masse von 1,5 kg und einer Feder mit der Kraftkonstanten 600 N/m verliert bei jeder vollen Schwingung 3,0 % seiner Energie. Dasselbe System wird durch eine sinusförmige Kraft mit einem Maximalwert von $F_{a,0} = 0,50 \text{ N}$ angetrieben. a) Wie groß ist Q für dieses System? b) Wie groß ist die Resonanzfrequenz ω_0 ? c) Wie groß ist die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ der Resonanz, wenn man die Anregungsfrequenz durch die Resonanz fährt? d) Wie groß ist die Amplitude bei Resonanz? e) Wie groß ist die Amplitude bei einer Anregungsfrequenz von $\omega = 19 \text{ s}^{-1}$?

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Der Energieverlust pro Schwingung beträgt nur 3 %, die Dämpfung ist daher schwach. Man kann Q aus Gleichung 11.47 berechnen. Mit diesem Ergebnis und mit Gleichung 11.51 lässt sich die Resonanzbreite $\Delta\omega$ bestimmen. Die Resonanzfrequenz ist die Eigenfrequenz. Die Amplituden sowohl für die Resonanz als auch außerhalb davon lassen sich mit Gleichung 11.55 bestimmen. Die darin auftretende Dämpfungskonstante berechnet man mit Gleichung 11.45 mit $\tau = m/b$ (Gleichung 11.42) aus dem ermittelten Q -Wert.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

Stellen Sie mit Gleichung 11.47 einen Zusammenhang zwischen Q und dem relativen Energieverlust her.

Teilaufgabe b

Die Resonanzfrequenz ist die Eigenfrequenz des Systems.

Teilaufgabe c

Stellen Sie mit Gleichung 11.51 einen Zusammenhang zwischen der Resonanzbreite $\Delta\omega$ und Q her.

Teilaufgabe d

1. Geben Sie die Amplitude A als Funktion der treibenden Frequenz ω an (Gleichung 11.55).

2. Setzen Sie $\omega = \omega_0$, um A für die Resonanz zu berechnen.

3. Stellen Sie mit $Q = \omega_0 \tau$ und $\tau = m/b$ einen Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstante b und Q her.

4. Berechnen Sie mit den Ergebnissen der vorangegangenen beiden Schritte die Amplitude bei Resonanz.

Teilaufgabe e

Berechnen Sie die Amplitude für $\omega = 19 \text{ s}^{-1}$. (Man kann die Einheiten weglassen, um die Gleichung zu vereinfachen. Da alle Größen in SI-Einheiten angegeben werden, hat A dieselbe Einheit wie in Schritt 4 von Teilaufgabe d, nämlich cm.)

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\pi}{(|\Delta E_{\text{mech}}|/E_{\text{mech}})_{\text{Periode}}} \\ &= \frac{2\pi}{0,030} = [210] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_F}{m}} = [20 \text{ s}^{-1}]$$

Teilaufgabe c

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = [0,096 \text{ s}^{-1}]$$

Teilaufgabe d

1.

$$A(\omega) = \frac{F_{a,0}}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}$$

2.

$$A(\omega_0) = \frac{F_{a,0}}{b \omega_0}$$

3.

$$b = \frac{m \omega_0}{Q} = 0,144 \text{ kg/s}$$

4.

$$A(\omega_0) = \frac{F_{a,0}}{b \omega_0} = [17 \text{ cm}]$$

Teilaufgabe e

$$\begin{aligned} A(19 \text{ s}^{-1}) &= \frac{0,50}{\sqrt{1,5^2 (20^2 - 19^2)^2 + 0,144^2 (19)^2}} \\ &= [0,85 \text{ cm}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Weicht die Frequenz ω nur um eine Schwingung pro Sekunde von der Resonanzfrequenz 20 s^{-1} ab, wird die Amplitude um einen Faktor 20 kleiner. Das erscheint plausibel, da $\Delta\omega$ nur $0,096 \text{ s}^{-1}$ ist.

Weitergedacht: Außerhalb der Resonanz ist der Term $b^2 \omega^2$ gegen den anderen Term im Nenner des Ausdrucks für A vernachlässigbar. Wenn $\omega - \omega_0$ ein Mehrfaches der Halbwertsbreite $\Delta\omega$ beträgt, wie in diesem Beispiel, kann man den Term mit $b^2 \omega^2$ vernachlässigen und A aus $A \approx F_{a,0}/(m(\omega_0^2 - \omega^2))$ berechnen. Abbildung 11.26 zeigt die Amplitude A in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz ω . Beachten Sie, dass die Abszissenachse nur einen kleinen Bereich von ω überstreckt.

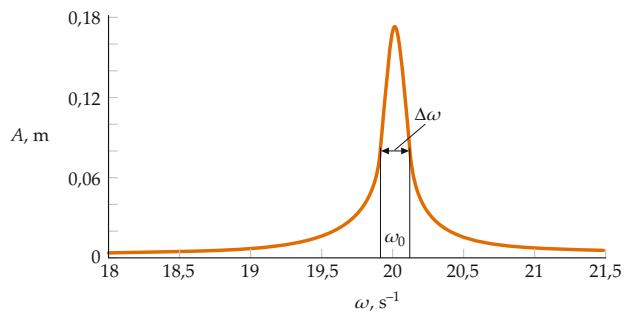


Abbildung 11.26 Resonanzkurve mit eingezeichneter Resonanzbreite für den Federschwinger.

♂ Im Kontext: Schwingen im Takt: Die Londoner Millennium Bridge

Die Millennium Bridge in London ist eine Fußgängerbrücke über die Themse, die im Juni 2000 übergeben wurde. Sie ist futuristisch gestaltet: Um die Aussicht zu verbessern, sind die Tragseile unterhalb der Fußweghöhe verlegt, wodurch sie für eine Hängebrücke ungewöhnlich flach erscheint. Während des Eröffnungstages überquerten 80 000 bis 100 000 Personen die Brücke. Als sich über 2000 Personen gleichzeitig auf der Brücke aufhielten¹, begann sie zu schwanken. Bald waren die seitlichen Schwankungen so stark, dass viele Menschen sich am Geländer festhalten mussten.² Die „Wackelbrücke“ (*Wobbly Bridge*³) wurde daraufhin drei Tage nach der Übergabe wieder gesperrt und erst im Februar 2002 erneut freigegeben.

Die Fußgängerbrücke war so konstruiert, dass sie sowohl extrem starken Windböen als auch schweren Zusammenstößen mit Schiffen standhalten konnte. Die seitlichen Schwankungen waren daher ein Schock für die Architekten und Bauingenieure. Nach monatelangen Untersuchungen stellten Forscher fest, dass Fußgänger beim Gehen sowohl Seitwärtskräfte als auch vertikale und vor- bzw. rückwärtsgerichtete Kräfte auf die Brücke ausüben.

Bei der typischen Schrittfolge einer gehenden Person trifft der linke Fuß den Boden in Abständen von etwa 1 s. (Dasselbe gilt natürlich auch für den rechten Fuß.) Beim Auftreten mit dem linken Fuß wird auf den Boden eine seitlich gerichtete Kraft von etwa 25 N nach links ausgeübt (beim rechten Fuß wirkt die Kraft nach rechts).⁴ Diese Kräfte treten mit einer Frequenz von etwa 1 Hz auf. Unglücklicherweise liegen die beiden niedrigsten Eigenfrequenzen für Seitwärtsschwingungen des 144 m langen Mittelstücks gerade bei 0,5 Hz und 1,0 Hz⁵, das 100 m lange Teilstück am Südufer hat eine Eigenfrequenz bei 0,8 Hz. Die Schritte der Menschenmenge regten die Brückenteile zu Schwingungen an. Solange nur wenige Menschen auf der Brücke waren, reichten die Gesamtkräfte durch die Schritte nicht aus, die Brücke in Bewegung zu setzen. Bei mehr als 200 Personen⁶ aber reichte die Eigendämpfung der Brücke nicht mehr aus, seitliche Schwankungen zu verhindern.



Kurz nachdem die Hängebrücke freigegeben worden war, musste man schwere Tilgungspendel unter dem Fußweg anbringen. Die Pendel sollen die übermäßigen Schwingungen verhindern, die die seitwärts gerichteten Kräfte aufgrund der Schritte der Fußgänger auf der Brücke verursachen. (© Alamy.)

Die Schwankungen wuchsen durch die Reaktion der Menschen auf die Seitwärtsbewegung weiter an: Berechnungen zeigen, dass die maximale Seitwärtsbeschleunigung zwischen 0,2 g und 0,3 g lag⁷; das reicht aus, um das Gleichgewicht zu verlieren. Die instinktive Reaktion auf eine Bewegung der Standfläche ist, so weiterzugehen, dass die Schrittfolge und Bewegung der Standfläche zusammenpassen. Diese rezonante Schrittfolge führt dazu, dass sich die Amplitude der Bewegung noch vergrößert.

Nach kontrollierten Testmessungen mit mehreren Hundert Personen auf der Brücke entschloss man sich, nachträglich eine Reihe von Schwingungstilgern einzubauen. Acht Tilgungspendel und 37 Flüssigkeitsdämpfer wurden installiert, um die seitlichen Schwankungen zu reduzieren. Die Tilgungspendel bestehen aus Stahlblocks mit einer Masse von 2,5 t, die schwingungsfähig gelagert sind. Sie reduzieren die seitlichen Schwankungen, indem sie gegenphasig (um 180° phasenverschoben) mit der Brücke schwingen.⁸ Die Flüssigkeitsdämpfer (sog. Visco-Dämpfer) ähneln den Stoßdämpfern, die in Fahrzeugen zur Dämpfung der vertikalen Schwingungen eingesetzt werden. Sie funktionieren, indem sich ein Kolben in einer Flüssigkeit hin- und herbewegt und durch deren Zähigkeit gebremst wird. Den größten Anteil an der Dämpfung haben die Flüssigkeitsdämpfer.⁹ Weitere Tilgungspendel wurden angebracht, um die vertikalen Schwingungen zu dämpfen. In Tests vor der Wiederfreigabe wurde gemessen, dass durch die Maßnahmen die maximale Beschleunigung um 97 % gesenkt wurde, von 0,25 g auf 0,006 g.¹⁰ Seit der Wiedereröffnung sind keine störenden Schwingungen mehr aufgetreten.

Die beschriebenen Schwingungsprobleme sind nicht auf die Millennium Bridge beschränkt. Jede Brücke¹¹ mit Eigenfrequenzen unter 1,3 Hz kann durch die Schritte einer genügend großen Menschenmenge zu Schwingungen angeregt werden¹². Solche Schwingungen waren – ohne weitere Konsequenzen – bei verschiedenen Brückentypen auch schon vor 2000 aufgetreten, darunter bei einer Schrägseilbrücke in Japan¹³ und bei Fußgängerbrücken in Paris und Ottawa. Selbst Autobahnbrücken haben dasselbe Verhalten gezeigt.¹⁴ Nach den spektakulären Vorkommnissen an der Millennium Bridge waren die Bauingenieure motiviert, die Schwingungen von Bauwerken unter neuen Gesichtspunkten zu untersuchen.

1. Dallard, P. et al., „The London Millennium Footbridge“, *The Structural Engineer*, 20. Nov. 2001, 79, Nr. 22, S. 17–33.
2. Smith, M., „Bouncing Bridge May Be Closed for Weeks“, *The Telegraph*, 13. Jun. 2000. <http://www.telegraph.co.uk/news/main.jhtml?xml=/news/2000/06/13/nsway13.xml> (Stand: April 2009).
3. Binney, M., „Throwing a Wobbly“, *The Times*, 31. Okt. 2000, Features, S. 16.
4. „Oscillation“, *The Millennium Bridge – Challenge*. Arup Engineering. <http://www.arup.com/MillenniumBridge/challenge/oscillation.html> (Stand: April 2009).
5. Fitzpatrick, T., *Linking London: The Millennium Bridge*. London: The Royal Academy of Engineering, Juni 2001.
6. Roberts, T. M., „Lateral Pedestrian Excitation of Footbridge“, *Journal of Bridge Engineering*, Jan./Feb. 2005, 10, Nr. 1, S. 107–112s.
7. Dallard et al., a. a. O.
8. „Elegant, filigran, aber felsenfest“, GERB Schwingungsisolierungen GmbH & Co. KG. http://www.gerb.com/de/aktuelles/presse_detail.php?ID=19&suchw=millennium+bridge (Stand: April 2009).

9. Taylor, D. P., „Damper Retrofit of the London Millennium Bridge – A Case Study in Biodynamic Design“, Taylor Devices. <http://www.taylordevices.com/papers/damper/damper.pdf> (Stand: April 2009).
10. A. a. O.
11. *Structural Safety 2000–2001: Thirteenth Report of SCOS – The Standing Committee on Structural Safety*. London: Standing Committee on Structural Safety. Mai 2001, S. 24–26. <http://www.scoss.org.uk/publications/rtf/13Report.pdf> (Stand: April 2009).
12. „Designing Footbridges with Eurocodes“, *Eurocode News*, März 2004, Nr. 2, S. 6.
13. Nakamura, S.-I.: „Model for Lateral Excitation of Footbridges by Synchronous Walking“, *Journal of Structural Engineering*, Jan. 2004, S. 32–37.
14. Fitzpatrick, a.ä. O.

Zusammenfassung

- Eine harmonische Schwingung tritt auf, wenn die rücktreibende Kraft zur Auslenkung aus dem Gleichgewicht proportional ist. Harmonische Schwingungen finden breite Anwendung bei der Untersuchung von Schwingungen, Wellen, elektrischen Stromkreisen und in der Molekulardynamik.
- Resonanz ist ein wichtiges Phänomen in vielen Bereichen der Physik. Sie tritt auf, wenn die Frequenz der anregenden Kraft in der Nähe der Eigenfrequenz des schwingenden Systems liegt.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Harmonische Schwingung	Bei der harmonischen Schwingung sind Beschleunigung (und damit auch die Gesamtkraft) proportional zur Auslenkung aus der Gleichgewichtslage und ihr entgegengerichtet: $F_x = -k_F x = m a_x. \quad (11.1)$
Ortsfunktion	$x(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (11.4)$
Geschwindigkeit	$v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \quad (11.5)$
Beschleunigung	$a_x(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \quad (11.6)$ $a_x = -\omega^2 x \quad (11.7)$
Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (11.11)$
Mechanische Energie	Die mechanische Gesamtenergie ist erhalten, d. h., sie ist zeitunabhängig: $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F A^2. \quad (11.17)$
Mittlere kinetische oder potenzielle Energie	$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{2} E_{\text{mech}} \quad (11.18)$
Kreisbewegung	Wenn sich ein Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreis bewegt, dann führt die Projektion des Teilchens auf einen Durchmesser des Kreises eine harmonische Schwingung aus.
Allgemeine Bewegung in der Nähe des Gleichgewichts	Wenn eine Masse nur wenig aus der stabilen Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, führt sie um diese Lage eine harmonische Schwingung aus.
2. Kreisfrequenzen für verschiedene Systeme	
Federschwinger	$\omega = \sqrt{\frac{k_F}{m}} \quad (11.8)$
Mathematisches Pendel	$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (11.27)$
*Physikalisches Pendel	$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (11.36)$ Darin ist d der Abstand des Massenmittelpunkts vom Drehpunkt der Rotationsachse und I das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse.
*Torsionspendel	$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (11.33)$ Darin ist I das Trägheitsmoment bezüglich der Rotationsachse und κ die Torsionskonstante. Für kleine Schwingungen eines physikalischen Pendels gilt $\kappa = mgd$; dabei ist d der Abstand des Massenmittelpunkts vom Drehpunkt der Rotationsachse.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
3. Gedämpfte Schwingungen	Die Schwingungen realer Systeme sind gedämpft, weil dissipative Kräfte auftreten. Wenn die Dämpfung größer als ein kritischer Wert ist, schwingt das System nach einer Störung nicht, sondern kehrt nach einiger Zeit in die Gleichgewichtslage zurück. Die Bewegung eines schwach gedämpften Systems ist nahezu harmonisch mit einer Amplitude, die mit der Zeit exponentiell abnimmt.
Frequenz	$\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ (11.48)
Amplitude	$A = A_0 e^{-(b/2m)t}$ (11.41)
Energie	$E_{\text{mech}} = E_{\text{mech},0} e^{-t/\tau}$ (11.44)
Zeitkonstante (Zerfallszeit)	$\tau = \frac{m}{b}$ (11.42)
Q -Faktor Definition	$Q = \omega_0 \tau$ (11.45)
Q -Faktor für schwache Dämpfung	$Q = \frac{2\pi}{(\Delta E_{\text{mech}} /E_{\text{mech}}) \text{Periode}}$ für $\frac{ \Delta E_{\text{mech}} }{E_{\text{mech}}} \ll 1$ (11.47)
4. Erzwungene Schwingungen	Wenn ein schwach gedämpftes System ($b < b_k$) durch eine äußere harmonische Kraft $F_a = F_{a,0} \cos \omega t$ angeregt wird, dann führt es Schwingungen mit der Frequenz ω der anregenden Kraft aus und hat eine Amplitude A , die von der anregenden Frequenz ω abhängt.
Resonanzfrequenz	Die Resonanzfrequenz entspricht der Eigenfrequenz des Schwingungssystems: $\omega = \omega_0$.
Resonanzbreite bei schwacher Dämpfung	$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$ (11.51)
*Ortsfunktion	$x(t) = A \cos(\omega t - \delta)$ (11.54)
*Amplitude	$A = \frac{F_{a,0}}{\sqrt{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}$ (11.55)
*Phasenkonstante	$\tan \delta = \frac{b \omega}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$ (11.56)

Antwort auf die Verständnisfrage

11.1 $\sqrt{l/g}$

11.3 a) $E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = 0,0625 \text{ J}$, b) $A = \sqrt{2 E_{\text{mech}} / k_F} = 5,59 \text{ cm}$

11.4 24 cm

11.5 2,01 s

11.6 $|a_G^{(B)}| = 10,3 \text{ m/s}^2$, $T = 1,96 \text{ s}$

11.7 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{6g}}$ für $d = l/6$ und für $d = l/2$

Lösungen der Übungen

11.1 a) $v = 3,6 \text{ Hz}$, $T = 0,28 \text{ s}$, b) $v = 2,5 \text{ Hz}$, $T = 0,40 \text{ s}$

11.2 $\omega = 3,1 \text{ s}^{-1}$, $v_{x,\text{max}} = 0,13 \text{ m/s}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

11.1 • Richtig oder falsch? a) Bei einem harmonischen Oszillator ist die Periode proportional zum Quadrat der Amplitude. b) Bei einem harmonischen Oszillator hängt die Frequenz nicht von der Amplitude ab. c) Wenn die Gesamtkraft auf ein Teilchen, das sich in einer Dimension bewegen kann, proportional zur Auslenkung aus der Gleichgewichtslage und ihr entgegengesetzt gerichtet ist, liegt eine harmonische Schwingung vor.

11.2 •• Ein Federschwinger führt eine harmonische Schwingung mit einer Amplitude von 4,0 cm aus. Der Schwinger ist zu einem bestimmten Zeitpunkt 2,0 cm von der Gleichgewichtslage entfernt. Welcher Bruchteil der Gesamtenergie ist hier potenzielle Energie? a) Ein Viertel, b) ein Drittel, c) die Hälfte, d) zwei Drittel, e) drei Viertel.

11.3 •• In den Einführungskursen zur Physik wird die Masse der Feder bei einem harmonisch schwingenden Federschwinger meist vernachlässigt, weil sie viel kleiner ist als die an der Feder befestigte Masse. Diese Vereinfachung ist jedoch nicht immer zulässig. Welchen Einfluss hat es auf die Berechnung der Schwingungsdauer, der Frequenz und der Gesamtenergie im Vergleich zu den korrekten Werten, wenn Sie die Federmasse dennoch vernachlässigen? Erläutern Sie Ihre Antwort.

11.4 •• Zwei Federschwinger A und B schwingen so, dass ihre beiden Gesamtenergien gleich sind. Welcher Ausdruck beschreibt den Zusammenhang zwischen ihren Schwingungsamplituden am besten, wenn $m_A = 2m_B$ gilt? a) $A_A = A_B/4$, b) $A_A = A_B/\sqrt{2}$, c) $A_A = A_B$, d) die Informationen reichen nicht aus, um den Zusammenhang der Amplituden zu bestimmen.

11.5 •• Für zwei mathematische Pendel gelten folgende Zusammenhänge: Pendel A hat die Länge l_A und einen Pendelkörper der Masse m_A , Pendel B hat die Länge l_B und einen Pendelkörper der Masse m_B . Die Schwingungsdauer von A ist doppelt so groß wie die von B. Welche Aussage ist richtig? a) $l_A = 2l_B$ und $m_A = 2m_B$, b) $l_A = 4l_B$ und $m_A = m_B$, c) $l_A = 4l_B$, unabhängig vom Verhältnis m_A/m_B , d) $l_A = \sqrt{2}l_B$, unabhängig vom Verhältnis m_A/m_B .

11.6 •• Für zwei mathematische Pendel gelten folgende Zusammenhänge: Pendel A hat die Länge l_A und einen Pendelkörper der Masse m_A , Pendel B hat die Länge l_B und einen Pendelkörper der Masse m_B . Die Frequenz von A beträgt ein Drittel der Frequenz von B. Welche Aussage ist richtig? a) $l_A = 3l_B$ und $m_A = 3m_B$, b) $l_A = 9l_B$ und $m_A = m_B$, c) $l_A = 9l_B$, unabhängig vom Verhältnis m_A/m_B , d) $l_A = \sqrt{3}l_B$, unabhängig vom Verhältnis m_A/m_B .

11.7 •• Richtig oder falsch? a) Die mechanische Energie eines gedämpften, nicht angetriebenen Oszillators fällt exponentiell mit der Zeit. b) Resonanz tritt bei einem gedämpften, angetriebenen Oszillator auf, wenn die Anregungsfrequenz genau gleich der Eigenfrequenz ist. c) Wenn der Q-Faktor eines gedämpften Oszillators hoch ist, dann ist die Resonanzkurve schmal. d) Die Zeitkonstante τ eines Federschwingers mit linearer Dämpfung hängt nicht von seiner Masse ab. e) Der Q-Faktor eines angetriebenen Federschwingers mit linearer Dämpfung hängt nicht von seiner Masse ab.

11.8 •• Zwei gedämpfte Federschwinger haben gleiche Federkonstanten und gleiche Dämpfungskonstanten. Jedoch ist die Masse m_A von Schwinger A viermal so groß wie die Masse m_B von Schwinger B. Wie hängen ihre Zeitkonstanten zusammen? a) $\tau_A = 4\tau_B$, b) $\tau_A = 2\tau_B$, c) $\tau_A = \tau_B$, d) die Zeitkonstanten können nicht verglichen werden, da nicht genügend Informationen vorliegen.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

11.9 • Schätzen Sie die Breite einer typischen alten Standuhr mit Pendel im Verhältnis zu den Abmessungen des Pendelkörpers. Nehmen Sie an, dass das Pendel eine harmonische Schwingung ausführt.

11.10 • Bei einer Schaukel auf einem Spielplatz nimmt die Amplitude über acht Perioden auf den Bruchteil 1/e ab, wenn dem System keine zusätzliche Energie zugeführt wird. Schätzen Sie den Q-Faktor des Systems.

11.11 •• a) Schätzen Sie die Schwingungsdauer Ihrer Arme, wenn Sie gehen. Ihre Hände sollen leer sein. b) Nun schätzen Sie die Schwingungsdauer Ihrer Arme, wenn Sie eine schwere Aktentasche tragen. c) Sehen Sie sich andere Leuten beim Gehen an. Sind Ihre Schätzungen plausibel?

Harmonische Schwingungen

11.12 • Der Ort eines Teilchens ist durch $x = (7,0 \text{ cm}) \cos(6\pi t)$ gegeben (t ist in Sekunden einzusetzen). Wie groß sind a) die Frequenz, b) die Schwingungsdauer und c) die Amplitude der Teilchenbewegung? d) Wann befindet sich das Teilchen zum ersten Mal nach $t = 0$ in seiner Gleichgewichtslage? In welche Richtung bewegt es sich zu diesem Zeitpunkt?

11.13 • Bestimmen Sie a) die maximale Geschwindigkeit und b) die maximale Beschleunigung des Teilchens in Aufgabe 11.12. c) Zu welchem Zeitpunkt bewegt sich das Teilchen zum ersten Mal durch $x = 0$ nach rechts?

11.14 • Gegeben ist die Beziehung $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ (Gleichung 11.4). Wie groß ist darin jeweils die Phasenkonstante δ , wenn für den Ort x des schwingenden Teilchens zur Zeit $t = 0$ Folgendes gilt: a) 0, b) $-A$, c) A , d) $A/2$?

11.15 •• Nach militärischen Spezifikationen müssen elektronische Geräte Beschleunigungen bis zu $10 g = 98,1 \text{ m/s}^2$ (darin ist g die Erdbeschleunigung) aushalten. Um sicherzustellen, dass die Produkte Ihrer Firma diesen Anforderungen entsprechen, sollen Sie einen Rütteltisch verwenden, der ein Gerät bei verschiedenen Frequenzen und Amplituden diesen Beschleunigungen aussetzt. Wie groß muss die Frequenz sein, wenn ein Gerät einer Schwingungsamplitude von 1,5 cm unterliegt, um es gemäß der militärischen 10-g-Spezifizierung zu testen?

11.16 •• a) Zeigen Sie, dass man den Ausdruck $A_0 \cos(\omega t + \delta)$ in der Form $A_s \sin(\omega t) + A_c \cos(\omega t)$ schreiben kann, und bestimmen Sie A_s und A_c in Abhängigkeit von A_0 und δ . b) Geben Sie den Zusammenhang von A_s und A_c mit dem Anfangsort und der Anfangsgeschwindigkeit eines harmonisch schwingenden Teilchens an.

Harmonische Schwingungen und Kreisbewegung

11.17 • Ein Teilchen bewegt sich auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius 15 cm. In 3,0 s vollführt es 1,0 Umdrehungen. a) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit des Teilchens? b) Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit ω ? c) Geben Sie eine Gleichung für die x -Komponente des Teilchenorts als Funktion der Zeit t an; nehmen Sie an, dass sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ auf der negativen x -Achse befindet.

Energie eines harmonischen Oszillators

11.18 • Ein horizontaler Federschwinger besteht aus einem Körper von 3,0 kg, der an einer horizontalen Feder befestigt ist und auf einer reibungsfreien Unterlage mit einer Amplitude von 10 cm mit einer Frequenz von 2,4 Hz schwingt. Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Systems.

11.19 •• Ein horizontaler Federschwinger besteht aus einem Körper von 3,0 kg, der an einer horizontalen Feder befestigt ist und auf einer reibungsfreien Unterlage mit einer Amplitude von 8,0 cm schwingt. Die maximale Beschleunigung beträgt $3,5 \text{ m/s}^2$. Bestimmen Sie die mechanische Gesamtenergie.

Harmonische Schwingungen und Federschwinger

11.20 • Eine Person von 85,0 kg steigt in ein Auto der Masse 2400 kg. Der Wagen federt um 2,35 cm durch. Mit welcher Frequenz werden Auto und Fahrgäste auf der Federung schwingen, wenn man annimmt, dass keine Dämpfung vorliegt?

11.21 •• Ein Körper der Masse m hängt an einer vertikalen Feder mit der Kraftkonstanten 1800 N/m. Wenn er 2,50 cm weit aus seiner Gleichgewichtslage nach unten gezogen und aus dem Stillstand heraus losgelassen wird, schwingt er mit 5,50 Hz. a) Bestimmen Sie m . b) Um wie viel wird die Feder gegenüber dem unbelasteten Zustand gedehnt, wenn der Körper in seiner Gleichgewichtslage an der Feder hängt? c) Geben Sie Ausdrücke für die Auslenkung y , die Geschwindigkeit v_y und die Beschleunigung a_y als Funktionen der Zeit t an.

11.22 •• Ein Koffer mit einer Masse von 20 kg hängt an zwei elastischen Kordeln, wie in Abbildung 11.27 gezeigt. Jede Kordel ist um 5,0 cm gedehnt, wenn der Koffer im Gleichgewicht ist. Wie groß ist seine Schwingungsfrequenz, wenn er ein wenig nach unten gezogen und dann losgelassen wird?



Abbildung 11.27 Zu Aufgabe 11.22.

11.23 •• Ein Körper von 2,0 kg ist an der Spitze einer vertikalen Feder befestigt, die am Boden verankert ist. Die Länge der nicht zusammengepressten Feder beträgt 8,0 cm. Ist der Körper im Gleichgewicht, ist die Feder 5,0 cm lang. Der Körper befindet sich in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe und erhält mit einem Hammer einen nach unten gerichteten Impuls, sodass seine Anfangsgeschwindigkeit 0,30 m/s beträgt. a) Welche maximale Höhe über dem Boden erreicht der Körper danach? b) Wie lange braucht er, um zum ersten Mal die maximale Höhe zu erreichen? c) Wird die Feder jemals wieder unkomprimiert? Welche minimale Anfangsgeschwindigkeit muss der Körper erhalten, damit die Feder zu irgendeiner Zeit unkomprimiert ist?

11.24 ••• Das Seil einer Winde hat eine Querschnittsfläche von $1,5 \text{ cm}^2$ und ist 2,5 m lang. Der Elastizitätsmodul des Seils beträgt $150 \text{ GN} \cdot \text{m}^{-2}$. An dem Seil hängt ein Maschinenteil von 950 kg. a) Um welche Länge dehnt sich das Seil? b) Fassen Sie das Seil als einfache Feder auf. Wie groß ist die Frequenz der (vertikalen) Schwingung des Maschinenteils an dem Seil?

Mathematisches Pendel

11.25 • Bestimmen Sie die Länge eines mathematischen Pendels, dessen Schwingungsdauer bei kleiner Amplitude 5,0 s beträgt.

11.26 •• Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie eines mathematischen Pendels, das Schwingungen mit kleiner Winkelamplitude θ_0 ausführt, näherungsweise $E \approx \frac{1}{2}mg l \theta_0^2$ ist. (Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ für kleine θ .)

11.27 •• Ein mathematisches Pendel der Länge l ist mit einem schweren Wagen verbunden, der reibungsfrei eine geneigte Ebene mit dem Winkel θ gegenüber der Horizontalen heruntergleitet (Abbildung 11.28). Bestimmen Sie die Schwingungsdauer dieses Pendels (für kleine Auslenkungen).

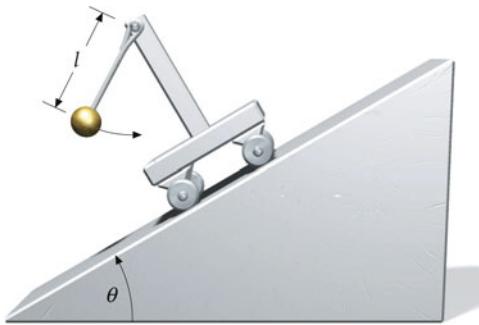


Abbildung 11.28 Zu Aufgabe 11.27.

Physikalisches Pendel

11.28 • Eine dünne gleichförmige Scheibe mit einer Masse von 5,0 kg und einem Radius von 20 cm ist an einer festen horizontalen Achse aufgehängt, die senkrecht zur Scheibe durch deren Rand verläuft. Die Scheibe wird leicht aus dem Gleichgewicht ausgelenkt und losgelassen. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer der darauffolgenden harmonischen Schwingung.

11.29 • Ein ebener Körper von 3,0 kg ist an einem Punkt 10 cm von seinem Schwerpunkt aufgehängt. Wenn der Körper mit kleiner Amplitude schwingt, beträgt seine Schwingungsdauer 2,6 s. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment I bezüglich einer Achse, die senkrecht auf der Ebene des Körpers steht und durch den Aufhängungspunkt verläuft.

11.30 •• Abbildung 11.29 zeigt eine gleichförmige zylindrische Scheibe mit einem Radius $r = 0,80 \text{ m}$ und einer Masse von 6,00 kg. In der Entfernung d vom Mittelpunkt der Scheibe befindet sich ein kleines Loch, an dem man die Scheibe aufhängen kann. a) Wie groß muss d sein, damit die Schwingungsdauer dieses physikalischen Pendels 2,50 s beträgt? b) Wie muss man d wählen, damit die Schwingungsdauer minimal wird? Wie groß ist diese minimale Schwingungsdauer?

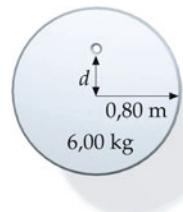


Abbildung 11.29 Zu Aufgabe 11.30.

11.31 •• Die Punkte P_1 und P_2 auf einem ebenen Körper befinden sich in einer Entfernung h_1 bzw. h_2 vom Schwerpunkt des Körpers (Abbildung 11.30). Wenn der Körper sich um eine Achse durch P_1 drehen kann, schwingt er mit derselben Schwingungsdauer T , wie wenn er sich um eine Achse durch P_2 drehen kann. Beide Achsen stehen senkrecht auf der Ebene des Körpers. Zeigen Sie, dass $h_1 + h_2 = g T^2 / (4\pi^2)$ gilt (mit $h_1 \neq h_2$).

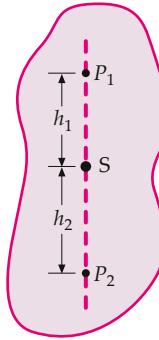


Abbildung 11.30 Zu Aufgabe 11.31.

11.32 •• Ein physikalisches Pendel (Fadenpendel) besteht aus einer Kugel mit dem Radius r_K und der Masse m , die an einem starren, oben drehbaren Stab vernachlässigbarer Masse hängt. Der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel zum Aufhängepunkt ist l . Für $r_K \ll l$ kann man ein solches Pendel oft als mathematisches Pendel der Länge l betrachten. a) Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer für Schwingungen kleiner Amplitude durch

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{2r_K^2}{5l^2}}$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels der Länge l . b) Zeigen Sie, dass sich die Schwingungsdauer für $r_K \ll l$ durch $T \approx T_0(1 + r_K^2/5l^2)$ nähern lässt. c) Berechnen Sie den Fehler für $l = 1,00 \text{ m}$ und $r_K = 2,00 \text{ cm}$, wenn die Näherung $T = T_0$ für dieses Pendel benutzt wird. Wie groß muss der Radius des Pendelkörpers sein, damit der Fehler 1,00 % beträgt?

Gedämpfte Schwingungen

11.33 • Ein 2,00 kg schwerer Körper schwingt mit einer Anfangsamplitude von 3,00 cm an einer Feder mit der Kraftkonstanten $k_F = 400 \text{ N/m}$. Bestimmen Sie a) die Schwingungsdauer und b) die gesamte Anfangsenergie. c) Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante b und den Q -Faktor, wenn die Energie pro Periode um 1,00 % abnimmt.

11.34 •• Ein linear gedämpfter Oszillatator hat einen Q -Faktor von 20. a) Um welchen Bruchteil nimmt die Energie während jeder Periode ab? b) Bestimmen Sie mithilfe von Gleichung 11.40 die prozentuale Differenz zwischen ω' und ω_0 . (Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für kleine x .)

11.35 •• Seismologen und Geophysiker haben festgestellt, dass die schwingende Erde eine Resonanzperiode von 54 min und einen Q -Faktor von ungefähr 400 aufweist. Nach einem großen Erdbeben klingt die Erde für bis zu zwei Monate „nach“. a) Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Schwingungsenergie, die durch Dämpfungskräfte während jeder Periode verloren geht. b) Zeigen Sie, dass nach n Perioden die Energie der Schwingung $E_n = (0,984)^n E_0$ beträgt (E_0 gibt die Anfangsenergie an). c) Wie groß ist die Energie nach 2,0 Tagen, wenn die anfängliche Schwingungsenergie eines Erdbebens E_0 beträgt?

11.36 ••• Sie sollen die Viskosität von Schmieröl in einer Raffinerie überwachen. Dazu wenden Sie folgendes Messverfahren an, das auf dem Stokes'schen Reibungsgesetz basiert: Sie bestimmen die Zeitkonstante der Schwingungen eines Oszillators mit bekannten Eigenschaften, der beim Schwingen völlig in ein Fluid eingetaucht ist. Solange die Geschwindigkeit des Oszillators in dem Fluid relativ klein ist, sodass keine Turbulenz auftritt, ist die Reibungskraft des Fluids auf eine Kugel proportional zu der Geschwindigkeit v der Kugel relativ zum Fluid. Es gilt $F_R = 6\pi\eta av$. Die Reibungskonstante b ist daher gegeben durch $b = 6\pi a\eta$. Ihre Messapparatur enthält eine ziemlich steife Feder mit einer Kraftkonstanten von 350 N/cm, an der eine Goldkugel mit dem Radius 6,00 cm hängt. a) Welche Viskosität messen Sie, wenn die Zeitkonstante dieses Systems 2,80 s beträgt? b) Wie groß ist der Q -Faktor dieses Systems?

Erzwungene Schwingungen und Resonanz

11.37 • Bestimmen Sie die Resonanzfrequenzen für die drei Systeme in Abbildung 11.31.

11.38 •• Ein gedämpfter Oszillatator verliert während einer Periode jeweils 3,50 % seiner Energie. a) Wie viele Schwingungsperioden laufen ab, bis die Hälfte der ursprünglichen Energie abgegeben ist? b) Wie groß ist sein Q -Faktor? c) Wie groß ist die Resonanzbreite, wenn der Oszillatator mit einer sinusförmigen Kraft angeregt wird und die Eigenfrequenz 100 Hz beträgt?

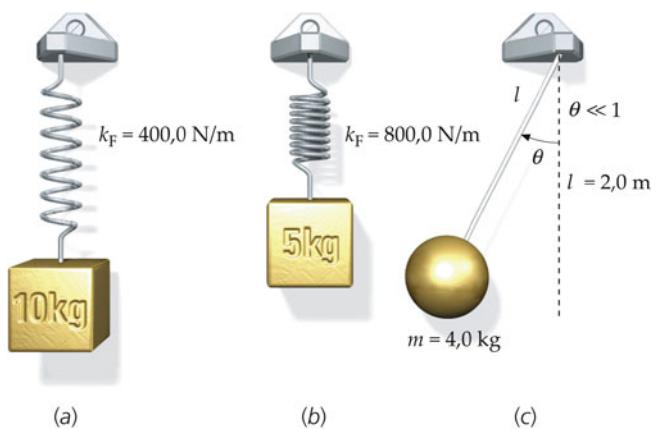


Abbildung 11.31 Zu Aufgabe 11.37.

11.39 •• Sie arbeiten mit derselben Messapparatur wie in Aufgabe 11.36, jetzt hängt die Goldkugel jedoch an einer weicheren Feder mit einer Federkonstanten von nur 35,0 N/cm. Sie haben mit dieser Apparatur die Viskosität von Ethylenglykol zu 19,9 Pa · s bestimmt. Nun wollen Sie das System mit einer äußeren Kraft anregen. a) Der Betrag der äußeren Kraft ist 0,110 N, die Apparatur wird in Resonanz angeregt. Wie groß ist die Amplitude der erzwungenen Schwingung? b) Welchen Bruchteil seiner Energie verliert das System bei einer Schwingungsperiode, wenn Sie das System nicht anregen, sondern frei schwingen lassen?

Allgemeine Aufgaben

11.40 • Die Auslenkung eines Teilchens aus seiner Gleichgewichtslage wird durch $x(t) = (0,40 \text{ m}) \cos(3,0 \text{ s}^{-1} t + \pi/4)$ beschrieben (x in Metern, t in Sekunden). a) Bestimmen Sie die Frequenz ν und die Periode der Bewegung. b) Geben Sie einen Ausdruck für die Geschwindigkeit des Teilchens als Funktion der Zeit an. c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit?

11.41 •• Abbildung 11.32 zeigt ein Pendel der Länge l mit einem Pendelkörper der Masse m . Der Pendelkörper ist an einer horizontalen Feder mit der Federkonstanten k_F befestigt. Wenn sich der Pendelkörper direkt unter der Aufhängung befindet, hat die Feder ihre Gleichgewichtslänge. a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Schwingungsdauer dieses Systems bei kleinen Amplitudenschwingungen her. b) Nehmen Sie an, dass $m = 1,00 \text{ kg}$ ist und l so gewählt wird, dass die Schwingungsdauer ohne die Feder 2,00 s beträgt. Wie groß ist die Federkonstante k_F , wenn die Schwingungsdauer des gesamten Systems 1,00 s ist?

11.42 •• Die Gravitationsbeschleunigung g verändert sich mit der geografischen Breite wegen der Erdrotation und weil die Erde nicht exakt kugelförmig ist. Dies wurde erstmals im 17. Jahrhundert entdeckt, als man beobachtete, dass eine Pendeluhr, die

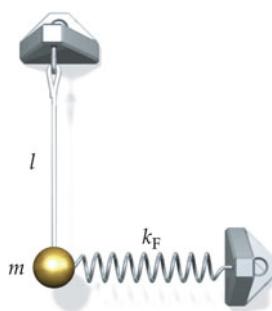


Abbildung 11.32 Zu Aufgabe 11.41.

so justiert war, dass sie in Paris die exakte Zeit anzeigte, in der Nähe des Äquators etwa 90 s/d nachging. a) Zeigen Sie mithilfe der Differentialrechnung, dass eine kleine Änderung Δg in der Gravitationsbeschleunigung eine kleine Änderung ΔT in der Schwingungsdauer eines Pendels erzeugt, für die gilt: $\Delta T/T = -\frac{1}{2} \Delta g/g$. b) Wie groß muss die Änderung von g sein, um die beschriebene Verzögerung von 90 s/d hervorzurufen?

11.43 •• Abbildung 11.33 zeigt zwei Arten, wie man eine Masse m an zwei waagerechten Federn befestigen kann. Zeigen Sie, dass die Masse mit der Frequenz $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k_{F,\text{eff}}/m}$ schwingt, wobei die effektive Federkonstante $k_{F,\text{eff}}$ gegeben ist durch a) $k_{F,\text{eff}} = k_{F,1} + k_{F,2}$ bzw. durch b) $1/k_{F,\text{eff}} = 1/k_{F,1} + 1/k_{F,2}$. (Hinweis: Berechnen Sie den Betrag der Gesamtkraft auf einen Körper für eine kleine Auslenkung x und schreiben Sie $F = -k_{F,\text{eff}} x$. Beachten Sie, dass sich die Federn in Teilaufgabe b um verschiedene Beträge dehnen, deren Summe x ergibt.)

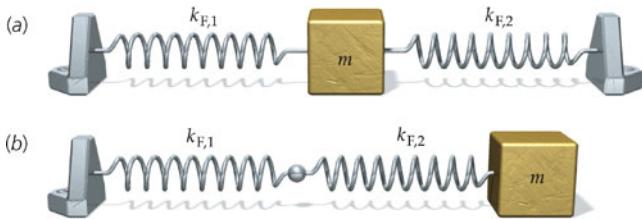


Abbildung 11.33 Zu Aufgabe 11.43.

11.44 •• Während eines Erdbebens vollführt eine ebene Plattform eine horizontale näherungsweise harmonische Schwingung. Nehmen Sie an, dass die Plattform mit einer einzigen Frequenz und einer Schwingungsdauer von 0,80 s schwingt. a) Nach dem Erdbeben sollen Sie mithilfe von Videoaufzeichnungen die Bewegungen der Plattform untersuchen. Sie entdecken einen Kasten, der auf der Plattform zu gleiten begann, als die Schwingungsamplitude 10 cm erreichte. Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Kasten und der Plattform? b) Wie groß ist die maximale Schwingungsamplitude, bei der der Kasten gerade noch nicht ins Rutschen gerät, wenn der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Kasten und der Plattform 0,40 beträgt?

11.45 •• Zwei Blöcke mit den Massen m_1 und m_2 sind an den beiden Enden einer Feder mit der Kraftkonstanten k_F befestigt und liegen auf einer horizontalen reibungsfreien Unterlage. Ziehen Sie die Massen auseinander und lassen Sie sie dann schwingen. Zeigen Sie, dass die Schwingungsfrequenz durch $\omega = (k_F/m_{\text{red}})^{1/2}$ gegeben ist. Dabei ist $m_{\text{red}} = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse des Systems. Die Feder wird als masselos angenommen.

11.46 •• In einem Chemielabor bestimmen Sie die Frequenz einer Schwingungsmodus des HCl-Moleküls in der Gasphase zu $8,969 \cdot 10^{13}$ Hz. Bestimmen Sie mithilfe der Formel aus Aufgabe 11.45 die „effektive Federkonstante“ zwischen dem H-Atom und dem Cl-Atom im HCl-Molekül.

11.47 •• Ersetzen Sie in dem HCl-Molekül von Aufgabe 11.46 das Wasserstoffatom durch ein Deuteriumatom (sodass DCI entsteht). Wie groß ist dann die Schwingungsfrequenz des Moleküls? (Der Kern des Wasserstoffisotops Deuterium besteht aus einem Proton und einem Neutron.)

11.48 •• Abbildung 11.34 zeigt einen homogenen Halbzylinder mit der Masse m und dem Radius r_Z , der auf einer horizontalen Oberfläche ruht. Wenn eine Seite dieses Zylinders leicht niedergedrückt und danach losgelassen wird, beginnt er, um seine Gleichgewichtslage zu schwingen. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer dieser Schwingung.



Abbildung 11.34 Zu Aufgabe 11.48.

11.49 •• Leiten Sie einen Ausdruck für die mittlere Leistung her, die durch eine anregende Kraft auf einen erzwungenen Oszillatator übertragen wird (siehe Abbildung 11.25). Gehen Sie folgendermaßen vor: a) Zeigen Sie, dass die von der anregenden Kraft dem System momentan zugeführte Leistung gegeben ist durch $P = Fv = -A\omega F_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \delta)$. b) Zeigen Sie mithilfe des Additionstheorems $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$, dass P sich als

$$P = A\omega F_0 \sin \delta \cos^2 \omega t - A\omega F_0 \cos \delta \cos \omega t \sin \omega t$$

schreiben lässt. c) Zeigen Sie, dass das zeitliche Mittel des zweiten Summanden in Ihrem Ergebnis für die Teilaufgabe b über eine oder mehrere Perioden gleich null ist und dass deshalb $\langle P \rangle = \frac{1}{2} A\omega F_0 \sin \delta$ gilt. d) Konstruieren Sie mit Gleichung 11.56 für $\tan \delta$ ein rechtwinkliges Dreieck, in dem der Winkel δ gegenüberliegenden Seite der Wert $b\omega$ und der angrenzenden Seite der Wert $m(\omega_0^2 - \omega^2)$ zugeordnet wird. Zeigen

Sie mit diesem Dreieck

$$\sin \delta = \frac{b \omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2}} = \frac{b \omega A}{F_0}.$$

e) Eliminieren Sie mithilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe d den Ausdruck ωA aus Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe c; die mittlere zugeführte Leistung lässt sich dann schreiben als

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{b} \sin^2 \delta = \frac{1}{2} \left(\frac{b \omega^2 F_0^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega^2} \right). \quad (11.57)$$

11.50 ••• Leiten Sie mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 11.49 die Gleichung 11.51 her, die bei scharfer Resonanz einen Zusammenhang zwischen der Breite der Resonanzkurve und dem Q -Wert herstellt. Im Resonanzfall ist der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite von Gleichung 11.57 (in Aufgabe 11.49) gleich $b^2 \omega_0^2$, und $\langle P \rangle$ hat seinen Maximalwert. Bei einer scharfen Resonanz kann man die Änderung von ω im Zähler von Gleichung 11.57 vernachlässigen. Dann ist die dem System zugeführte Leistung halb so groß wie der Maximalwert bei den Werten von ω , für die der Zähler $2 b^2 \omega_0^2$ beträgt. a) Zeigen Sie, dass dann ω die Beziehung $m^2(\omega - \omega_0)^2(\omega + \omega_0)^2 \approx b^2 \omega_0^2$ erfüllt. b) Zeigen Sie mithilfe

der Näherung $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, dass $\omega - \omega_0 \approx \pm b/(2m)$ gilt.
 c) Drücken Sie die Größe b mithilfe des Gütefaktors Q aus.
 d) Kombinieren Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben b und c und zeigen Sie, dass es zwei Werte von ω gibt, bei denen die zugeführte Leistung halb so groß ist wie bei Resonanz, und dass diese Werte gegeben sind durch

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}.$$

Deshalb gilt $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0/Q$, was mit Gleichung 11.51 übereinstimmt.

11.51 ••• Zur Modellbeschreibung zwischenatomarer Kräfte verwendet man oft das sogenannte *Morse-Potenzial*, das sich in der Form $\phi(r) = D(1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$ schreiben lässt; r ist darin der Abstand zwischen zwei Atomkernen. a) Erstellen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms oder eines grafikfähigen Taschenrechners einen Graphen des Morse-Potenzials mit $D = 5,00 \text{ eV}$, $\beta = 0,20 \text{ nm}^{-1}$ und $r_0 = 0,750 \text{ nm}$. b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtsabstand und die „Federkonstante“ für das Morse-Potenzial, wenn kleine Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage vorausgesetzt werden. c) Ermitteln Sie eine Formel für die Schwingungsfrequenz eines zweiatomigen Moleküls mit zwei gleichen Atomen der Masse m .



Eine Boje wird von einem Schiff der US-amerikanischen Nationalen Meeres- und Atmosphärenbehörde (NOAA) ausgesetzt, die zu einem Tsunami-Warnsystem gehört. Tsunami-Detektoren wie die gezeigte Boje sollen Katastrophen wie die nach dem Seebeben im Indischen Ozean im Dezember 2004 in Zukunft verhindern, indem sie rechtzeitig vor dem Auflaufen dieser Riesenwellen an der Küste warnen. An den Küsten der Anrainerstaaten waren 2004 Hunderttausende Menschen ums Leben gekommen, weil sie von dem herannahenden Tsunami nichts ahnten und sich deshalb nicht rechtzeitig in Sicherheit bringen konnten. (Mit freundlicher Genehmigung der NOAA und der Harbor Branch Oceanographic Institution.)

12.1	Einfache Wellenbewegungen	456
12.2	Periodische Wellen, harmonische Wellen	464
12.3	Energietransport und Intensität	468
12.4	Der Doppler-Effekt	474
12.5	Wellenausbreitung an Hindernissen	481
12.6	Überlagerung von Wellen	488
12.7	Stehende Wellen	496
12.8	*Harmonische Zerlegung und Wellenpakete	505
	Zusammenfassung	513
	Aufgaben	518



Warum bewegt sich ein Tsunami wesentlich schneller als eine gewöhnliche Welle an der Oberfläche des Meeres? (Siehe Beispiel 12.2.)

In Kapitel 11 haben wir uns mit Schwingungsbewegungen und sich periodisch bewegenden Körpern beschäftigt. In diesem Kapitel werden wir darauf aufbauen und die Mechanik von Wellen untersuchen, da Wellen ebenfalls periodische Bewegungen sind. Sie breiten sich in verschiedenen Medien aus und können sich sogar im leeren Raum ohne ein Trägermedium bewegen. Beispiele dafür sind die Meereswellen, Musik, Erdbeben und das Sonnenlicht. Wellen transportieren Energie und Impuls, sie transportieren jedoch *keine* Materie.

In diesem Kapitel werden wir uns mit periodischen Wellen, insbesondere harmonischen Wellen, beschäftigen. Wir diskutieren den Energietransport und die Intensität von Wellen und erläutern, wie der Doppler-Effekt zustande kommt. Anschließend zeigen wir, welche Effekte beim Auftreffen von Wellen an Hindernissen auftreten und wie man beliebige Wellenpakete in harmonische Wellen zerlegen kann.

12.1 Einfache Wellenbewegungen

Transversale und longitudinale Wellen

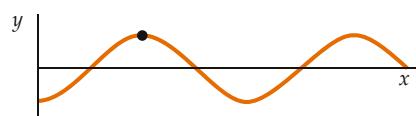
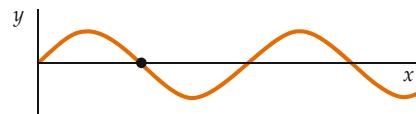
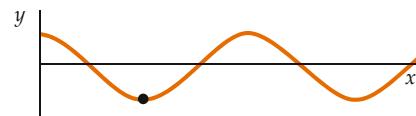
Eine mechanische Welle wird durch eine Störung in einem Medium erzeugt. Wenn beispielsweise eine gespannte Saite gezupft wird, pflanzt sich die so entstandene Auslenkung längs der Saite als Welle fort. Die Störung ist in diesem Fall die Verformung der Saite bezüglich ihrer Gleichgewichtsform. Ihre Ausbreitung entsteht durch die Wechselwirkung jedes einzelnen Segments der Saite mit den Segmenten in der unmittelbaren Nachbarschaft. Wenn die Störungen sich auf der Saite hin und zurück ausbreiten, bewegen sich die Segmente der Saite quer (senkrecht) zur Saite. Eine solche Welle, bei der sich das Medium (die Saite) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Störung bewegt, heißt **transversale** Welle. Abbildung 12.1 zeigt eine Auslenkung in einer gespannten Feder. Diese Verformung, man spricht manchmal auch von einer Störung, pflanzt sich als „Wellenberg“ oder „Puls“ mit konstanter Geschwindigkeit längs der Feder fort. Kommt die Auslenkung an einer bestimmten Stelle x der Feder an, werden die Federsegmente senkrecht zur Längsrichtung der Feder verschoben und führen Schwingungen in y -Richtung aus, bis sie schließlich wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehren und die Schwingungsenergie an Nachbarelemente abgegeben haben. Die Geschwindigkeit, mit der ein Wellenberg längs der Feder wandert, wird **Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle** genannt. Sie hängt u. a. von der Federspannung und den Materialeigenschaften der Feder ab.

Eine Welle dagegen, wie sie in Abbildung 12.2 zu sehen ist, heißt **longitudinale** Welle. Bei ihr wird das Medium (hier die Feder) in Ausbreitungsrichtung der Welle gestört. An die Stelle der Wellenberge und Wellentäler bei der transversalen Welle treten hier die Komprimierung (Verdichtung) und Ausdehnung (Verdünnung) des Mediums (z. B. der Federspirale). Weitere Beispiele für longitudinale Wellen sind Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten. Schallwellen in festen Körpern (Kristallen) sind longitudinale und transversale Wellen. Oberflächenwellen auf dem Wasser, die durch die Schwerkraft bedingt sind, sogenannte Schwerewellen, sind weder reine transversale noch longitudinale Wellen. Die Wassermoleküle bewegen sich in der Wellenbewegung kreisförmig und haben somit stets einen longitudinalen und einen transversalen Anteil bezüglich der Ausbreitungsrichtung.

Abbildung 12.3 zeigt zweidimensionale kreisförmige Wellen auf einer Wasseroberfläche. Diese Wellen werden durch Tropfen erzeugt, die auf die Wasseroberfläche auftreffen. Es liegt



(a)



(b)

Abbildung 12.1 a) Transversaler Wellenpuls (Wellenberg) auf einer Feder. Die Störung ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. b) Drei aufeinanderfolgende Skizzen einer transversalen Welle auf einer Saite, die sich nach rechts ausbreitet. Ein Element der Saite (schwarzer Punkt) bewegt sich auf und nieder, während sich die Wellenberge und -täler nach rechts ausbreiten. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

somit eine punktförmige Quelle vor. Die Wellenlänge ist der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenbergen, in diesem Fall konzentrischen Kreisen. Diese Kreise nennt man **Wellenfronten**. Bei einer punktförmigen *Schallquelle* in einem homogenen Medium breiten sich die Wellen dreidimensional aus, die Wellenfronten sind konzentrische Kugeloberflächen. Die Wellenausbreitung erfolgt in allen Raumrichtungen gleichartig, sie ist *isotrop*.

Die Bewegungsrichtung der Wellenfronten kann durch Strahlen veranschaulicht werden, die senkrecht auf den Wellenfronten stehen (Abbildung 12.4). Für Kreis- oder Kugelwellen sind diese Strahlen radiale Linien, die von der punktförmigen Wellenquelle ausgehen.

In einem homogenen Medium, z. B. in Luft mit konstanter Dichte, breit sich die Welle geradlinig in Richtung dieser Strahlen

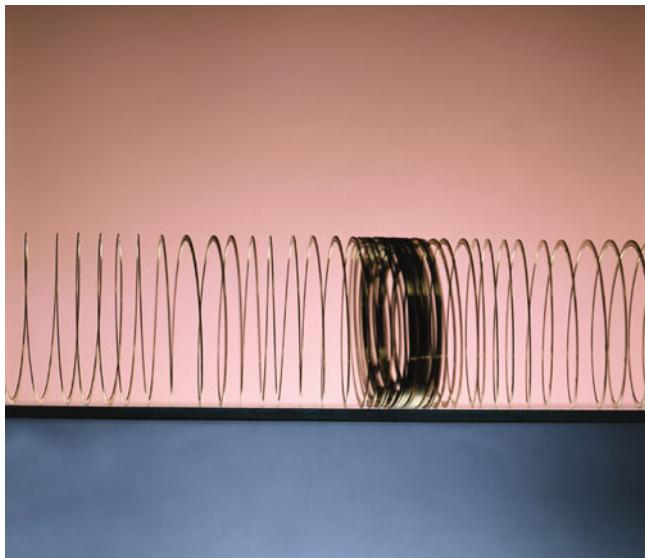


Abbildung 12.2 Longitudinaler Wellenpuls auf einer Feder. Die Störung (Verdichtung, Verdünnung) bewegt sich entlang der Feder. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)



Abbildung 12.3 Von einer punktförmigen Quelle gehen kreisförmige Wellenfronten aus. (© Alexander Hess/Pitopia.)

aus, ganz ähnlich wie ein Teilchenstrahl. In großem Abstand von einer punktförmigen Quelle lässt sich ein genügend kleiner Bereich der Wellenfront durch eine Ebene annähern; die Strahlen sind dann näherungsweise parallele Linien. Wellen mit parallelen ebenen Wellenfronten nennt man **ebene Wellen** (Abbildung 12.5). Das zweidimensionale Analogon einer ebenen Welle ist die *Linienwelle*, die man näherungsweise als kleinen Teil einer kreisförmigen Wellenfront in großer Entfernung von der Quelle auffassen kann. Solche besonders einfachen Wellentypen kann man auch in einer Wellenwanne durch eine linienförmige Quelle erzeugen (Abbildung 12.6).

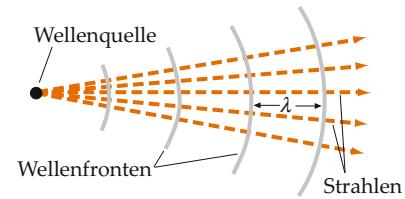


Abbildung 12.4 Die Bewegungsrichtung der Wellenfronten kann durch Strahlen dargestellt werden, die von der Wellenquelle ausgehen und senkrecht zu den Wellenfronten verlaufen. Für eine punktförmige Quelle sind die Strahlen von der Punktquelle ausgehende radiale Linien.

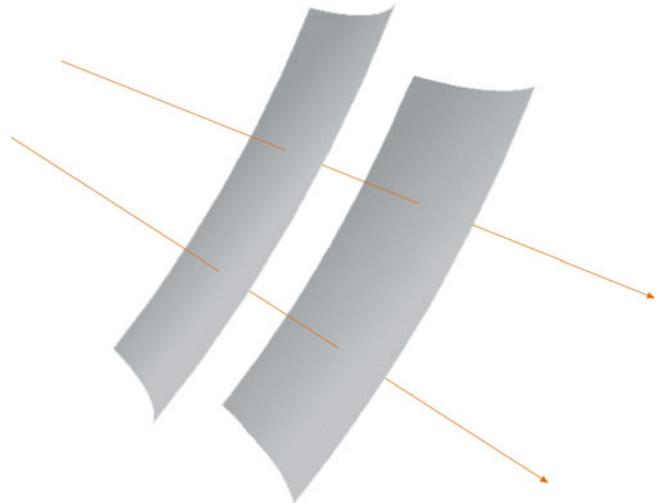


Abbildung 12.5 Ebene Wellen. In großer Entfernung von einer punktförmigen Quelle sind die Wellenfronten näherungsweise parallele Ebenen und die Strahlen parallele Linien senkrecht zu den Wellenfronten.



Abbildung 12.6 Ein zweidimensionales Analogon einer ebenen Welle, die *Linienwelle*, kann in einer Wellenwanne mit einem flachen Brett erzeugt werden, das im Wasser auf- und niederschwingt. Die Wellenfronten der Oberflächenwellen sind gerade Linien.

Wellenberge

Abbildung 12.7a zeigt einen Wellenberg auf einem Seil zur Zeit $t = 0$. Man kann das Bild als eine Momentaufnahme der

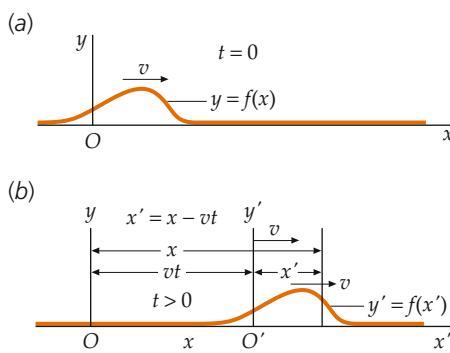


Abbildung 12.7 Ausbreitung eines Wellenbergs längs eines Seils

transversalen Seilwelle mit einer Störung auffassen. Die Gestalt des Wellenbergs (und damit die Auslenkung des Seils) lässt sich durch eine Funktion $y = f(x)$ beschreiben. Der Wellenberg wandert mit der Geschwindigkeit v längs der Ausbreitungsrichtung x . Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ befindet er sich an einem anderen Punkt auf dem Seil. Auch wenn wir voraussetzen, dass der Wellenberg seine Gestalt nicht ändert, müssen wir ihn in dem Koordinatensystem der Abbildung 12.7a durch eine neue Funktion von x und t beschreiben. Einfacher ist die Darstellung in einem mitbewegten Bezugssystem (x', y') mit dem Koordinatenursprung O' , wie es Abbildung 12.7b zeigt. Die Verformung des Seils lässt sich dann unabhängig von der Zeit stets mit $y' = f(x')$ beschreiben. Zwischen beiden Koordinatensystemen besteht der Zusammenhang

$$y' = y \quad \text{und} \quad x' = x - vt,$$

woraus

$$f(x') = f(x - vt)$$

folgt. Somit erhält man im ursprünglichen Koordinatensystem (x, y) für die Funktionsgleichung des Wellenbergs

$$y = f(x - vt) \quad \text{Wellenbewegung in positiver } x\text{-Richtung,} \quad (12.1)$$

und

$$y = f(x + vt) \quad \text{Wellenbewegung in negativer } x\text{-Richtung.} \quad (12.2)$$

In beiden Ausdrücken ist v die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung. (Da v eine skalare Geschwindigkeit ist, ist sie immer positiv.) Die Funktion $f(x - vt)$ heißt **Wellenfunktion**. Für Wellen auf einer Saite (oder einem gespannten Seil) beschreibt die Wellenfunktion die transversale Auslenkung der Saite (des Seils). Für Schallwellen in Luft kann die Wellenfunktion die longitudinale Auslenkung der Luftmoleküle oder der Luftdruck sein. Diese Wellenfunktionen sind Lösungen einer Differenzialgleichung, der sogenannten *Wellengleichung*, die man aus den Newton'schen Axiomen herleiten kann.

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen

Es ist eine allgemeine Eigenschaft von Wellen, dass ihre Geschwindigkeit relativ zum Medium von den Eigenschaften dieses Mediums abhängt; sie ist aber unabhängig von der Bewegung der Wellenquelle. Zum Beispiel hängt die Geschwindigkeit des Schalls aus einer Autohupe nur von den Eigenschaften der Luft ab, nicht von der Bewegung des Autos.

Für Wellenberge auf einem Seil lässt sich leicht zeigen, dass man die Wellengeschwindigkeit erhöhen kann, indem die Spannung (der Quotient von Zugkraft und Querschnittsfläche) des Seils vergrößert wird. Außerdem breiten sich Wellen unter derselben Spannkraft auf einem leichten Seil schneller aus als auf einem schweren. Wenn wir mit F_S die Spannkraft und mit μ die lineare Massendichte bezeichnen, gilt für die Wellengeschwindigkeit eines gespannten Seils oder einer Saite

$$v = \sqrt{\frac{|F_S|}{\mu}}. \quad (12.3)$$

WELLENGESCHWINDIGKEIT AUF EINER SAITE

Die beiden Beispiele 12.1 und 12.2 befassen sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen.

Beispiel 12.1: Eine kleine Raupe auf dem Seil

Eine kleine Raupe kriecht sehr langsam längs einer Baumwollwäscheleine (Abbildung 12.8). Die 25 m lange Wäscheleine hat eine Masse von $m_s = 1,0 \text{ kg}$ und ist durch ein hängendes Massestück von $m = 10 \text{ kg}$ straff gespannt. Vivian hängt gerade ihren Badeanzug 5 m von einem Ende der Leine auf, als sie die Raupe 2,5 cm vom entgegengesetzten Ende entfernt sieht. Sie zupft an der Leine und schickt so einen 3,0 cm hohen Wellenberg hin zu der Raupe. Die Raupe versucht mit 2,5 cm/s vor dem Wellenberg zu fliehen. Erreicht sie das Ende der Wäscheleine, bevor der Wellenberg sie erreicht?

Problembeschreibung: Wir müssen wissen, wie schnell sich die Welle ausbreitet. Die Wellengeschwindigkeit ermitteln wir anhand der Formel $v = \sqrt{|F_S|/\mu}$.

Lösung: 1. Die Wellengeschwindigkeit ist mit der Zugkraft F_S und der linearen Massendichte μ verbunden:

$$v = \sqrt{\frac{|F_S|}{\mu}}$$

2. Drücken Sie die Massendichte und die Zugkraft in Abhängigkeit von den gegebenen Parametern aus ($|a_G| = g$):

$$\mu = \frac{m_s}{l}$$

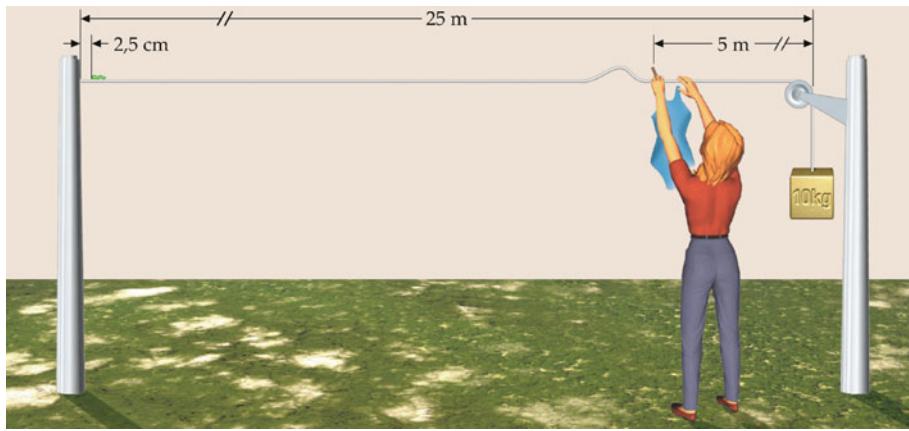


Abbildung 12.8 Skizze des Systems zu Beispiel 12.1.

und

$$|F_S| = mg$$

3. Setzen Sie diese Werte ein und berechnen Sie die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{|F_S|}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg l}{m_s}} \\ &= \sqrt{\frac{(10 \text{ kg}) \cdot (9,81 \text{ m/s}^2) \cdot (25 \text{ m})}{(1,0 \text{ kg})}} \\ &= 49,5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie mit dieser Geschwindigkeit die Zeit, die der Wellenberg für die 20 m bis zum anderen Ende braucht:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{20 \text{ m}}{49,5 \text{ m/s}} = 0,40 \text{ s}$$

5. Berechnen Sie die Zeit, die die Raupe für die 2,5 cm bis zum rettenden Pfosten benötigt:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v'} = \frac{2,5 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm/s}} = 1,0 \text{ s}$$

Es ist $\Delta t' > \Delta t$,

also wird die Raupe von dem Wellenberg eingeholt.

Plausibilitätsprüfung: Der Wellenberg bewegt sich mit 49 m/s über das Seil, die Raupe nur mit 0,025 m/s. Der Puls ist damit fast 2000-mal schneller als die Raupe. Kein Wunder, dass sie von dem Puls eingeholt wird.

Übung 12.1: Zeigen Sie, dass $\sqrt{|F_S|/\mu}$ die Einheit m/s hat, wenn man $|F_S|$ in N (Newton) und μ in kg/m misst. ▶ ■

Beispiel 12.2: Die Geschwindigkeit einer Meereswelle

Die Wellen an der Oberfläche eines Meeres entstehen durch die Wirkung von Wind und Gravitation und heißen darum auch **Schwerewellen**. Wenn die Wassertiefe geringer ist als die Hälfte der Wellenlänge, spricht man auch von einer **Flachwasserwelle**. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schwerewellen hängt gemäß $v = \sqrt{g h}$ von der Wassertiefe h ab. Eine Schwerewelle hat im offenen Meer (Wassertiefe ca. 5,0 km) eine Wellenlänge von 100 km. a) Welche Geschwindigkeit hat die Welle dann? b) Kann man hier von einer Flachwasserwelle sprechen?

Problembeschreibung: Mit dem Zusammenhang $v = \sqrt{g h}$ können Sie die Wellengeschwindigkeit berechnen. Prüfen Sie, ob die Wassertiefe größer ist als die Hälfte der angegebenen Wellenlänge.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie mit $v = \sqrt{g h}$ die Wellengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{g h} = \sqrt{(9,81 \text{ m/s}^2) (5000 \text{ m})} \\ &= [221 \text{ m/s} = 797 \text{ km/h}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Man spricht von einer Flachwasserwelle, wenn die Wassertiefe kleiner ist als die halbe Wellenlänge:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{5 \text{ km}}{100 \text{ km}} = \frac{1}{20}$$

Die Wassertiefe beträgt nur ein Zwanzigstel der Wellenlänge, die Welle ist also *definitiv eine Flachwasserwelle*.

Plausibilitätsprüfung: Von Tsunamis weiß man, dass sie sich im offenen Meer mit einer Geschwindigkeit von rund 800 km/h ausbreiten. Unser Ergebnis ist daher plausibel.

Weitergedacht: Ein Tsunami kann beispielsweise entstehen, wenn sich durch ein Erdbeben ein größerer Bereich des Meeresbodens ruckartig bewegt. Nehmen wir an, bei einem Erdbeben würde ein Gebiet von 50 km Durchmesser um 1 m angehoben. Der dadurch entstehende Tsunami hätte eine Wellenlänge von etwa 100 km, die Wellenhöhe aber betrüge im offenen Meer nur 1 m. Ein Tsunami bewegt sich im offenen Meer so schnell, weil die Wellenlängen erheblich länger sind als die Meerestiefe. Typische Meereswellen dagegen haben Wellenlängen von 100 m oder weniger, also wesentlich weniger als die Meerestiefe. Sie sind typische Tiefwasserwellen, die sich weit langsamer ausbreiten als Flachwasserwellen. In sehr flachem Wasser, etwa in Küstennähe, spielen bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit noch weitere Faktoren eine Rolle. ■

Der Wellenberg in Beispiel 12.1 breitet sich auf der Leine mit 49 m/s nach links aus, die Teilchen, aus denen die Leine besteht, bewegen sich nicht zur Seite; sie bewegen sich nur nach oben und wieder zurück, wenn der Wellenberg an ihnen vorüberläuft.

Für Schallwellen in Fluiden wie Luft oder Wasser ist die Wellengeschwindigkeit v durch

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (12.4)$$

gegeben; dabei ist ρ_0 die Massendichte des Mediums im Gleichgewichtszustand und K der Kompressionsmodul (siehe Gleichung 9.9). Der Kompressionsmodul ist das negative Verhältnis der Druckänderung zur relativen Änderung des Volumens:

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}.$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen 12.3 und 12.4 erkennen wir, dass die Wellengeschwindigkeit im Allgemeinen von den elastischen Eigenschaften des Mediums (z. B. von der Spannung bei den Seilwellen oder vom Kompressionsmodul bei den Schallwellen) und von den inneren Eigenschaften (wie der linearen bzw. der räumlichen Massendichte) des Mediums abhängt.

Für Schallwellen in Gasen (beispielsweise Luft) ist der Kompressionsmodul proportional zum Druck, der wiederum von der Dichte ρ und der absoluten Temperatur T des Mediums abhängt. Das Verhältnis K/ρ_0 wird unabhängig von der Dichte und ist nur noch der absoluten Temperatur des Gases proportional. In Kapitel 14 werden wir zeigen, dass Gleichung 12.4 in diesem Fall die Gleichung

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{m_{\text{Mol}}}} \quad (12.5)$$

SCHALLGESCHWINDIGKEIT IN GASEN

äquivalent ist. Hier ist T die absolute Temperatur in Kelvin (K), deren Maßzahl mit der Temperatur T_C in der Celsius-Skala durch

$$\{T\} = \{T_C\} + 273,15 \quad (12.6)$$

verknüpft ist. Die Konstante γ hängt von der Art des Gases ab. Für zweiatomige Moleküle, wie O_2 und N_2 , hat γ den Wert 7/5, und da Luft zu 98 % aus O_2 und N_2 besteht, gilt dieser Wert auch für Luft. (Für einatomige Gase, beispielsweise Edelgase wie He, ist $\gamma = 5/3$. Wir werden in Kapitel 15 näher darauf eingehen.) In Gleichung 12.5 ist R die universelle Gaskonstante mit

$$R = 8,3145 \text{ J/(mol} \cdot \text{K}), \quad (12.7)$$

und m_{Mol} ist die molare Masse des Gases (d. h. die Masse von 1 mol Gas); m_{Mol} hat für Luft den Wert

$$m_{\text{Mol}} = 29,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}.$$

Bei der Angabe des Kompressionsmoduls muss man streng genommen zwischen dem **isothermen** Kompressionsmodul (d. h. der Kompressibilität bei konstanter Temperatur) und dem **adiabatischen** Kompressionsmodul (Kompressibilität, bei der kein Wärmeaustausch stattfindet) unterscheiden. Für Schallwellen im hörbaren Frequenzbereich wechselt die Verdichtung jedoch so schnell, dass der Wärmeaustausch dabei vernachlässigbar ist und man den adiabatischen Kompressionsmodul verwenden kann. In Beispiel 12.3 wird die Schallgeschwindigkeit in Luft berechnet.

Herleitung von v für Wellen auf einer Saite

Gleichung 12.3 ($v = \sqrt{F_s/\mu}$) lässt sich mithilfe des Zusammenhangs von Kraftstoß und Impuls für die Bewegung auf einer Saite herleiten. Wir halten eine Saite an einem Ende fest; sie hat die lineare Massendichte (Masse pro Einheitslängenelement) μ und wird durch die Zugkraft F_s gespannt. (Das andere Ende ist an einer entfernten Wand befestigt.) Dann bewegen Sie ruckartig Ihre Hand mit der Geschwindigkeit v_y nach oben. Nach einem kurzen Moment erscheint die Saite wie in Abbildung 12.9 gezeigt; der am weitesten rechts gelegene Punkt des ausgelenkten Segments der Saite bewegt sich auf der Saite mit der Geschwindigkeit v nach rechts, das gesamte ausgelenkte Segment der Saite bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_y nach oben. Wir wenden den Zusammenhang zwischen Kraftstoß und Impulsänderung $\langle F \rangle \cdot \Delta t = \Delta p$ (Gleichung 6.10) auf die Saite an und erhalten

$$F_y \Delta t = m v_y - 0. \quad (12.8)$$

Darin ist F_y die aufwärts gerichtete Komponente der Kraft, die Ihre Hand auf die Saite ausübt, m ist die Masse des ausgelenkten Segments, und Δt ist die Zeit, während der sich Ihre Hand

Beispiel 12.3: Schallgeschwindigkeit in Luft

ZUR ÜBUNG

An einer Schule beginnt ab Anfang April, wenn die Lufttemperatur bei etwa $13,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ liegt, die Freiluftsaisons in der Leichtathletik. Zum Ende des Schuljahrs im Hochsommer liegen die Temperaturen mit rund $33,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ deutlich höher. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit für den Knall aus der Startpistole a) für $13,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ und b) für $33,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeiten zu den angegebenen Temperaturen können mithilfe von Gleichung 12.5 berechnet werden. Verwenden Sie den Wert 7/5 für γ und $29,0 \cdot 10^{-3}\text{ kg/mol}$ für m_{mol} .

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

Verwenden Sie Gleichung 12.5 und die gegebenen Werte, um die Schallgeschwindigkeit bei $13,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ zu berechnen. Vergessen Sie nicht, die Celsius-Temperatur in Kelvin umzurechnen.

Teilaufgabe b

1. Nach Gleichung 12.5 ist v proportional zu \sqrt{T} . Drücken Sie mit dieser Proportionalität das Verhältnis der Geschwindigkeiten bei $33,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ und $13,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (d. h. $306,0\text{ K}$ bzw. $286,0\text{ K}$) aus.

2. Berechnen Sie v bei $33,0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma R T_a}{m_{\text{Mol}}}} = [339\text{ m/s}]$$

Teilaufgabe b

1.

$$\frac{v_b}{v_a} = \sqrt{\frac{T_b}{T_a}}$$

2.

$$v_b = [351\text{ m/s}]$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Teilaufgabe b ist größer als das von Teilaufgabe a. Dies war zu erwarten, da die Schallgeschwindigkeit mit der Temperatur steigt.

Weitergedacht: Man erkennt an diesem Beispiel, dass die Schallgeschwindigkeit in Luft bei gewöhnlicher Temperatur (d. h. ca. $20\text{ }^{\circ}\text{C}$) ungefähr 340 m/s beträgt. Diese Temperatur bezeichnet man gemeinhin als Raumtemperatur.

Übung 12.2: Für Helium gilt $m_{\text{Mol}} = 4 \cdot 10^{-3}\text{ kg/mol}$ und $\gamma = 5/3$. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Schallwellen in Helium bei $20,0\text{ }^{\circ}\text{C}$? ◀

nach oben bewegt hat. Die zwei Dreiecke in Abbildung 12.9 sind ähnlich, daher gilt

$$\frac{F_y}{F_S} = \frac{v_y \Delta t}{v \Delta t} \quad \text{oder} \quad F_y = \frac{v_y}{v} F_S .$$

Setzen wir F_y in Gleichung 12.8 ein, so haben wir mit $m = \mu v \Delta t$

$$\frac{v_y}{v} F_S \Delta t = (\mu v \Delta t) v_y .$$

Auflösen nach v ergibt

$$v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} ,$$

und das ist der Ausdruck für die Wellengeschwindigkeit, den wir bereits in Gleichung 12.3 kennengelernt haben.

In der folgenden Diskussion zeigen wir, dass dieses Ergebnis nicht nur für eine wie in Abbildung 12.9 geformte Störung gilt, sondern für Pulse mit verschiedenen Formen.

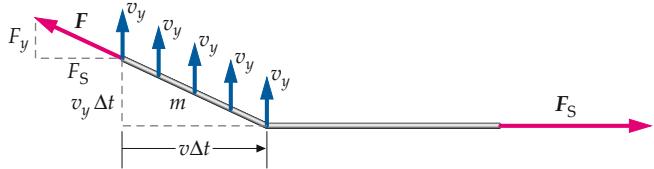


Abbildung 12.9 Wenn sich das Ende der Saite mit der konstanten Geschwindigkeit v_y nach oben bewegt, breitert sich die Störung (d. h. der äußerste rechte Punkt des ausgelenkten Segments der Saite) mit der Wellengeschwindigkeit v nach rechts aus.

*Die Wellengleichung

Als Wellengleichung wird die Differenzialgleichung bezeichnet, deren Lösung eine Wellenfunktion $y(x, t)$ ist. Die Wellengleichung lässt sich aus dem zweiten Newton'schen Axiom herleiten, wie am eindimensionalen Beispiel einer gespannten Saite nachfolgend gezeigt wird. Allgemein leitet man die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen aus den Maxwell'schen

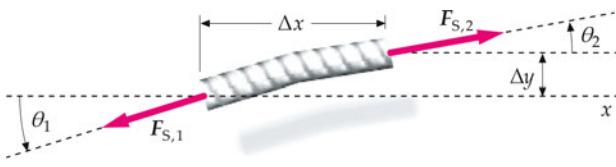


Abbildung 12.10 Zur Herleitung der Wellengleichung: Die Vertikalkomponente der resultierenden Kraft, die auf ein Segment einer gespannten Saite wirkt, ist $|F_{S,2}| \sin \theta_2 - |F_{S,1}| \sin \theta_1$; dabei ist $|F_S|$ der Betrag der Spannkraft in der Saite. Die Wellengleichung wird mit dem zweiten Newton'schen Axiom hergeleitet, das auf das Saitensegment angewandt wird.

Gleichungen und für mechanische Wellen oder Gravitationswellen im Rahmen der Lagrange-Hamilton'schen Theorie her.

Abbildung 12.10 zeigt ein Segment der gespannten Saite von der Länge Δx . Um das zweite Newton'sche Axiom anwenden zu können, sind Aussagen über Kräfte, Masse und Beschleunigung dieses Saitenelements bei der Wellenbewegung notwendig. Die vertikale Beschleunigung der Auslenkung der Saite am Ort x ergibt sich aus der zweiten Zeitableitung von $y(x, t)$ nach der Zeit zu $\partial^2 y / \partial t^2$. Wir setzen voraus, dass die Auslenkungen der Saite klein sind; damit sind auch die in Abbildung 12.10 definierten Winkel θ_1 und θ_2 gegen die horizontale x -Richtung klein. Ist μ die eindimensionale Massendichte der Saite, dann hat das Saitensegment die Masse $m = \mu \Delta x$. Damit haben wir die rechte Seite des zweiten Newton'schen Axioms ($\sum F_i = m a_y$) festgelegt. Wir gehen nun zu den Kräften auf das Saitensegment über. Dazu bezeichnen wir mit $|F_S|$ den Betrag der Spannkraft der Saite.

An dem Saitensegment greifen die Kräfte $F_{S,1}$ und $F_{S,2}$ an; ihre Richtungen gegen die x -Achse sind durch die Winkel θ_1 und θ_2 gegeben, die jeweiligen Beträge sind gleich dem Betrag der Spannkraft: $|F_{S,1}| = |F_{S,2}| = |F_S|$. Die horizontale Komponente der an dem Segment angreifenden Gesamtkraft ist

$$\begin{aligned}\sum F_x &= |F_{S,2}| \cos \theta_2 - |F_{S,1}| \cos \theta_1 \\ &= |F_S| (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \approx 0,\end{aligned}$$

denn für kleine Winkel θ ist $\cos \theta \approx 1$. Für die Kraftkomponenten in vertikaler Richtung erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum F_y &= |F_{S,2}| \sin \theta_2 - |F_{S,1}| \sin \theta_1 \\ &= |F_S| (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \approx |F_S| (\tan \theta_2 - \tan \theta_1)\end{aligned}$$

(für kleine Winkel θ gilt auch die Näherung $\sin \theta \approx \tan \theta$). Der Tangens des Winkels θ , den die ausgelenkte Saite mit der x -Achse bildet, ist die Steigung der Saitenkurve, die wir mit S bezeichnen wollen. Die Steigung S einer Kurve ist in der Differentialrechnung durch die erste Ableitung der Kurvenfunktion nach einer unabhängigen Variablen gegeben. Bei einer Funktion von mehreren unabhängigen Variablen ist die partielle Ableitung nach der betreffenden Variablen zu bilden, um die Steigung zu berechnen. In unserem Falle folgt für die Auslenkungsfunk-

tion $y(x, t)$ der Saite

$$S = \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Somit ergibt sich als resultierende Kraft auf das Segment

$$\sum F_y = |F_S| (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = |F_S| \Delta S.$$

Setzen wir nun die ermittelten Größen in das zweite Newton'sche Axiom ($\sum F_i = m a_y$) ein, so folgt

$$|F_S| \Delta S = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

bzw. nach Division durch $|F_S| \Delta x$

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\mu}{|F_S|} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (12.9)$$

Die Größe ΔS ist die Änderung der Kurvensteigung auf der Strecke Δx . Da für die Saitenauslenkung weder die Kurve noch ihre erste Ableitung Sprungstellen oder andere Singularitäten haben, können wir den Grenzprozess $\Delta x \rightarrow 0$ durchführen und erhalten

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung 12.9 ein, erhalten wir die **Wellengleichung** für die gespannte Saite:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{|F_S|} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (12.10a)$$

Diese eindimensionale Wellengleichung der gespannten Saite ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten; sie enthält die zweiten Ableitungen der Saitenauslenkung nach der Ausbreitungsrichtung der Welle und nach der Zeit. Bei der Herleitung wurde vorausgesetzt, dass die Auslenkung $y(x, t)$ klein gegen die Saitenlänge ist. Lösungen dieser Wellengleichung werden auch (lineare) **Wellenfunktionen** genannt. Wir zeigen nun, dass eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion $y(x - vt)$ die Wellengleichung 12.10a erfüllt und dass $v = \sqrt{|F_S|/\mu}$ die Wellengeschwindigkeit ist.

Mit der Substitution $\xi = x - vt$ erhalten wir aus der Identität

$$y(x - vt) = y(\xi)$$

durch Differenziation nach x bzw. nach t

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = y' \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = y' \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Wegen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = 1$$

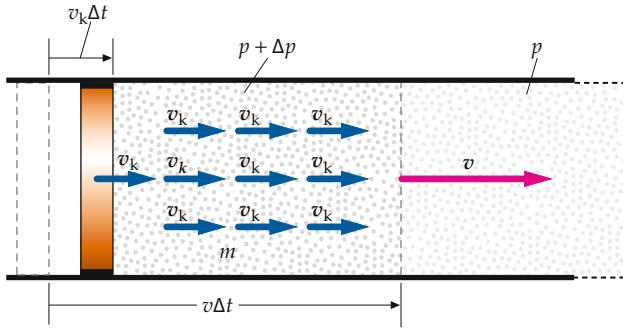


Abbildung 12.11 Die Luft in der Nähe des Kolbens bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit v_k nach rechts wie der Kolben selbst. Die rechte Kante dieses „Druckpulses“ bewegt sich mit der Wellengeschwindigkeit v nach rechts. Der Druck in dem Puls ist um Δp höher als der Druck im Rest des Zylinders.

und

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial(x - v t)}{\partial x} = -v$$

erhalten wir

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -v y'.$$

Die zweiten Ableitungen ergeben

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y''$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \frac{\partial y'}{\partial t} = +v^2 y''.$$

Somit ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (12.10b)$$

EINDIMENSIONALE WELLENGLEICHUNG

Das gleiche Ergebnis erhalten wir für eine Welle, die sich mit der Wellenfunktion $y(x + v t)$ in negativer x -Richtung ausbreitet. Der Vergleich der Gleichungen 12.10a und 12.10b ergibt für die Wellengeschwindigkeit $v = \sqrt{|F_s|/\mu}$, was mit Gleichung 12.3 übereinstimmt.

Herleitung von v für Schallwellen

Die Schallgeschwindigkeit ist nach Gleichung 12.4 gegeben durch $v = \sqrt{K/\rho}$; dabei sind K der Kompressionsmodul und ρ die Dichte des Mediums, in dem sich die Schallwelle bewegt. Diese Gleichung leitet man ab, indem man den Zusammenhang von Kraftstoß und Impulsänderung auf die Bewegung der Luft in einem einseitig offenen Zylinder anwendet, in dem sich ein Kolben bewegt (Abbildung 12.11): Wenn der Kolben ruckartig

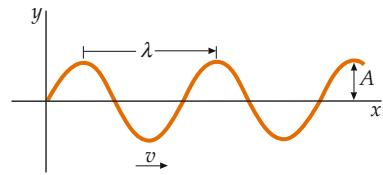


Abbildung 12.12 Harmonische Welle, betrachtet zu einem festen Zeitpunkt. A ist die Amplitude und λ die Wellenlänge. Eine solches Bild erhält man beispielsweise durch eine Hochgeschwindigkeitsaufnahme einer schwingenden Saite.

mit der konstanten Geschwindigkeit v_K nach rechts geschoben wird, dann hat sich nach einem kurzen Moment Δt der Kolben um die Strecke $v_K \Delta t$ bewegt, und die gesamte Luft innerhalb der Entfernung $v \Delta t$ von der Anfangslage des Kolbens bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_K nach rechts. Wir wenden den Zusammenhang zwischen Kraftstoß und Impulsänderung $\langle F \rangle \cdot \Delta t = \Delta p$ auf die Luft in dem Zylinder an und erhalten

$$F \Delta t = m v_K - 0. \quad (12.11)$$

Darin ist m die Masse der sich mit der Geschwindigkeit v_K bewegenden Luft, und F ist die resultierende Kraft, die auf die Luft im Zylinder wirkt. Die Luft war anfangs in Ruhe. Die resultierende Kraft hängt mit dem Druckanstieg Δp in der Luft nahe dem sich bewegenden Kolben gemäß

$$F = A \Delta p$$

zusammen (A ist die Querschnittsfläche des Zylinders).

Der Kompressionsmodul von Luft ist nach Definition $K = -\Delta p/(\Delta V/V)$, für die Druckänderung folgt also

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{-A v_K \Delta t}{A v \Delta t} = K \frac{v_K}{v}.$$

Dabei ist $A v_K \Delta t$ das von dem Kolben überstrichene Volumen und $a v \Delta t$ das Anfangsvolumen der Luft, die sich nun mit der Geschwindigkeit v_K bewegt. Setzen wir $F = A \Delta p$ in Gleichung 12.11 ein, so haben wir (mit $m = \rho A v \Delta t$)

$$A \Delta p \Delta t = m v_K \quad \text{bzw.} \quad A K \frac{v_K}{v} \Delta t = (\rho A v \Delta t) v_K.$$

Auflösen nach v ergibt

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

Das ist dieselbe Ausdruck wie in Gleichung 12.4.

Die Wellengleichung für Schallwellen lässt sich ebenfalls aus dem zweiten Newton'schen Axiom herleiten. Für eine eindimensionale Schallwelle gilt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2};$$

dabei ist $s(x, t)$ die Auslenkung des Mediums in x -Richtung (longitudinale Welle) und v_s die Schallgeschwindigkeit im Medium, in dem sich die Welle ausbreitet.

12.2 Periodische Wellen, harmonische Wellen

Wenn man das Ende einer gespannten Saite periodisch auf- und abbewegt, erzeugt man auf der Saite eine **periodische Welle**. Wenn sich eine periodische Welle auf der Saite oder in einem anderen Medium ausbreitet, führt jeder Punkt auf der Saite bzw. in dem Medium Schwingungen mit der gleichen Schwingungsdauer aus.

Harmonische Wellen

Harmonische Wellen sind der häufigste Typ periodischer Wellen. Harmonische Schallwellen lassen sich durch eine Stimmgabel oder einen Lautsprecher erzeugen, die harmonisch schwingen. Die Schallquelle versetzt die sich ihr am nächsten befindlichen Luftmoleküle in eine harmonische Schwingung um ihre jeweilige Gleichgewichtslage. Diese Moleküle wiederum stoßen mit benachbarten Molekülen zusammen und bringen auch sie zum Schwingen. Dieser Vorgang pflanzt sich wellenförmig durch die Luft fort; wir bezeichnen ihn daher als *Schallwelle*.

Alle Wellen, ob sie periodisch sind oder nicht, können durch Superposition aus harmonischen Wellen erzeugt werden. Somit ist das Studium der harmonischen Wellenbewegung für das Verständnis aller Wellenbewegungen von Bedeutung. Wenn sich eine **harmonische Welle** durch das Medium ausbreitet, führt jeder Punkt des Mediums *harmonische Schwingungen* aus.

Wenn man das Ende einer Saite mit einer schwingenden Stimmgabel berührt, wird das Saitenende periodisch bewegt, die Aufeinanderfolge periodischer Bewegungen wird auf die Saite übertragen und breitet sich längs der Saite als periodische Welle aus. Die von der Stimmgabel auf der Saite erzeugte harmonische Welle kann durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden. Ob eine Sinus- oder Kosinusfunktion verwendet wird, hängt von der Festlegung des Koordinatenursprungs ab. Abbildung 12.12 zeigt eine Momentaufnahme der schwingenden Saite in der Form einer Sinusfunktion. Der kleinste Abstand zwischen zwei Wellenkämmen ist die **Wellenlänge** λ .

Während sich die Welle auf der Saite ausbreitet, bewegt sich jeder Punkt der Saite auf und ab, also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Dabei vollführt jeder Punkt harmonische Schwingungen mit der Frequenz v der schwingenden Stimmgabel. Während einer Schwingungsdauer $T = 1/v$ hat sich die Welle um eine Wellenlänge λ fortbewegt. Daraus ergibt sich die Wellengeschwindigkeit zu

$$v = \frac{\lambda}{T} = v \lambda. \quad (12.12)$$

Da sich dieser Zusammenhang allein aus den Definitionen der Wellenlänge und Frequenz ergibt, gilt er für alle harmonischen Wellen.

Die Momentaufnahme in Abbildung 12.12 lässt sich durch eine Sinusfunktion beschreiben:

$$y(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \delta\right).$$

Darin ist A die Amplitude, λ die Wellenlänge und δ die Phasenkonstante. Die Phasenkonstante hängt von der Wahl des Ursprungspunkts $x = 0$ ab. Für eine einzelne Welle darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\delta = 0$ setzen, sodass sich die Funktion vereinfacht zu

$$y(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

Der im Argument der Sinusfunktion auftretende Faktor 2π sichert ab, dass sich der Funktionswert $y(x)$ nicht ändert, wenn man x um eine Wellenlänge (oder ein Vielfaches davon) ändert. Da die Ortskoordinate bei der harmonischen Welle stets mit der Größe $2\pi/\lambda$ verknüpft ist, führt man dafür eine eigene Größe k ein, die **Wellenzahl**, und vereinfacht die obigen Gleichungen zu

$$y(x) = A \sin(kx) \quad (12.13)$$

mit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (12.14)$$

Die Wellenzahl k hat die Dimension einer inversen Länge und wird im SI-System in der Einheit m^{-1} (in der spektroskopischen Literatur auch in cm^{-1}) angegeben.

Für eine sich in positiver x -Richtung mit der Geschwindigkeit v ausbreitende harmonische Welle haben wir das x in Gleichung 12.13 durch $x - vt$ zu ersetzen (Abschnitt 12.1). Wählen wir die Phasenkonstante $\delta = 0$, so folgt für die harmonische Welle

$$y(x, t) = A \sin(k(x - vt)) = A \sin(kx - kv t)$$

oder

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (12.15)$$

HARMONISCHE WELLENFUNKTION

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = k v. \quad (12.16)$$

Das Argument der Sinusfunktion, $(kx - \omega t)$, wird als **Phase** der Welle bezeichnet.

Zwischen Kreisfrequenz ω , Frequenz v und Schwingungsdauer T der harmonischen Welle besteht der Zusammenhang

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}. \quad (12.17)$$

Setzt man $\omega = 2\pi v$ in Gleichung 12.16 ein, so erhält man mit $k = 2\pi/\lambda$

$$2\pi v = k v = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

oder $v = v \lambda$ und somit Gleichung 12.12.

Beispiel 12.4 zeigt durch direkte Berechnung der Ableitungen, dass eine harmonische Wellenfunktion wie Gleichung 12.15 die Wellendifferenzialgleichung (Gleichung 12.10b) erfüllt.

Beispiel 12.4: Harmonische Wellenfunktion

Wir behandeln hier harmonische Wellen, d.h. Wellen, die durch eine Wellenfunktion $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ mit der Wellengeschwindigkeit $v = \omega/k$ definiert sind. Zeigen Sie durch explizite Berechnung der Ableitungen, dass diese Wellenfunktion Gleichung 12.10b erfüllt.

Problembeschreibung: Wir zeigen, dass die harmonische Wellenfunktion $y = A \sin(kx - \omega t)$ die Wellengleichung erfüllt, indem wir explizit die zweiten Ableitungen $\partial^2 y / \partial x^2$ und $\partial^2 y / \partial t^2$ berechnen und in Gleichung 12.10b einsetzen.

Lösung: 1. Berechnen Sie die zweite partielle Ableitung von y nach x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(A \sin(kx - \omega t)) \\ &= A \cos(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x} \\ &= k A \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(k A \cos(kx - \omega t)) \\ &= -k A \sin(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x} \\ &= -k^2 A \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie analog die zweite partielle Ableitung von y nach t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(A \sin(kx - \omega t)) \\ &= A \cos(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} \\ &= -\omega A \cos(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(-\omega A \cos(kx - \omega t)) \\ &= +\omega A \sin(kx - \omega t) \frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} \\ &= -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

3. Setzen Sie diese Ergebnisse in Gleichung 12.10b ein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ -k^2 A \sin(kx - \omega t) &= \frac{1}{v^2}(-\omega^2 A \sin(kx - \omega t)) \\ A \sin(kx - \omega t) &= \frac{\omega^2/k^2}{v^2} A \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

4. Die beiden Seiten im Ergebnis von Schritt 3 sind gleich, sofern $(\omega^2/k^2)/v^2 = 1$ gilt:

A sin(kx - ωt) ist eine Lösung der Wellengleichung 12.10b, sofern $(\omega^2/k^2)/v^2 = 1$ gilt, d.h. für $v = \omega/k$.

Plausibilitätsprüfung: Eine beliebige Funktion der Form $y(x - vt)$ erfüllt die Wellengleichung 12.10b. Die harmonische Wellenfunktion $y = A \sin(kx - \omega t)$ ist von der Form $y(x - vt)$, sofern $v = \omega/k$ gilt. Um zu zeigen, dass die harmonische Funktion dann die richtige Form hat, setzen wir anstelle von ω dort kv ein und erhalten $y = A \sin(kx - \omega t) = A \sin(kx - kvt) = A \sin(k(x - vt))$, was tatsächlich von der Form $y(x - vt)$ ist.

Übung 12.3: Zeigen Sie, dass eine beliebige Funktion $y(kx + \omega t)$ die Gleichung 12.10b erfüllt, wenn nur $v = \omega/k$ gilt. ◀

Wie wir bisher gesehen haben, ist die Wellengeschwindigkeit v eine physikalische Größe, die von den dynamischen Bedingungen (Kräften, Spannungen) und von den Materialeigenschaften des Mediums abhängt, in dem die Welle sich ausbreitet. Die Frequenz v (bzw. die Kreisfrequenz ω) ist eine kinematische Größe, die durch die äußeren Anregungsbedingungen der Welle festgelegt wird. Aus der Beziehung zwischen Geschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge ergibt sich, dass für eine sich in einem bestimmten Medium (Luft, Wasser, Stahlsaiten, usw.) ausbreitende harmonische Welle die Wellenlänge umgekehrt proportional zur Frequenz ist. Hochfrequente Wellen haben eine kürzere Wellenlänge als niederfrequente Wellen (in dem gleichen Material). Das trifft zu, solange die Wellengeschwindigkeit in einem Material nicht von der Anregungsfrequenz der Welle abhängt. Im Allgemeinen jedoch zeigt die Ausbreitungsgeschwindigkeit in jedem Stoff eine mehr oder weniger starke Abhängigkeit von der Wellenfrequenz. Man bezeichnet diese Eigenschaft als *Wellendispersion*, und Wellenpakete, die durch Überlagerung von harmonischen Wellen unterschiedlicher Frequenz zusammengesetzt sind, fließen als Folge dieser Dispersionserscheinung auseinander. Ein Wellenberg ändert, während er sich ausbreitet, seine Gestalt. Dispersionserscheinungen werden ausführlicher bei elektromagnetischen Wellen und in der Optik behandelt (Kapitel 28).

In einer harmonischen Welle, die sich längs einer gespannten Saite ausbreitet und durch die Funktion $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

beschrieben wird, besitzt ein Punkt (x, y) der schwingenden Saite die Geschwindigkeit

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A \sin(kx - \omega t)) = -\omega A \cos(kx - \omega t). \quad (12.18)$$

TRANSVERSAL GE SCHWINDIGKEIT

Die Beschleunigung dieses Punkts ist durch $\partial^2 y / \partial t^2$ gegeben.

Die charakteristischen Größen einer harmonischen Welle werden in Beispiel 12.5 berechnet.

Beispiel 12.5: Eine harmonische Welle auf einer Saite

Die Wellenfunktion einer harmonischen Welle auf einer Saite ist

$$y(x, t) = (0,030 \text{ m}) \cdot \sin((2,2 \text{ m}^{-1})x - (3,5 \text{ s}^{-1})t).$$

- a) In welche Richtung breitet sich die Welle aus, und wie groß ist ihre Geschwindigkeit? b) Ermitteln Sie Wellenlänge, Frequenz und Schwingungsdauer der Welle. c) Wie groß ist die maximale Auslenkung für einen Punkt auf der Saite? d) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit von einem beliebigen Punkt auf der Saite?

Problembeschreibung: a) Um die Ausbreitungsrichtung der Welle zu finden, schreibt man $y(x, t)$ entweder als Funktion von $(x - vt)$ oder als Funktion von $(x + vt)$ und wendet die Gleichungen 12.1 und 12.2 an. Die Wellengeschwindigkeit erhält man aus $\omega = k v$ (Gleichung 12.16). b) Wellenlänge, Frequenz und Schwingungsdauer lassen sich aus der Wellenzahl k und der Kreisfrequenz ω der Welle berechnen. c) Die maximale Auslenkung eines Punkts auf der Saite ist die Amplitude A . d) Die Geschwindigkeit eines Punkts auf der Saite ist $\partial y / \partial t$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die gegebene Wellenfunktion ist von der Form $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$. Mit $\omega = k v$ (Gleichung 12.16) lässt sich die Wellenfunktion als Funktion von $(x - vt)$ schreiben. Mit den Gleichungen 12.1 und 12.2 findet man die Ausbreitungsrichtung der Welle:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad \text{und} \quad \omega = k v$$

ergibt

$$y(x, t) = A \sin(kx - kvt) = A \sin(k(x - vt))$$

Die Welle breitet sich in $+x$ -Richtung aus.

2. Da die Wellenfunktion vom Typ $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ ist, kennen wir auch A und die beiden Größen ω und k . Bestimmen Sie mit diesen Größen die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{k} \\ &= \frac{3,5 \text{ s}^{-1}}{2,2 \text{ m}^{-1}} = 1,59 \text{ m/s} = \boxed{1,6 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die Wellenlänge λ ist mit der Wellenzahl k , die Schwingungsdauer T sowie die Frequenz v sind mit der Kreisfrequenz ω verknüpft:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2,2 \text{ m}^{-1}} = 2,86 \text{ m} = \boxed{2,9 \text{ m}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3,5 \text{ s}^{-1}} = 1,80 \text{ s} = \boxed{1,8 \text{ s}} \\ v &= \frac{1}{T} = \frac{1}{1,80 \text{ s}} = 0,557 \text{ Hz} = \boxed{0,56 \text{ Hz}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die maximale Auslenkung eines Punkts auf der Saite ist die Amplitude A :

$$A = \boxed{0,030 \text{ m}}$$

Teilaufgabe d

1. Berechnen Sie $\partial y / \partial t$ und geben Sie die Geschwindigkeit eines Punkts auf der Saite an:

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (0,030 \text{ m}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sin((2,2 \text{ m}^{-1})x - (3,5 \text{ s}^{-1})t) \\ &= (0,030 \text{ m}) \cdot (-3,5 \text{ s}^{-1}) \\ &\quad \cdot \cos((2,2 \text{ m}^{-1})x - (3,5 \text{ s}^{-1})t) \\ &= -(0,105 \text{ m/s}) \cdot \cos((2,2 \text{ m}^{-1})x - (3,5 \text{ s}^{-1})t) \end{aligned}$$

2. Die transversale Geschwindigkeit eines Punkts auf der Saite wird maximal, wenn die Kosinusfunktion den Wert ± 1 hat:

$$v_{y,\max} = 1,05 \text{ m/s} = \boxed{1,1 \text{ m/s}}$$

Plausibilitätsprüfung: In dieser Rechnung wurden die Einheiten mit einbezogen, um exemplarisch zu zeigen, wie man damit arbeitet. Die Einheitenrechnung dient gleichzeitig als Plausibilitätsbetrachtung. Später werden wir auf die Einheiten in den Rechnungen verzichten, wenn keine Verwechslungen möglich sind. Die Formeln werden dadurch übersichtlicher, und die Schreibweise vereinfacht sich. Beachten Sie aber, innerhalb einer Rechnung stets denselben Einheitsatz zu verwenden (z. B. m, kg, s); bei einem Einheitenwechsel müssen Sie die Umrechnungsfaktoren zwischen den Einheiten berücksichtigen. ■

Harmonische Schallwellen

In Gleichung 12.15 beschreibt $y(x, t)$ eine harmonische Welle, bei der sich die schwingenden Teilchen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bewegen (Transversalwelle). Schallwellen in Luft und Flüssigkeiten dagegen sind Longitudinalwellen (nur in Festkörpern, z. B. Kristallen, treten longitudinale und transversale – und kompliziertere – Schallwellen auf). Um eine solche longitudinale Schallwelle in Luft mathematisch zu beschreiben, bezeichnen wir in Gleichung 12.15 die Auslenkung der Moleküle aus ihrer Gleichgewichtslage mit $s(x, t)$; dann lässt sich eine harmonische Schallwelle darstellen durch

$$s(x, t) = s_{\max} \sin(kx - \omega t). \quad (12.19)$$

Darin ist s_{\max} die Amplitude, k die Wellenzahl, ω die Kreisfrequenz und x die Koordinate in Ausbreitungsrichtung der Welle.

Da die Schallwelle in Luft eine longitudinale Wellenbewegung ist, erfolgen die Auslenkungen der Luftmoleküle längs der Bewegungsrichtung der Welle und führen zu Schwankungen in der Dichte und im Druck der Luft. Abbildung 12.13 zeigt die Auslenkung von Luftmolekülen und die Dichteänderungen, die durch eine Schallwelle zu einem festen Zeitpunkt hervorgerufen werden. In einem Gas sind Druck und Dichte proportional zueinander. Deshalb sind die Druckmaxima in der Welle auch gleichzeitig Dichtemaxima. Die Druckmaxima fallen jedoch nicht mit den größten Auslenkungen der Luftmoleküle zusammen. Den Abbildungen 12.13a und 12.13e entnehmen wir, dass die Druck- bzw. Dichtewelle um 90° gegen die Auslenkungswelle phasenverschoben sind. (In Rechnungen drücken wir die Argumente der Sinus- und der Kosinusfunktion im Bogenmaß (rad) aus. Bei Beschreibungen hingegen sprechen wir in der Regel von einer Phasenverschiebung „um 90° “ statt „um $\pi/2$ “.) An den Punkten, an denen die Auslenkung null ist (z. B. in x_1 oder x_3), sind der Druck bzw. die Dichte maximal oder minimal; wo umgekehrt die Auslenkung maximal (z. B. bei x_2) oder minimal ist (z. B. bei x_4), sind Druck- und Dichteänderung gleich null. Eine Auslenkungswelle führt so zu einer Druckwelle gemäß

$$p(x, t) = p_{\max} \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}) = -p_{\max} \cos(kx - \omega t). \quad (12.20)$$

Darin ist $p(x, t)$ eine Druckänderung bezüglich des Gleichgewichtsdrucks; die Größe p_{\max} , der Maximalwert dieser Änderung, wird als Druckamplitude bezeichnet. Man kann zeigen, dass die Druckamplitude p_{\max} und die Auslenkungsamplitude s_{\max} durch

$$p_{\max} = \rho_0 \omega v s_{\max} \quad (12.21)$$

verbunden sind. Darin ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und ρ_0 die Gleichgewichtsdichte des Gases. In der (harmonischen) Schallwelle werden die Luftmoleküle periodisch gegeneinander verschoben, und Druck und Dichte ändern sich räumlich und zeitlich sinusförmig. Eine charakteristische Größe für die räumliche Änderung ist die Wellenzahl k , und für die zeitliche Änderung ist es die Kreisfrequenz ω , die durch die Frequenz der schwingenden Wellenquelle festgelegt wird.

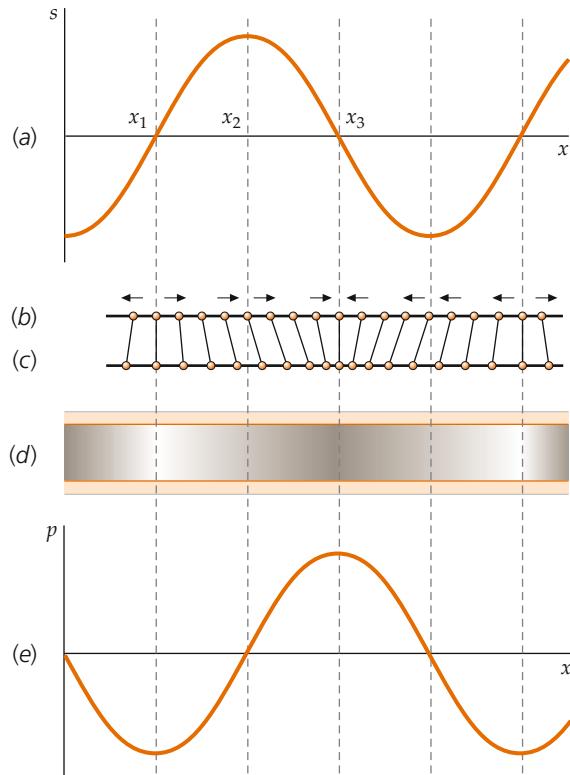


Abbildung 12.13 a) Auslenkung der Luftmoleküle aus der Gleichgewichtslage in einer harmonischen Schallwelle als Funktion der Ortskoordinate x zu einem festen Zeitpunkt. Die Teilabbildungen b bis e beziehen sich auf diese Momentaufnahme. In den Punkten x_1 und x_3 befinden sich die Moleküle in der Gleichgewichtslage, im Punkt x_2 ist die Auslenkung maximal. b) Einige repräsentative Moleküle an ihren Gleichgewichtslagen vor dem Eintreffen der Schallwelle. Die Pfeile kennzeichnen die Richtungen, in die sie die Schallwelle bewegen wird. c) Die Positionen der Moleküle in der Nähe der Punkte x_1 , x_2 und x_3 , nachdem die Schallwelle eingetroffen ist. Links von x_1 ist die Auslenkung negativ (Bewegung nach links), rechts davon positiv (Bewegung nach rechts). Das bedeutet, dass die dem Punkt x_1 benachbarten Gasmoleküle sich voneinander entfernen und sich damit die Dichte verringert (siehe Teilabbildung d). Die Dichte hat in x_1 ein Minimum, weil sich die Gasmoleküle auf beiden Seiten von diesem Punkt entfernen. Am Punkt x_3 hat die Dichte ein Maximum, weil die Moleküle auf beiden Seiten zu ihm hin verschoben werden. Am Punkt x_2 ändert sich die Dichte nicht, da die Gasmoleküle auf beiden Seiten dieses Punkts gleichgerichtet um denselben Betrag verschoben werden. d) Dichte der Luft in der harmonischen Schallwelle zu dem in Teilabbildung a gewählten Zeitpunkt. Die Dichte hat ein Maximum bei x_3 und ein Minimum bei x_1 , genau an den Punkten, an denen die Auslenkungen null sind. In x_2 hat die Dichte den Wert ρ_0 entsprechend dem Gleichgewichtswert, aber die Auslenkung der Moleküle ist maximal. e) Die Druckänderung, die proportional der Dichteänderung ist, in Abhängigkeit vom Ort. Die Druckänderung und die Auslenkung (Ortsänderung) sind um 90° gegeneinander phasenverschoben.

Übung 12.4: Der Mensch kann Schall in einem Frequenzbereich von ungefähr 20 Hz bis fast 20 000 Hz hören (ältere Menschen meist jedoch nur bis 15 000 Hz). Wie groß sind die Wellenlängen, die diesen extremen Frequenzen entsprechen, wenn die Schallgeschwindigkeit in Luft 343 m/s beträgt? ◀

Elektromagnetische Wellen

Elektromagnetische Wellen umfassen Wellen längs Hochspannungsleitungen, Radiowellen (Langwellen, Mittelwellen, Kurzwellen und ultrakurze Wellen), Mikrowellen, Licht (Infrarot, sichtbarer Bereich, ultravioletter Bereich), Röntgen- und Gammastrahlung. Diese unterschiedlichen Arten elektromagnetischer Wellen unterscheiden sich in ihrer Frequenz und damit auch in der Wellenlänge. Anders als mechanische Wellen erfordern elektromagnetische Wellen kein Ausbreitungsmedium. Sie bewegen sich mit der Lichtgeschwindigkeit c durch das Vakuum; diese universelle Konstante nennt man die Vakuumlichtgeschwindigkeit, ihr Wert ist näherungsweise gleich $3 \cdot 10^8$ m/s. Die Wellenfunktionen für eine elektromagnetische Welle in x -Richtung sind ein elektrisches Feld $\mathbf{E}(x, t)$ und ein damit gekoppeltes magnetisches Feld $\mathbf{B}(x, t)$. (Eine Wellengleichung, ähnlich der für Saiten- und Schallwellen, werden wir aus den Grundgesetzen des Elektromagnetismus – den sogenannten Maxwell'schen Gleichungen – in Kapitel 27 für die beiden Felder herleiten.) In elektromagnetischen Wellen im Vakuum stehen elektrisches Feld und magnetisches Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle und senkrecht zueinander. Sie bilden ein rechtshändiges Orthogonalsystem. Hier sind elektromagnetische Wellen *Transversalwellen*.

Elektromagnetische Wellen entstehen, wenn freie elektrische Ladungen beschleunigt werden, bei der Schwingung von elektrischen Dipolen oder durch elektronische Energieübergänge in Atomen, Molekülen und Festkörpern. Radiowellen mit Frequenzen von etwa 1 MHz bei Amplitudenmodulation (AM) und 100 MHz bei Frequenzmodulation (FM) werden durch (makroskopische) elektrische Ströme erzeugt, die in Radioantennen schwingen. Die Frequenz der abgestrahlten Wellen ist gleich der Frequenz der schwingenden Ladungen. Lichtwellen mit Frequenzen in der Größenordnung von 10^{14} Hz werden im Allgemeinen durch atomare oder molekulare Übergänge erzeugt, also durch inneratomare gebundene Elektronen. Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen wird in Kapitel 28 diskutiert.

12.3 Energietransport und Intensität einer Welle

Eine Welle, die sich längs einer Saite ausbreitet, transportiert in ihrer Ausbreitungsrichtung mechanische Energie. Wir betrachten dazu eine gespannte Saite, die an einem Ende mit einer Stimmgabel verbunden ist. Wenn die Stimmgabel vibriert, besitzt sie mechanische Schwingungsenergie, die auf das angrenzende Saitensegment übertragen wird. Wenn sich die Stimmgabel aus ihrer Gleichgewichtslage beispielsweise so bewegt, dass sie die Saite streckt, dann nimmt die elastische potentielle Energie des angrenzenden Saitensegments zu. Ferner bremst sich die Bewegung der Stimmgabel ab, wenn sie aus ihrer Gleichgewichtslage nach oben schwingt, und bremst damit auch die Bewegung des angrenzenden Saitensegments. Somit wird die kinetische Energie des Segments verringert. Wenn die

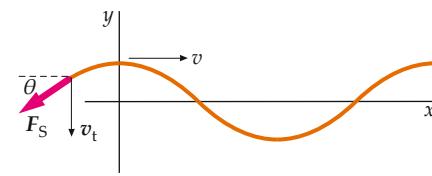


Abbildung 12.14 Momentaufnahme einer harmonischen Welle, die sich längs der Saite in positiver x -Richtung ausbreitet. Die am linken Saitenende angreifende Spannkraft \mathbf{F}_S hat eine Komponente in Richtung der Transversalgeschwindigkeit v_t . Die von der Kraft in dem gezeigten Moment verrichtete Arbeit hat daher einen positiven Betrag.

Welle sich entlang der Saite bewegt, wird auf ähnliche Weise Energie von einem Segment der Saite auf das benachbarte Segment übertragen.

Überträgt die Welle in der Zeit Δt die Energie ΔE_{mech} , dann ist die durch die Welle übertragene (mittlere) Leistung der Quotient $\Delta E_{\text{mech}}/\Delta t$. Wir berechnen die übertragene Leistung am Beispiel der Ausbreitung einer harmonischen Welle längs einer gespannten Saite und betrachten dazu die Kraft, die ein Segment der Saite auf ein benachbartes Segment ausübt. Abbildung 12.14 zeigt die Momentaufnahme einer harmonischen Welle, die sich auf der Saite nach rechts ausbreitet. Die Wellenfunktion hat somit die Form

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t). \quad (12.22)$$

Bezeichnet v_t die Transversalgeschwindigkeit dieses Saitensegments, dann ist die durch die Spannkraft \mathbf{F}_S verrichtete Leistung P nach Gleichung 5.14 durch $P = \mathbf{F}_S \cdot \mathbf{v}_t$ gegeben. Für die Berechnung des Skalarprodukts zerlegen wir die Zugkraft und die Transversalgeschwindigkeit in Komponenten bezüglich \hat{x} und \hat{y} . Dann haben wir $\mathbf{F}_S = F_{S,x} \hat{x} + F_{S,y} \hat{y}$ und $\mathbf{v}_t = v_y \hat{y}$. Somit folgt für die Leistung $P = F_{S,y} v_y$. Die Transversalgeschwindigkeit der harmonischen Welle wurde in Gleichung 12.18 angegeben, und die y -Komponente $F_{S,y}$ der Spannkraft ist aus Abbildung 12.14 abzulesen: $F_{S,y} = -|\mathbf{F}_S| \sin \theta$. Für kleine Amplituden der harmonischen Welle können wir die Kleinwinkelapproximation mit $\sin \theta \approx \tan \theta$ anwenden und erhalten $F_{S,y} \approx -|\mathbf{F}_S| \tan \theta$. Da $\tan \theta$ den Anstieg der harmonischen Wellenfunktion $y(x, t)$ für $t = \text{konstant}$ angibt, gilt $\tan \theta = \partial y / \partial x$. Zusammenfassend ergibt sich für die Leistung

$$P = F_{S,y} v_y \approx -|\mathbf{F}_S| \tan \theta v_y = -|\mathbf{F}_S| \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (12.23)$$

Wenden wir diese Gleichung auf eine harmonische Welle an (indem wir die Ableitungen von Gleichung 12.22 bilden), haben wir

$$\begin{aligned} P &= -|\mathbf{F}_S| (k \cos(kx - \omega t)) (-A \omega \cos(kx - \omega t)) \\ &= |\mathbf{F}_S| k \omega A^2 \cos^2(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Mit $v = \sqrt{|\mathbf{F}_S|/\mu}$ (Gleichung 12.3) und $v = \omega/k$ (Gleichung 12.16) folgt für die Leistung

$$P = \mu v \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad (12.24)$$

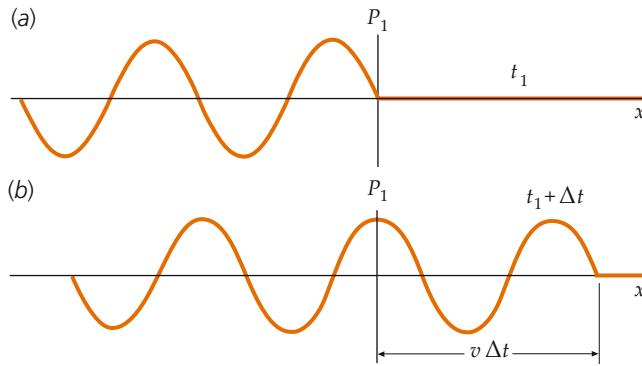


Abbildung 12.15 Der Energietransport durch eine fortschreitende Welle. a) Zum Zeitpunkt t_1 trifft die harmonische Welle am Punkt P_1 ein. b) Während der Zeit Δt fließt durch den Punkt P_1 die Energie $\langle \Delta E \rangle$, und die Welle hat sich um die Strecke $v \Delta t$ nach rechts bewegt.

mit der Wellengeschwindigkeit v . Die mittlere Leistung (bestimmt über eine volle Periode T der Wellenbewegung bei konstantem x) ist dann

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2. \quad (12.25)$$

MITTLERE LEISTUNG EINER WELLE ÜBER EINE PERIODE T

Dies gilt, da der zeitliche Mittelwert von $\cos^2(kx - \omega t)$ über die Schwingungsdauer T den Wert $\frac{1}{2}$ ergibt.

Die Energie breite sich längs der Saite mit der Wellengeschwindigkeit v aus; die mittlere Energie $\langle \Delta E \rangle$ der Welle, die während der Zeit Δt durch einen Punkt P_1 der Saite fließt (Abbildungen 12.15a und 12.15b), ist demnach

$$\langle \Delta E \rangle = \langle P \rangle \Delta t = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \Delta t.$$

Diese Energie der Welle verteilt sich über den „Wellenbereich“ $\Delta x = v \Delta t$. Die mittlere Energie, die in einer Saite der Länge Δx steckt, ist also

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x. \quad (12.26)$$

MITTLERE ENERGIE EINER SAITE DER LÄNGE Δx

Beachten Sie, dass sowohl die mittlere Leistung als auch die mittlere Energie pro Einheitslänge proportional zum Quadrat der Amplitude und zum Quadrat der Frequenz der Welle sind.

Die Gesamtenergie einer Welle auf einer Saite wird in Beispiel 12.6 behandelt.

Beispiel 12.6: Energieübertragung einer Welle auf einer Saite

Auf einer $l = 60\text{ m}$ langen Saite mit einer Gesamtmasse von 320 g , die mit einer Kraft von $F_S = 12\text{ N}$ gespannt ist, bewegt sich eine harmonische Welle mit der Wellenlänge von 25 cm und einer Amplitude von $1,2\text{ cm}$. a) Wie groß sind die Wellengeschwindigkeit und die Kreisfrequenz der Welle? b) Wie groß ist die mittlere transportierte Energie für einen Wellenzug von 15 m Länge?

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit der Welle ist $v = \sqrt{|F_S|/\mu}$; darin ist $|F_S|$ gegeben, für die lineare Massendichte gilt $\mu = m/l$. Die Kreisfrequenz der Welle bestimmen wir aus $\omega = 2\pi\nu$ mit $\nu = v/\lambda$. Die Energie lässt sich über $\langle \Delta E \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x$ (Gleichung 12.26) berechnen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Geschwindigkeit ist mit der Zugkraft in der Saite und der Massendichte verknüpft:

$$v = \sqrt{\frac{|F_S|}{\mu}} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{m}{l}$$

2. Berechnen Sie die Wellengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{|F_S| l}{m}} = \sqrt{\frac{(12\text{ N}) \cdot (60\text{ m})}{(0,32\text{ kg})}} \\ &= 47,4\text{ m/s} = \boxed{47\text{ m/s}} \end{aligned}$$

3. Die Kreisfrequenz der Welle lässt sich aus der Frequenz bestimmen, die wiederum von der Wellengeschwindigkeit und der Wellenlänge abhängt:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi\nu = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi \frac{47,4\text{ m/s}}{0,25\text{ m}} \\ &= 1190\text{ s}^{-1} = \boxed{1200\text{ s}^{-1}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die mittlere transportierte Energie der Welle auf der Saite ergibt sich nach Gleichung 12.26:

$$\begin{aligned} \langle \Delta E \rangle &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \omega^2 A^2 \Delta x \\ &= \frac{1}{2} \frac{0,32\text{ kg}}{60\text{ m}} \cdot (1190\text{ s}^{-1})^2 \cdot (0,012\text{ m})^2 \cdot (15\text{ m}) \\ &= 8,19\text{ J} = \boxed{8,2\text{ J}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Einheiten für die mittlere Leistung in Aufgabenteil b sind

$$1 \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \text{m}^3}{\text{m}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{N} \cdot \text{m} = 1 \text{J}.$$

Dabei haben wir den Zusammenhang $1 \text{N} = 1 \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ genutzt. Die Einheitenrechnung geht auf, das Ergebnis von Teilaufgabe b ist demnach plausibel.

Übung 12.5: Berechnen Sie die Leistung, die durch die Welle auf der Saite übertragen wird. ▶ ■

Energie von Schallwellen

Die mittlere Energie eines harmonischen Wellenzugs in einem Volumenelement ΔV ist durch Gleichung 12.26 gegeben. Für eine Schallwelle ist darin $\mu \Delta x$ durch $\rho_0 \Delta V$ mit ρ_0 als der mittleren Dichte des Mediums und die Amplitude A durch s_{\max} zu ersetzen. Damit erhalten wir

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 \Delta V. \quad (12.27)$$

Dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch ΔV , folgt die mittlere Energiedichte $\langle w \rangle$ mit

$$\langle w \rangle = \frac{\langle \Delta E \rangle}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2. \quad (12.28)$$

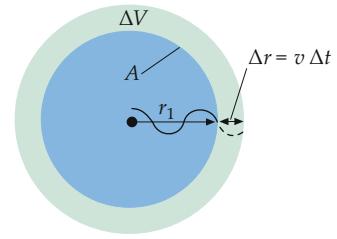
Intensität einer Welle

Wenn eine punktförmige Quelle in einem homogenen Medium Wellen gleichmäßig in alle Richtungen abstrahlt, wird die durch die Wellen übertragene Energie in einem Abstand r von der Quelle gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche vom Radius r und der Fläche $A = 4\pi r^2$ verteilt. Bezeichnet P die von der Quelle auf eine Fläche A abgestrahlte Leistung, dann wird die **Leistungsdichte** als Quotient P/A definiert. Die Leistungsdichte einer punktförmigen Wellenquelle auf einer Kugelfläche im Abstand r von der Quelle ist dann $P/(4\pi r^2)$. Mit zunehmender Entfernung r nimmt die Leistungsdichte quadratisch ab. Die **mittlere Leistungsdichte**, die auf eine Fläche A senkrecht zur Ausbreitungsrichtung auftrifft, bezeichnet man als **Intensität** der Welle:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{A}. \quad (12.29)$$

DEFINITION DER INTENSITÄT EINER WELLE

Die Einheit der Intensität ist Watt pro Quadratmeter (W/m^2). Im Abstand r von einer punktförmigen Quelle ist die Intensität der Welle



Volumen der Kugelschale = $\Delta V = A \Delta r = Av \Delta t$

Abbildung 12.16 Zur Intensität und Energiedichte einer Kugelwelle. Zur Zeit t_1 hat die Kugelwelle gerade die Kugelschale mit dem Radius r_1 erreicht. Während der Zeit Δt breitet sich die Welle in die Kugelschale der Dicke $\Delta r = v \Delta t$ aus.

$$I = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}. \quad (12.30)$$

WELLENINTENSITÄT EINER PUNKTQUELLE IM ABSTAND r

Die Intensität einer dreidimensionalen Welle ändert sich umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstands von der Punktquelle.

Zwischen der Intensität einer Welle (d. h. der mittleren Leistung pro Fläche) und der Energiedichte in dem Ausbreitungsmedium (d. h. der Energie pro Volumen) gibt es einen einfachen Zusammenhang. Dazu ermitteln wir die mit der Wellenausbreitung transportierte mittlere Energie. Wir setzen voraus, dass die punktförmige Wellenquelle im Inneren eines homogenen Mediums kontinuierlich harmonische Wellen erzeugt. Abbildung 12.16 zeigt eine Kugelwelle, die zu einem Zeitpunkt t_1 gerade die Kugelschale mit dem Radius r_1 erreicht hat. Die Gesamtenergie der Welle ist in der Kugel mit dem Radius r_1 enthalten. Der Bereich außerhalb dieser Kugelschale enthält bis zum Zeitpunkt t_1 keine Wellenenergie, da die Welle noch nicht in diesen Bereich vorgedrungen ist. Breitet sich nun die Welle in der Zeit Δt in die Kugelschale der Dicke $\Delta r = v \Delta t$ aus, dann wird durch die Kugeloberfläche mit dem Radius r_1 die Energie $\langle w \rangle \Delta V$ transportiert; dabei ist $\langle w \rangle$ die mittlere Energiedichte in der Kugelschale und $\Delta V = A \Delta r = 4\pi r_1^2 \Delta r = 4\pi r_1^2 v \Delta t$ das Volumen der Kugelschale. Die mittlere Energie der Kugelschale ist also

$$\langle \Delta E \rangle = \langle w \rangle \Delta V = \langle w \rangle A v \Delta t.$$

Durch die Fläche $A = 4\pi r_1^2$ wird die mittlere Leistung

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \Delta E \rangle}{\Delta t} = \langle w \rangle A v$$

transportiert, und die Intensität der Welle ist somit

$$I = \frac{\langle P \rangle}{A} = \langle w \rangle v. \quad (12.31)$$

Die Intensität der Welle ist gleich dem Produkt aus der Wellengeschwindigkeit v und der mittleren Energiedichte $\langle w \rangle$.



Schallwellen von einem Telefonhörer, die sich in Luft ausbreiten. Die Wellen wurden durch Abtasten des Raums vor dem Telefonhörer mit einer Lichtquelle sichtbar gemacht, deren Helligkeit durch ein Mikrofon gesteuert wurde. (© Winston E. Kock, *Lasers and Holography*, Dover Publications, New York 1978.)

Wir wollen nun Gleichung 12.31 auf Schallwellen anwenden. Dazu setzen wir die Energiedichte $\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 v$ nach Gleichung 12.28 ein. Dann folgt für die Intensität der Schallwelle

$$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 v = \frac{1}{2} \frac{p_{\max}^2}{\rho_0 v}. \quad (12.32)$$

Dabei haben wir den Zusammenhang mit dem Druck p_{\max} aus Gleichung 12.21 benutzt: $s_{\max} = p_{\max}/(\rho_0 \omega v)$. Das Ergebnis – die Intensität einer Schallwelle ist proportional dem Quadrat der Druckamplitude – ist eine allgemeine Eigenschaft von harmonischen Wellen.

Die Intensität wird bei Schallwellen auch als *Schallintensität* oder *Schallstärke* bezeichnet. Das menschliche Ohr kann Klänge über einen großen Bereich von Schallstärken wahrnehmen. Der Hörbereich erstreckt sich von ungefähr 10^{-12} W/m^2 , der Hörschwelle, bis ungefähr 1 W/m^2 – eine Schallstärke, die als Schmerzschwelle bezeichnet wird. Die Druckschwankungen, die diesen Extremwerten der Intensität entsprechen, betragen etwa $3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ für die Hörschwelle und 30 Pa für die Schmerzschwelle. (Zur Erinnerung: Ein Pascal ist ein Newton pro Quadratmeter.) Die sehr kleinen Druckänderungen in einer Schallwelle überlagern den normalen atmosphärischen Druck von ungefähr 101 kPa , werden von dem menschlichen Ohr aufgenommen und über die Nervenleitungen im Gehirn registriert. Die mit dem Hörprozess gespeicherten Erfahrungen erlauben es, aus einer Vielzahl von unterschiedlichen Frequenzen und Intensitäten selektiv bestimmte Reize zu analysieren.

In Beispiel 12.7 werden die abgestrahlte Leistung und die Schallstärke eines Lautsprechers berechnet.

12.3 Energietransport und Intensität

Beispiel 12.7: Ein Lautsprecher

Eine Lautsprechermembran von 30 cm Durchmesser schwingt bei 1 kHz mit einer Amplitude von $0,020 \text{ mm}$. Unter der Annahme, dass die Luftmoleküle in der unmittelbaren Umgebung der Membran dieselbe Schwingungsamplitude besitzen, bestimmen Sie a) die Druckamplitude unmittelbar vor der Membran, b) die Schallintensität (Schallstärke) vor der Membran und c) die ausgestrahlte akustische Leistung. d) Berechnen Sie die Intensität in $5,0 \text{ m}$ Entfernung vom Lautsprecher, wenn der Schall gleichmäßig in den halbkugelförmigen Raum vor dem Lautsprecher abgestrahlt wird.

Problembeschreibung: a) und b) Die Druckamplitude berechnet man direkt aus $p_{\max} = \rho_0 \omega v s_{\max}$ (Gleichung 12.21), die Intensität aus $I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 v$ (Gleichung 12.32). c) Die abgestrahlte Leistung ist die Intensität, multipliziert mit der Fläche der Membran. d) Die Fläche der Halbkugel vom Radius r ist $2\pi r^2$. Wir können dann Gleichung 12.29 mit $A = 2\pi r^2$ verwenden.

Lösung:

Teilaufgabe a

Gleichung 12.21 verknüpft die Druckamplitude mit der Auslenkungsamplitude, der Frequenz, der Wellengeschwindigkeit und der Luftdichte:

$$\begin{aligned} p_{\max} &= \rho_0 \omega v s_{\max} \\ &= (1,29 \text{ kg/m}^3) \cdot 2\pi (10^3 \text{ Hz}) \cdot (343 \text{ m/s}) \\ &\quad \cdot (2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}) \\ &= 55,6 \text{ N/m}^2 = \boxed{56 \text{ N/m}^2} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die Intensität und die anderen bekannten Größen hängen über Gleichung 12.32 zusammen:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 v \\ &= \frac{1}{2} (1,29 \text{ kg/m}^3) \cdot (2\pi (1,0 \text{ kHz}))^2 \\ &\quad \cdot (2,0 \cdot 10^{-5} \text{ m})^2 \cdot (343 \text{ m/s}) \\ &= 3,494 \text{ W/m}^2 = \boxed{3,5 \text{ W/m}^2} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die (mittlere) Leistung ist gleich der Intensität, multipliziert mit der Fläche der Membran:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= IA = (3,494 \text{ W/m}^2) \cdot \pi \cdot (0,15 \text{ m})^2 \\ &= 0,247 \text{ W} = \boxed{0,25 \text{ W}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe d

Berechnen Sie die Intensität bei $r = 5,0 \text{ m}$. Setzen Sie dabei voraus, dass die Strahlung homogen in der Halbkugel vor dem Lautsprecher verteilt ist:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{A} = \frac{0,247 \text{ W}}{2\pi (5,0 \text{ m})^2} = 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2 = 1,6 \text{ mW/m}^2$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet, ist das Ergebnis von Teilaufgabe d kleiner als das von Teilaufgabe b. (Es ist zu erwarten, dass die Schallstärke unmittelbar vor der Membran am größten ist.)

Weitergedacht: Die Annahme einer gleichmäßigen Strahlung in die vordere Halbkugel ist nicht sehr gut, da die Wellenlänge in diesem Fall ($\lambda = v/f = (343 \text{ m/s})/(1000 \text{ s}^{-1}) = 34,3 \text{ cm}$) klein ist im Vergleich zum Lautsprecherdurchmesser. Ferner gibt es eine Streustrahlung in Rückwärtsrichtung, wie man feststellen kann, wenn man hinter dem Lautsprecher steht. ■

Die Lautsprecher bei einem Rockkonzert können mehr als 100-mal so viel Leistung abgeben wie der Lautsprecher dieses Beispiels.

***Schallintensität und Lautstärke**

Unser Ohr vermag Schallintensitäten über einen Bereich von mehr als zwölf Größenordnungen wahrzunehmen. Unsere Schallempfindlichkeit ist aber nicht proportional zur Schallintensität, sondern hängt logarithmisch von ihr ab. Man definiert daher mithilfe einer logarithmischen Skala den sogenannten **Intensitätspegel** einer Schallwelle. Der Intensitätspegel wird in Dezibel (dB) gemessen:

$$IP = (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{I}{I_0}. \quad (12.33)$$

DEFINITION DES INTENSÄTSPEGELS IN dB

Hierin ist I die Schallintensität und I_0 eine Referenzgröße, die üblicherweise durch die Hörschwelle festgelegt wird:

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2. \quad (12.34)$$

HÖRSCHWELLE

Auf der logarithmischen Lautstärkeskala liegt die *Hörschwelle*

$$HS = (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{I_0}{I_0} = (10 \text{ dB}) \cdot \log 1 = 0 \text{ dB},$$

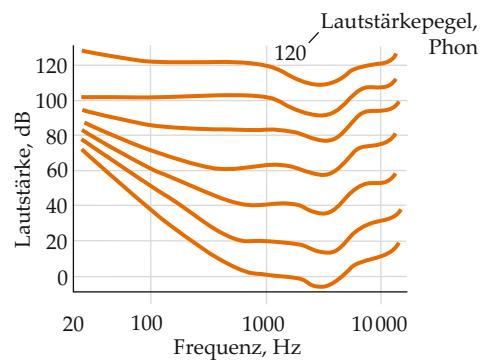


Abbildung 12.17 Kurven gleicher subjektiver Lautstärkeempfindung, statistisch ermittelt. Die unterste Kurve liegt für fast alle Menschen unterhalb der Hörschwelle, nur für etwa 1 % der Bevölkerung ist sie die Hörschwelle. Die zweitniedrigste Kurve beschreibt näherungsweise die Hörschwelle für ungefähr 50 % der Menschheit. Die individuelle Hörschwellenkurve ist außerdem vom Lebensalter abhängig. Die Lautstärke entspricht dem Schalldruckpegel, bei dem ein Sinuston (Einzelton) von 1000 Hz gleich laut empfunden wird.

für die *Schmerzschwelle* (1 W/m^2) folgt

$$\begin{aligned} SS &= (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = (10 \text{ dB}) \cdot \log 10^{12} \\ &= (10 \text{ dB}) \cdot 12 = 120 \text{ dB}. \end{aligned}$$

Tabelle 12.1 listet die relativen Intensitäten einiger üblicher Schallquellen auf.

Die subjektiv empfundene Lautstärke hängt aber nicht nur von der Intensität, sondern auch stark von der Schallfrequenz ab. Töne gleicher Intensität, aber unterschiedlicher Frequenz werden somit nicht als gleich laut empfunden. Abbildung 12.17 zeigt die (statistischen Mittelwerte subjektiv aufgenommener) Kurven gleicher **Lautstärke** in Abhängigkeit von der Frequenz. (In dieser Abbildung wurde die Frequenz auf einer logarithmischen Skala abgetragen, um den breiten Frequenzbereich von 20 Hz bis 10 kHz erfassen zu können.) Die Lautstärke ist physikalisch derjenige Schalldruckpegel, den ein gleich laut empfundener Sinuston mit der Frequenz 1000 Hz aufweist. Das menschliche Ohr ist bei einer Frequenz von ungefähr 4 kHz für alle Lautstärken am empfindlichsten.

Aus den Kurven in Abbildung 12.17 kann man die Lautstärkewerte für die Frequenz von 1000 Hz bestimmen, indem man die zugehörigen Dezibelwerte abliest – sie entsprechen den Phonen der Lautstärken von 1000-Hz-Tönen. (1 phon ist dabei als Einheit des psychoakustischen Lautstärkepegels definiert.) Dann erfasst die unterste Kurve die Hörschwelle (0 phon) und die oberste Kurve die Schmerzschwelle (120 phon). Wie man sieht, erfordern die Frequenzen unter 1000 Hz eine bedeutend größere Intensität, um gerade noch wahrgenommen zu werden, als die Frequenzen über 1000 Hz.

Frage 12.1

Als sein Radio kaputt geht, kauft sich ein Student als Ersatz ein Gerät, dessen Schallleistung P doppelt so hoch ist wie die des

Tabelle 12.1 Relative Intensitäten und Schallintensitätspegel einiger bekannter Schallquellen ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$)

Schallquelle	I/I_0	dB	Beschreibung
	10^0	0	Hörschwelle
Normales Atmen	10^1	10	Kaum hörbar
Raschelnde Blätter	10^2	20	
Leises Flüstern (5 m entfernt)	10^3	30	Sehr leise
Bibliothek	10^4	40	
Ruhiges Büro	10^5	50	Leise
Normale Unterhaltung (1 m entfernt)	10^6	60	
Reger Verkehr	10^7	70	
Bürolärm mit Maschinen, mittlerer Fabriklärm	10^8	80	
Schwertransporter (15 m entfernt), Niagara-Wasserfälle	10^9	90	Dauerbelastung führt zu Hörschäden
Alte Untergrundbahn	10^{10}	100	
Baulärm (3 m entfernt)	10^{11}	110	
Rockkonzert mit Verstärker (2 m entfernt), Starten eines Düsenflugzeugs (60 m entfernt)	10^{12}	120	Schmerzgrenze
Presslufthammer, Maschinengewehrfeuer	10^{13}	130	
Starten eines Düsenflugzeugs (unmittelbare Nähe)	10^{15}	150	
Großes Raketentriebwerk (unmittelbare Nähe)	10^{18}	180	

alten Radios. Er erwartet, damit doppelt so laut Musik hören zu können wie vorher. Wird das neue Radio seine Erwartung erfüllen? Erläutern Sie Ihre Antwort. Berücksichtigen Sie dabei die Proportionalität mit der Intensität $I = \langle P \rangle / (4\pi r^2)$.

Die beiden Beispiele 12.8 und 12.9 illustrieren den Zusammenhang von Schallstärke (d. h. der Intensität der Schallwelle) und dem Schallintensitätspegel bzw. der empfundenen Lautstärke.

Beispiel 12.8: Schalldämpfer

Ein Schallabsorber dämpft den Schallintensitätspegel um 30 dB. Um welchen Faktor hat die Intensität abgenommen?

Problembeschreibung: Schauen Sie sich die Einträge in Tabelle 12.1 genau an und achten Sie auf die Änderungen der Intensität für jede Änderung des Intensitätspegels von 10 dB. Erkennen Sie den Zusammenhang?

Lösung: In Tabelle 12.1 sieht man, dass bei jedem Rückgang des Intensitätspegels um 10 dB die Intensität um einen Faktor 10 abnimmt. Wenn also der Intensitätspegel um 30 dB sinkt, nimmt die Intensität um einen Faktor $10^3 = 1000$ ab.

Plausibilitätsprüfung: Wir können dieses Ergebnis mit dem Resultat vergleichen, das wir durch direkte Anwendung von Gleichung 12.33 erhalten: $\text{IP}_2 - \text{IP}_1 = 10 \log (I_2/I_0) - 10 \log (I_1/I_0) = 10 \log (I_2/I_1)$. Durch Auflösen nach I_2 erhält man $I_2 = 10^{(\text{IP}_2 - \text{IP}_1)/10} I_1$. Setzt

man $\text{IP}_2 - \text{IP}_1 = -30$, so ergibt sich $I_2 = 10^{-3} I_1$, was unser oben gewonnenes Ergebnis bestätigt. ■

Beispiel 12.9: Bellende Hunde

Wenn ein Hund bellt, gibt er eine Schallleistung von etwa 1 mW ab. a) Wie groß ist der Schallintensitätspegel in einer Entfernung von 5 m, wenn man voraussetzt, dass sich die Leistung in alle Richtungen gleichmäßig verteilt und am Boden keine Reflexion auftritt? b) Wie groß ist der Schallintensitätspegel von zwei Hunden, die zur selben Zeit mit je 1 mW Leistung bellten?

Problembeschreibung: Der Schallintensitätspegel ist durch $I = \langle P \rangle / (4\pi r^2)$ gegeben. Für zwei Hunde addieren sich die Intensitäten.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Der Schallintensitätspegel für einen Hund IP_1 ergibt sich nach Gleichung 12.33 aus der Schallintensität I_1 :

$$\text{IP}_1 = (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{I_1}{I_0}$$

2. Berechnen Sie mit $I = \langle P \rangle / (4\pi r^2)$ die Intensität in $r = 5,0 \text{ m}$ Entfernung:

$$I_1 = \frac{\langle P_1 \rangle}{4\pi r^2} = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{4\pi (5,0 \text{ m})^2} = 3,18 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

3. Berechnen Sie mit diesem Ergebnis den Schallintensitätspiegel in 5,0 m Entfernung:

$$\begin{aligned} IP_1 &= (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{I_1}{I_0} \\ &= (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{3,18 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-12}} = [65,0 \text{ dB}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Da I_1 die Intensität *eines* Hundes ist, ergibt sich für die Intensität von zwei Hunden $I_2 = 2I_1$:

$$\begin{aligned} IP_2 &= (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{I_2}{I_0} = (10 \text{ dB}) \cdot \log \frac{2I_1}{I_0} \\ &= (10 \text{ dB}) \cdot \left(\log 2 + \log \frac{I_1}{I_0} \right) = (10 \text{ dB}) \cdot \log 2 + IP_1 \\ &= 3,01 \text{ dB} + 65,0 \text{ dB} = [68,0 \text{ dB}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Teilaufgabe b besagt, dass bei jeder Verdopplung der Schallintensität (hier durch den zweiten Hund) der Schallintensitätspiegel um 3 dB zunimmt. Wir wollen das rechnerisch überprüfen. Dazu ziehen wir die beiden Intensitätspiegel wie in Beispiel 12.8 voneinander ab und lösen nach I_2 auf. Es ergibt sich $I_2 = I_1 \cdot 10^{(IP_2 - IP_1)/(10 \text{ dB})} = I_1 \cdot 10^{0,3} = 2 \cdot I_1$. Unser Ergebnis von Teilaufgabe b ist somit plausibel. ■

Die Quelle schwingt mit der Frequenz ν_Q (d.h., die Schwingungsdauer ist $T_Q = 1/\nu_Q$). Die empfangene Frequenz ν_E , d.h. die Zahl der Wellenberge, die den Empfänger pro Zeiteinheit erreicht, ist

$$\nu_E = \frac{\nu}{\lambda} \quad (\text{ruhender Empfänger}). \quad (12.35)$$

Dabei ist ν die Wellengeschwindigkeit und λ die Wellenlänge (der Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Wellenbergen). Ein Wellenberg verlässt die Quelle zum Zeitpunkt t_1 (Abbildung 12.18), der nächste Wellenberg zum Zeitpunkt t_2 . Zwischen diesen Ereignissen liegt die Zeit $T_Q = t_2 - t_1$, während derer die Quelle und der bei t_1 ausgestrahlte Wellenberg sich um die Strecke $\nu_Q T_Q$ bzw. $v T_Q$ weiterbewegen. Entsprechend ist zum Zeitpunkt t_2 der Abstand zwischen der Quelle und dem bei t_1 emittierten Wellenberg gleich der Wellenlänge λ . Damit wird die Wellenlänge *nach* der Quelle $\lambda = \lambda_n = (\nu + \nu_Q) T_Q$ und *vor* der Quelle $\lambda = \lambda_v = (\nu - \nu_Q) T_Q$, sofern $\nu_Q < \nu$ gilt. (Für den Fall $\nu_Q \geq \nu$ erreichen die Wellenfronten den Bereich vor der bewegten Quelle nicht.) Man kann beide Wellenlängen zusammenfassend durch

$$\lambda_{n,v} = (\nu \pm \nu_Q) T_Q = \frac{\nu \pm \nu_Q}{\nu_Q} \quad (12.36)$$

ausdrücken. Das Minuszeichen gilt für die vor der Quelle laufende Welle ($\lambda = \lambda_v$), das Pluszeichen für die nachlaufende Welle ($\lambda = \lambda_n$). Mit dem Ausdruck für λ aus Gleichung 12.35 ergibt sich

$$\nu_E = \frac{\nu}{\lambda_{n,v}} = \frac{\nu}{\nu \pm \nu_Q} \nu_Q \quad (\text{ruhender Empfänger}). \quad (12.37)$$

Wenn sich der Empfänger relativ zum Medium bewegt, weicht die empfangene Frequenz schon deshalb ab, weil der Empfänger sich in einem gegebenen Zeitraum an mehr oder weniger Wellenbergen vorbei bewegt. Wir bezeichnen mit T_E die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wellenbergen, die an einem mit der Geschwindigkeit v_E bewegten Empfänger ankommen. Dann hat sich jeder Wellenberg während der Zeit zwischen der Ankunft zweier Wellenberge um die Strecke $v T_E$ bewegt; in derselben Zeit hat der Empfänger die Strecke $v_E T_E$ zurückgelegt. Bewegt sich der Empfänger auf die Welle zu (Abbildung 12.19), dann ist die Strecke, die ein Wellenberg zurücklegt, plus der Strecke, um die sich der Empfänger bewegt, gleich der Wellenlänge; es gilt also $v T_E + v_E T_E = \lambda$ bzw. $T_E = \lambda / (\nu + v_E)$. (Bewegt sich der Empfänger mit der Geschwindigkeit $v_E < \nu$ in Ausbreitungsrichtung der Welle, dann erhält man $T_E = \lambda / (\nu - v_E)$.) Wegen $\nu_E = 1/T_E$ folgt

$$\nu_E = \frac{1}{T_E} = \frac{\nu \pm v_E}{\lambda} \quad (12.38)$$

Darin ist das Minuszeichen zu wählen, wenn sich der Empfänger in derselben Richtung wie die Welle bewegt und daher die empfangene Frequenz niedriger ist. Bewegt sich der Empfänger

12.4 Der Doppler-Effekt

Wenn sich eine Wellenquelle und ein Empfänger relativ zueinander bewegen, ist die empfangene Frequenz nicht dieselbe wie die Frequenz der Quelle. Bewegen sie sich aufeinander zu, ist die empfangene Frequenz größer als die Frequenz der Quelle; wenn sie sich voneinander entfernen, ist die empfangene Frequenz kleiner. Diese Frequenzänderung von Quelle und Empfänger bei einer Relativbewegung wird nach ihrem Entdecker, dem österreichischen Physiker Christian Doppler (1803–1853), als **Doppler-Effekt** bezeichnet. Ein bekanntes Beispiel dafür ist die Tonhöhenverschiebung im Motorengeräusch eines vorbeifahrenden Autos.

In der folgenden Diskussion betrachten wir alle Bewegungen von Schallquelle und Schallempfänger relativ zu dem ruhenden Medium, in dem sich der Schall ausbreitet. Die Frequenzänderung ist in geringem Maße davon abhängig, ob sich die Quelle oder der Schallempfänger relativ zum (ruhenden) Medium bewegt. Daher werden wir zunächst eine Quelle, die sich mit der Geschwindigkeit $v_Q \neq 0$ gegenüber dem Medium bewegt, und einen ruhenden Empfänger mit $v_E = 0$ betrachten (Abbildung 12.18). Die Indexbezeichnungen sind Q von Quelle und E von Empfänger.

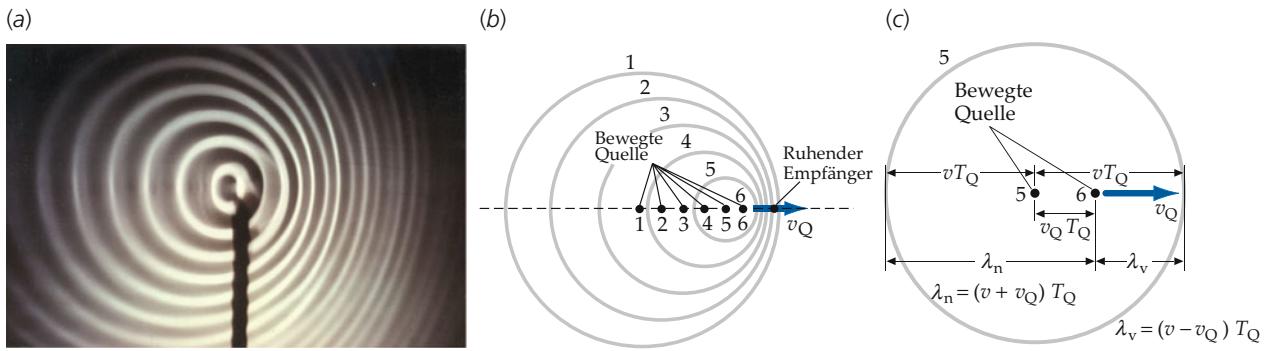


Abbildung 12.18 a) Wellen in einer Wasserwanne, erzeugt durch eine punktförmige Quelle, die sich nach rechts bewegt. Die Wellenfronten liegen vor der Quelle dichter zusammen und hinter ihr weiter auseinander. b) Aufeinanderfolgende Wellenfronten, ausgestrahlt durch eine punktförmige Quelle, die sich mit der Geschwindigkeit v_Q nach rechts bewegt. Die Zahlen an den Wellenfronten entsprechen den Positionen der Quelle, an denen die Welle ausgestrahlt wurde. c) Die Quelle schwingt mit der Schwingungsdauer T_Q . Während der Zeit T_Q bewegt sich die Quelle um eine Strecke $v_Q T_Q$ nach rechts, und die fünfte Wellenfront pflanzt sich um einen Abstand $v T_Q$ fort. Der Abstand zwischen fünfter Wellenfront (Kreis um Punkt 5 als Mittelpunkt) und der sechsten Wellenfront (Kreis um Punkt 6) beträgt vor der Quelle $\lambda_v = (v - v_Q) T_Q$ und hinter der Quelle $\lambda_n = (v + v_Q) T_Q$. Dabei gilt $\lambda_n > \lambda > \lambda_v$. (© Leifi Physik/LMU München.)

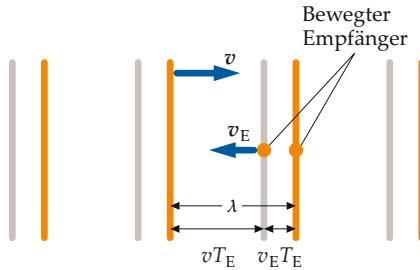


Abbildung 12.19 Zum Doppler-Effekt bei ruhender Quelle und bewegtem Empfänger. Die Zeit zwischen der Ankunft von Wellenbergen ist T_E . Die Wellenberge, die den Empfänger erreichen, sind hier durch orangefarbige Linien dargestellt; wenn der nächste Wellenberg den Empfänger erreicht, sind sie durch graue Linien dargestellt. Während der Zeit T_E bewegt sich der Empfänger um die Strecke $v_E T_E$ weiter, der Wellenberg bewegt sich um die Strecke $v T_E$.

der Welle entgegen, dann ist die Frequenz höher, und es gilt das Pluszeichen.

Die Gleichungen 12.37 und 12.38 lassen sich zusammenfassen zu

$$v_E = \frac{v \pm v_E}{v \pm v_Q} v_Q. \quad (12.39a)$$

Die korrekte Wahl des Plus- oder Minuszeichens wird durch Kenntnis des Zusammenhangs erleichtert, dass die Frequenz zunimmt, wenn sich die Quelle zum Empfänger und wenn sich der Empfänger zur Quelle hin bewegt. Bewegt sich beispielsweise der Empfänger zur ruhenden Quelle hin, wählt man das Pluszeichen im Zähler, was zu einer Zunahme der empfangenen Frequenz führt, denn im Nenner ist $v_Q = 0$ zu setzen. Bewegt sich die Quelle vom ruhenden Empfänger weg, ist das Pluszeichen im Nenner zu nehmen, was zu einer Abnahme der empfangenen Frequenz führt, denn im Zähler ist jetzt $v_E = 0$. Gleichung 12.39a erscheint symmetrischer und ist damit leichter zu merken, wenn man sie auf die folgende Form bringt:

$$\frac{v_E}{v \pm v_E} = \frac{v_Q}{v \pm v_Q}. \quad (12.39b)$$

Es lässt sich zeigen (siehe Aufgabe 12.32), dass – sofern sowohl v_Q als auch v_E wesentlich kleiner sind als die Wellengeschwindigkeit v – die Frequenzverschiebung $\Delta\nu = v_E - v_Q$ näherungsweise gegeben ist durch

$$\frac{\Delta\nu}{v_Q} \approx \pm \frac{v_{\text{rel}}}{v} \quad (v_{\text{rel}} \ll v). \quad (12.40)$$

Dabei ist die Relativgeschwindigkeit $v_{\text{rel}} = v_Q \pm v_E$ die Geschwindigkeit der Quelle relativ zum Empfänger.

Die Gleichungen 12.35 bis 12.40 gelten nur im Bezugssystem des Ausbreitungsmediums.

Alle Gleichungen von 12.35 bis 12.40 wurden für Relativbewegungen von Quelle bzw. Empfänger in Bezug auf ein *ruhendes* Schallmedium hergeleitet. In einem Bezugssystem, in dem sich das Medium bewegt (z. B. das Bezugssystem der Erde als ruhendes System und die bewegte Luft mit der Windgeschwindigkeit v_W als das bewegte Schallmedium), ist die Wellengeschwindigkeit v durch $v^{(W)} = v \pm v_W$ zu ersetzen, wo v_W die Windgeschwindigkeit relativ zur Erde ist und $v^{(W)}$ die Schallgeschwindigkeit im System des Winds, also die Schallgeschwindigkeit bei Windstille.

In Beispiel 12.10 berechnen wir die Frequenzverschiebung sowohl für eine bewegte Quelle und einen ruhenden Empfänger als auch umgekehrt für einen bewegten Empfänger bei ruhender Quelle. Beispiel 12.11 zeigt die doppelte Anwendung des Doppler-Effekts, bei der der Schall einer ruhenden Quelle an einem bewegten Hindernis reflektiert wird.

Vorgehensweise: Die Lösung von Aufgaben zum Doppler-Effekt

Bei Aufgaben zum Doppler-Effekt benutzt man Gleichung 12.39a:

$$v_E = \frac{v \pm v_E}{v \pm v_Q} v_Q .$$

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_Q der Quelle im Bezugssystem des Ausbreitungsmediums.
- Bestimmen Sie die Bewegungsrichtungen von Quelle und Empfänger in demselben Bezugssystem.
- Setzen Sie die Werte in Gleichung 12.39a ein. Sowohl wenn sich die Quelle auf den Empfänger zu bewegt als auch wenn sich der Empfänger auf die Quelle zu bewegt, kommt es zu einer Erhöhung der empfangenen Frequenz. Wenn sich also die Quelle dem Empfänger nähert, wählen Sie das Minuszeichen im Nenner; wenn sich der Empfänger der Quelle nähert, wählen Sie das Pluszeichen im Zähler.
- Wenn die Welle an einem Reflektor reflektiert wird, bevor sie den Empfänger erreicht, betrachten Sie im ersten Schritt den Reflektor als Empfänger und wenden Sie Gleichung 12.39a an, dann betrachten Sie in einem zweiten Schritt den Reflektor als Quelle und wenden erneut Gleichung 12.39a an. Wenn der Abstand zwischen Quelle und dem Empfänger abnimmt, ist die empfangene Frequenz v_E höher als die Frequenz v_Q der Quelle. Nimmt der Abstand zu, ist v_E geringer als v_Q .

Beispiel 12.10: Eine Autohupe

Bei einem Auto beträgt die Frequenz der Autohupe 400 Hz. Das Auto soll mit einer Geschwindigkeit von $v_Q = 34 \text{ m/s}$ (ca. 122 km/h) durch die ruhende Luft hin zu einem ruhenden Empfänger fahren und dauerhupen. Bestimmen Sie a) die Wellenlänge des Schalls, die den Empfänger erreicht, und b) die empfangene Frequenz. Verwenden Sie als Wert für die Schallgeschwindigkeit in Luft 343 m/s. c) Bestimmen Sie auch die Wellenlänge des Schalls, die den Empfänger erreicht, sowie die empfangene Frequenz, wenn das Auto steht und hupt, der Empfänger sich aber mit einer Geschwindigkeit von $v_E = 34 \text{ m/s}$ auf das Auto zu bewegt.

Problembeschreibung: a) Die Wellen vor der Quelle werden verdichtet, sodass wir in $\lambda = (v \pm v_Q)/v_Q$ (Gleichung 12.36) das Minuszeichen benutzen müssen. b) Wir berechnen die empfangene Frequenz mit $v_E = ((v \pm v_E)/(v \pm v_Q)) v_Q$ (Gleichung 12.39a). c) Für einen bewegten Empfänger benutzen wir dieselben Gleichungen wie in den Teilaufgaben a und b.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie mit Gleichung 12.36 die Wellenlänge vor dem Auto. Vor der Quelle ist die Wellenlänge kürzer, so-

dass das entsprechende Vorzeichen zu wählen ist:

$$\begin{aligned} \lambda_v &= \frac{v - v_Q}{v_Q} \\ &= \frac{343 \text{ m/s} - 34 \text{ m/s}}{400 \text{ Hz}} = 0,758 \text{ m} = \boxed{0,76 \text{ m}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie mit Gleichung 12.39a mit $v_E = 0$ die empfangene Frequenz:

$$\begin{aligned} v_E &= \frac{v \pm v_E}{v \pm v_Q} v_Q = \frac{v + 0}{v - v_Q} v_Q \\ &= \frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 34 \text{ m/s}} \cdot (400 \text{ Hz}) = 453 \text{ Hz} = \boxed{450 \text{ Hz}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Berechnen Sie mit Gleichung 12.36 mit $v_Q = 0$ die Wellenlänge vor dem Empfänger:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{v \pm v_Q}{v_Q} \\ &= \frac{343 \text{ m/s} \pm 0}{400 \text{ Hz}} = 0,858 \text{ m} = \boxed{0,86 \text{ m}} \end{aligned}$$

2. Die empfangene Frequenz ist durch Gleichung 12.39a gegeben. Die Quelle nähert sich dem Empfänger, also

verschiebt sich die Frequenz nach oben. Wählen Sie das entsprechende Vorzeichen:

$$\begin{aligned} v_E &= \frac{v \pm v_E}{v \pm v_Q} v_Q = \frac{v + v_E}{v \pm 0} v_Q \\ &= \left(1 + \frac{v_E}{v}\right) v_Q \\ &= \left(1 + \frac{34 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s}}\right) \cdot (400 \text{ Hz}) = [440 \text{ Hz}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Empfänger bewegt sich mit etwa 10 % der Schallgeschwindigkeit, und die empfangene Frequenz ist etwa 10 % höher als die von der Quelle ausgesandte Frequenz; das erscheint plausibel. (Aber Achtung, diese Abschätzung ist eigentlich nur für eine ruhende Quelle möglich!)

Weitergedacht: Die Frequenz v_E für den bewegten Beobachter erhält man auch aus Gleichung 12.38.

Übung 12.6: An einem windstillen Tag nähert sich ein Zug mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h einer am Bahndamm stehenden Person. Der Lokführer betätigt das Warnsignal, das eine Frequenz von 630 Hz hat. a) Welche Wellenlänge haben die Schallwellen vor dem Zug? b) Welche Frequenz hört die am Gleis stehende Person? (Benutzen Sie für die Schallgeschwindigkeit den Wert 343 m/s.) ▀

Beispiel 12.11: Ein Tsunami kommt an Land

Ein Asteroid ist im Meer eingeschlagen und hat einen Tsunami verursacht; beim Auftreffen der Wellen an Land türmten sie sich 10 m hoch auf und haben große Schäden verursacht. Sie arbeiten bei einer Versicherungsgesellschaft, die diese Schäden abwickelt. Ihr Vorgesetzter will wissen, wie schnell die Wellen aufgelaufen sind. An Indizien haben Sie nur das Band von einem Kassettenrekorder, der nach dem Tsunami in einem Baum gefunden wurde, als die Wellen wieder zurückgingen. Auf dem Band ist im Hintergrund das Heulen einer Warnsirene zu hören, dazwischen das schwache Echo der Sirene. Sie messen die Frequenz sowohl der Sirene als auch des Echos. Die Sirene hatte eine Frequenz von 4400 Hz, das Echo von 4000 Hz. Wie schnell bewegte sich also die Welle auf den Strand zu?

Problembeschreibung: Durch einen Anruf bei der Wetterstation finden Sie heraus, dass es windstill war, als der Tsunami an Land ankam. Die Lufttemperatur lag bei 20 °C, die Schallgeschwindigkeit betrug daher 343 m/s.

Wenden Sie zunächst Gleichung 12.39a des Doppler-Effekts an und drücken Sie damit die Frequenz des Schalls, den man auf dem Tsunami hören würde, mithilfe der Geschwindigkeit v_T der Tsunami-Welle aus. Dann wenden Sie die Gleichung erneut an; betrachten Sie nun die Tsunami-Welle als Schallquelle und den Kassettenrekorder als Empfänger. Der Rekorder soll sich nicht bewegen.

Lösung: 1. Wenden Sie die Gleichung für den Doppler-Effekt mit $v_Q = 0$ an und stellen Sie so einen Zusammenhang zwischen der Frequenz v_E (d.h. der Frequenz, die ein Empfänger auf dem Tsunami hören würde) und der Geschwindigkeit v_T des Tsunamis her:

$$v_E = \frac{v \pm v_T}{v \pm v_Q} v_Q = \frac{v + v_T}{v} v_Q$$

2. Wenden Sie nun die Gleichung für den Doppler-Effekt erneut an, diesmal mit $v_E = 0$, und stellen Sie so einen Zusammenhang zwischen der Frequenz v'_E , die der Kassettenrekorder empfängt, und der Geschwindigkeit des Tsunamis her. Verwenden Sie das Ergebnis für v_E aus Schritt 1 als die Frequenz der Tsunami-Welle als Schallquelle:

$$v'_E = \frac{v \pm v_E}{v \pm v_Q} v'_Q = \frac{v}{v - v_T} v_E$$

3. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 1 in das Ergebnis aus Schritt 2 ein und vereinfachen Sie:

$$\begin{aligned} v'_E &= \frac{v}{v - v_T} v_E = \frac{v}{v - v_T} \frac{v + v_T}{v} v_Q \\ v'_E &= \frac{v + v_T}{v - v_T} v_Q \end{aligned}$$

4. Lösen Sie nach v_T auf:

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{v'_E - v_Q}{v'_E + v_Q} v \\ &= \frac{4400 \text{ Hz} - 4000 \text{ Hz}}{4400 \text{ Hz} + 4000 \text{ Hz}} 343 \text{ m/s} = [16,3 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: 16 m/s (knapp 60 km/h) ist etwa doppelt so schnell, wie ein Mensch unter idealen Bedingungen laufen kann. Wenn man sich Videobilder eines Tsunamis anschaut, der an Land ankommt, scheint das ein sehr plausibler Wert zu sein. ▀

Ein weiteres vertrautes Beispiel für die Nutzung des Doppler-Effekts sind die Radarfallen, mit denen die Geschwindigkeit eines Autos gemessen werden kann (Beispiel 12.12). In diesen Anlagen emittiert ein Radarsender elektromagnetische Wellen, die auf das fahrende Auto auftreffen. Das Auto wirkt für die auf-

Beispiel 12.12: Die Radarfalle

ZUR ÜBUNG

Das Radargerät in einem Polizeiwagen sendet elektromagnetische Wellen aus, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten. Der elektrische Strom in der Antenne der Radarquelle schwingt mit der Frequenz ν_Q . Die Wellen werden an einem fahrenden Auto reflektiert, das sich mit der Geschwindigkeit v_{rel} vom Polizeiauto weg bewegt. Es gibt einen Frequenzunterschied $\Delta\nu$ zwischen ν_Q und ν_E , der im Polizeiwagen empfangenen Frequenz. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_{rel} des Autos aus den Werten von ν_Q und $\Delta\nu$.

Problembeschreibung: Die Radarwelle trifft das fahrende Auto mit der Frequenz ν_A . Diese Frequenz ist kleiner als ν_Q , wenn sich das Auto von der Quelle weg bewegt. Die Frequenzverschiebung ist nach Gleichung 12.40 durch $\Delta\nu/\nu = \pm v_{\text{rel}}/c$ gegeben (mit $v = c$). Das Auto wirkt für die reflektierte Welle als eine sich bewegende Quelle, die Wellen der Frequenz ν_A aussendet. Der Empfänger der Radaranlage registriert Wellen der Frequenz $\nu_E < \nu_A$, weil sich die Quelle (das fahrende Auto) vom Polizeiwagen weg bewegt. Die Frequenzverschiebung ist dann $\Delta\nu = \nu_E - \nu_Q$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Stellen Sie die beiden Frequenzdifferenzen zwischen sendendem Polizeiauto und wegfahrendem Auto ($\Delta\nu_1$) und wegfahrendem Auto und empfangendem Polizeiauto ($\Delta\nu_2$) durch ν_Q , ν_A und ν_E dar.

2. Stellen Sie $\Delta\nu_1$ und $\Delta\nu_2$ mithilfe von Gleichung 12.40 dar und setzen Sie die beiden Ausdrücke gleich den Ergebnissen aus Schritt 1.

3. Lösen Sie die erste Gleichung aus Schritt 2 nach ν_A und die zweite nach ν_E auf.

4. Setzen Sie die erste Gleichung aus Schritt 3 in die zweite ein und verwenden Sie im Weiteren nur die Terme linear in v_{rel} , da $(v_{\text{rel}}/c)^2 \ll 1$.

5. Lösen Sie das Ergebnis aus Schritt 4 nach v_{rel} auf und verwenden Sie dabei $\Delta\nu = \nu_E - \nu_Q$.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\Delta\nu_1 = \nu_A - \nu_Q$$

$$\Delta\nu_2 = \nu_E - \nu_A$$

2.

$$\Delta\nu_1 = -\frac{v_{\text{rel}}}{c} \nu_Q = \nu_A - \nu_Q$$

$$\Delta\nu_2 = -\frac{v_{\text{rel}}}{c} \nu_A = \nu_E - \nu_A$$

3.

$$\nu_A = \left(1 - \frac{v_{\text{rel}}}{c}\right) \nu_Q$$

$$\nu_E = \left(1 - \frac{v_{\text{rel}}}{c}\right) \nu_A$$

4.

$$\nu_E = \left(1 - \frac{v_{\text{rel}}}{c}\right)^2 \nu_Q \approx \left(1 - \frac{2v_{\text{rel}}}{c}\right) \nu_Q$$

5.

$$v_{\text{rel}} = -\frac{\Delta\nu}{2\nu_Q} c = \boxed{\frac{|\Delta\nu|}{2\nu_Q} c}$$

Weitergedacht: Der Frequenzunterschied von zwei Wellen nahezu gleicher Frequenz ist leicht zu bestimmen, da die beiden Wellen sich überlagern (interferieren) und so eine Welle erzeugen, deren Amplitude sich mit der Frequenz $|\Delta\nu|$ ändert. Diese Frequenz bezeichnet man als *Schwebungsfrequenz*.

Übung 12.7: Berechnen Sie $|\Delta\nu|$ für $\nu_Q = 1,50 \cdot 10^9$ Hz, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s und $v_{\text{rel}} = 50,0$ m/s. ◀

treffenden Wellen als sich bewegender Empfänger, aber auch als sich bewegende Quelle, wenn die aufgetroffenen Wellen vom Auto in die Radaranlage reflektiert werden. Für elektromagnetische Wellen ist Gleichung 12.39a jedoch nicht anwendbar, da sich die Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten (d.h. $v = c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Hier muss man eine Gleichung für den relativistischen Doppler-Effekt anwenden, der im Anschluss an Beispiel 12.12 kurz und in Abschnitt 31.3 eingehender diskutiert wird. Es lässt sich jedoch die Näherung aus Gleichung 12.40 anwenden, deren Gültigkeitsbedingung $v_{\text{rel}} \ll v$ von elektromagnetischen Wellen ($v = c$) erfüllt wird.

Doppler-Effekt und Relativitätstheorie

Wir haben in Beispiel 12.10 (und in den Gleichungen 12.37, 12.38, 12.39a und 12.39b) gesehen, dass die Größe der Doppler-Frequenzverschiebung davon abhängt, ob sich die Quelle oder der Empfänger relativ zum Medium bewegt. Für Schall sind diese zwei Situationen physikalisch verschieden. Wenn Sie sich beispielsweise relativ zur ruhenden Luft bewegen, fühlen Sie Luft an Ihnen vorbeiströmen: In Ihrem Bezugssystem gibt es einen Wind. Für Schallwellen in Luft gilt das ebenso; je nachdem, ob sich die Quelle oder der Empfänger relativ zur Luft

bewegt, wird der „Wind“ an der Schallquelle oder am Empfänger spürbar sein.

Für Licht und alle elektromagnetischen Wellen, die sich im Raum ausbreiten, gibt es hingegen kein solches Medium. Für sie gibt es keinen „Wind“, aus dem man ablesen könnte, ob sich die Lichtquelle oder der Empfänger bewegt. (Das wurde gegen Ende des 19. Jahrhunderts klar, als A. Michelson und E. Morley vergeblich versuchten, den „Ätherwind“ nachzuweisen.) Nur die Relativbewegung von Quelle und Empfänger ist wichtig. Nach der Einstein'schen Relativitätstheorie kann eine absolute Bewegung nicht bestimmt werden, und alle Beobachter messen dieselbe Lichtgeschwindigkeit c , unabhängig von ihrer Bewegung relativ zur Quelle. Daher kann man Gleichung 12.39a und 12.39b nicht für die Doppler-Verschiebung von Licht anwenden. Um den relativistischen Doppler-Effekt für Licht zu berechnen, sind zwei Modifikationen nötig. Erstens hat die Geschwindigkeit der Wellen, die auf den Empfänger zulaufen, unabhängig von der Bewegung des Empfängers stets denselben Wert c . Zweitens unterscheidet sich das Zeitintervall zwischen der Emission von aufeinanderfolgenden Wellenbergen in den Bezugssystemen: Im Bezugssystem der Quelle ist es einfach die Schwingungsdauer $T_Q = 1/v_Q$, im Bezugssystem des Empfängers hat es wegen der kinematischen Effekte (Zeitdilatation und Längenkontraktion) in der Relativitätstheorie einen anderen Wert. Wir werden den relativistischen Doppler-Effekt in Kapitel 31 eingehend diskutieren und die entsprechenden Formeln herleiten. Hier betrachten wir lediglich das Ergebnis, dass die empfangene Frequenz v_E nur von der Relativgeschwindigkeit v_{rel} zwischen Quelle und Empfänger und von der ausgestrahlten Frequenz v_Q abhängt:

$$v_E = \sqrt{\frac{c \pm v_{\text{rel}}}{c \mp v_{\text{rel}}}} v_Q. \quad (12.41)$$

Die Vorzeichen sind so zu wählen, dass es eine Frequenz erhöhung („Blauverschiebung“) gibt, wenn sich Quelle und Empfänger einander nähern, und eine Verschiebung zu kleineren Frequenzen hin („Rotverschiebung“), wenn sich Quelle und Empfänger voneinander entfernen. (Man wählt die oberen Vorzeichen, wenn sich Quelle und Empfänger nähern, und die unteren Zeichen, wenn sie sich voneinander entfernen.) Für $v_{\text{rel}} \ll c$ ergibt sich die klassische Frequenzverschiebung nach Gleichung 12.40: $\Delta\nu/\nu_Q \approx \pm v_{\text{rel}}/c$.

Stoßwellen

In den Ableitungen der Gleichungen für die Doppler-Verschiebung der Schallwellen wurde angenommen, dass die Geschwindigkeit v_Q der Quelle kleiner war als die Wellengeschwindigkeit v . Wenn sich eine Quelle mit einer Geschwindigkeit bewegt, die größer ist als die Wellengeschwindigkeit, dann gibt es keine Wellen vor der Quelle. Stattdessen häufen sich die Wellen hinter der Quelle an, und deren Wellenfronten erzeugen eine **Stoßwelle**. Bei Schallwellen in Luft wird eine solche Stoßwelle als kurzer explosionsartiger Knall



Stoßwellen von einem Überschallflugzeug. (© Sandia National Laboratory.)

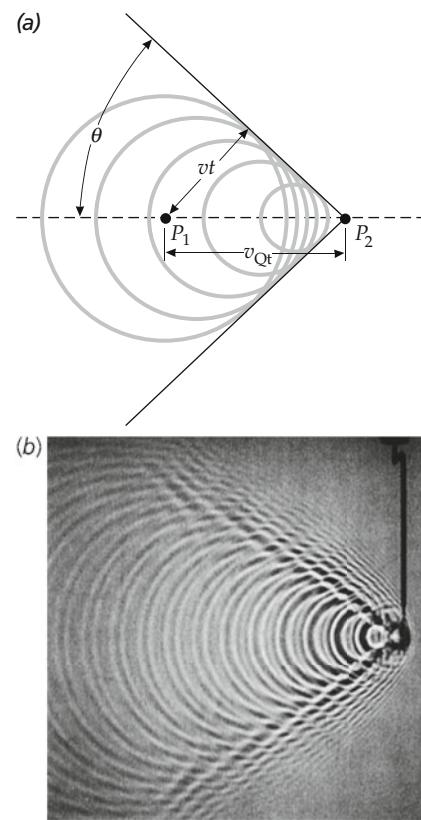


Abbildung 12.20 a) Eine Schallquelle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_Q , die größer ist als die Wellengeschwindigkeit v . Die Einhüllende der Wellenfronten bildet einen sogenannten Mach'schen Kegel mit der Quelle in der Spitze. b) Wellen in einer Wasserwanne, erzeugt durch eine Quelle, die sich mit einer Geschwindigkeit $v_Q > v$ bewegt. (© Educational Development Center.)

(„Überschallknall“) wahrgenommen, wenn sie beim Empfänger eintrifft.

Abbildung 12.20 zeigt eine Quelle, die sich ursprünglich am Punkt P_1 befand und sich mit der Geschwindigkeit v_Q nach rechts bewegt. Nach einer Zeit t hat die vom Punkt P_1 ausgestrahlte Welle einen Weg vt zurückgelegt. Die Quelle hat sich

Beispiel 12.13: Die Schallmauer durchbrechen

ZUR ÜBUNG

Ein Überschallflugzeug fliegt genau nach Osten und überfliegt den Punkt P in 15 km Höhe. Man hört im Punkt P einen Überschallknall, wenn sich das Flugzeug 22 km östlich von P befindet. Wie schnell fliegt das Überschallflugzeug?

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit des Flugzeugs ist mit dem Sinus des Mach-Winkels verknüpft (Gleichung 12.42). Fertigen Sie eine Skizze an, aus der Sie den Mach-Winkel berechnen können.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die Lage des Flugzeugs sowohl in dem Augenblick, in dem man im Punkt P den Überschallknall hört, als auch in dem Moment, in dem der Schall erzeugt wurde (Abbildung 12.21). Tragen Sie den Weg $v \Delta t$ ein, den der Schall zurücklegt, und den Weg $v_Q \Delta t$ des Flugzeugs.

2. Berechnen Sie mithilfe Ihrer Skizze und Gleichung 12.42 die Geschwindigkeit v_Q des Flugzeugs.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

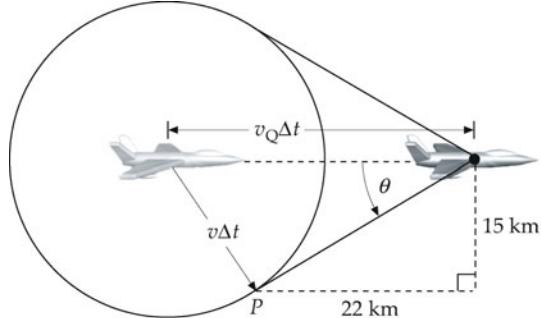


Abbildung 12.21 In der Zeit, in der sich das Flugzeug um $v_{\text{rel}} \Delta t$ bewegt, breitet sich der Schall um $v \Delta t$ aus.

2.

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{15 \text{ km}}{22 \text{ km}} \quad \text{und damit} \quad \theta = 34,3^\circ \\ \sin \theta &= \frac{v \Delta t}{v_Q \Delta t} = \frac{v}{v_Q} \quad \text{und damit} \\ v_Q &= \frac{v}{\sin \theta} = 609 \text{ m/s} = \boxed{610 \text{ m/s}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Schallgeschwindigkeit in Luft beträgt 343 m/s, der berechnete Wert von 610 m/s ist somit für eine Überschallgeschwindigkeit plausibel.

in dieser Zeit um die Strecke $v_Q t$ verschoben und erreicht den Punkt P_2 . Die Linie von dieser neuen Position der Quelle zur emittierten Wellenfront, bei der sich die Quelle am Punkt P_1 befand, schließt mit dem Weg der Quelle einen Winkel θ ein, den sogenannten **Mach-Winkel** mit

$$\sin \theta = \frac{v t}{v_Q t} = \frac{v}{v_Q}. \quad (12.42)$$

Somit wird die Stoßwelle in einem Kegel (dem Mach'schen Kegel) eingeschlossen, der schmäler wird, wenn v_Q zunimmt. Das Verhältnis der Quellgeschwindigkeit v_Q zur Wellengeschwindigkeit v wird **Mach-Zahl** Ma genannt:

$$Ma = \frac{v_Q}{v}. \quad (12.43)$$

Gleichung 12.42 lässt sich auch auf elektromagnetische Strahlung anwenden, die von geladenen Teilchen abgestrahlt wird,

wenn sie sich in einem Medium mit einer Geschwindigkeit bewegen, die größer ist als die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in diesem Medium. Diese Strahlung heißt **Cerenkov-Strahlung**, in der älteren Literatur findet man auch die Schreibweise Tscherenkov-Strahlung. Sie wird beispielsweise als blaues Leuchten an den Brennelementen eines Atomreaktors beobachtet. (Nach der speziellen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, c , die obere Grenze der Teilchengeschwindigkeiten. Die Cerenkov-Strahlung kann daher für Teilchenbewegungen im Vakuum nicht entstehen. In einem Medium wie Glas jedoch ist die Lichtgeschwindigkeit kleiner als c , und es können sich Elektronen und andere Teilchen schneller als die Lichtgeschwindigkeit in diesem Medium bewegen.)

Beispiel 12.13 vermittelt numerische Ergebnisse zu Bewegungen mit Überschallgeschwindigkeit.

12.5 Wellenausbreitung an Hindernissen

Die Ausbreitung von Wellen wird mithilfe der Wellengleichung (Gleichung 12.10b) allgemein beschrieben. Um eine anschaulichere Beschreibung für solche Fälle zu erhalten, in denen die Welle auf ein Hindernis oder auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien trifft, in denen die Ausbreitungsgeschwindigkeit verschieden ist, haben Christiaan Huygens (1629–1695) und Pierre de Fermat (1601–1665) zwei verschiedene, jedoch gleichberechtigte Konstruktionsmöglichkeiten entwickelt, die Wellenausbreitung in solchen Fällen anschaulich zu beschreiben. Wir nennen die beiden Arten das **Huygens'sche Prinzip** und das **Fermat'sche Prinzip**.

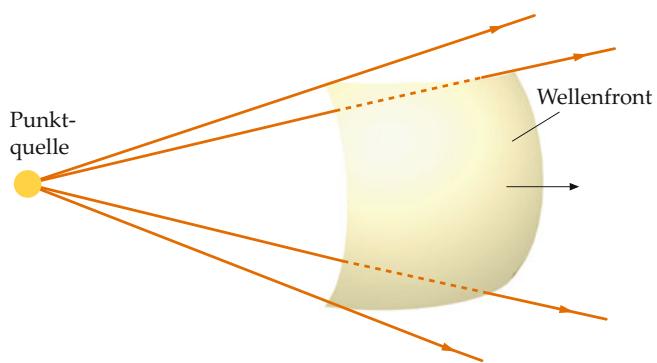


Abbildung 12.22 Eine kugelförmige Wellenfront, die von einer Punktquelle ausgeht.

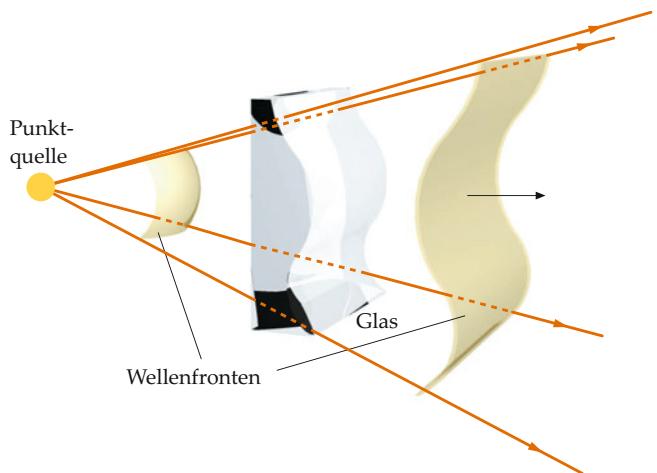


Abbildung 12.23 Die von einer Punktquelle ausgehende Wellenfront vor und nach dem Durchgang durch ein unregelmäßig geformtes Glasstück.

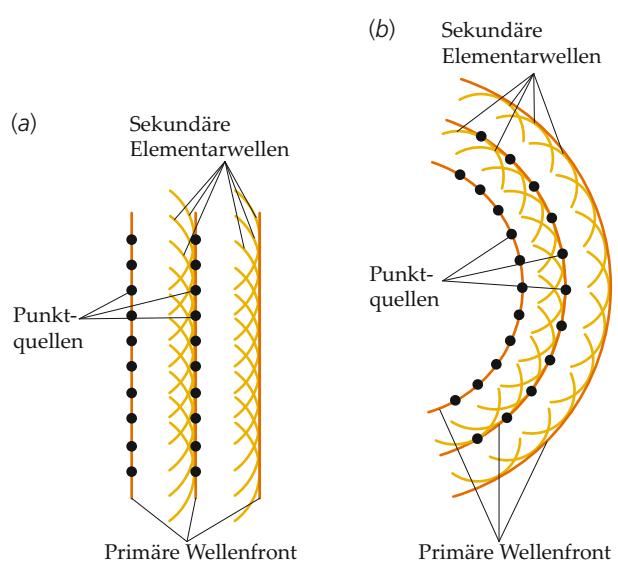


Abbildung 12.24 Die Huygens'sche Konstruktion für die Ausbreitung nach rechts a) einer ebenen Welle und b) einer kugelförmigen oder kreisförmigen Welle.

Das Huygens'sche Prinzip

Abbildung 12.22 zeigt einen Teil einer kugelförmigen Wellenfront, die von einer Punktquelle ausgeht. Die Wellenfront ist der geometrische Ort aller Punkte mit gleicher Phase der Welle. Nehmen wir an, die Wellenfront hat zur Zeit t den Radius r . Dann hat sie zur Zeit $t + \Delta t$ den Radius $r + v \Delta t$; darin ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Wenn aber ein Teil der Welle durch ein Hindernis blockiert wird oder ein anderes Medium durchquert, wie in Abbildung 12.23 gezeigt, dann kann die Position der neuen Wellenfront zur Zeit $t + \Delta t$ nicht so einfach angegeben werden.

Die Ausbreitung einer jeden Wellenfront im Raum kann mithilfe einer geometrischen Methode beschrieben werden, die Huygens um das Jahr 1678 entwickelte. Sie wird heute allgemein als **Huygens'sches Prinzip** bezeichnet:

Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Elementarwelle, die sich mit derselben Geschwindigkeit und Frequenz ausbreitet wie die ursprüngliche Wellenfront im betreffenden Medium. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

HYUGENS'SCHES PRINZIP

Abbildung 12.24 zeigt die Anwendung des Huygens'schen Prinzips auf die Ausbreitung einer ebenen Welle und auf die einer kugelförmigen oder kreisförmigen Welle. Wenn jeder Punkt einer Wellenfront der Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle

ist, muss es auch Wellen in Rückwärtsrichtung geben. Huygens ignorierte diese zurücklaufenden Wellen allerdings.

Das Huygens'sche Prinzip wurde später von Augustin Fresnel modifiziert. Nach seinem Ansatz kann die neue Wellenfront aus der alten Wellenfront durch Überlagerung von Elementarwellen ermittelt werden, und zwar unter Berücksichtigung ihrer relativen Amplituden und Phasen. Noch später konnte Gustav Robert Kirchhoff zeigen, dass das Huygens-Fresnel'sche Prinzip aus der Wellengleichung (Gleichung 12.10b) hervorgeht. Damit verlieh er diesem Prinzip eine sichere mathematische Grundlage. Kirchhoff bewies außerdem, dass die Intensität jeder Elementarwelle vom Winkel abhängt und bei den zurücklaufenden Wellen (mit einem Winkel von 180° zur Ausbreitungsrichtung) null ist.

Wir werden das Huygens'sche Prinzip in Kapitel 28 anwenden, um das Reflexions- und das Brechungsgesetz für Lichtwellen herzuleiten. In diesem Kapitel wollen wir uns lediglich qualitativ mit den Ergebnissen der Fresnel'schen Formeln und einigen ihrer Anwendungsbeispiele befassen.

Das Fermat'sche Prinzip

Die Ausbreitung einer Welle kann auch mithilfe des Fermat'schen Prinzip beschrieben werden:

Der Weg, den die Welle von einem Punkt zu einem anderen einschlägt, ist stets derjenige, bei dem die dafür benötigte Zeitspanne minimal ist.

FERMAT'SCHES PRINZIP

Vollständiger und allgemeiner ist folgende Aussage: Die Ausbreitungszeit hat einen Extremwert bezüglich der Variation des Wegs. Wenn also die Zeit t durch irgendeinen Parameter x ausgedrückt wird, dann wird derjenige Weg eingeschlagen, für den $\frac{dt}{dx} = 0$ ist. Wichtig dabei ist, dass der Zeitbedarf für Wege nahe dem tatsächlichen Weg nur wenig abweicht von dem Zeitbedarf, der für den tatsächlichen Weg benötigt wird.

Der Weg mit dem geringsten Zeitbedarf ist nicht unbedingt der kürzeste Weg. Wenn beispielsweise ein Badegast in einem großen Schwimmbecken in Not geraten ist, dann kann der Rettungsschwimmer zwar die gesamte Strecke, schräg zum Beckenrand, durchschwimmen, um zu Hilfe zu eilen. Aber er kommt in viel kürzerer Zeit ans Ziel, wenn er den größten Teil der Entfernung am Becken entlang läuft und erst nahe beim Badegast ins Wasser springt, sodass er nur einen kleinen Teil der Strecke schwimmen muss.

Reflexion, Transmission und Brechung

Wenn eine Welle auf eine Grenzfläche auftrifft, die zwei Bereiche unterschiedlicher Wellengeschwindigkeit voneinander trennt, wird ein Teil der Welle reflektiert und der andere Teil

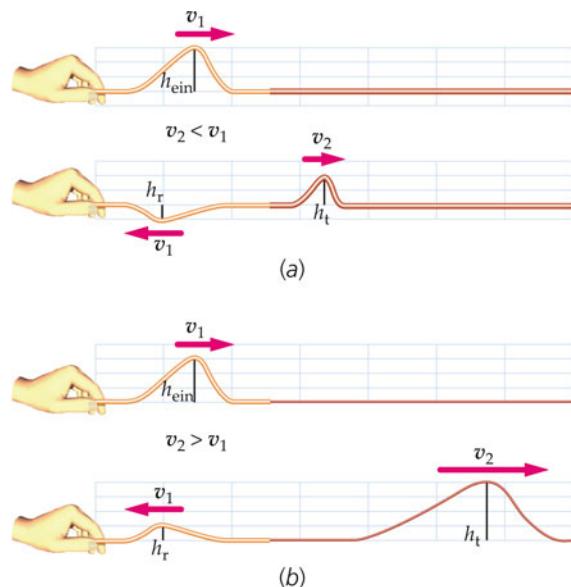


Abbildung 12.25 Seilwellen. Die Vorderflanken der Pulse sind steiler als die abfallenden Flanken, weil das Ende des Seils schneller nach oben als nach unten bewegt wurde. a) Ein Wellenzug läuft auf einem leichten Seil entlang, das mit einem schwereren Seil mit halber Wellengeschwindigkeit verbunden ist. Der reflektierte Wellenpuls ist invertiert, der transmittierte Wellenpuls hingegen nicht. b) Ein Wellenzug bewegt sich auf einem schweren Seil, das an einem leichten Seil mit doppelt so großer Wellengeschwindigkeit befestigt ist. In diesem Fall wird der reflektierte Puls nicht invertiert.

wird durchgelassen. Abbildung 12.25a zeigt einen Wellenberg auf einem leichten Seil, das an einem schwereren Seil (dort ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit geringer) befestigt ist. Dann läuft ein Teil des Wellenbergs wieder zurück, und ein weiterer Teil bewegt sich auf dem schwereren Seil weiter. Der reflektierte Wellenberg ist im Unterschied zum transmittierten invertiert, d.h., seine Orientierung kehrt sich um. Wenn das zweite Seil hingegen leichter ist als das erste (Abbildung 12.25b), kehrt der reflektierte Wellenberg seine Auslenkungsrichtung nicht um. In beiden Fällen wird der durchgelassene Wellenberg nicht invertiert, d.h., der auf das zweite Seil transmittierte Wellenberg ist stets aufrecht.

Ein an einem festen Punkt befestigtes Seil entspricht einem Seil, das mit einem zweiten Seil mit extrem hoher linearer Massendichte verbunden ist. Ein einlaufender Wellenberg wird in diesem Fall reflektiert und invertiert, man spricht von der *Reflexion am festen Seilende*. Ist umgekehrt das Seil an einem Seil mit vernachlässigbarer Masse befestigt, wird der Puls ohne Invertierung reflektiert, man spricht von der *Reflexion am losen Seilende*. Die Höhe des einlaufenden, des transmittierten und des reflektierten Wellenbergs wird mit h_{ein} , h_t bzw. h_r bezeichnet (Abbildung 12.25). Der **Reflexionskoeffizient R** gibt das Verhältnis der Höhe von reflektiertem und einlaufendem Wellenberg an, entsprechend ist der **Transmissionskoeffizient T**

das Verhältnis der Höhen von transmittiertem und einlaufendem Wellenberg. Mit den in Abbildung 12.25 gezeigten Größen h_{ein} , h_t bzw. h_r haben wir daher $R = h_r/h_{\text{ein}}$ und $T = h_t/h_{\text{ein}}$. Dann ergeben sich folgende Ausdrücke für R und T :

$$R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad \text{und} \quad T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}. \quad (12.44)$$

REFLEXIONS- UND TRANSMISSIONSKOEFFIZIENT

Diese Ausdrücke für den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten sind Spezialfälle der *Fresnel'schen Formeln*. Sie lassen sich mit der Annahme herleiten, dass die Zugkraft in dem Seil, die Höhe der Seilwelle und die Auslenkung sich in dem Grenzpunkt, an dem die lineare Massendichte sprunghaft wechselt, nur kontinuierlich ändern. (Nach dem dritten Newton'schen Axiom muss die Auslenkung kontinuierlich sein.) Beachten Sie, dass der Transmissionskoeffizient T niemals negativ ist und dass der Reflexionskoeffizient R nur für $v_2 < v_1$ negative Werte annimmt. Daraus lässt sich ableiten, das der transmittierte Wellenberg nie invertiert und der reflektierte Wellenberg nur für $v_2 < v_1$ invertiert ist.

Beispiel 12.14 behandelt die Wellenausbreitung an zwei verlöten Drähten mit unterschiedlicher linearer Massendichte.

Beispiel 12.14: Zwei zusammengelötete Drähte

Zwei Drähte von unterschiedlicher linearer Massendichte sind an einem Ende miteinander zusammenge lötet und danach durch eine Spannkraft F_S gedehnt. (Die Spannung ist in beiden Drähten dieselbe.) Die Wellengeschwindigkeit im ersten Draht ist doppelt so groß wie im zweiten. Eine harmonische Welle, die längs des ersten Drahts läuft, erreicht den Verbindungspunkt der Drähte. a) Die Amplitude der einlaufenden Welle ist A . Wie groß sind die Amplituden der reflektierten und der durchgehenden Welle? b) In welchem Verhältnis stehen die Massendichten der Drähte? c) Welcher Bruchteil der einfallenden Leistung wird am Verbindungspunkt reflektiert und welcher durchgelassen?

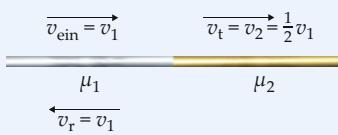


Abbildung 12.26 Aufbau der beiden verbundenen Drähte mitsamt der zugehörigen Wellengeschwindigkeiten. Hierbei bezeichnet v_r die Geschwindigkeit des reflektierten Wellenanteils.

Problembeschreibung: Die Amplituden der reflektierten Welle berechnet man mit $A_r = RA$, die Amplitude der transmittierten Welle ist $A_t = TA$; dabei sind R und T

die in Gleichung 12.44 definierten Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten. Die Leistung der Wellen ergibt sich nach Gleichung 12.25 jeweils zu $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$. Die Kreisfrequenzen aller Wellen sind gleich. Da die reflektierte und die einfallende Welle sich im selben Medium bewegen, haben sie dieselbe Wellengeschwindigkeit v_1 . Die Geschwindigkeit im zweiten Draht ist $v_2 = \frac{1}{2} v_1$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Drücken Sie die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle mithilfe der Amplitude der einlaufenden Welle und den Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten aus (Gleichung 12.44):

$$A_r = RA$$

und

$$A_t = TA$$

2. Mit dem gegebenen Zusammenhang $v_1 = 2 v_2$ können Sie nach den Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten auflösen:

$$R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{v_2 - 2v_2}{v_2 + 2v_2} = -\frac{1}{3}$$

$$T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2v_2}{v_2 + 2v_2} = \frac{2}{3}$$

also

$$A_r = \boxed{-\frac{1}{3} A}$$

und

$$A_t = \boxed{\frac{2}{3} A}$$

Teilaufgabe b

1. Die Massendichte μ und die Wellengeschwindigkeit v hängen über die Beziehung $v = \sqrt{|F_S|/\mu}$ (Gleichung 12.3) zusammen. $|F_S|$ ist auf beiden Seiten des Verbindungspunkts gleich. Lösen Sie nach μ_1 und μ_2 auf:

$$v_1^2 = \frac{|F_S|}{\mu_1}$$

und

$$v_2^2 = \frac{|F_S|}{\mu_2}$$

und somit

$$\mu_1 = \frac{|F_S|}{v_1^2}$$

und

$$\mu_2 = \frac{|F_S|}{v_2^2}$$

2. Bilden Sie das Verhältnis μ_2/μ_1 und nutzen Sie dabei den gegebenen Zusammenhang $v_1 = 2 v_2$:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{(2 v_2)^2}{(v_2)^2} = [4]$$

Teilaufgabe c

1. Geben Sie mithilfe des Zusammenhangs $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$ (Gleichung 12.25) Ausdrücke für die einfal-lende, reflektierte und transmittierte Leistung an:

$$\begin{aligned}\langle P_{\text{ein}} \rangle &= \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A^2 v_1 \\ \langle P_r \rangle &= \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A_r^2 v_1 \\ \langle P_t \rangle &= \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 A_t^2 v_2\end{aligned}$$

2. Setzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe a in die Aus-drücke für die reflektierte bzw. die transmittierte Leistung ein:

$$\begin{aligned}\langle P_r \rangle &= \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 \left(-\frac{1}{3} A\right)^2 v_1 = \frac{1}{18} \mu_1 \omega^2 A^2 v_1 \\ \langle P_t \rangle &= \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 \left(\frac{2}{3} A\right)^2 v_2 = \frac{2}{9} \mu_2 \omega^2 A^2 v_2\end{aligned}$$

3. Damit erhalten Sie Ausdrücke für die Verhältnisse $\langle P_r \rangle / \langle P_{\text{ein}} \rangle$ und $\langle P_t \rangle / \langle P_{\text{ein}} \rangle$:

$$\begin{aligned}\frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_{\text{ein}} \rangle} &= \frac{\frac{1}{18} \mu_1 \omega^2 A^2 v_1}{\frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A^2 v_1} = [\frac{1}{9}] \\ \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_{\text{ein}} \rangle} &= \frac{\frac{2}{9} \mu_2 \omega^2 A^2 v_2}{\frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A^2 v_1} = \frac{4}{9} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{v_2}{v_1}\end{aligned}$$

4. Vereinfachen Sie mithilfe des Ergebnisses aus Teilauf-gabe b und dem gegebenen Zusammenhang $v_1 = 2 v_2$:

$$\frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_{\text{ein}} \rangle} = \frac{4}{9} 4 \frac{v_2}{2 v_2} = [\frac{8}{9}]$$

Plausibilitätsprüfung: Der Anteil der reflektierten Leis-tung und der Anteil der transmittierten Leistung ergeben wie erwartet in der Summe 1.

Weitergedacht: Die reflektierte Welle ist relativ zur ein-fallenden Welle invertiert, also um 180° phasenverscho-ben. Eine negative Amplitude entspricht einer Phasenver-schiebung von 180° .

Übung 12.8: Wiederholen Sie die Rechnungen von Bei-spiel 12.14, diesmal jedoch mit $v_2 = 2 v_1$. ◀ ■

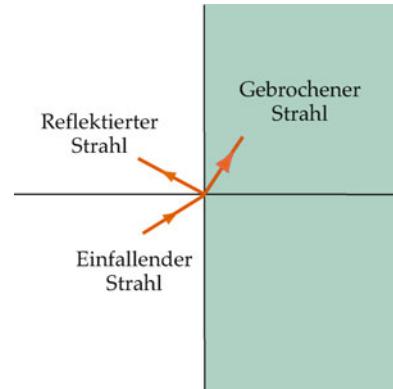


Abbildung 12.27 Eine Welle trifft auf eine Grenzfläche zwischen zwei Me-dien, in denen sich die Wellengeschwindigkeiten unterscheiden. Ein Teil der Welle wird reflektiert, ein Teil wird durchgelassen. Die Änderung in der Aus-breitungsrichtung des durchgehenden (gebrochenen) Strahls wird als Brechung bezeichnet.

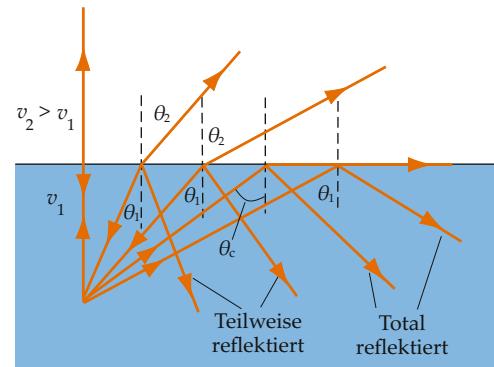


Abbildung 12.28 Licht von einer Quelle im Wasser wird von der Normalen weg gebrochen, wenn es in Luft eintritt. Für Einfallsinkel oberhalb eines kri-tischen Winkels θ_c gibt es keinen durchgehenden (gebrochenen) Strahl; dies nennt man Totalreflexion.

Mithilfe der Energieerhaltung kann man einen weiteren Zusam-menhang zwischen den Reflexions- und Transmissionskoeffizi-enten herleiten (Aufgabe 12.36), nämlich

$$1 = R^2 + \frac{v_1}{v_2} T^2 . \quad (12.45)$$

Darin ist R^2 der Bruchteil der eintreffenden Leistung, der reflek-tiert wird, $(v_1/v_2) T^2$ ist der Bruchteil, der transmittiert wird.

Übung 12.9: Zeigen Sie, dass die Werte für R und T in Bei-spiel 12.14 ebenfalls Gleichung 12.45 erfüllen. ◀

Im Dreidimensionalen ist die Grenze zwischen zwei Bereichen unterschiedlicher Wellengeschwindigkeit eine Fläche; bei der Grenzfläche zwischen einem Festkörper oder einer Flüssigkeit einerseits und einem Gas andererseits spricht man auch von einer Oberfläche. Abbildung 12.27 zeigt einen Strahl einer Wel-le, der auf eine Grenzfläche einfällt. Das Beispiel könnte eine

Beispiel 12.15: Ein Ballon als Hörhilfe

Bei einem verbreiteten Demonstrationsexperiment verwendet man einen mit Kohlendioxid gefüllten Wetterballon. Wenn Sie den Ballon zwischen sich und einer Schallquelle platzieren, hören Sie den Schall lauter. Warum?

Problembeschreibung: Die molare Masse von Kohlendioxid ist größer als die effektive molare Masse von Luft. Daher breiten sich Schallwellen in Luft schneller aus als in Kohlendioxid bei Normaldruck. Um zu erkennen, warum Sie den Schall lauter hören, wenn sich der Ballon zwischen Ihnen und der Quelle befindet, zeichnen Sie eine Skizze mit den Schallstrahlen, die durch den Ballon laufen. Die Strahlen ändern ihre Richtung (sie werden gebrochen), wenn sie die Grenzfläche zwischen zwei Medien passieren, in denen sie sich unterschiedlich schnell ausbreiten.

Lösung: 1. Zeichnen Sie einen Strahl von der Schallquelle durch die obere Hälfte des Ballons (Abbildung 12.29a). Der Strahl wird beim Eintritt in den Ballon zur Normalen hin gebrochen; verlässt er den Ballon, wird er von der Normalen weg gebrochen.

2. Wiederholen Sie Schritt 1 für vier oder fünf weitere Strahlen; zeichnen Sie auch Strahlen ein, die durch die untere Hälfte des Ballons verlaufen (Abbildung 12.29b).

3. Erläutern Sie anhand Ihrer Zeichnung, warum Sie den Schall lauter hören, wenn der Ballon sich zwischen Ihnen und der Schallquelle befindet: Der Schall ist in dem Bereich am lautesten, wo sich die Strahlen schneiden.

ZUM VERSTÄNDNIS

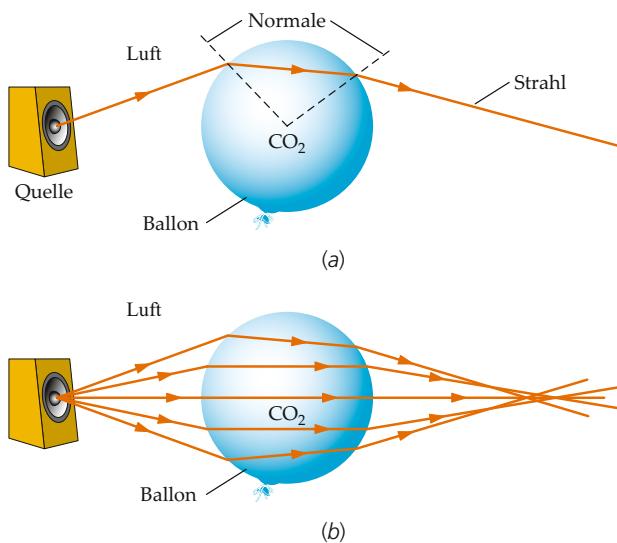


Abbildung 12.29 Skizze des Schallverlaufs durch den CO_2 -Ballon.

Plausibilitätsprüfung: Der Ballon wirkt für den Schall wie ein Vergrößerungsglas bei Licht; man spricht daher auch von einer *akustischen Linse*. Ursache dieses Effekts ist, dass das Licht sich in Glas langsamer ausbreitet als in Luft; entsprechend ist die Schallgeschwindigkeit in CO_2 geringer als in Luft.

Schallwelle in Luft sein, die auf eine feste oder eine flüssige Oberfläche auftrifft. Wie in der Abbildung zu erkennen, bilden dann der einfallende und der reflektierte Strahl mit der Senkrechten (Normalen) auf der Oberfläche denselben Winkel.

Der durchgehende Strahl ändert seine Richtung zur Normalen hin (der Winkel verkleinert sich) oder von der Normalen weg (der Winkel vergrößert sich). Dies hängt davon ab, ob die Wellengeschwindigkeit im zweiten Medium kleiner oder größer ist als die im Einfallsmedium. Die Richtungsänderung des durchgehenden Strahls nennt man **Brechung**. Wenn die Wellengeschwindigkeit im zweiten Medium größer ist als im Einfallsmedium (wenn beispielsweise eine Lichtwelle aus Glas oder Wasser in Luft eintritt oder eine Schallwelle umgekehrt von Luft in Wasser), wird der Strahl, der die Ausbreitungsrichtung beschreibt, von der Normalen weg gebrochen, wie es Abbildung 12.27 für die Schallwelle und Abbildung 12.28 für die Lichtwelle zeigt. Bei zunehmendem Einfallsinkel nimmt auch der Brechungswinkel zu, bis ein kritischer Einfallsinkel erreicht ist, für den der Brechungswinkel 90° beträgt. Ist der Einfallsinkel größer als der *kritische Winkel*, gibt es keinen gebrochenen Strahl; dieses Phänomen ist als **Totalreflexion** bekannt.

Der Energiebetrag, der von einer Oberfläche reflektiert wird, hängt von der Struktur und den Materialeigenschaften der Oberfläche ab. Ebene starre Wände, Böden und Decken sind gute Reflektoren für Schallwellen, während poröse und weiche Materialien (z. B. Stoffe, Vorhänge, Möbelverkleidungen) viel von dem einfallenden Schall absorbieren. Die Reflexion von Schallwellen spielt eine wichtige Rolle in der Ausgestaltung von Vorlesungssälen, Bibliotheken oder Konzerthallen, die jeweils unterschiedliche Anforderungen an die Schallausbreitung stellen. Wenn es in einem Vorlesungssaal viele flache reflektierende Oberflächen gibt, ist ein Sprecher wegen der vielen Echos schwer zu verstehen, die zu verschiedenen Zeiten die Ohren der Zuhörer erreichen. Man bringt daher an Decken und Wänden oft absorbierendes Material an, um solche Reflexionen zu reduzieren. In einer Konzerthalle hingegen stellt man oft eine reflektierende „Konzertmuschel“ hinter das Orchester, und reflektierende Tafeln hängen von der Decke, um den Schall direkt zu den Zuhörern zu reflektieren.

In Beispiel 12.15 wird der Einfluss eines Ballons betrachtet, der Schallwellen bündelt und damit wie eine akustische Linse wirkt.



Blick in einen Konzertsaal. An Decken und Wänden sind schallreflektierende Flächen unterschiedlicher Neigung angebracht, um für möglichst jeden Platz gute akustische Bedingungen zu erreichen. (Mit freundlicher Genehmigung der Davies Symphony Hall.)

Beugung

Wenn eine Wellenfront durch ein Hindernis teilweise eingeschränkt wird, bewegt sich die Welle nicht nur in der durch die Strahlengeometrie gegebenen Richtung weiter, sondern es tritt auch eine komplizierte Wellenbewegung außerhalb der geometrischen Strahlengrenzen auf. Diese Erscheinung lässt sich mithilfe des Huygens'schen Prinzips erklären und wird **Beugung** genannt. Die Beugung von Wellen tritt grundsätzlich bei jeder Begrenzung der Ausbreitung der Welle durch ein Hindernis unmittelbar an den Rändern auf. Für die Teile der Wellenfront, die von der Kante weiter als einige Wellenlängen entfernt sind, ist die Beugung vernachlässigbar, und die Welle breitet sich in der Richtung der einfallenden Strahlen ungestört aus. Wenn die Wellenfronten auf ein Hindernis mit einer Blende (Loch) treffen, die nur wenige Wellenlängen breit ist, wird der gesamte Bereich der Wellenfronten an der Blende gebogen. Dadurch werden aus einfallenden ebenen Wellenfronten kugel- oder kreisförmigen Wellenfronten (Abbildung 12.30).

Beugung ist eine typische Wellenerscheinung, was man besonders deutlich durch einen Vergleich mit einem Teilchenstrahl demonstrieren kann. Wenn ein *Teilchenstrahl* auf ein Hindernis mit einer Öffnung trifft, wird er genau auf den geometrischen Winkelbereich beschränkt (Abbildung 12.31a). Die Teilchen werden nicht in den geometrischen Schattenbereich der Öffnung abgelenkt. Trifft dagegen eine *Welle* auf ein Hindernis mit einer Öffnung in der Größenordnung der Wellenlänge, dann breiten sich infolge der Beugung Wellen in dem geometrischen Schattenbereich aus (Abbildung 12.31b). Das Abbeugen in den geometrischen Schattenbereich wird geringer, wenn man die Öffnung verbreitert (Abbildung 12.30 und 12.32). Wir werden die Beugung bei der Untersuchung von Interferenz und Beugung des Lichts in Kapitel 30 ausführlich diskutieren.

Obgleich Wellen, die durch eine Blende hindurchgehen, immer in gewissem Maße gebeugt werden, hängt die Stärke der Beu-

gung davon ab, ob die Wellenlänge groß oder klein im Vergleich zur Blendenabmessung ist. Wenn die Wellenlänge im Vergleich zu den Abmessungen der Blende groß ist, so wie in Abbildung 12.30, sind die Beugungseffekte groß, und die durch die Blende hindurchgegangenen Wellen breiten sich weit in den geometrischen Schattenbereich aus, als kämen sie von einer punktförmigen Quelle. Ist hingegen die Wellenlänge im Vergleich zur Blende klein, tritt nur geringe Beugung auf, wie es Abbildung 12.32 zeigt. Nahe bei den Kanten der Blende sind die Wellenfronten verformt, und die Wellen erscheinen leicht gekrümmt. Für den größten Teil jedoch werden die Wellenfronten nicht beeinflusst, und die Wellen breiten sich in gerader Linie ganz ähnlich wie ein Teilchenstrahl aus. Die Näherung, dass sich Wellen in geraden Linien in Strahlrichtung ohne Beugung ausbreiten, ist als **Strahlnäherung** bekannt.

Da die Wellenlängen von hörbarem Schall (ein Bereich von einigen Zentimetern bis zu mehreren Metern) im Allgemeinen groß sind im Vergleich zu Öffnungen und Hindernissen (z. B. Türen, Fenster und Menschen), ist die Beugung von Schallwellen ein wichtiges Phänomen der Schallausbreitung im Hörbereich. Die Wellenlängen von sichtbarem Licht hingegen sind mit $4 \cdot 10^{-7}$ bis $7 \cdot 10^{-7}$ m im Vergleich zur Größe von üblichen Objekten und Blenden so klein, dass die Lichtbeugung nicht leicht zu beobachten ist. Licht scheint sich „geradlinig“ auszubreiten, und das Strahlenmodell ist auch für die Kanten von Hindernissen eine gute Näherung; man spricht hier von der *Strahlenoptik*. Trotzdem ist die Beugung von Licht ein ebenso wichtiges Phänomen wie beim Schall; wir werden sie in Kapitel 30 eingehend behandeln.

Die Beugung setzt eine Grenze, wie genau kleine Objekte durch die an ihnen reflektierten Wellen lokalisiert und wie gut Details dieser Objekte aufgelöst (getrennt wahrgenommen) werden können. Wellen werden von Objekten, die kleiner als die Wel-

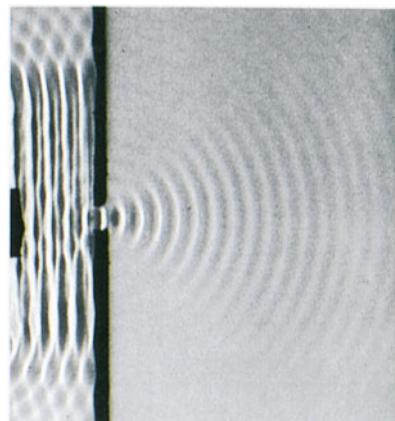


Abbildung 12.30 Ebene Wellen in einer Wasserwanne treffen auf ein Hindernis mit einer Öffnung, die nur wenige Wellenlängen breit ist. Hinter dem Hindernis bilden sich konzentrische Kreiswellen um die Öffnung, gerade so, als ob die Öffnung eine punktförmige Wellenquelle wäre. (© Fundamental Photographs.)

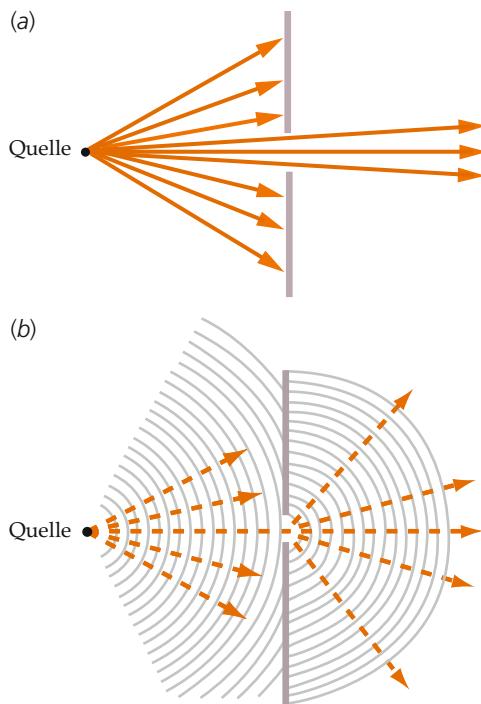


Abbildung 12.31 Vergleich von Teilchen und Wellen, die eine schmale Öffnung passieren. a) Die durchgegangenen Teilchen werden auf einen sich kaum auffächernden Strahl („Schmalwinkelstrahl“) begrenzt. b) Die durchgegangenen Wellen breiten sich radial weit hinter der Öffnung aus, die wie eine punktförmige Quelle von Kreiswellen wirkt.

Wellenlänge sind, nicht merklich reflektiert. Man spricht in diesem Fall von **Streuung** der Wellen an kleinen Objekten. So lassen sich Einzelheiten nicht auf einer Skala beobachten, die kleiner als die benutzte Wellenlänge ist. Wenn man Wellen der Wellenlänge λ dazu benutzt, ein Objekt zu lokalisieren, dann kann man seine Lage nur innerhalb einer Unsicherheit von einer Wellenlänge ermitteln.

Schall mit Frequenzen von ungefähr 20 000 Hz und mehr wird **Ultraschall** genannt. Der Ultraschallbereich umfasst Frequenzen von 20 kHz bis 10^{10} Hz und überdeckt damit etwa 16 Oktaven. Infolge ihrer sehr kleinen Wellenlängen können schmale Bündel von Ultraschallwellen ausgestrahlt und von kleinen Objekten reflektiert werden. Fledermäuse können Frequenzen bis etwa 120 000 Hz – das ist Schall mit einer Wellenlänge von 2,8 mm – ausstrahlen und wahrnehmen; sie lokalisieren damit kleine Beutetiere, z. B. Nachtfalter. Ortungssysteme, die auf dem Schallecho beruhen, werden als Sonar-Navigationsgeräte bezeichnet (vom Englischen *sound and navigation ranging*). Die einfachste Ausprägung solcher Geräte ist das Echolot, das man zur Ortung von Hindernissen oder von Fischschwämmen, in der Ozeanografie auch zur Messung der Meerestiefe einsetzt. Ihre Frequenz reicht von etwa 25–200 kHz. Schweinswale erzeugen kurze Echoortungswellenzüge (sogenannte *clicks*) in demselben Frequenzbereich. In der Medizin werden Ultra-

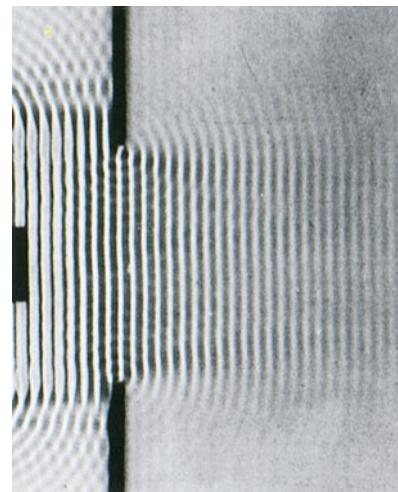


Abbildung 12.32 Ebene Wellen in einer Wasserwanne treffen auf ein Hindernis mit einer breiten Öffnung, die groß im Vergleich zur Wellenlänge λ ist. Die Welle läuft in Vorwärtsrichtung weiter, nur ein kleiner Teil breitet sich in den Bereichen rechts und links von den Kanten der Öffnung aus. (© Fundamental Photographers.)



Ultraschallaufnahme eines menschlichen Fötus. (© GE Medical Systems/Photo Researchers, Inc.)

schallwellen (in einem breiten Frequenzbereich von 10^6 Hz bis fast 10^9 Hz) für diagnostische Zwecke eingesetzt. Ultraschallwellen durchdringen den menschlichen Körper, und aus der Information über Frequenz und Intensität der durchgehenden und der reflektierten Welle kann man ein dreidimensionales Bild von Organen und Gewebeteilen des Körperinneren konstruieren, ein sogenanntes *Sonogramm*. Ultraschall mit Frequenzen zwischen 0,5 und $2 \cdot 10^9$ MHz wird auch für zerstörungsfreie Werkstoffuntersuchungen eingesetzt. Der **Hyperschallbereich** umfasst Frequenzen von 10^{10} Hz– 10^{12} Hz; die Wellenlängen liegen dann bereits in der Größenordnung des Molekülabstands. Mit Hyperschall lassen sich Gitterschwingungen in Kristallen anregen. Technisch nutzt man das bei Materialuntersuchungen, gemeinsam mit der Infrarotspektroskopie.

Beispiel 12.16: Die Begegnung zweier Wellenberge

Ein nach oben gerichteter Wellenberg bewegt sich entlang einer gespannten Saite nach rechts, ein entgegengesetzt gleicher Wellenberg bewegt sich nach links. Wenn die Wellenberge sich überlagern, gibt es einen Augenblick, an dem die Saite nicht ausgelenkt und kein Wellenberg zu sehen ist. Warum tauchen die Wellenberge wieder auf und breiten sich weiter aus?

Problembeschreibung: Zum Zeitpunkt, zu dem die Saite glatt ist, ist die Auslenkung für jeden Punkt auf der Saite null. Ist zu diesem Zeitpunkt aber auch die Geschwindigkeit für jeden Punkt null? Für einen nach oben gerichteten Wellenberg bewegt sich die Saite auf der Vorderflanke des Wellenbergs nach oben, auf der abfallenden Flanke bewegt sich die Saite nach unten. Für den entgegengesetzten gleichen Wellenberg gilt das Gegenteil: Die Saite auf der Vorderflanke bewegt sich nach unten, auf der abfallenden Flanke bewegt sich die Saite nach oben.

Lösung: 1. Zeichnen Sie Auslenkung y und Geschwindigkeit v_y der Saite in Abhängigkeit von der Position auf der Saite für einen Zeitpunkt, bevor sich die Wellenberge überlappen (Abbildung 12.33). Für einen nach oben gerichteten Wellenberg bewegt sich die Saite auf der Vorderflanke nach oben und auf der abfallenden Flanke nach unten. Für den entgegengesetzten gleichen Wellenberg gilt das Gegenteil: Die Saite auf der Vorderflanke bewegt sich nach unten, auf der abfallenden Flanke bewegt sich die Saite nach oben.

2. Zeichnen Sie nun Auslenkung und Geschwindigkeit der Saite in Abhängigkeit von der Position auf der Saite für einen Zeitpunkt, zu dem sich die Wellenberge vollständig überlappen (Abbildung 12.34).

3. Ist die Geschwindigkeit für alle Punkte der Saite null, wenn die Saite nicht ausgelenkt ist? In Schritt 1 sind die Geschwindigkeitsformen der Saite für beide Wellenberge gleich. Wenn die Wellenberge überlappen, addieren sich die

ZUM VERSTÄNDNIS

Auslenkungen zu null, aber die Geschwindigkeiten addieren sich nicht zu null. Die Wellenberge bilden sich nach der Überlappung neu, weil die Saite sich bewegt und einen Impuls hat. Daher bleibt sie nicht flach.

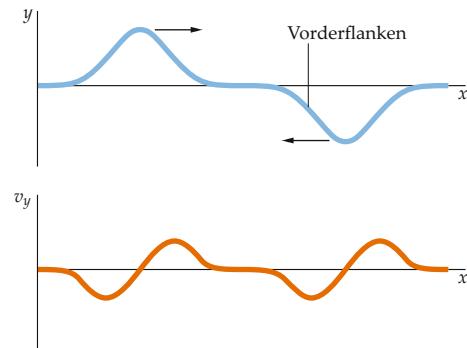


Abbildung 12.33 Skizze der Auslenkung y und der Geschwindigkeit v_y zu einem Zeitpunkt an dem sich die Wellenberge noch nicht überlappen.

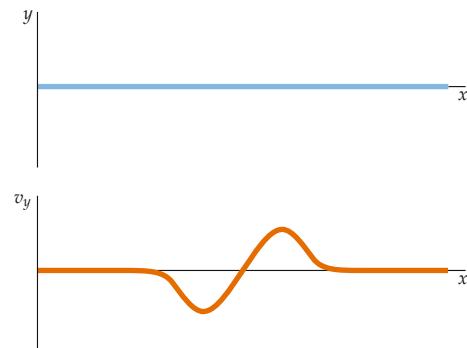


Abbildung 12.34 Skizze der Auslenkung y und der Geschwindigkeit v_y zu einem Zeitpunkt an dem sich die Wellenberge genau überlappen.

12.6 Überlagerung von Wellen

Abbildung 12.35a zeigt zwei kleine Wellenberge, die auf einem Seil aufeinander zu laufen. Wenn sich die Wellenberge treffen, bildet sich eine neue Form des Seils als Summe der einzelnen Auslenkungen. Man spricht dabei von einer Überlagerung oder mit dem lateinischen Wort von einer *Superposition*. Man sieht außerdem, dass sich die beiden Wellen danach wieder trennen und weiterlaufen, ohne dass sich ihre Form geändert hat. Dieses Verhalten – bei der Überlagerung addieren sich die Auslenkungen, aber es kommt zu keiner gegenseitigen Störung – ist eine grundlegende Eigenschaft von Wellen, die charakteristisch für sie ist. Bei der Bewegung von Teilchen nach den Newton'schen Axiomen kommt sie nicht vor; Teilchen können sich nicht auf

diese Weise verstärken oder auslöschen. Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als **Superpositionsprinzip**, das besagt:

Wenn zwei oder mehr Wellen sich überlagern, ergibt sich die resultierende Welle als algebraische Summe der einzelnen Auslenkungen.

SUPERPOSITIONSPRINZIP

Mathematisch ergibt sich bei der Überlagerung von mehreren Wellen auf einem Seil die Wellenfunktion der resultierenden Wellen als die algebraische Summe der einzelnen Wellenfunktionen.

Das Superpositionsprinzip gilt allerdings nicht für alle Wellen: Es ist beispielsweise nicht mehr anwendbar, wenn die Summe

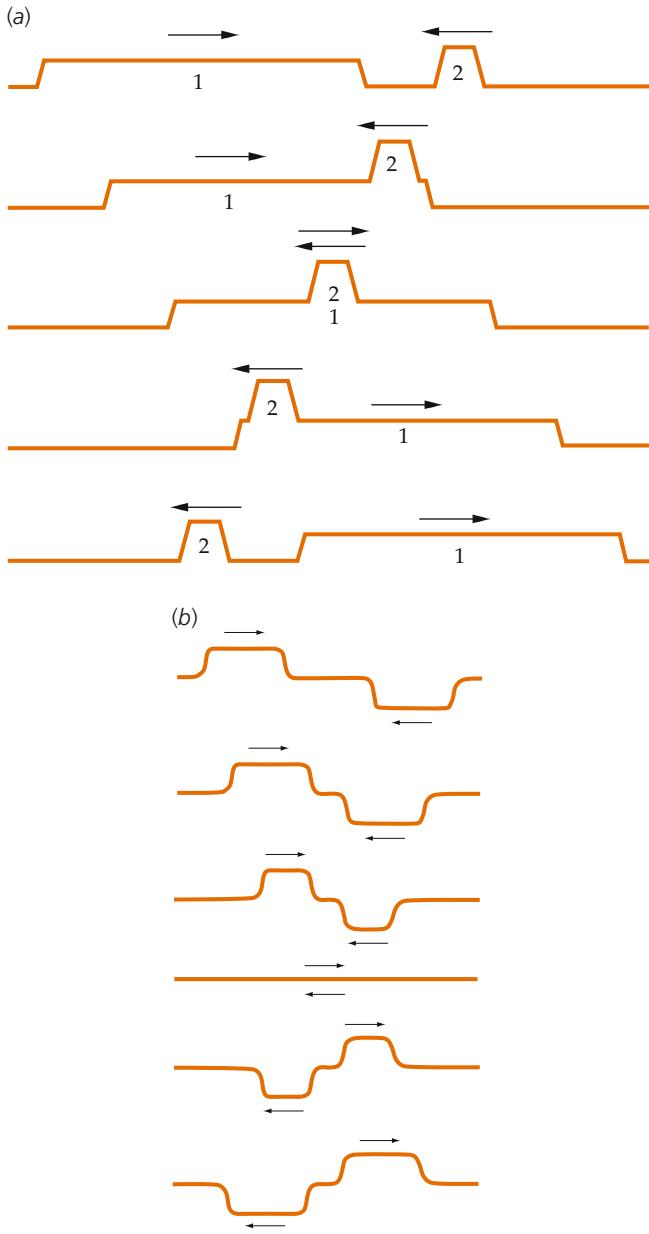


Abbildung 12.35 Zwei Wellenberge bewegen sich auf einem Seil aufeinander zu. Die resultierende Form bei der Überlagerung der Wellen ergibt sich, indem man die Auslenkungen der einzelnen Wellen addiert. a) Überlagerung zweier Wellenberge mit gleich gerichteter Auslenkung (nach oben). Die Abbildung zeigt die Form der Saite für verschiedene, jeweils um Δt getrennte Zeitpunkte. In diesem Zeitraum legen die Wellenberge jeweils eine Strecke von der Größe der Wellenbreite 2 zurück. b) Überlagerung zweier Wellenberge mit entgegengesetzter gleicher Auslenkung. Hier führt die algebraische Addition der Auslenkungen sogar zur (kurzzeitigen) Auslöschung der Amplituden.

der Auslenkungen die elastische Grenze des Mediums übersteigt (Kapitel 9). In diesem Kapitel werden wir jedoch nur solche Fälle betrachten, die das Superpositionsprinzip erfüllen.

Wenn zwei in entgegengesetzte Richtungen laufende Wellenberge zusammentreffen, dann trennen sie sich danach wieder und laufen mit derselben Geschwindigkeit, Größe und Form weiter wie vor dem Zusammentreffen.

Betrachten wir nun den speziellen Fall, dass sich zwei Wellenberge aufeinander zu bewegen (Abbildung 12.35b); ihre Form soll identisch sein, ihre Auslenkung ist jedoch entgegengesetzt. Dann gibt es einen Moment, bei dem die Wellenberge sich exakt überlappen und zu null addieren. Zu diesem Zeitpunkt ist die Auslenkung des Seils zwar null, aber das Seil ist keineswegs in Ruhe. Am rechten Rand des Überlappungsbereichs bewegt sich das Seil aufwärts, am linken Rand nach unten, und kurze Zeit darauf haben sich die beiden Wellenberge in ihrer ursprünglichen Form und Bewegungsrichtung wieder gebildet. In Beispiel 12.16 wird das detailliert untersucht.

*Superposition und die Wellengleichung

Das Superpositionsprinzip folgt daraus, dass die Wellengleichung (Gleichung 12.10b) für kleine Auslenkungen linear ist. Mit anderen Worten: Die Funktion $y(x, t)$ und ihre Ableitungen tauchen nur als lineare Glieder und nicht in höherer Potenz auf. Definierendes Kennzeichen einer linearen Gleichung ist es, dass bei zwei Lösungen y_1 und y_2 auch deren Linearkombination

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (12.46)$$

eine Lösung ist, bei der C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind. Die Linearität der Wellengleichung lässt sich zeigen, indem man die Gleichung für y_3 direkt einsetzt. Das Ergebnis ist die mathematische Formulierung des Superpositionsprinzips. Wenn zwei Wellen eine Wellengleichung erfüllen, dann erfüllt auch ihre algebraische Summe dieselbe Wellengleichung. In Beispiel 12.17 wird das explizit nachgerechnet.

Beispiel 12.17: Superposition und Wellengleichung

Die beiden Funktionen y_1 und y_2 lösen die Wellengleichung (Gleichung 12.10b)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion y_3 nach Gleichung 12.46 die Wellengleichung erfüllt.

Problembeschreibung: Setzen Sie y_3 in die Wellengleichung ein. Nehmen Sie an, dass sowohl y_1 als auch y_2 die Wellengleichung erfüllen, und zeigen Sie, dass dann folglich auch die Linearkombination $C_1 y_1 + C_2 y_2$ die Wellengleichung löst.

Lösung: 1. Setzen Sie den Ausdruck für y_3 aus Gleichung 12.46 in die linke Seite der Wellengleichung ein und trennen Sie diese dann in zwei separate Terme für y_1 und y_2 auf:

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

2. Sowohl y_1 als auch y_2 lösen die Wellengleichung. Schreiben Sie die Wellengleichung für y_1 und für y_2 nieder:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

3. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 2 in das aus Schritt 1 ein und klammern Sie alle gemeinsamen Faktoren aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} &= C_1 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{v^2} \left(C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

4. Klammern Sie die Konstanten in den Argumenten der Ableitungen aus und drücken Sie die Summe der Ableitungen als die Ableitung der Summe aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 C_1 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 C_2 y_2}{\partial t^2} \right) \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_1 y_1 + C_2 y_2) \end{aligned}$$

5. Das Argument in der in Schritt 4 erhaltenen Ableitung ist y_3 :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Schritt 5 hat die richtige Dimension. Der Term auf der linken Seite hat die Dimension $[L]/[L]^2 = [L]^{-1}$, der Term auf der rechten Seite hat die Dimension $([T]^2/[L]^2) \cdot ([L]/[T]^2) = [L]^{-1}$.

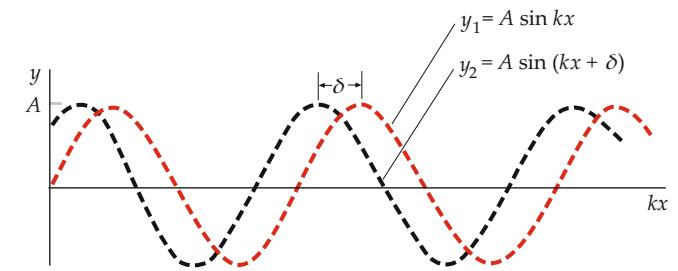


Abbildung 12.36 Verlauf der Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ für zwei harmonische Wellen mit derselben Auslenkung, Frequenz und Wellenzahl; sie unterscheiden sich nur in der Phase um eine Konstante δ .

der Gestalt

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad (12.47)$$

und

$$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \delta), \quad (12.48)$$

wie in Abbildung 12.36 gezeigt. Ein Vergleich von Gleichung 12.47 mit Gleichung 12.48 zeigt, dass beide Wellen dieselbe Amplitude, Frequenz und Wellenzahl haben, sich jedoch um die Phasenkonstante δ unterscheiden. An einem bestimmten Ort unterscheidet sich die Phase der beiden Wellen daher um die Phasendifferenz

$$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega(t_2 - t_1) - \delta = \omega \Delta t - \delta.$$

Die zweite Welle erreicht die gleiche Auslenkung wie die erste, wenn gilt $\omega \Delta t - \delta = 0$, also um die Zeit $\Delta t = \delta/\omega$ später.

Betrachten wir dagegen einen bestimmten Zeitpunkt, so erhalten wir eine nur von der Ortskoordinate abhängige Phasendifferenz:

$$\begin{aligned} (kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t + \delta) \\ = k(x_1 - x_2) - \delta = k \Delta x - \delta \quad (\text{für } x_1 > x_2). \end{aligned}$$

In diesem Fall bleibt die zweite Welle hinter der ersten um $\Delta x = \delta/k = \lambda \delta/2\pi$ zurück. Diese Wegdifferenz nennt man auch **Gangunterschied**. Unter der Phasendifferenz im engeren Sinne versteht man die Differenz der Phasenkonstanten der beiden Wellen. (In unserem Beispiel hatte die erste Welle die Phasenkonstante $\delta_1 = 0$, die zweite die Phasenkonstante δ , sodass sich die Phasendifferenz $\Delta\delta = \delta - \delta_1 = \delta$ ergibt.) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich das in Abbildung 12.36 gezeigte Bild. Die aus der Überlagerung resultierende Welle berechnet sich als

$$y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta). \quad (12.49)$$

Diese Gleichung lässt sich mithilfe des trigonometrischen Additionstheorems

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \cos \left(\frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \right) \sin \left(\frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right) \quad (12.50)$$

Interferenz von harmonischen Wellen

Das Ergebnis der Superposition von zwei harmonischen Wellen derselben Frequenz hängt vom Gangunterschied bzw. der Phasendifferenz der beiden Wellen ab. Die Phasendifferenz einer Welle ist dabei analog zur Phasendifferenz einer Schwingung definiert, wie wir sie bereits in Abschnitt 11.1 kennengelernt haben. Um die Überlagerung in Abhängigkeit der Phasendifferenz zu beschreiben, betrachten wir nun zwei harmonische Wellen

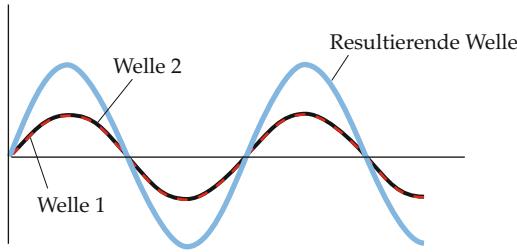


Abbildung 12.37 Konstruktive Interferenz. Sind zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz in Phase, so ist ihr Gangunterschied null, und sie addieren sich. Die Amplitude der resultierenden Welle (blau) ergibt sich als Summe der Amplituden der einzelnen (hier identischen) Wellen. Für Wellen mit gleicher Amplitude, wie hier gezeigt, hat die resultierende Welle die doppelte Amplitude. Die Wellen 1 und 2 sind identisch, daher erscheinen sie auf den ersten Blick wie eine einzige harmonische Welle. Welle 1 ist rot gestrichelt, Welle 2 schwarz gestrichelt eingezeichnet.

vereinfachen. In unserem Fall ist $\theta_1 = kx - \omega t$ und $\theta_2 = kx - \omega t + \delta$. Damit folgt

$$\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{1}{2}\delta$$

und

$$\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta.$$

Damit lässt sich Gleichung 12.49 in folgende Form bringen:

$$y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta\right). \quad (12.51)$$

SUPERPOSITION VON ZWEI WELLEN GLEICHER AMPLITUDE UND FREQUENZ

Dabei haben wir $\cos(-\frac{1}{2}\delta) = \cos\frac{1}{2}\delta$ verwendet. Gleichung 12.51 zeigt, dass die resultierende Welle bei der Überlagerung von zwei harmonischen Wellen gleicher Wellenzahl und Frequenz wieder eine harmonische Welle mit derselben Wellenzahl und Frequenz ist. Sie hat die Amplitude $2A \cos\frac{1}{2}\delta$, ihre Phase beträgt die Hälfte des Phasenunterschieds zwischen den Ausgangswellen. Das Phänomen, dass zwei Wellen gleicher – oder beinahe gleicher – Frequenz bei ihrer Überlagerung ein wahrnehmbares räumliches Intensitätsmuster erzeugen, nennt man **Interferenz**. Wenn die beiden Wellen in Phase sind, also bei $\delta = 0$, wird wegen $\cos 0 = 1$ der erste Term in Gleichung 12.51 maximal, und die Amplitude der resultierenden Welle beträgt $2A$. Diese Art der Überlagerung nennt man **konstruktive Interferenz** (Abbildung 12.37). Sind die beiden sich überlagernden Wellen gegenphasig, d. h. ist ihr Phasenunterschied 180° , dann gilt $\delta = \pi$; wegen $\cos(\pi/2) = 0$ wird der erste Term in Gleichung 12.51 null, und die resultierende Welle verschwindet. Diese Überlagerung von zwei Wellen, deren Phasenunterschied gerade 180° beträgt, nennt man **destruktive Interferenz** (Abbildung 12.38).

Übung 12.10: Zwei Wellen mit derselben Frequenz, Wellenlänge und Amplitude bewegen sich in dieselbe Richtung. a) Ihre Phasendifferenz ist $\pi/2$ (90°), ihre Amplitude beträgt jeweils

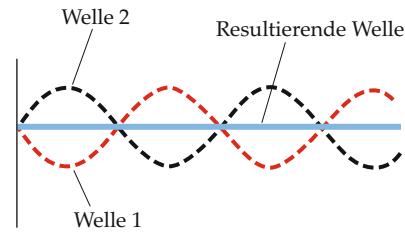


Abbildung 12.38 Destruktive Interferenz. Haben zwei Wellen eine Phasendifferenz von π , so beträgt ihr Gangunterschied $\lambda/2$, und die Amplitude der resultierenden Welle ergibt sich als Differenz der Einzelamplituden. Wenn die beiden Ausgangswellen dieselbe Amplitude haben, so löschen sie sich gegenseitig vollständig aus.

4,00 cm. Wie groß ist dann die Amplitude der resultierenden Welle? b) Für welche Phasendifferenz δ hat die resultierende Welle eine Amplitude von 4,0 cm? ◀

Schwebungen

Bei der Interferenz von zwei Schallwellen, deren Frequenz sich leicht unterscheidet, tritt ein interessantes Phänomen auf, das man **Schwebung** nennt. Solche Schwebungen werden beispielsweise durch die Schallwellen von zwei Stimmgabeln oder zwei Saiteninstrumenten mit fast, aber nicht genau gleicher Frequenz erzeugt. Dabei wird der Ton abwechselnd lauter und leiser. Die Frequenz dieser periodischen Erscheinung heißt die **Schwebungsfrequenz**.

Betrachten wir zwei Schallwellen mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 und gleicher Druckamplitude p_{\max} . Was kann man hören? An einem beliebigen, aber festen Punkt fällt die räumliche Abhängigkeit der Schallwelle nicht ins Gewicht, daher können wir sie vernachlässigen und konzentrieren uns nur auf die Zeitabhängigkeit des Schwingungsvorgangs. Der Schalldruck im Ohr aufgrund einer der beiden Wellen lässt sich dann mit einer einfachen harmonischen Funktion der Gestalt

$$p_1(t) = p_{\max} \sin \omega_1 t$$

bzw.

$$p_2(t) = p_{\max} \sin \omega_2 t$$

beschreiben. Aus Bequemlichkeitsgründen haben wir hier eine Sinuswelle angenommen und weiterhin vorausgesetzt, dass beide Wellen zum Zeitpunkt $t = 0$ in Phase sind. Mit der trigonometrischen Identität aus Gleichung 12.50 für die Summe zweier Sinusfunktionen ergibt sich für die resultierende Welle

$$\begin{aligned} p(t) &= p_{\max} \sin \omega_1 t + p_{\max} \sin \omega_2 t \\ &= 2p_{\max} \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right). \end{aligned}$$

Schreibt man die mittlere Kreisfrequenz als $\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ und die Differenz der Kreisfrequenzen als $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, so

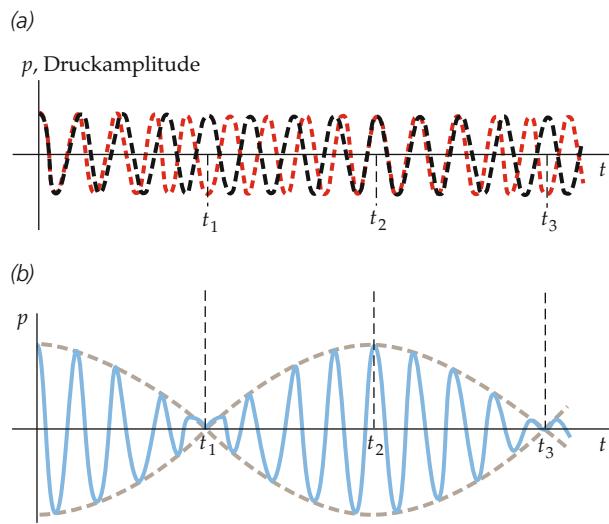


Abbildung 12.39 Schwebungen. a) Zwei Wellen mit unterschiedlicher, aber beinahe gleicher Frequenz sind zum Zeitpunkt $t = 0$ in Phase und zu einem späteren Zeitpunkt t_1 um 180° gegeneinander phasenverschoben. Zu einem noch späteren Zeitpunkt t_2 sind sie wieder in Phase. b) Die resultierende Welle, die sich aus der Überlagerung der in a gezeigten Wellen ergibt. Die Frequenz der resultierenden Welle ist etwa dieselbe wie die der ursprünglichen Wellen, aber die Amplitude ist mit einer neuen Frequenz verändert („moduliert“). Die Form der Amplitudenmodulation ist durch die gestrichelt gezeichnete Einhüllende angedeutet. Die Amplitude ist zu den Zeitpunkten t_0 und t_2 (wenn also die ursprünglichen Wellen in Phase sind) maximal, sie ist null zu den Zeitpunkten t_1 und t_3 .

hat die resultierende Wellenfunktion die Gestalt

$$\begin{aligned} p(t) &= 2p_{\max} \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \sin(\langle\omega\rangle t) \\ &= 2p_{\max} \cos\left(2\pi\frac{1}{2}\Delta\nu t\right) \sin(2\pi\langle\nu\rangle t). \end{aligned} \quad (12.52)$$

Dabei ist $\Delta\nu = \Delta\omega/(2\pi)$ die Differenz der Schwingungsfrequenzen und $\langle\nu\rangle = \langle\omega\rangle/(2\pi)$ die mittlere Schwingungsfrequenz.

Abbildung 12.39 zeigt die zeitlichen Druckvariationen der sich überlagernden Schallwellen. Die Wellen sind ursprünglich in Phase und interferieren zum Zeitpunkt $t = 0$ konstruktiv. Da ihre Frequenzen sich leicht unterscheiden, läuft die Phase der Wellen nach und nach auseinander; zum Zeitpunkt t_1 beträgt die Phasendifferenz der Wellen 180° , die Wellen sind gegenphasig und interferieren destruktiv (zur vollständigen Auslöschung kommt es nur, wenn die Druckamplituden der beiden Wellen gleich sind). Nach einem weiteren Zeitintervall gleicher Größe (zum Zeitpunkt t_2 in der Abbildung) sind die Wellen wieder in Phase und interferieren konstruktiv. Je höher der Frequenzunterschied der beiden Wellen ist, umso schneller kommen sie außer Phase und wieder in Phase.

Mit dem Ohr hört man bei diesem Phänomen einen Ton der Frequenz $\langle\nu\rangle = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$ und der Amplitude $2p_{\max} \cos(2\pi\frac{1}{2}\Delta\nu t)$. (Für einige Werte von t ist die Amplitude negativ. Wegen $-\cos\theta = \cos(\theta + \pi)$ ist ein Vorzeichenwechsel

der Amplitude jedoch äquivalent zu einer Phasenverschiebung um 180° .) Die Amplitude oszilliert daher mit der Frequenz $\frac{1}{2}\Delta\nu$. Da die Intensität der Schallwelle (d. h. die Lautstärke des Tons) proportional zum Quadrat der Amplitude ist, klingt der Ton immer dann laut, wenn die Amplitudenfunktion entweder minimal oder maximal ist. Daher ist die Frequenz der Intensitätsschwankungen, die sogenannte **Schwebungsfrequenz**, gerade doppelt so hoch wie $\frac{1}{2}\Delta\nu$, also gleich dem Frequenzunterschied der beiden Wellen:

$$\nu_{\text{Schwebung}} = \Delta\nu. \quad (12.53)$$

SCHWEBUNGSFREQUENZ

Je ähnlicher die Frequenzen der beiden sich überlagernden Wellen sind, umso länger dauert es, bis sie außer Phase und wieder in Phase sind. Wenn man beispielsweise zwei Stimmgabeln mit den Frequenzen 241 Hz und 243 Hz anschlägt, dann hört man einen Ton der Frequenz 242 Hz, der zweimal pro Sekunde laut und wieder leise wird; die Schwebungsfrequenz beträgt damit 2 Hz. Das Ohr kann maximal 15 bis 20 Schwebungen pro Sekunde wahrnehmen; bei höherer Frequenz sind die Lautstärkeunterschiede zu schnell, als dass man sie noch unterscheiden könnte.

Die Schwebung wird häufig eingesetzt, um etwa beim Vibratospiel auf Streichinstrumenten einen volleren Klang zu erreichen oder um beim Stimmen eine unbekannte Frequenz mit einer bekannten Frequenz zu vergleichen, etwa beim Stimmen eines Klaviers. Dazu schlägt man gleichzeitig eine Stimmgabel und die zu stimmende Saite an und verändert dabei die Saitenspannung, bis die einzelnen Schwebungen in sehr langem zeitlichen Abstand folgen; das bedeutet, dass der Frequenzunterschied der beiden Schallerzeuger sehr klein (im optimalen Fall $\Delta\nu = 0$) ist.

Zusammenhang von Phasendifferenz und Gangunterschied

Ein häufiger Grund für eine Phasendifferenz zwischen zwei Wellen ist die unterschiedliche Weglänge zwischen den Quellen und dem Interferenzpunkt. Die Differenz dieser Weglängen nennt man den Wegunterschied oder den Gangunterschied. Nehmen wir an, dass die beiden Quellen harmonische Wellen gleicher Frequenz und Wellenlänge emittieren. Die Wellen sollen in Phase sein, d. h. dass beispielsweise jeweils ein positiver Wellenkamm die erste und die zweite Quelle gleichzeitig verlässt. Betrachten Sie einen Punkt im Raum, der von den beiden Quellen unterschiedlich weit entfernt ist. Wenn der Gangunterschied genau eine Wellenlänge oder ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge beträgt (Abbildung 12.40a), ist die Interferenz in diesem Punkt konstruktiv. Beträgt der Gangunterschied dagegen eine halbe Wellenlänge oder ein ungeradzahliges Vielfaches davon (Abbildung 12.40b), fällt das Maximum der einen mit einem Minimum der anderen Welle zusammen, und die Interferenz in dem Punkt ist destruktiv.

Allgemein lässt sich die Wellenfunktion für zwei Wellen (z. B. Schallwellen), die in Phase emittiert werden, schreiben als

$$p_1 = p_{\max} \sin(kx_1 - \omega t)$$

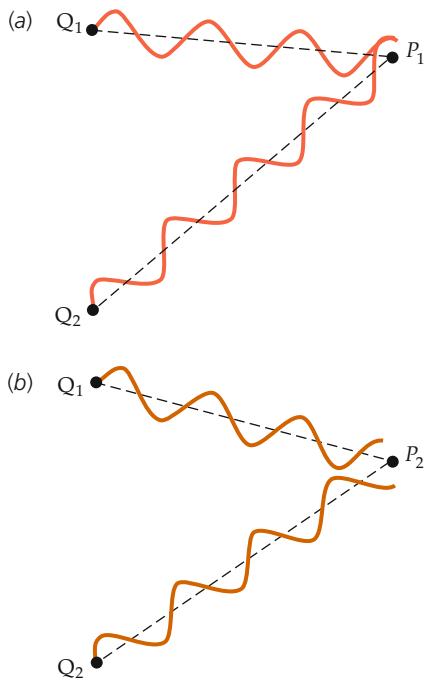


Abbildung 12.40 Wellen aus den zwei Quellen Q_1 und Q_2 treffen sich in einem Punkt. Sie werden in Phase emittiert. a) Wenn die Phasendifferenz für die Wellen in P_1 eine Wellenlänge λ beträgt, sind die Wellen in P_1 in Phase und interferieren konstruktiv. b) Wenn die Phasendifferenz für die Wellen in P_2 dagegen $\frac{1}{2}\lambda$ beträgt, sind die Wellen in P_2 um 180° gegeneinander phasenverschoben und interferieren daher destruktiv. Haben die Wellen in P_2 dieselbe Amplitude, löschen sie sich in diesem Punkt vollständig aus.

bzw. als

$$p_2 = p_{\max} \sin(kx_2 - \omega t).$$

Die Phasendifferenz der beiden Wellenfunktionen ist

$$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_1 - x_2) = k\Delta x.$$

Mit $k = 2\pi/\lambda$ erhält man

$$\delta = k\Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}. \quad (12.54)$$

ZUSAMMENHANG VON PHASENDIFFERENZ, WELLENZAHL UND GANGUNTERSCHIED

Die Beispiele 12.18 und 12.19 illustrieren das Prinzip der Überlagerung und den Einfluss der Phasendifferenz anhand von Schallwellen.

Beispiel 12.18: Resultierende Schallwelle

Zwei identische Lautsprecher werden von einem gemeinsamen Verstärker angesteuert und schwingen in Phase. In einem Punkt, der sich 5,00 m von dem einen

und 5,17 m vom anderen Lautsprecher entfernt befindet, beträgt die Druckamplitude jeder einzelnen Welle jeweils p_{\max} . Berechnen Sie die Amplitude der resultierenden Wellen, wenn die Frequenz der Schallwellen a) 1000 Hz, b) 2000 Hz und c) 500 Hz beträgt. (Rechnen Sie mit einer Schallgeschwindigkeit von 340 m/s.)

Problembeschreibung: Die durch die Überlagerung von zwei Wellen mit einer Phasendifferenz δ entstehende resultierende Welle hat die Amplitude $A = 2p_{\max} \cos(\frac{1}{2}\delta)$ (Gleichung 12.51); dabei hat jede der beiden ursprünglichen Wellen die Amplitude p_{\max} , die Phasendifferenz ist $\delta = 2\pi\Delta x/\lambda$ (Gleichung 12.54). Der Gangunterschied $\Delta x = 5,17 \text{ m} - 5,00 \text{ m} = 0,17 \text{ m}$ ist gegeben; wir brauchen somit nur noch die Wellenlänge λ .

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Wellenlänge ergibt sich als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, geteilt durch ihre Frequenz. Für $v = 1000 \text{ Hz}$ erhält man für die Wellenlänge λ :

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m/s}}{1000 \text{ Hz}} = 0,340 \text{ m}$$

2. Für $\lambda = 0,34 \text{ m}$ ist der gegebene Gangunterschied ($\Delta x = 0,17 \text{ m}$) gerade $\frac{1}{2}\lambda$; wir erwarten destruktive Interferenz. Berechnen Sie mit dem gefundenen Wert von λ und mit Gleichung 12.54 die Phasendifferenz δ und daraus die Amplitude A :

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{0,17 \text{ m}}{0,340 \text{ m}} = \pi$$

und damit

$$A = 2p_{\max} \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) = 2p_{\max} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = [0,0 \text{ m}]$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie λ für $\nu = 2000 \text{ Hz}$:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m/s}}{2000 \text{ Hz}} = 0,170 \text{ m}$$

2. Für $\lambda = 0,170 \text{ m}$ beträgt der Gangunterschied genau λ ; wir können also konstruktive Interferenz erwarten. Berechnen Sie die Phasendifferenz und die Amplitude:

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{0,170 \text{ m}}{0,170 \text{ m}} = 2\pi$$

und damit

$$A = 2p_{\max} \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) = p_{\max} \cos\pi = [-2p_{\max}]$$

Teilaufgabe c

1. Berechnen Sie λ für $v = 500 \text{ Hz}$:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 0,680 \text{ m}$$

2. Berechnen Sie die Phasendifferenz und die Amplitude.

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{0,17 \text{ m}}{0,680 \text{ m}} = \frac{\pi}{2}$$

und damit

$$A = 2p_{\max} \cos \left(\frac{1}{2} \delta \right) = 2p_{\max} \cos \frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}p_{\max}}$$

Plausibilitätsprüfung: Jede der Antworten liegt zwischen $-2p_{\max}$ und $+2p_{\max}$, also im erwarteten Bereich.

Weitergedacht: In Teilaufgabe b ist A negativ. Gleichung 12.51 kann als $y_1 + y_2 = A' \sin(kx - \omega t + \frac{\delta}{2})$ bzw. als $y_1 + y_2 = -A' \sin(kx - \omega t + \frac{\delta}{2} + \pi)$ geschrieben werden. Ein Phasenunterschied von $\pi = 180^\circ$ ist gleichwertig mit einer Multiplikation mit -1 . ■

Beispiel 12.19: Schalldruck aus zwei Lautsprechern

Die beiden identischen Lautsprecher aus Beispiel 12.18 werden nun gegeneinander gedreht und stehen sich im Abstand von 180 cm gegenüber. Sie werden beide durch einen Schallerzeuger mit 686 Hz gesteuert. Bestimmen Sie die Punkte auf der Verbindungsleitung zwischen den Lautsprechern, bei denen die Schallstärke (der Schalldruck) a) maximal und b) minimal ist. (Vernachlässigen Sie die Schalldruckänderung aufgrund der Entfernung von den Lautsprechern, und verwenden Sie für die Schallgeschwindigkeit den Wert 343 m/s.)

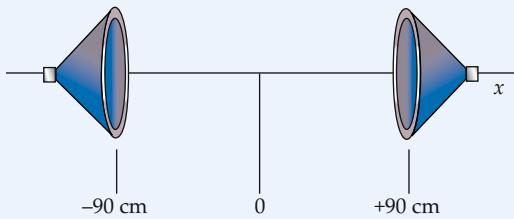


Abbildung 12.41 Die beiden Lautsprecher stehen auf der x -Achse, der Nullpunkt der x -Achse befindet sich genau auf der Mitte zwischen ihnen.

Problembeschreibung: Wir legen den Ursprung genau in die Mitte zwischen den Lautsprechern (Abbildung 12.41). Da dieser Punkt äquidistant zu beiden Lautsprechern ist, ist dort die Schallstärke maximal. Wenn wir uns um eine

Strecke x in Richtung auf einen der Lautsprecher zu bewegen, dann beträgt die Phasendifferenz $2x$. Der Schalldruck ist maximal für $2x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$ und minimal für $2x = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \dots$

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Der Schalldruck ist maximal, wenn $2x$ ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge ist:

$$2x = 0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \pm3\lambda, \dots$$

2. Berechnen Sie die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{343 \text{ m/s}}{686 \text{ Hz}} = 0,500 \text{ m} = 50,0 \text{ cm}$$

3. Lösen Sie mithilfe der berechneten Wellenlänge nach x auf:

$$x = 0, \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \dots$$

$$= \boxed{0, \pm 25,0 \text{ cm}, \pm 50,0 \text{ cm}, \pm 75,0 \text{ cm}}$$

Teilaufgabe b

1. Der Schalldruck ist minimal, wenn $2x$ ein ungeradzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge ist:

$$2x = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \pm\frac{5}{2}\lambda, \dots$$

2. Lösen Sie mithilfe der berechneten Wellenlänge nach x auf:

$$x = \pm\frac{1}{4}\lambda, \pm\frac{3}{4}\lambda, \pm\frac{5}{4}\lambda, \dots$$

$$= \boxed{\pm 12,5 \text{ cm}, \pm 37,5 \text{ cm}, \pm 62,5 \text{ cm}, \pm 87,5 \text{ cm}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Ergebnisse der Teilaufgaben a und b ergänzen einander; die Minima liegen wie erwartet genau in der Mitte zwischen den Maxima.

Weitergedacht: Die Maxima und Minima sind *relative* Maxima und *relative* Minima, weil die Amplitude des näheren Lautsprechers etwas größer ist als die von dem entfernteren Lautsprecher. Für die Maxima sind nur sieben, für die Minima nur acht Werte angegeben; jeder weitere Wert würde ein Maximum oder ein Minimum beschreiben, das nicht mehr zwischen den beiden Lautsprechern liegt. ■

Abbildung 12.42a zeigt das Wellenmuster, das zwei dicht beieinander liegende, gleichphasig schwingende Punktquellen erzeugen. Jede der Quellen erzeugt kreisförmige Wellenfronten. Die kreisförmigen Wellen haben jeweils dieselbe Phase und sind durch einen Abstand von einer Wellenlänge voneinander

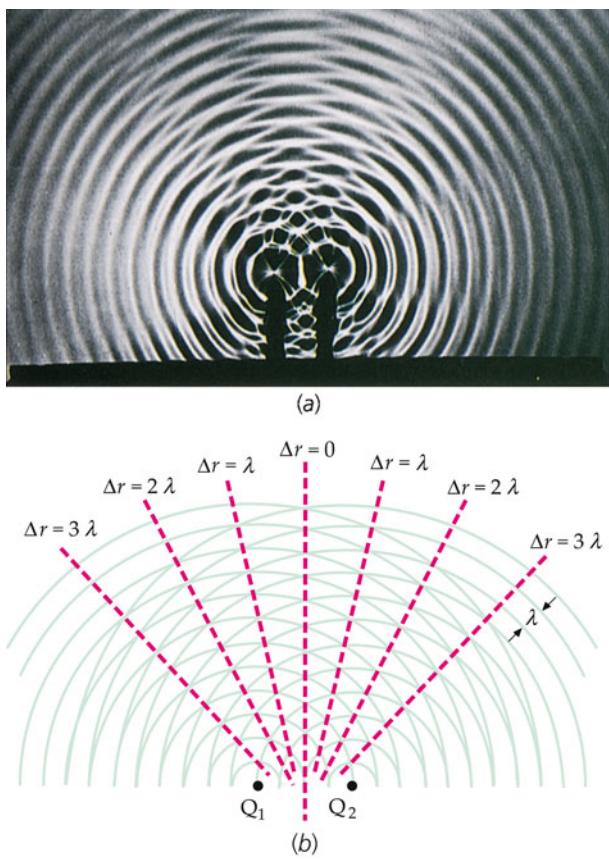


Abbildung 12.42 a) Wasserwellen, die durch zwei dicht beieinander liegende, gleichphasige Punktquellen erzeugt werden. Durch Überlagerung entsteht ein Interferenzmuster. b) Bei dieser geometrischen Konstruktion des Interferenzmusters aus a) geben die grauen Kreislinien die Lage der Wellenkämme (Maxima) an. Die Schnittpunkte der Kreise sind durch gestrichelte Linien verbunden. An diesen Stellen beträgt der Gangunterschied der Wellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge, dort überlagern sich die Wellen konstruktiv. (© a) Berenice Abbott, SJ 1328/Photo Researchers.)

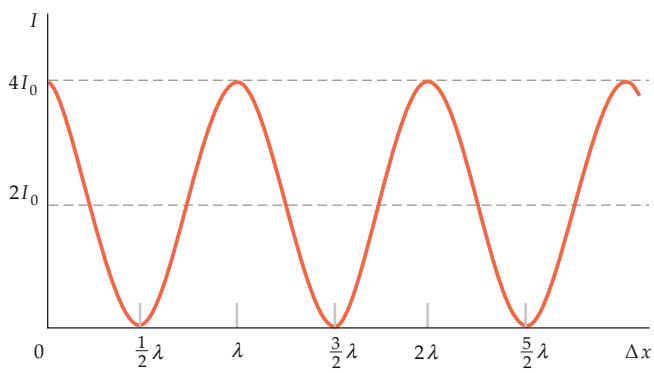


Abbildung 12.43 Intensität der resultierenden Welle, die sich bei der Überlagerung von zwei gleichphasigen Wellen mit der jeweiligen Intensität I_0 ergibt, aufgetragen gegen den Gangunterschied der beiden Wellen.

getrennt. Ein ähnliches Muster lässt sich geometrisch konstruieren, indem man mit dem Zirkel Kreise um zwei dicht beieinander liegende Punkte schlägt; diese Kreise repräsentieren die Wellenkämme, die zu einem bestimmten Zeitpunkt von jeder der beiden Quellen ausgehen (Abbildung 12.42b). Wo sich die Wellenkämme von jeder der beiden Quellen überlagern, interferieren die Wellen konstruktiv. Von diesen Punkten sind beide Quellen jeweils gleich weit entfernt, oder die Entfernung unterscheidet sich um ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge. Die gestrichelten Linien verbinden die Punkte, die von beiden Quellen gleich weit entfernt sind oder für die der Gangunterschied eine Wellenlänge, zwei Wellenlängen oder drei Wellenlängen beträgt. An jedem Punkt dieser Linien ist die Interferenz konstruktiv; sie kennzeichnen somit die Interferenzmaxima. Zwischen den Linien der Interferenzmaxima liegen die Linien der Interferenzminima. In den Minima unterscheiden sich die Weglängen um ein ungeradzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge. Im gesamten Bereich, in dem sich die Wellen überlagern, hat die Amplitude der resultierenden Welle die Form $A = 2p_{\max} \cos(\frac{1}{2}\delta)$; dabei ist p_{\max} die Amplitude der einzelnen Wellen, und δ hängt mit dem Gangunterschied Δr über $\delta = 2\pi \Delta r/\lambda$ zusammen (Gleichung 12.54).

Abbildung 12.43 zeigt die Intensität I der resultierenden Welle in Abhängigkeit vom Gangunterschied Δx der sich überlagern Wellen. In den Punkten konstruktiver Interferenz ist die Amplitude der resultierenden Welle doppelt so groß wie die Amplitude einer der beiden Wellen; da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, beträgt die Intensität in diesen Punkten $4I_0$, wenn man mit I_0 die Intensität für die Einzelwellen der Amplitude p_{\max} bezeichnet. Bei destruktiver Interferenz ist die Intensität der resultierenden Welle null. Die mittlere Intensität, angedeutet durch die gestrichelte Linie, ist doppelt so hoch wie die Intensität einer der beiden Wellen allein. Dies ist eine Folgerung aus dem Energieerhaltungssatz. Die Interferenz der Wellen sorgt also nur für eine Umverteilung der Energie im Raum. Die Interferenz von zwei Schallwellen lässt sich demonstrieren, indem man zwei Lautsprecher an denselben Kanal eines Verstärkers anschließt, damit sie stets in Phase sind. Wenn man sich dann durch den Raum bewegt, kann man mit dem Ohr die Stellen von konstruktiver und destruktiver Interferenz hören. Die Schallintensität wird normalerweise in den Punkten destruktiver Interferenz nicht genau null, weil der Schall von den Wänden und Gegenständen im Raum reflektiert wird. Man führt solche Demonstrationen am besten in speziell ausgerüsteten, sogenannten *schalltoten Räumen* durch, in denen praktisch keine Schallreflexionen (Echos) von den Wänden auftreten.

Kohärenz

Zwei Quellen müssen nicht gleichphasige Wellen emittieren, um Interferenzmuster zu erzeugen. Betrachten wir zwei Quellen, die gegenphasig emittieren. Beispielsweise lassen sich zwei in Phase befindliche Lautsprecher gegenphasig machen, indem man die elektrischen Anschlüsse von einem der beiden Lautsprecher vertauscht. Dann entsteht dasselbe Intensitätsmuster

wie in Abbildung 12.43 mit dem Unterschied, dass die Minima und die Maxima vertauscht sind: In den Punkten, an denen der Gangunterschied der beiden Wellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge beträgt, ist die Interferenz destruktiv, weil die Wellen um 180° gegeneinander phasenverschoben sind. In den Punkten, in denen der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt, tritt konstruktive Interferenz auf, weil die Wellen in diesen Punkten in Phase sind (die Phasendifferenz der Quellen von 180° wird durch die Phasendifferenz von 180° aufgrund des Gangunterschieds ausgeglichen).

Ähnliche Interferenzmuster entstehen immer dann, wenn die Quellen in Phase sind bzw. allgemeiner, wenn die Phasendifferenz der Quellen konstant bleibt. Zwei solche Quellen heißen **kohärent**. Die Quellen der Wasserwellen in Abbildung 12.42 sind beispielsweise dann kohärent, wenn sie von demselben Motor angetrieben werden. Kohärente Schallquellen erhält man, indem man zwei Lautsprecher an dieselbe Signalquelle und denselben Verstärker anschließt.

Quellen, deren Phasendifferenz nicht konstant ist, sondern zufällig verteilt variiert, heißen **inkohärente Quellen**. Es gibt mannigfache Beispiele für inkohärente Quellen, etwa zwei Lautsprecher, die durch unterschiedliche Verstärker gespeist, oder zwei Violinen, die von verschiedenen Spielern gespielt werden. Bei inkohärenten Quellen schwankt die Interferenz an einem bestimmten Punkt sehr schnell zwischen konstruktivem und destruktivem Fall, sodass kein stationäres Muster entsteht, das sich beobachten ließe. Bei der Überlagerung von zwei oder mehr Wellen aus inkohärenten Quellen ergibt sich die resultierende Intensität als die Summe der von den einzelnen Quellen am jeweiligen Ort erzeugten Intensitäten.

12.7 Stehende Wellen

Wenn sich Wellen nur in einem bestimmten räumlich begrenzten Gebiet ausbreiten können – etwa die Wellen auf einer beidseitig eingespannten Klaviersaite, die Schallwellen in einer Orgelpfeife oder die Lichtwellen in einem Laser –, treten an beiden Enden des Gebiets Reflexionen auf. Dadurch breiten sich die Wellen in zwei Richtungen aus und überlagern sich gemäß dem Superpositionsprinzip. In Abhängigkeit von der Länge der Seite oder der Orgelpfeife gibt es dann bestimmte Frequenzen, für die die Überlagerung zu einem stationären Schwingungsmuster führt. Diese Muster heißen **stehende Wellen**. Stehende Wellen haben wichtige Anwendungen beispielsweise bei Musikinstrumenten oder in der Quantentheorie.

Stehende Seilwellen

Beidseitig eingespannte Saiten

Wenn man eine Saite an beiden Enden einspannt und dann die Saite an einer beliebigen Stelle mit einer harmonischen Bewegung geringer Amplitude auslenkt, so ergibt sich für bestimmte

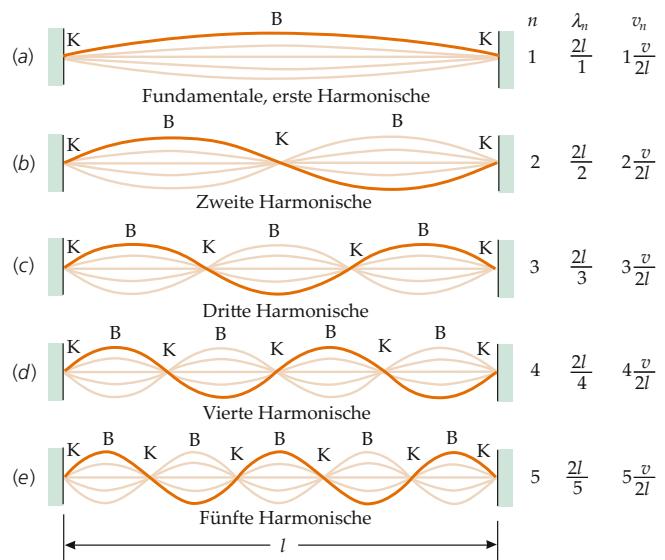
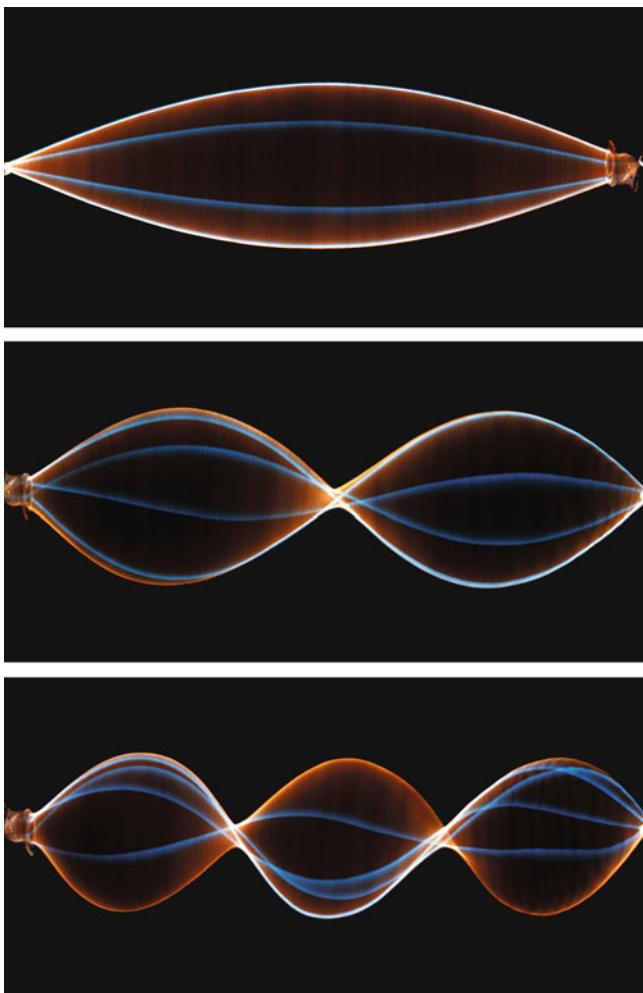


Abbildung 12.44 Stehende Wellen auf einer beidseitig eingespannten Saite. Die mit B bezeichneten Bereiche der Saite nennt man Schwingungsbäuche, die mit K bezeichneten Bereiche werden als Schwingungsknoten bezeichnet. Im Allgemeinen hat die n -te Harmonische genau n Bäuche.

Frequenzen ein stehendes Wellenfeld wie in Abbildung 12.44. Die Frequenzen, bei denen diese Muster auftreten, heißen **Resonanzfrequenzen** der Saite. Jede Resonanzfrequenz und ihre zugehörige Wellenfunktion wird **Schwingungsmodus** oder kurz Mode genannt. Die niedrigste Resonanzfrequenz, die sogenannte **Eigenfrequenz** ν_1 , erzeugt das stehende Wellenfeld in Abbildung 12.44a, das man **Grundschwingung**, **Fundamentale** oder **erste Harmonische** nennt. Die nächsthöhere Resonanzfrequenz ν_2 erzeugt das Wellenfeld in Abbildung 12.44b. Diese Schwingungsmodus hat eine doppelt so hohe Frequenz wie die Grundschwingung und wird zweite Grund- oder Eigenschwingung, zweite Harmonische oder erste Oberschwingung genannt. Die nächsthöhere Resonanzfrequenz ν_3 ist dreimal so hoch wie die der Grundschwingung und erzeugt als dritte Harmonische das Schwingungsmuster, wie es in Abbildung 12.44c zu sehen ist. Die Menge aller Resonanzfrequenzen nennt man das **Resonanzspektrum** der Saite.

Viele Systeme, in denen stehende Wellen auftreten, haben Resonanzspektren, in denen die Resonanzfrequenzen nicht-ganzzahlige Vielfache der niedrigsten Frequenz sind. Diese niedrigste Frequenz ist die Eigenfrequenz, die höheren Resonanzfrequenzen werden in allen Resonanzspektren als erster, zweiter usw. **Oberton** bezeichnet. Diese Terminologie hat ihren Ursprung in der Musik. Nur wenn die Resonanzfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Eigenfrequenz ist, nennt man einen Oberton auch eine Harmonische.

Man erkennt in Abbildung 12.44, dass es für jede Harmonische bestimmte Punkte auf der Saite gibt (beispielsweise den Mittelpunkt der Saite in Abbildung 12.44b), der sich nicht bewegt. Diese Punkte werden **Schwingungsknoten** oder kurz **Knoten**



Stehende Wellen auf einer Saite. Sie werden von einem Vibrator angeregt, an dem das linke Ende der Saite befestigt ist. Solche stehenden Wellen treten nur bei ganz bestimmten Frequenzen auf. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

genannt. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Knoten befindet sich ein Punkt maximaler Schwingungsamplitude, der **Schwingungsbauch** oder kurz **Bauch**. Die beiden fixierten Enden der Saite sind ebenfalls Knoten. Auch wenn ein Ende der Saite nicht vollständig fixiert, sondern beispielsweise mit einer Stimmgabel oder einem Vibrator verbunden ist, kann man es näherungsweise noch immer als Knoten ansehen, da seine Schwingungsamplitude im Vergleich zu der eines Schwingungsbauchs nur gering ist. Die erste Harmonische hat einen Bauch, die zweite Harmonische hat zwei Bäuche usw.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Resonanzfrequenzen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle auf der Saite und der Saitenlänge herleiten. Die Entfernung zwischen einem Knoten zum nächsten Bauch beträgt ein Viertel der Wellenlänge. Damit ist die Länge l der Saite genau die Hälfte

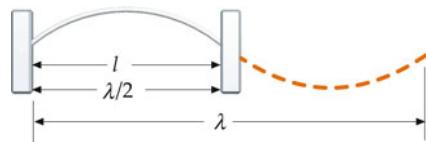


Abbildung 12.45 Zum Zusammenhang zwischen der Länge der Saite und der Wellenlänge der stehenden Welle. Für die erste Harmonische auf einer beidseitig eingespannten Saite gilt $\lambda = 2l$.

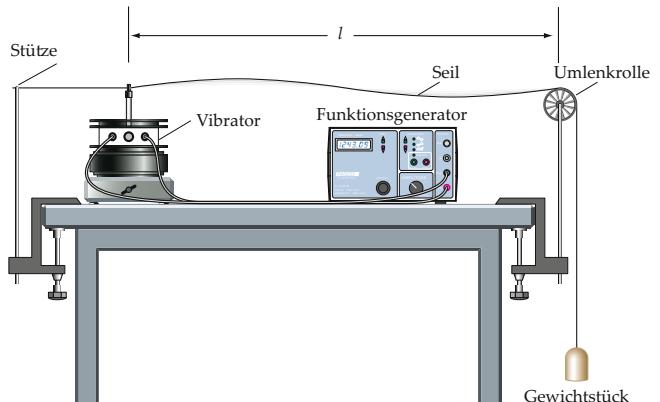


Abbildung 12.46 Versuchsaufbau zur Erzeugung von stehenden Seilwellen: Das Seil ist durch ein Gewicht gespannt. Der Funktionsgenerator steuert den Antrieb an, der das Seil in Schwingungen versetzt. Die Wellen breiten sich entlang des Seils aus und werden an der Umlenkrolle reflektiert.

der Wellenlänge bei der Grundschwingung (Abbildung 12.45). Nach Abbildung 12.44 macht l gerade zwei halbe Wellenlängen der zweiten Harmonischen, drei halbe Wellenlängen der dritten Harmonischen usw. aus. Allgemein gilt

$$l = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (12.55)$$

BEDINGUNG FÜR STEHENDE WELLEN BEI EINER BEIDSEITIG EINGESPANNTEN SAITE

wobei λ_n die Wellenlänge der n -ten Harmonischen ist. Dieser Zusammenhang heißt die **Bedingung für stehende Wellen**. Aus dieser Bedingung lässt sich die Frequenz der n -ten Harmonischen ableiten: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Welle ist gleich der Frequenz v_n mal der Wellenlänge. Somit erhält man

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l/n} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

oder

$$v_n = n \frac{v}{2l} = n v_1 \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \quad (12.56)$$

RESONANZFREQUENZEN EINER BEIDSEITIG EINGESPANNTEN SAITE

Dabei ist $v_1 = v/(2l)$ die Grundfrequenz.

Vorgehensweise: Lösung von Aufgaben mithilfe der Bedingung für stehende Wellen

Prägen Sie sich Abbildung 12.44 ein, aus der Sie immer die Bedingung für stehende Wellen ($\lambda_n = 2l/n$) herleiten können, und nutzen Sie den Zusammenhang $v = v_n \lambda_n$.

1. Skizzieren Sie wie im linken Teil von Abbildung 12.44 die ersten Harmonischen der Saite. An jedem eingespannten Ende der Saite ist ein Knoten, ferner sind ein Knoten und der benachbarte Bauch immer $\frac{1}{4}\lambda$ voneinander entfernt.
2. Stellen Sie mithilfe von $v = v \lambda$ einen Zusammenhang zwischen der Wellengeschwindigkeit und der Frequenz her.
3. Stellen Sie mithilfe von $v = \sqrt{|F_s|/\mu}$ einen Zusammenhang zwischen der Wellengeschwindigkeit und der Zugkraft, mit der die Saite gespannt ist, her.

Plausibilitätsprüfung: Prüfen Sie, ob die Dimensionen Ihres Ergebnisses richtig sind.

Das Phänomen der stehenden Wellen lässt sich mithilfe der Resonanz verstehen. Betrachten Sie ein Seil der Länge l , das mit einem Ende an einem Vibrator befestigt und am anderen Ende eingespannt ist (Abbildung 12.46). Die erste Welle läuft vom Vibrator aus über die Strecke l das Seil entlang bis zum festen Ende; dort wird sie reflektiert und invertiert. Sie läuft dann über die Strecke l zurück und wird am Vibrator erneut reflektiert und invertiert. Die gesamte Laufzeit für die Welle beträgt $2l/v$. Wenn diese Zeit gerade die Periode des Vibrators ist, überlagert sich die doppelt reflektierte Welle genau mit der zweiten vom Vibrator erzeugten Welle; durch konstruktive Interferenz entsteht so ein Wellenkamm, dessen Amplitude doppelt so hoch ist wie die der ursprünglichen Welle. Diese resultierende Welle läuft wieder das Seil hin und zurück und wird von der dritten durch den Vibrator erzeugten Welle überlagert, wodurch die Amplitude auf das Dreifache anwächst, usw. In einem solchen Fall ist der Vibrator in Resonanz mit dem Seil. Die Wellenlänge beträgt $2l$, und die Frequenz ist $v/(2l)$.

Auch bei anderen Vibratorkräften tritt Resonanz auf. Der Vibrator ist in Resonanz mit der Saite, wenn die Zeit, die der erste Wellenberg für die Ausbreitung über die Strecke $2l$ benötigt, genau das n -fache (mit einer ganzen Zahl n) der Periode T des Vibrators beträgt. In diesem Fall ist also $2l/v = nT$, wobei $2l/v$ die Zeit ist, die der Wellenkamm für den Hin- und Rückweg über die Saite benötigt. Dann lässt sich die Resonanzbedingung in der Form

$$v_n = \frac{1}{T_n} = n \frac{v}{2l} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

schreiben. Das ist dasselbe Ergebnis, wie wenn man die Saitenlänge l so wählt, dass sie ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ausmacht. Die bei der Resonanz maximal erreichbare Amplitude wird durch verschiedene Dämpfungseffekte begrenzt, etwa den Energieverlust bei der Reflexion, den Luftwiderstand der Saite, die nicht perfekte Biegsamkeit der Saite usw.

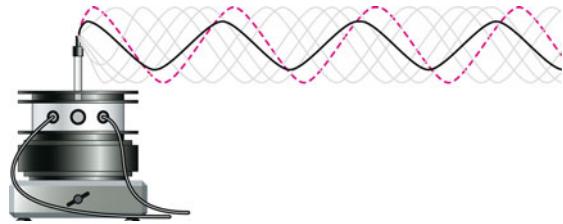
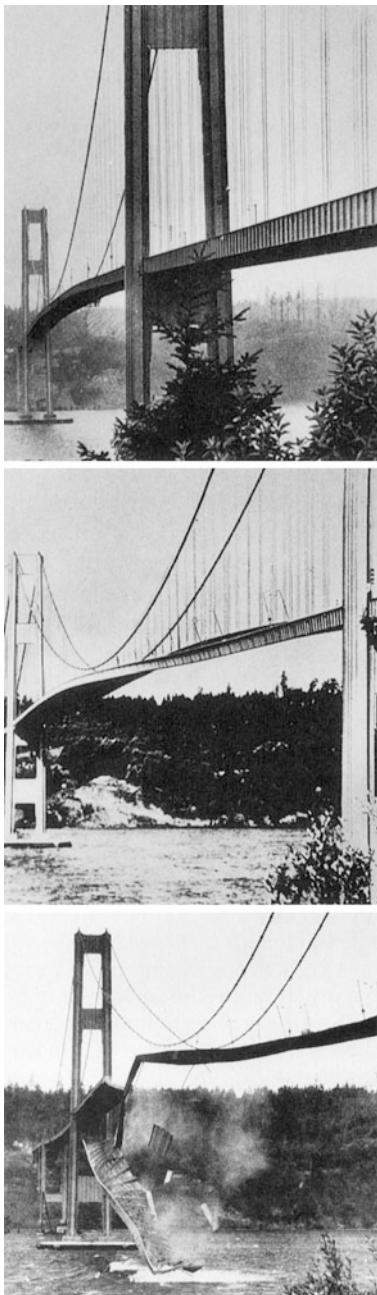


Abbildung 12.47 Ein mechanischer Vibrator erzeugt Wellen auf einer Saite; im hier gezeigten Fall ist seine Frequenz nicht mit einer der Eigenfrequenzen der Saite in Resonanz. Die Welle, die den Vibrator zuerst verlässt (rot gestrichelte Linie), ist nicht mit den zwei- oder mehrmals reflektierten Wellen (graue Linien) in Phase, und diese Wellen sind ihrerseits untereinander ebenfalls nicht in Phase. Daher bildet sich keine Amplitudenüberhöhung aus. Die resultierende Welle (schwarze Linie) hat etwa dieselbe Amplitude wie die einzelnen Wellen, die ungefähr der Auslenkung des Vibrators entspricht.

Die in Gleichung 12.56 gegebenen Resonanzfrequenzen werden, wie bereits bekannt, auch die Eigenfrequenzen der Saite genannt. Wenn die Frequenz des Vibrators nicht genau eine der Eigenfrequenzen ist, bilden sich keine stehenden Wellen aus. Nachdem die erste Welle die Strecke $2l$ zurückgelegt hat und am Vibrator reflektiert wurde, hat sie eine andere Phase als die zu diesem Zeitpunkt vom Vibrator erzeugte neue Welle (Abbildung 12.47). Wenn die durch Überlagerung dieser Wellen entstandene Welle die Strecke $2l$ auf der Saite zurückgelegt hat und am Vibrator reflektiert wurde, hat auch diese Resultierende eine andere Phase als die zu diesem Zeitpunkt vom Vibrator erzeugte neue Welle. In einigen Fällen wird die neue resultierende Welle eine größere, in anderen Fällen eine kleinere Amplitude als die vorangegangene Welle haben. Im Mittel wird sich die Amplitude nicht erhöhen, sondern in der Größenordnung der Amplitude von der ersten erzeugten Welle bleiben, die etwa der Auslenkung des Vibrators entspricht. Diese Amplitude ist sehr klein verglichen mit den Werten, die im Resonanzfall auftreten können.



Nur vier Monate nach ihrer Eröffnung stürzte die Hängebrücke von Tacoma Narrows im US-Bundesstaat Washington am 7. November 1940 ein. Ursache für den Einsturz waren Windböen von rund 70 km/h, die stehende Wellen in der Brücke erzeugt hatten. (© University of Washington.)

Beispiel 12.20 illustriert eine Anwendung der Schwingungsmöden im Klavierbau.

Beispiel 12.20: Testen von Klavierdraht

Sie sollen einen neuen Drahttyp auf die mögliche Verwendung in Klavieren untersuchen. Der 3,00 m lange Draht hat eine lineare Massendichte von $\mu = 0,00250 \text{ kg/m}$ und zwei benachbarte Resonanzfrequenzen bei 252 Hz und 336 Hz. Bestimmen Sie die Grundfrequenz des Drahts und stellen Sie fest, ob der Draht als Klaviersaite geeignet ist. Aus Sicherheitsgründen werden erhöhte Anforderungen an den Rahmen gestellt, wenn die Zugkraft der Saiten 700 N übersteigt.



Ein Techniker bestimmt den Durchmesser eines Klavierdrahts mit einem Mikrometer. (Mit freundlicher Genehmigung von Buck Rogers/Craftsmen Piano Rebuilders North Attleboro, Massachusetts.)

Problembeschreibung: Die Zugkraft $|F_S|$ lässt sich aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit v für transversale Wellen gemäß $v = \sqrt{|F_S|/\mu}$ berechnen, v erhält man aus $v = v \lambda$, was für jede beliebige Harmonische gilt. Die Wellenlänge für die Grundfrequenz beträgt das Doppelte der Drahtlänge. Um die Grundfrequenz zu bestimmen, setzen Sie 252 Hz als n -te Harmonische an. Dann gilt $v_n = n v_1$ und $v_{n+1} = (n + 1) v_1$ mit $v_{n+1} = 336 \text{ Hz}$. Diese beiden Gleichungen lassen sich nach v_1 auflösen.

Lösung: 1. Der Zusammenhang von Zugkraft und der Ausbreitungsgeschwindigkeit ist:

$$v = \sqrt{|F_S|/\mu}$$

oder

$$F_S = \mu v^2$$

2. Wellengeschwindigkeit, Wellenlänge und Frequenz hängen folgendermaßen zusammen:

$$v = v \lambda$$

3. Mithilfe von Abbildung 12.44 können Sie die Wellenlänge der Grundfrequenz und die Drahtlänge verknüpfen:

$$\lambda_1 = 2l$$

4. Kombinieren Sie die beiden Ergebnisse und bestimmen Sie den Zusammenhang von Wellengeschwindigkeit v und der Grundfrequenz ν_1 :

$$v = \nu_1 \lambda_1 = \nu_1 \cdot 2l = 2\nu_1 l$$

5. Setzen Sie das in das Ergebnis aus Schritt 1 ein und berechnen Sie die Zugkraft:

$$|F_S| = \mu v^2 = 4\mu v_1^2 l^2$$

6. Die aufeinanderfolgenden Harmonischen ν_n und ν_{n+1} hängen folgendermaßen mit der Grundfrequenz ν_1 zusammen:

$$n\nu_1 = 252 \text{ Hz}$$

$$(n+1)\nu_1 = 336 \text{ Hz}$$

7. Wenn Sie diese Gleichungen durcheinander teilen, können Sie ν_1 streichen und n bestimmen:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{252 \text{ Hz}}{336 \text{ Hz}} = 0,75 = \frac{3}{4}$$

$$4n = 3n + 3, \quad \text{also} \quad n = 3$$

8. Lösen Sie nach ν_1 auf:

$$\nu_n = n\nu_1,$$

also

$$\nu_1 = \frac{\nu_n}{n} = \frac{\nu_3}{3} = \frac{252 \text{ Hz}}{3} = 84,0 \text{ Hz}$$

9. Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus Schritt 8 $|F_S|$:

$$\begin{aligned} |F_S| &= 4\mu v_1^2 l^2 \\ &= 4(0,00250 \text{ kg/m})(84,0 \text{ Hz})^2 (3,00 \text{ m})^2 \\ &= 635 \text{ N} \end{aligned}$$

10. Liegt die Zugkraft noch innerhalb der Sicherheitsgrenzen?

Die Zugkraft liegt unter 700 N. Damit ist der Draht innerhalb der Sicherheitsgrenzen zu verwenden.



Abbildung 12.48 Eine Saite mit einem fest eingespannten und einem losen Ende erhält man näherungsweise z. B. dadurch, dass man das „lose“ Ende der Saite an einem Ring befestigt, der sich an einem Pfosten frei auf- und abbewegen kann. Das mit dem mechanischen Vibrator verbundene Ende kann man als näherungsweise fest ansehen, weil die Amplitude des Vibrators nur sehr klein ist.

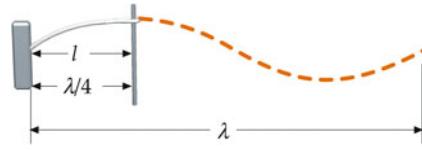


Abbildung 12.49 Für die Grundschwingung einer einseitig eingespannten Saite mit einem losen Ende gilt $\lambda = 4l$.

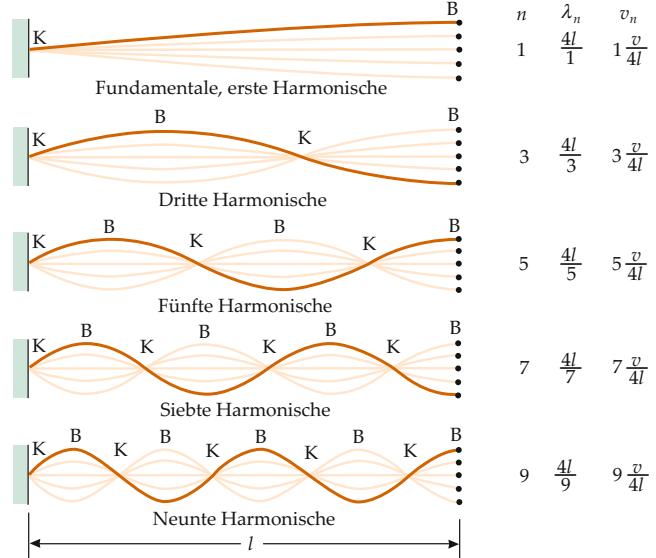


Abbildung 12.50 Stehende Wellen auf einer einseitig eingespannten Saite mit einem losen Ende. Am losen Ende befindet sich stets ein Schwingungsbau.

Einseitig eingespannte Saite mit losem Ende

Abbildung 12.48 zeigt eine Saite mit einem fest eingespannten und einem losen Ende; das lose Ende in dieser Anordnung ist realisiert, indem man das Saitenende an einem Ring befestigt, der sich entlang eines Pfostens reibungsfrei auf- und abbewegen kann. Der Ring wird dabei durch die vertikale Komponente der Zugkraft angetrieben (wir vernachlässigen dabei die Auswirkung der Gravitation). Da die vertikale Bewegung des Saitenendes, das an dem Ring befestigt ist, nicht eingeschränkt ist, spricht man hier von einem freien oder *losen Ende*. Der Ring wird als masselos angesehen, d. h., eine begrenzte vertikale

Kraft auf die Saite erzeugt eine unbegrenzte vertikale Beschleunigung. Diese Beschleunigung bleibt jedoch endlich, wenn die Tangente an die Saite in ihrem losen Ende parallel zur Gleichgewichtslage der Saite ist. Für eine in einer stehenden Welle schwingende Saite sind die einzigen Punkte, an denen diese Bedingung erfüllt ist, die Schwingungsbäuche; damit ist das lose Ende der Saite ein Schwingungsbau.

Bei der Grundschwingung einer einseitig eingespannten Saite mit einem losen Ende befindet sich ein Knoten am festen und

Beispiel 12.21: Stehende Wellen

ZUR ÜBUNG

a) Die Wellenfunktionen zweier Wellen mit gleicher Amplitude, Frequenz und Wellenlänge, die sich in entgegengesetzte Richtung ausbreiten, sind gegeben durch $y_1 = y_{\max} \sin(kx - \omega t)$ und $y_2 = y_{\max} \sin(kx + \omega t)$. Zeigen Sie, dass die Überlagerung dieser beiden Wellen eine stehende Welle ergibt. b) Eine stehende Welle auf einer beidseitig eingespannten Saite ist gegeben durch $y(x, t) = (0,024 \text{ m}) \sin(52,3 \text{ m}^{-1} x) \cos(480 \text{ s}^{-1} t)$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Wellen auf der Saite und berechnen Sie für die stehenden Wellen den Abstand zwischen benachbarten Knoten.

Problembeschreibung: Um zu zeigen, dass die Überlagerung der zwei gegebenen Wellen eine stehende Welle ergibt, muss man zeigen, dass sich die algebraische Summe von y_1 und y_2 in der Form $y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$ (Gleichung 12.61) schreiben lässt. Wenn man die Geschwindigkeit der Wellen und die Wellenlänge berechnen will, vergleicht man die gegebene Wellenfunktion mit Gleichung 12.61 und bestimmt dann anhand des Vergleichs die Wellenzahl und die Kreisfrequenz. Damit lassen sich die Wellenlänge und die Geschwindigkeit der Wellen berechnen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Schreiben Sie Gleichung 12.61 nieder. Wenn sich die Summe von y_1 und y_2 in dieser Form schreiben lässt, ist die Überlagerung der beiden sich ausbreitenden Wellen eine stehende Welle.
2. Addieren Sie die beiden Wellenfunktionen. Benutzen Sie dabei die trigonometrische Identität $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \sin\left(\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right)$. Dies ist die Form, wie sie in Gleichung 12.61 gegeben ist (mit $A = 2y_{\max}$); damit ist die Überlagerung eine stehende Welle.

ein Bauch am losen Ende. Da die Entfernung von einem Knoten zum benachbarten Bauch gerade ein Viertel der Wellenlänge ausmacht, entspricht bei der Grundschwingung die Saitenlänge gerade $l = \lambda_1/4$ (Abbildung 12.49).

Für jede Schwingungsmodus, wie sie in Abbildung 12.50 zu sehen ist, ergibt sich die Länge l der Saite als ein ungeradzahliges Vielfaches der Viertelwellenlänge, also $l = n \frac{1}{4} \lambda_n$ mit $n = 1, 3, 5, \dots$. Die Bedingung für stehende Wellen lässt sich damit schreiben als

$$l = n \frac{\lambda_n}{4} \quad \text{mit} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (12.57)$$

BEDINGUNG FÜR STEHENDE WELLEN AUF EINER SAITE MIT EINEM LOSEN ENDE

Teilaufgabe b

1. Identifizieren Sie die Wellenzahl und die Kreisfrequenz.
2. Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit aus $v = \omega/k$.
3. Berechnen Sie die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ und bestimmen Sie damit den Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

1. $y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$

2.
$$\begin{aligned} y &= y_{\max} \sin(kx - \omega t) + y_{\max} \sin(kx + \omega t) \\ &= 2y_{\max} \sin(kx) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. $k = [52,3 \text{ m}^{-1}], \quad \omega = [480 \text{ s}^{-1}]$

2. $v = [9,18 \text{ m/s}]$

3. $\frac{\lambda}{2} = [6,01 \text{ cm}]$

Plausibilitätsprüfung: Man kann zu Recht vermuten, dass die Überlagerung einer nach links laufenden und einer identischen nach rechts laufenden Welle eine stehende Welle ergibt. (Wenn es eine fortschreitende Welle ergäbe, in welche Richtung sollte sie sich ausbreiten?) Wir sind daher nicht überrascht, dass sich diese Vermutung rechnerisch bestätigt.

Damit ergibt sich $\lambda_n = 4l/n$. Die Resonanzfrequenzen sind dabei gegeben durch

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4l} = n v_1, \quad \text{mit} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (12.58)$$

RESONANZFREQUENZEN EINER SAITE MIT EINEM LOSEN ENDE

Dabei ist

$$v_1 = \frac{v}{4l} \quad (12.59)$$

die Grundfrequenz. Die Eigenfrequenzen dieses Systems stehen im Verhältnis $1:3:5:7\dots$, die geraden Harmonischen fehlen also.

Wellenfunktionen für stehenden Wellen

Wenn eine Saite in der n -ten Schwingungsmodus schwingt, bewegt sich jeder Punkt auf der Saite in einer harmonischen Schwingung auf und ab. Seine Auslenkung $y_n(x, t)$ ist dann gegeben durch

$$y_n(x, t) = A_n(x) \cos(\omega_n t + \delta_n).$$

Dabei ist ω_n die Kreisfrequenz, δ_n die von den Anfangsbedingungen abhängige Phasenkonstante und A_n die Amplitude, die von der Stelle x des betrachteten Abschnitts der Saite abhängt. Die Funktion $A(x)$ gibt die Form der Saite für $\cos(\omega_n t + \delta_n) = 1$ an (also in dem Moment, wenn die Schwingung ihre maximale Auslenkung zeigt). Die Amplitude der in der n -ten Mode schwingenden Saite wird dann durch

$$A_n(x) = A_n \sin(k_n x) \quad (12.60)$$

beschrieben; dabei ist $k_n = 2\pi/\lambda_n$ die Wellenzahl. Die Wellenfunktion für eine stehende Welle in der n -ten Harmonischen hat damit die Form

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n). \quad (12.61)$$

Beispiel 12.21 zeigt noch einmal die Zusammenhänge zwischen den Größen bei einer stehenden Welle.

Es ist nützlich, sich stets die beiden notwendigen Bedingungen für stehende Wellen vor Augen zu halten:

1. Jeder Punkt auf der Saite bleibt entweder in Ruhe oder bewegt sich in einer harmonischen Schwingung. (Die in Ruhe befindlichen Punkte sind die Knoten.)
2. Die Bewegung von zwei beliebigen Punkten auf der Saite, die nicht Knoten sind, ist entweder in Phase oder um 180° phasenverschoben.

NOTWENDIGE BEDINGUNGEN FÜR STEHENDE WELLEN
AUF EINER SAITE

Stehende Schallwellen

Orgelpfeifen sind bekannte Beispiele für die Verwendung von stehenden Wellen in Luftsäulen. Bei den sogenannten Lippen- oder Labialpfeifen strömt der Luftstrom direkt gegen die scharfe Kante einer Öffnung (Punkt A in Abbildung 12.51). Die komplizierte, aber periodische Wirbelbewegung der Luft in der Nähe der Kante bringt die Luftsäule in der Pfeife zum Schwingen. Die Resonanzfrequenzen der Pfeife hängen von der Pfeifenlänge sowie davon ab, ob die Pfeife am anderen Ende offen oder geschlossen ist (in der Orgelfachsprache heißt sie dann „gedackt“). Der weitaus größte Teil der Orgelpfeifen ist vom Typ der Labialpfeifen.

In einer offenen Orgelpfeife bleibt der Luftdruck an den Enden immer nahezu gleich dem Luftdruck der umgebenden Atmosphäre. Da der Druck unmittelbar neben dem offenen Ende nicht

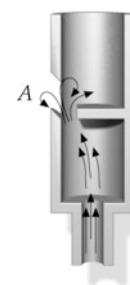


Abbildung 12.51 Schema einer Labialpfeife. Die Luft strömt gegen die Kante und wird in der Nähe des Punkts A verwirbelt. Dadurch werden stehende Wellen in der Pfeife angeregt. In der Nähe von Punkt A, der direkt mit der umgebenden Luft verbunden ist, gibt es einen Knoten, in dem sich der Luftdruck nicht ändert.

variiert, spricht man von einem *Druckknoten* am Ende der offenen Pfeife. Wenn die Schallwelle eine eindimensionale Welle ist (diese Annahme ist dann eine gute Näherung, wenn der Durchmesser der Pfeife wesentlich kleiner ist als die Wellenlänge), befindet sich der Druckknoten genau am Ende der Pfeife. In realen Pfeifen jedoch liegen die Druckknoten etwas außerhalb des offenen Rohrendes. Damit ist die effektive Länge der Pfeife etwas größer als die tatsächliche Länge: $l_{\text{eff}} = l + \Delta l$. Dabei ist Δl ein Korrekturwert für die gemessene Position des Druckknotens; diese sogenannte Endkorrektur liegt etwas unterhalb, aber in der Größenordnung des Pfeifendurchmessers. Die Bedingung für stehende Wellen in diesem System ist dieselbe wie bei einer beidseitig eingespannten Saite. Wenn man die Länge l durch die effektive Länge l_{eff} ersetzt, gelten genau dieselben Gleichungen wie dort.

In einer gedackten Orgelpfeife (an einem Ende offen, am anderen geschlossen) gibt es einen Druckknoten nahe der Öffnung (Punkt A in Abbildung 12.51) und einen Druckbauch am geschlossenen Ende. Die Bedingung für stehende Wellen ist dieselbe wie die für eine einseitig eingespannte Saite mit einem losen Ende. Die effektive Länge der Pfeife ist ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$. Damit beträgt die Wellenlänge der Grundmode das Vierfache der effektiven Pfeifenlänge, und nur die ungeraden Harmonischen tauchen auf. Dies ist der Grund, warum gedackte Orgelpfeifen einen anderen Klang hervorbringen als offene Pfeifen.

Wir haben in Abschnitt 12.1 gesehen, dass man sich eine Schallwelle entweder als Druckwelle mit Druckschwankungen in Ausbreitungsrichtung oder anhand der Geschwindigkeiten der senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingenden Luftmoleküle als eine Bewegungswelle vorstellen kann. Die Druckveränderungen und die Bewegungen in einer Schallwelle sind um 90° gegeneinander phasenverschoben. Daher sind in einer stehenden Schallwelle die Druckknoten gleich den Auslenkungsbäuchen und umgekehrt. In der Nähe des offenen Endes einer Orgelpfeife gibt es also einen Druckknoten und einen Auslenkungsbau, wohingegen in der Nähe des geschlossenen Endes einer gedackten Orgelpfeife ein Druckbauch und ein Auslenkungsknoten auftreten.

Beispiel 12.22: Stehende Schallwellen in einer Luftsäule I**ZUR ÜBUNG**

Eine beidseitig offene Orgelpfeife hat eine effektive Länge von 1,00 m. a) Die Schallgeschwindigkeit beträgt in Luft 343 m/s. Welche Frequenzen und Wellenlängen von stehenden Wellen treten an dieser Pfeife auf? b) Die Schallgeschwindigkeit beträgt in Helium 975 m/s. Welche Frequenzen für stehende Wellen treten an der Pfeife auf, wenn man sie in einer Heliumatmosphäre mit Helium betreibt?

Problembeschreibung: An jedem Ende befindet sich ein Auslenkungsbauch (oder ein Druckknoten). Die effektive Länge der Pfeife muss somit ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge sein.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Bestimmen Sie anhand von Abbildung 12.44 die Wellenlänge der Grundmode.

2. Berechnen Sie mit dem Zusammenhang $v = v \lambda$ die Frequenz der Grundschwingung.

3. Schreiben Sie die Ausdrücke für die Oberschwingungen v_n und die Wellenlängen λ_n für die anderen Harmonischen mithilfe von n auf.

Teilaufgabe b

Wiederholen Sie die Rechnung aus Teilaufgabe a für das resonante Frequenzspektrum der heliumgefüllten Pfeife.

Ergebnisse der Lösungsschritte:**Teilaufgabe a**

1.

$$\lambda_1 = 2 l_{\text{eff}} = 2,00 \text{ m}$$

2.

$$v_1 = \frac{v}{\lambda_1} = 172 \text{ Hz}$$

3.

$$v_n = n v_1 = \boxed{n \cdot (172 \text{ Hz}) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots}$$

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} = \boxed{2,00 \text{ m}/n \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots}$$

Teilaufgabe b

$$\begin{aligned} v_n &= n v_1 = n \frac{v}{\lambda_1} = n \frac{v}{2l} = n \frac{975 \text{ m/s}}{2,00 \text{ m}} \\ &= \boxed{n \cdot (488 \text{ Hz}) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Produkt der beiden Ergebnisse aus Schritt 3 von Teilaufgabe a hängt nicht von n ab. Das war zu erwarten, da das Produkt gleich der Schallgeschwindigkeit in Luft ist, die weder von Frequenz noch von Wellenlänge abhängt.

Weitergedacht: Bei vielen realen Problemen, beispielsweise der Ausbreitung von Schall in Flüssigkeiten oder Festkörpern, hängt die Wellengeschwindigkeit jedoch von Frequenz und Wellenlänge ab. Diese Abhängigkeit nennt man Dispersion. Wir werden bei der Betrachtung von Wellenpaketen (Abschnitt 12.8) und in Kapitel 28 bei der Erklärung des Regenbogens darauf zurückkommen.

Übung 12.11: Welche Länge hat eine offene Pfeife, die einen Ton von 16,0 Hz erzeugt? – Dieser Ton, das Subkontra-C oder C₃, wird vom menschlichen Ohr gerade noch wahrgenommen. Einige noch größere Pfeifen erzeugen Infraschall mit bis zu 9 Hz, der nicht mehr hörbar, sondern nur noch körperlich wahrzunehmen ist. ◀

Die Beispiele 12.22 und 12.23 illustrieren die bisherigen Überlegungen zu Orgelpfeifen anhand von einfachen Anordnungen mit schwingenden Luftsäulen.

Beispiel 12.23: Stehende Schallwellen in einer Luftsäule II

Eine Stimmgabel, die bei 500 Hz schwingt, wird über eine teilweise mit Wasser gefüllte Röhre gehalten (Abbildung 12.52). Resonanzen treten auf, wenn der Wasserspiegel 16,0 cm, 50,5 cm, 85,0 cm und 119,5 cm vom

oberen Ende der Röhre entfernt ist. a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Luft? b) Welchen Abstand hat der Auslenkungsbauch vom offenen Ende der Röhre?

Problembeschreibung: In diesem Beispiel werden stehende Schallwellen der Frequenz 500 Hz in einer Luftsäule angeregt, deren Länge l man (durch Veränderung des Wasserspiegels) einstellen kann. Die Luftsäule ist an einem Ende geschlossen, am anderen offen. Damit muss bei Resonanz die effektive Länge l_{eff} der Säule

ein ungeradzahliges Vielfaches einer Viertelwellenlänge sein (Abbildung 12.53). An der Wasseroberfläche befindet sich ein Auslenkungsknoten, etwas oberhalb des offenen Endes der Säule in Δl Entfernung befindet sich ein Auslenkungsbauch. Da die Frequenz fest ist, liegt auch die Wellenlänge fest. Die Schallgeschwindigkeit berechnet man dann aus $v = \nu \lambda$.

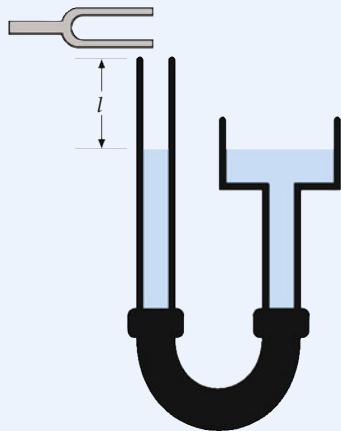


Abbildung 12.52 Die Länge l der Luftsäule in dem Zylinder auf der linken Seite kann man verändern, indem man den Wasserbehälter auf der rechten Seite hebt oder senkt. Die beiden Zylinder sind durch einen flexiblen Schlauch verbunden.

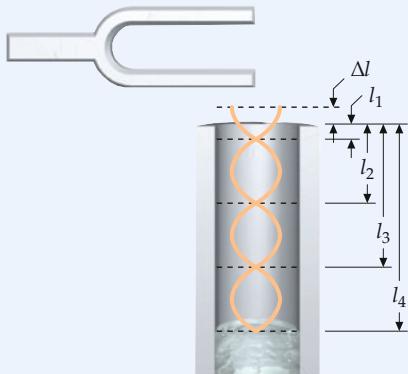


Abbildung 12.53 An der Wasseroberfläche befindet sich ein Auslenkungsknoten, ein Auslenkungsbauch befindet sich in der Entfernung Δl oberhalb des Zylinders.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Schallgeschwindigkeit in Luft hängt folgendermaßen mit der Frequenz und der Wellenlänge zusammen:

$$v = \nu \lambda$$

2. Resonanz tritt auf, wenn der Wasserspiegel in Höhe eines Auslenkungsbauchs ist (Abbildung 12.53), wenn also

die Länge l der Luftsäule sich um eine halbe Wellenlänge geändert hat:

$$l_{n+1} = l_n + \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, 4$$

3. Der Abstand zwischen den Höhen des Wasserspiegels ist in der Aufgabenstellung gegeben:

$$l_{n+1} - l_n = l_4 - l_3 = 119,5 \text{ cm} - 85 \text{ cm} = 34,5 \text{ cm}$$

und damit

$$\lambda = 2 \cdot (34,5 \text{ cm}) = 69,0 \text{ m} = 0,690 \text{ m}$$

4. Setzen Sie die Werte von ν und λ ein und berechnen Sie v :

$$v = \nu \lambda = (500 \text{ Hz}) (0,690 \text{ m}) = \boxed{345 \text{ m/s}}$$

Teilaufgabe b

Ein Auslenkungsbauch befindet sich eine Viertelwellenlänge oberhalb des Auslenkungsknotens in Höhe des Wasserspiegels. Damit beträgt der Abstand zwischen dem höchsten Wasserspiegel, bei dem noch Resonanz auftritt, und dem Auslenkungsbauch oberhalb der Öffnung der Röhre eine Viertelwellenlänge:

$$\frac{1}{4} \lambda = l_1 + \Delta l$$

also

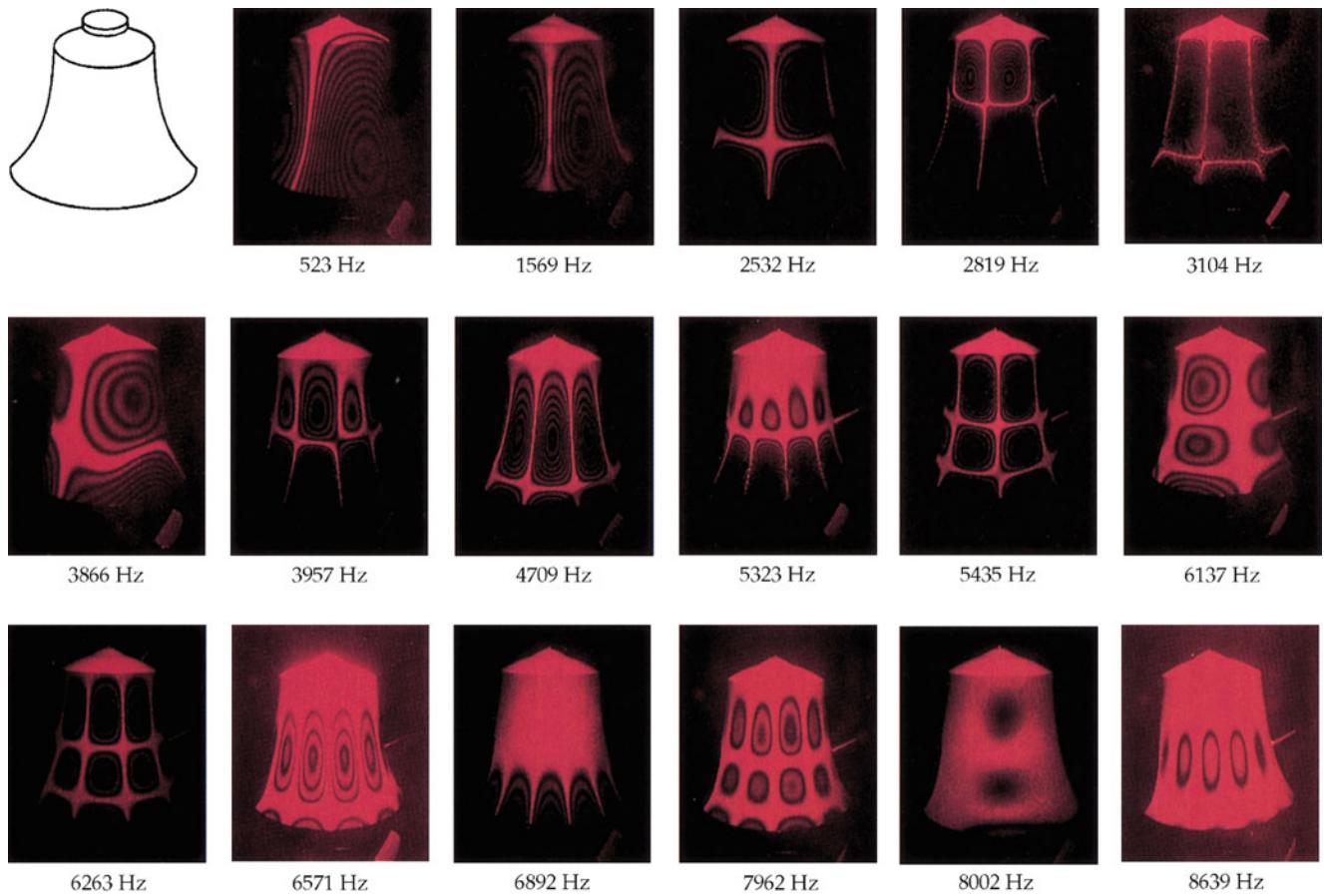
$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{4} \lambda - l_1 = \frac{1}{4} \cdot (69,0 \text{ cm}) - (16,0 \text{ m}) \\ &= \boxed{1,25 \text{ cm}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der in Schritt 4 von Teilaufgabe a berechnete Wert für die Schallgeschwindigkeit stimmt wie erwartet nahezu mit dem Standardwert für die Schallgeschwindigkeit bei Raumtemperatur überein. ■

Frage 12.2

Warum wird Ihre Stimme höher, wenn Sie den Inhalt eines Heliumballons einatmen? Diese Erscheinung nennt man aus naheliegenden Gründen auch Micky-Maus-Effekt.

Die meisten Blasinstrumente sind sehr viel komplizierter aufgebaut als Orgelpfeifen, die aus einfachen zylindrischen Röhren bestehen. Beispielsweise ist die Grundform von Oboe, Fagott, Englischhorn und Saxophon eine konische Röhre (mathematisch ein Kegelstumpf), die einen vollständigen Satz von



Holographische Interferogramme, in denen man die stehenden Wellen (Schwingungsmoden) einer kleinen Tischglocke sieht. Die dunklen „Bullaugen“ kennzeichnen die Schwingungsbäuche. (© Prof. Thomas D. Rossing, Northern Illinois University, DeKalb.)

Harmonischen zeigt; die Wellenlänge der Fundamentalen ist doppelt so groß wie die Länge der konischen Röhre. Blechblasinstrumente sind oft Kombinationen von Kegelstümpfen und Zylindern. Die Analyse solcher Instrumente ist außerordentlich kompliziert. Dass die Instrumente trotzdem nahezu harmonische Obertöne aufweisen, ist eher ein Triumph systematischen Suchens und Probierens der Instrumentenbauer als das Ergebnis mathematischer Berechnungen.

12.8 *Harmonische Zerlegung und Wellenpakete

Überlagerung von stehenden Wellen

Wie wir im vorangehenden Abschnitt gesehen haben, gibt es für Luftsäulen oder schwingende Saiten, die ein- oder beidseitig eingespannt sind, eine Reihe von natürlichen Resonanzfrequenzen, bei denen stehende Wellen auftreten. Beispielsweise ist

die Frequenz der Grundschwingung für eine beidseitig eingespannte Saite $\nu_1 = v/(2l)$. Dabei ist l die Saitenlänge und v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und die Wellenfunktion wird durch (12.61) beschrieben:

$$y_1(x, t) = A_1 \sin(k_1 x) \cos(\omega_1 t + \delta_1).$$

Im Allgemeinen schwingt ein schwingfähiges System nicht in einer einzigen Schwingungsmodus. Stattdessen wird man eine Überlagerung von Grundschwingung und Oberwellen beobachten. Die Wellenfunktion ergibt sich in diesen Fällen als Überlagerung von harmonischen Wellenfunktionen:

$$y(x, t) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n). \quad (12.62)$$

Dabei gilt $k_n = 2\pi/\lambda_n$ und $\omega_n = 2\pi\nu_n$. A_n und δ_n sind Konstanten, die von der anfänglichen Position und der Geschwindigkeit der Saite abhängen. Beispielsweise wird eine Harfensaiten in der Mitte gezupft (Abbildung 12.54). Die Ausgangsform

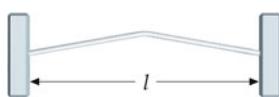


Abbildung 12.54 Eine in der Mitte angezupfte Saite. Wird sie losgelassen, so lässt sich ihre Schwingung als eine Linearkombination stehender Wellen beschreiben.

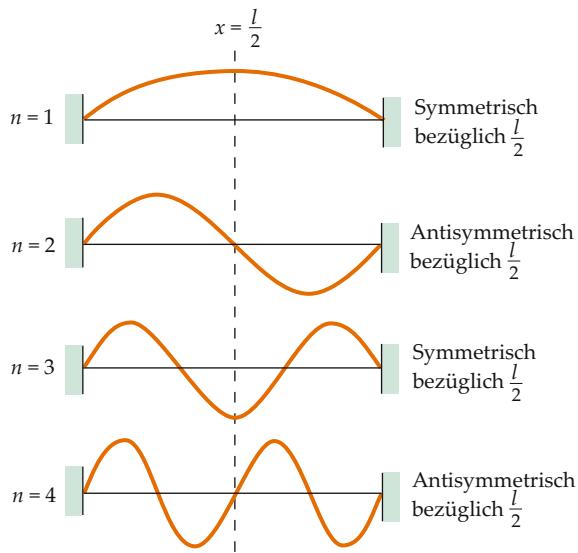


Abbildung 12.55 Die ersten vier Harmonischen einer beidseitig eingespannten Saite. Die ungeraden Harmonischen sind achsensymmetrisch, die geraden Harmonischen sind punktsymmetrisch zur Saitenmitte. Eine Saite, die in der Mitte gezupft wird, schwingt achsensymmetrisch zur Saitenmitte, und es treten nur ungerade Harmonische auf.

der Saite ist dann (achsen)symmetrisch bezüglich $x = \frac{1}{2} l$ verteilt, und die Anfangsgeschwindigkeit über die gesamte Saitenlänge ist null. Die Bewegung der Saite bleibt auch nach dem Loslassen symmetrisch bezüglich $x = \frac{1}{2} l$. Daher werden nur die ungeraden Harmonischen, die symmetrisch bezüglich $x = \frac{1}{2} l$

sind, angeregt. Die geraden Harmonischen, die bezüglich der Saitenmitte bei $x = \frac{1}{2} l$ antisymmetrisch (punktsymmetrisch) sind, können sich bei dieser Art des Zupfens nicht bilden; die Amplituden A_n sind daher null für alle geraden n . (Zupft man die Saite an einer anderen Stelle, können sie einen von null verschiedenen Wert annehmen. Dies lässt sich überprüfen, wenn man eine Gitarrensaite einmal über dem Schallloch und einmal direkt am Saitenende über dem Gitarrenkörper zupft. Der Ton klingt deutlich anders, was darauf hindeutet, dass andere Harmonische angeregt werden.) Die Form der ersten vier Harmonischen ist in Abbildung 12.55 zu sehen. Der größte Teil der Energie der gezupften Saite ist mit der Grundwelle verbunden; die dritte, fünfte und die weiteren ungeraden Schwingungsmoden tragen nur kleinere Energieanteile. Abbildung 12.56 zeigt eine Überlagerung der ersten drei ungeraden Harmonischen, mit der die Ausgangsauslenkung der Saite näherungsweise beschrieben wird.

*Harmonische Analyse und Synthese

Wenn verschiedene Blasinstrumente denselben Ton spielen, beispielsweise den Kammerton a, so klingen die Instrumente recht unterschiedlich. Zwar erzeugen alle dieselbe **Tonhöhe** – die mit der gehörten Frequenz zusammenhängt –, die Töne unterscheiden sich jedoch in ihrer **Klangfarbe**. Der Hauptgrund für die unterschiedliche Klangfarbe ist, dass trotz gleicher Grundfrequenz noch verschiedene Harmonische auftreten, deren relative Intensitäten vom jeweiligen Instrument und der Spielweise abhängen und für jedes Instrument typisch sind. Diese unterschiedlichen Obertonspektren machen den charakteristischen Klang eines Instruments aus; ohne sie klängen die Instrumente gleich.

Die in der Musik übliche Verwendung des Wortes Ton weicht im Allgemeinen von der Terminologie in der physikalischen Akustik ab. Der Musiker bezeichnet die jeweils gespielte Note als Ton; in der Bezeichnungsweise der Akustik handelt es sich dabei eher um einen Klang. Physikalisch versteht man unter einem (reinen) Ton eine sinusförmige Schallschwingung im

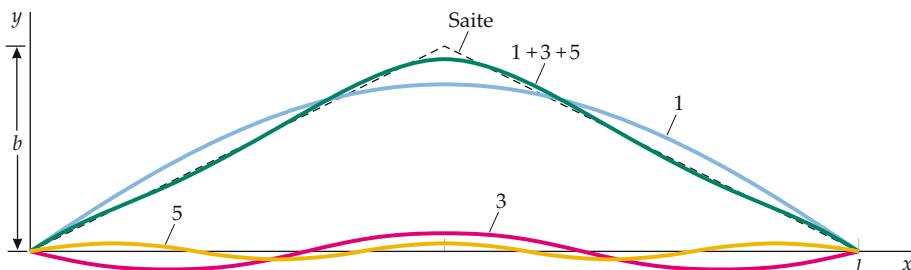


Abbildung 12.56 Die ursprüngliche Auslenkung einer in der Mitte gezupften Saite wie in Abbildung 12.54 lässt sich näherungsweise mithilfe mehrerer Harmonischer beschreiben. In diesem Bild ist die Ausgangsform der Saite durch eine gestrichelte Linie dargestellt, die Grundwelle (1) und die ersten höheren ungeraden Harmonischen (3 und 5) sind farbig eingezzeichnet. Die Linearkombination dieser Schwingungsmoden ergibt die grüne Linie, mit der die Ausgangsform recht gut angenähert wird. Die Größe der Auslenkung ist übertrieben eingezzeichnet, um die Amplitudenverhältnisse besser darstellen zu können. Der größte Anteil der Energie ist mit der Grundwelle verbunden, die höheren Harmonischen tragen einen wichtigen, aber viel kleineren Energieanteil bei.

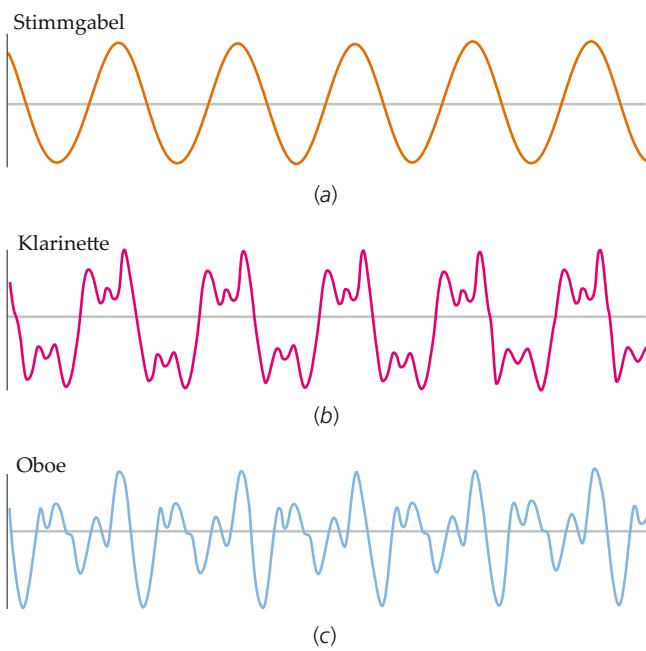


Abbildung 12.57 Wellenformen einer a) Stimmgabel, b) einer Klarinette und c) einer Oboe, alle mit einer Grundschwingung von 440 Hz und ungefähr gleicher Intensität.

Hörbereich, wie sie etwa von einem Schallgenerator als Sinuston erzeugt werden kann; auch die Töne einer Querflöte oder einer Stimmgabel sind näherungsweise sinusförmig. Ein *Klang* dagegen ist eine Schallwelle im Hörbereich, die sich aus Grund-

12.8 *Harmonische Zerlegung und Wellenpakete

und Obertönen zusammensetzt; Klänge sind nicht mehr sinusförmig, aber immer noch periodisch. Unter einem *Geräusch* schließlich versteht man Schallsignale, die auf nichtperiodischen Schwingungen beruhen.

In Abbildung 12.57 sind für eine Stimmgabel, eine Klarinette und eine Oboe die Druckänderungen als Funktion der Zeit aufgetragen, wobei alle Instrumente dieselbe Note spielen. Diese Muster werden **Wellenformen** genannt (genauer müsste man von Schwingungsformen sprechen). Die Wellenform einer Stimmgabel ist einer Sinusschwingung sehr ähnlich, die Wellenformen der anderen Instrumente sind erheblich komplizierter.

Wellenformen sind aus Harmonischen zusammengesetzt. Mit der sogenannten **harmonischen Analyse** lassen sich die Anteile der einzelnen Harmonischen bestimmen, sodass man eine Wellenform in die einzelnen Harmonischen zerlegen („analyseren“) kann. Die dazu notwendigen mathematischen Grundlagen wurden von dem französischen Physiker und Mathematiker Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) entwickelt, weswegen man auch von der **Fourier-Analyse** spricht. Abbildung 12.58 zeigt die mithilfe der harmonischen Analyse erhaltenen relativen Intensitäten der Harmonischen von den Wellenformen aus Abbildung 12.57. Man spricht hier vom **Fourier-Spektrum** oder kurz **Spektrum** der untersuchten Wellenform. Die Wellenform der Stimmgabel enthält nur die Grundfrequenz. Das Spektrum der Klarinette besteht aus der Grundfrequenz, größeren Anteilen der dritten, fünften und siebten Harmonischen sowie kleineren Anteilen der zweiten, vierten und sechsten Harmonischen. Bei der Oboe ist die Intensität der zweiten, dritten und vierten Harmonischen sogar höher als die der Grundfrequenz.

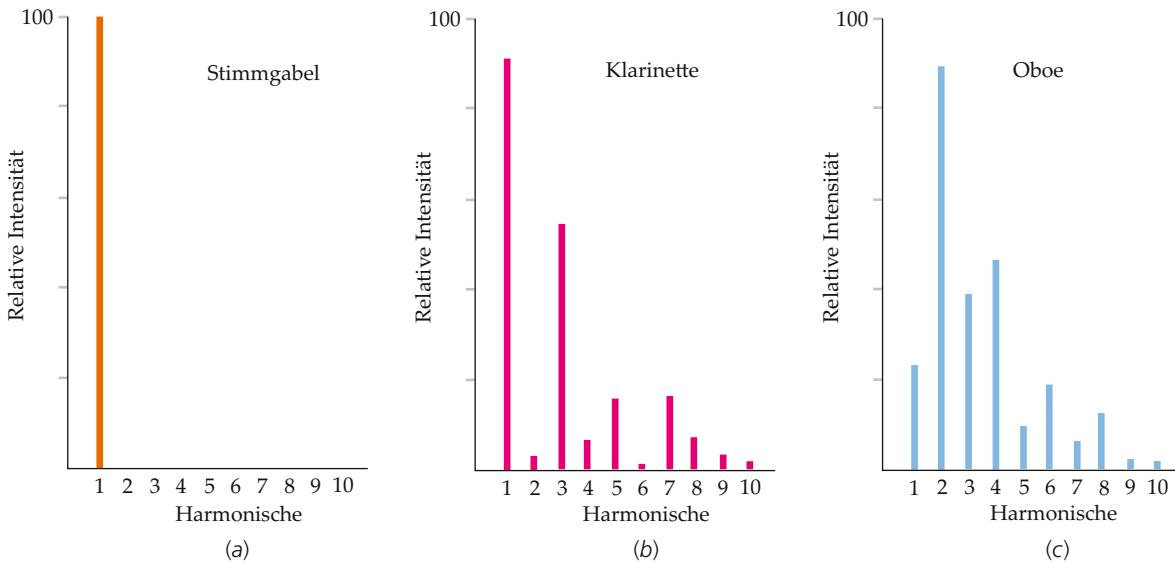


Abbildung 12.58 Relative Intensitäten der Harmonischen zu den in Abbildung 12.57 gezeigten Wellenformen a) einer Stimmgabel, b) einer Klarinette und c) einer Oboe.

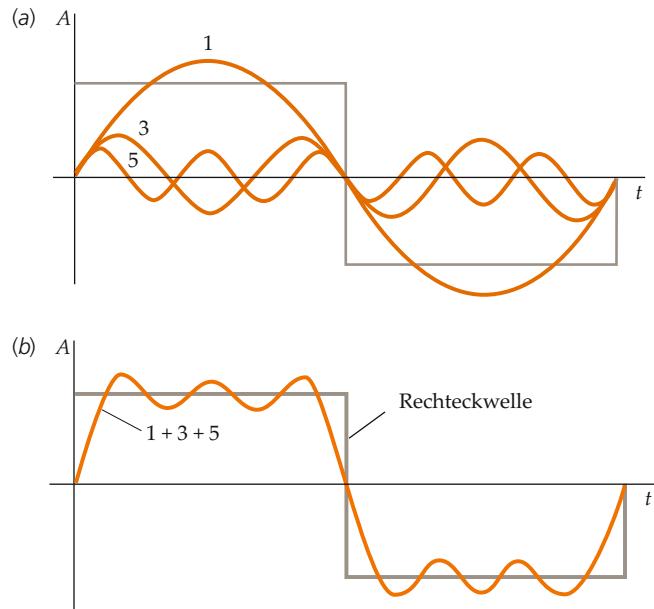


Abbildung 12.59 a) Eine Sinuswelle und die ersten ungeraden Harmonischen, mit der sich eine Rechteckwelle synthetisieren lässt. b) Bei der harmonischen Synthese wird die Rechteckwelle durch die Überlagerung der ersten drei ungeraden Harmonischen bereits recht gut angenähert.

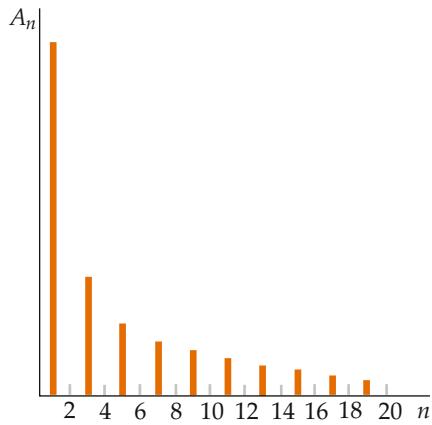


Abbildung 12.60 Die relativen Amplituden A_n der ersten Harmonischen einer Rechteckwelle. Je mehr Harmonische man bei der harmonischen Synthese verwendet, umso besser wird der Verlauf der Rechteckwelle angenähert.

Das Gegenstück zur harmonischen Analyse ist die **harmonische Synthese** oder **Fourier-Synthese**, d. h. die Konstruktion einer periodischen Wellenform aus ihren harmonischen Anteilen. Abbildung 12.59a zeigt die ersten drei ungeraden Harmonischen, die man zur Synthese einer Rechteckwelle verwendet; in Abbildung 12.59b ist die anzunähernde Rechteckwelle und das Ergebnis der Synthese zu sehen. Je mehr Harmonische man bei der Synthese verwendet, desto besser wird der Verlauf der Rechteckwelle angenähert. Das zur Synthese verwendete Spektrum der Rechteckwelle wird in Abbildung 12.60 gezeigt.

Wellenpakete und Dispersion

Die gerade diskutierten Wellenformen sind allesamt periodisch. Diese zeitliche Periodizität führt dazu, dass das durch die harmonische Analyse erhaltene Spektrum nur diskrete Frequenzen enthält (siehe z. B. das Frequenzspektrum in Abbildung 12.60). Auch nichtperiodische Funktionen wie Wellenpulse können durch die Überlagerung harmonischer (d. h. sinusförmiger) Wellen verschiedener Frequenzen dargestellt werden. Bei der Synthese eines Wellenpulses treten jedoch *kontinuierliche* Frequenzspektren auf.

Der entscheidende Unterschied zwischen einem einzelnen Wellenberg und einer periodischen Welle mit einer einzigen Frequenz liegt darin, dass der Wellenberg räumlich und zeitlich begrenzt ist, wohingegen sich die Welle ständig periodisch wiederholt. Um ein Signal wie einen begrenzten Puls mithilfe von Wellen zu übertragen, braucht man nicht nur eine einzige harmonische Welle, sondern eine ganze Gruppe von Wellen mit unterschiedlicher Frequenz. Eine solche Gruppe nennt man ein **Wellenpaket**. Dabei hängen die Dauer Δt eines Pulses, den man durch ein Wellenpaket darstellt, und die Verteilung $\Delta\omega$ der Frequenzen innerhalb des Wellenpaketes sehr eng miteinander zusammen: Je kürzer der Puls ist, umso breiter ist der Frequenzbereich (man spricht hier auch von der Bandbreite). Allgemein gilt

$$\Delta t \Delta\omega \sim 1. \quad (12.63)$$

Die Tilde \sim in Gleichung 12.63 bedeutet „von derselben Größenordnung“. Der genaue Wert des Produkts hängt davon ab, wie Δt und $\Delta\omega$ definiert sind. Bei den gebräuchlichsten Definitionen liegen $\Delta\omega$ und Δt meist in der gleichen Größenordnung.

Ein von einer Quelle während eines kurzen Zeitintervalls ausgesandter Wellenzug – beispielsweise das kurze Geräusch, das beim Auftreffen des Schlägers auf einen Ball auftritt – hat räumlich gesehen eine sehr geringe Breite $\Delta x = v \Delta t$ (dabei ist v die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Wellenzugs). Zu jeder harmonischen Welle mit der Frequenz ω gehört die Wellenzahl $k = \omega/v$. Zu einem Frequenzbereich $\Delta\omega$ gehört dementsprechend ein Bereich von Wellenzahlen $\Delta k = \Delta\omega/v$. Ersetzt man $\Delta\omega$ in Gleichung 12.63 durch $v \Delta k$, so erhält man $v \Delta k \Delta t \sim 1$ oder

$$\Delta k \Delta x \sim 1. \quad (12.64)$$

Der genaue Wert des Produkts hängt von der Definition der Größen ab. Beispiel 12.24 illustriert, wie man sie abschätzen kann.

Beispiel 12.24: Abschätzen von $\Delta\omega$ und Δk

In Beispiel 12.1 hatten wir einen Wellenpuls behandelt, der sich entlang einer Wäscheleine bewegt. a) Wie groß ist die Dauer des Wellenpulses, wenn seine Breite 1,00 m beträgt und er sich mit 100 m/s bewegt? Mit anderen Worten: Wie lang braucht der Wellenpuls, um an einem Punkt auf der Leine vorbeizulaufen? b) Man kann den Wellenpuls als Überlagerung von harmonischen Wellen auffassen. Welchen Frequenzbereich decken diese harmonischen Wellen ab? c) Wie groß ist der Bereich an Wellenzahlen?

Problembeschreibung: Um die Dauer des Wellenpulses zu bestimmen, verwenden wir den Zusammenhang $x = vt$. Den gesuchten Bereich von Frequenzen bzw. von Wellenzahlen berechnen wir mit $\Delta\omega \Delta t \sim 1$ und $\Delta k \Delta x \sim 1$ (Gleichungen 12.63 und 12.64).

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Dauer des Pulses ist die Zeit, die er benötigt, an einem Punkt auf der Wäscheleine vorbeizulaufen:

$$l = v \Delta t$$

also

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{1,00 \text{ m}}{100 \text{ m/s}} = \boxed{0,0100 \text{ s}}$$

Teilaufgabe b

Der gesuchte Frequenzbereich ergibt sich aus $\Delta\omega \Delta t \sim 1$ (Gleichung 12.63):

$$\Delta\omega \Delta t \sim 1$$

also

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{0,0100 \text{ s}} = \boxed{100 \text{ s}^{-1}}$$

12.8 *Harmonische Zerlegung und Wellenpakete

Teilaufgabe c

Der gesuchte Bereich an Wellenzahlen ergibt sich aus $\Delta k \Delta x \sim 1$ (Gleichung 12.64):

$$\Delta k \Delta x \sim 1$$

also

$$\Delta k \sim \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{1,00 \text{ m}} = \boxed{1,00 \text{ m}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wegen $k = \omega/v$ muss ein Frequenzbereich $\Delta\omega$ auch einen Bereich an Wellenzahlen $\Delta k = \Delta\omega/v$ bedingen. Teilen wir unser Ergebnis aus Teilaufgabe b durch die Wellengeschwindigkeit v , erhalten wir $(100 \text{ s}^{-1})/(100 \text{ m/s}) = 1 \text{ m}^{-1}$. Diesen Wert haben wir auch als Ergebnis von Teilaufgabe c erhalten. ■

Wenn ein Wellenpaket bei der Ausbreitung seine Form beibehalten soll, müssen sich alle harmonischen Wellen, aus denen sich das Wellenpaket zusammensetzt, in ihrem Medium mit derselben Geschwindigkeit ausbreiten. Dies ist der Fall, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle in dem Medium weder von der Frequenz noch von der Wellenlänge abhängt. Ein Medium, in dem das zutrifft, nennt man ein **nichtdispersives Medium**. Beispielsweise ist Luft für Schallwellen ein nichtdispersives Medium, in Festkörpern und Flüssigkeiten dagegen tritt Dispersion auf. Das wohl bekannteste Beispiel für Dispersion ist die Bildung eines Regenbogens aufgrund der Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit in Wasser leicht von der Frequenz des Lichts abhängt; daher haben die unterschiedlichen Farben, die mit den verschiedenen Frequenzen einhergehen, leicht unterschiedliche Brechungswinkel. (Wir werden auf den Begriff der Dispersion bei der Erläuterung des Regenbogens in Kapitel 28 zurückkommen.)

Wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen in einem Medium von der Frequenz (oder der Wellenlänge) der Wellen abhängt, spricht man von einem **dispersiven Medium**. Ein Wellenpaket in einem dispersiven Medium ändert wegen der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Bestandteile seine Form: Bei der Ausbreitung verbreitert es sich, gleichzeitig nimmt die Amplitude der Bestandteile ab. Man sagt, das Wellenpaket fließt auseinander. Hängt in einem dispersiven Medium die Ausbreitungsgeschwindigkeit nur *wenig* von der Frequenz der Welle ab, so kann sich ein Wellenpaket in dem Medium über beträchtliche Strecken bewegen, bevor sich seine Form so sehr verändert, dass es nicht mehr zu erkennen ist. Dabei sind jedoch die Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt des gesamten Wellenpakets fortbewegt, und die (mittlere) Geschwindigkeit der einzelnen harmonischen Wellen, aus denen sich das Paket zusammensetzt, nicht gleich. Man nennt die Geschwindigkeit des Wellenpakets die **Gruppengeschwindigkeit**.

keit, die Geschwindigkeit der einzelnen harmonischen Wellen wird **Phasengeschwindigkeit** genannt. (Mit der Geschwindigkeit einer einzelnen harmonischen Welle ist die Geschwindigkeit gemeint, mit der sich die Orte gleicher Phase in dieser Welle ausbreiten. Die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets ist dagegen diejenige Geschwindigkeit, mit der Energie

oder Informationen übertragen werden können; sie muss gemäß der Relativitätstheorie immer kleiner oder gleich der Lichtgeschwindigkeit c sein. Die Phasengeschwindigkeit kann jedoch größer oder gleich der Lichtgeschwindigkeit sein. Dies ist kein Widerspruch zur Relativitätstheorie, weil sich mit der Phasengeschwindigkeit keine Energie ausbreitet.)

♪ Im Kontext: Die Physik der Musikinstrumente

Musikinstrumente sind eine der ersten intellektuellen Errungenschaften des *Homo sapiens*. Schon seit Beginn der Jungsteinzeit fertigte der Mensch Musikinstrumente^{1,2}, die bei sakralen Prozessen, aber auch zur Kommunikation (z. B. bei der Jagd) genutzt wurden.

Im Prinzip haben alle Musikinstrumente die gleiche Struktur^{3,4,5}: Eine Anregungsquelle aktiviert über Filter eine Abstrahleinrichtung. Die Quelle kann periodische, zeitlich statistische oder auch Einzelimpulse erzeugen. Diese Signale durchlaufen danach eine Reihe von Resonanzfiltern und werden anschließend durch eine spezielle Vorrichtung (z. B. einen Resonanzboden oder einen Trichter bei Blasinstrumenten) in den Raum abgestrahlt. Letztere bewirkt eine effektive Kopplung des Instruments an den umgebenden Raum, wie dies bei allen Typen von effektiver Wellenabstrahlung – Radio-, Licht- und Wasserwellen – notwendig ist. Wie bei allen Wellenphänomenen ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit das Produkt von Wellenlänge und Frequenz.

Periodische Signale bestehen per se aus einem Frequenzgemisch, das aus einer Grundfrequenz und ganzzahligen Vielfachen dieser Frequenz, den sogenannten Obertönen oder Harmonischen besteht. Wenn ein solches Gemisch durch einen Resonator geschickt wird, werden die Frequenzen selektiert, die den Resonatorfrequenzen entsprechen. Das ist in ungünstigen Fällen keine oder nur eine einzige (geringe Intensität; Abbildung 12.61: Pedalton), in günstigen Fällen eine Vielzahl von Harmonischen (hohe Intensität; Abbildung 12.61: 2. und 3. Naturton).

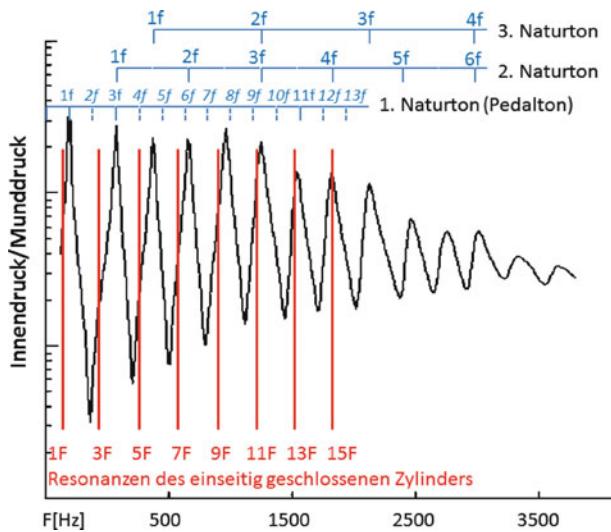


Abbildung 12.61 Resonanzen einer Posaune (schwarz) und eines einseitig geschlossenen Zylinders (rot). f ist die Grundfrequenz der Anregung, F die der Resonanzen. (© Adalbert Ding)

Diese Prinzipien sollen am Beispiel der Posaune und der menschlichen Stimme erläutert werden. Bei einer Posaune presst der Spieler die geschlossenen Lippen an ein kesselförmiges Mundstück. Durch Erhöhung des Drucks im Mund öffnen sich die Lippen für kurze Zeit und schließen dann wieder. Dies wiederholt sich periodisch, wobei die Periode und Öffnungszeit vom Munddruck und der Lippenspannung

abhängt. Ein geübter Spieler kann durch Variation beider Parameter sowohl die Tonhöhe als auch die Klangqualität unabhängig voneinander beeinflussen. Der entstehende Pulsszug enthält neben der Grundfrequenz auch Obertöne; kürzere Öffnungszeiten erzeugen mehr Obertöne, längere nur wenige. Dieser Pulsszug regt das Resonanzsystem der Posaune an, das aus einem langen zylindrischen Rohr besteht, das aus Gründen der Platzersparnis in Scheiben aufgewickelt ist. Durch Ausziehen eines Rohrstücks, dem sogenannten Zug, wird die Länge des Rohrs und damit die Frequenz variiert. Zur besseren Energieübertragung in den Außenraum dient der exponentiell sich aufweitende Trichter. Wie bei jeder Energieabstrahlung werden durch die damit verbundene Dämpfung die Resonanzen verbreitert und zu höheren Frequenzen verschoben.

Die Eigenresonanzen entsprechen im Idealfall denen eines an einem Ende geschlossenen Zylinders der Länge L mit den Wellenlängen $\lambda = 4L/n$ bzw. den Frequenzen $F = nc/4L$, $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

Um die Anregungswellenform an den Resonator anzupassen, muss deren Grundfrequenz f mit einer der höheren Harmonischen des Resonators übereinstimmen (Abbildung 12.61). Nur dann überlappen die höheren Harmonischen der Anregungsfunktion mit den verbreiterten und verschobenen Resonanzen des Posaunenkörpers. Fällt die Grundfrequenz von Anregungsfunktion und Resonatorfunktion zusammen, so ist der Überlapp der höheren Resonanzen schlecht. Dieser Pedalton ist leise und schwierig zu spielen.

Im Grunde genommen funktioniert die menschliche Stimme nach demselben Prinzip: Die Pulserzeugung geschieht durch die sich periodisch öffnenden und schließenden Stimmklappen (Glottis). Rachenraum, Mund- und Nasenhöhle sind für die Resonanzen verantwortlich. Im Gegensatz zu den festen und relativ engen Rohrresonanzen der Blasinstrumente sind diese Resonanzen – man spricht hier von Formanten – so breit, dass sie jeweils für mehrere Obertöne transparent sind (Abbildung 12.62).

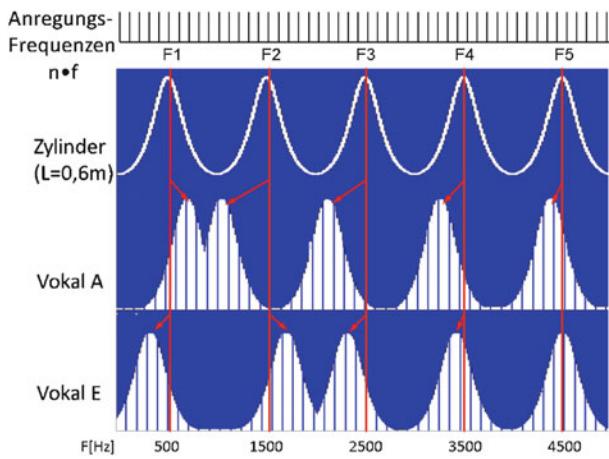


Abbildung 12.62 Formanten eines einseitig geschlossenen Zylinders und der menschlichen Stimme für die Vokale A und E. Die Anregungsfunktion der Glottis ist oben dargestellt (schematisch). (© Adalbert Ding)

Sie entsprechen den ersten fünf Resonanzen eines einseitig geschlossenen Rohrs von etwa der Länge des Mund-Rachen-Raums. Sie können allerdings durch Muskelspannung gegeneinander verschoben werden. Die Lage der Formanten, insbesondere der ersten beiden, bestimmt den Vokal, der von der menschlichen Stimme erzeugt wird. Konsonanten werden durch Einzelpuls- bzw. Rauschanregung der Resonanzen erzeugt. Die Grundfrequenz der Anregung, gegeben durch die von der Glottis erzeugte Pulsfolge, bestimmt die Tonhöhe des gesprochenen bzw. gesungenen Worts. Eine spezielle trainierbare Resonanz, der Sängerformant, erhöht die Abstrahlung bei etwa 3 kHz, sodass sich ausgebildete Sänger von einem lauten Orchester deutlich abheben. Die Abstrahlung in den freien Raum wird durch die Mundöffnung bewirkt und kann durch einen aufgesetzten Trichter (Megaphon) verstärkt werden.

1. Albrecht, G., Holdermann, C. S., Kerig, T., Lechterbeck, J., Serangeli, J., „Flöten“ aus Bärenknochen – Die frühesten Musikinstrumente?“, *Archäologisches Korrespondenzblatt*, 1998, Nr. 28, 1–19.
2. Conard, N. J., Malina, M., Münzel, S. C., „New flutes document the earliest musical tradition in southwestern Germany“, *Nature* **460**, 2009, 737–740.
3. Benade, A. H., *Fundamentals of Musical Acoustics*, Oxford University Press, Oxford, 1978.
4. Fletcher, N. H., Rossing T., *The Physics of Musical Instruments*, Springer, New York, 2005.
5. Winkler, K., *Die Physik der Musikinstrumente*, Spektrum Akademischer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1998.



Prof. Dr.-Ing. Adalbert M. Ding erlangte sein Diplom in Physik an der TU Berlin und promovierte dort in Chemie. Er war Gruppenleiter im Bereich Strahlenchemie des Hahn-Meitner-Instituts in Berlin und Akademischer Direktor am Optischen Institut der TU. Seine Forschungsaktivitäten lagen auf dem Gebiet der Laser- und Ionenstrahlspektroskopie kleiner Teilchen. Zurzeit arbeitet er auf dem Gebiet der musikalischen Akustik sowie der Solar- und Kometenastronomie.

Zusammenfassung

- Bei einer Wellenbewegung werden Energie und Impuls ohne Transport von Materie von einem Punkt des Raums zu einem anderen transportiert.
- Das Superpositionsprinzip gilt für alle linearen Wellen, z. B. für elektromagnetische Wellen im leeren Raum, für Wellen auf einer straff gespannten, flexiblen Saite bei kleinen Auslenkungswinkeln und für Schallwellen mit kleiner Amplitude. Es folgt aus der Linearität der entsprechenden Wellengleichungen.
- Interferenz ist ein wichtiges Wellenphänomen, das bei der Überlagerung von kohärenten Wellen auftritt. Die Interferenz folgt aus dem Superpositionsprinzip. Wellenbewegungen lassen sich durch Brechung und Interferenz von Teilchenbewegungen unterscheiden.
- Die Bedingungen für stehende Wellen kann man sich mithilfe einer Skizze der Saite oder der Pfeife ins Gedächtnis rufen. Die eingezeichneten stehenden Wellen haben einen Knoten dort, wo die Saite eingespannt oder die Pfeife geschlossen ist; die Wellen haben einen Bauch am losen Ende der Saite bzw. am offenen Ende der Pfeife.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Transversale und longitudinale Wellen	In transversalen Wellen, z. B. Wellen auf einer Saite, ist die Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. In longitudinalen Wellen, wie Schallwellen, ist die Störung längs der Ausbreitungsrichtung.
2. Wellengeschwindigkeit	Die Wellengeschwindigkeit v ist unabhängig von der Bewegung der Wellenquelle. Die Geschwindigkeit einer Welle relativ zum Ausbreitungsmedium hängt von der Dichte und den elastischen Eigenschaften des Mediums ab.
Wellen auf einer Saite	$v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} \quad (12.3)$ F_S ist die Spannkraft der Saite und μ die lineare Massendichte.
Schallwellen	$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \quad (12.4)$ K ist der Kompressionsmodul und ρ_0 die Massendichte des Schallmediums (Gas, Flüssigkeit).
Schallwellen in einem Gas	$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{m_{Mol}}} \quad (12.5)$ Darin ist T die absolute Temperatur, die mit der Celsius-Temperatur T_C über $\{T\} = \{T_C\} + 273,15 \quad (12.6)$ verknüpft ist. R ist die universelle Gaskonstante mit $R = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K}), \quad (12.7)$ und m_{Mol} ist die molare Masse des Gases (die Masse von 1 mol Gas), die für Luft den Wert $m_{Mol} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ hat. Die Konstante γ hängt von der Art des Gases ab. Für zweiatomige Moleküle, wie O_2 und N_2 , hat γ den Wert $7/5$, und weil Luft zu 98 % aus O_2 und N_2 besteht, gilt dieser Wert auch für Luft. Für einatomige Gase (z. B. Edelgase wie He) ist $\gamma = 5/3$.
Elektromagnetische Wellen	Die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen ist im Vakuum eine universelle Konstante: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$
3. *Wellengleichung	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (12.10b)$ ist die eindimensionale Wellengleichung, v die Wellengeschwindigkeit, x die Ausbreitungsrichtung, y die Elongation (Auslenkung der Teilchen).

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
4. Harmonische Wellen	
Wellenfunktion	$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$ (12.15) mit der Amplitude A , der Wellenzahl k und der Kreisfrequenz ω . Das Minuszeichen gilt für eine Welle, die sich in positiver x -Richtung ausbreitet, das Pluszeichen für eine Ausbreitung in negativer x -Richtung.
Wellenzahl	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (12.14) λ ist die Wellenlänge.
Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}$ (12.17) v ist die Frequenz und T die Schwingungsdauer der Welle.
Wellengeschwindigkeit	$v = v \lambda = \frac{\omega}{k}$ (12.12, 12.16)
Energie	Die Energie in einer harmonischen Welle ist proportional zum Quadrat der Amplitude.
Leistung von harmonischen Wellen auf einer Saite	$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$ (12.25) μ ist die lineare Massendichte und v die Wellengeschwindigkeit.
5. Harmonische Schallwellen	Man kann Schallwellen entweder als Auslenkungs- oder als Druckwellen betrachten. Das menschliche Ohr kann Schallwellen im Frequenzbereich zwischen etwa 20 Hz und 20 kHz wahrnehmen. In einer harmonischen Schallwelle sind Druck und Auslenkung um 90° gegeneinander phasenverschoben.
Amplitude	Druckamplitude p_{\max} und Auslenkungsamplitude s_{\max} sind durch $p_{\max} = \rho_0 \omega v s_{\max}$ (12.21) miteinander verbunden; dabei ist ρ_0 die mittlere Massendichte des Mediums.
Energiedichte	$\langle w \rangle = \frac{\langle \Delta E \rangle}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2$ (12.28)
6. Intensität	Die Intensität einer Welle ist die mittlere Leistung pro Einheitsfläche: $I = \frac{\langle P \rangle}{A}$. (12.29)
Mittlere Intensität I einer Schallwelle	$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 v = \frac{1}{2} \frac{P_{\max}^2}{\rho_0 v}$ (12.32)
*Schallintensitätspegel in dB	Die Intensität einer Schallwelle bezeichnet man als Schallstärke. Die Empfindung der Schallstärke nennt man die Lautstärke. Sie wird auf einer logarithmischen Skala mithilfe des Schallintensitätspegels angegeben: $IP = 10 \text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0}$. (12.33) Dabei ist $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ näherungsweise die Hörschwelle.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Doppler-Effekt	<p>Wenn sich eine Schallquelle und ein Empfänger relativ zueinander bewegen, ist die empfangene Frequenz v_E höher als die Frequenz v_Q der Quelle, wenn der Abstand zwischen ihnen abnimmt, und niedriger, wenn er zunimmt:</p> $v_E = \frac{v}{\lambda} \quad (\text{ruhender Empfänger}) \quad (12.35)$ <p>Die Gleichungen 12.35 bis 12.40 gelten nur im Bezugssystem des ruhenden Mediums. Wenn sich das Medium bewegt, sind die Wellengeschwindigkeiten v durch $v^{(M)} = v \pm v_M$ zu ersetzen, wobei v_M die Geschwindigkeit des Mediums gegen ein ruhendes System ist.</p>
Bewegte Quelle	$\lambda_{n,v} = \frac{v \pm v_Q}{v_Q} \quad (12.36)$ <p>$\lambda_{n,v}$ ist die Wellenlänge der nachlaufenden (n, Pluszeichen) bzw. vorlaufenden (v, Minuszeichen) Welle bezüglich einer bewegten Quelle, v_Q ist die Geschwindigkeit der Quelle und v_Q die Frequenz der Quelle.</p>
Bewegter Empfänger	$v_E = \frac{v \pm v_E}{\lambda} \quad (12.38)$ <p>v_E ist die Frequenz des Empfängers, v_E die Geschwindigkeit des Empfängers und λ die Wellenlänge der von der Quelle abgestrahlten Welle.</p>
Bewegte Quelle oder bewegter Empfänger	$v_E = \frac{v \pm v_E}{v \pm v_Q} v_Q \quad \text{oder} \quad \frac{v_E}{v \pm v_E} = \frac{v_Q}{v \pm v_Q} \quad (12.39a, 12.39b)$ <p>Die Vorzeichen sind so zu wählen, dass sich eine Frequenzerhöhung ergibt, wenn Quelle und Empfänger sich nähern, und eine Frequenzabnahme, wenn sie sich voneinander entfernen.</p>
Kleine Geschwindigkeit von Quelle oder Empfänger	$\frac{\Delta v}{v_Q} \approx \pm \frac{v_{\text{rel}}}{v} \quad (v_{\text{rel}} \ll v) \quad (12.40)$ <p>v_{rel} ist die Geschwindigkeit von Quelle oder Empfänger, $v_{\text{rel}} = v_Q \pm v_E$, v die Wellengeschwindigkeit.</p>
8. Stoßwellen	<p>Wenn die Geschwindigkeit v_Q der Quelle größer ist als die Wellengeschwindigkeit v, werden die Wellen hinter der Quelle durch einen Kegel mit dem Öffnungswinkel θ begrenzt, dem sogenannten Mach-Winkel; seine Spitze ist die Wellenquelle.</p>
Mach-Winkel	$\sin \theta = \frac{v}{v_Q} \quad (12.42)$
Mach-Zahl	$Ma = \frac{v_Q}{v} \quad (12.43)$
9. Wellenausbreitung	
Huygens'sches Prinzip	<p>Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen kugelförmigen Elementarwelle, die sich mit derselben Geschwindigkeit und Frequenz ausbreitet wie die ursprüngliche Wellenfront im betreffenden Medium. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.</p>
Fermat'sches Prinzip	<p>Der Weg, den die Welle von einem Punkt zu einem anderen einschlägt, ist stets derjenige, bei dem die dafür benötigte Zeitspanne minimal ist.</p>
10. Reflexion und Brechung	<p>Wenn eine Welle auf eine Grenzfläche fällt, die zwei Bereiche unterschiedlicher Wellengeschwindigkeit trennt, wird ein Teil der Welle reflektiert und der andere Teil durchgelassen. Der Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizient ist gegeben durch</p>
	$R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad \text{und} \quad T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}. \quad (12.44)$
11. Beugung	<p>Wenn eine Wellenfront an einem Hindernis teilweise blockiert wird, wird der nicht blockierte Teil der Wellenfront in den Bereich hinter dem Hindernis hinein gebucht.</p>
Strahlennäherung	<p>Wenn eine Wellenfront partiell durch ein Hindernis begrenzt wird, ist für die Beugung der Teil der Wellenfront verantwortlich, der im Bereich weniger Wellenlängen von der Kante entfernt durch das Hindernis hindurchgeht. Für weiter entfernte Teile der Wellenfront ist die Beugung vernachlässigbar, und die Welle breitet sich senkrecht zu den Wellenfronten in Richtung der einfallenden Strahlen aus.</p>

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
12. Superposition und Interferenz	<p>Die Superposition (Überlagerung) von zwei harmonischen Wellen mit gleicher Amplitude, Wellenzahl und Frequenz, aber unterschiedlicher Phasendifferenz δ ergibt eine harmonische Welle mit derselben Wellenzahl und Frequenz, die sich in Phase und Amplitude von den zwei einzelnen Wellen unterscheidet:</p> $y = y_1 + y_2 = y_{\max} \sin(kx - \omega t) + y_{\max} \sin(kx - \omega t + \delta)$ $= 2y_{\max} \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\delta\right). \quad (12.51)$
Konstruktive Interferenz	Wenn zwei Wellen in Phase sind oder ihre Phasendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches von 2π beträgt, addieren sich bei der Überlagerung die Amplituden, und die Interferenz ist konstruktiv.
Destruktive Interferenz	Wenn die Phasendifferenz zweier Wellen π oder ein ungeradzahliges Vielfaches von π beträgt, dann subtrahieren sich bei der Überlagerung die Amplituden, und die Interferenz ist destruktiv.
Schwebungen	Schwebungen entstehen bei der Interferenz von zwei Wellen mit leicht unterschiedlicher Frequenz. Die Schwebungsfrequenz ist gerade der Frequenzunterschied der beiden Wellen:
	$v_{\text{Schwebung}} = \Delta v. \quad (12.53)$
Phasendifferenz aufgrund eines Gangunterschieds Δx	$\delta = k \Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (12.54)$
13. Stehende Wellen	<p>Stehende Wellen treten für bestimmte Frequenzen und Wellenlängen auf, wenn Wellen räumlich beschränkt werden. Sie treten nur dann auf, wenn jeder Punkt des Systems sich in einer harmonischen Schwingung bewegt und zwei beliebige Punkte jeweils in Phase oder gegenphasig (um 180° phasenverschoben) schwingen.</p>
Knoten und Bäuche	Bei einer stehenden Welle findet man bestimmte Punkte, die sich nicht bewegen. Diese Punkte heißen Schwingungsknoten. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Knoten befindet sich ein Punkt maximaler Schwingungsamplitude, der Schwingungsbauch.
Wellenlänge	Der Abstand zwischen einem Knoten und dem benachbarten Schwingungsbauch beträgt eine Viertelwellenlänge.
Beidseitig eingespannte Saite	<p>Bei einer beidseitig eingespannten Saite befindet sich an jedem Ende der Saite ein Schwingungsknoten. Damit muss die Länge der Saite ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge betragen. Die Bedingung für stehende Wellen in diesem Fall ist</p> $l = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.55)$
Resonanzfrequenzen einer beidseitig eingespannten Saite	<p>Die zulässigen Wellen bilden eine harmonische Reihe; die sogenannten Resonanzfrequenzen sind gegeben durch</p> $v_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2l} = n v_1 \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \quad (12.56)$ <p>Dabei wird die niedrigste Frequenz $v_1 = v/2l$ die Eigenfrequenz oder Fundamentale genannt.</p>
Einseitig eingespannte Saite mit einem losen Ende	<p>Bei einer einseitig eingespannten Saite mit einem losen Ende befindet sich ein Schwingungsknoten am festen und ein Schwingungsbauch am losen Ende der Saite. Damit muss die Länge der Saite ein ganzzahliges Vielfaches der Viertelwellenlänge betragen. Die Bedingung für stehende Wellen in diesem Fall ist</p> $l = n \frac{\lambda_n}{4} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (12.57)$ <p>Es treten nur ungeradzahlige Harmonische auf. Ihre Frequenzen sind gegeben durch</p> $v_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{\lambda_1} = n \frac{v}{4l} = n v_1 \quad (n = 1, 3, 5 \dots) \quad (12.58)$ <p>mit $v_1 = v/4l$.</p>
Wellenfunktion für stehende Wellen	$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (12.61)$ <p>mit $k_n = 2\pi/\lambda_n$ und $\omega_n = 2\pi v_n$. Die notwendigen Bedingungen für stehende Wellen auf einer Saite sind:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Jeder Punkt auf der Saite bleibt entweder in Ruhe oder bewegt sich in einer harmonischen Schwingung. (Die ruhenden Punkte sind die Schwingungsknoten.) 2. Zwei beliebige Punkte auf der Saite, die nicht Knoten sind, bewegen sich entweder in Phase oder um 180° phasenverschoben.
14. *Überlagerung von stehenden Wellen	Ein schwingfähiges System schwingt normalerweise nicht in einer einzigen Schwingungsmodus, sondern in einer Überlagerung von mehreren zulässigen Schwingungsmoden.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen				
15. *Harmonische Analyse und Synthese	Töne mit unterschiedlicher Klangfarbe enthalten verschiedene Anteile an Harmonischen. Die Untersuchung eines bestimmten Tons mithilfe seiner Harmonischen heißt harmonische Analyse oder Fourier-Analyse. Die harmonische Synthese (oder Fourier-Synthese) ist die Konstruktion eines Tons durch Überlagerung von Harmonischen: $y(x, t) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n). \quad (12.62)$				
16. *Wellenpakete	Ein Signalpuls kann durch ein Wellenpaket, d. h. eine kontinuierliche Verteilung von harmonischen Wellen, dargestellt werden. Der Frequenzbereich (die Bandbreite) $\Delta\omega$ hängt mit der Pulsdauer Δt und der Bereich der Wellenzahlen Δk mit der räumlichen Ausdehnung Δx zusammen. <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 30%;">Bandbreite und Dauer</td> <td style="width: 70%;">$\Delta\omega \Delta t \sim 1$ (12.63)</td> </tr> <tr> <td>Bereich der Wellenzahlen und räumliche Ausdehnung</td> <td>$\Delta k \Delta x \sim 1$ (12.64)</td> </tr> </table>	Bandbreite und Dauer	$\Delta\omega \Delta t \sim 1$ (12.63)	Bereich der Wellenzahlen und räumliche Ausdehnung	$\Delta k \Delta x \sim 1$ (12.64)
Bandbreite und Dauer	$\Delta\omega \Delta t \sim 1$ (12.63)				
Bereich der Wellenzahlen und räumliche Ausdehnung	$\Delta k \Delta x \sim 1$ (12.64)				
17. *Dispersion	In einem nichtdispersiven Medium hängt die Phasengeschwindigkeit nicht von der Frequenz ab, und ein Puls (ein Wellenpaket) bewegt sich durch das Medium, ohne seine Form zu ändern. In einem dispersiven Medium hängt die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz ab, und ein Wellenpaket ändert beim Durchlaufen des Mediums seine Form. Der Puls bewegt sich mit einer Geschwindigkeit, die man die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes nennt.				

Antworten auf die Verständnisfragen

12.1 Die doppelte akustische Leistung führt zwar in gegebener Entfernung zu verdoppelter Schallstärke (Intensität), der Schallpegel (und damit die Lautstärke) verdoppeln sich jedoch nicht.

12.2 Die Stimme wird höher, weil die Grundfrequenz in ihrem Mund- und Rachenraum sich erhöht, so wie sich auch die Resonanzfrequenz der Orgelpfeife in Beispiel 12.22 erhöht, wenn sie mit Helium betrieben wird.

Lösungen der Übungen

12.1

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{N}{kg/m}} &= \sqrt{\frac{kg \cdot m/s^2}{kg/m}} = \sqrt{\frac{kg \cdot m^2/s^2}{kg}} \\ &= \sqrt{m^2/s^2} = m/s \end{aligned}$$

12.2 1,01 km/s

12.3

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

mit $\beta = kx + \omega t$. Damit folgt

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \text{und somit} \quad \omega = k v.$$

12.4 $\lambda = 17 \text{ m}$ bei 20 Hz bzw. 17 mm bei $20\,000 \text{ Hz}$

12.5 26 W

12.6 a) $\lambda_v = 0,5 \text{ m}$, b) $v_E = 680 \text{ Hz}$

12.7 $\Delta\nu = 500 \text{ Hz}$

12.8 a) $A_r = +\frac{1}{3}A$ und $A_r = \frac{4}{3}A$, b) $\langle P_r \rangle / \langle P_{\text{ein}} \rangle = 1/3$ und $\langle P_r \rangle / \langle P_{\text{ein}} \rangle = 8/9$

12.9

$$1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + 2\frac{4}{9} = 1$$

12.10 a) 5,66 cm, b) 120° oder 240°

12.11 Die gesuchte Pfeife hat eine effektive Länge von etwa 10,7 m.

Aufgaben

Verwenden Sie, wenn nicht anders angegeben, 343 m/s als Wert für die Schallgeschwindigkeit in Luft. Den Wert für die Hörschwelle, der in Aufgaben zum Schallpegel verwendet wird, setzt man nach Konvention mit exakt $1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ an. Dabei geht man von einer beliebigen Anzahl signifikanter Stellen aus. Die Anzahl der signifikanten Stellen in den Antworten hängt somit nur von den gegebenen Zahlenwerten ab.

Verständnisaufgaben

12.1 • Eine fortschreitende sinusförmige Welle auf einem gespannten Seil läuft an einem Beobachtungspunkt vorbei. An diesem Punkt beträgt die Zeit zwischen aufeinanderfolgenden Wellenzügen $0,20 \text{ s}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? a) Die Wellenlänge beträgt $5,0 \text{ m}$. b) Die Frequenz beträgt $5,0 \text{ Hz}$. c) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $5,0 \text{ m/s}$. d) Die Wellenlänge beträgt $0,20 \text{ m}$. e) Es liegen nicht genügend Informationen vor, um eine dieser Angaben zu bestätigen.

12.2 • Ein Ende eines sehr leichten, aber reißfesten Fadens ist mit dem Ende eines dickeren und dichteren Seils verbunden, das andere Ende des Fadens ist an einem stabilen Pfosten festgebunden. Sie ziehen am freien Ende des Seils, sodass Faden und Seil gespannt sind. Dann schicken Sie von dort einen Wellenberg durch das Seil. Welche der Aussagen sind richtig, welche falsch? a) Der an der Verbindungsstelle reflektierte Puls ist gegenüber dem einlaufenden Puls invertiert. b) Der über die Verbindungsstelle laufende Puls ist gegenüber dem einlaufenden Puls nicht invertiert. c) Der über die Verbindungsstelle laufende Puls hat eine geringere Amplitude als der einlaufende Puls.

12.3 • Die Mikrowellen in einem modernen Mikrowellengerät haben eine Wellenlänge in der Größenordnung von Zentimetern. Erwarten Sie nennenswerte Beugungseffekte, wenn diese Strahlung a) durch eine $1,0 \text{ m}$ breite Tür fällt, b) durch den Türspalt mit 5 cm Breite fällt? Erläutern Sie Ihre Antwort.

12.4 • Zwei Rechteckpulse bewegen sich auf einer Saite aufeinander zu. Bei $t = 0$ findet man die Situation wie in Abbildung 12.63. a) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen für $t = 1,0 \text{ s}$, $2,0 \text{ s}$ und $3,0 \text{ s}$. b) Wiederholen Sie Teilaufgabe a für den Fall, dass der Puls auf der rechten Seite die entgegengesetzte Auslenkung hat.

12.5 • Welche Aussage trifft zu? Stehende Wellen entstehen bei der Überlagerung von zwei Wellen a) mit gleicher Amplitude, gleicher Frequenz und gleicher Ausbreitungsrichtung, b) mit gleicher Amplitude, gleicher Frequenz und entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung, c) mit gleicher Amplitude, etwas anderer Frequenz und gleicher Ausbreitungsrichtung, d) mit gleicher

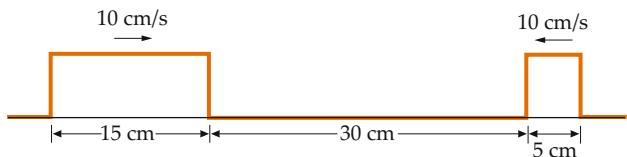


Abbildung 12.63 Zu Aufgabe 12.4.

Amplitude, etwas anderer Frequenz und entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung.

12.6 •• Abbildung 12.64 zeigt einen Wellenpuls zur Zeit $t = 0$, der sich nach rechts bewegt. a) Welche Segmente der Saite bewegen sich zu diesem Zeitpunkt nach oben? b) Welche Segmente der Saite bewegen sich nach unten? c) Gibt es irgendein Segment der Saite im Bereich des Pulses, das momentan in Ruhe ist? Beantworten Sie diese Fragen, indem Sie den Puls zu einem etwas späteren und zu einem etwas früheren Zeitpunkt skizzieren, um zu sehen, wie sich die Segmente der Saite bewegen.

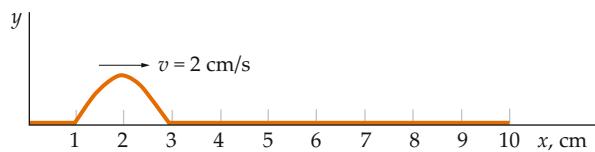


Abbildung 12.64 Zu Aufgabe 12.6.

12.7 •• Die Unterwasserexplosion einer Wasserbombe wird von einem Hubschrauber über der Wasseroberfläche aus beobachtet (Abbildung 12.65). Entlang welchen Wegs (A, B oder C) benötigt der Schall die geringste Zeit bis zum Hubschrauber? Erläutern Sie Ihre Antwort.

12.8 •• Wenn man zwei sehr feine Seidentücher übereinanderlegt, kann man ein Muster von hellen und dunklen Linien sehen wie in Abbildung 12.66. Ein solches sogenanntes Moiré-Muster taucht auch auf, wenn man Fotos aus einem Buch oder einer Zeitung abskannt. Wodurch wird es verursacht, und worin ähnelt es dem Phänomen der Interferenz?

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

12.9 • Es heißt, eine Sängerin könne mit einem entsprechend kräftigen Ton ein leerer Weinglas zerspringen lassen. Dazu müsste der Ton so hoch und so stark sein, dass die Luft im Glas in Resonanz mit der Frequenz ihrer Stimme gerät. Schätzen Sie

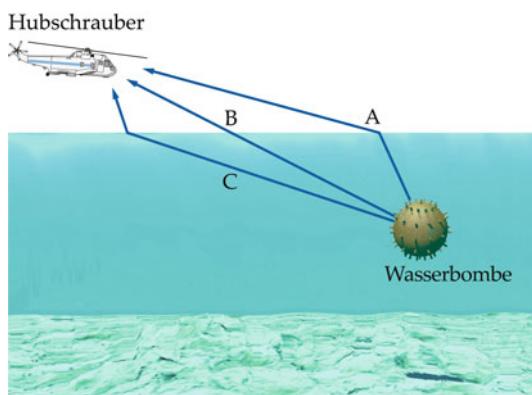


Abbildung 12.65 Zu Aufgabe 12.7.



Abbildung 12.66 Zu Aufgabe 12.8 (© Chuck Adler, St. Mary's College of Maryland.)

die Frequenz, mit der man in einem 8,0 cm hohen Weinglas (ohne Stiel) eine stehende Welle erzeugen kann. Um ungefähr wie viele Oktaven liegt dieser Ton oberhalb des Tons c¹ (262 Hz)? (*Hinweis:* Eine Erhöhung um eine Oktave entspricht einer Verdoppelung der Frequenz.)

12.10 •• Früher wurde der 100-m-Lauf der Leichtathletik mit dem Startschuss aus einer Pistole gestartet; der Starter stand dabei einige Meter vor den Startblöcken auf der Innenseite der Bahn. (Heute wird statt einer Pistole oft nur ein Auslöser gedrückt, der elektronisch die Lautsprecher aktiviert, die hinter jedem einzelnen der Startblöcke stehen. Auf diese Weise vermeidet man, dass einer der Sprinter den Startschuss eher als die anderen hört.) Schätzen Sie den Zeitvorteil, den der Läufer auf der Innenbahn gegenüber dem Läufer auf der äußersten der acht Bahnen hätte, wenn alle Läufer erst dann loslaufen würden, nachdem sie den Startschuss gehört haben.

12.11 •• Man nimmt an, dass das Gehirn die Richtung einer Schallquelle feststellt, indem es die Phasendifferenz zwischen den Schallwellen bestimmt, die die beiden Ohrmuscheln erreichen. Eine entfernte Quelle strahlt Schall mit einer Frequenz von 680 Hz ab. Wenn man direkt vor der Schallquelle steht, sollte es keine Phasendifferenz zwischen rechtem und linkem Ohr geben. Schätzen Sie die Phasendifferenz zwischen den Schallwellen, die am linken bzw. am rechten Ohr ankommen, wenn Sie die Schallquelle nicht direkt ansehen, sondern sich um 90° drehen.

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen

12.12 • Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Schallwellen in Wasserstoffgas bei $T = 300\text{ K}$. (Benutzen Sie $m_{\text{Mol}} = 2,00 \cdot 10^{-3}\text{ kg/mol}$ und $\gamma = 1,4$.)

12.13 • Ein 7,00 m langer Saitendraht hat eine Masse von 100 g und wird mit einer Zugkraft von 900 N gespannt. Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat ein transversaler Wellenpuls auf dieser Saite?

12.14 •• a) Berechnen Sie die Ableitung der Schallgeschwindigkeit in Luft nach der absoluten Temperatur und zeigen Sie, dass die Differenziale dv und dT der Beziehung $dv/v = \frac{1}{2} dT/T$ genügen. b) Berechnen Sie mit diesem Ergebnis die prozentuale Änderung der Schallgeschwindigkeit, wenn sich die Temperatur von 0 auf 27 °C ändert. c) Wie groß ist näherungsweise die Schallgeschwindigkeit bei 27 °C, wenn sie bei 0 °C 331 m/s beträgt? d) Vergleichen Sie diese Näherung mit dem Ergebnis einer exakten Rechnung.

Die Wellengleichung

12.15 • Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Funktionen die Wellengleichung $\partial^2y/\partial x^2 = (1/v^2)\partial^2y/\partial t^2$ befriedigen:
a) $y(x, t) = k(x + vt)^3$, b) $y(x, t) = A e^{ik(x-vt)}$ (mit den Konstanten A und k und $i = \sqrt{-1}$) und c) $y(x, t) = \ln [k(x - vt)]$.

Harmonische Wellen auf einer Saite

12.16 • Die Wellenfunktion einer harmonischen Welle auf einem Seil ist $y(x, t) = (1,00\text{ mm}) \sin(62,8\text{ m}^{-1}x + 314\text{ s}^{-1}t)$.
a) In welche Richtung bewegt sich die Welle, und wie groß ist ihre Geschwindigkeit? b) Bestimmen Sie Wellenlänge, Frequenz und Schwingungsperiode dieser Welle. c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit eines beliebigen Punkts auf dem Seil?

12.17 •• Längs eines gespannten Seils soll mittels transversaler harmonischer Wellen eine gewisse Leistung übertragen werden. Die Wellengeschwindigkeit ist 10 m/s, und die lineare Massendichte des Seils ist 0,010 kg/m. Die Quelle schwingt mit

einer Amplitude von 0,50 mm. a) Wie groß ist die längs des Seils transportierte mittlere Leistung, wenn die Frequenz 400 Hz beträgt? b) Man kann die übertragene Leistung erhöhen, indem man die Zugkraft des Seils, die Frequenz der Quelle oder die Amplitude der Wellen vergrößert. Um wie viel müssten diese Größen jeweils zunehmen, um eine Zunahme in der Leistung um einen Faktor 100 zu erreichen, wenn jeweils nur diese eine Größe geändert wird?

12.18 •• Auf einer realen Saite dissipiert stets ein Teil der Wellenenergie, während sich die Welle auf der Saite bewegt. Dies lässt sich durch eine Wellenfunktion beschreiben, deren Amplitude $A(x)$ von x abhängt: $y = A(x) \sin(kx - \omega t)$ mit $A(x) = A_0 e^{-bx}$. Geben Sie einen Ausdruck für die durch die Welle übertragene Leistung als Funktion von x (mit $x > 0$) an.

Harmonische Schallwellen

12.19 • a) Berechnen Sie die Auslenkungsamplitude einer Schallwelle mit einer Frequenz von 500 Hz und einer Druckamplitude an der Schmerzschwelle von 29,0 Pa. b) Die Dichte von Luft beträgt $1,29 \text{ kg/m}^3$. Bestimmen Sie die Auslenkungsamplitude von einer Schallwelle mit einer Frequenz von 1,00 kHz und derselben Druckamplitude der Welle in Teilaufgabe a.

12.20 • Eine laute Schallwelle mit einer Frequenz von 1,00 kHz hat eine Druckamplitude von $1,00 \cdot 10^{-4} \text{ atm}$ ($1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$). a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Druck p am Punkt x_1 maximal. Wie groß ist die Auslenkung an diesem Punkt zur Zeit $t = 0$? b) Die Dichte von Luft beträgt $1,29 \text{ kg/m}^3$. Wie groß ist der Maximalwert der Auslenkung zu einer beliebigen Zeit an einem beliebigen Ort?

12.21 •• Wale in den Ozeanen kommunizieren durch Schallübertragung unter Wasser. Ein Wal stößt einen Laut von 50,0 Hz aus, um ein eigensinniges Kalb dazu zu bringen, wieder zum Rudel zurückzukehren. Die Schallgeschwindigkeit in Wasser beträgt etwa 1500 m/s. a) Wie lang braucht der Schall zum 1,20 km entfernten Kalb? b) Wie groß ist die Wellenlänge dieses Tons im Wasser? c) Wenn die Wale dicht an der Wasseroberfläche sind, kann ein Teil der Schallenergie in die Luft gebrochen werden. Welche Frequenz und welche Wellenlänge hat der Schall über Wasser?

Intensität

12.22 • Ein Lautsprecher bei einem Rockkonzert erzeugt $1,00 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^2$ in 20,0 m Entfernung bei einer Frequenz von 1,00 kHz. Wir nehmen an, der Lautsprecher strahlt die Schallenergie homogen in alle Richtungen ab. a) Wie groß ist die gesamte von dem Lautsprecher abgestrahlte Schallleistung? b) In welcher Entfernung ist die Schallintensität an der Schmerzgrenze von $1,00 \text{ W/m}^2$? c) Wie groß ist die Intensität in 30,0 m Entfernung?

Schallpegel

12.23 • Wie groß ist die Intensität einer Schallwelle, wenn der Schallintensitätspegel an einem bestimmten Ort a) $IP = 10 \text{ dB}$ bzw. b) $IP = 3,0 \text{ dB}$ beträgt? c) Um welchen Anteil muss man die akustische Leistung eines Geräusches reduzieren, um den Schallpegel von 10 auf 3,0 dB zu reduzieren?

12.24 •• Eine kugelförmige Quelle strahlt Schall gleichmäßig in alle Raumrichtungen aus. In einer Entfernung von 10 m ist der Schallintensitätspegel 80 dB. a) Bei welcher Entfernung von der Quelle ist der Schallintensitätspegel 60 dB? b) Welche Leistung strahlt die Quelle ab?

12.25 •• Zeigen Sie, dass der Unterschied ΔIP (in Dezibel) der Schallintensitätspegel, den zwei Personen in unterschiedlicher Entfernung von einer Schallquelle wahrnehmen, stets gleich ist, unabhängig von der Leistung, die die Quelle abstrahlt.

12.26 ••• Auf einer Party beträgt an Ihrem Standort der Schallintensitätspegel einer sprechenden Person 72 dB. Nehmen Sie (nicht ganz realistisch) an, dass auf der Party insgesamt 38 Personen außer Ihnen gleichzeitig mit der gleichen Intensität wie die erwähnte Person sprechen und dabei sämtlich gleich weit von Ihnen entfernt sind. Bestimmen Sie den Schallintensitätspegel an Ihrem Standort.

Doppler-Effekt

12.27 • Eine Schallquelle mit einer Frequenz von 200 Hz bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 80 m/s relativ zur ruhenden Luft auf einen ruhenden Beobachter zu. a) Bestimmen Sie die Wellenlänge des Schalls im Bereich zwischen Quelle und Beobachter. b) Geben Sie die Frequenz an, die der Beobachter hört.

12.28 • Betrachten Sie die in Aufgabe 12.27 beschriebene Situation im Bezugssystem der Quelle. In diesem Bezugssystem bewegen sich der Beobachter und die Luft mit 80 m/s auf die ruhende Quelle zu. a) Mit welcher Geschwindigkeit relativ zur Quelle breitet sich der Schall im Bereich zwischen der Quelle und dem Beobachter aus? b) Bestimmen Sie die Wellenlänge des Schalls im Bereich zwischen der Quelle und dem Beobachter. c) Bestimmen Sie die Frequenz, die der Beobachter hört.

12.29 • Sie beobachten die Landung eines Spaceshuttle auf der Erde. Gegen Ende ihres Flugs bewegt sich die Raumfähre mit Mach 2,50 in einer Höhe von 5000 m. a) Welchen Winkel bildet die Stoßwelle mit der Bahn der Raumfähre? b) In welcher horizontalen Entfernung von Ihnen befindet sich die Raumfähre zu dem Zeitpunkt, wenn Sie die Stoßwelle hören? (Nehmen Sie dazu an, dass die Fähre ihre Richtung und ihre Höhe über dem Boden nicht ändert, während sie direkt über Ihnen fliegt.)

12.30 •• Der Neutrinoendetektor Super-Kamiokande in Japan besteht aus einem Wassertank in Größe eines 14-stöckigen Gebäudes. Wenn ein Neutrino mit einem Elektron des Wassers zusammenstößt, überträgt es den größten Teil seiner Energie auf das Elektron, das dann mit einer Geschwindigkeit durch das Wasser wegfliest, die nur wenig unterhalb der Vakuumlichtgeschwindigkeit c und über der Lichtgeschwindigkeit in Wasser liegt. Es entsteht eine Stoßwelle (die Čerenkov-Strahlung), die man nachweisen kann; damit ist indirekt auch das Neutrino nachgewiesen. Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit in Wasser, wenn der maximale Winkel des Čerenkov-Stoßwellenkegels $48,75^\circ$ ist?

12.31 •• Sie haben den Auftrag, die Radargeräte des Polizeipräsidiums zu kalibrieren. Eines der Geräte strahlt Mikrowellen mit einer Frequenz von $2,00\text{ GHz}$ aus. Während Ihrer Versuche werden die Wellen von einem Auto reflektiert, das sich direkt von der ruhenden Strahlungsquelle weg bewegt. Sie registrieren eine Frequenzdifferenz zwischen den ausgestrahlten und den empfangenen Radarwellen von 293 Hz . Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Autos.

12.32 •• Eine Schallquelle der Frequenz v_Q bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_Q relativ zur ruhenden Luft auf einen Empfänger zu, der sich mit der Geschwindigkeit v_E relativ zur ruhenden Luft von der Quelle weg bewegt. a) Geben Sie einen Ausdruck für die empfangene Frequenz v'_E an. b) Da v_Q und v_E im Vergleich zu v klein sind, können Sie die Näherung $(1-x)^{-1} \approx 1+x$ anwenden. Zeigen Sie, dass die empfangene Frequenz näherungsweise durch

$$v_E \approx \left(1 + \frac{v_Q - v_E}{v}\right) v_Q = \left(1 + \frac{v_{\text{rel}}}{v}\right) v_Q$$

gegeben ist ($v_{\text{rel}} = v_Q - v_E$ ist dabei die relative Geschwindigkeit der Annäherung von Quelle und Empfänger).

12.33 •• Ein Auto nähert sich einer reflektierenden Wand. Ein ruhender Beobachter hinter dem Auto hört einen Ton der Frequenz von 745 Hz von der Autohupe und einen Ton der Frequenz 863 Hz von der Wand. a) Wie schnell fährt das Auto? b) Welche Frequenz hat die Autohupe? c) Welche Frequenz hört der Autofahrer in der Welle, die von der Wand reflektiert wird?

12.34 ••• Das Hubble-Weltraumteleskop wurde dazu benutzt, um die Existenz von Planeten nachzuweisen, die um entfernte Sterne kreisen. Wenn ein Stern von einem solchen Planeten umkreist wird, beginnt er mit der Periode der Umlaufbahn zu „wobbeln“ (zu taumeln). Aufgrund dessen ist die empfangene Lichtfrequenz periodisch nach oben und unten Doppler-verschoben. Schätzen Sie die maximale und die minimale Wellenlänge von Licht, das die Sonne mit 500 nm abstrahlt und das aufgrund der Bewegung der Sonne infolge der Einwirkung des Planeten Jupiter Doppler-verschoben ist.

Reflexion und Transmission

12.35 • Ein $3,00\text{ m}$ langer Faden mit einer Masse von $25,0\text{ g}$ wird mit einer $4,00\text{ m}$ langen Schnur von $75,0\text{ g}$ verbunden. Beide Stücke zusammen werden mit einer Kraft von 100 N gespannt, dann wird ein Wellenpuls durch den Faden gesandt. Bestimmen Sie den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten am Verbindungspunkt.

12.36 •• Zeigen Sie, dass gilt $R^2 + (v_1/v_2) T^2$ (Gleichung 12.45), indem Sie die Ausdrücke für R bzw. für T dort einsetzen.

Überlagerung und Interferenz

12.37 • Zwei Lautsprecher schwingen in Phase mit derselben Amplitude A . Sie stehen hintereinander in einem räumlichen Abstand von $\lambda/3$ und strahlen Schall in dieselbe Richtung ab. Ein Punkt P liegt vor den beiden Lautsprechern auf der Linie, die durch deren Mittelpunkte geht. Die Schallamplitude in P aufgrund jedes der beiden Lautsprecher ist A . Drücken Sie die Amplitude der in P durch Überlagerung resultierenden Welle mithilfe von A aus.

12.38 • Zwei etwas voneinander entfernte Lautsprecher emittieren Schallwellen derselben Frequenz. An einem Punkt P' beträgt die Intensität aufgrund des Schalls aus jedem der beiden Lautsprecher I_0 . Der Abstand zwischen P' und einem der Lautsprecher ist um eine Wellenlänge größer als der zwischen P' und dem anderen Lautsprecher. Wie groß ist die Intensität bei P' , wenn die Lautsprechermembranen a) kohärent und in Phase schwingen, b) inkohärent schwingen bzw. c) kohärent und außer Phase schwingen?

12.39 •• Zwei Punktquellen Q_1 und Q_2 im Abstand d voneinander sind in Phase. Entlang einer Linie parallel zur Verbindungsgeraden zwischen den Quellen und in einer großen Entfernung r von den Quellen findet man ein Interferenzmuster (Abbildung 12.67). a) Zeigen Sie, dass sich der Gangunterschied Δs von den beiden Quellen bis zu einem Punkt auf der Linie bei einem kleinen Winkel θ durch $\Delta s \approx d \sin \theta$ annähern lässt. (Hinweis: Nehmen Sie $r \gg d$ an, sodass die Linien von den beiden Quellen zum Punkt P näherungsweise parallel sind; Abbildung 12.67b.) b) Zeigen Sie, dass die beiden Wellen in P für $\Delta s = m \lambda$ konstruktiv interferieren (mit $m = 0, 1, 2, \dots$). Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass es in P für $\Delta s = m \lambda$ mit $m = 0, 1, 2, \dots$ ein Interferenzmaximum gibt. c) Zeigen Sie, dass sich der Abstand y_n vom zentralen Maximum (bei $y = 0$) zum n -ten Interferenzmaximum näherungsweise durch $y_n = r \tan \theta_n$ angeben lässt (mit $d \sin \theta_n = m \lambda$).

12.40 •• Ein bestimmtes Radioteleskop besteht aus zwei Antennen im Abstand von 200 m . Beide Antennen werden auf eine bestimmte Frequenz – beispielsweise 20 MHz – abgestimmt. Die Signale aus jeder der beiden Antennen werden in einen gemeinsamen Verstärker eingespeist, aber eines der beiden Signale läuft zuvor durch einen sogenannten Phasenschieber, der

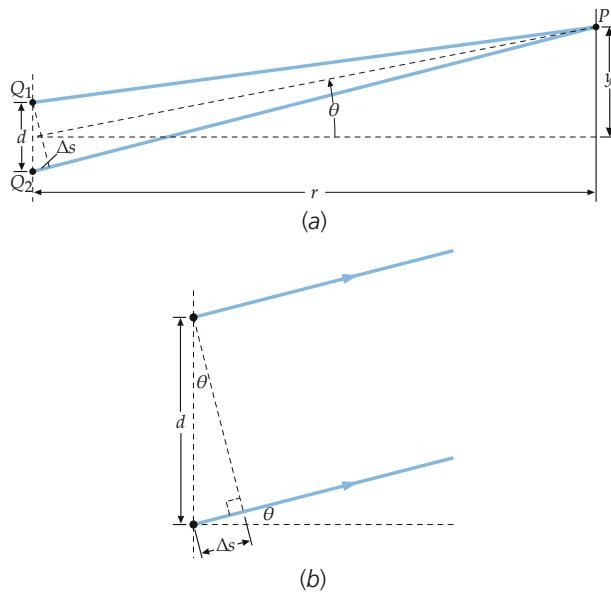


Abbildung 12.67 Zu Aufgabe 12.39.

dessen Phase um einen bestimmten wählbaren Betrag verzögert (Abbildung 12.68). Durch diesen Kniff kann das Teleskop in verschiedene Richtungen „schauen“. Bei der Phasenverzögerung null erzeugen ebene Radiowellen, die senkrecht auf die Antennen treffen, Signale, die sich im Verstärker konstruktiv überlagern. Welche Phasenverzögerung sollte man wählen, damit Signale, die unter einem Winkel von 10° mit der Vertikalen (in der Ebene, die durch die Vertikale und die Verbindungsstrecke der Antennen definiert ist) auftreffen, sich im Verstärker konstruktiv überlagern? (Hinweis: Radiowellen breiten sich mit $3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ aus.)

Schwebungen

12.41 • Wenn zwei bestimmte Stimmgabeln gleichzeitig angeschlagen werden, hört man 4,0 Schwebungen pro Sekunde. Die Frequenz der einen Stimmgabel ist 500 Hz. a) Welche Frequenzwerte sind für die andere Stimmgabel möglich? b) Auf die 500-Hz-Gabel wird ein Stückchen Wachs geklebt, um ihre Frequenz etwas zu verringern. Erläutern Sie, wie man mithilfe der dann gemessenen Schwebungsfrequenz bestimmen kann, welche der Antworten aus Teilaufgabe a die richtige Frequenz der anderen Stimmgabel ist.

Stehende Wellen

12.42 • Eine 3,00 m lange, beidseitig eingespannte Saite schwingt in der dritten Harmonischen. Die maximale Auslenkung eines beliebigen Punkts auf der Saite beträgt 4,00 mm. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von transversalen Wellen auf

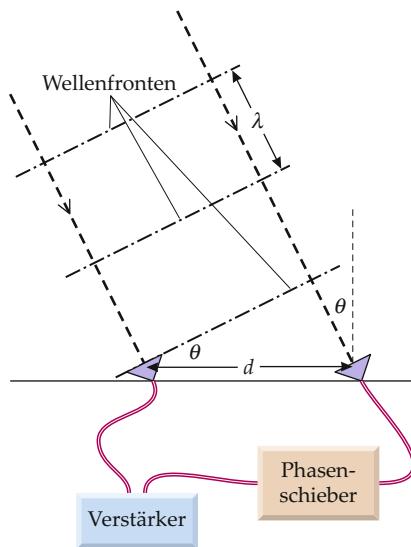


Abbildung 12.68 Zu Aufgabe 12.40.

der Saite beträgt $50,0 \text{ m/s}$. a) Welche Wellenlänge und welche Frequenz hat die angegebene stehende Welle? b) Geben Sie die Wellenfunktion dieser stehenden Welle an.

12.43 • Ein 4,00 m langes Seil ist an einem Ende eingespannt, das andere Ende ist an einer langen, leichten Schnur befestigt, sodass es sich frei bewegen kann (loses Ende). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen auf dem Seil beträgt $20,0 \text{ m/s}$. Berechnen Sie die Frequenz a) der Grundschwingung, b) der zweiten Harmonischen und c) der dritten Harmonischen.

12.44 •• Die Wellenfunktion $y(x, t)$ für eine bestimmte stehende Welle auf einer beidseitig eingespannten Saite ist gegeben durch

$$y(x, t) = (4,20 \text{ cm}) \sin(0,200 \text{ cm}^{-1} x) \cos(300 \text{ s}^{-1} t),$$

wobei y und x in Zentimetern und t in Sekunden angegeben werden. Man kann eine stehende Welle als Überlagerung von zwei fortschreitenden Wellen betrachten. a) Welche Wellenlänge und welche Frequenz haben die beiden fortschreitenden Wellen, die sich zur stehenden Welle überlagern? b) Mit welcher Ausbreitungsgeschwindigkeit bewegen sich diese Wellen auf der Saite? c) Die Saite schwingt in der vierten Harmonischen. Wie lang ist sie?

12.45 •• Eine Orgelpfeife hat bei $16,00^\circ\text{C}$ eine Fundamentalfrequenz von 440,0 Hz. Welche Fundamentalfrequenz hat diese Pfeife bei einer Temperatur von $32,00^\circ\text{C}$ (unter der Annahme, dass sich die Länge der Pfeife nicht ändert)? Wäre es besser, Orgelpfeifen aus einem Material zu bauen, das sich bei Erwärmung merklich ausdehnt, oder sollten Orgelpfeifen besser aus einem Material bestehen, das bei allen „normalen“ Temperaturen seine Länge beibehält?

12.46 •• Aus theoretischen Erwägungen ergibt sich für eine Orgelpfeife mit kreisförmigem Querschnitt eine Endkorrektur (d.h. eine Differenz zwischen der tatsächlichen und der effektiven Länge einer Pfeife) von näherungsweise $\Delta l = 0,3186 d$, wobei d den Durchmesser der Pfeife angibt. Berechnen Sie die tatsächliche Länge einer beidseitig offenen Pfeife, die den Ton c^1 (262 Hz) als Grundschwingung hervorbringt und einen Durchmesser von a) 1,00 cm, b) 10,0 cm bzw. c) 30,0 cm hat.

12.47 •• Die g-Saite einer Violine ist 30,0 cm lang. Wenn sie „leer“, d.h. ohne Fingersatz, gespielt wird, schwingt sie mit 196 Hz. Die nächsthöheren Töne der C-Dur-Tonleiter sind a (220 Hz), h (247 Hz), c^1 (262 Hz) und d^1 (294 Hz). Wie weit vom Ende der Saite entfernt muss man die Finger für diese Töne setzen? (Hinweis: Eine gestrichene Saite schwingt real nicht in einer einzigen Mode; daher sind die in hier angegebenen Daten nicht ganz exakt.)

12.48 •• Die Saiten einer Violine sind in g, d^1 , a^1 und e^1 gestimmt, die jeweils eine Quint auseinanderliegen; es gilt daher $v(d^1) = 1,5 v(g)$, $v(a^1) = 1,5 v(d^1) = 440 \text{ Hz}$ und $v(e^1) = 1,5 v(a^1)$. Die Entfernung zwischen den zwei Befestigungspunkten – bei der Schnecke und am Steg über dem Korpus – beträgt 30,0 cm. Die Zugkraft der e^1 -Saite beträgt 90,0 N. a) Welche lineare Massendichte hat die e^1 -Saite? b) Um zu vermeiden, dass sich das Instrument mit der Zeit verzieht, sollen die Zugkräfte für alle Saiten gleich sein. Berechnen Sie die linearen Massendichten der anderen Saiten.

*Harmonische Analyse

12.49 • Eine Gitarrensaite wird in der Mitte leicht angezupft. Sie nehmen den Ton mit einem Mikrofon auf und lassen ihn von Ihrem Computer analysieren. Demnach besteht der Ton im Wesentlichen aus einer 100-Hz-Schwingung mit einer kleinen Zumischung von 300 Hz. Welches sind die beiden dominanten Schwingungsmoden (stehender Wellen) auf der Saite?

*Wellenpakete

12.50 •• Eine Stimmgabel mit der Frequenz v_0 wird zur Zeit $t = 0$ angeschlagen und nach einer Zeitspanne Δt gestoppt. Die Wellenform des Schalls zu einem späteren Zeitpunkt ist in Abbildung 12.69 als Funktion von x dargestellt. Die Zahl n soll (näherungsweise) die Anzahl der Schwingungszyklen in dieser Wellenform sein. a) Wie hängen n , v_0 und Δt zusammen? b) Wie kann man die Wellenlängen mithilfe von Δx und n ausdrücken, wenn Δx die räumliche Länge des Wellenpakets ist? c) Drücken Sie die Wellenzahl k mithilfe von n und Δx aus. d) Die Zahl n der Schwingungszyklen ist nur mit einer Ungenauigkeit von ± 1 bekannt. Erklären Sie anhand der Abbildung, warum das so ist. e) Zeigen Sie, dass die Unsicherheit in der Wellenzahl k aufgrund der Unsicherheit von n gegeben ist durch $2\pi/\Delta x$.

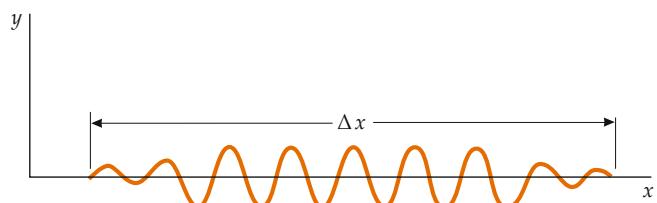


Abbildung 12.69 Zu Aufgabe 12.50.

Allgemeine Aufgaben

12.51 • Zur Zeit $t = 0$ ist die Form eines Wellenpulses auf einer Saite durch die Funktion

$$y(x, 0) = \frac{0,120 \text{ m}^3}{(2,00 \text{ m})^2 + x^2}$$

gegeben (x wird in Metern gemessen). a) Skizzieren Sie $y(x, 0)$ in Abhängigkeit von x . b) Geben Sie die Wellenfunktion $y(x, t)$ zu einer beliebigen Zeit t an, wenn sich der Puls mit einer Geschwindigkeit von $10,0 \text{ m/s}$ in positiver x -Richtung bzw. in negativer x -Richtung bewegt.

12.52 • Eine Pfeife mit einer Frequenz von 500 Hz bewegt sich mit 3,00 Umdrehungen pro Sekunde auf einer Kreisbahn vom Radius 1,00 m. Wie groß sind die maximale und die minimale Frequenz, die ein Beobachter hört, der in 5,00 m Entfernung vom Bahnmittelpunkt in der Ebene der Kreisbahn steht?

12.53 •• Eine Lautsprechermembran von 20,0 cm Durchmesser schwingt bei 800 Hz mit einer Amplitude von 0,0250 mm. Unter der Annahme, dass die Luftmoleküle in der Umgebung jeweils dieselbe Schwingungsamplitude besitzen, bestimmen Sie a) die Druckamplitude und b) die Schallintensität unmittelbar vor der Membran sowie c) die von der Vorderseite des Lautsprechers abgestrahlte akustische Leistung.

12.54 •• In Abbildung 12.70 wird eine Hochgeschwindigkeitskamera zur Aufnahme eines Fotos von einem Geschoss verwendet, das gerade eine Seifenblase zum Platzen bringt. Die Stoßwelle des Geschosses wird durch ein Mikrofon erfasst, das den Blitz für die Aufnahme auslöst. Das Mikrofon befindet sich 0,350 m unterhalb der Geschossbahn auf einer Schiene, die parallel zur Geschossbahn verläuft. Die Schiene dient dazu, die Position des Mikrofons einzustellen. Wie weit muss sich das Mikrofon hinter der Seifenblase befinden, um den Blitz auszulösen, wenn das Geschoss mit 1,25-facher Schallgeschwindigkeit fliegt und der Abstand zwischen der Geschossbahn und der Schiene 0,350 m beträgt? (Nehmen Sie an, dass der Blitz instantan nach der Auslösung aufleuchtet.)

12.55 •• Eine 5,00 m lange, einseitig eingespannte Saite ist mit einer langen, praktisch masselosen Saite verbunden und schwingt mit 400 Hz in der fünften Harmonischen. Die Amplitude eines jeden Schwingbauchs auf der Saite beträgt

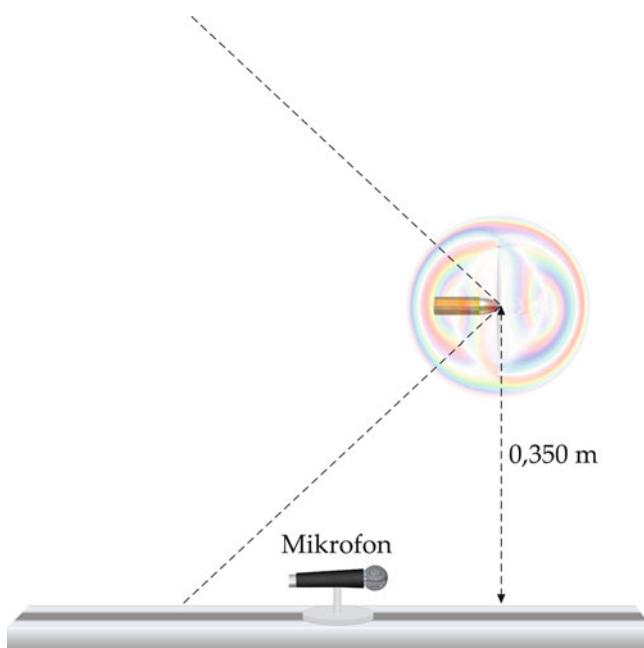


Abbildung 12.70 Zu Aufgabe 12.54.

3,00 cm. a) Welche Wellenlänge hat diese Welle? b) Welche Wellenzahl k hat die Welle? c) Wie groß ist die Kreisfrequenz? d) Geben Sie die Wellenfunktion dieser stehenden Welle an.

12.56 •• Eine 2,5 m lange Saite mit einer Masse von 0,10 kg wird beidseitig befestigt und mit einer Zugkraft von 30 N gespannt. Wenn man die n -te Harmonische anregt, befindet sich 0,50 m von einem Ende entfernt ein Schwingungsknoten. a) Wie groß ist n ? b) Welche Frequenzen haben die ersten drei Harmonischen auf dieser Saite?

12.57 •• Drei aufeinanderfolgende Resonanzfrequenzen einer Orgelpfeife sind 1310, 1834 und 2358 Hz. a) Ist die Pfeife an einem Ende geschlossen oder an beiden Seiten offen? b) Welche Grundfrequenz hat die Pfeife? c) Welche effektive Länge hat die Pfeife?

12.58 •• Eine stehende Welle auf einem Seil wird durch die Wellenfunktion $y(x, t) = (0,020 \text{ m}) \sin(\frac{1}{2} \pi m^{-1} x) \cos(40 \pi s^{-1} t)$ beschrieben; dabei werden x und y in Metern und t in Sekunden angegeben. a) Geben Sie Wellenfunktionen für zwei fortschreitende Wellen an, die sich zu dieser stehenden Welle überlagern. b) Welchen Abstand haben die Knoten der stehenden Welle? c) Welche maximale Geschwindigkeit hat ein Abschnitt des Seils bei $x = 1,0 \text{ m}$? d) Wie hoch ist die maximale Beschleunigung, die ein Abschnitt des Seils bei $x = 1,0 \text{ m}$ erfährt?

12.59 ••• Ein langes Seil mit einer linearen Massendichte von 0,100 kg/m unterliegt einer konstanten Spannkraft von 10,0 N. Ein Motor am Punkt $x = 0$ bewegt harmonisch ein Ende des Seils mit 5,00 Schwingungsperioden pro Sekunde und

einer Amplitude von 40,0 mm auf und ab. a) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Transversalwellen? b) Wie groß ist die Wellenlänge? c) Wie groß ist der maximale transversale lineare Impuls eines 1,00 mm langen Seilsegments? d) Wie groß ist die maximale resultierende Kraft auf ein 1,00 mm langes Segment des Seils?

12.60 ••• In dieser Aufgabe sollen Sie einen Ausdruck für die potentielle Energie eines Saitensegments herleiten, das eine fortschreitende Welle überträgt (Abbildung 12.71). Die potentielle Energie eines Segments ist gleich der Arbeit, die durch die Kraft beim Dehnen der Saite verrichtet wird. Sie beträgt $\Delta E_{\text{pot}} = |\mathbf{F}_S| (\Delta l - \Delta x)$; darin ist F_S die Kraft, Δl die Länge des gedehnten Segments und Δx dessen ursprüngliche Länge. Aus der Abbildung erkennt man den für positives Δx gültigen Zusammenhang

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + (\Delta y / \Delta x)^2}.$$

a) Zeigen Sie mithilfe einer Binomialentwicklung, dass gilt

$$\Delta l - \Delta x \approx \frac{1}{2} (\Delta y / \Delta x)^2 \Delta x$$

und damit

$$\Delta E_{\text{pot}} \approx \frac{1}{2} |\mathbf{F}_S| (\Delta y / \Delta x)^2 \Delta x.$$

b) Berechnen Sie $\partial y / \partial x$ aus der Wellenfunktion $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ und zeigen Sie, dass gilt:

$$\Delta E_{\text{pot}} \approx \frac{1}{2} |\mathbf{F}_S| k^2 A^2 [\cos^2(kx - \omega t)] \Delta x.$$

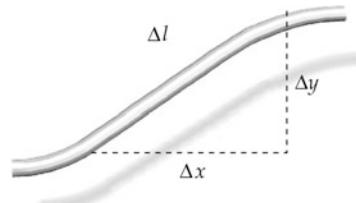


Abbildung 12.71 Zu Aufgabe 12.60.

12.61 ••• Drei Wellen mit derselben Frequenz, Wellenlänge und Amplitude breiten sich in dieselbe Richtung entlang der x -Achse aus. Die drei Wellen sind gegeben durch $y_1(x, t) = (5,00 \text{ cm}) \sin(kx - \omega t - \frac{\pi}{3})$, $y_2(x, t) = (5,00 \text{ cm}) \sin(kx - \omega t)$ und $y_3(x, t) = (5,00 \text{ cm}) \sin(kx - \omega t + \frac{\pi}{3})$. Dabei soll x in Metern und t in Sekunden angegeben werden. Die resultierende Welle ist $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \delta)$. Welche Werte haben dabei A und δ ?

12.62 ••• Im Prinzip lässt sich eine harmonische Welle von nahezu beliebiger Form als Summe von harmonischen Wellen verschiedener Frequenzen darstellen. a) Betrachten Sie die

Funktion, die durch

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right) \\&= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1}\end{aligned}$$

definiert ist. Schreiben Sie Anweisungen für ein Tabellenkalkulationsprogramm, sodass Sie diese Reihe mit einer endlichen Zahl von Termen berechnen können. Zeichnen Sie für den Bereich $x = 0$ bis $x = 4\pi$ drei Graphen der Funktion: Nähern Sie

für den ersten Graphen die Summe von $n = 0$ bis $n = \infty$ mit dem ersten Term der Summe an. Verwenden Sie für den zweiten bzw. dritten Graphen die ersten fünf bzw. die ersten zehn Terme. Diese Funktion wird manchmal als *Rechteckwelle* bezeichnet. b) Wie hängt die obige Funktion mit der Leibniz'schen Reihendarstellung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots s$$

für π zusammen?

Thermodynamik

Teil IV



13	Temperatur und der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik	529
14	Die kinetische Gastheorie	545
15	Wärme und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik	567
16	Der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik	599
17	Wärmeübertragung	631

Temperatur und der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik

13



In dieser Pipeline in Alaska wird Erdöl transportiert; sie besteht aus Stahl und hat einen Durchmesser von 1,2 m. An mehreren Stellen ist sie zickzackförmig angelegt, damit sie bei der Wärmeausdehnung nicht beschädigt wird. (Außerdem werden dadurch Schäden infolge von Erdbeben vermieden.) Diese Pipeline kann Temperaturen zwischen -50°C und 60°C standhalten. (Die tiefere dieser Temperaturen hatte die Pipeline, bevor Öl hindurchgeleitet wurde.) (© Karen Kasmauskis/Corbis.)

13.1 Temperatur und der Nullte Hauptsatz	530
13.2 Temperaturmessgeräte und Temperaturskalen	530
13.3 Thermische Ausdehnung	535
Zusammenfassung	542
Aufgaben	543

? Wie stark ändert sich die Länge eines 220 m langen Abschnitts einer Pipeline, wenn er von -50°C auf 60°C erwärmt wird? (Siehe Beispiel 13.2.)

Schon recht kleine Kinder haben ein gewisses Verständnis von „heiß“ und „kalt“ – aber was ist Temperatur eigentlich? Mithilfe welcher Größe oder Eigenschaft kann sie gemessen werden? In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zum ersten Mal mit der Temperatur.

Schon im antiken Griechenland war bekannt, dass sich Luft beim Erwärmen ausdehnt, was bereits zu simplen Temperaturmessgeräten, den sogenannten *Thermoskopen* führte. In diesem Kapitel werden wir sehen, dass die Weiterentwicklung dieser Thermoskope, die Gasthermometer, auch heute noch ein sehr gutes Mittel darstellen, Temperaturen über einen großen Wertebereich zu messen. Außerdem werden wir die Umrechnungsformeln für die verschiedenen Einheiten der Temperatur – Grad Fahrenheit, Grad Celsius und Kelvin – und ihre historischen Hintergründe kennenlernen.

In diesem Kapitel werden wir uns zunächst phänomenologisch mit der Temperatur und Temperaturmessgeräten beschäftigen, bevor wir uns mit den physikalischen Grundlagen der Wärmeausdehnung befassen, die in fast jedem Thermometer zur Temperaturmessung ausgenutzt wird.

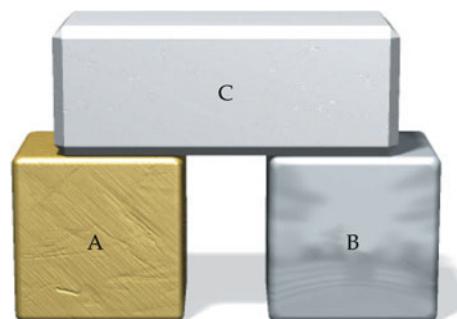
13.1 Temperatur und der Nullte Hauptsatz

Unser Tastsinn erlaubt uns festzustellen, ob ein Gegenstand heiß oder kalt ist. Wir machen schon früh die Erfahrung, dass wir einen Gegenstand erwärmen können, indem wir ihn in Kontakt mit einem heißeren Gegenstand bringen. Wollen wir einen Gegenstand abkühlen, bringen wir ihn in Kontakt mit einem kälteren Gegenstand.

Wird ein Gegenstand erwärmt oder abgekühlt, dann ändern sich einige seiner physikalischen Eigenschaften, darunter das Volumen: Beim Erwärmen eines Festkörpers oder einer Flüssigkeit nimmt gewöhnlich das Volumen zu. Wird ein Gas bei gleich gehaltenem Druck erwärmt, dann steigt sein Volumen. Hält man dagegen sein Volumen konstant, so nimmt sein Druck zu. Wenn ein elektrischer Leiter erhitzt wird, steigt sein elektrischer Widerstand. (Diese Eigenschaft betrachten wir in Kapitel 22). Eine physikalische Eigenschaft, die mit der Temperatur variiert und die man zur Temperaturmessung heranziehen kann, nennt man **thermometrische Eigenschaft**. Ihre Änderung ist ein Indiz dafür, dass der Körper eine andere Temperatur angenommen hat.

Nehmen wir an, wir bringen einen heißen Kupferstab in engen Kontakt mit einem kalten Eisenstab. Dann wird der Kupferstab sich abkühlen, während der Eisenstab wärmer wird. Wir sagen dann, dass beide Stäbe in **thermischem Kontakt** miteinander stehen. Der Kupferstab wird beim Abkühlen etwas kürzer, und der Eisenstab dehnt sich beim Erwärmen etwas aus. Nach einiger Zeit kommen diese Vorgänge zum Stillstand, und es lässt sich bei den Stäben keine Längenänderung mehr feststellen. Jetzt stehen beide Stäbe in **thermischem Gleichgewicht** mit einander.

Bei einem weiteren Experiment bringen wir die beiden unterschiedlich warmen Stäbe nicht in direkten Kontakt miteinander, sondern legen zunächst den heißen Kupferstab in einen kalten See. Der Stab kühlst dabei so weit ab, bis er mit dem Wasser in thermischem Gleichgewicht steht. Danach wird er nicht mehr kürzer. Anschließend legen wir auch den kalten Eisenstab in den See, aber etwas entfernt vom Kupferstab, sodass er mit ihm nicht in Kontakt kommt. Der Eisenstab wird wärmer, bis er mit dem Wasser in thermischem Gleichgewicht steht und sich nicht weiter ausdehnt. Schließlich bringen wir beide Stäbe eng zusammen. Nun ändern sich ihre Längen nicht, denn sie befinden sich in thermischem Gleichgewicht. Damit haben wir einen wichtigen Grundsatz gezeigt, den man als **Nullten Hauptsatz der Thermodynamik** bezeichnet und der nicht rein logisch abgeleitet werden kann (Abbildung 13.1):



(a)



(b)

Abbildung 13.1 Der Nullte Hauptsatz der Thermodynamik. a) Die Systeme A und B stehen in thermischem Kontakt mit dem System C, aber nicht direkt miteinander. Haben A und B thermisches Gleichgewicht mit C erreicht, dann stehen sie auch untereinander in thermischem Gleichgewicht. Das kann man überprüfen, indem man die Systeme A und B direkt zusammenbringt (b).

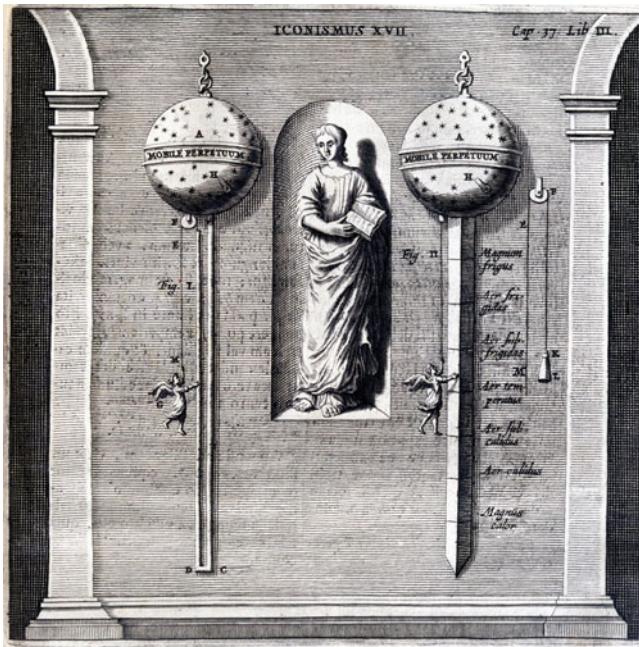
Befinden sich zwei Körper in thermischem Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander in thermischem Gleichgewicht.

NULLTER HAUPTSATZ DER THERMODYNAMIK

Man kann sagen, zwei Gegenstände haben die gleiche *Temperatur*, wenn sie miteinander in thermischem Gleichgewicht stehen. Wie wir in diesem Kapitel sehen werden, kann mithilfe des Nullten Hauptsatzes eine Temperaturskala erstellt werden.

13.2 Temperaturmessgeräte und Temperaturskalen

Zur Konstruktion von Thermometern kann man im Prinzip jede thermometrische Eigenschaft verwenden. Die Ausdehnung von Luft unter Erwärmung war bereits seit der Antike bekannt. Auf diese Grundlage aufbauend, wurden im 16. und 17. Jahrhundert sogenannte *Thermoskope* wie z. B. das Magdeburger Thermometer von Otto von Guericke (1602–1686) benutzt, um Temperaturveränderungen sichtbar machen zu können. Dieses Thermoskop bestand aus einer mit Luft gefüllten Hohlkugel, die mit einem U-Rohr verbunden war, das mit Alkohol gefüllt wurde, ähnlich wie das Manometer in Abbildung 10.7. Durch die



Das Magdeburger Thermometer von Otto von Guericke: Es besteht aus einer Kupferkugel, an der ein Arm mit einem U-Rohr befestigt ist, das Alkohol enthält. Auf der Flüssigkeit befindet sich ein Schwimmkörper, an dem mittels eines Seilzugs eine Engelsfigur befestigt ist, die die Temperaturänderung an einer Skala anzeigt, sobald die Luft in der Kugel sich ausdehnt oder komprimiert und damit den Flüssigkeitspegel ändert. Die Gesamthöhe der Apparatur beträgt 6 Meter.
(© Science and Society Picture Library.)

Ausdehnung und Kompression der Luft durch Temperaturveränderungen stieg und sank der Spiegel des Alkohols im U-Rohr. Statt Alkohol kann man auch andere Flüssigkeiten verwenden. Quecksilber wurde lange Zeit in haushaltstypischen Thermometern eingesetzt, wird jedoch heute nicht mehr verwendet wegen der Giftigkeit des Quecksilberdampfs. Entscheidend bei der Wahl der Flüssigkeit ist, dass sie sich beim Erwärmen wesentlich stärker ausdehnt als das sie umgebende Behältnis.

Doch nicht nur Flüssigkeiten eignen sich, um Temperaturänderungen sichtbar zu machen, auch Metalle dehnen sich unter Wärmeeinfluss sehr stark aus. Abbildung 13.2 zeigt einen Bimetallstreifen. Dieser besteht aus zwei unterschiedlichen Metallschichten, die fest miteinander verbunden sind (*bi* ist vom lateinischen *bis* für „zweifach“ abgeleitet). Ändert sich die Temperatur des Bimetallstreifens, krümmt er sich. Die Änderung der Krümmung bei einer bestimmten Temperaturänderung hängt vom Unterschied der thermischen Ausdehnungskoeffizienten der beiden Metalle ab (siehe Abschnitt 13.3).

Möchte man die Temperatur eines Objektes messen, bringt man ein Thermometer mit ihm in Kontakt und wartet, bis sich ein thermisches Gleichgewicht zwischen Thermometer und Objekt einstellt. Damit das Thermometer die Temperatur des Objektes, die gemessen werden soll, nicht wesentlich ändert, sollten die Kontaktstelle und die anfängliche Temperaturdifferenz zwi-

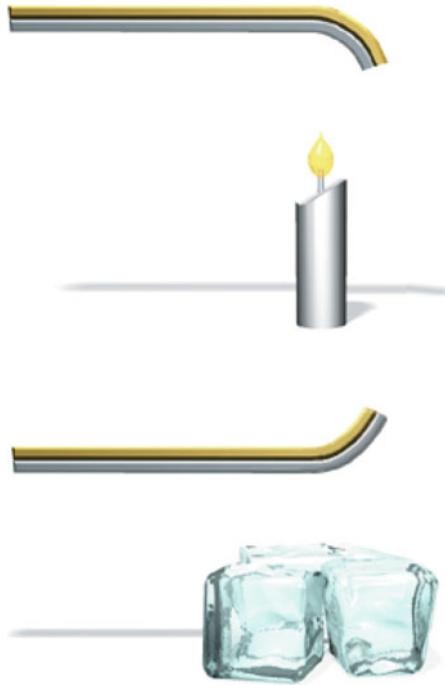


Abbildung 13.2 Dieser Bimetallstreifen verbiegt sich, wenn er erwärmt oder abgekühlt wird, denn die beiden hier miteinander verbundenen Metallschichten dehnen sich bei gleicher Temperaturerhöhung unterschiedlich stark aus.

schen Thermometer und Objekt möglichst klein sein. Um die Temperaturänderungen messbar zu machen, haben Thermometer seit dem 17. Jahrhundert neben einem Messfühler (der den Kontakt zu einem Objekt herstellt, dessen Temperatur gemessen werden soll) auch eine Temperaturskala, die aus der qualitativen Beobachtung der Wärmeausdehnung einen vergleichbaren Zahlenwert macht. Diese Skala erhält man durch Kalibrierung: Das Thermometer wird zunächst in Wasser gehängt, das bei Atmosphärendruck mit Eis im Gleichgewicht steht. (In dieser Mischung herrscht eine konstante Temperatur, und zwar aus folgendem Grund: Wenn Eis in Wasser gegeben wird, dann schmilzt ein Teil des Eises, und das Wasser wird kälter, bis schließlich thermisches Gleichgewicht erreicht ist und kein Eis mehr schmilzt. Führt man der Mischung Wärme zu, dann schmilzt wieder etwas Eis, aber die Temperatur ändert sich nicht, solange noch Eis vorhanden ist.) Sobald das Thermometer in thermischem Gleichgewicht mit dem Eiswasser steht, wird an der Kapillare, in der die Thermometerflüssigkeit steht, in Höhe des Flüssigkeitsmeniskus eine Markierung angebracht, die den sogenannten **Eispunkt** angibt, den **Gefrierpunkt des Wassers**. Danach wird das Thermometer (ebenfalls bei Atmosphärendruck) in siedendes Wasser getaucht. Man wartet auch hier ab, bis die Länge der Quecksilbersäule gleich bleibt, und markiert nun den **Siedepunkt des Wassers**.

Diese beiden Temperaturfixpunkte wurden zur Definition der **Celsius-Skala** verwendet. Bei ihr ist – nach einem Vorschlag des schwedischen Mathematikers und Geodäten Anders Cel-

sius aus dem Jahre 1742 – das Temperaturintervall zwischen dem Gefrierpunkt (0°C) und dem Siedepunkt des Wassers (100°C) in 100 gleiche Teile unterteilt. Durch lineare Extrapolation kann die Gradeinteilung auch nach oben und unten über die genannten Werte hinaus erweitert werden. Mit solchen Thermometern, die uns vertraut sind, kann man die Temperatur der verschiedensten Systeme oder Gegenstände messen, indem das Thermometer in thermisches Gleichgewicht mit dem Messobjekt gebracht wird. Ist l_T die Länge der Quecksilbersäule, so ist die Temperatur T_C in Grad Celsius gegeben durch

$$T_C = \frac{l_T - l_0}{l_{100} - l_0} \cdot 100^{\circ}\text{C}. \quad (13.1)$$

Dabei ist l_0 die Länge der Quecksilbersäule bei 0°C (Thermometer in Eiswasser) und l_{100} die Länge bei 100°C (Thermometer in siedendem Wasser). Die Temperatur des menschlichen Körpers liegt im Inneren normalerweise bei 37°C .

In den angelsächsischen Ländern wird im Alltag häufig noch die **Fahrenheit-Skala** verwendet. Hier liegt der Eispunkt bei 32°F und der normale Siedepunkt des Wassers bei 212°F . Als der deutsche Physiker Daniel Fahrenheit (1686–1736) seine Skala aufstellte, wollte er erreichen, dass alle messbaren Temperaturwerte positiv sind. Daher wählte er als Nullpunkt die tiefste Temperatur, die er – mit einer Salmiak-Schnee-Mischung – erreichen konnte. Der Normaltemperatur des menschlichen Körpers wies er den Wert 96°F zu, weil die Zahl 96 (im Gegensatz zur vielleicht naheliegenden Zahl 100) durch vie-

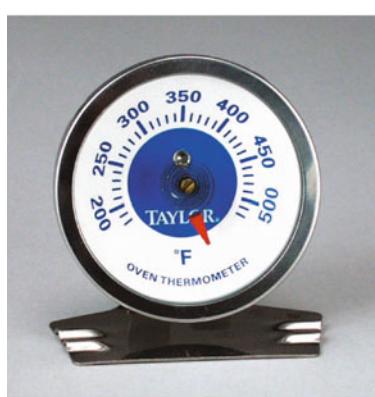
le kleinere Zahlen ohne Rest teilbar ist. Allerdings musste er noch einige kleinere Anpassungen vornehmen, um für den Eispunkt und den Siedepunkt des Wassers ganzzahlige Werte zu erhalten. Daher liegt die normale menschliche Körpertemperatur in der Fahrenheit-Skala zwischen 98°F und 99°F . Bei der Fahrenheit-Skala liegen zwischen Eispunkt und Siedepunkt des Wassers 180°F , bei der Celsius-Skala dagegen 100°C . Einer Temperaturänderung um 1°F entsprechen daher $(\frac{5}{9})^{\circ}\text{C}$, und die vollständige Umrechnungsformel lautet

$$T_C = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{T_F}{^{\circ}\text{F}} - 32 \right) ^{\circ}\text{C}. \quad (13.2)$$

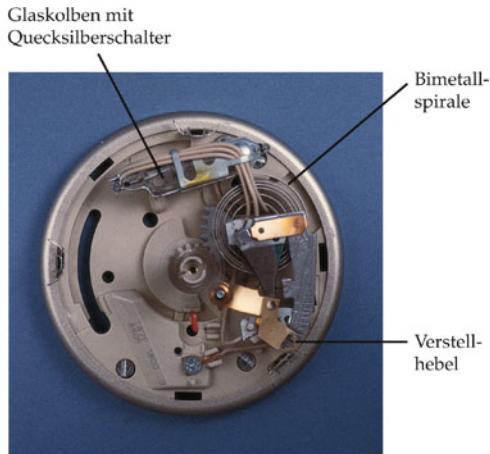
UMRECHNUNG GRAD FAHRENHEIT – GRAD CELSIUS

Ein Nachteil von auf diese Weise aufgestellten Temperaturskalen liegt darin, dass sie auf der thermometrischen Eigenschaft einer bestimmten Substanz (z. B. des Wassers oder der Salmiak-Schnee-Mischung) beruhen.

In Thermometern mit einem Bimetallstreifen wird dessen bei der jeweiligen Temperatur vorliegende Krümmung auf einen Zeiger übertragen, der an einer entsprechenden Skala die aktuelle Temperatur anzeigt (Abbildung 13.3a). Zur Kalibrierung wird im Prinzip so verfahren, wie es oben beim Flüssigkeitsthermometer beschrieben wurde (unter Ausnutzung von Gefrier- und Siedepunkt des Wassers). Abbildung 13.3b zeigt, wie die unterschiedliche Krümmung eines Bimetallstreifens zum Ein- und Ausschalten eines Thermostaten ausgenutzt werden kann.



(a)



(b)

Abbildung 13.3 a) Ein amerikanisches Backofenthermometer mit einem spiralförmig gewundenen Bimetallstreifen, der die Änderung seiner Krümmung auf den roten Zeiger überträgt, der an einem Ende der Spule befestigt ist. Wenn die Temperatur steigt, bewegt sich der Zeiger nach rechts, weil der äußere Teil des Bimetallstreifens sich stärker ausdehnt. Die Skala ist entsprechend zwischen ca. 80°C und 270°C kalibriert. b) Ein Thermostat, wie er bei Klimaanlagen eingesetzt wird. Wenn die Temperatur ansteigt, dehnt sich die Spule aus, sodass sich der teilweise mit Quecksilber gefüllte Glaskolben neigt. Bei einer bestimmten Stellung kippt der Kolben. Dadurch schließt das Quecksilber einen elektrischen Kontakt, der die Klimaanlage einschaltet. Mit dem Verstellhebel an der Spule kann eingestellt werden, bei welcher Temperatur dieser Schaltvorgang erfolgt. Die Klimaanlage wird wieder ausgeschaltet, wenn der Glaskolben beim Abkühlen in seine vorige Position zurückkippt. Dabei wird der elektrische Kontakt geöffnet. (a) Mit freundlicher Genehmigung von Taylor Precision Products. b) © Richard Megna/Fundamental Photographs.)

Gasthermometer

Wenn unterschiedliche Thermometer wie die eben beschriebenen mit Eiswasser und siedendem Wasser kalibriert wurden, dann stimmen sie bei 0°C und bei 100°C natürlich überein. Bei Temperaturen dazwischen zeigen sie jedoch geringe Abweichungen, weil die Wärmeausdehnungen von Flüssigkeit und Glas bzw. der beiden Metalle meist unterschiedlich stark von der Temperatur abhängen. Merkliche oder gar größere Abweichungen ergeben sich jedoch bei Temperaturen unterhalb des Eispunkts und oberhalb des Siedepunkts von Wasser. In diesen Bereichen weicht die zu messende Temperatur zu stark von den beiden Kalibrationspunkten ab. Um dennoch solche Temperaturen messen zu können, benötigt man eine andere Art Thermometer, ein Gasthermometer.

Bei einer Version, dem **Gasthermometer mit konstantem Volumen**, wird das Volumen konstant gehalten, und die Änderung des Drucks dient als Maß für die Änderung der Temperatur (Abbildung 13.4). Hierbei wird der Druck als thermometrische Eigenschaft ausgenutzt. Zur Kalibrierung wird zunächst der Druck p_0 beim Eispunkt gemessen, indem das Thermometer in Eiswasser getaucht wird. Danach wird in siedendem Wasser der Druck p_{100} gemessen. Das Intervall zwischen beiden Werten wird in 100 gleiche Teile unterteilt, womit man die Celsius-Skala erhält. Soll nun irgendeine Temperatur T ermittelt werden, dann wird der dabei herrschende Gasdruck p_T gemessen. Für die zu bestimmende Temperatur T_C in Grad Celsius gilt:

$$T_C = \frac{p_T - p_0}{p_{100} - p_0} \cdot 100^\circ\text{C}. \quad (13.3)$$

GASTHERMOMETER MIT KONSTANTEM VOLUMEN

Nehmen wir an, wir wollen beim normalen Luftdruck von 1 bar eine bestimmte Temperatur messen, z. B. den Siedepunkt von Schwefel. Dazu verwenden wir vier gleiche Gasthermometer mit konstantem Volumen, die mit unterschiedlichen Gasen gefüllt sind, nämlich mit Luft, Wasserstoff, Stickstoff bzw. Sauerstoff. Jedes Gasthermometer wird auf die gleiche Weise durch Messen der Drücke p_0 und p_{100} kalibriert und dann in siedenden Schwefel eingetaucht. Sobald sich thermisches Gleichgewicht zwischen dem siedenden Schwefel und dem Thermometer eingestellt hat, wird der Gasdruck abgelesen. Schließlich wird nach Gleichung 13.3 jeweils die Temperatur T_C in °C errechnet. Unter gleichen Bedingungen und für geringe Gasdichten zeigen alle vier Gasthermometer denselben Wert an. Allerdings variiert dieser Wert mit der Dichte des Gases, wie Abbildung 13.5 demonstriert.

Abbildung 13.5 zeigt die Messergebnisse beim Ermitteln des Siedepunkts von Schwefel mithilfe von Gasthermometern konstanter Volumens, die mit den verschiedenen Gasen gefüllt waren. Im Diagramm sind für jedes Gasthermometer die ermittelten Siedetemperaturen von Schwefel in Abhängigkeit vom Druck p_{100} aufgetragen. Dieser Druck beim Siedepunkt des Wassers ist ein Maß für die Dichte des Gases. Ändert sich die

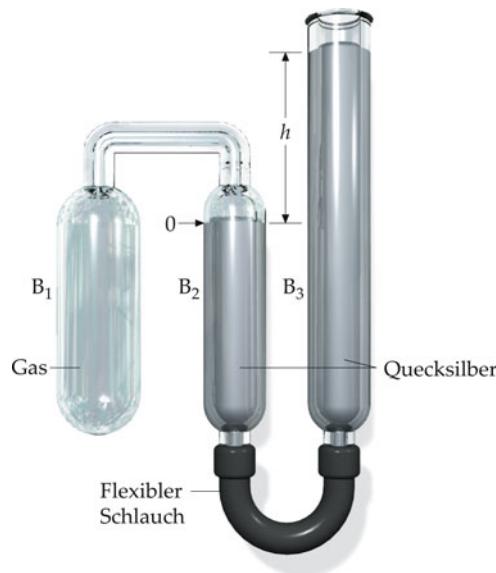


Abbildung 13.4 Ein Gasthermometer mit konstantem Volumen. Das Gasvolumen im Gefäß B₁ wird durch Anheben oder Absenken des Gefäßes B₃ konstant gehalten, sodass der Quecksilbermaniskus im Gefäß B₂ stets auf gleicher Höhe (an der Nullmarke) steht. Die Temperatur ist proportional zum Gasdruck im Gefäß B₁. Dieser Druck wird durch die überstehende Höhe h der Quecksilbersäule im Gefäß B₃ angezeigt.

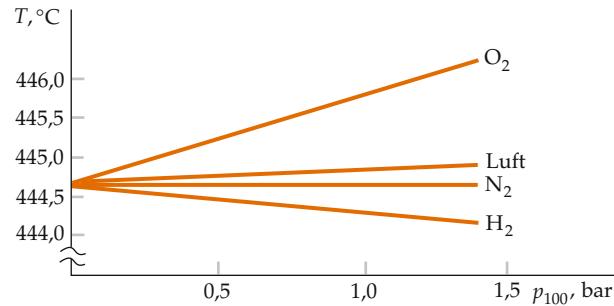


Abbildung 13.5 Der Siedepunkt von Schwefel wurde mit Gasthermometern konstanten Volumens gemessen, die mit unterschiedlichen Gasen gefüllt waren. Zusätzlich wurde jeweils die Gasmenge und damit der Gasdruck p_{100} beim Siedepunkt des Wassers durch Änderung der Füllmenge an Gas im Thermometer variiert. Wird die Gasmenge immer weiter verringert, dann strebt der Messwert bei allen Gasthermometern gegen 444,60 °C. Es ist zu beachten, dass die Temperaturachse nur den Bereich von 444 °C bis 446 °C zeigt.

Gasmenge und damit ihre Dichte bei konstantem Volumen, dann ändert sich nicht nur der Druck p_{100} , sondern auch der Druck p_0 , und das Gasthermometer muss neu kalibriert werden.

Bei herabgesetzter Füllmenge an Gas sind sowohl die Gasdichte als auch der Druck p_{100} geringer. Wir erkennen in der Abbildung, dass die mit den Thermometern gemessenen Werte recht ähnlich (beinahe unabhängig von der Art des Gases) sind, solange die Gasdichte bzw. p_{100} gering ist. Extrapoliert man auf die Gasdichte null, liefern alle Gasthermometer den-

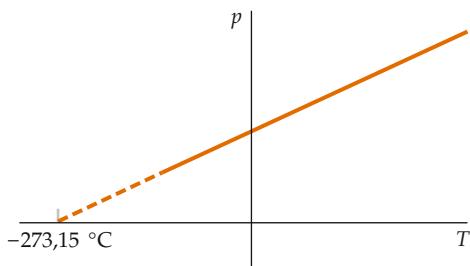


Abbildung 13.6 Druck-Temperatur-Diagramm für ein Gas in einem Gasthermometer konstanten Volumens. Bei der Extrapolation auf den Druck null schneidet die Gerade die Temperaturachse stets bei $-273,15^{\circ}\text{C}$.

Tabelle 13.1 Einige charakteristische Temperaturen

Temperatur in Kelvin	
10^{10}	Supernova
10^9	Wasserstoffbombe
10^8	Sonneninneres
10^7	Sonnenkorona
10^6	
10^5	
10^4	Sonnenoberfläche
10^3	Smp. von Kupfer
10^2	Smp. von Wasser
10^1	Flüssiger Stickstoff
10^0	Flüssiger Wasserstoff
10^{-1}	Flüssiges Helium
10^{-2}	${}^3\text{He}$ wird suprafluid
10^{-3}	
10^{-4}	
10^{-5}	
10^{-6}	
10^{-7}	
10^{-8}	Bose-Einstein-Kondensat
10^{-9}	
10^{-10}	Tiefste bisher erreichte Temperatur



Abbildung 13.7 Wasser an seinem Tripelpunkt. Der Rundkolben enthält Eis, Wasser und Wasserdampf (also feste, flüssige und gasförmige Phase des Wassers) im Gleichgewicht miteinander. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

selben Wert für die Siedetemperatur von Schwefel. Diese Art der Temperaturmessung hängt bei geringer Gasdichte nicht von den Eigenschaften des jeweiligen Gases ab.

Betrachten wir nun eine Reihe von Temperaturmessungen, die mithilfe eines Gasthermometers durchgeführt wurden, das eine sehr kleine, aber stets gleiche Gasmenge enthält. Nach Gleichung 13.3 hängt der Gasdruck p_T im Thermometer linear von der Temperatur T_C ab. In Abbildung 13.6 ist der Gasdruck gegen die gemessene Temperatur (bei konstantem Volumen im Gasthermometer) aufgetragen. Die extrapolierte Gerade schneidet die Abszisse stets bei $-273,15^{\circ}\text{C}$. Dieser Grenzwert hängt nicht von der Art des im Gasthermometer verwendeten Gases ab, was auch am Beispiel zur Bestimmung des Siedepunkts von Schwefel für vier Gasarten gezeigt wurde.

Dass Gase nur bei geringen Dichten in Thermometern einsetzbar sind, liegt daran, dass sich in diesem Fall alle Gase sehr ähnlich verhalten. Unter diesen Umständen spielen die verschiedenen Massen und Eigenvolumina der Moleküle unterschiedlicher Gase keine Rolle. Man sagt auch, dass sich Gase bei geringer Dichte wie ein **ideales Gas** verhalten.

Das ideale Gas ist ein Gas, dessen Verhalten vollständig und uneingeschränkt durch die kinetische Gastheorie (siehe Kapitel 14) beschrieben wird.

DEFINITION DES IDEALEN GASES

Die tiefsten Temperaturen, die man mit einem Gasthermometer messen kann, liegen um -250°C . Dafür muss man Helium verwenden, da alle anderen Gase bereits bei höheren Temperaturen flüssig werden. (siehe Tabelle 13.1).

Um Thermometer besser zu kalibrieren, nutzt man häufig einen viel genauer zu reproduzierenden Referenzpunkt als den Schmelz- oder den Siedepunkt des Wassers, die stark von den äußeren Bedingungen abhängig sind. Dieser Referenzpunkt ist

der **Tripelpunkt des Wassers** (Abbildung 13.7). Bei ihm stehen Wasserdampf, flüssiges Wasser und Eis im Gleichgewicht miteinander, und es herrschen ein Druck von 6,105 mbar und eine Temperatur von 0,01 °C. Die **Temperaturskala der absoluten Temperatur** benutzt ebenfalls diesen Referenzpunkt und ordnet ihm eine Temperatur von 273,16 K zu. Das **Kelvin** (Einheitenzeichen K) ist die Temperatureinheit der absoluten Temperatur, und man nennt die Temperaturskala der absoluten Temperatur daher auch **Kelvin-Skala**. Als zweiten Referenzpunkt hat die Kelvin-Skala den Wert –273,15 °C als 0 K. Mit diesen beiden Referenzpunkten ist die absolute Temperaturskala, wie wir in Kapitel 15 noch sehen werden, so definiert, dass sie von jeglichen Stoffeigenschaften unabhängig wird und in allen erreichbaren Temperaturbereichen ohne Einschränkung anwendbar ist.

Temperaturen können mithilfe des Gasdrucks p in einem Gasthermometer konstanten Volumens gemessen und in der Kelvin-Skala angegeben werden:

$$T = \frac{p}{p_3} \cdot 273,16 \text{ K}. \quad (13.4)$$

TEMPERATURSKALA DER ABSOLUTEN TEMPERATUR

Darin ist p_3 der Druck im Gasthermometer, wenn sich dieses in einer Eis-Wasser-Dampf-Mischung am Tripelpunkt des Wassers befindet.

!

Die Temperaturskala der absoluten Temperatur gemäß Gleichung 13.4 hat den Vorteil, dass die Temperatur dabei nicht von den Eigenschaften des jeweils verwendeten Gases abhängt, sondern nur von den allgemeinen Eigenschaften von Gasen.

Die Bezeichnung T wird bei der Angabe absoluter Temperaturen gewöhnlich ohne den Index K verwendet. Da die Temperaturdifferenzen zwischen Siedepunkt und Eispunkt des Wassers in der Kelvin-Skala und der Celsius-Skala identisch sind, haben Temperaturdifferenzen in beiden Skalen stets dieselben Werte. Das bedeutet, eine Temperaturänderung um 1 K ist identisch mit einer Temperaturänderung um 1 °C. Beide Skalen unterscheiden sich nur in ihren Nullpunkten, und die Umrechnung zwischen ihnen besteht in der einfachen Addition von 273,15:

$$T = \left(\frac{T_C}{\text{°C}} + 273,15 \right) \text{ K}. \quad (13.5)$$

UMRECHNUNG GRAD CELSIUS – KELVIN

Für die meisten Zwecke reicht es aus, gerundet zu rechnen, d. h. den Nullpunkt der absoluten Temperaturskala auf –273 K zu setzen. Dann liegt der Eispunkt (0 °C) bei 273 K. Während im Alltag die Celsius-Skala nützlich und üblich ist, wird in der Wissenschaft weitestgehend die Kelvin-Skala verwendet. Die Gründe dafür liegen darin, dass mit ihr viele Formeln ein sehr

einfaches Aussehen erhalten, und vor allem darin, dass der absoluten Temperatur eine fundamentalere Interpretation gegeben werden kann.

Frage 13.1

Welche Angaben benötigt man mindestens, um eine Temperaturskala zu definieren?

13.3 Thermische Ausdehnung

Wird ein Gegenstand erwärmt, so dehnt er sich im Allgemeinen aus. Betrachten wir einen Stab oder eine Flüssigkeitssäule der Länge l bei der Temperatur T . Ändert sich diese um ΔT , dann ist die Längenänderung Δl proportional zu ΔT , und für die relative Längenänderung gilt

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T. \quad (13.6)$$

Die Größe α heißt **Längenausdehnungskoeffizient** oder **linearer Ausdehnungskoeffizient** und ist gleich dem Quotienten aus relativer Längenänderung und Temperaturdifferenz:

$$\alpha = \frac{\Delta l/l}{\Delta T}. \quad (13.7)$$

Die Einheit von α gemäß dem SI-System ist das reziproke Kelvin (K^{-1}); oft wird auch die gleich große Einheit reziproke Grad Celsius (°C^{-1}) verwendet. Der Längenausdehnungskoeffizient von Flüssigkeiten oder Festkörpern hängt in der Regel nicht stark vom Druck ab, kann sich aber mit der Temperatur deutlich ändern. Gleichung 13.7 liefert den Mittelwert von α im Temperaturintervall ΔT bei konstantem Druck. Den Ausdehnungskoeffizienten bei einer bestimmten Temperatur T erhält man durch Grenzübergang für ΔT gegen null:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta l/l}{\Delta T} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT}. \quad (13.8)$$

DEFINITION DES LÄNGENAUSDEHNUNGSKOEFFIZIENTEN

In den meisten Fällen ist der oben erwähnte Mittelwert nach Gleichung 13.7 auch für größere Temperaturintervalle ausreichend genau.

Der **Volumenausdehnungskoeffizient** oder *kubische Ausdehnungskoeffizient* β einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers ist analog definiert, nämlich als Quotient aus relativer Volumenänderung und Temperaturdifferenz (bei konstantem Druck):

$$\beta = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}. \quad (13.9)$$

DEFINITION DES VOLUMENAUSDEHNUNGSKOEFFIZIENTEN

Beispiel 13.1: Dehnen sich Löcher beim Erwärmen aus?**ZUM VERSTÄNDNIS**

Nehmen Sie an, durch ein aus Stahl gefertigtes Lineal wurde ein kreisförmiges Loch gebohrt. Wenn das Lineal erwärmt wird, dehnt es sich aus. Wird der Durchmesser des Lochs dabei größer oder kleiner?

Problembeschreibung: Die Größenzunahme irgendeines Teils des Lineals bei einer bestimmten Temperaturzunahme ist gemäß Gleichung 13.6 proportional zu seiner ursprünglichen Größe. Wir nehmen an, dass das Loch vor dem Erwärmen einen Durchmesser von genau 1 cm hat und dass sich seine Mitte exakt bei der 3,5-cm-Markierung befindet.

Lösung: 1. Stellen Sie fest, bis zu welchen Markierungen sich das Loch anfangs erstreckt: Da das 1-cm-Loch bei der 3,5-cm-Markierung zentriert ist, liegen seine Ränder bei der 3-cm- und der 4-cm-Markierung.

2. Stellen Sie fest, wie sich das Lineal bei der Erwärmung ausdehnt: Der Abstand zwischen der 3-cm- und der 4-cm-Markierung nimmt zu.

3. Stellen Sie fest, wo sich die Ränder des Lochs nach der Ausdehnung befinden: Wie im vorigen Schritt ermittelt, steigt der Abstand zwischen den beiden Markierungen, an denen sich die Ränder des Lochs befinden. Das bedeutet:

Der Durchmesser des Lochs nimmt zu.

Plausibilitätsprüfung: Wir stellen uns vor, dass das Loch so ausgestanzt wurde, dass eine Stahlscheibe mit einem Durchmesser von genau 1 cm entstand. Wird diese nun gemeinsam

mit dem Lineal erwärmt, dann nimmt ihr Durchmesser ebenso stark zu wie der Abstand zwischen der 3-cm- und der 4-cm-Markierung beim erwärmten Lineal.



Abbildung 13.8 Bei Zimmertemperatur hat diese Kugel einen solchen Durchmesser, dass sie gerade nicht durch das Loch passt. Wird nun der Ring erwärmt, die Kugel aber auf Zimmertemperatur gehalten, dann kann diese durch den Ring geschoben werden. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

Weitergedacht: Eine Anordnung, mit der sich die Ausdehnung eines Lochs demonstrieren lässt, ist in Abbildung 13.8 gezeigt.

Wie α hängt auch β bei Flüssigkeiten und Festkörpern in der Regel kaum vom Druck ab, kann sich aber mit der Temperatur mehr oder weniger stark ändern. Die mittleren Ausdehnungskoeffizienten einiger Materialien sind in Tabelle 13.2 aufgeführt. Die Beispiele 13.1 bis 13.4 illustrieren einige Effekte der thermischen Ausdehnung. Beispiel 13.5 zeigt dann, wie man mithilfe der Wärmeausdehnung von Alkohol ein Flüssigkeitsthermometer kalibrieren kann.

Beispiel 13.2: Wärmeausdehnung einer Pipeline

Ein 220 m langes Stück einer Pipeline in Alaska hatte zu Beginn eine Temperatur von -50°C . Während Öl hindurchfloss, stieg die Temperatur auf maximal 60°C an. Es soll hier angenommen werden, dass die Pipeline wegen der Isolationsschicht, mit der sie umgeben ist, auch am Außenrand nicht kälter ist. a) Um wie viel wird der genannte Abschnitt der Pipeline bei der angegebenen Erwärmung länger? b) Die Pipeline verläuft über eine Strecke von insgesamt 670 km

oberirdisch. Wie groß ist deren Längenänderung bei derselben Temperaturänderung?

Problembeschreibung: Wir entnehmen der Tabelle 13.2 den Längenausdehnungskoeffizienten für Stahl ($\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) und berechnen mithilfe von Gleichung 13.6 die Längenänderung Δl .

Lösung:

Teilaufgabe a

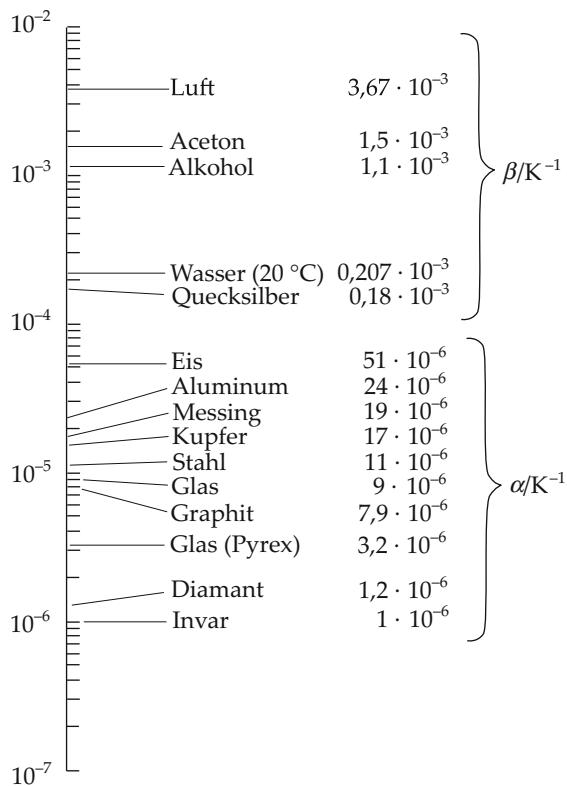
1. Die Längenänderung Δl ist das Produkt aus α , l und ΔT :

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

2. Berechnen Sie aus den angegebenen Werten die Temperaturänderung:

$$\Delta T = 60^{\circ}\text{C} - (-50^{\circ}\text{C}) = 110^{\circ}\text{C} = 110 \text{ K}$$

Tabelle 13.2 Gerundete Werte für den Längen- und den Volumenausdehnungskoeffizienten einiger Substanzen



Weitergedacht: Die beiden Enden des oberirdisch verlaufenden Teils der Pipeline auf dem Foto am Anfang des Kapitels bewegen sich auch bei großen Temperaturschwankungen nicht, da die Längenänderungen der einzelnen Zickzackabschnitte durch seitliche Bewegungen abgefangen werden. ■

Beispiel 13.3: Ein randvolles Gefäß

Bei der Arbeit im Labor füllen Sie einen 1,000-l-Glaskolben bei 10 °C bis zum Rand mit Wasser. Wie viel Wasser wird überlaufen, wenn die Temperatur von Kolben und Wasser auf 30 °C ansteigt?

Problembeschreibung: Bei der Erwärmung dehnen sich sowohl der Kolben als auch das Wasser aus. Da sich das Wasser stärker ausdehnt, wird ein Teil überlaufen. Die Temperaturdifferenz beträgt $\Delta T = 20\text{ K}$. Die Ausdehnungskoeffizienten entnehmen Sie Tabelle 13.2. Für Wasser ist $\beta_w = 0,207 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$. Für Pyrex-Glas beträgt der lineare Ausdehnungskoeffizient $\alpha_g = 3,2 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$. Für die beim Erwärmen eintretenden Volumenänderungen gilt jeweils $\Delta V = \beta V \Delta T$, wobei V das anfängliche Innenvolumen des Körpers ist, dessen Wandstärke nicht berücksichtigt wird. Die Differenz beider Volumenänderungen ist dann gleich dem Volumen des überlaufenden Wassers.

Lösung: 1. Das auslaufende Volumen ΔV ist gleich der Differenz der Volumenänderungen von Wasser und Glas:

$$\Delta V = \Delta V_w - \Delta V_g$$

2. Berechnen Sie die Volumenänderung des Wassers:

$$\Delta V_w = \beta_w V \Delta T$$

3. Die Volumenänderung des Glases ist entsprechend:

$$\Delta V_g = \beta_g V \Delta T = 3 \alpha_g V \Delta T$$

4. Subtrahieren Sie beide Volumenänderungen und setzen Sie die Werte ein:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V_w - \Delta V_g \\ &= (\beta_w - 3 \alpha_g) V \Delta T \\ &= \{0,207 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1} - 3 \cdot (3,2 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1})\} \\ &\quad \cdot (1,000\text{ l}) \cdot (20\text{ K}) \\ &= 3,97 \cdot 10^{-3}\text{ l} = [4,0\text{ ml}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Es laufen nur knapp 0,4 % des Wasservolumens aus. Das erscheint angesichts der geringen Temperaturdifferenz von 20 K plausibel. Der Kolben dehnt sich ebenso aus, als wäre er aus massivem Glas gefertigt. Im selben Ausmaß nimmt daher sein Innenvolumen zu, was wir hier jedoch vernachlässigt haben. ■

3. Berechnen Sie die Längenänderung, indem Sie die Werte in die Gleichung von Schritt 1 einsetzen:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \alpha l \Delta T \\ &= (11 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}) \cdot (220\text{ m}) \cdot (110\text{ K}) \\ &= [0,27\text{ m}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die Längenänderung ist proportional zur Länge. Damit können Sie die gesamte Längenänderung Δl_{ges} berechnen:

$$\frac{\Delta l_{\text{ges}}}{l_{\text{ges}}} = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{also} \quad \Delta l_{\text{ges}} = \frac{l_{\text{ges}}}{l} \Delta l$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta l_{\text{ges}} &= \alpha l \Delta T = \frac{670\text{ km}}{0,22\text{ km}} \cdot (0,27 \cdot 10^{-3}\text{ km}) \\ &= [0,82\text{ km}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die berechnete Längenänderung macht etwas mehr als 0,1 % der Länge aus. Das erscheint angesichts der enormen Temperaturdifferenz plausibel.

Beispiel 13.4: Zerreißen von Kupfer beim Abkühlen

Bei Reparaturen an den Wasserleitungen in Ihrem Haus erwärmen Sie ein Stück Kupferrohr auf 300 °C und spannen es an den Enden fest ein, sodass es sich beim Abkühlen nicht mehr zusammenziehen kann. Die Bruchspannung von Kupfer beträgt 230 MN · m⁻². Bei welcher Temperatur wird das Rohr beim Abkühlen reißen?

Problembeschreibung: Die Längenänderung Δl , die beim Abkühlen um ΔT auftreten würde, wenn das Rohr nicht eingespannt wäre, wird kompensiert durch eine gleich große Dehnung aufgrund der Zugspannung F/A . Diese ist mit der Längenänderung Δl verknüpft, wobei gilt $E = (F/A)/(\Delta l/l)$. Darin ist E der Elastizitätsmodul. Für Kupfer beträgt er 110 GN · m⁻² (siehe Tabelle 9.1). Die Bruchspannung des Kupfers beträgt 230 MN · m⁻². Mit diesen Werten können Sie berechnen, wie stark das Kupferrohr abgekühlt werden kann, bis es zerreißen.

Lösung: 1. Stellen Sie einen Ausdruck für die Längenänderung Δl_1 auf, die beim nicht eingespannten Kupferrohr auftrete, wenn es um ΔT abgekühlt würde:

$$\Delta l_1 = \alpha l \Delta T$$

2. Durch eine Zugspannung F/A würde das Rohr um Δl_2 gedehnt:

$$E = \frac{F/A}{\Delta l_2} \quad \text{also} \quad \Delta l_2 = l \frac{F/A}{E}$$

3. Die durch die Abkühlung bewirkte Längenänderung Δl_1 gleicht die durch die Zugspannung hervorgerufene Längenänderung Δl_2 aus, sodass ihre Summe null ergibt. Damit können Sie ΔT berechnen:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$$

$$\alpha l \Delta T + l \frac{F/A}{E} = 0$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta T &= -\frac{F/A}{\alpha E} \\ &= -\frac{230 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}}{(17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}) \cdot (110 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2})} \\ &= -123 \text{ K} = -123^\circ\text{C} \end{aligned}$$

4. Diesen Wert addieren Sie zur Anfangstemperatur. Dies ergibt die Endtemperatur T_E , bei der das an den Enden eingespannte Kupferrohr aufgrund der Abkühlung reißt:

$$T_E = T_1 + \Delta T = 300^\circ\text{C} - 123^\circ\text{C} = \boxed{177^\circ\text{C}}$$

Kommentar: Die Warmwasserrohre in den Häusern sind daher nie fest eingespannt, da sie beim Zusammenlöten erhitzt werden. Im Übrigen treten keine so hohen Temperaturdifferenzen auf, wie sie hier angenommen werden: Zum einen kann das fließende Wasser nicht kälter als 0 °C sein, und zum anderen werden beim Warmwasser 60 °C gewöhnlich nicht überschritten. Zudem arbeiten moderne Heizzentralen mit noch geringeren Vorlauftemperaturen. Der hier beschriebene Effekt ist daher bei sachgemäßer Montage und normalem Betrieb nicht zu befürchten. ■

Beispiel 13.5: Kalibrierung eines Thermometers

Ein Flüssigkeitsthermometer, dessen zylinderförmiges Röhrchen vom Radius r mit Alkohol gefüllt ist, wird mithilfe des Gefrierpunkts und des Siedepunkts von Wasser kalibriert. Um wie viel steigt der Alkohol im Röhrchen relativ zu seiner Ursprungshöhe von 0 °C bis 100 °C an? (Vernachlässigen Sie dabei die Ausdehnung des Röhrchens.)

Problembeschreibung: Der Alkohol nimmt bei 0 °C im Röhrchen ein gewisses Volumen $V_1 = \pi r^2 \cdot h$ ein. Wird das Röhrchen bis auf 100 °C erhitzt, dehnt sich der Alkohol aufgrund der zugeführten Wärme auf ein Volumen $V_2 = \pi r^2 \cdot (h + \Delta h)$ aus. Die Differenz der beiden Volumina entspricht der Volumenänderung für die Temperaturdifferenz von 100 °C (= 100 K), woraus man mithilfe von Gleichung 13.9 die Größe Δh bestimmen kann.

Lösung: 1. Stellen Sie mithilfe von Gleichung 13.9 eine Formel für die relative Höhenänderung im Röhrchen auf:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{\pi r^2 \cdot (h + \Delta h - h)}{\pi r^2 \cdot h} = \frac{\Delta h}{h} = \beta \cdot \Delta T$$

2. Setzen Sie den Volumenausdehnungskoeffizienten für Alkohol aus Tabelle 13.2 und die Temperaturdifferenz in die Formel aus Schritt 1 ein:

$$\frac{\Delta h}{h} = \beta \cdot \Delta T = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 100 \text{ K} = \boxed{0,11}$$

Plausibilitätsprüfung: Da sich die Einheiten in Schritt 2 weglassen, ist das Ergebnis als Verhältnis zwischen Höhenänderung und Ursprungshöhe plausibel. Eine relative Höhenänderung von 11 Prozent entspricht 11 cm bei einer Ursprungshöhe von 100 cm, d. h. bei einem solchen Thermometer entspricht 1,1 mm einer Temperaturänderung von 1 °C.

Übung 13.1: Berechnen Sie die relative Höhenänderung für Quecksilber für 100 K Temperaturdifferenz. ◀ ■

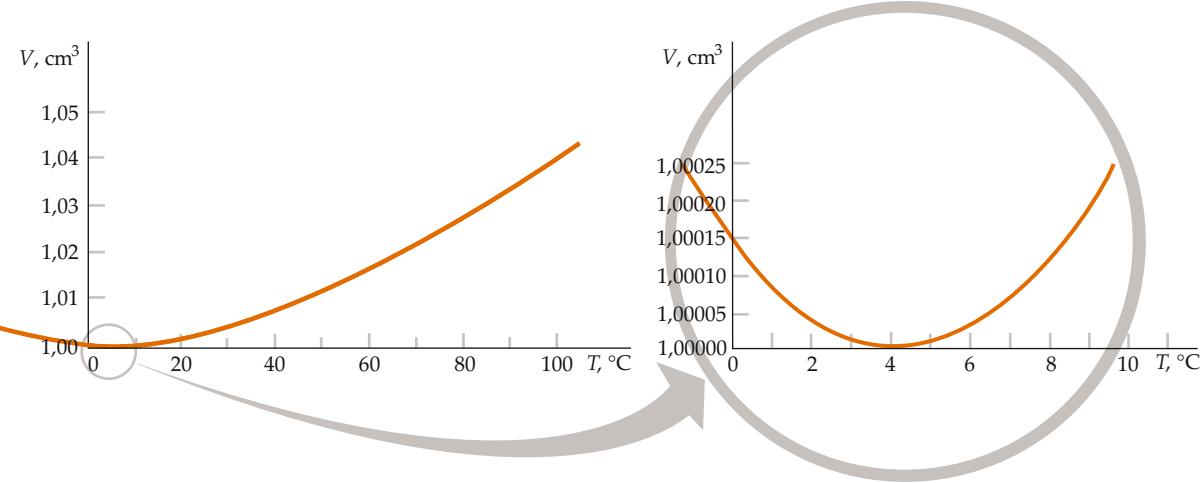


Abbildung 13.9 Die Temperaturabhängigkeit des Volumens von 1 g Wasser bei Atmosphärendruck. Bei $4,0\text{ }^\circ\text{C}$ ist das Volumen am geringsten und demnach die Dichte am höchsten. Für Temperaturen unterhalb von $0,0\text{ }^\circ\text{C}$ ist die Kurve für unterkühltes Wasser dargestellt. (Von unterkühltem Wasser spricht man, wenn es unterhalb seines Gefrierpunkts abgekühlt wurde, ohne dass es erstarrte.) Die unterhalb von $4,0\text{ }^\circ\text{C}$ beim Abkühlen auftretende Dichteabnahme bzw. Volumenzunahme nennt man die Anomalie des Wassers.

Bei jedem Material ist der Volumenausdehnungskoeffizient β dreimal so groß wie der Längenausdehnungskoeffizient α . Um das zu zeigen, stellen wir uns einen Kasten mit den Kantenlängen l_1 , l_2 und l_3 vor. Bei der Temperatur T ist sein Volumen

$$V = l_1 l_2 l_3 .$$

Der Quotient aus Volumen- und Temperaturänderung lautet in differenzieller Schreibweise

$$\frac{\partial V}{\partial T} = l_1 l_2 \frac{\partial l_3}{\partial T} + l_1 l_3 \frac{\partial l_2}{\partial T} + l_2 l_3 \frac{\partial l_1}{\partial T} .$$

Wir dividieren jede Seite durch das Volumen V gemäß der vorigen Gleichung und erhalten

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{l_3} \frac{\partial l_3}{\partial T} + \frac{1}{l_2} \frac{\partial l_2}{\partial T} + \frac{1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial T} .$$

Jeder Summand auf der rechten Seite ist gleich α , sodass folgt

$$\beta = 3 \alpha . \quad (13.10)$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung wurde vorausgesetzt, dass der Ausdehnungskoeffizient unabhängig von der Richtung ist. Das trifft für die meisten Substanzen näherungsweise zu, sodass wir dies hier durchgehend annehmen. Eine ähnliche Herleitung ergibt, dass der Flächenausdehnungskoeffizient zweimal so groß ist wie der Längenausdehnungskoeffizient.

Die meisten Substanzen dehnen sich beim Erwärmen aus und ziehen sich beim Abkühlen zusammen. Eine wichtige Ausnahme ist das Wasser. Abbildung 13.9 zeigt, welches Volumen 1 g Wasser bei verschiedenen Temperaturen zwischen $0,0\text{ }^\circ\text{C}$

und $4,0\text{ }^\circ\text{C}$ annimmt. Bei $4,0\text{ }^\circ\text{C}$ ist das Volumen am geringsten, also die Dichte am höchsten. Das bedeutet: Wenn Wasser unter $4,0\text{ }^\circ\text{C}$ abgekühlt wird, dehnt es sich aus, anstatt sich zusammenzuziehen. Das Gleiche geschieht, wenn Wasser oberhalb von $4,0\text{ }^\circ\text{C}$ erwärmt wird. Diese Eigenschaft hat wichtige Auswirkungen auf die Lebewesen in Gewässern. Oberhalb von $4,0\text{ }^\circ\text{C}$ nimmt die Dichte des Wassers bei Abkühlung zu, sodass es nach unten sinkt. Wenn es jedoch weiter abkühlt, unterhalb von $4,0\text{ }^\circ\text{C}$, so wird seine Dichte wieder geringer und es steigt nach oben. Deswegen bildet sich bei Frost das Eis zuerst auf der Oberfläche des Gewässers. Wasser expandiert auch beim Gefrieren. Eis hat somit eine geringere Dichte als die Flüssigkeit und bleibt ebenfalls oben. Daher wirkt die Eisschicht als Wärmeisolation für das Wasser darunter. Würde Wasser – wie die meisten Substanzen – beim Abkühlen dichter und hätte Eis daher eine höhere Dichte als Wasser, so würde das Eis absinken und stets neues Wasser an die Oberfläche steigen, dort gefrieren und ebenfalls absinken, bis das ganze Gewässer von unten her mit Eis gefüllt wäre.

Wir können ausrechnen, wie groß die Spannung F/A bei einer bestimmten Temperaturerhöhung ist, wenn beispielsweise bei einer Stahlbrücke keine Dehnungsfugen (Abbildung 13.10) vorhanden sind. Nach Gleichung 9.3 ist der Elastizitätsmodul gegeben durch

$$E = \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}} = \frac{F/A}{\Delta l/l} .$$

Wir formen um und setzen den Ausdruck für die relative Längenänderung aus Gleichung 13.6 ein:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l} = E \alpha \Delta T .$$

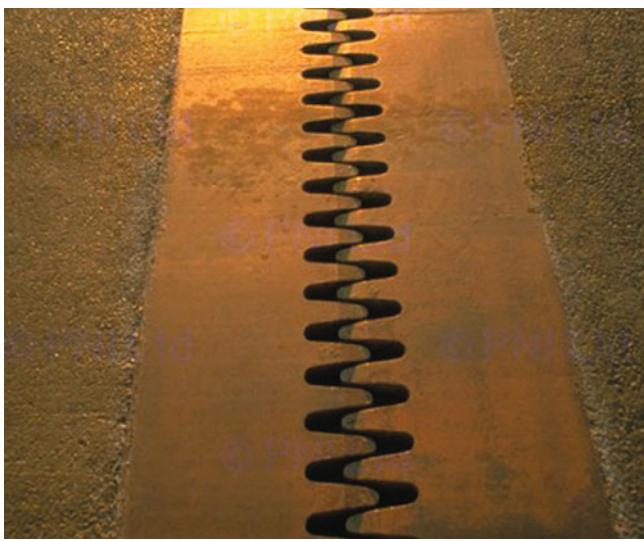


Abbildung 13.10 Brückenbauten werden mit Dehnungsfugen ausgeführt, die die thermische Ausdehnung ermöglichen. Andernfalls würde eine enorme Spannung auftreten, die zu Verformungen führen kann. (© Frank Siteman/Stock Boston, Inc./PictureQuest.)

Wir nehmen nun eine Brücke länge von $l = 1000 \text{ m}$ und eine Temperaturdifferenz von 30 K an. Den Längenausdehnungskoeffizienten von Stahl entnehmen wir der Tabelle 13.2. Für die Längenänderung Δl ergibt sich dann

$$\Delta l = \alpha l \Delta T = (11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}) \cdot (1000 \text{ m}) \cdot (30 \text{ K}) = 0,33 \text{ m}.$$

Daher ist die relative Längenänderung bzw. die Dehnung $\Delta l/l = (0,33 \text{ m})/(1000 \text{ m})$. Mit dem Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ (siehe Tabelle 9.1) erhalten wir für die mechanische Spannung

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= E \frac{\Delta l}{l} = (2 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}) \frac{0,33 \text{ m}}{1000 \text{ m}} \\ &= 6,6 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}. \end{aligned}$$

Eine derart hohe Spannung, ungefähr ein Drittel der Bruchspannung von Stahl bei Druckbeanspruchung, würde zu bleibenden Verformungen der Brücke führen.

🔗 Im Kontext: Negative absolute Temperaturen

Bringt man zwei Systeme in thermischen Kontakt, so kühlt sich das heißere System ab (seine Energie nimmt ab), während das kältere System erwärmt wird (seine Energie nimmt zu). Temperatur definiert also eine *Ordnungsrelation* zwischen Systemen, sie ordnet sie von kalt nach heiß. Ein System am absoluten Nullpunkt bei $T = +0\text{ K}$ ist dabei das *kältest mögliche System*, es kann unter keinen Umständen weiter abgekühlt werden, also keine Energie mehr abgeben. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich alle Teilchen des Systems bereits im Zustand mit der niedrigsten möglichen Energie befinden (Abb. 13.11, linke Säule). Für das klassische ideale Gas bedeutet dies, dass alle Teilchen zum Stillstand gekommen sind und ihre kinetische Energie verschwindet: $E_{\text{kin}} \propto k_B T = 0$.

Gibt es dementsprechend auch einen *heißest möglichen Zustand*? Hierbei müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Für die meisten Systeme, wie z. B. das klassische ideale Gas, gibt es keine Obergrenze für die Energie pro Teilchen E und das System kann immer weiter Energie aufnehmen. Die Obergrenze der Temperatur ist dann der Grenzwert $T \rightarrow \infty\text{ K}$ und kann in der Praxis nicht erreicht werden, da wir immer nur endlich viel Energie zur Verfügung haben. In diesem Fall erhalten wir immer eine positive absolute Temperatur: $0\text{ K} \leq T < \infty\text{ K}$.

Anders sieht es aus, wenn die mögliche Energie pro Teilchen eine Obergrenze besitzt, also $E \leq E_{\text{max}}$. In diesem Fall kann man anhand der Boltzmannverteilung ($p_i \propto e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$, p_i : Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand i zu finden) sehen, dass eine endliche Energiemenge ausreicht, um das System von $T = +0\text{ K}$ auf $T = \infty\text{ K}$ zu erhitzten: Bei unendlicher Temperatur sind alle möglichen Zustände der einzelnen Teilchen gleich wahrscheinlich (Abb. 13.11, mittlere Säule), und die mittlere Energie pro Teilchen entspricht der mittleren Energie aller möglichen Zustände des Teilchens. Diese Verteilung kann jedoch noch *nicht* der höchstmöglichen Temperatur entsprechen, da es Verteilungen mit höherer Energie gibt (Abb. 13.11, Säulen rechts). Im ganz rechts gezeigten System sind alle Teilchen im Zustand maximaler Energie ($E = E_{\text{max}}$). Dieser Zustand ist nun der *heißest mögliche Zustand*, da das System in diesem Zustand keine Energie mehr aufnehmen kann, insbesondere ist er *heißer als $T = \infty\text{ K}$* .

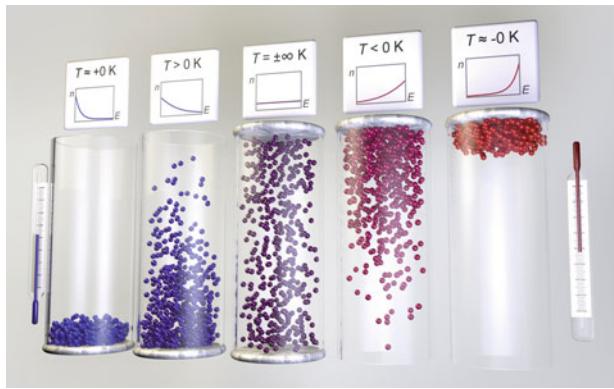


Abbildung 13.11 Energieverteilung für verschiedene Temperaturen. Die vertikale Position in den Säulen beschreibt die Energie der Teilchen innerhalb des Systems, die Graphen darüber beschreiben die Besetzungsverteilung $n(E)$ gemäß der Boltzmann Verteilung. $T = \infty\text{ K}$ und negative Temperaturen sind dabei nur in Systemen möglich, in denen die mögliche Energie pro Teilchen eine Obergrenze besitzt – hier symbolisiert durch die Platten auf den Säulen (© Simon Braun LMU & MPQ München)

Die Verteilungen in den beiden Säulen rechts können ebenfalls durch die Boltzmann-Verteilung beschrieben werden, und zwar indem negative Werte für die Temperatur eingesetzt werden. Das zusätzliche Minuszeichen im Exponenten erzeugt dabei aus der exponentiell abfallenden Verteilung eine exponentiell ansteigende Verteilung. Eine genauere Analyse zeigt, dass diese Verteilungen in der Tat mögliche thermische Zustände darstellen. Sie sind dabei trotz des negativen Werts der Temperatur nicht kälter als $T = +0\text{ K}$, sondern im Gegenteil sogar heißer als $T = \infty\text{ K}$! Für Systeme, bei denen die Energie pro Teilchen nach oben begrenzt ist, hört die Temperaturskala bei unendlich also noch nicht auf, sondern springt zu negativen Werten und steigt weiter bis zu $T = -0\text{ K}$. Hierbei beschreiben $+0\text{ K}$ und -0 K gerade die beiden unterschiedlichen Extreme: Bei $T = +0\text{ K}$ sind alle Teilchen im Zustand niedrigster Energie, bei $T = -0\text{ K}$ im Zustand höchster Energie!

Diese Zustände sind dabei nicht nur theoretischer Natur, sondern können im Labor erzeugt werden; sie werden bereits seit den 1950er Jahren für die Spinfreiheitsgrade von Atomkernen untersucht. In unserem Experiment¹ konnten wir negative absolute Temperaturen im Jahre 2012 zum ersten Mal für ein Gas realisieren: Hierzu benutzen wir ein System, das wir normalerweise zur Simulation von Elektronen in Festkörpern einsetzen. Dabei ersetzen wir die Elektronen durch größere und damit einfacher zu kontrollierende ultrakalte Atome in einem optischen Gitter, d. h. einem Kristall aus Licht. Dazu überlagern wir einander entgegengesetzte Laserstrahlen und erzeugen eine Stehwelle, in der die Lichtintensität periodisch moduliert ist. Diese wirkt als periodisches Potenzial für die Atome, deren Bewegung dann analog zu der Bewegung von Elektronen in einem Festkörperkristall ist: Durch das periodische Potenzial der Atomrumpfe spalten die möglichen kinetischen Energien der Elektronen in verschiedene Energiebänder auf, die durch Bandlücken voneinander getrennt sind. Da die Atome im Experiment auf ein einzelnes Band eingeschränkt sind, besitzt ihre kinetische Energie nun eine wohldefinierte Obergrenze, nämlich die obere Bandkante. Diese Obergrenze ist der fundamentale Unterschied zum freien Raum, in dem die kinetische Energie nach oben unbegrenzt ist, und ermöglichte es uns, ein Gas bei negativer absoluter Temperatur innerhalb des Gitters zu erzeugen.

1. Braun, S. et al., „Negative Absolute Temperature for Motional Degrees of Freedom“, *Science* **339**, 2013, 52.



Dr. Ulrich Schneider (LMU & MPQ München) arbeitet mit ultrakalten Atomen in optischen Gittern und interessiert sich besonders für die Dynamik in Vielteilchensystemen sowie für Fragen der Thermodynamik in Quantensystemen. Er studierte Physik an der TU Kaiserslautern und der University of Sheffield und promovierte an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz zum Thema „Interacting Fermionic Atoms in Optical Lattices – A Quantum Simulator for Condensed Matter Physics“. Er ist Gruppenleiter an der Ludwig-Maximilians-Universität München am Lehrstuhl von Prof. I. Bloch.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Nullter Hauptsatz der Thermodynamik	Befinden sich zwei Körper in thermischem Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.
2. Celsius- und Fahrenheit-Skala	In der Celsius-Skala liegt der Eispunkt bei 0°C und der Siedepunkt des Wassers bei 100°C . Die entsprechenden Werte in der Fahrenheit-Skala sind 32°F bzw. 212°F . Für die Umrechnung zwischen beiden Skalen gilt $T_C = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{T_F}{9} - 32 \right)^\circ\text{C}. \quad (13.2)$
3. Gasthermometer	Gasthermometer stimmen bei allen Temperaturen miteinander überein, wenn die Dichte des Gases sehr gering ist. Unter dieser Bedingung gilt für die Temperaturskala: $T = \frac{p}{p_3} \cdot 273,16 \text{ K}. \quad (13.4)$ Darin ist p der gemessene Druck im Gasthermometer und p_3 der Druck, der sich am Tripelpunkt des Wassers einstellt, wenn das Gasthermometer in eine im Gleichgewicht befindliche Mischung aus Eis, Wasser und Dampf eingetaucht ist.
4. Kelvin-Skala	Die absolute Temperatur T wird in Kelvin angegeben; sie hängt mit der Temperatur in Grad Celsius folgendermaßen zusammen: $T = \left(\frac{T_C}{\text{°C}} + 273,15 \right) \text{ K}. \quad (13.5)$
5. Thermische Ausdehnung	Linearer Ausdehnungskoeffizient $\alpha = \frac{\Delta l/l}{\Delta T} \quad (13.7)$ Volumenausdehnungskoeffizient $\beta = \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = 3\alpha \quad (13.9, 13.10)$

Antwort auf die Verständnisfrage

13.1 Man benötigt zwei Referenzpunkte und die Information, in wie viele gleiche Teile die Differenz zwischen den beiden Punkten einzuteilen ist.

Lösung der Übung

13.1 0,018

Aufgaben

Verständnisaufgaben

13.1 • Wie können Sie feststellen, ob sich zwei Körper in thermischem Gleichgewicht miteinander befinden, wenn es nicht möglich ist, sie in thermischen Kontakt miteinander zu bringen? (Beispielsweise können Sie ein Stück Natriummetall nicht in Wasser bringen, ohne eine heftige chemische Reaktion auszulösen.)

13.2 • Warum sinkt der Meniskus eines Flüssigkeitsthermometers anfangs ein wenig ab, wenn man es in warmes Wasser eintaucht?

13.3 • Ein großes Metallblech wurde in der Mitte durchbohrt. Was geschieht mit der Querschnittsfläche des Bohrlochs, wenn das Blech erwärmt wird? a) Sie ändert sich nicht. b) Sie wird auf jeden Fall größer. c) Sie wird auf jeden Fall kleiner. d) Sie wird größer, wenn sich das Loch nicht genau in der Mitte des Blechs befindet. e) Sie wird nur dann kleiner, wenn sich das Loch genau in der Mitte des Blechs befindet.

13.4 • Ein Metall A hat einen Längenausdehnungskoeffizienten, der dreimal so groß ist wie derjenige eines Metalls B. Wie verhalten sich ihre Volumenausdehnungskoeffizienten β zueinander? a) $\beta_A = \beta_B$, b) $\beta_A = 3 \beta_B$, c) $\beta_A = 6 \beta_B$, d) $\beta_A = 9 \beta_B$, e) das ist anhand der Angaben nicht zu entscheiden.

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

13.5 • Für welchen Temperaturbereich eignet sich Wasser als Flüssigkeit zur Temperaturnessung in einem Flüssigkeitsthermometer? Für welchen Bereich eignet es sich nicht?

Temperaturskalen

13.6 • Ein Gasthermometer mit konstantem Volumen hat beim Tripelpunkt des Wassers einen Druck von 66 mbar. a) Skizzieren Sie die Abhängigkeit des Drucks von der absoluten Temperatur bei diesem Thermometer. b) Wie hoch ist der Druck, wenn dieses Thermometer eine Temperatur von 300 K misst? c) Welche absolute Temperatur herrscht in ihm bei einem Druck von 0,9 bar?

13.7 • Rechnen Sie folgende Temperaturen in Grad Fahrenheit um: a) $-273,15^\circ\text{C}$, b) 20°C , c) 100°C , d) 300 K .

13.8 • Rechnen Sie folgende Temperaturen in Kelvin um: a) $-273,15^\circ\text{C}$, b) 20°C , c) 100°C , d) 32°F .

13.9 • Rechnen Sie folgende Temperaturen in Grad Celsius um: a) 0°F , b) 100°F , c) 10 K , d) 1000 K .

Wärmeausdehnung

13.10 •• Ein Kupferring soll eng um einen Stahlstab gelegt werden, der bei $20,0^\circ\text{C}$ einen Durchmesser von 6,0000 cm hat. Bei dieser Temperatur beträgt der Innendurchmesser des Kupferrings 5,9800 cm. Auf welche Temperatur muss er erwärmt werden, damit er gerade über den Stahlstab geschoben werden kann? Nehmen Sie an, dass dessen Temperatur sich nicht ändert, sondern bei $20,0^\circ\text{C}$ bleibt.

13.11 ••• Wie hoch ist die Zugspannung in dem Kupferring in Aufgabe 10, nachdem er auf 20°C abgekühlt ist?

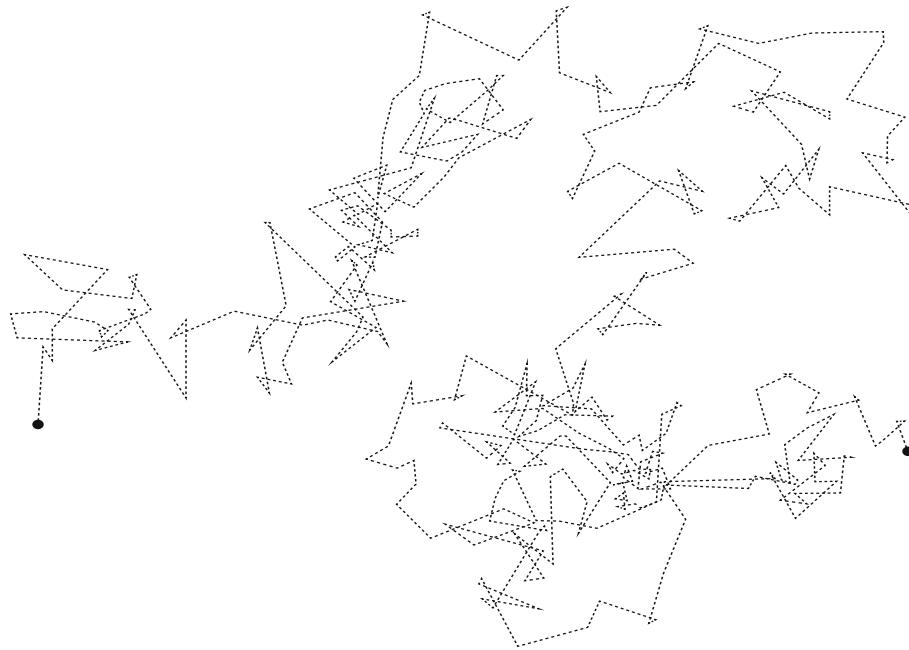
Allgemeine Aufgaben

13.12 •• Zur Kalibrierung eines Flüssigkeitsthermometers mit einer Fahrenheit-Skala wird ein mit Alkohol gefülltes Flüssigkeitsthermometer verwendet. Die beiden Kalibrierungspunkte haben eine Temperaturdifferenz von 100°F . Wie groß ist die relative Volumenänderung bezüglich des Ursprungsvolumens, wenn der Alkohol um diese Differenz erhitzt wird?

13.13 •• Zeigen Sie, dass bei einem Temperaturanstieg um ΔT für die Dichteänderung $\Delta\rho$ eines isotropen Materials gilt: $\Delta\rho = -\rho \beta \Delta T$.

Die kinetische Gastheorie

14



Gase bestehen aus vielen kleinen Molekülen, die sich mit Geschwindigkeiten von mehreren Hundert Metern pro Sekunde bewegen und auf ihrem Weg mit anderen Teilchen zusammenstoßen.

?

Wie lange dauert es im Mittel, bis so ein Teilchen mit einem anderen zusammenstößt? (Siehe Beispiel 14.9)

14.1	Die Zustandsgleichung für das ideale Gas	546
14.2	Druck und Teilchengeschwindigkeit	551
14.3	Der Gleichverteilungssatz	555
14.4	Die mittlere freie Weglänge	556
14.5	*Die Van-der-Waals-Gleichung und Flüssigkeits-Dampf-Isothermen	558
	Zusammenfassung	562
	Aufgaben	563

In Kapitel 10 hatten wir die Luft als Fluid modelliert. Dabei sind wir davon ausgegangen, dass man ihr Verhalten mit Ansätzen beschreiben kann, die in ähnlicher Form auch für Flüssigkeiten gelten. Doch diese Näherung ist nicht immer gültig. In diesem Kapitel werden wir Luft und andere Gase als eine große Ansammlung von Atomen und Molekülen betrachten und feststellen, dass die makroskopische Beschreibung, die wir in Kapitel 10 und auch in Kapitel 13 gefunden hatten, sich durch die Vorgänge auf molekularer Ebene herleiten lässt.

In diesem Kapitel verknüpfen wir die makroskopische Beschreibung für Gase mit den mikroskopischen Vorgängen auf molekularer Ebene. Die **kinetische Gastheorie**, die diese Beziehung herstellt, ist jedoch nur bei geringen Gasdichten gültig. Lässt man die Annahme eines solchen idealen Gases fallen, muss man die Größen und die Wechselwirkungen der Teilchen miteinander berücksichtigen, was am Ende des Kapitels mithilfe der Van-der-Waals-Gleichung gezeigt wird.

14.1 Die Zustandsgleichung für das ideale Gas

Die Eigenschaften realer Gase bei geringen Dichten ermöglichen die Temperaturmessung mithilfe eines Gasthermometers (siehe Kapitel 13). Bei geringen Dichten hatten wir festgestellt, dass alle Gasthermometer die gleiche Temperatur anzeigen, unabhängig von der Art des darin enthaltenen Gases. Ein solches Gas hatten wir als **ideales Gas** bezeichnet.

Unter einem idealen Gas verstehen wir eine Ansammlung von Atomen oder Molekülen, die wir als punktförmige, massebehaftete Teilchen annehmen, die sich kräftefrei in einem Volumen V bei einem Druck p und einer Temperatur T aufhalten und nur durch Stöße miteinander wechselwirken können.

DEFINITION EINES IDEALEN GASES

Wir wollen nun das Verhalten eines idealen Gases näher untersuchen, wenn man die Bedingungen (z. B. den Druck, das Volumen oder die Temperatur) ändert: Komprimiert man ein Gas bei konstanter Temperatur auf ein geringeres Volumen, dann steigt der Druck. Beim Expandieren dagegen sinkt (ebenfalls bei gleich bleibender Temperatur) der Druck während der Volumenzunahme. In guter Näherung ist das Produkt aus Druck und Volumen eines Gases bei unveränderter Temperatur konstant. Dieser Sachverhalt wurde von Robert Boyle (1627–1691) im Jahre 1662 entdeckt und 1676 von Edme Mariotte (um 1620–1684) experimentell nachvollzogen. Der eben beschriebene Zusammenhang wird daher als **Boyle-Mariotte'sches Gesetz** bezeichnet:

$$p \cdot V = \text{konstant} \quad \text{bei konstanter Temperatur.}$$

Diese Beziehung ist im Grunde der Spezialfall eines allgemeineren Gesetzes. Nach Gleichung 13.4 ist die absolute Temperatur einer bestimmten Gasmenge bei geringer Dichte proportional zu ihrem Druck bei konstantem Volumen. Daher ist wegen des Boyle-Mariotte'schen Gesetzes die absolute Temperatur proportional zum Volumen der Gasmenge, wenn der Druck konstant ist. Diese Gesetzmäßigkeit wurde von Jacques Charles (1746–1823) und Joseph Louis Gay-Lussac (1778–1850) gefunden und heißt **Gay-Lussac'sches Gesetz**. Wenn man beide Beziehungen kombiniert, ist das Produkt aus Druck und Volumen proportional zur absoluten Temperatur T :

$$pV = CT. \quad (14.1)$$

Darin ist C eine Proportionalitätskonstante, die von der vorhandenen Gasmenge abhängt. Das können wir folgendermaßen zeigen: Nehmen wir an, in zwei Behältern mit identischen Volumina befinden sich bei gleichem Druck und gleicher Temperatur identische Mengen desselben Gases. Wenn wir beide Behälter als ein einziges System ansehen, dann enthält es die doppelte Gasmenge bei doppeltem Volumen, jedoch gleichem Druck und gleicher Temperatur. Somit ist wegen der doppelten Gasmenge die Größe $pV/T = C$ doppelt so groß. Daher schreiben wir die Konstante C als das Produkt einer neuen Konstante k_B mit der Anzahl n der Teilchen im Gas:

$$C = k_B n.$$

Damit wird Gleichung 14.1 zu

$$pV = n k_B T. \quad (14.2)$$

Die Größe k_B heißt **Boltzmann-Konstante**. Sie hat, wie sich experimentell ergibt, für alle Gase denselben Wert:

$$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (14.3)$$

Die Gasmenge wird häufig in der Einheit **Mol** (Formelzeichen mol) angegeben. Ein Mol einer Substanz enthält n_A Teilchen.

Die **Avogadro-Zahl** n_A ist die Anzahl der Atome in exakt 12 g des Kohlenstoffisotops ^{12}C . Der Wert der Avogadro-Zahl ist

$$n_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}. \quad (14.4)$$

AVOGADRO-ZAHL

Liegen \tilde{n} mol einer Substanz vor, dann ist folgende Anzahl an Teilchen vorhanden:

$$n = \tilde{n} n_A. \quad (14.5)$$

Gleichung 14.2 lautet damit

$$pV = \tilde{n} n_A k_B T = \tilde{n} R T. \quad (14.6)$$

Die Größe $R = n_A k_B$ heißt **Gaskonstante**. Sie hat für alle Gase den Wert

$$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0,083141 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (14.7)$$

In Abbildung 14.1 ist für einige Gase $pV/(\tilde{n}T)$ gegen den Druck p aufgetragen. Der Wert von $pV/(\tilde{n}T)$ ist für alle Gase über einen relativ weiten Druckbereich einigermaßen konstant. Die größte Abweichung beträgt (beim Sauerstoff) zwischen 0 bar und 5 bar nur rund 1 %. Für das ideale Gas ist $pV/(\tilde{n}T)$ für alle Drücke immer konstant. Dabei ergibt sich als Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und Volumen:

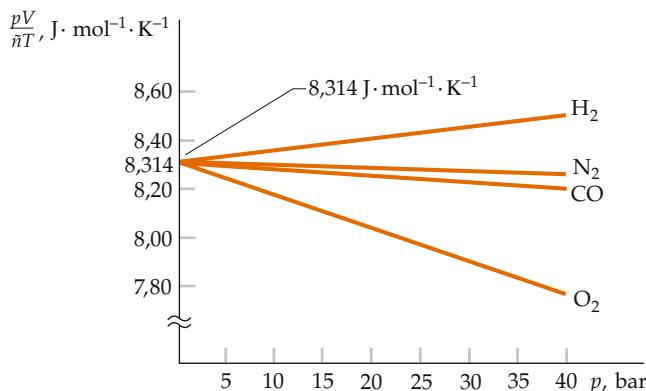


Abbildung 14.1 Die Auftragung von $p V / (\tilde{n} T)$ gegen den Druck p für einige reale Gase. Hierfür wurde der Druck durch Ändern der Füllmenge im Behälter variiert. Bei immer weiter abnehmender Gasdichte (und damit abnehmendem Druck) erreicht der Quotient $p V / (\tilde{n} T)$ für alle Gase denselben Wert $8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Dies ist die Gaskonstante R .

$$p V = \tilde{n} R T. \quad (14.8)$$

ZUSTANDSGLEICHUNG FÜR DAS IDEALE GAS

Da diese Beziehung die Größen p , V und T für eine bestimmte Menge des betreffenden Gases miteinander verknüpft, spricht man von einer **Zustandsgleichung**. Gleichung 14.8 beschreibt die Zustandsänderungen des idealen Gases, dessen Eigenschaften die der realen Gase bei geringen Dichten (und daher geringen Drücken) sehr nahe kommen. An dieser Gleichung müssen für reale Gase bei höheren Dichten und Drücken bestimmte Korrekturen angebracht werden. Eine solche Zustandsgleichung, die Van-der-Waals-Gleichung, werden wir in Abschnitt 14.5 behandeln. Für jedes Gas kann für jede Dichte eine Zustandsgleichung aufgestellt werden, die für die jeweilige Gasmenge die Größen p , V und T miteinander verknüpft. Damit ist der Zustand einer gegebenen Gasmenge durch zwei der drei **Zustandsgrößen** p , V und T eindeutig bestimmt. In Beispiel 14.1 ergibt sich V aus p und T .

Beispiel 14.1: Das Volumen des idealen Gases

Welches Volumen nehmen 1,00 mol eines Gases bei 0,00 °C und einem Druck von 1,00 bar ein?

Problembeschreibung: Es ist die Zustandsgleichung für das ideale Gas zu verwenden.

Lösung: Bei 0,00 °C ist die absolute Temperatur gleich $T = 273,15 \text{ K}$, und mit Gleichung 14.8 ergibt sich (mit $R = 0,083141 \cdot \text{bar} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) das Volumen zu:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\tilde{n} R T}{p} \\ &= \frac{(1,00 \text{ mol}) \cdot R \cdot (273,15 \text{ K})}{1,00 \text{ bar}} = [22,71] \end{aligned}$$

Kommentar: Beachten Sie, dass wir die Gaskonstante R in $\text{l} \cdot \text{bar} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ eingesetzt haben, sodass wir den Druck in bar einsetzen können, um das Volumen in l zu erhalten.

Übung 14.1: Berechnen Sie a) die Anzahl \tilde{n} der Mole und b) die Anzahl n der Teilchen in 1,00 cm³ eines Gases bei 0,00 °C und 1,00 bar. ▶

Partialdrücke

Trockene Luft besteht zu etwa 79 % aus Stickstoff und zu 21 % aus Sauerstoff. Taucher verwenden bei größeren Tiefen meist mit Sauerstoff angereicherte Luft (sogenanntes Nitrox). Soll noch tiefer getaucht werden, wird eine Mischung aus Sauerstoff und Helium (sogenanntes Heliox) eingesetzt, weil diese Mischung die Gefahren verringert, die mit einem zu hohen Stickstoffdruck in der Atemluft einhergehen.

Angenommen, in einem Behälter mit konstantem Volumen befinden sich zwei oder mehr Gase, deren Dichte insgesamt so gering ist, dass wir die Mischung als ideales Gas ansehen können. Dann können wir die Verhältnisse so beschreiben, als würde jedes Gas das gesamte Volumen des Behälters einnehmen. Das ist zulässig, weil das Volumen der einzelnen Teilchen des Gases im Vergleich zum Volumen des leeren Raums, der sie umgibt, vernachlässigt werden kann. Der von der Gasmischung ausgeübte Gesamtdruck ist dabei die Summe der einzelnen so genannten **Partialdrücke**, die von jedem der einzelnen Gase in der Mischung ausgeübt werden. Weiterhin ist der Partialdruck jedes Gases in der Mischung der Druck, den es ausüben würde, wenn es sich allein im Behälter befände. Diesen Sachverhalt, dass die Summe der Partialdrücke gleich dem Gesamtdruck ist, nennt man auch **Partialdruckgesetz**. Der Druck einer Gasmischung wird in Beispiel 14.2 berechnet.

Beispiel 14.2: Das Mischen von Gasen

Ein 20-l-Tank mit Sauerstoffgas hat einen Druck von $0,30 p_{\text{Atm}}$, und ein 30-l-Tank mit Stickstoffgas hat einen Druck von $0,60 p_{\text{Atm}}$. Beide Tanks haben eine Temperatur von 300 K. Dann wird der Sauerstoff in den 30-l-Tank gedrückt, der schon den Stickstoff enthält und in dem sich beide Gase nun mischen. Wie hoch ist der Druck der Gasmischung bei der gleichen Temperatur 300 K?

Problembeschreibung: Das Endvolumen beider Gase beträgt 30 l, und die Anfangs- wie auch die Endtemperaturen beider Gase sind gleich. Daher können Sie das Boyle'sche Gesetz ($p_A V_A = p_E V_E$) anwenden, um den Partialdruck jedes Gases in der Mischung zu ermitteln.

Vorgehensweise: Verdünnte Gase

Ein Gas kann als verdünnt betrachtet werden, wenn die Anwendung der Zustandsgleichung für das ideale Gas ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Die Variablen sind Druck, Volumen, Temperatur, Masse und Substanzmenge (Molanzahl).

- Wenden Sie auf jedes verdünnte Gas die Zustandsgleichung für das ideale Gas an: $pV = \tilde{n}RT$. Achten Sie darauf, dass Sie die Werte für die absolute Temperatur und den absoluten Druck (also keinen Überdruck o. Ä.) verwenden.
- Bei einer Mischung von verdünnten Gasen gilt die Zustandsgleichung für das ideale Gas für jedes Gas in der Mischung, wobei das Volumen jedes einzelnen Gases gleich dem Gesamtvolumen des Behälters und der Druck jedes einzelnen Gases gleich dem Partialdruck dieses betreffenden Gases ist. Der Druck der Mischung ist die Summe der Partialdrücke der einzelnen Gase.
- Weitere nützliche Beziehungen sind $R = n_A k_B$ und $n = \tilde{n} n_A$ sowie $m = \tilde{n} m_{\text{Mol}}$. Darin sind k_B die Boltzmann-Konstante, n die Anzahl der Teilchen, \tilde{n} die Molanzahl, m die Masse des Gases und m_{Mol} dessen Molmasse, die Masse eines Mols des betreffenden Gases.
- Lösen Sie die jeweilige Gleichung nach der gewünschten Größe auf.

Plausibilitätsprüfung: Druck p , Volumen V und absolute Temperatur T können nie negativ sein.

Danach berechnen Sie mithilfe des Partialdruckgesetzes den Enddruck der Mischung.

Lösung: 1. Der Druck der Mischung ist die Summe der Partialdrücke beider Gase:

$$p = p_{\text{O}_2} + p_{\text{N}_2}$$

2. Die Anfangs- und die Endtemperaturen der Gase sind gleich. Daher ergeben sich ihre Partialdrücke aus dem Boyle'schen Gesetz:

$$p_A V_A = p_E V_E \quad \text{d. h.} \quad p_E = \frac{V_A}{V_E} p_A$$

3. Das Endvolumen des Sauerstoffs (wie auch das des Stickstoffs) beträgt 30 l:

$$p_{\text{O}_2} = \frac{201}{301} \cdot (0,30 p_{\text{Atm}}) = 0,20 p_{\text{Atm}}$$

$$p_{\text{N}_2} = \frac{301}{301} \cdot (0,60 p_{\text{Atm}}) = 0,60 p_{\text{Atm}}$$

4. Der Druck ist die Summe der Partialdrücke:

$$p = p_{\text{O}_2} + p_{\text{N}_2} = (0,20 + 0,60) p_{\text{Atm}} = \boxed{0,80 p_{\text{Atm}}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten einen Anstieg des Drucks im 30-l-Tank infolge des Einleitens des Sauerstoffs. Dies wird durch unsere Berechnung bestätigt, denn der Enddruck beträgt $0,80 p_{\text{Atm}}$ und ist damit um $0,20 p_{\text{Atm}}$ höher als der Anfangsdruck im Stickstofftank. ■

Frage 14.1

Zwei gleich große Zimmer, das von Tom und das von Jessica, sind durch eine offene Tür miteinander verbunden. Toms Zimmer ist klimatisiert und hat eine um 5°C geringere Temperatur als das von Jessica. In welchem Raum befindet sich die größere Luftmenge?

Die Temperatur $0^{\circ}\text{C} = 273,15\text{ K}$ und der Druck 1 atm wurden früher als sogenannte **Standardbedingungen** verwendet. Inzwischen werden die Standardbedingungen jedoch mit einem Druck von $1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$ definiert, weil das Pascal (Einheitenzeichen Pa) die SI-Einheit des Drucks ist. Es gilt: $1\text{ atm} = 1,01325\text{ bar}$. Wie in Beispiel 14.1 berechnet wurde, nimmt 1 mol des idealen Gases bei den letztgenannten Standardbedingungen ein Volumen von 22,71 ein.

In Abbildung 14.2 ist der Druck gegen das Volumen einer bestimmten Gasmenge bei verschiedenen Temperaturen aufgetragen. Da jede Kurve für eine konstante Temperatur gilt, spricht man von **Isothermen** (vom griechischen *isos* für „gleich“). Beim idealen Gas sind dies Hyperbeln.

Bei einer gegebenen Gasmenge, d. h. bei konstanter Molanzahl \tilde{n} , ist gemäß Gleichung 14.8 pV/T konstant. Bezeichnen wir den Anfangszustand mit 1 und den Endzustand mit 2, so gilt

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}. \quad (14.9)$$

ZUSTANDSGEGLICHUNG FÜR EINE BESTIMMTE MENGE DES IDEALEN
GASES

Anwendungen dieser Gleichung sind in den Beispielen 14.3 und 14.4 verdeutlicht.

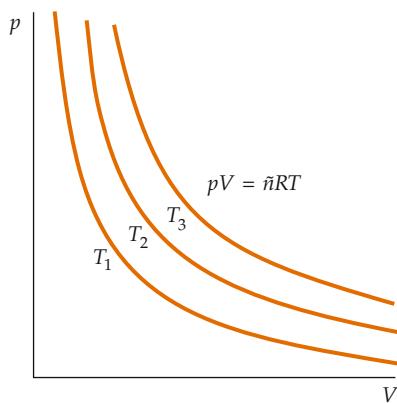


Abbildung 14.2 Die p - V -Isothermen des idealen Gases sind Hyperbeln, die der Beziehung $pV = \tilde{n}RT$ folgen. (Bei einer Hyperbel, die sich beiden Koordinatenachsen asymptotisch nähert, ist das Produkt von x Wert und y Wert stets konstant.)

Beispiel 14.3: Erwärmen und Komprimieren eines Gases

Eine bestimmte Gasmenge hat bei einer Temperatur von $30,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ und bei einem Druck von $1,00\text{ bar}$ ein Volumen von $2,00\text{ l}$. Sie wird auf $60,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ erwärmt und auf $1,50\text{ l}$ komprimiert. Wie hoch ist dann der Druck?

Problembeschreibung: Da die Gasmenge konstant ist, kann der Druck mit Gleichung 14.9 berechnet werden. Bezeichnen Sie, wie dort, den Anfangszustand mit 1 und den Endzustand mit 2.

Lösung: 1. Lösen Sie Gleichung 14.9 nach p_2 auf:

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad \text{und damit} \quad p_2 = \frac{T_2 V_1}{T_1 V_2} p_1$$

2. Berechnen Sie die Anfangs- und die Endtemperatur; dabei müssen Sie jeweils die absolute Temperatur einsetzen:

$$T_1 = 273,15\text{ K} + 30,0\text{ K} = 303,15\text{ K}$$

$$T_2 = 273,15\text{ K} + 60,0\text{ K} = 333,15\text{ K}$$

3. Setzen Sie diese Zahlenwerte schließlich in die Gleichung von Schritt 1 ein:

$$p_2 = \frac{(333,15\text{ K}) \cdot (2,00\text{ l})}{(303,15\text{ K}) \cdot (1,50\text{ l})} \cdot (1,00\text{ bar}) \\ = 1,47\text{ bar}$$

Plausibilitätsprüfung: Beim Erwärmen oder beim Komprimieren eines Gases erhöht sich dessen Druck. Daher war ein Druckanstieg zu erwarten. Er beträgt hier $0,47\text{ bar}$.

Übung 14.2: Wie viele Mole an Gas liegen in diesem Beispiel vor? ▶

Beispiel 14.4: Der Druck in einem Heißluftballon

Ein kleiner Heißluftballon hat ein Volumen von $15,0\text{ m}^3$ und ist unten offen. Die Luft in seinem Inneren hat eine mittlere Temperatur von $75\text{ }^{\circ}\text{C}$, während die Außentemperatur nahe beim Ballon $24\text{ }^{\circ}\text{C}$ und der Druck hier im Mittel $1,00\text{ bar}$ beträgt. Der Ballon ist mit einem Seil am Boden befestigt, sodass er nicht aufsteigen kann. Die Zugspannung im Halteseil beträgt $10,0\text{ N}$. Setzen Sie als Molmasse der Luft $0,0290\text{ kg/mol}$ an und vernachlässigen Sie die Gewichtskraft der Ballonhülle. Wie hoch ist im Mittel der Druck innerhalb des Ballons?



(© J. Friedrich/Pixelio.)

Problembeschreibung: Auf den Ballon und seinen Inhalt wirken drei Kräfte ein: die Auftriebskraft der umgebenden Luft, die Zugkraft des Halteseils und die Gravitationskraft der Erde. Die Nettokraft ist die Vektorsumme dieser drei Kräfte. Die Auftriebskraft ist betragsmäßig gleich der Gewichtskraft der verdrängten Luft (Archimedisches Prinzip). Druck, Temperatur und Volumen des Gases sind über die Beziehung $pV = \tilde{n}RT$ miteinander verknüpft. Die Masse m der Luft ist gleich der Molanzahl \tilde{n} , multipliziert mit der Molmasse m_{Mol} der Luft.

Lösung: 1. Auf das System (den Ballon und die Luft in ihm) wirkt wegen der Befestigung am Boden keine Netto-kraft. Skizzieren Sie das Kräftediagramm für das System (Abbildung 14.3):

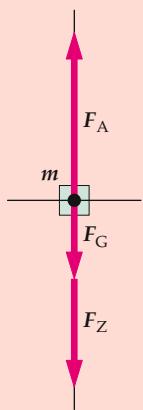


Abbildung 14.3 Kräftediagramm des luftgefüllten Ballons.

2. Wenden Sie auf das System das zweite Newton'sche Axiom an. Da keine Nettokraft wirkt, ist die Zugkraft F_Z des Seils gleich der Differenz der Auftriebskraft F_A und der Gewichtskraft F_G der Luft im Ballon:

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

$$F_Z + F_A + F_G = 0 \quad \text{d.h.} \quad F_Z = F_A - F_G$$

3. Die Auftriebskraft F_A des Ballons ist betragsmäßig gleich der Gewichtskraft der Außenluft mit dem Volumen V , das durch den Ballon verdrängt wird. Schreiben Sie ϱ_1 für die mittlere Dichte der Luft nahe beim Ballon und ϱ_2 für die mittlere Dichte der Luft innerhalb des Ballons. Berechnen Sie damit die beiden Kräfte:

$$F_A = \varrho_1 V g$$

$$F_G = \varrho_2 V g$$

4. Setzen Sie diese Beziehungen in die Gleichung von Schritt 2 ein:

$$\begin{aligned} F_Z &= F_A - F_G \\ &= \varrho_1 V g - \varrho_2 V g = (\varrho_1 - \varrho_2) V g \end{aligned}$$

5. Drücken Sie die Dichte ϱ der Luft jeweils in Abhängigkeit von ihrer Masse m bzw. von ihrer Molanzahl \tilde{n} und ihrer Molmasse m_{Mol} aus:

$$\varrho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{\tilde{n}_1 m_{\text{Mol}}}{V}$$

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{\tilde{n}_2 m_{\text{Mol}}}{V}$$

6. Setzen Sie das Ergebnis von Schritt 5 in die Gleichung von Schritt 4 ein:

$$F_Z = \left(\frac{\tilde{n}_1 m_{\text{Mol}}}{V} - \frac{\tilde{n}_2 m_{\text{Mol}}}{V} \right) V g$$

Daher ist

$$\frac{F_Z}{m_{\text{Mol}} g} = \tilde{n}_1 - \tilde{n}_2$$

7. Ersetzen Sie \tilde{n}_1 und \tilde{n}_2 mithilfe der Zustandsgleichung für das ideale Gas ($p V = \tilde{n} R T$):

$$\frac{F_Z}{m_{\text{Mol}} g} = \frac{p_1 V}{R T_1} - \frac{p_2 V}{R T_2}$$

8. Lösen Sie nach p_2 auf und setzen Sie die Zahlenwerte ein (mit $R = 8,314 \text{ Nm} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ und $m_{\text{Mol}} = 0,0290 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ sowie $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$):

$$\begin{aligned} p_2 &= \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{F_Z R}{m_{\text{Mol}} g V} \right) T_2 \\ &= \left(\frac{1 \text{ bar}}{297 \text{ K}} - \frac{(10,0 \text{ N}) \cdot R}{m_{\text{Mol}} \cdot g \cdot (15,0 \text{ m}^3)} \right) \cdot (273 \text{ K} + 75 \text{ K}) \\ &= \boxed{1,01 \text{ bar}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Damit der Ballon aufgebläht ist (andernfalls kann er keinen Auftrieb erfahren), muss die Luft in seinem Inneren einen höheren Druck als die Außenluft haben. Das ist konsistent mit dem Ergebnis 1,01 bar für den mittleren Innendruck.

Weitergedacht: Der Druck an der Öffnung unten im Ballon ist der gleiche wie derjenige der Umgebungsluft in der gleichen Höhe über dem Boden. In einem statischen Fluid nimmt der Druck mit steigender Höhe ab, und dies umso stärker, je höher die Dichte des Fluids unter Standardbedingungen ist. Die Dichte der Luft im Ballon ist geringer als die der Außenluft. Daher ist die Druckabnahme im Ballon von der Öffnung bis zum Scheitel geringer als in der Außenluft entlang derselben Strecke. ■

Die Masse eines Mols einer Substanz nennt man, wie bereits erwähnt, **Molmasse** oder **molare Masse** m_{Mol} . Nach Definition ist sie für ^{12}C gleich 12 g/mol oder $12 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$. In Anhang 40.3 sind im Periodensystem die Molmassen der Elemente aufgeführt. Daraus lässt sich, wie Beispiel 14.5 zeigt, die Masse der betreffenden Atome mithilfe der Avogadro-Zahl berechnen. Die molare Masse eines chemischen Elements ist der (mit den jeweiligen relativen Häufigkeiten) gewichtete Mittelwert der Molmassen seiner Isotope. Der natürliche Kohlenstoff hat daher die Molmasse $m_{\text{Mol}} = 12,011 \text{ g/mol}$. Die molare Masse einer chemischen Verbindung (beispielsweise von CO_2) ist gleich der Summe der molaren Massen der Elemente, aus denen sie besteht. Für O_2 ist daher $m_{\text{Mol}} = 2 \cdot 15,999 \text{ g/mol} = 31,998 \text{ g/mol}$, und für CO_2 ergibt sich entsprechend $m_{\text{Mol}} = 12,011 \text{ g/mol} + 31,998 \text{ g/mol} = 44,009 \text{ g/mol}$.

Frage 14.2

Wenn die Temperatur einer bestimmten Gasmenge bei konstantem Druck verringert wird, was geschieht dann mit dem Volumen?

Beispiel 14.5: Die Masse eines Wasserstoffatoms

Die molare Masse von atomarem Wasserstoff beträgt 1,008 g/mol. Wie groß ist die mittlere Masse eines Wasserstoffatoms, beispielsweise in einem Glas mit H₂O (Wasser)?

Problembeschreibung: Bezeichnen Sie die Masse eines Wasserstoffatoms mit m . Da 1 mol Wasserstoff n_A Atome enthält, ist seine molare Masse gegeben durch $m_{\text{Mol}} = m n_A$. Diese Beziehung können Sie nach m auflösen.

Lösung: Die Masse eines Wasserstoffatoms ist gleich der molaren Masse, dividiert durch die Avogadro-Zahl:

$$m = \frac{m_{\text{Mol}}}{n_A} = \frac{1,008 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}$$

$$= 1,674 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet, ist die Masse eines Wasserstoffatoms um sehr viele Größenordnungen kleiner als die Molmasse von etwa 1 g/mol.

Kommentar: Sie sehen hier, dass die Avogadro-Zahl ungefähr dem Kehrwert der Masse (in Gramm) eines Wasserstoffatoms entspricht.

Weitergedacht: Die Isotope des Wasserstoffs sind Proton (¹H), Deuterium (²H), und Tritium (³H). In natürlichem Wasserstoff hat das Isotop ¹H eine relative Häufigkeit von 99,985 %. ■

Von der makroskopischen zur mikroskopischen Beschreibung

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir das Verhalten der Gase mithilfe der **makroskopischen Zustandsgrößen** p , V und T beschrieben. Diese Beschreibung kann auf Mittelwerte **mikroskopischer** Größen zurückgeführt werden, etwa der Masse und der Geschwindigkeit der Gasteilchen. Hiermit befasst sich die **kinetische Gastheorie**, die ein detailliertes Modell verdünnter Gase bereitstellt.

Aus dem Blickwinkel der kinetischen Gastheorie besteht ein Gas aus einer sehr großen Anzahl von Teilchen, die sich sehr schnell bewegen. Bei einem einatomigen Gas, beispielsweise Helium und Neon, sind diese Teilchen einzelne Atome, und

bei mehratomigen Gasen, beispielsweise Sauerstoff und Kohlendioxid, sind es Moleküle, die aus zwei oder mehr Atomen aufgebaut sind. Bei der kinetischen Gastheorie spielt dieser Unterschied jedoch keine Rolle, und wir sprechen daher im Folgenden nur von Teilchen.

Ferner wird bei der kinetischen Gastheorie angenommen, dass sich bei Raumtemperatur eine sehr hohe Anzahl von Teilchen mit Geschwindigkeiten von mehreren Hundert Metern pro Sekunde bewegen. Die Teilchen stoßen elastisch miteinander zusammen und erfahren an den Wänden des Behälters Stöße, die ebenfalls als elastisch angenommen werden. Außerdem gibt es, wenn keine äußeren Kräfte wirken – die Gravitation kann vernachlässigt werden –, für die Teilchen keine bevorzugte Richtung ihrer Geschwindigkeit und auch keine bevorzugte Position im Behälter. (Streng genommen ist wegen der Gravitation die Anzahldichte der Teilchen unten im Behälter ein wenig größer als oben. Wie in Kapitel 10 ausgeführt, ist die Dichte der Luft erst in 5,5 km Höhe halb so groß wie auf Meereshöhe. Daher ist der Unterschied der Dichte innerhalb eines gewöhnlichen Behälters völlig vernachlässigbar.) Die Teilchen haben im Mittel einen Abstand voneinander, der groß gegen ihren Durchmesser ist. Daher üben sie – außer bei den Stößen – keinerlei Kräfte aufeinander aus. (Diese letzte Annahme entspricht der Annahme einer sehr geringen Dichte. Diese ist, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, gleichbedeutend damit, dass ein ideales Gas vorliegt. Da bei den Zusammenstößen der Teilchen der Impuls erhalten bleibt, haben diese Stöße keinen Einfluss auf den gesamten Impuls in irgendeiner Richtung, sodass wir die Stöße der Teilchen untereinander außer Acht lassen können.)

14.2 Druck und Teilchengeschwindigkeit

Nach der kinetischen Gastheorie röhrt der Druck, den ein Gas auf die Wände seines Behälters ausübt, von den Stößen seiner Teilchen auf die Behälterwände her. Der Druck ist gleich der Kraft pro Flächeneinheit. Außerdem ist nach dem zweiten Newton'schen Axiom die Kraft gleich der Impulsänderung, die die Teilchen pro Zeiteinheit erfahren, wenn sie auf die Behälterwände stoßen.

Nehmen wir an, es befinden sich n Teilchen in einem quaderförmigen Behälter mit dem Volumen V . Jedes Teilchen hat die Masse m und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v . Wir wollen nun die Kraft berechnen, die die Gasteilchen auf die rechte Behälterwand ausüben, die senkrecht auf der x -Achse steht und die Fläche A hat. Die Teilchen, die innerhalb des Zeitintervalls Δt auf diese Wand treffen, sind diejenigen, die sich innerhalb des Abstands $|v_x| \Delta t$ von ihr befinden und sich nach rechts bewegen (Abbildung 14.4).

Daher ist die Anzahl der Teilchen, die im Zeitintervall Δt auf die Wand treffen, gleich der Anzahl n/V der Teilchen pro Volumeneinheit, multipliziert mit dem Volumen $|v_x| \Delta t A$ und multipliziert mit $\frac{1}{2}$, denn nur die Hälfte der Teilchen bewegt sich

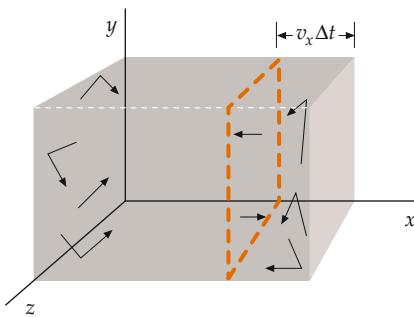


Abbildung 14.4 Gasteilchen in einem quaderförmigen Behälter. Im Zeitintervall Δt treffen diejenigen Teilchen auf die rechte Wand, die sich nach rechts bewegen und von ihr höchstens den Abstand $|v_x| \Delta t$ haben.

nach rechts. Somit ist die Anzahl der Teilchen, die die Wand treffen, gegeben durch

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{V} |v_x| \Delta t A.$$

Die Impulskomponente eines Teilchens in x -Richtung ist $+m|v_x|$, bevor es auf die Wand trifft, und $-m|v_x|$ nach dem elastischen Stoß auf die Wand. Der Betrag der Impulsänderung ist daher $2m|v_x|$. Somit ist der Betrag $|\Delta p|$ der im Zeitintervall Δt insgesamt auftretenden Impulsänderung aller Teilchen gleich $2m|v_x|$, multipliziert mit der Anzahl der Teilchen, die in dieser Zeit auf die Wand treffen:

$$|\Delta p| = (2m|v_x|) \left(\frac{1}{2} \frac{n}{V} |v_x| \Delta t A \right) = \frac{n}{V} m v_x^2 A \Delta t. \quad (14.10)$$

Verwechseln Sie nicht den Druck p und die Impulsänderung Δp . Eine Dimensionsanalyse hilft Ihnen im Zweifelsfall, die beiden Größen zu unterscheiden.

Der Betrag der Kraft F , die die Teilchen auf die Wand ausüben (und umgekehrt), ist betragsmäßig gleich dieser Impulsänderung, dividiert durch die Zeitspanne: $|\Delta p|/\Delta t$. Für den Druck, definiert als Betrag der Kraft pro Fläche, gilt daher

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{n}{V} m v_x^2$$

oder

$$p V = n m v_x^2. \quad (14.11)$$

Nun müssen wir noch berücksichtigen, dass nicht alle Teilchen dieselbe Geschwindigkeit haben. Wir ersetzen deshalb v_x^2 durch den Mittelwert $\langle v_x^2 \rangle$ und drücken Gleichung 14.11 durch die mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle$ in Richtung der x -Achse aus:

$$p V = 2 n \left(\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle \right). \quad (14.12)$$

Die molekulare Deutung der Temperatur

Jetzt vergleichen wir Gleichung 14.12 mit Gleichung 14.2, die experimentell für sehr geringe Gasdichten erhalten wurde. Gleichsetzen der rechten Seiten beider Gleichungen ergibt

$$2 n \left(\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle \right) = n k_B T$$

und damit

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \quad (14.13)$$

Somit ist die mittlere kinetische Energie der Teilchen in Richtung der x -Achse gleich $\frac{1}{2} k_B T$. Dabei ist die x -Richtung in keiner Weise bevorzugt. Im Mittel ist

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle,$$

und es gilt

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle.$$

Es ist daher $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$. Für die mittlere kinetische Energie der Teilchen schreiben wir $\langle E_{\text{kin}} \rangle$. Damit wird Gleichung 14.13 zu

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (14.14)$$

MITTLERE KINETISCHE ENERGIE EINES GASTEILCHENS

Wir dürfen hier die Rotations- und die Schwingungsenergie, die die Teilchen außerdem haben können, außer Acht lassen, denn zum Druck, den die Gesamtheit der Teilchen auf die Behälterwände ausübt, trägt nur die Translations- bzw. kinetische Energie bei.

Die absolute Temperatur T ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Teilchen. Die Summe der kinetischen Teilchenenergien von \tilde{n} mol einer Menge eines idealen Gases mit insgesamt n Teilchen ergibt sich zu

$$E_{\text{kin}} = n \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = \frac{3}{2} n k_B T = \frac{3}{2} \tilde{n} R T. \quad (14.15)$$

Darin haben wir die Beziehung $n k_B = \tilde{n} n_A k_B = \tilde{n} R$ verwendet. Die kinetische Energie des idealen Gases beträgt also $\frac{3}{2} k_B T$ pro Teilchen bzw. $\frac{3}{2} R T$ pro Mol.

Mithilfe dieser Ergebnisse können wir die Größenordnung der Teilchengeschwindigkeit in Gasen abschätzen. Nach Gleichung 14.14 ist der Mittelwert von v^2 gegeben durch

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3 k_B T}{m} = \frac{3 n_A k_B T}{n_A m} = \frac{3 R T}{m_{\text{Mol}}}.$$

Darin ist $m_{\text{Mol}} = n_A m$ die molare Masse. Die Quadratwurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2 \rangle$ heißt **quadratisch gemittelte Geschwindigkeit**:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 R T}{m_{\text{Mol}}}}. \quad (14.16)$$

QUADRATISCH GEMITTELTE GESCHWINDIGKEIT DER TEILCHEN EINES GASES

Darin steht der Index rms für *root mean square*, d. h. „Wurzel aus dem quadratischen Mittelwert“. Beachten Sie, dass Gleichung 14.16 der Gleichung 12.5 für die Schallgeschwindigkeit in einem Gas ähnelt:

$$v_{\text{Schall}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{m_{\text{Mol}}}}. \quad (14.17)$$

Für Luft ist $\gamma = 1,4$. Die Ähnlichkeit beider Gleichungen ist nicht überraschend, denn eine Schallwelle in einem Gas besteht aus periodischen Druckänderungen, die sich durch Stöße zwischen den Gasteilchen fortpflanzen. Eine Anwendung von Gleichung 14.16 ist in Beispiel 14.6 gezeigt.

Beispiel 14.6: Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit von Gasteilchen

Die molare Masse von Sauerstoffgas (O_2) beträgt rund 32,0 g/mol und die von Wasserstoffgas (H_2) rund 2,00 g/mol. Wie groß ist bei 300 K die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit a) der O_2 -Moleküle und b) der H_2 -Moleküle?

Problembeschreibung: Wir berechnen v_{rms} mithilfe von Gleichung 14.16. Damit die Einheiten konsistent sind, müssen wir $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ sowie die molare Masse von O_2 in kg/mol einsetzen.

Lösung:

Teilaufgabe a

Setzen Sie die gegebenen Werte in Gleichung 14.16 ein:

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3 R T}{m_{\text{Mol}}}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot (8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (300 \text{ K})}{0,0320 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} \\ &= 484 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Wiederholen Sie die Berechnung für Wasserstoff mit $m_{\text{Mol}} = 0,00200 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$:

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3 R T}{m_{\text{Mol}}}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot (8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (300 \text{ K})}{0,00200 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} \\ &= 1934 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Kommentar: Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} ist gemäß Gleichung 14.16 proportional zu $1/\sqrt{m_{\text{Mol}}}$, und die molare Masse m_{Mol} des Wasserstoffs ist 16-mal kleiner als die des Sauerstoffs. Daher muss v_{rms} beim Wasserstoff 4-mal größer als beim Sauerstoff sein. Das entspricht den Ergebnissen: $1934/484 = 4,0$.

Weitergedacht: Die eben berechnete quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} der Sauerstoffmoleküle ist mit $484 \text{ m/s} = 1742 \text{ km/h}$ etwa 1,4-mal höher als die Schallgeschwindigkeit in Luft, die bei 300 K und Atmosphärendruck rund 343 m/s beträgt.

Übung 14.3: Berechnen Sie die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit von Stickstoffmolekülen ($m_{\text{Mol}} = 28 \text{ g/mol}$) bei 300 K. ◀

*Die Verteilung von Teilchengeschwindigkeiten

Die Annahme liegt nahe, dass in einem Gas nicht alle Teilchen dieselbe Geschwindigkeit haben. Wir haben zwar die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Gasteilchen berechnet, aber wir erhielten keine Information über die *Verteilung* der Teilchengeschwindigkeiten. Wir wissen jedoch, dass die Stöße der Teilchen im Gas unkontrollierbar und statistisch erfolgen. Daher können wir die Ergebnisse unserer Diskussion aus Kapitel 1 auch für die Verteilungsfunktion der Teilchengeschwindigkeiten in einem Gas anwenden. Es ist offensichtlich, dass die mittlere Geschwindigkeit in einer der drei Raumrichtungen (wir wählen die x -Richtung) den Wert $\langle v_x \rangle = 0$ haben muss, denn im Mittel werden gleich viele Teilchen in positive wie in negative Richtung fliegen. Die Varianz der Verteilung ist in Gleichung 1.12b definiert und ist gegeben durch $\sigma^2 = \langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2 = \langle v_x^2 \rangle$, da $\langle v_x \rangle = 0$ ist. Mit Gleichung 14.13 folgt daraus $\sigma^2 = k_B T/m$. Die Verteilung der Geschwindigkeiten in x -Richtung entspricht einer Normal- oder Gauß-Verteilung (siehe Gleichung 1.7):

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(v_x - \langle v_x \rangle)^2/(2\sigma^2)}. \quad (14.18)$$

Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Die Verteilung $f(v_x)$ der Teilchengeschwindigkeiten in einem Gas kann direkt gemessen werden (Abbildung 14.5).

Interessant ist aber nicht die Geschwindigkeitsverteilung $f(v_x)$ in einer Richtung, sondern die Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ im gesamten Raum. In Abbildung 14.6 sind die Geschwindigkeitsverteilungen $f(v)$ bei zwei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Die in Abbildung 14.6 aufgetragene Größe $f(v)$ nennt man **Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung**. In einer Gasmenge mit n Teilchen ist die Anzahl dn

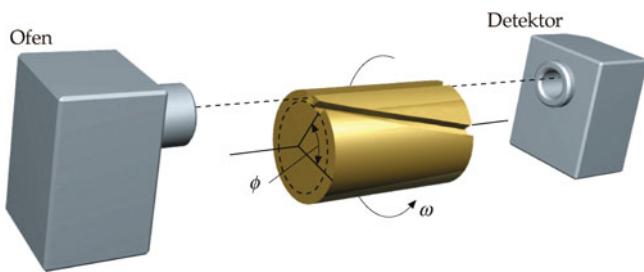


Abbildung 14.5 Schema einer Apparatur zur Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung von Gasteilchen. Die betreffende Substanz wird in einem Ofen verdampft, und die Teilchen des Dampfs können durch eine enge Öffnung in der Ofenwand in eine Vakuumkammer entweichen. Sie werden durch eine Reihe von engen (hier nicht gezeigten) Schlitzen zu einem parallelen Strahl ausgerichtet. Der Strahl wird auf einen Detektor gerichtet, der die Teilchen zählt, die pro Zeiteinheit auf ihn auftreffen. Der größte Teil des Strahls wird dabei durch einen rotierenden Zylinder abgefangen, der auf seinem Mantel schraubenartig eingravierte Nuten aufweist (in der Zeichnung ist nur eine dargestellt). Die Nuten lassen jeweils nur Teilchen in einem kleinen Geschwindigkeitsintervall durch, das durch die Winkelgeschwindigkeit der Zylinderrotation bestimmt wird. Bei verschiedenen Umdrehungsgeschwindigkeiten des Zylinders wird jeweils die Anzahl der Teilchen ermittelt, die pro Zeiteinheit auf den Detektor treffen, deren Geschwindigkeiten also im betreffenden Intervall liegen.

der Teilchen mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ gegeben durch

$$dn = n f(v) dv. \quad (14.19)$$

Der Anteil $dn/n = f(v) dv$ in einem bestimmten Geschwindigkeitsintervall dv ist in Abbildung 14.6 bei einer recht geringen Temperatur durch die getönte Fläche $f(v) dv$ angedeutet. Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Geschwindigkeiten kann mit den Methoden der statischen Thermodynamik hergeleitet werden. Auf die Herleitung wollen wir hier nicht eingehen. Das Ergebnis ist

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)}. \quad (14.20)$$

MAXWELL-BOLTZMANN-GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNG

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_{\max} der Gasteilchen ist diejenige Geschwindigkeit, bei der die Verteilungskurve $f(v)$ bei der betreffenden Temperatur ihr Maximum hat. Man kann zeigen, dass gilt:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{2 R T}{m_{\text{Mol}}}}. \quad (14.21)$$

WAHRSCHEINLICHSTE GESCHWINDIGKEIT

Der Vergleich mit der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit $v_{\text{rms}} = \sqrt{3 R T / m_{\text{Mol}}}$ (siehe Gleichung 14.16) lässt erkennen, dass die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_{\max} etwas geringer ist als die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} . Diese wird in Beispiel 14.7 berechnet.

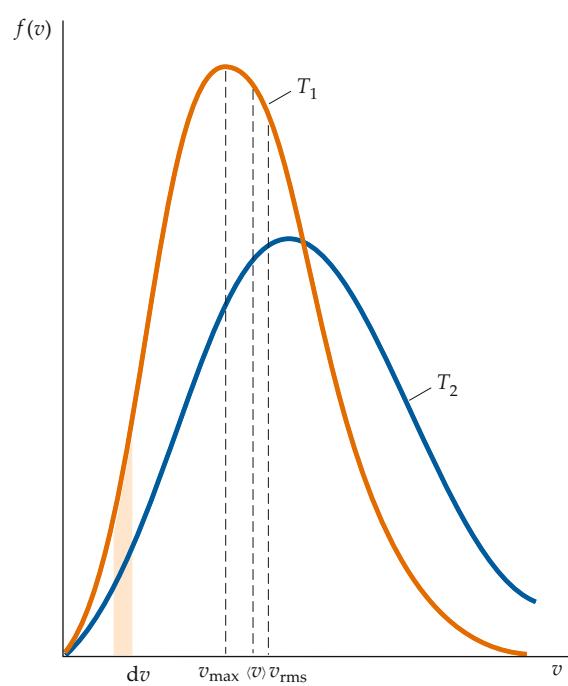


Abbildung 14.6 Die Verteilungen der Teilchengeschwindigkeiten eines Gases bei zwei Temperaturen, wobei $T_2 > T_1$ ist. Die getönte Fläche $f(v) dv$ ist gleich dem Anteil der Teilchen, deren Geschwindigkeiten im engen Intervall dv bei der Geschwindigkeit v liegen. Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} und die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ sind beide etwas größer als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_{\max} .

Beispiel 14.7: Anwendung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Berechnen Sie mithilfe der Maxwell-Boltzmann-Verteilung den Mittelwert von v^2 bei Gasteilchen.

Problembeschreibung: Der Mittelwert von v^2 ergibt sich aus $\langle h^2 \rangle = \int h^2 f(h) dh$ (siehe Gleichung 1.11), wobei die Messvariable h durch v zu ersetzen ist; ferner wird $f(v)$ aus Gleichung 14.20 verwendet.

Lösung: 1. Nach Definition ist:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) dv$$

2. Verwenden Sie Gleichung 14.20 für $f(v)$. Damit erhalten Sie:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_0^\infty v^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)} dv \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/(2k_B T)} dv \end{aligned}$$

3. Die Lösung des Integrals in Schritt 2 können Sie in Tabelle nachschlagen:

$$\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/(2k_B T)} dv = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{5/2}$$

4. Berechnen Sie damit den Mittelwert von v^2 :

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{5/2} \\ &= \boxed{\frac{3k_B T}{m}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis stimmt überein mit $v_{\text{rms}} = \sqrt{3k_B T/m}$ in Gleichung 14.16. ■

In Beispiel 14.6 errechneten wir die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} der Wasserstoffmoleküle zu rund 1,93 km/s. Das ist ungefähr ein Sechstel der Fluchtgeschwindigkeit von 11,2 km/s, mit der ein Körper der Erdanziehung entfliehen kann (siehe Abschnitt 4.4). Warum enthält die Erdatmosphäre keinen Wasserstoff? Der Abbildung 14.6 entnehmen wir, dass ein beträchtlicher Anteil der Moleküle eines Gases im Gleichgewicht Geschwindigkeiten über v_{rms} aufweist. Wenn v_{rms} in einem Gas mindestens 15–20 % der Fluchtgeschwindigkeit eines Planeten ausmacht, dann überschreiten ausreichend viele Moleküle die Fluchtgeschwindigkeit, sodass das betreffende Gas nicht sehr lange in der Atmosphäre dieses Planeten verbleiben kann. Aus diesem Grund befindet sich praktisch kein freier Wasserstoff in der Erdatmosphäre. Dagegen ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Sauerstoffmoleküle viermal geringer als die der Wasserstoffmoleküle; damit beträgt sie nur rund 4 % der Fluchtgeschwindigkeit der Erde. Deswegen überschreitet nur ein verschwindend geringer Anteil der Sauerstoffmoleküle die Fluchtgeschwindigkeit, sodass der Sauerstoff in unserer Atmosphäre verbleibt.

Frage 14.3

Wie jeder Tieftemperaturtechniker weiß, ist flüssiger Stickstoff wesentlich billiger als flüssiges Helium. Ein Grund dafür ist (abgesehen vom deutlich höheren Siedepunkt und daher der weniger aufwendigen Herstellung und Gefäßisolation), dass Stickstoff einen hohen Anteil der Erdatmosphäre ausmacht, Helium aber nur einen verschwindend geringen. Warum ist so wenig Helium in der Erdatmosphäre enthalten?

Die Energieverteilung

Wir können die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung (Gleichung 14.20) in die Verteilung der kinetischen Energie E_{kin} umrechnen. Wir schreiben für die Anzahl der Moleküle

mit kinetischen Energien zwischen E_{kin} und $(E_{\text{kin}} + dE_{\text{kin}})$:

$$dn = nf(E_{\text{kin}}) dE_{\text{kin}}.$$

Darin ist $f(E_{\text{kin}})$ die Energieverteilungsfunktion. Für die Anzahl dn ergibt sich derselbe Wert wie in Gleichung 14.20, wenn für die Energie E_{kin} eines Teilchens mit der Geschwindigkeit v der Ausdruck $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ eingesetzt wird. Damit ist

$$dE_{\text{kin}} = mv dv$$

und

$$nf(v) dv = \frac{n}{mv} f(E_{\text{kin}}) dE_{\text{kin}}.$$

Somit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} f(v) dv &= C v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)} dv = C v e^{-E_{\text{kin}}/(k_B T)} v dv \\ &= C \left(\frac{2E_{\text{kin}}}{m} \right)^{1/2} e^{-E_{\text{kin}}/(k_B T)} \frac{dE_{\text{kin}}}{m}. \end{aligned}$$

Darin ist $C = (4/\sqrt{\pi}) (m/2k_B T)^{3/2}$, gemäß Gleichung 14.20. Die Verteilungsfunktion $f(E_{\text{kin}})$ für die kinetische Energie lautet dann

$$f(E_{\text{kin}}) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{m} \sqrt{E_{\text{kin}}} e^{-E_{\text{kin}}/(k_B T)}.$$

Wir vereinfachen und erhalten die übliche Schreibweise der **Maxwell-Boltzmann-Energieverteilung**:

$$f(E_{\text{kin}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{E_{\text{kin}}} e^{-E_{\text{kin}}/(k_B T)}. \quad (14.22)$$

MAXWELL-BOLTZMANN-ENERGIEVERTEILUNG

In der statistischen Mechanik unterscheidet man in dieser Verteilungsfunktion zwei Faktoren: Der eine, die **Zustandsdichte**, ist proportional zu $\sqrt{E_{\text{kin}}}$. Der andere Faktor ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand besetzt ist; dieser Faktor lautet $e^{-E_{\text{kin}}/(k_B T)}$ und wird **Boltzmann-Faktor** genannt.

14.3 Der Gleichverteilungssatz

Gemäß Gleichung 14.13 beträgt die mittlere kinetische Energie der Translation in jeder Richtung pro Teilchen $\frac{1}{2}k_B T$ (wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist); pro Mol beträgt die kinetische Energie in jeder Richtung $\frac{1}{2}RT$ (R ist hier die Gaskonstante). Nehmen wir nun an, die Translationsenergie eines Teilchens in einer bestimmten Richtung wird plötzlich größer, beispielsweise durch einen Stoß des Teilchens auf den momentan von außen bewegten Kolben während der Kompression des Gases. Dann wird die zugeführte Energie durch die nachfolgenden Zusammenstöße dieses Teilchens mit anderen Teilchen bald umverteilt

werden. Wenn sich das Gas später wieder im Gleichgewicht befindet, dann ist die gesamte kinetische Energie wieder gleichmäßig auf die kinetischen Energien in x -, y - und z -Richtung verteilt. Diese Aufteilung der kinetischen Energie auf die drei Raumrichtungen ist ein Spezialfall des sogenannten **Gleichverteilungssatzes**, der mit Mitteln der klassischen statistischen Mechanik abgeleitet werden kann. Jede Komponente des Orts und des Impulses (sowie auch des Drehwinkels und des Drehimpulses), die als quadratischer Term im Ausdruck für die Energie des Systems erscheint, wird **Freiheitsgrad** genannt. Typische Freiheitsgrade sind verknüpft mit den kinetischen Energien der Translation, der Rotation und der Schwingung sowie mit der potentiellen Energie der Schwingung. Der Gleichverteilungssatz besagt:

Wenn sich eine bestimmte Substanzmenge im Gleichgewicht befindet, dann entfällt auf jeden Freiheitsgrad im Mittel eine Energie von $\frac{1}{2} k_B T$ pro Teilchen bzw. von $\frac{1}{2} R T$ pro Mol.

GLEICHVERTEILUNGSSATZ

Das ideale Gas hat daher drei Freiheitsgrade, nämlich die der Translation. In Kapitel 15 werden wir den Gleichverteilungssatz dazu nutzen, um bei realen Gasen den Zusammenhang zwischen den gemessenen Wärmekapazitäten und den Strukturen der Moleküle zu klären, aus denen diese Gase bestehen. Beispiel 14.8 zeigt eine Anwendung des Gleichverteilungssatzes.

14.4 Die mittlere freie Weglänge

Die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen in einem Gas beträgt bei Atmosphärendruck und normalen Temperaturen einige Hundert Meter pro Sekunde. Wenn Sie in einer Ecke eines großen Zimmers stehen und jemand in der gegenüberliegenden Ecke eine Parfüumflasche öffnet, dann können Sie das Parfüm erst nach mehreren Minuten riechen. Der Grund für diese Verzögerung liegt darin, dass die Teilchen des Parfüums sich nicht direkt auf Sie zu bewegen, sondern einen Zickzackweg zurücklegen, weil sie ständig mit den Teilchen der Luft zusammenstoßen. Die Strecke, die die Teilchen zwischen zwei Stößen durchschnittlich zurücklegen, nennt man **mittlere freie Weglänge**. Ihr Formelzeichen ist λ . (Sie können das Parfüm bereits nach mehreren Minuten riechen, aber nicht wegen der eben beschriebenen Ausbreitung, sondern infolge der Konvektion, d. h. der Bewegung der Luft aufgrund geringer Temperatur- und daher Dichteunterschiede. Träte wirklich nur Diffusion durch Teilchenstöße ein, dann würden die ersten Moleküle des Parfüums Ihre Zimmerecke erst nach Wochen erreichen.)

Die mittlere freie Weglänge eines Gasteilchens hängt von seinem Durchmesser und auch vom Durchmesser der übrigen Gasteilchen sowie von der Anzahldichte der Gasteilchen ab. Betrachten wir ein Gasteilchen mit dem Radius r_1 , das sich mit der Geschwindigkeit v in einer Umgebung mit ruhenden Teilchen mit dem Radius r_2 bewegt (Abbildung 14.7). Das sich bewegende Teilchen wird mit einem anderen Teilchen mit dem Radius

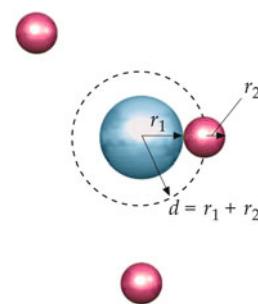


Abbildung 14.7 Modell eines Gasteilchens (blaue Kugel), das sich in einem Gas aus anderen Teilchen (rote Kugeln) bewegt. Das Teilchen mit dem Radius r_1 stößt mit einem Teilchen mit dem Radius r_2 zusammen, sobald ihre Mittelpunkte den Abstand $d = r_1 + r_2$ voneinander haben. Das bedeutet, ein anderes Teilchen wird getroffen, wenn sich sein Mittelpunkt auf einer Kugel mit dem Radius $d = r_1 + r_2$ um den Mittelpunkt des ersten Teilchens befindet.

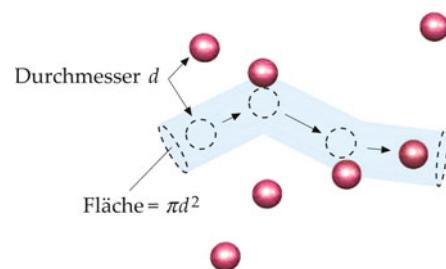


Abbildung 14.8 Modell der Bewegung eines Teilchens mit der Geschwindigkeit v in einem Gas aus ähnlichen Teilchen. Hier ist ein beispielhafter Weg gezeigt, den es in der Zeitspanne t zurücklegt. Das Teilchen mit dem Durchmesser d wird währenddessen mit allen ähnlichen Teilchen zusammenstoßen, die sich im Zylinder mit dem Volumen $\pi d^2 v t$ befinden. Dabei werden alle Stöße als elastisch angenommen, und alle Teilchen außer dem gerade betrachteten Teilchen werden als ruhend angesehen.

r_2 zusammenstoßen, wenn sich ihre Mittelpunkte einander auf den Abstand $d = r_1 + r_2$ nähern. (Wenn alle Teilchen gleich wären, dann wäre d gleich ihrem Durchmesser.) Während sich das betrachtete Teilchen bewegt, stößt es mit jedem Teilchen zusammen, dessen Mittelpunkt sich auf einer Kugel mit dem Radius d befindet (Abbildung 14.8).

Während der Zeitspanne t legt das Teilchen die Strecke $v t$ zurück und trifft dabei auf jedes Teilchen innerhalb des zylindrischen Volumens $\pi d^2 v t$. Die Anzahl der Teilchen in diesem Volumen ist $(n/V) \pi d^2 v t$. Darin ist n/V die Anzahldichte, d. h. die Anzahl der Teilchen pro Volumeneinheit. Bei jedem Stoß ändert sich die Bewegungsrichtung des Teilchens, sodass es einen Zickzackweg zurücklegt. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg, dividiert durch die Anzahl der Stöße in dieser Zeitspanne, ist die mittlere freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{v t}{(n/V) \pi d^2 v t} = \frac{1}{(n/V) \pi d^2}.$$

Bei dieser Berechnung der mittleren freien Weglänge wird angenommen, dass alle Teilchen außer dem einen, gerade be-

Beispiel 14.8: Das Mischen von Gasen II

ZUM VERSTÄNDNIS

Ein thermisch isolierter Tank ist in zwei gleiche Teile mit jeweils 20 l unterteilt. Einer dieser 20-l-Teile enthält ein Mol Stickstoffgas bei 300 K, und der andere 20-l-Teil ein Mol Heliumgas bei 320 K. Nun wird die Abtrennung zwischen den Teilen entfernt, sodass sich die beiden Gase vermischen können. Ist in der Mischung der Partialdruck des Stickstoffgases geringer als der Partialdruck des Heliumgases, ist er gleich diesem oder ist er höher? Ist die Endtemperatur der Mischung geringer als, gleich oder höher als 310 K?

Problembeschreibung: Da der Tank thermisch isoliert ist, bleibt die Energie seiner Inhalte konstant. Jegliche Energie, die von Stickstoffmolekülen aufgenommen wird, muss daher von Heliummolekülen abgegeben werden. Nach dem Vermischen ist die Temperatur beider Gase gleich der Temperatur der Gasmischung, und die Temperatur jedes Gases ist proportional zur mittleren kinetischen Energie seiner Teilchen. Helium ist einatomig und Stickstoff zweiatomig. Daher ist zu erwarten, dass die von den Stickstoffmolekülen aufgenommene Energie zu Rotationsenergie wie auch zu kinetischer Energie wird.

Lösung: 1. Nach dem Mischen sind die Volumina, die Temperaturen und die Molanzahlen beider Gase gleich. Die Zustandsgleichung für das ideale Gas verknüpft für jedes Gas das Volumen, die Temperatur, den Partialdruck und die Molanzahl miteinander. Diese Verknüpfung bedeutet, dass der Partialdruck jedes Gases durch Volumen, Temperatur und Molanzahl vollständig bestimmt ist. Da Volumina, Temperaturen und Molanzahlen gleich sind, *sind die Partialdrücke gleich*.

trachteten Teilchen ruhen. Das ist jedoch keine realistische Annahme. Wenn man die Bewegungen aller Teilchen berücksichtigt, ergibt sich für die mittlere freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(n/V)\pi d^2}. \quad (14.23)$$

MITTLERE FREIE WEGLÄNGE EINES GASTEILCHENS

Die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen nennt man **Stoßzeit** τ . Ihr Kehrwert $1/\tau$ ist gleich der mittleren Anzahl der Stöße pro Sekunde, also gleich der **Stoßhäufigkeit** oder Stoßfrequenz. Bei der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ ist die mittlere Strecke zwischen zwei Stößen gegeben durch

$$\lambda = \langle v \rangle \tau. \quad (14.24)$$

Eine mittlere freie Weglänge wird in Beispiel 14.9 berechnet.

2. Weil der Tank thermisch isoliert ist, bleibt die Gesamtenergie der beiden Gase während des Mischens konstant. Daher wird jegliche Energie, die von Stickstoffmolekülen aufgenommen wird, von Heliumatomen abgegeben. Somit ist die mittlere Zunahme der Energie eines Stickstoffmoleküls gleich der mittleren Abnahme der Energie eines Heliumatoms.

3. Die Endtemperaturen beider Gase sind identisch mit der Temperatur der Mischung. Daher ist die mittlere kinetische Energie der Teilchen beider Gase nach dem Mischen dieselbe.

4. Stickstoff ist ein zweiatomiges und Helium ein einatomiges Gas. Daher hat das Stickstoffmolekül mehr Freiheitsgrade als das Heliumatom, und ein Teil der von den Stickstoffatomen aufgenommenen Energie wird zu Rotationsenergie. Die Abnahme der kinetischen Energie der Heliumatome ist gleich der Summe aus der Zunahme der kinetischen Energie und der Zunahme der Rotationsenergie der Stickstoffmoleküle.

5. Die Temperaturänderung jedes Gases ist proportional zur Änderung der mittleren kinetischen Energie seiner Teilchen. Die Abnahme der Temperatur des Heliumgases ist größer als die Zunahme der Temperatur des Stickstoffgases. Daher ist die Endtemperatur *geringer als 310 K*.

Kommentar: Wären beide Gase einatomig, dann wäre die Endtemperatur gleich 310 K, und zwar auch bei stark unterschiedlichen Molmassen.

Beispiel 14.9: Mittlere freie Weglänge eines CO-Moleküls

Nehmen Sie an, der Sicherheitsingenieur in einer Fabrik will untersuchen, wie sich Kohlenmonoxid (CO) in einem Raum ausbreitet. Berechnen Sie a) die mittlere freie Weglänge eines CO-Moleküls und schätzen Sie b) die Zeit zwischen zwei Teilchenstößen ab. CO hat eine molare Masse von 28,0 g/mol. Nehmen Sie an, dass sich das CO-Molekül bei 300 K und 1,00 bar in Luft bewegt und dass die Moleküle des CO wie auch die der Luft einen Durchmesser von $3,75 \cdot 10^{-10}$ m haben.

Problembeschreibung: a) Da d gegeben ist, können Sie die Beziehung $\lambda = 1/(\sqrt{2}(n/V)\pi d^2)$ verwenden. Dazu berechnen Sie n/V mit der Zustandsgleichung $pV = \tilde{n}RT$ des idealen Gases. b) Die Zeit zwischen zwei Stößen können Sie anhand der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Verwenden Sie die Abhängigkeit der Größe λ von der Anzahldichte n/V und vom Teilchendurchmesser d :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} (n/V) \pi d^2}$$

2. Mit $pV = n k_B T$ ermitteln Sie die Anzahldichte n/V :

$$\begin{aligned} n/V &= \frac{p}{k_B T} \\ &= \frac{1 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{(1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (300 \text{ K})} \\ &= 2,41 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \end{aligned}$$

3. Setzen Sie diesen Wert von n/V und den gegebenen Wert von d in die Gleichung für λ ein:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2} (n/V) \pi d^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (2,41 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}) \cdot \pi \cdot (3,75 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2)^2} \\ &= 6,64 \cdot 10^{-8} \text{ m} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Verwenden Sie den Zusammenhang zwischen τ und λ :

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle v \rangle}$$

2. Als Näherungswert für $\langle v \rangle$ berechnen Sie v_{rms} :

$$\begin{aligned} v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{3RT}{m_{\text{Mol}}}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot (8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (300 \text{ K})}{0,0280 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} \\ &= 517,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

3. Mit der Annahme $\langle v \rangle \approx v_{\text{rms}}$ schätzen Sie τ ab:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\lambda}{\langle v \rangle} \approx \frac{\lambda}{v_{\text{rms}}} \\ &\approx \frac{6,64 \cdot 10^{-8} \text{ m}}{517,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 1,28 \cdot 10^{-10} \text{ s} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die in Schritt 3 von Teilaufgabe a berechnete mittlere freie Weglänge ist rund 170-mal so groß wie der Moleküldurchmesser. Wäre sie kleiner als der Teilchendurchmesser, so müssten wir nach einem Fehler im Ansatz oder in der Berechnung suchen.

Weitergedacht: Die Stoßfrequenz $1/\tau$ beträgt etwa $8 \cdot 10^9$ Stöße pro Sekunde. Die Stoßhäufigkeit ist sehr hoch. ■

14.5 *Die Van-der-Waals-Gleichung und Flüssigkeits-Dampf-Isothermen

Die meisten Gase verhalten sich bei normalen Drücken praktisch wie das ideale Gas. Von diesem Verhalten weichen sie bei steigendem Druck oder sinkender Temperatur immer stärker ab, weil die Gasdichte zunimmt und die Teilchen im Mittel nicht mehr so weit voneinander entfernt sind. Die **Van-der-Waals'sche Gleichung** ist eine Zustandsgleichung, die das Verhalten vieler realer Gase über weite Druckbereiche besser beschreibt als die Zustandsgleichung $pV = \tilde{n}RT$ für das ideale Gas. Für \tilde{n} Mole eines Gases lautet sie:

$$\left(p + \frac{a\tilde{n}^2}{V^2} \right) (V - b\tilde{n}) = \tilde{n}RT. \quad (14.25)$$

VAN-DER-WAALS'SCHE ZUSTANDSGEICHUNG

Der Koeffizient b röhrt daher, dass die Gasteilchen nicht punktförmig sind, sondern eine endliche Ausdehnung haben. Dadurch ist das für ihre Bewegung verfügbare Volumen kleiner, als es bei der Beschreibung des idealen Gases angenommen wird. Der Betrag von b ist gleich dem Volumen aller Teilchen eines Mols des betreffenden Gases.

Der Term $a\tilde{n}^2/V^2$ berücksichtigt die gegenseitige Anziehung der Gasteilchen. Kommt ein Teilchen in die Nähe einer Behälterwand, dann wird es durch die übrigen Teilchen mit einer Kraft zurückgezogen, die proportional zu \tilde{n}/V ist, also zur Anzahl der Teilchen pro Volumen. Die Anzahl der Teilchen, die in einer bestimmten Zeit auf die Wand treffen, ist ebenfalls proportional zu \tilde{n}/V . Deswegen ist die von der Anziehung der Teilchen herrührende Druckabnahme proportional zum Quadrat der Anzahldichte, also zu \tilde{n}^2/V^2 . Der Koeffizient a hängt von der Art des Gases ab. Er ist klein für die Edelgase, deren Atome nur geringe Anziehungskräfte aufeinander ausüben. Mit zunehmendem Volumen bzw. abnehmender Dichte werden die Terme $b\tilde{n}$ und $a\tilde{n}^2/V^2$ kleiner, und die Van-der-Waals-Gleichung geht schließlich in die Zustandsgleichung für das ideale Gas (Gleichung 14.8) über. Bei hohen Dichten beschreibt die Van-der-Waals-Gleichung das Verhalten realer Gase jedoch wesentlich besser als die Zustandsgleichung für das ideale Gas.

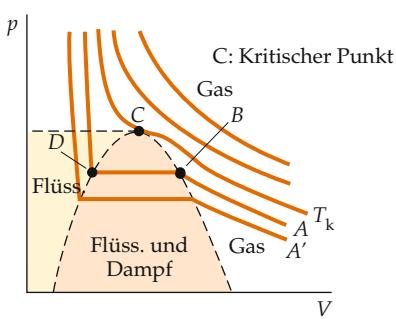


Abbildung 14.9 Die p - V -Isothermen einer Substanz, die flüssig und gasförmig vorliegen kann. Die Substanz ist oberhalb ihrer kritischen Temperatur T_k bei allen Drücken gasförmig. Hier, außerhalb des Bereichs, in dem Flüssigkeit und Dampf nebeneinander vorliegen, folgen die Isothermen recht gut der Van-der-Waals-Gleichung. Die waagerechten Kurvenstücke innerhalb des orangefarben gekennzeichneten Bereichs geben den jeweiligen Dampfdruck an; das ist der Druck, bei dem Gas und Flüssigkeit im Gleichgewicht miteinander stehen. Links von diesem Bereich, hier gelb schattiert, liegt die Substanz unterhalb der kritischen Temperatur flüssig vor und ist fast nicht kompressibel (das ist an der in diesem Bereich sehr großen Steigung der Kurven abzulesen).

Tabelle 14.1 Die Van-der-Waals-Koeffizienten a und b für einige Gase

	a $\text{l}^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}$	b $\text{ml} \cdot \text{mol}^{-1}$
He	0,0350	23,80
Ne	0,213	17,1
Ar	1,36	32,2
Kr	2,35	39,8
Xe	4,25	51,0
H ₂	0,247	26,6
N ₂	1,388	38,70
O ₂	1,400	31,86
H ₂ O	5,53	30,5
CO ₂	3,64	42,7

In Abbildung 14.9 sind einige p - V -Isothermen einer beliebigen Substanz dargestellt, die flüssig und gasförmig existieren kann. Abgesehen von dem Bereich, in dem Flüssigkeit und Dampf nebeneinander vorliegen, entsprechen diese Kurven recht genau der Van-der-Waals-Gleichung. Daher können die Koeffizienten a und b aus experimentellen Daten bestimmt werden. Beispielsweise ist für Stickstoff $a = 0,14 \text{l}^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}$ und $b = 38,7 \text{ ml} \cdot \text{mol}^{-1}$. Das diesem Koeffizienten entsprechende Volumen beträgt knapp 0,2 % des Volumens von 22,71, das 1 mol Stickstoffgas unter Standardbedingungen einnimmt. Würde 1 mol Stickstoff (molare Masse $m_{\text{Mol}} = 28,02 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) auf 38,7 ml komprimiert, so wäre seine Dichte

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{28,0 \text{ g}}{38,7 \text{ ml}} = 0,724 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1}.$$

Das entspricht ungefähr der Dichte von flüssigem Stickstoff ($0,80 \text{ g} \cdot \text{ml}^{-1}$).

Da der Koeffizient b in der Van-der-Waals-Gleichung das Volumen eines Mols (also von n_A Molekülen) angibt, kann aus ihm

das Volumen eines einzelnen Moleküls abgeschätzt werden. Für ein Mol Stickstoff (mit n_A Molekülen) ergibt sich, wie gerade gezeigt, ein Wert von rund $38,7 \text{ cm}^3$. Daraus errechnet sich das Volumen eines Moleküls zu

$$V_{\text{Molekül}} = \frac{b}{n_A} = \frac{38,7 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 6,43 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3.$$

Mit diesem Wert können wir auch den Moleküldurchmesser abschätzen. Nehmen wir in einer groben Näherung an, dass jedes Molekül eine Kugel mit dem Durchmesser d ist, die einen Würfel mit der Kantenlänge d besetzt. Dann ist dessen Volumen gegeben durch

$$d^3 = 6,43 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3.$$

Der Durchmesser eines Moleküls ergibt sich daraus näherungsweise zu $d = 4 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 0,4 \text{ nm}$. Einige aus zahlreichen Experimenten erhaltene (und entsprechend gemittelte) Werte für die Koeffizienten a und b sind in Tabelle 14.1 aufgeführt.

Beispiel 14.10 behandelt die Korrekturen zur idealen Gasgleichung für Helium.

Beispiel 14.10: Helium bei hoher Dichte

Ein 20,0-l-Tank enthält 300 mol Helium bei einem Druck von 400 bar. a) Welchen Wert hat der Ausdruck $a \tilde{n}^2/V^2$, und welchem Bruchteil des Drucks entspricht er? b) Welchen Wert hat der Ausdruck $b \tilde{n}$, und welchem Bruchteil des Volumens entspricht er? c) Welche Temperatur hat das Heliumgas?

Problembeschreibung: Zum Ermitteln der Temperatur ist die Van-der-Waals-Gleichung (Gleichung 14.25) zu verwenden. Die Koeffizienten a und b sind der Tabelle 14.1 zu entnehmen.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie $a \tilde{n}^2/V^2$ und vergleichen Sie den Wert mit dem angegebenen Druck von 400 bar:

$$\begin{aligned} \frac{a \tilde{n}^2}{V^2} &= \frac{(0,0350 \text{l}^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}) \cdot (300 \text{ mol})^2}{(20,0 \text{l})^2} \\ &= 7,888 \text{ bar} = \boxed{7,89 \text{ bar}} \end{aligned}$$

Das entspricht etwa 2 % des Drucks.

Teilaufgabe b

Berechnen Sie $b \tilde{n}$ und vergleichen Sie den Wert mit dem angegebenen Volumen von 20 l:

$$b \tilde{n} = (0,0238 \text{l} \cdot \text{mol}^{-1}) \cdot (300 \text{ mol}) = \boxed{7,141}$$

Das entspricht etwa 36 % des Volumens.

Teilaufgabe c

1. Lösen Sie die Van-der-Waals-Gleichung nach der Temperatur auf:

$$\left(p + \frac{a\tilde{n}^2}{V^2}\right)(V - b\tilde{n}) = \tilde{n}RT$$

$$T = \frac{\left(p + \frac{a\tilde{n}^2}{V^2}\right)}{R\tilde{n}}(V - b\tilde{n})$$

2. Setzen Sie die Zahlenwerte ein:

$$a = 0,03501^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}$$

$$b = 0,02381 \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$T = \frac{\left(400 \text{ bar} + \frac{(0,03501^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}) \cdot (300 \text{ mol})^2}{(20,01)^2}\right)}{(300 \text{ mol}) \cdot (0,0831451 \cdot \text{bar} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})} \cdot \{20,01 - (0,02381 \cdot \text{mol}^{-1}) \cdot (300 \text{ mol})\}$$

$$= \boxed{213 \text{ K}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Korrektur von etwa 2 % am Druck, die durch die Van-der-Waals-Gleichung gegenüber der Zustandsgleichung für das ideale Gas eingebracht wird, wird durch die Korrektur von etwa 36 % am Volumen bei weitem übertroffen. Das ist auch zu erwarten, da die Volumenkorrektur vom Eigenvolumen der Atome herrührt. Dagegen berücksichtigt der Druckterm die Wechselwirkung der Teilchen, und diese ist bei einem Edelgas wie Helium sehr schwach. ■

Unterhalb der kritischen Temperatur T_k beschreibt die Van-der-Waals-Gleichung nur die Isothermen außerhalb der farbig getönten Bereiche in Abbildung 14.9, nicht aber die innerhalb. Betrachten wir ein Gas, das unterhalb von T_k zunächst ein großes Volumen bei geringem Druck hat. Wir komprimieren es bei konstanter Temperatur (Isotherme A in Abbildung 14.9). Zunächst nimmt der Druck zu. Wenn aber am Punkt B die gestrichelte Kurve erreicht wird, steigt der Druck nicht mehr weiter an, sondern das Gas beginnt sich bei konstantem Druck zu verflüssigen. Entlang der horizontalen Geraden BD stehen Gas und Flüssigkeit miteinander im Gleichgewicht. Erhöhen wir den Druck weiter, wird immer mehr Gas flüssig, bis am Punkt D die gesamte Gasmenge verflüssigt ist. Versuchen wir danach eine weitere Kompression, so müssen wir schon für eine sehr geringe Volumenänderung einen enormen Druck aufbringen, denn eine Flüssigkeit ist nahezu inkompressibel.

Bei einem anderen Versuch spritzen wir eine Flüssigkeit, beispielsweise Wasser, in einen evakuierten, verschlossenen Behäl-

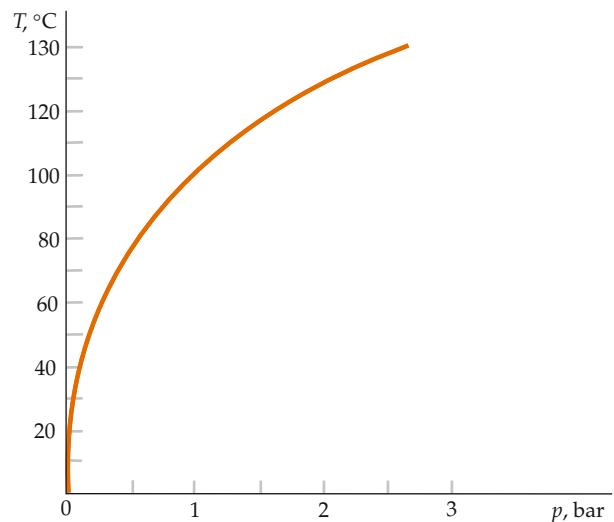


Abbildung 14.10 Die Siedetemperatur des Wassers in Abhängigkeit vom äußeren Druck.

ter. Wenn ein Teil der Wassermenge verdampft ist, verteilen sich Wassermoleküle im zuvor leeren Raum. Einige dieser Moleküle treffen auf die Flüssigkeitsoberfläche und treten dabei wieder in die Flüssigkeit ein; diesen Vorgang nennt man Kondensation. Die Verdampfungsgeschwindigkeit ist anfänglich höher als die Kondensationsgeschwindigkeit, nach einiger Zeit wird sich jedoch ein Gleichgewichtszustand einstellen. Der Druck, bei dem Gas und Flüssigkeit bei einer bestimmten Temperatur miteinander im Gleichgewicht stehen, wird **Sättigungsdampfdruck** genannt. Wenn wir den Behälter nun leicht erwärmen, verdampft noch etwas Wasser, und es stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand bei einem höheren Dampfdruck ein. Der Sättigungsdampfdruck hängt von der Temperatur ab. Das können wir auch aus Abbildung 14.9 ablesen. Nehmen wir dazu an, wir hätten die vorhin beschriebene Kompression des Gases bei einer tieferen Temperatur vorgenommen, etwa bei der Isotherme A'. Dann hätte sich ein geringerer Sättigungsdampfdruck eingestellt: Der waagerechte Teil der Isotherme A' liegt tiefer als derjenige der Isotherme A.

Die Temperatur, bei der der Sättigungsdampfdruck einer Flüssigkeit gleich 1,0 bar ist, heißt **normaler Siedepunkt** der betreffenden Substanz. Für Wasser liegt er bei $100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$. Im Hochgebirge siedet das Wasser bei tieferer Temperatur, weil der Atmosphärendruck hier geringer als 1,0 bar ist. In Abbildung 14.10 ist gezeigt, wie die Siedetemperatur des Wassers vom äußeren Druck abhängt. Umgekehrt kann hier auch der Sättigungsdampfdruck bei verschiedenen Temperaturen abgelesen werden.

Oberhalb seiner kritischen Temperatur T_k kann ein Gas nicht verflüssigt werden, auch nicht durch noch so hohen Druck. Für Wasser ist $T_k = 647\text{ K} = 374^\circ\text{C}$. Der Berührungs punkt der kritischen Isotherme mit der gestrichelten Kurve (der Punkt C in Abbildung 14.9) heißt **kritischer Punkt**.

⌚ Im Kontext: Die Brown'sche Bewegung

Die Forschungen von Robert Brown (1773–1858), einem schottischen Botaniker, zeichneten sich vor allem dadurch aus, dass er bereits um 1800 damit begann, ein Mikroskop zur genaueren Beobachtung seiner Proben einzusetzen. Während seines dreieinhalbjährigen Australienaufenthalts konnte er bereits über 2000 bis dahin unbekannte Spezies sammeln. Nach seiner Rückkehr nach England verbrachte er ab 1805 seine Zeit damit, die in Australien gesammelten Proben zu katalogisieren. Mehr als 1200 unbekannte Pflanzenarten allein aus Westaustralien beschrieb er in seinen zahlreichen Veröffentlichungen und benannte Gattungen wie *Livistonia*, *Triodia*, *Eriachne*, *Caladenia*, *Isolepis*, *Praesophyllum*, *Pterostylis*, *Patersonia* und viele weitere.¹

1827 untersuchte er die Samenanlagen einer *Clarkia pulchella*, deren Pollen er in Wasser gelöst unter einem seiner Mikroskope betrachtete. Dabei sah er eine Zitterbewegung der kleinen Organellen, die sich aus den Pollen hinausbewegten. Zunächst schrieb er diese Bewegung einer Lebenskraft des Pollenstaubs zu, da man zu der Zeit der Auffassung war, alles Organische müsse eine solche Kraft zur Selbsterhaltung besitzen. Als er sein Experiment jedoch mit unbelebten Staubkörnern wiederholte, konnte er dieselbe Bewegung beobachten. Das gleiche Verhalten hatte bereits 1785 der Niederländer Jan Ingenhousz (1730–1799), ebenfalls Botaniker, für Holzkohlestaubpartikel auf Alkohol beschrieben. Da offensichtlich auch unbelebte Materie sich nach diesem Muster bewegte, war die These, es müsse sich um eine Lebenskraft handeln, widerlegt.



Clarkia-pulchella-Pollen mit heraustretenden Organellen, deren Molekularbewegung Robert Brown beobachtete. (© Hamilton College's Brownian Motion Webseite, <http://physerver.hamilton.edu/Research/Brownian/index.html>).

Erst Christian Wiener (1826–1896) konnte 1863 experimentell nachweisen, dass das Zittern eindeutig eine Folge der Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle ist, zwischen denen die Pollen eingelegt waren.² Er stellte außerdem fest, dass die Zitterbewegung mit sinkender Teilchengröße zunimmt. Es sollten jedoch noch weitere 17 Jahre vergehen, bis Thorvald N. Thiele (1838–1910) die erste mathematische Beschreibung der Brown'schen Bewegung lieferte.³ Anfang des 20. Jahrhunderts komplettierten Albert Einstein (1879–1955) und Marian Smoluchowski (1872–1917) unabhängig voneinander die physikalische Theorie und etablierten das stochastische Modell in der Physik.^{4,5}

1991 kam die Frage auf, ob Robert Brown technisch überhaupt in der Lage gewesen war, die Bewegung der Partikel, die nur wenige Mikrometer groß waren, zu beobachten.⁶ Mit einer ausführlichen Literaturrecherche und einer Rekonstruktion seines Experiments wurde jedoch schon im darauf folgenden Jahr klar gezeigt, dass Brown die Zitterbewegung tatsächlich sehen konnte.⁷

1. Keighery, G. und Gibson, N., „The influence of Robert Brown on Western Australian botany“, *Australian Garden History*, 14(3), 2002, S. 5–8.
2. Wiener, C., „Erklärung des atomistischen Wesens des tropfbar flüssigen Körperzustandes und Bestätigung desselben durch die sogenannten Molekularbewegungen“, *Poggendorffs Annalen*, Bd. 118, 1863, S. 79–94.
3. Thiele, T. N., „Über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen, wo gewisse Sorten von zufälligen Fehlerquellen den Fehlern einen systematischen Charakter verleihen“.
4. Einstein, A., „Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen“, *Annalen der Physik*, 322(8), 1905, S. 549–560.
5. Smoluchowski, M., „Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen“, *Annalen der Physik*, 21(14), 1906, S. 756–780.
6. Deutsch, D. H., „Did Robert Brown Observe Brownian Motion: Probably Not“, *Scientific American*, 265(20), 1991.
7. Ford, B. J., „Brownian Movement in Clarkia pollen: a reprise of the first observations“, *The Microscope*, 40(4), 1992, S. 235–241.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Formeln und Anmerkungen
1. Ideales Gas	Bei geringer Dichte erfüllen alle Gase die Zustandsgleichung des idealen Gases.
Zustandsgleichung	$pV = \tilde{n}RT$ (14.8)
Gaskonstante	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0,083141 \cdot \text{bar} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ (14.7)
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}$ (14.3)
Avogadro-Zahl	$n_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (14.4)
Zustandsgleichung für eine bestimmte Menge des idealen Gases	Für viele Berechnungen, bei denen sich die Menge des idealen Gases nicht verändert, ist folgende Form der Zustandsgleichung nützlich: $\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1}.$ (14.9)
2. Kinetische Gastheorie	
Molekulare Deutung der Temperatur	Die absolute Temperatur T ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Teilchen im idealen Gas.
Gleichverteilungssatz	Wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, dann beträgt pro Freiheitsgrad die mittlere Energie $\frac{1}{2} k_B T$ pro Teilchen bzw. $\frac{1}{2} RT$ pro Mol.
Mittlere kinetische Energie	Beim idealen Gas beträgt die mittlere kinetische Energie pro Teilchen $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$ (14.14)
Summe der kinetischen Energien	Für \tilde{n} mol des idealen Gases mit n Teilchen beträgt die gesamte kinetische Energie der Teilchen $E_{\text{kin}} = n \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = \frac{3}{2} n k_B T = \frac{3}{2} \tilde{n} RT.$ (14.15)
Quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Teilchen	Für den Zusammenhang der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit v_{rms} der Gasteilchen mit der absoluten Temperatur T gilt $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 RT}{m_{\text{Mol}}}}.$ (14.16) Darin ist m die Masse eines Teilchens und m_{Mol} die molare Masse des betreffenden Gases.
Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung	$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)}$ (14.20)
Maxwell-Boltzmann-Energieverteilung	$f(E_{\text{kin}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{E_{\text{kin}}} e^{-E_{\text{kin}}/(k_B T)}$ (14.22)
Mittlere freie Weglänge	Die mittlere freie Weglänge λ eines Teilchens mit dem Durchmesser d ist bei der Anzahldichte n/V an Teilchen pro Volumeneinheit gegeben durch $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} (n/V) \pi d^2}.$ (14.23)
3. Van-der-Waals'sche Gleichung	Die Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung beschreibt das Verhalten realer Gase über einen weiten Bereich von Temperaturen und Drücken. Sie berücksichtigt mit dem Term $b \tilde{n}$ das Volumen der Moleküle selbst und mit dem Term $a \tilde{n}^2/V^2$ die anziehenden Kräfte, die die Moleküle aufeinander ausüben: $\left(p + \frac{a \tilde{n}^2}{V^2} \right) (V - b \tilde{n}) = \tilde{n} RT.$ (14.25)

Antworten auf die Verständnisfragen

- 14.1 In Toms Zimmer befindet sich mehr Luft.
 14.2 Das Volumen nimmt ab.
 14.3 Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit der Heliumatome beträgt etwa 12 % der Fluchtgeschwindigkeit der Erde. Daher haben ausreichend viele Heliumatome eine Geschwindigkeit oberhalb der Fluchtgeschwindigkeit, sodass sie allmählich aus der Atmosphäre entweichen können.

Lösungen der Übungen

- 14.1 a) $\tilde{n} = 4,40 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$, b) $n = 2,65 \cdot 10^{19} \text{ Teilchen}$
 14.2 $\tilde{n} = 0,0793 \text{ mol}$
 14.3 $5,2 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

14.1 • Um welchen Faktor muss die absolute Temperatur eines Gases erhöht werden, damit sich die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit seiner Teilchen verdoppelt?

14.2 • Zwei unterschiedliche Gase haben die gleiche Temperatur. Was können Sie über die quadratisch gemittelten Geschwindigkeiten der Gasteilchen sagen? Was können Sie über die mittleren kinetischen Energien der Teilchen sagen?

14.3 • Wovon hängt die mittlere kinetische Energie der Teilchen des idealen Gases ab: a) von der Anzahl der Mole des Gases und von der Temperatur, b) vom Druck und von der Temperatur, c) allein vom Druck, d) allein von der Temperatur?

14.4 •• Zwei identische Behälter enthalten unterschiedliche ideale Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur. Welche der folgenden Aussagen trifft bzw. treffen dann zu? a) Die Anzahlen der Gasteilchen in beiden Behältern sind gleich. b) Die Gesamtmassen an Gas in beiden Behältern sind gleich. c) Die mittleren Geschwindigkeiten der Gasteilchen in beiden Behältern sind gleich. d) Keine dieser Aussagen trifft zu.

14.5 •• Ein Gefäß enthält eine Mischung aus Helium (He) und Methan (CH_4). Wie groß ist das Verhältnis der quadratisch gemittelten Teilchengeschwindigkeit des Heliums zu der des Methans: a) 1, b) 2, c) 4, d) 16?

14.6 •• Nehmen Sie an, Sie erhöhen die Temperatur einer bestimmten Gasmenge, wobei Sie deren Volumen konstant halten. Erklären Sie im Hinblick auf die Teilchenbewegungen, warum dabei der Druck auf die Wände des Behälters ansteigt.

14.7 •• Dem Phasendiagramm in Abbildung 14.11 kann man entnehmen, wie sich die Schmelz- und die Siedetemperatur von Wasser mit dem äußeren Druck, also auch mit der Höhe über dem Meeresspiegel ändern. a) Erläutern Sie, wie diese Informationen bestätigt werden können. b) Was bedeuten die Ergebnisse für das Kochen von Lebensmitteln in großer Höhe?

14.8 •• Erklären Sie, warum das auf dem Mars gefundene Kohlendioxid sich in dessen Polargebieten in festem Zustand befindet, obwohl der Atmosphärendruck an der Marsoberfläche nur etwa 0,1 % des Atmosphärendrucks auf der Erde beträgt.

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

14.9 •• Die Fluchtgeschwindigkeit auf dem Mars beträgt 5,0 km/s, und die Temperatur an seiner Oberfläche liegt durchschnittlich bei 0 °C. Berechnen Sie die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit von a) H_2 , b) O_2 und c) CO_2 bei dieser

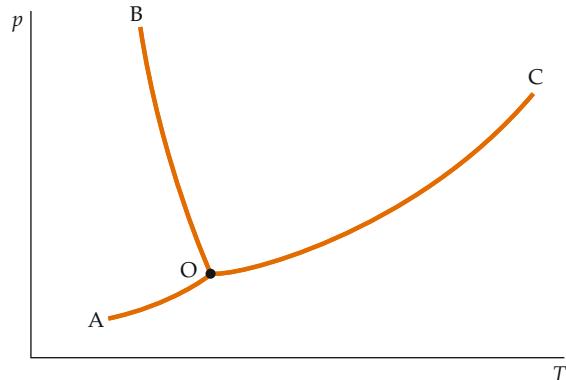


Abbildung 14.11 Zu Aufgabe 14.7.

Temperatur. d) Ist es nach dem in diesem Kapitel erarbeiteten Kriterium wahrscheinlich, dass die Atmosphäre des Mars H_2 , O_2 bzw. CO_2 enthält?

Die Zustandsgleichung für das ideale Gas

14.10 • In einem Zylinder, der mit einem beweglichen Kolben verschlossen ist (Abbildung 14.12), befindet sich eine bestimmte Menge eines idealen Gases bei gleich bleibendem Druck. Um welchen Faktor ändert sich ihr Volumen, wenn die Temperatur von 50 °C auf 100 °C erhöht wird?



Abbildung 14.12 Zu Aufgabe 14.10.

14.11 • Ein 10,0-l-Behälter enthält Gas bei einer Temperatur von 0,00 °C und einem Druck von 4,00 bar. Wie viele Mole Gas befinden sich im Behälter? Wie viele Gasteilchen enthält er?

14.12 •• Eine Autofahrerin pumpt die Reifen ihres Autos auf einen Druck von 180 kPa auf, während die Temperatur bei $-8,0^\circ\text{C}$ liegt. Als sie ihr Fahrziel erreicht hat, ist der Reifendruck auf 245 kPa angestiegen. Wie hoch ist dann die Temperatur der Reifen, wenn a) angenommen wird, dass sie sich nicht ausdehnen; wenn b) angenommen wird, dass sie sich so ausdehnen, dass das Volumen der Luft darin um 7 % zunimmt?

14.13 •• Ein Zimmer hat eine Größe von 6,0 m mal 5,0 m mal 3,0 m. a) Wie viele Mole Luft befinden sich im Zimmer, wenn der Luftdruck bei 1,0 bar liegt und eine Temperatur von 300 K

herrscht? b) Wie viele Mole Luft entweichen aus dem Zimmer, wenn die Temperatur um 5,0 K ansteigt, während der Luftdruck gleich bleibt?

14.14 •• 10,0 g flüssiges Helium mit einer Anfangstemperatur von 4,20 K verdampfen in einen leeren Ballon, der auf einem Druck von 1,00 bar gehalten wird. Wie groß ist das Volumen des Ballons a) bei 25,0 K bzw. b) bei 293 K?

14.15 •• Ein Taucher befindet sich in einem See 40 m tief, wo die Temperatur bei 5,0 °C liegt. Aus seinem Atemgerät entweicht eine Luftblase mit einem Volumen von 15 cm³. Die Blase steigt an die Oberfläche, wo eine Temperatur von 25 °C herrscht. Nehmen Sie an, dass sich die Luft in der Blase stets in thermischem Gleichgewicht mit dem umgebenden Wasser befindet und dass zwischen Luft und Wasser kein Austausch von Molekülen stattfindet. Wie groß ist das Volumen der Luftblase unmittelbar vor dem Erreichen der Wasseroberfläche? (*Hinweis:* Beachten Sie, dass sich nach oben hin auch der Druck ändert.)

14.16 •• Ein unten offener Heißluftballon hat ein Volumen von 446 m³, und die Luft in ihm hat eine mittlere Temperatur von 100 °C. Die Außenluft hat eine Temperatur von 20,0 °C und einen Druck von 1,00 bar. Welche Nutzlast (einschließlich der Ballonhülle) kann der Ballon tragen? Setzen Sie für die Molmasse der Luft 29,0 g/mol an und vernachlässigen Sie das Volumen der Ballonhülle und der Nutzlast.

Die molekulare Geschwindigkeit und der Gleichverteilungssatz

14.17 • Berechnen Sie die kinetische Energie der Moleküle von 1,01 Sauerstoffgas bei einer Temperatur von 0,0 °C und einem Druck von 1,0 bar.

14.18 • Berechnen Sie die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit und die mittlere kinetische Energie von Wasserstoffatomen bei einer Temperatur von $1,0 \cdot 10^7$ K. (Bei dieser Temperatur, die in der Größenordnung der Temperatur im Inneren von Sternen liegt, sind die Wasserstoffatome ionisiert, bestehen also nur aus einem einzelnen Proton.)

14.19 •• Zeigen Sie, dass $f(v)$ gemäß Gleichung 14.20 maximal ist, wenn $v = \sqrt{2 k_B T / m}$ ist. (*Hinweis:* Setzen Sie $df/dv = 0$ und lösen Sie nach v auf.)

Die mittlere freie Weglänge

14.20 • Zeigen Sie, dass die mittlere freie Weglänge eines Teilchens in einem idealen Gas bei der Temperatur T und dem Druck p gegeben ist durch: $\lambda = k_B T / (\sqrt{2} p \pi d^2)$.

14.21 •• Bei einer Temperatur von 300 K und einem Druck von 1,00 bar beträgt die mittlere freie Weglänge von O₂-Molekülen $\lambda = 7,10 \cdot 10^{-8}$ m. Schätzen Sie mithilfe dieser Daten die Größe eines O₂-Moleküls ab.

Die Van-der-Waals-Gleichung für reale Gase

14.22 • Berechnen Sie a) das Volumen von 1,00 mol eines idealen Gases bei einer Temperatur von 100 °C und einem Druck von 1,00 bar sowie b) das Volumen von 1,00 mol Wasserdampf bei denselben Bedingungen. Verwenden Sie hierzu die Van-der-Waals-Koeffizienten $a = 5,50 \text{ l}^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}$ und $b = 30,0 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

14.23 •• Für Helium betragen die Van-der-Waals-Koeffizienten $a = 0,0350 \text{ l}^2 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}$ und $b = 0,02381 \cdot \text{mol}^{-1}$. Berechnen Sie damit das Volumen in Kubikzentimeter, das ein Heliumatom besetzt, und schätzen Sie dessen Radius ab.

Allgemeine Aufgaben

14.24 • a) Verwenden Sie die Definition des Volumenausdehnungskoeffizienten β (bei konstantem Druck) und zeigen Sie, dass für das ideale Gas gilt: $\beta = 1/T$. b) Für Stickstoffgas (N₂) wurde bei 0 °C experimentell der Wert $\beta = 0,003673 \text{ K}^{-1}$ bestimmt. Vergleichen Sie diesen gemessenen Wert von β mit dem theoretischen Wert von $1/T$ für das ideale Gas und geben Sie die prozentuale Abweichung an.

14.25 •• a) Das Volumen, das einem Molekül in einem Gas zur Verfügung steht, ist der Kehrwert der Anzahldichte (d.h. der Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit). Berechnen Sie das mittlere Volumen pro Molekül in trockener Luft bei einem Druck von 1,0 bar. b) Schätzen Sie mithilfe der Quadratwurzel aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a den mittleren Abstand d der Moleküle voneinander grob ab. c) Berechnen oder schätzen Sie den mittleren Durchmesser D der Luftpoleküle und vergleichen Sie ihn mit dem Wert, den Sie in Teilaufgabe b erhalten haben. d) Skizzieren Sie ein würzelförmiges Volumen, in dem sich Luft befindet und das eine Kantenlänge von $3d$ hat. Zeichnen Sie maßstabsgerecht die Moleküle so ein, wie sie Ihrer Meinung nach in einer typischen Momentaufnahme vorliegen. e) Erklären Sie anhand Ihrer Skizze, warum die mittlere freie Weglänge wesentlich größer ist als der mittlere Abstand der Moleküle voneinander.

14.26 •• Ein Zylinder mit konstantem Volumen enthält eine Mischung von Stickstoffgas (N₂) und Wasserstoffgas (H₂). Bei der Temperatur T_1 seien sämtliche Stickstoffmoleküle dissoziiert, jedoch keines der Wasserstoffmoleküle. Der Druck sei dabei p_1 . Wenn die Temperatur auf $T_2 = 2T_1$ verdoppelt wird, dann verdreifacht sich der Druck, weil nun auch alle Wasserstoffmoleküle dissoziiert sind. In welchem Massenverhältnis liegen die beiden Gase im Zylinder vor?

14.27 •• Bei neueren Experimenten mit Atomfallen und Laserkühlung konnte man Gase mit sehr geringer Dichte realisieren, die Rubidium- und andere Atome enthalten, wobei die Temperatur im Bereich von Nanokelvin (nK, 10^{-9} K) lag. Die Atome werden dabei mithilfe von Magnetfeldern und Laserstrahlung in Ultrahochvakuumkammern eingefangen und gekühlt. Eine

Methode zum Messen der Temperatur von derart eingefangen Gasteilchen besteht darin, die Falle abzuschalten und die Zeitspanne zu messen, in der die Gasteilchen eine bestimmte Strecke weit fallen. Nehmen Sie an, ein Gas aus Rubidiumatomen hat eine Temperatur von 120 nK . Berechnen Sie, welche Zeit ein Atom mit der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit des Gases benötigt, um $10,0\text{ cm}$ weit zu fallen, wenn es sich a) anfangs direkt nach unten bewegt bzw. wenn es sich b) anfangs direkt nach oben bewegt. Nehmen Sie an, dass das Atom auf seiner Flugbahn mit keinem anderen Atom zusammenstößt.

14.28 ••• Ein Zylinder ist mit $0,10\text{ mol}$ eines idealen Gases bei Standardbedingungen gefüllt. Ein zunächst fixierter Kolben mit der Masse $1,4\text{ kg}$ (Abbildung 14.13) dichtet den Zylinder gasdicht ab. Die eingeschlossene Gassäule ist $2,4\text{ m}$ hoch. Kolben und Zylinder sind von Luft umgeben, ebenfalls bei Standardbedingungen. Nun wird der Kolben losgelassen und kann absinken, wobei er sich (nach wie vor gasdicht schlie-

ßend) reibungsfrei bewegen kann. Nach einiger Zeit endet die Schwingungsbewegung des Kolbens; nun sind der Kolben und die umgebende Luft in thermischem Gleichgewicht miteinander. a) Berechnen Sie, wie hoch die Gassäule nun ist. b) Nehmen Sie an, der Kolben wird um eine geringe Strecke nach unten gedrückt und dann losgelassen. Nehmen Sie an, dass die Temperatur des Gases konstant bleibt, und berechnen Sie die Frequenz, mit der der Kolben schwingt.



Abbildung 14.13 Zu Aufgabe 14.28.

Wärme und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik

15



Fahrradreifen müssen auf einen deutlich höheren Druck aufgepumpt werden als PKW-Reifen.
(© Ruth, 2006/Pitopia.)

? Warum ist beim Aufpumpen eines Fahrradreifens Arbeit aufzuwenden? (Siehe Beispiel 15.12.)

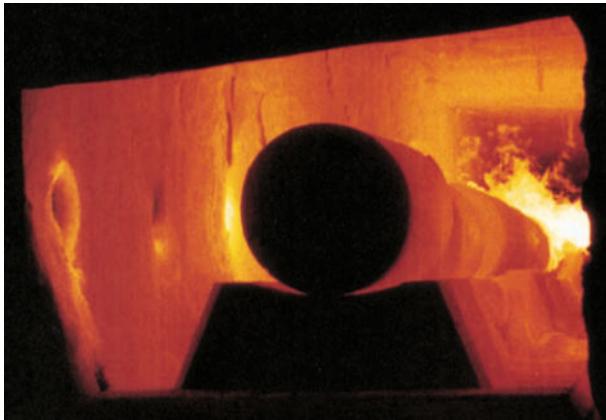
15.1	Wärmekapazität und spezifische Wärmekapazität	568
15.2	Phasenübergänge und latente Wärme	571
15.3	Phasendiagramme	574
15.4	Joules Experiment und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik	575
15.5	Die innere Energie eines idealen Gases	577
15.6	Volumenarbeit und das p - V -Diagramm eines Gases	578
15.7	Wärmekapazitäten von Festkörpern	582
15.8	Wärmekapazitäten von Gasen	583
15.9	Die reversible adiabatische Expansion eines Gases	588
	Zusammenfassung	594
	Aufgaben	596

Die Beziehung zwischen einer Erwärmung eines Systems, einer an ihm verrichteten Arbeit und einer Änderung seiner inneren Energie wird durch den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben. In Teil I dieses Buches haben wir die Bewegung besprochen, nun wenden wir uns der Rolle zu, die die Wärme beim Erzeugen einer Bewegung spielt, sei es bei den zyklischen Bewegungen der Kolben in Motoren oder auch bei den Wassertropfen, die an einem heißen Tag an einem Glas mit kalter Limonade herunterlaufen.

In diesem Kapitel definieren wir die Wärmekapazität und untersuchen, wie die Erwärmung eines Systems entweder dessen Temperatur erhöhen oder in ihm einen Phasenübergang (beispielsweise von fest nach flüssig) bewirken kann. Dann betrachten wir den Zusammenhang zwischen Änderungen der inneren Energie eines Systems und der zu oder von ihm durch Wärme oder Arbeit übertragenen Energie. Dabei formulieren wir den Energieerhaltungssatz als Ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Schließlich sehen wir, wie die spezifische Wärmekapazität einer Substanz mit ihrem molekularen Aufbau zusammenhängt.

15.1 Wärmekapazität und spezifische Wärmekapazität

Wärme ist die Energie, die infolge einer Temperaturdifferenz von einem Gegenstand auf einen anderen übergehen kann. Im 17. Jahrhundert folgten Galileo Galilei, Isaac Newton und andere Forscher der im antiken Griechenland vertretenen Theorie der Atomisten, nach der die Wärme von der Bewegung kleinsten Teilchen herrührt. Im darauffolgenden Jahrhundert entwickelte man Methoden, mit denen die aufgrund von Temperaturdifferenzen übertragene Wärme quantitativ erfasst werden kann. Man stellte fest: Befinden sich zwei Körper in thermischem Kontakt, dann ist die von einem Körper abgegebene Wärmemenge gleich der vom anderen Körper aufgenommenen Wärmemenge. Daraus entstand die Theorie von der Wärme als einem unsichtbaren, flüssigen „Wärmestoff“, der von einem Gegenstand auf einen anderen übergehen kann. Seine Menge sollte



Dieser Stahlblock mit einem Durchmesser von 53 cm wurde in einem Doppelrohrofen 7 h lang auf etwa 1340 °C erhitzt. Er hat eine Masse von 3200 kg und liegt auf einem Wagen, der ihn durch den 81 m langen Ofen transportiert. Dieser ist in zwölf Heizzonen unterteilt, sodass der Stahlblock allmählich erhitzt wird, damit er nicht zerspringt. Hier ist er noch gelblich-weiß glühend und wird anschließend zu einer langen, dickwandigen Röhre gezogen. (© Phoenix Pipe & Tube/Lana Berkovich.)

nach dieser Theorie stets erhalten bleiben, er sollte weder erzeugt noch vernichtet werden können.

Die „Theorie des Wärmestoffs“ hielt sich bis ins 19. Jahrhundert. Dann fand man heraus, dass durch Reibung zwischen Gegenständen praktisch unbegrenzt thermische Energie, also Wärme, erzeugt werden kann. Das widerspricht der Vorstellung eines „Wärmestoffs“ als einer Substanz, die in stets gleich bleibender Menge vorliegt. Erst um 1840 kam die moderne Theorie der Wärme auf. Zu jener Zeit konnte James Joule (1818–1889) zeigen, dass beispielsweise beim intensiven Rühren einer zähen Flüssigkeit eine Zunahme bzw. Abnahme an Wärmeenergie stets mit der Abnahme bzw. Zunahme einer entsprechenden Menge an verrichteter mechanischer Energie einhergeht. Damit war klar geworden, dass die Wärmeenergie selbst keinem Erhaltungssatz unterliegt. Sie ist vielmehr eine Form von innerer Energie, und es ist die gesamte *Energie*, die erhalten bleibt.

Ist ein wärmerer Gegenstand in thermischem Kontakt mit einem kälteren Gegenstand, dann wird **Wärme** auf letzteren übertragen. In diesem erhöht sie die **innere Energie**. Die innere Energie eines Gegenstands ist sein gesamter Energieinhalt in Bezug auf sein Massenmittelpunktssystem. In diesem Buch bezeichnen wir die innere Energie mit U und die Wärme mit Q .

Wird einer Substanzprobe durch Erwärmung Energie zugeführt, dann steigt im Allgemeinen ihre Temperatur. (Anders ist das bei Phasenübergängen wie Schmelzen oder Verdampfen, die wir im nächsten Abschnitt behandeln.) Die für einen Temperaturanstieg ΔT aufzubringende Wärmemenge Q ist proportional zu diesem und zur Masse m der Substanzprobe:

$$Q = mc \Delta T. \quad (15.1)$$

DEFINITION DER SPEZIFISCHEN WÄRMEKAPAZITÄT

Darin ist c die **spezifische Wärmekapazität**, d. h. die Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Substanzmasse $m = 1 \text{ kg}$ um 1 K oder 1°C zu erwärmen. Der Faktor mc ist die gesamte **Wärmekapazität** eines Körpers oder einer Substanzprobe mit der Masse m .

Der Begriff **Wärmekapazität** bedeutet nicht, dass der betreffende Gegenstand eine bestimmte Wärmemenge enthält oder aufnehmen kann.

Als Einheit für die Wärmeenergie wurde zunächst die **Kalorie** als die Wärmemenge definiert, durch die 1 g Wasser um 1°C erwärmt wird. (Wenn die Werte der Verbrennungsenergie von Nahrungsmitteln in „Kalorien“ angegeben werden, so sind stets Kilokalorien gemeint; es ist $1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal}$.) Inzwischen ist die SI-Einheit **Joule** gebräuchlich, wobei gilt:

$$1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}. \quad (15.2)$$

15.1 Wärmekapazität und spezifische Wärmekapazität

Tabelle 15.1 Spezifische Wärmekapazität c und molare Wärmekapazität C einiger Stoffe bei 20 °C und konstantem Druck (1 bar)

Substanz	$\frac{c}{\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$	$\frac{c}{\text{kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$	$\frac{C}{\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$
Aluminium	0,900	0,215	24,3
Bismut	0,123	0,0294	25,7
Blei	0,128	0,0305	26,4
Eis (bei -10 °C)	2,05	0,49	36,9
Ethanol (flüssig)	2,4	0,58	111
Glas	0,840	0,20	-
Gold	0,126	0,0301	25,6
Kupfer	0,386	0,0923	24,5
Quecksilber (flüssig)	0,140	0,033	28,3
Silber	0,223	0,0558	24,9
Wasser (flüssig)	4,18	1,00	75,2
Wasserdampf (gasförmig)	2,02	0,48	36,4
Wolfram	0,134	0,0321	24,8
Zink	0,387	0,0925	25,2

Mit der ursprünglichen Definition der Einheit Kalorie ist die spezifische Wärmekapazität c_W von Wasser

$$\begin{aligned} c_W &= 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot (\text{°C})^{-1} = 1 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot (\text{°C})^{-1} \\ &= 1 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 4,184 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Exakte Messungen zeigten, dass die spezifische Wärmekapazität von Wasser etwas temperaturabhängig ist. Zwischen 0 °C und 100 °C macht dies jedoch nur rund 1 % aus. Wir können diese Abweichungen daher meist vernachlässigen und mit dem hier angegebenen Wert rechnen.

Die Wärmekapazität pro Mol der betreffenden Substanz heißt **molare Wärmekapazität** C . Sie hängt mit der spezifischen Wärmekapazität c folgendermaßen zusammen:

$$C = \frac{m c}{\tilde{n}} = m_{\text{Mol}} c. \quad (15.4)$$

MOLARE WÄRMEKAPAZITÄT

Darin ist $m_{\text{Mol}} = m/\tilde{n}$ die molare Masse und \tilde{n} die Anzahl der Mole der Substanz. In Tabelle 15.1 sind spezifische und molare Wärmekapazitäten einiger Stoffe aufgeführt. Beachten Sie, dass die molaren Wärmekapazitäten aller Metalle ähnlich sind; darauf kommen wir in Abschnitt 15.7 zurück. Beispiel 15.1 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen der Temperaturzunahme und der Wärmekapazität.

Beispiel 15.1: Temperaturerhöhung

Ein Juwelier stellt Amulette aus Gold her. Um das Gold in die Gussform gießen zu können, muss er es schmelzen. Welche Wärmemenge ist nötig, um die

Temperatur von 3,00 kg Gold von 22 °C (Raumtemperatur) auf 1063 °C, den Schmelzpunkt von Gold, zu erwärmen?

Problembeschreibung: Die zum Erwärmen der angegebenen Goldmenge aufzuwendende Wärmemenge Q ist proportional zur Temperaturdifferenz und zur Masse des Goldes.

Lösung: Die erforderliche Wärmemenge ist mithilfe von Gleichung 15.1 zu berechnen. Darin ist $c = 0,126 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (siehe Tabelle 15.1):

$$\begin{aligned} Q &= m c \Delta T \\ &= (3,00 \text{ kg}) \cdot (0,126 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (1041 \text{ K}) \\ &= \boxed{393 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie anhand der Einheit des eingesetzten Werts der spezifischen Wärmekapazität zu erwarten war, erhalten wir die Wärmemenge in der Einheit kJ.

Kommentar: Die eingesetzte Temperaturdifferenz ergibt sich aus $\Delta T = 1063 \text{ °C} - 22 \text{ °C} = 1041 \text{ °C} = 1041 \text{ K}$.

Übung 15.1: Ein 2,0-kg-Block aus Aluminium hat anfangs eine Temperatur von 10 °C. Dann werden ihm 36 kJ Wärmeenergie zugeführt. Welche Temperatur hat er danach? ◀

In Tabelle 15.1 fällt auf, dass die spezifische Wärmekapazität von flüssigem Wasser deutlich höher ist als die der anderen aufgeführten Substanzen. Deswegen ist Wasser ein sehr guter Wärmespeicher, beispielsweise in Solarkollektoren. Entspre-

chend ist es auch als Kühlmittel gut geeignet, beispielsweise in Automotoren (hier ist ihm Ethylenglykol als Frostschutzmittel zugesetzt).

Kalorimetrie

Will man die Wärmekapazität eines Gegenstands ermitteln, so erwärmt man ihn auf irgendeine bekannte Temperatur, z. B. den Siedepunkt des Wassers, und gibt ihn dann in ein Wasserbad, dessen Füllmenge und Anfangstemperatur genau bekannt sind. Nun wartet man thermisches Gleichgewicht ab und misst schließlich die Temperatur des Wasserbads mit dem Gegenstand. Ist das System von der Umgebung thermisch gut isoliert (z. B. durch die Isolation des Wasserbehälters), dann ist die Wärmemenge, die der Gegenstand abgegeben hat, ebenso groß wie die Wärmemenge, die das Wasser und der Behälter aufgenommen haben. Dieses Verfahren nennt man **Kalorimetrie**. Der isolierte Wasserbehälter heißt **Kalorimeter**.

Betrachten wir einen Gegenstand mit der Masse m_G und der spezifischen Wärmekapazität c_G . Seine Anfangstemperatur ist $T_{A,G}$. Die nach dem Erreichen des thermischen Gleichgewichts gemessene Endtemperatur von Gegenstand, Wasser und Behälter ist T_E . Dann ist die Wärmemenge, die der Gegenstand abgegeben hat, gegeben durch

$$Q_{ab} = m_G c_G (T_E - T_{A,G}).$$

Die Anfangstemperatur des Kalimeters mit Wasser und Behälter ist $T_{A,W}$, seine Endtemperatur wegen des thermischen Gleichgewichts mit dem Gegenstand gleich T_E . Daher ist die dem Kalimeter – also dem Wasser (W) und dem Behälter (B) – zugeführte Wärmemenge

$$Q_{zu} = (m_W c_W + m_B c_B) (T_E - T_{A,W}).$$

Darin ist m_W die Masse des Wassers, und $c_W = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. K^{-1} ist seine spezifische Wärmekapazität. Der Behälter hat die Masse m_B und die spezifische Wärmekapazität c_B .

Da keine Wärme von außen zugeführt oder nach außen abgegeben wird, ist die Summe beider Wärmemengen gleich null:

$$Q_{ab} + Q_{zu} = 0 \quad \text{bzw.} \quad Q_{ab} = -Q_{zu}. \quad (15.5)$$

Daraus ergibt sich

$$m_G c_G (T_E - T_{A,G}) = -(m_W c_W + m_B c_B) (T_E - T_{A,W}).$$

In dieser Gleichung treten nur Temperaturdifferenzen auf. Deshalb können die Temperaturen in $^{\circ}\text{C}$ oder in K eingesetzt werden, denn die Einheiten $^{\circ}\text{C}$ und K sind gleich groß. Eine kalorimetrische Messung wird in Beispiel 15.2 ausgewertet.

Beispiel 15.2: Messung einer spezifischen Wärmekapazität

Es soll die spezifische Wärmekapazität von Blei ermittelt werden. Dazu werden 600 g Bleischrot auf $100,0^{\circ}\text{C}$ erhitzt und in ein Aluminiumgefäß mit der Masse 200 g gegeben, in dem sich 500 g Wasser befinden. Die Anfangstemperatur des Kalimeters beträgt $17,3^{\circ}\text{C}$. Nach dem Erreichen des thermischen Gleichgewichts wird eine Endtemperatur von $20,0^{\circ}\text{C}$ gemessen. Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität von Blei? (Die spezifische Wärmekapazität von Aluminium beträgt $0,900 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.)

Problembeschreibung: Es sind zwei Wärmemengen zu berechnen: die vom Blei abgegebene sowie die vom Kalimeter (Wasser und Aluminiumbehälter) aufgenommene. Dann ist Gleichung 15.5 anzuwenden und schließlich nach der spezifischen Wärmekapazität c_{Pb} von Blei aufzulösen.

Lösung: 1. Stellen Sie einen Ausdruck für die vom Blei abgegebene Wärmemenge auf:

$$Q_{ab} = m_{\text{Pb}} c_{\text{Pb}} \Delta T_{\text{Pb}}$$

2. Stellen Sie einen Ausdruck für die vom Wasser aufgenommene Wärmemenge auf:

$$Q_{zu,W} = m_W c_W \Delta T_W$$

3. Stellen Sie einen Ausdruck für die vom Aluminiumbehälter aufgenommene Wärmemenge auf:

$$Q_{zu,Al} = m_{\text{Al}} c_{\text{Al}} \Delta T_{\text{Al}}$$

4. Wenden Sie Gleichung 15.5 an. Dabei ist der Gegenstand der Bleiklotz. Das Kalimeter besteht aus dem Aluminiumbehälter mit dem Wasser:

$$Q_{ab} = -(Q_{zu,W} + Q_{zu,Al})$$

$$m_{\text{Pb}} c_{\text{Pb}} \Delta T_{\text{Pb}} = -(m_W c_W \Delta T_W + m_{\text{Al}} c_{\text{Al}} \Delta T_{\text{Al}})$$

Darin ist

$$\Delta T_{\text{Al}} = \Delta T_W = 2,7 \text{ K} \quad \text{und} \quad \Delta T_{\text{Pb}} = -80,0 \text{ K}$$

5. Lösen Sie nach c_{Pb} auf und setzen Sie die Werte ein:

$$\begin{aligned} c_{\text{Pb}} &= \frac{-(m_W c_W + m_{\text{Al}} c_{\text{Al}}) \Delta T_W}{m_{\text{Pb}} \Delta T_{\text{Pb}}} \\ &= \frac{-(0,50 \text{ kg}) \cdot (4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (2,7 \text{ K})}{(0,600 \text{ kg}) \cdot (-80,0 \text{ K})} \\ &\quad - \frac{(0,20 \text{ kg}) \cdot (0,90 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (2,7 \text{ K})}{(0,600 \text{ kg}) \cdot (-80 \text{ K})} \\ &= 0,128 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = \boxed{0,13 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} \end{aligned}$$

Kommentar: Beachten Sie, dass die spezifische Wärmekapazität von Blei wesentlich geringer ist als die von Wasser, die $4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ beträgt.

Weitergedacht: Das Ergebnis von Schritt 5 ist mit zwei gültigen Stellen anzugeben, da die Temperaturdifferenz auch nicht genauer errechnet wurde.

Übung 15.2: Ein mit Sonnenenergie beheiztes Haus besteht u. a. aus $1,00 \cdot 10^5 \text{ kg}$ Beton (spezifische Wärmekapazität $1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Wie viel Wärme gibt diese Betonmenge ab, wenn sie von 25°C auf 20°C abkühlt? ■



Beim Schmelzen erfährt das Wasser einen Phasenübergang. Seine Temperatur ändert sich dabei nicht. (© Donald Wink, Sharon Gislason und Sheila McNicholas, The Practice of Chemistry, W. H. Freeman and Company, 2002.)

15.2 Phasenübergänge und latente Wärme

Wenn ein Eiswürfel bei 0°C Wärme aufnimmt, dann erhöht seine Temperatur sich nicht, sondern er schmilzt. Der Schmelzvorgang ist ein Beispiel für einen **Phasenübergang**. Zu den wichtigsten Phasenübergängen gehören Erstarren (flüssig \rightarrow fest), Schmelzen (fest \rightarrow flüssig), Verdampfen (flüssig \rightarrow gasförmig), Kondensieren (gasförmig \rightarrow flüssig) und Sublimieren (fest \rightarrow gasförmig, beispielsweise wenn festes Kohlendioxid, auch „Trockeneis“ genannt, bei Atmosphärendruck direkt in die Gasphase übergeht). Andere Arten von Phasenübergängen sind die zwischen verschiedenen Kristallmodifikationen bei manchen Festkörpern. So kann Kohlenstoff (Graphit) unter hohem Druck zu Diamant werden.

Anhand des molekularen Aufbaus der Substanzen kann man sich klar machen, warum sich die Temperatur während eines Phasenübergangs nicht ändert. In einer Flüssigkeit sind die Teilchen relativ nahe beieinander und üben daher Anziehungskräfte aufeinander aus. Dagegen sind sie in der Gasphase wesentlich weiter voneinander entfernt. Daher muss beim Verdampfen Arbeit gegen die Anziehungskräfte verrichtet werden, um die Teilchen voneinander zu entfernen. Nehmen Sie an, ein Topf mit kaltem Wasser wird auf eine heiße Herdplatte gestellt. Zunächst nimmt bei der Wärmezufuhr die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen zu: Die Temperatur steigt an. Sobald die Siedetemperatur erreicht ist, können die Teilchen in der Flüssigkeit keine höhere kinetische Energie mehr annehmen, ohne aus ihr auszutreten. Wenn das Wasser verdampft, dient die zugeführte Energie dazu, die Anziehungskräfte zwischen den Teilchen zu überwinden. Sie treten daher in die Gasphase über, in der sie weiter voneinander entfernt sind. Dabei nimmt ihre potentielle Energie anstatt ihrer kinetischen Energie zu. Da die Temperatur ein Maß für die mittlere *kinetische* Energie der Teilchen ist, ändert sich die Temperatur nicht.

Bei einer reinen Substanz finden die verschiedenen Phasenübergänge jeweils bei einer ganz bestimmten Temperatur statt. Beispielsweise siedet Wasser unter Atmosphärendruck bei 100°C , seinem normalen Siedepunkt, und es schmilzt bei 0°C , seinem normalen Schmelzpunkt.

Die Wärmeenergie, die zum Schmelzen einer Substanzprobe mit der Masse m zugeführt werden muss, ohne dass eine Temperaturänderung eintritt, ist proportional zur Masse der Substanzprobe:

$$Q_S = m \lambda_S . \quad (15.6)$$

Da sich während des Phasenübergangs die Temperatur nicht erhöht, nennt man die für die Umwandlung nötige Wärme **latente Wärme** (*latent* = verborgen). Hier ist λ_S die **spezifische Schmelzwärme** der betreffenden Substanz. Für Wasser beträgt sie bei Atmosphärendruck $333,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Für den Übergang von der Flüssigkeit zur Gasphase ist die Wärmemenge

$$Q_D = m \lambda_D . \quad (15.7)$$

zuzuführen. Darin ist λ_D die **spezifische Verdampfungswärme**. Auch sie ist eine latente Wärme. Für Wasser hat sie bei Atmosphärendruck den Wert $2,26 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ bzw. $540 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1}$. In Tabelle 15.2 sind für einige Substanzen der Schmelzpunkt und der Siedepunkt sowie die spezifische Schmelzwärme und die spezifische Verdampfungswärme zusammengestellt. In den Beispielen 15.3 und 15.4 wird deutlich, wie viel die latente Wärme beim Schmelzen und beim Verdampfen von Eis ausmacht.

Tabelle 15.2 Normaler Schmelzpunkt (T_{Smp}) und Siedepunkt (T_{Sdp}) sowie spezifische Schmelzwärme λ_S und spezifische Verdampfungswärme λ_D einiger Substanzen bei Atmosphärendruck*

Substanz	T_{Smp} K	λ_S $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	T_{Sdp} K	λ_D $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
Blei	600	24,7	2023	858
Brom	266	67,4	332	369
Ethanol	159	109	351	879
Gold	1336	62,8	3081	1701
Helium	–	–	4,2	21
Kohlendioxid	–	–	194,6	573
Kupfer	1356	205	2839	4726
Quecksilber	234	11,3	630	296
Sauerstoff	54,4	13,8	90,2	213
Schwefel	388	38,5	717,75	287
Silber	1234	105	2436	2323
Stickstoff	63	25,7	77,35	199
Wasser (flüssig)	273,15	333,5	373,15	2257
Zink	692	102	1184	1768

* Die Werte für Kohlendioxid beziehen sich auf die Sublimation, weil flüssiges CO₂ bei Atmosphärendruck nicht existent ist.

Beispiel 15.3: Eis zu Wasserdampf machen

Welche Wärmemenge ist nötig, um 1,5 kg Eis der Temperatur -20°C bei 1,0 bar in Wasserdampf zu überführen?

Problembeschreibung: Die hierfür insgesamt aufzubringende Wärmemenge lässt sich in vier „Portionen“ aufteilen: Q_1 zum Erhöhen der Temperatur des Eises von -20°C auf 0°C ; Q_2 zum Schmelzen des Eises; Q_3 zum Erwärmen des Wassers von 0°C auf 100°C ; Q_4 zum Verdampfen des Wassers. Beim Berechnen der Wärmemengen Q_1 und Q_3 kann man annehmen, dass sich die jeweilige spezifische Wärmekapazität im betreffenden Temperaturbereich nicht ändert. Daher ist hier $c_{\text{Eis}} = 2,05 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ und $c_W = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Lösung: 1. Ermitteln Sie mit der Beziehung $Q_1 = m_{\text{Eis}} c_{\text{Eis}} \Delta T$ die Wärmemenge zum Erwärmen des Eises auf 0°C :

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_{\text{Eis}} c_{\text{Eis}} \Delta T \\ &= (1,5 \text{ kg}) \cdot (2,05 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (20 \text{ K}) \\ &= 61,5 \text{ kJ} = 0,0615 \text{ MJ} \end{aligned}$$

2. Die spezifische Schmelzwärme λ_S entnehmen Sie Tabelle 15.2. Damit errechnen Sie die zum Schmelzen des Eises nötige Wärmemenge Q_2 :

$$\begin{aligned} Q_2 &= m_{\text{Eis}} \lambda_S = (1,5 \text{ kg}) \cdot (333,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}) \\ &= 500 \text{ kJ} = 0,500 \text{ MJ} \end{aligned}$$

3. Nun berechnen Sie die Wärmemenge Q_3 zum Erhöhen der Temperatur des Wassers von 0°C auf 100°C :

$$\begin{aligned} Q_3 &= m_W c_W \Delta T \\ &= (1,5 \text{ kg}) \cdot (4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (100 \text{ K}) \\ &= 627 \text{ kJ} = 0,627 \text{ MJ} \end{aligned}$$

4. Der Tabelle 15.2 entnehmen Sie die spezifische Verdampfungswärme λ_D des Wassers und berechnen damit die zum Verdampfen nötige Wärmemenge:

$$\begin{aligned} Q_4 &= m_W \lambda_D = (1,5 \text{ kg}) \cdot (2,26 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}) \\ &= 3,39 \text{ MJ} \end{aligned}$$

5. Die Summe aller vier Wärmemengen ist die gesuchte gesamte Wärmemenge:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 4,6 \text{ MJ}$$

Plausibilitätsprüfung: Sie haben sicher schon beobachtet, dass Sie schneller eine bestimmte Wassermenge zum Kochen bringen als den Topf „trocken“ zu kochen, bis das gesamte Wasser verdampft ist. Dieser Befund entspricht der Tatsache, dass das Ergebnis von Schritt 3 weniger als 20 % des Ergebnisses von Schritt 4 ausmacht.

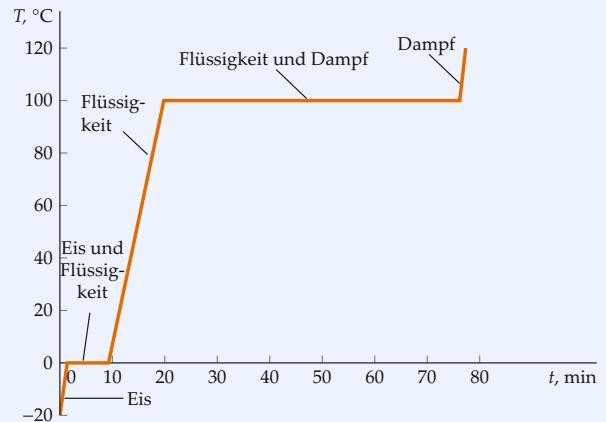


Abbildung 15.1 Eine Wassermenge von 1,5 kg wird von -20°C auf 120°C erwärmt, wobei konstant 60 kJ pro Minute zugeführt werden.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass der größte Teil der aufzuwendenden Wärmemenge zum Verdampfen benötigt wird und dass die zum Schmelzen des Eises erforderliche Wärmemenge nicht viel kleiner ist als die zum Erwärmen des Wassers um 100°C nötige. Abbildung 15.1 zeigt den zeitlichen Temperaturverlauf, wenn pro Minute 60 kJ an Wärmeenergie zugeführt werden. Wie Sie sehen, dauert es bei konstanter Wärmezufuhr bedeutend länger, das

Wasser zu verdampfen als das Eis zu schmelzen oder das Wasser um 100 °C zu erwärmen. Wenn die gesamte Wassermenge verdampft ist, steigt die Temperatur bei weiterer Wärmezufuhr wieder an.

Übung 15.3: Ein Stück Blei mit der Masse 830 g wurde exakt bis zum Schmelzpunkt (600 K) erwärmt. Welche Wärmeenergie muss danach zugeführt werden, um es vollständig zu schmelzen? ■

Beispiel 15.4: Ein kühler Drink

Ein 2,0-l-Krug mit Limonade stand bei einer Temperatur von 33 °C den ganzen Tag auf einem Gartentisch in der Sonne. Sie gießen nun 0,24 kg der Limonade in einen Styroporbecher und geben zwei Eiswürfel hinein, die jeweils 0,025 kg schwer sind und eine Temperatur von 0,0 °C haben. a) Welche Temperatur hat die Limonade im Becher, nachdem sich thermisches Gleichgewicht eingestellt hat? Nehmen Sie dabei an, dass keine Wärme an die Umgebung abgeführt wird. b) Wie hoch wird die Endtemperatur sein, wenn Sie sechs Eiswürfel anstatt nur zwei in den Becher geben? (Vernachlässigen Sie bei Ihrer Rechnung die Abkühlung des Styroporbechers und betrachten Sie ihn als einen Gegenstand mit einer spezifischen Wärmekapazität von 0.)

Problembeschreibung: Die von der Limonade abgegebene Wärmemenge und die von den beiden Eiswürfeln aufgenommene Wärmemenge addieren sich zu null. Bezeichnen Sie die Endtemperatur von Limonade und Wasser im Becher mit T_E . Ferner können Sie annehmen, dass die Limonade dieselbe spezifische Wärmekapazität c_W hat wie das Wasser.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die von der Limonade (Li) bis zum Erreichen der Endtemperatur T_E abgegebene Wärmemenge ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= m_{Li} c_W \Delta T_{Li} \\ &= m_{Li} c_W (T_E - T_{A,Li}) \end{aligned}$$

2. Die von den Eiswürfeln und dem daraus beim Schmelzen entstandenen Wasser (W) aufgenommene Wärmemenge ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} Q_{zu} &= m_{Eis} \lambda_{S,Eis} + m_{Eis} c_W \Delta T_W \\ &= m_{Eis} \lambda_{S,Eis} + m_{Eis} c_W (T_E - T_{A,Eis}) \end{aligned}$$

3. Die abgegebene Wärmemenge und die aufgenommene Wärmemenge addieren sich zu null. Damit ergibt sich

$$Q_{ab} = -Q_{zu}$$

$$m_{Li} c_W (T_E - T_{A,Li})$$

$$= -m_{Eis} \lambda_{S,Eis} - m_{Eis} c_W (T_E - T_{A,Eis})$$

Setzen Sie die Temperaturen in Kelvin ein, sodass $T_{A,Eis} = 273,15 \text{ K}$ ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} T_E &= \frac{m_{Eis} T_{A,Eis} + m_{Li} T_{A,Li}}{m_{Eis} + m_{Li}} - \frac{m_{Eis} \lambda_{S,Eis}}{(m_{Eis} + m_{Li}) c_W} \\ &= \frac{(0,050 \text{ kg}) \cdot (273,15 \text{ K}) + (0,24 \text{ kg}) \cdot (306,15 \text{ K})}{0,29 \text{ kg}} \\ &\quad - \frac{(0,050 \text{ kg}) \cdot (333,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1})}{(0,29 \text{ kg}) \cdot (4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})} \\ &= 286,7 \text{ K} = \boxed{14 \text{ °C}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Wenn sechs Eiswürfel zugegeben werden, können Sie mit $m_{Eis} = 0,15 \text{ kg}$ die Endtemperatur auf dieselbe Weise wie in Schritt 3 der Teilaufgabe a errechnen:

$$T_E = 262,8 \text{ K} = -10,4 \text{ °C}$$

2. Eine negative Temperatur kann nicht stimmen! Keine noch so große Eismenge mit einer Temperatur von 0 °C kann die warme Limonade unter 0 °C herabkühlen. Wo liegt der Fehler? – Nun, Sie haben in Schritt 2 von Teilaufgabe a angenommen, dass die ganze Eismenge schmilzt. Das ist hier nicht der Fall. Vielmehr reicht die Wärmemenge, die von der Limonade beim Abkühlen von 33 °C auf 0 °C abgegeben wird, nicht dazu aus, das ganze Eis zu schmelzen. Daher ist die Endtemperatur:

$$T_E = \boxed{0 \text{ °C}}$$

Plausibilitätsprüfung: Berechnen wir nun, wie viel Eis schmilzt. Damit die Limonade von 33 °C auf 0 °C abkühlt, muss sie die Wärmemenge $Q = (0,24 \text{ kg}) \cdot (4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot (\text{°C})^{-1}) \cdot (33 \text{ °C}) = 33,1 \text{ kJ}$ abgeben. Die Masse an Eis, die dadurch geschmolzen wird, ist $m_{Eis} = Q_{zu} / \lambda_{S,Eis} = (33,1 \text{ kJ}) / (333,5 \text{ kJ/kg}) = 0,10 \text{ kg}$. Das ist die Masse von nur vier Eiswürfeln. Die Zugabe von zwei zusätzlichen Eiswürfeln mit einer Temperatur von 0 °C senkt die Temperatur nicht unter 0 °C ab, sondern erhöht nur die Menge an Eis, die sich zum Schluss bei dieser Temperatur in der Limonade-Wasser-Mischung befindet. Bei derartigen Aufgaben ist daher immer zuerst zu prüfen, wie viel Eis schmelzen muss, um die Temperatur der Flüssigkeit auf 0 °C zu senken. Wenn eine geringere als diese Menge an Eis zugegeben wird, kann man wie in der Teilaufgabe a vorgehen. Wird aber mehr Eis mit einer Temperatur von 0 °C zugegeben, dann ist die Endtemperatur stets 0 °C. ■

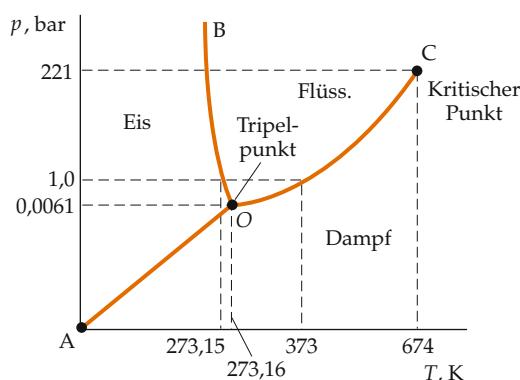


Abbildung 15.2 Das Phasendiagramm des Wassers. Druck und Temperatur sind nicht linear aufgetragen, sondern die Maßstäbe sind in der Nähe des Tripelpunkts zur Verdeutlichung gedehnt. Die drei Phasengrenzlinien sind: Dampfdruckkurve OC , Schmelzdruckkurve OB und Sublimationsdruckkurve OA .

15.3 Phasendiagramme

Trägt man den Druck einer Substanz bei konstantem Volumen gegen die Temperatur auf, erhält man ihr **Phasendiagramm**. Für Wasser ist es in Abbildung 15.2 gezeigt. Die Kurve OC beschreibt darin die Temperaturabhängigkeit des Sättigungsdampfdrucks. Beim Erwärmen eines teilweise mit Wasser gefüllten Behälters konstanten Volumens nimmt die Dichte des flüssigen Wassers ab, und die des Dampfs steigt. Am Punkt C haben Flüssigkeit und Dampf dieselbe Dichte; dies ist der **kritische Punkt**. Bei der kritischen Temperatur und darüber sind Flüssigkeit und Gas nicht zu unterscheiden. In Tabelle 15.3 sind die kritischen Temperaturen einiger Substanzen aufgeführt. Beachten Sie, dass ein Gas nur unterhalb seiner kritischen Temperatur verflüssigt werden kann.

Wir kühlen nun den mit Wasser gefüllten Behälter ab. Dadurch wird etwas Wasserdampf kondensieren. Wir bewegen uns in Abbildung 15.2 auf der Kurve OC nach links, zu tieferen Temperaturen hin, bis der Punkt O erreicht ist. Hier beginnt das Wasser fest zu werden. Dieser Punkt O ist der **Tripelpunkt**. An ihm stehen alle drei Phasen (feste, flüssige und gasförmige Phase) miteinander im Gleichgewicht. Jede Substanz hat einen für sie charakteristischen Tripelpunkt. Für Wasser liegt er bei $273,16\text{ K} = 0,01\text{ }^\circ\text{C}$ und $6,105\text{ mbar}$.

Bei geringeren Drücken und Temperaturen als denen am Tripelpunkt kann keine flüssige Phase existieren. Die Kurve OA im Phasendiagramm von Abbildung 15.2 stellt sämtliche p - T -Wertepaare dar, bei denen Festkörper und Gas im Gleichgewicht koexistieren können. Den direkten Übergang vom festen in den gasförmigen Zustand nennt man **Sublimation**. Man kann sie beispielsweise beobachten, wenn man einige Eiswürfel offen in das Gefrierfach eines Kühlschranks mit Defrostereinrichtung legt. Mit der Zeit werden die Eiswürfel immer kleiner, bis sie ganz verschwunden sind. Hier kann sich nämlich niemals ein Gleichgewicht zwischen Eis und Dampf einstellen, weil der Atmosphärendruck weit über dem Druck am Tripelpunkt des

Tabelle 15.3 Die kritische Temperatur einiger Substanzen

T_k , K
700
Wasser: 647,4
600
Schwefeldioxid: 430,9
Chlor: 417,12
500
Kohlendioxid: 304,2
400
Stickstoffoxid: 180,2
Sauerstoff: 154,8
Argon: 150,8
300
Neon: 44,4
Wasserstoff: 33,3
200
Helium: 5,3
100
0

Wassers liegt. Der Tripelpunkt von Kohlendioxid (CO_2) liegt bei $216,55\text{ K}$ und $5,17\text{ bar}$. Deswegen kann flüssiges CO_2 nur bei Drücken oberhalb von $5,17\text{ bar}$ existieren. Bei Atmosphärendruck kann festes Kohlendioxid nicht schmelzen, sondern es sublimiert, d. h. geht direkt in den gasförmigen Zustand über. Daher röhrt auch seine Bezeichnung als „Trockeneis“.

Die Schmelzdruckkurve OB in Abbildung 15.2 ist die Phasengrenzlinie zwischen festem und flüssigem Zustand. Sie hat bei Wasser eine negative Steigung (ist also nach links geneigt). Das bedeutet, die Schmelztemperatur nimmt mit steigendem Druck ab, anders als bei den meisten anderen Substanzen. Dies ist die schon erwähnte Anomalie des Wassers (vgl. Abbildung 13.9). Bei den meisten anderen Substanzen steigt die Schmelztemperatur mit zunehmendem Druck an, und die Schmelzdruckkurve hat eine positive Steigung, d. h., sie ist nach rechts geneigt.

Ein Molekül benötigt beim Verdampfen eine bestimmte Energie, um aus der Flüssigkeitsoberfläche in die Gasphase zu entweichen, denn es muss dabei die zwischen den Molekülen ausgeübten anziehenden Kräfte überwinden. Da nur die energiereichsten Moleküle in den Dampf gelangen, sinkt die mittlere Geschwindigkeit der verbleibenden Moleküle ab. Daher geht die Verdampfung mit einer Abkühlung der restlichen Flüssigkeit einher. Wird der Flüssigkeit beim Sieden laufend Wärme zugeführt, bewirkt der gleichzeitige Energieverlust infolge der Verdampfung ein Gleichbleiben der Temperatur am Siedepunkt. Dieser Effekt kann beim Kalibrieren von Thermometern aus-

genutzt werden. Man kann eine Flüssigkeit, beispielsweise Wasser, auch ohne Wärmezufuhr verdampfen. Dazu braucht man nur den Druck im Behälter zu vermindern, indem man den entweichenden Dampf abpumpt. Die zum Verdampfen nötige Energie wird der restlichen Flüssigkeit entzogen, die sich dabei abkühlt. Dann kann sich auf siedendem Wasser sogar Eis bilden!

15.4 Joules Experiment und der Erste Hauptsatz der Thermodynamik

Wir können die Temperatur eines Systems erhöhen, indem wir ihm Wärme zuführen, aber auch, indem wir ihm Arbeit zuführen.

In Abbildung 15.3 ist das Prinzip der Apparatur dargestellt, mit der James Joule sein berühmtes Experiment durchführte. Dabei ermittelte er die Arbeit, die nötig war, um einer bestimmten Wassermenge eine bestimmte Temperaturerhöhung zu verleihen. Das System besteht u. a. aus einem thermisch isolierten Behälter, in dem sich die betreffende Wassermenge befindet. In Joules Apparatur wird die potentielle Energie der herabfallenden Gewichtsstücke in Arbeit umgesetzt. Die Arbeit wird dabei von einem Schaufelrad verrichtet, das von den fallenden Gewichtsstücken in Drehung versetzt wird, wie in der Abbildung gezeigt. Joule stellte fest, dass er die Temperatur seiner 1 Pfund schweren Wasserprobe um 1 Grad Fahrenheit erhöhen konnte, indem er 772 Pfund schwere Gewichtsstücke 1 Fuß weit herabfallen ließ. In moderne Einheiten umgerechnet: Es ist eine Energiemenge von rund 4,184 J nötig, um die Temperatur von 1 g Wasser um 1 °C zu erhöhen. Früher sprach man vom „mechanischen Wärmeäquivalent“, weil der mechanischen Arbeit 4,184 J eine bestimmte Wärmemenge entspricht (in der früher gebräuchlichen Einheit: 1 cal).

Wir können einem solchen System auch auf andere Art Arbeit zuführen. Beispielsweise können wir die Gravitationskraft direkt ausnutzen und den thermisch isolierten Wasserbehälter aus einer bestimmten Höhe herunterfallen lassen, sodass er am Boden einen inelastischen Stoß erfährt (siehe Beispiel 15.5). Oder wir können mit einem Generator mechanische Energie in elektrische umsetzen und diese zum Erwärmen des Wassers nutzen (Abbildung 15.4). Bei allen derartigen Experimenten wird zum Erzielen einer bestimmten Temperaturerhöhung am gleichen System dieselbe Menge an Arbeit benötigt. Wegen der Energieerhaltung ist die zugeführte Arbeit gleich der Zunahme der inneren Energie des Systems.

Frage 15.1

Das Experiment von Joule verdeutlicht die Gleichwertigkeit von Wärme und Arbeit, die sich in der Umwandlung von Arbeit in Wärme bzw. innere Energie zeigt. Nennen Sie einige Beispiele, bei denen innere Energie eines Systems in Arbeit umgesetzt wird.



Abbildung 15.3 Schema der Apparatur von Joules Experiment. Das Wasser ist von einer thermisch isolierenden Wandung umgeben, sodass keine Wärme übertragen werden kann. Während die Gewichtsstücke mit konstanter Geschwindigkeit herabfallen, drehen sie über die Seile und die Walze das Schaufelrad im Wasser. Dieses verrichtet dadurch Arbeit am Wasser. Vernachlässigt man die Reibung, dann ist die vom Schaufelrad auf das Wasser übertragene Arbeit gleich der Abnahme der potenziellen Energie der Gewichtsstücke. Sie ist aus ihren Massen und der Höhendifferenz leicht zu berechnen.

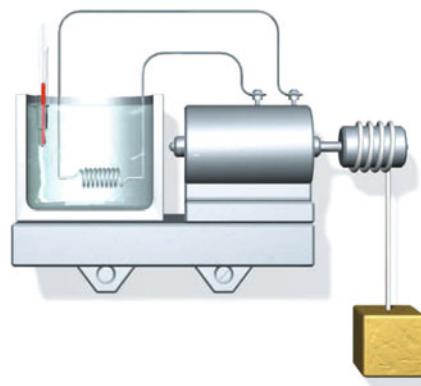


Abbildung 15.4 Eine andere Methode, einem thermisch isolierten, mit Wasser gefüllten Behälter Arbeit bzw. Energie zuzuführen. Hier wird dem System elektrische Energie zugeführt. Diese wird von einem Generator abgegeben, der vom herabfallenden Gewichtsstück angetrieben wird.

Beispiel 15.5: Erwärmung durch inelastischen Stoß beim Fallen

- Setzen Sie die Fallhöhe des Wassers in den Niagarafällen zu 50 m an. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Verringerung der potenziellen Energie der Gravitation gleich der Zunahme der inneren Energie des Wassers ist, den Temperaturanstieg beim Auftreffen.
- Die Fallhöhe beim großen Wasserfall des Yosemite-Parks beträgt 740 m. Berechnen Sie unter derselben Annahme wie in Teilaufgabe a auch hier den Temperaturanstieg.

Problembeschreibung: Die kinetische Energie des Wassers unmittelbar vor dem Aufschlag ist gleich der ursprünglichen potenziellen Energie mgh . Während des Stoßes wird diese Energie in thermische Energie Q umgesetzt, die zu einer Temperaturerhöhung ΔT führt. Dabei gilt $Q = mc_w \Delta T$.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Setzen Sie die potentielle Energie gleich der Zunahme der thermischen Energie:

$$mgh = mc_w \Delta T$$

- Lösen Sie nach der Temperaturänderung auf:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{gh}{c_w} = \frac{(9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) \cdot (50 \text{ m})}{4,184 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} \\ &= 0,117 \text{ K} = \boxed{0,12 \text{ K}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Wiederholen Sie die Berechnung für $h = 740 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{gh}{c_w} = \frac{(9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}) \cdot (740 \text{ m})}{4,184 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} \\ &= 1,74 \text{ K} = \boxed{1,7 \text{ K}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Da die Fallhöhe im Yosemite-Park 14,8-mal höher ist als bei den Niagarafällen, ist die Änderung der potenziellen Energie des Wassers um denselben Faktor höher. Daher sollten sich auch die Temperaturzunahmen um diesen Faktor unterscheiden. Multiplizieren von 0,117 K mit 14,8 ergibt 1,73 K, was sehr nahe am Ergebnis von Teilaufgabe b liegt.

Weitergedacht: Die errechneten Temperaturen sind jedoch kaum zu beobachten, da während des Herabstürzens des Wassers auch einige andere Effekte auftreten. Beispielsweise kühlte sich das Wasser durch teilweise Verdampfung ab und wird andererseits dadurch erwärmt, dass die umgebende Luft infolge der Wechselwirkungen aufgrund der Viskositäten an ihm Arbeit verrichtet. Die Ergebnisse illustrieren jedoch die Schwierigkeiten bei Joules Experiment: Es muss eine große Menge an mechanischer Energie umgesetzt werden, damit sich eine messbare Temperaturzunahme einstellt. ■

Nun wiederholen wir Joules Experiment, jedoch mit thermisch nicht isolierten, sondern leitenden Behälterwänden. Beispiel 15.6 illustriert einen solchen Versuch. Dann zeigt

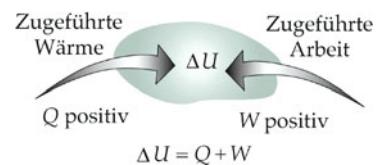


Abbildung 15.5 Die Vorzeichenkonvention für den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Dem System zugeführte Energiemengen werden stets positiv und vom System abgegebene Energiemengen stets negativ gerechnet.

sich, dass zum Erzielen einer bestimmten Temperaturerhöhung des Systems verschiedene Mengen an Arbeit zuzuführen sind, je nachdem, wie viel Wärme das System infolge von Wärmeleitung durch die Wände von der Umgebung aufnimmt oder an sie abgibt. Die Summe der dem System zugeführten Arbeit und der von ihm netto aufgenommenen Wärmemenge ist jedoch bei derselben Temperaturdifferenz stets die gleiche. Mit anderen Worten: Die Summe der dem System zugeführten Arbeit und der ihm netto zugeführten Wärmeenergie ist gleich der Änderung seiner inneren Energie. Das ist der **Erste Hauptsatz der Thermodynamik**, der damit nur eine andere Formulierung des Energieerhaltungssatzes darstellt.

Wir bezeichnen mit W die zwischen System und Umgebung ausgetauschte Arbeit. Sie ist positiv, wenn dem System Arbeit zugeführt wird, jedoch negativ, wenn der Umgebung Arbeit zugeführt, also Arbeit vom System verrichtet wird. Nehmen wir als System einen gasgefüllten Zylinder an, der von einem beweglichen Kolben verschlossen ist. Wenn der Kolben das Gas komprimiert, dann wird von der Umgebung am System Arbeit verrichtet und W ist positiv. (Wenn sich das Gas jedoch gegen den äußeren Druck des Kolbens ausdehnt, dann ist W negativ, weil das System nun Arbeit verrichtet bzw. abführt.) Entsprechend schreiben wir Q für die zwischen System und Umgebung ausgetauschte Wärme. Wird dem System Wärme zugeführt, dann ist Q positiv, bei Wärmeabfuhr aus dem System ist Q negativ (Abbildung 15.5).

Wenn wir diese Konventionen berücksichtigen und ΔU für die Änderung der inneren Energie schreiben, lautet der Erste Hauptsatz der Thermodynamik folgendermaßen:

$$\Delta U = Q + W. \quad (15.8)$$

Die Änderung ΔU der inneren Energie eines Systems ist gleich der Summe der ihm netto zugeführten Wärme Q und der ihm netto zugeführten Arbeit W .

ERSTER HAUPTSATZ DER THERMODYNAMIK

Gleichung 15.8 ist nichts anderes als der in Kapitel 5 behandelte verallgemeinerte Energiesatz der Mechanik. Hier ist nur die Wärmeenergie Q hinzugekommen, und die innere Energie ist mit U bezeichnet.

Beispiel 15.6: Wasser „warm röhren“

Nehmen Sie an, Sie verrichten durch Röhren 25 000 N · m Arbeit an einem System, das 3,0 kg Wasser enthält. Währenddessen verliert das System wegen der schlechten thermischen Isolation eine Wärmemenge von 62,7 kJ. Um wie viel ändert sich die innere Energie des Systems insgesamt?

Problembeschreibung: Es sind sämtliche Energien in Kilojoule (kJ) auszudrücken bzw. darin umzurechnen. Dann ist der Erste Hauptsatz der Thermodynamik anzuwenden.

Lösung: 1. Berechnen Sie ΔU nach dem Ersten Hauptsatz:

$$\Delta U = Q + W$$

2. Es wird Wärme abgeführt, daher ist die netto zugeführte Wärme Q negativ:

$$Q = -62,7 \text{ kJ}$$

3. Dem System wird Arbeit zugeführt, daher ist W positiv. Zudem ist $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$:

$$W = 25\,000 \text{ N} \cdot \text{m} = 25\,000 \text{ J} = 25 \text{ kJ}$$

4. Setzen Sie die Werte ein:

$$\begin{aligned}\Delta U &= Q + W = (-62,7 \text{ kJ}) + (25 \text{ kJ}) \\ &= -37,7 \text{ kJ} = \boxed{-38 \text{ kJ}}\end{aligned}$$

Kommentar: Die innere Energie nimmt ab, weil die abgegebene Wärmemenge größer ist als die zugeführte mechanische Arbeit. ■

Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die innere Energie U eine sogenannte Zustandsgröße oder Zustandsfunktion ist. Ebenso sind auch der Druck p , das Volumen V und die Temperatur T Zustandsfunktionen. Betrachten wir eine bestimmte Menge eines Gases im Anfangszustand (p_1, V_1). Dann ist seine Temperatur T_1 durch die Zustandsgleichung gegeben. Wenn ein ideales Gas vorliegt, ist $T_1 = p_1 V_1 / (\tilde{n} R)$. Die innere Energie U hängt ebenfalls nur vom Zustand des Gases ab, der durch zwei der drei Variablen eindeutig bestimmt ist, also durch p und V oder durch p und T oder durch V und T . Wenn wir das Gas komprimieren oder es expandieren lassen oder wenn wir ihm Wärme zuführen oder ihm entnehmen oder wenn wir Arbeit an ihm verrichten oder von ihm verrichten lassen, wird es eine Reihe von Zustandsänderungen durchlaufen, d. h. verschiedene Werte der Zustandsfunktionen p , V , T und U annehmen.

Wenn das Gas danach wieder in seinen Anfangszustand (p_1, V_1) zurückgekehrt ist, müssen die Temperatur T und die innere Energie U wieder ihren jeweiligen Anfangswert haben.

15.5 Die innere Energie eines idealen Gases

Im Gegensatz dazu sind die vom System aufgenommene oder von ihm abgegebene Wärme Q und die an ihm oder von ihm verrichtete Arbeit W keine Zustandsfunktionen. Es gibt daher keine Funktionen Q oder W , die einem bestimmten Zustand des Gases zuzuschreiben sind. Wir können das Gas eine Reihe von Zuständen durchlaufen lassen, die bei (p_1, V_1) beginnen und bei denen es Arbeit verrichtet und eine entsprechende Wärmemenge aufnimmt. Oder wir können es eine Reihe von anderen Zuständen durchlaufen lassen, bei denen am Gas Arbeit verrichtet und Wärme von ihm abgeführt wird.

Man kann zwar sagen, die innere Energie eines Systems habe zugenommen, aber es ist nicht richtig, zu sagen, seine Wärme habe zugenommen oder seine Arbeit habe zugenommen.

Wärme ist somit nicht als solche im System enthalten, sondern die Wärmemenge Q ist das Maß für die Energie, die ein System infolge einer Temperaturdifferenz mit einem anderen System austauschen kann. Die Arbeit W ist entsprechend das Maß für die Energie, die von einem System auf ein anderes übergeht, wenn der Angriffspunkt einer Kraft, die ein System auf das andere ausübt, eine parallel zur Krafrichtung verlaufende Auslenkung erfährt.

Gleichung 15.8 lautet in differenzieller Schreibweise für infinitesimale Änderungen:

$$dU = dQ + dW. \quad (15.9)$$

In dieser Gleichung ist dU das Differenzial der Zustandsfunktion U , während weder dQ noch dW als Differenziale angesehen werden können. Sie symbolisieren vielmehr nur eine infinitesimale Änderung der ausgetauschten Wärme Q bzw. der verrichteten Arbeit W .

15.5 Die innere Energie eines idealen Gases

In Kapitel 14 haben wir gesehen, dass die mittlere kinetische Translationsenergie $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ eines jeden Teilchens in einem idealen Gas mit der absoluten Temperatur T folgendermaßen zusammenhängt (siehe Gleichung 14.14):

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Darin ist k_B die Boltzmann-Konstante. Wenn die Energie des Gases nur in der kinetischen Energie seiner Teilchen besteht (wie bei einem idealen Gas), dann ist die innere Energie von \tilde{n} mol dieses Gases:

$$U = \frac{3}{2} \tilde{n} R T. \quad (15.10)$$

Darin ist R die Gaskonstante. Die innere Energie hängt bei einem idealen Gas nur von der Temperatur ab, nicht aber vom Volumen oder vom Druck. Wenn jedoch andere Energieformen

als die kinetische Energie der Translation hinzukommen, beispielsweise Rotationsenergie der Teilchen, dann ist die innere Energie des Gases größer, als es Gleichung 15.10 angibt. Nach dem Gleichverteilungssatz (siehe Abschnitt 14.3) entfällt auf jeden Freiheitsgrad eine mittlere Energie von $\frac{1}{2} R T$ pro Mol bzw. von $\frac{1}{2} k_B T$ pro Teilchen. Wiederum zeigt sich, dass die innere Energie eines idealen Gases nur von der Temperatur und nicht vom Volumen oder vom Druck abhängt.

Wir können uns aber durchaus vorstellen, dass bei einem *realen* Gas auch andere Energieformen eine Rolle spielen, bei denen es auf den Druck oder auf das Volumen des Gases ankommt. Nehmen wir an, dass die Teilchen aufeinander Anziehungskräfte ausüben, wenn sie sich sehr nahe kommen. Dann erfordert es Arbeit, ihren mittleren Abstand voneinander zu vergrößern, weil dabei die von ihren Anziehungskräften herrührende potentielle Energie ansteigt. Die Änderung des mittleren Abstands der Gasteilchen voneinander ist nun gleichbedeutend mit einer Volumenänderung; daher hängt in diesem Fall die innere Energie nicht nur von der Temperatur der betreffenden Gasmenge ab, sondern auch von ihrem Volumen.

Zu der Frage, ob die innere Energie eines Gases von seinem Volumen abhängt, ersann James Joule ein einfaches, aber sehr interessantes Experiment (Abbildung 15.6). Der linke Behälter enthält zu Beginn ein Gas, der rechte ist evakuiert. Die Verbindungsleitung zwischen den Behältern ist zunächst durch einen Absperrhahn verschlossen. Das gesamte System ist von der Umgebung durch starre Wände thermisch isoliert, sodass keine Wärme in das System hinein- oder aus ihm herausgelangen kann. Außerdem kann dadurch keine Arbeit am oder vom System verrichtet werden. Nach dem Öffnen des Absperrhahns strömt ein Teil des Gases in den leeren Behälter. Diesen Vorgang nennt man **freie Expansion**. Nach einer gewissen Zeit ist der Druck in beiden Behältern gleich. Es hat sich ein Gleichgewicht zwischen den Zustandsgrößen eingestellt. Da am oder vom Gas keine Arbeit verrichtet und auch keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wurde, muss seine innere Energie nach der Expansion ebenso groß sein wie vorher. Wenn die Gasteilchen aufeinander Anziehungskräfte ausüben, wird bei der Volumenerhöhung die von diesen Kräften herrührende potentielle Energie größer, weil der mittlere Abstand der Teilchen zunimmt. Wegen der Energieerhaltung wird in diesem Falle

die kinetische Energie der Translation abnehmen und damit die Temperatur der meisten Gase sinken.

Bei dem hier geschilderten Experiment konnte Joule keine Temperaturänderung feststellen. Auch spätere Versuche bestätigten dies bei geringen Gasdichten. Das bedeutet, dass bei Gasen geringerer Dichte – und damit bei annähernd idealen Gasen – die Temperatur ein Maß für die innere Energie ist. Meist sagen wir daher, die innere Energie hängt nur von der Temperatur ab. Führt man das Experiment jedoch mit einer größeren Gasmenge durch, also bei höherem Druck bzw. höherer Dichte im linken Behälter, dann ist die Temperatur nach der Expansion etwas geringer als vorher. Das deutet darauf hin, dass zwischen den Teilchen eines realen Gases eine gewisse Anziehungskraft wirkt.

15.6 Volumenarbeit und das p - V -Diagramm eines Gases

Bei vielen Arten von Maschinen verrichtet ein Gas (Volumen-)Arbeit, indem es gegen einen beweglichen Kolben expandiert. Beispielsweise wird in der Dampfmaschine durch Erhitzen von Wasser in einem Kessel Wasserdampf erzeugt. Dieser verrichtet beim Ausdehnen Arbeit, indem er den Kolben im Zylinder nach außen treibt. Im Verbrennungsmotor wird eine Kraftstoff-Luft-Mischung zur Explosion gebracht. Daraufhin treiben die heißen, gasförmigen Reaktionsprodukte durch ihren hohen Druck den Kolben nach außen und verrichten dadurch Arbeit. In diesem Abschnitt werden wir sehen, welche Gleichungen für die von einem expandierenden Gas verrichtete Arbeit gelten.

Reversible Vorgänge

In Abbildung 15.7 befindet sich eine bestimmte Gasmenge in einem Behälter, der mit einem dicht schließenden, reibungsfrei beweglichen Kolben verschlossen ist. Wenn sich der Kolben bewegt, ändert sich das Gasvolumen V . Dabei müssen sich die Temperatur T oder der Druck p oder beide Größen ebenfalls ändern, denn alle drei Variablen sind über die Zustandsgleichung $pV = \tilde{n}RT$ miteinander verknüpft (im vorliegenden Fall ist die Molanzahl \tilde{n} konstant). Drücken wir den Kolben sehr schnell hinein, so wird der Druck dicht am Kolben anfänglich etwas höher sein als weiter innen. Doch bald wird das Gas wieder einen neuen Gleichgewichtszustand mit entsprechenden Werten von Druck und Volumen erreicht haben. Erst dann können wir makroskopische Variablen wie p , T oder U für das gesamte Gasvolumen bestimmen. Wir können den Kolben jedoch langsam bewegen, nämlich in kleinsten Schritten, und nach jedem kleinsten Schub die erneute Einstellung des Gleichgewichts abwarten. Bei einer derart durchgeführten Kompression oder Expansion ist das Gas zu jedem Zeitpunkt nicht weit vom jeweiligen Gleichgewichtszustand entfernt. Dann sprechen wir von einer quasistatischen oder **reversiblen Zustandsänderung**. Bei ihr durchläuft das Gas zwischen Anfangs- und Endzustand eine ganze Reihe von Gleichgewichtszuständen. Reversible Zustandsänderungen kann man in recht guter Näherung praktisch durchführen.

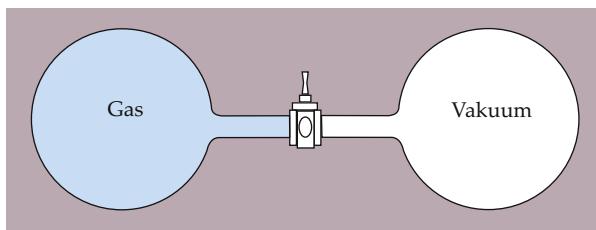


Abbildung 15.6 Die freie Expansion eines Gases in ein Vakuum. Nach dem Öffnen des Absperrhahns zwischen den Behältern breitet sich das Gas schnell in den evakuierten Behälter aus. Da hierbei am Gas keine Arbeit verrichtet wird und das gesamte System thermisch isoliert ist, also keine Wärme ausgetauscht wird, ist die innere Energie des Gases nach der Expansion die gleiche wie zuvor.

15.6 Volumenarbeit und das p - V -Diagramm eines Gases

p - V -Diagramme

Die möglichen Zustände einer gegebenen Gasmenge können wir darstellen, indem wir das Volumen V gegen den Druck p auftragen, was den Zustand einer bestimmten Gasmenge eindeutig festlegt. Daher spezifiziert jeder Punkt im p - V -Diagramm eindeutig den betreffenden Zustand des Gases. Abbildung 15.8 zeigt das p - V -Diagramm für einen konstanten Druck p_0 . Die p - V -Kurve ist eine waagerechte Gerade. Entlang des Pfeils vollzieht sich eine *Kompression* bei konstantem Druck: eine **isobare Kompression**. Bei der (negativen) Volumenänderung ΔV ist dabei die Volumenarbeit

$$W = - \int_{V_A}^{V_E} p \, dV = -p \int_{V_A}^{V_E} dV = -p \Delta V.$$

Der Betrag dieser Volumenarbeit ist gleich der getönten Fläche in Abbildung 15.8. Beachten Sie die Vorzeichen in dieser Gleichung: ΔV ist negativ, weil das Volumen bei der Kompression abnimmt. Da der Druck stets positiv ist, ergibt sich eine positive Arbeit, denn dem Gas wurde Arbeit zugeführt. Der Betrag der Arbeit ist allgemein gleich der Fläche unter der Kurve im p - V -Diagramm zwischen Anfangs- und Endvolumen. Bei einer Expansion ist ΔV positiv, und die Arbeit ist negativ, d. h. das Gas hat Arbeit verrichtet und dabei Energie an die Umgebung abgegeben.

Bei der Volumenarbeit ist folgender Umrechnungsfaktor zwischen „Liter mal Bar“ und Joule hilfreich:

$$1 \text{ l} \cdot \text{bar} = (10^{-3} \text{ m}^3) \cdot (10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}) = 100 \text{ J}. \quad (15.14)$$

Übung 15.4: Eine bestimmte Menge eines idealen Gases nimmt bei 2,00 bar ein Volumen von 5,001 ein. Sie wird bei konstantem Druck abgekühlt, bis das Volumen nur noch 3,001 beträgt. Welche Arbeit wird dabei am Gas verrichtet? ▶

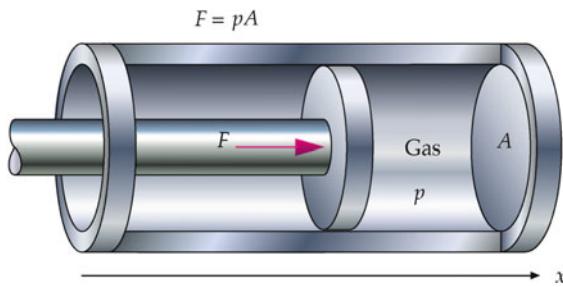


Abbildung 15.7 Eine bestimmte Gasmenge mit dem Druck p befindet sich in einem thermisch isolierten Zylinder, der mit einem beweglichen Kolben der Fläche A verschlossen ist. Wird der Kolben um die Strecke dx bewegt, dann ändert sich das Gasvolumen um $dV = A \, dx$, und die vom Gas verrichtete Arbeit ist $p \, A \, dx = p \, dV$.

Wir beginnen mit einem recht hohen Gasdruck und lassen das Gas dann reversibel und isotherm expandieren. Der Betrag der Kraft, die das Gas beim Druck p auf den Kolben der Fläche A in x -Richtung ausübt, ist $|F_x| = pA$. Wenn sich der Kolben um die infinitesimale Strecke dx nach außen bewegt, ist der Betrag der am Kolben verrichteten Arbeit gegeben durch

$$|dW| = |F_x| \, dx = pA \, dx = p \, dV. \quad (15.11)$$

Dabei ist $dV = A \, dx$ der Volumenanstieg des Gases. Der Kolben übt während der Expansion eine Kraft pA auf das Gas aus, aber es wirkt eine gleich große Kraft $-pA$ des Gases in entgegengesetzter Richtung auf den Kolben. Daher ist die vom Gas verrichtete Arbeit gleich groß, hat jedoch entgegengesetztes Vorzeichen:

$$dW = -p \, dV. \quad (15.12)$$

Beachten Sie, dass bei der Expansion des Gases seine Volumenänderung dV positiv ist. Die vom Gas am Kolben bzw. an der Umgebung verrichtete Arbeit ist daher negativ, denn das Gas hat Energie abgegeben. Bei einer Kompression dagegen ist dV negativ, und die dabei von der Umgebung am Gas verrichtete Arbeit ist positiv.

Wird ein Gas vom Anfangsvolumen V_A auf das Endvolumen V_E expandiert oder komprimiert, ergibt sich die ihm netto zugeführte Arbeit durch Integration über die infinitesimalen Volumenänderungen:

$$W = - \int_{V_A}^{V_E} p \, dV. \quad (15.13)$$

DEM GAS ZUGEFÜHRTE VOLUMENARBEIT

Wenn man die Arbeit mithilfe dieser Gleichung berechnet, muss man berücksichtigen, wie sich der Druck während der Expansion oder Kompression ändert. Die verschiedenen Möglichkeiten können am einfachsten mit dem jeweiligen p - V -Diagramm dargestellt werden.

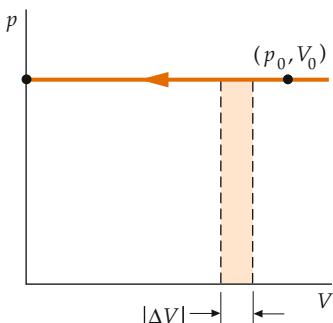


Abbildung 15.8 In einem p - V -Diagramm für ein Gas repräsentiert jeder Punkt, beispielsweise (p_0, V_0) , einen bestimmten Zustand des Gases. Die horizontale Linie stellt Zustände mit konstantem Druck p_0 dar. Die getönte Fläche $p_0 |\Delta V|$ gibt den Betrag der bei der Kompression verrichteten Arbeit an.

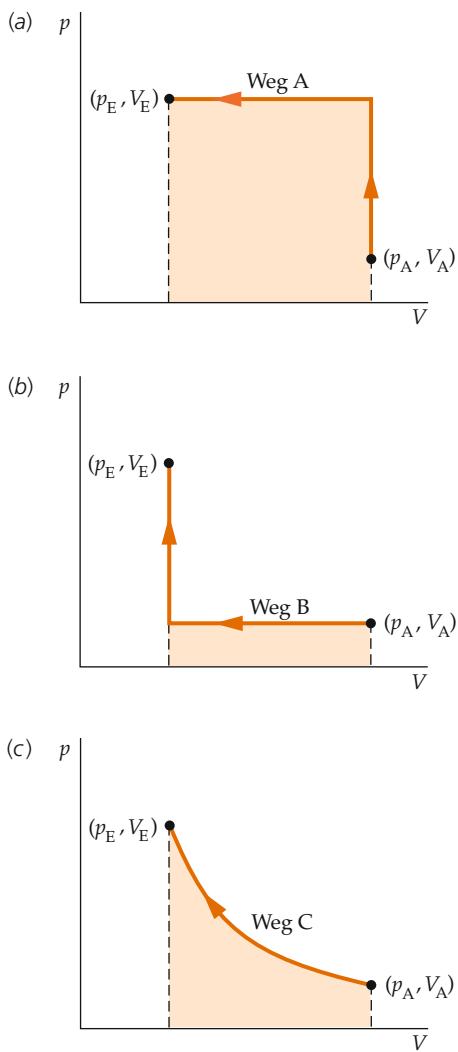


Abbildung 15.9 p - V -Diagramme mit drei möglichen Wegen der Kompression eines idealen Gases vom Anfangszustand (p_A, V_A) zum Endzustand (p_E, V_E) . Der Betrag der Arbeit entspricht jeweils der getönten Fläche.

In Abbildung 15.9 sind drei verschiedene Wege im p - V -Diagramm gezeigt, auf denen eine Kompression vom Anfangszustand (p_A, V_A) zum Endzustand (p_E, V_E) erfolgen kann. Das Gas ist wiederum ein ideales Gas. Außerdem haben Anfangs- und Endzustand die gleiche Temperatur. Dann ist $p_A V_A = p_E V_E = \tilde{n} R T$. Da die innere Energie des idealen Gases nur von der Temperatur abhängt, ist sie ebenfalls im Anfangs- und im Endzustand dieselbe.

In Abbildung 15.9a wird das Gas **isochor** bzw. **isometrisch** (d. h. bei konstantem Volumen) erwärmt, bis der Druck p_E erreicht ist. Danach wird es isobar (bei konstantem Druck) ab-

gekühlt, bis das Volumen V_E erreicht ist. Die am Gas entlang des im Diagramm senkrechten ersten Teils des Wegs A verrichtete Arbeit ist null, weil das Volumen hierbei konstant ist. Doch entlang des im Diagramm horizontalen Wegs A (bei konstantem Druck) hat die Arbeit den Betrag $p_E (V_E - V_A)$.

In Abbildung 15.9b wird das Gas zuerst bei konstantem Druck abgekühlt, bis das Volumen V_E erreicht ist. Danach wird es bei konstantem Volumen erwärmt, bis der Druck p_E erreicht ist. Die entlang dieses Wegs B am Gas verrichtete Arbeit ist betragsmäßig gleich $p_A (V_E - V_A)$, und zwar im waagerechten Teil des Wegs, denn im senkrechten Teil ist das Volumen konstant. Wir sehen an den in der Abbildung getönten Flächen sofort, dass der Betrag der Arbeit entlang des Wegs B viel geringer ist als entlang des Wegs A.

Beim Weg C (Abbildung 15.9c) wird die Kompression bei konstanter Temperatur durchgeführt. Es liegt eine sogenannte **isotherme** Kompression vor. (Wenn bei der Kompression die Temperatur konstant gehalten wird, muss währenddessen Wärme vom Gas abgeführt werden.) Zur Berechnung der Arbeit verwenden wir die Beziehung $p = \tilde{n} R T / V$. Wenn das Gas von V_A auf V_E komprimiert wird, so ist die Arbeit entlang des Wegs C:

$$W = - \int_{V_A}^{V_E} p \, dV = - \int_{V_A}^{V_E} \frac{\tilde{n} R T}{V} \, dV.$$

Da die Temperatur bei einem isothermen Vorgang konstant ist, können wir bei gleich bleibender Gasmenge nicht nur \tilde{n} und R , sondern auch T vor das Integral ziehen:

$$\begin{aligned} W_{\text{isotherm}} &= -\tilde{n} R T \int_{V_A}^{V_E} \frac{dV}{V} = -\tilde{n} R T \ln \frac{V_E}{V_A} \\ &= \tilde{n} R T \ln \frac{V_A}{V_E}. \end{aligned} \quad (15.15)$$

VOLUMENARBEIT BEI ISOTHERMER KOMPRESSION

Wir sehen, dass die am Gas verrichteten Volumenarbeiten bei den drei Vorgängen in Abbildung 15.9 unterschiedlich sind. Die Änderung der inneren Energie hängt nur vom Anfangszustand und vom Endzustand ab, nicht aber vom Weg, der zwischen ihnen durchlaufen wird. Zudem setzt sich die Änderung der inneren Energie bei konstanter Temperatur aus der verrichteten Arbeit und der übertragenen Wärme zusammen. Da die Volumenarbeiten bei den drei Wegen in der Abbildung unterschiedlich sind, ist auch die übertragene Wärmemenge jeweils eine andere. Daraus wird deutlich, dass die mit der Umgebung ausgetauschten Mengen an Arbeit und an Wärme davon abhängen, auf welchem Weg die Zustandsänderungen erfolgen. Diese Zusammenhänge werden in Beispiel 15.7 verdeutlicht.

Vorgehensweise:**Berechnung der Volumenarbeit beim idealen Gas bei reversibler Prozessführung**

Die Volumenarbeit beim idealen Gas ist das negative Produkt aus dem Druck und der Volumenänderung: $dW = -p dV$. Mit dem Anfangsvolumen V_A und dem Endvolumen V_E gilt daher $W = -\int_{V_A}^{V_E} p dV$.

1. Bei konstantem Volumen ist $dV = 0$ und daher $W = 0$.
2. Bei konstantem Druck ist $W = -p \int_{V_A}^{V_E} dV = p(V_E - V_A)$.
3. Bei konstanter Temperatur gilt (mit $p = \tilde{n}RT/V$):

$$W = -\tilde{n}RT \int_{V_A}^{V_E} \frac{dV}{V} = -\tilde{n}RT \ln \frac{V_E}{V_A}.$$

4. Der Fall, dass dabei keine Wärmeübertragung vom oder zum Gas erfolgt, wird in Abschnitt 15.9 behandelt.

Plausibilitätsprüfung: Wenn das Volumen abnimmt, ist die Arbeit positiv und umgekehrt.

Beispiel 15.7: An einem idealen Gas verrichtete Volumenarbeit

Ein ideales Gas wird dem in Abbildung 15.10 gezeigten zyklischen Prozess unterzogen: vom Punkt A über die Punkte B, C und D wieder zurück zum Punkt A. Der Zyklus beginnt bei A, bei dem das Volumen 1,00 l und der Druck 2,00 bar beträgt, mit einer Expansion bei konstantem Druck bis auf ein Volumen von 2,50 l (Punkt B). Danach wird es bei konstantem Volumen abgekühlt, bis ein Druck von 1,00 bar erreicht ist (Punkt C). Dann wird das Gas bei konstantem Druck auf das Anfangsvolumen von 1,00 l komprimiert (Punkt D) und anschließend bei konstantem Volumen erwärmt, bis wieder der Anfangszustand A mit einem Druck von 2,00 bar erreicht ist. Wie groß sind die dem Gas während des Zyklus netto zugeführte Volumenarbeit und die ihm während des Zyklus netto zugeführte Wärmemenge?

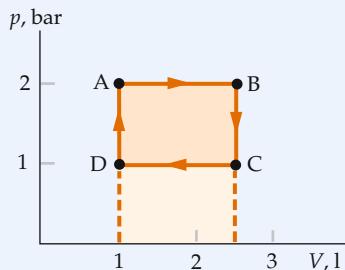


Abbildung 15.10 Zyklier Prozess eines idealen Gases.

Problembeschreibung: Berechnen Sie für jeden Vorgang die dem Gas netto zugeführte Arbeit. Da bei einem vollständig durchlaufenen zyklischen Prozess die Änderung der inneren Energie null ist ($\Delta U = 0$), muss nach dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik die Summe der netto zugeführten Wärmemenge und der netto zugeführten Volumenarbeit ebenfalls null sein.

Lösung: 1. Von A nach B vollzieht sich eine isobare (bei konstantem Druck ablaufende) Expansion. Daher ist die dem Gas netto zugeführte Arbeit negativ. Ihr Betrag entspricht der Fläche unter der Kurve AB in Abbildung 15.11a:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= -p \Delta V = -p (V_B - V_A) \\ &= -(2,00 \text{ bar}) \cdot (2,50 \text{ l} - 1,00 \text{ l}) = -3,00 \text{ l} \cdot \text{bar} \end{aligned}$$

2. Rechnen Sie diese Energiemenge in Joule um:

$$W_{AB} = -(3,00 \text{ l} \cdot \text{bar}) \cdot \frac{100 \text{ J}}{1,00 \text{ l} \cdot \text{bar}} = -300 \text{ J}$$

3. Von B nach C in Abbildung 15.10 kühlt das Gas bei konstantem Volumen ab, und es wird keine Arbeit verrichtet:

$$W_{BC} = 0 \text{ J}$$

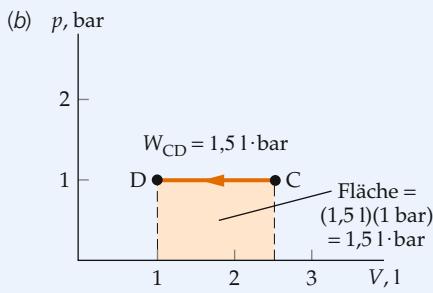
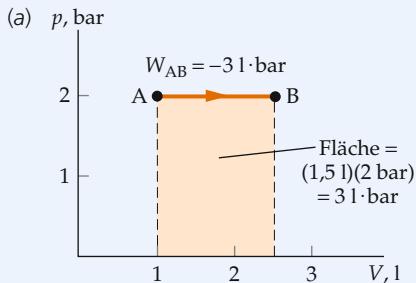


Abbildung 15.11 a) Die Volumenarbeit während der Expansion eines Gases auf dem Weg vom Zustand A zum Zustand B ist betragsmäßig gleich der getönten Fläche unter der Kurve. b) Die bei der Kompression vom Zustand C zum Zustand D am Gas verrichtete Arbeit ist betragsmäßig gleich der getönten Fläche unter der Kurve.

4. Von C nach D erfährt das Gas eine isobare Kompression, die zugeführte Arbeit ist positiv. Sie entspricht der Fläche unter der Kurve CD in Abbildung 15.11b:

$$\begin{aligned} W_{CD} &= -p \Delta V = -p (V_D - V_C) \\ &= -(1,00 \text{ bar}) \cdot (1,001 - 2,501) \\ &= 1,501 \cdot \text{bar} = \boxed{150 \text{ J}} \end{aligned}$$

5. Von D nach A wird das Gas erwärmt und erreicht wieder den Anfangszustand A. Dabei wird wegen des konstanten Volumens keine Arbeit ausgetauscht:

$$W_{DA} = 0 \text{ J}$$

6. Die Gesamtbilanz der Arbeit ergibt sich aus der Summe der eben ermittelten Größen:

$$\begin{aligned} W_{\text{ges}} &= W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \\ &= -300 \text{ J} + 0 \text{ J} + 150 \text{ J} + 0 \text{ J} = \boxed{-150 \text{ J}} \end{aligned}$$

7. Da das Gas wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, ist die Änderung seiner inneren Energie gleich null:

$$\Delta U = 0$$

8. Die netto zugeführte Wärme wird mithilfe des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik berechnet:

$$\Delta U = Q + W$$

Daher ist

$$Q = \Delta U - W = 0 \text{ J} - (-150 \text{ J}) = \boxed{150 \text{ J}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie bei einem zyklischen Prozess zu erwarten, ist die Summe der (jeweils vorzeichenrichtig ermittelten) vom Gas aufgenommenen und der von ihm abgegebenen Energiemengen gleich null. Im vorliegenden Fall ist die vom Gas verrichtete Arbeit betragsmäßig gleich der von ihm aufgenommenen Wärmemenge 150 J.

Weitergedacht: Der in Schritt 6 errechnete Wert der dem Gas insgesamt zugeführten Arbeit ist negativ, weil vom Gas verrichtete Arbeit negativ und dem Gas zugeführte Arbeit positiv zu rechnen ist. Per Saldo hat das Gas Arbeit verrichtet bzw. abgegeben. Während des gesamten Zyklus nimmt das Gas eine Wärmemenge von 150 J aus der Umgebung auf und verrichtet eine gleich große Arbeit an der Umgebung. Es kehrt während des Zyklus wieder in seinen Anfangszustand zurück. Die ausgetauschte Arbeit entspricht betragsmäßig der in Abbildung 15.10 fett umrahmten Fläche des Vierecks ABCD. Derartige zyklische Vorgänge, auch Kreisprozesse genannt, haben große Bedeutung bei den Wärmekraftmaschinen (siehe Kapitel 16). ■

15.7 Wärmekapazitäten von Festkörpern

In Abschnitt 15.1 wurde erwähnt, dass die molaren Wärmekapazitäten der Metalle einander sehr ähnlich sind (siehe Tabelle 15.1). Die Werte liegen bei etwa $3R$:

$$C \approx 3R = 24,9 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (15.16)$$

Diesen Sachverhalt nennt man **Dulong-Petit'sche Regel**. Um sie zu begründen, wenden wir den Gleichverteilungssatz auf ein einfaches Modell eines Festkörpers an, wie es in Abbildung 15.12 dargestellt ist. Der Festkörper besteht in diesem Modell aus einer regelmäßigen Anordnung von Atomen, die durch Federn miteinander verbunden sind. Jedes Atom befindet sich an einer bestimmten Position, seiner sogenannten Gleichgewichtslage, und kann um diese herum Schwingungen in x -, y - und z -Richtung ausführen. Die gesamte kinetische und potenzielle Schwingungsenergie eines Atoms in diesem Festkörpermodell ist dann

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} k_{\text{eff}} x^2 + \frac{1}{2} k_{\text{eff}} y^2 + \frac{1}{2} k_{\text{eff}} z^2. \end{aligned}$$

Darin ist k_{eff} die effektive Kraftkonstante einer Bindung zwischen den Atomen, also einer der hypothetischen Federn gemäß Abbildung 15.12.

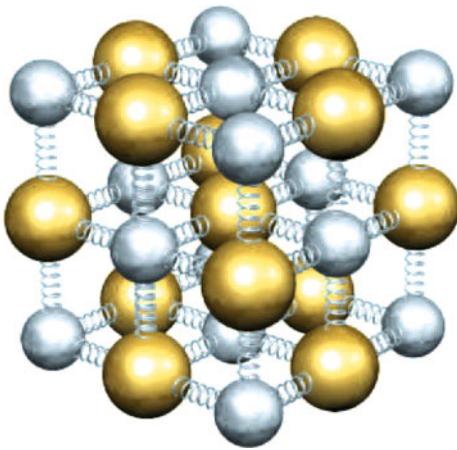


Abbildung 15.12 Modell eines Festkörpers, bei dem die Atome durch Federn miteinander verbunden sind. Seine innere Energie besteht aus den kinetischen und den potentiellen Schwingungsenergien aller Teilchen.

Jedes Atom hat demnach sechs Freiheitsgrade, und nach dem Gleichverteilungssatz ist im Gleichgewicht die mittlere Energie eines Mols von Atomen gleich $\frac{1}{2}RT$ pro Freiheitsgrad. Somit ist die innere Energie eines Mols eines Festkörpers

$$U_{\text{Mol}} = 6 \cdot \frac{1}{2}RT = 3RT. \quad (15.17)$$

Das bedeutet, die molare Wärmekapazität C beträgt $3R$. Dieser Wert wird in Beispiel 15.8 zum Ermitteln einer spezifischen Wärmekapazität verwendet.

Beispiel 15.8: Anwendung der Dulong-Petit'schen Regel

Kupfer hat die molare Masse 63,5 g/mol. Berechnen Sie mithilfe der Dulong-Petit'schen Regel seine spezifische Wärmekapazität.

Problembeschreibung: Die Dulong-Petit'sche Regel gibt die molare Wärmekapazität C eines metallischen Festkörpers an. Nach Gleichung 15.4 ist die spezifische Wärmekapazität $c = C/m_{\text{Mol}}$, wobei m_{Mol} die molare Masse ist.

Lösung: 1. Die Dulong-Petit'sche Regel besagt:

$$C = 3R$$

2. Mit $m_{\text{Mol}} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ für Kupfer ergibt sich:

$$\begin{aligned} c &= \frac{C}{m_{\text{Mol}}} \approx \frac{3R}{m_{\text{Mol}}} = \frac{3 \cdot (8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})}{63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \\ &\approx 0,392 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0,392 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

Kommentar: Dieses Ergebnis weicht vom experimentell ermittelten Wert $0,386 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (siehe Tabelle 15.1) um weniger als 2 % ab.

Übung 15.5: Die spezifische Wärmekapazität eines Metalls wurde zu $1,02 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ gemessen. a) Berechnen Sie seine molare Masse unter der Annahme, dass die Dulong-Petit'sche Regel gilt. b) Um welches Metall handelt es sich? ■

15.8 Wärmekapazitäten von Gasen

Wenn man die molare Wärmekapazität einer Substanz bestimmt, so erhält man daraus Informationen über ihre innere Energie, genauer: über deren Temperaturabhängigkeit. Diese hängt von der molekularen Struktur der Substanz ab. Bei Substanzen, die sich beim Erwärmen ausdehnen, ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck (C_p) größer als die bei konstantem Volumen (C_V). Wenn eine Probe einer solchen Substanz bei konstantem Druck Wärme aufnimmt, dehnt sie sich aus und verrichtet Volumenarbeit an der Umgebung (Abbildung 15.13). Daher muss zum Erzielen derselben Temperaturdifferenz mehr Energie zugeführt werden, als wenn die Probe bei konstantem Volumen erwärmt wird. Die Wärmeausdehnung spielt bei Flüssigkeiten und Festkörpern gewöhnlich keine Rolle, sodass hier $C_p \approx C_V$ ist. Wenn aber Gase bei konstantem Druck erwärmt werden, dehnen sie sich merklich aus und verrichten dabei Volumenarbeit an der Umgebung. Daher ist bei ihnen die Differenz $C_p - C_V$ nicht vernachlässigbar.

Wird einem Gas bei konstantem Volumen Wärme zugeführt, so tritt keine Volumenarbeit auf (Abbildung 15.14). Daher ist die Zunahme der inneren Energie des Gases ebenso groß wie die zugeführte Wärmemenge. Für die bei konstantem Volumen zugeführte Wärme erhalten wir

$$Q = \tilde{n} C_V \Delta T.$$

Da $W = 0$ ist, ergibt sich gemäß dem Ersten Hauptsatz die Erhöhung der inneren Energie U zu

$$\Delta U = Q + W = Q.$$

Mit der vorigen Gleichung ergibt sich daraus

$$\Delta U = \tilde{n} C_V \Delta T.$$

Bei infinitesimalen Änderungen ($\Delta T \rightarrow 0$) können wir die differenzielle Schreibweise anwenden. Damit ist

$$dU = \tilde{n} C_V dT \quad (15.18a)$$

bzw.

$$\tilde{n} C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (15.18b)$$

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen ist daher gleich der Änderung der inneren Energie eines Mols der betreffenden Substanz, dividiert durch die Temperaturänderung. Da U

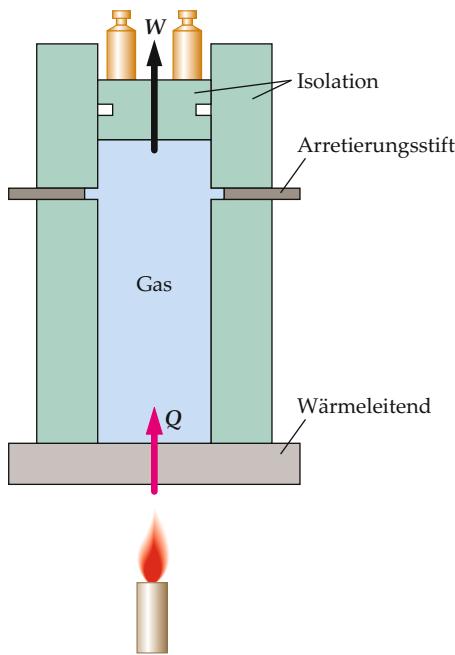


Abbildung 15.13 Einem Gas wird bei konstantem Druck Wärme zugeführt. Das Gas expandiert und verrichtet Volumenarbeit am Kolben und damit an der Umgebung.

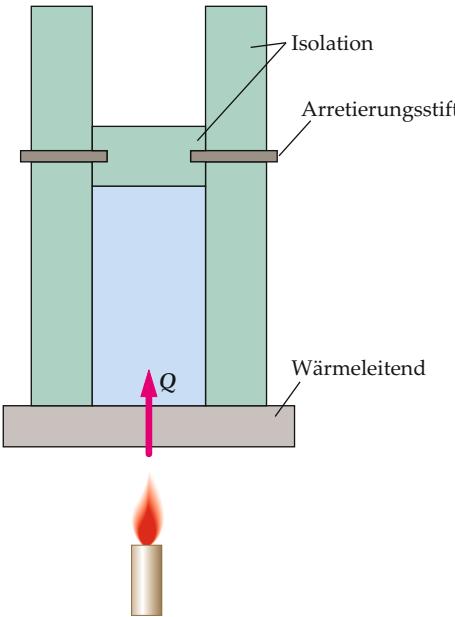


Abbildung 15.14 Dem Gas wird bei konstantem Volumen Wärme zugeführt, da der Kolben durch Stifte arretiert ist. Deswegen wird keine Volumenarbeit verrichtet, und die gesamte zugeführte Wärme erhöht die innere Energie des Gases.

und T Zustandsfunktionen sind, gelten die Gleichungen 15.18a und 15.18b für jegliche Erwärmungen oder Abkühlungen.

Wir wollen nun die Differenz der molaren Wärmekapazitäten C_p und C_V eines idealen Gases berechnen. Aus der Definition der molaren Wärmekapazität C_p ergibt sich für die bei konstantem Druck aufgenommene Wärme

$$Q = \tilde{n} C_p \Delta T.$$

Nach dem Ersten Hauptsatz ist

$$\Delta U = Q + W = Q - p \Delta V.$$

Damit folgt

$$\Delta U = \tilde{n} C_p \Delta T - p \Delta V \quad \text{bzw.} \quad \tilde{n} C_p \Delta T = \Delta U + p \Delta V.$$

Bei infinitesimalen Änderungen ist

$$\tilde{n} C_p dT = dU + p dV.$$

Mit Gleichung 15.18a für die Änderung der inneren Energie ergibt sich daraus

$$\tilde{n} C_p dT = \tilde{n} C_V dT + p dV. \quad (15.19)$$

Bei idealen Gasen gilt die Gleichung

$$p V = \tilde{n} R T.$$

Wir setzen auf beiden Seiten die Differenziale der sich ändernden Größen an:

$$p dV + V dp = \tilde{n} R dT.$$

Bei konstantem Druck ist $dp = 0$, sodass folgt:

$$p dV = \tilde{n} R dT.$$

Das setzen wir in Gleichung 15.19 ein:

$$\tilde{n} C_p dT = \tilde{n} C_V dT + \tilde{n} R dT = (C_V + R) \tilde{n} dT.$$

Damit ist

$$C_p = C_V + R. \quad (15.20)$$

Die molare Wärmekapazität eines idealen Gases bei konstantem Druck ist um R größer als seine molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

In Tabelle 15.4 sind für einige Gase die gemessenen molaren Wärmekapazitäten C_p und C_V sowie daraus errechnete Größen aufgeführt. Beachten Sie, dass die für ideale Gase gültige Beziehung $C_p - C_V = R$ für alle Gase recht gut erfüllt ist.

Der Tabelle entnehmen wir weiterhin, dass C_V , die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen, bei den einatomigen Gasen ungefähr gleich $\frac{3}{2} R$ ist. Bei den zweiatomigen Gasen ist sie um R größer (somit etwa gleich $\frac{5}{2} R$) und bei mehratomigen noch größer. Um diese Werte zu verstehen, erinnern wir uns an die Besprechung des Teilchenmodells der Gase in Abschnitt 14.2. Gemäß Gleichung 14.15 ist die gesamte kinetische Translationsenergie eines Mols eines Gases $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} R T$. Wenn die innere Energie des Gases ausschließlich aus der kinetischen Translationsenergie der Teilchen besteht, so ist die innere Energie pro Mol:

$$U_{\text{Mol}} = \frac{3}{2} R T. \quad (15.21)$$

Damit sind die molaren Wärmekapazitäten:

Tabelle 15.4 Molare Wärmekapazitäten C_p und C_V einiger Gase bei 25 °C, in $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Gas	C_p	C_V	C_V/R	$C_p - C_V$	$(C_p - C_V)/R$
Einatomige Gase					
He	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
Ne	20,79	12,68	1,52	8,11	0,98
Ar	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Kr	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Xe	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
Zweiatomige Gase					
N ₂	29,12	20,80	2,50	8,32	1,00
H ₂	28,82	20,44	2,46	8,38	1,01
O ₂	29,37	20,98	2,52	8,39	1,01
CO	29,04	20,74	2,49	8,30	1,00
Mehratomige Gase					
CO ₂	36,62	28,17	3,39	8,45	1,02
N ₂ O	36,90	28,39	3,41	8,51	1,02
H ₂ S	36,12	27,36	3,29	8,76	1,05

$$C_V = \frac{dU_{\text{Mol}}}{dT} = \frac{3}{2} R \quad (15.22)$$

C_V EINES EINATOMIGEN IDEALEN GASES

und

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2} R. \quad (15.23)$$

C_p EINES EINATOMIGEN IDEALEN GASES

Die Messwerte in Tabelle 15.4 stimmen bei einatomigen Gasen mit diesen beiden Gleichungen gut überein. Eine Anwendung dieser Beziehungen wird in Beispiel 15.9 vorgestellt. Bei Gasen aus zweiatomigen oder aus mehratomigen Molekülen sind die molaren Wärmekapazitäten offenbar größer, als es den Gleichungen 15.22 und 15.23 entspricht. Der Grund liegt darin, dass solche Moleküle auch andere Formen der Energie als nur kinetische Translationsenergie besitzen können, nämlich Rotations- und/oder Schwingungsenergie.

Beispiel 15.9: Erwärmen, Abkühlen und Komprimieren eines idealen Gases

0,32 mol eines einatomigen idealen Gases mit $C_V = \frac{3}{2} R$ nehmen bei einem Druck von 2,4 bar ein Volumen von 2,2 l ein (siehe Punkt A in Abbildung 15.15). Dann durchläuft das Gas einen zyklischen Prozess mit folgenden drei Vorgängen:

1. Das Gas wird bei konstantem Druck erwärmt, bis sein Volumen 4,4 l beträgt (Punkt B).
2. Das Gas wird bei konstantem Volumen abgekühlt, bis der Druck auf 1,2 bar abgesunken ist (Punkt C).

3. Das Gas erfährt eine isotherme Kompression zurück zum Punkt A.

- a) Wie hoch ist die Temperatur an den Punkten A, B und C? b) Berechnen Sie W , Q und ΔU für jeden Vorgang und für den gesamten Prozess.

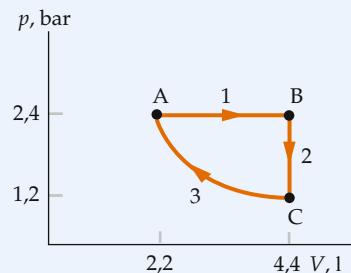


Abbildung 15.15 Die gesamte am bzw. vom Gas verrichtete Arbeit entspricht betragsmäßig der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.

Problembeschreibung: Die Temperatur können Sie für jeden Punkt mithilfe der Zustandsgleichung für das ideale Gas berechnen. Die bei jedem Vorgang verrichtete Arbeit können Sie anhand der Fläche unter der Kurve ermitteln, und die jeweils ausgetauschte Wärme können Sie für jeden Vorgang aus der End- und der Anfangstemperatur sowie der gegebenen Wärmekapazität errechnen. Bei Vorgang 3 ist T konstant, sodass hierfür $\Delta U = 0$ ist. Das bedeutet, hier ist die Summe aus der umgesetzten Wärme und der verrichteten Arbeit gleich null.

Lösung:

Teilaufgabe a

Errechnen Sie mithilfe der Zustandsgleichung für das ideale Gas die Temperaturen an den Punkten A, B und C:

$$\begin{aligned} T_C &= T_A = \frac{p_A V_A}{\tilde{n} R} \\ &= \frac{(2,4 \text{ bar}) \cdot (2,2 \text{ l})}{(0,32 \text{ mol}) \cdot (0,083141 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})} \\ &= \boxed{198 \text{ K}} \\ T_B &= \frac{p_B V_B}{\tilde{n} R} = \frac{p_A 2 V_A}{\tilde{n} R} = 2 \frac{p_A V_A}{\tilde{n} R} \\ &= 2 T_A = \boxed{396 \text{ K}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

- Bei Vorgang 1 ist die Arbeit gegeben durch $W_1 = -p \Delta V$, die Wärme Q_1 ergibt sich mithilfe des Werts $C_p = \frac{5}{2} R$. Verwenden Sie W_1 und Q_1 , um ΔU_1 zu errechnen:

$$\begin{aligned} W_1 &= -p_A \Delta V = -p_A (V_B - V_A) \\ &= -(2,4 \text{ bar}) \cdot (2,2 \text{ l}) = -528 \text{ J} = \boxed{-0,53 \text{ kJ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \tilde{n} C_p \Delta T = \frac{5}{2} \tilde{n} R \Delta T \\ &= \frac{5}{2} \cdot (0,32 \text{ mol}) \cdot (8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (198 \text{ K}) \\ &= 1317 \text{ J} = [1,3 \text{ kJ}] \\ \Delta U_1 &= Q_1 + W_1 = 789 \text{ J} = [0,80 \text{ kJ}] \end{aligned}$$

2. Bei Vorgang 2 verwenden Sie den Wert $C_V = \frac{3}{2} R$ und die Temperaturdifferenz $T_C - T_B$ aus Schritt 1, um Q_2 zu ermitteln. Wegen $W_2 = 0$ ist $\Delta U_2 = Q_2$:

$$\begin{aligned} W_2 &= [0 \text{ J}] \\ Q_2 &= \tilde{n} C_V \Delta T = \frac{3}{2} \tilde{n} R \Delta T \\ &= \frac{3}{2} \cdot (0,32 \text{ mol}) \cdot (8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \\ &\quad \cdot (-198 \text{ K}) \\ &= -789 \text{ J} = [-0,80 \text{ kJ}] \\ \Delta U_2 &= W_2 + Q_2 = 0 + (-789 \text{ J}) \\ &= -789 \text{ J} = [-0,80 \text{ kJ}] \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie W_3 mithilfe der Beziehung $W = -\tilde{n} R T \ln(V_A/V_C)$ für die isotherme Kompression. Wegen $\Delta U_3 = 0$ ist $Q_3 = -W_3$:

$$\begin{aligned} W_3 &= \tilde{n} R T_A \ln \frac{V_A}{V_C} \\ &= (0,32 \text{ mol}) \cdot (8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \\ &\quad \cdot (-198 \text{ K}) \cdot \ln 2,0 \\ &= 365 \text{ J} = [0,37 \text{ kJ}] \\ \Delta U_3 &= [0 \text{ J}] \\ Q_3 &= \Delta U_3 - W_3 = -365 \text{ J} = [-0,37 \text{ kJ}] \end{aligned}$$

4. Ermitteln Sie die gesamte Arbeit W , die gesamte Wärme Q und die gesamte Änderung ΔU der inneren Energie, indem Sie jeweils die in den Schritten 1 bis 3 berechneten Werte addieren:

$$\begin{aligned} W_{\text{ges}} &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= -528 \text{ J} + 0 \text{ J} + 365 \text{ J} \\ &= -163 \text{ J} = [-0,16 \text{ kJ}] \\ Q_{\text{ges}} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 1317 \text{ J} + (-789 \text{ J}) + (-365 \text{ J}) \\ &= 163 \text{ J} = [0,16 \text{ kJ}] \\ \Delta U_{\text{ges}} &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 \\ &= 789 \text{ J} + (-789 \text{ J}) + 0 \text{ J} = [0 \text{ J}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die gesamte Änderung der inneren Energie ist null, wie es bei einem vollständig durchlaufenen zyklischen Prozess sein muss. Die am Gas netto verrichtete Arbeit plus der ihm netto zugeführten Wärme muss daher ebenfalls null sein. Die am Gas insgesamt verrichtete Arbeit entspricht betragsmäßig der Fläche unter der Kurve AB in Abbildung 15.15, abzüglich der Fläche unter der Kurve CA, also der von den drei Kurvenstücken eingeschlossenen Fläche. ■

Wärmekapazitäten und der Gleichverteilungssatz

Nach dem Gleichverteilungssatz (siehe Abschnitt 14.3) ist die innere Energie U von \tilde{n} mol eines Gases aus gleichen Molekülen für jeden Freiheitsgrad eines Moleküls gleich $\frac{1}{2} \tilde{n} R T$. Damit ist die molare Wärmekapazität des Gases bei konstantem Volumen das $(\frac{5}{2}R)$ -Fache der Anzahl der Freiheitsgrade eines Moleküls. Tabelle 15.4 entnehmen wir, dass Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenmonoxid bei konstantem Volumen eine molare Wärmekapazität von etwa $\frac{5}{2} R$ haben. Daher müssen ihre Moleküle fünf Freiheitsgrade aufweisen. Um das Jahr 1880 postulierte Rudolf Clausius, dass die Moleküle dieser Gase zweiatomig sind und deshalb um zwei Achsen rotieren können. Von daher stammen die beiden weiteren Freiheitsgrade (drei Freiheitsgrade entfallen auf die Translation).

Abbildung 15.16 zeigt das Modell eines zweiatomigen Moleküls, das einer starren Hantel ähnelt. Die erwähnten zwei zusätzlichen Freiheitsgrade sind die der Rotation um die beiden Achsen x' und y' , die durch den Massenmittelpunkt des Moleküls verlaufen und senkrecht aufeinander sowie auf der Verbindungslinie der Atomkerne stehen. Die gesamte kinetische Energie der Translation und der Rotation eines zweiatomigen Moleküls ist damit

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} I_{x'} \omega_{x'}^2 + \frac{1}{2} I_{y'} \omega_{y'}^2.$$

Daher ist die gesamte innere Energie von \tilde{n} mol eines Gases aus zweiatomigen Molekülen

$$U = 5 \cdot \frac{1}{2} \tilde{n} R T = \frac{5}{2} \tilde{n} R T, \quad (15.24)$$

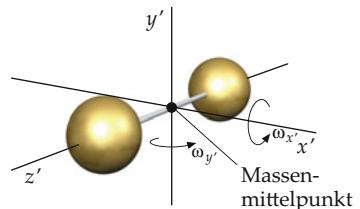


Abbildung 15.16 Hantelmodell eines zweiatomigen Moleküls.

und die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen ist

$$C_V = \frac{5}{2} R. \quad (15.25)$$

Offensichtlich rotieren zweiatomige Moleküle nicht um die Verbindungsgeraden ihrer Atomkerne. Wenn sie es täten, müsste die molare Wärmekapazität C_V den Wert $\frac{6}{2} R = 3R$ haben, anstatt $\frac{5}{2} R$ wie in Beispiel 15.10. Das widerspricht jedoch den experimentellen Befunden. In Kapitel 35 werden wir sehen, wie dieser Sachverhalt durch die Quantisierung der Energie zu erklären ist.

Beispiel 15.10: Erwärmen eines zweiatomigen Gases

2,00 mol Sauerstoffgas haben anfangs bei einem Druck von 1,00 bar eine Temperatur von 20,0 °C und werden dann auf 100,0 °C erwärmt. Es soll angenommen werden, dass sich das Gas wie ein ideales Gas verhält. a) Wie viel Wärme muss für die gewünschte Temperaturerhöhung zugeführt werden, wenn beim Erwärmen das Volumen konstant gehalten wird? b) Wie viel Wärme muss zugeführt werden, wenn beim Erwärmen der Druck konstant gehalten wird? c) Wie viel Arbeit wird dem Gas im Fall b netto zugeführt?

Problembeschreibung: Die zum Erwärmen bei konstantem Volumen nötige Wärme ist $\Delta U = \tilde{n} C_V \Delta T$, wobei für Sauerstoff als zweiatomiges Gas $C_V = \frac{5}{2} R$ ist. Für das Erwärmen bei konstantem Druck ist die Wärme $Q = \tilde{n} C_p \Delta T$ aufzuwenden, wobei gilt $C_p = C_V + R$. Die dem Gas netto zugeführte Arbeit ist schließlich mithilfe der Beziehung $\Delta U = Q + W$ oder der Beziehung $W = -p \Delta V$ zu errechnen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Drücken Sie die zum Erwärmen bei konstantem Volumen nötige Wärme durch $\tilde{n} C_V$ und ΔT aus:

$$\Delta U = \tilde{n} C_V \Delta T$$

2. Berechnen Sie die Wärme, die für die Erwärmung um $\Delta T = 80,0^\circ\text{C} = 80,0\text{ K}$ bei konstantem Volumen nötig ist:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{5}{2} \tilde{n} R \Delta T \\ &= \frac{5}{2} \cdot (2,00 \text{ mol}) \cdot (8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}) \cdot (80,0 \text{ K}) \\ &= [3,33 \text{ kJ}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Drücken Sie die zum Erwärmen bei konstantem Druck nötige Wärme durch $\tilde{n} C_p$ und ΔT aus:

$$Q = \tilde{n} C_p \Delta T$$

2. Berechnen Sie die Wärmekapazität bei konstantem Druck:

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2} R + R = \frac{7}{2} R$$

3. Berechnen Sie die für die Erwärmung um $\Delta T = 80,0\text{ K}$ bei konstantem Druck zuzuführende Wärme:

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{n} C_p \Delta T \\ &= \frac{7}{2} \cdot (2,00 \text{ mol}) \cdot (8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}) \cdot (80,0 \text{ K}) \\ &= [4,66 \text{ kJ}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Errechnen Sie die dem Gas zugeführte Arbeit W mithilfe des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik:

$$\Delta U = Q + W$$

und daher

$$W = \Delta U - Q$$

2. Die Änderung der inneren Energie entspricht der bei konstantem Volumen zugeführten Wärme, die in Teilaufgabe a berechnet wurde:

$$\Delta U = \tilde{n} C_V \Delta T = \frac{5}{2} \tilde{n} R \Delta T$$

und

$$Q = \tilde{n} C_p \Delta T = \frac{7}{2} \tilde{n} R \Delta T$$

Damit ist

$$\begin{aligned} W &= \Delta U - Q = \frac{5}{2} \tilde{n} R \Delta T - \frac{7}{2} \tilde{n} R \Delta T = -\tilde{n} R \Delta T \\ &= -(2,00 \text{ mol}) \cdot (8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}) \cdot (80,0 \text{ K}) \\ &= -1,33 \text{ kJ} \end{aligned}$$

3. Die dem Gas bei konstantem Druck netto zugeführte Arbeit ist:

$$W = [-1,33 \text{ kJ}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Arbeit ist negativ. Das Gas hat daher Arbeit an der Umgebung verrichtet. Beachten Sie außerdem, dass die Änderung der inneren Energie nur vom Anfangs- und vom Endzustand abhängt, nicht aber davon, wie der Prozess durchgeführt wird.

Übung 15.6: Berechnen Sie das Anfangs- und das Endvolumen dieses Gases mithilfe der Zustandsgleichung für das ideale Gas und berechnen Sie mit den dabei erhaltenen Werten sowie der Beziehung $W = -p \Delta V$ die dem Gas bei konstantem Druck netto zugeführte Arbeit. ▲ ■

Beispiel 15.11: Die Schwingungsmoden des CO₂-Moleküls

ZUM VERSTÄNDNIS

Im Kohlendioxidmolekül befindet sich das Kohlenstoffatom zwischen zwei Sauerstoffatomen. Dabei sind drei sogenannte Schwingungsmoden möglich. Skizzieren Sie diese Schwingungsmoden in einem Bezugssystem, in dem sich der Massenmittelpunkt des Moleküls in Ruhe befindet.

Problembeschreibung: Wenn das Molekül nicht schwingt, liegen alle drei Atome auf einer Linie, und die beiden Abstände sind gleich. Beim Schwingen können sich die Atome parallel zu der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte oder auch senkrecht zu ihr bewegen. Es treten zwei Schwingungsmoden auf, bei denen die Bewegungen in dieser Linie erfolgen, und ein Modus mit Bewegungen senkrecht dazu.

Lösung: 1. Bei der symmetrischen Valenzschwingung bleibt das Kohlenstoffatom zwischen den beiden Sauerstoffatomen in Ruhe und diese schwingen gegenphasig zueinander (Abbildung 15.17a). Es ist gut zu erkennen, warum man dies zuweilen als „Atmungsschwingung“ bezeichnet.

2. Bei der antisymmetrischen Valenzschwingung schwingen die beiden Sauerstoffatome miteinander in Phase, aber gegenphasig zur Schwingung des Kohlenstoffatoms (Abbildung 15.17b).

3. Bei der Knickschwingung schwingen die beiden Sauerstoffatome miteinander in Phase, aber gegenphasig zur Schwingung des Kohlenstoffatoms (Abbildung 15.17c).

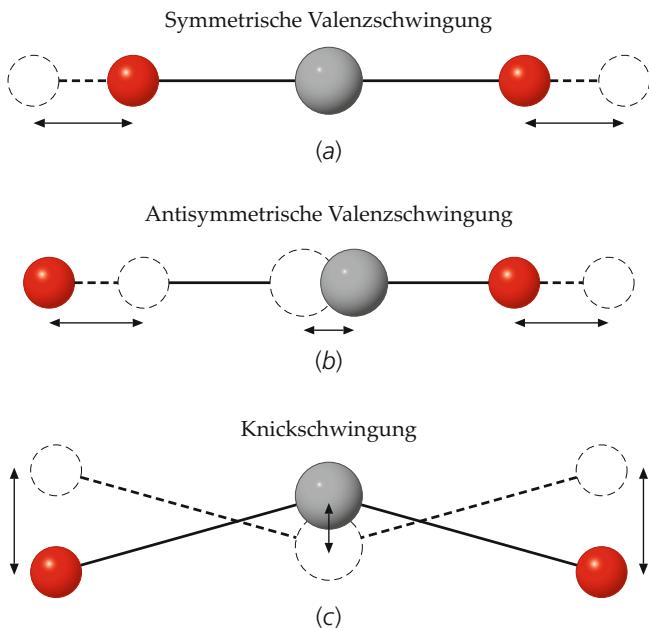


Abbildung 15.17 Valenz- und Knickschwingung.

15.9 Die reversible adiabatische Expansion eines Gases

Einen Prozess, bei dem keine Wärme in das System hinein- oder aus ihm herausgelangt, nennt man **adiabatisch**. Ein Prozess kann adiabatisch ablaufen, wenn das System thermisch extrem gut isoliert ist oder wenn er sehr schnell vor sich geht. Wir betrachten nun die reversible adiabatische Kompression einer bestimmten Menge eines idealen Gases, die sich in einem thermisch isolierten Behälter befindet. Dieser ist durch einen beweglichen Kolben verschlossen. Zur reversiblen Kompression wird der Kolben langsam hineingedrückt, sodass er Arbeit am Gas verrichtet. Da das Gas keine Wärme aufnehmen oder abgeben kann, ist die bei der Kompression verrichtete Volumenarbeit gleich der Zunahme der inneren Energie des Gases. Daher steigt seine Temperatur an. Das p-V-Diagramm für die Änderungen von Druck und Volumen bei diesem Vorgang ist in Abbildung 15.18 dargestellt.

Wir können die Gleichung für die Kurve der adiabatischen Kompression oder Expansion mithilfe der Zustandsgleichung idealer Gase ($pV = \tilde{n}RT$) und des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik ($dU = dQ + dW$) aufstellen. Damit erhalten

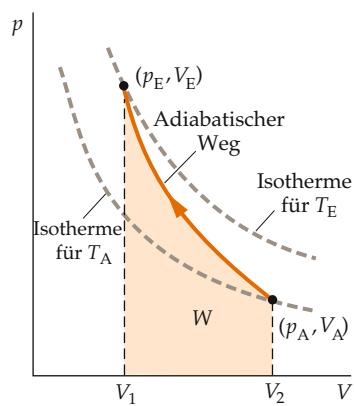


Abbildung 15.18 Das p-V-Diagramm für die reversible adiabatische Kompression eines idealen Gases. Die gestrichelten Kurven sind die Isothermen ($pV = \tilde{n}RT$) für die Anfangstemperatur T_A bzw. für die Endtemperatur T_E . Die durchgezogene Kurve verbindet den Anfangs- und den Endzustand dieser adiabatischen Kompression miteinander. Sie verläuft steiler als die Isothermen, weil die Temperatur bei der Kompression zunimmt.

wir

$$\tilde{n}C_V dT = 0 + (-P dV). \quad (15.26)$$



Wolken bilden sich, wenn aufsteigende feuchte Luft infolge der adiabatischen Expansion abkühlt. Durch die Abkühlung kondensiert die Feuchtigkeit zu Was sertröpfchen. (© Will und Deni McIntyre/Photo Researchers.)

Dabei haben wir Gleichung 15.18a verwendet, außerdem $dQ = 0$ (weil der Prozess adiabatisch abläuft) sowie Gleichung 15.12, nach der $dW = -p dV$ ist. Wir ersetzen nun p mithilfe der Zustandsgleichung für das ideale Gas und erhalten

$$\tilde{n} C_V dT = -\tilde{n} R T \frac{dV}{V}.$$

Division der Gleichung durch $\tilde{n} C_V T$ sowie Umstellen ergeben

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

Integrieren liefert

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \text{konstant}.$$

Das kann vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \ln T + \frac{R}{C_V} \ln V &= \ln T + \ln(V^{R/C_V}) \\ &= \ln(T V^{R/C_V}) = \text{konstant}, \end{aligned}$$

und es folgt

$$T V^{R/C_V} = \text{konstant}. \quad (15.27)$$

(Die Konstanten in den beiden letzten Gleichungen sind nicht dieselben.)

15.9 Die reversible adiabatische Expansion eines Gases

Wir können Gleichung 15.27 umschreiben, wobei wir berücksichtigen, dass $C_p - C_V = R$ ist. Damit ergibt sich

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1. \quad (15.28)$$

Darin ist γ der Quotient der molaren Wärmekapazitäten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}. \quad (15.29)$$

Wir erhalten schließlich

$$T V^{\gamma-1} = \text{konstant}. \quad (15.30)$$

Aus dieser Gleichung können wir T eliminieren, wobei wir wieder die Beziehung $p V = \tilde{n} R T$ verwenden. Dies ergibt

$$\frac{p V}{\tilde{n} R} V^{\gamma-1} = \text{konstant}.$$

Das ist (bei unveränderter Molzahl \tilde{n}) gleichbedeutend mit

$$p V^\gamma = \text{konstant}. \quad (15.31)$$

REVERSIBLER ADIABATISCHER PROZESS

Diese Gleichung verknüpft den Druck p und das Volumen V bei der reversiblen adiabatischen Expansion oder Kompression. Auflösen von $p V = \tilde{n} R T$ nach V und Einsetzen des resultierenden Ausdrucks in Gleichung 15.31 sowie Vereinfachen liefert

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{konstant}. \quad (15.32)$$

Übung 15.7: Zeigen Sie, dass für einen reversiblen adiabatischen Prozess gilt: $T^\gamma/p^{\gamma-1} = \text{konstant}$. ◀

Die Arbeit, die bei der adiabatischen Kompression einer bestimmten Gasmenge verrichtet wird, kann mithilfe des Ersten Hauptsatzes berechnet werden:

$$dU = dQ + dW$$

oder

$$dW = dU - dQ.$$

Da $dU = \tilde{n} C_V dT$ und $dQ = 0$ ist, folgt

$$dW = \tilde{n} C_V dT$$

sowie daraus

$$W_{\text{ad.}} = \int dW = \int \tilde{n} C_V dT = \tilde{n} C_V \Delta T. \quad (15.33)$$

ADIABATISCHE VOLUMENARBEIT

Dabei haben wir angenommen, dass C_V konstant ist. (Beim idealen Gas ist U proportional zur absoluten Temperatur und daher $C_V = dU/dT$ eine Konstante.) Wir sehen nun, dass die am Gas verrichtete Arbeit nur von der Änderung seiner Temperatur abhängt. Bei einer adiabatischen Kompression wird Arbeit am Gas verrichtet, und seine innere Energie sowie seine Temperatur steigen an. Bei einer adiabatischen *Expansion* verrichtet das Gas Arbeit an der Umgebung, wodurch seine innere Energie und seine Temperatur sinken.

Wir schreiben Gleichung 15.33 so um, dass die Anfangs- und Endwerte von Druck und Temperatur eingesetzt werden können:

$$W_{\text{ad.}} = \tilde{n} C_V \Delta T = \tilde{n} C_V (T_E - T_A).$$

Wir wenden nun wieder die Zustandsgleichung für das ideale Gas an und erhalten

$$W_{\text{ad.}} = \tilde{n} C_V \left(\frac{p_E V_E}{\tilde{n} R} - \frac{p_A V_A}{\tilde{n} R} \right) = \frac{C_V}{R} (p_E V_E - p_A V_A).$$

Das vereinfachen wir mithilfe von Gleichung 15.28:

$$W_{\text{ad.}} = \frac{p_E V_E - p_A V_A}{\gamma - 1}. \quad (15.34)$$

Eine Anwendung dieser Beziehung in Verbindung mit Gleichung 15.31 ist in Beispiel 15.12 verdeutlicht.

Beispiel 15.12: Reversible adiabatische Kompression von Luft

Mit einer Handpumpe wird ein Fahrradreifen auf einen Überdruck von 483 kPa aufgepumpt. a) Welche Arbeit ist dazu aufzubringen, wenn jeder Pumpenhub einen reversiblen und adiabatischen Prozess bewirkt? Der Atmosphärendruck beträgt 1 atm = 1,013 bar und die Temperatur 20 °C. Das Volumen im Reifen bleibt konstant bei 1,001. b) Wie hoch ist der Druck im aufgepumpten Reifen, nachdem die Pumpe abgenommen wurde und die Temperatur im Reifen wieder auf 20 °C gesunken ist?

Problembeschreibung: Die Arbeit ist mithilfe der Beziehung $\Delta U = Q + W$ zu ermitteln, wobei $Q = 0$ ist. Gemäß Gleichung 15.33 gilt für ein ideales Gas $\Delta U = \tilde{n} C_V \Delta T$. Da der Prozess sowohl reversibel als auch adiabatisch abläuft, muss Gleichung 15.32 gelten. Damit ergibt sich die Endtemperatur. Die Größe γ ist mit den Beziehungen $\gamma = C_p/C_V$ und $C_p = C_V + R$ sowie $C_V = \frac{5}{2}R$ zu berechnen. Bezeichnen Sie den Anfangszustand mit dem Index 1 und den Endzustand mit dem Index 2. Dann ist $p_1 = 1,00$ bar, $V_1 = V_2 = 1,001$ und $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293\text{ K}$.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Um die Arbeit zu berechnen, wenden Sie den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik an. Da die Kompression adiabatisch ist, gilt dabei $Q = 0$:

$$\Delta U = Q + W = 0 + W$$

- Die Änderung der inneren Energie ist beim idealen Gas gleich $\tilde{n} C_V \Delta T$:

$$W = \Delta U = \tilde{n} C_V \Delta T$$

- Bei einem zweiatomigen Gas ist $C_V = \frac{5}{2}R$:

$$W = \tilde{n} C_V \Delta T = \frac{5}{2} \tilde{n} R \Delta T$$

- Berechnen Sie mit $T^{\gamma}/p^{\gamma-1} = \text{konstant}$ die Endtemperatur:

$$\frac{T_1^\gamma}{p_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{p_2^{\gamma-1}}$$

somit

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1$$

- Berechnen Sie γ für ein zweiatomiges Gas mit den Gleichungen 15.29, 15.20 und 15.25:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \\ &= 1 + \frac{R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1,4 \end{aligned}$$

- Lösen Sie nach T_2 auf. Da der angegebene Druck (483 kPa) der Überdruck ist, muss zunächst der Atmosphärendruck (1 atm = 101,3 kPa) addiert werden:

$$\begin{aligned} p_2 &= 483\text{ kPa} + 101,3\text{ kPa} = 584\text{ kPa} \\ T_2 &= \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1 \\ &= \left(\frac{584\text{ kPa}}{101,3\text{ kPa}} \right)^{0,4/1,4} \cdot (293\text{ K}) = 483\text{ K} \end{aligned}$$

- Berechnen Sie mit dem Ergebnis von Schritt 3 die Arbeit. Verwenden Sie dabei die Zustandsgleichung für ideale Gase, um $\tilde{n} R$ durch p_2 , V_2 und T_2 auszudrücken:

$$\begin{aligned} W &= \frac{5}{2} \tilde{n} R \Delta T = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_2 V_2}{T_2} (T_2 - T_1) \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{(584\text{ kPa}) \cdot (1,00 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3)}{483\text{ K}} \\ &\quad \cdot (483\text{ K} - 293\text{ K}) \\ &= \boxed{634\text{ J}} \end{aligned}$$

15.9 Die reversible adiabatische Expansion eines Gases

Teilaufgabe b

Die Luft im Reifen kühlt bei konstantem Volumen ab. Daher ist $p_3/T_3 = p_2/T_2$, wobei p_3 und T_3 die neuen Endwerte von Druck bzw. Temperatur sind:

$$\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_2}{T_2}$$

mit

$$\begin{aligned} T_3 &= T_1 = 293 \text{ K} \\ p_3 &= \frac{T_3}{T_2} p_2 = \frac{293 \text{ K}}{483 \text{ K}} \cdot (584 \text{ kPa}) \\ &= 354 \text{ kPa} = \boxed{3,54 \text{ bar}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Beim adiabatischen Prozess ist, wie erwartet, die Endtemperatur höher als die Anfangstemperatur, da am Gas bei konstantem Volumen Arbeit verrichtet wird.

Weitergedacht: In Wirklichkeit sind die Luftpumpe und der Reifen nicht isoliert, sodass der gesamte Vorgang des Aufpumpens nicht einmal annähernd als adiabatisch angesehen werden kann. ■

Die Geschwindigkeit von Schallwellen

Gleichung 15.31 erlaubt es, die adiabatische Kompressibilität bzw. den adiabatischen Kompressionsmodul eines idealen Gases zu berechnen. Dieser hängt mit der Schallgeschwindigkeit im Gas zusammen. Zunächst bilden wir in Gleichung 15.31 auf beiden Seiten die Differenziale und erhalten

$$p d(V^\gamma) + V^\gamma dp = 0$$

und durch Ableiten des ersten Terms

$$p \gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dp = 0.$$

Daraus folgt

$$dp = -\frac{\gamma p dV}{V}.$$

Wir verwenden nun den in Gleichung 9.9 definierten Kompressionsmodul K . Dies ist der negative Quotient aus der Druckänderung Δp und der relativen Volumenänderung $\Delta V/V$ ($K = -\Delta P/(\Delta V/V)$). Der Kompressionsmodul hat für isotherme (bei konstanter Temperatur ablaufende) und für adiabatische (ohne Wärmeaustausch verlaufende) Prozesse unterschiedliche Werte. Bei Schallwellen im für uns hörbaren Frequenzbereich vollziehen sich die Druckänderungen so schnell, dass keine merkliche Wärmeübertragung möglich ist. Daher gilt hierfür der adiabatische Kompressionsmodul K . Mit ihm wird aus der vorigen Gleichung

$$K_{\text{ad.}} = -\frac{dp}{dV/V} = \gamma p. \quad (15.35)$$

Die Schallgeschwindigkeit (siehe Gleichung 12.4) ist gegeben durch

$$v_{\text{Schall}} = \sqrt{\frac{K_{\text{ad.}}}{\varrho}}.$$

Darin ist ϱ die Massendichte. Damit und mit der Zustandsgleichung für das ideale Gas können wir das Volumen aus dem Ausdruck für die Dichte eliminieren:

$$\varrho = \frac{\tilde{n} m_{\text{Mol}}}{V} = \frac{\tilde{n} m_{\text{Mol}}}{\tilde{n} R T / p} = \frac{m_{\text{Mol}} p}{R T}.$$

Mit diesem Ergebnis und mit $K_{\text{ad.}} = \gamma p$ ergibt sich

$$v_{\text{Schall}} = \sqrt{\frac{K_{\text{ad.}}}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{m_{\text{Mol}} p / (R T)}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{m_{\text{Mol}}}}.$$

Das entspricht Gleichung 12.5 für die Schallgeschwindigkeit in Gasen.

🔍 Im Kontext: Respirometrie: Atmung und Wärmeumsatz

Mithilfe der Kalorimetrie, die in diesem Kapitel beschrieben wurde, kann auch der Energieumsatz von Organismen untersucht werden. Wilber O. Atwater, der erste Direktor der Experimentalinstitute des US-Landwirtschaftsministeriums,¹ initiierte das überaus ehrgeizige Unterfangen, den mittleren Energieumsatz der Bürger zu ermitteln. Dazu mussten Nahrungsmittel und Wasser, die sie zu sich nahmen, genauestens analysiert und ihre Ausscheidungen zur Analyse verbrannt werden. Zudem waren Temperatur, Luftzusammensetzung und Feuchtigkeit in der kleinen Kammer zu erfassen, in der die jeweilige Versuchsperson während der Experimente zu leben hatte.² Die Kammer war thermisch isoliert und innen mit Kupfer ausgekleidet, das von kupfernen Wasserröhren durchzogen war. Diese dienten zum exakten Erfassen der abgegebenen Wärme und enthielten kleine Thermometer.³ Zudem waren feine Heizdrähte eingebaut, mit denen ggf. die Temperatur geregelt werden konnte. Jegliche Änderung der Lufttemperatur in der Kammer konnte nur von der darin befindlichen Person verursacht worden sein und erlaubte Rückschlüsse auf deren Energieabgabe. Zur Messung der Lufttemperatur dienten empfindliche Thermometer, die in der Kammer aufgehängt waren.



Pro Liter eingeatmeten Sauerstoffs werden im menschlichen Organismus etwa 21 J Energie umgesetzt. Hier wird der Sauerstoffverbrauch eines Probanden auf dem Laufband gemessen. (© Philippe Psaila/Photo Researchers, Inc.)

Dieses Verfahren lieferte gute Ergebnisse für den Energieumsatz der Personen in Ruhe wie auch in Aktion, war aber teuer und schwierig zu handhaben. Daher ging man zu einer sozusagen indirekten Kalorimetrie über, indem man die Atemluft untersuchte; man spricht hierbei von der *Respirometrie*. Weitere Untersuchungen ergaben, dass über 95 % des menschlichen Energieumsatzes⁴ zuverlässig zu ermitteln sind, wenn die Mengen des eingeatmeten Sauerstoffs und des ausgetatmeten Kohlendioxids gemessen werden.⁵ Inzwischen wird davon ausgegangen, dass einem Liter eingeatmeten Sauerstoffs ein Energieumsatz von ungefähr 5 kcal bzw. 21 J entspricht.⁶ Je nach der verwendeten Messvorrichtung kann das Sauerstoffvolumen aus dem Partialdruck des Sauerstoffs in der eingeatmeten Luft berechnet oder direkt beim Einatmen ermittelt werden.

Die Respirometrie ist äußerst nützlich, da sie die schnellste Methode darstellt, den Energieumsatz von Organismen zu bestimmen. Mit entsprechenden Modifikationen kann sie auch bei Großvieh⁷, Geflügel⁸, exotischen Tieren⁹ und sogar bei Klärschlamm¹⁰ angewandt werden. In letzter Zeit zog man die Respirometrie auch heran, wenn zu ermitteln

war, ob Kompost reif genug ist, um dem Boden zugeführt zu werden. Bei hoher Geschwindigkeit des Gasaustauschs ist die Aktivität der Bakterien noch hoch, und der Kompost ist noch nicht reif genug.¹¹

Im medizinischen Bereich unterstützt die Respirometrie eine genaue Anpassung der Ernährung, insbesondere bei schwer verletzten oder schwer kranken Patienten.^{12,13} Tragbare Respirometer erlauben eine schnelle und trotzdem ausreichend genaue Messung des Energiebedarfs, sei es bei Sportlern, beispielsweise im Fitnesscenter, oder bei Diätpatienten.¹⁴ Zudem wird mit solchen Messungen die Gewichtskontrolle unterstützt.

Schließlich ist die Respirometrie auch hilfreich, wenn die öffentliche Gesundheit zu bewerten ist oder Ernährungsstandards zu etablieren sind. Bei einer Studie wurde verglichen, wie sich der Energiebedarf von kaum aktiven bzw. von aktiven Erwachsenen zu verschiedenen Ernährungsstandards verhält. Dabei zeigte sich, dass der eine Standard einer höheren Energieaufnahme entsprach, als die Erwachsenen tatsächlich benötigten.¹⁵ Indem die indirekte Kalorimetrie immer preiswerter wird, erleichtert sie die Untersuchung des Energiebedarfs der Bevölkerung in den unterschiedlichsten Ländern der Erde.

1. Swan, P., „100 Years Ago“, *Nutrition Notes of the American Society for Nutrition Sciences*, Juni 2004, 40, Nr. 2, S. 4–5. <http://www.nutrition.org/media/publications/nutrition-notes/nnjun04a.pdf> (Stand: März 2009).
2. Atwater, W. O., *A Respiration Calorimeter with Appliances for the Direct Determination of Oxygen*. Washington, D.C.: Carnegie Institution, 1905.
3. Morrison, P. und Morrison, P., „Laws of Calorie Counting“, *Scientific American*, Aug. 2000, S. 93+.
4. Ferrannini, E., „The Theoretical Bases of Indirect Calorimetry: A Review“, *Metabolism*, März 1988, 37, Nr. 3, S. 287–301.
5. Mansell, P. I. und MacDonald, I. A., „Reappraisal of the Weir Equation for Calculation of Metabolic Rate“, *AIP – Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, Juni 1990, 258, Nr. 6, S. R1347–R1354.
6. Food and Nutrition Board, *Dietary Reference Intakes for Energy, Carbohydrate, Fiber, Fat, Fatty Acids, Cholesterol, Protein, and Amino Acids*. Washington, D.C.: National Academies Press, 2005, S. 884.
7. McLeod, K. et al., „Effects of Brown Midrib Corn Silage on the Energy Balance of Dairy Cattle“, *Journal of Dairy Science*, April 2000, 84, S. 885–895.
8. „Animal Calorimetry“, *Biomeasurements and Experimental Techniques for Avian Species*. <http://web.uconn.edu/poultry/NE-127/NewFiles/Home2.html> (Stand: März 2009).
9. Schalkwyk, S. J. et al., „Gas Exchange of the Ostrich Embryo During Peak Metabolism in Relation to Incubator Design“, *South African Journal of Animal Science*, 2002, 32, S. 122–129.
10. Rai, C. L. et al., „Influence of Ultrasonic Disintegration on Sludge Growth Reduction and Its Estimation by Respirometry“, *Environmental Science and Technology*, Nov. 2004, 38, Nr. 21, S. 5779–5785.

Im Kontext: Respirometrie: Atmung und Wärmeumsatz

11. Seekings, B., „Field Test for Compost Maturity“, *Biocycle*, Juli 1996, 37, Nr. 8, S. 72–75.
12. American Association for Respiratory Care, „Metabolic Measurement Using Indirect Calorimetry During Mechanical Ventilation – 2004 Revision & Update“, *Respiratory Care*, Sept. 2004, 49, Nr. 9, 1073–1079. http://www.guideline.gov/summary/summary.aspx?ss=15&doc_id=6515 (Stand: März 2009).
13. Steward, D. und Pridham, K., „Stability of Respiratory Quotient and Growth Outcomes of Very Low Birth Weight Infants“, *Biological Research for Nursing*, Jan. 2001, 2, Nr. 3, S. 198–205.
14. St-Onge, M. et al., „A New Hand-Held Indirect Calorimeter to Measure Postprandial Energy Expenditure“, *Obesity Research*, April 2004, 12, Nr. 4, S. 704–709.
15. Alfonzo-González, G. et al., „Estimation of Daily Energy Needs with the FAO/WHO/UNU 1985 Procedures in Adults: Comparison to Whole-Body Indirect Calorimetry Measurements“, *European Journal of Clinical Nutrition*, Aug. 2004, 58, Nr. 8, S. 1125–1131.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Formeln und Anmerkungen
1. Wärme	Wärme ist die Energieform, die zwischen einem Gegenstand oder System und einem anderen aufgrund einer Temperaturdifferenz ausgetauscht wird.
Kalorie	Die nicht mehr gebräuchliche Energieeinheit Kalorie wurde definiert als die Wärmemenge, die nötig ist, um 1 g Wasser um 1 °C zu erwärmen. Sie entspricht 4,184 J.
2. Wärmekapazität	Die Wärmekapazität ist die Wärmemenge, die nötig ist, um die Temperatur einer Substanzprobe um 1 °C oder 1 K zu erwärmen.
Spezifische Wärmekapazität	$c = \frac{Q}{m} \Delta T$ (15.1)
Molare Wärmekapazität	$C = \frac{Q}{n \Delta T} = \frac{m c}{n} = m_{\text{Mol}} c$ (15.4)
Ideales Gas	$C_p = C_V + R$ (15.20)
Einatomiges Gas	$C_V = \frac{3}{2} R$ (15.22)
Zweiatomiges Gas	$C_V = \frac{5}{2} R$ (15.25)
3. Schmelzen und Verdampfen	Während des Schmelz- und des Verdampfungsvorgangs ändert sich die Temperatur auch bei Wärmezufuhr nicht.
Latente Schmelzwärme	Die Wärmemenge, die nötig ist, um eine Substanzprobe zu schmelzen, ist gleich dem Produkt aus der Masse und der spezifischen Schmelzwärme λ_S :
	$Q = m \lambda_S$ (15.6)
Latente Verdampfungswärme	Die Wärmemenge, die nötig ist, um eine Substanzprobe zu verdampfen, ist gleich dem Produkt aus der Masse und der spezifischen Verdampfungswärme λ_D :
	$Q = m \lambda_D$ (15.7)
Sättigungsdampfdruck	Der Sättigungsdampfdruck ist der Druck, bei dem die flüssige und die gasförmige Phase einer Substanz bei der jeweiligen Temperatur miteinander im Gleichgewicht stehen. Eine Flüssigkeit siedet bei der Temperatur, bei der ihr Dampfdruck dem äußeren Druck entspricht.
Trielpunkt	Der Trielpunkt ist dasjenige Wertepaar von Druck und Temperatur, bei dem feste, flüssige und gasförmige Phase einer Substanz miteinander im Gleichgewicht stehen. Bei Drücken unterhalb dem des Tripelpunkts der betreffenden Substanz kann deren flüssige Phase nicht existieren.
4. Erster Hauptsatz der Thermodynamik	Die Änderung der inneren Energie eines Systems ist gleich der ihm netto zugeführten Wärme plus der ihm netto zugeführten Arbeit (vom System abgeführte Wärme bzw. Arbeit ist jeweils negativ zu rechnen):
	$\Delta U = Q + W$ (15.8)
5. Innere Energie U	Die innere Energie eines Systems ist eine Zustandsfunktion und hängt nur vom jeweiligen Zustand des Systems ab, nicht aber von dem Weg, auf dem dieser erreicht wurde. Auch Druck, Volumen und Temperatur sind Zustandsfunktionen, nicht aber Wärme und Arbeit.
Ideales Gas	Die innere Energie U hängt nur von der Temperatur T ab.
Einatomiges Gas	$U = \frac{3}{2} \tilde{n} R T$ (15.10)
Zusammenhang zwischen innerer Energie und Wärmekapazität bei konstantem Volumen	$dU = \tilde{n} C_V dT$ (15.18a)

Thema	Wichtige Formeln und Anmerkungen
6. Reversible Prozesse	Bei reversiblen (quasistatischen) Prozessen erfolgen die Veränderungen so langsam, dass das System praktisch eine Reihe von Gleichgewichtszuständen durchläuft.
Isometrisch (isochor)	$V = \text{konstant}$
Isobar	$p = \text{konstant}$
Isotherm	$T = \text{konstant}$
Adiabatisch	$Q = 0$ (kein Wärmeaustausch)
Adiabatische Zustandsgleichung, ideales Gas	$T V^{\gamma-1} = \text{konstant}$ (15.30) $p V^\gamma = \text{konstant}$ (15.31) $T^\gamma / p^{\gamma-1} = \text{konstant}$ (15.32) mit $\gamma = C_p / C_V$ (15.29)
7. Am Gas verrichtete Arbeit	$W = - \int_{V_A}^{V_E} p \, dV = \tilde{n} C_V \Delta T - Q \quad (15.8, 15.13, 15.18a)$
Isometrisch (isochor)	$W = - \int_{V_A}^{V_E} p \, dV = 0 \quad \text{mit} \quad V_E = V_A$
Isobar	$W = - \int_{V_A}^{V_E} p \, dV = -p \int_{V_A}^{V_E} dV = -p \Delta V$
Isotherm	$W_{\text{isoth.}} = - \int_{V_A}^{V_E} p \, dV = -\tilde{n} R T \int_{V_A}^{V_E} \frac{dV}{V} = \tilde{n} R T \ln \frac{V_A}{V_E} \quad (15.15)$
Adiabatisch	$W_{\text{ad.}} = \tilde{n} C_V \Delta T \quad (15.33)$
8. Gleichverteilungssatz	Bei einem System im Gleichgewicht entfällt auf jeden Freiheitsgrad eine Energie von $\frac{1}{2} k_B T$ pro Molekül bzw. von $\frac{1}{2} R T$ pro Mol.
9. Dulong-Petit'sche Regel	Die molare Wärmekapazität der meisten metallischen Festkörper beträgt $3 R$. Das folgt aus dem Gleichverteilungssatz, wobei angenommen wird, dass jedes Atom im Festkörper sechs Freiheitsgrade aufweist.

Antwort auf die Verständnisfrage

- Wenn eine gespannte Saite eines Bogens losgelassen wird, dann wird ihre innere Energie in die kinetische Energie des Pfeils übertragen. – Die gespeicherte Volumenarbeit in einem Druckluftbehälter kann dazu verwendet werden, die Hebebühne in der Werkstatt anzuheben.
- 20,5 kJ
- 400 J
- a) $m_{\text{Mol}} = 24,4 \text{ g/mol}$. b) Es handelt sich offenbar um Magnesium mit $m_{\text{Mol}} = 24,31 \text{ g/mol}$.
- $V_A = 48,71$, $V_E = 62,01$,
 $W = -13,31 \cdot \text{bar} = -1,33 \text{ kJ}$
- Bei einem reversiblen Prozess gilt $p V^\gamma = \text{konstant}$. Aus der Zustandsgleichung für das ideale Gas folgt $V = \tilde{n} R T / p$. Einsetzen in die vorige Beziehung liefert $p (\tilde{n} R T / p)^\gamma = \text{konstant}$, und nach Umstellen ergibt sich daraus $T^\gamma / p^{\gamma-1} = \text{konstant}$ (wenn die Molanzahl \tilde{n} konstant ist).

Lösungen der Übungen

- 30 °C
- 500 kJ

Aufgaben

Verständnisaufgaben

15.1 • Gegenstand A hat eine doppelt so große Masse wie Gegenstand B. Wenn beide Gegenstände gleich große Wärmemengen aufnehmen, ergibt sich bei beiden die gleiche Temperaturänderung. Welche Beziehung besteht zwischen ihren spezifischen Wärmekapazitäten? a) $c_A = 2 c_B$, b) $2 c_A = c_B$, c) $c_A = c_B$, d) keine dieser Beziehungen.

15.2 • Beim Joule'schen Experiment, das die Äquivalenz von Wärme und Arbeit zeigte, wird mechanische Energie in innere Energie umgesetzt. Nennen Sie einige Beispiele, bei denen die innere Energie eines Systems in mechanische Energie umgesetzt wird.

15.3 • Kann eine bestimmte Gasmenge Wärme aufnehmen, ohne dass sich ihre innere Energie ändert? Wenn ja, nennen Sie ein Beispiel. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

15.4 • Welche der Aussagen sind richtig, welche sind falsch: In der Gleichung $Q = \Delta U - W$ (einer Formulierung des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik) stehen die Größen Q und W für a) die dem System zugeführte Wärme und die von ihm verrichtete Arbeit, b) die dem System zugeführte Wärme und die an ihm verrichtete Arbeit, c) die vom System abgegebene Wärme und die von ihm verrichtete Arbeit, d) die vom System abgegebene Wärme und die an ihm verrichtete Arbeit.

15.5 • Ein bestimmtes Gas besteht aus Ionen, die einander abstoßen. Das Gas erfährt eine freie Expansion, während der es weder Wärme aufnimmt noch Arbeit verrichtet. Wie ändert sich die Temperatur? Begründen Sie Ihre Antwort.

15.6 • Welche dieser Aussagen trifft zu: Ein Gas ändert seinen Zustand reversibel von A nach C im p -V-Diagramm von Abbildung 15.19. Die vom Gas verrichtete Arbeit ist a) am größten für den Weg A → B → C, b) am kleinsten für den Weg A → C, c) am größten für den Weg A → D → C, d) für alle drei Wege gleich groß.

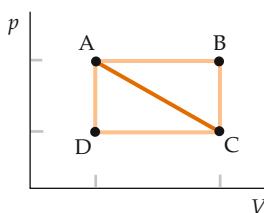


Abbildung 15.19 Zu Aufgabe 15.6.

15.7 • Das Volumen einer bestimmten Menge eines Gases bleibt konstant, während sich ihre Temperatur und ihr Druck ändern. Welche der folgenden Aussagen trifft bzw. treffen dafür zu? a) Die innere Energie des Gases bleibt unverändert. b) Das Gas verrichtet keine Arbeit. c) Das Gas nimmt keine Wärme auf. d) Die Änderung der inneren Energie des Gases entspricht der von ihm netto aufgenommenen Wärmemenge. e) Es trifft keine dieser Aussagen zu.

15.8 •• Welches Metall hat nach Ihrer Einschätzung die höhere Wärmekapazität pro Masseneinheit: Blei oder Kupfer? Warum? (Schlagen Sie vor der Beantwortung der Frage nicht die Wärmekapazitäten nach.)

15.9 •• Ein ideales Gas durchläuft einen Prozess, bei dem $p\sqrt{V} = \text{konstant}$ ist und das Gasvolumen abnimmt. Wie ändert sich dabei die Temperatur? Erklären Sie die Zusammenhänge.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

15.10 • An einer Küste soll ein Kraftwerk errichtet werden, und zur Kühlung soll Meerwasser verwendet werden. Das Kraftwerk soll eine elektrische Leistung von 1,00 GW abgeben und einen Wirkungsgrad von einem Drittel haben (was für moderne Kraftwerke ein guter Wert ist). Die Wärmeabgabe an das Kühlwasser beträgt daher 2,00 GW. Nach den Vorschriften darf dessen Temperaturanstieg aber nicht höher als 10 °C sein. Schätzen Sie ab, wie hoch der Kühlwasserdurchsatz (in kg/s) sein muss.

15.11 •• Ein gewöhnlicher Mikrowellenherd nimmt eine elektrische Leistung von rund 1200 W auf. Schätzen Sie ab, wie lange es dauert, um eine Tasse Wasser zum Sieden zu bringen, wenn 50 % dieser Leistung zum Erwärmen des Wassers genutzt werden. Entspricht der damit berechnete Wert Ihrer Erfahrung?

Wärmekapazität, spezifische Wärme, latente Wärme

15.12 • Ein mit Sonnenenergie beheiztes Haus besteht u. a. aus $1,00 \cdot 10^5 \text{ kg}$ Beton (spezifische Wärmekapazität $1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Wie viel Wärme gibt diese Betonmenge ab, wenn sie von 25,0 °C auf 20,0 °C abkühlt?

15.13 • Wie viel Wärme muss zugeführt werden, um 60,0 g Eis mit $-10,0^\circ\text{C}$ zu 60,0 g Wasser mit $40,0^\circ\text{C}$ umzuwandeln?

15.14 •• Wie viel Wärme muss abgeführt werden, wenn 0,100 kg Wasserdampf von 150°C abgekühlt und zu 0,100 kg Eis mit $0,00^\circ\text{C}$ umgewandelt werden?

Kalorimetrie

15.15 •• Nehmen Sie an, bei seinen verschiedenen Teilnahmen an der Tour de France erbrachte der Radrennfahrer Lance Armstrong jeweils 20 Tage lang 5,0 Stunden täglich eine mittlere Leistung von 400 W. Welche Wassermenge mit einer Anfangstemperatur von 24 °C wäre bis zum Siedepunkt zu erwärmen, wenn die von Armstrong während einer Tour insgesamt erbrachte Energie nutzbar gemacht werden könnte?

15.16 •• Ein Stück Eis der Masse 200 g mit der Temperatur 0,0 °C wird in 500 g Wasser mit 20 °C eingebbracht. Das System ist ein von der Umgebung thermisch isolierter Behälter mit vernachlässigbarer Wärmekapazität. a) Wie hoch ist am Ende die Gleichgewichtstemperatur des Systems? b) Wie viel Eis ist dann geschmolzen?

15.17 •• Ein gut isolierter Behälter mit vernachlässigbarer Wärmekapazität enthält 150 g Eis mit einer Temperatur von 0,0 °C. a) Welche Gleichgewichtstemperatur erreicht das System, nachdem 20 g Dampf mit 100 °C hineingespritzt wurden? b) Ist noch Eis vorhanden, wenn das System wieder im Gleichgewicht ist?

15.18 •• Ein Kalorimeter mit vernachlässigbarer Masse enthält 1,00 kg Wasser mit 303 K. Es werden 50,0 g Eis mit 273 K hineingegeben. a) Welche Endtemperatur stellt sich nach einiger Zeit ein? b) Wie hoch ist die Endtemperatur bei einer Eismenge von 500 g?

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

15.19 • Eine bestimmte Menge eines zweiatomigen Gases verrichtet 300 J Arbeit und nimmt 2,50 kJ Wärme auf. Wie hoch ist die Änderung seiner inneren Energie?

15.20 • Eine bestimmte Menge eines Gases nimmt 1,67 MJ Wärme auf, während es 800 J Arbeit verrichtet. Wie hoch ist die Änderung seiner inneren Energie?

15.21 •• Ein Bleigeschoss mit einer Anfangstemperatur von 30 °C kam gerade zum Schmelzen, als es inelastisch auf eine Platte aufschlug. Nehmen Sie an, die gesamte kinetische Energie des Projektils ging beim Aufprall in seine innere Energie über und bewirkte dadurch die Temperaturerhöhung, die zum Schmelzen führte. Wie hoch war die Geschwindigkeit des Projektils beim Aufprall?

Arbeit und das p - V -Diagramm eines Gases

15.22 • 1,00 mol eines idealen Gases hat folgenden Anfangszustand: $p_1 = 3,00 \text{ bar}$, $V_1 = 1,001 \text{ m}^3$ und $U_1 = 456 \text{ J}$. Der Endzustand ist $p_2 = 2,00 \text{ bar}$, $V_2 = 3,001 \text{ m}^3$ und $U_2 = 912 \text{ J}$. Das Gas expandiert bei konstantem Druck bis auf das angegebene Endvolumen. Dann wird es bei konstantem Volumen abgekühlt,

bis es den angegebenen Enddruck erreicht hat. a) Erstellen Sie das p - V -Diagramm für diesen Vorgang und berechnen Sie die Arbeit, die das Gas verrichtet. b) Welche Wärmemenge wird während des Prozesses zugeführt?

15.23 •• 1,00 mol eines idealen Gases hat anfangs einen Druck von 1,00 bar und ein Volumen von 25,0 l. Das Gas wird langsam erwärmt, wofür sich im p - V -Diagramm eine gerade Linie zum Endzustand mit dem Druck 3,00 bar und dem Volumen 75,0 l ergibt. Wie viel Arbeit verrichtet das Gas, und wie viel Wärme nimmt es auf?

Wärmekapazitäten von Gasen und der Gleichverteilungssatz

15.24 •• Eine bestimmte Menge eines zweiatomigen Gases befindet sich beim Druck p_0 in einem verschlossenen Behälter mit dem konstanten Volumen V . Welche Wärmemenge Q muss dem Gas zugeführt werden, um den Druck zu verdreifachen?

15.25 •• Eine bestimmte Menge Kohlendioxid (CO_2) sublimiert bei einem Druck von 1,00 bar und einer Temperatur von $-78,5^\circ\text{C}$. Sie geht also direkt vom festen in den gasförmigen Zustand über, ohne die flüssige Phase zu durchlaufen. Wie hoch ist die Änderung der molaren Wärmekapazität (bei konstantem Druck) bei der Sublimation? Ist die Änderung positiv oder negativ? Nehmen Sie an, dass die Gasmoleküle rotieren, nicht aber schwingen können. Die Struktur des CO_2 -Moleküls ist in Abbildung 15.20 dargestellt.

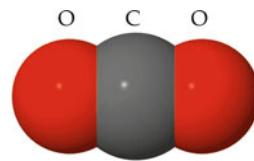


Abbildung 15.20 Zu Aufgabe 15.25.

Wärmekapazitäten von Festkörpern und die Dulong-Petit'sche Regel

15.26 • Die Dulong-Petit'sche Regel diente ursprünglich dazu, die molare Masse einer metallischen Substanzprobe aus ihrer Wärmekapazität zu ermitteln. Die spezifische Wärmekapazität eines bestimmten Festkörpers wurde zu $0,447 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ gemessen. a) Wie hoch ist seine molare Masse? b) Um welches Element kann es sich handeln?

Reversible adiabatische Expansion eines Gases

15.27 •• 0,500 mol eines einatomigen idealen Gases mit einem Druck von 400 kPa und einer Temperatur von 300 K expandieren reversibel, bis der Druck auf 160 kPa abgesunken ist.

Ermitteln Sie die Endtemperatur, das Endvolumen, die netto zugeführte Arbeit und die netto aufgenommene Wärmemenge, wenn die Expansion a) isotherm bzw. wenn sie b) adiabatisch abläuft.

15.28 •• Wiederholen Sie die vorangegangene Aufgabe für ein zweiatomiges Gas.

Zyklische Prozesse

15.29 •• 1,00 mol eines zweiatomigen idealen Gases kann so expandieren, dass im p - V -Diagramm (Abbildung 15.21) die gerade Linie vom Zustand 1 zum Zustand 2 durchlaufen wird. Dann wird das Gas isotherm vom Zustand 2 zum Zustand 1 komprimiert, wobei die gekrümmte Linie durchlaufen wird. Berechnen Sie die in diesem Zyklus insgesamt umgesetzte Arbeit.

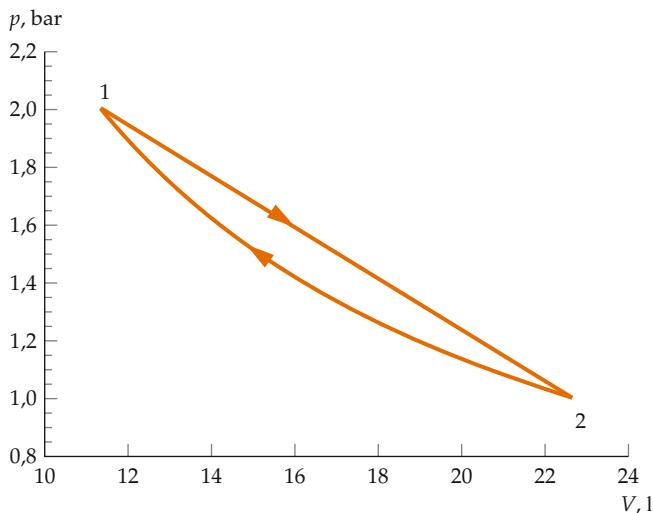


Abbildung 15.21 Zu Aufgabe 15.29.

15.30 ••• Am Punkt D in Abbildung 15.22 haben 2,00 mol eines einatomigen idealen Gases einen Druck von 2,00 bar und eine Temperatur von 360 K. Am Punkt B im p - V -Diagramm ist das Volumen des Gases dreimal so groß wie am Punkt D, und sein Druck ist zweimal so groß wie am Punkt C. Die Wege AB und CD entsprechen isothermen Prozessen. Das Gas durchläuft einen vollständigen Zyklus entlang des Wegs DABCD. Ermitteln Sie die dem Gas netto zugeführte Arbeit und die ihm in jedem einzelnen Schritt netto zugeführte Wärmemenge.

Allgemeine Aufgaben

15.31 •• Ein thermisch isoliertes System besteht aus 1,00 mol eines zweiatomigen idealen Gases mit einer Temperatur von

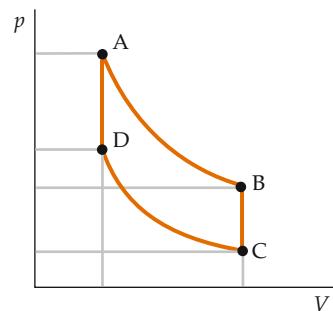


Abbildung 15.22 Zu Aufgabe 15.30.

100 K sowie 2,00 mol eines Festkörpers mit einer Temperatur von 200 K, die durch eine feste, isolierende Wand voneinander getrennt sind. Ermitteln Sie die Gleichgewichtstemperatur, die das System erreicht, nachdem die Wand entfernt wurde. Nehmen Sie an, dass die Zustandsgleichung für ideale Gase bzw. die Dulong-Petit'sche Regel gelten.

15.32 •• Wenn eine bestimmte Menge eines idealen Gases bei konstantem Volumen eine Temperaturänderung erfährt, so ändert sich ihre innere Energie um $\Delta U = \tilde{n} C_V dT$. a) Erklären Sie, warum diese Gleichung für ein ideales Gas auch bei einer Veränderung des Volumens korrekte Ergebnisse liefert. b) Zeigen Sie mithilfe dieser Beziehung und des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik, dass für ein ideales Gas gilt: $C_p = C_V + R$.

15.33 •• Gemäß dem Einstein'schen Modell für einen kristallinen Festkörper gilt für dessen molare innere Energie

$$U_{\text{Mol}} = \frac{3 n_A k_B \Theta_E}{e^{\Theta_E/T} - 1}.$$

Bestimmen Sie mithilfe dieser Gleichung die molare innere Energie von Diamant ($\Theta_E = 1060$ K) bei 300 K und bei 600 K sowie daraus die Zunahme der inneren Energie, wenn 1,00 mol Diamant von 300 K auf 600 K erwärmt wird.

15.34 ••• Gemäß dem Einstein'schen Modell für einen kristallinen Festkörper gilt für dessen molare innere Energie

$$U_{\text{Mol}} = \frac{3 n_A k_B \Theta_E}{e^{\Theta_E/T} - 1}.$$

Darin ist Θ_E die Einstein-Temperatur und T die in Kelvin einzusetzende Temperatur des Festkörpers. Zeigen Sie mithilfe dieser Beziehung, dass für die molare Wärmekapazität des kristallinen Festkörpers bei konstantem Volumen gilt:

$$C_V = 3 R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T} - 1)^2}.$$

Der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik

16



In dieser alten Lokomotive wird Dampf erzeugt, der an einem Kolben Arbeit verrichtet und dadurch den Antrieb bewirkt. Der Wirkungsgrad einer Dampfmaschine erfüllt den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. (© DGEG Eisenbahnmuseum Neustadt/Weinstraße, Foto: Thomas Kayser.)

? Welchen Wirkungsgrad kann diese Maschine höchstens haben? (Siehe Beispiel 16.4.)

16.1	Wärmekraftmaschinen und der Zweite Hauptsatz	600
16.2	Kältemaschinen und der Zweite Hauptsatz	605
16.3	Der Carnot'sche Kreisprozess	608
16.4	*Wärmepumpen	613
16.5	Irreversibilität, Unordnung und Entropie	614
16.6	Entropie und die Verfügbarkeit der Energie	620
16.7	Entropie und Wahrscheinlichkeit	621
16.8	*Der Dritte Hauptsatz	623
	Zusammenfassung	625
	Aufgaben	627

Der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik

In den letzten Jahren ist uns stärker bewusst geworden, dass wir Energie sparen müssen. Doch können wir das überhaupt, wenn der Erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die Energie in einem abgeschlossenen System erhalten bleibt? Die Antwort lautet „ja“, denn die Gesamtenergie bleibt zwar stets dieselbe, es gibt jedoch gut nutzbare und weniger nutzbare Energieformen, mit denen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen werden.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Er erlaubt Aussagen darüber, wie effizient Wärmekraftmaschinen oder Kältemaschinen sein können. Weiterhin lernen wir eine ideale Wärmekraftmaschine kennen, die nach dem Carnot-Kreisprozess arbeitet. Schließlich betrachten wir die Irreversibilität von Vorgängen und die Entropie. Daraus leiten wir Aussagen zur Verfügbarkeit der Energie, zur Unordnung von Systemen und zur Wahrscheinlichkeit bestimmter Vorgänge ab.

16.1 Wärmekraftmaschinen und der Zweite Hauptsatz

Mechanische Energie (bzw. Arbeit) kann ohne weiteres restlos in Wärme umgewandelt werden, es ist jedoch unmöglich, einem einzelnen Reservoir Wärme zu entnehmen und sie vollständig in Arbeit umzusetzen, ohne dass dabei zwangsläufig auch andere Vorgänge ablaufen. Diese experimentell ermittelte Tatsache ist eine der Aussagen des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Von William Thomson, dem späteren Lord Kelvin of Largs, stammt folgende Formulierung:

Kein System kann Energie in Form von Wärme einem einzelnen Reservoir entnehmen und sie vollständig in Arbeit umsetzen, ohne dass gleichzeitig zusätzliche Veränderungen im System oder in dessen Umgebung eintreten.

ZWEITER HAUPTSATZ: THOMSON'SCHE FORMULIERUNG

Ein bekanntes Beispiel für die Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme ist die Reibung. Nehmen Sie an, Sie bewegen auf einer Tischplatte zwei Minuten lang einen schweren Klotz auf einer geschlossenen Kreisbahn, abwechselnd rechts



In dieser konzentrischen Anordnung zahlreicher Reflektoren wird die Sonnenstrahlung auf den Kollektor in der Mitte gerichtet. In ihm wird Sonnenenergie in Wärme umgesetzt. Diese Anlage steht in Barstow im US-Bundesstaat Kalifornien. (© Sandia National Laboratory)

und links herum. Zum Schluss befindet sich der Klotz an derselben Stelle wie zu Beginn. Nehmen Sie nun weiter an, das aus Klotz und Tisch bestehende System befand sich anfangs im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung. Die Arbeit, die Sie am Klotz verrichtet haben, wurde in innere Energie des Systems umgesetzt, das infolge der Reibung wärmer wurde. Dadurch ist das System nicht mehr im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung, sondern es gibt Wärme an diese ab, bis wieder thermisches Gleichgewicht zwischen System und Umgebung erreicht ist. Wir nehmen an, dass die Umgebung so groß ist, dass sich ihre Temperatur praktisch nicht geändert hat; daher erreicht das System aus Klotz und Tisch zum Schluss wieder dieselbe Temperatur wie zuvor. Nach dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik muss die der Umgebung zugeführte Wärmemenge ebenso groß sein wie die Arbeit, die Sie am System verrichtet haben. Der umgekehrte Vorgang wird allerdings niemals ablaufen, nämlich dass sich der warme Tisch und der warme Klotz abkühlen und dabei ihre innere Energie in Arbeit umsetzen und den Klotz an Ihrer Hand auf dem Tisch herumbewegen! Dieser wahrlich seltsame Vorgang würde dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik keineswegs widersprechen, ebenso wenig einem der anderen physikalischen Gesetze, die wir bisher behandelt haben. Doch er widerspricht dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Zwischen den Rollen, die Wärme und Arbeit spielen, herrscht eine Art Unsymmetrie, die aus dem Ersten Hauptsatz nicht hervorgeht. Diese Unsymmetrie hängt mit der Tatsache zusammen, dass manche Prozesse *irreversibel* sind.

Es gibt viele irreversible Prozesse, die sich offenbar stark von einander unterscheiden, jedoch alle den Zweiten Hauptsatz erfüllen. Beispielsweise ist die Wärmeübertragung ein irreversibler Prozess. Bringen wir einen heißen und einen kalten Gegenstand zusammen, geht Wärme vom heißen zum kalten Gegenstand über, bis beide dieselbe Temperatur erreicht haben. Auch hier wird niemals der umgekehrte Prozess ablaufen, nämlich dass bei zwei in Kontakt gebrachten gleich warmen Gegenständen der eine abkühlt und der andere sich erwärmt. Vielmehr werden beide Gegenstände dieselbe Temperatur behalten, und es wird keine Wärme von einem zum anderen übertragen. Diese experimentell ermittelte Tatsache führt zu einer anderen Formulierung des Zweiten Hauptsatzes:

Ein Prozess, bei dem nur Wärmeenergie einem kälteren Reservoir entnommen und dieselbe Menge an Wärmeenergie einem wärmeren Reservoir zugeführt wird, ist unmöglich.

ZWEITER HAUPTSATZ: CLAUSIUS'SCHE FORMULIERUNG

Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass die Thomson'sche und die Clausius'sche Formulierung des Zweiten Hauptsatzes gleichwertig sind.

Auf die mit dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zusammenhängenden Gesetzmäßigkeiten stieß man zuerst bei dem Versuch, die Effizienz der **Wärmekraftmaschinen** zu verbessern. Dies sind zyklisch arbeitende Vorrichtungen, mit denen möglichst viel Wärme in mechanische Arbeit umgesetzt wird. Jede Wärmekraftmaschine enthält eine sogenannte **Arbeitssubstanz**. Bei der Dampfmaschine ist diese das Wasser und

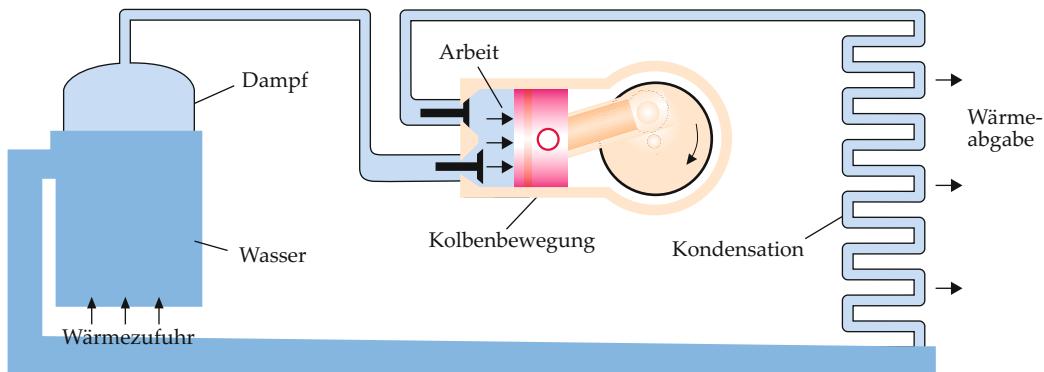


Abbildung 16.1 Das Prinzip der Dampfmaschine. Der unter hohem Druck erzeugte Dampf verrichtet Arbeit am Kolben.

beim Verbrennungsmotor das Benzindampf-Luft-Gemisch. Die Arbeitssubstanz nimmt bei der höheren Temperatur T_w die Wärmemenge Q_w auf, verrichtet an der Umgebung die Arbeit $|W|$ und gibt bei der tieferen Temperatur T_k die Wärmemenge $|Q_k|$ ab. Dann kehrt sie in den Anfangszustand zurück, sodass sich insgesamt ein Kreisprozess vollzieht.

Dampfmaschinen, erfunden Mitte des 18. Jahrhunderts, waren die ersten Wärmekraftmaschinen. Sie dienten anfangs in Kohlebergwerken zum Abpumpen von Wasser aus den Schächten, später auch lange Zeit zum Antrieb von Lokomotiven. Heute treibt man mit Dampfmaschinen Generatoren zur Erzeugung von elektrischem Strom an. Das Prinzip einer Dampfmaschine ist in Abbildung 16.1 dargestellt: Wasser wird unter hohem Druck (meist mehrere Hundert Bar) bis zum Sieden erhitzt; hierzu sind meist etwa 500 °C erforderlich. Der Dampf expandiert und treibt dabei einen Kolben oder Turbinenschaufeln an, wobei er sich stark abkühlt. Danach tritt er in den Kühler aus und wird dort noch weiter abgekühlt. Dabei gibt er Wärme an ein Reservoir mit der tieferen Temperatur ab und kondensiert schließlich zu Wasser. Das Wasser wird dann in den Kessel zurück gepumpt und erneut erhitzt.

In Abbildung 16.2 sind schematisch die Abläufe im Viertakt-Verbrennungsmotor gezeigt, im sogenannten Ottomotor. Er gehört zu den Wärmekraftmaschinen mit innerer Verbrennung – im Gegensatz zur Dampfmaschine, bei der die Wärmeerzeugung außerhalb des Arbeitsvolumens stattfindet. Während des Ansaugtakts gelangt bei geschlossenem Auslassventil das Benzindampf-Luft-Gemisch in den Zylinder, während sich der Kolben abwärts bewegt. Die Mischung wird dann komprimiert und anschließend durch die Zündkerze gezündet. Die heißen, gasförmigen Verbrennungsprodukte expandieren, treiben den Kolben im *Arbeitstakt* nach unten und verrichten so Arbeit an ihm. Im *Auspufftakt* werden die Abgase durch die Aufwärtsbewegung des Kolbens aus dem Zylinder gedrückt. Danach wiederholt sich der Zyklus.

Abbildung 16.3 zeigt das idealisierte *p-V*-Diagramm des sogenannten **Ottokreisprozesses**, der im Ottomotor abläuft.

Das Prinzip einer Wärmekraftmaschine ist in Abbildung 16.4 dargestellt. Die aufgenommene Wärmemenge Q_w wird dem **wärmeren Wärmereservoir** entnommen, das die Temperatur T_w hat. Die abgegebene Wärmemenge $|Q_k|$ gelangt in das **kältere Wärmereservoir** mit der Temperatur T_k . Unter einem Wärmereservoir verstehen wir eine idealisierte Vorrichtung, deren Wärmekapazität so groß ist, dass sie Wärme aufnehmen oder abgeben kann, ohne dass sich ihre Temperatur merklich ändert. In der Praxis stellt der verbrennende Brennstoff oder Kraftstoff oft das wärmere Reservoir dar, und häufig dient die umgebende Atmosphäre oder auch ein Gewässer als kälteres Reservoir.

Wir wenden auf die Wärmekraftmaschine nun den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik ($\Delta U = Q + W$) an. Damit gilt

$$|W| = Q_w - |Q_k|. \quad (16.1)$$

Darin ist $|W|$ der Betrag der von der Wärmekraftmaschine in einem vollständigen Zyklus netto verrichteten Arbeit, und die Differenz $Q_w - |Q_k|$ ist die dem System in einem Zyklus netto zugeführte Wärmeenergie. Die Größe ΔU schließlich ist die in einem Zyklus auftretende Änderung der inneren Energie des Systems (einschließlich der Arbeitssubstanz). Sie ist null, weil Anfangs- und Endzustand des Systems nach dem Durchlauf eines vollständigen Zyklus identisch sind, d. h. $\Delta U = 0$ ist.

Der **Wirkungsgrad** ε einer Wärmekraftmaschine ist definiert als das Verhältnis der abgegebenen Arbeit $|W|$ zu der aus dem wärmeren Reservoir aufgenommenen Wärme Q_w :

$$\varepsilon = \frac{|W|}{Q_w} = \frac{Q_w - |Q_k|}{Q_w} = 1 - \frac{|Q_k|}{Q_w}. \quad (16.2)$$

DEFINITION DES WIRKUNGSGRADS EINER WÄRMEKRAFTMASCHINE

Die Beispiele 16.1 und 16.2 illustrieren bzw. beschreiben den Wirkungsgrad von Wärmekraftmaschinen.

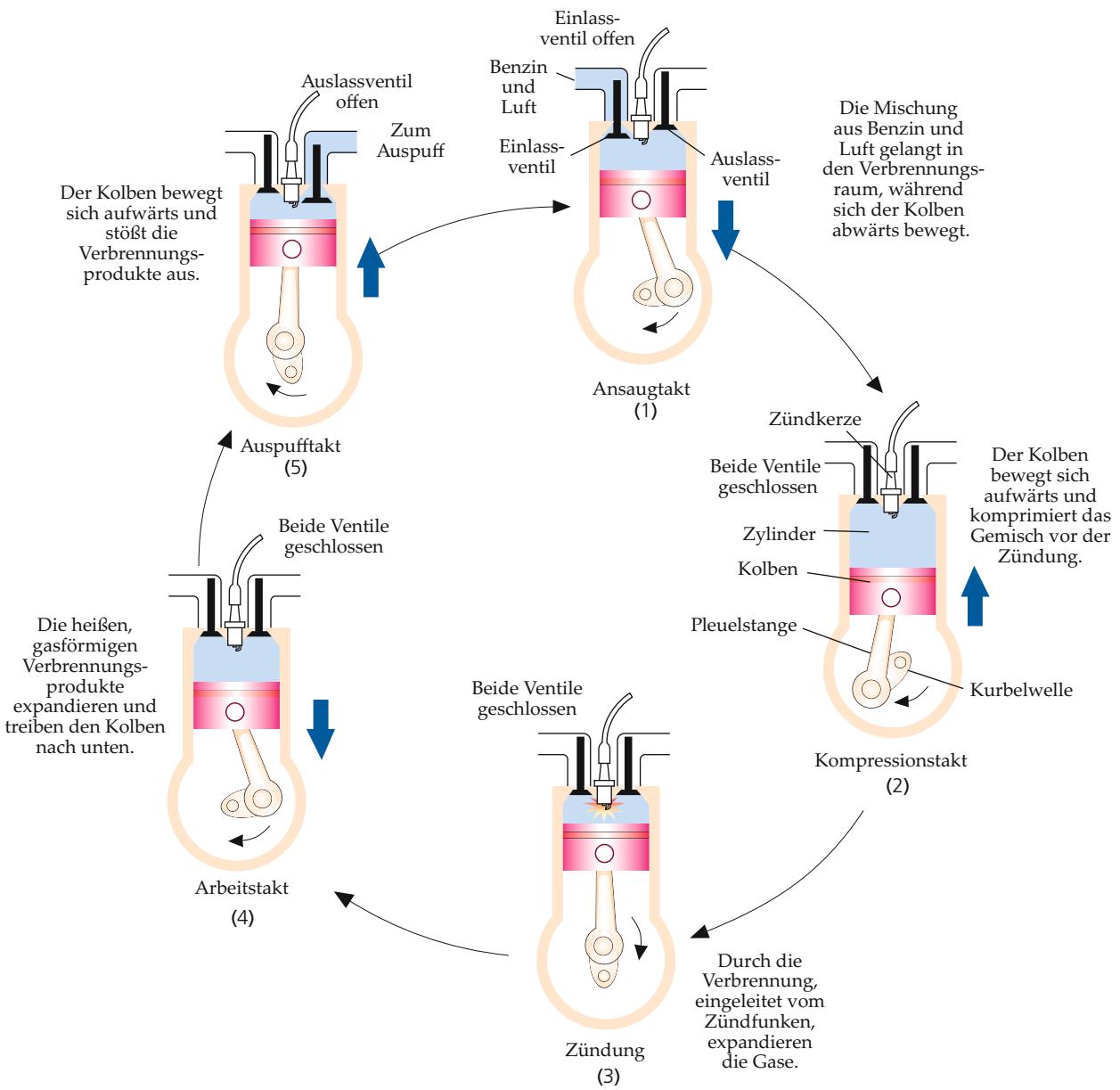


Abbildung 16.2 Die Funktionsweise des Viertakt-Ottomotors. Bei einigen modernen Motorentypen wird das Benzindampf-Luft-Gemisch direkt in den Zylinder eingespritzt, also nicht das Benzin in den Luftstrom.

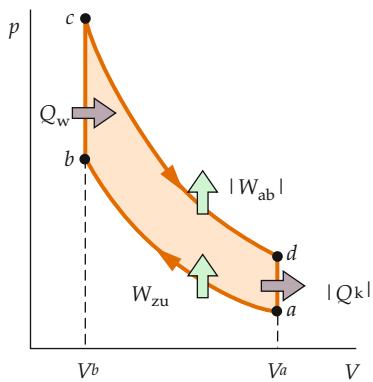


Abbildung 16.3 Das schematische p - V -Diagramm für die Vorgänge im Ottomotor („Ottokreisprozess“). Das Benzindampf-Luft-Gemisch tritt bei a ein und wird adiabatisch komprimiert bis b . Nach der durch die Zündkerze herbeigeführten Zündung wird es bei konstantem Volumen bis c durch die Verbrennung aufgeheizt. Dabei wird ihm die Wärmemenge Q_w zugeführt. Im Arbeitstakt wird es von c nach d adiabatisch expandiert. Während der Abkühlung bei konstantem Volumen (von d nach a) wird die Wärmemenge $|Q_k|$ abgegeben. Nicht gezeigt sind hier der Ausstoß der Verbrennungsprodukte und die Zufuhr neuen Benzindampf-Luft-Gemischs bei konstantem Volumen. Während der adiabatischen Kompression wird Arbeit (W_{zu}) am System verrichtet, und das System verrichtet seinerseits Arbeit ($|W_{ab}|$) während der adiabatischen Expansion.

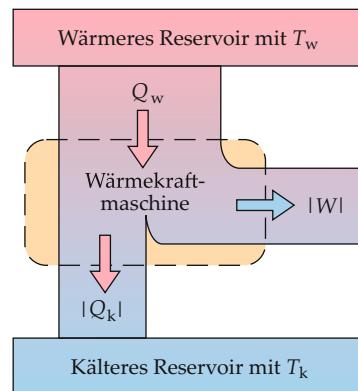


Abbildung 16.4 Das Prinzip der Wärmekraftmaschine. Sie nimmt die Wärmemenge Q_w aus einem Wärmereservoir mit der höheren Temperatur T_w auf und gibt die Arbeit $|W|$ an die Umgebung ab. Außerdem gibt sie die Wärmemenge $|Q_k|$ an ein kälteres Reservoir mit der Temperatur T_k ab.

Vorgehensweise: Berechnung der Arbeit einer zyklisch arbeitenden Wärmekraftmaschine

Eine Wärmekraftmaschine nimmt Wärme aus einem Reservoir mit höherer Temperatur auf, verrichtet Arbeit und gibt Wärme an ein Reservoir mit tieferer Temperatur ab. Wegen der Energieerhaltung ist *pro Zyklus* die aufgenommene Wärme gleich der Summe der von der Maschine abgegebenen Wärme und der von ihr verrichteten Arbeit. Der Wirkungsgrad der Wärmekraftmaschine ist definiert als der Quotient aus der *pro Zyklus* verrichteten Arbeit und der *pro Zyklus* aufgenommenen Wärme. Bei unseren Berechnungen wird als Arbeitssubstanz meist ein ideales Gas angenommen.

1. Für eine Anzahl vollständig durchlaufener Zyklen ist die Änderung der inneren Energie $\Delta U = 0$ und daher $Q_w = |W| + |Q_k|$.
2. Der Wirkungsgrad ist gegeben durch $\varepsilon = |W|/Q_w$.
3. Die in einem Schritt eines Zyklus verrichtete Arbeit ist gegeben durch $W_{\text{Schritt}} = \int_{V_A}^{V_E} p \, dV$, wobei für das ideale Gas gilt: $p = \tilde{n} R T/V$.
4. Die vom Gas in einem Schritt aufgenommene Wärme ist gegeben durch $m c \Delta T$, wobei c die spezifische Wärmekapazität ist.

Plausibilitätsprüfung: Bei einem vollständig durchlaufenen Zyklus muss die verrichtete Arbeit $|W|$ gleich $Q_w - |Q_k|$ sein.

Beispiel 16.1: Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine

Eine Wärmekraftmaschine nimmt während eines jeden Zyklus 200 J Wärme aus einem heißen Reservoir auf, verrichtet Arbeit und gibt 160 J Wärme an ein kaltes Reservoir ab. Wie hoch ist ihr Wirkungsgrad?

Problembeschreibung: Es ist Gleichung 16.2, die Definition des Wirkungsgrads, zu verwenden.

Lösung: 1. Der Wirkungsgrad ist definiert als der Quotient aus verrichteter Arbeit und aufgenommener Wärmemenge:

$$\varepsilon = \frac{|W|}{Q_w}$$

2. Die aufgenommene Wärmemenge Q_w und die abgegebene Wärmemenge $|Q_k|$ sind:

$$Q_w = 200 \text{ J}$$

und

$$|Q_k| = 160 \text{ J}$$

3. Berechnen Sie mit dem Ersten Hauptsatz die Arbeit:

$$|W| = Q_w - |Q_k| = 200 \text{ J} - 160 \text{ J} = 40 \text{ J}$$

4. Setzen Sie die Werte von $|W|$ und Q_w ein, um den Wirkungsgrad zu berechnen:

$$\varepsilon = \frac{|W|}{Q_w} = \frac{40 \text{ J}}{200 \text{ J}} = [0,20] \quad \text{oder } 20\%$$

Plausibilitätsprüfung: Der Wirkungsgrad muss dimensionslos sein. Sowohl die Arbeit als auch die Wärme sind Energien, die hier in Joule eingesetzt wurden. Daher ist ihr Quotient dimensionslos, wie erwartet.

Übung 16.1: Der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine beträgt 0,35. a) Wie viel Arbeit verrichtet sie in einem Zyklus, wenn sie 150 J Wärme aus einem heißen Reservoir entnimmt? b) Wie viel Wärme wird in jedem Zyklus an das kalte Reservoir abgegeben? ◀ ■

Die Wärme Q_w wird gewöhnlich mithilfe von Brennstoffen wie Kohle oder Öl erzeugt, die Kosten verursachen und auch nicht unbegrenzt zur Verfügung stehen. Deshalb versucht man, einen möglichst hohen Wirkungsgrad zu erzielen. Die in dieser Hinsicht besten Dampfmaschinen haben einen Wirkungsgrad von etwa 0,4 (bzw. 40 %). Verbrennungsmotoren können einen Wirkungsgrad von nahezu 0,5 (bzw. 50 %) erreichen. Bei einem Wirkungsgrad von 100 % würde die gesamte dem wärmeren Reservoir entnommene Wärmemenge in Arbeit umgesetzt und es würde keine Wärme an das kältere Reservoir abgegeben. *Es ist jedoch unmöglich, eine Wärmekraftmaschine zu konstruieren, die einen Wirkungsgrad von 100 % hat.* Diese Aussage bezeichnet man als „Wärmekraftmaschinen-Formulierung“ des Zweiten Hauptsatzes. Sie entspricht der bereits zitierten Thomson'schen Formulierung und lautet:

Es ist unmöglich, eine zyklisch arbeitende Wärmekraftmaschine zu konstruieren, die *keinen anderen* Effekt bewirkt, als Wärme aus einem einzigen Reservoir zu entnehmen und eine äquivalente Menge an Arbeit zu verrichten.

ZWEITER HAUPTSATZ: FORMULIERUNG FÜR
WÄRMEKRAFTMASCHINEN

Ganz entscheidend ist hier der Begriff *zyklisch arbeitend*. Denn in einem nicht zyklischen Prozess kann eine vorliegende Wärmemenge durchaus vollständig in Arbeit umgewandelt werden.

Die vollständige Umwandlung von Wärme in Arbeit kann beispielsweise durch isotherme Expansion eines idealen Gases geschehen. Nach dieser Expansion hat das Gas allerdings nicht mehr denselben Zustand wie zu Beginn, und es muss ihm Arbeit zugeführt werden, um wieder den Anfangszustand einzustellen. Dabei gibt das Gas Wärme ab.

Wollen wir in einem zyklischen Prozess die einem Wärmereservoir entnommene Wärmeenergie in Arbeit umsetzen, muss ein kälteres Wärmereservoir vorhanden sein, das den Teil der von der Maschine dem wärmeren Reservoir entnommenen Energie aufnimmt, der nicht in Arbeit umgesetzt wird. Wäre dies nicht so, könnten wir etwa einen Schiffsantrieb konstruieren, der nichts anderes tut, als aus dem Meer (einem Wärmereservoir mit gewaltiger Wärmekapazität) ständig Energie für die Fortbewegung zu entnehmen. Leider macht es dabei das Fehlen eines kälteren Reservoirs zur Aufnahme von Wärme unmöglich, den Wärmeverrat der Meere so einfach zu nutzen. (Es wäre aber theoretisch möglich, eine Wärmekraftmaschine mit dem Oberflächenwasser als wärmerem Reservoir und dem Tiefenwasser als kälterem Reservoir zu betreiben. Jedoch konnte man noch keine praktikable Vorrichtung zum Ausnutzen dieser Temperaturdifferenz entwickeln.) Damit bei einer und derselben Temperatur die aufgrund der Wärmebewegung der Teilchen völlig ungeordnete Wärmeenergie in vollständig geordnete Energie, also in Arbeit, umgesetzt werden kann – ohne irgendwelche anderen Veränderungen an der Energiequelle oder am System zu bewirken –, muss ein separates kälteres Reservoir vorhanden sein.

Beispiel 16.2: Der Otto-Kreisprozess**ZUR ÜBUNG**

- a) Ermitteln Sie den Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine, die gemäß dem in Abbildung 16.3 dargestellten Otto-Kreisprozess arbeitet. b) Geben Sie die Lösung in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis $r = V_a/V_b$ an.

Problembeschreibung: a) Um den Wirkungsgrad ε zu berechnen, müssen Sie Q_w und $|Q_k|$ ermitteln. Wärmeübertragungen finden nur während der beiden Vorgänge mit konstantem Volumen statt, also von b nach c und von d nach a . Damit können Sie Q_w und $|Q_k|$ berechnen und daraus den Wirkungsgrad ε in Abhängigkeit von den Temperaturen T_a , T_b , T_c und T_d ermitteln. b) Die Temperaturen hängen bei adiabatischen Prozessen mit den Volumina über die folgende Beziehung zusammen: $T V^{\gamma-1} = \text{konstant}$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Drücken Sie den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von Q_w und $|Q_k|$ aus.
2. Die Wärmeabgabe erfolgt beim Übergang von d nach a bei konstantem Volumen. Drücken Sie $|Q_k|$ in Abhängigkeit von C_V sowie von den Temperaturen T_a und T_d aus.
3. Die Wärmeaufnahme erfolgt beim Übergang von b nach c bei konstantem Volumen. Drücken Sie Q_w in Abhängigkeit von C_V sowie von den Temperaturen T_c und T_b aus.
4. Setzen Sie die Ausdrücke für $|Q_k|$ und Q_w in die Gleichung von Schritt 1 ein, um den Wirkungsgrad in Abhängigkeit von den Temperaturen T_a , T_b , T_c und T_d zu erhalten.

Teilaufgabe b

1. Drücken Sie T_c durch T_d und r aus, unter Verwendung der Beziehungen $r = V_d/V_c$ und $T V^{\gamma-1} = \text{konstant}$.
2. Drücken Sie T_b durch T_a und r aus, wie in Schritt 1.
3. Verwenden Sie diese Beziehungen, um T_c und T_b aus ε in Teilaufgabe a zu eliminieren. Damit erhalten Sie ε in Abhängigkeit von r .

Ergebnisse der Lösungsschritte:**Teilaufgabe a**

1.

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_k|}{Q_w}$$

2.

$$|Q_k| = |Q_{d \rightarrow a}| = \tilde{n} C_V |T_a - T_d| = \tilde{n} C_V (T_d - T_a)$$

3.

$$Q_w = Q_{b \rightarrow c} = \tilde{n} C_V (T_c - T_b)$$

4.

$$\varepsilon = \boxed{1 - \frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}}$$

Teilaufgabe b

1.

$$T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}$$

$$T_c = T_d \frac{V_d^{\gamma-1}}{V_c^{\gamma-1}} = T_d r^{\gamma-1}$$

2.

$$T_b = T_a r^{\gamma-1}$$

3.

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_d - T_a}{T_d r^{\gamma-1} - T_a r^{\gamma-1}} = \boxed{1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis in Teilaufgabe b ist dimensionslos. Der Wirkungsgrad ε liegt zwischen 0 und 1, und nähert sich dem Wert 0, wenn r sich dem Wert 1 nähert.

Weitergedacht: Das Verhältnis r (Volumen vor der Kompression zum Volumen nach der Kompression) wird auch als Verdichtungsverhältnis bezeichnet.

16.2 Kältemaschinen und der Zweite Hauptsatz

Eine **Kältemaschine** ist im Prinzip eine Wärmekraftmaschine mit umgekehrter Arbeitsrichtung (Abbildung 16.5a). Die Vorrichtung nimmt Wärme aus dem Inneren des Kühlzentrums (dem kälteren Reservoir) auf und gibt Wärme an die Umgebung (das wärmere Reservoir) ab (Abbildung 16.5b).

Die Erfahrung zeigt, dass der Kältemaschine für eine solche Wärmeübertragung stets Arbeit zugeführt werden muss. Diese Feststellung nennt man auch die „Kältemaschinen-Formulierung“ des Zweiten Hauptsatzes. Sie entspricht der bereits zitierten Clausius'schen Formulierung und lautet:

Es ist unmöglich, eine zyklisch arbeitende Kältemaschine zu konstruieren, die *keinen anderen* Effekt bewirkt, als eine

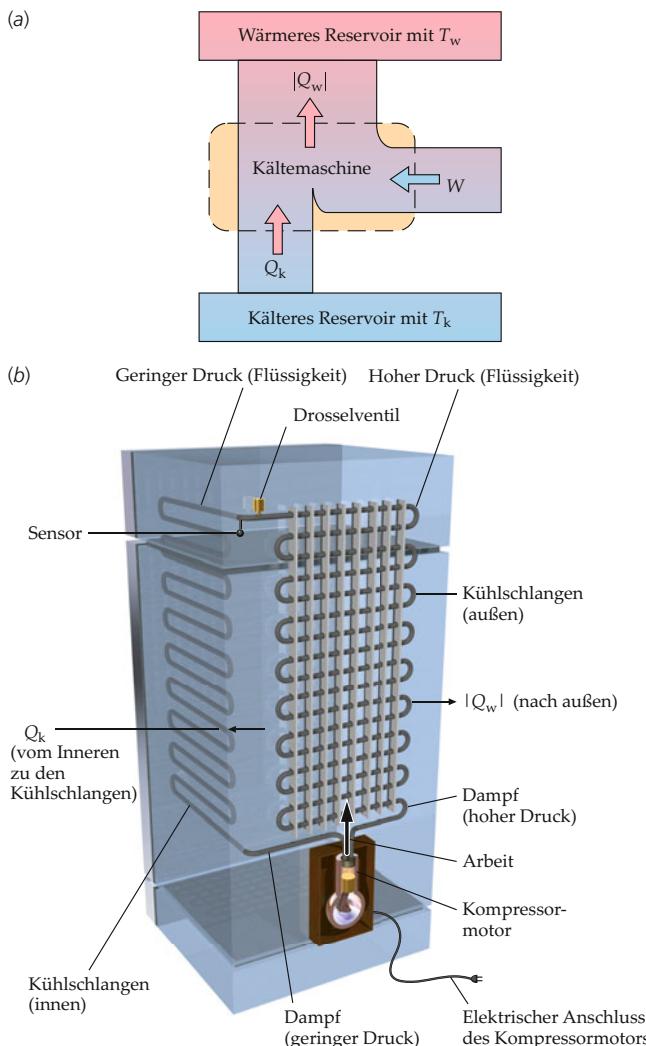


Abbildung 16.5 a) Das Prinzip der Kältemaschine. Sie nimmt die Wärmemenge Q_k aus einem Wärmereservoir mit der tieferen Temperatur T_k auf und gibt unter Ausnutzung der zugeführten Arbeit W die Wärmemenge $|Q_w|$ an das wärmeres Reservoir mit der Temperatur T_w ab. b) Der Aufbau eines Kühlschranks und die beiden an ihm übertragenen Wärmemengen.

bestimmte Wärmemenge von einem kälteren Reservoir vollständig in ein wärmeres zu übertragen.

ZWEITER HAUPTSATZ: FORMULIERUNG FÜR KÄLTEMASCHINEN

Wäre dieses Prinzip nicht gültig, würden unsere Kühlschränke und Klimaanlagen keinerlei Energie benötigen. Wie leistungsfähig bzw. effizient eine Kältemaschine arbeitet, bemisst sich nach dem Quotienten Q_k/W , also nach dem Verhältnis der aus dem kälteren Reservoir aufgenommenen Wärme zu der an ihr aufgewendeten Arbeit (diese entspricht der aus dem Stromnetz zugeführten elektrischen Energie). Der **Wirkungsgrad einer Kältemaschine** ist definiert als

$$\varepsilon_{KM} = \frac{Q_k}{W}. \quad (16.3)$$

DEFINITION DES WIRKUNGSGRADS EINER KÄLTEMASCHINE

Man nennt ε_{KM} meist **Leistungszahl** (oder auch COP, *coefficient of performance*). Die Bezeichnung „Leistungszahl“ ist jedoch vorzuziehen, denn ε_{KM} ist – im Gegensatz zu einem Wirkungsgrad – größer als 1. Je größer die Leistungszahl ist, desto effizienter arbeitet die Kältemaschine, z. B. die Klimaanlage oder der Kühlschrank. In der Praxis liegt ε_{KM} oft zwischen 5 und 6 (Beispiel 16.3). Der Wert von ε_{KM} kann gemäß der Kältemaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes nicht unendlich groß werden (genauso wie der Wirkungsgrad ε einer Wärmekraftmaschine nicht 1 sein kann).

Beispiel 16.3: Eiswürfel produzieren

Sie haben gerade noch eine halbe Stunde Zeit, bis Ihre Gäste zur Grillparty eintreffen. Entsetzt stellen Sie fest, dass Sie keine Eiswürfel für die Getränke haben. Also gießen Sie schnell 1,00 l Leitungswasser mit 10,0 °C in eine Eisschale und stellen sie in das Gefrierfach. Sind die Eiswürfel fertig, wenn Ihre Gäste eintreffen? Ihr Gefrierschrank hat laut Herstellerangabe eine Leistungszahl von 5,5 und nimmt eine elektrische Leistung von 550 W auf. Nehmen Sie an, dass 10 % dieser Leistung zum Kühlen des Wassers in der Eisschale genutzt werden.

Problembeschreibung: Die Leistung ist definiert als Energie pro Zeit. Die Leistung ist hier gegeben, und wir müssen die Zeit berechnen, die der Kühlschrank benötigt, das Wasser in Eis umzuwandeln. Die zugeführte Arbeit W hängt mit der Wärmemenge Q_k über $\varepsilon_{KM} = W/Q_k$ zusammen. Um Q_k zu ermitteln, ist zu berechnen, wie viel Wärme von dem einen Liter Wasser abgegeben werden muss, damit er zu Eis wird.

Lösung: 1. Die benötigte Zeitspanne Δt ergibt sich aus der Leistung P und der zugeführten Arbeit W :

$$P = W/\Delta t \quad \text{also} \quad \Delta t = W/P$$

2. Die Arbeit W hängt mit der Leistungszahl ε_{KM} und der ausgetauschten Wärmemenge Q_k folgendermaßen zusammen:

$$W = \frac{Q_k}{\varepsilon_{KM}}$$

3. Die vom Gefrierfach aufzunehmende Wärmemenge Q_k setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus der Wärmemenge Q_0 zum Abkühlen des Wassers auf 0 °C und der Wärmemenge Q_g zum Gefrieren des Wassers bei 0 °C:

$$Q_k = Q_0 + Q_g$$

4. Die zum Abkühlen von 1,001 Wasser (mit der Masse 1,00 kg) von 10,0 °C auf 0,0 °C abzuführende Wärmemenge ist:

$$\begin{aligned} Q_0 &= m c_w \Delta T \\ &= (1,00 \text{ kg}) \cdot (4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (10,0 \text{ K}) \\ &= 41,8 \text{ kJ} \end{aligned}$$

5. Die zum Gefrieren von 1,00 kg Wasser bei 0 °C abzuführende Wärmemenge ist:

$$\begin{aligned} Q_g &= m \lambda_{s,w} = (1,00 \text{ kg}) \cdot (333,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}) \\ &= 333,5 \text{ kJ} \end{aligned}$$

6. Die Addition der beiden Wärmemengen Q_0 und Q_g ergibt Q_k (siehe Schritt 3):

$$Q_k = 41,8 \text{ kJ} + 333,5 \text{ kJ} = 375,3 \text{ kJ} = 375 \text{ kJ}$$

7. Setzen Sie Q_k in den Ausdruck von Schritt 2 ein, um die Arbeit W zu erhalten:

$$W = \frac{Q_k}{\varepsilon_{KM}} = \frac{375 \text{ kJ}}{5,5} = 68,2 \text{ kJ}$$

8. Berechnen Sie mit diesem Wert von W und der effektiv verfügbaren Leistung von 55 W die nötige Zeitspanne Δt :

$$\Delta t = \frac{W}{P} = \frac{68,2 \text{ kJ}}{55 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}} = (1240 \text{ s}) \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 20,7 \text{ min}$$

Sie können Ihren Gästen Eis anbieten.

Kommentar: Weniger als eine halbe Stunde für das Gefrieren von einem Liter Wasser erscheint sehr knapp, muss aber nicht einmal ganz ausgenutzt werden.

Übung 16.2: Eine Kältemaschine hat die Leistungszahl 4,0. Wie viel Wärme wird pro Zyklus an das wärmere Reservoir abgegeben, wenn aus dem kälteren Reservoir pro Zyklus 200 kJ aufgenommen werden? ◀ ■

Die Gleichwertigkeit der Formulierungen des Zweiten Hauptsatzes

Betrachten wir noch einmal die Thomson'sche und die Kältemaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes. Die beiden Formulierungen scheinen sehr unterschiedlich zu sein. Sie sind jedoch *absolut gleichwertig*. Das können wir beweisen, indem wir Folgendes zeigen: Wenn die eine Formulierung falsch ist, dann ist es zwangsläufig auch die andere. Wir wollen nun anhand eines Zahlenbeispiels zeigen, dass die Kältemaschi-

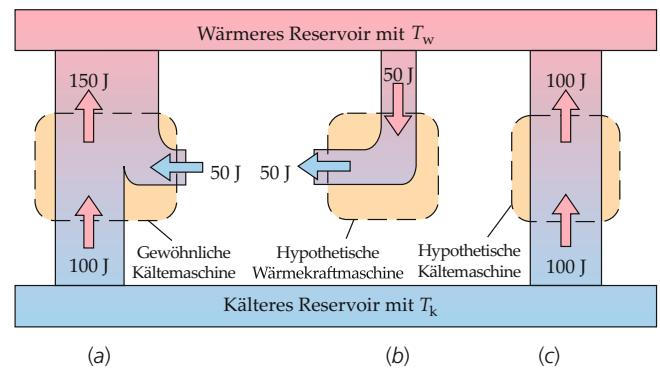


Abbildung 16.6 Zum Beweis der Gleichwertigkeit der Wärmekraftmaschinen- und der Kältemaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes. a) Eine gewöhnliche Kältemaschine nimmt 100 J aus dem kälteren Reservoir auf. Zusätzlich werden ihr 50 J Arbeit aus ihrer Umgebung zugeführt. b) Eine hypothetische Wärmekraftmaschine verletzt die Wärmekraftmaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes, indem sie 50 J aus dem wärmeren Reservoir aufnimmt und sie vollständig in Arbeit umsetzt. c) Die Kombination der beiden Maschinen ergibt eine hypothetische Kältemaschine. Sie verletzt die Kältemaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes, indem sie 100 J aus dem kälteren Reservoir in das wärmere Reservoir überträgt, ohne Arbeit aufzunehmen.

nen-Formulierung falsch ist, wenn die Wärmekraftmaschinen-Formulierung falsch ist.

Abbildung 16.6a zeigt eine gewöhnliche Kältemaschine, die 50 J Arbeit aus der Umgebung aufnimmt, um 100 J Wärme aus dem kälteren Reservoir mit der Temperatur T_k aufzunehmen und 150 J Wärme an das wärmere Reservoir mit der Temperatur T_w abzugeben. Nehmen wir nun an, die Wärmekraftmaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes sei falsch. Dann könnte eine hypothetische Wärmekraftmaschine 50 J Wärme aus dem wärmeren Reservoir aufnehmen und sie vollständig zu 50 J Arbeit umsetzen, d. h. mit einem Wirkungsgrad von 100 %. Wir könnten diese hypothetische Wärmekraftmaschine dazu nutzen, 50 J Wärme aus dem wärmeren Reservoir zu entnehmen und damit an der gewöhnlichen Kältemaschine (Abbildung 16.6b) 50 J Arbeit zu verrichten. Dann wäre die Kombination aus der hypothetischen Wärmekraftmaschine und der gewöhnlichen Kältemaschine eine hypothetische Kältemaschine, die 100 J Energie als Wärme aus dem kälteren Reservoir aufnimmt und sie vollständig in das wärmere Reservoir überträgt, ohne dazu Arbeit aufzunehmen (Abbildung 16.6c). Dies widerspricht aber der Kältemaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes. Wenn die Wärmekraftmaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes falsch ist, muss es auch die Kältemaschinen-Formulierung sein. Analog dazu könnte mit einer hypothetischen Kältemaschine in Verbindung mit einer gewöhnlichen Wärmekraftmaschine eine hypothetische Wärmekraftmaschine konstruiert werden. Das bedeutet, wenn die Kältemaschinen-Formulierung des Zweiten Hauptsatzes falsch ist, muss es auch die Wärmekraftmaschinen-Formulierung sein. Zusammenfassend können wir sagen: Wenn eine der Formulierungen falsch ist, dann ist es auch die andere. Somit sind beide Formulierungen gleichwertig.

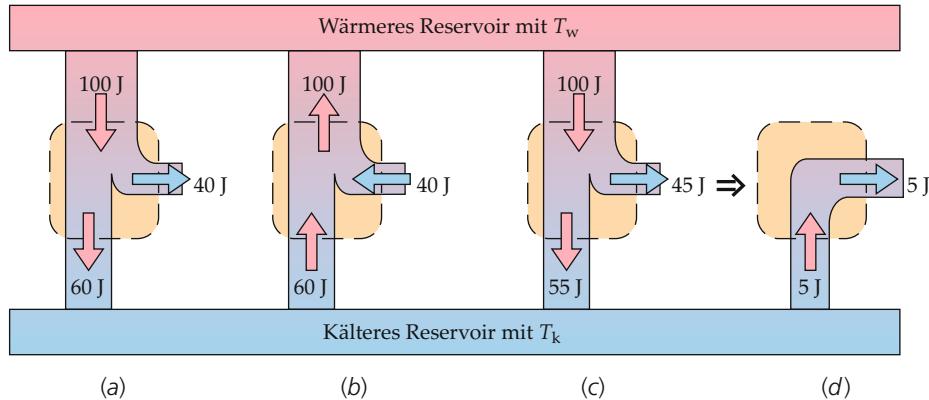


Abbildung 16.7 Zum Carnot-Prinzip. a) Eine reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine mit einem Wirkungsgrad von 0,40 nimmt aus dem wärmeren Reservoir 100 J Wärme auf, verrichtet 40 J Arbeit und gibt 60 J Wärme an das kältere Reservoir ab. b) Wenn dieselbe Maschine in umgekehrter Richtung als Kältemaschine arbeitet, sind 40 J Arbeit aufzubringen, um aus dem kälteren Reservoir 60 J Wärme aufzunehmen, wobei 100 J Wärme an das wärmeres Reservoir abgegeben werden. c) Eine hypothetische Wärmekraftmaschine soll zwischen den gleichen Wärmereservoiren arbeiten und einen Wirkungsgrad von 0,45 haben, der größer ist als derjenige der reversiblen Maschine a. In d sind die Wärmekraftmaschine b und die Kältemaschine c miteinander kombiniert. Die Nettowirkung dieser hypothetischen Maschine besteht darin, 5 J Wärme dem kälteren Reservoir zu entnehmen und sie – ohne jeden weiteren Effekt – vollständig in Arbeit umzusetzen. Das aber widerspricht dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Daher hat die zwischen den beiden gegebenen Reservoiren reversibel arbeitende Maschine in a den maximalen Wirkungsgrad.

16.3 Der Carnot'sche Kreisprozess

Gemäß dem Zweiten Hauptsatz kann keine Wärmekraftmaschine, die zwischen zwei Wärmereservoiren arbeitet, den Wirkungsgrad 1 (bzw. 100 %) haben, da stets auch Wärme an das kältere Reservoir abzuführen ist. Wie hoch kann daher der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine maximal sein? Diese Frage beantwortete der französische Ingenieur Sadi Carnot (1796–1832) schon im Jahre 1824, noch bevor der Erste oder der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik aufgestellt war. Carnot bewies, dass eine zwischen zwei gegebenen Wärmereservoiren arbeitende Wärmekraftmaschine dann den höchsten Wirkungsgrad hat, also am effizientesten ist, wenn sie *reversibel* arbeitet. Das sogenannte Carnot-Prinzip lautet also:

Zwischen zwei gegebenen Wärmereservoiren hat die reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine den höchstmöglichen Wirkungsgrad.

CARNOT-PRINZIP

Eine zwischen zwei gegebenen Wärmereservoiren zyklisch und vollständig reversibel arbeitende Maschine nennt man daher auch Carnot-Maschine. Ihr Arbeitszyklus wird **Carnot-Kreisprozess** genannt. Abbildung 16.7 illustriert das Carnot-Prinzip an einem Zahlenbeispiel.

Wenn keine Wärmekraftmaschine oder Kältemaschine einen höheren Wirkungsgrad als den Carnot-Wirkungsgrad haben kann, dann haben alle Carnot-Maschinen, die zwischen denselben Reservoiren arbeiten, denselben Wirkungsgrad. Dieser sogenannte **Carnot-Wirkungsgrad** ε_{\max} muss von der Arbeitssubstanz unabhängig sein und kann daher nur von den Temperaturen der beiden Reservoire abhängen.

Betrachten wir nun den Unterschied zwischen reversiblen und nicht reversiblen Prozessen. Nach dem Zweiten Hauptsatz fließt Wärme von wärmeren zu kälteren Gegenständen, aber niemals in umgekehrter Richtung. Daher ist die Wärmeübertragung von einem heißen zu einem kalten Körper *nicht reversibel*. Weiterhin kann durch Reibung Arbeit in Wärme bzw. in innere Energie umgesetzt werden, aber es kann niemals durch Reibung Wärme bzw. innere Energie in Arbeit umgesetzt werden. Die Umwandlung von Arbeit in Wärme durch Reibung ist ebenfalls *nicht reversibel*. Reibung und andere **dissipative** (nicht rückgängig zu machende) Effekte setzen mechanische Energie irreversibel in thermische Energie um (*dissipativ* = zerstreuend, vernichtend). Eine dritte Art von irreversiblen Vorgängen finden wir bei Systemen, die Nichtgleichgewichtszustände durchlaufen, etwa bei turbulenten Gasströmungen oder bei Explosionen. Ein Prozess ist dann reversibel, wenn wir dafür sorgen können, dass das System dieselben Gleichgewichtszustände auch in umgekehrter Reihenfolge wieder durchlaufen kann.

Aus diesen Betrachtungen und dem, was wir über den Zweiten Hauptsatz gelernt haben, können wir nun einige Bedingungen für die Reversibilität von Prozessen zusammenfassen:

1. Es darf keine mechanische Energie aufgrund von Reibung, viskosen Kräften oder anderen dissipativen Effekten in Wärme umgesetzt werden.
2. Wärmeübertragung zwischen Gegenständen darf nur bei einer infinitesimal geringen Temperaturdifferenz auftreten.
3. Der Prozess muss (wie auch sämtliche Teilvergänge) reversibel (quasistatisch) ablaufen, sodass sich das System

stets in einem Gleichgewichtszustand oder in einer infinitesimalen Abweichung davon befindet.

BEDINGUNGEN FÜR REVERSIBILITÄT

Jeder Prozess, der auch nur eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, ist irreversibel. Die meisten Vorgänge in der Natur und Technik gehören zu dieser Kategorie, sodass man den reversiblen Prozess als eine Idealisierung betrachtet, die in der Praxis nicht erreicht wird. Allerdings ist es möglich, Reibungskräfte und andere dissipative Effekte so weit zu minimieren und einen Prozess quasistatisch durchzuführen, dass man ihn in guter Näherung als reversibel ansehen kann.

Unter diesen Bedingungen besteht der Carnot-Kreisprozess aus 4 reversibel ablaufenden Schritten:

1. Reversible isotherme Aufnahme von Wärme aus einem wärmeren Reservoir.
2. Reversible adiabatische Expansion, bei der die tiefere Temperatur erreicht wird.
3. Reversible isotherme Abgabe von Wärme an ein kälteres Reservoir.
4. Reversible adiabatische Kompression, wieder zurück in den Anfangszustand.

DIE SCHRITTE DES CARNOT-KREISPROZESSES

Wenn wir den Wirkungsgrad ε_{\max} des Carnot-Kreisprozesses berechnen wollen, können wir als Arbeitssubstanz ein ideales Gas wählen und die Arbeit explizit berechnen, die am bzw. vom idealen Gas während des Carnot-Kreisprozesses verrichtet wird (Abbildung 16.8). Da alle Carnot-Kreisprozesse, unabhängig von der Arbeitssubstanz, denselben Wirkungsgrad haben, wird unser Ergebnis allgemein gültig sein.

Bei der isothermen Expansion vom Zustand 1 zum Zustand 2 nimmt das Gas die Wärmemenge Q_w auf. Nach dem Ersten Hauptsatz ist $\Delta U = Q + W$. Da ein ideales Gas vorliegt, ist bei der isothermen Expansion $\Delta U = 0$ und daher $Q_w = -W$, wobei das Gas die Arbeit $|W|$ verrichtet. Daher gilt

$$\begin{aligned} Q_w = -W_{1 \rightarrow 2} &= \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \tilde{n} R T_w \frac{dV}{V} \\ &= \tilde{n} R T_w \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \tilde{n} R T_w \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned}$$

Bei der isothermen Kompression vom Zustand 3 zum Zustand 4 wird bei der Temperatur T_k die Wärmemenge $|Q_k|$ an das kältere Reservoir abgegeben. Ihr Betrag entspricht der dabei am Gas durch die Kompression verrichteten Arbeit. Die abgeführt Wärmemenge ist daher

$$|Q_k| = |W_{3 \rightarrow 4}| = \tilde{n} R T_k \ln \frac{V_3}{V_4}.$$



Kohlekraftwerk in Four Corners im US-Bundesstaat New Mexico. (© Michael Collier/Stock, Boston.)



Geothermisches Kraftwerk in Wairakei, Neuseeland. (© Jean-Pierre Horlin/The Image Bank.)

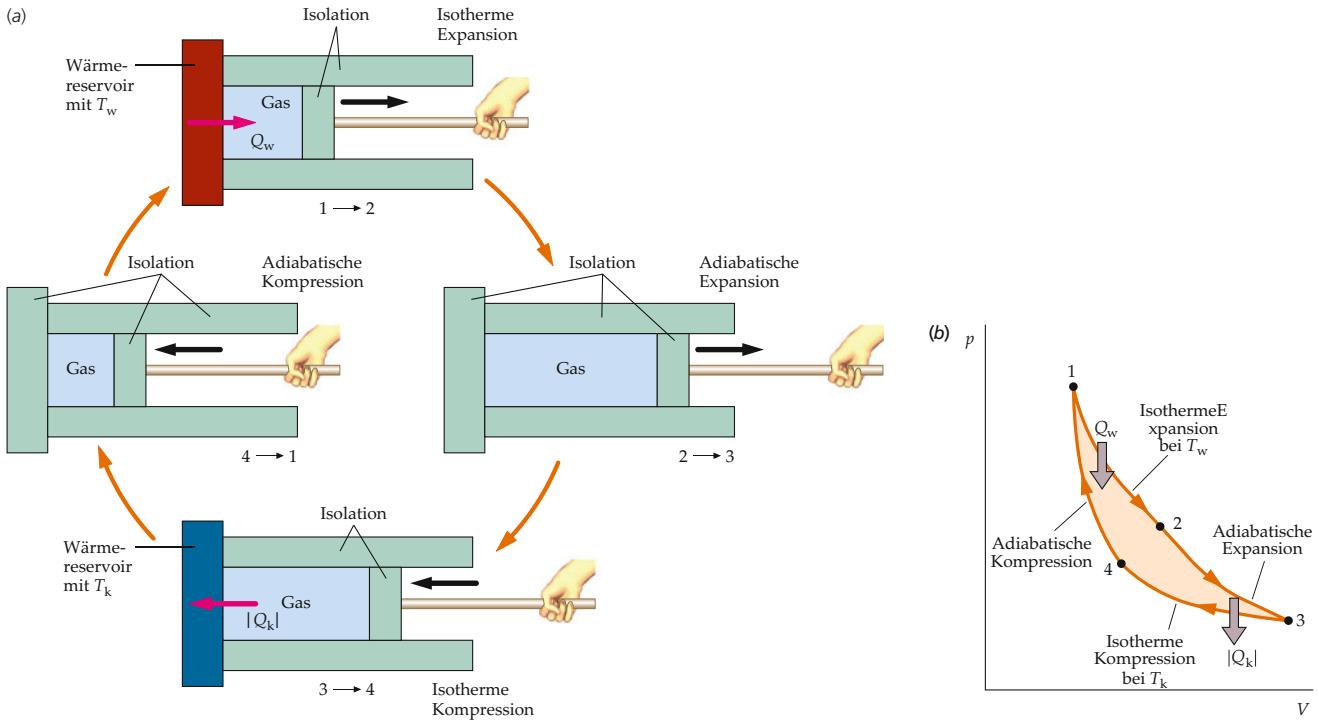


Abbildung 16.8 a) Der Carnot-Kreisprozess, durchgeführt mit einem idealen Gas:

Schritt 1, von 1 nach 2: Während der isothermen Expansion wird bei der Temperatur T_w die Wärmemenge Q_w vom wärmeren Reservoir aufgenommen.

Schritt 2, von 2 nach 3: Das Gas wird adiabatisch expandiert, bis die Temperatur auf T_k gesunken ist.

Schritt 3, von 3 nach 4: Das Gas wird bei der Temperatur T_k isotherm komprimiert, wobei die Wärmemenge $|Q_k|$ an das kältere Reservoir abgegeben wird.

Schritt 4, von 4 nach 1: Das Gas wird adiabatisch komprimiert, bis wieder die Temperatur T_w erreicht ist.

b) Bei jedem der Schritte von 1 nach 2 und dann nach 3 wird Arbeit vom Gas verrichtet, bei den Schritten von 3 nach 4 und dann nach 1 wird Arbeit am Gas verrichtet. Der Betrag der im gesamten Zyklus netto zugeführten Arbeit entspricht der getönten Fläche im p-V-Diagramm. Der gesamte Prozess ist reversibel, denn alle Schritte laufen quasistatisch bzw. reversibel ab.

Der Quotient beider Wärmemengen ist

$$\frac{|Q_k|}{Q_w} = \frac{T_k \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_w \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (16.4)$$

Wir können die Volumenquotienten V_2/V_1 und V_3/V_4 mithilfe von Gleichung 15.30 für die reversible adiabatische Expansion ersetzen. Für die Expansion vom Zustand 2 zum Zustand 3 erhalten wir damit

$$T_w V_2^{\gamma-1} = T_k V_3^{\gamma-1}.$$

Entsprechend gilt für die adiabatische Kompression vom Zustand 4 zum Zustand 1:

$$T_w V_1^{\gamma-1} = T_k V_4^{\gamma-1}.$$

Wir dividieren die erste dieser beiden Gleichungen durch die zweite und erhalten

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$$

und daraus

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Hiermit wird Gleichung 16.4 zu

$$\frac{|Q_k|}{Q_w} = \frac{T_k \ln \frac{V_1}{V_2}}{T_w \ln \frac{V_4}{V_3}} = \frac{T_k}{T_w}. \quad (16.5)$$

Der Carnot-Wirkungsgrad ε_{\max} ist daher gemäß Gleichung 16.2

$$\varepsilon_{\max} = 1 - \frac{T_k}{T_w}. \quad (16.6)$$

CARNOT-WIRKUNGSGRAD

Diese Gleichung zeigt, dass der Carnot-Wirkungsgrad nicht von der Arbeitssubstanz abhängen kann, da er nur von den Temperaturen der beiden Reservoire abhängt.

Der Carnot-Wirkungsgrad gibt somit eine theoretische Obergrenze für die Effizienz von Wärmekraftmaschinen an. In Beispiel 16.4 wird ein Carnot-Wirkungsgrad von 0,268 errechnet.



Eine vom Sandia National Laboratory in den USA betriebene Versuchsanlage zur Erzeugung von elektrischem Strom aus Windenergie. Der „Propeller“ ist so konstruiert, dass er die Luftbewegung (den Wind) optimal in die Rotation des Generators umsetzt. (© Sandia National Laboratory.)

Das bedeutet, dass bei den Reservoirtemperaturen 373 K und 273 K kein höherer Wirkungsgrad erzielbar ist, und sei die Maschine noch so reibungsarm und thermisch gut isoliert. Aus dem theoretischen Wirkungsgrad 0,268 können wir auch folgern, dass eine Wärmekraftmaschine mit einem Wirkungsgrad von 0,25 bei den gegebenen Temperaturen wirklich exzellent arbeitet!

Die „verlorene“ Arbeit ist die von einer reversibel arbeitenden Maschine verrichtete Arbeit abzüglich der von einer realen Maschine mit denselben Reservoirtemperaturen verrichteten Arbeit. Dabei wird angenommen, dass beide Maschinen eine ganze Anzahl von Zyklen ausführen und pro Zyklus dieselbe Wärmemenge aus ihrem wärmeren Reservoir aufzunehmen. Wie viel Energie eine reale Wärmekraftmaschine im Vergleich zur idealen Maschine ungenutzt lässt, ist in den Beispielen 16.5 und 16.6 verdeutlicht.

Beispiel 16.4: Wirkungsgrade von Dampfmaschine und Kältemaschine

Eine Dampfmaschine arbeitet mit einem wärmeren Reservoir bei 100 °C (373 K) und einem kälteren Reservoir bei 0,0 °C (273 K). a) Wie hoch kann ihr Wirkungsgrad höchstens sein? b) Angenommen, diese Wärmekraftmaschine wird umgekehrt betrieben, also als Kältemaschine. Wie hoch ist dann ihre maximale Leistungszahl?

Problembeschreibung: Der maximale Wirkungsgrad ist der Carnot-Wirkungsgrad ε_{\max} (siehe Gleichung 16.6). Um die maximale Leistungszahl ε_{KM} zu berechnen, ist die Definition des Wirkungsgrads ($\varepsilon = |W|/Q_w$) zu verwenden, außerdem die Definition der Leistungszahl ($\varepsilon_{KM} = Q_k/W$) sowie, da der Prozess reversibel ist, Gleichung 16.5: $|Q_k|/Q_w = T_k/T_w$.

Lösung:

Teilaufgabe a

Der maximale Wirkungsgrad ist der Carnot-Wirkungsgrad:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\max} &= 1 - \frac{T_k}{T_w} = 1 - \frac{273 \text{ K}}{373 \text{ K}} \\ &= [0,268] \quad \text{oder } 26,8 \%\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Setzen Sie den Ausdruck für die Leistungszahl an, die dann gilt, wenn die Maschine einen Zyklus in umgekehrter Richtung durchläuft:

$$\varepsilon_{KM} = \frac{Q_k}{W}$$

2. Die Arbeit ist gleich $|Q_w| - Q_k$ (d.h. gleich der Differenz der an das wärmere Reservoir abgegebenen Wärmemenge und der aus dem kälteren Reservoir aufgenommenen Wärmemenge):

$$\varepsilon_{KM} = \frac{Q_k}{|Q_w| - Q_k} = \frac{1}{\frac{|Q_w|}{Q_k} - 1}$$

3. Ersetzen Sie mithilfe von Gleichung 16.5 den Quotienten $|Q_w|/Q_k$ durch T_w/T_k :

$$\varepsilon_{KM} = \frac{1}{\frac{T_w}{T_k} - 1} = \frac{1}{\frac{373 \text{ K}}{273 \text{ K}} - 1} = [2,73]$$

Plausibilitätsprüfung: Löst man die Gleichung in Teilaufgabe a nach dem Quotienten der Temperaturen auf und setzt dies in das Ergebnis von Schritt 3 in Teilaufgabe b ein, so ergibt sich nach Umstellen $\varepsilon_{KM} = \varepsilon_{\max}^{-1} - 1$. Wird hier der berechnete Wert 0,268 für ε_{\max} eingesetzt, ergibt sich, wie in Teilaufgabe b: $\varepsilon_{KM} = 2,73$.

Weitergedacht: Ein Wirkungsgrad $\varepsilon_{\max} = 0,268$ erscheint recht gering, dennoch gibt dieser Wert das bei den gegebenen Reservoirtemperaturen theoretisch erreichbare Maximum an. In der Praxis haben Wärmekraftmaschinen infolge von Reibung, Wärmeableitung und anderen

irreversiblen Prozessen einen deutlich geringeren Wirkungsgrad. Entsprechend haben reale Kältemaschinen eine deutlich geringere Leistungszahl. Man kann zeigen, dass der Carnot-Wirkungsgrad einer Kältemaschine gleich $T_k/\Delta T$ ist, wobei $\Delta T = T_w - T_k$ ist.

Plausibilitätsprüfung: Der Carnot-Wirkungsgrad beträgt bei den angegebenen Temperaturen 0,268. Im vorliegenden Beispiel verrichtet die reale Maschine 48,0 J Arbeit, was 24 % der aufgenommenen Arbeit 200 J entspricht. Außerdem entsprechen 5,6 J an „verlorener“ Arbeit 2,6 % von 200 J. Unsere Lösung ist somit plausibel, denn 24 % plus 2,6 % ergeben 26,8 %.

Beispiel 16.5: In einer Maschine „verlorene“ Arbeit

Eine Wärmekraftmaschine nimmt 200 J Wärme aus einem Reservoir mit 373 K auf, verrichtet 48,0 J Arbeit und gibt 152 J Wärme an ein kälteres Reservoir mit 273 K ab. Wie viel Arbeit geht dabei pro Zyklus „verloren“, d. h. ist aufgrund irreversibler Prozesse nicht nutzbar?

Problembeschreibung: Die „verlorene“ Menge an Arbeit ist die Differenz zwischen der Menge an Arbeit, die in einer (reversibel arbeitenden) Carnot-Maschine theoretisch verrichtet werden könnte, und der tatsächlich verrichteten Arbeit von 48 J. Dabei wird angenommen, dass beide Maschinen pro Zyklus dieselbe Wärmemenge aus ihrem wärmeren Reservoir aufnehmen.

Lösung: 1. Die „verlorene“ Menge an Arbeit ist die Differenz zwischen der theoretisch erzielbaren und der tatsächlich verrichteten Arbeit:

$$|W|_{\text{verl}} = |W_{\max}| - |W|$$

2. Die maximal mögliche Arbeit entspricht der von einer Carnot-Maschine verrichteten Arbeit:

$$|W_{\max}| = \varepsilon_{\max} Q_w$$

3. Die „verlorene“ Menge an Arbeit ist daher:

$$|W|_{\text{verl}} = \varepsilon_{\max} Q_w - |W|$$

4. Der Carnot-Wirkungsgrad kann mithilfe der beiden Reservoirtemperaturen ausgedrückt werden:

$$\varepsilon_{\max} = 1 - \frac{T_k}{T_w}$$

5. Setzen Sie diesen Ausdruck in die Gleichung von Schritt 3 ein und berechnen Sie die „verlorene“ Arbeit:

$$\begin{aligned} |W|_{\text{verl}} &= \left(1 - \frac{T_k}{T_w}\right) Q_w - |W| \\ &= \left(1 - \frac{273 \text{ K}}{373 \text{ K}}\right) \cdot (200 \text{ J}) - 48,0 \text{ J} \\ &= 53,6 \text{ J} - 48,0 \text{ J} = \boxed{5,6 \text{ J}} \end{aligned}$$

Weitergedacht: Die Energiemenge von 5,6 J geht dem Universum nicht verloren, denn die Gesamtenergie bleibt nach dem Ersten Hauptsatz stets erhalten. Die Differenz von 5,6 J wird in der betrachteten, nicht ideal arbeitenden Wärmekraftmaschine an das kältere Reservoir übertragen, wäre in einer ideal arbeitenden Maschine jedoch als Arbeit nutzbar. Nur in diesem Sinne kann man von einem Verlust sprechen.

Beispiel 16.6: Zwischen Wärmereservoiren „verlorene“ Arbeit

Von einem wärmeren Reservoir mit 373 K wird eine Wärmemenge von 200 J abgegeben und von einem kälteren Reservoir mit 273 K aufgenommen. Wie viel theoretisch nutzbare Arbeit geht hierbei pro Zyklus „verloren“?

Problembeschreibung: Bei der Übertragung der Wärmemenge 200 J wird keine Arbeit verrichtet. Daher entspricht der „Verlust“ an Arbeit 100 % der Arbeit, die von einer reversibel arbeitenden Maschine verrichtet werden könnte, die zwischen denselben beiden Reservoiren arbeitet und 200 J aus dem wärmeren Reservoir aufnimmt.

Lösung: 1. Die „verlorene“ Menge an Arbeit ist die Differenz zwischen der mit einer reversibel arbeitenden Maschine theoretisch bzw. maximal erzielbaren Arbeit und der tatsächlich verrichteten Arbeit, die im vorliegenden Fall null ist:

$$|W|_{\text{verl}} = |W_{\max}| - |W| = |W_{\max}| - 0$$

2. Die von einer reversibel arbeitenden Maschine mit denselben Reservoiren verrichtete Arbeit beträgt bei der Aufnahme von 200 J aus dem wärmeren Reservoir:

$$\begin{aligned} |W|_{\text{verl}} &= \varepsilon_{\max} Q_w = \left(1 - \frac{T_k}{T_w}\right) Q_w \\ &= \left(1 - \frac{273 \text{ K}}{373 \text{ K}}\right) \cdot (200 \text{ J}) = 53,6 \text{ J} \end{aligned}$$

3. Die „verlorene“ Menge an Arbeit ist daher:

$$|W|_{\text{verl}} = |W_{\max}| = \boxed{53,6 \text{ J}}$$

Plausibilitätsprüfung: Im Beispiel 16.4 haben wir den Wirkungsgrad einer reversibel arbeitenden Maschine mit denselben Reservoirtemperaturen (373 K und 273 K) zu 0,268 bzw. 26,8 % berechnet. Unser Ergebnis von Schritt 3 ist plausibel, weil die Arbeit 53,6 J eben diesen Anteil 26,8 % der Wärmemenge 200 J ausmacht, die aus dem wärmeren Reservoir aufgenommen wird.

Übung 16.3: Eine reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine hat die Reservoirtemperaturen 500 K und 300 K. a) Wie hoch ist ihr Wirkungsgrad? b) Dem wärmeren Reservoir werden pro Zyklus 200 kJ Wärme entnommen. Wie viel Arbeit verrichtet diese Carnot-Wärmekraftmaschine pro Zyklus? ◀

Übung 16.4: Eine reale Wärmekraftmaschine arbeitet mit den Reservoirtemperaturen 500 K und 300 K. Pro Zyklus entnimmt sie dem wärmeren Reservoir 500 kJ Wärme und verrichtet 150 kJ Arbeit. Wie hoch ist ihr Wirkungsgrad? ◀

16.4 *Wärmepumpen

Eine **Wärmepumpe** ist vom Aufbau her gleich einer Kältemaschine, allerdings mit dem Zweck, Gegenstände oder Räume zu erwärmen statt zu kühlen. Wir sind bei der Wärmepumpe an der dem wärmeren Reservoir zugeführten Wärmemenge interessiert und nicht an der dem kälteren Reservoir entzogenen Wärmemenge. Nehmen wir an, Sie heizen Ihr Wohnhaus mit einer Wärmepumpe. Diese überträgt Wärmeenergie vom Erdreich oder von der kälteren Außenluft auf die wärmere Luft im Inneren des Hauses. Der Wärmepumpe wird die Arbeit W zugeführt; sie entnimmt die Wärmemenge Q_k dem kälteren Reservoir und führt die Wärmemenge $|Q_w|$ dem wärmeren Reservoir zu. Dann ist die Leistungszahl der Wärmepumpe definiert durch

$$\varepsilon_{WP} = \frac{|Q_w|}{W}. \quad (16.7)$$

DEFINITION DER LEISTUNGSZAHL EINER WÄRMEPUMPE

Diese Leistungszahl einer Wärmepumpe unterscheidet sich von der Leistungszahl einer Kältemaschine, die als Q_k/W definiert ist (Gleichung 16.3). Mit $W = |Q_w| - Q_k$ ergibt sich für die Leistungszahl der Wärmepumpe

$$\varepsilon_{WP} = \frac{|Q_w|}{|Q_w| - Q_k} = \frac{1}{1 - \frac{Q_k}{|Q_w|}}. \quad (16.8)$$

Auch hier wäre gemäß dem Carnot-Prinzip die maximale Leistungszahl nur bei vollständig reversibler Prozessführung zu erreichen. Dann gilt Gleichung 16.5 für den Zusammenhang

zwischen Q_k und $|Q_w|$. Wir setzen diese Beziehung in Gleichung 16.8 ein und erhalten für die maximale Leistungszahl der Wärmepumpe

$$\varepsilon_{WP,max} = \frac{1}{1 - \frac{T_k}{T_w}} = \frac{T_w}{T_w - T_k} = \frac{T_w}{\Delta T}. \quad (16.9)$$

Darin ist ΔT die Differenz der Temperaturen von wärmerem und kälterem Reservoir. Reale Wärmepumpen haben aufgrund von Reibung, Wärmeleitung und anderen irreversiblen Vorgängen stets Leistungszahlen, die geringer sind als die nach Gleichung 16.9.

Die Leistungszahl ε_{KM} der Kältemaschine (Gleichung 16.3) und die Leistungszahl ε_{WP} der Wärmepumpe (Gleichung 16.9) hängen miteinander zusammen. Mithilfe der Beziehung $|Q_w| = Q_k + W$ kombinieren wir die beiden genannten Gleichungen und erhalten

$$\varepsilon_{WP} = \frac{|Q_w|}{W} = \frac{Q_k + W}{W} = 1 + \frac{Q_k}{W} = 1 + \varepsilon_{KM}. \quad (16.10)$$

Eine Anwendung dieser Beziehung ist in Beispiel 16.7 illustriert.

Beispiel 16.7: Eine ideale Wärmepumpe

Mit einer idealen, vollständig reversibel arbeitenden Wärmepumpe wird Wärme von der Außenluft mit $-5,0^\circ\text{C}$ auf den Heizkessel in einem Haus übertragen, dessen Temperatur auf 40°C gehalten wird. Wie viel Arbeit ist dabei erforderlich, um der Heizung eine Wärmemenge von 1,0 kJ zuzuführen?

Problembeschreibung: Es ist Gleichung 16.10 zu verwenden, wobei die nach Gleichung 16.9 berechnete maximale Leistungszahl $\varepsilon_{WP,max}$ einzusetzen ist. Dabei ist $T_k = -5,0^\circ\text{C} = 268\text{ K}$ und $\Delta T = 45\text{ K}$.

Lösung: 1. Die Definition der Leistungszahl $\varepsilon_{WP} = |Q_w|/W$ (siehe Gleichung 16.7) beschreibt den Zusammenhang zwischen der zugeführten Arbeit und der abgegebenen Wärmemenge:

$$W = \frac{|Q_w|}{\varepsilon_{WP}}$$

2. Gleichung 16.9 liefert den Zusammenhang zwischen den Temperaturen und der Leistungszahl bei reversibel arbeitender Maschine:

$$\varepsilon_{WP,max} = \frac{T_w}{\Delta T}$$

3. Mit diesen beiden Beziehungen kann nun die Arbeit berechnet werden:

$$W = \frac{|Q_w|}{\varepsilon_{WP,max}} = |Q_w| \frac{\Delta T}{T_w} = (1,0\text{ kJ}) \cdot \frac{45\text{ K}}{313\text{ K}}$$

$$W = \boxed{0,14 \text{ kJ}}$$

Plausibilitätsprüfung: Da der Quotient $\Delta T/T_w$ dimensionslos ist, erhalten wir in Schritt 3 für die Arbeit die gleiche Dimension wie für die Wärme.

Weitergedacht: Die maximale Leistungszahl ist hier $\varepsilon_{WP,max} = T_w/\Delta T = 7,0$. Die in das Haus übertragene Energiemenge ist damit 7-mal so groß wie die der Wärmepumpe zugeführte Arbeit. (Es werden theoretisch nur 0,14 kJ Arbeit benötigt, um 1,0 kJ Wärme in die Heizanlage des Hauses zu übertragen.) ■

16.5 Irreversibilität, Unordnung und Entropie

Es gibt viele irreversible Vorgänge, die nicht durch eine der beiden weiter oben vorgestellten Formulierungen des Zweiten Hauptsatzes zu beschreiben sind. Dazu zählen beispielsweise das Herunterfallen und Zerspringen eines Glases und das Zerplatzen eines gasgefüllten Luftballons. Jedoch haben alle irreversiblen Prozesse etwas gemeinsam: Durch sie geht die Gesamtheit aus System und Umgebung in einen Zustand geringerer Ordnung über.

Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel. Ein Behälter mit vernachlässigbarer Masse enthält eine Gasmenge mit der Masse m_{Gas} . Er bewegt sich bei der Temperatur T mit der Geschwindigkeit v_{Gas} reibungsfrei auf einer Unterlage (Abbildung 16.9a). Die gesamte kinetische Energie des Gases hat dann zwei Komponenten. Die eine Komponente ist $\frac{1}{2} m_{\text{Gas}} v_{\text{Gas}}^2$ und entspricht der Bewegung der gesamten Gasfüllung und damit der Bewegung ihres Massenmittelpunkts. Die andere Komponente führt von den ungeordneten Bewegungen der Moleküle im Gas her, die relativ zum Massenmittelpunkt erfolgen (in der Abbildung durch die dünnen Pfeile angedeutet). Die Energie der erstgenannten Komponente ist geordnete mechanische Energie, denn alle Moleküle bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit v_{Gas} in dieselbe Richtung. Diese Energie kann direkt in Arbeit umgesetzt werden, z. B. durch Anheben eines Gewichtsstücks mit einem Seil über eine Rolle. Die letztergenannte Komponente ist die Wärmeenergie des Gases, die mit seiner Temperatur T zusammenhängt. Sie besteht in der regellosen, ungeordneten Bewegung aller Gasmoleküle und kann nicht vollständig in Arbeit umgesetzt werden.

Nun nehmen wir an, der Behälter stößt auf eine feste Wand und bleibt dadurch stehen (Abbildung 16.9b). Dieser inelastische Stoß ist offensichtlich ein irreversibler Prozess. Durch ihn wird die geordnete kinetische Energie $\frac{1}{2} m_{\text{Gas}} v_{\text{Gas}}^2$ des Gases in ungeordnete innere Energie umgesetzt, und seine Temperatur steigt an. Das Gas hat immer noch dieselbe Gesamtenergie wie

vor dem Stoß, diese besteht nun jedoch vollständig aus kinetischer Energie der ungeordneten Bewegung aller Gasmoleküle relativ zum (jetzt ruhenden) Massenmittelpunkt. Die Gasmenge hat nun einen Zustand höherer Unordnung (bzw. geringerer Ordnung) und hat damit einen Teil ihrer Fähigkeit verloren, Arbeit zu verrichten.

Als Maß für die Unordnung eines Systems verwendet man eine Größe, die als **Entropie** bezeichnet wird. Die Entropie S ist eine Zustandsfunktion, ebenso wie der Druck p , das Volumen V , die Temperatur T und die innere Energie U . Auch die Entropie hängt nur vom Zustand des Systems ab, nicht aber vom Weg, auf dem dieser erreicht wurde. Wie bei der potenziellen Energie ist bei der Entropie vor allem ihre Änderung interessant. Die infinitesimale Entropieänderung eines Systems, das von einem Zustand in einen anderen übergeht, ist

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}. \quad (16.11)$$

DEFINITION DER ENTROPIEÄNDERUNG

Darin ist dQ_{rev} die Energie, die dem System in einem *reversiblen* Prozess netto als Wärme zugeführt wird. Wenn dQ_{rev} negativ ist, das System also Wärme abgibt, dann ist auch die Entropieänderung des Systems negativ.

Der Ausdruck dQ_{rev} bedeutet nicht, dass ein reversibler Austausch von Wärme stattfinden muss, damit sich die Entropie des Systems ändert. Es gibt viele Fälle, bei denen sich die Entropie des Systems ändert, jedoch keine Wärme übertragen wird. Ein Beispiel dafür ist der vorhin betrachtete Stoß des gasgefüllten Behälters (siehe Abbildung 16.9). Gleichung 16.11 erlaubt es uns jedoch, die Entropiedifferenz zweier Zustände eines Systems *zu berechnen*. Wir bezeichnen die Entropie im Anfangszustand mit S_1 und die im Endzustand S_2 ; dann können wir ihre Änderung $S_2 - S_1$ durch Auswerten des Integrals $\int dQ_{\text{rev}}/T$ für jeden reversibel durchlaufenen Weg (oder Prozess) berechnen, der das System von Zustand 1 in den Zustand 2 überführt.

Die Entropie eines idealen Gases

Wir können uns verdeutlichen, dass dQ_{rev}/T für ein ideales Gas das Differenzial einer Zustandsfunktion ist, obwohl das für dQ_{rev} nicht unbedingt zutrifft. Dazu betrachten wir einen beliebigen reversibel durchgeföhrten Prozess, bei dem ein System, das aus einem idealen Gas besteht, die Wärmemenge dQ_{rev} aufnimmt. Nach dem Ersten Hauptsatz hängt diese Wärmemenge dQ_{rev} mit der Änderung dU der inneren Energie des Gases und der an ihm verrichteten Arbeit $dW = -p dV$ folgendermaßen zusammen:

$$dU = dQ_{\text{rev}} + dW = dQ_{\text{rev}} - p dV.$$

Für ein ideales Gas können wir dU mithilfe der spezifischen Wärmekapazität ausdrücken ($dU = \tilde{n} C_V dT$) und außerdem

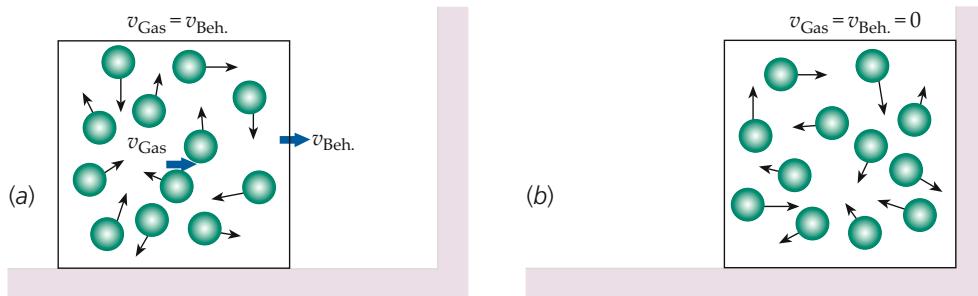


Abbildung 16.9 a) Ein Behälter mit vernachlässigbarer Masse enthält ein Gas. Der Behälter und der Massenmittelpunkt der Gasteilchen bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit in dieselbe Richtung auf eine Wand zu. b) Kurze Zeit nach dem inelastischen Stoß des Behälters auf die Wand sind der Behälter und der Massenmittelpunkt des Gases in Ruhe, und das Gas hat nun eine höhere Temperatur.

die Zustandsgleichung $p = \tilde{n} R T / V$ für das ideale Gas anwenden. Damit erhalten wir

$$\tilde{n} C_V dT = dQ_{\text{rev}} - \tilde{n} R T \frac{dV}{V}. \quad (16.12)$$

Diese Gleichung können wir nur dann direkt integrieren, wenn wir wissen, wie T von V abhängt. Anders ausgedrückt: dQ_{rev} ist kein Differenzial einer Zustandsfunktion, weil Q_{rev} keine Zustandsfunktion ist. Wenn wir die Gleichung durch T dividieren und sie umstellen, so ergibt sich

$$\frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \tilde{n} C_V \frac{dT}{T} + \tilde{n} R \frac{dV}{V}. \quad (16.13)$$

Da C_V nur von T abhängt, kann der erste Term auf der rechten Seite integriert werden. Auch der zweite Term auf der rechten Seite ist integrierbar. (In der Sprache der Mathematik wird $1/T$ in diesem Fall als „integrierender Faktor“ bezeichnet.) Daher ist dQ_{rev}/T das Differenzial der Zustandsfunktion S :

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \tilde{n} C_V \frac{dT}{T} + \tilde{n} R \frac{dV}{V}. \quad (16.14)$$

Der Einfachheit halber nehmen wir C_V als konstant an. Dann ergibt die Integration von Gleichung 16.14 vom Anfangszustand bis zum Endzustand:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \tilde{n} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \tilde{n} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16.15)$$

ENTROPIEÄNDERUNG EINES IDEALEN GASES

Diese Gleichung gibt die Entropieänderung eines idealen Gases an, wenn es eine Expansion oder Kompression vom Anfangszustand mit dem Volumen V_1 und der Temperatur T_1 zum Endzustand mit dem Volumen V_2 und der Temperatur T_2 erfährt.

Entropieänderungen bei verschiedenen Prozessen

ΔS bei einer isothermen Expansion eines idealen Gases

Bei einer isothermen Expansion eines idealen Gases ist $T_1 = T_2$, sodass in der vorigen Gleichung der erste Summand gleich

null ist. Die Entropieänderung ist daher

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \tilde{n} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16.16)$$

Diese Entropieänderung ist positiv, weil V_2 größer als V_1 ist. Bei diesem Prozess wird die Energiemenge Q_{rev} als Wärme vom Reservoir abgegeben und vom Gas aufgenommen. Diese Wärmemenge entspricht betragsmäßig der vom Gas verrichteten Arbeit:

$$Q_{\text{rev}} = -W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \tilde{n} R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \tilde{n} R T \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16.17)$$

Die Entropieänderung des Gases ist $\Delta S_{\text{Gas}} = +|Q|/T$. Da dieselbe Wärmemenge vom Reservoir mit der Temperatur T abgegeben wird, ist dessen Entropieänderung $\Delta S_{\text{Res}} = -|Q|/T$. Die gesamte Entropieänderung von Gas und Reservoir ist daher null:

$$\Delta S_U = \Delta S_{\text{Gas}} + \Delta S_{\text{Res}} = 0.$$

Die Gesamtheit aus dem System und seiner Umgebung bezeichnen wir hier und im Folgenden mit „Universum“. Unser Beispiel illustriert einen sehr wichtigen, allgemein gültigen Sachverhalt:

Bei einem reversiblen Prozess ist die Entropieänderung des Universums gleich null.

FAUSTREGEL FÜR SIGNIFIKANTE STELLEN

Von jetzt ab werden wir bei der Berechnung der Entropieänderungen für die zugeführte bzw. abgeführte Wärme allein das Symbol Q verwenden und stillschweigend annehmen, dass die erforderlichen Prozesse reversibel ablaufen bzw. durchgeführt werden.

ΔS bei der freien Expansion eines idealen Gases

Die freie Expansion eines idealen Gases in ein Vakuum haben wir schon in Abschnitt 15.5 betrachtet. Das Gas ist in einem

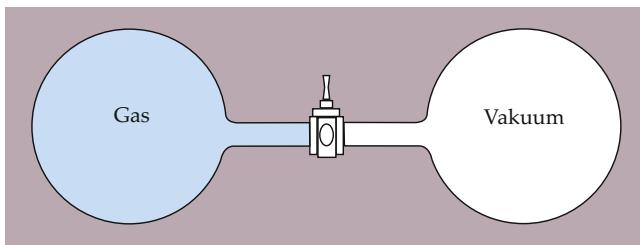


Abbildung 16.10 Die adiabatische freie Expansion eines Gases in ein Vakuum. Nach dem Öffnen des Absperrhahns zwischen den Behältern breitet sich das Gas in den evakuierten Behälter aus. Da während dieser Expansion am oder vom Gas keine Arbeit verrichtet wird und das gesamte System thermisch isoliert ist, also keine Wärme ausgetauscht wird, ist die innere Energie des Gases nach der Expansion die gleiche wie zuvor. Dabei wird angenommen, dass die Wärmekapazitäten der Behälterwände, der Leitungen und des Ventils vernachlässigbar sind.

Behälter eingeschlossen und kann sich nach dem Öffnen des Absperrhahns auch in den zuvor evakuierten Behälter ausbreiten (Abbildung 16.10). Die gesamte Anordnung hat starre Wände und ist von der Umgebung thermisch isoliert, sodass weder Wärme noch Arbeit mit der Umgebung ausgetauscht werden können. Wenn der Absperrhahn geöffnet wird, strömt das Gas in den evakuierten Behälter. Nach einiger Zeit wird ein neuer Gleichgewichtszustand erreicht. Da keine Wärme oder Arbeit aufgenommen oder abgegeben wurde, ist die innere Energie des Gases im Endzustand dieselbe wie im Anfangszustand. Wir nehmen an, dass ein ideales Gas vorliegt, bei dem die innere Energie nur von der Temperatur T abhängt; daher ist die Endtemperatur gleich der Anfangstemperatur.

Man könnte nun annehmen, dass sich die Entropie durch diese Expansion nicht geändert hat, weil keine Wärme übertragen wurde. Dieser Prozess ist jedoch nicht reversibel. Deshalb können wir die Entropieänderung des Gases nicht mithilfe eines Integrals $\int dQ_{\text{irrev}}/T$ errechnen. Jedoch sind Anfangs- und Endzustand des Gases hier dieselben wie bei der eben betrachteten isothermen Expansion eines idealen Gases. *Da die Entropieänderung eines Systems infolge irgendeines Prozesses nur vom Anfangs- und vom Endzustand des Systems abhängt, ist die Entropieänderung des Gases bei der freien Expansion ebenso groß wie bei der reversiblen Expansion.* Wir schreiben V_1 für das Anfangsvolumen und V_2 für das Endvolumen. Dann gilt Gleichung 16.16 für die Entropieänderung, und es ist

$$\Delta S_{\text{Gas}} = \tilde{n} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Im vorliegenden Fall ist das Gas von der Umgebung isoliert, sodass bei der Expansion keinerlei Veränderungen in der Umgebung auftreten, sodass $\Delta S_{\text{Res}} = 0$ ist. Somit ist die Entropieänderung ΔS_{Gas} des Gases auch die Entropieänderung ΔS_{U} des Universums:

$$\Delta S_{\text{U}} = \tilde{n} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16.18)$$

Beachten Sie, dass V_2 größer als V_1 ist. Daher ist die Entropieänderung des Universums bei diesem irreversiblen Prozess positiv:

Bei einem irreversiblen Prozess nimmt die Entropie des Universums zu.

ENTROPIEZUWACHS BEI IRREVERSIBLEN PROZESSEN

Dies gilt auch für die freie Expansion des idealen Gases, wie in Beispiel 16.8 illustriert wird.

Beispiel 16.8: Freie Expansion eines idealen Gases

Wie hoch ist die Entropieänderung bei der freien Expansion von 0,75 mol eines idealen Gases von $V_1 = 1,51$ auf $V_2 = 3,01$?

Problembeschreibung: Bei der freien Expansion eines idealen Gases sind Anfangs- und Endtemperatur gleich. Daher ist die Entropieänderung ΔS bei der freien Expansion von V_1 auf V_2 dieselbe wie bei einem isothermen Übergang von V_1 auf V_2 . Beim isothermen Prozess ist $\Delta U = 0$ und deshalb $Q = -W$. Man berechnet daher zuerst Q und damit $\Delta S = Q/T$.

Lösung: 1. Die Entropieänderung ist dieselbe wie bei einem isothermen Prozess zwischen denselben Volumina:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_{\text{isotherm}} \\ &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} \end{aligned}$$

2. Die Wärmemenge Q , die vom Gas bei der isothermen Expansion bei der Temperatur T aufgenommen wird, entspricht betragsmäßig der Arbeit, die es bei der Expansion verrichtet:

$$Q = -W = \tilde{n} R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

3. Setzen Sie den Ausdruck für Q ein, um ΔS zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{Q}{T} = \tilde{n} R \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= (0,75 \text{ mol}) \cdot (8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot \ln 2 \\ &= [4,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In Schritt 3 kürzt sich die Einheit mol heraus, sodass sich für die Entropie die richtige Einheit $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ ergibt (vgl. die Definition $\Delta S = \int dQ/T$). ■

Wäre das Endvolumen nach der freien Expansion kleiner als das Anfangsvolumen, dann hätte die Entropie des Universums abgenommen. Ein Gas wird sich jedoch niemals von selbst auf ein geringeres Volumen komprimieren, bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass dies geschieht ist verschwindend gering, wie wir in Beispiel 16.13 noch berechnen werden. Das entspricht einem Grundsatz, der eine weitere Formulierung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik darstellt:

Es gibt keinen Prozess, durch den die Entropie des Universums abnimmt.

ALTERNATIVE FORMULIERUNG DES ZWEITEN HAUPTSATZES

Frage 16.1

Ein lebendiger Organismus besteht aus hoch organisierter Materie. Kann das Wachstum eines solchen Organismus einen Widerspruch zum Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik darstellen? Anders gefragt: Nimmt die Entropie des Universums beim Wachstum zu oder ab?

ΔS bei Prozessen mit konstantem Druck

Eine Substanzprobe wird bei konstantem Druck von der Temperatur T_1 auf die Temperatur T_2 erwärmt. Wenn sie die Wärmemenge dQ aufnimmt, erhöht sich ihre Temperatur um dT , und es gilt:

$$dQ = \tilde{n} C_p dT .$$

Eine reversible Wärmeübertragung könnten wir angenähert realisieren, indem wir die Temperaturdifferenz zwischen T_1 und T_2 in sehr viele sehr kleine Intervalle aufteilen und für jede Zwischen temperatur ein Wärmereservoir verwenden. Dann bringen wir die Substanzprobe mit der Anfangstemperatur T_1 in Kontakt mit dem ersten Reservoir (dessen Temperatur nur wenig höher als T_1 ist) und lassen sie eine geringe Wärmemenge aufnehmen. Da annähernd isotherme Bedingungen vorliegen, verläuft die Wärmeübertragung nahezu reversibel. Danach bringen wir die Substanzprobe in Kontakt mit dem nächstwärmeren Reservoir (dessen Temperatur nur wenig höher als die momentane Substanztemperatur ist). Nach einer großen Anzahl solcher Schritte ist die Endtemperatur T_2 erreicht. Wurde die Wärmemenge dQ jeweils reversibel aufgenommen, so gilt:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \tilde{n} C_p \frac{dT}{T} .$$

Wir integrieren von T_1 bis T_2 und erhalten die gesamte Entropieänderung der Substanzprobe:

$$\Delta S = \tilde{n} C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \tilde{n} C_p \ln \frac{T_2}{T_1} . \quad (16.19)$$

Diese Gleichung liefert die Entropiedifferenz beim Erwärmen der Substanzprobe von T_1 auf T_2 , sofern der Druck von Anfangs- und Endzustand derselbe und C_p konstant ist. Die Gleichung gilt unabhängig davon, ob der Prozess reversibel oder irreversibel ablief. Beispiel 16.9 zeigt eine mögliche Anwendung von Gleichung 16.19. Außerdem gilt sie auch für eine Abkühlung: Dabei ist T_2 kleiner als T_1 und $\ln(T_2/T_1)$ negativ. Die Entropieänderung bei einer isobaren Abkühlung ist somit negativ.

Übung 16.5: Wie hoch ist die Entropieänderung, wenn 1,00 kg Wasser bei konstantem Druck von 0,00 °C auf 100 °C erwärmt werden? ◀

Beispiel 16.9: Entropieänderungen bei einer Wärmeübertragung

Nehmen Sie an, 1,00 kg Wasser mit $T_1 = 30,0^\circ\text{C}$ werden in ein isoliertes Kalorimeter gegeben, in dem sich 2,00 kg Wasser mit $T_2 = 90,0^\circ\text{C}$ befinden. Vernachlässigen Sie die Wärmekapazität des Kalorimeters. Der Druck ist konstant und beträgt 1,00 bar. a) Wie hoch ist die Entropieänderung des Systems? b) Wie hoch ist die Entropieänderung des Universums?

Problembeschreibung: Nach dem Zusammengießen der beiden Wassermengen stellt sich eine Gleichgewichtstemperatur ein, die hier als Endtemperatur T_E bezeichnet werden soll. Sie kann ermittelt werden, indem die aufgenommene Wärmemenge gleich der abgegebenen gesetzt wird. Zum Berechnen der Entropieänderungen können Sie die reversible isobare Erwärmung der Wassermenge 1,00 kg von 30,0 °C auf T_E sowie die isobare Abkühlung der Wassermenge 2,00 kg von 90,0 °C auf T_E betrachten. Dabei ist jeweils Gleichung 16.19 anzuwenden. Die Entropieänderung des Systems ist gleich der Summe der einzelnen Entropieänderungen. Die Entropieänderung des Universums ist gleich der Entropieänderung des Systems plus der Entropieänderung der Umgebung. Beim Ermitteln der letzteren können Sie annehmen, dass bis zum Erreichen der Endtemperatur praktisch keine Wärme vom Kalorimeter aufgenommen oder abgegeben wird.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie die Endtemperatur T_E , indem Sie die abgegebene und die aufgenommene Wärmemenge gleichsetzen:

$$T_E = 70,0^\circ\text{C} = 343\text{ K}$$

2. Berechnen Sie mit diesem Wert von T_E ΔS_1 und ΔS_2 , wobei Sie die Beziehung $Q = m c \Delta T$ sowie Gleichung 16.19 verwenden. Dabei ist vom Anfangszustand

A bis zum Endzustand E zu integrieren

$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \int_A^E \frac{dQ}{T} = \int_{T_A}^{T_E} \frac{\tilde{n} C_p dT}{T} \\ &= \tilde{n} C_p \int_{T_A}^{T_E} \frac{dT}{T} = \tilde{n} C_p \ln \frac{T_E}{T_A} \\ &= m_1 c_p \ln \frac{T_E}{T_A} \\ &= (1,00 \text{ kg}) \cdot (4,184 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot \ln \frac{343 \text{ K}}{303 \text{ K}} \\ &= 0,519 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta S_2 &= (2,00 \text{ kg}) \cdot (4,184 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot \ln \frac{343 \text{ K}}{363 \text{ K}} \\ &= -0,474 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

3. Addieren Sie beide Entropieänderungen ΔS_1 und ΔS_2 , um die gesamte Entropieänderung des Systems zu ermitteln:

$$\Delta S_{\text{Sys}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \boxed{+0,0453 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}}$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie die Entropieänderung der Umgebung unter der Annahme, dass das Kalorimeter isoliert ist:

$$\Delta S_{\text{Umg}} = 0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$$

2. Ermitteln Sie die Entropieänderung des Universums, indem Sie die Entropieänderungen von System und Umgebung addieren:

$$\Delta S_{\text{U}} = \boxed{+0,0453 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis in Schritt 2 von Teilaufgabe b ist positiv, wie erwartet, da der Prozess irreversibel und die Entropieänderung des Universums niemals negativ ist. ■

ΔS bei einem vollständig inelastischen Stoß

Da bei einem inelastischen Stoß mechanische Energie in thermische Energie umgesetzt wird, liegt offensichtlich ein irreversibler Prozess vor, bei dem die Entropie des Universums zunehmen muss. Wir betrachten einen Block der Masse m , der aus der Höhe h auf den Boden fällt und dort vollständig inelastisch aufschlägt. Wir nehmen an, dass der Block, der Boden und die Atmosphäre überall die gleiche Temperatur T haben, die sich zudem durch den Prozess nicht merklich ändert. Fer-

ner betrachten wir Block, Boden und Atmosphäre als isoliertes System, das mit der Umgebung keine Wärme austauschen kann. Der Zustand des Systems ändert sich bei diesem Prozess dahingehend, dass die potenzielle Energie des Blocks um mgh abnimmt und die innere Energie des Systems bei konstanter Temperatur T um die gleich große Wärmemenge Q zunimmt. Um die Entropieänderung zu berechnen, nehmen wir an, dass diese Wärmemenge in einem reversiblen Prozess bei konstanter Temperatur aufgenommen wird. Nach Gleichung 16.11 ist die Entropieänderung dann gegeben durch

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{mgh}{T}.$$

Diese positive Entropieänderung ist gleichzeitig auch die Entropieänderung ΔS_{U} des Universums.

ΔS bei einer Wärmeübertragung zwischen Wärmereservoirn

Auch die Wärmeübertragung ist ein irreversibler Prozess. Daher erwarten wir, dass die Entropie des Universums bei einem solchen Vorgang zunimmt. Wir betrachten den einfachen Fall, dass die Wärmemenge $|Q|$ von einem wärmeren Reservoir der Temperatur T_w zu einem kälteren Reservoir mit T_k übertragen wird. Der Zustand eines Wärmereservoirs wird ausschließlich durch seine Temperatur und seine innere Energie bestimmt. Somit ist bei der Übertragung der Wärmemenge $|Q|$ die Entropieänderung eines Reservoirs dieselbe, unabhängig davon, ob der Wärmeaustausch reversibel verläuft oder nicht. Wird von einem Reservoir bei der Temperatur T_w die Wärmemenge $|Q|$ aufgenommen, dann ist seine Entropieänderung gleich $+|Q|/T$. Wenn es bei derselben Temperatur T die gleiche Wärmemenge abgibt, dann ist seine Entropieänderung gleich $-|Q|/T$. Bei der Wärmeübertragung gibt das wärmere Reservoir Wärme ab, und seine Entropieänderung ist

$$\Delta S_w = -\frac{|Q|}{T_w}.$$

Das kältere Reservoir nimmt dieselbe Wärmemenge auf, und seine Entropieänderung ist

$$\Delta S_k = +\frac{|Q|}{T_k}.$$

Daraus ergibt sich die gesamte Entropieänderung des Universums zu

$$\Delta S_{\text{U}} = \Delta S_k + \Delta S_w = \frac{|Q|}{T_k} - \frac{|Q|}{T_w}. \quad (16.20)$$

Dieser Gleichung entnehmen wir, dass die Entropieänderung des Universums positiv ist, da die Wärme immer vom wärmeren zum kälteren Reservoir fließt und die Temperatur des kälteren Reservoirs kleiner als die des wärmeren ist.

ΔS bei einem Carnot-Kreisprozess

Nach Definition besteht ein Carnot-Kreisprozess aus reversibel durchlaufenden Schritten. Wenn ein vollständiger Zyklus durchlaufen wird, muss die Entropieänderung des Universums gleich null sein. Um das zu beweisen, können wir zeigen, dass die Entropieänderung der Reservoirs im Carnot-Kreisprozess null ist. (Da eine Carnot-Maschine zyklisch arbeitet, ist ihre eigene Entropieänderung null. Daher ist die Entropieänderung des Universums gleich der Summe der Entropieänderungen der Reservoirs.) Die Entropieänderung des wärmeren Reservoirs ist $\Delta S_w = -|Q_w|/T_w$ und die des kälteren Reservoirs $\Delta S_k = +|Q_k|/T_k$. Für den Zusammenhang der Wärmemengen mit der Temperatur können wir Gleichung 16.5 benutzen. Damit erhalten wir

$$\frac{T_k}{T_w} = \frac{|Q_k|}{|Q_w|}$$

oder

$$\frac{|Q_w|}{T_w} = \frac{|Q_k|}{T_k}.$$

Für die Entropieänderung des Universums ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\Delta S_U &= \Delta S_{\text{Maschine}} + \Delta S_w + \Delta S_k \\ &= 0 - \frac{|Q_w|}{T_w} + \frac{|Q_k|}{T_k} = -\frac{|Q_w|}{T_w} + \frac{|Q_w|}{T_w} = 0.\end{aligned}$$

Wie erwartet, ist die Entropieänderung des Universums gleich null. Beispiel 16.10 illustriert dies für einen speziellen Carnot-Kreisprozess.

Beachten Sie, dass wir hier jegliche Entropieänderung außer Acht gelassen haben, die damit verknüpft ist, dass die Carnot-Maschine Energie in Form von Arbeit an die Umgebung überträgt. Wenn diese Arbeit dazu dient, beispielsweise ein Gewichtsstück anzuheben oder andere geordnete Vorgänge auszulösen, dann bewirken diese Vorgänge keine Entropieänderung, wie in Beispiel 16.11 gezeigt ist. Wenn die Arbeit jedoch dazu dient, beispielsweise ein Gewichtsstück über eine Tischplatte oder eine andere Oberfläche zu ziehen, auf der es sich reibend bewegt, dann ergibt sich hierbei insgesamt eine Entropieerhöhung.

Beispiel 16.10: Entropieänderungen in einem Carnot-Kreisprozess

Eine Wärmekraftmaschine mit dem Carnot-Wirkungsgrad nimmt pro Zyklus aus dem wärmeren Reservoir 100 J Wärme bei 400 K auf, verrichtet Arbeit und gibt Wärme bei 300 K an das kältere Reservoir ab. Berechnen Sie für einen Zyklus die Entropieänderung jedes Reservoirs und zeigen Sie explizit, dass die Entropieänderung des Universums bei diesem reversiblen Prozess null ist.

Problembeschreibung: Da die Wärmekraftmaschine zyklisch arbeitet, ist ihre Entropieänderung in einem vollständig durchlaufenen Zyklus gleich null. Es sind die Entropieänderungen beider Reservoirs zu berechnen und zu addieren, um die Entropieänderung des Universums zu erhalten.

Lösung: 1. Die Entropieänderung des Universums ist gleich der Summe der Entropieänderungen der Reservoirs:

$$\Delta S_U = \Delta S_w + \Delta S_k = \Delta S_{400} + \Delta S_{300}$$

2. Berechnen Sie die Entropieänderung des wärmeren Reservoirs:

$$\Delta S_w = -\frac{Q_w}{T_w} = -\frac{100 \text{ J}}{400 \text{ K}} = \boxed{-0,250 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$$

3. Die Entropieänderung des kälteren Reservoirs ist gleich $|Q_k|$, dividiert durch T_k , wobei $|Q_k| = Q_w - |W|$ ist:

$$\Delta S_k = \frac{|Q_k|}{T_k} = \frac{Q_w - |W|}{T_k}$$

4. Verwenden Sie die Beziehung $|W| = \varepsilon_{\max} Q_w$. Darin ist ε_{\max} der Carnot-Wirkungsgrad (siehe Gleichung 16.6):

$$|W| = \varepsilon_{\max} Q_w \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{\max} = 1 - \frac{T_k}{T_w}$$

Daraus folgt

$$|W| = \left(1 - \frac{T_k}{T_w}\right) Q_w$$

5. Berechnen Sie die Entropieänderung des kälteren Reservoirs:

$$\begin{aligned}\Delta S_k &= \frac{Q_w - |W|}{T_k} = \frac{Q_w - Q_w \left(1 - \frac{T_k}{T_w}\right)}{T_k} \\ &= \frac{Q_w}{T_w} = \frac{100 \text{ J}}{400 \text{ K}} = \boxed{0,250 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}\end{aligned}$$

6. Setzen Sie diese Ergebnisse in die Beziehung von Schritt 1 ein, um die Entropieänderung des Universums zu berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta S_U &= \Delta S_w + \Delta S_k \\ &= -0,250 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} + 0,250 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = \boxed{0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Entropieänderung des Universums ist nicht negativ, wie es vom Zweiten Hauptsatz gefordert wird.

Weitergedacht: Nehmen Sie an, eine gewöhnliche, nicht reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine entnimmt dem wärmeren Reservoir ebenfalls 100 J Wärme. Da ihr Wirkungsgrad kleiner sein muss als der Carnot-Wirkungsgrad, verrichtet sie weniger Arbeit und gibt mehr Wärme an das kältere Reservoir ab als die Carnot-Maschine. Dabei ist nun die Entropiezunahme des kälteren Reservoirs größer als die Entropieabnahme des wärmeren Reservoirs und die Entropieänderung des Universums ist positiv. ■

16.6 Entropie und die Verfügbarkeit der Energie

Bei einem irreversiblen Prozess bleibt gemäß dem Ersten Hauptsatz die Gesamtenergie erhalten, ein Teil von ihr geht jedoch in eine Form über, in der sie nicht mehr als Arbeit nutzbar ist. Man sagt, sie wird „entwertet“. Betrachten wir noch einmal das Beispiel mit dem herabfallenden und inelastisch auf den Boden aufschlagenden Block. Die Entropie des Universums ändert sich dabei um $m g h / T$. Wenn sich der Block noch in der Höhe h über dem Boden befindet, hat er die potenzielle Energie $m g h$, die zum Verrichten von Arbeit (etwa zum Anheben eines anderen Körpers) genutzt werden kann. Doch nach dem inelastischen Stoß ist diese Energiemenge nicht mehr für nutzbare Arbeit verfügbar, denn sie liegt nun als innere Energie des Blocks und seiner Umgebung vor.

Beispiel 16.11: Das Temperatur-Entropie-Diagramm

Da die Entropie eine Zustandsfunktion ist, können thermodynamische Prozesse auch in einem S-T-, einem S-V- oder einem S-p-Diagramm anstelle des bisher verwendeten p-V-Diagramms dargestellt werden. Skizzieren Sie das S-T-Diagramm für den Carnot-Kreisprozess.

Problembeschreibung: Der Carnot-Kreisprozess besteht aus einer reversiblen isothermen Expansion, gefolgt von einer reversiblen adiabatischen Expansion, danach einer reversiblen isothermen Kompression sowie schließlich einer reversiblen adiabatischen Kompression. Während der isothermen Vorgänge wird Wärme bei konstanter Temperatur reversibel aufgenommen oder abgegeben. Dadurch steigt bzw. sinkt S und die Temperatur T bleibt konstant. Während der adiabatischen Vorgänge ändert sich die Temperatur, doch es wird keine Wärme ausgetauscht ($\Delta Q = 0$) und S ist konstant.

Lösung: 1. Bei der isothermen Expansion (von 1 nach 2 in Abbildung 16.11a) wird Wärme reversibel aufgenommen. Daher nimmt S bei konstanter Temperatur T zu.

2. Bei der reversiblen adiabatischen Expansion (von 2 nach 3 in Abbildung 16.11b) sinkt die Temperatur T , während die Entropie S konstant bleibt.

3. Bei der reversiblen isothermen Kompression (von 3 nach 4 in Abbildung 16.11c) wird Wärme isotherm abgegeben. Daher nimmt S bei konstanter Temperatur T ab.

4. Bei der reversiblen adiabatischen Kompression (von 4 nach 1 in Abbildung 16.11d) steigt die Temperatur T , während die Entropie S konstant bleibt.

ZUM VERSTÄNDNIS

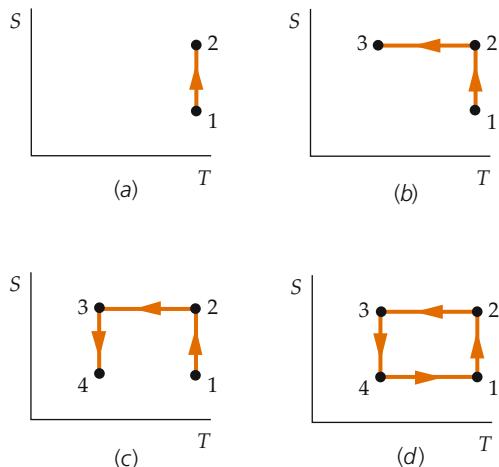


Abbildung 16.11 Das Temperatur-Entropie-Diagramm bzw. die S-T-Auftragung für einen Carnot-Kreisprozess mit einem idealen Gas.

Plausibilitätsprüfung: Die Auftragung von S gegen T für den Carnot-Kreisprozess ist eine geschlossene Kurve. Dies ist auch zu erwarten, weil der gesamte Vorgang einen Kreisprozess darstellt und weil S und T Zustandsfunktionen sind.

Weitergedacht: Das S-T-Diagramm für den Carnot-Kreisprozess ist ein Rechteck.

16.7 Entropie und Wahrscheinlichkeit

Die nicht nutzbare, entwertete Energiemenge ist gegeben durch $mgh = T\Delta S_U$. Das ist ein wichtiges Ergebnis:

Durch einen irreversiblen Prozess wird die Energiemenge

$$W_{\text{entw.}} = T\Delta S_U \quad (16.21)$$

entwertet und ist nicht mehr als Arbeit nutzbar. Dabei ist T die absolute Temperatur des kältesten vorhandenen Reservoirs.

NICHT MEHR NUTZBARE ENERGIE
EINES IRREVERSIBLEN PROZESSES

Beispiel 16.12 verdeutlicht diesen Zusammenhang für den Behälter in Abbildung 16.9.

Beispiel 16.12: Der anstoßende Behälter mit Gas

Nehmen Sie an, der Behälter in Abbildung 16.9 hat eine vernachlässigbare Masse und das Gas in ihm eine Masse von 2,4 kg. Er gleitet anfangs mit der Geschwindigkeit $v = 3,0 \text{ m/s}$ auf der Tischplatte entlang, prallt dann inelastisch gegen die Wand und bleibt liegen. Die Temperatur von Behälter, Tisch und Gas beträgt anfangs 293 K und ändert sich nicht merklich, wenn der Behälter aufprallt. Wie hoch ist die Entropieänderung des Universums?

Problembeschreibung: Die anfängliche Bewegungsenergie ist $\frac{1}{2}m_{\text{Gas}}v_{\text{Gas}}^2$. Sie wird durch den Aufprall in innere Energie des Systems aus Behälter, Wand und Umgebung umgesetzt. Die Entropieänderung ist ebenso groß, als würde die Wärmemenge $Q = \frac{1}{2}m_{\text{Gas}}v_{\text{Gas}}^2$ dem System reversibel zugeführt.

Lösung: Die Entropieänderung des Universums ist Q/T :

$$\begin{aligned}\Delta S_U &= \frac{Q}{T} = \frac{\frac{1}{2}m_{\text{Gas}}v_{\text{Gas}}^2}{T} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (2,4 \text{ kg}) \cdot (3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{293 \text{ K}} \\ &= [37 \text{ mJ} \cdot \text{K}^{-1}]\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis ist größer als null, wie es für einen irreversiblen Prozess zu erwarten ist.

Weitergedacht: Die Gesamtenergie bleibt erhalten, aber die Energie $T\Delta S_U = \frac{1}{2}m_{\text{Gas}}v_{\text{Gas}}^2$ ist nicht mehr als Arbeit nutzbar. ■

Bei der freien Expansion geht ebenfalls die Fähigkeit verloren, Arbeit zu verrichten. In diesem Fall beträgt die Entropieänderung des Universums $\tilde{n}R \ln(V_2/V_1)$, und die entwertete Energie

ist $\tilde{n}RT \ln(V_2/V_1)$. Das ist nach Gleichung 16.17 der Betrag an Arbeit, die verrichtet werden könnte, wenn sich das Gas reversibel und isotherm von V_1 auf V_2 expandiert hätte.

Wird eine Wärmemenge Q von einem wärmeren Reservoir abgegeben und von einem kälteren Reservoir aufgenommen, ist die Entropieänderung des Universums durch Gleichung 16.20 gegeben. Die entwertete Energie ist dabei

$$W_{\text{entw.}} = T_k \Delta S_U = T_k \left(\frac{|Q|}{T_k} - \frac{|Q|}{T_w} \right) = |Q| \left(1 - \frac{T_k}{T_w} \right).$$

Dies ist gerade die Arbeit, die eine zwischen Reservoiren mit den Temperaturen T_k und T_w reversibel, also mit dem Carnot-Wirkungsgrad, arbeitende Wärmekraftmaschine verrichtet, wenn sie dem wärmeren Reservoir die Wärmemenge Q entnimmt und die Arbeit $|W| = \varepsilon_{\max} Q$ verrichtet. Dabei ist $\varepsilon_{\max} = 1 - T_k/T_w$.

16.7 Entropie und Wahrscheinlichkeit

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Entropie ein Maß dafür ist, wie hoch der Ordnungsgrad des betrachteten Systems ist. Ganz entscheidend ist dabei die Tatsache, dass ein Zustand höherer Ordnung mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit auftritt, ein Zustand geringerer Ordnung dagegen mit einer höheren Wahrscheinlichkeit. Deswegen geht das Universum bei einem irreversiblen Prozess stets von einem Zustand geringerer Wahrscheinlichkeit in einen Zustand höherer Wahrscheinlichkeit über. Betrachten wir die freie Expansion, bei der ein ideales Gas von einem Anfangsvolumen V_1 auf ein doppelt so großes Volumen $V_2 = 2V_1$ expandieren kann. Beispiel 16.13 berechnet für diesen Fall mit 10 Teilchen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich alle Moleküle des Gases in einer Hälfte des Volumens V_2 befinden, also weiterhin im Volumen V_1 bleiben.

Beispiel 16.13: Die Wahrscheinlichkeit einer freien Kontraktion

Nehmen Sie an, ein Gas mit nur 10 Teilchen befindet sich in einem würffelförmigen Behälter. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich sämtliche Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer Hälfte des Behälters befinden?

Problembeschreibung: Die Wahrscheinlichkeit, dass sich irgendein Teilchen zu einem beliebigen Zeitpunkt beispielsweise in der linken Hälfte des Behälters befindet, beträgt $\frac{1}{2}$. Anhand dieses Werts ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass sich sämtliche 10 Teilchen gleichzeitig in der linken Hälfte befinden.

Lösung: 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 1 Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt in der linken Hälfte befindet, ist ebenso groß wie die, dass es sich in der rechten Hälfte befindet: Diese Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{1}{2}$.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 2 Teilchen (zu einem bestimmten Zeitpunkt) sämtlich in der linken Hälfte (1) aufhalten, ist das Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten für jedes dieser Teilchen (das entspricht der Wahrscheinlichkeit, beim Münzenwerfen zweimal hintereinander „Zahl“ zu erhalten): Diese Wahrscheinlichkeit beträgt daher

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ebenso groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die drei anderen möglichen Fälle:

Teilchen 1 in Hälfte 1 und Teilchen 2 in Hälfte 2,
Teilchen 2 in Hälfte 1 und Teilchen 1 in Hälfte 2,
beide Teilchen in Hälfte 2.

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich 3 Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt sämtlich in einer Hälfte befinden, ist das Produkt aus der im vorigen Schritt berechneten Wahrscheinlichkeit für die beiden ersten Teilchen und der Wahrscheinlichkeit für das dritte Teilchen: Diese Wahrscheinlichkeit beträgt daher

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

4. Weiterführen dieser Argumentation ergibt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich alle 10 Teilchen in einer Hälfte befinden, das Produkt aus allen 10 Einzelwahrscheinlichkeiten ist: Diese Wahrscheinlichkeit beträgt daher

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet ist die Wahrscheinlichkeit, alle 10 Teilchen gleichzeitig in einer Hälfte des Behälters anzutreffen sehr gering. (Ebenso groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim Münzwurf 10-mal hintereinander „Zahl“ zu erhalten.) ■

Wie die Rechnung zeigt, hat dieses Ereignis eine Wahrscheinlichkeit von 1/1024, dass es eintrifft. Daher war unsere Annahme, dass sich das Gas über das gesamte Volumen des ihm zur Verfügung stehenden Raumes verteilt, gerechtfertigt. Die Teilchen verharren nicht starr an ihren Orten, sondern bewegen sich, wie in Kapitel 14 gezeigt, mit Geschwindigkeiten von mehreren Hundert Metern pro Sekunde innerhalb des Volumens. Dabei könnten sie durchaus für kurze Zeit alle in einem kleinen Volumenbereich zusammentreffen. Im Mittel werden sie jedoch gleichmäßig über das gesamte Volumen verteilt sein. Betrach-

ten wir die makroskopische Entropiebilanz, so ist die Entropie bei der Expansion von V_1 auf $V_2 = 2V_1$ um

$$\Delta S = \tilde{n} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \tilde{n} R \ln 2 \quad (16.22)$$

gestiegen, wenn wir annehmen, dass im Mittel alle Teilchen über das Volumen V_2 gleichverteilt sind. Um diesen aus makroskopischen Größen wie den Volumina und der Zahl \tilde{n} der Mole gewonnenen Mittelwert mit den mikroskopischen Zuständen der einzelnen Teilchen zu verknüpfen, berechnen wir analog zu Beispiel 16.13 die Wahrscheinlichkeit für den Zustand, dass sich alle n Teilchen eines freien Gases zu einem Zeitpunkt im Volumen V_2 befinden, wenn sie zuvor den Zustand einnahmen, in dem sich alle im Volumen V_1 befanden ($V_2 < V_1$):

$$p = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n.$$

Logarithmieren beider Seiten ergibt:

$$\ln p = n \ln \frac{V_2}{V_1} = \tilde{n} n_A \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (16.23)$$

Vergleichen wir Gleichung 16.22 mit 16.23 und nutzen die Beziehungen $n = \tilde{n} n_A$ und $R = n_A k_B$ aus, so ergibt sich für die makroskopische Entropieänderung aufgrund der mikroskopischen Zustandsänderung der Gasteilchen

$$\Delta S = k_B \ln p. \quad (16.24)$$

Wegen $V_2 < V_1$ ist die Entropieänderung in diesem Fall negativ, d. h. die Entropie sinkt bei einem Übergang in einen Zustand höherer Ordnung im Vergleich zum Ausgangszustand. Umgekehrt steigt die Entropie, wenn V_2 größer als V_1 ist.

Allgemein kann man herleiten, dass die Gesamtentropie eines thermodynamischen Systems mit insgesamt n verschiedenen möglichen Zuständen, in denen sich die Gasteilchen befinden können, gegeben ist durch

$$S = k_B \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \quad (16.25)$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass die Gasteilchen den i -ten möglichen Zustand einnehmen. Für den (klassischen) Fall, dass es keine diskreten Zustände für die einzelnen Gasteilchen gibt und sie sich kontinuierlich verteilen können, ist die Entropie gegeben als Produkt aus der Boltzmann-Konstante k_B und dem Logarithmus des für die Teilchen zugänglichen Phasenraumvolumens. Letzteres ist ein 6-dimensionaler Raum, bestehend aus allen drei Raumkoordinaten und den drei Geschwindigkeitskomponenten, die die Teilchen annehmen können.

16.8 *Der Dritte Hauptsatz

Je niedriger die Temperatur T_k des kälteren Reservoirs ist, desto geringer ist die nach dem Carnot-Prinzip maximal mögliche Leistungszahl einer Kältemaschine

$$\varepsilon_{\text{KM,max}} = \frac{T_k}{T_w - T_k}.$$

Befindet sich beispielsweise das wärmere Reservoir bei 1 K und das kältere bei 10^{-3} K, so ist $\varepsilon_{\text{KM,max}} = 10^{-3}$. Dann müssten 10^3 J aufgewendet werden, um dem kälteren Reservoir 1 J Wärme zu entziehen. Die Leistungszahl geht in jedem Fall gegen null, wenn T_k gegen 0 K geht (außer für den sinnlosen Fall $T_w = 0$ K). Deshalb wäre eine unendlich große Menge Arbeit aufzuwenden, um die Temperatur auf 0 K abzusenken. Das bedeutet, dass man mit endlich vielen Schritten den absoluten Nullpunkt niemals erreicht kann. Es liegt keineswegs an Isolationsproblemen oder anderen experimentellen Bedingungen, sondern ist eine Aussage des **Dritten Hauptsatzes** der Thermodynamik:

Es ist unmöglich, durch irgendeinen Prozess, und sei er noch so idealisiert, die Temperatur eines Systems in einer endlichen Anzahl von Schritten auf den absoluten Nullpunkt zu senken.

DRITTER HAUPTSAZ: UNERREICHBARKEIT DES ABSOLUTEN TEMPERATURNULLPUNKTS

Dies hängt damit zusammen, dass die Entropieänderung bei jeglichen Prozessen sowie die spezifischen Wärmen der Substanzen bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt gegen null gehen. Daraus folgt – wie hier nicht gezeigt werden kann – das **Nernst'sche Wärmetheorem**, eine andere Formulierung des Dritten Hauptsatzes. Sie lautet in der Formulierung von Max Planck:

Am absoluten Nullpunkt der Temperatur ist die Entropie völlig geordneter Kristalle der chemischen Elemente gleich null. Daher hat jede Verbindung von Elementen eine positive Entropie.

DRITTER HAUPTSAZ: NERNST'SCHES WÄRMETHEOREM

Damit können die absoluten Entropien der Substanzen berechnet werden. Diese Werte sind wichtig, um Hinweise über die Durchführbarkeit chemischer Reaktionen zu erhalten.

🔍 Im Kontext: Das „Perpetuum mobile“

Seit jeher träumen die Menschen davon, eine Maschine zu konstruieren, die ohne jegliche Energiezufuhr ständig Arbeit verrichtet, ein sogenanntes „Perpetuum mobile“. Solch eine Maschine kann es jedoch nach den Hauptsätzen der Thermodynamik nicht geben. Im Laufe der Zeit hat es schon viele Erfinder gegeben, die auf die eine oder andere Art eine solche Maschine entworfen haben. Je nachdem, welchen Hauptsatz diese Maschinen verletzen, teilt man sie in die folgenden Kategorien:

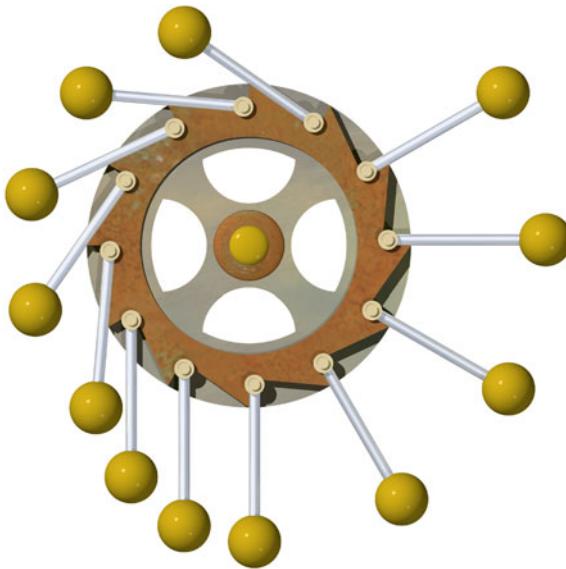
Maschinen der ersten Kategorie widersprechen dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik, denn sie würden Energie aus dem Nichts erzeugen oder mehr Energie liefern, als ihnen zugeführt wird. Die ersten bekannten Versuche sollten unter Zuhilfenahme der Gewichtskraft eine Drehbewegung ausnutzen. Ein nicht ausgewuchtes Rad war mit Stäben versehen, die eine immerwährende Drehbewegung des Rades in einer Richtung bewirken sollten. Nach einem anderen Entwurf, wie er beispielsweise von Leonardo da Vinci vorgeschlagen wurde, sollte ein Wasserrad sowohl eine Mühle als auch eine Pumpe antreiben, die das Wasser wieder in eine solche Höhe pumpte, dass es wiederum das Wasserrad antreiben konnte.¹

Später versuchte man es häufig mit Kombinationen von Auftriebskraft und Drehbewegung.² Entwürfe für Auftriebsräder und -riemen enthielten Luftsäcken, Ketten und miteinander verbundene Schläuche.³ Doch bei keinem derartigen Ansatz wurde die Arbeit berücksichtigt, die erforderlich ist, um die Luftsäcke wieder zu füllen oder um die inneren Gewichte wieder anzuheben.

Maschinen der zweiten Kategorie widersprechen dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Bei ihnen wird zwar nicht behauptet, dass sie Energie aus dem Nichts erzeugen (was dem Ersten Hauptsatz widerspricht), aber sie entsprächen wärme- oder dampfbetriebenen Maschinen mit einem unmöglich hohen Wirkungsgrad. Berühmt wurde der Entwurf des sogenannten Zeromotors (wörtlich: „Nullmotors“) von John Gamgee aus dem Jahre 1880. Sein Motor, der Schiffsschrauben antreiben sollte,⁴ war eine besondere Ausführung des Ammoniakmotors. Ammoniak, das bei einer Temperatur nahe bei 0 °C siedet, sollte in flüssiger Form in einen Zylinder eingespritzt werden, der mit einem beweglichen Kolben versehen war. Bei seiner Expansion sollte das verdampfende Ammoniak den Kolben nach außen drücken. Aufgrund dieser Expansion sollte es so weit abkühlen, dass es wieder kondensieren, danach erneut verdampfen kann usw. Dieser zyklische Vorgang sollte sich ohne Aufnahme oder Abgabe von Wärme ständig wiederholen. Das widerspricht eklatant den damals schon lange bekannten Erkenntnissen von Sadi Carnot – und folgerichtig konnte auch Gamgees Zeromotor nicht funktionieren. Ebenso erging es vergleichbaren Entwürfen vom Maschinen, deren Arbeitsprinzip dem Zweiten Hauptsatz widerspricht. Der Dampf muss nämlich wieder kondensieren (und dabei Wärme abgeben), damit ein vollständiger Zyklus durchlaufen werden kann.

Schon im Jahre 1775 stellte die französische Akademie der Wissenschaften klar, dass jegliche Bemühungen um ein Perpetuum mobile nur einen unnützen Zeitaufwand darstellen. Daher sollten sämtliche Patenteinreichungen verworfen werden, in denen die Erfahrung derartiger Vorrichtungen beansprucht wurden.⁵ 1856 wurde in den USA und in Großbritannien offiziell davon abgeraten, Patentschriften einzureichen, die sich auf ein Perpetuum mobile bezogen.⁶ Dennoch findet man derartige Patentansprüche noch jüngeren Datums.⁷ Es kommt sogar vor, dass ein Perpetuum mobile⁸ von den Patentämtern nicht als solches erkannt

wird, wie es dem US-Patentamt passierte⁹, und obwohl die Physik bereits unwiderlegbar bewiesen hat, dass eine solche Konstruktion nicht realisierbar ist, tauchen stetig neue Ideen zu diesem Thema auf.



Dieses Rad ist nur scheinbar nicht ausgewuchtet. Links von der Drehachse befinden sich zwar mehr Stäbe als rechts von ihr. Doch der Massenmittelpunkt befindet sich genau senkrecht unter der Drehachse. (Wenn man beispielsweise nur vier am Umfang gleichmäßig verteilte Stäbe vorsieht, lässt sich diese Position des Massenmittelpunkts rechnerisch ohne große Schwierigkeiten nachvollziehen.)

1. Leonardo3, „Pompe Meccaniche e a Moto Perpetuo“, *Codex Atlanticus*, Mailand: Leonardo3 srl, 2005.
2. „Austin's Perpetual Motion“, *Scientific American*, 27. März 1847, 2, Nr. 27, S. 209.
3. Diamond, D., „Gravity-Actuated Fluid Displacement Power Generator“, US-Patent 3.934.964, 27. Jan. 1976.
4. Park, R., *Voodoo Science*. Oxford: Oxford University Press, 2000, S. 129–130.
5. Ward, J., *Naturalism and Agnosticism*, I. London: Black, 1906.
6. „Patent Correspondence“, *Scientific American*, Sept. 1856, 20, Nr. 1, S. 343.
7. Wine, B., „Energy Information“. <http://byronwine.com>.
8. Voss, D., „New Physics' Finds a Haven at the Patent Office“, *Science*, 21. Mai 1999, 284, Nr. 5418, S. 1252–1254.
9. Collins, G. P., „There's No Stopping Them“, *Scientific American*, 22. Okt. 2002, S. 41.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	Alle folgenden Formulierungen des Zweiten Hauptsatzes sind gleichwertig.
Thomson'sche Formulierung	Kein System kann Energie in Form von Wärme aus einem einzelnen Reservoir aufnehmen und sie vollständig in Arbeit umsetzen, ohne dass gleichzeitig zusätzliche Veränderungen im System oder in dessen Umgebung eintreten.
Wärmekraftmaschinen-Formulierung	Es ist unmöglich, eine zyklisch arbeitende Wärmekraftmaschine zu konstruieren, die <i>keinen anderen</i> Effekt bewirkt, als Wärme aus einem einzigen Reservoir aufzunehmen und eine äquivalente Menge an Arbeit zu verrichten.
Claudius'sche Formulierung	Ein Prozess, bei dem nur Wärmeenergie von einem kälteren auf einen wärmeren Gegenstand übertragen wird, ist unmöglich.
Kältemaschinen-Formulierung	Es ist unmöglich, eine zyklisch arbeitende Kältemaschine zu konstruieren, die <i>keinen anderen</i> Effekt bewirkt, als eine bestimmte Wärmemenge von einem einzigen kälteren Reservoir vollständig in ein wärmeres zu übertragen.
Entropie-Formulierung	Die Entropie des Universums (des Systems und seiner Umgebung) kann niemals abnehmen.
2. Bedingungen für reversible Prozesse	<ol style="list-style-type: none"> 1. Es darf keine mechanische Energie aufgrund von Reibung, viskosen Kräften oder anderen dissipativen Effekten in Wärme umgesetzt werden. 2. Wärmeübertragung darf nur zwischen Gegenständen mit gleicher Temperatur oder aufgrund einer infinitesimalen Temperaturdifferenz auftreten. 3. Der Prozess muss (wie auch sämtliche Teilvergänge) reversibel (quasistatisch) ablaufen, sodass sich das System stets in einem Gleichgewichtszustand oder in einer infinitesimalen Abweichung davon befindet.
3. Carnot-Wärmekraftmaschine	Eine Carnot-Wärmekraftmaschine ist eine Maschine, die im Carnot-Kreisprozess, also reversibel, zwischen zwei Reservoiren arbeitet.
Carnot-Kreisprozess	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reversible isotherme Aufnahme von Wärme aus einem wärmeren Reservoir mit der Temperatur T_w 2. Reversible adiabatische Expansion, bei der die tiefere Temperatur T_k erreicht wird 3. Reversible isotherme Abgabe von Wärme an ein kälteres Reservoir 4. Reversible adiabatische Kompression, wieder zurück in den Anfangszustand
Wirkungsgrad des Carnot-Kreisprozesses	$\varepsilon_{\max} = 1 - \frac{ Q_k }{Q_w} = 1 - \frac{T_k}{T_w}$ (16.6)
4. Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine	Wenn eine Wärmekraftmaschine die Wärmemenge Q_w aus dem wärmeren Reservoir aufnimmt, die Arbeit $ W $ verrichtet und die Wärmemenge $ Q_k $ an das kältere Reservoir abgibt, dann ist ihr Wirkungsgrad
	$\varepsilon = \frac{ W }{Q_w} = \frac{Q_w - Q_k }{Q_w} = 1 - \frac{ Q_k }{Q_w}.$ (16.2)
5. Leistungszahl einer Kältemaschine	$\varepsilon_{KM} = \frac{Q_k}{W}$ (16.3)
6. Leistungszahl einer Wärmepumpe	$\varepsilon_{WP} = \frac{ Q_w }{W}$ (16.7)

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Entropie	<p>Die Entropie ist ein Maß für die Unordnung eines Systems. Bei infinitesimalen Änderungen ist die Entropieänderung</p> $dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} . \quad (16.11)$ <p>Darin ist dQ_{rev} die beim Übergang zwischen beiden Zuständen in einem reversiblen Prozess zugeführte Wärmemenge. Die Entropieänderung eines Systems kann positiv oder negativ sein.</p>
Entropie und Entwertung der Energie	<p>Bei einem irreversiblen Prozess nimmt die Entropie S_U des Universums zu, und die Energie</p> $W_{\text{entw.}} = T \Delta S_U \quad (16.21)$ <p>ist nicht mehr als Arbeit nutzbar.</p>
Entropie und Wahrscheinlichkeit	<p>Die Entropie hängt mit der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Zustands zusammen. Ein Zustand höherer Ordnung tritt mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit auf, ein Zustand geringerer Ordnung dagegen mit einer höheren Wahrscheinlichkeit. Ein isoliertes, sich selbst überlassenes System nimmt einen Zustand hoher Wahrscheinlichkeit, geringer Ordnung und hoher Entropie an.</p>
8. Dritter Hauptsatz der Thermodynamik	<p>Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunkts der Temperatur</p> <p>Nernst'sches Wärmetheorem</p> <p>Es ist unmöglich, in irgendeinem Prozess, und sei er noch so idealisiert, die Temperatur eines Systems in einer endlichen Anzahl von Schritten auf den absoluten Nullpunkt zu senken.</p> <p>Am absoluten Nullpunkt der Temperatur ist die Entropie völlig geordneter Kristalle der chemischen Elemente gleich null. Daher hat jede Verbindung von Elementen eine positive Entropie.</p>

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Nein. Der Aufbau und die Entwicklung des Organismus vollziehen sich auf Kosten einer zunehmenden Unordnung in der Umgebung.

Lösungen der Übungen

1. a) 52,5 J, b) 97,5 J
2. 250 kJ
3. a) 40 %, b) 80 kJ
4. 0,30 bzw. 30 %
5. $\Delta S = 1,31 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

16.1 • Warum ist es sinnlos, die Kühlschranktür offen zu halten, wenn man bei heißem Wetter die Küche kühlen will? Und warum kühlst im Gegensatz dazu eine Klimaanlage den Raum?

16.2 • Warum versucht man, in Kraftwerken die Temperatur des den Turbinen zugeführten Dampfs so hoch wie möglich anzusetzen?

16.3 • Welche der nachstehend genannten Maßnahmen ist am besten geeignet, um den Wirkungsgrad einer Carnot-Wärmekraftmaschine zu steigern? a) Die Temperatur des wärmeren Reservoirs wird gesenkt. b) Die Temperatur des kälteren Reservoirs wird erhöht. c) Die Temperatur des wärmeren Reservoirs wird erhöht. d) Das Verhältnis des maximalen Volumens zum minimalen Volumen wird geändert.

16.4 •• An einem Tag mit hoher Luftfeuchtigkeit kondensiert Wasser an einer kalten Oberfläche. Wie ändert sich bei der Kondensation die Entropie des Wassers? a) Sie steigt. b) Sie bleibt gleich. c) Sie sinkt. d) Sie kann abnehmen oder unverändert bleiben. Begründen Sie Ihre Antwort.

16.5 •• Ein ideales Gas durchläuft reversibel eine Zustandsänderung vom Anfangszustand p_1, V_1, T_1 zum Endzustand p_2, V_2, T_2 . Es stehen zwei mögliche Wege zur Auswahl: A) eine isotherme Expansion, gefolgt von einer adiabatischen Kompression, und B) eine adiabatische Kompression, gefolgt von einer isothermen Expansion. Was trifft für diese beiden Wege zu? a) $\Delta U_A > \Delta U_B$, b) $\Delta S_A > \Delta S_B$, c) $\Delta S_A < \Delta S_B$, d) keine dieser Beziehungen.

16.6 •• Abbildung 16.12 zeigt das S - T -Diagramm eines Kreisprozesses mit einem idealen Gas. Um welchen Prozess handelt es sich? Skizzieren Sie sein p - V -Diagramm.

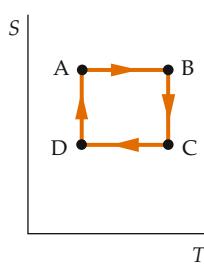


Abbildung 16.12 Zu Aufgabe 16.6.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

16.7 •• Schätzen Sie den maximalen Wirkungsgrad eines Ottomotors mit dem Verdichtungsverhältnis $8,0 : 1,0$ ab. Legen Sie den Otto-Kreisprozess (siehe Abbildung 16.3) zugrunde und setzen Sie $\gamma = 1,4$.

16.8 •• Die mittlere Oberflächentemperatur der Sonne liegt bei rund 5400 K und die der Erde bei rund 290 K . Die Solarkonstante beträgt etwa $1,37\text{ kW/m}^2$ (das ist die Leistung pro Fläche, die durch Sonneneinstrahlung auf die Erde auftrifft). a) Schätzen Sie die gesamte Strahlungsleistung der Sonne ab, die auf die Erde trifft. b) Wie stark erhöht sich pro Zeiteinheit die Entropie der Erde durch diese Strahlungsleistung? c) Wie stark sinkt pro Zeiteinheit die Entropie der Sonne aufgrund des Anteils der von ihr emittierten Strahlung, der auf die Erde trifft?

16.9 ••• „Soweit wir wissen, hat die Natur niemals eine Wärmekraftmaschine hervorgebracht.“ Dies schrieb Steven Vogel 1988 in seinem Werk *Life's Devices*. a) Berechnen Sie den Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine, die zwischen Reservoiren mit der menschlichen Körpertemperatur (37°C) und einer mittleren Außentemperatur von 21°C arbeitet. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit dem Wirkungsgrad von rund $0,2$, mit dem der menschliche Körper chemische in mechanische Energie umsetzt. Widerspricht das Ergebnis dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik? b) Verwenden Sie die Ergebnisse von a sowie Ihre Kenntnisse über die Lebensbedingungen der meisten Warmblüter. Erklären Sie, warum die Warmblüter im Verlauf der Evolution keine „Wärmekraftmaschine“ entwickelt haben, mit der sie ihre innere Energie erhöhen könnten.

Wärmekraftmaschinen und Kältemaschinen

16.10 • Eine Wärmekraftmaschine mit einem Wirkungsgrad von $20,0\%$ verrichtet pro Zyklus $0,100\text{ kJ}$ Arbeit. a) Wie viel Wärme wird pro Zyklus aus dem wärmeren Reservoir aufgenommen? b) Wie viel Wärme wird pro Zyklus an das kältere Reservoir abgegeben?

16.11 • Eine Wärmekraftmaschine entnimmt pro Zyklus $0,400\text{ kJ}$ Wärme aus dem wärmeren Reservoir und verrichtet $0,120\text{ kJ}$ Arbeit. a) Wie hoch ist ihr Wirkungsgrad? b) Wie viel Wärme wird pro Zyklus an das kältere Reservoir abgegeben?

16.12 •• Eine Wärmekraftmaschine enthält als Arbeitssubstanz $1,00\text{ mol}$ eines idealen Gases. Zu Beginn hat dieses ein Volumen von $24,61$ und eine Temperatur von 400 K . Sie durchläuft folgenden vierstufigen Kreisprozess: 1) isotherme Expansion bei 400 K auf das doppelte Volumen, 2) Abkühlung bei konstantem Volumen auf 300 K , 3) isotherme Kompression

auf das Anfangsvolumen, 4) Erwärmung bei konstantem Volumen auf die Anfangstemperatur 400 K. Skizzieren Sie das p - V -Diagramm für den angegebenen Kreisprozess. Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Maschine; setzen Sie dabei $C_V = 21,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

16.13 ••• Der Kreisprozess für die Vorgänge im Dieselmotor (der sogenannte „Diesel-Kreisprozess“) ist in Abbildung 16.13 schematisch dargestellt. Von a nach b wird adiabatisch komprimiert, von b nach c bei konstantem Druck expandiert. Der Prozess von c nach d ist eine adiabatische Expansion, von d nach a wird bei konstantem Volumen abgekühlt. Berechnen Sie den Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses als Funktion der Volumina V_a , V_b und V_c .

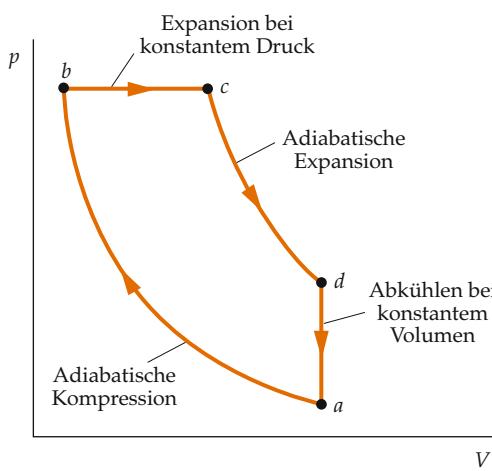


Abbildung 16.13 Zu Aufgabe 16.13.

Der Zweite Hauptsatz

16.14 •• Wenn sich in einem p - V -Diagramm zwei Kurven schneiden, die reversible adiabatische Prozesse darstellen, so kann durch Hinzufügen einer Isotherme zwischen beiden Adiabaten ein Kreisprozess konstruiert werden (Abbildung 16.14). Zeigen Sie, dass ein solcher Kreisprozess den Zweiten Hauptsatz verletzt.

Carnot-Kreisprozesse

16.15 • Eine Carnot-Maschine arbeitet zwischen zwei Reservoiren mit den Temperaturen $T_w = 300 \text{ K}$ und $T_k = 200 \text{ K}$. a) Wie hoch ist ihr Wirkungsgrad? b) Wie viel Arbeit verrichtet sie pro Zyklus, wenn sie 100 J aus dem wärmeren Reservoir aufnimmt? c) Wie viel Wärme gibt sie in jedem Zyklus an das kältere Reservoir ab? d) Wie hoch ist ihre Leistungszahl, wenn sie zwischen denselben Reservoiren in umgekehrter Richtung als Kältemaschine arbeitet?

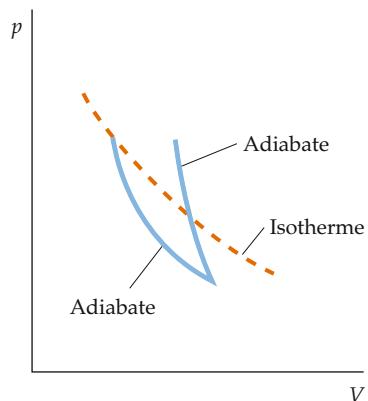


Abbildung 16.14 Zu Aufgabe 16.14.

16.16 • Eine Carnot-Maschine arbeitet zwischen zwei Reservoiren mit den Temperaturen $T_w = 300 \text{ K}$ und $T_k = 77,0 \text{ K}$. a) Wie hoch ist ihr Wirkungsgrad? b) Wie viel Arbeit wird verrichtet, wenn sie pro Zyklus 100 J aus dem wärmeren Reservoir aufnimmt? c) Wie viel Wärme gibt sie in jedem Zyklus an das kältere Reservoir ab? d) Wie hoch ist ihre Leistungszahl, wenn sie zwischen denselben Reservoiren in umgekehrter Richtung als Kältemaschine arbeitet?

16.17 •• Der Kreisprozess in Abbildung 16.15 wird mit 1,00 mol eines zweiatomigen Gases durchgeführt, das sich wie ein ideales Gas verhält und für das $\gamma = 1,4$ ist. Zu Anfang beträgt der Druck 1,00 bar und die Temperatur $0,0^\circ\text{C}$. Das Gas wird bei konstantem Volumen auf $T_2 = 150^\circ\text{C}$ aufgeheizt und anschließend adiabatisch expandiert, bis der Druck wieder 1,00 bar beträgt. Schließlich wird es bei konstantem Druck auf den Endzustand komprimiert. Ermitteln Sie a) die Temperatur T_3 nach der adiabatischen Expansion, b) die vom Gas bei jedem Schritt abgegebene oder aufgenommene Wärmemenge, c) den Wirkungsgrad dieses Kreisprozesses, d) den Carnot-Wirkungsgrad eines Kreisprozesses zwischen der niedrigsten und der höchsten hier auftretenden Temperatur.

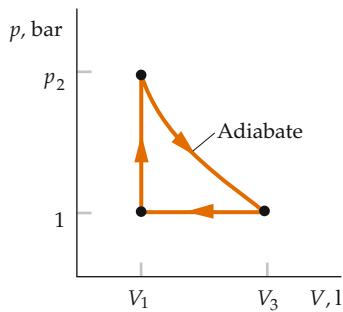


Abbildung 16.15 Zu Aufgabe 16.17.

16.18 •• Einer Dampfmaschine wird überhitzter Wasserdampf mit einer Temperatur von 270°C zugeführt. Aus ihrem Arbeits-

zylinder gibt sie kondensierten Dampf, also Wasser, mit $50,0^{\circ}\text{C}$ ab. Der Wirkungsgrad wurde zu 0,300 gemessen. a) Vergleichen Sie diesen Wert mit dem theoretischen Wirkungsgrad bei den angegebenen Temperaturen. b) Angenommen, die Maschine liefert 200 kW an nutzbarer mechanischer Leistung. Wie viel Wärme gibt sie dann in 1,00 h an die Umgebung ab?

Wärmepumpen

16.19 • Eine Wärmepumpe führt der Heizung eines Hauses eine Wärmeleistung von 20 kW zu. Die Außentemperatur beträgt -10°C , und die Temperatur des Heizkessels liegt bei 40°C . a) Wie hoch wäre die Leistungszahl, wenn die Maschine bei denselben Temperaturen vollkommen reversibel, also mit dem Carnot-Wirkungsgrad, arbeitete? b) Mit welcher elektrischen Leistung müsste die ideale Wärmepumpe dabei mindestens betrieben werden? c) Angenommen, die Wärmepumpe erreicht 60 % der theoretischen Leistungszahl einer idealen Wärmepumpe. Mit welcher elektrischen Leistung muss sie dann mindestens betrieben werden?

Entropieänderungen

16.20 • Sie haben einen Topf mit Wasser versehentlich auf dem eingeschalteten Herd stehen lassen und bemerken dies gerade noch rechtzeitig, bevor das letzte Tröpfchen Wasser verdampft. Zu Beginn hatten sich 1,001 Wasser im Topf befunden. Wie hoch ist die Entropieänderung des Wassers infolge seiner Zustandsänderung von flüssig zu gasförmig?

16.21 • Wie stark ändert sich die Entropie von 1,00 mol flüssigen Wassers, wenn es bei $0,0^{\circ}\text{C}$ zu Eis gefriert?

16.22 •• Im Gefrierfach eines Kühlschranks werden 50,0 g Wasser, die eine Anfangstemperatur von $0,0^{\circ}\text{C}$ haben, gefroren und auf -10°C abgekühlt. Nehmen Sie an, die Wände des Gefrierfachs werden dabei auf einer konstanten Temperatur von -10°C gehalten. Zeigen Sie, dass die Entropie des Universums zunimmt, obwohl die Entropie des Wassers bzw. Eises abnimmt.

16.23 •• 2,00 mol eines idealen Gases expandieren bei 400 K reversibel und isotherm vom Anfangsvolumen 40,0 l auf das doppelte Volumen. Wie hoch sind die Entropieänderungen a) des Gases und b) des Universums?

16.24 •• Ein 200-kg-Block Eis mit $0,0^{\circ}\text{C}$ wird in einen großen See gelegt. Dessen Temperatur liegt nur geringfügig über $0,0^{\circ}\text{C}$, sodass das Eis sehr langsam schmilzt. Bestimmen Sie die nach dem Schmelzen eingetretenen Entropieänderungen: a) des Eises, b) des Sees, c) des Universums (Eis plus See).

16.25 •• Ein Kupferblock mit der Masse 1,00 kg hat eine Temperatur von 100°C . Er wird in ein Kalorimeter mit vernachlässigbarer Wärmekapazität gegeben, das 4,001 flüssiges Wasser mit $0,0^{\circ}\text{C}$ enthält. Wie groß sind die Entropieänderungen a) des Kupferblocks, b) des Wassers, c) des Universums?

Entropie und entwertete Energie

16.26 •• Ein Reservoir mit 300 K nimmt aus einem zweiten Reservoir mit 400 K eine Wärmemenge von 500 J auf. a) Wie groß ist die Entropieänderung des Universums? b) Wie viel Energie wird bei diesem Prozess entwertet bzw. „geht verloren“?

Allgemeine Aufgaben

16.27 • Eine Wärmekraftmaschine nimmt in jedem Zyklus 150 J aus einem Reservoir mit 100°C auf und gibt 125 J an ein Reservoir mit 20°C ab. a) Wie hoch ist der Wirkungsgrad dieser Maschine? b) Wie hoch ist dieser Wirkungsgrad im Verhältnis zum Carnot-Wirkungsgrad bei denselben Reservoiren?

16.28 • Um die Temperatur in einem Haus auf 20°C zu halten, nimmt eine elektrische Fußbodenheizung an einem Tag mit einer Außentemperatur von $-7,0^{\circ}\text{C}$ eine Leistung von 30,0 kW auf. Wie viel trägt dieses Beheizen pro Stunde zur Entropieerhöhung des Universums bei?

16.29 •• Zeigen Sie, dass die Leistungszahl ε_{KM} einer Carnot-Kältemaschine folgendermaßen mit dem Carnot-Wirkungsgrad ε_{max} zusammenhängt: $\varepsilon_{\text{KM}} = T_k / (\varepsilon_{\text{max}} T_w)$.

16.30 •• Vergleichen Sie den Wirkungsgrad des Otto-Kreisprozesses (siehe Abschnitt 16.1) mit dem einer Carnot-Maschine, die zwischen denselben Temperaturen arbeitet.

16.31 ••• Der englische Logiker und Philosoph Bertrand Russell (1872–1970) behauptete einmal, dass eine Million Affen, die eine Million Jahre lang auf je einer Schreibmaschine völlig ungezielt herumtippen, sämtliche Werke von Shakespeare her vorbringen könnten. Beschränken wir uns hier auf einige Sätze aus *Julius Caesar* (3. Akt, 2. Szene), die Marcus Antonius zu den Römern spricht:

Friends, Romans, countrymen! Lend me your ears.

I come to bury Caesar, not to praise him.

The evil that men do lives after them,

The good is oft interred with the bones.

So let it be with Caesar.

The noble Brutus hath told you that Caesar was ambitious,

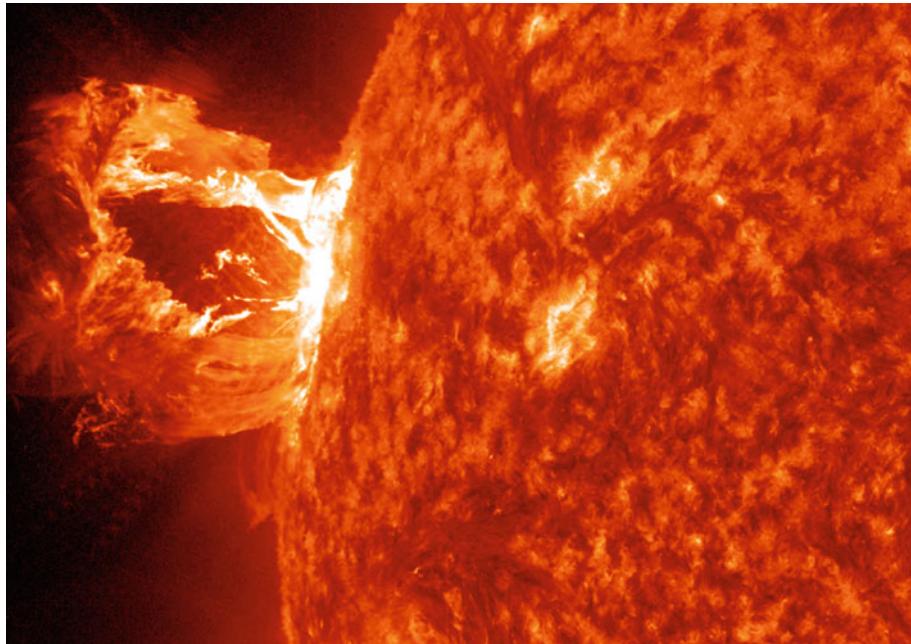
And, if so, it were a grievous fault,

And grievously hath Caesar answered it...

Selbst für diesen kurzen Ausschnitt würden die Affen nach der eben beschriebenen Methode wesentlich länger als eine Million Jahre brauchen. Um welchen Faktor irrite sich Russel näherungsweise? Treffen Sie dabei die nötigen Annahmen (darunter auch die, dass die Affen unsterblich sind).

Wärmeübertragung

17



Die Sonne ist unsere Licht- und Wärmequelle. Einfache Berechnungen zeigen, dass es bereits 8 Minuten und 20 Sekunden nach dem Verlöschen der Sonne auf der Erde dunkel würde. Wie schnell es abkühlen würde, ist jedoch wesentlich komplizierter zu berechnen, da die verschiedenen Arten des Wärmetransports unterschiedlich schnell ablaufen. (© NASA.)

?

Welche Transportmechanismen bewirken, dass uns die Wärme erreicht? Außerdem ist es möglich, aus der Wellenlänge des bei uns eintreffenden Lichts die Oberflächentemperatur der Sonne zu berechnen. (Siehe Beispiel 17.4)

17.1	Wärmeübertragungsarten	632
17.2	Wärmeleitung	632
17.3	Konvektion	638
17.4	Wärmestrahlung	638
	Zusammenfassung	644
	Aufgaben	646

Wärmeleitung spielt in vielen Bereichen des täglichen Lebens eine entscheidende Rolle, so z. B. beim Vermeiden von Wärmeverlusten in Rohrleitungen oder beheizten Häusern. Andere Formen des Wärmetransports, wie die Konvektion und die Wärmestrahlung, sind wichtig bei der Planung von Heizungsanlagen. Auch auf kosmischen Skalen bei der Evolution von Sternen spielen diese Vorgänge eine große Rolle.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Vorgängen des Wärmetransports durch Wärmeleitung, Konvektion und Wärmestrahlung.

17.1 Wärmeübertragungsarten

Thermische Energie kann auf drei Arten übertragen werden: durch Wärmeleitung, Konvektion oder Strahlung.

Bei der **Wärmeleitung** vollzieht sich der Energietransport durch Wechselwirkungen zwischen Atomen oder Molekülen, die dabei aber selbst nicht transportiert werden. Wird beispielsweise ein fester Stab an einem Ende erwärmt, dann schwingen die Atome an diesem Ende mit höherer Energie als die Atome am kalten Ende, die eine geringere Energie haben. Durch Stöße mit den jeweils benachbarten Atomen wird die Wärmeenergie allmählich durch den Stab transportiert, wobei jedes Atom an seinem Platz bleibt. (In den Metallen wird die Wärmeleitung durch die freien Elektronen unterstützt, die die durch Stöße aufgenommene Energie bei Stößen mit anderen Atomen weitergeben.)

Bei der **Konvektion** ist die Wärmeübertragung mit einem Stofftransport verknüpft. Wird beispielsweise die Luft in einem Zimmer durch einen Heizkörper erwärmt, nimmt ihre Dichte ab. Dadurch wirkt eine Auftriebskraft auf sie ein, sodass sie aufsteigt und die aufgenommene Wärme nach oben mitnimmt.

Bei der **Strahlung** wird Energie durch elektromagnetische Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, auch im leeren Raum transportiert. Zur elektromagnetischen Strahlung gehören neben der Infrarotstrahlung u. a. auch sichtbares Licht, Radiowellen und Röntgenstrahlung. Die Strahlungsarten unterscheiden sich voneinander durch ihre Frequenz- bzw. ihre Wellenlängenbereiche.

Für alle Mechanismen der Wärmeübertragung gilt das **Newton'sche Abkühlungsgesetz**. Es besagt, dass die Abkühlungsgeschwindigkeit eines Körpers näherungsweise proportional zur Differenz der Temperaturen von Körper und Umgebung ist.

Häufig treten bei der Wärmeübertragung alle drei Mechanismen gleichzeitig auf. Ihr Anteil am Wärmetransport kann allerdings variieren. Ein gewöhnlicher Heizkörper erwärmt das Zimmer durch Strahlung und durch Konvektion. Dagegen hat bei einem Heizstrahler mit einer Quarzröhre die Strahlung den größten Anteil an der Heizleistung. Wenn das Heizelement aus Metall besteht (das nicht so effizient strahlt wie Quarz), wird die Wärme vor allem durch Konvektion übertragen. Dabei steigt die erwärmte Luft auf, sodass sie nahe dem Heizkörper durch kühlere Luft ersetzt wird. Oft unterstützt man diesen Effekt durch den Einsatz eines Ventilators.

17.2 Wärmeleitung

Abbildung 17.1a zeigt einen wärmeleitenden Stab mit der konstanten Querschnittsfläche A . Wenn wir seine Enden auf unter-

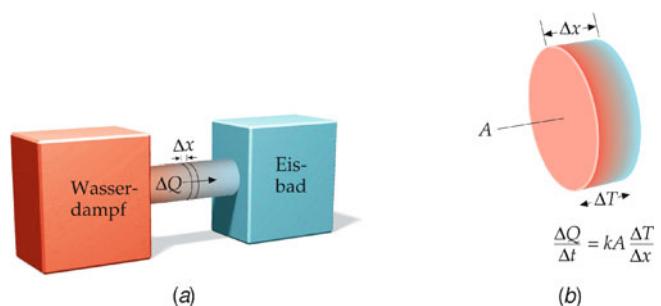


Abbildung 17.1 a) Die Enden dieses wärmeleitenden Stabs werden mithilfe von Wasserdampf und Eis auf unterschiedlichen Temperaturen gehalten. b) Ein Abschnitt des Stabs mit der Länge Δx . Die Geschwindigkeit, mit der Wärmeenergie durch diesen Abschnitt geleitet wird, ist proportional zur Querschnittsfläche A und zur Temperaturdifferenz ΔT entlang des Abschnitts. Außerdem ist sie umgekehrt proportional zur Länge Δx des Abschnitts.

schiedlichen Temperaturen halten, wird in ihm Wärmeenergie vom wärmeren zum kälteren Ende geleitet. Nach einiger Zeit stellt sich dabei ein stationärer Zustand ein, bei dem die Temperatur gleichmäßig zum kälteren Ende hin abnimmt, weil er überall dieselbe Querschnittsfläche hat. Die Änderung der Temperatur pro Längeneinheit, $\Delta T/\Delta x$, heißt **Temperaturgradient**. (Der Temperaturgradient ist ein Vektor, dessen Richtung diejenige der stärksten Temperaturdifferenz ist. Sein Betrag ist der Quotient aus der Temperaturdifferenz und dem Abstand in dieser Richtung.)

Wir bezeichnen mit Δx die Länge eines sehr kurzen Abschnitts dieses Stabs (Abbildung 17.1b). Entlang dieser Strecke herrscht im stationären Zustand die Temperaturdifferenz ΔT . Wenn in der Zeitspanne Δt die Wärmemenge ΔQ übertragen wird, dann ist die Geschwindigkeit der Wärmeübertragung $\Delta Q/\Delta t$. Diese Größe heißt **Wärmestrom**. Er wird gewöhnlich mit I bezeichnet und in der Einheit Watt (W) angegeben. Es wurde experimentell ermittelt, dass der Wärmestrom bei der Wärmeleitung proportional zum Temperaturgradienten $\Delta T/\Delta x$ und zur Querschnittsfläche A ist:

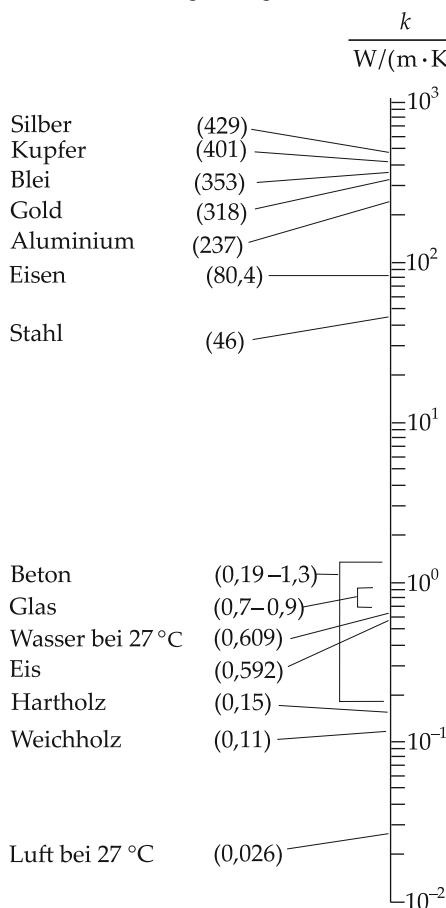
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (17.1)$$

DEFINITION DES WÄRMESTROMS

!

Der Wärmestrom verläuft von einem Gebiet höherer Temperatur zu einem Gebiet tieferer Temperatur, d. h. in Richtung des Temperaturgradienten.

Die Proportionalitätskonstante k nennt man **Wärmeleitfähigkeit**. Sie hängt vom Material ab, durch das die Wärme fließt, und wird meist in $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ angegeben. Einige Werte sind in Tabelle 17.1 zusammengestellt. Die Wärme wird in der Richtung übertragen, in der die Temperatur abnimmt. Wenn die Temperatur beispielsweise in positiver x -Richtung zunimmt, dann verläuft die Wärmeübertragung in negativer x -Richtung.

Tabelle 17.1 Die Wärmeleitfähigkeit einiger Materialien**Frage 17.1**

In einem kalten Zimmer fühlt sich eine Tischplatte aus Metall deutlich kühler an als eine aus Holz, obwohl beide dieselbe Temperatur haben. Wie ist das zu erklären?

Wir lösen Gleichung 17.1 nach der Temperaturdifferenz auf und erhalten

$$|\Delta T| = I \frac{|\Delta x|}{kA} \quad (17.2)$$

oder

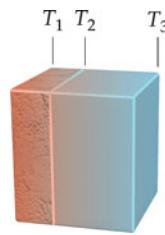
$$|\Delta T| = IR. \quad (17.3)$$

TEMPERATURGRADIENT UND WÄRMESTROM

Darin ist ΔT die Temperaturabnahme in Richtung des Wärmestroms und R der **Wärmewiderstand**, der meist in K/W angegeben wird:

$$R = \frac{|\Delta x|}{kA}. \quad (17.4)$$

DEFINITION DES WÄRMEWIDERSTANDS

**Abbildung 17.2** Der Wärmestrom, der zwei thermisch leitende Schichten aus verschiedenen Materialien nacheinander durchsetzt, ist im stationären Zustand in beiden Schichten derselbe. Der gesamte Wärmewiderstand beider Schichten ist gleich der Summe aus beiden einzelnen Wärmewiderständen.

Übung 17.1: Berechnen Sie den Wärmewiderstand einer Aluminiumplatte mit einer Fläche von 15,0 cm² und einer Dicke von 2,00 cm. ◀

Übung 17.2: Wie dick muss eine Silberplatte sein, damit sie bei gleicher Fläche denselben Wärmewiderstand hat wie eine 1,00 cm dicke Luftsicht? ◀

Praktische Bedeutung hat oft der Wärmestrom durch zwei oder mehrere aufeinanderliegende Schichten aus verschiedenen Materialien, die die Wärme unterschiedlich gut (oder schlecht) leiten. Beispielsweise kann man die Wärmedämmung an Hauswänden durch Anbringen von Isolationsschichten verbessern. Abbildung 17.2 zeigt zwei unterschiedlich dicke wärmeleitende Schichten aus verschiedenen Materialien, jedoch mit derselben Querschnittsfläche. Hier ist T_1 die Temperatur auf der warmen Seite, T_2 die an der Grenzfläche beider Schichten und T_3 die an der kalten Seite. Hat sich ein stationärer Zustand eingestellt, muss der (dabei konstante) Wärmestrom I durch beide Schichten derselbe sein. Das folgt aus dem Prinzip der Energieerhaltung, denn die auf einer Seite hineinfließende Energie muss den gesamten Block auf der anderen Seite in derselben Zeitspanne wieder verlassen, wenn sich die Temperaturen des Blocks nicht ändern.

Mit den Wärmewiderständen R_1 und R_2 der beiden Schichten gilt gemäß Gleichung 17.3:

$$T_1 - T_2 = IR_1$$

und

$$T_2 - T_3 = IR_2.$$

Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$\Delta T = T_1 - T_3 = I (R_1 + R_2) = IR$$

sowie daraus

$$I = \frac{\Delta T}{R}. \quad (17.5)$$

R ist der **Wärmewiderstand** der gesamten Schicht. Wenn mehrere Wärmewiderstände, wie es hier der Fall ist, in Reihe angeordnet sind, gilt:

Vorgehensweise: Berechnen von Wärmeströmen

Bestimmen Sie die Anordnung der Gegenstände, bei der der serielle oder der in parallele Wärmeströme aufgeteilte Wärmestrom ermittelt werden soll.

1. Berechnen Sie mit der Beziehung $R = |\Delta x|/(kA)$ (Gleichung 17.4) den Wärmewiderstand jedes einzelnen Gegenstands.
2. Wenn die Gegenstände hintereinander (in Reihe) angeordnet sind, berechnen Sie den gesamten Wärmewiderstand mit der Beziehung $R = R_1 + R_2 + \dots$ (Gleichung 17.6).
3. Wenn die Gegenstände parallel angeordnet sind, berechnen Sie den gesamten Wärmewiderstand mit der Beziehung $1/R = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots$ (Gleichung 17.8).
4. Wiederholen Sie die Schritte 2 und 3, bis Sie den gesamten Wärmewiderstand des vorliegenden Systems berechnet haben.
5. Berechnen Sie mit der Beziehung $\Delta T = IR$ (Gleichung 17.3) den gesamten Wärmestrom.

Plausibilitätsprüfung: Bei einer Anordnung der Gegenstände in Reihe muss der gesamte Wärmewiderstand größer als der größte einzelne Wärmewiderstand sein. Entsprechend muss bei einer parallelen Anordnung der Gegenstände der gesamte Wärmewiderstand geringer als jeder der einzelnen Wärmewiderstände sein.

$$R = R_1 + R_2 + \dots \quad (17.6)$$

WÄRMEWIDERSTÄNDE IN REIHE

Diese Beziehung ist auf beliebig viele aufeinanderfolgende Schichten anzuwenden. Wir werden ihr in Kapitel 22 bei der Reihenanordnung elektrischer Widerstände wieder begegnen.

Will man die Wärmemenge berechnen, die beispielsweise aus einem Haus pro Zeiteinheit durch Fenster, Wände, Türen, Kellerboden und Dach entweicht, muss man die einzelnen Wärmeströme durch die jeweiligen Flächen ermitteln. Hier verlaufen die einzelnen Wärmeströme aber **parallel** zueinander, und man kann jeden Wärmestrom als näherungsweise unabhängig von den anderen ansehen. Bei allen Wärmeströmen besteht in diesem Fall dieselbe Temperaturdifferenz. Der gesamte Wärmestrom I ist dann gleich der Summe aller einzelnen Wärmeströme durch die parallelen Wege:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} + \dots \\ &= \Delta T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$I = \frac{\Delta T}{R}, \quad (17.7)$$

wobei der gesamte Wärmewiderstand R gegeben ist durch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \quad (17.8)$$

PARALLELE WÄRMEWIDERSTÄNDE



Dieses Thermogramm lässt erkennen, an welchen Stellen besonders viel Energie vom Inneren des Hauses nach außen gelangt. Je heller die Färbung ist, desto größer ist der Wärmestrom. (© Alfred Pasieka/Photo Researchers, Inc.)

Auch diese Gleichung hat dieselbe Form wie die entsprechende Gesetzmäßigkeit bei (in diesem Fall parallel angeordneten) elektrischen Widerständen (siehe Kapitel 22). Beachten Sie, dass sowohl für die hintereinander als auch für die parallel angeordneten Wärmewiderstände (Gleichung 17.5 bzw. 17.7) der Wärmestrom I proportional zur Temperaturdifferenz ΔT ist. Das entspricht dem Newton'schen Abkühlungsgesetz. In den Beispielen 17.1 und 17.2 werden diese Zusammenhänge verdeutlicht.

Beispiel 17.1: Wärmestrom durch zwei Metallblöcke in Reihe

In Abbildung 17.3 sind zwei in Reihe angeordnete Metallblöcke aus Blei und Silber dargestellt. Sie sind jeweils 5,0 cm lang, haben einen Querschnitt von 2,0 cm mal 3,0 cm und befinden sich, wie gezeigt, zwischen zwei Wänden. Eine der Wände wird auf 100 °C gehalten, die andere auf 0,0 °C. Berechnen Sie a) den gesamten Wärmestrom durch beide Blöcke und b) die Temperatur an der Grenzfläche zwischen dem Blei- und dem Silberblock.

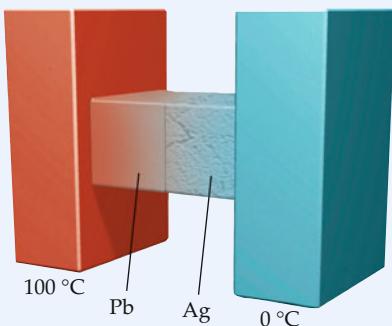


Abbildung 17.3 Zwei hintereinander angeordnete wärmeleitfähige Blöcke aus unterschiedlichen Metallen.

Problembeschreibung: a) Der gesamte Wärmestrom wird mithilfe der Beziehung $I = \Delta T/R$ berechnet, wobei sich der gesamte Wärmewiderstand aus der Summe der beiden Einzelwiderstände ergibt. Diese werden mithilfe von Gleichung 17.4 ermittelt, wobei die jeweilige Wärmeleitfähigkeit der Tabelle 17.1 zu entnehmen ist. b) Die Temperatur an der Grenzfläche zwischen beiden Blöcken wird mit der Beziehung $I = \Delta T/R_{\text{Pb}}$ für den Bleiblock berechnet. Dafür ist nach ΔT aufzulösen und der Wert von I aus Teilaufgabe a einzusetzen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Drücken Sie mithilfe der Beziehung $\Delta T = IR$ (Gleichung 17.7) die Abhängigkeit des gesamten Wärmestroms I von der Temperaturdifferenz ΔT aus:

$$I = \frac{\Delta T}{R}$$

2. Drücken Sie jeden einzelnen Wärmewiderstand mithilfe der Beziehung $R = |\Delta x|/(kA)$ (Gleichung 17.4) in Abhängigkeit von der jeweiligen Wärmeleitfähigkeit und der jeweiligen Abmessung aus und setzen Sie die Zahlen-

werte ein:

$$R_{\text{Pb}} = \frac{|\Delta x_{\text{Pb}}|}{k_{\text{Pb}} A_{\text{Pb}}} , \quad R_{\text{Ag}} = \frac{|\Delta x_{\text{Ag}}|}{k_{\text{Ag}} A_{\text{Ag}}}$$

$$R_{\text{Pb}} = \frac{0,050 \text{ m}}{(353 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (0,020 \text{ m}) \cdot (0,030 \text{ m})} \\ = 0,236 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$R_{\text{Ag}} = \frac{0,050 \text{ m}}{(429 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (0,020 \text{ m}) \cdot (0,030 \text{ m})} \\ = 0,194 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

3. Drücken Sie den gesamten Wärmewiderstand als Summe der Wärmewiderstände beider Blöcke aus und setzen Sie die in Schritt 2 berechneten Werte ein:

$$R = R_{\text{Pb}} + R_{\text{Ag}} \\ = 0,236 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} + 0,194 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \\ = 0,430 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

4. Berechnen Sie mithilfe der in Schritt 1 angegebenen Gleichung und des eben berechneten Werts des Wärmewiderstands den Wärmestrom:

$$I = \frac{\Delta T}{R} = \frac{100 \text{ K}}{0,430 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}} = 232 \text{ W} = [0,23 \text{ kW}]$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie die Temperaturdifferenz entlang des Bleiblocks, wobei Sie die in a ermittelten Werte des Wärmestroms und des Wärmewiderstands einsetzen:

$$\Delta T_{\text{Pb}} = IR_{\text{Pb}} = (232 \text{ W}) \cdot (0,236 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}) \\ = 54,9 \text{ K}$$

2. Ermitteln Sie mit diesem Ergebnis die Temperatur an der Grenzfläche zwischen den Blöcken.

$$T_{\text{Gr}} = 100 \text{ °C} - \Delta T_{\text{Pb}} = [45 \text{ °C}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wir überprüfen das Resultat, indem wir die Temperaturdifferenz entlang des Silberblocks berechnen: $\Delta T_{\text{Ag}} = IR_{\text{Ag}} = (232 \text{ W}) \cdot (0,194 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}) = 45 \text{ °C}$. Das ist konsistent mit dem Ergebnis von Teilaufgabe b. Beachten Sie, dass der gesamte Wärmewiderstand von 0,43 K/W größer als jeder einzelne Wärmewiderstand der beiden Blöcke ist. ■

Beispiel 17.2: Wärmestrom durch zwei parallele Metallblöcke

Die Metallblöcke von Beispiel 17.1 sind nun parallel angeordnet, wie in Abbildung 17.4 gezeigt. Berechnen Sie a) den Wärmestrom durch jeden Block, b) den gesamten Wärmestrom und c) den gesamten Wärme widerstand der beiden parallel angeordneten Blöcke.

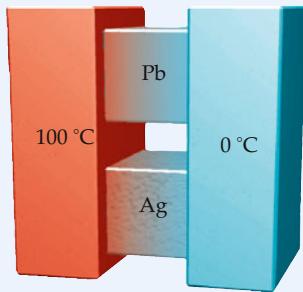


Abbildung 17.4 Anordnung zweier parallel angeordneter Metallblöcke zur Wärmestromleitung.

Problembeschreibung: Für den Wärmestrom durch jeden Block i gilt $I_i = \Delta T / R_i$, wobei R_i der Wärme widerstand des jeweiligen Blocks ist. Die beiden einzelnen Wärme widerstände wurden bereits in Beispiel 17.1 berechnet. Der gesamte Wärmestrom ist die Summe beider Wärmeströme, der gesamte Wärme widerstand kann mit Gleichung 17.8 oder mit der Beziehung $I = \Delta T / R$ errechnet werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie die Wärmeströme in beiden Blöcken:

$$I_{\text{Pb}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{Pb}}} = \frac{100 \text{ K}}{0,236 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}} = [0,42 \text{ kW}]$$

$$I_{\text{Ag}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{Ag}}} = \frac{100 \text{ K}}{0,194 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}} = [0,52 \text{ kW}]$$

Teilaufgabe b

1. Addieren Sie die Wärmeströme, um den gesamten Wärmestrom zu ermitteln:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{Pb}} + I_{\text{Ag}} = 424 \text{ W} + 515 \text{ W} \\ &= 938 \text{ W} = [0,94 \text{ kW}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Berechnen Sie mit Gleichung 17.8 den gesamten Wärme widerstand der beiden parallel angeordneten Blöcke:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{Pb}}} + \frac{1}{R_{\text{Ag}}} = \frac{1}{0,236 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}} + \frac{1}{0,194 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}$$

Damit ist

$$R = 0,107 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} = [0,11 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}]$$

2. Überprüfen Sie das Ergebnis anhand der Beziehung $I = \Delta T / R$:

$$I = \Delta T / R$$

$$R = \frac{\Delta T}{I} = \frac{100 \text{ K}}{938 \text{ W}} = 0,11 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten, ist der gesamte Wärme widerstand kleiner als jeder einzelne Wärme widerstand. Da die Blöcke parallel angeordnet sind, liegt über jedem die volle Temperaturdifferenz von 100 K an. Deswegen ist der gesamte Wärmestrom größer als der Wärmestrom durch jeden einzelnen Block in Beispiel 17.1. Dort waren die Blöcke in Reihe angeordnet, sodass die Temperaturdifferenz über jedem Block deutlich unter 100 K lag. Weiterhin war der gesamte Wärmestrom in Beispiel 17.1 gleich jedem einzelnen Strom, während er hier gleich der Summe beider Wärmeströme ist. Zudem ist er mit 0,94 kW rund 4-mal größer als der Strom 0,23 kW in Beispiel 17.1. Auch das ist angesichts der parallelen Anordnung plausibel. ■

Im Bauwesen wird oft nicht die Wärmeleitfähigkeit der Materialien angegeben, sondern der sogenannte **Wärme widerstands faktor**. Er ist definiert als der Wärme widerstand, den ein 1 m^2 großes Stück des betreffenden Werkstoffs bei einer Schichtdicke von Δx hat. Nach Gleichung 17.4 ist der Wärme widerstand $R = |\Delta x| / (kA)$. Multipliziert man mit der Fläche A , dann erhält man den Wärme widerstands faktor:

$$r = A R = \frac{|\Delta x|}{k}. \quad (17.9)$$

DEFINITION DES WÄRMEWIDERSTANDSFAKTORES

Darin ist Δx die Schichtdicke und k die Wärmeleitfähigkeit. Der Wärme widerstands faktor wird meist in der Einheit $\text{m}^2 \cdot \text{K} / \text{W}$ angegeben. In der Technik wird er häufig als *Wärmedurchlass widerstand* bezeichnet, jedoch ist dieses Wort missverständlich, denn r gibt den Wärme widerstand mal Flächeneinheit an.

In Tabelle 17.2 sind einige typische Werte von Wärme widerstands faktoren für jeweils gebräuchliche bzw. realistische Schichtdicken zusammengestellt. In der Praxis ist der Wärmestrom die interessante Größe, denn er gibt an, wie viel Wärme pro Zeiteinheit beispielsweise aus dem Haus durch Wände, Decken und Fenster entweicht. Nach Gleichung 17.2 ist der Wärmestrom

$$I = \frac{k}{|\Delta x|} A \Delta T.$$

Tabelle 17.2 Wärmewiderstandsfaktoren $r = \Delta x/k$ einiger Baumaterialien

Material	Dicke $\frac{\Delta x}{\text{mm}}$	Wärmewiderstandsfaktor $\frac{r}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}}$
Dachpappe	5	0,03
Bitumen	20	0,12
Ziegelmauerwerk	300	0,67
Beton	300	0,19
Marmor	300	0,09
Fliesen	15	0,02
Asphaltestrich	30	0,04
Kunststoffbodenbelag	10	0,04
Weichholz	30	0,20
Hartholz	30	0,15
Gipskartonplatten	25	0,12
Holzspanplatten	25	0,19
Polystyrol-Hartschaum	100	2,4
Polyurethan-Hartschaum	100	3,3
Mineralfasermatte	100	2,4
Glas	8	0,01

Mit dem Wärmewiderstandsfaktor $r = |\Delta x|/k$ gemäß Gleichung 17.9 ergibt sich daraus

$$I = \frac{A}{r} \Delta T. \quad (17.10)$$

Der gesamte Wärmestrom durch parallele Schichten ist gleich der Summe der einzelnen Wärmeströme. Bei aufeinanderliegenden Schichten addieren sich die Wärmewiderstandsfaktoren ebenso, wie es bei den Wärmewiderständen gemäß Gleichung 17.6 der Fall ist:

$$r = r_1 + r_2 + \dots$$

In Beispiel 17.3 wird eine Anwendung dieser wie auch der vorangehenden Gleichung gezeigt.

Beispiel 17.3: Wärmestrom durch Wände und Decke

Nehmen Sie an, an Ihrem Haus ist ein 3,0 m mal 5,0 m großer und innen 2,5 m hoher Geräteschuppen angebaut, dessen eine Längsseite die Hauswand ist. Sie wollen diesen Raum nun als Hobbywerkstatt nutzen, also vom Haus aus zugänglich machen und auch beheizen. Leider hat der Schuppen nur eine einfache, 20,0 cm starke Ziegelmauer. Sie wollen Heizkosten sparen und die drei Außenwände sowie das Dach besser isolieren. Dazu verwenden Sie eine 5,0 cm starke Polystyrolschaummatte, die Sie mit Weichholz (3,0 cm stark) verkleiden. Wie viel Heizenergie können Sie in 24 h sparen, wenn die Außentemperatur um durchschnittlich 15 °C tiefer als die Innentemperatur liegt? Nehmen Sie an, dass die Wärmeisolation des Dachs derjenigen der Außenwände entspricht, und lassen

Sie die Fensteröffnung außer Acht. Schätzen Sie auch die durch die Isolation erzielte Einsparung an Erdgas ab. (Der mittlere Heizwert von Erdgas liegt zwischen 25 MJ und 56 MJ pro Kubikmeter.)

Problembeschreibung: Es müssen zwei Wärmeströme berechnet werden: der durch die unverkleidete und der durch die mit Schaumstoff und Holz verkleidete Ziegelmauer. Die Differenz der Wärmeströme entspricht der eingesparten Heizleistung. Die Wärmewiderstände sind der Tabelle 17.2 zu entnehmen, wobei ggf. auf die unterschiedliche Schichtdicke zu achten ist.

Lösung: 1. Der Wärmewiderstandsfaktor einer 30 cm starken Ziegelmauer beträgt $0,67 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$. Daher müssen Sie für die 20 cm starke Mauer zwei Drittel davon ansetzen:

$$r_Z = \frac{2}{3} \cdot 0,67 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1} = 0,45 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

2. Der Wärmewiderstandsfaktor des Polystyrolschaums beträgt bei einer 10 cm starken Schicht $2,4 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$. Daher ist er bei der 5 cm starken Platte halb so groß:

$$r_P = 1,2 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

3. Den Wärmewiderstandsfaktor der Holzverkleidung entnehmen Sie wegen der gleichen Schichtdicke direkt der Tabelle 17.2:

$$r_H = 0,20 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

4. Der gesamte Wärmewiderstandsfaktor der verkleideten Mauer ist gleich der Summe der drei einzelnen Wärmewiderstandsfaktoren:

$$\begin{aligned} r &= r_Z + r_P + r_H \\ &= (0,45 + 1,2 + 0,20) \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1} \\ &= 1,85 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1} \end{aligned}$$

5. Die Gesamtfläche, die besser isoliert werden soll, setzt sich folgendermaßen zusammen: 3,0 m mal 5,0 m Dach sowie zwei Außenwände mit 3,0 m mal 2,5 m und eine Außenwand mit 5,0 m mal 2,5 m:

$$A = (15,0 + 15,0 + 12,5) \text{ m}^2 = 42,5 \text{ m}^2$$

6. Der Wärmestrom durch die Ziegelmauer ohne Wärmeisolation ist gemäß Gleichung 17.10 mit dem in Schritt 1 berechneten Wärmewiderstandsfaktor:

$$\begin{aligned} I_Z &= \frac{A}{r_Z} \Delta T \\ &= \frac{42,5 \text{ m}^2}{0,45 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}} \cdot (15 \text{ K}) = 1420 \text{ W} \end{aligned}$$

7. Der Wärmestrom durch die isolierte Mauer ist:

$$\begin{aligned} I &= \frac{A}{r} \Delta T \\ &= \frac{42,5 \text{ m}^2}{1,85 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}} \cdot (15 \text{ K}) = 344 \text{ W} \end{aligned}$$

8. Die Differenz beider Wärmeströme ist:

$$I_Z - I = (1420 - 344) \text{ W} = 1076 \text{ W} = 1,08 \text{ kW}$$

9. Daraus berechnen Sie die in 24 h eingesparte Heizenergie:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= (1,08 \text{ kJ} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (24 \text{ h}) \cdot (3600 \text{ s} \cdot \text{h}^{-1}) \\ &= [93\,000 \text{ kJ}] \end{aligned}$$

10. Aus dem Durchschnitt der angegebenen Heizwerte ($H = 40 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-3}$) und der pro Tag erzielten Energiendifferenz berechnen Sie das eingesparte Volumen an Erdgas:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\Delta Q}{H} \\ &= \frac{93\,000 \text{ kJ}}{40 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-3}} = [2,3 \text{ m}^3] \end{aligned}$$

Kommentar: Diese Berechnung ist nur eine grobe Abschätzung. Sie vermittelt jedoch einen Eindruck davon, wie viel Heizenergie schon durch eine sehr einfache Wärmeisolation eingespart werden kann.

Wenn Sie an einem kalten Tag die Innenseite der Fensterscheibe berühren, dann bemerken Sie, dass sie deutlich kälter als die Luft im Zimmer ist. Das liegt daran, dass der Wärmewiderstand der Glasscheibe hauptsächlich von den dünnen Luftsichten herröhrt, die auf ihren beiden Seiten haften. Die Dicke der Glasscheibe hat auf den gesamten Wärmewiderstand nur geringen Einfluss. Die Luftsicht an einer Scheibenfläche erhöht den Wärmewiderstand um rund 45 %, und die beidseitigen Luftsichten bewirken eine Erhöhung um 90 %. Bei einer n -fachen Verglasung ist daher eine Vergrößerung des Wärmewiderstands um den Faktor $(1+0,9n)$ zu erwarten, wenn zwischen den Fensterscheiben keine Konvektion auftritt. Starker Wind verwirbelt die äußere Luftsicht weitgehend und erniedrigt dadurch den Wärmewiderstand der Fensterscheibe deutlich.

17.3 Konvektion

Unter Konvektion versteht man die mit einem Stofftransport verknüpfte Übertragung von Wärme. Sie findet beispielsweise ständig in den Meeresströmungen statt, aber auch in globalen

Zirkulationen in der Atmosphäre. Betrachten wir einen ganz einfachen Fall von Konvektion, nämlich bei der Erwärmung eines fluiden Mediums (einer Flüssigkeit oder eines Gases) von unten, beispielsweise auf einer Herdplatte. Die erwärmte Flüssigkeit dehnt sich aus und steigt aufgrund der geringeren Dichte nach oben, während kalte Flüssigkeit von oben herab sinkt. Auch bei der Isolation von Fensterscheiben spielt die Konvektion eine entscheidende Rolle: Die Wärmeleitfähigkeit von Gasen, beispielsweise der Luft, ist wesentlich geringer als die von Flüssigkeiten oder Festkörpern. Daher ist Luft ein sehr gutes Isolationsmaterial. Wenn aber die Dicke der Luftsicht – etwa zwischen dem Innen- und dem Außenfenster einer Isolierverglasung – zu groß ist, dann wird die isolierende Wirkung durch die Konvektion stark vermindert. Eine Temperaturdifferenz zwischen verschiedenen Teilen des Luftvolumens wird nämlich durch Konvektionsströmungen schnell ausgeglichen, sodass die effektive Wärmeleitfähigkeit der Luftsicht stark erhöht wird. Bei Doppelverglasungen ist ein Abstand der Scheiben von 1–2 cm optimal. Bei einer dickeren Luftsicht wird die thermische Isolation durch die Konvektion vermindert.

Die wärmeisolierende Eigenschaft der Luft (oder anderer Gase) wird am besten ausgenutzt, wenn man das Gesamtvolume in kleinere Abschnitte unterteilt, sodass die Konvektion weitgehend verhindert wird. Darauf beruht beispielsweise die ausgezeichnete Wärmeisolation von Daunensteppdecken oder von aufgeschäumten Kunststoffen wie Styropor.

Die mathematische Beschreibung ist sehr kompliziert, weil die Strömungsgeschwindigkeit von der jeweiligen Temperaturdifferenz an den verschiedenen Stellen abhängt und weil die Temperaturdifferenzen ihrerseits durch die Strömung beeinflusst werden.

Die von einem Gegenstand durch Konvektion in seine Umgebung übertragene Wärmemenge ist etwa proportional zu seiner Oberfläche und zur Temperaturdifferenz gegenüber dem ihm umgebenden fluiden Medium. Man kann eine Gleichung für die durch Konvektion bewirkte Wärmeübertragung aufstellen und einen Konvektionskoeffizienten definieren, jedoch ist eine auch nur annähernd exakte Beschreibung von Konvektionsvorgängen so komplex, dass sie hier nicht behandelt werden kann.

17.4 Wärmestrahlung

Jeder Körper emittiert und absorbiert elektromagnetische Strahlung. Befindet er sich in thermischem Gleichgewicht mit seiner Umgebung, so vollziehen sich Emission und Absorption von Wärme mit gleicher Geschwindigkeit. Die von ihm abgestrahlte Leistung ist proportional zu seiner Oberfläche und zur vierten Potenz der absoluten Temperatur. Dies ist die Aussage des **Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes**, das 1879 von Josef Stefan empirisch gefunden und von Ludwig Boltzmann rund fünf Jahre später theoretisch begründet wurde. Es lautet:

$$P_e = e \sigma A T^4. \quad (17.11)$$

STEFAN-BOLTZMANN'SCHES GESETZ

Darin ist P_e die abgestrahlte (emittierte) Leistung, A die Oberfläche und T die absolute Temperatur. Die Größe e , der **Emissionsgrad** der betreffenden Oberfläche, liegt zwischen 0 und 1 und hängt von deren Beschaffenheit ab. Der Faktor σ ist die **Stefan-Boltzmann-Konstante**. Sie hat den Wert

$$\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}. \quad (17.12)$$

Fällt elektromagnetische Strahlung auf einen undurchsichtigen Körper, wird sie teilweise reflektiert und teilweise absorbiert. Farbige Gegenstände reflektieren den größten Teil des sichtbaren Lichts, während dunkle Körper den größten Teil absorbieren. Die bei der Umgebungstemperatur T_0 absorbierte Strahlungsleistung ist

$$P_a = a \sigma A T_0^4, \quad (17.13)$$

dabei bezeichnet a den **Absorptionsgrad** des Gegenstandes. Seine Werte liegen ebenfalls zwischen 0 und 1. Im Allgemeinen sind Absorptionsgrad und Emissionsgrad verschieden. Sie können neben den Materialeigenschaften zusätzlich von der Frequenz der Strahlung oder von der Strahlungsrichtung abhängen. Im Folgenden wollen wir davon ausgehen, dass die betrachteten Körper sogenannte **Lambert'sche Strahler** sind, d. h. die von ihnen absorbierte oder emittierte Strahlung ist richtungsunabhängig. Zudem hängen Gleichung 17.11 und 17.13 nicht von der Frequenz der emittierten Strahlung ab, sodass wir den Absorptions- und den Emissionsgrad als reine Materialkonstanten betrachten können.

Wenn ein Körper Wärme mit einer höheren Leistung abstrahlt, als er durch Absorption aufnimmt, kühlst er sich dadurch ab, und die Umgebung erwärmt sich dabei, da sie netto mehr Strahlungsleistung vom Körper aufnimmt, als sie an ihn abgibt. Umgekehrt erwärmt sich der Körper, wenn er mehr Strahlungsleistung aufnimmt, als er abgibt, wobei sich die Umgebung abkühlt. Die Nettostrahlungsleistung eines Körpers, der die Temperatur T hat und sich in einer Umgebung mit der Temperatur T_0 befindet, ist:

$$\Delta P = e \sigma A T^4 - a \sigma A T_0^4. \quad (17.14)$$

Wenn sich ein Körper in thermischem Gleichgewicht mit seiner Umgebung befindet, so haben beide die Temperatur $T = T_0$, und der Körper absorbiert eine ebenso hohe Strahlungsleistung, wie er emittiert, das bedeutet $a = e$.

Einen Körper, der die gesamte auftreffende Strahlung absorbiert, nennt man **schwarzen Körper**. Er hat demnach den Absorptionsgrad 1 und ist gleichzeitig ein idealer Strahler. Seine Strahlungseigenschaften können theoretisch berechnet werden und spielen in der Physik eine große Rolle. Einen schwarzen Körper kann man am besten mit einem Hohlraum realisieren,

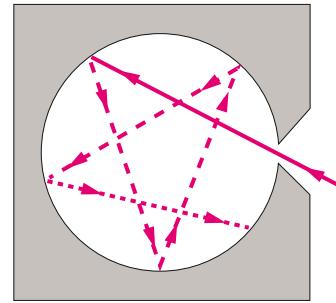


Abbildung 17.5 Mit einem Hohlraum, der eine kleine Öffnung nach außen hat, kann ein schwarzer Körper sehr gut angenähert werden. Durch die Öffnung einfallende Strahlung wird im Inneren so oft absorbiert und wieder emittiert, dass sie mit großer Wahrscheinlichkeit vollständig absorbiert wird, bevor sie wieder austreten kann. Dadurch steht sie mit den Wänden in thermischem Gleichgewicht. Die durch die Öffnung emittierte Strahlung (hier nicht gezeigt) ist deswegen charakteristisch für die Temperatur der Wände des Hohlraums.

der eine kleine Öffnung hat, durch die Strahlung einfallen und austreten kann (Abbildung 17.5). Die Strahlung im Inneren wird vor dem Wiederaustritt so oft reflektiert und dabei teilweise absorbiert, dass sie mit den Wänden in thermischem Gleichgewicht steht. Wenn sie schließlich austritt, ist sie charakteristisch für die Temperatur der Wände des Hohlraums. Die Strahlung eines schwarzen Körpers nennt man deshalb auch **Hohlraumstrahlung**.

Bei einer Temperatur unterhalb von rund 600°C ist die Strahlung eines schwarzen Körpers nicht sichtbar, weil sie fast vollständig bei Wellenlängen über 800 nm liegt (sichtbares Licht erstreckt sich ungefähr von 400 nm bis 700 nm ; siehe Kapitel 27). Mit höherer Temperatur steigt die Strahlungsleistung gemäß Gleichung 17.11 stark an, und die Strahlung nimmt immer kleinere Wellenlängen bzw. höhere Frequenzen an. Zwischen 600°C und 700°C fällt schon ein merklicher Anteil der Strahlung in den sichtbaren Bereich, es zeigt sich dunkle Rotglut. Bei weiter steigender Temperatur erscheint helle Rotglut und schließlich Weißglut. Abbildung 17.6 zeigt die Wellenlängenabhängigkeit der emittierten Strahlungsleistung bei drei verschiedenen Temperaturen. Die Wellenlänge des Maximums ist umgekehrt proportional zur Temperatur. Diesen Sachverhalt nennt man **Wien'sches Verschiebungsgesetz**:

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}. \quad (17.15)$$

WIEN'SCHES VERSchiebungGESETZ

Mithilfe dieser Gesetzmäßigkeit, die in Beispiel 17.4 angewendet wird, kann man die Oberflächentemperatur von Sternen aus der Charakteristik ihrer Strahlung bestimmen. Auch die Temperaturen an verschiedenen Stellen der Oberfläche von heißen Körpern lassen sich anhand dieses Zusammenhangs ermitteln. Die Aufnahme sogenannter Wärmebilder nennt man **Thermografie**. Sie ist u. a. in der Krebsdiagnostik nützlich, weil

krebsbefallenes Gewebe aufgrund der stärkeren Durchblutung etwas wärmer ist als gesundes.

Die spektrale Verteilung der Strahlung eines schwarzen Körpers (siehe Abbildung 17.6) war bei der Entwicklung der modernen Physik sehr bedeutsam. Es zeigte sich nämlich, dass die tatsächliche Wellenlängenabhängigkeit der Strahlung eines schwarzen Körpers stark von denjenigen abweicht, wie sie mit den Gesetzen der klassischen Physik berechnet werden kann. Die Erklärung dieser Diskrepanz führte Max Planck um das Jahr 1900 zur Hypothese von der Quantelung der Energie.

Die Wellenlänge des Strahlungsmaximums eines schwarzen Körpers mit 300 K liegt, wie in Beispiel 17.4 gezeigt, im infraroten Bereich, und zwar bei deutlich größeren Wellenlängen als denen des sichtbaren Lichts. Dieses erstreckt sich bis etwa 700 nm. Somit können auch Körper, die uns nicht schwarz erscheinen, im Infraroten als schwarze Körper wirken. Entsprechend stellte man fest, dass die Haut des Menschen, unabhängig von der Hautfarbe, im Infraroten auch als schwarzer Strahler wirkt, also den Emissionsgrad 1 hat. Die Wärmestrahlung der menschlichen Haut wird in Beispiel 17.5 berechnet.

Beispiel 17.4: Die Strahlung der Sonne

- a) Die von der Sonnenoberfläche emittierte Strahlung hat ihr Intensitätsmaximum bei einer Wellenlänge von rund 500 nm. Nehmen Sie an, dass die Sonne einem schwarzen Körper entspricht. Wie hoch ist dann ihre Temperatur an der Oberfläche? b) Berechnen Sie λ_{\max} der Strahlung eines schwarzen Körpers bei Raumtemperatur ($T = 300$ K).

Problembeschreibung: Der Zusammenhang zwischen der Wellenlänge der maximalen Strahlungsleistung und der Temperatur wird in beiden Fällen durch das Wien'sche Verschiebungsgesetz $\lambda_{\max} = (2,898 \text{ mm} \cdot \text{K})/T$ beschrieben.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie mit der angegebenen Gleichung die Temperatur T :

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}$$

Damit ergibt sich

$$T = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{\lambda_{\max}} = \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{500 \text{ nm}} = [5800 \text{ K}]$$

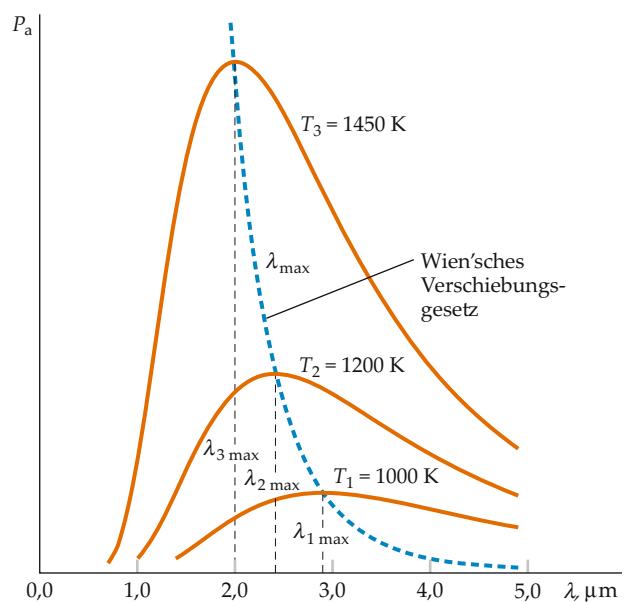


Abbildung 17.6 Die Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei drei verschiedenen Temperaturen. Die Wellenlänge λ_{\max} , bei der die maximale Leistung emittiert wird, ist umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur T des schwarzen Körpers (gestrichelte Kurve).

Teilaufgabe b

Ermitteln Sie λ_{\max} für $T = 300$ K:

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \frac{2,898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{300 \text{ K}} = 9,66 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ &= [9,66 \mu\text{m}]\end{aligned}$$

Weitergedacht: Das Maximum der Strahlungsleistung der Sonne liegt im sichtbaren Bereich des Spektrums. Die Strahlungscharakteristik der Sonne stimmt ungefähr mit der eines schwarzen Strahlers überein. Daher war es nicht unberechtigt, die Sonne als schwarzen Körper anzunehmen. ■

Wenn sich die absolute Temperatur T eines Körpers nur wenig von der Umgebungstemperatur T_0 unterscheidet, dann gilt für diesen strahlenden Körper das Newton'sche Abkühlungsgesetz. Das bedeutet, die von ihm netto abgestrahlte Leistung ist etwa proportional zur Temperaturdifferenz. Um das zu zeigen, formen wir Gleichung 17.14 mit $a = e$ um:

$$\begin{aligned}\Delta P &= e \sigma A (T^4 - T_0^4) = e \sigma A (T^2 + T_0^2) (T^2 - T_0^2) \\ &= e \sigma A (T^2 + T_0^2) (T + T_0) (T - T_0).\end{aligned}$$

Beispiel 17.5: Die Wärmestrahlung des menschlichen Körpers

ZUR ÜBUNG

Berechnen Sie die von einem nackten Menschen in einem Raum mit $20,0^{\circ}\text{C}$ netto abgestrahlte Leistung. Nehmen Sie an, dass die Hautfläche wie ein schwarzer Strahler wirkt und eine Fläche von $1,4\text{ m}^2$ hat. Die Hautoberfläche ist wegen des Wärmewiderstands der Haut etwas kühler als das Körperinnere und hat eine Temperatur von ca. 33°C bzw. 306 K .

Problembeschreibung: Es ist Gleichung 17.14 mit $a = e = 1$ anzuwenden, die die abgestrahlte Nettoleistung mit den Temperaturen verknüpft: $\Delta P = \sigma A (T^4 - T_0^4)$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: Verwenden Sie die angegebene Gleichung und setzen Sie dabei $T = 306\text{ K}$ und $T_0 = 293\text{ K}$ ein:

Ergebnisse der Lösungsschritte:

$$\Delta P = 111\text{ W} = [0,11\text{ kW}]$$

Plausibilitätsprüfung: Diese Leistungsabgabe erscheint recht hoch. Sie entspricht jedoch dem sogenannten Grundumsatz eines erwachsenen Menschen und führt pro Tag zu einer Energieabgabe von ungefähr 9500 kJ bzw. 2300 kcal .

Weitergedacht: Einen zu großen Energieverlust durch Abstrahlung verhindern wir mit unserer Kleidung, die wegen ihrer geringen Wärmeleitfähigkeit an der Außenseite deutlich kühler ist und daher eine wesentlich geringere Strahlungsleistung emittiert.

Wenn $T - T_0$ klein ist, dürfen wir, ohne einen großen Fehler zu machen, in den Summen T durch T_0 ersetzen. Damit erhalten wir

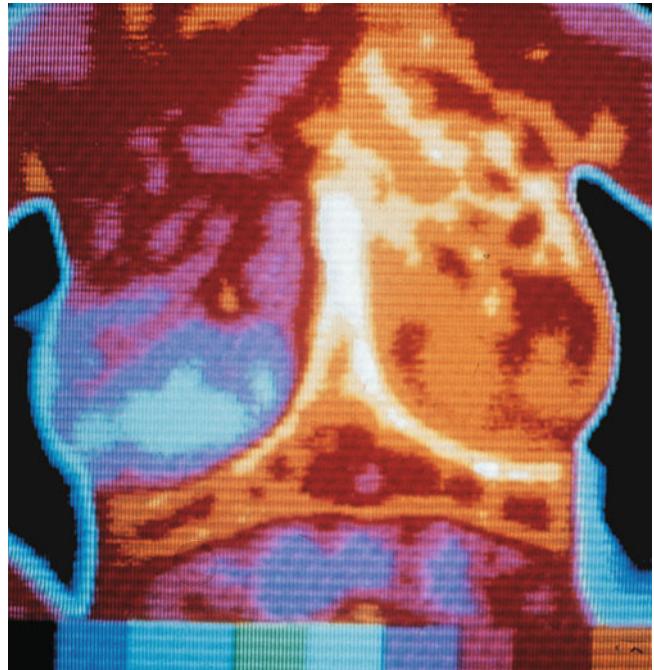
$$\begin{aligned}\Delta P &= e \sigma A (T^4 - T_0^4) \\ &\approx e \sigma A (T_0^2 + T_0^2) (T_0 + T_0) (T - T_0) \\ &= 4 e \sigma A T_0^3 \Delta T.\end{aligned}$$

Wie es auch das Newton'sche Abkühlungsgesetz besagt, ist die netto abgestrahlte Leistung damit proportional zur Temperaturdifferenz ΔT . Dasselbe Ergebnis können wir auch durch differenzielle Näherung erhalten:

$$\Delta P \approx \left. \frac{dP_e}{dT} \right|_{T=T_0} (T - T_0).$$

Darin ist $P_e = e \sigma A T^4$. Für kleine Temperaturdifferenzen $T - T_0$ ergibt sich

$$\Delta P \approx 4 e \sigma A T^3 \Big|_{T=T_0} (T - T_0) = 4 e \sigma A T_0^3 \Delta T.$$

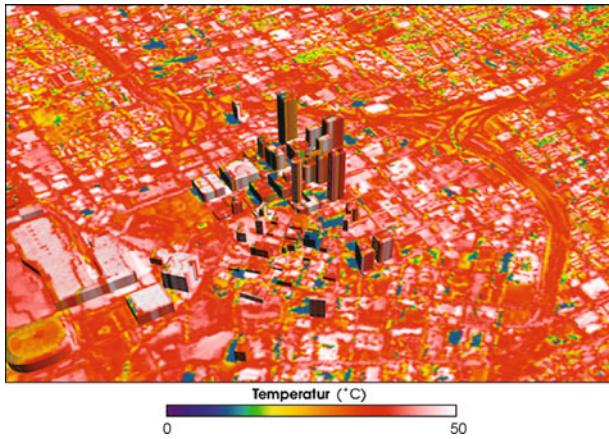


Anhand solcher Thermogramme lassen sich Tumore im Gewebe aufspüren, die an den unterschiedlichen Färbungen erkennbar sind. (© Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.)

ⓘ Im Kontext: Städtische Wärmeinseln: Keine nächtliche Abkühlung

Im Jahre 1820 veröffentlichte Luke Howard von ihm im Laufe mehrerer Jahre erarbeitete Tabellen mit dem Verlauf der Tages- und der Nachtemperaturen von London und Umgebung. Aus den Listen ging hervor, dass es in London wärmer als in den Vorstädten und auf dem Lande war und dass der Unterschied nachts am größten war. Howard ermittelte hierfür eine Differenz von $2,1^{\circ}\text{C}$ zwischen London und der ländlichen Umgebung.¹ Fast zwei Jahrhunderte später, im Jahre 2004, wurde beispielsweise für die Stadt Phoenix im US-Bundesstaat Arizona eine entsprechende nächtliche Differenz von bis zu 10°C gemessen.² Daher kann man eine Großstadt wie London oder Phoenix als eine städtische Wärmeinsel (UHI, von der englischen Bezeichnung *urban heat island*) ansehen. Städte sind mit ihren gepflasterten Straßen und zahlreichen Gebäuden allgemein wärmer als die ländliche Umgebung.

Die Bildung städtischer Wärmeinseln röhrt zum großen Teil auch daher, dass die Städte vergleichsweise nur wenige Bäume oder andere Pflanzen aufweisen. Tagsüber bewirken Pflanzen aufgrund der hohen latenten Wärme des von ihnen abgegebenen Wassers eine Abkühlung. Auf dem Lande und sogar auf Grünflächen in der Großstadt bewirkt ein großer Teil der von der Sonne eingestrahlten Wärme, dass die latente Verdampfungswärme des Wassers aufgebracht wird, anstatt dass die Oberflächentemperatur erhöht wird.³ Außerdem reflektieren Pflanzen einen Großteil der Infrarot- oder Wärmestrahlung der Sonne, während Asphalt, Stahl, Glas, Beton und Aluminium sie absorbieren und damit zurückhalten. Einen weiteren Einflussfaktor stellt die geometrische Anordnung der Gebäude dar. Die Fassaden hoher Gebäude in relativ engen Straßen reflektieren die Strahlung so, dass sie auf gegenüberliegende Fassaden trifft und von diesen teilweise absorbiert wird.⁴ Dagegen ermöglichen es eher offene Flächen, dass die Strahlung vom Boden letztlich entweichen kann.



In diesem Thermogramm der Stadt Atlanta, Georgia, erscheinen die von der Sonne abgewandten Hauswände dunkelblau oder schwarz. Das röhrt daher, dass sie kühler sind als die der Sonnenstrahlung direkt ausgesetzten Wände. In dieser Aufnahme stellen weiße Färbungen besonders hohe Temperaturen dar. (© NASA/Goddard Space Flight Center Scientific Visualisation Studio.)

Außer der Strahlung spielen aber auch andere Faktoren eine Rolle. So kann abfließendes Regenwasser auf den Straßen durch Wärmeleitung erwärmt werden. Im August 2001 erhielt ein heftiger Regenguss in Cedar Rapids, Iowa, die Temperatur eines Flusses in einer einzigen Stunde um

mehr als 10°C , sodass viele Fische verendeten.⁵ Zwar war das herabregende Wasser kälter als der Fluss, ein großer Teil des Regenwassers, das ihn erreichte, war zuvor jedoch über das heiße Straßenplaster geflossen. ähnlich schnelle Erhitzungen wurden u. a. in den US-Bundesstaaten Minnesota, Wisconsin, Oregon⁶ und Kalifornien⁷ beobachtet.

Im Jahre 1996 wurden anlässlich der Olympischen Spiele in Atlanta, Georgia, in der Umgebung besonders intensive Wetterbeobachtungen vorgenommen.⁸ Ein interessantes Ergebnis war, dass in der Abwindrichtung deutlich mehr Niederschläge fallen, da die mit der städtischen Wärmeinsel verknüpfte Konvektion das Wettergeschehen beeinflusst.⁹ Mehr Niederschläge im direkten Abwindfeld stellte man auch bei Dallas, bei San Antonio¹⁰ und sogar bei Saint Louis¹¹ fest, und das bis zu 64 km weit von der Stadtmitte entfernt. Veränderungen in der Konvektion, die durch städtische Wärmeinseln hervorgerufen wurden, sind nur schwierig zu beschreiben, ihre Auswirkungen auf die Niederschläge sind jedoch messbar.

Die Städteplaner suchen vermehrt nach Möglichkeiten zur Abkühlung städtischer Wärmeinseln.¹² In Chicago hat das Rathaus ein „grünes Dach“ mit Pflanzen und gut reflektierenden Gehwegen. Die Temperatur auf diesem Dach wird überwacht und mit der auf dem Dach des Gebäudes der Cook County verglichen, das mit schwarzem Asphalt gedeckt ist. Das begrünte Dach ist um bis zu 10°C kühler als das Asphaltgedach.¹³

Städtische Wärmeinseln können durch verschiedene Methoden der Kühlung eingedämmt werden. Daher forcieren einige Städte die Anpflanzung von Bäumen,¹⁴ andere die Anbringung besser reflektierender Oberflächen an Gebäuden,¹⁵ wieder andere die Errichtung wasserdurchlässiger Pflasterungen¹⁶ oder begrünter Dächer.

- Howard, L., *The Climate of London, Deduced from Meteorological Observations Made in the Metropolis and Various Places around It*, 2. Aufl. London: Harvey and Darton, 1833.
- Fast, J. D., Torcolini, J. C. und Redman, R., „Pseudovertical Temperature Profiles and the Urban Heat Island Measured by a Temperature Dataloger Network in Phoenix, Arizona“; *Journal of Applied Meteorology*, Jan. 2005, 44, Nr. 1, S. 3–13.
- Souch, C. und Grimmond, S., „Applied Climatology: Urban Climate“, *Progress in Physical Geography*, Febr. 2006, 30, Nr. 2, S. 270–279.
- Kusaka, H. und Kimura, F., „Thermal Effects of Urban Canyon Structure on the Nocturnal Heat Island: Numerical Experiment Using a Mesoscale Model Coupled with an Urban Canopy Model“, *Journal of Applied Meteorology*, Dez. 2004, 43, Nr. 12, S. 1899–1910.
- Boshart, R., „Urban Trout Stream Still in Works – DNR Targeting McCloud Run in C. R., Despite Recent Fish Kill“, *The Gazette*, 9. Aug. 2001, S. B1+.
- Frazer, L., „Paving Paradise: The Perils of Impervious Surfaces“, *Environmental Health Perspective*, Juli 2005, 113, Nr. 7, S. 456–462.
- Fowler, B. und Rasmus, J., „Seaside Solution“, *Civil Engineering*, Dez. 2005, S. 44–49.
- Skindrud, E., „Georgia on Their Minds“, *Science News*, 13. Juli 1996. <http://www.sciencenews.org/pages/pdfs/data/1996/150-02/15002.pdf> (Stand: April 2009).

Im Kontext: Städtische Wärmeinseln: Keine nächtliche Abkühlung

9. Dixon, P. G. und Mote, T. L., „Patterns and Causes of Atlanta's Urban Heat Island-Initiated Precipitation“, *Journal of Applied Meteorology*, Sept. 2003, 42, Nr. 9, S. 1273–1284.
10. Shepard, J., Pierce, H. und Negri, A., „Rainfall Modification by Major Urban Areas: Observations from Spaceborne Rain Radar on the TRMM Satellite“, *Journal of Applied Meteorology*, Juli 2002, 41, Nr. 7, S. 689–701.
11. „Urban-related Weather Anomalies“, *Science News*, 5. März 1977, 111, Nr. 10, S. 152.
12. Wade, B., „Putting the Freeze on Heat Islands“, *American City & County*, Febr. 2000, S. 30–40.
13. „Monitoring the Rooftop Garden's Benefits“, City of Chicago Department of Environment. <http://chicagorooftops.notlong.com> (Stand: April 2009).
14. Duncan, H., „Trees, Please: More Cities Enacting Tree Ordinances, but Enforcement Is the Age-Old Problem“, *Macon Telegraph*, 6. Juli 2006, S. A1.
15. „NASA Assesses Strategies to 'Turn Off the Heat' in New York City“, *Engineered Systems*, April 2006, S. 79–80.
16. Hoffman, L., „Green Roof Storm Water Modeling“, *BioCycle*, Febr. 2006, S. 38–40.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Wärmeübertragung	<p>Wärme kann durch drei Mechanismen übertragen werden: Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung.</p> <p>Newton'sches Abkühlungsgesetz</p> <p>Bei allen Mechanismen der Wärmeübertragung ist bei geringem Temperaturunterschied die Abkühlungsgeschwindigkeit eines Gegenstands näherungsweise proportional zur Temperaturdifferenz zwischen ihm und seiner Umgebung.</p>
2. Wärmeleitung	<p>Bei der Wärmeleitung vollzieht sich der Energietransport durch Wechselwirkungen zwischen Atomen oder Molekülen, die dabei aber selbst nicht transportiert werden.</p> <p>Wärmestrom</p> <p>Der Wärmestrom, also die pro Zeiteinheit durch Wärmeleitung übertragene Wärmemenge, ist gegeben durch</p> $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = k A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (17.1)$ <p>Darin ist I der Wärmestrom, k die Wärmeleitfähigkeit und $\Delta T / \Delta x$ der Temperaturgradient.</p> <p>Wärmewiderstand</p> <p>$\Delta T = RI$ (17.3)</p> <p>Darin ist R der Wärmewiderstand:</p> $R = \frac{ \Delta x }{k A}. \quad (17.4)$ <p>Wärmewiderstand bei Reihenschaltung</p> <p>Sind Wärmewiderstände hintereinander geschaltet, ist der Gesamtwiderstand der Anordnung:</p> $R = R_1 + R_2 + \dots. \quad (17.6)$ <p>Wärmewiderstand bei Parallelschaltung</p> <p>Sind Wärmewiderstände parallel geschaltet, ist der Gesamtwiderstand der Anordnung:</p> $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots. \quad (17.8)$ <p>Wärmewiderstandsfaktor</p> <p>Dies ist der Wärmewiderstand, den ein 1 m^2 großes Stück des betreffenden Werkstoffs bei einer gegebenen Schichtdicke Δx hat:</p> $r = \frac{ \Delta x }{k}. \quad (17.9)$ <p>k ist die Wärmeleitfähigkeit. Der Wärmestrom durch die Fläche A ist dann gegeben durch</p> $I = \frac{A}{r} \Delta T. \quad (17.10)$
3. Wärmestrahlung	<p>Bei der Strahlung wird Energie durch elektromagnetische Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, auch im leeren Raum transportiert.</p> <p>Strahlungsleistung</p> <p>Die Strahlungsleistung eines Körpers mit der Temperatur T ist</p> $P_e = e \sigma A T^4. \quad (17.11)$ <p>Darin ist $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante und e der Emissionsgrad, der zwischen 0 und 1 liegt und von der Oberflächenbeschaffenheit des betreffenden Körpers abhängt. Stoffe, die Wärmestrahlung gut absorbieren, emittieren sie auch gut.</p> <p>Abgestrahlte Wärmeleistung</p> <p>Die von einem Körper mit der Temperatur T an seine Umgebung mit der Temperatur T_0 abgestrahlte Wärmeleistung ist</p> $\Delta P = e \sigma A T^4 - a \sigma A T_0^4, \quad (17.14)$ <p>darin ist a der Absorptionsgrad des Körpers. Seine Werte liegen zwischen 0 und 1 und sind im Allgemeinen von e verschieden.</p> <p>Schwarzer Körper</p> <p>Ein schwarzer Körper hat den Emissionsgrad $e = 1$ und den Absorptionsgrad $a = 1$. Er absorbiert sämtliche auf ihn einfallende Strahlung und ist auch ein idealer Strahler.</p> <p>Lambert'scher Strahler</p> <p>Beim Lambert'schen Strahler ist die emittierte Strahlungsleistung richtungsunabhängig.</p> <p>Wien'sches Verschiebungsgesetz</p> <p>Die von einem Körper emittierte Strahlungsleistung hat ihr Maximum bei der Wellenlänge λ_{\max}, die umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur T des Körpers ist:</p> $\lambda_{\max} = \frac{2,898 \text{ nm} \cdot \text{K}}{T}. \quad (17.15)$

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Holz leitet die Wärme schlecht, ein Metall dagegen gut. Beim Berühren mit der Hand, die wärmer ist als die Tischplatte, leitet das Metall die Wärme viel schneller von ihr ab als das Holz. Deswegen fühlt sich die Metallplatte kalt an. Dagegen wird das Holz aufgrund seiner geringen Wärmeleitfähigkeit in unmittelbarer Nähe der Hand leicht erwärmt, sodass sich nur ein schwaches Kältegefühl einstellt.

Lösungen der Übungen

1. $0,0563 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} = 56,3 \text{ mK} \cdot \text{W}^{-1}$
 $\Delta x = (1 \text{ cm}) \cdot \frac{429 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{0,026 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$
 $= 16\,500 \text{ cm} = 165 \text{ m}$
- 2.

Aufgaben

Verständnisaufgaben

17.1 •• Warum kann man Heizkosten sparen, wenn man im Winter die Raumtemperatur nachts absenkt? Erklären Sie dazu, warum folgende Annahme falsch ist, die viele Menschen vertreten: „Das Wiederaufheizen am Morgen macht die Ersparnis zunichte, die durch das Absenken der Temperatur über Nacht erreicht wurde.“

17.2 •• Zwei massive Zylinder aus dem Material A bzw. B sind gleich lang, und für ihre Durchmesser gilt $d_A = 2d_B$. Wenn zwischen ihren Enden die gleiche Temperaturdifferenz aufrechterhalten wird, dann übertragen beide Zylinder pro Zeiteinheit dieselbe Wärmemenge. Wie verhalten sich die Wärmeleitfähigkeiten der beiden Materialien zueinander? a) $k_A = k_B/4$, b) $k_A = k_B/2$, c) $k_A = k_B$, d) $k_A = 2k_B$, e) $k_A = 4k_B$.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

17.3 •• Flüssiges Helium wird gewöhnlich in Behältern mit einer 7,00 cm starken „Superisolierung“ aufbewahrt, die aus zahlreichen sehr dünnen Schichten aus aluminisiertem Mylar besteht. Angenommen, aus einem solchen kugelförmigen Behälter mit einem Volumen von 2001 verdampfen bei einer Raumtemperatur von 20 °C pro Tag 0,7001 Helium. Die Dichte des flüssigen Heliums beträgt 0,125 kg/l, seine latente Verdampfungswärme ist 21,0 kJ/kg. Schätzen Sie die Wärmeleitfähigkeit der Superisolierung ab.

17.4 •• Schätzen Sie die Wärmeleitfähigkeit der menschlichen Haut ab. Nehmen Sie als Durchschnittswerte an, dass ein Mensch eine Körperoberfläche von 1,8 m² hat und in Ruhe eine Leistung von rund 130 W abgibt. Die Temperatur beträgt im Körperinneren 37 °C und an der Hautoberfläche 33 °C. Setzen Sie als mittlere Dicke der Haut 1 mm an.

17.5 •• Schätzen Sie den mittleren Emissionsgrad der Erde ab, wobei Sie folgende Daten heranziehen: Die Solarkonstante (die Intensität der Sonnenstrahlung, die auf die Erde trifft) beträgt 1,37 kW/m²; es werden 70 % dieser Strahlung von der Erde absorbiert; die mittlere Temperatur der Erdoberfläche liegt bei 288 K. Nehmen Sie als Fläche, auf die die Strahlung auftrifft, πr_E^2 an, wobei r_E der Erdradius ist. Als Fläche, von der angenommen wird, dass sie wie ein schwarzer Körper strahlt, ist $4\pi r_E^2$ anzusetzen.

Wärmeleitung

17.6 •• Zwei Metallwürfel mit der Kantenlänge 3,00 cm, einer aus Kupfer und der andere aus Aluminium, sind angeordnet,

wie in Abbildung 17.7 gezeigt. Berechnen Sie a) den Wärmewiderstand jedes Würfels, b) den Wärmewiderstand der gezeigten Kombination aus beiden Würfeln, c) den Wärmestrom I durch diese Kombination, d) die Temperatur an der Grenzfläche zwischen den Würfeln.

17.7 •• Die monatlichen Kosten für die Klimatisierung eines Hauses sind etwa proportional zu der Geschwindigkeit, mit der das Haus Wärme aus der Umgebung aufnimmt, dividiert durch die Leistungszahl ε_{KM} der Klimaanlage. Bezeichnen Sie die Temperaturdifferenz zwischen dem Inneren des Hauses und der Außenluft mit ΔT . Nehmen Sie an, dass der Wärmestrom in das Haus proportional zu ΔT ist und dass die Klimaanlage eine ideal arbeitende Kältemaschine ist. Zeigen Sie, dass die monatlichen Kosten für die Klimatisierung des Hauses dann proportional zu $(\Delta T)^2/T_H$ sind, wobei T_H die Temperatur im Inneren des klimatisierten Hauses ist.

Wärmestrahlung

17.8 • Nehmen Sie den menschlichen Körper als schwarzen Strahler der Temperatur 33 °C an (das ist etwa die Temperatur der Hautoberfläche) und berechnen Sie hierfür λ_{max} , die Wellenlänge der maximalen Strahlungsleistung.

17.9 • Das Universum ist von einer sogenannten Hintergrundstrahlung erfüllt, von der man annimmt, dass sie letztlich vom Urknall herrührt. Nehmen Sie an, das gesamte Universum sei ein schwarzer Körper mit einer Temperatur von 2,3 K. Wie groß ist dann die Wellenlänge λ_{max} der maximalen Strahlungsleistung?

17.10 •• Eine geschwärzte, massive Kupferkugel mit dem Radius 4,0 cm hängt in einem evakuierten Gefäß, dessen Wandungen eine Temperatur von 20 °C haben. Die Kugel hat eine Anfangstemperatur von 0,0 °C. Berechnen Sie – unter der Annahme, dass Wärme nur durch Strahlung übertragen wird – die Geschwindigkeit ihrer Temperaturänderung. (Nehmen Sie dabei an, dass die Kugel wie ein schwarzer Körper strahlt.)

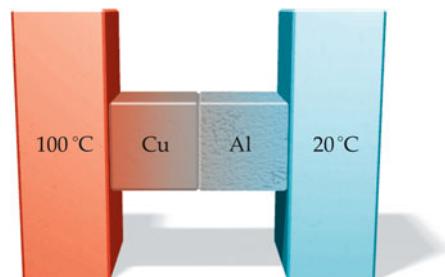


Abbildung 17.7 Zu Aufgabe 17.6.

Allgemeine Aufgaben

17.11 •• Die Solarkonstante ist die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit der Sonne beim mittleren Abstand zwischen Sonne und Erde, die auf die Erdoberfläche trifft und auf ihrer Strahlungsrichtung senkrecht steht. Sie beträgt in der oberen Atmosphäre rund $1,37 \text{ kW/m}^2$. Nehmen Sie die Sonne als schwarzen Strahler an und berechnen Sie ihre effektive Oberflächentemperatur. (Der Sonnenradius beträgt $6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$.)

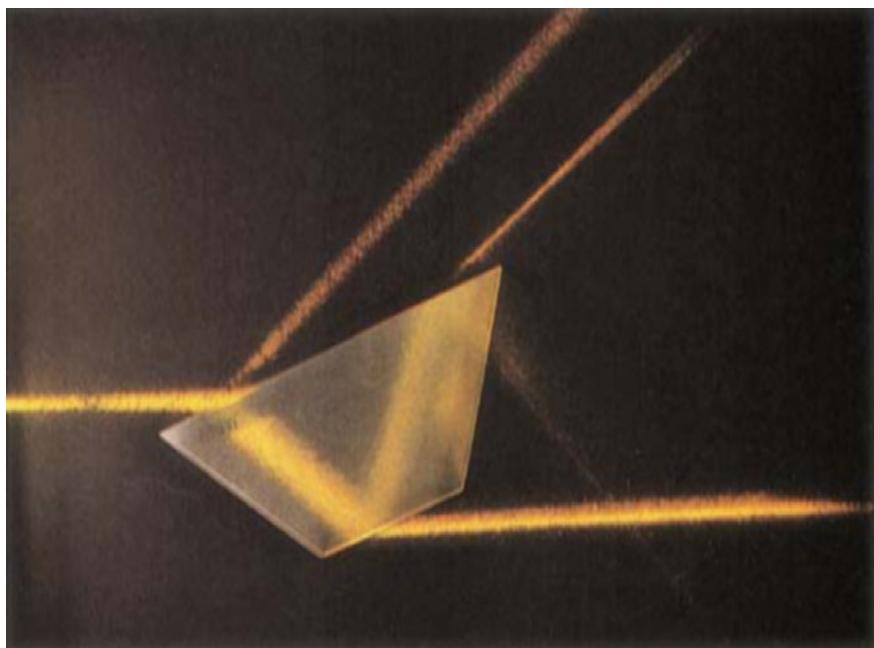
17.12 •• Die Temperatur der Erdkruste nimmt pro 30 m Tiefe durchschnittlich um $1,0^\circ\text{C}$ zu. Ihre mittlere Wärmeleitfähigkeit beträgt $0,74 \text{ J/(m} \cdot \text{s} \cdot \text{K)}$. Welche Wärmemenge pro Sekunde führt die Erdkruste durch Wärmeleitung aus dem Erdkern ab? Wie hoch ist diese Wärmeabgabe im Vergleich zur Strahlungsleistung, die von der Sonne auf die Erde gelangt? (Die Solarkonstante beträgt rund $1,37 \text{ kW/m}^2$.)

17.13 •• Ein Stab hat einen sich entlang seiner Länge ändernden Durchmesser d , wobei gilt: $d = d_0 (1 + \alpha x)$. Darin ist α eine Konstante und x der Abstand von einem Ende des Stabs. Dieser besteht aus einem Material mit der Wärmeleitfähigkeit k . Stellen Sie einen Ausdruck für den Wärmewiderstand des Stabs in Abhängigkeit von der Länge l auf.

17.14 ••• Auf einem Teich schwimmt eine $1,00 \text{ cm}$ dicke Eisschicht. a) Um wie viele Zentimeter pro Stunde wird die Eisschicht unten dicker, wenn die Lufttemperatur -10°C beträgt? Eis hat die Dichte $0,917 \text{ g/cm}^3$. b) Wie lange dauert es, bis sich eine $20,0 \text{ cm}$ dicke Eisschicht gebildet hat, sodass man darauf Schlittschuh laufen kann?

Elektrizität und Magnetismus

Teil V



18	Das elektrische Feld I: Diskrete Ladungsverteilungen	651
19	Das elektrische Feld II: Kontinuierliche Ladungsverteilungen . .	687
20	Das elektrische Potenzial	725
21	Die Kapazität	761
22	Elektrischer Strom – Gleichstromkreise	799
23	Das Magnetfeld	845
24	Quellen des Magnetfelds	873
25	Die magnetische Induktion	913
26	Wechselstromkreise	947
27	Die Maxwell'schen Gleichungen – Elektromagnetische Wellen	979

Das elektrische Feld I: Diskrete Ladungs- verteilungen

18



Kupfer ist ein elektrischer Leiter, ein Material mit besonderen Eigenschaften, das wir nützlich finden, weil es ermöglicht, Elektrizität zu transportieren.
(© <http://images-of-elements.com/>.)

?

Wie groß ist die Gesamtladung von allen Elektronen in einer Kupfermünze? (Siehe Beispiel 18.1.)

18.1 Die elektrische Ladung	652
18.2 Leiter und Nichtleiter	654
18.3 Das Coulomb'sche Gesetz	656
18.4 Das elektrische Feld	662
18.5 Elektrische Feldlinien	668
18.6 Wirkung von elektrischen Feldern auf Ladungen	672
Zusammenfassung	680
Aufgaben	682

Noch vor 150 Jahren gab es kaum mehr als ein paar elektrische Lampen, doch inzwischen sind wir in unserem Alltag extrem abhängig von der Elektrizität geworden. Obgleich aber die Elektrizität erst seit jüngster Zeit breit genutzt wird, reicht die Erforschung der Elektrizität weit in die Geschichte zurück und ist viel älter als die ersten elektrischen Glühlampen. Beobachtungen der elektrischen Anziehung können bis zu den alten Griechen zurückverfolgt werden. Sie beobachteten, dass Bernstein nach dem Reiben beispielsweise mit Katzenfell kleine Objekte wie Stroh oder Federn anzog. Das Wort „elektrisch“ kommt von *elektron*, dem griechischen Wort für „Bernstein“.

In diesem Kapitel beginnen wir unsere Untersuchung der Elektrizität mit der *Elektrostatik*, die sich mit ruhenden elektrischen Ladungen befasst. Nachdem wir den Begriff der elektrischen Ladung eingeführt haben, behandeln wir Leiter und Nichtleiter und betrachten, wie sich Leiter elektrisch laden lassen. Danach lernen wir das Coulomb'sche Gesetz kennen, das die Kraft beschreibt, die von einer elektrischen Ladung auf eine andere ausgeübt wird. Als Nächstes führen wir das elektrische Feld ein und erläutern, wie es durch Feldlinien veranschaulicht werden kann, die die Größe und Richtung des Felds anzeigen – so wie die Stromlinien das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit veranschaulichen (Kapitel 10). Abschließend diskutieren wir das Verhalten von Punktladungen und elektrischen Dipolen in elektrischen Feldern.

18.1 Die elektrische Ladung

Wir reiben einen Hartgummistab an einem Fell und hängen ihn dann an einer Schnur so auf, dass er frei rotieren kann. Dann bringen wir einen zweiten Gummistab, der ebenfalls an einem Fell gerieben wurde, in seine Nähe. Die Stäbe stoßen sich gegenseitig ab (Abbildung 18.1a). Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir zwei Glasstäbe benutzen, die an Seide gerieben wurden (Abbildung 18.1b). Bringen wir aber einen an Fell geriebenen Gummistab in die Nähe eines an Seide geriebenen Glasstabs, dann ziehen sie sich gegenseitig an (Abbildung 18.1c).

Durch das Reiben wird der Stab elektrisch aufgeladen; man spricht daher von **Reibungselektrizität** oder (nach dem griechischen *tribos* für „Reiben“) von **Triboelektrizität**. Wird das Experiment mit verschiedenen Materialien wiederholt, so stellt man fest, dass sich alle geladenen Objekte in genau zwei Gruppen einteilen lassen – in eine, ähnlich dem an Fell geriebenen Gummistab, und in eine andere, ähnlich dem an Seide geriebenen Glasstab. Objekte derselben Gruppe stoßen einander ab, Objekte aus verschiedenen Gruppen ziehen sich gegenseitig an. Der amerikanische Naturforscher und Diplomat Benjamin Franklin (1706–1790) schlug als Erklärung vor, dass jedes Objekt einen bestimmten Betrag an Elektrizität besitzt. Diese Elektrizitätsmenge – die **Ladung** – oder ein Teil davon kann von einem Objekt auf ein anderes übertragen werden, wenn zwei Objekte in engem Kontakt sind – genau wie beim Aneinanderreiben. Nach seiner Vorstellung hat dann ein Objekt einen Überschuss und das andere einen Mangel an Ladung, und zwar in derselben Größe wie der Überschuss. Franklin bezeichnete die Überschussladung mit einem Pluszeichen (+) und die Mangelladung mit einem Minuszeichen (−). Er wählte die Vorzeichen so, dass die Ladung auf dem an Seide geriebenen Glasstab positiv ist. Das Stück Seide erhält dann während des Vorgangs eine negative Ladung von gleicher Größe. Ein an Fell geriebener Hartgummistab hat eine negative Ladung und das Fell

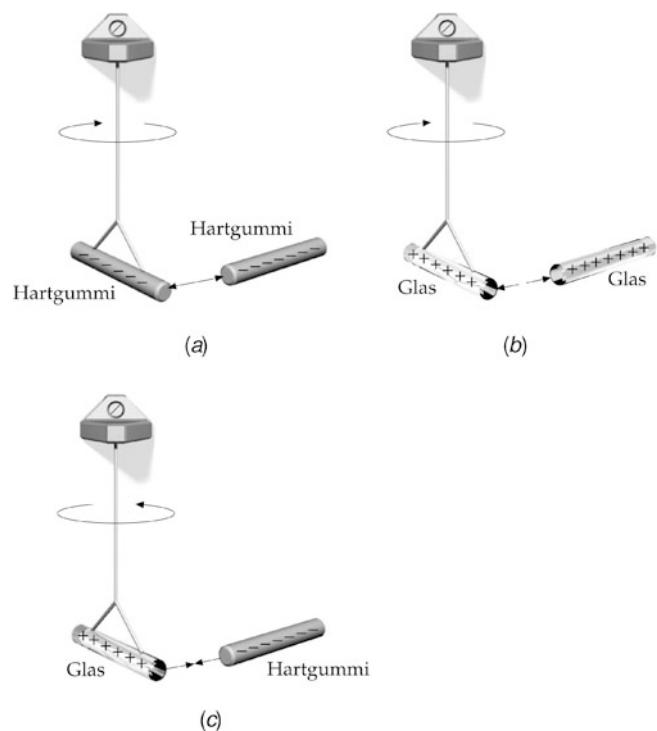


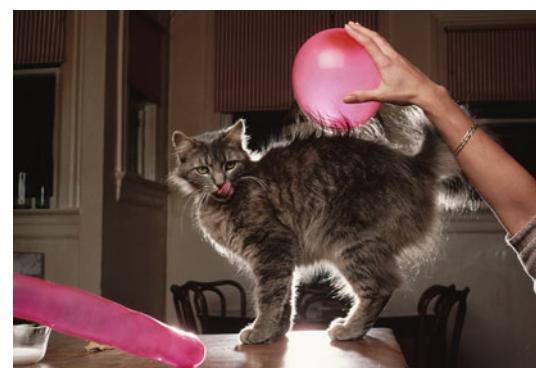
Abbildung 18.1 a) Zwei an einem Fell geriebene Hartgummistäbe stoßen sich gegenseitig ab. b) Auch zwei Glasstäbe, die an Seide gerieben wurden, stoßen sich gegenseitig ab. c) Ein an einem Fell geriebener Hartgummistab und ein an Seide geriebener Glasstab ziehen einander an.

eine positive. Auch wenn die Vorstellung von einem Ladungsüberschuss und einem Ladungsmangel nicht richtig ist, wurde Franklins Konvention der Klassifizierung elektrischer Ladungen als positive oder negative Ladungen übernommen. Zwei Objekte, die Ladungen mit gleichem Vorzeichen tragen, stoßen sich gegenseitig ab, und zwei Objekte, die Ladungen mit ungleichem Vorzeichen besitzen, ziehen einander an (Abbildung 18.1). Ein Objekt, das weder positive noch negative Ladungen trägt, wird als *neutral* bezeichnet.

Heute wissen wir, dass beim Reiben *Elektronen* von Glas auf Seide übertragen werden. Da die Seide negativ geladen ist (gemäß der Franklin'schen Konvention, die wir weiterhin benutzen), tragen Elektronen eine negative Ladung. Tabelle 18.1 ist ein Ausschnitt aus der sogenannten **triboelektrischen Reihe**, die durch empirische Beobachtungen beim Experimentieren mit verschiedenen Materialien gefunden wurde. Je weiter unten ein Material in der Reihe steht, desto größer ist seine Affinität für Elektronen. Wenn zwei Materialien in Kontakt gebracht werden, treten Elektronen von dem Material, das in der Tabelle höher steht, in das weiter unten in der Tabelle stehende Material über. Wenn z. B. Teflon an Nylon gerieben wird, werden Elektronen von Nylon auf Teflon übertragen.

Tabelle 18.1 Die triboelektrische Reihe

+ positives Ende der Reihe
Asbest
Glas
Nylon
Wolle
Blei
Seide
Aluminium
Papier
Baumwolle
Stahl
Hartgummi
Nickel und Kupfer
Messing und Silber
Synthetischer Gummi
Orlon
Frischhaltefolie (Polyvinylidenchlorid, PVdC)
Polyethylen
Teflon
Silikon
– negatives Ende der Reihe



Eine Katze und ein Luftballon. (© Roger Ressmeyer/Corbis.)

Neutronen und andere, die man allesamt als Hadronen bezeichnet –, aus sogenannten *Quarks* zusammengesetzt, die Ladungen von $\pm \frac{1}{3} e$ oder $\pm \frac{2}{3} e$ tragen. Quarks können aber selbst nicht als *freie Teilchen* isoliert werden, sie treten stets in gebundenen Zuständen auf, sodass sich diese „Drittelladungen“ nicht beobachten lassen. Elementarteilchen sind aus zwei oder drei Quarks zusammengesetzt. Es sind nur solche Kombinationen der Quarks bekannt, die zu einer Summenladung von $\pm n e$ oder 0 (mit einer natürlichen Zahl n) führen.

Ladungsquantisierung

Jedes Material besteht aus Atomen. Ein Atom besitzt einen winzigen, aber massiven Kern, der Protonen und Neutronen enthält. Protonen sind positiv geladen, Neutronen sind ungeladen. Die Anzahl der Protonen im Kern entspricht der Ordnungszahl oder Kernladungszahl Z des Elements. Den Atomkern umgibt eine gleiche Anzahl von negativ geladenen Elektronen, wodurch das Atom die Gesamtladung null erhält, also elektrisch neutral ist. Das Elektron ist ungefähr 2000-mal leichter als das Proton, aber die Ladungen beider Teilchen haben exakt den gleichen Betrag. Die Ladung des Protons ist $+e$, die Ladung des Elektrons ist $-e$; man bezeichnet e als die **Elementarladung**. Die Ladung eines Elektrons oder Protons ist eine innere Eigenschaft des Teilchens, so wie Masse und Spin innere Eigenschaften dieser Teilchen sind.

Alle beobachtbaren Ladungen treten in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung e auf, d. h., die Ladung ist *quantisiert* (in kleinste Portionen „gequontelt“ (zerlegt)). Eine beobachtbare Ladung q , die irgendwo in der Natur vorkommt, kann als $q = \pm n e$ mit einer natürlichen Zahl n geschrieben werden. Für gewöhnliche Objekte ist n jedoch im Allgemeinen sehr groß, und die Ladung scheint kontinuierlich verteilt zu sein, gerade so wie Luft kontinuierlich erscheint, obgleich sie aus vielen diskreten Molekülen besteht. Um ein Alltagsbeispiel von n zu geben: Das Aufladen eines Kunststoffstabs durch Reiben mit einem Stück Fell überträgt etwa 10^{10} oder mehr Elektronen auf den Stab.

Die Quantisierung der Ladung gilt nur in der makroskopischen (der Beobachtung zugänglichen) Welt: Im Standardmodell der Elementarteilchen sind die Elementarteilchen – wie Protonen,

Ladungserhaltung

Wenn Objekte aneinandergerieben werden, kommt es zum Austausch von Elektronen; bei dem Objekt, das sich negativ auflädt, findet man einen Überschuss an Elektronen, das positiv geladene Objekt verliert Ladungen. Bei diesem Vorgang wird weder Ladung erzeugt noch vernichtet, sondern mit den Elektronen wird Ladung transportiert. Die Gesamtladung von beiden Objekten bleibt bei diesem Prozess konstant, sie bleibt erhalten. Das **Gesetz von der Erhaltung der Ladung** ist ein fundamentales Naturgesetz, ein Erfahrungssatz. Wir wissen, dass alle Stoffe aus Molekülen bzw. Atomen aufgebaut sind, die sich wiederum aus Elementarteilchen zusammensetzen. Elementarteilchen können bei Wechselwirkungen erzeugt oder vernichtet werden. Dabei gibt es Prozesse, in denen Elektronen erzeugt oder vernichtet werden; hier bleibt die Elektronenzahl vor und nach der Wechselwirkung nicht konstant. Doch auch solche Prozesse verletzen nicht den Ladungserhaltungssatz, denn wird bei einem Prozess ein negativ geladenes Teilchen vernichtet, wird zugleich ein positiv geladenes Teilchen gleichen Ladungsbeitrags vernichtet. (Ein Beispiel ist der Paarvernichtungsprozess: Ein Elektron mit der Ladung $-e$ wird gleichzeitig mit einem Positron der Ladung $+e$ vernichtet, und mindestens zwei Lichtquanten, die elektrisch neutral sind, werden erzeugt.)

Bei allen Prozessen ist die Gesamtladung der Teilchen vor der Wechselwirkung gleich der Gesamtladung der Teilchen nach der Wechselwirkung. Somit ist die elektrische Ladung des Universums konstant.

GESETZ DER LADUNGSERHALTUNG

Die SI-Einheit der Ladung ist das Coulomb, das über die Grundeinheit des elektrischen Stroms, das Ampere (A), definiert ist. Das **Coulomb** (C) ist die Ladung (Elektrizitätsmenge), die in einer Sekunde durch die Querschnittsfläche eines Drahts fließt, wenn die Stromstärke im Draht ein Ampere beträgt.

Die Elementarladung e hat in der SI-Einheit Coulomb den Wert

$$e = 1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (18.1)$$

ELEMENTARLADUNG

Übung 18.1: Eine Ladung der Größe 50 nC ($1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C}$) kann im Labor durch einfaches Reiben zweier Objekte miteinander erzeugt werden. Wie viele Elektronen müssen zum Erzeugen dieser Ladung übertragen werden? ◀

Welche Elektronenladung in einem Stück Metall ist, verdeutlicht Beispiel 18.1.

Beispiel 18.1: Welche Ladung steckt in einer Kupfermünze?

Die alte, von 1793 bis 1857 geprägte Pennymünze in den USA bestand aus reinem Kupfer und hatte eine Masse von 3,10 g. (Moderne „Kupfermünzen“ werden aus einer Kupfer-Zink-Legierung geprägt, so der heutige US-Penny, oder bestehen aus einem Stahlkern mit Kupferummantelung wie der Eurocent.) Wie groß ist die Gesamtladung aller Elektronen in einer solchen Münze? (Die Kernladungszahl von Kupfer ist $Z = 29$.)

Problembeschreibung: Die Elektronen haben eine Gesamtladung, die man aus der Zahl n_e der Elektronen in dem Penny, multipliziert mit der Ladung $-e$ eines Elektrons berechnet. Die Zahl der Elektronen n_e ist das Produkt aus der Elektronenzahl eines Atoms (Ordnungszahl für Kupfer ist $Z = 29$), multipliziert mit der Zahl der Kupferatome n_{Cu} . Ein Mol Kupfer hat eine Masse von 63,5 g und enthält $n_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ (Avogadro-Zahl) Kupferatome. Wir finden die Zahl der Atome in 1 g Kupfer, indem wir n_A (Atome/Mol) durch m_{Mol} (Gramm/Mol) dividieren.

Lösung: 1. Die Gesamtladung ist das Produkt aus der Zahl der Elektronen multipliziert mit der Elektronenladung:

$$q = n_e (-e)$$

2. Die Zahl der Elektronen ist Z mal der Zahl der Kupferatome n_{Cu} :

$$n_e = Z n_{\text{Cu}}$$

3. Berechnen Sie die Zahl der Kupferatome in 3,10 g Kupfer:

$$\begin{aligned} n_{\text{Cu}} &= (3,10 \text{ g}) \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ Atome/Mol}}{63,5 \text{ g/Mol}} \\ &= 2,94 \cdot 10^{22} \text{ Atome} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie die Zahl der Elektronen n_e :

$$\begin{aligned} n_e &= Z n_{\text{Cu}} \\ &= (29 \text{ Elektronen/Atom}) \\ &\quad \cdot (2,94 \cdot 10^{22} \text{ Atome}) \\ &= 8,53 \cdot 10^{23} \text{ Elektronen} \end{aligned}$$

5. Berechnen Sie damit die Gesamtladung:

$$\begin{aligned} q &= n_e (-e) \\ &= (8,53 \cdot 10^{23} \text{ Elektronen}) \\ &\quad \cdot (-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C/Elektron}) \\ &= \boxed{-1,37 \cdot 10^5 \text{ C}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In 63,5 g Kupfer sind $29 \cdot (6,02 \cdot 10^{23})$ Elektronen enthalten, in 3,10 g damit $(3,10/63,5) \cdot 29 \cdot (6,02 \cdot 10^{23}) = 8,5 \cdot 10^{23}$ Elektronen – in Übereinstimmung mit unserem Ergebnis aus Schritt 4.

Übung 18.2: Wenn man jedem Bewohner der Vereinigten Staaten (rund 300 Millionen Menschen) eine Million Elektronen geben würde, welchem Prozentsatz der gesamten Elektronenzahl in einem Kupferpenny würde das entsprechen? ◀ ■

18.2 Leiter und Nichtleiter

In vielen Materialien – beispielsweise in Kupfer und anderen Metallen – können sich einige der Elektronen im gesamten Material frei bewegen. Ein Stoff, in dem sich ein Teil der Elektronen frei bewegen kann, wird **elektrischer Leiter** genannt. In anderen Materialien wie Holz oder Glas sind alle Elektronen an Atome gebunden, und keines kann sich frei bewegen. Ein Stoff, in dem keine Elektronen frei beweglich sind, nennt man **Nichtleiter** oder Isolator.

In einem einzelnen Kupferatom sind 29 Elektronen an den Atomkern gebunden aufgrund der elektrostatischen Anziehung zwischen den negativ geladenen Elektronen und dem positiv geladenen Kern. Die Außenelektronen (die sogenannten Valenzelektronen) sind wegen ihres größeren Abstands vom Kern und wegen der durch die inneren Elektronen ausgeübten Abstossungskraft schwächer gebunden als die inneren Elektronen. In einem Stück metallischen Kupfer befindet sich eine große Zahl an Kupferatomen. Infolge der Wechselwirkung der Kupferatome untereinander wird die Bindung der äußeren Elektronen jedes Atoms reduziert. Ein oder mehrere der äußeren Elektronen jedes Atoms sind dann nicht stärker gebunden als ein Gasmolekül, das sich frei innerhalb eines Behälters bewegen kann. Man spricht von einem *freien Elektronengas* in Leitern, die freien



Abbildung 18.2 Elektroskop. Zwei Goldblättchen sind an einem leitenden Stab befestigt, an dessen Spitze sich eine leitende Kugel befindet. Die Blättchen sind gegenüber dem Gefäß isoliert. Wenn sie ungeladen sind, hängen die Blättchen senkrecht unten zusammen. Wird die Kugel mit einem negativ geladenen Kunststoffstab berührt, geht ein Teil der negativen Ladung des Stabs auf die Kugel über und verteilt sich über den Metallstab und die Goldblättchen. Diese spreizen sich dann wegen der elektrischen Abstoßung zwischen gleichnamigen Ladungen. In der gleichen Weise kann eine positive Aufladung bestimmt werden, z. B. mit einem positiv geladenen Glasstab. In diesem Fall zieht der positiv geladene Glasstab Elektronen von der Metallkugel an und lässt eine positive Gesamtladung auf den Blättchen zurück.

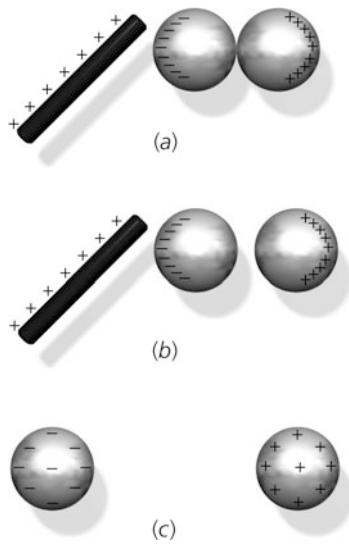


Abbildung 18.3 Aufladen durch Influenz. a) In Kontakt stehende, neutrale Leiter werden entgegengesetzt geladen, wenn ein geladener Stab Elektronen in der linken Kugel anzieht. b) Wenn die Kugeln getrennt werden, bevor man den Stab entfernt, behalten sie ihre entgegengesetzt gleich großen Ladungen. c) Nachdem der Stab entfernt ist und die Kugeln weit voneinander entfernt sind, verteilen sich die Ladungen auf jeder Kugel gleichmäßig.

Elektronen werden auch als *Leitungselektronen* oder delokalisierte Elektronen bezeichnet. Die Zahl der freien Elektronen hängt von dem jeweiligen Metall ab; charakteristisch ist etwa ein freies Elektron pro Atom. Ein Atom, das ein Elektron verloren hat, ist positiv geladen (entsprechend ist ein Atom, das ein Elektron aufgenommen hat, negativ geladen). Ein solches

positiv oder negativ geladenes Atom bezeichnet man als **Ion**. In metallischem Kupfer sind die Ionen in einem symmetrischen System, genannt *Gitter* (Kristallgitter), angeordnet. Ein Leiter ist elektrisch neutral, wenn es für jedes Gitterion mit einer positiven Ladung $+e$ ein freies Elektron mit einer negativen Ladung $-e$ gibt. Die Gesamtladung eines Leiters kann durch Zufuhr oder Abfuhr von Elektronen geändert werden. Ein Leiter mit einer negativen Ladung besitzt einen Überschuss an freien Elektronen, während ein Leiter mit einer positiven Gesamtladung ein Defizit an freien Elektronen aufweist. Die Aufladung kann mit einem Elektroskop (Abbildung 18.2) gemessen werden.

Aufladen durch Influenz (elektrostatische Induktion)

Die Aufladung eines Leiters nach der Methode der *Influenz* oder *elektrostatischen Induktion* beruht auf der Beweglichkeit der Leitungselektronen und der Ladungserhaltung, wie es Abbildung 18.3 zeigt. Zwei ungeladene Metallkugeln sind miteinander in Kontakt. Wenn ein geladener Stab in die Nähe einer Kugel gebracht wird, fließen freie Elektronen von einer Kugel zur anderen, und zwar bei einem positiv geladenen Stab zu ihm hin oder bei einem negativ geladenen Stab von ihm weg. Der positiv geladene Stab in Abbildung 18.3a zieht die negativ geladenen Elektronen der Kugeln an, und auf der dem Stab zugewandten Fläche überwiegen die negativen Ladungen, auf der abgewandten Seite die positiven. Für einen negativ geladenen Stab ändern sich diese Verhältnisse gerade entgegengesetzt. Ein Leiter, der entgegengesetzt gleiche Ladungen an seinen Enden besitzt, heißt **polarisiert**. Wenn die Kugeln getrennt werden, bevor der Stab entfernt ist, bleiben sie mit entgegengesetzt gleichen Ladungen zurück (Abbildung 18.3b). Wird schließlich der Stab entfernt (Abbildung 18.3c) und haben die Kugeln einen genügend großen Abstand, verteilen sich die Ladungen auf der Kugel wegen der freien Beweglichkeit der Elektronen gleichmäßig, und die beiden Kugeln tragen entgegengesetzt gleiche homogen über die Kugeloberfläche verteilte Ladungen.

Frage 18.1

Zwei identische leitende Kugeln, eine mit der Anfangsladung $+q$ und die andere anfangs ungeladen, werden in Kontakt gebracht. a) Wie groß ist die neue Ladung auf jeder der beiden Kugeln? b) Während die Kugeln sich berühren, wird ein positiv geladener Stab eng an eine der Kugeln gebracht. Er verursacht eine Umverteilung der Ladungen auf den beiden Kugeln, so dass die Ladung auf der dem Stab benachbarten Kugel nun $-q$ beträgt. Welche Ladung trägt dann die andere Kugel?

Frage 18.2

Zwei gleiche Kugeln werden durch Influenz aufgeladen und dann getrennt. Kugel 1 hat die Ladung $+q$ und Kugel 2 die Ladung $-q$. Eine dritte Kugel ist ungeladen. Kugel 3 wird nun mit Kugel 1 in Kontakt gebracht und danach von ihr getrennt, dann mit Kugel 2 in Kontakt gebracht und von ihr getrennt. Wie groß ist die Endladung auf jeder dieser drei Kugeln?

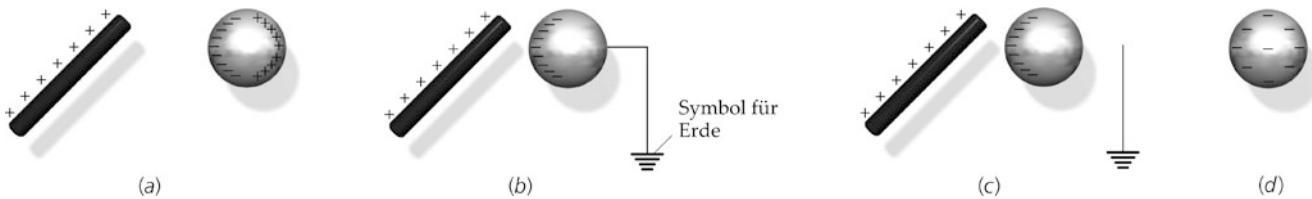
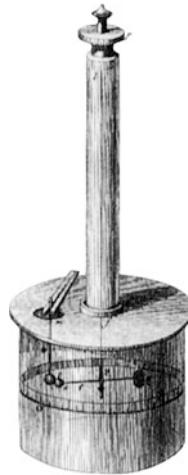


Abbildung 18.4 Influenz durch Erdung. a) Die freie Ladung auf der leitenden Kugel wird durch den positiv geladenen Stab polarisiert. Freie Elektronen bewegen sich zu der Seite, die dem Stab zugewandt ist. Die gegenüberliegende Kugelseite ist positiv geladen. b) Wenn der Leiter geerdet wird, indem man ihn über einen Draht mit der Erde als einem sehr großen Leiter verbindet, dann neutralisieren die Elektronen von der Erde die positive Ladung auf der rechten Hälfte der Kugelfläche. Der Leiter ist dann negativ aufgeladen. c) Die negative Ladung verbleibt auf der Kugel, wenn die Verbindung zur Erde unterbrochen wird, bevor der Stab entfernt ist. d) Nachdem der Stab entfernt wurde, trägt die Kugel eine über der Oberfläche gleich verteilte negative Ladung.

Für viele Zwecke kann man die Erde selbst als einen unendlich großen Leiter mit einem unbegrenzten Vorrat an freien Ladungen betrachten. Wenn ein Leiter elektrisch mit der Erde verbunden ist, heißt er **geerdet** (schematisch gekennzeichnet in Abbildung 18.4b durch einen Verbindungsdräht, der in parallelen horizontalen Linien endet). Abbildung 18.4 demonstriert, wie durch Influenz ein Leiter elektrisch geladen wird, indem man Ladung von der Erde durch den Erdleiter überträgt und dann die Verbindung zur Erde abbricht. Eine Erdung ist aus Sicherheitsgründen auch bei elektrischen Stromkreisen im Haushalt vorgesehen. Deshalb haben die in Deutschland vorgeschriebenen Schutzkontaktstecker außer den beiden Kontaktstiften für die Wechselstromphasen einen dritten Anschluss für die Erdung des Gehäuses. Der flache sogenannte Eurostecker wurde entwickelt, da sich die Normen für Schutzkontakte in verschiedenen Ländern unterscheiden und die Stecker mechanisch und elektrisch oft inkompatibel sind. Der Eurostecker passt zwar in fast ganz Europa in die Steckdosen, bietet jedoch keine Erdung. Er ist nur für leistungsschwache Geräte zugelassen.



Die Coulomb'sche Torsionswaage. (© Burndy Library, Norwalk, Connecticut.)

Experimente von Coulomb und anderen Forschern sind in dem **Coulomb'schen Gesetz** zusammengefasst:

Die Kraft, die von einer Punktladung auf eine andere ausgeübt wird, wirkt längs der Verbindungsgeraden zwischen den Ladungen. Sie ändert sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands der Ladungen und proportional zum Produkt der Ladungen. Die Kraft ist abstoßend, wenn die beiden Ladungen gleiches Vorzeichen haben, und anziehend für Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens.

COULOMB'SCHES GESETZ

Der **Betrag** der elektrostatischen Kraft, die von einer Ladung q_1 auf eine Ladung q_2 im Abstand r ausgeübt wird, ist somit gegeben durch

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (18.2)$$

COULOMB'SCHES GESETZ FÜR DEN BETRAG DER KRAFT ZWISCHEN ZWEI LADUNGEN

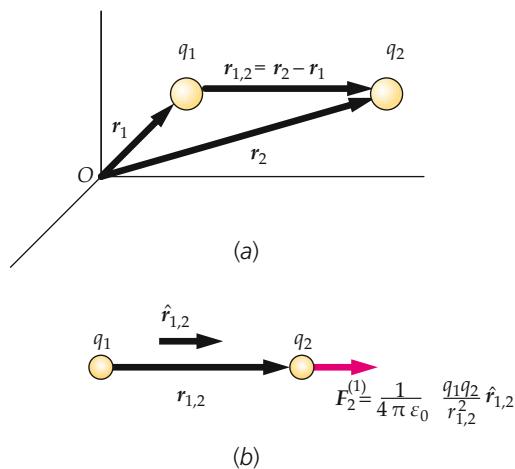


Abbildung 18.5 a) Die Ladung q_1 befindet sich am Ort \mathbf{r}_1 und die Ladung q_2 am Ort \mathbf{r}_2 bezüglich des Koordinatenursprungs O . b) Die Kraft, die von q_1 auf q_2 ausgeübt wird, hat die Richtung des Vektors $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, wenn beide Ladungen das gleiche Vorzeichen haben, und die entgegengesetzte Richtung bei unterschiedlichen Vorzeichen. Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/|\mathbf{r}_{1,2}|$ zeigt von q_1 nach q_2 .

Darin ist $1/(4\pi\epsilon_0)$ eine experimentell bestimmte Konstante mit dem Wert

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,98758 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \approx 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2. \quad (18.3a)$$

Die darin auftretende Größe ϵ_0 wird **elektrische Feldkonstante** oder **Dielektrizitätskonstante** genannt. Sie hat den Wert

$$\epsilon_0 = 8,85416 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2. \quad (18.3b)$$

In der theoretischen Physik setzt man die Proportionalitätskonstante im Coulomb'schen Gesetz oft gleich eins. Das Coulomb'sche Gesetz nimmt dann die Form $|\mathbf{F}| = (q_1 q_2)/r^2$ an. Diese Wahl ist zulässig, allerdings müssen dann die elektrischen Einheiten anders definiert werden. Man spricht in diesem Fall vom (elektrostatischen) cgs-System. Wir werden in diesem Buch jedoch beim experimentell geläufigeren SI-System bleiben.

Wenn sich die Ladung q_1 an der Stelle \mathbf{r}_1 und die Ladung q_2 an der Stelle \mathbf{r}_2 befindet (Abbildung 18.5), ist die von q_1 auf q_2 ausgeübte Kraft $\mathbf{F}_2^{(1)}$ gegeben durch

$$\mathbf{F}_2^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2}.$$

Darin ist $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ der Vektor von q_1 nach q_2 und $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = \mathbf{r}_{1,2}/|\mathbf{r}_{1,2}|$ der Einheitsvektor, der von q_1 nach q_2 zeigt. Wegen des dritten Newton'schen Axioms ist die Kraft $\mathbf{F}_1^{(2)}$, die von q_2 auf q_1 wirkt, der Kraft $\mathbf{F}_2^{(1)}$, die von q_1 auf q_2 wirkt, entgegengesetzt gleich. Wegen $\hat{\mathbf{r}}_{1,2} = -\hat{\mathbf{r}}_{2,1} = \hat{\mathbf{r}}$ und $r_{1,2}^2 = r_{2,1}^2 = r^2$

finden wir auch für diese Kraft einen ganz entsprechenden Ausdruck:

$$\mathbf{F}_1^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{2,1}^2} \hat{\mathbf{r}}_{2,1}.$$

Wir können daher das Coulomb'sche Gesetz allgemein folgendermaßen formulieren:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (18.4)$$

COULOMB'SCHES GESETZ IN VEKTORIELLER FORM

wobei $\hat{\mathbf{r}}$ den Vektor der Länge eins bezeichnet, der in Richtung der Kraft, parallel zur Verbindungslinie zwischen q_1 und q_2 zeigt.

Gleichung 18.4 gibt stets die richtige Richtung der Kraft an. Es spielt dabei keine Rolle, ob die beiden Ladungen beide positiv, beide negativ oder entgegengesetzt sind.

Auffallend ist die Ähnlichkeit zwischen dem Coulomb'schen Gesetz und dem Newton'schen Gravitationsgesetz (Gleichung 4.16). Beides sind $1/r^2$ -Gesetze. Beachten Sie aber auch die Unterschiede: Die Gravitationskraft zwischen zwei Teilchen ist den Massen der Teilchen proportional und immer anziehend, die elektrostatische Kraft dagegen ist den Ladungen der Teilchen proportional und abstoßend ($F > 0$), wenn die Ladungen das gleiche Vorzeichen haben, und nur dann anziehend ($F < 0$), wenn die Ladungen entgegengesetzt sind.

In Beispiel 18.2 wird die elektrostatische Kraft (auch als Coulomb-Kraft bezeichnet) auf ein Elektron im Wasserstoffatom berechnet.

Beispiel 18.2: Elektrostatische Kraft in Wasserstoff

In einem Wasserstoffatom beträgt der mittlere Abstand zwischen Elektron und Proton ungefähr $5,3 \cdot 10^{-11}$ m. Berechnen Sie die Größe der elektrostatischen Anziehungskraft, die das Proton auf das Elektron ausübt.

Problembeschreibung: Bezeichnen Sie das Proton als q_1 und das Elektron als q_2 . Berechnen Sie dann die Kraft, die das Proton auf das Elektron ausübt, mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes.

Lösung: 1. Fertigen Sie eine Skizze von Elektron und Proton. Beschriften Sie sie mit passenden Symbolen (Abbildung 18.6).

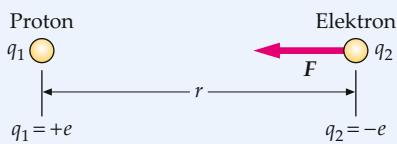


Abbildung 18.6 Skizze des Elektrons und des Protons.

2. Setzen Sie die Werte für die Ladung von Proton und Elektron und deren Abstand in das Coulomb'sche Gesetz ein und berechnen Sie die Kraft:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} \\ &= [8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Größenordnung der Kraft ist plausibel. Die Zehnerpotenzen im Zähler ergeben zusammen $10^9 \cdot 10^{-38} = 10^{-29}$, die Zehnerpotenz im Nenner ist 10^{-22} , der Quotient ist daher $10^{-29}/10^{-22} = 10^{-7}$. Das Ergebnis liegt mit $8,2 \cdot 10^{-8} \approx 10^{-7}$ in derselben Größenordnung.

Weitergedacht: Verglichen mit makroskopischen Wechselwirkungen ist die Coulomb-Kraft sehr klein. Da die Masse des Elektrons aber nur etwa 10^{-30} kg beträgt, erzeugt diese Kraft jedoch eine enorme Beschleunigung von $|\mathbf{F}|/m = 8 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$. Das Proton hat eine fast 2000-mal höhere Masse als das Elektron, die Beschleunigung des Protons liegt bei etwa $4 \cdot 10^{19} \text{ m/s}^2$. Die Beschleunigung aufgrund der Gravitation liegt dagegen bei gerade 10^1 m/s^2 .

Übung 18.3: Zwei Punktladungen von je $0,0500 \mu\text{C}$ sind $10,0 \text{ cm}$ voneinander entfernt. Berechnen Sie den Betrag der Kraft, die von einer Punktladung auf die andere ausgeübt wird. ◀

Da sowohl die elektrostatische Kraft als auch die Gravitationskraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen den Teilchen sind, hängt das Verhältnis dieser Kräfte nicht von diesem Abstand ab. Wir können deshalb, wie in Beispiel 18.3 gezeigt, die relative Stärke von elektrischen und Gravitationskräften für Elementarteilchen wie Elektron und Proton unabhängig vom Abstand miteinander vergleichen.

Beispiel 18.3: Vergleich von elektrostatischer Anziehung und Gravitation

Berechnen Sie das Verhältnis von elektrostatischer Kraft zur Gravitationskraft, die in einem Wasserstoffatom von einem Proton auf ein Elektron ausgeübt werden.

Problembeschreibung: Wir wenden das Coulomb'sche Gesetz mit $q_1 = e$ und $q_2 = -e$ an, um die elektrostatische Kraft zu berechnen. Die Gravitationskraft berechnen wir mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz; die Masse des Protons ist $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, die Masse des Elektrons $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Lösung: 1. Drücken Sie die Beträge der elektrostatischen Kraft F_C und der Gravitationskraft F_G durch Ladung, Masse, Teilchenabstand r sowie elektrische Feldkonstante und Gravitationskonstante aus:

$$|F_C| = F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}; \quad F_G = G \frac{m_p m_e}{r^2}$$

2. Bilden Sie das Verhältnis. Beachten Sie, dass der Teilchenabstand r verschwindet:

$$\frac{F_C}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{G m_p m_e}$$

3. Setzen Sie die Zahlenwerte ein:

$$\begin{aligned} \frac{F_C}{F_G} &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)}{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})} \\ &\quad \cdot \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})} \\ &= [2,27 \cdot 10^{39}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Im Zähler des Bruchs in Schritt 3 fällt die Einheit Coulomb heraus. Im Nenner des Bruchs fällt die Einheit Kilogramm heraus. Daher haben sowohl Zähler als auch Nenner die Einheit $\text{N} \cdot \text{m}^2$. Damit ist der Bruch insgesamt einheitenlos, wie man es für das Verhältnis zweier Kräfte auch erwartet.

Weitergedacht: Das in Schritt 3 gewonnene Verhältnis ist so groß, dass man die Gravitationseffekte bei der Diskussion der atomaren oder molekularen Wechselwirkungen nicht zu berücksichtigen braucht. ◀

Obwohl die Gravitationskraft im Vergleich zur elektrostatischen Kraft unvorstellbar schwach ist und auf atomarem Niveau praktisch keine Rolle spielt, ist sie bei großen Objekten – etwa Planeten und Sternen – die dominierende Kraft. Große Objekte enthalten jeweils nahezu die gleiche Zahl von positiven und negativen Ladungen, sodass sich die elektrischen Anziehungs- und Abstoßungskräfte ausgleichen. Als Gesamtkraft zwischen astronomischen Objekten ergibt sich daher im Wesentlichen nur die anziehende Gravitationskraft.

Resultierende Kraft eines Systems von Ladungen

Bei einem System von vielen Ladungen übt jede einzelne Ladung eine Kraft entsprechend Gleichung 18.4 auf jede andere Ladung aus. Die resultierende Kraft, die auf eine beliebige einzelne Ladung wirkt, ist die Vektorsumme der einzelnen Kräfte aller anderen Ladungen des Systems, die auf diese Einzelladung wirken. Das folgt aus dem *Superpositionsprinzip*, nach dem sich Kräfte vektoriell überlagern. Die Überlagerung wird in Beispiel 18.4 verdeutlicht.

Beispiel 18.4: Resultierende Kraft

Drei Punktladungen liegen auf der x -Achse. q_1 befindet sich im Koordinatenursprung, q_2 bei $x_2 = 2 \text{ m}$ und q_0 befindet sich am Punkt x ($x > 2 \text{ m}$). a) Berechnen Sie die resultierende Kraft, die von den Ladungen q_1 und q_2 auf q_0 ausgeübt wird, wenn $q_0 = +20 \text{ nC}$, $q_1 = +25 \text{ nC}$, $q_2 = -10 \text{ nC}$ und $x = 3,5 \text{ m}$ beträgt. b) Finden Sie einen Ausdruck für die resultierende Kraft, die von den Ladungen q_1 und q_2 auf q_0 ausgeübt wird, wenn x im Intervall $2,0 \text{ m} < x < \infty$ liegt.

Problembeschreibung: Die resultierende Kraft auf q_0 ist die Vektorsumme der Kraft \mathbf{F}_1 , ausgeübt von q_1 , und der Kraft \mathbf{F}_2 , ausgeübt von q_2 . Die Einzelkräfte werden mit dem Coulomb'schen Gesetz berechnet. Beachten Sie, dass $\hat{\mathbf{r}}_1 = \hat{\mathbf{r}}_2 = \hat{\mathbf{x}}$ ist, weil beide Vektoren \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 in positive x -Richtung weisen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Zeichnen Sie eine Skizze von dem Ladungssystem (Abbildung 18.7). Tragen Sie die Abstände r_1 und r_2 ein.
- Bestimmen Sie die Kraft \mathbf{F}_1 , die von q_1 auf q_0 ausgeübt wird (beide Ladungen haben dasselbe Vorzeichen, sie stoßen sich ab und die Kraft weist in die positive x -Richtung).
- Bestimmen Sie die Kraft \mathbf{F}_2 , die von q_2 auf q_0 ausgeübt wird (beide Ladungen haben verschiedene Vorzeichen, sie ziehen sich an und die Kraft weist in die negative x -Richtung).
- Kombinieren Sie diese Ergebnisse und bestimmen Sie die resultierende Kraft.

Teilaufgabe b

- Zeichnen Sie eine Skizze des Ladungssystems (Abbildung 18.7). Tragen Sie die Abstände r_1 und r_2 ein.
- Geben Sie einen Ausdruck für die Kraft von q_1 auf q_0 an.
- Geben Sie einen Ausdruck für die Kraft von q_2 auf q_0 an.

ZUR ÜBUNG

- Kombinieren Sie diese Ergebnisse und geben Sie einen Ausdruck für die resultierende Kraft an.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

1.

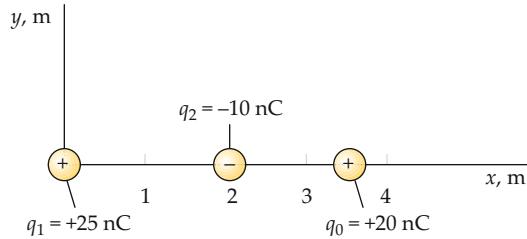


Abbildung 18.7 Skizze des Ladungssystems für $x = 3,5 \text{ m}$.

2.

$$|\mathbf{F}_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_0|}{r_1^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= +|\mathbf{F}_1| \hat{\mathbf{x}} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_0|}{r_1^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(25 \cdot 10^{-9} \text{ C})(20 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(3,5 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &= (0,367 \mu\text{N}) \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

3.

$$|\mathbf{F}_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2 q_0|}{r_2^2}$$

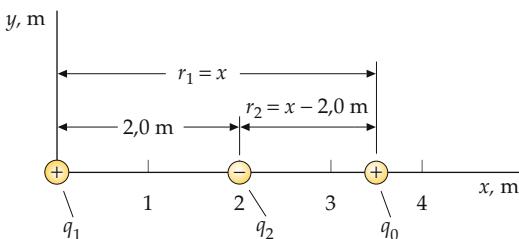
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= -|\mathbf{F}_2| \hat{\mathbf{x}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2 q_0|}{r_2^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &= -\frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(10 \cdot 10^{-9} \text{ C})(20 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(1,5 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &= -(0,80 \mu\text{N}) \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

4.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ = [(-0,43 \mu\text{N}) \hat{x}]$$

Teilaufgabe b

1.

**Abbildung 18.7** Skizze des Ladungssystems bei variablem x.

2.

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{x^2} \hat{x}$$

3.

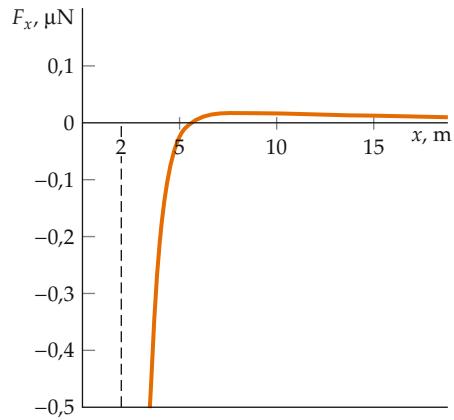
$$\mathbf{F}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2 q_0|}{(x - 2,0 \text{ m})^2} \hat{x}$$

4.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_0}{x^2} - \frac{|q_2 q_0|}{(x - 2,0 \text{ m})^2} \right) \hat{x}$$

Plausibilitätsprüfung: In Schritt 2, 3 und 4 von Teilaufgabe b gehen beide Kräfte wie erwartet für $x \rightarrow \infty$ gegen null. Ferner geht der Betrag des Ergebnisses aus Schritt 3 für $x \rightarrow 2,0 \text{ m}$ gegen ∞ , wie ebenfalls zu erwarten war.

Weitergedacht: Die Ladung q_2 befindet sich zwischen den Ladungen q_0 und q_1 . Man könnte daher erwarten, dass sich die Anwesenheit von q_2 auf die Kraft \mathbf{F}_1 ausübt, die von q_1 auf q_0 ausgeübt wird. Das ist jedoch nicht der Fall, \mathbf{F}_1 wird durch eine weitere Ladung nicht beeinflusst. Dies folgt aus dem Superpositionsprinzip. Abbildung 18.8 zeigt die x -Komponente der Kraft F_x auf q_0 als Funktion des Orts x von q_0 für das Intervall $2,0 \text{ m} < x < \infty$. Befindet sich q_0 in der Nähe von q_2 , überwiegt die durch q_2 hervorgerufene Kraft, und wegen der entgegengesetzten Ladungen wirkt die Anziehungs- kraft von q_2 in die negative x -Richtung. Für $x \gg 2 \text{ m}$ zeigt die resultierende Kraft in die positive x -Richtung. Für große x ist der Abstand zwischen q_1 und q_2 vernachlässigbar, sodass die Kraft, die durch die zwei Ladungen hervorgerufen wird, beinahe dieselbe ist wie die von einer einzelnen Ladung von $+15 \text{ nC}$.

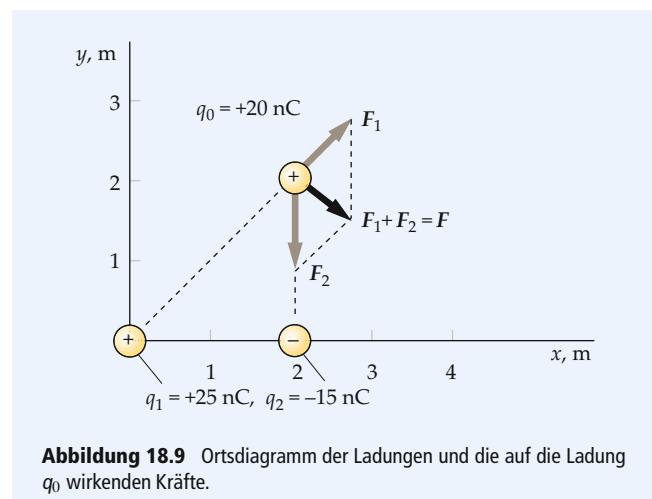
**Abbildung 18.8** Kraft F_x auf q_0 in Abhängigkeit von x .

Übung 18.4: q_0 befindet sich im Punkt $x = 1,0 \text{ m}$. Berechnen Sie die resultierende Kraft auf q_0 . ◀

Wenn ein System von Ladungen in Ruhe bleibt, dann muss es Kräfte geben, die dafür sorgen, dass die Gesamtkraft aller Quellen auf jede Ladung gleich null ist. In Beispiel 18.5 und den folgenden Beispielen nehmen wir jeweils an, dass es solche Kräfte gibt und dass alle Ladungen in Ruhe bleiben.

Beispiel 18.5: Resultierende Kraft in zwei Dimensionen

Die Ladung $q_1 = +25 \text{ nC}$ befindet sich im Ursprung, die Ladung $q_2 = -15 \text{ nC}$ liegt auf der x -Achse im Punkt $x_2 = 2 \text{ m}$, und die Ladung $q_0 = +20 \text{ nC}$ befindet sich im Punkt $x = 2 \text{ m}, y = 2 \text{ m}$ (Abbildung 18.9). Bestimmen Sie Größe und Richtung der resultierenden Kraft auf q_0 .

**Abbildung 18.9** Ortsdiagramm der Ladungen und die auf die Ladung q_0 wirkenden Kräfte.

Problembeschreibung: Die resultierende Kraft ist die Vektorsumme der einzelnen Kräfte, die die anderen Ladungen auf q_0 ausüben. Wir berechnen jede Kraft mit dem Coulomb'schen Gesetz und schreiben sie in den Ausdrücken ihrer Komponenten im Koordinatensystem.

Lösung: 1. Zeichnen Sie die Koordinatenachsen und die Orte der drei Ladungen. Tragen Sie die resultierende Kraft auf die Ladung q_0 als Vektorsumme der Kräfte \mathbf{F}_1 von q_1 und \mathbf{F}_2 von q_2 ein (Abbildung 18.9).

2. Die resultierende Kraft $\sum_i \mathbf{F}_i$ auf q_0 ist die Summe der Einzelkräfte. Dies gilt für die Vektorsumme sowie für die Kräfte entlang der einzelnen Koordinaten:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$F_x = \sum_{i=1}^2 F_{i,x} = F_{1,x} + F_{2,x}$$

$$F_y = \sum_{i=1}^2 F_{i,y} = F_{1,y} + F_{2,y}$$

3. Die Kraft \mathbf{F}_1 weist vom Ursprung in die Richtung von q_1 nach q_0 . Verwenden Sie $r_1 = 2\sqrt{2}$ für den Abstand zwischen q_1 und q_0 und berechnen Sie den Betrag der Kraft:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_1| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_0|}{r_1^2} \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \\ &\quad \cdot \frac{(25 \cdot 10^{-9} \text{ C})(20 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(2,0\sqrt{2} \text{ m})^2} \\ &= 5,62 \cdot 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$

4. Da die Kraft \mathbf{F}_1 einen Winkel von 45° mit den Koordinatenachsen bildet, sind die x - und y -Komponente der Kraft gleich:

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F_{1,y} = |\mathbf{F}_1| \cos 45^\circ \\ &= (5,62 \cdot 10^{-7} \text{ N}) \cos 45^\circ = 3,97 \cdot 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$

5. Die von q_2 auf q_0 wirkende Kraft \mathbf{F}_2 ist anziehend und weist in negative y -Richtung (Abbildung 18.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2 q_0|}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \\ &\quad \cdot \frac{(-15 \cdot 10^{-9} \text{ C})(20 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(2,0 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{y}} \\ &= (-6,74 \cdot 10^{-7} \text{ N}) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

6. Berechnen Sie die Komponenten der resultierenden Kraft:

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{i=1}^2 F_{i,x} = F_{1,x} + F_{2,x} \\ &= (3,97 \cdot 10^{-7} \text{ N}) + 0 \\ &= 3,97 \cdot 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= \sum_{i=1}^2 F_{i,y} = F_{1,y} + F_{2,y} \\ &= (3,97 \cdot 10^{-7} \text{ N}) + (-6,74 \cdot 10^{-7} \text{ N}) \\ &= -2,77 \cdot 10^{-7} \text{ N} \end{aligned}$$

7. Zeichnen Sie die resultierende Kraft mit diesen beiden Komponenten (Abbildung 18.9).

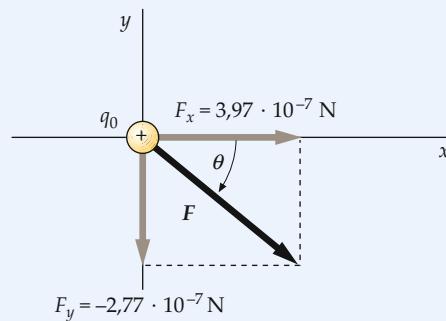


Abbildung 18.9 Darstellung des resultierenden Kraftvektors.

8. Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft aus ihren Komponenten:

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ &= \sqrt{(3,97 \cdot 10^{-7} \text{ N})^2 + (-2,77 \cdot 10^{-7} \text{ N})^2} \\ &= 4,84 \cdot 10^{-7} \text{ N} = \boxed{4,8 \cdot 10^{-7} \text{ N}} \end{aligned}$$

9. Die resultierende Kraft zeigt nach rechts unten (Abbildung 18.9). Der Winkel θ zwischen Kraftrichtung und x -Achse ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2,77}{3,97} = -0,698 \\ \theta &= \tan^{-1}(-0,698) = -34,9^\circ = \boxed{-35^\circ} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten, dass beide Kräfte näherungsweise denselben Betrag haben, denn zwar ist q_1 etwas größer als $|q_2|$, doch ist q_2 dichter an q_0 als q_1 . Ein Vergleich der Ergebnisse aus Schritt 3 und 5 zeigt, dass diese Erwartung berechtigt ist. ■

Übung 18.5: Drücken Sie \hat{r}_1 von Beispiel 18.5 mithilfe von \hat{x} und \hat{y} aus. ◀

Übung 18.6: Ist in Beispiel 18.5 die x -Komponente der Kraft $F_1 = (1/4\pi\epsilon_0)(q_1 q_0/r_1^2)\hat{r}_1$ gleich $(1/4\pi\epsilon_0)q_1 q_0/x_1^2$? (x_1 soll dabei die x -Komponente von \hat{r}_1 sein.) ◀

18.4 Das elektrische Feld

Die elektrostatische Kraft, die von einer Ladung auf eine andere wirkt, ist eine Fernwirkungskraft, ähnlich der Gravitationskraft, die von einer Masse auf eine andere wirkt. Das Konzept der Fernwirkung ist ein schwieriges begriffliches Problem. Dank welchem Mechanismus kann ein Teilchen quer durch den leeren Raum eine Kraft auf ein anderes ausüben? Angenommen, ein geladenes Teilchen an einem Punkt wird plötzlich bewegt. Ändert sich dann im selben Augenblick die Kraft, die auf das zweite Teilchen im Abstand r ausgeübt wird? Um das Problem der Fernwirkung zu vermeiden, führt man das Konzept des **elektrischen Felds** ein. Eine Ladung erzeugt überall im Raum ein elektrisches Feld E , und durch dieses Feld erfährt eine zweite Ladung eine Kraft. So ist es *das Feld E* am Ort der zweiten Ladung, das unmittelbar die Kraft auf sie vermittelt, und nicht die sich in einiger Entfernung befindliche erste Ladung selbst. Änderungen eines Felds breiten sich durch den Raum mit Lichtgeschwindigkeit c aus, wie wir bei der Behandlung elektromagnetischer Wellen (Kapitel 27) erfahren werden. Wenn eine Ladung plötzlich bewegt wird, ändert sich die auf eine zweite Ladung im Abstand r wirkende Kraft erst zu einem späteren Zeitpunkt r/c .

Als **Punktladung** bezeichnet man die Idealisierung einer Ladung ohne räumliche Ausdehnung. Abbildung 18.10a zeigt ein System von Punktladungen q_1 , q_2 und q_3 , die beliebig im Raum angeordnet sind. Diese drei Ladungen erzeugen überall im Raum ein elektrisches Feld E . Wenn man eine kleine positive **Probeladung** q_0 an einen Punkt in der Nähe der drei Ladungen bringt, wirkt eine Kraft auf q_0 , die durch die anderen Ladungen hervorgerufen wird. (Umgekehrt übt auch die Ladung q_0 eine Kraft auf die anderen Punktladungen aus (Abbildung 18.10b). Um zu vermeiden, dass diese Kräfte die Ladungen bewegen, muss die Probeladung q_0 so klein sein, dass ihre Wirkung auf die ursprüngliche Ladungsverteilung vernachlässigbar ist.) Die resultierende Kraft auf q_0 ist die Vektorsumme der einzelnen Kräfte, die von allen anderen Ladungen des Systems auf q_0 ausgeübt werden. Da jede dieser Kräfte zu q_0 proportional ist, ist auch die resultierende Kraft proportional zu q_0 . Das elektrische Feld E am Ort der Ladung q_0 ist definiert als der Quotient aus der resultierenden Kraft F auf q_0 und dem Betrag der Ladung q_0 :

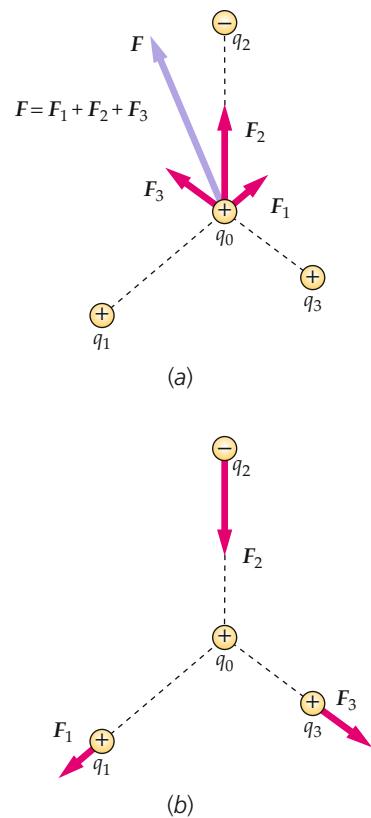


Abbildung 18.10 a) Eine kleine Probeladung q_0 erfährt in der Nähe eines Systems von Ladungen q_1 , q_2 , q_3 , ... eine Kraft F , die proportional zu q_0 ist. Das Verhältnis F/q_0 ist das elektrische Feld E am Ort von q_0 . b) Die Testladung übt auch eine Kraft auf jede der Ladungen in der Nähe aus; jede dieser Kräfte ist proportional zu q_0 .

$$E = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (q_0 \text{ ist klein}). \quad (18.5)$$

DEFINITION ELEKTRISCHES FELD

Streng genommen gilt diese Definition nur für hinreichend kleine q_0 , deren Coulomb-Kraft auf benachbarte Ladungen vernachlässigbar ist. Die Definition entspricht der des Gravitationsfelds der Erde, das wir in Abschnitt 4.4 (Gleichung 4.30) definiert hatten als die Gravitationskraft, die die Erde auf eine Einheitsmasse ausübt, geteilt durch den Betrag dieser Einheitsmasse.

Die SI-Einheit des elektrischen Felds ist Newton dividiert durch Coulomb (N/C). In Tabelle 18.2 ist die Größe einiger elektrischer Felder aufgeführt, die in Natur und Technik vorkommen.

Tabelle 18.2 Einige elektrische Felder in der Natur

	$ E , \text{N/C}$
In Hausleitungen	10^{-2}
In Radiowellen	10^{-1}
In der Atmosphäre	10^2
Im Sonnenlicht	10^3
Unter einer Gewitterwolke	10^4
In einem Blitzbündel	10^4
In einer Röntgenstrahlröhre	10^6
An dem Elektron in einem Wasserstoffatom	$6 \cdot 10^{11}$
An der Oberfläche eines Urankerns	$2 \cdot 10^{21}$

Das elektrische Feld beschreibt den Zustand des Raums, der durch ein System von Punktladungen hervorgerufen wird. Durch Bewegen einer Probeladung q_0 von Punkt zu Punkt kann man E in allen Raumpunkten finden (außer an Punkten mit felderzeugenden Ladungen q). Daher ist das elektrische Feld E eine Vektorfunktion des Orts. Die Kraft auf eine Probeladung q_0 an einem beliebigen Punkt hängt folgendermaßen mit dem elektrischen Feld zusammen:

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}. \quad (18.6)$$

Übung 18.7: Wenn eine Probeladung von 5nC an einen bestimmten Punkt gebracht wird, erfährt sie eine Kraft von $2 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ in Richtung zunehmender x -Werte. Wie groß ist das elektrische Feld E an diesem Punkt? ◀

Übung 18.8: Wie groß ist die Kraft auf ein Elektron, das sich an einem Ort befindet, in dem $E = (4 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \hat{x}$ beträgt? ◀

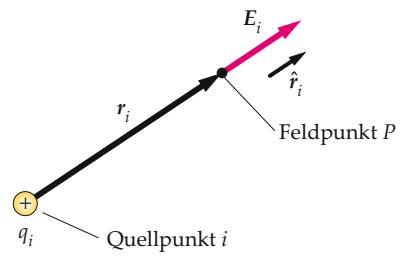
Das elektrische Feld, das durch eine einzelne Punktladung erzeugt wird, lässt sich mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes berechnen. Dazu betrachtet man eine kleine positive Probeladung q_0 an einem Punkt P im Abstand r_i von der das Feld erzeugenden Ladung q_i . Die Kraft auf die Probeladung ist dann

$$\mathbf{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i.$$

Das durch die Ladung q_i erzeugte elektrische Feld im Punkt P (Abbildung 18.11) ist damit

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (18.7)$$

COULOMB'SCHES GESETZ FÜR DAS FELD EINER PUNKTLADUNG

**Abbildung 18.11** Das elektrische Feld E an einem Feldpunkt P , erzeugt durch eine Ladung q_i im Quellpunkt i .

Darin ist $\hat{\mathbf{r}}_i$ der Einheitsvektor in Richtung vom **Quellpunkt i** zum **Feldpunkt P** (auch als **Aufpunkt** bezeichnet).

Obwohl der Ausdruck für das elektrische Feld (Gleichung 18.7) vom Ort des Punkts P abhängt, hängt er *nicht* von der Probeladung q_0 ab (q_0 taucht in Gleichung 18.7 nicht auf).

Das resultierende elektrische Feld in P , das durch eine Verteilung von Punktladungen hervorgerufen wird, ergibt sich als die Summe der Felder jeder einzelnen Ladung:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i. \quad (18.8)$$

ELEKTRISCHES FELD EINES SYSTEMS VON PUNKTLADUNGEN

Auch für elektrische Felder gilt daher das Superpositionsprinzip.

Die folgenden Beispiele zeigen, wie man die Richtung und die Stärke des Felds von bestimmten Ladungsverteilungen berechnet. Beispiel 18.6 bestimmt qualitativ die Punkte, in denen sich die Felder verschiedener Ladungen gerade ausgleichen, die Beispiele 18.7 und 18.9 behandeln das Feld für Punkte auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei Ladungen, und in Beispiel 18.8 wird das Feld für einen Punkt außerhalb der Verbindungsgeraden berechnet.

Vorgehensweise:

Berechnung des resultierenden elektrischen Felds

Um das resultierende elektrische Feld \mathbf{E} an einem Feldpunkt P zu bestimmen, das durch eine bestimmte Verteilung von Punktladungen hervorgerufen wird, zeichnen Sie zunächst die Ladungsverteilung und den Feldpunkt in ein Koordinatensystem ein.

1. Tragen Sie in der Zeichnung die Entferungen r_i von den einzelnen Ladungen zum Feldpunkt P ein. Zeichnen Sie den Vektor \mathbf{E}_i des elektrischen Felds in P von jeder einzelnen Ladung.
2. Wenn der Feldpunkt P und die Punktladungen nicht alle auf einer Geraden liegen, zeichnen Sie die Winkel ein, die jeder einzelne Feldvektor \mathbf{E}_i mit einer der Koordinatenachsen bildet. Dies gilt nur für mehr als zwei Punktladungen, da man bei zwei Punktladungen das Koordinatensystem stets so wählen bzw. verschieben kann, dass die Verbindungsgeraden der beiden Ladungen auf einer Koordinatenachse liegen.
3. Berechnen Sie die Komponenten für jeden einzelnen Feldvektor \mathbf{E}_i bezüglich der Koordinatenachsen und berechnen Sie damit die Komponenten des resultierenden elektrischen Felds \mathbf{E} .

Plausibilitätsprüfung: Vergewissern Sie sich, dass das resultierende elektrische Feld in die Richtung zeigt, die Sie durch eine Abschätzung der Kräfte nach Betrag und Richtung erwarten würden.

Beispiel 18.6: Die Richtung des elektrischen Felds

ZUM VERSTÄNDNIS

Eine positive Punktladung $q_1 = +q$ und eine negative Punktladung $q_2 = -2q$ liegen auf der x -Achse bei $x = a$ bzw. bei $x = -a$ (Abbildung 18.12). Untersuchen Sie folgende Bereiche auf der x -Achse: Bereich I ($x < -a$), Bereich II ($-a < x < +a$) und Bereich III ($x > a$). In welchem Bereich (oder welchen Bereichen) gibt es einen Punkt, in dem das resultierende Feld null ist?

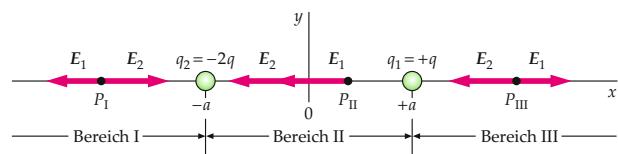


Abbildung 18.12 Skizze der beiden Ladungen im zweidimensionalen Ortsraum unter Darstellung der elektrischen Feldvektoren auf der x -Achse.

Problembeschreibung: Wir bezeichnen die von den Ladungen q_1 bzw. q_2 hervorgerufenen Felder mit \mathbf{E}_1 bzw. \mathbf{E}_2 . Da q_1 positiv ist, weist \mathbf{E}_1 überall von q_1 weg. Da q_2 negativ ist, ist \mathbf{E}_2 überall auf q_2 hin gerichtet. Das resultierende elektrische Feld \mathbf{E} ergibt sich als $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Das resultierende Feld ist null, wenn \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 den gleichen Betrag und entgegengesetzte Richtung haben. Der Betrag des elektrischen Felds einer Punktladung geht unmittelbar in der Nähe der Punktladung gegen unendlich. Außerdem nähert sich bei Punkten in großer Entfernung von der Ladungsanordnung das resultierende Feld (das sogenannte *Fernfeld*) dem Feld einer Punktladung von $q_1 + q_2$, die sich im Mittelpunkt der Ladungsverteilung befindet. In großer Entfernung von der Ladungsverteilung ist hier das resultierende elektrische Feld das Feld einer negativen Punktladung, da $q_1 + q_2$ negativ ist.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine Skizze mit den beiden Ladungen, der x -Achse und den durch die Ladungen hervorgerufenen elektrischen Feldern in Punkten auf der x -Achse in jedem der Bereiche I, II und III. Kennzeichnen Sie diese Punkte als P_1 , P_{II} bzw. P_{III} (Abbildung 18.12).

2. Prüfen Sie, ob zwei elektrische Feldvektoren irgendwo in Bereich I entgegengesetzt gleich sein können: Im gesamten Bereich I sind die beiden elektrischen Feldvektoren entgegengesetzt gerichtet. Allerdings sind alle Punkte in Bereich I näher an q_2 als an q_1 . Daher ist E_2 in jedem Punkt des Bereichs größer als E_1 . Somit kann es in Bereich I keinen Punkt geben, an dem sich ein resultierendes Feld von null ergibt.

3. Prüfen Sie, ob zwei elektrische Feldvektoren irgendwo in Bereich II entgegengesetzt gleich sein können: Im gesamten Bereich II weisen die beiden elektrischen Feldvektoren für jeden Punkt auf der x -Achse in dieselbe Richtung. Somit kann es in Bereich II keinen Punkt geben, an dem sich ein resultierendes Feld von null ergibt.

4. Prüfen Sie, ob zwei elektrische Feldvektoren irgendwo in Bereich III entgegengesetzt gleich sein können: Im gesamten Bereich III sind die beiden elektrischen Feldvektoren entgegengesetzt gerichtet. Bei Punkten in unmittelbarer Nähe zu $x = a$ ist E_1 größer als E_2 (da nahe einer Punktladung der Betrag von deren elektrischen Feld gegen unendlich geht). Allerdings ist E_2 bei Punkten mit $x \gg a$ größer als E_1 (da in großer Entfernung von den zwei Punktladungen die Richtung des Felds durch das Vorzeichen von $q_1 + q_2$ bestimmt ist). Somit muss es irgendwo in Bereich III einen Punkt geben, an dem E_1 gleich E_2 ist. An diesem Punkt ist das resultierende elektrische Feld null.

Beispiel 18.7: Elektrisches Feld von zwei positiven Ladungen auf einer Linie

Eine positive Punktladung $q_1 = +8,0 \text{ nC}$ befindet sich auf der x -Achse bei $x_1 = -1,0 \text{ m}$, und eine zweite positive Ladung $q_2 = +12 \text{ nC}$ liegt auf der x -Achse bei $x_2 = 3,0 \text{ m}$ (Abbildung 18.13). Bestimmen Sie das resultierende elektrische Feld im Punkt A , der auf der x -Achse bei $x_A = 6,0 \text{ m}$ liegt und im Punkt B auf der x -Achse bei $x_B = 2,0 \text{ m}$.

Problembeschreibung: Wir bezeichnen die von den Punktladungen q_1 bzw. q_2 verursachten elektrischen Felder mit \mathbf{E}_1 bzw. \mathbf{E}_2 . Da q_1 positiv ist, weist \mathbf{E}_1 überall von q_1 weg. Da q_2 positiv ist, weist \mathbf{E}_2 überall von q_2 weg. Wir berechnen das resultierende Feld mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die Ladungsverteilung und zeichnen Sie den Feldpunkt A an der richtigen Stelle auf der x -Achse ein. Zeichnen Sie die Vektoren ein, die die elektrischen Felder in A aufgrund der beiden Punktladungen darstellen. Wiederholen Sie das für den Feldpunkt B (Abbildung 18.13).

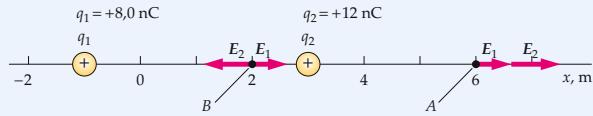


Abbildung 18.13 q_1 ist eine positive Ladung, daher ist \mathbf{E}_1 sowohl in A als auch in B von q_1 weg gerichtet. q_2 ist eine positive Ladung, daher ist auch \mathbf{E}_2 sowohl in A als auch in B von q_2 weg gerichtet.

2. Berechnen Sie \mathbf{E} am Punkt A . Verwenden Sie $r_1 = |x_A - x_1| = 6,0 \text{ m} - (-1,0 \text{ m}) = 7,0 \text{ m}$ und $r_2 = |x_A - x_2| = 6,0 \text{ m} - (3,0 \text{ m}) = 3,0 \text{ m}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(x_A - x_1)^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{(x_A - x_2)^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (8,0 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(7,0 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (12 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(3,0 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &= (1,47 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{x}} + (12 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{x}} = \boxed{(13 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{x}}}\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie \mathbf{E} am Punkt B . Verwenden Sie $r_1 = |x_B - x_1| = 2,0 \text{ m} - (-1,0 \text{ m}) = 3,0 \text{ m}$ und $r_2 = |x_B - x_2| = |2,0 \text{ m} - (3,0 \text{ m})| = 1,0 \text{ m}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{(x_B - x_1)^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{(x_B - x_2)^2} (-\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (8,0 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(3,0 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (12 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(1,0 \text{ m})^2} (-\hat{\mathbf{x}}) \\ &= (7,99 \text{ N/C} - 108 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{x}} \\ &= \boxed{(-100 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{x}}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das in Schritt 3 berechnete Feld ist groß und weist in die negative x -Richtung. Dieses Ergebnis war zu erwarten, denn Punkt B liegt nahe an q_2 , die eine große positive Ladung ($+12 \text{ nC}$) ist und das elektrische Feld \mathbf{E}_2 im Punkt B in negative x -Richtung zeigen lässt.

Weitergedacht: Das resultierende elektrische Feld an einem Punkt in der Nähe von q_1 wird dominiert durch das von q_1 verursachte Feld \mathbf{E}_1 . Es gibt einen Punkt zwischen den Ladungen q_1 und q_2 , an dem das resultierende Feld null ist. An diesem Punkt würde eine Probeladung keine resultierende elektrostatische Kraft erfahren. Eine Skizze von E_x in Abhängigkeit von x für dieses System ist in Abbildung 18.14 gezeigt.

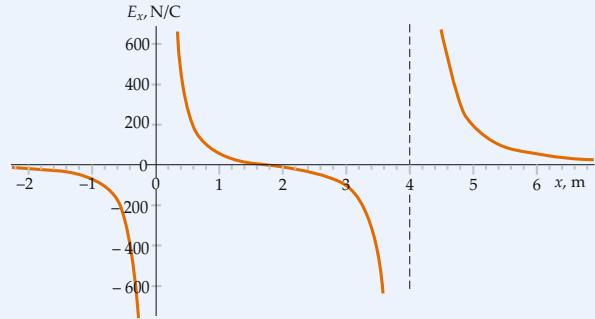


Abbildung 18.14 E_x in Abhängigkeit von x .

Übung 18.9: Bestimmen Sie den Punkt auf der x -Achse, in dem das elektrische Feld null ist. ▶

Beispiel 18.8: Elektrisches Feld außerhalb der Verbindungsgeraden zwischen Punktladungen ZUR ÜBUNG

Eine Punktladung $q_1 = +8,0 \text{ nC}$ befindet sich im Ursprung, eine zweite Punktladung $q_2 = +12,0 \text{ nC}$ liegt auf der x -Achse bei $x = 4,0 \text{ m}$. Bestimmen Sie das elektrische Feld auf der y -Achse bei $y = 3,0 \text{ m}$.

Problembeschreibung Wie in Beispiel 18.7 gilt $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Das elektrische Feld \mathbf{E}_1 der Ladung q_1 verläuft in allen Punkten auf der y -Achse in y -Richtung. Das Feld \mathbf{E}_2 der Ladung q_2 verläuft im zweiten Quadranten (Abbildung 18.15). Um das resultierende Feld \mathbf{E} zu finden, berechnet man zunächst die x - und y -Komponente von \mathbf{E} .

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung 1. Zeichnen Sie die beiden Ladungen und den Feldpunkt in ein Koordinatensystem. Tragen Sie die elektrischen Felder ein, die von den beiden Ladungen im Feldpunkt verursacht werden, und beschriften Sie die Entfernung und Winkel (Abbildung 18.15).

2. Berechnen Sie den Betrag des Feldes \mathbf{E}_1 der Ladung q_1 im Punkt P_3 . Bestimmen Sie die x - und y -Komponente von \mathbf{E}_1 .
3. Berechnen Sie den Betrag des Feldes \mathbf{E}_2 der Ladung q_2 .
4. Geben Sie die x - und y -Komponente von \mathbf{E}_2 mithilfe der Winkel an.
5. Berechnen Sie $\sin \theta$ und $\cos \theta$ mithilfe der in Abbildung 18.15 angegebenen Distanzen im Dreieck q_1, q_2, P_3 .
6. Berechnen Sie $E_{2,x}$ und $E_{2,y}$.
7. Zeichnen Sie die Komponenten des resultierenden Felds. Tragen Sie sowohl den Vektor \mathbf{E} als auch den Winkel, den \mathbf{E} mit der x -Achse bildet, ein (Abbildung 18.16).
8. Bestimmen Sie die x - und y -Komponente des resultierenden Felds \mathbf{E} .
9. Berechnen Sie den Betrag des Feldes \mathbf{E} aus seinen Komponenten.
10. Bestimmen Sie den Winkel θ_1 zwischen \mathbf{E} und der x -Achse.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

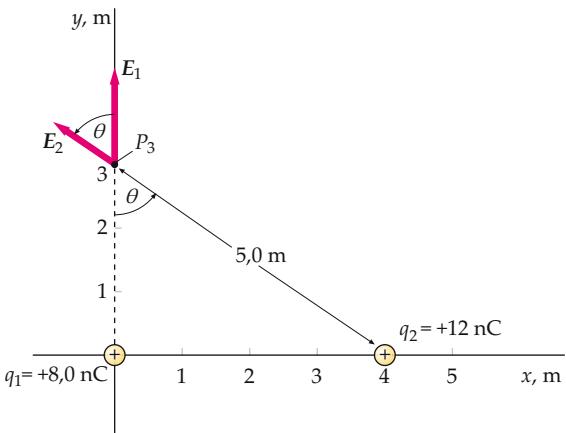


Abbildung 18.15 Skizze der beiden Ladungen und der wirkenden elektrischen Felder im Feldpunkt P_3 .

2.

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{y^2} = 7,99 \text{ N/C}$$

$$E_{1,x} = 0, \quad E_{1,y} = E_1 = 7,99 \text{ N/C}$$

3.

$$|E_2| = 4,32 \text{ N/C}$$

4.

$$E_{2,x} = -|E_2| \sin \theta, \quad E_{2,y} = |E_2| \cos \theta$$

5.

$$\sin \theta = 0,8, \quad \cos \theta = 0,6$$

6.

$$E_{2,x} = -3,46 \text{ N/C}, \quad E_{2,y} = 2,59 \text{ N/C}$$

7.

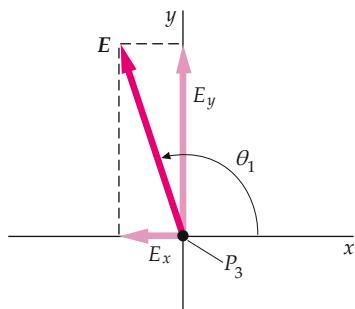


Abbildung 18.16 Konstruktion des Feldvektors E mit seinen beiden Komponenten.

8.

$$E_x = E_{1,x} + E_{2,x} = -3,46 \text{ N/C}$$

$$E_y = E_{1,y} + E_{2,y} = 10,6 \text{ N/C}$$

9.

$$|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 11,2 \text{ N/C} = \boxed{11 \text{ N/C}}$$

10.

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{|E_y|}{|E_x|}\right) + 90^\circ = \boxed{108^\circ}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet ist $|E|$ größer als E_1 oder E_2 , aber kleiner als $E_1 + E_2$. (Dieses Ergebnis ist zu erwarten, da der Winkel zwischen E_1 und E_2 kleiner ist als 90° .)

Beispiel 18.9: Elektrisches Feld von zwei entgegengesetzten gleichen Ladungen

Eine Ladung $+q$ befindet sich bei $x = a$ und eine zweite Ladung $-q$ bei $x = -a$ (Abbildung 18.17). a) Bestimmen Sie das elektrische Feld auf der x -Achse an einem beliebigen Punkt $x > a$. b) Bestimmen Sie den Grenzwert des elektrischen Felds für $x \gg a$.

Problembeschreibung: Wir berechnen das elektrische Feld mithilfe des Superpositionsprinzips (d.h. Gleichung 18.8 in der Form $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$). Für $x > a$ läuft das elektrische Feld \mathbf{E}_+ aufgrund der positiven Ladung in die positive x -Richtung und das elektrische Feld \mathbf{E}_- aufgrund der negativen Ladung in die negative x -Richtung. Die Abstände sind $x - a$ zur positiven Ladung und $x - (-a) = x + a$ zur negativen Ladung.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie die Ladungskonfiguration auf einer Koordinatenachse und bezeichnen Sie die Abstände jeder Ladung zum Feldpunkt (Abbildung 18.17).

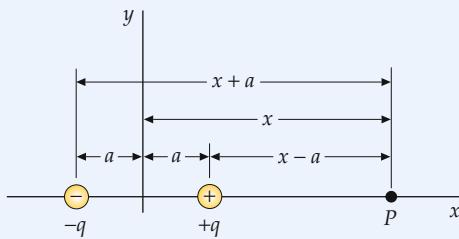


Abbildung 18.17 Skizze der Ladungskonfiguration.

2. Berechnen Sie das Feld \mathbf{E} von zwei Ladungen für $x > a$ (*Hinweis:* Die Gleichung rechts gilt nur für $x > a$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} \hat{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-(-a))^2} (-\hat{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) \hat{x} \end{aligned}$$

3. Bringen Sie die Terme in der großen Klammer auf den Hauptnenner und vereinfachen Sie:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2} \right) \hat{x} \\ &= \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{4ax}{(x^2-a^2)^2} \hat{x}} \quad (\text{für } x > a) \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Im Grenzwert $x \gg a$ kann man im Nenner a^2 im Vergleich zu x^2 vernachlässigen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{4ax}{(x^2-a^2)^2} \hat{x} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{4ax}{x^4} \hat{x} \\ &= \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4qa}{x^3} \hat{x}} \end{aligned}$$

für $x \gg a$.

Plausibilitätsprüfung: Die Endergebnisse beider Teilaufgaben gehen wie erwartet für $x \rightarrow \infty$ gegen null.

Weitergedacht: Abbildung 18.18 zeigt E_x in Abhängigkeit von x für alle x (Quelle des Felds sind die beiden Ladungen mit $q = \pm 1 \text{ nC}$ bei $x = +a = +1 \text{ m}$ bzw. $x = -a = -1 \text{ m}$). In großer Entfernung von den Ladungen ($x \gg a$) ist das Feld gegeben durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q a}{|x|^3} \hat{x}.$$

Zwischen den Ladungen zeigt das Feld von jeder Ladung in die negative Richtung. Das Feld \mathbf{E} lässt sich für alle x gemäß

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} \hat{x}_+ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{(x+a)^2} \hat{x}_-$$

angeben. Dabei ist \hat{x}_+ ein Einheitsvektor, der für alle Werte von x (außer für $x = a$) von dem Punkt $x = a$ weg zeigt, und \hat{x}_- ist ein Einheitsvektor, der für alle Werte von x (außer für $x = -a$) von dem Punkt $x = -a$ weg zeigt. Dabei gilt

$$\hat{x}_+ = \frac{x-a}{|x-a|} \hat{x}$$

und

$$\hat{x}_- = \frac{x+a}{|x+a|} \hat{x}.$$

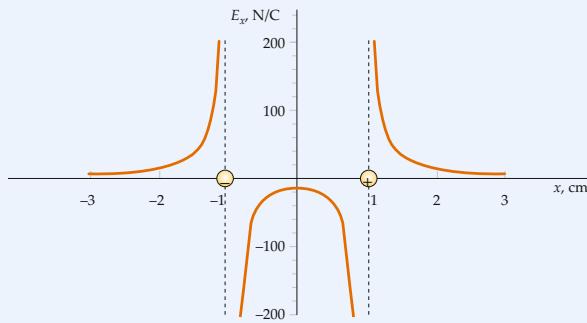


Abbildung 18.18 Betrag des Feldes E_x auf der x -Achse in Abhängigkeit von x für die Ladungsverteilung in Beispiel 18.9.

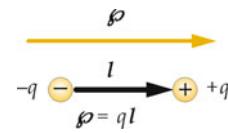


Abbildung 18.19 Ein elektrischer Dipol besteht aus einem Paar von entgegengesetzten gleichen Ladungen. Das Dipolmoment ist $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$. Dabei ist q der Betrag einer Ladung und \mathbf{l} der Vektor von der negativen zur positiven Ladung.

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}. \quad (18.9)$$

DEFINITION DES ELEKTRISCHEN DIPOLMOMENTS

Für das System von Ladungen in Abbildung 18.18 (Beispiel 18.9) ist $\mathbf{l} = 2a\hat{x}$, und das elektrische Dipolmoment ist

$$\mathbf{p} = 2a q \hat{x}.$$

Das elektrische Feld des Dipols in einem Punkt auf der Achse des Dipols in großer Entfernung $|x|$ vom Dipol hat die Richtung des Dipolmoments \mathbf{p} und den Betrag

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|\mathbf{p}|}{|x|^3} \quad (18.10)$$

(Beispiel 18.9). Der Betrag des elektrischen Felds in großer Entfernung von einem Dipol (das sogenannte *Fernfeld*) ist in beliebiger Richtung proportional zum Dipolmoment und nimmt in dritter Potenz mit dem Abstand ab. Für ein beliebiges System von Ladungen nimmt das elektrische Feld in großer Entfernung wie $1/r^2$ ab. Ist die Gesamtladung des Systems null, fällt das elektrische Feld mit der Entfernung stärker als $1/r^2$ ab. Im Fall des elektrischen Dipols nimmt das Feld wie $1/r^3$ ab.

18.5 Elektrische Feldlinien

Man kann sich das elektrische Feld durch gerichtete Linien veranschaulichen, die man **elektrische Feldlinien** nennt und aus denen man sowohl den Betrag als auch die Richtung des Felds ablesen kann. In jedem Punkt verläuft der Feldvektor \mathbf{E} tangential zu der Feldlinie durch diesen Punkt. Man kann daher die elektrischen Feldlinien auch *Kraftlinien* nennen, da sie in die Richtung der Kraft zeigen, die auf eine *positive* Probeladung wirkt. In der unmittelbaren Umgebung einer positiven Punktladung zeigt das elektrische Feld \mathbf{E} radial von der Ladung weg. Daher verlaufen auch die elektrischen Feldlinien in der Nähe einer positiven Ladung radial von der Ladung weg. Entsprechend verlaufen die elektrischen Feldlinien in unmittelbarer Nähe einer negativen Ladung radial zu dieser Ladung hin.

Abbildung 18.20 zeigt die elektrischen Feldlinien einer einzelnen positiven Punktladung. Der Abstand der Linien ist mit der Stärke des elektrischen Felds verknüpft. Wenn man sich von der Ladung entfernt, wird das Feld schwächer, und die einzelnen

Elektrische Dipole

Ein System von zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen q , die durch einen (kleinen) Abstand l voneinander getrennt sind, nennt man einen **elektrischen Dipol**. Seine Stärke und seine Orientierung werden durch das **elektrische Dipolmoment** \mathbf{p} beschrieben. Das Dipolmoment ist ein Vektor, der von der negativen zur positiven Ladung des Dipols zeigt und den Betrag ql hat (Abbildung 18.19):

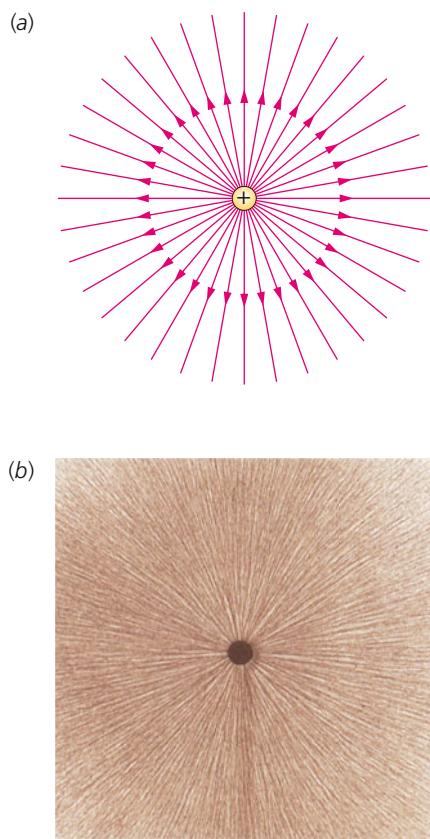


Abbildung 18.20 Elektrische Feldlinien einer einzelnen positiven Punktladung. Wenn die Ladung negativ wäre, würden die Pfeile in die entgegengesetzte Richtung zeigen. b) Dieselben elektrischen Feldlinien, sichtbar gemacht durch in Öl suspendierte Fasern. Das elektrische Feld des geladenen Objekts in der Mitte lädt die Enden jeder Faser durch elektrostatische Influenz entgegengesetzt auf, wodurch sich die Fasern parallel zum Feld ausrichten. (© Harold M. Waage.)

Linien sind weiter voneinander entfernt. Wir betrachten nun eine Kugeloberfläche vom Radius r , in deren Zentrum sich eine Ladung befindet. Ihre Oberfläche ist $4\pi r^2$. Wenn r zunimmt, nimmt die Dichte der Feldlinien (Zahl der Linien pro Fläche) wie $1/r^2$ ab, genauso wie $|E|$. Wenn man festlegt, dass einer Ladung q eine feste Zahl von Linien entspricht, dann ist die Zahl der Linien der Ladung q proportional, und wenn man die Linien symmetrisch um die Punktladung zeichnet, wird der Betrag des Felds durch die Dichte der Feldlinien angegeben. Je dichter die Linien liegen, umso stärker ist das elektrische Feld. Der Betrag des elektrischen Felds wird auch als **elektrische Feldstärke** bezeichnet.

Abbildung 18.21 zeigt die elektrischen Feldlinien für zwei gleiche positive Punktladungen q , die sich in einem kleinen Abstand voneinander befinden. In der Nähe jeder Punktladung ist das Feld näherungsweise das einer Ladung allein, da die Feldstärke einer einzelnen Punktladung in unmittelbarer Umgebung der Ladung extrem groß wird und die andere Ladung sich relativ weit weg befindet. Folglich verlaufen die Feldlinien in der Nähe jeder der beiden Ladungen radial mit gleichmäßigem Abstand. Da die Ladungen gleich sind, zeichnet man eine gleiche Anzahl von Linien, die ihren Ursprung in jeder der beiden Ladungen haben. In sehr großer Entfernung sind die Details der Ladungsverteilung nicht mehr wichtig, und das Liniensystem sieht aus wie das einer Punktladung vom Betrag $2q$. („Sehr groß“ bezieht sich auf den Vergleich zwischen dem Abstand der beiden Ladungen und der Entfernung zum Feldpunkt. Wenn beispielsweise die beiden Ladungen 1 mm voneinander getrennt sind und man sie aus einer Entfernung von 100 km betrachtet, würden die Feldlinien aussehen wie die einer einzelnen Ladung mit dem Betrag $2q$ in einer Entfernung von 100 km.) In Abbildung 18.21 erkennt man, dass die Feldliniendichte in dem Bereich zwischen den beiden Ladungen klein ist, verglichen mit der Dichte der Linien in dem Bereich direkt links und rechts von den Ladungen.

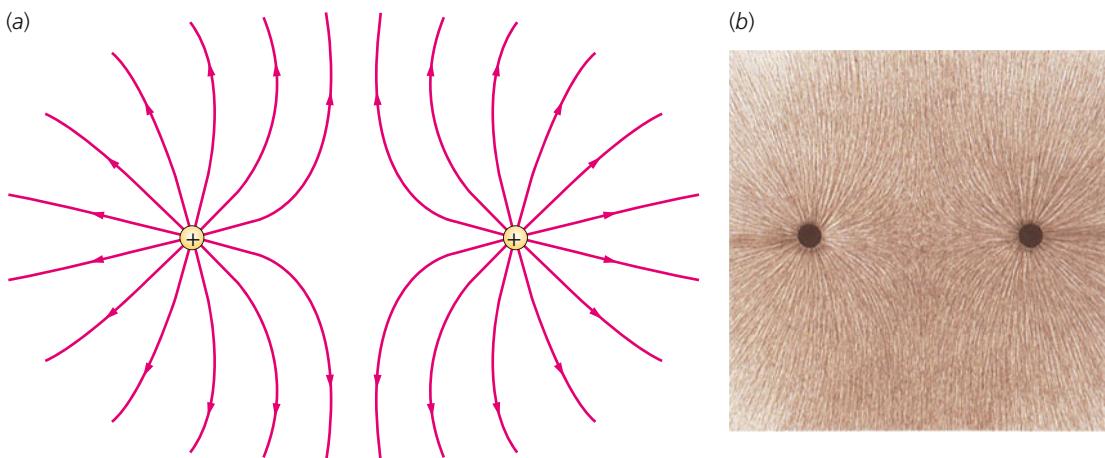


Abbildung 18.21 a) Elektrische Feldlinien von zwei positiven Punktladungen. Die Pfeile würden in die umgekehrte Richtung zeigen, wenn die Ladungen negativ wären. b) Die gleichen elektrischen Feldlinien, sichtbar gemacht durch in Öl suspendierte Fasern. (© Harold M. Waage.)

Vorgehensweise: Zeichnen von elektrischen Feldlinien

Elektrische Feldlinien beginnen an positiven Ladungen (oder im Unendlichen) und enden an negativen Ladungen (oder im Unendlichen).

1. Die aus einer Punktladung austretenden (oder in sie eintretenden) elektrischen Feldlinien sind am Ort der Ladung räumlich gleichmäßig verteilt.
2. Die Zahl der Feldlinien, die eine positive Ladung verlassen oder die in eine negative Ladung eintreten, ist dem Betrag der Ladung proportional.
3. Die Dichte der Feldlinien (d. h. die Zahl der Linien pro Einheitsfläche senkrecht zu den Linien) in einem beliebigen Punkt ist proportional zur Feldstärke in diesem Punkt.
4. In großer Entfernung von einem Ladungssystem mit einer von null verschiedenen Gesamtladung sind die Feldlinien räumlich gleichmäßig verteilt und verlaufen kugelsymmetrisch radial, so als wären sie von einer einzelnen Punktladung gleicher Größe erzeugt.

Plausibilitätsprüfung: Stellen Sie sicher, dass sich die Feldlinien niemals kreuzen. (Wenn zwei Linien sich kreuzten, müsste das elektrische Feld \mathbf{E} im Schnittpunkt zwei verschiedene Richtungen haben, im Widerspruch zur Eindeutigkeit des Feldbegriffs.)

Hinweis: Es gibt auch sogenannte *entartete Feldlinien*, die – wie in Abbildung 18.22 gezeigt – *nicht* in einer Ladung enden. Die entartete Feldlinie beginnt an einer der positiven Ladungen und ist auf die andere positive Ladung hin gerichtet. Die Feldlinie endet genau in der Mitte zwischen den beiden Ladungen. Analog treten auch bei zwei negativen Ladungen entartete Feldlinien auf. Eine Ladungsverteilung wie die in Abbildung 18.22 gezeigte hat eine unendliche Anzahl von Feldlinien, genau zwei davon sind entartet.

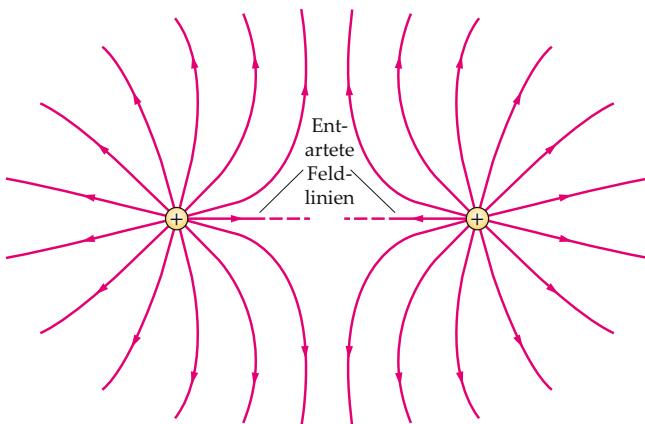


Abbildung 18.22 Unendlich viele Feldlinien gehen von diesen beiden Punktladungen aus, zwei davon sind entartet. Diese entarteten Feldlinien enden genau im Mittelpunkt zwischen den beiden Punktladungen.

Das zeigt an, dass die Stärke des elektrischen Felds in dem Bereich zwischen den Ladungen schwächer ist als direkt links und rechts von den Ladungen, wo die Linien räumlich dichter liegen. Diese Information könnte man auch durch direkte Berechnung des Felds an Punkten in diesen Bereichen erhalten.

Man kann diese Argumentation zum Zeichnen der elektrischen Feldlinien für ein beliebiges System von Punktladungen nutzen. In der Nähe jeder Ladung sind die Feldlinien räumlich gleich-

mäßig verteilt und treten radial aus der Ladung heraus oder in sie hinein, je nach dem Vorzeichen der Ladung. Sehr weit entfernt von allen Ladungen ist die genaue Form der Ladungsverteilung nicht wichtig, der Feldlinienverlauf ähnelt dem Feld einer Punktladung, die die Gesamtladung des Systems trägt. Die Regeln zum Zeichnen von elektrischen Feldlinien sind in der folgenden Problemlösungsstrategie zusammengefasst.

Abbildung 18.23 zeigt die elektrischen Feldlinien von einem elektrischen Dipol. In unmittelbarer Nähe der positiven Ladung sind die Linien radial nach außen gerichtet, in unmittelbarer Nähe der negativen Ladung radial nach innen. Da die Ladungen den gleichen Betrag haben, ist die Zahl der Linien, die an der positiven Ladung beginnen, gleich der Zahl, die an der negativen Ladung enden. Die hohe Dichte der Feldlinien im Bereich zwischen den Ladungen zeigt, dass das elektrische Feld hier stärker ist als außerhalb dieses Bereichs.

Abbildung 18.24a zeigt die elektrischen Feldlinien für eine negative Ladung $-q$ in einem geringen Abstand von einer positiven Ladung $+2q$. Zweimal so viele Linien treten aus der positiven Ladung heraus wie in die negative Ladung hinein. So tritt die Hälfte der an der positiven Ladung $+2q$ beginnenden Linien in die negative Ladung $-q$ ein. Die andere Hälfte der Linien aus der positiven Ladung verlässt das System und erstreckt sich bis ins Unendliche. In großer Entfernung von den Ladungen (Abbildung 18.24b) sind die das System verlassenden Linien näherungsweise kugelsymmetrisch radial nach außen gerichtet wie von einer einzelnen positiven Ladung $+q$.

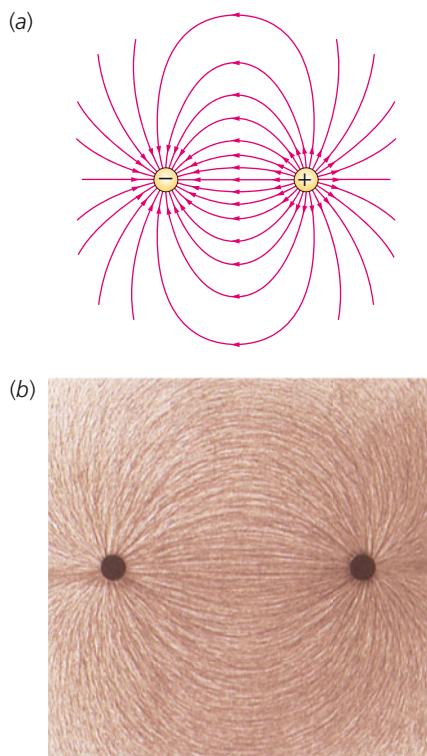


Abbildung 18.23 a) Elektrische Feldlinien eines elektrischen Dipols. b) Die selben Feldlinien, sichtbar gemacht durch in Öl suspendierte kleine Fasern. (© Harold M. Waage.)

Wie man aus dem Feldlinienbild auf die Größe und das Vorzeichen von Ladungen schließen kann, wird in Beispiel 18.10 behandelt.

Beispiel 18.10: Elektrische Feldlinien für zwei leitende Kugeln

Abbildung 18.25 zeigt die elektrischen Feldlinien für zwei leitende Kugeln. Welche Vorzeichen haben die Ladungen auf den Kugeln, und wie groß sind sie relativ zueinander?

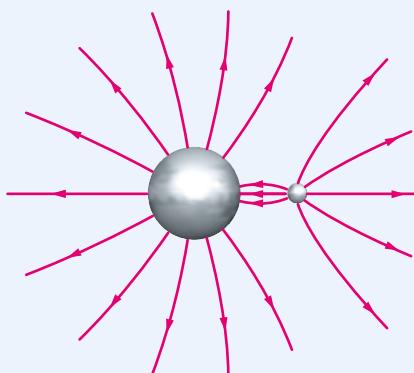


Abbildung 18.25 Elektrische Feldlinien zweier leitender Kugeln.

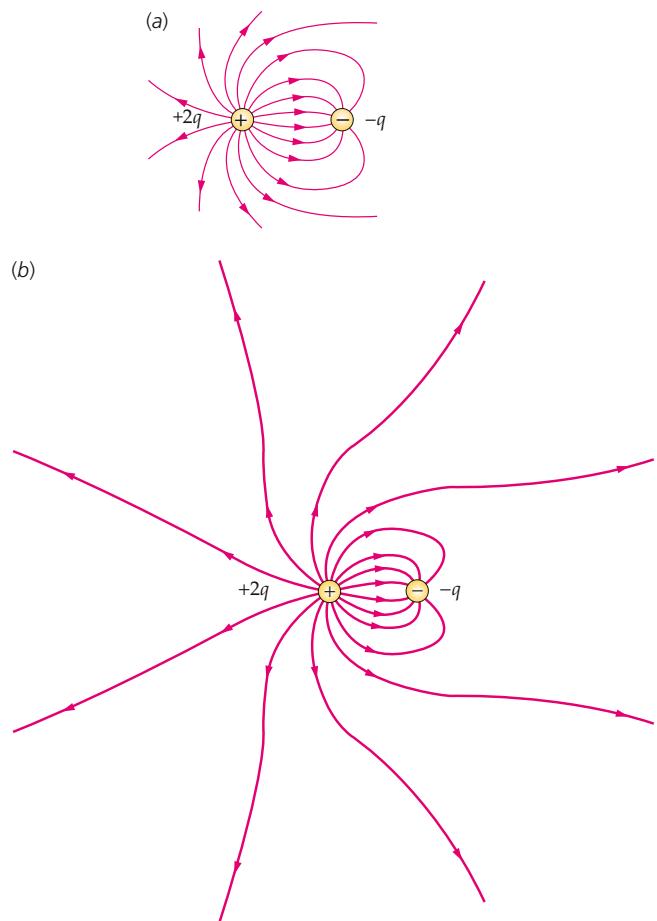


Abbildung 18.24 a) Elektrische Feldlinien für eine Punktladung $+2q$ und eine zweite Punktladung $-q$. b) In großem Abstand von den beiden Einzelladungen nähern sich die Feldlinien denen einer einzelnen Punktladung $+q$, die sich im Ladungszentrum befindet.

Problembeschreibung: Die Ladung auf einer Kugel ist positiv, wenn mehr Feldlinien von ihr ausgehen, als in sie eintreten; sie ist negativ, wenn mehr Feldlinien in sie eintreten, als von ihr ausgehen. Das Verhältnis der Ladungsbeträge ist gleich dem Verhältnis der Anzahl von den beiden Kugeln ausgehenden bzw. in sie eintretenden Feldlinien.

Lösung: 1. Zählen Sie die Feldlinien und bestimmen Sie die resultierende Anzahl der Feldlinien, die von der größeren Kugel ausgehen: Aus der Kugel treten elf elektrische Feldlinien aus, drei Linien enden auf ihr. Die resultierende Anzahl ist acht.

2. Zählen Sie die Feldlinien und bestimmen Sie die resultierende Anzahl der Feldlinien, die von der kleineren Kugel ausgehen: Aus der Kugel treten acht elektrische Feldlinien aus, keine Linie endet auf ihr. Die resultierende Anzahl ist acht.

3. Bestimmen Sie das Vorzeichen der beiden Ladungen:
Aus beiden Kugeln treten mehr Linien aus, als in ihnen enden, daher sind *beide Kugeln positiv geladen*.

4. Bestimmen Sie die relativen Beträge der Ladungen auf den beiden Kugeln: Von beiden Kugeln geht dieselbe resultierende Anzahl von Feldlinien aus, daher haben *beide Ladungen denselben Betrag*. ■

Das Konzept der Feldlinien eines Vektorfelds wurde an dem elektrischen Feld entwickelt, das umgekehrt proportional vom Abstandsquadrat einer Punktladung abhängt. Da das Gravitationsfeld einer Punktmasse ebenfalls umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung variiert, ist das Feldliniennetz auch für Gravitationsfelder geeignet. Der Unterschied zwischen dem elektrostatischen Feld und dem Gravitationsfeld ergibt sich aus dem Sachverhalt, dass es zwei Arten von elektrischen Ladungen, aber nur eine Sorte Masse gibt. Nahe der Punktmasse laufen die Feldlinien des Gravitationsfelds radial und gleich verteilt auf die Punktmasse zu, so wie die elektrischen Feldlinien einer negativen Ladung. Es gibt jedoch keine Raumpunkte, von denen eine Gravitationsfeldlinie ausgeht: Da das Gravitationsfeld stets anziehend und niemals abstoßend ist, gibt es kein Analogon zu den elektrischen Feldlinien einer positiven Ladung.



Schema einer Kathodenstrahlröhre, wie sie im Farbfernseher als Bildröhre benutzt wird. Die Elektronenstrahlen von der Elektronenquelle (rechts im Bild) regen die roten, blauen und grünen Fluoreszenzzentren auf dem Schirm (links im Bild) an; die Gesamtfarbe der so erzeugten Leuchtflecke ergibt sich durch additive Farbmischung und hängt von der relativen Intensität der Strahlen ab. Elektrische Felder zwischen den Ablenkplatten (oder magnetische Felder von Spulen um die Elektronenquelle) lenken den Strahl ab. Die Strahlen werden zeilenweise quer über den Schirm geführt. Durch eine Ablenkung nach unten können nacheinander alle Zeilen von oben nach unten überstrichen werden. Der ganze Schirm wird auf diese Weise 30-mal pro Sekunde von dem Strahl überdeckt. (Mit freundlicher Genehmigung der Video Display Corporation, Tucker GA USA.)

18.6 Wirkung von elektrischen Feldern auf Ladungen

Ein elektrisches Feld kann auf ein geladenes Teilchen eine Kraft, auf einen elektrischen Dipol eine Kraft und ein Drehmoment ausüben.

Die Bewegung von Punktladungen in elektrischen Feldern

Wenn sich ein Teilchen mit einer Ladung q in einem elektrischen Feld \mathbf{E} befindet, dann erfährt es eine Kraft $q\mathbf{E}$. Falls auf das Teilchen mit der Masse m nur die elektrische Kraft wirkt, ist die Beschleunigung des Teilchens

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{m} \mathbf{E}.$$

Daraus kann man die Geschwindigkeit des Teilchens berechnen und sein Weg-Zeit-Gesetz bestimmen. (Wenn das Teilchen ein Elektron ist, kann die Geschwindigkeit in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit kommen, was zur Folge hat, dass man nicht mehr mit den Newton'schen Bewegungsgesetzen rechnen darf, sondern die Korrekturen durch die Einstein'sche spezielle Relativitätstheorie berücksichtigen muss.)

Ist das elektrische Feld bekannt, lässt sich das Ladung-Masse-Verhältnis aus der gemessenen Beschleunigung ermitteln. Joseph John Thomson (1856–1940) nutzte 1897 die Ablenkung

von negativen Ladungen in einem homogenen elektrischen Feld, um die Existenz von Elektronen nachzuweisen und das Verhältnis von Ladung und Masse des Elektrons zu bestimmen. Vertraute Beispiele von Geräten, die auf der Bewegung von Elektronen in elektrischen Feldern beruhen, sind Oszilloskopen, Computerbildschirme und Fernsehröhren, in denen Kathodenstrahlröhren als Bildröhren verwendet werden.

Die Beispiele 18.11 und 18.12 behandeln die Bewegung eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld. In Beispiel 18.13 wird die Steuerung eines Tintenstrahldruckers behandelt.

Beispiel 18.11: Bewegung eines Elektrons parallel zu einem homogenen elektrischen Feld

Ein Elektron tritt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = (2 \cdot 10^6 \text{ m/s}) \hat{x}$ in Richtung des Felds in ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E} = (1000 \text{ N/C}) \hat{x}$ ein (Abbildung 18.26). Wie weit bewegt sich das Elektron, bis es zur Ruhe kommt?

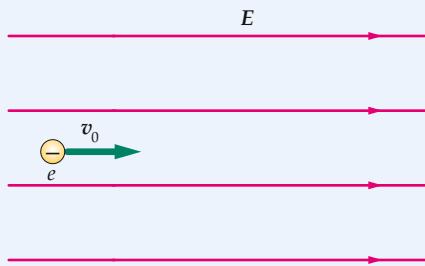


Abbildung 18.26 Skizze des Elektrons im elektrischen Feld.

18.6 Wirkung von elektrischen Feldern auf Ladungen

Problembeschreibung: Da die Ladung des Elektrons negativ ist, wirkt die Kraft $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ auf das Elektron entgegengesetzt der Feldrichtung. Das elektrische Feld und damit die auf das Elektron wirkende Kraft sind beide konstant, d. h. wir können den Bewegungsablauf nach den in Kapitel 2 hergeleiteten Gleichungen für konstante Beschleunigungen berechnen. Wir wählen das Feld in positiver x -Richtung.

Lösung: 1. Die „Eindringtiefe“ Δx hängt folgendermaßen mit Anfangs- und Endgeschwindigkeit zusammen:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a_x \Delta x$$

2. Die Beschleunigung erhält man aus dem zweiten Newton'schen Axiom:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{-e E}{m}$$

3. Wegen $v_x = 0$ gilt für die im Feld zurückgelegte Entfernung:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{v_x^2 - v_{0,x}^2}{2 a_x} = \frac{0 - v_{0,x}^2}{2(-e E/m)} = \frac{m v_0^2}{2 e E} \\ &= \frac{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(2,00 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2}{2(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1000 \text{ N/C})} \\ &= 1,14 \cdot 10^{-2} \text{ m} = [1,14 \text{ cm}]\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die im Feld zurückgelegte Entfernung Δx ist positiv, wie man es erwartet, da das Elektron sich in positiver x -Richtung bewegt. ■

Beispiel 18.12: Bewegung eines Elektrons senkrecht zu einem homogenen elektrischen Feld

Ein Elektron tritt mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = (10^6 \text{ m/s})\hat{x}$ senkrecht zum Feld in ein homogenes elektrisches Feld $E = (-2000 \text{ N/C})\hat{y}$ ein (Abbildung 18.27). a) Vergleichen Sie die Gravitationskraft mit der elektrischen Kraft, die beide auf das Elektron wirken. b) Um wie viel wurde das Elektron abgelenkt, nachdem es sich 1,0 cm in x -Richtung bewegt hat?

Problembeschreibung: a) Berechnen Sie das Verhältnis aus der elektrischen Kraft $|F_C| = |q| |E| = e |E|$ zur Gravitationskraft $|F_G| = mg$. b) Da mg vernachlässigbar ist, wirkt als resultierende Kraft auf das Elektron nur die elektrische Kraft vertikal aufwärts. Das Elektron bewegt sich deshalb mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit v_x und wird senkrecht dazu nach oben um den Betrag $\Delta y = \frac{1}{2} a_y t^2$ abgelenkt. Die Größe t ist dann die Flugzeit für die Bewegung des Elektrons um 1,0 cm in x -Richtung.

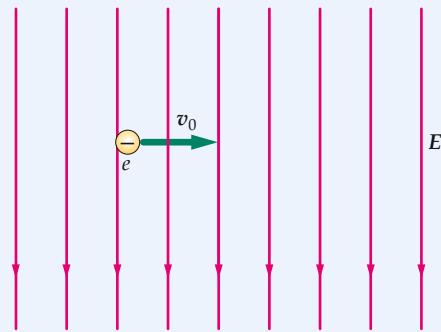


Abbildung 18.27 Skizze des Elektrons im elektrischen Feld senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie das Verhältnis der Beträge aus der elektrischen Kraft $|F_C|$ und der Gravitationskraft $|F_G|$:

$$\begin{aligned}\frac{|F_C|}{|F_G|} &= \frac{e |E|}{mg} \\ &= \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(9,81 \text{ N/kg})} \\ &= [3,6 \cdot 10^{13}]\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Drücken Sie die vertikale Abweichung durch die Beschleunigung a_y und die Zeit t aus:

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

2. Geben Sie die Zeit an, die das Elektron benötigt, um die horizontale Strecke Δx mit konstanter Geschwindigkeit v_0 zurückzulegen:

$$t = \frac{\Delta x}{v_0}$$

3. Benutzen Sie dieses Ergebnis für t und $e |E|/m$ für a_y , um y zu berechnen:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2} \frac{e |E|}{m} \left(\frac{\Delta x}{v_0} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(2000 \text{ N/C})}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})} = [1,8 \text{ cm}]\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die im Feld erfahrene Ablenkung Δx (Ergebnis aus Schritt 3 in Teilaufgabe b) ist positiv, d. h. nach oben gerichtet, wie man es für eine negative Ladung im E -Feld aus Abbildung 18.27 erwartet.

Weitergedacht: 1) In vielen Fällen ist die elektrische Kraft sehr viel größer als die Gravitationskraft. Somit ist es nicht notwendig, beispielsweise bei der Konstruktion einer Kathodenstrahlröhre oder bei einem Ablenkungsproblem wie hier die Gravitationskraft zu berücksichtigen. Tatsächlich arbeitet eine Fernsehbildröhre in jeder räumlichen Lage gleich gut, als ob die Gravitationskraft nicht vorhanden wäre. 2) Die Bahn eines Elektrons in einem homogenen elektrischen Feld ist eine Parabel, genauso wie die Bahn eines neutralen Teilchens in einem homogenen Gravitationsfeld.

Beispiel 18.13: Das elektrische Feld in einem Tintenstrahldrucker

Sie fragen sich, woher der Tintenstrahldrucker weiß, wohin er die Tinte setzen soll. Eine Suche im Internet liefert eine Schemazeichnung wie Abbildung 18.28. Demnach werden die Tintentropfen elektrisch geladen und bewegen sich zwischen einem Paar von entgegengesetzt geladenen Metallplatten. Diese Platten erzeugen ein homogenes Feld im Bereich zwischen den Platten. Um die Stärke des elektrischen Felds in diesem Druckertyp zu bestimmen, suchen Sie nach

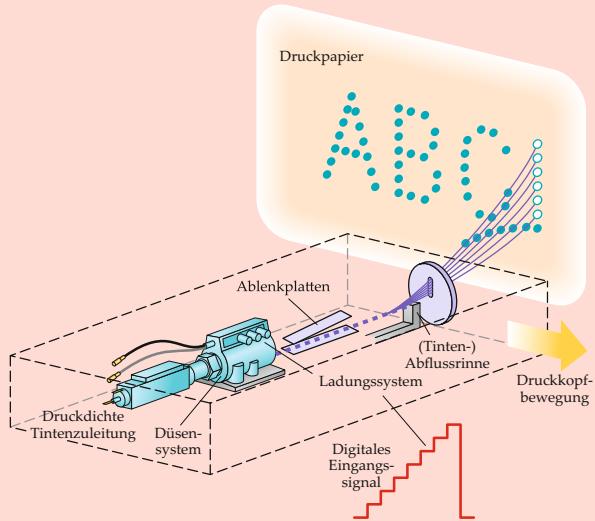


Abbildung 18.28 Im Tintenstrahldrucker wird die Tinte in Form von einzelnen Tröpfchen aus dem Düsensystem gepumpt. Jedes Tröpfchen, das beim Auftreffen auf dem Papier einen Punkt erzeugen soll, wird elektrisch aufgeladen. Das Ablenksystem besteht aus einem Paar von entgegengesetzt geladenen Platten. Die Ladung auf den Platten hängt von der Form des Eingangssignals ab. Je größer die Ladung auf einem Tintentropfen ist, umso stärker wird der Tropfen abgelenkt, wenn er die Ablenkplatten passiert. Tropfen, die nicht auf dem Papier auftreffen sollen, werden nicht elektrisch aufgeladen und damit nicht von den Ablenkplatten abgelenkt. Diese Tropfen landen in der Tintenabflussrinne und werden wieder dem Tintenvorrat zugeführt.

mehr Informationen und finden, dass die Tintentropfen von $40,0 \mu\text{m}$ Durchmesser eine Anfangsgeschwindigkeit von $40,0 \text{ m/s}$ aufweisen und dass ein Tropfen mit einer Ladung von $2,00 \text{ nC}$ um $3,00 \text{ mm}$ aufwärts abgelenkt wird, wenn er den $1,00 \text{ cm}$ langen Bereich zwischen den Platten durchläuft. Bestimmen Sie die Stärke des elektrischen Felds. (Vernachlässigen Sie den Einfluss der Gravitation auf die Bewegung der Tropfen.)

Problembeschreibung: Das elektrische Feld \mathbf{E} übt eine konstante elektrische Kraft auf den Tropfen aus, wenn er den Raum zwischen den beiden Platten durchläuft, in dem $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ist. Wir suchen $|\mathbf{E}|$. Man kann die Kraft \mathbf{F} aus $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ erhalten, indem man die Masse und die Beschleunigung bestimmt. Die Beschleunigung lässt sich kinematisch ermitteln; die Masse des Tropfens lässt sich aus seinem Radius und der Annahme, dass die Dichte ρ der Tinte 1000 kg/m^3 beträgt (wie die Dichte von Wasser), abschätzen.

Lösung: 1. Das elektrische Feld ist gleich dem Verhältnis aus Kraft durch Ladung:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

2. Die Kraft in die positive y -Richtung (aufwärts) ist gleich der Masse multipliziert mit der Beschleunigung:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3. Die vertikale Ablenkung erhält man aus der kinematischen Formel für eine konstante Beschleunigung mit $v_{0,y} = 0$:

$$\begin{aligned}\Delta y &= v_{0,y} t + \frac{1}{2} |\mathbf{a}| t^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2} |\mathbf{a}| t^2\end{aligned}$$

4. Die Zeit, die ein Tropfen benötigt, um eine Strecke von $\Delta x = 1,00 \text{ cm}$ mit einer Geschwindigkeit von $v_{0,x} = 40,0 \text{ m/s}$ zurückzulegen, ist gegeben durch:

$$\Delta x = v_{0,x} t = v_0 t$$

also

$$t = \frac{\Delta x}{v_0}$$

5. Die Lösung für $|\mathbf{a}|$ lautet:

$$|\mathbf{a}| = \frac{2 \Delta y}{t^2} = \frac{2 \Delta y}{(\Delta x/v_0)^2} = \frac{2 v_0^2 \Delta y}{(\Delta x)^2}$$

6. Die Masse ist gleich dem Produkt aus Dichte und Volumen:

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

18.6 Wirkung von elektrischen Feldern auf Ladungen

7. Die Lösung für $|E|$ ist:

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{|F|}{q} = \frac{m|\alpha|}{q} = \frac{\rho^{\frac{4}{3}}\pi r^3}{q} \frac{2v_0^2 \Delta y}{(\Delta x)^2} \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{\rho r^3 v_0^2 \Delta y}{q (\Delta x)^2} \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{(1000 \text{ kg/m}^3) (20,0 \cdot 10^{-6} \text{ m})^3}{(2,00 \cdot 10^{-9} \text{ C})} \\ &\quad \cdot \frac{(40,0 \text{ m/s})^2 (3,00 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{(0,01 \text{ m})^2} \\ &= [1610 \text{ N/C}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Für die letzte Zeile in Schritt 7 ergibt sich die Einheit $\text{kg} \cdot \text{m}/(\text{C} \cdot \text{s}^2)$. Die Einheit des Endergebnisses als N/C ergibt sich mithilfe der Umrechnung von $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Weitergedacht: Der Drucker in diesem Beispiel arbeitet mit einem mehrfach abgelenkten kontinuierlichen Tintenstrahl (*multiple-deflection continuous ink jet*). Dieses Prinzip wird in industriell verwendeten Druckern (Tintenstrahlplottern) benutzt. Die Tintenstrahldrucker für die private oder bürogewerbliche Nutzung arbeiten nach einem anderen Prinzip. Hier werden durch Piezokristalle oder durch Heizelemente kleine Tröpfchen erzeugt (*bubble jet*) und gleich in die gewünschte Richtung gespritzt.

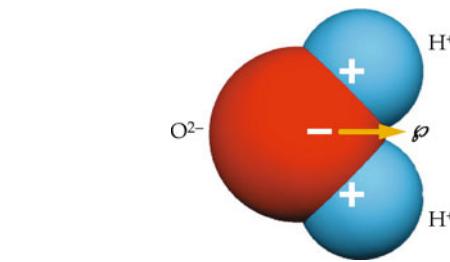


Abbildung 18.29 Ein H_2O -Molekül hat ein permanentes elektrisches Dipolmoment, das in die Richtung vom Zentrum der negativen Ladung zum Zentrum der positiven Ladung zeigt.

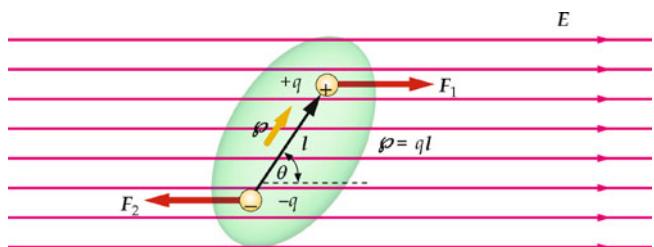


Abbildung 18.30 Ein Dipol in einem homogenen elektrischen Feld erfährt entgegengesetzt gleiche Kräfte, die ihn drehen, bis sein Dipolmoment p in die Richtung des Felds E weist.

Das Drehmoment, das von dem Kräftepaar erzeugt wird, ist unabhängig von dem gewählten Bezugspunkt und senkrecht in die Papierebene hinein gerichtet. Somit wird der Dipol mit dem Moment p im Sinne einer Rechtsdrehung in die Feldrichtung von E gedreht. Das Drehmoment lässt sich in der bekannten Form als Vektorprodukt (Kreuzprodukt) aus dem Dipolmomentvektor p und dem elektrischen Feldvektor E schreiben:

$$M = p \times E. \quad (18.11)$$

Wenn sich der Dipol im elektrischen Feld um den Winkel $d\theta$ dreht, wird an ihm die Arbeit

$$dW = -|M| d\theta = -|p| |E| \sin \theta d\theta$$

verrichtet. (Das Minuszeichen ergibt sich, weil das Drehmoment entgegengesetzt zur Zunahme des Drehwinkels θ ist.) Setzt man die negative Arbeit der Änderung der potenziellen Energie gleich, so folgt

$$dE_{\text{pot}} = -dW = +|p| |E| \sin \theta d\theta.$$

Durch Integration folgt

$$E_{\text{pot}} = -|p| |E| \cos \theta + U_0.$$

Wenn wir für $\theta = 90^\circ$ das Potenzial U_0 gleich null wählen, dann ist die potenzielle Energie des Dipols

$$E_{\text{pot}} = -|p| |E| \cos \theta = -p \cdot E. \quad (18.12)$$

POTENZIELLE ENERGIE EINES DIPOLS IM ELEKTRISCHEN FELD

Elektrische Dipole in elektrischen Feldern

In Beispiel 18.9 wurde das elektrische Feld eines Dipols berechnet, eines Systems aus zwei entgegengesetzt gleichen Punktladungen, die nahe beieinander sind. Hier betrachten wir das Verhalten eines elektrischen Dipols in einem *äußeren* elektrischen Feld. Einige Moleküle haben permanente Dipolmomente, verursacht durch eine inhomogene Ladungsverteilung innerhalb des Moleküls. Solche Moleküle nennt man **polare Moleküle**. Ein Beispiel ist HCl, das im Wesentlichen aus einem positiven Wasserstoffion der Ladung $+e$ und einem negativen Chlorion der Ladung $-e$ besteht. Das Zentrum der Ladung des positiven Ions fällt nicht mit dem Zentrum der Ladung des negativen Ions zusammen, daher besitzt das Molekül ein permanentes Dipolmoment. Ein anderes Beispiel ist Wasser (Abbildung 18.29).

Ein homogenes äußeres elektrisches Feld übt keine resultierende Kraft auf einen Dipol aus, denn die an den Ladungen angreifenden Kräfte bilden ein Kräftepaar (Abbildung 18.30). Dieses Kräftepaar verursacht eine Drehbewegung des Dipols in die Feldrichtung. Entsprechend Abbildung 18.30 hat das Drehmoment für jede der beiden Punktladungen des Dipols den Betrag $|F| |l| \sin \theta = |q E| |l| \sin \theta = |p| |E| \sin \theta$.

In Beispiel 18.14 werden wir das Drehmoment und die potentielle Energie eines Dipols im homogenen elektrischen Feld durchrechnen.

Beispiel 18.14: Drehmoment und potentielle Energie

Ein polares Molekül hat ein Dipolmoment der Größe $0,02 e \cdot \text{nm}$ und bildet mit einem homogenen elektrischen Feld der Größe $3,0 \cdot 10^3 \text{ N/C}$ einen Winkel von 20° (Abbildung 18.31). Bestimmen Sie a) die Größe des Drehmoments auf den Dipol und b) die potentielle Energie des Systems.

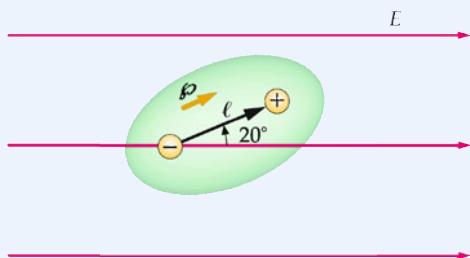


Abbildung 18.31 Skizze des Dipols im elektrischen Feld.

Problembeschreibung: Das Drehmoment berechnet man aus $M = \rho \times E$ und die potentielle Energie aus $E_{\text{pot}} = -\rho \cdot E$.

Lösung: 1. Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments:

$$\begin{aligned} |M| &= |\rho \times E| = |\rho| |E| \sin \theta \\ &= (0,02 e \cdot \text{nm}) (3 \cdot 10^3 \text{ N/C}) (\sin 20^\circ) \\ &= (0,02) (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (10^{-9} \text{ m}) \\ &\quad \cdot (3 \cdot 10^3 \text{ N/C}) (\sin 20^\circ) \\ &= [3,3 \cdot 10^{-27} \text{ N} \cdot \text{m}] \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die potentielle Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= -\rho \cdot E = -|\rho| |E| \cos \theta \\ &= (0,02) (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (10^{-9} \text{ m}) \\ &\quad \cdot (3 \cdot 10^3 \text{ N/C}) (\cos 20^\circ) \\ &= [-9,0 \cdot 10^{-27} \text{ J}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Vorzeichen der potentiellen Energie ist negativ. Dies liegt daran, dass die potentielle Energiefunktion $E_{\text{pot}} = -|\rho| |E| \cos \theta + U_0$ so festgelegt ist, dass U_0 für $\theta = 90^\circ$ null ist. Für $\theta = 20^\circ$ ist die potentielle Energie kleiner als null. Das System hat demnach für $\theta = 20^\circ$ mehr potentielle Energie als für $\theta = 90^\circ$. ■

Dass Wassermoleküle ein Dipolmoment haben, nutzen beispielsweise Mikrowellenherde aus, um Speisen zu erwärmen oder zu kochen. Wie alle elektromagnetischen Wellen haben auch Mikrowellen oszillierende elektrische Felder, die Drehmomente auf elektrische Dipole ausüben. Aufgrund dieser Drehmomente beginnen die Wassermoleküle in den Speisen in der Mikrowelle mit einer beachtlichen kinetischen Rotationsenergie zu rotieren. Auf diese Weise wird die Energie der Mikrowellenstrahlung über die Wassermoleküle auf die Speisen übertragen. Die Effizienz ist dabei recht hoch, sodass die Kochzeit bzw. Zeit zum Erhitzen der Speisen relativ gering ist.

Nichtpolare Moleküle haben kein permanentes elektrisches Dipolmoment. Alle neutralen Moleküle enthalten aber stets gleiche Mengen von positiven und negativen Ladungen. In Anwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes E werden die Ladungen räumlich getrennt. Die positiven Ladungen werden in die Richtung von E und die negativen Ladungen in die entgegengesetzte Richtung verschoben. So erlangen die neutralen Moleküle in einem elektrischen Feld ein Dipolmoment, das als

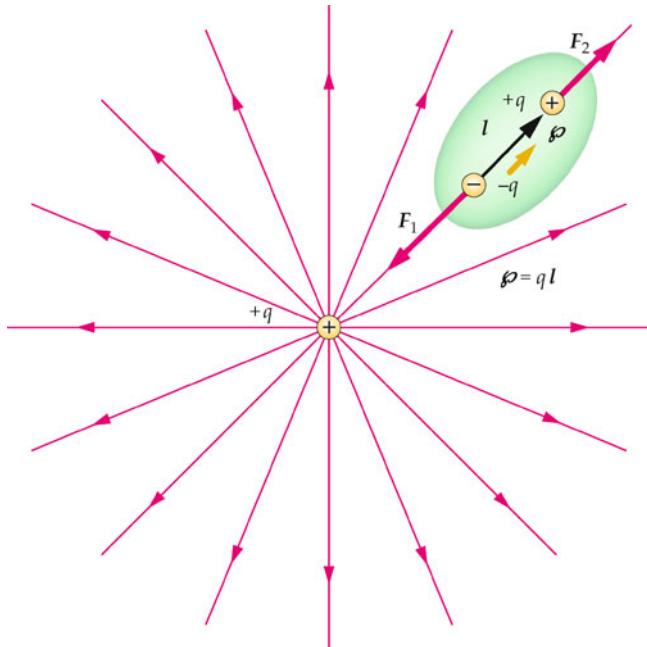


Abbildung 18.32 Ein nichtpolares Molekül in dem inhomogenen Feld einer positiven Punktladung $+q$. Die Punktladung zieht die negativen Ladungen (die Elektronen) in dem Molekül an und stößt die positiven Ladungen (die Protonen) ab. Im Ergebnis verschiebt sich die Ladungsverteilung innerhalb des Moleküls: Das Zentrum der negativen Ladung ist näher an $+q$ als das Zentrum der positiven Ladung. Das so induzierte elektrische Dipolmoment ρ ist parallel zu dem Feld der Punktladung. Da sich die Punktladung näher am Zentrum der negativen Ladung als am Zentrum der positiven Ladung des Moleküls befindet, gibt es eine resultierende Anziehungs Kraft zwischen dem Dipol und der Punktladung. Wenn die Punktladung negativ wäre, wäre das induzierte Dipolmoment umgekehrt, und das Molekül würde wieder von der Punktladung angezogen werden.

18.6 Wirkung von elektrischen Feldern auf Ladungen

induziertes Dipolmoment bezeichnet wird. Die Moleküle richten sich parallel zu dem äußeren elektrischen Feld aus und werden als **polarisiert** bezeichnet.

In einem *inhomogenen* elektrischen Feld erfährt ein elektrischer Dipol eine von null verschiedene resultierende Kraft, da das elektrische Feld unterschiedliche Feldstärken an dem positiven und dem negativen Pol aufweist. Abbildung 18.32 zeigt, wie eine positive Punktladung ein nichtpolares Molekül polarisiert und es dann anzieht. Ein Beispiel aus dem Alltag ist die Anziehungskraft, die einen elektrostatisch aufgeladenen Luftballon an einer Wand hält. Das inhomogene Feld, das durch die Ladung

auf dem Ballon erzeugt wird, polarisiert Moleküle in der Wand und zieht sie an. Eine entgegengesetzt gleich große Kraft wird durch die Moleküle der Wand auf den Ballon ausgeübt.

Der Durchmesser von einem Atom oder Molekül ist von der Größenordnung $10^{-10}\text{ m} = 0,1\text{ nm}$ und beträgt beim kleinsten Atom, dem Wasserstoffatom, etwa $0,05\text{ nm}$ (Kapitel 34). Eine geeignete Einheit für das elektrische Dipolmoment von Atomen und Molekülen ist das Produkt aus der Elementarladung e und dem Abstand 1 nm . Das Dipolmoment von H_2O ist z. B. in dieser Einheit ungefähr $0,04e \cdot \text{nm}$.

🔍 Im Kontext: Pulverbeschichtung – Elektrostatisches Zeichnen

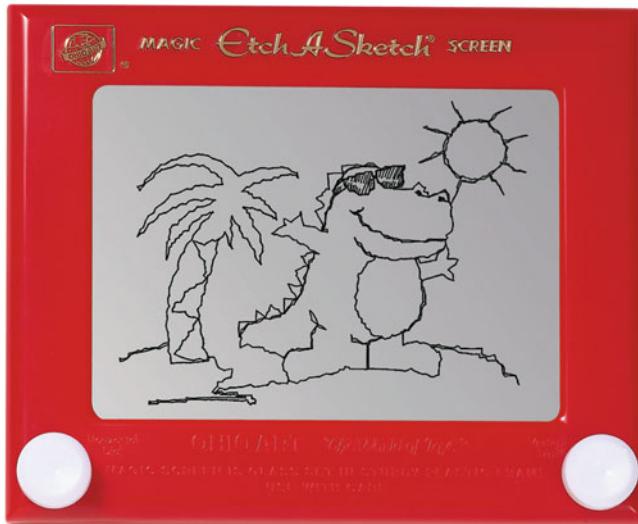
Millionen von Kindern in aller Welt haben die Reibungselektrizität schon genutzt, ohne es zu merken: Seit Anfang der 1960er Jahre gibt es eine Art Zeichentafel unter dem Markennamen „Etch A Sketch“¹, die hinter einer Glasplatte ein feines Pulvergemisch von Aluminium und Polystyrol enthält. Beim Schüttelnreiben die Bestandteile aneinander, laden sich entgegengesetzt auf, und das Aluminiumpulver haftet an der Glasscheibe. Gezeichnet wird mit einer Art Schaber, der durch zwei Drehknöpfe in x - und y -Richtung bewegt werden kann und feine Linien durch das Pulver zieht. Mit Geschick kann man so ganze Bilder fertigen. Durch Umdrehen und Schütteln wird das Bild gelöscht.

Pulver, die sich elektrostatisch aufladen, sind aber nicht nur eine Spieldrei, sondern können in vielen Branchen zur Metallbeschichtung eingesetzt werden. Um Metallteile in Autos, Werkzeugen oder Anlagen vor Korrosion zu schützen, müssen sie mit einer Schutzschicht überzogen werden. Klassisch setzt man dazu Lacke und Farben oder Email ein, die als Flüssigkeiten oder in Pulverform aufgebracht werden. Flüssige Lacke haben verschiedene Nachteile², denn die Lösungsmittel benötigen Zeit zum Trocknen oder setzen unerwünschte flüchtige Verbindungen frei. An geneigten Oberflächen fließt der Lack nicht zu einer gleichmäßigen Schicht zusammen. Beim Aufsprühen entstehen Verluste und Rückstände, die als Abfall entsorgt werden müssen. Elektrostatische Pulverbeschichtungen vermeiden viele dieser Probleme.³ Dieser Beschichtungsprozess wurde erstmals in den 1950er Jahren eingesetzt und ist heute besonders bei Herstellern verbreitet, die Umweltauflagen zur Reduzierung flüchtiger chemischer Verbindungen unterliegen.

Das Pulver wird aufgebracht, indem man das zu beschichtende Teil elektrostatisch auflädt.⁴ Das gelingt am besten, wenn das zu beschichtende Teil leitfähig ist. Dann lädt man sehr kleine (zwischen $1\text{ }\mu\text{m}$ und $100\text{ }\mu\text{m}$) Pulverteilchen⁵ entgegengesetzt auf. Die Beschichtungsteilchen werden so von dem zu beschichtenden Körper angezogen. Lose Pulverteilchen können wieder aufbereitet und erneut verwendet werden. Sobald die Beschichtung in Pulverform aufgebracht ist, muss man sie aushärten, entweder durch erhöhte Temperatur oder durch Ultraviolettbestrahlung. Beim Aushärten verbinden sich die Moleküle der Beschichtung miteinander, und die Pulverteilchen und das zu beschichtende Objekt verlieren ihre Ladungen.

Die Pulverteilchen können durch eine Glimmentladung (Koronaentladung) oder triboelektrisch aufgeladen werden.⁶ Bei der Glimmentladung dienen Elektronen in einem Plasma zum Aufladen der Pulverteilchen, die sich auf der (positiv geladenen) Oberfläche absetzen. Bei triboelektrischer Aufladung bläst man die Pulverteilchen durch eine Röhre aus einem Material vom anderen Ende der triboelektrischen Reihe, beispielsweise Teflon. Beim Kontakt mit diesem Material erhalten die Pulverteilchen eine positive Ladung. Das zu beschichtende Objekt

wird je nach genutzter Beschichtungsmethode geladen. Die Ladungen variieren je nach Beschichtungsmaterial und den eingesetzten Additiven zwischen 500 und $1000\text{ }\mu\text{C/kg}$.⁷ Auch die Aushärtung hängt von dem Beschichtungsmaterial und der Beschaffenheit des zu beschichtenden Objekts ab. Die Aushärtezeit kann zwischen 1 und 30 min liegen.⁸



Bei der Zeichentafel „Etch-A-Sketch“ haftet ein feines Pulver durch elektrostatische Anziehung auf der Rückseite einer Mattscheibe. Durch Drehen der Knöpfe kann man einen kleinen Stift bewegen, der das Pulver abkratzt. (*Mit freundlicher Genehmigung von The Ohio Art Company*)

Obwohl die elektrostatische Pulverbeschichtung wirtschaftlich und umweltfreundlich ist, bringt sie einige Schwierigkeiten mit sich. Es gibt die Möglichkeit, dass sich die Pulverteilchen je nach Luftfeuchtigkeit entladen⁹ – deshalb muss man die Luftfeuchtigkeit genau regeln.¹⁰ Wenn das elektrische Feld für die Glimmentladung zu stark ist, treffen die Pulverteilchen zu schnell auf das zu beschichtende Objekt auf; dabei entstehen ringartige Muster mit dünnerer Beschichtung in der Mitte („Orangenschaleneffekt“).¹¹ Objekte mit komplizierter Geometrie sind nur schwierig und innen liegende Hohlräume gar nicht zu beschichten (hier wirkt das leitende Material des Hohlraums wie ein Faraday'scher Käfig; Abschnitt 19.6). Ferner eignet sich das Verfahren durch die thermische Belastung beim Aushärten nicht für alle Materialien.

Im Kontext: Pulverbeschichtung – Elektrostatik in der Industrie

1. Grandjean, A., „Tracing Device“, *U.S. Patent No. 3 055 113*, 25. Sept. 1962.
2. Matheson, R. D., „20th- to 21st-Century Technological Challenges in Soft Coatings“, *Science*, 9. Aug. 2002, 297, Nr. 5583, S. 976–979.
3. Hammerton, D. und Buysens, K., „UV-Curable Powder Coatings: Benefits and Performance“, *Paint and Coatings Industry*, Aug. 2000, S. 58.
4. Zeren, S. und Renoux, D., „Powder Coatings Additives“, *Paint and Coatings Industry*, Okt. 2002, S. 116.
5. Hemphill, R., „Deposition of BaTiO₃ Nanoparticles by Electrostatic Spray Powder Charging“, *Paint and Coatings Industry*, Apr. 2006, S. 74–78.
6. Czyzak, S. J. und Williams, D. T., „Static Electrification of Solid Particles by Spraying“, *Science*, 20. Juli 1951, 14, S. 66–68.
7. Zeren, S. und Renoux, D., a. a. O.
8. Hammerton, D. und Buysens, K., a. a. O.
9. O’Konski, C. T., „The Exponential Decay Law in Spray De-electrification“, *Science*, 5. Okt. 1951, 114, S. 368.
10. Sharma, R. et al., „Effect of Ambient Relative Humidity and Surface in Modification on the Charge Decay Properties of Polymer Powders in Powder Coating“, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jan./Feb. 2003, 39, Nr. 1, S. 87–95.
11. Wostratzky, D., Lord, S. und Sitzmann, E. V., „Power!“ *Paint and Coatings Industry*, Okt. 2000, S. 54.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Elektrische Ladung	<p>Es gibt zwei Arten der elektrischen Ladung: positive und negative. Ladungen gleichen Vorzeichen stoßen sich ab, Ladungen verschiedenem Vorzeichens ziehen sich an.</p>
Quantisierung (Quantelung)	Die elektrische Ladung ist quantisiert – sie tritt immer in ganzzahligen Vielfachen der Elementarladung e auf. Die Ladung des Elektrons ist $-e$, die des Protons ist $+e$.
Größe	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (18.1)
Erhaltung	Ladung bleibt erhalten. Sie kann weder erzeugt noch vernichtet, sondern lediglich übertragen werden. Wenn in atomaren Prozessen geladene Teilchen erzeugt oder vernichtet werden, ist die Gesamtladung der davon betroffenen Teilchen null.
2. Leiter und Nichtleiter	In Leitern ist etwa ein Elektron pro Atom delokalisiert (innerhalb des gesamten Materials frei beweglich). In Nichtleitern sind alle Elektronen lokalisiert (an Atome in der Nähe gebunden).
Erde (Erden, Erdung)	Ein sehr großer Leiter, der eine unbegrenzte Menge an Ladung aufnehmen oder liefern kann (so wie die Erde), wird als Erde bezeichnet.
3. Ladung durch Influenz	Ein Leiter kann aufgeladen werden, indem man den Leiter erdet und dann eine Ladung in die Nähe des Leiters bringt, um freie Elektronen anzuziehen oder abzustoßen. Danach trennt man die Verbindung zur Erde und entfernt die äußere Ladung aus der Nähe des Leiters.
4. Coulomb'sches Gesetz	<p>Die Kraft, die durch eine Ladung q_1 auf eine Ladung q_2 im Abstand r ausgeübt wird, ist durch</p> $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ (18.4) <p>gegeben. $\hat{\mathbf{r}}$ ist dabei der Einheitsvektor, der von q_1 nach q_2 zeigt.</p>
Elektrische Feldkonstante	<p>Die im Coulomb'schen Gesetz auftretende Proportionalitätskonstante hat den Wert</p> $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ (18.3a) <p>mit der Dielektrizitätskonstanten</p> $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$. (18.3b)
5. Elektrisches Feld	<p>Das elektrische Feld, das durch ein System von Ladungen in einem Punkt erzeugt wird, ist definiert als der Quotient aus der resultierenden Kraft \mathbf{F}, die insgesamt von den felderzeugenden Ladungen auf eine (kleine positive) Probeladung q_0 ausgeübt wird, und dem Betrag der Ladung q_0:</p> $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$ (18.5)
Feld einer Punktladung	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ (18.7)
Feld eines Systems von Punktladungen	Das elektrische Feld in einem Punkt P eines Systems von Punktladungen ist die Vektorsumme der Felder in P der einzelnen Ladungen:
	$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i$. (18.8)
6. Elektrische Feldlinien	Das elektrische Feld kann durch elektrische Feldlinien veranschaulicht werden, die an positiven Ladungen beginnen und an negativen Ladungen enden. Die elektrische Feldstärke wird durch die Dichte der elektrischen Feldlinien angezeigt.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Elektrische Dipole	Ein elektrischer Dipol ist ein System von zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen, die durch einen kleinen Abstand l voneinander getrennt sind.
Dipolmoment	$\boldsymbol{\rho} = q \mathbf{l}$ (18.9) \mathbf{l} zeigt von der negativen zur positiven Ladung.
Feld eines Dipols	Das elektrische Fernfeld, das ein Dipol erzeugt, ist proportional zu dem Dipolmoment und umgekehrt proportional zu der dritten Potenz des Abstands von dem Dipol.
Drehmoment eines Dipols	In einem homogenen elektrischen Feld ist die resultierende Kraft auf einen Dipol null, aber es gibt ein Drehmoment, das versucht, den Dipol in die Richtung des Felds zu drehen: $\mathbf{M} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{E}. \quad (18.11)$
Potenzielle Energie eines Dipols	$E_{\text{pot}} = -\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{E} + U_0 \quad (18.12)$ U_0 wird üblicherweise gleich null gesetzt.
8. Polare und nichtpolare Moleküle	Polare Moleküle, z. B. H ₂ O oder HCl, haben permanente Dipolmomente, da ihre positiven und negativen Ladungszentren nicht zusammenfallen. Sie verhalten sich wie Dipole in einem elektrischen Feld. Nichtpolare Moleküle besitzen kein permanentes Dipolmoment. In einem elektrischen Feld können in ihnen Dipolmomente induziert werden.

Antworten auf die Verständnisfragen

- a) $\frac{1}{2}q$. Da die Kugeln identisch sind, muss sich die Ladung gleichmäßig auf ihnen verteilen. b) $+2q$; dieser Wert ist notwendig, um die Ladungserhaltung zu gewährleisten.
- $q_1 = +q/2$, $q_2 = -q/4$ und $q_3 = -q/4$

Lösungen der Übungen

- $n = q/e = (50 \cdot 10^{-9} \text{ C})/(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 3,1 \cdot 10^{11}$. Bei einer Ladung von dieser Größe kann man eine Ladungsquantisierung nicht mehr wahrnehmen. Selbst eine Zunahme oder eine Abnahme von einer Million Elektronen erzeugt einen vernachlässigbar kleinen Effekt.
- Ungefähr $35 \cdot 10^{-9}$ Prozent
- $2,25 \cdot 10^{-3} \text{ N}$
- $+(6,3 \mu\text{N}) \hat{x}$
- $\hat{\mathbf{r}}_1 = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$
- Nein. Um das zu zeigen, nehmen Sie an, sie wäre es. Da die x -Komponente von $\hat{\mathbf{r}}_1$ kleiner ist als der Betrag von $\hat{\mathbf{r}}_1$, ist der Nenner von $(1/4\pi\epsilon_0)q_0/x_1^2$ kleiner als der Nenner von $(1/4\pi\epsilon_0)q_0/r_1^2$. Dann müsste die x -Komponente von \mathbf{F}_1 größer sein als der Betrag von \mathbf{F}_1 , und das ist unmöglich, denn eine Komponente eines Vektors ist niemals größer als dessen Betrag. Daher muss die x -Komponente der Kraft $\mathbf{F}_1 = (1/4\pi\epsilon_0)(q_1 q_0/r_1^2) \hat{\mathbf{r}}_1$ nicht unbedingt gleich $|\mathbf{F}_{1,x}| = (1/4\pi\epsilon_0) q_1 q_0/x_1^2$ sein.
- $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0 = (4,0 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \hat{x}$
- $(-6,4 \cdot 10^{-15} \text{ N}) \hat{x}$
- $x = 1,80 \text{ m}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

18.1 •• Sie wollen mit einem einfachen Experiment das Coulomb'sche Gesetz widerlegen: Zunächst gehen Sie mit einem Gummikamm durch Ihre trockenen Haare, dann ziehen sie mit dem Kamm kleine neutrale Papierfetzen auf dem Tisch an. Sie sagen: „Damit elektrostatische Anziehungskräfte zwischen zwei Körpern wirken, müssen dem Coulomb'schen Gesetz zufolge beide Körper geladen sein. Das Papier war jedoch nicht geladen. Nach dem Coulomb'schen Gesetz hätten keine elektrostatischen Anziehungskräfte auftreten dürfen, sie sind aber offenbar doch aufgetreten. Daher stimmt das Gesetz nicht.“ a) Worin liegt der Fehler Ihrer Argumentation? b) Muss für eine Anziehungskraft zwischen dem Papier und dem Kamm die Gesamtladung auf dem Kamm negativ sein? Erläutern Sie Ihre Antwort.

18.2 •• Sie haben einen positiv geladenen nichtleitenden Stab und zwei Metallkugeln auf Isolierfüßen. Erläutern Sie Schritt für Schritt genau, wie sie mit dem Stab eine der Kugeln negativ laden können.

18.3 •• Sie können die elektrostatische Anziehung einfach demonstrieren, indem Sie eine kleine Kugel aus zerknüllter Aluminiumfolie an einem herabhängenden Bindfaden befestigen und einen geladenen Stab in die Nähe bringen. Anfänglich wird die Kugel von dem Stab angezogen, sobald sie sich berühren, wird sie jedoch stark von ihm abgestoßen. Erläutern Sie dieses Verhalten.

18.4 •• Drei Punktladungen, $+q_0$, $+q$ und $-q$, befinden sich in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks (Abbildung 18.33). Keine anderen geladenen Körper befinden sich in der Nähe. a) In welche Richtung wirkt die resultierende Kraft auf die Ladung $+q_0$, die durch die anderen beiden Ladungen verursacht wird? b) Welche resultierende elektrische Kraft wirkt auf diese Ladungsanordnung? Erläutern Sie.

$+q_0$

$+$

$+q$

$-$

Abbildung 18.33 Zu Aufgabe 18.4.

18.5 •• Vier Ladungen befinden sich in den Ecken eines Quadrats (Abbildung 18.34). Keine anderen geladenen Körper befinden sich in der Nähe. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? a) Das elektrische Feld E ist null in allen Punkten in der Mitte zwischen zwei Ladungen längs der Seiten des Quadrats. b) E ist null im Mittelpunkt des Quadrats. c) E ist null in der Mitte zwischen den beiden oberen und in der Mitte zwischen den beiden unteren Ladungen.

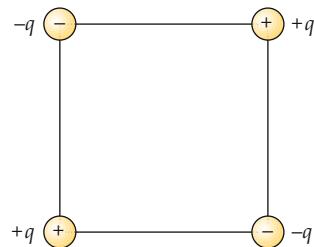


Abbildung 18.34 Zu Aufgabe 18.5.

18.6 •• Zwei Punktladungen, $+q$ und $-3q$, sind durch einen kleinen Abstand d voneinander getrennt. a) Veranschaulichen Sie mit elektrischen Feldlinien das elektrische Feld in der Nähe dieses Systems. b) Zeichnen Sie auch die Feldlinien für Entfernung, die groß gegenüber dem Abstand der Ladungen sind.

18.7 •• Ein ruhendes Molekül mit einem elektrischen Dipolmoment ρ ist so orientiert, dass ρ mit einem homogenen elektrischen Feld E einen Winkel θ einschließt. Das Molekül kann sich nun als Reaktion auf die durch das Feld wirkende Kraft frei bewegen. Beschreiben Sie die Bewegung des Moleküls.

18.8 •• Richtig oder falsch? a) Das elektrische Feld einer Punktladung zeigt immer von der Ladung weg. b) Die elektrische Kraft auf ein geladenes Teilchen in einem elektrischen Feld weist stets in dieselbe Richtung wie das Feld. c) Elektrische Feldlinien kreuzen sich nie. d) Alle Moleküle haben in Gegenwart eines äußeren elektrischen Felds ein elektrisches Dipolmoment.

18.9 •• Zwei Moleküle haben Dipolmomente vom selben Betrag und sind auf vier verschiedene Arten orientiert (Abbildung 18.35). Bestimmen Sie jeweils die Richtung des elektrischen Felds in den durch die Zahlen gekennzeichneten Punkten. Erläutern Sie Ihre Antworten.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

18.10 •• Schätzen Sie die Kraft ab, die notwendig ist, um den He-Kern zusammenzuhalten. (*Hinweis:* Modellieren Sie die

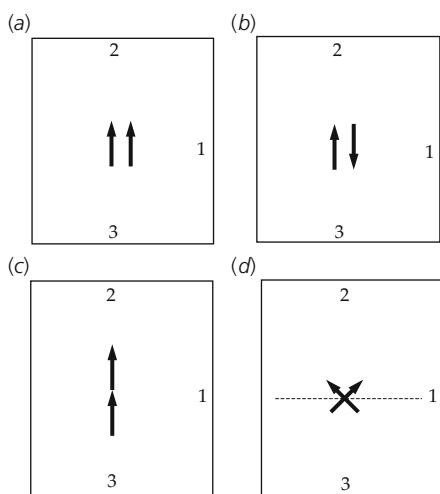


Abbildung 18.35 Zu Aufgabe 18.9.

Protonen als Punktladungen. Den Abstand zwischen ihnen müssen Sie schätzen.)

18.11 •• Bei einem verbreiteten Schauversuch reibt man einen Kunststoffstab an einem Fell, um ihn aufzuladen, und hält den Stab dann in die Nähe einer leeren Getränkedose (Abbildung 18.36). Erläutern Sie, warum die Dose sich auf den Stab zu bewegt.

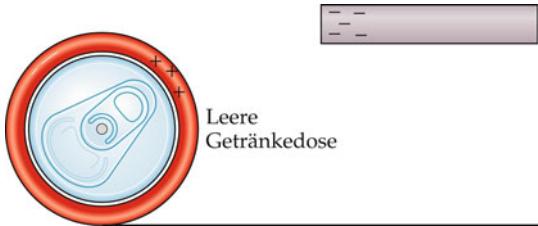


Abbildung 18.36 Zu Aufgabe 18.11.

Elektrische Ladung

18.12 • Eine Ladung, die der Ladung der Avogadro-Zahl von Protonen ($n_A = 6,02 \cdot 10^{23}$) entspricht, nennt man ein *Faraday*. Wie viele Coulomb sind das?

18.13 • Welche Gesamtladung haben alle Protonen in 1,00 kg Kohlenstoff?

Das Coulomb'sche Gesetz

18.14 • Drei Punktladungen befinden sich auf der x -Achse: $q_1 = -6,0 \mu\text{C}$ bei $x = -3,0 \text{ m}$, $q_2 = 4,0 \mu\text{C}$ im Koordinatenursprung und $q_3 = -6,0 \mu\text{C}$ bei $x = 3,0 \text{ m}$. Berechnen Sie die Kraft auf q_1 .

18.15 •• Eine Punktladung von $-2,5 \mu\text{C}$ befindet sich im Koordinatenursprung. Eine zweite Ladung von $6,0 \mu\text{C}$ ist bei $x = 1,0 \text{ m}$, $y = 0,5 \text{ m}$. Eine dritte Punktladung – ein Elektron – befindet sich in einem Punkt mit den Koordinaten (x, y) . Berechnen Sie die Werte für x und y , bei denen sich das Elektron im Gleichgewicht befindet.

18.16 ••• Fünf gleiche Punktladungen q sind gleichmäßig auf einem Halbkreis vom Radius r verteilt (Abbildung 18.37). Geben Sie mithilfe von $1/4\pi\epsilon_0$, q und r die Kraft auf eine Ladung q_0 an, die sich gleich weit von den anderen fünf Ladungen befindet.

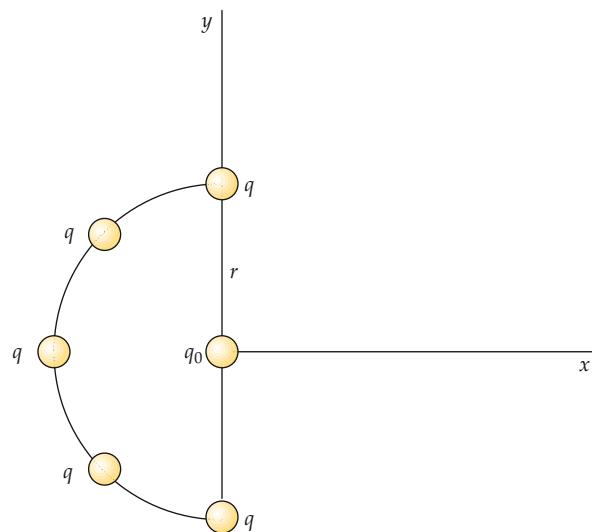


Abbildung 18.37 Zu Aufgabe 18.16.

Elektrisches Feld

18.17 • Zwei Punktladungen von je $+4,0 \mu\text{C}$ befinden sich auf der x -Achse, eine im Koordinatenursprung und die andere bei $x = 8,0 \text{ m}$. Berechnen Sie das elektrische Feld auf der x -Achse bei a) $x = -2,0 \text{ m}$, b) $x = 2,0 \text{ m}$, c) $x = 6,0 \text{ m}$ und d) $x = 10 \text{ m}$. e) An welchem Punkt auf der x -Achse ist das elektrische Feld null? f) Skizzieren Sie E_x in Abhängigkeit von x über den Bereich $-3,0 \text{ m} < x < 11 \text{ m}$.

18.18 • Das elektrische Feld in der Nähe der Erdoberfläche zeigt nach unten und hat eine Größe von 150 N/C . a) Vergleichen Sie den Betrag der nach oben gerichteten elektrischen Kraft auf ein Elektron mit dem Betrag der nach unten gerichteten Gravitationskraft. b) Welche Ladung muss ein Tischtennisball mit einer Masse von $2,70 \text{ g}$ tragen, sodass die elektrische Kraft seine Gewichtskraft in der Nähe der Erdoberfläche ausgleicht?

18.19 •• Zwei gleiche positive Ladungen q sind auf der y -Achse, die eine bei $y = +a$, die andere bei $y = -a$. a) Zeigen

Sie, dass für Punkte auf der x -Achse die x -Komponente des elektrischen Felds den Betrag $E_x = (1/4\pi\epsilon_0) 2q x/(x^2 + a^2)^{3/2}$ hat. b) Zeigen Sie, dass in der Nähe des Koordinatenursprungs (d. h. für $x \ll a$) näherungswise gilt: $E_x \approx (1/4\pi\epsilon_0) 2q x/a^3$. c) Zeigen Sie, dass für $x \gg a$ das Feld näherungswise durch $E_x \approx (1/4\pi\epsilon_0) 2q/x^2$ gegeben ist. Erläutern Sie, warum man dieses Ergebnis erwarten würde, ohne es durch eine passende Grenzwertbetrachtung herzuleiten.

18.20 •• a) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld für die Ladungsverteilung in Aufgabe 18.19 seinen größten Betrag an den Punkten $x = a/\sqrt{2}$ und $x = -a/\sqrt{2}$ besitzt, indem Sie $\partial E_x / \partial x$ berechnen und die Ableitung null setzen. b) Skizzieren Sie die Funktion E_x über x unter Benutzung des Ergebnisses von Teilaufgabe a dieser Aufgabe und den in den Teilaufgaben b und c aus Aufgabe 18.19 angegebenen Ausdrücken.

Bewegung von Punktladungen in elektrischen Feldern

18.21 •• Die Beschleunigung eines Teilchens in einem elektrischen Feld hängt von dem Verhältnis seiner Ladung zu seiner Masse ab. a) Berechnen Sie q/m für ein Elektron. b) Welchen Betrag und welche Richtung hat die Beschleunigung eines Elektrons in einem homogenen elektrischen Feld der Stärke 100 N/C ? c) Berechnen Sie die Zeit, die ein ruhendes Elektron in einem elektrischen Feld mit der Stärke von 100 N/C braucht, um eine Geschwindigkeit von $0,01c$ zu erlangen. (Wenn sich die Geschwindigkeit des Elektrons der Lichtgeschwindigkeit c nähert, muss man zur Berechnung seiner Bewegung die relativistische Mechanik zugrunde legen. Bei Geschwindigkeiten von $0,01c$ oder weniger liefert die Newton'sche Mechanik hinreichend genaue Ergebnisse.) d) Wie weit bewegt sich das Elektron in dieser Zeit?

18.22 •• Ein Elektron hat eine kinetische Energie von $2,00 \cdot 10^{-16} \text{ J}$ und bewegt sich entlang der Achse einer Kathodenstrahlröhre nach rechts (Abbildung 18.38). Im Bereich zwischen den Ablenkplatten herrscht ein elektrisches Feld von $\mathbf{E} = (2,00 \cdot 10^4 \text{ N/C}) \hat{\mathbf{y}}$, außerhalb des Bereichs gibt es kein elektrisches Feld ($\mathbf{E} = 0$). a) Wie weit ist das Elektron von der Achse entfernt, wenn es den Bereich zwischen den Platten durchflogen hat? b) In welchem Winkel zur Achse bewegt sich das Elektron dabei? c) In welcher Entfernung von der Achse trifft das Elektron auf die Fluoreszenzschicht der Mattscheibe?

Dipole

18.23 • Zwei Punktladungen $q_1 = 2,0 \text{ pC}$ und $q_2 = -2,0 \text{ pC}$ sind durch einen Abstand von $4,0 \mu\text{m}$ voneinander getrennt. a) Wie groß ist das Dipolmoment von diesem Ladungspaar? b) Tragen Sie in einer Skizze das Ladungspaar und die Richtung des Dipolmoments ein.

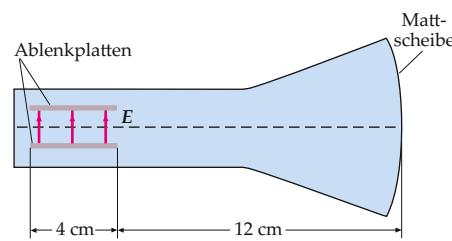


Abbildung 18.38 Zu Aufgabe 18.22.

Allgemeine Aufgaben

18.24 •• Eine positive Ladung q wird in zwei positive Ladungen q_1 und q_2 getrennt. Zeigen Sie, dass die Kraft, die von einer Ladung auf die andere ausgeübt wird, für einen gegebenen Abstand d dann am größten ist, wenn $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}q$ ist.

18.25 •• Zwei punktförmige Teilchen sind durch einen Abstand von $0,60 \text{ m}$ voneinander getrennt und tragen eine Gesamtladung von $200 \mu\text{C}$. Bestimmen Sie die Ladungen von jedem der beiden Teilchen, wenn sie a) mit einer Kraft von 80 N anziehen.

18.26 •• Ein punktförmiges Teilchen mit der Ladung $+q$ und unbekannter Masse m befindet sich anfangs in Ruhe. Es wird in einem homogenen elektrischen Feld \mathbf{E} , das senkrecht nach unten gerichtet ist, aus einer Höhe h fallen gelassen. Das Teilchen trifft mit einer Geschwindigkeit $v = 2\sqrt{gh}$ auf der Erde auf. Berechnen Sie m in Abhängigkeit von E , q und g .

18.27 •• Ein starrer Stab von $1,00 \text{ m}$ Länge ist in seinem Mittelpunkt drehbar gelagert (Abbildung 18.39). Eine Ladung $q_1 = 5,00 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ wird an einem Ende des Stabs angebracht, eine weitere Ladung $q_2 = -q_1$ wird im Abstand $d = 10,0 \text{ cm}$ direkt darunter platziert. a) Welche Kraft übt q_2 auf q_1 aus? b) Welches Drehmoment (bezüglich der Drehachse) ruft diese Kraft hervor? c) Um die Anziehungskraft zwischen den Ladungen auszugleichen, wird, wie in der Abbildung gezeigt, ein Massestück in $25,0 \text{ cm}$ Entfernung vom Drehpunkt angehängt. Welche Masse m sollte dieses Stück haben? d) Wir hängen nun das Massestück in $25,0 \text{ cm}$ Entfernung vom Drehpunkt auf die andere (die den Ladungen zugewandte) Seite des Stabs. q_1 und d bleiben unverändert. Welchen Wert muss q_2 haben, damit die Anordnung im Gleichgewicht bleibt?

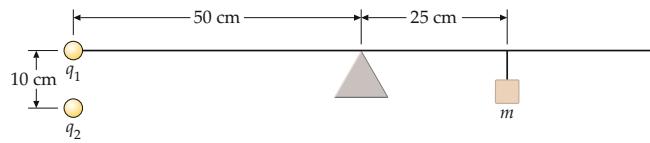


Abbildung 18.39 Zu Aufgabe 18.27.

18.28 •• Zwei Punktladungen von je $3,0 \mu\text{C}$ befinden sich in den Punkten $x = 0, y = 2,0 \text{ m}$ und $x = 0, y = -2,0 \text{ m}$. Zwei weitere Punktladungen, jeweils mit der Ladung q , befinden sich in den Punkten $x = 4,0 \text{ m}, y = 2,0 \text{ m}$ und $x = 4,0 \text{ m}, y = -2,0 \text{ m}$ (Abbildung 18.40). Das elektrische Feld bei $x = 0, y = 0$ aufgrund der vier Ladungen ist $(4,0 \cdot 10^3 \text{ N/C}) \hat{x}$. Bestimmen Sie q .

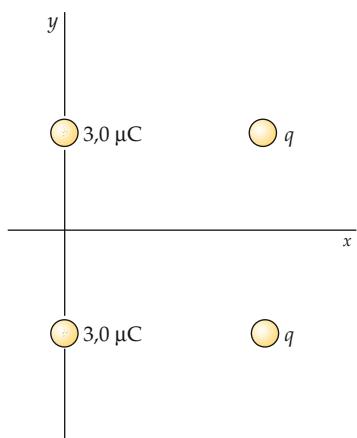


Abbildung 18.40 Zu Aufgabe 18.28.

18.29 •• Vier Ladungen gleichen Betrags sind in den Ecken eines Quadrats der Seitenlänge l angeordnet (Abbildung 18.41). a) Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Kraft, die durch die anderen Ladungen auf die Ladung in der unteren linken Ecke ausgeübt wird. b) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld im Mittelpunkt einer der Quadratseiten zur negativen Ladung hin gerichtet ist und dass die Feldstärke durch

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8q}{l^2} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{25}\right)$$

gegeben ist.

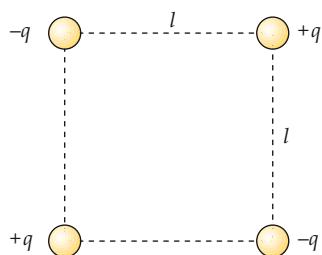


Abbildung 18.41 Zu Aufgabe 18.29.

18.30 •• Ein Elektron (Ladung $-e$, Masse m) und ein Positron (Ladung $+e$, Masse m) drehen sich unter dem Einfluss ihrer anziehenden Coulomb-Kraft um ihren gemeinsamen Massenmittelpunkt. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v jedes Teilchens in Abhängigkeit von e, m, ϵ_0 und ihrem Abstand r .

18.31 ••• Ein punktförmiges Teilchen mit der Masse m und einer Ladung q_0 kann sich nur senkrecht innerhalb eines engen reibungsfreien Zylinders bewegen (Abbildung 18.42). Am Boden des Zylinders befindet sich eine Punktladung q , die das gleiche Vorzeichen wie q_0 hat. a) Zeigen Sie, dass das Teilchen in einer Höhe von $y_0 = \sqrt{(1/4\pi\epsilon_0)(q_0 q/m g)}$ im Gleichgewicht ist. b) Zeigen Sie, dass das Teilchen eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{2g/y_0}$ ausführt, wenn es um eine kleine Strecke aus seiner Gleichgewichtslage verschoben wird und dann sich selbst überlassen bleibt.

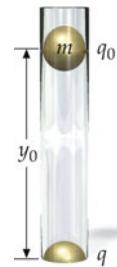


Abbildung 18.42 Zu Aufgabe 18.31.

18.32 ••• Im Millikan-Experiment, das zum Bestimmen der Ladung eines Elektrons dient, wird ein geladenes Polystyrolkugelchen in ruhender Luft in ein bekanntes senkrechtes elektrisches Feld gebracht. Das geladene Kugelchen wird in Richtung der auf es wirkenden Gesamtkraft beschleunigt, bis es seine Endgeschwindigkeit erreicht. Die Ladung des Kugelchens wird durch Messen der Endgeschwindigkeit bestimmt. In einem solchen Experiment hat das Kugelchen einen Radius von $r = 5,50 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, die Feldstärke beträgt $E = 6,00 \cdot 10^4 \text{ N/C}$. Der Betrag der Reibungskraft auf die Kugel ist $F_R = 6\pi\eta rv$; dabei ist v die Geschwindigkeit der Kugel und η die Viskosität von Luft mit einem Wert von $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$. Das Polystyrol hat eine Dichte von $1,05 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. a) Das elektrische Feld zeigt nach unten, sodass das Kugelchen eine Endgeschwindigkeit von $v = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$ erhält. Wie groß ist dann die Ladung auf der Kugel? b) Wie viele überschüssige Elektronen sind auf der Kugel? c) Wie groß ist die Endgeschwindigkeit der Mikrokugel, wenn die Richtung des elektrischen Felds umgekehrt wird, aber die Feldstärke gleich bleibt?

18.33 ••• In Aufgabe 18.32 wurde das Millikan-Experiment beschrieben, das zur Bestimmung der Ladung des Elektrons dient. In dem Experiment kann man die Richtung des elektrischen Felds durch einen Schalter umkehren (nach oben oder nach unten); die Feldstärke bleibt dabei unverändert, sodass man die Endgeschwindigkeit des Kugelchens messen kann, wenn es sich nach oben (entgegen der Gravitationskraft) und nach unten bewegt. Es sei v_u (Index u von up) die Endgeschwindigkeit, mit der sich das Teilchen nach oben bewegt, und v_d (Index d von down) die Endgeschwindigkeit für eine Bewegung nach unten. a) Setzen Sie $v = v_u + v_d$. Zeigen Sie, dass $q = 3\pi\eta rv/E$ ist (q ist dabei die Gesamtladung des Kugelchens). Welchen Vorteil bringt es bei der Bestimmung von q , anstelle einer einzigen Ge-

schwindigkeit beide Geschwindigkeiten v_u und v_d zu messen?
b) Da die Ladung gequantelt ist, kann sich v nur in Schritten mit dem Betrag $n \Delta v$ ändern (n ist dabei eine ganze Zahl). Berechnen Sie $n \Delta v$ mit den Daten aus Aufgabe 18.32.

Das elektrische Feld II: Kontinuierliche Ladungsverteilungen

19



Ein Blitz ist ein elektrisches Phänomen. Während eines Blitzschlags werden Ladungen zwischen den Wolken und der Erde ausgetauscht. Das dabei abgestrahlte sichtbare Licht stammt von Luftmolekülen, die durch die entstehende Hitze in energetisch höhere Zustände gehoben werden und dann wieder zurückfallen. (© Frank Waßerführer/Pitopia.)

Wie würden Sie die Ladung auf der Oberfläche der Erde berechnen? (Siehe Beispiel 19.15.)

19.1	Das Konzept der Ladungsdichte	688
19.2	Berechnung von E mit dem Coulomb'schen Gesetz	688
19.3	Das Gauß'sche Gesetz	699
19.4	Berechnung von E mit dem Gauß'schen Gesetz	704
19.5	Diskontinuität von E_n	711
19.6	Ladung und Feld auf Leiteroberflächen	711
19.7	*Die Äquivalenz des Gauß'schen und des Coulomb'schen Gesetzes	714
	Zusammenfassung	717
	Aufgaben	719

Im mikroskopischen Maßstab ist die elektrische Ladung quantisiert; sie tritt immer als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung e auf. Jedoch gibt es im makroskopischen Bereich genügend Fälle, in denen viele Ladungen so dicht zusammen sind, dass man sie als über ein Raumgebiet kontinuierlich verteilt ansehen kann. Wir werden das Konzept der Ladungsdichte zusammen mit Symmetrieeigenschaften zur Beschreibung von Ladungen anwenden, ganz ähnlich wie wir die Massendichte zum Beschreiben von Masseverteilungen verwenden.

In diesem Kapitel zeigen wir, wie man mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes das elektrische Feld verschiedener kontinuierlicher Ladungsverteilungen berechnet. Wir führen darüber hinaus das Gauß'sche Gesetz ein und berechnen damit die elektrischen Felder von Ladungsverteilungen mit bestimmten Symmetrieeigenschaften.

19.1 Das Konzept der Ladungsdichte

Die Beschreibung einer sehr großen Zahl von diskreten Ladungen durch eine kontinuierliche Ladungsdichte ähnelt dem Vorgehen, wenn wir beispielsweise Luft, die ebenfalls aus einer großen Zahl von diskreten Molekülen besteht, durch eine kontinuierliche Massendichte beschreiben. In beiden Fällen lässt sich leicht ein Volumenelement ΔV finden, das einerseits groß genug ist, damit es genügend viele Ladungen bzw. Moleküle enthält, andererseits aber immer noch klein genug, dass man ΔV als Differenzial dV ansehen kann.

Um das Konzept der Ladungsdichte einzuführen, betrachten wir ein endliches Raumgebiet V , in dem elektrische Ladungen kontinuierlich verteilt sind, sodass im Volumenelement dV die Ladung dq enthalten ist. Die sogenannte **Raumladungsdichte** ρ ist definiert durch den Quotienten der Differenziale dq und dV :

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (19.1)$$

Die Raumladungsdichte ρ ist eine Funktion des Orts in dem betrachteten Raumgebiet V . Die Ladungsverteilung heißt *homogen*, wenn ρ konstant ($\neq 0$) ist, sonst *inhomogen*.

Häufig ist die Ladung (in einer sehr dünnen Schicht) auf der (Ober-)Fläche eines Körpers verteilt. Wir definieren die (**Ober-**) **Flächenladungsdichte** σ durch

$$\sigma = \frac{dq}{dA}. \quad (19.2)$$

dq ist hier die Ladung im Flächenelement dA .

Entsprechend wird einer kontinuierlichen Ladungsverteilung längs einer Linie im Raum die **Linienladungsdichte** λ zugeordnet, indem man definiert:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}. \quad (19.3)$$

Hier ist dq die Ladung des Linienelements dl .

Die Berechnung von Gesamtladungen und den durch sie erzeugten elektrischen Feldern bei gegebenen kontinuierlichen Ladungsverteilungen ist grundsätzlich eine Integrationsaufgabe über räumliche Bereiche, Flächenstücke oder geschlossene Oberflächen und über Kurven. Nur für einfache geometrische Ladungsverteilungen sind analytische Lösungen des Integrationsproblems zu erwarten. In vielen praktischen Anwendungen führen numerische Integrationsmethoden zu Näherungslösungen.

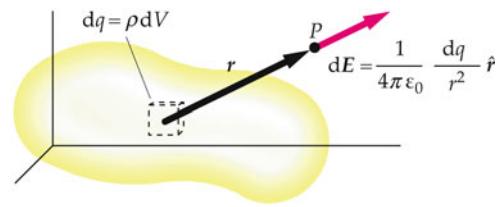


Abbildung 19.1 Ein Ladungselement dq erzeugt ein Feld $dE = (1/4\pi\epsilon_0)(dq/r^2)\hat{r}$ im Punkt P . Das Feld in P berechnet man durch Integration von Gleichung 19.4a über die gesamte Ladungsverteilung.

19.2 Berechnung von E mit dem Coulomb'schen Gesetz

Abbildung 19.1 zeigt ein Ladungselement $dq = \rho dV$, das hinreichend klein gewählt wird, sodass man es als Punktladung betrachten kann. Das Coulomb'sche Gesetz liefert dann das elektrische Feld dE im Feldpunkt P , das von dem Ladungselement erzeugt wird:

$$dE = dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}. \quad (19.4a)$$

Darin ist \hat{r} der Einheitsvektor, der von dem Ladungselement dq im Quellpunkt zum Feldpunkt P zeigt. dE_r (die Komponente von dE in Richtung von \hat{r}) ist gegeben durch $1/(4\pi\epsilon_0) dq/r^2$.

Das Gesamtfeld in P erhält man durch die Integration dieses Ausdrucks über die gesamte Ladungsverteilung. So ergibt sich

$$E = \int dE = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}. \quad (19.4b)$$

ELEKTRISCHES FELD EINER KONTINUIERLICHEN LADUNGSVERTEILUNG

Darin ist $dq = \rho dV$. Wenn die Ladung auf einer Oberfläche verteilt ist, verwendet man $dq = \sigma dA$ und integriert über die Oberfläche. Für eine lineare Verteilung benutzt man $dq = \lambda dl$ mit Integration über eine Linie.

Die Beispiele 19.1 bis 19.8 in diesem Abschnitt zeigen detailliert die Berechnung des elektrischen Felds für unterschiedliche Geometrien und verschiedene definierte Ladungsverteilungen.

Beispiel 19.1: Elektrisches Feld einer endlichen Linienladung

Ein dünner Stab der Länge l und der Gesamtladung q ist gleichmäßig geladen, d. h., die lineare Ladungsdichte beträgt $\lambda = q/l$. Bestimmen Sie das elektrische Feld dieser Linienladung in einem beliebigen Punkt P .

Vorgehensweise:**Die Berechnung von E mit den Gleichungen 19.4a und 19.4b**

- Skizzieren Sie die Ladungsverteilung sowie den Feldpunkt P , für den E berechnet werden soll. Die Skizze sollte ferner ein Ladungselement dq an einem beliebigen Quellpunkt S enthalten. Tragen Sie die Koordinatenachsen in Ihrer Skizze ein. Wenn Sie die Achsen wählen, sollten Sie die Symmetrie der Ladungsverteilung ausnutzen. Wenn Sie beispielsweise eine Ladungsverteilung längs einer Linie betrachten, wählen Sie diese Linie als eine der Koordinatenachsen (wie in Abbildung 19.2). Zeichnen Sie eine zweite Achse so, dass sie durch den Feldpunkt P verläuft. Tragen Sie ferner die Koordinaten von P und S ein, den Abstand r zwischen P und S sowie den Einheitsvektor \hat{r} , der von P nach S zeigt.
- Um das elektrische Feld E mit Gleichung 19.4b zu berechnen, drücken Sie $dE = dE_r \hat{r}$ in Komponentenform aus. Die x -Komponente von dE ist $dE_x = dE_r \hat{r} \cdot \hat{x} = dE_r \cos \theta$; dabei ist θ der Winkel zwischen \hat{r} und \hat{x} , die y -Komponente von dE ist $dE_y = dE_r \hat{r} \cdot \hat{y} = dE_r \sin \theta$.
- Drücken Sie E in Gleichung 19.4b mithilfe der x - und y -Komponenten aus:

$$E_x = \int dE_x = \int dE_r \cos \theta = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta,$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE_r \sin \theta = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \sin \theta.$$

- Um E_x zu berechnen, drücken Sie das Ladungselement je nach den Gegebenheiten als ρdV , als σdA oder λdl aus und integrieren Sie den so entstandenen Term. E_y berechnen Sie analog.
- Manchmal kann man mithilfe von Symmetrieargumenten zeigen, dass eine oder mehrere Komponenten von E null sind. (Ein solches Symmetrieargument wird etwa in Beispiel 19.5 verwendet, um $E_y = 0$ zu zeigen.)

Plausibilitätsprüfung: Wenn die Ladungsverteilung auf einen kleinen Raumbereich in großer Entfernung vom Feldpunkt beschränkt ist, nähert sich der Ausdruck für das elektrische Feld dem für das Feld einer Punktladung an, die sich im Ladungsmittelpunkt befindet. (Wenn die Ladungsverteilung in irgendeiner Weise symmetrisch ist, lässt sich der Ladungsmittelpunkt oft schon anhand des Raumgebiets erkennen.)

Problembeschreibung: Wählen Sie die x -Achse so, dass der Stab auf der x -Achse zwischen den Punkten x_1 und x_2 liegt; die y -Achse soll durch den Feldpunkt P verlaufen. Bezeichnen Sie mit y den radialen Abstand von P zur x -Achse. Um das elektrische Feld E in P zu berechnen, bestimmen Sie einzeln E_x und E_y . Mit Gleichung 19.4a können Sie zunächst die Feldänderung dE in P bei einer beliebigen Änderung dq der Ladungsverteilung bestimmen. Dann integrieren Sie gemäß Gleichung 19.4b jede Komponente von dE über die gesamte Ladungsverteilung.

Lösung: 1. Zeichnen Sie die Ladungsverteilung und den Feldpunkt P . Fügen Sie die x - und die y -Achse ein; die x -Achse legen Sie entlang der Ladungsverteilung, die y -Achse lassen Sie durch P laufen. Kennzeichnen Sie ferner ein *beliebiges* Element der Linienladung im Quellpunkt S (bei $x = x_S$) ein; das Element soll die Länge dx_S haben und eine Ladung dq tragen. Zeichnen Sie das durch dq in P hervorgerufene Feld ein. Tragen Sie den elektrischen Feldvektor dE so ein, als ob dq positiv wäre (Abbildung 19.2).

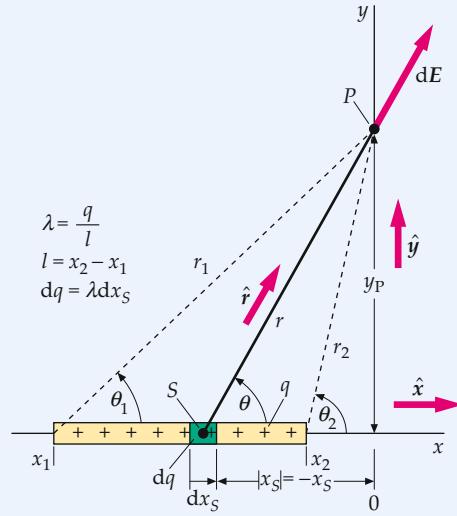


Abbildung 19.2 Geometrie für die Berechnung des elektrischen Felds in einem Feldpunkt P , der durch einen homogen geladenen Stab verursacht wird.

2. Für das Feld gilt $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}$. Geben Sie mithilfe von dE_r und θ Ausdrücke für dE_x und dE_y an. Dabei ist dE_r die Komponente von $d\mathbf{E}$ in Richtung vom Quellpunkt S zum Feldpunkt P :

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= dE_r \hat{\mathbf{r}} \\ dE_x &= dE_r \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = dE_r \cos \theta \\ dE_y &= dE_r \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = dE_r \sin \theta \end{aligned}$$

3. Zunächst lösen wir nach E_x auf. Drücken Sie dE_r mithilfe von Gleichung 19.4a aus, dabei ist r der Abstand zwischen dem Quellpunkt S und dem Feldpunkt P . Aus Abbildung 19.2 erkennt man, dass $\cos \theta = |x_S|/r = -x_S/r$. Wenden Sie außerdem die Definition der Linienladungsdichte $dq = \lambda dx_S$ an:

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

und

$$\cos \theta = \frac{-x_S}{r}$$

also

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta \lambda dx_S}{r^2}$$

4. Integrieren Sie das Ergebnis aus Schritt 3:

$$E_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta \lambda dx_S}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos \theta dx_S}{r^2}$$

5. Ändern Sie nun die Integrationsvariable von x_S zu θ . Aus Abbildung 19.2 können Sie den Zusammenhang zwischen x_S und θ und zwischen r und θ ablesen:

$$\tan \theta = \frac{y_p}{|x_S|}$$

und damit

$$x_S = -\frac{y_p}{\tan \theta} = -y_p \cot \theta$$

$$\sin \theta = \frac{y_p}{r}$$

also

$$r = \frac{y_p}{\sin \theta}$$

6. Differenzieren Sie das Ergebnis aus Schritt 5. Dann erhalten Sie einen Ausdruck für dx_S (der Feldpunkt P bleibt fix, y_p ist daher konstant):

$$dx_S = -y_p \frac{dcot \theta}{d\theta} = y_p \csc^2 \theta d\theta$$

7. Setzen Sie in dem in Schritt 4 erhaltenen Integral $dx_S = y_p \csc^2 \theta d\theta$ und $r = y_p/\sin \theta$ und vereinfachen Sie:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos \theta dx_S}{r^2} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta y_p \csc^2 \theta d\theta}{y_p^2 / \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{y_p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \quad (y_p \neq 0) \end{aligned}$$

8. Berechnen Sie das Integral und lösen Sie nach E_x auf:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y_p} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y_p} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y_p} \left(\frac{y_p}{r_2} - \frac{y_p}{r_1} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

$(r_1 > 0 \text{ und } r_2 > 0)$

9. Wiederholen Sie Schritt 3 bis 7 analog für E_y (vgl. dazu auch Aufgabe 19.10):

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y_p} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left(\frac{\cot \theta_2}{r_2} - \frac{\cot \theta_1}{r_1} \right) \quad (y_p \neq 0) \\ E_y &= 0 \quad (y_p = 0) \end{aligned}$$

10. Kombinieren Sie die Ergebnisse aus Schritt 8 und 9 und geben Sie den Ausdruck für das elektrische Feld in P an:

$$\mathbf{E} = [E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}]$$

Plausibilitätsprüfung: Betrachten Sie die Ebene, die senkrecht auf dem Stab steht und ihn in zwei Hälften teilt. Aus Symmetriegründen muss \mathbf{E} für Punkte auf dieser Ebene vom Mittelpunkt des Stabs weg weisen. Wir erwarten daher, dass für alle Punkte dieser Ebene $E_x = 0$ ist, was sich aus Schritt 8 mit $r_1 = r_2$ ergibt.

Weitergedacht: Der erste Ausdruck für E_y im Ergebnis aus Schritt 9 gilt für die gesamte x - y -Ebene außer der x -Achse. Die zwei Kotangensfunktionen in dem Ausdruck für E_y sind gegeben durch

$$\cot \theta_1 = \frac{-x_1}{y_p}$$

und

$$\cot \theta_2 = \frac{-x_2}{y_p}.$$

19.2 Berechnung von E mit dem Coulomb'schen Gesetz

Keine dieser Funktionen ist für die x -Achse definiert (dort ist $y_P = 0$). Den zweiten Ausdruck für E_y im Ergebnis aus Schritt 9 erhält man mit Gleichung 19.4a. Da auf der x -Achse stets $\hat{r} = \pm \hat{x}$ gilt, kann man auch aus Gleichung 19.4a $dE = \pm dE \hat{x}$ und somit $E_y = 0$ ableiten.

Übung 19.1: Zeigen Sie mithilfe des Ausdrucks für E_x aus Schritt 8, dass für alle Punkte auf der x -Achse im Bereich $x > x_2$ gilt: $E_x > 0$. ■

Beispiel 19.2: Das Fernfeld einer endlichen Linienladung

Eine Ladung q ist homogen im Bereich zwischen $z = -\frac{1}{2}l$ und $z = +\frac{1}{2}l$ auf der z -Achse verteilt. Zeigen Sie, dass für große Werte von z der Ausdruck für das elektrische Feld der Linienladung auf der z -Achse in den Ausdruck für das Feld einer elektrischen Punktladung q im Ursprung übergeht.

Problembeschreibung: Gehen Sie von Gleichung 19.5a aus und zeigen Sie, dass der Ausdruck für das elektrische Feld der Linienladung auf der z -Achse sich für große z dem Ausdruck für das Feld einer elektrischen Punktladung q im Ursprung nähert.

Lösung: 1. Das elektrische Feld auf der z -Achse hat nur eine z -Komponente, die durch Gleichung 19.5a gegeben ist:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

2. Zeichnen Sie die Linienladung. Tragen Sie die z -Achse, den Feldpunkt P sowie r_1 und r_2 ein (siehe Abbildung 19.3).

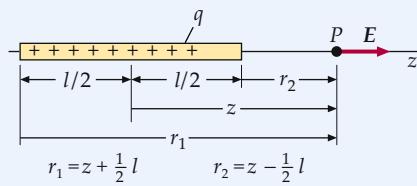


Abbildung 19.3 Geometrie für die Berechnung des elektrischen Felds auf der Achse einer endlichen Linienladung der Länge l , Ladung q und linearen Ladungsdichte $\lambda = q/l$.

3. Setzen Sie $r_1 = z + \frac{1}{2}l$ und $r_2 = z - \frac{1}{2}l$ in das Ergebnis von Schritt 1 ein und vereinfachen Sie:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left(\frac{1}{z - \frac{1}{2}l} - \frac{1}{z + \frac{1}{2}l} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l} \frac{l}{z^2 - (\frac{1}{2}l)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2 - (\frac{1}{2}l)^2} \quad (z > \frac{1}{2}l) \end{aligned}$$

4. Geben Sie für E_z einen passenden Ausdruck für $z \gg l$ an. Vernachlässigen Sie dazu im Ergebnis aus Schritt 3 den Ausdruck $(\frac{1}{2}l)^2$ gegen z^2 :

$$E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \quad (z \gg l)$$

Plausibilitätsprüfung: Der Näherungsausdruck aus Schritt 4 fällt umgekehrt proportional zum Quadrat von z ab, der Entfernung vom Ursprung. Dieser Zusammenhang ist derselbe wie für das elektrische Feld einer Punktladung q im Ursprung.

Übung 19.2: Das Ergebnis in Schritt 3 wurde für den Bereich $l/2 > z > \infty$ hergeleitet. Gilt das Ergebnis auch für den Bereich $-l/2 < z < +l/2$? Erläutern Sie Ihre Antwort. ■

Beispiel 19.3: Das Feld einer unendlichen Linienladung

Geben Sie das elektrische Feld einer homogenen Linienladung mit der Linienladungsdichte λ an, die sich in beide Richtungen bis ins Unendliche erstreckt.

Problembeschreibung: Man kann eine Linienladung als unendlich ansehen, wenn der Abstand zwischen den Enden der Linienladung und den untersuchten Feldpunkten wesentlich größer ist als der radiale Abstand zwischen einem beliebigen Feldpunkt und der Linienladung. Um das elektrische Feld einer solchen Linienladung zu berechnen, betrachten wir in Abbildung 19.2 die Grenzwerte $z_1 \rightarrow -\infty$ und $z_2 \rightarrow +\infty$. Aus der Abbildung liest man ab, dass man beide Grenzwerte mit $\theta_1 \rightarrow 0$ und $\theta_2 \rightarrow \pi$ bilden kann. Das elektrische Feld wird in den Gleichungen 19.5a und 19.5b angegeben.

Lösung: 1. Wählen Sie in den beiden Gleichungen 19.5a und 19.5b jeweils den ersten Ausdruck für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ E_r &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \end{aligned}$$

2. Bilden Sie die Grenzwerte $\theta_1 \rightarrow 0$ und $\theta_2 \rightarrow \pi$:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (0 - 0) = 0 \\ E_r &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (-1 - 1) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \end{aligned}$$

3. Geben Sie das elektrische Feld in Vektorform an:

$$\mathbf{E} = E_z \hat{z} + E_r \hat{r} = 0\hat{z} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \hat{r} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \hat{r}}$$

Plausibilitätsprüfung: Das elektrische Feld verläuft – wie man aus Symmetriegründen erwarten konnte – in radialer Richtung.

Weitergedacht: Der Betrag des elektrischen Felds nimmt umgekehrt proportional zum radialen Abstand von der Linienladung ab. ■

Das elektrische Feld, das eine homogene Linienladung (z. B. ein dünner, homogen geladenen Stab) auf der z -Achse in einem Punkt P hervorruft (Abbildung 19.4), ist gegeben durch $\mathbf{E} = E_z \hat{z} + E_r \hat{r}$ mit

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) & (19.5a) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (r_1 \neq 0 \text{ und } r_2 \neq 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) & (19.5b) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left(\frac{\cot \theta_2}{r_2} - \frac{\cot \theta_1}{r_1} \right) \quad (r \neq 0). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen wurden in Beispiel 19.1 hergeleitet. Die Ausdrücke für E_z (Gleichung 19.5a) sind an den Enden des

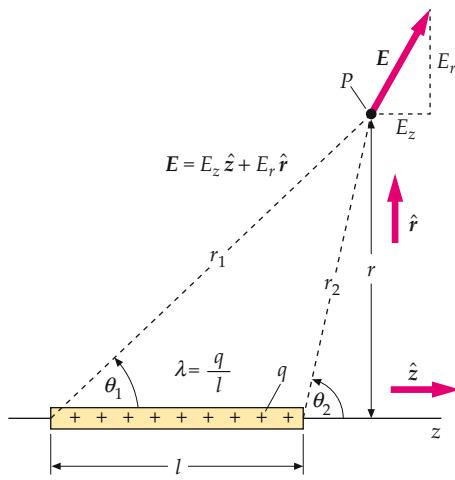


Abbildung 19.4 Geometrie für die Berechnung des elektrischen Felds in einem Feldpunkt P , das von einer homogen verteilten endlichen Linienladung erzeugt wird.

geladenen Stabs undefiniert; die Ausdrücke für E_r (Gleichung 19.5b) sind auf allen Punkten der z -Achse (dort ist $r = 0$) undefiniert. Für alle Punkte mit $r = 0$ gilt jedoch $E_r = 0$.

Beispiel 19.4: Näherung der Gleichungen 19.5a und 19.5b für die Symmetrieebene

Eine Ladung q ist homogen im Bereich zwischen $z = -\frac{1}{2}l$ und $z = +\frac{1}{2}l$ auf der z -Achse verteilt. a) Geben Sie einen Ausdruck für das elektrische Feld auf der Ebene $z = 0$ als Funktion von r an, dem radialen Abstand des Feldpunkts von der z -Achse. b) Zeigen Sie, dass für $r \gg l$ der in Teilaufgabe a gefundene Ausdruck in den Ausdruck für das Feld einer Punktladung q im Ursprung übergeht. c) Zeigen Sie, dass für $r \ll l$ der in Teilaufgabe a gefundene Ausdruck in den Ausdruck für das Feld einer unendlichen Linienladung auf der z -Achse mit einer homogenen Linienladungsdichte $\lambda = q/l$ übergeht.

Problembeschreibung: Die Ladungsverteilung ist dieselbe wie in Beispiel 19.2, die Linienladungsdichte ist $\lambda = q/l$. Zeichnen Sie die Linienladung auf der z -Achse und legen Sie den Feldpunkt in die Ebene $z = 0$. Mit den Gleichungen 19.5a und 19.5b können Sie das Feld für Teilaufgabe a angeben. – Das elektrische Feld einer Punktladung hängt umgekehrt proportional vom Quadrat des Abstands von der Ladung ab. Betrachten Sie das Verhalten des Ergebnisses aus Teilaufgabe a für $r \gg l$ und machen Sie sich klar, wie der Ausdruck in den für eine Punktladung im Ursprung übergeht. – Das elektrische Feld einer unendlichen homogenen Linienladung hängt umgekehrt proportional vom Abstand von der Ladung ab (Gleichung 19.6). Betrachten Sie das Verhalten des Ergebnisses aus Teilaufgabe a für $r \ll l$ und machen Sie sich klar, wie der Ausdruck in den für eine unendlich ausgedehnte Linienladung übergeht.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Wählen Sie in den beiden Gleichungen 19.5a und 19.5b jeweils den ersten Ausdruck für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ E_r &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \end{aligned}$$

2. Machen Sie eine Skizze der Ladungsverteilung auf der z -Achse im Bereich zwischen $z = -\frac{1}{2}l$ und $z = +\frac{1}{2}l$. Zeichnen Sie einen Feldpunkt P in der Ebene $z = 0$ in einer Entfernung r vom Ursprung ein (Abbildung 19.5).

19.2 Berechnung von E mit dem Coulomb'schen Gesetz

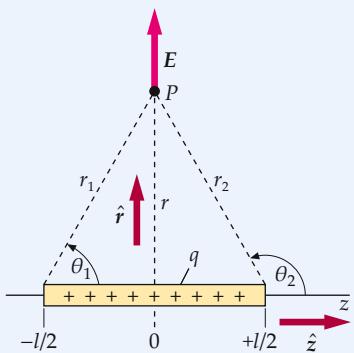


Abbildung 19.5 Skizze der Ladungsverteilung auf der z -Achse.

3. Aus der Abbildung lesen wir ab: $\theta_2 + \theta_1 = \pi$, daher ist $\sin \theta_2 = \sin(\pi - \theta_1) = \sin \theta_1$ und $\cos \theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos \theta_1$. Setzen Sie das in die Ergebnisse aus Schritt 1 ein:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (\sin \theta_1 - \sin \theta_1) = 0$$

$$E_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} (-\cos \theta_1 - \cos \theta_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \cos \theta_1$$

4. Drücken Sie $\cos \theta_1$ mit r und l aus und setzen Sie das in das Ergebnis aus Schritt 3 ein:

$$\cos \theta_1 = \frac{\frac{1}{2}l}{\sqrt{r^2 + (\frac{1}{2}l)^2}}$$

also

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \frac{\frac{1}{2}l}{\sqrt{r^2 + (\frac{1}{2}l)^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r \sqrt{r^2 + (\frac{1}{2}l)^2}}$$

5. Drücken Sie das elektrische Feld in Vektorform aus. Setzen Sie ferner $\lambda l = q$:

$$\mathbf{E} = E_z \hat{z} + E_r \hat{r} = 0 \hat{z} + E_r \hat{r}$$

also

$$\mathbf{E} = E_r \hat{r} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r \sqrt{r^2 + (\frac{1}{2}l)^2}} \hat{r}}$$

Teilaufgabe b

1. Untersuchen Sie das Verhalten des Ergebnisses aus Schritt 5. Für $r \gg l$ gilt $r^2 + (\frac{1}{2}l)^2 \approx r^2$. Setzen Sie diese Näherung ein:

$$\mathbf{E} = E_r \hat{r} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r \sqrt{r^2}} \hat{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (r \gg l)$$

2. Dieser Näherungsausdruck für das elektrische Feld nimmt umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Ursprung ab, so wie es auch bei einer Punktladung im Ursprung der Fall ist:

$$\mathbf{E} \approx \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (r \gg l)}$$

Teilaufgabe c

Untersuchen Sie das Verhalten des Ergebnisses aus Schritt 5. Für $r \ll l$ gilt $r^2 + (\frac{1}{2}l)^2 \approx (\frac{1}{2}l)^2$. Setzen Sie diese Näherung ein. Der erhaltene Näherungsausdruck für das elektrische Feld nimmt umgekehrt proportional mit dem Abstand vom Ursprung ab, genauso wie der exakte Ausdruck für das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Punktladung (Gleichung 19.6):

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda l}{r \sqrt{(\frac{1}{2}l)^2}} \hat{r} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \hat{r} \quad (r \ll l)}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Ergebnisse der Teilaufgaben b und c können Sie als Plausibilitätsprüfung für das Ergebnis von Teilaufgabe a auffassen. Sie machen die Gültigkeit des Ergebnisses von Teilaufgabe a in den beiden Grenzfällen $r \gg l$ und $r \ll l$ deutlich.

Weitergedacht: Abbildung 19.6 zeigt das exakte Ergebnis für eine Linienladung mit der Länge $l = 10$ cm und der linearen Ladungsdichte $\lambda = 4,5$ nC/m. In der Abbildung sind ferner die Grenzfälle für eine unendliche Ladungsdichte desselben Betrags und für eine Punktladung mit der Ladung $q = \lambda l$ eingetragen.

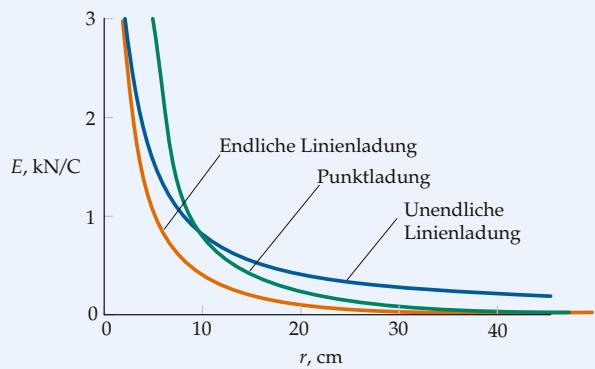


Abbildung 19.6 Die Größe des elektrischen Feldes in Abhängigkeit vom radialen Abstand für eine 10 cm lange Linienladung, eine Punktladung und eine unendliche Linienladung. Das Feld der endlichen Linienladung nähert sich für große Abstände r dem Feld der Punktladung und für kleine Abstände r dem Feld der unendlichen Linienladung.

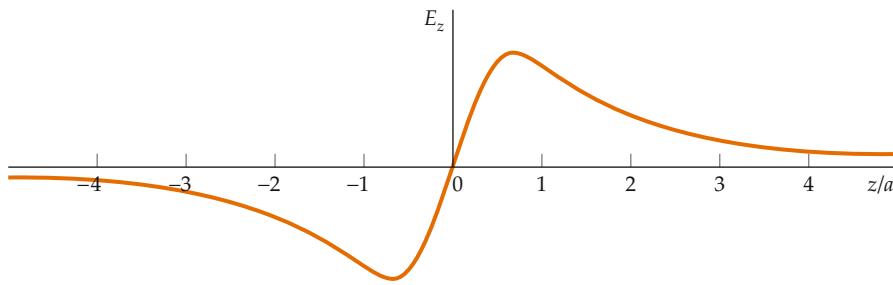


Abbildung 19.7 Elektrische Feldstärke \$E_z\$ einer homogenen Ringladung für Feldpunkte auf der Achse. Die Antisymmetrie der Kurve ergibt sich aus der Spiegelsymmetrie des elektrischen Felds an der Ringladungsebene.

Beispiel 19.5: Das Feld auf der Achse einer Ringladung I

Ein dünner kreisförmiger Ring vom Radius \$a\$ trägt homogen verteilt die Ladung \$q\$. Bestimmen Sie das elektrische Feld, das von dieser Ladungsverteilung in den Punkten auf der Achse des Rings hervorgerufen wird. Die Achse steht senkrecht zur Ringebene und verläuft durch den Mittelpunkt des Rings.

Problembeschreibung: Beginnen Sie mit \$\mathbf{d}\mathbf{E} = (1/4\pi\epsilon_0)(dq/r^2)\hat{\mathbf{r}}\$ (Gleichung 19.4a). Berechnen Sie damit das elektrische Feld in einem beliebigen Feldpunkt auf der Achse. Zeichnen Sie den geladenen Ring. Wählen Sie die \$z\$-Achse so, dass sie mit der Achse des Rings übereinstimmt und der Ring in der Ebene \$z = 0\$ liegt. Kennzeichnen Sie einen beliebigen Feldpunkt \$P\$ auf der positiven \$z\$-Achse und legen Sie einen Quellpunkt \$S\$ auf dem Ring fest.

Lösung: 1. Geben Sie die Gleichung für das elektrische Feld eines Ladungselementes mit der Ladung \$dq\$ an (Gleichung 19.4a):

$$\mathbf{d}\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

2. Zeichnen Sie den Ring (Abbildung 19.8a); legen Sie seine Achse in die \$z\$-Achse. Tragen Sie den elektrischen Feldvektor in einem Feldpunkt \$P\$ aufgrund eines Ladungselements \$dq\$ im Quellpunkt \$S\$ ein.

3. Zeichnen Sie den Ring (Abbildung 19.8b). Tragen Sie die axiale und radiale Komponente von \$\mathbf{E}\$ für identische Ladungselemente auf gegenüberliegenden Seiten des Rings ein. Die Radialkomponenten gleichen sich, wie man sieht, paarweise aus. Das resultierende Feld muss somit axial sein.

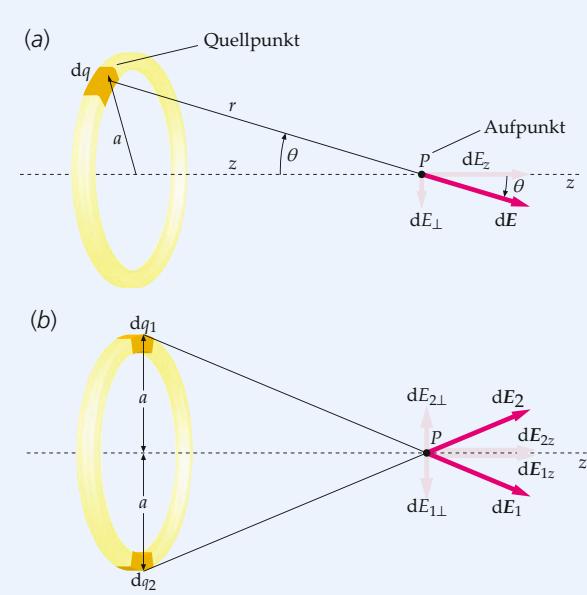


Abbildung 19.8 a) Eine Ringladung vom Radius \$a\$. Das elektrische Feld im Punkt \$P\$ auf der \$z\$-Achse aufgrund des Ladungselementes \$dq\$ hat eine Komponente längs der \$z\$-Achse und eine senkrecht dazu. b) Für jedes Ladungselement \$dq_1\$ gibt es ein gleiches Ladungselement \$dq_2\$, das ihm auf der entgegengesetzten Seite des Rings gegenüberliegt. Die elektrischen Feldkomponenten dieser Ladungselemente senkrecht zur \$z\$-Achse addieren sich und ergeben null.

4. Geben Sie die \$z\$-Komponente des elektrischen Felds aus Schritt 1 an:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{z}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq z}{r^3}$$

5. Integrieren Sie beide Seiten des Ergebnisses aus Schritt 4. Ziehen Sie konstante Terme vor das Integral:

$$E_z = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq z}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} q$$

6. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $r = \sqrt{z^2 + a^2}$:

$$\mathbf{E} = E_z \hat{z} + E_r \hat{r} = E_z \hat{z} + 0 = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten, dass das elektrische Feld in Punkten auf der z -Achse für positive Ladungen ($q > 0$) vom Ursprung weg zeigt. Das in Schritt 6 gewonnene Ergebnis erfüllt diese Erwartung, denn z ist auf der positiven z -Achse positiv und negativ auf der negativen z -Achse. Wir erwarten ferner, dass E für $z \gg a$ umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Ursprung abfällt. Das Ergebnis aus Schritt 6 erfüllt diese Erwartung. Ist a^2 gegen z^2 zu vernachlässigen, ergibt sich $E_z \approx (1/4\pi\epsilon_0) (q/z^2)$.

Übung 19.3: Abbildung 19.7 zeigt den Verlauf der elektrischen Feldstärke E_z einer homogenen Ringladung als Funktion von z für Feldpunkte auf der Achse. Die Kurve wurde mit dem Ergebnis aus Schritt 6 berechnet. Bestimmen Sie den Punkt auf der Achse des Rings, in dem E_z maximal wird. (Hinweis: An der Stelle des Maximums gilt $dE_z/dz = 0$). ▶

Beispiel 19.6: Das Feld auf der Achse einer Ringladung II

Wir betrachten noch einmal die Ringladung aus Beispiel 19.5. Warum ist die elektrische Feldstärke nahe dem Ursprung klein (siehe Abbildung 19.7), obwohl doch der Ursprung, wie Abbildung 19.9 zeigt, dichter an dem Ring liegt als jeder andere Punkt auf der z -Achse?

Problembeschreibung: Den Schlüssel zur Lösung dieses Problems finden wir in Abbildung 19.8b. Zeichnen Sie noch einmal diese Abbildung für einen Feldpunkt P auf z -Achse, diesmal jedoch für einen Punkt nahe dem Ursprung.

Lösung: 1. Zeichnen Sie Abbildung 19.8b noch einmal, diesmal für einen Feldpunkt P nahe dem Ursprung.

2. Die elektrischen Felder nahe dem Ursprung, die durch die beiden in der Abbildung gezeigten Ladungselemente dq_1 und dq_2 verursacht werden, sind groß, aber bei gleichem Betrag nahezu entgegengesetzt gerichtet; daher

19.2 Berechnung von E mit dem Coulomb'schen Gesetz

summieren sie sich zu nahezu null: Nahe dem Ursprung ist das elektrische Feld axial und die Feldstärke relativ gering.

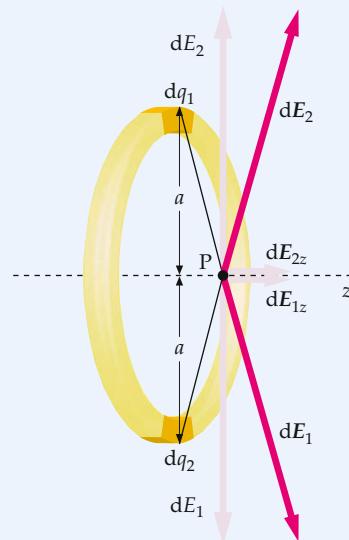


Abbildung 19.9 Ringladung vom Radius a mit Feldpunkt P auf der z -Achse nahe des Ursprungs.

Plausibilitätsprüfung: Im Ursprung sind die zwei durch die Ladungselemente dq_1 und dq_2 hervorgerufenen Felder zwar relativ groß, aber entgegengesetzt gerichtet; sie addieren sich daher zu null. In großer Entfernung vom Ursprung ($|z| \gg a$) laufen die beiden Felder nahezu in dieselbe Richtung (Abbildung 19.8b) und addieren sich daher nicht zu null. ■

Beispiel 19.7: Das Feld auf der Achse einer geladenen Kreisscheibe

Wir betrachten eine homogen geladene dünne Scheibe mit dem Radius r_s und der Flächenladungsdichte σ . a) Bestimmen Sie das elektrische Feld für alle Punkte auf der Achse der Scheibe. b) Zeigen Sie, dass der gefundene Ausdruck für Feldpunkte in großer Entfernung von der Scheibe in den Ausdruck für das Feld einer Punktladung im Ursprung mit derselben Ladung wie die Scheibe übergeht. c) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld auf beiden Seiten einer homogen geladenen Kreisscheibe mit unendlichem Radius homogen ist.

Problembeschreibung: Wir können das Feld auf der Achse einer Kreisscheibe berechnen, indem wir die Scheibe als einen Satz von konzentrischen Ringladungen betrachten.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Berechnen Sie das Feld auf der Achse der Scheibe, indem Sie die Scheibe als Satz von konzentrischen Ringladungen beschreiben. Das Feld eines einzigen homogenen Kreisrings mit der Ladung q und dem Radius a ist in Gleichung 19.7 angegeben:

$$\mathbf{E} = E_z \hat{z} \quad \text{mit} \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

- Zeichnen Sie die Scheibe (Abbildung 19.10). Tragen Sie den Feldvektor $d\mathbf{E}$ auf der Achse ein, der durch eine einzelne Ringladung mit der Ladung dq , dem Radius a und der Dicke da hervorgerufen wird.

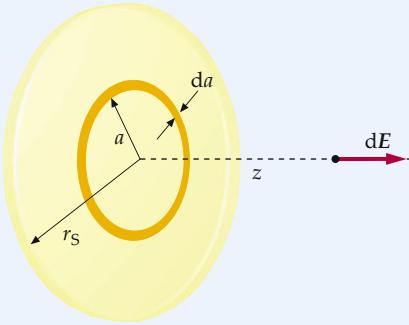


Abbildung 19.10 Eine homogen geladene Kreisscheibe mit dem Radius r_s lässt sich als Satz von Ringladungen mit dem (variablen) Radius a , der Dicke da und der Ladung $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi a da$ betrachten.

- Setzen Sie in die Formel aus Schritt 1 dq und dE_z ein. Durch Integrieren beider Seiten der Gleichung erhalten Sie dann das resultierende Feld für die gesamte Scheibe. Der Feldpunkt bleibt fix, somit ist z konstant:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

also

$$E_z = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} z \int \frac{dq}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

- Um das Integral zu berechnen, wechseln wir die Integrationsvariable (von q zu a). Die Ladung ist $dq = \sigma dA$, dabei ist $dA = 2\pi a da$ die Fläche eines Rings vom Radius a und der Dicke da :

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi a da$$

also

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi z \sigma \int_0^{r_s} \frac{2a da}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi z \sigma \int_{z^2+0^2}^{z^2+r_s^2} u^{-3/2} du$$

mit $u = z^2 + a^2$, also $du = 2a da$

- Berechnen Sie das Integral und vereinfachen Sie das Ergebnis:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi z \sigma \left. \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right|_{z^2}^{z^2+r_s^2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi z \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r_s^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right)$$

$$= \boxed{\operatorname{sgn} z \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_s^2}{z^2}}} \right)}$$

mit der Vorzeichenfunktion (Signumfunktion) $\operatorname{sgn}(z) = z/|z|$

Teilaufgabe b

- Für $z \gg r_s$ (d. h. auf der z -Achse weit von der Scheibe entfernt) erwarten wir, dass das elektrische Feld umgekehrt proportional zu z^2 abfällt, wie bei einer Punktladung. Um das zu zeigen, wenden wir die Binomialentwicklung (Taylor-Entwicklung erster Ordnung) an: Die Binomialentwicklung für rationale Exponenten n lautet für $|x| \ll 1$ (wenn man nach dem ersten Glied der Entwicklung abbucht)

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

- Wenden Sie die Binomialentwicklung auf den Wurzelterm im Ergebnis aus Schritt 5 an:

$$\sqrt{1 + \frac{r_s^2}{z^2}} = \left(1 + \frac{r_s^2}{z^2} \right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{r_s^2}{z^2} \quad (z^2 \gg r_s^2)$$

- Setzen Sie das in das Ergebnis aus Schritt 5 ein und vereinfachen Sie. (Für $z \gg r_s$ ist $\operatorname{sgn}(z) = 1$.) Der Ausdruck für das Feld bei $z \gg r_s$ ist somit derselbe wie für das einer Punktladung mit der Ladung $q = \sigma \pi r_s^2$, die sich im

Ursprung befindet:

$$\begin{aligned} E_z &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_s^2}{z^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \frac{1}{2} \frac{r_s^2}{z^2} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \quad (z \gg r_s)} \end{aligned}$$

mit $q = \sigma\pi r_s^2$.

Teilaufgabe c

Betrachten Sie das Ergebnis aus Schritt 5 aus Teilaufgabe a und bilden Sie den Grenzwert für $r_s \rightarrow \infty$. Sie erhalten einen Ausdruck, der für die beiden Bereiche $z > 0$ und $z < 0$ dieselbe Form hat:

$$\begin{aligned} E_z &= \operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}} \right) \\ &= \boxed{\operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten, dass das elektrische Feld auf den beiden entgegengesetzten Seiten der Scheibe in entgegengesetzte Richtungen zeigt. Das Ergebnis von Schritt 5 aus Teilaufgabe a trifft diese Erwartung.

Kommentar: Die Vorzeichenfunktion (Signumfunktion) ist definiert als

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} +1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases} .$$

Die Zahl null ist nicht vorzeichenbehaftet. Diese Definition wird auch in Tabellenkalkulationsprogrammen wie Excel oder in Mathematikprogrammen wie Mathematica verwendet. Texas Instruments verwendet hingegen eine Definition, in der $\operatorname{sgn}(0)$ den Wert ± 1 zurückgibt.

Weitergedacht: Nach dem Ergebnis in Teilaufgabe c ist das elektrische Feld in $z = 0$ unstetig: Es hat in $z = 0$ eine Sprungstelle, d.h., es ändert beim Durchgang durch die Ebene $z = 0$ seinen Wert von $(-\sigma/(2\epsilon_0))\hat{x}$ auf $(+\sigma/(2\epsilon_0))\hat{x}$ (Abbildung 19.11). Es tritt also eine Diskontinuität der Feldstärke von σ/ϵ_0 auf. Wir werden Diskontinuitäten von elektrischen Feldkomponenten in Abschnitt 19.5 noch eingehend behandeln.

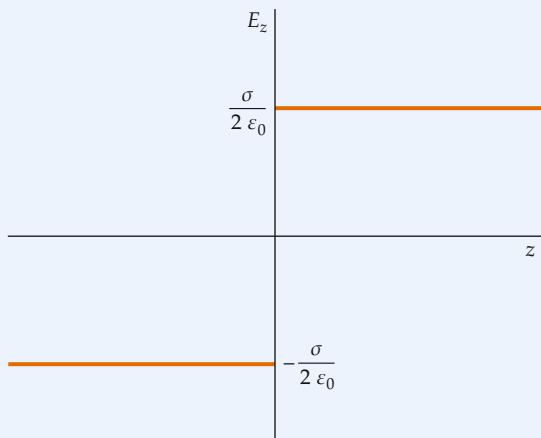


Abbildung 19.11 Diskontinuität von E an einer ebenen Flächenladung. Erkennen Sie die Ähnlichkeit dieses Graphen zu dem Graphen in Abbildung 19.7?

Übung 19.4: Das elektrische Feld einer homogenen Flächenladung auf der gesamten Ebene $z = 0$ wird durch den in Teilaufgabe c gewonnenen Ausdruck beschrieben. Welcher Bruchteil des Felds auf der z -Achse bei $z = a$ wird durch den Anteil der Flächenladung verursacht, der innerhalb eines Kreises mit dem Radius $r = 5a$ um den Ursprung liegt? (Hinweis: Setzen Sie im Ergebnis aus Schritt 5 von Teilaufgabe a den Radius der Scheibe r_s gleich $5a$ und die Entfernung des Feldpunkts a gleich z , dann teilen Sie diesen Ausdruck durch das Ergebnis von Teilaufgabe c.) ◀

Das elektrische Feld, das von einer homogenen Linienladung hervorgerufen wird, die sich in beide Richtungen bis ins Unendliche erstreckt, ist

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \hat{r}. \quad (19.6)$$

Darin ist λ die Linienladungsdichte, r ist der radiale Abstand des Feldpunkts von der Linienladung, und \hat{r} ist der Einheitsvektor in radialer Richtung. Gleichung 19.6 wurde in Beispiel 19.3 hergeleitet.

Das elektrische Feld auf der Achse einer homogenen Ringladung vom Radius a und der Ladung q ist $\mathbf{E} = E_z \hat{z}$ mit

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (19.7)$$

Gleichung 19.7 wurde in Beispiel 19.5 hergeleitet. Die Lösung der Übung 19.4 hängt nicht von a ab, sondern von dem Verhältnis $r_s/a = 5$. 80 % der Feldstärke für einen Feldpunkt in beliebigem Abstand a von einer homogen geladenen Ebene werden durch die Ladung verursacht, die sich innerhalb eines Kreises vom Radius $5a$ um den Ursprung befindet.

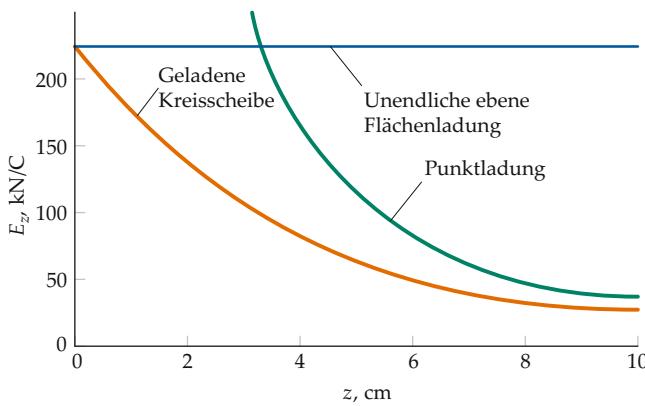


Abbildung 19.12 Eine Kreisscheibe und ein punktförmiger Leiter tragen gleiche Ladungen, eine unendlich ausgedehnte Ebene und die Scheibe haben die gleiche Flächenladungsdichte. Dann verändern sich die elektrischen Feldstärken wie gezeigt mit dem Abstand. Das Feld der geladenen Kreisscheibe nähert sich für $z \rightarrow \infty$ dem Feld der Punktladung, für $z \rightarrow 0$ ist es gleich dem Feld der unendlichen Flächenladung.

Beispiel 19.8: Elektrisches Feld von zwei unendlich ausgedehnten Flächenladungen

Eine unendlich ausgedehnte, homogen geladene Ebene mit der Flächenladungsdichte $\sigma = +4,5 \text{ nC/m}^2$ liegt in der Ebene $z = 0,00 \text{ m}$, eine zweite unendlich ausgedehnte Ebene mit der Flächenladungsdichte $\sigma = -4,5 \text{ nC/m}^2$ liegt in der Ebene $z = 2,00 \text{ m}$ (Abbildung 19.13). Bestimmen Sie das elektrische Feld bei a) $x = 1,80 \text{ m}$ und b) $x = 5,00 \text{ m}$.

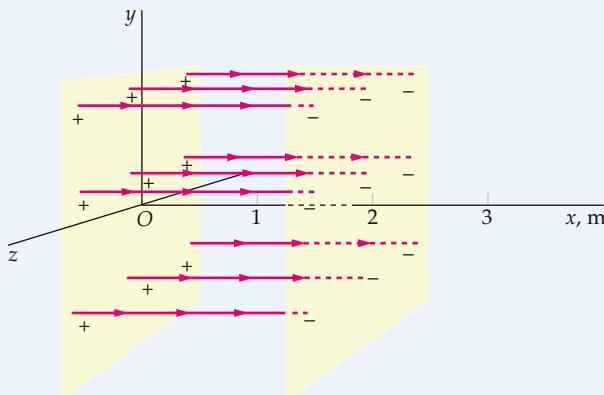


Abbildung 19.13 Skizze des elektrischen Felds zweier unendlich ausgedehnter Flächenladungen.

Problembeschreibung: Jede der beiden Ebenen verursacht ein homogenes elektrisches Feld der Feldstärke $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Mithilfe des Superpositionsprinzips können wir das resultierende Feld bestimmen. Zwischen den Ebenen

addieren sich die Feldstärken und verursachen ein Feld der Feldstärke σ/ϵ_0 in positiver x -Richtung. In den Bereichen $x > 2,00 \text{ m}$ und $x < 0$ zeigen die Felder in entgegengesetzte Richtungen und addieren sich zu null.

Lösung: 1. Berechnen Sie die Feldstärke E , die von jeder der beiden Ebenen verursacht wird:

$$\begin{aligned} E &= |\sigma|/(2\epsilon_0) \\ &= (4,50 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2)/(2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)) \\ &= 254 \text{ N/C} \end{aligned}$$

2. Bei $x = 1,80 \text{ m}$ zwischen den Ebenen zeigen die Felder beider Platten in die positive x -Richtung:

$$E_x = E_1 + E_2 = 254 \text{ N/C} + 254 \text{ N/C} = \boxed{508 \text{ N/C}}$$

3. Bei $x = 5,00 \text{ m}$ sind die von den Platten verursachten Felder entgegengesetzt gerichtet:

$$E_x = E_1 - E_2 = \boxed{0,00 \text{ N/C}}$$

Plausibilitätsprüfung: Da die beiden Platten gleich große und entgegengesetzte Ladungsdichten tragen, treten die Feldlinien aus der positiv geladenen Platte aus und enden in der negativ geladenen Platte. E ist überall null, außer im Bereich zwischen den Platten.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass der erhaltene Wert für die resultierende Feldstärke $E_x = 508 \text{ N/C}$ nicht nur für $x = 1,8 \text{ m}$ auftritt, sondern für einen beliebigen Punkt zwischen den beiden geladenen Platten gilt. Die im Beispiel beschriebene Ladungsverteilung ist die eines Plattenkondensators. Kondensatoren werden wir in Kapitel 21 diskutieren. ■

Das elektrische Feld für einen Feldpunkt auf der Achse einer homogen geladenen Kreisscheibe wurde in Beispiel 19.7 hergeleitet:

$$\operatorname{sgn} z \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_s^2}{z^2}}} \right). \quad (19.8)$$

ELEKTRISCHES FELD AUF DER ACHSE EINER HOMOGEN GELADENEN KREISSCHEIBE

$\operatorname{sgn} z$ ist dabei die im Beispiel definierte Vorzeichenfunktion, r_s ist der Radius der Scheibe. Das Feld einer unendlich ausgedehnten ebenen Flächenladung lässt sich aus Gleichung 19.8 herleiten, indem man dort den Quotienten r_s/z gegen unendlich gehen lässt. Dann ergibt sich

$$E_z = \operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\sigma = \operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (19.9)$$

ELEKTRISCHES FELD EINER UNENDLICH AUSGEDEHNTEN EBENEN FLÄCHENLADUNG

Bei der Bewegung entlang der z -Achse springt das elektrische Feld von $(-\sigma/(2\epsilon_0))\hat{x}$ auf $(+\sigma/(2\epsilon_0))\hat{x}$ (Abbildung 19.11). In der Ebene der Flächenladung ($z = 0$) liegt eine Diskontinuität vom Betrag σ/ϵ_0 vor.

Abbildung 19.12 zeigt die elektrischen Felder einer Punktladung, einer homogen geladenen Kreisscheibe und einer unendlichen ebenen Flächenladung als Funktion des Abstands von der jeweiligen Ladung.

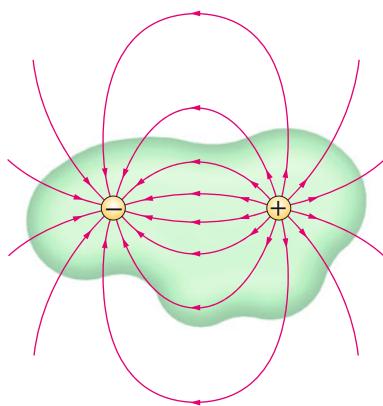


Abbildung 19.14 Eine Oberfläche von beliebiger Gestalt, die einen elektrischen Dipol einschließt. Wenn die Oberfläche beide Ladungen einschließt, ist die Zahl der Linien, die die Oberfläche von innen her durchstoßen, gleich der Zahl der Linien, die die Oberfläche von außen durchdringen, unabhängig davon, wie die Oberfläche gestaltet ist.

19.3 Das Gauß'sche Gesetz

In Kapitel 18 wurde das elektrische Feld durch elektrische Feldlinien veranschaulicht. Diese qualitative Beschreibung kann zu einer exakten mathematischen Formulierung weiterentwickelt werden, die als *Gauß'sches Gesetz* bezeichnet wird. Das Gauß'sche Gesetz ist eine der Maxwell'schen Gleichungen, die fundamentalen Gleichungen des Elektromagnetismus, die Schwerpunkt von Kapitel 27 sind. In der Elektrostatik, d. h. für statische Ladungen und zeitunabhängige Felder, die wir hier ausschließlich behandeln werden, sind das Gauß'sche Gesetz und das Coulomb'sche Gesetz äquivalente Beschreibungen. Elektrische Felder symmetrischer Ladungsverteilungen, z. B. eine geladene Kugelschale oder eine unendliche Linienladung, lassen sich jedoch mithilfe des Gauß'schen Gesetzes leichter berechnen. In diesem Abschnitt gehen wir von dem Feldlinienvbild des elektrischen Felds aus und geben eine plausible Erklärung für die Gültigkeit des Gauß'schen Gesetzes. Die strenge Ableitung des Gauß'schen Gesetzes folgt in Abschnitt 19.7.

Eine geschlossene Oberfläche ist eine einfach zusammenhängende Fläche, die das Universum in zwei Bereiche einteilt, in den Bereich *innerhalb* und in den Bereich *außerhalb* der Oberfläche (die Orientierung ist durch die Festlegung des Flächennormalenvektors eindeutig). Abbildung 19.14 zeigt eine geschlossene Oberfläche von beliebig gewählter Gestalt, die einen Dipol einschließt. Die Anzahl der elektrischen Feldlinien, die an der positiven Ladung beginnen und die Oberfläche vom Inneren her durchdringen, hängt von der Gestalt der Oberfläche ab. Jede Linie, die die Oberfläche von innen her durchdringt, durchsetzt sie auch von außen.

Somit ist im Beispiel der Abbildung 19.14 die Anzahl der austretenden Linien gleich der Anzahl der in die Oberfläche eintretenden Linien. Das gilt für beliebig gestaltete Oberflächen, solange beide Ladungen eingeschlossen werden. Anders ist es für das Beispiel der Abbildung 19.15, in der eine geschlossene Oberfläche zwei ungleich starke Ladungen umschließt. Hier ist

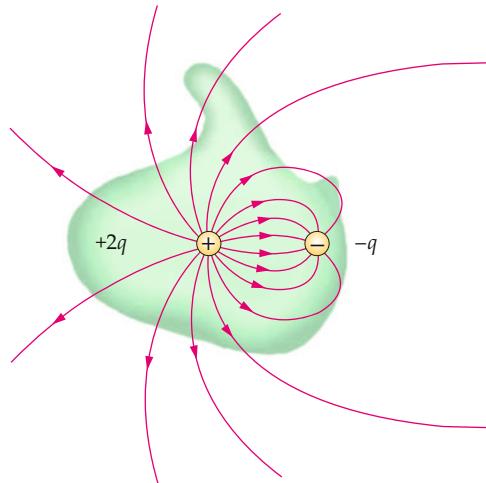


Abbildung 19.15 Eine Oberfläche von beliebiger Gestalt, die die Ladungen $+2q$ und $-q$ einschließt. Jede Feldlinie, die an $-q$ endet, verläuft entweder nur im Innengebiet oder verlässt die Oberfläche und tritt wieder ein. Die Gesamtzahl der Linien beider Ladungen, die durch die Oberfläche austreten, ist die gleiche wie bei einer einzelnen eingeschlossenen Ladung $+q$.

für jede beliebig geformte Oberfläche, die beide Ladungen umschließt, die Differenz der ein- und austretenden Linien ungleich null.

Zählt man jede austretende Linie mit $+1$ und eine in das Innere von außen eintretende Linie mit -1 , so ist im Beispiel von Abbildung 19.15 die Gesamtzahl der Linien durch die Oberfläche eine positive Zahl, die proportional der Differenz $2q - q = +q$ ist, wie man durch Vergleich mit Abbildung 19.14 finden kann, wenn die Oberfläche nur die Ladung $+q$ einschließt. Diese Abzählung der orientierten Feldlinien, die eine Oberfläche verlassen oder in sie eintreten, entspricht den Beobachtungen aus Abschnitt 18.5. Zusammengefasst halten wir fest:

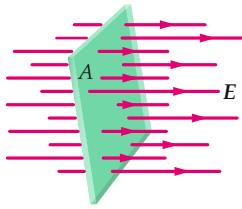


Abbildung 19.16 Elektrische Feldlinien eines homogenen Felds, die eine Fläche A senkrecht durchdringen. Das Produkt $E A$ ist der elektrische Fluss durch die Fläche.

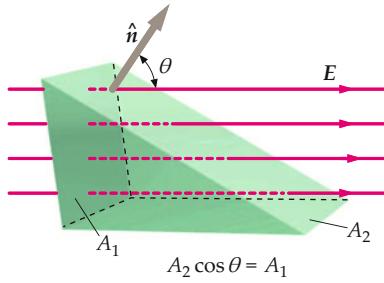


Abbildung 19.17 Elektrische Feldlinien eines homogenen elektrischen Felds, das senkrecht zu der Fläche A_1 ausgerichtet ist und mit der Flächennormalen \hat{n} der Fläche A_2 einen Winkel θ einschließt. Da E nicht senkrecht zur Fläche A_2 steht, ist der Fluss $E_n A_2$; dabei ist E_n die Projektion von E auf die Normalenrichtung \hat{n} mit $E \cdot \hat{n} = |E| \cos \theta$. Der Fluss durch die Fläche A_2 ist der gleiche wie durch die Fläche A_1 .

Die Differenz aus der Anzahl der eine Oberfläche verlassenden und der in die Oberfläche eintretenden Feldlinien ist proportional zu der von der Oberfläche eingeschlossenen Gesamtladung.

AUSSAGE DES GAUSS'SCHEN GESETZES

Diese Regel ist die qualitative Aussage des Gauß'schen Gesetzes.

Der elektrische Fluss

Die mathematische Größe, die der Zahl der Feldlinien entspricht, die eine Fläche senkrecht durchstoßen, nennt man den **elektrischen Fluss** Φ_{el} . Für eine ebene Fläche senkrecht zu einem homogenen Feld E (Abbildung 19.16), deren Flächennormale die gleiche Richtung hat wie das Feld, ist der elektrische Fluss das Produkt aus der Feldstärke E und der Fläche A :

$$\Phi_{\text{el}} = EA.$$

Die Einheit des Flusses ist $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Der Fluss ist proportional zur Anzahl der Feldlinien, die die Fläche durchsetzen, ebenso wie die Feldstärke E proportional zur Feldliniendichte ist.

Wir verallgemeinern nun den Flussbegriff, indem wir beliebige Richtungen zwischen Feld und Flächennormale und beliebig

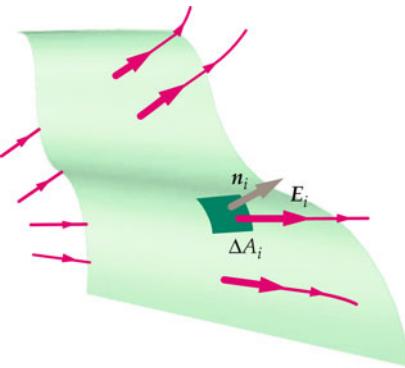


Abbildung 19.18 Wenn E_n auf der Fläche variiert, entweder weil E oder der Winkel zwischen E und \hat{n} sich ändert, unterteilt man die Fläche in kleine Flächenelemente $\Delta A_i = \hat{n} \Delta A_i$. Der Gesamtfluss durch die Fläche ergibt sich durch Aufsummierung über die Flüsse aller Flächenelemente: $\sum_i E_i \cdot \hat{n} \Delta A_i = \sum_i E_i \cdot \Delta A_i$.

gekrümmte Flächen zulassen. In Abbildung 19.17 ist die Fläche A₂ nicht senkrecht zum elektrischen Feld E orientiert. Dennoch wird die Fläche A₂ von derselben Anzahl von Feldlinien durchsetzt wie die Fläche A₁, die senkrecht zu E orientiert ist. Zwischen diesen Flächen besteht der Zusammenhang

$$|A_2| \cos \theta = A_1. \quad (19.10)$$

Darin bezeichnet θ den Winkel zwischen E und dem Einheitsvektor \hat{n} der Flächennormalen von A₂.

Der elektrische Fluss durch eine ebene Fläche mit beliebiger Orientierung zwischen dem elektrischen Feld E und der Fläche A ist daher allgemein

$$\Phi_{\text{el}} = E \cdot A = E \cdot \hat{n} |A| = |E| |A| \cos \theta = E_n A. \quad (19.11)$$

A ist definitionsgemäß positiv. $E_n = E \cdot \hat{n}$ ist die Komponente von E in Normalenrichtung \hat{n} der Fläche A.

Abbildung 19.18 zeigt eine gekrümmte Fläche, auf der sich E von Punkt zu Punkt ändern kann. Wenn man den Flächeninhalt des Flächenelements ΔA_i klein genug wählt, kann man es als ein ebenes Flächenstück betrachten und die Änderung des elektrischen Felds E_i über dem Flächenelement vernachlässigen. Der Fluss des elektrischen Felds durch das Flächenelement ΔA_i ist

$$\Delta \Phi_{\text{el},i} = E_i \cdot \Delta A_i = E_i \cdot \hat{n} \Delta A_i = E_{n,i} \Delta A_i.$$

Darin ist \hat{n} der Einheitsvektor, der senkrecht auf dem Flächenelement ΔA_i steht, und E_i das elektrische Feld in einem beliebigen Punkt des Flächenelements ΔA_i . Bei einer gekrümmten Fläche haben die Einheitsvektoren für verschiedene Elemente unterschiedliche Richtungen. Der Gesamtfluss durch die Fläche ist die Summe der Flüsse $\Delta \Phi_{\text{el},i}$ über alle Flächenelemente. Im Grenzprozess $\Delta A_i \rightarrow dA_i$, wenn die Unterteilung der Fläche immer feiner gewählt wird und die Zahl der Elemente gegen unendlich geht, wird aus der Summation ein Flächenintegral. Die allgemeine Definition des elektrischen Flusses ist damit

$$\Phi_{\text{el}} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \quad (19.12)$$

DEFINITION DES ELEKTRISCHEN FLUSSES

Der Index A am Integral bezeichnet das gesamte Integrationsgebiet der Fläche. Das Vorzeichen des elektrischen Flusses hängt von der Wahl der Flächennormale $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}/A$ ab. Indem man $\hat{\mathbf{n}}$ zu einer Seite der Fläche austreten lässt, bestimmt man das Vorzeichen von $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$ und damit das Vorzeichen des Flusses durch die Fläche.

Auf ähnliche Weise wie hier den elektrischen Fluss kann man auch den Fluss anderer Vektorfelder berechnen. Man benutzt dabei den Gauß'schen Satz der Mathematik, der einen Zusammenhang zwischen dem Fluss eines Vektorfelds durch eine Fläche mit seiner Quelle in einem bestimmten Volumen herstellt. In der Elektrostatisik verbindet der Gauß'sche Satz über das Flächenintegral das elektrische Feld mit den sie erzeugenden Ladungen; diese Aussage heißt dann Gauß'sches Gesetz. Ähnliche Anwendungen des Gauß'schen Satzes findet man beispielsweise auch beim Volumen- oder Massenfluss von Fluiden oder beim Wärmetransport.

Für die mathematische Formulierung des Gauß'schen Satzes ist man am Fluss durch eine *geschlossene* Oberfläche interessiert, der von Ladungen im Inneren erzeugt wird. Dazu hat man den Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ der Fläche nach außen zu wählen, um den Fluss aus der Oberfläche heraus zu erhalten, wie es beispielsweise in Abbildung 19.19 gezeichnet ist. Das Integral über eine geschlossene Oberfläche kennzeichnen wir durch das Symbol \oint . Der Fluss durch die geschlossene Oberfläche A wird dann geschrieben als

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E_n dA. \quad (19.13)$$

Der Gesamtfluss durch eine geschlossene Oberfläche kann positiv oder negativ sein, abhängig davon, ob \mathbf{E} an der Oberfläche vorwiegend nach außen oder nach innen zeigt. An Punkten auf der Oberfläche, an denen \mathbf{E} nach innen gerichtet ist, wird E_n negativ.

Quantitative Darstellung des Gauß'schen Gesetzes

Abbildung 19.19 zeigt eine Kugelfläche vom Radius r_K mit einer Punktladung q im Mittelpunkt. Das elektrische Feld steht überall senkrecht auf dieser Oberfläche und hat die Stärke

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K^2}.$$

Der Gesamtfluss von \mathbf{E} durch diese Kugelfläche ist

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_A E_n dA = E_n \oint_A dA.$$

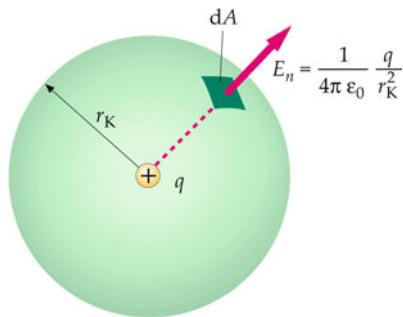


Abbildung 19.19 Eine Kugelfläche mit einer eingeschlossenen Punktladung q . Der Gesamtfluss durch die Kugelfläche ist leicht zu berechnen: Er ergibt sich als Produkt aus E_n und dem Flächeninhalt $4\pi r^2$ der Kugelfläche: $E_n 4\pi r^2$.

Dabei wurde E_n vor das Integral gezogen, da es auf der gesamten Oberfläche konstant ist. Das Integral von dA über die gesamte Fläche ergibt gerade den Flächeninhalt der Kugelfläche vom Radius r_K , also $4\pi r_K^2$. Somit erhalten wir für den Gesamtfluss durch die Kugelfläche

$$\Phi_{\text{el}} = E_n (4\pi r_K^2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K^2} (4\pi r_K^2) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (19.14)$$

Der *Gesamtfluss* durch eine Kugelfläche, die im Zentrum die Ladung q enthält, ist *unabhängig vom Radius r_K der Kugel*. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der vorangegangenen Beobachtung, dass die Zahl der Linien durch eine geschlossene Oberfläche nach außen der Gesamtladung im Inneren proportional ist. *Unabhängig von der Gestalt der Fläche ist die Zahl der Linien für alle geschlossenen Flächen um die Ladung herum gleich*, wie Abbildung 19.19 zeigt. Somit ist auch der Gesamtfluss durch eine beliebige Fläche, die q im Inneren enthält, gleich dem Fluss durch die Kugelfläche, nämlich q/ϵ_0 .

Man kann dieses Ergebnis auf Systeme mit mehreren Ladungen übertragen. In Abbildung 19.20 schließt eine geschlossene Fläche zwei Punktladungen q_1 und q_2 ein, eine dritte Punktladung q_3 liegt außerhalb der Fläche. Da sich das elektrische Feld in einem beliebigen Punkt auf der Fläche als Vektorsumme der durch die einzelnen Punktladungen erzeugten elektrischen Felder ergibt, ist der Gesamtfluss $\Phi_{\text{el}} = \oint_A (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3) \cdot d\mathbf{A}$ aus der Fläche gleich der Summe der durch die einzelnen Punktladungen erzeugten Flüsse, also $\Phi_{\text{el}} = \sum \Phi_i$ mit $\Phi_i = \oint_A \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A}$. Der Fluss Φ_3 von der außerhalb der Fläche liegenden Ladung q_3 ist null, da jede Feldlinie von q_3 , die an irgendeinem Punkt in das von der Fläche umschlossene Gebiet eintritt, es an einem anderen Punkt wieder verlässt. Der durch die Ladung q_1 erzeugte Fluss aus der Oberfläche ist $\Phi_1 = q_1/\epsilon_0$ und derjenige von q_2 gleich $\Phi_2 = q_2/\epsilon_0$. Daraus ergibt sich der Gesamtfluss aus der Fläche zu $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$. Der Fluss kann positiv, negativ oder null sein, je nachdem, welche Vorzeichen und welche Werte die beiden Ladungen q_1 und q_2 besitzen.

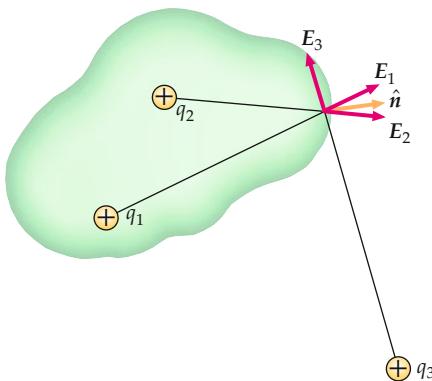


Abbildung 19.20 Eine Fläche, die die Punktladungen q_1 und q_2 einschließt, aber nicht die Ladung q_3 . Der Gesamtfluss aus dieser Fläche heraus ist $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$.

Der Gesamtfluss durch eine beliebige geschlossene Fläche nach außen ist gleich dem Produkt von $1/\epsilon_0$ multipliziert mit der durch die Fläche eingeschlossenen Gesamtladung:

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E_n dA = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}. \quad (19.15)$$

GAUSS'SCHES GESETZ

Das ist das **Gauß'sche Gesetz**. Seine Gültigkeit hängt damit zusammen, dass sie sich in großer Entfernung von der Ladung verhalten wie das Feld einer Punktladung und umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat abfallen. Diese Eigenschaft des elektrischen Felds hat es ermöglicht, eine bestimmte Anzahl von elektrischen Feldlinien an eine Ladung zu zeichnen, deren Feldliniendichte proportional zur Feldstärke ist.

Das Gauß'sche Gesetz gilt für alle Oberflächen und alle Ladungsverteilungen. Bei Ladungsverteilungen mit hoher Symmetrie kann man es dazu benutzen, das elektrische Feld zu berechnen, was im nächsten Abschnitt dargestellt wird. In Beispiel 19.9 wird mithilfe des Gauß'schen Satzes die Gesamtladung berechnet, die von einer zylindrischen Oberfläche eingeschlossen wird. Der nächste Abschnitt enthält Feldberechnungen mit dem Gauß'schen Gesetz für ebene Symmetrie, kugelsymmetrische und zylindersymmetrische Ladungsdichten.

Beispiel 19.9: Fluss durch eine geschlossene Zylinderfläche

Gegeben ist ein elektrisches Feld $\mathbf{E} = +(200 \text{ N/C})\hat{z}$ für $z > 0$ und $\mathbf{E} = (-200 \text{ N/C})\hat{z}$ für $z < 0$. Wir denken uns eine zylindrische Oberfläche, deren Achse parallel zum elektrischen Feld verläuft, mit einer Länge von 20 cm und einem Radius $r_Z = 5,00 \text{ cm}$. Der Mittelpunkt des Zylinders liegt im Koordinatenursprung, die Zylinderachse fällt mit der z -Achse zusammen. Ein Ende des Zylinders befindet sich demnach

bei $x = +10 \text{ cm}$, das andere bei $x = -10 \text{ cm}$ (Abbildung 19.21). a) Wie groß ist der nach außen gerichtete Gesamtfluss durch diese geschlossene Oberfläche? b) Wie groß ist die Gesamtladung innerhalb der geschlossenen Oberfläche?

Problembeschreibung: Die beschriebene geschlossene Oberfläche ist stetig und stückweise glatt: Sie besteht aus drei Teilen: den zwei ebenen Deckflächen und der zylindrisch gekrümmten Mantelfläche. Der Fluss von \mathbf{E} aus jedem Teil der Oberfläche wird getrennt berechnet. Dazu zeichnet man jeweils die nach außen gerichtete Normale \hat{n} in einem beliebig gewählten Punkt auf jeder der Teilflächen sowie den Feldvektor \mathbf{E} im selben Punkt. Da $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{n}$ in jedem Punkt einer Teilfläche den gleichen Wert besitzt, ergibt sich der Fluss durch eine der Teilflächen zu $\Phi_{\text{el}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = E_n A$ (Gleichung 19.11). Den Gesamtfluss durch die geschlossene Oberfläche nach außen erhält man dann durch Aufsummieren der einzelnen Flüsse durch die Teilflächen. Der Gesamtfluss nach außen ist mit der Ladung im Inneren durch das Gauß'sche Gesetz verknüpft (Gleichung 19.15).

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Skizzieren Sie die zylindrische Oberfläche. Auf jedes Teilstück der Oberfläche zeichnen Sie die nach außen gerichtete Normale \hat{n} und den Feldvektor \mathbf{E} (Abbildung 19.21).

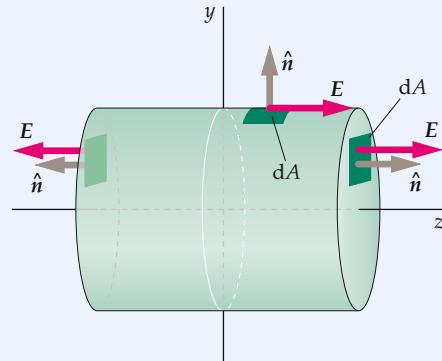


Abbildung 19.21 Skizze der Zylinderfläche mit Normalenvektor \hat{n} und Feldvektor \mathbf{E} .

2. Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss durch die rechte Deckfläche (bei $z = +10 \text{ cm}$). Hier ist $\hat{n} = \hat{z}$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el, rechts}} &= \mathbf{E}_{\text{rechts}} \cdot \mathbf{A}_{\text{rechts}} \\ &= E_{\text{rechts}} \pi r_Z^2 \\ &= (200 \text{ N/C}) \cdot \pi \cdot (0,0500 \text{ m})^2 \\ &= 1,57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

Vorgehensweise:

Berechnung von E mit dem Gauß'schen Gesetz

Untersuchen Sie, ob die Ladungsverteilung zu einer der drei folgenden Symmetrieklassen gehört: Kugelsymmetrie, Zylindersymmetrie, Ebenensymmetrie. Liegt eine Symmetrie vor, skizzieren Sie die Ladungsverteilung und bestimmen Sie Stärke und Richtung des elektrischen Felds E anhand von Symmetrieverlegungen. Ist dies nicht der Fall, suchen Sie ein anderes Verfahren zur Berechnung des elektrischen Felds.

1. Tragen Sie in Ihre Skizze eine imaginäre geschlossene Oberfläche ein, eine sogenannte **Gauß'sche Oberfläche** (wie die Zylinderfläche in Beispiel 19.9), die die gegebene Ladungsverteilung einschließt. Diese Oberfläche sei so gewählt, dass auf jeder ihrer Teilstücke das elektrische Feld E entweder null ist, senkrecht zu \hat{n} steht (dann ist E_n auf dem gesamten Teilstück null) oder parallel zu \hat{n} ist (dann ist E_n auf dem gesamten Teilstück gleich). Bei Zylindersymmetrie wählen Sie als Gauß'sche Oberfläche einen zur Ladungsverteilung koaxialen Zylinder. Bei ebener Geometrie ist die Gauß'sche Fläche ein Zylinder, der durch die Symmetrieebene in zwei Hälften zerlegt wird und dessen Symmetriearchse senkrecht auf der Symmetrieebene steht. Bei sphärischer Symmetrie wählen Sie als Gauß'sche Oberfläche eine Kugel mit dem Symmetriepunkt als Mittelpunkt. Zeichnen Sie auf jedem Teilstück der Gauß'schen Oberfläche ein Flächenelement dA , die nach außen gerichtete Flächennormale \hat{n} und das elektrische Feld E .
2. Geschlossene Zylinderflächen sind stückweise kontinuierlich; sie zerfallen in drei Flächenstücke, die einzeln behandelt werden. Kugelflächen bestehen aus einem einzigen Stück. Der Fluss durch jedes Teilstück einer passend gewählten Gauß'schen Oberfläche ist $E_n A$; dabei ist E_n die Feldkomponente von E , die senkrecht auf dem Teilstück steht, A ist der Flächeninhalt des Teilstücks. Durch Addieren der Einzelflüsse erhalten Sie den Gesamtfluss durch die geschlossene Fläche.
3. Berechnen Sie die Gesamtladung innerhalb der Gauß'schen Fläche.
4. Wenden Sie nun das Gauß'sche Gesetz an, stellen Sie den Zusammenhang zwischen E_n und den eingeschlossenen Ladungen her und lösen Sie nach E_n auf.

3. Berechnen Sie den Fluss nach außen durch die linke Deckfläche (bei $z = +10 \text{ cm}$). Hier ist $\hat{n} = -\hat{z}$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el},\text{links}} &= E_{\text{links}} \cdot A_{\text{links}} \\ &= -E_{\text{links}} \pi r_z^2 \\ &= -(-200 \text{ N/C}) \cdot \pi \cdot (0,0500 \text{ m})^2 \\ &= 1,57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

4. Berechnen Sie den Fluss nach außen durch die Mantelfläche des Zylinders. Hier verläuft \hat{n} stets radial, senkrecht zur z -Achse und damit auch senkrecht zu E :

$$\Phi_{\text{el,Mantel}} = E_{\text{Mantel}} \cdot A_{\text{Mantel}} = 0$$

5. Der gesamte nach außen gerichtete Fluss ist die Summe der Beiträge von den drei einzelnen Oberflächen:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el}} &= \Phi_{\text{el,rechts}} + \Phi_{\text{el},\text{links}} + \Phi_{\text{el,Mantel}} \\ &= 1,57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} + 1,57 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C} + 0 \\ &= 3,14 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Das Gauß'sche Gesetz verbindet die Ladung im Inneren mit dem Gesamtfluss:

$$\begin{aligned}q_{\text{innen}} &= \varepsilon_0 \Phi_{\text{el}} \\ &= (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) \\ &\quad \cdot (3,14 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}) \\ &= 2,78 \cdot 10^{-11} \text{ C} = 27,8 \text{ pC}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Fluss durch eine der Deckflächen hängt nicht von Länge des Zylinders ab. Dieses Ergebnis kann man für ein elektrisches Feld, das sich mit der Entfernung von der Ebene $z = 0$ nicht ändert, erwarten.

Weitergedacht: Der Gesamtfluss hängt nicht von der Länge des Zylinders ab. Die Ladung im Inneren muss daher vollständig in der Ebene $z = 0$ liegen. ■

Das Gauß'sche Gesetz und das Coulomb'sche Gesetz sind für statische Ladungsverteilungen äquivalent. Das Gauß'sche Gesetz ist jedoch weitreichender, denn es gilt auch für zeitlich veränderliche Felder in ruhenden und bewegten Materialien, während das Coulomb'sche Gesetz nur für statische Ladungs- und Feldverteilungen gilt (ähnlich wie auch das Newton'sche Gravitationsgesetz nur innerhalb der nichtrelativistischen Mechanik anwendbar ist).

19.4 Berechnung von E mit dem Gauß'schen Gesetz

Wenn eine hochsymmetrische Ladungsverteilung gegeben ist, kann man das elektrische Feld oft leichter mithilfe des Gauß'schen Gesetzes berechnen als mit dem Coulomb'schen Gesetz. Dabei lassen sich drei verschiedene Symmetrieklassen unterscheiden: Eine Ladungsverteilung hat eine **Zylindersymmetrie** (oder **Achsen symmetrie**), wenn die Ladungsdichte nur von der Entfernung zu einer Geraden abhängt; **ebene Symmetrie** liegt vor, wenn die Ladungsdichte nur von der Entfernung zu einer Ebene abhängt; sie hat **sphärische Symmetrie**, **Kugelsymmetrie** oder **Punktsymmetrie**, wenn die Ladungsdichte nur von der Entfernung zu einem Punkt abhängt. Die Beispiele dieses Abschnitts zeigen Anwendungen davon: In Beispiel 19.10 wird das Feld einer homogen geladenen Platte berechnet, in Beispiel 19.11 das Feld einer geladenen Kugelschale, in Beispiel 19.12 das von einer Punktladung und einer geladenen Kugelschale hervorgerufene Feld, in Beispiel 19.13 das Feld einer homogen geladenen Vollkugel und in Beispiel 19.14 das Feld einer unendlichen Linienladung.

Frage 19.1

Ist das elektrische Feld \mathbf{E} , das im Gauß'schen Gesetz vorkommt, nur der Teil des elektrischen Feldes, der durch die Ladungen innerhalb einer Fläche hervorgerufen wird, oder ist es das Gesamtfeld, das durch alle Ladungen – sowohl innerhalb als auch außerhalb der Fläche – hervorgerufen wird?

Beispiel 19.10: Das elektrische Feld einer homogenen Platte

Eine sehr große (unendlich ausgedehnte), gleichförmig geladene Kunststoffplatte mit der Dicke $2a$ liegt im Bereich zwischen den Ebenen $z = +a$ und $z = -a$. Bestimmen Sie das elektrische Feld dieser Ladungsverteilung in einem beliebigen Punkt. Die Ladungsdichte (Ladung pro Volumen) in dem Kunststoff ist ρ .

Problembeschreibung: Die Ladungsverteilung hat ebene Symmetrie, die Symmetrieebene ist die Ebene $z = 0$. Anhand von Symmetriüberlegungen können Sie die Richtung des elektrischen Felds an einem beliebigen Punkt bestimmen. Wenden Sie dann das Gauß'sche Gesetz an und lösen Sie nach dem elektrischen Feld auf.

Lösung: 1. Bestimmen Sie die Richtung von \mathbf{E} anhand von Symmetriüberlegungen. Da die Platte unendlich ausgedehnt ist, gibt es keine ausgezeichnete Richtung parallel zu der Platte: Für $\rho > 0$ zeigt \mathbf{E} von der Ebene $z = 0$ fort, für $\rho < 0$ zeigt \mathbf{E} auf die Ebene $z = 0$ hin. Auf der Ebene $z = 0$ gilt $\mathbf{E} = 0$.

2. Skizzieren Sie die Ladungsverteilung und zeichnen Sie eine passende Gauß'sche Oberfläche ein, in diesem Fall

einen Zylinder, der durch die Symmetrieebene ($z = 0$) mittig geteilt wird und dessen Achse senkrecht auf der Symmetrieebene steht (Abbildung 19.22). Der Zylinder erstreckt sich von $-z$ bis $+z$.

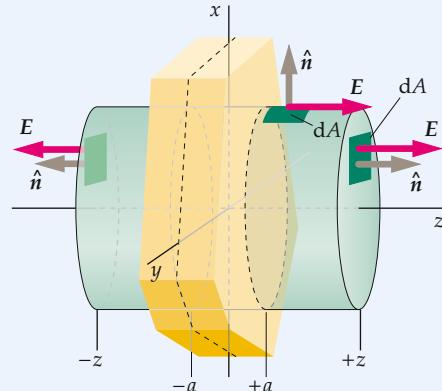


Abbildung 19.22 Skizze der Ladungsverteilung inklusive zylindrischer Gauß'scher Oberfläche für $\rho > 0$.

3. Schreiben Sie das Gauß'sche Gesetz nieder (Gleichung 19.15):

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E_n dA = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

4. Der nach außen gerichtete Fluss durch die Zylinderfläche ist gleich der Summe aus den Flüssen durch jedes der Teilstücke der Fläche. Zeichnen Sie sowohl \hat{n} und \mathbf{E} in einem Flächenelement von jedem der Teilstücke (Abbildung 19.22):

$$\Phi_{\text{el}} = \Phi_{\text{el,rechts}} + \Phi_{\text{el,links}} + \Phi_{\text{el,Mantel}}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el,links}} &= \int_{\text{links}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ \Phi_{\text{el,rechts}} &= \int_{\text{rechts}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\ \Phi_{\text{el,Mantel}} &= \int_{\text{Mantel}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}\end{aligned}$$

5. Da $\mathbf{E} \cdot \hat{n}$ überall auf dem Mantel null ist, ist auch der Fluss durch die Mantelfläche null:

$$\Phi_{\text{el,Mantel}} = 0$$

6. \mathbf{E} ist auf der rechten Deckfläche überall gleich, daher kann man $\mathbf{E} \cdot \hat{n} = E_n$ als Konstante vor das Integral ziehen.

Wir bezeichnen den Flächeninhalt der rechten Deckfläche als A :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el,rechts}} &= \int_{\text{rechts}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\text{rechts}} E_n dA \\ &= E_n \int_{\text{rechts}} dA = E_n A\end{aligned}$$

7. Die beiden Deckflächen haben denselben Abstand von der Symmetrieebene (bei $z = 0$), somit ist \mathbf{E} auf der rechten Deckfläche dem Feld \mathbf{E} auf der linken Deckfläche entgegengesetzt gleich. Die Normalen der beiden Deckflächen sind ebenfalls entgegengesetzt gleich. Daher gilt $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E_n$ für beide Deckflächen. Demnach ist auch der Fluss durch beide Deckflächen gleich: $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = E_n$ ist für beide Deckflächen gleich, also

$$\Phi_{\text{el,links}} = \Phi_{\text{el,rechts}} = E_n A$$

8. Addieren Sie die Flüsse durch die einzelnen Teilstücke der Gauß'schen Oberfläche:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el}} &= \Phi_{\text{el,rechts}} + \Phi_{\text{el,links}} + \Phi_{\text{el,Mantel}} \\ &= E_n A + E_n A + 0 = 2 E_n A\end{aligned}$$

9. Lösen Sie nach der durch die Gauß'sche Oberfläche eingeschlossenen Ladung auf (das Volumen eines Zylinders ist gleich dem Flächeninhalt A der Deckfläche mal der Länge, die $2z$ ist):

$$\begin{aligned}q_{\text{innen}} &= \rho A 2a \quad (|z| \geq a) \\ q_{\text{innen}} &= \rho A 2|z| \quad (-a \leq z \leq a)\end{aligned}$$

10. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 8 und 9 in den Ausdruck $\Phi_{\text{el}} = q_{\text{innen}}/\epsilon_0$ (Schritt 3) ein. Bestimmen Sie E_n auf der rechten Deckfläche: Außerhalb der Platte ($|z| \geq a$) gilt $2E_n A = \rho A 2a/\epsilon_0$ und damit $E_n = \rho a/\epsilon_0$. Innerhalb der Platte ($-a \leq z \leq a$) gilt $2E_n A = \rho A 2|z|/\epsilon_0$ und damit $E_n = \rho |z|/\epsilon_0$.

11. Lösen Sie nach \mathbf{E} als Funktion von z auf. Im Bereich $z < 0$ ist $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{z}$, also $E_z = -E_n$. Demnach weist \mathbf{E} in negative z -Richtung und E_z ist negativ:

$$\mathbf{E} = E_z \hat{z} = \begin{cases} -(\rho a/\epsilon_0) \hat{z} & (z \leq -a) \\ (\rho z/\epsilon_0) \hat{z} & (-a \leq z \leq a) \\ +(\rho a/\epsilon_0) \hat{z} & (z \geq +a) \end{cases}$$

oder

$$\mathbf{E} = E_z \hat{z} = \begin{cases} \text{sgn}(z) \cdot (\rho a/\epsilon_0) \hat{z} & (|z| \geq a) \\ \text{sgn}(z) \cdot (\rho |z|/\epsilon_0) \hat{z} & (|z| \leq a) \end{cases}$$

19.4 Berechnung von E mit dem Gauss'schen Gesetz

Plausibilitätsprüfung: Das elektrische Feld hat die Einheit N/C. Nach den Ergebnissen aus Schritt 11 muss $\rho a/\epsilon_0$ dieselbe Einheit haben. Das ist so, wie eine Einheitenrechnung zeigt: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, ρ hat die Einheit C/m^3 , und a hat die Einheit m.

Weitergedacht: Außerhalb der Platte ist das elektrische Feld dasselbe wie das einer unendlich ausgedehnten ebenen Flächenladung (Gleichung 19.9) mit $\sigma = 2\rho a$. Abbildung 19.23 zeigt den Verlauf von E_z in Abhängigkeit von z für die geladene Platte. Vergleichen Sie diese Abbildung mit dem Feldverlauf der geladenen Ebene (Abbildung 19.11).

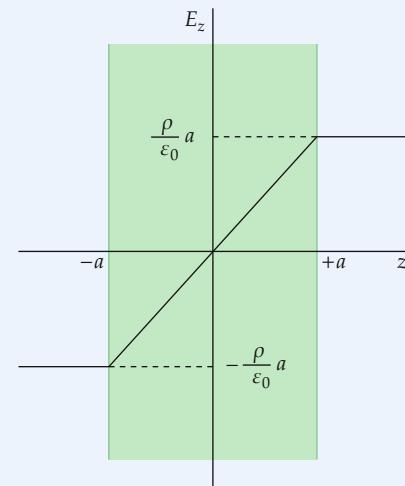


Abbildung 19.23 Verlauf von E_z in Abhängigkeit von z für eine homogen geladene, unendlich ausgedehnte Platte der Dicke $2a$ und der Ladungsdichte ρ . Erkennen Sie die Ähnlichkeit zu Abbildung 19.11?

Beispiel 19.11: Das Feld einer dünnen geladenen Kugelschale

Bestimmen Sie das Feld einer homogen geladenen dünnen Kugelschale vom Radius r_K , die die Ladung q trägt.

Problembeschreibung: Diese Ladungsverteilung hängt nur von der Entfernung von einem einzigen Punkt ab – nämlich dem Mittelpunkt der Kugelschale. Daher hat die Ladungsverteilung sphärische Geometrie (Kugelsymmetrie). Dieser Symmetrie zufolge muss \mathbf{E} radial sein, und der Betrag hängt nur vom Abstand r zum Kugelmittelpunkt ab. Wir werden daher eine sphärische Gauß'sche Oberfläche mit einem beliebigen Radius r verwenden, die konzentrisch mit der Ladungsverteilung ist.

Lösung: 1. Zeichnen Sie die Ladungsverteilung und eine kugelförmige Gauß'sche Oberfläche mit einem Radius $r > r_K$. Zeichnen Sie auch ein Flächenelement dA , die Flächennormale \hat{n} und das elektrische Feld E an dem Flächenelement (Abbildung 19.24).

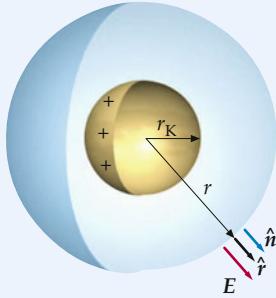


Abbildung 19.24 Eine kugelförmige Gauß'sche Oberfläche vom Radius $r > r_K$ zur Berechnung des elektrischen Felds außerhalb einer gleichmäßig geladenen Kugelschale vom Radius r_K .

2. Schreiben Sie das Gauß'sche Gesetz nieder (Gleichung 19.15):

$$\Phi_{\text{cl}} = \oint_A E_n \, dA = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

3. Der Wert von E_n ist auf der gesamten Fläche gleich. Daher können wir ihn vor das Integral ziehen:

$$E_n \oint_A dA = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

4. Das Flächenintegral über die Oberfläche A ist gerade der Flächeninhalt der Kugel, $4\pi r^2$:

$$E_n (4\pi r^2) = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

5. Wegen der Symmetrie ist $E_n = E_r$. Setzen Sie das ein und lösen Sie nach E_r auf:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{innen}}}{r^2}$$

6. Für $r > r_K$ ist die eingeschlossene Ladung die Gesamtladung q ; für $r < r_K$ ist die eingeschlossene Ladung null:

$$E = E_r \hat{r} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} & r > r_K \\ E_r = 0 & r < r_K \end{cases}$$

Plausibilitätsprüfung: Außerhalb der geladenen Kugelschale ist das elektrische Feld dasselbe wie das einer Punktladung q im Mittelpunkt der Kugelschale. Dieses Ergebnis kann man für $r \gg r_K$ auch erwarten.

Weitergedacht: Das Ergebnis von Schritt 6 hätte man auch durch direkte Integration des Coulomb'schen Gesetzes erhalten können, diese Rechnung ist jedoch schwieriger. ■

Wir werden nun mithilfe des Gauß'schen Gesetzes das Coulomb'sche Gesetz ableiten. Dazu wenden wir den Gauß'schen Satz auf die Berechnung elektrischer Felder von kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen an. Zur Veranschaulichung betrachten wir zuerst das elektrische Feld in einem Punkt mit dem Abstand r von einer Punktladung q . Als Gauß'sche Oberfläche wählen wir eine Kugelfläche vom Radius r um die Ladung q . Die nach außen weisende Flächennormale \hat{n} ist gleich dem radialen Einheitsvektor \hat{r} . Wegen der Punktsymmetrie der Punktladung muss das elektrische Feld E radial nach außen oder nach innen gerichtet sein. Daher muss E_n , die Komponente von E senkrecht zur Gauß'schen Oberfläche, gleich der Radialkomponente von E sein, d.h. $E_n = E \cdot \hat{n} = E \cdot \hat{r} = E_r$. Somit hängt der Betrag des Felds $|E|$ nur vom Abstand r zur Punktladung q ab; auf der Gauß'schen Fläche mit dem Radius r ist das Feld E_n überall gleich groß. Der nach außen gerichtete elektrische Fluss ist gegeben durch

$$\Phi_{\text{cl}} = \oint_A E \cdot dA = \oint_A E_n \, dA = E_n \oint_A dA = E_r (4\pi r^2).$$

Darin ist $\oint_A dA = 4\pi r^2$ der Flächeninhalt der Kugelfläche. Da die Gesamtladung im Inneren der Gauß'schen Fläche nur die Punktladung q ist, liefert das Gauß'sche Gesetz

$$E_r (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Die Auflösung nach E ergibt die Ortsabhängigkeit des elektrischen Felds zu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

ein Ergebnis, wie wir es von dem Coulomb'schen Gesetz einer Punktladung kennen. Damit haben wir das Coulomb'sche Gesetz aus dem Gauß'schen Gesetz (am Beispiel einer Punktladung) abgeleitet. Da sich umgekehrt auch das Gauß'sche Gesetz aus dem Coulomb'schen Gesetz herleiten lässt (wir werden das in Abschnitt 19.7 für beliebige Gauß'sche Flächen tun), haben wir die Äquivalenz beider Gesetze für statische Ladungsverteilungen gezeigt.

Abbildung 19.25a zeigt den Verlauf von E über r bei einer homogen geladenen Kugelschale. Wieder erkennt man, dass das elektrische Feld E bei $r = r_K$ unstetig ist, wo die Oberflächenladungsdichte $\sigma = q/4\pi r_K^2$ beträgt. Nähert man sich von außen der Ladungsfläche, berechnet man den rechtsseitigen Grenzwert von E an $r = r_K$, so erhält man $\lim_{r \rightarrow r_K^+} E = q/(4\pi\epsilon_0 r_K^2) = \sigma/\epsilon_0$. Für die Annäherung an die Ladungsfläche von innen her erhält man wegen $q = 0$ den linksseitigen

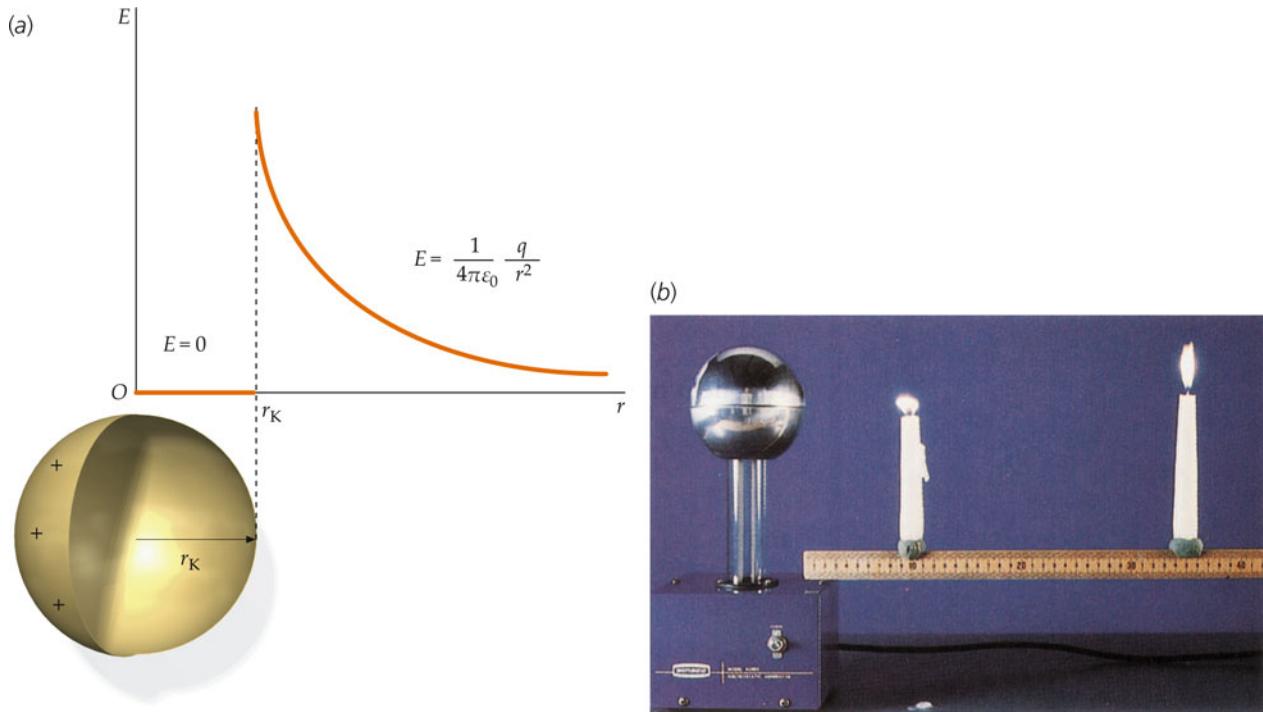


Abbildung 19.25 a) Verlauf von E in Abhängigkeit von r für die Ladungsverteilung einer Kugelschale. Das elektrische Feld ist bei $r = r_K$ unstetig, wo die Oberflächenladungsdichte $\sigma \neq 0$ ist. b) Die Abnahme von E mit wachsender Entfernung r von einer geladenen Kugelschale ist durch die Wirkung des Felds auf die Flammen zweier Kerzen klar ersichtlich. Die Kugelschale links im Bild (Teil eines Van-de-Graaff-Generators; Kapitel 20) trägt eine große negative Ladung, die die positiven Ionen in der nahen Kerzenflamme anzieht. Die Flamme rechts, die viel weiter von der Kugelschale entfernt ist, wird nicht spürbar beeinflusst. (© Runk/Schoenberger von Grant Heilmann.)

Grenzwert $\lim_{r \rightarrow r_K^-} E = 0$. Damit ergibt sich für die radiale Komponente des elektrischen Felds der homogen geladenen Kugelschale beim Durchgang durch die Ladungsfläche ein Sprung von der Größe σ/ϵ_0 .

Beispiel 19.12: Elektrisches Feld, erzeugt durch eine Punktladung und eine geladene Kugelschale

Der Mittelpunkt einer Kugelschale vom Radius $r_K = 3,00 \text{ m}$ sitzt im Koordinatenursprung. Die Kugelschale hat eine Oberflächenladungsdichte $\sigma = 3,00 \text{ nC/m}^2$. Eine Punktladung $q = 250 \text{ nC}$ liegt auf der y -Achse bei $y = 2,00 \text{ m}$. Berechnen Sie das elektrische Feld auf der x -Achse in den Punkten a) $x_1 = 2,00 \text{ m}$ und b) $x_2 = 4,00 \text{ m}$.

Problembeschreibung: Wir berechnen die Felder der Punktladung und der Kugelschale jeweils einzeln und addieren dann gemäß dem Superpositionsprinzip die Feldvektoren. Im Fall a liegt der Feldpunkt innerhalb der Kugelschale. Das dort erzeugte Feld röhrt ausschließlich von der Punktladung her (Abbildung 19.26a). Im Fall b befindet sich der Feldpunkt außerhalb der Schale, sodass man die Schale als eine Punktladung im Koordinatenursprung

betrachten kann. Es ist dann das resultierende Feld von zwei Punktladungen zu berechnen (Abbildung 19.26b).

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Innerhalb der Schale wird E_1 allein von der Punktladung erzeugt:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \hat{r}_1$$

2. Berechnen Sie das Abstandsquadrat von r_1 :

$$r_1^2 = (2,00 \text{ m})^2 + (2,00 \text{ m})^2 = 8,00 \text{ m}^2$$

3. Berechnen Sie mit diesem Wert von r_1^2 den Betrag des Feldes:

$$\begin{aligned} |E_1| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r_1^2} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot (250 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{8,00 \text{ m}^2} \\ &= 281 \text{ N/C} \end{aligned}$$

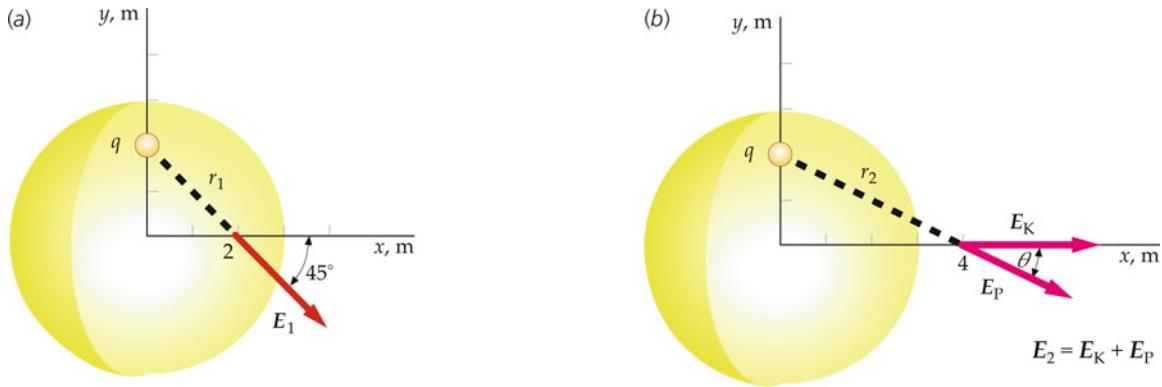


Abbildung 19.26 Skizze der Kugelschalen inklusive Punktladung q und Feldpunkt. Im Fall a befindet sich der Feldpunkt innerhalb der Kugelschale, im Fall b außerhalb.

4. Aus Abbildung 19.26a kann man erkennen, dass das Feld mit der x -Achse einen Winkel von -45° bildet:

$$\theta_1 = -45,0^\circ$$

5. Drücken Sie E_1 in seinen Komponenten aus:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{1,x} \hat{x} + E_{1,y} \hat{y} \\ &= E_1 \cos 45,0^\circ \hat{x} - E_1 \sin 45,0^\circ \hat{y} \\ &= [(281 \cos 45^\circ) \text{ N/C}] \hat{x} - [(281 \sin 45^\circ) \text{ N/C}] \hat{y} \\ &= [199 \text{ N/C} (\hat{x} - \hat{y})] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Für Feldpunkte außerhalb des Schalenrands kann man das Feld der Kugelschale als das Feld einer Punktladung im Koordinatenursprung betrachten. Das von der Schale herrührende Feld E_K zeigt deshalb in Richtung der x -Achse:

$$E_K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_K}{x_2^2} \hat{x}$$

2. Berechnen Sie die Gesamtladung q_K der Kugelschale:

$$\begin{aligned} q_K &= \sigma 4\pi r_K^2 \\ &= (3,00 \text{ nC/m}^2) \cdot 4\pi \cdot (3,00 \text{ m})^2 \\ &= 339 \text{ nC} \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie mit diesem Wert von q_K das Feld der Schale:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_K}{x_2^2} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot (339 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(4,00 \text{ m})^2} \\ &= 190 \text{ N/C} \end{aligned}$$

4. Das Feld der Punktladung lautet:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2} \hat{r}_2$$

5. Berechnen Sie das Abstandsquadrat r_2^2 von der Punktladung q auf der y -Achse zu dem Feldpunkt bei $x_2 = 4,00$:

$$r_2^2 = (2,00 \text{ m})^2 + (4,00 \text{ m})^2 = 20,0 \text{ m}^2$$

6. Berechnen Sie den Betrag des von der Punktladung erzeugten Felds:

$$\begin{aligned} |E_P| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r_2^2} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \cdot (250 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{20,0 \text{ m}^2} \\ &= 112 \text{ N/C} \end{aligned}$$

7. Berechnen Sie den Winkel θ , den das Feld E_P mit der x -Achse bildet:

$$\tan \theta = -\frac{2,00 \text{ m}}{4,00 \text{ m}} = -0,500$$

$$\Rightarrow \theta = -\arctan 0,500 = -26,6^\circ$$

8. Damit lassen sich die x - und die y -Komponente des resultierenden elektrischen Felds $E = E_x \hat{x} + E_y \hat{y}$ berechnen:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{P,x} + E_{K,x} = |E_P| \cos \theta + E_K \\ &= (112 \text{ N/C}) \cdot \cos 26,6^\circ + 190 \text{ N/C} = 290 \text{ N/C} \\ E_y &= E_{P,y} + E_{K,y} = -|E_P| \sin \theta + 0 \\ &= -(112 \text{ N/C}) \cdot \sin 26,6^\circ = -50,0 \text{ N/C} \\ E &= E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = [290 \text{ N/C} \hat{x} - 50,0 \text{ N/C} \hat{y}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Schritt 8 von Teilaufgabe b stimmt qualitativ mit Abbildung 19.26b überein, wonach E_x positiv und E_y negativ ist. Außerdem gilt $|E_y| < E_x$.

Weitergedacht: Durch die Angabe von x -, y - und z -Komponente ist ein Vektor vollständig bestimmt. Da die z -Komponente des elektrischen Feldvektors in diesem Fall null ist, ist E vollständig durch die x - und y -Komponente bestimmt. ■

Beispiel 19.13: Das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel

Bestimmen Sie das elektrische Feld außerhalb und innerhalb einer homogen geladenen Vollkugel mit dem Radius r_K , einer Gesamtladung q und einer Ladungsdichte $\rho = q/V$. Das Kugelvolumen ist $V = (4/3)\pi r^3$.

Problembeschreibung: Wegen der Kugelsymmetrie muss das elektrische Feld radial sein, d. h. $E = E\hat{r}$. (Für eine positive Gesamtladung ist E vom Zentrum radial nach außen gerichtet, für eine negative Gesamtladung nach innen.) Wir wählen als Gauß'sche Oberfläche eine Kugel (Abbildung 19.27a und b). Auf der Gauß'schen Oberfläche ist der Betrag des Feldes $|E|$ und somit auch die radiale Komponente E konstant. Das Gauß'sche Gesetz bringt dann E mit der Gesamtladung innerhalb der Gauß'schen Oberfläche in Zusammenhang.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine geladene Kugel vom Radius r_K und eine kugelförmige Gauß'sche Oberfläche mit dem Radius r (Abbildung 19.27a für $r > r_K$ und Abbildung 19.27b für $r < r_K$).

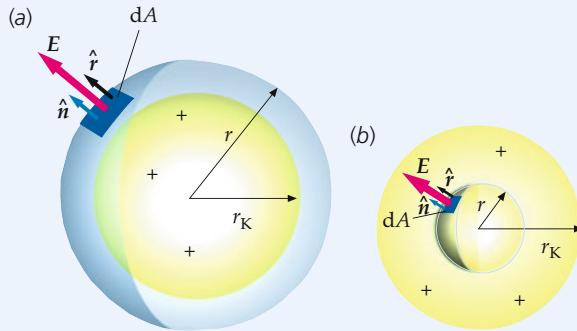


Abbildung 19.27 Skizze der Kugel und der Gauß'schen Oberflächen für die Fälle a) $r > r_K$ und b) $r < r_K$.

2. Bringen Sie den Fluss durch die Gauß'sche Oberfläche mit dem elektrischen Feld auf ihr in Zusammenhang. In jedem Punkt dieser Oberfläche ist $\hat{n} = \hat{r}$ und E konstant:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el}} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \cdot \hat{r} A = EA \\ &= E(4\pi r^2)\end{aligned}$$

(Die Oberfläche einer Kugel vom Radius r ist $4\pi r^2$.)

3. Bringen Sie mit dem Gauß'schen Gesetz die Feldkomponente E mit der Gesamtladung q im Inneren der Kugeloberfläche in Zusammenhang:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

19.4 Berechnung von E mit dem Gauß'schen Gesetz

4. Berechnen Sie q_{innen} für alle Werte von r . Die Ladungsdichte beträgt $\rho = q/V$, das Kugelvolumen ist $V = (4/3)\pi r_K^3$: Für $r \geq r_K$ ist $q_{\text{innen}} = q$.

Für $r < r_K$ ist $q_{\text{innen}} = \rho V'$ mit $V' = (4/3)\pi r^3$, sodass

$$q_{\text{innen}} = \left(\frac{q}{V}\right)V' = \left(\frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_K^3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = q \frac{r^3}{r_K^3}$$

5. Setzen Sie das in das Ergebnis aus Schritt 3 ein und lösen Sie nach E auf: $E = E\hat{r}$ mit

$$\boxed{\begin{aligned}E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, & r > r_K \\E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{r^3}{r_K^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K^3} r, & r \leq r_K\end{aligned}} \quad \text{bzw.}$$

Plausibilitätsprüfung: Im Mittelpunkt der geladenen Kugel ist das elektrische Feld null, wie es die Symmetrie erfordert. Für $r \gg r_K$ ist, wie ebenfalls zu erwarten, das Feld identisch mit dem einer Punktladung q im Mittelpunkt der Kugel.

Weitergedacht: Abbildung 19.28 zeigt den Verlauf von E in Abhängigkeit von r für die Ladungsverteilung in diesem Beispiel. Innerhalb der homogen geladenen Kugel wächst E linear mit r . Interessanterweise ist E bei $r = r_K$ stetig. Eine homogen geladene Kugel wird manchmal als Modell benutzt, um das elektrische Feld eines Atomkerns zu beschreiben.

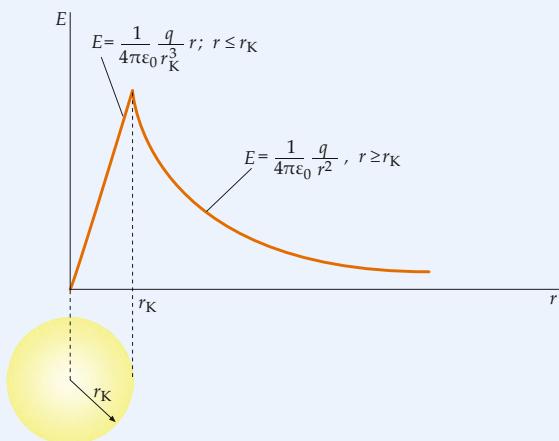


Abbildung 19.28 Das Feld einer homogen geladenen Kugel wächst im Innenraum linear mit r und nimmt im Außenraum umgekehrt proportional zu r^2 ab.

Beispiel 19.14: Das elektrische Feld einer unendlich langen Linienladung

Bestimmen Sie mithilfe des Gauß'schen Gesetzes das elektrische Feld einer unendlich langen Linienladung mit homogener Ladungsdichte λ . (Diese Aufgabe wurde bereits in Beispiel 19.3 mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes behandelt.)

Problembeschreibung: Aufgrund der Symmetrie der Ladungsverteilung ist das elektrische Feld ein Radialfeld. Somit hängt der Betrag des Felds nur vom Abstand des Feldpunkts zur Linienladung ab. Die Feldrichtung zeigt senkrecht von der Ladungsverteilung weg, wenn λ positiv ist, bei negativer Ladung zu ihr hin. Wir wählen deshalb eine zylinderförmige Gauß'sche Oberfläche, die die Linienladung koaxial umgibt. Diese Oberfläche besteht aus drei Teilebenen, aus zwei ebenen Flächen an den Enden des Zylinders und der Mantelfläche. Wir berechnen den nach außen führenden Fluss von E durch jede Teilfläche und stellen dann mithilfe des Gauß'schen Gesetzes einen Zusammenhang zwischen dem Gesamtfloss und der Ladung im Inneren des Zylinders her.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine Gerade mit einer homogenen Ladungsverteilung und eine dazu koaxiale zylindrische Gauß'sche Oberfläche (Abbildung 19.29) mit der Länge l und dem Radius r_{\perp} . Die geschlossene Oberfläche besteht aus drei Teilen, nämlich der Grund- und Deckfläche und der Mantelfläche des Zylinders. Zeichnen Sie in einem beliebig gewählten Punkt auf jeder Fläche die Vektoren E und \hat{n} . Aufgrund der Zylindersymmetrie zeigt E bei positivem λ senkrecht von der Linienladung weg, und seine Größe hängt nur vom radialen Abstand zur Linienladung ab.

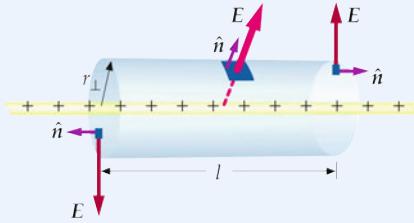


Abbildung 19.29 Skizze der Ladungsverteilung und der koaxialen zylindrischen Gauß'schen Oberfläche.

2. Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss durch die Mantelfläche des Gauß'schen Zylinders. In jedem Punkt der Mantelfläche ist $\hat{r}_{\perp} = \hat{n}$ (dabei ist \hat{r}_{\perp} der Einheitsvektor in radialer Richtung):

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el,Mantel}} &= E \cdot A_{\text{Mantel}} = E \cdot r_{\perp} A_{\text{Mantel}} \\ &= E (2\pi r_{\perp} l)\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie den Fluss nach außen durch die beiden ebenen Flächen der Gauß'schen Oberfläche. Auf diesen

Flächen ist die Richtung von \hat{n} parallel zur Linienladung und daher senkrecht zu E :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el,links}} &= E \cdot A_{\text{links}} = 0 \\ \Phi_{\text{el,rechts}} &= E \cdot A_{\text{rechts}} = 0\end{aligned}$$

4. Stellen Sie mit dem Gauß'schen Gesetz einen Zusammenhang zwischen dem Feld und der Gesamtladung q_{innen} innerhalb der Oberfläche her. Der Gesamtfloss Φ_{el} durch die Gauß'sche Oberfläche setzt sich aus den drei Teilflüssen zusammen, und q_{innen} ist die Ladung auf einer Länge l der Linienladung:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{el}} &= \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} \\ E (2\pi r_{\perp} l) &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

und somit

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r_{\perp}}$$

Kommentar: Damit haben wir das gleiche Ergebnis wie in Beispiel 19.3 (Gleichung 19.6) erhalten, das mit dem Coulomb'schen Gesetz hergeleitet wurde. ■

Das elektrische Feld einer homogen geladenen dünnen Kugelschale ist gegeben durch $E = E_r \hat{r}$ mit

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r > r_K, \quad (19.16a)$$

$$E_r = 0 \quad r < r_K. \quad (19.16b)$$

Wir haben in Beispiel 19.13 gesehen, dass das elektrische Feld in einer Entfernung r vom Mittelpunkt einer homogen geladenen Vollkugel mit dem Radius r_K durch $E = E_r \hat{r}$ gegeben ist, mit

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r \geq r_K, \quad (19.17a)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K^3} r, \quad r \leq r_K. \quad (19.17b)$$

In Beispiel 19.9 wurde bei der Berechnung von E stillschweigend angenommen, dass der Feldpunkt weit genug von den Enden der Linienladung entfernt ist, sodass E_n überall auf der zylindrischen Gauß'schen Oberfläche einen konstanten Wert besitzt. (Das ist zu der Annahme äquivalent, dass für einen Abstand r_{\perp} von der Linie die Linienladung unendlich lang erscheint.) Nähert man sich den Enden einer endlichen Linienladung, treffen diese Annahmen nicht mehr zu, denn E ist nicht mehr senkrecht auf der Mantelfläche und E_n nicht konstant. Die Zylindersymmetrie ist in den Randbereichen stark gestört, und das Gauß'sche Gesetz lässt sich nicht mehr zur Berechnung des Felds verwenden.

19.6 Ladung und Feld auf Leiteroberflächen

Es ist wichtig sich klarzumachen, dass das Gauß'sche Gesetz zwar für beliebige geschlossene Flächen und beliebige Ladungsverteilungen gilt, für die Berechnung elektrischer Felder lässt es sich jedoch nur dann vorteilhaft nutzen, wenn eine Ladungsverteilung mit hoher Symmetrie (zylindrische, sphärische oder ebene Symmetrie) vorliegt.

19.5 Diskontinuität von E_n

Wir haben gesehen, dass die elektrischen Felder einer unendlich ausgedehnten geladenen Ebene und einer geladenen Kugelschale an der Ladungsfläche eine Sprungstelle der Größe σ/ε_0 haben, sich also unstetig verhalten. Wir werden nun zeigen, dass das Auftreten einer Sprungstelle für die Normalkomponente des elektrischen Felds an einer geladenen Fläche mit einer Flächenladungsdichte σ ein allgemein gültiges Ergebnis ist.

Abbildung 19.30 zeigt eine beliebige Fläche mit einer Flächenladungsdichte σ . Die Fläche ist beliebig gekrümmt, hat aber keine scharfen Knicke, an denen die Normalenrichtung nicht eindeutig wäre. σ ist beliebig, aber stetig. Das elektrische Feld \mathbf{E} nahe einem Punkt auf der Fläche setzt sich nach dem Superpositionsprinzip aus zwei Anteilen zusammen: dem Feld der geladenen Kreisscheibe \mathbf{E}_S und einem Feld \mathbf{E}' beliebiger anderer Feldquellen außerhalb der Ladungsfläche. Somit gilt

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_S + \mathbf{E}'. \quad (19.18)$$

Wenn man die Scheibe klein genug wählt, kann man sie als eben und homogen geladen ansehen. Das elektrische Feld \mathbf{E}_S auf der Achse der Scheibe ist dann durch Gleichung 19.8 gegeben. In Punkten auf der Achse und sehr nahe der Scheibe herrscht die Feldstärke $|\mathbf{E}_S| = |\sigma|/2\varepsilon_0$; die Richtung von \mathbf{E}_S zeigt von der Scheibe weg, wenn σ positiv ist und auf die Scheibe zu, wenn σ negativ ist. Betrag und Richtung des elektrischen Felds \mathbf{E}' sind unbekannt. In der Umgebung des Punkts P darf man \mathbf{E}' jedoch als stetig und homogen voraussetzen (Abbildung 19.30).

Die Achse steht senkrecht auf der Fläche, sodass die Vektorkomponenten längs dieser Achse als Normalkomponenten

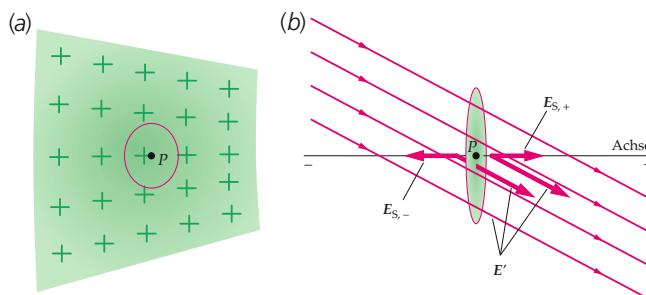


Abbildung 19.30 a) Eine Fläche mit einer Oberflächenladung. b) \mathbf{E}_S bezeichnet das elektrische Feld einer geladenen Kreisscheibe, \mathbf{E}' ist das elektrische Feld von anderen Feldquellen. Die rechte Seite der Scheibe bezeichnen wir mit (+) und die linke Seite mit (-).

der Felder angesehen werden können. Somit gilt nach Gleichung 19.18 $E_n = E_{S,n} + E'_{n,-}$. Wenn wir eine Seite der Fläche als die (+)-Seite und die andere als die (-)-Seite betrachten, haben wir auf den beiden Seiten die Normalkomponenten $E_{n,+} = \sigma/2\varepsilon_0 + E'_{n,+}$ und $E_{n,-} = -\sigma/2\varepsilon_0 + E'_{n,-}$. Die Normalkomponente E_n ändert sich also an der Ladungsfläche unstetig. Beim Übergang von der (+)-Seite zur (-)-Seite hängt der Sprung von der Flächenladungsdichte ab:

$$\Delta E_n = E_{n,+} - E_{n,-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (19.19)$$

DISKONTINUITÄT VON E_n BEI EINER OBERFLÄCHENLADUNG

Für die Herleitung dieser Gleichung wurde ausgenutzt, dass in der Nähe der Scheibe $E'_{n,+} = E'_{n,-}$ gilt (denn das Feld \mathbf{E}' ist an der Ladungsfläche stetig).

Der Sprung der Normalkomponente des Felds ist uns bereits bei einer endlichen Ladungsscheibe (Abbildung 19.10), einer unendlichen Ladungsebene (Abbildung 19.11) und einer geladenen Kugelschale (Abbildung 19.25) begegnet. Am Rand einer homogen geladenen Kugel (Abbildung 19.28) tritt hingegen keine Diskontinuität auf. Die Normalkomponente des elektrischen Felds an der Oberfläche der homogen geladenen Kugel ist stetig, obgleich da eine (endliche) Sprungstelle der räumlichen Ladungsdichte vorhanden ist. Nur für eine unendlich große Sprungstelle der Ladungsdichte würde auch das elektrische Feld im dreidimensionalen Fall unstetig werden. Die Diskontinuität des elektrischen Felds an Sprungstellen einer endlichen Ladungsdichte tritt nur im zweidimensionalen Fall, also bei Flächenladungsdichten, auf.

19.6 Ladung und Feld auf Leiteroberflächen

Ein Leiter enthält eine riesige Menge an Ladung, die sich frei innerhalb des Leiters bewegen kann. Wenn innerhalb eines Leiters ein elektrisches Feld herrscht, wirkt eine resultierende Kraft auf diese Ladung und verschiebt sie, d. h., im Leiter fließt ein momentaner elektrischer Strom (elektrische Ströme werden wir in Kapitel 22 diskutieren). Wird dieser Ladungstransport jedoch nicht durch eine äußere Energiequelle aufrechterhalten, verteilen sich die freien Ladungen im Leiter neu, und zwar so lange, bis die resultierende Kraft und damit das elektrische Feld im Leiter wieder null ist. Dann befindet sich der Leiter wieder im **elektrostatischen Gleichgewicht**. In diesem Zustand ist das elektrische Feld innerhalb eines Leiters überall null. Die Zeit bis zum Erreichen des Gleichgewichts hängt vom Material des Leiters ab. Für Kupfer und andere metallische Leiter ist diese Zeit so klein, dass das elektrostatische Gleichgewicht meist schon in einigen Nanosekunden erreicht ist. (Bei sehr tiefen Temperaturen werden manche Metalle supraleitend. In einem Supraleiter dauert der Strom eine wesentliche längere Zeit an, selbst ohne

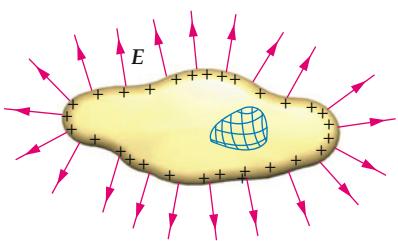


Abbildung 19.31 Eine Gauß'sche Oberfläche, die sich vollständig im Inneren eines Leiters befindet. Da das elektrische Feld innerhalb eines Leiters im elektrostatischen Gleichgewicht überall null ist, muss auch der Gesamtfluss durch die Gauß'sche Fläche null sein. Das gilt für jede Gauß'sche Fläche im Inneren des Leiters. Folglich ist die Ladungsdichte ρ innerhalb eines Leiters null.

äußere Energiequelle. Supraleitende Metalle werden in Kapitel 37 behandelt.)

Da das elektrische Feld im Inneren eines Leiters null ist, gilt das auch für einen beliebigen von einem Leiter umschlossenen Hohlraum. Man kann so einen bestimmten begrenzten Raumbereich von elektrischen Feldern freihalten, indem man ihn mit einem Leiter umhüllt. In der praktischen Ausführung konstruiert man eine solche *Abschirmung* aus massiven, gut leitenden Metallwänden – einen sogenannten **Faraday'schen Käfig**. Bei geringeren Anforderungen an die Abschirmwirkung genügen auch Metallflächen mit Löchern, im Extremfall sogar Drahtgitter; solche durchbrochenen Abschirmungen zeigen jedoch einen gewissen Durchgriff, d.h., in ihrem Inneren treten in der Nähe der Begrenzung noch geringe Feldstärken auf.

Wir können mithilfe des Gauß'schen Gesetzes zeigen, dass sich eine (von null verschiedene) elektrische Gesamtladung in einem Leiter nur auf seiner Oberfläche befinden kann. Dazu legen wir zunächst eine Gauß'sche Fläche vollständig in das Innere eines Leiters, der sich im elektrostatischen Gleichgewicht befindet.

den soll (Abbildung 19.31). Größe und Gestalt der Gauß'schen Oberfläche spielen keine Rolle, solange sich nur die gesamte Oberfläche innerhalb des Leiters befindet. Das elektrische Feld ist überall im Inneren des Leiters null, also auch in jedem Punkt einer Gauß'schen Oberfläche. Der Gesamtfluss des elektrischen Felds durch die Oberfläche ist daher null, und aufgrund des Gauß'schen Gesetzes muss dann auch die Gesamtladung innerhalb der Oberfläche null sein. Da dies für jede beliebig gewählte Gauß'sche Oberfläche im Inneren des Leiters gilt, hat ein Leiter im elektrostatischen Gleichgewicht in jedem inneren Punkt die Ladungsdichte null.

Wenn ein Leiter eine Gesamtladung $q \neq 0$ trägt und sich im elektrostatischen Gleichgewicht befindet, muss sich die Ladung auf der Leiteroberfläche verteilen. Im elektrostatischen Gleichgewicht eines geladenen Leiters steht das elektrische Feld \mathbf{E} in jedem Punkt der Leiteroberfläche senkrecht auf dem Flächenelement. (Gäbe es eine Tangentialkomponente $E_t \neq 0$, dann würde sich eine freie Ladung so lange tangential zur Oberfläche bewegen, bis das elektrostatische Gleichgewicht wiederhergestellt wäre und $E_t = 0$ ist.)

Da E_n auf geladenen Oberflächen eine Sprungstelle der Größe σ/ϵ_0 hat und \mathbf{E} innerhalb eines Leiters null ist, erhält man für das elektrische Feld unmittelbar außerhalb einer Leiteroberfläche $E_t = 0$ und

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (19.20)$$

E_n AN DER OBERFLÄCHE EINES LEITERS

Das elektrische Feld an der Leiteroberfläche mit der Ladungsdichte σ ist genau doppelt so groß wie das elektrische Feld an der Oberfläche einer Kreisscheibe mit derselben Ladungsdichte σ . Man kann sich das mithilfe von Abbildung 19.32 klarmachen. Wir denken uns an der Oberfläche des Leiters um den

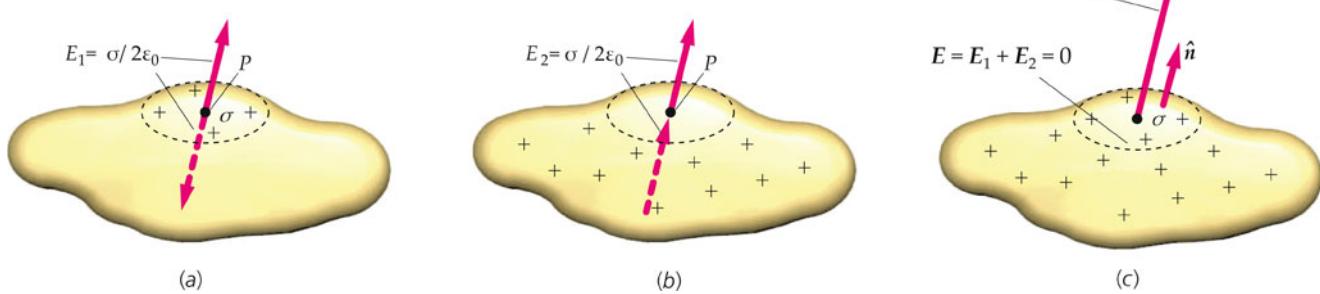


Abbildung 19.32 Ein beliebig geformter Leiter trägt eine Ladung auf seiner Oberfläche. a) Die Ladungsverteilung in der Umgebung des Punkts P nahe der Oberfläche kann man beschreiben als eine kleine homogene geladene Kreisscheibe mit P als ihrem Mittelpunkt. Sie verursacht ein elektrisches Feld der Größe $\sigma/(2\epsilon_0)$, das nach außen und nach innen gerichtet ist. Innerhalb des Leiters ist dieses Feld stets in entgegengesetzter Richtung von P weg gerichtet. b) Da das Gesamtfeld im Inneren des Leiters gleich null ist, muss der Rest der Ladungen, die es in der Welt gibt, auf der Leiteroberfläche ein nach außen gerichtetes Feld der Größe $\sigma/(2\epsilon_0)$ erzeugen. Das Feld dieser Ladungen ist unmittelbar innerhalb wie auch außerhalb der Oberfläche gleich. c) Innerhalb der Fläche heben sich die in a und b gezeigten Felder auf, aber außerhalb addieren sie sich zu $E_n = \sigma/\epsilon_0$.



Elektrische Feldlinien eines Zylinders und einer Platte, die entgegengesetzt aufgeladen sind. Sie werden durch feine, in Öl suspendierte Fäden sichtbar gemacht. Man erkennt, dass die Feldlinien senkrecht aus den Leiteroberflächen austreten und dass es im Inneren des Zylinders keine Linien gibt. Das Innere des Zylinders wird vom Außenbereich elektrisch abgeschirmt. (© Harold M. Waage.)

Feldpunkt P , in dem wir das elektrische Feld betrachten, einen kleinen kreisförmigen ebenen Bereich, der die Ladung der Dichte σ trägt. Dann besteht die Gesamtladung der Leiteroberfläche aus zwei Teilen: der Ladung der eben festgelegten Kreisscheibe mit P als Mittelpunkt und dem Rest der Ladung auf der Fläche. Die Ladung der homogen geladenen Kreisscheibe erzeugt nahe P ein Feld der Größe $\sigma/(2\epsilon_0)$ (Gleichung 19.9) innerhalb und außerhalb des Leiters (Abbildung 19.32a). Der Rest der Ladungen der Leiteroberfläche muss genau das Gegenfeld zu dem von der Kreisscheibe nach innen gerichteten Feld erzeugen, weil im Inneren des Leiters im elektrostatischen Gleichgewicht das resultierende Feld null sein muss (Abbildung 19.32b) und damit ebenfalls von der Größe $\sigma/(2\epsilon_0)$. In P ist demnach das Gesamtfeld gleich der Summe der Felder von der Kreisscheibe und dem Feld des restlichen Ladungsanteils (Abbildung 19.32c), nämlich $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

Bisher haben wir das Feld für eine gegebene Ladungsverteilung auf dem Leiter berechnet. Beispiel 19.15 behandelt das inverse Problem, nämlich die Berechnung der Ladung eines Leiters aus der Kenntnis des Felds an seiner Oberfläche.

Beispiel 19.15: Die Ladung der Erde

In einer Wissenschaftssendung über die Elektrizität in der Atmosphäre erfahren Sie, dass das elektrische Feld der Erde im Mittel eine Stärke von etwa 100 N/C hat und senkrecht nach unten gerichtet ist. Sie erin-

nern sich an Ihre Kenntnisse im Physikunterricht und fragen sich, ob Sie daraus die Gesamtladung auf der Erdoberfläche bestimmen können.

Problembeschreibung: Die Erde ist ein Leiter. Da ein elektrisches Feld an der Oberfläche existiert, muss sich eine bestimmte Ladung auf der Oberfläche der Erde befinden. Die Oberflächenladungsdichte σ ist durch Gleichung 19.20 mit der Normalkomponente E_n des elektrischen Felds verbunden. Die Gesamtladung q ergibt sich aus der Ladungsdichte σ , multipliziert mit dem Flächeninhalt A der Erdoberfläche.

Lösung: 1. Die Oberflächenladungsdichte σ ist durch Gleichung 19.20 mit der Normalkomponente E_n des elektrischen Felds verbunden:

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

2. Auf der Oberfläche der Erde zeigt \hat{n} nach außen (oben), \mathbf{E} zeigt nach innen (unten); daher ist E_n negativ:

$$\begin{aligned} E_n &= \mathbf{E} \cdot \hat{n} = |\mathbf{E}| |\hat{n}| \cos 180^\circ \\ &= -|\mathbf{E}| = -100 \text{ N/C} \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie q aus der Flächenladungsdichte σ , dem Oberflächeninhalt A und aus Schritt 1:

$$q = \sigma A = \epsilon_0 E_n A = -\epsilon_0 |\mathbf{E}| A$$

4. Der Flächeninhalt einer Kugeloberfläche mit Radius r ist $A = 4\pi r^2$. Setzen Sie $r = r_{\text{Erde}} = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ ein und benutzen Sie das Ergebnis aus Schritt 3:

$$\begin{aligned} q &= -\epsilon_0 |\mathbf{E}| A = -\epsilon_0 |\mathbf{E}| 4\pi r_{\text{Erde}}^2 \\ &= -4\pi\epsilon_0 |\mathbf{E}| r_{\text{Erde}}^2 \\ &= -4\pi \cdot (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2) \cdot \\ &\quad (100 \text{ N/C}) \cdot (6,38 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \\ &= \boxed{-4,51 \cdot 10^5 \text{ C}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir prüfen das Ergebnis aus Schritt 4 mit einer Einheitenrechnung. Beim Multiplizieren der drei Größen fallen die Einheiten Newton und Meter heraus, und es bleiben wie erwartet Coulomb übrig.

Weitergedacht: Ist die angegebene Ladung von $-4,51 \cdot 10^5 \text{ C}$ eine große Ladung? In Beispiel 18.1 hatten wir die gesamte Ladung aller Elektronen in einem Kupfer-Penny zu $-1,37 \cdot 10^5 \text{ C}$ berechnet. Die Gesamtladung auf der Erdoberfläche ist somit nur 3,3-mal größer als die Gesamtladung aller Elektronen in einer einzigen Kupfermünze.

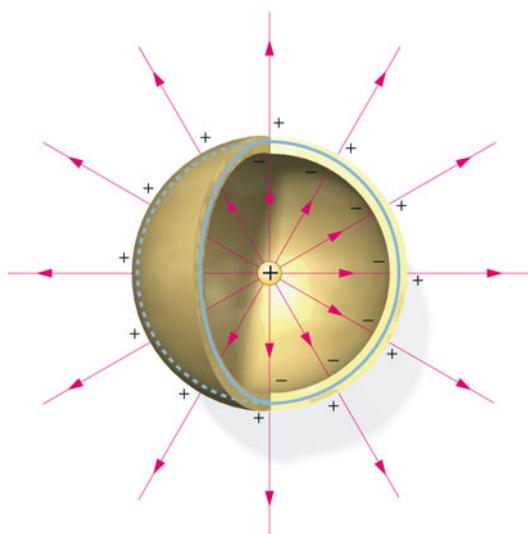


Abbildung 19.33 Eine positive Punktladung q im Mittelpunkt einer leitenden Kugelschale endlicher Dicke. Da die Gesamtladung innerhalb der Gauß'schen Oberfläche (bläulich gekennzeichnet) im Leiter null sein muss, wird eine Oberflächenladung $-q$ auf der inneren Oberfläche der Kugelschale influenziert. Da der Leiter neutral ist, wird eine gleiche, aber entgegengesetzte Ladung $+q$ auf der äußeren Oberfläche erzeugt. Die elektrischen Feldlinien beginnen an der Punktladung, enden an der inneren Oberfläche und beginnen wieder an der äußeren Oberfläche der Schale.

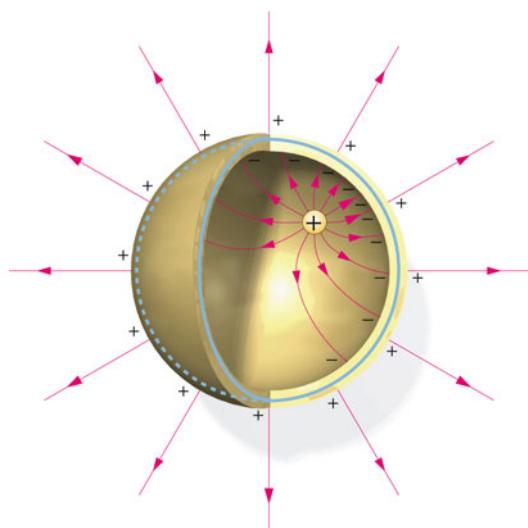


Abbildung 19.34 Derselbe Leiter wie in Abbildung 19.33 mit einer Punktladung, die aus dem Mittelpunkt der Kugel verschoben wurde. Die Ladung auf der äußeren Oberfläche und die elektrischen Feldlinien auf der Außenseite der Kugel werden davon nicht beeinflusst.

In Abbildung 19.33 befindet sich eine positive Punktladung q im Mittelpunkt einer leitenden Hohlkugel. Da die Gesamtladung innerhalb einer Gauß'schen Oberfläche im Leiter null sein muss, gibt es eine durch Influenz erzeugte negative Ladung $-q$ auf der Innenseite der leitenden Oberfläche. In Abbildung 19.34 wurde

die Punktladung aus dem Mittelpunkt des Hohlraums verschoben. Der Feldlinienverlauf im Hohlraum ist im Vergleich zu Abbildung 19.33 verändert und die Oberflächenladungsdichte der influenzierten negativen Ladung auf der inneren Oberfläche ist nicht mehr homogen. Die positive Oberflächenladungsdichte auf der Außenseite der Oberfläche bleibt jedoch unverändert homogen, auch wenn im Inneren der Kugel die Ladung q aus dem Zentrum verschoben wird. Die leitende Kugelwand schirmt die Ladung innerhalb der Hohlkugel ab, denn die durch Influenz erzeugte Oberflächenladung ist im elektrostatischen Gleichgewicht homogen über die Kugeloberfläche verteilt. Dies ist für eine Punktladung im Zentrum der Hohlkugel offensichtlich richtig, es gilt aber auch, wenn sich die Punktladung an einer anderen Stelle innerhalb der Hohlkugel befindet. Die Oberflächenladung auf der äußeren Oberfläche des Leiters erzeugt ein elektrisches Feld, das überall auf der inneren Oberfläche des Leiters exakt null ist. Diese Aussagen gelten auch, wenn die äußere Oberfläche und die innere Oberfläche des Leiters nicht kugelförmig sind.

19.7 *Die Äquivalenz des Gauß'schen und des Coulomb'schen Gesetzes

Das Gauß'sche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen der Ladung im Inneren der Gauß'schen Oberfläche und dem elektrischen Vektorfluss durch diese Fläche nach außen her. In den behandelten Beispielen wurde die Gestalt der Gauß'schen Oberfläche der Symmetrie der Ladungsverteilungen angepasst: Die Gauß'schen Oberflächen waren Kugelflächen, Zylinderflächen und Ebenenstücke. In diesem Abschnitt leiten wir den Gauß'schen Satz für beliebig geformte Flächen her, die eine Ladung einschließen. Um dafür den Vektorfluss allgemein berechnen zu können, verwenden wir den Begriff des *Raumwinkels*. Wir erläutern diesen Begriff zunächst an der Kugeloberfläche und gehen anschließend zu beliebig gestalteten Flächen über.

Gegeben sei ein kreisförmiges Flächenelement dA auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius r . Verbinden wir den Rand dieses Flächenelements mit dem Kugelmittelpunkt, entsteht ein Kegel mit der Spitze im Kugelmittelpunkt und dem Flächenelement als Grundfläche (Abbildung 19.35). Aus der Sicht vom Kugelmittelpunkt erzeugt das Oberflächenelement einen Raumwinkelbereich, der von dem Mantel des Kegels aufgespannt wird. Dieser räumliche Winkelbereich wird als **Raumwinkel** $d\Omega$ definiert:

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} .$$

Die Einheit des Raumwinkels ist der *Steradian* (Einheitenzeichen sr). Im Rahmen des Internationalen Einheitensystems ist es freigestellt, ob man den Steradian als Basiseinheit oder als abgeleitete Einheit ansieht. In vielen Gebieten der Physik ist es üblich, die Einheit des Raumwinkels wegzulassen. Diese Konvention wird auch im Folgenden angewendet.

Der Raumwinkel für die gesamte Kugeloberfläche ist 4π , wie sich durch Integration über die Kugeloberfläche ergibt:

$$\oint_{\text{Kugel}} d\Omega = \oint_{\text{Kugel}} \frac{dA}{r^2} = \frac{1}{r^2} \oint_{\text{Kugel}} dA = \frac{1}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi.$$

Das Raumwinkelelement in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ durch $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ gegeben. Wenn das Flächenelement nicht kreisförmig, sondern z. B. eine Rechteckfläche ist, wird, wie Abbildung 19.35 zeigt, durch die Verbindung der Randsymmetrie zum Kugelmittelpunkt eine vierseitige Pyramide erzeugt.

In der Geometrie der Ebene entspricht dem Raumwinkelelement $d\Omega$ der *ebene Winkel* $d\theta$, der durch das Verhältnis des Bogenelements eines Kreisbogens ds zum Radius r des Kreises definiert wird:

$$d\theta = \frac{ds}{r}.$$

Der *ebene Winkel* des Vollkreises ist dann 2π .

Wir wenden uns nun beliebig geformten Oberflächen zu. In Abbildung 19.35 steht das Flächenelement dA nicht senkrecht zur Mittellinie des Kegels, der Geraden vom Punkt O zum Mittelpunkt des Flächenelements. Der Normalenvektor \hat{n} des Flächenelements bildet mit dem radialen Einheitsvektor $r/r = \hat{r}$ der Mittellinie des Kegels einen Winkel θ , und das senkrechte Grundflächenelement des Kegels ist die Projektion des Flächenelements dA . Damit wird das Raumwinkelelement des Flächenelements dA bezüglich O

$$d\Omega = \frac{dA \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{dA \cos \theta}{r^2}. \quad (19.21)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir das Gauß'sche Gesetz für beliebig gestaltete Oberflächen herleiten. In Abbildung 19.36 wird eine Punktladung q von einer beliebig geformten Oberfläche A eingeschlossen. Um den elektrischen Fluss durch diese Oberfläche zu berechnen, muss man $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ für jedes Flächenelement auf der Oberfläche kennen und über die gesamte Oberfläche integrieren. Das elektrische Feld \mathbf{E} auf dem gezeichneten Flächenelement ist

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r},$$

der Fluss durch dieses Flächenelement dA mit dem Normaleneinheitsvektor \hat{n} ergibt sich daher zu

$$\begin{aligned} d\Phi_{\text{el}} &= \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{n} dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dA \cos \theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \end{aligned}$$

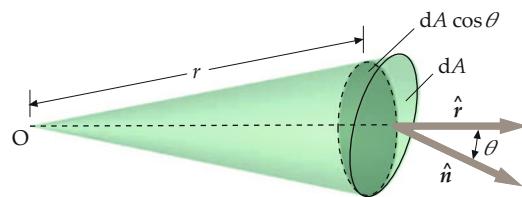


Abbildung 19.35 Ein Flächenelement dA , dessen Normale \hat{n} mit der Verbindungsgeraden von O zum Mittelpunkt des Elements einen Winkel θ einschließt. Der Raumwinkel, der durch dieses Element bei O aufgespannt wird, ist durch $(dA \cos \theta)/r^2$ definiert.

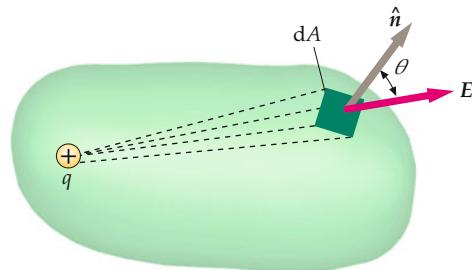


Abbildung 19.36 Eine Punktladung im Inneren einer beliebig geformten Oberfläche A . Der Fluss durch ein Flächenelement dA ist zu dem Raumwinkel proportional, der von der Punktladung und dem Flächenelement aufgespannt wird. Der Gesamtfluss durch die Oberfläche, den man durch Integration über alle Flächenelemente erhält, ist zu dem gesamten Raumwinkel um die Punktladung, also zu 4π , proportional. Er ist unabhängig von der Gestalt der Oberfläche.

Wie wir gezeigt haben, ist das Raumwinkelelement $d\Omega$ dasselbe, das ein entsprechendes Flächenelement einer Kugeloberfläche mit dem Radius r aufspannen würde. Der Gesamtfluss durch die geschlossene Oberfläche um die Ladung q ist demnach dem Raumwinkel 4π der geschlossenen Oberfläche proportional. Die Integration über die geschlossene Oberfläche ergibt

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_A d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (19.22)$$

Damit haben wir das Gauß'sche Gesetz für beliebige geschlossene Oberflächen hergeleitet.

🔍 Im Kontext: Ladungsverteilung – ein scharfes Thema

Das elektrische Dipolmoment (die *Polarität*) einer Substanz beeinflusst ihre Löslichkeit. Wassermoleküle beispielsweise sind polar und haben ein sehr starkes elektrisches Dipolmoment. Wasser eignet sich daher sehr gut als Lösungsmittel für andere Moleküle mit schwachen und starken Dipolmomenten oder für Ionen. Andererseits lösen sich Moleküle ohne Dipolmoment oder sehr große Moleküle nicht besonders gut in Wasser. Einige Öle beispielsweise haben kein Dipolmoment und lassen sich nicht in Wasser lösen.



Die für den scharfen Geschmack dieser Chilischoten verantwortliche Substanz löst sich nicht in Wasser, weil ihre Moleküle kein elektrisches Dipolmoment haben. (© SIngrid/pixelio.)

Die Ladungsverteilung innerhalb von Molekülen hat auch Einfluss darauf, ob Moleküle, die keine Öle im engeren Sinn sind, sich gut in Wasser lösen. Wer jemals in eine sehr scharfe Peperoni gebissen und dann ein Glas Wasser getrunken hat, kann bestätigen, dass sich der Schmerzreiz mit Wasser nicht lindern lässt. Das Capsaicin, der Wirkstoff in Peperoni, in scharfen Paprika- und Chilischoten, löst sich nämlich nicht in Wasser – eben wegen seiner Ladungsverteilung.¹ Allerdings lässt sich die Löslichkeit von Capsaicin in Wasser durch Alkohol verbessern, wie jeder weiß, der nach dem Biss in eine Chilischote seinen Mund mit einem Glas Bier hat kühlen können. Die Alkoholmoleküle sind nur schwach polar und lösen daher das Capsaicin, lassen sich aber andererseits auch mit Wasser mischen. Capsaicin löst sich auch in einigen Ölen, vielen stärkehaltigen Speisen und Proteinen. In vielen Ländern verwendet man anstelle von Alkohol Reis oder Fleisch, um das Capsaicin zu lösen.

Auch der Schmerzreiz beim Essen von Chilischoten hängt mit der Ladungsverteilung in den Molekülen zusammen. Das Protein TRPV1 ist ein Neuronenrezeptor beim Menschen, der Temperaturreize übermittelt. Das Protein hat eine Ladungsverteilung, die sich bei Temperaturen über 43 °C ändert. Wenn sich die Ladungsverteilung ändert, ändern Proteine ihre Form, sie falten oder entfalten sich.² Viele Proteinfunktionen werden bestimmt, indem man die Proteine durch eine Änderung der Ladungsverteilung faltet oder entfaltet.³ Bei einer Änderung der Ladungsverteilung in TRPV1 faltet sich das Protein und übermittelt einen Hitzereiz an die Neuronen. Capsaicin ändert die Ladungsverteilung in dem TRPV1-Protein genauso wie Hitze und ruft so dieselbe Empfindung hervor.⁴ Daher empfinden viele Menschen Chili oder Peperoni als „heiß“ (in der englischen Sprache werden große Schärfe und hohe Temperatur sogar mit demselben Wort *hot* bezeichnet). Ingwer, in der traditionellen chinesischen Medizin ein „wärmendes“ Gewürz, enthält Gingerole, die durch eine geänderte Ladungsverteilung dieselben Rezeptoren ansprechen.⁵ Menthol verursacht ähnliche Änderungen der Ladungsverteilung in Proteinen, die beim Menschen als Rezeptoren für Kältereize wirken.⁶ Ein Menthol- oder Pfefferminzbonbon wird daher als kühlend empfunden.

Die Änderung in der Ladungsverteilung eines Proteins kann auch Änderungen der Konsistenz verursachen. Das passiert beispielsweise beim Salzen von Kaviar. Wenn sich die Proteine falten, dickt die eigentlich dünnflüssige Flüssigkeit im Inneren der Fischeier ein und gibt dem Kaviar eine sahnig-zarte Konsistenz.⁷

1. Turgut, C., Newby, B. und Cutright, T., „Determination of Optimal Water Solubility of Capsaicin for Its Usage as a Non-Toxic Antifoulant“. *Environmental Science Pollution Research International*, Jan.–Feb. 2004, 11, Nr. 1, S. 7–10.
2. Suydam, I. T. et al., „Electric Fields at the Active Site of an Enzyme: Direct Comparison of Experiment with Theory“, *Science*, 14. Juli 2006, 313, Nr. 5784, S. 200–204.
3. Honig, B. und Nicholls, A., „Classical Electrostatics in Biology and Chemistry“. *Science*, 26. Mai 1995, 268, S. 1144.
4. Montell, C., „Thermosensation: Hot Findings Make TRPNs Very Cool“, *Current Biology*, 17. Juni 2003, 13, Nr. 12, S. R476–R478.
5. Dedov, V. N. et al., „Gingerols: A Novel Class of Vanilloid Receptor (VR1) Agonists“, *British Journal of Pharmacology*, 2002, 137, S. 793–798.
6. Montell, C., a. a. O.
7. Sternin, V. und Dorè, I., *Caviar: The Resource Book*. Moskau: Kultura, 1993, in McGee, H., *On Food and Cooking: The Science and Lore of the Kitchen*. New York: Scribner, 2004.

Zusammenfassung

Thema	Wichige Gleichungen und Anmerkungen
1. Elektrisches Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung	$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq}{r^2} \hat{r}$ (Coulomb'sches Gesetz) (19.4b) Hier ist $dq = \rho dV$ für eine Raumladung, $dq = \sigma dA$ für eine Flächenladung und $dq = \lambda dl$ für eine Linienladung einzusetzen.
2. Elektrischer Fluss	$\Phi_{el} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ (19.12)
3. Gauß'sches Gesetz	$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A E_n dA = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$ (19.15) Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche nach außen ist gleich dem Quotienten aus der Gesamtladung q innerhalb der Oberfläche, dividiert durch die elektrische Feldkonstante (Dielektrizitätskonstante) ϵ_0 .
4. Dielektrizitätskonstante ϵ_0	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ (18.3b)
5. Diskontinuität von E_n	Auf einer Oberfläche mit der Flächenladungsdichte σ hat die Normalkomponente E_n des elektrischen Felds eine Unstetigkeit: $\Delta E_n = E_{n,+} - E_{n,-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$ (19.19)
6. Ladung auf einem Leiter	Im elektrostatischen Gleichgewicht ist die Ladungsdichte im Inneren eines Leiters überall null. Wird ein Leiter geladen, so verteilt sich die Ladung gleichmäßig auf seiner Oberfläche.
7. E außerhalb des Leiters	Das elektrische Feld unmittelbar außerhalb der Leiteroberfläche steht senkrecht zur Oberfläche und hat die Normalkomponente $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$ (19.20) Dabei ist σ die lokale Oberflächenladungsdichte in diesem Punkt des Leiters.
8. Elektrische Felder homogener Ladungsverteilungen	
Linienladung unendlicher Länge	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r_\perp} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r_\perp}$ (19.6)
Auf der Achse eines geladenen Rings	$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$ (19.7)
Auf der Achse einer geladenen Kreisscheibe	$E_z = \text{sgn}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \left(1 + \frac{r^2}{z^2} \right)^{-1} \right)$ (19.8)
Einer geladenen, unendlich ausgedehnten Ebene	$E = E_z = \text{sgn}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (19.9)
Einer geladenen Kugelschale	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad r > r_K$ (19.16a)
	$E = 0 \quad r < r_K$ (19.16b)

Antwort auf die Verständnisfrage

1. E im Gauß'schen Gesetz ist das elektrische Feld, das von allen Ladungen verursacht wird. Der elektrische Fluss aufgrund aller Ladungen außerhalb der Fläche ist jedoch null. Daher ist der Fluss des elektrischen Felds aufgrund von allen Ladungen gleich dem Fluss des Felds, das allein durch die Ladungen im Inneren verursacht wird.

Lösungen der Übungen

1. $E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$. Für $x > x_2$ gilt $r_2 < r_1$. Dann ist $\frac{1}{r_2} > \frac{1}{r_1}$, woraus $E_x > 0$ folgt.
2. Nein. Nach der Symmetrie muss E_z für $z = 0$ gleich null sein, die Gleichung in Schritt 3 gibt dagegen für $z = 0$ einen negativen Wert von E_z an. Diese Ergebnisse widersprechen sich und können daher nicht beide gelten.
3. $z = a/\sqrt{2}$
4. 80 %

Aufgaben

Verständnisaufgaben

19.1 • Richtig oder falsch? a) Das elektrische Feld, das von einer homogen geladenen dünnen Kugelschale verursacht wird, ist in allen Punkten innerhalb der Schale null. b) Im elektrostatischen Gleichgewicht muss das elektrische Feld überall im Inneren eines Leiters null sein. c) Wenn die Gesamtladung eines Leiters null ist, muss die Ladungsdichte in jedem Punkt auf der Oberfläche des Leiters null sein.

19.2 •• Eine einzelne Punktladung q befindet sich im Mittelpunkt sowohl eines imaginären Würfels als auch einer imaginären Kugel. In welchem Verhältnis stehen der elektrische Fluss durch die Oberfläche des Würfels und der Fluss durch die Oberfläche der Kugel? Erläutern Sie Ihre Antwort.

19.3 •• Erläutern Sie, warum das elektrische Feld zwischen dem Mittelpunkt und der Oberfläche einer homogen geladenen Vollkugel mit r zunimmt, statt mit $1/r^2$ abzunehmen.

19.4 •• Die Gesamtladung auf der leitenden Kugelschale in Abbildung 19.37 ist null. Die negative Punktladung im Mittelpunkt trägt die Ladung q . Welche Richtung hat das elektrische Feld in den folgenden Bereichen? a) $r < r_1$, b) $r_2 > r > r_1$, c) $r > r_2$. Erläutern Sie Ihre Antwort.

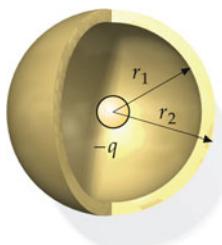


Abbildung 19.37 Zu Aufgabe 19.5 und 19.6.

19.5 •• Die leitende Kugelschale in Abbildung 19.37 ist außen geerdet. Die negative Punktladung im Mittelpunkt trägt die Ladung q . Welche der folgenden Aussagen trifft zu? a) Die Ladung auf der inneren Oberfläche der Kugelschale ist $+q$, und die Ladung auf der äußeren Oberfläche ist $-q$. b) Die Ladung auf der inneren Oberfläche der Kugelschale ist q , und die Ladung auf der äußeren Oberfläche ist null. c) Die Ladung auf beiden Oberflächen der Kugelschale ist $+q$. d) Die Ladung auf beiden Oberflächen der Kugelschale ist null.

19.6 •• Die leitende Kugelschale in Abbildung 19.37 ist außen geerdet. Die negative Punktladung im Mittelpunkt trägt die Ladung q . Welche Richtung hat das elektrische Feld in den folgenden Bereichen? a) $r < r_1$, b) $r_2 > r > r_1$, c) $r > r_2$. Erläutern Sie Ihre Antwort.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

19.7 •• In diesem Kapitel hatten wir den Ausdruck für das elektrische Feld auf der Achse einer homogen geladenen Scheibe hergeleitet; in einem Punkt auf der Achse ist

$$|E| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \left(1 + \frac{r^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right].$$

In großer Entfernung ($|z| \gg r$) nähert sich das Feld dem Ausdruck $E \approx (1/4\pi\epsilon_0)(q/z^2)$, sehr nahe an der Scheibe ($|z| \ll r$) verläuft die Feldstärke näherungsweise wie bei einer unendlich ausgedehnten geladenen Ebene mit $|E| \approx \sigma/(2\epsilon_0)$. Sie haben eine Scheibe mit einem Radius von 2,5 cm mit einer homogenen Flächenladungsdichte von $3,6 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Wenden Sie sowohl den exakten Ausdruck als auch die Näherungsausdrücke an und bestimmen Sie die elektrische Feldstärke auf der Achse in einer Entfernung a) 0,010 cm, b) 0,040 cm und c) 5,0 m von der Scheibe. Vergleichen Sie jeweils die beiden Werte und beurteilen Sie, wie gut die Näherung in ihrem jeweiligen Gültigkeitsbereich ist.

Berechnung von E aus dem Coulomb'schen Gesetz

19.8 •• Eine homogene Linienladung mit der linearen Ladungsdichte $\lambda = 3,5 \text{nC}/\text{m}$ erstreckt sich auf der x -Achse von $x = 0$ bis $x = 5,0 \text{m}$. a) Wie groß ist die Gesamtladung? Berechnen Sie das elektrische Feld auf der x -Achse bei b) $x = 6,0 \text{m}$, c) $x = 9,0 \text{m}$ und d) $x = 250 \text{m}$. e) Bestimmen Sie das Feld bei $x = 250 \text{m}$; wenden Sie dabei die Näherung an, dass die Ladung eine Punktladung bei $x = 2,5 \text{m}$ ist und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Rechnung aus Teilaufgabe d. (Dafür müssen Sie annehmen, dass die angegebenen Zahlenwerte auf mehr als zwei signifikante Stellen gelten.) Ist ihr Näherungsergebnis größer oder kleiner als das exakte Ergebnis? Erläutern Sie Ihre Antwort.

19.9 •• a) Zeigen Sie, dass die elektrische Feldstärke E auf der Achse einer Ringladung vom Radius a Maximal- bzw. Minimalwerte bei $z = +a/\sqrt{2}$ und $z = -a/\sqrt{2}$ besitzt. b) Skizzieren Sie den Verlauf von E über z für positive und negative z -Werte. c) Bestimmen Sie den Maximalwert von E .

19.10 •• Eine Linienladung mit einer homogenen linearen Ladungsdichte λ erstreckt sich längs der x -Achse von $x = x_1$ bis $x = x_2$ (mit $x_1 < x_2$). Zeigen Sie, dass die x -Komponente des elektrischen Felds auf einem Punkt der y -Achse gegeben ist durch

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1).$$

Dabei ist $\theta_1 = \arctan(x_1/y)$ und $\theta_2 = \arctan(x_2/y)$ sowie $y \neq 0$.

- 19.11 ••** Ein Ring vom Radius r_R hat eine Ladungsverteilung $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin \theta$ (Abbildung 19.38). a) In welche Richtung zeigt das elektrische Feld im Ringmittelpunkt? b) Welchen Betrag hat das Feld im Ringmittelpunkt?

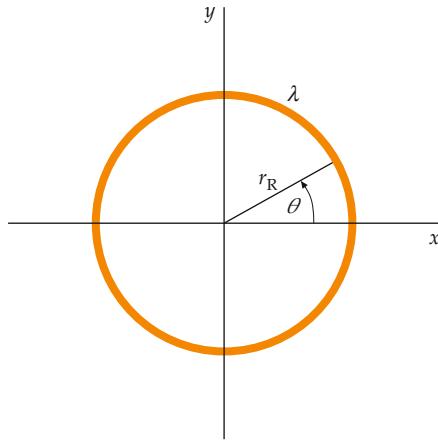


Abbildung 19.38 Zu Aufgabe 19.11.

- 19.12 •••** Eine dünne Halbkugelschale vom Radius r_K hat eine homogene Flächenladungsdichte σ . Bestimmen Sie das elektrische Feld im Mittelpunkt der Basis der Halbkugelschale.

Das Gauß'sche Gesetz

- 19.13 •** Wir betrachten ein homogenes elektrisches Feld $E = (2,00 \text{ kN/C}) \hat{x}$. a) Wie groß ist der elektrische Fluss dieses Felds durch eine quadratische Fläche der Seitenlänge 10 cm, die auf der x -Achse zentriert ist und deren Normale in die positive x -Richtung weist? b) Wie groß ist der elektrische Fluss durch dasselbe Quadrat, wenn seine Normale mit der y -Achse einen Winkel von 30° und mit der z -Achse einen Winkel von 90° einschließt?

- 19.14 ••** Da das Newton'sche Gravitationsgesetz und das Coulomb'sche Gesetz dieselbe Abstandsabhängigkeit in der Form eines $(1/r^2)$ -Gesetzes aufweisen, kann man in Analogie zum Gauß'schen Gesetz für den elektrischen Fluss auch einen Ausdruck für den Vektorfluss des Gravitationsfelds finden. Das Gravitationsfeld G in einem Punkt ist in Kapitel 4 definiert worden als die Kraft pro Masseneinheit auf eine Probemasse m_0 in diesem Punkt. Für eine felderzeugende Masse m im Ursprung des Koordinatensystems ist das Gravitationsfeld an einem Ort \vec{r} gegeben durch

$$G = -\Gamma \frac{m}{r^2} \hat{r}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Gravitationsfelds durch eine Kugeloberfläche mit dem Radius r_K und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Zeigen Sie, dass in Analogie zum Gauß'schen Gesetz für den elektrischen Fluss für die Gravitation $\Phi_{\text{grav}} = -4\pi \Gamma m_{\text{innen}}$ gilt.

- 19.15 ••** Ein imaginärer senkrechter Kreiskegel (Abbildung 19.39) mit dem Basiswinkel θ und dem Basisradius r_K befindet sich in einem ladungsfreien Gebiet mit einem homogenen elektrischen Feld E (die Feldlinien verlaufen vertical, parallel zur Kegelachse). In welchem Verhältnis steht die Anzahl der Feldlinien pro Einheitsfläche, die die Kegelbasis durchdringen, zu der Anzahl der Feldlinien pro Einheitsfläche, die die Mantelfläche des Kegels durchdringen? Wenden Sie das Gauß'sche Gesetz an. (Die in der Abbildung gezeigten Feldlinien sind nur repräsentative Beispiele.)

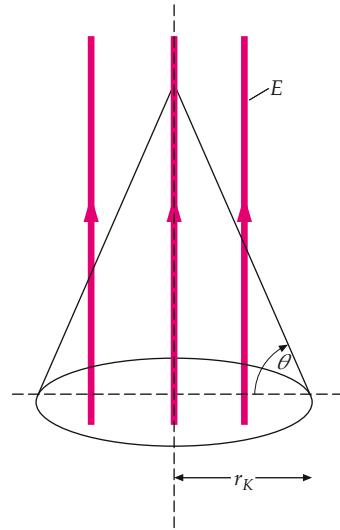


Abbildung 19.39 Zu Aufgabe 19.15.

- 19.16 ••** In einem bestimmten Gebiet der Erdatmosphäre wurde das elektrische Feld oberhalb der Erdoberfläche mit folgenden Ergebnissen gemessen: 150 N/C in einer Höhe von 250 m und 170 N/C in 400 m Höhe. In beiden Fällen ist das elektrische Feld nach unten zur Erde gerichtet. Berechnen Sie die Raumladungsdichte der Atmosphäre zwischen 250 und 400 m unter der Annahme, dass sie in diesem Bereich homogen ist. (Die Erdkrümmung kann vernachlässigt werden. Warum?)

Anwendungen des Gauß'schen Gesetzes bei Kugelsymmetrie

- 19.17 •** Eine dünne nichtleitende Kugelschale vom Radius $r_{K,1}$ trägt eine Gesamtladung q_1 , die gleichmäßig auf ihrer Oberfläche verteilt ist. Eine zweite, größere Kugelschale mit dem Radius $r_{K,2}$, die konzentrisch zur ersten liegt, trägt eine Ladung q_2 , die ebenfalls gleichmäßig auf ihrer Oberfläche verteilt ist.
a) Wenden Sie das Gauß'sche Gesetz an und bestimmen Sie das elektrische Feld in den Bereichen $r < r_{K,1}$, $r_{K,1} < r < r_{K,2}$ und $r > r_{K,2}$. b) Wie müssen Sie das Verhältnis der Ladungen q_1/q_2 und ihre relativen Vorzeichen wählen, damit das elektrische Feld für $r > r_{K,2}$ gleich null ist? c) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien für die Situation in Teilaufgabe b, wenn q_1 positiv ist.

19.18 •• Betrachten Sie die leitende Vollkugel und die konzentrisch angeordnete leitende Kugelschale aus Abbildung 19.40. Die Kugelschale trägt die Ladung $-7q$, die Vollkugel die Ladung $+2q$. a) Welche Ladung ist auf der äußeren Oberfläche der Kugelschale, welche auf der inneren? b) Nun wird zwischen der Kugelschale und der Kugel ein Metalldraht eingezogen. Welche Ladung befindet sich nach Erreichen des elektrostatischen Gleichgewichts auf der Kugel und auf den Oberflächen der Kugelschale? Ändert sich das elektrische Feld an der Oberfläche der Kugel, wenn der Draht eingezogen wird? Wenn ja, in welcher Weise? c) Wir kehren nun zu der Ladungsverteilung von Teilaufgabe a zurück, verbinden die Kugelschale über einen Metalldraht mit der Erde und unterbrechen die Verbindung wieder. Welche Ladungen befinden sich nun auf der Kugel und auf den Oberflächen der Kugelschale?

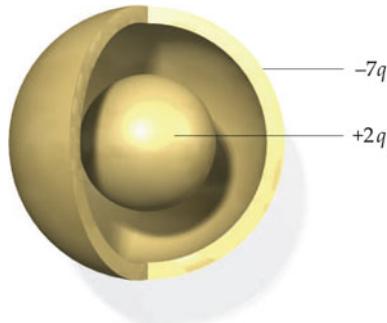


Abbildung 19.40 Zu Aufgabe 19.18.

19.19 •• Eine nichtleitende Kugel mit dem Radius r_K trägt eine Raumladungsdichte, die proportional zum Abstand vom Mittelpunkt ist: $\rho = Br$ für $r \leq r_K$. Darin ist B eine Konstante. Für $r > r_K$ ist $\rho = 0$. a) Bestimmen Sie die Gesamtladung auf der Kugel, indem Sie die Ladungen auf Kugelschalen der Dicke dr und des Volumens $4\pi r^2 dr$ aufsummieren. b) Bestimmen Sie das elektrische Feld E innerhalb und außerhalb der Ladungsverteilung. c) Skizzieren Sie das elektrische Feld E in Abhängigkeit vom Abstand r zum Kugelmittelpunkt.

19.20 •• Wiederholen Sie Aufgabe 19.19 für die Raumladungsdichte $\rho = C/r$ für $r < r_K$ und $\rho = 0$ für $r > r_K$ (C ist eine Konstante).

Anwendungen des Gauß'schen Gesetzes bei Zylindersymmetrie

19.21 •• Für ein Praktikum bauen Sie ein Geiger-Müller-Zählrohr zum Nachweis ionisierender Strahlung. Das Zählrohr besteht aus einer langen zylindrischen Röhre, entlang deren Achse ein dünner Metalldraht gespannt ist. Der Draht hat eine Dicke von 0,500 mm, der Innendurchmesser des Zählrohrs beträgt 4,00 cm. Das Zählrohr ist mit einem verdünnten Gas gefüllt, in dem eine Gasentladung (ein Spannungsdurchbruch im Gas) stattfindet, wenn die elektrische Feldstärke einen Wert von

$5,50 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ erreicht. Bestimmen Sie den Maximalwert der linearen Ladungsdichte auf dem Draht, bei der noch kein Spannungsdurchbruch auftritt. Nehmen Sie an, das Zählrohr und der Draht seien unendlich lang.

19.22 •• Ein unendlich langer nichtleitender, massiver Zylinder mit dem Radius r_Z trägt eine homogene Raumladungsdichte von $\rho(r) = \rho_0$. Zeigen Sie, dass das elektrische Feld durch

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r_{\perp} \quad (0 \leq r_{\perp} < r_Z),$$

$$E = \frac{\rho r_Z^2}{2\epsilon_0 r_{\perp}} \quad (r_{\perp} > r_Z)$$

gegeben ist. r_{\perp} ist dabei der Abstand von der Längsachse des Zylinders.

19.23 •• Abbildung 19.41 zeigt den Querschnitt eines unendlich langen Koaxialkabels. Der innere Leiter trägt eine lineare Raumladungsdichte von $6,00 \text{ nC/m}$, der äußere Leiter ist ungeladen. a) Bestimmen Sie das elektrische Feld für alle Werte r des Abstands von der Achse des konzentrischen Zylindersystems. b) Wie groß sind die Oberflächenladungsdichten auf der inneren und der äußeren Oberfläche des äußeren Leiters?

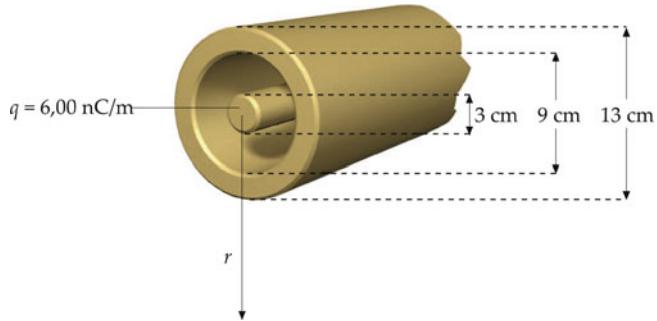


Abbildung 19.41 Zu Aufgabe 19.23.

19.24 ••• Betrachten Sie noch einmal Ihr Geiger-Müller-Zählrohr aus Aufgabe 19.21. Ionisierende Strahlung hat in einem Abstand von 2,00 cm von der Längsachse des Drahts in dem Zählrohr ein Ion und ein Elektron erzeugt. Der Draht soll positiv geladen sein und eine lineare Ladungsdichte von $76,5 \text{ pC/m}$ tragen. a) Welche Geschwindigkeit hat in diesem Fall das Elektron, wenn es auf den Draht auftrifft? b) Vergleichen Sie die Elektronengeschwindigkeit mit der Endgeschwindigkeit des Ions, wenn es auf die Innenfläche des Zählrohrs auftrifft. Erläutern Sie Ihre Antwort.

Elektrische Ladungen und Felder an Leiteroberflächen

19.25 • Eine ungeladene Kupfermünze befindet sich in einem homogenen elektrischen Feld der Stärke $1,60 \text{ kN/C}$, das

senkrecht zu seiner Oberfläche steht. a) Bestimmen Sie die Ladungsdichte auf jeder Fläche der Kupfermünze unter der Annahme, dass die Flächen eben sind. b) Bestimmen Sie die Gesamtladung auf einer der Flächen, wenn der Radius der Münze 1,00 cm beträgt.

19.26 •• Für das nach unten gerichtete elektrische Feld unmittelbar über der Erdoberfläche wurden 150 N/C gemessen. a) Welches Vorzeichen hat die Gesamtladung auf der Erdoberfläche unter diesen Bedingungen? b) Welcher Gesamtladung auf der Erdoberfläche entspricht diese Messung?

19.27 •• Wenn die Stärke eines elektrischen Felds in Luft etwa $3,0 \cdot 10^6 \text{ N/C}$ beträgt, dann wird die Luft ionisiert und elektrisch leitend. Dieses Phänomen wird als *dielektrischer Durchschlag* (oder dielektrische Entladung) bezeichnet. Eine Ladung von $18 \mu\text{C}$ wird auf eine leitende Kugel gebracht. Bis zu welchem Minimalradius kann die Kugel diese Ladung gerade noch halten, ohne dass es zu einem Durchschlag kommt?

Allgemeine Aufgaben

19.28 •• Betrachten Sie die drei in Abbildung 19.42 dargestellten konzentrischen Metallkugeln bzw. Kugelschalen. Kugel 1 ist eine Vollkugel mit dem Radius $r_{K,1}$, Kugel 2 ist eine Hohlkugel mit dem Innenradius $r_{K,2}$ und dem Außenradius $r_{K,3}$, und Kugel 3 ist eine Hohlkugel mit dem Innenradius $r_{K,4}$ und dem Außenradius $r_{K,5}$. Zu Beginn sind alle drei Kugeln ungeladen. Dann wird eine negative Ladung $-q_0$ auf Kugel 1 und eine positive Ladung $+q_0$ auf Kugel 3 gebracht. a) In welche Richtung zeigt das elektrische Feld in dem Raum zwischen den Kugeln 1 und 2, wenn sich elektrostatisches Gleichgewicht eingestellt hat? b) Wie groß ist die Ladung auf der inneren Oberfläche von Kugel 2? Geben Sie das Vorzeichen dieser Ladung an. c) Wie groß ist die Ladung auf der äußeren Oberfläche von Kugel 2? d) Wie groß ist die Ladung auf der inneren Oberfläche von Kugel 3? e) Wie groß ist die Ladung auf der äußeren Oberfläche von Kugel 3? f) Stellen Sie E in Abhängigkeit von r dar.

19.29 •• Eine dünne nichtleitende, homogen geladene Kugelschale vom Radius r (Abbildung 19.43a) trägt eine Gesamtladung q . Ein kleiner kreisförmiger Stöpsel wird aus der Oberfläche entfernt. a) Geben Sie Betrag und Richtung des elektrischen Felds im Zentrum des Lochs an b) Der Stöpsel wird wieder in das Loch eingesetzt (Abbildung 19.43b). Berechnen Sie anhand des Ergebnisses von Teilaufgabe a die elektrostatische Kraft auf den Stöpsel. c) Berechnen Sie anhand des Betrags der Kraft den *elektrostatischen Druck* (Kraft/Einheitsfläche), der versucht, die Kugel auszudehnen.

19.30 •• Eine unendlich ausgedehnte Ebene in der x - z -Ebene trägt eine homogene Oberflächenladungsdichte $\sigma_1 = +65 \text{ nC/m}^2$. Eine zweite unendlich ausgedehnte Ebene mit einer homogenen Ladungsdichte von $\sigma_2 = +45 \text{ nC/m}^2$ schneidet die x - z -Ebene in der z -Achse und schließt mit der x - z -Ebene einen Winkel von 30° ein (Abbildung 19.44). Bestimmen Sie

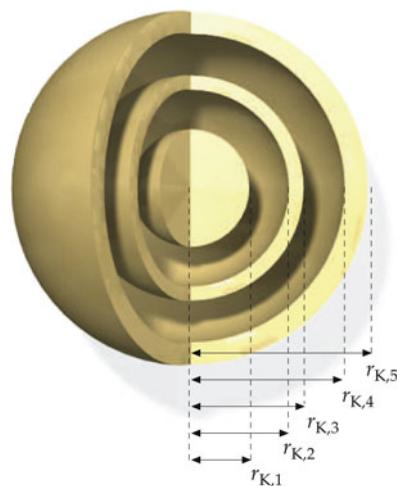


Abbildung 19.42 Zu Aufgabe 19.28.

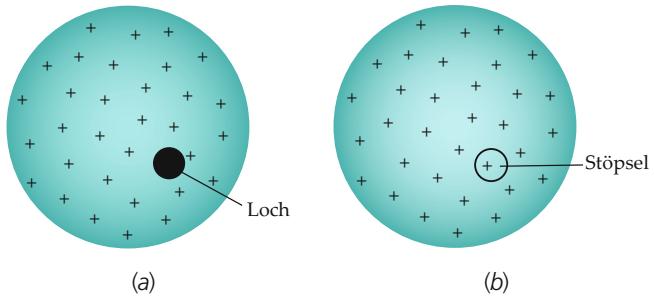


Abbildung 19.43 Zu Aufgabe 19.29.

das elektrische Feld bei a) $x = 6,0 \text{ m}, y = 2,0 \text{ m}$ und b) bei $x = 6,0 \text{ m}, y = 5,0 \text{ m}$.

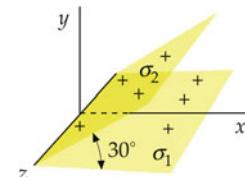


Abbildung 19.44 Zu Aufgabe 19.30.

19.31 •• Eine quantenmechanische Betrachtung des Wasserstoffatoms zeigt, dass man das Elektron in diesem Atom als eine verschmierte negative Ladungsverteilung mit der Form $\rho(r) = -\rho_0 e^{-2r/a}$ betrachten kann. Darin ist r der Abstand vom Kern und a der *erste Bohr'sche Radius* ($a = 0,0529 \text{ nm}$). Bedenken Sie, dass der Kern des Wasserstoffatoms aus einem Proton besteht, das Sie als positive Punktladung betrachten können. a) Berechnen Sie ρ_0 unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Atom ungeladen ist. b) Geben Sie das elektrische Feld in Abhängigkeit des Abstands r vom Kern an.

19.32 •• Ein ruhender Ring vom Radius r_R liegt in der y - z -Ebene und trägt eine positive Ladung q , die gleichmäßig über seine Länge verteilt ist. Ein Punktteilchen mit der Masse m und einer negativen Ladung $-q$ befindet sich im Mittelpunkt des Rings. a) Zeigen Sie, dass für $x \ll r_R$ das elektrische Feld längs der Ringachse proportional zu x ist. b) Bestimmen Sie die Kraft auf das Teilchen mit der Masse m als Funktion von x . c) Zeigen Sie, dass das Teilchen bei einer kleinen Auslenkung in positiver x -Richtung eine harmonische Schwingung ausführt. d) Welche Frequenz hat diese Bewegung?

19.33 •• Eine homogen geladene, nichtleitende Vollkugel mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung hat eine Raumladungsdichte ρ . a) Zeigen Sie, dass in einem Punkt innerhalb der Kugel im Abstand r vom Mittelpunkt das elektrische Feld durch

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{\mathbf{r}}$$

gegeben ist. b) Jetzt wird Material aus der Kugel entfernt, so dass ein kugelförmiger Hohlraum mit dem Radius $b = a/2$ und dem Mittelpunkt bei $x = b$ auf der x -Achse entsteht (Abbildung 19.45). Berechnen Sie das elektrische Feld in den Punkten 1 und 2, die in Abbildung 19.45 eingezeichnet sind. (Hinweis: Ersetzen Sie die *Kugel mit Hohlraum* durch zwei homogene Kugeln mit gleich großen positiven und negativen Ladungsdichten.)

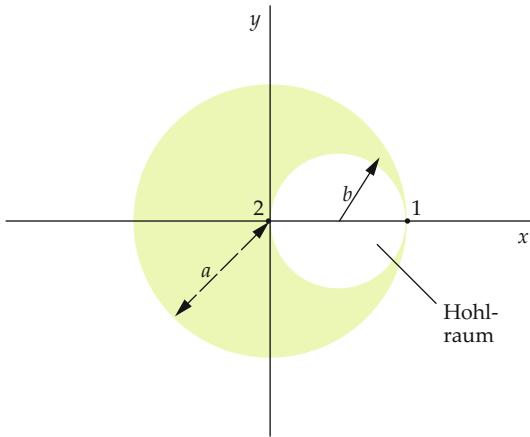


Abbildung 19.45 Zu Aufgabe 19.33 und 19.35.

19.34 •• Betrachten Sie ein einfaches, aber überraschend genaues Modell des Wasserstoffmoleküls: Zwei positive Punktladungen, jeweils mit der Ladung $+e$, befinden sich innerhalb einer Kugel vom Radius r mit homogener Ladungsdichte und der Gesamtladung $-2e$. Die zwei Punktladungen sind räumlich symmetrisch, also jeweils gleich weit vom Kugelmittelpunkt angeordnet (Abbildung 19.46). Bestimmen Sie den Abstand a vom Kugelmittelpunkt, bei dem die resultierende Kraft auf jede der beiden Punktladungen gleich null ist.

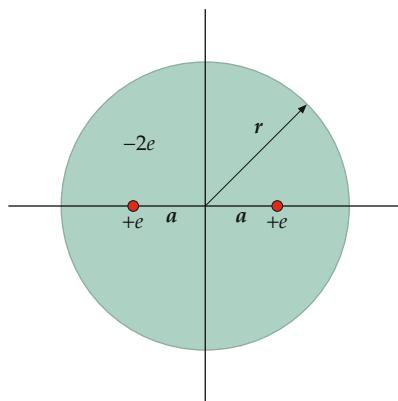


Abbildung 19.46 Zu Aufgabe 19.34.

19.35 ••• Zeigen Sie, dass das elektrische Feld in dem Hohlraum von Aufgabe 19.33b homogen ist und durch

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} b \hat{\mathbf{x}}$$

beschrieben wird.

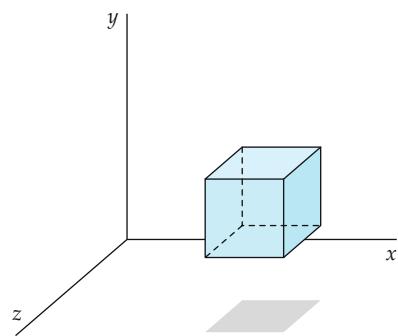


Abbildung 19.47 Zu Aufgabe 19.36.

19.36 ••• Eine *kleine* Gauß'sche Oberfläche in Gestalt eines Würfels mit Flächen, die parallel zu der x - y -, der x - z - und der y - z -Ebene liegen (Abbildung 19.47), befindet sich in einem Raumbereich, in dem das elektrische Feld parallel zur x -Achse ist. a) Zeigen Sie mithilfe der Taylor-Reihe (unter Vernachlässigung aller Terme ab zweiter Ordnung), dass der Gesamtfluss des elektrischen Felds aus der Gauß'schen Oberfläche durch

$$\Phi_{\text{el}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V$$

gegeben ist; ΔV ist darin das von der Gauß'schen Oberfläche eingeschlossene Volumen. b) Zeigen Sie mit dem Gauß'schen Gesetz und den Ergebnissen aus Teilaufgabe a, dass gilt:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Darin ist ρ die Raumladungsdichte innerhalb des Würfels.

Bemerkung: Diese Gleichung ist die eindimensionale Fassung des Gauß'schen Satzes. Das entsprechende Ergebnis für Beispiele, in denen die Richtung des elektrischen Felds nicht auf eindimensionale Probleme beschränkt ist, lautet

$$\Phi_{\text{el}} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V,$$

worin die Summe der partiellen Ableitungen in der runden Klammer wie in der Vektoranalysis üblich zu $\nabla \cdot \mathbf{E}$ zusammengefasst und als *Divergenz* des Vektorfelds \mathbf{E} bezeichnet wird. Das Symbol ∇ (genannt Nabla) ist der Vektoroperator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}.$$

Das elektrische Potenzial 20



Das Mädchen, das mit einer Hand die Elektrode eines Van-de-Graaff-Generators berührt, wird auf ein hohes Potenzial geladen. Es steht auf einem Podest, sodass es elektrisch vom Boden isoliert ist und sich die Ladungen bei ihm sammeln. Da die Ladungen auf seinem Kopf und auf seinen Haaren alle dasselbe Vorzeichen haben und sich damit gegenseitig abstoßen, stehen seine Haare ab. (Mit freundlicher Genehmigung vom U.S. Department of Energy.)

?

Wussten Sie schon, dass das maximale Potenzial, auf das die Elektrode des Van-de-Graaff-Generators geladen werden kann, von ihrem Radius abhängt? (Siehe Beispiel 20.14.)

20.1 Die Potenzialdifferenz	726
20.2 Das Potenzial eines Punktladungssystems	728
20.3 Die Berechnung des elektrischen Felds aus dem Potenzial	733
20.4 Die Berechnung des elektrischen Potenzials ϕ kontinuierlicher Ladungsverteilungen	735
20.5 Äquipotenzialflächen	742
20.6 Die elektrische Energie	749
Zusammenfassung	754
Aufgaben	756

In Kapitel 5 haben wir die potentielle Energie der Gravitation eingeführt. Dabei hat sich gezeigt, dass diese sowohl in konzeptioneller Hinsicht als auch für praktische Berechnungen außerordentlich nützlich ist. Dies trifft ebenso auf die elektrische Energie zu, die wir in diesem Kapitel einführen werden. In diesem Zusammenhang wird auch der Begriff des elektrischen Felds weiterentwickelt. Dabei werden wir sehen, wie das elektrische Feld, das wir in Kapitel 18 und 19 kennen gelernt haben, mithilfe des elektrischen Potenzials beschrieben werden kann. Da das elektrische Potenzial ein skalares Feld ist, ist es in vielen Fällen leichter zu handhaben als das elektrische Feld selbst, das ein Vektorfeld ist.

Im vorliegenden Kapitel wollen wir die Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und dem elektrischen Potenzial formulieren und das elektrische Potenzial verschiedener Ladungsverteilungen berechnen. Außerdem werden wir die elektrische Energie eines Punktladungssystems und eines Systems geladener Leiter berechnen.

$$\Delta\phi = \phi_b - \phi_a = \frac{\Delta E_{\text{el}}}{q_0} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (20.2b)$$

DEFINITION DER ENDLICHEN POTENZIALDIFFERENZ
ZWISCHEN ZWEI PUNKTEN

20.1 Die Potenzialdifferenz

Die elektrische Kraft, die eine Punktladung auf eine andere Punktladung ausübt, wirkt längs der Verbindungsgeraden der Ladungen und nimmt umgekehrt proportional mit dem Quadrat ihres Abstands ab. Dies ist genauso wie bei der Gravitationskraft zwischen zwei Massen. Die elektrische Kraft ist ebenso wie die Gravitationskraft konservativ – egal, auf welchem Weg eine Ladung verschoben wird, die Änderung der potentiellen Energie hängt nur vom Verschiebungsvektor $d\mathbf{s}$ zwischen Anfangs- und Endposition ab:

$$dE_{\text{pot}} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

(Die Änderung der potentiellen Energie mit wachsendem Radialabstand zum Kraftzentrum entspricht dem Negativen der Arbeit für diese Verschiebung.) Die konservative Kraft, die ein elektrostatisches Feld \mathbf{E} auf eine Punktladung q_0 ausübt, ist

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}.$$

Wenn die Punktladung q_0 um $d\mathbf{s}$ verschoben wird, ändert sich die elektrische Energie um

$$dE_{\text{pot}} = dE_{\text{el}} = -q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (20.1)$$

In Abschnitt 18.4 haben wir gezeigt, dass die elektrostatische Kraft \mathbf{F} auf eine Probelaadung q_0 proportional zu q_0 ist. Dies hat nahegelegt, die Kraft pro Ladungseinheit am Ort der Probelaadung als eine Größe \mathbf{E} zu definieren, die wir elektrisches Feld genannt hatten. Ähnlich können wir mit der potentiellen Energie verfahren. Die Änderung der potentiellen Energie einer Probelaadung q_0 bei der Verschiebung $d\mathbf{s}$ ist $dE_{\text{pot}} = -q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ und so proportional zur Größe der Probelaadung. Damit definieren wir die Änderung der potentiellen Energie pro Ladungseinheit als eine neue Größe, die **Potenzialdifferenz** $d\phi$ heißt:

$$d\phi = \frac{dE_{\text{el}}}{q_0} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (20.2a)$$

DEFINITION DER POTENZIALDIFFERENZ

Die Potenzialänderung bei einer endlichen Verschiebung einer Ladung von einem Punkt a zu einem Punkt b ist

Die Potenzialdifferenz $\phi_b - \phi_a$ ist das Negative der Arbeit pro Ladungseinheit, die das elektrische Feld an einer Probelaadung verrichtet, die sich auf einem *beliebigen* Weg vom Punkt a zum Punkt b bewegt. Dabei wurde angenommen, dass sich die Lagen aller anderen Ladungen nicht ändern. (Zur Erinnerung: Eine Probelaadung ist eine Punktladung, deren Betrag so klein ist, dass sie auf alle anderen Ladungen nur vernachlässigbar kleine Kräfte ausübt. Es ist zweckmäßig, Probelaadungen immer als positiv anzunehmen.)

Die Funktion ϕ heißt das **elektrische Potenzial** oder häufig auch nur das **Potenzial**. Das Potenzial ϕ ist ebenso wie das elektrische Feld \mathbf{E} eine Ortsfunktion. Andererseits ist das elektrische Potenzial ϕ jedoch eine skalare Funktion, während das elektrische Feld \mathbf{E} eine Vektorfunktion ist. Wie bei der potentiellen Energie E_{pot} sind lediglich *Differenzen* des Potenzials ϕ physikalisch von Bedeutung. Damit kann man das Potenzial ebenso wie die potentielle Energie an einem geeigneten Punkt null setzen. Nach einer zweckmäßigen Konvention werden das elektrische Potenzial und die elektrische Energie einer Probelaadung so gewählt, dass sie im selben Bezugspunkt null sind. In diesem Fall lautet die Beziehung zwischen elektrischer Energie und elektrischem Potenzial

$$E_{\text{el}} = q_0 \phi. \quad (20.3)$$

BEZIEHUNG ZWISCHEN ELEKTRISCHER ENERGIE UND POTENZIAL

Zur Stetigkeit des Potenzials ϕ

In Kapitel 19 haben wir gesehen, dass das elektrische Feld an Punkten, an denen eine Oberflächenladungsdichte σ herrscht, um σ/ϵ_0 springt und daher an diesen Stellen unstetig ist. Demgegenüber ist das Potenzial überall (mit Ausnahme solcher Punkte, an denen das elektrische Feld unendlich wird, an denen sich also eine Punkt- oder Linienladung befindet) stetig. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir ein Gebiet, in dem ein elektrisches Feld \mathbf{E} herrscht. Die Potenzialdifferenz zwischen zwei nahe gelegenen Punkten, die durch eine Verschiebung $d\mathbf{s}$ voneinander getrennt sind, hängt mit dem elektrischen Feld über Gleichung 20.2a zusammen. Das Skalarprodukt kann durch $E_t |d\mathbf{s}|$ ausgedrückt werden, wobei E_t die (tangentielle) Komponente von \mathbf{E} in Richtung von $d\mathbf{s}$ und $|d\mathbf{s}|$ der Betrag von $d\mathbf{s}$ ist. Eingesetzt in Gleichung 20.2a ergibt dies $d\phi = -E_t |d\mathbf{s}|$. Wenn das elektrische Feld \mathbf{E} in beiden Punkten und entlang der Verbindungsstrecke mit der infinitesimalen Länge $|d\mathbf{s}|$ endlich ist, ist $d\phi$ infinitesimal. Damit ist das Potenzial ϕ in jedem Punkt, in dem sich keine Punkt- oder Linienladung befindet, stetig.

Maßeinheiten

Da das elektrische Potenzial die elektrische Energie pro Ladungseinheit ist, ist die SI-Einheit für das Potenzial und für die Potenzialdifferenz Joule pro Coulomb. Hierfür wurde eine eigene Einheit, das **Volt** (V), eingeführt:

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}. \quad (20.4)$$

Die Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten (in Volt) wird die **elektrische Spannung**, oft auch nur **Spannung**, zwischen diesen beiden Punkten genannt. Bei einer 12-V-Autobatterie ist das Potenzial der positiven Elektrode 12 V höher als das der negativen Elektrode. Wenn man einen äußeren Stromkreis an die Batterie anschließt und eine Ladung von 1 Coulomb über den Stromkreis von der positiven zur negativen Elektrode fließt, nimmt die elektrische Energie dieser Ladung um $q \Delta\phi = (1 \text{ C})(12 \text{ V}) = 12 \text{ J}$ ab.

Gleichung 20.2a zeigt, dass die Dimension des Potenzials das Produkt der Dimensionen des elektrischen Felds und der Länge ist. Damit ist die Maßeinheit des elektrischen Felds das Volt pro Meter:

$$1 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} = 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (20.5)$$

Damit kann man die elektrische Feldstärke sowohl als Kraft pro Ladungseinheit als auch als Änderungsrate des Potenzials ϕ pro Längeneinheit in einer gegebenen Richtung ansehen. In der Atom- und Kernphysik hat man häufig mit Elementarteilchen zu tun, die wie Elektronen und Protonen die Ladung e tragen und sich über Potenzialdifferenzen von Tausenden oder sogar Millionen Volt bewegen. Da die Dimension der Energie das Produkt der Dimensionen der elektrischen Ladung und des elektrischen Potenzials ist, ist das Produkt aus der Elementarladungseinheit e und einem Volt eine Energieeinheit, das sogenannte **Elektronenvolt** (eV). Häufig hat man es in der Atom- und Kernphysik nur mit Energien von einigen wenigen Elektronenvolt zu tun, sodass das Elektronenvolt eine zweckmäßige Einheit zur Beschreibung von Prozessen auf der atomaren oder molekularen Ebene ist. Zur Umrechnung zwischen dem Elektronenvolt und dem Joule wird die Elementarladung in Coulomb ausgedrückt:

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (20.6)$$

DAS ELEKTRONENVOLT

Ein Elektron, das von der negativen Elektrode einer 12-V-Autobatterie zur positiven fließt, verliert eine elektrische Energie von 12 eV.

Potenzial und elektrisches Feld

Wenn man eine positive Ladung q_0 in ein elektrisches Feld \mathbf{E} bringt und dort loslässt, wird sie in Richtung des \mathbf{E} -Felds beschleunigt. Mit zunehmender kinetischer Energie der Ladung nimmt ihre elektrische Energie ab. Im Ergebnis wird die Ladung in ein Gebiet beschleunigt, in dem ihre elektrische Energie

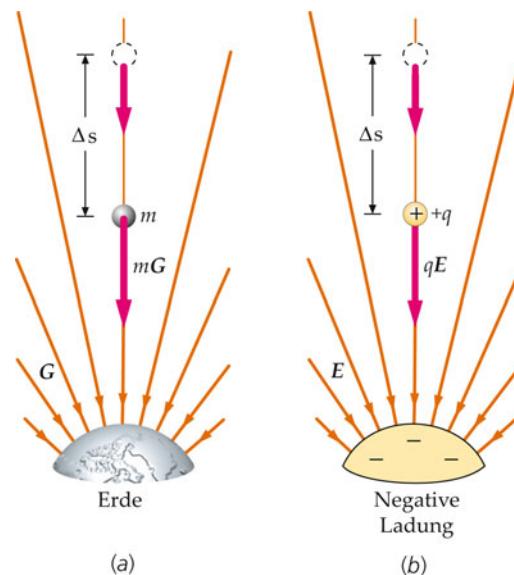


Abbildung 20.1 a) Die Arbeit, die das Gravitationsfeld G an einer Masse m verrichtet, ist gleich der Abnahme der potentiellen Gravitationsenergie. b) Die Arbeit, die das elektrische Feld E an einer Ladung q verrichtet, ist gleich der Abnahme der elektrischen Energie.

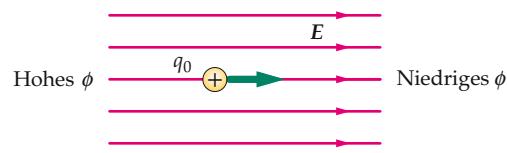


Abbildung 20.2 Das elektrische Feld zeigt in die Richtung, in der das Potenzial am schnellsten abnimmt. Eine positive Probeladung q_0 wird in einem elektrischen Feld in Richtung des Felds beschleunigt. Nachdem die zu Beginn ruhende Ladung losgelassen worden ist, steigt ihre kinetische Energie, während ihre elektrische Energie sinkt.

niedriger ist. Dies ist ähnlich wie bei einer Masse, die zu einem Gebiet niedrigerer potentieller Gravitationsenergie beschleunigt wird (Abbildung 20.1). Da die elektrische Energie E_{el} mit dem elektrischen Potenzial ϕ über $E_{el} = q\phi$ verknüpft ist, ist ein Gebiet, in dem eine positive Ladung eine niedrige potentielle Energie E_{el} besitzt, auch ein Gebiet, in dem ein niedrigeres elektrisches Potenzial ϕ herrscht. Damit wird eine positive Ladung also in Richtung E (Abbildung 20.2) zu einem Gebiet mit niedrigerem elektrischen Potenzial ϕ beschleunigt:

Das elektrische Feld E zeigt in die Richtung, in der das Potenzial ϕ am schnellsten abnimmt.

REGEL FÜR DIE ELEKTRISCHE FELDRICHTUNG

Übung 20.1: Wird eine negative Ladung, die in ein elektrisches Feld gebracht wird, in Richtung zunehmenden oder abnehmenden Potenzials beschleunigt? ◀

In Beispiel 20.1 wird das Potenzial eines homogenen elektrischen Felds berechnet.

Beispiel 20.1: Das Potenzial ϕ eines homogenen elektrischen Felds E

Ein homogenes elektrostatisches Feld weist in $+x$ -Richtung und hat den Betrag $|E| = 10 \text{ N/C} = 10 \text{ V/m}$. Ermitteln Sie das Potenzial in Abhängigkeit von x unter der Annahme, dass das Potenzial ϕ bei $x = 0$ null ist.

Problembeschreibung: Das Potenzial ϕ ergibt sich aus Gleichung 20.2b. Wir wählen einen Punkt a in der Ebene $x = 0$ (in der $\phi = 0$ ist). Der Punkt b ist ein beliebiger Punkt im Raum. Nun schreiben wir E und ds in kartesischen Koordinaten auf und berechnen damit das Integral.

Lösung: 1. Die Potenzialänderung ergibt sich nach Gleichung 20.2b aus dem elektrischen Feld:

$$\phi_b - \phi_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

2. Skizzieren Sie die Punkte a und b und die Koordinatenachsen x , y und z . Zeichnen Sie außerdem einen Integrationsweg von a nach b ein (Abbildung 20.3).

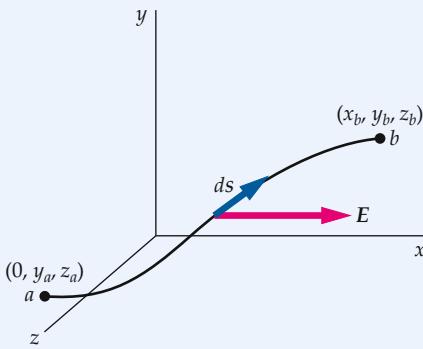


Abbildung 20.3 Skizze des Integrationswegs von a nach b mit Wegelement ds und Feldvektor E .

3. Drücken Sie E und ds durch ihre kartesischen Komponenten aus und vereinfachen Sie den Ausdruck $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \hat{x} \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) = E dx$$

4. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 3 in die Formel aus Schritt 1 ein und legen Sie den Punkt a in die Ebene $x = 0$ (sodass $\phi_a = 0$ ist):

$$\phi_b - \phi_a = - \int_{x_a}^{x_b} E dx$$

5. Da a in der Ebene $x = 0$ liegt, ist neben $\phi_a = 0$ auch $x_a = 0$. Da E homogen ist, ist E konstant und kann aus dem Integral herausgezogen werden:

$$\phi_b - 0 = -E \int_0^{x_b} dx$$

und somit

$$\phi_b = -Ex_b$$

6. Nun ersetzen wir x_b durch x sowie ϕ_b durch $\phi(x)$ und setzen für E die Feldstärke von

$$\phi(x) = -Ex = \boxed{-(10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})x}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Schritt 6 ist für $x = 0$ null. Dies entspricht der Aufgabenstellung, in der $\phi = 0$ für $x = 0$ gegeben war.

Übung 20.2: Wiederholen Sie das Beispiel für das elektrische Feld $E = (10 \text{ V/m}^2)x \hat{x}$. ■

Der Punkt a in Beispiel 20.1, an dem der Wert des Potenzials gegeben ist, wird der **Bezugspunkt** für das Potenzial ϕ genannt. Das Potenzial an einem Feldpunkt b kann dann aus $\phi - 0 = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ berechnet werden. Dabei wurde angenommen, dass das Potenzial im Punkt a null ist. Das Integral kann entlang eines beliebigen Wegs von a nach b berechnet werden.

Im Folgenden werden wir das Potenzial für eine Anzahl verschiedener Ladungsverteilungen berechnen.

20.2 Das Potenzial eines Punktladungssystems

Das elektrische Potenzial im Abstand r von einer Punktladung q im Koordinatenursprung lässt sich aus Gleichung 20.2b berechnen. Dabei ist das Potenzial am Bezugspunkt gleich ϕ_B und P ein beliebiger Punkt (Abbildung 20.4). Das elektrische Feld einer Punktladung lautet

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Einsetzen von \mathbf{E} in das Integral ergibt

$$\begin{aligned} \phi_P - \phi_B &= - \int_B^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^P \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\mathbf{s} \\ &= - \int_B^P \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Dabei ist $dr = \hat{r} \cdot ds$ die Änderung des Abstands r bei der Verschiebung ds (Abbildung 20.4). Setzt man nun $\phi_B = 0$ und integriert entlang eines Wegs von einem beliebigen Bezugspunkt zu einem beliebigen Feldpunkt, ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi_P - 0 &= - \int_B^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{r_B}^{r_P} r^{-2} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_P} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B}\end{aligned}$$

bzw.

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B}. \quad (20.7)$$

DAS POTENZIAL EINER PUNKTLADUNG

Dabei haben wir r_P (die Entfernung zum Feldpunkt P) durch r und ϕ_P durch ϕ ersetzt. Da wir den Bezugspunkt frei wählen können, legen wir ihn so, dass das Potenzial die einfachste algebraische Form annimmt. Dies ist der Fall, wenn wir den Bezugspunkt unendlich weit entfernt von der Punktladung legen ($r_B = \infty$). Damit ist

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (20.8)$$

DAS COULOMB-POTENZIAL

Das Potenzial in Gleichung 20.8 heißt **Coulomb-Potenzial**. Je nachdem, ob q positiv oder negativ ist, ist auch das Coulomb-Potenzial positiv oder negativ.

Die elektrische Energie E_{el} einer Punktladung q_0 in einem Abstand r von der Punktladung q ist

$$E_{el} = q_0 \phi = q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}. \quad (20.9)$$

DIE ELEKTRISCHE ENERGIE EINES SYSTEMS ZWEIER LADUNGEN

Dies ist die elektrische Energie eines Systems zweier Ladungen, wenn bei unendlichem Abstand $E_{el} = 0$ gewählt wird. Lässt man eine zu Beginn ruhende Punktladung q_0 in einem Abstand r_0 von der Ladung q los, während q festgehalten wird, wird sie (wenn beide Ladungen das gleiche Vorzeichen haben) von q weg beschleunigt. In sehr großem Abstand von q geht die elektrische Energie des Teilchens mit der Ladung q_0 gegen null, sodass seine kinetische Energie $q_0 q / (4\pi\epsilon_0 r_0)$ wird.

Die Arbeit, die verrichtet werden muss, um eine zu Beginn im Unendlichen ruhende Probeladung q_0 zu einem Punkt P im Abstand r von q zu bringen, wo sie wieder ruht, beträgt daher $q_0 q / (4\pi\epsilon_0 r)$ (Abbildung 20.5). Die Arbeit pro Ladungseinheit ist $q / (4\pi\epsilon_0 r)$, d. h. gleich dem elektrischen Potenzial ϕ im Punkt P , wenn dieses im Unendlichen null gesetzt wird.

Die Festlegung, die elektrische Energie zweier Punktladungen bei unendlichem Abstand null zu setzen, entspricht der Wahl aus

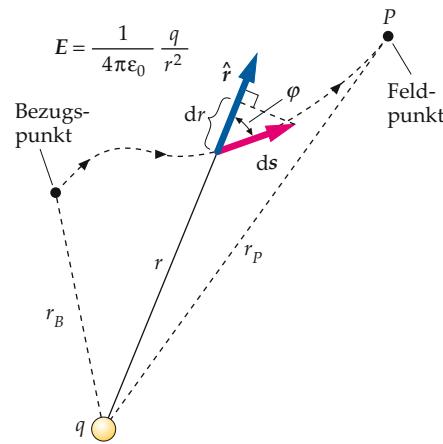


Abbildung 20.4 Die Änderung von r ist dr . Es handelt sich um die Komponente von ds in Richtung von \hat{r} . Die Abbildung zeigt, dass $|ds| \cos \varphi = dr$ ist. Wegen $\hat{r} \cdot ds = |ds| \cos \varphi$ gilt $dr = \hat{r} \cdot ds$.

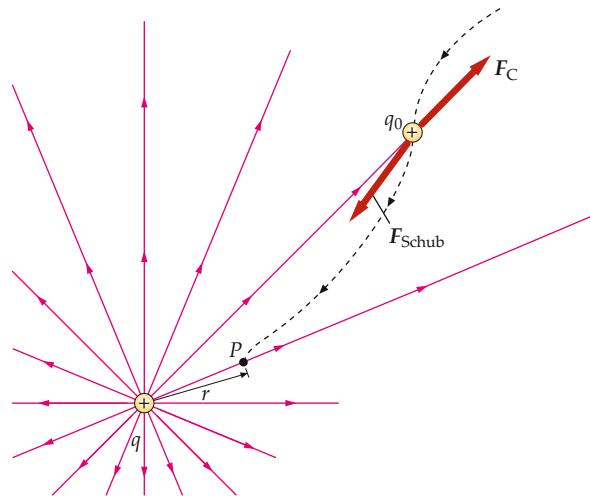


Abbildung 20.5 Die Arbeit, die verrichtet werden muss, um eine zu Beginn im Unendlichen ruhende Probeladung q_0 gegen die Coulomb-Abstoßung aus dem Unendlichen zu einem Punkt P zu bringen, ist $q_0 q / (4\pi\epsilon_0 r)$, wobei r der Abstand des Punkts P von der Ladung q ist. Die Arbeit pro Ladungseinheit ist $q / (4\pi\epsilon_0 r)$, entspricht also dem elektrischen Potenzial im Punkt P , wenn das Potenzial im Unendlichen gleich null gesetzt wird. Falls die Probeladung vom Punkt P losgelassen wird, verrichtet das elektrische Feld an ihr die Arbeit $q_0 q / (4\pi\epsilon_0 r)$, während sie ins Unendliche beschleunigt wird.

Kapitel 5, wo wir die potenzielle Gravitationsenergie von zwei Punktmassen bei unendlichem Abstand ebenfalls null gesetzt haben. Dabei gehen wir davon aus, dass die beiden Ladungen (oder Massen) nicht miteinander wechselwirken, wenn sie unendlich weit voneinander entfernt sind. Es scheint sinnvoll, die potenzielle bzw. elektrische Energie null zu setzen, wenn die Teilchen nicht miteinander wechselwirken.

Die beiden Beispiele 20.2 und 20.3 zeigen zwei Anwendungen des Potenzials in der Atom- und Kernphysik.

Beispiel 20.2: Die elektrische Energie eines Wasserstoffatoms

- a) Wie groß ist das elektrische Potenzial im Abstand $r_0 = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ von einem Proton, dem durchschnittlichen Abstand zwischen Proton und Elektron in einem Wasserstoffatom? b) Welche elektrische Energie haben das Elektron und das Proton in diesem Abstand?

Problembeschreibung: Das elektrische Potenzial der Ladung des Protons und die elektrische Energie der beiden Punktladungen ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen 20.8 und 20.9.

Lösung:

Teilaufgabe a

Das Potenzial ϕ der Ladung des Protons bei $r = r_0$ ergibt sich aus $\phi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Für ein Proton ist $q = +e$:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{q}{r_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{e}{r_0} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \\ &= 27,2 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{C}^{-1} = [27,2 \text{ V}]\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die elektrische Energie ergibt sich aus $E_{\text{el}} = q_0 \phi$ mit $q_0 = -e$:

$$E_{\text{el}} = q_0 \phi = (-e) (27,2 \text{ V}) = [-27,2 \text{ eV}]$$

Plausibilitätsprüfung: Eine Betrachtung der Maßeinheiten in der Gleichung $\phi = q/(4\pi\epsilon_0 r_0)$ zeigt, dass sich die Einheit $\text{N} \cdot \text{m}/\text{C}$ ergibt. Wegen $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$ und $1 \text{ J/C} = 1 \text{ V}$ ist $1 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{C} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ V}$.

Weitergedacht: Wenn das Elektron in dem gegebenen Abstand vom Proton in Ruhe wäre, müsste man mindestens 27,2 eV aufwenden, um es vom Atom abzulösen. Allerdings besitzt das Elektron außerdem eine kinetische Energie von 13,6 eV, sodass seine Gesamtenergie in dem Atom $-27,2 \text{ eV} + 13,6 \text{ eV} = -13,6 \text{ eV}$ beträgt. Damit genügt bereits eine Energie von mindestens 13,6 eV, um es vom Atom abzulösen. Da dabei ein positiv geladenes Ion zurückbleibt, heißt diese Energie die *Ionisierungsenergie*.

Übung 20.3: Wie groß ist die elektrische Energie des Elektrons und des Protons im vorliegenden Beispiel in SI-Einheiten? ▶

Beispiel 20.3: Die elektrische Energie von Kernspaltungsprodukten

Bei der Kernspaltung fängt ein Atomkern von ^{235}U ein Neutron ein und bildet dabei einen instabilen ^{236}U -Kern. Dieser wird anschließend in zwei leichtere Kerne gespalten (Abbildung 20.6). Daneben werden zwei oder drei Neutronen freigesetzt. Manchmal sind die beiden Spaltungsprodukte ein Bariumkern (Ladung 56e) und ein Kryptonkern (Ladung 36e). Wir betrachten die beiden Kerne als positive Punktteilchen, die unmittelbar nach der Spaltung den Abstand $r = 14,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ haben. (Dieser Abstand ist gerade die Summe der Radien des Barium- und des Kryptonkerns.) Berechnen Sie die elektrische Energie des Systems der beiden Ladungen in Elektronenvolt.

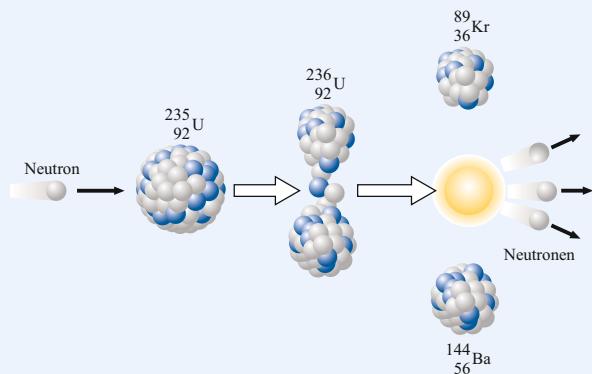


Abbildung 20.6 Ein ^{235}U -Kern absorbiert ein Neutron und wird in einen Bariumkern und in einen Kryptonkern gespalten.

Problembeschreibung: Die elektrische Energie zweier Punktladungen im Abstand r ist $E_{\text{el}} = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r)$. Um die Energie in Elektronenvolt zu erhalten, berechnen wir das Potenzial einer Ladung $q_1 / (4\pi\epsilon_0 r)$ in Volt und multiplizieren es mit der anderen Ladung, die dabei als Vielfache der Elementarladung e geschrieben wird.

Lösung: 1. Die elektrische Energie der beiden Ladungen ergibt sich aus Gleichung 20.9:

$$E_{\text{el}} = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$$

2. Setzen Sie die gegebenen Zahlenwerte ein und ziehen Sie e heraus:

$$\begin{aligned}E_{\text{el}} &= e \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{36 \cdot 56 e}{r} \\ &= e \frac{36 \cdot 56 \cdot (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{14,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}} \\ &= e (199 \cdot 10^6 \text{ V}) = [199 \text{ MeV}]\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die elektrische Energie eines Protons und eines Elektrons in einem Wasserstoffatom, die wir in Beispiel 20.2 berechnet haben, ist sieben Größenordnungen kleiner als die elektrische Energie, die sich im vorliegenden Beispiel ergibt. Dies entspricht unserer Erwartung, dass die Energien in Kernumwandlungen wesentlich höher als die in atomaren Prozessen sind.

Weitergedacht: Nach der Spaltung fliegen die beiden Kerne wegen der elektrostatischen Abstoßung auseinander. Dabei wird ihre elektrische Energie von 199 MeV in kinetische Energie und schließlich beim Stoß mit den umgebenden Atomen in Wärmeenergie umgewandelt. Bei einer Kettenreaktion führen eines oder mehrere der freigesetzten Neutronen zur Spaltung eines weiteren Uranatoms. Wie wir oben berechnet haben, wird bei einer solchen Kettenreaktion pro Atomkern durchschnittlich eine Energie von etwa 200 MeV freigesetzt. ■

Aus dem Superpositionsprinzip für das elektrische Feld ergibt sich unmittelbar, dass das Potenzial mehrerer Punktladungen an einem Feldpunkt die Summe der Potenziale jeder Einzelladung für sich ist. Somit lautet das Potenzial eines Systems von Punktladungen q_i

$$\phi = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \quad (20.10)$$

DAS POTENZIAL EINES PUNKTLADUNGSSYSTEMS

Dabei ist die Summe über alle Ladungen zu bilden und r_i der Abstand, den der Feldpunkt, an dem das Potenzial berechnet wird, von der i -ten Ladung hat. In dieser Formel wurde der Bezugspunkt, an dem $\phi = 0$ ist, ins Unendliche gelegt, während der jeweilige Abstand zwischen zwei Ladungen in dem System endlich ist.

Vorgehensweise:

Berechnung des elektrischen Potenzials ϕ anhand von Gleichung 20.10

Gleichung 20.10 ermöglicht die Berechnung des Potenzials einer beliebigen Menge von Punktladungen an einem beliebigen Feldpunkt. Dabei muss jede Punktladung von jeder anderen Punktladung einen endlichen Abstand haben.

- Skizzieren Sie die Ladungskonfiguration. Zeichnen Sie geeignete Koordinatenachsen ein. Bezeichnen Sie die Punktladungen geeignet, etwa mit q_i . Verbinden Sie jede Punktladung q_i durch eine Gerade mit dem Feldpunkt P , an dem das Potenzial berechnet wird und bezeichnen Sie die Geraden mit $r_{i,P}$. Eine sorgfältige Zeichnung kann sehr dabei helfen, die gesuchten Abstände durch die in der Aufgabenstellung gegebenen Strecken auszudrücken.
- Berechnen Sie mit der Formel $\phi = \sum_i q_i / (4\pi\epsilon_0 r_{i,P})$ das Potenzial der Punktladungen am Punkt P .

Plausibilitätsprüfung: Wenn der Feldpunkt beliebig gewählt wurde, können Sie ihn im Grenzwert gegen unendlich gehen lassen. In diesem Grenzwert muss das Potenzial gegen null gehen.

In den Beispielen 20.4 bis 20.6 ist die explizite Berechnung des Potenzials für den Fall zweier Ladungen gezeigt. Der in Beispiel 20.6 behandelte elektrische Dipol wird in der Physik häufig für Modellrechnungen herangezogen.

Beispiel 20.4: Das Potenzial zweier Punktladungen

Auf der x -Achse befinden sich zwei Punktladungen von $+5,0 \text{ nC}$, von denen eine im Koordinatenursprung und die andere bei $x = 8,0 \text{ cm}$ liegt. Ermitteln Sie das Potenzial a) im Punkt P_1 auf der x -Achse bei $x = 4,0 \text{ cm}$ und b) im Punkt P_2 auf der y -Achse bei $y = 6,0 \text{ cm}$. Der Bezugspunkt mit $\phi = 0$ soll im Unendlichen liegen.

Problembeschreibung: Abbildung 20.7 zeigt die beiden positiven Punktladungen auf der x -Achse. Gesucht ist das Potenzial an den beiden Punkten P_1 und P_2 .

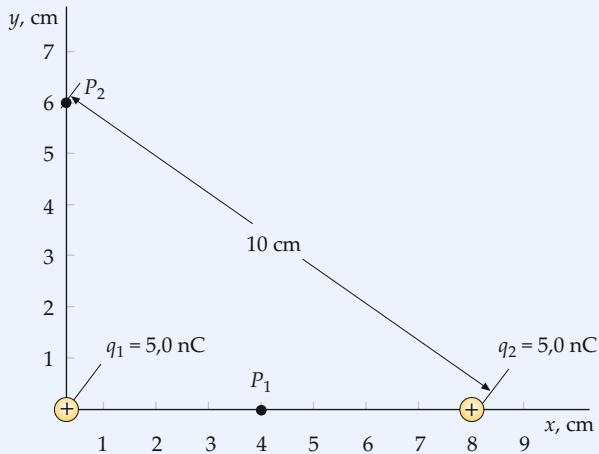


Abbildung 20.7 Skizze der beiden Punktladungen und der Punkte P_1 und P_2 .

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Schreiben Sie das Potenzial ϕ nach Gleichung 20.10 als Funktion der Abstände r_1 und r_2 von den Ladungen auf:

$$\phi = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}$$

2. Berücksichtigen Sie, dass der Punkt P_1 4,0 cm von jeder Ladung entfernt ist und die beiden Ladungen gleich sind:

$$r_1 = r_2 = r = 0,040 \text{ m}$$

$$q_1 = q_2 = q = 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

3. Berechnen Sie daraus das Potenzial im Punkt P_1 :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} \\ &= \frac{2 \cdot (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (5,0 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{0,040 \text{ m}} \\ &= 2247 \text{ V} = \boxed{2,2 \text{ kV}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Der Punkt P_2 ist 6,0 cm von der Ladung q_1 und 10 cm von der Ladung q_2 entfernt. Berechnen Sie daraus das Potenzial am Punkt P_2 :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (5,0 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{0,060 \text{ m}} \\ &\quad + \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (5,0 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{0,10 \text{ m}} \\ &= 749 \text{ V} + 450 \text{ V} = \boxed{1,20 \text{ kV}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die berechneten Potenziale sind beide positiv. Das Potenzial an einem Feldpunkt ist die Arbeit, die pro Ladungseinheit verrichtet werden muss, um eine Probeladung von einem Bezugspunkt (an dem das Potenzial null ist) zu dem Feldpunkt zu bringen. Bei dem hier verwendeten Potenzial haben wir den Bezugspunkt ins Unendliche gelegt. Eine positive Probeladung an einem beliebigen Ort wird sowohl von q_1 als auch von q_2 abgestoßen. Somit muss an der Probeladung eine Arbeit verrichtet werden, um sie aus der Ruhe vom Bezugspunkt im Unendlichen an einen beliebigen anderen Feldpunkt zu bringen, wo sie wiederum ruht. Daher sollte das Potenzial an jedem Feldpunkt positiv sein.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass in Teilaufgabe a in der Mitte zwischen den Ladungen zwar das elektrische Feld, nicht aber das elektrische Potenzial null ist. Um eine Probeladung aus weiter Entfernung an diesen Punkt zu bringen, muss Arbeit verrichtet werden, da das elektrische Feld erst in der Endlage null ist. ■

Beispiel 20.5: Das Potenzial auf der x-Achse

Eine Punktladung q_1 befindet sich im Koordinatenursprung und eine zweite q_2 bei $x = a$ auf der x -Achse. Ermitteln Sie anhand von Gleichung 20.10 eine Formel in Abhängigkeit von x für das Potenzial an einem beliebigen Punkt auf der x -Achse.

Problembeschreibung: Das Gesamtpotenzial an einem Feldpunkt ist die Summe der Potenziale der beiden Einzelladungen.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die x -Achse und die beiden Ladungen darauf. Der Abstand r_1 , den ein beliebiger Punkt P von q_1 hat, ist $r_1 = |x|$ und der Abstand r_2 , den P von q_2 hat, $r_2 = |x - a|$ (Abbildung 20.8).

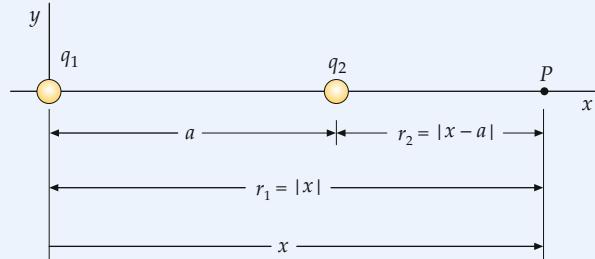


Abbildung 20.8 Skizze der Ladungsanordnung.

2. Schreiben Sie das Potenzial in Abhängigkeit von den Abständen der beiden Ladungen auf:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \\ &= \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|x|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|x - a|}}, \quad (x \neq 0, x \neq a) \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß geht ϕ sowohl für $x \rightarrow 0$ als auch für $x \rightarrow a$ gegen unendlich. Außerdem geht ϕ sowohl für $x \rightarrow -\infty$ als auch für $x \rightarrow +\infty$, wie es sein sollte, gegen null.

Kommentar: Abbildung 20.9 zeigt das Potenzial ϕ in Abhängigkeit von x auf der x -Achse für $q_1 = q_2 > 0$.

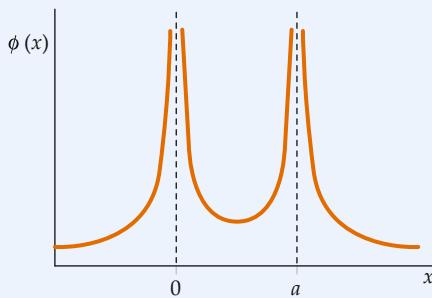


Abbildung 20.9 Graph des Potenzials ϕ in Abhängigkeit von x .

Beispiel 20.6: Das Potenzial eines elektrischen Dipols

Ein elektrischer Dipol besteht aus einer positiven Ladung $+q$ bei $x = +l/2$ und aus einer negativen Ladung $-q$ bei $x = -l/2$, die beide auf der x -Achse liegen. Berechnen Sie das Potenzial auf der x -Achse für $x \gg +l/2$, ausgedrückt durch das Dipolmoment $\rho = q l \hat{x}$.

Problembeschreibung: Das Potenzial an einem Feldpunkt ist die Summe der Potenziale beider Ladungen.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die x -Achse und die beiden Ladungen darauf. Bei $x > l/2$ ist der Abstand vom Feldpunkt P zur positiven Ladung $x - \frac{1}{2}l$ und der vom Feldpunkt zur negativen Ladung $x + \frac{1}{2}l$ (Abbildung 20.10).

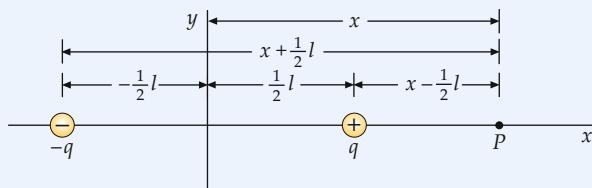


Abbildung 20.10 Skizze der Dipolanordnung im Ortsraum.

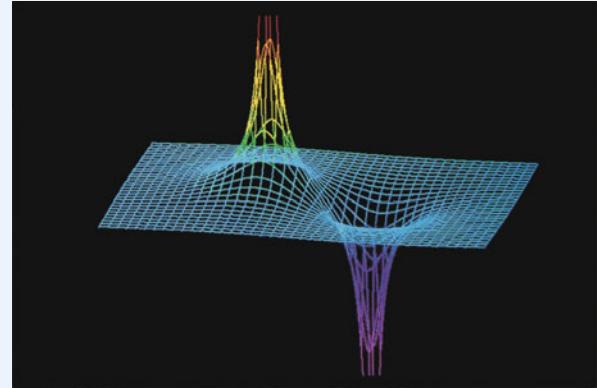
2. Bei $x > l/2$ ist das Potenzial der beiden Ladungen:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x - (l/2)} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q)}{x + (l/2)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q l}{x^2 - l^2/4}, \quad x > \frac{l}{2}\end{aligned}$$

3. Der Betrag von ρ ist $\rho = ql$. Für $x \gg l/2$ kann $l^2/4$ im Nenner gegenüber x^2 vernachlässigt werden:

$$\phi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{x^2}, \quad x \gg l$$

Plausibilitätsprüfung: Ein Dipol hat die Gesamtladung null. In großer Entfernung von ihm sollte daher das Potenzial mit dem Abstand schneller abnehmen als bei einer Ladungskonfiguration, deren Gesamtladung von null verschieden ist. Nach dem Ergebnis aus Schritt 3 nimmt das Potenzial tatsächlich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands ab. Demgegenüber nimmt das Potenzial einer Konfiguration mit einer von null verschiedenen Gesamtladung nur umgekehrt proportional mit dem Abstand ab.



Das elektrische Potenzial in einer Ebene, die beide Punktladungen eines elektrischen Dipols enthält. Das Potenzial jeder Einzelladung ist proportional zur Ladung und umgekehrt proportional zum Abstand von der Ladung. (©1990 Richard Megna/Fundamental Photographs.)

20.3 Die Berechnung des elektrischen Felds aus dem Potenzial

In Abschnitt 20.2 haben wir ausgehend von der Kenntnis des elektrischen Felds das Potenzial berechnet. Hierzu haben wir über beide Seiten der Gleichung $d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ integriert. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir über dieselbe Gleichung anhand der Kenntnis des Potenzials das elektrische Feld berechnen.

Wir betrachten dazu eine kleine Verschiebung $d\mathbf{s}$ in einem beliebigen elektrischen Feld \mathbf{E} . Die zugehörige Potenzialänderung ist dann $d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. Um \mathbf{E} zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Komponenten von \mathbf{E} in Richtung der Verschiebung $d\mathbf{s}$, d. h.

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -|\mathbf{E}| \cos \theta |d\mathbf{s}| = -E_t |d\mathbf{s}|, \quad (20.11)$$

wobei $E_t = |\mathbf{E}| \cos \theta$ die (tangentielle) Komponente von \mathbf{E} in Richtung von $d\mathbf{s}$ ist. Damit gilt

$$E_t = -\frac{d\phi}{|d\mathbf{s}|}. \quad (20.12)$$

Wenn die Verschiebung ds senkrecht auf \mathbf{E} steht, ist $d\phi = 0$, d.h., das Potenzial ändert sich nicht. Bei gegebenem ds ist die Zunahme des Potenzials ϕ maximal, wenn die Verschiebung ds die gleiche Richtung wie $-\mathbf{E}$ hat. Ein Vektor, der in Richtung der größten Änderung einer skalaren Funktion zeigt und dessen Betrag gleich der Ortsableitung der Funktion in dieser Richtung ist, heißt **Gradient** der Funktion. Damit ist das elektrische Feld \mathbf{E} gleich dem Negativen des Gradienten des Potenzials ϕ . Somit stimmt die Richtung des elektrischen Felds mit der Richtung des stärksten Abfalls des Potenzials mit der Entfernung überein.

Wenn das Potenzial ϕ nur von x abhängt, ändert es sich bei Verschiebungen in y - oder z -Richtung nicht, sodass E_y und E_z null sind. Bei einer Verschiebung in x -Richtung ist dagegen $ds = dx\hat{x}$, sodass Gleichung 20.11 in

$$d\phi(x) = -\mathbf{E} \cdot ds = -\mathbf{E} \cdot dx\hat{x} = -(E \cdot \hat{x}) dx = -E_x dx$$

übergeht. Somit ist

$$E_x = -\frac{d\phi(x)}{dx}. \quad (20.13)$$

Das Potenzial einer *kugelsymmetrischen* Ladungsverteilung mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung kann nur eine Funktion des radialen Abstands r sein. Verschiebungen senkrecht zur radialen Richtung führen zu keiner Änderung von $\phi(r)$, sodass das elektrische Feld ebenfalls radial sein muss. Eine Verschiebung in radialer Richtung können wir $ds = dr\hat{r}$ schreiben. Damit lautet Gleichung 20.11

$$d\phi(r) = -\mathbf{E} \cdot ds = -\mathbf{E} \cdot dr\hat{r} = -E_r dr,$$

und somit ist

$$E_r = -\frac{d\phi(r)}{dr}. \quad (20.14)$$

Wenn das Potenzial in einem vollständigen Raumgebiet gegeben ist, können wir daraus das elektrische Feld berechnen und umgekehrt. Häufig lässt sich das Potenzial als skalare Funktion leichter berechnen als das elektrische Feld, das eine Vektorfunktion ist. Es muss betont werden, dass es zur Berechnung des elektrischen Felds \mathbf{E} nicht ausreicht, wenn das Potenzial ϕ nur in einem Punkt bekannt ist: Damit die zum Berechnen von \mathbf{E} erforderliche Ableitung gebildet werden kann, muss das Potenzial ϕ in einem Raumgebiet bekannt sein. Ist das Potenzial ϕ nur längs einer Kurve oder auf einer Fläche gegeben, können wir nur die Tangentialkomponente von \mathbf{E} an die Kurve oder Fläche berechnen.

Frage 20.1

In welcher Richtung kann man sich in einem elektrischen Feld bewegen, ohne dass sich das elektrische Potenzial ändert?

Frage 20.2

In welcher Richtung muss man sich in einem elektrischen Feld bewegen, damit das elektrische Potenzial am stärksten zunimmt?

In Beispiel 20.7 ist das elektrische Feld eines in x -Richtung linear ansteigenden Potenzials zu berechnen.

Beispiel 20.7: Das elektrische Feld \mathbf{E} eines x -abhängigen Potenzials

Ermitteln Sie das elektrische Feld bei gegebenem Potenzial $\phi = 100 \text{ V} - (25 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})x$.

Problembeschreibung: Das Potenzial hängt nur von x ab. Berechnen Sie E_x aus der Gleichung $E_x = -d\phi/dx$ (Gleichung 20.13). Da das Potenzial nicht von y und z abhängt, ist $E_y = E_z = 0$.

Lösung: Das elektrische Feld berechnet sich aus Gleichung 20.13 mit $\phi = 100 \text{ V} - (25 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})x$:

$$E_x = -\frac{d\phi}{dx} \text{ und } E_y = E_z = 0$$

und somit

$$\mathbf{E} = \boxed{+(25 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})\hat{x}}$$

Plausibilitätsprüfung: Mit wachsendem x nimmt das Potenzial ab. Wie es sein sollte, zeigt das elektrische Feld in die $+x$ -Richtung, d.h. in Richtung des abnehmenden Potenzials.

Weitergedacht: Das elektrische Feld ist homogen und zeigt in $+x$ -Richtung. Beachten Sie, dass die Konstante 100 V im Potenzial $\phi(x)$ keine Wirkung auf das elektrische Feld hat, da dieses von der Wahl des Potenzialnullpunkts unabhängig ist.

Übung 20.4: a) An welchem Punkt ist das Potenzial ϕ in diesem Beispiel null? b) Schreiben Sie das Potenzial ϕ auf, das demselben elektrischen Feld entspricht, aber in der gesamten Ebene $x = 0$ null ist. ◀

Der allgemeine Zusammenhang zwischen dem Feld \mathbf{E} und dem Potenzial ϕ

In der Vektorschreibweise wird der Gradient von ϕ als $\nabla\phi$ geschrieben. Damit ist

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (20.15)$$

Im Allgemeinen kann das Potenzial von x , y und z abhängen. Die kartesischen Komponenten des elektrischen Felds ergeben sich aus den partiellen Ableitungen des Potenzials nach x , y und z . Beispielsweise ergibt sich die x -Komponente des elektrischen Felds aus

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}. \quad (20.16a)$$

Analog erhält man die y - und die z -Komponente des elektrischen Felds aus dem Potenzial über

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (20.16b)$$

und

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (20.16c)$$

Damit lautet Gleichung 20.15 in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z}\right). \quad (20.17)$$

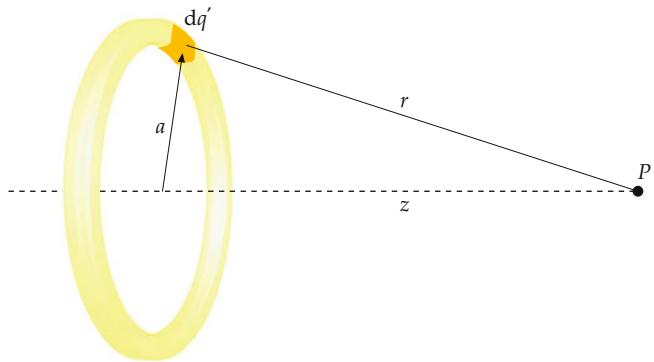


Abbildung 20.11 Die Geometrie bei der Berechnung des elektrischen Potenzials an einem Punkt auf der Achse eines Ladungsringes mit dem Radius a .

20.4 Die Berechnung des elektrischen Potenzials ϕ kontinuierlicher Ladungsverteilungen

Um das Potenzial einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zu berechnen, greifen wir ein Ladungselement dq' heraus, das wir als Punktladung behandeln. Wir nutzen das Superpositionsprinzip und gehen anschließend in $\phi = \sum q_i/(4\pi\epsilon_0 r_i)$ (Gleichung 20.10) von der Summe zu einem Integral über:

$$\phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r}. \quad (20.18)$$

DAS POTENZIAL EINER KONTINUIERLICHEN LADUNGSVERTEILUNG

In dieser Gleichung wurde angenommen, dass in unendlichem Abstand von den Ladungen $\phi = 0$ ist. Damit kann sie nicht angewendet werden, wenn sich Ladungen bis ins Unendliche erstrecken, wie es bei fiktiven Ladungsverteilungen, etwa bei einer unendlich ausgedehnten Linienladung oder einer unendlich ausgedehnten Ladungsebene, durchaus vorkommt.

Das Potenzial ϕ auf der Achse eines Ladungsringes

Abbildung 20.11 zeigt einen homogen geladenen Ring mit dem Radius a und der Ladung q in der Ebene $z = 0$ mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Der Abstand eines Feldpunkts P auf der Achse des Rings von einem Ladungselement dq' ist $r = \sqrt{z^2 + a^2}$. Da der Abstand für alle Ladungselemente des Rings gleich ist, können wir diesen Term aus dem Integral in Gleichung 20.18 herausziehen. Damit ist das Potenzial des Rings im Punkt P

$$\phi = \int_0^q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^q dq' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

oder

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \quad (20.19)$$

DAS POTENZIAL EINES LADUNGSRINGS AUF DER ACHSE

Beachten Sie, dass das Potenzial für $|z| \gg a$ gegen $q/(4\pi\epsilon_0 |z|)$ und somit gegen das Potenzial einer Punktladung im Koordinatenursprung geht.

Beispiel 20.8: Ein Teilchen im Feld eines Ladungsringes

ZUR ÜBUNG

In der Ebene $z = 0$ befindet sich ein Ring mit einem Radius von $a = 4,0 \text{ cm}$. Sein Mittelpunkt liegt im Koordinatenursprung. Der Ring trägt eine homogene Ladung von $q = +8,0 \text{ nC}$. Auf der z -Achse wird am Punkt $z = 3,0 \text{ cm}$ ein kleines Teilchen mit einer Masse von $6,0 \text{ mg}$ und mit einer Ladung von $5,0 \text{ nC}$ losgelassen. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Teilchens in großer Entfernung vom Ring; vernachlässigen Sie dabei Gravitationseffekte.

Problembeschreibung: Das Teilchen wird von dem Ring abgestoßen. Während es sich entlang der z -Achse bewegt, nimmt seine elektrische Energie ab, während seine kinetische Energie zunimmt. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Erhaltung der mechanischen Energie die kinetische Energie des Teilchens in großer Entfernung vom Ring. Die Endgeschwindigkeit ergibt sich aus der schließlich erreichten kinetischen Energie.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

- Lösung:**
- Fertigen Sie eine Skizze des Rings, des Teilchens und der z -Achse an und bezeichnen Sie diese geeignet (Abbildung 20.12).
 - Notieren Sie den Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Geschwindigkeit.
 - Leiten Sie aus $E_{\text{el}} = q_0 \phi$ mit dem Potenzial $\phi = q/(4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + a^2})$ aus Gleichung 20.19 einen Ausdruck für die elektrische Energie E_{el} der Punktladung q_0 in Abhängigkeit von ihrem Abstand z von der Mitte des Rings ab.
 - Stellen Sie unter Berücksichtigung der Erhaltung der mechanischen Energie eine Beziehung zwischen der Energie am Ort $z_A = 0,030 \text{ m}$ und der Energie für $z_E \rightarrow \infty$ auf. Lösen Sie diese nach der Geschwindigkeit für z_E gegen unendlich auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

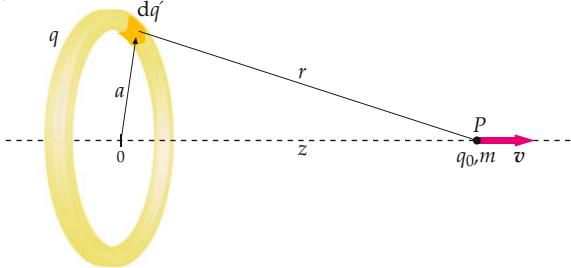


Abbildung 20.12 Skizze der Ringladung und des Teilchens auf der z -Achse.

Versuchen Sie in Beispiel 20.8 selbst, die Bewegung eines geladenen Teilchens in diesem Ring zu berechnen. In Beispiel 20.9 wird ausgehend von dem Potenzial des Ladungsringes das Potenzial einer geladenen Scheibe bestimmt.

Das Potenzial ϕ auf der Achse einer homogen geladenen Scheibe

Beispiel 20.9: Das Potenzial ϕ einer homogen geladenen Scheibe

Ermitteln Sie für eine Scheibe mit dem Radius r_S , auf deren Oberfläche homogen eine Gesamtladung q verteilt ist, das Potenzial entlang der Achse senkrecht zur Scheibenebene.

Problembeschreibung: Wir wählen die Achse der Scheibe als z -Achse. Weiterhin behandeln wir die Scheibe als eine Menge von Ringladungen. Der Ring mit dem Radius a und der Dicke da in Abbildung 20.13 besitzt den Flächeninhalt $2\pi a da$. Seine Ladung ist $dq' = \sigma da =$

2.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

3.

$$E_{\text{el}} = q_0 \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

4.

$$E_{\text{el,E}} + E_{\text{kin,E}} = E_{\text{el,A}} + E_{\text{kin,A}}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{\sqrt{z_E^2 + a^2}} + \frac{1}{2} m v_E^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{\sqrt{z_A^2 + a^2}} + \frac{1}{2} m v_A^2$$

und somit

$$v_E^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 q_0 q}{m \sqrt{z_A^2 + a^2}} = 2,40 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_E = \boxed{1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: In Schritt 4 haben wir $v_E^2 = 2,40 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ und damit einen positiven Wert erhalten. Im Fall eines negativen Werts müsste ein Rechenfehler vorliegen.

Übung 20.5: Wie groß ist die elektrische Energie des Teilchens bei $z = 9,0 \text{ cm}$? ◀

$\sigma 2\pi a da$, wobei $\sigma = q/(\pi r_S^2)$ die Oberflächenladungsdichte ist. Das Potenzial der Ringladung im Punkt P ist durch Gleichung 20.19 gegeben. Wenn wir dies von $a = 0$ bis $a = r_S$ integrieren, ergibt sich das Gesamtpotenzial der Ladung auf der Scheibe.

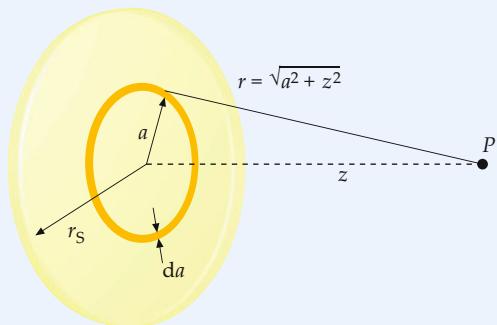


Abbildung 20.13 Skizze der geladenen Scheibe und des Punkts P auf der z -Achse.

20.4 Die Berechnung des elektrischen Potenzials ϕ

Lösung: 1. Schreiben Sie das Potenzial $d\phi$ des Ladungsringes mit dem Radius a im Punkt P auf:

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma a da}{(z^2 + a^2)^{1/2}}$$

2. Integrieren Sie von $a = 0$ bis $a = r_s$:

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^{r_s} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma a da}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \pi \int_0^{r_s} (z^2 + a^2)^{-1/2} 2a da\end{aligned}$$

3. Das Integral hat die Form $\int u^n du$ mit $u = z^2 + a^2$, $du = 2a da$ und $n = -\frac{1}{2}$. Bei $a = 0$ ist $u = z^2 + 0^2$, und bei $a = r_s$ ist $u = z^2 + r_s^2$:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \pi \int_{z^2+0^2}^{z^2+r_s^2} u^{-1/2} du = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \pi \left. \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right|_{z^2}^{z^2+r_s^2} \\ &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \pi \left(\sqrt{z^2 + r_s^2} - \sqrt{z^2} \right)\end{aligned}$$

4. Durch Ausklammern von $|z|$ ergibt sich das Potenzial ϕ :

$$\phi = \left[\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |z| \left(\sqrt{1 + \frac{r_s^2}{z^2}} - 1 \right) \right]$$

Plausibilitätsprüfung: Bei $|z| \gg r_s$ sollte das Potenzial ϕ gegen das einer Punktladung q im Koordinatenursprung gehen. Bei großen $|z|$ erwarten wir daher $\phi \approx q/(4\pi\epsilon_0|z|)$. Für $|z| \gg r_s$ lässt sich das Ergebnis mithilfe der Binomialformel $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon + \dots$ ($\epsilon \ll 1$) annähern:

$$\left(1 + \frac{r_s^2}{z^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{r_s^2}{z^2} + \dots$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\phi &\approx \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |z| \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_s^2}{z^2} + \dots \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\sigma \pi r_s^2)}{|z|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|z|}.\end{aligned}$$

■

Mithilfe des erhaltenen Potenzials auf der Achse eines Ladungsringes lässt sich das Potenzial auf der Achse einer homogen geladenen Scheibe berechnen (Beispiel 20.9).

Im Ergebnis von Beispiel 20.9 lautet das Potenzial auf der z -Achse einer homogen geladenen Scheibe in der Ebene $z = 0$:

$$\phi = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |z| \left(\sqrt{1 + \frac{r_s^2}{z^2}} - 1 \right). \quad (20.20)$$

DAS POTENZIAL AUF DER SYMMETRIE EBBENE SENKRECHT ZU EINER HOMOGEN GELADENEN SCHEIBE

In Beispiel 20.10 soll nun aus den erhaltenen Potenzialen auf der z -Achse des homogen geladenen Rings und der homogen geladenen Scheibe die elektrische Feldstärke berechnet werden.

Beispiel 20.10: Berechnung des elektrischen Felds E aus dem Potenzial ϕ

Berechnen Sie aus dem Potenzial in Gleichung 20.20 das elektrische Feld E_z einer homogen geladenen Scheibe mit der Ladung q und mit dem Radius r_s .

Problembeschreibung: E_z kann anhand von $E_z = -\partial\phi/\partial z$ direkt durch Ableiten berechnet werden. Dagegen lassen sich E_x und E_y nicht direkt durch Ableiten berechnen, da wir nicht wissen, wie sich das Potenzial ϕ in diesen Richtungen ändert. Aus der Symmetrie der Ladungsverteilung folgt jedoch, dass auf der z -Achse $E_x = E_y = 0$ sein muss.

Lösung: 1. Schreiben Sie Gleichung 20.20 für das Potenzial auf der Achse einer homogen geladenen Scheibe auf:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |z| \left(\sqrt{1 + \frac{r_s^2}{z^2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left[(z^2 + r_s^2)^{1/2} - |z| \right]\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie E_z aus $-\partial\phi/\partial z$:

$$E_z = -\frac{d\phi}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} (z^2 + r_s^2)^{-1/2} 2z - \frac{d|z|}{dz} \right]$$

3. Berechnen Sie $d|z|/dz$. Diese Funktion beschreibt den Anstieg von $|z|$ in Abhängigkeit von z (vgl. die Anmerkung unter „Weitergedacht“):

$$\frac{d|z|}{dz} = \text{sgn}(z) = \begin{cases} +1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

4. Einsetzen von $d|z|/dz$ in das Ergebnis aus Schritt 2 ergibt:

$$\begin{aligned}E_z &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + r_s^2}} - \text{sgn}(z) \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left(\text{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r_s^2}} \right)\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn man $|z|$ in dem Ergebnis aus Schritt 4 aus der Wurzel zieht, ergibt sich

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma \left(\frac{z}{|z|\sqrt{1+(r_S^2/z^2)}} - \operatorname{sgn}(z) \right) \\ &= \operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(r_S^2/z^2)}} \right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir von $z/|z| = \operatorname{sgn}(z)$ Gebrauch gemacht. Diese Formel hat dieselbe Form wie Gleichung 19.8.

Weitergedacht: In dem Ausdruck $d|z|/dz = \operatorname{sgn}(z)$ in Schritt 3 ist $d|z|/dz$ bei $z = 0$ gleich null definiert. Analog ist in der Plausibilitätsprüfung in dem Ausdruck $d|z|/dz = \operatorname{sgn}(z)$ der Quotient $|z|/z$ bei $z = 0$ gleich null definiert. Dies ist das übliche Vorgehen: Der Wert einer Funktion an einem Unstetigkeitspunkt wird gleich dem Mittelwert der Funktion beiderseits der Unstetigkeit gesetzt.

Übung 20.6: Berechnen Sie aus dem Potenzial ϕ auf der Achse eines homogen geladenen Rings vom Radius a (Gleichung 20.19) die Ableitung $-d\phi/dz$ auf der Achse und leiten Sie daraus einen Ausdruck für das elektrische Feld E_z auf der Achse her. Zeigen Sie, dass das Ergebnis dieselbe Form wie in Gleichung 19.7 besitzt. ◀ ■

Das Potenzial ϕ einer unendlich ausgedehnten Ladungsebene

Lässt man r_S sehr groß werden, nähert sich die betrachtete homogen geladene Scheibe einer unendlich ausgedehnten Ebene. Für r_S gegen unendlich wird (nach Gleichung 20.20) auch das Potenzial

$$\phi = \frac{\sigma |z|}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{1+(r_S^2/z^2)} - 1 \right)$$

unendlich. Allerdings folgt Gleichung 20.20 aus Gleichung 20.18, in der wir angenommen haben, dass im Unendlichen $\phi = 0$ ist. Damit liegt ein Widerspruch vor, sodass Gleichung 20.20 als Potenzial einer homogen geladenen Scheibe mit unendlichem Radius nicht infrage kommt. Bei Ladungsverteilungen, die sich bis ins Unendliche erstrecken, kann nicht an einem unendlich weit von den Ladungen entfernten Punkt $\phi = 0$ gesetzt werden. Stattdessen muss man zunächst durch direkte Integration oder aus dem Gauß'schen Gesetz das elektrische Feld \mathbf{E} und anschließend aus $d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ das Potenzial ϕ berechnen.

Nach Gleichung 19.9 lautet das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Ebene mit homogener Ladungsdichte σ in der

Ebene $x = 0$ im Gebiet $x > 0$:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{x}, \quad x > 0.$$

Der Potenzialzuwachs $d\phi$ für ein beliebiges Verschiebungsinrement $d\mathbf{s} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ ist dann

$$\begin{aligned} d\phi &= -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\left(\frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma \hat{x}\right) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma dx, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Durch Integration über beide Seiten der Gleichung ergibt sich

$$\phi = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma x + \phi_0, \quad x > 0,$$

wobei die beliebige Integrationskonstante ϕ_0 das Potenzial bei $x = 0$ ist. Beachten Sie, dass das Potenzial mit zunehmendem Abstand von der Ebene abnimmt und für x gegen $+\infty$ gegen $-\infty$ geht.

Bei negativen x ist das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma \hat{x}, \quad x < 0,$$

und damit

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = +\frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma dx, \quad x < 0,$$

sodass das Potenzial

$$\phi = \phi_0 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma x = \phi_0 - \frac{1}{2\varepsilon_0} \sigma |x|, \quad x < 0,$$

lautet.

Abbildung 20.14 zeigt eine grafische Darstellung dieser Funktion. Das Potenzial nimmt auch hier mit dem Abstand von der Ebene ab und geht für x gegen $-\infty$ gegen $-\infty$. Zusammengefasst kann das Potenzial ϕ sowohl für positive als auch für negative x

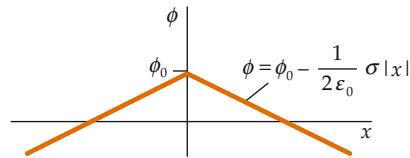


Abbildung 20.14 Das Potenzial ϕ einer unendlich ausgedehnten Ladungsebene in der Ebene $x = 0$ in Abhängigkeit von x . Beachten Sie, dass das Potenzial bei $x = 0$ stetig ist, während das Feld $E_x = -d\phi/dx$ selbst dort unstetig ist. Der Bezugspunkt, bei dem $\phi = \phi_0$ ist, liegt im Koordinatenursprung

20.4 Die Berechnung des elektrischen Potenzials ϕ

$$\phi = \phi_0 - \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |x| \quad (20.21)$$

DAS POTENZIAL IN DER NÄHE EINER UNENDLICH AUSGEDEHNTEN LADUNGSEBENE

geschrieben werden.

In Beispiel 20.11 wird das gemeinsame Potenzial einer unendlichen Ladungsebene und einer Punktladung betrachtet.

Beispiel 20.11: Eine Ladungsebene und eine Punktladung

Gegeben ist eine unendlich ausgedehnte Ladungsebene mit der homogenen Ladungsdichte σ in der Ebene $x = 0$. Weiter befindet sich auf der x -Achse bei $x = a$ eine Punktladung q (Abbildung 20.15). Bestimmen Sie das Potenzial in einem Punkt P im Abstand r von der Punktladung.

Problembeschreibung: Wir wenden das Superpositionsprinzip an. Das Gesamtpotenzial ϕ ist die Summe der Einzelpotenziale der Ebene und der Punktladung. Zu dem erhaltenen Potenzial ϕ addieren wir eine freie Konstante, die wir so wählen, dass an einem gewählten Bezugspunkt $\phi = 0$ ist. Der Bezugspunkt ist (mit Ausnahme von $x = \pm\infty$ oder $x = a$ auf der x -Achse) frei wählbar. Wir wählen ihn hier so, dass im Koordinatenursprung $\phi = 0$ gilt.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die Ladungskonfiguration. Zeichnen Sie die Koordinatenachsen und einen Feldpunkt bei (x, y, z) ein.

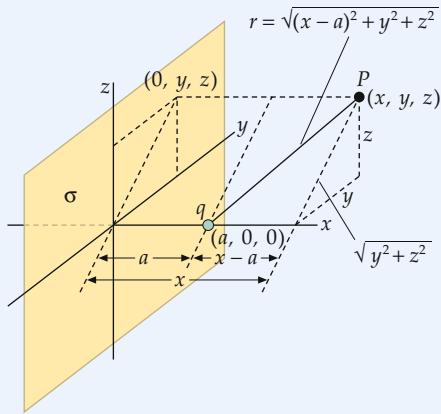


Abbildung 20.15 Skizze der Ladungskonfiguration.

2. Das Potenzial der Ladungsebene ist durch Gleichung 20.21, das Potenzial der Punktladung durch Gleichung 20.7 gegeben. Das Gesamtpotenzial ist die Summe

beider Potenziale:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_{\text{Ebene}} + \phi_{\text{Punktladung}} \\ &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |x| + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C,\end{aligned}$$

wobei die Konstante $C (= \phi_0 - q/(4\pi\epsilon_0 r_B))$ so gewählt werden muss, dass das Potenzial am Bezugspunkt null ist.

3. Der Abstand r der Punktladung bei $(a, 0, 0)$ von dem Feldpunkt bei (x, y, z) ist $\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$:

$$\phi = -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |x| + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + C$$

4. Setzen Sie das Potenzial ϕ im Koordinatenursprung $x = y = z = 0$ null und stellen Sie die erhaltene Gleichung nach der Konstanten C um:

$$0 = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + C,$$

und damit

$$C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}$$

5. Setzen Sie dies in das Ergebnis aus Schritt 3 ein:

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |x| \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \\ &= \boxed{-\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma |x| + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das aus drei Teilen zusammengesetzte Ergebnis war bei der Überlagerung zweier Potenziale (das der homogen geladenen Platte und der Punktladung) zusammen mit der Eichung, dass das Potenzial am Koordinatenursprung verschwindet, zu erwarten.

Weitergedacht: Das Ergebnis ist nicht eindeutig. Ebenso gut hätten wir das Potenzial an einem anderen Punkt (außer $x = a$ oder $x = \pm\infty$) vorgeben können. ■

Das Potenzial ϕ innerhalb und außerhalb einer geladenen Kugelschale

Wir bestimmen nun das Potenzial einer dünnen Kugelschale mit dem Radius r_K und einer homogen auf ihrer Oberfläche verteilten Ladung q . Gesucht ist das Potenzial an allen

Punkten innerhalb, außerhalb und auf der Kugelschale. Anders als die unendlich ausgedehnte Ladungsebene ist die hier vorliegende Ladungsverteilung auf ein endliches Raumgebiet beschränkt, sodass wir das Potenzial durch direkte Integration von Gleichung 20.18 berechnen könnten. Allerdings gibt es eine einfachere Möglichkeit: Da sich das elektrische Feld dieser kugelsymmetrischen Ladungsverteilung leicht aus dem Gauß'schen Gesetz ermitteln lässt, können wir das Potenzial über $d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ aus dem bekannten elektrischen Feld berechnen.

Außerhalb der geladenen Kugelschale ist das elektrische Feld radial und dasselbe, wie wenn die gesamte Ladung q als Punktladung im Koordinatenursprung liegen würde:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{r}}$ der vom Kugelmittelpunkt nach außen gerichtete Einheitsvektor. Die Potenzialdifferenz bei einer Verschiebung $d\mathbf{s}$ außerhalb der Kugelschale ist dann

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr.$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass das Produkt $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}$ (die Komponente von $d\mathbf{s}$ in Richtung $\hat{\mathbf{r}}$) gleich dr ist. Durch Integration entlang eines Wegs vom Bezugspunkt im Unendlichen zum gesuchten Punkt P ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi_P &= - \int_{\infty}^{r_p} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\infty}^{r_p} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{\infty}^{r_p} r^{-2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_p}. \end{aligned}$$

Dabei ist P ein beliebiger Feldpunkt in dem Gebiet $r \geq r_K$ und r_p der Abstand des betrachteten Punkts P vom Mittelpunkt der Kugelschale. Das Potenzial ist so gewählt, dass es bei unendlich null ist. Da der Punkt P beliebig ist, setzen wir $r_p = r$:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad r \geq r_K.$$

Innerhalb der Kugelschale ist das elektrische Feld überall null. Wenn wir wiederum vom Bezugspunkt im Unendlichen aus integrieren, gibt das Feld in diesem Gebiet keinen Beitrag, sodass wir

$$\begin{aligned} \phi_P &= - \int_{\infty}^{r_p} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\infty}^{r_K} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr - \int_{r_K}^{r_p} (0) dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K} \end{aligned}$$

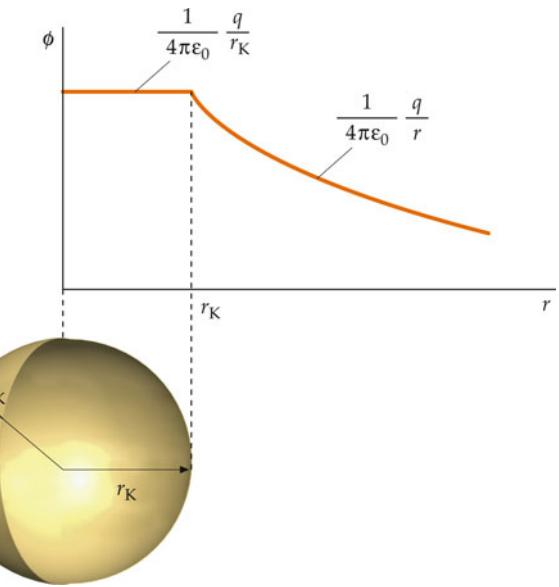


Abbildung 20.16 Das elektrische Potenzial einer homogen geladenen Kugelschale mit dem Radius r_K in Abhängigkeit vom Abstand r vom Mittelpunkt. Innerhalb der Kugelschale hat das Potenzial den konstanten Wert $q/(4\pi\epsilon_0 r_K)$. Außerhalb der Kugelschale ist das Potenzial dasselbe wie das einer Punktladung q in der Mitte der Kugelschale.

erhalten. Dabei ist P ein beliebiger Feldpunkt in dem Gebiet $r < r_K$ im Abstand r_P vom Mittelpunkt der Kugelschale. Damit ist das Potenzial ϕ an allen Punkten innerhalb der Kugelschale $q/(4\pi\epsilon_0 r_K)$ und überall gleich, wobei r_K der Radius der Kugelschale ist: Es ist die Arbeit pro Ladungseinheit, die aufgewendet werden muss, um eine Probeladung aus dem Unendlichen bis zur Kugelschale zu bringen. Um die Probeladung von der Kugelschale weiter bis zu einem Punkt im Inneren zu bringen, braucht keine weitere Arbeit verrichtet zu werden. Somit ist

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} & r \geq r_K, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K} & r \leq r_K. \end{cases} \quad (20.22)$$

DAS POTENZIAL EINER KUGELSCHALE

Abbildung 20.16 zeigt den Verlauf des Potenzials.

Ein häufiger Fehler besteht in der Annahme, dass das Potenzial im Inneren einer Kugelschale null sein müsste, da dort auch das elektrische Feld null ist.

Tatsächlich folgt daraus, dass das Feld null ist, lediglich, dass das Potenzial in diesem Gebiet *konstant* sein muss. Wir betrachten dazu eine Kugelschale mit einem kleinen Loch, durch das eine Probeladung in die Kugelschale eingeführt und aus ihr entnommen werden kann. Wenn die Probeladung aus dem Unendlichen bis zur Kugelschale verschoben wird, muss die

Arbeit $q/(4\pi\epsilon_0 r_K)$ verrichtet werden. Innerhalb der Kugelschale herrscht dagegen kein elektrisches Feld, sodass keine Arbeit verrichtet zu werden braucht, um die Probeladung von einem Punkt zu einem anderen zu bringen. Damit ist die Gesamtarbeit pro Ladungseinheit, um die Probeladung aus dem Unendlichen bis zu einem Punkt innerhalb der Kugelschale zu bringen, lediglich die Arbeit pro Ladungseinheit, die aufgewendet werden muss, um die Probeladung bis zum Radius r_K zu verschieben, d. h. $q/(4\pi\epsilon_0 r_K)$. Somit ist das Potenzial überall in der Kugelschale konstant gleich $q/(4\pi\epsilon_0 r_K)$.

Übung 20.7: Wie groß ist das Potenzial auf einer Kugelschale mit einem Radius von 10,0 cm und mit einer Ladung von 6,00 μC ? ◀

In Beispiel 20.12 wird das Potenzial einer homogen geladenen Kugel anhand eines Modells für das Proton angewendet.

Das Potenzial ϕ einer unendlich ausgedehnten Linienladung

Wir wollen nun das Potenzial einer unendlich ausgedehnten homogenen Linienladung berechnen. Die Ladung pro Einheitslänge sei λ . Wie bei der unendlich ausgedehnten Ladungsebene ist diese Ladungsverteilung nicht auf ein endliches Raumgebiet beschränkt, sodass wir das Potenzial nicht durch direkte Integration von $d\phi = dq'/(4\pi\epsilon_0 r)$ (Gleichung 20.18) berechnen können. Stattdessen ermitteln wir das Potenzial, indem wir direkt über das elektrische Feld integrieren. Das elektrische Feld einer homogen geladenen endlichen Linienladung ist nach Gleichung 19.6 $\mathbf{E} = (\lambda/(2\pi\epsilon_0 r_\perp)) \hat{\mathbf{r}}_\perp$. Dabei ist λ die Linienladungsdichte und $\hat{\mathbf{r}}_\perp$ zeigt in radialer Richtung von der Linienladung weg. Die Potenzialänderung bei einer Verschiebung ds ist dann

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot ds = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r_\perp} \hat{\mathbf{r}}_\perp \cdot ds.$$

Beispiel 20.12: Das Potenzial ϕ einer homogen geladenen Kugel

ZUR ÜBUNG

In einem Modell wird das Proton als eine homogen geladene Kugel mit einem Radius r_K sowie mit einer Ladung $q = e$ betrachtet. Das elektrische Feld in der Kugel ist durch

$$\mathbf{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_K^3} \frac{e}{r} \mathbf{r}$$

(Gleichung 19.17b) gegeben. Ermitteln Sie das Potenzial ϕ innerhalb und außerhalb der Kugel.

Problembeschreibung: Außerhalb der Kugel wirkt die Ladung wie eine Punktladung, sodass das Potenzial durch $\phi = e/4\pi\epsilon_0 r$ gegeben ist. Innerhalb der Kugel kann das Potenzial ϕ durch Integrieren von $d\phi = -\mathbf{E} \cdot dr$ mit $\mathbf{E} = (e r / (4\pi\epsilon_0 r_K^3)) \hat{\mathbf{r}}$ (Gleichung 19.17b) erhalten werden.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Außerhalb der Kugel ist das elektrische Feld das gleiche wie das einer Punktladung. Wählen Sie das Potenzial wie bei der Punktladung im Unendlichen null.

2. Ermitteln Sie aus $d\phi = -\mathbf{E} \cdot dr$ die Potenzialdifferenz $d\phi$ für $r \leq r_K$. Das elektrische Feld in der Kugel ist $\mathbf{E} = (e r / (4\pi\epsilon_0 r_K^3)) \hat{\mathbf{r}}$.

3. Berechnen Sie das bestimmte Integral über das Differenzial des Potenzials aus Schritt 2. Ermitteln Sie damit die Potenzialdifferenz eines beliebigen Punkts P gegenüber dem

Unendlichen in dem Gebiet $r_P < r_K$, wobei r_P der Abstand des Punkts P vom Kugelmittelpunkt ist.

4. Setzen Sie im Ergebnis $r_P = r$.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\phi(r) = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r}, \quad r \geq r_K}$$

2.

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot ds = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e r}{r_K^3} \hat{\mathbf{r}} \cdot ds = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e r}{r_K^3} dr$$

3.

$$\begin{aligned} \phi_P &= - \int_{\infty}^{r_P} E_r dr = - \int_{\infty}^{r_K} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} dr - \int_{r_K}^{r_P} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r_K^3} r dr \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r_K} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{2r_K^3} (r_P^2 - r_K^2) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{2r_K} \left(3 - \frac{r_P^2}{r_K^2} \right) \end{aligned}$$

4.

$$\phi(r) = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{2r_K} \left(3 - \frac{r^2}{r_K^2} \right), \quad r \leq r_K}$$

Plausibilitätsprüfung: Einsetzen von $r = r_K$ in das Ergebnis aus Schritt 4 liefert erwartungsgemäß $\phi(r_K) = e/(4\pi\epsilon_0 r_K)$. Bei $r = 0$ ist $\phi(0) = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot 3e/(2r_K) = 1,5e/(4\pi\epsilon_0 r_K)$, d.h., das Potenzial bei null ist größer als $e/(4\pi\epsilon_0 r_K)$. Dies sollte auch so sein, da das elektrische Feld für $r < r_K$ in die positive radiale Richtung zeigt. (Ein elektrostatisches Feld zeigt stets in Richtung abnehmenden Potenzials.)

Weitergedacht: Abbildung 20.17 zeigt $\phi(r)$ in Abhängigkeit von r . Beachten Sie, dass sowohl $\phi(r)$ als auch $E_r = -d\phi/dr$ überall stetig ist.

Übung 20.8: Wie lautet das Potenzial, wenn man $r = r_K$ als Bezugspunkt wählt, bei dem $\phi = 0$ ist? ◀

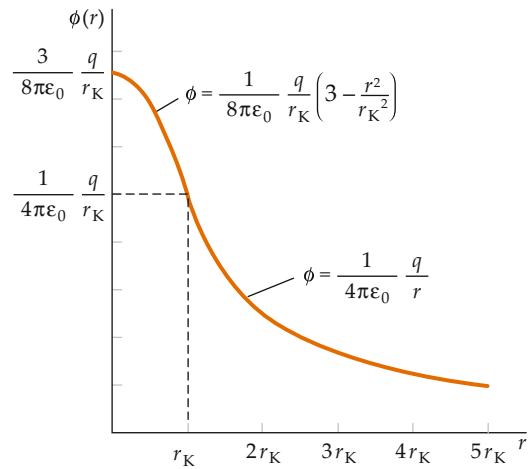


Abbildung 20.17 Graph des Potenzials ϕ in Abhängigkeit von r .

Das Produkt $\hat{r}_\perp \cdot ds$ ist $\hat{r}_\perp \cdot ds = dr_\perp$ (die Komponente von ds in Richtung von \hat{r}_\perp). Damit ist $d\phi = -(\lambda/(2\pi\epsilon_0 r_\perp)) dr_\perp$. Integration von einem beliebigen Bezugspunkt B bis zu einem beliebigen Feldpunkt P ergibt (Abbildung 20.18)

$$\phi_P - \phi_B = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \int_{r_B}^{r_P} \frac{dr_\perp}{r_\perp} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln \frac{r_P}{r_B}.$$

Dabei sind r_P und r_B die radialen Abstände des Punkts P bzw. des Bezugspunkts B von der Linienladung. Zweckmäßig wählen wir das Potenzial am Bezugspunkt gleich null ($\phi_B = 0$). Wegen $\ln(0) = -\infty$ eignet sich der Nullpunkt in diesem Fall nicht als Bezugspunkt r_B . Auch $r_B = \infty$ ist wegen $\ln(\infty) = +\infty$ nicht als Bezugspunkt geeignet. Jede andere Wahl im Intervall $0 < r_B < \infty$ ist dagegen möglich. Daher lautet das Potenzial mit endlichem r_B

$$\phi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln \frac{r_B}{r}. \quad (20.23)$$

POTENZIAL EINER LINIENLADUNG

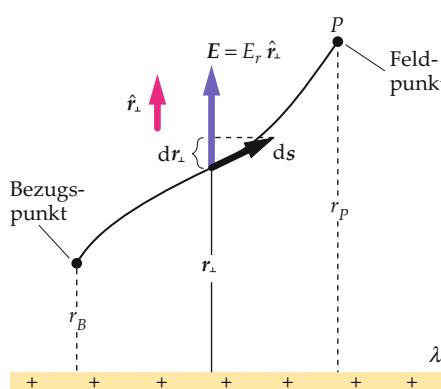


Abbildung 20.18 Zur Integration bei der Berechnung des Potenzials einer unendlich ausgedehnten Linienladung.

In der Realität treten unendlich ausgedehnte Ladungsverteilungen zwar nicht auf, jedoch lassen sich mit ihnen einige tatsächliche Situationen wie z.B. das Potenzial einer 500 m langen, nahezu geraden Hochspannungsleitung sehr gut modellieren.

20.5 Äquipotenzialflächen

Da im Inneren eines Leiters im statischen Gleichgewicht kein elektrisches Feld herrscht, ist der Wert des Potenzials im gesamten Gebiet, in dem sich das leitende Material befindet, gleich. Damit ist ein Leiter ein dreidimensionales **Äquipotenzialgebiet** und seine Oberfläche eine **Äquipotenzialfläche**.

In einer Äquipotenzialfläche hat das Potenzial ϕ überall den gleichen Wert. Somit ist die Potenzialänderung bei einer kleinen Verschiebung ds einer Probelaadung in einer Äquipotenzialfläche $d\phi = -E \cdot ds = 0$. Da $E \cdot ds$ für eine beliebige Verschiebung ds parallel zu der Oberfläche null ist, muss E entweder null sein oder auf jeder Verschiebung ds parallel zur Oberfläche senkrecht stehen, mit anderen Worten, senkrecht auf der Oberfläche selbst stehen.

Da das elektrische Potenzial im Allgemeinen vom Ort abhängt, ist E nicht zwangsläufig null auf einer Äquipotenzialfläche. Folglich müssen alle elektrischen Feldlinien, die an einer Äquipotenzialfläche beginnen oder enden, senkrecht auf ihr stehen. Die Abbildungen 20.19 und 20.20 zeigen die Äquipotenzialflächen in der Nähe eines kugelförmigen sowie eines länglichen Leiters. Beachten Sie, dass die Feldlinien an jedem Schnittpunkt mit einer grau eingezeichneten Äquipotenzialfläche senkrecht zu dieser sind. Schreitet man mit einer Verschiebung ds entlang einer Feldlinie in Feldrichtung von einer Äquipotenzialfläche zu einer benachbarten fort, ändert sich das Potenzial um $d\phi = -E \cdot ds = -|E| |ds|$. Im Ergebnis ist der Abstand zwischen Äquipotenzialflächen, die sich um eine gegebene Potenzialdifferenz $d\phi$ unterscheiden, an Stellen einer höheren elektrischen Feldstärke $|E|$ kleiner.

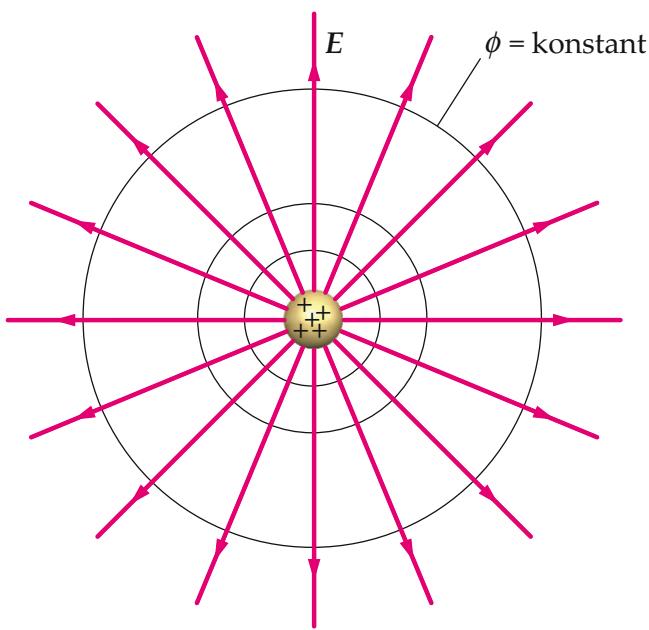


Abbildung 20.19 Äquipotenzialflächen (im Schnitt als Linien gezeigt) und elektrische Feldlinien (rot) außerhalb eines homogen geladenen kugelförmigen Leiters. Die Äquipotenzialflächen sind kugelförmig, die Feldlinien verlaufen radial und stehen senkrecht auf ihnen.

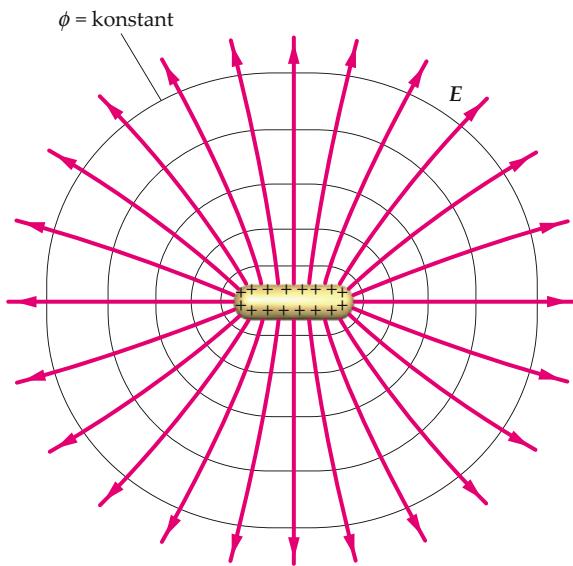


Abbildung 20.20 Äquipotenzialflächen und elektrische Feldlinien außerhalb eines länglichen Leiters.

In Beispiel 20.13 wird eine Hohlkugel mit einer Ladung im Inneren betrachtet.

Beispiel 20.13: Eine Ladung in einer Kugelschale

Eine hohle, ungeladene, leitende Kugelschale besitzt den Innenradius a und den Außenradius b . Im Mittelpunkt der Kugelschale befindet sich eine positive Punktladung $+q$. a) Wie groß sind die Ladungen auf der Außen- und auf der Innenoberfläche der Kugelschale? b) Ermitteln Sie unter der Annahme $\phi(r = \infty) = 0$ das Potenzial $\phi(r)$ in einem beliebigen Punkt.

Problembeschreibung: a) Da die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist, ist zu erwarten, dass sich die Ladungen auf der Außen- und auf der Innenseite der Kugeloberfläche leicht über das Gauß'sche Gesetz berechnen lassen. b) Das Gesamtpotenzial ergibt sich als Summe der Potenziale der Einzelladungen. Die Potenziale einer Punktladung und einer homogenen dünnen Kugelschale hatten wir bereits berechnet (Gleichungen 20.8 und 20.22).

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Ladung innerhalb einer geschlossenen Fläche A ist proportional zu dem nach außen gerichteten Fluss des elektrischen Felds \mathbf{E} durch diese Fläche:

$$\Phi_{\text{el}} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{innen}}$$

mit

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_{A} \mathbf{E}_n \, dA$$

2. Fertigen Sie eine Skizze der Punktladung und der Kugelschale an. Die Ladungen eines leitenden Körpers können sich nur auf dessen Oberflächen befinden, während sein Inneres ladungsfrei ist. Zeichnen Sie die Ladungen auf beiden Oberflächen der Kugelschale ein. Zeichnen Sie weiter eine Gauß'sche Fläche ein, die vollständig innerhalb der leitenden Kugelschale liegt und die innere Oberfläche enthält (Abbildung 20.21).

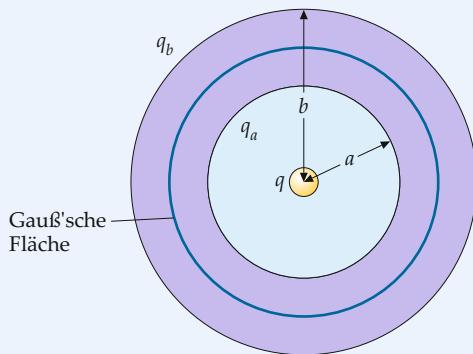


Abbildung 20.21 Skizze der Punktladung und der Kugelschale inklusive der Gauß'schen Fläche.

3. Wenden Sie auf die Gauß'sche Fläche das Gauß'sche Gesetz (aus Schritt 1) an. Hieraus erhalten Sie die Ladung auf der Innenoberfläche der Kugelschale:

$$E_n = 0 \Rightarrow q_{\text{innen}} = q + q_a = 0$$

und somit

$$q_a = -q$$

4. Die Ladung auf der Außenoberfläche ergibt sich daraus, dass die Kugelschale insgesamt ungeladen ist:

$$q_a + q_b = 0$$

und somit

$$q_b = -q_a = +q$$

Teilaufgabe b

1. Das Potenzial ist an jedem Punkt die Summe der Potenziale der Einzelladungen:

$$\phi = \phi_q + \phi_{q_a} + \phi_{q_b}$$

2. Das Potenzial einer homogen geladenen dünnen Kugelschale vom Radius r_K ist durch Gleichung 20.22 gegeben:

$$\phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} & r \geq r_K \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K} & r \leq r_K \end{cases}$$

3. Addieren Sie die Potenziale in dem Gebiet ($r \geq b$):

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_b}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \\ &= \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad r \geq b} \end{aligned}$$

4. Addieren Sie die Potenziale in dem Gebiet $a \leq r \leq b$:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b} = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}, \quad a \leq r \leq b}$$

5. Addieren Sie nun noch die Potenziale in dem Gebiet $0 < r \leq a$:

$$\phi = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}, \quad 0 < r \leq a}$$

Plausibilitätsprüfung: Alle Potenziale müssen stetig sein. Somit sollten die Ergebnisse aus Teilaufgabe b, Schritt 3 und 4, bei $r = b$ gleich sein. Weiterhin sollten die Ergebnisse aus Teilaufgabe b, Schritt 4 und 5, bei $r = a$ gleich sein. Die obigen Lösungen erfüllen dies: Bei $r = b$ sind die Ergebnisse aus Schritt 3 und 4 beide $q/(4\pi\epsilon_0 b)$. Analoges gilt für die Ergebnisse aus Schritt 4 und 5 bei $r = a$ zu.

Weitergedacht: Der Bezugspunkt mit dem Potenzial null liegt bei allen drei Einzelpotenzialen in Schritt 1 aus Teilaufgabe b bei $r = \infty$. Damit liegt auch der Nullpunkt für die Summe der Potenziale bei $r = \infty$. Das Potenzial, das wir in dem Beispiel erhalten haben, kann auf andere Weise direkt durch Berechnen von $-\int_{\infty}^P E \cdot ds = -\int_{\infty}^{rp} E_r dr$ erhalten werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, in jedem Gebiet das unbestimmte Integral $-\int E_r dr$ zu berechnen und die Integrationskonstanten mithilfe der Stetigkeitsbedingungen für die Potenziale zu ermitteln – die Potenziale müssen an den Grenzen kontinuierlich ineinander übergehen, d. h. gleiche Funktionswerte haben. ■

Abbildung 20.22 zeigt das elektrische Potenzial für eine solche geladene Kugelschale in Abhängigkeit vom Abstand vom Mittelpunkt des hohlen Innenraums. Im Inneren der leitenden

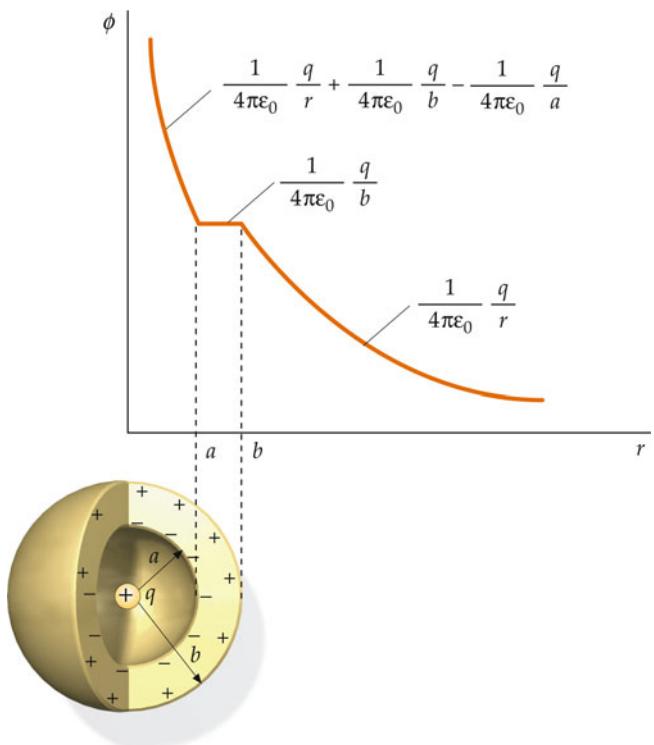


Abbildung 20.22 Potenzial einer Hohlkugel mit der Ladung q im Mittelpunkt.

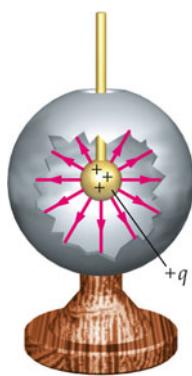


Abbildung 20.23 Ein kleiner Leiter mit der positiven Ladung q im Inneren eines hohlen größeren Leiters.

Kugelschale, d.h. für $a \leq r \leq b$, hat das Potenzial den konstanten Wert $q/(4\pi\epsilon_0 b)$. Außerhalb der Kugelschale ist das Potenzial das gleiche wie das einer Punktladung q im Mittelpunkt. Beachten Sie, dass das Potenzial $\phi(r)$ überall stetig ist. Dagegen ist das elektrische Feld an den Leiteroberflächen unstetig, was man an den Sprüngen des Anstiegs von $\phi(r)$ bei $r = a$ und $r = b$ sieht.

Im Allgemeinen sind zwei räumlich getrennte Leiter nicht auf demselben Potenzial. Die Potenzialdifferenz zwischen ihnen hängt von ihren geometrischen Gestalten, von ihrem Abstand und von ihrer Gesamtladung ab. Dagegen verteilt sich die Ladung auf zwei Leitern, die sich berühren, sodass ein elektrostatisches Gleichgewicht entsteht und das elektrische Feld in beiden Leitern null wird. Solange sich beide berühren, kann man sich beide als einen einzigen Leiter mit einem gemeinsamen Potenzial vorstellen. Berührt man einen kugelförmigen geladenen Leiter mit einem zweiten kugelförmigen Leiter, der nicht geladen ist, fließen so lange Ladungen zwischen ihnen, bis beide auf dem gleichen Potenzial sind. Haben die beiden kugelförmigen Leiter den gleichen Radius, verteilt sich die ursprüngliche Ladung zu gleichen Teilen auf sie, nachdem sie sich berühren; werden beide anschließend getrennt, trägt jeder von ihnen die Hälfte der ursprünglichen Ladung.

Der Van-de-Graaff-Generator

Abbildung 20.23 zeigt einen kleinen Leiter mit einer positiven Ladung q im hohlen Innenraum eines größeren Leiters. Im Gleichgewicht ist das elektrische Feld im Inneren des leitenden Materials, aus dem die beiden Leiter bestehen, jeweils null. Die elektrischen Feldlinien, die bei der positiven Ladung q beginnen, enden an der Innenoberfläche des äußeren Leiters, unabhängig davon, welche Ladung auf seiner Außenoberfläche sitzt. Da die elektrischen Feldlinien vom kleinen Leiter zum größeren verlaufen, ist der kleine Leiter im hohlen Innenraum unabhängig von der Ladung auf dem großen Leiter immer auf einem höheren Potenzial.

Nun sollen die beiden Leiter z.B. mit einem dünnen leitenden Draht verbunden werden. Durch diese Verbindung verhält sich das System aus dem kleineren Leiter und dem größeren wie ein zusammenhängender Leiter (siehe Abbildung 19.31), d.h., der kleinere Leiter wird seine gesamte Ladung auf den ihn einschließenden größeren Leiter übertragen, sodass sich die Gesamtladung wegen der elektrostatischen Abstoßung auf der Außenoberfläche des größeren Leiters sammelt. Damit nehmen alle Ladungen den maximal möglichen Abstand voneinander ein. Wird die Verbindung anschließend getrennt, sitzt auf dem kleinen Leiter keine Ladung mehr, sodass auch keine Feldlinien mehr zwischen beiden Leitern verlaufen. Stattdessen befindet sich die gesamte von dem kleinen auf den großen Leiter geflossene positive Ladung auf der Außenoberfläche des größeren Leiters.

Nun geben wir weitere positive Ladung auf den kleinen Leiter im hohen Innenraum und verbinden die Leiter anschließend erneut mit einem dünnen Draht. Wieder fließt die gesamte Ladung auf den Außenleiter. Dies kann beliebig oft wiederholt werden. Mit diesem Verfahren lassen sich im sogenannten **Van-de-Graaff-Generator** oder **Bandgenerator** hohe Potenziale erzeugen. Im Van-de-Graaff-Generator wird die Ladung mit einem endlosen Band auf die Innenoberfläche eines großen kugelförmigen Leiters gebracht (Abbildung 20.24). Um sie dabei auf dem Band von unten nach oben zu bringen, wo ein sehr hohes Potenzial herrscht, muss der Motor, der das Band antreibt, Arbeit verrichten. Häufig kann man sogar hören, wie die Drehzahl des Motors abnimmt, während sich die Ladungen auf der Kugel ansammeln. Je größer die Ladung auf dem Außenleiter ist, desto höher ist sein Potenzial und damit auch das elektrische Feld außerhalb seiner Außenoberfläche. Beim **Van-de-Graaff-Beschleuniger** werden mit dem von einem **Van-de-Graaff-Generator** erzeugten starken elektrischen Feld geladene Ionen wie z.B. Protonen beschleunigt.

Der dielektrische Durchschlag

Viele Nichtleiter werden in sehr starken elektrischen Feldern ionisiert, sodass sie zu Leitern werden. Diese **dielektrische Durchschlag** genannte Erscheinung tritt in Luft bei einer Feldstärke $E_{\max} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 3 \text{ MN/C}$ auf. Dabei werden einige der in der Luft vorhandenen Ionen auf höhere kinetische Energien beschleunigt und stoßen anschließend mit Nachbarmolekülen zusammen. Zum dielektrischen Durchschlag kommt es, wenn diese Ionen auf so hohe kinetische Energien beschleunigt werden, dass es wegen der Stöße mit den Nachbarmolekülen zu einem Anstieg der Ionenkonzentration kommt. Das maximale Potenzial, das in einem Van-de-Graaff-Generator erhalten werden kann, ist durch den dielektrischen Durchschlag in der Luft begrenzt. In einer kontrollierten Atmosphäre lassen sich mit einem Van-de-Graaff-Generator wesentlich höhere Potenziale erzielen als in Luft bei Umgebungsluftdruck. Wenn es auf die optimale Leistung ankommt, wird Schwefelhexafluoridgas mit einem Druck von mehreren Atmosphären eingesetzt.

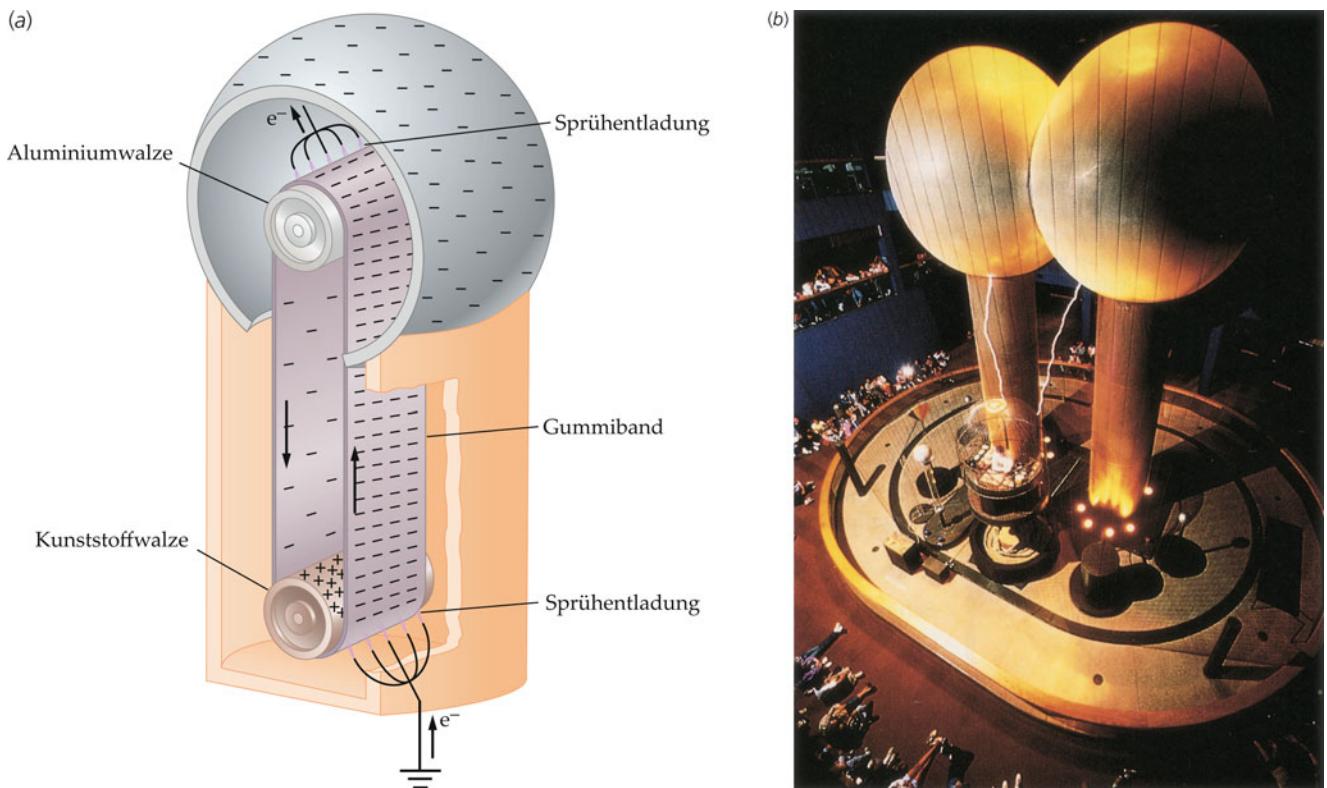


Abbildung 20.24 a) Schematische Darstellung eines Van-de-Graaff-Generators. Die untere Walze wird durch den Kontakt mit dem umlaufenden Band positiv aufgeladen (wobei die Innenoberfläche des Bands ebenso viel negative elektrische Ladung erhält, die sich über einen größeren Bereich verteilt). Die dichte positive Ladung auf der Walze zieht Elektronen zu den Spitzen des unteren Kamms an, wo es zum dielektrischen Durchschlag kommt und die negative Ladung durch eine Sprühentladung auf das Band überspringt. An der oberen Walze stößt das negativ geladene Band die Elektronen von den Spitzen des oberen Kamms ab, sodass sie vom Band auf den Kamm überspringen. Anschließend fließt die Ladung weiter bis zur Außenoberfläche der Elektrode. b) Die beiden großen Van-de-Graaff-Generatoren im Boston Science Museum, die für Demonstrationszwecke verwendet werden, werden zu dem geerdeten Drahtkäfig entladen, in dem eine Versuchsperson sitzt. (b) © Karen R. Preuss.)

Diejenige elektrische Feldstärke, bei der es in einem Stoff zum dielektrischen Durchschlag kommt, heißt die **Durchschlagfestigkeit** dieses Stoffs. Die Durchschlagfestigkeit von Luft beträgt etwa 3 MV/m. In Beispiel 20.14 wird die Durchschlagfestigkeit einer geladenen Kugel berechnet, d. h. diejenige Feldstärke, bei der es schließlich zum Durchschlag durch die Luft in der Umgebung kommt.

Beispiel 20.14: Der dielektrische Durchschlag einer geladenen Kugel

Ein kugelförmiger Leiter hat einen Radius $r_K = 30 \text{ cm}$. a) Wie hoch kann die Kugelschale maximal aufgeladen werden, bevor es zum Durchschlag durch die Luft in der Umgebung kommt? b) Wie hoch ist das maximale Potenzial der Kugelschale?

Problembeschreibung: a) Die maximal mögliche Ladung lässt sich aus dem Zusammenhang von elektrischem

Feld und Ladung ermitteln, wenn für das Feld die Durchschlagfestigkeit von Luft E_{\max} eingesetzt wird. b) Anschließend kann aus der in Teilaufgabe a berechneten maximalen Ladung das maximale Potenzial ermittelt werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Das elektrische Feld auf der Oberfläche eines Leiters ist proportional zur Ladungsdichte σ auf dieser Oberfläche (Gleichung 19.20):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

2. Setzen Sie die Feldstärke gleich E_{\max} :

$$E_{\max} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{\max}$$

3. Die maximale Ladung q_{\max} ergibt sich aus σ_{\max} :

$$\sigma_{\max} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{q_{\max}}{4\pi r_K^2}$$

4. Berechnen Sie hieraus q_{\max} :

$$\begin{aligned} q_{\max} &= 4\pi r_K^2 \sigma_{\max} = 4\pi \varepsilon_0 r_K^2 E_{\max} \\ &= \frac{(0,30 \text{ m})^2 \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})}{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^{-2})} = [3 \cdot 10^{-5} \text{ C}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie aus der Formel für die maximale Ladung das maximale Potenzial der Kugel:

$$\begin{aligned} \phi_{\max} &= \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_{\max}}{r_K} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r_K} 4\pi \varepsilon_0 r_K^2 E_{\max} = r_K E_{\max} \\ &= (0,30 \text{ m}) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) = [9 \cdot 10^5 \text{ V}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Kleine Van-de-Graaff-Generatoren werden häufig bei Demonstrationsexperimenten verwendet, bei denen die Haare der Versuchsperson vom Kopf abstehen. Diese erfordern ein hohes Potenzial, wie es sich in Teilaufgabe b ergibt. Die berechneten Werte betreffen einen Van-de-Graaff-Generator mit einem Kugeldurchmesser von 60 cm. Allerdings haben die Kugeln der meisten Van-de-Graaff-Generatoren für Schulexperimente aus Sicherheitsgründen nur einen Durchmesser von höchstens 30 cm.

Übung 20.9: Berechnen Sie die maximale Ladung und das maximale Potenzial eines Van-de-Graaff-Generators mit einem Kugeldurchmesser von 30 cm. ◀ ■

Die Entladung durch die leitende Luft infolge des dielektrischen Durchschlags heißt **Bogen-** oder **Funkenentladung**. Von Funkenentladung spricht man beim einmaligen kurzzeitigen Überspringen eines Funkens, während ein längerer Zustand, in dem immer neue Ionen erzeugt werden, Bogenentladung heißt. Der elektrische Schlag, den man bekommt, wenn man einen Türgriff aus Metall berührt, nachdem man zuvor an einem trockenen Tag über einen Teppich gegangen ist, ist ein bekanntes Beispiel für eine Funkenentladung. Da feuchte Luft die Ladung abführen kann, bevor sie die für den Durchschlag erforderliche Feldstärke erreicht, werden solche Funkenentladungen eher an trockenen Tagen beobachtet. Auch der Blitz beim Gewitter ist ein Beispiel für eine Funkenentladung. Eine Bogenentladung kann man etwa beim Lichtbogenschweißen beobachten. Beispiel 20.15 illustriert, welchen Einfluss die Geometrie auf die Ladungsverteilung zweier durch einen elektrischen Leiter verbundener Kugeln hat.

Beispiel 20.15: Zwei geladene kugelförmige Leiter

Gegeben sind zwei geladene kugelförmige Leiter mit den Radien $r_1 = 6,0 \text{ cm}$ und $r_2 = 2,0 \text{ cm}$ (Abbildung 20.25) in einem Abstand, der groß gegen $6,0 \text{ cm}$ ist. Die beiden Leiter sind durch einen langen, dünnen leitenden Draht verbunden. Einer von ihnen wird mit einer Gesamtladung $q = +80 \text{ nC}$ geladen. Anschließend wird gewartet, bis sich ein elektrostatisches Gleichgewicht einstellt a) Wie hoch sind dann die Ladungen auf beiden Kugeln? b) Wie groß ist die elektrische Feldstärke in der Nähe der Oberfläche jeder Kugel? c) Wie hoch ist das elektrische Potenzial jeder Kugel? (Die Ladung des Verbindungsdrahts sei vernachlässigbar.)

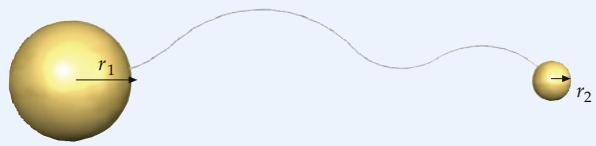


Abbildung 20.25 Darstellung der beiden Kugelleiter und ihres verbindenden Drahts.

Problembeschreibung: Die Gesamtladung verteilt sich auf beide Kugeln. Dabei hat die erste Kugel die Ladung q_1 und die zweite die Ladung q_2 , sodass beide auf dem gleichen Potenzial sind. Für das Potenzial jeder Kugel können wir die Formel $\phi = q/(4\pi \varepsilon_0 r)$ verwenden.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Formulieren Sie anhand der Ladungserhaltung die Beziehung

$$q_1 + q_2 = q$$

2. Durch Gleichsetzen der Potenziale der Kugeln erhält man eine zweite Beziehung zwischen den Ladungen q_1 und q_2 :

$$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r_1} q_1 = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r_2} q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{r_2}{r_1} q_1$$

3. Durch Verknüpfen der Formeln aus Schritt 1 und 2 kann das Gleichungssystem nach q_1 und q_2 aufgelöst werden:

$$q_1 + \frac{r_2}{r_1} q_1 = q$$

und somit

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{r_1}{r_1 + r_2} q = \frac{6,0 \text{ cm}}{8,0 \text{ cm}} (80 \text{ nC}) = [60 \text{ nC}] \\ q_2 &= q - q_1 = [20 \text{ nC}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie aus den erhaltenen Ladungen die elektrischen Feldstärken an den Kugeloberflächen:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \frac{q_1}{r_1^2} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (60 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(0,060 \text{ m})^2} \\ &= \boxed{150 \text{ kN} \cdot \text{C}^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \frac{q_2}{r_2^2} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (20 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(0,020 \text{ m})^2} \\ &= \boxed{450 \text{ kN} \cdot \text{C}^{-1}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Berechnen Sie anhand des Potenzials $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ einer der Kugeln das gemeinsame Potenzial:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \frac{q_1}{r_1} \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (60 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{0,060 \text{ m}} \\ &= \boxed{9,0 \text{ kV}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn wir die zweite Kugel zur Berechnung von ϕ verwenden, ergibt sich ebenfalls $\phi_2 = q_2/(4\pi\epsilon_0 r_2) = (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (20 \cdot 10^{-9} \text{ C})/0,020 \text{ m} = 9,0 \cdot 10^3 \text{ V}$. Da die elektrische Feldstärke auf der Oberfläche jeder Kugel proportional zu deren Ladungsdichte ist, gibt es eine weitere Möglichkeit, das Ergebnis zu überprüfen. Der Radius der ersten Kugel ist dreimal so groß wie der der zweiten. Damit ist ihr Oberflächeninhalt neunmal so groß wie der der zweiten Kugel. Da sie dreimal so viel Ladung trägt, beträgt ihre Ladungsdichte ein Drittel der Ladungsdichte der zweiten Kugel. Somit sollte die elektrische Feldstärke an der Oberfläche der ersten Kugel ein Drittel der elektrischen Feldstärke der zweiten Kugel sein, was wir in Teilaufgabe b auch erhalten haben.

Weitergedacht: Da die Kugeln mit dem langen, dünnen Draht verbunden sind, ist das Ergebnis nur näherungsweise gültig. Das liegt daran, dass das Potenzial $\phi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ nur im Gebiet außerhalb einer isolierten leitenden Kugel gültig ist. Mit dem Draht zwischen den Kugeln können diese streng genommen nicht mehr als isolierte Kugeln angesehen werden. ■

Wenn man einen nicht kugelförmigen Leiter wie etwa den in Abbildung 20.26a gezeigten auflädt, ist seine Oberfläche im-

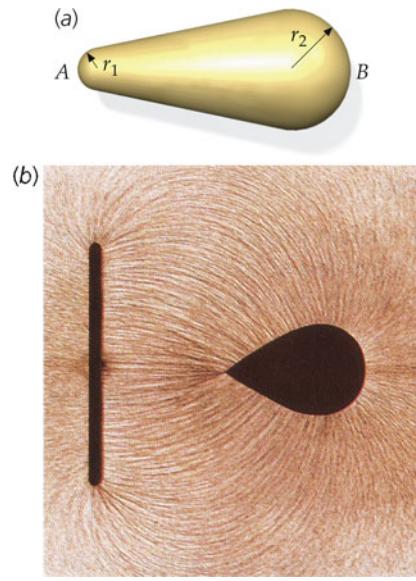


Abbildung 20.26 a) Ein tropfenförmiger Leiter. Wenn man einen solchen Leiter auflädt, ist das elektrische Feld in der Nähe des Punkts A, an dem der Krümmungsradius klein ist, stärker als in der Nähe des Punkts B mit einem großen Krümmungsradius. b) Die elektrischen Feldlinien in der Nähe eines tropfenförmigen Leiters und einer Platte, die gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen tragen. Die Feldlinien sind durch dünne Fadenstücke veranschaulicht, die in Öl schwimmen. Beachten Sie, dass das elektrische Feld in der Nähe der Punkte mit kleinem Krümmungsradius, etwa an den Enden der Platte und an der Spitze links an dem tropfenförmigen Leiter, am stärksten ist. Dagegen haben die Äquipotenzialflächen dort, wo die Feldstärke größer ist, einen kleineren Abstand. (b) © Harold M. Waage.

mer eine Äquipotenzialfläche. Allerdings sind in diesem Fall die Oberflächenladungsdichte und das elektrische Feld außerhalb des Leiters im Allgemeinen ortsabhängig. In der Nähe eines Punkts, an dem der Krümmungsradius klein ist, etwa in der Nähe des Punkts A in der Abbildung, sind die Oberflächenladungsdichte und das elektrische Feld hoch, während sie in der Nähe eines Punkts mit großem Krümmungsradius wie etwa des Punkts B klein sind. Dies kann man qualitativ verstehen, indem man die Enden des Leiters als Kugeln mit unterschiedlichen Radien betrachtet (siehe hierzu Beispiel 20.15). Im Folgenden ist σ die Oberflächenladungsdichte.

Das Potenzial einer Kugel mit dem Radius r ist

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{q}{r}. \quad (20.24)$$

Da eine Kugel den Oberflächeninhalt $4\pi r^2$ hat, sind die Ladung auf einer Kugel und ihre Oberflächenladungsdichte über $q = 4\pi r^2 \sigma$ verknüpft. Setzen wir diesen Ausdruck für q in Gleichung 20.24 ein, ergibt sich

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi r^2 \sigma}{r} = \frac{r\sigma}{\epsilon_0}.$$

Dies können wir nach σ umstellen:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \phi}{r}. \quad (20.25)$$

Da beide Kugeln auf gleichem Potenzial sind, muss die Kugel mit dem kleineren Radius die größere Oberflächenladungsdichte haben. Ausgehend von der Feldstärke in der Nähe der Oberfläche eines Leiters $E = \sigma/\epsilon_0$ ist somit die elektrische Feldstärke an den Punkten mit dem kleinsten Krümmungsradius am größten.

Bei einem beliebig geformten Leiter hängt das Potenzial, bei dem der dielektrische Durchschlag auftritt, von dem kleinsten Krümmungsradius irgendeines Teils dieses Leiters ab. Wenn der Leiter Spitzen mit sehr kleinem Krümmungsradius besitzt, kommt es schon bei verhältnismäßig niedrigen Potenzialen zum dielektrischen Durchschlag. Im Van-de-Graaff-Generator (Abbildung 20.24a) wird die Ladung unten durch spitze Leiter auf das Band übertragen und oben durch ebenso spitze Leiter wieder von ihm entnommen.

20.6 Die elektrische Energie

Körper, die einander abstoßen, besitzen eine höhere potentielle Energie, wenn sie nahe beieinander sind. Umgekehrt ist die potentielle Energie bei Körpern, die einander anziehen, höher, wenn sie weiter voneinander entfernt sind. Wir betrachten eine Punktladung q_1 an einem Punkt 1. Um eine zweite Punktladung q_2 , die anfangs im Unendlichen ruht, an einen Punkt 2 zu bringen, der vom Punkt 1 den Abstand $r_{1,2}$ besitzt, sodass sie danach im Punkt 2 wieder ruht, muss die Arbeit

$$W_2 = q_2 \phi_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1,2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{1,2}}$$

verrichtet werden. Dabei ist ϕ_2 das Potenzial der Ladung q_1 im Punkt 2

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1,2}}.$$

Damit ist die potentielle Energie dieser beiden Punktladungen das Negative der dabei verrichteten Arbeit.

Das Potenzial an einem weiteren Punkt 3, der von der Ladung q_1 den Abstand $r_{1,3}$ und von der Ladung q_2 den Abstand $r_{2,3}$ hat, lautet dann

$$\phi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2,3}}.$$

Um nun eine dritte Ladung q_3 aus der Ruhe im Unendlichen an den Punkt 3 zu bringen, sodass sie wiederum ruht, muss erneut Arbeit verrichtet werden:

$$W_3 = q_3 \phi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}}.$$

Die Gesamtarbeit, die aufgewendet werden muss, um die drei Ladungen zusammenzubringen, ist die **elektrische Energie** E_{el} des Systems der drei Punktladungen:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}}. \quad (20.26)$$

Wie viel Arbeit dabei zu verrichten ist, ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Ladungen an die betreffenden Ruhelagen gebracht wurden. Allgemein gilt:

Die elektrische Energie eines Systems von Punktladungen ist die Arbeit, die verrichtet werden muss, um die Ladungen aus unendlichem Abstand an ihre Ruhelagen zu bringen.

DIE ELEKTRISCHE ENERGIE EINES PUNKTLADUNGSSYSTEMS
(VERBALE FORMULIERUNG)

Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite von Gleichung 20.26 können

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} &= q_1 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{1,3}} \right) \\ &= q_1 \phi_1 \end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei ϕ_1 das Potenzial der Ladungen q_2 und q_3 am Ort der Ladung q_1 ist. Ähnlich ergeben der zweite und der dritte Term das Produkt aus der Ladung q_3 und dem Potenzial der Ladungen q_1 und q_2 sowie der erste und der dritte Term das Produkt aus der Ladung q_2 und dem Potenzial der Ladungen q_1 und q_3 . Damit kann Gleichung 20.26 wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{1}{2} (E_{\text{el}} + E_{\text{el}}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}} \right) \\ &= \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{1,3}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_{2,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1,2}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} q_3 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2,3}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2 + q_3 \phi_3). \end{aligned}$$

Somit lautet die elektrische Energie E_{el} eines Systems von n Punktladungen

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (20.27)$$

DIE ELEKTRISCHE ENERGIE EINES PUNKTLADUNGSSYSTEMS
(FORMEL)

wobei ϕ_i das Potenzial aller anderen Ladungen am Ort der i -ten Ladung ist.

Anhand von Gleichung 20.27 lässt sich auch die elektrische Energie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung herleiten. Wir

betrachten dazu einen kugelförmigen Leiter mit dem Radius r . Wenn die Kugel eine Ladung q trägt, hat sie das Potenzial

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} q,$$

das so normiert ist, dass $\phi(\infty) = 0$ ist.

Die Arbeit, um eine zusätzliche Ladungsmenge dq' aus dem Unendlichen bis zu dem Leiter zu bringen, ist $\phi dq'$. Um diese Arbeit wächst seine elektrische Energie:

$$dE_{\text{el}} = \phi dq' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{q'}{r} dq'.$$

Die elektrische Gesamtenergie E_{el} ist das Integral über dE_{el} für q' von null bis zur Endladung q . Integration ergibt

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^q q' dq' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2r} = \frac{1}{2} q \phi, \quad (20.28)$$

wobei wir $\phi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ für das Potenzial auf der Oberfläche einer geladenen Kugel eingeführt haben. Gleichung 20.28 kann als $E_{\text{el}} = q \cdot \frac{1}{2} \phi$ interpretiert werden, wobei $\frac{1}{2} \phi$ das mittlere Potenzial der Kugel ist, während sie geladen wird. Wenn beim Laden das erste Ladungselement aus dem Unendlichen auf die ungeladene Kugel gebracht wird, braucht keine Arbeit verrichtet zu werden, da sich auf der Kugel noch keine Ladung befindet, die die neu hinzukommende Ladung abstoßen würde. Je mehr Ladung sich aber auf der Kugel ansammelt, desto mehr Arbeit ist erforderlich, um weitere Ladungselemente auf die Kugel zu bringen. Dabei wird angenommen, dass jedes Ladungselement dieselbe Größe hat. Wenn die Kugel fast vollständig geladen ist, muss die meiste Arbeit verrichtet werden, um die Abstossungskraft der Ladung, die bereits auf der Kugel ist, zu überwinden und das letzte Ladungselement auf die Kugel zu bringen. Das mittlere Potenzial der Kugel, während sie geladen wird, ist die Hälfte des Endpotenzials ϕ , sodass die Gesamtarbeit, um die gesamte Ladung q aus dem Unendlichen auf die Kugel zu bringen, $\frac{1}{2} q \phi$ ist.

Als eine alternative Betrachtung ergibt sich Gleichung 20.28 aus Gleichung 20.27, wenn wir $\phi_i = \phi$ und $q = \sum_i q_i$ setzen. Man kann sich die Ladung auf der homogen geladenen Kugelschale auch als Sammlung infinitesimaler Punktladungen vorstellen, die alle dasselbe Potenzial ϕ haben. Gleichung 20.27 führt daher direkt auf Gleichung 20.28.

Obwohl wir zur Herleitung von Gleichung 20.28 einen kugelförmigen geladenen Leiter betrachtet hatten, gilt sie für beliebige geladene Leiter, deren Potenzial $\phi(\infty) = 0$ ist. Da das Potenzial jedes Leiters proportional zu seiner Ladung q ist, können wir $\phi = \alpha q$ schreiben, wobei α eine Konstante ist. Die Arbeit, um eine zusätzliche Ladung dq' aus dem Unendlichen auf den Leiter zu bringen, ist $\phi dq' = \alpha q' dq'$, sodass die Gesamtarbeit, um eine Ladung q auf den Leiter zu bringen,

$\frac{1}{2} \alpha q^2 = \frac{1}{2} q \phi$ ist. Die elektrische Energie von n Leitern, von denen der i -te auf dem Potenzial ϕ_i ist und eine Ladung q_i trägt, ist dann

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i. \quad (20.29)$$

DIE ELEKTRISCHE ENERGIE EINES LEITERSYSTEMS

In Beispiel 20.16 wird die Arbeit zum Zusammenfügen einer Konfiguration von vier Punktladungen berechnet.

Beispiel 20.16: Die Arbeit beim Verschieben von Punktladungen

Vier gleich große positive Punktladungen q sind anfangs in unendlichem Abstand in Ruhe. a) Berechnen Sie die Gesamtarbeit, die aufgewendet werden muss, um die Punktladungen an die vier Ecken eines Quadrats mit der Kantenlänge a zu bringen. Berechnen Sie dazu die Arbeit, um jede Ladung nacheinander an ihren Endpunkt zu verschieben. b) Zeigen Sie, dass Gleichung 20.27 die Gesamtarbeit ergibt.

Problembeschreibung: Wir verschieben die Ladungen jede für sich an die Ecken des Quadrats. Um die erste Ladung an die erste Ecke zu bringen, braucht keine Arbeit verrichtet zu werden, da das Potenzial dort null ist, wenn die anderen drei Ladungen noch im Unendlichen sind. Anschließend muss gegen die Abstossung der bereits vorhandenen Ladungen Arbeit verrichtet werden, um die weiteren Ladungen jeweils an ihren Ort zu bringen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Skizzieren Sie das Quadrat und bezeichnen Sie die Ecken mit A , B , C und D (Abbildung 20.27).

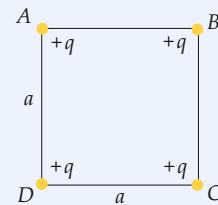


Abbildung 20.27 Skizze des Quadrats aus den vier Punktladungen.

2. Um die erste Ladung an den Punkt A zu bringen, ist keine Arbeit erforderlich:

$$W_A = 0$$

3. Nun wird die zweite Ladung an den Punkt B gebracht. Die hierfür erforderliche Arbeit ist $W_B = q \phi_A$, wobei ϕ_A das Potenzial der ersten Ladung im Punkt A in einem Abstand a vom Punkt B ist:

$$W_B = q \phi_A = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}$$

4. Für die Ladung C gilt $W_C = q \phi_C$, wobei ϕ_C das gemeinsame Potenzial der Ladung q am Punkt A in einem Abstand $\sqrt{2}a$ und der Ladung q am Punkt B in einem Abstand a vom Punkt C ist:

$$\begin{aligned} W_C &= q \phi_C = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{2}a} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \end{aligned}$$

5. Eine ähnliche Betrachtung ergibt W_D , die Arbeit, um die vierte Ladung an den Punkt D zu bringen:

$$\begin{aligned} W_D &= q \phi_D = q \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \right) \\ &= \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \end{aligned}$$

6. Die Gesamtarbeit, um die vier Ladungen an die jeweiligen Punkte zu bringen, ist die Summe der Einzelbeiträge:

$$W = W_A + W_B + W_C + W_D = \boxed{\left(4 + \sqrt{2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}}$$

Teilaufgabe b

1. Die Gesamtarbeit W ergibt sich aus Gleichung 20.27. Verwenden Sie für das Potenzial ϕ_i am Ort jeder Ladung ϕ_D aus Schritt 5 von Teilaufgabe a:

$$W = E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \phi_i$$

mit $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_D$ und $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$.

2. Das Potenzial am Ort jeder Ladung ist ϕ_D . Ersetzen Sie jeweils ϕ_i durch ϕ_D und q_i durch q und fassen Sie die Terme zusammen:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q_i \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 q \phi_D = \frac{1}{2} q \phi_D \sum_{i=1}^4 1 \\ &= \frac{1}{2} q \phi_D 4 = 2q \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a} \\ &= \boxed{\left(4 + \sqrt{2} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Teilaufgabe a und Teilaufgabe b führen auf dasselbe Ergebnis.

Weitergedacht: W ist gleich der elektrischen Gesamtenergie der Ladungsverteilung. Diese Arbeit muss von außen verrichtet werden, um die Konfiguration ausgehend von den vier Ladungen in unendlichem Abstand zusammenzusetzen.

Übung 20.10: a) Welche Arbeit muss zusätzlich verrichtet werden, um eine fünfte positive Ladung q aus dem Unendlichen in die Mitte des Quadrats zu bringen?
b) Welche Gesamtarbeit ist erforderlich, um das System aus fünf Ladungen zusammenzufügen? ◀ ■

🔍 Im Kontext: Blitze am Saturn

Seit Mitte 2004 befindet sich die 1997 gestartete Raumsonde Cassini in einem Orbit um Saturn. Die Sonde funkte faszinierende Bilder von den Saturnringen, den Geysiren am Südpol des Monds Enceladus oder von der Oberfläche des Monds Titan zur Erde. Ein weiteres „Highlight“ war das Auftreten eines gigantischen Sturms in der Saturnatmosphäre, der Anfang Dezember 2010 begann und fast neun Monate lang andauerte.¹



Ein gigantischer Sturm auf Saturn um 35° nördlicher Breite, fotografiert am 25. Februar 2011 von der Kamera auf der Raumsonde Cassini (© NASA/JPL/SSI).

Drei Wochen nach dem ersten Blitzsignal hatte der Sturm eine Ausdehnung von 10.000 km in der Breite und 17.000 km in der Länge², und durch die vorherrschenden Westwinde wurden die Sturmwolken nach Osten getrieben. Schließlich umrundeten sie den gesamten Planeten (siehe Foto), eine Distanz von etwa 300.000 km. Solche riesigen Stürme sind extrem selten und werden „Great White Spots“³ genannt, und sie passieren im Schnitt nur einmal pro Saturnjahr (29,5 Erdjahre).

Wie ist die Atmosphäre des Saturn beschaffen, dass überhaupt Gewitter entstehen können? Die Hauptbestandteile des Gasplaneten sind Wasserstoff (H_2) und Helium (He), aber es gibt auch Wolken bestehend aus Ammoniak (NH_3), Ammoniumhydrogensulfid (NH_4SH) und Wasser (H_2O). An der sichtbaren „Oberfläche“ des Saturn befinden sich NH_3 -Wolken bei einem Druck um 1 bar und einer Temperatur von $-138^{\circ}C$. Danach folgen NH_4SH -Wolken und Wasserwolken, letztere erstrecken sich von 5–20 bar um den Gefrierpunkt.⁴ Der Mechanismus der Aufladung der Wolkenteilchen könnte somit ähnlich wie bei der Erde ablaufen, der hauptsächlich im Temperaturbereich von $-25^{\circ}C$ bis $-10^{\circ}C$ durch Kollision von Graupel mit Eispunkeln erfolgt.⁵ Davor muss es (wie bei Gewittern auf der Erde) eine starke vertikale Konvektion geben, die bei Saturn von der inneren Wärme des Planeten gespeist wird. Die Wolkenteilchen werden von den Aufwinden ganz nach oben

transportiert, schießen über die oberste NH_3 -Wolkenschicht hinaus und verursachen die klar sichtbaren weißen Sturmwolken. Trotz der Tiefe der Entladungen in der Atmosphäre (ca. 200 km unter dem 1-bar-Niveau) konnten die Blitze von der Cassini-Kamera fotografisch nachgewiesen werden.⁶ Die anderen Gasplaneten unseres Sonnensystems haben übrigens eine ähnliche Wolkenstruktur, und das Auftreten von Blitzen wurde bei Jupiter und Uranus nachgewiesen und ist auch bei Neptun sehr wahrscheinlich.⁷

Der kurze Entladungsstrom im Blitzkanal führt zur Abstrahlung von Radiowellen über einen breiten Frequenzbereich. Im Falle von Saturn kann nun das Cassini RPWS (Radio and Plasma Wave Science) Instrument⁸ diese Radiowellen der Blitze oberhalb der ionosphärischen Grenzfrequenz (ca. um 1 MHz) messen. Die Frequenzen unterhalb dieser kritischen Frequenz werden von der Ionosphäre (Schicht geladener Teilchen in oberer Atmosphäre des Saturn) reflektiert und erreichen die Raumsonde nicht. Die Saturnblitze ermöglichen es somit, diese Grenzfrequenz genau zu bestimmen, woraus die maximale Elektronendichte der Ionosphäre des Saturn einfach ermittelt werden kann.⁹ Die Radiowellen der Saturnblitze sind so stark (ca. 10.000-fach stärker als Erdblitze in diesem Frequenzbereich), dass sie vor einigen Jahren erstmals mit großen Radioteleskopen auf der Erde detektiert werden konnten.¹⁰ Der Grund für die Stärke der Saturnblitze ist nicht ganz klar, möglicherweise spielt der erhöhte Druck (um 10 bar) an ihrem Entstehungsort eine Rolle. Ein höherer Druck führt zur Erhöhung der Durchbruchsfeldstärke, und somit muss sich eine größere Ladungsmenge ansammeln bevor es zur Entladung kommen.¹¹

1. Sayanagi, K. et al., „Dynamics of Saturn’s great storm of 2010–2011 from Cassini ISS and RPWS“, *Icarus* **223**, 2013, 460–478.
2. Fischer, G. et al., „A giant thunderstorm on Saturn“, *Nature* **475**, 2011, 75–77.
3. Sánchez-Lavega, A. et al., „Deep winds beneath Saturn’s upper clouds from a seasonal long-lived planetary-scale storm“, *Nature* **475**, 2011, 71–74.
4. West, R. et al., „Clouds and aerosols in Saturn’s atmosphere“, in: Dougherty M. K. et al. (Hrsg.), *Saturn from Cassini-Huygens*, Springer, New York, 2009, 161–179.
5. Rakov, V. A., Uman, M. A., *Lightning*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
6. Dyudina, U. A. et al., „Detection of visible lightning on Saturn“, *Geophys. Res. Lett.* **37**, L09205, 2010.
7. Yair, Y. et al., „Updated review of planetary atmospheric electricity“, *Space Sci. Rev.* **137**, 2008, 29–49.
8. Gurnett, D. A. et al., „The Cassini Radio and Plasma Wave investigation“, *Space Sci. Rev.*, 114, 395–463, 2004.
9. Fischer, G. et al., „Peak electron densities in Saturn’s ionosphere derived from the low-frequency cutoff of Saturn lightning“, *J. Geophys. Res.* **116**, A04315, 2011.
10. Zakharenko, V. et al., „Ground-based and spacecraft observations of lightning activity on Saturn“, *Planet. Space Sci.* **61**, 2012, 53–59.
11. Fischer, G. et al., „Atmospheric electricity at Saturn“, *Space Sci. Rev.* **137**, 2008, 271–285.



DI Dr. Georg Fischer studierte Technische Physik an der TU Graz, promovierte in Geophysik an der Univ. Graz, und arbeitete drei Jahre als Postdoc an der University of Iowa, USA. Er ist Co-Investigator des Cassini RPWS Instruments und arbeitet heute am Institut für Weltraumforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Potenzialdifferenz	Die Potenzialdifferenz $\phi_b - \phi_a$ ist als das Negative der Arbeit pro Ladungseinheit definiert, die vom elektrischen Feld verrichtet wird, wenn sich eine Probeladung von einem Punkt a zu einem Punkt b bewegt:
	$\Delta\phi = \phi_b - \phi_a = \frac{\Delta E_{el}}{q_0} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (20.2b)$
Potenzialdifferenz für infinitesimale Verschiebungen	$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ (20.2a)
2. Elektrisches Potenzial	
Potenzial einer Punktladung	$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{r_B}, \quad (\phi = 0 \text{ bei } r = r_B) \quad (20.7)$
Coulomb-Potenzial	$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (\phi = 0 \text{ bei } r = \infty) \quad (20.8)$
Potenzial eines Punktladungssystems	$\phi = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \quad (\phi = 0 \text{ bei } r_i = \infty, i = 1, 2, \dots) \quad (20.10)$
Potenzial einer kontinuierlichen Ladungsverteilung	$\phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{r} \quad (\phi = 0 \text{ bei } r = \infty) \quad (20.18)$ Dabei ist dq' ein Ladungssinkrement und r der Abstand von dem Inkrement zum Feldpunkt. Dieser Ausdruck kann nur dann verwendet werden, wenn die Ladungsverteilung in einem endlichen Volumen enthalten ist, sodass das Potenzial im Unendlichen gleich null gewählt werden kann.
Stetigkeit des elektrischen Potenzials	Das Potenzial ϕ ist eine im gesamten Raum stetige Funktion.
3. Berechnung des elektrischen Felds aus dem Potenzial	Das elektrische Feld zeigt in Richtung der stärksten Abnahme des Potenzials, d. h., \mathbf{E} ist das Negative des Gradienten des Potenzials ϕ .
	Die Potenzialänderung bei der Verschiebung $d\mathbf{s}$ einer Probeladung beträgt
	$E_t = -\frac{d\phi}{ d\mathbf{s} }. \quad (20.12)$
Wenn das Potenzial nur von x abhängt	$E_x = -\frac{d\phi(x)}{dx} \quad (20.13)$
Wenn das Potenzial nur von r abhängt	$E_r = -\frac{d\phi(r)}{dr} \quad (20.14)$
4. Der allgemeine Zusammenhang zwischen dem Feld \mathbf{E} und dem Potenzial ϕ	$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z}\right)$ oder $\phi_b - \phi_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (20.17)$
5. Maßeinheiten	
Potenzial ϕ und Potenzialdifferenz $\Delta\phi$	Die SI-Einheit des Potenzials und der Potenzialdifferenz ist das Volt (V): $1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}. \quad (20.4)$
Elektrisches Feld	$1 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1} = 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad (20.5)$
Elektronenvolt	Das Elektronenvolt (eV) ist die Änderung der elektrischen Energie eines Teilchens mit der Ladung e , das sich in einer Potenzialdifferenz $\Delta\phi = \phi_b - \phi_a = 1$ Volt von a nach b bewegt: $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (20.6)$
6. Elektrische Energie zweier Punktladungen	$E_{el} = q_0 \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r}, \quad (E_{el} = 0 \text{ bei } r = \infty) \quad (20.9)$

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Potenziale	
Auf der Achse eines homogen geladenen Rings	$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2+a^2}}, \quad (\phi = 0 \text{ bei } z = \infty)$ (20.19)
Auf der Achse einer homogen geladenen Scheibe	$\phi = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma z \left(\sqrt{1 + \frac{r_s^2}{z^2}} - 1 \right), \quad (\phi = 0 \text{ bei } z = \infty)$ (20.20)
In der Nähe einer unendlich ausgedehnten Ladungsebene	$\phi = \phi_0 - \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma x , \quad (\phi = \phi_0 \text{ bei } x = 0)$ (20.21)
Geladene Kugelschale	$\phi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} & r \geq r_K, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K} & r \leq r_K, \end{cases} \quad (\phi = 0 \text{ bei } r = \infty)$ (20.22)
Unendlich ausgedehnte Linienladung	$\phi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda \ln \frac{r_B}{r}, \quad (\phi = 0 \text{ bei } r = r_B)$ (20.23)
8. Ladung auf einem nicht kugelförmigen Leiter	Bei einem beliebig geformten Leiter ist die Oberflächenladungsdichte σ an den Punkten am größten, an denen der Krümmungsradius am kleinsten ist.
9. Dielektrischer Durchschlag	Die Ladungsmenge, mit der ein Leiter geladen werden kann, ist begrenzt, da die Moleküle des umgebenden Mediums bei sehr hohen elektrischen Feldern einen dielektrischen Durchschlag erleiden, durch den das Medium zu einem Leiter wird.
Durchschlagfestigkeit	Die Durchschlagfestigkeit ist der Betrag des elektrischen Felds, bei dem es zum dielektrischen Durchschlag kommt. Die Durchschlagfestigkeit trockener Luft ist $E_{\max} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} = 3 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$.
10. Elektrische Energie	Die elektrische Energie eines Punktladungssystems ist die Arbeit, die verrichtet werden muss, um die Ladungen aus unendlichem Abstand an ihre Orte bringen.
Von endlich ausgedehnten Punktladungen	$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i$ (20.27)
Eines endlichen Leiters mit der Ladung q auf dem Potenzial ϕ	$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} q \phi$ (20.28)
Eines endlichen Leitersystems	$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i$ (20.29)

Antworten auf die Verständnisfragen

- Wenn man sich senkrecht zur Richtung des Felds E bewegt, ist die Potenzialänderung null.
- Wenn man sich in der zu E entgegengesetzten Richtung bewegt, nimmt das Potenzial am schnellsten zu.

Lösungen der Übungen

- in Richtung des zunehmenden Potenzials
- $\phi(x) = -(5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-2}) x^2$
- $-4,53 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
- a) in der Ebene $x = 4,0 \text{ m}$, b) $\phi = -(25 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}) x$
- $3,7 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
- $\phi(x) = \text{sgn}(z) \cdot \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_s^2/z^2)}} \right)$
- $5,39 \cdot 10^5 \text{ V} = 539 \text{ kV}$
- $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K} \quad \text{für } r \geq r_K$
 $\phi(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_K} \right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_K^2} \right) \quad \text{für } r \leq r_K$
- $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ C}, 5,5 \cdot 10^5 \text{ V}$
- a) $4\sqrt{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}$, b) $(4 + 5\sqrt{2}) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

20.1 • Ein Proton wird in einem homogenen elektrischen Feld, das nach rechts zeigt, nach links verschoben. Bewegt sich das Proton dabei in Richtung zunehmenden oder abnehmenden Potenzials? Nimmt die elektrische Energie des Protons dabei zu oder ab?

20.2 • Was kann man über das elektrische Feld in einem Raumgebiet aussagen, in dem das elektrische Potenzial überall konstant ist?

20.3 • Gegeben ist das Potenzial ϕ an genau einem Punkt. Lässt sich daraus die elektrische Feldstärke E an diesem einen Punkt berechnen? Erläutern Sie Ihre Antwort.

20.4 •• Wir betrachten zwei gleich große positive Punktladungen in einem endlichen Abstand. Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien und die Äquipotenzialflächen des Systems.

20.5 •• Es ist ein elektrostatisches Potenzial $\phi(x, y, z) = (4,00 \text{ V/m}) |x| + \phi_0$ mit einer Konstanten ϕ_0 gegeben. a) Skizzieren Sie das elektrische Feld dieses Potenzials. b) Welche der folgenden Ladungsverteilungen könnte dieses Potenzial Ihrer Meinung nach am ehesten erzeugen? 1) Eine negativ geladene ebene Platte in der Ebene $x = 0$, 2) eine Punktladung im Koordinatenursprung, 3) eine positiv geladene ebene Platte in der Ebene $x = 0$ oder 4) eine homogen geladene Kugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Erläutern Sie Ihre Antwort.

20.6 •• Das elektrische Potenzial ist überall auf der Oberfläche eines Leiters gleich. Bedeutet das, dass auch die Oberflächenladungsdichte überall auf der Oberfläche gleich ist? Erläutern Sie Ihre Antwort.

20.7 •• An den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks befinden sich drei gleiche positive Punktladungen. Um welchen Faktor ändert sich die elektrische Energie dieses Systems, wenn die Länge jeder Seite des Dreiecks auf ein Viertel der ursprünglichen Länge verkürzt wird? (Wenn die Länge jeder Seite des Dreiecks gegen unendlich geht, geht die elektrische Energie gegen null.)

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

20.8 • Der Radius eines Protons beträgt etwa $1,0 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Zwei Protonen stoßen mit gleich großen, aber entgegengesetzten Impulsen zentral zusammen. Schätzen Sie die kinetische Energie (in MeV), die jedes Proton mindestens haben muss, damit beide die elektrische Abstoßung überwinden und zusammenstoßen. (Hinweis: Die Ruheenergie des Protons beträgt

938 MeV. Die nichtrelativistische Rechnung ist gerechtfertigt, falls die kinetische Energie der Protonen klein gegen die Ruheenergie ist.)

20.9 •• Nachdem Sie an einem trockenen Tag über einen Teppich gelaufen sind, berühren Sie einen Freund. Dabei entsteht üblicherweise ein 2,0 mm langer Funken. Schätzen Sie die Potenzialdifferenz zwischen sich und Ihrem Freund ab, bevor der Funken überspringt.

Potenzialdifferenz

20.10 •• Die einander gegenüberliegenden Oberflächen zweier großer paralleler leitender Platten in einem Abstand von 10,0 cm tragen homogene Oberflächenladungsdichten, die betragsmäßig gleich sind, deren Vorzeichen aber entgegengesetzt sind. Die Potenzialdifferenz zwischen den Platten beträgt 500 V. a) Ist die positive oder die negative Platte auf dem höheren Potenzial? b) Wie groß ist betragsmäßig das elektrische Feld zwischen den Platten? c) In der Nähe der negativen Platte wird ein Elektron aus der Ruhe losgelassen. Welche Arbeit muss das elektrische Feld an dem Elektron verrichten, während es sich von dem Punkt, an dem es losgelassen wird, zur positiven Platte bewegt? Geben Sie die Lösung sowohl in Elektronenvolt als auch in Joule an. d) Wie groß ist die Änderung der elektrischen Energie des Elektrons, wenn es sich von dem Punkt, an dem es losgelassen wird, zur positiven Platte bewegt? e) Welche kinetische Energie hat es, wenn es die positive Platte erreicht?

20.11 •• Ein Kaliumion (K^+) und ein Chlorion (Cl^-) haben in Kaliumchlorid einen Abstand von $2,80 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. a) Berechnen Sie die Energie (in eV), die aufgewendet werden muss, um die beiden Ionen bis zu einem unendlichen Abstand zu trennen. (Modellieren Sie die beiden Ionen als zwei Punktteilchen, die zu Beginn ruhen.) b) Wie hoch ist die kinetische Gesamtenergie beider Ionen im unendlichen Abstand, wenn doppelt so viel wie die in Teilaufgabe a ermittelte Energie zugeführt wird?

Das Potenzial eines Punktladungssystems

Hinweis: Soweit nichts anderes angegeben ist, wird in allen Aufgabenstellungen dieses Abschnitts angenommen, dass das elektrische Potenzial in großem Abstand von allen Ladungen null ist.

20.12 • An den Ecken eines Quadrats mit einer Seitenlänge von 4,00 m sind vier Punktladungen von jeweils $2,00 \mu\text{C}$ befestigt. Bestimmen Sie das elektrische Potenzial in der Mitte des Quadrats, falls a) alle Ladungen positiv sind, b) drei Ladungen positiv sind und eine negativ ist und c) zwei Ladungen positiv und zwei negativ sind.

20.13 •• Gegeben sind zwei Punktladungen q und q' in einem Abstand a . An einem Punkt im Abstand $a/3$ von q auf der Verbindungsgeraden der beiden Ladungen ist das Potenzial null. a) Welche der folgenden Aussagen treffen zu? 1) Die Ladungen tragen das gleiche Vorzeichen, 2) Die Ladungen tragen entgegengesetzte Vorzeichen, 3) Die relativen Vorzeichen der Ladungen lassen sich aus diesen Angaben nicht ermitteln. b) Welche der folgenden Aussagen treffen zu? 1) $|q| > |q'|$, 2) $|q| < |q'|$, 3) $|q| = |q'|$. 4) Die relativen Beträge der Ladungen lassen sich aus diesen Angaben nicht ermitteln. c) Bestimmen Sie das Verhältnis q/q' .

20.14 •• Im Koordinatenursprung befindet sich eine Punktladung von $+3e$. Eine zweite Punktladung von $-2e$ befindet sich auf der x -Achse bei $x = a$. a) Skizzieren Sie für alle Punkte auf der x -Achse das Potenzial $\phi(x)$ in Abhängigkeit von x . b) An welchem Punkt oder an welchen Punkten ist das Potenzial $\phi(x)$ auf der x -Achse null? c) An welchem Punkt oder an welchen Punkten, wenn überhaupt, auf der x -Achse ist das elektrische Feld null? Stimmen diese Punkte mit den in Teilaufgabe b ermittelten überein? Erläutern Sie Ihre Antwort. d) Welche Arbeit muss verrichtet werden, um eine dritte Ladung $+e$ zum Punkt $x = \frac{1}{2}a$ auf der x -Achse zu bringen?

Berechnung des elektrischen Felds aus dem Potenzial

20.15 • Gegeben ist ein homogenes elektrisches Feld, das in die $-x$ -Richtung zeigt. Wir betrachten zwei Punkte a und b auf der x -Achse, von denen a bei $x = 2,00\text{ m}$ und b bei $x = 6,00\text{ m}$ liegt. a) Ist die Potenzialdifferenz $\phi_b - \phi_a$ positiv oder negativ? b) Wie groß ist der Betrag des elektrischen Felds, wenn $|\phi_b - \phi_a|$ gleich 100 kV ist?

20.16 •• Das elektrische Potenzial einer bestimmten Ladungsverteilung wird an zahlreichen Punkten entlang der x -Achse gemessen. Abbildung 20.28 zeigt eine grafische Darstellung der Messergebnisse. An welchem Ort (oder an welchen Orten) ist die x -Komponente des elektrischen Felds null? Ist das Potenzial an diesem Ort (bzw. an diesen Orten) ebenfalls null? Erläutern Sie Ihre Aussage.

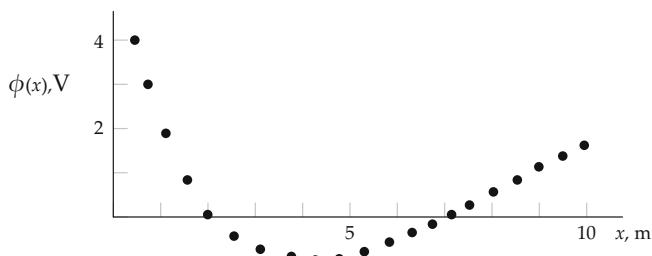


Abbildung 20.28 Zu Aufgabe 20.16.

20.17 •• In der x - y -Ebene liegen drei Punktladungen, jeweils mit der Ladung q . Zwei davon befinden sich auf der y -Achse bei $y = -a$ und $y = +a$, während die dritte auf der x -Achse bei $x = a$ liegt. a) Ermitteln Sie das Potenzial dieser Ladungen als Ortsfunktion auf der x -Achse. b) Bestimmen Sie anhand des Ergebnisses aus Teilaufgabe a die x -Komponente des elektrischen Felds E_x als Funktion von x . Entsprechen die Ergebnisse aus Teilaufgabe a und b im Koordinatenursprung und für $x \rightarrow \infty$ Ihren Erwartungen?

Berechnung des Potenzials ϕ kontinuierlicher Ladungsverteilungen

20.18 •• Ein Stab der Länge l ist mit der homogen über seine Länge verteilten Gesamtladung q geladen. Der Stab liegt entlang der y -Achse, wobei sich seine Mitte im Koordinatenursprung befindet. a) Berechnen Sie das elektrische Potenzial in Abhängigkeit vom Ort entlang der x -Achse. b) Zeigen Sie, dass sich das in Teilaufgabe a erhaltene Ergebnis für $x \gg l$ zu $\phi = q/(4\pi\epsilon_0|x|)$ vereinfacht. Erläutern Sie, weshalb dies zu erwarten war.

20.19 •• Zwei koaxiale leitende Zylinderschalen tragen gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen. Die innere Schale trägt die Ladung $+q$ und hat einen Außenradius a , während die äußere Schale die Ladung $-q$ trägt und den Innenradius b hat. Die Länge jeder Zylinderschale ist l , wobei $l \gg b$ ist. Ermitteln Sie die Potenzialdifferenz $\phi_a - \phi_b$ zwischen den beiden Schalen.

20.20 •• Eine leitende Kugelschale mit dem Innenradius b und dem Außenradius c ist konzentrisch zu einer kleinen Metallkugel mit dem Radius $a < b$. Die Metallkugel ist mit der positiven Ladung q geladen. Die Gesamtladung auf der leitenden Kugelschale ist $-q$. a) Wie lautet das Potenzial auf der Kugelschale? b) Wie lautet das Potenzial auf der Metallkugel? Nehmen Sie an, dass das Potenzial fern von allen Ladungen null ist.

20.21 •• Zwei konzentrische, leitende Kugelschalen tragen gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen. Die innere Kugelschale hat den Radius a und trägt die Ladung $+q$. Die äußere Kugelschale hat den Radius b und trägt die Ladung $-q$. Bestimmen Sie die Potenzialdifferenz $\phi_a - \phi_b$ zwischen beiden Kugelschalen.

20.22 ••• Eine Scheibe mit dem Radius r_S trägt eine Oberflächenladungsdichte $\sigma = \sigma_0 r_S/r$, wobei σ_0 eine Konstante und r der Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe ist. a) Bestimmen Sie die Gesamtladung der Scheibe. b) Ermitteln Sie das elektrische Potenzial im Abstand x von der Mitte der Scheibe auf der Achse, die durch den Mittelpunkt der Scheibe geht und senkrecht auf ihrer Ebene steht.

20.23 ••• Das elektrische Potenzial im Inneren einer homogen geladenen Vollkugel lautet

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2r_K} \left(3 - \frac{r^2}{r_K^2} \right).$$

Dabei ist r_K der Kugelradius und r der Abstand von der Mitte. Diese Formel wurde in Beispiel 20.12 über das elektrische Feld hergeleitet. In der vorliegenden Aufgabe sollen Sie sie herleiten, indem Sie die Kugel aus aneinandergrenzenden dünnen Kugelschalen modellieren und anschließend die Potenziale dieser Schalen an einem Feldpunkt innerhalb der Kugel addieren. Das Potenzial $d\phi$ in einem Abstand r vom Mittelpunkt einer homogen geladenen dünnen Kugelschale vom Radius r' und mit der Ladung dq lautet $d\phi = dq/(4\pi\epsilon_0 r)$ für $r \geq r'$ und $d\phi = dq/(4\pi\epsilon_0 r')$ für $r \leq r'$ (Gleichung 20.22). Betrachten Sie nun eine Kugel vom Radius r , die eine homogen verteilte Ladung q enthält, und ermitteln Sie ϕ an einem Punkt innerhalb der Kugel (d. h. für $r < r_K$). a) Bestimmen Sie die Ladung dq auf einer Kugelschale mit dem Radius r' und mit der Dicke dr' . b) Bestimmen Sie das Potenzial $d\phi$ der Ladung auf einer Schale mit dem Radius r' und mit der Dicke dr' im Abstand r mit $r \leq r' \leq r_K$. c) Integrieren Sie Ihre Formel aus Teilaufgabe b von $r' = r$ bis $r' = r_K$, um das Potenzial zu erhalten, das die Gesamtladung in dem weiter als r vom Kugelmittelpunkt entfernten Gebiet bei r erzeugt. d) Ermitteln Sie das Potenzial $d\phi$ der Ladung in einer Schale mit dem Radius r' und mit der Dicke dr' bei r für $r' \leq r$. e) Integrieren Sie die Formel aus Teilaufgabe d von $r' = 0$ bis $r' = r$, um das Potenzial zu bestimmen, das das näher als r vom Kugelmittelpunkt entfernte Gebiet bei r erzeugt. f) Ermitteln Sie durch Addieren der Ergebnisse aus Teilaufgabe c und e das Gesamtpotenzial ϕ bei r .

Äquipotenzialflächen

20.24 •• Ein Geigerzählrohr besteht aus einem langen Metallzylinder und aus einem langen geraden Metalldraht, der in seiner Mittelachse verläuft. Modellieren Sie das Zählrohr so, dass der Draht und der Zylinder unendlich lang sind. Der Mitteldraht ist positiv geladen und der Außenzylinder negativ. Zwischen dem Draht und dem Zylinder herrscht eine Potenzialdifferenz von 1,00 kV. a) In welche Richtung zeigt das elektrische Feld im Inneren des Zählrohrs? b) Ist der Zylinder oder der Draht auf dem höheren Potenzial? c) Welche Form haben die Äquipotenzialflächen in dem Zählrohr? d) Betrachten Sie zwei in Teilaufgabe c gefundene Äquipotenzialflächen, deren Potenzial sich um 10 V unterscheidet. Haben zwei derartige Äquipotenzialflächen in der Nähe des Mitteldrahts denselben Abstand wie in der Nähe des Außenzylinders? Wenn nicht, wo sind die Äquipotenzialflächen weiter entfernt? Erläutern Sie Ihre Antwort.

20.25 •• Ein Punktteilchen mit der Ladung +11,1 nC befindet sich im Koordinatenursprung. a) Welche Form haben die Äquipotenzialflächen in dem Gebiet um die Ladung? b) Nehmen Sie an, dass das Potenzial für $r = \infty$ null ist. Berechnen Sie die Radien der fünf Flächen auf den Potenzialen 20,0 V, 40,0 V, 60,0 V, 80,0 V und 100,0 V und zeichnen Sie sie maßstabsgerecht um die Ladung im Mittelpunkt. c) Sind diese Flächen äquidistant? Erläutern Sie Ihre Antwort. d) Schätzen Sie die elektrischen Feldstärken zwischen den Äquipotenzialflächen auf 40,0 V und

auf 60,0 V, indem Sie die Differenz zwischen den beiden Potenzialen durch die Differenz der beiden Radien dividieren. Vergleichen Sie diesen Schätzwert mit dem genauen Wert in der Mitte zwischen beiden Äquipotenzialflächen.

Die elektrische Energie

20.26 • Drei Punktladungen q_1 , q_2 und q_3 sind an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Seitenlänge von 2,50 m befestigt. Bestimmen Sie die elektrische Energie dieses Ladungssystems für die folgenden Werte der Ladungen: a) $q_1 = q_2 = q_3 = +4,20 \mu\text{C}$; b) $q_1 = q_2 = +4,2 \mu\text{C}$ und $q_3 = -4,20 \mu\text{C}$; c) $q_1 = q_2 = -4,2 \mu\text{C}$ und $q_3 = +4,20 \mu\text{C}$. (Nehmen Sie an, dass die elektrische Energie null ist, wenn die Ladungen sehr weit voneinander entfernt sind.)

20.27 •• An den Eckpunkten eines Quadrats mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung sind vier Punktladungen befestigt. Jede Seite des Quadrats hat die Länge $2a$. Die Ladungen sind wie folgt angeordnet: $+q$ bei $(-a, +a)$; $+2q$ bei $(+a, +a)$; $-3q$ bei $(+a, -a)$; $+6q$ bei $(-a, -a)$. Nun wird ein fünftes Teilchen mit der Masse m und mit der Ladung $+q$ in den Koordinatenursprung gebracht und dort aus der Ruhe losgelassen. Berechnen Sie seinen Geschwindigkeitsbetrag in großer Entfernung vom Koordinatenursprung.

Allgemeine Aufgaben

20.28 • Wie klein kann der Radius einer leitenden Kugel gewählt werden, die auf ein Potenzial von 10,0 kV geladen werden soll, damit das elektrische Feld in der Nähe der Kugeloberfläche die Durchschlagfestigkeit von Luft nicht übersteigt?

20.29 •• Der Metallelektrodenkugel eines Van-de-Graaff-Generators wird durch ein Band mit einer Rate von $200 \mu\text{C}/\text{s}$ Ladung zugeführt. Zwischen dem Band und der Kugel herrscht eine Potenzialdifferenz von 1,25 MV. Die Kugel gibt mit derselben Rate Ladung an die Umgebung ab, sodass die Potenzialdifferenz von 1,25 MV erhalten bleibt. Mit welcher Leistung muss das Band dazu mindestens angetrieben werden?

20.30 •• Eine Ladung von +2,00 nC ist homogen auf einem Ring mit einem Radius von 10,0 cm verteilt. Der Ring liegt mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung in der Ebene $x = 0$. Auf der x -Achse befindet sich anfangs bei $x = 50,0$ cm eine Punktladung von +1,00 nC. Welche Arbeit muss verrichtet werden, um die Punktladung in den Koordinatenursprung zu bringen?

20.31 •• Ein kugelförmiger Leiter mit dem Radius r_1 wird auf 20 kV geladen. Wenn er über einen langen, dünnen leitenden Draht mit einer weit entfernten zweiten leitenden Kugel verbunden wird, fällt sein Potenzial auf 12 kV. Wie groß ist der Radius der zweiten Kugel?

20.32 •• Ein radioaktiver ^{210}Po -Kern emittiert ein Alphateilchen mit der Ladung $+2e$. Wenn das Alphateilchen weit von dem Kern entfernt ist, hat es eine kinetische Energie von 5,30 MeV. Es wird angenommen, dass das Alphateilchen vernachlässigbare kinetische Energie hatte, als es aus der Oberfläche des Atomkerns ausgetreten ist. Der Folgekern ^{206}Pb hat die Ladung $+82e$. Ermitteln Sie den Kernradius des ^{206}Pb . (Der Radius des Alphateilchens sei vernachlässigbar, und es wird angenommen, dass der ^{206}Pb -Kern in Ruhe bleibt.)

20.33 •• Das Potenzial längs der Mittelachse einer homogen geladenen Scheibe an einem 0,60 m vom Mittelpunkt der Scheibe entfernten Punkt beträgt 80 V. Die elektrische Feldstärke ist dort 80 V/m. In einem Abstand von 1,5 m beträgt das Potenzial 40 V und die elektrische Feldstärke 23,5 V/m. In großer Entfernung von der Scheibe soll das Potenzial null sein. Bestimmen Sie die Gesamtladung auf der Scheibe.

20.34 ••• Das Wasserstoffatom im Grundzustand kann als eine positive Punktladung der Größe $+e$ (das Proton) modelliert werden, die von einer negativen Ladungsverteilung umgeben ist, deren Ladungsdichte (das Elektron) gemäß der Formel $\rho(r) = -\rho_0 e^{-2r/a}$ vom Abstand vom Mittelpunkt des Protons abhängt. Diese Formel folgt aus der Quantenmechanik; $a = 0,523 \text{ nm}$ ist der wahrscheinlichste Abstand des Elektrons vom Proton. a) Berechnen Sie den Wert, den ρ_0 haben muss, damit das Wasserstoffatom neutral ist. b) Berechnen Sie das elektrische Potenzial (in Bezug auf $\phi(\infty) = 0$) dieses Systems in Abhängigkeit vom Abstand r von dem Proton.

20.35 ••• Ein Teilchen mit der Masse m und der positiven Ladung q kann sich nur entlang der x -Achse bewegen. Bei $x = -l$ und $x = l$ befinden sich zwei Ringladungen mit dem Radius l (Abbildung 20.29). Die Mittelpunkte beider Ringe liegen auf der x -Achse, und die Ebenen beider Ringe stehen senkrecht auf dieser. Jeder Ring trägt eine positive Gesamtladung q_R , die homogen auf ihm verteilt ist. a) Ermitteln Sie das Potenzial $\phi(x)$ der Ringladungen auf der x -Achse. b) Zeigen Sie, dass $\phi(x)$ für $x = 0$ minimal ist. c) Zeigen Sie, dass das Potenzial für $x \ll l$ gegen die Form $\phi(x) = \phi(0) + \alpha x^2$ geht. d) Ermitteln Sie mithilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe c die Kreisfrequenz der Schwingungen, die die Masse m ausführt, wenn sie etwas aus dem Koordinatenursprung verschoben und losgelas-

sen wird. (Nehmen Sie an, dass das Potenzial an weit von den Ringen entfernten Punkten null ist.)

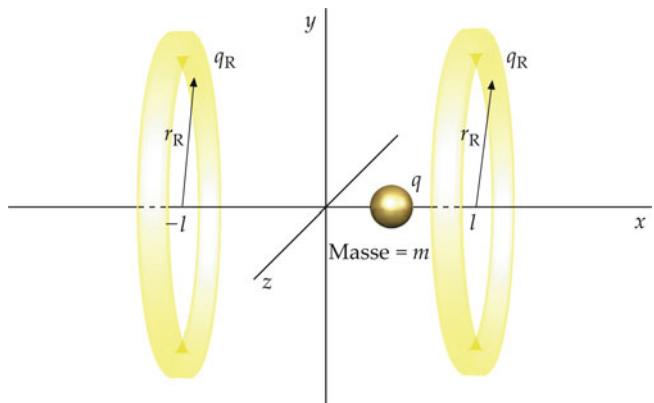


Abbildung 20.29 Zu Aufgabe 20.35.

20.36 ••• Zeigen Sie, dass die Gesamtarbeit, die verrichtet werden muss, um eine homogen geladene Kugel mit der Gesamtladung q und dem Radius r_K zusammenzusetzen, $3q^2/(20\pi\epsilon_0 r_K)$ ist. Aus der Energieerhaltung folgt, dass diese gleich der resultierenden elektrischen Energie der Kugel ist. Hinweis: Setzen Sie ρ gleich der Ladungsdichte der Kugel. Berechnen Sie die Arbeit dW , die verrichtet werden muss, um die Ladung dq' aus dem Unendlichen bis an die Oberfläche einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius r ($r < r_K$) und der Ladungsdichte ρ zu bringen. (Um die Ladung dq' gleichmäßig auf einer Kugelschale mit dem Radius r , der Dicke dr und der Ladungsdichte ρ zu verteilen, braucht keine weitere Arbeit verrichtet zu werden. Weshalb?)

20.37 ••• a) Berechnen Sie ausgehend von dem Ergebnis von Aufgabe 20.36 den *klassischen Elektronenradius*. Das ist der Radius einer homogenen Kugel mit der Ladung $-e$, deren elektrische Energie gleich der Ruheenergie des Elektrons ($5,11 \cdot 10^5 \text{ eV}$) ist. Welche Nachteile besitzt dieses Modell des Elektrons? b) Wiederholen Sie die Berechnung aus Teilaufgabe a für ein Proton mit der Ruheenergie von 938 MeV. Experimente zeigen, dass das Proton näherungsweise einen Radius von $1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ besitzt. Liegt Ihr Ergebnis in der Nähe dieses Werts?

Die Kapazität

21



Die Energie für das Fotoblitzlicht dieser Kamera wurde von einer Batterie auf einen Kondensator übertragen.
(© PhotoDisc/Getty Images.)

?

Wie lässt sich ermitteln, wie viel Energie in einem Kondensator gespeichert werden kann? (Siehe Beispiel 21.3.)

21.1 Die Kapazität	762
21.2 Speicherung elektrischer Energie	766
21.3 Kondensatoren, Batterien und elektrische Stromkreise	770
21.4 Dielektrika	778
21.5 Molekulare Betrachtung von Dielektrika	785
Zusammenfassung	791
Aufgaben	793

Kennen Sie jemanden, der weder eine Digitalkamera noch ein Mobiltelefon (oft mit integrierter Digitalkamera), noch irgendein anderes transportables elektronisches Gerät besitzt? Alle diese kleinen Helfer enthalten einen oder mehrere Kondensatoren, und ein Leben ohne sie ist heute kaum noch vorstellbar. Dank Mobiltelefon gelingt es uns, trotz der heutzutage unumgänglichen Mobilität problemlos mit anderen in Kontakt zu bleiben, sogar unterwegs E-Mails zu senden.

In den bisherigen Kapiteln zur Elektrizität hatten wir die Beziehung zwischen Ladungen und elektrischen Feldern und die Abhängigkeit der elektrischen Energie von der Lage der Ladungen erörtert. Im Folgenden wollen wir zeigen, wie elektrische Energie gespeichert und wieder abgegeben werden kann. Im Mittelpunkt wird dabei der Begriff der Kapazität stehen.

In diesem Kapitel werden wir Stromkreise mit Batterien und Kondensatoren diskutieren. In den folgenden Kapiteln werden wir das Verständnis des elektrischen Potenzials und der Kapazität vertiefen und dann auch Schaltungen betrachten, die Widerstände, Spulen und andere Bauelemente enthalten.

21.1 Die Kapazität

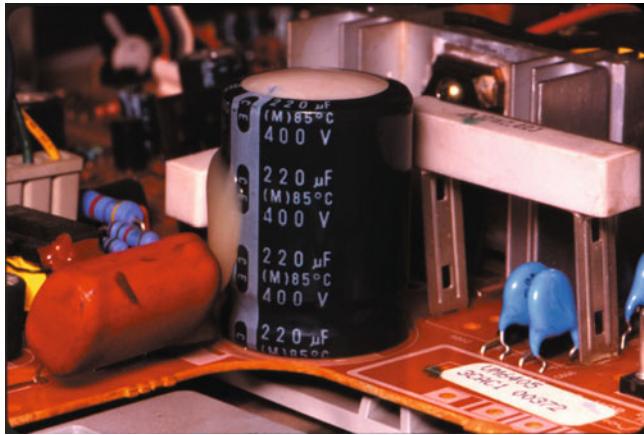
Das Potenzial ϕ einer Ladung q auf einem einzelnen isolierten Leiter ist proportional zur Ladung q und hängt von der Größe und von der Gestalt des Leiters ab. Bei gegebenem Potenzial kann ein Leiter umso mehr Ladung tragen, je größer sein Oberflächeninhalt ist. So ist etwa das Potenzial eines kugelförmigen Leiters mit dem Radius r , der eine Ladung q trägt,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Dabei hatten wir für das bis auf eine Konstante bestimmte Potenzial $\phi(\infty) = 0$ vereinbart (siehe Gleichung 20.22). Dabei taucht ein praktisches Problem auf, da wir den Wert des Potenzials im Unendlichen $\phi(\infty)$ nicht messen können. Es ist praktisch nur möglich, die *Potenzialdifferenz* $\Delta\phi$ zwischen zwei im Endlichen liegenden Punkten a und b zu bestimmen:

$$\Delta\phi = \phi_b - \phi_a.$$

Diese Potenzialdifferenz zwischen zwei der Messung zugänglichen Punkten bezeichnet man gewöhnlich als die **elektrische Spannung** U .



Kondensatoren werden in einer Vielzahl elektronischer Geräte wie etwa in Fernsehgeräten eingesetzt. Einige Kondensatoren dienen zum Speichern von Energie, die meistens aber zum Filtern unerwünschter elektrischer Frequenzen. (©Tom Pantages Images.)

Die elektrische Spannung zwischen den Punkten a und b mit den Potenzialen ϕ_a und ϕ_b beträgt

$$U = \phi_b - \phi_a. \quad (21.1)$$

DEFINITION DER ELEKTRISCHEN SPANNUNG

Das Verhältnis der Ladung q , die sich auf einem Leiter befindet, zu seiner elektrischen Spannung U gegenüber einem Bezugspunkt heißt seine Kapazität C :

$$C = \frac{q}{U}. \quad (21.2)$$

DEFINITION DER KAPAZITÄT

Die Kapazität ist ein Maß für das Ladungsfassungsvermögen bei gegebener Spannung. Da bei einem einzelnen Leiter die Spannung bei gegebenem Bezugspunkt proportional zur Ladung ist, hängt dieses Verhältnis weder von der Ladung q noch von der Spannung U , sondern nur von der Größe und Gestalt sowie von den relativen Lagen der Leiter ab. Zum Beispiel ist die Eigenkapazität eines kugelförmigen Leiters, wenn der Bezugspunkt des Potenzials im Unendlichen liegt,

$$C = \frac{q}{U} = q \left/ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \right) \right. = 4\pi\epsilon_0 r. \quad (21.3)$$

Die SI-Einheit der Kapazität ist das Coulomb pro Volt, das nach dem englischen Experimentalphysiker Michael Faraday **Farad** (F) genannt wird:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1}. \quad (21.4)$$

Für die Praxis ist das Farad eine recht große Maßeinheit, sodass häufig Teile davon wie etwa das Mikrofarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) oder das Picofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$) verwendet werden. Da die Kapazität in Farad und der Radius r in Metern gemessen werden, kann die SI-Einheit der elektrischen Feldkonstanten ϵ_0 nach Gleichung 21.3 auch als Farad/Meter geschrieben werden:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} = 8,85 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}.$$

DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE

Übung 21.1: Wie groß ist der Radius eines kugelförmigen Leiters mit einer Kapazität von $1,0 \text{ F}$? ◀

Frage 21.1

Eine Kugel mit der Kapazität C_1 trägt eine Ladung von $20 \mu\text{C}$. Wie groß ist die Kapazität C_2 , wenn die Ladung auf $60 \mu\text{C}$ erhöht wird?

Kondensatoren

Ein **Kondensator** ist eine Anordnung von zwei Leitern, die beide eine gleich große, aber entgegengesetzte Ladung tragen können. Üblicherweise wird ein Kondensator dadurch geladen, dass eine Ladung q von einem Leiter auf den anderen übertragen wird, sodass anschließend ein Leiter die Ladung $+q$ und der andere die Ladung $-q$ hat. Die Kapazität der Anordnung wird als q/U definiert, wobei q die Ladung auf einem der beiden Leiter und U die elektrische Spannung zwischen beiden Leitern ist. Um die Kapazität zu berechnen, bringen wir auf beide Leiter gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen und ermitteln anschließend über das elektrische Feld E der Ladungen die Spannung U .

Mit der Ladung eines Kondensators ist stets die Ladung auf einem der Leiter gemeint. Allerdings wird im technischen Sprachgebrauch nicht immer sauber zwischen U , ΔU und Potenzialdifferenz unterschieden.

Der Plattenkondensator

Eine große Rolle in der Physik spielt der **Plattenkondensator**, der aus zwei parallelen leitenden Platten aufgebaut ist. In der Praxis handelt es sich bei den Platten häufig um dünne Metallfolien, die durch eine dünne Kunststoffschicht voneinander getrennt und gegeneinander isoliert sind. Anschließend wird diese Mehrschichtanordnung aufgerollt, sodass auf verhältnismäßig kleinem Raum ein großer Flächeninhalt untergebracht werden kann. Es sei A der Flächeninhalt der Platten (genauer: der Flächeninhalt der der anderen Platte zugewandten Seite jeder Platte) und d ihr Abstand, der im Vergleich zu ihrer Länge und Breite sehr klein sein soll. Wir laden eine Platte mit der Ladung $+q$ und die andere mit der Ladung $-q$. Die Ladungen auf den beiden Platten ziehen sich an und verteilen sich homogen auf deren Innenseiten. Da die Platten nur einen geringen Abstand haben, ist das elektrische Feld zwischen ihnen homogen und hat den Betrag $E = \sigma/\epsilon_0$. (Diese Formel für das elektrische Feld außerhalb der Oberfläche eines Leiters hatten wir in Gleichung 19.20 erhalten.) Da das elektrische Feld E zwischen den Platten homogen ist (Abbildung 21.1), ist die Spannung zwischen den Platten gleich dem Produkt aus der Feldstärke E und dem Plattenabstand d :

$$U = E d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{q d}{\epsilon_0 A}, \quad (21.5)$$

wobei wir $\sigma = q/A$ eingesetzt haben. Damit ist die Kapazität eines Plattenkondensators

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{qd/(\epsilon_0 A)} = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (21.6)$$

DIE KAPAZITÄT EINES PLATTENKONDENSATORS

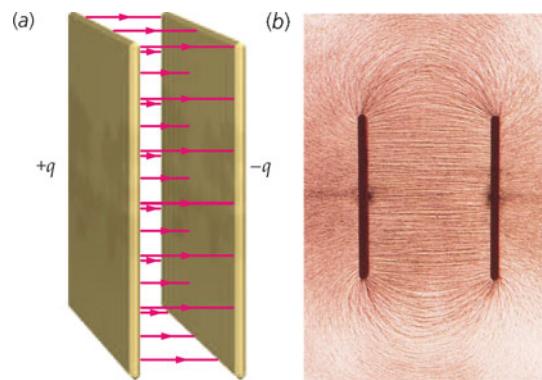


Abbildung 21.1 a) Die elektrischen Feldlinien zwischen den Platten eines Plattenkondensators. Da das Feld zwischen den Platten homogen ist, sind die Feldlinien dort äquidistant. b) Die elektrischen Feldlinien in einem Plattenkondensator, dargestellt mit feinen Fasern, die in Öl schwimmen. (© Harold M. Waage.)

Da die Spannung U proportional zur Ladung q ist, hängt die Kapazität weder von q noch von U ab. Die Kapazität eines Plattenkondensators ist proportional zur Fläche der Platten und umgekehrt proportional zu ihrem Abstand. Im Allgemeinen hängt die Kapazität eines Kondensators von der Größe, von der Form und von der geometrischen Anordnung der Leiter und zudem, wie wir in Abschnitt 21.4 sehen werden, auch von den Eigenschaften des Isoliermaterials zwischen ihnen ab.

In Beispiel 21.1 wird die Kapazität eines Plattenkondensators bei gegebenen Abmessungen berechnet.

Beispiel 21.1: Die Kapazität eines Plattenkondensators

Gegeben ist ein Plattenkondensator mit quadratischen Metallplatten, die eine Seitenlänge von 10 cm und einen Abstand von 1,0 mm haben. a) Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators. b) Welche Ladung wird von einer Platte auf die andere übertragen, während der Kondensator auf 12 V geladen wird?

Problembeschreibung: Die Kapazität C ergibt sich aus dem Flächeninhalt und aus dem Abstand der Platten. Nachdem C bekannt ist, kann die Ladung bei gegebener Spannung U aus der Definition der Kapazität $C = q/U$ bestimmt werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie die Kapazität aus Gleichung 21.6:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,85 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}) \cdot (0,10 \text{ m})^2}{0,0010 \text{ m}} \\ &= 88,5 \text{ pF} = \boxed{89 \text{ pF}} \end{aligned}$$

Vorgehensweise: Kapazitätsberechnungen I

Fertigen Sie eine Skizze des Kondensators mit der Ladung $+q$ auf einem Leiter und mit der Ladung $-q$ auf dem anderen an.

1. Bestimmen Sie – meist mit dem Gauß'schen Gesetz – das elektrische Feld \mathbf{E} .
2. Ermitteln Sie durch Integration über $d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ (Gleichung 20.2a) den Betrag der Spannung U zwischen den beiden Leitern.
3. Die Kapazität ergibt sich dann aus $C = q/U$.

Plausibilitätsprüfung: Überzeugen Sie sich, dass das Ergebnis außer von der Dielektrizitätskonstanten nur von geometrischen Merkmalen wie etwa Längen und Flächen abhängt.

Teilaufgabe b

Die übertragene Ladung ergibt sich aus $q = C U$ (der Definition der Kapazität):

$$\begin{aligned} q &= C U = (88,5 \text{ pF}) \cdot (12 \text{ V}) = 1,06 \cdot 10^{-9} \text{ C} \\ &= [1,1 \text{ nC}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In dem Ausdruck von Teilaufgabe b steht ein Produkt aus Farad und Volt. Wegen $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$ (Gleichung 21.3) ist das Produkt aus 1 Farad und 1 Volt 1 Coulomb und damit, wie es sein sollte, eine Ladungseinheit.

Weitergedacht: $|q|$ ist der Betrag der Ladung auf jeder Kondensatorplatte für sich. Eine Ladung von $1,1 \text{ nC}$ entspricht der Übertragung von $6,6 \cdot 10^9$ Elektronen von einer Platte zur anderen.

Übung 21.2: Welchen Flächeninhalt müssten die Platten haben, damit der Kondensator eine Kapazität von $1,0 \text{ F}$ hätte? ■

Zylinderkondensatoren

Ein Zylinderkondensator enthält einen langen leitenden Zylinder mit dem Radius r_1 sowie einen zu ihm konzentrischen größeren leitenden Hohlzylinder mit dem Radius r_2 . Beide Zylinder haben dieselbe Länge. Ein Beispiel hierfür ist ein Koaxialkabel, wie es etwa beim Kabelfernsehen Verwendung findet. Die Kapazität pro Längeneinheit eines Koaxialkabels ist wichtig, wenn die Übertragungseigenschaften des Kabels bestimmt werden sollen. Beispiel 21.2 zeigt, wie sich die Kapazität eines Zylinderkondensators berechnen lässt.

Frage 21.2

Wie ändert sich die Kapazität, wenn die Spannung über den Zylinderkondensator von 20 V auf 80 V erhöht wird?

Beispiel 21.2: Die Kapazität eines Zylinderkondensators

Formulieren Sie eine Formel für die Kapazität eines Zylinderkondensators, der aus zwei Leitern mit der Länge l besteht. Ein Leiter ist ein Zylinder mit dem Radius r_1 und der zweite ein dazu koaxialer Hohlzylinder mit dem Innenradius r_2 , wobei wie in Abbildung 21.2 gezeigt $r_1 < r_2 \ll l$ gilt.

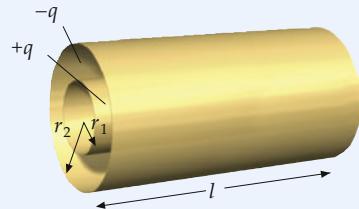


Abbildung 21.2 Darstellung eines Zylinderkondensators.

Problembeschreibung: Der innere Leiter wird mit der Ladung $+q$ und der äußere Leiter mit der Ladung $-q$ geladen. Wir berechnen zunächst aus dem Gauß'schen Gesetz das elektrische Feld und aus diesem dann die Spannung $U = \phi_{r_2} - \phi_{r_1}$. Da das elektrische Feld inhomogen ist (vom Abstand r von der Achse abhängt), muss über das elektrische Feld \mathbf{E} integriert werden, um die Spannung zu bestimmen.

Lösung: 1. Die Kapazität ist als der Quotient q/U definiert:

$$C = \frac{q}{U}$$

2. Die infinitesimale Potenzialdifferenz $d\phi$ ergibt sich aus dem elektrischen Feld:

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

3. Um E_r zu ermitteln, wählen wir eine dosenförmige Gauß'sche Fläche mit dem Radius r und der Länge l' , wobei $(r_1 < r < r_2)$ und $l' \ll l$ ist. Die gesamte Gauß'sche

Fläche liegt in großer Entfernung von den Enden der koaxialen Leiter (Abbildung 21.3):

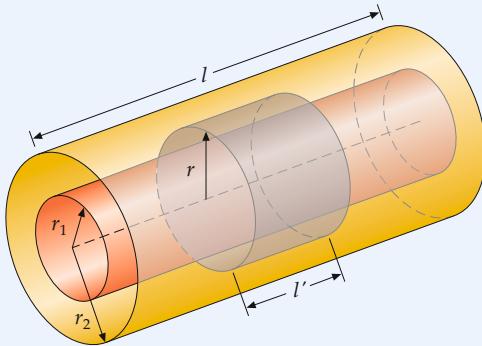


Abbildung 21.3 Detaillierte Skizze des Zylinderkondensators inklusive Gauß'scher Fläche.

4. Auf der Gauß'schen Fläche ist \mathbf{E} entweder null oder zeigt in radiale Richtung. Durch die flachen Enden auf beiden Seiten der Dose gibt es keinen Fluss von \mathbf{E} . Der Flächeninhalt des Mantels der Dose beträgt $2\pi r l'$. Da auf dieser Fläche $E_n = E_r$ ist, folgt aus dem Gauß'schen Gesetz:

$$\Phi_{\text{el}} = \oint_A E_n \, dA = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

mit

$$\begin{aligned} \oint_A E_n \, dA &= \int_{\text{links}} E_n \, dA + \int_{\text{Mantel}} E_n \, dA + \int_{\text{rechts}} E_n \, dA \\ &= 0 + \int_{\text{Mantel}} E_r \, dA + 0 = E_r \int_{\text{Mantel}} dA \\ &= E_r 2\pi r l' \end{aligned}$$

5. Einsetzen von $\oint_A E_n \, dA$ ergibt:

$$E_r 2\pi r l' = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

6. Berechnen Sie q_{innen} ausgehend von der Annahme, dass die Ladung pro Längeneinheit auf dem inneren Zylinder homogen verteilt ist :

$$\frac{q_{\text{innen}}}{q} = \frac{l'}{l}$$

und damit

$$q_{\text{innen}} = \frac{l'}{l} q$$

7. Setzen Sie dies in das Ergebnis aus Schritt 5 für q_{innen} ein und stellen Sie nach E_r um:

$$E_r 2\pi r l' = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{l'}{l} q$$

und damit

$$E_r = \frac{q}{2\pi l \epsilon_0 r}$$

8. Integration ergibt $U = |\phi_{r_2} - \phi_{r_1}|$:

$$\begin{aligned} \phi_{r_2} - \phi_{r_1} &= \int_{\phi_{r_1}}^{\phi_{r_2}} d\phi = - \int_{r_1}^{r_2} E_r \, dr \\ &= -\frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

und somit

$$U = |\phi_{r_2} - \phi_{r_1}| = \frac{q}{2\pi l \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

9. Berechnen Sie hieraus $C = q/U$:

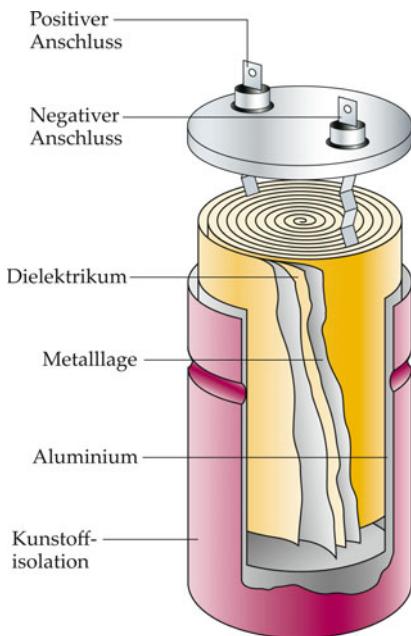
$$C = \frac{q}{U} = \boxed{\frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}}$$

Plausibilitätsprüfung: Da eine Kapazität die Dimension eines Produkts von ϵ_0 und einer Länge haben muss, ist das Ergebnis in Schritt 9 dimensionsmäßig richtig.

Kommentar: Die Kapazität eines Zylinderkondensators ist proportional zur Länge der Zylinder. – Den Faktor E_r konnten wir in Schritt 4 vor das Integral ziehen, da E_r aus Symmetriegründen überall auf der Mantelfläche gleich sein muss. ■



Ein Koaxialkabel ist ein langer Zylinderkondensator mit einem Volldraht als Innenleiter und einer Drahtgeflechtschirmung als Außenleiter. Die äußere Gummischicht wurde von dem Kabel abisoliert, damit die Leiter und die dazwischenliegende Kunststoffisolierschicht sichtbar sind. Das Drahtgeflecht soll den Innenleiter, auf dem die Informationen (z. B. das Video- oder Audiosignal einer Fernsehsendung) übertragen werden, vor elektromagnetischen Wellen abschirmen. (© <http://de.wikipedia.org/wiki/Koaxialkabel> (Stand: August 2008), http://commons.wikimedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License).



Schnittansicht eines Elektrolytkondensators. Das Dielektrikum ist ein Isolator.



Schnittansicht eines Folienkondensators. (© Bruce Iverson.)

Nach Beispiel 21.2 ist die Kapazität eines Zylinderkondensators

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (21.7)$$

DIE KAPAZITÄT EINES ZYLINDERKONDENSATORS

21.2 Speicherung elektrischer Energie

Wenn ein Kondensator geladen wird, werden meist Elektronen von dem positiv geladenen Leiter zum negativ geladenen gebracht. Dabei bildet sich auf dem positiven Leiter ein Elektronenmangel, während auf dem negativen ein Elektronenüberschuss entsteht. Als eine weitere Möglichkeit kann ein Kondensator dadurch geladen werden, dass positive Ladungen vom negativen Leiter zum positiven gebracht werden. In beiden Fällen muss beim Laden des Kondensators Arbeit verrichtet werden. Zum mindesten ein Teil dieser Arbeit wird als elektrische Energie gespeichert.

Wir gehen von zwei Leitern aus, die zunächst ungeladen sind und sich nicht berühren. Nun wird eine erste positive Ladung q' beim Laden übertragen. Die davon herrührende Spannung ist $U = q'/C$. Wird nun gegen die Spannung U eine kleine weitere Ladungsmenge dq' vom negativen Leiter zum positiven gebracht (Abbildung 21.4), steigt die elektrische Energie der Ladung in dem Kondensator um

$$dE_{el} = U dq' = \frac{q'}{C} dq'.$$

Der Gesamtzuwachs der elektrischen Energie E_{el} ist das Integral über dE_{el} , wenn q' von null bis zur Endladung q steigt (Abbildung 21.5):

$$E_{el} = \int dE_{el} = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Diese elektrische Energie wird in dem Kondensator gespeichert. Mithilfe der Definition der Kapazität $C = q/U$ kann sie auf verschiedene Weise durch q und U , durch C und U oder durch q und C ausgedrückt werden:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} C U^2. \quad (21.8)$$

DIE IN EINEM KONDENSATOR GESPEICHERTE ENERGIE

Übung 21.3: Ein $185\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator wird auf 200 V geladen. Welche Energie ist anschließend in ihm gespeichert? ▶

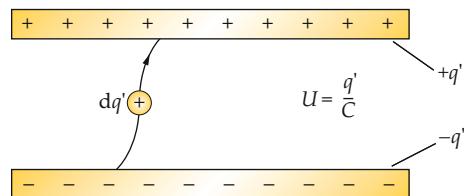


Abbildung 21.4 Wenn eine kleine positive Ladung dq' vom negativen Leiter zum positiven gebracht wird, steigt ihre elektrische Energie um $dE_{el} = U dq'$, wobei U die Spannung zwischen den Leitern ist

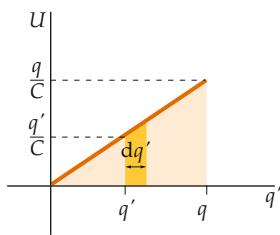


Abbildung 21.5 Die Arbeit zum Laden eines Kondensators ist das Integral über $U \, dq'$ von der Anfangsladung $q' = 0$ bis zur Endladung $q' = q$. Diese Arbeit ist der Flächeninhalt unter der Kurve, d. h. der Flächeninhalt des Dreiecks mit der Höhe q/C und der Breite q .

Übung 21.4: Leiten Sie aus $E_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i$ (Gleichung 20.29) mit $q_1 = -q$, $q_2 = +q$, $n = 2$ und $\phi_2 = \phi_1 + U$ die Formel für die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie (Gleichung 21.8) ab. ◀

Ein Kondensator wird an eine Batterie angeschlossen, um ihn zu laden. Wenn ein Leiter des Kondensators vollständig mit der Ladung $+q$ und der andere mit der Ladung $-q$ geladen ist, ist die Spannung U zwischen den Platten des Kondensators gleich der Spannung, die zwischen den Anschlüssen der Batterie herrschte, bevor der Kondensator an sie angeschlossen wurde. Die Gesamtarbeit, die die Batterie verrichtet, während sie den Kondensator lädt, beträgt $q U$, also das Doppelte der im Kondensator gespeicherten Energie. Die zusätzliche Arbeit, die die Batterie verrichtet, wird entweder als Wärmeenergie von der Batterie und von den Anschlussdrähten abgegeben oder als elektromagnetische Energie über elektromagnetische Wellen abgestrahlt. (Dies wird in Abschnitt 22.6 bzw. 27.3 genauer diskutiert.)

In Beispiel 21.3 wird das Laden eines Plattenkondensators anhand konkreter Zahlenwerte betrachtet.

Beispiel 21.3: Laden eines Plattenkondensators mit einer Batterie

Ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten, die eine Seitenlänge von 14 cm und einen Abstand von 2,0 mm haben, wird an eine Batterie angeschlossen und auf 12 V geladen. a) Welche Ladung hat der Kondensator danach? b) Welche Energie ist dann in dem Kondensator gespeichert? c) Im Anschluss daran wird die Batterie von dem Kondensator getrennt. Danach werden die Platten so lange auseinandergezogen, bis sie einen Abstand von 3,5 mm haben. Um wie viel ändert sich die Energie, wenn der Abstand der Platten von 2,0 mm auf 3,5 mm erhöht wird?

Problembeschreibung: a) Die Ladung auf dem Kondensator kann aus der Kapazität berechnet werden. b) Die im Kondensator gespeicherte Energie ergibt sich dann aus der Ladung und der Kapazität. c) Da der Kondensator

nicht mehr mit der Batterie verbunden ist, bleibt die Ladung auf den Platten beim Auseinanderziehen konstant. Die Energieänderung ergibt sich, indem zunächst aus der Ladung und der Spannung nach dem Auseinanderziehen der Platten die Energie der auseinandergezogenen Platten berechnet und hiervon die ursprüngliche Energie subtrahiert wird.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Ladung q auf dem Kondensator ist gleich dem Produkt aus der Kapazität C_0 des Kondensators und der Batteriespannung $U_0 = 12 \text{ V}$:

$$q = C_0 U_0$$

2. Die Kapazität des Plattenkondensators ergibt sich aus Gleichung 21.6:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d_0}$$

3. Setzen Sie die Kapazität C_0 aus Schritt 2 in die Gleichung von Schritt 1 ein und berechnen Sie die Ladung q :

$$\begin{aligned} q &= C_0 U_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d_0} U_0 \\ &= \frac{(8,85 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}) \cdot (0,14 \text{ m})^2}{0,0020 \text{ m}} \cdot (12 \text{ V}) = 1,04 \text{ nC} \\ &= \boxed{1,0 \text{ nC}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie die gespeicherte Energie aus Gleichung 21.8:

$$\begin{aligned} E_{el,0} &= \frac{1}{2} q U_0 = \frac{1}{2} (1,04 \text{ nC}) \cdot (12 \text{ V}) \\ &= 6,24 \text{ nJ} = \boxed{6,2 \text{ nJ}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Nun wird die Batterie getrennt und der Abstand der Platten auf 3,5 mm erhöht. Die Energieänderung ist proportional zur Spannungsänderung:

$$\Delta E_{el} = E_{el} - E_{el,0} = \frac{1}{2} q U - \frac{1}{2} q U_0 = \frac{1}{2} q (U - U_0)$$

2. Die Spannung ist das Produkt der Feldstärke E mit dem Plattenabstand d :

$$U = E d$$

und

$$U_0 = E_0 d_0$$

3. Das elektrische Feld an einer Leiteroberfläche ist $E = \sigma/\epsilon_0$ (Gleichung 19.20). Während der Kondensator von

der Batterie getrennt ist, bleiben die Oberflächenladungsdichte σ und damit auch das elektrische Feld E konstant:

$$E = E_0$$

4. Anhand der letzten beiden Schritte sieht man, dass die Spannung U proportional zum Abstand d ist:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{d_0}$$

und damit

$$U = \frac{d}{d_0} U_0$$

5. Setzen Sie nun die Spannung U aus Schritt 4 in die Formel aus Schritt 1 ein. Mit dem in Teilaufgabe b berechneten Wert für die elektrische Energie $E_{\text{el},0}$ können Sie nun ΔE_{el} berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{el}} &= \frac{1}{2} q \left(\frac{d}{d_0} U_0 - U_0 \right) = \left(\frac{d}{d_0} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} q U_0 \right) \\ &= \left(\frac{d}{d_0} - 1 \right) E_{\text{el},0} \\ &= \left(\frac{3,5 \text{ mm}}{2,0 \text{ mm}} - 1 \right) \cdot (6,24 \text{ nJ}) = \boxed{4,7 \text{ nJ}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Mit zunehmendem Plattenabstand sollte die elektrische Energie zunehmen: Da die Platten unterschiedlich geladen sind, ziehen sie einander an, so dass Arbeit verrichtet werden muss, um sie weiter zu trennen. Diese Arbeit führt dazu, dass die elektrische Energie zunimmt. Das Ergebnis aus Teilaufgabe c kann man auch auf eine andere Weise erhalten: Die entgegengesetzten geladenen Platten eines Kondensators üben eine Anziehungskraft aufeinander aus. Um den Plattenabstand zu erhöhen, muss gegen diese Anziehungskraft Arbeit verrichtet werden. Wir nehmen an, dass die untere Platte festgehalten und die obere bewegt wird. Die Kraft, die auf die obere Platte wirkt, ist gleich dem Produkt aus der Ladung $+q$ der Platte und dem elektrischen Feld E' der Ladung $-q$ der unteren Platte. Da die Ladung auf der oberen Platte den gleichen Beitrag zum Feld gibt wie die auf der unteren, ist dieses Feld gleich der Hälfte des Gesamtfelds E zwischen den Platten. Wenn wir von einer Spannung von 12 V und von einem Abstand von 2,0 mm ausgehen, beträgt die Gesamtfeldstärke zwischen den Platten

$$E = \frac{U}{d} = \frac{12 \text{ V}}{2,0 \text{ mm}} = 6,0 \text{ V} \cdot \text{mm}^{-1} = 6,0 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Damit ist die von der unteren auf die obere Platte ausgeübte Kraft

$$F = q E' = q (\frac{1}{2} E) = (1,04 \text{ nC}) \cdot (3,0 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}) = 3,1 \mu\text{N}.$$

Folglich muss die Arbeit

$$W = F \Delta d = (3,1 \mu\text{N}) \cdot (1,5 \text{ mm}) = 4,7 \text{ nJ}$$

verrichtet werden, um die obere Platte um $\Delta d = 1,5 \text{ mm}$ zu verschieben. Die Arbeit ist gleich dem Zuwachs an elektrischer Energie.

Weitergedacht: In Abbildung 21.6 ist eine Anwendung der Abstandsabhängigkeit der Kapazität gezeigt: Der kapazitive Schalter einer Computertastatur. An jeder Taste ist eine Metallplatte angebracht, die als die obere Kondensatorplatte wirkt. Beim Drücken der Taste wird der Abstand zwischen der oberen und der unteren Platte verringert, sodass die Kapazität steigt. Eine entsprechende Auswerteschaltung des Computers erkennt hieran den Tastendruck.

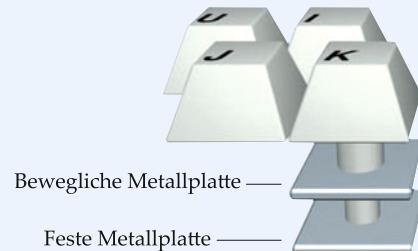


Abbildung 21.6 Darstellung der kapazitiven Funktionsweise einer Computertastatur.

Übung 21.5: Ermitteln Sie die Spannung U zwischen den Kondensatorplatten, nachdem der Abstand erhöht worden ist. ▶

Übung 21.6: a) Bestimmen Sie die Kapazität C_0 zu Beginn, wenn die Platten einen Abstand von 2,0 mm haben.
b) Wie groß ist die Kapazität C bei einem Plattenabstand von 3,5 mm? ▶

Die Energie des elektrischen Felds

Während ein Kondensator geladen wird, wird zwischen seinen Platten ein elektrisches Feld aufgebaut. Die Arbeit, die beim Laden des Kondensators verrichtet werden muss, kann man sich als die Arbeit vorstellen, die erforderlich ist, um das elektrische Feld zu erzeugen. Dabei wird die in einem Kondensator gespeicherte elektrische Energie als in dem elektrischen Feld gespeicherte Energie, d. h. als **Energie des elektrischen Felds**, angesehen.

Wir wollen nun zeigen, wie die in dem Plattenkondensator gespeicherte Energie von der elektrischen Feldstärke E zwischen den Platten abhängt. Zunächst ist die Spannung zwischen den Platten über $U = Ed$ mit dem elektrischen Feld verknüpft,

wobei d der Plattenabstand ist. Die Kapazität ist $C = \epsilon_0 A/d$ (Gleichung 21.6). Somit ist die gespeicherte Energie (Gleichung 21.8):

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) (E d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (A d).$$

Das Produkt $A d$ ist das Volumen des Raums zwischen den Kondensatorplatten, in dem das elektrische Feld enthalten ist. Die Energie pro Volumeneinheit heißt **Energiedichte** w . Damit ist die Energiedichte des elektrischen Felds E durch die folgende Gleichung gegeben:

$$w_{\text{el}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2. \quad (21.9)$$

DIE ENERGIEDICHTE DES ELEKTRISCHEN FELDS

Die Energie des elektrischen Felds pro Volumeneinheit ist proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke. *Obwohl wir Gleichung 21.9 anhand des elektrischen Felds zwischen den Platten eines Plattenkondensators abgeleitet haben, ist die Formel für beliebige elektrische Felder gültig.* Überall, wo im Raum ein elektrisches Feld herrscht, ist dessen elektrische Energie pro Volumeneinheit durch Gleichung 21.9 gegeben.

Übung 21.7: a) Berechnen Sie die Energiedichte w_{el} für Beispiel 21.3 bei einem Plattenabstand von 2,0 mm. b) Zeigen Sie, dass der Energiezuwachs in Beispiel 21.3 gleich dem Produkt aus w_{el} und dem Volumenzuwachs $A \Delta d$ des Gebiets zwischen den Platten ist. ◀

Um deutlich zu machen, dass Gleichung 21.9 allgemein gültig ist, wollen wir die Energie des elektrischen Felds eines kugelförmigen Leiters mit dem Radius r berechnen, der mit der Ladung q geladen ist. Die Eigenkapazität eines kugelförmigen Leiters ist nach Gleichung 21.3 $C = 4\pi\epsilon_0 r$. Die elektrische Energie ist nach Gleichung 21.8 $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} q^2/C$. Damit gilt für einen kugelförmigen Leiter:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{q^2}{r}. \quad (21.10)$$

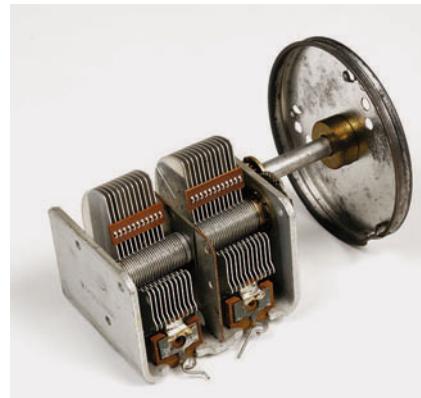
Wir wollen dies noch einmal ausgehend von der Energiedichte des elektrischen Felds (Gleichung 21.9) ableiten. Wenn der Leiter eine Ladung q trägt, ist das elektrische Feld radial und

$$E_r = 0, \quad r < r_K$$

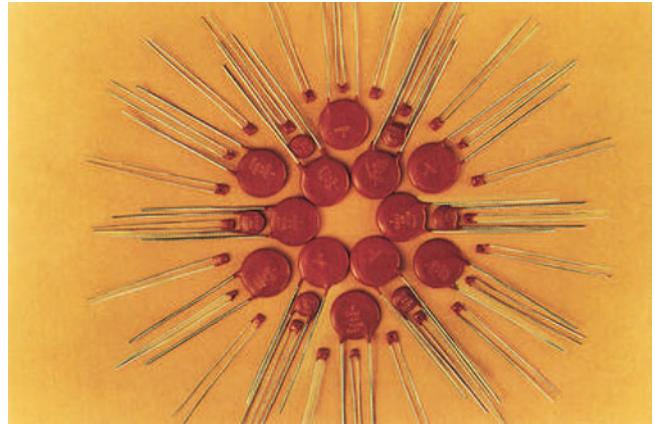
(innerhalb des kugelförmigen Leiters),

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r > r_K$$

(außerhalb des kugelförmigen Leiters). Da das elektrische Feld kugelsymmetrisch ist, wählen wir eine Hohlkugel als Volumenelement. Eine Hohlkugel mit dem Radius r und der Dicke dr hat das Volumen $dV = 4\pi r^2 dr$ (Abbildung 21.7). Die Energie



Drehkondensatoren mit veränderlichem Luftspalt wurden früher in den Abstimmschaltungen von Radios eingesetzt. Die halbkreisförmigen Platten können um die feststehenden gedreht werden, sodass sich ihr zwischen den Platten gelegener Flächeninhalt und damit die Kapazität ändert. (© Loren Winters/Visuals Unlimited.)



Keramikkondensatoren, wie sie in elektronischen Schaltungen verwendet werden. (Mit freundlicher Genehmigung von Tucsonix, Tucson, AZ.)

dE_{el} in diesem Volumenelement ist

$$\begin{aligned} dE_{\text{el}} = w_{\text{el}} dV &= \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right)^2 (4\pi r^2 dr) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} dr. \end{aligned}$$

Da das elektrische Feld für $r < r_K$ null ist, ergibt sich die Gesamtenergie in dem elektrischen Feld durch Integration von $r = r_K$ bis $r = \infty$ mit $\phi(\infty) = 0$ zu

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \int w_{\text{el}} dV = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \int_{r_K}^{\infty} r^{-2} dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_K} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \end{aligned} \quad (21.11)$$

Dies ist aber gerade Gleichung 21.8.

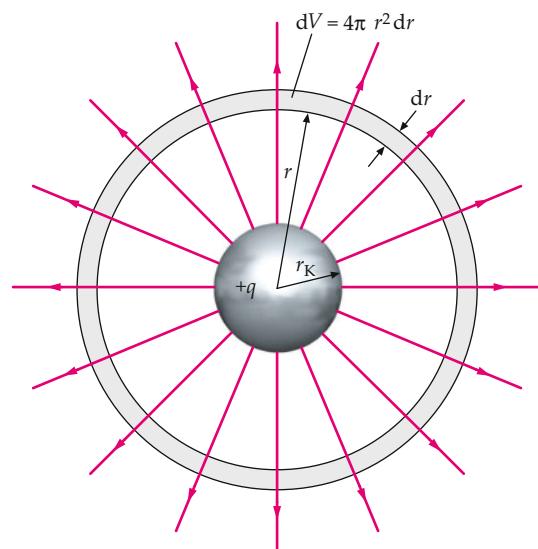


Abbildung 21.7 Zur Geometrie bei der Berechnung der elektrischen Energie eines kugelförmigen Leiters mit der Ladung q . Das Volumen des Raums zwischen r und $r + dr$ ist $dV = 4\pi r^2 dr$. Die Energie des elektrischen Felds in diesem Volumenelement ist $w_{el} dV$, wobei $w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ die Energiedichte ist.

21.3 Kondensatoren, Batterien und elektrische Stromkreise

Wir wollen nun betrachten, was geschieht, wenn ein zunächst ungeladener Kondensator an eine Batterie angeschlossen wird. Die Spannung zwischen den beiden Anschlüssen einer Batterie heißt ihre **Klemmenspannung**. Die Anschlüsse einer Batterie (Abbildung 21.8) sind mit zwei verschiedenen Leitern verbunden, den sogenannten *Elektroden*. Innerhalb der Batterie liegt zwischen den beiden Elektroden eine leitende Flüssigkeit oder Masse, der *Elektrolyt*. Durch chemische Reaktionen in der Batterie wird Ladung von einer Elektrode auf die andere übertragen. Dadurch wird eine Elektrode der Batterie, die **Anode**,

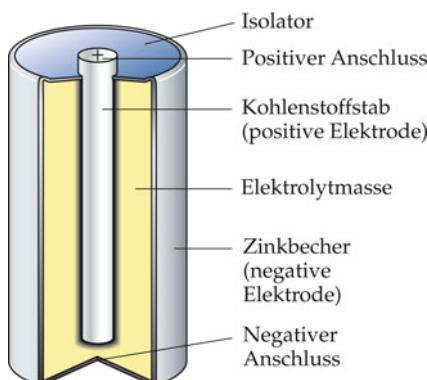


Abbildung 21.8 Ein Kohlezinkelement.

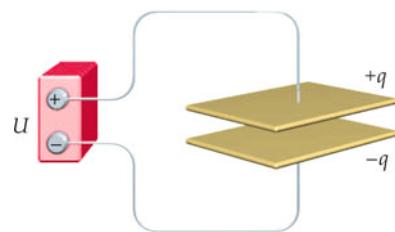


Abbildung 21.9 Wenn die Leiter eines ungeladenen Kondensators an eine Batterie angeschlossen werden, „pumpt“ die Batterie Ladung von einem Leiter auf den anderen, bis zwischen ihnen die gleiche Spannung wie zwischen den Anschlüssen der Batterie herrscht. (Batterien werden in Kapitel 22 ausführlicher behandelt. An dieser Stelle wird lediglich angenommen, dass eine Batterie Energie speichert, elektrische Energie liefert und zwischen ihren Anschlüssen eine konstante Spannung U herrscht.) Die über die Batterie übertragene Ladung ist $q = C U$.

positiv und die andere, die **Kathode**, negativ geladen. Diese Ladungstrennung wird durch chemische Vorgänge in der Batterie aufrechterhalten. Neben dem elektrischen Feld vom positiven Anschluss zum negativen außerhalb der Batterie ist auch in ihrem Inneren ein elektrisches Feld vom positiven Anschluss zum negativen gerichtet. Wenn die Platten eines ungeladenen Kondensators an die Batterie angeschlossen werden, verteilt sich die Ladung auf der negativen Elektrode auch auf die an sie angeschlossene Platte. Die Ladung auf der positiven Elektrode verteilt sich ebenfalls auf die an sie angeschlossene Kondensatorplatte. Durch diese Ladungsverteilung verringert sich sofort die Menge der Ladung auf jeder der Batterielektroden und somit die Spannung zwischen ihnen. Dies setzt chemische Reaktionen in der Batterie in Gang, die Ladungen von einem Anschluss zum anderen transportieren, um die Klemmenspannung auf dem Anfangspegel, der sogenannten **Leerlaufspannung**, zu halten. Diese Prozesse laufen ab, bis die Batterie so viele Ladungen von der einen zu der anderen Kondensatorplatte gebracht hat, dass die Spannung zwischen den Platten wieder auf die Leerlaufspannung der Batterie gestiegen ist.

Man kann sich eine Batterie als eine Ladungspumpe vorstellen. Wenn wir die Platten eines ungeladenen Kondensators an die Anschlüsse einer Batterie anschließen (Abbildung 21.9), bewirkt das Sinken der Klemmenspannung, dass die Batterie so lange Ladungen von einer Platte zu der anderen pumpt, bis die Leerlaufspannung wieder erreicht ist.

In elektrischen Schaltplänen wird die Batterie mit dem Schaltzeichen $\text{--}\parallel\text{--}$ dargestellt, bei dem die längere, dünne vertikale Linie den positiven Anschluss und die kürzere, dicke den negativen darstellt. Ein Kondensator wird mit dem Schaltzeichen $\text{--}\parallel\text{--}$ dargestellt.

Übung 21.8: Ein zunächst ungeladener $6,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator wird an eine $9,0\text{-V}$ -Batterie angeschlossen. Welche Gesamtladung fließt über die Batterie, während der Kondensator bis auf die Leerlaufspannung der Batterie geladen wird? ◀

Wir betrachten nun die Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren. Zunächst sollen zwei Kondensatoren wie in Abbildung 21.10 gezeigt miteinander verbunden sein. Dabei sind

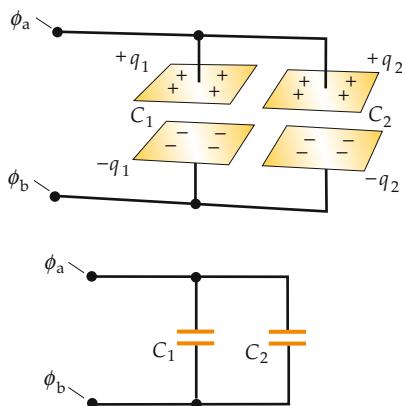


Abbildung 21.10 Zwei parallel geschaltete Kondensatoren. Die oberen Platten sind miteinander verbunden und damit auf dem gleichen Potenzial ϕ_a . Die unteren Platten sind ebenfalls miteinander verbunden und auf dem gleichen Potenzial ϕ_b .

einerseits die oberen Platten beider Kondensatoren mit einem Leitungsdraht verbunden und somit auf dem gleichen Potenzial und andererseits die beiden unteren Platten miteinander verbunden und ebenfalls auf einem gemeinsamen Potenzial. Man sagt dann, die Kondensatoren sind **parallel geschaltet**. Über parallel geschaltete Bauelemente herrscht immer *allein durch die Art und Weise, wie sie miteinander verbunden sind*, die gleiche Spannung. In Beispiel 21.4 wird die Ladung berechnet, mit der ein parallel geschaltetes Kondensatorpaar geladen werden kann.

Beispiel 21.4: Parallelschaltung von Kondensatoren

Wir betrachten die in Abbildung 21.11 gezeigte Schaltung aus einem $6,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator, einem $12,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator, einer $12,0\text{-V}$ -Batterie und einem Schalter. Anfangs ist der Schalter geöffnet, die Kondensatoren sind zunächst ungeladen. Wenn der Schalter geschlossen wird, beginnen sich die Kondensatoren zu laden. Schließlich sind sie vollständig geladen, wobei die Batterie wieder auf der Leerlaufspannung ist. a) Wie groß ist danach das Potenzial auf jedem der Leiter? (Wählen Sie den negativen Anschluss der Batterie als Bezugspunkt mit dem Potenzial null.) b) Wie hoch ist die Ladung auf jeder Kondensatorplatte? c) Welche Gesamtladung ist über die Batterie geflossen?

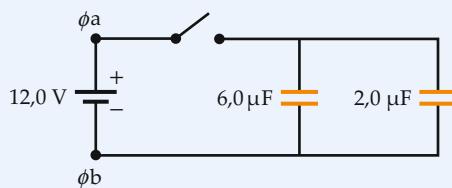


Abbildung 21.11 Parallelschaltung zweier Kondensatoren.

Problembeschreibung: Im elektrostatischen Gleichgewicht ist das Potenzial überall auf einem Leiter gleich. Nachdem keine Ladungen mehr fließen, sind daher jeweils alle Leiter, die mit einem Leitungsdraht verbunden sind, auf dem gleichen Potenzial. Wegen $q = CU$ kann die Ladung q auf jedem Kondensator für sich durch die Spannung U über den Kondensator ausgedrückt werden. Außerdem sind die Ladungen auf den beiden Platten eines der Kondensatoren gleich groß, aber entgegengesetzt.

Lösung:

Teilaufgabe a

Kennzeichnen Sie den positiven Anschluss (+) der Batterie sowie alle damit verbundenen Leiter mit einem roten Stift. Bezeichnen Sie den negativen Anschluss (-) der Batterie sowie die mit ihm verbundenen Leiter mit einem blauen Stift (Abbildung 21.12).

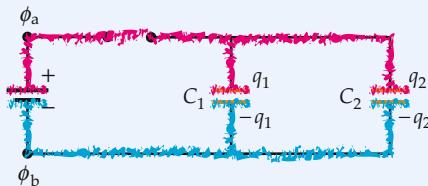


Abbildung 21.12 Positiv (rot) und negativ (blau) geladene Leiter.

Alle roten Punkte sind auf dem Potenzial

$$\phi_a = 12 \text{ V.}$$

Alle blauen Punkte sind auf dem Potenzial

$$\phi_b = 0.$$

Teilaufgabe b

Ermitteln Sie aus $q = CU$ den Betrag der Ladung auf den Platten. (Die Kondensatorplatte auf dem höheren Potenzial ist jeweils positiv geladen):

$$q_1 = C_1 U = C_1 (\phi_a - \phi_b) = (6,0 \mu\text{F}) \cdot (12,0 \text{ V}) = 72 \mu\text{C}$$

$$q_2 = C_2 U = C_2 (\phi_a - \phi_b) = (12,0 \mu\text{F}) \cdot (12,0 \text{ V}) = 144 \mu\text{C}$$

Teilaufgabe c

Die Platten werden geladen, da die Batterie als Ladungspumpe folgende Ladung überträgt:

$$q = q_1 + q_2 = 216 \mu\text{C}$$

Plausibilitätsprüfung: Bei gleicher Spannung von $12,0 \text{ V}$ über beide Kondensatoren ist die Ladung auf dem $12,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator doppelt so groß wie die auf dem $6,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator. Dies war zu erwarten, da die Kapazität eines Kondensators ein Maß dafür ist, welche Ladung er bei gegebener Spannung speichern kann.

Weitergedacht: Die weiter unten genauer betrachtete Ersatzkapazität beider Kondensatoren, d. h. die Kapazität eines Kondensators, der an die Stelle beider treten könnte, ist q/U , wobei q die über die Batterie fließende Ladung und U die Leerlaufspannung der Batterie ist. Im vorliegenden Beispiel ist $C = (216 \mu\text{C})/(12,0 \text{ V}) = 18,0 \mu\text{F}$.

In Abbildung 21.10 haben wir angenommen, dass die Punkte a und b an eine Batterie oder an ein anderes Bauelement angeschlossen sind, das eine Spannung $U = \phi_a - \phi_b$ zwischen den Platten jedes Kondensators aufrechterhält. Wenn die beiden Kondensatoren die Kapazitäten C_1 und C_2 haben, ergeben sich die auf den Platten gespeicherten Ladungen q_1 und q_2 zu

$$q_1 = C_1 U$$

und

$$q_2 = C_2 U.$$

Die gespeicherte Gesamtladung ist dann

$$q = q_1 + q_2 = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U.$$

In bestimmten Fällen kann eine Kombination von Kondensatoren in einer Schaltung durch einen einzigen Kondensator ersetzt werden, der die gleiche Wirkung wie die Kondensatoren zusammen erzielt. Dieser Ersatzkondensator wird als **Ersatzkapazität** bezeichnet. Das heißt: Wird eine Kombination anfangs ungeladener Kondensatoren an eine Batterie angeschlossen, fließt beim Laden der Kondensatoren die gleiche Ladung q über die Batterie, wie wenn ein einzelner ungeladener Kondensator mit der Ersatzkapazität an sie angeschlossen wird. Somit ist die Ersatzkapazität zweier parallel geschalteter Kondensatoren das Verhältnis der Ladung $q_1 + q_2$ zu der Spannung:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} = C_1 + C_2. \quad (21.12)$$

Die Ersatzkapazität C zweier parallel geschalteter Kondensatoren ist gleich der Summe der Einzelkapazitäten. Wird zu einem Kondensator ein zweiter Kondensator parallel geschaltet, wird die Kapazität der Kondensatorschaltung erhöht. Da effektiv die Fläche erhöht wird, auf der sich die Ladung verteilt, kann bei gleicher Spannung eine höhere Ladung gespeichert werden.

Die gleiche Argumentation kann auf drei oder mehr parallel geschaltete Kondensatoren erweitert werden (Abbildung 21.13):

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (21.13)$$

ERSATZKAPAZITÄT PARALLEL GESCHALTETER KONDENSATOREN

Ein Knoten ist ein Punkt, an dem sich eine Leitung in zwei oder mehr Leitungen verzweigt. Abbildung 21.14 zeigt zwei Kondensatoren, die so miteinander verbunden sind, dass eine

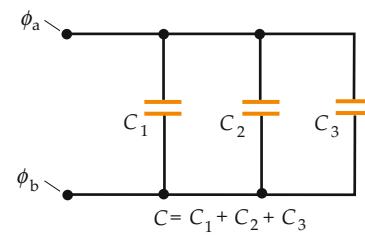


Abbildung 21.13 Drei parallel geschaltete Kondensatoren. Wenn weitere Kondensatoren parallel geschaltet werden, steigt die Ersatzkapazität.

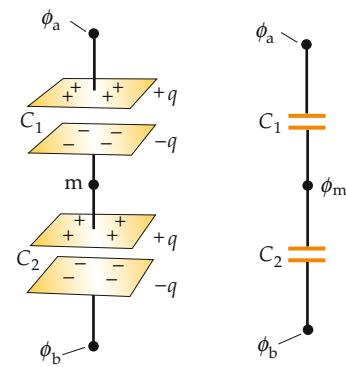


Abbildung 21.14 Die Gesamtladung der beiden miteinander verbundenen Kondensatorplatten in der Mitte ist null. Die Spannung über das Kondensatorpaar ist gleich der Summe der Spannungen über die Einzelkondensatoren. Die beiden Kondensatoren sind in Reihe geschaltet.

Platte eines Kondensators durch eine Leitung ohne dazwischenliegenden Knoten mit einer Platte eines zweiten Kondensators verbunden ist. Kondensatoren, die so miteinander verbunden sind, heißen **in Reihe geschaltet**. Ein solches in Reihe geschaltetes Kondensatorpaar wird in Beispiel 21.5 behandelt.

Beispiel 21.5: Reihenschaltung von Kondensatoren

Wir betrachten die in Abbildung 21.15 gezeigte Schaltung aus einem $6,0-\mu\text{F}$ -Kondensator, einem $12,0-\mu\text{F}$ -Kondensator, einer 12-V-Batterie und einem Schalter. Anfangs ist der Schalter geöffnet, die Kondensatoren sind zunächst ungeladen. Wenn der Schalter geschlossen wird, beginnen sich die Kondensatoren zu laden. Wenn die Batterie wieder auf der Leerlaufspannung ist, sind die Kondensatoren vollständig geladen. a) Wie groß ist danach das Potenzial auf jedem der Leiter? (Wählen Sie den negativen Anschluss der Batterie als Bezugspunkt mit dem Potenzial null.) b) Wie hoch ist die Ladung auf jeder Kondensatorplatte? c) Welche Gesamtladung ist über die Batterie geflossen?

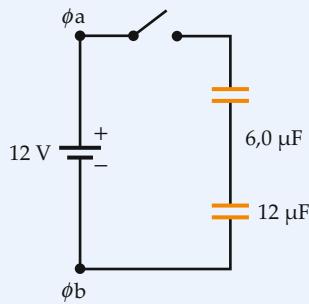


Abbildung 21.15 Reihenschaltung zweier Kondensatoren.

Problembeschreibung: Im elektrostatischen Gleichgewicht ist das Potenzial überall auf einem Leiter gleich. Nachdem keine Ladungen mehr fließen, sind jeweils alle Leiter, die mit einem Leitungsdraht verbunden sind, auf dem gleichen Potenzial. Die Ladung auf jedem Kondensator für sich kann wegen $q = C U$ durch die Spannung über den Kondensator ausgedrückt werden. Über den Spalt zwischen den Kondensatorplatten kann keine Ladung fließen.

Lösung:

Teilaufgabe a

Kennzeichnen Sie den positiven Anschluss (+) der Batterie sowie alle damit verbundenen Leiter mit einem roten Stift. Bezeichnen Sie den negativen Anschluss (-) der Batterie sowie die mit ihm verbundenen Leiter mit einem blauen Stift. Markieren Sie alle anderen miteinander verbundenen Leiter mit einem grünen Stift (Abbildung 21.16).

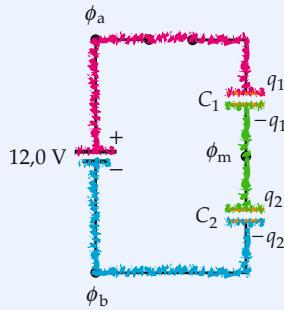


Abbildung 21.16 Positiv (rot) und negativ (blau) geladene mit der Batterie verbundene Leiter. Nicht mit der Batterie verbundene Leiter sind grün.

Alle roten Punkte sind auf dem Potenzial

$$\phi_a = 12 \text{ V}.$$

Alle blauen Punkte sind auf dem Potenzial

$$\phi_b = 0.$$

Alle grünen Punkte sind auf dem noch unbekannten Potenzial
 $\boxed{\phi_m}.$

Teilaufgabe b

1. Formulieren Sie ausgehend davon die Spannung über jeden Kondensator:

$$U_1 = \phi_a - \phi_m$$

und

$$U_2 = \phi_m - \phi_b$$

2. Schreiben Sie über $q = C U$ die Ladung auf jedem Kondensator in Abhängigkeit von der Spannung auf:

$$q_1 = C_1 U_1 = C_1 (\phi_a - \phi_m)$$

und

$$q_2 = C_2 U_2 = C_2 (\phi_m - \phi_b)$$

3. Eliminieren Sie ϕ_m aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_a - \phi_m = \frac{q_1}{C_1} \\ \phi_m - \phi_b = \frac{q_2}{C_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \phi_a - \phi_b = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}$$

4. Da beim Laden weder Ladung in das grüne Gebiet in Abbildung 21.16 hinein noch aus ihm heraus fließt, ist seine Gesamtladung null:

$$(-q_1) + q_2 = 0$$

und damit

$$q_1 = q_2$$

5. Wir setzen $q_1 = q_2 = q$. Ersetzen Sie q_1 und q_2 durch q und stellen Sie die Gleichung nach q um:

$$\phi_a - \phi_b = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

und damit

$$q = \frac{\phi_a - \phi_b}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{12 \text{ V} - 0 \text{ V}}{\frac{1}{6,0 \mu\text{F}} + \frac{1}{12 \mu\text{F}}} = 48 \mu\text{C}$$

$$q_1 = q_2 = \boxed{48 \mu\text{C}}$$

Teilaufgabe c

Über die Batterie fließt so viel Ladung, wie sich auf der oberen Platte von C_1 sammelt:

$$q_1 = q = \boxed{48 \mu\text{C}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Spannung über einen Kondensator beträgt q/C . Somit ist die Spannung über den $6,0\text{-}\mu\text{C}$ -Kondensator $(48\text{ }\mu\text{C})/(6,0\text{ }\mu\text{F}) = 8,0\text{ V}$, während die über den $12\text{-}\mu\text{C}$ -Kondensator $(48\text{ }\mu\text{C})/(12\text{ }\mu\text{F}) = 4,0\text{ V}$ beträgt. Die Summe der Spannungen ist $8,0\text{ V} + 4,0\text{ V} = 12,0\text{ V}$, wie es bei einer 12- V-Batterie sein sollte.

Weitergedacht: Die Ersatzkapazität beider Kondensatoren ist q/U , wobei q die über die Batterie fließende Ladung und U die Leerlaufspannung der Batterie ist. Im vorliegenden Beispiel ist $C = (48\text{ }\mu\text{C})/(12\text{ V}) = 4,0\text{ }\mu\text{F}$.

Übung 21.9: Bestimmen Sie das Potenzial ϕ_m auf den grün bezeichneten Leitern in Abbildung 21.16. ◀ ■

Frage 21.3

Nimmt die Gesamtladung in der Batterie während des Ladens der Kondensatoren in Beispiel 21.5 zu oder ab, oder bleibt sie gleich?

Wir betrachten noch einmal Abbildung 21.15. Beginnen wir bei Punkt b und durchlaufen den Stromkreis von dort aus einmal in Uhrzeigerrichtung. Beim ersten Schritt über die Batterie nimmt das Potenzial um 12 V zu. Anschließend fällt es über den $6\text{-}\mu\text{C}$ -Kondensator um 8 V und über den $12\text{-}\mu\text{C}$ -Kondensator noch einmal um 4 V. Auf dem Rückweg zum Punkt b bleibt es dann gleich. Damit ist die Summe der Spannungen (Potenzialänderungen) von $+12\text{ V}, -4\text{ V}$ und -8 V null. Dies ist kein Zufall: Die Summe der Spannungen auf einem beliebigen geschlossenen Weg ist stets null. Das Addieren der Spannungen auf einer geschlossenen Schleife und Nullsetzen der Summe ist ein nützliches Verfahren zur Behandlung elektrischer Stromkreise. Dieser sogenannte **Kirchhoff'sche Maschensatz** ergibt sich aus der Tatsache, dass die Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten nicht von dem Weg abhängt, auf dem man von einem Punkt zum anderen gelangt.

Die Summe der Spannungen auf einem geschlossenen Weg ist immer null.

DER KIRCHHOFF'SCHE MASCHENSATZ

Wir kommen auf Abbildung 21.14 zurück. Die Kondensatoren C_1 und C_2 sind in Reihe geschaltet und zunächst ungeladen. Wenn die Anschlusspunkte a und b nun an eine Batterie angeschlossen werden, werden Elektronen von der oberen Platte des Kondensators C_1 über die Batterie auf die untere Platte des Kondensators C_2 gepumpt. Dabei erhält die obere Platte von C_1 die Ladung $+q$, während die untere Platte von C_2 mit der Ladung $-q$ geladen wird. Wenn sich auf der oberen Platte von C_1 die Ladung $+q$ ausbildet, induziert das durch diese Ladung erzeugte elektrische Feld eine gleich große negative Ladung $-q$ auf der unteren Platte von C_1 . Diese Ladung auf der unteren Platte von C_1 stammt von Elektronen, die aus der oberen Platte von C_2

abgezogen werden. Damit bildet sich auf der oberen Platte von C_2 eine gleich große Ladung $+q$. Somit ist die Spannung über den ersten Kondensator C_1

$$U_1 = \frac{q}{C_1}$$

und ähnlich die über den zweiten Kondensator

$$U_2 = \frac{q}{C_2}.$$

Die Spannung über die beiden in Reihe geschalteten Kondensatoren ist die Summe dieser beiden Spannungen:

$$U = \phi_a - \phi_b = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \quad (21.14)$$

Die Ersatzkapazität der beiden Kondensatoren ist als

$$C = \frac{q}{U} \quad (21.15)$$

definiert. Dabei ist q die Ladung, die während des Ladevorgangs über die Batterie fließt. Wir ersetzen U in Gleichung 21.14 durch q/C und dividieren beide Seiten durch q :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (21.16)$$

Gleichung 21.16 kann auf drei oder mehr in Reihe geschaltete Kondensatoren verallgemeinert werden:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (21.17)$$

DIE ERSATZKAPAZITÄT IN REIHE GESCHALTETER KONDENSATOREN

Gleichung 21.17 ist nur dann gültig, wenn die Kondensatoren in Reihe geschaltet sind *und* die Gesamtladung auf jedem durch einen ansonsten isolierten Leiter verbundenen Kondensatorplattenpaar null ist.

Übung 21.10: Gegeben sind zwei Kondensatoren mit einer Kapazität von $20\text{ }\mu\text{F}$ und $30\text{ }\mu\text{F}$. Bestimmen Sie die Ersatzkapazität, wenn die Kondensatoren a) parallel, b) in Reihe geschaltet sind. ◀

Beachten Sie, dass die Ersatzkapazität der beiden in Reihe geschalteten Kondensatoren in Übung 21.10 kleiner als die Kapazität jedes Einzelkondensators ist. Wenn ein Kondensator in Reihe geschaltet wird, steigt $1/C$, sodass die Ersatzkapazität C sinkt. Damit sinkt die Kapazität der Kondensatorkombination, wenn zu einem Kondensator ein zweiter Kondensator in Reihe geschaltet wird. Im Wesentlichen wird dabei der Plattenabstand erhöht, sodass eine höhere Spannung erforderlich ist, um die gleiche Ladung zu speichern.

Beispiel 21.6 zeigt, wie die Ersatzkapazität bei einer Reihenschaltung von Kondensatoren genutzt werden kann, um die über diese Kondensatoren abfallenden Spannungen zu berechnen. Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren kommen in elektrischen Schaltungen sehr häufig vor. Die Beispiele 21.7 bis 21.9 zeigen einige weitere Anwendungen.

Beispiel 21.6: Die Ersatzkapazität einer Reihenschaltung

Ein 6,0- μF -Kondensator und ein 12- μF -Kondensator, die anfangs ungeladen sind, werden über eine 12-V-Batterie in Reihe geschaltet. Ermitteln Sie anhand der Formel für die Ersatzkapazität bei der Reihenschaltung von Kondensatoren die Ladung auf jedem Kondensator sowie die Spannung über ihn.

Problembeschreibung: Abbildung 21.17a zeigt die betrachtete Schaltung und Abbildung 21.17b den Ersatzkondensator mit der gleichen Ladung $q = CU$. Nachdem die Ladung bestimmt worden ist, kann der Spannungsabfall über jeden Kondensator ermittelt werden.

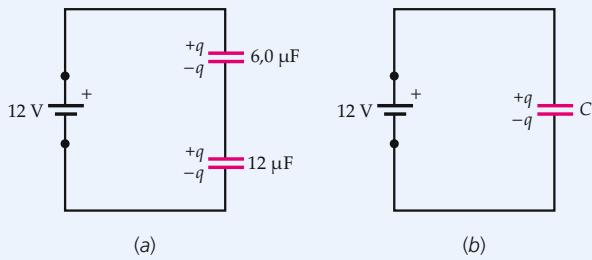


Abbildung 21.17 a) Reihenschaltung zweier Kondensatoren und b) dieselbe Schaltung nur mit Ersatzkapazität.

Lösung: 1. Jeder einzelne Kondensator hat die gleiche Ladung wie der Ersatzkondensator:

$$q = CU$$

2. Die Ersatzkapazität der Reihenschaltung ergibt sich aus:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6,0 \mu\text{F}} + \frac{1}{12 \mu\text{F}} = \frac{3}{12 \mu\text{F}}$$

$$C = 4,0 \mu\text{F}$$

3. Ermitteln Sie hieraus die Ladung q , die über die Batterie geflossen und mit der nun jeder Kondensator geladen ist:

$$q = CU = (4,0 \mu\text{F}) \cdot (12 \text{ V}) = [48 \mu\text{C}]$$

4. Bestimmen Sie aus der Ladung q die Spannung über den 6,0- μF -Kondensator:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{48 \mu\text{C}}{6,0 \mu\text{F}} = [8,0 \text{ V}]$$

5. Bestimmen Sie nun aus der Ladung q die Spannung über den 12- μF -Kondensator:

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{48 \mu\text{C}}{12 \mu\text{F}} = [4,0 \text{ V}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wie es sein sollte, beträgt die Summe der Spannungen 12 V und die Ergebnisse stimmen mit denen aus Beispiel 21.5 überein. ■

Beispiel 21.7: Schaltnetze

Gegeben sind mehrere Kondensatoren, die wie in Abbildung 21.18 miteinander verbunden sind. a) Bezeichnen Sie alle Parallelschaltungen von Kondensatoren. b) Bezeichnen Sie alle Reihenschaltungen von Kondensatoren.

Problembeschreibung: Über parallel geschaltete Kondensatoren liegt wegen der Art und Weise, wie sie miteinander verbunden sind, dieselbe Spannung an. Außerdem ist das Potenzial auf einem leitenden Weg konstant. Bezeichnen Sie jeden leitenden Weg mit einer anderen Farbe. Zwei Kondensatoren sind in Reihe geschaltet, wenn die Platte des einen Kondensators mit einer Platte des anderen verbunden ist, ohne dass ein Knoten dazwischenliegt.

ZUM VERSTÄNDNIS

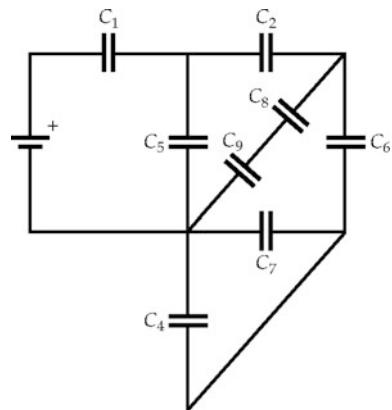


Abbildung 21.18 Schaltnetz von Kondensatoren.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Kennzeichnen Sie jedes Potenzial mit einer anderen Farbe (Abbildung 21.19). Potenzialänderungen sind nur über ein Bauelement wie einen Kondensator oder eine Batterie möglich.

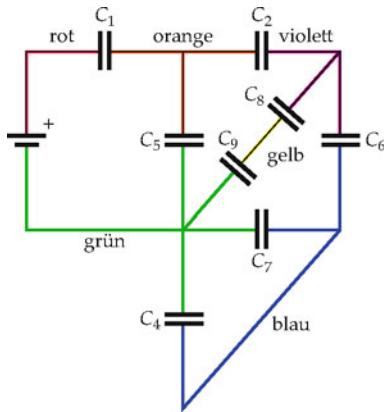


Abbildung 21.19 Schaltnetz von Kondensatoren, bei dem gleiche Farben gleiche Potenziale kennzeichnen.

2. Über parallel geschaltete Kondensatoren liegt wegen der Art und Weise, wie sie miteinander verbunden sind, dieselbe Spannung an. Die Kondensatoren 4 und 7 sind als einzige parallel geschaltet.

Teilaufgabe b

Zwei Kondensatoren sind in Reihe geschaltet, wenn die Platte des einen Kondensators ohne dazwischenliegenden Knoten mit einer Platte des anderen verbunden ist. Die Kondensatoren 8 und 9 sind als einzige in Reihe geschaltet.

Kommentar: Die Kondensatoren 1 und 2 sind nicht in Reihe geschaltet, da zwischen ihnen ein Knoten liegt. Die Kondensatoren 2 und 5 sind trotz des orangefarbenen Drahts an einer Platte jedes Kondensators nicht parallel geschaltet, da der violette Draht, der mit einer Platte des Kondensators 2 verbunden ist, nicht mit der zweiten Platte des Kondensators 5 verbunden ist. Somit kann über beide Kondensatoren nicht wegen der Art und Weise, wie sie verbunden sind, dieselbe Spannung anliegen.

Beispiel 21.8: Parallelschaltung zuvor in Reihe geschalteter Kondensatoren

Die beiden Kondensatoren aus Beispiel 21.6 werden vorsichtig von der Batterie und voneinander getrennt, sodass sich die Ladungen auf den Platten nicht ändern (Abbildung 21.20a). Anschließend werden sie zu einem Stromkreis zusammengeschaltet, der zwei geöffnete Schalter S_1 und S_2 enthält, wobei die beiden positiv geladenen Platten und die beiden negativ geladenen Platten jeweils auf der gleichen Seite sind (Abbildung 21.20b). Ermitteln Sie die Spannung über

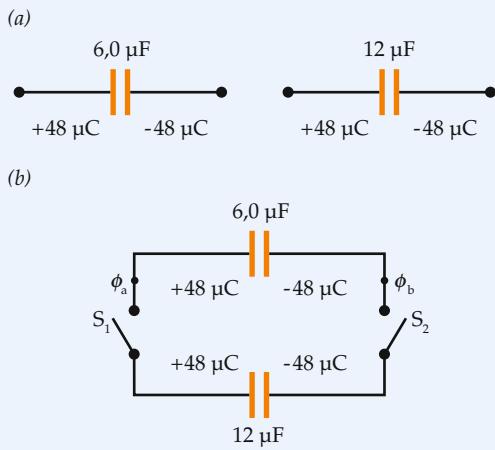


Abbildung 21.20 Darstellung der beiden Kondensatoren und deren Schaltungsnets mit S_1 und S_2 .

die Kondensatoren sowie die Ladung auf jedem Kondensator, nachdem die Schalter geschlossen wurden und der Stromfluss abgeklungen ist.

Problembeschreibung: Unmittelbar nachdem die beiden Kondensatoren von der Batterie getrennt worden sind, tragen Sie die gleiche Ladung von jeweils $48 \mu\text{C}$. Nachdem die neue Schaltung zusammengebaut wurde und die Schalter S_1 und S_2 geschlossen wurden, sind die Spannungen über beide Kondensatoren gleich. Ermitteln Sie anhand der Definition der Kapazität und der Ladungserhaltung die Ladung auf jedem Kondensator. Anhand der Ladungen kann dann die Spannung berechnet werden.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die Schaltung, nachdem beide Schalter geschlossen worden sind, und bezeichnen Sie die Bauelemente. Dabei soll $C_1 = 6,0 \mu\text{F}$ und $C_2 = 12 \mu\text{F}$ sein (Abbildung 21.21).

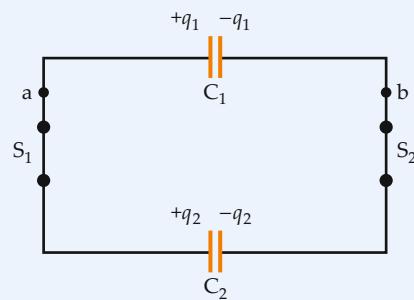


Abbildung 21.21 Schaltungsskizze nach Schließung der beiden Schalter.

2. Nach dem Schließen der Schalter ist die Spannung über jeden Kondensator gleich:

$$U = U_1 = U_2$$

3. Für jeden Kondensator gilt $U = q/C$. Setzen Sie dies in die Formel aus Schritt 2 ein:

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

4. Die Summe der Ladungen auf den beiden linken Kondensatorplatten bleibt $96 \mu\text{C}$:

$$q_1 + q_2 = 96 \mu\text{C}$$

5. Ermitteln Sie aus den beiden Gleichungen aus Schritt 3 und 4 die Ladung auf jedem Kondensator:

$$q_1 = [32 \mu\text{C}], \quad q_2 = [64 \mu\text{C}]$$

6. Berechnen Sie nun noch die Spannung:

$$U = \frac{q_1}{C_1} = [5,3 \text{ V}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wie es sein sollte, ist $q = q_1 + q_2 = 96 \mu\text{C}$ und außerdem $q_2/C_2 = 5,3 \text{ V}$.

Weitergedacht: Nachdem die Schalter geschlossen wurden, sind die beiden Kondensatoren parallel geschaltet, wobei über das Kondensatorpaar die Spannung zwischen dem Punkt a und dem Punkt b herrscht. Damit ist $C = C_1 + C_2 = 18 \mu\text{F}$, $q = q_1 + q_2 = 96 \mu\text{C}$ und $U = q/C = 5,3 \text{ V}$. Darüber hinaus kann man die Konfiguration nach Schließen der Schalter als Reihenschaltung ansehen. Allerdings ist hier die Summe der Ladungen auf jedem durch einen ansonsten isolierten Leiter verbundenen Kondensatorplattenpaar *nicht* null, sodass Gleichung 21.17 für diese Reihenschaltung nicht anwendbar ist.

Übung 21.11: Bestimmen Sie die in den Kondensatoren gespeicherte elektrische Energie, bevor und nachdem die Schaltung geändert worden ist. ▶ ■

Beispiel 21.9: Parallel- und Reihenschaltung mehrerer Kondensatoren

Drei Kondensatoren sind wie in Abbildung 21.22 gezeigt miteinander verbunden. a) Ermitteln Sie die Ersatzkapazität der Kondensatorschaltung. b) Die Kondensatoren seien anfangs ungeladen. Anschließend wird die Anordnung an eine $6,0\text{-V}$ -Batterie angeschlossen. Bestimmen Sie den Spannungsabfall über jeden Kondensator und die Ladung auf jedem Kondensator, nachdem die Batterie angeschlossen worden ist und keine Ladungen mehr fließen.

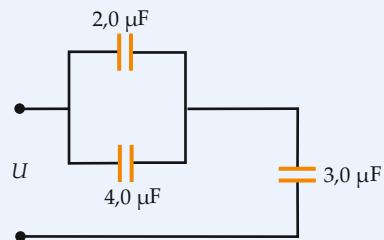


Abbildung 21.22 Gleichzeitige Parallel- und Reihenschaltung dreier Kondensatoren.

Problembeschreibung: Der $2,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator und der $4,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator sind parallel geschaltet, und die Parallelschaltung beider ist wiederum mit dem $3,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator in Reihe geschaltet. Wir ermitteln zunächst die Ersatzkapazität der beiden parallel geschalteten Kondensatoren (Abbildung 21.23a). Anschließend verknüpfen wir diese Ersatzkapazität mit dem $3,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator, um die Ersatzkapazität der gesamten Anordnung zu erhalten (Abbildung 21.23b). Wie Abbildung 21.23a zeigt, ist die Ladung auf der positiven Platte des $3,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensators gleich der Ladung $q = CU$, die über die Batterie fließt.

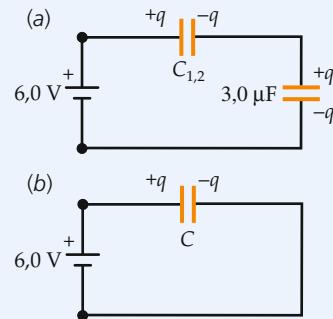


Abbildung 21.23 a) Schaltung mit Ersatzkapazität der Parallelschaltung. b) Ersatzkapazität der gesamten Schaltung.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Ersatzkapazität der beiden parallel geschalteten Kondensatoren ist die Summe der Einzelkapazitäten:

$$C_{1,2} = C_1 + C_2 = 2,0 \mu\text{F} + 4,0 \mu\text{F} = 6,0 \mu\text{F}$$

2. Berechnen Sie nun die Ersatzkapazität eines $6,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensators, der mit einem $3,0\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator in Reihe geschaltet ist:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{6,0 \mu\text{F}} + \frac{1}{3,0 \mu\text{F}} = \frac{1}{2,0 \mu\text{F}}$$

$$C = [2,0 \mu\text{F}]$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie die Ladung q , die beim Laden über die Batterie geflossen ist. Diese stimmt auch mit der Ladung auf dem 3- μF -Kondensator überein:

$$q = C U = (2,0 \mu\text{F}) \cdot (6,0 \text{ V}) = 12 \mu\text{C}$$

2. Die Spannung über den 3,0- μF -Kondensator ist q/C_3 :

$$U_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{q}{C_3} = \frac{12 \mu\text{C}}{3,0 \mu\text{F}} = 4,0 \text{ V}$$

3. Die Spannung über die Parallelschaltung $U_{1,2}$ ist $q/C_{1,2}$:

$$U_{1,2} = \frac{q}{C_{1,2}} = \frac{12 \mu\text{C}}{6,0 \mu\text{F}} = 2,0 \text{ V}$$

4. Die Ladung auf jedem der parallel geschalteten Kondensatoren ergibt sich nun aus $q_i = C_i U_{1,2}$ mit $U_{1,2} = 2,0 \text{ V}$:

$$q_1 = C_1 U_{1,2} = (2,0 \mu\text{F}) \cdot (2,0 \text{ V}) = 4,0 \mu\text{C}$$

$$q_2 = C_2 U_{1,2} = (4,0 \mu\text{F}) \cdot (2,0 \text{ V}) = 8,0 \mu\text{C}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie es sein sollte, ist die Summe der Spannungen über die parallel geschalteten Kondensatoren (2,0 V) und der Spannung über den 3,0- μF -Kondensator (4,0 V) gleich der Spannung der Batterie. Weiterhin ist die Summe der Ladungen auf den parallel geschalteten Kondensatoren ($4,0 \mu\text{C} + 8,0 \mu\text{C}$) gleich der Gesamtladung (12 μC) auf dem 3,0- μF -Kondensator.

Übung 21.12: Berechnen Sie die in jedem Kondensator gespeicherte Energie. ▶ ■

Wenn die Kondensatoren anders angeschlossen werden, nimmt die in den Kondensatoren gespeicherte elektrische Energie ab. Die „verloren gegangene“ elektrische Energie wird entweder als Wärmeenergie in den Drähten abgegeben oder abgestrahlt.

Die Ladung bleibt erhalten, wenn die Kondensatoren anders angeschlossen werden. Während die Gesamtenergie ebenfalls erhalten bleibt, bleibt die elektrische Energie für sich aber *nicht* erhalten.

21.4 Dielektrika

Als **Dielektrika** werden nichtleitende Materialien wie z. B. Luft, Glas, Papier oder Holz bezeichnet. Wie Michael Faraday erstmals experimentell beobachtete, steigt die Kapazität eines Kondensators um einen Faktor, wenn der Raum zwischen den beiden Leitern von einem Dielektrikum eingenommen wird, wobei der Wert des Faktors vom Dielektrikum abhängt. Dies liegt daran, dass das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten durch das Dielektrikum abgeschwächt wird. Damit wird bei gegebener Ladung der Platten die Spannung U verringert und die Kapazität (q/U) erhöht.

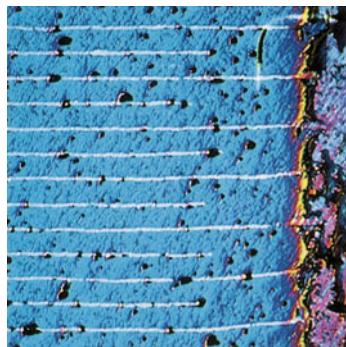
Wir betrachten zunächst einen isolierten geladenen Kondensator ohne Dielektrikum zwischen den Platten. Anschließend wird zwischen die Platten ein Dielektrikum eingeführt, sodass es den Zwischenraum zwischen den Platten vollständig ausfüllt. Wenn wir die elektrische Feldstärke vor Einführen des Dielektrikums E_0 nennen, ist die Feldstärke danach

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_{\text{rel}}} \quad (21.18)$$

DAS ELEKTRISCHE FELD IN EINEM DIELEKTRIKUM

Tabelle 21.1 Dielektrizitätskonstanten und Durchschlagfestigkeiten verschiedener Materialien

Material	Relative Dielektrizitätskonstante ϵ_{rel}	Durchschlagfestigkeit in kV/mm
Luft	1,00059	3
Bakelit	4,9	24
Benzin	2,0 (70 °F)	
Glas (Jenaer Glas)	5,6	14
Glimmer	5,4	10–100
Neopren	6,9	12
Papier	3,7	16
Paraffin	2,1–2,5	10
Plexiglas	3,4	40
Polystyrol	2,55	24
Porzellan	7	5,7
Strontiumtitannat	240	8
Transformatorenöl	2,24	12



Schnittansicht eines Mehrschichtkondensators mit einem blauen Keramikdielektrikum. Die weißen Linien sind die Kanten der leitenden Platten. (© Manfred Kage/Peter Arnold, Inc.)

Die Größe ϵ_{rel} heißt die **relative Dielektrizitätskonstante** des eingeführten Materials. Die Spannung U über einen Plattenkondensator, dessen Platten den Abstand d haben, ist

$$U = Ed = \frac{E_0 d}{\epsilon_{\text{rel}}} = \frac{U_0}{\epsilon_{\text{rel}}}.$$

Dabei ist U die Spannung mit Dielektrikum, während $U_0 = E_0 d$ die Spannung ohne Dielektrikum ist. Demnach ist die Kapazität mit Dielektrikum

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{U_0/\epsilon_{\text{rel}}} = \epsilon_{\text{rel}} \frac{q}{U_0}$$

oder

$$C = \epsilon_{\text{rel}} C_0, \quad (21.19)$$

DIE WIRKUNG EINES DIELEKTRIKUMS AUF DIE KAPAZITÄT

wobei $C_0 = q/U_0$ die Kapazität ohne Dielektrikum ist. Somit ist die Kapazität eines Plattenkondensators, der mit einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_{rel} gefüllt ist,

$$C = \frac{\epsilon_{\text{rel}} \epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d}, \quad (21.20)$$

wobei

$$\epsilon = \epsilon_{\text{rel}} \epsilon_0 \quad (21.21)$$

die **Dielektrizitätskonstante** des Dielektrikums heißt.

Bei der bisherigen Diskussion hatten wir angenommen, dass der Kondensator elektrisch isoliert ist (zu keinem Stromkreis gehört), sodass sich die Ladung auf seinen Platten beim Einführen des Dielektrikums nicht ändert. Dies ist der Fall, wenn der Kondensator zunächst geladen, vor Einführen des Dielektrikums aber von der Ladungsquelle (Batterie) getrennt wird. Wird das Dielektrikum dagegen eingeführt, während der Kondensator an die Batterie angeschlossen bleibt, pumpt diese zusätzliche Ladung auf den Kondensator, damit die ursprüngliche Spannung erhalten bleibt. Die Gesamtladung auf den Platten ist dann $q = \epsilon_{\text{rel}} q_0$. In beiden Fällen steigt die Kapazität q/U um denselben Faktor ϵ_{rel} .

Übung 21.13: Der 89-pF-Kondensator aus Beispiel 21.1 wird mit einem Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_{\text{rel}} = 2,0$ gefüllt. a) Wie groß ist danach seine Kapazität? b) Bestimmen Sie die Ladung auf dem Kondensator mit eingeführtem Dielektrikum, wenn dieser an eine 12-V-Batterie angeschlossen ist. ▶

Übung 21.14: Der Kondensator aus der vorigen Übung wird nun ohne Dielektrikum auf 12 V geladen und anschließend von der Batterie getrennt. Danach wird das Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_{\text{rel}} = 2,0$ eingeführt. Welchen Wert haben dann a) die Ladung q , b) die Spannung U und c) die Kapazität C ? ▶

Dielektrika erhöhen nicht nur die Kapazität eines Kondensators. Sie helfen auch, die parallelen Platten in einem Abstand getrennt zu halten. Darüber hinaus haben wir in Kapitel 20 gesehen, dass Luft bei Feldern über $3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ ionisiert wird und damit zu leiten beginnt, was als dielektrischer Durchschlag bezeichnet wird. Dielektrika erhöhen auch die Spannung, bei der dieser Durchschlag auftritt.

Wir betrachten wieder einen Plattenkondensator, der aus zwei Metallfolien mit einer dünnen Kunststofffolie dazwischen besteht. Die Kunststofffolie ermöglicht, dass die beiden Metallfolien sehr nahe beieinander sind, ohne sich jedoch zu berühren. Da der Kunststoff eine viel höhere Durchschlagfestigkeit als Luft hat, kann eine höhere Spannung erreicht werden, bevor es zum dielektrischen Durchschlag kommt. In Tabelle 21.1 sind die relativen Dielektrizitätskonstanten und die Durchschlagfestigkeiten einiger Dielektrika aufgeführt. Beachten Sie, dass für Luft $\epsilon_{\text{rel}} \approx 1$ ist, sodass in den meisten Fällen nicht zwischen Luft und Vakuum unterschieden zu werden braucht.

In den beiden Beispielen 21.10 und 21.11 werden diese Werte zur Berechnung der Kapazität von Plattenkondensatoren genutzt.

Beispiel 21.10: Ein Dielektrikum in einem Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei quadratischen Platten mit einer Kantenlänge von 10 cm mit einem Abstand $d = 4,0 \text{ mm}$. Ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_{\text{rel}} = 2,0$ hat die Abmessungen $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 4,0 \text{ mm}$. a) Welche Kapazität hat der Kondensator ohne Dielektrikum? b) Welche Kapazität hat er, wenn der Zwischenraum zwischen den Platten mit dem Dielektrikum gefüllt ist? c) Wie groß ist die Kapazität, wenn in den 4,0 mm breiten Zwischenraum ein Dielektrikum von $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 3,0 \text{ mm}$ eingeführt wird?

Problembeschreibung: Die Kapazität C_0 ohne das Dielektrikum ergibt sich aus dem Flächeninhalt und dem Abstand der Platten (Abbildung 21.24a). Wenn der Kondensator mit einem Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_{rel} gefüllt ist (Abbildung 21.24b), hat er nach Gleichung 21.19 die Kapazität $C = \epsilon_{\text{rel}} C_0$. Wenn der Kondensator nur teilweise mit dem Dielektrikum gefüllt ist (Abbildung 21.24c), isolieren wir den Kondensator und berechnen zunächst die Spannung U bei gegebener Ladung q_0 . Anschließend wenden wir die Definition der Kapazität $C = q/U$ an.

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Kapazität C_0 ohne das Dielektrikum ergibt sich aus Gleichung 21.6:

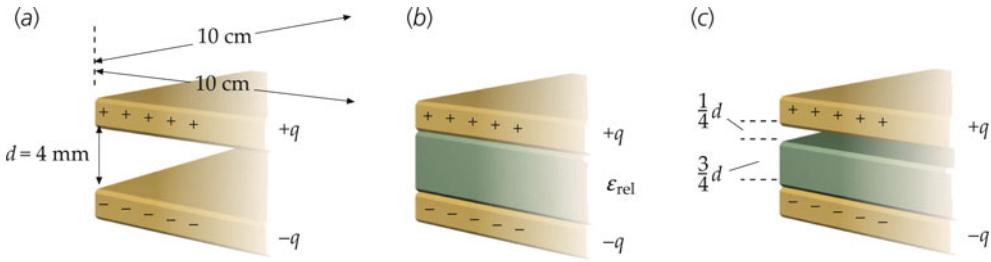


Abbildung 21.24 Plattenkondensator a) ohne Dielektrikum, b) mit Dielektrikum und c) mit partieller Füllung durch das Dielektrikum.

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8,85 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}) \cdot (0,10 \text{ m})^2}{0,0040 \text{ m}} = 22,1 \text{ pF}$$

$$= [22 \text{ pF}]$$

Teilaufgabe b

Wenn der Kondensator mit einem Material mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_{rel} gefüllt wird, steigt seine Kapazität C um den Faktor ϵ_{rel} :

$$C = \epsilon_{\text{rel}} C_0 = (2,0) \cdot (22,1 \text{ pF}) = 44,2 \text{ pF}$$

$$= [44 \text{ pF}]$$

Teilaufgabe c

1. Nun lassen wir den Kondensator elektrisch isoliert, so dass die Ladung beim Einführen oder Herausziehen des Dielektrikums konstant bleibt. Die Kapazität mit Dielektrikum ergibt sich aus der Ladung q_0 ohne Dielektrikum und aus der Spannung nach Einführen des Dielektrikums U :

$$C = \frac{q_0}{U}$$

2. Nachdem das Dielektrikum eingeführt worden ist, ist die Spannung U über den gesamten Zwischenraum die Summe der Spannungen über den leeren Zwischenraum und über das Dielektrikum:

$$U = U_{\text{Zwischenraum}} + U_{\text{Dielektrikum}}$$

$$= E_{\text{Zwischenraum}} \left(\frac{1}{4} d \right) + E_{\text{Dielektrikum}} \left(\frac{3}{4} d \right)$$

3. Die Feldstärke $E_{\text{Zwischenraum}}$ in dem leeren Zwischenraum ist σ_0 / ϵ_0 mit $\sigma_0 = q_0 / A$. Sie ist genauso groß wie die Feldstärke E_0 ohne Dielektrikum zwischen den Platten:

$$E_{\text{Zwischenraum}} = E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{q_0}{\epsilon_0 A}$$

4. In dem Dielektrikum ist das Feld um den Faktor ϵ_{rel} verringert:

$$E_{\text{Dielektrikum}} = \frac{E_0}{\epsilon_{\text{rel}}}$$

5. Wir setzen die Ergebnisse aus den beiden letzten Schritten in das Ergebnis aus Schritt 2 ein. Dies liefert die Spannung U in Abhängigkeit von der Dielektrizitätskonstanten ϵ . Die Spannung ohne Dielektrikum ist $U_0 = E_0 d$:

$$U = E_0 d_{\text{Zwischenraum}} + E_{\text{Dielektrikum}} d_{\text{Dielektrikum}}$$

$$= E_0 \cdot \left(\frac{1}{4} d \right) + \frac{E_0}{\epsilon_{\text{rel}}} \cdot \left(\frac{3}{4} d \right) = E_0 d \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4 \epsilon_{\text{rel}}} \right)$$

$$= U_0 \left(\frac{\epsilon_{\text{rel}} + 3}{4 \epsilon_{\text{rel}}} \right)$$

6. $C = q_0 / U$ ergibt die Kapazität mit Dielektrikum, ausgedrückt durch die Kapazität $C_0 = q_0 / U_0$ ohne Dielektrikum:

$$C = \frac{q_0}{U} = \frac{q_0}{U_0 \frac{\epsilon_{\text{rel}} + 3}{4 \epsilon_{\text{rel}}}} = \frac{q_0}{U_0} \left(\frac{4 \epsilon_{\text{rel}}}{\epsilon_{\text{rel}} + 3} \right)$$

$$= C_0 \left(\frac{4 \epsilon_{\text{rel}}}{\epsilon_{\text{rel}} + 3} \right) = (22,1 \text{ pF}) \cdot \left(\frac{4 \cdot 2,0}{2,0 + 3} \right) = [35 \text{ pF}]$$

Plausibilitätsprüfung: Ohne Dielektrikum ist $\epsilon_{\text{rel}} = 1$. Ersetzen von ϵ_{rel} durch 1 im letzten Schritt von Teilaufgabe c ergibt erwartungsgemäß $C = C_0$. Andererseits wollen wir den Fall betrachten, dass das Dielektrikum durch eine leitende Platte ersetzt wird. In einem Leiter herrscht stets $E = 0$, sodass ϵ_{rel} wegen $E = E_0 / \epsilon_{\text{rel}}$ (Gleichung 21.18) unendlich wäre. Für $\epsilon_{\text{rel}} \rightarrow \infty$ geht $4 \epsilon_{\text{rel}} / (\epsilon_{\text{rel}} + 3)$ gegen 4, sodass das Ergebnis aus dem letzten Schritt von Teilaufgabe c gegen $4 C_0$ geht. Andererseits verringert eine leitende Platte lediglich den Plattenabstand um die Dicke des Dielektrikums, sodass dann der Abstand zwischen den Platten nur noch $\frac{1}{4} d$ ist. Nach Gleichung 21.20 ($C = \epsilon_{\text{rel}} \epsilon_0 A / d$) sollte dann C ebenfalls gleich $4 C_0$ sein, was dem Ergebnis für sehr große ϵ_{rel} entspricht.

Weitergedacht: Die Ergebnisse dieses Beispiels sind unabhängig von der vertikalen Lage des Dielektrikums (oder zusätzlichen Leiters) in dem Zwischenraum zwischen den Platten. ■

Vorgehensweise: Kapazitätsberechnungen II

Um die Kapazität eines Kondensators mit einem Zwischenraum zu berechnen, der zwei oder mehr Dielektrika enthält, muss zunächst aus der Ladung q die elektrische Feldstärke E_0 ohne Dielektrika im Zwischenraum berechnet werden.

1. Wenn das Dielektrikum im Zwischenraum ist, beträgt die elektrische Feldstärke im Dielektrikum $E = E_0/\varepsilon_{\text{rel}}$, wobei ε_{rel} die Dielektrizitätskonstante ist.
2. Aus der Feldstärke E in einem Dielektrikum kann die Spannung $U_{\text{Dielektrikum}}$ über das Dielektrikum berechnet werden. Die Spannung U über den gesamten Zwischenraum ist dann die Summe der Spannungen über die einzelnen Dielektrika im Zwischenraum plus der Summe der Spannungen über die Leerräume im Zwischenraum.
3. Anschließend ergibt sich die Kapazität C aus $C = q/U$.

Plausibilitätsprüfung: Setzen Sie in Ihrem Ergebnis für die Kapazität C die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_{\text{rel}} = 1$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit C_0 , der Kapazität ohne Dielektrika.

Beispiel 21.11: Ein Eigenbau-Kondensator

Bei der Behandlung der Kondensatoren behauptet der Professor, dass man einen Plattenkondensator aus Wachspapier und Aluminiumfolie selbst herstellen kann. Ein Student probiert dies aus, wobei er einen Kondensator etwa von der Größe eines DIN-A4-Schreibblocks baut. Zunächst berechnet er, wie viel Ladung auf ihm gespeichert werden kann, wenn er an eine 9,0-V-Batterie angeschlossen wird.

Problembeschreibung: Gesucht ist die Ladung, die bei bekannter Kapazität aus der Definition $C = q/U$ erhalten werden kann. Die Kapazität eines Plattenkondensators lässt sich aus $C = \varepsilon_0 A/d$ berechnen. Dazu muss man die Dicke des Wachspapiers entweder schätzen oder messen.

Lösung: 1. Die Ladung auf dem Kondensator und seine Spannung hängen über die Kapazität zusammen:

$$q = C U$$

2. Die Kapazität ergibt sich aus der Formel für den Plattenkondensator:

$$C = \frac{\varepsilon_{\text{rel}} \varepsilon_0 A}{d}$$

3. Einsetzen von C aus Schritt 2 in Schritt 1 ergibt:

$$q = C U = \frac{\varepsilon_{\text{rel}} \varepsilon_0 U A}{d}$$

4. Ein DIN-A4-Schreibblock hat eine Größe von 21 mm \times 29,5 mm:

$$A = (21 \text{ mm}) \cdot (29,5 \text{ mm}) = 0,0620 \text{ m}^2$$

5. Wir wollen annehmen, dass ein Blatt Wachspapier ungefähr so dick wie ein Blatt aus dem vorliegenden Buch

ist. Messen Sie dazu die Dicke von 300 Blättern des Buchs (etwa Seite 1 bis Seite 600): 300 Blatt Papier sind 2,0 cm (0,020 m) dick. Damit ergibt sich die Dicke eines einzelnen Blatts zu $0,020 \text{ m}/300 = 66,7 \mu\text{m}$.

6. Berechnen Sie nun mit der Formel aus Schritt 3 die Ladung. Nehmen Sie dabei für die Dielektrizitätskonstante von Wachspapier 2,3 (Paraffin) an:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\varepsilon_{\text{rel}} \varepsilon_0 A U}{d} \\ &= \frac{2,3 (8,85 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}) \cdot (0,0603 \text{ m}^2) (9,0 \text{ V})}{66,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \\ &= 1,66 \cdot 10^5 \text{ pC} = 0,17 \mu\text{C} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Da ein Farad ein Coulomb pro Volt ist, ergibt sich als Einheit Coulomb. ■

Die gespeicherte Energie in Anwesenheit eines Dielektrikums

Wir berechnen die in einem Plattenkondensator mit einem Dielektrikum gespeicherte Energie aus der Formel

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} C U^2.$$

Die Kapazität C können wir durch den Flächeninhalt und durch den Abstand der Platten ausdrücken. Für die Spannung U setzen wir das Produkt aus elektrischer Feldstärke und Plattenabstand ein:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon A}{d} \right) (E d)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 (A d).$$

Das Produkt $A d$ ist das Volumen des Gebiets (zwischen den Platten), in dem das elektrische Feld enthalten ist. Somit ergibt

sich die Energie pro Volumeneinheit

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{rel}} \varepsilon_0 E^2. \quad (21.22)$$

Während ein Teil dieser Energie direkt zum elektrischen Feld gehört (Gleichung 21.9), gibt es einen Rest, der von der mechanischen Spannung im Zusammenhang mit der Polarisation des Dielektrikums herröhrt (Abschnitt 21.5).

Die Beispiele 21.12 und 21.14 zeigen, wie sich Dielektrika auf die elektrische Energie auswirken. Beispiel 21.13 schildert eine praktische Anwendung der Änderung der Kapazität eines Kondensators beim Einführen eines Dielektrikums.

Beispiel 21.12: Einführen eines Dielektrikums bei getrennter Batterie

Zwei parallel geschaltete, luftgefüllte Plattenkondensatoren, von denen jeder eine Kapazität von 2,00 μF besitzt, sind an eine 12,0-V-Batterie angeschlossen. Die Batterie wird von den parallel geschalteten Kondensatoren getrennt, und anschließend wird zwischen die Platten eines der Kondensatoren ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_{\text{rel}} = 2,50$ so eingeführt, dass es den Zwischenraum vollständig füllt. Berechnen Sie a) die Ladung und die gespeicherte Energie für jeden Kondensator sowie b) die in beiden Kondensatoren gespeicherte Gesamtenergie, bevor das Dielektrikum eingeführt wird. Ermitteln Sie c) die Spannung über jeden Kondensator, d) die Ladung auf jedem Kondensator und e) die auf den Kondensatoren gespeicherte Gesamtenergie, nachdem das Dielektrikum eingeführt worden ist.

Problembeschreibung: Da die beiden Kondensatoren parallel geschaltet sind, liegt über ihnen dieselbe Spannung an. Die Ladung q und die Gesamtenergie E_{el} lassen sich für jeden Kondensator aus seiner Kapazität C und aus der Spannung U über ihn ermitteln. Nachdem die Kondensatoren von der Batterie getrennt worden sind, ändert sich die Gesamtladung auf dem Kondensatorpaar nicht. Wird nun das Dielektrikum in einen der Kondensatoren eingeführt, ändert sich seine Kapazität. Die Spannung über die parallel geschalteten Kondensatoren ergibt sich dann aus der Gesamtladung und aus der Ersatzkapazität.

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Ladung auf jedem Kondensator ergibt sich aus der Kapazität C und aus der Spannung $U = 12,0 \text{ V}$:

$$q_{1,2} = C U = (2,00 \mu\text{F}) \cdot (12,0 \text{ V}) = [24,0 \mu\text{C}]$$

Teilaufgabe b

1. Die in jedem Kondensator gespeicherte Energie folgt aus der Ladung q und aus der Spannung U :

$$E_{\text{el},1,2} = \frac{1}{2} q_{1,2} U = \frac{1}{2} (24,0 \mu\text{C}) \cdot (12,0 \text{ V}) = [144 \mu\text{J}]$$

2. Die Gesamtenergie ist doppelt so groß wie die in jedem Kondensator gespeicherte Energie:

$$E_{\text{el}} = 2 E_{\text{el},1} = [288 \mu\text{J}]$$

Teilaufgabe c

1. Die Spannung über die parallel geschalteten Kondensatoren kann aus der Gesamtladung q und aus der Ersatzkapazität C berechnet werden:

$$U = \frac{q}{C}$$

2. Die Kapazität des Kondensators mit dem Dielektrikum ist um den Faktor ε_{rel} erhöht. Die Ersatzkapazität ist die Summe der Kapazitäten:

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 = C_1 + \varepsilon_{\text{rel}} C_1 \\ &= (2,00 \mu\text{F}) + (2,50) \cdot (2,00 \mu\text{F}) \\ &= 2,00 \mu\text{F} + 5,00 \mu\text{F} = 7,00 \mu\text{F} \end{aligned}$$

3. Die Gesamtladung bleibt 48,0 μC . Setzen Sie q und C ein und berechnen Sie daraus die Spannung U :

$$U = \frac{q}{C} = \frac{48,0 \mu\text{C}}{7,00 \mu\text{F}} = [6,86 \text{ V}]$$

Teilaufgabe d

Die Ladung auf jedem Kondensator ergibt sich wieder aus $q = C U$:

$$q_1 = (2,00 \mu\text{F}) \cdot (6,86 \text{ V}) = [13,7 \mu\text{C}]$$

$$q_2 = (5,00 \mu\text{F}) \cdot (6,86 \text{ V}) = [34,3 \mu\text{C}]$$

Teilaufgabe e

Die in jedem Kondensator gespeicherte elektrische Energie ergibt sich aus der Ladung und aus der Spannung nach Einführen des Dielektrikums:

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= E_{\text{el},1} + E_{\text{el},2} = \frac{1}{2} q_1 U + \frac{1}{2} q_2 U \\ &= \frac{1}{2} (q_1 + q_2) U \\ &= \frac{1}{2} (13,7 \mu\text{C} + 34,3 \mu\text{C}) \cdot (6,86 \text{ V}) = [165 \mu\text{J}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn in einen der Kondensatoren das Dielektrikum eingeführt wird, wird dessen Feld geschwächt und die Spannung über ihn gesenkt. Da beide Kondensatoren parallel geschaltet sind, muss Ladung von dem anderen Kondensator auf den fließen, in den das Dielektrikum eingeführt wird, damit die Spannung über beide wieder gleich wird. Beachten Sie, dass der

Kondensator mit dem Dielektrikum die höhere Ladung besitzt. Wenn die für jeden Kondensator in Teilaufgabe d berechneten Ladungen addiert werden, ist die Gesamtladung $q_1 + q_2 = 13,7 \mu\text{C} + 34,3 \mu\text{C} = 48 \mu\text{C}$, also gleich der Summe der ursprünglichen Ladungen.

Weitergedacht: Die Gesamtenergie von $165 \mu\text{J}$ ist um $123 \mu\text{J}$ geringer als die ursprüngliche Energie von $288 \mu\text{J}$. Wenn das Dielektrikum eingeführt wird, wird es von den Ladungen auf den Platten angezogen und muss daran gehindert werden, in den Zwischenraum beschleunigt zu werden. Währenddessen wird von der äußeren Kraft, die das Dielektrikum festhält, an diesem eine Arbeit von $-123 \mu\text{J}$ ($165 \mu\text{J} + 123 \mu\text{J} = 288 \mu\text{J}$) verrichtet. Um das Dielektrikum wieder aus dem Zwischenraum herauszuziehen, müssen $+123 \mu\text{J}$ verrichtet werden, die als elektrische Energie in den Kondensatoren gespeichert werden.

Beispiel 21.13: Eine provisorische Treibstoffanzeige

In einem Kleinflugzeug ist das Treibstoffanzeigegerät ausgefallen. Die Treibstoffanzeige besteht aus einem luftgefüllten Zylinderkondensator in dem Treibstofftank (Abbildung 21.25). Die Achse dieses Kondensators verläuft vertikal, und der Kondensatorzwischenraum ist bis in Höhe des Treibstoffstands mit Treibstoff gefüllt. Der mitreisende Passagier beginnt, sich Sorgen zu machen, ob der Treibstoff reicht. Gibt es eine Möglichkeit, wie sich der Pilot behelfen kann, um eine ungefähre Angabe über den Füllstand zu erhalten? Er hat gerade noch gesehen, dass der Tank halb voll war, als das Instrument kaputtging. Ein Handmultimeter (Abbildung 21.26), mit dem Kapazitätsmessungen möglich sind, ist an Bord.

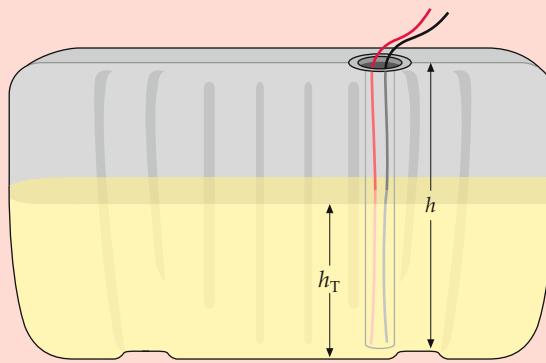


Abbildung 21.25 Im Treibstofftank befindet sich ein Zylinderkondensator, dessen Achse senkrecht verläuft. Die Länge des Kondensators stimmt mit der Höhe h des Tanks überein. Der Kondensatorzwischenraum ist bis in Höhe des Treibstoffstands h_T mit Treibstoff gefüllt.

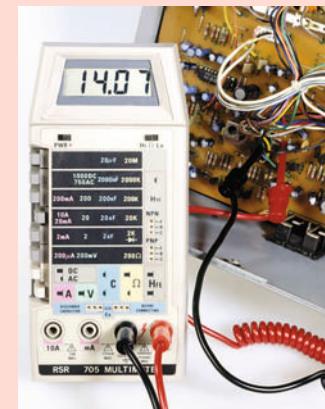


Abbildung 21.26 Handmultimeter. (© Paul Silverman/Fundamental Photographs.)

Problembeschreibung: Der Zylinderkondensator kann als Parallelschaltung zweier Kondensatoren modelliert werden, von denen einer in den Treibstoff getaucht ist und der andere herausragt. Der Längenanteil des untergetauchten Abschnitts an der Gesamtlänge ist ein Maß für den Treibstoffstand.

Lösung: 1. Lösen Sie die beiden vom Treibstofftank kommenden Drähte von der Treibstoffanzeige am Instrumentenbrett. Messen Sie die Kapazität $C_{1/2}$ bei halb vollem Tank:

$$C = C_{1/2}$$

2. Modellieren Sie den Kondensator als Parallelschaltung zweier Kondensatoren (Abbildung 21.27), von denen einer in den Treibstoff getaucht und der andere luftgefüllt ist. Zeichnen Sie einen Stromlaufplan der Schaltung. Bezeichnen Sie die Kapazitäten mit C_1 und C_2 , wobei C_2 die Kapazität des untergetauchten Abschnitts ist.

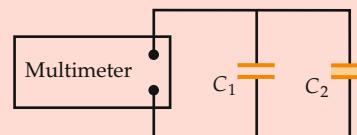


Abbildung 21.27 Skizze der Schaltung.

3. Die Kapazität eines Zylinderkondensators ist proportional zu seiner Länge. Wir bezeichnen die Höhe des Tanks (die gleich der Länge des Kondensators ist) mit h und die Höhe des Treibstoffstands mit h_T . Die Kapazität des Kondensators bei leerem Tank ist C_0 :

$$C_1 = \frac{h - h_T}{h} C_0 \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{h_T}{h} \varepsilon_{\text{rel}} C_0$$

4. Die Ersatzkapazität C ist die Summe der Kapazitäten:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{h - h_T}{h} C_0 + \frac{h_T}{h} \varepsilon_{\text{rel}} C_0 \\ = \left[1 + (\varepsilon_{\text{rel}} - 1) \frac{h_T}{h} \right] C_0$$

5. Schlagen Sie die Dielektrizitätskonstante von Benzin in Tabelle 21.1 nach (das Lehrbuch hat der Pilot zufällig einstecken):

$$\varepsilon_{\text{rel}} = 2,0$$

$$C = \left[1 + (2,0 - 1) \frac{h_T}{h} \right] C_0 = \left[1 + 1,0 \frac{h_T}{h} \right] C_0$$

6. Unmittelbar vor Ausfall des Instruments war der Tank halb voll. Setzen Sie $C = C_{1/2}$ und $h_T/h = 1/2$ und stellen Sie nach der Kapazität C_0 bei leerem Tank um:

$$C_{1/2} = \left[1 + 1,0 \frac{1}{2} \right] C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{2}{3} C_{1/2}$$

7. Setzen Sie die erhaltene Kapazität C_0 in das Ergebnis aus Schritt 5 ein und stellen Sie nach h_T/h um. Damit haben Sie eine Formel, um den angezeigten Kapazitätswert des Multimeters C in den verbleibenden Treibstoffanteil umzurechnen:

$$C = \left[1 + 1,0 \frac{h_T}{h} \right] \frac{2}{3} C_{1/2}$$

und somit

$$\frac{h_T}{h} = \left[\frac{3}{2} \frac{C}{C_{1/2}} - 1 \right]$$

Plausibilitätsprüfung: Einsetzen von $C_{1/2}$ für C im Ergebnis aus Schritt 7 liefert, wie es sein sollte, $h_T/h = \frac{1}{2}$. Außerdem führen das Einsetzen von $h_T = 0$ sowie von $C = C_0$ und das Umstellen nach C_0 auf den Wert $C_0 = \frac{2}{3} C_{1/2}$. Dies ist gerade die Formel, die wir in Schritt 6 für C_0 erhalten haben.

Weitergedacht: Da die Treibstofftanks nicht überall die gleiche Höhe haben, ist das Ergebnis nur ein grober Anhaltspunkt. Man kann dies bei vielen PKW-Kraftstofftanks beobachten. ■

Beispiel 21.14: Einführen eines Dielektrikums bei angeschlossener Batterie

ZUR ÜBUNG

Wir betrachten noch einmal die Schaltung aus Beispiel 21.12. Das Dielektrikum wird langsam in einen der Kondensatoren eingeführt, während die Batterie angeschlossen bleibt. Ermitteln Sie a) die Ladung auf jedem Kondensator, b) die in den Kondensatoren gespeicherte Gesamtenergie und c) die Arbeit, die die Batterie während des Einführens des Dielektrikums verrichtet.

Problembeschreibung: Da die Batterie angeschlossen bleibt, beträgt die Spannung über die Kondensatoren weiterhin 12,0 V. Dadurch sind die in jedem Kondensator gespeicherte Ladung und Energie bestimmt. Der Index 1 bezeichnet den Kondensator ohne Dielektrikum, der Index 2 den mit Dielektrikum.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie aus $q = CU$ unter Verwendung von $C_1 = 2,00 \mu\text{F}$ und $C_2 = 5,00 \mu\text{F}$ aus Beispiel 21.12 die Ladung auf jedem Kondensator.

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie aus $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2$ die in jedem Kondensator gespeicherte Energie. Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand von $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} q U$ nach.
2. Berechnen Sie die Energie nach Einführen des Dielektrikums, indem Sie $E_{\text{el},1}$ und $E_{\text{el},2}$ addieren.

Teilaufgabe c

Die von der Batterie während des Einführens des Dielektrikums verrichtete Arbeit ist das Produkt aus der Batteriespannung und der durch die Batterie fließenden Ladung. Diese Ladung ist gerade der Ladungszuwachs auf dem Kondensator C_2 .

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

$$q_1 = C_1 U = 24,0 \mu\text{C}$$

$$q_2 = C_2 U = 60,0 \mu\text{C}$$

Teilaufgabe b

1.

$$E_{\text{el},1} = 144 \mu\text{J}, \quad E_{\text{el},2} = 360 \mu\text{J}$$

2.

$$E_{\text{el}} = \boxed{504 \mu\text{J}}$$

Teilaufgabe c

$$\begin{aligned} W &= U \Delta q = (12,0 \text{ V}) \cdot (60,0 \mu\text{C} - 24,0 \mu\text{C}) \\ &= \boxed{432 \mu\text{J}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn das Dielektrikum in den Zwischenraum eingeführt worden ist, ist die Gesamtenergie der beiden Kondensatoren um $504 \mu\text{J} - 288 \mu\text{J} = 216 \mu\text{J}$ höher als ohne Dielektrikum. Dies ist zu erwarten, da die Batterie beim Einführen $432 \mu\text{J}$ abgibt, was für die Zunahme der in den Kondensatoren gespeicherten Energie beim Einführen des Dielektrikums mehr als ausreichend ist. (Das Dielektrikum wird durch elektrische Anziehungskräfte in den Kondensator hineingezogen, sodass an dem Dielektrikum Arbeit verrichtet werden muss, um zu verhindern, dass es während des Einführens beschleunigt wird.)

Frage 21.4

Hat die Arbeit, die die äußere Kraft an dem Dielektrikum verrichten muss, um zu verhindern, dass es während des Einführens beschleunigt wird, ein positives oder ein negatives Vorzeichen?

21.5 Molekulare Betrachtung von Dielektrika

Ein Dielektrikum schwächt das elektrische Feld zwischen den Platten eines Kondensators, da die Moleküle darin ein elektrisches Feld erzeugen, das dem von den Platten erzeugten Feld entgegengerichtet ist. Dieses von dem Dielektrikum erzeugte elektrische Feld stammt von elektrischen Dipolmomenten der Moleküle des Dielektrikums.

Auch wenn Atome und Moleküle elektrisch neutral sind, werden sie von elektrischen Feldern beeinflusst, da sie positive und negative Ladungen enthalten, die jeweils für sich auf diese äußeren Felder reagieren können. In einem Modell kann man sich ein Atom als einen sehr kleinen positiv geladenen Atomkern

Die Mitte der negativen Ladungsverteilung fällt mit der Mitte der positiven Ladung zusammen.

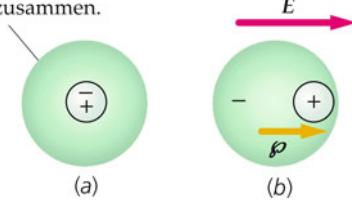


Abbildung 21.28 Schematische Darstellungen der Ladungsverteilungen eines Atoms oder nichtpolaren Moleküls. a) Ohne äußeres elektrisches Feld fällt die Mitte der positiven Ladungsverteilung mit der Mitte der negativen Ladungsverteilung zusammen. b) In Anwesenheit eines äußeren elektrischen Felds sind die Zentren der positiven und der negativen Ladungsverteilung gegeneinander verschoben, sodass ein induziertes Dipolmoment in Richtung des äußeren Felds erzeugt wird.

vorstellen, der von einer negativ geladenen Elektronenwolke umgeben ist. In einigen Atomen und Molekülen ist die Ladungskonfiguration so symmetrisch, dass „der Mittelpunkt der negativen Ladung“ mit dem Mittelpunkt der positiven Ladung zusammenfällt. Ein Atom oder Molekül mit dieser Symmetrie besitzt kein Dipolmoment; man sagt, es sei nichtpolar. Ist dagegen ein äußeres elektrisches Feld vorhanden, wirken auf die

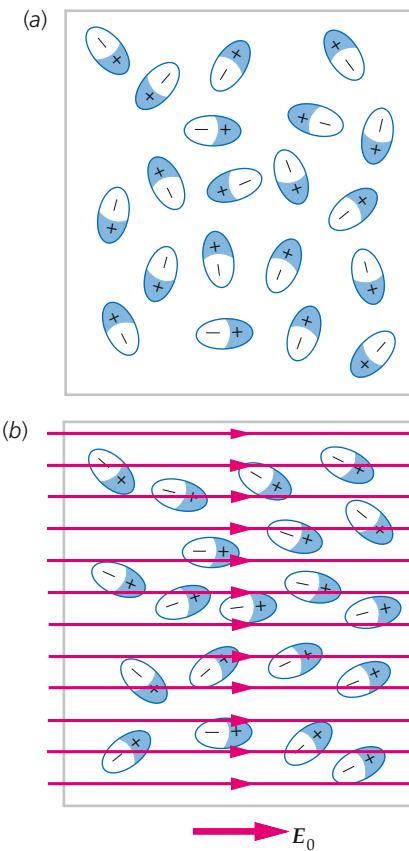


Abbildung 21.29 a) Die zufällig ausgerichteten elektrischen Dipole eines polaren Dielektrikums ohne äußeres elektrisches Feld. b) Bei Vorhandensein eines äußeren elektrischen Felds werden die Dipole teilweise im Feld ausgerichtet.

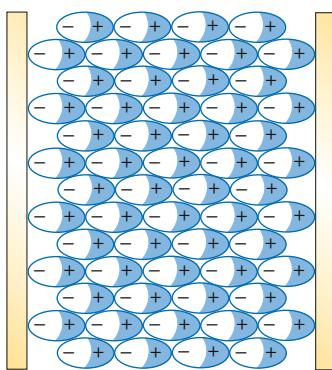


Abbildung 21.30 Wenn ein Dielektrikum zwischen die Platten eines Kondensators gebracht wird, polarisiert das elektrische Feld des Kondensators die Moleküle des Dielektrikums. Dabei entstehen auf der Oberfläche des Dielektrikums gebundene Ladungen, die ihr eigenes elektrisches Feld erzeugen, das zum äußeren Feld entgegengesetzt gerichtet ist. Somit schwächt das Feld der gebundenen Oberflächenladungen das elektrische Feld im Dielektrikum.

positive und auf die negative Ladung entgegengesetzt gerichtete Kräfte, sodass sich die Ladungen trennen, bis die Anziehungskräfte, die sie aufeinander ausüben, mit den Kräften des äußeren elektrischen Felds im Gleichgewicht sind (Abbildung 21.28). Man sagt dann, das Molekül sei polarisiert, wobei es sich wie ein elektrischer Dipol verhält.

In einigen Molekülen (z. B. denen von Salzsäure HCl oder Wasser H₂O) fallen die Zentren der positiven und der negativen Ladung auch ohne äußeres elektrisches Feld nicht zusammen. Wie schon in Kapitel 18 festgestellt wurde, besitzen diese polaren Moleküle ein permanentes elektrisches Dipolmoment.

Wird ein Dielektrikum in das Feld eines Kondensators gebracht, werden seine Moleküle so polarisiert, dass ein resultierendes Dipolmoment entsteht, das zu dem Feld parallel ist. Bei polaren Molekülen neigen die ursprünglich zufällig ausgerichteten

Dipolmomente dazu, sich wegen des vom Feld ausgeübten Drehmoments auszurichten. Inwieweit dies geschieht, hängt sowohl vom äußeren Feld als auch von der Temperatur ab. Der Grad der Ausrichtung ist annähernd proportional zu $\varphi E / (k_B T)$, wobei φE die maximale Energie eines Dipols in einem Feld E und $k_B T$ die charakteristische Wärmeenergie ist. Sind die Moleküle nicht polar, induziert das Feld Dipolmomente, die parallel zum Feld sind. In beiden Fällen werden die Moleküle im Dielektrikum in Richtung des äußeren Felds polarisiert (Abbildung 21.29).

Wie in Abbildung 21.30 gezeigt ist, besteht die Gesamtwirkung der Polarisierung eines homogenen Dielektrikums in einem Plattenkondensator darin, dass auf den Oberflächen des Dielektrikums in der Nähe der Platten Oberflächenladungen erzeugt werden. Da diese Oberflächenladungen an die Moleküle des Dielektrikums gebunden sind und sich nicht wie die freien Ladungen auf den leitenden Kondensatorplatten bewegen können, heißen sie **gebundene Ladungen**. Diese gebundenen Ladungen erzeugen ein elektrisches Feld, das zu dem von den freien Ladungen auf den Leitern erzeugten elektrischen Feld entgegengesetzt gerichtet ist. Somit wird das elektrische Gesamtfeld zwischen den Platten wie in Abbildung 21.31 gezeigt geschwächt.

In Beispiel 21.15 wird das induzierte Dipolmoment anhand eines Modells des Wasserstoffatoms berechnet.

Beispiel 21.15: Das induzierte Dipolmoment eines Wasserstoffatoms

Ein Wasserstoffatom besteht aus einem Proton mit der Ladung $+e$ und einem Elektron mit der Ladung $-e$. Da die Ladungsverteilung des Atoms kugelsymmetrisch ist, ist das Atom nicht polar. Wir betrachten ein Modell, in dem das Wasserstoffatom aus einer positiven Punktladung $+e$ in der Mitte einer homogen ge-

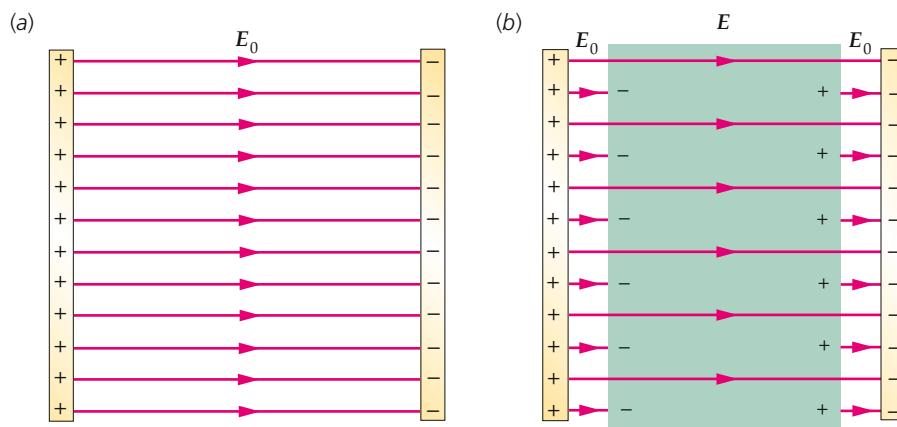


Abbildung 21.31 Das elektrische Feld zwischen den Platten eines Kondensators a) ohne Dielektrikum, b) mit Dielektrikum. Die Oberflächenladungen auf dem Dielektrikum schwächen das ursprüngliche Feld zwischen den Platten ab.

ladenen kugelsymmetrischen Ladungswolke mit dem Radius r und der Gesamtladung $-e$ besteht. Zeigen Sie, dass das induzierte Dipolmoment eines solchen Atoms, das in ein homogenes äußeres elektrisches Feld E gebracht wird, proportional E ist, d. h. $\varphi = \alpha E$ gilt, wobei α die Polarisierbarkeit heißt.

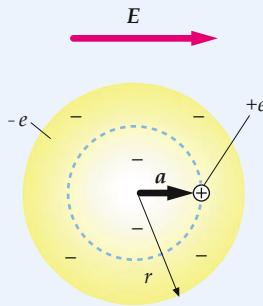


Abbildung 21.32 Darstellung des Wasserstoffatommodells, wobei das Proton um eine Distanz a zum Mittelpunkt der Elektronenwolke verschoben ist, was ein Dipolmoment induziert.

Problembeschreibung: Wir bezeichnen das Feld der homogenen negativen Ladungswolke mit E' . Ihr Mittelpunkt wird in dem äußeren Feld um eine Strecke a gegenüber der positiven Ladungsverteilung verschoben, sodass die durch das Feld eE auf die positive Punktladung ausgeübte Kraft mit der Kraft eE' der negativen Ladungswolke am Ort der Punktladung im Gleichgewicht ist (Abbildung 21.32). E' ermitteln wir aus dem Gauß'schen Gesetz. Anschließend berechnen wir das induzierte Dipolmoment $\varphi = ea$, wobei a die Verschiebung der positiven Ladung gegenüber des Zentrums der Ladungswolke ist. Das als qa definierte Dipolmoment haben wir in Abschnitt 18.4 eingeführt.

Lösung: 1. Drücken Sie den Betrag des induzierten Dipolmoments durch e und a aus:

$$\varphi = ea$$

2. Um a zu erhalten, berechnen wir das Feld E'_n der negativen Ladungswolke in einem Abstand a von der Mitte. E'_n ergibt sich aus dem Gauß'schen Gesetz. Wählen Sie zur Integration eine hohlkugelförmige Gauß'sche Oberfläche vom Radius a , die zur Ladungswolke konzentrisch ist. Auf dieser Oberfläche ist E'_n überall gleich:

$$\Phi_{el} = \oint E'_n dA = \frac{q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

$$E'_n = \frac{q_{\text{innen}}}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

3. Die Ladung in der Kugel mit dem Radius a ist gleich dem Produkt aus der Ladungsdichte und dem Volumen:

$$q_{\text{innen}} = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi r^3} \frac{4}{3}\pi a^3 = -e \frac{a^3}{r^3}$$

4. Setzen Sie diesen Wert für q_{innen} ein und berechnen Sie E'_n :

$$E'_n = \frac{q_{\text{innen}}}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{-e a^3 / r^3}{4\pi\epsilon_0 a^2} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} a$$

5. Stellen Sie die Gleichung nach a um:

$$a = -\frac{4\pi\epsilon_0 r^3}{e} E'_n$$

6. Die Normalkomponente E'_n ist negativ, da E'_n in die Gauß'sche Oberfläche hinein zeigt. Am Ort der positiven Ladung zeigt E'_n nach links. Da $|E'_n| = |E|$ ist, gilt:

$$E'_n = -E$$

und damit

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 r^3}{e} E$$

7. Setzen Sie die erhaltenen Ausdrücke für a und E'_n ein und drücken Sie φ durch die äußere Feldstärke E aus:

$$\varphi = ea = 4\pi\epsilon_0 r^3 E$$

und damit

$$\boxed{\varphi = \alpha E}$$

$$\text{mit } \alpha = 4\pi\epsilon_0 r^3$$

Plausibilitätsprüfung: Da φ und E in dieselbe Richtung zeigen, erwarten wir ein positives α , wie es sich hier ergibt.

Weitergedacht: Aus der Quantentheorie folgt tatsächlich, dass die Verteilung der negativen Ladung in einem Wasserstoffatom kugelsymmetrisch ist. Allerdings ist sie nicht homogen, sondern wächst zunächst bis zum Bohr'schen Elektronenradius an, außerhalb dessen sie exponentiell mit dem Abstand vom Kern abfällt. Dennoch ergibt die obige Berechnung, dass das Dipolmoment gemäß $\varphi = \alpha E$ proportional zum äußeren Feld ist. Bei einem Atom oder Molekül mit dem Atom- oder Molekürradius r liegt die Polarisierbarkeit α in der Größenordnung von $4\pi\epsilon_0 r^3$. Die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_{rel} hängt von der Polarisierbarkeit α und von der Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit ab.

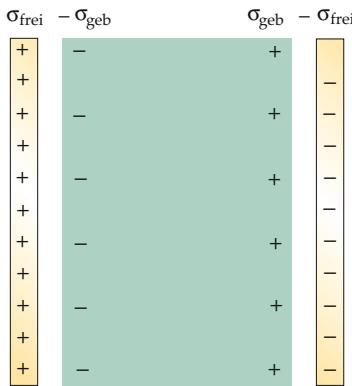


Abbildung 21.33 Ein Plattenkondensator mit einem Dielektrikum zwischen den Platten. Wenn die Platten nur geringen Abstand haben, können die Oberflächenladungen jeweils als unendliche Ladungsebene betrachtet werden. Das elektrische Feld der freien Ladungen auf den Platten ist nach rechts gerichtet und beträgt $E_0 = \sigma_{\text{frei}}/\epsilon_0$, während das der gebundenen Ladungen nach links gerichtet ist und $E_{\text{geb}} = \sigma_{\text{geb}}/\epsilon_0$ beträgt.

Die Größe der gebundenen Ladung

Die Dichte σ_{geb} der gebundenen Ladungen auf den Oberflächen des Dielektrikums hängt von der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_{rel} und von der Dichte σ_{frei} der freien Ladungen auf den Platten ab. Wir betrachten ein Dielektrikum zwischen den Platten eines Plattenkondensators (Abbildung 21.33). Falls das Dielektrikum nur eine sehr dünne Schicht zwischen den Platten ist und diese einen geringen Abstand haben, ist das elektrische Feld der Dichten der gebundenen Ladungen $+\sigma_{\text{geb}}$ rechts und $-\sigma_{\text{geb}}$ links im Dielektrikum gerade das Feld zweier unendlicher Ladungsebenen. Wird die positive Richtung nach rechts gewählt, ist das dementsprechende Feld E_{geb}

$$E_{\text{geb}} = \frac{\sigma_{\text{geb}}}{\epsilon_0}.$$

Dieses Feld ist nach links gerichtet, weil $\sigma_{\text{geb}} < 0$ ist, und schwächt das ursprüngliche Feld

$$E_0 = \frac{\sigma_{\text{frei}}}{\epsilon_0}.$$

Die Stärke des Gesamtfelds $E = E_0/\epsilon_{\text{rel}}$ ergibt sich zu

$$E = E_0 + E_{\text{geb}} = \frac{E_0}{\epsilon_{\text{rel}}}$$

oder

$$E_{\text{geb}} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\text{rel}}}\right) E_0.$$

Wenn wir E_{geb} als $\sigma_{\text{geb}}/\epsilon_0$ und E_0 als $\sigma_{\text{frei}}/\epsilon_0$ schreiben, ergibt sich schließlich

$$\sigma_{\text{geb}} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_{\text{rel}}}\right) \sigma_{\text{frei}}. \quad (21.23)$$

Die Dichte $|\sigma_{\text{geb}}|$ der gebundenen Ladungen ist daher immer kleiner als die Dichte $|\sigma_{\text{frei}}|$ der freien Ladungen auf den Kondensatorplatten. Wenn kein Dielektrikum vorhanden ist, ist sie null (d. h. $\epsilon_{\text{rel}} = 1$). Dagegen gilt bei einem leitenden Material zwischen den Platten $\epsilon_{\text{rel}} = \infty$ und $\sigma_{\text{geb}} = -\sigma_{\text{frei}}$.

Frage 21.5

Nimmt die Kapazität immer zu, wenn ein Dielektrikum in den Zwischenraum eines Kondensators eingeführt wird? Erläutern Sie Ihre Antwort.

Der piezoelektrische Effekt und der pyroelektrische Effekt

In bestimmten Kristallen, die polare Moleküle enthalten (wie z. B. Quarz, Turmalin und Topas), führt ein mechanischer Druck auf den Kristall zur Polarisation der Moleküle. Dies ist als **piezoelektrischer Effekt** bekannt. Die Polarisation des mit Druck beaufschlagten Kristalls führt zu einer Spannung, mit deren Hilfe ein elektrischer Strom erzeugt werden kann. Piezoelektrische Kristalle werden in Wandlern (z. B. Mikrofonen, Tonabnehmern von Plattenspielern, Schwingungsmeldern) eingesetzt, um mechanischen Druck in elektrische Signale umzuwandeln. Der umgekehrte piezoelektrische Effekt, in dem eine an den Kristall angelegte Spannung eine mechanische Verformung erzeugt, wird in manchen Kopfhörern und in vielen anderen Geräten genutzt. Da die Frequenz der Eigenschwingungen von Quarz im Radiofrequenzbereich liegt und seine Resonanzkurve ein sehr scharfes Maximum zeigt (zur Resonanz in Wechselstromkreisen siehe Kapitel 26; diese ist ähnlich zu der in Kapitel 11 behandelten mechanischen Resonanz), finden sogenannte Schwingquarze in großem Umfang zur Stabilisierung von Radiofrequenzoszillatoren und bei der Herstellung von Quarzuhren Verwendung.

Bei vielen Kristallen, die den piezoelektrischen Effekt zeigen, kann auch der **pyroelektrische Effekt** beobachtet werden. Dabei handelt es sich um die Erzeugung eines starken elektrischen Felds in einem Kristall, wenn die Temperatur des Kristalls erhöht wird. Pyroelektrische Kristalle werden gelegentlich verwendet, um geladene Teilchen auf so hohe Energien zu beschleunigen, dass Röntgenstrahlung entsteht oder es sogar zur Kernfusion kommt, wenn die geladenen Teilchen auf ein Metalltarget auftreffen.

🔗 Im Kontext: Kondensatoren im Umbruch

Der Ur-Kondensator war die Leidener Flasche – eine Glasflasche, die außen mit Metall beschichtet und innen entweder mit Wasser gefüllt war oder eine Metallfolie enthielt. Die Leidener Flasche wurde im 18. Jahrhundert von Experimentalphysikern der niederländischen Universität Leiden erfunden, die die Wirkungen elektrischer Ladungen auf Menschen und Tiere untersuchten. Dabei versuchten sie, eine möglichst große Ladung in einer Flasche Wasser zu speichern. Einer der Physiker hielt eine Flasche Wasser in einer Hand, während von einem Stromgenerator eine Ladung über ein Kabel in das Wasser geleitet wurde. Als er das Kabel mit der anderen Hand aus der Flasche ziehen wollte, bekam er einen elektrischen Schlag und fiel in Ohnmacht. Benjamin Franklin erkannte später, dass es bei der „Leidener Flasche“ überhaupt nicht auf die Flaschenform ankommt. Er verwendete stanniolbeschichtetes Fensterglas, die sogenannte Franklin'sche Tafel. Bei einer Vorführung hatte er mehrere dieser Tafeln parallel geschaltet, um zu demonstrieren, dass man damit einen Truthahn töten könnte. Allerdings erhielt dabei nicht der Truthahn, sondern er selbst einen Schlag, der ihn in die Knie zwang, was ihn zu der selbstkritischen Bemerkung veranlasste: „Da hätte es doch statt des Truthahns fast die Gans erwischt.“

Kurz nachdem 1746 die Abhandlung über die Leidener Flasche veröffentlicht worden war, führten 180 Soldaten die Kraft einer großen Leidener Flasche dem französischen Gerichtshof vor. Sie fassten sich im Kreis an den Händen an, und der Erste und der Letzte wurden an eine Leidener Flasche angeschlossen. Als ein einziger Spannungsstoß von der Leidener Flasche durch den Kreis ging, sprangen die Soldaten gleichzeitig auf und schrien.^{1,2}

Seitdem haben die Kondensatoren eine lange Entwicklung durchgemacht. Eine von vielen Veränderungen war der Zusatz von Mineralöl als Dielektrikum im 19. Jahrhundert. Allerdings waren ölfüllte Kondensatoren, wie sie damals bekannt waren, feuergefährlich, wenn sie heiß wurden. Daher begann das Chemieunternehmen Swann 1929 mit der Herstellung von polychlorierten Biphenylen oder PCB für Industriekondensatordielektrika.³ PCB sind schwer entflammbar und reaktionsträge mit anderen Substanzen. Außerdem sind die Dielektrizitätskonstanten noch etwas höher als die von Mineralölen. Leider stellte sich später heraus, dass PCB krebsfördernd sind; zudem sind sie hochgiftig, wenn sie unvollständig verbrennen.⁴ Seit 1979 ist die Herstellung von PCB in den Vereinigten Staaten verboten, und seither werden sie nicht mehr als Kondensatordielektrika eingesetzt.⁵ In der Bundesrepublik Deutschland wurde die Herstellung 1973 eingestellt, und der Einsatz ist seit 1989 (bis auf geringe Beimengungen) verboten.⁶ Allerdings sind bis heute zahlreiche ältere Kondensatoren im Einsatz, die PCB enthalten.⁷ Das PCB-Verbot bei neuen Kondensatoren zwang die Forscher, effizientere Kondensatoren zu entwickeln, wobei „effizient“ in diesem Zusammenhang meist eine höhere Kapazität pro Masseneinheit bedeutet.

Inzwischen gibt es verschiedenen Typen solcher effizienten Kondensatoren. Viele Kondensatoren nutzen heute die hohen Dielektrizitätskonstan-

ten von Spezialkeramiken⁸, Kunststofffilmen und Polymergelen. Die effizientesten Kondensatoren sind elektrische Doppelschichtkondensatoren (EDLCs). Diese bestehen aus Elektroden, die aus porösem Kohlenstoff hergestellt sind, der auf beiden Seiten eines *Elektrolytseparators* abgelagert ist. Die Schichten sind eng gewickelt und in einem Behälter untergebracht. Die Kohlenstoffschicht und der Elektrolytseparatator sind so dünn, dass der Abstand zwischen ihnen nur wenige Molekülllagen beträgt.⁹ Von „Doppelschichtkondensatoren“ spricht man, da jede Elektrolytschicht zwei Ladungsschichten umfasst.



Eine Leidener Flasche mit Glocken. Die Glocke an dem Stab über dem Verschluss ist mit einem Leiter auf der Innenseite der Flasche verbunden. Die zweite Glocke ist mit dem Leiter auf der Außenseite der Flasche verbunden. Die Anordnung wird aufgeladen, indem kurzzeitig eine Batterie zwischen die beiden Glocken geschaltet wird. Nachdem diese wieder entfernt worden ist, schwingt die leitende Kugel von einer Glocke zur anderen, wobei sie jedes Mal etwas Ladung überträgt. (Mit freundlicher Genehmigung von Bernhard Thomas.)

Da der Kohlenstoff sehr porös ist, besitzt jede Schicht eine sehr große Oberfläche (zwischen 400 und 2000 m²/g), über die der Kohlenstoff mit dem Elektrolyten in Kontakt steht. Es ist diese hohe Oberfläche zusammen mit der sehr dünnen Elektrolytschicht, die zu der hohen Kapazität führt. Allerdings haben die meisten Doppelschichtkondensatoren wegen der sehr dünnen Elektrolytschichten nur eine niedrige Durchschlagsspannung. Ein EDLC mit einem Durchmesser von ca. 3,5 cm und mit einer Länge von ca. 6,2 cm wiegt 60 g, hat eine Kapazität von 350 F und eine Nennspannung von 2,5 V.¹⁰ Wegen der niedrigen Durchschlagsspannung werden EDLC nur selten einzeln eingesetzt. Ein Kondensatorpack aus sechs in Reihe geschalteten solchen Zellen hat eine Ersatzkapazität von 58 F und eine Nennspannung von 15 V.¹¹

EDLCs sind heute bereits in Mobiltelefonen, Kameras und Kraftfahrzeugen zu finden. Schon bald könnten sie preiswert und leistungsfähig genug sein, um in Alltagsgeräten an die Stelle der Batterien zu treten.

1. Dray, P., *Stealing God's Thunder: Benjamin Franklin's Lightning Rod and the Invention of America*. New York: Random House, 2005, S. 45f.
2. Cohen, I. B., *Benjamin Franklin's Science*. Cambridge: Harvard University Press, 1990, S. 4–37.
3. *History of PCB Manufacturing in Anniston*. 2000. Solutia <http://www.solutia.com/pages/anniston/pchistory.asp> (Stand: Sept. 2006.)
4. Lloyd, R. J. W. et al., *Current Intelligence Bulletin 7 – Polychlorinated Biphenyls (PCBs)*. Washington, DC: Centers for Disease Control, 3. Nov. 1975, http://www.cdc.gov/niosh/78127_7.html (Stand: April 2009.)
5. *EPA Bans PCB Manufacture; Phases Out Uses*. United States Environmental Protection Agency, 19. April 1979, <http://www.epa.gov/history/topics/pcbs/01.htm> (Stand: April 2009.)
6. Schadstoffberatung Tübingen, Polychlorierte Biphenyle. <http://www.schadstoffberatung.de/polycbli.htm> (Stand: April 2009.)
7. *Brookhaven National Laboratory Reduces Mercury and PCBs*. United States Environmental Protection Agency, <http://www.epa.gov/epawaste/partnerships/npep/success/brookhav.htm> (Stand: April 2009.)
8. Chen, L. et al., „Migration and Redistribution of Oxygen Vacancy in Barium Titanate Ceramics“, *Applied Physics Letters*, 14. Aug. 2006, 89, Nr. 7, Letter 071916.
9. Prophet, G., „Supercaps for Supercaches“, *Electronic Design News*, 9. Jan. 2003, S. 53–58.
10. Blankenship, S., „It looks Like a Battery, but It's an Ultracapacitor“, *Power Engineering*, Mai 2004, S. 64f.
11. Everett, M., „Ultracapacitors Turn Malibus into Mercedes“, *Machine Design*, 8. Dez. 2005, S. 82–88.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Kondensator	Ein Kondensator ist ein Bauelement zum Speichern von Ladung und Energie. Er besteht aus zwei gegeneinander isolierten Leitern, die gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen tragen.
2. Elektrische Spannung	Definition der elektrischen Spannung als Potenzialdifferenz: $U = \phi_b - \phi_a. \quad (21.1)$
3. Kapazität	Definition der Kapazität: $C = \frac{q}{U}. \quad (21.2)$
Eines einzelnen Leiters	q ist die Gesamtladung des Leiters, U die Spannung des Leiters, also die Differenz zwischen Leiterpotenzial und Nullpotenzial im Unendlichen.
Eines Kondensators	q ist die Ladung auf einem der Leiter, U die Spannung zwischen den Leitern.
Eines isolierten kugelförmigen Leiters	$C = 4\pi\epsilon_0 r \quad (21.3)$
Eines Plattenkondensators	$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (21.6)$
Eines Zylinderkondensators	$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)} \quad \text{mit} \quad r_2 > r_1 \quad (21.7)$
Die in einem Kondensator gespeicherte Energie	$E_{el} = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 \quad (21.8)$
Die Energiedichte des elektrischen Felds	$w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (21.9)$
4. Ersatzkapazität	
Parallelschaltung von Kondensatoren	Der Spannungsabfall über alle parallel geschalteten Kondensatoren ist gleich: $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (21.13)$
Reihenschaltung von Kondensatoren	Die Spannungsabfälle über in Reihe geschaltete Kondensatoren addieren sich. Wenn die Gesamtladung auf jedem verbundenen Plattenpaar null ist, gilt: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (21.17)$
5. Dielektrika	
Makroskopisches Verhalten	Ein nichtleitendes Material wird Dielektrikum genannt. Wenn zwischen die Platten eines Kondensators ein Dielektrikum eingeführt wird, wird das elektrische Feld im Dielektrikum geschwächt und die Kapazität dabei um den Faktor ϵ_{rel} erhöht. ϵ_{rel} heißt relative Dielektrizitätskonstante.
Mikroskopische Betrachtung	Das elektrische Feld im Dielektrikum eines Kondensators wird geschwächt, da die (sowohl zuvor vorhandenen als auch induzierten) Dipolmomente der Moleküle dazu neigen, sich im Feld auszurichten. Dadurch erzeugen sie im Dielektrikum ein elektrisches Feld, das dem angelegten Feld entgegengesetzt gerichtet ist. Das ausgerichtet Dipolmoment des Dielektrikums ist proportional zum angelegten Feld.
Elektrisches Feld im Inneren	$E = \frac{E_0}{\epsilon_{rel}} \quad (21.18)$
Wirkung auf die Kapazität	$C = \epsilon_{rel} C_0 \quad (21.19)$
Dielektrizitätskonstante ϵ	$\epsilon = \epsilon_{rel} \epsilon_0 \quad (21.21)$
Anwendungen von Dielektrika	1. Erhöhung der Kapazität 2. Erhöhung der Durchschlagfestigkeit 3. Physikalische Trennung der Leiter

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
6. *Piezoelektrischer Effekt	In bestimmten Kristallen, die polare Moleküle enthalten, polarisiert mechanischer Druck die Moleküle, sodass sich über den Kristall eine Spannung aufbaut. Umgekehrt erzeugt eine angelegte Spannung eine mechanische Verformung (Deformation) im Kristall.
7. *Pyroelektrischer Effekt	In bestimmten Kristallen ändert eine Temperaturzunahme die Polarisation des Materials, was zur Entstehung einer Spannung über den Kristall führt.

Antworten auf die Verständnisfragen

- $C_2 = C_1$. Die Kapazität hängt nicht von der Ladung ab. Wenn die Ladung verdreifacht wird, verdreifacht sich das Potenzial der Kugel, während sich das nur vom Radius der Kugel abhängige Verhältnis q/U nicht ändert.
- Die Kapazität eines Kondensators hängt nicht vom Potenzial ab. Um die Spannung U zu erhöhen, muss die Ladung q erhöht werden und umgekehrt. Das Verhältnis q/U hängt nur von der Geometrie des Kondensators und von der Art des Dielektrikums zwischen den Platten ab.
- Die Gesamtladung ist gleich geblieben. Die Übertragung von Ladung durch eine Batterie lässt sich mit der Funktion einer Wasserpumpe vergleichen, die Wasser überträgt. Die Ladungsmenge in einer Batterie ändert sich ebenso wenig wie die Wassermenge in einer Wasserpumpe.
- Sie hat einen negativen Wert.
- Ja. Die Kapazität ist als $C = q/U$ definiert. Damit ist die Kapazität C eines isolierten geladenen Kondensators, dessen Ladung q konstant ist, umgekehrt proportional zur Spannung U . Wird ein Dielektrikum in einen isolierten Kondensator eingeführt, führen die auf der Oberfläche des Dielektrikums erzeugten gebundenen Oberflächenladungen zu einer verringerten elektrischen Feldstärke im Dielektrikum. Da die Spannung direkt proportional zur elektrischen Feldstärke ist, bedeutet eine verringerte elektrische Feldstärke eine verringerte Spannung und eine erhöhte Kapazität.

Lösungen der Übungen

- $9,0 \cdot 10^9$ m, also das 1400-fache des Erdradius. Das Farad ist tatsächlich eine sehr große Einheit.
- $A = 1,1 \cdot 10^8$ m²; dies entspricht einem Quadrat mit einer Seitenlänge von 11 km.
- 3,7 J
- $E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 = \frac{1}{2} (-q) U_1 + \frac{1}{2} (+q) (U_1 + U) = \frac{1}{2} q U$
- 21 V
- a) $C_0 = 87 \mu\text{F}$, b) $C_0 = 50 \mu\text{F}$
- a) $w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = 160 \mu\text{J/m}^3$,
b) $\Delta \text{Vol} = A \Delta d = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{m}^3$, $w_{\text{el}} \Delta \text{Vol} = 4,7 \text{nJ}$ in Übereinstimmung mit Beispiel 21.3
- 54 μC
- 4,0 V
10. a) 50 μF , b) 12 μF
- $E_{\text{el,A}} = q_2/(C_1) + q_2/(C_2)$, mit $q = 48 \mu\text{C}$. Somit ist $E_{\text{el,A}} = 288 \mu\text{J}$. $E_{\text{el,E}} = q_1^2/(2C_1) + q_2^2/(2C_2) = 256 \mu\text{J}$.
- $E_{\text{el,2}} = 4,0 \mu\text{J}$, $E_{\text{el,3}} = 24 \mu\text{J}$, $E_{\text{el,4}} = 8,0 \mu\text{J}$. Beachten Sie, dass $E_{\text{el,2}} + E_{\text{el,3}} + E_{\text{el,4}} = 36 \mu\text{J} = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} q^2/C = \frac{1}{2} C U^2$ ist.
- a) 0,18 nF, b) 2,1 nC
- a) $q = 1,1 \text{nC}$ (ungeändert), b) $U = 6,0 \text{V}$, c) $C = 180 \text{pF}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

21.1 • Ein Plattenkondensator ist an eine Batterie angeschlossen. Der Raum zwischen den Platten ist leer. Nun wird der Abstand der Kondensatorplatten bei weiterhin angeschlossener Batterie verdreifacht. Wie ist das Verhältnis der am Ende gespeicherten Energie zu der am Anfang gespeicherten Energie?

21.2 • Wie ändert sich das Verhältnis der gespeicherten Energie in dem Kondensator aus Aufgabe 21.1, wenn dieser von der Batterie getrennt wird, bevor der Abstand der Platten verdreifacht wird?

21.3 • Zwei ungeladene Kondensatoren mit den Kapazitäten C_0 und $2C_0$ sind in Reihe geschaltet. Diese Reihenschaltung wird dann an die Anschlüsse einer Batterie angeschlossen. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig? a) Der Kondensator mit der Kapazität $2C_0$ wird mit der doppelten Ladung geladen wie der Kondensator C_0 . b) Die Spannung über beide Kondensatoren ist gleich. c) Die in jedem Kondensator gespeicherte Energie ist gleich. d) Die Ersatzkapazität ist $3C_0$. e) Die Ersatzkapazität ist $2C_0/3$.

21.4 •• Es werden zwei Kondensatoren A und B mit den gleichen Plattenflächen und Zwischenräumen betrachtet (Abbildung 21.34). Der Raum zwischen den Platten jedes Kondensators ist wie gezeigt halb mit einem Dielektrikum gefüllt. Hat der Kondensator A oder der Kondensator B die höhere Kapazität? Erläutern Sie Ihre Antwort.

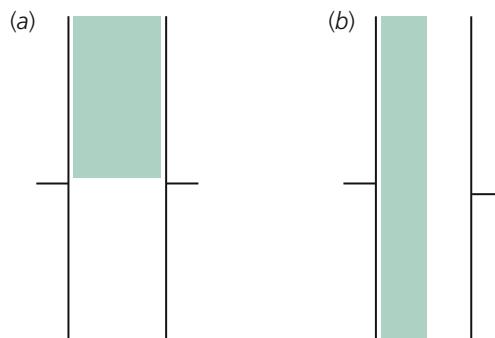


Abbildung 21.34 Zu Aufgabe 21.4.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

21.5 •• Es soll ein Stickstoffimpulsaser entwickelt werden. Die für den Betrieb eines solchen Lasers erforderlichen hohen Energiedichten werden durch Entladung von Hochspannungskondensatoren erzeugt. Pro Impuls (d. h. pro Entladung) wird

üblicherweise eine Energie von 100 J benötigt. Schätzen Sie die Kapazität, die benötigt wird, wenn die Entladung einen Funken über eine 1,0 cm breite Funkenstrecke erzeugen soll. Nehmen Sie dabei an, dass die Durchschlagsspannung von Stickstoff dieselbe wie die von Luft ist.

21.6 •• Schätzen Sie die Kapazität der in Abbildung 21.35 gezeigten Leidener Flasche. Die Figur ist 1/10 so groß wie ein durchschnittlicher Mann.



Abbildung 21.35 Zu Aufgabe 21.6.

Kapazität

21.7 •• Zwei isolierte leitende Kugeln mit dem gleichen Radius r haben die Ladungen $+q$ und $-q$. Der Abstand der Zentren der beiden Kugeln d ist groß gegen ihren Radius. Schätzen Sie die Kapazität dieses etwas ungewöhnlichen Kondensators.

Die Speicherung elektrischer Energie

21.8 •• Gegeben sind eine Metallvollkugel mit einem Radius von 10,0 cm und eine zu ihr konzentrische Metallkugel mit einem Innenradius von 10,5 cm. Die Vollkugel trägt eine Ladung $q = 5,00 \text{ nC}$. a) Schätzen Sie die Energie, die in dem elektrischen Feld in dem Gebiet zwischen den Kugeln gespeichert ist. (Hinweis: Sie können die Hohlkugeln im Wesentlichen als parallele flache Platten im Abstand von 0,5 cm behandeln.) b) Schätzen Sie die Kapazität des Doppelkugelsystems. c) Schätzen Sie anhand von $\frac{1}{2} q^2/C$ die im elektrischen Feld gespeicherte Gesamtenergie und vergleichen Sie sie mit dem Ergebnis von Teilaufgabe a.

21.9 •• Ein Plattenkondensator, dessen Platten eine Fläche von 500 m^2 haben, ist an eine Batterie angeschlossen. Nach einiger Zeit wird er von der Batterie getrennt. Anschließend werden die Platten um $0,40 \text{ cm}$ voneinander weg bewegt. Während die Ladung auf jeder Platte gleich bleibt, wächst die Potenzialdifferenz zwischen den Platten um 100 V . a) Wie groß ist der Betrag der Ladung auf jeder Platte? b) Erwarten Sie, dass die in dem Kondensator gespeicherte Energie zunimmt, abnimmt oder gleich bleibt, während die Platten auseinandergezogen werden? Erläutern Sie Ihre Antwort. c) Untermauern Sie Ihre Antwort in Teilaufgabe b, indem Sie bestimmen, wie sich die in dem Kondensator gespeicherte Energie durch die Bewegung der Platten ändert.

Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren

21.10 • a) Wie viele parallel geschaltete $1,00\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensatoren sind erforderlich, um bei einer Spannung von $10,0 \text{ V}$ über jeden Kondensator eine Gesamtladung von $1,00 \text{ mC}$ zu speichern? Zeichnen Sie die Parallelschaltung. b) Wie groß ist in diesem Fall die Spannung über alle parallel geschalteten Kondensatoren? c) Ermitteln Sie die Ladung auf jedem Kondensator sowie die Spannung über die Kondensatoranordnung, wenn die Kondensatoren aus Teilaufgabe a entladen, in Reihe geschaltet und anschließend so lange geladen werden, bis die Potenzialdifferenz über jeden $10,0 \text{ V}$ beträgt.

21.11 •• Drei gleiche Kondensatoren werden so zusammengeschaltet, dass ihre maximale Ersatzkapazität $15,0 \text{ }\mu\text{F}$ erreicht wird. a) Bestimmen Sie, wie die Kondensatoren zusammengeschaltet werden, und skizzieren Sie die Schaltung. b) Es gibt drei weitere Möglichkeiten, die Kondensatoren zusammenzuschalten. Skizzieren Sie diese weiteren Möglichkeiten und bestimmen Sie die Ersatzkapazität jeder Schaltung.

21.12 •• a) Zeigen Sie, dass die Ersatzkapazität zweier in Reihe geschalteter Kondensatoren

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

geschrieben werden kann. b) Zeigen Sie allein anhand dieses Ausdrucks durch algebraische Rechenoperationen, dass C stets kleiner als C_1 und C_2 und somit auch kleiner als der kleinere der beiden Werte sein muss. c) Zeigen Sie, dass die Ersatzkapazität dreier in Reihe geschalteter Kondensatoren

$$C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}$$

geschrieben werden kann. d) Zeigen Sie allein anhand dieses Ausdrucks durch algebraische Rechenoperationen, dass C stets kleiner als C_1 , C_2 und C_3 und somit kleiner als der kleinste der drei Werte sein muss.

21.13 •• Es soll ein Kondensatornetz mit einer Ersatzkapazität von $2,00 \text{ }\mu\text{F}$ und mit einer Durchschlagsspannung von 400 V konstruiert werden. Zur Verfügung stehen nur Kondensatoren mit einer Kapazität von $2,00\text{-}\mu\text{F}$ und einer Durchschlagsspannung von 100 V . Skizzieren Sie die Schaltung.

Plattenkondensatoren

21.14 • Ein Plattenkondensator besitzt eine Kapazität von $2,00 \text{ }\mu\text{F}$ und einen Plattenabstand von $1,60 \text{ mm}$. a) Wie groß kann die maximale Spannung zwischen seinen Platten sein, ohne dass es in der Luft zwischen den Platten zum dielektrischen Durchschlag kommt? b) Welche Ladung ist bei dieser Spannung gespeichert?

21.15 •• Konstruieren Sie einen luftgefüllten Plattenkondensator mit einer Kapazität von $0,100 \text{ }\mu\text{F}$, der auf eine maximale Spannung von 1000 V geladen werden kann, bevor es zum dielektrischen Durchschlag kommt. a) Wie groß muss der Abstand zwischen den Platten mindestens sein? b) Welchen Flächeninhalt müssen die Platten des Kondensators mindestens haben?

Zylinderkondensatoren

21.16 • Gegeben ist ein Geigerzählrohr mit einer Länge von $12,0 \text{ cm}$ und mit einem Radius des Mitteldrahts von $0,200 \text{ mm}$. Die Außenoberfläche des Rohrs ist ein leitender Hohlzylinder mit einem Innenradius von $1,50 \text{ cm}$. Der Zylinder ist koaxial zum Draht und hat dieselbe Länge wie dieser. Berechnen Sie a) die Kapazität des Rohrs unter der Annahme, dass das Gas im Rohr die relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon_{\text{rel}} = 1,00$ hat, b) die lineare Ladungsdichte auf dem Draht, wenn zwischen ihm und dem Hohlzylinder eine Spannung von $1,20 \text{ kV}$ herrscht.

21.17 ••• Ein *Goniometer* ist ein Präzisions-Winkelmessinstrument. Abbildung 21.36a zeigt ein *kapazitives Goniometer*. Jede Platte des Drehkondensators (Abbildung 21.36b) besteht aus einem flachen Metallhalbkreis mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 . Die Platten haben eine gemeinsame Drehachse; der Luftpalt zwischen ihnen hat eine Breite d . Berechnen Sie die Kapazität in Abhängigkeit vom Winkel θ und den gegebenen Parametern.

Kugelkondensatoren

21.18 •• Ein Kugelkondensator besteht aus einer dünnen Hohlkugel mit dem Radius r_1 und aus einer konzentrischen dünnen Hohlkugel mit dem Radius r_2 , wobei $r_2 > r_1$ ist. a) Zeigen Sie, dass er die Kapazität $C = 4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 / (r_2 - r_1)$ hat. b) Zeigen Sie, dass die Kapazität näherungsweise durch den Ausdruck $C = \epsilon_0 A/d$ (A : Oberflächeninhalt der Kugel, $d = r_2 - r_1$) für die Kapazität eines Plattenkondensators gegeben ist, wenn die Hohlkugeln fast den gleichen Radius haben.

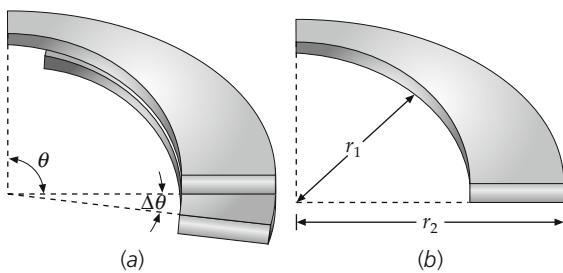


Abbildung 21.36 Zu Aufgabe 21.17.

Getrennte und wieder verbundene Kondensatoren

21.19 •• Ein $2,00\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator wird auf eine Spannung von $12,0\text{ V}$ geladen. Anschließend werden die Drähte, die den Kondensator mit der Batterie verbinden, von der Batterie getrennt und an einen zweiten, zunächst ungeladenen Kondensator angeschlossen. Daraufhin sinkt die Spannung über den $2,00\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator auf $4,00\text{ V}$. Wie groß ist die Kapazität des zweiten Kondensators?

21.20 •• Ein 20-pF -Kondensator wird auf $3,0\text{ kV}$ geladen. Anschließend wird er von der Batterie getrennt und mit einem ungeladenen 50-pF -Kondensator verbunden. a) Wie groß ist dann die Ladung auf jedem Kondensator? b) Wie groß ist die Energie, die in dem 20-pF -Kondensator gespeichert ist, bevor er von der Batterie getrennt wird, sowie die Energie, die in beiden Kondensatoren gespeichert ist, nachdem sie miteinander verbunden worden sind? Nimmt die gespeicherte Energie zu oder ab, wenn die beiden Kondensatoren miteinander verbunden werden?

Dielektrika

21.21 •• Der Mitteldraht eines Geigerzählrohrs hat einen Radius von $0,200\text{ mm}$ und eine Länge von $12,0\text{ cm}$. Die Außenoberfläche des Rohrs ist ein leitender Hohlzylinder mit einem Innenradius von $1,50\text{ cm}$. Der Hohlzylinder ist koaxial zum Draht und hat dieselbe Länge wie dieser. Das Rohr ist mit einem Gas mit der relativen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_{\text{rel}} = 1,08$ und mit einer Durchschlagfestigkeit von $2,00 \cdot 10^6\text{ V/m}$ gefüllt. a) Welche maximale Spannung kann zwischen dem Draht und dem Hohlzylinder aufrechterhalten werden? b) Wie groß ist die maximale Ladung pro Einheitslänge auf dem Draht?

21.22 •• Es soll ein Dielektrikum mit einer außergewöhnlich hohen relativen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_{\text{rel}} = 24$ und mit einer Durchschlagfestigkeit von $4,0 \cdot 10^7\text{ V/m}$ entwickelt werden. Mit diesem Dielektrikum soll ein $0,10\text{-}\mu\text{F}$ -Plattenkondensator gebaut werden, der eine Spannung von $2,0\text{ kV}$ aushält. a) Wie groß muss der Plattenabstand dabei mindestens sein? b) Welchen Flächeninhalt muss jede Platte bei diesem Abstand haben?

21.23 •• Die Membran des Axons einer Nervenzelle kann als ein dünner Hohlzylinder mit einem Radius von $1,00 \cdot 10^{-5}\text{ m}$, mit einer Länge von $10,0\text{ cm}$ und mit einer Dicke von $10,0\text{ nm}$ modelliert werden. Auf der einen Seite der Membran sitzt eine positive Ladung und auf der anderen eine negative. Die Membran wirkt als Plattenkondensator mit dem Flächeninhalt $2\pi r l$ und dem Plattenabstand d . Nehmen Sie an, dass die Membran mit einem Material mit einer Dielektrizitätskonstanten von etwa $3,00$ gefüllt ist. a) Wie groß ist die Kapazität der Membran? Ermitteln Sie b) die Ladung auf der positiv geladenen Seite der Membran sowie c) das elektrische Feld in der Membran, wenn über sie eine Spannung von $70,0\text{ mV}$ herrscht.

21.24 •• Zwei positiv geladene Platten eines Plattenkondensators tragen die Ladung q . Wenn der Zwischenraum zwischen ihnen luft leer ist, beträgt die elektrische Feldstärke zwischen den Platten $2,5 \cdot 10^5\text{ V/m}$. Nachdem der Zwischenraum mit einem bestimmten Dielektrikum gefüllt worden ist, sinkt die Feldstärke zwischen den Platten auf $1,2 \cdot 10^5\text{ V/m}$. a) Wie groß ist die relative Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums? b) Wie groß ist der Flächeninhalt der Platten bei $q = 10\text{ nC}$? c) Wie groß ist die insgesamt induzierte gebundene Ladung auf beiden Seiten des Dielektrikums?

Allgemeine Aufgaben

21.25 • Gegeben sind vier gleiche Kondensatoren und eine 100-V -Batterie. Wenn lediglich ein Kondensator mit der Batterie verbunden ist, ist in ihm die Energie $E_{\text{el},0}$ gespeichert. Schalten Sie die vier Kondensatoren so zusammen, dass die in allen vier Kondensatoren gespeicherte Gesamtenergie $E_{\text{el},0}$ ist. Beschreiben Sie die Schaltung und erläutern Sie Ihre Antwort.

21.26 •• Bestimmen Sie die Ersatzkapazität jedes der in Abbildung 21.37 gezeigten Kondensatornetze, ausgedrückt durch C_0 .

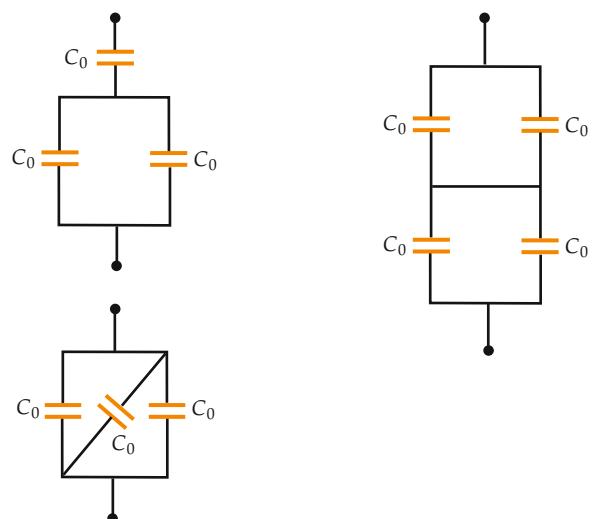


Abbildung 21.37 Zu Aufgabe 21.26.

21.27 •• Abbildung 21.38 zeigt vier Kondensatoren, die in einer sogenannten Kondensatorbrücke zusammengeschaltet sind. Anfangs sind die Kondensatoren ungeladen. Welche Beziehung muss zwischen den vier Kapazitäten gelten, damit die Spannung zwischen den Punkten c und d null bleibt, wenn zwischen den Punkten a und b eine Spannung U angelegt wird?

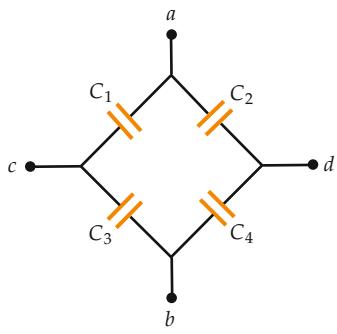


Abbildung 21.38 Zu Aufgabe 21.27.

21.28 •• Eine Parallelschaltung zweier gleicher $2,00\text{-}\mu\text{F}$ -Plattenkondensatoren (ohne Dielektrikum im Zwischenraum zwischen den Platten) wird an eine 100-V -Batterie angeschlossen. Anschließend wird die Verbindung zur Batterie getrennt und der Abstand zwischen den Platten eines der Kondensatoren verdoppelt. Ermitteln Sie die Ladung auf der positiv geladenen Platte jedes Kondensators.

21.29 •• Ein Plattenkondensator mit einer Plattenfläche A ist wie in Abbildung 21.39 gezeigt mit zwei gleich großen Dielektrika gefüllt. a) Zeigen Sie, dass dieses System als zwei Kondensatoren modelliert werden kann, die parallel geschaltet sind und jeweils die Fläche $A/2$ haben. b) Zeigen Sie, dass die Kapazität durch $\frac{1}{2}(\epsilon_{\text{rel},1} + \epsilon_{\text{rel},2})C_0$ gegeben ist, wobei C_0 die Kapazität ist, wenn sich im Raum zwischen den Platten kein Dielektrikum befindet.

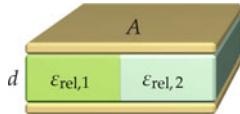


Abbildung 21.39 Zu Aufgabe 21.29.

21.30 •• Die Platten eines Plattenkondensators besitzen einen Abstand d_0 , und jede Platte hat die Fläche A . Zwischen die Platten wird parallel zu ihnen eine Metallschicht mit der Dicke d und der Fläche A eingeführt. a) Zeigen Sie, dass die Kapazität danach unabhängig vom Abstand zwischen der Metallschicht und der positiv geladenen Platte stets $C = \epsilon_0 A / (d_0 - d)$ ist. b) Zeigen Sie, dass diese Anordnung als ein Kondensator mit dem Plattenabstand a modelliert werden kann, der mit einem zweiten Kondensator mit dem Plattenabstand b in Reihe geschaltet ist, wobei $a + b + d = d_0$ gilt.

21.31 ••• Ein elektrisch isolierter Kondensator mit der Ladung q auf der positiv geladenen Platte ist wie in Abbildung 21.40 teilweise mit einer dielektrischen Substanz gefüllt. Der Kondensator enthält zwei rechteckige Platten mit den Seitenlängen a und b und mit dem Abstand d . Das Dielektrikum ist über die Strecke x in den Zwischenraum eingeführt. a) Wie groß ist die in dem Kondensator gespeicherte Energie? (Hinweis: Der Kondensator kann als zwei parallel geschaltete Kondensatoren modelliert werden.) b) Da die Energie des Kondensators mit wachsendem x abnimmt, muss das elektrische Feld am Dielektrikum Arbeit verrichten. Somit muss es eine elektrische Kraft geben, die das Dielektrikum hineinzieht. Berechnen Sie diese Kraft, indem Sie untersuchen, wie sich die gespeicherte Energie mit der Strecke x ändert. c) Drücken Sie die Kraft durch die Kapazität und die Spannung U zwischen den Platten aus. d) Woher kommt diese Kraft?

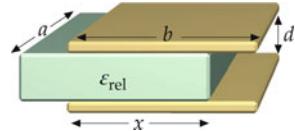


Abbildung 21.40 Zu Aufgabe 21.31.

21.32 ••• Abbildung 21.41 zeigt eine kapazitive Waage. Auf einer Seite der Waage ist ein Gewicht angebracht, während auf der anderen ein Kondensator befestigt ist, dessen Plattenzwi-schenraum verändert werden kann. Nehmen Sie an, dass die Masse der oberen Platte des Kondensators vernachlässigt werden kann. Wenn die Kondensatorspannung zwischen den Platten U_0 ist, ist die Anziehungskraft zwischen den Platten mit dem Gewicht der angehängten Masse im Gleichgewicht. a) Ist die Waage stabil? Betrachten Sie dazu den Fall, dass die Waage zunächst im Gleichgewicht ist und anschließend die Platten etwas zusammengedrückt werden. Stabil ist die Waage dann, wenn die Platten nicht zusammenklappen, sondern ins Gleichgewicht zurückkehren. b) Berechnen Sie die Spannung U_0 , die für ein Gleichgewicht mit einer Masse m erforderlich ist, wenn die Platten den Abstand d_0 und den Flächeninhalt A haben. (Hinweis: Sie können dabei die Tatsache nutzen, dass die Kraft zwischen den Platten gleich der Ableitung der gespeicherten Energie nach dem Plattenabstand ist.)



Abbildung 21.41 Zu Aufgabe 21.32.

21.33 ••• Sie sollen einen luftgefüllten Plattenkondensator für einen Impulsgeber konstruieren, der eine Energie von 100 kJ speichern kann. a) Welches Volumen muss der Zwischenraum zwischen den Platten mindestens haben? b) Nehmen Sie an, Sie hätten ein Dielektrikum mit einer Durchschlagfestigkeit von

$3,00 \cdot 10^8 \text{ V/m}$ und mit einer relativen Dielektrizitätskonstanten von 5,00 entwickelt. Welches Volumen muss dieses Dielektrikum zwischen den Platten einnehmen, damit der Kondensator eine Energie von 100 kJ speichern kann?

21.34 ••• Die Platten eines luftgefüllten Plattenkondensators mit einer Spaltbreite d haben jeweils einen Flächeninhalt A . Der Kondensator wird auf eine Spannung U geladen und anschließend von der Spannungsquelle getrennt. Nun wird wie in Abbildung 21.42 gezeigt ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätskonstanten von 2,00, mit der Dicke d und mit dem Flächeninhalt $A/2$ eingeführt. Wir bezeichnen die Dichte der freien Ladungen auf der Grenzfläche zwischen Leiter und Dielektrikum mit σ_1 und die Dichte der freien Ladungen auf der Grenzfläche zwischen Leiter und Luft mit σ_2 . a) Erläutern Sie, weshalb das elektrische Feld im Dielektrikum den gleichen Wert wie in dem leeren Raum zwischen den Platten haben muss. b) Zeigen Sie, dass $\sigma_1 = 2\sigma_2$ ist. c) Zeigen Sie, dass die Kapazität nach Einführen des Dielektrikums das 1,50-fache der Kapazität des luftgefüllten Kondensators ist. d) Zeigen Sie, dass die Potenzialdifferenz nach Einführen des Dielektrikums $\frac{2}{3}U$ ist. e) Zeigen Sie, dass die nach Einführen des Dielektrikums gespeicherte Energie nur $2/3$ der davor gespeicherten Energie beträgt.

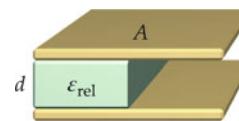


Abbildung 21.42 Zu Aufgabe 21.34.

21.35 ••• Nicht alle Dielektrika zwischen den Platten eines Kondensators sind starr. So ist z. B. die Membran eines Nervenaxons eine Lipiddoppelschicht mit endlicher Kompressibilität. Wir betrachten einen Plattenkondensator, dessen Plattenabstand durch ein Material mit einer Dielektrizitätskonstanten von 3,00, mit einer Durchschlagfestigkeit von $40,0 \text{ kV/mm}$ und mit einem Elastizitätsmodul von $5,00 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ aufrechterhalten wird. Wenn die Potenzialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten null ist, ist die Dicke des Dielektrikums 0,200 mm, wobei der Kondensator die Kapazität C_0 hat. a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Kapazität als Funktion der Potenzialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten her. b) Wie groß ist der Maximalwert der Potenzialdifferenz. (Gehen Sie davon aus, dass sich die Dielektrizitätskonstante und die Durchschlagfestigkeit bei Kompression *nicht* ändern.)

Elektrischer Strom – Gleichstromkreise

22



Manchmal ist es nützlich, sich mit der Funktionsweise von Gleichstromkreisen auszukennen – zum Beispiel, wenn man bei leerer Batterie sein Auto fremdstarten möchte, ohne die Batterie und sich selbst zu gefährden. (© Tom Stewart/Corbis.)

?

Welcher Anschluss des Überbrückungskabels gehört an welchen Pol der Batterie? (Siehe Beispiel 22.15)

22.1	Elektrischer Strom und die Bewegung von Ladungsträgern	800
22.2	Widerstand und Ohm'sches Gesetz	804
22.3	Energetische Betrachtung elektrischer Stromkreise	808
22.4	Zusammenschaltung von Widerständen	813
22.5	Die Kirchhoff'schen Regeln	820
22.6	<i>RC</i> -Stromkreise	829
	Zusammenfassung	836
	Aufgaben	838

Wenn wir Licht einschalten, verbinden wir die Glühlampe mit den Polen einer Spannungsquelle, zwischen denen eine Potenzialdifferenz – eine elektrische **Spannung** – besteht. Diese Potenzialdifferenz bewirkt, dass elektrische Ladungen durch den Glühdraht fließen, ähnlich wie Wasser, das infolge des Druckunterschieds durch einen Gartenschlauch strömt, sobald wir den Wasserhahn aufdrehen. Einen Fluss elektrischer Ladungen bezeichnet man als elektrischen Strom. Wir denken dabei normalerweise an Ladungsträger, die sich durch einen leitfähigen Draht bewegen. Weniger alltägliche Beispiele sind der Elektronenstrahl einer Bildröhre und ein Ionenstrahl in einem Teilchenbeschleuniger.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Gleichstromkreisen, d. h. Stromkreisen, in denen sich die Stromrichtung nicht ändert. Zu solchen Stromkreisen gehört eine Gleichspannungsquelle (eine Batterie), die mit Widerständen und Kondensatoren verbunden sein kann. In Kapitel 26 werden wir uns Wechselstromkreisen (Kreisen, in denen sich die Stromrichtung ständig ändert) zuwenden.

22.1 Elektrischer Strom und die Bewegung von Ladungsträgern

Was geschieht, wenn wir den Schalter eines Stromkreises schließen und so den Transport der Ladungen von der Stromquelle über die zusammengeschalteten Bauelemente ermöglichen? Unmittelbar nach dem Umlegen des Schalters beginnen sich kleine Ladungen an den Oberflächen von Leitungsdrähten und anderen leitfähigen Bauelementen anzusammeln. Diese Ladungen erzeugen ein elektrisches Feld, das die freien Ladungsträger in allen leitfähigen Materialien des Stromkreises in Bewegung setzt. Der Aufbau des Stromflusses ist ein komplizierter Vorgang, während dessen an vielen Punkten des Kreises vorübergehend Ladung akkumuliert wird. Er dauert jedoch nur eine äußerst kurze Zeit an. In Abhängigkeit von der Größe und der Leitfähigkeit der Bauelemente stellt sich fast sofort – zu schnell, als dass wir den Prozess in seinem Verlauf bemerken oder verfolgen könnten – ein stationärer Zustand ein: Der Strom fließt gleichmäßig, nirgendwo im Stromkreis sammelt sich Ladung an. (In Stromkreisen, die Kondensatoren und Widerstände enthalten, kann der Strom langsam ab- oder zunehmen. Die Ladungs- und Entladungsvorgänge ereignen sich im Verlauf deutlich längerer Zeiträume, als sie zur Einstellung des stationären Zustands erforderlich sind.)

Die Rate, mit der elektrische Ladung durch eine Fläche A (typischerweise ist das der Querschnitt eines leitfähigen Drahts) fließt, also den Ladungssfluss, bezeichnen wir definitionsgemäß als **elektrischen Strom**. In Abbildung 22.1 sehen Sie einen Abschnitt eines stromdurchflossenen Drahts, in dem sich Ladungsträger bewegen. Ist Δq die innerhalb der Zeit Δt durch die Querschnittsfläche A des Drahts fließende Ladung, so gilt für den Strom

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (22.1)$$

wobei Δt gegen null geht. Die SI-Einheit des Stroms ist das **Ampere** (A):

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (22.2)$$

In Kapitel 23 werden wir das Ampere anhand der Kraft definieren, die zwei stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben. Die Ladungseinheit Coulomb ist davon ausgehend definiert als ein Ampere mal Sekunde.

Bewegte Ladungsträger können negativ oder positiv geladen sein. Für den Leiter legt man eine positive Richtung fest. Vereinbarungsgemäß erhält der Strom ein positives Vorzeichen,

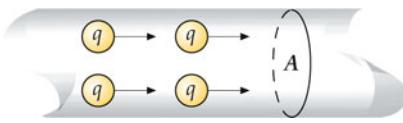


Abbildung 22.1 Ein Abschnitt eines stromdurchflossenen Drahts. Fließt während der Zeit Δt die Ladungsmenge Δq durch die Querschnittsfläche A , so ist der Strom durch A definiert gemäß $I = \Delta q / \Delta t$, wobei Δt gegen null geht.

wenn er durch die Bewegung positiver Ladungsträger in positive Richtung oder negativer Ladungsträger in negative Richtung entsteht. Bewegen sich hingegen negative Ladungsträger in positive Richtung oder umgekehrt, ist das Vorzeichen des Stroms negativ. Diese Konvention stammt aus einer Zeit, in der noch nicht bekannt war, dass die negativ geladenen freien Elektronen für den Stromfluss in Metalldrähten verantwortlich sind. Elektronen bewegen sich folglich stets entgegengesetzt der konventionellen Stromrichtung (also in negative Richtung, wenn der Strom positiv ist und umgekehrt). Positive Ladungsträger, beispielsweise Protonen in dem von einem Beschleuniger erzeugten Teilchenstrahl, fließen gegebenenfalls in der konventionellen Stromrichtung.

Die Bewegung negativ geladener freier Elektronen durch einen Metalldraht ist ein recht komplexer Vorgang. Solange kein elektrisches Feld am Draht anliegt, bewegen sich die Elektronen mit relativ hoher Geschwindigkeit (in der Größenordnung von 10^6 m/s) in zufällige Richtungen. Dabei stoßen sie ständig mit den Gitterionen des Metalls zusammen. Da die Geschwindigkeitsvektoren zufällig orientiert sind, ist die *mittlere* Geschwindigkeit der Ladungsträger null. (Die mittlere Energie der freien Elektronen eines Metalls ist selbst bei sehr niedrigen Temperaturen hoch. Für diese Ladungsträger haben die klassische Maxwell-Boltzmann-Energieverteilung und der Gleichverteilungssatz keine Gültigkeit. Wir beschäftigen uns mit diesem Thema in Kapitel 37, in dem wir auch die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen berechnen werden.)

Ein äußeres elektrisches Feld übt auf jedes freie Elektron eine Kraft $-eE$ aus und beschleunigt es damit entgegengesetzt zur Feldrichtung. Die erworbene kinetische Energie geht den Ladungsträgern durch Stöße mit den Gitterionen zwar umgehend wieder verloren, für kurze Zeit jedoch besitzen die Elektronen eine zusätzliche Geschwindigkeitskomponente entgegengesetzt zur Richtung des elektrischen Felds. Durch den unablässigen Wechsel von Beschleunigung und Energieumwandlung bewegen sich die Elektronen langsam durch den Draht: Sie „driften“ entgegengesetzt zur Feldrichtung mit der sogenannten **Driftgeschwindigkeit** v_d .

Die Bewegung freier Elektronen in einem Metall ist der Bewegung der Moleküle in einem Gas (etwa Luft) vergleichbar: In Luft, die wir als unbewegt empfinden, bewegen sich die Moleküle aufgrund ihrer thermischen Energie mit großen Momentangeschwindigkeiten (ungefähr 500 m/s), ihre mittlere Geschwindigkeit hingegen ist null. Weht ein leichter Wind, so ist den großen Momentangeschwindigkeiten eine kleine Geschwindigkeitskomponente (oder Driftgeschwindigkeit) in Windrichtung

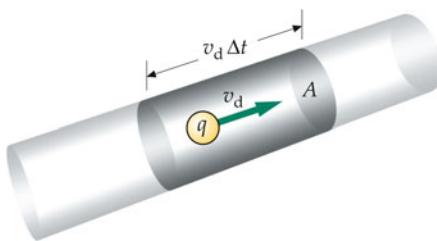


Abbildung 22.2 Während der Zeit Δt gelangen alle freien Ladungsträger, die sich zu Beginn im schattiert gezeichneten Volumen befinden, durch die Fläche A . Sind (n/V) Ladungsträger, jeweils mit der Ladung q , pro Volumeneinheit vorhanden, so ist die freie Gesamtladung im gezeigten Volumen $\Delta q = q (n/V) A v_d \Delta t$ mit v_d als Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger.

überlagert, und die Moleküle bewegen sich gemeinsam (für uns wahrnehmbar) in eine Richtung. Analog ist die mittlere Geschwindigkeit der freien Elektronen in einem Metall null, solange kein äußeres elektrisches Feld anliegt. Das Anlegen eines solchen Felds bewirkt eine Drift der freien Ladungsträger.

Es sei nun n/V die Anzahl freier Ladungsträger pro Volumeneinheit – die **Anzahldichte** – in einem elektrischen Leiter mit der Querschnittsfläche A . Wir vereinbaren, dass die Teilchen jeweils die Ladung q tragen und sich mit der Driftgeschwindigkeit v_d senkrecht zur Fläche bewegen. Während der Zeit Δt gelangen alle Ladungsträger aus dem in Abbildung 22.2 schattierten Volumen $A v_d \Delta t$ durch die Fläche A . Die Teilchenzahl in diesem Volumen ist $(n/V) A v_d \Delta t$, und die gesamte freie Ladung ist dann

$$\Delta q = q (n/V) A v_d \Delta t.$$

Für den Strom (die Stromstärke) erhalten wir damit

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q (n/V) A v_d. \quad (22.3)$$

STROM UND DRIFTGESCHWINDIGKEIT

Mithilfe von Gleichung 22.3 können wir den Strom berechnen, der durch die Bewegung beliebiger Ladungsträger erzeugt wird. Wir müssen dazu lediglich die Driftgeschwindigkeit v_d durch die Geschwindigkeit der Ladungsträger ersetzen. Entsteht der Strom durch die Bewegung verschieden gearteter Ladungsträger, beispielsweise in ionischen Lösungen wie Salzwasser, so ist der Gesamtstrom gleich der Summe der Teilströme für jede Ladungsträgerart. In Beispiel 22.1 wird anhand dieser Gleichung die Driftgeschwindigkeit für einen gegebenen Strom berechnet, in Beispiel 22.2 die Anzahldichte von Protonen in einem Teilchenstrahl.

Beispiel 22.1: Berechnung der Driftgeschwindigkeit

Leitungsdrähte für Experimente im Labor bestehen gewöhnlich aus Kupfer. Wir betrachten einen Kupferdraht mit einem typischen Durchmesser von 1,63 mm.

- a) Berechnen Sie die Gesamtladung der freien Elektronen pro Meter eines solchen Drahts, durch den ein Strom von 1,0 A fließt. Nehmen Sie dazu an, dass Kupfer ein freies Elektron pro Atom enthält. b) Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der freien Elektronen.

Problembeschreibung: Gleichung 22.3 gibt die Beziehung zwischen der Driftgeschwindigkeit und der Anzahldichte der Ladungsträger (die ungefähr gleich der Anzahldichte der Kupferatome n_{Cu}/V ist) an. Wir berechnen n_{Cu}/V aus der Avogadro-Konstante sowie der Massendichte und der molaren Masse von Kupfer.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Beziehung zwischen dem Strom, der Driftgeschwindigkeit und der Anzahldichte der Ladungsträger lautet:

$$I = (n/V) q v_d A$$

2. Wenn pro Atom ein freies Elektron vorhanden ist, so ist die Anzahldichte der Ladungsträger gleich der Anzahldichte n_{Cu}/V der Atome:

$$(n/V) = (n_{\text{Cu}}/V)$$

3. Die Anzahldichte der Kupferatome (n_{Cu}/V) erhalten Sie aus der Massendichte ρ , der Avogadro-Zahl n_A und der Molmasse m_{Mol} . Für Kupfer ist $\rho = 8,93 \text{ g/cm}^3$ und $m_{\text{Mol}} = 63,5 \text{ g/mol}$:

$$\begin{aligned} (n_{\text{Cu}}/V) &= \frac{\rho n_A}{m_{\text{Mol}}} \\ &= \frac{(8,93 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}) \cdot (6,02 \cdot 10^{23} \text{ Atome} \cdot \text{mol}^{-1})}{63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \\ &= 8,47 \cdot 10^{22} \text{ Atome} \cdot \text{cm}^{-3} \\ &= 84,7 \text{ Atome} \cdot \text{nm}^{-3} \\ &= 8,47 \cdot 10^{28} \text{ Atome} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

4. Die Ladungsdichte ρ_{FE} der freien Elektronen ist gleich Anzahldichte mal Ladung:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{FE}} &= -e (n/V) \\ &= -(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (8,47 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}) \\ &= -1,36 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

5. Die Ladung ergibt sich als Produkt aus Ladungsdichte und Volumen; der Radius des Leiters ist 0,815 mm:

$$q = \rho_{\text{FE}} A l = -e (n/V) A l$$

also ist

$$\begin{aligned} q/l &= -e (n/V) A \\ &= (-1,36 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}) \cdot \pi \cdot (8,15 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2 \\ &= -2,83 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{m}^{-1} = \boxed{-2,8 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Abschließend setzen Sie alle Zahlenwerte in Gleichung 22.3 ein. (Der Strom ist negativ, weil Gleichung 22.3 nur für Ladungsträger gilt, die sich in positiver Richtung bewegen.)

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{I}{(n/V) q A} = \frac{I}{-(n/V) e A} = \frac{I}{q/l} \\ &= \frac{-1,0 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}}{(-2,83 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{m}^{-1})} = \boxed{3,5 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie wir in Schritt 5 von Teilaufgabe a berechnet haben, beträgt die Ladung pro Meter des Drahts 28 000 Coulomb. Für einen Strom von einem Coulomb pro Sekunde erwarten wir deshalb nur eine geringe Driftgeschwindigkeit, wie wir sie in Teilaufgabe b auch erhalten.

Übung 22.1: Wie lange braucht ein Elektron mit einer Driftgeschwindigkeit von $3,5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$, um von der Batterie Ihres Autos bis zum Startermotor zu gelangen? (Das Kabel ist etwa 1 m lang.) ►

Beispiel 22.2: Berechnung der Anzahldichte der Ladungsträger

In einem Teilchenbeschleuniger wird ein 5,0-MeV-Protonenstrahl mit einem Radius von 1,5 mm erzeugt, der einen Strom von 0,50 mA führt. a) Berechnen Sie die Anzahldichte der Ladungsträger im Strahl. b) Im Strahlweg befindet sich eine Materialprobe (ein Target). Wie viele Protonen treffen pro Sekunde auf dem Target auf?

Problembeschreibung: Zur Berechnung der Anzahldichte wenden wir Gleichung 22.3 an: $I = q (n_p/V) A v_p$; v_p sei die Driftgeschwindigkeit (die mittlere Geschwindigkeit) der Protonen, die wir aus deren kinetischer Energie erhalten. (In einem 5,0-MeV-Teilchenstrahl hat jedes Teilchen eine kinetische Energie von 5,0 MeV.) Die während

Δt auf dem Target auftreffende Ladungsmenge q ist gleich $I \Delta t$, die gesuchte Anzahl n_p der Protonen ergibt sich als Quotient aus der Gesamtladung Δq und der Ladung e eines Protons.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Beziehung zwischen Anzahldichte der Ladungsträger, Strom, Ladung, Querschnittsfläche und Geschwindigkeit lautet:

$$I = e (n_p/V) A v_p$$

2. Die Geschwindigkeit der Protonen ergibt sich aus deren kinetischer Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_p^2 = 5,0 \text{ MeV}$$

3. Lösen Sie dies nach v_p auf; für die Masse des Protons setzen Sie $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ein:

$$\begin{aligned} v_p &= \sqrt{\frac{2 E_{\text{kin}}}{m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (5,0 \cdot 10^6 \text{ eV})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \cdot \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \\ &= \boxed{3,1 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \end{aligned}$$

4. Dies setzen Sie in die Beziehung aus Schritt 1 ein und berechnen (n_p/V):

$$\begin{aligned} (n_p/V) &= \frac{I}{e A v_p} \\ &= \frac{0,50 \cdot 10^{-3} \text{ A}}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{Proton}^{-1}) \cdot \pi} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \cdot (3,10 \cdot 10^7 \text{ m/s})} \\ &= \boxed{1,43 \cdot 10^{13} \text{ Protonen} \cdot \text{m}^{-3}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Die Anzahl n_p der pro Sekunde auf dem Target auftreffenden Protonen hängt mit der während einer Sekunde auftreffenden Gesamtladung Δq und der Ladung e eines Protons zusammen:

$$\Delta q = n_p e$$

2. Die während Δt auftreffende Ladung Δq ist gleich dem Produkt aus Strom und Zeit:

$$\Delta q = I \Delta t$$

3. Für die gesuchte Anzahl der Protonen erhalten Sie damit:

$$n_p = \frac{\Delta q}{e} = \frac{I \Delta t}{e} = \frac{(0,50 \cdot 10^{-3} \text{ A}) \cdot (1,0 \text{ s})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{Proton}^{-1})} = 3,13 \cdot 10^{15} \text{ Protonen}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Anzahl n_p der Protonen, die das Target in der Zeit Δt treffen, ist gleich der Anzahl der Protonen im Volumen $A v_p \Delta t$; es gilt $n_p = (n_p/V) A v_p \Delta t$. Mit $(n_p/V) = I/(eA v_p)$ ist $n_p = (n_p/V) A v_p \Delta t = [I/(eA v_p)](A v_p) \Delta t = I \Delta t/e = \Delta q/e$. Diese Beziehung haben wir in Teilaufgabe b verwendet.

Weitergedacht: Wir durften in Schritt 2 von Teilaufgabe a die klassische Beziehung für die kinetische Energie verwenden, ohne relativistische Effekte in Betracht ziehen zu müssen, weil die kinetische Energie der Protonen (5 MeV) viel geringer ist als deren Ruheenergie (rund 931 MeV). Die berechnete Geschwindigkeit, $3,1 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, entspricht ungefähr einem Zehntel der Lichtgeschwindigkeit.

Übung 22.2: Wie viele Protonen befinden sich in einem Kubikmillimeter des Raums, der von dem Strahl durchlaufen wird? Verwenden Sie die in Teilaufgabe a berechnete Anzahldichte. ▶

Die Anzahldichte der Ladungsträger in einem elektrischen Leiter kann man unter Ausnutzung des Hall-Effekts messen, den wir in Kapitel 23 behandeln werden. Es stellt sich heraus, dass Metalle ungefähr ein freies Elektron pro Atom enthalten.

Dividieren wir beide Seiten von Gleichung 22.3 durch die Fläche A , so erhalten wir den Strom pro Flächeneinheit, $q (n/V) v_d$. Der Vektor der **Stromdichte**, j , ist gegeben durch

$$j = q (n/V) v_d . \quad (22.4)$$

DEFINITION DER STROMDICHTE

Der **Strom** durch eine Fläche A ist definiert als der Fluss des Stromdichtevektors j durch A :

$$I = \int_S j \cdot dA = \int_S j \cdot \hat{n} dA \quad (22.5)$$

DEFINITION DES STROMS

mit dA als Flächenelement der Oberfläche und \hat{n} als Vektor der Normalen von A in Richtung von dA (Abbildung 22.3). Ist j homogen und die Fläche eben – ist also \hat{n} überall gleich, kann

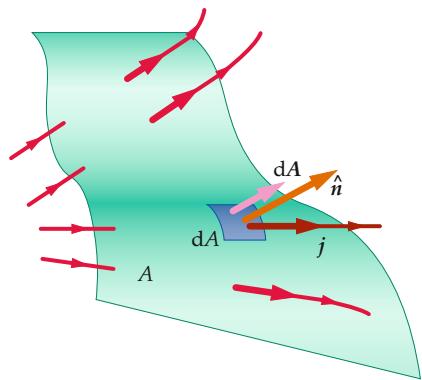


Abbildung 22.3 Die Stromdichte j ist ein Vektorfeld, das wir durch Feldlinien veranschaulichen können. Die roten, gerichteten Feldlinien gehören zum Stromdichtefeld und geben die Richtung des Ladungsflusses an. Der Strom I durch A ist gleich dem Fluss von j durch A .

man für den Strom formulieren:

$$I = \int_A j \cdot dA = j \cdot A = j \cdot \hat{n} A = j A \cos \theta .$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen j und \hat{n} . Das Vorzeichen des Stroms I entspricht dem Vorzeichen von $\cos \theta$. I ist positiv für $\theta < 90^\circ$ und negativ für $\theta > 90^\circ$ (Abbildung 22.4). Der schwarze, mit dem Pluszeichen markierte Pfeil neben jedem der beiden Drähte gibt die Wahl der Richtung des Normalenvektors \hat{n} relativ zu den Querschnittsflächen an.

Bei gegebener Stromdichte j und Fläche A hängt das Vorzeichen des Stroms I von der Wahl der Richtung des Flächennormalenvektors \hat{n} ab.

Wir können berechnen, wie langsam sich die Elektronen durch einen Draht bewegen (in Beispiel 22.1 nur wenige hundertstel Millimeter pro Sekunde), wenn ein Strom fließt. Wie kommt es dann, dass eine Glühlampe sofort zu leuchten beginnt, wenn wir den Lichtschalter betätigen? Um dies zu verstehen, denken Sie wieder an einen Gartenschlauch. Stellen Sie sich vor, Sie schließen einen 30 m langen, leeren Schlauch an die Wasserleitung an. Nachdem Sie den Wasserhahn aufgedreht haben, vergehen mehrere Sekunden, bis das Wasser vorn aus dem Schlauch zu strömen beginnt. Ist der Schlauch hingegen bereits gefüllt, wenn Sie das Ventil öffnen, so fließt das Wasser praktisch unverzüglich heraus. Teilen Sie die Wassersäule im Schlauch gedanklich in viele kleine Segmente ein. Wenn Sie den Hahn bei gefülltem Schlauch aufdrehen, so drückt das dem Hahn anschließende Segment auf das nächstliegende usw., bis das letzte Segment vorn aus dem Schlauch gedrückt wird. Die Druckwelle breitet sich durch den Schlauch mit der Schallgeschwindigkeit (in Wasser) aus. Nach kurzer Zeit strömt die Flüssigkeit mit stationärer Geschwindigkeit.

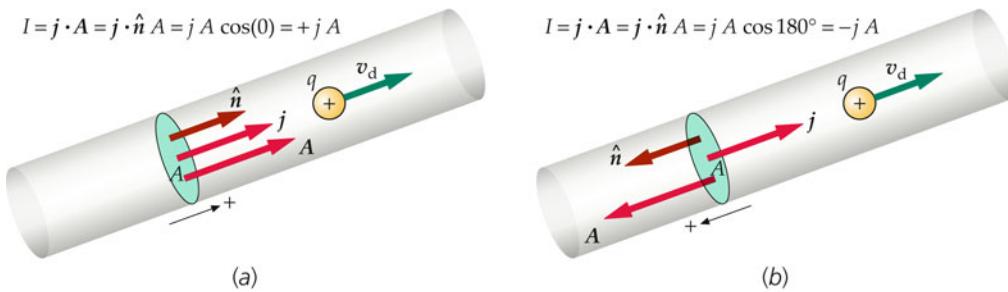


Abbildung 22.4 Der Stromdichtevektor j steht senkrecht auf der ebenen Oberfläche S , deren Vektor A definitionsgemäß in die gleiche Richtung zeigt wie der Vektor der Flächennormalen, \hat{n} . Dabei kann \hat{n} zwei verschiedene Richtungen haben: a) Der Strom I durch die Fläche A ist positiv, wenn \hat{n} und j gleich gerichtet sind. b) Der Strom I durch die Fläche A ist negativ, wenn \hat{n} und j entgegengesetzt gerichtet sind.

Ein Schlauch kann leer sein, in einem Metalldraht hingegen befinden sich stets sehr viele freie Elektronen. Unmittelbar nach der Betätigung des Lichtschalters setzt die Bewegung der Ladungsträger auf der ganzen Länge des Drahts (einschließlich des Glühfadens in der Lampe) ein. Größere Ladungsmengen werden nicht durch den Leiter transportiert, indem sich wenige Ladungsträger schnell bewegen, sondern indem eine sehr große Zahl von Ladungsträgern langsam den Draht entlangdriftet. Maßgeblich für die Anfangsbeschleunigung der Ladungsträger ist die Zeit, die für den Aufbau des elektrischen Felds benötigt wird, das die Ladungsträger durch den Leiter treibt.

erhalten wir für die Potenzialdifferenz (die Spannung) U zwischen den Punkten a und b

$$U = \phi_a - \phi_b = |E| \Delta l. \quad (22.6)$$

Den Quotienten aus der Potenzialdifferenz in Stromrichtung und dem Strom nennt man **Widerstand** des Leiterabschnitts:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (22.7)$$

DEFINITION DES WIDERSTANDS

Die Richtung des Stroms (einer skalaren Größe) entspricht dabei der Richtung des Stromdichtevektors. Die SI-Einheit des Widerstands (Volt geteilt durch Ampere) ist das **Ohm** (Ω):

$$1 \Omega = 1 \text{ V/A}. \quad (22.8)$$

Der Widerstand vieler Materialien, insbesondere der meisten Metalle, hängt weder von der Spannung noch vom Strom ab. Man bezeichnet diesen Widerstand als **Ohm'schen Widerstand** und spricht von Ohm'schem Verhalten. Bei vielen solchen Materialien bleibt der Widerstand in einem weiten Bereich äußerer Bedingungen konstant. Die Spannung über einen Leiterabschnitt ist in diesem Fall dem Strom direkt proportional, und man schreibt Gleichung 22.7 in der Form

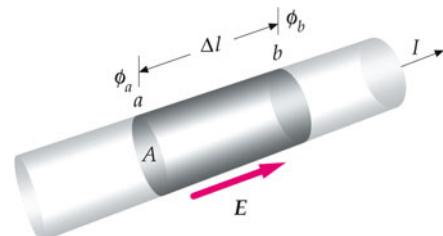


Abbildung 22.5 Durch den Leiterabschnitt mit der Länge Δl fließt ein Strom I . Die Beziehung zwischen Spannung und elektrischem Feld lautet $\phi_a - \phi_b = |E| \Delta l$.

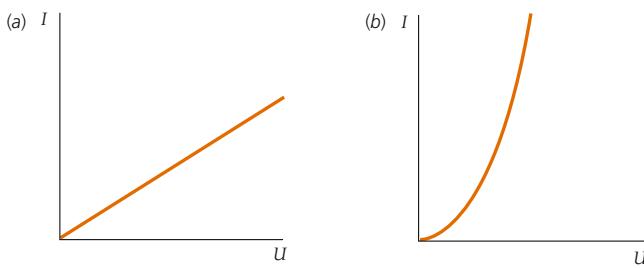


Abbildung 22.6 I als Funktion von U für zwei Materialien. a) Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist linear und entspricht damit dem Ohm'schen Gesetz. Der Widerstand $R = U/I$, gegeben durch die (konstante) Steigung des Graphen, hängt demnach nicht von I ab. b) Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung ist nicht linear. Der Widerstand $R = U/I$ in einem Punkt (I, U) ist jetzt durch die Steigung der Sehne gegeben, die den Ursprung mit diesem Punkt verbindet, und nimmt mit I zu.

$$U = RI, \quad R = \text{konstant}. \quad (22.9)$$

OHM'SCHES GESETZ

Diese Gleichung wird allgemein **Ohm'sches Gesetz** genannt, auch wenn der Widerstand R eines bestimmten Materials vom Strom I abhängt, also U nicht proportional zu I ist.

In Abbildung 22.6 wurde die Spannung U als Funktion von I für zwei verschiedene Leiter aufgetragen. Für das Material in Abbildung 22.6a ergibt sich ein linearer Zusammenhang, für den Leiter in Abbildung 22.6b nicht. Das Ohm'sche Gesetz ist kein grundlegendes Naturgesetz wie etwa die Newton'schen Axiome oder die Hauptsätze der Thermodynamik, sondern eher eine empirische Beschreibung des Verhaltens vieler (längst nicht aller) elektrischer Leiter. Wie wir noch sehen werden, hängt der Widerstand eines Leiters auch von seiner Temperatur ab.

Übung 22.3: In einem Draht mit einem Widerstand von $3,0 \Omega$ fließt ein Strom von $1,5 \text{ A}$. Berechnen Sie die Spannung über den Draht. ▶

Im Experiment zeigt sich, dass der Widerstand eines Leiters proportional zu dessen Länge und umgekehrt proportional zu dessen Querschnitt ist:

$$R = r \frac{l}{A}. \quad (22.10)$$

Der Proportionalitätsfaktor r ist der **spezifische Widerstand**, eine stoffspezifische Eigenschaft mit der Einheit Ohmmeter ($\Omega \cdot \text{m}$), die in einer unmittelbaren Anwendung in Beispiel 22.3 betrachtet wird. Beispiel 22.4 verknüpft Gleichung 22.8 mit dem elektrischen Feld eines Strom führenden Drahts. Sicherlich ist Ihnen aufgefallen, dass die Gleichungen 22.9 und 22.10 für die elektrische Leitung und den elektrischen Widerstand den Beziehungen für die Wärmeleitung und den thermischen Widerstand analog sind ($\Delta T = IR$, Gleichung 17.3, bzw. $R = \Delta x / (kA)$, Gleichung 17.4). Der Temperaturdifferenz ΔT entspricht dabei die Potenzialdifferenz U , der Wärmeleitfähigkeit

k entspricht $1/r$. Tatsächlich bezeichnet man die Größe $1/r$ auch als elektrische Leitfähigkeit mit der Einheit Siemens ($1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$). Die Analogie zwischen elektrischer und thermischer Leitung führte Georg Simon Ohm zu dem nach ihm benannten Gesetz.

Beispiel 22.3: Widerstand pro Längeneinheit

Berechnen Sie den Widerstand pro Längeneinheit eines Kupferdrahts mit einem Querschnitt von $1,5 \text{ mm}^2$.

Problembeschreibung: Den spezifischen Widerstand von Kupfer finden Sie in Tabelle 22.1.

Lösung: 1. Gemäß Gleichung 22.10 ist der Widerstand pro Längeneinheit gleich dem spezifischen Widerstand pro Flächeneinheit:

$$R = r \frac{l}{A}, \quad \text{also} \quad \frac{R}{l} = \frac{r}{A}$$

2. Den spezifischen Widerstand von Kupfer entnehmen Sie Tabelle 22.1:

$$r = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}, \quad A = 1,5 \text{ mm}^2$$

3. Setzen Sie diese Werte in die Gleichung aus Schritt 1 ein und berechnen Sie R/l :

$$\frac{R}{l} = \frac{r}{A} = \frac{1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}}{1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \boxed{1,1 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}^{-1}}$$

Plausibilitätsprüfung: Kupferdraht mit einem Querschnitt von $1,5 \text{ mm}^2$ wird normalerweise in Haushaltsstromkreisen verlegt. Der Widerstand des Glühlampe, die mit der Netzspannung (230 V) betrieben wird, beträgt 529Ω , der Widerstand einer 100 m langen „1,5-Quadrat“-Leitung ($1,1 \Omega$) ist dagegen vernachlässigbar gering. ■

Beispiel 22.4: Elektrisches Feld in einem Strom führenden Draht

Wie groß ist die elektrische Feldstärke E in dem Kupferdraht aus Beispiel 22.3, wenn durch den Draht ein Strom von $1,3 \text{ A}$ fließt?

Problembeschreibung: Die elektrische Feldstärke ist gleich der Potenzialdifferenz (der Spannung) über einer gegebenen Länge des Drahts, $E = U/l$. Die Potenzialdifferenz berechnen wir aus dem Ohm'schen Gesetz ($U = IR$), den Widerstand pro Längeneinheit entnehmen wir Beispiel 22.3.

Lösung: 1. Die elektrische Feldstärke ist gleich der Potenzialdifferenz pro Längeneinheit:

$$E = \frac{U}{l}$$

2. Formulieren Sie das Ohm'sche Gesetz für die Spannung:

$$U = IR$$

3. Setzen Sie dies in die Gleichung für E aus Schritt 1 ein:

$$E = \frac{U}{l} = \frac{IR}{l} = I \frac{R}{l}$$

4. Nun setzen Sie den in Beispiel 22.3 erhaltenen Wert von R/l ein und berechnen E :

$$\begin{aligned} E &= I \frac{R}{l} = (1,3 \text{ A}) \cdot (1,13 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}^{-1}) \\ &= 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die errechnete Feldstärke von $0,014 \text{ V/m}$ bedeutet für einen 100 m langen Draht eine Potenzialdifferenz von $1,4 \text{ V}$ – ein akzeptabler Wert für einen $220\text{-Volt-Haushaltsstromkreis}$. Bei einer Stromstärke von 13 A läge die Potenzialdifferenz hingegen schon bei 14 V , und es könnte Schwierigkeiten beim Betrieb von Elektrogeräten geben, denn viele Geräte funktionieren nicht richtig, wenn die tatsächlich anliegende Spannung deutlich unter der vollen Netzspannung liegt. ■

Übung 22.4: Ein aus der Legierung Nichrom ($r = 110 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$) bestehender Draht hat einen Radius von $0,65 \text{ mm}$. Wie lang muss ein solcher Draht sein, der einen Widerstand von $2,0 \Omega$ haben soll? ◀

Sind für einen Leiterabschnitt, der von einem Strom I durchflossen wird, die Länge l , die Querschnittsfläche A und der Widerstand R gegeben, so lautet die Beziehung zwischen der Spannung U über diesen Leiterabschnitt und dem Strom I

$$U = IR = Ir \frac{l}{A}.$$

Spannung und elektrische Feldstärke E hängen gemäß $U = El$ miteinander zusammen. Setzen wir El für U und j für I/A ein, erhalten wir

$$El = rjl.$$

Wir teilen beide Seiten durch l und schreiben die Stromdichte und das elektrische Feld in Vektorform auf:

$$\mathbf{E} = r\mathbf{j}. \quad (22.11)$$

Gleichung 22.11, eine alternative Schreibweise des Ohm'schen Gesetzes, sagt aus: Der Stromdichtevektor \mathbf{j} in einem Punkt eines stromdurchflossenen Leiters ist gleich dem Produkt aus dem

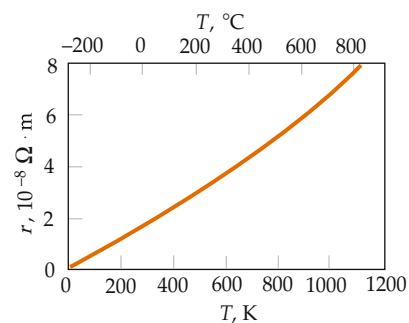


Abbildung 22.7 Spezifischer Widerstand r von Kupfer als Funktion der Temperatur. Da sich die Kelvin- und die Celsiusskala der Temperatur nur in der Wahl des Nullpunkts unterscheiden, hat der Graph für Temperaturen in K und in $^{\circ}\text{C}$ den gleichen Anstieg.

spezifischen Widerstand und dem elektrischen Feldvektor \mathbf{E} in diesem Punkt.

Der spezifische Widerstand aller Metalle hängt von der Temperatur ab. Abbildung 22.7 zeigt den Zusammenhang am Beispiel von Kupfer: Der Graph ist näherungsweise linear, das bedeutet, der spezifische Widerstand ist der Temperatur nahezu direkt proportional. (Bei sehr tiefen Temperaturen ist die Abhängigkeit nicht mehr linear; dies trifft für alle Metalle zu und wurde in der Abbildung nicht berücksichtigt.) In Tabellenwerken findet man in der Regel den spezifischen Widerstand r_{20} bei Raumtemperatur ($20\text{ }^{\circ}\text{C}$), dazu wird ein **Temperaturkoeffizient** α angegeben als Verhältnis zwischen der relativen Änderung des spezifischen Widerstands und einer gegebenen Änderung der Temperatur:

$$\alpha = \frac{(r - r_0) / r_0}{T - T_0} \quad (22.12)$$

mit r_0 als spezifischem Widerstand bei der Temperatur T_0 und r als spezifischem Widerstand bei der Temperatur T .

Frage 22.1

Der Glühfaden der Glühlampe, die Sie in Abbildung 22.8 sehen, ist ein dünner Wolframdraht. In Abbildung 22.9 wurde der Strom, der durch den Draht fließt, als Funktion der Zeit aufgetragen. Wie Sie sehen, steigt der Strom zunächst sehr schnell an,

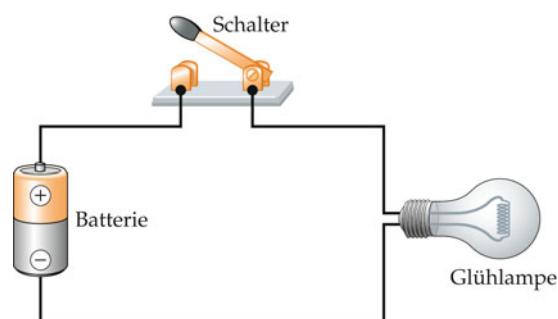


Abbildung 22.8 Stromkreis zu Verständnisfrage 22.1

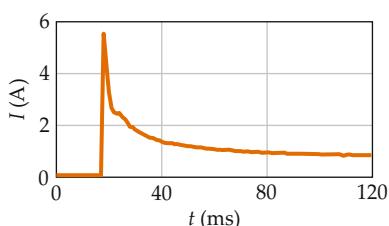


Abbildung 22.9 Unmittelbar nach dem Einschalten der Glühlampe in Abbildung 22.8 erreicht der Strom, der durch den Wolfram-Glühfaden fließt, einen Spitzenwert, von dem aus er innerhalb von ungefähr 100 ms auf einen gleichbleibenden Wert von etwa 0,75 A absinkt. Die Ursache für dieses Verhalten ist, dass der Widerstand des Drahts mit dessen Temperatur zunimmt.

wenn der Stromkreis geschlossen wird, um dann allmählich auf einen konstanten Wert zu fallen. a) Warum liegt die Stromstärke zu Beginn über diesem konstanten Wert? b) Warum ändert sich die Stromstärke nach einer gewissen Zeit nicht mehr?

Tabelle 22.1 führt den spezifischen Widerstand r und den zugehörigen Temperaturkoeffizienten α , jeweils bei 20 °C, für verschiedene Materialien auf. Beachten Sie den enorm großen Wertebereich von r . Die klassische Theorie der Leitfähigkeit sagt voraus, dass der spezifische Widerstand von Metallen mit steigender Temperatur abnehmen sollte. Das ist einer der Gründe dafür, dass man heute von der klassischen Beschreibung der Leitfähigkeit abgekommen ist. Der Anstieg des spezifischen Widerstands von Metallen mit steigender Temperatur ist stattdessen konsistent mit den Vorhersagen, die auf quantenmechanischer Basis getroffen werden. Beide Ansätze, der klassische und der quantenmechanische, werden einander in Kapitel 37 gegenübergestellt.

Die Querschnitte von Leitungsdrähten sind genormt und liegen bei handelsüblichen Drähten für Haushaltsgeräte in der Größenordnung von 1 mm².

Widerstände in elektronischen Geräten bestehen oft aus Kohlenstoff, einem Material mit einem relativ hohen spezifischen Widerstand. Zur Kennzeichnung von Größen und Toleranzbe-

Tabelle 22.1 Spezifischer Widerstand und Temperaturkoeffizient

Material	Spezifischer Widerstand $r / \Omega \cdot \text{m}$ bei 20 °C	Temperaturkoeffizient α / K^{-1} bei 20 °C
<i>Elektrische Leiter</i>		
Silber	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Kupfer	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$3,93 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	$2,8 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Wolfram	$5,5 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
Eisen	$10 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$
Blei	$22 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Quecksilber	$96 \cdot 10^{-8}$	$0,89 \cdot 10^{-3}$
Platin	$100 \cdot 10^{-8}$	$3,927 \cdot 10^{-3}$
Kohlenstoff	$3500 \cdot 10^{-8}$	$-0,5 \cdot 10^{-3}$
<i>Leitfähige Legierungen</i>		
Messing	$\sim 8 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-3}$
Konstantan (60 % Cu, 40 % Ni)	$\sim 44 \cdot 10^{-8}$	$0,01 \cdot 10^{-3}$
Manganin (~ 84 % Cu, ~ 12 % Mn, ~ 4 % Ni)	$44 \cdot 10^{-8}$	$0,04 \cdot 10^{-3}$
Nichrom	$100 \cdot 10^{-8}$	$0,4 \cdot 10^{-3}$
<i>Halbleiter</i>		
Germanium	0,45	$-4,8 \cdot 10^{-2}$
Silicium	640	$-7,5 \cdot 10^{-2}$
<i>Isolatoren</i>		
Neopren	$\sim 10^9$	
Polystyrol	$\sim 10^8$	
Porzellan	$\sim 10^{11}$	
Holz	$10^8\text{--}10^{14}$	
Glas	$10^{10}\text{--}10^{14}$	
Hartgummi	$10^{13}\text{--}10^{16}$	
Bernstein	$5 \cdot 10^{14}$	
Schwefel	10^{15}	
Teflon	10^{14}	
<i>Biologische Materialien</i>		
Blut	1,5	
Fett	25	

reichen solcher Kohleschichtwiderstände verwendet man farbige Ringe. Tabelle 22.2 erläutert diesen Farbcode.

Tabelle 22.2 Farbcode für Widerstände und andere Bauelemente



Farbe	erster Ring erste Ziffer	zweiter Ring zweite Ziffer	dritter Ring Multiplikator	vierter Ring Toleranz
Schwarz	0	[0]	1	–
Braun	1	1	10	1 %
Rot	2	2	100	2 %
Orange	[3]	3	1000	–
Gelb	4	4	10 000	–
Grün	5	5	100 000	–
Blau	6	6	1 000 000	–
Violett	7	7	10 000 000	–
Grau	8	8	100 000 000	–
Weiß	9	9	–	–
Gold	–	–	0,1	5 %
Silber	–	–	0,01	[10 %]
(ohne)	–	–	–	20

Der Code besteht aus vier oder mehr farbigen Ringen, die den Wert des Widerstands in Ohm, einen Multiplikator und einen Toleranzfaktor angeben, dazu eventuell Betriebsspannung und Temperatur. Beim Ablesen des Farbcodes beginnt man mit dem Ring, der einem Ende des Bauelements am nächsten liegt. Die ersten beiden Ringe stehen für ganze Zahlen zwischen 0 und 9. Der dritte Ring gibt den Multiplikator in Form von Zehnerpotenzen an. Im abgebildeten Beispiel sind die ersten drei Ringe (von links) orange, schwarz und blau. Der gesuchte Zahlenwert ist $30 \cdot 10^6$, der Widerstand beträgt damit $30 \text{ M}\Omega$. (Ein grüner vierter Ring zwischen dem schwarzen und dem blauen ergäbe einen Wert von $305 \text{ M}\Omega$). Am Ring ganz rechts im Bild wird der Toleranzbereich abgelesen. Hier (silbern) ist er gleich 10 %. Folglich wird ein Widerstand von $(30 \pm 3) \text{ M}\Omega$ codiert.



Farbig codierte Kohleschichtwiderstände auf einer Leiterplatte. (© Chris Rogers / The Stock Market.)

Übung 22.5: Geben Sie den Wert des Widerstands links unten auf dem Foto und den zugehörigen Toleranzbereich an. ◀

22.3 Energetische Betrachtung elektrischer Stromkreise

Herrscht in einem Leiter ein elektrisches Feld, so verrichtet es Arbeit an den freien Elektronen, und die Energie der Ladungsträger nimmt zu. Nach kurzer Zeit hat sich jedoch ein Gleichgewicht eingestellt, weil die erworbene kinetische Energie durch Wechselwirkungen der Ladungsträger mit Gitterionen ständig in thermische Energie, sogenannte **Joule'sche Wärme**, umgewandelt wird.

Betrachten wir dazu einen Leiterabschnitt mit der Länge l und der Querschnittsfläche A (Abbildung 22.10a). Durch den Draht fließt von links nach rechts ein stationärer Strom, den wir uns als positive freie Ladung vorstellen wollen. Zu Beginn befindet sich innerhalb des Leiterabschnitts die Ladung q . Innerhalb der Zeit Δt wandert die Ladung ein kleines Stück nach rechts (Abbildung 22.10b). Anstelle dieser Verschiebung könnte auch eine Ladungsmenge Δq (Abbildung 22.10c) vom linken Ende des Leiterabschnitts an dessen rechtes Ende versetzt werden. Die elektrische Energie der Ladung ändert sich dabei von $\Delta q \phi_a$ (links) auf $\Delta q \phi_b$ (rechts), also um

$$\Delta E_{\text{el}} = \Delta q (\phi_b - \phi_a).$$

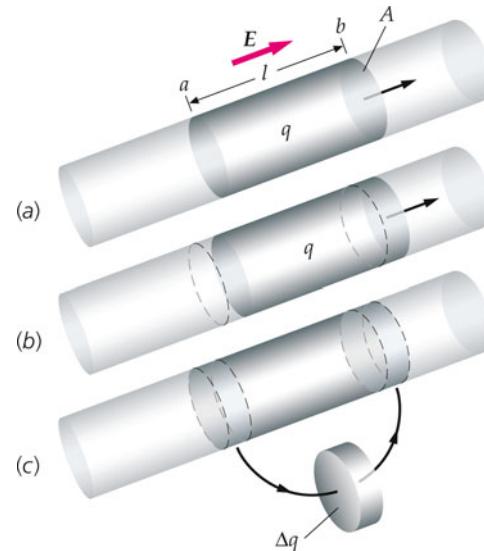


Abbildung 22.10 Durch ein Leitersegment (a) fließt innerhalb der Zeit Δt eine Ladung Δq durch die Fläche A an Punkt a mit dem Potenzial ϕ_a . Gleichzeitig verlässt dieselbe Ladungsmenge den Abschnitt durch Punkt b mit dem Potenzial ϕ_b (b). Diese Verschiebung hat folgenden Effekt (c): Die ursprünglich im Abschnitt befindliche Ladung q verliert während Δt die elektrische Energie $\Delta q \phi_a$, gewinnt aber die elektrische Energie $\Delta q \phi_b$ hinzu. Da $\phi_a > \phi_b$ ist, entspricht dies insgesamt einem Verlust an elektrischer Energie.



Der Zitterrochen hat an beiden Kopfseiten ein großes elektrisches Organ. Der Strom fließt zwischen der Ober- und der Unterseite des Körpers. Die elektrischen Organe bestehen aus umgewandelten Muskelfasern, sogenannten elektrischen Platten. Rund 140 bis zu einer halben Million solcher Platten sind zu Säulen zusammengelagert. Bei Salzwasserfischen wie diesem Rochen sind die Säulen parallel verbunden, bei Süßwasserfischen (Zitteraal, Zitterwels) hingegen in Reihe, wodurch höhere Entladungsspannungen erzeugt werden können. (Diese sind erforderlich, weil Süßwasser einen höheren spezifischen Widerstand hat als Salzwasser.) Mithilfe seiner „Batterien“, die Ströme von bis zu 50 A bei 50 V liefern, kann sich der Fisch wirksam verteidigen oder Beutetiere betäuben. (© Wolfgang Pölzer.)

Da $\phi_a > \phi_b$ ist, verliert die Ladung elektrische potenzielle Energie. Der Energieverlust beträgt

$$-\Delta E_{\text{el}} = \Delta q U$$

mit $U = \phi_a - \phi_b$ als Potenzialdifferenz entlang des Leiterabschnitts. Die Rate des Energieverlusts ist daher

$$-\frac{\Delta E_{\text{el}}}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} U$$

Wenn Δt gegen null geht, schreiben wir dafür

$$-\frac{dE_{\text{el}}}{dt} = \frac{dq}{dt} U = I U.$$

$I = dq/dt$ ist der fließende Strom. Der Verlust an elektrischer Energie pro Zeiteinheit entspricht der im Leiterabschnitt umgesetzten Leistung P :

$$P = I U. \quad (22.13)$$

ENERGIEVERLUST PRO ZEITEINHEIT

Ist U in Volt angegeben und I in Ampere, so erhalten wir die Leistung in Watt. Der Energieverlust ist gleich dem Produkt aus U , der Potenzialdifferenz pro Ladungseinheit, und I , der pro Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters fließenden Ladung. Gleichung 22.13 gilt für alle Bauelemente beliebiger Stromkreise. Die Rate, mit der dem Bauelement elektrische

22.3 Energetische Betrachtung elektrischer Stromkreise

Energie zugeführt wird, ergibt sich als Produkt aus der Spannung über das Bauelement (in Stromrichtung) und dem durch das Element fließenden Strom.

An einem Leiter – ein Widerstand ist ein Leiter – wird elektrische Energie in Form von Wärme an die Umgebung abgeführt. Mithilfe der Beziehung $U = IR$ (bzw. $I = U_R/R$, wobei U_R der **Spannungsabfall** über dem Widerstand R ist) können wir Gleichung 22.13 in nützlicher Weise umformulieren:

$$P = I U_R = RI^2 = \frac{U_R^2}{R}. \quad (22.14)$$

IN EINEM WIDERSTAND UMGESETZTE LEISTUNG

Eine Anwendung illustriert Beispiel 22.5.

Beispiel 22.5: In einem Widerstand umgesetzte Leistung

Durch einen Ohm'schen Widerstand von $12,0 \Omega$ fließt ein Strom von $3,00 \text{ A}$. Welche Leistung wird dabei umgesetzt?

Problembeschreibung: Gegeben sind der Strom und der Widerstand, nicht aber der Spannungsabfall. Deshalb wenden wir am besten die Beziehung $P = RI^2$ (siehe Gleichung 22.14) an. Ebenso gut könnten wir zunächst den Spannungsabfall berechnen ($U_R = RI$) und anschließend die Beziehung $P = I U_R$ anwenden.

Lösung: Berechnen Sie RI^2 :

$$P = RI^2 = (12,0 \Omega) \cdot (3,00 \text{ A})^2 = 108 \text{ W}$$

Plausibilitätsprüfung: Über den Widerstand fällt die Spannung $U_R = RI = (12,0 \Omega) \cdot (3,00 \text{ A}) = 36,0 \text{ V}$ ab. Damit erhalten wir für die Leistung $P = I U_R = (3,00 \text{ A}) \cdot (36,0 \text{ V}) = 108 \text{ W}$.

Übung 22.6: Durch einen Draht mit einem Widerstand von $5,0 \Omega$ fließt $6,0 \text{ s}$ lang ein Strom von $3,0 \text{ A}$. a) Welche Leistung wird dem Draht dabei zugeführt? b) Wie viel thermische Energie wird an die Umgebung abgeführt? ◀

Spannungsquellen und Quellenspannung

Um einen stationären Strom durch einen Leiter aufrechtzuerhalten, muss ständig elektrische Energie zugeführt werden. Die Energiezufuhr übernimmt eine **Spannungsquelle**, beispielsweise eine Batterie, die chemische in elektrische Energie umwandelt, oder ein Generator, der elektrische aus mechanischer Energie erzeugt. Eine Spannungsquelle verrichtet nichtkonservative Arbeit an den hindurchtretenden Ladungen, deren elektrische Energie dadurch zu- oder abnimmt (ähnlich wie beim Anheben

eines Massestücks dessen potentielle Energie der Gravitation zunimmt). Die pro Ladungseinheit verrichtete Arbeit ist die **Quellenspannung** U_Q . (In der älteren Literatur findet man hierfür noch den Begriff „elektromotorische Kraft“, kurz EMK. Er ist irreführend, weil er keine Kraft bezeichnet, sondern eine Spannung, und wird nicht mehr verwendet.) Die Einheit der (Quellen-)Spannung ist, wie die Einheit der Potenzialdifferenz, das Volt. An den Polen einer **idealen Spannungsquelle** kann unabhängig vom fließenden Strom stets die gleiche Quellenspannung abgegriffen werden. Die Potenzialdifferenz zwischen den Polen einer idealen Spannungsquelle ist vom Betrag her gleich deren Quellenspannung.

In Abbildung 22.11 sehen Sie einen einfachen Stromkreis: Mit einer Spannungsquelle $\text{---} \mid \text{---}$ ist ein Ohm'scher Widerstand R (Schaltsymbol $\text{---} \text{W} \text{---}$) verbunden. Die geraden Linien stehen für Leitungsdrähte, deren Widerstand vernachlässigbar ist. Im Idealfall sorgt die Spannungsquelle für eine konstante Potenzialdifferenz (gleich U_Q) zwischen den Punkten a und b , wobei sich a auf dem höheren Potenzial befindet. Die Potenzialdifferenz zwischen a und c bzw. d und b ist aufgrund des vernachlässigbaren Widerstands des Leitungsdrähtes praktisch gleich null. Daraus folgt, dass der Spannungsabfall zwischen den Punkten c und d gleich U_Q sein muss. Durch den Widerstand fließt dann der Strom $I = U_Q/R$ in Uhrzeigerrichtung, wie in der Skizze durch einen Pfeil angedeutet wird.

Machen Sie sich klar, dass die Ladung *innerhalb* der Batterie vom niedrigen zum höheren Potenzial fließt, wodurch die elektrische Energie zunimmt. (Lädt man die Batterie mithilfe eines Generators oder einer zweiten Batterie auf, so fließt die Ladung innerhalb der Batterie entsprechend vom höheren zum niedrigen Potenzial, und die elektrische potentielle Energie nimmt ab: Elektrische Energie wird in chemische Energie umgewandelt und von der Batterie in dieser Form gespeichert.) Bewegt sich die Ladung Δq durch eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_Q , so steigt ihre elektrische Energie um $\Delta q U_Q$. Anschließend fließt die Ladung durch den Widerstand, wo elektrische Energie in Wärme umgewandelt wird. Die Rate, mit der die Spannungsquelle Energie zur Verfügung stellt, ist gleich der Leistung der Quelle:

$$P = \frac{(\Delta q) U_Q}{\Delta t} = I U_Q. \quad (22.15)$$

von einer SPANNUNGSSQUELLE ABGEGBENE LEISTUNG

Im Fall des einfachen Stromkreises aus Abbildung 22.11 wird die von der Batterie abgegebene Leistung vollständig im Widerstand umgesetzt.

Eine Spannungsquelle wie die Batterie in Abbildung 22.11 können wir uns als eine Art Pumpe vorstellen, die Ladung von einer Region mit niedrigem Potenzial in eine Region höheren Potenzials befördert. Ein mechanisches Analogon zum eben besprochenen Stromkreis sehen Sie in Abbildung 22.12.

An den Polen einer **realen Spannungsquelle** greift man die **Klemmenspannung** U_K ab, die nicht gleich der Quellenspannung ist. Betrachten wir dazu einen Stromkreis aus einer realen

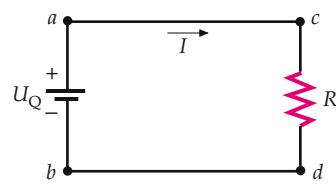


Abbildung 22.11 Ein einfacher Stromkreis aus einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_Q und einem Ohm'schen Widerstand R . Der Widerstand der Leitungsdrähte ist vernachlässigbar gering.

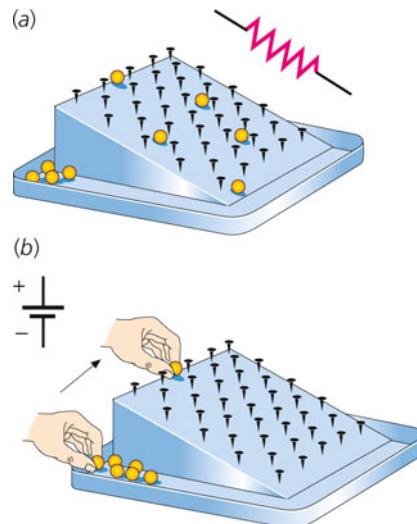


Abbildung 22.12 Mechanisches Modell für einen einfachen, aus einer Spannungsquelle und einem Ohm'schen Widerstand bestehenden Stromkreis. a) Die Murmeln werden auf eine Höhe h angehoben und auf das Brett gelegt. Infolge der Gravitation beginnen sie, die schiefe Ebene hinunterzurollen. Durch Zusammenstöße mit den Nägeln (Analoga für die Gitterionen im Widerstand) werden sie wiederholt abgebremst, wobei kinetische Energie in Wärme umgewandelt wird. Die ständigen Stöße bewirken, dass sich die Murmeln nur relativ langsam, mit ungefähr konstanter (Drift-)Geschwindigkeit, abwärts bewegen. b) Ein Kind legt die unten angekommenen Murmeln wieder nach oben auf das Brett und verrichtet dabei jeweils die Arbeit $m g h$. Analog zur Spannungsquelle wandelt es chemische Energie in potentielle Energie um.

Batterie und einem Ohm'schen Widerstand. Verändern wir den Strom durch Variation von R und messen die Klemmenspannung der Batterie, so stellen wir fest, dass diese bei ansteigendem Strom geringfügig abnimmt (Abbildung 22.13), als ob die Batterie selbst einen Widerstand besäße.

Wir stellen uns eine reale Spannungsquelle deshalb als Kombination einer idealen Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_Q und eines kleinen Widerstands R_{in} vor. R_{in} heißt **Innenwiderstand** der Batterie.

Das Schaltbild des Stromkreises aus realer Batterie und Ohm'schem Widerstand sehen Sie in Abbildung 22.14. Fließt im Kreis der Strom I , so ist die Beziehung zwischen den Poten-

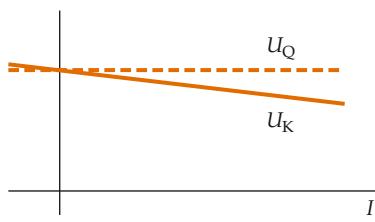


Abbildung 22.13 Klemmenspannung U_k einer realen Batterie in Abhängigkeit vom fließenden Strom I . Die gestrichelte Linie gibt die Klemmenspannung (gleich der Quellenspannung) einer idealen Batterie an.

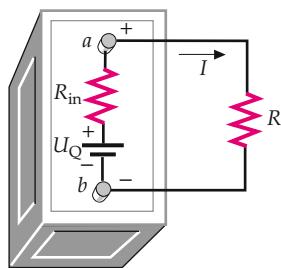


Abbildung 22.14 Eine reale Batterie denken wir uns zusammengesetzt aus einer idealen Spannungsquelle und einem kleinen Innenwiderstand R_{in} .

zialen an den Punkten a und b gegeben durch

$$\phi_a = \phi_b + U_Q - R_{in} I,$$

und die Klemmenspannung ist dann

$$\phi_a - \phi_b = U_Q - R_{in} I. \quad (22.16)$$

Wie Sie Abbildung 22.13 entnehmen, nimmt die Klemmenspannung mit ansteigendem Strom linear ab. Der Spannungsabfall über dem Ohm'schen Widerstand R ist gleich $R I$ und gleich der Klemmenspannung:

$$R I = \phi_a - \phi_b = U_Q - R_{in} I.$$

Wir lösen dies nach dem Strom I auf und erhalten:

$$I = \frac{U_Q}{R + R_{in}}. \quad (22.17)$$

Bei einer Schaltung wie in Abbildung 22.14 ist die durch Gleichung 22.16 gegebene Klemmenspannung geringer als die Quellspannung der Batterie, weil über den Innenwiderstand der Batterie ebenfalls eine Spannung abfällt. In der Praxis haben beispielsweise Autoakkumulatoren einen Innenwiderstand in der Größenordnung von nur wenigen hundertsteln Ohm; solange die Stromstärke nicht sehr groß wird, ist die Klemmenspannung dann fast gleich der Quellspannung. Ein ungewöhnlich hoher Innenwiderstand deutet auf einen Defekt der Batterie hin. Um zu überprüfen, ob die Batterie funktionstüchtig

22.3 Energetische Betrachtung elektrischer Stromkreise

ist, reicht es nicht unbedingt aus, die Klemmenspannung mit einem Voltmeter zu messen, denn solche Messgeräte arbeiten mit sehr geringen Stromstärken. Sie müssen die Klemmenspannung stattdessen feststellen, wenn die Batterie belastet wird und ein starker Strom fließt (etwa beim Betätigen des Anlassers). Ein deutlicher Abfall der Klemmenspannung ist dann ein Indiz für einen hohen Innenwiderstand und damit für einen Batteriedefekt.

Auf Batterien und Akkumulatoren ist in der Regel vermerkt, wie viel Ladung (in Amperestunden, $A \cdot h$) insgesamt entnommen werden kann:

$$1 A \cdot h = (1 C \cdot s^{-1}) \cdot (3600 s) = 3600 C.$$

Die in der Batterie gespeicherte Energie ist gleich dem Produkt aus der Ladung, die abgegeben werden kann, und der Quellspannung:

$$E_{el} = q U_Q. \quad (22.18)$$

Die gespeicherte Energie entspricht der Arbeit, die die Batterie verrichten kann. Die Beispiele 22.6 und 22.7 illustrieren die Beziehungen zwischen Spannung, Leistung und Energie.

Beispiel 22.6: Klemmenspannung, Leistung und gespeicherte Energie

Ein Ohm'scher Widerstand mit $R = 11,0 \Omega$ ist mit einer Batterie verbunden (Quellspannung 6,00 V, Innenwiderstand 1,00 Ω). Berechnen Sie a) den Strom in diesem Stromkreis, b) die Klemmenspannung der Batterie, c) die von den chemischen Reaktionen innerhalb der Batterie freigesetzte Leistung, d) die am (äußeren) Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung und e) die am Innenwiderstand umgesetzte Leistung. f) Wie viel Energie ist in der Batterie gespeichert, wenn sich auf der Verpackung die Angabe 150 $A \cdot h$ findet?

Problembeschreibung: Das Schaltbild dieses Stromkreises entspricht Abbildung 22.14. Mit Gleichung 22.17 ($I = U_Q / (R + R_{in})$) berechnen wir den Strom, das Ergebnis verwenden wir zur Berechnung der Klemmenspannung und der an den Widerständen umgesetzten Leistungen.

Lösung:

Teilaufgabe a

Den Strom erhalten Sie aus Gleichung 22.17:

$$I = \frac{U_Q}{R + R_{in}} = \frac{6,00 \text{ V}}{11,0 \Omega + 1,00 \Omega} = \boxed{0,500 \text{ A}}$$

Teilaufgabe b

Mit diesem Ergebnis berechnen Sie die Klemmenspannung:

$$\begin{aligned} \phi_a - \phi_b &= U_Q - R_{in} I = 6,00 \text{ V} - (1,00 \Omega) \cdot (0,500 \text{ A}) \\ &= \boxed{5,50 \text{ V}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die von den chemischen Reaktionen in der Batterie freigesetzte Leistung ist gleich $U_Q I$:

$$P = U_Q I = (6,00 \text{ V}) \cdot (0,500 \text{ A}) = \boxed{3,00 \text{ W}}$$

Teilaufgabe d

Am äußeren Ohm'schen Widerstand wird die Leistung $R I^2$ (siehe Gleichung 22.14) umgesetzt:

$$R I^2 = (11,0 \Omega) \cdot (0,500 \text{ A})^2 = \boxed{2,75 \text{ W}}$$

Teilaufgabe e

Am Innenwiderstand wird die Leistung $R_{\text{in}} I^2$ umgesetzt:

$$R_{\text{in}} I^2 = (1,00 \Omega) \cdot (0,500 \text{ A})^2 = \boxed{0,250 \text{ W}}$$

Teilaufgabe f

Die insgesamt in der Batterie gespeicherte Energie ist gleich dem Produkt aus der Quellenspannung und der Ladung, die abgegeben werden kann:

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= q U_Q = (150 \text{ A} \cdot \text{h}) \cdot \frac{3600 \text{ C}}{1 \text{ A} \cdot \text{h}} \cdot (6,00 \text{ V}) \\ &= \boxed{3,24 \text{ MJ}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Batterie gibt hier eine Leistung von 3,00 W ab, 2,75 W davon werden im äußeren Ohm'schen Widerstand umgesetzt, 0,250 W am Innenwiderstand der Batterie.

Weitergedacht: Der Innenwiderstand der meisten Batterien ist geringer als der in diesem Beispiel berechnete Wert; hier wurde nur versucht, die Rechnung numerisch möglichst einfach zu machen. In vielen anderen Fällen können wir den Innenwiderstand der Batterie als vernachlässigbar klein betrachten. ■

Beispiel 22.7: Maximal abgegebene Leistung

Gegeben ist eine Batterie mit der Quellenspannung U_Q und dem Innenwiderstand R_{in} , an die ein Ohm'scher Lastwiderstand angeschlossen wird. Wie groß muss R sein, damit die an den Widerstand abgegebene Leistung maximal ist?

Problembeschreibung: Das Schaltbild entspricht Abbildung 22.14. Dem Ohm'schen Widerstand R wird die Leistung $R I^2$ zugeführt (Gleichung 22.14) mit $I = U_Q / (R + R_{\text{in}})$. Wir erhalten den Wert von R , für den die an den Widerstand abgegebene Leistung maximal wird, indem wir dP/dR null setzen und nach R auflösen.

Lösung: 1. Mithilfe von Gleichung 22.17 eliminieren Sie I aus der Beziehung $P = R I^2$. So können Sie P als Funktion von R mit den Konstanten U_Q und R_{in} aufschreiben:

$$P = \frac{U_Q^2 R}{(R + R_{\text{in}})^2}$$

2. Bilden Sie die Ableitung dP/dR ; wenden Sie die Quotientenregel an:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR} &= \frac{U_Q^2 (R + R_{\text{in}})^2 - 2 U_Q^2 R (R + R_{\text{in}})}{(R + R_{\text{in}})^4} \\ &= \frac{U_Q^2 (R_{\text{in}} - R)}{(R + R_{\text{in}})^3} \end{aligned}$$

3. Setzen Sie dP/dR gleich null und lösen Sie nach R auf:

$$R = R_{\text{in}}$$

Plausibilitätsprüfung: Für $R = 0$ ist der Strom maximal, aber die Leistung gleich null. In diesem Fall wird keine Leistung am Widerstand umgesetzt. Um den Grenzwert von P für $R \rightarrow \infty$ zu bilden, klammern wir R im Nenner aus:

$$P = \frac{U_Q^2 R}{(R + R_{\text{in}})^2} = \frac{U_Q^2}{R (1 + R_{\text{in}}/R)^2} .$$

Offenbar geht bei $R \rightarrow \infty$ $P \rightarrow 0$. Folglich muss P sein Maximum für R im Bereich $0 < R < \infty$ erreichen. $R = R_{\text{in}}$ ist daher ein plausibles Ergebnis.

Weitergedacht: Die Leistung wird maximal, wenn der Lastwiderstand R gleich dem Innenwiderstand R_{in} ist. Ein ähnliches Ergebnis erhält man für Wechselstromkreise; die Wahl von $R = R_{\text{in}}$ zur Maximierung der Leistung, die dem Lastwiderstand zugeführt wird, bezeichnet man in diesem Fall als *Impedanzanpassung*. In Abbildung 22.15 wurde P als Funktion von R aufgetragen.



Abbildung 22.15 Bei $R = R_{\text{in}}$ wird die dem Lastwiderstand zugeführte Leistung maximal. ■

22.4 Zusammenschaltung von Widerständen

Um die Analyse von Stromkreisen zu vereinfachen, bietet es sich oft an, Kombinationen aus zwei oder mehreren Widerständen durch einen einzigen Widerstand zu ersetzen. Durch den **Ersatzwiderstand** fließt der gleiche Strom (und an ihm fällt die gleiche Spannung ab) wie an den ursprünglichen Widerständen zusammengenommen. Die Vorgehensweise ist dabei analog zu der in Kapitel 21 für Zusammenschaltungen von Kondensatoren.

Reihenschaltung von Widerständen

Sind zwei oder mehr Widerstände so miteinander verbunden, dass durch alle der gleiche Strom fließt (wie R_1 und R_2 in Abbildung 22.16), dann spricht man von einer **Reihenschaltung**. Über R_1 fällt die Spannung $R_1 I$ ab, über R_2 die Spannung $R_2 I$ (I ist der durch den jeweiligen Widerstand fließende Strom). Der Spannungsabfall über beiden Widerständen ergibt sich als Summe der Spannungsabfälle über den einzelnen Bauelementen:

$$U_R = R_1 I + R_2 I = I (R_1 + R_2) . \quad (22.19)$$

Wie groß muss nun ein einzelner Widerstand sein, damit über ihn die Spannung U_R abfällt, wenn er vom gleichen Strom I durchflossen wird? Um dies zu ermitteln, setzen wir U_R gleich RI (Abbildung 22.16b) und erhalten

$$R = R_1 + R_2 .$$

Sind mehr als zwei Widerstände in Reihe geschaltet, so ergibt sich allgemein

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (22.20)$$

ERSATZWIDERSTAND FÜR REIHENSCHALTUNGEN VON WIDERSTÄNDEN

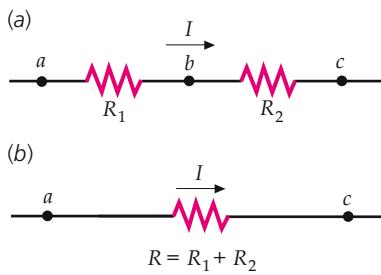


Abbildung 22.16 a) Zwei in Reihe geschaltete Widerstände werden vom gleichen Strom durchflossen. b) Die Widerstände in Schaltung a) können durch einen Ersatzwiderstand $R = R_1 + R_2$ ersetzt werden, über den dieselbe Spannung abfällt wie über den Widerständen R_1 und R_2 zusammengenommen, wenn der Strom I fließt.

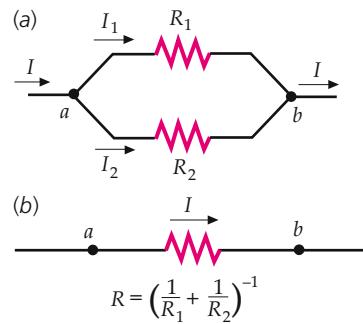


Abbildung 22.17 a) Von einer Parallelschaltung spricht man, wenn zwei (oder mehr) Widerstände an beiden Enden verbunden sind, sodass über allen die gleiche Spannung abfällt. b) Die Widerstände in Schaltung a) können durch einen einzelnen Ersatzwiderstand R ersetzt werden, für den gilt: $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

Parallelschaltung von Widerständen

Sind zwei oder mehr Widerstände so miteinander verbunden, dass über allen die gleiche Spannung abfällt (wie R_1 und R_2 in Abbildung 22.17a), dann nennt man dies **Parallelschaltung**. (Beachten Sie, dass durch die Art der Verknüpfung ein Ende jedes Widerstands auf dem Potenzial a liegt und das andere auf dem Potenzial b .) Zum Punkt a in der Skizze fließt der Strom I . In a verzweigt sich der Stromkreis, und der Strom teilt sich auf: In den oberen Zweig mit dem Widerstand R_1 fließt der Teilstrom I_1 , in den unteren Zweig mit dem Widerstand R_2 fließt der Teilstrom I_2 . Die Summe aller **Teilströme** ist gleich dem Strom I , der zu a hinfließt:

$$I = I_1 + I_2 . \quad (22.21)$$

Im Punkt b vereinigen sich die Zweige, hinter b fließt durch den Draht wieder der Strom $I = I_1 + I_2$. Die Beziehung zwischen dem Spannungsabfall $U_R = \phi_a - \phi_b$ über jeden der Widerstände und den Teilströmen lautet

$$U_R = R_1 I_1 = R_2 I_2 . \quad (22.22)$$

Über den Ersatzwiderstand R fällt die Spannung U_R ab, wenn der Strom I fließt (Abbildung 22.17b):

$$R = \frac{U_R}{I} . \quad (22.23)$$

Wir lösen die Gleichungen 22.22 und 22.23 nach I , I_1 und I_2 auf und setzen alles in Gleichung 22.21 ein. So erhalten wir

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_R}{R_1} + \frac{U_R}{R_2} = U_R \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (22.24)$$

Anschließend teilen wir beide Seiten durch U_R und erhalten

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

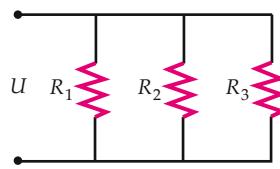


Abbildung 22.18 Drei parallel geschaltete Widerstände.

Diese Beziehung lässt sich nach dem Ersatzwiderstand \$R\$ zweier parallel geschalteter Widerstände auflösen. Wir verallgemeinern das Ergebnis wieder für Parallelschaltungen beliebig vieler Widerstände (wie z. B. in Abbildung 22.18):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (22.25)$$

ERSATZWIDERSTAND FÜR PARALLELSCHALTUNGEN VON
WIDERSTÄNDEN

!

Der Ersatzwiderstand einer Kombination parallel geschalteter Widerstände ist kleiner als jeder einzelne Widerstand der Kombination.

Übung 22.7: Ein Widerstand \$R_1 = 2,0 \Omega\$ und ein Widerstand \$R_2 = 4,0 \Omega\$ sind a) in Reihe und b) parallel geschaltet. Berechnen Sie jeweils den Ersatzwiderstand. ◀

Der Ersatzwiderstand \$R\$ einer Gruppe parallel geschalteter Widerstände ist stets niedriger als jeder einzelne Widerstand \$R_i\$ der Kombination. Aus Gleichung 22.25 folgt

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{R_i}.$$

Durch Multiplikation beider Seiten dieser Ungleichung mit dem Produkt \$R R_i\$ erhalten wir

$$R_i > R.$$

Widerstände leiten den elektrischen Strom zwar nicht so gut wie die Drähte, mit denen sie in einem Stromkreis verbunden sind, aber im Prinzip bleiben es elektrische Leiter. Je mehr Widerstände man in einer Parallelschaltung hinzufügt, desto mehr leitfähige Wege stehen für die Bewegung der Ladungsträger zur Verfügung. Deshalb wird der Ersatzwiderstand der Kombination umso niedriger, je mehr einzelne Widerstände (parallele Wege) vorhanden sind.

In Beispiel 22.8 können Sie üben, Parallel- und Reihenschaltungen von Widerständen zu erkennen. Wie sich parallel und in Reihe geschaltete Widerstände unterscheiden, illustrieren die Beispiele 22.9 und 22.10.

Vorgehensweise:

Aufgaben zur Parallel- oder Reihenschaltung Ohm'scher Widerstände

Wenn das Schaltschema nicht gegeben ist, fertigen Sie es an.

- Identifizieren Sie alle Reihen- oder Parallelkombinationen und berechnen Sie die zugehörigen Ersatzwiderstände.
- Zeichnen Sie ein neues Schaltschema, wobei Sie jede der Kombinationen aus Schritt 1 gegen den jeweiligen Ersatzwiderstand austauschen.
- Wiederholen Sie Schritt 1 und 2, bis Sie sämtliche Reihen- und Parallelkombinationen ersetzt haben. Ihr Stromkreis sollte dann nur noch einen einzigen Widerstand enthalten. Berechnen Sie den Strom mit der Beziehung \$U = IR\$.
- Gehen Sie zum vorangegangenen Schema zurück und berechnen Sie Strom und Spannungsabfall für alle darin auftretenden Widerstände.
- Wiederholen Sie Schritt 4, bis Sie sukzessive alle Ströme und Spannungsabfälle berechnet haben.

Plausibilitätsprüfung: Berechnen Sie aus \$P = I U\$ oder einem äquivalenten Ausdruck die Leistung, die in jedem einzelnen Widerstand umgesetzt wird, und aus \$P = I U_Q\$ die Leistung, die von den in der Batterie ablaufenden chemischen Reaktionen freigesetzt wird. Vergewissern Sie sich dann, dass die insgesamt abgegebene Leistung gleich der insgesamt aufgenommenen Leistung ist.

Beispiel 22.8: Parallel- und Reihenschaltungen von Widerständen

ZUM VERSTÄNDNIS

In Abbildung 22.19 sehen Sie das Schema eines Stromkreises mit einer Batterie und sechs Ohm'schen Widerständen. a) Enthält der Kreis in Reihe geschaltete Widerstände? Wenn ja, welche sind es? b) Enthält der Kreis parallel geschaltete Widerstände? Wenn ja, welche sind es?

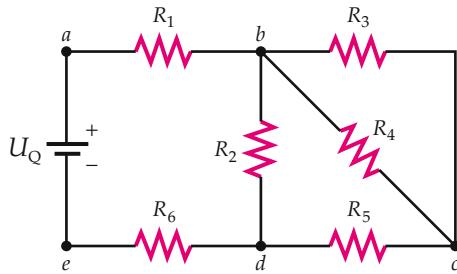


Abbildung 22.19 Schaltungsnetz von Ohm'schen Widerständen.
Problembeschreibung: Eine Reihenschaltung von Widerständen liegt vor, wenn die Bauelemente so miteinander verbunden sind, dass durch alle der gleiche Strom fließt. Eine Parallelschaltung liegt vor, wenn mehrere Bauelemente so miteinander verbunden sind, dass über allen die gleiche Spannung abfällt.

Lösung:

Teilaufgabe a

In einem Stromkreis ändert sich der Strom nur an Verzweigungspunkten (b, c, d): Die Widerstände 1 und 6 sind in Reihe geschaltet.

Teilaufgabe b

1. Entlang eines Wegs ändert sich das Potenzial nur an Batterien, Ohm'schen Widerständen oder Kondensatoren. Es sei $\phi_a, \phi_b, \phi_c, \phi_d$ und ϕ_e das Potenzial im Punkt a, b, c, d bzw. e. Tragen Sie das Potenzial an beiden Enden jedes Widerstands in eine Tabelle ein:

Widerstand	ϕ_a	ϕ_b	ϕ_c	ϕ_d	ϕ_e
1	×	×			
2		×			×
3		×	×		
4		×	×		
5			×	×	
6				×	×

2. Aus der Tabelle entnehmen Sie, dass sowohl für Widerstand 3 als auch für Widerstand 4 das Potenzial an einem Ende bei ϕ_b und am anderen Ende bei ϕ_c liegt: Die Widerstände 3 und 4 sind parallel geschaltet.

Weitergedacht: Widerstand 5 ist mit der parallelen Kombination aus den Widerständen 3 und 4 in Reihe geschaltet. Widerstand 2 ist parallel geschaltet mit der Kombination aus den Widerständen 3, 4 und 5. Außerdem sind Widerstand 1, die Batterie, Widerstand 6 und die Kombination der Widerstände 2, 3, 4 und 5 in Reihe geschaltet.

Beispiel 22.9: Parallel geschaltete Ohm'sche Widerstände

An zwei parallel geschalteten Ohm'schen Widerständen $R_1 = 4,0 \Omega$ und $R_2 = 6,0 \Omega$ liegt eine Spannung von 12 V an, die von einer idealen Batterie zur Verfügung gestellt wird (Abbildung 22.20). Zu berechnen ist a) der Ersatzwiderstand, b) der insgesamt fließende Strom, c) der durch jeden Ohm'schen Widerstand fließende Teilstrom, d) die in jedem Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung und e) die von der Batterie abgegebene Leistung.

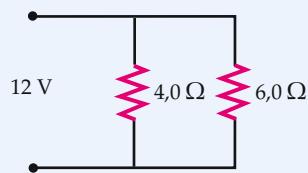


Abbildung 22.20 Parallelschaltung zweier Ohm'scher Widerstände.

Problembeschreibung: Tragen Sie die Ströme mit den zugehörigen Richtungen in das Schaltbild ein, wie es Abbildung 22.21 zeigt.

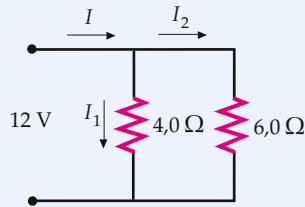


Abbildung 22.21 Schaltung mit zugehörigen Stromrichtungen.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie den Ersatzwiderstand:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{4,0 \Omega} + \frac{1}{6,0 \Omega} = \frac{3,0}{12 \Omega} + \frac{2,0}{12 \Omega} = \frac{5,0}{12 \Omega}$$

$$R = \frac{12 \Omega}{5,0} = \boxed{2,4 \Omega}$$

Teilaufgabe b

Der Gesamtstrom ist gleich dem Quotienten aus dem Spannungsabfall und dem Ersatzwiderstand:

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{12 \text{ V}}{2,4 \Omega} = \boxed{5,0 \text{ A}}$$

Teilaufgabe c

Die Teilstrome berechnen Sie mithilfe von Gleichung 22.22. Der Spannungsabfall U_R über beiden Ohm'schen Widerständen ist gegeben (12 V):

$$U_R = RI$$

$$I_1 = \frac{12 \text{ V}}{4,0 \Omega} = \boxed{3,0 \text{ A}}$$

$$I_2 = \frac{12 \text{ V}}{6,0 \Omega} = \boxed{2,0 \text{ A}}$$

Teilaufgabe d

Die berechneten Stromstärken setzen Sie ein, um mithilfe der Beziehungen $P = UI$ und $U = IR$ die in den einzelnen Ohm'schen Widerständen umgesetzten Leistungen zu ermitteln:

$$P = UI = (IR)I = RI^2$$

$$P_1 = R_1 I_1^2 = (4,0 \Omega) \cdot (3,0 \text{ A})^2 = \boxed{36 \text{ W}}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = (6,0 \Omega) \cdot (2,0 \text{ A})^2 = \boxed{24 \text{ W}}$$

Teilaufgabe e

Die Beziehung $P = U_Q I$ liefert Ihnen schließlich die von der Batterie abgegebene Leistung:

$$P = U_Q I = (12 \text{ V}) \cdot (5,0 \text{ A}) = \boxed{60 \text{ W}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die von der Batterie abgegebene Leistung muss gleich der Summe der in den Ohm'schen Widerständen umgesetzten Leistungen sein: $P = 60 \text{ W} = 36 \text{ W} + 24 \text{ W}$. Wir hätten die einzelnen Leistungen in Teilaufgabe d auch wie folgt berechnen können: $P_1 = U_R I_1 = (12 \text{ V}) \cdot (3,0 \text{ A}) = 36 \text{ W}$ und $P_2 = U_R I_2 = (12 \text{ V}) \cdot (2,0 \text{ A}) = 24 \text{ W}$.

Weitergedacht: Aus Gleichung 22.22 ($I_1 R_1 = I_2 R_2$) folgt, dass sich die Ströme durch zwei parallel geschaltete Ohm'sche Widerstände umgekehrt zueinander verhalten wie die entsprechenden Werte der Widerstände:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{für parallel geschaltete Widerstände}).$$

Zum Abschluss können Sie in den Übungsbeispielen 22.11 und 22.12 grundlegende Anwendungen selbst durchrechnen und in Beispiel 22.13 einen Bezug zu alltäglichen Elektrogeräten herstellen.

Beispiel 22.10: In Reihe geschaltete Ohm'sche Widerstände**ZUR ÜBUNG**

Zwei Ohm'sche Widerstände $R_1 = 4,0 \Omega$ und $R_2 = 6,0 \Omega$ sind in Reihe mit einer 12-V-Batterie geschaltet, deren Innenwiderstand vernachlässigt werden kann. Berechnen Sie a) den Ersatzwiderstand der Schaltung, b) die Stromstärke in diesem Stromkreis, c) den Spannungsabfall über R_1 und R_2 , d) die an jedem Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung und e) die insgesamt umgesetzte Leistung.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie das Schaltbild (Abbildung 22.22).

2. Berechnen Sie den Ersatzwiderstand.

Teilaufgabe b

Den Strom erhalten Sie aus der Beziehung $U_R = RI$.

Teilaufgabe c

Zur Berechnung des Spannungsabfalls über den einzelnen Ohm'schen Widerständen wenden Sie das Ohm'sche Gesetz an.

Teilaufgabe d

Mithilfe der Gleichung $P = RI^2$ erhalten Sie die an jedem Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung.

Teilaufgabe e

Die insgesamt umgesetzte Leistung ist gleich der Summe der beiden Leistungen, die Sie in Teilaufgabe d berechnet haben.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

1.

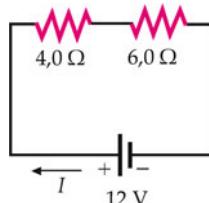


Abbildung 22.22 Reihenschaltung zweier Ohm'scher Widerstände.

2.

$$R = [10,0 \Omega]$$

Teilaufgabe b

$$I = [1,2 \text{ A}]$$

Teilaufgabe c

$$U_{R_1} = [4,8 \text{ V}], \quad U_{R_2} = [7,2 \text{ V}]$$

Teilaufgabe d

$$P_1 = [5,8 \text{ W}], \quad P_2 = [8,6 \text{ W}]$$

Teilaufgabe e

$$P = [14,4 \text{ W}]$$

Plausibilitätsprüfung: In diesem Stromkreis fließt ein Strom von 1,2 A. Sind dieselben Widerstände nicht in Reihe, sondern parallel geschaltet (siehe Beispiel 22.9), so fließt ein Strom von 5,0 A. Der geringere Strom in einer Reihenschaltung von Widerständen entspricht der Erwartung.

Beispiel 22.11: Parallel- und Reihenschaltung Ohm'scher Widerstände**ZUR ÜBUNG**

Gegeben ist der in Abbildung 22.23 skizzierte Stromkreis. Zunächst sei der Schalter S₁ offen und der Schalter S₂ geschlossen. Berechnen Sie a) den Ersatzwiderstand des Stromkreises, b) den insgesamt durch die Spannungsquelle fließenden Strom, c) den Spannungsabfall über jeden Ohm'schen Widerstand und d) den durch die einzelnen Ohm'schen Widerstände fließenden Strom. e) Schalter S₁ sei nun geschlossen. Wie stark ist der Strom, der durch R₁ fließt? f) Nun werde Schalter S₂ geöffnet, während S₁ geschlossen bleibt. Berechnen Sie die Spannungsabfälle über R₃ und über S₂ (R₁ = 2,0 Ω, R₂ = 12 Ω, R₃ = 6,0 Ω).

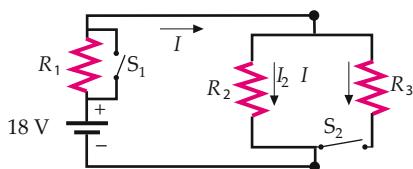


Abbildung 22.23 Parallel- und Reihenschaltung von drei Ohm'schen Widerständen.

Problembeschreibung: a) Zur Berechnung des Ersatzwiderstands des gesamten Stromkreises ersetzen Sie zunächst die parallel geschalteten Ohm'schen Widerstände durch ihren Ersatzwiderstand. Strom und Spannungsabfälle berechnen Sie dann mithilfe des Ohm'schen Gesetzes, das Sie auch für die Teilaufgaben b und c anwenden müssen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Berechnen Sie den Ersatzwiderstand der Parallelschaltung von R₂ und R₃.
- Verfahren Sie nun, als ob dieser Ersatzwiderstand mit R₁ in Reihe geschaltet wäre, und berechnen Sie den Ersatzwiderstand des Stromkreises.

Teilaufgabe b

Den durch die Batterie (und natürlich auch durch R₁) fließenden Strom berechnen Sie mithilfe des Ohm'schen Gesetzes.

Teilaufgabe c

- Der Spannungsabfall über R₁ ergibt sich aus der Beziehung $U_{R_1} = R_1 I$.
- Den Spannungsabfall über den Ohm'schen Widerständen in der Parallelschaltung erhalten Sie aus der Beziehung $U_R = R_{2,3} I$.

Teilaufgabe d

Den durch die parallel geschalteten Ohm'schen Widerstände R₂ und R₃ fließenden Strom berechnen Sie mit der Gleichung $I_i = U_R / R_i$.

Teilaufgabe e

Bei geschlossenem Schalter S₁ ist der Spannungsabfall über R₁ null. Der Strom durch dieses Bauelement ergibt sich aus dem Ohm'schen Gesetz.

Teilaufgabe f

Ist der Schalter S₂ geöffnet, fließt durch R₃ kein Strom. Der Spannungsabfall über dieses Bauelement ergibt sich aus dem Ohm'schen Gesetz. Der Spannungsabfall über R₂ ist gleich der Summe aus den Spannungsabfällen über R₃ und über den Schalter S₂.

Ergebnisse der Lösungsschritte:**Teilaufgabe a**

- $R_{2,3} = 4,0 \Omega$
- $R = [6,0 \Omega]$

Teilaufgabe b

$$I = [3,0 \text{ A}]$$

Teilaufgabe c

- $U_{R_1} = [6,0 \text{ V}]$
- $U_{R_2} = U_{R_3} = [12 \text{ V}]$

Teilaufgabe d

$$I_3 = [2,0 \text{ A}], \quad I_2 = [1,0 \text{ A}]$$

Teilaufgabe e

$$I_1 = \boxed{0}$$

Teilaufgabe f

$$U_{R_3} = \boxed{0}, \quad U_{S_2} = \boxed{18 \text{ V}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn S_1 geöffnet und S_2 geschlossen ist, fließt durch R_3 ein doppelt so starker Strom wie durch

R_2 , was zu erwarten ist. Ebenfalls erwartungsgemäß summieren sich dann I_2 und I_3 zum Gesamtstrom I . Die Summe der Spannungsabfälle über R_1 und der Parallelkombination aus R_2 und R_3 ist schließlich gleich der Klemmenspannung: $U_{R_1} + U_R = 6,0 \text{ V} + 12 \text{ V} = 18 \text{ V}$.

Übung 22.8: Wiederholen Sie die Teilaufgaben a bis d, wobei Sie anstelle von R_3 einen Draht mit vernachlässigbarem Widerstand einsetzen. ◀

Beispiel 22.12: Eine kompliziertere Schaltung Ohm'scher Widerstände**ZUR ÜBUNG**

Zu berechnen ist der Ersatzwiderstand R des in Abbildung 22.24 gegebenen Stromkreises. Es gelten folgende Zuordnungen: $R_1 = 24 \Omega$, $R_2 = 5,0 \Omega$, $R_3 = 4,0 \Omega$, $R_4 = 12 \Omega$.

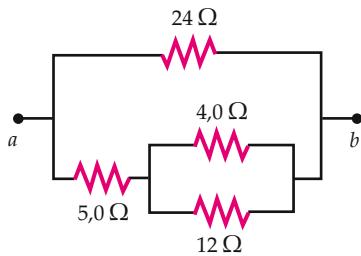


Abbildung 22.24 Schaltungsnetz Ohm'scher Widerstände.

Problembeschreibung: Analysieren Sie die Schaltung schrittweise. Berechnen Sie zunächst den Ersatzwiderstand $R_{3,4}$ der Parallelschaltung aus R_3 und R_4 ; ermitteln Sie dann den Ersatzwiderstand $R_{2,3,4}$ der Reihenschaltung aus R_2 und $R_{3,4}$; abschließend berechnen Sie $R_{1,2,3,4}$ der Parallelschaltung aus R_1 und $R_{2,3,4}$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Berechnen Sie den Ersatzwiderstand $R_{3,4}$ der Parallelschaltung aus R_3 und R_4 .

2. Berechnen Sie den Ersatzwiderstand $R_{2,3,4}$ der Reihenschaltung aus $R_{3,4}$ und R_2 .

3. Berechnen Sie den Ersatzwiderstand $R_{1,2,3,4}$ der Parallelschaltung aus $R_{2,3,4}$ und R_1 .

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$R_{3,4} = 3,0 \Omega$$

2.

$$R_{2,3,4} = 8,0 \Omega$$

3.

$$R_{1,2,3,4} = R = \boxed{6,0 \Omega}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Ergebnisse entsprechen unseren Erwartungen für Kombinationen Ohm'scher Widerstände: Erstens sind $R_{3,4}$ und $R_{1,2,3,4}$ kleiner als die beiden parallel geschalteten Widerstände R_3 und R_4 für sich genommen; zweitens ist $R_{2,3,4}$ größer als jeder der beiden in Reihe geschalteten Widerstände.

Beispiel 22.13: Elektrogeräte in einem Stromkreis

Sie treffen sich abends mit Freunden zum Lernen. Bevor die Bücher bereitgelegt werden, möchten Sie zur Stärkung Kaffee, Toast und Popcorn anbieten. Nachdem Sie Toaster und Mikrowelle (für das Popcorn) angestellt haben, fällt Ihnen ein, dass gelegentlich die Sicherung herauspringt, wenn Sie zu viele Elektrogeräte gleichzeitig in Betrieb nehmen (die Elektroanlage in Ihrem Wohnhaus ist nicht besonders modern). Sollten Sie riskieren, auch noch die Kaffeemaschine anzuschalten? Auf den Geräten finden Sie Angaben über die aufgenommenen Leistungen: 900 W für den Toaster, 1200 W für die Mikrowelle und 600 W für die Kaffeemaschine. Außerdem wissen Sie, dass Ihr Stromkreis mit 10 A abgesichert ist.

Problembeschreibung: Wir können davon ausgehen, dass die am Haushaltsnetz angeschlossenen Geräte parallel betrieben werden; das Einschalten eines Geräts beeinflusst in der Regel bereits laufende Geräte nicht. Die Spannung im Haushaltsnetz beträgt 230 V. (Dass es sich dabei um Wechselspannung handelt, dürfen wir hier vernachlässigen.) Wir berechnen den durch die einzelnen Geräte fließenden Strom, addieren alle Ergebnisse und vergleichen die Summe mit der Angabe auf der Sicherung.

Lösung: 1. Die von einem Gerät aufgenommene Leistung ist gleich dem Produkt aus Strom und Spannungsabfall, $P = UI$. Lösen Sie diese Beziehung jeweils nach I auf:

$$\begin{aligned} I_{\text{Toaster}} &= \frac{P_{\text{Toaster}}}{U_{\text{Netz}}} = \frac{900 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 3,9 \text{ A} \\ I_{\text{Mikrow.}} &= \frac{P_{\text{Mikrow.}}}{U_{\text{Netz}}} = \frac{1200 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 5,2 \text{ A} \\ I_{\text{Kaffeem.}} &= \frac{P_{\text{Kaffeem.}}}{U_{\text{Netz}}} = \frac{600 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 2,6 \text{ A} \end{aligned}$$

2. Den durch die Sicherung fließenden Strom erhalten Sie durch Addition der Teilströme:

$$I_S = 11,7 \text{ A}$$

3. Dieser Strom ist größer als die Angabe auf der Sicherung (10 A):

Bevor Sie die Kaffeemaschine anstellen, sollten Sie mindestens eins der anderen beiden Geräte ausschalten.

Plausibilitätsprüfung: Die maximale Leistung, die ein 230-V-Stromkreis abgeben kann, der mit 10 A abgesichert ist, beträgt $P_{\max} = I_{\max} U = (10 \text{ A}) \cdot (230 \text{ V}) = 2300 \text{ W}$. Die drei Geräte im Beispiel nehmen gemeinsam eine Leistung von $900 \text{ W} + 1200 \text{ W} + 600 \text{ W} = 2700 \text{ W}$ auf – das ist für diesen Stromkreis 400 W zu viel.

Weitergedacht: Wir haben hier angenommen, dass in der ganzen Wohnung nur ein Stromkreis (mit einer Sicherung) verlegt ist. Normalerweise sind Wohnungen in mehrere, separat abgesicherte Bereiche aufgeteilt. Sie könnten also Toaster und Mikrowelle in der Küche betreiben und gleichzeitig etwa im Wohnzimmer Kaffee aufsetzen, ohne dass eine Sicherung herauspringt.

22.5 Die Kirchhoff'schen Regeln

Viele einfache Stromkreise, beispielsweise die Schaltung in Abbildung 22.25, lassen sich nicht in der bisher gezeigten Weise als Parallel- und/oder Reihenschaltung Ohm'scher Widerstände analysieren. Das bedeutet, es gelingt hier nicht, Kombinationen Ohm'scher Widerstände schrittweise durch ihre Ersatzwiderstände zu ersetzen. Nur auf den ersten Blick scheinen R_1 und R_2 in der Skizze parallel geschaltet zu sein; durch die Anwesenheit der zweiten, zu R_2 in Reihe geschalteten Spannungsquelle U_2 fällt über R_1 und R_2 jedoch nicht die gleiche Spannung ab. Die beiden Ohm'schen Widerstände sind aber auch nicht in Reihe geschaltet, denn durch sie fließt nicht der gleiche Strom, weil sich die leitende Verbindung zwischen ihnen verzweigt.

Auf diesen und jeden beliebigen anderen Stromkreis lassen sich (unter der Voraussetzung eines stationären Stroms) die folgenden beiden Regeln, die **Kirchhoff'schen Regeln**, anwenden:

1. Die Summe aller Ströme, die zu einem Verzweigungspunkt (einem „Knoten“) in einem Stromkreis hinfließen, ist gleich der Summe aller Ströme, die von diesem Knoten wegfließen (**Knotenregel**).
2. Beim Durchlaufen einer geschlossenen Schleife (einer „Masche“) eines Stromkreises ist die Summe aller Spannungen gleich null (**Maschenregel**).

KIRCHHOFF'SCHE REGELN

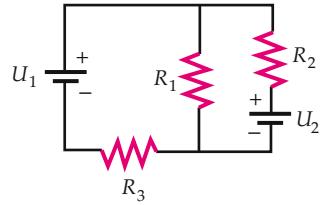


Abbildung 22.25 Dieser einfach aussehende Stromkreis lässt sich nicht analysieren, indem man Kombinationen Ohm'scher Widerstände schrittweise durch ihre Ersatzwiderstände ersetzt. R_1 und R_2 sind weder parallel noch in Reihe geschaltet: Über ihnen fällt nicht die gleiche Spannung ab, da der Stromkreis zusätzlich eine Spannungsquelle U_2 in Reihe mit R_2 enthält, und durch sie fließt auch nicht der gleiche Strom.

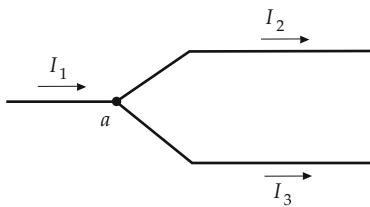


Abbildung 22.26 Zur Kirchhoff'schen Knotenregel: Der zum Verzweigungs-
punkt a hin fließende Strom I_1 muss gleich dem von diesem Punkt weg
fließenden Strom $I_2 + I_3$ sein.

Die zweite Kirchhoff'sche Regel, die bereits in Kapitel 21 eingeführte **Maschenregel**, folgt unmittelbar aus der Anwesenheit eines konservativen Felds \mathbf{E} . (Wie wir in Kapitel 25 sehen werden, existiert auch ein nichtkonservatives elektrisches Feld. Das resultierende elektrische Feld ergibt sich als Superposition des konservativen und des nichtkonservativen Felds. Die Kirchhoff'sche Maschenregel gilt nur für den konservativen Anteil.) Dass \mathbf{E} konservativ ist, bedeutet

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0; \quad (22.26)$$

integriert wird entlang eines beliebigen geschlossenen Wegs C . Die Beziehung zwischen Potenzialänderungen ΔU und \mathbf{E} lautet

$$\Delta U = \phi_b - \phi_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Aus Gleichung 22.26 kann deshalb geschlossen werden, dass die Summe aller Potenzialänderungen ΔU entlang eines beliebigen geschlossenen Wegs null sein muss.

Die erste Kirchhoff'sche Regel, die **Knotenregel**, folgt aus der Ladungserhaltung. In Abbildung 22.26 sehen Sie einen Verzweigungspunkt dreier Drähte, in denen die Ströme I_1 (zum Knoten hin) bzw. I_2 und I_3 (vom Knoten weg) fließen. Da sich im Knoten keine Ladung ansammeln kann, muss die in einem bestimmten Zeitintervall zum Knoten hin fließende Ladung gleich der in diesem Intervall vom Knoten weg fließenden Ladung sein. Das bedeutet

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (22.27)$$

Prinzipiell sammelt sich Ladung an der Oberfläche jedes Leiters an. Um eine signifikante Ladungsmenge zu akkumulieren, reichen die Oberflächen von Drähten, wie sie normalerweise in Stromkreisen verwendet werden, jedoch bei Weitem nicht aus – dazu ist z. B. ein Plattenkondensator nötig.

Stromkreise mit einer Masche

Zur Veranschaulichung der Kirchhoff'schen Maschenregel betrachten wir den in Abbildung 22.27 skizzierten Stromkreis. Er

enthält zwei Spannungsquellen mit den Innenwiderständen $R_{in,1}$ und $R_{in,2}$ sowie drei Ohm'sche Widerstände R_1 , R_2 und R_3 . Zu berechnen ist der Strom in diesem Kreis, ausgedrückt anhand der Klemmenspannungen und der Widerstände.

Zunächst legen wir die Uhrzeigerrichtung als positive Stromrichtung fest (in der Abbildung durch einen Pfeil mit einem Pluszeichen verdeutlicht). Dann durchlaufen wir den Stromkreis, ausgehend von Punkt a , in positiver Richtung. Wenn Sie die Polung der Batterien 1 und 2 betrachten, wird Ihnen aufallen, dass wir zwischen den Punkten c und d (Batterie 2) einen Potenzialabfall durchlaufen, zwischen e und a (Batterie 1) hingegen einen Potenzialanstieg. Über jeden Ohm'schen Widerstand fällt die Spannung ab (der Strom soll positiv sein). Die Kirchhoff'sche Maschenregel liefert uns entlang des angegebenen Wegs:

$$(\phi_b - \phi_a) + (\phi_c - \phi_b) + (\phi_d - \phi_c) + (\phi_e - \phi_d) + (\phi_a - \phi_e) = 0.$$

Wir schreiben alle Potenzialänderungen mithilfe des Stroms und der geeigneten Klemmenspannungen und Widerstände auf:

$$(-R_1 I) + (-R_2 I) + (-U_{Q,2} - R_{in,2} I) + (-R_3 I) + (U_{Q,1} - R_{in,1} I) = 0.$$

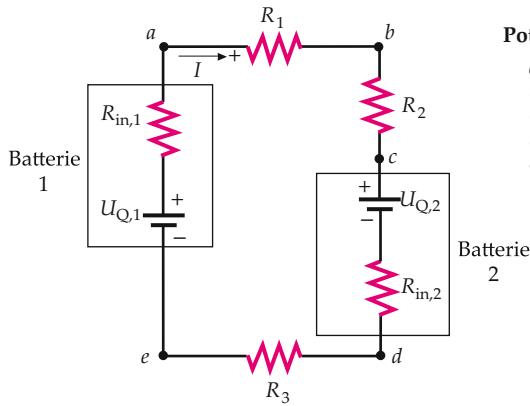
Dies lösen wir nach I auf und erhalten:

$$I = \frac{U_{Q,1} - U_{Q,2}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{in,1} + R_{in,2}} \quad (22.28)$$

Ist $U_{Q,2}$ größer als $U_{Q,1}$, so ergibt sich für I ein negativer Wert. Das bedeutet, der Strom fließt in negativer Richtung (entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn).

Nehmen wir an, die Quellspannung $U_{Q,1}$ ist größer als $U_{Q,2}$. Den Strom stellen wir uns als positive Ladungsträger vor, die sich im Uhrzeigersinn durch den Stromkreis bewegen. (In Wirklichkeit bewegen sich negativ geladene Ladungsträger, Elektronen, entgegen dem Uhrzeigersinn durch den Kreis.) In Batterie 2 fließt die Ladung vom höheren zum niedrigeren Potenzial; Ladung, die sich von Punkt c nach Punkt d bewegt, verliert folglich die elektrische Energie $\Delta q U_{Q,2}$ (abgesehen von der Energie, die in der Batterie in Joule'sche Wärme umgewandelt wird). Ist Batterie 2 aufladbar – handelt es sich also um einen Akkumulator –, so wird diese Energie größtenteils in chemische Energie umgewandelt, und die Batterie wird *aufgeladen*.

Die Analyse von Stromkreisen lässt sich in der Regel vereinfachen, wenn man das Potenzial in einem geeignet ausgewählten Punkt („Masse“ oder „Erde“ genannt) null setzt und alle anderen Potenziale relativ zu diesem Punkt berechnet. Da uns ausschließlich Potenzialdifferenzen interessieren, ist es gleichgültig, welcher Bezugspunkt festgelegt wird. Reale Stromkreise sind häufig tatsächlich geerdet, d. h. mit einem Leiter (Stab, Draht oder Ähnlichem) verbunden, der in die Erde eingegraben ist. In diesem Punkt ist das Potenzial definitionsgemäß null. Bei Autos verbindet man den negativen Pol der Batterie über ein

**Potenzialänderungen**

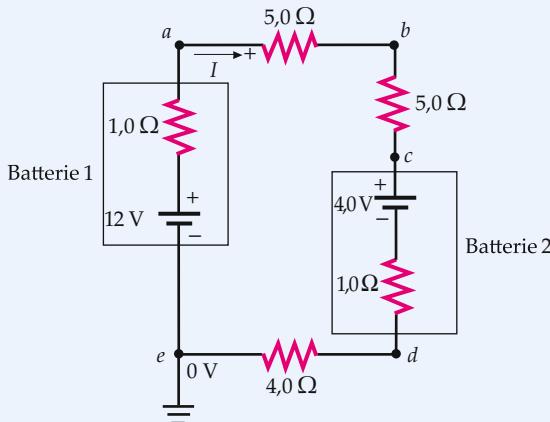
a	b	Potenzialabfall $R_1 I$
b	c	Potenzialabfall $R_2 I$
c	d	Potenzialabfall $U_{Q,2} + R_{in,2} I$
d	e	Potenzialabfall $R_3 I$
e	a	Potenzialanstieg $U_{Q,1} - R_{in,1} I$

Abbildung 22.27 Ein Stromkreis mit zwei Spannungsquellen und drei Ohm'schen Widerständen.

starkes „Massekabel“ mit dem Motorblock; der Bezugspunkt ist dann der Punkt, wo das Kabel am Motor befestigt ist. Im folgenden Beispiel 22.14 wählen wir dafür Punkt e in Abbildung 22.28, den wir mit dem Massesymbol $\underline{\underline{=}}$ kennzeichnen.

Beispiel 22.14: Potenzialdifferenzen im Stromkreis

Gegeben ist der in Abbildung 22.28 dargestellte Stromkreis mit $U_{Q,1} = 12 \text{ V}$, $U_{Q,2} = 4,0 \text{ V}$, $R_{in,1} = R_{in,2} = 1,0 \Omega$, $R_1 = R_2 = 5,0 \Omega$ und $R_3 = 4,0 \Omega$. In Punkt e sei das Potenzial gleich null. a) Gesucht sind die Potenziale in den Punkten a bis d . b) Diskutieren Sie die Leistungsaufnahme und -abgabe im Stromkreis.

**Abbildung 22.28** Schaltung Ohm'scher Widerstände, wobei zwei davon mit der jeweiligen Spannungsquelle als Batterie fungieren.

Problembeschreibung: Als Voraussetzung für die Berechnung der Potenziale müssen wir den Strom I in diesem Stromkreis ermitteln. Über jeden Ohm'schen Widerstand fällt dann die Spannung RI ab. Zur Diskussion der Energiebilanz berechnen wir mithilfe der Gleichun-

gen 22.14 und 22.15, welche Leistung den einzelnen Bauelementen zugeführt bzw. von ihnen abgegeben wird.

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Den Strom I liefert Ihnen Gleichung 22.28:

$$I = \frac{12 \text{ V} - 4,0 \text{ V}}{5,0 \Omega + 5,0 \Omega + 4,0 \Omega + 1,0 \Omega + 1,0 \Omega} = \frac{8,0 \text{ V}}{16 \Omega} = 0,50 \text{ A}$$

2. Nun berechnen Sie das Potenzial in den bezeichneten Punkten a bis d :

$$\phi_a = \phi_e + U_{Q,1} - R_{in,1} I$$

$$= 0 + 12 \text{ V} - (0,50 \text{ A}) \cdot (1,0 \Omega) = \boxed{11,5 \text{ V}}$$

$$\phi_b = \phi_a - R_1 I$$

$$= 11,5 \text{ V} - (0,50 \text{ A}) \cdot (5,0 \Omega) = \boxed{9,0 \text{ V}}$$

$$\phi_c = \phi_b - R_2 I = 9,0 \text{ V} - (0,50 \text{ A}) \cdot (5,0 \Omega) = \boxed{6,5 \text{ V}}$$

$$\phi_d = \phi_c - U_{Q,2} - R_{in,2} I$$

$$= 6,5 \text{ V} - 4,0 \text{ V} - (0,50 \text{ A}) \cdot (1,0 \Omega) = \boxed{2,0 \text{ V}}$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie die von der Spannungsquelle 1 abgegebene Leistung:

$$P_1 = U_{Q,1} I = (12 \text{ V}) \cdot (0,50 \text{ A}) = \boxed{6,0 \text{ W}}$$

2. Ein Teil dieser Leistung wird in den Ohm'schen Widerständen sowie in den Innenwiderständen der Batterien umgesetzt:

$$\begin{aligned} P_R &= R_1 I^2 + R_2 I^2 + R_3 I^2 + R_{in,1} I^2 + R_{in,2} I^2 \\ &= (0,50 \text{ A})^2 \cdot (5,0 + 5,0 + 4,0 + 1,0 + 1,0) \Omega \\ &= 4,0 \text{ W} \end{aligned}$$

3. Die verbleibende Leistung von 2,0 W dient zur Aufladung der Spannungsquelle 2:

$$P_2 = U_{Q,2} I = (4,0 \text{ V}) \cdot (0,50 \text{ A}) = 2,0 \text{ W}$$

4. Dem Stromkreis wird Energie mit folgender Rate entnommen:

$$P = P_R + P_2 = [6,0 \text{ W}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Rate, mit der Batterie 1 chemische Energie in elektrische potenzielle Energie umwandelt (6,0 W), ist gleich der Summe aus der Rate, mit der Batterie 2 bei der Aufladung elektrische potenzielle Energie in chemische Energie umwandelt (2,0 W), und der Rate, mit der elektrische potenzielle Energie von den Widerständen umgesetzt wird (4,0 W). ■

Beachten Sie, dass die Klemmenspannung der in Beispiel 22.14 aufgeladenen Batterie 2, $\phi_c - \phi_d = 4,5 \text{ V}$, größer ist als ihre Quellenspannung. Lieferte die gleiche 4,0-V-Batterie an einen Stromkreis einen Strom von 0,50 A, so wäre ihre Klemmenspannung (bei gleichem Innenwiderstand von $1,0 \Omega$) lediglich gleich 3,5 V. Bei einer Batterie mit sehr kleinem Innenwiderstand sind Klemmen- und Quellenspannung nahezu identisch, unabhängig davon, ob die Batterie Energie an einen Stromkreis abgibt oder umgekehrt Energie aus einem Stromkreis aufnimmt. Einige reale Batterien, beispielsweise Autoakkumulatoren, sind tatsächlich nahezu ideal reversibel und lassen sich problemlos wieder aufladen. (Der Begriff „aufladen“ ist in gewisser Weise irreführend, weil eine Batterie keine Ladung speichert, sondern chemische Energie.) Auf Trockenbatterien trifft das nicht zu. Wenn Sie versuchen, solche Batterien nachzuladen, indem Sie den Strom vom positiven zum negativen Pol fließen lassen, so wird die zugeführte Energie nicht in chemische Energie, sondern fast vollständig in Wärme umgewandelt. Schlimmstenfalls kann die Batterie explodieren (Beispiel 22.15).

Beispiel 22.15: Fremdstarten eines Autos

Stellen Sie sich vor, Sie möchten dem Auto Ihres Nachbarn Starthilfe geben, weil dessen Batterie (genau genommen dessen Akkumulator) entladen ist, während Ihre eigene Autobatterie maximal aufgeladen ist. (Denken Sie daran, dass eine Batterie nicht Ladung, sondern chemische Energie speichert, obwohl man von „aufladen“ und „entladen“ spricht.) a) Welche Pole der entladenen und der geladenen Batterie sollten Sie mithilfe des Fremdstartkabels verbinden? b) Die Quellenspannung der geladenen Batterie sei $U_{Q,1} = 12,0 \text{ V}$, die der entladenen Batterie sei $U_{Q,2} = 11,0 \text{ V}$. Weiterhin gegeben sind die Innenwiderstände der Batterien ($R_{in,1} = R_{in,2} = 0,020 \Omega$) sowie der Widerstand des Fremdstartkabels ($R_K = 0,010 \Omega$). Wie groß ist der

Ladestrom? c) Wie groß ist die Stromstärke, wenn Sie die Batterien an den falschen Polen verbinden?

Problembeschreibung: In Teilaufgabe a müssen die beiden Batterien so verbunden werden, dass die ursprünglich entladene Batterie aufgeladen wird. Den fließenden Strom berechnen Sie dann mit der Kirchhoff'schen Maschenregel.

Lösung:

Teilaufgabe a

Damit die entladene Batterie aufgeladen wird, muss durch sie ein Strom vom positiven zum negativen Pol fließen. Sie müssen die jeweils gleichnamigen Pole der beiden Batterien verbinden, wie es im Schaltbild (Abbildung 22.29) dargestellt ist.

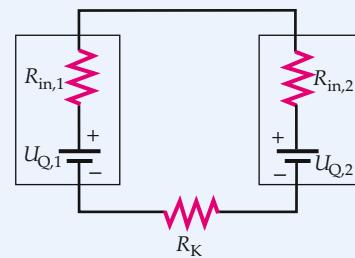


Abbildung 22.29 Schaltung der beiden Batterien, wobei R_K den Innenwiderstand des Startkabels bezeichnet.

Teilaufgabe b

Den Ladestrom berechnen Sie mithilfe der Kirchhoff'schen Maschenregel:

$$U_{Q,1} - R_{in,1} I - R_{in,2} I - U_{Q,2} - R_K I = 0$$

also

$$I = \frac{U_{Q,1} - U_{Q,2}}{R_K + R_{in,1} + R_{in,2}} = \frac{12,0 \text{ V} - 11,0 \text{ V}}{0,050 \Omega} = [20,0 \text{ A}]$$

Teilaufgabe c

Werden die falschen (die ungleichnamigen) Pole der Batterien miteinander verbunden, so addieren sich die Quellenspannungen:

$$U_{Q,1} - R_{in,1} I + U_{Q,2} - R_{in,2} I - R_K I = 0$$

also

$$I = \frac{U_{Q,1} + U_{Q,2}}{R_K + R_{in,1} + R_{in,2}} = \frac{12,0 \text{ V} + 11,0 \text{ V}}{0,050 \Omega} = [460 \text{ A}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn Sie die ungleichnamigen Pole der Batterien verbinden (Abbildung 22.30), so fließt ein starker Strom. Schlimmstenfalls explodieren die Batterien, wobei die heiße Batteriesäure in alle Richtungen spritzt.

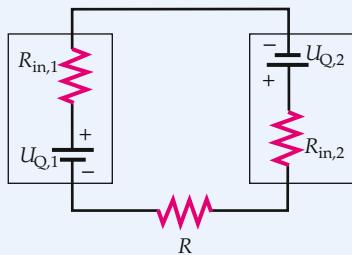


Abbildung 22.30 Eine gefährliche Situation: Zwei Batterien sind an den ungleichnamigen Polen miteinander verbunden.



Abbildung 22.31 Die Richtung des Stroms I ist nicht bekannt; unabhängig von dieser Richtung gilt aber $\phi_b - \phi_a = -R I$. Fließt der Strom in positiver Richtung (in Pfeilrichtung), so ist I positiv und $-R I$ negativ. Fließt der Strom hingegen in negativer Richtung (entgegen der Pfeilrichtung), so ist I negativ und $-R I$ positiv.

Durchlaufen wir einen Ohm'schen Widerstand in positiver Richtung und ist I positiv, so ist $-RI$ wie erwartet negativ: Der Strom fließt durch Ohm'sche Widerstände stets in Richtung abnehmenden Potenzials. Durchlaufen wir den Ohm'schen Widerstand bei positivem I dagegen in negativer Richtung, so ist $+RI$ positiv, und bei negativem I und negativer Richtung ist $+RI$ negativ.

Um Stromkreise mit mehr als einer Masche zu analysieren, benötigen wir beide Kirchhoff'schen Regeln. Die Knotenregel wenden wir auf alle Verzweigungspunkte (Knoten) der Schaltung an. Beispiel 22.16 veranschaulicht Ihnen, wie Sie bei der Analyse von Stromkreisen mit mehreren Maschen vorgehen müssen. Prägen Sie sich die im Folgenden noch einmal zusammengefassten Schritte ein, die Sie in Beispiel 22.17 anwenden können.

Beispiel 22.16: Anwendung der Kirchhoff'schen Regeln

- a) Ermitteln Sie die Stromstärke in allen Zweigen des Stromkreises aus Abbildung 22.32 b) Wie groß ist die Energie, die am Ohm'schen Widerstand R_1 innerhalb von 3,0 s in Wärme umgewandelt wird?

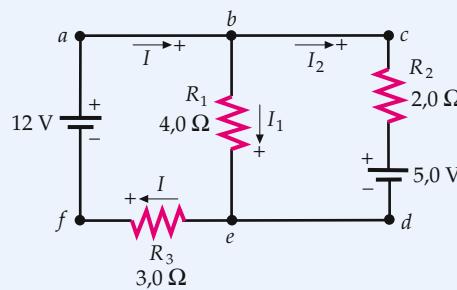


Abbildung 22.32 Schaltungsnetz mit eingezeichneten Knoten a bis f.

Problembeschreibung: In diesem Stromkreis treten drei Teilströme auf, I , I_1 und I_2 , zu deren Berechnung wir drei Gleichungen benötigen. Eine Beziehung erhalten wir

In jeder Masche des Stromkreises bezeichnen wir die positive Stromrichtung mit einem Pfeil. Beim Durchlaufen eines Ohm'schen Widerstands in Pfeilrichtung ist die Potenzialdifferenz U_R gleich $-RI$; beim Durchlaufen eines Ohm'schen Widerstands entgegen der Pfeilrichtung ist die Potenzialänderung U_R gleich $+RI$.

VORZEICHENREGEL FÜR DIE POTENZIALÄNDERUNG ÜBER EINEN OHM'SCHEN WIDERSTAND

Vorgehensweise:

Allgemeine Schritte zur Analyse von Stromkreisen mit mehreren Maschen

Skizzieren Sie das Schaltbild.

1. Ersetzen Sie Parallel- und Reihenschaltungen von Ohm'schen Widerständen oder Kondensatoren durch die jeweiligen Ersatzwerte.
2. Wiederholen Sie Schritt 1 so oft wie nötig.
3. Legen Sie in jedem Zweig eine positive Stromrichtung durch einen Pfeil fest. Bezeichnen Sie alle Ströme. Bezeichnen Sie die Pole von Batterien mit Plus (höheres Potenzial) und Minus (niedrigeres Potenzial).
4. Wenden Sie die Knotenregel auf alle Verzweigungspunkte des Stromkreises bis auf einen an. (Letzterer liefert eine redundante Information.)
5. Wenden Sie die Maschenregel auf so viele verschiedene Maschen des Stromkreises an, dass die Zahl der Gleichungen der Zahl der Unbekannten entspricht. Beim Durchlaufen eines Ohm'schen Widerstands in positiver Richtung ändert sich das Potenzial um $-RI$. Beim Durchlaufen einer Spannungsquelle vom negativen zum positiven Pol ändert sich das Potenzial um $U_Q - R_{in} I$.
6. Lösen Sie die Gleichungen schrittweise nach den gesuchten Größen auf.

Plausibilitätsprüfung: Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie einen Punkt des Stromkreises als Nullpunkt des Potenzials festlegen und mithilfe der erhaltenen Stromstärken die Potenziale in anderen Punkten des Kreises bestimmen.

durch Anwendung der Knotenregel auf Punkt *b*. (Alternativ – und mit gleichem Resultat – könnten wir die Knotenregel auf den anderen Verzweigungspunkt *e* anwenden.) Die anderen beiden Gleichungen ergeben sich aus der Maschenregel. Der Stromkreis besteht aus drei Maschen, zwei inneren (*abefa* und *bcdeb*) und der äußeren (*abcdefa*), von denen wir zwei auswählen können; die Berücksichtigung der dritten Masche liefert dann eine redundante Information. In jeden Zweig des Schaltbilds (Abbildung 22.32) wurde bereits ein Pfeil für die positive Stromrichtung eingezeichnet. Falls wir für den Strom in einem Zweig einen negativen Wert erhalten, fließt der Strom in diesem Zweig entgegengesetzt der Pfeilrichtung.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Wenden Sie die Knotenregel auf Punkt *b* an:

$$I = I_1 + I_2$$

2. Wenden Sie die Maschenregel auf die äußere Masche *abcdefa* an:

$$12 \text{ V} - (2,0 \Omega) I_2 - 5,0 \text{ V} - (3,0 \Omega) \cdot (I_1 + I_2) = 0$$

3. Teilen Sie diese Gleichung durch 1Ω (wegen $(1 \text{ V}) / (1 \Omega) = 1 \text{ A}$) und vereinfachen Sie die Beziehung:

$$7,0 \text{ A} - 3,0 I_1 - 5,0 I_2 = 0$$

4. Um die dritte erforderliche Gleichung zu erhalten, wenden Sie die Maschenregel auf die Masche *bcdeb* an:

$$\begin{aligned} -(2,0 \Omega) I_2 - 5,0 \text{ V} + (4,0 \Omega) I_1 &= 0 \\ -5,0 \text{ A} + 4,0 I_1 - 2,0 I_2 &= 0 \end{aligned}$$

5. Fassen Sie die Ergebnisse von Schritt 3 und 4 zusammen und lösen Sie nach I_1 und I_2 auf. Dazu multiplizieren Sie zunächst das Resultat von Schritt 3 mit 2 und dann das Resultat von Schritt 4 mit -5 :

$$\begin{aligned} 14 \text{ A} - 6,0 I_1 - 10 I_2 &= 0 \\ 25 \text{ A} - 20 I_1 + 10 I_2 &= 0 \end{aligned}$$

6. Addieren Sie die Gleichungen aus Schritt 5, um I_2 zu eliminieren. Lösen Sie dann nach I_1 auf:

$$39 \text{ A} - 26 I_1 = 0$$

$$I_1 = \frac{39 \text{ A}}{26} = \boxed{1,5 \text{ A}}$$

7. Setzen Sie dieses Ergebnis für I_1 in Ihr Resultat aus Schritt 3 oder 4 ein, um I_2 auszurechnen:

$$7,0 \text{ A} - 3,0 \cdot (1,5 \text{ A}) - 5,0 I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{2,5 \text{ A}}{5,0} = \boxed{0,50 \text{ A}}$$

8. Mit Ihren Ergebnissen für I_1 und I_2 berechnen Sie schließlich I gemäß der Gleichung aus Schritt 1:

$$I = I_1 + I_2 = 1,5 \text{ A} + 0,50 \text{ A} = \boxed{2,0 \text{ A}}$$

Teilaufgabe b

1. Die im Ohm'schen Widerstand R_1 umgesetzte Leistung ergibt sich aus der Beziehung $P_1 = R_1 I_1^2$:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = (4,0 \Omega) \cdot (1,5 \text{ A})^2 = 9,0 \text{ W}$$

2. Während der Zeit Δt wird in diesem Ohm'schen Widerstand insgesamt die elektrische Energie $E_{\text{el}} = P \Delta t$ in Wärme umgewandelt. In unserem Beispiel ist $\Delta t = 3,0 \text{ s}$:

$$E_{\text{el}} = P \Delta t = (9,0 \text{ W}) \cdot (3,0 \text{ s}) = \boxed{27 \text{ J}}$$

Plausibilitätsprüfung: In Abbildung 22.33 wurden alle in diesem Beispiel berechneten Ströme und Potenziale eingetragen, wobei das Potenzial in Punkt f gleich null gesetzt wurde. Beachten Sie, dass $\phi_b - \phi_e = 6,0 \text{ V}$ und $\phi_e - \phi_f = 6,0 \text{ V}$ ist. Die Anwendung der Maschenregel auf die rechte Masche liefert $+12 \text{ V} - 6,0 \text{ V} - 6,0 \text{ V} = 0$.

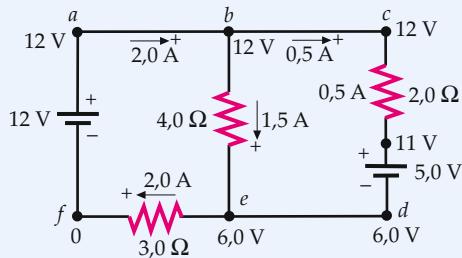


Abbildung 22.33 Schaltungsnetz mit allen eingezeichneten Strömen und Potenzialen.

Weitergedacht: Die Anwendung der Maschenregel auf die linke Masche ($abefa$) ergibt $12 \text{ V} - (4,0 \Omega) I_1 - (3,0 \Omega) (I_1 + I_2) = 0$ oder $12 \text{ A} - 7,0 I_1 - 3,0 I_2 = 0$. Sicher fällt Ihnen auf, dass dieses Ergebnis gleich der Differenz der Resultate von Schritt 3 und 4 ist und demzufolge, wie erwartet, keine neue Information liefert.

Übung 22.9: Berechnen Sie I_1 , wenn R_3 a) gegen null und b) gegen unendlich geht. ▶

Beispiel 22.17: Ein Stromkreis mit drei Zweigen

a) Berechnen Sie die Stromstärke in allen Zweigen des in Abbildung 22.34 skizzierten Stromkreises. Tragen Sie alle erhaltenen Stromstärken und -richtungen in ein Schaltbild ein. b) Der Nullpunkt des Potenzials be-

finde sich in c. Geben Sie die Potenziale in den Punkten a bis f an.

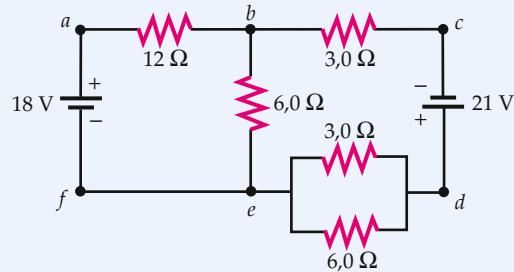


Abbildung 22.34 Schaltungsnetz mit drei Zweigen und eingezeichneten Knoten a bis f.

Problembeschreibung: Ersetzen Sie erstens die beiden Parallelwiderstände durch ihren Ersatzwiderstand. Ordnen Sie zweitens jedem Zweig des Stromkreises eine positive Stromrichtung zu und tragen Sie entsprechende Pfeile in das Schaltbild ein. Kennzeichnen Sie drittens bei jeder Batterie die Seite mit höherem Potenzial durch ein Pluszeichen und die Seite mit niedrigerem Potenzial durch ein Minuszeichen. Geben Sie den Strömen in den einzelnen Zweigen geeignete Symbole. Zur Berechnung dieser Ströme wenden Sie die Knotenregel auf Verzweigungspunkt b oder e und dann zweimal die Maschenregel an.

Lösung: 1. Berechnen Sie den Ersatzwiderstand der beiden Parallelwiderstände:

$$R = 2,0 \Omega$$

2. Zeichnen Sie ein neues Schaltbild mit dem Ersatzwiderstand aus Schritt 1 anstelle der beiden Parallelwiderstände (Abbildung 22.35). Geben Sie die positive Stromrichtung in allen Zweigen an. I sei der Strom in dem Zweig, der die 18-V-Batterie enthält, I_1 der Strom durch den Ohm'schen Widerstand in der Mitte und I_2 der Strom in dem Zweig, der die 21-V-Batterie enthält.

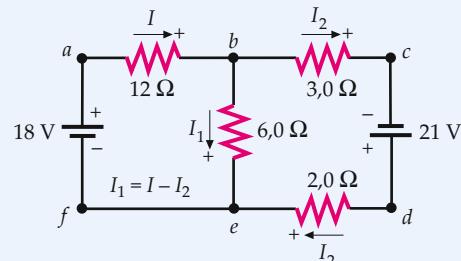


Abbildung 22.35 Schaltungsnetz mit Ersatzwiderstand anstelle der Parallelschaltung.

3. Wenden Sie die Knotenregel für Verzweigungspunkt b an:

$$I = I_1 + I_2$$

4. Wenden Sie die Maschenregel auf die Masche *abefa* an, um eine Gleichung zu erhalten, in der sowohl I als auch I_2 auftreten:

$$18 \text{ V} - (12 \Omega) I - (6,0 \Omega) \cdot (I - I_2) = 0$$

5. Vereinfachen Sie die Gleichung aus Schritt 4, indem Sie beide Seiten durch $6,0 \Omega$ teilen:

$$3,0 \text{ A} - 2,0 I - 1,0 (I - I_2) = 0$$

6. Wenden Sie die Maschenregel auf die Masche *bcdeb* an:

$$-(3,0 \Omega) I_2 + 21 \text{ V} - (2,0 \Omega) I_2 + (6,0 \Omega) I_1 = 0$$

7. Vereinfachen Sie die Gleichung aus Schritt 6, indem Sie beide Seiten durch $1,0 \Omega$ teilen:

$$21 \text{ A} + 6,0 I - 5,0 I_2 = 0$$

8. Lösen Sie das aus den Ergebnissen von Schritt 3, 5 und 7 bestehende Gleichungssystem. Dazu können Sie beispielsweise im Ergebnis von Schritt 5 I durch $I_1 + I_2$ ersetzen, Sie erhalten so $3,0 \text{ A} - 3,0 I_1 - 2,0 I_2 = 0$. Diese Gleichung und die Gleichung aus Schritt 7 bilden gemeinsam ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, das Sie nach den Strömen auflösen können:

$$I = [2,0 \text{ A}], \quad I_1 = [-1,0 \text{ A}], \quad I_2 = [3,0 \text{ A}]$$

9. Den Spannungsabfall über den Parallelwiderständen erhalten Sie aus der Beziehung $U_R = R I_2$:

$$U_R = 6,0 \text{ V}$$

10. Mithilfe des Ergebnisses aus Schritt 9 und des Ohm'schen Gesetzes berechnen Sie schließlich die Stromstärken an jedem der beiden Parallelwiderstände:

$$I_{3\Omega} = [2,0 \text{ A}], \quad I_{6\Omega} = [1,0 \text{ A}]$$

Teilaufgabe b

Tragen Sie die berechneten Ströme (Werte und Richtungen) in das Schaltbild aus Abbildung 22.35 ein; Sie erhalten Abbildung 22.36. Berechnen Sie die Potenziale in den Punkten *d*, *e*, *f*, *a* und *b*. Gehen Sie dabei von $\phi_c = 0$ aus:

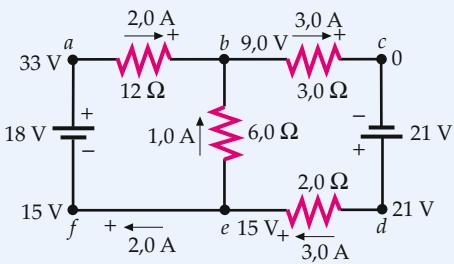


Abbildung 22.36 Schaltungsnetz mit allen eingezeichneten Strömen und Potenzialen.

$$\phi_d = \phi_c + 21 \text{ V} = 0 + 21 \text{ V} = [21 \text{ V}]$$

$$\phi_e = \phi_d - (3,0 \text{ A}) \cdot (2,0 \Omega) = 21 \text{ V} - 6,0 \text{ V} = [15 \text{ V}]$$

$$\phi_f = \phi_e = [15 \text{ V}]$$

$$\phi_a = \phi_f + 18 \text{ V} = 15 \text{ V} + 18 \text{ V} = [33 \text{ V}]$$

$$\phi_b = \phi_a - (2,0 \text{ A}) \cdot (12 \Omega) = 33 \text{ V} - 24 \text{ V} = [9,0 \text{ V}]$$

Plausibilitätsprüfung: Der Spannungsabfall zwischen den Punkten *b* und *c* beträgt $(3,0 \text{ A}) \cdot (3,0 \Omega) = 9,0 \text{ V}$. Wie erwartet ergibt sich daraus $\phi_c = 0$. Zwischen den Punkten *e* und *b* beträgt der Spannungsabfall $(1,0 \text{ A}) \cdot (6,0 \Omega) = 6,0 \text{ V}$, also ist $\phi_b = \phi_e - 6,0 \text{ V} = 15 \text{ V} - 6,0 \text{ V} = 9,0 \text{ V}$.

Messgeräte für Strom, Spannung und Widerstand

Die Messgeräte für Strom, Spannung (Potenzialdifferenz) und Widerstand heißen **Ampermeter**, **Voltmeter** bzw. **Ohmmeter**. Oft sind alle drei zu einem Mehrfachmessgerät (Multimeter) zusammengefasst, wobei man zwischen den einzelnen Funktionen umschalten kann. Mit einem Voltmeter können Sie beispielsweise die Klemmenspannung Ihrer Autobatterie messen, und mit einem Ohmmeter können Sie den Ohm'schen Widerstand eines elektrischen Haushaltsgeräts (etwa eines Toasters oder einer Glühlampe) feststellen, wenn Sie einen Kurzschluss oder einen Kabelbruch vermuten.

Um in einem einfachen Stromkreis den Strom zu ermitteln, der durch einen Ohm'schen Widerstand fließt, schalten wir ein Ampermeter in Reihe zum fraglichen Widerstand (Abbildung 22.37), sodass durch diesen und das Messgerät der gleiche Strom fließt. Der Innenwiderstand des Ampermeters ist zwar sehr klein, aber endlich. Folglich nimmt die Stromstärke im Kreis durch die Zwienschaltung des Messgeräts geringfügig ab. Im Idealfall ist der Innenwiderstand des Ampermeters so klein, dass diese Änderung der Stromstärke vernachlässigt werden kann.

Der Spannungsabfall über einen Widerstand wird gemessen, indem man ein Voltmeter parallel zum Widerstand schaltet (Abbildung 22.38), sodass über das Voltmeter die gleiche Spannung abfällt wie über den Widerstand. Das Voltmeter weist selbst einen Innenwiderstand auf. Ist dieser kleiner als der parallel geschaltete zu vermessende Widerstand R , so fließt beim Zuschalten des Voltmeters im gesamten Stromkreis ein etwas höherer Strom, und der gemessene Spannungsabfall entspricht nicht dem tatsächlichen Wert. Ein gutes Voltmeter hat einen sehr hohen Innenwiderstand, damit die Änderung der Stromstärke vernachlässigt werden kann.

Das wichtigste Bauteil vieler gebräuchlicher (analoger) Ampere- und Voltmeter ist ein **Galvanometer**, ein Gerät zur

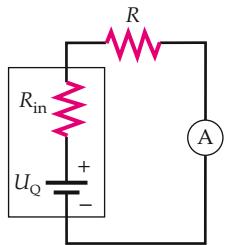


Abbildung 22.37 Zur Messung der Stromstärke in einem Widerstand wird ein Amperemeter A (Symbol im Kreis) mit dem Widerstand in Reihe geschaltet. Es wird dann vom gleichen Strom durchflossen wie der Widerstand.

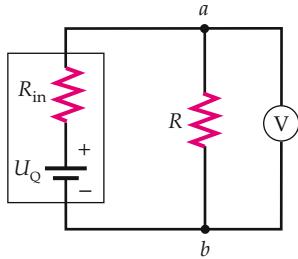


Abbildung 22.38 Zur Messung des Spannungsabfalls über einen Widerstand wird ein Voltmeter V (Symbol im Kreis) parallel zu diesem Widerstand geschaltet, sodass die Potenzialdifferenzen am Messgerät und am Widerstand gleich sind.

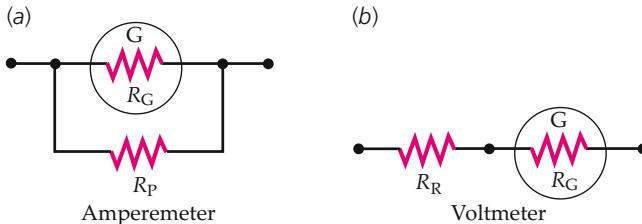
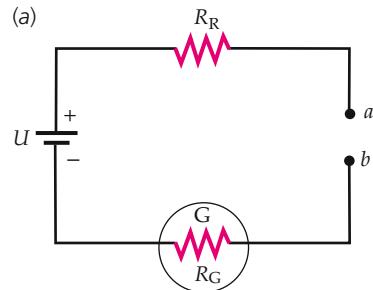


Abbildung 22.39 a) Ein Amperemeter besteht aus einem Galvanometer G mit dem Innenwiderstand R_G und einem kleinen Parallelwiderstand R_p . b) Ein Voltmeter besteht aus einem Galvanometer G und einem großen Reihenwiderstand R_R .

Messung kleiner Ströme. Der Zeigerausschlag eines Galvanometers ist dabei proportional zur Stärke des durchfließenden Stroms. Im Praktikumslabor verwendete Galvanometer bestehen häufig aus einer im Magnetfeld eines Permanentmagneten befindlichen Spule. Fließt durch die Spule ein Strom, so übt das Magnetfeld ein Drehmoment auf die Spule aus. Die Spule (und mit ihr ein Zeiger) dreht sich. Wird das Galvanometer in einen Stromkreis geschaltet, so trägt der Innenwiderstand des Spulendrahts geringfügig zum Ohm'schen Widerstand des gesamten Kreises bei.

Um ein Amperemeter zu bauen, schalten wir *parallel* zu einem Galvanometer einen kleinen sogenannten **Nebenschluss- oder Querwiderstand**. Sein Wert ist normalerweise viel geringer als der Widerstand des Galvanometers, sodass der Hauptteil



(b)

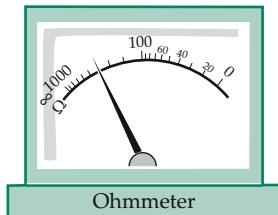


Abbildung 22.40 a) Ein Ohmmeter ist eine Reihenschaltung aus Spannungsquelle, Galvanometer und einem Widerstand R_R , der so gewählt ist, dass das Galvanometer beim Kurzschließen (Verbinden) der Klemmen a und b voll ausschlägt. b) Wird ein Widerstand R zwischen a und b geschaltet, so hängt der Ausschlag des Zeigers direkt vom Wert von R ab. Die Skala wird so kalibriert, dass der Widerstandswert in Ohm abgelesen werden kann.

des Stroms durch den Nebenschlusswiderstand fließt und der Ersatzwiderstand des Amperemeters wesentlich kleiner als der Widerstand des Galvanometers selbst ist. Zum Bau eines Voltmeters schalten wir einen sehr großen Widerstand *in Reihe* zu einem Galvanometer, sodass der Ersatzwiderstand des Messgeräts viel größer ist als der Widerstand des Galvanometers selbst. In Abbildung 22.39 finden Sie die prinzipiellen Schaltbilder beider Messgeräte. Der Innenwiderstand R_G des Galvanometers ist hier separat eingezeichnet; in Wirklichkeit ist er natürlich eine innere Eigenschaft des Galvanometers.

Ein einfaches Ohmmeter ist eine Reihenschaltung aus einer Spannungsquelle, einem Galvanometer und einem Widerstand (Abbildung 22.40a). Der Widerstand R_R wird so gewählt, dass das Galvanometer voll ausschlägt, wenn die Klemmen a und b kurzgeschlossen werden (also der Widerstand zwischen ihnen nahezu null ist). Haben die Klemmen keinen Kontakt, so ist der Widerstand zwischen ihnen unendlich, und der Zeiger des Galvanometers steht auf null. Schaltet man nun zwischen die Klemmen einen unbekannten Widerstand R , so hängt der durch das Messgerät fließende Strom von der Größe von R ab. Die Skala kann mithilfe bekannter Widerstände so geeicht werden, dass sich der Wert von R in Ohm direkt ablesen lässt (Abbildung 22.40b).

Wie wir gesehen haben, enthält ein Ohmmeter eine Spannungsquelle. Bei der Widerstandsmessung ist deshalb Vorsicht angebracht, wenn der Stromkreis empfindliche Bauteile (etwa

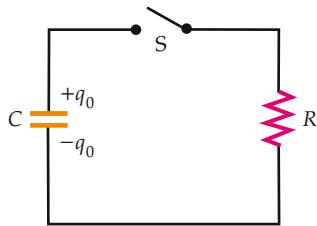


Abbildung 22.41 Schaltbild einer Reihenschaltung eines Kondensators mit parallelen Platten mit einem Schalter S und einem Ohm'schen Widerstand R

ein Galvanometer) enthält, die durch den fließenden Strom beschädigt werden könnten.

22.6 RC-Stromkreise

Eine Schaltung, die einen Ohm'schen Widerstand und einen Kondensator enthält, bezeichnet man als **RC-Stromkreis**. In einem **RC-Stromkreis** fließt der Strom (wie in allen Gleichstromkreisen) in einer Richtung, aber die Stromstärke ist zeitlich nicht konstant. Denken Sie beispielsweise an das Blitzgerät eines Fotoapparats: Nachdem Sie das Gerät eingeschaltet haben, lädt eine Batterie über einen Ohm'schen Widerstand einen Kondensator auf. Bei maximaler Aufladung ist das Gerät bereit für den nächsten Blitz. Wenn Sie nun den Kameraauslöser für eine Blitzlichtaufnahme betätigen, entlädt sich der Kondensator über die Blitzlampe. Anschließend lädt die Batterie den Kondensator erneut auf, und Sie können den nächsten Blitz auslösen. Mithilfe der Kirchhoff'schen Regeln beschreiben wir die Ladung q und den Strom I beim Aufladen und Entladen eines Kondensators über einen Ohm'schen Widerstand als Funktionen der Zeit.

Entladen eines Kondensators

In Abbildung 22.41 sehen Sie einen Kondensator mit parallelen Platten. Zu Beginn des Versuchs trägt die obere Platte die Ladung $+q_0$ und die untere Platte die Ladung $-q_0$. Mit dem Kondensator verbunden sind ein Ohm'scher Widerstand R und ein anfangs geöffneter Schalter S. Die Potenzialdifferenz zwischen den Platten des Kondensators beträgt dann $U_{C,0} = q_0/C$, wobei C die Kapazität des Kondensators ist.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Damit liegt am Ohm'schen Widerstand eine Potenzialdifferenz an, es muss also ein Strom durch das Bauelement fließen. Der Anfangstrom ist

$$I_0 = \frac{U_{C,0}}{R} = \frac{q_0}{RC}. \quad (22.29)$$

Der Strom kommt dadurch zustande, dass (positive) Ladung von der oberen (positiven) Kondensatorplatte durch den Ohm'schen Widerstand zur unteren (negativen) Platte fließt. (Denken Sie

daran, dass wir den Strom mit positiven Ladungsträgern modellieren, während sich in Wirklichkeit negativ geladene Elektronen bewegen.) Mit der Zeit nimmt die Ladung des Kondensators ab. Als positive Richtung wählen wir die Uhrzeigerrichtung; der Strom ist dann gleich der Rate, mit der die Ladung geringer wird. Die Ladung der oberen Platte zur Zeit t sei $q(t)$. Zu diesem Zeitpunkt fließt folglich der Strom

$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}. \quad (22.30)$$

(Das Minuszeichen bedeutet, dass q mit der Zeit abnimmt; deshalb ist die Ableitung von q nach der Zeit negativ. Hätten wir den Gegenuhrzeigersinn als positive Stromrichtung definiert, stünde in Gleichung 22.30 ein Pluszeichen.) Wenn wir den Stromkreis im Uhrzeigersinn durchlaufen, so fällt die Spannung am Widerstand um RI ab, am Kondensator hingegen nimmt sie um q/C zu. Die Kirchhoff'sche Maschenregel liefert dann

$$\frac{q(t)}{C} - RI(t) = 0, \quad (22.31)$$

wobei sowohl I als auch q von der Zeit abhängen und der Zusammenhang zwischen beiden Größen durch Gleichung 22.30 gegeben ist. Wir setzen nun $-dq(t)/dt$ in Gleichung 22.31 für $I(t)$ ein und erhalten

$$\frac{q(t)}{C} + R \frac{dq(t)}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} q(t). \quad (22.32)$$

Um diese Gleichung zu lösen, trennen wir zunächst die Variablen q und t durch Multiplikation beider Seiten mit $dt/q(t)$ und integrieren anschließend beide Seiten. Die Multiplikation ergibt

$$\frac{dq(t)}{q(t)} = -\frac{1}{RC} dt. \quad (22.33)$$

Die Variablen q und t treten jetzt in getrennten Termen auf, und wir integrieren von $q_0 = q(0)$ zur Zeit $t = 0$ bis $q' = q(t')$ zur Zeit t' :

$$\int_{q_0}^{q'} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^{t'} dt,$$

also

$$\ln \frac{q'}{q_0} = -\frac{t'}{RC}.$$

Da der Zeitpunkt t' beliebig gewählt wurde, können wir $t' = t$ setzen. Dann ist $q' = q(t)$, und wir erhalten für $q(t)$ die Beziehung

$$q(t) = q_0 e^{-t/(RC)} = q_0 e^{-t/\tau}. \quad (22.34)$$

Die Größe τ , die **Zeitkonstante**, gibt an, wie lange es dauert, bis die Ladung des Kondensators auf den Faktor $1/e$ der ursprünglichen Ladung q_0 gefallen ist:

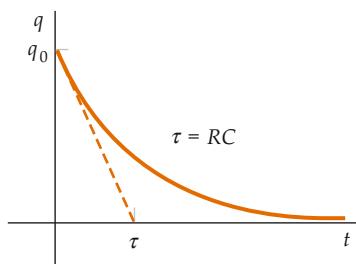


Abbildung 22.42 Die Ladung q des Kondensators aus dem in Abbildung 22.41 gezeigten Stromkreis, aufgetragen in Abhängigkeit von der Zeit; bei $t = 0$ ist der Schalter geschlossen. Die Zeitkonstante $\tau = RC$ ist gleich der Zeit, innerhalb derer die Ladung auf q_0/e abnimmt. (Wie die gestrichelte Linie andeutet, ist τ außerdem gleich der Zeit, die bis zur vollständigen Entladung des Kondensators verginge, wenn die Entladungsrate konstant bei ihrem Anfangswert bliebe.)

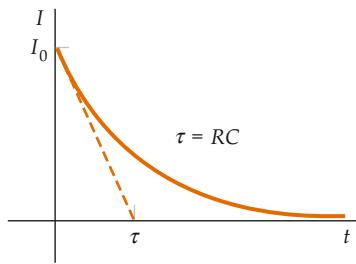


Abbildung 22.43 Der Strom in dem in Abbildung 22.41 gezeigten Stromkreis als Funktion der Zeit; der Graph hat die gleiche Form wie der Verlauf der Ladung in Abbildung 22.42. Bleibe die Rate der Stromabnahme konstant bei ihrem Anfangswert, so fiele der Strom innerhalb einer Zeitkonstante auf null ab, wie die gestrichelte Linie andeutet.

$$\tau = RC. \quad (22.35)$$

DEFINITION DER ZEITKONSTANTE DES RC-STROMKREISES

In Abbildung 22.42 wurde die Ladung des Kondensators aus dem in Abbildung 22.41 gezeigten Stromkreis in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen. Bei $t = \tau$ ist die Ladung $q = (1/e) q_0 = 0,37 q_0$, nach $t = 2\tau$ ist sie $(1/e)^2 q_0 = 0,135 q_0$ usw. Nach Ablauf eines Mehrfachen von τ ist die Ladung vernachlässigbar gering. Diesen zeitlichen Verlauf bezeichnet man auch als **exponentiellen Abfall**. Er tritt in der Natur sehr häufig auf – überall dort, wo die Abnahme einer Größe proportional zu dieser Größe selbst ist. In Kapitel 11 sind wir Beispielen dafür im Zusammenhang mit der gedämpften Schwingung bereits begegnet. Beispiel 22.18 verdeutlicht den Verlauf für die Entladung des Kondensators.

Beispiel 22.18: Entladung eines Kondensators

Ein Kondensator mit $C = 4,0 \mu\text{F}$ wird auf 24 V aufgeladen und dann über einen Ohm'schen Widerstand mit $R = 200 \Omega$ entladen. Berechnen Sie a) die Anfangsladung des Kondensators, b) den Anfangstrom

durch den Ohm'schen Widerstand, c) die Zeitkonstante der Schaltung und d) die Ladung des Kondensators $4,0 \text{ ms}$ nach dem Schließen der Verbindung.

Problembeschreibung: Das Schaltbild finden Sie in Abbildung 22.41.

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Anfangsladung des Kondensators ist das Produkt aus der Kapazität und der Spannung:

$$q_0 = C U_{C,0} = (4,0 \mu\text{F}) \cdot (24 \text{ V}) = [96 \mu\text{C}]$$

Teilaufgabe b

Der Anfangsstrom ist der Quotient aus Anfangsspannung und Widerstand:

$$I_0 = \frac{U_{C,0}}{R} = \frac{24 \text{ V}}{200 \Omega} = [0,12 \text{ A}]$$

Teilaufgabe c

Die Zeitkonstante ist gleich RC :

$$\tau = RC = (200 \Omega) \cdot (4,0 \mu\text{F}) = 800 \mu\text{s} = [0,80 \text{ ms}]$$

Teilaufgabe d

Setzen Sie $t = 4,0 \text{ ms}$ in Gleichung 22.34 ein und berechnen Sie die die Ladung des Kondensators nach dieser Zeitspanne:

$$\begin{aligned} q &= q_0 e^{-t/\tau} = (96 \mu\text{C}) \cdot e^{-(4,0 \text{ ms})/(0,80 \text{ ms})} \\ &= (96 \mu\text{C}) \cdot e^{-5} = [0,65 \mu\text{C}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Mit dem Anfangsstrom $I_0 = 0,12 \text{ A}$ würde es $q_0/I_0 = 96 \mu\text{C}/0,12 \text{ A} = 0,80 \text{ ms}$ dauern, bis der Kondensator vollständig entladen wäre. Da der Strom aber während der Entladung exponentiell abfällt, überrascht es nicht, dass $4,0 \text{ ms}$ vergehen, bis $99,3\%$ der Anfangsladung abgeflossen sind.

Weitergedacht: Nachdem fünf Zeitkonstanten vergangen sind, ist die Ladung des Kondensators auf weniger als 1 % des Anfangswerts gesunken.

Übung 22.10: Berechnen Sie den Strom, der bei $t = 4,0 \text{ ms}$ durch den Ohm'schen Widerstand fließt. ◀ ■

Die Abnahme der Ladung eines Kondensators können wir durch eine Analogiebetrachtung veranschaulichen: Stellen Sie sich einen gefüllten Wassereimer mit senkrechten Wänden vor, in

dessen Boden ein kleines Loch gebohrt ist. Die Rate, mit der das Wasser aus dem Loch strömt, ist proportional zur Druckdifferenz beider Seiten des Lochs, die wiederum proportional zu der noch im Eimer verbliebenen Wassermenge ist.

Den in einem RC -Kreis fließenden Strom erhalten wir durch Ableitung von Gleichung 22.34 nach der Zeit:

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/(RC)}.$$

Wir setzen Beziehung 22.29 ein, und es ergibt sich

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \quad (22.36)$$

mit $I_0 = U_{C,0}/R = q_0/(RC)$ als Anfangsstrom. Abbildung 22.43 zeigt den zeitlichen Verlauf der Stromstärke, die wie die Ladung exponentiell mit der Zeitkonstante $\tau = RC$ abfällt.

Aufladen eines Kondensators

In Abbildung 22.44a sehen Sie eine Schaltung, mit der ein Kondensator aufgeladen werden kann. Vor Versuchsbeginn ist der Kondensator entladen und der Schalter S geöffnet. Bei $t = 0$ wird der Schalter geschlossen, und die Ladung beginnt zu fließen (Abbildung 22.44b). Zur Zeit t sei $q(t)$ die Ladung der rechten Kondensatorplatte; als positive Richtung des Stroms I legen wir die Uhrzeigerrichtung fest. Die Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel liefert dann

$$U - I(t)R - \frac{q(t)}{C} = 0. \quad (22.37)$$

Betrachten wir diese Gleichung etwas genauer: Bei $t = 0$ ist die Ladung des Kondensators $q_A = 0$, der Strom ist daher $I_A = U/R$. Dann nimmt die Ladung zu, und der Strom wird schwächer. Ihren maximalen Wert $q_E = CU$ erreicht die Ladung, wenn der Strom gegen null geht.

Die Stromrichtung in dieser Schaltung haben wir so gewählt, dass q zunimmt, wenn I positiv ist, also

$$I(t) = +\frac{dq(t)}{dt}.$$

Wir setzen dies in Gleichung 22.37 ein und erhalten

$$U - R \frac{dq(t)}{dt} - \frac{q(t)}{C} = 0. \quad (22.38)$$

Gleichung 22.38 lösen wir analog zu Gleichung 22.32: Die einzelnen Schritte sollen Sie als Aufgabe 22.39 formulieren. Das Ergebnis lautet

$$q(t) = CU \left[1 - e^{-t/(RC)} \right] = q_E (1 - e^{-t/\tau}) \quad (22.39)$$

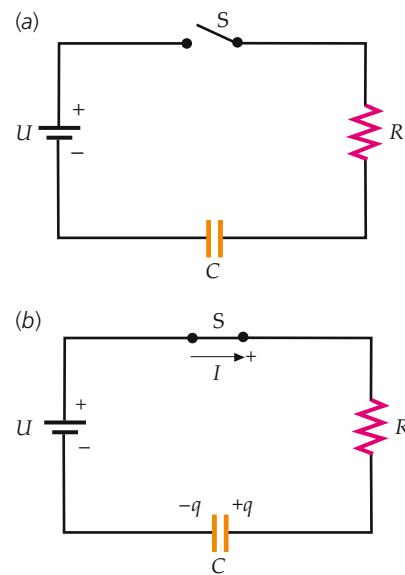


Abbildung 22.44 a) Stromkreis zur Aufladung eines Kondensators auf die Spannung U . b) Nachdem der Schalter geschlossen wurde, fließt ein Strom durch den Ohm'schen Widerstand, und der Kondensator wird geladen. Über beiden Bauelementen fällt die Spannung ab.

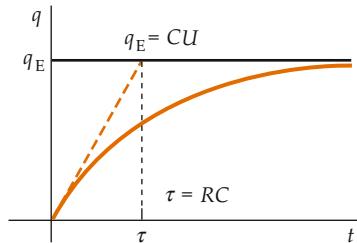


Abbildung 22.45 Die Ladung q des Kondensators aus dem in Abbildung 22.44 gezeigten Stromkreis, aufgetragen in Abhängigkeit von der Zeit; bei $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Nach der Zeit $t = \tau = RC$ ist die Ladung des Kondensators gleich $0,63 CU$ mit CU als maximaler Ladung. Wäre die Aufladungsrate konstant, so wäre der Kondensator zur Zeit $t = \tau$ vollständig geladen.

mit $q_E = CU$ als maximaler Ladung (Endladung) des Kondensators. Den Strom liefert uns die Beziehung $I(t) = dq(t)/dt$:

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = CU \left[-\frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} \right] = \frac{U}{R} e^{-t/(RC)}$$

oder

$$I(t) = \frac{U}{R} e^{-t/(RC)} = I_A e^{-t/\tau}. \quad (22.40)$$

Der Anfangsstrom ist hier $I_A = U/R$.

Den zeitlichen Verlauf der Ladung des Kondensators und des Stroms im Stromkreis zeigen die Abbildungen 22.45 und 22.46. Überlegen Sie sich anhand der folgenden Übungen und der Beispiele 22.19 und 22.20 die Anwendung dieser Gleichungen.

Beispiel 22.19: Aufladung eines Kondensators**ZUR ÜBUNG**

Mit einer 6,0-V-Batterie, deren Innenwiderstand vernachlässigt werden kann, soll ein Kondensator mit $C = 2,0 \mu\text{F}$ über einen Ohm'schen Widerstand mit $R = 100 \Omega$ aufgeladen werden. Berechnen Sie a) den Strom zu Beginn des Ladevorgangs, b) die maximale Ladung des Kondensators, c) die erforderliche Zeit, um den Kondensator auf 90 % des Maximalwerts aufzuladen, und d) die Ladung des Kondensators, wenn die Stromstärke auf die Hälfte ihres Anfangswerts abgesunken ist.

Problembeschreibung: Zu Beginn ist die Ladung des Kondensators null; die Spannung am Ohm'schen Widerstand ist daher gleich der Batteriespannung. Wenden Sie das Ohm'sche Gesetz auf den Widerstand an und lösen Sie nach dem Strom auf. Nach hinreichend langer Zeit ist die Stromstärke auf null gesunken, die Spannung am Kondensator ist jetzt gleich der Batteriespannung. Wenden Sie die Definition der Kapazität an, um die Endladung zu berechnen. Mithilfe von Gleichung 22.20 setzen Sie die Ladung in Beziehung zur Zeit, die Kirchhoff'sche Maschenregel liefert den Zusammenhang zwischen Ladung und Strom.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

Den Anfangsstrom erhalten Sie aus der Beziehung $I_A = U/R$.

Teilaufgabe b

Die maximale Ladung ergibt sich gemäß $q_E = C U$.

Teilaufgabe c

Setzen Sie in Gleichung 22.39 $q = 0,90 q_E$ und lösen Sie nach t auf. (Dazu müssen Sie zunächst nach $e^{-t/\tau}$ umstellen und den natürlichen Logarithmus beider Seiten bilden.)

Teilaufgabe d

- Wenden Sie die Kirchhoff'sche Maschenregel auf den Stromkreis (siehe Abbildung 22.44b) an.
- Setzen Sie $I = I_A/2$ und lösen Sie nach q auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

Teilaufgabe a

$$I_A = [0,060 \text{ A}]$$

Teilaufgabe b

$$q_E = [12 \mu\text{C}]$$

Teilaufgabe c

$$t = 2,3 \tau = [0,46 \text{ ms}]$$

Teilaufgabe d

1.

$$U - RI - \frac{q}{C} = 0$$

2.

$$q = \frac{q_E}{2} = [6,0 \mu\text{C}]$$

Plausibilitätsprüfung: Teilaufgabe d können Sie auch lösen, indem Sie t aus Gleichung 22.40 berechnen, in Gleichung 22.39 einsetzen und diese nach q auflösen. Die Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel führt allerdings schneller zum Ziel.

Übung 22.11: Zeigen Sie, dass Gleichung 22.39 tatsächlich eine Lösung von Gleichung 22.38 ist, indem Sie $q(t)$ und dq/dt in Gleichung 22.38 einsetzen. ◀

Übung 22.12: Welcher Teil der maximalen Ladung befindet sich nach der Zeit $t = 2\tau$ auf dem Kondensator? ◀

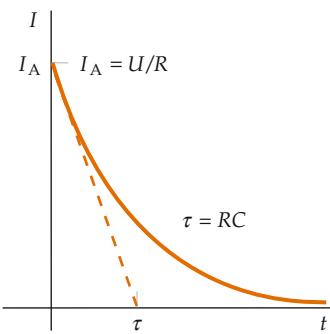


Abbildung 22.46 Der Strom in dem in Abbildung 22.44 gezeigten Stromkreis als Funktion der Zeit. Von seinem Anfangswert $I_A = U/R$ ausgehend fällt der Strom exponentiell über der Zeit ab.

Beispiel 22.20: Ströme und Ladungen nach verschiedenen Zeiten

Gegeben ist der Stromkreis in Abbildung 22.47. Zu Versuchsbeginn ist der Kondensator mit $C = 6,0 \mu\text{F}$ entladen. Berechnen Sie den Strom, der a) kurz nach dem Schließen des Schalters und b) lange nachdem der Schalter geschlossen wurde durch die Ohm'schen Widerstände $R_1 = 4,0 \Omega$ und $R_2 = 8,0 \Omega$ fließt. c) Wie groß ist die Ladung des Kondensators, nachdem der Schalter lange Zeit geschlossen war?

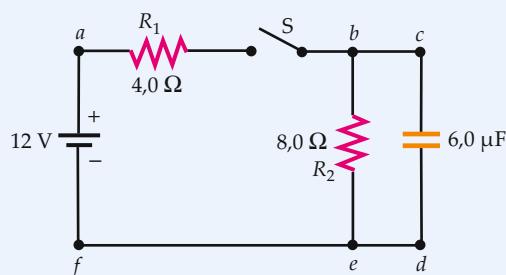


Abbildung 22.47 Schaltungsnetz aus Ohm'schen Widerständen und einem Kondensator, auch RC-Kreis genannt.

Problembeschreibung: Zu Beginn ist der Kondensator entladen, und der Ohm'sche Widerstand R_1 begrenzt den Stromfluss durch die Batterie; der Spannungsabfall über den Kondensator ist deshalb anfänglich null. Der Kondensator ist mit R_2 parallel geschaltet, d. h., über beiden Bauelementen fällt die gleiche Spannung ab. Folglich ist der Spannungsabfall über R_2 zu Beginn ebenfalls null. Die

positive Stromrichtung zeigt für den Zweig, der die Batterie enthält, in der Papierebene nach oben, für die anderen beiden Zweige nach unten. Die Ladung auf der oberen Platte des Kondensators sei q .

Lösung:

Teilaufgabe a

Der Kondensator ist zu Beginn entladen. Wenden Sie die Maschenregel auf die äußere Masche an und berechnen Sie den Strom durch R_1 . Wenden Sie dann die Maschenregel auf die Masche an, die R_2 und den Kondensator enthält, und berechnen Sie den Strom durch R_2 :

$$12 \text{ V} - (4,0 \Omega) I_{R_1,0} - \frac{0}{C} = 0, \quad I_{R_1,0} = \boxed{3,0 \text{ A}}$$

$$I_{R_2,0} (8 \Omega) - \frac{0}{C} = 0, \quad I_{R_2,0} = \boxed{0}$$

Teilaufgabe b

Eine hinreichend lange Zeit später ist der Kondensator vollständig aufgeladen (es fließt keine Ladung mehr zu den Platten), und beide Ohm'schen Widerstände werden vom gleichen Strom durchflossen. Wenden Sie die Maschenregel auf die linke Masche an und lösen Sie nach dem Strom auf:

$$12 \text{ V} - (4,0 \Omega) I_E - (8,0 \Omega) I_E = 0$$

$$I_E = \boxed{1,0 \text{ A}}$$

Teilaufgabe c

Die Spannungsabfälle über R_2 und den Kondensator sind gleich. Deshalb können Sie q_E wie folgt ausrechnen:

$$I_E (8,0 \Omega) = \frac{q_E}{C}$$

$$q_E = (1,0 \text{ A}) \cdot (8,0 \Omega) \cdot (6,0 \mu\text{F}) = \boxed{48 \mu\text{C}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Analyse dieses Stromkreises zu den beiden extremen Zeitpunkten – wenn der Kondensator entweder vollständig entladen oder vollständig geladen ist – fällt nicht schwer: Der ungeladene Kondensator wirkt wie ein guter Leiter (ein Kurzschluss) zwischen den Punkten c und d (Abbildung 22.48a), der vollständig aufgeladene Kondensator unterbricht den Stromkreis zwischen c und d wie ein offener Schalter (Abbildung 22.48b).

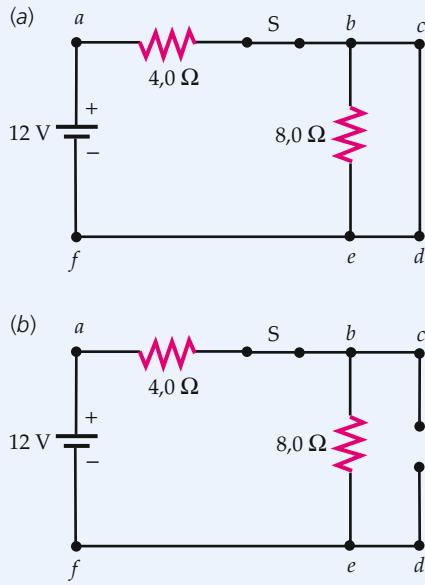


Abbildung 22.48 Ist der Kondensator aus Abbildung 22.47 vollständig entladen, so schließt er die Punkte c und d kurz (a); ist er vollständig aufgeladen, so unterbricht er den Stromkreis zwischen c und d (b).

Die andere Hälfte wird, wie wir jetzt zeigen wollen, durch den Ohm'schen Widerstand des Stromkreises in Wärme umgewandelt. Die Rate, mit der Arbeit an einem Ohm'schen Widerstand R in Wärme umgewandelt wird, ist gleich

$$\frac{dW_R}{dt} = R I^2$$

mit $I(t) = (U/R) e^{-t/(RC)}$ (Gleichung 22.40). Wenn wir dies für den Strom einsetzen, haben wir

$$\frac{dW_R}{dt} = R \left(\frac{U}{R} e^{-t/(RC)} \right)^2 = \frac{U^2}{R} e^{-2t/(RC)}.$$

Diesen Ausdruck integrieren wir in den Grenzen $t = 0$ und $t = \infty$:

$$W_R = \int_0^\infty \frac{U^2}{R} e^{-2t/(RC)} dt = \frac{U^2}{R} \int_0^\infty e^{-at} dt$$

mit $a = 2/(RC)$. Wir erhalten

$$W_R = \frac{U^2}{R} \left. \frac{e^{-at}}{-a} \right|_0^\infty = -\frac{U^2}{Ra} (0 - 1) = \frac{U^2 RC}{2}.$$

Insgesamt wird also die Joule'sche Wärme

$$W_R = \frac{1}{2} U^2 C = \frac{1}{2} q_E U$$

erzeugt mit $q_E = UC$. Dieses Resultat gilt unabhängig vom Wert des Ohm'schen Widerstands R . Lädt man also einen Kondensator mit einer Batterie, die eine konstante Spannung abgibt, über einen Ohm'schen Widerstand auf, so wird die Hälfte der von der Spannungsquelle gelieferten Energie im Kondensator gespeichert, die andere Hälfte wird vom Ohm'schen Widerstand (zu einem kleinen Teil natürlich vom Innenwiderstand der Batterie) in Wärme umgewandelt.

Die Energiebilanz beim Aufladen eines Kondensators

Während der Aufladung des Kondensators fließt durch die Batterie insgesamt die Ladung $q_E = UC$. Das bedeutet, die Batterie verrichtet die Arbeit

$$W = q_E U = CU^2.$$

Die Hälfte dieser Arbeit wird in Form von elektrischer Energie im Kondensator gespeichert (siehe Gleichung 21.8):

$$E_{el} = \frac{1}{2} q_E U.$$

⌚ Im Kontext: Autoelektrik – ein Thema in Bewegung

Seit den 1930er Jahren betrieb man das elektrische Bordnetz von Automobilen mit einer Nennspannung von 6 V, was eine Ladespannung der Akkumulatoren von 7 V erforderte. Gegen Mitte der 1950er Jahre stellte sich heraus, dass diese Spannung zum Betrieb der Autoelektrik künftig nicht mehr ausreichen würde. Die neuen 12-V-Akkumulatorblöcke mit einer Ladespannung von 14 V lieferten eine Ladeschlussspannung (Nennspannung während der Fahrt) von 14 V.¹ Bis die Autoindustrie sich entsprechend umgestellt hatte, vergingen etliche Jahre.²

In den 1960er Jahren bestand die von Batterie bzw. Lichtmaschine zu versorgende Autoelektrik im Wesentlichen aus Anlasser, Zündung, Beleuchtung, Hupe, Radio und bestenfalls (in Luxuslimousinen) noch einer Standheizung und einem Gebläse.³ Inzwischen bieten schon Mittelklassewagen zahlreiche elektrische und elektronische Systeme⁴, z. B. Crash-Sensoren, Automatikbremsen, elektrisch verstellbare Sitze, Servolenkung, Bremskraftverstärker, Klimaanlage, Scheibenwischer mit Intervallbetrieb, Unterhaltungselektronik mit Videodisplay, Motorsteuerung, Tempomat und elektrische Fensterheber. In komfortablen Autos der Oberklasse findet man darüber hinaus Radare zur Abstandsmessung⁵, elektronische Gaspedale, Stabilitäts- und Fahrwerksregelungen oder Sitzheizungen⁶. Ein Auto nimmt heute eine Leistung von 1,5 bis 2 kW auf; in näherer Zukunft rechnet man mit 3,5 kW oder mehr.⁷ Auf die Bordelektrik und -elektronik entfällt mittlerweile über ein Fünftel der Herstellungskosten eines durchschnittlichen Fahrzeugs.⁸



(© Graham Harrison/Alamy.)

Dass die Anforderungen an das Bordnetz deutlich weiter steigen werden, lässt sich heute schon absehen.⁹ Man diskutiert deshalb seit einiger Zeit über den Einsatz von 36-V-Batterien zum Betrieb von 42-V-Netzen. Die Leistung ist das Produkt aus Spannung und Strom; wenn also die Spannung steigt, muss der Strom sinken, wenn die Leistung gleich bleiben soll. Reizvoll an dieser Idee ist deshalb, dass man zur Verkaubelung der Geräte dann dünnere, leichtere Drähte verwenden kann.¹⁰

Die höhere Spannung würde außerdem kleinere, leichtere Anlassermotoren und Lichtmaschinen zulassen. Der Umstieg auf die höhere Bordnetzspannung erweist sich jedoch als komplizierter, als zunächst angenommen wurde. In einer Designstudie konnte das 42-V-System nur mit maßgeschneiderten Spezialteilen verwirklicht werden.¹¹ Bei einem 14-V-System kommt es bei einer Verbindung, die sich durch die Vibration gelockert hat, auch dann nicht zu einem durchgehenden Lichtbogen, wenn die Lücke zwischen den Leitern rund 1 mm breit ist. Bei einem 42-V-System hingegen reicht eine solche Lücke aus, dass ein Lichtbogen überschlägt und die Gefahr eines Kabelbrands steigt.¹² Deshalb werden hier wesentlich teurere Steckersysteme benötigt. Bis Jahresmitte 2005 hatten sich bereits etliche große Automobilfirmen darauf verständigt, innerhalb der kommenden Jahre auf höhere Bordnetzspannungen zu verzichten.^{13,14} Ein Forschungskonsortium verfolgt das Thema vorerst weiter.¹⁵ Sobald sich ein Umstieg auf das 42-V-System wirtschaftlich lohnt, wird es vermutlich in der Massenproduktion von Automobilen Einzug halten.

1. Ribbens, W. B., *Understanding Automotive Electronics*, 6. Aufl., New York: Newnes (Elsevier), 2003.
2. Corbett, B., „No Flick of the Switch“, *Ward's Auto World*, April 2001, 37, Nr. 4, S. 50.
3. Ribbens, W. B., a.a.O.
4. *Automotive Electronics Handbook*, Jurgen, R. (Hrsg.), New York: McGraw-Hill, 1995.
5. Allen, R., „New Technologies Make Roads Safer ... One Smart Car at a Time“ *Electronic Design*, 29. Juni 2006, S. 41–44.
6. „The 2009 S600 Sedan“, Mercedes-Benz. <http://www.mbusa.com/mercedes/#/vehiclesMenu/exploreOverview/?yr=2009&vmf=600V&vc=S> (Stand: April 2009).
7. Masrur, M., Monroe, J., Patel, R. und Garg, V. K., „42-Volt Electrical Power System for Military Vehicles – Comparison with Commercial Automotive Systems“, *Vehicular Technology Conference*, 2002. Tagungsbericht VTC 2002-Fall, 2002 IEEE 56, 3, S. 1846–1850.
8. Marsh, D., „LIN Simplifies and Standardizes In-Vehicle Networks“, *Electronic Design News*, 8. April 2005, S. 29 ff.
9. Huber, P. W. und Mills, M. P., „The End of the M. E.?“, *Mechanical Engineering*, Mai 2005, S. 26–29.
10. Truett, R., „42-Volt Systems Boost Fuel Economy Efforts“, *Automotive News*, 21. Okt. 2001, 77, Nr. 6008, S. 6.
11. „No-Compromise Mild Hybrid Car Engine Has a Promising Future“, *Asia-Pacific Engineer*, 1. Juni 2003.
12. Moran, T., „42-Volt Challenges: Arcs and Sparses“, *Automotive News*, 12. März 2001, 75, Nr. 5920, S. 8.
13. Kelly, K., „DC Dumps 42-Volts“, *Ward's AutoWorld*, Juni 2004, S. 9.
14. Crain, K., „Let's Step Back, Rethink Technology“, *Automotive News*, 3. Jan. 2005, 79, Nr. 6128, S. 12.
15. MIT/Industry Consortium on Advanced Automotive Electrical/Electronic Components and Systems, „Consortium Research Units“. http://lees.mit.edu/public/In_the_News/InTheNews.htm (Stand: April 2009).

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Elektrischer Strom	<p>Der elektrische Strom ist definiert als die Rate des Flusses elektrischer Ladung durch eine Querschnittsfläche, wobei Δt gegen null geht:</p> $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$ (22.1)
Driftgeschwindigkeit	<p>Ein elektrischer Strom I in einem Leiter kommt dadurch zustande, dass negative Ladungsträger (Elektronen), ständig beschleunigt von einem elektrischen Feld im Leiter und wieder abgebremst durch Zusammenstöße mit Gitterionen, langsam den Leiter entlang driften. Typische Driftgeschwindigkeiten v_d von Elektronen in Metalldrähten liegen bei wenigen Millimetern pro Sekunde. Für Ladungsträger, die sich in positiver Richtung bewegen, gilt</p> $I = q (n/V) A v_d$ (22.3) <p>mit $q = -e$ für Elektronen; (n/V) ist die Anzahldichte der freien Ladungsträger, A die Querschnittsfläche des Leiters und v_d die Driftgeschwindigkeit.</p>
Stromdichte	<p>Die Beziehung zwischen der Stromdichte j, einer Vektorgröße, und der Driftgeschwindigkeit lautet</p> $j = q (n/V) v_d.$ (22.4) <p>Der Strom I durch eine Querschnittsfläche entspricht dem Fluss der Stromdichte durch diese Fläche.</p>
2. Elektrischer Widerstand	
Definition	$R = \frac{U}{I}$ (22.7)
Spezifischer Widerstand r	$R = r \frac{L}{A}$ (22.10)
Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstands α	$\alpha = \frac{(r-r_0)/r_0}{T-T_0}$ (22.12)
3. Ohm'sches Gesetz	Der Widerstand von Materialien, die sich nach dem Ohm'schen Gesetz verhalten, hängt weder vom Strom noch von der Spannung ab: $U = RI$, R ist konstant. (22.9)
4. Leistung	
Einem Bauelement zugeführte Leistung	$P = I U$ (22.13)
In einem Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung	$P = I U_R = R I^2 = \frac{U^2}{R}$ (22.14)
5. Quellenspannung	
Spannungsquellen	Eine Spannungsquelle ist ein Bauelement, das einem Stromkreis elektrische Energie zuführt.
Leistung einer Spannungsquelle	$P = I U_Q$ (22.15)
6. Batterien	
Ideale Batterie	Eine ideale Batterie ist eine Spannungsquelle, an deren Klemmen unabhängig vom Batteriestrom eine konstante Spannung abgegriffen werden kann.
Reale Batterie	Eine reale Batterie kann als Reihenschaltung einer idealen Batterie und eines kleinen Ohm'schen Widerstands, des Innenwiderstands R_{in} , betrachtet werden.
Klemmenspannung	$\phi_a - \phi_b = U_Q - R_{in} I$ (22.16)
	wobei die Richtung steigenden Potenzials in der Batterie als positive Richtung festgelegt ist.
Insgesamt gespeicherte Energie	$E_{el} = q U_Q$ (22.18)

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Ersatzwiderstand	
Reihenschaltung Ohm'scher Widerstände	$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$ (22.20)
Parallelschaltung Ohm'scher Widerstände	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$ (22.25)
8. Kirchhoff'sche Regeln	
Maschenregel	Beim Durchlaufen einer geschlossenen Schleife eines Stromkreises ist die Summe aller Spannungen (Potenzialänderungen) in dieser Schleife gleich null.
Knotenregel	Die Summe aller Ströme in einem Stromkreis, die zu einem Verzweigungspunkt hin fließen, ist gleich der Summe aller Ströme, die von diesem Punkt weg fließen.
9. Messgeräte	
Ampermeter	Ein Ampermeter (Strommessgerät) besitzt einen sehr kleinen Ohm'schen Widerstand und wird in Reihe mit dem zu vermessenden Bauelement geschaltet.
Voltmeter	Ein Voltmeter (Spannungsmessgerät) besitzt einen sehr großen Ohm'schen Widerstand und wird parallel zu dem zu vermessenden Bauelement geschaltet.
Ohmmeter	Ein Ohmmeter (Widerstandsmessgerät) entspricht einer Reihenschaltung aus einer Batterie, einem Galvanometer und einem Ohm'schen Widerstand. Es dient zur Messung des Widerstands eines mit den Klemmen verbundenen Bauelements.
10. Entladung eines Kondensators	
Zeitlicher Verlauf der Ladung	$q(t) = q_0 e^{-t/(RC)} = q_0 e^{-t/\tau}$ (22.34)
Zeitlicher Verlauf des Stroms	$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{U_{C,0}}{R} e^{-t/(RC)} = I_0 e^{-t/\tau}$ (22.36)
Zeitkonstante	$\tau = RC$ (22.35)
11. Aufladung eines Kondensators	
Zeitlicher Verlauf der Ladung	$q(t) = C U [1 - e^{-t/(RC)}] = q_E (1 - e^{-t/\tau})$ (22.39)
Zeitlicher Verlauf des Stroms	$I(t) = \frac{U}{R} e^{-t/(RC)} = I_0 e^{-t/\tau}$ (22.40)

Antwort auf die Verständnisfrage

1. a) Kurz nach dem Einschalten der Lampe ist der aus Metall bestehende Glühfaden noch relativ kühl, sein Widerstand ist deshalb geringer als nach einer gewissen Betriebszeit. Ein niedrigerer Widerstand bedeutet einen stärkeren Strom. Deshalb misst man unmittelbar nach Betätigung des Schalters einen höheren Wert für die Stromstärke. b) Kurz nach dem Einschalten wird dem Glühfaden mit einer größeren Rate Energie von der Batterie zugeführt, als der Draht in Form von Wärme wieder abgeben kann. Nach kurzer Zeit hat sich ein stationärer Zustand eingestellt: Der nun heiße Draht gibt Energie (Wärme) genauso schnell ab, wie er sie aus der Batterie aufnimmt. Deshalb erhitzt er sich nicht weiter, und eine konstante Temperatur bedeutet einen konstanten Widerstand.

Lösungen der Übungen

1. 7,9 h
2. 14 000
3. 4,5 V
4. 2,4 m
5. Die Streifen sind (von oben nach unten) braun, orange, blau, rot und braun. Der Wert des Ohm'schen Widerstands beträgt 13,6 kΩ und der Toleranzbereich 1 %.
6. a) 45 W, b) 270 J
7. a) 6,0 Ω, b) 1,3 Ω
8. a) $R = 2,0 \Omega$, b) $I = 9,0 \text{ A}$, c) $U_{R_1} = 18 \text{ V}$, $U_{R_3} = 0$, $U_{R_2} = 0$, d) $I_1 = 9,0 \text{ A}$, $I_3 = 9,0 \text{ A}$, $I_2 = 0$
9. a) 3,0 A, b) 0,83 A
10. 0,81 mA
11. Einsetzen von $q(t) = C U (1 - e^{-t/\tau})$ und $\frac{dq(t)}{dt} = \frac{U}{R} e^{-t/\tau}$ liefert:

$$U - R \frac{U}{R} e^{-t/\tau} - \frac{1}{C} C U (1 - e^{-t/\tau}) =$$

$$U - U e^{-t/\tau} - U + U e^{-t/\tau} = 0.$$
12. 0,86

Aufgaben

Verständnisaufgaben

22.1 • Bei der Diskussion der Elektrostatisik hatten wir festgestellt, dass in einem Leiter im elektrostatischen Gleichgewicht kein elektrisches Feld existiert. Warum können wir jetzt über elektrische Felder innerhalb des Materials von Leitern sprechen?

22.2 • Gegeben sind zwei Kupferdrähte gleicher Masse mit kreisförmigen Querschnitten; Draht A ist doppelt so lang wie Draht B. Wie verhalten sich die Widerstände der Drähte zueinander (unter Vernachlässigung von Temperatureffekten)?
a) $R_A = 8R_B$, b) $R_A = 4R_B$, c) $R_A = 2R_B$, d) $R_A = R_B$.

22.3 • Zwei Ohm'sche Widerstände R_1 und R_2 werden parallel geschaltet. Wie groß ist der Ersatzwiderstand der Schaltung ungefähr, wenn $R_1 \gg R_2$ ist? a) R_1 , b) R_2 , c) 0, d) unendlich groß.

22.4 • Zwei Ohm'sche Widerstände R_1 und R_2 werden in Reihe geschaltet. Wie groß ist ungefähr der Ersatzwiderstand der Schaltung, wenn $R_1 \gg R_2$ ist? a) R_1 , b) R_2 , c) 0, d) unendlich groß.

22.5 • Eine Parallelschaltung zweier Ohm'scher Widerstände A und B ist an die Klemmen einer Batterie angeschlossen. Der Widerstand von A ist doppelt so groß wie der von B. Wenn durch A ein Strom I fließt, welcher Strom fließt dann durch B?
a) I , b) $2I$, c) $I/2$, d) $4I$, e) $I/4$.

22.6 • Eine Reihenschaltung zweier Ohm'scher Widerstände A und B ist an die Klemmen einer Batterie angeschlossen. Der Widerstand von A ist doppelt so groß wie der von B. Wenn durch A ein Strom I fließt, welcher Strom fließt dann durch B?
a) I , b) $2I$, c) $I/2$, d) $4I$, e) $I/4$.

22.7 • Richtig oder falsch? a) Der Innenwiderstand eines idealen Voltmeters ist null. b) Der Innenwiderstand eines idealen Ampermeters ist null. c) Der Innenwiderstand einer idealen Spannungsquelle ist null.

22.8 • Der Kondensator C in Abbildung 22.49 ist anfangs entladen. Welche der folgenden Aussagen trifft unmittelbar nach dem Schließen des Schalters zu? a) An C liegt die Spannung U_Q an. b) An R liegt die Spannung U_Q an. c) Im Stromkreis fließt kein Strom. d) a und c sind richtig.

22.9 •• Der Kondensator C in Abbildung 22.49 ist anfangs entladen. Welche der folgenden Aussagen trifft zu, wenn der Schalter längere Zeit geschlossen bleibt? a) Die Batterie gibt die Energie $\frac{1}{2} C U_Q^2$ ab. b) Dem Ohm'schen Widerstand wird die Energie $\frac{1}{2} C U_Q^2$ zugeführt. c) Im Ohm'schen Widerstand wird die Energie mit konstanter Rate umgesetzt. d) Durch den Ohm'schen Widerstand fließt insgesamt eine Ladung $\frac{1}{2} C U_Q$.

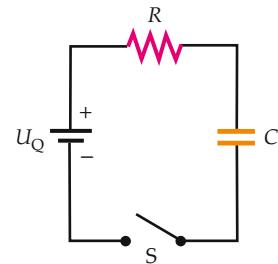


Abbildung 22.49 Zu den Aufgaben 22.8. und 22.9.

22.10 •• Für die Werte der Widerstände R_1 , R_2 und R_3 in Abbildung 22.50 gilt die Beziehung $R_2 = R_3 = 2R_1$. An R_1 wird die Leistung P umgesetzt. Welche Leistung wird dann an R_2 und R_3 umgesetzt?

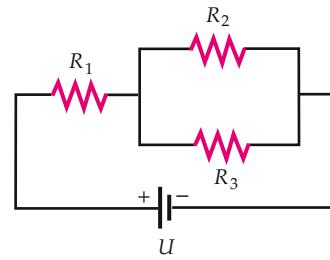


Abbildung 22.50 Zu Aufgabe 22.10.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

22.11 •• a) Schätzen Sie den Widerstand eines Fremdstartkabels für Autos ab. b) Finden Sie heraus, welcher Strom beim Starten eines durchschnittlichen Autos ungefähr fließt. Wie groß ist die Spannung, die bei diesem Strom über das Fremdstartkabel abfällt? c) Welche Leistung wird dabei im Kabel umgesetzt?

22.12 •• Der Querschnitt der im Haushalt verlegten elektrischen Leitungen muss hinreichend groß sein, damit sich die Kabel nicht so weit erhitzen, dass ein Brand entsteht. Durch eine bestimmte Leitung soll ein Strom von 20 A fließen; die Joule'sche Erwärmung des Kupferdrahts darf in diesem Fall $2,0 \text{ W/m}$ nicht übersteigen. Welchen Durchmesser muss die Leitung haben, um der Anforderung zu genügen?

Elektrischer Strom und die Bewegung von Ladungsträgern

22.13 •• Zwei kupferne Drahtstücke mit Durchmessern von 2,6 mm und 1,6 mm sind hintereinander verschweißt und werden von einem 15 A starken Strom durchflossen. a) Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in jedem Drahtabschnitt unter der Annahme, dass auf jedes Kupferatom genau ein freies Elektron kommt. b) Geben Sie das Verhältnis der Beträge der Stromdichte in beiden Drahtstücken an.

22.14 •• Ein Beschleuniger erzeugt einen Protonenstrahl mit einem kreisförmigen Querschnitt und einem Durchmesser von 2,0 mm; hindurch fließt ein Strom von 1,0 mA. Die Stromdichte ist homogen über den Strahlquerschnitt verteilt. Jedes Proton besitzt eine kinetische Energie von 20 MeV. Der Strahl trifft auf ein metallisches Target, von dem er absorbiert wird. a) Geben Sie die Anzahldichte der Protonen im Strahl an. b) Wie viele Protonen treffen pro Minute auf das Target? c) Wie groß ist der Betrag der Stromdichte in diesem Strahl?

22.15 •• Die Protonen eines 5,00-mA-Strahls in einem geplanten Protonenspeicherring, einem sogenannten *Supercollider*, bewegen sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Die Stromdichte ist homogen über den Strahl verteilt. a) Berechnen Sie die Protonenzahl pro Meter des Strahls. b) Der Strahlquerschnitt sei $1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Geben Sie die Anzahldichte der Protonen an. c) Berechnen Sie den Betrag der Stromdichte im Strahl.

Widerstand und Ohm'sches Gesetz

Hinweis: Falls nicht anders angegeben, handelt es sich hier stets um Ohm'sche (also konstante) Widerstände.

22.16 • Durch einen 10 m langen Draht mit einem Widerstand von $0,20 \Omega$ fließt ein Strom von 5,0 A. a) Wie groß ist der Spannungsabfall über den Draht? b) Geben Sie die elektrische Feldstärke im Draht an.

22.17 •• Gegeben ist ein Zylinder aus Glas mit einer Länge von 1,00 cm und einem spezifischen Widerstand von $1,01 \cdot 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$. Wie lang muss ein Kupferkabel mit der gleichen Querschnittsfläche sein, um denselben Widerstand wie der Glaszylinder aufzuweisen?

22.18 •• Für Stromstärken bis zu 30 A werden Kabel benutzt, deren Kupferdrähte einen Durchmesser von 2,6 mm aufweisen. a) Wie groß ist der Widerstand eines solchen Kabels von 100 m Länge? b) Wie groß ist die elektrische Feldstärke im Draht, wenn ein Strom von 30,0 A fließt? c) Wie lange dauert es unter diesen Bedingungen, bis sich ein Elektron entlang des Drahts um 100 m weiterbewegt hat?

22.19 ••• Geben Sie einen Ausdruck für den Widerstand zwischen den Enden des in Abbildung 22.51 dargestellten Halbringss an. Der spezifische Widerstand des Materials sei r . (*Hinweis:* Modellieren Sie den Halbring als Parallelschaltung sehr vieler dünner Halbringe. Nehmen Sie an, dass die Stromdichten jeweils homogen über eine Querschnittsfläche des Halbrings verteilt ist.)

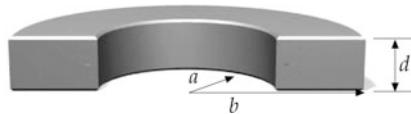


Abbildung 22.51 Zu Aufgabe 22.19.

Temperaturabhängigkeit des Widerstands

22.20 • Bei welcher Temperatur besitzt ein Kupferdraht einen um 10 % größeren Widerstand als bei 20°C ?

22.21 •• Sie möchten die Arbeitstemperatur der aus der Legierung Nichrom bestehenden Heizschlange Ihres Toasters ermitteln. Bei 20°C messen Sie einen Widerstand des Heizelements von $80,0 \Omega$. Als Nächstes stellen Sie fest, dass unmittelbar nach dem Anschalten des Geräts durch die noch nicht signifikant erwärmte Heizschlange ein Strom von 8,70 A fließt. Nachdem die Heizschlange ihre Endtemperatur erreicht hat, beträgt die Stromstärke nur noch 7,00 A. Wie heiß wird das Heizelement?

22.22 ••• Zwei Drähte mit gleicher Querschnittsfläche A , den Längen l_1 bzw. l_2 , den spezifischen Widerständen r_1 bzw. r_2 und den zugehörigen Temperaturkoeffizienten α_1 bzw. α_2 sind an den Enden so miteinander verbunden, dass durch beide der gleiche Strom fließt. a) Zeigen Sie, dass der Widerstand R der gesamten Anordnung für kleine Temperaturänderungen nicht von der Temperatur abhängt, wenn gilt: $r_1 l_1 \alpha_1 + r_2 l_2 \alpha_2 = 0$. b) Der eine Draht bestehe aus Kohlenstoff, der andere aus Kupfer. In welchem Verhältnis müssen die Längen der Drähte zueinander stehen, damit R näherungsweise unabhängig von der Temperatur ist?

22.23 ••• Eine kleine 5,00-V-Kohlefadenlampe hat einen zylindrischen Glühfaden mit einer Länge von 3,00 cm und einem Durchmesser $d = 40,0 \mu\text{m}$. Der spezifische Widerstand von Kohlenstoff, der zur Herstellung von Glühfäden eingesetzt wird, beträgt bei Temperaturen zwischen 500 und 700 K ungefähr $3,00 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$. a) Wie heiß wird der Glühfaden beim Betrieb der Lampe? Behandeln Sie die Glühlampe als idealen schwarzen Strahler. b) Der spezifische Widerstand von Kohlenstoff nimmt mit steigender Temperatur ab, der von Wolfram nicht. Bei Kohlefadenlampen kann es deshalb zu Problemen kommen, die bei Glühlampen mit Wolframdraht nicht auftreten. Erklären Sie, warum.

Energie in elektrischen Stromkreisen

22.24 • An eine Batterie mit einer Quellenspannung von 6,0 V und einem Innenwiderstand von $0,30\Omega$ wird ein regelbarer Lastwiderstand R angeschlossen. Berechnen Sie die Stromstärke und die Leistungsabgabe der Batterie für a) $R = 0$, b) $R = 5,0\Omega$, c) $R = 10\Omega$ und d) für einen unendlich großen Lastwiderstand.

22.25 •• Ein mit einem Elektromotor ausgerüstetes Leichtfahrzeug wird mit zehn 12,00-V-Akkumulatoren betrieben. Jeder Akkumulator kann eine Ladungsmenge von $160\text{ A}\cdot\text{h}$ abgeben, bevor er nachgeladen werden muss. Die mittlere Reibungskraft bei einer Geschwindigkeit von $80,0\text{ km/h}$ beträgt $1,20\text{ kN}$. a) Wie groß muss die vom Motor abgegebene Leistung mindestens sein, damit das Auto sich mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h bewegt? b) Geben Sie die Gesamtladungsmenge in Coulomb an, die alle Akkumulatoren zusammengekommen während eines Ladezyklus liefern können. c) Wie viel elektrische Energie geben die Akkumulatoren zusammengekommen während eines Entladezyklus ab? d) Wie weit kann das Auto mit einer Geschwindigkeit von $80,0\text{ km/h}$ fahren, bevor die Akkumulatoren nachgeladen werden müssen? e) Das Aufladen der Akkumulatoren kostet 9,00 Eurocent pro Kilowattstunde. Geben Sie die (Strom-)Kosten pro gefahrenem Kilometer an.

Zusammenschaltungen von Widerständen

22.26 • a) Zeigen Sie, dass der Ersatzwiderstand zwischen den Punkten a und b in Abbildung 22.52 gleich R ist. b) Welchen Effekt hat das Einfügen eines fünften Widerstands R zwischen den Punkten c und d auf diesen Ersatzwiderstand?

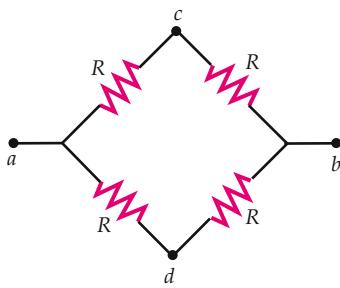


Abbildung 22.52 Zu Aufgabe 22.26.

22.27 •• Sie vermessen eine unbekannte Batterie: Zuerst schließen Sie an die Klemmen einen Lastwiderstand $R_1 = 5,00\Omega$ an, die Stromstärke im Stromkreis beträgt dann $0,500\text{ A}$. Schließen Sie nun einen Widerstand $R_2 = 11,0\Omega$ an, so fließt ein Strom von nur $0,250\text{ A}$. Berechnen Sie a) die Quellenspannung U_Q und b) den Innenwiderstand R_{in} der Batterie.

22.28 •• Aus einem Ohm'schen Widerstand $R_1 = 8,00\Omega$, einem unbekannten Widerstand R_2 , einem weiteren Widerstand

$R_3 = 16,0\Omega$ und einer idealen Spannungsquelle werden nacheinander zwei verschiedene Stromkreise aufgebaut: Zuerst wird eine parallele Kombination aus R_1 und R_2 mit R_3 und der Batterie in Reihe geschaltet, dann werden alle drei Ohm'schen Widerstände mit der Batterie in Reihe geschaltet. In beiden Fällen fließt der gleiche Strom durch R_1 . Wie groß ist der unbekannte Widerstand R_2 ?

22.29 •• Gegeben ist die in Abbildung 22.53 skizzierte Schaltung mit R_{ab} als Ersatzwiderstand zwischen den Punkten a und b . Zu berechnen ist a) R_3 , wenn $R_{ab} = R_1$ sein soll, b) R_2 , wenn $R_{ab} = R_3$ sein soll, und c) R_1 , wenn $R_{ab} = R_1$ sein soll.

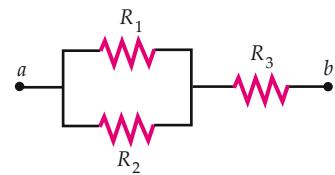


Abbildung 22.53 Zu Aufgabe 22.29.

Kirchhoff'sche Regeln

Hinweis: Zur Lösung der Aufgaben in diesem Abschnitt sollen Sie die Kirchhoff'schen Regeln anwenden, auch wenn es einen alternativen Weg über die Berechnung von Ersatzwiderständen gibt.

22.30 • Gegeben ist der in Abbildung 22.54 skizzierte Stromkreis. Berechnen Sie a) die Stromstärke mit der Kirchhoff'schen Maschenregel, b) die von jeder der Spannungsquellen abgegebene oder aufgenommene Leistung sowie c) die Rate der Joule'schen Erwärmung jedes Ohm'schen Widerstands. (Die Innenwiderstände der Batterien seien zu vernachlässigen.)

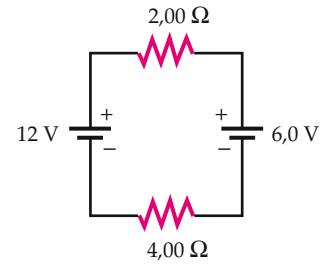


Abbildung 22.54 Zu Aufgabe 22.30.

22.31 •• Betrachten Sie den Stromkreis in Abbildung 22.55. Das Amperemeter zeigt den gleichen Wert an, wenn die Schalter beide geöffnet oder beide geschlossen sind. Wie groß ist R ?

22.32 •• Gegeben ist der Stromkreis in Abbildung 22.56; die Innenwiderstände der Batterien seien zu vernachlässigen.

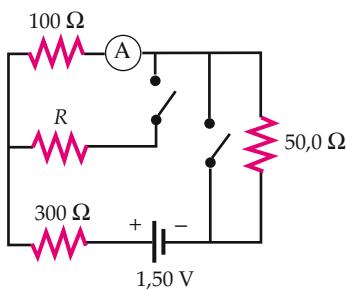


Abbildung 22.55 Zu Aufgabe 22.31.

Berechnen Sie a) den durch jeden Ohm'schen Widerstand fließenden Strom, b) die Spannung zwischen den Punkten *a* und *b* sowie c) die von jeder der beiden Batterien abgegebene Leistung.

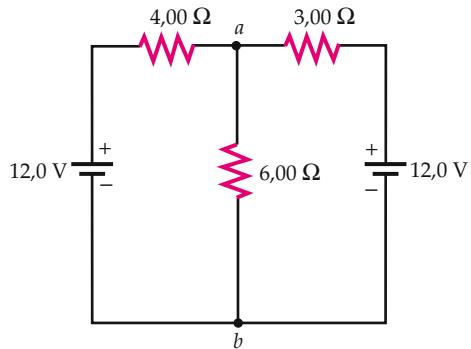


Abbildung 22.56 Zu Aufgabe 22.32.

22.33 •• Die in Abbildung 22.57 skizzierte Schaltung nennt man *Spannungsteiler*. a) Zeigen Sie, dass $U_{\text{aus}} = UR_2 / (R_1 + R_2)$ ist, wenn kein Lastwiderstand R_{Last} angeschlossen ist. b) Es sei $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$. Wie groß muss R_{Last} dann mindestens sein, damit die Ausgangsspannung U_{aus} im Vergleich zu ihrem Wert ohne Last um weniger als 10 % abnimmt? (U_{aus} wird relativ zur Erde gemessen.)

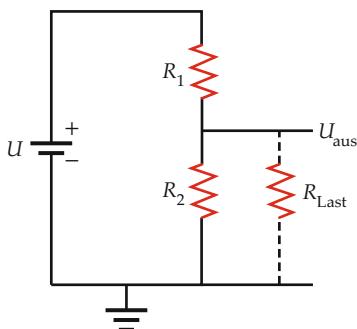


Abbildung 22.57 Zu Aufgabe 22.33.

22.34 •• Berechnen Sie die Spannung zwischen den Punkten *a* und *b* in der in Abbildung 22.58 skizzierten Schaltung.

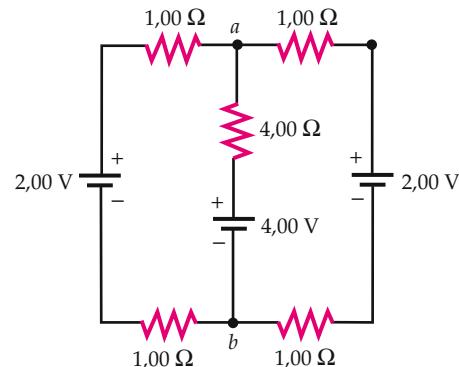


Abbildung 22.58 Zu Aufgabe 22.34.

Strom- und Spannungsmessgeräte

22.35 •• Der Zeiger eines D'Arsonval-Galvanometers schlägt voll aus, wenn ein Strom von $50,0 \mu\text{A}$ durch das Messgerät fließt. Der Spannungsabfall über das Galvanometer beträgt dabei $0,250 \text{ V}$. Geben Sie den Innenwiderstand des Galvanometers an.

22.36 •• Der Zeiger eines D'Arsonval-Galvanometers schlägt voll aus, wenn ein Strom von $50,0 \mu\text{A}$ durch das Messgerät fließt. Der Spannungsabfall über das Galvanometer beträgt dabei $0,250 \text{ V}$. Angenommen, Sie wollen dieses Gerät in ein Amperemeter umwandeln, mit dem man Ströme bis zu 100 mA messen kann. Zeigen Sie, dass Sie dazu einen Ohm'schen Widerstand parallel zum Messgerät schalten müssten. Wie groß muss der Widerstand sein?

RC-Stromkreise

22.37 • Betrachten Sie den in Abbildung 22.59 skizzierten Stromkreis. Der Schalter sei lange Zeit in Position *a* geschlossen gewesen und werde zum Zeitpunkt $t = 0$ auf Position *b* umgelegt. a) Berechnen Sie die unmittelbar vor dem Umschalten im Kondensator gespeicherte Energie E_{el} . b) Drücken Sie die im Kondensator gespeicherte Energie als Funktion der nach dem Umschalten vergangenen Zeit t aus. c) Skizzieren Sie den Graphen von E_{el} als Funktion von t .

22.38 •• Betrachten Sie den in Abbildung 22.60 skizzierten Stromkreis. Die Batterie liefert eine Spannung von $6,00 \text{ V}$, ihr Innenwiderstand ist zu vernachlässigen. Gegeben sind außerdem $R = 2,00 \text{ M}\Omega$ und $C = 1,50 \mu\text{F}$. Der Schalter war lange Zeit geschlossen und wird nun geöffnet. Berechnen Sie für den Zeitpunkt, zu dem genau eine Zeitkonstante des Stromkreises vergangen ist, a) die Ladung der rechten Kondensatorplatte, b) die Rate, mit der die Ladung zunimmt, c) den fließenden

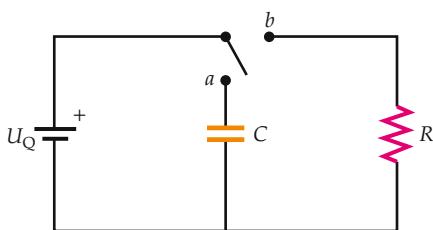


Abbildung 22.59 Zu Aufgabe 22.37.

Strom, d) die von der Batterie abgegebene Leistung, e) die dem Widerstand zugeführte Leistung und f) die Rate, mit der die im Kondensator gespeicherte Energie zunimmt.

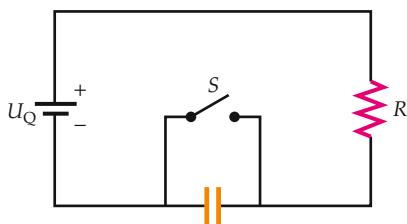


Abbildung 22.60 Zu Aufgabe 22.38.

22.39 •• Zeigen Sie, dass sich Gleichung 22.38 auch folgendermaßen schreiben lässt:

$$\frac{dq(t)}{U_C - q(t)} = \frac{dt}{RC}.$$

Integrieren Sie diesen Ausdruck, um zu der in Gleichung 22.39 angegebenen Lösung zu gelangen.

22.40 ••• Betrachten Sie die in Abbildung 22.61 skizzierte Schaltung. Der Schalter S war lange Zeit geöffnet und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. a) Berechnen Sie den Strom, der unmittelbar nach dem Schließen des Schalters durch die Batterie fließt. b) Wie groß ist dieser Strom lange nachdem der Schalter geschlossen wurde? c) Geben Sie den Strom durch den Ohm'schen Widerstand mit $R = 600 \Omega$ als Funktion der Zeit an.

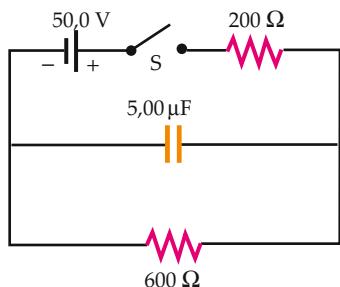


Abbildung 22.61 Zu Aufgabe 22.40.

Allgemeine Aufgaben

22.41 •• An einer Reihenschaltung aus einer 25,0-W- und einer 100-W-Glühlampe (beide mit konstantem Widerstand) liegt eine Spannung von 230 V an. a) Welche Lampe leuchtet heller? Begründen Sie Ihre Entscheidung. (*Hinweis:* Überlegen Sie zunächst, was die Leistungsangabe bedeutet. Unter welchen Bedingungen werden in einer 100-W-Lampe tatsächlich 100 W umgesetzt?) b) Berechnen Sie die in den beiden Lampen unter den angegebenen Bedingungen jeweils umgesetzte Leistung. Bestätigt Ihr Ergebnis Ihre Überlegung aus Teilaufgabe a?

22.42 •• Gegeben ist die in Abbildung 22.62 skizzierte Schaltung. Der Schalter S war lange Zeit geöffnet und wird nun geschlossen. a) Wie groß ist der durch die Batterie fließende Strom unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S? b) Wie groß ist dieser Strom lange nachdem der Schalter geschlossen wurde? c) Wie groß ist die Ladung der Kondensatorplatten lange nachdem der Schalter geschlossen wurde? d) Der Schalter wurde wieder geöffnet, seitdem ist eine lange Zeit vergangen. Wie groß ist nun die Ladung der Kondensatorplatten?

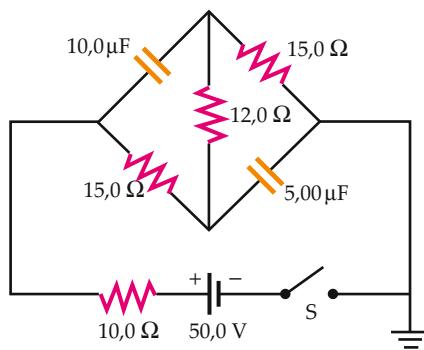


Abbildung 22.62 Zu Aufgabe 22.42.

22.43 •• Das Schaltbild in Abbildung 22.63 zeigt eine Widerstandsmessbrücke (eine sogenannte Wheatstone-Brücke) zur Messung eines unbekannten Widerstands R_x anhand dreier bekannter Widerstände R_1 , R_2 und R_0 . Ein 1,00 m langer Draht wird durch einen Gleitkontakt (in Punkt a) in zwei (in Abhängigkeit voneinander) variable Widerstände R_1 und R_2 unterteilt, wobei die Größe von R_1 proportional zum Abstand des Gleitkontakte vom linken Drahtende (0 cm) und die Größe von R_2 proportional zum Abstand des Gleitkontakte vom rechten Drahtende (100 cm) ist. Die Summe aus R_1 und R_2 ist konstant. Befinden sich die Punkte a und b auf gleichem Potenzial, so fließt kein Strom durch das Galvanometer, und die Brücke ist abgeglichen. (Das Galvanometer wird hier verwendet, um die Abwesenheit eines Stroms anzudecken; man nennt es deshalb auch Nulldetektor.) Gegeben sei für diese Schaltung $R_0 = 200 \Omega$. Berechnen Sie den Wert von R_x , wenn die Brücke bei folgenden Positionen von a (relativ zum Nullpunkt links) abgeglichen ist: a) 18,0 cm, b) 60,0 cm, c) 95,0 cm.

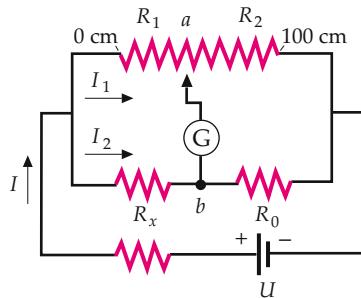


Abbildung 22.63 Zu Aufgabe 22.43.

22.44 •• Die Ladungsdichte auf der Oberfläche des Ladungsbands eines Van-de-Graaff-Generators sei $5,00 \text{ mC/m}^2$. Das Band sei $0,500 \text{ m}$ breit und bewege sich mit einer Geschwindigkeit von $20,0 \text{ m/s}$. a) Wie groß ist der fließende Strom? b) Die Ladung werde nun auf ein Potenzial von 100 kV gegen Masse angehoben. Wie viel Leistung muss der Motor mindestens abgeben, um das Band zu bewegen?

22.45 •• Die Spulen großer herkömmlicher Elektromagneten werden in der Regel mit Wasser gekühlt, um eine Überhitzung zu verhindern. Durch die Spulen eines großen Labormagneten fließt ein Strom von 100 A , wenn eine Spannung von 240 V anliegt. Das Kühlwasser hat eine Anfangstemperatur von 15°C . Wie viele Liter Wasser pro Sekunde müssen an den Spulen vorbeigeführt werden, wenn deren Temperatur 50°C nicht übersteigen soll?

22.46 ••• In Abbildung 22.64 sehen Sie die Prinzipschaltung eines Sägezahngenerators, wie er in Oszilloscopen verwendet wird. Der elektronische Schalter S schließt sich, wenn die an ihm anliegende Spannung den Wert U_{zu} erreicht, und öffnet sich, wenn die Spannung auf $0,200 \text{ V}$ abgesunken ist. Die Spannungsquelle U (U ist viel größer als U_{zu}) lädt den Kondensator C über den Ohm'schen Widerstand R_1 auf. Der Ohm'sche Widerstand R_2 steht für einen kleinen, aber endlichen Innenwiderstand des Schalters. Für einen typischen Sägezahn-generator gelten folgende Werte: $U = 800 \text{ V}$, $U_{zu} = 4,20 \text{ V}$, $R_2 = 1,00 \text{ m}\Omega$, $R_1 = 0,500 \text{ M}\Omega$ und $C = 20,0 \text{ nF}$. a) Berechnen Sie die Zeitkonstante für die Aufladung des Kondensators C . b) Während der Zeit, die erforderlich ist, um die Spannung über dem Schalter von $0,200 \text{ V}$ auf $4,20 \text{ V}$ anzuheben, steigt die Spannung am Kondensator nahezu linear mit der Zeit an. Zeigen Sie dies. (Hinweis: Verwenden Sie die Näherung $e^x \approx 1+x$ für $|x| \ll 1$. Sie geht aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion für kleine Exponenten hervor.) c) Wie groß ist R_1 zu wählen, damit der Kondensator innerhalb von $0,100 \text{ s}$ von $0,200 \text{ V}$ auf $4,20 \text{ V}$ aufgeladen wird? d) Wie lange dauert es, bis sich der Kondensator entladen hat, wenn der Schalter geschlossen wird? e) Geben Sie die mittlere Rate der Wärmeerzeugung am Ohm'schen Widerstand R_1 beim Laden und am Innenwiderstand des Schalters R_2 beim Entladen des Kondensators an.

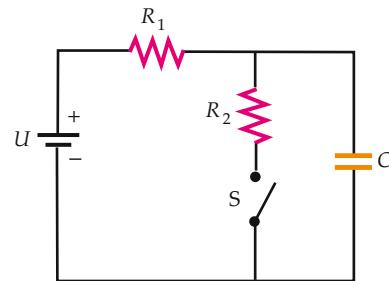


Abbildung 22.64 Zu Aufgabe 22.46.

22.47 ••• Gegeben sind zwei parallel geschaltete Batterien mit den Quellenspannungen $U_{Q,1}$ bzw. $U_{Q,2}$ und den Innenwiderständen $R_{in,1}$ bzw. $R_{in,2}$ sowie ein zu dieser Kombination parallel geschalteter Lastwiderstand R . Beweisen Sie: Der optimale Lastwiderstand (die Belastung, für die die Leistungsabgabe der Batterien maximal wird) ist $R = R_{in,1} R_{in,2} / (R_{in,1} + R_{in,2})$.

22.48 ••• Betrachten Sie die in Abbildung 22.65 skizzierte Schaltung. Die Kondensatoren C_1 und C_2 sind mit einem Ohm'schen Widerstand R und einer idealen Spannungsquelle (U_0) verbunden. Der Schalter war ursprünglich auf Position a geschlossen, und beide Kondensatoren waren entladen. Dann wurde auf Position b umgeschaltet; nachdem eine lange Zeit vergangen war, wurde schließlich zum Zeitpunkt $t = 0$ zurück auf Position a geschaltet. a) Vergleichen Sie quantitativ die insgesamt in den Kondensatoren gespeicherte Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ und lange Zeit später. b) Geben Sie den Strom, der durch R fließt, als Funktion der Zeit t ($t > 0$) an. c) Geben Sie die R zugeführte Energie als Funktion der Zeit t ($t > 0$) an. d) Wie groß ist die Energie, die im Ohm'schen Widerstand nach $t = 0$ insgesamt dissipiert wird? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Verlust an gespeicherter Energie, den Sie in Teilaufgabe a berechnet haben.

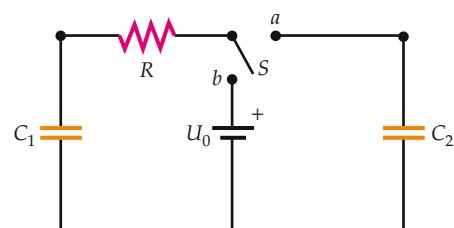


Abbildung 22.65 Zu Aufgabe 22.48.

22.49 ••• Abbildung 22.66 zeigt den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung für eine Esaki-Diode. a) Skizzieren Sie den Graphen des differenziellen Widerstands der Diode als Funktion der Spannung. Der differenzielle (oder dynamische) Widerstand R_{diff} eines Bauelements ist definiert als $R_{diff} = dU/dI$; U ist die am Bauelement anliegende Spannung, I der durch das Bauelement fließende Strom. b) Bei welchem Spannungsabfall wird der differenzielle Widerstand negativ? c) Wie

groß ist der maximale differenzielle Widerstand der Diode im abgebildeten Spannungsbereich? Bei welcher Spannung wird er erreicht? d) Gibt es im abgebildeten Bereich Werte der Spannung, für die der differenzielle Widerstand der Diode null ist? Wenn ja, um welche(n) Wert(e) handelt es sich?

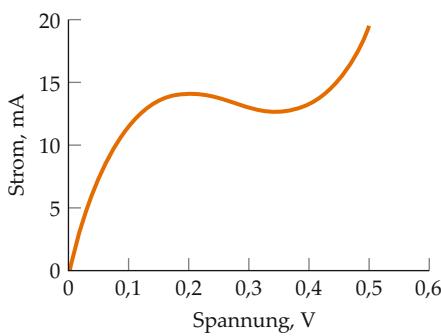


Abbildung 22.66 Zu Aufgabe 22.49.

22.50 •• Ein Beschleuniger erzeugt einen Protonenstrahl mit einer Stromstärke von $3,50 \mu\text{A}$. Jedes Proton besitzt eine Energie von $60,0 \text{ MeV}$. Die Protonen treffen innerhalb einer Vakuumkammer auf ein Kupfertarget mit einer Masse von $50,0 \text{ g}$, in dem sie zur Ruhe kommen. Dabei erhitzt sich das Target. a) Wie

viele Protonen treffen pro Sekunde auf der Kupferprobe auf?
b) Wie viel Energie wird dem Target dadurch pro Sekunde zugeführt? c) Wie lange dauert es, bis sich das Kupfer auf 300°C erhitzt hat? Vernachlässigen Sie, dass das Metall unterdessen einen kleinen Teil der Wärme wieder abgibt.

22.51 ••• Stellen Sie einen Ausdruck auf für den Ersatzwiderstand zwischen den Punkten a und b für eine unendliche „Leiter“ aus Ohm’schen Widerständen (einen Ausschnitt zeigt Abbildung 22.67). a) Nehmen Sie zunächst an, alle Widerstände seien identisch, also $R = R_1 = R_2$. b) Wiederholen Sie die Aufgabe für beliebige, aber verschiedene Werte von R_1 und R_2 . c) Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie in Ihre Formel aus Aufgabenteil b R anstelle von sowohl R_1 als auch R_2 einsetzen; Sie sollten dann die Formel aus Aufgabenteil a erhalten.

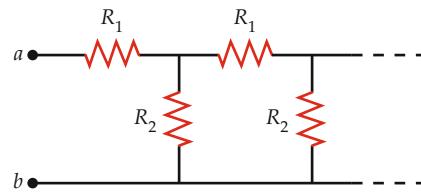


Abbildung 22.67 Zu Aufgabe 22.67.

Das Magnetfeld

23



Polarlichter entstehen, wenn der „Sonnenwind“ – ein Strom geladener Teilchen, die bei Kernfusionsreaktionen in der Sonne gebildet werden – vom Erdmagnetfeld eingefangen wird und auf die oberen Schichten der Atmosphäre trifft. (© Atlas Photo Bank/Photo Researchers, Inc.)

?

Wie wirkt das Erdmagnetfeld auf subatomare Teilchen?
(Siehe Beispiel 23.1.)

23.1	Die magnetische Kraft	846
23.2	Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld	851
23.3	Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment	858
23.4	*Der Hall-Effekt	863
	Zusammenfassung	868
	Aufgaben	870

Schon vor 2000 Jahren war im antiken Griechenland bekannt, dass bestimmte Steine (heute Magnetit genannt) Eisenstückchen anziehen. Schriftliche Überlieferungen belegen die Verwendung von Magneten zur Navigation bereits im 12. Jahrhundert.

1600 entdeckte William Gilbert, dass die Erde selbst ein natürlicher Magnet ist, dessen Pole in der Nähe der geografischen Pole liegen. Da der Nordpol einer Kompassnadel in Richtung des Südpols eines anderen Magneten zeigt, liegt der magnetische Nordpol der Erde in der Nähe ihres geografischen Südpols, wie Sie in Abbildung 23.1 erkennen.

Elektrische Ladungen und magnetische Pole ähneln einander in vielerlei Hinsicht, aber zwischen ihnen besteht ein wesentlicher Unterschied: Magnetische Pole treten niemals isoliert, sondern stets paarweise auf. Wenn ein Stabmagnet in zwei Hälften geteilt wird, erscheinen an der Bruchstelle neue Pole – das bedeutet, es entstehen zwei Magnete mit jeweils einem Nord- und Südpol. Über die Existenz magnetischer Monopole wurde vielfach spekuliert. Viele Forscher haben in den vergangenen Jahren erfolglos versucht, ein solches Phänomen nachzuweisen. Es wurde aber auch noch nicht endgültig bewiesen, dass es magnetische Monopole nicht geben kann.

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie ein gegebenes Magnetfeld auf bewegte Punktladungen und auf stromdurchflossene Leiter wirkt. Die Quellen des Magnetfelds werden in Kapitel 24 besprochen.

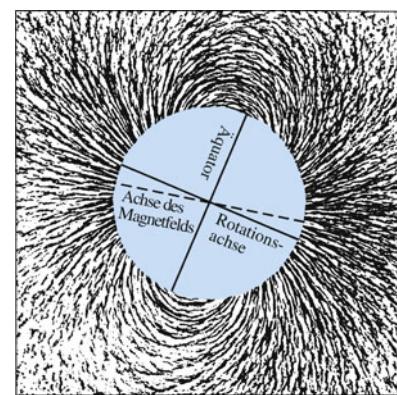


Abbildung 23.1 Magnetfeldlinien der Erde, sichtbar gemacht durch Eisenfeilspäne in der Umgebung einer homogenen magnetischen Kugel. Die Feldlinien gehen vom magnetischen Nordpol aus, der sich in der Nähe des geografischen Südpols befindet, und laufen im magnetischen Südpol (nahe dem geografischen Nordpol) wieder zusammen.

23.1 Die magnetische Kraft

Die Existenz eines Magnetfelds \mathbf{B} in einem bestimmten Punkt des Raums kann man mithilfe einer Kompassnadel nachweisen: Ist ein Magnetfeld vorhanden, so richtet sich die Nadel entlang der magnetischen Feldlinien aus. (Da die Nadel meist in einem Gerät in waagerechter Lage befestigt ist, kann sie sich nur entlang der waagerechten Feldkomponente ausrichten.)

Experimentell beobachtet man Folgendes: Auf ein Teilchen mit einer elektrischen Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit v in einem Bereich des Raums bewegt, in dem ein Magnetfeld existiert, wirkt eine Kraft; diese Kraft ist proportional zu q , v , B und dem Sinus des Winkels, den die Richtungen von v und \mathbf{B} einschließen. Die Kraft ist senkrecht sowohl zum Geschwindigkeitsvektor als auch zum Feldvektor gerichtet. Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen: Auf ein Teilchen mit der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit v in einem Magnetfeld \mathbf{B} bewegt, wirkt die (magnetische) Kraft \mathbf{F} mit

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (23.1)$$

MAGNETISCHE KRAFT AUF EIN BEWEGTES GELADENES TEILCHEN

\mathbf{F} steht senkrecht sowohl auf \mathbf{v} als auch auf \mathbf{B} und folglich auch auf der Ebene, die \mathbf{v} und \mathbf{B} aufspannen. Die Richtung von $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ergibt sich aus der Rechte-Hand-Regel, indem die rechte Handfläche in Richtung von \mathbf{v} zeigt und dann in die Richtung von \mathbf{B} gedreht wird (Abbildung 23.2). Ist q positiv, so zeigt $\mathbf{F} \propto \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ in die Richtung des Daumens.

In Abbildung 23.3 sehen Sie verschiedene Beispiele für die Richtung der Kraft, die auf eine bewegte Ladung wirkt, wobei der Magnetfeldvektor \mathbf{B} jeweils senkrecht nach oben zeigt. Machen Sie sich bewusst, dass man die Richtung eines Magnetfelds \mathbf{B} bestimmen kann, indem man \mathbf{F} für mehrere Geschwindigkeiten \mathbf{v} in verschiedenen Richtungen misst und anschließend Gleichung 23.1 anwendet.

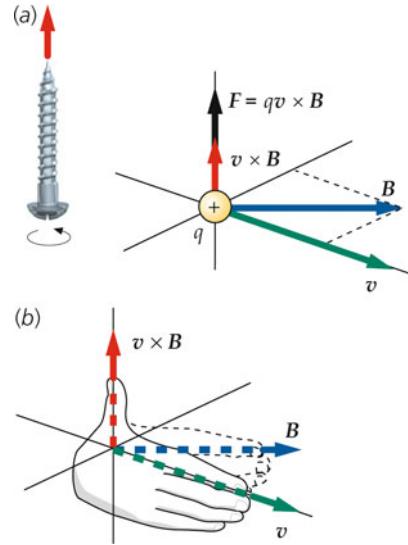


Abbildung 23.2 Anwendung der Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Richtung der Kraft, die auf ein geladenes, in einem Magnetfeld bewegtes Teilchen wirkt. Ist q positiv, so zeigt \mathbf{F} in die gleiche Richtung wie $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. a) Das Vektorprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ steht senkrecht sowohl auf \mathbf{v} als auch auf \mathbf{B} . Es zeigt in die Richtung, in die eine Rechtsschraube bewegt, wenn man sie in die Richtung dreht, in der \mathbf{v} (mit dem kleinstmöglichen Drehwinkel) in \mathbf{B} überführt wird. b) Wenn die Finger der rechten Hand so in Richtung von \mathbf{v} zeigen, dass sie auf \mathbf{B} zu gekrümmt werden können, so weist der Daumen in Richtung von $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Gleichung 23.1 definiert das **Magnetfeld** \mathbf{B} anhand der auf eine bewegte Ladung ausgeübten Kraft. Die SI-Einheit der Stärke des Magnetfelds ist das **Tesla** (T). Auf ein Teilchen mit einer Ladung von 1 C, das sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s senkrecht zu einem Magnetfeld von 1 T bewegt, wirkt eine Kraft von 1 N:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}. \quad (23.2)$$

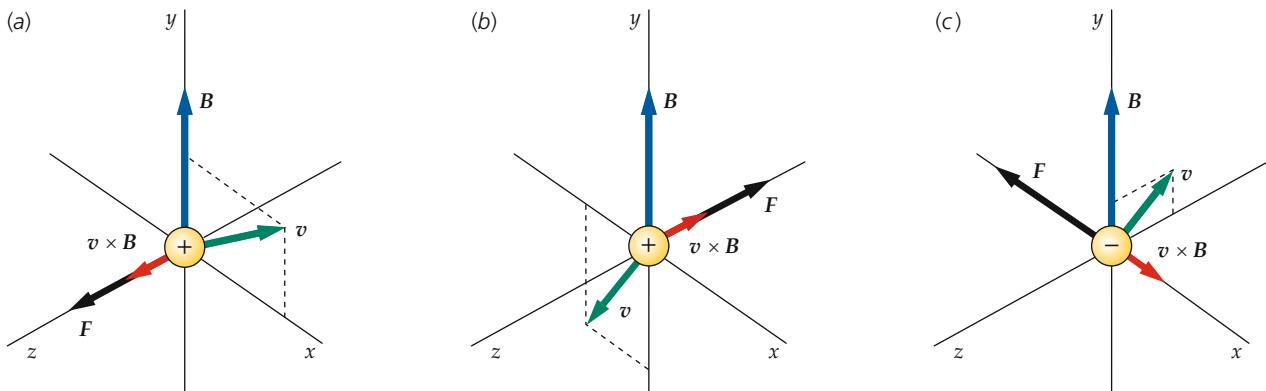


Abbildung 23.3 Richtung der Kraft, die im Magnetfeld \mathbf{B} auf eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Ladung q wirkt.

Frage 23.1

Die Richtung eines Magnetfelds \mathbf{B} ist festgelegt als die Richtung, in die der Nordpol einer Kompassnadel nach Ausrichtung in diesem Feld zeigt. Nehmen Sie an, die Feldrichtung wäre stattdessen durch die Ausrichtung des Südpols spezifiziert. Welche Regel müsste man dann anwenden, um die Richtung der magnetischen Kraft auf ein positiv geladenes, bewegtes Teilchen zu ermitteln: die Rechte-Hand-Regel aus Abbildung 23.2 oder eine Linke-Hand-Regel?

Frage 23.2

Ist das Teilchen in Abbildung 23.3c a) positiv geladen, b) negativ geladen oder c) könnte es sowohl positiv als auch negativ geladen sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Das Tesla ist (wie auch das Farad) eine relativ große Einheit. Die Stärke des Magnetfelds der Erde an deren Oberfläche beispielsweise ist etwas geringer als 10^{-4} T. In der Nähe starker Permanentmagneten herrschen Feldstärken von ungefähr 0,1 T – 0,5 T, und leistungsfähige Elektromagnete für Anwendungen in Labors und in der Industrie erzeugen Felder von 1–2 T. Feldstärken oberhalb von 10 T sind extrem schwer aufrechtzuhalten, weil die Magnete durch die gewaltigen Kräfte zerstört werden können. Eine weit verbreitete, aus dem CGS-System abgeleitete Einheit ist das **Gauß** (G) mit

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}. \quad (23.3)$$

DEFINITION DER EINHEIT GAUSS

In der Praxis werden Magnetfelder oft in der Einheit Gauß angegeben, obwohl dies keine SI-Einheit ist. Denken Sie deshalb daran, gegebenenfalls Gauß in Tesla umzurechnen. Beispiel 23.1 illustriert die Kraft, die das Erdmagnetfeld auf ein Proton ausübt.

Beispiel 23.1: Die Kraft auf ein Proton, das sich nordwärts bewegt

An einem bestimmten Ort an der Oberfläche der Nordhalbkugel hat das Erdmagnetfeld eine Stärke von 0,6 G und ist nach unten sowie nach Norden gerichtet, wobei es einen Winkel von etwa 70° mit der Horizontalen einschließt (Abbildung 23.4). Diese Angaben treffen ungefähr auf Deutschland zu). Ein Proton ($q = +e$) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 10^7$ m/s horizontal nach Norden. Berechnen Sie die auf das Proton wirkende magnetische Kraft a) mithilfe der Beziehung $|F| = q |v| |B| \sin \theta$ und b) vektoriell als $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, indem Sie v und B in Komponentenschreibweise mit den Einheitsvektoren \hat{x} , \hat{y} und \hat{z} formulieren.

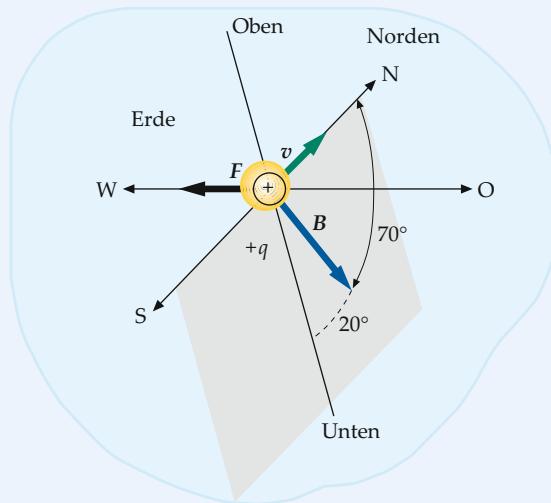


Abbildung 23.4 Koordinatensystem für ein Proton im Erdmagnetfeld ungefähr auf Höhe Deutschlands.

Problembeschreibung: Wir legen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse nach Osten zeigt, die y-

Achse nach Norden und die z -Achse nach oben (Abbildung 23.5). Der Vektor der Geschwindigkeit zeigt dann in $+y$ -Richtung.

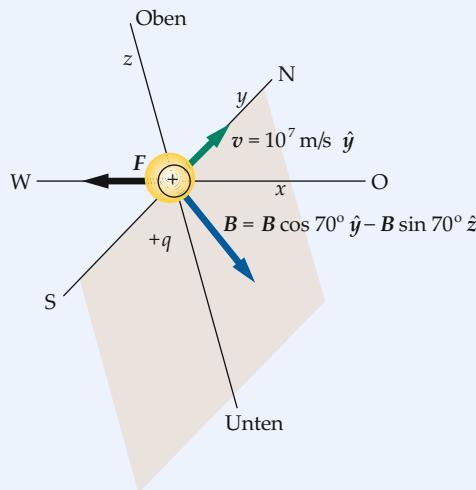


Abbildung 23.5 Koordinatensystem des Protons inklusive genauer Definition und Lage des Geschwindigkeits- und Magnetfeldvektors.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie $|F| = q |v| |B| \sin \theta$ mit $\theta = 70^\circ$. Wie Sie Abbildung 23.5 entnehmen, zeigt die Kraft nach Westen:

$$\begin{aligned} |F| &= q |v| |B| \sin 70^\circ \\ &= (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (10 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ &\quad \cdot (0,6 \cdot 10^{-4} \text{ T}) \cdot (0,94) \\ &= [9,0 \cdot 10^{-17} \text{ N}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Die magnetische Kraft ist gegeben als das Vektorprodukt von $q v$ und B :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

2. Formulieren Sie v und B in Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_y \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{B} &= B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

3. Schreiben Sie die Beziehung $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ für alle Komponenten auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q (v_y \hat{\mathbf{y}}) \times (B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}) \\ &= q v_y B_y (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{y}}) + q v_y B_z (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}) \\ &= q v_y B_z \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie nun F :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q v (-B \sin \theta) \hat{\mathbf{x}} \\ &= -(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ &\quad \cdot (0,6 \cdot 10^{-4} \text{ T}) \sin 70^\circ \hat{\mathbf{x}} \\ &= [-9,0 \cdot 10^{-17} \text{ N}] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Teilaufgabe a ist gleich dem Betrag des Ergebnisses von Teilaufgabe b.

Weitergedacht: Zu Beginn haben wir festgelegt, dass $\hat{\mathbf{x}}$ nach Osten zeigt; folglich zeigt die berechnete Kraft nach Westen, wie in Abbildung 23.5 eingezeichnet ist.

Übung 23.1: Welche Kraft wirkt auf ein Proton, das sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = (2,0 \text{ T}) \hat{\mathbf{z}}$ mit der Geschwindigkeit $v = (4 \cdot 10^6 \text{ m/s}) \hat{\mathbf{x}}$ bewegt? □

Die auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld wirkende Kraft ist gleich der Summe der Kräfte auf alle Ladungsträger, deren Bewegung den Strom hervorruft. In Abbildung 23.6 sehen Sie einen kurzen Abschnitt eines Leiters mit der Querschnittsfläche A und der Länge l , durch den ein Strom I fließt. Wird der Leiter in ein Magnetfeld gebracht, so wirkt auf jede Ladung die magnetische Kraft $q v_d \times \mathbf{B}$; v_d ist die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger und entspricht deren mittlerer Geschwindigkeit. Die Anzahl der Ladungsträger im Leiterabschnitt ist gleich der Anzahl pro Volumeneinheit (n/V), multipliziert mit dem Volumen $A l$. Insgesamt wirkt auf den Leiterabschnitt die Kraft

$$\mathbf{F} = (q v_d \times \mathbf{B}) (n/V) A l.$$

Gleichung 22.3 gibt den Strom im Leiter an:

$$I = (n/V) q v_d A.$$

Für die Kraft können wir demnach schreiben:

$$\mathbf{F} = I l \times \mathbf{B}. \quad (23.4)$$

MAGNETISCHE KRAFT AUF EINEN STROMDURCHFLOSSENEN
LEITERABSCHNITT

Der Betrag des Vektors I ist die Länge des Leiters, seine Richtung ist parallel zum fließenden Strom. (Unter der Stromrichtung verstehen wir dabei die Richtung des Stromdichtevektors j .) Fließt der Strom in $+x$ -Richtung und liegt der Vektor des Magnetfelds in der Umgebung des Drahts in der x - y -Ebene, so zeigt die wirkende Kraft in $+z$ -Richtung (Abbildung 23.7). Bei der Herleitung von Gleichung 23.4 haben wir angenommen, dass der Leiterabschnitt geradlinig und das Magnetfeld über die gesamte Länge des Leiters konstant ist. Nun

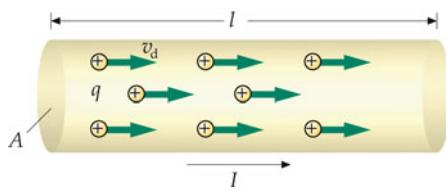


Abbildung 23.6 Durch den Leiterabschnitt mit der Länge l fließt ein Strom I . Ein äußeres Magnetfeld B übt auf jeden einzelnen Ladungsträger im Leiter eine Kraft aus; diese Kräfte addieren sich zu einer Kraft auf den Leiter.

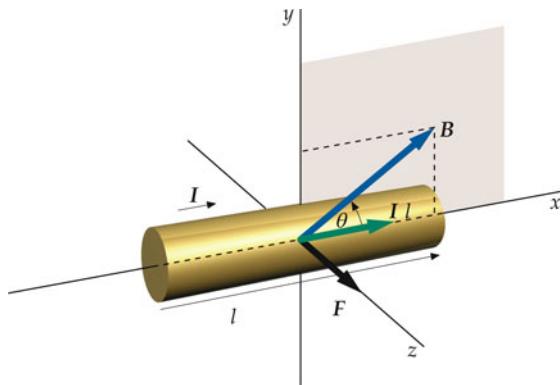


Abbildung 23.7 Magnetische Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiterabschnitt in einem Magnetfeld. Der Strom zeigt in x -Richtung, der Vektor des Magnetfelds liegt in der x - y -Ebene und schließt einen Winkel θ mit der positiven x -Richtung ein. Die Kraft F zeigt in z -Richtung, senkrecht sowohl zu B als auch zu I . Ihr Betrag ist gleich $I |I| |B| \sin \theta$.

wollen wir die Beziehung für Leiter mit beliebiger Gestalt und beliebige Magnetfelder verallgemeinern. Wir wählen einen sehr kleinen Leiterabschnitt dI ; auf ihn wirke die Kraft dF . Dann ist

$$d\mathbf{F} = I dI \times \mathbf{B} \quad (23.5)$$

MAGNETISCHE KRAFT AUF EIN STROMELEMENT

mit \mathbf{B} als Vektor des Magnetfelds am Ort des Leiterabschnitts. Die Größe $I dI$ nennen wir **Stromelement**. Die insgesamt auf einen stromdurchflossenen Leiter wirkende Kraft erhalten wir durch Summation (Integration) der Kräfte, die auf alle Stromelemente des Leiters wirken. (Gleichung 23.5 entspricht deshalb Gleichung 23.1, wobei das Stromelement $I dI$ an die Stelle des Terms $q v$ getreten ist.) Zwei Anwendungen illustrieren die Beispiele 23.2 und 23.3.

Beispiel 23.2: Magnetische Kraft auf einen geraden Leiter

Durch einen 3,0 mm langen Drahtabschnitt fließt in positiver x -Richtung ein Strom von 3,0 A. Der Leiter ist von einem Magnetfeld mit einer Feldstärke von 0,020 T umgeben, dessen Vektor in der x - y -Ebene liegt und einen Winkel von 30° mit der x -Achse einschließt (Abbildung 23.8). Berechnen Sie die auf den Leiterabschnitt wirkende magnetische Kraft.

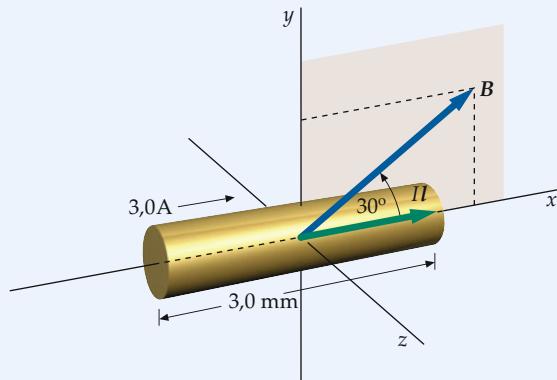


Abbildung 23.8 Koordinatensystem des geraden Leiters.

Problembeschreibung: Die magnetische Kraft zeigt in die Richtung von $I \times B$. Wie Sie Abbildung 23.8 entnehmen, ist dies die positive z -Richtung.

Lösung: Die magnetische Kraft ist gegeben durch Gleichung 23.4:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I I \times \mathbf{B} = I |I| |\mathbf{B}| \sin 30^\circ \hat{z} \\ &= (3,0 \text{ A}) \cdot (0,0030 \text{ m}) \cdot (0,020 \text{ T}) \cdot (\sin 30^\circ) \hat{z} \\ &= (9,0 \cdot 10^{-5} \text{ N}) \hat{z} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Kraft steht, wie zu erwarten ist, senkrecht auf der Richtung des Leiters. ■

Beispiel 23.3: Magnetische Kraft auf einen gebogenen Leiter

Ein zu einem Halbkreis mit dem Radius r gebogener Leiter liegt in der x - y -Ebene. Zwischen den Punkten a und b fließt ein Strom I (Abbildung 23.9). Den Leiter umgibt ein senkrecht zur Ebene des Halbkreises gerichtetes Magnetfeld $B = B\hat{z}$. Welche magnetische Kraft wirkt auf den halbkreisförmigen Leiterabschnitt?

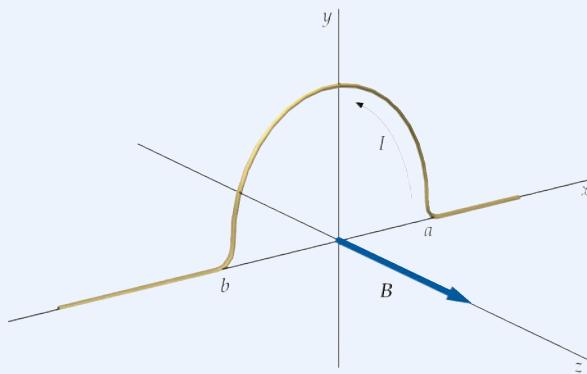


Abbildung 23.9 Koordinatensystem des stromdurchflossenen gebogenen Leiters.

Problembeschreibung: Die auf einen Abschnitt des halbkreisförmigen Drahts wirkende magnetische Kraft liegt in der x - y -Ebene, wie Sie Abbildung 23.10 entnehmen. Die Gesamtkraft erhalten wir, indem wir \mathbf{F} mithilfe von θ komponentenweise aufschreiben und die Integration für die x - und die y -Komponente getrennt von $\theta = 0$ bis π ausführen.

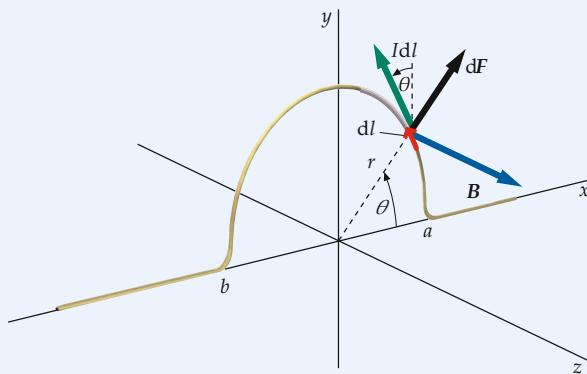


Abbildung 23.10 Kennzeichnung des Kräfteanteils $d\mathbf{F}$, des Wegelements dl , des Stromelements Idl und des Magnetfelds \mathbf{B} .

Lösung: 1. Schreiben Sie die auf ein Stromelement $I dl$ wirkende Kraft $d\mathbf{F}$ auf:

$$d\mathbf{F} = I dl \times \mathbf{B}$$

2. Zerlegen Sie dl in Komponenten mit den Einheitsvektoren \hat{x} und \hat{y} :

$$dl = -dl \sin \theta \hat{x} + dl \cos \theta \hat{y}$$

3. Berechnen Sie $I dl$ unter Verwendung von $dl = r d\theta$ und $\mathbf{B} = B\hat{z}$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I dl \times \mathbf{B} \\ &= I (-r \sin \theta d\theta \hat{x} + r \cos \theta d\theta \hat{y}) \times B\hat{z} \\ &= Ir B \sin \theta d\theta \hat{y} + Ir B \cos \theta d\theta \hat{x} \end{aligned}$$

4. Integrieren Sie nun jede Komponente von $d\mathbf{F}$ von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d\mathbf{F} = Ir B \hat{x} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + Ir B \hat{y} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= Ir B \hat{x} \cdot (0) + Ir B \hat{y} \cdot (2) \\ &= \boxed{2IrB\hat{y}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Dass die x -Komponente von \mathbf{F} null sein muss, folgt aus der Symmetrie der Anordnung. Für den rechten Viertelkreis ist die Richtung von $d\mathbf{F}$ nach rechts geneigt, für den linken Viertelkreis nach links.

Weitergedacht: Diese resultierende Kraft ändert sich nicht, wenn der halbkreisförmige Drahtabschnitt durch einen geraden Leiter mit der Länge $2r$ ersetzt wird, der die Punkte a und b verbindet. Wie in Aufgabe 23.9 gezeigt wird, ist dieses Ergebnis allgemein gültig. ■

Ein elektrisches Feld \mathbf{E} kann durch Feldlinien dargestellt werden. Analog stellen wir ein Magnetfeld \mathbf{B} durch **Magnetfeldlinien** dar. In beiden Fällen gibt die Richtung der Linien die Richtung des Felds an, und die Dichte (Anzahl pro Flächeneinheit) der Linien auf einer senkrecht zu den Linien stehenden Fläche ist ein Maß für die Feldstärke. Abgesehen davon bestehen die folgenden wesentlichen Unterschiede zwischen elektrischen und magnetischen Feldlinien:

1. Elektrische Feldlinien zeigen in die Richtung der auf eine positive Ladung wirkenden elektrostatischen Kraft. Magnetfeldlinien stehen senkrecht zu der Kraft, die auf eine bewegte Ladung ausgeübt wird.
2. Elektrische Feldlinien gehen von positiven Ladungen aus und enden an negativen Ladungen. Magnetfeldlinien haben weder Anfang noch Ende, sie sind in sich geschlossen.

Die magnetischen Feldlinien eines Stabmagneten haben weder Anfang noch Ende, auch wenn es auf den ersten Blick aussieht mag, als ob sie am Südpol beginnen und am Nordpol enden würden. In Wirklichkeit treten sie an einem Ende in den Stabmagneten ein und am anderen wieder aus.

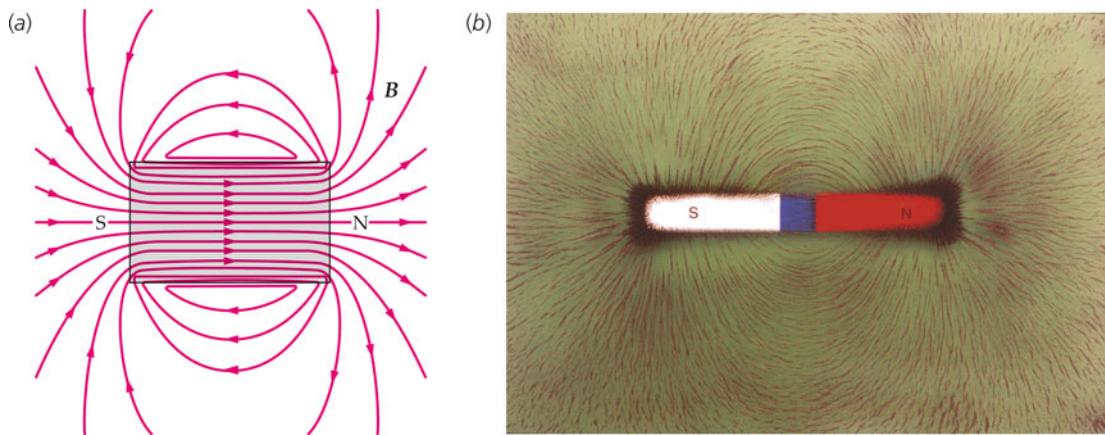


Abbildung 23.11 a) Magnetfeldlinien innerhalb und außerhalb eines Stabmagneten. Die Linien treten am Nordpol aus dem Magneten aus und am Südpol wieder ein. Sie haben aber weder Anfangs- noch Endpunkt, sondern bilden geschlossene Schleifen. b) Magnetfeldlinien in der Umgebung eines Stabmagneten, sichtbar gemacht mithilfe von Eisenfeilspänen. (© 1995 Tom Pantages.)

Abbildung 23.11 zeigt die Magnetfeldlinien innerhalb und außerhalb eines Stabmagneten.

23.2 Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld

Die auf ein geladenes, sich in einem Magnetfeld bewegendes Teilchen ausgeübte Kraft ist immer senkrecht zur Geschwindigkeit des Teilchens gerichtet. Das bedeutet, die magnetische Kraft ändert zwar die Richtung, nicht aber den Betrag der Geschwindigkeit. *Magnetische Kräfte verrichten an Teilchen keine Arbeit und haben keinen Einfluss auf deren kinetische Energie.*

Ein spezieller Fall tritt ein, wenn sich ein Teilchen in einem homogenen Magnetfeld bewegt und seine Geschwindigkeit senkrecht zu dem Magnetfeld gerichtet ist. Wie Sie Abbildung 23.12 entnehmen, beschreibt das Teilchen dann eine Kreisbahn, seine Winkelgeschwindigkeit ist ω . Die für die Zentripetalbeschleunigung $a_{ZP} = -v^2/r$ bei der Kreisbewegung notwendige Kraft wird vom Magnetfeld geliefert. Auf einer Kreisbahn gilt für die Normalbeschleunigung a_n auf das Teilchen $a_n = -a_{ZP}$. Mithilfe dieser Gleichung setzen wir den Radius der Kreisbahn in Beziehung zur Stärke des Magnetfelds und zur Geschwindigkeit des Teilchens. Bei einer Geschwindigkeit v wirkt auf ein Teilchen mit der Ladung q die magnetische Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Die resultierende Normalbeschleunigung ist für ein Teilchen mit der Masse m gleich $a_n = F/m = (q/m)vB$, weil die Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{B} senkrecht aufeinander stehen. Daraus folgt

$$\frac{q}{m}vB = \frac{v^2}{r}.$$

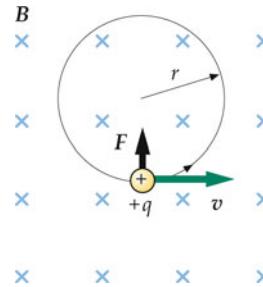


Abbildung 23.12 Ein geladenes Teilchen bewegt sich in einer Ebene senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld. Der Feldvektor zeigt in die Papierebene hinein, wie durch die Kreuze angedeutet wird. (Ein Kreuz symbolisiert hier die Federn eines Pfeils. Ein aus der Papierebene herauszeigendes Feld wird durch Punkte als Symbole für Pfeilspitzen angegeben.) Die Richtung der magnetischen Kraft steht senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens, welches sich folglich auf einer Kreisbahn bewegt.

Dabei kann die Ladung q sowohl positiv als auch negativ sein. Daher ist

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \text{oder} \quad r = \frac{mv}{|qB|}. \quad (23.6)$$

Als Periode einer Kreisbewegung bezeichnet man die Zeit, die das Teilchen benötigt, um den Umfang des Kreises einmal vollständig zu durchlaufen. Sie hängt wie folgt mit der Geschwindigkeit zusammen:

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Wir setzen hier $r = mv/|qB|$ ein (Gleichung 23.6) und erhalten die Periode der Kreisbewegung des Teilchens, die auch als **Zyklotronperiode** bezeichnet wird:

$$T = \frac{2\pi m v / |qB|}{v} = \frac{2\pi m}{|qB|}. \quad (23.7)$$

ZYKLOTRONPERIODE

Der Kehrwert der Periode ist die Frequenz der Kreisbewegung, die **Zyklotronfrequenz**:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|qB|}{2\pi m}, \quad (23.8)$$

also

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{|qB|}{m}$$

mit

$$\hat{\omega} = \frac{q}{|q|} \hat{B}.$$

ZYKLOTRONFREQUENZ

Beachten Sie: Periode und Frequenz der Bewegung hängen gemäß den Gleichungen 23.7 und 23.8 vom Ladung-Masse-Verhältnis q/m des Teilchens ab, nicht von der Geschwindigkeit v oder vom Radius der Kreisbahn r . Zwei wichtige Anwendungen der Kreisbewegung von Teilchen in homogenen Magnetfeldern werden wir in diesem Kapitel noch besprechen: das Massenspektrometer und das Zyklotron, für das Beispiel 23.4 bereits eine Rechenanwendung vorwegnimmt.

Beispiel 23.4: Die Zyklotronperiode

Ein Proton mit der Masse $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg und der Ladung $q = e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C bewegt sich auf einer Kreisbahn mit einem Radius $r = 21,0$ cm senkrecht zu einem Magnetfeld mit $|B| = 4000$ G. Berechnen Sie a) die Geschwindigkeit des Protons und b) die Periode der Bewegung.

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit berechnen Sie mit dem zweiten Newton'schen Axiom. Zur Berechnung der Periode verwenden Sie Gleichung 23.7.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom an:

$$F = ma \Rightarrow v |qB| = m \frac{v^2}{r}$$

2. Lösen Sie die Beziehung nach der Geschwindigkeit auf:

$$\nu = \frac{r |qB|}{m} = \frac{(0,210 \text{ m}) \cdot (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0,400 \text{ T})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \\ = 8,05 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,0268 c$$

Teilaufgabe b

Die Periode T erhalten Sie aus Gleichung 23.7:

$$T = \frac{2\pi m}{|qB|} \\ = \frac{2\pi \cdot (1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0,400 \text{ T})} \\ = 164 \text{ ns}$$

Weitergedacht: Der Radius der Kreisbahn ist proportional zur Geschwindigkeit, die Periode hingegen hängt weder von der Geschwindigkeit noch vom Radius ab. ■

Betrachten wir nun ein geladenes Teilchen, das sich in einem homogenen Magnetfeld mit einer Geschwindigkeit bewegt, deren Richtung nicht senkrecht zu \mathbf{B} ist. Parallel zu \mathbf{B} ist keine Komponente der magnetischen Kraft und folglich auch keine Komponente der Beschleunigung verschieden von null; das bedeutet, die Geschwindigkeitskomponente parallel zu \mathbf{B} bleibt konstant. Die magnetische Kraft wirkt senkrecht zu \mathbf{B} auf das Teilchen, dessen Bewegung deshalb in der gleichen Weise beeinflusst wird wie oben besprochen, und das Teilchen beschreibt eine Schraubenbahn (Abbildung 23.13).

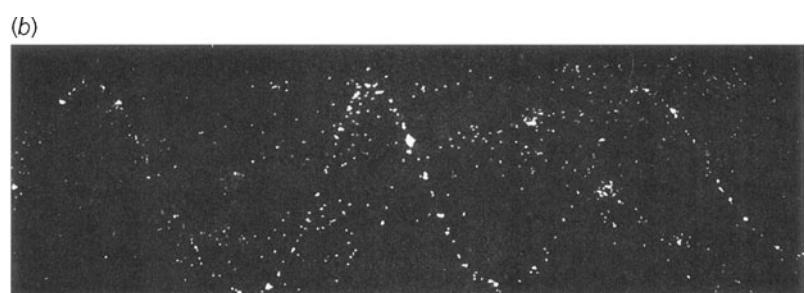
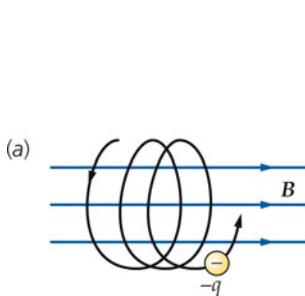
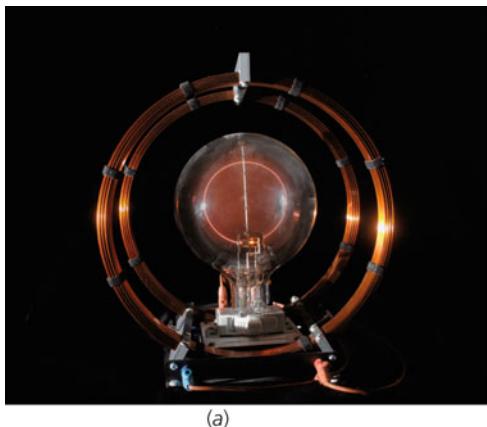
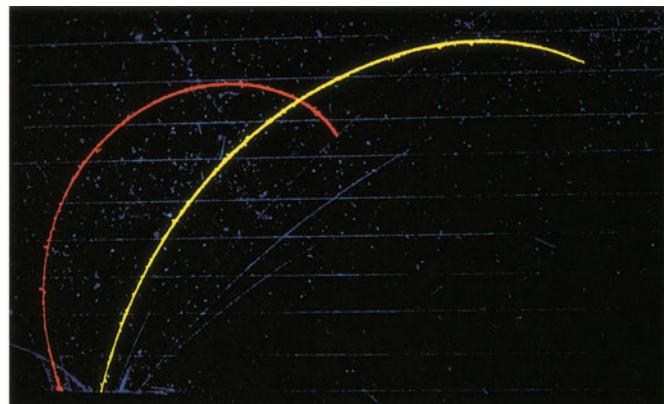


Abbildung 23.13 a) Besitzt die Geschwindigkeit eines Teilchens Komponenten sowohl parallel als auch senkrecht zum homogenen Magnetfeld, so beschreibt das Teilchen eine Schraubenbahn um die Feldlinien. b) Nebelkammeraufnahme der Schraubenbahn eines Elektrons, das sich in einem Magnetfeld bewegt. Die Bahn wird durch die Kondensation von Wassertröpfchen in der Kammer sichtbar gemacht. (© Carl E. Nielsen.)



(a)



(b)

a) Kreisbahn von Elektronen, die sich in einem Magnetfeld bewegen, das der durch zwei große Spulen fließende Strom erzeugt. Die Elektronen ionisieren das in der Röhre befindliche verdünnte Gas; entlang der Teilchenbahn sendet das Gas Licht aus. b) Falschfarbenfoto von Spuren eines 1,6-MeV-Protons (rot) und eines 7-MeV-Alphateilchens (gelb) in einer Nebelkammer. Der Krümmungsradius der Bahn ist proportional zum Impuls und umgekehrt proportional zur Ladung des betreffenden Teilchens. Die Ladung des Alphateilchens ist doppelt so groß wie die des Protons, der Impuls des Alphateilchens ist bei den angegebenen Energien rund viermal so groß wie der des Protons; der Krümmungsradius der Bahn des Alphateilchens ist deshalb deutlich größer. (a) © Fakultät für Physik der LMU München, b) © Lawrence Berkeley Laboratory/ SPL Agentur Focus.)

Die Bewegung geladener Teilchen in inhomogenen Magnetfeldern kann recht kompliziert sein. In Abbildung 23.14 sehen Sie eine *magnetische Flasche*, eine Anordnung, an deren Enden das Feld deutlich stärker ist als dazwischen. Eine ausführliche Analyse der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem derartigen Feld zeigt, dass sich das Teilchen auf Spiralbahnen um die Feldlinien zwischen den Punkten P_1 und P_2 hin- und herbewegt, ohne die Flasche verlassen zu können. Solche Magnetfelder verwendet man z. B. in der Kernfusionsforschung zum Einschluss geladener Teilchen mit hoher Dichte (Plasmen). Ein ähnliches Phänomen ist die Oszillation von Ionen zwischen den magnetischen Polen der Erde innerhalb der Van-Allen-Gürtel (Abbildung 23.15).

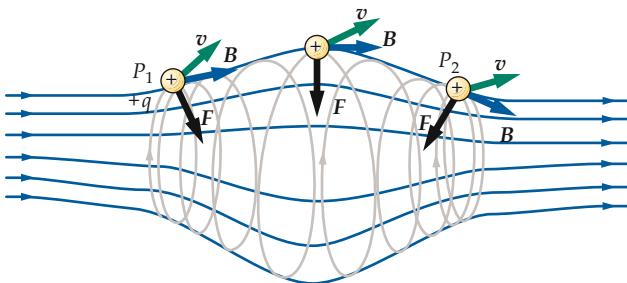


Abbildung 23.14 Magnetische Flasche. Das Feld ist auf beiden Seiten (rechts und links außen) wesentlich stärker als in der Mitte. Ein geladenes Teilchen bewegt sich darin auf Spiralbahnen um die Feldlinien hin und zurück, ohne die Flasche verlassen zu können.

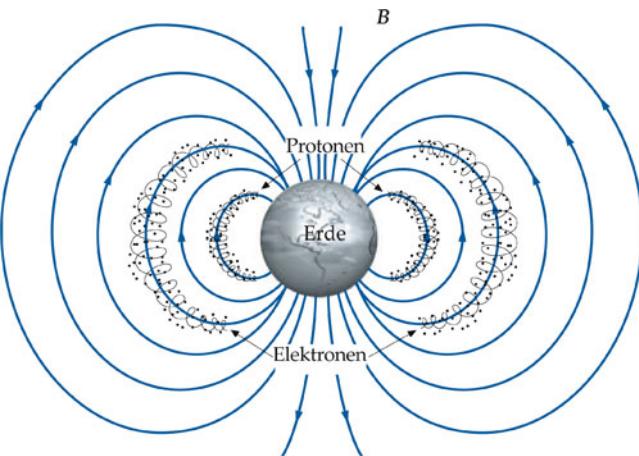


Abbildung 23.15 Van-Allen-Gürtel. Protonen (innerer Gürtel) und Elektronen (äußerer Gürtel) können das Erdmagnetfeld nicht verlassen und bewegen sich auf Spiralbahnen um die Magnetfeldlinien zwischen Nord- und Südpol hin und her.

Das Geschwindigkeitsfilter

Die magnetische Kraft, die auf eine bewegte Ladung in einem homogenen Magnetfeld wirkt, kann durch eine elektrische Kraft kompensiert werden. Voraussetzung dafür ist eine geeignete Wahl von Betrag und Richtung des magnetischen und des elektrischen Felds. Die elektrische Kraft wirkt (für positiv geladene Teilchen) parallel zu den zugehörigen Feldlinien, die magneti-

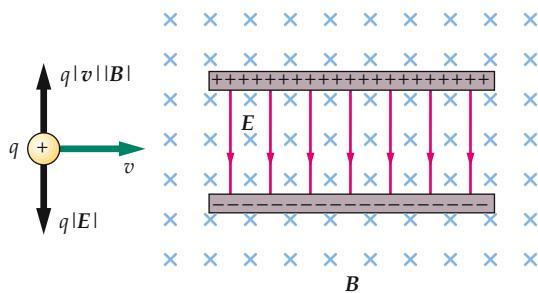


Abbildung 23.16 Gekreuzte Felder. Auf ein positiv geladenes Teilchen, das sich nach rechts bewegt, wirkt eine elektrische Kraft (nach unten) und eine magnetische Kraft (nach oben). Die Kräfte heben einander auf, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens gemäß $|v||B| = |E|$ zu den Feldstärken in Beziehung steht.

sche senkrecht dazu. In dem Gebiet, in dem sich das Teilchen bewegt, müssen die beiden Felder deshalb senkrecht zueinander stehen, damit sich die Kräfte gegenseitig aufheben können. Solche Felder bezeichnet man als **gekreuzt**.

Abbildung 23.16 zeigt das Gebiet zwischen den Platten eines Kondensators, der ein elektrisches Feld erzeugt. Senkrecht zu diesem wirkt ein Magnetfeld (eines Magneten, dessen Pole Sie sich ober- und unterhalb der Papierebene vorstellen müssen). Betrachten wir nun ein Teilchen mit der Ladung q , das von links in dieses Gebiet eintritt. Insgesamt wirkt auf dieses Teilchen die Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Ist q positiv, so wirkt die elektrische Kraft vom Betrag $q|E|$ in der Papierebene nach unten und die magnetische Kraft vom Betrag $q|v||B|$ nach oben; ist q negativ, wirken die Kräfte in den umgekehrten Richtungen. Die Kräfte heben einander gerade auf, wenn $q|E| = q|v||B|$ ist oder

$$|v| = \frac{|E|}{|B|}. \quad (23.9)$$

Bei vorgegebenen Feldstärken kompensieren sich die Kräfte nur für Teilchen, die sich exakt mit der durch Gleichung 23.9 gegebenen Geschwindigkeit bewegen. Jedes Teilchen mit dieser Geschwindigkeit – ungetacht seiner Masse oder Ladung – durchläuft den Raum zwischen den Kondensatorplatten, ohne abgelenkt zu werden. Teilchen mit größerer Geschwindigkeit werden in Richtung der magnetischen Kraft abgelenkt, Teilchen mit geringerer hingegen in Richtung der elektrischen Kraft. Eine derartige Anordnung gekreuzter Felder nennt man auch (**Wien'sches**) **Geschwindigkeitsfilter**. In der Praxis bringt man rechts von den Kondensatorplatten in Abbildung 23.16 eine Blende mit einem kleinen Loch so an, dass ausschließlich Teilchen mit der richtigen Geschwindigkeit diese Blende passieren können.

Übung 23.2: Ein Proton bewegt sich in $+x$ -Richtung durch ein Gebiet mit gekreuzten Feldern ($E = (2,00 \cdot 10^5 \text{ N/C})\hat{z}$, $B = (0,300 \text{ T})\hat{y}$). a) Wie schnell muss sich das Proton bewegen, damit es nicht abgelenkt wird? b) In welcher Richtung wird das Proton abgelenkt, wenn es sich mit dem Doppelten der Teilaufgabe a erfüllenden Geschwindigkeit bewegt? ▶

Thomsons Experiment zur Messung von q/m

Ein Beispiel für die Anwendung gekreuzter Felder ist das berühmte Experiment Joseph John Thomsons im Jahr 1897: Thomson zeigte, dass Kathodenstrahlen sich durch elektrische und magnetische Felder ablenken lassen und folglich aus geladenen Teilchen bestehen müssen. Durch Messung der Ablenkung wies er nach, dass das Ladung-Masse-Verhältnis q/m aller dieser Teilchen gleich ist. Teilchen mit genau diesem Ladung-Masse-Verhältnis erzeugte Thomson unter Verwendung der unterschiedlichsten Kathodenmaterialien, was bedeutete, dass diese Teilchen zu den Grundbausteinen der Materie gehören. Heute nennt man diese Teilchen „Elektronen“.

Abbildung 23.17 zeigt ein Schema der Kathodenstrahlröhre, an der Thomson seine Versuche durchführte. Elektronen werden von der Kathode C emittiert, die relativ zu den Spalten A und B negativ vorgespannt ist. Ein elektrisches Feld beschleunigt die Elektronen von C nach A, dann fliegen die Teilchen durch die Spalte A und B, passieren ein feldfreies Gebiet und treten in das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten D und F ein. Das Feld steht senkrecht zur Bewegungsrichtung der Teilchen und verleiht ihnen eine vertikale Geschwindigkeitskomponente. Die Elektronen werden dadurch abgelenkt und treffen auf dem Leuchtschirm S rechts in einem Punkt auf, der gegenüber dem Auftreffpunkt beim feldfreien Flug um eine Strecke Δy vertikal verschoben ist. Im Auftreffpunkt leuchtet der Schirm, wodurch sich der Strahl leicht lokalisieren lässt. Die Geschwindigkeit der Elektronen v_0 wird durch Anlegen eines Magnetfelds \mathbf{B} zwi-

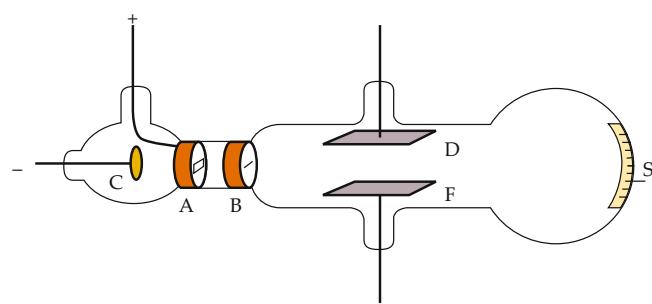


Abbildung 23.17 Schema der von Thomson zur Messung von q/m verwendeten Kathodenstrahlröhre. Kathodenstrahlen (Elektronen) treten aus der Kathode C aus, fliegen durch die Spalte A und B und treffen auf einen Leuchtschirm S. Ein elektrisches Feld zwischen den Kondensatorplatten D und F oder ein (nicht eingezeichnetes) Magnetfeld kann den Strahl ablenken.

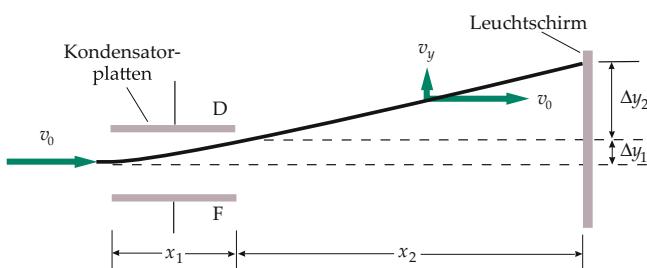


Abbildung 23.18 Die gesamte Ablenkung Δy eines Elektronenstrahls in J. J. Thomsons Experiment setzt sich zusammen aus der Ablenkung Δy_1 im Kondensator und der Ablenkung Δy_2 im feldfreien Raum zwischen Kondensator und Leuchtschirm.

schen den Platten festgelegt, dessen Richtung senkrecht sowohl zur Richtung des elektrischen Felds als auch zur Richtung der Geschwindigkeit steht. Die Feldstärke von \mathbf{B} wird zu Beginn des Versuchs so eingestellt, dass der Strahl keine Ablenkung erfährt. Dann ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen aus Gleichung 23.9.

Ist das Magnetfeld ausgeschaltet, so ist die Ablenkung des Strahls im Auftreffpunkt gleich Δy . Dieser Wert setzt sich aus zwei Beträgen zusammen, der Ablenkung Δy_1 während des Flugs durch das elektrische Feld zwischen den Platten und der Ablenkung Δy_2 während des anschließenden Flugs durch das feldfreie Gebiet (Abbildung 23.18).

Nun sei x_1 die Länge der Flugstrecke durch das elektrische Feld (die Länge der Kondensatorplatten). Bewegt sich das Elektron beim Eintreten in das Gebiet zwischen den Platten mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 , so durchfliegt es den Ablenkbereich in einer Zeit $t_1 = x_1/v_0$. Die Vertikalgeschwindigkeit des Elektrons beim Verlassen des Kondensators ist dann

$$v_y = a_y t_1 = \frac{q E_y}{m} t_1 = \frac{q E_y}{m} \frac{x_1}{v_0}$$

mit E_y als aufwärts gerichteter Komponente des elektrischen Felds zwischen den Platten. Die Ablenkung in diesem Gebiet beträgt dadurch

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{q E_y}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2.$$

Zwischen den Kondensatorplatten und dem Schirm durchfliegt das Elektron die waagerecht gemessene Entfernung x_2 im feldfreien Raum. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist dort konstant, die Flugzeit bis zum Schirm ist deshalb gegeben durch $t_2 = x_2/v_0$. Für die zusätzliche vertikale Ablenkung erhalten wir damit

$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{q E_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0}.$$

Wir addieren die Beiträge zur Gesamtablenkung in vertikaler Richtung:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1^2 + \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1 x_2 \\ &= \frac{q E_y}{m v_0^2} \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right). \end{aligned} \quad (23.10)$$

Die gemessene Ablenkung Δy setzt man in Gleichung 23.10 ein und kann nun das Ladung-Masse-Verhältnis q/m (im Falle des Elektrons e/m) berechnen. Eine andere Anwendung dieser Gleichung ist die Ablenkung des Elektronenstrahls in Beispiel 23.5.

Beispiel 23.5: Ablenkung eines Elektronenstrahls

Elektronen gelangen ohne Ablenkung durch das elektrische Feld zwischen den Kondensatorplatten in Thomsons Versuchsanordnung (siehe Abbildung 23.18), wenn die elektrische Feldstärke -3000 V/m und die Stärke des gekreuzt anliegenden Magnetfelds $0,140 \text{ mT}$ beträgt. Die Kondensatorplatten seien $4,00 \text{ cm}$ lang und ihre Enden $30,0 \text{ cm}$ vom Leuchtschirm entfernt. Berechnen Sie die Ablenkung des Elektronenstrahls nach Ausschalten des Magnetfelds.

Problembeschreibung: Masse und Ladung des Elektrons sind bekannt: $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und $q = -e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Die Geschwindigkeit des Elektrons folgt aus dem Verhältnis der elektrischen zur magnetischen Feldstärke.

Lösung: 1. Gleichung 23.10 gibt die Gesamtablenkung des Elektrons an:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1^2 + \frac{q E_y}{m v_0^2} x_1 x_2$$

2. Die Geschwindigkeit v_0 ist gleich $|\mathbf{E}|/|\mathbf{B}|$:

$$v_0 = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{3000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}}{1,40 \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 2,14 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

3. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 2, die gegebene elektrische Feldstärke sowie die bekannten Werte von m und q in Gleichung 23.10 (siehe Schritt 1) ein, um Δy zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{1}{2} \frac{(-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (-3000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (2,14 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} \\ &\quad \cdot (0,0400 \text{ m})^2 \\ &= 9,20 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta y_2 &= \frac{(-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (-3000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (2,14 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} \\ &\quad \cdot (0,0400 \text{ m}) \cdot (0,300 \text{ m}) \\ &= 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta y &= \Delta y_1 + \Delta y_2 \\ &= 9,20 \cdot 10^{-4} \text{ m} + 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ &= 0,92 \text{ mm} + 13,8 \text{ mm} \\ &= \boxed{14,7 \text{ mm}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten, ist Δy_2 etwa um eine Größenordnung größer als Δy_1 . Der gleiche Unterschied besteht zwischen den Größenordnungen des Abstands zwischen Platten und Leuchtschirm einerseits und der Länge der Platten andererseits. ■

Das Massenspektrometer

Das erste **Massenspektrometer** wurde 1919 von Francis William Aston zur Messung von Isotopenmassen gebaut. Ziel dieser Experimente ist zum einen der Nachweis von Isotopen, zum anderen die Ermittlung natürlicher Isotopenverhältnisse. Natürliches Magnesium z. B. enthält die Isotope ^{24}Mg (78,8%), ^{25}Mg (10,1%) und ^{26}Mg (11,2%), deren Massenverhältnis ungefähr 24 : 25 : 26 beträgt.

Ein einfaches Schema eines Massenspektrometers sehen Sie in Abbildung 23.19. Durch Beschuss neutraler Atome mit

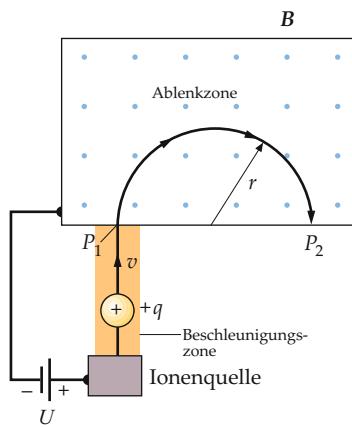


Abbildung 23.19 Funktionsschema eines Massenspektrometers. Positiv geladene Ionen treten aus der Ionenquelle aus, werden durch eine Potenzialdifferenz U beschleunigt und erreichen in P_1 ein homogenes Magnetfeld. Das Magnetfeld zeigt aus der Papierebene heraus, wie durch die Punkte angedeutet wird. Im Magnetfeld werden die Ionen auf eine Kreisbahn gezwungen, in Punkt P_2 treffen sie auf eine Fotoplatte. Der Radius der Kreisbahn hängt von der Masse der Ionen ab.

Röntgen- oder Elektronenstrahlen entstehen positiv geladene Ionen. (Dabei werden Elektronen aus den Atomen herausgeschlagen.) Die Ionen treten aus der Ionenquelle aus, werden durch ein elektrisches Feld beschleunigt und erreichen in Punkt P_1 ein homogenes Magnetfeld. Sind die Ionen anfangs in Ruhe und ist die Potenzialdifferenz gleich U , so ist die Summe aus ihrem Gewinn an kinetischer Energie $m v^2 / 2$ (mit dem die Ionen in das Magnetfeld eintreten) und ihrem Verlust an potentieller Energie $-q U$ gleich null:

$$\frac{1}{2} m v^2 = q U. \quad (23.11)$$

Im Magnetfeld bewegen sich die Ionen auf einer halbkreisförmigen Bahn, deren Radius r durch Gleichung 23.6 gegeben ist ($r = m v / |q B|$), und treffen in Punkt P_2 auf eine Fotoplatte. Die Entfernung zwischen P_1 und P_2 beträgt $2r$.

Die Geschwindigkeit v kann aus den Gleichungen 23.6 und 23.11 eliminiert werden. So lässt sich m/q aus den bekannten Größen U , B und r berechnen. Dazu lösen wir zunächst Gleichung 23.6 nach v auf und quadrieren beide Seiten:

$$v^2 = \frac{r^2 q^2 B^2}{m^2}.$$

Diese Beziehung setzen wir für v^2 in Gleichung 23.11 ein und erhalten

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{r^2 q^2 B^2}{m^2} \right) = q U.$$

Vereinfachen dieses Ausdrucks und Auflösen nach m/q liefert schließlich

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2 U}. \quad (23.12)$$

Anhand dieser Beziehung wird in Beispiel 23.6 die Trennung von Nickelisotopen berechnet.

Beispiel 23.6: Trennung von Nickelisotopen

Ein ^{58}Ni -Ion mit der Ladung $+e$ und einer Masse von $9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ wird durch eine Potenzialdifferenz von $3,00 \text{ kV}$ beschleunigt und anschließend in einem Magnetfeld von $0,120 \text{ T}$ abgelenkt. a) Berechnen Sie den Krümmungsradius der Flugbahn im Magnetfeld. b) Das Massenverhältnis von ^{58}Ni und ^{60}Ni ist ungefähr 58:60. Wie groß ist die Differenz zwischen den Radien der Flugbahnen eines ^{58}Ni -Ions und eines ^{60}Ni -Ions?

Problembeschreibung: Zur Berechnung des Krümmungsradius r wenden wir Gleichung 23.12 an. Da wir die Massenabhängigkeit von r kennen, können wir den Bahnradius für ein ^{60}Ni -Ion aus dem Bahnradius für ein ^{58}Ni -Ion berechnen und anschließend die Differenz der Radien bilden.

Lösung:**Teilaufgabe a**

Lösen Sie Gleichung 23.12 nach r auf:

$$r = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}} = \left(\frac{2 \cdot (9,62 \cdot 10^{-26} \text{ kg}) \cdot (3000 \text{ V})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0,120 \text{ T})^2} \right)^{1/2} = [0,501 \text{ m}]$$

Teilaufgabe b

1. r_1 und r_2 seien die Radien der Flugbahn eines ^{58}Ni -Ions bzw. eines ^{60}Ni -Ions. Unter Verwendung Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe a berechnen Sie das Verhältnis von r_2 zu r_1 :

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1,017$$

2. Mit diesem Resultat berechnen Sie r_2 für ^{60}Ni :

$$r_2 = 1,017 r_1 = (1,017) \cdot (0,501 \text{ m}) = 0,510 \text{ m}$$

3. Bilden Sie nun $r_2 - r_1$, die Differenz der Bahnradien:

$$r_2 - r_1 = 0,510 \text{ m} - 0,501 \text{ m} = [9 \text{ mm}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Differenz der Bahnradien beträgt weniger als 2 % der beiden einzelnen Radien. Angesichts dessen, dass sich die Massen der beiden betrachteten Ionen nur sehr wenig (um weniger als 4 %) unterscheiden, ist dieser geringe Unterschied der Radien zu erwarten. ■

Mit Astons ursprünglicher Versuchsanordnung ließen sich relative Massendifferenzen $\Delta m/m$ mit einer Genauigkeit von ungefähr 1 : 10 000 auflösen. Bessere Auflösungen erreicht man, indem man zwischen Ionenquelle und Magnetfeld ein Geschwindigkeitsfilter setzt, wodurch sich die Geschwindigkeit der in das Feld eintretenden Ionen eingrenzen und damit exakter festlegen lässt.

Das Zyklotron

Das Zyklotron wurde 1934 von Ernest O. Lawrence und M. Stanley Livingston entwickelt. Mit diesem Gerät lassen sich Teilchen wie Protonen und Deuteronen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigen. (Ein Deutron ist ein Kern von schwerem Wasserstoff, ^2H , bestehend aus einem Proton und einem Neutron.) Diese energiereichen Teilchen werden anschließend auf Atomkerne geschossen, wodurch Kernreaktionen ausgelöst werden, deren Verlauf Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Zielkerne zulässt. Außerdem verwendet man

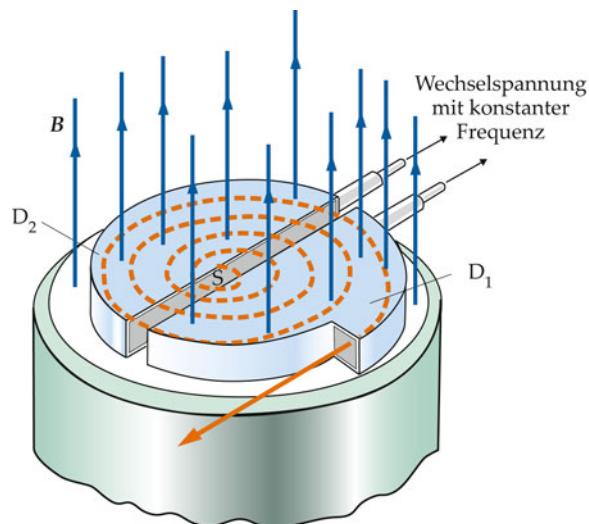


Abbildung 23.20 Funktionsschema eines Zyklotrons; der obere Teil des Magneten wurde weggelassen. Geladene Teilchen, emittiert von einer Quelle S in der Mitte der Anordnung, werden durch eine in der Lücke zwischen den Ds herrschende Potenzialdifferenz beschleunigt und bewegen sich entlang der gestrichelt eingezeichneten Bahn. Die Potenzialdifferenz ändert ihr Vorzeichen mit der Zyklotronfrequenz des untersuchten Teilchens, die nicht vom Radius der Bahn abhängt. Jedes Mal, wenn die Teilchen die Lücke erreichen, werden sie erneut beschleunigt, weshalb der Bahnradius immer größer wird.

die schnellen Teilchen zur Erzeugung radioaktiver Substanzen und für medizinische Zwecke.

Das Funktionsschema eines Zyklotrons sehen Sie in Abbildung 23.20. Die Teilchen bewegen sich in zwei halbkreisförmigen, aufgrund ihrer Gestalt „Ds“ genannten Metallbehältern. Die Ds befinden sich in einer Vakuumkammer, damit die beschleunigten Teilchen keine Energie durch Zusammenstöße mit Molekülen der Luft verlieren können. An der gesamten Anordnung liegt ein von einem Elektromagneten erzeugtes homogenes äußeres Magnetfeld an. Zwischen den Ds wird eine Potenzialdifferenz U erzeugt, die sich mit der Periode T zeitlich ändert; T ist die durch Gleichung 23.7 gegebene Zyklotronperiode, $T = 2\pi m/|qB|$. Die Potenzialdifferenz bewirkt ein elektrisches Feld in der Lücke zwischen den Ds, während das Innere der Ds feldfrei bleibt (die Metallgehäuse wirken als Abschirmung).

Positiv geladene Teilchen treten mit niedriger Geschwindigkeit aus der Ionenquelle S im Mittelpunkt der Anordnung aus und in D_1 ein. Darin beschreiben sie eine halbkreisförmige Bahn und erreichen nach der Zeit $\frac{1}{2}T$ die Lücke zwischen D_1 und D_2 . Die Potenzialdifferenz wird so eingestellt, dass D_1 in diesem Moment auf höherem Potenzial liegt als D_2 . Folglich werden die Teilchen in der Lücke durch das elektrische Feld beschleunigt, ihre kinetische Energie nimmt um qU zu.

Da die kinetische Energie der Teilchen nun höher ist, ist der Bahnradius in D_2 größer. Wieder kommen die Teilchen nach der Zeit $\frac{1}{2}T$ an der Lücke an, weil die Zyklotronperiode nicht von

der Geschwindigkeit der Teilchen abhängt. Inzwischen hat das Potenzial in der Lücke sein Vorzeichen umgekehrt: D₂ befindet sich nun auf höherem Potenzial, die Teilchen werden beim Durchfliegen der Lücke erneut beschleunigt, und ihre kinetische Energie nimmt erneut um $q U$ zu. Dieser Vorgang findet stets beim Überqueren der Lücke statt. Auf diese Weise wird der Bahnradius allmählich größer, bis die Teilchen schließlich aus dem Magnetfeld austreten. In einem typischen Zyklotron erreichen die Teilchen nach 50 bis 100 Umläufen Energien von bis zu mehreren Hundert Megaelektronenvolt.

Wir wollen nun die kinetische Energie eines Teilchens beim Austritt aus einem Zyklotron berechnen. Dazu setzen wir in Gleichung 23.6 r gleich dem Maximalradius der Ds und lösen nach v auf:

$$r = \frac{mv}{|qB|}, \quad v = \frac{|qB|r}{m}.$$

Die kinetische Energie ist dann

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2B^2}{m}\right)r^2. \quad (23.13)$$

In Beispiel 23.7 wird die Energie eines beschleunigten Protons berechnet.

Beispiel 23.7: Energie eines beschleunigten Protons

Ein Zyklotron zur Beschleunigung von Protonen arbeitet mit einem Magnetfeld von 0,150 T, der maximale Radius der Ds beträgt 0,500 m. a) Geben Sie die Zyklotronfrequenz an. b) Mit welcher kinetischen Energie treten die Protonen aus dem Zyklotron aus?

Problembeschreibung: Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom ($F = ma$) an mit $F = |qv \times B|$. Berechnen Sie dann mithilfe der Beziehung $v = r\omega$ die Frequenz und die Geschwindigkeit.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom an, $F = ma_n$ mit F als der magnetischen Kraft und a_n als Normalbeschleunigung ($a_n = -a_{ZP} = v^2/r$; a_{ZP} ist die Zentripetalbeschleunigung; siehe auch Gleichung 23.6). Setzen Sie ωr für v ein und lösen Sie nach ω auf:

$$\begin{aligned} F &= ma_n \\ v|qB| &= m\frac{v^2}{r} \\ \omega r|qB| &= m\frac{\omega^2 r^2}{r} \\ \omega &= \frac{|qB|}{m} = \frac{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (0,150 \text{ T})}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \\ &= 1,44 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

2. Die Frequenz (in Zyklen pro Sekunde oder Hertz, Hz) erhalten Sie mithilfe der Beziehung $\omega = 2\pi\nu$:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1,44 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} \\ &= 2,29 \cdot 10^6 \text{ Hz} = [2,29 \text{ MHz}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \\ &\quad \cdot (1,44 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot (0,500 \text{ m})^2 \\ &= 4,33 \cdot 10^{-14} \text{ J} \end{aligned}$$

2. Energien von Protonen und anderen Elementarteilchen werden üblicherweise in Elektronenvolt angegeben ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$):

$$E_{\text{kin}} = 4,33 \cdot 10^{-14} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = [271 \text{ keV}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Austrittsgeschwindigkeit des Protons beträgt $v = r\omega = (0,500 \text{ m})(1,44 \cdot 10^7 \text{ rad/s}) = 7,20 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Die Lichtgeschwindigkeit ist $3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Unser Wert für die Zyklotronfrequenz von $1,44 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$ ist angesichts der Austrittsgeschwindigkeit (fast 10 % der Lichtgeschwindigkeit) plausibel. ■

23.3 Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment

Auf eine stromdurchflossene Leiterschleife wirkt in einem homogenen Magnetfeld keine resultierende Kraft, aber ein Drehmoment. Die Lage der Schleife beschreiben wir durch einen Einheitsvektor \hat{n} , der in Richtung der Normalen der Schleifenfläche (senkrecht zu dieser) steht (Abbildung 23.21). Wenn sich die Finger der rechten Hand in Richtung des Stroms durch die Leiterschleife krümmen, zeigt der Daumen in Richtung von \hat{n} .

Abbildung 23.22 zeigt, welche Kräfte in einem homogenen Magnetfeld auf eine rechteckige Leiterschleife wirken, deren Normalenvektor \hat{n} einen Winkel θ mit der Richtung des Magnetfelds B einschließt. Die Summe der Kräfte ist null, ihre Beträge sind gegeben durch

$$|F_1| = |F_2| = I|\mathbf{a}||\mathbf{B}|.$$

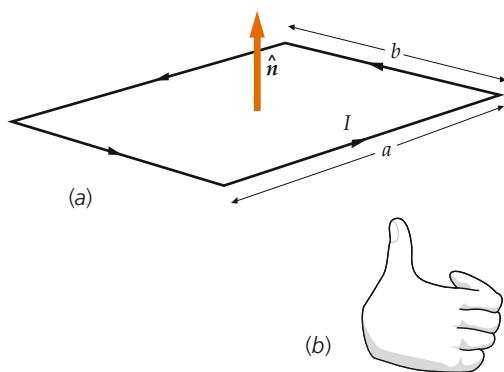


Abbildung 23.21 a) Die Orientierung einer stromdurchflossenen Leiterschleife lässt sich durch den Normalenvektor \hat{n} beschreiben, einen Einheitsvektor, der senkrecht auf der Schleifenebene steht. b) Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Richtung von \hat{n} : Wenn sich die Finger der rechten Hand in Richtung des Stroms durch die Leiterschleife krümmen, zeigt der Daumen in Richtung von \hat{n} .

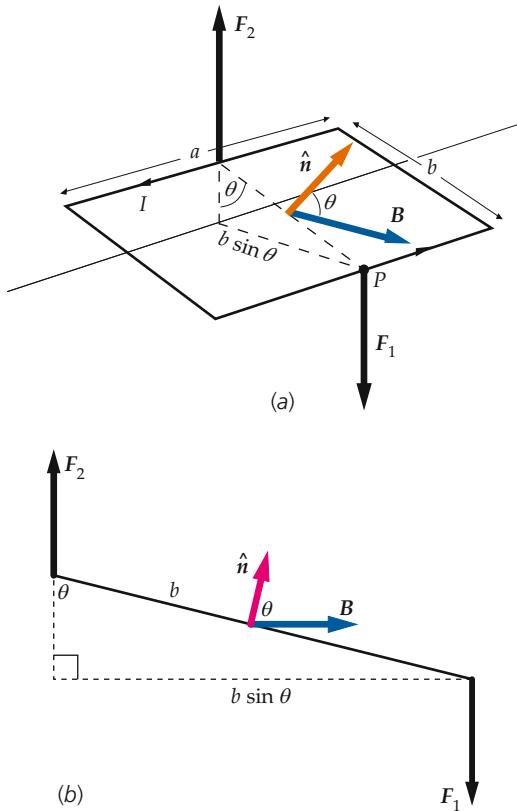


Abbildung 23.22 a) Rechteckige, stromdurchflossene Leiterschleife, deren Normalenvektor \hat{n} einen Winkel θ mit der Richtung eines homogenen Magnetfelds \mathbf{B} einschließt. b) Seitenansicht der Leiterschleife: Das ausgeübte Drehmoment hat den Betrag $I |A| |\mathbf{B}| \sin \theta$ und ist so gerichtet, dass durch die Drehung der Schleife der Normalenvektor mit der Richtung von \mathbf{B} zur Deckung kommt.

F_1 und F_2 bilden ein Kräftepaar. Das Drehmoment ist deshalb bezüglich jedes Punkts auf der Leiterschleife gleich. Zur Berechnung des Drehmoments wählen wir bequemerweise Punkt P in Abbildung 23.22. Der Betrag des Drehmoments ist

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}_2| |\mathbf{b}| \sin \theta = I |\mathbf{a}| |\mathbf{B}| |\mathbf{b}| \sin \theta = I |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta,$$

wobei der Flächenbetrag eines Parallelogramms mit den Seiten \mathbf{a} und \mathbf{b} gegeben ist durch $|\mathbf{A}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Für den Spezialfall des Rechtecks ergibt sich $|\mathbf{A}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin 90^\circ = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$; dies ist die Fläche der Leiterschleife. Für eine Schleife mit n Windungen gilt entsprechend

$$|\mathbf{M}| = n I |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta.$$

Das Drehmoment versucht die Schleife so zu drehen, dass \hat{n} in dieselbe Richtung zeigt wie \mathbf{B} .

Eine einfache Schreibweise für das Drehmoment ergibt sich, wenn wir zuvor das **magnetische Dipolmoment** μ (oder kürzer das **magnetische Moment**) einführen. Für die Leiterschleife ist es wie folgt definiert:

$$\mu = n I \mathbf{A}, \quad (23.14)$$

MAGNETISCHES MOMENT EINER LEITERSCHLEIFE

wobei der Flächenvektor \mathbf{A} in Richtung der Normalen auf der Fläche steht:

$$\mathbf{A} = A \hat{n}.$$

Die SI-Einheit des magnetischen Moments ist $\text{A} \cdot \text{m}^2$ (Ampere mal Meter zum Quadrat). Auf die Leiterschleife wirkt damit das Drehmoment

$$\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B}. \quad (23.15)$$

DREHMOMENT AUF EINE LEITERSCHLEIFE

Wir haben Gleichung 23.15 zwar für eine rechteckige Leiterschleife abgeleitet, sie gilt aber für Leiterschleifen beliebiger Form – vorausgesetzt, sie liegen in einer Ebene. Das Drehmoment ergibt sich jeweils als Vektorprodukt des magnetischen Moments μ der Schleife und des Magnetfelds \mathbf{B} , wobei das magnetische Moment als Vektor definiert ist, der in Richtung von

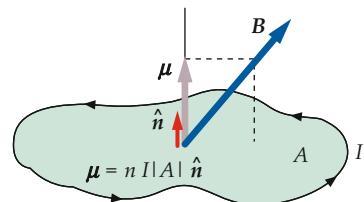


Abbildung 23.23 Eine ebene, stromdurchfossene Leiterschleife beliebiger Form wird durch ihr magnetisches Moment $\mu = n I |\mathbf{A}| \hat{n}$ beschrieben. In einem Magnetfeld \mathbf{B} wirkt auf die Schleife das Drehmoment $\mu \times \mathbf{B}$.

\hat{n} zeigt und dessen Betrag gleich $n I |A|$ ist (Abbildung 23.23). Ein Vergleich von Gleichung 23.15 mit Gleichung 18.11 ($M = \mu \times E$) zeigt, dass sich eine Leiterschleife in einem Magnetfeld genauso verhält wie ein elektrischer Dipol in einem elektrischen Feld. Die Beispiele 23.8 und 23.9 verdeutlichen Anwendungen des Drehmoments bei Leiterschleifen.

Beispiel 23.8: Auf eine Leiterschleife wirkendes Drehmoment

Durch eine kreisrunde Leiterspirale mit zehn Windungen und einem Radius von 2,00 cm fließt ein Strom von 3,00 A. Die Achse der Schleife schließt mit der Richtung eines Magnetfelds von 8000 G einen Winkel von $30,0^\circ$ ein. Berechnen Sie den Betrag des auf die Spirale wirkenden Drehmoments.

Problembeschreibung: Das auf eine Leiterschleife wirkende Drehmoment ist gegeben durch Gleichung 23.15, $M = \mu \times B$, mit $\mu = n I A \hat{n}$ (Gleichung 23.14).

Lösung: Den Betrag des Drehmoments gibt Gleichung 23.15 an:

$$\begin{aligned} |M| &= |\mu \times B| = |\mu| |B| \sin \theta = n I |A| |B| \sin \theta \\ &= (10,0) \cdot (3,00 \text{ A}) \cdot \pi \cdot (0,0200 \text{ m})^2 \\ &\quad \cdot (0,800 \text{ T}) \cdot \sin 30,0^\circ \\ &= 1,51 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Aus der Beziehung $F = I l \times B$ (Gleichung 23.4) ist abzulesen, dass die SI-Einheit der Magnetfeldstärke (Tesla) gleich $\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m})$ sein muss. Für die rechte Seite der Gleichung in unserer Lösung ergibt sich damit die Einheit $\text{N} \cdot \text{m}$, also tatsächlich die SI-Einheit des Drehmoments. ■

Beispiel 23.9: Kippen einer Leiterschleife

ZUR ÜBUNG

Eine kreisrunde Leiterschleife mit dem Radius r und der Masse m , durch die ein Strom I fließt, liegt auf einer waagerechten Fläche (Abbildung 23.24) und ist von einem waagerecht orientierten Magnetfeld B umgeben. Wie groß darf die Stromstärke höchstens sein, damit sich der Umfang der Schleife gerade noch nicht seitlich von der Unterlage abhebt?

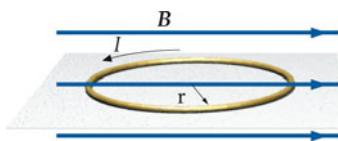


Abbildung 23.24 Darstellung der kreisrunden Leiterfläche und des waagerecht orientierten Magnetfelds.

Problembeschreibung: Die Schleife beginnt sich zu heben, wenn der Betrag des resultierenden Drehmoments ungleich null ist (Abbildung 23.25). Um das Drehmoment zu eliminieren, das durch die Normalkraft entsteht, führen wir unsere Rechnung bezüglich des Berührungspunkts zwischen Schleife und Fläche aus. Das Magnetfeld ruft das Drehmoment $M = \mu \times B$ hervor, das bezüglich aller Punkte gleich ist, da jeweils Kräftepaare vorliegen. Der Hebelarm, an dem

das Drehmoment der Gravitation angreift, ist der Radius des Kreises.

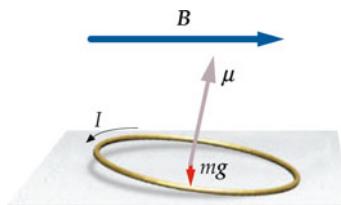


Abbildung 23.25 Illustration der Neigung der Leiterschleife bei einem resultierenden Drehmoment M ungleich null.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

- Lösung:**
1. Berechnen Sie das auf die Schleife wirkende magnetische Drehmoment.
 2. Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments, das die Gravitationskraft auf die Schleife ausübt.
 3. Setzen Sie die Beträge der Drehmomente gleich und lösen Sie nach dem Strom I auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$M_B = \mu B \sin 90,0^\circ = I \pi r^2 B$$

2.

$$M_G = -m g r$$

3.

$$I = \boxed{\frac{mg}{\pi r B}}$$

Plausibilitätsprüfung: Für konstantes B ist der Strom direkt proportional zur Masse. Dieses Ergebnis leuchtet ein: Je größer die Masse der Schleife ist, desto stärker muss der Strom sein, um sie zum Kippen zu bringen.

Die potenzielle Energie eines magnetischen Dipols in einem Magnetfeld

Wirkt ein Drehmoment auf ein rotierendes Objekt, so wird Arbeit verrichtet. Die bei der Drehung eines magnetischen Dipols um einen Winkel $d\theta$ verrichtete Arbeit ist

$$dW = -|\mathbf{M}| d\theta = -|\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| \sin \theta d\theta$$

mit θ als Winkel zwischen $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{B} ; das Minuszeichen kommt zustande, weil θ durch die Wirkung des Drehmoments kleiner wird. Setzen wir diese Arbeit gleich der Abnahme der potenziellen Energie E_{pot} des Systems, so erhalten wir

$$dE_{\text{pot}} = -dW = +|\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| \sin \theta d\theta,$$

und die Integration liefert

$$E_{\text{pot}} = -|\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| \cos \theta + E_{\text{pot},0}.$$

Als Nullpunkt der potenziellen Energie wählen wir $\theta = 90^\circ$. Dann ist $E_{\text{pot},0} = 0$, und die potenzielle Energie des Dipols ist

$$E_{\text{pot}} = -|\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (23.16)$$

POTENZIELLE ENERGIE EINES MAGNETISCHEN DIPOLS

Gleichung 23.16 gibt die potenzielle Energie eines magnetischen Dipols an, der mit der Richtung eines umgebenden magnetischen Felds den Winkel θ einschließt. Diese Beziehung wird in Beispiel 23.10 verdeutlicht.

Beispiel 23.10: Auf eine Spule wirkendes Drehmoment

Durch eine quadratische Spule mit zwölf Windungen und einer Kantenlänge von 40,0 cm fließt ein Strom von 3,00 A. Wie in Abbildung 23.26 dargestellt, liegt die Spule in der x - y -Ebene ($z = 0$). Sie ist von einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = ((0,300 \text{ T}) \hat{x} + (0,400 \text{ T}) \hat{z})$ umgeben. Von einem Punkt auf der positiven z -Achse aus gesehen fließt der Strom im Gegenuhrzeigersinn. Berechnen Sie a) das magnetische Moment der Spule, b) das auf die Spule wirkende Drehmoment und c) die potenzielle Energie der Spule.

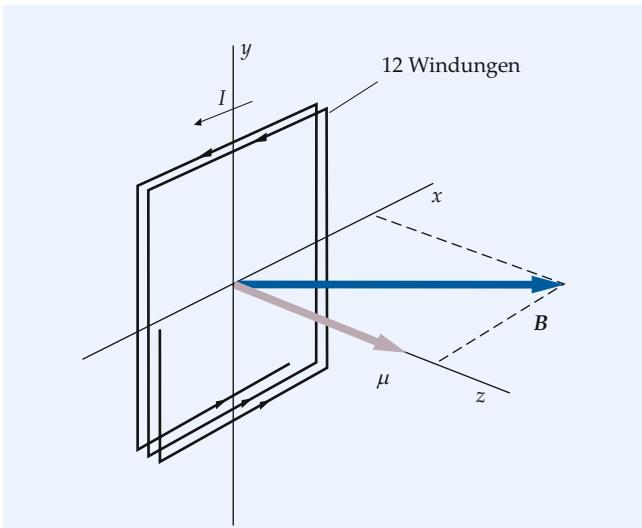


Abbildung 23.26 Koordinatensystem der Spule.

Problembeschreibung: Abbildung 23.26 entnehmen wir, dass das magnetische Moment der Spule in $+z$ -Richtung zeigt.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie zunächst das magnetische Moment der Spule:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= n I |\mathbf{A}| \hat{z} = (12) \cdot (3,00 \text{ A}) \cdot (0,400 \text{ m})^2 \hat{z} \\ &= \boxed{5,76 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \hat{z}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Das auf eine Leiterschleife wirkende Drehmoment ist durch Gleichung 23.15 gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \\ &= (5,76 \hat{z}) \times (0,300 \hat{x} + 0,400 \hat{z}) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{T} \\ &= \boxed{(1,73 \text{ N} \cdot \text{m}) \hat{y}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die potentielle Energie ist gleich dem negativen Skalarprodukt von μ und \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= -\mu \cdot \mathbf{B} \\ &= -(5,76\hat{z}) \cdot (0,300\hat{x} + 0,400\hat{z}) \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{T} \\ &= \boxed{-2,30 \text{ J}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das in Teilaufgabe b berechnete Drehmoment steht senkrecht sowohl auf dem Vektor des magnetischen Moments als auch auf dem Vektor des Magnetfelds, wie wir es für ein Vektorprodukt erwarten.

Übung 23.3: Die potentielle Energie einer stromdurchflossenen, von einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} umgebenen Spule ist null, wenn der Winkel zwischen dem magnetischen Dipolmoment μ und dem Vektor des Magnetfelds 90° beträgt. Berechnen Sie die potentielle Energie eines solchen Systems, wenn μ und \mathbf{B} a) in die gleiche Richtung und b) in entgegengesetzte Richtungen zeigen. ◀ ■

Bringt man einen Permanentmagneten, etwa eine Kompassnadel oder einen Stabmagneten, in ein Magnetfeld \mathbf{B} , so wirkt darauf ein Drehmoment: Die Nadel richtet sich entlang der Feldlinien aus. (Dieser Effekt tritt auch mit zuvor nicht magnetischen Eisenfeilspänen auf, die durch das \mathbf{B} -Feld magnetisiert werden.) Der Stabmagnet besitzt ein magnetisches Moment μ ; dieser Vektor zeigt in Richtung eines Pfeils, der Südpol und Nordpol des Magneten verbindet. Ein kleiner Stabmagnet verhält sich demnach im Magnetfeld genauso wie eine Leiterschleife. Zum Abschluss illustriert Beispiel 23.11, wie die Ladungen in einer rotierenden Scheibe zu einem magnetischen Moment führen.

Beispiel 23.11: Magnetisches Moment einer rotierenden Scheibe

Die Oberfläche einer dünnen, aus einem nichtleitenden Material bestehenden Scheibe mit der Masse m und dem Radius r_S sei homogen geladen, die Ladungsdichte pro Flächeneinheit betrage σ . Diese Scheibe dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, die senkrecht zu ihrer Ebene und durch ihren Mittelpunkt verläuft. Berechnen Sie das magnetische Moment der rotierenden Scheibe.

Problembeschreibung: Wir berechnen das magnetische Moment eines Kreisrings mit dem Radius r und der Breite dr (Abbildung 23.27) und integrieren anschließend. Die Ladung auf dem Kreisring ist $dq = \sigma d|A| = \sigma 2\pi r dr$. Ist die Ladung positiv, so zeigt der Vektor des magnetischen Moments in die gleiche Richtung wie die

Winkelgeschwindigkeit ω , die auch die Richtung des Normalenvektors \hat{n} angibt.

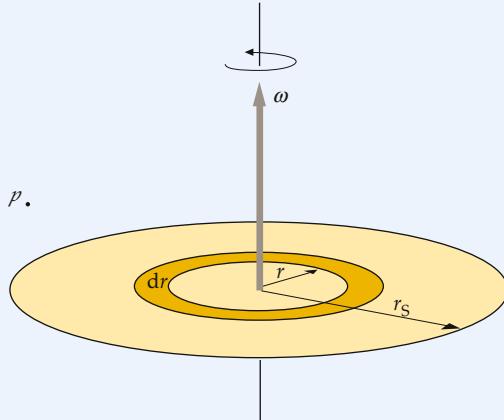


Abbildung 23.27 Kreisring mit Radius r und Breite dr .

Lösung: 1. Das magnetische Moment des gekennzeichneten Kreisrings ist gleich dem Produkt aus dem Strom und der Fläche des Rings:

$$d\mu = A dI = \pi r^2 dI$$

2. Der Strom im Kreisring ist gleich der Gesamtladung des Rings, dividiert durch die Periode T der Drehbewegung. Innerhalb einer Periode läuft die Ladung dq genau einmal an einem vorher beliebig festgelegten Bezugspunkt P vorbei, der sich nicht auf dem Ring befindet. Die Periode der Drehbewegung ist gleich dem Kehrwert der Rotationsfrequenz v , $1/T = v = \omega / (2\pi)$:

$$\begin{aligned} dI &= \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega}{2\pi} \sigma dA \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr = \sigma \omega r dr \end{aligned}$$

3. Setzen Sie dies in das Ergebnis aus Schritt 1 ein, um den Betrag des magnetischen Moments $d\mu$ des Kreisrings als Funktion von r und dr auszudrücken:

$$d\mu = \pi r^2 dI = \pi r^2 \sigma \omega r dr = \pi \sigma \omega r^3 dr$$

4. Integrieren Sie diesen Ausdruck in den Grenzen $r = 0$ und $r = r_S$:

$$\mu = \int d\mu = \int_0^{r_S} \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{1}{4} \pi \sigma \omega r_S^4$$

5. Sie können das magnetische Moment nun als Vektor aufschreiben, indem Sie sich zunutze machen, dass μ für positive σ parallel zu ω ist:

$$\boxed{\mu = \frac{\pi}{4} \sigma r_S^4 \omega}$$

Plausibilitätsprüfung: Betrachten wir anstelle der Scheibe einen rotierenden Ring ebenfalls mit dem Radius r_S und der Ladung $q = \sigma \pi r_S^2$. Der Betrag des magnetischen Moments des Rings ist dann gegeben durch

$$\mu = IA = \frac{q}{T} \pi r_S^2 = \frac{\sigma \pi r_S^2}{2\pi/\omega} \pi r_S^2 = \frac{1}{2} \pi \sigma r_S^4 \omega,$$

was dem Doppelten unseres Ergebnisses aus Schritt 5 entspricht. Das Resultat aus Schritt 5 ist erwartungsgemäß kleiner als der Betrag des magnetischen Moments des Rings.

Weitergedacht: Betrachtet man die Gesamtladung $q = \sigma \pi r_S^2$ der Scheibe, so ist deren magnetisches Moment gegeben durch $\mu = \frac{1}{4} q r_S^2 \omega$. Der Drehimpuls der Scheibe ist $\mathbf{L} = (\frac{1}{2} m r_S^2) \omega$. Eine allgemeinere Schreibweise für das magnetische Moment lautet deshalb $\mu = (q / (2m)) \mathbf{L}$ (siehe dazu Aufgabe 23.21). ■

23.4 *Der Hall-Effekt

Wie wir gesehen haben, wirkt in Magnetfeldern auf bewegte Ladungen senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung eine Kraft. In einem stromdurchflossenen Leiter „schiebt“ diese Kraft die Ladungsträger auf eine Seite des Leiters, und es kommt zu einer Ladungstrennung. Dieses Phänomen nennt man **Hall-Effekt**. Man kann den Hall-Effekt ausnutzen, um das Vorzeichen und die Anzahldichte n der Ladungsträger in einem Leiter zu bestimmen oder auch um Magnetfeldstärken zu messen.

In Abbildung 23.28 sehen Sie zwei aus einem leitfähigen Material bestehende Streifen, die jeweils von links nach rechts von einem Strom I durchflossen werden (die linke Seiten jedes Streifens ist mit dem positiven, die rechte mit dem negativen Pol einer Spannungsquelle verbunden). Die Streifen sind von einem Magnetfeld \mathbf{B} umgeben, das in die Papierebene hineinzeigt. Nehmen wir zunächst an, es handelt sich um positive Ladungsträger, die sich nach rechts bewegen (Abbildung 23.28a). Auf diese Teilchen wirkt im Mittel die magnetische Kraft $qv_d \times \mathbf{B}$ (v_d ist die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger), die in der Papierebene nach oben zeigt. Die positiv geladenen Teilchen bewegen sich deshalb in Richtung des oberen Rands des Streifens, im Bereich des unteren Rands verbleibt ein Überschuss an negativen Ladungen. Infolge dieser Ladungstrennung entsteht im Streifen ein elektrisches Feld \mathbf{E} , das auf die Ladungsträger eine Kraft ausübt, die der magnetischen Kraft entgegengesetzt gerichtet ist. Gleichen sich die Kräfte gerade aus, dann hört die Bewegung der Ladungsträger auf. Da das elektrische Feld in Richtung abnehmenden Potenzials zeigt, befindet sich in diesem Moment die obere Kante des Streifens auf höherem Potenzial als die untere. Diese Potenzialdifferenz kann man mit einem empfindlichen Voltmeter messen.

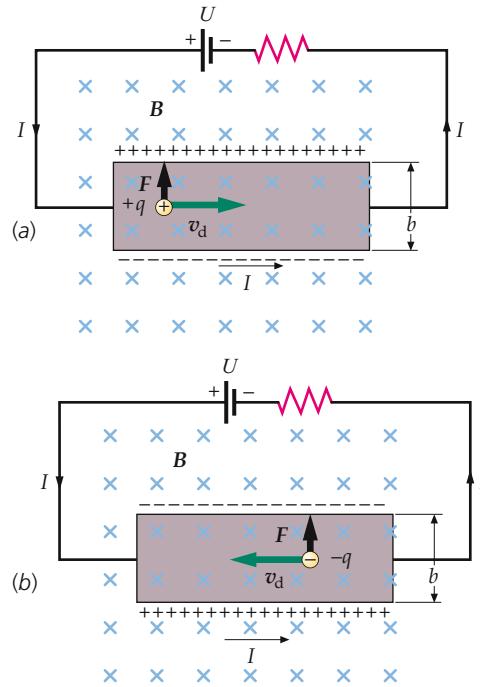


Abbildung 23.28 Der Hall-Effekt. Das Magnetfeld zeigt in die Papierebene hinein, wie die Kreuze angeben. Wenn der Strom von links nach rechts fließt, übt das Magnetfeld eine nach oben gerichtete Kraft aus – gleichgültig, ob es sich a) um positive Ladungsträger handelt, die sich nach rechts bewegen, oder b) um negative Ladungsträger, die sich nach links bewegen.

Negative Ladungsträger (Abbildung 23.28b) hingegen müssen sich im Leiter nach links bewegen (da der Strom, definiert als die Bewegung der *positiven* Ladungsträger, wieder von links nach rechts fließen soll). Die magnetische Kraft $qv_d \times \mathbf{B}$ zeigt auch in diesem Fall nach oben (sowohl q als auch v_d haben das Vorzeichen geändert). Die Ladungsträger bewegen sich wie zuvor zur oberen Kante; dort sammelt sich nun aber ein Überschuss negativer Ladung an, während die untere Kante positiv geladen zurückbleibt.

Eine Messung des Vorzeichens der Potenzialdifferenz zwischen oberem und unterem Rand des Streifens führt also unmittelbar zum Vorzeichen der Ladungsträger. In Halbleitern können negativ geladene Ionen oder positiv geladene „Löcher“ als Ladungsträger fungieren. Mit der beschriebenen Messung kann man dann feststellen, welcher Mechanismus des Ladungstransports in einem bestimmten Halbleiter überwiegt. Besteht der Streifen aus einem normalen metallischen Leiter, so findet man für die obere Kante des Streifens in Abbildung 23.28b ein niedrigeres Potenzial als für die untere, was bedeutet, dass die obere Kante eine negative Überschussladung aufweisen muss. Experimente dieser Art führten historisch zu dem Schluss, dass negative Ladungsträger für die Leitfähigkeit typischer Metalle verantwortlich sind. Abbildung 23.28b gibt diese Situation korrekt wieder.

Die Potenzialdifferenz zwischen dem oberen und dem unteren Rand des Streifens nennt man **Hall-Spannung**. Ihren Wert können wir als Funktion der Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger angeben. Das Magnetfeld übt auf die Ladungsträger im Streifen eine Kraft $q v_d B$ aus. Diese Kraft wird kompensiert durch die elektrostatische Kraft $-q E_H$, wobei E_H das elektrische Feld ist, das durch die Ladungstrennung im Leiter entsteht. Wir schreiben daher für den Gleichgewichtszustand $E_H = v_d B$. Ist die Breite des Streifens gleich b , so beträgt die Potenzialdifferenz $E_H b$, und für die Hall-Spannung erhalten wir

$$U_H = E_H b = v_d B b. \quad (23.17)$$

Übung 23.4: Ein 2,0 cm breiter Streifen, der aus einem leitfähigen Material besteht, wird in ein Magnetfeld von 0,80 T gebracht. Die gemessene Hall-Spannung beträgt 0,64 μ V. Berechnen Sie die Driftgeschwindigkeit der Elektronen. ▶

In normalen Leitern ist die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger sehr klein. Für Streifen mit gewöhnlichen Abmessungen und Magnetfeldstärken im Bereich von 1 T ist deshalb, wie aus Gleichung 23.17 ersichtlich, auch die Hall-Spannung sehr klein. Aus Messungen der Hall-Spannung eines Streifens mit gegebenen Abmessungen können wir die Anzahldichte n/V (Anzahl pro Volumeneinheit) der Ladungsträger im Leiter berechnen. Gleichung 22.3 liefert die Stromstärke,

$$|I| = (n/V) |q| v_d A,$$

mit A als Querschnittsfläche des Streifens. Für einen Streifen mit der Breite b und der Dicke d ist $A = b d$. Die Ladungsträger sind Elektronen, für $|q|$ setzen wir deshalb den Betrag von $-e$ ein. Die Anzahldichte (n/V) der Ladungsträger ist dann

$$n/V = \frac{|I|}{A |q| v_d} = \frac{|I|}{b d e v_d}. \quad (23.18)$$

Wir setzen gemäß Gleichung 23.17 U_H/B für $v_d b$ ein und erhalten

$$n/V = \frac{|I| B}{d e U_H}. \quad (23.19)$$

In Beispiel 23.12 werden aus einer Hall-Spannung die Anzahldichten von Silberatomen und Ladungsträgern berechnet.

Beispiel 23.12: Dichte der Ladungsträger in Silber

Eine 1,00 mm dicke und 1,50 cm breite Silberplatte, die von einem Strom $I = 2,50 \text{ A}$ durchflossen wird, ist umgeben von einem senkrecht zur Platte orientierten homogenen Magnetfeld mit einer Stärke von 1,25 T. Es wird eine Hall-Spannung von 0,334 μ V gemessen. a) Berechnen Sie die Anzahldichte der Ladungsträger in der Platte. b) Berechnen Sie die Anzahldichte der Silberatome in der Platte und vergleichen Sie das Resultat mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe a. Silber hat die Dichte $\rho = 10,5 \text{ g/cm}^3$ und die molare Masse $m_{\text{Mol}} = 107,9 \text{ g/mol}$.

Problembeschreibung: Die Anzahldichte der Ladungsträger ist mithilfe von Gleichung 23.19 zu berechnen. Daraus kann die Anzahldichte der Atome ermittelt werden, weil die Dichte und die molare Masse des Materials bekannt sind.

Lösung:

Teilaufgabe a

Zur Berechnung von n/V setzen Sie alle Zahlenwerte in Gleichung 23.19 ein:

$$\begin{aligned} n/V &= \frac{|I| B}{d e U_H} \\ &= \frac{(2,5 \text{ A}) \cdot (1,25 \text{ T})}{(1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (3,34 \cdot 10^{-7} \text{ V})} \\ &= \boxed{5,85 \cdot 10^{28} \text{ Elektronen} \cdot \text{m}^{-3}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Die Dichte der Silberatome ist gleich $\rho n_A / m_{\text{Mol}}$:

$$\begin{aligned} n/V &= \rho \frac{n_A}{m_{\text{Mol}}} \\ &= (10,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}) \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ Atome} \cdot \text{mol}^{-1}}{107,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \\ &= 5,86 \cdot 10^{22} \text{ Atome} \cdot \text{cm}^{-3} \\ &= \boxed{5,86 \cdot 10^{28} \text{ Atome} \cdot \text{m}^{-3}} \end{aligned}$$

2. Vergleichen Sie das Ergebnis aus Schritt 1 mit Teilaufgabe a: Der Vergleich zeigt, dass in Silber pro Atom ungefähr ein Ladungsträger enthalten ist.

Plausibilitätsprüfung: Es ist zu erwarten, dass die Anzahldichte der Ladungsträger und der Atome in einem Metall in der gleichen Größenordnung liegen. Unser Ergebnis bestätigt diese Überlegung. ■

Die Hall-Spannung bietet einen bequemen Weg zur Messung von Magnetfeldern. Dazu stellen wir Gleichung 23.19 um:

$$U_H = \frac{|I|}{(n/V) d e} B. \quad (23.20)$$

Zu Beginn des Versuchs eicht man einen Metallstreifen durch Messung der Hall-Spannung bei gegebener Stromstärke in einem bekannten Magnetfeld. Anschließend bringt man den Streifen in ein unbekanntes Magnetfeld, misst die Hall-Spannung, wenn ein gegebener Strom fließt, und berechnet daraus die Stärke des Magnetfelds.

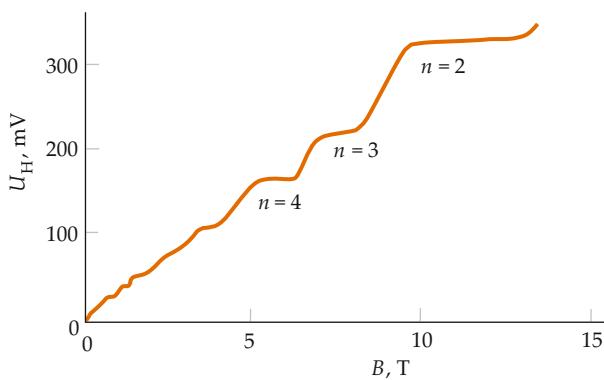


Abbildung 23.29 Trägt man die Hall-Spannung als Funktion des angelegten Magnetfelds auf, so steigt der Graph nicht geradlinig, sondern in Stufen an: Die Hall-Spannung ist gequantelt. Die Messung fand bei einer Temperatur von 1,39 K und einer konstanten Stromstärke von 25,52 μA statt.

Quanten-Hall-Effekte

Gemäß Gleichung 23.20 sollte die Hall-Spannung für einen gegebenen Leiterstreifen, in dem ein gegebener Strom fließt, linear von der Stärke des Magnetfelds abhängen. 1980 untersuchte der deutsche Physiker Klaus von Klitzing den Hall-Effekt in Halbleitern bei sehr tiefen Temperaturen in extrem starken Magnetfeldern und erhielt das überraschende Ergebnis, dass der lineare Zusammenhang unter diesen Bedingungen nicht mehr gilt. Im Graphen von U_{H} als Funktion von B erkennt man eine Reihe von Plateaus: Die Hall-Spannung kann nur bestimmte Werte annehmen, sie ist gequantelt. Für die Entdeckung dieses

ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts wurde von Klitzing 1985 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

Die Theorie des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts sagt aus, dass der Hall-Widerstand, definiert als $R_{\text{H}} = U_{\text{H}}/I$, nur die Werte

$$R_{\text{H}} = \frac{U_{\text{H}}}{I} = \frac{R_{\text{K}}}{n} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (23.21)$$

annehmen kann; n ist eine ganze Zahl und R_{K} die **Klitzing-Konstante**, die mit der Elementarladung e und der Planck'schen Konstante h wie folgt verknüpft ist:

$$R_{\text{K}} = \frac{h}{e^2}. \quad (23.22)$$

Da die Klitzing-Konstante bis auf wenige Milliardstel genau gemessen werden kann, wurde ausgehend vom Quanten-Hall-Effekt ein Standard für den Widerstand festgelegt: Seit Januar 1990 ist das **Ohm** so definiert, dass die Klitzing-Konstante $R_{\text{K}(90)}$ den Wert

$$R_{\text{K}(90)} = 25\,812,8076 \Omega \text{ (exakt)} \quad (23.23)$$

hat. $R_{\text{K}(90)}$ ist ein gerundeter, in internationaler Übereinkunft festgelegter Wert. Er weicht nur sehr wenig von R_{K} ab; gegenwärtig rechnet man mit $R_{\text{K}} = (25\,812,807\,572 \pm 0,000\,095) \Omega$.

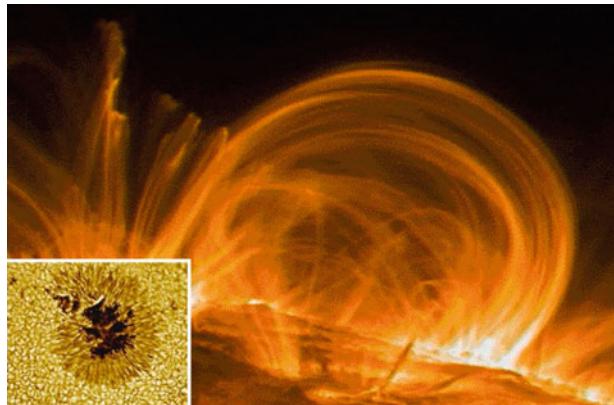
1982 wurde experimentell beobachtet, dass die Hall-Spannung in bestimmten Fällen durch Gleichung 23.21 gegeben ist, wenn n diskreten rationalen Brüchen aus kleinen ganzen Zahlen entspricht. Für die Entdeckung und Erklärung dieses *fraktionalen* Quanten-Hall-Effekts erhielten die Amerikaner Laughlin, Störmer und Tsui 1998 den Nobelpreis.

🔍 Im Kontext: Erde und Sonne: Die Magnetfelder ändern sich

Im Laufe der vergangenen Jahre wurde die Stärke der Magnetfelder von Erde und Sonne von Satelliten oder Observatorien am Boden aus nahezu kontinuierlich verfolgt.¹ Geologen und Physiker arbeiteten gemeinsam an paläomagnetischen Vermessungen. Alle Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich sowohl das Erd- als auch das Sonnenmagnetfeld ständig verändert.^{2,3}

Seit mehr als 900 Jahren dient das Erdmagnetfeld als Navigationshilfe auf See.⁴ Die Seefahrer hatten bald bemerkt, dass der magnetische Nordpol und der Himmelsnordpol nicht zusammenfallen und dass die magnetische Deklination (die Abweichung zwischen magnetischer Nordrichtung und Himmelsnordrichtung) von der Position der Messung abhängt. Aus dem 16. Jahrhundert⁵ sind zudem Werte der magnetischen Deklination überliefert, die zu verschiedenen Zeitpunkten am gleichen Ort ermittelt wurden. Aus den historischen Daten lässt sich ablesen, dass die magnetische Nordrichtung zeitlich nicht konstant war.⁶ Sie können damit als früheste Beweise der dynamischen Natur des Erdmagnetfelds gelten.

In den 1960er Jahren stellte man bei der Untersuchung von Bohrkerzen fest, dass sich die Richtung des Magnetfelds in den Schichten aus Vulkangestein vielfach umkehrte.⁷ Allgemein scheint eine solche Umkehr etwa alle 200 000 Jahre stattzufinden, wobei es in der Erdgeschichte auch über sechs Millionen Jahre lange Perioden ohne geomagnetische Veränderungen gegeben hat. Die Messwerte zeigen, dass die Feldstärke vor einer Richtungsumkehr abnimmt und anschließend wieder zunimmt. Insgesamt dauert dieser sogenannte Polsprung einige Tausend Jahre.⁸ Die letzte Umpolung liegt mehr als 700 000 Jahre zurück. In jüngerer Zeit geht die Stärke des Erdmagnetfelds zurück, und zwar zwischen 1840 und heute um 15 nT pro Jahr⁹ oder 3 % im Jahrhundert. Durch Rekonstruktion von Daten aus den Logbüchern von Schiffen schließt man auf eine durchschnittliche Abnahme der Feldstärke von 2 nT/Jahr zwischen 1590 und 1840.



Im Bereich von Sonnenflecken ist das solare Magnetfeld so stark, dass geladene Strömungen von Gasteilchen in ihrem Magnetfeld abgelenkt werden (großes Bild). Die Flecken sind etwas kühler als ihre Umgebung und erscheinen deshalb dunkler (kleines Bild). (© NASA.)

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts entdeckte G.E. Hale, dass die schon seit Jahrhunderten bekannten und beobachteten Sonnenflecken starke Magnetfelder besitzen. Er wies nach, dass das Magnetfeld der Sonne in einem 22 Jahre dauernden Zyklus allmählich abnimmt, sich umpolt

und wieder bis zur ursprünglichen Stärke zunimmt.¹⁰ Für Sonnenflecken wurden inzwischen Feldstärken bis über 200 mT gemessen.¹¹ Neuere Beobachtungen zeigten, dass Sonnenflecken durch örtliche Störungen (Wirbel) des solaren Magnetfelds entstehen. In Bereichen der Sonnenoberfläche, auf denen sich keine Flecken befinden, herrscht eine mittlere Magnetfeldstärke von 0,10 mT, die stellenweise auf knapp 20 bis über 100 mT ansteigen kann.¹²

Der Sonnenwind, ein Strom geladener Teilchen subatomarer Dimension, der von der Sonne mit einer Geschwindigkeit von rund 400 km/s¹³ ins All geschickt wird, führt ein Magnetfeld mit. Satellitendaten lassen die komplexe, dynamische Struktur des interplanetaren Magnetfelds erkennen.^{14,15} In Erdnähe schwankt die interplanetare Feldstärke zwischen 1 und 37 nT. Gelegentlich schleudert die Sonne bei gewaltigen Eruptionen große Mengen geladener Teilchen ins All. Trifft eine solche Wolke auf die Erde, kann ein sogenannter Magnetsturm ausgelöst werden, der Funkverbindungen stört und weltweit Stromausfälle verursacht. 94 Astronomische Einheiten von der Sonne entfernt maß die Raumsonde *Voyager 1* eine interplanetare Magnetfeldstärke von 0,03 nT.^{16,17} Noch weit außerhalb der Plutobahn ist das Magnetfeld des Sonnenwinds deutlich messbar.

1. „Geomagnetic Frequently Asked Questions“, United States National Geophysical Data Center, National Oceanic and Atmospheric Administration. <http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/faqgeom.shtml> (Stand: April 2009).
2. Yamazaki, T. und Oda, H., „Orbital Influence on Earth’s Magnetic Field: 100 000-Year Periodicity in Inclination“, *Science*, 29. März 2002, 294, S. 2435–2437.
3. Solanki, S. et al., „11 000 Year Sunspot Number Reconstruction“, *IBGP Pages/World Data Center for Paleoclimatology Data Contribution Series #2005-015*, 2005. ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/paleo/climate_forcing/solar_variability/solanki2004-ssn.txt (Stand: April 2009).
4. Hellemans, A. und Bunch, B., *The Timetables of Science*, New York: Simon & Schuster, 1988, S. 75.
5. Kono, M., „Ships’ Logs and Archeomagnetism“, *Science*, 12. Mai 2006, 312, S. 865–866.
6. Hermanus Magnetic Observatory, „Detailed History“, <http://www.hmo.ac.za/detailed-history.html> (Stand: April 2009).
7. Dunn, J. R. et al., „Paleomagnetic Study of a Reversal of the Earth’s Magnetic Field“, *Science*, 21. Mai 1971, 172, S. 840–844.
8. Merrill, R. T. und McFadden, P. L., „Geomagnetic Polarity Transitions“, *Reviews of Geophysics*, Mai 1999, 37, Nr. 2, S. 201–226.
9. Gubbins, D., Jones, A. L. und Finlay, C., „Fall in Earth’s Magnetic Field is Erratic“, *Science*, 12. Mai 2006, 312, S. 900–902.
10. Abbot, C. G., „Sun-Spots and Weather“, *Science*, 8. Dez. 1933, 78, S. 518–519.
11. Liang, H.-F., Zhao, H.-J. und Xiang, F.-Y., „Vector Magnetic Field Measurement of NOAA AR 10197“, *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, Aug. 2006, 6, Nr. 4, S. 470–476.
12. Lin, H. und Rimmele, T., „The Granular Magnetic Fields of the Quiet Sun“, *The Astrophysical Journal*, 20. März 1999, 514, Teil 1, S. 448–455.

Im Kontext: Erde und Sonne: Die Magnetfelder ändern sich

13. Hathaway, D., „The Solar Wind“, *Solar Physics*, Marshall Space Flight Center, NASA. <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SolarWind.shtml>. 18. Jan. 2007 (Stand: April 2009).
14. Smith, E.J. et al., „The Sun and Heliosphere at Solar Maximum“ *Science*, 14. Nov. 2003, 302, S. 1165–1168.
15. Arnold, N. und Lyons, A., „Granta MIST: Meeting Report“, *Astronomy and Geophysics*, Aug. 2006, 46, S. 4.18–4.21.
16. Gurnett, D. A. und Kurth, W. S., „Electron Plasma Oscillations Upstream of the Solar Wind Termination Shock“, *Science*, 23. Sept. 2005, 309, S. 2025–2027.
17. Burlaga, L. F. et al., „Crossing the Termination Shock into the Heliosheath: Magnetic Fields“, *Science*, 23. September 2005, 309, S. 2027–2029.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Magnetische Kraft	
Auf eine bewegte Ladung	$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (23.1)
Auf ein Stromelement	$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ (23.5)
Einheit der Magnetfeldstärke	Die SI-Einheit der Magnetfeldstärke ist das Tesla (T). Häufig verwendet wird auch die Einheit Gauß (G) mit $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$. (23.3)
2. Bewegung von Punktladungen	Ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit v in einer Ebene senkrecht zur Richtung eines homogenen Magnetfelds bewegt, beschreibt eine Kreisbahn. Periode und Frequenz der Kreisbewegung hängen weder vom Radius der Bahn noch von der Geschwindigkeit des Teilchens ab.
Bewegung auf Kreisbahn	$\frac{q}{m} v B = \frac{v^2}{r}$ (23.6)
Zyklotronperiode	$T = \frac{2\pi m}{ qB }$ (23.7)
Zyklotronfrequenz	$\nu = \frac{1}{T} = \frac{ qB }{2\pi m}$ (23.8)
Geschwindigkeitsfilter	Ein Geschwindigkeitsfilter besteht aus einem elektrischen und einem magnetischen Feld, die aufeinander senkrecht stehen (gekreuzte Felder) und deren Kraftwirkung sich für ein Teilchen mit der Geschwindigkeit v kompensiert: $ v = \frac{ E }{ B }$. (23.9)
*Thomsons Versuch zur Bestimmung von q/m	Die Ablenkung eines geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld hängt von der Geschwindigkeit des Teilchens ab und ist proportional zu dessen Ladung-Masse-Verhältnis q/m . J. J. Thomson legte die Geschwindigkeit von Teilchen aus Kathodenstrahlen mithilfe gekreuzter Felder fest und ermittelte q/m durch anschließende Ablenkung der Teilchen in einem elektrischen Feld. Er wies nach, dass alle Kathodenstrahlen aus Teilchen mit einem bestimmten Ladung-Masse-Verhältnis bestehen. Wir nennen diese Teilchen Elektronen.
Massenspektrometer	Das Ladung-Masse-Verhältnis q/m eines Ions mit bekannter Geschwindigkeit kann durch Messung des Radius der Kreisbahn bestimmt werden, auf der sich das Ion in einem Magnetfeld bekannter Stärke bewegt.
3. Leiterschleifen	
Magnetisches Dipolmoment	$\boldsymbol{\mu} = nIA$ (23.14)
Drehmoment	$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ (23.15)
Potenzielle Energie eines magnetischen Dipols	$E_{\text{pot}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ (23.16)
Resultierende Kraft	Die resultierende Kraft auf eine Leiterschleife in einem <i>homogenen</i> Magnetfeld ist null.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
4. Der Hall-Effekt	Ist ein stromdurchflossener Leiter von einem Magnetfeld umgeben, so führt die auf die Ladungsträger wirkende magnetische Kraft zu einer Ladungstrennung. Dieses Phänomen heißt Hall-Effekt. Die Ladungstrennung erzeugt eine Potenzialdifferenz U_H , die Hall-Spannung. Aus der Messung des Vorzeichens der Hall-Spannung lässt sich das Vorzeichen der Ladungsträger in einem Leiter bestimmen, und aus dem Betrag von U_H kann die Anzahl der Ladungsträger pro Volumeneinheit berechnet werden.
Hall-Spannung	$U_H = E_H b = v_d B b = \frac{ I }{(n/V)de} B \quad (23.17, 23.20)$
*Quanten-Hall-Effekte	Messungen bei sehr tiefen Temperaturen in extrem starken Magnetfeldern ergeben, dass der Hall-Widerstand $R_H = U_H/I$ gequantelt ist und nur folgende Werte annehmen kann: $R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{R_K}{n} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (23.21)$ wobei $R_K = h/e^2$ die Klitzing-Konstante ist, die die Planck'sche Konstante h und die Elementarladung e miteinander verknüpft.
*Definition des Ohm	$R_{K(90)} = 25\,812,8076 \Omega \text{ (exakt)} \quad (23.23)$ $R_{K(90)}$ ist ein international festgelegter Rundungswert der Klitzing-Konstante R_K .

Antworten auf die Verständnisfragen

- Die Aufgabe lässt sich mit einer Linke-Hand-Regel lösen. Die Richtung von \mathbf{B} ist willkürlich festgelegt. Ändert man diese Definition so, wie es im Aufgabentext vorgeschlagen wird, kann man eine gültige Beziehung $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \otimes \mathbf{B}$ aufschreiben, wobei das Symbol \otimes dieselbe Bedeutung hat wie sonst \times – nur, dass jetzt anstelle der Rechte-Hand-Regel eine Linke-Hand-Regel angewendet werden muss. Eine zweite Möglichkeit wäre, das Vektorprodukt umzudrehen: Mit $\mathbf{F} = \mathbf{B} \times q \mathbf{v}$ könnten Sie bei der Rechte-Hand-Regel bleiben.
- b) Negativ geladen. Die Kraft \mathbf{F} und der Vektor $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ zeigen nur dann in entgegengesetzte Richtungen, wenn das Teilchen eine negative Ladung trägt. Das ist konsistent mit der Formel $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Lösungen der Übungen

- $(-1,3 \cdot 10^{-12} \text{ N})\hat{\mathbf{y}}$
- a) 667 km/s, b) in $-z$ -Richtung
- a) $-2,88 \text{ J}$; diese potentielle Energie ist niedriger als die im Beispiel berechnete. (Den minimalen Wert erreicht die potentielle Energie, wenn μ und \mathbf{B} in die gleiche Richtung zeigen.) b) $+2,88 \text{ J}$
- $4,0 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

- 23.1 •** Die Achse einer Kathodenstrahlröhre liegt waagerecht in einem Magnetfeld, dessen Vektor senkrecht nach oben zeigt (Abbildung 23.30). Auf welcher der gestrichelt eingezeichneten Bahnen bewegen sich die von der Kathode emittierten Elektronen? a) Bahn 1, b) Bahn 2, c) Bahn 3, d) Bahn 4, e) Bahn 5.

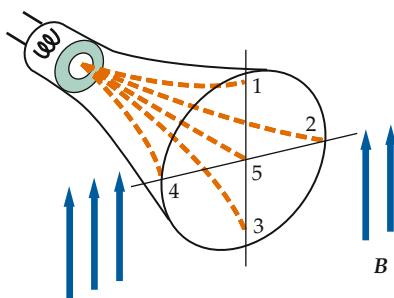


Abbildung 23.30 Zu Aufgabe 23.1.

- 23.2 • Richtig oder falsch?** a) Das magnetische Moment eines Stabmagneten zeigt von dessen Nordpol zu dessen Südpol. b) Im Inneren eines Stabmagneten zeigt das von diesem Magneten erzeugte Feld vom Südpol zum Nordpol. c) Wenn die Stromstärke in einer stromdurchflossenen Leiterschleife verdoppelt und gleichzeitig die Querschnittsfläche der Schleife halbiert wird, ändert sich der Betrag ihres magnetischen Moments nicht. d) Wenn die Ebene einer stromdurchflossenen Leiterschleife senkrecht zur Richtung eines umgebenden Magnetfelds ausgerichtet ist, wird das auf sie wirkende Drehmoment maximal.

- 23.3 •** Ein Elektron, das sich in $+x$ -Richtung bewegt, tritt in ein homogenes, in $+y$ -Richtung zeigendes Magnetfeld ein. Wird es dabei a) zur $+y$ -Richtung hin, b) zur $-y$ -Richtung hin, c) zur $+z$ -Richtung hin, d) zur $-z$ -Richtung hin abgelenkt, oder e) fliegt es unabgelenkt in $+x$ -Richtung weiter?

- 23.4 •** Vergleichen Sie elektrische und magnetische Feldlinien. Erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

- 23.5 •** Schätzen Sie die magnetische Kraft ab, die das Erdmagnetfeld maximal auf 1 m eines stromdurchflossenen Drahts in einem 16-A-Stromkreis eines Wohnhauses ausüben kann.

Die magnetische Kraft

- 23.6 •** Ein punktförmiges Teilchen mit einer Ladung $q = -3,64 \text{ nC}$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $2,75 \cdot 10^6 \text{ m/s} \hat{x}$. Berechnen Sie die Kraft, die folgende Magnetfelder auf das Teilchen ausüben: a) $\mathbf{B} = 0,38 \text{ T} \hat{y}$, b) $\mathbf{B} = (0,75 \text{ T} \hat{x} + 0,75 \text{ T} \hat{y})$, c) $\mathbf{B} = 0,65 \text{ T} \hat{x}$ und d) $\mathbf{B} = (0,75 \text{ T} \hat{x} + 0,75 \text{ T} \hat{z})$.

- 23.7 •** In einem geraden, stromdurchflossenen Leiterabschnitt befindet sich das Stromelement Il mit $I = 2,7 \text{ A}$ und $l = (3,0 \text{ cm} \hat{x} + 4,0 \text{ cm} \hat{y})$. Es ist von einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = 1,3 \text{ T} \hat{x}$ umgeben. Berechnen Sie die auf den Leiterabschnitt wirkende Kraft.

- 23.8 ••** Durch den in Abbildung 23.31 skizzierten Leiterabschnitt fließt von a nach b ein Strom von $1,8 \text{ A}$. Den Leiterabschnitt umgibt ein Magnetfeld $\mathbf{B} = 1,2 \text{ T} \hat{z}$. Berechnen Sie die insgesamt auf den Leiter wirkende Kraft und zeigen Sie, dass sich die gleiche Kraft ergibt, wenn der Leiterabschnitt geradlinig von a nach b verläuft und vom selben Strom durchflossen wird.

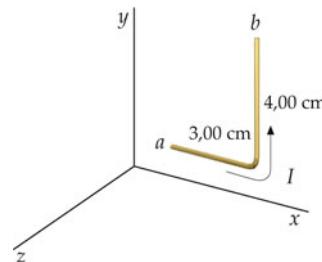


Abbildung 23.31 Zu Aufgabe 23.8.

- 23.9 •••** Durch einen in beliebiger Form gebogenen, in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} befindlichen Draht fließt ein Strom I . Zeigen Sie explizit, dass die Kraft auf einen Abschnitt des Drahts, der von den beliebig gewählten Punkten a und b begrenzt wird, gegeben ist durch $\mathbf{F} = Il \times \mathbf{B}$; dabei ist l ein Vektor, der vom Punkt a zum Punkt b zeigt. Anders ausgedrückt: Zeigen Sie, dass auf den beliebig gebogenen Leiterabschnitt dieselbe Kraft wirkt wie auf einen geraden Abschnitt, der die gleichen Endpunkte miteinander verbindet.

Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld

- 23.10 •** Ein Proton bewegt sich auf einer Kreisbahn mit einem Radius von 65 cm. Die Bahn befindet sich in einem Magnetfeld mit einer Feldstärke von $0,75 \text{ T}$, das senkrecht auf der Bahn steht. Berechnen Sie a) die Periode der Kreisbewegung, b) die Bahngeschwindigkeit und c) die kinetische Energie des Protons.

23.11 • Ein Elektron mit einer kinetischen Energie von 4,5 keV bewegt sich auf einer Kreisbahn, die sich in einem senkrecht zur Bahn gerichteten Magnetfeld mit einer Feldstärke von 0,325 T befindet. a) Berechnen Sie den Radius der Bahn. b) Berechnen Sie die Frequenz und die Periode der Kreisbewegung.

23.12 •• Ein Proton, ein Deuteron und ein Alphateilchen bewegen sich auf Kreisbahnen, die alle den gleichen Radius haben und sich in einem homogenen Magnetfeld befinden. Die Ladung des Deuterons ist gleich der Ladung des Protons, die Ladung des Alphateilchens ist doppelt so groß. Außerdem sei $m_\alpha = 2m_d = 4m_p$. Vergleichen Sie a) die Geschwindigkeiten, b) die kinetischen Energien und c) die Beträge der Drehimpulse bezüglich der Bahnmittelpunkte der drei Teilchen.

23.13 •• Ein Teilchenstrahl mit der Geschwindigkeit v tritt in ein homogenes Magnetfeld \mathbf{B} ein, das in $+x$ -Richtung zeigt. Die x -Komponente der Verschiebung eines Teilchens ist gegeben durch $2\pi(m/|q\mathbf{B}|)v \cos \theta$, wobei θ der Winkel ist, den v mit \mathbf{B} einschließt. Zeigen Sie, dass der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens dann in dieselbe Richtung zeigt wie beim Eintritt in das Feld.

Die auf geladene Teilchen wirkende magnetische Kraft

23.14 • Ein Geschwindigkeitsfilter arbeitet mit einem 0,28 T starken Magnetfeld senkrecht zu einem 0,46 MV/m starken elektrischen Feld. a) Wie schnell muss sich ein Teilchen bewegen, um das Filter ohne Ablenkung zu durchqueren? b) Protonen und c) Elektronen welcher Energie können das Filter unabgelenkt durchqueren?

23.15 •• Es gibt zwei stabile Chlorisotope, ^{35}Cl und ^{37}Cl . Eine Mischung einfach ionisierter Chlormoleküle in der Gasphase soll mithilfe eines Massenspektrometers in die Isotopenanteile getrennt werden. Das Spektrometer arbeitet mit einem Magnetfeldstärke von 1,2 T. Welche Beschleunigungsspannung muss mindestens anliegen, damit die räumliche Trennung der Isotope nach dem Durchlaufen der Halbkreisbahn 1,4 cm beträgt?

23.16 •• Ein Zyklotron zur Beschleunigung von Protonen arbeitet mit einem Magnetfeld von 1,4 T und hat einen Radius von 0,70 m. a) Geben Sie die Zyklotronfrequenz an. b) Berechnen Sie die kinetische Energie der Protonen beim Austritt aus dem Zyklotron. c) Wie ändern sich Ihre Ergebnisse, wenn Sie Deuteronen anstelle von Protonen betrachten?

23.17 •• Zeigen Sie: Der Bahnradius eines geladenen Teilchens in einem Zyklotron ist proportional zur Wurzel aus der Anzahl der absolvierten Umläufe.

Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment, magnetische Momente

23.18 • Ein elektrischer Leiter hat die Form eines Quadrats mit der Seitenlänge $l = 6,0$ cm und liegt in der x - y -Ebene. Durch

den Leiter fließt ein Strom $I = 2,5$ A, es herrscht ein äußeres homogenes Magnetfeld mit einer Stärke von 0,30 T. Geben Sie den Betrag des Drehmoments an, das auf den Leiter wirkt, wenn das Magnetfeld a) in $+z$ -Richtung und b) in $+x$ -Richtung zeigt.

23.19 • Ein elektrischer Leiter hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $l = 8,0$ cm und liegt in der x - y -Ebene. Durch den Leiter fließt ein Strom $I = 2,5$ A, es herrscht ein äußeres homogenes Magnetfeld mit einer Stärke von 0,30 T. Geben Sie den Betrag des Drehmoments an, das auf den Leiter wirkt, wenn das Magnetfeld a) in $+z$ -Richtung und b) in $+x$ -Richtung zeigt.

23.20 •• Eine Leiterschleife besteht aus zwei Halbkreisbögen, verbunden durch gerade Abschnitte (Abbildung 23.32). Der innere Radius ist 0,30 m, der äußere 0,50 m. Durch die Schleife fließt (im äußeren Bogen in Uhrzeigerrichtung) ein Strom $I = 1,5$ A. Geben Sie das magnetische Moment der Leiterschleife an.

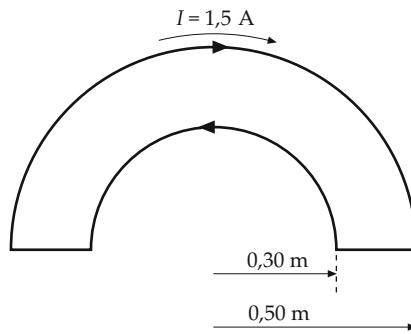


Abbildung 23.32 Zu Aufgabe 23.20.

23.21 •• Ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . a) Zeigen Sie, dass der Mittelwert des Stroms, der durch die Bewegung des Teilchens erzeugt wird, gegeben ist durch $I = q\omega/(2\pi)$ und dass der Betrag des magnetischen Moments $\mu = \frac{1}{2}q\omega r^2$ ist. b) Zeigen Sie, dass der Betrag des Drehimpulses $L = mr^2\omega$ ist und dass die Beziehung zwischen den Vektoren des magnetischen Moments und des Drehimpulses $\mu = (\frac{1}{2}q/m)\mathbf{L}$ lautet; \mathbf{L} ist der Drehimpuls bezüglich des Mittelpunkts der Bahn.

23.22 ••• Gegeben ist ein nichtleitender Hohlzylinder mit der Länge l , dem Außenradius r_a und dem Innenradius r_i (Abbildung 23.33), der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Längsachse dreht. In der Zylinderschale herrscht eine homogene Raumladungsdichte ρ . Leiten Sie einen Ausdruck für das magnetische Moment des Hohlzylinders her.

23.23 ••• An der Oberfläche einer Kugelschale mit dem Radius r herrscht eine homogene Flächenladungsdichte σ . Die Kugel rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Durchmesser. Geben Sie einen Ausdruck für das magnetische Moment der rotierenden Kugelschale an.

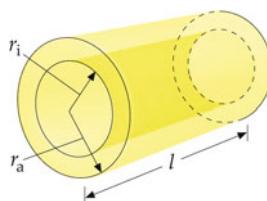


Abbildung 23.33 Zu Aufgabe 23.22

Der Hall-Effekt

23.24 • Ein 2,00 cm breiter und 0,100 cm dicker Metallstreifen wird von einem Strom mit einer Stärke von 20,0 A durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld von 2,00 T (Abbildung 23.34). Es wird eine Hall-Spannung von 4,27 mV gemessen. Berechnen Sie a) die Driftgeschwindigkeit der freien Elektronen und b) deren Anzahldichte im Leiter. c) Befindet sich Punkt a oder Punkt b auf höherem Potenzial? Begründen Sie Ihre Antwort.

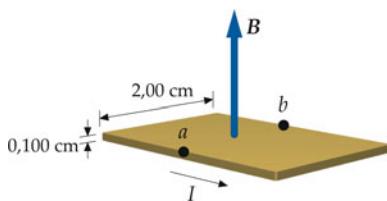


Abbildung 23.34 Zu Aufgabe 23.24.

23.25 •• Eine Anwendung aus der Biologie: Blut enthält geladene Teilchen (Ionen), sodass fließendes Blut eine Hall-Spannung über dem Durchmesser einer Ader hervorrufen kann. Die Fließgeschwindigkeit des Bluts in einer großen Arterie mit einem Durchmesser von 0,85 cm sei maximal 0,60 m/s. Ein Abschnitt der Arterie befindet sich in einem Magnetfeld von 0,20 T. Welche Potenzialdifferenz baut sich dort maximal über dem Durchmesser der Ader auf?

23.26 •• Der Hall-Koeffizient R_H , eine Eigenschaft von Leitern (ähnlich dem spezifischen Widerstand), ist definiert gemäß $R_H = E_y / (j_x B_z)$ mit j_x als x -Komponente der Stromdichte im Material, B_z als z -Komponente der Magnetfeldstärke und E_y als y -Komponente des resultierenden Hall-Felds. Zeigen Sie, dass der Hall-Koeffizient gleich $1 / [(n/V) q]$ ist. (q ist die Ladung pro

Ladungsträger, also $-e$ für Elektronen, und n/V deren Anzahl dichte. Die Hall-Koeffizienten einwertiger Metalle wie Kupfer, Silber und Natrium sind folglich negativ.)

Allgemeine Aufgaben

23.27 • Ein Alphateilchen (Ladung $+2e$) bewegt sich in einem Magnetfeld von 0,10 T auf einer Kreisbahn mit einem Radius von 0,50 m. Berechnen Sie a) die Periode, b) den Betrag der Geschwindigkeit und c) die kinetische Energie (in Elektronenvolt) des Teilchens. Für die Masse des Teilchens setzen Sie $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$ kg ein.

23.28 •• Ein langer, dünner Stabmagnet mit dem magnetischen Moment μ parallel zu seiner Längsachse ist in der Mittereibungsfrei gelagert und wird als Kompassnadel verwendet. In einem horizontal orientierten Magnetfeld \mathbf{B} richtet sich die Nadel an den Feldlinien aus. Zeigen Sie, dass die Nadel nach einer Auslenkung um den kleinen Winkel θ mit der Frequenz $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|\mu| |\mathbf{B}| / I}$ um ihre Gleichgewichtslage schwingt. I ist das Trägheitsmoment bezüglich des Lagers.

23.29 •• Ein 20 m langer, leitfähiger Draht ist parallel zur y -Achse ausgerichtet und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s in $+x$ -Richtung. Die Anordnung befindet sich in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = 0,50 \text{ T} \hat{z}$. a) Durch die magnetische Kraft bewegen sich die Elektronen so lange zu einem Ende des Drahts (wodurch das andere Ende eine positive Ladung erhält), bis die Kraft des durch die Ladungstrennung erzeugten elektrischen Felds die magnetische Kraft kompensiert. Berechnen Sie Betrag und Richtung dieses elektrischen Felds im stationären Zustand. b) Welches Ende des Drahts ist positiv geladen und welches negativ? c) Der bewegte Leiter sei 2,0 m lang. Welche Potenzialdifferenz baut sich durch das in Teilaufgabe a berechnete elektrische Feld zwischen den Enden des Leiters auf?

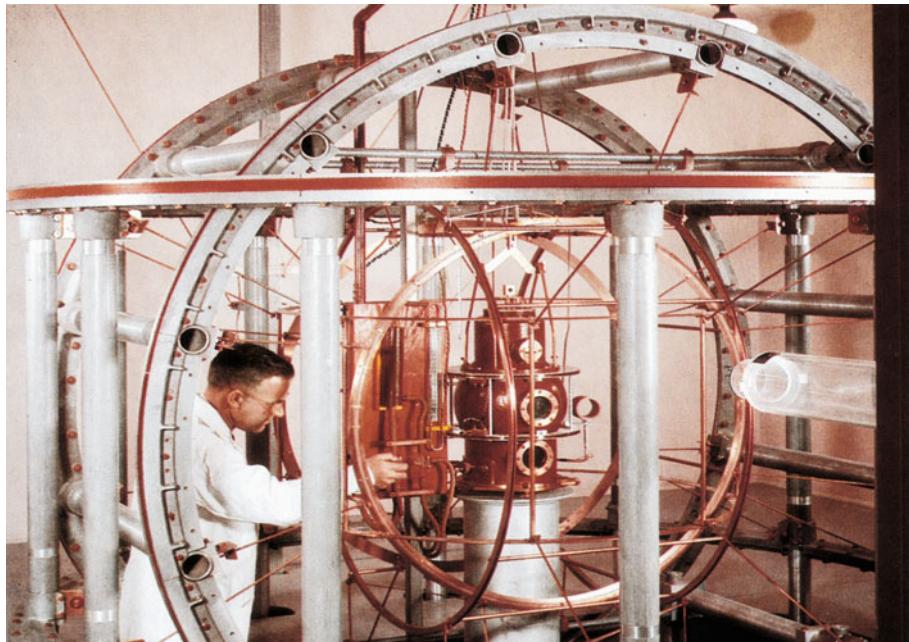
23.30 ••• Das magnetische Moment μ eines kleinen Stabmagneten schließt einen Winkel θ mit der x -Achse ein. Der Magnet befindet sich in einem *inhomogenen* Magnetfeld $\mathbf{B} = B_x(x) \hat{x} + B_y(y) \hat{y}$. Zeigen Sie, dass auf den Magneten die resultierende Kraft

$$\mathbf{F} = \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x} \hat{x} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \hat{y}$$

wirkt. Verwenden Sie die Beziehungen $F_x = -\partial E_{\text{pot}} / \partial x$, $F_y = -\partial E_{\text{pot}} / \partial y$ und $F_z = -\partial E_{\text{pot}} / \partial z$.

Quellen des Magnetfelds

24



Diese großen Helmholtz-Spulen im Kettering Magnetics Laboratory der Oakland University dienen zum Ausgleich des Magnetfelds der Erde und zur Erzeugung eines homogenen Magnetfelds in einem kleinen Raumbereich, in dem magnetische Eigenschaften der Materie untersucht werden. (© Bob Williamson/Oakland University, Rochester, Michigan.)

?

Wissen Sie, wie man die Stärke des Magnetfelds einer stromdurchflossenen Spule berechnet? (Siehe Beispiel 24.2.)

24.1 Das Magnetfeld bewegter Punktladungen	874
24.2 Das Magnetfeld von Strömen: Das Biot-Savart'sche Gesetz	875
24.3 Der Gauß'sche Satz für Magnetfelder	889
24.4 Das Ampère'sche Gesetz	889
24.5 Magnetismus in Materie	894
Zusammenfassung	905
Aufgaben	907

Wie Sie aus Kapitel 23 wissen, kennt man die besonderen Eigenschaften von Permanentmagneten schon seit rund 1000 Jahren. Den Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus entdeckte aber erst 1819 Hans Christian Ørsted, der beobachtete, dass eine Kompassnadel von einem elektrischen Strom abgelenkt wird. Bereits einen Monat später berichteten Jean-Baptiste Biot und Félix Savart über ihre Messungen des Drehmoments, das ein Magnet in der Nähe eines langen, stromführenden Drahts erfährt. Ihre Ergebnisse analysierten sie anhand des von jedem einzelnen Stromelement erzeugten Magnetfelds. André-Marie Ampère wies in weiteren Experimenten nach, dass umgekehrt auch auf Stromelemente in Anwesenheit eines Magnetfelds eine Kraft wirkt und dass zwei Stromelemente aufeinander eine Kraft ausüben.

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst das von einer einzelnen bewegten Ladung und von bewegten Ladungen in einem Stromelement erzeugte Magnetfeld. Dann berechnen wir, welche Magnetfelder von einigen allgemeinen stromführenden Anordnungen bewirkt werden: einem geraden Leiterabschnitt, einem langen, geraden Draht, einer Leiterschleife und einer Zylinderspule. Im Anschluss diskutieren wir das Ampère'sche Gesetz. Abschließend besprechen wir magnetische Eigenschaften der Materie.

24.1 Das Magnetfeld bewegter Punktladungen

Eine Punktladung q , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt ($v \ll c$ vorausgesetzt), erzeugt im Raum ein Magnetfeld \mathbf{B} , das senkrecht zu v und dem Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ steht:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (24.1)$$

MAGNETFELD EINER BEWEGTEN PUNKTLADUNG

Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ (Abbildung 24.1) zeigt von der Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, auf den Punkt P des Felds; μ_0 ist ein Proportionalitätsfaktor, die **magnetische Feldkonstante** oder **Permeabilität des Vakuums**. Ihr exakter Wert ist definiert als

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}. \quad (24.2)$$

(Achten Sie darauf, die Konstante μ_0 nicht mit der Komponente μ des magnetischen Moments μ zu verwechseln.) Die Einheit von μ_0 bewirkt, dass B die Einheit Tesla erhält, wenn q in Coulomb, v in Metern pro Sekunde und r in Metern angegeben ist. Die Einheit N/A^2 ergibt sich wegen $1 \text{T} = 1 \text{N} \cdot \text{s} / (\text{C} \cdot \text{m})$. Den Faktor $1 / (4\pi)$ haben wir in Gleichung 24.1 als Konvention eingeführt, damit im Ampère'schen Gesetz (Gleichung 24.16), das wir in Abschnitt 24.4 besprechen wollen, der Faktor 4π nicht auftaucht. Beispiel 24.1 verdeutlicht, dass die Magnetfelder bewegter Punktladungen sehr schwach sind.

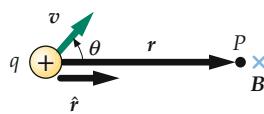


Abbildung 24.1 Eine positive, sich mit der Geschwindigkeit v bewegende Punktladung q erzeugt ein Magnetfeld \mathbf{B} in einem Punkt P im Raum. Das Magnetfeld in P zeigt in die Richtung von $v \times \hat{\mathbf{r}}$; dabei ist v die Geschwindigkeit der Punktladung und $\hat{\mathbf{r}}$ der Einheitsvektor, der von der Ladung nach P zeigt. Das Feld ändert sich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Ladung und P und ist proportional zum Sinus des Winkels zwischen v und $\hat{\mathbf{r}}$. (Das blaue Kreuz neben P zeigt, dass das Feld in die Papierebene hinein zeigt.)

Beispiel 24.1: Das Magnetfeld einer Punktladung

Ein Massenpunkt mit der Ladung $q = 4,5 \mu\text{C}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = (3,0 \cdot 10^3 \text{ m/s}) \hat{x}$ parallel zur x -Achse in der Ebene mit $z = 0$ entlang der Linie mit $y = 3,0 \text{ m}$. Wie groß ist das von dieser Ladung im Koordinatenursprung erzeugte Magnetfeld, wenn sich die Ladung im Punkt ($x = -4,0 \text{ m}$, $y = 3,0 \text{ m}$) befindet (Abbildung 24.2)?

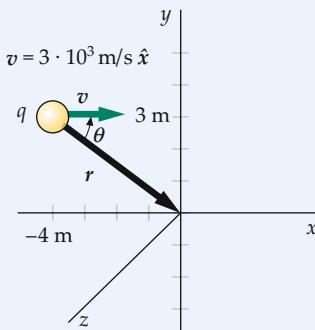


Abbildung 24.2 Koordinatensystem der bewegten Punktladung.

Problembeschreibung: Das Magnetfeld einer bewegten Punktladung ist durch Gleichung 24.1 gegeben.

Lösung: 1. Das Magnetfeld ist gegeben durch Gleichung 24.1:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \text{ mit } v = v \hat{x}$$

2. Berechnen Sie \mathbf{r} und $|\mathbf{r}|$ aus Abbildung 24.2; schreiben Sie $\hat{\mathbf{r}}$ in Form der Komponenten entlang \hat{x} und \hat{y} :

$$\mathbf{r} = 4,0 \text{ m} \hat{x} - 3,0 \text{ m} \hat{y}$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{4,0^2 + 3,0^2} \text{ m} = 5,0 \text{ m}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{4,0 \text{ m} \hat{x} - 3,0 \text{ m} \hat{y}}{5,0 \text{ m}} = 0,80 \hat{x} - 0,60 \hat{y}$$

3. Setzen Sie diese Ergebnisse in Gleichung 24.1 ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q (v \hat{x}) \times (0,80 \hat{x} - 0,60 \hat{y})}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q (-0,60v)}{r^2} \hat{z} \\ &= -(10^{-7} \text{T m A}^{-1}) \\ &\quad \cdot \frac{(4,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}) \cdot (0,60) \cdot (3,0 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1})}{(5,0 \text{ m})^2} \hat{z} \\ &= [-3,2 \cdot 10^{-14} \text{ T} \hat{z}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Sie können \mathbf{B} auch berechnen, ohne den Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ explizit angeben zu müssen. Aus Abbildung 24.2 entnehmen wir, dass $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$ in die negative z -Richtung zeigt. Der Wert von $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}$ ist außerdem gleich $|\mathbf{v}| \sin \theta$ mit $\sin \theta = (3,0 \text{ m}) / (5,0 \text{ m}) = 0,60$. Fügen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}} = |\mathbf{v}| \sin \theta (-\hat{\mathbf{z}}) = -v(0,60)\hat{\mathbf{z}}$ in Übereinstimmung mit unserem Resultat in Zeile 3 von Schritt 3.

Übung 24.1: Berechnen Sie für die gleiche Situation das Magnetfeld auf der y -Achse bei $y = 3,0 \text{ m}$ bzw. $y = 6,0 \text{ m}$. ▶

24.2 Das Magnetfeld von Strömen: Das Biot-Savart'sche Gesetz

Im vorangehenden Kapitel haben wir unsere Diskussion von Kräften, die auf Punktladungen wirken, auf Kräfte erweitert, die auf Stromelemente wirken. Dazu wurde $q\mathbf{v}$ durch das Stromelement $I d\mathbf{l}$ ersetzt (siehe Gleichung 23.5). In gleicher Weise wollen wir nun für das von einem Stromelement erzeugte Magnetfeld vorgehen. Aus Gleichung 24.1 ergibt sich mit $q\mathbf{v} = I d\mathbf{l}$ das Magnetfeld $d\mathbf{B}$, das von einem Stromelement $I d\mathbf{l}$ hervorgerufen wird:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (24.3)$$

BIOT-SAVART'SCHES GESETZ

Diese als **Biot-Savart'sches Gesetz** bezeichnete Gleichung wurde unabhängig auch von Ampère hergeleitet. Sie ist wie Gleichung 24.1 dem Coulomb'schen Gesetz für das elektrische Feld einer Punktladung analog: Die Quelle des Magnetfelds ist eine bewegte Ladung $q\mathbf{v}$ oder ein Stromelement $I d\mathbf{l}$, die Quelle des elektrostatischen Felds ist eine ruhende Ladung q . Die Stärke des Magnetfelds nimmt quadratisch mit der Entfernung von der bewegten Ladung oder dem Stromelement ab, wie auch das elektrische Feld mit dem Quadrat des Abstands von der Punktladung schwächer wird. Deutlich verschieden sind allerdings die Richtungssaspekte der beiden Felder: Das elektrische Feld zeigt radial in Richtung $\hat{\mathbf{r}}$ von der Punktladung zum gegebenen Punkt des Felds (wenn die Punktladung positiv ist), das Magnetfeld hingegen steht senkrecht auf $\hat{\mathbf{r}}$ und \mathbf{v} (Punktladung) bzw. auf $\hat{\mathbf{r}}$ und $d\mathbf{l}$ (Stromelement $I d\mathbf{l}$). In einem Punkt, der sich auf der Achse eines Stromelements befindet (P_2 in Abbildung 24.3), erzeugt dieses Element kein Magnetfeld. (Aus Gleichung 24.3 folgt $d\mathbf{B} = 0$, wenn $d\mathbf{l}$ und $\hat{\mathbf{r}}$ parallel oder antiparallel sind.)

Will man das Magnetfeld berechnen, das vom insgesamt in einem Stromkreis fließenden Strom erzeugt wird, so ermittelt man zunächst mithilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes die Felder zu jedem Stromelement. Anschließend summiert (integriert) man

über alle Stromelemente im Stromkreis. Abgesehen von Stromkreisen mit sehr einfacher Geometrie ist eine solche Berechnung kompliziert.

Magnetfelder von Leiterschleifen

In Abbildung 24.4 sehen Sie ein Stromelement $I d\mathbf{l}$ einer Leiterschleife mit dem Radius r_{LS} ; der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ zeigt vom Stromelement zum Mittelpunkt der Schleife. Das von diesem Element im Mittelpunkt der Schleife erzeugte Magnetfeld ist entlang der Achse der Schleife gerichtet, seine Komponente (die wir erhalten, wenn wir von beiden Seiten der Gleichung 24.3 den Betrag bilden) ist gegeben durch

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\mathbf{l}| \sin \theta}{r_{LS}^2} \quad (24.4)$$

mit θ als Winkel zwischen $d\mathbf{l}$ und $\hat{\mathbf{r}}$. Für alle Stromelemente gilt $\theta = 90^\circ$ und folglich $\sin \theta = 1$. Um das von allen Stromelementen gemeinsam erzeugte Magnetfeld zu berechnen, integrieren wir Gleichung 24.4 über alle Stromelemente in der

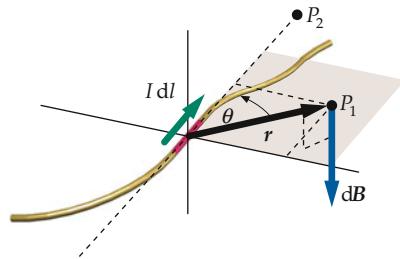


Abbildung 24.3 Das Stromelement $I d\mathbf{l}$ erzeugt im Punkt P_1 ein Magnetfeld $d\mathbf{B}$, das in Richtung von $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}$ zeigt und daher sowohl zu $d\mathbf{l}$ als auch zu \mathbf{r} senkrecht ist. Im Punkt P_2 , der in Richtung von $d\mathbf{l}$ liegt, ist das Magnetfeld null.

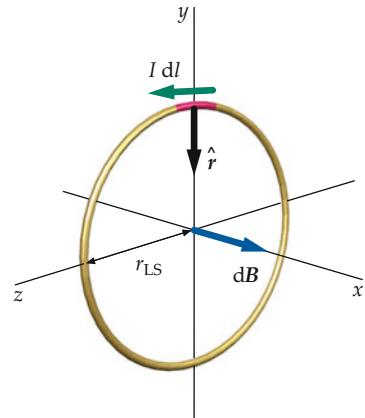


Abbildung 24.4 Stromelement zur Berechnung des Magnetfelds im Mittelpunkt einer kreisrunden Leiterschleife. Jedes Element erzeugt ein Magnetfeld, das in Richtung der Achse der Schleife zeigt.

Schleife. Da I und r_{LS} für alle Elemente gleich sind, erhalten wir

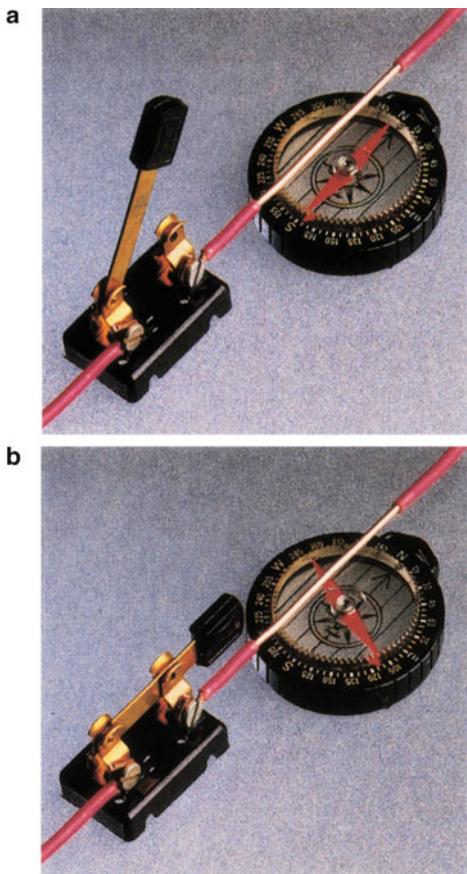
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{LS}^2} \oint |dl|.$$

Das Integral von $|dl|$ um die Schleife ist gleich der Gesamtlänge $2\pi r_{LS}$, dem Umfang der Schleife. Insgesamt erzeugt die Leiterschleife das Magnetfeld

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{LS}^2} 2\pi r_{LS} = \frac{\mu_0 I}{2 r_{LS}}. \quad (24.5)$$

MAGNETFELD IM MITTELPUNKT EINER LEITERSCHLEIFE

Übung 24.2: Welcher Strom muss in einer kreisrunden Leiterschleife mit Radius 8,0 cm fließen, damit im Mittelpunkt der Schleife ein 0,20 mT starkes Magnetfeld herrscht? ▶



Das Experiment von Ørsted. a) Wenn kein Strom durch den Draht fließt, zeigt die Kompassnadel nach Norden. b) Führt der Draht einen Strom, so wird die Nadel in Richtung des aufgebauten Magnetfelds abgelenkt. Im gezeigten Fall fließt der Strom von links unten nach rechts oben. Um den Draht in der Aufnahme deutlicher sichtbar zu machen, wurde die Isolierung entfernt. (© 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs.)

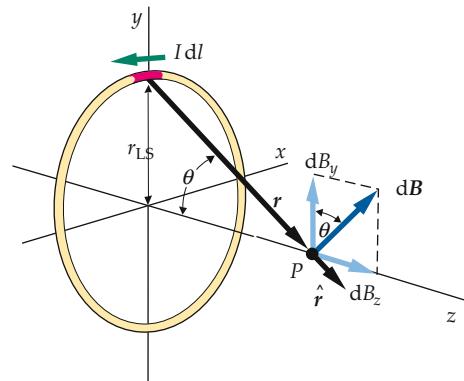


Abbildung 24.5 Geometrie zur Berechnung des Magnetfelds in einem Punkt auf der Achse einer kreisrunden Leiterschleife.

In Abbildung 24.5 ist die Geometrie zur Berechnung des Magnetfelds in einem Punkt P auf der Achse einer kreisrunden Leiterschleife skizziert; der Abstand zwischen P und dem Mittelpunkt der Schleife sei gleich z . Betrachten wir zunächst das kleine (rot gekennzeichnete) Stromelement an der Oberseite der Schleife. Hier gilt wie für die gesamte Schleife: Idl zeigt in Richtung der Tangente an die Schleife und steht senkrecht auf dem Vektor r , der das Stromelement mit Punkt P verbindet. Die Richtung des von diesem Stromelement hervorgerufenen Magnetfelds dB entnehmen Sie der Skizze: senkrecht zu \hat{r} und auch zu Idl . Der Wert von dB ist

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |dl \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{(z^2 + r_{LS}^2)}. \quad (24.6)$$

Wir machen uns hier zunutze, dass $r^2 = z^2 + r_{LS}^2$ ist und dass dl und \hat{r} senkrecht aufeinander stehen, weshalb gilt: $|dl \times \hat{r}| = dl$.

Bei der Summation über alle Stromelemente in der Schleife addieren sich die Komponenten senkrecht zur Achse der Schleife (wie dB_y in Abbildung 24.5) zu null; nur Komponenten dB_z , parallel zur Achse, bleiben übrig. Wir berechnen demnach nur die z -Komponente des Felds. Aus Abbildung 24.5 ergibt sich

$$\begin{aligned} dB_z &= |dB| \sin \theta = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{(z^2 + r_{LS}^2)} \right) \cdot \left(\frac{r_{LS}}{\sqrt{z^2 + r_{LS}^2}} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS} dl}{(z^2 + r_{LS}^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Um das von der gesamten Leiterschleife hervorgerufene Feld zu ermitteln, integrieren wir dB_z über die Schleife:

$$B_z = \oint dB_z = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS}}{(z^2 + r_{LS}^2)^{\frac{3}{2}}} dl.$$

Da sich bei der Summation über die Elemente der Schleife wieder z noch r_{LS} ändert, dürfen wir diese Größen vor das Integral ziehen:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS}}{(z^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} \oint dl.$$

Das Integral von dl um die Schleife ist gleich $2\pi r_{LS}$. Wir erhalten daher

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r_{LS}}{(z^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} 2\pi r_{LS} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 I}{(z^2 + r_{LS}^2)^{3/2}}. \quad (24.6)$$

MAGNETFELD AUF DER ACHSE EINER LEITERSCHLEIFE

Übung 24.3: Zeigen Sie, dass sich Gleichung 24.6 im Mittelpunkt der Leiterschleife auf $B_z = \mu_0 I / 2 r_{LS}$ (Gleichung 24.5) reduziert. ◀

Weit von der Schleife entfernt ist $|z|$ viel größer als r_{LS} , und es wird $(z^2 + r_{LS}^2)^{3/2} \approx (z^2)^{3/2} = |z|^3$. Es gilt dann

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I\pi r_{LS}^2}{|z|^3}$$

oder

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|z|^3} \quad (24.7)$$

MAGNETFELD AUF DER ACHSE EINES MAGNETISCHEN DIPOLS

mit $\mu = I\pi r_{LS}^2$ als magnetischem Moment der Leiterschleife. Machen Sie sich die Ähnlichkeit dieser Beziehung mit dem Ausdruck für das elektrische Feld auf der Achse eines elektrischen Dipols mit dem Dipolmoment φ (siehe Gleichung 18.10) bewusst:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\varphi}{|z|^3}.$$

Unser Resultat – eine Leiterschleife erzeugt in großer Entfernung ein magnetisches Dipolfeld – gilt, obwohl wir es hier nicht nachgewiesen haben, allgemein für jeden Punkt, ob er sich nun auf der Achse der Schleife befindet oder nicht. Eine Leiterschleife verhält sich demnach wie ein magnetischer Dipol: Wird

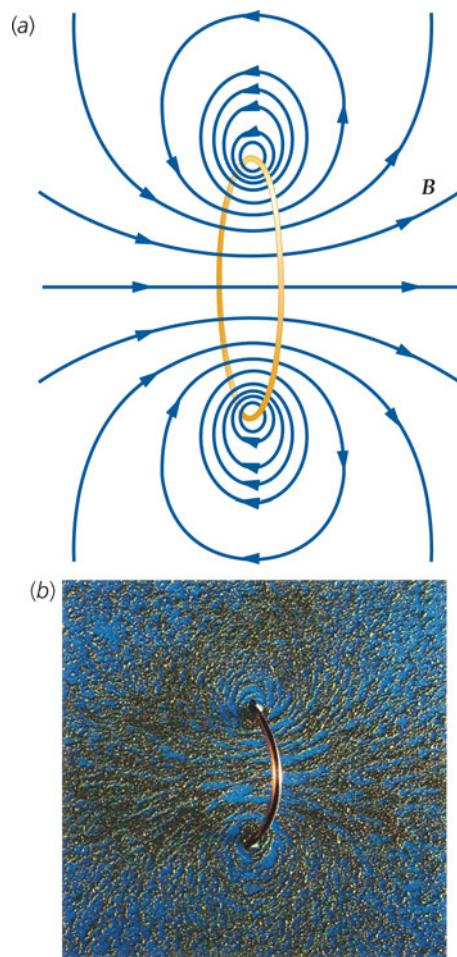


Abbildung 24.6 a) Magnetfeldlinien einer kreisrunden Leiterschleife. b) Magnetfeldlinien eines stromdurchflossenen Rings, sichtbar gemacht mithilfe von Eisenfeilspänen. (© 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs.)

sie in ein äußeres Magnetfeld gebracht (wie in Kapitel 23 erläutert), so wirkt auf sie ein Drehmoment $\mu \times B$, und sie ruft in weit von ihr entfernten Punkten ein magnetisches Dipolfeld hervor. In Abbildung 24.6 sehen Sie die Magnetfeldlinien einer Leiterschleife. In Beispiel 24.2 wird das Magnetfeld einer Leiterschleife mit n Windungen betrachtet. In Beispiel 24.3 wird dann ein Stabmagnet im Feld dieser Leiterschleife untersucht.

Beispiel 24.2: B auf der Achse einer Leiterschleife mit mehreren Windungen

Eine mehrfach schraubenartig gewundene Leiterschleife mit kreisförmigem Querschnitt und einem Radius von 5,00 cm hat zwölf Windungen und liegt in der x - y -Ebene ($z = 0$) mit ihrem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Die Leiterschleife wird von einem Strom von 4,00 A durchflossen, der so gerichtet ist, dass das magnetische Moment der Schleife in Richtung der $+z$ -Achse zeigt. Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 24.6 das Magnetfeld auf der z -Achse bei a) $z = 0$, b) $z = 15,0$ cm und c) $z = 3,00$ m. d) Wenden Sie Gleichung 24.7 zur Berechnung des Magnetfelds auf der z -Achse bei $z = 3,00$ m an.

Problembeschreibung: Das von einer Leiterschleife mit n Windungen erzeugte Magnetfeld ist n -mal so groß wie das von einer einzelnen Windung erzeugte Feld. a) Bei $z = 0$ ist gemäß Gleichung 24.5 $B = \frac{1}{2}\mu_0 n I / r_{LS}$. Gleichung 24.6 gibt das vom Strom in einer Windung hervorgerufene Magnetfeld auf der Achse an. In großer Entfernung von der Schleife, wie in Aufgabenteil c, berechnen wir das Feld mithilfe von Gleichung 24.7. Da wir n Windungen betrachten, ist das magnetische Moment hier gleich $\mu = nIA$ mit $A = \pi r_{LS}^2$.

Lösung:
Teilaufgabe a

Im Mittelpunkt der Leiterschleife ist B_z n -mal so groß wie der durch Gleichung 24.5 für eine Windung gegebene Wert:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 n I}{2 r_{LS}} \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \frac{(12) \cdot (4,00 \text{ A})}{2 \cdot (0,0500 \text{ m})} \\ &= [6,03 \cdot 10^{-4} \text{ T}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Auf der Achse ist B_z gleich dem n -fachen des durch Gleichung 24.6 gegebenen Werts:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 n I}{(z^2 + r_{LS}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \frac{2\pi \cdot (0,0500 \text{ m})^2 \cdot (12) \cdot (4,00 \text{ A})}{((0,1500 \text{ m})^2 + (0,0500 \text{ m})^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= [1,91 \cdot 10^{-5} \text{ T}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Wenden Sie wieder Gleichung 24.6 an:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 n I}{(z^2 + r_{LS}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \frac{2\pi \cdot (0,0500 \text{ m})^2 \cdot (12) \cdot (4,00 \text{ A})}{((3,00 \text{ m})^2 + (0,0500 \text{ m})^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= [2,79 \cdot 10^{-9} \text{ T}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe d

1. 3,00 m sind groß gegen den Radius der Schleife, $r_{LS} = 0,0500$ m. Sie können deshalb Gleichung 24.7 für das Magnetfeld weit von der Schleife entfernt anwenden:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|z|^3}$$

2. Das magnetische Moment der Leiterschleife ist gleich nIA :

$$\begin{aligned} \mu &= nI\pi r_{LS}^2 = (12) \cdot (4,00 \text{ A}) \cdot \pi \cdot (0,0500 \text{ m})^2 \\ &= 0,377 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

3. In den Ausdruck für B_z aus Schritt 1 setzen Sie nun $\mu = 0,377 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ und $z = 3,00 \text{ m}$ ein:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu}{|z|^3} = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \frac{2 \cdot (0,377 \text{ A} \cdot \text{m}^2)}{(3,00 \text{ m})^3} \\ &= [2,79 \cdot 10^{-9} \text{ T}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In Teilaufgabe d ist $z = 60 r_{LS}$, weshalb wir eine Näherung verwenden dürfen, die für $z \gg r_{LS}$ gilt. Das Ergebnis weicht vom tatsächlichen, in Teilaufgabe c berechneten Wert um weniger als 1/279 ab. ■

Beispiel 24.3: Auf einen Stabmagneten wirkendes Drehmoment**ZUR ÜBUNG**

Ein kleiner Stabmagnet hat ein magnetisches Moment mit einem Betrag von $0,0300 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ und wird so in die Mitte der Leiterschleife aus Beispiel 24.2 gebracht, dass der Vektor seines magnetischen Moments in der Ebene mit $z = 0$ liegt und mit der $+z$ -Achse einen Winkel von 30° einschließt. Berechnen Sie das auf den Stabmagneten wirkende Drehmoment; nehmen Sie dazu B im Bereich des Magneten als konstant an.

Problembeschreibung: Das auf den Magneten wirkende Drehmoment ist gegeben als $\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B}$. Da \mathbf{B} in positive z -Richtung zeigt, zeigt das Produkt $\mu \times \mathbf{B}$ in negative x -Richtung, wie Sie mithilfe der Rechte-Hand-Regel leicht nachprüfen können (Abbildung 24.7).

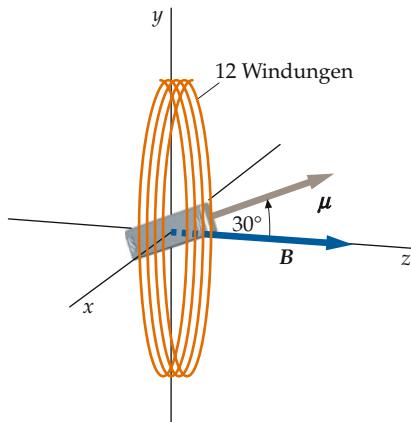


Abbildung 24.7 Darstellung des Stabmagneten in der Mitte der Leiterschleife.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments aus der Beziehung $\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B}$.

2. Geben Sie mithilfe eines Einheitsvektors die Richtung an.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$|\mathbf{M}| = 9,04 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.

$$\mathbf{M} = -(9,04 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}) \hat{x}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Drehmoment sollte bestrebt sein, das magnetische Moment am Magnetfeld auszurichten. Unser Drehmomentvektor, der in $-x$ -Richtung zeigt, entspricht dieser Erwartung.

Das Magnetfeld im Inneren einer stromdurchflossenen Spule

Eine **Zylinderspule** ist ein fest zu einer Spirale mit eng beieinander liegenden Windungen aufgewickelter Draht (Abbildung 24.8); solange keine Verwechslungen auftreten können, werden wir im Folgenden einfach von einer **Spule** sprechen. Fließt durch die Spule ein Strom, so baut sich in dem von den Leiterschleifen umschlossenen Raum ein starkes, homogenes Magnetfeld auf. Die Spule spielt daher die gleiche Rolle in der Magnetostatik wie der Plattenkondensator in der Elektrostatis, zwischen dessen Platten ein starkes, homogenes elektrisches Feld entsteht. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule gleicht im Wesentlichen dem Magnetfeld von n identischen, nebeneinander angeordneten Leiterschleifen. In Abbildung 24.9 sehen Sie die Magnetfeldlinien zweier solcher Schleifen.

Abbildung 24.10a zeigt die Magnetfeldlinien einer dicht gewickelten Spule. Innerhalb der Spule und weit von ihren Enden entfernt sind die Feldlinien annähernd parallel zur Achse. Der

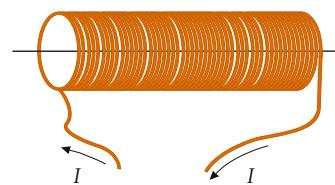


Abbildung 24.8 Eine dicht gewickelte Spule kann man sich als eine Reihe nahe beieinander liegender Leiterschleifen vorstellen, die jeweils vom gleichen Strom durchflossen werden. Im Inneren der Spule und weit von den Spulenenden entfernt wird ein homogenes Magnetfeld aufgebaut.

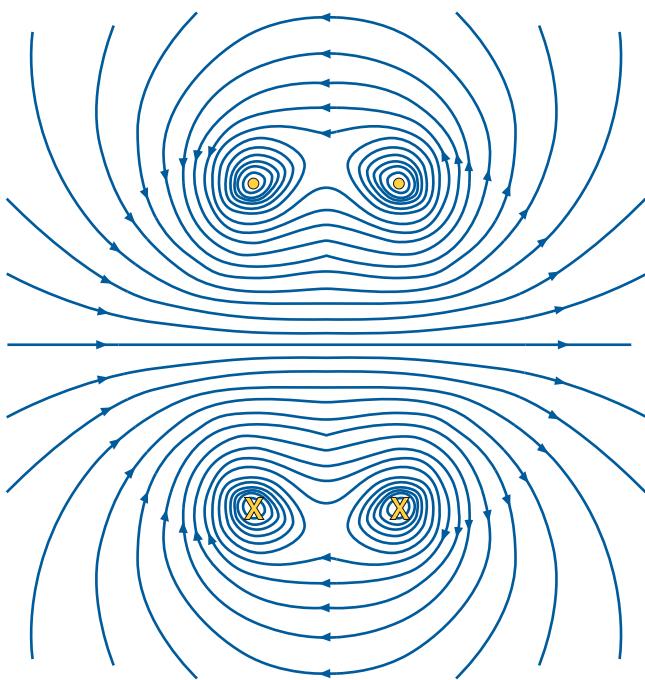


Abbildung 24.9 Magnetfeldlinien zweier koaxialer Leiterschleifen, die vom gleichen Strom durchflossen werden. Die Schnittpunkte der Leiterschleifen mit der Papierebene sind markiert: An den Kreuzen fließt der Strom in die Papierebene hinein, an den Punkten tritt er wieder aus. Im achsennahen Gebiet zwischen den Leiterschleifen überlagern die beiden Magnetfelder einander. Das resultierende Feld ist stark und bemerkenswert homogen. In den von der Achse weg zeigenden Gebieten ist das Feld verhältnismäßig schwach. Der Bereich, in dem das Feld homogen ist, wird maximal, wenn der Abstand zwischen den beiden Schleifenebenen gleich dem Radius der Schleifen ist.

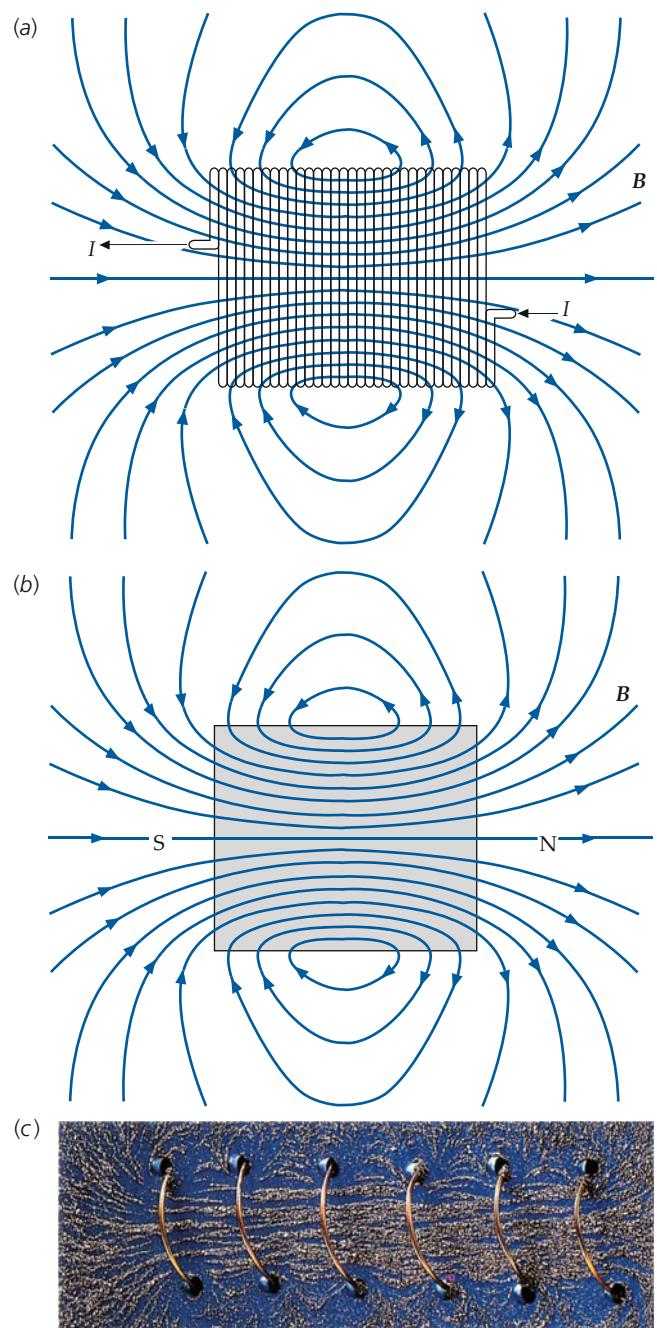


Abbildung 24.10 a) Magnetfeldlinien einer stromdurchflossenen Spule. Das Linienmuster stimmt mit dem eines Stabmagneten gleicher Gestalt überein (b). c) Magnetfeldlinien einer Spule, sichtbar gemacht mithilfe von Eisenfeilspänen.
(© 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs.)

Abstand zwischen ihnen ist gering und einheitlich; das zugehörige Feld ist folglich stark und homogen. Außerhalb der Spule (darüber und darunter) liegen die Feldlinien deutlich weniger dicht beieinander, und ihr Abstand wird umso größer, je weiter man sich von den Enden entfernt. Ein Vergleich mit Abbildung 24.10b zeigt, dass das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule mit demjenigen eines Stabmagneten gleicher Form übereinstimmt. In Abbildung 24.10c wurden die Magnetfeldlinien einer stromdurchflossenen Spule mithilfe von Eisenfeilspänen sichtbar gemacht. Beispiel 24.4 betrachtet das Magnetfeld einer langen, dicht gewickelten Spule.

Betrachten wir eine aus n Windungen bestehende Spule der Länge l , die von einem Strom I durchflossen wird. Als z -Achse wählen wir die Achse der Spule; das linke Ende der Spule liege bei $z = z_1$, das rechte Ende bei $z = z_2$ (Abbildung 24.14). Zu berechnen ist das Magnetfeld in einem Punkt P auf der z -Achse. In der Abbildung ist ein Abschnitt der Spule mit der Länge dz' im Abstand z' vom Ursprung hervorgehoben. Ist n/l die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit (die Dichte der Windungen), so enthält der Abschnitt $(n/l) dz'$ Windungen, in

denen jeweils ein Strom I fließt. Der Abschnitt kann folglich einer einzelnen Leiterschleife gleichgesetzt werden, die von einem Strom $dI = (n/l) I dz'$ durchflossen wird. Gleichung 24.6

Beispiel 24.4: Magnetfeld einer langen, dicht gewickelten Spule**ZUM VERSTÄNDNIS**

In diesem Abschnitt des Kapitels wurde festgestellt, dass das Magnetfeld einer langen, dicht gewickelten, stromdurchflossenen Spule in deren Innerem und weit von deren Enden entfernt homogen und parallel zur Achse der Spule gerichtet, außerhalb der Spule (oberhalb und unterhalb der Achse) jedoch null ist. Prüfen Sie diese Aussage nach. Modellieren Sie dazu die Spule als fest gepackten Stapel stromdurchflossener Ringe und zeichnen Sie die Feldlinien jedes einzelnen Rings (Abbildung 24.11).

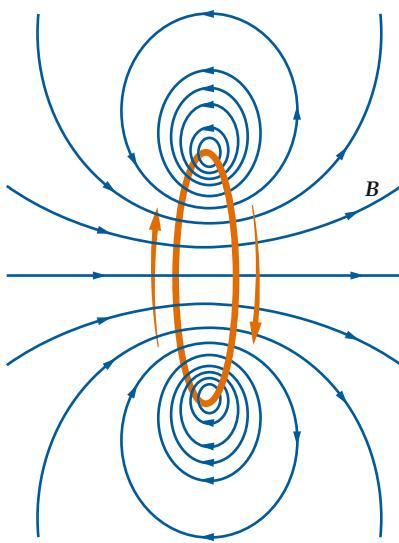


Abbildung 24.11 Darstellung des Magnetfelds eines Rings der Spule.

Problembeschreibung: In Abbildung 24.12 sehen Sie drei stromdurchflossene Ringe in gleichen Abständen als Modell dreier Windungen einer langen, dicht gewickelten Spule. Skizzieren Sie Richtung und relativen Betrag der Magnetfeldvektoren jeweils in Punkt A, B und C. Als Anhaltspunkt dient Ihnen das Feldlinienbild eines einzelnen Rings in Abbildung 24.11. Begründen Sie anhand Ihrer Skizze, dass die resultierenden Magnetfelder in A und B vom Betrag her gleich und parallel zur Achse der Spule ausgerichtet sind, während das Magnetfeld in C null ist.

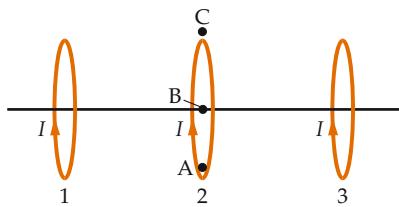


Abbildung 24.12 Anordnung von drei stromdurchflossenen Ringen.

Lösung: 1. Skizzieren Sie in Punkt A die Vektoren der Magnetfelder \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 und \mathbf{B}_3 , die von den Strömen in Ring 1, 2 bzw. 3 hervorgerufen werden (Abbildung 24.13). Orientieren Sie sich an Abbildung 24.11.

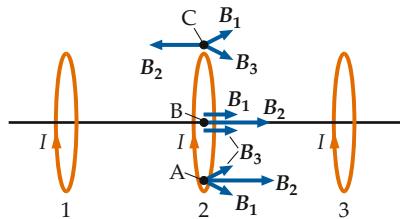


Abbildung 24.13 Anordnung der drei Ringe inklusive der Magnetfeldbeiträge der einzelnen Ringe in den Punkten A, B und C.

2. Das Magnetfeld ist umso stärker, je enger die Feldlinien beieinander liegen. Ein Blick auf Abbildung 24.11 zeigt, dass die Feldstärke von \mathbf{B}_2 (hervorgerufen von Ring 2) in Punkt A größer ist als in Punkt B:

Die Feldstärke von \mathbf{B}_2 (hervorgerufen von Ring 2) ist in Punkt A größer als in Punkt B. Da jedoch \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 und \mathbf{B}_3 in die gleiche Richtung zeigen, ist es trotzdem plausibel, dass die Stärke des resultierenden Felds in Punkt B ($\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3$) ungefähr so groß ist wie jene des resultierenden Felds in Punkt A.

3. Abbildung 24.11 zeigt weiter, dass das Magnetfeld in der Ebene des stromdurchflossenen Rings in Punkten außerhalb des Rings entgegengesetzt gerichtet ist wie in Punkten innerhalb des Rings:

In Punkt C zeigt \mathbf{B}_2 nach links, $(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3)$ nach rechts. Wenn jenseits der Ringe 1 und 3 weitere Windungen der Spule hinzukommen, erzeugen auch diese Magnetfelder in C, deren Vektorsumme nach rechts zeigt. Deshalb ist es plausibel, dass sich die Felder in C aufheben und die resultierende Feldstärke null ist.

Weitergedacht: Nur für Bereiche in der Mitte der Spule, also Windungen, die sich weit von beiden Enden entfernt befinden, kann man so argumentieren, wie es in diesem Beispiel vorgeführt wird. Stellen Sie sich vor, Ring 2 befände sich am rechten Ende der Spule; Ring 3 gäbe es dann nicht, und die drei Vektoren \mathbf{B}_3 in der Skizze würden wegfallen.

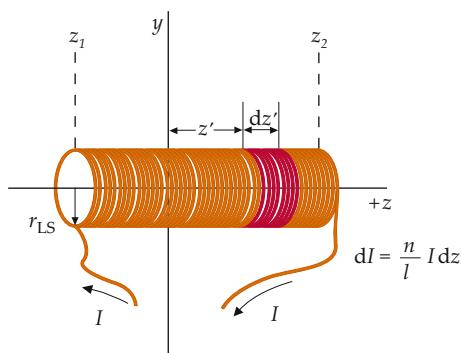


Abbildung 24.14 Schema zur Berechnung des Magnetfelds innerhalb einer Spule entlang deren Achse. Der Spulenabschnitt dz' enthält $n/l dz'$ Windungen mit n/l als Anzahl der Windungen pro Längeneinheit. Den Ausschnitt dz' kann man als einzelne Leiterschleife behandeln, die vom Strom $dI = (n/l) I dz'$ durchflossen wird.

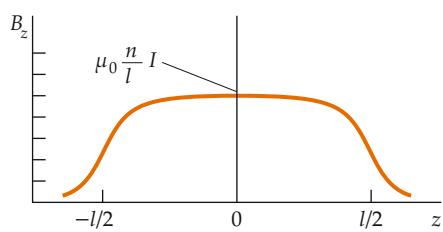


Abbildung 24.15 Magnetfeld im Inneren einer Spule auf deren Achse als Funktion der Position z . In hinreichend großer Entfernung von den Enden der Spule ist das Magnetfeld nahezu konstant. Die Länge l_{LS} dieser Spule ist zehnmal so groß wie ihr Radius r_{LS} .

gibt das Magnetfeld in einem Punkt auf der z -Achse an, das eine im Ursprung befindliche, von einem Strom dI durchflossene Leiterschleife erzeugt:

$$dB_z = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{r_{\text{LS}}^2}{(z^2 + r_{\text{LS}}^2)^{3/2}} dI$$

mit z als Abstand zwischen der Leiterschleife und dem betrachteten Punkt P des Felds. Für eine Schleife mit $z = z'$, die von einem Strom $dI = (n/l) I dz'$ durchflossen wird, ist dieser Abstand gegeben durch $z - z'$. Also ist

$$dB_z = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{r_{\text{LS}}^2 (n/l) I dz'}{(z - z')^2 + r_{\text{LS}}^2}^{3/2}.$$

Das von der gesamten Spule in Punkt P hervorgerufene Magnetfeld erhalten wir, indem wir diese Beziehung in den Grenzen $z = z_1$ und $z = z_2$ integrieren:

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 (n/l) I r_{\text{LS}}^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + r_{\text{LS}}^2]^{3/2}}. \quad (24.8)$$

Das Integral kann durch Substitution $(z - z') = r_{\text{LS}} \tan \theta$ gelöst oder in einer Formelsammlung nachgeschlagen werden. Sein Wert ist

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{[(z - z')^2 + r_{\text{LS}}^2]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{r_{\text{LS}}^2} \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + r_{\text{LS}}^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + r_{\text{LS}}^2}} \right). \end{aligned}$$

Wir setzen dies in Gleichung 24.8 ein und erhalten

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n}{l} I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + r_{\text{LS}}^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + r_{\text{LS}}^2}} \right). \quad (24.9)$$

B_z AUF DER ACHSE EINER SPULE

Im Inneren einer langen Spule (einer Spule, deren Länge l groß gegen ihren Radius r_{LS} ist) und hinreichend weit von ihren Enden entfernt geht der linke Bruch gegen +1, der rechte gegen -1; insgesamt geht der Ausdruck in der Klammer daher gegen +2. In den genannten Bereichen des Raums ist das Magnetfeld dann gegeben durch

$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{l}. \quad (24.10)$$

B_z IM INNEREN EINER LANGEN SPULE

Zur Berechnung von B_z am rechten Ende der Spule wenden wir Gleichung 24.9 mit $z = z_2$ an und erhalten $B_z(z_2) = \frac{1}{2} \mu_0 (n/l) I l_{\text{LS}} / \sqrt{l_{\text{LS}}^2 + r_{\text{LS}}^2}$ mit $l_{\text{LS}} = z_2 - z_1$ als Spulenlänge.

Für $l_{\text{LS}} \gg r_{\text{LS}}$ wird das Verhältnis $l_{\text{LS}} / \sqrt{l_{\text{LS}}^2 + r_{\text{LS}}^2}$ nahezu eins, und es gilt $B_z(z_2) \approx \frac{1}{2} \mu_0 (n/l) I$. An den beiden Enden einer langen Spule ist die Magnetfeldstärke B_z folglich halb so groß wie B an Punkten im Inneren der Spule. In Abbildung 24.15 wurde das Magnetfeld auf der z -Achse einer Spule gegen die Position auf dieser Achse aufgetragen (die Mitte der Spule liegt im Ursprung). Wie Sie sehen, kann das Magnetfeld auf der Achse in guter Näherung als homogen (ortsunabhängig) betrachtet werden, solange die Entfernung von den Enden der Spule groß genug ist. In Beispiel 24.5 wird das Magnetfeld in der Mitte einer Spule berechnet.

Beispiel 24.5: B in der Mitte einer Spule

Berechnen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt einer 20,0 cm langen Spule mit einem Radius von 1,40 cm und 600 Windungen, durch die ein Strom von 4,00 A fließt.

Problembeschreibung: Das Magnetfeld auf der Achse einer Spule berechnen wir mithilfe von Gleichung 24.9, wobei wir den Ursprung in die Mitte der Spule legen.

Lösung: 1. Mithilfe von Gleichung 24.9 berechnen Sie das Feld exakt:

$$B_z(z) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n}{l} I \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + r_{LS}^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + r_{LS}^2}} \right)$$

2. Um das Magnetfeld im Mittelpunkt der Spule zu berechnen, legen Sie diesen Punkt in den Ursprung Ihres Koordinatensystems. Setzen Sie dann $z = 0$, $z_1 = -\frac{1}{2}l_{LS}$ und $z_2 = \frac{1}{2}l_{LS}$ mit l_{LS} als Länge der Spule:

$$\begin{aligned} B_z(0) &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n}{l} I \left(\frac{0 - (-\frac{1}{2}l_{LS})}{\sqrt{[0 - (-\frac{1}{2}l_{LS})]^2 + r_{LS}^2}} - \frac{0 - (\frac{1}{2}l_{LS})}{\sqrt{[0 - (\frac{1}{2}l_{LS})]^2 + r_{LS}^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n}{l} I \frac{l_{LS}}{\sqrt{\frac{1}{4}l_{LS}^2 + r_{LS}^2}} = \mu_0 \frac{n}{l} I \frac{l_{LS}}{\sqrt{l_{LS}^2 + 4r_{LS}^2}} \end{aligned}$$

3. In das Ergebnis aus Schritt 2 setzen Sie die gegebenen Werte ein (Wd. steht für Windungen):

$$\begin{aligned} \frac{l_{LS}}{\sqrt{l_{LS}^2 + 4r_{LS}^2}} &= \frac{20,0 \text{ cm}}{\sqrt{(20,0 \text{ cm})^2 + 4 \cdot (1,40 \text{ cm})^2}} = 0,990 \\ B_z(0) &= 0,990 \mu_0 \frac{n}{l} I \\ &= 0,990 \cdot (4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \\ &\quad \cdot \frac{600 \text{ Wd.}}{0,200 \text{ m}} (4,00 \text{ A}) \\ &= 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ T} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Mit der Näherung, die uns zu Gleichung 24.10 führte, könnten wir in Schritt 3 0,990 durch 1 ersetzen; die Abweichung vom dort erhaltenen Er-

gebnis beträgt nur 1 %, wie es angesichts des Verhältnisses zwischen Länge und Radius der Spule ($20 \text{ cm}/1,4 \text{ cm} \approx 14$) auch zu erwarten ist.

Übung 24.4: Berechnen Sie B_z in der Mitte zwischen dem Mittelpunkt der Spule und einem ihrer Enden. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert aus Schritt 3. ▶

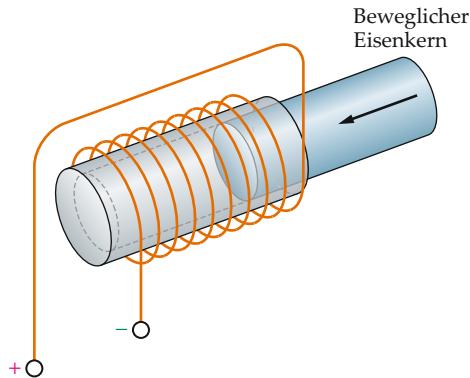
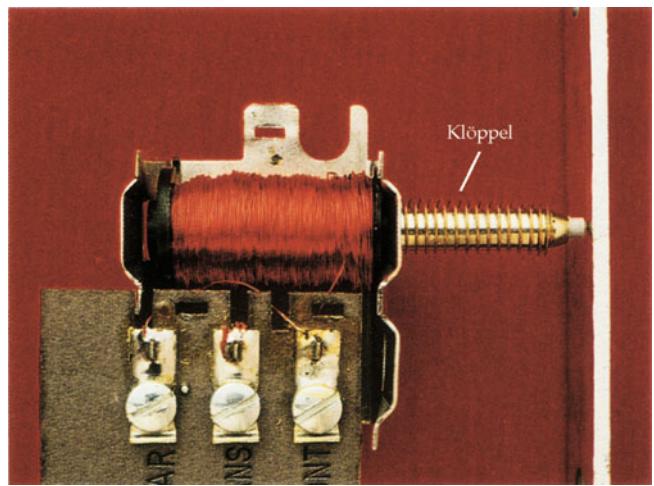


Abbildung 24.16 Anlasserspule eines Autos. Fließt durch die Spule ein Strom, so zieht das erzeugte Magnetfeld den Eisenkern ins Innere der Spule, woraufhin das Ritzel des Anlassermotors an das Schwungrad des Motors kuppelt. Wird die Stromzufuhr zur Spule unterbrochen, so kuppelt eine Feder das Ritzel wieder ab und schiebt den Eisenkern nach rechts in seine Ausgangslage.



Innenansicht einer Türklingel. Fließt durch die Spule ein Wechselstrom, so zieht das Magnetfeld den Klöppel periodisch hin und her, sodass er den (hier abmontierten) Glockendeckel anschlägt. Die Feder zieht den Klöppel jeweils zurück in die Ausgangslage. (© Bruce Iverson.)

Das Magnetfeld eines geraden, stromdurchflossenen Leiters

Wir wollen nun das Magnetfeld \mathbf{B} berechnen, das ein Abschnitt eines geraden, stromdurchflossenen Leiters in einem Punkt P außerhalb des Leiters hervorruft. Die geometrische Anordnung zeigt Abbildung 24.17. Der Draht liege auf der x -Achse, die Projektion von P auf den Draht befindet sich bei $x = 0$, und r_{\perp} sei der (senkrechte) Abstand zwischen P und dem Draht.

In Abbildung 24.17 wurde ein typisches Stromelement $I \, dl$ im Abstand x vom Ursprung herausgegriffen. Der Vektor \mathbf{r} zeigt von diesem Element in Richtung P . Die Richtung des von dem Element in P erzeugten Magnetfelds ist gleich der Richtung von $I \, dl \times \hat{\mathbf{r}}$; sie zeigt aus der Papierebene heraus in z -Richtung. Da dies auch für die von allen anderen Stromelementen hervorgerufenen Magnetfelder gilt, müssen wir lediglich die z -Komponente des Felds berechnen. Das abgebildete Stromelement liefert folgenden Beitrag zum Magnetfeld (siehe Gleichung 24.3):

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, dx}{r^2} \sin \phi.$$

Es ist bequemer, mit dem Winkel θ anstelle von ϕ weiterzuarbeiten:

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, dx}{r^2} \cos \theta. \quad (24.11)$$

Um nun die Beiträge aller Stromelemente zu summieren, müssen wir eine Beziehung zwischen den Variablen θ , r und x

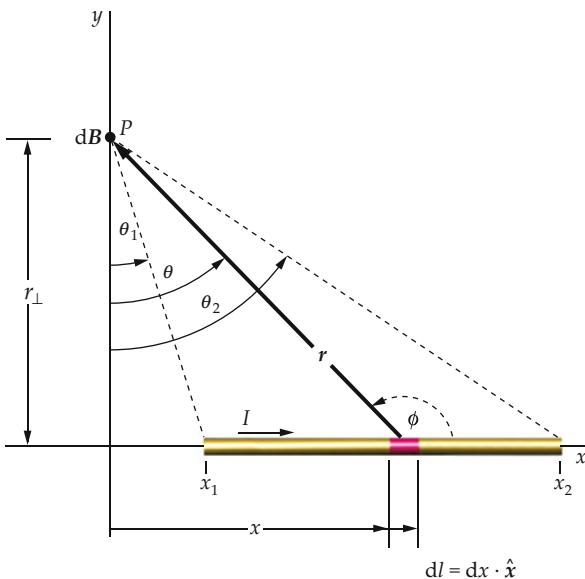


Abbildung 24.17 Schema zur Berechnung des Magnetfelds, das von einem geraden Leiterabschnitt in einem Punkt P hervorgerufen wird. Jedes Element des Leiterabschnitts trägt zum Magnetfeld in P bei; das Feld zeigt aus der Papierebene heraus. Das Resultat geben wir als Funktion der Winkel θ_1 und θ_2 an.

finden. Am einfachsten ist es, x und r in Abhängigkeit von θ aufzuschreiben:

$$x = r_{\perp} \tan \theta.$$

Wir leiten beide Seiten dieser Beziehung ab (r_{\perp} ist konstant) und erhalten

$$dx = r_{\perp} \sec^2 \theta \, d\theta = r_{\perp} \frac{r^2}{r_{\perp}^2} d\theta = \frac{r^2}{r_{\perp}} d\theta$$

mit $\sec \theta = r/r_{\perp}$. Einsetzen dieser Beziehung für dx in Gleichung 24.11 liefert

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \frac{r^2}{r_{\perp}} \frac{d\theta}{r_{\perp}} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} \cos \theta \, d\theta.$$

Zur Berechnung des gesamten Magnetfelds integrieren wir diesen Ausdruck in den Grenzen $\theta = \theta_1$ und $\theta = \theta_2$ (θ_1 und θ_2 sind in Abbildung 24.17 eingezzeichnet):

$$B_z = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} \cos \theta \, d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta \, d\theta.$$

Abschließend rechnen wir das Integral aus:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2). \end{aligned} \quad (24.12)$$

MAGNETFELD EINES GERADEN LEITERABSCHNITTS

Dieser Ausdruck gibt das Magnetfeld an, das ein beliebiger stromdurchflossener Leiterabschnitt in einem Punkt P auf der y -Achse erzeugt. Es ist eine Funktion des senkrechten Abstands r_{\perp} zwischen P und der Achse des Leiters sowie der Winkel ϕ_1 und ϕ_2 , die die Verbindungslien zwischen P und den Endpunkten des Leiters mit der Achse einschließen. Geht die Länge des Drahts in beiden Richtungen gegen unendlich, so geht ϕ_1 gegen 0° und ϕ_2 gegen 180° . Das von einem solchen sehr langen Leiter hervorgerufene Magnetfeld erhalten wir, indem wir in Gleichung 24.12 $\phi_1 = 0^\circ$ und $\phi_2 = 180^\circ$ setzen:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r_{\perp}}. \quad (24.13)$$

MAGNETFELD EINES UNENDLICH LANGEN GERADEN LEITERS

In jedem Punkt des Raums zeigen die Magnetfeldlinien einen langen, geraden stromdurchflossenen Leiter in Richtung der Tangenten an einen Kreis um den Leiter mit dem Radius r_{\perp} (r_{\perp} ist der senkrechte Abstand zwischen dem Draht und dem betrachteten Punkt des Felds). Um die Richtung von \mathbf{B} zu bestimmen, wenden wir die Rechte-Hand-Regel an (Abbildung 24.18a). Die Magnetfeldlinien bilden Kreise um den

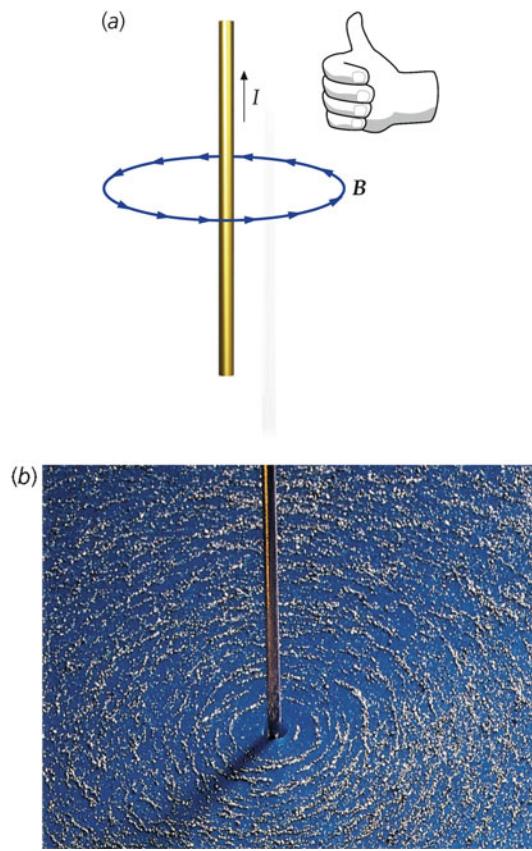


Abbildung 24.18 a) Zur Bestimmung der Richtung des von einem langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter erzeugten Magnetfelds wenden wir die Rechte-Hand-Regel an. Die Magnetfeldlinien bilden Kreise um den Draht in Richtung der Finger der rechten Hand, wenn der Daumen in Stromrichtung zeigt. b) Feldlinien des von einem langen Draht hervorgerufenen Magnetfelds, sichtbar gemacht durch Eisenfeilspäne. (© 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs.)

Leiter, wie Abbildung 24.18b zeigt; deshalb haben wir in den Gleichungen 24.12 und 24.13 den Index an der magnetischen Feldstärke weggelassen. Anwendungen von Gleichung 24.12 illustrieren Beispiel 24.6 und 24.7.

Beispiel 24.6: B im Mittelpunkt einer quadratischen Leiterschleife

Berechnen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt einer quadratischen Leiterschleife mit der Seitenlänge $l = 50 \text{ cm}$, durch die ein Strom von $1,5 \text{ A}$ fließt.

Problembeschreibung: Das Magnetfeld im Mittelpunkt der Leiterschleife ist gleich der Summe der Beiträge der vier Seitenabschnitte. Abbildung 24.19 entnehmen wir, dass die vier Felder gleich sind; alle Felder zeigen aus der Papierebene heraus. Demzufolge berechnen wir mithilfe von Gleichung 24.12 das von einer Seite erzeugte

Magnetfeld und multiplizieren es mit 4, um das Gesamtfeld zu erhalten.

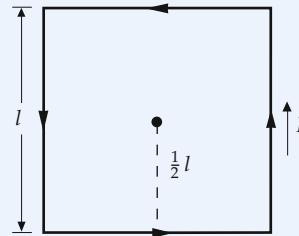


Abbildung 24.19 Darstellung der quadratischen Leiterschleife mit Seitenlänge l .

Lösung: 1. Die Gesamtfeldstärke ist gleich der von einer Seite erzeugten Feldstärke B_S , multipliziert mit 4:

$$B = 4 B_S$$

2. Berechnen Sie zunächst die Feldstärke für eine Seite. Setzen Sie $r_{\perp} = \frac{1}{2} l$, $\theta_1 = -45^\circ$ und $\theta_2 = +45^\circ$ ein (Abbildung 24.19):

$$\begin{aligned} B_S &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_{\perp}} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\frac{1}{2} l} (\sin (+45^\circ) - \sin (-45^\circ)) \\ &= (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot \frac{1,5 \text{ A}}{0,25 \text{ m}} \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ \\ &= 8,5 \cdot 10^{-7} \text{ T} \end{aligned}$$

3. Diesen Wert multiplizieren Sie nun noch mit 4, um die gesamte Feldstärke zu erhalten:

$$B = 4 B_S = 4 (8,5 \cdot 10^{-7} \text{ T}) = [3,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}]$$

Plausibilitätsprüfung: Beschäftigen Sie sich dazu mit Übung 24.5.

Übung 24.5: Vergleichen Sie das Magnetfeld im Mittelpunkt einer kreisrunden Leiterschleife mit dem Radius r_{\perp} mit dem Magnetfeld im Mittelpunkt einer quadratischen Leiterschleife mit der Kantenlänge $l = 2 r_{\perp}$; in beiden Schleifen soll der gleiche Strom fließen. Welche Schleife erzeugt das stärkere Feld? ◀

Übung 24.6: Durch einen langen, geraden Leiter fließt ein Strom von 12 A . In welchem Abstand vom Leiter ist der Betrag des erzeugten Magnetfelds gleich $60 \mu\text{T}$? ◀



Mit diesem Prüfgerät kann man elektrische Ströme messen. Die Backen der Zange umschließen das stromführende Kabel, ohne den leitenden Draht zu berühren. Ein eingebauter Hall-Generator misst das vom stromführenden Leiter erzeugte Magnetfeld und gibt eine zur Feldstärke proportionale Spannung aus; die Feldstärke wiederum ist proportional zu dem im Leiter fließenden Strom. (Mit freundlicher Genehmigung von F. W. Bell.)

Beispiel 24.7: \mathbf{B} zweier paralleler stromdurchflossener Leiter

Zwei lange, gerade Leiter liegen parallel zur z -Achse entlang der Linie mit $x = -3,0 \text{ cm}$ und $y = 0$ bzw. mit $x = +3,0 \text{ cm}$ und $y = 0$ (Abbildung 24.20). Durch beide Leiter fließt in positiver z -Richtung ein Strom von $1,7 \text{ A}$. Berechnen Sie das Magnetfeld im Punkt P auf der y -Achse bei $y = 6,0 \text{ cm}$.

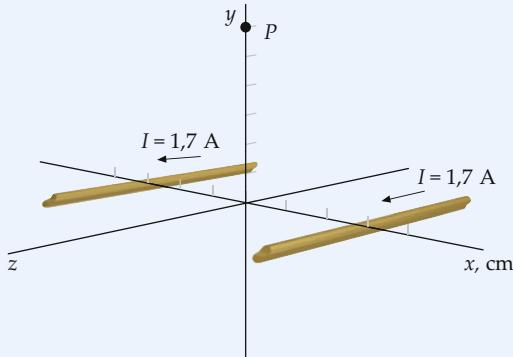


Abbildung 24.20 Zwei parallele stromdurchflossene Leiter im Koordinatensystem.

Problembeschreibung: Das Magnetfeld im Punkt P ergibt sich durch Vektoraddition des vom linken und des vom rechten Leiter hervorgerufenen Feldbeitrags, \mathbf{B}_L bzw. \mathbf{B}_R (Abbildung 24.21). Durch beide Leiter fließt der gleiche Strom, und beide sind gleich weit vom Punkt P entfernt. Deshalb müssen die Feldstärken $|\mathbf{B}_L|$ und $|\mathbf{B}_R|$ ebenfalls gleich sein. \mathbf{B}_L steht senkrecht auf der (senkrechten) Verbindung zwischen P und dem linken Leiter; analog gilt dies für \mathbf{B}_R und den rechten Leiter.

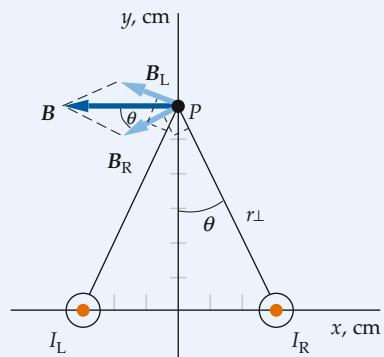


Abbildung 24.21 Skizze des Magnetfeldes \mathbf{B} im Punkt P , welches von den Strömen I_L und I_R hervorgerufen wird.

Lösung: 1. Das Magnetfeld im Punkt P erhalten Sie durch Addition der Vektoren \mathbf{B}_L und \mathbf{B}_R :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_R$$

2. Wie Sie Abbildung 24.21 entnehmen, zeigt das resultierende Magnetfeld in $-x$ -Richtung, seine Komponente in diese Richtung lautet $2 |\mathbf{B}_L| \cos \theta$:

$$\mathbf{B} = -2 |\mathbf{B}_L| \cos \theta \hat{x}$$

3. Gleichung 24.13 liefert die Beträge von \mathbf{B}_L und \mathbf{B}_R :

$$|\mathbf{B}_L| = |\mathbf{B}_R| = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{2I}{r_{\perp}}$$

4. r_{\perp} ist der (senkrechte) Abstand zwischen P und jedem der Leiter. Berechnen Sie diesen Abstand aus der Abbildung und setzen Sie ihn dann in die Beziehungen für $|\mathbf{B}_L|$ und $|\mathbf{B}_R|$ ein:

$$r_{\perp} = \sqrt{(3,0 \text{ cm})^2 + (6,0 \text{ cm})^2} = 6,7 \text{ cm}$$

also

$$|\mathbf{B}_L| = |\mathbf{B}_R| = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot \frac{2 \cdot (1,7 \text{ A})}{0,067 \text{ m}} = 5,07 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

5. Den Wert von $\cos \theta$ entnehmen Sie ebenfalls der Abbildung:

$$\cos \theta = \frac{6,0 \text{ cm}}{r_{\perp}} = \frac{6,0 \text{ cm}}{6,7 \text{ cm}} = 0,894$$

6. Abschließend setzen Sie Ihre Resultate für $\cos \theta$ und B_L in die Gleichung für \mathbf{B} (Schritt 2) ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -2 \cdot (5,07 \cdot 10^{-6} \text{ T}) \cdot (0,894) \hat{x} \\ &= (-9,1 \cdot 10^{-6} \text{ T}) \hat{x} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Betrag des Ergebnisses aus Schritt 6 ist geringer als das Doppelte des Betrags des Ergebnisses aus Schritt 4. Das ist zu erwarten, weil die addierten Vektoren nicht parallel zueinander sind.

Übung 24.7: Wie groß ist \mathbf{B} im Koordinatenursprung?



Übung 24.8: Wie groß ist \mathbf{B} im Koordinatenursprung, wenn der Strom in umgekehrter Richtung durch den Draht entlang der Linie mit $x = +3,0 \text{ cm}$ und $y = 0$ fließt?



Zu dem durch Gleichung 24.13 ausgedrückten Ergebnis gelangten Biot und Savart im Jahre 1820 auf experimentellem Weg. Im Zuge ihrer Analyse leiteten die beiden Forscher die Beziehung für das von einem Stromelement erzeugte Magnetfeld (Gleichung 24.3) her.

Die Kraft zwischen zwei parallelen, stromdurchflossenen Leitern

Um die Kraft zu bestimmen, die zwei stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben, verwenden wir zwei bereits hergeleitete Beziehungen: Gleichung 24.13 gibt, wie in Beispiel 24.7 erläutert, das von einem langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter erzeugte Magnetfeld an, Gleichung 23.5 ($d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$) liefert die von einem Magnetfeld auf einen Abschnitt eines stromdurchflossenen Leiters ausgeübte Kraft. In Abbildung 24.22

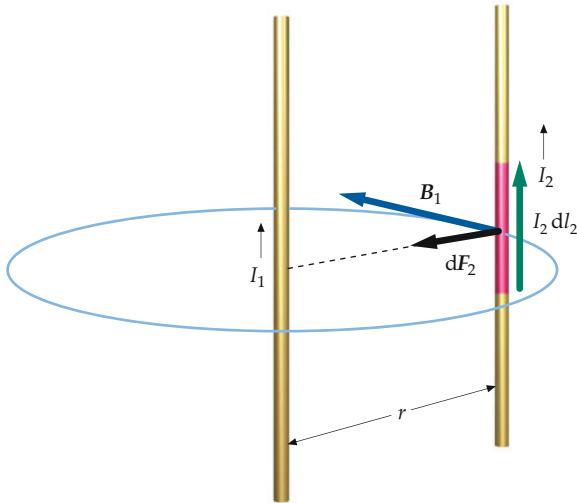


Abbildung 24.22 Zwei lange gerade Leiter, die von parallelen Strömen durchflossen werden. Das vom Strom I_1 erzeugte Magnetfeld \mathbf{B}_1 steht senkrecht auf I_2 . Die Kraft, die \mathbf{B}_1 auf I_2 ausübt, zeigt in Richtung des ersten Leiters. Das Magnetfeld des Stroms I_2 übt auf I_1 eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft aus. Deshalb ziehen die Leiter einander an.

sehen Sie zwei lange parallele Leiter, durch die in gleicher Richtung ein Strom fließt. Wir betrachten zunächst die Kraft, die auf einen Abschnitt $d\mathbf{l}_2$ wirkt, in dem ein Strom I_2 fließt. An diesem Abschnitt herrscht ein Magnetfeld \mathbf{B}_1 , das von dem Strom I_1 herrührt; es steht senkrecht auf dem Stromelement $I_2 d\mathbf{l}_2$, wie die Abbildung zeigt. Gleches gilt für alle anderen Stromelemente des Leiters. Die auf das Stromelement $I_2 d\mathbf{l}_2$ wirkende Kraft $d\mathbf{F}_{12}$ zeigt wegen $d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1$ in Richtung von Leiter 1 (Rechte-Hand-Regel). Analog erfährt ein Stromelement $I_1 d\mathbf{l}_1$ eine Kraft $d\mathbf{F}_{21} = I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_2$, die in Richtung des zweiten Leiters zeigt. Das bedeutet, die beiden parallelen, in gleicher

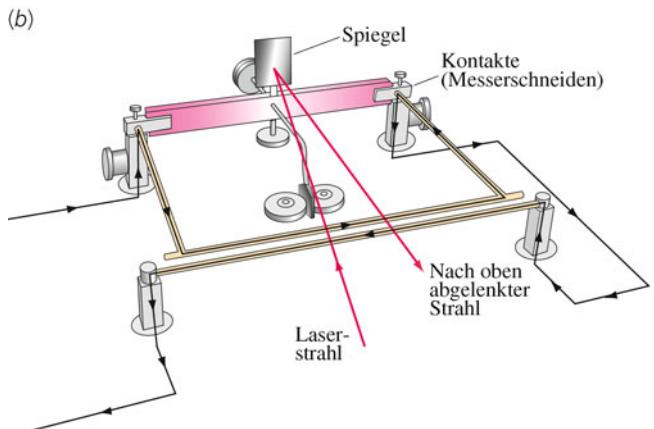
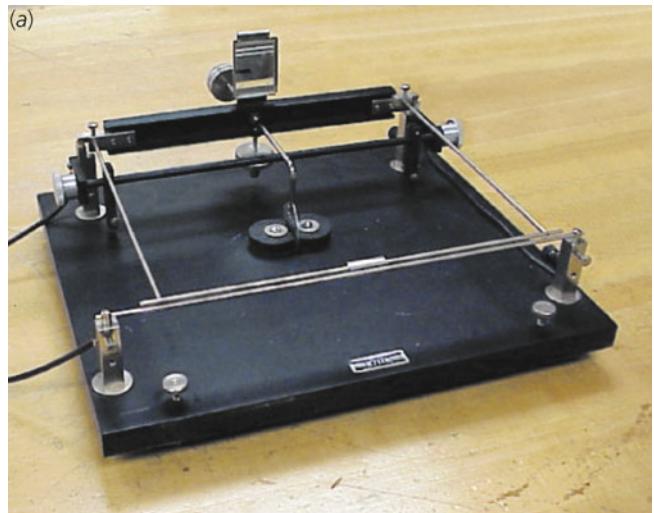


Abbildung 24.23 a) Eine Stromwaage, wie sie in vielen physikalischen Labors verwendet wird. b) Schemazeichnung einer Stromwaage. Durch die beiden parallelen Stäbe im Vordergrund fließen gleich starke, aber entgegengesetzt gerichtete Ströme, weshalb die Leiter einander abstoßen. Der obere Stab ist über rechtwinklig angesetzte Verbindungsstäbe kippbar auf Messerschneiden gelagert, sodass der Spiegel je nach Position dieses Stabs aus der Senkrechten gekippt wird. Durch Tariergewichte auf dem oberen Stab gleicht man die nach dem Einschalten des Stroms wirkende Abstoßungskraft aus. Mithilfe eines Laserstrahls, der am hinten angebrachten Spiegel reflektiert wird, kann man die Position des oberen Leiterstabs exakt bestimmen. (Foto: © Gene Mosca.)

Richtung von Strömen durchflossenen Leiter ziehen sich gegenseitig an. Kehrt man die Stromrichtung in einem der beiden Leiter um, so kehrt sich auch die Richtung der Kraft um: Leiter, in denen antiparallele Ströme fließen, stoßen einander ab. Diesen Effekt entdeckte Ampère nur eine Woche nachdem er von Ørstedts Beobachtungen zur Wirkung eines Stroms auf eine Kompassnadel erfahren hatte.

Die von dem Magnetfeld \mathbf{B}_1 auf das Stromelement $I_2 \, dl_2$ ausgeübte Kraft hat die Größe

$$dF_{12} = I_2 |dl_2 \times \mathbf{B}_1|.$$

Da das Magnetfeld senkrecht auf dem Stromelement $I_2 \, dl_2$ steht, ergibt sich

$$dF_{12} = I_2 \, dl_2 \, B_1.$$

Ist der Abstand r_{\perp} zwischen den Drähten im Vergleich zu ihrer Länge sehr klein, so wird das Magnetfeld \mathbf{B}_1 gut durch Gleichung 24.13 für das Feld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters angenähert. Da r_{\perp} vom Draht 1 zum Draht 2 zeigt, ist die Kraft, die auf das Stromelement $I_2 \, dl_2$ wirkt,

$$dF_{12} = -I_2 \, dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi|r_{\perp}|},$$

und für die Kraft pro Längeneinheit (Meter) erhalten wir schließlich

$$\frac{dF_{12}}{dl_2} = -I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi|r_{\perp}|} = -2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{|r_{\perp}|}. \quad (24.14)$$

Das negative Vorzeichen zeigt, dass die Kraft zwischen den Drähten anziehend ist, wenn I_1 und I_2 dasselbe Vorzeichen besitzen.

In Kapitel 18 haben wir die Einheit Coulomb mithilfe des Ampere definiert, jedoch die Definition des Ampere aufgeschoben. Wir wollen sie jetzt nachholen:

Ein Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 m angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließt und zwischen diesen Leitern je 1 m Leiterlänge elektrodynamisch eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.

DEFINITION DES AMPERE

Diese Definition des Ampere ermöglicht die Messung der Einheit der Stromstärke (und damit auch der elektrischen Ladung) mit ausschließlich mechanischen Mitteln. In der Praxis wählt man den Abstand zwischen den Leitern wesentlich geringer als 1 m, um die Kraft exakt messen zu können.

In Abbildung 24.23 sehen Sie eine **Stromwaage**, eine Vorrichtung, mit der man Ampermeter unter Verwendung der gegebenen Definition des Ampere eichen kann. Die beiden Leiter (Drähte oder Metallstäbe) sind übereinander angeordnet. Der obere Leiter ist rückwärtig auf Messerschneiden gelagert und kann ohne nennenswerte Reibung nach vorn und hinten kippen. Zu Beginn der Eichung wird der obere Leiter so ausbalanciert, dass der Abstand zwischen den beiden Leitern sehr klein ist. Die Leiter sind in Reihe geschaltet, sodass durch beide der gleiche Strom fließt. Da aber die Stromrichtungen entgegengesetzt sind, stoßen die Leiter einander ab, sobald der Strom eingeschaltet wird. Nun legt man Massestückchen auf den oberen Leiter, bis der ursprüngliche Abstand wiederhergestellt ist. Man misst die Kraft (Abstoßung) zwischen den Leitern also über die Masse, die man benötigt, um die Waage ins Gleichgewicht zu bringen. Wie Beispiel 24.8 zeigt, ist diese Kraft relativ gering.

Beispiel 24.8: Messung mit einer Stromwaage

ZUR ÜBUNG

In zwei 50,0 cm langen Leitern einer Stromwaage fließt (in entgegengesetzten Richtungen) jeweils ein Strom von 15,0 A. Die Entfernung zwischen den Achsen der Leiter beträgt 1,50 mm. Welche Masse muss man am oberen Stab anbringen, um die abstoßende Kraft zu kompensieren?

Problembeschreibung: Gleichung 24.14 gibt die Kraft an, die der obere Stab pro Längeneinheit auf den unteren Stab ausübt. Wir berechnen diese Kraft für einen Stab der Länge l und setzen sie gleich der Gewichtskraft mg .

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Setzen Sie die Gewichtskraft mg gleich der zwischen den Stäben wirkenden Abstoßungskraft.

2. Nun lösen Sie nach der Masse m auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$mg = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{\perp}} l$$

2.

$$m = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = \boxed{1,53 \text{ g}}$$

Weitergedacht: Zum Ausgleich der Waage werden nur 1,53 g benötigt. Die Kraft zwischen geraden stromdurchflossenen Leitern ist, wie wir sehen, relativ gering, selbst wenn starke Ströme (15,0 A) fließen und die Leiter nur 1,50 mm voneinander entfernt sind.

24.3 Der Gauß'sche Satz für Magnetfelder

Die in Abbildung 24.6, 24.9 und 24.10 gezeigten Magnetfeldlinien unterscheiden sich deutlich von elektrischen Feldlinien: Während die Linien von \mathbf{B} geschlossene Schleifen bilden, beginnen und enden die Linien von \mathbf{E} an elektrischen Ladungen. Als Analoga zu den elektrischen Ladungen sind magnetische Monopole zu betrachten, wie sie scheinbar an den Enden eines Stabmagneten auftreten. Die Magnetfeldlinien scheinen vom Nordpol des Magneten auszugehen und im Südpol wieder zusammenzulaufen (Abbildung 24.10b). Innerhalb des Magneten gibt es jedoch keinen Punkt nahe dem Nordpolende, in dem die Linien beginnen, und keinen Punkt in der Nähe des Südpolendes, in dem sie sich treffen; stattdessen verlaufen die Linien, wie in der Abbildung erkennbar ist, vom Süd- zurück zum Nordpol.

Wird ein Ende eines Stabmagneten von einer Gauß'schen Oberfläche umschlossen, so ist die Anzahl der Magnetfeldlinien, die von innen durch die Fläche dringen, gleich der Anzahl der Feld-

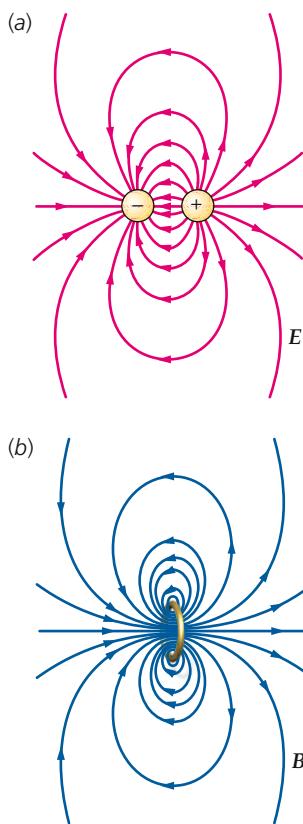


Abbildung 24.24 a) Elektrische Feldlinien eines elektrischen Dipols. b) Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipols. In großer Entfernung von den Dipolen sind die Muster identisch. Im Gebiet zwischen den elektrischen Ladungen (a) ist die Richtung der elektrischen Feldlinien entgegengesetzt der Richtung des Dipolmoments; innerhalb der Leiterschleife in (b) sind die Magnetfeldlinien parallel zur Richtung des Dipolmoments.

linien, die von außen in die Fläche eintreten. Der magnetische Fluss Φ_{mag} durch eine beliebige geschlossene Fläche A ist stets null. (Wie Sie sich erinnern, ist der elektrische Fluss ein Maß für die Anzahl elektrischer Feldlinien, die eine geschlossene Oberfläche verlassen; es gilt $\Phi_{\text{el}} = q_{\text{innen}}/\epsilon_0$.) Demnach ist

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = \oint_A B_n \, dA = 0 \quad (24.15)$$

GAUSS'SCHER SATZ FÜR MAGNETFELDER

mit B_n als Normalkomponente von \mathbf{B} bezüglich des Flächen-elements dA . Der magnetische Fluss Φ_{mag} ist exakt analog zum elektrischen Fluss definiert (wobei \mathbf{E} durch \mathbf{B} ersetzt wurde). Gleichung 24.15 wird deshalb als *Gauß'scher Satz für Magnetfelder* bezeichnet. Mit Worten ausgedrückt besagt die mathematische Formel: Es gibt keinen Punkt im Raum, von dem Magnetfeldlinien ausgehen oder in dem sie zusammenlaufen. Magnetische Monopole gibt es nicht – zumindest wurden sie bislang noch nicht gefunden, obwohl dieses Thema nach wie vor kontrovers diskutiert und die Suche als noch nicht abgeschlossen betrachtet wird.

Als fundamentale Einheit des Magnetismus gilt der magnetische Dipol. In Abbildung 24.24 wurden die Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipoles den elektrischen Feldlinien eines elektrischen Dipoles gegenübergestellt. Wie Sie sehen, sind die Feldlinienmuster in großer Entfernung von den Dipolen identisch, innerhalb der Dipole aber sind die Feldlinien von \mathbf{E} denen von \mathbf{B} entgegengesetzt gerichtet. Elektrische Feldlinien gehen von der positiven Ladung aus und treffen sich am Ort der negativen Ladung, während Magnetfeldlinien in sich geschlossene Schleifen bilden.

24.4 Das Ampère'sche Gesetz

In Kapitel 19 haben wir gesehen, dass sich das elektrische Feld für hochgradig symmetrische Ladungsverteilungen einfacher mit dem Gauß'schen Satz berechnen lässt als mit dem Coulomb'schen Gesetz. Ähnlich ist die Situation für Magnetfelder. Das Ampère'sche Gesetz verknüpft die tangentiale Komponente B_t des Magnetfelds, summiert (integriert) entlang einer geschlossenen Kurve C , mit dem durch eine beliebige, von C begrenzte Fläche tretenden Strom I_C . Mit seiner Hilfe kann man das Magnetfeld in Anordnungen mit einem hohen Grad an Symmetrie ermitteln. Einen solchen symmetrischen Fall illustriert Beispiel 24.9. Mathematisch ausgedrückt lautet das **Ampère'sche Gesetz**

$$\oint_C B_t \, dl = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C \quad (24.16)$$

(C ist eine beliebige, geschlossene Kurve).

AMPÈRE'SCHES GESETZ

Beispiel 24.9: Richtung des Magnetfelds eines Hohlzylinders

ZUM VERSTÄNDNIS

Betrachten Sie einen langen, geraden, stromdurchflossenen Hohlzylinder. Zeigen Sie, dass das von dem Strom hervorgerufene Magnetfeld tangential zu einem Kreis gerichtet ist, dessen Achse mit der des Zylinders zusammenfällt (Abbildung 24.25).

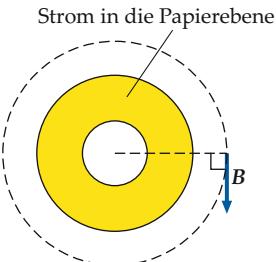


Abbildung 24.25 Skizze des stromdurchflossenen Hohlzylinders.

Problembeschreibung: Stellen Sie sich den Hohlzylinder als ein Bündel dünner, langer, gerader und zur Längssachse des Zylinders paralleler Drähte vor. Durch jeden dieser Drähte fließt ein kleiner Teil des Gesamtstroms. Suchen Sie sich einen beliebigen Punkt P im Magnetfeld und halbieren Sie den Hohlzylinder, indem Sie eine Ebene festlegen, die sowohl P als auch die Längsachse enthält. Mithilfe der Rechte-Hand-Regel (siehe Abbildung 24.28) ermitteln Sie die Richtung des Magnetfelds, das ein einzelner dünner Draht Ihres Modells in P hervorruft. Suchen Sie sich dann das von P aus gesehen symmetrische Gegenstück dieses Drahts in der anderen Hälfte des Hohlzylinders (also einen Draht mit gleichem Abstand von der Teilungsebene, aber auf deren gegenüberliegender Seite) und ermitteln Sie auch die Richtung des Magnetfelds, das dieser zweite Draht in P bewirkt. Die Richtung des Magnetfelds in P liegt dann in der Mitte zwischen den Richtungen der Felder, die die beiden betrachteten Drähte hervorrufen.

Lösung: 1. Wählen Sie den Feldpunkt P . Wenden Sie die Rechte-Hand-Regel (siehe Abbildung 24.28) an, um die Richtungen der Magnetfelder zu ermitteln, die der ausgewählte dünne Draht und sein symmetrisches Gegenstück in P hervorrufen. Skizzieren Sie die Lage der beiden Drähte

und die Richtungen ihrer Magnetfelder in Punkt P (Abbildung 24.26), zeichnen Sie auch die Vektorsumme der beiden Felder ein:

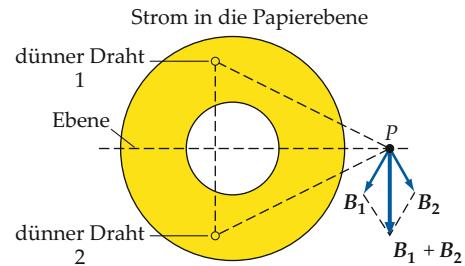


Abbildung 24.26 Skizze des Hohlzylinders mit den beiden gewählten dünnen Drähten und dem in Punkt P resultierenden Magnetfeld $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$.

2. Das resultierende Magnetfeld in P ist gleich der Summe der Magnetfelder, die alle dünnen Drähte hervorrufen, aus denen Sie sich den Hohlzylinder aufgebaut denken:

Das resultierende Magnetfeld in P zeigt in Richtung der Summe $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, weil das resultierende Magnetfeld für jedes einzelne Paar aus einem dünnen Draht und seinem symmetrischen Gegenstück in diese Richtung zeigt.

3. Liegt der Punkt P innerhalb des Hohlzylinders, dann zeigt das von zwei Drähten rechts von P hervorgerufene Magnetfeld (Abbildung 24.27) in entgegengesetzte Richtung wie das von zwei Drähten links von P bewirkte Feld (Abbildung 24.26).

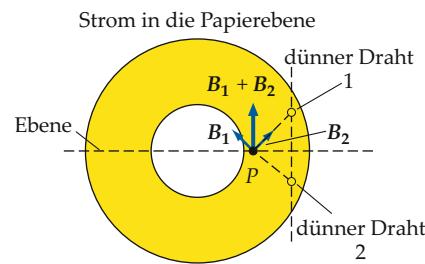


Abbildung 24.27 Obige Skizze für den Fall, dass sich der Punkt P innerhalb des Zylinders befindet und die Drähte rechts davon liegen.

I_C ist der insgesamt durch eine von C umschlossene Fläche A tretende Strom. Wie Abbildung 24.28 zeigt, hängt die positive tangentiale Richtung des Umlaufintegrals entlang C gemäß einer Rechte-Hand-Regel von der Wahl der positiven Richtung des durch A tretenden Stroms I_C ab. Das Ampère'sche Gesetz gilt für jede beliebige Kurve C , stationäre und kontinuierliche Ströme vorausgesetzt (d. h., der Strom ist zeitlich konstant, und die Ladung sammelt sich nirgendwo an). Es eignet sich ins-

besondere dann zur Bestimmung des Magnetfelds, wenn die Situation einen hohen Grad an Symmetrie aufweist; dann lässt sich das Linienintegral $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ einfach als Produkt $\mathbf{B} \cdot (\oint_C d\mathbf{l})$ aus \mathbf{B} und einer Länge schreiben. $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ nennt man **Umlaufintegral**; es handelt sich um das Integral von \mathbf{B} über eine geschlossene Kurve C . Sowohl der Gauß'sche Satz als auch das Ampère'sche Gesetz sind von theoretischer Bedeutung. Beide Gesetze gelten unabhängig von der Symmetrie, für praktische

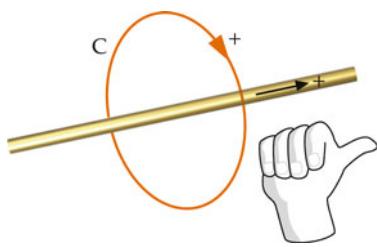


Abbildung 24.28 Die positive Richtung des Linienintegrals im Ampère'schen Gesetz hängt mit der positiven Richtung des durch die Oberfläche tretenden Stroms über eine Rechte-Hand-Regel zusammen.

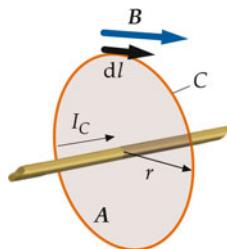


Abbildung 24.29 Geometrische Skizze zur Berechnung des Magnetfelds eines langen, geraden, stromdurchflossenen Leiters mithilfe des Ampère'schen Gesetzes. Auf einem Kreis um den Leiter ist das Magnetfeld konstant und verläuft tangential zum Kreis.

Berechnungen aber sind sie weitgehend nutzlos, wenn die betrachtete Anordnung wenig oder nicht symmetrisch ist.

! Das Ampère'sche Gesetz gilt immer, wenn die betrachteten Ströme stationär und kontinuierlich sind.

Die Anwendung des Ampère'schen Gesetzes soll an einem der einfachsten Fällen demonstriert werden, der Berechnung des Magnetfelds eines unendlich langen, geraden, stromdurchflossenen Leiters. In Abbildung 24.29 sehen Sie einen Kreis, auf dessen Symmetrieachse ein langer Draht liegt. Gemäß dem Biot-Savart'schen Gesetz zeigt das von jedem Stromelement erzeugte Magnetfeld in Richtung einer Tangente an den Kreis. Unter der Annahme, dass das Magnetfeld \mathbf{B} tangential zum Kreis ist, seine Richtung mit der von dl übereinstimmt und B auf der Kreislinie konstant ist, ergibt das Ampère'sche Gesetz

$$B \oint_C dl = \mu_0 I_C$$

mit $B = B_t$. Dabei können wir den Faktor B vor das Integral ziehen, weil sein Wert in allen Punkten des Kreises gleich ist. Das Integral von dl entlang des geschlossenen Kreises ist gleich dessen Umfang $2\pi r_{\perp}$, und I_C ist die Stromstärke I im Leiter. Wir erhalten $B 2\pi r_{\perp} = \mu_0 I$ und daraus

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{\perp}},$$

was genau Gleichung 24.13 entspricht. Dieses Ergebnis wird in Beispiel 24.10 noch einmal im Zusammenhang mit dem Magnetfeld innerhalb und außerhalb eines stromdurchflossenen Drahts hergeleitet.

Beispiel 24.10: B innerhalb und außerhalb eines Drahts

Ein langer, gerader Draht mit dem Radius r_{LD} werde von einem Strom I durchflossen; die Stromdichte sei über den kreisförmigen Querschnitt des Drahts hinweg konstant. Bestimmen Sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Leiters.

Problembeschreibung: Wegen der Symmetrie der Anordnung können wir das Magnetfeld mithilfe des Ampère'schen Gesetzes berechnen. Wir wissen, dass \mathbf{B} auf einem Kreis mit dem Radius r_{\perp} (der Kurve C in Abbildung 24.30) um den Mittelpunkt des Leiters überall denselben Betrag hat und in Richtung der Tangente an den Kreis zeigt. Der Ausdruck für den Strom durch die von C umschlossene Fläche A hängt davon ab, ob r_{\perp} größer oder kleiner ist als der Radius des Drahts, r_{LD} .

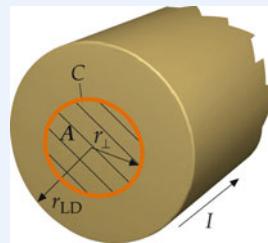


Abbildung 24.30 Skizze des Drahtquerschnitts mit Darstellung des Radius $r_{\perp} < r_{LD}$.

Lösung: 1. Mithilfe des Ampère'schen Gesetzes stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Integral von \mathbf{B} entlang der geschlossenen Kurve C und dem Strom her, der durch die von C umschlossene Fläche A tritt:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C$$

2. Das Integral lösen Sie, wobei Sie für die Kurve C einen Kreis mit dem Radius r_{\perp} einsetzen, dessen Symmetrieachse auf der Achse des Drahts liegt:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B 2\pi r_{\perp}$$

3. Nun setzen Sie dies in das Ampère'sche Gesetz ein und lösen nach B auf:

$$B 2\pi r_{\perp} = \mu_0 I_C$$

also

$$B = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r_\perp}$$

4. Außerhalb des Drahts ist $r_\perp > r_{LD}$. Durch die von C umschlossene Fläche tritt dann der gesamte Strom:

$$I_C = I$$

$$B = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \quad (r_\perp \geq r_{LD})}$$

5. Innerhalb des Drahts ist $r_\perp < r_{LD}$. Unter der Voraussetzung, dass die Stromdichte über den Querschnitt des Drahts hinweg konstant ist, können Sie I_C wie folgt zum Gesamtstrom in Beziehung setzen:

$$\begin{aligned} \frac{I_C}{\pi r_\perp^2} &= \frac{I}{\pi r_{LD}^2} \\ I_C &= \frac{r_\perp^2}{r_{LD}^2} I \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I_C}{2\pi r_\perp} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(r_\perp^2/r_{LD}^2) I}{r_\perp} \\ &= \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_{LD}^2} r_\perp \quad (r_\perp \leq r_{LD})} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Für $r_\perp = r_{LD}$ liefern Schritt 4 und 5 wie erwartet dasselbe Ergebnis.

Weitergedacht: Innerhalb des Drahts nimmt das Magnetfeld mit der Entfernung vom Mittelpunkt zu. Abbildung 24.31 zeigt den Verlauf von B als Funktion von r_\perp für dieses Beispiel.

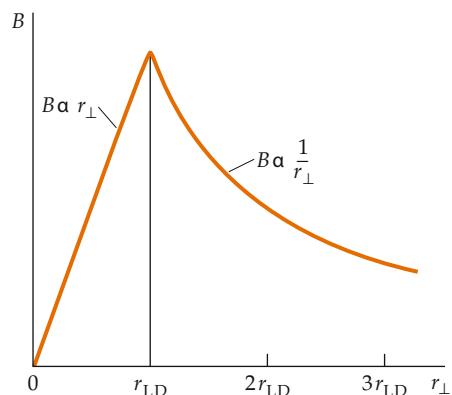


Abbildung 24.31 Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters mit dem Radius r_{LD} bei homogener Stromdichte als Funktion des Abstands r_\perp von der Leiterachse.

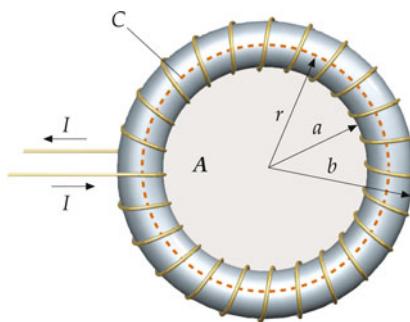


Abbildung 24.32 Eine Ringspule besteht aus Drahtschleifen, die um eine gedachte Ringröhre gewickelt sind. Das Magnetfeld in einem beliebigen Abstand r vom Mittelpunkt des Rings kann man durch Anwendung des Ampère'schen Gesetzes auf einen Kreis mit dem Radius r berechnen. Jede Windung des Drahts tritt einmal durch die Fläche A .

Drahtschleifen, die um eine zum Ring geschlossene Röhre gewickelt sind (Abbildung 24.32). In jeder der n Windungen fließt ein Strom I . Zur Berechnung von \mathbf{B} ermitteln wir den Wert des Umlaufintegrals $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ entlang eines Kreises mit dem Radius r , dessen Achse auf der Längsachse der Ringröhre liegt und der innerhalb der Windungen verläuft. Aus Symmetriegründen ist der Betrag von \mathbf{B} an allen Punkten der Kreislinie konstant, und \mathbf{B} zeigt jeweils in Richtung der Tangente an den Kreis. Dann ist

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r = \mu_0 I_C .$$

a und b sind der Innen- bzw. Außenradius der Ringröhre. Der Gesamtstrom durch die von einem Kreis mit dem Radius r umschlossene Fläche A mit $a < r < b$ beträgt nI . Mit dem Ampère'schen Gesetz erhalten wir

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C$$

Beispiel 24.10 entnehmen wir, dass ein homogen über den Querschnitt eines Drahts mit dem Radius r_{LD} verteilter Strom das Magnetfeld

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{LD}^2} r_\perp \quad (r_\perp \leq r_{LD})$$

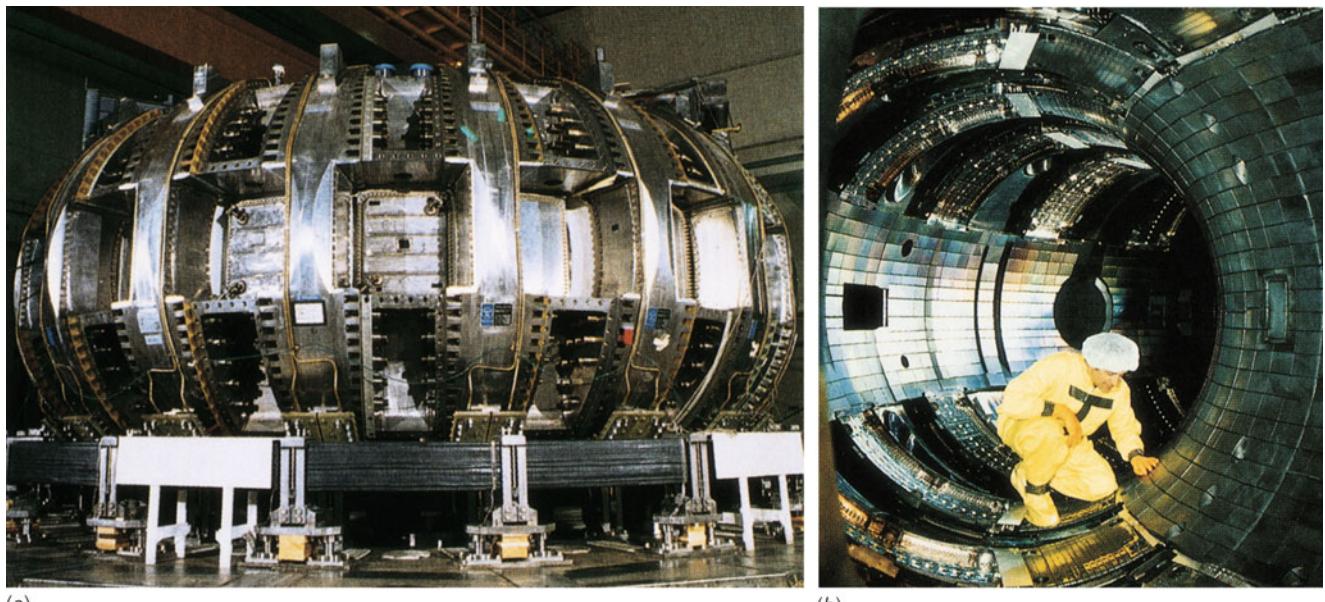
bzw.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp} \quad (r_\perp \geq r_{LD}) \quad (24.17)$$

B EINES LANGEN, GERADEN LEITERS

hervorruft (Abbildung 24.31).

Unsere nächste Anwendung des Ampère'schen Gesetzes besteht darin, das Magnetfeld einer dicht gewickelten **Toroid**- oder **Ringspule** zu berechnen. Eine solche Spule besteht aus



(a)

(b)

a) Der Tokamak-Reaktor, eine Versuchsanlage für die kontrollierte Kernfusion, hat die Form eines großen Toroids. Er erzeugt ein starkes Magnetfeld zur Speicherung geladener Teilchen. In Spulen, die mehr als 10 km wassergekühlten Kupferdraht enthalten, fließt ein gepulster Strom, dessen Spitzenwert bei 73 000 A liegt. Er erzeugt für etwa 3 s ein Magnetfeld von 5,2 T. b) Inspektion der Reaktoranordnung von innen. (Mit freundlicher Genehmigung des Princeton University Plasma Physics Laboratory.)

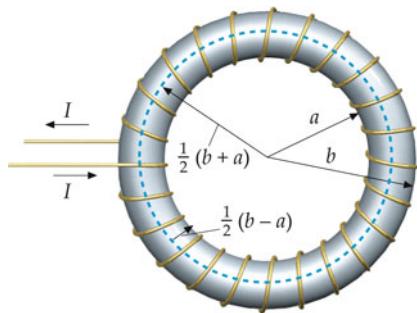


Abbildung 24.33 Der mittlere Radius der Ringspule ist $r = \frac{1}{2}(b + a)$ mit a als Innen- und b als Außenradius. Jede Drahtwindung entspricht einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}(b - a)$.

oder

$$B 2\pi r = \mu_0 n I$$

oder

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}, \quad a < r < b. \quad (24.18)$$

MAGNETFELD INNERHALB EINER DICHT GEWICKELTEN RINGSPULE

Ist r kleiner als a , fließt durch die Fläche A kein Strom. Ist r größer als b , ist der Gesamtstrom durch A ebenfalls gleich null: Jede Windung des Drahts tritt dann zweimal durch A , weshalb

es zu jedem Strom I , der in die Papierebene hineingeht, einen gleich großen Strom gibt, der aus der Papierebene herauskommt (Abbildung 24.33). Das Magnetfeld ist daher sowohl im Bereich mit $r < a$ als auch im Bereich mit $r > b$ gleich null:

$$B = 0 \quad \text{für} \quad r < a \quad \text{oder} \quad r > b.$$

Die Magnetfeldstärke im Inneren der Ringspule ist nicht homogen, sondern nimmt mit steigendem r ab (siehe Gleichung 24.17). Ist jedoch $b - a$, der Durchmesser der einzelnen Windungen, viel kleiner als $2b$, so ist der Unterschied zwischen $r = a$ und $r = b$ relativ gering, und innerhalb der Windungen ist B dann annähernd homogen wie in einer Zylinderspule.

Grenzen der Gültigkeit des Ampère'schen Gesetzes

Ein Magnetfeld mithilfe des Ampère'schen Gesetzes zu berechnen, ist nur sinnvoll, wenn die Anordnung einen hohen Grad an Symmetrie aufweist und wenn der Strom im Raum stetig ist. Betrachten wir die Leiterschleife in Abbildung 24.34. Gemäß dem Ampère'schen Gesetz ist das Linienintegral $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B_t dl$ entlang einer Kurve C (etwa des in der Abbildung eingezeichneten Kreises) gleich dem Produkt aus μ_0 und der Stromstärke I in der Schleife. Für die gewählte Kurve ist das Ampère'sche Gesetz zwar gültig, aber die Tangentialkomponente B_t des Magnetfelds ist nicht entlang aller Kurven, die den Strom umschließen können, konstant. Die Anordnung ist daher nicht symmetrisch genug, um das Integral $\oint_C B_t dl$ auswerten und B_t berechnen zu können.

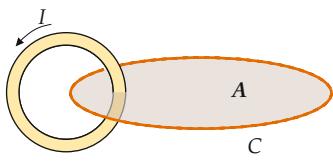


Abbildung 24.34 Zwar gilt für die eingezeichnete Kurve C , die den Strom in der Leiterschleife umschließt, das Ampère'sche Gesetz, aber dieses eignet sich hier nicht zur Berechnung von B_t , denn B_t lässt sich nicht als konstanter Faktor vor das Integral ziehen.

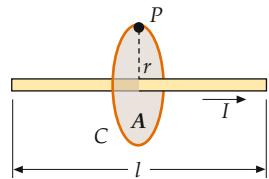


Abbildung 24.35 Die Anwendung des Ampère'schen Gesetzes zur Berechnung des Magnetfelds in der Mitte eines endlich langen Leiterabschnitts liefert ein falsches Ergebnis.

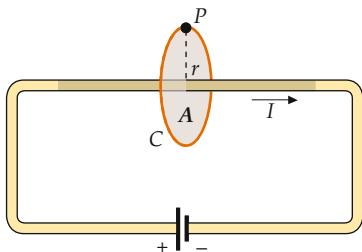


Abbildung 24.36 Ist der Leiterabschnitt aus Abbildung 24.35 Teil eines geschlossenen Stromkreises, so gilt zwar das Ampère'sche Gesetz für die Kurve C , zur Berechnung des Magnetfelds in P reicht die Symmetrie der Anordnung aber nicht aus.

Abbildung 24.35 zeigt einen endlichen Leiterabschnitt der Länge l . Zu berechnen ist das Magnetfeld in einem Punkt P , der von den Enden des Leiterabschnitts gleich weit entfernt ist und dessen Abstand zur Mitte des Leiters gleich r ist. Die direkte Anwendung des Ampère'schen Gesetzes liefert

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir für einen unendlich langen Draht, denn die Symmetrie der Anordnungen ist gleich. Dies widerspricht allerdings dem Biot-Savart'schen Gesetz, das ein von der Länge des Drahts abhängiges Resultat liefert und mit dem experimentellen Befund im Einklang steht. Ist der Leiterabschnitt Teil eines geschlossenen Stromkreises wie in Abbildung 24.36, so gilt zwar das Ampère'sche Gesetz für die Kurve C , es kann aber aufgrund der niedrigen Symmetrie der Anordnung nicht zur Berechnung des Magnetfelds in P verwendet werden.

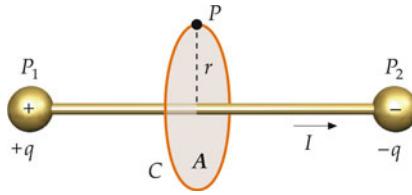


Abbildung 24.37 Fließt durch den Leiterabschnitt aus Abbildung 24.35 kurzzeitig ein Strom (etwa infolge der Entladung kleiner, geladener Kugeln an den Enden), so reicht die Symmetrie zur Anwendung des Ampère'schen Gesetzes aus, um das Magnetfeld in P zu berechnen. Das Ampère'sche Gesetz gilt hier aber nicht, weil der Strom im Raum nicht stetig ist.

In Abbildung 24.37 sehen Sie einen Leiterabschnitt, an dessen Enden jeweils eine leitende Kugel sitzt. Zu Beginn des Experiments tragen die Kugeln die Ladung $-q$ (links) bzw. $+q$ (rechts); sobald die Verbindung zwischen den Kugeln geschlossen wird, fließt für kurze Zeit ein Strom $I = -dq/dt$ durch den Leiterabschnitt, bis die Kugeln entladen sind. In diesem Fall ist die Symmetrie der Anordnung hoch genug, um davon auszugehen, dass \mathbf{B} tangential zur Kurve C verläuft und der Betrag von \mathbf{B} in allen Punkten der Kurve gleich ist. Allerdings ist der Strom hier im Raum nicht stetig, denn er bildet keine geschlossene Schleife. Folglich ist das Ampère'sche Gesetz nicht gültig. Wie wir in Kapitel 27 sehen werden, gelang es James C. Maxwell, das Ampère'sche Gesetz so zu erweitern, dass es für Anordnungen aller Art gilt. Diese verallgemeinerte Form des Ampère'schen Gesetzes, angewendet auf Leiterabschnitte wie den in Abbildung 24.37 dargestellten, liefert dann die gleichen Resultate wie das Biot-Savart'sche Gesetz.

24.5 Magnetismus in Materie

Jedes Atom besitzt ein magnetisches Dipolmoment aufgrund der Bewegung seiner Elektronen. Zusätzlich sind auch mit den Spins der einzelnen Elektronen magnetische Momente verbunden. Im Gegensatz zu elektrischen Dipolen richten sich magnetische Dipole parallel zu einem äußeren Feld aus und verstärken dieses. Anschaulich wird dieser Unterschied in Abbildung 24.24, die elektrische Feldlinien eines elektrischen Dipols den Magnetfeldlinien eines magnetischen Dipols gegenüberstellt: In hinreichend großer Entfernung von den Dipolen sind die Linienmuster identisch. Im Bereich zwischen den Ladungen des elektrischen Dipols jedoch sind die elektrischen Feldlinien dem Dipolmoment entgegengesetzt gerichtet, während die Magnetfeldlinien innerhalb der Leiterschleife parallel zum magnetischen Dipolmoment verlaufen. In magnetisch polarisierten Materialien werden folglich Magnetfelder erzeugt, die zum Vektor des magnetischen Dipolmoments parallel sind.

Nach dem Verhalten ihrer magnetischen Momente in einem äußeren Magnetfeld lassen sich alle Materialien in eine von drei Kategorien einordnen: **paramagnetische**, **diamagnetische** und **ferromagnetische** Stoffe. Paramagnetisches Verhalten ist durch

die teilweise Ausrichtung der Elektronenspins (in Metallen) oder der magnetischen Momente von Atomen oder Molekülen bei Anliegen eines äußeren Felds gekennzeichnet. Liegt kein äußeres Magnetfeld an, so sind in paramagnetischen Materialien die Wechselwirkungen der magnetischen Dipole untereinander nur schwach ausgeprägt und die Dipolmomente sind zufällig orientiert. Durch Anlegen eines Magnetfelds werden die Dipole teilweise in Feldrichtung orientiert, wodurch sich das Feld verstärkt. Allerdings bewirken äußere Magnetfelder gewöhnlicher Stärke bei Zimmertemperatur die Ausrichtung nur eines kleinen Teils der Dipole, weil deren thermische Bewegung dem Effekt entgegenwirkt, und die Verstärkung des Magnetfelds ist äußerst gering. Bei ferromagnetischen Materialien sind die Verhältnisse weitaus komplizierter. Die starke Wechselwirkung benachbarter magnetischer Dipole führt zur Ausrichtung sehr vieler Dipole bereits beim Anliegen schwacher äußerer Felder. Oft sind die magnetischen Dipole auch in Abwesenheit eines äußeren Magnetfelds parallel ausgerichtet (wie bei Permanentmagneten). In Diamagneten werden beim Anliegen eines äußeren Magnetfelds aufgrund der Elektronenbewegung magnetische Dipole induziert. Sie sind antiparallel zum äußeren Feld gerichtet und schwächen dieses folglich ab. Diamagnetismus tritt bei allen Materialien auf; er wird aber, weil die induzierten verglichen mit den permanenten magnetischen Momenten sehr klein sind, häufig durch Para- oder Ferromagnetismus überdeckt und lässt sich deshalb nur bei Materialien beobachten, die keine permanenten magnetischen Dipolmomente aufweisen.

Magnetisierung und magnetische Suszeptibilität

Bringt man einen Stoff in ein starkes Magnetfeld, etwa das einer stromdurchflossenen Spule, so werden die (induzierten oder permanenten) magnetischen Momente im Inneren des Materials ausgerichtet – das Material wird magnetisiert. Die charakteristische Messgröße hierfür ist die **Magnetisierung M** , definiert als das resultierende magnetische Moment pro Volumeneinheit:

$$M = \frac{d\mu}{dV}. \quad (24.19)$$

Lange bevor sich konkrete Vorstellungen über den Aufbau von Atomen oder Molekülen entwickelt hatten, führte Ampère die Magnetisierung bereits auf mikroskopische Kreisströme im Inneren des Stoffs zurück. Inzwischen wissen wir, dass diese Kreisströme als klassisches Modell für die Bahnbewegung und die Spins der Elektronen in den Atomen gelten können. Betrachten wir einen Zylinder, der aus einem magnetisierten Material besteht (Abbildung 24.38). Die magnetischen Momente der skizzierten atomaren Kreisströme sind parallel zur Achse des Zylinders ausgerichtet. Da benachbarte Kreisströme sich gegenseitig aufheben (eine homogene Magnetisierung des Materials vorausgesetzt), ist der Strom im Inneren des Körpers überall null; nur an der Oberfläche fließt ein Strom (Abbildung 24.39). Dieser Oberflächenstrom wird **Ampère'scher Strom** genannt und ähnelt dem Strom in den Windungen einer Zylinderspule.

Abbildung 24.40 zeigt eine kleine Kreisscheibe mit der Querschnittsfläche A , der Dicke dl und dem Volumen $dV = A dl$.

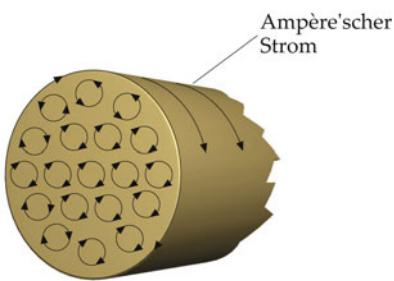


Abbildung 24.38 Ein Modell atomarer Kreisströme; alle magnetischen Dipolmomente sind parallel zur Achse des Zylinders ausgerichtet. Da sich benachbarte Kreisströme gegenseitig aufheben, ist der resultierende Strom im Inneren des Zylinders null; lediglich an der Oberfläche fließt ein Strom, vergleichbar dem Strom in den Windungen einer Zylinderspule.

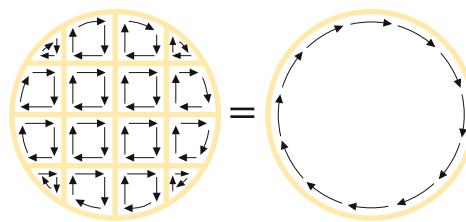


Abbildung 24.39 In jedem Punkt im Inneren eines homogen magnetisierten Materials heben benachbarte Kreisströme einander auf, und zwar unabhängig von der Form der (sehr kleinen) Kurven, die die Ströme beschreiben. Übrig bleibt nur ein Oberflächenstrom.

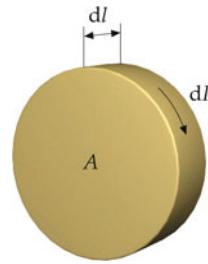


Abbildung 24.40 Scheibenmodell zur Erklärung der Beziehung zwischen Magnetisierung M und Ampère'schem Strom pro Längeneinheit, dl/dl .

Der Ampère'sche Strom an der Oberfläche der Scheibe sei dI . Das magnetische Dipolmoment der Scheibe ist gleich demjenigen einer vom Strom dI durchflossenen Leiterschleife mit der Fläche A :

$$d\mu = A dI.$$

Die Magnetisierung entspricht dem magnetischen Moment pro Volumeneinheit:

$$M = \frac{d\mu}{dV} = \frac{A dl}{A dl} \hat{n} = \frac{dl}{dl} \hat{n}. \quad (24.20)$$

(Bitte verwechseln Sie das Drehmoment M nicht mit der Magnetisierung M ; in diesem Kapitel treten diese beiden Größen an verschiedenen Stellen auf.) Die Magnetisierung ergibt sich nun

als Verhältnis von Ampère'schem Strom an der Oberfläche des magnetisierten Körpers zur Längeneinheit. Das bedeutet, die SI-Einheit von M ist Ampere pro Meter.

Betrachten wir jetzt einen Zylinder mit einer homogenen Magnetisierung \mathbf{M} parallel zu seiner Achse. Die Magnetisierung wirkt so, als fließe an der Oberfläche des Zylinders ein Ampère'scher Strom pro Längeneinheit vom Betrag $|M|$. Dieser Strom wiederum ist mit dem Strom in den Windungen einer dicht gewickelten Zylinderspule vergleichbar. Für eine solche Spule ist der Strom pro Längeneinheit gleich $(n/l)I$ mit I als Strom in jeder einzelnen Windung und (n/l) als Windungsdichte. Das Magnetfeld \mathbf{B}_{mag} im Inneren des Zylinders, hinreichend weit von dessen Enden entfernt, ist dann durch Gleichung 24.10 gegeben, wobei wir $(n/l)I$ durch \mathbf{M} ersetzen:

$$\mathbf{B}_{\text{mag}} = \mu_0 \mathbf{M}. \quad (24.21)$$

Stellen wir uns nun vor, wir bringen einen Zylinder aus einem magnetischen Material ins Innere einer langen Spule mit (n/l) Windungen pro Längeneinheit, in der ein Strom I fließt. Durch das Magnetfeld im Inneren der Spule \mathbf{B}_{aus} wird das Material des Zylinders magnetisiert, seine Magnetisierung ist \mathbf{M} . Innerhalb der Spule (weit von ihren Enden entfernt) setzt sich das Magnetfeld dann aus dem Feld der Spule selbst und dem Feld des magnetisierten Materials zusammen:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{aus}} + \mu_0 \mathbf{M}. \quad (24.22)$$

Für paramagnetische und ferromagnetische Materialien sind \mathbf{M} und \mathbf{B}_{aus} gleich gerichtet, für diamagnetische entgegengesetzt. Bei para- und diamagnetischen Stoffen ist die Magnetisierung proportional zum anliegenden, die Ausrichtung der Dipole bewirkenden Feld. Wir können daher schreiben:

$$\mathbf{M} = \chi_{\text{mag}} \frac{\mathbf{B}_{\text{aus}}}{\mu_0} \quad (24.23)$$

mit χ_{mag} als dimensionsloser Konstante, der **magnetischen Suszeptibilität**. Gleichung 24.22 wird damit zu

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{aus}} + \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}_{\text{aus}} (1 + \chi_{\text{mag}}) = \mu_{\text{rel}} \mathbf{B}_{\text{aus}} \quad (24.24)$$

mit

$$\mu_{\text{rel}} = 1 + \chi_{\text{mag}} \quad (24.25)$$

als **relativer Permeabilität** des Materials. Für paramagnetische Stoffe ist χ_{mag} eine kleine, positive Zahl, deren Wert von der Temperatur abhängt. Bei diamagnetischen Stoffen (mit Ausnahme von Supraleitern) ist χ_{mag} klein, negativ und unabhängig von der Temperatur. In Tabelle 24.1 sind magnetische Suszeptibilitäten verschiedener para- und diamagnetischer Materialien zusammengestellt. Wie Sie sehen, liegen die Suszeptibilitäten der aufgeführten festen Stoffe in der Größenordnung von 10^{-5} und $\mu_{\text{rel}} \approx 1$.

Im Falle ferromagnetischer Materialien ist die Diskussion der Magnetisierung wesentlich komplizierter, wie Sie weiter unten

Tabelle 24.1 Magnetische Suszeptibilität verschiedener Materialien bei 20 °C

Material	χ_{mag}
Aluminium	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Bismut	$-1,66 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$-0,98 \cdot 10^{-5}$
Diamant	$-2,2 \cdot 10^{-5}$
Gold	$-3,6 \cdot 10^{-5}$
Magnesium	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Quecksilber	$-3,2 \cdot 10^{-5}$
Silber	$-2,6 \cdot 10^{-5}$
Natrium	$-0,24 \cdot 10^{-5}$
Titan	$7,06 \cdot 10^{-5}$
Wolfram	$6,8 \cdot 10^{-5}$
Wasserstoff (1 atm)	$-9,9 \cdot 10^{-9}$
Kohlendioxid (1 atm)	$-2,3 \cdot 10^{-9}$
Stickstoff (1 atm)	$-5,0 \cdot 10^{-9}$
Sauerstoff (1 atm)	$2090 \cdot 10^{-9}$

sehen werden. Die relative Permeabilität μ_{rel} , definiert als das Verhältnis B/B_{aus} , ist dann nicht konstant; ihr Wert kann zwischen 5000 und 100 000 liegen. Für Permanentmagneten ist μ_{rel} überhaupt nicht definiert, weil diese Stoffe auch in Abwesenheit äußerer Magnetfelder magnetisch sind.

Magnetische Momente von Atomen

Die Magnetisierung eines para- oder ferromagnetischen Stoffs lässt sich auf die permanenten magnetischen Momente der einzelnen Atome oder Elektronen des Materials zurückführen. Das magnetische (Bahn-)Moment eines Elektrons in einem Atom ist ein quantenmechanisches Phänomen, es kann aber halbklassisch hergeleitet werden. Dazu betrachten wir ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt (Abbildung 24.41). Der Bahndrehimpuls des Teilchens bezüg-

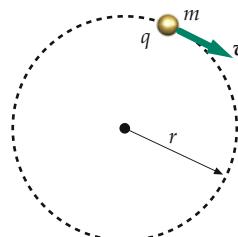


Abbildung 24.41 Ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Der Drehimpulsvektor zeigt in die Papierebene hinein, es gilt $L = m v r$; wenn q positiv ist, zeigt der Vektor des magnetischen Moments ebenfalls in die Papierebenen hinein, es gilt $\mu = \frac{1}{2} q v r$.

lich des Kreismittelpunkts ist

$$L = mvr. \quad (24.26)$$

Das magnetische Moment ergibt sich als Produkt aus dem Strom und der Fläche des Kreises:

$$\mu = IA = I\pi r^2.$$

T sei die Zeit, in der sich die Ladung einmal vollständig um die Kreisbahn bewegt. Der Strom – die einen bestimmten Punkt pro Zeiteinheit durchlaufende Ladung – ist dann q/T . Da die Periode T des Umlaufs gleich dem Quotienten aus dem Kreisumfang $2\pi r$ und der Geschwindigkeit v ist, erhalten wir für den Strom

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}.$$

Das magnetische Moment ist damit

$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr. \quad (24.27)$$

Wir setzen $vr = L/m$ aus Gleichung 24.26 ein:

$$\mu = \frac{q}{2m} L.$$

Ist die Ladung q positiv, zeigen der Drehimpuls und das magnetische Moment in die gleiche Richtung, und wir können schreiben

$$\mu = \frac{q}{2m} L. \quad (24.28)$$

KLASSISCHE BEZIEHUNG ZWISCHEN MAGNETISCHEM MOMENT UND BAHNDREHIMPULS

Gleichung 24.28 drückt die allgemeine klassische Beziehung zwischen dem magnetischen Moment und dem Bahndrehimpuls aus. Auch in der Quantentheorie des Atoms gilt sie für den Bahndrehimpuls, nicht aber für den Spin des Elektrons, da in dem Fall relativistische und quantenmechanische Effekte nicht mehr zu vernachlässigen sind, wie wir in Kapitel 34 näher untersuchen werden.

Sind in einem Material die magnetischen Momente aller Atome oder Moleküle ausgerichtet, so ist das magnetische Moment pro Volumeneinheit gleich dem Produkt aus der Anzahl (n/V) der Moleküle pro Volumeneinheit und dem magnetischen Moment μ jedes einzelnen Moleküls. Für diesen extremen Fall ist die **Sättigungsmagnetisierung** M_S gegeben durch

$$M_S = (n/V) \mu. \quad (24.29)$$

Die Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit (die Anzahldichte) lässt sich aus der Molmasse m_{Mol} , der Dichte ρ des Stoffs und der Avogadro-Konstante n_A berechnen (siehe auch Beispiel 24.11):

$$\frac{n}{V} = \frac{n_A (\text{Atome} \cdot \text{mol}^{-1})}{m_{\text{Mol}} (\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1})} \rho (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}). \quad (24.30)$$

Beispiel 24.11: Die Sättigungsmagnetisierung von Eisen

Berechnen Sie die Sättigungsmagnetisierung von Eisen und das von ihr im Inneren einer Probe bewirkte Magnetfeld. Nehmen Sie dazu an, das magnetische Moment jedes Eisenatoms ist gleich einem Bohr'schen Magneton $\mu_{\text{Bohr}} = 9,72 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Problembeschreibung: Die Zahl der Eisenatome pro Volumeneinheit berechnen wir aus der Dichte von Eisen, $\rho = 7,87 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, und seiner molaren Masse $m_{\text{Mol}} = 55,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

Lösung: 1. Die Sättigungsmagnetisierung ist gleich dem Produkt aus der Anzahldichte der Atome und dem magnetischen Moment jedes Atoms:

$$M_S = \frac{n}{V} \mu$$

2. In die Berechnung der Anzahldichte der Eisenatome fließen die Avogadro-Konstante sowie die molare Masse und die Dichte von Eisen ein:

$$\begin{aligned} \frac{n}{V} &= \frac{n_A}{m_{\text{Mol}}} \rho \\ &= \frac{6,01 \cdot 10^{23} \text{ Atome} \cdot \text{mol}^{-1}}{55,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} (7,87 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}) \\ &= 8,48 \cdot 10^{28} \text{ Atome} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

3. Dieses Ergebnis und $\mu = 1 \mu_{\text{Bohr}}$ setzen Sie nun in die Gleichung für die Sättigungsmagnetisierung ein:

$$\begin{aligned} M_S &= \frac{n}{V} \mu = (8,48 \cdot 10^{28} \text{ Atome} \cdot \text{m}^{-3}) \\ &\quad \cdot (9,72 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2) \\ &= \boxed{7,86 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}} \end{aligned}$$

4. Von dieser maximalen Magnetisierung wird im Inneren eines langen Eisenzylinders, auf der Achse und weit von den Enden entfernt, das Magnetfeld $B = \mu_0 M_S$ bewirkt:

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 M_S \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}) \cdot (7,86 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}) \\ &= \boxed{0,987 \text{ T} \approx 1 \text{ T}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die in Schritt 4 berechnete Feldstärke, $B \approx 1 \text{ T}$, ist hoch, wie man es für das gesättigte Magnetfeld im Inneren eines Ferromagneten erwartet.

Weitergedacht: Für das gesättigte Magnetfeld von gehärtetem Eisen misst man einen Wert von $2,16 \text{ T}$. Folglich ist das magnetische Moment eines einzelnen Eisenatoms etwas größer als zwei Bohr'sche Magnetons. Dieses magnetische Moment ist im Wesentlichen auf die Spins der beiden ungepaarten Elektronen im Eisenatom zurückzuführen. ■

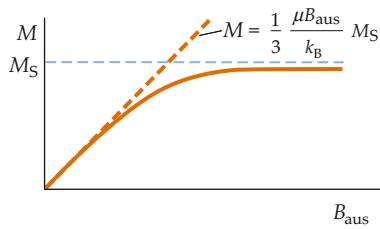


Abbildung 24.42 Die Magnetisierung M als Funktion des angelegten Magnetfelds B_{aus} . In sehr starken Feldern nähert sich die Magnetisierung dem Sättigungswert M_S . Praktisch lässt sich dies nur bei sehr niedrigen Temperaturen erreichen. In schwachen Feldern ist die Magnetisierung näherungsweise proportional zu B_{aus} . Dieser Zusammenhang wird als Curie'sches Gesetz bezeichnet.

*Paramagnetismus

Paramagnetische Stoffe besitzen eine sehr kleine, positive magnetische Suszeptibilität χ_{mag} , denn die permanenten magnetischen Momente ihrer Atome wechselwirken nur schwach miteinander. Liegt kein äußeres Magnetfeld an, so zeigen diese magnetischen Momente in zufällige Raumrichtungen. Bei Anwesenheit eines äußeren Felds richten sich die magnetischen Momente bis zu einem gewissen Grad in Feldrichtung aus; dieser Tendenz entgegen wirkt jedoch die thermische Bewegung. Wie viele magnetische Momente sich tatsächlich ausrichten, hängt deshalb nicht nur von der Stärke des äußeren Felds, sondern auch von der Temperatur ab. Generell bleibt das Ausmaß der Ausrichtung gering: Die Energie eines magnetischen Moments in einem Magnetfeld ist typischerweise viel kleiner als die thermische Energie eines Atoms des Stoffs, die in der Größenordnung von $k_B T$ liegt (k_B ist die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur).

Die potenzielle Energie eines magnetischen Dipols mit dem Dipolmoment μ in einem äußeren Feld \mathbf{B} ist durch Gleichung 23.16 gegeben:

$$E_{\text{pot}} = -\mu \cdot \mathbf{B} = -|\mu| |\mathbf{B}| \cos \theta.$$

Die minimale potenzielle Energie des Dipols bei paralleler Einstellung zum Feld ($\theta = 0$) ist um den Betrag $2|\mu||\mathbf{B}|$ kleiner als die bei antiparalleler Einstellung ($\theta = 180^\circ$) erreichte maximale potenzielle Energie. Die Differenz beträgt für ein typisches atomares magnetisches Moment von einem Bohr'schen Magneton ($\mu_{\text{Bohr}} = 9,72 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$) und eine typische Magnetfeldstärke von 1 T

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{pot}} &= 2 \mu_{\text{Bohr}} |\mathbf{B}| = 2 \cdot (5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}) \cdot (1 \text{ T}) \\ &= 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Bei Zimmertemperatur ($T = 300 \text{ K}$) ist die thermische Energie $k_B T$

$$k_B T = (8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}) (300 \text{ K}) = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ eV},$$

also über 200-mal so groß wie $2 \mu_{\text{Bohr}} |\mathbf{B}|$. Selbst in einem starken Magnetfeld von 1 T sorgt die thermische Bewegung dafür,

dass die magnetischen Momente überwiegend in zufällige Richtungen zeigen (wenn die Temperatur nicht sehr niedrig ist).

In Abbildung 24.42 ist die Magnetisierung M in Abhängigkeit von einem äußeren Magnetfeld B_{aus} für eine bestimmte Temperatur aufgetragen. Ist das anliegende Feld sehr stark, so richten sich fast alle magnetischen Momente in Feldrichtung aus, und es ist $M \approx M_S$. (Bei im Labor erreichbaren Magnetfeldstärken tritt dieser Fall nur bei sehr tiefen Temperaturen ein.) Für $B = 0$ ist $M = 0$, das bedeutet, die Momente sind vollkommen zufällig orientiert. Bei schwachen Feldern ist die Magnetisierung der Feldstärke annähernd proportional, was in der Abbildung durch die gestrichelte orangefarbene Linie angedeutet wird. In diesem Bereich gilt für die Magnetisierung

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{aus}}}{k_B T} M_S. \quad (24.31)$$

CURIE'SCHES GESETZ

Beachten Sie dabei, dass $\mu B_{\text{aus}} / (k_B T)$ das Verhältnis der maximalen Energie des Dipols im Magnetfeld zur thermischen Energie angibt. Die Magnetisierung ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional; dieser Zusammenhang wurde von Pierre Curie experimentell entdeckt und wird als **Curie'sches Gesetz** bezeichnet. Eine Anwendung findet sich in Beispiel 24.12.

Beispiel 24.12: Anwendung des Curie'schen Gesetzes

Für ein Material sei $\mu = \mu_{\text{Bohr}}$. Es werde ein äußeres Magnetfeld von 1,00 T erzeugt. Bei welcher Temperatur erreicht die Magnetisierung 1,00 % des Sättigungswerts?

Problembeschreibung: Wir wenden Gleichung 24.31 an, setzen $M/M_S = 0,0100$ und lösen nach der Temperatur auf.

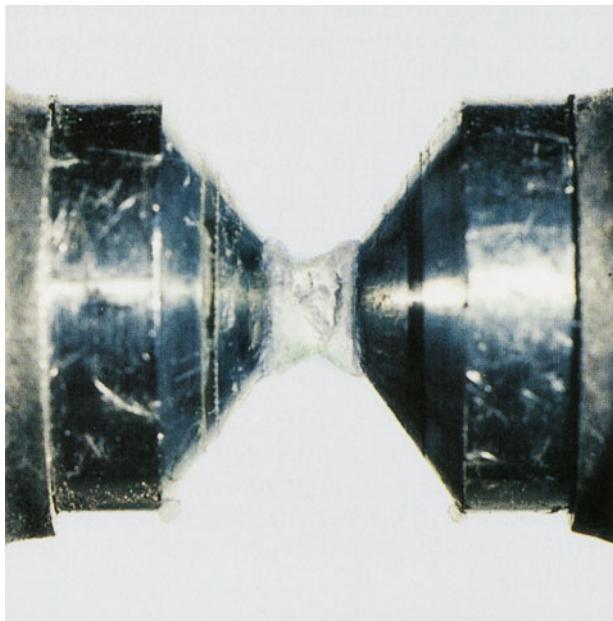
Lösung: 1. Das Curie'sche Gesetz gibt den Zusammenhang zwischen M , T , M_S und B_{aus} an:

$$M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{aus}}}{k_B T} M_S$$

2. Setzen Sie in diese Gleichung $\mu = \mu_{\text{Bohr}}$ und $M/M_S = 0,0100$ ein und berechnen Sie T :

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu_{\text{Bohr}} B_{\text{aus}}}{3 k_B} \frac{M_S}{M} \\ &= \frac{(5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1}) \cdot (1,00 \text{ T})}{3 \cdot (8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1})} 0,0100 \\ &= [22,4 \text{ K}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß liegt das Resultat aus Schritt 2 oberhalb des absoluten Nullpunkts.



Flüssiger Sauerstoff ist paramagnetisch und wird vom Magnetfeld eines Permanentmagneten angezogen. Auf die magnetischen Dipole wirkt eine resultierende Kraft, weil das Magnetfeld nicht homogen ist. (© J. F. Allen, St. Andrews University, Scotland.)



Kanadische Münzen enthalten in der Regel größere Anteile des ferromagnetischen Nickels. Diese Münze wird deshalb von einem Magneten angezogen. (Foto: © Gene Mosca.)

Weitergedacht: Wie Sie sehen, ist selbst in einem starken äußeren Magnetfeld von 1,00 T die Magnetisierung kleiner als 1 % des Sättigungswerts, wenn die Temperatur 22,4 K überschreitet.

Übung 24.9: Wie groß ist M im Verhältnis zur Sättigungsmagnetisierung bei 300 K und einem äußeren Magnetfeld von 1,50 T, wenn $\mu = \mu_{\text{Bohr}}$ ist? ▶ ■

*Ferromagnetismus

Zu den ferromagnetischen Stoffen gehören reines Eisen, Cobalt, Nickel und Legierungen dieser Metalle untereinander, außerdem Gadolinium, Dysprosium und einige wenige ihrer Verbindungen. Die Ursache für ferromagnetisches Verhalten sind starke Wechselwirkungen zwischen den Elektronen in einem teilweise gefüllten Band eines Metalls oder zwischen lokalisierten Elektronen an benachbarten Atomen, die magnetische Momente besitzen. Diese sogenannte **Austauschwechselwirkung** setzt die Energie von Elektronenpaaren mit parallelen Spins im Vergleich zu Elektronenpaaren mit antiparallelen Spins herab.

Bei ferromagnetischen Materialien nimmt die magnetische Suszeptibilität χ_{mag} sehr große positive Werte an (gemessen unter den im Folgenden spezifizierten Bedingungen). Schon schwache Magnetfelder führen bei diesen Materialien zu einer weit-

gehenden Ausrichtung der atomaren magnetischen Dipolmomente. In manchen Fällen bleibt diese Orientierung selbst nach Abschalten des äußeren Felds erhalten: Da die Wechselwirkung benachbarter magnetischer Dipole sehr stark ist, richten sich die magnetischen Momente in mikroskopisch kleinen Raumbereichen auch ohne äußeres Feld aneinander aus. Diese Raumbereiche nennt man **magnetische Domänen** oder **Weiβ'sche Bezirke**.

Innerhalb eines Weiβ'schen Bezirks sind alle magnetischen Momente ausgerichtet. Die Richtung der Orientierung ist allerdings von Bezirk zu Bezirk verschieden, weshalb das resultierende magnetische Moment einer makroskopischen Probe des ferromagnetischen Materials normalerweise gleich null ist. Abbildung 24.43 veranschaulicht diese Situation. Die für die Orientierung verantwortlichen Wechselwirkungskräfte werden von der Quantentheorie vorhergesagt, sind aber im Rahmen der klassischen Physik nicht zu erklären. Übersteigt die Temperatur einen kritischen Wert, die **Curie-Temperatur**, so ist die thermische Bewegung intensiv genug, um die Orientierung der magnetischen Momente aufzuheben, und das Material wird paramagnetisch.

Bei Anliegen eines äußeren Magnetfelds können sich die Grenzen der Weiβ'schen Bezirke verschieben, oder die Orientierungsrichtung in einzelnen Bezirken kann sich ändern („umklappen“). In beiden Fällen ist das resultierende magnetische Moment der makroskopischen Probe dann verschieden von null und parallel zum Feld gerichtet. Da bereits schwache Felder zur hochgradigen Ausrichtung führen, ist das von den Dipolen des Materials erzeugte Magnetfeld häufig wesentlich stärker als das anliegende Feld.

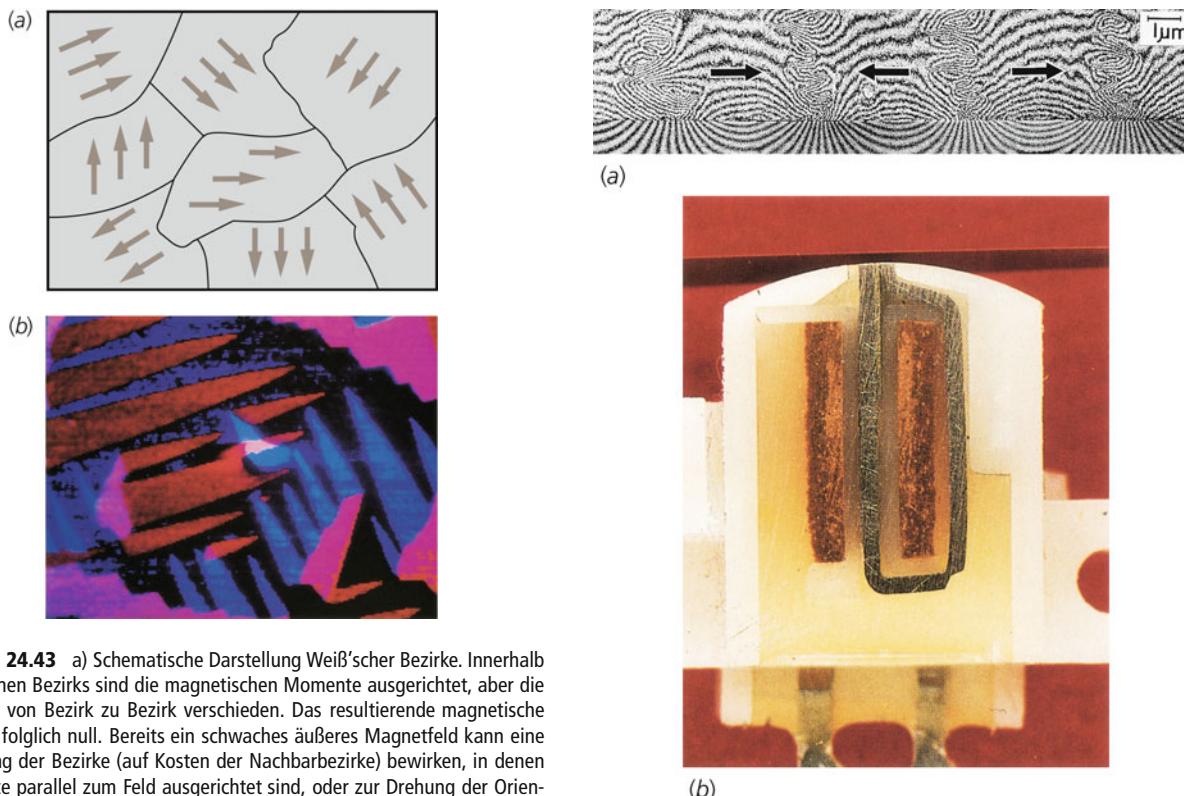


Abbildung 24.43 a) Schematische Darstellung Weiß'scher Bezirke. Innerhalb jedes einzelnen Bezirks sind die magnetischen Momente ausgerichtet, aber die Richtung ist von Bezirk zu Bezirk verschieden. Das resultierende magnetische Moment ist folglich null. Bereits ein schwaches äußeres Magnetfeld kann eine Vergrößerung der Bezirke (auf Kosten der Nachbarbezirke) bewirken, in denen die Momente parallel zum Feld ausgerichtet sind, oder zur Drehung der Orientierungsrichtung einzelner Bezirke führen. In beiden Fällen ist das resultierende magnetische Moment dann von null verschieden und parallel zum Feld gerichtet. b) Magnetische Bezirke an der Oberfläche eines aus 97 % Fe und 3 % Si bestehenden Kristalls, aufgenommen mit einem Rasterelektronenmikroskop mit Polarisationsanalyse. Die vier Farben zeigen vier mögliche Orientierungen der magnetischen Momente an. (© NIST.)

Überlegen wir nun, was passiert, wenn ein langer Eisenstab in eine Zylinderspule geschoben und bei allmählich zunehmendem Strom magnetisiert wird. Stab und Spule seien lang genug, dass wir die Randeffekte vernachlässigen können. Die induzierten magnetischen Momente zeigen in Richtung des äußeren Felds; B_{aus} und \mathbf{M} sind folglich gleich gerichtet. Es ist dann

$$B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M = \mu_0 (n/l) I + \mu_0 M. \quad (24.32)$$

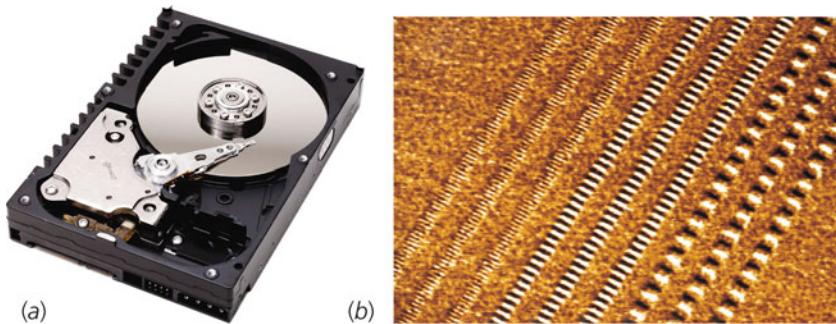
In ferromagnetischen Materialien ist das induzierte Magnetfeld $\mu_0 M$ oft deutlich (um einen Faktor von mehreren Tausend) stärker als das äußere Feld.

In Abbildung 24.44 wurde B als Funktion des äußeren Magnetfelds B_{aus} aufgetragen. Während der Strom von null ausgehend allmählich ansteigt, nimmt B entlang der von O nach P_1 führenden Kurve zu. Die Abflachung der Kurve in der Nähe von P_1 zeigt, dass M sich dem Sättigungswert M_S (mit Ausrichtung sämtlicher magnetischer Momente) nähert. Oberhalb der Sättigung nimmt B nur noch zu, weil auch das äußere Feld $B_{\text{aus}} = \mu_0 (n/l) I$ weiter zunimmt. Fällt B_{aus} ausgehend von P_1 langsam wieder ab, geht die Magnetisierung nicht in entsprechendem Maß zurück: Die Ausrichtung der Weiß'schen Bezirke

a) Magnetfeldlinien auf einem Cobaltmagnetband („Tonband“). Die Pfeile zeigen die verschlüsselten magnetischen Bits an. b) Im Schreib-Lese-Kopf des Tonbandgeräts befindet sich ein magnetischer Kern mit einer Wicklung, durch die bei der Aufnahme ein Strom fließt, der an der Spitze des Tonkopfs ein Magnetfeld erzeugt, das das Band im Takt der elektrischen Eingangssignale magnetisiert. Beim Abspielen werden entsprechend der Bandmagnetisierung im Ausgangssignal Schwankungen erzeugt, die verstärkt über Lautsprecher wiedergegeben werden. (a) © Akira Tonomura, Hitachi Advanced Research Library, Hatomaya, Japan; b) © Bruce Iverson.)

bleibt teilweise erhalten, und selbst bei $B_{\text{aus}} = 0$ verschwindet die Magnetisierung nicht völlig, wie Sie dem Diagramm entnehmen können. Diesen Effekt nennt man **Hysteresis** (vom griechischen *hysteros* für „später“, „hinterher“), die Kurve in Abbildung 24.44 ist die **Hysteresekurve**, und das verbleibende Magnetfeld im Punkt P_4 ($B_{\text{aus}} = 0$) heißt **Remanenzfeld** B_{rem} . An diesem Punkt ist der Eisenstab zum Permanentmagneten geworden. Polt man den Strom in der Spule jetzt um, sodass B_{aus} in entgegengesetzte Richtung zeigt, nimmt das Magnetfeld B allmählich ab und erreicht in Punkt c wieder den Wert null. Um die Hysteresekurve zu schließen, lässt man den Strom darüber hinaus weiter steigen, bis die Sättigung erneut erreicht ist (P_2), schaltet dann das äußere Feld ab (P_3), polt den Strom wieder um und lässt ihn in der ursprünglichen Richtung ansteigen.

Die Magnetisierung M hängt von der Vorgeschichte des Materials ab und kann auch ohne Anliegen eines äußeren Felds sehr große Werte annehmen; sie hängt nicht in einfacher Weise mit B_{aus} zusammen. Beschränken wir uns jedoch auf den Kurven-



a) Ein Festplattenlaufwerk zur magnetischen Aufzeichnung von Informationen. b) Magnetisches Muster auf einer Festplatte in 2400facher Vergrößerung. Die hellen und dunklen Bereiche entsprechen magnetischen Momenten gegensätzlicher Richtung. In dem geglätteten Bereich außerhalb des Musters wurden die Daten zuvor gelöscht. Die eingebrannten Dellen (Pits) werden mit dem Lesekopf des Plattenlaufwerks abgetastet und in Stromimpulse umgewandelt. (a) © WD, a Western Digital company. b) © Tom Chang/IBM Storage Systems Division, San Jose, CA.)

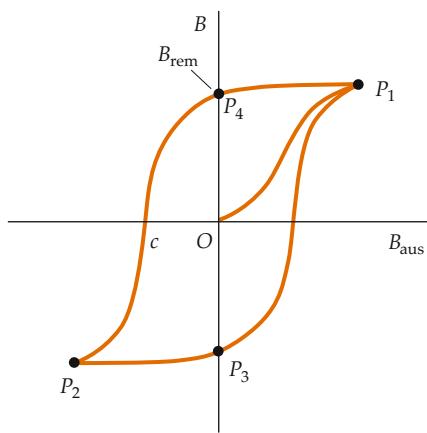


Abbildung 24.44 Das Magnetfeld B eines Eisenstabs als Funktion des äußeren Felds B_{aus} . Die äußere (geschlossene) Kurve ist die Hysteresekurve. Das Remanenzfeld B_{rem} bleibt auch beim Abschalten des äußeren Felds erhalten.

abschnitt zwischen dem Ursprung und P_1 in Abbildung 24.44 (die sogenannte **Neukurve**), so sind \mathbf{B}_{aus} und \mathbf{M} parallel, und \mathbf{M} ist in Abwesenheit des äußeren Felds null. Wir können die magnetische Suszeptibilität dann gemäß Gleichung 24.23 aufschreiben,

$$\mathbf{M} = \chi_{\text{mag}} \frac{\mathbf{B}_{\text{aus}}}{\mu_0},$$

und es ist

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{aus}} + \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}_{\text{aus}} (1 + \chi_{\text{mag}}) = \mu_{\text{rel}} \mu_0 n I = \mu n I \quad (24.33)$$

mit

$$\mu = (1 + \chi_{\text{mag}}) \mu_0 = \mu_{\text{rel}} \mu_0 \quad (24.34)$$

als **Permeabilität** des Materials. (Für para- und diamagnetische Stoffe ist χ_{mag} viel kleiner als eins. Die Permeabilität μ und die magnetische Feldkonstante (die Permeabilität des Vakuums) μ_0

Tabelle 24.2 Maximale Werte von $\mu_0 M_S$ und μ_{rel} für einige ferromagnetische Materialien

Material	$\mu_0 M_S$ (T)	μ_{rel}
Eisen (gehärtet)	2,16	5500
Eisen-Silicium (96 % Fe, 4 % Si)	1,95	7000
Permalloy (55 % Fe, 45 % Ni)	1,60	25 000
Mu-Metall (77 % Ni, 16 % Fe, 5 % Cu, 2 % Cr)	0,65	100 000

sind dann nahezu gleich. – Achten Sie darauf, das magnetische Dipolmoment μ nicht mit der Permeabilität μ zu verwechseln.)

Wie Abbildung 24.44 zeigt, ist der Zusammenhang zwischen B und B_{aus} nicht linear. Aus diesem Grund ist die relative Permeabilität keine Konstante. Sie erreicht ihre Maximalwerte bei Magnetisierungen, die deutlich unterhalb der Sättigungsmagnetisierung liegen. In Tabelle 24.2 wurden Sättigungsfelder $\mu_0 M_S$ und Maximalwerte von μ_{rel} für einige ferromagnetische Materialien zusammengestellt. Beachten Sie, dass μ_{rel} viel größer als eins werden kann. Beispiel 24.13 verdeutlicht die Anwendung der Gleichungen 24.32 bis 24.34.

Beispiel 24.13: Eine Spule mit Eisenkern

Eine lange Spule mit zwölf Windungen pro Zentimeter hat einen Kern aus Weicheisen. Ein Spulenstrom von 0,500 A erzeugt im Inneren des Kerns ein Magnetfeld von 1,36 T. Berechnen Sie a) das äußere Magnetfeld B_{aus} , b) die relative Permeabilität μ_{rel} und c) die Magnetisierung M .

Problembeschreibung: Das äußere Magnetfeld ist das Magnetfeld der Spule, $B_{\text{aus}} = \mu_0 (n/l) I$. Das Gesamtfeld ist gegeben; die relative Permeabilität können wir deshalb mithilfe ihrer Definitionsgleichung berechnen,

$\mu_{\text{rel}} = B/B_{\text{aus}}$. M ergibt sich schließlich aus der Beziehung $B = B_{\text{aus}} + \mu_0 M$.

Lösung:

Teilaufgabe a

Das äußere Feld ist durch Gleichung 24.10 gegeben (Wd. steht für Windungen):

$$\begin{aligned} B_{\text{aus}} &= \mu_0 (n/l) I \\ &= (4\pi) \cdot (10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \cdot (1200 \text{ Wd. m}^{-1}) \cdot (0,500 \text{ A}) \\ &= 7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die relative Permeabilität ist gleich dem Quotienten aus B und B_{aus} :

$$\mu_{\text{rel}} = \frac{B}{B_{\text{aus}}} = \frac{1,36 \text{ T}}{7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 1,80 \cdot 10^3$$

Teilaufgabe c

Die Magnetisierung M ergibt sich aus Gleichung 24.32:

$$\begin{aligned} \mu_0 M &= B - B_{\text{aus}} \\ &= 1,36 \text{ T} - 7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T} \approx B = 1,36 \text{ T} \\ M &= \frac{B}{\mu_0} = \frac{1,36 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}} \\ &= 1,08 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Laut Tabelle 24.2 ist der maximale Wert von μ_{rel} gleich 5500. Das Ergebnis aus Teilaufgabe b ist, wie zu erwarten, kleiner.

Weitergedacht: Die Stärke des äußeren Felds, $7,54 \cdot 10^{-4} \text{ T}$, ist gegenüber dem Gesamtfeld von $1,36 \text{ T}$ vernachlässigbar gering. ■

Die von der Hysteresekurve umschlossene Fläche ist proportional der Energie, die während des irreversiblen Prozesses der Magnetisierung und Entmagnetisierung als Wärme verloren geht. Ist diese Fläche klein, so ist der Energieverlust gering, und man bezeichnet das Material, z. B. Weicheisen (chemisch reines Eisen), als **magnetisch weich**. Eine entsprechende Hysteresekurve sehen Sie in Abbildung 24.45. Das Remanenzfeld B_{rem} ist nahezu null, pro Zyklus geht nur wenig Energie verloren. Magnetisch weiche Materialien werden oft als Kerne von Transformatorschleifen verwendet, weil man hier die Wärmeverluste bei Änderungen des Magnetfelds möglichst klein halten will. Permanentmagneten hingegen, bei denen große Remanenzfelder

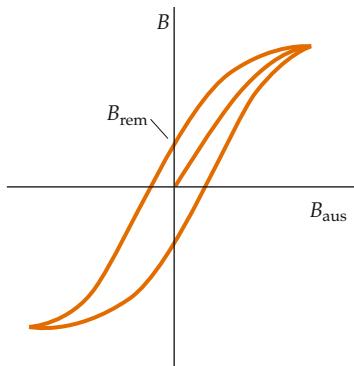


Abbildung 24.45 Hysteresekurve eines magnetisch weichen Materials. Das Remanenzfeld ist sehr klein verglichen mit demjenigen eines magnetisch harten Materials (siehe Abbildung 24.44).

erwünscht sind, stellt man aus **magnetisch harten** Materialien wie unlegiertem Stahl (Kohlenstoffstahl), der Legierung Alnico 5 oder Legierungen der seltenen Erden Samarium und Neodym (Samarium-Cobalt, Neodym-Eisen-Bor) her.

*Diamagnetismus

Diamagnetische Materialien weisen sehr kleine, negative Werte der magnetischen Suszeptibilität χ_{mag} auf. Der Diamagnetismus wurde im Jahr 1845 von Michael Faraday entdeckt, der beobachtete, dass ein Stück Bismut von beiden Polen eines Magneten abgestoßen wurde. Faraday folgerte, dass das äußere Feld des Magneten in der Bismutprobe magnetische Momente in entgegengesetzter Richtung induziert.

Zum qualitativen Verständnis dieses Effekts betrachten wir Abbildung 24.46: Zwei positive Ladungen bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzten Richtungen auf Kreisbahnen. Ihre magnetischen Momente sind antiparallel gerichtet und heben einander auf. (Die magnetischen Momente in der Materie werden zwar von negativ geladenen Elektronen erzeugt, aber an dieser Stelle ist es einfacher, von positiven Ladungen auszugehen.) In Anwesenheit eines in die Papierebene hinein zeigenden äußeren Felds \mathbf{B} wirkt auf die Ladungen eine zusätzliche radial gerichtete Kraft $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Für die Ladung links zeigt diese Kraft nach innen und verstärkt die Zentripetalkraft. Damit sich die Kreisbahn nicht ändert, muss die Ladung sich schneller bewegen, sodass $-m v^2/r$ die resultierende Zentripetalkraft ausgleicht; ihr magnetisches Moment, das aus der Papierebene herauszeigt, nimmt zu. (Das Elektron wird durch ein elektrisches Feld beschleunigt, das durch die Änderung des Magnetfelds induziert wird. Diesen Induktion genannten Vorgang besprechen wir in Kapitel 25.) Für die Ladung rechts zeigt die zusätzliche Kraft nach außen, bei konstanter Kreisbahn muss sich das Teilchen langsamer bewegen. Sein in die Papierebene hinein zeigendes magnetisches Moment nimmt ab. In beiden

Fällen ist die Änderung des magnetischen Moments aus der Papierebene heraus und damit dem äußeren Feld entgegengesetzt gerichtet. Da die permanenten magnetischen Momente der beiden Ladungen gleich groß, aber entgegengesetzt orientiert sind, heben sie einander auf. Übrig bleiben die induzierten magnetischen Momente, die beide entgegengesetzt zum äußeren Feld gerichtet sind.

Ein Material ist diamagnetisch, wenn der resultierende Drehimpuls seiner Atome und folglich auch deren permanenten magnetischen Moment null ist. (Der resultierende Drehimpuls eines Atoms hängt von seiner Elektronenstruktur ab, wie wir in Kapitel 34 näher besprechen werden.) In Diamagneten induzierte magnetische Momente liegen in der Größenordnung von 10^{-5} Bohr'schen Magnetons und sind damit viel kleiner als die permanenten magnetischen Momente der Atome para- oder ferromagnetischer Materialien. Bei hinreichend hohen Temperaturen verhalten sich theoretisch alle Stoffe diamagnetisch, weil dann die Ausrichtung bestehender magnetischer Momente aufgehoben wird; sind die Temperaturen niedriger, so werden die (in allen Materialien vorhandenen) diamagnetischen Eigenschaften gegebenenfalls vom Para- oder Ferromagnetismus überdeckt.

Bringt man einen Supraleiter in ein äußeres Magnetfeld, so werden an seiner Oberfläche elektrische Ströme induziert, sodass das resultierende Magnetfeld innerhalb des Materials null ist. Betrachten wir einen supraleitenden Stab in einer Zylinderspule mit (n/l) Windungen pro Längeneinheit. Wird die Spule mit einer Spannungsquelle verbunden, fließt ein Strom I , der ein Magnetfeld $\mu_0 (n/l) I$ erzeugt. An der Oberfläche des Stabs wird pro Längeneinheit ein Strom $-(n/l) I$ induziert, dessen Magnetfeld das Spulenfeld gerade aufhebt. Das resultierende Magnetfeld innerhalb des Stabs ist null. Aus Gleichung 24.24 folgt

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{aus}} (1 + \chi_{\text{mag}}) = 0$$

und daraus

$$\chi_{\text{mag}} = -1.$$

Ein Supraleiter ist also ein idealer Diamagnet mit einer magnetischen Suszeptibilität von -1 .

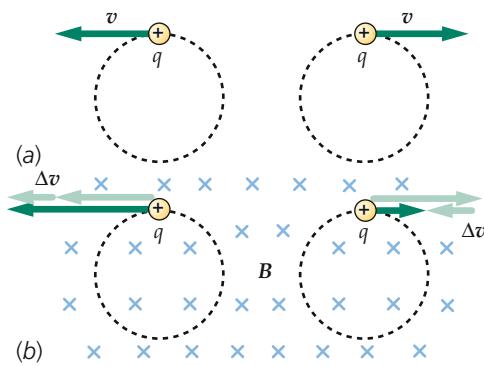
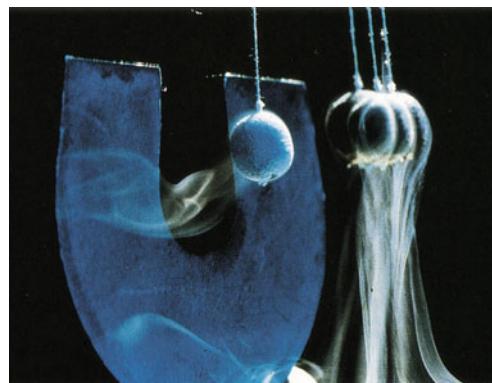


Abbildung 24.46 a) Eine positive Ladung, die sich entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn bewegt, besitzt ein aus der Papierebene heraus zeigendes magnetisches Moment. Beim Einschalten eines äußeren, in die Papierebene hinein zeigenden Magnetfelds kommt ein zusätzlicher Beitrag zur Zentripetalkraft hinzu, und die Ladung muss sich schneller bewegen, wenn die Kreisbahn konstant bleiben soll. Die Änderung des magnetischen Moments zeigt aus der Papierebene heraus. b) Eine positive Ladung, die sich im Uhrzeigersinn auf einer Kreisbahn bewegt, besitzt ein in die Papierebene hinein zeigendes magnetisches Moment. Beim Einschalten eines äußeren, in die Papierebene hinein zeigenden Magnetfelds nimmt die Zentripetalkraft um einen zusätzlichen Beitrag ab, und die Ladung muss sich langsamer bewegen, wenn die Kreisbahn konstant bleiben soll. Wieder zeigt die Änderung des magnetischen Moments aus der Papierebene heraus.



Ein Supraleiter ist ein idealer Diamagnet. Die supraleitende, an einem Faden aufgehängte Kugel wird von dem Permanentmagneten abgestoßen. (© Bill Pierce/Time Magazine, Inc.)



Hochenergie-Kondensatorbank (© Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf)

Deutlich höhere Feldstärken können nur mit gepulst betriebenen Spulen realisiert werden; nur dann sind die entstehenden thermischen Lasten beherrschbar. Bei einem Magnetenpuls erwärmen sich die mit flüssigem Stickstoff bei 77 K gekühlten Spulen innerhalb weniger 10 ms auf etwa Raumtemperatur. Diese Zeitspanne ist ausreichend, um mit moderner Elektronik auch sehr kleine Signale hochauflöst zu messen.

Magnetfelder wirken auf bewegliche Ladungsträger und die magnetischen Freiheitsgrade eines Materials. Sie können somit das Verhalten von Materialien ebenso vielfältig beeinflussen wie z. B. Temperatur und Druck. Hohe Magnetfelder erlauben deshalb in der Physik und vielen anderen Forschungsdisziplinen grundlegende Untersuchungen der elektronischen und magnetischen Eigenschaften der Materie. So sind mehr als 15 Nobelpreise in Physik, Chemie und Medizin eng mit der Forschung in Magnetfeldern verknüpft. Nicht nur deshalb wächst die wissenschaftliche Nachfrage nach Forschungsanlagen, in denen Experimente in hohen Magnetfeldern möglich sind.

Weltweit existieren eine Reihe von Hochfeld-Magnetlaboratorien, die den verfügbaren Magnetfeldbereich für wissenschaftliche Fragestellungen erweitern sollen. In Deutschland gibt es ein solches Labor: das Hochfeld-Magnetlabor Dresden (HLD) am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, in dem wir gepulste Magnetfelder für Flussdichten bis etwa 100 T zerstörungsfrei erzeugen. Solche Magnetfelder benutzen wir für eigene Forschungsvorhaben und stellen sie Wissenschaftlern aus der ganzen Welt zur Verfügung.^{1,2}

Hohe Magnetfelder erzeugt man in der Forschung und der Anwendung, z. B. für die Magnetresonanztomografie, meist durch supraleitende Spulen. Damit sind zurzeit Magnetfelder bis 20 T, vereinzelt auch bis etwa 23,5 T erreicht worden. Da der supraleitende Zustand in hohen Magnetfeldern jedoch zusammenbricht, werden noch höhere Magnetfelder mit resistiven Spulen erzeugt. Deren Betrieb erfordert allerdings enorme elektrische Leistungen (einige 10 MW) und verursacht hohe laufende Kosten. Solche Spulen erzeugen Magnetfelder von maximal etwa 35–38 T. Dabei muss die entstehende Verlustleistung durch leistungsfähige Wasserkühlung abgeführt werden. Kombiniert man eine äußere supraleitende mit einer inneren resistiven Spule, dann sind statische Magnetfelder bis etwa 45 T erreichbar. (Das amerikanische Hochfeldlabor in Tallahassee besitzt so einen zurzeit weltweit einmaligen Hybridmagneten.)

Um innerhalb dieser kurzen Zeiten den benötigten starken Strom für die Spulen bereitzustellen, verwenden wir am HLD die modernste Variante, eine Hochenergie-Kondensatorbank (siehe Abbildung). Sie enthält 500 Kondensatoren mit einer Kapazität von jeweils 350 μF und kann eine Gesamtenergie von 50 MJ aufnehmen. Vor einem Magnetenpuls werden die benötigten Kondensatoren mit niedriger Leistung kostengünstig aus dem Stromnetz bis auf eine maximale Spannung von 24 kV aufgeladen. Über elektronische Schalter (Thyristoren) wird die benötigte Energie dann den Spulensystemen zugeführt. Unsere Kondensatorbank kann sehr hohe Entladeströme von einigen 100 kA bei elektrischen Leistungen von bis zu 5 GW bereitstellen. In der Tat sind die durch solche Ströme in den Zuleitungen entstehenden Magnetfelder bereits so groß, dass beim Test der Anlage mit 250 kA nahe gelegene mechanische Schalter öffneten und mit einem großen Lichtbogen und Knall versagten. Dies war eine direkte Folge der Lorentz-Kraft auf den stromdurchflossenen Schalter. Seit dem Wiedereinbau von um 180° gedrehten Schaltern funktioniert die Kondensatorbank einwandfrei.

Die Lorentz-Kraft ist übrigens auch der Grund, warum der Bau von Spulen für sehr hohe Magnetfelder eine große technische Herausforderung ist. Da das Magnetfeld, B , proportional zum Strom und die Lorentz-Kraft proportional zum Magnetfeld mal Strom ist, wachsen die Kräfte in den Spulendrähten mit B^2 . In einfachster Näherung ist der Druck auf den Draht im Inneren einer Spule durch $P = B^2/2\mu_0$ gegeben. Damit müsste des Leitermaterial im Inneren einer 100-T-Spule einen Druck von ca. 4 GPa (= 40 000 Atmosphären) aushalten. Nur durch den Einsatz spezieller nicht leitender Kunstfasern als Verstärkung können solche Kräfte aufgefangen werden^{3,4}.



Prof. Dr. Joachim Wosnitza studierte an der RWTH Aachen Physik und diplomierte 1985. 1988 promovierte er an der Universität Karlsruhe (jetzt KIT) in Physik und habilitierte 1995 dort auch. Seit 2001 ist er Professor an der TU Dresden, seit 2004 gleichzeitig Direktor des Hochfeld-Magnetlabor Dresden.

1. www.hzdr.de/hld (Stand: September 2014).

2. Herrmannsdörfer, T., Wosnitza, J., „100 Tesla für die Forschung“ *Physik in Unserer Zeit* **38**, 2007, 242

3. Zherlitsyn, S., Wustmann, B., Herrmannsdörfer, T., Wosnitza, J., „Status of the Pulsed Magnet-Development Program at the Dresden High Magnetic Field Laboratory“ *IEEE Trans. Appl. Supercon.* **22**, 2012, 4300603.

4. Zherlitsyn, S., Wustmann, B., Herrmannsdörfer, T., Wosnitza, J., „Magnet-Technology Development at the Dresden High Magnetic Field Laboratory“ *J. Low Temp. Phys.* **170**, 2013, 447.

Zusammenfassung

1. Magnetfelder werden von bewegten Ladungen, also von Strömen, erzeugt.
2. Das Biot-Savart'sche Gesetz gibt das von einem Stromelement erzeugte Magnetfeld an.
3. Das Ampère'sche Gesetz fasst den Zusammenhang zwischen dem Linienintegral des Magnetfelds entlang einer geschlossenen Kurve und dem Strom, der durch eine beliebige, von dieser Kurve umschlossene Fläche tritt.
4. Der Magnetisierungsvektor \mathbf{M} beschreibt das magnetische Moment eines Stoffs pro Volumeneinheit.
5. Die klassische Beziehung $\mu = (q / (2m)) \mathbf{L}$ folgt aus den Definitionen des Drehimpulses und des magnetischen Moments.
6. Das Bohr'sche Magneton ist eine für magnetische Momente von Atomen und Atomkernen geeignete Einheit.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Magnetfeld \mathbf{B}	
Einer bewegten Punktladung	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (24.1)$ $\hat{\mathbf{r}}$ ist ein Einheitsvektor, der von der Ladung q zum Punkt P des Felds zeigt; q bewegt sich mit der Geschwindigkeit v ; der Proportionalitätsfaktor μ_0 heißt magnetische Feldkonstante (Permeabilität des Vakuums): $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}. \quad (24.2)$
Eines Stromelements (Biot-Savart'sches Gesetz)	$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (24.3)$
Auf der Achse einer Leiterschleife	$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 I}{(z^2 + r_{LS}^2)^{3/2}} \quad (24.6)$
Im Inneren einer langen Spule, weit von den Enden entfernt	$B_z = \mu_0 (n/l) I \quad (24.10)$ mit (n/l) als der Anzahl der Windungen pro Längeneinheit.
Eines geraden Leiterabschnitts	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_\perp} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) \quad (24.12)$ r_\perp ist der senkrechte Abstand zwischen dem Feldpunkt P und der Achse des Leiters, ϕ_1 und ϕ_2 sind die Winkel, die die Verbindungslien zwischen P und den Endpunkten des Leiters mit der Achse einschließen.
Eines langen, geraden Leiters	Es gilt Gleichung 24.12 mit $\phi_1 = 0^\circ$ und $\phi_2 = 180^\circ$; alternativ kann die Beziehung aus dem Ampère'schen Gesetz hergeleitet werden. Die Richtung von \mathbf{B} ist wie folgt gegeben: Die Magnetfeldlinien bilden Kreise um den Leiter in Richtung der Finger der rechten Hand, wenn der Daumen in die Stromrichtung zeigt.
Im Inneren einer dicht gewickelten Ringspule	$B = \frac{\mu_0 n}{2\pi} r \quad (24.18)$
2. Magnetfeldlinien	Magnetfeldlinien beginnen und enden nicht an einem Punkt des Raums, sondern bilden entweder geschlossene Schleifen oder setzen sich bis ins Unendliche fort.
3. Gauß'scher Satz für Magnetfelder	$\oint_A \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \oint_A B_n dA = 0 \quad (24.15)$
4. Magnetische Pole	Magnetische Pole treten stets paarweise auf (Nord- und Südpol). Isolierte Monopole wurden bisher noch nicht nachgewiesen.
5. Ampère'sches Gesetz	$\oint_C B_t dl = \oint_C \mathbf{B} \cdot dl = \mu_0 I_C \quad (24.16)$ C ist eine geschlossene Kurve.
Gültigkeit des Ampère'schen Gesetzes	Das Ampère'sche Gesetz gilt nur für kontinuierliche, im Raum stetige Ströme. Es kann angewandt werden zur Herleitung von Ausdrücken für das Magnetfeld in Situationen mit einem hohen Grad an Symmetrie (wie einem langen, geraden, stromdurchflossenen Leiter oder einer langen, dicht gewickelten Zylinderspule).

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
6. Magnetismus in Materie	<p>Nach ihrem Verhalten in Magnetfeldern unterscheidet man paramagnetische, ferromagnetische und diamagnetische Materialien.</p> <p>Magnetisierung</p> <p>Ein magnetisiertes Material wird durch seinen Magnetisierungsvektor \mathbf{M} beschrieben, definiert als das resultierende magnetische Dipolmoment pro Volumeneinheit des Materials:</p> $\mathbf{M} = \frac{d\mu}{dV}. \quad (24.19)$ <p>Das Magnetfeld eines homogen magnetisierten Zylinders entspricht dem Feld, das der Zylinder erzeugen würde, wenn an seiner Oberfläche ein Strom I pro Längeneinheit fließen würde, der die Magnetisierung M bewirkt. Dieser Oberflächenstrom ist auf die Bewegung atomarer Ladungen innerhalb des Zylinders zurückzuführen und wird Ampère'scher Strom genannt.</p>
7. \mathbf{B} in magnetischen Materialien	$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{aus}} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (24.22)$ <p>Magnetische Suszeptibilität χ_{mag}</p> $\mathbf{M} = \chi_{\text{mag}} \frac{\mathbf{B}_{\text{aus}}}{\mu_0} \quad (24.23)$ <p>Für paramagnetische Materialien nimmt χ_{mag} kleine positive Werte an und hängt von der Temperatur ab. Für diamagnetische Materialien (mit Ausnahme von Supraleitern) nimmt χ_{mag} kleine, negative, nicht von der Temperatur abhängige Werte an. Für Supraleiter ist $\chi_{\text{mag}} = -1$. Bei ferromagnetischen Materialien hängt die Magnetisierung nicht nur vom äußeren Feld (vom magnetisierenden Strom) ab, sondern auch von der Vorgeschichte des Materials.</p> <p>Relative Permeabilität</p> $\mathbf{B} = \mu_{\text{rel}} \mathbf{B}_{\text{aus}} \quad (24.24)$ <p>mit</p> $\mu_{\text{rel}} = 1 + \chi_{\text{mag}} \quad (24.25)$
8. Magnetische Momente von Atomen	$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad (24.28)$ <p>mit \mathbf{L} als Bahndrehimpuls des Teilchens.</p> <p>Bohr'sches Magneton</p> $\mu_{\text{Bohr}} = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ $= 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1}$
9. Paramagnetismus	<p>Paramagnetische Materialien besitzen permanente magnetische Momente, deren Orientierungen in Abwesenheit eines äußeren Magnetfelds zufällig auf alle Richtungen verteilt sind. Liegt ein Feld an, so richten sich die Dipole teilweise aus und liefern einen kleinen Beitrag zum Gesamtfeld, der zum äußeren Feld addiert wird. Der Grad der Ausrichtung ist gering, wenn das äußere Feld nicht sehr stark und die Temperatur nicht sehr niedrig ist. Bei Zimmertemperatur wird die zufällige Orientierung durch die thermische Bewegung aufrechterhalten.</p> <p>Curie'sches Gesetz</p> <p>In schwachen Feldern ist die Magnetisierung näherungsweise proportional zum äußeren Feld und umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur:</p> $M = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{\text{aus}}}{k_B T} M_S. \quad (24.31)$
10. Ferromagnetismus	<p>In ferromagnetischen Materialien existieren kleine Gebiete, die Weiß'schen Bezirke, in denen die permanenten magnetischen Momente der Atome ausgerichtet sind. In unmagnetisiertem Zustand sind die Orientierungen der einzelnen Weiß'schen Bezirke zufällig verteilt, weshalb das resultierende Feld null ist. Durch eine Magnetisierung richten sich die Weiß'schen Bezirke am äußeren Feld aus und erzeugen ein starkes zusätzliches Magnetfeld. Die Ausrichtung kann in magnetisch harten Materialien auch nach Abschaltung des äußeren Felds bestehen bleiben; es entsteht ein Permanentmagnet.</p>
11. Diamagnetismus	<p>In diamagnetischen Materialien heben die magnetischen Momente aller Elektronen der Atome einander auf. Liegt kein äußeres Feld an, so ist das resultierende magnetische Moment null. Durch ein äußeres Feld wird ein sehr kleines magnetisches Moment induziert, das dem äußeren Feld entgegengerichtet ist und dieses folglich abschwächt. Dieser Effekt hängt nicht von der Temperatur ab. Supraleiter sind Diamagneten mit einer magnetischen Suszeptibilität von -1.</p>

Lösungen der Übungen

- $\mathbf{B} = 0, \mathbf{B} = (3,2 \cdot 10^{-14} \text{ T}) \hat{z}$
- 25 A
- Im Mittelpunkt gilt $z = 0$. Einsetzen in Gleichung 24.6 ergibt $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi r_{LS}^2 I}{(0^2 + r_{LS}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{r_{LS}}$, was Gleichung 24.5 entspricht.
- $1,48 \cdot 10^{-2} \text{ T}$; das sind rund 2 % weniger als das Ergebnis aus Schritt 3.
- Das Magnetfeld im Mittelpunkt der kreisrunden Schleife ist um etwa 10 % stärker.
- $r = 4,0 \text{ cm}$
- 0
- $\mathbf{B} = (2,2 \cdot 10^{-5} \text{ T}) \hat{y}$
- $M/M_S = 1,12 \cdot 10^{-3}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

- 24.1** • Skizzieren Sie die Feldlinien der beiden in Abbildung 24.47 dargestellten Dipole. Vergleichen Sie das Erscheinungsbild der Feldlinien in unmittelbarer Nähe des Mittelpunkts der Dipole.



Abbildung 24.47 Zu Aufgabe 24.1.

- 24.2** • Zwei in der Papierebene liegende Leiter werden in entgegengesetzten Richtungen von gleich starken Strömen durchflossen (Abbildung 24.48). Betrachten Sie den von beiden Leitern gleich weit entfernten Punkt. Welche Aussage über das Magnetfeld an diesem Punkt trifft zu? a) Es ist null. b) Es zeigt in die Papierebene hinein. c) Es zeigt aus der Papierebene heraus. d) Es zeigt zum oberen oder zum unteren Seitenende. e) Es zeigt in Richtung eines der beiden Leiter.

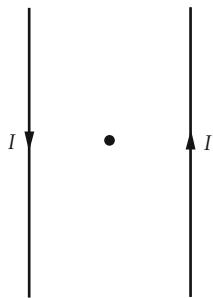


Abbildung 24.48 Zu Aufgabe 24.2.

- 24.3** • Diskutieren Sie Übereinstimmungen und Unterschiede in den Gauß'schen Sätzen für das elektrische Feld und für das Magnetfeld.

- 24.4** • Wie müsste Ihrer Meinung nach der Gauß'sche Satz für das Magnetfeld abgewandelt werden, falls doch noch die Existenz isolierter magnetischer Monopole nachgewiesen wird?

- 24.5** • Stellen Sie sich vor, Sie schauen entlang der Längsachse einer langen, stromdurchflossenen Spule, deren Magnetfeld von Ihnen weg zeigt. Wie fließt aus dieser Sicht der Strom durch die Windungen: im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn? Erläutern Sie Ihre Antwort.

- 24.6** • Die beiden Enden einer elektrisch leitenden Schraubenfeder werden mit den Klemmen einer Batterie verbunden. Wird der Abstand zwischen den einzelnen Windungen der Feder größer, kleiner oder bleibt er gleich, wenn der Strom zu fließen beginnt? Erklären Sie Ihre Antwort.

- 24.7** • In einem langen, geraden Leiter mit kreisförmigem Querschnitt herrscht eine konstante und homogene Stromdichte. Welche der folgenden Aussagen ist (sind) richtig? a) Die Stärke des von dem Leiter erzeugten Magnetfelds ist an der Oberfläche des Leiters maximal. b) Die Stärke des Magnetfelds nimmt mit dem Quadrat des Abstands des betrachteten Feldpunkts von der Längsachse des Leiters ab. c) An allen Punkten auf der Längsachse des Leiters ist das Magnetfeld null. d) Innerhalb des Drahts nimmt die Stärke des Magnetfelds linear mit dem Abstand eines Feldpunkts von der Längsachse des Leiters ab.

- 24.8** • In Tabelle 24.1 finden Sie vier Gase. Welche davon sind diamagnetisch, welche paramagnetisch?

Das Magnetfeld von Punktladungen und Strömen

- 24.9** • Ein Proton, das sich mit der Geschwindigkeit $v = 1,0 \cdot 10^2 \text{ m/s} \hat{x} + 2,0 \cdot 10^2 \text{ m/s} \hat{y}$ bewegt, befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt t in der Ebene mit $z = 0$ im Punkt $x = 3,0 \text{ m}$, $y = 4,0 \text{ m}$. Berechnen Sie das Magnetfeld des Protons in folgenden Punkten derselben Ebene: a) $x = 2,0 \text{ m}$, $y = 2,0 \text{ m}$, b) $x = 6,0 \text{ m}$, $y = 4,0 \text{ m}$ und c) $x = 3,0 \text{ m}$, $y = 6,0 \text{ m}$.

- 24.10** • In einem klassischen Modell des Wasserstoffatoms bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn mit einem Radius von $5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ um das Proton. Berechnen Sie die Stärke des Magnetfelds, das nach diesem Modell durch die Bahnbewegung des Elektrons am Ort des Protons erzeugt wird. Vernachlässigen Sie die Eigenbewegung des Protons.

- 24.11** • Ein kleines, $2,0 \text{ mm}$ langes Stromelement, das von einem Strom $I = 2,0 \text{ A}$ in $+z$ -Richtung durchflossen wird, liegt mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Berechnen Sie das Magnetfeld \mathbf{B} in folgenden Punkten: a) auf der x -Achse bei $x = 3,0 \text{ m}$, b) auf der x -Achse bei $x = -6,0 \text{ m}$, c) auf der z -Achse bei $z = 3,0 \text{ m}$ und d) auf der y -Achse bei $y = 3,0 \text{ m}$.

Leiterschleifen

- 24.12** • Durch eine einzelne kreisrunde Leiterschleife mit einem Radius von $3,0 \text{ cm}$ fließt ein Strom von $2,6 \text{ A}$. Berechnen Sie die Stärke des Magnetfelds an folgenden Positionen auf der Achse, die senkrecht zur Ebene der Leiterschleife durch deren Mittelpunkt verläuft: a) im Mittelpunkt der Schleife, b) $1,0 \text{ cm}$ vom Mittelpunkt entfernt, c) $2,0 \text{ cm}$ vom Mittelpunkt entfernt, d) 35 cm vom Mittelpunkt entfernt.

24.13 ••• Der Abstand zwischen zwei identischen Spulen mit je 250 Windungen sei gleich dem Radius der Spulen, nämlich 30 cm. Die Spulen sind koaxial angeordnet und von gleichen Strömen ($I = 15 \text{ A}$) so durchflossen, dass ihre axialen Magnetfelder gleich gerichtet sind. Eine besondere Eigenschaft solcher sogenannter *Helmholtz-Spulen* ist die bemerkenswerte Homogenität des Magnetfelds im Bereich zwischen den Spulen. Berechnen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms dieses Magnetfeld als Funktion von z , dem Abstand vom Mittelpunkt der Anordnung auf der gemeinsamen Achse der Spulen, für $-30 \text{ cm} < z < +30 \text{ cm}$. Wie groß ist der Bereich von z , in dem sich die Feldstärke um nicht mehr als 20 % ändert? Skizzieren Sie die Abhängigkeit des Magnetfelds von z .

24.14 ••• Die Achsen zweier Helmholtz-Spulen (siehe Aufgabe 24.13), jeweils mit dem Radius r , liegen auf der z -Achse. Eine Spule liegt in der Ebene mit $z = -\frac{1}{2}r$, die andere in der Ebene mit $z = +\frac{1}{2}r$. Zeigen Sie, dass auf der z -Achse bei $z = 0$ gilt: $dB_z/dz = 0$, $d^2B_z/dz^2 = 0$ und $d^3B_z/dz^3 = 0$. (Hinweis: Das Resultat soll Ihnen zeigen, dass das Magnetfeld in Punkten beiderseits und nahe der Mitte der Anordnung in Betrag und Richtung dem Feld im Mittelpunkt selbst annähernd entspricht.)

Geradlinige Leiterabschnitte

Die Aufgaben 24.15 und 24.16 beziehen sich auf die Anordnung in Abbildung 24.49 : Zwei lange, gerade Leiter liegen parallel zur x -Achse in der x - y -Ebene. Ein Leiter befindet sich bei $y = +6,0 \text{ cm}$, der andere bei $y = -6,0 \text{ cm}$. Die Stromstärke in den Leitern betrage jeweils 20 A.

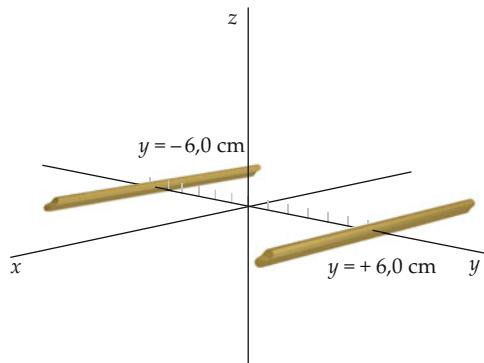


Abbildung 24.49 Zu den Aufgaben 24.15 und 24.16

24.15 • Die Ströme in Abbildung 24.49 fließen in $-x$ -Richtung. Berechnen Sie \mathbf{B} in folgenden Punkten auf der y -Achse: a) $y = -3,0 \text{ cm}$, b) $y = 0$, c) $y = +3,0 \text{ cm}$, d) $y = +9,0 \text{ cm}$.

24.16 •• Der Strom im Leiter bei $y = -6,0 \text{ cm}$ in Abbildung 24.49 fließt in $-x$ -Richtung, im Leiter bei $y = +6,0 \text{ cm}$ hingegen in $+x$ -Richtung. Berechnen Sie \mathbf{B} in folgenden Punkten auf der y -Achse: a) $y = -3,0 \text{ cm}$, b) $y = 0$, c) $y = +3,0 \text{ cm}$, d) $y = +9,0 \text{ cm}$.

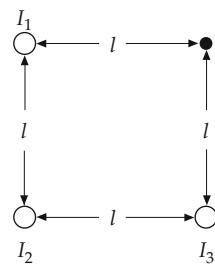


Abbildung 24.50 Zu Aufgabe 24.19.

24.17 •• Stellen Sie sich vor, Sie bereiten einen Demonstrationsversuch zum Thema „Berührungsreie magnetische Aufhängung“ vor. Sie wollen einen 16 cm langen, starren Draht beweglich an leichten Anschlägen über einem zweiten, langen, geraden Draht aufhängen. Wenn die Leiter von Strömen gleicher Stärke, aber entgegengesetzten Richtungen durchflossen werden, soll der 16-cm-Draht spannungsfrei (ohne Last auf den Befestigungen) im Abstand h über dem zweiten Draht schweben. Wie müssen Sie die Stromstärke wählen, wenn der 16-cm-Draht eine Masse von 14 g besitzt und h , der senkrechte Abstand zwischen den Längssachsen der beiden Leiter, 1,5 mm betragen soll?

24.18 •• Ein unendlich langer, isolierter Draht liegt auf der x -Achse eines Koordinatensystems und wird in $+x$ -Richtung von einem Strom I durchflossen. Ein zweiter, ebensolcher Draht liegt auf der y -Achse, der Strom I durchfließt ihn in $+y$ -Richtung. An welchem Punkt (oder an welchen Punkten) in der Ebene mit $z = 0$ ist das resultierende Magnetfeld null?

24.19 •• Drei lange parallele Drähte verlaufen senkrecht durch drei Eckpunkte des in Abbildung 24.50 gezeigten Quadrats. Durch jeden Draht fließt ein Strom I . Berechnen Sie das Magnetfeld \mathbf{B} im unbesetzten Eckpunkt unter folgenden Bedingungen: a) Alle Stromrichtungen zeigen in die Papierebene hinein, b) I_1 und I_3 zeigen in die Papierebene, I_2 zeigt heraus, und c) I_1 und I_2 zeigen in die Papierebene, I_3 zeigt heraus. Formulieren Sie Ihre Antworten in Abhängigkeit von I und l .

Das Magnetfeld einer Zylinderspule

24.20 • Durch eine Zylinderspule mit einer Länge von 2,7 m, einem Radius von 0,85 cm und 600 Windungen fließt ein Strom von 2,5 A. Berechnen Sie \mathbf{B} im Inneren der Spule, weit von den Enden entfernt.

24.21 •• Durch eine Zylinderspule mit einer Länge von 30 cm, einem Radius von 1,2 cm und 300 Windungen fließt ein Strom von 2,6 A. Berechnen Sie \mathbf{B} auf der Achse der Spule, und zwar a) in der Mitte der Spule, b) an einem Ende der Spule.

- 24.22 ••** Durch eine Spule mit n/l Windungen pro Längeneinheit, dem Radius r und der Länge l fließt ein Strom I . Ihre Achse ist die z -Achse, ihre Enden liegen in den Punkten $z = -\frac{1}{2}l$ und $z = +\frac{1}{2}l$. Zeigen Sie, dass das Magnetfeld B in einem Punkt auf der z -Achse außerhalb der Spule gegeben ist durch

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n}{l} I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2),$$

wobei aufgrund von geometrischen Gegebenheiten gilt:

$$\cos \theta_1 = \frac{z + \frac{1}{2}l}{\sqrt{(z + \frac{1}{2}l)^2 + r^2}}$$

und

$$\cos \theta_2 = \frac{z - \frac{1}{2}l}{\sqrt{(z - \frac{1}{2}l)^2 + r^2}}.$$

Das Ampère'sche Gesetz

- 24.23 •** Durch einen langen, geraden, dünnwandigen Hohlzylinder mit dem Radius r fließt parallel zu seiner Längsachse ein Strom I . Beschreiben Sie die Magnetfelder (hinsichtlich Betrag und Richtung) innerhalb und außerhalb des Hohlzylinders.

- 24.24 ••** Zeigen Sie, dass es homogene Magnetfelder ohne Streufelder an den Rändern, wie in Abbildung 24.51 dargestellt, nicht geben kann, weil hierbei das Ampère'sche Gesetz verletzt würde. Wenden Sie dazu das Ampère'sche Gesetz auf den gestrichelt gezeichneten rechteckigen Weg an.

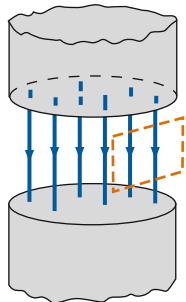


Abbildung 24.51 Zu Aufgabe 24.24.

- 24.25 ••** Abbildung 24.52 zeigt eine Zylinderspule mit n/l Windungen pro Längeneinheit, durch die ein Strom I fließt. Leiten Sie einen Ausdruck für die Magnetfeldstärke unter der Bedingung her, dass \mathbf{B} im Inneren der Spule homogen und parallel zur Längsachse der Spule gerichtet, außerhalb der Spule hingegen null ist. Wenden Sie dazu das Ampère'sche Gesetz auf den eingezeichneten rechteckigen Weg an.

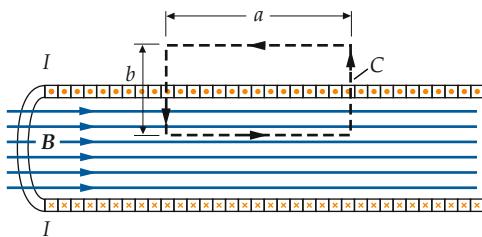


Abbildung 24.52 Zu Aufgabe 24.25.

Magnetisierung und magnetische Suszeptibilität

- 24.26 •** Durch eine eng gewickelte, 20,0 cm lange Zylinderspule mit 400 Windungen fließt ein Strom von 4,00 A; das axiale Magnetfeld der Spule zeigt in $+z$ -Richtung. Berechnen Sie B und B_{aus} in der Mitte der Spule, wenn diese a) keinen Kern und b) einen Weicheisenkern mit der Magnetisierung $M = 1,2 \cdot 10^6$ A/m besitzt.

- 24.27 •** Durch eine lange Spule mit Wolframkern fließt ein Strom. a) Der Kern wird bei konstant gehaltenem Strom entfernt. Wird das Magnetfeld im Inneren der Spule dadurch stärker oder schwächer? b) Um wie viel Prozent ändert sich die Magnetfeldstärke im Spuleninneren bei diesem Vorgang?

- 24.28 ••** Stellen Sie sich vor, Sie bringen während eines Praktikumsversuchs eine zylindrisch geformte Probe eines unbekannten magnetischen Materials in eine lange Spule mit n/l Windungen pro Längeneinheit, durch die ein Strom I fließt. In der nachfolgenden Tabelle finden Sie Messwerte für die Feldstärke B innerhalb des Zylinders als Funktion von $(n/l)I$. Skizzieren Sie mithilfe dieser Angaben B als Funktion von B_{aus}

$(n/l)I$, A/m	0	50	100	150
B , T	0	0,04	0,67	1,00
$(n/l)I$, A/m	200	500	1000	10000
B , T	1,2	1,4	1,6	1,7

und μ_{rel} für verschiedene Werte von $(n/l)I$. Dabei ist B_{aus} das von I hervorgerufene Feld, μ_{rel} ist die relative Permeabilität Ihrer Probe.

Magnetische Momente von Atomen

- 24.29 ••** Nickel hat eine Dichte von $8,70 \text{ g/cm}^3$ und eine molare Masse von $58,7 \text{ g/mol}$, seine Sättigungsmagnetisierung ist $\mu_0 M_S = 0,610 \text{ T}$. Geben Sie das magnetische Moment eines Nickelatoms in Vielfachen des Bohr'schen Magneton an.

*Paramagnetismus

- 24.30 ••** Vereinfacht können wir uns die Situation in einem paramagnetischen Material folgendermaßen vorstellen: Die magnetischen Momente eines Anteils f der Atome oder Moleküle

sind in Feldrichtung orientiert, die magnetischen Momente aller anderen Moleküle sind zufällig ausgerichtet und tragen daher nicht zum Gesamtmagnetfeld bei. a) Zeigen Sie im Rahmen dieses Modells mithilfe des Curie'schen Gesetzes, dass der Anteil ausgerichteter Atome bei der Temperatur T und dem äußeren Magnetfeld B gegeben ist durch $f = \mu B / (3 k_B T)$. b) Berechnen Sie f für eine Probentemperatur von 300 K und ein äußeres Feld von 1,00 T; außerdem sei $\mu = 1,00 \mu_{\text{Bohr}}$.

24.31 •• Eine vom Strom I durchflossene Ringspule mit n Windungen hat den mittleren Radius r_{RS} und den Querschnittsradius r mit $r \ll r_{\text{RS}}$ (Abbildung 24.53). Ist die Spule mit einem Material gefüllt, so nennt man sie auch *Rowland-Ring*. Berechnen Sie B_{aus} und B in einem solchen Ring, wenn die Magnetisierung überall parallel zu B_{aus} ist.

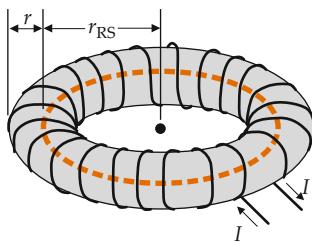


Abbildung 24.53 Zu Aufgabe 24.31.

*Ferromagnetismus

24.32 •• Die Sättigungsmagnetisierung von gehärtetem Eisen wird bei $B_{\text{aus}} = 0,201 \text{ T}$ erreicht. Berechnen Sie für diese Situation die Permeabilität und die relative Permeabilität (siehe Tabelle 24.2).

24.33 •• Durch eine lange, dünne Spule mit 50 Windungen pro Zentimeter fließt ein Strom von 2,00 A. Nachdem ein Eisenkern in die Spule gebracht wurde, wird eine Magnetfeldstärke von 1,72 T gemessen. Berechnen Sie unter Vernachlässigung von Randeffekten a) B_{aus} , b) die Magnetisierung und c) die relative Permeabilität.

24.34 ••• Ein langer, gerader Draht mit kreisrundem Querschnitt und einem Radius von 1,00 mm ist mit einer 3,00 mm dicken Schicht eines ferromagnetischen Materials mit einer relativen Permeabilität von 400 überzogen. Das Material des Drahts selbst ist nicht magnetisch, und die Anordnung befindet sich in Luft. Durch den Leiter fließt ein Strom von 40,0 A. Berechnen Sie in Abhängigkeit vom senkrechten Abstand r zwischen dem betrachteten Feldpunkt und der Längsachse des Leiters a) das Magnetfeld im Inneren des Drahts, b) das Magnetfeld im Inneren der ferromagnetischen Schicht und c) das Magnetfeld außerhalb von Draht und Schicht. d) Wie groß müssen die Beträge der Ampère'schen Ströme an den Oberflächen des ferromagnetischen Materials sein und welche Richtung müssen sie haben, um die beobachteten Magnetfelder hervorzurufen?

Allgemeine Aufgaben

24.35 •• Ein Draht mit der Länge l ist zu einer kreisrunden Spule mit n Windungen aufgewickelt. Durch sie fließt ein Strom I . Zeigen Sie, dass das Magnetfeld in der Mitte der Spule gegeben ist durch $B = \mu_0 \pi n^2 I / l$.

24.36 •• Ein 2,0 m unter der Erdoberfläche verlegtes Starkstromkabel führt einen Strom von 50 A. Die genaue Lage und die Richtung des Kabels sind nicht bekannt. Wie könnten Sie beides mithilfe eines Kompasses ermitteln? Das Kabel befindet sich in unmittelbarer Nähe des Äquators, wo das Erdmagnetfeld mit einer Stärke von 0,700 G nach Norden zeigt.

24.37 •• In Abbildung 24.54 sehen Sie eine geschlossene Leiterschleife. Sie führt einen Strom von 8,0 A, der entgegen dem Uhrzeigersinn fließt. Der Radius des äußeren Bogens ist 0,60 m, der des inneren Bogens 0,40 m. Wie stark ist das Magnetfeld im Punkt P ?

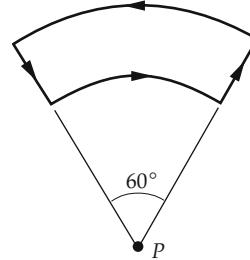


Abbildung 24.54 Zu Aufgabe 24.37.

24.38 •• Durch einen sehr langen geraden Leiter fließt ein Strom von 20,0 A. In 1,00 cm Entfernung vom Draht bewegt sich ein Elektron mit einer Geschwindigkeit von $5,00 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Welche Kraft wirkt auf das Elektron, wenn es sich a) direkt vom Draht weg, b) parallel zum Draht in Stromrichtung oder c) senkrecht zum Draht in Richtung der Tangente an einen zum Draht koaxialen Kreis bewegt?

24.39 •• Eine Kompassnadel in Form eines homogenen Stäbchens hat eine Länge von 3,00 cm, einen Radius von 0,850 mm und eine Dichte von $7,96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Sie ist in der Waagerechten frei drehbar. Die horizontale Komponente des Erdmagnetfelds betrage 0,600 G. Nach einer kleinen Auslenkung führt die Nadel mit einer Frequenz von 1,40 Hz eine einfache harmonische Schwingung um die Gleichgewichtslage aus. a) Geben Sie das magnetische Dipolmoment der Nadel an. b) Wie groß ist die Magnetisierung? c) Berechnen Sie den Ampère'schen Strom an der Oberfläche der Nadel.

24.40 •• Am magnetischen Nordpol der Erde herrscht ein Magnetfeld mit einer Feldstärke von rund 0,600 G, das senkrecht nach unten zeigt. Angenommen, dieses Feld würde von einem elektrischen Strom erzeugt, der eine Leiterschleife mit dem Radius des inneren Eisenkerns der Erde (etwa 1300 km)

durchfließt. a) Wie groß müsste die Stromstärke in der Leiterschleife sein? b) In welcher Richtung müsste der Strom durch die Leiterschleife fließen – in Richtung der Erdrotation oder entgegengesetzt? Erläutern Sie Ihre Antwort.

24.41 •• a) Geben Sie das Magnetfeld im Punkt P für den in Abbildung 24.55 skizzierten, einen Strom I führenden Leiter an. b) Leiten Sie unter Verwendung Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe a einen Ausdruck für das Magnetfeld im Mittelpunkt eines n -seitigen Vielecks her. c) Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck für sehr große n in die Beziehung für das Magnetfeld im Mittelpunkt einer kreisförmigen Leiterschleife übergeht.

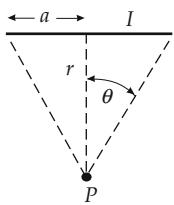


Abbildung 24.55 Zu Aufgabe 24.41.

24.42 •• Durch einen langen zylindrischen Leiter mit dem Radius $r_{LZ} = 10 \text{ cm}$ fließt ein Strom, dessen Stärke vom senkrechten Abstand r von der Leiterachse abhängt mit $I(r) =$

$(50 \text{ A/m}) r$. Berechnen Sie das Magnetfeld für a) $r = 5,0 \text{ cm}$, b) $r = 10 \text{ cm}$ und c) $r = 20 \text{ cm}$.

24.43 ••• Auf einer nicht leitfähigen Scheibe mit dem Radius r_{LS} herrscht eine homogene Flächenladungsdichte σ . Die Scheibe rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω . a) Betrachten Sie einen ringförmigen Streifen mit dem Radius r und der Breite dr , der die Ladung dq trägt. Zeigen Sie, dass dieser Streifen den Strom $dI = \omega dq/(2\pi) = \omega \sigma r dr$ erzeugt. b) Zeigen Sie mithilfe Ihres Ergebnisses aus Teilaufgabe a, dass das Magnetfeld im Mittelpunkt der Scheibe gegeben ist durch $B = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega r_{LS}$. c) Ermitteln Sie mithilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe a einen Ausdruck für das Magnetfeld in einem Punkt auf der Achse der Scheibe im Abstand z von deren Mittelpunkt.

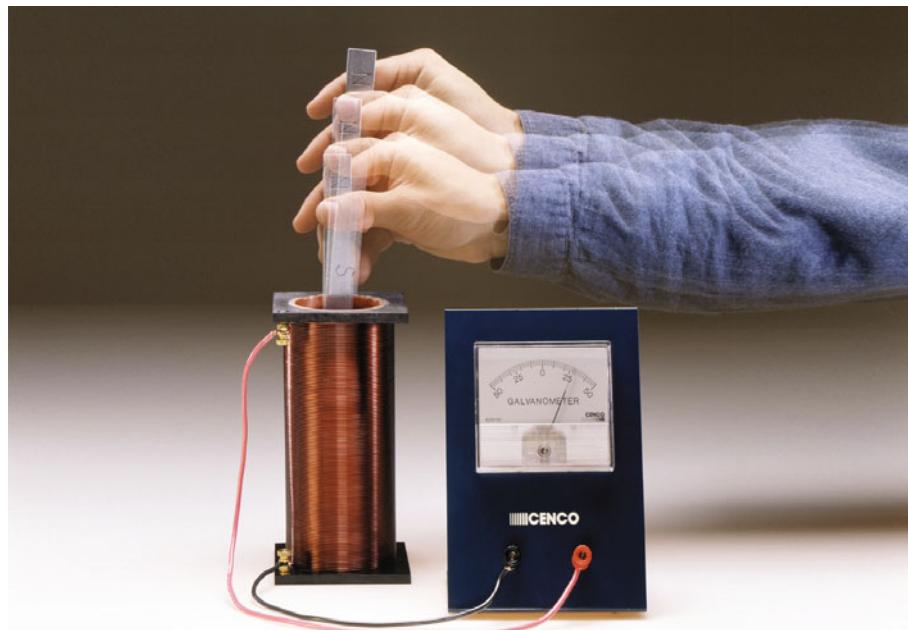
24.44 ••• Eine quadratische Leiterschleife mit der Seitenlänge l liegt in der Ebene mit $z = 0$ mit ihrem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Durch die Schleife fließt der Strom I . a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Magnetfeldstärke B in beliebigen Punkten auf der z -Achse her. b) Zeigen Sie anhand Ihres Resultats, dass für $z \gg l$ gilt:

$$B \approx \frac{\mu \mu_0}{2 \pi z^3}$$

mit $\mu = I l^2$ als magnetischem Moment der Schleife.

Die magnetische Induktion

25



Die induzierte Spannung im Demonstrationsversuch: Bewegt man den Magneten in die Spule hinein oder aus ihr heraus, so wird in der Spule eine Spannung induziert – Sie erkennen dies am Ausschlag des Galvanometers. Wird der Magnet nicht bewegt, so schlägt das Messgerät nicht aus. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

Wie berechnet man die in einer Spule induzierte Spannung? (Siehe Beispiel 25.2.)

25.1 Der magnetische Fluss	914
25.2 Induktionsspannung und Faraday'sches Gesetz	915
25.3 Die Lenz'sche Regel	919
25.4 Induktion durch Bewegung	923
25.5 Wirbelströme	928
25.6 Induktivität	929
25.7 Die Energie des Magnetfelds	931
25.8 RL-Stromkreise	933
Zusammenfassung	939
Aufgaben	941

Spannungen und Ströme, die von einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld hervorgerufen werden, bezeichnen wir als **induzierte Spannungen** und **induzierte Ströme**, der Vorgang selbst ist die **magnetische Induktion**. Michael Faraday und Joseph Henry entdeckten diesen Effekt unabhängig voneinander in den 1830er Jahren und stellten weiterhin fest, dass auch in *statischen* Magnetfeldern ein Strom induziert wird, wenn sich der magnetische Fluss durch eine Fläche ändert, die von einer *bewegten* Leiterschleife umschlossen ist.

In diesem Kapitel werden wir die verschiedenen Formen der magnetischen Induktion kennen lernen. Sie alle lassen sich durch eine einfache Beziehung zusammenfassend beschreiben, das Faraday'sche Gesetz. Das Faraday'sche Gesetz verknüpft die Induktionsspannung in einem Stromkreis mit der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch diesen Stromkreis. Unter dem *magnetischen Fluss durch den Stromkreis* wollen wir dabei den Fluss des Magnetfelds durch eine beliebige, von diesem Kreis umschlossene Fläche verstehen.

25.1 Der magnetische Fluss

Den Fluss eines beliebigen Vektorfelds durch eine Fläche können wir analog zum elektrischen Fluss berechnen, den wir in Abschnitt 19.3 kennen gelernt haben. Es sei dA ein Element der Fläche A und \hat{n} der Normalenvektor (Einheitsvektor in Richtung der Normalen) dieses Flächenelements, sodass $dA = dA \hat{n}$ ist (Abbildung 25.1). Ist \hat{n} ein Normalenvektor des Flächenelements, gilt dies natürlich auch für $-\hat{n}$, denn zu jedem Flächenelement gibt es zwei Senkrechten, die in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Das Vorzeichen des Flusses hängt davon ab, welche der beiden Richtungen man auswählt. Der magnetische Fluss Φ_{mag} durch A ist

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_A B_n dA. \quad (25.1)$$

MAGNETISCHER FLUSS

Die Einheit des magnetischen Flusses ist Feldstärke mal Fläche, also Tesla mal Quadratmeter oder **Weber** (Wb):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2. \quad (25.2)$$

Die Stärke des Magnetfelds \mathbf{B} ist proportional zur Anzahl der Feldlinien pro Flächeneinheit, daher ist der magnetische Fluss durch ein Flächenelement proportional zur Anzahl der Feldlinien, die dieses durchsetzen.

Übung 25.1: Zeigen Sie, dass ein Weber pro Sekunde gleich ein Volt ist. ◀

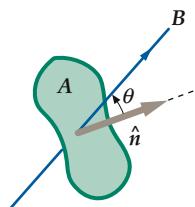


Abbildung 25.1 Bildet der Flächenvektor \mathbf{A} der von einer Leiterschleife umschlossenen Fläche den Winkel θ mit der Richtung des Magnetfelds \mathbf{B} , so ist der magnetische Fluss gegeben durch $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}| \cos \theta$.

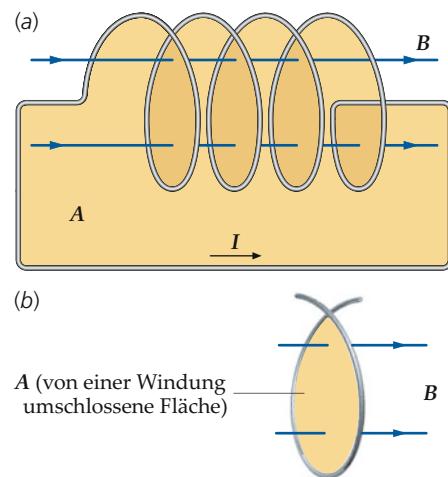


Abbildung 25.2 a) Der Fluss durch eine Fläche A , die von einer Spule mit n Windungen umschlossen wird, ist proportional zur Anzahl der Feldlinien, die die Fläche durchdringen. Gezeigt ist eine Spule mit vier Windungen. Jede der beiden eingezeichneten Feldlinien durchdringt die Fläche viermal (einmal in jeder Windung), weshalb der Fluss durch A viermal so groß ist wie der Fluss durch die von einer einzelnen Windung „umschlossene“ Fläche. b) Die ebene Fläche A , die von einer einzelnen Windung (nahezu) umschlossen wird.

Handelt es sich um eine ebene Fläche mit dem Flächeninhalt A und ist das Magnetfeld \mathbf{B} über der gesamten Fläche homogen (sind Betrag und Richtung konstant), so ist der magnetische Fluss durch die Fläche gleich

$$\Phi_{\text{mag}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}| \cos \theta = B_n A. \quad (25.3)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen der Richtung von \mathbf{B} und der Richtung des Flächenvektors, die wir als positiv annehmen wollen. Häufig betrachten wir den magnetischen Fluss durch eine Fläche, die von einer Spule mit mehreren Windungen umschlossen wird. Ist n die Anzahl der Windungen, so ist der Fluss durch die Fläche gleich dem n -fachen des Flusses durch jede einzelne Windung (Abbildung 25.2):

$$\Phi_{\text{mag}} = n |\mathbf{B}| |\mathbf{A}| \cos \theta \quad (25.4)$$

mit A als der von einer Windung umschlossenen ebenen Fläche. (Hinweis: Nur eine geschlossene Kurve kann eine Fläche tatsächlich begrenzen. Eine einzelne Windung einer Spule ist natürlich nicht in sich geschlossen. Liegen die Windungen aber hinreichend eng beieinander, so bilden sie nahezu geschlossene Kreise und A ist dann die ebene Fläche, die von einem solchen Kreis nahezu begrenzt wird.) In Beispiel 25.1 wird der magnetische Fluss durch eine Spule berechnet.

Beispiel 25.1: Magnetischer Fluss durch eine Spule

Gegeben ist eine 40 cm lange Zylinderspule mit 600 Windungen und einem Radius von 2,5 cm. Berechnen Sie den magnetischen Fluss, wenn durch die Spule ein Strom von 7,5 A fließt.

25.2 Induktionsspannung und Faraday'sches Gesetz

Problembeschreibung: Das Magnetfeld \mathbf{B} im Inneren dieser langen Spule ist homogen und parallel zur Längsachse der Spule gerichtet (die Randeffekte vernachlässigen wir hier); folglich steht es senkrecht auf den Ebenen der einzelnen Windungen. Um den magnetischen Fluss zu ermitteln, müssen wir deshalb B innerhalb der Spule berechnen und anschließend mit $n A$ multiplizieren.

Lösung: 1. Der magnetische Fluss ist gegeben als Produkt aus der Windungszahl, der Stärke des Magnetfelds und der von einer Windung umschlossenen Fläche (Gleichung 25.4):

$$\Phi_{\text{mag}} = nBA$$

2. Die Magnetfeldstärke im Inneren der Spule ist $B = \mu_0 (n/l) I$ (siehe Gleichung 24.10) mit n/l als Anzahl der Windungen pro Längeneinheit (Windungsdichte):

$$\Phi_{\text{mag}} = n \mu_0 \frac{n}{l} IA = \frac{\mu_0 n^2 IA}{l}$$

3. Der Flächeninhalt A ergibt sich aus dem Radius der Spule:

$$A = \pi r^2$$

4. Nun setzen Sie alle gegebenen Werte ein und rechnen den magnetischen Fluss aus (Wd. ist die Abkürzung für Windungen):

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{mag}} &= \frac{\mu_0 n^2 I \pi r^2}{l} \\ &= \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot (600 \text{ Wd.})}{0,40 \text{ m}} \\ &\quad \cdot (7,5 \text{ A}) \cdot \pi \cdot (0,025 \text{ m})^2 \\ &= 1,66 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Einheiten in Schritt 4, Zeile 2, lassen sich zu $\text{T} \cdot \text{m}^2$ kürzen; definitionsgemäß ist $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$, also liefert unsere Rechnung die für den magnetischen Fluss korrekte Einheit.

Weitergedacht: Φ_{mag} ist proportional zu n^2 , weil $\Phi_{\text{mag}} = nBA$ und B proportional zur Windungszahl n ist. ■

Änderungsrate des Flusses ist. In der Regel erkennen wir die Spannung, indem wir den hervorgerufenen Strom messen. Die Spannung ist aber auch vorhanden, wenn gar kein Strom fließen kann, etwa weil der Stromkreis nicht geschlossen ist oder gar nicht existiert. Bisher haben wir Spannungen betrachtet, die in bestimmten Teilen eines Stromkreises bestehen, beispielsweise zwischen den Anschlüssen einer Batterie. Die Induktionsspannung hingegen muss man sich über den ganzen Stromkreis verteilt vorstellen.

Der magnetische Fluss Φ_{mag} durch eine ebene, in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} befindliche Fläche mit dem Flächenvektor \mathbf{A} ist gemäß Gleichung 25.3 gegeben durch $\Phi_{\text{mag}} = |\mathbf{B}| |\mathbf{A}| \cos \theta$ mit θ als dem Winkel, den die Richtung von \mathbf{B} mit der Flächennormalen einschließt. Der Fluss durch die Fläche ändert sich, wenn die Magnetfeldstärke, der Flächeninhalt oder der Winkel θ verändert wird. Ist ein Permanentmagnet die Quelle des Magnetfelds, so ändert sich die Feldstärke durch Bewegung dieses Magneten relativ zur Fläche; wird das Magnetfeld von einem Strom in einer Leiterschleife hervorgerufen, so bewirkt eine Änderung der Stromstärke eine Änderung der Magnetfeldstärke. Um θ zu variieren, muss die Orientierung der Fläche oder die Richtung des Magnetfelds geändert werden. In jedem Fall aber gilt: Wird die betrachtete Fläche von einem elektrischen Leiter (etwa einem Metalldraht) umschlossen, so wird in diesem Leiter eine Spannung U_{ind} induziert, die gleich der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die Fläche ist:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}. \quad (25.5)$$

FARADAY'SCHES GESETZ

Diese Beziehung heißt **Faraday'sches Gesetz**. Das Minuszeichen im Faraday'schen Gesetz hängt, wie wir später in diesem Abschnitt genauer besprechen werden, mit der Richtung der Induktionsspannung (im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn) zusammen.

Abbildung 25.3 zeigt eine einzelne unbewegte Leiterschleife in einem Magnetfeld. Der Fluss durch die Schleife ändert sich, weil das Magnetfeld allmählich stärker wird, und in der Schleife wird eine Spannung induziert. Die Spannung ist definiert als Arbeit pro Ladungseinheit; auf die bewegten Ladungsträger muss daher eine Kraft wirken, die Arbeit an ihnen verrichtet. Wie wir wissen, kann die magnetische Kraft keine Arbeit verrichten, sie kann somit auch nicht für die Induktionsspannung verantwortlich sein. Die Arbeit wird hier von der elektrischen Kraft eines nichtkonservativen elektrischen Felds \mathbf{E} geleistet. Das Linienintegral über dieses Feld längs eines geschlossenen Wegs ist gleich der pro Ladungseinheit verrichteten Arbeit, also gleich der Induktionsspannung.

Bisher haben wir elektrische Felder kennen gelernt, die von ruhenden elektrischen Ladungen erzeugt wurden. Dabei handelt es sich um konservative elektrische Felder: Ihr Umlaufintegral längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist null. (Das Umlaufintegral eines Vektorfelds \mathbf{A} bezüglich einer geschlossenen Kurve C ist definiert als $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$; siehe Abschnitt 24.4). Ein

25.2 Induktionsspannung und Faraday'sches Gesetz

Experimente von Faraday, Henry und anderen zeigten, dass jede Änderung des magnetischen Flusses durch die von einem elektrischen Leiter (einem Draht) umschlossene Fläche eine Spannung in dem Leiter induziert, deren Stärke proportional zur

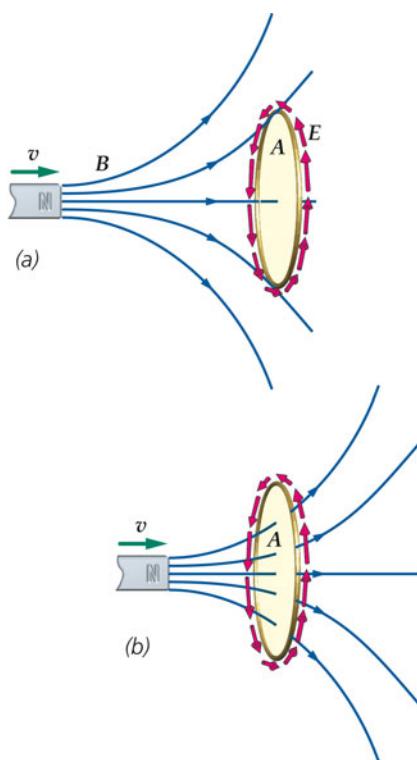


Abbildung 25.3 Ändert sich der magnetische Fluss durch die ruhende Leiterschleife, so wird in der Schleife eine Spannung induziert, die über den gesamten Kreis verteilt ist. Der Urheber der Induktionsspannung ist ein nichtkonservatives, tangential zur Schleife gerichtetes elektrisches Feld E .

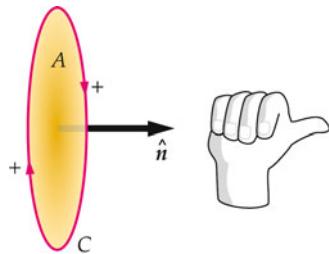


Abbildung 25.4 Der Daumen der rechten Hand zeigt in Richtung des Normalvektors \hat{n} der Fläche A ; dann krümmt sich die Handfläche tangential zu C in positiver Richtung.

zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt hingegen ein nicht-konservatives elektrisches Feld. Sein Umlaufintegral längs C ist nicht null, sondern gleich der im Leiter induzierten Spannung, die wiederum gleich ist der negativen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch eine beliebige, von C umschlossene Fläche:

$$U_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (25.6)$$

INDUKTIONSSPANNUNG IN EINER RUHENDEN LEITERSCHLEIFE BEI VERÄNDERLICHEM MAGNETFELD

In den Beispielen 25.2 bis 25.4 werden die Induktionsspannung in kreisrunden Spulen bzw. die Induktion eines nichtkonservativen elektrischen Felds betrachtet.

Beispiel 25.2: Induktionsspannung in einer kreisrunden Spule I

Die Längsachse einer kreisrunden Spule mit 300 Windungen und einem Radius von 4,00 cm schließt einen Winkel von $30,0^\circ$ mit der Richtung eines homogenen äußeren Magnetfelds ein. Die Stärke des Magnetfelds nimmt pro Sekunde um 85,0 T zu, ohne dass sich die Richtung des Felds ändert. Wie groß ist die in der Spule induzierte Spannung?

Problembeschreibung: Die Induktionsspannung ergibt sich als Produkt aus der Windungszahl n und der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch eine einzelne Windung. Da es sich um ein homogenes Magnetfeld handelt, ist der Fluss durch eine Windung gegeben als $\Phi_{\text{mag}} = |\mathbf{B}| |A| \cos \theta$ mit $|A| = \pi r^2$ als der von einer Windung umschlossenen Kreisfläche.

Lösung: 1. Die Induktionsspannung folgt aus dem Faraday'schen Gesetz:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

2. In einem homogenen Magnetfeld gilt für den Fluss:

$$\Phi_{\text{mag}} = n \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = n |\mathbf{B}| |A| \cos \theta$$

3. Setzen Sie diese Beziehung für Φ_{mag} ein und berechnen Sie U_{ind} :

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -\frac{d}{dt} (n |\mathbf{B}| |A| \cos \theta) \\ &= -n \pi r^2 \cos \theta \frac{|d\mathbf{B}|}{dt} \\ &= -(300) \cdot \pi \cdot (0,0400 \text{ m})^2 \cdot \cos 30^\circ \cdot (85,0 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}) \\ &= -111 \text{ V} \\ |U_{\text{ind}}| &= \boxed{111 \text{ V}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In Schritt 3, Zeile 3, ergibt sich die Einheit $\text{T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; dabei ist $1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ V}$. Anhand der Beziehung $\mathbf{F} = qv \times \mathbf{B}$ können Sie sich gut merken, dass $1 \text{ N} = 1 \text{ C} \cdot \text{m} \cdot \text{T} \cdot \text{s}^{-1}$ und folglich $1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot (\text{C} \cdot \text{m})^{-1}$ ist.

Übung 25.2: Wie groß ist der Induktionsstrom, wenn die Spule einen Widerstand von 200Ω besitzt? ◀ ■

Beispiel 25.3: Induktionsspannung in einer kreisrunden Spule II**ZUR ÜBUNG**

Eine Spule mit 80 Windungen, einem Radius von 5,00 cm und einem Widerstand von 30,0 Ω befindet sich in einem homogenen Magnetfeld, dessen Richtung senkrecht zur Ebene der Spulenwindungen steht. Wie schnell muss sich die Magnettfeldstärke ändern, damit in der Spule ein Strom von 4,00 A induziert wird?

Problembeschreibung: Die Anzahl der Windungen multipliziert mit der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die von einer Windung umschlossene Fläche, ist dem Faraday'schen Gesetz zufolge gleich dem Negativen der induzierten Spannung. Die Spannung in der Spule ist IR .

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Formulieren Sie den magnetischen Fluss als Funktion von B , n und dem Radius r ; lösen Sie nach B auf.

2. Leiten Sie B nach der Zeit ab.

3. Den Zusammenhang zwischen der Änderungsrate des Flusses und der induzierten Spannung gibt das Faraday'sche Gesetz an.

4. Berechnen Sie den Betrag der Spannung in der Spule aus den gegebenen Werten für Stromstärke und Widerstand.

5. Setzen Sie nun die Zahlenwerte von U_{ind} , n und r in die Beziehung aus Schritt 2 ein und berechnen Sie dB/dt .

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\Phi_{\text{mag}} = nBA = nB\pi r^2$$

$$B = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{n\pi r^2}$$

2.

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{n\pi r^2} \frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

3.

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

4.

$$|U_{\text{ind}}| = IR = 120 \text{ V}$$

5.

$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{1}{n\pi r^2} |U_{\text{ind}}| = [191 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Beispiel 25.4: Ein nichtkonservatives induziertes elektrisches Feld

Ein homogenes Magnetfeld B , dessen Richtung senkrecht zur Papierebene steht, sei auf ein Gebiet über einer Kreisfläche mit dem Radius r_{LS} beschränkt; außerhalb dieses Gebiets sei das Feld null (Abbildung 25.5). Die Richtung von B sei konstant, seine Stärke ändere sich mit der Rate dB/dt . Geben Sie Betrag und Richtung des elektrischen Felds an, das in der Papierebene induziert wird, a) in einem Abstand $r < r_{LS}$ vom Mittelpunkt des Kreises und b) in einem Abstand $r > r_{LS}$ vom Mittelpunkt (dort ist $B = 0$).

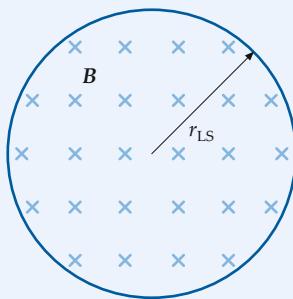


Abbildung 25.5 Kreisförmiges, in die Ebene hinein zeigendes Magnetfeld.

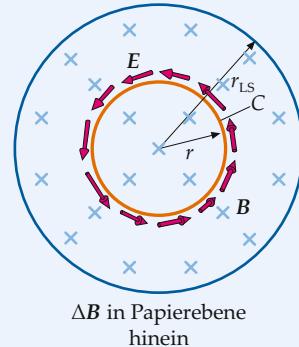


Abbildung 25.6 Magnetfeld mit eingezeichneter Kontur C , entlang der ein elektrisches Feld E induziert wird.

Problembeschreibung: Das Magnetfeld zeigt in die Papierebene hinein und ist über einem kreisförmigen Gebiet mit dem Radius r_{LS} homogen, wie Abbildung 25.6 zeigt. Nimmt B zu oder ab, so ändert sich auch der magnetische Fluss durch die von der geschlossenen Kurve C begrenzte Fläche; entlang C wird eine Spannung $U_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ induziert. Das induzierte elektrische Feld finden wir durch Anwendung von Gleichung 25.6. Um uns die Symmetrie der Anordnung zunutze zu machen, wählen wir als Integrationsweg C einen Kreis mit dem Radius r und füh-

ren die Integration aus. Aus Symmetriegründen zeigt \mathbf{E} in Richtung der Tangente an C , und sein Betrag ist entlang der Kreislinie konstant. Wir vereinbaren, dass A in die Papierebene hinein zeigt. Dann besagt die Vorzeichenkonvention, dass die positive tangentielle Richtung dem Uhrzeigersinn entspricht. Nun berechnen wir den magnetischen Fluss Φ_{mag} , leiten ihn nach der Zeit ab und lösen nach der tangentialen Komponente des elektrischen Felds, E_t , auf.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld gibt Gleichung 25.6 an:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

mit

$$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

2. E_t , die tangentiale Komponente von \mathbf{E} , ergibt sich aus dem Linienintegral für einen Kreis mit dem Radius $r < r_{\text{LS}}$. \mathbf{E} zeigt tangential zum Kreis, sein Betrag ist in allen Punkten auf diesem Kreis gleich:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C E_t d\mathbf{l} = E_t \oint_C d\mathbf{l} = E_t 2\pi r$$

3. Für $r < r_{\text{LS}}$ ist \mathbf{B} über der vom Kreis C umschlossenen ebenen Fläche A homogen. Wir vereinbaren, dass A in die Papierebene hinein zeigt. Da dies auch für \mathbf{B} gilt, ist der Fluss durch A einfach BA :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{mag}} &= \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_S B d\mathbf{A} = B \int_S d\mathbf{A} \\ &= BA = B\pi r^2 \end{aligned}$$

4. Nun leiten Sie Φ_{mag} nach der Zeit ab:

$$\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = \frac{d}{dt} (B\pi r^2) = \frac{dB}{dt} \pi r^2$$

5. Setzen Sie jetzt die Ergebnisse aus Schritt 2 und 4 in die Beziehung aus Schritt 1 ein und lösen Sie nach E_t auf:

$$E_t 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \pi r^2$$

also

$$E_t = \boxed{-\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad \text{für } r < r_{\text{LS}}}$$

6. Unserer Wahl der Richtung von A (Schritt 3) gemäß ist die positive tangentielle Richtung gleich dem Uhrzeigersinn, weshalb wir erhalten: E_t ist negativ, also ist \mathbf{E} entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet.

Teilaufgabe b

1. Für einen Kreis mit dem Radius $r > r_{\text{LS}}$ (das Gebiet, in dem das Magnetfeld null ist) erhalten wir das gleiche Linienintegral wie in Schritt 2 von Teilaufgabe a:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_t 2\pi r$$

2. Da für $r > r_{\text{LS}}$ gilt $B = 0$, ist der magnetische Fluss durch A gleich $B\pi r_{\text{LS}}^2$:

$$\Phi_{\text{mag}} = B\pi r_{\text{LS}}^2$$

3. E_t berechnen Sie nun mithilfe des Faraday'schen Gesetzes:

$$\begin{aligned} E_t 2\pi r &= -\frac{dB}{dt} \pi r_{\text{LS}}^2 \\ E_t &= -\frac{r_{\text{LS}}^2}{2r} \frac{dB}{dt} \quad \text{für } r > r_{\text{LS}} \end{aligned}$$

E_t ist negativ, also ist \mathbf{E} entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet.

Plausibilitätsprüfung: Die positive tangentielle Richtung entspricht dem Uhrzeigersinn. Ist $d\Phi_{\text{mag}}/dt$ positiv, so ist E_t negativ, und das elektrische Feld ist entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet (Abbildung 25.7).

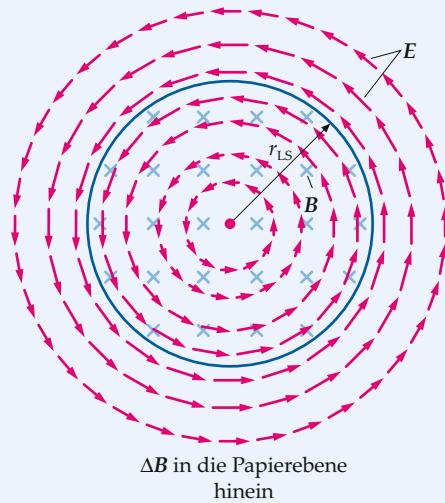


Abbildung 25.7 Das Magnetfeld zeigt in die Papierebene hinein; seine Stärke nimmt zu. Das induzierte elektrische Feld ist dann entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass das elektrische Feld in diesem Fall nicht von bewegten Ladungen, sondern von einem veränderlichen Magnetfeld erzeugt wird. Denken Sie auch daran, dass E (und folglich die Induktionsspannung) entlang jeder geschlossenen Kurve existiert, die die Fläche begrenzt, durch die sich der Fluss ändert – gleichgültig, ob diese Kurve aus einem Draht bzw. Stromkreis besteht oder nicht.

Mithilfe der folgenden Vorzeichenvereinbarung können wir Gleichung 25.5 die Richtung der Induktionsspannung entnehmen: Die positive Richtung tangential zum Integrationsweg C ist mit der Richtung des Normalenvektors \hat{n} der von C umschlossenen Fläche A durch eine Rechte-Hand-Regel verknüpft (Abbildung 25.4). Zeigt Ihr Daumen in die Richtung von \hat{n} , so biegt sich die Handfläche tangential zu C in positiver Richtung. Ist $d\Phi_{\text{mag}}/dt$ positiv, dann zeigt (übereinstimmend mit dem Faraday'schen Gesetz; Gleichung 25.6) E tangential zu C in negativer Richtung. (Die Richtung von E kann auch anhand der Lenz'schen Regel ermittelt werden, der wir uns in Abschnitt 25.3 zuwenden.)

!

E (und folglich die Induktionsspannung) existiert entlang jeder geschlossenen Kurve, die die Fläche begrenzt, durch die sich der Fluss ändert – gleichgültig, ob diese Kurve aus einem elektrischen Leiter besteht oder nicht.

25.3 Die Lenz'sche Regel

Das negative Vorzeichen im Faraday'schen Gesetz ergibt sich aus der Richtung der Induktionsspannung. Dies folgt aus der im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Vorzeichenvereinba-

rung und auch aus einem allgemeinen physikalischen Prinzip, der **Lenz'schen Regel**:

Die von einer Zustandsänderung verursachte Induktionsspannung ist stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenzuwirken sucht.

LENZ'SCHE REGEL

Wie Sie feststellen werden, ist die Lenz'sche Regel sehr allgemein formuliert; sie gibt nicht an, welcher Art die Zustandsänderung ist, die die Induktionsspannung (und damit den Induktionsstrom) hervorruft. Auf diese Weise erfasst die Regel eine Reihe verschiedener Situationen, die wir im Folgenden besprechen wollen.

In Abbildung 25.8 sehen Sie einen Stabmagneten, der sich auf einen leitenden Ring mit dem Widerstand R zubewegt. Durch die Bewegung des Magneten nach rechts wird im Ring eine Spannung induziert, und es fließt ein Strom. Die Lenz'sche Regel besagt, dass Induktionsspannung und -strom so gerichtet sein müssen, dass sie ihrer Ursache (der Verschiebung des Magneten) entgegenwirken. Der Induktionsstrom im Ring bewirkt selbst ein Magnetfeld, das auf den sich nähernenden Magneten eine Kraft ausübt, die nach links gerichtet sein muss. Abbildung 25.9 zeigt das beim Herankommen des Stabmagneten im Ring induzierte magnetische Moment: Der Ring verhält sich wie ein kleiner Stabmagnet, dessen Nordpol nach links und dessen Südpol nach rechts weist. Gleichnamige Pole stoßen einander ab; folglich stößt das induzierte magnetische Moment des Rings den Stabmagneten ab, wirkt somit dessen Annäherung entgegen. Der im Ring induzierte Strom fließt deshalb in der in Abbildung 25.9 angegebenen Richtung.

Nehmen wir einmal an, die Richtung des Stroms in Abbildung 25.9 wäre der eingezeichneten Richtung genau entgegengesetzt. Die magnetische Kraft auf den ankommenden Stabmagneten wirkte dann nach rechts und der Magnet würde beschleunigt. Die Zunahme der Geschwindigkeit wiederum rief eine Zunahme der induzierten Stromstärke hervor, wodurch

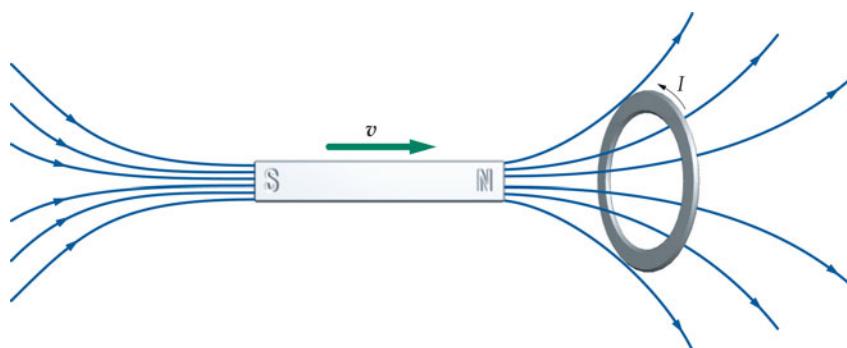


Abbildung 25.8 Bewegt sich der Stabmagnet nach rechts auf den leitenden Ring zu, so wird im Ring eine Spannung induziert, und in der angegebenen Richtung fließt ein Strom. Dieser Strom erzeugt seinerseits ein Magnetfeld, das auf den Stabmagneten eine Kraft ausübt, die der Annäherung entgegenwirkt.

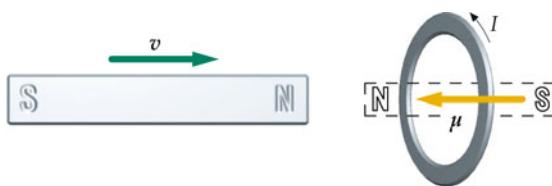


Abbildung 25.9 Das magnetische Moment μ (gestrichelt angedeutet in Form eines Stabmagneten) des Rings wird vom induzierten Strom hervorgerufen und wirkt der Bewegung des Stabmagneten entgegen: Der Stabmagnet nähert sich dem Ring, also stößt das induzierte magnetische Moment ihn ab.

die Kraft auf den Magneten erneut ansteigen würde – und so fort. Eine angenehme Vorstellung: Wenn wir einen Magneten in die Nähe einer Leiterschleife brächten, würde der Magnet von der Schleife immer schneller angezogen, ohne dass wir etwas dazu tun müssten. Dieses Szenario verletzt jedoch den Energieerhaltungssatz. Die Energie ist nämlich eine Erhaltungsgröße, weshalb die Aussage der Lenz'schen Regel mit der Realität im Einklang steht.

Häufig verwendet wird eine alternative Formulierung der Lenz'schen Regel, die sich auf den magnetischen Fluss bezieht:

Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche, so wird ein Strom induziert, der seinerseits ein Magnetfeld und damit einen magnetischen Fluss durch dieselbe Fläche, aber mit relativ zur ursprünglichen Flussänderung umgekehrtem Vorzeichen hervorruft.

LENZ'SCHE REGEL IN ALTERNATIVER FORMULIERUNG

Die Anwendung dieser alternativen Formulierung wird in Beispiel 25.5 demonstriert.

Beispiel 25.5: Lenz'sche Regel und Induktionsstrom

Ermitteln Sie die Richtung des Induktionsstroms in dem in Abbildung 25.8 gezeigten Ring unter Zuhilfenahme der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel.

Problembeschreibung: Stellen Sie mithilfe der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel zunächst die Richtung des Magnetfelds fest, das der im Ring induzierte Strom bewirkt: Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche, so wird ein Strom induziert, der seinerseits ein Magnetfeld und damit einen magnetischen Fluss durch dieselbe Fläche, aber mit relativ zur ursprünglichen Flussänderung umgekehrtem Vorzeichen hervorruft. Die Richtung des Stroms erhalten Sie dann durch Anwendung der Rechte-Hand-Regel.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die Leiterschleife mit der umschlossenen ebenen Fläche A (Abbildung 25.10). Von A ausgehend zeichnen Sie den Vektor $\Delta\mathbf{B}_1$ ein, der die Änderung des Magnetfelds \mathbf{B}_1 des sich nähernenden Stabmagneten angibt.

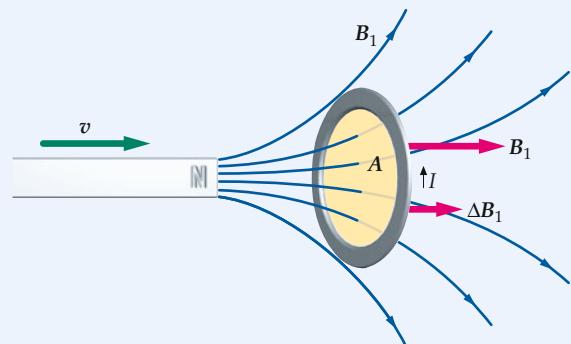


Abbildung 25.10 Stabmagnet, der sich auf die kreisförmige Leiterschleife zubewegt. $\Delta\mathbf{B}_1$ kennzeichnet hierbei die Änderung des Magnetfelds des Stabmagneten.

2. Zeichnen Sie nun den Vektor \mathbf{B}_2 für das Magnetfeld des im Ring induzierten Stroms ein (Abbildung 25.11). \mathbf{B}_2 war zu Beginn null und zeigt deshalb in dieselbe Richtung wie $\Delta\mathbf{B}_2$. Die Richtung von \mathbf{B}_2 erhalten Sie aus der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel: \mathbf{B}_2 und $\Delta\mathbf{B}_1$ müssen die umschlossene Fläche in entgegengesetzten Richtungen durchdringen, weil das Vorzeichen der Änderung des Flusses von \mathbf{B}_2 entgegengesetzt dem Vorzeichen der Änderung des Flusses von \mathbf{B}_1 sein muss.

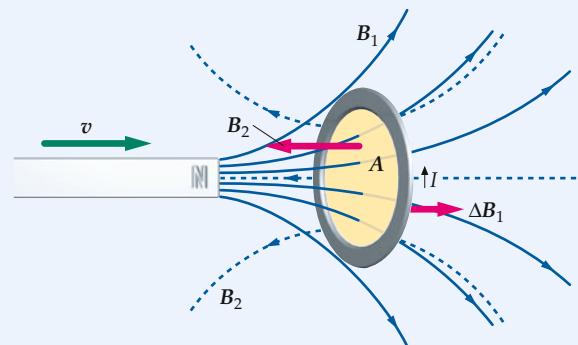


Abbildung 25.11 Leiterschleife mit induziertem entgegengesetztem Magnetfeld \mathbf{B}_2 .

3. Aus der Richtung von \mathbf{B}_2 folgt mithilfe der Rechte-Hand-Regel die Richtung des im Ring induzierten Stroms (Abbildung 25.12):

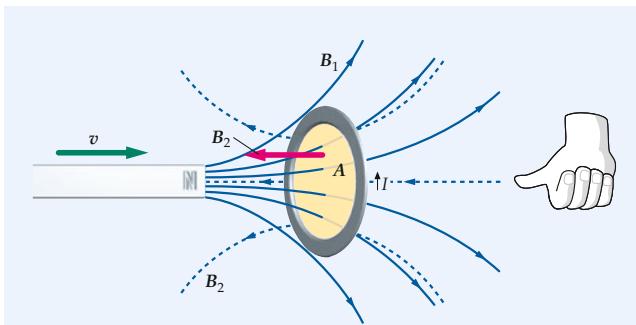


Abbildung 25.12 Zusätzliche Bestimmung der Stromrichtung durch die Rechte-Hand-Regel.

Plausibilitätsprüfung: Die in Schritt 3 erhaltene Richtung stimmt mit dem Ergebnis überein, das wir zu Beginn dieses Abschnitts mit der ursprünglichen Formulierung der Lenz'schen Regel erhalten hatten. ■

Abbildung 25.13 zeigt einen ruhenden Stabmagneten, von dem sich der leitende Ring weg bewegt. Die Richtungen des induzierten Stroms und des entstehenden magnetischen Moments sind in der Skizze angegeben. In diesem Fall zieht der Stabmagnet den Ring an und wirkt so wieder der Bewegung des Rings entgegen, wie es die Lenz'sche Regel verlangt.

In Abbildung 25.14 sehen Sie zwei induktiv gekoppelte Stromkreise: Eine Änderung des Stroms in Stromkreis 1 bewirkt eine Änderung des magnetischen Flusses in Stromkreis 2. Nehmen wir an, der Schalter S ist zu Beginn des Versuchs geöffnet, sodass in Kreis 1 kein Strom fließt (Abbildung 25.14a). Wird der Schalter geschlossen (Abbildung 25.14b), so vergeht eine bestimmte Zeit, bis der Strom in Kreis 1 von null ausgehend seinen Gleichgewichtswert U_1/R_1 erreicht hat. Während die Stromstärke ansteigt, ändert sich aber auch der magnetische Fluss durch die Spule in Kreis 2, wodurch hier in der gezeigten Richtung ein Strom induziert wird. Hat der Strom in Kreis 1 seinen Gleichgewichtswert erreicht, so ändert sich der magnetische Fluss durch die Spule in Kreis 2 nicht mehr, und es wird kein Strom mehr induziert. Wenn man den Schalter wieder öffnet, so fällt der Strom in Kreis 1 auf null ab; währenddessen wird in Kreis 2 erneut kurzzeitig ein Strom induziert, diesmal jedoch in Gegenrichtung

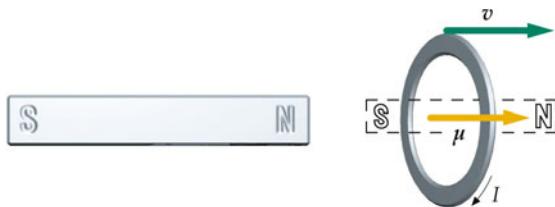


Abbildung 25.13 Bewegt sich der Ring vom (ruhenden) Stabmagneten weg, so erzeugt der induzierte Strom ein magnetisches Moment, das eine Anziehung zwischen Ring und Magnet bewirkt und so wieder der Relativbewegung entgegenwirkt.

(Abbildung 25.14c). Machen Sie sich bewusst, dass nur ein *veränderlicher magnetischer Fluss* zur Induktion einer Spannung führt. Diese Spannung hängt nicht von der Größe des Flusses ab, sondern nur von der Geschwindigkeit seiner Änderung. Durch einen hohen, aber konstanten Fluss wird keine Spannung induziert.

Frage 25.1

Ermitteln Sie die Richtung des Induktionsstroms in dem in Abbildung 25.8 gezeigten Ring unter Zuhilfenahme der alternativen Formulierung der Lenz'schen Regel, wenn sich der Magnet nach links (vom Ring weg) bewegt.

Betrachten wir nun einen einfachen Stromkreis, der nur aus einer Stromquelle, einem Schalter und einer Spule besteht. Ist der Schalter geschlossen und fließt ein Strom, so entsteht in der Spule ein magnetischer Fluss; ändert sich der Strom, so ändert sich auch der Fluss und es wird eine Spannung induziert, die ihrer Ursache (der Stromänderung) entgegenwirkt. Diesen Vorgang nennt man **Selbstinduktion**. Die Selbstinduktion ist dafür verantwortlich, dass der Strom in einem Stromkreis nicht sprunghaft, also innerhalb unendlich kurzer Zeit, von null auf einen bestimmten Wert ansteigen (bzw. von einem bestimmten Wert auf null abfallen) kann. Joseph Henry beobachtete diesen Effekt erstmals beim Experimentieren mit einer Schaltung wie der gerade beschriebenen, wobei die Spule sehr viele Windungen aufwies. In solchen Anordnungen bewirken bereits schwache Ströme einen starken magnetischen Fluss. Beim Öffnen des Kreises fiel Henry auf, dass am Schalter ein Funken übersprang. Die Ursache ist eine durch die schnelle Änderung des Flusses induzierte Spannung, die ihrer Ursache entgegenwirkt (in diesem Fall also den Stromfluss aufrechtzuerhalten sucht). So kommt eine beträchtliche Potenzialdifferenz über dem Schalter zustande; das elektrische Feld zwischen den Kontakten ist stark genug, um die Moleküle der umgebenden Luft zu ionisieren, d. h. leitfähig zu machen, und damit einen Funkenüberschlag (einen Durchschlag) auszulösen.

Einen Fall, in dem die Flussänderung durch die Bewegung der Induktionsspule zustande kommt, illustriert Beispiel 25.6. Allgemein behandelt wird das Thema Induktion durch Bewegung im nächsten Abschnitt.

Beispiel 25.6: Anwendung der Lenz'schen Regel bei einer bewegten Spule

Gegeben ist eine rechteckige Spule mit n Windungen sowie den Seitenlängen a und b ; es sei $n = 80$, $a = 20,0 \text{ cm}$ und $b = 30,0 \text{ cm}$. Die Spule befindet sich zur Hälfte (Abbildung 25.15) in einem Magnetfeld mit einer Stärke von $0,800 \text{ T}$, das in die Papierebene hinein zeigt. Der Widerstand der Spule ist $30,0 \Omega$. Berechnen Sie Betrag und Richtung des induzierten Stroms, wenn sich die Spule mit einer Geschwindigkeit von $2,00 \text{ m/s}$ a) nach rechts, b) in der Papierebene nach oben und c) in der Papierebene nach unten bewegt.

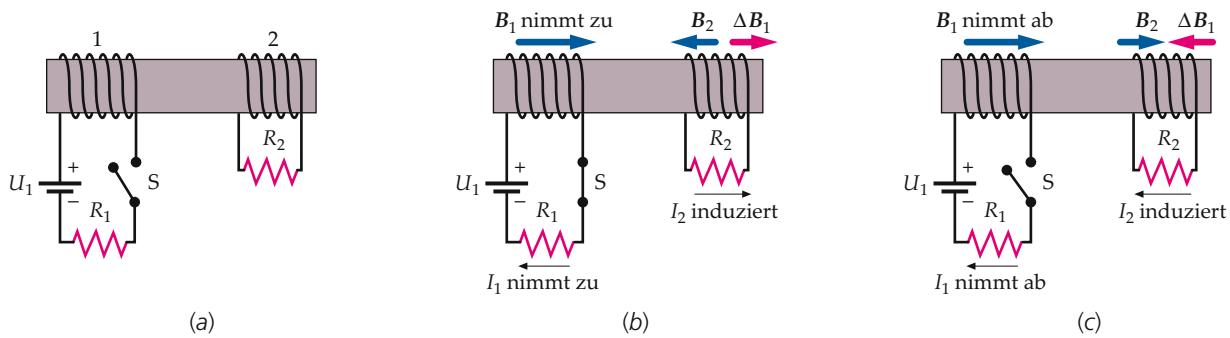


Abbildung 25.14 a) Zwei induktiv gekoppelte Stromkreise. b) Wird der Schalter geschlossen, so nimmt I_1 in der gezeigten Richtung zu. Der veränderliche magnetische Fluss durch die Spule von Kreis 2 induziert dort einen Strom I_2 . Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld, das dem induzierenden Fluss infolge von I_1 entgegenwirkt. c) Wird der Schalter geöffnet, so fällt I_1 ab, und wieder ändert sich der Fluss durch Kreis 2. Der induzierte Strom I_2 versucht, dem entgegenzuwirken, also den Fluss durch Kreis 2 aufrechtzuerhalten.

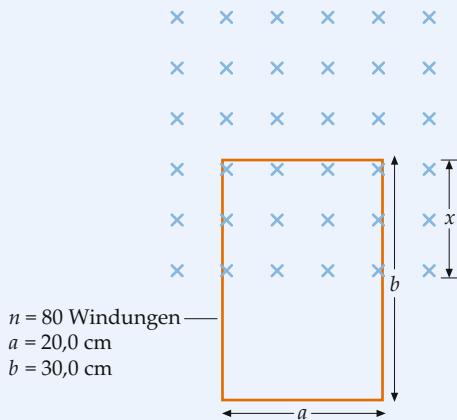


Abbildung 25.15 Darstellung der rechteckigen Spule und des Anteils x , der sich im Magnetfeld befindet.

Problembeschreibung: Der Induktionsstrom ist gleich dem Quotienten aus der induzierten Spannung und dem Widerstand der Spule. Um die Induktionsspannung bei der Bewegung der Spule zu berechnen, müssen wir ermitteln, wie schnell sich der Fluss durch die Spule ändert. Aus der Lenz'schen Regel ergibt sich schließlich die Richtung des induzierten Stroms.

Lösung:

Teilaufgabe a

- Der induzierte Strom ist gleich der Spannung, geteilt durch den Widerstand:

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{R}$$

- Der Zusammenhang zwischen induzierter Spannung und magnetischem Fluss ist durch das Faraday'sche Gesetz gegeben:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

3. Der magnetische Fluss durch die Spule ist n -mal so groß wie der Fluss durch jede einzelne Windung. Wir vereinbaren, dass A in die Papierebene hinein zeigt. Der Fluss durch die von einer Windung umschlossene Fläche A ist gleich $B a x$:

$$\Phi_{\text{mag}} = n B \cdot A = n [B a x - (0) \cdot a \cdot (b - x)] = n B a x$$

4. Bewegt sich die Spule nach rechts (oder links), so ändert sich der Fluss nicht (vorausgesetzt, dass die Spule das Magnetfeld selbst nicht verlässt). Folglich wird kein Strom induziert:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = 0$$

also

$$I = [0]$$

Teilaufgabe b

- Berechnen Sie, wie schnell sich der Fluss ändert, wenn die Spule in der Papierebene nach oben bewegt wird. In diesem Fall wird x größer, also ist dx/dt positiv:

$$\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = \frac{d}{dt} (n B a x) = n B a \frac{dx}{dt}$$

- Die Geschwindigkeit der Spule ist gleich der Ableitung von x nach t :

$$\begin{aligned} |I| &= \frac{|U|}{R} = \frac{n B a (dx/dt)}{R} \\ &= \frac{(80) \cdot (0,800 \text{ T}) \cdot (0,200 \text{ m}) \cdot (2,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})}{30,0 \Omega} \\ &= 0,853 \text{ A} \end{aligned}$$

- Wenn sich die Spule in der Papierebene nach oben bewegt, so nimmt der magnetische Fluss durch A zu. Der

induzierte Strom muss ein Magnetfeld erzeugen, dessen Fluss durch A abnimmt, wenn x größer wird. Das Skalarprodukt eines solchen Magnetfelds mit A muss negativ sein; das Magnetfeld zeigt folglich aus der Papierebene heraus und wird von einem Strom erzeugt, der entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung fließt:

$$I = [0,853 \text{ A, entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung}]$$

Teilaufgabe c

Wenn sich die Spule in der Papierebene nach unten bewegt, so nimmt der magnetische Fluss durch A ab. Der induzierte Strom muss ein Magnetfeld erzeugen, dessen Fluss durch A zunimmt, wenn x kleiner wird. Das Skalarprodukt eines solchen Magnetfelds mit A muss positiv sein; das Magnetfeld zeigt folglich in die Papierebene hinein und wird von einem Strom erzeugt, der in Uhrzeigerrichtung fließt:

$$I = [0,853 \text{ A, in Uhrzeigerrichtung}]$$

Plausibilitätsprüfung: In Teilaufgabe b ist die Bewegung in der Papierebene nach oben für die Induktion des Stroms verantwortlich; der Strom muss folglich so gerichtet sein, dass er eine Kraft hervorruft, die der Aufwärtsbewegung entgegenwirkt. Wenn wir Gleichung 23.4, $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, auf den oberen Teil der Schleife anwenden, erhalten wir eine Kraft, die genau dann nach unten gerichtet ist, wenn der Strom gegen die Uhrzeigerrichtung fließt. Diese Überlegung steht in Einklang mit unserem Ergebnis aus Teilaufgabe c. ■

Magnetfelds (Abbildung 25.16). Die Spule ist mit einem Stromintegrator (SI) verbunden, einem Gerät zur Messung der Ladung, die insgesamt durch die Spule fließt. Wie groß ist diese Ladung, wenn die Spule bezüglich der eingezeichneten Achse um 180° gedreht wird?

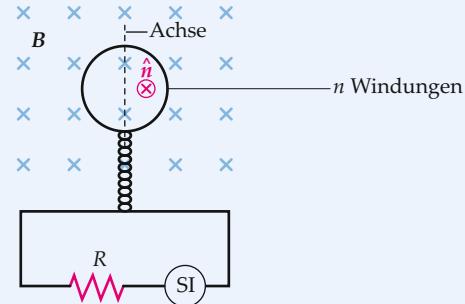


Abbildung 25.16 Kreisförmige Flipspule, die drehbar gelagert ist und sich so, wie angegeben, im Magnetfeld um die bezeichnete Achse drehen kann.

Problembeschreibung: Wird die in Abbildung 25.16 skizzierte Spule gedreht, so ändert sich der magnetische Fluss durch die Spule, und eine Spannung U_{ind} wird induziert. Folglich fließt ein Strom $I = U_{\text{ind}}/R$ (R ist der Gesamtwiderstand des Stromkreises). Da $I = dq/dt$ ist, erhalten wir die insgesamt durch den Integrator fließende Ladung q durch Integration von I , also $q = \int I dt$.

Lösung: 1. Die Ladung dq ist gleich dem Strom, multipliziert mit der Zeit dt :

$$dq = I dt$$

2. Den Zusammenhang zwischen der Spannung U_{ind} und dem Strom I gibt das Ohm'sche Gesetz an:

$$U_{\text{ind}} = RI,$$

also

$$U_{\text{ind}} dt = RI dt$$

3. Die Spannung ist gemäß dem Faraday'schen Gesetz mit dem magnetischen Fluss Φ_{mag} verknüpft:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

oder

$$U_{\text{ind}} dt = -d\Phi_{\text{mag}}$$

4. Ersetzen Sie im Ergebnis von Schritt 2 $U_{\text{ind}} dt$ durch $-d\Phi_{\text{mag}}$ (Schritt 3) und $I dt$ durch dq (Schritt 1):

$$-d\Phi_{\text{mag}} = R dq,$$

25.4 Induktion durch Bewegung

Wird ein Leiter in einem Bereich des Raums bewegt, in dem ein Magnetfeld herrscht, so wird eine Spannung induziert.

Durch die Bewegung eines Leiters in einem Magnetfeld wird eine Spannung induziert.

INDUKTIONSSPANNUNG DURCH BEWEGUNG

Die Induktion einer Spannung in einer Flipspule illustriert Beispiel 25.7.

Beispiel 25.7: Durch eine Flipspule fließende Ladung

Die Ebene einer kleinen Spule mit n Windungen liegt senkrecht zur Richtung eines homogenen, statischen

also

$$dq = -\frac{1}{R} d\Phi_{\text{mag}}$$

5. Die Gesamtladung q ergibt sich durch Integration dieser Beziehung:

$$\begin{aligned} q &= \int_0^q dq = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_{\text{mag},A}}^{\Phi_{\text{mag},E}} d\Phi_{\text{mag}} \\ &= -\frac{1}{R} (\Phi_{\text{mag},E} - \Phi_{\text{mag},A}) = -\frac{\Delta\Phi_{\text{mag}}}{R} \end{aligned}$$

6. Der magnetische Fluss durch die Spule ist $\Phi_{\text{mag}} = n \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$; \mathbf{A} ist die ebene, von der Spule umschlossene Fläche (Abbildung 25.17). Zu Beginn zeigt der Flächenvektor in die Papierebene hinein; die Fläche A dreht sich dann mit der Spule. Berechnen Sie die Änderung von Φ_{mag} , wenn die Spule sich um 180° dreht:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{\text{mag}} &= \Phi_{\text{mag},E} - \Phi_{\text{mag},A} = n \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_E - n \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_A \\ &= n B (-A - (+A)) = -2nBA \end{aligned}$$



Vor der Drehung Nach der Drehung

Abbildung 25.17 Von der Spule umschlossene Fläche.

7. Die Ladung q erhalten Sie durch Zusammenfassung der Ergebnisse aus Schritt 5 und 6:

$$q = \boxed{\frac{2nBA}{R}}$$

Weitergedacht: Beachten Sie, dass die Ladungsmenge q nicht davon abhängt, wie schnell die Spule gedreht wird. Entscheidend ist die Änderung des magnetischen Flusses durch die Spule. – Mithilfe einer derartigen, auch *Flipspule* genannten Anordnung kann man die Stärke von Magnetfeldern messen. Misst der Stromintegrator beim Umdrehen der Spule eine Ladungsmenge q , so ergibt sich die Magnetfeldstärke gemäß $B = Rq/(2nA)$, wie unmittelbar aus dem Resultat von Schritt 7 folgt.

Übung 25.3: Zu Beginn eines Versuchs liegt die Ebene einer Flipspule mit 40 Windungen, einem Radius von 3,00 cm und einem Widerstand von $16,0 \Omega$ senkrecht zu einem statischen, homogenen Magnetfeld von $0,500 \text{ T}$. Welche Ladungsmenge fließt durch die Spule, wenn diese um 90° gedreht wird? ■

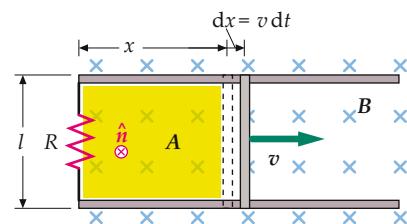


Abbildung 25.18 Ein elektrisch leitender Stab gleitet, umgeben von einem Magnetfeld, auf leitenden Schienen. Bewegt sich der Stab nach rechts, so nimmt der Flächeninhalt von A und folglich der magnetische Fluss durch A (in die Papierebene hinein) zu. Im Stromkreis wird eine Spannung B/lv induziert, und es fließt ein Strom entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. Der magnetische Fluss, den dieser Strom erzeugt, wirkt seiner Ursache entgegen und ist aus der Papierebene heraus gerichtet.

In Abbildung 25.18 sehen Sie einen dünnen, elektrisch leitenden Stab, der auf leitenden Schienen nach rechts gleitet. Die Schienen sind über einen Widerstand miteinander verbunden. Ein homogenes Magnetfeld \mathbf{B} zeigt in die Papierebene hinein.

Wir betrachten den magnetischen Fluss durch die von dem Stromkreis umschlossene Fläche A . Der Flächenvektor A soll in die Papierebene hinein zeigen. Wenn sich der Stab nach rechts bewegt, nimmt der Inhalt der Fläche und folglich der magnetische Fluss durch A zu. Deshalb wird im Stromkreis eine Spannung induziert. Ist l der Abstand der Schienen und x die Entfernung zwischen dem linken Schienenende und dem Stab zu einem bestimmten Zeitpunkt, so ist die vom Stromkreis umschlossene Fläche gleich lx , und der magnetische Fluss durch A ist

$$\Phi_{\text{mag}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA = Blx.$$

Wir leiten beide Seiten nach der Zeit t ab und erhalten

$$\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv$$

mit $v = dx/dt$ als Geschwindigkeit des Stabs. Im Stromkreis wird folglich die Spannung

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -Blv$$

induziert. Das negative Vorzeichen gibt an, dass das induzierte elektrische Feld entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet ist – es wirkt seiner Ursache entgegen. (Wenn der Daumen Ihrer rechten Hand in die Richtung von A zeigt, also in die Papierebene hinein, so biegt sich Ihre Handfläche im Uhrzeigersinn.)

Die Richtung des induzierten Felds können wir anhand der Lenz'schen Regel nachprüfen. Der Strom wird durch die Bewegung des Stabs nach rechts induziert; der induzierte Strom muss also eine magnetische Kraft hervorrufen, die nach links gerichtet ist. Gleichung 23.4 gibt die magnetische Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter an, $I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Die Richtung von \mathbf{l} ist parallel zum fließenden Strom und zum induzierten Feld. Zeigt \mathbf{l} in der Papierebene aufwärts und \mathbf{B} in die Papierebene hinein,

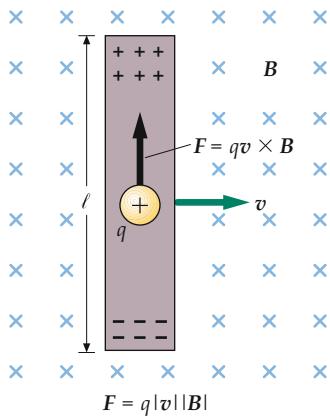


Abbildung 25.19 Die auf einen positiven Ladungsträger in einem leitenden, durch ein Magnetfeld bewegten Stab wirkende magnetische Kraft besitzt eine aufwärts gerichtete Komponente. Einige Ladungsträger bewegen sich in Richtung der Spitze des Stabs, wodurch an dessen unterem Ende ein negativer Ladungsüberschuss verbleibt. Durch die Ladungstrennung entsteht im Stab ein nach unten gerichtetes elektrisches Feld vom Betrag $|E_{\parallel}| = |v| |B|$. Die Potenzialdifferenz zwischen Spitze und Ende des Stabs ist dann $|E_{\parallel}| l = |v| |B| l$.

so wirkt die Kraft nach links, was unser obiges Ergebnis (das induzierte Feld ist entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet) bestätigt. Wenn man den Stab nach rechts anschiebt (ihm also eine Anfangsgeschwindigkeit v verleiht) und ihn dann loslässt, so bremst ihn die vom induzierten Strom bewirkte Kraft ab, bis er zur Ruhe kommt. Um die Bewegung des Stabs aufrechtzuerhalten, müsste auf ihn ständig eine äußere Kraft von links einwirken.

Ein anderer Weg, die Richtung des induzierten Felds und des induzierten Stroms zu überprüfen, ist folgender: Wir betrachten die Richtung der magnetischen Kraft, die auf die gemeinsam mit dem Stab nach rechts bewegten Ladungsträger wirkt. Die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist natürlich ebenfalls v ; die magnetische Kraft ist dann gegeben als $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Ist q positiv, so zeigt diese Kraft nach oben, und die induzierte Spannung ist daher entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gerichtet:

$$U_{\text{ind}} = |v| |B| l. \quad (25.7)$$

INDUKTIONSSPANNUNG IN EINEM SENKRECHT ZU SEINER LÄNGSACHSE UND ZU \mathbf{B} BEWEGTEN STAB

Steht das Magnetfeld nicht senkrecht auf dem Stromkreis, so tritt an die Stelle von $|\mathbf{B}|$ in Gleichung 25.7 die zum Stromkreis senkrechte Komponente von \mathbf{B} .

Abbildung 25.19 zeigt einen positiven Ladungsträger in einem elektrisch leitenden Stab, der sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem homogenen Magnetfeld bewegt; das Feld zeigt in die Papierebene hinein. Da sich der Ladungsträger mit dem Stab waagerecht fortbewegt, wirkt auf ihn eine aufwärts gerichtete magnetische Kraft $q |v| |\mathbf{B}|$. Durch die Kraftwirkung werden alle Ladungsträger im Stab nach oben gedrückt, wodurch eine positive Ladung am oberen Ende und eine negative Ladung am unteren Ende entstehen und sich ein elektrisches Feld \mathbf{E}_{\parallel} aufbaut. Diese Verschiebung der Ladungsträger hält an, bis die von diesem Feld nach unten ausgeübte Kraft $q |E_{\parallel}|$ die nach oben gerichtete magnetische Kraft $q |v| |\mathbf{B}|$ gerade kompensiert. Im Gleichgewicht ist die elektrische Feldstärke im Stab gleich

$$|E_{\parallel}| = |v| |\mathbf{B}| .$$

Das elektrische Feld ist abwärts gerichtet, parallel zur Längsachse des Stabs. Die zugehörige Potenzialdifferenz über der Länge l des Stabs ist dann

$$U = |E_{\parallel}| l = |v| |\mathbf{B}| l,$$

wobei sich die Spitze des Stabs auf dem höheren Potenzial befindet. Fließt kein Strom durch den Stab, so ist die Potenzialdifferenz entlang des Stabs gleich der Induktionsspannung, $|v| |\mathbf{B}| l$. Wenn ein Strom fließt, ist die Potenzialdifferenz gleich

$$U = |v| |\mathbf{B}| l - IR \quad (25.8)$$

mit R als Ohm'schem Widerstand des Stabs.

Übung 25.4: Ein 40 cm langer Stab bewegt sich senkrecht zu seiner Längsachse mit einer Geschwindigkeit von 12 m/s in einer Ebene, auf der ein Magnetfeld von 0,30 T senkrecht steht. Wie groß ist die im Stab induzierte Spannung? ◀

In den Beispielen 25.8 und 25.9 werden für bewegte Leiter die Beziehungen für Leistung, Kraft und Geschwindigkeit untersucht.

Beispiel 25.8: Ein U-förmiger Leiter und ein gleitender Stab

ZUR ÜBUNG

Für Abbildung 25.18 sollen folgende Parameter gelten: $|B| = 0,600 \text{ T}$, $v = 8,00 \text{ m/s}$, $l = 15,0 \text{ cm}$ und $R = 25,0 \Omega$; die Widerstände des Stabs und der Schienen seien zu vernachlässigen. Berechnen Sie a) die im Stromkreis induzierte Spannung, b) den induzierten Strom, c) die erforderliche Kraft, um den Stab mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, und d) die im Widerstand umgesetzte Leistung.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Berechnen Sie die induzierte Spannung aus Gleichung 25.7.

2. Den Strom erhalten Sie aus dem Ohm'schen Gesetz.

3. Um den Stab mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, muss man eine Kraft aufwenden, deren Betrag gleich der vom Magnetfeld auf den Stab ausgeübten Kraft ist ($|I l B|$; siehe Gleichung 23.4), die aber entgegengesetzt gerichtet ist. Berechnen Sie den Betrag der Kraft.

4. Berechnen Sie nun die im Widerstand umgesetzte Leistung.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$U_{\text{ind}} = |v| |B| l = 0,720 \text{ V}$$

2.

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{R} = 28,8 \text{ mA}$$

3.

$$|F| = |I l B| = 2,59 \text{ mN}$$

4.

$$P = I^2 R = 20,7 \text{ mW}$$

Plausibilitätsprüfung: Auch aus der Beziehung $P = |F| |v|$ erhalten Sie eine Leistung von 20,7 mW.

Weitergedacht: Das Potenzial an der Spitze des Stabs ist höher als das Potenzial an dessen unterem Ende.

Beispiel 25.9: Magnetische Reibung

Ein Stab mit der Masse m gleitet reibungsfrei auf elektrisch leitenden Schienen, umgeben von einem statischen, homogenen Magnetfeld B , das in die Papierebene hinein zeigt (Abbildung 25.20). Der Stab wird von außen angeschoben, sodass er sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Stab plötzlich losgelassen. Daraufhin bewegt er sich eine Zeit lang weiter nach rechts, wobei er durch die magnetische Kraft gebremst wird. Geben Sie die Geschwindigkeit v des Stabs als Funktion der Zeit an.

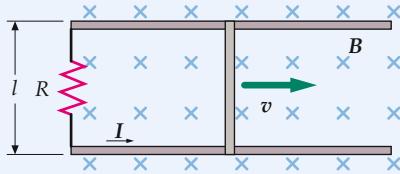


Abbildung 25.20 Darstellung des Stabs, der sich reibungsfrei auf den beiden elektrisch leitenden Schienen mit der Geschwindigkeit $v(t)$ bewegt.

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit des Stabs ändert sich, weil eine magnetische Kraft auf den induzierten Strom wirkt. Durch die Bewegung des Stabs im Magnetfeld wird die Spannung $U_{\text{ind}} = |v| |B| l$ induziert,

und es fließt ein Strom $I = U_{\text{ind}}/R$. Als Folge davon wirkt auf den Stab die magnetische Kraft $F = I l \times B$ (siehe Gleichung 23.4). Ist diese Kraft bekannt, so können wir mithilfe des zweiten Newton'schen Axioms die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit ausdrücken. Die positive x -Richtung soll nach rechts zeigen.

Lösung: 1. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf den Stab an:

$$F_x = m a_x = m \frac{dv}{dt}$$

2. Auf den Stab wirkt die magnetische Kraft (siehe Gleichung 23.4), deren Betrag proportional zum Strom und deren Richtung parallel zur $-x$ -Achse ist (Abbildung 25.20):

$$F_x = -IBl$$

3. Der Strom ergibt sich als Quotient aus der Induktionsspannung und dem Widerstand des Stabs:

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

4. Fügen Sie die Ergebnisse der ersten Schritte zusammen. Sie erhalten die magnetische Kraft, die auf den Stab wirkt:

$$F_x = -IBl = -\frac{Blv}{R} Bl = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$$

5. Das zweite Newton'sche Axiom liefert dann:

$$-\frac{B^2 l^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

6. Trennen Sie nun die Variablen und integrieren Sie über die Geschwindigkeit in den Grenzen v_0 und v_E sowie über die Zeit in den Grenzen 0 und t_E :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2 l^2}{m R} dt \\ \int_{v_0}^{v_E} \frac{dv}{v} &= -\frac{B^2 l^2}{m R} \int_0^{t_E} dt \\ \ln \frac{v_E}{v_0} &= -\frac{B^2 l^2}{m R} t_E \end{aligned}$$

7. Lösen Sie für $v = v_E$ und $t = t_E$ nach v auf:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = \frac{m R}{B^2 l^2}$$

Plausibilitätsprüfung: Am Widerstand wird kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Die Energieerhaltung fordert, dass dann die kinetische Energie des Stabs abnehmen, also seine Geschwindigkeit sinken muss. Unser Ergebnis aus Schritt 7 steht mit dem Energieerhaltungssatz in Einklang.

Weitergedacht: Wäre die Kraft konstant, so nähme die Geschwindigkeit des Stabs linear mit der Zeit ab. Die Kraft ist jedoch proportional zur Geschwindigkeit des Stabs, wie wir es in Schritt 4 erhalten haben, und folglich am Anfang groß, mit abnehmender Geschwindigkeit aber immer kleiner. Im Prinzip kommt der Stab so niemals zur Ruhe; er bewegt sich jedoch aufgrund von Reibung nur innerhalb einer endlichen Strecke. ■

Generatoren und Motoren

Ein Großteil der Elektroenergie wird heute von Generatoren in Form von Wechselstrom erzeugt. Abbildung 25.21 zeigt einen einfachen **Wechselstromgenerator**, bestehend aus einer Spule, die in einem homogenen Magnetfeld rotiert. Die Enden des Spulendrahts sind mit Schleifringen verbunden, die sich mit der Spule drehen. Der elektrische Kontakt wird über fest montierte sogenannte Bürsten (Kohlestäbe) hergestellt.

Wenn die Normale der Spulenfläche mit der Richtung des Magnetfelds \mathbf{B} den in Abbildung 25.21b markierten Winkel θ einschließt, ist der magnetische Fluss durch die Spule

$$\Phi_{\text{mag}} = n |\mathbf{B}| |A| \cos \theta ; \quad (25.9)$$

A ist die von einer Spulenwindung umschlossene ebene Fläche, n ist die Windungszahl. Wird die Spule im Magnetfeld gedreht, so ändert sich der magnetische Fluss durch A , und gemäß dem Faraday'schen Gesetz wird folglich eine Spannung induziert. Nehmen wir an, die Spule rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω und der Anfangswinkel zwischen Flächennormale und Magnetfeld ist null. Zu einem Zeitpunkt t ist dieser Winkel dann

$$\theta = \omega t ,$$

was wir in Gleichung 25.9 einsetzen:

$$\Phi_{\text{mag}} = n |\mathbf{B}| |A| \cos (\omega t) = n |\mathbf{B}| |A| \cos (2\pi v t) .$$

In der Spule wird folglich eine Spannung

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -n |\mathbf{B}| |A| \frac{d}{dt} \cos (\omega t) \\ &= +n |\mathbf{B}| |A| \omega \sin (\omega t) \end{aligned} \quad (25.10)$$

induziert. Gleichung 25.10 kann man auch in der Form

$$U_{\text{ind}} = U_{\text{ind}}(t) = U_{\text{max}} \sin (\omega t)$$

aufschreiben. Dabei ist U_{max} der Maximalwert (die Amplitude) der periodischen Spannung:

$$U_{\text{max}} = n |\mathbf{B}| |A| \omega .$$

Wird die Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einem homogenen Magnetfeld gedreht, so wird demnach eine sinusförmige Spannung induziert. Ein Generator wandelt also die mechanische Energie der rotierenden Spule in elektrische Energie um; die mechanische Energie wird meist von einer Dampfturbine oder einem Wasserfall an einem Staudamm geliefert. In der Praxis ist ein Generator zwar wesentlich komplizierter aufgebaut als hier gezeigt, das Funktionsprinzip ist jedoch daselbe: Durch magnetische Induktion wird eine alternierende, fast immer sinusförmige Wechselspannung erzeugt.

Anstatt als Generator können wir eine Spule in einem statischen Magnetfeld auch als **Wechselstrommotor** betreiben: Wir drehen die Spule nicht mechanisch, sondern führen ihr die von einem anderen Generator erzeugte Wechselspannung zu (Abbildung 25.22). (In Schaltbildern kennzeichnet man Wechselstromgeneratoren mit \odot) Auf eine Leiterschleife wirkt in einem Magnetfeld ein Drehmoment, das bestrebt ist, die Schleife so zu drehen, dass ihr magnetisches Moment μ in Richtung von \mathbf{B} zeigt; die Ebene der Schleife steht dann senkrecht zu \mathbf{B} . Legt man an die in Abbildung 25.22 gezeigte Spule eine Gleichspannung an, so kehrt das Drehmoment seine Richtung um, wenn die Spule ihre Gleichgewichtslage (die waagerechte Lage ihrer Ebene) durchläuft. Anschließend schwingt die Spule um diese Gleichgewichtslage, bis sie schließlich mit waagerechter Ebene zur Ruhe kommt. Wenn aber die Spannung im Moment des Durchlaufens der Gleichgewichtsposition ihre Richtung ändert, dann kehrt sich die Richtung des Drehmoments nicht um,

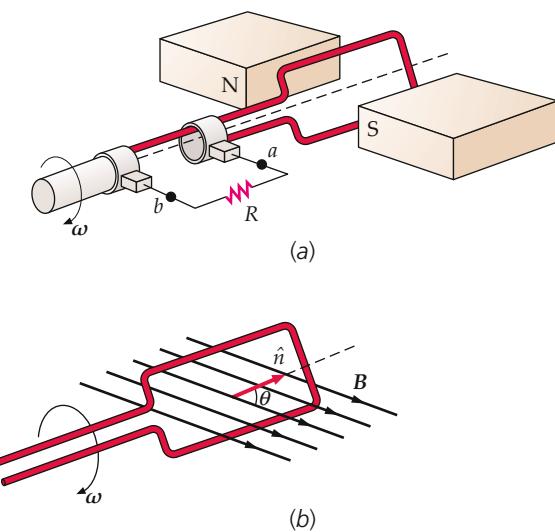
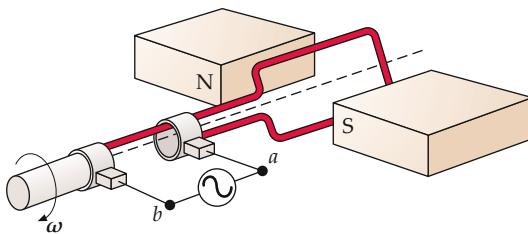


Abbildung 25.21 a) Ein Wechselstromgenerator. Rotiert eine Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem statischen äußeren Magnetfeld \mathbf{B} , so wird eine sinusförmige Spannung induziert. Zum Antrieb der Spule wird mechanische Energie (z. B. von einem Wasserfall oder einer Dampfturbine) geliefert; der Generator wandelt sie in elektrische Energie um. Über Schleifringe wird die Energie an Bürsten und damit an einen äußeren Stromkreis abgegeben. b) Die Normale der Spulenfläche bildet mit der Richtung des Magnetfelds einen Winkel θ ; der magnetische Fluss durch die von einer Windung umschlossene ebene Fläche ist dann gleich $|\mathbf{B}| |\mathbf{A}| \cos \theta$.



und die Rotation wird fortgesetzt. Durch Selbstinduktion baut sich während der Drehung der Spule eine Spannung auf, die ihrer Ursache (dem Strom) entgegenwirkt. Im Moment des Einschaltens des Motors ist diese induzierte Spannung null, und es fließt ein starker, nur durch den Ohm'schen Widerstand des Stromkreises begrenzter Strom. Wenn sich die Spule zu bewegen beginnt, steigt die induzierte Spannung an, und der Strom geht zurück.

Frage 25.2

Woher stammt die Energie, die ein Generator an einen Stromkreis abgibt?

Übung 25.5: Gegeben ist eine Spule mit 250 Windungen; jede Windung umschließt eine Fläche von $3,0 \text{ cm}^2$. Wie groß ist die

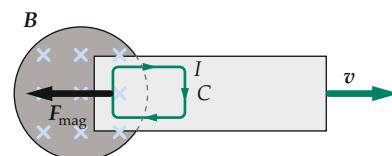
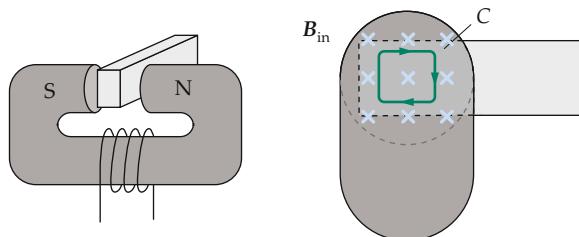
Amplitude der Spannung (U_{\max}), wenn die Spule mit einer Frequenz von 60 Umdrehungen pro Sekunde in einem Magnetfeld von $0,40 \text{ T}$ rotiert? ◀

25.5 Wirbelströme

Bisher haben wir uns mit Strömen beschäftigt, die in dünnen Drähten oder Stäben – also Stromkreisen mit definierter Begrenzung – induziert wurden. Änderungen des magnetischen Fluxes rufen jedoch auch Kreisströme, sogenannte *Wirbelströme*, im Inneren von Metallstücken wie beispielsweise dem Kern einer Transformatorspule hervor. Wirbelströme erzeugen Wärme; dies bedeutet einen Energieverlust im Transformator.

Betrachten wir einen leitenden Stab, der sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten befindet (Abbildung 25.23). Ändert sich das Magnetfeld \mathbf{B} zwischen den Polen mit der Zeit (etwa wenn in den Windungen des Magneten ein Wechselstrom fließt), so ändert sich der Fluss durch jede geschlossene Schleife innerhalb des Stabs. Ein Beispiel für einen solchen Weg ist die in der Skizze eingezeichnete Kurve C . Da diese sich in einem leitfähigem Material befindet, wird entlang C eine Spannung induziert, und es fließt ein Strom.

Man kann das Vorhandensein von Wirbelströmen demonstrieren, indem man ein Kupfer- oder Aluminiumblech durch den Raum zwischen den Polen eines starken Permanentmagneten zieht (Abbildung 25.24): Die Schleife C in der Skizze umschließt eine Fläche, die sich zum Teil innerhalb, zum Teil



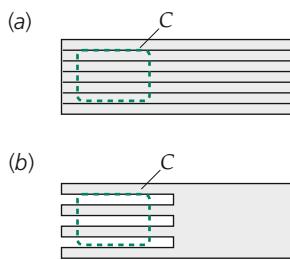


Abbildung 25.25 Durch Unterbrechung der Wege in einem Metallstab lassen sich Wirbelströme reduzieren. a) Der Widerstand der geschlossenen Schleife C nimmt deutlich zu, wenn der Stab aus Schichten zusammengefügt wird, die durch eine Klebstoffsicht voneinander isoliert sind. b) Einen ähnlichen Effekt hat das Anbringen von Schlitten im Stab.

außerhalb des Magnetfelds befindet. zieht man das Blech nach rechts, so nimmt der Fluss durch die Schleife ab (vorausgesetzt, der Flächenvektor zeigt in die Papierebene hinein). In der Schleife wird ein elektrisches Feld in Uhrzeigerrichtung induziert; es erzeugt einen Strom, der im Gebiet zwischen den Polen nach oben fließt. Das Magnetfeld übt auf diesen Strom eine nach links gerichtete, also der Bewegung des Blechs entgegenwirksame Kraft aus. Sie können diese Kraft deutlich spüren, wenn Sie versuchen, ein leitfähiges Blech schnell durch ein starkes Magnetfeld zu ziehen.

In der Regel sind Wirbelströme unerwünscht. Sie führen zu Leistungsverlusten in Form von Joule'scher Wärme, die zudem an die Umgebung abgeführt werden muss. Um die Verluste möglichst zu vermeiden, erhöht man den elektrischen Widerstand der Wege, entlang derer die Wirbelströme induziert werden: Der leitende Stab in Abbildung 25.25a wurde schichtweise aus jeweils durch eine Klebstoffsicht isolierten Blechen zusammengesetzt. Wirbelströme können nun lediglich in jeder einzelnen dünnen Schicht induziert werden, größere Stromschleifen sind unterbrochen, und der Leistungsverlust sinkt deutlich ab. Einen ähnlichen Effekt erreicht man, indem man den Stab mit Schlitten versieht (Abbildung 25.25b), wodurch die Wirbelströme ebenfalls unterbunden werden und die magnetische Kraft reduziert wird.

In manchen Fällen macht man sich Wirbelströme jedoch auch zunutze, beispielsweise zur Dämpfung nicht erwünschter Oszillationen. Ohne Dämpfung schwingt etwa die Anzeige sehr empfindlicher mechanischer Waagen viele Male um ihre Gleichgewichtslage, was das Ablesen erschwert. Abhilfe schafft hier, am Zeiger ein kleines Metallstück (z. B. ein Aluminiumblech) anzubringen, das beim Pendeln des Zeigers zwischen den Polen eines Magneten schwingt. Die induzierten Wirbelströme dämpfen die Oszillationen wirksam, und die Gleichgewichtslage stellt sich rasch ein. Eine andere wichtige Anwendung sind Wirbelstrombremsen in Schienenfahrzeugen. Ein großer Elektromagnet wird oberhalb der Schienen im Waggon angebracht. Fließt durch die Windungen der bewegten Magnetspule ein Strom, so werden in den Schienen Wirbelströme induziert, die den Zug abbremsen.

25.6 Induktivität

Selbstinduktion

Betrachten wir eine Spule, die von einem Strom I durchflossen wird. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld \mathbf{B} , dessen Stärke in jedem Punkt proportional zu I ist. Folglich ist auch der magnetische Fluss durch die Spule proportional zu I :

$$\Phi_{\text{mag}} = LI. \quad (25.11)$$

DEFINITION DER SELBSTINDUKTION

Den Proportionalitätsfaktor L nennt man die **Selbstinduktivität** der Spule; L hängt von der Geometrie der Spule ab. Die SI-Einheit der Induktivität ist das **Henry** (H). Wie aus Gleichung 25.11 folgt, ergibt sich die Einheit der Induktivität als Quotient der Einheiten des magnetischen Flusses und des Stroms:

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}.$$

Die Selbstinduktivität jeder Spule oder jedes Stromkreises lässt sich prinzipiell folgendermaßen berechnen: Man ermittelt für eine bestimmte Stromstärke I das Magnetfeld in jedem Punkt auf einer Fläche, die von der Spule umschlossen wird, berechnet den Fluss Φ_{mag} und wendet schließlich die Beziehung $L = \Phi_{\text{mag}}/I$ an. In der Praxis sind derartige Berechnungen in der Regel mühsam. Eine Ausnahme bildet eine lange, dicht gewickelte Zylinderspule. Der magnetische Fluss durch eine solche Spule, in der ein Strom I fließt, ist (siehe Beispiel 25.1) nBA mit $B = \mu_0(n/l)I$, n als Windungszahl, l als Länge der Spule, (n/l) als Windungsdichte und A als der von einer Windung umschlossenen Fläche:

$$\Phi_{\text{mag}} = nBA = n\mu_0 \frac{n}{l} IA = \mu_0 \left(\frac{n}{l}\right)^2 IA l. \quad (25.12)$$

Wie erwartet ist der Fluss proportional zum Strom I mit der Selbstinduktivität als Proportionalitätsfaktor:

$$L = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{I} = \mu_0 \left(\frac{n}{l}\right)^2 Al. \quad (25.13)$$

SELBSTINDUKTIVITÄT EINER ZYLINDERSPULE

Mit Worten ausgedrückt: Die Selbstinduktivität einer Zylinderspule ist proportional zum Quadrat der Windungsdichte (n/l) und zum Volumen der Spule Al . Sie hängt also, wie auch die Kapazität, nur von geometrischen Parametern ab – das illustriert Beispiel 25.10. (Hat die Spule einen Kern, dann beeinflussen auch dessen Materialeigenschaften die Induktivität.) Betrachten wir die Einheiten in Gleichung 25.13, so stellen wir fest, dass sich μ_0 in Henry pro Meter angeben lässt:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Beispiel 25.10: Selbstinduktivität einer Zylinderspule

Zu berechnen ist die Selbstinduktivität einer 10,0 cm langen Zylinderspule mit 100 Windungen und einer Querschnittsfläche von 5,00 cm².

Problembeschreibung: Mithilfe von Gleichung 25.13 berechnen wir die Selbstinduktivität in Henry.

Lösung: 1. L ist von Gleichung 25.13 gegeben:

$$L = \mu_0 (n/l)^2 A l$$

2. Rechnen Sie die gegebenen Größen in SI-Einheiten um (Wd. steht für Windungen):

$$l = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$$

$$A = 5,00 \text{ cm}^2 = 5,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$n/l = (100 \text{ Wd.}) / (0,100 \text{ m}) = 1000 \text{ Wd.} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

3. Setzen Sie alle gegebenen Größen ein:

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 (n/l)^2 A l \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}) \cdot (10^3 \text{ Wd.} \cdot \text{m}^{-1})^2 \\ &\quad \cdot (5,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) \cdot (0,100 \text{ m}) \\ &= 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ H} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Selbstinduktivität einer Spule ohne Weicheisenkern sollte nur einen kleinen Bruchteil eines Henry betragen. Auf die Spule in diesem Beispiel trifft das zu. ■

Ändert sich die Stromstärke in einem Stromkreis, so ändert sich auch der magnetische Fluss, und es wird eine Spannung induziert. Da die Selbstinduktivität des Stromkreises konstant ist, hängt die Flussänderung nur von der Änderungsrate der Stromstärke ab:

$$\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}.$$

Gemeinsam mit dem Faraday'schen Gesetz ergibt sich dann

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (25.14)$$

SELBSTINDUKTIONSSPANNUNG

Die Selbstinduktionsspannung ist somit proportional zur Änderungsrate des Stroms. Für Zylinderspulen mit vielen Windungen, in Stromkreisen symbolisiert durch , ist die Selbstinduktivität so groß, dass man dagegen die Selbstinduktivität des restlichen Kreises normalerweise vernachlässigen

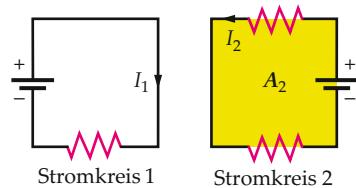


Abbildung 25.26 Zwei benachbarte Stromkreise. Das Magnetfeld in A_2 wird jeweils zum Teil von I_1 und I_2 hervorgerufen. Der magnetische Fluss durch A_2 ergibt sich dann als Summe zweier Terme, von denen der eine proportional zu I_1 ist und der andere zu I_2 .

kann. Man nennt solche Spulen auch allgemein **Induktivität**. (Achten Sie darauf, dass Bauelement und Eigenschaft mit dem gleichen Begriff bezeichnet werden können!) Der Spannungsabfall an der Spule ist gegeben durch

$$U_L = U_{\text{ind}} - IR = -L \frac{dI}{dt} - IR \quad (25.15)$$

SPANNUNGSABFALL AN EINER SPULE

mit R als Innenwiderstand der Spule. Der Innenwiderstand wird gegebenenfalls vom Kern der Spule beeinflusst und ist für eine ideale Spule null.

Übung 25.6: Wie schnell muss sich der Strom in der Spule aus Beispiel 25.10 ändern, damit eine Spannung von 20,0 V induziert wird? ◀

Gegeninduktion

In Abbildung 25.26 sehen Sie zwei nahe beieinander liegende Stromkreise 1 und 2. Der magnetische Fluss durch einen der Kreise hängt in diesem Fall nicht nur von dem Strom ab, der in diesem Kreis fließt, sondern auch vom Strom im Nachbarkreis. Wir bezeichnen den in Kreis 1 (Abbildung 25.26a) fließenden Strom mit I_1 und den Strom in Kreis 2 (Abbildung 25.26b) mit I_2 . Das Magnetfeld über der Fläche A_2 ergibt sich dann als Überlagerung der von I_1 und I_2 hervorgerufenen Felder \mathbf{B}_1 bzw. \mathbf{B}_2 , wobei die Feldstärken den jeweils zugehörigen Stromstärken proportional sind. Für den Fluss des Felds \mathbf{B}_1 durch den Kreis 2, $\Phi_{\text{mag}12}$, können wir dann schreiben:

$$\Phi_{\text{mag}12} = L_{12} I_1. \quad (25.16a)$$

DEFINITION DER GEGENINDUKTION

Die Größe L_{12} ist die **Gegeninduktivität** der beiden Stromkreise. Die Gegeninduktivität hängt von der relativen geometrischen Anordnung der Kreise ab. Sind die Kreise beispielsweise weit voneinander entfernt, so ist der magnetische Fluss von \mathbf{B}_1 durch Kreis 2 und folglich auch die Gegeninduktivität gering. (Der resultierende Fluss $\Phi_{\text{mag}2}$ beider Felder durch Kreis 2 ergibt sich als Summe zweier Anteile, $\Phi_{\text{mag}2} = \Phi_{\text{mag}22} + \Phi_{\text{mag}12}$.)

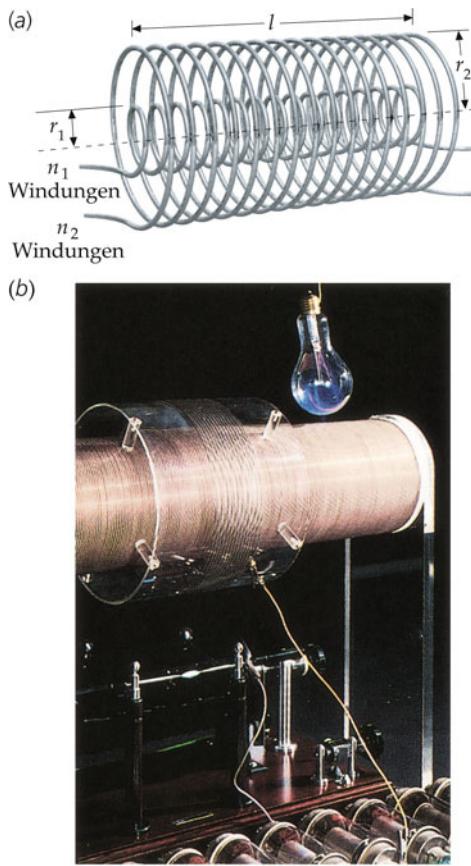


Abbildung 25.27 a) Eine lange, schmale Spule befindet sich im Inneren einer zweiten, gleich langen Spule. Fließt in einer der beiden Spulen ein Strom, so wird ein magnetischer Fluss in der jeweils anderen Spule erzeugt. b) Der in Bild a skizzierte Aufbau wird in dieser Tesla-Spule praktisch umgesetzt. Die Anordnung arbeitet als Transformator (Kapitel 26): Eine niedrige Wechselspannung in der äußeren Spule wird in eine höhere Wechselspannung in der inneren Spule umgewandelt. Der Strom durch die äußere Spule induziert eine Spannung in der inneren Spule, die hoch genug ist, um die darüber aufgehängte Glühlampe zum Leuchten zu bringen. (b) © Michael Holford, Collection of the Science Museum, London.)

Analog zu Gleichung 25.16a formulieren wir folgende Beziehung für den Fluss von \mathbf{B}_2 durch den Kreis 1:

$$\Phi_{\text{mag}21} = L_{21} I_2. \quad (25.16b)$$

Wir wollen nun die Gegeninduktivität zweier eng gewickelter, konzentrisch angeordneter Zylinderspulen berechnen, wie sie in Abbildung 25.27 dargestellt sind. Dazu sei l die Länge beider Spulen; die innere Spule mit dem Radius r_1 habe n_1 Windungen, die äußere Spule mit dem Radius r_2 habe n_2 Windungen. Durch die innere Spule fließe der Strom I_1 . Zunächst bestimmen wir die Gegeninduktivität L_{12} ; dazu ermitteln wir den magnetischen Fluss $\Phi_{\text{mag}2}$, den I_1 in der äußeren Spule hervorruft.

Der Strom I_1 erzeugt ein innerhalb der inneren Spule homogenes Magnetfeld mit der Feldstärke

$$B_1 = \mu_0 (n_1/l) I_1, \quad r < r_1. \quad (25.17)$$

Außerhalb der inneren Spule ist dieses Magnetfeld nahezu null. Das Feld der inneren Spule erzeugt demnach in der äußeren Spule den Fluss

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{mag}2} &= n_2 B_1 (\pi r_1^2) = (n_2/l) l B_1 (\pi r_1^2) \\ &= \mu_0 (n_2/l) (n_1/l) l (\pi r_1^2) I_1. \end{aligned}$$

Beachten Sie dabei, dass die Fläche zur Berechnung des Fluxes durch die äußere Spule nicht die von einer Windung dieser Spule umschlossene Fläche πr_2^2 ist, sondern die von einer Windung der inneren Spule umschlossene Fläche, πr_1^2 ; der Grund dafür ist, dass wir das Magnetfeld der inneren Spule – wie bereits betont – außerhalb dieser Spule vernachlässigen können. Für die Gegeninduktion erhalten wir daraus

$$L_{12} = \frac{\Phi_{\text{mag}21}}{I_1} = \mu_0 (n_2/l) (n_1/l) l \pi r_1^2. \quad (25.18)$$

Übung 25.7: Berechnen Sie die Gegeninduktivität L_{21} der in Abbildung 25.27 gezeigten koaxialen Spulen, indem Sie den Fluss durch die innere Spule ermitteln, der von einem Strom I_2 durch die äußere Spule hervorgerufen wird. ◀

Übung 25.7 liefert das – wie man zeigen kann, allgemeingültige – Ergebnis $L_{12} = L_{21}$. Wir dürfen deshalb den Index der Gegeninduktivität von jetzt an weglassen und einfach L schreiben.

25.7 Die Energie des Magnetfelds

Ein Kondensator speichert elektrische Energie; eine Spule oder Induktivität speichert magnetische Energie. Betrachten wir den Stromkreis in Abbildung 25.28: Eine ideale Spule L und ein Widerstand R sind mit einer Spannungsquelle U_0 und einem

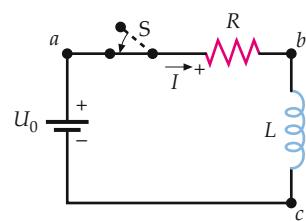


Abbildung 25.28 Sobald der Schalter dieses Stromkreises geschlossen wird, nimmt die Stromstärke zu, und in der Spule wird eine Gegenspannung vom Betrag $L di/dt$ induziert. Die Summe aus den Spannungsabfällen über dem Widerstand ($I R$) und über der Spule ($L di/dt$) ist gleich der Spannung U_0 der Spannungsquelle.

Schalter S in Reihe geschaltet. R und L sollen dem Ohm'schen Widerstand bzw. der Induktivität des gesamten Stromkreises entsprechen. Zu Beginn des Versuchs ist der Schalter geöffnet, es fließt kein Strom. Kurz nachdem der Schalter geschlossen wurde, fließt der Strom I; der Spannungsabfall beträgt am Widerstand $-IR$, an der Spule $-L \frac{dI}{dt}$. (Die Potenzialdifferenz an der Spule ist gleich der durch Gleichung 25.14 gegebenen Spannung, wenn der Innenwiderstand der Spule vernachlässigbar klein ist.)

Wir wenden die Kirchhoff'sche Maschenregel auf den Stromkreis an und erhalten

$$U_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (25.19)$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit dem Strom I und Umstellen der Gleichung ergibt sich daraus

$$U_0 I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt}. \quad (25.20)$$

Der Term $U_0 I$ gibt die von der Batterie gelieferte Leistung (potentielle elektrische Energie pro Zeit) an; der Term $I^2 R$ entspricht der Leistung, die am Widerstand ankommt (und dort in Wärme umgesetzt wird), während die Leistung $LI \frac{dI}{dt}$ auf die Spule entfällt. Die in die Spule fließende Energie bezeichnen wir mit E_{mag} . Dann ist

$$\frac{dE_{\text{mag}}}{dt} = LI \frac{dI}{dt},$$

woraus folgt:

$$dE_{\text{mag}} = LI dI.$$

Wir integrieren diesen Ausdruck und erhalten

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} LI^2 + C$$

mit C als Integrationskonstante, zu deren Berechnung wir für $I = 0$ $E_{\text{mag}} = 0$ setzen. In einer Spule, durch die ein Strom I fließt, wird daher folgende Energie gespeichert:

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} LI^2. \quad (25.21)$$

IN EINER SPULE GESPEICHERTE ENERGIE

Ein Strom, der durch eine Spule fließt, erzeugt ein Magnetfeld innerhalb der Spulenwindungen und um die Windungen herum. Die in der Spule gespeicherte Energie können wir uns als Energie dieses Magnetfelds vorstellen. Im Spezialfall einer langen, dünnen Zylinderspule ist das Magnetfeld überall null außer im Bereich innerhalb der Spulenwindungen; dort ist es gegeben durch

$$B = \mu_0 (n/l) I.$$

Die Selbstinduktivität einer langen, dünnen Zylinderspule ist gemäß Gleichung 25.13

$$L = \mu_0 (n/l)^2 A l$$

mit A als Querschnittsfläche und l als Länge der Spule. Wir setzen in Gleichung 25.21 $B / (\mu_0 (n/l))$ für I und $\mu_0 (n/l)^2 A l$ für L ein und erhalten

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 (n/l)^2 A l \left(\frac{B}{\mu_0 (n/l)} \right)^2 = \frac{B^2}{2 \mu_0} A l.$$

Dabei ist Al das von der Spule umschlossene Volumen, in dem das Magnetfeld herrscht. Die Energie pro Volumeneinheit ist dann die **Energiedichte des Magnetfelds**

$$w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2 \mu_0}. \quad (25.22)$$

ENERGIEDICHTE DES MAGNETFELDS

Wir haben diese Beziehung für den speziellen Fall einer langen Zylinderspule hergeleitet. Trotzdem gilt sie allgemein. Gleichung 25.22 gibt die Energiedichte eines beliebigen Magnetfelds im Raum an. Machen Sie sich die Ähnlichkeit dieses Ausdrucks mit der Gleichung für die Energiedichte eines elektrischen Felds w_{el} bewusst (siehe Gleichung 21.9):

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Wie Beispiel 25.11 illustriert, entspricht die Gesamtenergiedichte eines elektromagnetischen Felds der Summe aus w_{el} und w_{mag} .

Beispiel 25.11: Energiedichte eines elektromagnetischen Felds

In einem bestimmten Gebiet des Raums überlagern einander ein homogenes Magnetfeld mit einer Stärke von $0,0200 \text{ T}$ und ein homogenes elektrisches Feld mit einer Stärke von $2,50 \cdot 10^6 \text{ N/C}$. Berechnen Sie a) die Energiedichte des elektromagnetischen Felds in diesem Raumbereich und b) die Energie in einem kubischen Volumen mit der Kantenlänge $l = 12,0 \text{ cm}$.

Problembeschreibung: Die Gesamtenergiedichte w_{em} ist die Summe der Energiedichten des elektrischen und des magnetischen Felds, $w_{\text{em}} = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}}$. Die Energie in einem Volumen V ergibt sich durch die Beziehung $E = w_{\text{em}} V$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie die Energiedichte des elektrischen Felds:

$$\begin{aligned} w_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \\ &= \frac{1}{2} (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}) \\ &\quad \cdot (2,50 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})^2 \\ &= 27,7 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie nun die Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(0,0200 \text{ T})^2}{2 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2})} = 159 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

3. Die Gesamtenergiedichte des elektromagnetischen Felds ergibt sich als Summe der Resultate aus Schritt 1 und 2:

$$\begin{aligned} w_{\text{em}} &= w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = 27,7 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} + 159 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \\ &= [187 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die Gesamtenergie im angegebenen Volumen ist $E = w_{\text{em}} V$ mit $V = l^3$:

$$\begin{aligned} E &= w_{\text{em}} V = w_{\text{em}} l^3 = (187 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}) \cdot (0,120 \text{ m})^3 \\ &= [0,323 \text{ J}] \end{aligned}$$

25.8 RL-Stromkreise

Der Stromkreis in Abbildung 25.28 enthält einen Widerstand und eine Spule. Solche Schaltungen nennt man **RL-Kreise**. Da alle Stromkreise bei Raumtemperatur einen Widerstand und eine Selbstinduktivität aufweisen, kann die folgende Analyse des **RL-Kreises** prinzipiell verallgemeinert werden. (Alle realen Stromkreise haben außerdem eine bestimmte Kapazität. Wir werden dies allerdings erst in Kapitel 26 besprechen, wenn wir uns mit Wechselstromkreisen befassen. Vorläufig vereinfachen wir die Analyse, indem wir die Kapazität vernachlässigen und uns auf die Induktivität konzentrieren.)

Aus der Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel auf den Stromkreis aus Abbildung 25.28 ergab sich Gleichung 25.19:

$$U_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Bevor wir diese Gleichung lösen, wollen wir ihre Eigenschaften allgemein betrachten. Zunächst stellen wir fest, dass die Summe $IR + L \frac{dI}{dt}$ gleich der (konstanten) Batteriespannung ist. Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters ist die Stromstärke im Kreis null; also ist auch IR null, und die negative Induktionsspannung $L \frac{dI}{dt}$ ist gleich der Spannung der Batterie, U_0 . Für $I = 0$ erhalten wir aus Gleichung 25.19

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} = \frac{U_0}{L}. \quad (25.23)$$

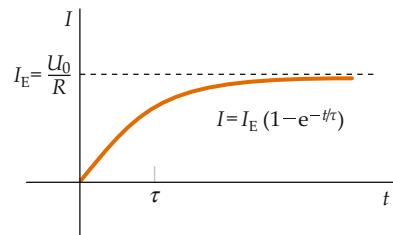


Abbildung 25.29 Die Stromstärke in einem *RL*-Kreis als Funktion der Zeit. Zum Zeitpunkt $t = \tau = L/R$ hat der Strom 63 % seines Maximalwerts U_0/R erreicht.

Steigt die Stromstärke an, so nimmt IR zu und dI/dt ab. Beachten Sie dabei, dass der Strom nicht abrupt von null auf einen endlichen Wert springen kann, weil die Induktivität L des Stromkreises ungleich null ist. Wenn L größer als null ist, ist dI/dt endlich und die Stromstärke über der Zeit stetig. Nach kurzer Zeit t hat der Strom einen positiven Wert $I(t)$ erreicht. Die Änderungsrate des Stroms kurz nach dem Schließen des Schalters ist

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{U_0}{L} - \frac{I(t)R}{L}.$$

Zu diesem Zeitpunkt nimmt der Strom noch zu, inzwischen aber langsamer als zum Zeitpunkt $t = 0$. Den Endwert der Stromstärke I_E erhalten wir, indem wir dI/dt in Gleichung 25.19 gleich null setzen:

$$I_E = \frac{U_0}{R}. \quad (25.24)$$

In Abbildung 25.29 wurde der Strom in dem beschriebenen Stromkreis als Funktion der Zeit aufgetragen. Beachten Sie die Analogie zum Verlauf der Ladung eines Kondensators als Funktion der Zeit, wenn der Kondensator in einem *RC*-Kreis aufgeladen wird (siehe Abbildung 22.45).

Gleichung 25.19 hat dieselbe Form wie Gleichung 22.37 für die Aufladung eines Kondensators, und wir lösen sie in analoger Weise durch Variablentrennung und Integration:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-(R/L)t} \right) = I_E \left(1 - e^{-t/\tau} \right). \quad (25.25)$$

Hier ist $I_E = U_0/R$ der Strom bei $t \rightarrow \infty$ und

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (25.26)$$

die **induktive Zeitkonstante** des Stromkreises. Je größer die Selbstinduktivität L und je kleiner der Widerstand R ist, desto länger dauert es, bis die Stromstärke einen vorgegebenen Bruchteil ihres Endwerts I_E erreicht hat, wie Beispiel 25.12 illustriert.

Beispiel 25.12: Stromstärke in einer Spule

Eine Spule mit einer Selbstinduktivität von 5,00 mH und einem Widerstand von 15,0 Ω wird mit einer 12,0-V-Spannungsquelle mit vernachlässigbarem Innenwiderstand verbunden. a) Wie groß ist die maximale Stromstärke? b) Wie groß ist die Zeitkonstante des Stromkreises? c) Wie lange (in Vielfachen der Zeitkonstante) dauert es, bis die Stromstärke 99,0 % ihres Endwerts erreicht hat?

Problembeschreibung: Die maximale Stromstärke ist erreicht, wenn $dI/dt = 0$ ist (Gleichung 25.24). Gleichung 25.25 gibt die Zeitabhängigkeit der Stromstärke an: $I(t) = I_E (1 - e^{-t/\tau})$ mit $\tau = L/R$.

Lösung: 1. Die maximale Stromstärke berechnen Sie aus Gleichung 25.19, indem Sie $dI/dt = 0$ setzen:

$$\begin{aligned} U_0 - IR - L \frac{dI}{dt} &= 0 \\ U_0 - I_E R - 0 &= 0 \\ I_E &= \frac{U_0}{R} = \frac{12,0 \text{ V}}{15,0 \Omega} = [0,800 \text{ A}] \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie nun die Zeitkonstante τ :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5,00 \cdot 10^{-3} \text{ H}}{15,0 \Omega} = [333 \mu\text{s}]$$

3. Mithilfe von Gleichung 25.25 erhalten Sie die Zeit t , für die $I = 0,990 I_E$ ist:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_E (1 - e^{-t/\tau}) \\ e^{-t/\tau} &= \left(1 - \frac{I(t)}{I_E}\right) \end{aligned}$$

Logarithmieren auf beiden Seiten liefert

$$-\frac{t}{\tau} = \ln \left(1 - \frac{I(t)}{I_E}\right)$$

und folglich

$$\begin{aligned} t &= -\tau \ln \left(1 - \frac{I(t)}{I_E}\right) = -\tau \ln (1 - 0,990) \\ &= -\tau \ln (0,010) = +\tau \ln (100) \\ &= [4,61 \tau] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Nachdem fünf Zeitkonstanten vergangen sind, hat der Strom über 99 % seines Maximalwerts erreicht. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit unserem Resultat aus Beispiel 22.18; dort haben wir festgestellt, dass die Ladung eines Kondensators auf weniger als 1 % des Anfangswertes abgesunken war, nachdem der Entladevorgang fünf Zeitkonstanten gedauert hatte. ■

Übung 25.8: Wie viel Energie ist in der Spule gespeichert, nachdem die maximale Stromstärke erreicht wurde? ◀

Der Stromkreis in Abbildung 25.30 enthält einen unterbrechungsfreien Umschalter (Abbildung 25.31). So kann die Batterie aus dem Kreis ausgekoppelt werden, ohne dass der Stromfluss durch die Spule unterbrochen wird. Der Schutzwiderstand R_1 verhindert, dass die Batterie beim Umlegen des Schalters kurzgeschlossen wird. Zu Beginn des Versuchs befindet sich der Schalter in Position e . Batterie, beide Widerstände und die Spule sind jetzt in Reihe geschaltet; es handelt sich daher um einen Stromkreis, bei dem der Gesamtwiderstand nun $R_1 + R$ ist und der Maximalstrom folglich $U/(R_1 + R)$. Wir nehmen an, dass der Schalter diese Position bereits eine Zeit lang eingenommen hat und sich der Endwert des Stroms einstellen konnte, den wir I_0 nennen wollen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ legen wir den Schalter rasch auf die Position f um. Die Spannungsquelle brauchen wir nun nicht mehr zu berücksichtigen; unser Stromkreis $abcta$ enthält lediglich den Widerstand R und die Spule, es fließt der Strom I_0 . Wir wenden die Kirchhoff'sche Maschenregel auf diesen Kreis an:

$$-I(t) R - L \frac{dI(t)}{dt} = 0.$$

Durch Variablenentrennung erhalten wir

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{R}{L} dt. \quad (25.27)$$

Gleichung 25.27 hat die gleiche Form wie Gleichung 22.33 für die Entladung eines Kondensators. Wir integrieren und lösen nach $I(t)$ auf:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad (25.28)$$

mit $\tau = L/R$ als Zeitkonstante. In Abbildung 25.32 ist die Stromstärke als Funktion der Zeit aufgetragen.

Übung 25.9: Berechnen Sie die Zeitkonstante eines geschlossenen Stromkreises mit einer Masche, einem Widerstand von 85 Ω und einer Induktivität von 6,0 mH. ◀

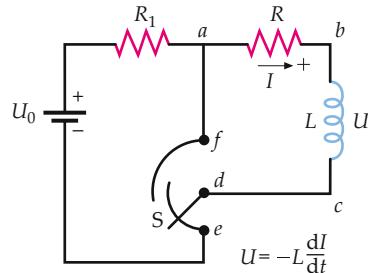


Abbildung 25.30 Ein RL -Stromkreis mit unterbrechungsfreiem Umschalter: Die Batterie kann aus dem Stromkreis entfernt werden, ohne dass der Stromfluss durch die Spule unterbrochen wird. Der Spulenstrom erreicht seinen Maximalwert, wenn der Schalter auf Position e steht. Anschließend wird der Schalter schnell auf Position f umgelegt.

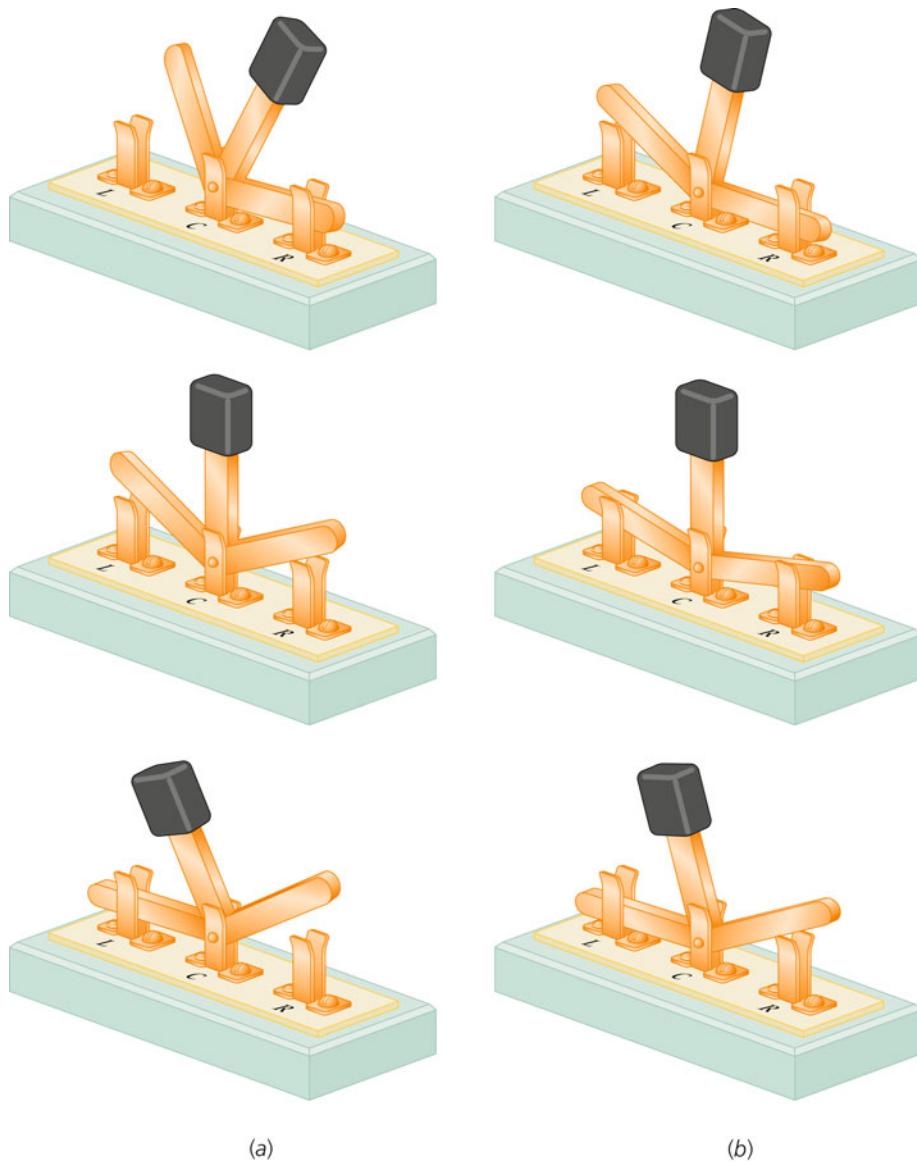


Abbildung 25.31 a) Umschaltkontakte arbeiten in der Regel mit Unterbrechung: Die Verbindung R wird unterbrochen, bevor die Verbindung L geschlossen wird.
 b) Bei einem unterbrechungsgenauen Umschalter wird die zweite Verbindung bereits geschlossen, bevor die erste unterbrochen wird. Befindet sich der Schalter in Mittelposition, so sind beide Verbindungen hergestellt.

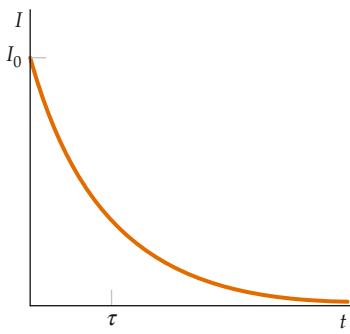


Abbildung 25.32 Die Stromstärke im Kreis aus Abbildung 25.30 nimmt exponentiell mit der Zeit ab

In den Beispielen 25.13 und 25.14 wird der exponentielle Abfall des Stroms herangezogen, um die umgewandelte Energie bzw. den Potenzialabfall zu berechnen.

Beispiel 25.13: Wärmeerzeugung am Widerstand

Wie viel Energie wird an dem Widerstand aus Abbildung 25.30 in Wärme umgewandelt, wenn der Spulenstrom von seinem Maximalwert I_0 auf null abfällt?

Problembeschreibung: Die Rate, mit der Energie in Wärme umgewandelt wird (die umgesetzte Leistung), ist gleich $I(t)^2 R$.

Lösung: 1. Die umgesetzte Leistung ist $I(t)^2 R$:

$$P = \frac{dE_{el}}{dt} = I(t)^2 R$$

2. Die in Wärme umgesetzte potentielle Energie E_{el} erhalten Sie durch Integration von $P dt$ in den Grenzen $t = 0$ und $t = \infty$:

$$E_{el} = \int_0^\infty I(t)^2 R dt$$

3. Den Strom $I(t)$ gibt Gleichung 25.28 an:

$$I(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$$

4. Setzen Sie diesen Ausdruck für den Strom in das Integral aus Schritt 2 ein:

$$\begin{aligned} E_{el} &= \int_0^\infty I(t)^2 R dt = \int_0^\infty I_0^2 e^{-2(R/L)t} R dt \\ &= I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2(R/L)t} dt \end{aligned}$$

5. Die Integration erfolgt durch Substitution ($x = 2Rt/L$):

$$E_{el} = I_0^2 R \frac{e^{-2(R/L)t}}{-2(R/L)} \Big|_0^\infty = I_0^2 R \frac{-L}{2R} (0 - 1) = \left[\frac{1}{2} L I_0^2 \right]$$

Plausibilitätsprüfung: Die insgesamt in Wärme umgewandelte Energie ist gleich der zu Beginn in der Spule gespeicherten Energie $\frac{1}{2} L I_0^2$. (Gemäß Gleichung 25.21 ist die in einer Spule gespeicherte Energie allgemein gegeben durch $\frac{1}{2} L I^2$.) ■

Beispiel 25.14: Anfangsstrom und Maximalstrom

Betrachten Sie den in Abbildung 25.33 skizzierten Stromkreis und berechnen Sie die Stromstärken I_1 , I_2 und I_3 a) unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S und b) lange nachdem der Schalter geschlossen wurde. – Nachdem der Schalter eine lange Zeit geschlossen war, wurde er wieder geöffnet. Berechnen Sie c) die drei Stromstärken und d) den Spannungsabfall am Widerstand $R_2 = 20 \Omega$ unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters. e) Wie groß sind die drei Stromstärken, nachdem der Schalter lange geöffnet war?

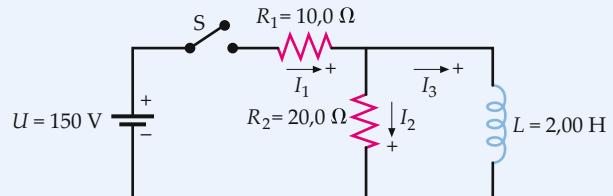


Abbildung 25.33 Stromkreis aus einer Kombination von Ohm'schem Widerstand und Spule, was auch als RL -Glied bezeichnet wird.

Problembeschreibung: a) Um unsere Analyse zu vereinfachen, machen wir uns zunutze, dass der Strom durch eine Spule sich nicht abrupt ändern kann. Bevor der Schalter geschlossen wird, ist der Spulenstrom null; unmittelbar nach dem Schließen des Schalters muss der Spulenstrom demnach ebenfalls null sein. b) Hat der Strom seinen Endwert erreicht, so ist dI/dt und deshalb auch der Spannungsabfall an der Spule null. Die Spule wirkt dann wie ein Nullwiderstand (wie ein gerader Leiter, dessen Widerstand null ist). c) und d) Unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters ist die Stromstärke genauso groß wie kurz vor dem Öffnen des Schalters. e) Nachdem der Schalter lange Zeit geöffnet war, müssen alle drei Ströme auf null gefallen sein.

Lösung:**Teilaufgabe a**

1. Der Schalter wurde gerade geschlossen. Der Spulenstrom ist null (wie kurz vor dem Schließen). Die Knotenregel liefert die Beziehung zwischen I_1 und I_2 :

$$\begin{aligned} I_3 &= \boxed{0} \\ I_1 &= I_2 + I_3 \end{aligned}$$

also

$$I_1 = I_2$$

2. Den Strom in der linken Schleife erhalten Sie durch Anwendung der Maschenregel:

$$U - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

und folglich

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{150 \text{ V}}{10 \Omega + 20 \Omega} = \boxed{5,0 \text{ A}} = I_2$$

Teilaufgabe b

1. Nachdem eine längere Zeit vergangen ist, sind alle Ströme stationär, und die Spule wirkt wie ein Nullwiderstand. Der Spannungsabfall an R_2 ist deshalb null. Wenden Sie die Maschenregel auf die rechte Schleife an und lösen Sie nach I_2 auf:

$$\begin{aligned} -L \frac{dI_3}{dt} + I_2 R_2 &= 0 \\ 0 + I_2 R_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \boxed{0} \end{aligned}$$

2. Wenden Sie nun die Maschenregel auf die linke Schleife an und lösen Sie nach I_1 auf:

$$\begin{aligned} U - I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0 \\ U - I_1 R_1 - 0 &= 0 \end{aligned}$$

also

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{150 \text{ V}}{10 \Omega} = \boxed{15 \text{ A}}$$

3. Rechnen Sie I_3 mithilfe der Knotenregel aus:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ 15 \text{ A} &= 0 + I_3 \\ I_3 &= \boxed{15 \text{ A}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Wenn der Schalter wieder geöffnet wird, fällt I_1 „sofort“ auf null ab. Der Spulenstrom hingegen geht allmählich zurück, im „Moment“ des Öffnens ist er also noch $I_3 = 15 \text{ A}$. Durch Anwendung der Knotenregel erhalten Sie I_2 :

$$\begin{aligned} I_3 &= \boxed{15 \text{ A}} \\ I_1 &= I_2 + I_3 \end{aligned}$$

also

$$I_2 = I_1 - I_3 = 0 - 15 \text{ A} = \boxed{-15 \text{ A}}$$

Teilaufgabe d

Den Spannungsabfall am Widerstand R_2 liefert das Ohm'sche Gesetz:

$$U_R = I_2 R_2 = (-15 \text{ A}) \cdot (20 \Omega) = \boxed{-300 \text{ V}}$$

Teilaufgabe e

Nachdem der Schalter lange geöffnet war, müssen alle Stromstärken auf null gefallen sein:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \boxed{0}$$

Weitergedacht: Vielleicht sind Sie überrascht, dass der Spannungsabfall am Widerstand R_2 in Teilaufgabe d größer ist als die Batteriespannung – er ist gleich der Induktionsspannung der Spule.

Übung 25.10: Im skizzierten Stromkreis sei $R_2 = 200 \Omega$, der Schalter sei bereits lange Zeit geschlossen. Wie groß ist der Spannungsabfall an R_2 unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters? ◀

🔍 Im Kontext: Moderne Bremstechnik im Zug

Wie in diesem Kapitel gezeigt, werden im Inneren von Metallstücken Wirbelströme induziert, wenn sich der magnetische Fluss durch die Fläche des Metallstücks ändert. Diese Wirbelströme wirken aufgrund der Lenz'schen Regel der Bewegung entgegen, d.h., die Wirbelströme bremsen das Metallstück. Entscheidend für die Wirkung ist dabei nur die Relativbewegung zwischen Leiter und Magnetfeld. Bewegt man einen Magneten über einen ruhenden, fixierten Leiter, beobachtet man das gleiche Phänomen; in diesem Fall wird der Magnet in seiner Bewegung gebremst.



Wirbelstrombremse an einem Zugwaggon. (© S. Terfloth)

Dieses Konzept wird seit dem Jahr 2000 in der neuen Generation Schnellzüge, dem ICE 3, der Deutschen Bahn umgesetzt¹: Zwischen den Radsätzen aufgehängte Elektromagnete werden zum Bremsen über die Schiene abgesenkt und erzeugen ein zu den Schienen paralleles Magnetfeld, sodass in den Schienen starke Wirbelströme entstehen, die die Geschwindigkeit des Zugs verringern. Die kinetische Energie des Zugs wird so in Wärmeenergie in den Schienen umgewandelt. Im Gegensatz zu mechanischen Bremsen, deren Bremswirkung auf Reibungskräften beruht, sind Wirbelstrombremsen berührungs- und damit verschleißfrei, da keine Reibung zwischen dem Elektromagneten und den Schienen auftritt.

Um nicht die gesamte Energie beim Bremsvorgang in nicht mehr nutzbare Wärmeenergie umzuwandeln, arbeitet die Wirbelstrombremse im ICE 3 mit einer zweiten, unabhängigen generatorischen Bremse, auch Motorbremse genannt, zusammen. Diese ermöglicht es, einen Teil der Bremsenergie wieder zurück ins Stromnetz einzuspeisen. So speist der ICE 3 auf der Schnellfahrstrecke von Würzburg nach Hannover bei Geschwindigkeiten von maximal 280 km/h rund 10 % der verbrauchten Energie wieder ins Bahnstromnetz zurück. Die Bremsenergierrückspeisung liegt bei 800 GWh insgesamt im Personen- und Güterverkehr, was einer Jahresleistung von 130 modernen Windkraftanlagen entspricht.² Zusätzlich zur Wirbelstrom- und Motorbremse wird das Bremssystem des ICE 3 noch durch eine pneumatische Bremse unterstützt, die bei geringeren Geschwindigkeiten eingesetzt wird.

1. http://www.deutschebahn.com/site/ice_europaweit/de/ice_fahrzeuge/ice3/ice3.html
2. [http://www.deutschebahn.com/site/ice_europaweit/de/umwetaspekte/bremstechnik/bremstechnik.html](http://www.deutschebahn.com/site/ice_europaweit/de/umweltaspekte/bremstechnik/bremstechnik.html)

Zusammenfassung

- Das Faraday'sche Gesetz und die Lenz'sche Regel gehören zu den Grundgesetzen der Physik.
- Die Selbstinduktivität eines Bauelements bringt die Beziehung zwischen dem magnetischen Fluss durch das Element und der Stromstärke zum Ausdruck.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Magnetischer Fluss Φ_{mag}	
Definition	$\Phi_{\text{mag}} = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (25.1)$
Homogenes Feld; ebene Fläche, umschlossen von einer Spule mit n Windungen	$\Phi_{\text{mag}} = n \mathbf{B} A \cos \theta \quad (25.4)$ mit A als ebener Fläche, die von einer Windung umschlossen wird.
Einheit	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \quad (25.2)$
In einem Stromkreis	$\Phi_{\text{mag}} = LI \quad (25.11)$
In zwei benachbarten Stromkreisen	$\Phi_{\text{mag},1} = L_1 I_1 + L_{12} I_2$ $\Phi_{\text{mag},2} = L_2 I_2 + L_{21} I_1 \quad (25.16a, 25.16b)$
2. Induktionsspannung	
Faraday'sches Gesetz (auch für Induktion durch Bewegung)	$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} \quad (25.5)$
Induktion (zeitabhängiges Magnetfeld, C stationär)	$U_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (25.6)$
Senkrecht zu seiner Längsachse und zu \mathbf{B} bewegter Stab	$U_{\text{ind}} = \mathbf{v} \mathbf{B} l \quad (25.7)$
Selbstinduktion (Gegenspannung)	$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt} \quad (25.14)$
3. Lenz'sche Regel	Die von einer Zustandsänderung verursachte Induktionsspannung und der dadurch hervorgerufene Induktionsstrom sind stets so gerichtet, dass sie ihrer Ursache entgegenzuwirken suchen.
Alternative Formulierung	Ändert sich der magnetische Fluss durch eine Fläche, so wird ein Strom induziert, der seinerseits ein Magnetfeld und damit einen magnetischen Fluss durch dieselbe Fläche hervorruft, dessen Richtung der ursächlichen Flussänderung entgegenwirkt.
4. Induktivität	
Selbstinduktivität	$L = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{I} \quad (25.11)$
Selbstinduktivität einer Zylinderspule	$L = \mu_0 (n/l)^2 A l \quad (25.13)$
Gegeninduktion	$L = \frac{\Phi_{\text{mag}21}}{I_1} = \frac{\Phi_{\text{mag}12}}{I_2} \quad (25.18)$
Einheiten	$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
5. Energie des Magnetfelds	
In einer Spule gespeicherte Energie	$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2 \quad (25.21)$
Energiedichte im Magnetfeld	$w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (25.22)$

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
6. *RL-Stromkreise	
Spannungsabfall an einer Spule	$U_L = U_{\text{ind}} - IR = -L \frac{dI}{dt} - IR$ (25.15) mit R als Innenwiderstand der Spule; für eine ideale Spule gilt $R = 0$.
Energiezufuhr aus einer Spannungsquelle an eine Spule	In einer Reihenschaltung (mit einer Masche) aus einem Widerstand R , einer Spule mit der Induktivität L und einer Spannungsquelle mit der Quellspannung U_0 erreicht der Strom nach Einschalten der Quelle seinen Maximalwert I_E nicht sofort, sondern erst nach einer bestimmten Zeit. Ist die Stromstärke im Moment des Einschaltens ($t = 0$) null, so ist sie zu einem späteren Zeitpunkt t gegeben durch
Zeitkonstante τ	$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = I_E (1 - e^{-t/\tau})$. (25.25)
Abbau der Feldenergie einer Spule über einen Widerstand	In einer Reihenschaltung (mit einer Masche) aus einem Widerstand R und einer Spule mit der Induktivität L fällt der durch den Widerstand fließende Strom nicht sofort, sondern erst im Laufe einer bestimmten Zeit auf null ab. Ist die Stromstärke zu Beginn ($t = 0$) gleich I_0 , so beträgt sie zu einem späteren Zeitpunkt t
	$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. (25.28)

Antworten auf die Verständnisfragen

- Entgegengesetzt zu der in Abbildung 25.12 gezeigten Richtung.
- Zur Drehung der Spule wird an ihr von außen Arbeit verrichtet; das bedeutet, der Spule wird die Energie von außen zugeführt.

Lösungen der Übungen

- $1 \frac{\text{Wb}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} \cdot \text{m} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \text{m} = 1 \text{V}$
- 0,555 A
- 3,53 mC
- 1,4 V
- 11 V
- $3,18 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$
- $L_{21} = L_{12} = \mu_0 (n_2/l) (n_1/l) l \pi r_1^2$
- $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I_E^2 = 1,60 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
- 71 μs
- 10.3000 V

Aufgaben

Verständnisaufgaben

25.1 • Zwei Leiterschleifen sind parallel zueinander angeordnet (Abbildung 25.34). In der Schleife A fließt, von links gegen die Ebenen der Schleifen gesehen, ein Strom entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. In welcher Richtung fließt der Strom in Schleife B, wenn die Stromstärke in A zunimmt? Entscheiden Sie, ob die Schleifen einander abstoßen oder anziehen; erläutern Sie Ihre Antwort.

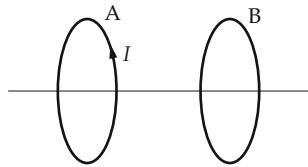


Abbildung 25.34 Zu Aufgabe 25.1.

25.2 • Ein Stabmagnet ist so am Ende einer Spiralfeder befestigt, dass er eine einfache harmonische Bewegung entlang der Achse einer Leiterschleife ausführt (Abbildung 25.35). Der Magnet befindet sich im Gleichgewicht, wenn sein Mittelpunkt in der Ebene der Schleife liegt. a) Skizzieren Sie den Verlauf des Flusses Φ_{mag} durch die Schleife in Abhängigkeit von der Zeit. Markieren Sie die Zeitpunkte t_1 und t_2 , zu denen sich der Magnet gerade auf halbem Wege durch die Schleife befindet. b) Skizzieren Sie den Verlauf des Stroms I in der Schleife als Funktion der Zeit. Die Uhrzeigerrichtung, von oben gesehen, soll zu positiven Werten von I gehören.



Abbildung 25.35 Zu Aufgabe 25.2.

25.3 • Der magnetische Äquator ist die Linie entlang der Erdoberfläche, auf der das Erdmagnetfeld senkrecht steht. Wie

müsste man dort ein Blatt Papier halten, damit der Betrag des magnetischen Flusses durch die Papierebene a) maximal und b) minimal wird?

25.4 • Ein Stabmagnet wird senkrecht in ein langes Rohr hingeworfen. Besteht das Rohr aus einem Metall, so erreicht der Magnet rasch seine Endgeschwindigkeit; besteht das Rohr aus Pappe, so fällt der Magnet mit konstanter Beschleunigung. Erklären Sie diesen Unterschied.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

25.5 • Vergleichen Sie die im elektrischen Feld und im Magnetfeld der Erde (jeweils in der Nähe der Erdoberfläche) gespeicherten Energiedichten.

25.6 •• Stellen Sie sich ein typisches, in der Luft befindliches Passagierflugzeug vor und schätzen Sie a) die durch die Bewegung im Erdmagnetfeld hervorgerufene, maximal zwischen den Spitzen der Tragflächen induzierte Spannung. b) Wie groß ist dabei die elektrische Feldstärke zwischen den Spitzen der Tragflächen?

Der magnetische Fluss

25.7 • Betrachten Sie eine kreisrunde Spule mit 25 Windungen und einem Radius von 5,0 cm, die sich in der Nähe des Äquators befindet. Das Erdmagnetfeld hat dort eine Stärke von 0,70 G und zeigt nach Norden. Die Achse der Spule steht senkrecht auf der Spulenebene und verläuft durch den Mittelpunkt der Spule. Wie groß ist der magnetische Fluss durch die Spule, wenn ihre Achse a) senkrecht, b) waagerecht nach Norden zeigend, c) waagerecht nach Osten zeigend und d) waagerecht im Winkel von 30° relativ zur Nordrichtung orientiert ist?

25.8 •• Eine kreisrunde Spule mit 15 Windungen und einem Radius von 4,00 cm befindet sich in einem homogenen, 4,00 kG starken, in die positive x -Richtung zeigenden Magnetfeld. Geben Sie den magnetischen Fluss durch die Spule an, wenn der Normalenvektor \hat{n} der Spulenebene wie folgt gerichtet ist: a) $\hat{n} = \hat{x}$, b) $\hat{n} = \hat{y}$, c) $\hat{n} = (\hat{x} + \hat{y}) / \sqrt{2}$, d) $\hat{n} = \hat{z}$ und e) $\hat{n} = 0,60\hat{x} + 0,80\hat{y}$.

25.9 ••• a) Formulieren Sie einen Ausdruck für den magnetischen Fluss durch die rechteckige Schleife in Abbildung 25.36. b) Berechnen Sie den Fluss für $a = 5,0 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $d = 2,0 \text{ cm}$ und $I = 20 \text{ A}$.

25.10 ••• Durch einen langen, zylindrischen Leiter mit der Länge l und dem Radius r_{LZ} fließt homogen über den Querschnitt verteilt ein Strom I . Geben Sie den magnetischen Fluss pro Längeneinheit durch die in Abbildung 25.37 markierte Fläche an.

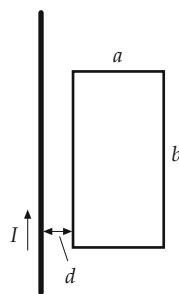


Abbildung 25.36 Zu Aufgabe 25.9.

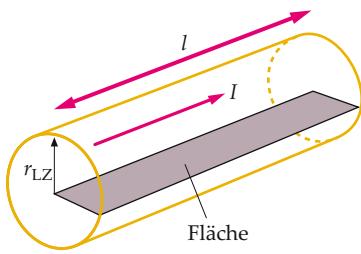


Abbildung 25.37 Zu Aufgabe 25.10.

Induktionsspannung und Faraday'sches Gesetz

25.11 •• Eine kreisrunde Spule mit 100 Windungen hat einen Durchmesser von 2,00 cm und einen Widerstand von $50,0 \Omega$. Die beiden Enden des Spulendrahts sind miteinander verbunden. Senkrecht zur Ebene der Spule ist ein homogenes äußeres Magnetfeld mit einer Stärke von 1,00 T ausgerichtet. Plötzlich kehrt sich die Feldrichtung um. a) Berechnen Sie die insgesamt durch einen Querschnitt des Drahts tretende Ladung. Die Umkehr der Feldrichtung dauert 0,100 s; berechnen Sie b) den mittleren Spulenstrom und c) die mittlere Spannung in der Spule während des Umkehrvorgangs.

25.12 •• Ein Stromintegrator misst den Strom in Abhängigkeit von der Zeit und ermittelt durch Integrieren (Aufaddieren) die insgesamt fließende Ladungsmenge. (Wegen $I = dq/dt$ ist das Integral des Stroms gleich $q = \int I dt$.) Eine kreisrunde Spule mit 300 Windungen und einem Radius von 5,00 cm ist mit einem solchen Instrument verbunden. Der Gesamtwiderstand des Stromkreises beträgt $20,0 \Omega$. Zu Beginn des Versuchs bildet die Ebene der Spule einen Winkel von 90° mit der Richtung des Erdmagnetfelds an einem gegebenen Ort. Dann wird die Spule um 90° um eine Achse gedreht, die in der Spulenebene liegt. Dabei wird am Stromintegrator eine Ladungsmenge von $9,40 \mu\text{C}$ abgelesen. Berechnen Sie die Stärke des Erdmagnetfelds an diesem Ort.

Induktion durch Bewegung

25.13 •• In Abbildung 25.38 sei $B = 0,80 \text{ T}$, $v = 10 \text{ m/s}$, $l = 20 \text{ cm}$ und $R = 2,0 \Omega$. (Der Widerstand des Stabs und der

Schienen soll vernachlässigt werden.) Berechnen Sie a) die im Stromkreis induzierte Spannung, b) den davon hervorgerufenen Strom (Betrag und Richtung) und c) die zur Bewegung des Stabs mit konstanter Geschwindigkeit erforderliche Kraft (vernachlässigen Sie die Reibung). d) Welche Leistung wird dem System durch die Kraft aus Teilaufgabe c zugeführt? e) Geben Sie die Leistung (Rate der Wärmeerzeugung am Widerstand) an.

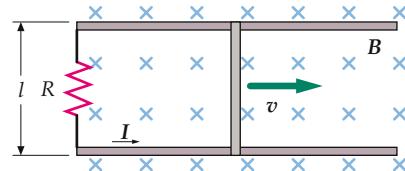


Abbildung 25.38 Zu Aufgabe 25.13.

25.14 •• Der Stab in Abbildung 25.39 hat die Masse m und den Widerstand R . Der Widerstand der waagerecht angeordneten, reibungsfreien Schienen sei vernachlässigbar gering; der Abstand zwischen den Schienen ist l . An die Punkte a und b des Stromkreises ist eine Batterie mit der Spannung U und einem vernachlässigbaren Innenwiderstand so angeschlossen, dass der Strom im Stab von oben nach unten fließt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der zuvor ruhende Stab losgelassen. a) Geben Sie einen Ausdruck für die auf den Stab wirkende Kraft als Funktion von dessen Geschwindigkeit an. b) Zeigen Sie, dass der Stab schließlich eine Endgeschwindigkeit erreicht, mit der er sich weiterbewegt. Geben Sie einen Ausdruck für diese Geschwindigkeit an. c) Wie groß ist die Stromstärke im Kreis, wenn der Stab seine Endgeschwindigkeit erreicht hat?

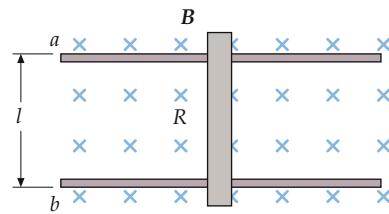


Abbildung 25.39 Zu Aufgabe 25.14.

25.15 •• Betrachten Sie die Anordnung in Abbildung 25.40: Der leitfähige Stab mit der Masse m gleitet reibungsfrei auf zwei parallelen Schienen; der Widerstand aller dieser Bauelemente sei vernachlässigbar. Der Abstand zwischen den Schienen ist l , an einem Ende sind die Schienen über einen Ohm'schen Widerstand R miteinander verbunden. Die Schienen sind auf eine ebene Platte montiert, die mit der Waagerechten den Winkel θ einschließt. Die ganze Anordnung befindet sich in einem Magnetfeld, das senkrecht nach oben zeigt. a) Zeigen Sie, dass entlang der geneigten Ebene eine Kraft $F = (B^2 l^2 v \cos^2 \theta) / R$ nach oben wirkt, die die Abwärtsbewegung des Stabs bremst. b) Zeigen Sie, dass die Endgeschwindigkeit des Stabs gegeben ist durch $v_E = mgR \sin \theta / (B^2 l^2 \cos^2 \theta)$.

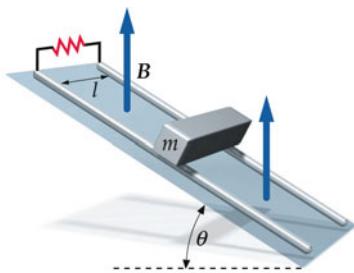


Abbildung 25.40 Zu Aufgabe 25.15.

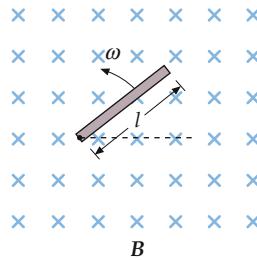


Abbildung 25.42 Zu Aufgabe 25.17.

25.16 •• Betrachten Sie die Anordnung in Abbildung 25.41: Eine rechteckige Leiterschleife mit Seitenlängen von 10 cm und 5,0 cm und einem Ohm'schen Widerstand von $2,5 \Omega$ bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,4 cm/s durch ein Gebiet, in dem ein homogenes, aus der Papierebene herauszeigendes Magnetfeld mit einer Feldstärke von 1,7 T herrscht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt die Vorderkante der Schleife in das Magnetfeld ein; erfassen Sie in den beiden folgenden Teilaufgaben das Intervall $0 \leq t \leq 16$ s. a) Skizzieren Sie den Graphen des magnetischen Flusses durch die Schleife als Funktion der Zeit. b) Skizzieren Sie Graphen der Induktionsspannung und des durch die Schleife fließenden Stroms ebenfalls in Abhängigkeit von der Zeit. Vernachlässigen Sie Selbstinduktionseffekte.

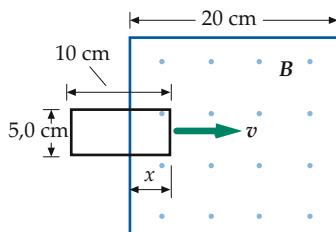


Abbildung 25.41 Zu Aufgabe 25.16.

25.17 ••• Ein Metallstab mit der Länge l rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eines seiner Enden. Senkrecht zur Rotationsebene orientiert ist ein homogenes Magnetfeld B (Abbildung 25.42). a) Zeigen Sie, dass sich zwischen den Enden des Stabs die Potenzialdifferenz $U = \frac{1}{2} B \omega l^2$ aufbaut. b) Der Winkel θ zwischen dem rotierenden Stab und der in der Skizze gestrichelten Linie sei gegeben durch $\theta = \omega t$. Zeigen Sie, dass die Fläche des Kreissektors, der von dieser Linie und dem Stab begrenzt wird, dann gegeben ist durch $A = \frac{1}{2} l^2 \theta$. c) Berechnen Sie den magnetischen Fluss durch diese Fläche und zeigen Sie, dass die Anwendung des Faraday'schen Gesetzes ($U_{\text{ind}} = -d\Phi_{\text{mag}}/dt$) auf den Kreissektor die Beziehung $U_{\text{ind}} = \frac{1}{2} B \omega l^2$ liefert.

Wechselstromgeneratoren

25.18 • Eine Spule mit rechteckigem Querschnitt (Seitenlängen: 2,00 cm und 1,50 cm) und 300 Windungen rotiert in einem Magnetfeld von 0,400 T. a) Geben Sie den Maximalwert der induzierten Spannung an, wenn sich die Spule mit einer Frequenz von 60,0 Hz dreht. b) Wie groß muss die Rotationsfrequenz sein, damit eine Spannung von 110 V (Maximalwert) induziert wird?

Induktivität

25.19 • Durch eine Spule mit einer Induktivität von 8,00 H fließt ein Strom von 3,00 A, der sich mit einer Rate von 200 A/s ändert. Berechnen Sie a) den magnetischen Fluss durch die Spule und b) die in der Spule induzierte Spannung.

25.20 •• Zwei Zylinderspulen mit Radien von 2,00 cm und 5,00 cm und mit 300 bzw. 1000 Windungen seien koaxial so angeordnet, dass sich die dünnerne Spule komplett innerhalb der dickeren befindet. Beide Spulen sind 25,0 cm lang. Berechnen Sie die Gegeninduktivität.

25.21 ••• Betrachten Sie eine Ringspule mit rechteckigem Querschnitt (Abbildung 25.43). Zeigen Sie, dass die Induktivität der Spule gegeben ist durch

$$L = \frac{\mu_0 n^2 x \ln(b/a)}{2\pi}$$

mit n als Anzahl der Windungen, a als innerem Radius, b als äußerem Radius und x als Höhe des Rings.

Die Energie des Magnetfelds

25.22 • Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle, etwa eine Lichtwelle. Die Beziehung zwischen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke lautet hier $E = cB$ mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Zeigen Sie, dass die Energiedichten des elektrischen und des magnetischen Felds in diesem Fall gleich sind, wenn die Beziehung $E = cB$ gilt.

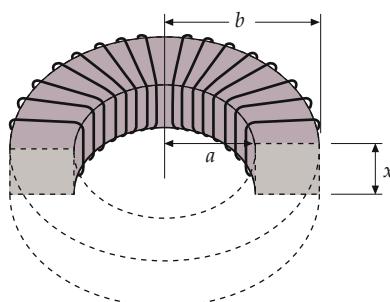


Abbildung 25.43 Zu Aufgabe 25.21.

25.23 •• Durch eine Zylinderspule mit 2000 Windungen, einer Querschnittsfläche von $4,0 \text{ cm}^2$ und einer Länge von 30 cm fließt ein Strom von 4,0 A. a) Berechnen Sie die in der Spule gespeicherte magnetische Energie mithilfe der Beziehung $\frac{1}{2}LI^2$. b) Geben Sie die magnetische Energie pro Volumeneinheit in der Spule an; teilen Sie dazu Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a durch das Volumen der Spule. c) Berechnen Sie die Energiedichte des Magnetfelds mithilfe der Beziehung $w_{\text{mag}} = B^2 / (2\mu_0)$, wobei gilt $B = \mu_0(n/l)I$ Vergleichen Sie das Resultat mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe b.

25.24 •• Die Wicklung einer Ringspule mit einem mittleren Radius von 25,0 cm und einem kreisrunden Querschnitt, dessen Radius 2,00 cm beträgt, besteht aus einem supraleitenden Material. Der Wickelungsdräht ist 1000 m lang. Durch die Spule fließt ein Strom von 400 A. a) Wie viele Windungen besitzt die Spule? b) Geben Sie die Magnetfeldstärke und die Energiedichte des Magnetfelds beim mittleren Radius an. c) Berechnen Sie die insgesamt in der Spule gespeicherte Energie unter der Annahme, dass die Energiedichte innerhalb der Spule homogen verteilt ist.

*RL-Stromkreise

25.25 •• Betrachten Sie den Stromkreis in Abbildung 25.44; es sei $U_0 = 12,0 \text{ V}$, $R = 3,00 \Omega$ und $L = 0,600 \text{ H}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Berechnen Sie für den Zeitpunkt $t = 0,500 \text{ s}$ a) die Rate, mit der die Batterie Energie liefert, b) die Rate der Wärmeerzeugung im Widerstand und c) die Rate, mit der Energie in der Spule gespeichert wird.

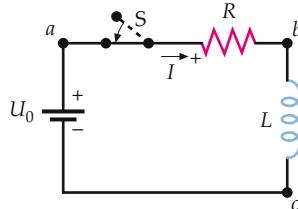


Abbildung 25.44 Zu den Aufgaben 25.25 und 25.29.

25.26 •• Eine Spule (4,00 mH), ein Ohm'scher Widerstand (150 Ω), eine ideale Batterie (12,0 V) und ein Schalter sind in Reihe geschaltet. Der zunächst offene Schalter wird geschlossen. a) Geben Sie an, mit welcher Anfangsrate die Stromstärke zunimmt. b) Wie groß ist diese Rate, wenn die Stromstärke die Hälfte ihres stationären Werts erreicht hat? c) Geben Sie diese stationäre Stromstärke an. d) Wie lange dauert es, bis die Stromstärke 99 % des stationären Werts erreicht hat?

25.27 •• Ein Stromkreis besteht aus einer Reihenschaltung eines großen Elektromagneten mit einer Induktivität von 50,0 H, einem Ohm'schen Widerstand von 8,00 Ω , einer 250-V-Gleichspannungsquelle und einem zunächst geöffneten Schalter. Wie viel Zeit vergeht nach dem Schließen des Schalters, bis die Stromstärke a) 10,0 A und b) 30,0 A erreicht hat?

25.28 •• Betrachten Sie den Stromkreis in Abbildung 25.45. Der Innenwiderstand der Spule soll vernachlässigt werden; nehmen Sie außerdem an, dass der Schalter S seit langer Zeit geschlossen ist, sodass die Spule von einem stationären Strom durchflossen wird. a) Berechnen Sie den Batteriestrom und den Strom, der durch den 100- Ω -Widerstand fließt, sowie den Strom, der durch die Spule fließt. b) Berechnen Sie den Spannungsabfall an der Spule unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters. c) Tragen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms den Spulenstrom und den Spannungsabfall an der Spule jeweils als Funktion der Zeit auf, während der Schalter geöffnet ist.

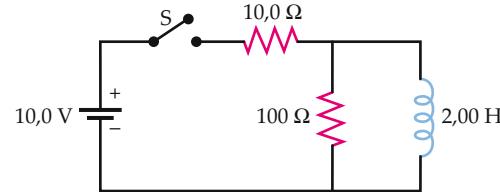


Abbildung 25.45 Zu Aufgabe 25.28.

25.29 ••• In dem in Abbildung 25.44 skizzierten Stromkreis sei $U_0 = 12,0 \text{ V}$, $R = 3,00 \Omega$ und $L = 0,600 \text{ H}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Betrachten Sie den Zeitraum zwischen $t = 0$ und $t = L/R$. a) Wie viel Energie wird in diesem Zeitraum insgesamt von der Batterie abgegeben? b) Wie viel Energie wird im Widerstand in Wärme umgewandelt? c) Wie viel Energie wird der Spule zugeführt? (Hinweis: Geben Sie die Raten der Energieübertragung als Funktion der Zeit an und integrieren Sie zwischen den gegebenen Grenzen.)

Allgemeine Aufgaben

25.30 • Gegeben ist eine Spule mit 100 Windungen, einem Radius von 4,00 cm und einem Widerstand von 25,0 Ω . a) Die Spule befindet sich in einem homogenen Magnetfeld, dessen Richtung senkrecht auf der Spulenebene steht. Mit welcher Rate muss sich die Feldstärke ändern, damit in der Spule ein Strom

von 4,00 A induziert wird? b) Wie lautet die Antwort auf Frage a, wenn die Feldrichtung einen Winkel von 20° mit der Normalen der Spulenebene einschließt?

25.31 •• In Abbildung 25.46 sehen Sie einen Wechselstromgenerator, bestehend aus einer rechteckigen, mit Schleifringen verbundenen Leiterschleife mit den Seitenlängen a und b sowie n Windungen. Die Schleife dreht sich, von außen angetrieben, mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} . a) Zeigen Sie, dass die Potenzialdifferenz zwischen den Schleifringen gegeben ist durch $U(t) = n B a b \omega \sin(\omega t)$. b) Es sei $a = 2,00\text{ cm}$, $b = 4,00\text{ cm}$, $n = 250$ und $B = 0,200\text{ T}$. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω muss die Schleife rotieren, damit eine Spannung mit einem Maximalwert von 100 V induziert wird?

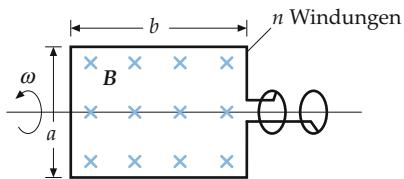


Abbildung 25.46 Zu Aufgabe 25.31.

25.32 •• Zwei Spulen mit den Selbstinduktivitäten L_1 und L_2 sind parallel geschaltet, wobei eine Spule jeweils nicht vom Magnetfeld der anderen durchdrungen wird. Zeigen Sie, dass für die Selbstinduktivität L der gesamten Anordnung dann gilt:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

25.33 •• In Abbildung 25.47a ist eine Anordnung skizziert, mit deren Hilfe man die Gravitationsbeschleunigung messen kann. Um ein langes Plastikrohr ist ein Draht so gewickelt, dass im Abstand von 10 cm einfache Drahtschleifen entstehen. Nun lässt man einen starken Permanentmagneten senkrecht von oben in das Rohr fallen. Jedesmal, wenn der Magnet durch eine Schleife tritt, steigt die Spannung an, erreicht einen Maximalwert, fällt durch den Nullpunkt auf einen großen negativen Wert ab und steigt wieder bis zum Nullpunkt (Abbildung 25.47b). a) Erklären Sie, wie das Experiment funktioniert. b) Warum muss das Rohr aus einem Isolator bestehen? c) Erklären Sie die Form des Signals in Abbildung 25.47b qualitativ. d) In der Tabelle sind die Zeiten für die Nulldurchläufe der Spannung während eines solchen Experiments angegeben. Berechnen Sie daraus einen Wert für g .

Nr. der Schleife	Nulldurchgang (s)
1	0,011189
2	0,063133
3	0,10874
4	0,14703
5	0,18052
6	0,21025
7	0,23851
8	0,26363
9	0,28853
10	0,31144
11	0,33494
12	0,35476
13	0,37592
14	0,39107

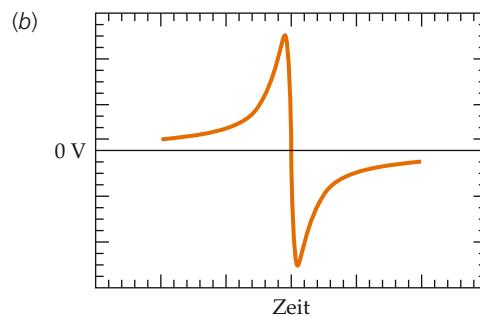
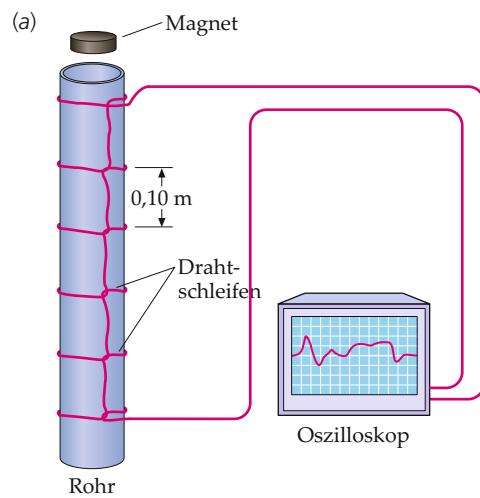


Abbildung 25.47 Zu Aufgabe 25.33.

25.34 •• Die in Abbildung 25.48 skizzierte rechteckige Spule mit einer Länge von 30 cm, einer Breite von 25 cm und 80 Windungen befindet sich zur Hälfte in einem Magnetfeld $B = 0,14 \text{ T}$, das aus der Papierebene heraus zeigt. Der Widerstand der Spule beträgt 24Ω . Ermitteln Sie den Betrag und die Richtung des induzierten Stroms, wenn die Spule mit einer Geschwindigkeit von $2,0 \text{ m/s}$ a) nach rechts, b) nach oben, c) nach links und d) nach unten bewegt wird.

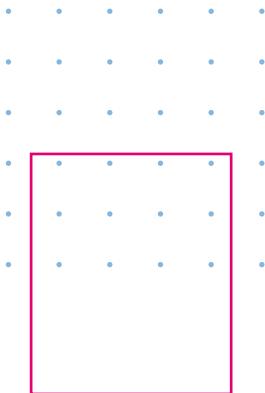


Abbildung 25.48 Zu Aufgabe 25.34.

25.35 •• Durch eine lange Zylinderspule mit der Windungsdichte (n/l) fließt ein zeitabhängiger Strom $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Die Spule hat einen kreisrunden Querschnitt mit dem Radius r_{LS} . Geben Sie einen Ausdruck für das induzierte elektrische Feld in Punkten an, die sich auf einer von beiden Spulenenden gleich weit entfernten Ebene befinden; betrachten Sie das Feld als Funktion von der Zeit t und von der radialen Entfernung r von der Achse mit a) $r < r_{LS}$ und b) $r > r_{LS}$.

25.36 ••• Eine Spule mit n Windungen und einer Fläche A hängt an einem Draht mit linearem Rückstellmoment und der Torsionskonstante κ . Die beiden Enden des Spulendrahts sind miteinander verbunden; die Spule hat den Widerstand R und das Trägheitsmoment I . Wenn der Draht nicht verdrillt ist ($\theta = 0$), ist die Spulenebene vertikal und parallel zu einem homogenen horizontalen Magnetfeld \mathbf{B} . Nun wird die Spule um einen kleinen Winkel $\theta = \theta_0$ um eine senkrechte, durch ihren Mittelpunkt verlaufende Achse gedreht und losgelassen. Sie vollführt dann eine gedämpfte harmonische Schwingung. Zeigen Sie, dass dabei mit $\theta(t) = \theta_0 e^{-i/2\tau} \cos(\omega' t)$ und $\tau = RI / (nBA)^2$ gilt:

$$\omega = \sqrt{\kappa/I} \text{ und } \omega' = \omega_0 \sqrt{1 - (2\omega_0 \tau)^{-2}}.$$

Wechselstromkreise

26



Die junge Radiohörerin stellt ihren Lieblingssender ein. Durch das Drehen am Abstimmknopf ändert sich die Resonanzfrequenz eines elektrischen Schwingkreises im Tuner, und nur das Signal des ausgewählten Senders wird verstärkt. (© Roger Ressmeyer/Corbis.)

? Welche Eigenschaft des Schwingkreises wird durch das Drehen des Wahlknopfs beeinflusst? (Siehe Beispiel 26.11.)

26.1	Wechselspannung an einem Ohm'schen Widerstand	948
26.2	Wechselstromkreise	951
26.3	Der Transformator	954
26.4	<i>LC</i> - und <i>RLC</i> -Stromkreise ohne Wechselspannungsquelle	957
26.5	*Zeigerdiagramme	960
26.6	*Erzwungene Schwingungen in <i>RLC</i> -Stromkreisen	961
	Zusammenfassung	971
	Aufgaben	973

Über 99 % der Elektroenergie werden heute weltweit von Generatoren als Wechselstrom erzeugt. Die Energie lässt sich in Hochspannungsleitungen nahezu verlustfrei über große Entfernungen transportieren, denn bei hohen Spannungen und damit verbundenen niedrigen Stromstärken sind die Leistungsverluste in Form von Joule'scher Wärme minimal. Für die Verteilung vor Ort und den Gebrauch im Haushalt wird die Energie wieder auf Niederspannung (und entsprechend höhere Stromstärke) umgesetzt. Zur Umwandlung der Stromstärken und Spannungen dienen Transformatoren. Sie arbeiten auf der Grundlage der magnetischen Induktion genauso wie Wechselstromgeneratoren.

Liegt an einer Spule, einem Kondensator oder einem Ohm'schen Widerstand eine Wechselspannung an, so fließt – wie wir in diesem Kapitel sehen werden – im Stromkreis ein ebenfalls sinusförmiger Strom, wobei die Phasen von Strom und Spannung im Allgemeinen gegeneinander verschoben sind. Die Maximalwerte einer sinusförmigen Spannung und des zugehörigen sinusförmigen Stroms sind zueinander proportional. Sinusförmige Ströme sind ein wichtiger Spezialfall, den wir eingehend diskutieren wollen, weil sich alle nicht sinusförmigen Wechselströme mithilfe der Fourier-Analyse in Sinuskomponenten zerlegen lassen.

26.1 Wechselspannung an einem Ohm'schen Widerstand

In Abbildung 26.1 sehen Sie einen einfachen **Wechselstromgenerator**, wie er in Kapitel 25 bereits besprochen wurde. Dort haben wir auch die Beziehung für die in der Spule des Generators induzierte Spannung hergeleitet,

$$U_{\text{ind}}(t) = U_{\max} \cos(\omega t) \quad (26.1)$$

(siehe Gleichung 25.10), ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Spule. Beachten Sie, dass Gleichung 25.10 die Proportionalität zwischen der Spannung und $\sin(\omega t)$ beschreibt, während sich Gleichung 26.1 auf $\cos(\omega t)$ bezieht. Der Unterschied zwischen beiden Varianten liegt lediglich in der Wahl des Zeitpunkts $t = 0$.

Für eine Spule mit n Windungen und der von einer Windung umschlossenen Fläche A ist der Maximalwert der Spannung in einem homogenen Magnetfeld \mathbf{B} gegeben durch $n |\mathbf{B}| |A| \omega$. In der Praxis ist ein Generator zwar wesentlich komplizierter aufgebaut als hier gezeigt, das Funktionsprinzip ist jedoch daselbe: Durch magnetische Induktion wird eine alternierende,

fast immer sinusförmige Wechselspannung erzeugt. In Schaltbildern kennzeichnet man Wechselstromgeneratoren mit \circlearrowright .

Abbildung 26.2 zeigt einen einfachen Wechselstromkreis mit einem Ohm'schen Widerstand und einer idealen Wechselspannungsquelle. (Ideal bedeutet, dass der innere Widerstand, die Selbstinduktivität und die Kapazität der Spannungsquelle vernachlässigt werden können.) Der Spannungsabfall U_R am Ohm'schen Widerstand ist gleich der durch Gleichung 26.1 gegebenen Klemmspannung U_{ind} des Generators:

$$U_R(t) = U_{\text{ind}}(t) = U_{\max} \cos(\omega t).$$

Gemäß dem Ohm'schen Gesetz ist

$$U_R(t) = RI(t) \quad (26.2)$$

und folglich

$$U_{R,\max} \cos(\omega t) = RI(t). \quad (26.3)$$

Durch den Ohm'schen Widerstand fließt dann der Strom

$$I(t) = \frac{U_{R,\max}}{R} \cos(\omega t) = I_{\max} \cos(\omega t) \quad (26.4)$$

mit

$$I_{\max} = \frac{U_{R,\max}}{R}. \quad (26.5)$$

Beachten Sie, dass der Spannungsabfall am Ohm'schen Widerstand und der durch den Ohm'schen Widerstand fließende Strom phasengleich sind, wie Abbildung 26.3 verdeutlicht.

Die am Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung ist zeitabhängig und hat den Momentanwert

$$P(t) = RI(t)^2 = R (I_{\max} \cos(\omega t))^2 = R I_{\max}^2 \cos^2(\omega t). \quad (26.6)$$

In Abbildung 26.4 wurde die Leistung als Funktion der Zeit aufgetragen. Sie schwankt zwischen null und dem Maximalwert

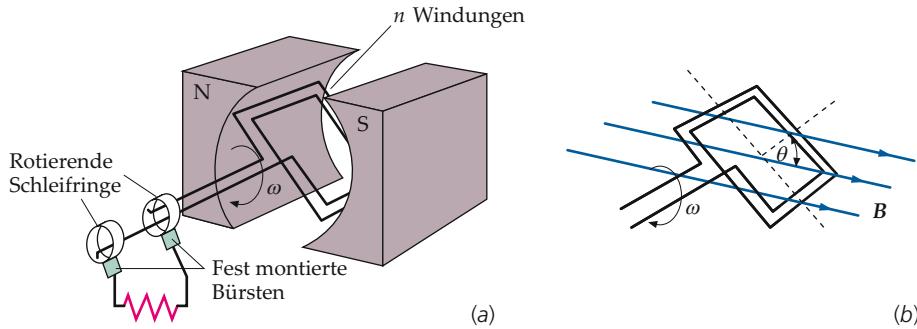


Abbildung 26.1 a) Ein Wechselstromgenerator. Rotiert eine Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem statischen äußeren Magnetfeld \mathbf{B} , so wird eine sinusförmige Spannung induziert. Zum Antrieb der Spule wird mechanische Energie (z. B. von einem Wasserfall oder einer Dampfturbine) geliefert; der Generator wandelt sie in elektrische Energie um. Über Schleifringe wird die Energie an Bürsten und damit an einen äußeren Stromkreis abgegeben. b) Die Normale der Spulenfläche bildet mit der Richtung des Magnetfelds einen Winkel θ ; der magnetische Fluss durch die von einer Windung umschlossene ebene Fläche ist dann gleich $|\mathbf{B}| |A| \cos \theta$.

26.1 Wechselspannung an einem Ohm'schen Widerstand

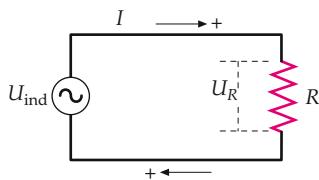


Abbildung 26.2 Eine einfache Reihenschaltung aus Wechselspannungsquelle und Ohm'schem Widerstand R .

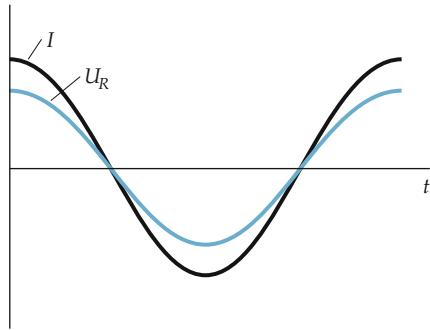


Abbildung 26.3 Der Spannungsabfall und der Strom durch den Ohm'schen Widerstand sind in Phase.

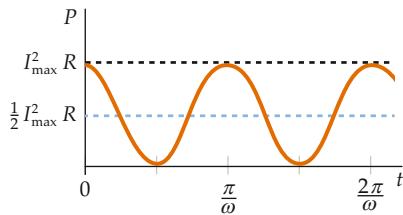


Abbildung 26.4 Die im Ohm'schen Widerstand aus Abbildung 26.2 umgesetzte Leistung, aufgetragen als Funktion der Zeit. Die Momentanleistung schwankt zwischen null und dem Maximalwert $R I_{\max}^2$; die mittlere Leistung ist halb so groß wie die Maximalleistung.

$R I_{\max}^2$. Gewöhnlich interessiert uns nicht der Momentanwert, sondern der Mittelwert der Leistung über eine oder mehrere Schwingungsperioden:

$$\langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = R I_{\max}^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle .$$

Der Mittelwert von $\cos^2(\omega t)$ ist $\frac{1}{2}$, wie aus der Beziehung $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ folgt: Die Sinusquadratfunktion entspricht – abgesehen von einer Verschiebung um 90° – der Kosinusquadratfunktion. Beide Funktionen haben deshalb über eine oder mehrere Perioden betrachtet den gleichen Mittelwert, und da ihre Summe eins ist, muss der Mittelwert jeder der beiden Funktionen gleich $\frac{1}{2}$ sein. Im zeitlichen Mittel wird im Ohm'schen Widerstand daher die Leistung

$$\langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = \frac{1}{2} R I_{\max}^2 \quad (26.7)$$

umgesetzt.

Effektivwerte

Spannungs- und Strommessgeräte für Wechselstromkreise zeigen in der Regel nicht die Maximalwerte der entsprechenden Größen an, sondern **Effektivwerte**, die wir im Folgenden definieren wollen.

Als **effektive Stromstärke** I_{eff} bezeichnet man die quadratisch gemittelte Stromstärke

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} . \quad (26.8)$$

DEFINITION DER EFFEKTIVEN STROMSTÄRKE

Präzise ausgedrückt, handelt es sich um die Wurzel aus dem mittleren Quadrat der Stromstärke („rms-Wert“ von *root mean square*). Der Mittelwert des Quadrats der Stromstärke ist für einen sinusförmigen Strom gegeben durch

$$\langle I^2 \rangle = I_{\max}^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} I_{\max}^2 .$$

Wir setzen dies in Gleichung 26.8 ein und erhalten für die effektive Stromstärke

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\max} \approx 0,7071 I_{\max} . \quad (26.9)$$

BEZIEHUNG ZWISCHEN MAXIMALER UND EFFEKTIVER STROMSTÄRKE

Der Effektivwert *jeder* Größe, deren Zeitabhängigkeit durch eine Sinusfunktion beschrieben wird, ist gleich dem Maximalwert dieser Größe geteilt durch $\sqrt{2}$. In Beispiel 26.1 wird I_{eff} für eine sägezahnförmige Stromschwankung behandelt.

Beispiel 26.1: Eine Sägezahnfunktion

Die Zeitabhängigkeit eines Stroms werde durch die in Abbildung 26.5 gezeigte Sägezahnfunktion beschrieben. Berechnen Sie a) die mittlere Stromstärke und b) die effektive Stromstärke; im Bereich $0 < t < T$ gelte $I(t) = (I_0/T)t$.

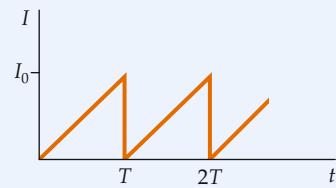


Abbildung 26.5 Darstellung der Sägezahnfunktion.

Problembeschreibung: Den Mittelwert einer Funktion in einem Zeitintervall T erhält man, indem man das Integral über die Funktion in diesem Intervall durch T , die Länge des Intervalls, dividiert. Diese Überlegung führt uns zur mittleren Stromstärke $\langle I \rangle$ und zur effektiven Stromstärke $\sqrt{\langle I^2 \rangle}$.

Lösung:

Teilaufgabe a

Zur Berechnung von $\langle I \rangle$ integrieren Sie I von $t = 0$ bis $t = T$ und dividieren durch T :

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0}{T} t dt = \frac{I_0}{T^2} \frac{T^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2} I_0}$$

Teilaufgabe b

1. Durch Integration von I^2 erhalten Sie $\langle I^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{I_0}{T} \right)^2 \int_0^T t^2 dt \\ &= \frac{I_0^2}{T^3} \frac{T^3}{3} = \frac{1}{3} I_0^2 \end{aligned}$$

2. Die effektive Stromstärke ist gleich der Wurzel aus $\langle I^2 \rangle$:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \boxed{\frac{I_0}{\sqrt{3}}}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie zu erwarten, ist sowohl die mittlere als auch die effektive Stromstärke kleiner als I_0 .

Mithilfe der Beziehungen $I_{\text{eff}} = I_{\max}/\sqrt{2}$ und $U_{\text{eff}} = U_{\max}/\sqrt{2}$ können wir schreiben:

$$\langle P \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} . \quad (26.11)$$

MITTLERE VON EINEM GENERATOR ABGEGEBENE LEISTUNG

Die Effektivwerte von Stromstärke und Spannungsabfall hängen in der gleichen Weise voneinander ab wie die zugehörigen Maximalwerte. Um uns davon zu überzeugen, teilen wir beide Seiten von Gleichung 26.5 durch $\sqrt{2}$ und setzen die Beziehungen $I_{\text{eff}} = I_{\max}/\sqrt{2}$ sowie $U_{R,\text{eff}} = U_{R,\max}/\sqrt{2}$ ein:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{R,\text{eff}}}{R} . \quad (26.12)$$

Wie Ihnen sicherlich auffällt, haben die Gleichungen 26.10 bis 26.12 dieselbe Form wie die entsprechenden Gleichungen für Gleichstromkreise, wenn wir die Effektivwerte von Strom und Spannung, I_{eff} und $U_{R,\text{eff}}$, anstelle von I und U_R einsetzen. Unter dieser Voraussetzung können wir die Leistungsaufnahme und die erzeugte Joule'sche Wärme in Wechselstromkreisen genauso berechnen wie in Gleichstromkreisen.

Übung 26.1: Der Abfall einer sinusförmigen Spannung an einem Ohm'schen Widerstand mit $R = 12 \Omega$ erreicht einen Maximalwert von 48 V. Berechnen Sie a) die effektive Stromstärke, b) die mittlere Leistung und c) die maximale Leistung. ◀

In Deutschland beträgt die Haushaltsnetzspannung (der Effektivwert einer sinusförmigen Wechselspannung) an Steckdosen oder Lampenanschlüssen 230 V bei einer Frequenz von 50 Hz. Unabhängig von der Stromstärke wird diese Wechselspannung aufrechterhalten. Ein Heizlüfter mit einer Leistung von 1600 W „zieht“ beispielsweise einen Strom von

$$I_{\text{eff}} = \frac{\langle P \rangle}{U_{\text{eff}}} = \frac{1600 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 6,95 \text{ A} .$$

Wohnungen sind üblicherweise in mehrere Wohnbereiche aufgeteilt, die jeweils von einem eigenen Stromkreis versorgt werden. Innerhalb eines Stromkreises sind alle Steckdosen parallel geschaltet; die Leitungen sind für bestimmte Stromstärken ausgelegt. Übersteigt der bei Parallelschaltung verschiedener Geräte fließende Strom diesen Wert, so besteht die Gefahr, dass sich die Leitungen überhitzen und ein Brand entsteht. Deshalb rüstet man die Stromkreise mit Schutzschaltern aus – das sind Sicherungen, die beim Überschreiten von (in Haushalten typischerweise) 10 A oder 16 A ansprechen („herausspringen“). Im Fall einer 10-A-Sicherung kann dem Netz innerhalb des zugehörigen Stromkreises höchstens eine Leistung $\langle P \rangle = 230 \text{ V} \cdot 10 \text{ A} = 2,3 \text{ kW}$ entnommen werden.

Fließt durch einen Ohm'schen Widerstand ein Wechselstrom mit einer effektiven Stromstärke I_{eff} , so wird im zeitlichen Mittel die gleiche Leistung in Wärme umgewandelt wie beim Fließen eines Gleichstroms mit der Stromstärke I_{eff} .

Betrachten wir noch einmal den einfachen Stromkreis aus Abbildung 26.2. Der Generator liefert die mittlere Leistung

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle U_{\text{ind}} I \rangle = \langle (U_{\max} \cos(\omega t)) (I_{\max} \cos(\omega t)) \rangle \\ &= U_{\max} I_{\max} \langle \cos^2(\omega t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} . \end{aligned}$$

26.2 Wechselstromkreise

Spulen und Kondensatoren verhalten sich in Wechselstromkreisen grundlegend anders als in Gleichstromkreisen. Ein Kondensator kann in einem Gleichstromkreis vollständig aufgeladen werden; dann ist der Stromfluss unterbrochen. In einem Wechselstromkreis hingegen fließt ständig Ladung auf die Platten und von den Platten ab. Ist die Frequenz des Wechselstroms hinreichend hoch, so setzt, wie wir noch sehen werden, der Kondensator dem Stromfluss nahezu keinen Widerstand entgegen. Eine Spule hingegen hat im Gleichstromkreis nur einen sehr geringen Ohm'schen Widerstand. Fließt aber ein Wechselstrom – ändert sich also die Stromstärke periodisch – so wird in der Spule eine Gegenspannung proportional zu dI/dt induziert. Je höher die Frequenz des Wechselstroms ist, desto größer ist die induzierte Spannung und damit der Widerstand, der dem Stromfluss entgegensteht.

Spulen in Wechselstromkreisen

In Abbildung 26.6 sehen Sie eine Spule, in Reihe geschaltet mit einer Wechselspannungsquelle. Ändert sich der Spulenstrom, so ändert sich der magnetische Fluss durch die Spule, und es wird eine Gegenspannung induziert, die proportional zu dI/dt ist. In der Regel ist die induzierte Spannung weit größer als der Spannungsabfall $R I$ infolge des Eigenwiderstands des Spulendrahts, weshalb letzterer häufig vernachlässigt werden kann. Der Spannungsabfall U_L an der Spule ist dann

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (26.13)$$

SPANNUNGSABFALL AN EINER IDEALEN SPULE

Für den abgebildeten Stromkreis ist der Spannungsabfall U_L an der Spule gleich der Generatorspannung:

$$U_L(t) = U_{\text{ind}}(t) = U_{\text{max}} \cos(\omega t) = U_{L,\text{max}} \cos(\omega t)$$

mit $U_{L,\text{max}} = U_{\text{max}}$. Wir setzen dies für U_L in Gleichung 26.13 ein und erhalten

$$U_{L,\text{max}} \cos(\omega t) = L \frac{dI}{dt}, \quad (26.14)$$

woraus sich durch Umformen ergibt:

$$dI = \frac{U_{L,\text{max}}}{L} \cos(\omega t) dt. \quad (26.15)$$

Die Stromstärke erhalten wir durch Integration beider Seiten dieser Gleichung:

$$I(t) = \frac{U_{L,\text{max}}}{L} \int \cos(\omega t) dt = \frac{U_{L,\text{max}}}{\omega L} \sin(\omega t) + C. \quad (26.16)$$

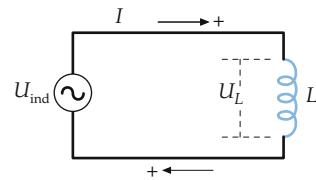


Abbildung 26.6 Wechselstromkreis mit einer Spule; der Pfeil gibt die positive Richtung des Stromflusses an. Ist dI/dt positiv, so ist auch der Spannungsabfall U_L an der Spule positiv.

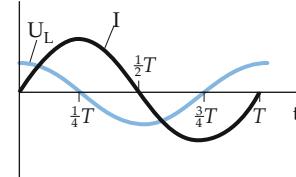


Abbildung 26.7 Spulenstrom und Spannungsabfall an der Spule im Stromkreis aus Abbildung 26.6 als Funktionen der Zeit. Die Spannung erreicht ihren Maximalwert eine Viertelperiode vor dem Strom. Man sagt, die Spannung eilt dem Strom um 90° voraus.

Die Integrationskonstante C entspricht dem Gleichstromanteil; setzen wir sie gleich null, so ist

$$I(t) = \frac{U_{L,\text{max}}}{\omega L} \sin(\omega t) = I_{\text{max}} \sin(\omega t) \quad (26.17)$$

mit

$$I_{\text{max}} = \frac{U_{L,\text{max}}}{\omega L}. \quad (26.18)$$

Spannung $U_L(t) = U_{L,\text{max}} \cos(\omega t)$ und Strom $I(t) = I_{\text{max}} \sin(\omega t)$ an der Spule sind gegeneinander um 90° phasenverschoben, wie Sie Abbildung 26.7 entnehmen. I und U_L wurden hier als Funktionen der Zeit aufgetragen; der Maximalwert des Spannungsabfalls wird 90° oder eine Viertelperiode ($\frac{1}{4}T$, T ist die Periode) vor dem zugehörigen Maximalwert des Stroms erreicht. Man sagt, die Spannung an einer Spule *eilt dem Strom um 90° voraus*. Qualitativ können wir diesen Zusammenhang folgendermaßen verstehen: Der Spannungsabfall an einer Spule ist gleich der Induktionsspannung. Wenn der Strom von null aus abzunehmen beginnt, ändert er sich besonders schnell; dI/dt erreicht sein Minimum (d.h. die maximale negative Änderung), und die induzierte Gegenspannung ist minimal. Eine Viertelperiode später ist I am Minimalwert angelangt, und dI/dt ist null, also ist auch U_L null. Mit der Beziehung $\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2)$ und $\theta = \omega t$ können wir Gleichung 26.17 wie folgt aufschreiben:

$$I(t) = I_{\text{max}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (26.19)$$

Wir können die Beziehung zwischen den Maximalwerten von Strom und Spannung (oder auch zwischen den jeweiligen Effektivwerten) in eine zu Gleichung 26.12, dem Zusammenhang

von Strom und Spannung am Ohm'schen Widerstand ($I_{\text{eff}} = U_{R,\text{eff}}/R$), analoge Form bringen. Laut Gleichung 26.18 ist

$$I_{\max} = \frac{U_{L,\max}}{\omega L} = \frac{U_{L,\max}}{X_L} \quad (26.20)$$

mit

$$X_L = \omega L \quad (26.21)$$

DEFINITION DES INDUKTIVEN WIDERSTANDS

als **induktivem (Blind-)Widerstand** (auch **Induktanz**) der Spule. Wegen $I_{\text{eff}} = I_{\max}/\sqrt{2}$ und $U_{L,\text{eff}} = U_{L,\max}/\sqrt{2}$ ist die effektive Stromstärke gegeben durch

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{L,\text{eff}}}{X_L}. \quad (26.22)$$

Die Einheit des Blindwiderstands ist wie die des Ohm'schen Widerstands das Ohm. Gleichung 26.22 besagt, dass der effektive Strom umso geringer wird, je größer der induktive Widerstand einer gegebenen Spule ist. Im Unterschied zum Ohm'schen Widerstand hängt der induktive Widerstand von der Frequenz des fließenden Stroms ab: Je größer die Frequenz des Stroms ist, desto größer ist der induktive Widerstand. Das illustriert Beispiel 26.2.

Beispiel 26.2: Induktiver Blindwiderstand

Eine Spule mit einer Induktivität von $40,0 \text{ mH}$ ist mit einem Generator verbunden, der eine sinusförmige Wechselspannung mit einem Effektivwert von 120 V liefert. Berechnen Sie den induktiven Widerstand der Spule und die effektive Stromstärke, wenn die Frequenz der Wechselspannung a) $60,0 \text{ Hz}$ und b) 6000 Hz ist.

Problembeschreibung: Wir berechnen den induktiven Widerstand bei beiden Frequenzen mithilfe von Gleichung 26.21. Die Stromstärken erhalten wir aus Gleichung 26.20.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die effektive Stromstärke ist gleich dem Quotienten aus effektiver Spannung und induktivem Widerstand:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{L,\text{eff}}}{X_L}$$

2. Berechnen Sie den induktiven Widerstand bei 60 Hz :

$$\begin{aligned} X_{L,1} &= \omega_1 L = 2\pi\nu_1 L \\ &= (2\pi) \cdot (60,0 \text{ Hz}) \cdot (40,0 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = [15,1 \Omega] \end{aligned}$$

3. Mit diesem Wert für X_L berechnen Sie nun die effektive Stromstärke bei $60,0 \text{ Hz}$:

$$I_{\text{eff},1} = \frac{120 \text{ V}}{15,1 \Omega} = [7,95 \text{ A}]$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie den induktiven Widerstand bei 6000 Hz :

$$\begin{aligned} X_{L,2} &= \omega_2 L = 2\pi\nu_2 L \\ &= (2\pi) \cdot (6000 \text{ Hz}) \cdot (40,0 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = [1508 \Omega] \end{aligned}$$

2. Mit diesem Wert für X_L berechnen Sie schließlich die effektive Stromstärke bei 6000 Hz :

$$I_{\text{eff},2} = \frac{120 \text{ V}}{1508 \Omega} = 0,0796 \text{ A} = [0,08 \text{ A}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die effektive Stromstärke bei 6000 Hz beträgt nur rund 1 % der effektiven Stromstärke bei $60,0 \text{ Hz}$. Dieses Ergebnis ist einleuchtend, weil die Spule mit zunehmender Frequenz immer mehr wie eine Unterbrechung des Stromkreises wirkt. ■

Die *momentane* Leistungsaufnahme der Spule ist

$$\begin{aligned} P(t) &= U_L(t) I(t) = (U_{L,\max} \cos(\omega t)) (I_{\max} \sin(\omega t)) \\ &= U_{L,\max} I_{\max} \cos(\omega t) \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Die *mittlere* Leistungsaufnahme hingegen ist null, wovon wir uns mithilfe der trigonometrischen Beziehung

$$2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \sin(2\omega t)$$

überzeugen können: Die Funktion $\sin(2\omega t)$ durchläuft den Nullpunkt während jeder Periode zweimal. Aus Symmetriegründen kompensieren sich dabei die Flächen oberhalb und unterhalb der t -Achse, was bedeutet, dass im zeitlichen Mittel über eine ganze Zahl von Schwingungszyklen keine Leistung in der Spule umgesetzt wird. (Kann der Eigenwiderstand R_{in} des Spulendrahts nicht vernachlässigt werden, so ist die umgesetzte Leistung gegeben durch $(I_{\text{eff}})^2 R_{\text{in}}$.)

Kondensatoren in Wechselstromkreisen

Wir betrachten den Stromkreis in Abbildung 26.8: Ein Kondensator ist mit einer Wechselspannungsquelle verbunden, und der Spannungsabfall am Kondensator ist gegeben durch

$$U_C = \frac{q}{C} \quad (26.23)$$

mit q als Ladung der (in der eingezeichneten Stromrichtung betrachtet) oberen Platte.

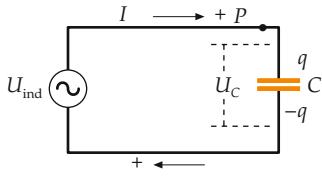


Abbildung 26.8 Wechselstromkreis mit einem Kondensator; die Pfeile geben die positive Stromrichtung an. Fließt ein Strom in dieser Richtung, so nimmt die Ladung der oberen Platte des Kondensators zu. Der Zusammenhang zwischen Strom und Ladung ist folglich $I = +dq/dt$.

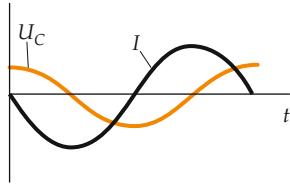


Abbildung 26.9 Kondensatorstrom und Spannungsabfall am Kondensator im Stromkreis aus Abbildung 26.8 als Funktionen der Zeit. Die Spannung erreicht ihr Maximum eine Viertelperiode nach dem Strom. Das bedeutet, der Strom eilt der Spannung um 90° voraus.

Für den abgebildeten Stromkreis ist der Spannungsabfall U_C am Kondensator gleich der Generatorenspannung U_{ind} :

$$U_C(t) = U_{\text{max}} \cos(\omega t) = U_{C,\text{max}} \cos(\omega t)$$

mit $U_{C,\text{max}} = U_{\text{max}}$. Wir setzen dies anstelle von U_C in Gleichung 26.23 ein und lösen nach q auf:

$$q(t) = C U_C(t) = C U_{C,\text{max}} \cos(\omega t) = q_{\text{max}} \cos(\omega t).$$

Die Stromstärke ist dann

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega q_{\text{max}} \sin(\omega t) = -I_{\text{max}} \sin(\omega t)$$

mit

$$I_{\text{max}} = \omega q_{\text{max}}. \quad (26.24)$$

Mithilfe der Beziehung $\sin \theta = -\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$, θ , können wir für den Strom schreiben:

$$I = -\omega q_{\text{max}} \sin(\omega t) = I_{\text{max}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (26.25)$$

Der Spannungsabfall U_C am Kondensator ist gemäß Gleichung 26.23 phasengleich mit der Ladung q ; ähnlich wie bei einer Spule sind folglich auch beim Kondensator im Wechselstromkreis Spannung ($U_C(t) = U_{C,\text{max}} \cos(\omega t)$) und Strom (Gleichung 26.25) um 90° gegeneinander phasenverschoben. Aus Abbildung 26.9 ersehen Sie, dass der Maximalwert der Spannung eine Viertelperiode (90°) nach dem Maximalwert der Stromstärke erreicht wird: Beim Kondensator *eilt der Strom der Spannung um 90° voraus*. Auch dies können wir vom physikalischen Konzept her verstehen: Die Ladung q ist proportional

zum Spannungsabfall U_C . Die Ladung nimmt am schnellsten zu – das bedeutet, $dq/dt = I$ ist am größten –, wenn die Kondensatorplatten nicht geladen sind und folglich $U_C = 0$ ist. Sobald die Ladung einer Kondensatorplatte ansteigt, nimmt die Stromstärke ab, bis eine Viertelperiode später q (und damit U_C) maximal und die Stromstärke null ist. Anschließend kehrt der Strom sein Vorzeichen um, und der Kondensator wird wieder entladen.

Wieder können wir die Beziehung zwischen den Effektivwerten von Strom und Spannung in eine zu Gleichung 26.5 für den Ohm'schen Widerstand ($I_{\text{eff}} = U_{R,\text{eff}}/R$) analoge Form bringen. Gleichung 26.24 zufolge ist

$$I_{\text{max}} = \omega q_{\text{max}} = \frac{U_{C,\text{max}}}{1/(\omega C)} = \frac{U_{C,\text{max}}}{X_C}$$

und

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{C,\text{eff}}}{X_C} \quad (26.26)$$

mit

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (26.27)$$

DEFINITION DES KAPAZITIVEN WIDERSTANDS

als **kapazitivem (Blind-)Widerstand** (auch **Kondensanz**) des Kondensators. Die Einheit des kapazitiven Widerstands ist wie die des Ohm'schen und des induktiven Widerstands das Ohm. Wie der induktive Widerstand hängt auch der kapazitive Widerstand von der Frequenz des fließenden Stroms ab, wobei die Proportionalität jetzt umgekehrt ist: Je größer die Frequenz des Stroms ist, desto kleiner ist der kapazitive Widerstand. Die mittlere Leistungsaufnahme eines Kondensators im Wechselstromkreis ist (wie die einer Spule) gleich null, denn der Spannungsabfall am Kondensator ist proportional zu $\cos(\omega t)$, und der Strom ist proportional zu $\sin(\omega t)$; es ist $(\cos(\omega t) \sin(\omega t)) = 0$. In einem idealen Kondensator (dessen Ohm'scher Widerstand null ist) wird ebenso wie in einer idealen Spule im Wechselstromkreis keine Leistung umgesetzt.

Angesichts dessen, dass die Platten eines Kondensators durch ein isolierendes Medium voneinander getrennt sind, fragen Sie sich vielleicht, wie in dem Stromkreis aus Abbildung 26.8 ein Wechselstrom fließen kann. Um diesen Sachverhalt zu erklären, wählen wir als Zeitpunkt $t = 0$ den Moment, in dem der Spannungsabfall am Kondensator gerade von null ausgehend zuzunehmen beginnt. (Zu diesem Zeitpunkt beginnt auch die Ladung q der oberen Platte von null aus anzusteigen.) Mit steigendem Spannungsabfall U_C fließt positive Ladung von der unteren Platte ab und zur oberen Platte hin (in Wirklichkeit bewegen sich natürlich Elektronen, und zwar entgegengesetzt zu den angegebenen Richtungen); eine Viertelperiode später erreicht die Ladung ihr Maximum q_{max} . Anschließend nimmt q wieder ab, ist bei 180° gleich null, bei 270° gleich $-q_{\text{max}}$ und nach einer vollständigen Periode (360°) erneut null. Das bedeutet, in jeder Viertelperiode fließt die Ladung q_{max} einmal an

Punkt P in Abbildung 26.8 vorbei. Verdoppeln wir die Frequenz der Spannung, so halbiert sich die Länge einer Periode; die Ladung q_{\max} fließt dann in der halben Zeit durch Punkt P , und die maximale Stromstärke nimmt auf das Doppelte zu. Je größer demnach die Frequenz der Wechselspannung ist, desto weniger Widerstand setzt der Kondensator dem Ladungsfluss entgegen, wie auch Beispiel 26.3 verdeutlicht.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass der kapazitive Widerstand umgekehrt proportional zur Frequenz ist; nimmt die Frequenz um zwei Größenordnungen zu, so nimmt der kapazitive Widerstand um zwei Größenordnungen ab. Wie erwartet, ist die Stromstärke der Frequenz direkt proportional. ■

Beispiel 26.3: Kapazitiver Blindwiderstand

Ein Kondensator mit einer Kapazität von $20,0 \mu\text{F}$ ist mit einem Generator verbunden, der eine sinusförmige Wechselspannung mit einem Maximalwert von 100 V liefert. Berechnen Sie den kapazitiven Widerstand des Kondensators und die maximale Stromstärke für Frequenzen der Wechselspannung von a) $60,0 \text{ Hz}$ und b) 6000 Hz .

Problembeschreibung: Der kapazitive Widerstand ist $X_C = 1/(\omega C)$, die maximale Stromstärke $I_{\max} = U_{C,\max}/X_C$.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie den kapazitiven Widerstand des Kondensators bei $60,0 \text{ Hz}$. Verwenden Sie Ihr Ergebnis, um die maximale Stromstärke bei $60,0 \text{ Hz}$ zu ermitteln:

$$\begin{aligned} X_{C,1} &= \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi\nu_1 C} \\ &= \frac{1}{2\pi(60,0 \text{ Hz})(20,0 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = [133 \Omega] \\ I_{\max,1} &= \frac{U_{C,\max}}{X_{C,1}} = \frac{100 \text{ V}}{133 \Omega} = [0,752 \text{ A}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie nun den kapazitiven Widerstand des Kondensators bei 6000 Hz und damit die maximale Stromstärke bei 6000 Hz :

$$\begin{aligned} X_{C,2} &= \frac{1}{\omega_2 C} = \frac{1}{2\pi\nu_2 C} \\ &= \frac{1}{2\pi(6000 \text{ Hz})(20,0 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = [1,33 \Omega] \\ I_{\max,2} &= \frac{U_{C,\max}}{X_{C,2}} = \frac{100 \text{ V}}{1,33 \Omega} = [75,2 \text{ A}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Stromstärke bei $60,0 \text{ Hz}$ beträgt nur 1% der Stromstärke bei 6000 Hz ; dieses Ergebnis leuchtet ein, weil sich der Kondensator bei niedrigen Frequenzen zunehmend wie eine Unterbrechung des Stromkreises bemerkbar macht.

26.3 Der Transformator

Mit einem Transformator kann man eine gegebene Eingangsspannung ohne wesentlichen Leistungsverlust in eine gewünschte Ausgangsspannung umsetzen. Einen einfachen Transformator sehen Sie in Abbildung 26.10: Er besteht aus zwei Spulen, die auf einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt sind. Die Spule, an der die Eingangsspannung anliegt, bezeichnet man als Primärspule, die andere als Sekundärspule. (Beide Wicklungen können wahlweise als Primär- oder Sekundärspule geschaltet werden.) Der Transformator arbeitet nach folgendem Prinzip: Wird eine der beiden Spulen von einem zeitlich veränderlichen Strom (etwa einem Wechselstrom) durchflossen, so wird in der benachbarten Spule eine zeitlich veränderliche Spannung induziert, wie wir es im Abschnitt 25.6 besprochen haben. Der Eisenkern verstärkt das Magnetfeld bei gegebenem Strom, beeinflusst seine Richtung und sorgt so dafür, dass möglichst der gesamte in der einen Spule erzeugte magnetische Fluss auch die andere Spule durchsetzt. Ginge dabei keine Leistung verloren, so wäre das Produkt aus Spannungsabfall und Stromstärke an beiden Spulen gleich: Fällt über der Sekundärspule eine höhere Spannung ab als über der Primärspule, so ist die Stromstärke in der Sekundärspule geringer als in der Primärspule (und umgekehrt).

Leistungsverluste können mehrere Ursachen haben: die Erwärmung der Spulen infolge ihres (kleinen) Ohm'schen Widerstands, die Hysterese des Kernmaterials sowie Wirbelströme im Kern. Zur Reduktion der Wirbelströme wird der Eisenkern aus voneinander isolierten, verklebten Blechen hergestellt (Abschnitt 25.5). In der folgenden Diskussion wollen wir sämtliche Leistungsverluste vernachlässigen. Wir betrachten also einen idealen Transformator mit einem Wirkungsgrad von 100% ; die an der Primärspule zugeführte Leistung kann an der Sekundärspule restlos wieder entnommen werden. In der Praxis liegt der Wirkungsgrad von Transformatoren oft bei über 98% .

Betrachten wir einen Transformator, an dessen Primärspule mit n_1 Windungen die Spannung U_1 abfällt. Der zweite Stromkreis, der die Sekundärspule mit n_2 Windungen enthält, sei zunächst offen. Aufgrund des Eisenkerns ist der magnetische Fluss durch beide Spulen groß, selbst wenn der Magnetisierungsstrom I_{mag} im Primärstromkreis sehr klein ist. (Als Magnetisierungsstrom bezeichnet man den Strom, der durch die Primärspule fließt, wenn der Sekundärstromkreis geöffnet ist.) Wir wollen den Ohm'schen Widerstand beider Spulen vernachlässigen, da er im Vergleich zum induktiven Blindwiderstand klein ist. Der

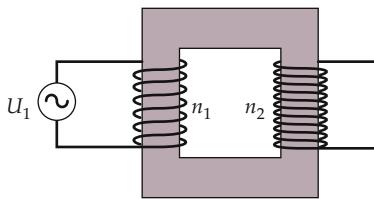


Abbildung 26.10 Ein einfacher Transformator; n_1 ist die Windungszahl der Primärspule, n_2 die der Sekundärspule.

Primärstromkreis besteht dann einfach aus einem Wechselspannungsgenerator und einem rein induktiven Widerstand, wie wir in Abschnitt 26.2 besprochen haben. Magnetisierungsstrom und Spannung an der Primärspule sind gegeneinander um 90° phasenverschoben, und in der Spule wird im zeitlichen Mittel keine Leistung umgesetzt. Ist Φ_{mag} der magnetische Fluss durch eine Windung der Primärspule, so ist der Spannungsabfall an dieser Spule gleich der induzierten Gegenspannung

$$U_1 = -n_1 \frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}. \quad (26.28)$$

Wenn wir Streufelder am Eisenkern vernachlässigen, wird jede Windung der Sekundärspule von dem gleichen magnetischen Fluss durchsetzt wie die einzelnen Windungen der Primärspule. Der gesamte magnetische Fluss durch die Sekundärspule ist dann gleich $n_2 \Phi_{\text{mag}}$, und für den Spannungsabfall an dieser Spule erhalten wir

$$U_2 = -n_2 \frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}. \quad (26.29)$$

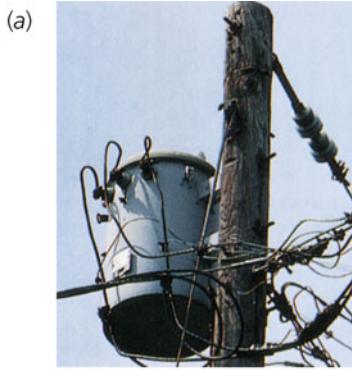
Beim Vergleich der letzten beiden Beziehungen sehen wir

$$U_2 = \frac{n_2}{n_1} U_1. \quad (26.30)$$

Ist n_2 größer als n_1 , so ist die Spannung, die an der Sekundärspule abgegriffen werden kann, größer als die am Primärkreis anliegende Spannung (man spricht auch von einem Aufwärtstransformator). Ist umgekehrt n_1 größer als n_2 , so ist die Spannung an der Sekundärspule geringer als an der Primärspule (Abwärtstransformator).

Als Nächstes verbinden wir die Sekundärspule mit einem Ohm'schen Widerstand R , einem sogenannten Lastwiderstand. Der Strom I_2 im Sekundärkreis und der Spannungsabfall U_2 am Ohm'schen Widerstand sind dann in Phase. Durch diesen Strom wird in den Windungen der Sekundärspule ein zusätzlicher magnetischer Fluss Φ'_{mag} induziert, der proportional zu $n_2 I_2$, aber dem ursprünglichen, durch den Magnetisierungsstrom I_{mag} bewirkten magnetischen Fluss entgegengesetzt gerichtet ist. Der Spannungsabfall an der Primärspule wird dabei nach wie vor von der Generatorenspannung bestimmt, die nicht vom Sekundärkreis beeinflusst wird. Gemäß Gleichung 26.29 muss sich der magnetische Fluss durch den Eisenkern dann mit der ursprünglichen Rate ändern; das bedeutet, der Gesamtfluss

durch den Kern bleibt unabhängig von der Anwesenheit eines Lastwiderstands stets gleich. In der Primärspule muss deshalb ein zusätzlicher Strom I_1 fließen, um den ursprünglichen Fluss Φ_{mag} aufrechtzuerhalten. I_1 erzeugt durch jede Windung einen



- a) Ein Masttransformator, der die Energie auf zur Haushaltsversorgung übliche Werte herunterspannt. b) Umspannwerk zum Herunterspannen der über Hochspannungsleitungen transportierten Energie. c) 9-Volt-Transformator für die Steckdose („Netzteil“). (a) © Yaov/Phototake; b) © Jasmina Becker/Pitopia; c) © Ramón Rivera Moret.)

magnetischen Fluss proportional zu $n_1 I_1$ und gleich $-\Phi'_{\text{mag}}$. Der zusätzliche Strom I_1 im Primärkreis hängt somit wie folgt mit dem Strom I_2 im Sekundärkreis zusammen:

$$n_1 I_1 = -n_2 I_2. \quad (26.31)$$

Die Ströme sind gegenphasig und erzeugen entgegengesetzt gerichtete magnetische Flüsse. Da I_2 phasengleich mit U_2 ist, ist der zusätzliche Strom I_1 phasengleich mit der Primärspannung. Der Generator gibt die Leistung $U_{1,\text{eff}} I_{1,\text{eff}}$ ab, entnommen wird die Leistung $U_{2,\text{eff}} I_{2,\text{eff}}$. (Der Magnetisierungsstrom trägt nicht zur Eingangsleistung bei, da er gegenüber der Primärspannung um 90° phasenverschoben ist.) Vernachlässigt man alle Verluste, so ergibt sich

$$U_{1,\text{eff}} I_{1,\text{eff}} = U_{2,\text{eff}} I_{2,\text{eff}}. \quad (26.32)$$

Der zusätzliche Strom I_1 im Primärkreis ist normalerweise viel größer als der ursprüngliche Magnetisierungsstrom I_{mag} , der durch die Primärspule fließt, wenn kein Lastwiderstand angeschlossen ist. Man kann dies zeigen, indem man eine Glühlampe mit der Primärwicklung in Reihe schaltet: Sie leuchtet wesentlich heller, wenn der Sekundärkreis mit einem Ohm'schen Widerstand belastet ist. Lässt sich I_{mag} vernachlässigen, so ist die Beziehung zwischen den Gesamtströmen in beiden Kreisen durch Gleichung 26.32 gegeben. Eine Anwendung illustriert Beispiel 26.4.

Beispiel 26.4: Ein Klingeltransformator

Eine Türklingel, mit einer effektiven Wechselspannung von 6,0 V betrieben, benötigt eine effektive Stromstärke von 0,40 A. Sie ist mit einem Transformator verbunden, dessen Primärspule (mit 2000 Windungen) an das Haushaltsstromnetz (230 V Wechselspannung) angeschlossen ist. a) Wie viele Windungen sollte die Sekundärspule haben? b) Geben Sie die Stromstärke in der Primärspule an.

Problembeschreibung: Die Windungszahl der Sekundärspule erhalten wir aus dem Verhältnis der Windungszahlen, das dem Verhältnis der Spannungen entspricht. Zur Berechnung der Primärstromstärke setzen wir Eingangs- und Ausgangsleistung gleich.

Lösung:

Teilaufgabe a

Gleichung 26.30 gibt das Verhältnis der Windungszahlen an. Lösen Sie die Gleichung nach der gesuchten Größe n_2 auf (Wd. steht für Windungen):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{U_2}{U_1},$$

also

$$n_2 = \frac{U_{2,\text{eff}}}{U_{1,\text{eff}}} n_1 = \frac{6 \text{ V}}{230 \text{ V}} \cdot 2000 \text{ Wd.}$$

= 52 Windungen

Teilaufgabe b

Wir nehmen an, es handele sich um einen idealen Transformator mit einem Wirkungsgrad von 100 %. Eingangs- und Ausgangstrom hängen dann gemäß Gleichung 26.32 zusammen. Lösen Sie die Gleichung nach I_1 , dem Strom im Primärkreis, auf:

$$U_2 I_2 = U_1 I_1$$

$$I_1 = \frac{U_2}{U_1} I_2 = \frac{6.0 \text{ V}}{230 \text{ V}} \cdot (0,40 \text{ A}) = \boxed{0,010 \text{ A}}$$

Plausibilitätsprüfung: Bei einem Abwärtstransformator muss die Sekundärspule weniger Windungen umfassen als die Primärspule; außerdem muss die Stromstärke steigen, wenn die Spannung sinkt. Beide Überlegungen werden durch unsere Resultate bestätigt. ■

Ein wichtiger Anwendungsbereich für Transformatoren ist der Transport elektrischer Energie. Die Leistungsverluste in Form von Joule'scher Wärme, RI^2 , lassen sich minimieren, wenn die Spannung möglichst hoch und die Stromstärke entsprechend gering ist. Für den Endabnehmer sind sehr hohe Spannungen jedoch gefährlich; an Haushalte muss die Energie folglich mit relativ niedriger Spannung und entsprechend höherer Stromstärke geliefert werden. Betrachten wir dazu ein Beispiel. In einer Stadt mit 50 000 Einwohnern liege der Pro-Kopf-Verbrauch an elektrischer Leistung bei durchschnittlich 1,2 kW. Bei einer Netzspannung von 230 V fließt pro Person im Mittel ein Strom

$$I_{\text{eff}} = \frac{1200 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 5,2 \text{ A.}$$

Für 50 000 Einwohner ergibt das insgesamt einen Strom von 260 000 A. Wollte man diese enorme Stromsträke von einem Kraftwerk bis zu den Verbrauchern transportieren, so bräuchte man sehr dicke Leitungen und der Leistungsverlust RI^2 wäre entsprechend hoch. Deshalb werden die in den Kraftwerksgeneratoren erzeugten Wechselspannungen mit Transformatoren auf bis zu 380 kV „hochgespannt“. Die Stromstärke in unserem Beispiel beträgt dann nur noch

$$I_{\text{eff}} = \frac{230 \text{ V}}{380\,000 \text{ V}} \cdot (260\,000 \text{ A}) = 160 \text{ A.}$$

Die in Überlandleitungen transportierte Hochspannung wird in kleinen, stadtnahen Umspannwerken zunächst auf mittlere Werte (10 kV) und in Trafostationen oder Masttrafos in

Verbrauchernähe weiter auf die übliche Netzspannung (230 V) heruntertransformiert. Durch die einfache Möglichkeit, die Amplitude verlustarm mithilfe von Transformatoren zu ändern, hat sich Wechselspannung gegenüber der Gleichspannung weitgehend durchgesetzt. Beispiel 26.5 illustriert die so erreichte Reduzierung der Leistungsverluste.

Beispiel 26.5: Leistungsverluste beim Transport

Eine Überlandleitung hat einen Ohm'schen Widerstand von $0,020 \Omega/\text{km}$. Welcher Leistungsverlust (Joule'sche Wärme) tritt auf, wenn 200 kW elektrischer Leistung aus einem 10 km entfernten Kraftwerk mit einer Spannung (Effektivwerte) von a) 230 V und b) 4,40 kV zum Verbraucher transportiert wird?

Problembeschreibung: Der Gesamtwiderstand des 10 km langen Kabels ist $R = (0,020 \Omega/\text{km}) \cdot (10 \text{ km}) = 0,20 \Omega$. Wir berechnen jeweils den Strom, der bei der Übertragung einer Leistung von 200 kW fließt ($P = I U$), und bestimmen dann den Leistungsverlust $R(I_{\text{eff}})^2$. Im Lösungsweg sind jeweils die Effektivwerte für Ströme und Spannungen und die mittlere Leistung gemeint.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie den Strom, der bei der Übertragung einer Leistung von 200 kW mit 230 V fließt:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{200 \text{ kW}}{230 \text{ V}} = 870 \text{ A}$$

2. Berechnen Sie den Leistungsverlust:

$$R I^2 = (870 \text{ A})^2 \cdot (0,20 \Omega) = 1,51 \cdot 10^2 \text{ kW}$$

Teilaufgabe b

1. Wiederholen Sie Schritt 1 von Teilaufgabe a für eine Spannung von 4,40 kV:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{200 \text{ kW}}{4400 \text{ V}} = 45,5 \text{ A}$$

2. Für den Leistungsverlust erhalten Sie dann:

$$R I^2 = (45,5 \text{ A})^2 \cdot (0,20 \Omega) = 0,41 \text{ kW}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Leistungsverluste bei 4,40 kV betragen weniger als 1 % der Verluste bei 230 kV. Dieses Resultat macht noch einmal die Überlegenheit von Hochspannungsleitungen zum Ferntransport von Elektroenergie deutlich.

Weitergedacht: Bei einer Übertragungsspannung von 230 V gehen mehr als 70 % der Leistung in Form von Wärme verloren; der Spannungsabfall ($R I$) über dem Kabel beträgt 174 V, und beim Verbraucher kommt eine Spannung von nur noch 56 V an. Bei einer Übertragungsspannung von 4400 V hingegen machen die Transportverluste gerade 0,2 % aus, und der Spannungsabfall beträgt nur 9 V. ■

26.4 LC- und RLC-Stromkreise ohne Wechselspannungsquelle

Abbildung 26.11 zeigt einen **LC-Stromkreis**, eine einfache Schaltung aus einer Spule und einem Kondensator, jedoch ohne Ohm'schen Widerstand. Auf der oberen Platte des Kondensators befindet sich die positive Ladung q_0 , und der Schalter ist zu Versuchsbeginn geöffnet.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Der Kondensator entlädt sich, und die Ladung beginnt durch die Spule zu fließen. Ist q die Ladung der oberen Kondensatorplatte und entspricht die Stromrichtung der Angabe in Abbildung 26.11, so ist

$$I = +\frac{dq}{dt}.$$

Die Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel auf den Stromkreis liefert

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (26.33)$$

Wir setzen dq/dt für I ein und erhalten

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (26.34)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie Gleichung 11.2 für die Beschleunigung eines Massestücks durch eine Feder:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

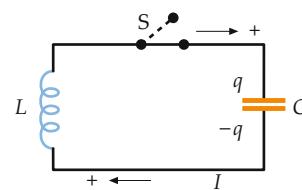


Abbildung 26.11 Ein LC-Stromkreis. Zu Beginn des Versuchs ist der Kondensator geladen. Wird der Schalter geschlossen, so entlädt sich der Kondensator über die Spule, in der dadurch eine Gegenspannung induziert wird.

Ein LC -Kreis verhält sich genauso wie ein Massestück an einer Feder: L entspricht der Masse m , q dem Ort x und $1/C$ der Federkonstante k . Außerdem ist der Strom I analog der Geschwindigkeit v , denn es gilt $v = dx/dt$ und $I = dq/dt$. In mechanischen Systemen ist die Trägheit eines Objekts durch seine Masse bestimmt: Je größer die Masse, desto schwerer fällt es, die Geschwindigkeit des Objekts zu ändern. Die Induktivität L können wir uns als eine Art Trägheit des Wechselstromkreises vorstellen – je größer L , desto schwieriger ist es, den Strom I zu ändern.

Wir teilen nun jeden Term in Gleichung 26.34 durch L und stellen die Gleichung um:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q \quad (26.35)$$

ist analog zur mechanischen Beziehung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x. \quad (26.36)$$

In Kapitel 11 haben wir Gleichung 26.36 für die einfache harmonische Schwingung bereits gelöst. Wir erhielten

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$ als Kreisfrequenz, A als Amplitude der Auslenkung und δ als Phasenkonstante, die von den Anfangsbedingungen abhängt. Die Lösung von Gleichung 26.35 lautet folglich

$$q(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

mit

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (26.37)$$

Den Strom I erhalten wir durch Ableitung der Ladung q nach der Zeit:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \delta).$$

Als Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ wählen wir $q(0) = q_{\max}$ und $I(0) = 0$. Dann ist die Phasenkonstante δ gleich null und $A = q_{\max}$, und unsere Lösungen werden zu

$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega t) \quad (26.38)$$

und

$$I(t) = -\omega q_{\max} \sin(\omega t) = -I_{\max} \sin(\omega t) \quad (26.39)$$

mit $I_{\max} = \omega q_{\max}$.

Abbildung 26.12 verdeutlicht die Zeitabhängigkeit von q und I . Die Ladung oszilliert zwischen den Werten $+q_{\max}$ und $-q_{\max}$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 1/\sqrt{(LC)}$. Mit der gleichen Frequenz oszilliert die Stromstärke zwischen den Werten $+\omega q_{\max}$ und $-\omega q_{\max}$, sie eilt der Ladung außerdem um 90° voraus (siehe Aufgabe 26.12 und Beispiel 26.6). Die Stromstärke erreicht ihr Maximum, wenn die Ladung null ist und umgekehrt.

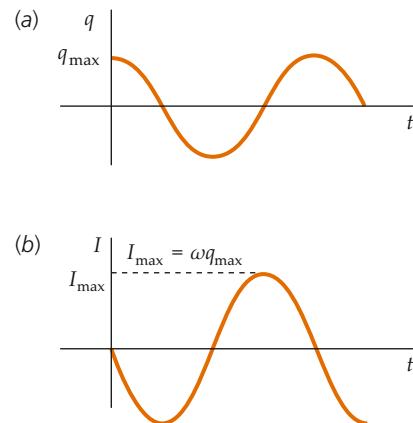


Abbildung 26.12 a) Ladung q und b) Strom I als Funktion der Zeit für den LC -Kreis in Abbildung 26.11.

Unsere Diskussion mechanischer Schwingungen (beispielsweise eines Systems aus Masse und Feder) zeigte, dass die Gesamtenergie konstant ist, wobei sich potentielle und kinetische Energie ständig ineinander umwandeln. Auch in einem LC -Stromkreis gibt es zwei Energieformen, elektrische und magnetische Energie. Die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie ist

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} q U_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Setzen wir hier $q_{\max} \cos(\omega t)$ für q ein (Gleichung 26.38), so erhalten wir für die elektrische Energie

$$E_{\text{el}}(t) = \frac{1}{2} \frac{q_{\max}^2}{C} \cos^2(\omega t). \quad (26.40)$$

E_{el} oszilliert mit der Kreisfrequenz 2ω zwischen ihrem Maximalwert $q_{\max}^2/(2C)$ und null (siehe auch Aufgabe 26.12). Die in der Spule gespeicherte magnetische Energie ist, wie wir aus Kapitel 25 (Gleichung 25.21) wissen,

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L I^2. \quad (26.41)$$

Hier setzen wir $I(t) = -\omega q_{\max} \sin(\omega t)$ (Gleichung 26.39) ein und erhalten mit $\omega^2 = 1/LC$

$$E_{\text{mag}}(t) = \frac{1}{2} L \omega^2 q_{\max}^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} \frac{q_{\max}^2}{C} \sin^2(\omega t). \quad (26.42)$$

Auch die magnetische Energie oszilliert mit der Kreisfrequenz 2ω zwischen dem Maximalwert $q_{\max}^2/(2C)$ und null. Die Summe aus elektrischer und magnetischer Energie, die Gesamtenergie, ist zeitlich konstant:

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= E_{\text{el}} + E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{q_{\max}^2}{C} \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} \frac{q_{\max}^2}{C} \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{q_{\max}^2}{C}. \end{aligned}$$

Diese Gesamtenergie entspricht natürlich der ursprünglich (vor dem Schließen des Schalters in Abbildung 26.11) im Kondensator gespeicherten Energie. Die Berechnung der Frequenz und der Stromstärke eines LC-Schwingkreises illustriert Beispiel 26.6.

Beispiel 26.6: Ein LC-Schwingkreis

Ein Kondensator mit einer Kapazität von $2,0 \mu\text{F}$ wird auf 20 V aufgeladen und dann mit einer Spule mit einer Induktivität von $6,0 \mu\text{H}$ verbunden. Geben Sie a) die Frequenz des Schwingkreises und b) die maximale Stromstärke an.

Problembeschreibung: Die Stromstärke wird maximal, wenn dq/dt maximal ist; die Amplitude des Stroms ist folglich ωq_{\max} , und es ist $q = q_{\max}$ für $U_C = U_{C,\max}$ (U_C ist die Spannung am Kondensator).

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Schwingungsfrequenz ν hängt nur von der Kapazität und der Induktivität ab:

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(6,0 \cdot 10^{-6} \text{ H}) \cdot (2,0 \cdot 10^{-6} \text{ F})}} \\ &= [4,6 \cdot 10^4 \text{ Hz}]\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Die maximale Stromstärke hängt vom Maximalwert der Ladung ab:

$$I_{\max} = \omega q_{\max} = \frac{q_{\max}}{\sqrt{LC}}$$

2. Die Beziehung zwischen der maximalen Ladung des Kondensators und dem maximalen Spannungsabfall an diesem Bauelement lautet:

$$q_{\max} = C U_{C,\max}$$

3. Setzen Sie $C U_{C,\max}$ für q_{\max} ein und berechnen Sie I_{\max} :

$$\begin{aligned}I_{\max} &= \frac{C U_{C,\max}}{\sqrt{LC}} = \frac{U_{C,\max}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \\ &= \frac{(20 \text{ V})}{\sqrt{(6,0 \mu\text{H}) \cdot (2,0 \mu\text{F})^{-1}}} = [12 \text{ A}]\end{aligned}$$

Übung 26.2: Ein Kondensator mit einer Kapazität von $5,0 \mu\text{F}$ wird aufgeladen und anschließend über eine Spule entladen. Wie groß muss die Induktivität der Spule sein, damit der Strom im Schwingkreis mit einer Frequenz von $8,0 \text{ kHz}$ oszilliert? ◀ ■

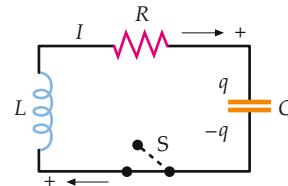


Abbildung 26.13 Ein RLC-Stromkreis.

Neben der Spule und dem Kondensator soll unsere Reihenschaltung nun zusätzlich einen Ohm'schen Widerstand enthalten (Abbildung 26.13). Die Anwendung der Kirchhoff'schen Maschenregel auf diesen **RLC-Stromkreis** liefert

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0 \quad (26.43a)$$

oder

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0, \quad (26.43b)$$

wobei wir wieder $I = dq/dt$ verwendet haben. Die Gleichungen 26.43a und 26.43b entsprechen formal der Bewegungsgleichung für einen gedämpften harmonischen Oszillator, wie wir sie in Kapitel 11 kennen gelernt haben (Gleichung 11.38):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Der erste Term in Gleichung 26.43b, $L d^2q/dt^2$, ist analog dem Produkt aus Masse und Beschleunigung, $m d^2x/dt^2$; der zweite Term, $RI = R dq/dt$, entspricht dem Dämpfungsglied $b dx/dt$, und der dritte Term, q/C , lässt sich der Rückstellkraft kx zuordnen. Schwingt ein Massestück an einer Feder, so führt die Dämpfungskonstante b zur Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme. Der Widerstand R in einem RLC-Schwingkreis ist mit b vergleichbar und für die Umwandlung elektromagnetischer Energie in Wärme verantwortlich.

Ein RLC-Stromkreis ist also ein gedämpfter Schwingkreis. Ist der Widerstand R klein, so ist die Kreisfrequenz ω von Ladung und Strom fast gleich der **Eigenfrequenz** $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ des ungedämpften Kreises; auch eine geringe Dämpfung bewirkt jedoch, dass Ladung und Strom allmählich abnehmen. Eine energetische Betrachtung hilft uns, dies qualitativ zu verstehen. Wir multiplizieren in Gleichung 26.43a jeden Term mit dem Strom I :

$$LI \frac{dI}{dt} + RI^2 + I \frac{q}{C} = 0. \quad (26.44)$$

In der Spule ist die magnetische Energie $\frac{1}{2} LI^2$ gespeichert (siehe Gleichung 25.21); die Ableitung dieses Ausdrucks nach der Zeit liefert gerade den ersten Term in Gleichung 26.44:

$$\frac{d(\frac{1}{2} LI^2)}{dt} = LI \frac{dI}{dt}.$$

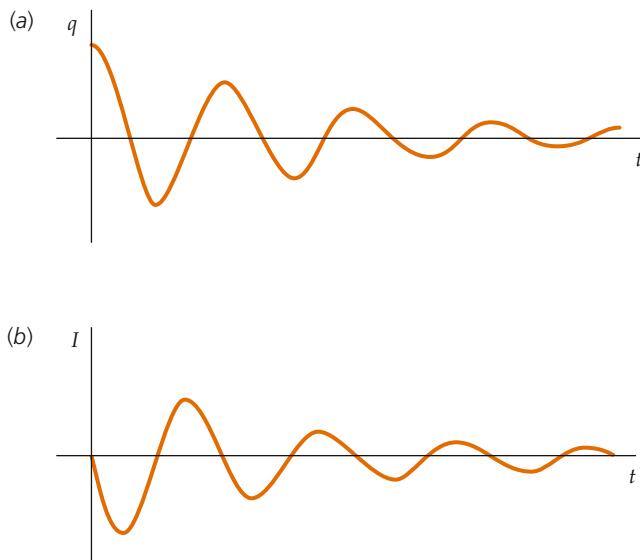


Abbildung 26.14 a) Ladung q und b) Strom I als Funktion der Zeit für den RLC-Kreis in Abbildung 26.13; der Widerstand R ist so klein, dass die Schwingungen nur wenig gedämpft werden.

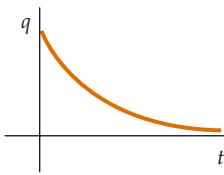


Abbildung 26.15 Die Ladung q als Funktion der Zeit für den RLC-Kreis in Abbildung 26.13; der Widerstand R ist so groß, dass die Schwingungen überdämpft sind (es tritt keine Schwingung mehr auf).

$LI \frac{dI}{dt}$ gibt die zeitliche Veränderung der magnetischen Energie an, die entweder zu- oder abnimmt, je nachdem, ob der Term positiv oder negativ ist. Beachten Sie dabei, dass das Vorzeichen von $LI \frac{dI}{dt}$ davon abhängt, ob I und dI/dt gleiche oder unterschiedliche Vorzeichen haben. Der zweite Term in Gleichung 26.44, RI^2 , gibt die Rate an, mit der am Ohm'schen Widerstand elektromagnetische Energie in Wärme umgewandelt wird. RI^2 ist immer positiv. Weiterhin gilt

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}q^2/C\right)}{dt} = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = I \frac{q}{C};$$

Iq/C , der dritte Term in Gleichung 26.44, gibt an, wie schnell sich die elektrische Energie des Kondensators ändert (positiv oder negativ). Die Summe aus elektrischer und magnetischer Energie kann in diesem Stromkreis nicht konstant sein, weil am Ohm'schen Widerstand ständig Energie in Form von Joule'scher Wärme abgeführt wird. In Abbildung 26.14 wurden q und I in einem RLC-Kreis mit sehr kleinem Widerstand R als Funktionen der Zeit aufgetragen. Je größer der Widerstand ist, desto stärker werden die Schwingungen gedämpft, bis schließlich ein kritischer Wert erreicht ist und keine Schwingung mehr auf-

tritt (aperiodischer Grenzfall). Wählt man R noch größer, so spricht man von einer Überdämpfung. Für diesen Fall ist in Abbildung 26.15 q als Funktion der Zeit dargestellt.

26.5 *Zeigerdiagramme

Bis jetzt haben wir nur Wechselstromkreise betrachtet, die neben einer idealen Spannungsquelle ein einziges passives Bauelement (Ohm'scher Widerstand, Spule, Kondensator) enthielten. Der Spannungsabfall am jeweiligen Bauelement war dann stets gleich der Generatorenspannung. Nun wollen wir Wechselstromkreise diskutieren, die zwei oder mehrere in Reihe geschaltete Bauelemente enthalten. Die Summe aller Spannungsabfälle zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem solchen Kreis ist wieder gleich der Generatorenspannung in diesem Moment, wie wir es von Gleichstromkreisen her kennen. Die Spannungsabfälle an den einzelnen Elementen sind in einem Wechselstromkreis jedoch im Allgemeinen gegeneinander phasenverschoben, weshalb die Summe der effektiven Spannungsabfälle nicht gleich der effektiven Generatorenspannung ist.

Zur Darstellung der Phasenbeziehungen zwischen Spannung und Strom an Spulen, Widerständen und Kondensatoren eignen sich zweidimensionale Vektoren in der x - y -Ebene, sogenannte **Zeiger**. Beispielsweise repräsentiert der Zeiger U_R in Abbildung 26.16 den Spannungsabfall U_R an einem Ohm'schen Widerstand; der Zeiger hat die Länge (den Betrag) RI_{\max} und schließt mit der x -Achse den Winkel θ ein. Strom und Spannung sind in diesen Fall in Phase. Allgemein hängt der Strom in einem stationären Wechselstromkreis von der Zeit ab gemäß

$$I(t) = I_{\max} \cos \theta = I_{\max} \cos (\omega t - \delta) \quad (26.45)$$

mit der Kreisfrequenz ω und einem beliebigen konstanten Phasenwinkel δ . Der Spannungsabfall an einem Ohm'schen Widerstand ist dann

$$U_R(t) = RI(t) = RI_{\max} \cos (\omega t - \delta). \quad (26.46)$$

Er entspricht folglich der x -Komponente des Zeigers U_R , der mit der Kreisfrequenz ω entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn rotiert. Den Strom I können wir als x -Komponente eines Zeigers I auffassen, der in dieselbe Richtung weist wie U_R .

Werden mehrere Bauelemente in Reihe geschaltet, so addieren sich, wie bereits bemerkt, die einzelnen Spannungsabfälle zur Generatorenspannung. Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Ströme. Die algebraische Addition von Sinus- und Kosinusfunktionen mit verschiedenen Amplituden ist sehr mühsam; wesentlich einfacher ist die Addition entsprechender Vektoren (oder auch komplexer Zahlen).

Zeiger werden folgendermaßen addiert: Zunächst schreibt man alle Spannungen und Ströme in der Form $A \cos (\omega t - \delta)$ auf. Den Momentanwert setzt man gleich der x -Komponente A_x eines Zeigers, der einen Winkel $(\omega t - \delta)$ mit der positiven x -Achse einschließt. Anstatt nun zwei Werte $A \cos (\omega t - \delta_1)$ und

26.6 *Erzwungene Schwingungen in RLC-Stromkreisen

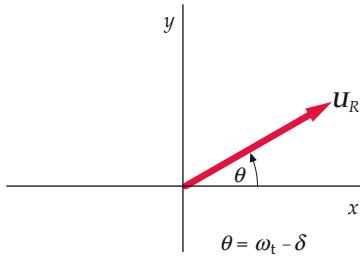


Abbildung 26.16 Der Spannungsabfall an einem Ohm'schen Widerstand kann in Form eines Vektors \mathbf{U}_R , eines sogenannten Zeigers, dargestellt werden. Der Zeiger hat den Betrag $I_{\max} R$, schließt mit der x-Achse den Winkel $\theta = \omega t - \delta$ ein und rotiert mit der Kreisfrequenz ω . Seine x-Komponente ist gleich der Momentanspannung $U_R = I R$.

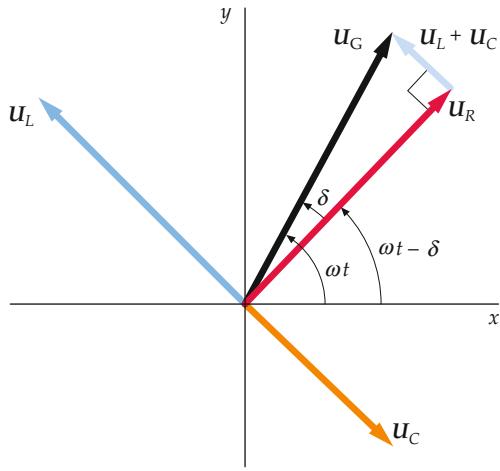


Abbildung 26.17 Zeigerdarstellung der Spannungen U_R , U_L und U_C . Jeder der drei Zeiger rotiert mit der Kreisfrequenz ω entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. Der Momentanwert des Spannungsabfalls an einem der Bauelemente ist zu jedem Zeitpunkt gleich der x-Komponente des zugehörigen Zeigers, während der Spannungsabfall an der RLC-Reihenschaltung gleich der x-Komponente des resultierenden Zeigers $\mathbf{U}_G = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C$ ist.

$B \cos(\omega t - \delta_2)$ algebraisch zu addieren, stellt man die Größen in Form zweier Zeiger \mathbf{A} und \mathbf{B} dar, deren Summe $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ geometrisch ermittelt werden kann. Die resultierende Größe (Spannung oder Strom) entspricht dann der x-Komponente des resultierenden Zeigers, $C_x = A_x + B_x$. Im Zeigerdiagramm erkennen wir mühelos die relativen Längen (Beträge) und Phasen der einzelnen Zeiger.

Betrachten wir nun einen Wechselstromkreis, in dem eine Spule L , ein Kondensator C und ein Ohm'scher Widerstand R in Reihe geschaltet sind. Durch alle Bauelemente fließt der gleiche Strom; wir stellen ihn als x-Komponente eines Zeigers \mathbf{I} dar. Für den Spannungsabfall an der Spule, U_L , wählen wir den Zeiger \mathbf{U}_L mit dem Betrag $X_L I_{\max}$. Er eilt dem Zeiger \mathbf{I} um 90° voraus. Analog gehört zum Spannungsabfall am Kondensator U_C der Zeiger \mathbf{U}_C mit dem Betrag $X_C I_{\max}$, der \mathbf{I} um 90° nacheilt. Die x-Komponente des Zeigers \mathbf{U}_G entspricht dem Spannungsabfall

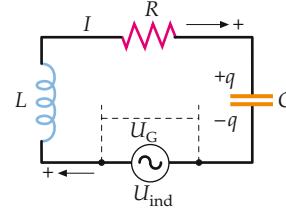


Abbildung 26.18 Reihenschwingkreis (RLC-Reihenschaltung) mit Wechselstromgenerator.

über der gesamten Reihenschaltung. Alle vier Zeiger wurden in Abbildung 26.17 in ein Diagramm eingetragen. Sie rotieren entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn mit der Kreisfrequenz ω . Der Momentanwert des Spannungsabfalls an einem der Bauelemente ist zu jedem Zeitpunkt durch die x-Komponente des zugehörigen Zeigers gegeben.

26.6 *Erzwungene Schwingungen in RLC-Stromkreisen

Der Reihenschwingkreis

Abbildung 26.18 zeigt eine Reihenschaltung aus Ohm'schem Widerstand, Spule und Kondensator (einen sogenannten Reihenschwingkreis) mit einem Generator, der eine sinusförmige Wechselspannung liefert. Die Generatorenspannung sei $U_G(t) = U_{G,\max} \cos(\omega t)$. Wir wenden die Kirchhoff'sche Maschenregel auf den Stromkreis an,

$$U_{G,\max} \cos(\omega t) - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{q}{C} = 0,$$

und stellen unter Verwendung von $I = dq/dt$ um:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U_{G,\max} \cos(\omega t). \quad (26.47)$$

Eine Gleichung dieser Form ist uns bei der Diskussion der erzwungenen mechanischen Schwingung eines Massestücks an einer Feder bereits begegnet (siehe Gleichung 11.53):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t).$$

(Hier haben wir, wie in Kapitel 11, die Kraftkonstante k als Produkt aus der Masse m und dem Quadrat der Eigenfrequenz ω_0^2 formuliert. Eine ähnliche Beziehung könnten wir für die Kapazität in Gleichung 26.47 verwenden, $1/C = L \omega_0^2$.)

Die Lösung der Differentialgleichung 26.47 wollen wir nicht explizit berechnen, sondern qualitativ diskutieren, wie wir es auch in Kapitel 11 mit Gleichung 11.53 getan haben. Der im Schwingkreis fließende Strom setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen: einem transienten (nach dem Einschalten nur kurz

andauernden) Nichtgleichgewichtsanteil und einem Gleichgewichtsanteil (der stationären Lösung der Gleichung). Der Nichtgleichgewichtsanteil hängt von den Anfangsbedingungen (der Anfangsphase des Generators und der Anfangsladung des Kondensators) ab und fällt während des *Einschwingens* des Kreises exponentiell mit der Zeit ab, bis er schließlich vernachlässigt werden kann. Von Bedeutung ist dann nur noch der Gleichgewichtstrom. Er ergibt sich als Lösung von Gleichung 26.47:

$$I(t) = I_{\max} \cos (\omega t - \delta) . \quad (26.48)$$

Für die Phasenkonstante δ gilt dabei:

$$\tan \delta = \frac{X_L - X_C}{R} . \quad (26.49)$$

PHASENCONSTANTE EINES REIHENSCHWINGKREISES

Die maximale Stromstärke ist

$$I_{\max} = \frac{U_{G,\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_{G,\max}}{Z} \quad (26.50)$$

MAXIMALE STROMSTÄRKE EINES REIHENSCHWINGKREISES

mit

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} . \quad (26.51)$$

IMPEDANZ EINES REIHENSCHWINGKREISES

Die Differenz zwischen induktivem und kapazitivem Blindwiderstand, $(X_L - X_C)$, ist der **Gesamtblindwiderstand** des Schwingkreises, und die Größe Z (formal ein Widerstand) heißt Scheinwiderstand oder **Impedanz** des Schwingkreises. Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

$$I(t) = \frac{U_{G,\max}}{Z} \cos (\omega t - \delta) . \quad (26.52)$$

Zu Gleichung 26.52 gelangen wir auch mithilfe einer einfachen Zeigerdarstellung. In Abbildung 26.19 ist je ein Zeiger für den Spannungsabfall am Ohm'schen Widerstand, an der Spule und am Kondensator eingezeichnet. Die x -Komponente entspricht jeweils dem momentanen Spannungsabfall am betreffenden Bauelement. Die Summe der x -Komponenten ist gleich der x -Komponente der Summe der Zeiger; das bedeutet, die Summe der x -Komponenten ist gleich der Summe aller Spannungsabfälle, und diese wiederum ist gemäß der Kirchhoff'schen Maschenregel gleich der momentanen Generatorenspannung.

Die Generatorenspannung $U_G(t) = U_{G,\max} \cos (\omega t)$ stellen wir nun als Zeiger \mathbf{U}_G mit der Länge $U_{G,\max}$ dar. Dann ist

$$\mathbf{U}_G = \mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C . \quad (26.53)$$

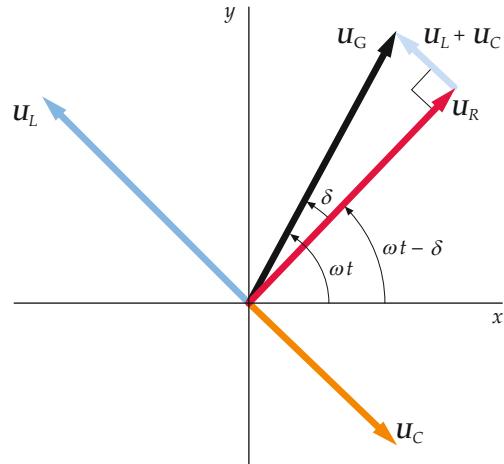


Abbildung 26.19 Zeigerdiagramm zur Veranschaulichung der Phasenbeziehung zwischen den Spannungsabfällen an den Bauelementen eines Reihenschwingkreises. Der Spannungsabfall U_R am Ohm'schen Widerstand ist mit dem Strom in Phase; der Spannungsabfall U_L an der Spule eilt dem Strom um 90° voraus, und der Spannungsabfall U_C am Kondensator eilt dem Strom um 90° nach. Die Summe der zu den Spannungen gehörenden Zeiger ist der Zeiger der Generatorenspannung \mathbf{U}_G , der einen Winkel δ mit dem Zeiger zu U_R einschließt. Im dargestellten Fall ist U_L größer als U_C , und der Strom eilt der Generatorenspannung um δ nach.

Für die Beträge bedeutet dies

$$\begin{aligned} U_{G,\max} &= |\mathbf{U}_R + \mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C| \\ &= \sqrt{U_{R,\max}^2 + (U_{L,\max} - U_{C,\max})^2} . \end{aligned}$$

Nun gilt aber $U_R = RI_{\max}$, $U_L = X_L I_{\max}$ und $U_C = X_C I_{\max}$; damit ist

$$U_{G,\max} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} I_{\max} = Z I_{\max} .$$

Der Zeiger \mathbf{U}_G schließt mit \mathbf{U}_R den Winkel δ ein, wie Sie Abbildung 26.19 entnehmen. Aus der Skizze folgt außerdem

$$\tan \delta = \frac{|\mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C|}{|\mathbf{U}_R|} = \frac{X_L I_{\max} - X_C I_{\max}}{R I_{\max}} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

im Einklang mit Gleichung 26.49. Der Winkel zwischen \mathbf{U}_G und der x -Achse ist ωt , weshalb \mathbf{U}_R mit der x -Achse den Winkel $\omega t - \delta$ einschließt. Der durch \mathbf{U}_R repräsentierte Spannungsabfall am Ohm'schen Widerstand ist in Phase mit dem Strom, für den sich folglich ergibt:

$$I(t) = I_{\max} \cos (\omega t - \delta) = \frac{U_{G,\max}}{Z} \cos (\omega t - \delta) .$$

Dies ist aber gerade Gleichung 26.52.

Den Zusammenhang zwischen der Impedanz Z , dem Ohm'schen Widerstand R und dem Gesamtblindwiderstand $X_L - X_C$ merken Sie sich am besten anhand des in Abbildung 26.20 gezeigten rechtwinkligen Dreiecks.

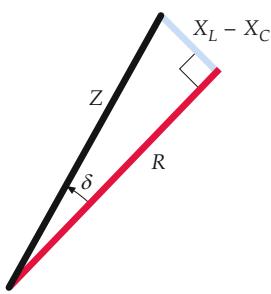


Abbildung 26.20 Dieses rechtwinklige Dreieck gibt den Zusammenhang zwischen kapazitivem und induktivem Blindwiderstand, Ohm'schem Widerstand, Impedanz und Phasenkonstante in einem Reihenschwingkreis wieder.

Resonanz

Sind in einem Reihenschwingkreis die Blindwiderstände X_L und X_C gleich, so ist der Gesamtblindwiderstand null, und die Impedanz nimmt den kleinstmöglichen Wert R an. I_{\max} wird maximal und der Phasenwinkel δ null; Strom und Spannung sind damit in Phase. Die Kreisfrequenz ω nennen wir für diesen Fall ω_{Res} ; wir erhalten sie aus

$$X_L = X_C$$

$$\omega_{\text{Res}} L = \frac{1}{\omega_{\text{Res}} C}$$

oder

$$\omega_{\text{Res}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Dies entspricht der Eigenfrequenz ω_0 . Ist die Generatorfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Schwingkreises, so ist die Impedanz minimal und I_{\max} maximal. Man sagt, der Schwingkreis ist in **Resonanz**. Die Eigenfrequenz ω_0 heißt deshalb auch **Resonanzfrequenz**. Das Phänomen der Resonanz eines elektrischen Schwingkreises ist mit der Resonanz einer erzwungenen mechanischen Schwingung vergleichbar.

Wie wir bereits festgestellt haben, wird weder an einer Spule noch an einem Kondensator Energie in Joule'sche Wärme umgewandelt. Die in einem Reihenschwingkreis umgesetzte mittlere Leistung entspricht deshalb der Leistungsaufnahme des Ohm'schen Widerstands, deren Momentanwert gegeben ist durch

$$P(t) = RI(t)^2 = R(I_{\max} \cos(\omega t - \delta))^2.$$

Wir mitteln die Leistung über eine oder mehrere Schwingungsperioden und verwenden die Beziehung $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$. So erhalten wir

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_{\max}^2 = RI_{\text{eff}}^2. \quad (26.54)$$

In diese Gleichung setzen wir $R/Z = \cos \delta$ (Abbildung 26.20) und $I_{\max} = U_{G,\max}/Z$ ein:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_{G,\max} I_{\max} \cos \delta = U_{G,\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \delta. \quad (26.55)$$

26.6 *Erzwungene Schwingungen in RLC-Stromkreisen

Die Größe $\cos \delta$ bezeichnet man als **Leistungsfaktor** des Schwingkreises. Im Resonanzfall ist $\delta = 0$ und $\cos \delta = 1$.

Wir können die Leistung auch als Funktion der Kreisfrequenz ω schreiben. Mit $I_{\text{eff}} = U_{G,\text{eff}}/Z$ folgt aus Gleichung 26.54

$$\langle P \rangle = RI_{\text{eff}}^2 = \frac{R}{Z^2} U_{G,\text{eff}}^2.$$

Aus der Definition der Impedanz, Gleichung 26.49, erhalten wir mit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

$$\begin{aligned} Z^2 &= (X_L - X_C)^2 + R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 + R^2 \\ &= \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + R^2. \end{aligned}$$

Mit diesem Ausdruck für Z^2 ist die mittlere Leistungsaufnahme des Schwingkreises in Abhängigkeit von ω

$$\langle P \rangle = \frac{\omega^2 R}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 L^2 + \omega^2 R^2} U_{G,\text{eff}}^2. \quad (26.56)$$

In Abbildung 26.21 ist die mittlere vom Generator an den Schwingkreis gelieferte Leistung als Funktion der Generatorfrequenz für zwei verschiedene Widerstände R aufgetragen. Diese sogenannten **Resonanzkurven** entsprechen den Leistungsfrequenz-Kurven, die wir bei der Diskussion erzwungener mechanischer Schwingungen (Abschnitt 11.5) erhalten haben. Die mittlere Leistung ist maximal, wenn die Generatorfrequenz

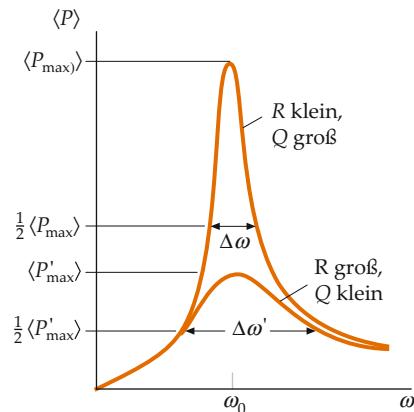


Abbildung 26.21 Mittlere Leistungsaufnahme eines Reihenschwingkreises als Funktion der Frequenz. Die Leistung ist maximal, wenn die Generatorfrequenz ω gleich der Eigenfrequenz des Stromkreises $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ist. Für kleine Werte von R ist der Gütefaktor groß und die Resonanz scharf. Die Bandbreite $\Delta\omega$ misst man zwischen den beiden Punkten, an denen die Leistung die Hälfte ihres Maximalwerts erreicht.

gleich der Resonanzfrequenz ist. Bei kleinem Widerstand R ist die Resonanzkurve schmal; je größer der Widerstand ist, desto breiter ist die Resonanzkurve. Eine charakteristische Größe der Resonanzkurve ist die **Bandbreite** $\Delta\omega$, die Differenz der Frequenzen zweier Punkte, an denen die Leistung die Hälfte ihres Maximalwerts erreicht (Abbildung 26.21). Ist die Bandbreite wesentlich kleiner als die Resonanzfrequenz selbst, so spricht man von einer „scharfen“ Resonanz.

In Kapitel 11 haben wir den Gütefaktor Q eines mechanischen Schwingers definiert, $Q = \omega_0 m/b$ mit der Masse m und der Dämpfungskonstante b . Bei geringer Dämpfung gilt $Q = 2\pi E/|\Delta E|$; E ist die Gesamtenergie des schwingenden Systems zu Beginn einer Periode, ΔE der Energieverlust während dieser Periode in Form von Wärme. In ähnlicher Weise können wir einen **Gütefaktor** (oder **Q-Faktor**) eines Reihenschwingkreises definieren. Dabei entspricht L der Masse m und R der Dämpfungskonstante b , wir erhalten daher

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} = \frac{\omega_0 L}{R}. \quad (26.57)$$

Ist die Resonanz hinreichend scharf (das bedeutet Q größer als etwa 2 bis 3), so gilt für den Gütefaktor die Näherung

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}. \quad (26.58)$$

GÜTEFAKTOREINES REIHENSCHWINGKREISES

Resonanzschwingkreise sind ein wesentlicher Bestandteil von Rundfunkempfängern. Die Resonanzfrequenz wird mithilfe eines regelbaren Kondensators oder einer regelbaren Spule abgestimmt. Wenn die Eigenfrequenz des Schwingkreises mit der Frequenz eines von der Antenne empfangenen Signals übereinstimmt, kommt es zur Resonanz. Im Antennenkreis ist die Stromstärke dann relativ hoch. Damit störende Signale mit benachbarter Frequenz nicht gleichzeitig empfangen werden, muss der Gütefaktor des Schwingkreises hinreichend groß sein. Der vom Nachbarsignal hervorgerufene Strom im Antennenkreis kann in diesem Fall gegenüber dem vom gewünschten Signal erzeugten Strom vernachlässigt werden.

Die Resonanzeigenschaften der Reihenschwingkreise haben wichtige technische Anwendungen und werden in den Beispielen 26.7 bis 26.11 näher betrachtet.

Frage 26.1

Betrachten Sie eine Reihenschaltung aus einem idealen Wechselspannungsgenerator mit konstanter Frequenz, einem Ohm'schen Widerstand, einem Kondensator und einer Spule mit beweglichem Eisenkern. Wenn Sie den Kern etwas weiter in die Spule hineinschieben, beobachten Sie einen leichten Anstieg der effektiven Stromstärke. War die Resonanzfrequenz des Kreises vor dem Hineinschieben a) kleiner als die Generatorfrequenz, b) gleich der Generatorfrequenz oder c) größer als die Generatorfrequenz?

Beispiel 26.7: Erzwungene Schwingungen im Reihenschwingkreis

Gegeben ist ein Reihenschwingkreis mit der Induktivität $L = 2,0 \text{ H}$, der Kapazität $C = 2,0 \mu\text{F}$, dem Ohm'schen Widerstand $R = 20 \Omega$ und einem Generator, der eine Wechselspannung von maximal 100 V mit durchstimmbarer Frequenz liefert. Zu berechnen sind die Resonanzfrequenz ν_0 , der Gütefaktor des Kreises, die Bandbreite $\Delta\nu$ sowie die Amplitude des Stroms im Resonanzfall.

Problembeschreibung: Die Resonanzfrequenz folgt aus der Beziehung $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, der Gütefaktor ist gegeben durch Gleichung 26.57, $Q = \omega_0 L/R$, woraus sich mit Gleichung 26.58 die Bandbreite ergibt. Das Ohm'sche Gesetz für den Resonanzfall liefert dann die maximale Stromstärke.

Lösung: 1. Die Resonanzfrequenz lautet $\nu_0 = \omega_0/2\pi$:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(2,0 \text{ H}) \cdot (2,0 \cdot 10^{-6} \text{ F})}} = \boxed{80 \text{ Hz}} \end{aligned}$$

2. Damit berechnen Sie den Gütefaktor Q :

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi(80 \text{ Hz}) \cdot (2,0 \text{ H})}{20 \Omega} = \boxed{50}$$

3. Für die Bandbreite $\Delta\nu$ erhalten Sie:

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0}{Q} = \frac{80 \text{ Hz}}{50} = \boxed{1,6 \text{ Hz}}$$

4. Im Resonanzfall ist die Impedanz gleich R und $I_{\max} = U_{G,\max}/R$:

$$I_{\max} = \frac{U_{G,\max}}{R} = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} = \boxed{5,0 \text{ A}}$$

Plausibilitätsprüfung: Im Resonanzfall sind sowohl der induktive als auch der kapazitive Blindwiderstand gegeben durch $X_L = X_C = \omega_0 L = 2\pi(80 \text{ Hz})(2,0 \text{ H}) = 1,0 \text{ k}\Omega$. Der Ohm'sche Widerstand ist gleich 20Ω , also deutlich geringer, weshalb der Gütefaktor hoch und die Resonanz scharf sein sollte. Die Ergebnisse der Schritte 2 und 3 bestätigen diese Überlegung.

Weitergedacht: Diese Resonanz ist tatsächlich ziemlich scharf: Die Bandbreite von $1,6 \text{ Hz}$ beläuft sich auf weniger als 2 % der Resonanzfrequenz von 80 Hz . ■

Beispiel 26.8: Strom, Phase und Leistung im Reihenschwingkreis**ZUR ÜBUNG**

Der Generator aus Beispiel 26.7 liefere eine Wechselspannung mit einer Frequenz von 60 Hz. Berechnen Sie a) die maximale Stromstärke, b) die Phasenkonstante δ , c) den Leistungsfaktor und d) die im Mittel abgegebene Generatorleistung.

Problembeschreibung: Die Amplitude des Stroms ist gleich der Amplitude der Generatorenspannung, geteilt durch die Impedanz des Schwingkreises. Aus der Beziehung $\tan \delta = (X_L - X_C) / R$ ergibt sich die Phasenkonstante δ und damit der Leistungsfaktor. Die mittlere Leistung erhalten Sie aus Gleichung 26.54 oder 26.55.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Schreiben Sie die Amplitude des Stroms als Funktion der maximalen Generatorenspannung $U_{G,\max}$ und der Impedanz auf.
2. Berechnen Sie den kapazitiven und den induktiven Blindwiderstand sowie den Gesamtblindwiderstand.
3. Berechnen Sie die Impedanz des Schwingkreises.
4. Mithilfe der Ergebnisse aus Schritt 2 und 3 erhalten Sie nun I_{\max} .

Teilaufgabe b

Zur Berechnung von δ verwenden Sie die Resultate aus Schritt 2 und 3 von Teilaufgabe a.

Teilaufgabe c

Aus diesem Wert von δ berechnen Sie den Leistungsfaktor.

Teilaufgabe d

Gleichung 26.54 liefert Ihnen schließlich die im zeitlichen Mittel abgegebene Generatorleistung.

Ergebnisse der Lösungsschritte:**Teilaufgabe a**

- 1.

$$I_{\max} = \frac{U_{G,\max}}{Z}$$

- 2.

$$X_C = 1326 \Omega$$

und

$$X_L = 754 \Omega,$$

also

$$X_L - X_C = -572 \Omega$$

3.

$$Z = 573 \Omega$$

4.

$$I_{\max} = [0,17 \text{ A}]$$

Teilaufgabe b

$$\tan \delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\delta = [-88,0^\circ]$$

Teilaufgabe c

$$\cos \delta = [0,035]$$

Teilaufgabe d

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_{\max}^2 = [0,29 \text{ W}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wir überprüfen den Mittelwert der Leistung mithilfe des in Teilaufgabe c berechneten Leistungsfaktors. Es ist $\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_{G,\max} I_{\max} \cos \delta = 0,29 \text{ W}$. Wie Sie sehen, stimmt dieser Wert mit dem Resultat von Teilaufgabe d überein.

Weitergedacht: Die Generatorfrequenz von 60 Hz ist deutlich geringer als die Resonanzfrequenz des Schwingkreises von 79,6 Hz. (Erinnern Sie sich an Beispiel 26.7: Die Bandbreite der Resonanz beträgt nur 1,6 Hz.) Folglich ist der Gesamtblindwiderstand des Kreises weit größer als dessen Ohm'scher Widerstand (wir betrachten die Beträge). Weit von der Resonanz entfernt trifft dies stets zu. Ähnliches gilt für die hier berechnete maximale Stromstärke (0,17 A) im Vergleich zur maximalen Stromstärke im Resonanzfall (5,0 A). – Ein Blick auf Abbildung 26.19 zeigt, dass der Strom bei negativer Phasenkonstante δ der Generatorenspannung vorausseilt.

Beispiel 26.9: Resonanz im Reihenschwingkreis

ZUR ÜBUNG

Gegeben ist der in Beispiel 26.7 beschriebene Reihenschwingkreis. Berechnen Sie die Maximalwerte der Spannungsabfälle am Ohm'schen Widerstand, an der Spule und am Kondensator im Resonanzfall.

Problembeschreibung: Der maximale Spannungsabfall am Ohm'schen Widerstand beträgt $R I_{\max}$. Zur Berechnung des Spannungsabfalls an der Spule und am Kondensator multiplizieren wir analog I_{\max} mit dem zugehörigen Blindwiderstand. Aus Beispiel 26.7 ist bekannt: $I_{\max} = 5,0 \text{ A}$, $\nu_0 = 80 \text{ Hz}$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Berechnen Sie $U_{R,\max} = R I_{\max}$.

2. Berechnen Sie $U_{L,\max}$ aus I_{\max} und X_L .

3. Berechnen Sie $U_{C,\max}$ aus I_{\max} und X_C .

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$U_{R,\max} = R I_{\max} = [100 \text{ V}]$$

2.

$$U_{L,\max} = X_L I_{\max} = \omega_0 L I_{\max} = [5000 \text{ V}]$$

3.

$$U_{C,\max} = X_C I_{\max} = \frac{1}{\omega_0 C} I_{\max} = [5000 \text{ V}]$$

Plausibilitätsprüfung: Wie nicht anders zu erwarten, sind die Blindwiderstände im Resonanzfall gleich (jeweils gleich 1000Ω) – schließlich haben wir die Blindwiderstände gleichgesetzt, um die Resonanzfrequenz zu berechnen.

Weitergedacht: In Abbildung 26.22 sehen Sie das Zeigerdiagramm für die Spannungsabfälle an Ohm'schem Widerstand, Spule und Kondensator. Am Widerstand fällt eine Spannung von maximal 100 V (relativ ungefährlich) ab, gleich dem Maximalwert der Generatorenspannung. Die mit je 5000 V deutlich höheren Spannungsabfälle an Spule und Kondensator sind gegeneinander um 180° phasenverschoben. Im Resonanzfall nimmt die Spannung an der Spule zu jedem Zeitpunkt den negativen Wert der Spannung am Kondensator an. Die Summe beider Spannungen ist folglich null und der Spannungsabfall am Ohm'schen Widerstand gleich der Generatorenspannung.

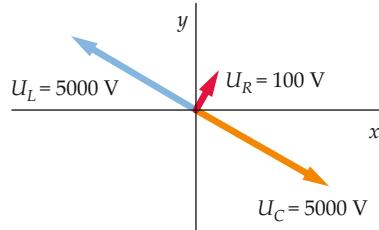


Abbildung 26.22 Zeigerdiagramm der Spannungsabfälle an Ohm'schem Widerstand, Spule und Kondensator.

Beispiel 26.10: Ein RC-Tiefpassfilter

Abbildung 26.23 zeigt eine Reihenschaltung aus einem Ohm'schen Widerstand R , einem Kondensator C und einem Generator, der eine Wechselspannung $U_E(t) = \sqrt{2} U_{E,\text{eff}} \cos(\omega t)$ erzeugt. Berechnen Sie U_A – die Spannung am Kondensator, die am Ausgang der Schaltung abgegriffen werden kann, als Funktion der Kreisfrequenz ω . (Der Maximalwert von U_A nimmt mit steigender Frequenz der Wechselspannung ab.)

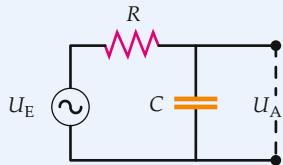


Abbildung 26.23 Schaltungsnetz eines RC-Tiefpassfilters.

Problembeschreibung: Der effektive Spannungsabfall am Kondensator ist gleich dem Produkt aus der effektiven Stromstärke und dem kapazitiven Blindwiderstand. Die effektive Stromstärke erhalten wir, indem wir die effektive Generatorenspannung durch die Impedanz der RC -Reihenschaltung teilen.

Lösung: 1. Der effektive Spannungsabfall am Kondensator ist gleich dem Produkt aus I_{eff} und X_C :

$$U_{A,\text{eff}} = X_C I_{\text{eff}}$$

2. Die effektive Stromstärke hängt von der anliegenden effektiven Spannung und von der Impedanz des Stromkreises ab:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{E,\text{eff}}}{Z}$$

26.6 *Erzwungene Schwingungen in RLC-Stromkreisen

3. In diesem Stromkreis liefern nur R und X_C einen Beitrag zur Impedanz:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

4. Setzen Sie die Beziehungen aus Schritt 2 und 3 sowie $X_C = 1/(\omega C)$ in die Gleichung aus Schritt 1 ein und berechnen Sie den Spannungsabfall am Kondensator U_A :

$$\begin{aligned} U_{A,\text{eff}} &= X_C I_{\text{eff}} = \frac{X_C U_{E,\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \\ &= \frac{U_{E,\text{eff}}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{X_C^2}}} = \frac{U_{E,\text{eff}}}{\sqrt{1 + \omega^2 (R C)^2}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: In Schritt 4 ergeben sich die korrekten Dimensionen: Die Dimension von ω ist $1/t$ und die von RC ist t , folglich ist das Produkt ωRC dimensionslos.

Weitergedacht: Eine solche Schaltung nennt man *RC-Tiefpassfilter*: Sie lässt niedrfrequente Signale nahezu unverändert durch, höherfrequente Signale hingegen werden stark gedämpft. Im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ wird die abgegriffene Ausgangsspannung U_A gleich der Eingangsspannung U_E , für $\omega \rightarrow \infty$ geht U_A gegen null. Die Kurve in Abbildung 26.24 veranschaulicht das Verhältnis von Eingangs- zu Ausgangsspannung als Funktion der Kreisfrequenz.

Übung 26.3: Welche Ausgangsspannung kann man an einer ähnlichen Schaltung abgreifen, wenn der Kondensator durch eine Spule L ersetzt wird? ◀

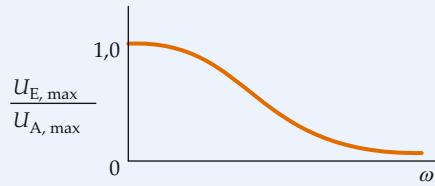


Abbildung 26.24 Darstellung der Dämpfung von hochfrequenten Signalen, wobei tieffrequente nahezu unverändert durchgelassen werden, daher die Bezeichnung.

Beispiel 26.11: Ein UKW-Empfänger

Nachdem Sie sich nun ausgiebig mit elektrischen Schwingkreisen beschäftigt haben, möchten Sie einen Rundfunkempfänger bauen. Sie erinnern sich, dass die Frequenzeinteilung an einem Abstimmknopf für die

UKW-Senderwahl in Megahertz angegeben ist. Nun möchten Sie wissen, um wie viel Prozent Sie die Induktivität der Spule des Abstimmkreises variieren müssen (von einem mittleren Wert aus aufwärts und abwärts), um den gesamten UKW-Bereich überstreichen zu können. Als regelbare Spulen verwendet man meist Zylinderspulen mit Eisenkern; durch Hineinschieben oder Herausziehen des Kerns wird die gewünschte Induktivität eingestellt. Das UKW-Frequenzband reicht von **88 bis 108 MHz**.

Problembeschreibung: Wir setzen die Induktivität zur Resonanzfrequenz des Schwingkreises in Beziehung: $2\pi\nu_0 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Aus der prozentualen Änderung der Frequenz können wir damit die prozentuale Änderung der Induktivität berechnen. Die Kapazität C ist konstant.

Lösung: 1. Schreiben Sie die Beziehung zwischen der Kreisfrequenz im Resonanzfall und der Induktivität L auf:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 2\pi\nu_0,$$

also

$$v_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

2. L ist umgekehrt proportional zu v_0^2 :

$$L = \frac{a}{v_0^2}$$

mit

$$a = \frac{1}{4\pi^2 C}$$

3. Nun geben Sie die relative Änderung von L in Abhängigkeit von den Frequenzen an: Ist L maximal, so ist v minimal und umgekehrt. In der Mitte zwischen Maximal- und Minimalfrequenz liegt ν_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L}{L} &= \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L} = \frac{a v_{\max}^{-2} - a v_{\min}^{-2}}{a v_0^{-2}} \\ &= v_0^2 \left(\frac{1}{v_{\max}^2} - \frac{1}{v_{\min}^2} \right) = 98^2 \cdot \left(\frac{1}{108^2} - \frac{1}{88^2} \right) \\ &= -0,417 \end{aligned}$$

4. Das negative Vorzeichen ist hier nicht von Bedeutung (es sagt lediglich aus, dass die Resonanzfrequenz sinkt, wenn die Induktivität steigt). Sie müssen das Resultat aus Schritt 3 also nur noch in Form von Prozenten angeben:

Die Induktivität ändert sich um ungefähr **42 %**.

Der Parallelschwingkreis

In Abbildung 26.25 sehen Sie eine Parallelschaltung aus einem Ohm'schen Widerstand R , einem Kondensator C , einer Spule L und einem Wechselspannungsgenerator. Der vom Generator erzeugte Gesamtstrom I teilt sich in drei Ströme: den Strom I_R durch den Ohm'schen Widerstand, den Strom I_C durch den Kondensator und den Strom I_L durch die Spule. Der momentane Spannungsabfall ist an allen drei Bauelementen gleich. Am Ohm'schen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase, und der Zeiger I_R hat den Betrag U_{\max}/R . An der Spule eilt die Spannung dem Strom um 90° voraus, folglich eilt I_R der Spannung um 90° nach, und der Zeiger I_L hat den Betrag U_{\max}/X_L . Am Kondensator schließlich eilt I_C der Spannung um 90° voraus, der Zeiger I_C hat den Betrag U_{\max}/X_C . Die zu den Strömen gehörenden Zeiger sind in Abbildung 26.26 in ein Diagramm eingetragen. Wie Sie dem Diagramm entnehmen, ist der Gesamtstrom I die x -Komponente der Vektorsumme der Zeiger der einzelnen Ströme. Damit erhalten wir für den Betrag des Gesamtstromzeigers

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{U_{\max}}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_{\max}}{X_L} - \frac{U_{\max}}{X_C}\right)^2} = \frac{U_{\max}}{Z}. \quad (26.59) \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen der Impedanz Z des Schwingkreises einerseits und dem Ohm'schen Widerstand sowie dem kapazitiven und dem induktiven Blindwiderstand andererseits



Funkgerät an Bord eines Schiffes um 1920. Links vom Funker sind die Spulen und Plattenkondensatoren des Abstimmkreises zu erkennen. (© George H. Clark Radioana Collection-Archive Center, National Museum of American History.)

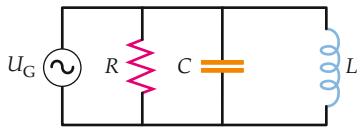


Abbildung 26.25 Ein Parallelschwingkreis.

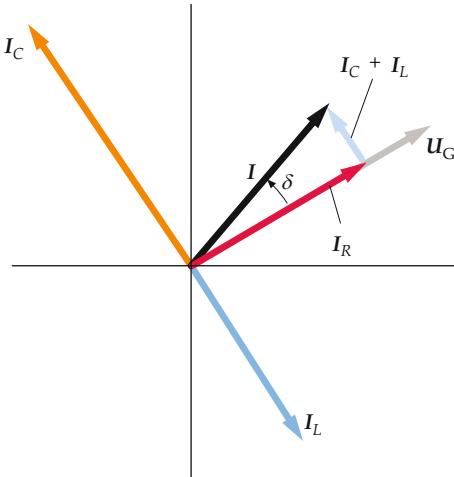


Abbildung 26.26 Zeigerdiagramm für Ströme und Spannung im Parallelschwingkreis aus Abbildung 26.25. Der Spannungsabfall ist an jedem Bauelement gleich. Am Ohm'schen Widerstand sind Strom und Spannung in Phase; am Kondensator eilt der Strom der Spannung um 90° voraus, und an der Spule eilt der Strom der Spannung um 90° nach. Der Phasenunterschied δ zwischen dem Gesamtstrom und der Spannung hängt vom Verhältnis der Stromstärken ab, das wiederum durch die Größe des Ohm'schen Widerstands und der Blindwiderstände bestimmt wird.

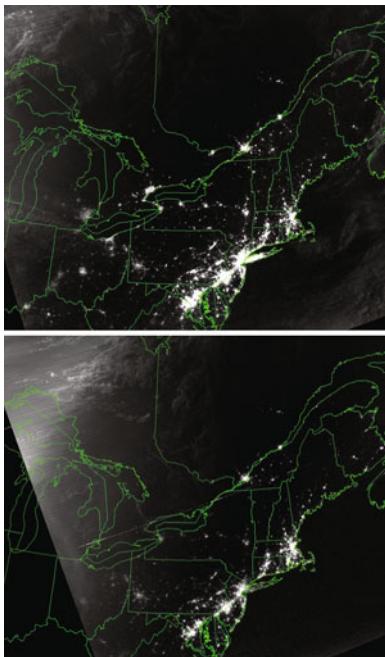
lautet

$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2. \quad (26.60)$$

Im Resonanzfall sind die Ströme durch die Spule und durch den Kondensator gegeneinander um 180° phasenverschoben. Der Gesamtstrom ist dann minimal und gleich dem Strom, der durch den Ohm'schen Widerstand fließt. Gleichung 26.59 entnehmen wir, dass in dieser Situation Z maximal, also $1/Z$ minimal ist. Gleichung 26.60 sagt aus, dass das Minimum von $1/Z$ für $X_L = X_C$ bei $1/R$ liegt. Setzen wir X_L und X_C gleich und lösen nach ω auf, so erhalten wir die Resonanzfrequenz, die der Eigenfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ entspricht.

⌚ Im Kontext: Das elektrische Leitungsnetz: Vom Kraftwerk bis zur Steckdose

Die Mehrheit der Weltbevölkerung ist heute von einer zuverlässig funktionierenden Stromversorgung abhängig. Zum verlustarmen Transport von Elektroenergie über weite Entfernungen ist ein Netz aus Generatoren, Umspannwerken, Transformatorenstationen und Leitungen erforderlich.¹ 2005 umfasste das deutsche Energieversorgungsnetz rund 1,7 Millionen Kilometer – davon waren 36 000 km Höchstspannungsleitungen (220 oder 380 kV) zur überregionalen Stromverteilung – und außerdem mehr als eine halbe Million Transformatorstationen.² Da das Stromnetz weltweit ständig wächst^{3,4,5} und immer komplizierter wird, nimmt auch die Zahl der Schwachstellen zu. Das deutsche Versorgungsnetz gehört europaweit zu den stabilsten; im Jahr 2006 entfielen auf jeden Kunden nur 21,53⁶ Minuten Unterbrechungszeit.



Diese Satellitenaufnahmen von Nordamerika und Kanada zeigen die Auswirkungen des Stromausfalls am 14. August 2003, einem Donnerstagabend. Das obere Bild wurde 20 Stunden vor dem Blackout aufgezeichnet, das untere sieben Stunden danach. (© Mit freundlicher Genehmigung von Chris Eldridge/U.S. Airforce.)

Die meisten Netzprobleme sind lokaler Natur: Wetterphänomene, Tiere⁷ oder das Versagen technischer Geräte⁸ führen zu kleineren, schnell

behebbaren Ausfällen, die ihrerseits Rückschlüsse auf generelle Schwächen des Netzes zulassen. Die wichtigste Ursache für Stromausfälle sind Spannungsspitzen in Leitungen und Transformatoren. Um den Schaden zu begrenzen, werden dann die betroffenen Leitungsabschnitte durch Schaltschütze abgeschaltet. Gelegentlich kommt es auch durch kurzzeitige Überlastung der örtlichen Kraftwerke zu Stromausfällen.

Die eigentlich zur örtlichen Schadensbegrenzung gedachten Mechanismen können in ungünstigen Fällen zu einer kaskadenartigen Ausbreitung des Stromausfalls im amerikanischen oder europäischen Netz führen. In einem Wasserkraftwerk im Süden Ontarios wurde im November 1965 ein Relais ausgelöst. Der Strom der betroffenen Leitung wurde auf fünf andere Leitungen umgeleitet, deren Relais daraufhin ebenfalls ausgelöst wurde. Durch den dramatischen Lastabfall beschleunigten die Generatoren – die Generatorspannung war dann mit der Netzspannung, die andere Einspeiser lieferten, nicht mehr phasengleich.⁹ Innerhalb weniger Minuten schaltete sich Leitung für Leitung ab. Zahlreiche Generatoren liefen ohne Last und gingen außer Betrieb. Nach vier Sekunden hatte die Abschaltungswelle den gesamten Nordosten der Vereinigten Staaten erfasst; nach fünf Minuten standen die meisten Generatoren still, und über 30 Millionen Menschen hatten stundenlang keinen elektrischen Strom. Nach diesem Blackout wurde ein Gremium zur Überwachung des amerikanischen Versorgungsnetzes bestellt, der National Electric Reliability Council.¹⁰ In Kontinentaleuropa übernimmt solche Aufgaben vor allem die UCCE (Union for the Coordination of Transmission of Electricity). Im deutschen Versorgungsnetz wird durch staatliche Auflagen eine hohe Netzstabilisierung erzwungen, historisch auch dadurch bedingt, dass die öffentlichen Versorger zunehmend nach amerikanischem Vorbild privatisiert wurden.

Maßnahmen zur Koordinierung der Einspeiser und Abnehmer konnten seitdem viele, aber nicht alle großräumigen Stromausfälle verhindern.^{11,12} Im Juli 1977 schlug ein Blitz in eine Überlandleitung in New York ein, und die Schutzschalter lösten aus. Der Netzbetreiber reagierte nur langsam¹³, und ganz New York City musste drei Tage ohne Strom auskommen.¹⁴ Im August 2003 führte das unglückliche Zusammentreffen eines Kurzschlusses durch einen nicht zurückgeschnittenen Baum mit einer hohen Netzlast und unzureichender Kommunikation zu einem Stromausfall im Nordosten der Vereinigten Staaten bis nach Kanada. 50 Millionen Abnehmer saßen teils mehrere Tage lang im Dunkeln.¹⁵

Um solche dramatischen Ausfälle zu verhindern, sucht man ständig nach Möglichkeiten zur technischen Verbesserung des Versorgungsnetzes. Nützlich in diesem Zusammenhang ist Software, die eine zeitnahe Überwachung und flexible Steuerung¹⁶ der Auslastung einzelner Netzsegmente erlaubt. Hinzu kommen optimierte Wartungsmethoden, Übertragungsleitungen mit höherer Kapazität und verbesserte Umspannanlagen.^{17,18}

1. *The Electricity Delivery System*. United States Department of Energy, Office of Electricity Delivery and Energy Reliability, Februar 2006. <http://www.energetics.com/gridworks/pdfs/factsheet.pdf> (Stand: April 2009).
2. <http://www.fair-pr.com/background/deutsches-hochspannungsnetz.php>.
3. Harris, J. L. et al., „Peak Demand and Energy Projection Bandwidths 2005–2014 Regional and National“, National Energy Reliability Council, 14. September 2005. http://www.nerc.com/docs/pc/lfwg/Final_NERC_2005-2014_REGIONAL_BANDWIDTH_REPORT.pdf (Stand: April 2009).
4. „Towards National Power Grid“, Prayas Energy Group. http://www.prayaspune.org/peg/publications/Nat1_whshp_mar07_086A01.pdf (Stand: März 2007).
5. Chow, J., Kopp, R. und Portney, P., „Energy Resources and Global Development“, *Science*, 28. November 2003, 302, S. 1528–1531.
6. Bundesnetzagentur, „Monitoringbericht 2008 – Entwicklung des Strom- und Gasmarkts“. Abzurufen bei www.bundesnetzagentur.de.
7. Orso, J., „Bangor Hit with Power Outage“, *La Crosse Tribune*, 16. Juli 2006.
8. Chowdhury, A. et al., „MAPP Bulk Transmission System Outage Report“, Mid-Continent Area Power Pool, Juni 2001. http://www.mapp.org/assets/pdf/BTOR19_1.PDF (Stand: April 2009).
9. U.S. Federal Power Commission, „Northeast Power Failure: November 9 and 10, 1965“, Washington, DC: U.S. Government Printing Office. http://blackout.gmu.edu/archive/pdf/fpc_65.pdf (Stand: April 2009).
10. Blackout History Project, „The Great Northeast Blackout of 1965“, <http://www.blackout.gmu.edu/events/tl1965.html> (Stand: April 2009).
11. California Independent System Operator, „Load Reduction Programs“, California Independent System Operator Procedure E-511, 7. April 2009. <http://www.caiso.com/docs/2000/06/15/20000615111359621.pdf> (Stand: April 2009).
12. „Emergency Manual Load Shedding“, California Independent System Operator Procedure E-502, 12. September 2008. <http://www.caiso.com/docs/1998/12/02/1998120218100812000.pdf> (Stand: April 2009).
13. Boffey, P. M., „Investigators Agree N. Y. Blackout of 1977 Could Have Been Avoided“, *Science*, 15. September 1978, 201, Nr. 4360, S. 994–998.
14. Metz, W. D., „New York Blackout: Weak Links Tie Con Ed to Neighboring Utilities.“ *Science*, 29. Juli 1977, 197, Nr. 4302, S. 441–442.
15. U.S.-Canada Power System Outage Task Force, „Final Report on the August 14, 2003 Blackout in the United States and Canada: Causes and Recommendations“, <http://www.nerc.com/docs/docs/blackout/ch1-3.pdf> (Stand: April 2009).
16. Brown, E., „Creating Stability in a World of Unstable Electricity Distribution“, *Logos*, Argonne National Laboratories, Frühjahr 2004, 22, Nr. 1. http://www.anl.gov/Media_Center/logos22-1/electricity.htm (Stand: April 2009).
17. Office of Electric Transmission and Distribution, „GridWorks Multi-Year Plan“, United States Department of Energy. http://www.oe.energy.gov/DocumentsandMedia/multiyearplan_final.pdf (Stand: April 2009).
18. U.S.-Canada Power System Outage Task Force, „The August 14, 2003 Blackout One Year Later: Actions Taken in the United States and Canada to Reduce Blackout Risk“, Natural Resources Canada and the U.S. Department of Energy, 13. August 2004. <http://www.nerc.com/docs/docs/blackout/BlackoutOneYearLater.pdf> (Stand: April 2009).

Zusammenfassung

- Der Blindwiderstand von Kondensatoren und Spulen ist mit einem Ohm'schen Widerstand vergleichbar.
- Die Impedanz, eine frequenzabhängige Eigenschaft von Wechselstromkreisen (oder einzelnen Maschen eines Kreises), ist dem Widerstand eines Gleichstromkreises analog.
- Zeiger sind Vektoren im zweidimensionalen Raum, mit deren Hilfe wir Phasenbeziehungen in Stromkreisen darstellen können.
- Stimmt die Generatorfrequenz mit der Eigenfrequenz eines Schwingkreises überein, so bezeichnet man dies als Resonanz.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Wechselstromgeneratoren	Ein Wechselstromgenerator wandelt mechanische Energie in elektrische Energie um. Die mechanische Energie dient dazu, entweder eine stromdurchflossene Spule in einem Magnetfeld oder einen Magneten in einer stromdurchflossenen Spule zu drehen.
Generatorenspannung	$U_{\text{ind}}(t) = U_{\text{ind,max}} \cos(\omega t + \delta)$ (26.1)
2. Wechselstrom	
Effektive Stromstärke	$I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle}$ (26.8)
Effektive und maximale Stromstärke	$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\text{max}}$ (26.9)
Am Ohm'schen Widerstand	$I_{\text{eff}} = \frac{U_{R,\text{eff}}}{R}$ (26.12) (Strom und Spannung in Phase)
An einer Spule	$I_{\text{eff}} = \frac{U_{L,\text{eff}}}{\omega L} = \frac{U_{L,\text{eff}}}{X_L}$ (26.22) (Spannung eilt Strom um 90° voraus)
An einem Kondensator	$I_{\text{eff}} = \frac{U_{C,\text{eff}}}{1/\omega C} = \frac{U_{C,\text{eff}}}{X_C}$ (26.26) (Strom eilt Spannung um 90° voraus)
3. Blindwiderstände	
Induktiver Blindwiderstand	$X_L = \omega L$ (26.21)
Kapazitiver Blindwiderstand	$X_C = \frac{1}{\omega C}$ (26.27)
4. Mittlere umgesetzte Leistung	
Am Ohm'schen Widerstand	$\langle P \rangle = U_{R,\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2$ (26.10, 26.11)
An einer Spule oder einem Kondensator	$\langle P \rangle = 0$
5. Transformatoren	Ein Transformator dient zur nahezu verlustfreien Änderung der Amplitude einer Wechselspannung auf einen gewünschten Wert. Hat die Primärspule n_1 Windungen und die Sekundärspule n_2 Windungen, so lautet die Beziehung zwischen Primär- und Sekundärspannung $U_2 = \frac{n_2}{n_1} U_1 .$ (26.30) Für einen idealen Transformator (ohne Leistungsverluste) gilt $U_{1,\text{eff}} I_{1,\text{eff}} = U_{2,\text{eff}} I_{2,\text{eff}} .$ (26.32)
6. *LC- und RLC-Reihenschaltungen	Wird ein Kondensator über eine Spule entladen, so oszillieren Ladung und Strom am Kondensator mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$ (26.37) Mit der gleichen Kreisfrequenz, aber gegenüber der Ladung um 90° phasenverschoben oszilliert der Spulenstrom. Es findet eine periodische Umwandlung von elektrischer Energie des Kondensators in magnetische Energie der Spule und umgekehrt statt. Enthält der Stromkreis außerdem einen Ohm'schen Widerstand, so werden die Schwingungen gedämpft, weil am Ohm'schen Widerstand Energie als Joule'sche Wärme abgeführt wird.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. *Zeiger	Zeiger sind Vektoren im zweidimensionalen Raum zur Darstellung des Stroms (\mathbf{I}) sowie der Spannungsabfälle (\mathbf{U}_R , \mathbf{U}_C und \mathbf{U}_L) an den Bauelementen eines Wechselstromkreises, der einen Ohm'schen Widerstand, einen Kondensator und eine Spule enthalten kann. Die Zeiger rotieren entgegengesetzt der Uhrzeigerrichtung mit der Kreisfrequenz ω des Stroms. \mathbf{U}_R ist phasengleich mit \mathbf{I} , \mathbf{U}_L eilt \mathbf{I} um 90° voraus, und \mathbf{U}_C eilt \mathbf{I} um 90° nach. Die x -Komponente jedes Zeigers gibt die momentane Stromstärke oder den zugehörigen momentanen Spannungsabfall am jeweiligen Bauelement an.
8. *Erzwungene Schwingungen in RLC-Schwingkreisen	
Generatorenspannung	$U_G(t) = U_{G,\max} \cos(\omega t)$
Stromstärke	$I(t) = \frac{U_{G,\max}}{Z} \cos(\omega t - \delta)$ (26.52)
Impedanz Z	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ (26.51)
Phasenkonstante δ	$\tan \delta = \frac{X_L - X_C}{R}$ (26.49)
Mittlere Leistung	$\langle P \rangle = R I_{\text{eff}}^2 = U_{G,\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \delta$ (26.54, 26.55)
	$\langle P \rangle = \frac{\omega^2 R}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 L^2 + \omega^2 R^2} U_{G,\text{eff}}^2$ (26.56)
Leistungsfaktor	Die Größe $\cos \delta$ in Gleichung 26.55 wird Leistungsfaktor des Schwingkreises genannt. Im Resonanzfall ist $\delta = 0$, $\cos \delta = 1$ und $\langle P \rangle = U_{G,\text{eff}} I_{\text{eff}}$.
Resonanz	Ist die effektive Stromstärke maximal, so kommt der Schwingkreis zur Resonanz. Die Resonanzbedingungen lauten $X_L = X_C$, also $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$, $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und $\delta = 0$.
9. *Gütefaktor	Die Breite der Resonanz wird durch den Gütefaktor Q charakterisiert: $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$. (26.57) Ist die Resonanz hinreichend schmal („scharf“), so gilt die Näherung $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$. (26.58)

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Richtig ist Antwort c.

Lösungen der Übungen

1. a) 2,8 A, b) 96 W, c) $1,9 \cdot 10^2$ W

2. $79 \mu\text{H}$

3. $U_{A,\text{eff}} = U_{E,\text{eff}} / \sqrt{1 + (R/L)^2 / \omega^2}$; die Schaltung heißt Hochpassfilter.

Aufgaben

Verständnisaufgaben

26.1 • Was geschieht mit der maximalen Spannung in einem Wechselstromkreis, wenn man die effektive Spannung verdoppelt? a) Sie verdoppelt sich auch. b) Sie halbiert sich. c) Sie nimmt um den Faktor $\sqrt{2}$ zu. d) Sie verändert sich nicht.

26.2 • Betrachten Sie den Stromkreis in Abbildung 26.27. Wie ändert sich der induktive Blindwiderstand der Spule, wenn die Frequenz der Wechselspannung verdoppelt wird? a) Er verdoppelt sich auch. b) Er ändert sich nicht. c) Er halbiert sich. d) Er vervierfacht sich.



Abbildung 26.27 Zu Aufgabe 26.2.

26.3 • Betrachten Sie den Stromkreis in Abbildung 26.28. Wie ändert sich der kapazitive Blindwiderstand des Kreises, wenn die Frequenz der Wechselspannung verdoppelt wird? a) Er verdoppelt sich auch. b) Er ändert sich nicht. c) Er halbiert sich. d) Er vervierfacht sich.



Abbildung 26.28 Zu Aufgabe 26.3.

26.4 • Wenn Sie mit dem Auto zwischen zwei Städten unterwegs sind, können Sie auf der eingestellten Empfangsfrequenz Ihres Autoradios manchmal zwei Sender gleichzeitig hören. Erklären Sie, wie es dazu kommt.

26.5 • Richtig oder falsch? a) Bei Frequenzen weit oberhalb oder weit unterhalb der Resonanzfrequenz eines *RLC*-Reihenschwingkreises ist der Gütefaktor nahezu null. b) Der Gütefaktor eines *RLC*-Reihenschwingkreises ist umso größer, je größer dessen Bandbreite ist. c) Die Bandbreite eines *RLC*-Reihenschwingkreises nimmt mit dem Ohm'schen Widerstand des Kreises zu.

26.6 • Betrachten Sie einen idealen Transformator mit n_1 Windungen auf der Primär- und n_2 Windungen auf der Sekundärspule. Bei gegebener Primärspannung U_1 werde an einem Lastwiderstand R im Sekundärkreis eine mittlere

Leistung P_2 umgesetzt. Fließt in der Primärspule dann der Strom a) P_2/U_1 , b) $(n_1/n_2)(P_2/U_1)$, c) $(n_2/n_1)(P_2/U_1)$ oder d) $(n_2/n_1)^2(P_2/U_1)$?

Schätzungs- und Näherungsaufgabe

26.7 •• Die in Motoren, Transformatoren und Elektromagneten enthaltenen Spulen haben Ohm'sche Widerstände und induktive Blindwiderstände. Eine große Industrieanlage nehme bei Vollast eine elektrische Leistung von 2,3 MW auf. Der Phasenwinkel der Gesamtimpedanz der Anlage betrage dann 25° . Die Energieversorgung der Anlage übernimmt ein 4,5 km entferntes Umspannwerk; geliefert wird eine Netzspannung mit einem Effektivwert von 40 kV und einer Frequenz von 60 Hz. Der Widerstand der Freileitung zwischen Umspannwerk und Anlage beträgt $5,2 \Omega$. Eine Kilowattstunde Elektroenergie kostet 20 Eurocent, wobei der Betreiber der Anlage nur für die tatsächlich aus dem Netz entnommene Energie bezahlen muss. a) Geben Sie den Ohm'schen Widerstand und den induktiven Blindwiderstand der gesamten Anlage bei Vollastbetrieb an. b) Welche Stromstärke fließt durch die Zuleitungen? Wie groß muss die effektive Spannung am Umspannwerk sein? c) Wie groß sind die Leistungsverluste bei der Übertragung? d) Durch Einbau eines Kondensatorblocks (in Reihenschaltung zum Lastwiderstand) wird der Phasenwinkel, um den der Strom der anliegenden Spannung nacheilt, auf 18° abgesenkt. Wie viel Geld spart der Betreiber pro Monat, wenn die Anlage täglich 16 Stunden lang unter Vollast betrieben wird? e) Wie groß muss die Kapazität des Kondensatorblocks sein, um diese Änderung des Phasenwinkels erreichen zu können?

Wechselspannung an Ohm'schen Widerständen, Spulen und Kondensatoren

26.8 • Ein Schutzschalter („Sicherung“) ist für eine effektive Stromstärke von 15 A bei einer effektiven Spannung von 120 V ausgelegt. a) Wie groß darf I_{\max} höchstens sein, damit der Stromkreis gerade noch geschlossen bleibt? b) Welche mittlere Leistung kann dem Stromkreis entnommen werden?

26.9 • Eine Spule hat einen Blindwiderstand von 100Ω , wenn eine Wechselspannung mit einer Frequenz von 80 Hz anliegt. a) Geben Sie die Induktivität der Spule an. b) Wie groß ist der Blindwiderstand, wenn die Frequenz der Spannung 160 Hz beträgt?

26.10 • Wie groß muss die Frequenz einer anliegenden Wechselspannung sein, damit die Blindwiderstände eines Kondensators mit $C = 10 \mu\text{F}$ und einer Spule mit $L = 1,0 \text{ mH}$ gleich sind?

Stromkreise mit Kondensatoren, Spulen und Widerständen ohne Wechselspannungsquelle

26.11 •• Wir betrachten drei LC-Stromkreise: Kreis 1 mit der Kapazität C_1 und der Induktivität L_1 , Kreis 2 mit der Kapazität $C_2 = \frac{1}{2}C_1$ und $L_2 = 2L_1$ sowie Kreis 3 mit der Kapazität $C_3 = 2C_1$ und der Induktivität $L_3 = \frac{1}{2}L_1$. a) Zeigen Sie, dass die Frequenzen der drei Schwingkreise gleich sind. b) Nehmen Sie an, die drei Kondensatoren werden auf das gleiche maximale Potenzial U aufgeladen. In welchem Stromkreis wäre die maximale Stromstärke dann am größten?

26.12 •• Abbildung 26.29 zeigt einen Stromkreis mit einem Kondensator und einer Spule. Bei geöffnetem Schalter sei die Ladung auf der linken Kondensatorplatte gleich q_0 . Nun wird der Schalter geschlossen. a) Skizzieren Sie den Verlauf von q und von I als Funktion der Zeit in einem Diagramm und erläutern Sie anhand der beiden Kurven, woran man erkennt, dass der Strom der Ladung um 90° vorausseilt. b) Die Ausdrücke für Strom und Ladung sind durch Gleichung 26.38 bzw. 26.39 gegeben. Zeigen Sie, dass der Strom der Ladung um 90° vorausseilt; nehmen Sie trigonometrische Beziehungen zu Hilfe.

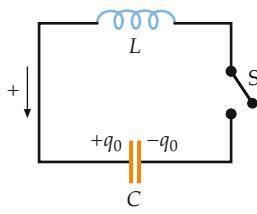


Abbildung 26.29 Zu Aufgabe 26.12.

RL-Kreise mit Wechselspannungsquelle

26.13 •• Durch eine zweidrige Leitung werden simultan zwei Wechselspannungssignale übertragen, $U_1(t) = (10,0 \text{ V}) \cos(\omega_1 t)$ und $U_2(t) = (10,0 \text{ V}) \cos(\omega_2 t)$ mit $\omega_1 = 100 \text{ rad/s}$ und $\omega_2 = 10\,000 \text{ rad/s}$. Der Potenzialunterschied zwischen den beiden Leitern ist gegeben durch $U = U_1 + U_2$. Wie in Abbildung 26.30 gezeigt, ist eine Spule mit $L = 1,00 \text{ H}$ in Reihe zu den Spannungsquellen geschaltet. Zusätzlich ist ein Nebenschlusswiderstand $R = 1,00 \text{ k}\Omega$ eingebaut. Die Schaltung sei am Ausgang mit einem Lastwiderstand verbunden, durch den ein vernachlässigbar geringer Strom fließt. a) Beschreiben Sie das Spannungssignal U_A , das sich am Ausgang der Schaltung abgreifen lässt. b) Geben Sie das Verhältnis der Amplituden des niederfrequenten und des hochfrequenten Signals am Ausgang an.

26.14 •• Wir betrachten eine Parallelschaltung aus einer Spule und einem Ohm'schen Widerstand mit einer idealen Wechselspannungsquelle ($U(t) = U_{\max} \cos(\omega t)$; Abbildung 26.31). Zeigen Sie: a) Durch den Ohm'schen Widerstand fließt der Strom $I_R(t) = (U_{\max}/R) \cos(\omega t)$. b) Durch die Spule fließt

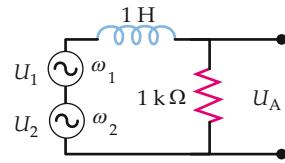


Abbildung 26.30 Zu Aufgabe 26.13.

der Strom $I_L(t) = (U_{\max}/X_L) \cos(\omega t - 90^\circ)$. c) Für den Gesamtstrom aus der Spannungsquelle gilt $I(t) = I_R(t) + I_L(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \delta)$ mit $I_{\max} = U_{\max}/Z$.

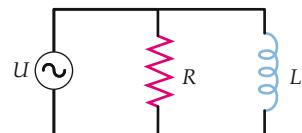


Abbildung 26.31 Zu Aufgabe 26.14.

Filter und Gleichrichter

26.15 •• Den in Abbildung 26.32 gezeigten Stromkreis nennt man *RC-Hochpassfilter*: Er lässt Signale mit hoher Frequenz verlustarm durch, Signale mit niedriger Frequenz hingegen werden unterdrückt. Gegeben sei eine Eingangsspannung $U_E(t) = U_{\max} \cos(\omega t)$. Zeigen Sie, dass die Ausgangsspannung dann $U_A(t) = U_H \cos(\omega t - \delta)$ ist, mit

$$U_H = \frac{U_{\max}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}}.$$

(Nehmen Sie an, der Ausgang ist mit einem Lastwiderstand verbunden, durch den ein vernachlässigbar geringer Strom fließt.) Zeigen Sie, dass dieses Resultat die Bezeichnung „Hochpassfilter“ rechtfertigt.

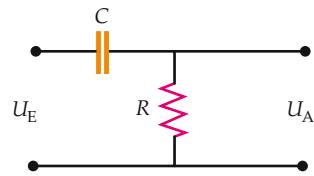


Abbildung 26.32 Zu Aufgabe 26.15.

26.16 •• Betrachten Sie noch einmal den Hochpassfilter aus Aufgabe 26.15. Das Eingangssignal sei eine niederfrequente Wechselspannung $U(t)$. (Niederfrequent bedeutet hier, dass sich während einer Zeitkonstante RC die Spannung nicht signifikant ändert.) Zeigen Sie, dass das Ausgangssignal dieser sogenannten *Differenzierungsschaltung* dann durch die Ableitung des Eingangssignals nach der Zeit gegeben ist.

26.17 •• In der Dezibel-Skala können wir das Ausgangssignal aus dem in Aufgabe 26.15 besprochenen Hochpassfilter wie folgt beschreiben:

$$\beta = (20 \text{ dB}) \log_{10} \frac{U_H}{U_{\max}}.$$

Zeigen Sie, dass für $U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\max}$ gilt $\beta = 3,0 \text{ dB}$. Die Frequenz, für die dies zutrifft, wird als 3-dB-Frequenz $\nu_{3\text{dB}}$ eines Hochpassfilters bezeichnet. Zeigen Sie, dass das Ausgangssignal für $\nu \ll \nu_{3\text{dB}}$ mit jeder Halbierung der Frequenz ν um 6 dB schwächer wird.

26.18 •• Den in Abbildung 26.33 gezeigten Stromkreis nennt man Tiefpassfilter: Er unterdrückt Signale mit hoher Frequenz. Der Ausgang der Schaltung sei mit einem Lastwiderstand verbunden, durch den ein vernachlässigbar geringer Strom fließt. a) Gegeben ist eine Eingangsspannung $U_E(t) = U_{\max} \cos(\omega t)$. Zeigen Sie, dass die Ausgangsspannung dann $U_A(t) = U_T \cos(\omega t - \delta)$ ist mit

$$U_T = \frac{U_{\max}}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}}.$$

b) Diskutieren Sie das Verhalten der Ausgangsspannung in den Grenzfällen $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$.

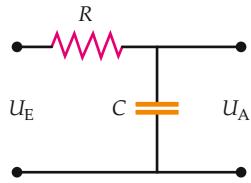


Abbildung 26.33 Zu Aufgabe 26.18.

26.19 ••• Abbildung 26.34 zeigt einen Gleichrichter, der eine Wechselspannung in eine (pulsierende) Gleichspannung umwandelt. Die Diode können Sie sich wie ein „Einwegventil“ für den Strom vorstellen: Es fließt nur dann ein Strom in Pfeilrichtung, wenn gilt $U_E - U_A \geq +0,60 \text{ V}$; andernfalls geht der Widerstand der Diode gegen unendlich. Zeichnen Sie die zeitlichen Verläufe von U_E und U_A gemeinsam in ein Koordinatensystem (jeweils zwei Perioden) für ein Eingangssignal $U_E(t) = U_{\max} \cos(\omega t)$.

26.20 ••• Das Ausgangssignal des in Aufgabe 26.19 besprochenen Gleichrichters kann man durch Nachschaltung eines Tiefpassfilters glätten (Abbildung 26.35a). So erhält man eine Gleichspannung mit nur noch geringfügigen zeitlichen Schwankungen (Abbildung 26.35b). Gegeben sind die Frequenz $\nu = 60 \text{ Hz}$ des Eingangssignals sowie $R = 1,00 \text{ k}\Omega$. Wie groß muss C sein, damit das Ausgangssignal im Laufe einer Periode um weniger als 5 % seines Mittelwerts schwankt?

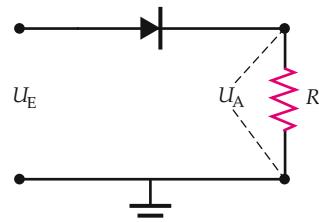


Abbildung 26.34 Zu Aufgabe 26.19.

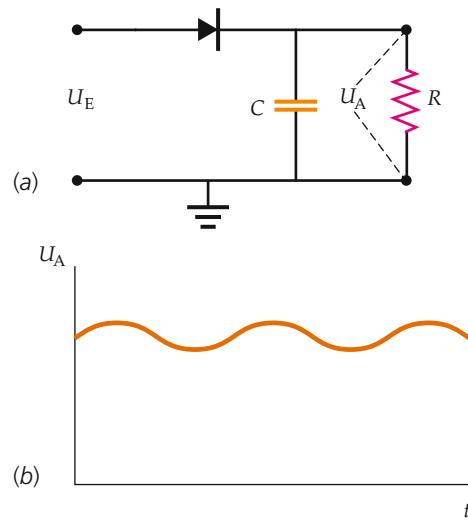


Abbildung 26.35 Zu Aufgabe 26.20.

LC-Stromkreise mit Wechselspannungsquelle

26.21 •• Wir betrachten den Stromkreis in Abbildung 26.36. Gegeben ist die Generatorenspannung $U_G(t) = (100 \text{ V}) \cos(2\pi\nu t)$. a) Geben Sie für jeden Zweig des Stromkreises die Amplitude des Stroms sowie den Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung an. b) Wie groß muss die Kreisfrequenz ν sein, damit der Generatorstrom null wird? c) Wie groß sind in diesem Resonanzfall die Stromstärken in der Spule und im Kondensator? Formulieren Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von der Zeit. d) Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm zur Verdeutlichung der Beziehungen zwischen anliegender Spannung sowie den Strömen durch Generator, Kondensator und Spule für den Fall, dass der induktive Blindwiderstand größer ist als der kapazitive.

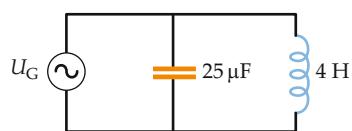


Abbildung 26.36 Zu Aufgabe 26.21.

RLC-Stromkreise mit Wechselspannungsquelle

26.22 • Ein Kondensator ($C = 20 \mu\text{F}$) und ein Ohm'scher Widerstand ($R = 80 \Omega$) sind in Reihe mit einem idealen Wechselspannungsgenerator geschaltet, der eine Maximalspannung von 20 V bei einer Kreisfrequenz von 400 rad/s liefert. Die Induktivität des Stromkreises ist null. Berechnen Sie a) den Leistungsfaktor, b) die effektive Stromstärke und c) die mittlere Leistung des Generators.

26.23 •• Zeigen Sie, dass die Beziehung $\langle P \rangle = R U_{\text{eff}}^2 / Z^2$ das richtige Ergebnis für einen Stromkreis liefert, der neben einem idealen Wechselspannungsgenerator a) nur einen Ohm'schen Widerstand (also $C = 0$ und $L = 0$), b) nur einen Kondensator ($R = 0$ und $L = 0$) und c) nur eine Spule ($R = 0$ und $C = 0$) enthält. In der genannten Beziehung ist $\langle P \rangle$ die mittlere vom Generator abgegebene Leistung und U_{eff} die effektive Generatorenspannung.

26.24 •• Zwischen den Trägerfrequenzen einzelner UKW-Sendestationen liegt ein Abstand von 0,20 MHz. Damit man nicht gleichzeitig die Signale benachbarter Stationen hört, wenn man ein Rundfunkgerät auf eine Station einstellt (etwa bei 100,1 MHz), sollte die Bandbreite des Schwingkreises im Empfänger wesentlich kleiner sein als 0,20 MHz. Wie groß ist der Gütefaktor eines Schwingkreises, der bei $\nu_0 = 100,1$ MHz eine Bandbreite von $\Delta\nu = 0,050$ MHz aufweist?

26.25 •• Wir betrachten eine Parallelschaltung aus einem Kondensator und einem Ohm'schen Widerstand an einer idealen Wechselspannungsquelle ($U(t) = U_{\text{max}} \cos(\omega t)$; Abbildung 26.37). Zeigen Sie: a) Durch den Ohm'schen Widerstand fließt der Strom $I_R(t) = (U_{\text{max}}/R) \cos(\omega t)$. b) Durch den Kondensator fließt der Strom $I_C(t) = (U_{\text{max}}/X_C) \cos(\omega t + 90^\circ)$. c) Durch den Generator fließt der Strom $I(t) = I_{\text{max}} \cos(\omega t + \delta)$ mit $\tan \delta = R/X_C$ und $I_{\text{max}} = U_{\text{max}}/Z$.

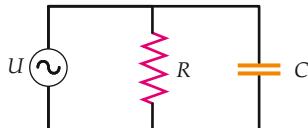


Abbildung 26.37 Zu Aufgabe 26.25.

26.26 •• In dem Stromkreis aus Abbildung 26.38 beträgt die effektive Spannung des Generators 115 V bei 60 Hz. Geben Sie den effektiven Spannungsabfall zwischen den Punkten a) A und B, b) B und C, c) C und D, d) A und C sowie e) B und D an.

26.27 •• Skizzieren Sie den Verlauf der Impedanz als Funktion von ω für a) eine RL -Reihenschaltung, b) eine RC -Reihenschaltung und c) einen RLC -Reihenschwingkreis (alle mit Wechselspannungsquelle).

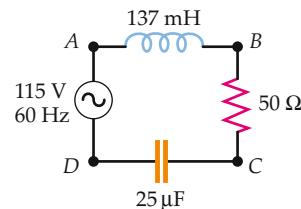


Abbildung 26.38 Zu Aufgabe 26.26.

26.28 •• Die Induktivität einer Spule kann man folgendermaßen messen: Man schaltet die Spule in Reihe mit einer bekannten Kapazität, einem bekannten Ohm'schen Widerstand, einem Wechselstrom-Amperemeter und einem durchstimmmbaren Frequenzgenerator. Die Frequenz des Signals wird bei konstanter Spannung variiert, bis die Stromstärke maximal ist. Für eine solche Anordnung ist gegeben $C = 10 \mu\text{F}$, $U_{\text{max}} = 10 \text{ V}$, $R = 100 \Omega$, und die effektive Stromstärke wird maximal bei $\omega = 5000 \text{ rad/s}$. a) Wie groß ist L ? b) Wie groß ist I_{max} ?

26.29 •• Betrachten Sie eine RLC -Reihenschaltung aus einer Spule mit einer Induktivität von 10 mH, einem Kondensator mit einer Kapazität von $2,0 \mu\text{F}$, einem Ohm'schen Widerstand von $5,0 \Omega$ und einer idealen Wechselspannungsquelle mit einer Maximalspannung von 100 V. Berechnen Sie a) die Resonanzfrequenz und b) die effektive Stromstärke im Resonanzfall. Berechnen Sie dann für eine Frequenz von 8000 rad/s c) den kapazitiven und den induktiven Blindwiderstand, d) die Impedanz, e) die effektive Stromstärke und f) den Phasenwinkel.

26.30 •• Für die in Aufgabe 26.29 beschriebene Schaltung ist zu berechnen a) der Gütefaktor und b) die Bandbreite. c) Wie groß ist der Leistungsfaktor bei $\omega = 8000 \text{ rad/s}$?

26.31 •• Eine Spule ist an einen Wechselspannungsgenerator angeschlossen, der eine maximale Spannung von 100 V mit einer Frequenz von 60 Hz abgibt. Bei dieser Frequenz beträgt die Impedanz der Spule 10Ω und der induktive Blindwiderstand $8,0 \Omega$. a) Berechnen Sie die maximale Stromstärke in der Spule. b) Wie groß ist der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung? c) Ein Kondensator werde mit der Spule und dem Generator in Reihe geschaltet. Welche Kapazität muss er haben, damit der Strom mit der Generatorenspannung in Phase ist? d) Welche Spannung fällt maximal am Kondensator ab?

26.32 •• Ein RLC -Stromkreis enthält einen Ohm'schen Widerstand von $60,0 \Omega$, einen Kondensator mit einer Kapazität von $8,00 \mu\text{F}$ und eine ideale Wechselspannungsquelle mit einer Maximalspannung von 200 V und einer Kreisfrequenz von 2500 rad/s. Die Induktivität der Spule lässt sich durch Verschieben eines Eisenkerns zwischen 8,00 mH und 40,0 mH variieren. Die Spannung am Kondensator soll 150 V nicht übersteigen. a) Wie groß darf in diesem Fall der maximale Strom sein? b) In welchem Bereich darf die Induktivität liegen?

26.33 ••• Zeigen Sie durch Einsetzen, dass Gleichung 26.43b,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0,$$

erfüllt wird von

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega' t)$$

mit

$$\tau = 2L/R$$

und

$$\omega' = \sqrt{(1/LC) - (1/\tau)^2}.$$

q_0 ist die Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt $t = 0$.

26.34 ••• Die magnetische Suszeptibilität einer Probe kann man z. B. mithilfe eines LC -Schwingkreises messen, der eine Zylinderspule ohne Kern (gefüllt mit Luft) und einen Kondensator enthält. Man ermittelt die Resonanzfrequenz des Kreises einmal ohne die Probe und einmal, nachdem die Probe in die Zylinderspule gebracht wurde. Die Spule sei 4,00 cm lang, habe 400 Windungen aus dünnem Draht und einen Durchmesser von 3,00 mm. Das zu vermessende Materialstück sei ebenfalls 4,00 cm lang und füllte das Innere der Spule exakt aus. Randeffekte sollen vernachlässigt werden. a) Wie groß ist die Induktivität der luftgefüllten Spule? b) Wie groß muss die Kapazität des Kondensators sein, damit die Resonanzfrequenz des Schwingkreises (ohne Probe) bei exakt 6,0000 MHz liegt? c) Nachdem die Probe in die Spule gebracht wurde, sinkt die Resonanzfrequenz auf 5,9989 MHz. Wie groß ist die Suszeptibilität des Materials?

Der Transformator

26.35 • Ein Bauelement mit einer Impedanz von 12Ω soll mit einer Spannung von 24 V betrieben werden. a) Wie muss das Windungsverhältnis des Transformators lauten, mit dem sich das Gerät am Haushaltsnetz (230 V) betreiben lässt? b) Nehmen Sie an, das Netzteil sei falsch verschaltet, sodass die Primärwindung am Gerät und die Sekundärwindung am 230-Volt-Netz angeschlossen ist. Wie groß ist dann die effektive Stromstärke in der Primärschleife?

26.36 • Wir betrachten einen Transformator mit 400 Windungen auf der Primär- und acht Windungen auf der Sekundärspule. a) Transformiert er die Spannung herauf oder herunter? b) Geben Sie die Leerlaufspannung des Sekundärkreises an, wenn an der Primärschleife eine effektive Spannung von 120 V anliegt. c) Im Primärkreis fließe ein Strom von 0,100 A. Wie groß ist die Stromstärke im Sekundärkreis, wenn man den Magnetisierungsstrom und Leistungsverluste vernachlässigen kann?

Allgemeine Aufgaben

26.37 •• In Abbildung 26.39 ist der zeitliche Verlauf einer sogenannten *Rechteckspannung* skizziert. Gegeben sei $U_0 = 12 \text{ V}$. a) Wie groß ist die effektive Spannung für diese Wellenform? b) Die Welle soll durch Entfernung der negativen Abschnitte gleichgerichtet werden. Wie groß ist die effektive Spannung für die entstehende Wellenform?

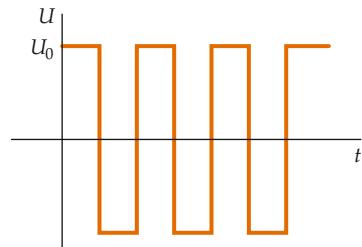


Abbildung 26.39 Zu Aufgabe 26.37.

26.38 •• Geben Sie jeweils die mittlere und die effektive Stromstärke an, wenn die Zeitabhängigkeit des Stroms durch die Funktionen in Abbildung 26.40 beschrieben wird.

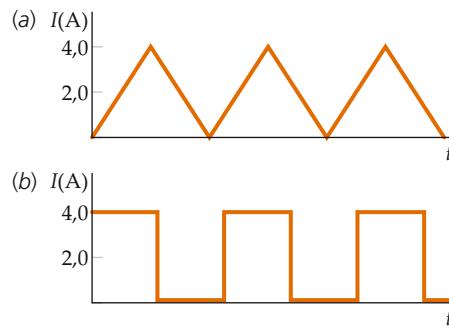


Abbildung 26.40 Zu Aufgabe 26.38.

26.39 •• Für den Stromkreis in Abbildung 26.41 sei gegeben: $U_1(t) = (20 \text{ V}) \cos(2\pi\nu t)$, $\nu = 180 \text{ Hz}$, $U_2 = 18 \text{ V}$ und $R = 36 \Omega$. Geben Sie die maximale, die minimale, die effektive und die mittlere Stromstärke im Ohm'schen Widerstand an.

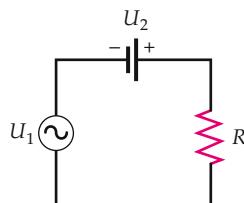


Abbildung 26.41 Zu den Aufgaben 26.39 und 26.40.

26.40 •• Wiederholen Sie Aufgabe 26.39, wobei Sie den Ohm'schen Widerstand R gegen einen Kondensator mit $C = 2,0 \mu\text{F}$ austauschen.

26.41 ••• Betrachten Sie eine Reihenschaltung aus einem Wechselspannungsgenerator, einem Kondensator und einer idealen Spule. Die Generatorenspannung ist gegeben durch $U(t) = U_{\max} \cos(\omega t)$. a) Zeigen Sie, dass die Ladung des Kondensators die Gleichung

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = U_{\max} \cos(\omega t)$$

erfüllt. b) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Gleichung erfüllt ist durch

$$q(t) = q_{\max} \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad q_{\max} = -\frac{U_{\max}}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

c) Zeigen Sie, dass man den Strom in der Form $I(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \delta)$ aufschreiben kann mit

$$I_{\max} = \frac{\omega U_{\max}}{L|\omega^2 - \omega_0^2|} = \frac{U_{\max}}{|X_L - X_C|},$$

$\delta = -90^\circ$ für $\omega < \omega_0$ und $\delta = 90^\circ$ für $\omega > \omega_0$; ω_0 ist die Resonanzfrequenz.

Die Maxwell'schen Gleichungen – Elektromagnetische Wellen

27



Das Very Large Array (VLA) ist ein Interferometer für astronomische Beobachtungen und steht in der Wüste von New Mexico westlich von Socorro. Es umfasst 27 Y-förmig angeordnete Teleskope und wird vom amerikanischen National Radio Astronomy Observatory betrieben. Durch elektronische Korrelation der Messdaten erreicht die Anlage die Winkelauflösung eines Teleskops von 36 km Durchmesser. (© NRAO/AUI.)

?

Haben Sie sich schon einmal gefragt, ob die von einer Funkantenne ausgesendete Welle in allen Raumrichtungen gleich ist? (Siehe Beispiel 27.5.)

27.1	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	980
27.2	Die Maxwell'schen Gleichungen	983
27.3	Die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen	984
27.4	Elektromagnetische Strahlung	988
	Zusammenfassung	999
	Aufgaben	1001

Die Maxwell'schen Gleichungen – ursprünglich formuliert von dem schottischen Physiker James Clerk Maxwell – beschreiben den Zusammenhang zwischen den Vektoren des elektrischen und des magnetischen Felds einerseits und den Quellen dieser Felder, elektrischen Ladungen und Strömen, andererseits. Dabei fassen die Gleichungen experimentelle Beobachtungen zu Elektrizität und Magnetismus zusammen, die in den Gesetzen von Coulomb, Gauß, Biot und Savart, Ampère und Faraday formuliert sind. Alle genannten Gesetze gelten allgemein, mit Ausnahme des Ampère'schen Gesetzes, dessen Gültigkeit auf stationäre und kontinuierliche Ströme beschränkt ist.

In diesem Kapitel werden wir verfolgen, wie Maxwell das Ampère'sche Gesetz durch Einführung des Verschiebungsstroms verallgemeinerte. Anschließend konnte Maxwell zeigen, dass aus den verallgemeinerten Gesetzen von Elektrizität und Magnetismus unmittelbar auf die Existenz elektromagnetischer Wellen geschlossen werden kann.

Maxwell schloss aus seinen Gleichungen, dass sich alle elektromagnetischen Wellen im Vakuum mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (27.1)$$

GESCHWINDIGKEIT DER AUSBREITUNG ELEKTROMAGNETISCHER
WELLEN

27.1 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Die Maxwell'schen Gleichungen spielen für die klassische Theorie des Elektromagnetismus eine ähnliche Rolle wie die Newton'schen Axiome für die klassische Mechanik. Im Prinzip lassen sich sämtliche Probleme der klassischen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus mithilfe der Maxwell'schen Gleichungen lösen, so wie alle Probleme der klassischen Mechanik prinzipiell auf die Newton'schen Axiome zurückgeführt werden können. Die Maxwell'schen Gleichungen sind jedoch wesentlich komplizierter aufgebaut als die Newton'schen Axiome, und ihre Anwendung erfordert die Kenntnis mathematischer Ansätze und Lösungswege, die über den Rahmen dieses Buchs hinausgehen. Maxwell zeigte beispielsweise, dass sich aus einer geeigneten Kombination seiner Gleichungen eine Wellengleichung für die Vektoren des elektrischen und des magnetischen Felds E und B ergibt, die **elektromagnetische Welle**. Elektromagnetische Wellen werden von beschleunigten Ladungen (etwa Ladungen eines Wechselstroms in einer Antenne) erzeugt. Heinrich Hertz beobachtete solche Wellen 1887 erstmals im Labor.

fortpflanzen; in dieser Beziehung ist ϵ_0 die elektrische Feldkonstante, die auch im Coulomb'schen Gesetz und im Gauß'schen Satz auftritt, und μ_0 die magnetische Feldkonstante, die Ihnen aus dem Biot-Savart'schen und dem Ampère'schen Gesetz bekannt ist. Maxwell vermutete richtig, dass auch Licht eine elektromagnetische Welle ist, da die für Licht gemessene Geschwindigkeit ebenfalls $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ beträgt. Definitionsgemäß verwenden wir heute als Zahlenwert der Lichtgeschwindigkeit $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ und als Zahlenwert der magnetischen Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$. Der (definierte) Zahlenwert von ϵ_0 ergibt sich dann aus Gleichung 27.1.

Das Ampère'sche Gesetz (siehe Gleichung 24.16) setzt das Umlaufintegral des Magnetfelds um eine geschlossene Kurve C zu dem Strom I in Beziehung, der durch eine beliebige, von C umschlossene Fläche tritt:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (27.2)$$

Maxwell erkannte folgende Schwäche des Ampère'schen Gesetzes: Die in Abbildung 27.1 eingzeichnete geschlossene Kurve C führt um die stromdurchflossene Zuleitung eines Plattenkondensators. C umschließt die Flächen A_1 und A_2 . Durch A_1 tritt der Strom I , durch A_2 hingegen tritt überhaupt kein Strom, da der Spalt zwischen den Kondensatorplatten den Stromfluss unterbricht. Das Gesetz erfasst den Strom, der „durch eine beliebige, von C umschlossene Kurve“ tritt, also nicht in allen Fällen. Probleme mit dieser Formulierung treten auf, wenn der Strom im Raum nicht kontinuierlich ist.

Nun zeigte Maxwell, dass eine Verallgemeinerung des Ampère'schen Gesetzes auf beliebige Situationen möglich ist, wenn der reale Strom I in Gleichung 27.1 erweitert wird durch einen Zusatzterm I_V mit

$$I_V = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}. \quad (27.3)$$

DEFINITION DES VERSCHIEBUNGSTROMS

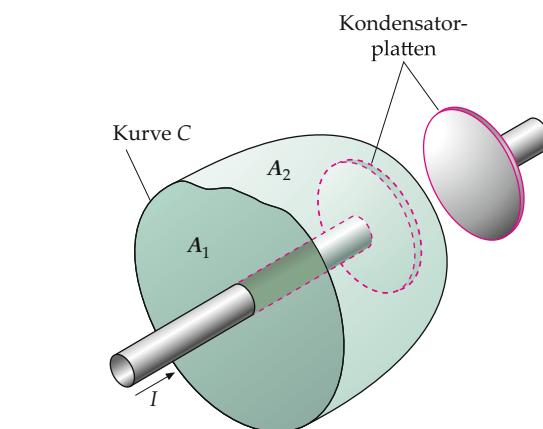


Abbildung 27.1 Zwei Flächen A_1 und A_2 , die von der gleichen Kurve C umschlossen werden. Durch A_1 tritt der Strom I , durch A_2 hingegen tritt kein Strom. Das Ampère'sche Gesetz setzt das Umlaufintegral des Magnetfelds um die Kurve C mit dem Strom in Beziehung, der durch jede von C umschlossene Fläche tritt. Es ist nicht gültig, wenn der Strom räumlich nicht kontinuierlich fließt, weil er beispielsweise – wie hier – an einer Kondensatorplatte unterbrochen ist.

Diesen Term nennt man den **Maxwell'schen Verschiebungsstrom**; Φ_{el} ist der elektrische Fluss durch die von C umschlossene Fläche. Damit erhalten wir die allgemeine Form des Ampère'schen Gesetzes:

27.1 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_{cl}}{dt} \quad (27.4)$$

VERALLGEMEINERTE FORM DES AMPÈRE'SCHEN GESETZES

Um den physikalischen Sinn dieser Beziehung zu verstehen, betrachten wir noch einmal Abbildung 27.1. Die Summe $I + I_V$ wollen wir als verallgemeinerten Strom bezeichnen. (Fortgeschrittenere Herleitungen behandeln den verallgemeinerten Strom als Summe eines Leitungsstroms und eines Verschiebungsstroms. Ersterer wird der Bewegung freier – delokalisierte – Ladungsträger zugeschrieben; letzterer wird seinerseits als Summe des Verschiebungsstroms, wie ihn dieses Buch auffasst, und eines Zusatzterms behandelt, der mit der Bewegung gebundener – lokalisierte – Ladungsträger zusammenhängt.) Wie oben begründet wurde, muss durch sämtliche von C umschlossene Flächen der gleiche verallgemeinerte Strom fließen. A_1 und A_2 bilden gemeinsam eine geschlossene Oberfläche. Das bedeutet: Die Summe der verallgemeinerten Ströme, die in das von A_1 und A_2 umschlossene Volumen hinein fließen, muss gleich der Summe der verallgemeinerten Ströme sein, die aus diesem Volumen heraus fließen. Anders ausgedrückt: Fließt ein realer Strom I in das Volumen hinein, so muss gleichzeitig ein Verschiebungsstrom I_V aus dem Volumen heraus fließen. In das umschlossene Volumen aus Abbildung 27.1 fließt ein Strom I , wodurch die Ladung innerhalb des Volumens zunimmt:

$$I = \frac{dq_{\text{innen}}}{dt}.$$

Den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Fluss aus dem Volumen heraus und der Ladung gibt der Gauß'sche Satz an:

$$\Phi_{el} = \oint_A E_n dA = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{innen}}.$$

Wir lösen dies nach der Ladung auf,

$$q_{\text{innen}} = \epsilon_0 \Phi_{el},$$

und leiten beide Seiten nach der Zeit ab:

$$\frac{dq_{\text{innen}}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}.$$

Die Rate, mit der die umschlossene Ladung zunimmt, ist folglich proportional zu der Rate, mit der der elektrische Fluss aus dem Volumen heraus zunimmt:

$$\frac{dq_{\text{innen}}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt} = I_V.$$

Der in das Volumen hinein fließende reale Strom ist gleich dem aus dem Volumen heraus fließenden Verschiebungsstrom, und folglich ist der verallgemeinerte Strom kontinuierlich. Dies gilt ohne Ausnahme.

Interessant ist es nun, Gleichung 27.4 mit dem Faraday'schen Gesetz (siehe Gleichung 25.6) zu vergleichen. Wir beschränken uns hier auf eine Formulierung des Faraday'schen Gesetzes, die von zeitlich veränderlichen Magnetfeldern hervorgerufene Induktionsspannungen berücksichtigt, nicht aber Spannungen, die durch Bewegungen induziert werden:

$$U_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -\oint_A \frac{\partial B_n}{\partial t} dA. \quad (27.5)$$

FARADAY'SCHES GESETZ

Das Faraday'sche Gesetz besagt: Ein veränderlicher magnetischer Fluss erzeugt ein elektrisches Feld, dessen Umlaufintegral entlang einer geschlossenen Kurve proportional zur Rate der Änderung des magnetischen Flusses durch jede von dieser Kurve umspannte Fläche ist. Die von Maxwell modifizierte Form des Ampère'schen Gesetzes hingegen zeigt, dass ein veränderlicher elektrischer Fluss ein Magnetfeld erzeugt, dessen Umlaufintegral entlang einer geschlossenen Kurve proportional zur Änderungsrate des elektrischen Flusses ist. Wir haben hier den interessanten Fall zweier Gesetze, von denen eines jeweils die Umkehrung des anderen bedeutet: Ein veränderliches Magnetfeld bewirkt ein elektrisches Feld (Faraday'sches Gesetz) – ein veränderliches elektrisches Feld bewirkt ein Magnetfeld (verallgemeinertes Ampère'sches Gesetz). Beachten Sie dabei, dass der elektrische Strom I keine magnetische Entsprechung hat, weil das magnetische Analogon zur elektrischen Ladung, der magnetische Monopol, nicht existiert. (Wie in vorangegangenen Kapiteln bereits bemerkt wurde, gilt die Suche nach magnetischen Monopolen allerdings als noch nicht definitiv abgeschlossen.) Der Verschiebungsstrom wird in Beispiel 27.1 betrachtet und in Beispiel 27.2 zum Magnetfeld in Beziehung gesetzt.

Beispiel 27.1: Berechnung des Verschiebungsstroms

Ein Kondensator hat parallele, kreisrunde, in geringem Abstand voneinander angeordnete Platten mit dem Radius r_p . Durch die mit den Platten verbundenen Leiter fließt ein Strom $I = 2,5 \text{ A}$, wie Abbildung 27.2 zeigt. Berechnen Sie den Verschiebungsstrom I_V , der durch die Fläche A zwischen den beiden Platten fließt. Ermitteln Sie dazu die Änderungsrate des elektrischen Flusses durch A .

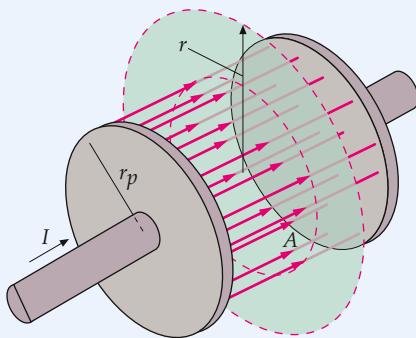


Abbildung 27.2 Darstellung der kreisförmigen Kondensatorplatten, die hier der Übersichtlichkeit halber mit stark vergrößertem Abstand dargestellt sind.

Problembeschreibung: Der Verschiebungsstrom ist $I_V = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}$, wobei Φ_{el} der elektrische Fluss durch die Fläche zwischen den Platten ist. Der Abstand der beiden parallelen Platten ist gering (in Abbildung 27.2 ist er übertrieben groß dargestellt), weshalb das elektrische Feld im Raum zwischen ihnen als homogen und senkrecht zu den Platten gerichtet betrachtet werden kann. Außerhalb des Bereichs zwischen den Platten kann das elektrische Feld vernachlässigt werden. Der elektrische Fluss ist demnach $\Phi_{el} = EA$, wenn E die elektrische Feldstärke zwischen den Platten ist und A deren Fläche. Wir müssen hier streng genommen die Richtungen von E und A berücksichtigen, wobei die Richtung der Fläche als Normalenrichtung definiert ist. In diesem Beispiel ist die Richtung des elektrischen Feldes E mit der Richtung der Fläche A identisch.

Lösung: 1. Der Verschiebungsstrom ergibt sich durch Ableitung des elektrischen Flusses nach der Zeit:

$$I_V = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}$$

2. Der Fluss ist gleich dem Produkt aus elektrischer Feldstärke und Plattenfläche:

$$\Phi_{el} = EA$$

3. Das elektrische Feld ist proportional zur Ladungsdichte auf den Platten, die wir als gleichmäßig verteilt betrachten wollen:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q/A}{\varepsilon_0}$$

4. Setzen Sie die Resultate von Schritt 2 und 3 in die Formel aus Schritt 1 ein und berechnen Sie I_V :

$$\begin{aligned} I_V &= \varepsilon_0 \frac{d(EA)}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{A \varepsilon_0} \right) \\ &= \frac{dq}{dt} = [2,5 \text{ A}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Verschiebungsstrom durch die Fläche zwischen den Platten ist erwartungsgemäß genauso groß wie der Strom, der durch die Zuleitungen fließt. ■

Beispiel 27.2: Berechnung des Magnetfelds aus dem Verschiebungsstrom

Der Radius der runden Kondensatorplatten aus Beispiel 27.1 sei $r_P = 3,0 \text{ cm}$. Berechnen Sie die Magnetfeldstärke B in einem Punkt zwischen den Platten, der $2,0 \text{ cm}$ radial von deren gemeinsamer Achse entfernt ist. Der Strom zur positiven Platte hin sei $I = 2,5 \text{ A}$.

Problembeschreibung: Die Magnetfeldstärke B erhalten wir aus dem verallgemeinerten Ampère'schen Gesetz (Gleichung 27.4). Als Kurve C wählen wir den Umfang des Kreises mit dem Radius $r = 2,0 \text{ cm}$ und dem Mittelpunkt auf der gemeinsamen Achse der Platten, wie Abbildung 27.3 zeigt. Dann berechnen wir den Verschiebungsstrom durch die von C umschlossene Kreisfläche A . Aus Symmetriegründen ist B tangential zu C gerichtet und überall auf C gleich groß.

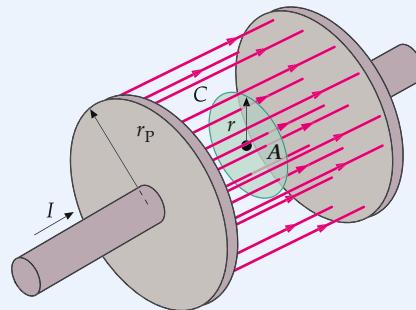


Abbildung 27.3 Darstellung der Kondensatorplatten aus Beispiel 27.1 mit Kontur C zur Berechnung des Magnetfelds B .

Lösung: 1. Die Magnetfeldstärke B ergibt sich aus dem verallgemeinerten Ampère'schen Gesetz:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 (I + I_V)$$

mit

$$I_V = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}$$

2. Das Umlaufintegral ist gleich dem Produkt aus B und dem Umfang des Kreises:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = B \cdot (2\pi r)$$

3. Durch die Fläche A findet kein Ladungstransport statt, $I = 0$. Der verallgemeinerte Strom ist deshalb gleich dem Verschiebungsstrom:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}$$

$$B \cdot (2\pi r) = 0 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}$$

4. Der elektrische Fluss ist gleich dem Produkt aus der (homogenen) elektrischen Feldstärke ($E = \sigma/\varepsilon_0$) und der Größe der von der Kurve C umschlossenen ebenen Fläche ($A = \pi r^2$):

$$\Phi_{el} = AE = \pi r^2 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \pi r^2 \frac{q}{\varepsilon_0 \pi r_p^2}$$

$$= \frac{q r^2}{\varepsilon_0 r_p^2}$$

5. Setzen Sie die Resultate in Schritt 3 ein und lösen Sie nach B auf:

$$B \cdot (2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{q r^2}{\varepsilon_0 r_p^2} \right) = \mu_0 \frac{r^2}{r_p^2} \frac{dq}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{r_p^2} \frac{dq}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{r_p^2} I$$

$$= (2 \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot \frac{0,02 \text{ m}}{(0,03 \text{ m})^2} \cdot (2,5 \text{ A})$$

$$= [1,11 \cdot 10^{-5} \text{ T}]$$

■

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 (I + I_V) \quad \text{mit} \quad I_V = \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial E_n}{\partial t} dA. \quad (27.6d)$$

AMPÈRE'SCHES GESETZ

(Dabei sind die Integrationswege C und die Integrationsflächen A jeweils unveränderlich, und die Integration findet zu einem bestimmten Zeitpunkt statt.)

Der Gauß'sche Satz für das elektrische Feld (Gleichung 27.6a) besagt: Der elektrische Fluss durch eine beliebige geschlossene Fläche ist gleich $1/\varepsilon_0$ -mal die resultierende Ladung in dem von der Fläche umschlossenen Volumen. Wie wir in Kapitel 19 herausgearbeitet haben, lässt der Gauß'sche Satz darauf schließen, dass die von einer Punktladung bewirkte elektrische Feldstärke umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands von der Punktladung ist (quadratisches Abstandsgesetz). Der Gauß'sche Satz beschreibt, wie die elektrischen Feldlinien von einer positiven Ladung ausgehen und sich am Ort einer negativen Ladung treffen. Seine experimentelle Grundlage ist das Coulomb'sche Gesetz.

Der Gauß'sche Satz für das Magnetfeld (Gleichung 27.6b) sagt aus, dass der magnetische Fluss durch jede beliebige geschlossene Fläche null ist. Die Gleichung gibt den experimentellen Befund wieder, dass Magnetfeldlinien nicht von einem Punkt des Raums ausgehen oder in einem Punkt zusammenlaufen, weshalb es isolierte magnetische Pole nicht geben kann.

Das Faraday'sche Gesetz (Gleichung 27.6c) bedeutet in Worten: Das Integral des elektrischen Felds E um eine geschlossene Kurve C – die induzierte Spannung – ist gleich der (negativen) Änderungsrate des magnetischen Flusses durch eine beliebige, von C umschlossene Fläche A . (Beachten Sie: A ist keine geschlossene Fläche; der magnetische Fluss durch A kann deshalb von null verschieden sein.) Das Faraday'sche Gesetz beschreibt, wie die elektrischen Feldlinien eine Fläche umgeben, die von einem zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss durchsetzt wird. Es stellt einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feldvektor E und der Änderungsrate des magnetischen Feldvektors B her.

Gleichung 27.6d ist eine modifizierte Form des Ampère'schen Gesetzes: Sie enthält nun auch den Verschiebungsstrom. Die Gleichung besagt, dass das Umlaufintegral des Magnetfelds \mathbf{B} entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve C gegeben ist als Produkt aus μ_0 und der Summe zweier Beiträge: des Stroms I durch eine von C umschlossene Fläche A und des Verschiebungsstroms I_V durch dieselbe Fläche. Das Gesetz beschreibt, wie die Magnetfeldlinien eine Fläche umgeben, durch die ein Strom oder ein Verschiebungsstrom fließt.

In Abschnitt 27.3 werden wir sehen, wie sich Wellengleichungen für E und B aus den Maxwell'schen Gleichungen herleiten lassen.

27.2 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen lauten:

$$\oint_A E_n dA = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{innen}}, \quad (27.6a)$$

GAUSS'SCHER SATZ FÜR DAS ELEKTRISCHE FELD

$$\oint_A B_n dA = 0, \quad (27.6b)$$

GAUSS'SCHER SATZ FÜR DAS MAGNETFELD

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = - \frac{d}{dt} \int_A B_n dA = - \int_A \frac{\partial B_n}{\partial t} dA, \quad (27.6c)$$

FARADAY'SCHES GESETZ

27.3 Die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

In Kapitel 12 haben wir gesehen, dass sich Seilwellen mit einer partiellen Differentialgleichung beschreiben lassen, der **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (27.7)$$

mit der Wellenfunktion $y(x,t)$. Für eine Seilwelle gibt die Wellenfunktion die Auslenkung des Seils an. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle ist $v = \sqrt{F_S/\rho}$, wobei F_S die Zugkraft und ρ die lineare Massendichte ist. Die allgemeine Lösung der Wellengleichung 27.7 lautet

$$y(x,t) = y_1(x-vt) + y_2(x+vt),$$

y_1 und y_2 sind Funktionen von $(x-vt)$ bzw. $(x+vt)$. Die Lösungen lassen sich als Superposition harmonischer Wellenfunktionen der Form

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

und

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

aufschreiben; $k = 2\pi/\lambda$ ist die Wellenzahl und $\omega = 2\pi\nu$ die Kreisfrequenz.

Die Maxwell'schen Gleichungen lassen darauf schließen, dass \mathbf{E} und \mathbf{B} ähnlichen Wellengleichungen wie Gleichung 27.7 genügen. Wir beschränken unsere Betrachtung auf das Vakuum, das frei von Ladungen und Strömen ist; das elektrische und das magnetische Feld, \mathbf{E} und \mathbf{B} , sollen ausschließlich von der Zeit und von einer Ortskoordinate abhängen, wofür wir die x -Koordinate wählen. Es handelt sich dann um eine **ebene Welle**: \mathbf{E} und \mathbf{B} sind homogen entlang jeder senkrecht auf der x -Achse stehenden Ebene. Für eine ebene elektromagnetische Welle, die sich parallel zur x -Achse ausbreitet, sind die x -Komponenten beider Felder null. Die Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{B} stehen in diesem Fall senkrecht auf der x -Achse und genügen jeweils einer Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (27.8a)$$

WELLENGEICHUNG FÜR DEN ELEKTRISCHEN FELDVEKTOR

sowie

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (27.8b)$$

WELLENGEICHUNG FÜR DEN MAGNETISCHEN FELDVEKTOR

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. (Beim Einprägen dieser Gleichungen hilft eine Dimensionsbetrachtung: Die Zähler sind auf beiden Seiten gleich,

und die Nenner haben auf beiden Seiten die Dimension einer Länge zum Quadrat.)

Herleitung der Wellengleichung

Wir können die Ableitung eines der beiden Feldvektoren nach der Ortskoordinate mit der Ableitung des anderen Feldvektors nach der Zeit verknüpfen, indem wir das Faraday'sche Gesetz (Gleichung 27.6c) und die modifizierte Form des Ampère'schen Gesetzes (Gleichung 27.6d) auf geeignet gewählte Wege im Raum anwenden. Zunächst wollen wir die Ortsableitung von E_y zur Zeitableitung von B_z in Beziehung setzen. Dazu wenden wir Gleichung 27.6c auf den in Abbildung 27.4 eingezeichneten rechteckigen Weg C in der x - y -Ebene mit den Seitenlängen Δx und Δy an. Das Umlaufintegral von \mathbf{E} bezüglich C ist für kleine Δx und Δy

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_y(x_2) \Delta y - E_y(x_1) \Delta y \\ = [E_y(x_2) - E_y(x_1)] \Delta y.$$

Hier ist $E_y(x_1)$ der Wert von E_y bei $x = x_1$ und $E_y(x_2)$ der Wert von E_y bei $x = x_2$. Die Beiträge der oberen und der unteren Seite des Rechtecks mit der Form $E_x \Delta x$ sind null, weil $E_x = 0$ ist. Da Δx relativ zur Wellenlänge sehr klein ist, können wir für die Differenz von E_y zwischen der linken und der rechten Seite des Rechtecks (in x_1 und x_2) folgende Näherung verwenden:

$$E_y(x_2) - E_y(x_1) = \Delta E_y \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x.$$

Dann ist

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \approx \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y.$$

Das Faraday'sche Gesetz besagt:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A \frac{\partial B_n}{\partial t} dA.$$

Der Fluss von $\partial B_n / \partial t$ durch die von C umschlossene Rechteckfläche ist ungefähr gleich

$$\int_A \frac{\partial B_n}{\partial t} dA \approx \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y.$$

Aus dem Faraday'schen Gesetz folgt dann

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \Delta y = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

oder

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (27.9)$$

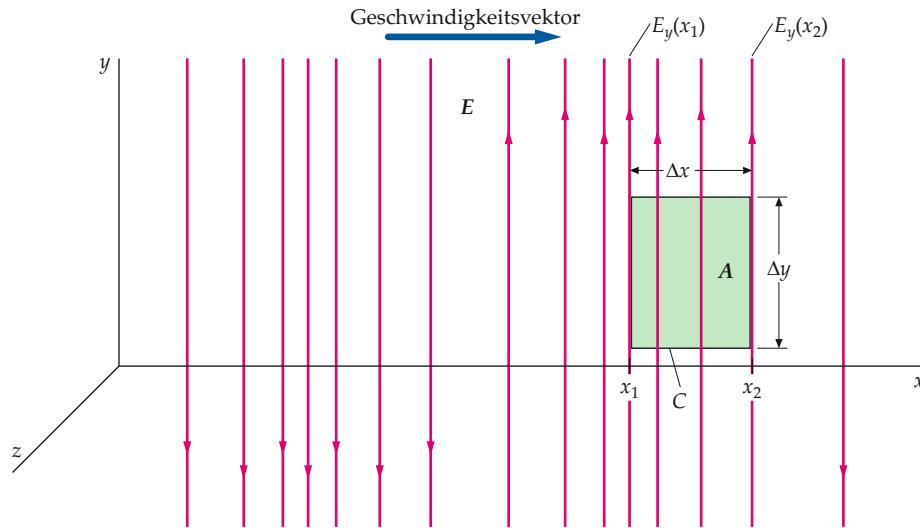


Abbildung 27.4 Rechteckiger Weg C in der x - y -Ebene zur Herleitung von Gleichung 27.9.

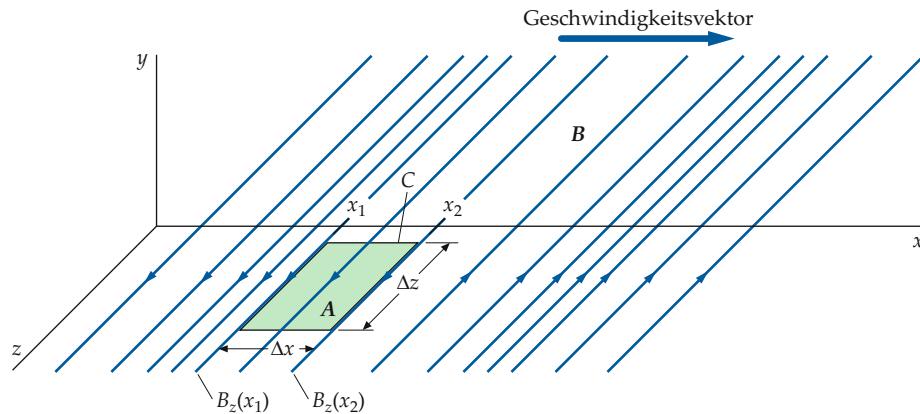


Abbildung 27.5 Rechteckiger Weg C in der x - z -Ebene ($y = 0$) zur Herleitung von Gleichung 27.10.

Aus Gleichung 27.9 lässt sich Folgendes schließen: Hat das elektrische Feld E_y eine von x abhängige Komponente, dann muss eine Komponente des Magnetfelds B_z von der Zeit abhängen (oder umgekehrt – hat das Magnetfeld B_z eine zeitabhängige Komponente, dann muss eine Komponente des elektrischen Feldes E_y von x abhängen).

Einen ähnlichen Zusammenhang erhalten wir, wenn wir die Ableitung des Magnetfelds B_z nach der Ortskoordinate zur Ableitung des elektrischen Felds E_y nach der Zeit in Beziehung setzen. Dazu wenden wir das Ampère'sche Gesetz (Gleichung 27.6d) auf den rechteckigen Weg C in der x - z -Ebene mit den Seitenlängen Δx und Δz an (Abbildung 27.5).

Unter der Voraussetzung, dass kein Strom fließt ($I = 0$), folgt aus Gleichung 27.6d

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \int_A \frac{\partial E_y}{\partial t} dA .$$

Die Schritte der Herleitung sind analog zu den Schritten, die uns zu Gleichung 27.9 führten. Wir erhalten

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} . \quad (27.10)$$

Um aus den Gleichungen 27.9 und 27.10 B_z oder E_y zu eliminieren, leiten wir beide Seiten der jeweiligen Gleichung entweder nach x oder nach t ab. Beispielsweise liefert die Ableitung beider Seiten von Gleichung 27.9 nach x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} \right) .$$

Wir vertauschen die Reihenfolge der Zeit- und der Ortsableitung auf der rechten Seite,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right) ,$$

und setzen den Ausdruck aus Gleichung 27.10 für $\partial B_z / \partial x$ ein:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \right).$$

So gelangen wir zur Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (27.11)$$

Ein Vergleich der Gleichungen 27.11 und 27.7 zeigt, dass E_y für Wellen mit der Geschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ (Gleichung 27.1) einer Wellengleichung genügt.

Ebenso gut hätten wir E_y aus den Gleichungen 27.9 oder 27.10 eliminieren können (z. B. durch Ableitung von Gleichung 27.9 nach t). Wir hätten eine mit Gleichung 27.11 identische Beziehung erhalten, abgesehen davon, dass an der Stelle von E_y dann B_z stünde. Folglich halten wir fest: Sowohl das elektrische Feld E_y als auch das Magnetfeld B_z befolgen eine Wellengleichung für elektromagnetische Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ ausbreiten. Maxwell setzte in diesen Ausdruck die verfügbaren Messwerte für μ_0 und ε_0 ein und zeigte, dass das Resultat gleich dem Messwert der Lichtgeschwindigkeit ist.

Eine ähnliche Argumentation unter Anwendung des Faraday'schen Gesetzes (Gleichung 27.6c) auf den Weg C in der x - z -Ebene (siehe Abbildung 27.5) führt uns zu

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (27.12)$$

die Anwendung von Gleichung 27.6d auf den Weg C in der x - y -Ebene (siehe Abbildung 27.4) schließlich liefert

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (27.13)$$

Mithilfe dieser Resultate können wir zeigen, dass die Komponenten E_z und B_y einer Welle, die sich in x -Richtung ausbreitet, ebenfalls der Wellengleichung genügen.

Wir wollen nun nachweisen, dass das elektrische und das magnetische Feld der Welle in Phase sind. Dazu betrachten wir eine harmonische Wellenfunktion der Form

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t). \quad (27.14)$$

Wir setzen dies in Gleichung 27.9 ein:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -k E_0 \cos(kx - \omega t).$$

Um diese Gleichung nach B_z aufzulösen, integrieren wir $\partial B_z / \partial t$ über die Zeit:

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - \omega t) + f(x). \quad (27.15)$$

$f(x)$ ist eine beliebige Funktion von x .

Übung 27.1: Prüfen Sie Gleichung 27.15 nach, indem Sie zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - \omega t) + f(x) \right] \\ = -k E_0 \cos(kx - \omega t). \end{aligned}$$

Als Nächstes setzen wir die harmonische Wellenfunktion aus Gleichung 27.14 in Gleichung 27.10 ein und erhalten

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = \omega \mu_0 \varepsilon_0 E_0 \cos(kx - \omega t).$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir für B_z

$$B_z = \int \frac{\partial B_z}{\partial x} dx = \frac{\omega \mu_0 \varepsilon_0}{k} E_0 \sin(kx - \omega t) + g(t) \quad (27.16)$$

mit $g(t)$ als beliebiger Funktion der Zeit. Gleichsetzen der rechten Seiten der Gleichungen 27.15 und 27.16 führt zu

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - \omega t) + f(x) \\ &= \frac{\omega \mu_0 \varepsilon_0}{k} E_0 \sin(kx - \omega t) + g(t), \end{aligned}$$

woraus durch Einsetzen von c für ω/k und von $1/c^2$ für $\mu_0 \varepsilon_0$ folgt:

$$\frac{1}{c} E_0 \sin(kx - \omega t) + f(x) = \frac{1}{c} E_0 \sin(kx - \omega t) + g(t).$$

Diese Beziehung sagt aus, dass für alle Werte von x und t gelten muss $f(x) = g(t)$, was nur der Fall sein kann, wenn $f(x) = g(t) = \text{konstant}$ ist (also beide Funktionen weder von x noch von t abhängen). Aus Gleichung 27.15 wird dann

$$B_z = \frac{k}{\omega} E_0 \sin(kx - \omega t) + C = B_0 \sin(kx - \omega t) \quad (27.17)$$

mit $B_0 = (k/\omega) E_0 = (1/c) E_0$. Die Integrationskonstante C haben wir null gesetzt, weil sie für die Welle physikalisch keine Rolle spielt; sie lässt lediglich gegebenenfalls die Anwesenheit eines statischen, homogenen Magnetfelds zu. Die elektrische und die magnetische Feldkomponente der elektromagnetischen Welle oszillieren mit gleicher Frequenz und Phase. Wir erhalten deshalb das allgemeine Resultat, dass elektrische und magnetische Feldstärke einer elektromagnetischen Welle verknüpft sind gemäß

$$E = c B. \quad (27.18)$$

Die Ausbreitungsrichtung einer elektromagnetischen Welle ist stets gleich der Richtung des Vektorprodukts $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Für die oben beschriebene Welle sind gegeben das elektrische Feld $\mathbf{E} = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$ und das Magnetfeld $\mathbf{B} = B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= [E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}}] \times [B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}] \\ &= E_0 B_0 \sin^2(kx - \omega t) \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Der Term rechts beschreibt einen Vektor, der in $+x$ -Richtung zeigt. Wir haben damit nachgewiesen, dass $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ die Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle liefert.

Die Ausbreitungsrichtung einer elektromagnetischen Welle ist stets gleich der Richtung des Vektorprodukts $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Beispiel 27.3: Das Magnetfeld einer linear polarisierten ebenen Welle

Gegeben ist das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle, $\mathbf{E}(y, t) = E_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{z}}$. a) Geben Sie die Ausbreitungsrichtung der Welle an. b) Geben Sie einen Ausdruck für das Magnetfeld der Welle an.

Problembeschreibung: Die Ausbreitungsrichtung lesen wir aus dem Argument der Sinusfunktion ab. \mathbf{B} steht senkrecht auf \mathbf{E} und auf der Ausbreitungsrichtung; \mathbf{B} und \mathbf{E} sind in Phase. Die Ausbreitungsrichtung ist gegeben durch $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Ausbreitungsrichtung entnehmen Sie dem Argument der Sinusfunktion: Die Ausbreitungsrichtung ist die Richtung, in der y abnimmt, also die Richtung von $-\hat{\mathbf{y}}$.

Teilaufgabe b

1. \mathbf{B} und \mathbf{E} sind in Phase; \mathbf{B} steht senkrecht auf \mathbf{E} und auf der Ausbreitungsrichtung $\hat{\mathbf{y}}$ (also senkrecht zu $\hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$). Daraus folgt:

$$\mathbf{B}(y, t) = +B_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{x}}$$

oder

$$\mathbf{B}(y, t) = -B_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{x}}$$

2. $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ zeigt in die Ausbreitungsrichtung $-\hat{\mathbf{y}}$. Bilden Sie das Vektorprodukt $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$; nehmen Sie dazu an, dass gilt $\mathbf{B}(y, t) = B_0 \sin(ky + \omega t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= [E_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{z}}] \times [B_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{x}}] \\ &= E_0 B_0 \sin^2(ky + \omega t) (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}) \\ &= E_0 B_0 \sin^2(ky + \omega t) (\hat{\mathbf{y}})\end{aligned}$$

3. Das Resultat aus Schritt 2 widerspricht der Realität, denn die Welle breitet sich in $-y$ -Richtung aus. Deshalb wiederholen Sie die Rechnung mit dem alternativen Ausdruck für das Magnetfeld:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= [E_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{z}}] \times [-B_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{x}}] \\ &= E_0 (-B_0) \sin^2(ky + \omega t) (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}) \\ &= -E_0 B_0 \sin^2(ky + \omega t) (\hat{\mathbf{y}})\end{aligned}$$

4. Das Resultat aus Schritt 3 gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle korrekt wieder. Deshalb lautet der gesuchte Ausdruck für das Magnetfeld der Welle:

$$\boxed{\mathbf{B}(y, t) = -B_0 \sin(ky + \omega t) \hat{\mathbf{x}}}$$

mit $B_0 = E_0/c$ (Gleichung 27.18)

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Schritt 4 steht, wie erwartet, senkrecht sowohl auf \mathbf{E} als auch auf der Ausbreitungsrichtung der Welle. ■

Beispiel 27.4: Das Magnetfeld einer zirkular polarisierten ebenen Welle

Gegeben ist

$$\mathbf{E}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}} + E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}},$$

das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle. a) Geben Sie einen Ausdruck für das Magnetfeld dieser Welle an. b) Berechnen Sie $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Problembeschreibung: Zur Lösung dieser Aufgabe wenden wir das Superpositionsprinzip an. Das elektrische Feld entspricht der Superposition zweier Felder; eines davon ist durch Gleichung 27.14 gegeben, das andere durch $E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Aus den Argumenten der Winkelfunktionen entnehmen Sie die Ausbreitungsrichtung: Die Welle breitet sich in positiver x -Richtung aus.

2. Betrachten Sie das gegebene elektrische Feld als Superposition der Funktionen $\mathbf{E}_1 = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$ und $\mathbf{E}_2 = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$. Geben Sie die Magnetfelder an, die zu diesen beiden elektrischen Feldern gehören; gehen Sie vor, wie es in Beispiel 27.3 gezeigt wurde: Für

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}} \text{ ist } \mathbf{B}_1 = B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

mit $B_0 = E_0/c$ (Gleichung 27.18) und für

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{z} \quad \text{ist} \quad \mathbf{B}_2 = -B_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y}$$

mit $B_0 = E_0/c$.

3. Die Superposition der beiden Magnetfelder liefert das resultierende Magnetfeld:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, t) &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \\ &= [B_0 \sin(kx - \omega t) \hat{z} - B_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y}] \end{aligned}$$

mit $B_0 = E_0/c$.

Teilaufgabe b

1. Um die Schreibweise zu vereinfachen, setzen Sie $\theta = kx - \omega t$. Berechnen Sie nun $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= (E_0 \sin \theta \hat{y} + E_0 \cos \theta \hat{z}) \cdot (B_0 \sin \theta \hat{z} - B_0 \cos \theta \hat{y}) \\ &= E_0 B_0 \sin^2 \theta \hat{y} \cdot \hat{z} - E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta \hat{y} \cdot \hat{y} \\ &\quad + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta \hat{z} \cdot \hat{z} - E_0 B_0 \cos^2 \theta \hat{z} \cdot \hat{y} \\ &= 0 - E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta - 0 \\ &= [0] \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie schließlich $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= (E_0 \sin \theta \hat{y} + E_0 \cos \theta \hat{z}) \times (-B_0 \cos \theta \hat{y} + B_0 \sin \theta \hat{z}) \\ &= -E_0 B_0 \sin \theta \cos \theta (\hat{y} \times \hat{y}) + E_0 B_0 \sin^2 \theta (\hat{y} \times \hat{z}) \\ &\quad - E_0 B_0 \cos^2 \theta (\hat{z} \times \hat{y}) + E_0 B_0 \cos \theta \sin \theta (\hat{z} \times \hat{z}) \\ &= 0 + E_0 B_0 \sin^2 \theta \hat{x} + E_0 B_0 \cos^2 \theta \hat{x} + 0 \\ &= [E_0 B_0 \hat{x}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Schritt 1 in Teilaufgabe b zeigt, dass \mathbf{E} und \mathbf{B} tatsächlich senkrecht aufeinanderstehen;

Schritt 2 in Teilaufgabe b entnehmen Sie die korrekte Ausbreitungsrichtung, $+x$.

Weitergedacht: Eine solche elektromagnetische Welle nennt man *zirkular polarisiert*: Bei einem bestimmten x beschreiben \mathbf{E} und \mathbf{B} mit der Kreisfrequenz ω Kreise in einer auf \hat{x} senkrecht stehenden Ebene, d.h., $|\mathbf{E}|$ und $|\mathbf{B}|$ sind zeitlich und räumlich konstant.

Übung 27.2: Berechnen Sie $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$; die elektrische und die magnetische Feldstärke sind konstant. ◀ ■

Wir haben gesehen, dass sich aus den Maxwell'schen Gleichungen auf die Wellengleichungen für das elektrische und das magnetische Feld, Gleichung 27.8a und 27.8b, schließen lässt. Wird E_y durch eine harmonische Funktion beschrieben (wie Gleichung 27.14), so oszilliert das Magnetfeld B_z phasengleich mit E_y , und die Beziehung zwischen den Amplituden der Felder lautet $B_z = E_y/c$. Das elektrische und das magnetische Feld stehen senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung der Welle, wie es in Abbildung 27.6 gezeigt ist. In den Beispielen 27.3 und 27.4 werden *linear polarisierte* und *zirkular polarisierte* Wellen betrachtet, bei denen \mathbf{E} und \mathbf{B} jeweils nur in einer bzw. zwei Raumrichtungen von null verschiedene Komponenten haben.

27.4 Elektromagnetische Strahlung

In Abbildung 27.6 wurden die Vektoren des elektrischen und des magnetischen Felds einer elektromagnetischen Welle skizziert. Die beiden Felder stehen senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung der Welle. Das bedeutet, elektromagnetische Wellen sind **Transversalwellen**. Die Felder sind in Phase; an jedem Ort des Raums und zu jedem Zeitpunkt sind die Feldstärken verknüpft gemäß Gleichung 27.18,

$$E = c B$$

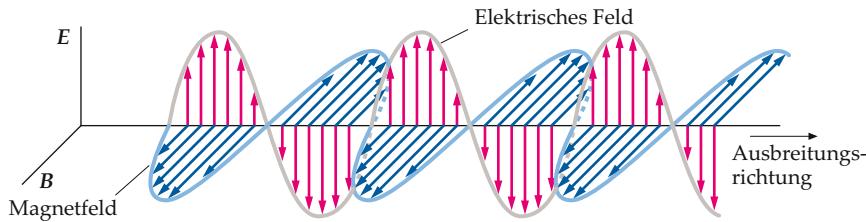
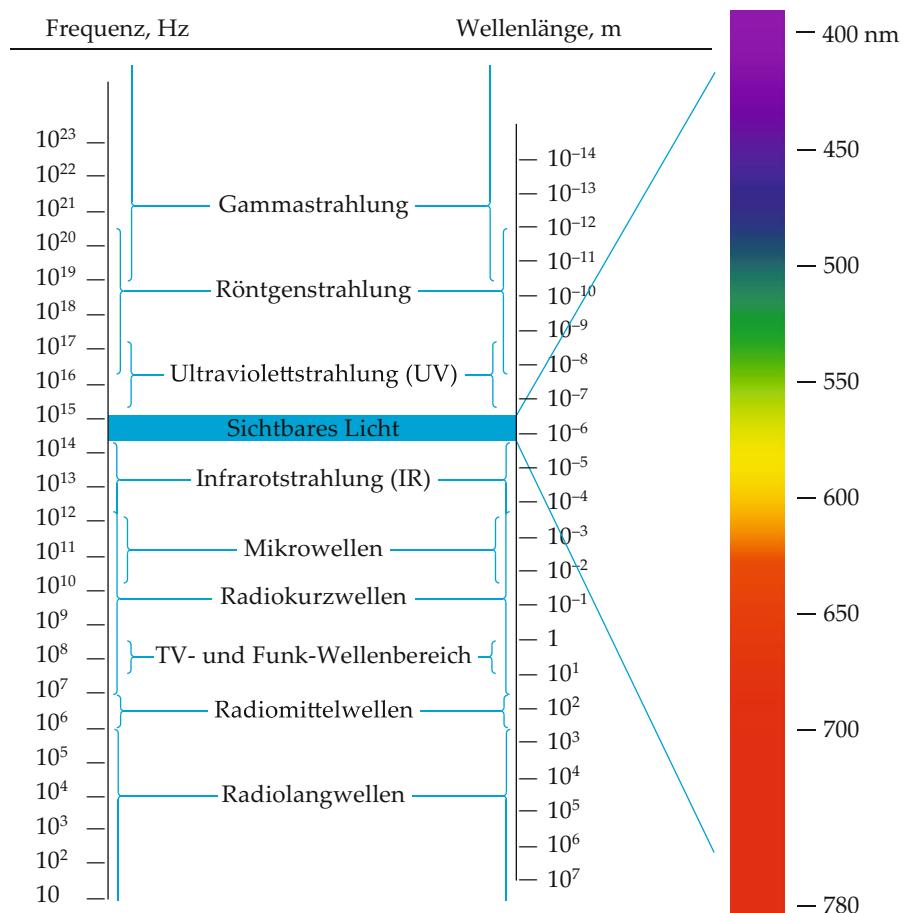


Abbildung 27.6 Elektrischer und magnetischer Feldvektor einer elektromagnetischen Welle. Die Felder sind in Phase; sie stehen senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung der Welle.

Tabelle 27.1 Das elektromagnetische Spektrum

mit $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ als Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Die Richtung der Fortpflanzung einer elektromagnetischen Welle entspricht der Richtung des Kreuzprodukts der Feldvektoren, $E \times B$.

Das elektromagnetische Spektrum

Elektromagnetische Wellen teilt man nach ihrer Wellenlänge und Frequenz in verschiedene Bereiche ein, beispielsweise sichtbares Licht, Gammastrahlen und Radiowellen. Das Produkt aus Wellenlänge und Frequenz ist dabei jeweils gleich der Lichtgeschwindigkeit, $v \lambda = c$. Das **elektromagnetische Spektrum** mit den gebräuchlichen Bezeichnungen der Wellenlängen- und Frequenzbereiche zeigt Tabelle 27.1. Die Grenzen der einzelnen Bereiche sind nicht streng festgelegt; wie Sie beim Betrachten der Tabelle feststellen, überlappen manche Regionen. Elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen um 0,1 nm beispielsweise nennt man gewöhnlich Röntgenstrahlen; entste-

hen sie hingegen durch einen Kernzerfall, bezeichnet man sie als Gammastrahlen.

Unsere Augen sind empfindlich für elektromagnetische Strahlung im Wellenlängenbereich von ungefähr 400–780 nm, das **sichtbare Licht**. (Licht mit Wellenlängen zwischen 700 und 780 nm kann man nur unter bestimmten Bedingungen sehen; u. a. muss die Intensität sehr hoch sein.) Das kurzwellige Ende dieses Bereichs empfinden wir als Violett, das langwellige als Rot. Jenseits des violetten sichtbaren Lichts bis hinab zu Wellenlängen von 10 nm folgt die kürzerwellige **Ultraviolettspektren** oder **UV-Strahlung**, jenseits des roten sichtbaren Lichts bis hinauf zu Wellenlängen von 100 µm die längerwellige **Infrarotspektren** oder **IR-Strahlung**. Wärmestrahlung, die von Körpern bei Raumtemperatur abgegeben wird, liegt im Infrarotbereich. Theoretisch unterliegt die Wellenlänge (und damit die Frequenz) der elektromagnetischen Strahlung keinerlei Beschränkung.

Die Wellenlänge einer elektromagnetischen Strahlung hat wichtige physikalische Konsequenzen. Wie Sie wissen, hängt das Verhalten von Wellen entscheidend vom Verhältnis der Wel-

Wellenlänge zur Dimension des physikalischen Objekts (eines Körpers, Spalts usw.) ab, auf das die Welle trifft. Die Wellenlänge sichtbaren Lichts liegt in dem relativ schmalen Bereich von 400–780 nm und ist damit geringer als die Dimension der meisten Hindernisse. Deshalb können wir die Welle näherungsweise als Strahl auffassen und in der Regel mit den Gesetzen der geometrischen Optik arbeiten, die wir in Kapitel 12 eingeführt haben. Von der Wellenlänge (bzw. der Frequenz) der Strahlung hängt es auch ab, inwieweit elektromagnetische Wellen mit der Materie in Wechselwirkung treten. Die extrem kurzwellige, hochfrequente Röntgenstrahlung z. B. durchdringt mühelos Stoffe, die sichtbares Licht vollständig absorbieren. Mikrowellenstrahlung, mit der man im Mikrowellenofen Nahrungsmittel erhitzt, besitzt eine Wellenlänge im Bereich von 1 mm bis 30 cm. Moleküle mit großem Dipolmoment (wie Wasser) richten sich im elektrischen Feld dieser Strahlung aus. Da das elektrische Feld mit einer Frequenz seine Richtung wechselt, die doppelt so groß ist wie die Strahlungsfrequenz selbst, werden die polaren Moleküle zu schnellen Rotationen angeregt, um dem wechselnden Feld zu folgen. Durch Zusammenstöße mit umgebenden Molekülen wird Wärme frei; dies ist das Funktionsprinzip von Mikrowellenöfen. Bluetooth und andere Protokolle für drahtlose Computernetze arbeiten ebenfalls mit Strahlung im Mikrowellenbereich.

Quellen elektromagnetischer Strahlung

Beschleunigte freie elektrische Ladungen senden elektromagnetische Wellen aus. Auch der Übergang von Elektronen, die in Atomen oder Molekülen gebunden sind, aus einem Niveau höherer auf ein Niveau niedrigerer Energie führt zur Emission elektromagnetischer Strahlung. Radiowellen mit Frequenzen bei 550–1600 kHz (Mittelwelle) oder bei 88–108 MHz (UKW) entstehen durch die Oszillation makroskopischer Ströme in Sendeanennen, wobei die Frequenz der emittierten Wellen der Oszillationsfrequenz der Ladungen entspricht.

Röntgenstrahlung mit kontinuierlichem Spektrum, die sogenannte **Bremsstrahlung**, wird ausgesendet, wenn Elektronen beim Eindringen in ein Metall abgebremst werden. Dem breiten Kontinuum überlagert ist ein Spektrum diskreter Röntgenlinien, die durch Elektronenübergänge zwischen den inneren Schalen der Metallatome entstehen.

Synchrotronstrahlung kommt durch die Kreisbewegung geladener Teilchen (meist Elektronen oder Positronen) in Teilchenbeschleunigern, den Synchrotrons, zustande. Ursprünglich betrachteten Hochenergiephysiker diese Strahlung als lästigen Nebeneffekt; heute erzeugt man Synchrotronstrahlung im Röntgenbereich absichtlich als Hilfsmittel in der medizinischen Diagnostik, da sich die Strahlen mit reflektierenden und beugenden Bauelementen leicht manipulieren lassen. Geladene Teilchen, die in Magnetfeldern von Sternen oder Galaxien gefangen sind, senden ebenfalls Synchrotronstrahlung aus. Man nimmt heute an, dass der überwiegende Teil der niederfrequenten Radiowellen, die unsere Erde aus dem Weltraum erreichen, Synchrotronstrahlung ist.

Thermisch angeregte Ladungen in Molekülen emittieren Wärmestrahlung, deren Frequenzspektrum – das Spektrum des **schwarzen Körpers** – wir bereits in Abschnitt 17.4 besprochen haben.

Die Frequenzen des sichtbaren Lichts liegen in der Größenordnung von 10^{14} Hz. Licht wird in der Regel bei Übergängen gebundener elektrischer Ladungen ausgesendet, wie wir in Kapitel 28 näher untersuchen werden.

Abhängig von der Ausdehnung der Quelle und der abgestrahlten Wellenlänge unterscheiden wir außerdem drei Bereiche des elektromagnetischen Feldes im Raum um die Quelle herum: die **Nahzone**, die **Mittelzone** und die **Fernzone**. Ist die Ausdehnung der Strahlungsquelle in der Größenordnung r_S und strahlt sie Wellen mit einer Wellenlänge λ ab, die größer ist als r_S , so ist die Nahzone definiert als der Bereich im Raum um die Quelle mit Abstand zwischen r_S und λ von der Quelle. Die Mittelzone ist der Bereich, in dem der Abstand zur Quelle größer als r_S ist und in der Größenordnung von λ liegt. Die Fernzone ist schließlich der Bereich, für den der Abstand wesentlich größer als die Wellenlänge ist. Wie wir bereits in Kapitel 18 für raumfeste Ladungsverteilungen gesehen haben, unterscheiden sich die einzelnen Bereiche in Stärke und Richtung des statischen elektrischen Feldes. Das Gleiche gilt für den Raum um eine elektromagnetische Strahlungsquelle, wie wir am Beispiel des elektrischen Dipols noch sehen werden.

Im Allgemeinen ist das elektromagnetische Feld einer Strahlungsquelle in der Nahzone quasi-statisch, d. h., es oszilliert lediglich in der Zeit und verhält sich sonst wie ein statisches Radialfeld. Erst das Fernfeld zeigt die in diesem Kapitel besprochenen Transversalwellen.

Elektrische Dipolstrahlung

Abbildung 27.7 zeigt das Schema einer Dipolantenne, bestehend aus zwei elektrisch leitenden Stäben, die mit einem Wechselspannungsgenerator verbunden sind. Zum Zeitpunkt $t = 0$ (Abbildung 27.7a) sind die Enden der Stäbe elektrisch geladen; in der Umgebung der Stäbe wird dadurch ein zu diesen paralleles elektrisches Nahfeld erzeugt, das im Raum dem Feld eines statischen Dipols entspricht, wie wir es in Kapitel 18 bereits kennen gelernt haben. Über die Zeit oszilliert das Feld an jedem Ort, wie wir in den Abbildung 27.7b und 27.7c sehen. Der Strom durch die Stäbe bewirkt außerdem ein (nicht eingezeichnetes) Magnetfeld, dessen Linien die Stäbe kreisförmig umgeben. Nach einer Viertelperiode ($t = T/4$; Abbildung 27.7b) sind die Stäbe entladen, die elektrische Feldstärke in ihrer Umgebung ist null. Bei $t = T/2$ (Abbildung 27.7c) sind die Enden wieder geladen, im Vergleich zu $t = 0$ aber andersherum gepolt. Weit von der Antenne entfernt beobachtet man ein deutlich anderes Verhalten des elektrischen und des magnetischen Felds: Sie oszillieren harmonisch und phasengleich sowohl über die Zeit als auch im Raum, wobei sie senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung der Welle stehen, wie in Abbildung 27.8 detailliert dargestellt ist.

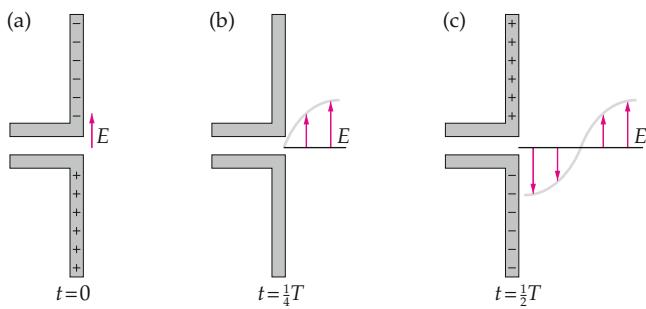


Abbildung 27.7 Elektrische Dipolantenne, die elektromagnetische Wellen (Radiowellen) aussendet. Die Stäbe sind mit einem (nicht eingezeichneten) Wechselspannungsgenerator verbunden. Die Oszillationen der Ladungen in den Stäben führen zu Oszillationen des elektrischen Nahfelds über die Zeit, das im Raum das Feld eines statischen Dipols annimmt. Weit weg von der Antenne erst oszilliert das elektrische Feld auch im Raum. Der Strom durch die Stäbe bewirkt außerdem ein oszillierendes, senkrecht zur Papierebene orientiertes Magnetfeld (nicht eingezeichnet).

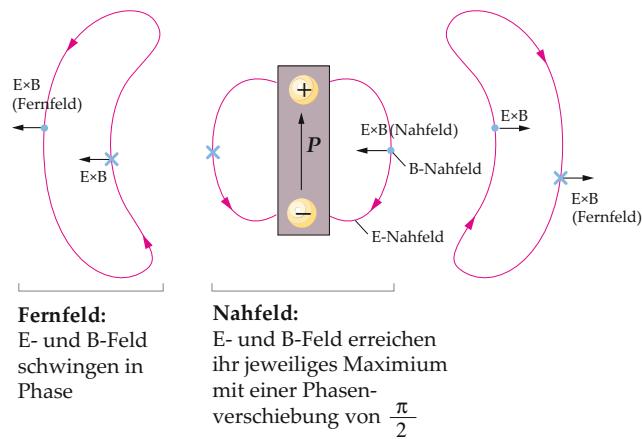


Abbildung 27.8 Linien des elektrischen (rot) und des magnetischen Felds (blau), die von einem oszillierenden elektrischen Dipol in der Nah- und Fernzone erzeugt werden. Die Magnetfeldlinien bilden geschlossene Kreise, auf deren Achse sich die Längsachse des Dipols befindet. Das Kreuzprodukt $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ zeigt in allen Punkten des Nahfelds zum Dipol hin, während es im Fernfeld vom Dipol weg zeigt.

Zum Empfang elektromagnetischer Wellen mit Frequenzen im Rundfunk- oder Fernsehbereich ordnet man eine elektrische Dipolantenne parallel zum elektrischen Feld der ankommenden Welle an, wodurch in der Antenne ein Wechselstrom induziert wird (Abbildung 27.9). Auch mit einer Ringantenne, deren Ebene senkrecht zum Magnetfeld der ankommenden Welle orientiert ist, kann man Radiowellen empfangen. Wie Abbildung 27.10 zeigt, induziert der veränderliche magnetische Fluss durch den Ring einen Strom; die induzierte Spannung wird in Beispiel 27.5 berechnet. Elektromagnetische Wellen im Frequenzbereich des sichtbaren Lichts empfängt man mit dem Auge oder mit fotografischen Platten und Filmen; alle genannten Empfänger reagieren hauptsächlich auf die elektrische Feldkomponente der Welle.

Beispiel 27.5: In einer Ringantenne induzierte Spannung

Mit einer Ringantenne, bestehend aus einer einzelnen Drahtschleife mit einem Radius von 10,0 cm, wird elektromagnetische Strahlung mit einer effektiven elektrischen Feldstärke $E_{\text{eff}} = 0,150 \text{ V/m}$ empfangen. Das Magnetfeld steht senkrecht auf der Ebene der Schleife. Berechnen Sie die effektive Induktionsspannung in der Schleife, wenn die Frequenz der ebenen Welle a) 600 kHz und b) 60,0 MHz beträgt.

Problembeschreibung: Das Faraday'sche Gesetz (Gleichung 27.5) stellt den Zusammenhang zwischen der Induktionsspannung in der Schleife und der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die Schleifenebene her. Mithilfe von Gleichung 27.18 berechnen wir die effektive Magnetfeldstärke aus der gegebenen effektiven elektrischen Feldstärke.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Das Faraday'sche Gesetz gibt die Beziehung zwischen dem Betrag der Induktionsspannung und der Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die ruhende, ebene, von der Schleife umschlossenen Fläche an:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

2. Eine Welle mit einer Frequenz von 600 kHz, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, hat die Wellenlänge $\lambda = c/v = 500 \text{ m}$. Über der ebenen, von der Schleife mit dem Durchmesser von 10 cm umschlossenen Fläche ist das Magnetfeld in guter Näherung homogen:

$$\Phi_{\text{mag}} = BA = \pi r^2 B$$

also

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$

und

$$U_{\text{eff}} = \pi r^2 \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{eff}}$$

3. Berechnen Sie $(\partial B / \partial t)$ für einen sinusförmigen Verlauf von B (die Amplitude des magnetischen Felds ist B_0):

$$B = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \cos(kx - \omega t)$$

4. Berechnen Sie nun $(\partial B / \partial t)_{\text{eff}}$. Der Effektivwert einer Sinusfunktion der Zeit ist gleich $1/\sqrt{2}$; der Maximalwert, geteilt durch $\sqrt{2}$, ist gleich dem Effektivwert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{eff}} &= \omega B_0 [-\cos(kx - \omega t)]_{\text{eff}} \\ &= \omega B_0 / \sqrt{2} = \omega B_{\text{eff}} \end{aligned}$$

5. Aus Gleichung 27.18 ($E = cB$) folgt der Zusammenhang zwischen den effektiven Feldstärken:

$$E = cB,$$

also

$$B_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{c}$$

6. Setzen Sie dies in Ihr Ergebnis aus Schritt 4 ein:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{eff}} = \omega B_{\text{eff}} = \omega \frac{E_{\text{eff}}}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} E_{\text{eff}}$$

7. Nun setzen Sie dieses Resultat in das Ergebnis aus Schritt 2 ein:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} &= \pi r^2 \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{eff}} = \pi r^2 \frac{2\pi\nu}{c} E_{\text{eff}} \\ &= \pi \cdot (0,100 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi \cdot (6,00 \cdot 10^5 \text{ Hz})}{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \\ &\quad \cdot (0,150 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}) \\ &= [5,92 \cdot 10^{-5} \text{ V}] = 59,2 \mu\text{V} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die Induktionsspannung ist proportional zur Frequenz (Teilaufgabe a, Schritt 4). Bei 60 MHz ist die Induktionsspannung folglich 100-mal so groß wie bei 600 kHz:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} &= (100) \cdot (5,92 \cdot 10^{-5} \text{ V}) = 0,00592 \text{ V} \\ &= [5,92 \text{ mV}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Schritt 7 aus Teilaufgabe a zeigt Ihnen wie erwartet, dass die Induktionsspannung mit der Frequenz, der effektiven elektrischen Feldstärke und der Fläche der Schleife zunimmt.

Weitergedacht: In Teilaufgabe b beträgt die Frequenz 60,0 MHz, also ist $\lambda = c/\nu = 5,00 \text{ m}$. Über der Fläche, die von der Schleife mit dem Radius von 10 cm umschlossen wird, ist B dann weniger homogen als in Teilaufgabe a mit $\lambda = 500 \text{ m}$, jedoch homogen genug, dass das in Teil b berechnete Ergebnis für die meisten Zwecke hinreichend genau ist. ■

Die von einer Dipolantenne wie in Abbildung 27.8 ausgesendete Strahlung nennt man **elektrische Dipolstrahlung**. Die Merkmale elektrischer Dipolstrahlung lassen sich bei elektromagnetischen Wellen aus vielen Quellen wiederfinden. Zu den wichtigen Eigenschaften der Dipolstrahlung gehört ihre

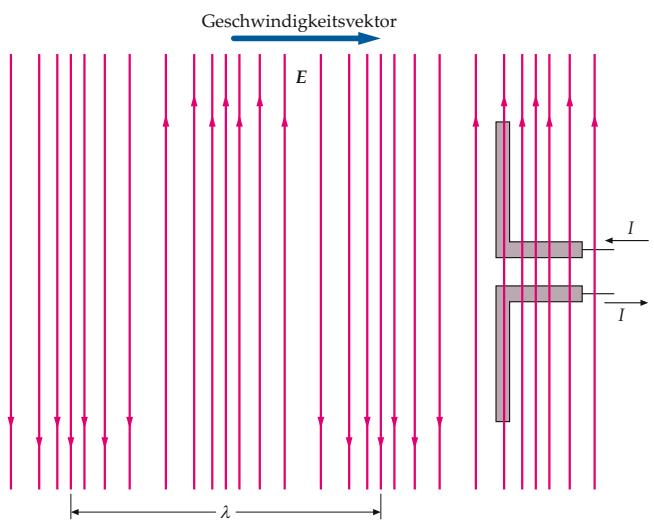


Abbildung 27.9 Elektrische Dipolantenne zum Empfang elektromagnetischer Wellen. Das alternierende elektrische Feld der ankommenden Welle erzeugt in der Antenne einen Wechselstrom. Die nicht eingezeichneten Magnetfeldlinien stehen senkrecht auf der Papierebene.

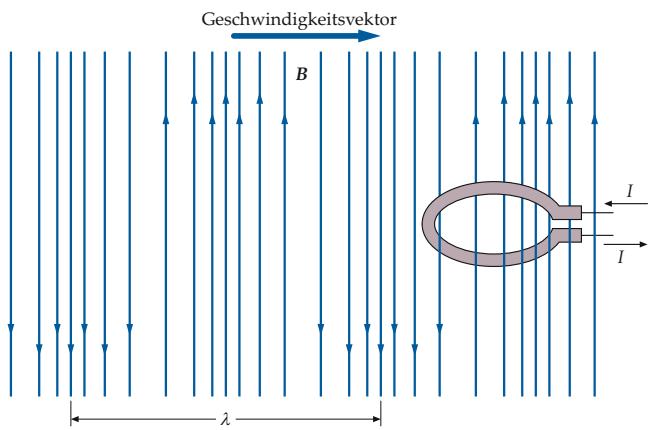


Abbildung 27.10 Ringantenne zum Empfang elektromagnetischer Wellen. Das zeitlich veränderliche Magnetfeld der Strahlung erzeugt einen alternierenden magnetischen Fluss durch den Ring, wodurch in diesem ein Wechselstrom induziert wird. Die nicht eingezeichneten elektrischen Feldlinien stehen senkrecht auf der Papierebene.

Winkelabhängigkeit: Die Intensität der von einer Dipolantenne ausgesendeten Strahlung ist entlang der Antennenachse null, in radialer Richtung (von der Achse weg zeigend) hingegen maximal. Zeigt der Dipol beispielsweise in Richtung der y-Achse mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung (Abbildung 27.11), so ist die Intensität der elektromagnetischen Welle entlang der y-Achse null und in der x-z-Ebene maximal. In einer Richtung, die mit der y-Achse den Winkel θ einschließt, ist die Intensität proportional zu $\sin^2 \theta$.

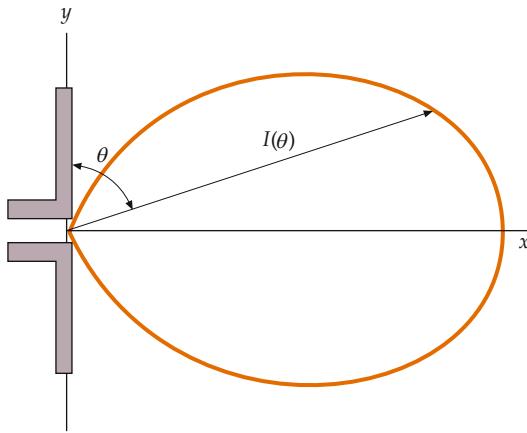


Abbildung 27.11 Intensität der elektromagnetischen Strahlung einer Dipolantenne in Abhängigkeit von θ ; $I(\theta)$ ist proportional zur Länge des Pfeils und wird maximal bei $\theta = 90^\circ$ (senkrecht zur Antenne), minimal hingegen bei $\theta = 0^\circ$ oder $\theta = 180^\circ$ (in Richtung der Antenne).

Energie und Impuls einer elektromagnetischen Welle

Elektromagnetische Wellen führen, wie andere Wellen auch, Energie und einen Impuls mit sich. Zur Beschreibung der übertragenen Energie dient die Intensität, definiert als die mittlere Leistung, die pro Flächeneinheit auf eine senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle orientierte Fläche trifft. Den pro Zeit- und Flächeneinheit übertragenen Impuls bezeichnet man als **Strahlungsdruck**.

Die Intensität

Wir betrachten eine elektromagnetische Welle, die sich von links nach rechts ausbreitet, sowie einen zylindrischen Bereich des Raums mit der Länge l und der Querschnittsfläche A , dessen Längsachse ebenfalls nach rechts zeigt. Die mittlere elektromagnetische Energie $\langle E_{\text{em}} \rangle$ in diesem Raumbereich ist gleich dem Produkt aus der mittleren Energiedichte $\langle w_{\text{em}} \rangle$ und dem Volumen des Zylinders, $V = l \cdot A = lA$, also $\langle E_{\text{em}} \rangle = \langle w_{\text{em}} \rangle V$. Während die elektromagnetische Welle die Länge l des Zylinders durchläuft, tritt ihre Energie durch die rechte Begrenzungsfläche des Bereichs. Zum Durchlaufen von l benötigt die Welle die Zeit $\Delta t = l/c$. Die am rechten Ende des Bereichs austretende mittlere Leistung (Energie pro Zeiteinheit) $\langle P_{\text{em}} \rangle$ ist deshalb gleich

$$\langle P_{\text{em}} \rangle = \langle E_{\text{em}} \rangle / \Delta t = \langle w_{\text{em}} \rangle lA / (l/c) = \langle w_{\text{em}} \rangle A c,$$

und die Intensität (mittlere Leistung pro Flächeneinheit) I_{em} beträgt

$$I_{\text{em}} = \langle P_{\text{em}} \rangle / A = \langle w_{\text{em}} \rangle c.$$

Die elektromagnetische Energiedichte w_{em} der Welle setzt sich aus der elektrischen und der magnetischen Energiedichte, w_{el}

und w_{mag} , zusammen, für die wir bereits die Gleichungen 21.9 und 25.22 hergeleitet haben:

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad \text{und} \quad w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2 \mu_0}.$$

In jedem Punkt im Vakuum, an dem eine elektromagnetische Welle existiert, gilt $E = cB$. Wir können folglich die magnetische Energiedichte anhand des elektrischen Felds ausdrücken:

$$w_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2 \mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2 \mu_0} = \frac{E^2}{2 \mu_0 c^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Dazu haben wir die Beziehung $1/c^2 = \varepsilon_0 \mu_0$ verwendet. Die elektrische und die magnetische Energiedichte sind demnach gleich. Mithilfe der Beziehung $E = cB$ erhalten wir verschiedene nützliche Formulierungen der elektromagnetischen Energiedichte:

$$w_{\text{em}} = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c}. \quad (27.19)$$

ENERGIEDICHTE EINER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLE

Zur Berechnung der mittleren Energiedichte ersetzen wir die momentanen Feldstärken E und B durch ihre Effektivwerte $E_{\text{eff}} = E_0 / \sqrt{2}$ und $B_{\text{eff}} = B_0 / \sqrt{2}$. Für die Intensität ergibt sich damit

$$I_{\text{em}} = \langle w_{\text{em}} \rangle c = \frac{E_{\text{eff}} B_{\text{eff}}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \langle |S| \rangle. \quad (27.20)$$

INTENSITÄT EINER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLE

Der Vektor S mit

$$S = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (27.21)$$

DEFINITION DES POYNTING-VEKTORS

wurde von Sir John Poynting eingeführt und nach ihm **Poynting-Vektor** benannt. Der mittlere Betrag von S gibt die Intensität der Welle an, die Richtung von S entspricht der Ausbreitungsrichtung der Welle.

Strahlungsdruck

An einem einfachen Beispiel wollen wir uns vor Augen führen, dass eine elektromagnetische Welle einen Impuls mitführt. Dazu betrachten wir eine Welle, die sich entlang der x -Achse ausbreitet und auf eine ruhende Ladung trifft (Abbildung 27.12). \mathbf{E} soll in $+y$ -Richtung zeigen und \mathbf{B} in $+z$ -Richtung; außerdem wollen wir die Zeitabhängigkeit der Felder vernachlässigen. Auf die Ladung wirkt in y -Richtung eine Kraft $q\mathbf{E}$. Das bedeutet,

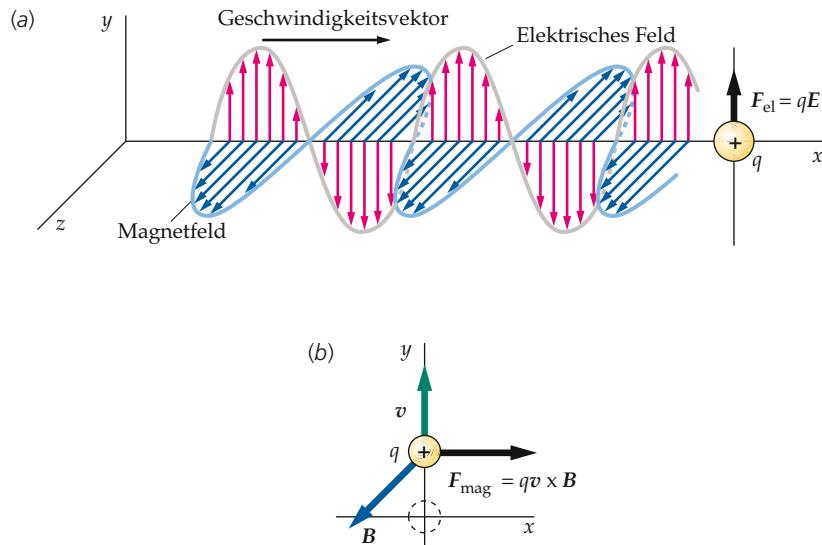


Abbildung 27.12 Eine elektromagnetische Welle trifft entlang der x -Achse auf eine zu Beginn ruhende Punktladung. a) Die elektrische Kraft $q \mathbf{E}$ beschleunigt die Ladung in $+y$ -Richtung. b) Zeigt die Geschwindigkeit \mathbf{v} der Ladung in $+y$ -Richtung, so beschleunigt die magnetische Kraft $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ die Ladung in der Ausbreitungsrichtung der Welle ($+x$ -Richtung).

das elektrische Feld beschleunigt die Ladung, deren Geschwindigkeit in y -Richtung zu einem Zeitpunkt t gegeben ist durch

$$v_y = a_y t = \frac{q E}{m} t.$$

Nachdem eine kurze Zeit t_1 vergangen ist, hat die Punktladung die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} \frac{m q^2 E^2 t_1^2}{m^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t_1^2 \quad (27.22)$$

erworben. Bewegt sich die Ladung in y -Richtung, so wirkt auf sie die magnetische Kraft

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q v_y B \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} = q v_y B \hat{\mathbf{x}} = \frac{q^2 E B}{m} t \hat{\mathbf{x}}.$$

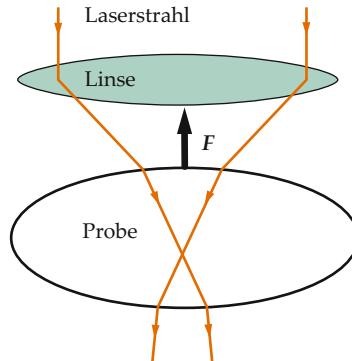
Wie Sie sehen, zeigt diese Kraft in die Ausbreitungsrichtung der Welle. Mit $d p_x = F_x dt$ erhalten wir den Impuls p_x , den die Welle während der Zeit t_1 auf die Ladung überträgt:

$$p_x = \int_0^{t_1} F_x dt = \int_0^{t_1} \frac{q^2 E B}{m} t dt = \frac{1}{2} \frac{q^2 E B}{m} t_1^2.$$

Mithilfe der Beziehung $B = E/c$ können wir dies umformen:

$$p_x = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2 E^2}{m} t_1^2 \right). \quad (27.23)$$

Ein Vergleich der Gleichungen 27.22 und 27.23 zeigt, dass der Impuls in Ausbreitungsrichtung der Welle, den die Welle auf die



Funktionsschema einer sogenannten Laserpinzette. Der von einer elektromagnetischen Welle mitgeführte Impuls wird hier zur Manipulation von Proben molekularer Dimension ausgenutzt. Beim Durchgang durch die transparente Probe – etwa eine Zelle oder sogar nur ein winziges, an eine Zelle gebundenes Tröpfchen – werden die von oben kommenden Laserstrahlen gebrochen; sie knicken nach unten hin ab, wodurch die nach unten gerichtete Impulskomponente zunimmt. So übt die Probe nach unten eine Kraft auf die Laserstrahlen aus; umgekehrt wirkt auf die Probe eine Kraft nach oben, wodurch die Probe in Richtung der Laserquelle gedrückt wird. Die Kräfte bewegen sich üblicherweise in der Größenordnung von Pikonewton. Mit Laserpinzetten gelangen bereits erstaunliche Manipulationen, u. a. das Auseinanderziehen zusammengerollter DNA-Stränge.

Ladung überträgt, gleich dem $\frac{1}{c}$ -fachen der kinetischen Energie ist. Obwohl wir die Rechnung vereinfacht haben, ist das Ergebnis richtig – der von einer elektromagnetischen Welle übertragene Impuls ist gleich der von der Welle mitgeführten Energie, geteilt durch c :

$$p = \frac{E_{\text{em}}}{c}. \quad (27.24)$$

IMPULS UND ENERGIE EINER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLE

Die Intensität ist gleich der Energie pro Flächen- und Zeiteinheit; die Intensität, geteilt durch c , ist gleich dem von der Welle übertragenen Impuls pro Flächen- und Zeiteinheit. Der pro Zeit-einheit übertragene Impuls entspricht einer Kraft, das bedeutet, die durch c geteilte Intensität entspricht einer Kraft pro Flächen-einheit, also einem Druck, dem sogenannten Strahlungsdruck P_S :

$$P_S = \frac{I_{\text{em}}}{c}. \quad (27.25)$$

STRAHLUNGSDRUCK UND INTENSITÄT

Um den Strahlungsdruck zum elektrischen oder magnetischen Feld in Beziehung zu setzen, drücken wir zunächst I_{em} mithilfe von E und B aus (Gleichung 27.20) und eliminieren anschließend entweder E oder B (Gleichung 27.18):

$$P_S = \frac{I_{\text{em}}}{c} = \frac{E_0 B_0}{2 \mu_0 c} = \frac{E_{\text{eff}} B_{\text{eff}}}{\mu_0 c} = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c^2} = \frac{B_0^2}{2 \mu_0}. \quad (27.26)$$

STRAHLUNGSDRUCK UND ELEKTRISCHES ODER MAGNETISCHES FELD

Betrachten wir nun eine elektromagnetische Welle, die senkrecht auf eine Fläche trifft. Absorbiert die Fläche die Energie E_{em} der Welle, so nimmt sie gleichzeitig den durch Gleichung 27.24 gegebenen Impuls p auf. Der auf die Fläche ausgeübte Druck entspricht dem Strahlungsdruck. Wird die Welle hingegen reflektiert, so wird ein Impuls $2p$ übertragen, da die Welle dann einen Impuls in Gegenrichtung mitführt. Auf die Fläche wird demnach das Doppelte des in Gleichung 27.26 gegebenen Strahlungsdrucks ausgeübt. In den Beispielen 27.6 und 27.7 werden Anwendungen besprochen.

Beispiel 27.6: Strahlungsdruck einer Glühlampe

Eine Glühlampe emittiert elektromagnetische Kugelwellen homogen in alle Richtungen des Raums, die Emissionsleistung beträgt 50 W. Berechnen Sie a) die Strahlungsintensität, b) den Strahlungsdruck und c) die elektrische und die magnetische Feldstärke in 3,0 m Entfernung von der Lampe.

Problembeschreibung: Im Abstand r von der Glühlampe ist die Energie homogen über die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r , gegeben durch $4\pi r^2$, verteilt. Die Intensität ist gleich der Leistung, geteilt durch die Fläche. Der Strahlungsdruck ergibt sich dann gemäß $P_S = I_{\text{em}}/c$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Um die Intensität zu erhalten, teilen Sie die abgegebene Leistung durch die Fläche:

$$I_{\text{em}} = \frac{50 \text{ W}}{4\pi r^2}$$

2. Setzen Sie $r = 3,0 \text{ m}$ ein:

$$I_{\text{em}} = \frac{50 \text{ W}}{4\pi \cdot (3,0 \text{ m})^2} = 0,44 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Teilaufgabe b

Der Strahlungsdruck ist gleich dem Quotienten aus der Intensität und der Lichtgeschwindigkeit:

$$P_S = \frac{I_{\text{em}}}{c} = \frac{0,44 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}{3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}$$

Teilaufgabe c

1. Den Zusammenhang zwischen B_0 und P_S gibt Gleichung 27.26 an:

$$\begin{aligned} B_0 &= \sqrt{2 \mu_0 P_S} \\ &= [2 \cdot (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot (1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Pa})]^{1/2} \\ &= 6,1 \cdot 10^{-8} \text{ T} \end{aligned}$$

2. Die maximale elektrische Feldstärke ist gleich dem Produkt aus der maximalen Magnetfeldstärke und c :

$$\begin{aligned} E_0 &= c B_0 = (3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (6,1 \cdot 10^{-8} \text{ T}) \\ &= 18 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

3. Das elektrische und das magnetische Feld in 3 m Entfernung von der Glühlampe kann wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \sin(\omega t) & \text{und} & B(t) = B_0 \sin(\omega t) \\ \text{mit } E_0 &= 18 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} & \text{und} & B_0 = 6,1 \cdot 10^{-8} \text{ T} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Der in Teilaufgabe b berechnete Druck ist sehr klein – 14 Größenordnungen geringer als der Atmosphärendruck. Allerdings können wir den vom Licht einer Glühlampe ausgeübten Strahlungsdruck auch nicht empfinden, deshalb mag die Größenordnung des Resultats nicht überraschen.

Weitergedacht: Nur ungefähr 2 % der von gewöhnlichen Glühlampen verbrauchten Leistung werden tatsächlich in sichtbares Licht umgewandelt. ■

Beispiel 27.7: Eine Rakete mit Laserantrieb

Stellen Sie sich vor, Sie schweben 20 m von Ihrem Raumschiff entfernt im Weltraum und sind mit einem 1,0-kW-Laser ausgerüstet. Wie lange dauert es, bis Sie das Schiff erreicht haben, wenn Sie den Laserstrahl direkt von Ihrem Ziel weg richten? Ihre Masse (einschließlich Raumanzug und Laser) betrage 95 kg.

Problembeschreibung: Der Laser emittiert einen Lichtstrahl; der Strahl führt einen Impuls mit. Infolge der Impulserhaltung wird Ihnen ein gleich großer, entgegengesetzt (also zum Raumschiff hin) gerichteter Impuls verliehen. Der Impuls des Laserstrahls ist $p = E_{\text{em}}/c$ (mit E_{em} als Energie des Lichts). Die Leistung des Lasers ist $P_{\text{em}} = dE_{\text{em}}/dt$, folglich ist die Rate der Impulsänderung gleich $dp/dt = (dE_{\text{em}}/dt)/c = P_{\text{em}}/c$. Dies entspricht der auf Sie ausgeübten konstanten Kraft.

Lösung: 1. Die benötigte Zeit hängt mit dem zurückzulegenden Weg und der Beschleunigung zusammen. Nehmen Sie an, Sie befinden sich anfangs relativ zum Raumschiff in Ruhe:

$$x = \frac{1}{2} a t^2, \quad \text{also } t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

2. Ihre Beschleunigung ist gleich der ausgeübten Kraft, geteilt durch Ihre Masse. Die Kraft erhalten Sie, indem Sie die Leistung durch c dividieren:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P_{\text{em}}/c}{m} = \frac{P_{\text{em}}}{mc}$$

3. Setzen Sie diese Beschleunigung in Ihr Ergebnis aus Schritt 1 ein und berechnen Sie t :

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2xmc}{P_{\text{em}}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot (20 \text{ m}) \cdot (95 \text{ kg}) \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{1000 \text{ W}}} \\ &= 3,38 \cdot 10^4 \text{ s} = \boxed{9,4 \text{ h}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß berechnen Sie eine ziemlich lange Zeit, weil Sie aus Erfahrung wissen, dass der Strahlungsdruck einer Lichtquelle unmerkbar klein ist.

Weitergedacht: Diese Beschleunigung ist äußerst gering (nur ungefähr 10^{-9} g). Sie würden sich dem Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = at = 1,2 \text{ mm/s}$ nähern – das bedeutet, Sie könnten Ihre Bewegung praktisch nicht wahrnehmen.

Übung 27.3: Wie lange bräuchten Sie, um das Raumschiff zu erreichen, wenn Sie einen Ihrer Schnürsenkel lösten und mit aller Kraft vom Raumschiff weg schleuderten? (Um die Frage zu beantworten, müssen Sie die Masse Ihres Schnürsenkels und die Geschwindigkeit, mit der Sie ihn werfen könnten, schätzen.) Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Ergebnis aus Schritt 3. ◀ ■

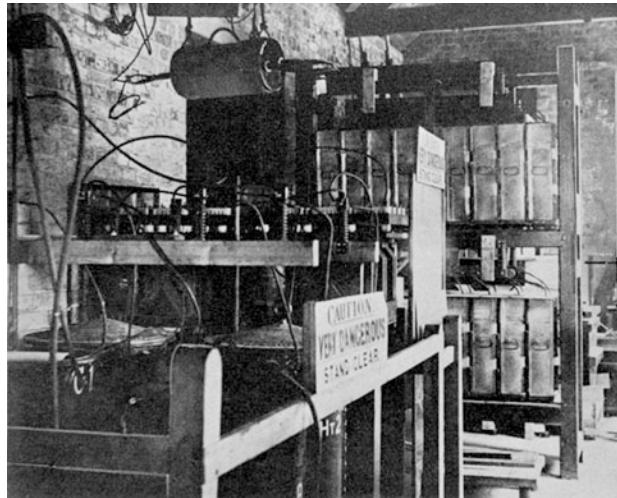
⌚ Im Kontext: Drahtlose Kommunikation: Kampf ums Frequenzband

An einem Märztag des Jahres 1998¹ waren am Baylor University Medical Center und am Methodist Hospital in Dallas plötzlich die Monitore der drahtlosen Herzüberwachungsgeräte gestört. Gleichzeitig testete eine örtliche Fernsehstation ihren neuen digitalen Sender auf einem unbunzten Kanal. Die medizinischen Geräte waren schon seit längerer Zeit (und aufgrund ihrer niedrigen Sendeleistung lizenzenfrei) im gleichen Frequenzband betrieben worden. Patienten kamen nicht zu Schaden, und die Sendeanstalt verzichtete auf weitere Testläufe, bis die Krankenhäuser ihre mit Hochfrequenz sendenden Instrumente ausgetauscht hatten.² Im Jahr 2000 wurde technischen, wissenschaftlichen und medizinischen Anwendungen in den USA ein eigenes Frequenzband (Wireless Medical Telemetry Service³) zugewiesen; in Deutschland ist zu diesem Zweck das sogenannte ISM-Band freigegeben.

Bei seinen ersten Versuchen zur drahtlosen Telegrafie verwendete Guglielmo Marconi 1896 einen Funkeninduktor (Knallfunkensender).⁴ Beim Funkenüberschlag wurde elektromagnetische Strahlung emittiert, deren Frequenzen sich über mehr als fünf Größenordnungen (von wenigen Kilohertz bis zwei Gigahertz) erstreckten. Mehrere benachbarte Telegrafenstationen durften nur abwechselnd und unter Beachtung strikter Vorschriften senden, denn ein rücksichtsloser Telegrafist konnte mühelos den Nachrichtenverkehr einer ganzen Region lahmlegen.⁵

1903 begann die International Telegraph Union sich der Probleme des Sendebetriebs anzunehmen. Die 1. Große Internationale Funkkonferenz in Berlin reservierte 1906 die Frequenz von 500 kHz (gemeint war das Leistungsmaximum der nach wie vor relativ breitbandigen Signale) verbindlich für den Seenotfunk.⁶ Die Schiffe wurden angewiesen, die Sendeleistung auf 1 kW zu beschränken, sofern sie nicht weiter als 300 km von der nächsten Küstenfunkstation entfernt waren.⁷ Die erste praktikable Alternative zur Funkenstrecke, die Rückkopplungsschaltung, erfand 1912 Edwin Armstrong.⁸ Ebenfalls 1912 teilte die International Radiotelegraph Convention erstmals einzelnen Anwendern feste Frequenzen zu.⁹ Da Knallfunkensender aber noch verbreitet im Einsatz waren, blieben die lokale und die regionale Nachrichtenübertragung störanfällig.¹⁰

Allmählich konzentrierten sich die Radiostationen auf immer schmalere Frequenzbänder. In den 1920er Jahren wurden nationale Behörden zur Erstellung von Frequenzplänen eingesetzt¹¹; 1937 wurde die internationale Körperschaft in International Telecommunication Union (ITU) umbenannt.¹² Die Aufsicht über die Nutzung der Funkfrequenzen führt in Deutschland die Bundesnetzagentur.¹³



Mit diesem Sender stellte Marconi 1901 die erste drahtlose transatlantische Funkverbindung (vom britischen Cornwall nach Neufundland, USA) her.

Mit zunehmender Bedeutung des drahtlosen Datenübermittlungsverkehrs wurden die Frequenznutzungspläne vielfach überarbeitet und angepasst. Nicht immer werden die Zuteilungen international einheitlich gehandhabt. So sind für den UMTS-Mobilfunk in Nordamerika die Frequenzen 850 und 1900 MHz reserviert, in vielen anderen Ländern (darunter Deutschland) 900 und 1800 MHz.¹⁴

Unabhängig von ihrer Sendeleistung müssen alle Geräte, die elektromagnetische Strahlung emittieren können, technisch geprüft und entstört werden, damit die unerwünschte Überlagerung und damit gegenseitige Störung von Funksignalen außerhalb eines kleinen Radius ausgeschlossen werden kann.¹⁵ Häufig kann man tolerieren, dass technische Geräte einen Frequenzbereich gemeinsam nutzen; so teilen sich Mikrowellenherde die Frequenzen um 2,4 GHz¹⁶ mit drahtlosen Computernetzen und Schnurlostelefonen. Da auch für lizenzenfreie Geräte die Festlegung einer eigenen Sendefrequenz sinnvoll sein kann – insbesondere in der medizinischen Telemetrie, wie das eingangs erwähnte Beispiel zeigt –, wurde das ISM-Band eingerichtet. Gelegentlich kann man mit einem drahtlosen Empfänger breitbandige elektromagnetische Impulse hören, die durch einen Funkenüberschlag in einem defekten Elektrogerät entstehen. In diesem Fall wird ein Kurzschluss zum Störsender.

27 Die Maxwell'schen Gleichungen – Elektromagnetische Wellen

1. „Wireless Medical Telemetry – Electromagnetic Interference“, *United States Food and Drug Administration Center for Devices and Radiological Health*. 1. September 2002. <http://www.fda.gov/cdrh/emc/wmt/emi.html#1>. (Stand: November 2006).
2. McClain, J. P., „Time to Upgrade“, *American Society for Healthcare Engineering*. www.ashe.org/ashe/wmts/pdfs/timetoupgrade.pdf (Stand: April 2009).
3. Federal Communications Commission, *FCC-00211*. Washington, DC: United States Federal Communications Commission, 12. Juni 2000. http://www.fcc.gov/Bureaus/Engineering_Technology/Orders/2000/fcc00211.doc (Stand: April 2009).
4. Thomson, E., „The Field of Experimental Research“, *Science*, 25. August 1899, X, Nr. 243, S. 236–245.
5. Pitts, A., „Backgrounder: What is Amateur Radio?“, *American Radio Relay League*, 4. Oktober 2004. <http://www.arrl.org/pio/bwhatis.html> (Stand: April 2009).
6. „ARRL Granted Experimental License for 500 kHz Research by Radio Amateurs“, *American Relay Radio League*, 15. September 2006. <http://www.arrl.org/news/stories/2006/09/15/104> (Stand: April 2009).
7. „Service Regulation Affixed to the International Wireless Convention.“ *United States Early Radio History*. <http://earlyradiohistory.us/1906conv.htm#SR> (Stand: April 2009).
8. Lewis, T., *Empire of the Air*. New York: Harper Collins, 1991, S. 70–74.
9. „History“, *International Telecommunication Union*, 23. April 2009. <http://www.itu.int/aboutitu/overview/history.html> (Stand: April 2009).
10. Lapin, G. D., „Lessons Learned About Frequency Sharing in the Amateur Radio Service“, *Amateur Radio Relay League*, <http://www.arrl.org/tis/info/HTML/plc/files/Lessons%20Learned%20About%20Frequency%20Sharing%20in%20the%20Amateur%20Radio%20Service%20Rev%202.ppt> (Stand: April 2009).
11. *Radio Act of 1927*. United States Public Law 632, 23. Februar 1927. Abrufbar von <http://www.snugglebunny.us/pdf/1927act.pdf> (Stand: April 2009).
12. „History“, *International Telecommunication Union*, 15. November 2004. <http://www.itu.int/aboutitu/overview/history.html> (Stand: April 2009).
13. <http://www.bundesnetzagentur.de>.
14. Luna, N., „Globetrotting with Cell Phones Tricky but Not Impossible“, *The Orange County Register*, 4. Mai 2005.
15. „Rule 47 CFR Part 15“, *United States Federal Register*, Washington, DC: 14. August 2006. <http://www.fcc.gov/oet/info/rules/part15/part15-9-20-07.pdf> (Stand: April 2009).
16. Lowe, M., „Muting Microwaves“, *Appliance Design*, Januar 2006, 54, Nr. 1, S. 74–75.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	<p>Das Ampère'sche Gesetz lässt sich so verallgemeinern, dass es auch auf Situationen mit nicht stationärem (und räumlich nicht kontinuierlichem) Strom angewendet werden kann. Dazu wird der reale Strom I durch den verallgemeinerten Strom $I + I_V$ ersetzt. I_V ist der Maxwell'sche Verschiebungsstrom:</p> $I_V = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt} . \quad (27.3)$
Verallgemeinerte Form des Ampère'schen Gesetzes	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_V) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt} \quad (27.4)$
2. Die Maxwell'schen Gleichungen	<p>Die Maxwell'schen Gleichungen fassen die Gesetze der Elektrizität und des Magnetismus zusammen.</p>
Gauß'scher Satz für das elektrische Feld	$\oint_A \mathbf{E}_n \cdot dA = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{innen}} \quad (27.6a)$
Gauß'scher Satz für das Magnetfeld (isolierte magnetische Pole gibt es nicht)	$\oint_A \mathbf{B}_n \cdot dA = 0 \quad (27.6b)$
Faraday'sches Gesetz (Induktion durch Bewegung nicht enthalten)	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B}_n \cdot dA = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t} \cdot dA \quad (27.6c)$
Modifiziertes Ampère'sches Gesetz	$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 (I + I_V) \\ &= \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial \mathbf{E}_n}{\partial t} \cdot dA \end{aligned} \quad (27.6d)$
3. Die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen	<p>Aus den Maxwell'schen Gleichungen lässt sich schließen, dass der elektrische und der magnetische Feldvektor im Vakuum einer Wellengleichung genügen:</p> $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (27.8a)$ $\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (27.8b)$
4. Elektromagnetische Strahlung	<p>Der elektrische und der magnetische Feldvektor einer elektromagnetischen Welle stehen senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung der Welle. Zwischen den Feldstärken gilt die Beziehung</p> $E = c B. \quad (27.18)$ <p>Das Vektorprodukt $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Welle.</p>
Geschwindigkeit der Welle	$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (27.1)$
Elektromagnetisches Spektrum	<p>Sichtbares Licht, Rundfunksignale, Röntgenstrahlen, Gammastrahlen, Mikrowellen u. a. gehören zu den elektromagnetischen Wellen und unterscheiden sich lediglich durch ihre Wellenlänge und Frequenz. Das Auge des Menschen kann elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen zwischen ungefähr 400 und 780 nm wahrnehmen.</p>
Elektrische Dipolstrahlung	<p>Beschleunigte freie elektrische Ladungen senden elektromagnetische Wellen aus. Die in einer elektrischen Dipolantenne oszillierenden Ladungen emittieren elektromagnetische Wellen, deren Intensität senkrecht zur Antenne maximal und entlang der Längsachse der Antenne null ist. Senkrecht zur Antenne und weit von ihr entfernt ist das elektrische Feld der elektromagnetischen Welle parallel zur Antenne gerichtet.</p>

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen	
Energiedichte in einer elektromagnetischen Welle	$w_{\text{em}} = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c}$	(27.19)
Intensität einer elektromagnetischen Welle	$I_{\text{em}} = \langle w_{\text{em}} \rangle c = \frac{E_{\text{eff}} B_{\text{eff}}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \langle S \rangle$	(27.20)
Poynting-Vektor	$S = \frac{E \times B}{\mu_0}$	(27.21)
Impuls und Energie einer elektromagnetischen Welle	$p = \frac{E_{\text{em}}}{c}$	(27.24)
Strahlungsdruck und Intensität	$P_S = \frac{I_{\text{em}}}{c}$	(27.25)

Lösungen der Übungen

1. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E_0^2$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B_0^2$
2. Ungefähr 5 h für einen 10 g schweren Schnürsenkel mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s – das bedeutet, mit Lichtstrahlantrieb sind Sie doppelt so lange unterwegs wie mit Schnürsenkelantrieb.

Aufgaben

Verständnisaufgaben

27.1 • Richtig oder falsch? a) Die Maxwell'schen Gleichungen gelten nur für zeitunabhängige elektrische und magnetische Felder. b) Die Wellengleichung elektromagnetischer Wellen lässt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen herleiten. c) Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen. d) Das elektrische und das magnetische Feld einer elektromagnetischen Welle im Vakuum sind in Phase.

27.2 • Eine senkrecht ausgerichtete Dipolantenne wird als Sender benutzt. Der Empfänger befindet sich 1 km vom Sender entfernt auf gleicher Höhe. a) Wie sollte seine Dipolantenne ausgerichtet sein, um das Signal optimal zu empfangen? b) Wie sollte die Ebene einer Ringantenne ausgerichtet sein, um das Signal optimal zu empfangen?

27.3 • Radiowellen können mit Dipol- und Ringantennen empfangen werden. a) Ist das Funktionsprinzip einer Dipolantenne das Faraday'sche Gesetz? Betrachten Sie jetzt eine linear polarisierte Welle, die sich auf Sie zu bewegt. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? b) Wenn das elektrische Feld einer solchen Welle vertikal oszilliert, kann man das Signal am besten mit einer Ringantenne empfangen, die so orientiert ist, dass die Normale ihrer Ebene nach links oder rechts zeigt. c) Wenn das elektrische Feld einer solchen Welle in einer horizontalen Ebene oszilliert, dann kann man das Signal am besten mit einer Dipolantenne empfangen, die vertikal ausgerichtet ist.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

27.4 •• Einer der ersten amerikanischen Satelliten, die in den 1950er Jahren erfolgreich auf eine Umlaufbahn gebracht wurden, bestand im Wesentlichen aus einem großen, kugelförmigen Ballon aus aluminiumbeschichteter Mylar-Folie, der Radiowellen reflektierte. Nach einigen Umläufen beobachtete das Bodenpersonal, dass sich die Bahn des Flugkörpers allmählich verschob. Schließlich fand man die bei der Planung nicht einkalkulierte Ursache – den Strahlungsdruck des Sonnenlichts. Schätzen Sie das Verhältnis der Kräfte, die der Strahlungsdruck bzw. die Erdanziehung auf den Satelliten ausübten.

27.5 •• Laserkühlung und Atomfallen sind moderne Forschungsgebiete. In beiden Fällen nutzt man die mit dem Strahlungsdruck verbundene Kraft, um Atome von thermischen Geschwindigkeiten (bei Raumtemperatur mehrere Hundert Meter pro Sekunde) auf einige Meter pro Sekunde oder weniger abzubremsen. Isolierte Atome absorbieren Strahlungsenergie nur bei bestimmten Resonanzfrequenzen. Bestrahlt man ein Atom mit Laserlicht einer solchen Frequenz, so findet die sogenannte Resonanzabsorption statt. Der effektive Querschnitt des

Atoms ist bei diesem Prozess ungefähr gleich λ^2 (dabei ist λ die eingestrahlte Wellenlänge). a) Schätzen Sie die Beschleunigung ab, die ein Rubidiumatom (Atommasse 85 g/mol) durch einen Laserstrahl mit einer Wellenlänge von 780 nm und einer Intensität von 10 W/m^2 erfährt. b) Wie lange dauert es ungefähr, mit diesem Laserstrahl ein Rubidiumatom in einem Gas bei Raumtemperatur (300 K) nahezu zum Stillstand zu bringen?

Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

27.6 • Die Platten eines Kondensators ohne Dielektrikum sind parallel und kreisförmig mit einem Radius von 2,3 cm. Der Abstand zwischen den Platten beträgt 1,1 mm. Mit einer Rate von 5,0 A fließt Ladung zur oberen Platte hin und von der unteren Platte ab. a) Geben Sie die Rate der zeitlichen Änderung des elektrischen Felds zwischen den Platten an. b) Berechnen Sie den Verschiebungsstrom im Bereich zwischen den Platten und zeigen Sie, dass er gleich 5,0 A ist.

27.7 •• Betrachten Sie noch einmal den Kondensator aus Aufgabe 27.6 und zeigen Sie, dass das Magnetfeld zwischen den Platten im Abstand r von deren gemeinsamer Achse gegeben ist durch $B = (1,9 \cdot 10^{-3} \text{ T/m}) r$.

27.8 •• Ein Ohm'scher Widerstand und ein Plattenkondensator (ohne Dielektrikum, Fläche der Platten je $0,50 \text{ m}^2$) sind in Reihe geschaltet; durch die Schaltung fließt ein Strom von 10 A. a) Geben Sie den Verschiebungsstrom zwischen den Platten an. b) Mit welcher Rate ändert sich die elektrische Feldstärke zwischen den Platten? c) Berechnen Sie das Integral $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. Der Integrationsweg C sei ein Kreis mit einem Radius von 10,0 cm, dessen Ebene parallel zur Ebene der Platten ausgerichtet ist und der sich vollständig im Gebiet zwischen den Platten befindet.

Maxwell'sche Gleichungen und elektromagnetisches Spektrum

27.9 • Der größte Teil des Lichts, das uns von der Sonne erreicht, liegt im gelbgrünen Bereich des sichtbaren elektromagnetischen Spektrums. Schätzen Sie die Wellenlänge und die Frequenz dieses Lichts ab. (Hinweis: Siehe Tabelle 27.1.)

27.10 • a) Wie groß ist die Frequenz von Röntgenstrahlung mit einer Wellenlänge von 0,100 nm? b) Besonders empfindlich ist das menschliche Auge für Licht mit einer Wellenlänge von 550 nm. Wie ist die Frequenz dieser Strahlung? Wie ist ihre Farbe? Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem Ergebnis von Aufgabe 27.9 und erläutern Sie Ihre Antwort.

Elektrische Dipolstrahlung

Hinweis: Die Aufgaben 27.11 und 27.12 beziehen sich auf Abbildung 27.11. Die Intensität elektrischer Dipolstrahlung in einem Punkt weit entfernt vom Sender ist proportional zu $\sin^2 \theta / r^2$ mit θ als Winkel zwischen den Richtungen des Dipolmomentvektors und des Ortsvektors r des Feldpunkts relativ zum Mittelpunkt der Antenne. Das Intensitätsmuster, das eine solche Dipolantenne abstrahlt, hängt nicht vom Azimut ab – das bedeutet, das Muster ist symmetrisch bezüglich der Rotation um die Längsachse der Antenne.

27.11 •• Ein elektrischer Dipol ist entlang der z -Achse ausgerichtet (sein Dipolmoment zeigt dann in z -Richtung). I_{em} ist die Intensität der ausgesendeten Strahlung im Abstand $r = 10 \text{ m}$ unter dem Winkel $\theta = 90^\circ$. Geben Sie die Strahlungsintensität I_{em} als Funktion von r und θ an folgenden Positionen an: a) $r = 30 \text{ m}$, $\theta = 90^\circ$; b) $r = 10 \text{ m}$, $\theta = 45^\circ$ und c) $r = 20 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$.

27.12 ••• Eine Radiostation sendet mit senkrechten Dipolantennen bei einer Frequenz von $1,20 \text{ MHz}$; die abgestrahlte Leistung beträgt insgesamt 500 kW . Berechnen Sie die Intensität des Signals 120 km waagerecht von der Station entfernt.

Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen

27.13 • Die Amplitude einer elektromagnetischen Welle sei $E_0 = 400 \text{ V/m}$. Berechnen Sie a) E_{eff} , b) B_{eff} , c) die Intensität I_{em} und d) den Strahlungsdruck P_S .

27.14 •• a) Eine elektromagnetische Welle mit einer Intensität von 200 W/m^2 trifft senkrecht auf ein rechteckiges Stück schwarzer Pappe mit Seitenlängen von 20 cm und 30 cm . Die Pappe absorbiert die Strahlung zu 100% . Welche Kraft übt die Strahlung auf die Pappe aus? b) Welche Kraft übt die Strahlung aus, wenn sie nicht absorbiert, sondern zu 100% reflektiert würde?

27.15 •• Ein Laserpuls mit einer Energie von $20,0 \text{ J}$ und einem Strahlradius von $2,00 \text{ mm}$ dauert $10,0 \text{ ns}$ an, wobei die Energiedichte während des Pulses gleichmäßig verteilt ist. a) Geben Sie die räumliche Länge des Pulses an. b) Wie groß ist die Energiedichte innerhalb des Pulses? c) Berechnen Sie die Amplitude des elektrischen und des magnetischen Feldes des Laserpulses.

27.16 •• Auf einen $10,0 \text{ mg}$ schweren Körper, der an einem $4,00 \text{ cm}$ langen, dünnen Faden aufgehängt ist, trifft ein 200 ns andauernder Lichtpuls aus einem Laser mit einer Leistung von 1000 MW . Um welchen Winkel wird dieses Pendel aus seiner Ruhelage ausgelenkt, wenn der Körper die Strahlung vollständig absorbiert? (Behandeln Sie das System als ballistisches Pendel; der Körper soll senkrecht nach unten hängen, bevor der Lichtpuls ihn trifft.)

27.17 •• In einen bestimmten Laser sind Spiegel eingebaut, die die Strahlung zu $99,99\%$ reflektieren. a) Der Laser habe eine mittlere Ausgangsleistung von 15 W . Wie groß ist die mittlere Strahlungsleistung, die auf einen dieser Spiegel fällt? b) Welche Kraft wird dabei durch den Strahlungsdruck ausgeübt?

Die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen

27.18 • Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Wellenfunktion

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t) = E_0 \sin[k(x - ct)]$$

mit $c = \omega/k$ Gleichung 27.8a erfüllt.

27.19 •• Zeigen Sie, dass jede beliebige Funktion der Form $y(x, t) = f(x - vt)$ oder $y(x, t) = g(x + vt)$ die Wellengleichung 27.7 erfüllt.

Allgemeine Aufgaben

27.20 • Zeigen Sie, dass die Einheit des Poynting-Vektors $S = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) / \mu_0$ (Gleichung 27.21) Watt pro Quadratmeter (die SI-Einheit für die Intensität einer elektromagnetischen Welle) ist, wenn E in Volt pro Meter und B in Tesla angegeben wird.

27.21 •• Die von einer Radiostation abgestrahlte elektrische Feldstärke in einer bestimmten Entfernung vom Sender ist gegeben durch $E = (1,00 \cdot 10^{-4} \text{ N/C}) \cos[(1,00 \cdot 10^6 \text{ rad/s}) t]$. a) Welche maximale Spannung baut sich entlang eines $50,0 \text{ cm}$ langen Drahts auf, der in Feldrichtung orientiert ist? b) Welche Spannung kann maximal in einer Leiterschleife mit einem Radius von $20,0 \text{ cm}$ induziert werden, und wie muss die Schleife dazu ausgerichtet sein?

27.22 •• Zeigen Sie, dass Gleichung 27.10,

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

für $I = 0$ aus Gleichung 27.6d folgt,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \int_A \frac{\partial E_n}{\partial t} dA.$$

Integrieren Sie dazu entlang eines geeigneten Wegs C und über eine geeignete Fläche A ; orientieren Sie sich an der Herleitung von Gleichung 27.9.

27.23 ••• Die Mittelpunkte der runden (Radius r_p) parallelen Platten eines Kondensators sind durch einen dünnen Draht mit dem Ohm'schen Widerstand R verbunden; der Abstand zwischen den Platten ist d . An den Platten liegt eine zeitabhängige Spannung $U_0 \sin(\omega t)$ an. a) Welcher Strom fließt durch den Kondensator? b) Geben Sie das Magnetfeld zwischen den Platten als Funktion des radialen Abstands r von der Mittellinie an. c) Wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Strom und angelegter Spannung?

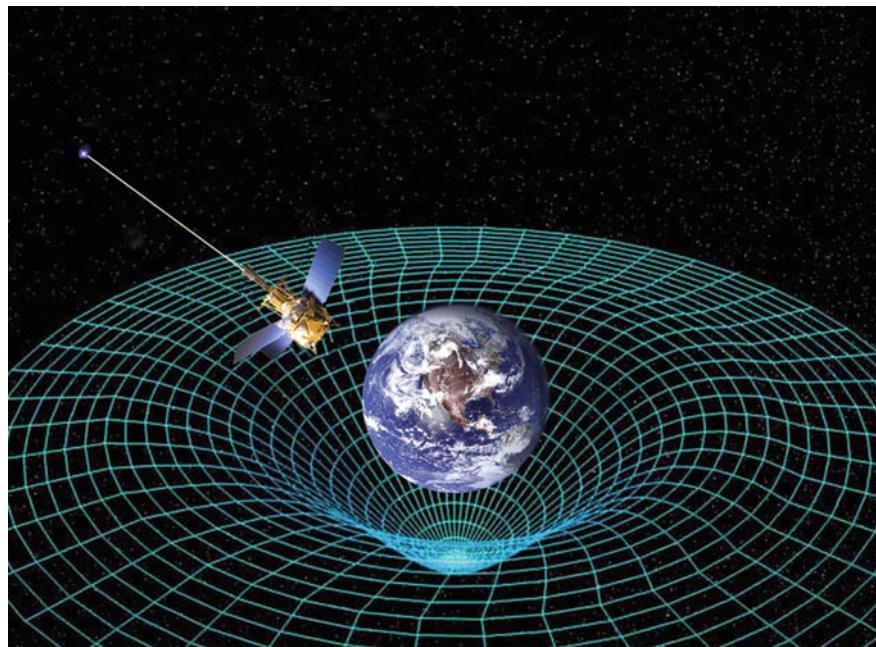
27.24 ••• Eine intensive Punktquelle mit einer Leistung von 1,00 MW strahlt isotrop (in alle Raumrichtungen gleichmäßig) Licht ab. Sie befindet sich 1,00 m oberhalb einer unendlich ausgedehnten, ideal reflektierenden Ebene. Geben Sie eine Beziehung für die Kraft an, die der Strahlungsdruck auf die Ebene ausübt.

27.25 ••• Durch den Strahlungsdruck der Sonne werden kleine Teilchen aus dem Sonnensystem hinaus „geweht“. Betrachten Sie kugelförmige Partikel mit dem Radius r und einer Dich-

te von $1,00 \text{ g/cm}^3$, die über einen effektiven Querschnitt πr^2 sämtliche Strahlung absorbieren. Die Teilchen befinden sich im Abstand d von der Sonne, die eine Leistung von $3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$ abgibt. a) Bei welchem Teilchenradius r gleichen sich die von der Strahlung ausgeübte Abstoßungskraft und die Anziehungs- kraft durch die Gravitation der Sonne gerade aus? b) Welche Teilchen verlassen unser Sonnensystem – solche mit einem kleineren oder solche mit einem größeren Radius als der kritische Wert? Erläutern Sie Ihre Antwort.

Optik

Teil VI



28	Eigenschaften des Lichts	1007
29	Geometrische Optik	1041
30	Interferenz und Beugung	1085

Eigenschaften des Lichts

28



In Glasfasern wird das Licht durch Totalreflexion praktisch verlustfrei übertragen. (© James L. Amos/Corbis.)

?

Wie groß muss der Einfallswinkel des Lichts an der Innenwand der Faser sein, damit es nicht austritt? (Siehe Beispiel 28.5.)

28.1 Die Lichtgeschwindigkeit	1008
28.2 Die Ausbreitung des Lichts	1011
28.3 Reflexion und Brechung	1011
28.4 *Herleitung des Reflexions- und des Brechungsgesetzes	1022
28.5 Polarisation	1024
28.6 Lichtspektren	1029
Zusammenfassung	1035
Aufgaben	1037

Das menschliche Auge nimmt elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen zwischen etwa 400 nm und 700 nm als Licht wahr. (Manche Menschen können Licht bis herunter zu 380 nm oder bis hinauf zu 780 nm sehen.) Die kleinsten Wellenlängen im sichtbaren Spektrum entsprechen violettem Licht und die größten rotem Licht. Unsere Farbwahrnehmung beruht auf der physiologischen Reaktion von Augen, Sehnerven und Gehirn. Wahrgenommene Farbe und Lichtfrequenz stimmen zwar prinzipiell überein, aber es gibt interessante Abweichungen. Beispielsweise wird eine Mischung aus Rot und Grün als Gelb wahrgenommen, obwohl das einfallende Licht keinen Anteil mit Wellenlängen gelben Lichts aufweist.

In diesem Kapitel betrachten wir, wie die Lichtgeschwindigkeit gemessen und wie Licht gestreut, reflektiert, gebrochen und polarisiert wird. Zum Schluss wenden wir uns der Frage zu, wie Licht erzeugt wird; siehe auch Kapitel 34.

28.1 Die Lichtgeschwindigkeit

Bis zum 17. Jahrhundert hielten viele Menschen die Lichtgeschwindigkeit für unendlich hoch. Einer der Ersten, die versuchten, sie zu messen, war der Italiener Galileo Galilei. Er postierte sich auf einen Hügel und einen Mitarbeiter auf einem anderen Hügel, rund drei Kilometer entfernt. Beide hatten eine Laterne und eine Klappe, um sie abzudecken. Galilei wollte die Zeitspanne messen, in der das Licht die Strecke zwischen den beiden Hügeln und zurück durchquert. Er deckte seine Laterne zuerst auf, und sein Assistent tat dasselbe mit seiner Laterne, sobald er den Lichtschein sah. Galilei versuchte, die Zeitspanne zu messen, die zwischen dem Aufdecken seiner Laterne und dem Erkennen der anderen Laterne verstrich. Sein Experiment war im Grunde völlig richtig angelegt. Aber die Lichtgeschwindigkeit ist bei weitem zu hoch, als dass man das extrem kurze Zeitintervall mithilfe menschlicher Reaktionen bestimmen könnte. Folgerichtig konnte Galileo keinen brauchbaren Wert für die Lichtgeschwindigkeit ermitteln.

Ein erster Hinweis auf die wahre Größe der Lichtgeschwindigkeit ergab sich im letzten Drittel des 17. Jahrhunderts aus astronomischen Beobachtungen. Im Jahre 1676 bemerkte der dänische Astronom Ole Römer bei der Beobachtung des Jupitermonds Io, dass dieser nicht genau periodisch in den Jupiterschatten eintritt bzw. aus ihm heraustritt. Ein Umlauf dauert im Mittel rund 42,5 h. Immer, wenn sich die Erde auf dem Bogen ABC in Abbildung 28.1 vom Jupiter weg bewegt, nimmt diese Dauer zu. Entsprechend nimmt sie ab, wenn sich die Erde ihm auf dem Bogen CDA wieder nähert. Die Umlaufdauern weichen dabei vom mittleren Wert nur um etwa 15 s ab. Daher war es schwierig, die Unterschiede genau zu messen. Schließlich führte Römer die Abweichungen auf die Tatsache zurück, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. Das stand im Widerspruch zu den Behauptungen von René Descartes, der eine augenblickliche Ausbreitung annahm. Während der Zeitspanne von 42,5 h zwischen den Verfinsternissen von Io ändert sich die Entfernung zwischen Erde und Jupiter, sodass die Wegstrecke für das Licht länger oder kürzer wird. Römer erdachte folgende Methode, um den kumulativen Effekt dieser Abweichungen zu messen: Wenn sich die Erde im Punkt A befindet, also Jupiter am nächsten ist, ändert sich die Entfernung zwischen beiden Planeten nur geringfügig. Jetzt wird die Periode von Io gemessen, und zwar als die Zeitspanne zwischen dem Beginn aufeinanderfolgender Verfinsternissen. Mit diesem Wert wird die Anzahl der Verfinsternissen während der nächsten sechs Monate berechnet, außerdem der Zeitpunkt, zu dem genau ein halbes Jahr später eine Verfinsternis eintreten sollte. Dann befindet sich die Erde im Punkt C. Die Verfinsternis tritt aber ungefähr 16,6 min später ein, als es der Voraussetzung entspricht. Diese Differenz ist

die Zeitspanne, die das Licht benötigt, um die Strecke von der Größe des Erdbahndurchmessers zu durchlaufen. Beispiel 28.1 berechnet die sich daraus ergebende Lichtgeschwindigkeit. Bei dieser Berechnung wird allerdings vernachlässigt, dass sich während des halben Jahrs auch die Entfernung zwischen Jupiter und Erde ändert. Dieser Unterschied der Wegstrecken ist jedoch viel kleiner als der Durchmesser der Erdbahn um die Sonne, denn die Umlaufgeschwindigkeit des Jupiter um die Sonne ist wesentlich geringer als die der Erde.

Beispiel 28.1: Die Lichtgeschwindigkeit

Der mittlere Durchmesser der Erdbahn um die Sonne beträgt rund $3,00 \cdot 10^{11}$ m. Wenn das Licht 16,6 min benötigt, um diese Strecke zurückzulegen, wie hoch ist dann die Lichtgeschwindigkeit?

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit ist definiert als Wegstrecke pro Zeitspanne.

Lösung: Die Lichtgeschwindigkeit ist $c = \Delta x / \Delta t$, und Sie müssen die Zeiteinheit entsprechend umrechnen:

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3,00 \cdot 10^{11} \text{ m}}{16,6 \text{ min}} = \frac{3,00 \cdot 10^{11} \text{ m}}{996 \text{ s}} \\ = [3,01 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Übung 28.1: a) Berechnen Sie die Strecke, die die Erde zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verfinsternissen von Io zurücklegt. b) Welcher Wert ergibt sich für die Lichtgeschwindigkeit, wenn die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verfinsternissen nur um 15 s länger als der Mittelwert ist (während sich die Erde direkt vom Jupiter weg bewegt)? ◀

Römer gab seinerzeit nur die Lichtlaufzeit an. Erst Christiaan Huygens berechnete im Jahre 1678 mit dem damals anerkannten Wert für den Erdbahndurchmesser eine Lichtgeschwindigkeit von 214 000 km/s. Auch nach der Arbeit von Römer gab es immer noch viele Zweifler an der endlichen Lichtgeschwindigkeit. Sie wurden erst überzeugt, als James Bradley 1728 die Aberration des Lichts nachwies.

Der französische Physiker Armand Fizeau entwickelte im Jahre 1849 die erste nichtastronomische Methode, die Lichtgeschwindigkeit zu messen. Die Anordnung, die er auf einem Hügel bei Paris platzierte, ist in Abbildung 28.2 gezeigt. Das Licht aus einer Lichtquelle wird über einen halbdurchlässigen Spiegel geführt, wobei es durch eine Linse auf ein Zahnrad fokussiert wird. Auf einen anderen, etwa 8,63 km weit entfernten Hügel stellte Fizeau einen Spiegel, der das Licht zurückreflektierte, sodass es der Beobachter durch eine weitere Linse sehen konnte. Das Zahnrad wurde in Drehung versetzt, deren Geschwindigkeit einstellbar war. Ab einer bestimmten Rotationsgeschwindig-

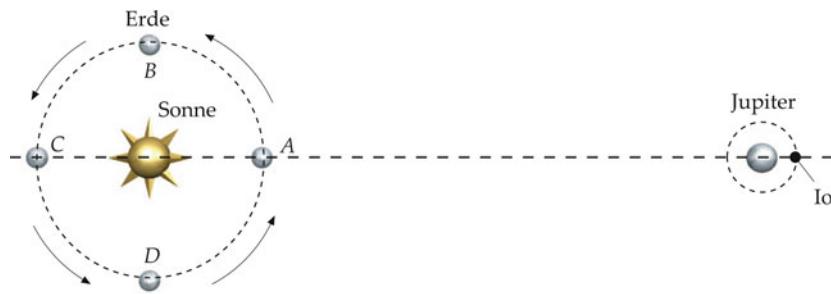


Abbildung 28.1 Römers Methode (von 1675), die Lichtgeschwindigkeit zu ermitteln. Die Zeitspanne zwischen den Verfinsternungen des Jupitermonds Io nimmt zu, wenn sich die Erde auf dem Bogen ABC von Jupiter entfernt, und sie nimmt ab, wenn sich die Erde ihm auf dem Bogen CDA wieder nähert. Aus der Zeitverschiebung und der Änderung des Abstands zwischen Erde und Jupiter lässt sich die Lichtgeschwindigkeit berechnen. (Die Strecke, die Jupiter in einem Erdenjahr zurücklegt, kann hierbei vernachlässigt werden.)

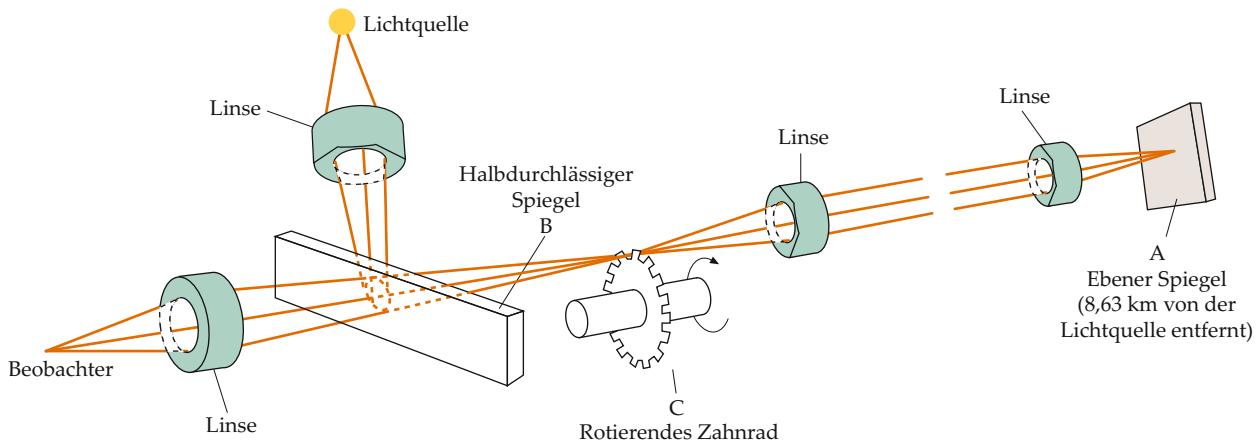


Abbildung 28.2 Fizeaus Methode (von 1849), die Lichtgeschwindigkeit zu messen. Das Licht von der Lichtquelle wird vom halbdurchlässigen Spiegel B reflektiert und gelangt durch eine Lücke im Zahnrad zum entfernten Spiegel A. Die Lichtgeschwindigkeit wird aus der Winkelgeschwindigkeit des Zahnrads berechnet, bei der das vom Spiegel A reflektierte Licht gerade die nächste Lücke im Zahnrad passiert und den Beobachter erreicht, der daraufhin ein Bild der Lichtquelle sieht.

keit konnte der Beobachter kein reflektiertes Licht sehen, weil das Licht, das durch eine Lücke im rotierenden Zahnrad zum Spiegel A gelangte, nach der Reflexion vom nächsten Zahn abgedeckt wurde. Dann wurde die Drehgeschwindigkeit des Zahnrads gesteigert. Sobald sie einen bestimmten Wert erreichte, wurde das reflektierte Licht plötzlich sichtbar, weil es nun die nächste Lücke im Zahnrad passieren konnte. Die Zeitspanne, die das Zahnräder benötigte, um den Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Lücken zurückzulegen, entsprach der Zeitspanne, die das Licht für den Weg zum entfernten Spiegel und zurück benötigte. Daraus ergibt sich, wie in Beispiel 28.2 gezeigt ist, die Lichtgeschwindigkeit.

Beispiel 28.2: Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Fizeau

Nehmen Sie an, Sie wollen Fizeaus Experiment zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nachvollziehen. Sie verwenden ein Zahnräder mit 720 Zähnen, und es

gelangt Licht zum Beobachter, wenn es mit 22,3 Umdrehungen pro Sekunde rotiert. Die Entfernung vom Rad zum entfernten Spiegel beträgt 8,63 km. Welcher Wert ergibt sich dabei für die Lichtgeschwindigkeit?

Problembeschreibung: Die Zeitspanne, die das Licht für die Strecke vom Zahnräder zum Spiegel und zurück benötigt, ist gleich der Zeitspanne, in der das Zahnräder ein N -tel einer Umdrehung vollführt. Dabei ist $N = 720$ die Anzahl seiner Zähne.

Lösung: 1. Die Geschwindigkeit ist gleich der Wegstrecke, dividiert durch die Zeitspanne. Der Abstand zwischen Rad und Spiegel ist l , also ist die zurückgelegte Strecke doppelt so groß:

$$c = \frac{2l}{\Delta t}$$

2. Die Winkeländerung ist gleich dem Produkt aus Kreisfrequenz und Zeitspanne:

$$\Delta\theta = \omega \Delta t$$

3. Lösen Sie nach der Zeitspanne Δt auf:

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega}$$

4. Setzen Sie den in Schritt 3 aufgestellten Ausdruck für Δt in die erste Gleichung ein und berechnen Sie c :

$$c = \frac{2l\omega}{\Delta\theta} = \frac{2 \cdot (8,63 \cdot 10^3 \text{ m}) \cdot (22,3 \text{ s}^{-1})}{1/720} \\ = [2,77 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis ist zwar um gut 7 % zu niedrig, stellt jedoch durchaus einen sinnvollen Wert dar.

Übung 28.2: Die Astronauten auf dem Mond kommunizierten über Funk mit der Bodenstation in Houston, USA. Setzen Sie für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Funkwellen $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ an und berechnen Sie die Zeitspanne, die ein Signal zwischen Mond und Erde benötigt; deren Abstand beträgt durchschnittlich $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$.



Drehspiegel während der Zeitspanne, die das Licht für die Strecke zum festen Spiegel und zurück benötigte, um genau eine achtel Umdrehung.

Bei einer anderen Möglichkeit, die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen, misst man (indirekt) die elektrische Feldkonstante ϵ_0 und die magnetische Feldkonstante μ_0 . Sie hängen mit der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum über die Beziehung $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ zusammen.

Mit den unterschiedlichen Methoden, die hier skizziert wurden, erhält man heute allgemein übereinstimmende Werte für die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Inzwischen ist ihr Wert definiert:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (28.1)$$

DEFINITION DER LICHTGESCHWINDIGKEIT

Die heutige Festlegung der SI-Einheit Meter beruht auf diesem Wert. Danach ist 1 m die Strecke, die das Licht im Vakuum in $(1/299\,792\,458)$ s zurücklegt. Für die meisten praktischen Berechnungen reicht es aus, die Lichtgeschwindigkeit mit $3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ anzusetzen. Alle elektromagnetischen Wellen, darunter auch Licht- und Radiowellen, breiten sich im Vakuum mit dieser Geschwindigkeit aus.

Frage 28.1

Das Ergebnis in Beispiel 28.2 ist um gut 7 % zu niedrig. Von wo kann die Abweichung herrühren? Mögliche – jedoch nicht sehr wahrscheinliche – Fehlerquellen sind: falsche Zählung der Zähne des Zahnrads, zu ungenaue Messung der Winkelgeschwindigkeit und/oder der Abstände. Können Sie eine wahrscheinlichere Fehlerquelle nennen?

Astronomische Entfernungen werden oft als Vielfache der Strecke angegeben, die das Licht in einer bestimmten Zeit zurücklegt. Beispielsweise beträgt die Entfernung zwischen Erde und Sonne im Mittel 8,33 Lichtminuten, und ein Lichtjahr ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt. Der Umrechnungsfaktor zwischen Lichtjahr und Meter ist leicht zu errechnen. Die Anzahl der Sekunden in einem Jahr ist

$$1 \text{ a} = (1 \text{ a}) \cdot \frac{365,24 \text{ d}}{1 \text{ a}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}.$$

Die Einheitenzeichen a, d, und h sind von den entsprechenden lateinischen Wörtern abgeleitet: a steht für *annum* = Jahr, d für *dies* (gesprochen *di-es*) = Tag sowie h für *hora* = Stunde. (Übrigens hat das Jahr ungefähr $\pi \cdot 10^7$ s, was man sich als Näherungswert recht gut merken kann.) Der Umrechnungsfaktor zwischen Meter (m) und Lichtjahr (Lj) ist somit

$$1 \text{ Lj} = (2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot (3,156 \cdot 10^7 \text{ s}) \\ = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}. \quad (28.2)$$

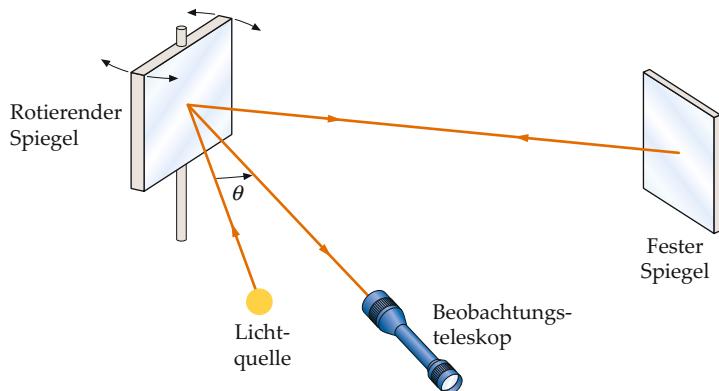


Abbildung 28.3 Schematische Darstellung der Foucault'schen Methode (von 1850), die Lichtgeschwindigkeit zu messen.

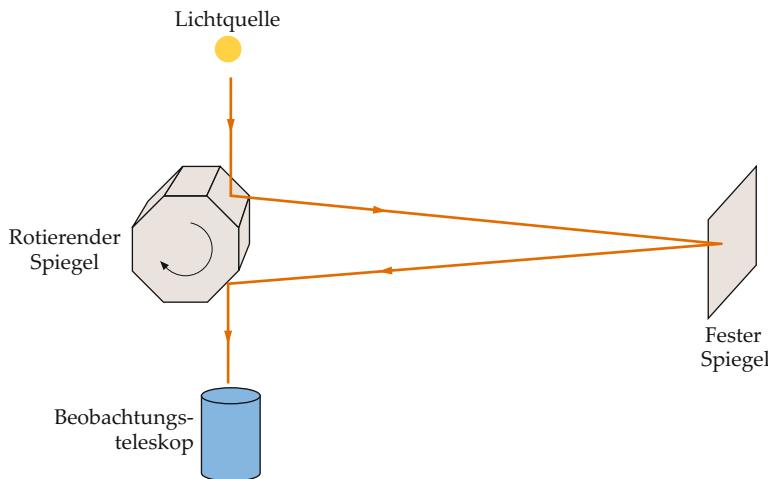


Abbildung 28.4 Schematische Darstellung der Michelson'schen Methode (von 1926), die Lichtgeschwindigkeit zu messen.

28.2 Die Ausbreitung des Lichts

Da Licht eine elektromagnetische Welle ist, erfolgt seine Ausbreitung nach den in Kapitel 12 eingeführten Gesetzen der Wellenmechanik, insbesondere nach der Wellengleichung, die auch in Abschnitt 27.3 besprochen wurde. Wir werden das in Kapitel 12 gezeigte Huygens'sche und das Fermat'sche Prinzip in Abschnitt 28.4 anwenden, um das Reflexions- und das Brechungsgesetz für Lichtwellen herzuleiten. Da die Wellenlänge des Lichts sehr klein ist, können wir oft mit dem Begriff „Strahl“ arbeiten, um die Ausbreitung des Lichts zu beschreiben. Dabei steht jeder Strahl senkrecht auf der Wellenfront und weist in deren Ausbreitungsrichtung. Eine Besonderheit von Lichtwellen im Gegensatz zu den in Kapitel 12 betrachteten Schallwellen ist, dass Licht eine **Polarisation** besitzen kann. Darunter versteht man die Eigenschaft einer Transversalwelle, die Schwingungsrichtung in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verändern zu können. Wir werden darauf in Abschnitt 28.5 näher eingehen.

28.3 Reflexion und Brechung

Die Lichtgeschwindigkeit in einem durchsichtigen Medium wie Luft, Wasser oder Glas ist geringer als die Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ im Vakuum. Ein durchsichtiges Medium ist durch seinen **Brechungsindex** bzw. seine **Brechzahl** n charakterisiert. Sie ist definiert als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum zur Lichtgeschwindigkeit c_n im Medium mit der Brechzahl n :

$$n = \frac{c}{c_n}. \quad (28.3)$$

DEFINITION DER BRECHZAHL

Die Brechzahl von Wasser ist $n = 1,33$, und für Glas liegt sie meist zwischen rund 1,50 und 1,66, je nach der Art des Glases. Diamant hat eine sehr hohe Brechzahl von ungefähr 2,4. Die Brechzahl von Luft beträgt 1,0003; daher können wir in den meisten Fällen annehmen, dass die Lichtgeschwindigkeit in Luft ebenso groß ist wie im Vakuum.

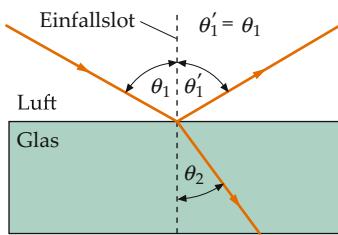


Abbildung 28.5 Der Reflexionswinkel θ'_1 ist betragsmäßig gleich dem Einfallswinkel θ_1 . Der Brechungswinkel θ_2 ist kleiner als der Einfallswinkel, wenn die Lichtgeschwindigkeit im zweiten Medium geringer ist als im Medium auf der Einfallsseite. (Alle Winkel werden zum Einfallslot hin gemessen.)

Wenn ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien trifft, beispielsweise zwischen Luft und Glas, dann wird ein Teil des Lichts reflektiert, und der andere Teil gelangt in das zweite Medium. Wenn das Licht nicht senkrecht auf die Grenzfläche trifft, dann hat der durchgelassene Strahl nicht dieselbe Richtung wie der einfallende Strahl. Diesen Effekt nennt man **Brechung**. Abbildung 28.5 zeigt einen Lichtstrahl, der auf eine ebene Grenzfläche zwischen Luft und Glas trifft. Der Winkel θ_1 zwischen dem einfallenden Strahl und der Normalen (dem Lot an der Einfallsstelle) heißt **Einfallswinkel**, und die Ebene, die durch diese beiden Linien aufgespannt wird, nennt man **Einfallsebene**. Der reflektierte Strahl liegt ebenfalls in der Einfallsebene und schließt mit der Normalen den Winkel θ'_1 ein, der – wie aus Abbildung 28.5 hervorgeht – ebenso groß ist wie der Einfallswinkel:

$$\theta'_1 = \theta_1. \quad (28.4)$$

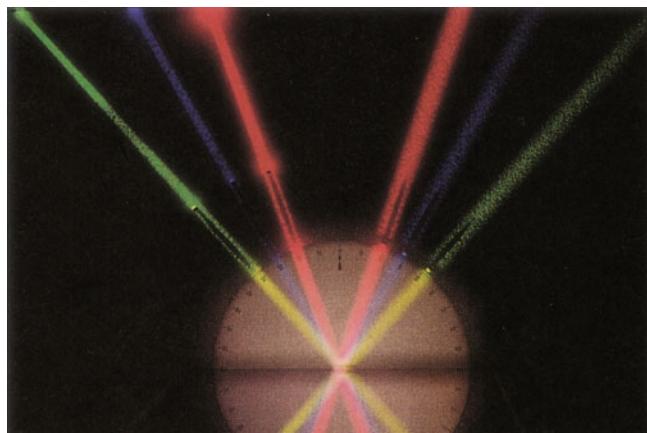
REFLEXIONSGESETZ

Dieses **Reflexionsgesetz** gilt für alle Arten von Wellen. Abbildung 28.6 zeigt Beispiele für die Reflexion von Licht- und von Ultraschallwellen.

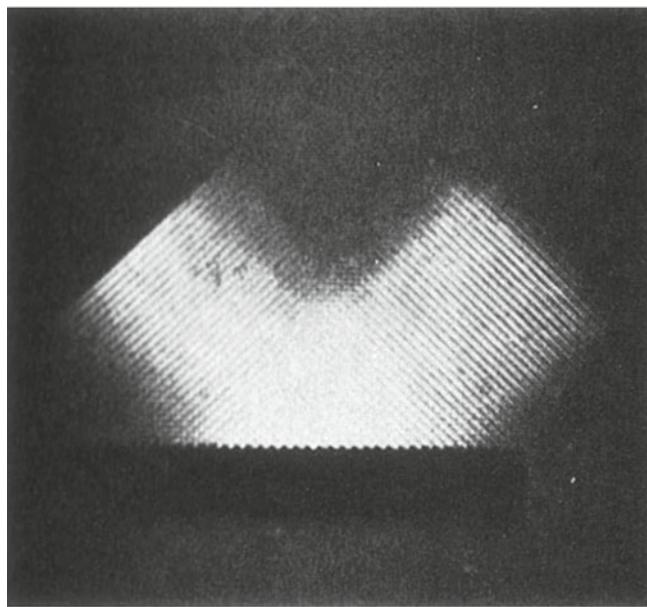
Der Lichtstrahl, der in Abbildung 28.5 in das Glas eintritt, heißt **gebrochener Strahl**, und seinen Winkel θ_2 zum Einfallslot nennt man **Brechungswinkel**. Wenn eine Welle eine Grenzfläche durchquert, an der ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit verringert wird (wie bei Licht, das aus der Luft in Glas eintritt), dann ist der Brechungswinkel θ_2 kleiner als der Einfallswinkel θ_1 , wie in Abbildung 28.5 gezeigt ist. Das bedeutet, der gebrochene Strahl wird zur Normalen hin gebrochen. Wenn umgekehrt ein Lichtstrahl aus Glas in Luft übertritt, wird er von der Normalen weg gebrochen.

Der Brechungswinkel θ_2 hängt vom Einfallswinkel und vom Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien ab. Wenn $c_{n,1}$ die Lichtgeschwindigkeit im ersten Medium und $c_{n,2}$ die im zweiten Medium ist, dann hängen der Einfallswinkel θ_1 und der Brechungswinkel θ_2 folgendermaßen miteinander zusammen:

$$\frac{1}{c_{n,1}} \sin \theta_1 = \frac{1}{c_{n,2}} \sin \theta_2. \quad (28.5a)$$



(a)



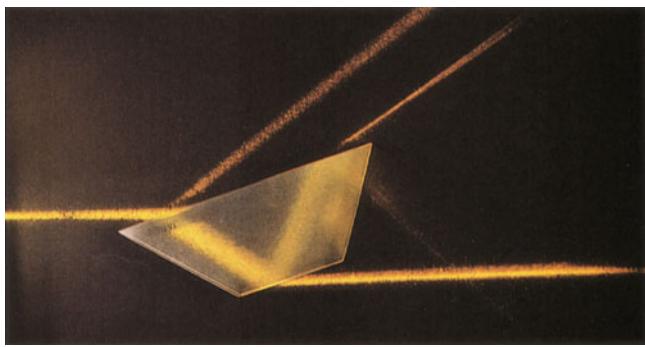
(b)

Abbildung 28.6 a) Bei diesen Lichtstrahlen, die auf die Grenzfläche zwischen Luft und Glas treffen, ist gut zu erkennen, dass Einfalls- und Reflexionswinkel gleich groß sind. b) Ebene Ultraschallwellen in Wasser werden hier an einer Stahlplatte reflektiert. (a) © Ken Kay/Fundamental Photographs. b) Mit freundlicher Genehmigung von Battelle-Northwest Laboratories.)

Das gilt für die Brechung aller Arten von Wellen, die eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen durchqueren. Diese Gesetzmäßigkeit kann gemäß Gleichung 28.3 auch mithilfe der Brechzahlen n_1 und n_2 der beiden Medien formuliert werden:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (28.5b)$$

SNELLIUS'SCHES BRECHUNGSGESETZ



Reflexionen und Brechungen eines Lichtstrahls, der auf ein Glasprisma trifft.
(© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

Dieser Zusammenhang, den der holländische Forscher Willebrod Snellius im Jahre 1621 auf experimentelle Weise entdeckte, heißt **Snellius'sches Brechungsgesetz**. Oft spricht man auch einfach vom **Brechungsgesetz**. Unabhängig von Snellius fand es einige Jahre später der französische Mathematiker und Philosoph René Descartes. In Beispiel 28.3 wird der Brechungswinkel beim Übergang von Luft in Wasser behandelt.

Beispiel 28.3: Brechung des Lichts von Luft zu Wasser

Ein Lichtstrahl tritt aus der Luft unter einem Einfallwinkel von $45,0^\circ$ in Wasser ein. Dessen Brechzahl beträgt 1,33. Wie groß ist der Brechungswinkel?

Problembeschreibung: Der Brechungswinkel kann mithilfe des Snellius'schen Gesetzes berechnet werden. Wir weisen der Luft den Index 1 und dem Wasser den Index 2 zu. Dann ist $n_1 = 1,00$ und $\theta_1 = 45,0^\circ$ sowie $n_2 = 1,33$. Den Brechungswinkel bezeichnen wir mit θ_2 (Abbildung 28.7).

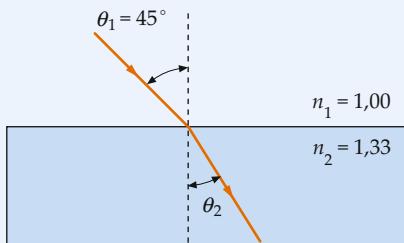


Abbildung 28.7 Lichtbrechung von Luft zu Wasser.

Lösung: 1. Lösen Sie die Gleichung für das Snellius'sche Gesetz nach $\sin \theta_2$, dem Sinus des Brechungswinkels, auf:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

daraus folgt

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$$

2. Berechnen Sie den Winkel, dessen Sinus 0,532 beträgt:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right) = \arcsin\left(\frac{1,00}{1,33} \sin 45^\circ\right) \\ &= \arcsin(0,532) = [32,1^\circ]\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Beim Eintritt in ein Medium, in dem sich das Licht langsamer ausbreitet, wird der Lichtstrahl zum Einfallslot hin gebrochen. Daher war zu erwarten, dass θ_2 kleiner als θ_1 ist, was sich in Schritt 2 auch ergab. ■

Physikalische Mechanismen bei Reflexion und Brechung

Die physikalischen Mechanismen, die der Reflexion und der Brechung zugrunde liegen, kann man verstehen, wenn man die Absorption und Wiederabstrahlung (Re-Emission) von Licht durch die Atome im reflektierenden bzw. im brechenden Medium betrachtet. Wenn Licht aus der Luft auf eine Glasoberfläche trifft, dann wird es von den Atomen an der Oberfläche absorbiert und mit der gleichen Frequenz in allen Richtungen wieder abgestrahlt. Die dadurch entstehenden Wellen interferieren in einem Winkel konstruktiv miteinander, der ebenso groß wie der Einfallswinkel ist, wodurch die reflektierte Welle erzeugt wird.

Die in das Glas eintretende (transmittierte) Welle entsteht durch Interferenz der einfallenden Welle und der Welle, die durch Absorption und Wiederabstrahlung von Licht durch die Atome im Glas erzeugt wird. Das aus der Luft in das Glas eintretende Licht erfährt eine Phasenverzögerung gegenüber der einfallenden Welle, da die Atome im Glas die einfallende Welle verzögert weiterleiten. Daher besteht auch eine Phasenverzögerung zwischen der resultierenden und der einfallenden Welle. Diese Phasenverzögerung bedeutet, dass ein Wellenberg der vom Medium durchgelassenen Welle später auftritt als ein Wellenberg der einfallenden Welle. Daher bewegt sich ein Wellenberg der durchgelassenen Welle in derselben Zeitspanne weniger weit als ein Wellenberg der ursprünglichen, einfallenden Welle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der durchgelassenen Welle ist somit kleiner als die der einfallenden Welle, und die Brechzahl ist größer als 1. Die Frequenz der Lichtwelle im zweiten Medium ist genauso groß wie die der einfallenden Lichtwelle (die Atome absorbieren Licht und strahlen es mit derselben Frequenz wieder ab). Da jedoch die Wellengeschwindigkeiten unterschiedlich sind, ist die Wellenlänge des hindurchtretenden Lichts nicht gleich der des einfallenden Lichts. Für die Lichtwellenlänge λ im Vakuum gilt $\lambda v = c$. Für die Lichtwellenlänge λ' im zweiten Medium, in der die Lichtgeschwindigkeit c_n ist, gilt $\lambda' v = c_n$. Mit der Brechzahl $n = c/c_n$ des zweiten Mediums ergibt sich durch Kombinieren dieser beiden Bezie-

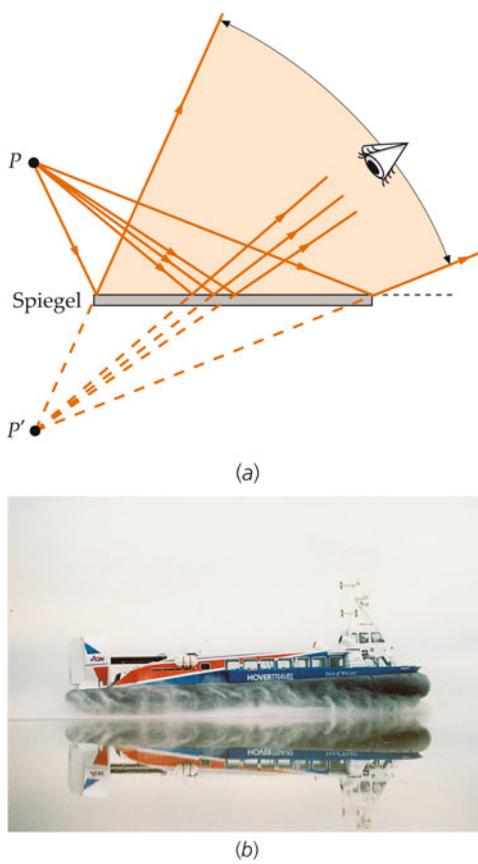


Abbildung 28.8 a) Spiegelreflexion an einer glatten Oberfläche. b) Spiegelreflexion eines Luftkissenboots an einer Wasserfläche. (Mit freundlicher Genehmigung von Hoverwork, UK.)

hungen $\lambda/\lambda' = c/c_n$ und daraus

$$\lambda' = \frac{\lambda}{c/c_n} = \frac{\lambda}{n}. \quad (28.6)$$

Spiegelreflexion und diffuse Reflexion

Abbildung 28.8a zeigt ein Bündel von Lichtstrahlen, das von einer Punktquelle P ausgeht und an einer glatten Oberfläche reflektiert wird. Nach der Reflexion divergieren die Strahlen so, als gingen sie von einem Punkt P' hinter der Oberfläche aus. (Dieser Punkt P' wird *Bildpunkt* genannt. Die Erzeugung von Bildern durch reflektierende und brechende Oberflächen wird im nächsten Kapitel besprochen.) Wenn diese Strahlen in unser Auge gelangen, können wir sie nicht von Strahlen unterscheiden, die tatsächlich von einer Punktquelle bei P' ausgehen.

Die Reflexion an einer glatten Oberfläche heißt **Spiegelreflexion** oder auch **reguläre Reflexion**. Sie unterscheidet sich von der **diffusen Reflexion**, die in Abbildung 28.9 illustriert ist.

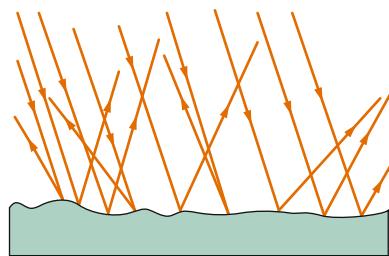


Abbildung 28.9 Diffuse Reflexion an einer rauen Oberfläche.

Hier werden die Strahlen an den einzelnen Punkten der Oberfläche regellos in unterschiedliche Richtungen reflektiert, sodass kein erkennbares Bild entsteht. Auch die Reflexion des Lampen- oder Sonnenlichts an dieser Buchseite ist eine solche diffuse Reflexion. In Bilderrahmen setzt man oft Glas ein, das leicht geschliffen ist, damit es diffus reflektiert; dadurch wird die Beobachtung des Bildes nicht durch die Spiegelung von Lichtquellen gestört. Übrigens ermöglicht es die diffuse Reflexion an der Straßenoberfläche, auch nachts die Straße vor dem Auto zu erkennen, weil ein Teil des Scheinwerferlichts zum Fahrer zurückreflektiert wird. Bei Nässe herrscht auf der Straße jedoch meist Spiegelreflexion vor. Dann wird kaum Licht zurückreflektiert, und die Straße ist schwerer zu erkennen.

Relative Intensitäten von reflektiertem und durchgelassenem Licht

Der Anteil der Lichtintensität, der an einer Grenzfläche (z. B. zwischen Luft und Glas) reflektiert wird, hängt auf komplizierte Weise von mehreren Größen ab: vom Einfallswinkel, von der Orientierung des elektrischen Feldvektors der Welle und von den Brechzahlen der beiden Medien. Für den Spezialfall des senkrechten Lichteinfalls ($\theta_1 = \theta'_1 = 0$) ist die Intensität der reflektierten Wellen gegeben durch

$$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0. \quad (28.7)$$

Darin ist I_0 die einfallende Intensität, n_1 und n_2 sind die Brechzahlen der beiden Medien. Für einen typischen Fall wie dem der Reflexion an einer Luft-Glas-Grenzfläche, also mit $n_1 = 1$ und $n_2 = 1.5$, ergibt sich aus Gleichung 28.7 die reflektierte Intensität $I = I_0/25$. Es werden also nur rund 4 % der Lichtenergie reflektiert, und der allergrößte Teil wird durchgelassen (transmittiert).

Totalreflexion

Abbildung 28.10 zeigt eine Punktquelle in Glas, von der Lichtstrahlen ausgehen, die unter verschiedenen Winkeln auf die Grenzfläche zwischen Luft und Glas treffen. Alle Strahlen, die nicht senkrecht zur Grenzfläche verlaufen, werden beim Austritt

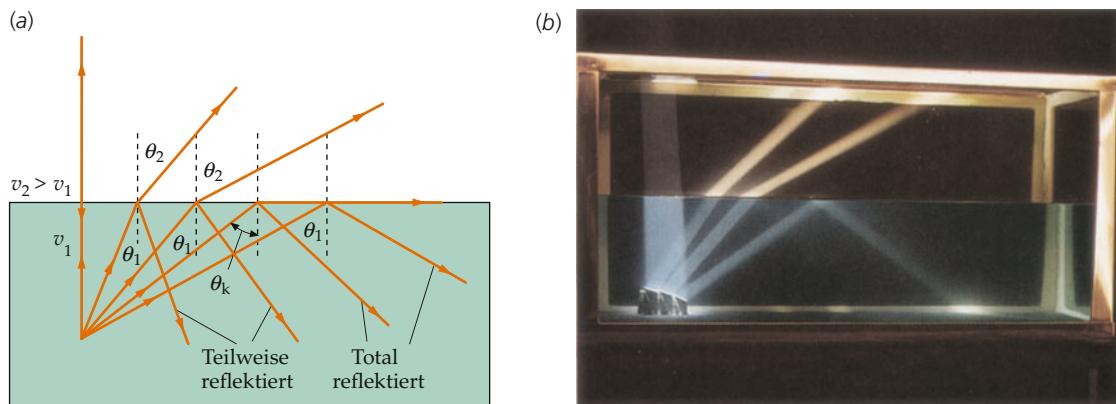


Abbildung 28.10 a) Totalreflexion. Mit steigendem Einfallwinkel nimmt der Brechungswinkel zu, bis der kritische Einfallwinkel θ_k erreicht ist, für den der Brechungswinkel gleich 90° ist. Bei noch größeren Einfallwinkeln als θ_k tritt kein gebrochener Strahl in das Medium mit der geringeren Brechzahl aus. b) Dieses Foto illustriert die Brechung und die Totalreflexion an einer Wasser-Luft-Grenzfläche. (© Ken Kay/Fundamental Photographs.)

in die Luft vom Einfallslot weg gebrochen. Mit steigendem Einfallwinkel nimmt der Brechungswinkel bis zu einem kritischen Einfallwinkel θ_k zu, für den der Brechungswinkel gleich 90° ist. Ist der Einfallwinkel größer als dieser kritische Winkel, so tritt keine Brechung auf, und es tritt kein Strahl in die Luft aus. Die gesamte Lichtintensität wird stattdessen reflektiert. Dieses Phänomen heißt **Totalreflexion**. Der kritische Winkel hängt von den Brechzahlen der beiden Medien ab. Man kann ihn ermitteln, indem man Gleichung 28.5b ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) nach $\sin \theta_1$ auflöst und θ_2 gleich 90° setzt. Das ergibt

$$\sin \theta_k = \frac{n_2}{n_1} \sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1}. \quad (28.8)$$

KRITISCHER WINKEL DER TOTALREFLEXION

Beachten Sie, dass Totalreflexion nur auftreten kann, wenn das Licht vom Medium mit der höheren Brechzahl ausgehend auf die Grenzfläche trifft. Wäre hier n_2 größer als n_1 , so könnte das Snellius'sche Brechungsgesetz nicht erfüllt werden, denn der Sinus eines Winkels kann niemals größer als 1 sein. Die Beispiele 28.4 und 28.5 illustrieren Auswirkungen der Totalreflexion.

Beispiel 28.4: Tauchtiefe und Gesichtskreis

Sie entspannen sich im Swimmingpool Ihres Urlaubshotels. Sie sind getaucht und bemerken bei einem Blick nach oben, dass Sie über der Wasserfläche nur Gegenstände in einem Kreis mit einem Radius von rund 2,0 m sehen können. Darum herum sehen Sie nur die Farbe der Poolwände. Wie tief sind Sie unter der Wasseroberfläche?

Problembeschreibung: Sie können die Tauchtiefe aus dem Radius des Gesichtskreises und dem Winkel ermitteln, unter dem das Licht Ihr Auge am Rand dieses Kreises

trifft. Hier tritt es unter einem Einfallwinkel von $90,0^\circ$ von außen auf das Wasser. Der zugehörige Brechungswinkel ist gleich dem kritischen Winkel θ_k der Totalreflexion zwischen Wasser und Luft. Der Abbildung 28.11 entnehmen Sie, dass die Tiefe y mit diesem Winkel und mit dem Radius r des Gesichtskreises über $\tan \theta_k = r/y$ zusammenhängt. Der kritische Winkel der Totalreflexion ist dann mit Gleichung 28.8 zu berechnen, wobei $n_2 = 1,00$ und $n_1 = 1,33$ ist.

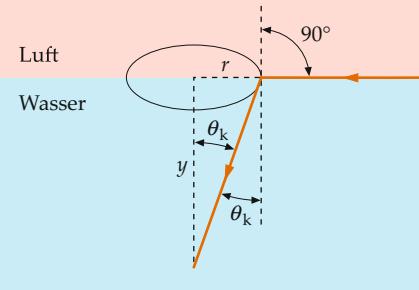


Abbildung 28.11 Darstellung der Totalreflexion unter Wasser und dem Radius des Gesichtskreises.

Lösung: 1. Die Tiefe y und der Radius r des Gesichtskreises hängen mit dem kritischen Winkel θ_k der Totalreflexion zusammen:

$$\tan \theta_k = r/y$$

2. Lösen Sie nach der Tiefe y auf:

$$y = \frac{r}{\tan \theta_k}$$

3. Berechnen Sie den kritischen Winkel der Totalreflexion an der Wasser-Luft-Grenzfläche:

$$\sin \theta_k = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,00}{1,33} = 0,752$$

$$\theta_k = 48,8^\circ$$

4. Berechnen Sie mithilfe der Gleichung von Schritt 2 die Tiefe y :

$$y = \frac{r}{\tan \theta_k} = \frac{2,0 \text{ m}}{\tan 48,8^\circ} = \boxed{1,7 \text{ m}}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Schritt 4 erscheint sinnvoll. Die meisten Swimmingpools haben mindestens diese Tiefe.

Abbildung 28.13a zeigt Licht, das senkrecht auf eine der Kathetenseiten eines Glasprismas auftrifft. Dessen Grundfläche ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, hat also zwei Winkel von 45° . Bei einer Brechzahl von 1,5 des Glases ist der kritische Winkel der Totalreflexion gleich $41,8^\circ$ (siehe Beispiel 28.5). Der Strahl tritt hier durch die Glas-Luft-Grenzfläche an der Hypotenuse unter einem Einfallswinkel von 45° ein. Daher wird er total reflektiert und tritt (ebenfalls senkrecht) durch die andere Kathetenseite wieder aus. Auch in Abbildung 28.13b fällt der Lichtstrahl senkrecht ein, jedoch durch die Hypotenusenfläche des Prismas. Er wird zweimal total reflektiert, sodass er in der Gegenrichtung wieder austritt, also insgesamt um 180° abgelenkt wird. Diese Totalreflexion in Prismen wird bei vielen optischen Geräten ausgenutzt, um die Richtung der Lichtstrahlen möglichst verlustfrei abzulenken. Ein Feldstecher weist für jedes Objektiv zwei solcher Prismen auf. Dadurch kann der erforderliche Lichtweg auf einer geringeren, handlichen Länge untergebracht werden. In jedem Prisma wird das Bild durch die zweimalige Reflexion umgekehrt (Abbildung 28.13b). Der

Beispiel 28.5: Totalreflexion

ZUR ÜBUNG

Eine bestimmte Glassorte hat die Brechzahl $n = 1,50$. Berechnen Sie den kritischen Winkel der Totalreflexion von Licht, das dieses Glas verlässt und in Luft mit $n = 1,00$ austritt.

Problembeschreibung: Es ist das Brechungsgesetz (Gleichung 28.5b) anzuwenden, wobei der Reflexionswinkel gleich 90° gesetzt wird.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Zeichnen Sie eine Skizze (Abbildung 28.12), die den einfallenden und den reflektierten Strahl zeigt. Beim kritischen Winkel beträgt der Brechungswinkel 90° .

2. Wenden Sie das Brechungsgesetz (Gleichung 28.5b) an. Der kritische Winkel θ_k ist der Einfallswinkel für den oben angegebenen Brechungswinkel von 90° .

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

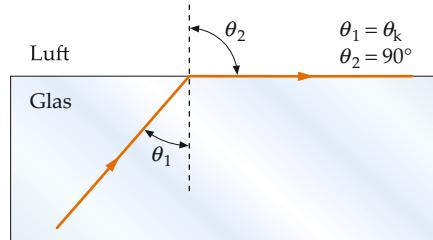


Abbildung 28.12 Totalreflexion des Lichts beim Übergang von Glas zu Luft.

2.

$$\sin \theta_k = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,00}{1,50} = 0,667$$

$$\theta_k = \boxed{41,8^\circ}$$

Plausibilitätsprüfung: Aus Abbildung 28.10 geht hervor, dass der kritische Winkel bei einer Wasser-Luft-Grenzfläche etwas größer als 45° ist. Da die Brechzahl des Glases etwas höher als die von Wasser ist, war hier zu erwarten, dass der kritische Winkel bei einer Glas-Luft-Grenzfläche etwas kleiner als 45° ist. Das Ergebnis $41,8^\circ$ stimmt damit überein.

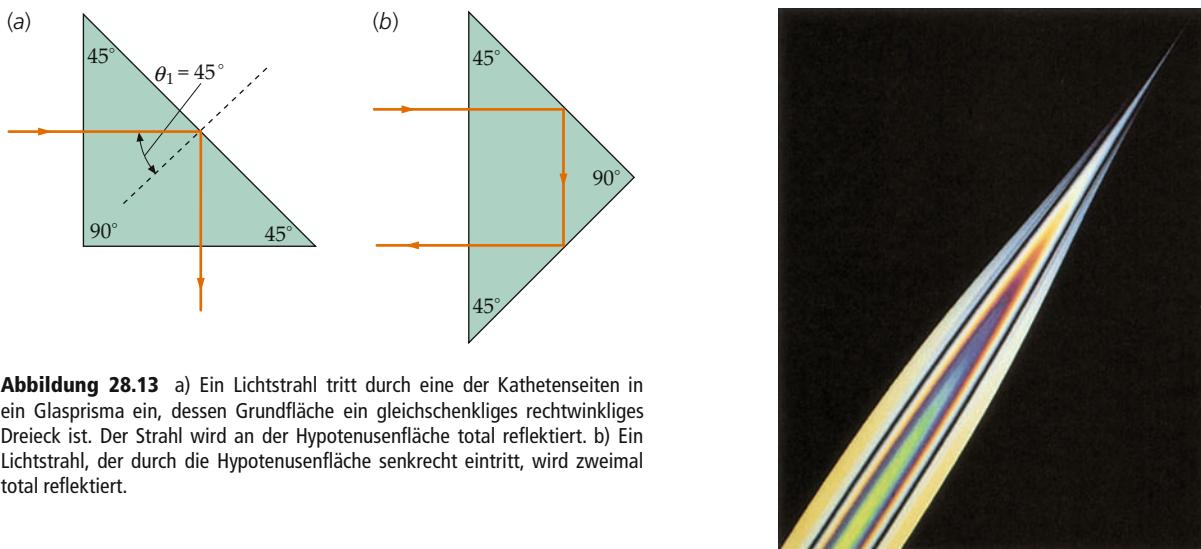


Abbildung 28.13 a) Ein Lichtstrahl tritt durch eine der Kathetenseiten in ein Glasprisma ein, dessen Grundfläche ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ist. Der Strahl wird an der Hypotenuse total reflektiert. b) Ein Lichtstrahl, der durch die Hypotenuse senkrecht eintritt, wird zweimal total reflektiert.

Betrachter sieht im Feldstecher das vom Objektiv umgekehrte Bild jedoch aufrecht, weil im Okular eine weitere Linse für eine weitere Bildumkehr sorgt (vgl. Abschnitt 29.4). – Die mit $n \approx 2,4$ sehr hohe Brechzahl von Diamant hat eine bekannte Auswirkung: Nahezu das gesamte Licht, das in einen Diamanten eintritt, wird total reflektiert. Dies verleiht ihm eine Brillanz, wie sie mit Glas nicht zu erzielen ist.

Faseroptik

Eine interessante Anwendung der Totalreflexion ist die Übertragung von Lichtstrahlen in langen, dünnen Glasfasern oder Lichtleitern (Abbildung 28.14a). Wenn ein Lichtstrahl ungefähr parallel zur Achse der Faser in diese eintritt, dann trifft er auf deren Wandung mit Winkel, die größer sind als der kritische Win-

kel der Totalreflexion (solange die Faser nicht zu stark gebogen ist). In diesem Fall geht keine Lichtenergie durch die Wandung verloren. Mit Bündeln aus vielen solcher Fasern kann man Bilder übertragen, wie es in Abbildung 28.14b illustriert ist.

Die Faseroptik wird beispielsweise in der Medizin angewandt, um mit einem winzigen Einschnitt, also „minimal invasiv“,

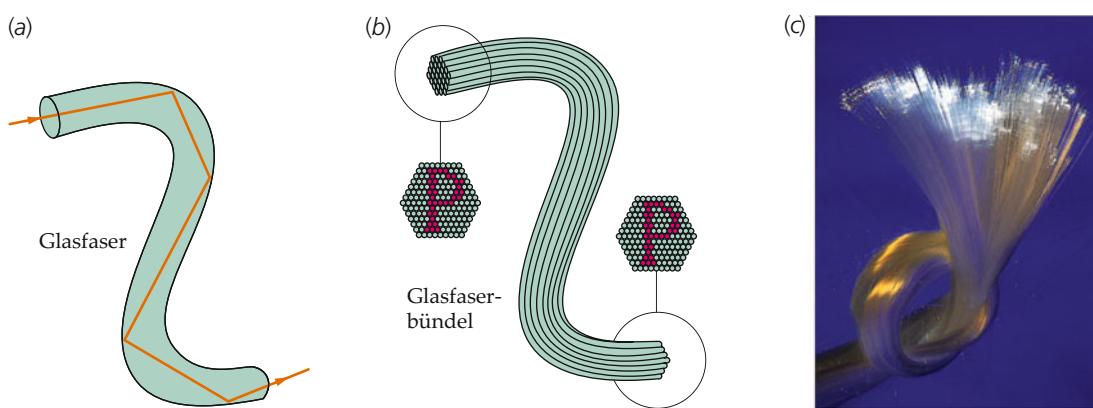


Abbildung 28.14 a) Eine Glasfaser, auch Lichtleiter genannt. In der Faser trifft der Lichtstrahl stets flacher als mit dem kritischen Winkel der Totalreflexion auf die Wandung. Daher tritt aufgrund der Totalreflexion kein Licht durch Brechung aus der Faser aus. b) Das vom Gegenstand ausgehende Licht wird durch ein Bündel von Glasfasern geführt, und das Bild des Gegenstands kann am anderen Ende des Faserbündels betrachtet werden. c) Aus einem Faserbündel austretendes Licht. Das Licht wird durch Totalreflexion und oft zusätzlich mit Brechung wie bei der Luftspiegelung durch die Faser geführt. (c) © Ted Horowitz/The Stock Market.)

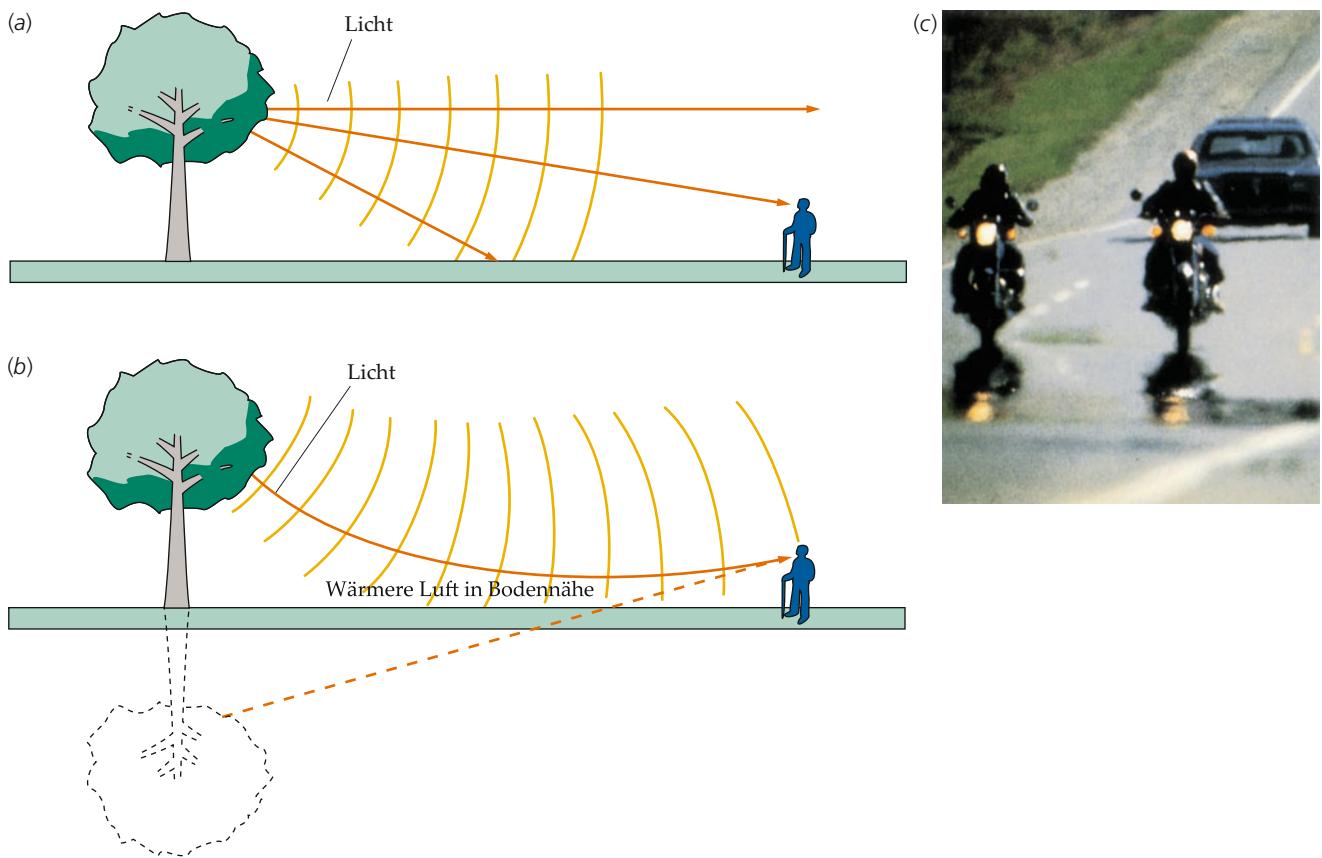


Abbildung 28.15 Luftspiegelungen. a) Wenn die Luft überall dieselbe Temperatur hat, sind die Wellenfronten kugelförmig, und die Lichtstrahlen verlaufen geradlinig. b) Wenn die Luft nahe am Boden wärmer ist, sind die Wellenfronten nicht kugelförmig, weil das vom Baum ausgehende Licht gebrochen wird. c) Luftspiegelung auf einer heißen Fahrbahn. (© Robert Greenler.)

innere Organe zu betrachten oder auch den Verlauf einer Operation zu verfolgen. In letzter Zeit erlangten die Glasfasern eine sehr große Bedeutung in der Telekommunikation. Durch Modulation elektromagnetischer Wellen kann pro Zeiteinheit umso mehr Information übertragen werden, je höher die Frequenz der Trägerwelle ist. Lichtwellen haben Frequenzen in der Größenordnung von 10^{14} Hz. Somit ermöglichen sie es, in derselben Zeit ein Vielfaches der Informationsmenge zu übertragen wie mit Funkwellen, deren Frequenzen nur in der Größenordnung von 10^6 Hz liegen. In einer einzigen Glasfaser mit der Dicke eines menschlichen Haares können beispielsweise Videosignale in hoher Qualität und in Echtzeit übertragen werden. Die pro Zeiteinheit übertragbare Informationsmenge ist dabei ungefähr so hoch wie bei 32 000 gleichzeitig geführten Telefongesprächen.

genannt. An einem heißen und sonnigen Tag wird Asphalt, Stein oder Sand an der Oberfläche oft sehr heiß. Dadurch ist die Luftsicht nahe am Boden wärmer als die Luft darüber und hat daher eine geringere Dichte. In Luft mit geringerer Dichte breiten sich die Lichtwellen etwas schneller aus, sodass ein Lichtstrahl beim Übergang in die wärmeren Luftsicht gebogen wird. Abbildung 28.15a zeigt, wie die von einem Baum reflektierten Lichtstrahlen bei überall gleicher Lufttemperatur zum Betrachter gelangen: Die Wellenfronten sind kugelförmig, und die Strahlen verlaufen geradlinig. In Abbildung 28.15b ist die Luft nahe am Boden wärmer. Hier breiten sich die Wellenfronten schneller aus als darüber und sind daher nicht mehr kugelförmig. Die Lichtstrahlen, die stets senkrecht auf den Wellenfronten stehen, sind daher nach oben gebogen. Dadurch gelangen schräg nach unten gerichtete Lichtstrahlen, die bei überall gleicher Temperatur auf den Boden trafen, nun zum Betrachter, und er sieht ein Bild des Baums, als würde es an einer Wasserfläche reflektiert. Wahrscheinlich haben Sie an heißen sonnigen Tagen zuweilen scheinbar nasse Flecken auf der Straße beobachtet, die verschwanden, als Sie näher kamen. Auch dieser Effekt beruht auf der Lichtbrechung an der heißen Luftsicht direkt über der Fahrbahn.

Luftspiegelungen

Wenn sich die Brechzahl eines Mediums räumlich ändert, dann wird ein hindurchgehender Lichtstrahl gebogen. Ein interessantes Beispiel dafür ist die Luftspiegelung, auch Fata Morgana

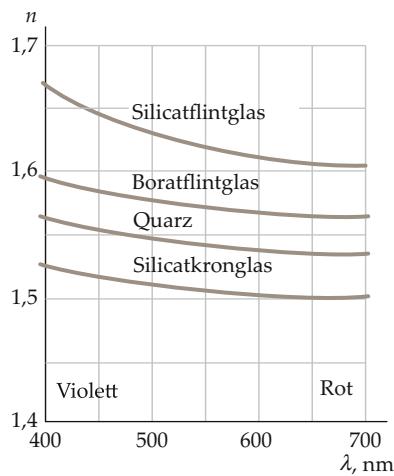


Abbildung 28.16 Die Brechzahlen einiger Glassorten in Abhängigkeit von der Wellenlänge des einfallenden Lichts.

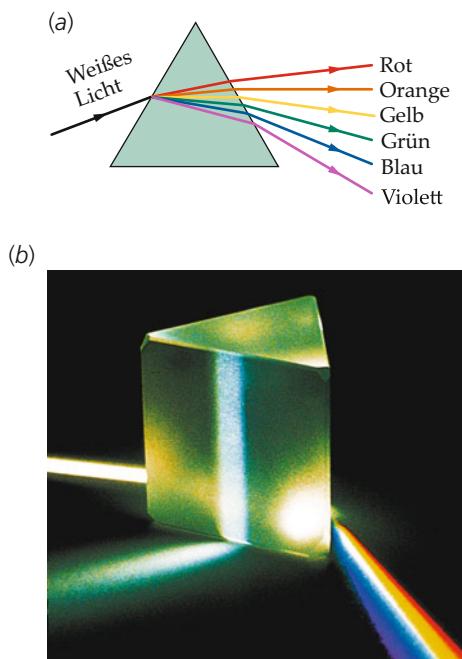


Abbildung 28.17 Weißes Licht wird durch ein Glasprisma spektral zerlegt. Die Brechzahl ist für größere Wellenlängen geringer, sodass rotes Licht schwächer gebrochen wird als violettes Licht. (© David Parker/Science Photo Library/Photo Researchers.)

Dispersion

Die Brechzahl jeder Substanz ist geringfügig von der Wellenlänge des einfallenden Lichts abhängig. In den meisten Fällen nimmt sie mit steigender Wellenlänge leicht ab (Abbildung 28.16). Die Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge und daher auch von der Frequenz nennt man **Dispersion**.

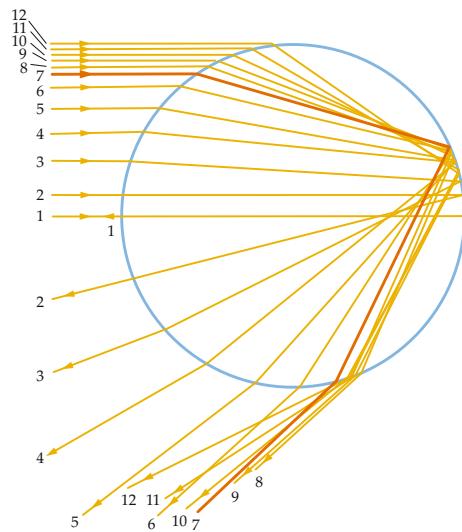


Abbildung 28.18 Descartes' Konstruktion zur Erklärung des Regenbogens. Parallel einfallende Lichtstrahlen treffen auf einen kugelförmigen Wassertropfen. Die einfallenden Strahlen sind nach zunehmendem Abstand vom Durchmesser nummeriert. Strahl 1 verläuft durch den Mittelpunkt und wird an der Rückseite des Tropfens in sich selbst reflektiert. Strahl 2 tritt etwas darüber ein. Er wird beim Eintritt gebrochen, an der Rückseite reflektiert und beim Austritt erneut gebrochen. Nun bildet er einen kleinen Winkel gegen den Durchmesser. Bis hin zu Strahl 7, der in der Abbildung fett eingezeichnet ist, wird der Winkel des austretenden Strahls gegen den Durchmesser umso größer, je weiter der einfallende Strahl vom Durchmesser entfernt ist. Die weiteren Strahlen, Strahl 8 bis Strahl 12, treten nach Brechung, Reflexion und erneuter Brechung mit wieder abnehmenden Winkeln gegen den Durchmesser aus.

Trifft weißes Licht aus der Luft schräg auf eine Glasfläche, ist der Brechungswinkel umso kleiner, je geringer die Wellenlänge ist. Kurzwelliges violettes Licht wird daher stärker zum Einfallslot hin gebrochen als langwelliges rotes Licht. Daher wird weißes Licht in einem Glasprisma in seine verschiedenen Komponenten bzw. Spektralfarben zerlegt (Abbildung 28.17).

Der Regenbogen

Der Regenbogen ist das uns vielleicht vertrauteste Beispiel der Dispersion, in diesem Fall von Sonnenlicht. In Abbildung 28.18 ist das Prinzip der Konstruktion dargestellt, mit der René Descartes in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts das Zustandekommen des Regenbogens erklärte. Das parallele Sonnenlicht trifft auf einen kugelförmigen Wassertropfen. Die Strahlen werden gebrochen, wenn sie in einen Wassertropfen eintreten. An der rückwärtigen Wasser-Luft-Grenzfläche werden sie reflektiert, und beim Austritt werden sie an der vorderen Grenzfläche erneut gebrochen.

Der Abbildung 28.18 können wir entnehmen, dass der Winkel der austretenden Strahlen gegen den Durchmesser zunächst umso größer wird, je weiter der eintretende Strahl vom Mittelpunkt entfernt ist. Bei einem bestimmten Abstand vom Mittelpunkt (Strahl 7 in der Abbildung) erreicht dieser Winkel ein Maximum



Dieser 22°-Halo um die Sonne röhrt von der Lichtbrechung durch hexagonale Eiskristalle her, die in der oberen Atmosphäre regellos verteilt sind. Wenn die flachen Eiskristalle nicht regellos verteilt sind, sondern herabschweben, wobei ihre Grundfläche etwa waagerecht liegt, dann sieht man auf jeder Seite der Sonne nur Teile des Halos, die sogenannten *Nebensonnen* oder *Nebensonnenhalos*.
© P. Parvainen, Turku.)

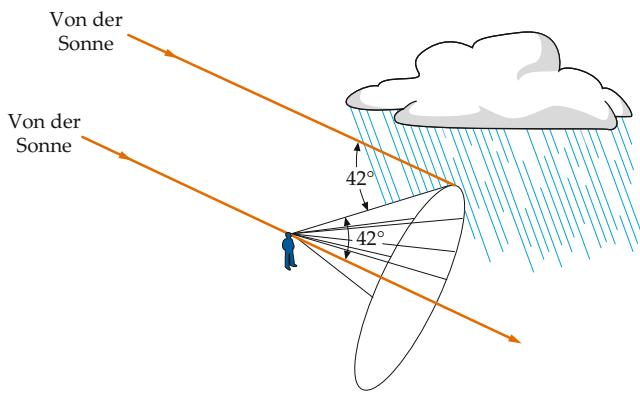


Abbildung 28.19 Ein Regenbogen erscheint unter einem Beobachtungswinkel von 42° gegen die Richtung des Sonnenlichts, das dabei von hinten kommt. Siehe hierzu die Konstruktion von Descartes in Abbildung 28.18.

und wird dann wieder kleiner. Die Häufung der Strahlen nahe dem maximalen Austrittswinkel (bei Strahl 7) führt letztlich zum Regenbogen. Anhand seiner Konstruktion, der ebenfalls das Brechungsgesetz zugrunde liegt, konnte Descartes zeigen, dass der maximale Austrittswinkel ungefähr 42° beträgt. Um einen Regenbogen zu beobachten, müssen wir somit auf diejenigen Wassertropfen blicken, die wir unter einem Winkel von 42° gegen die Richtung des von hinten kommenden Sonnenlichts sehen (Abbildung 28.19).

Die Auf trennung der Farben im Regenbogen röhrt daher, dass beim Wasser – wie bei allen durchsichtigen Materialien – die Brechzahl geringfügig von der Lichtwellenlänge abhängt. Daher ändert sich der Beobachtungswinkel des Regenbogens geringfügig mit der Wellenlänge. Der gesamte Regenbogen

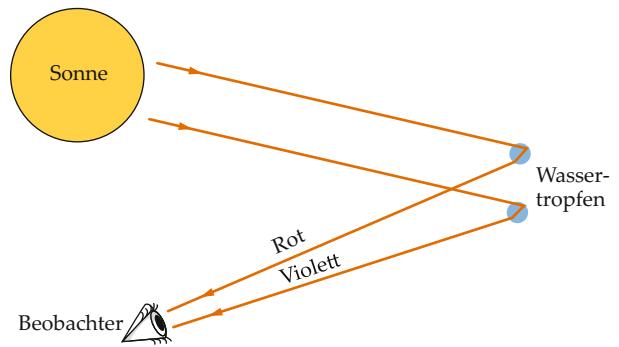


Abbildung 28.20 Ein Regenbogen entsteht durch Lichtstrahlen, die in sehr vielen Wassertropfen gebrochen und reflektiert wurden.

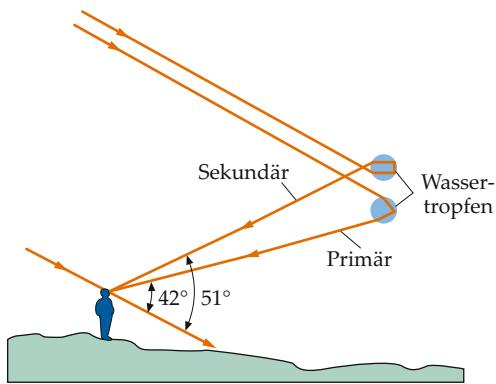


Abbildung 28.21 Der sekundäre Regenbogen entsteht durch Lichtstrahlen, die in den Wassertropfen zweimal reflektiert werden.

setzt sich aus Lichtstrahlen zusammen, die in sehr vielen Wassertropfen gebrochen und reflektiert werden (Abbildung 28.20). Die Farbe, die wir unter einem bestimmten Beobachtungswinkel sehen, entspricht jeweils der Wellenlänge, für die der Ablenkungswinkel nach Abbildung 28.18 maximal ist. Da die Brechzahl für rotes Licht kleiner ist als für blaues Licht, liegt der rote Streifen des Regenbogens bei einem etwas größeren Beobachtungswinkel als der blaue Teil. Deswegen ist der Regenbogen außen rot und innen violett.

Wenn Licht auf eine Grenzfläche zwischen Wasser und Luft trifft, wird es teilweise reflektiert und teilweise gebrochen. Das ist beispielsweise auch beim Austritt der in den Wassertropfen gebrochenen Lichtstrahlen der Fall. Durch die erneute Reflexion der austretenden Lichtstrahlen tritt neben dem eben beschriebenen primären Regenbogen auch ein zweiter, der sekundäre Regenbogen auf (Abbildung 28.21). Er erscheint bei einem Beobachtungswinkel von 51° , und seine Farbreihenfolge ist umgekehrt gegenüber der im primären Regenbogen. Beim sekundären Regenbogen liegt Violett außen und Rot innen. Da an der Wasser-Luft-Grenzfläche nur ein geringer Anteil des Lichts reflektiert wird, ist der sekundäre Regenbogen wesentlich schwächer als der primäre.

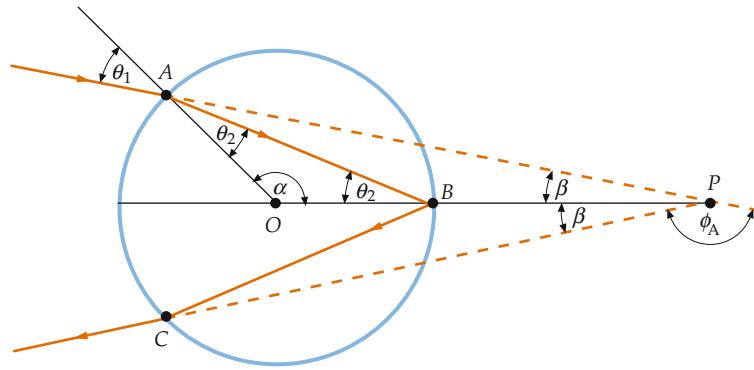


Abbildung 28.22 Ein Lichtstrahl trifft auf einen kugelförmigen Wassertropfen. Der im Punkt A gebrochene Strahl trifft die Rückseite des Wassertropfens im Punkt B. Hier bildet er mit dem Einfallslot OB den Winkel θ_2 und wird unter dem gleichen Winkel reflektiert. Beim Austritt aus dem Tropfen wird er im Punkt C erneut gebrochen.

*Berechnung des Beobachtungswinkels beim Regenbogen

Wir können den Beobachtungswinkel, unter dem der Regenbogen erscheint, mithilfe des Reflexions- und des Brechungsgesetzes berechnen. Abbildung 28.22 zeigt einen Lichtstrahl, der im Punkt A auf einen kugelförmigen Wassertropfen trifft. Für den Zusammenhang zwischen dem Brechungswinkel θ_2 und dem Einfallswinkel θ_1 gilt das Snellius'sche Brechungsgesetz:

$$n_{\text{Luft}} \sin \theta_1 = n_{\text{Wasser}} \sin \theta_2. \quad (28.9)$$

Der Punkt P in Abbildung 28.22 ist der Schnittpunkt der Verlängerungen des letztlich austretenden und des einfallenden Strahls. Der Winkel ϕ_A ist der sogenannte Ablenkwinkel des Strahls. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass ϕ_A und 2β eine Gerade ergeben. Daher ist

$$\phi_A + 2\beta = \pi. \quad (28.10)$$

Wir wollen ermitteln, wie der Ablenkwinkel ϕ_A vom Einfallswinkel θ_1 abhängt. Im Dreieck AOB ist

$$2\theta_2 + \alpha = \pi. \quad (28.11)$$

Entsprechend gilt im Dreieck AOP:

$$\theta_1 + \beta + \alpha = \pi. \quad (28.12)$$

Wir eliminieren α aus den Gleichungen 28.11 und 28.12 und lösen nach β auf. Das ergibt

$$\beta = \pi - \theta_1 - \alpha = \pi - \theta_1 - (\pi - 2\theta_2) = 2\theta_2 - \theta_1.$$

Einsetzen dieses Ausdrucks für β in Gleichung 28.10 ergibt den Ablenkwinkel:

$$\phi_A = \pi - 2\beta = \pi - 4\theta_2 + 2\theta_1. \quad (28.13)$$

Wir können die Gleichungen 28.13 und 28.9 kombinieren, um θ_2 zu eliminieren. Damit erhalten wir den Ablenkwinkel ϕ_A in Abhängigkeit vom Einfallswinkel θ_1 :

$$\phi_A = \pi + 2\theta_1 - 4 \arcsin \left(\frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Wasser}}} \sin \theta_1 \right). \quad (28.14)$$

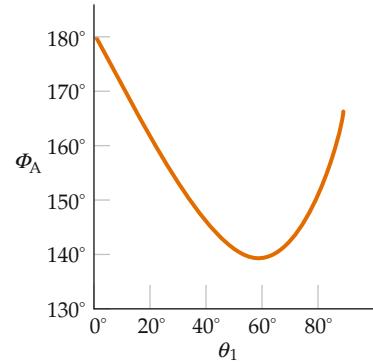


Abbildung 28.23 Der Ablenkwinkel ϕ_A in Abhängigkeit vom Einfallswinkel θ_1 . Der Ablenkwinkel hat seinen Minimalwert von 138° bei einem Einfallswinkel von 60° . Bei der minimalen Ablenkung ist $d\phi_A/d\theta_1 = 0$. Daher ist die Ablenkung von Strahlen mit Einfallswinkeln wenig unter oder über 60° ungefähr die dieselbe.

Abbildung 28.23 zeigt diese Abhängigkeit. Für $\theta_1 = 60^\circ$ hat der Ablenkwinkel ein Minimum; hier ist $\phi_{A,\min} = 138^\circ$. Dieser Winkel heißt **Winkel der minimalen Ablenkung**. Bei Einfallswinkeln, die nur wenig größer oder kleiner als 60° sind, hat der Ablenkwinkel kaum unterscheidbare Werte. Daher ist die Intensität des im Wassertropfen gebrochenen und reflektierten Lichts beim Winkel der minimalen Ablenkung am größten.

Aus Abbildung 28.22 geht hervor, dass der Maximalwert von β beim Minimalwert von ϕ_A auftritt. Daher ergibt sich der Winkel $2\beta_{\max}$ des Intensitätsmaximums zu

$$2\beta_{\max} = \pi - \phi_{A,\min} = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ. \quad (28.15)$$

Dies entspricht gerade dem Beobachtungswinkel beim Regenbogen.

Die Brechzahl von Wasser hängt geringfügig von der Wellenlänge ab. Daher treten bei den einzelnen Wellenlängen bzw. Farben die Intensitätsmaxima bei leicht unterschiedlichen Beobachtungswinkeln auf.

28.4 *Herleitung des Reflexions- und des Brechungsgesetzes

Das Reflexions- und das Brechungsgesetz können wir auf zwei erlei Weise herleiten: entweder mithilfe des Huygens'schen Prinzips oder mithilfe des Fermat'schen Prinzips (siehe Kapitel 12).

Huygens'sches Prinzip

Reflexion

Abbildung 28.24 zeigt eine ebene Wellenfront AA' , die im Punkt A auf einen Spiegel trifft. Wie aus der Abbildung hervorgeht, ist der Winkel ϕ_1 zwischen der Wellenfront und dem Spiegel ebenso groß wie der Einfallswinkel θ_1 . Dies ist der Winkel zwischen dem Einfallslot und den einfallenden Lichtstrahlen, die senkrecht auf den Wellenfronten stehen. Nach dem Huygens'schen Prinzip kann jeder Punkt auf einer gegebenen Wellenfront als Punktquelle einer sekundären Elementarwelle angesehen werden. Die Position der Wellenfront nach einer bestimmten Zeit t können wir ermitteln, indem wir Elementarwellen konstruieren, die den Radius ct haben und deren Mittelpunkte auf der Wellenfront AA' liegen. Elementarwellen, die die Spiegeloberfläche noch nicht erreicht haben, bilden den Teil BB' der neuen Wellenfront. Elementarwellen, die den Spiegel bereits erreicht haben, werden reflektiert und bilden den Teil $B''B$ der neuen Wellenfront. Mit derselben Konstruktion erhalten wir die Wellenfront $C'C$ aus den Huygens'schen Elementarwellen, die aus der Wellenfront CC' hervorgehen.

Abbildung 28.25 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt von Abbildung 28.24. Hier ist die Wellenfront AP dargestellt, die Teil der ursprünglichen Wellenfront AA' ist. In der Zeit t erreicht die vom Punkt P ausgehende Elementarwelle den Spiegel im Punkt B, und die Elementarwelle vom Punkt A erreicht in derselben Zeit den Punkt B'' . Die reflektierte Wellenfront $B''B$ bildet mit dem Spiegel den Winkel ϕ'_1 , der gleich dem Reflexionswinkel θ'_1 zwischen dem reflektierten Strahl und dem

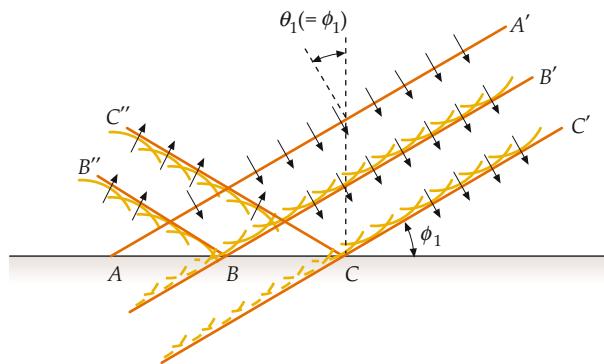


Abbildung 28.24 Eine ebene Welle, die an einem ebenen Spiegel reflektiert wird. Der Winkel θ_1 zwischen dem einfallenden Strahl und dem Einfallslot ist der Einfallswinkel. Er ist ebenso groß wie der Winkel ϕ_1 zwischen der einfallenden Wellenfront und dem Spiegel.

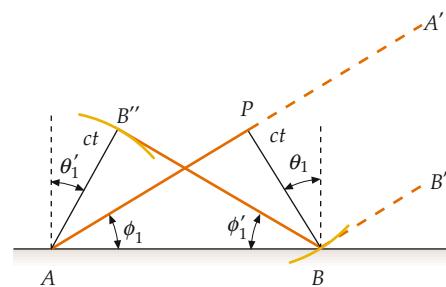


Abbildung 28.25 Zur Herleitung des Reflexionsgesetzes nach dem Huygens'schen Prinzip. Die ankommende Wellenfront AP trifft den Spiegel zuerst im Punkt A. Nach der Zeit t trifft die von P ausgehende Elementarwelle den Spiegel im Punkt B, während die von A ausgehende Elementarwelle den Punkt B'' erreicht.

Einfallslot ist. Die Dreiecke ABB'' und ABP sind rechtwinklige Dreiecke mit der gemeinsamen Seite AB und gleich großen Seiten $AB'' = BP = ct$. Daher sind diese Dreiecke kongruent. Die Winkel ϕ_1 und ϕ'_1 sind daher gleich. Somit ist der Reflexionswinkel θ'_1 gleich dem Einfallswinkel θ_1 .

Brechung

Abbildung 28.26 zeigt eine ebene Welle, die auf eine Luft-Glas-Grenzfläche trifft. Wir wenden auch hier die Huygens'sche Konstruktion an, um die Wellenfront der in das Glas eintretenden Welle zu ermitteln. Die Gerade AP repräsentiert einen Teil der Wellenfront im Medium 1 (Luft). Sie trifft die Glasoberfläche unter dem Winkel ϕ_1 . In der Zeit t legt die von P ausgehende Elementarwelle die Strecke $c_{n,1} t$ zurück und erreicht den Punkt B auf der Linie AB, die beide Medien voneinander trennt. In derselben Zeit legt die von A ausgehende Elementarwelle im Medium 2 die kürzere Strecke $c_{n,2} t$ zurück. Die neue Wellenfront BB' verläuft nicht parallel zur ursprünglichen Wellenfront AP, weil die Geschwindigkeiten $c_{n,1}$ und $c_{n,2}$ unterschiedlich sind. Im Dreieck ABP ist

$$\sin \phi_1 = \frac{c_{n,1} t}{AB}$$

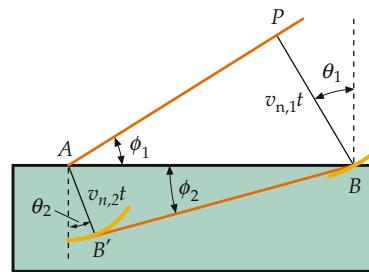


Abbildung 28.26 Anwendung des Huygens'schen Prinzips der Elementarwellen auf ebene Wellen, die an der Grenzfläche zweier Medien gebrochen werden. Das Licht hat im Medium 1 (Luft) die Wellengeschwindigkeit $c_{n,1}$ und im Medium 2 (Glas) die geringere Wellengeschwindigkeit $c_{n,2}$. Der Brechungswinkel ist hier kleiner als der Einfallswinkel.

oder

$$AB = \frac{c_{n,1} t}{\sin \phi_1} = \frac{c_{n,1} t}{\sin \theta_1}.$$

Dabei haben wir die Tatsache ausgenutzt, dass der Winkel ϕ_1 gleich dem Einfallswinkel θ_1 ist. Entsprechend gilt im Dreieck ABB'

$$\sin \phi_2 = \frac{c_{n,2} t}{AB}$$

oder

$$AB = \frac{c_{n,2} t}{\sin \phi_2} = \frac{c_{n,2} t}{\sin \theta_2}.$$

Darin ist $\theta_2 = \phi_2$ der Brechungswinkel. Wir setzen die Kehrwerte der beiden Ausdrücke für die Strecke AB gleich und erhalten

$$\frac{\sin \theta_1}{c_{n,1}} = \frac{\sin \theta_2}{c_{n,2}}. \quad (28.16)$$

Wenn wir $c_{n,1} = c/n_1$ und $c_{n,2} = c/n_2$ in diese Gleichung einsetzen und sie mit c multiplizieren, erhalten wir $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. Dies ist das Snellius'sche Brechungsgesetz.

Fermat'sches Prinzip

Reflexion

In Abbildung 28.27 geht ein Lichtstrahl vom Punkt A aus und trifft eine ebene, spiegelnde Oberfläche. Nach der Reflexion erreicht er den Punkt B . Beim Anwenden des Fermat'schen Prinzips auf die Reflexion stellt sich folgende Frage: In welchem Punkt P muss der Lichtstrahl den Spiegel treffen, damit er in möglichst geringster Zeit von A nach B gelangt? Das Licht breite sich hier im gleichen Medium aus; daher ist die Laufzeit dann minimal, wenn die durchlaufene Strecke minimal ist. In Abbildung 28.27 ist die Strecke APB ebenso groß wie die Strecke $A'PB$. Der Punkt A' liegt auf dem durch A verlaufenden Lot auf der Spiegelfläche, und er ist ebenso weit von dieser entfernt wie A . Nun verschieben wir den Punkt P nach rechts. Die Strecke $A'PB$ ist dann minimal, wenn die Punkte A' , P und B auf einer Geraden liegen. Wie man zeigen kann, ist in diesem Fall der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

Brechung

Die Herleitung des Snellius'schen Brechungsgesetzes aus dem Fermat'schen Prinzip der minimalen Laufzeit ist etwas komplizierter. Abbildung 28.28 zeigt einige denkbare Wege eines Lichtstrahls, der vom Punkt A ausgeht, sich zunächst in Luft ausbreitet, dann ins Glas eintritt und hier den Punkt B erreicht. Der Punkt P_1 liegt auf einer Geraden mit A und B . Diese kürzeste Gesamtstrecke muss jedoch keineswegs der Weg sein, auf dem der Lichtstrahl den Punkt B in der kürzesten Zeit erreicht, denn der Strahl hat im Glas eine geringere Geschwindigkeit. Wir verschieben nun den Punkt P_1 nach rechts. Die Gesamtstrecke wird dadurch zwar länger, aber ihr innerhalb des Glases langsamer durchlaufener Anteil wird kleiner als beim Weg durch P_1 . Der Abbildung können wir nicht entnehmen, auf welchem Weg der Lichtstrahl die geringste Gesamtlaufzeit hat.

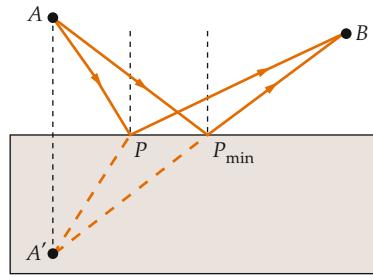


Abbildung 28.27 Zur Herleitung des Reflexionsgesetzes aus dem Fermat'schen Prinzip. Die Zeit, die der Lichtstrahl für die Strecke von A zur Oberfläche sowie von dort weiter nach B benötigt, ist minimal, wenn er den Spiegel im Punkt P_{\min} trifft. Hier ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel.

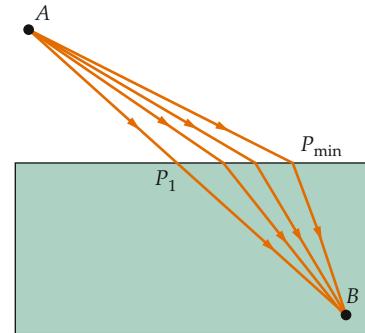


Abbildung 28.28 Zur Herleitung des Snellius'schen Brechungsgesetzes aus dem Fermat'schen Prinzip. Der Punkt P_{\min} ist der Punkt, in dem der Lichtstrahl in das Glas eintreten muss, damit er vom Punkt A zum Punkt B die geringste Gesamtlaufzeit benötigt.

Aber die Annahme liegt nahe, dass es zumindest ungefähr einer der dargestellten Wege ist. Er wird daher ein Stück weit rechts von P_1 die Grenzfläche kreuzen. Der Zeitgewinn durch eine etwas kürzere Strecke mit geringerer Geschwindigkeit im Glas wird dabei aufgewogen durch eine etwas längere Strecke mit höherer Geschwindigkeit in Luft. Wenn wir den Punkt P_1 nach rechts verschieben, erreichen wir so irgendwann den Punkt P_{\min} , bei dem die gesamte Laufzeit von A nach B minimal ist. Auf Wegen, deren Eintrittspunkt in das Glas noch weiter rechts als P_{\min} liegt, wird die Laufzeit wieder länger, denn hier ist die Zeitsparnis durch eine noch kürzere Strecke im Glas geringer als der zusätzliche Zeitbedarf, den das Zurücklegen der noch längeren Strecke in der Luft erfordert.

Abbildung 28.29 zeigt die Gegebenheiten beim Ermitteln des Wegs mit der geringsten Gesamtlaufzeit des Lichtstrahls von A nach B . Hier ist l_1 die im Medium 1 mit der Brechzahl n_1 durchlaufene Strecke, und l_2 ist entsprechend die im Medium 2 mit der höheren Brechzahl n_2 durchlaufene Strecke. Die Gesamtzeit, die der Lichtstrahl benötigt, um von A nach B zu gelangen, ist gegeben durch

$$t = \frac{l_1}{c_{n,1}} + \frac{l_2}{c_{n,2}} = \frac{l_1}{c/n_1} + \frac{l_2}{c/n_2} = \frac{n_1 l_1}{c} + \frac{n_2 l_2}{c}. \quad (28.17)$$

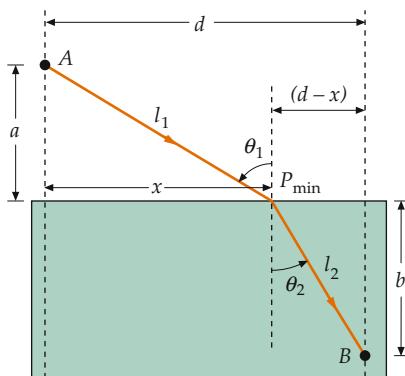


Abbildung 28.29 Zur Berechnung der minimalen Gesamlaufzeit eines Lichtstrahls bei der Brechung. Die Größe x ist der Abstand zwischen dem Punkt P_{\min} und dem Lot vom Punkt A auf die Grenzfläche.

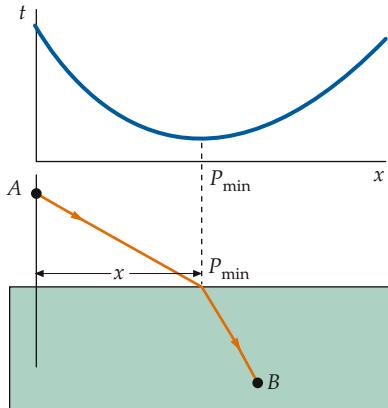


Abbildung 28.30 Oben ist die Laufzeit t des Lichtstrahls von A nach B (siehe Abbildung 28.29) gegen den Abstand x aufgetragen. Die Laufzeit ist an dem Punkt minimal, an dem der Einfalls- und der Brechungswinkel das Snellius'sche Gesetz erfüllen.

Wir wollen nun den Punkt P_{\min} ermitteln, für den diese Zeitspanne minimal ist. Dazu drücken wir die Zeit t zunächst durch den Abstand x aus, der in Abbildung 28.29 eingezeichnet ist. Er gibt die Position des Punkts P_{\min} an. Wir erhalten

$$l_1^2 = a^2 + x^2$$

und

$$l_2^2 = b^2 + (d - x)^2. \quad (28.18)$$

Abbildung 28.30 zeigt, wie die Zeit t von x abhängt. Die Laufzeit t ist für denjenigen Wert von x minimal, bei dem der Graph t gegen x die Steigung null hat:

$$\frac{dt}{dx} = 0.$$

Wir differenzieren daher jeden Term in Gleichung 28.17 nach x und setzen das Ergebnis gleich null:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left(n_1 \frac{dl_1}{dx} + n_2 \frac{dl_2}{dx} \right) = 0. \quad (28.19)$$

Die Ableitungen können wir unter Verwendung von Gleichung 28.18 berechnen. Damit ergibt sich

$$2 l_1 \frac{dl_1}{dx} = 2x$$

und daraus

$$\frac{dl_1}{dx} = \frac{x}{l_1}.$$

Darin ist x/l_1 gleich sin θ_1 , wobei θ_1 der Einfallsinkel ist. Also ist

$$\frac{dl_1}{dx} = \sin \theta_1. \quad (28.20)$$

Analog dazu ist

$$2 l_2 \frac{dl_2}{dx} = 2(d - x)(-1)$$

oder

$$\frac{dl_2}{dx} = -\frac{d - x}{l_2} = -\sin \theta_2. \quad (28.21)$$

Darin ist θ_2 der Brechungswinkel. Gemäß Gleichung 28.19 ist

$$n_1 \frac{dl_1}{dx} + n_2 \frac{dl_2}{dx} = 0. \quad (28.22)$$

Wir setzen für dl_1/dx und dl_2/dx die Ergebnisse der Gleichungen 28.20 und 28.21 ein. Das ergibt

$$n_1 \sin \theta_1 + n_2 (-\sin \theta_2) = 0$$

oder

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Dies ist das Snellius'sche Brechungsgesetz.

28.5 Polarisation

Bei einer (sich transversal ausbreitenden) elektromagnetischen Welle steht die Schwingungsrichtung des elektrischen Felds senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle. Wenn die Auslenkung der Schwingung stets einer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehenden geraden Linie folgt, dann nennt man die Welle **linear polarisiert**. Eine von einer elektrischen Dipolantenne erzeugte Welle ist so polarisiert, dass ihr elektrischer Feldvektor in jedem Punkt parallel zu der Ebene verläuft, die durch den Ortsvektor zu diesem Punkt und die Antennenachse aufgespannt wird. Die von den meisten Quellen erzeugten Wellen sind unpolarisiert. Beispielsweise schwingen die Abermillionen von Atomen im Glühfaden einer elektrischen Lampe praktisch unabhängig voneinander. Betrachtet man die x - und die y -Komponenten des elektrischen Feldvektors der Strahlung solcher Lampen, dann zeigt sich, dass sie völlig regellos variieren, denn es gibt praktisch keine Korrelation zwischen den einzelnen strahlenden Atomen.

Die Polarisation elektromagnetischer Wellen lässt sich gut an Mikrowellen demonstrieren, deren Wellenlängen im Zentimeterbereich liegen. In einem typischen Mikrowellengenerator strahlt eine elektrische Dipolantenne polarisierte Wellen ab. In Abbildung 28.31 ist die (nicht dargestellte) elektrische Dipolantenne vertikal angeordnet, sodass der elektrische Feldvektor \mathbf{E} der horizontal abgestrahlten Wellen ebenfalls vertikal verläuft. Ein Absorber für Mikrowellen lässt sich durch einen Schirm aus geraden, parallelen Drähten realisieren. Stehen sie vertikal, wie in Abbildung 28.31a, dann werden durch das elektrische Feld in ihnen Ströme induziert. Dadurch wird Energie absorbiert, und die Wellen passieren den Schirm nicht. Stehen die Drähte aber horizontal (wie in Abbildung 28.31b), also senkrecht auf dem Feldvektor \mathbf{E} , dann werden keine Ströme induziert, und die Wellen werden durchgelassen.

Es gibt vier Effekte, mit denen man aus unpolarisierten elektromagnetischen Wellen polarisierte erzeugen kann: Absorption, Reflexion, Streuung und Doppelbrechung. Wir wollen sie nun im Einzelnen betrachten.

Polarisation durch Absorption

Mehrere natürlich vorkommende Kristalle haben eine besondere Eigenschaft: Spaltet man sie entlang bestimmter Ebenen, absorbieren oder transmittieren sie Licht auf unterschiedliche Weise, je nach dessen Polarisation. Mithilfe solcher Kristalle lässt sich linear polarisiertes Licht erzeugen. Im Jahre 1938 erfand der Amerikaner Edwin H. Land eine einfache, nicht kristalline Polarisationsfolie. Sie besteht aus langkettigen Kohlenwasserstoffmolekülen, die ausgerichtet werden, wenn die Folie während der Herstellung in einer bestimmten Richtung gedehnt wird. Diese Kettenmoleküle werden für Wellen mit Frequenzen des sichtbaren Lichts durchlässig, wenn die Folie in eine Iod enthaltende Lösung eingetaucht wird. Fällt Licht ein, dessen elektrischer Feldvektor parallel zu den Molekülketten verläuft, werden in ihnen elektrische Ströme induziert, und die Lichtenergie wird absorbiert, ebenso wie die Mikrowellen von den Drähten in Abbildung 28.31. Wenn der elektrische Feldvektor jedoch senkrecht auf den Molekülketten steht, wird das Licht durchgelassen (transmittiert). Die Richtung senkrecht zu den Molekülketten nennt man daher **Transmissionsachse**. Im Folgenden nehmen wir zur Vereinfachung an, dass das Licht vollständig durchgelassen wird, wenn der elektrische Feldvektor parallel zur Transmissionsachse verläuft. Entsprechend wird das Licht vollständig absorbiert, wenn er senkrecht zur Transmissionsachse verläuft. (In Wirklichkeit absorbiert die Folie immer nur einen Teil des Lichts – auch dann, wenn der elektrische Feldvektor parallel zur Transmissionsachse schwingt.)

Betrachten wir nun einen unpolarisierten Lichtstrahl, der auf eine Polarisationsfolie P_1 trifft, deren Transmissionsachse in x -Richtung steht, wie in Abbildung 28.32 gezeigt. Der Strahl trifft danach auf eine zweite Polarisationsfolie, deren Transmissionsachse einen Winkel θ mit der x -Achse bildet, also mit der Transmissionsachse der ersten Folie. Bei dem von der ersten

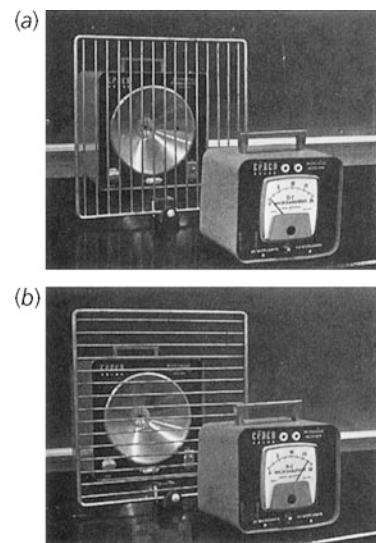


Abbildung 28.31 Versuch zur Polarisation von Mikrowellen. Der elektrische Feldvektor der Mikrowellen verläuft vertikal, parallel zur (nicht sichtbaren) Dipolantenne. a) Wenn die Metalldrähte des Absorbers vertikal stehen, werden Ströme in ihnen induziert, und es wird Energie absorbiert. Der Mikrowellendetektor im Vordergrund schlägt dabei kaum aus. b) Sind die Drähte waagerecht angeordnet, dann werden in ihnen keine Ströme induziert, und die Mikrowellen werden durchgelassen. Der Detektor schlägt nun aus. (© Larry Langrill.)

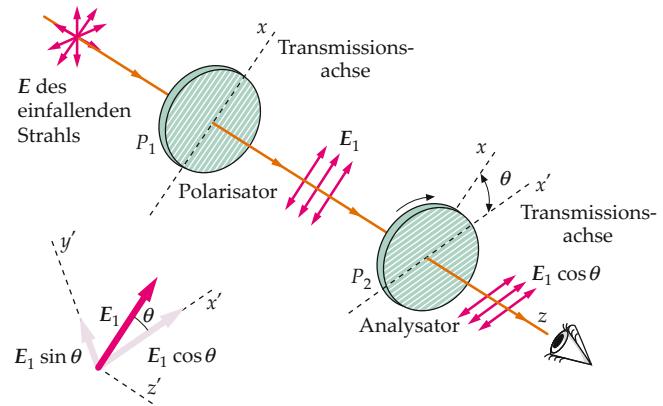
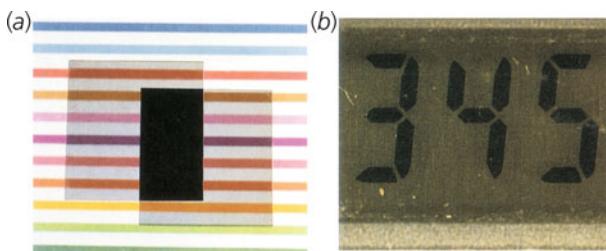


Abbildung 28.32 Ein unpolarisiertes Lichtstrahl fällt auf eine Polarisationsfolie, deren Transmissionsachse in Richtung der x -Achse angeordnet ist. Diese Folie lässt polarisiertes Licht mit dem elektrischen Feldvektor \mathbf{E}_1 durch. Die Welle ist hinter der Folie in Richtung der Transmissionsachse x polarisiert. Ihre Intensität ist I_1 , und sie gelangt auf die zweite Polarisationsfolie. Diese bildet gegen die x -Achse den Winkel θ und lässt daher nur die Feldkomponente $E_1 \cos \theta$ durch. Deren Intensität, also die Intensität der von beiden Folien durchgelassenen Welle, ist $I_1 \cos^2 \theta$, wobei I_1 nur halb so groß ist wie die ursprüngliche, auf die erste Folie eingestrahlte Intensität I_0 .

Folie durchgelassenen Strahl hat das elektrische Feld die Amplitude E_1 . Die Feldkomponente parallel zur Transmissionsachse der zweiten Folie ist daher $E_{\parallel} = E_1 \cos \theta$, und die Komponente senkrecht zur Transmissionsachse ist $E_{\perp} = E_1 \sin \theta$. Die zweite Polarisationsfolie absorbiert E_{\perp} und lässt E_{\parallel} durch. Daher hat



a) Gekreuzte Polarisatoren lassen insgesamt kein Licht durch. b) Bei einem Flüssigkristall-Display befindet sich der Kristall zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren. Das auf den Kristall auftreffende Licht wird durchgelassen, weil dieser die Polarisationsrichtung des Lichts um 90° dreht. Das vom Kristall durchgelassene Licht wird an einem dahinter befindlichen Spiegel durch den Kristall zurückreflektiert, und man sieht nur den gleichmäßigen Hintergrund. Wenn aber an bestimmten Teilen des Kristalls eine elektrische Spannung angelegt wird, dann wird die Polarisierungsebene nicht gedreht. Nun wird kein Licht durchgelassen, und die betreffenden Teile erscheinen schwarz. (a) © Fundamental Photographs. b) © 1990 PAR/NYC, Inc./Foto von Elizabeth Algieri.)

das von ihr transmittierte Licht die Amplitude $E_{\parallel} = E_1 \cos \theta$ und ist in Richtung der zweiten Transmissionsachse linear polarisiert. Die Intensität des Lichts ist proportional zum Quadrat der Amplitude des elektrischen Felds. Für die Intensität I_2 des von der zweiten Folie durchgelassenen Lichts gilt

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta. \quad (28.23)$$

MALUS'SCHES GESETZ

Darin ist I_1 die Intensität des auf die zweite Folie auftreffenden Lichtstrahls. Diese Beziehung heißt **Malus'sches Gesetz**, benannt nach ihrem Entdecker, dem französischen Physiker Étienne Louis Malus (1775–1812). Es gilt für jegliche polarisierende Elemente, deren Transmissionsachsen den Winkel θ miteinander bilden. Oft spricht man auch von *Polarisationsfiltern* statt von Polarisationsfolien.

Wenn ein unpolarisierter Lichtstrahl mit der Intensität I_0 auf eine Polarisationsfolie trifft, variieren in ihm die Richtungen der elektrischen Feldvektoren zeitlich und räumlich völlig regellos. Im Mittel beträgt der Winkel zwischen dem elektrischen Feldvektor und der Transmissionsachse des Filters 45° . Mit Gleichung 28.23 ergibt sich die Intensität des durchgelassenen Strahls zu $I_1 = I_0 \cos^2 45^\circ = I_0/2$.

Wenn sich im Lichtweg zwei polarisierende Elemente hintereinander befinden, dann bezeichnet man das erste als **Polarisator** und das zweite meist als **Analysator**. Stehen ihre beiden Transmissionsachsen aufeinander senkrecht, dann sind Polarisator und Analysator, wie man sagt, *gekreuzt*, und es wird insgesamt kein Licht durchgelassen. Stehen die Achsen in anderen Winkeln zueinander, wie in Beispiel 28.6, so wird die Lichtintensität insgesamt verringert.

Beispiel 28.6: Analysator und Polarisator

Unpolarisiertes Licht mit der Intensität $3,0 \text{ W/m}^2$ fällt auf eine Polarisationsfolie. Hinter dieser ist eine zweite angebracht, deren Transmissionsachse mit derjenigen der ersten einen Winkel von 60° bildet (Abbildung 28.33). Wie hoch ist die Intensität des von der zweiten Folie durchgelassenen Lichts?

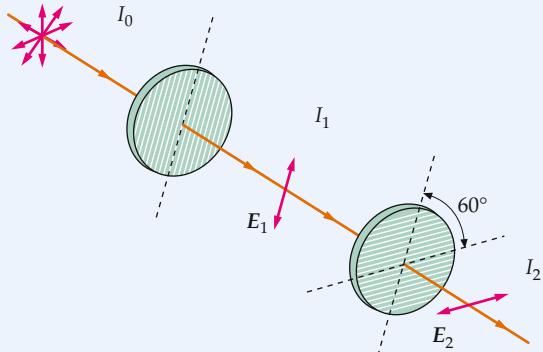


Abbildung 28.33 Die erste Folie polarisiert das unpolarisierte Licht, während die zweite zur Analyse dient.

Problembeschreibung: Das einfallende Licht ist unpolariert. Daher ist die Intensität des von der ersten Polarisationsfolie durchgelassenen Lichts halb so groß wie die Intensität des einfallenden Lichts. Die zweite Folie reduziert die Intensität weiter um den Faktor $\cos^2 \theta$, wobei $\theta = 60^\circ$ ist.

Lösung: 1. Die Intensität I_1 , die von der ersten Folie durchgelassen wird, ist halb so groß wie die Intensität I_0 des unpolarisierten Lichts, das auf die erste Folie trifft:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

2. Für den Zusammenhang zwischen der von der zweiten Folie durchgelassenen Intensität I_2 und der auf sie auftreffenden Intensität I_1 gilt Gleichung 28.23:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta$$

3. Kombinieren Sie die beiden Ergebnisse und setzen Sie die gegebenen Werte ein:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} I_0 \cos^2 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot (3,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}) \cdot (0,500)^2 \\ &= [0,38 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die erste Folie lässt die Hälfte der Intensität durch, unabhängig davon, wie ihre Transmissionsachse ausgerichtet ist. Daher war zu erwarten, dass die von der zweiten Folie durchgelassene Intensität geringer als die Hälfte der anfänglichen Intensität $3,0 \text{ W/m}^2$ ist. Das wird durch das Ergebnis von Schritt 3 bestätigt.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass die zweite Folie die Polarisierungsebene um 60° dreht. ■

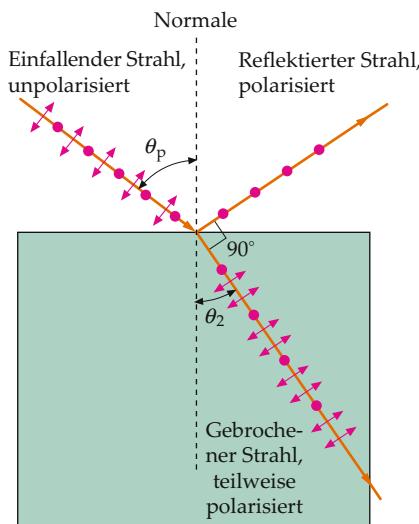


Abbildung 28.34 Polarisation durch Reflexion. Die einfallende Welle ist unpolarisiert. Ihr elektrisches Feld hat Komponenten parallel zur Einfallssebene (Pfeile) und Komponenten senkrecht dazu (Punkte). Beim Einfall des Lichts unter dem Polarisationswinkel ist die reflektierte Welle vollständig polarisiert, wobei das elektrische Feld senkrecht auf der Einfallssebene steht.

Polarisation durch Reflexion

Wenn unpolarisiertes Licht an einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei durchsichtigen Medien – etwa Luft und Glas oder Luft und Wasser – reflektiert wird, dann ist das reflektierte Licht teilweise polarisiert. Das Ausmaß der Polarisation hängt vom Einfallswinkel und vom Verhältnis der Wellengeschwindigkeiten in den beiden Medien ab. Bei einem bestimmten Einfallswinkel, den man **Polarisationswinkel** θ_p nennt, ist das reflektierte Licht sogar vollständig polarisiert. Bei diesem Einfallwinkel stehen reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander. Der schottische Wissenschaftler und Erfinder David Brewster (1781–1868), der zahlreiche Instrumente erfand, darunter das Kaleidoskop, entdeckte diesen Sachverhalt im Jahre 1812 auf experimentellem Wege. Der Polarisationswinkel wird daher auch als *Brewster'scher Winkel* bezeichnet.

In Abbildung 28.34 fällt Licht unter dem Polarisationswinkel θ_p auf eine Grenzfläche. Das reflektierte Licht ist daher vollständig polarisiert. Der elektrische Feldvektor des einfallenden Lichts lässt sich in zwei Komponenten zerlegen, z. B. parallel und senkrecht zur Einfallssebene. Das reflektierte Licht ist linear polarisiert, und sein elektrischer Feldvektor steht senkrecht auf der Einfallssebene.

Wir können den Polarisationswinkel in Abhängigkeit von den Brechzahlen der beiden Medien ausdrücken, wobei wir das Snellius'sche Brechungsgesetz anwenden. Mit den Brechzahlen n_1 des ersten und n_2 des zweiten Mediums ergibt sich aus dem Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin \theta_2 .$$

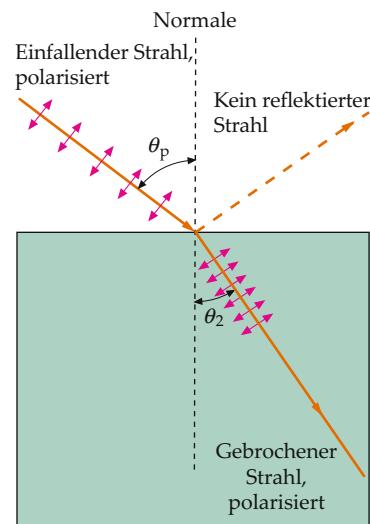


Abbildung 28.35 Polarisiertes Licht fällt unter dem Polarisationswinkel ein. Wenn sein elektrischer Feldvektor E in der Einfallssebene liegt, wird kein Licht reflektiert.

Darin ist θ_2 der Brechungswinkel. Abbildung 28.34 können wir entnehmen, dass sich Reflexionswinkel und Brechungswinkel zu 90° addieren. Da der Reflexionswinkel gleich dem Einfallwinkel ist, folgt

$$\theta_2 = 90^\circ - \theta_p .$$

Damit ergibt sich

$$n_1 \sin \theta_p = n_2 \sin (90^\circ - \theta_p) = n_2 \cos \theta_p$$

oder

$$\tan \theta_p = \frac{n_2}{n_1} . \quad (28.24)$$

BREWSTER'SCHES GESETZ FÜR DEN POLARISATIONSWINKEL

Während das reflektierte Licht vollständig polarisiert ist, wird das in das Medium eindringende Licht nur teilweise polarisiert. Da nur ein geringer Anteil des einfallenden Lichts reflektiert wird, ist die Intensität des reflektierten Strahls dementsprechend niedrig. Wenn das einfallende Licht schon polarisiert ist und sein elektrisches Feld in der Einfallssebene liegt, wird beim Einfallwinkel θ_p kein Licht reflektiert. Das können wir anhand von Abbildung 28.35 qualitativ verstehen. Nehmen wir an, die Ladungen in den Atomen nahe der Oberfläche des zweiten Mediums mit der höheren Brechzahl werden zu Schwingungen parallel zur Richtung des elektrischen Feldes des gebrochenen Lichtstrahls gezwungen. Da jedes der schwingenden Moleküle eine winzige elektrische Dipolantenne darstellt, kann es keinen reflektierten Strahl geben, weil eine elektrische Dipolantenne entlang ihrer Schwingungsrichtung keine Welle aussendet.

Wegen der Polarisation des reflektierten Lichts schützen Sonnenbrillen mit Gläsern aus polarisierendem Material sehr gut

vor zu grellem Licht. Wenn das Sonnenlicht an einer horizontalen Fläche reflektiert wird, beispielsweise einem See oder einem Schneefeld, dann schwingt das elektrische Feld des reflektierten Lichts vorwiegend in horizontaler Richtung. Die Einfallsebene steht dann vorwiegend senkrecht auf den Gläsern der Sonnenbrille. Daher absorbieren polarisierende Sonnenbrillen mit vertikaler Transmissionsachse einen großen Teil des reflektierten Lichts. Ob eine Sonnenbrille polarisiert, können Sie leicht feststellen: Schauen Sie durch die Gläser auf reflektiertes Licht und drehen Sie die Brille dann um 90° . Wenn nun deutlich mehr Licht durchgelassen wird, so wirken die Gläser polarisierend.

Polarisation durch Streuung

Das Phänomen der Absorption und Wiederabstrahlung wird, wie schon früher ausgeführt, als **Streuung** bezeichnet. Sie lässt sich beispielsweise an einem Lichtstrahl beobachten, den man durch einen Behälter mit Wasser führt, dem einige Tropfen Milch zugesetzt wurden. Die winzigen Milchtröpfchen absorbieren Licht und strahlen es wieder ab, d.h., sie streuen es, sodass der Lichtstrahl sichtbar wird. Auf ähnliche Weise können Lichtstrahlen, beispielsweise von einem Laser oder Sonnenstrahlen in einem teilweise abgedunkelten Zimmer, durch Rauch sichtbar gemacht werden, dessen Teilchen das Licht ebenfalls streuen. Übrigens kommt auch das Blau des Himmels abseits von der Richtung zur Sonne durch Streuung zustande: Die Moleküle in der Luft streuen das Licht umso stärker, je kleiner die Wellenlänge ist.

Wir können die Polarisation durch Streuung verstehen, wenn wir uns die Ladungen in einem streuenden Atom oder Teilchen als elektrische Dipolantennen vorstellen. Sie strahlen senkrecht zur jeweiligen Antennenachse Wellen mit maximaler Intensität ab, während in Richtung der Antennenachsen die Intensität null ist. Der elektrische Feldvektor des gestreuten Lichts steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und liegt in der Ebene, die von der Antennenachse und der Ausbreitungsrichtung aufgespannt wird.

In Abbildung 28.36 verläuft ein unpolarisierter Lichtstrahl in $+z$ -Richtung und trifft im Ursprung auf ein Teilchen, das als Streuzentrum wirkt. Das elektrische Feld des Lichtstrahls hat Komponenten in $\pm x$ - wie auch in $\pm y$ -Richtung, also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Dadurch werden in diesen beiden Richtungen, d.h. in der $z = 0$ -Ebene, im Molekül Ladungsschwingungen induziert. Jedoch tritt senkrecht dazu, in $\pm z$ -Richtung, keine Schwingung auf. Die im Teilchen induzierten Schwingungen kann man daher als Überlagerungen je einer Schwingung entlang der x -Achse und entlang der y -Achse auffassen, wobei jede von ihnen Strahlung abgibt, wie eine Dipolantenne. Die Schwingung entlang der x -Achse strahlt nun nicht entlang der x -Achse ab. Das bedeutet, dass das in $\pm x$ -Richtung ausgestrahlte Licht nur von der Schwingung entlang der y -Achse herrührt. Somit ist es in x -Richtung polarisiert, wobei sein elektrischer Feldvektor parallel zur y -Achse verläuft.

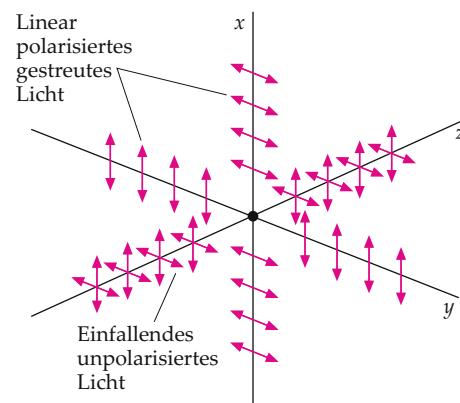


Abbildung 28.36 Polarisation durch Streuung. Unpolarisiertes Licht breitet sich in $+z$ -Richtung aus und trifft im Ursprung auf ein Molekül, das als Streuzentrum wirkt. Das in der $z = 0$ -Ebene in $\pm x$ -Richtung gestreute Licht ist parallel zur y -Achse polarisiert; entsprechend ist das in $\pm y$ -Richtung gestreute Licht parallel zur x -Achse polarisiert.

Dabei können die Achsen bzw. Richtungen völlig frei gewählt werden. Das Ergebnis kann daher verallgemeinert werden: Das senkrecht zum einfallenden Strahl gestreute Licht ist so polarisiert, dass sein elektrisches Feld sowohl auf dem einfallenden Strahl als auch auf der Ausbreitungsrichtung des gestreuten Lichts senkrecht steht. Das ist leicht zu überprüfen, indem man das gestreute Licht durch eine Polarisationsfolie betrachtet.

Polarisation durch Doppelbrechung

Ein kompliziertes Phänomen ist die **Doppelbrechung**. Sie tritt in Calcit und manchen anderen nichtkubischen Kristallen auf, aber auch in einigen Kunststoffen, beispielsweise Cellophan, wenn sie unter mechanischer Spannung stehen. Die meisten durchsichtigen Materialien sind **isotrop**, d.h. die Lichtgeschwindigkeit ist in ihnen in jeder Richtung gleich groß und unabhängig von der Polarisation des Lichts. Dagegen sind doppelbrechende Materialien aufgrund ihrer Gitterstruktur optisch **anisotrop**. In ihnen hängt die Lichtgeschwindigkeit von der Polarisationsebene und von der Ausbreitungsrichtung des Lichts ab. Tritt ein Lichtstrahl in ein solches Material ein, dann kann er in zwei Strahlen aufgespalten werden, die man *ordentlichen Strahl* (o-Strahl) und *außerordentlichen Strahl* (ao-Strahl) nennt. Diese beiden Strahlen sind polarisiert, wobei ihre Polarisationsebenen aufeinander senkrecht stehen. Sie breiten sich außerdem mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus. Je nach der relativen Orientierung des Materialstücks und des einfallenden Lichtstrahls können der ordentliche und der außerordentliche Strahl daher verschiedene Richtungen haben.

In einem doppelbrechenden Materialstück gibt es eine bestimmte Richtung, in der ordentlicher und außerordentlicher Strahl dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit haben. Diese Richtung

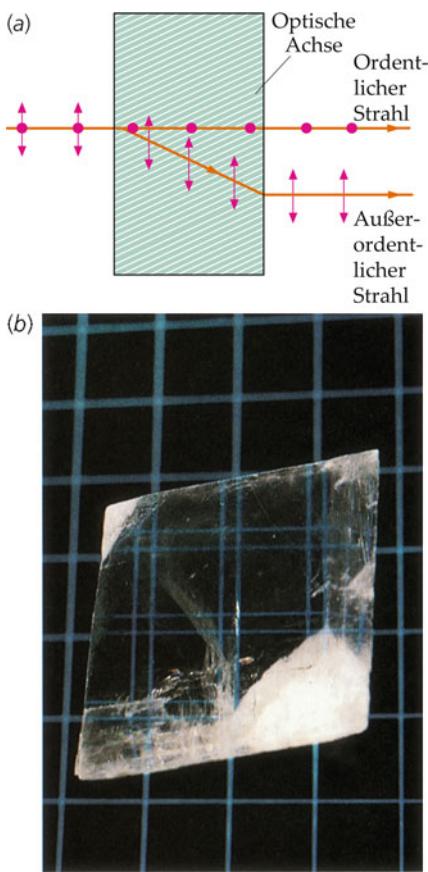


Abbildung 28.37 a) Ein schmaler Lichtstrahl tritt in einen doppelbrechenden Kristall, beispielsweise Calcit, ein. Er wird in zwei Strahlen aufgespalten: in den ordentlichen Strahl (o-Strahl) und den außerordentlichen Strahl (ao-Strahl). De- ren Polarisationsebenen stehen senkrecht aufeinander. Wenn der Kristall gedreht wird, so rotiert der außerordentliche Strahl im Raum um den ordentlichen Strahl. b) Durch diesen Calcitkristall sieht man aufgrund der Doppelbrechung zwei Bilder des Karomusters. (© Paul Silverman Photographs.)

nennt man **optische Achse**. (Sie ist eigentlich eher eine *Richtung* als eine besondere Linie im Kristallgitter.) Trifft ein Lichtstrahl in Richtung der optischen Achse in das Materialstück ein, so geschieht nichts Ungewöhnliches. Anders liegen die Verhältnisse, wenn der Lichtstrahl einen Winkel zur optischen Achse bildet (Abbildung 28.37). Hierbei laufen ordentlicher und außerordentlicher Strahl in unterschiedliche Richtungen und treten getrennt aus dem Materialstück aus. Wenn man dieses dreht, dann rotiert der außerordentliche Strahl (ao-Strahl) im Raum um den ordentlichen Strahl (o-Strahl).

Wenn Licht senkrecht auf die Oberfläche einer Platte oder Schicht aus doppelbrechendem Material trifft und dabei auch senkrecht zur optischen Achse einfällt, dann haben ordentlicher und außerordentlicher Strahl dieselbe Richtung, aber unterschiedliche Geschwindigkeiten. Daher legen die beiden Strahlen innerhalb der Schicht unterschiedlich viele Wellen-

längen zurück, denn ihre Wellenlängen ($\lambda' = c_n/v$) sind nicht gleich. Die Strahlen treten daher mit einer Phasendifferenz aus, die von der Schichtdicke und von der Wellenlänge des einfallenden Lichts abhängt. Bei einem $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen beträgt die Phasendifferenz der austretenden Wellen 90° , und bei einem $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen beträgt sie 180° .

Wir betrachten nun den Fall, dass das einfallende Licht linear polarisiert ist und in eine doppelbrechende Schicht so eintritt, dass sein elektrischer Feldvektor mit der optischen Achse einen Winkel von 45° bildet (Abbildung 28.38). Der ordentliche und der außerordentliche Strahl sind zu Beginn miteinander in Phase und haben gleiche Amplituden. Aus einem $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen treten die Wellen mit einer Phasendifferenz von 90° wieder aus, und das resultierende elektrische Feld kann zerlegt werden in die Komponenten $E_x = E_0 \sin(\omega t)$ und $E_y = E_0 \sin(\omega t + 90^\circ) = E_0 \cos(\omega t)$. Die z -Komponente ist null. Der elektrische Feldvektor rotiert also in einem Kreis und hat einen konstanten Betrag. Man spricht dann von einer **zirkular polarisierten Welle**.

Bei einem $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen haben die austretenden Wellen eine Phasendifferenz von 180° . Das resultierende elektrische Feld ist also linear polarisiert, und seine Komponenten sind $E_x = E_0 \sin(\omega t)$ und $E_y = E_0 \sin(\omega t + 180^\circ) = -E_0 \sin(\omega t)$. Die Polarisationsrichtung der Welle ist also um 90° gegen die des einfallenden Lichts gedreht, wie in Abbildung 28.39 gezeigt ist.

Wie bereits erwähnt, lassen gekreuzte Polarisatoren kein Licht durch, weil ihre Transmissionsachsen aufeinander senkrecht stehen. Interessante und schöne Muster können jedoch auftreten, wenn man zwischen die gekreuzten Polarisatoren ein sehr dünnes Plättchen aus doppelbrechendem Material bringt, beispielsweise aus Cellophan oder einem anderen Kunststoff, der unter mechanischer Spannung steht. Hat das Plättchen eine geeignete Dicke, so wirkt es je nach der Farbe bzw. der Wellenlänge des Lichts als $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen. Dabei wird die Polarisationsrichtung gedreht, und es gelangt Licht durch den zweiten Polarisator. Auch bestimmte Glassorten werden unter mechanischer Belastung doppelbrechend. Die an den einzelnen Stellen unterschiedlich hohen mechanischen Spannungen lassen sich dann an den verschiedenen Farben des aus dem zweiten Polarisator austretenden Lichts erkennen.

28.6 Lichtspektren

Isaac Newton erkannte gegen Ende des 17. Jahrhunderts als Erster, dass weißes Licht eine Mischung von Licht aller Farben mit ungefähr gleicher Intensität darstellt. Zum Nachweis ließ er Sonnenlicht auf ein Glasprisma fallen und beobachtete das Spektrum des von dem Prisma gebrochenen Lichts (Abbildung 28.40). Da der Brechungswinkel in einem Glasprisma sich mit der Wellenlänge leicht ändert, wird das gebrochene Lichtbündel räumlich in seine Komponenten aufgespalten, und man erkennt deren unterschiedliche Farben, ähnlich wie bei einem Regenbogen.

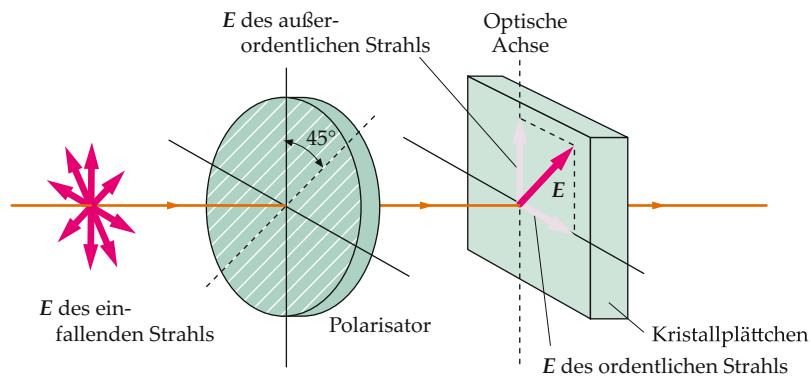


Abbildung 28.38 Polarisiertes Licht, das aus dem Polarisator austritt, gelangt in einen doppelbrechenden Kristall. Hier bildet der elektrische Feldvektor einen Winkel von 45° mit der optischen Achse, und diese steht senkrecht auf dem Lichtstrahl. Der ordentliche und der außerordentliche Strahl breiten sich in derselben Richtung aus, jedoch mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Die Polarisation des austretenden Lichts hängt von der Dicke des Kristalls und von der Lichtwellenlänge ab.

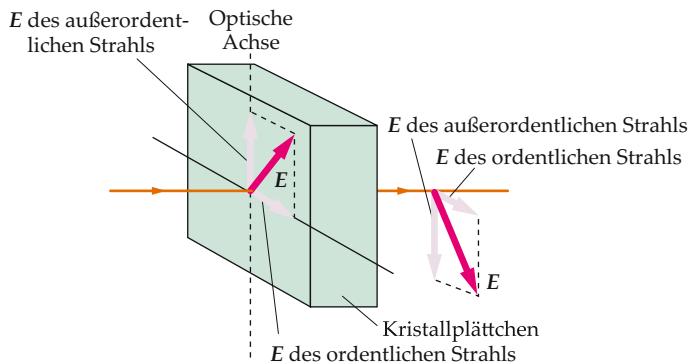


Abbildung 28.39 Hier hat der doppelbrechende Kristall von Abbildung 28.38 eine Dicke von $\frac{1}{2}$, und der elektrische Feldvektor des einfallenden Licht bildet, wie dort, einen Winkel von 45° mit der optischen Achse. Dann ist die Polarisationsrichtung des austretenden Lichts gegenüber der des einfallenden Lichts um 90° gedreht.

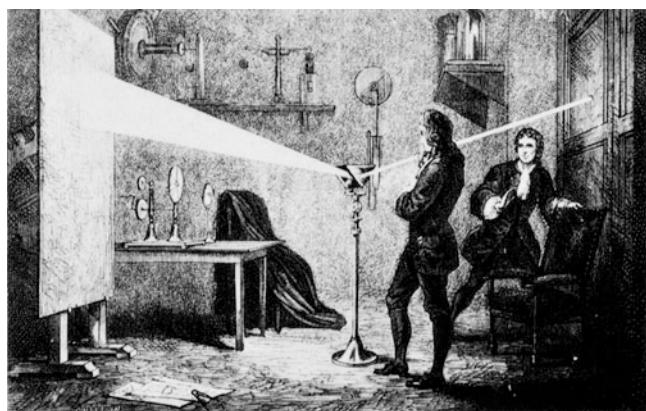
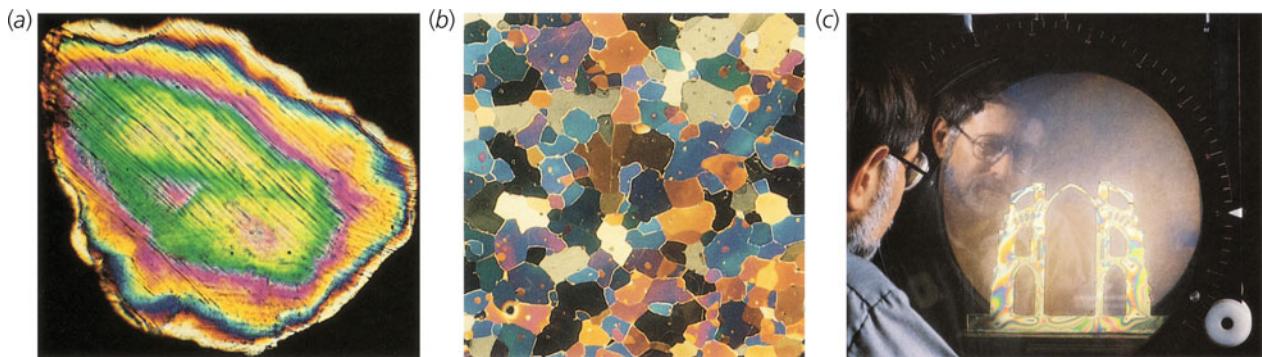


Abbildung 28.40 Newton demonstriert mit einem Glasprisma das Spektrum des Sonnenlichts. (© Corbis/Bettmann.)

Abbildung 28.41 zeigt ein historisches Spektroskop, mit dem das Licht aus einer beliebigen Quelle untersucht werden kann. Der Lichtstrahl tritt durch einen engen Spalt ein, wird durch eine Linse parallelisiert und fällt dann auf ein Glasprisma. In ihm wird es zweimal gebrochen: einmal beim Eintritt in das Glas und einmal beim Austritt daraus. Das gebrochene Licht wird durch ein Teleskop betrachtet. Dessen Halterung ist drehbar, sodass für jede einzelne Farbe des gebrochenen Lichts der Brechungswinkel gemessen werden kann. Durch kontinuierliches Drehen des Teleskops kann man so das ganze Spektrum der Lichtquelle beobachten. Das Spektrum des Sonnenlichts enthält lückenlos alle Wellenlängen des sichtbaren Lichts, und man spricht von einem **kontinuierlichen Spektrum**. Im Gegensatz dazu emittieren die Atome oder Moleküle erhitzter Gase, beispielsweise des Quecksilberdampfs in einer Lampe, nur Licht mit bestimmten Wellenlängen. Das ergibt ein sogenanntes **Linienspektrum**. Im Foto auf dieser Seite sind – neben einem kontinuierlichen Spektrum – die Linienspektren einiger Elemente dargestellt.



Wenn die Transmissionsachsen zweier Polarisationsfilter aufeinander senkrecht stehen, also gekreuzt sind, wird kein Licht durchgelassen. Es gibt Materialien, die doppelbrechend sind oder unter mechanischer Spannung dazu werden und die Polarisationsrichtung des Lichts drehen. Betrachtet man das Licht, das von zwei gekreuzten Polarisatoren und einer solchen doppelbrechenden Schicht dazwischen durchgelassen wird, kann man Aufschlüsse über deren innere Struktur erhalten.

a) Dünnschliff eines Quarzkorns, das aus einem Meteoritenkrater stammt. Die Schichtstruktur, erkennbar an den parallelen sogenannten Stoßlinien, entstand durch die Stoßwelle beim Einschlag des Meteoriten. b) Dünnschliff eines Eiskerns aus dem antarktischen Eisfeld. Er enthält Blasen von eingeschlossenem CO_2 , die hier bernsteinfarben erscheinen. Diese Probe wurde in einer Tiefe von 194 m entnommen. Das bedeutet, dass das Gas vor rund 1600 Jahren im Eis eingeschlossen wurde. c) Robert Mark von der Princeton School of Architecture untersucht die Spannungsmuster an einem Modell des Mittelschiffs der Kathedrale von Chartres. (a) © Glen A. Izett, US Geological Survey. b) © Dr. Anthony J. Gow/Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire. c) © Sepp Seitz/Woodfin Camp and Associates.)

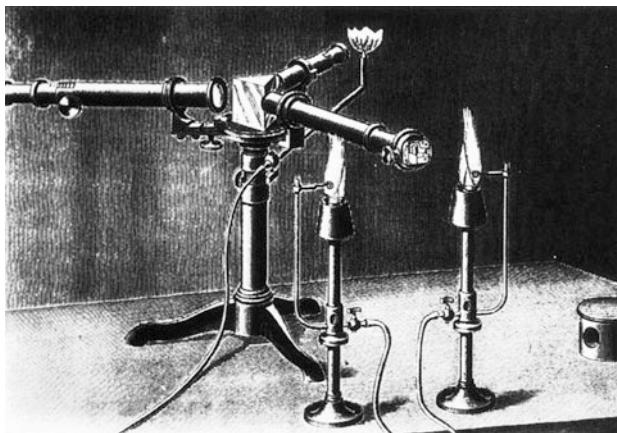
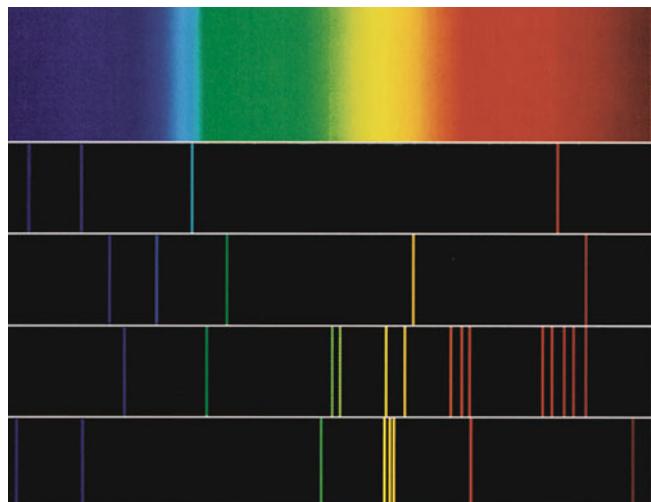


Abbildung 28.41 Ein Spektroskop aus dem späten 19. Jahrhundert, wie es Gustav Robert Kirchhoff benutzte. In der Ausbildung und für Demonstrationszwecke werden auch heute noch Spektroskope verwendet, die im Prinzip ebenso aufgebaut sind. (© Corbis/Bettmann.)



Oben: Ein kontinuierliches Spektrum im sichtbaren Bereich; darunter (von oben nach unten) die Linienspektren von Wasserstoff, Helium, Barium und Quecksilber. (© Eastman Kodak and Wabash Instrument Corporation.)

Linienspektren

Sichtbares Licht entsteht häufig durch Übergänge von äußeren Elektronen (meist Valenzelektronen) in Atomen. Normalerweise besetzen die Elektronen im Atom jeweils den sogenannten Grundzustand mit den niedrigsten erlaubten Energieniveaus, wobei das Ausschließungsprinzip gilt. (Es wurde von Wolfgang Pauli im Jahre 1925 formuliert und besagt, dass sich in einem Atom niemals zwei Elektronen im gleichen Quantenzustand befinden können.) Die Elektronen mit den geringsten Energien

sind dem Atomkern am nächsten, also besonders stark an ihn gebunden; sie bilden daher eine recht stabile innere Elektronenhülle. Die wenigen Elektronen in der äußersten Schale mit den höchsten Energien sind vom Atomkern weiter entfernt und daher lockerer an ihn gebunden. Sie sind daher relativ leicht anzuregen, wobei sie unbesetzte Zustände mit höherer Energie besetzen können. Diese äußeren Elektronen sind daher verant-

wortlich für die Energieänderungen im Atom, die zur Emission oder Absorption von sichtbarem Licht führen.

Da die Energieniveaus in den Atomen, wie in Kapitel 34 gezeigt wird, durch die Gesetze der Quantenmechanik festgelegt werden, sind die Energien des aus Atomen emittierten Lichts auf bestimmte Werte beschränkt, was zu den diskreten Spektrallinien führt. Darüber hinaus sind die Energieniveaus und daher die Spektrallinien des emittierten Lichts charakteristisch für das chemische Element, das sie aussendet. Diese schmalen Linien werden aufgrund des Doppler-Effekts etwas verbreitert, weil sich die Atome im Gas relativ zum Beobachter ungeordnet bewegen und weil sie außerdem ständig mit anderen Atomen zusammenstoßen. Die Linien sind umso schmäler und daher umso besser voneinander getrennt, je geringer die Dichte des emittierenden Gases ist. Die Untersuchung der Linienspektren des Wasserstoffs und später auch anderer Elemente führte zu ersten Erkenntnissen über die Energieniveaus in den Atomen.

Kontinuierliche Spektren

Wenn die Atome, beispielsweise in Flüssigkeiten und Festkörpern, nahe beieinander sind und stark miteinander wechselwirken, dann sind viele Energieniveaus der Atome zu ununterbrochenen Bereichen von Energieniveaus verbreitert. Häufig

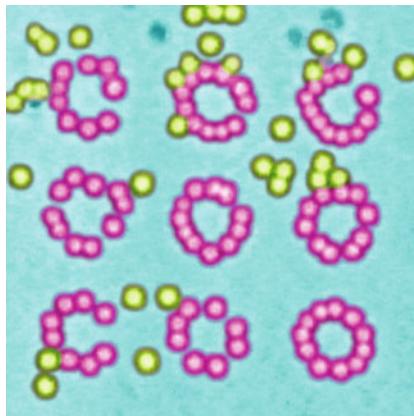
überlappen sich diese sogenannten Energiebänder, sodass ein zusammenhängender Bereich von besetzbaren Energieniveaus entsteht und das Emissionsspektrum kontinuierlich ist. Im metallischen Glühfaden einer Lampe werden die Elektronen wegen der hohen Temperatur durch häufige Stöße beschleunigt, und es wird ein kontinuierliches Spektrum emittiert. Die Geschwindigkeit, mit der ein Körper Wärmeenergie ausstrahlt, ist proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur. (Dies ist die Aussage des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes. Es wurde neben anderen Eigenschaften der Wärmestrahlung in Kapitel 17 besprochen.)

Die Strahlung, die von einem Körper bei Temperaturen unterhalb von rund $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ emittiert wird, liegt weitestgehend im Infraroten, also außerhalb des sichtbaren Spektralbereichs. Mit steigender Temperatur des Körpers verschiebt sich die Strahlung zu immer kürzeren Wellenlängen. Zwischen ungefähr $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ und $700\text{ }^{\circ}\text{C}$ liegt ein ausreichend hoher Anteil der Strahlung im sichtbaren Spektrum, und wir sehen dunkle Rotglut. Bei noch höheren Temperaturen wird der Körper helle Rotglut und schließlich Weißglut zeigen. Die Wellenlänge λ_{\max} , bei der die emittierte Strahlungsleistung ihr Maximum hat, ist umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur (Wien'sches Verschiebungsgesetz; siehe Gleichung 17.15). Die Sonnenoberfläche mit einer Temperatur von rund 6000 K strahlt ein kontinuierliches Spektrum aus, dessen Intensität im gesamten sichtbaren Wellenlängenbereich vergleichbar hoch ist.

⌚ Im Kontext: Optische Pinzetten und Wirbel: Licht bei der Arbeit

Der Lichtdruck kann dazu genutzt werden, um die von biologischen Molekülen ausgeübte Kraft¹ zu messen, Proteine zu falten und zu entfalten² und sogar Atome einzufangen und zu untersuchen.³ Das Ausnutzen des Strahlungsdrucks des Lichts, um mikroskopisch kleine Teilchen an einer Stelle zu halten, nennt man *optisches Einfangen*. Einige optischen Fallen, oft als *optische Pinzetten* bezeichnet, können Teilchen bewegen und handhaben.

In den 1970er Jahren gelang es einer von Arthur Ashkin geleiteten Forschergruppe an den Bell Laboratories, mithilfe des Strahlungsdrucks von Licht Wassertröpfchen mit einem Durchmesser von 1 bis 40 Mikrometern anzuheben.⁴ Nach mehrjährigen Versuchen konnten die Forscher zeigen, dass ein einziger Laserstrahl die Position eines Virus in einer Lösung auf einem Objekträger steuern kann.⁵ Auch Molekularbiologen und Mikrobiologen nutzten bald darauf optische Pinzetten bei ihren Experimenten.



Siliciumkugelchen in Wasser werden durch eine Drei-mal-drei-Anordnung von optischen Wirbeln gehalten. Diese halten die Kugelchen fest und üben ein Drehmoment auf sie aus. (Mit freundlicher Genehmigung von David G. Grier, aus E. Curtis, B. A. Koss und D. G. Grier, „Dynamic holographic optical tweezers“, *Optics Communications* 207, 169–175 (2002).)

Häufig wird das optische Einfangen mithilfe von Lasern durchgeführt, die Licht mit einer Wellenlänge um 1000 Nanometer emittieren⁶; der Grund dafür liegt darin, dass viele biologische Materialien für Licht mit solchen Wellenlängen, also im nahen Infrarot, relativ transparent

sind. Die zum Halten biologischer Proben verwendete Flüssigkeit absorbiert bei ungefähr diesen Wellenlängen gestreutes Licht.^{7,8} (Dabei wird das eingefangene Objekt durch das Licht nicht zu stark erhitzt.) Je nach der Beschaffenheit der einzufangenden Objekte können auch andere Lichtwellenlängen verwendet werden. Die in optischen Fallen zum Untersuchen biologischer Moleküle ausgeübte Kraft beträgt einige Pikonewton.⁹

Das optische Einfangen erfolgt durch den Lichtdruck und unter Ausnutzen des Gradienten der Lichtintensität eines eng gebündelten Laserstrahls. Wenn ein Lichtstrahl ein kleines, durchscheinendes kugelförmiges Objekt durchstrahlt, das sich im Lichtweg befindet, wird das Licht gebrochen. Der Mittelwert des Brechungsdrucks eines intensiven Lichtstrahls bewirkt, dass das Objekt im Strahl zentriert bleibt. Je enger der Lichtstrahl gebündelt ist, desto stärker wird das Teilchen (infolge des Gradienten der Lichtintensität) längs des Strahls zentriert.^{10,11} Dadurch kann die Position des Objekts in drei Dimensionen gesteuert werden. Bei der Untersuchung biologischer Moleküle ist gewöhnlich ein Molekül an einer Styroporkugel befestigt, die einen Durchmesser zwischen 100 nm und 2 µm haben kann. Beim Bewegen der Kugel kann das Molekül mithilfe der optischen Pinzette gedehnt, gefaltet und in die Mitte gebracht werden. Auch wesentlich größere Objekte, beispielsweise ganze Zellen, können mittels optischer Pinzetten bewegt werden.¹²

Spezielle digitale Linsen können dem Laserlicht eine genau berechnete Verdrillung verleihen. Solche verdrillten Lichtstrahlen nennt man *optische Wirbel*. Für diese sind zwar auch andere Anwendungen möglich, doch werden sie meist als spezielle optische Pinzetten verwendet, die ein Drehmoment ausüben.¹³ Unterschiedliche Verdrillungen bewirken unterschiedlich starke Drehmomente und können ausgenutzt werden, um Teilchen in Rotation und in eine Kreisbewegung zu versetzen. Auf diese Weise können Teilchen mithilfe optischer Pinzetten ineinander getrieben und miteinander kombiniert werden.

Physiker an der Universität Chicago entwickelten eine Methode zum Erzeugen Hunderter verschiedener optischer Pinzetten aus denselben Laserstrahlen, indem die Laserstrahlen durch eine digital gesteuerte Linse geführt wurden.¹⁴ Diese Pinzetten können optische Wirbel aufweisen, die auf Teilchen unterschiedlich starke Drehmomente ausüben. Die Methode, optische Wirbel mithilfe einer holografischen optischen Pinzette (HOT) zu erzeugen, wurde zum Handhaben von Teilchen sowie zum Pumpen, Mischen und Sortieren von Fluiden und von Objekten im mikroskopischen Maßstab patentiert.^{15,16} Die Hersteller von Miniaturgeräten sind von dieser Technologie begeistert, da sich Licht – anders als heikle Mikromaschinen – nicht abnutzt.¹⁷

1. Mehta, A. D. et al., „Single-Molecule Biomechanics with Optical Methods“, *Science*, 12. März 1999, 283, Nr. 5408, S. 1689–1695.
2. Cecconi, C. et al., „Direct Observation of the Three-State Folding of a Single Protein Molecule“, *Science*, 23. Sept. 2005, Bd. 309, Nr. 5743, S. 2057–2060.
3. Nagel, B., „Presentation Speech for 1997 Nobel Prize in Physics“, *Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 1997*, Hrsg. Tore Frängsmyr [Nobel Foundation], Stockholm, 1998. http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1997/presentation-speech.html (Stand: Mai 2009).
4. Ashkin, A. und Dziedzic, J. M., „Optical Levitation of Liquid Drops by Radiation Pressure“, *Science*, 21. März 1975, 187, Nr. 4181, S. 1073–1075.
5. Ashkin, A. und Dziedzic, J. M., „Optical Trapping and Manipulation of Viruses and Bacteria“, *Science*, 20. März 1987, 235, Nr. 4795, S. 1517–1520.
6. Mohanty, S. K., Dasgupta, R. und Gupta, P. K., „Three-Dimensional Orientation of Microscopic Objects Using Combined Elliptical and Point Optical Tweezers“, *Applied Physics B*, Dez. 2005, 81, Nr. 8, S. 1063–1066.
7. Molloy, J. E. und Padgett, M. E., „Lights, Action: Optical Tweezers“, *Contemporary Physics*, Juli/Aug. 2002, 43, Nr. 4, S. 241–258.
8. Block, S. M., „Construction of Optical Tweezers“. *Cells: A Laboratory Manual. Vol. 2, Sect. 7*. Hrsg. D. L. Spector, R. D. Goldman und L. A. Leinwand. Cold Spring Harbor: Cold Spring Harbor Laboratory Press, 1998. http://www.cshlpress.com/chap_cells.tpl (Stand: Mai 2009).
9. Mehta, A. D. et al., a. a. O.
10. Block, S. M., a. a. O.
11. Molloy, J. E. und Padgett, M. J., a. a. O.
12. Pool, R., „Trapping with Optical Tweezers“, *Science*, 26. Aug. 1988, 241, Nr. 4869, S. 1042.
13. Dholakia, K., Spalding, G. und MacDonald, M., „Optical Tweezers: The Next Generation“, *Physics World*, Okt. 2002, 15, Nr. 9, S. 31–35.
14. Curtis, J. E., Koss, B. A. und Grier, D. G., „Dynamic Holographic Optical Tweezers“, *Optics Communications*, 2002, 207, S. 169–175.
15. Curtis, J. E., Koss, B. A. und Grier, D. G., *Use of Multiple Optical Vortices for Pumping, Mixing and Sorting*. US-Patent 6.858.833 B2, 22. Febr. 2005.
16. Curtis, J. E., Koss, B. A. und Grier, D. G., *Multiple Optical Vortices for Manipulating Particles*, US-Patent 6.995.351 B2, 7. Febr 2006.
17. „Motors of Light May Resolve Dilemma of How to Power MEMS“, *Small Times*, 4. April 2004. http://www.smalltimes.com/document_display.cfm?document_id=579 (Stand: Mai 2006).

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	Die SI-Einheit der Länge, das Meter (m), ist seit einigen Jahren definiert über die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Diese ist definiert zu $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (28.1)
Lichtgeschwindigkeit in einem durchsichtigen Medium	$c_n = \frac{c}{n}$ (28.3) Darin ist n die Brechzahl des Mediums.
2. Reflexion und Brechung	Wenn Licht auf die Grenzfläche zweier Medien trifft, in denen die Lichtgeschwindigkeiten unterschiedlich sind, dann tritt ein Teil der Lichtenergie in das zweite Medium ein (d. h. er wird gebrochen), und der andere Teil wird reflektiert.
Reflexionsgesetz	Die reflektierten Lichtstrahlen liegen in der Einfallsebene und bilden mit dem Einfallslot den Reflexionswinkel θ'_1 , der gleich dem Einfallswinkel θ_1 ist: $\theta'_1 = \theta_1$. (28.4)
Reflektierte Intensität, senkrechter Einfall	$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 I_0$ (28.7)
Brechzahl	$n = \frac{c}{c_n}$ (28.3)
Brechungsgesetz (Snellius'sches Gesetz)	$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ (28.5b)
Totalreflexion	Wenn sich Licht in einem Medium mit der Brechzahl n_1 ausbreitet und auf die Grenzfläche zu einem zweiten Medium mit einer geringeren Brechzahl $n_2 < n_1$ trifft, wird es total reflektiert, wenn der Einfallswinkel größer als der kritische Winkel θ_k der Totalreflexion ist. Für diesen gilt $\sin \theta_k = \frac{n_2}{n_1}$, mit $n_1 > n_2$. (28.8)
Dispersion	Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium und daher auch dessen Brechzahl hängen geringfügig von der Lichtwellenlänge ab. Aufgrund dieser Dispersion wird ein weißer Lichtstrahl durch ein Prisma in seine Farbkomponenten zerlegt. Die Dispersion in Wassertropfen ist verantwortlich für die Entstehung des Regenbogens.
3. Polarisation	Transversale Wellen können polarisiert sein, d. h. der Vektor des elektrischen Felds kann eine bestimmte Schwingungsrichtung (senkrecht zur Ausbreitung der Welle) annehmen. Ist die Schwingungsrichtung über die Zeit konstant, spricht man von einer linear polarisierten Welle, rotiert der Vektor des elektrischen Felds auf einem Kreis in der Schwingungsebene, spricht man von zirkular polarisiertem Licht. Aus unpolarisierten elektromagnetischen Wellen können polarisierte durch Absorption, Streuung, Reflexion oder Doppelbrechung erzeugt werden.
Malus'sches Gesetz	Wenn die Transmissionsachsen zweier Polarisatoren den Winkel θ miteinander bilden, dann ist die Intensität I_2 des vom zweiten Polarisator durchgelassenen Lichts um den Faktor $\cos^2 \theta$ geringer als die Intensität I_1 des auf ihn auftreffenden Lichts: $I_2 = I_1 \cos^2 \theta$. (28.23)
4. Lichtspektren	
Linienspektren	Atome in verdünnten Gasen emittieren nur Licht mit einem Satz von diskreten Wellenlängen; diese ergeben die Linien im Spektrum.
Kontinuierliche Spektren	Atome in Gasen mit sehr hoher Dichte sowie in Flüssigkeiten oder Festkörpern weisen kontinuierliche Bänder von Energieniveaus auf. Daher strahlen sie ein kontinuierliches Lichtspektrum aus. Wird ein Gegenstand erhitzt, dann tritt thermische Strahlung auf; ab einer Temperatur von ungefähr 600°C wird sie sichtbar und erscheint als dunkle Rotglut.
Sichtbares Licht	Das menschliche Auge nimmt elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen zwischen etwa 400 nm und 700 nm wahr. Die entsprechenden Photonenenergien liegen zwischen ungefähr 1,8 eV und 3,1 eV. Das Sonnenlicht, das Licht mit allen Wellenlängen in diesem Bereich aufweist, nehmen wir als weiß wahr.

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Da das Zahnrad 720 Zähne hat, weist es ebenso viele Lücken dazwischen auf. Daher ist die Breite eines Zahns kleiner als $1/720$ des Radumfangs. Somit muss das Rad weniger als $1/720$ einer Umdrehung ausführen, damit das Licht vom entfernten Spiegel wieder sichtbar wird.

Lösungen der Übungen

1. a) $4,57 \cdot 10^6$ km, b) $3,05 \cdot 10^8$ m · s $^{-1}$
2. 1,28 s für den einfachen Weg

Aufgaben

Verständnisaufgaben

28.1 • Ein Lichtstrahl fällt aus der Luft auf eine Glasoberfläche, und zwar in einem Winkel von 40° zum Einfallslot. Der Winkel zwischen dem gebrochenen Strahl und dem Einfallslot beträgt 28° . Wie groß ist der Winkel zwischen dem einfallenden und dem gebrochenen Strahl?

28.2 • Ein Lichtstrahl fällt aus der Luft auf eine Wasserfläche, und zwar in einem Winkel von 45° zum Einfallslot. Welche der nachfolgend genannten vier Größen ändert bzw. ändert sich, wenn das Licht in das Wasser eintritt? a) Die Wellenlänge, b) die Frequenz, c) die Ausbreitungsgeschwindigkeit, d) die Ausbreitungsrichtung, e) keine der genannten Größen.

28.3 • Die Dichte der Atmosphäre wird mit zunehmender Höhe geringer, dadurch auch die Brechzahl der Luft. Erklären Sie, warum man die Sonne unmittelbar nach dem Untergang noch sehen kann, wenn sie sich schon unter dem Horizont befindet. (Der Horizont ist die Fortsetzung einer Ebene, die tangential an der Erdoberfläche anliegt.) Warum erscheint die Sonne beim Untergang abgeflacht?

28.4 • Ein Schwimmer befindet sich am Punkt S in einem ruhigen See, nicht sehr weit vom Ufer entfernt (Abbildung 28.42). Er bekommt einen Muskelkrampf und ruft um Hilfe. Eine Rettungsschwimmerin am Punkt R hört den Hilferuf. Sie kann $9,0 \text{ m/s}$ schnell laufen und $3,0 \text{ m/s}$ schnell schwimmen. Sie will natürlich denjenigen Weg von R nach S einschlagen, der sie in der kürzesten Zeit zum Schwimmer bringt. Welcher der in der Abbildung dargestellten Wege ist dies?

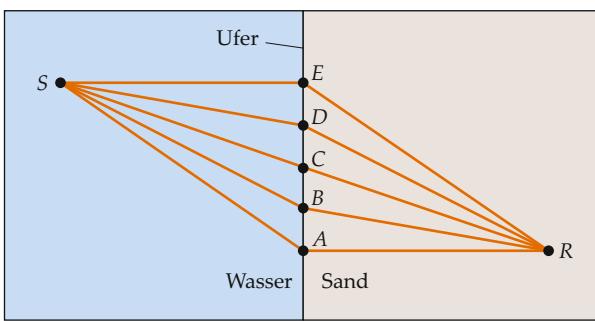


Abbildung 28.42 Zu Aufgabe 28.4.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

28.5 • Bei Galileis Versuch, die Lichtgeschwindigkeit zu messen, standen er und sein Assistent auf zwei wenige Kilometer voneinander entfernten Hügeln. Welche Zeitspanne für den Hin-

und den Rückweg des Lichts hätte Galilei größtenteils messen müssen, um die Lichtgeschwindigkeit zumindest ungefähr bestimmen zu können? Vergleichen Sie diese Zeitspanne mit der menschlichen Reaktionszeit. Wie genau, glauben Sie, konnte seine Messung sein?

28.6 • Schätzen Sie die Zeitspanne ab, um die sich das Auftreffen eines Lichtstrahls auf die Netzhaut Ihres Auges verzögert, wenn Sie eine Brille aufsetzen.

28.7 •• Wenn der Einfallswinkel klein genug ist, kann das Snellius'sche Brechungsgesetz vereinfacht werden, indem man die Näherung für kleine Winkel ansetzt: $\sin \theta \approx \theta$. Nehmen Sie an, Sie wollen einen Brechungswinkel berechnen. Wie groß darf der Einfallswinkel höchstens sein, wenn der auf diese Näherung zurückzuführende Fehler – verglichen mit der Anwendung der exakten Formel – nicht mehr als 1 % ausmachen soll? (Diese Näherung für kleine Winkel wird in Kapitel 29 bei der Abbildung durch sphärische Oberflächen verwendet.)

Die Lichtgeschwindigkeit

28.8 •• Die Entfernung eines Punkts auf der Erdoberfläche von einem Punkt auf der Mondoberfläche soll aus der Laufzeit (hin und zurück) eines Laserstrahls errechnet werden, der an einer Spiegelanordnung auf dem Mond reflektiert wird. Die Unsicherheit Δx der ermittelten Entfernung hängt mit der Unsicherheit Δt der gemessenen Zeitspanne zusammen über $\Delta x = \frac{1}{2} c \Delta t$. Nehmen Sie an, die Laufzeit wird auf $\pm 1,00 \text{ ns}$ genau gemessen. a) Wie groß ist dann, in Metern angegeben, die Unsicherheit der Entfernung? b) Wie viel macht sie prozentual aus?

Reflexion und Brechung

28.9 • Ein Lichtstrahl fällt auf einen von zwei Spiegeln, die einen rechten Winkel bilden. Die Einfallsebene steht senkrecht auf beiden Spiegeln. Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl nach der Reflexion an beiden Spiegeln in entgegengesetzter Richtung verläuft, unabhängig vom Einfallswinkel.

28.10 •• Licht fällt senkrecht auf eine Glasscheibe; die Brechzahl des Glases beträgt $n = 1,50$. a) Bestimmen Sie näherungsweise den prozentualen Anteil der einfallenden Lichtintensität, der aus der Rückseite der Glasscheibe austritt. b) Wiederholen Sie Teilaufgabe a für eine in Wasser eingetauchte Glasscheibe.

28.11 ••• Abbildung 28.43 zeigt einen Lichtstrahl, der auf eine Glasplatte mit der Dicke d und der Brechzahl n fällt. a) Stellen Sie einen Ausdruck für den Einfallswinkel auf, bei dem der Abstand b zwischen dem an der oberen Grenzfläche reflektierten Strahl und demjenigen Strahl maximal ist, der nach

der Reflexion an der unteren Grenzfläche aus der oberen Grenzfläche austritt. b) Wie groß ist dieser Einfallswinkel, wenn die Brechzahl des Glases 1,60 beträgt? c) Welchen Abstand haben die beiden Lichtstrahlen, wenn die Glasplatte 4,0 cm dick ist?

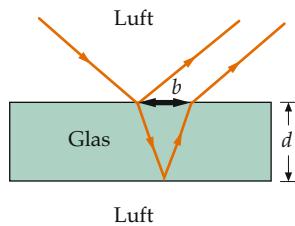


Abbildung 28.43 Zu Aufgabe 28.11.

Totalreflexion

28.12 • Auf einer Oberfläche aus Glas mit der Brechzahl 1,50 befindet sich eine Wasserschicht (Brechzahl 1,33). Licht, das sich im Glas ausbreitet, fällt auf die Glas-Wasser-Grenzfläche. Berechnen Sie den kritischen Winkel der Totalreflexion.

28.13 •• In einer Glasfaser breiten sich Lichtstrahlen über eine lange Strecke aus, wobei sie total reflektiert werden. Wie in Abbildung 28.44 gezeigt ist, besteht die Faser aus einem Kern mit der Brechzahl n_2 und dem Radius b . Der Kern ist umgeben von einem Mantel mit der Brechzahl $n_3 < n_2$. Die *numerische Apertur* der Faser ist definiert als $\sin \theta_1$. Dabei ist θ_1 der Einfallswinkel eines Lichtstrahls an der Stirnfläche der Faser, der an der Grenzfläche zum Mantel unter dem kritischen Winkel der Totalreflexion reflektiert wird. Zeigen Sie anhand der Abbildung, dass bei einem aus der Luft in die Glasfaser eintretenden Lichtstrahl für die numerische Apertur gilt:

$$\sin \theta_1 = \sqrt{n_2^2 - n_3^2}.$$

(Hinweis: Evtl. ist der Satz des Pythagoras anzuwenden.)

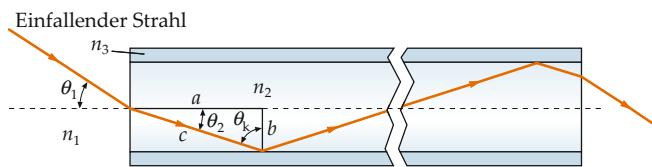


Abbildung 28.44 Zu Aufgabe 28.13.

28.14 ••• Überlegen Sie sich, wie ein dünner Wasserfilm auf einer Glasoberfläche den kritischen Winkel der Totalreflexion verändert. Die Brechzahlen sind 1,50 beim Glas und 1,33 beim Wasser. a) Wie groß ist der kritische Winkel der Totalreflexion an der Glas-Wasser-Grenzfläche? b) Gibt es einen Bereich von Einfallswinkeln, die größer als der kritische Winkel θ_k der Totalreflexion an der Glas-Luft-Grenzfläche sind und bei denen Lichtstrahlen das Glas verlassen, sich durch das Wasser ausbreiten und schließlich in die Luft austreten?

Dispersion

28.15 •• Für Licht verschiedener Farben (Frequenzen) sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in einem Medium unterschiedlich hoch. Dieses als Dispersion bezeichnete Phänomen kann in Glasfasern zu Problemen führen, wenn die Lichtimpulse sehr weit übertragen werden müssen. Betrachten Sie zwei kurze Lichtimpulse mit den Wellenlängen 700 nm bzw. 500 nm, die in einer aus Silicatkronglas bestehenden Glasfaser übertragen werden (Abbildung 28.45). Berechnen Sie die Differenz der Zeitspannen, die die beiden Impulse benötigen, um in der Glasfaser eine 15,0 km lange Strecke zurückzulegen.

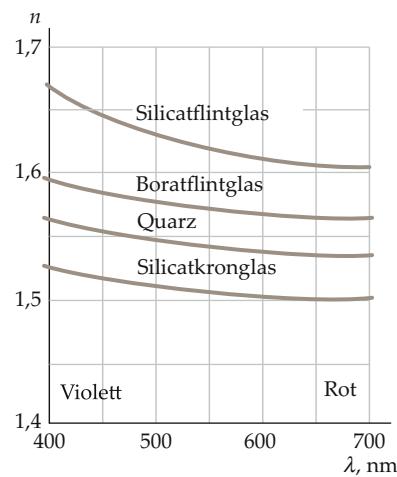


Abbildung 28.45 Zu Aufgabe 28.15.

Polarisation

28.16 • In horizontaler Richtung polarisiertes Licht fällt auf eine bestimmte Polarisationsfolie. Experimentell wird festgestellt, dass sie nur 15 % der Energie des auftreffenden Lichts durchlässt. Welchen Winkel schließt ihre Polarisationsachse mit der Horizontalen ein?

28.17 •• Die Achsen zweier Polarisationsfolien sind gekreuzt, sodass kein Licht durchgelassen wird. Zwischen ihnen wird eine dritte Polarisationsfolie angebracht, deren Polarisationsachse mit derjenigen der ersten Folie den Winkel θ bildet. a) Wie hängt die Intensität des von allen drei Polarisationsfolien durchgelassenen Lichts von θ ab? b) Zeigen Sie, dass sie bei $\theta = 45^\circ$ maximal ist.

28.18 ••• Eine zirkular polarisierte Welle nennt man *rechts-zirkular polarisiert*, wenn – in Ausbreitungsrichtung betrachtet – der elektrische und der magnetische Feldvektor im Uhrzeigersinn rotieren. Entsprechend ist sie *links-zirkular polarisiert*, wenn die Feldvektoren entgegen dem Uhrzeigersinn rotieren. Betrachten Sie folgende Welle:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(kx - \omega t) \hat{\mathbf{y}} + E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{\mathbf{z}}.$$

a) In welchem Drehsinn ist sie zirkular polarisiert? b) Wie lautet der entsprechende Ausdruck für eine im gegenläufigen Drehsinn zirkular polarisierte Welle, die sich in derselben Richtung ausbreitet? c) Zeigen Sie mathematisch, dass eine linear polarisierte Welle als Überlagerung einer rechtsläufig und einer linksläufig zirkular polarisierten Welle angesehen werden kann.

Allgemeine Aufgaben

28.19 • Monochromatisches rotes Licht mit der Wellenlänge 700 nm tritt aus der Luft in Wasser über. a) Wie groß ist seine Wellenlänge im Wasser? b) Sieht es ein Taucher in der gleichen oder in einer anderen Farbe?

28.20 •• Zeigen Sie Folgendes: Wenn ein ebener Spiegel um eine Achse, die in der Spiegelebene liegt, um den Winkel θ gedreht wird, dann dreht sich der reflektierte Strahl um den Winkel 2θ . Dabei soll vorausgesetzt werden, dass der unverändert einfallende Strahl senkrecht zur Drehachse auftrifft.

28.21 •• Licht fällt unter dem Einfallswinkel θ_1 auf eine Platte aus transparentem Material, wie in Abbildung 28.46 gezeigt ist. Die Platte hat die Dicke h , und ihr Material hat die Brechzahl n . Zeigen Sie, dass gilt:

$$n = \frac{\sin \theta_1}{\sin (\tan(d/h))}.$$

Dabei ist d der in der Abbildung dargestellte Abstand, und $\tan(d/h)$ ist der Winkel, dessen Tangens gleich d/h ist.

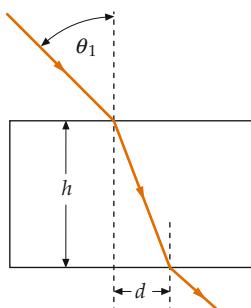


Abbildung 28.46 Zu Aufgabe 28.21.

28.22 •• Ein sogenanntes Brewster'sches Fenster kann dazu dienen, einen Strahl polarisierten Laserlichts zu erzeugen. Es besteht, wie in Abbildung 28.47 gezeigt ist, aus einer Platte aus transparentem Material, die im Laserhohlraum so ausgerichtet ist, dass der Strahl im Polarisationswinkel auf sie auftrifft. Zeigen Sie Folgendes: Wenn der Polarisationswinkel an der n_1/n_2 -Grenzfläche θ_{P1} ist, dann ist der Polarisationswinkel an der n_2/n_1 -Grenzfläche gleich θ_{P2} .

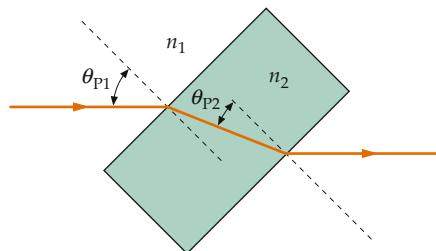


Abbildung 28.47 Zu Aufgabe 28.22.

28.23 •• Ein Lichtstrahl breite sich in einem transparenten Medium aus, das eine ebene Grenzfläche zu Vakuum aufweist. a) Zeigen Sie, dass dabei der Polarisationswinkel θ_p und der kritische Winkel θ_k der Totalreflexion über $\tan \theta_p = \sin \theta_k$ miteinander zusammenhängen. b) Welcher der beiden Winkel ist größer?

28.24 •• Ein Lichtstrahl fällt aus der Luft unter einem Winkel von 58° zum Einfallslot auf die Grenzfläche zu einer transparenten Substanz. Der reflektierte und der gebrochene Strahl stehen senkrecht aufeinander. a) Wie groß ist die Brechzahl der transparenten Substanz? b) Wie groß ist in ihr der kritische Winkel der Totalreflexion?

28.25 ••• Licht mit der Intensität I_0 trifft senkrecht auf eine Glasplatte mit der Brechzahl n . a) Zeigen Sie, dass für die von ihr durchgelassene (transmittierte) Intensität gilt:

$$I_t \approx I_0 \left(\frac{4n}{(n+1)^2} \right)^2.$$

b) Ermitteln Sie mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a das Verhältnis der von N parallelen Glasscheiben insgesamt durchgelassenen Intensität zur ebenfalls senkrecht einfallenden Intensität. c) Wie viele Scheiben aus Glas mit der Brechzahl 1,5 sind nötig, um die austretende Intensität auf 10 % der einfallenden Intensität zu verringern?

Geometrische Optik

29



Dieses Foto eines weiblichen Moskitos wurde mithilfe eines Mikroskops aufgenommen.
(© Nuridsany & Perennou/Photo Researchers.)

? Aus welchen Größen ergibt sich die Vergrößerung eines Mikroskops? (Siehe Beispiel 29.15.)

29.1 Spiegel	1042
29.2 Linsen	1053
29.3 Abbildungsfehler	1066
29.4 Optische Instrumente	1067
Zusammenfassung	1078
Aufgaben	1081

Lichtwellenlängen sind sehr viel kleiner als die meisten Hindernisse oder Öffnungen im Lichtweg. Daher können wir die Beugung – die Ablenkung der Lichtwellen an den Kanten der Gegenstände – in den meisten Fällen vernachlässigen. In diesem Kapitel werden wir uns mit verschiedenen Anwendungsbeispielen beschäftigen, für die diese Näherung gilt. Wir wenden dann die vereinfachte Beschreibung an, bei der sich die Lichtstrahlen, die senkrecht auf den Wellenfronten stehen, geradlinig ausbreiten. Man spricht dabei auch von *geometrischer Optik*.

In diesem Kapitel wenden wir das Reflexions- und das Brechungsgesetz auf die Erzeugung von Bildern mithilfe von Spiegeln und Linsen an. Außerdem beschäftigen wir uns mit nicht perfekten Linsen und Spiegeln und den Abbildungsfehlern, die sie erzeugen.

29.1 Spiegel

Ebene Spiegel

In Abbildung 29.1 geht ein Lichtstrahlenbündel von einer Punktquelle P aus und wird an einem ebenen Spiegel reflektiert. Nach der Reflexion laufen die Strahlen so auseinander, als gingen sie von einem Punkt P' hinter der Ebene des Spiegels aus. Diesen Punkt P' nennt man das **Bild** des **Gegenstands** P . Wenn die reflektierten Strahlen das Auge erreichen, können sie nicht von solchen Strahlen unterschieden werden, die wirklich von einer Quelle bei P' ohne Vorhandensein eines Spiegels ausgehen. Das in Abbildung 29.1 vorliegende Bild bei P' wird als **virtuelles Bild** bezeichnet, weil keine realen Strahlen von ihm ausgehen. Die Spiegelebene steht senkrecht auf der Strecke zwischen dem Gegenstandspunkt P und dem Bildpunkt P' und teilt sie in der Mitte. Das virtuelle Bild des Punkts P lässt sich in dem in Abbildung 29.1 farbig getönten Bereich beobachten. Dabei verläuft eine gedachte Gerade vom Bildpunkt durch den Spiegel zum Auge. Der Gegenstand muss sich nicht direkt vor dem Spiegel befinden (in der Abbildung ist er links vom Spiegel angeordnet). Solange er nicht hinter der Spiegelebene liegt, gibt es stets einen Punkt, von dem aus sein Bild sichtbar ist.

Wenn Sie vor einem Spiegel stehen und Ihre rechte Hand hochhalten, sehen Sie in ihm ein Bild der Hand, das weder vergrößert noch verkleinert ist. Die rechte Hand sieht jedoch wie eine linke Hand aus (Abbildung 29.2). Diese Umkehrung von rechts und links röhrt von der **Spiegelsymmetrie** her: Die rechte Hand wird zu einer linken, weil Vorder- und Rückseite vom Spiegel umgedreht werden. Die Spiegelsymmetrie ist auch in Abbildung 29.3 dargestellt.

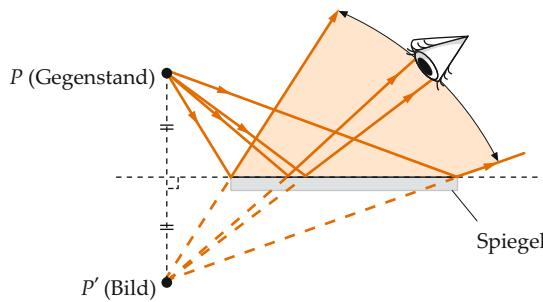


Abbildung 29.1 Bilderzeugung beim ebenen Spiegel. Die vom Punkt P ausgehenden Strahlen treffen auf den Spiegel und werden reflektiert. Wenn sie danach auf das Auge treffen, scheinen sie vom Bildpunkt P' hinter dem Spiegel zu kommen. Das Bild kann überall im farbig schattierten Bereich beobachtet werden.



Abbildung 29.2 Das Spiegelbild einer rechten Hand entspricht einer linken Hand. Diese Umkehrung von rechts und links wird durch die Spiegelsymmetrie verursacht, bei der vorn und hinten vertauscht werden. (© Demitrios Zangos.)

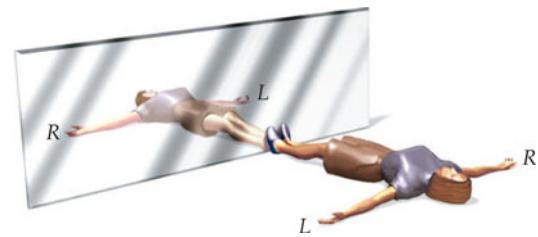


Abbildung 29.3 Ein Mensch liegt vor einem Spiegel und berührt ihn mit den Füßen. Durch die Spiegelsymmetrie wird im Spiegelbild beispielsweise die rechte Hand zu einer linken Hand.

Abbildung 29.4 zeigt ein kartesisches Koordinatensystem und sein Spiegelbild. Für die Einheitsvektoren des rechtshändigen Koordinatensystems gilt $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$. Sein Spiegelbild ist ein links-händiges Koordinatensystem mit $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$.

Bei der Abbildung durch einen ebenen Spiegel werden aufgrund der Spiegelsymmetrie die dem Spiegel zugewandte und die dem Spiegel abgewandte Seite miteinander vertauscht, was den Anschein erweckt, „rechts“ und „links“ seien miteinander vertauscht.

In Abbildung 29.5 steht ein Pfeil der Höhe G im Abstand g vor einem Spiegel, parallel zu dessen Ebene. Das Bild des Pfeils lässt sich für jeden seiner Punkte anhand zweier Strahlen konstruieren. Wir zeichnen zunächst von der Pfeilspitze einen Strahl senkrecht zum Spiegel. Er trifft den Spiegel im Punkt A und wird in sich selbst reflektiert. Der andere Strahl schließt mit der Senkrechten auf dem Spiegel, also mit der x -Achse, den Winkel θ ein. Er wird unter dem gleichen Winkel θ reflektiert. Die Verlängerungen der beiden Strahlen hinter dem Spiegel, in der Abbildung gestrichelt eingezeichnet, schneiden sich im Bild der Pfeilspitze. Wie aus der Zeichnung hervorgeht, hat das

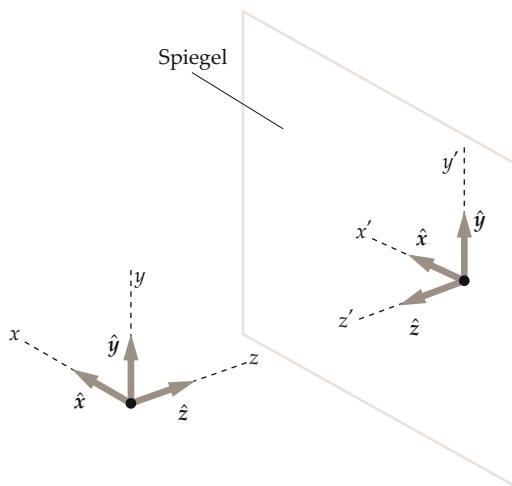


Abbildung 29.4 Abbildung eines rechtwinkligen (kartesischen) Koordinatensystems durch einen ebenen Spiegel. Die Richtung der z -Achse wird durch die Spiegelung umgekehrt. Das Bild des rechtshändigen Koordinatensystems mit $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ ist ein linkshändiges Koordinatensystem mit $\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{z}$.

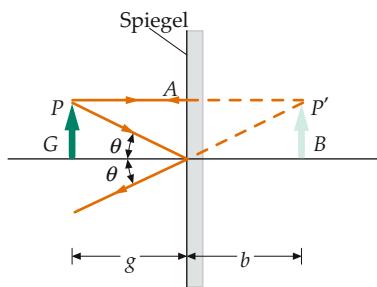


Abbildung 29.5 Die Konstruktion des Spiegelbilds eines Pfeils beim ebenen Spiegel. Wie im Text erläutert, ist die Gegenstandsweite gleich der Bildweite und die Gegenstandshöhe gleich der Bildhöhe.

Bild hinter der Spiegelebene von dieser denselben Abstand wie der Gegenstand vor ihr. Außerdem steht das Bild aufrecht (die Pfeilspitze weist in eine Richtung, die zu der des Gegenstands parallel ist), und es ist ebenso hoch wie der Gegenstand.

Mehrachabbildungen entstehen, wenn zwei ebene Spiegel gegeneinander geneigt sind, also einen Winkel miteinander bilden. Solche *Winkelspiegel* trifft man beispielsweise in Bekleidungsgeschäften an; meist ist ihr Winkel veränderlich. In Abbildung 29.6 gehen Lichtstrahlen von der Gegenstandsquelle P aus. Sie werden am Spiegel 1 so reflektiert, als gingen sie vom Bildpunkt P'_1 aus. Nun treffen sie auf den Spiegel 2. Der Bildpunkt P'_1 ist der Gegenstandspunkt für die Abbildung durch den Spiegel 2. Sein Bildpunkt beim Spiegel 2 ist $P''_{1,2}$ und liegt hinter diesem Spiegel. Dieser Bildpunkt $P''_{1,2}$ entsteht immer, wenn der Bildpunkt P'_1 vor der Ebene des Spiegels 2 liegt. Das Bild im Punkt P'_2 röhrt von Strahlen her, die von P ausgehen und direkt am Spiegel 2 reflektiert werden. Da der Punkt P'_2 hinter der Ebene des Spiegels 1 liegt, kann er nicht als Gegenstandspunkt für ein

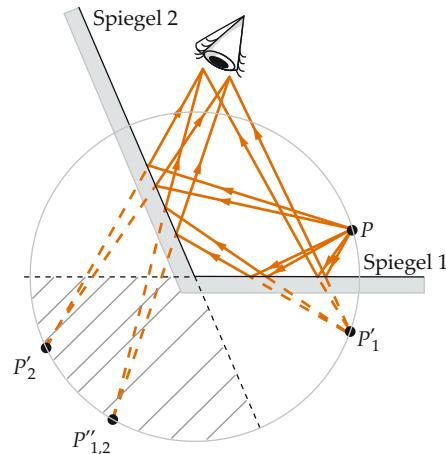


Abbildung 29.6 Mehrfachbilder, die durch zwei ebene Spiegel erzeugt werden. Der Punkt P'_1 ist das Bild des Gegenstands P im Spiegel 1, und P'_2 ist das Bild des Gegenstands im Spiegel 2. Der Punkt $P''_{1,2}$ ist das Bild von P'_1 im Spiegel 2. Es entsteht, wenn Lichtstrahlen vom Gegenstand zuerst am Spiegel 1 und dann am Spiegel 2 reflektiert werden. Der Bildpunkt P'_2 hat im Spiegel 1 kein Bild, weil er sich hinter dessen Ebene befindet.

weiteres Bild beim Spiegel 1 dienen, denn in der vorliegenden Anordnung können keine von P ausgehenden und am Spiegel 2 reflektierten Strahlen den Spiegel 1 treffen. Wie viele Mehrfachbilder an zwei zueinander geneigten Spiegeln entstehen, hängt ab vom Winkel zwischen beiden Spiegeln und von der Position des Gegenstands relativ zu ihnen.

Frage 29.1

Zeigen Sie, dass eine Punktquelle und sämtliche aufeinanderfolgenden Bildpunkte, die durch zwei ebene Spiegel entstehen, den gleichen Abstand vom Kreuzungspunkt der beiden Spiegelachsen haben. (Alle Punkte auf dem in Abbildung 29.6 eingezeichneten Kreis haben vom Kreuzungspunkt denselben Abstand.)

Nehmen Sie an, Ihr Freund Ben, der ein Hemd mit dem Aufdruck BEN trägt, steht am Punkt P in Abbildung 29.6. Er befindet sich damit vor dem Kreuzungspunkt der beiden Spiegel. Von seinem Standpunkt aus winkt er Ihnen mit der rechten Hand zu. Nehmen Sie weiter an, dass Sie dort stehen, wo in der Abbildung das Auge eingezeichnet ist. Sie sehen dann an jedem der eingezeichneten Bildpunkte ein Bild von Ben. Bei den Bildpunkten P'_1 und P'_2 winkt er mit der linken Hand, und der Aufdruck auf seinem Hemd erscheint für Sie in Spiegelschrift und von rechts nach links. Beim Bild $P''_{1,2}$ jedoch winkt er mit der rechten Hand, und der Aufdruck erscheint seitenrichtig. Die Erzeugung des Bilds bei $P''_{1,2}$ erfolgt nämlich durch zwei Reflexionen, deren Spiegelsymmetrien sich gegenseitig aufheben.

Frage 29.2

Welche Bilder von sich selbst kann Ben sehen?

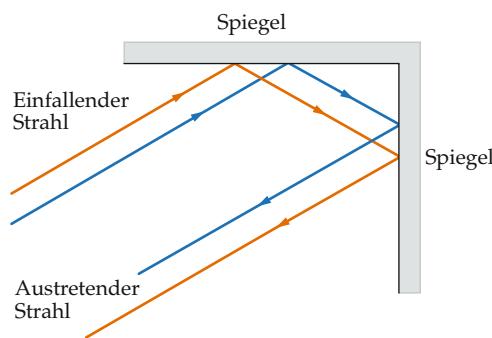


Abbildung 29.7 Ein in der Zeichenebene verlaufender Strahl trifft auf einen von zwei senkrechten Spiegeln, die einen rechten Winkel einschließen. Der am ersten Spiegel reflektierte Strahl wird am zweiten Spiegel so reflektiert, dass der dabei resultierende Strahl parallel zur Einfallsrichtung verläuft – unabhängig vom Einfallswinkel am ersten Spiegel. Die Zeichenebene, in der alle Strahlen liegen, steht senkrecht auf beiden Spiegeln.

In Abbildung 29.7 schließen zwei senkrecht stehende Spiegel einen rechten Winkel ein, und es trifft ein horizontaler (in der Zeichenebene verlaufender) Strahl schräg auf einen der Spiegel. Der danach vom zweiten Spiegel reflektierte Strahl verläuft (in Gegenrichtung) stets parallel zum ursprünglichen Strahl, unabhängig vom Einfallswinkel am ersten Spiegel.

Nehmen wir nun an, es sind drei Spiegel jeweils senkrecht zueinander angeordnet, wie an einer inneren Ecke einer Kiste, und es trifft ein Lichtstrahl auf einen der drei Spiegel. Dann wird der Strahl letztlich in die gleiche Richtung reflektiert, aus der er kam, unabhängig davon, aus welcher Richtung er einfällt und welchen der Spiegel er zuerst trifft. Dieser Effekt wird bei den „Katzenaugen“ ausgenutzt, beispielsweise in den Rückstrahlern an Fahrzeugen. Eine derartige Anordnung von drei senkrecht aufeinander stehenden Spiegelflächen, allerdings mit totalreflektierenden Prismen, wurde im Jahre 1969 von den Apollo-11-Astronauten auf dem Mond im „Meer der Ruhe“ angebracht. Ein von der Erde aus dorthin gerichteter Laserstrahl wird so zur Quelle zurückreflektiert. Aus seiner Laufzeit ist der Abstand zwischen Mond und Erde auf einige Zentimeter genau zu bestimmen.

Sphärische Spiegel

In Abbildung 29.8 geht ein Strahlenbündel von einer Punktquelle P aus; diese liegt auf der **optischen Achse** eines sphärischen, d. h. kugelförmigen Hohlspiegels (Konkavspiegels), die durch den Scheitelpunkt des Spiegels verläuft. Die Strahlen laufen nach der Reflexion am Spiegel im Punkt P' zusammen. Von diesem breiten sie sich dann so aus, als kämen sie von einem Gegenstand in eben diesem Punkt P' . Das Bild P' wird **reelles Bild** genannt, weil von ihm tatsächlich Lichtstrahlen ausgehen. Das Bild ist zu betrachten, wenn man auf den Spiegel blickt und sich dabei links vom Bild befindet. Man kann es auch mithilfe einer Mattscheibe sichtbar machen. (Man muss eine Mattscheibe anstatt einer glatten Glasscheibe verwenden, weil nur eine

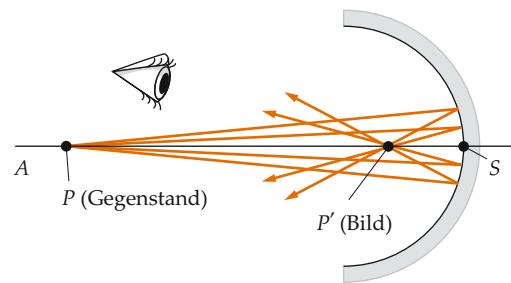


Abbildung 29.8 Von einem punktförmigen Gegenstand P auf der optischen Achse AS eines sphärischen Hohlspiegels gehen Lichtstrahlen aus. Ihre Reflexionen ergeben ein Bild bei P' . Das Bild ist nur dann scharf, wenn die einfallenden Strahlen den Spiegel nahe der Achse treffen und außerdem nahezu parallel zu ihr verlaufen.

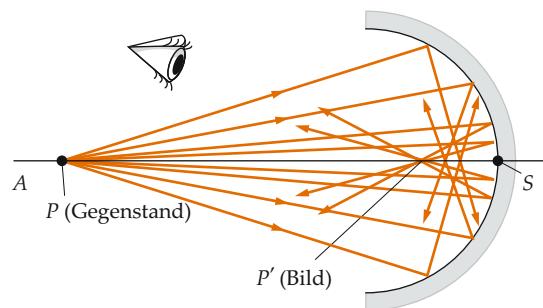


Abbildung 29.9 Sphärische Aberration beim Hohlspiegel. Strahlen, die nicht achsennah sind, werden nicht in den Bildpunkt P' reflektiert. Aufgrund dieser Strahlen ist das Bild unscharf.

diffuse Reflexion oder Transmission das Bild sichtbar macht. Für diesen Zweck dient meist geschliffenes Glas. Die Mattscheibe muss klein genug sein, damit sie nur einen Teil der von der Punktquelle auf den Spiegel gerichteten Strahlen abdeckt.) Das Bild kann auch mit einem fotografischen Film am Bildpunkt aufgenommen werden. Dagegen kann man ein **virtuelles Bild** (wie z. B. an einem ebenen Spiegel; siehe Abbildung 29.1) nicht mit einer Mattscheibe im Bildpunkt beobachten, denn dabei gehen vom Bildpunkt keine Lichtstrahlen aus. Trotz dieses Unterschieds zwischen realem und virtuellem Bild kann ein Beobachter nicht entscheiden, ob die sein Auge erreichenen Lichtstrahlen von einem realen Bildpunkt kommen oder von einem virtuellen Bildpunkt auszugehen scheinen.

Aus Abbildung 29.9 geht hervor, dass beim sphärischen Spiegel nur Strahlen in der Nähe der optischen Achse (der Geraden AS) in den Bildpunkt reflektiert werden. Strahlen, die nahe der optischen Achse liegen und daher fast parallel zu ihr verlaufen, nennt man **achsennahe Strahlen**. Im Unterschied zu ihnen werden Strahlen, die den Spiegel weiter entfernt von der optischen Achse treffen, nicht in den Bildpunkt reflektiert, sondern in Punkten, die diesem mehr oder weniger nahe sind. Sie machen das Bild unscharf. Dieser Effekt heißt **sphärische Aberration**. Die Bildschärfe kann man beim Hohlspiegel verbessern, indem man achsenferne Strahlen ausblendet. Das Bild ist dann jedoch

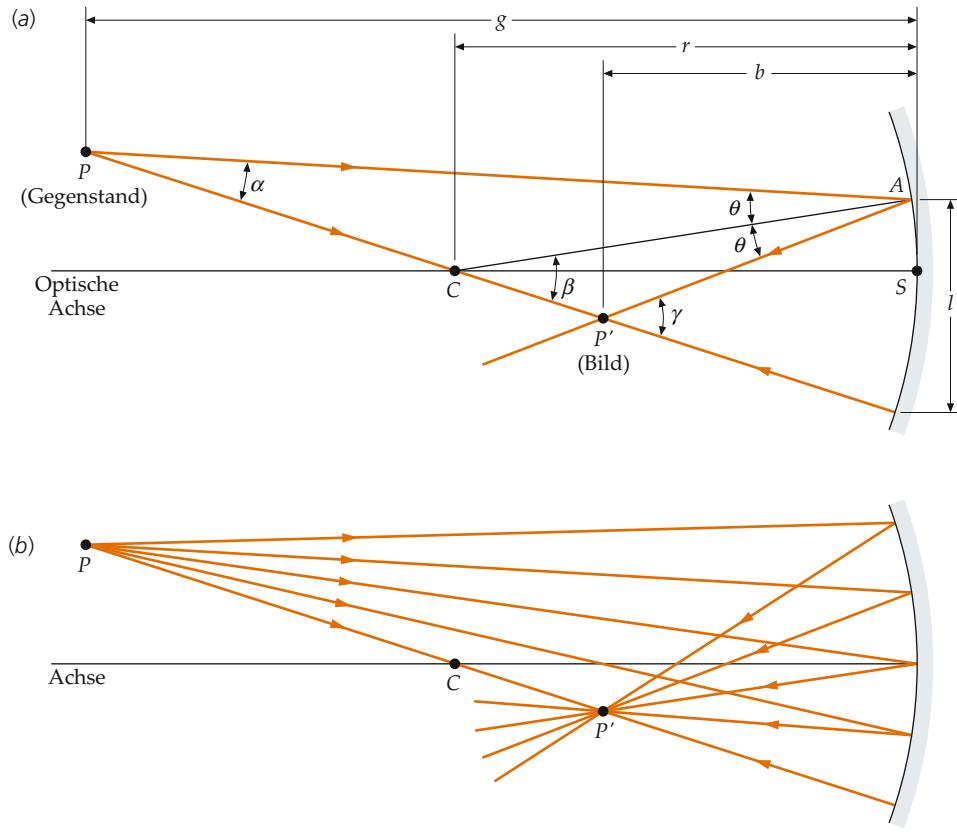


Abbildung 29.10 a) Zur Berechnung der Bildweite b aus der Gegenstandsweite g und dem Krümmungsradius r . b) Alle achsennahen Strahlen, die vom Gegenstandspunkt P ausgehen, gelangen nach der Reflexion am Hohlspiegel zum Bildpunkt P' .

weniger hell, weil weniger Licht auf den Spiegel und damit in den jeweiligen Bildpunkt gelangt.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Positionen von Bildpunkt und Gegenstandspunkt relativ zum Spiegel untersuchen. Dazu zeichnen wir zwei Strahlen, die von einem willkürlich gewählten Gegenstandspunkt P ausgehen (Abbildung 29.10a). Der eine Strahl verläuft durch den Krümmungsmittelpunkt C des Spiegels, und der andere trifft einen wiederum willkürlich gewählten Punkt A auf dem Spiegel. Der Bildpunkt P' ist der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen nach ihrer Reflexion am Spiegel. Die Lage des Bildpunkts P' ermitteln wir gemäß dem Reflexionsgesetz: Der durch den Krümmungsmittelpunkt verlaufende Strahl C trifft den Spiegel senkrecht, weil er radial verläuft, und wird daher in sich selbst reflektiert. Der Strahl, der im Punkt A auf den Spiegel trifft, bildet mit dem Einfallslot den Winkel θ , wie auch der reflektierte Strahl. (Das Einfallslot verläuft hier stets durch den Krümmungsmittelpunkt, weil der Spiegel sphärisch, d. h. kugelförmig ist.) Die Bildweite b und die Gegenstandsweite g sind die Abstände von der Ebene, die im Scheitelpunkt S des Spiegels senkrecht auf seiner Achse steht. Der Winkel β ist ein Außenwinkel des Dreiecks PCA ; daher ist $\beta = \alpha + \theta$. Beim Dreieck $PP'A$ ist entsprechend $\gamma = \alpha + 2\theta$. Eliminieren von θ aus diesen

Beziehungen ergibt

$$\alpha + \gamma = 2\beta.$$

Wir nehmen an, dass alle Strahlen achsennah sind. Dann können wir die Näherungen für kleine Winkel anwenden: $\alpha \approx l/g$ und $\beta \approx l/r$ sowie $\gamma \approx l/b$. Wenn wir diese Ausdrücke einsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}. \quad (29.1)$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen der Gegenstandsweite g , der Bildweite b und dem Krümmungsradius r . Interessant ist dabei, dass der Ort des Punkts A in dieser Gleichung nicht enthalten ist. Daher gilt die Gleichung für *irgendeinen* Punkt A , solange er auf dem Spiegel liegt und alle Strahlen achsennah sind. Wie Abbildung 29.10b zeigt, verlaufen *alle* achsennahe Strahlen, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen, nach der Reflexion durch einen *einzig* Bildpunkt.

Gleichung 29.1 gibt die Abstände des Gegenstands sowie des Bilds vom Spiegel an. Nun interessieren uns die Abstände des Gegenstands- und des Bildpunkts von der optischen Achse. Wir zeichnen einen einzelnen Strahl, der am Spiegel in dessen Scheitelpunkt S reflektiert wird (Abbildung 29.11). Dabei entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke. Da es sich hierbei um

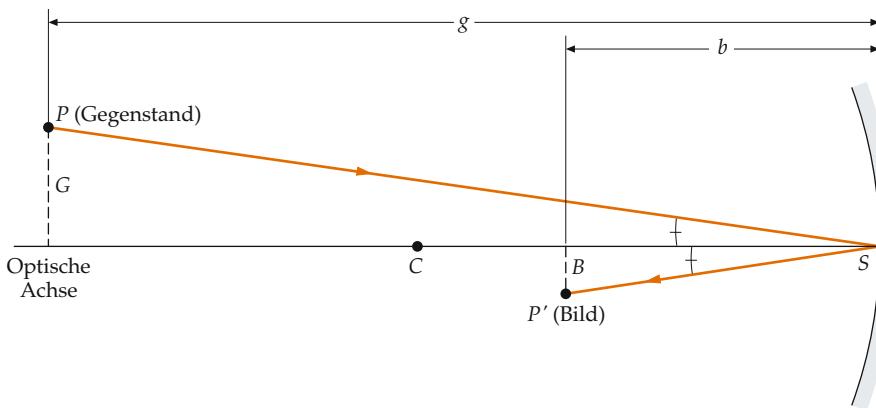


Abbildung 29.11 Zur Berechnung des Abstands B des Bildpunkts von der optischen Achse.

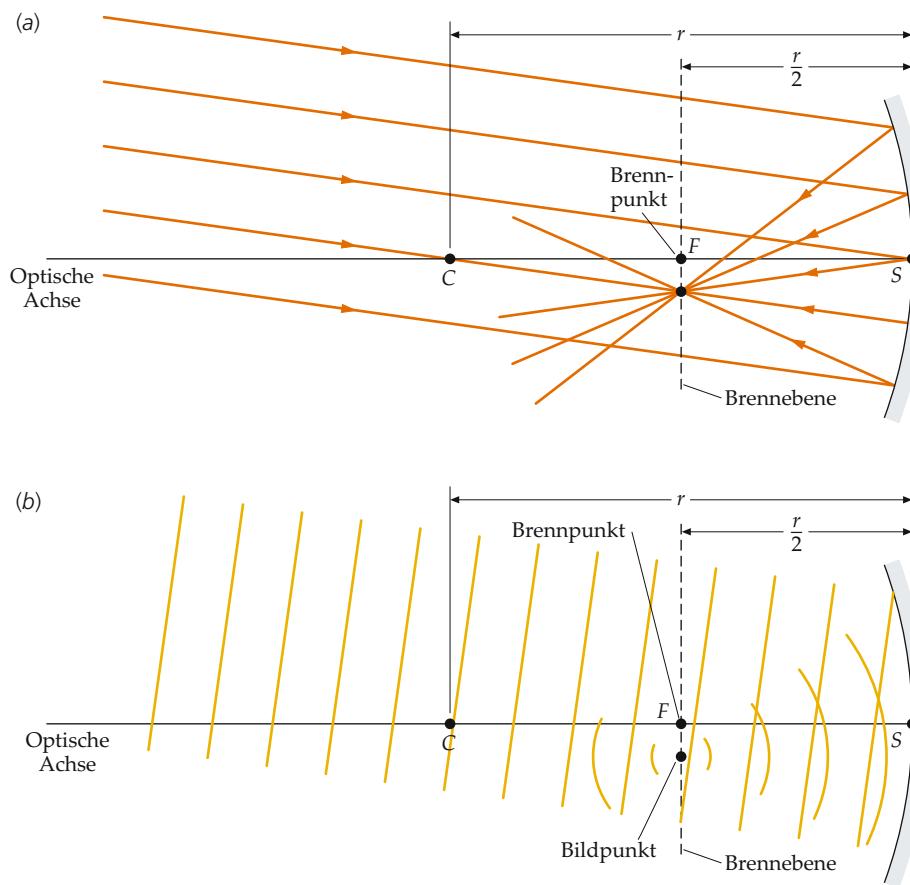


Abbildung 29.12 a) Parallele Strahlen treffen auf einen Konkavspiegel und werden in einen Punkt auf der Brennebene reflektiert, der vom Spiegel den Abstand $r/2$ hat und auf derselben Seite des Spiegels liegt wie die ankommenden Strahlen. b) Die einlaufenden Wellenfronten sind hier eben. Durch die Reflexion am Hohlspiegel werden sie kugelförmig, wobei ihr Mittelpunkt im Bildpunkt liegt; sie laufen also in ihm zusammen und von dort aus wieder auseinander.

ähnliche Dreiecke handelt, sind die Verhältnisse entsprechender Seiten gleich. Somit ist

$$\frac{B}{G} = -\frac{b}{g}. \quad (29.2)$$

Mit dem negativen Vorzeichen wird berücksichtigt, dass B/G negativ ist, da P und P' auf verschiedenen Seiten der Achse liegen. Wenn G positiv ist, ist B negativ und umgekehrt.

Übung 29.1: Zeigen Sie, dass in Abbildung 29.11 für die Abstände B des Bildpunkts und G des Gegenstandspunkts von der Achse folgende Beziehung gilt:

$$\frac{B}{G} = -\frac{r/2}{g - (r/2)}.$$

(Hinweis: Lösen Sie Gleichung 29.1 nach b auf und setzen Sie das Ergebnis in Gleichung 29.2 ein.) ▶

Wenn die Gegenstandsweite g viel größer als der Krümmungsradius r des Spiegels ist, dann ist der Ausdruck $1/g$ viel kleiner als $2/r$ und kann in Gleichung 29.1 vernachlässigt werden. Für $g \rightarrow \infty$ ergibt sich $b \rightarrow r/2$; das bedeutet, die Bildweite b ist für sehr weit entfernte Gegenstände praktisch gleich dem halben Radius. Dieser Abstand wird **Brennweite** f des Spiegels genannt. Die Ebene, in die parallel einfallende Strahlen fokussiert werden, heißt **Brennebene**. Deren Schnittpunkt mit der Achse nennt man **Brennpunkt** F ; er ist in Abbildung 29.12a illustriert. (Wiederum werden nur achsennahe Strahlen in einem einzigen Punkt fokussiert.) Die Brennweite ist gegeben durch

$$f = \frac{1}{2} r. \quad (29.3)$$

BRENNWEITE SPHÄRISCHER SPIEGEL

Da die Brennweite f eines sphärischen Spiegels halb so groß wie sein Krümmungsradius r ist, können wir $r = 2f$ in Gleichung 29.1 einsetzen. Damit ergibt sich die **Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel**:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (29.4)$$

ABBILDUNGSGEGLICHUNG FÜR SPHÄRISCHE SPIEGEL

Eine Anwendung dieser Beziehung wird in Beispiel 29.1 gezeigt.

Beispiel 29.1: Abbildung durch einen Konkavspiegel

Ein punktförmiger Gegenstand befindet sich 12 cm vor einem Konkavspiegel und 3,0 cm oberhalb von dessen Achse. Der Spiegel hat einen Krümmungsradius von 6,0 cm. Berechnen Sie a) die Brennweite des Spiegels, b) die Bildweite, c) den Abstand des Bildpunkts von der Achse.

Problembeschreibung: Die Brennweite eines sphärischen Spiegels ist halb so groß wie der Krümmungsradi-

radius. Bei bekannter Brennweite kann die Bildweite aus der Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel (Gleichung 29.4) berechnet werden. Für den Abstand des Bildpunkts von der Achse gilt Gleichung 29.2. Die Bildweite b ist der Abstand des Bilds von der Ebene, die im Scheitelpunkt S des Spiegels senkrecht auf dessen Achse steht.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Brennweite ist halb so groß wie der Krümmungsradius:

$$f = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} \cdot (6,0 \text{ cm}) = [3,0 \text{ cm}]$$

Teilaufgabe b

1. Verwenden Sie die Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel, um den Zusammenhang mit der Bildweite b zu ermitteln:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

2. Einsetzen der Werte und Auflösen nach b ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{4}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{12 \text{ cm}} = \frac{3}{12 \text{ cm}} \\ b &= [4,0 \text{ cm}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

1. Verwenden Sie Gleichung 29.2, um den Abstand B des Bildpunkts von der Achse zu ermitteln:

$$\frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$$

2. Errechnen Sie daraus B :

$$B = -\frac{b}{g} G = -\frac{4,0 \text{ cm}}{12,0 \text{ cm}} \cdot (3,0 \text{ cm}) = [-1,0 \text{ cm}]$$

Plausibilitätsprüfung: In Abbildung 29.13 sind zwei von der Pfeilspitze ausgehende Strahlen eingezeichnet, damit der entsprechende Bildpunkt lokalisiert werden kann. Am einfachsten ist es, den durch C verlaufenden Strahl und den am Scheitelpunkt S reflektierten Strahl einzuziehen. Ihr Schnittpunkt ergibt den Bildpunkt der Pfeilspitze. Der Skizze können wir entnehmen, dass die berechneten Ergebnisse plausibel sind.

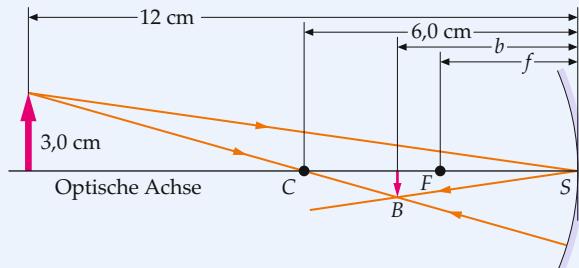


Abbildung 29.13 Skizze zum Konkavspiegel. ■

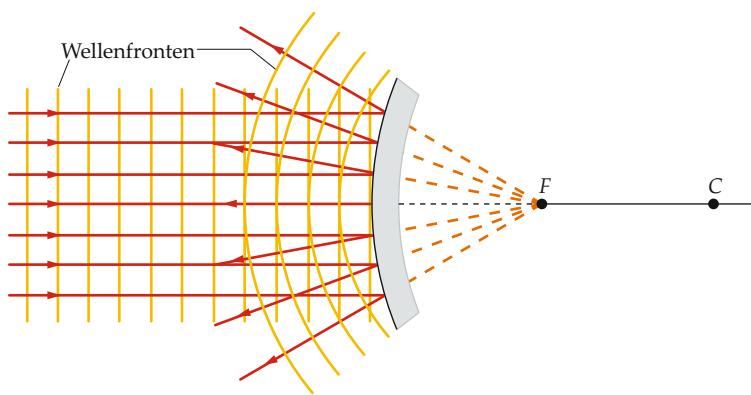


Abbildung 29.14 Reflexion ebener Wellen an einem Konvexspiegel. Die abgehenden Wellenfronten sind kugelförmig und scheinen vom Brennpunkt F hinter dem Spiegel auszugehen. Da die Strahlen auf den Wellenfronten senkrecht stehen, scheint ihr Ausgangspunkt im Brennpunkt F zu liegen.

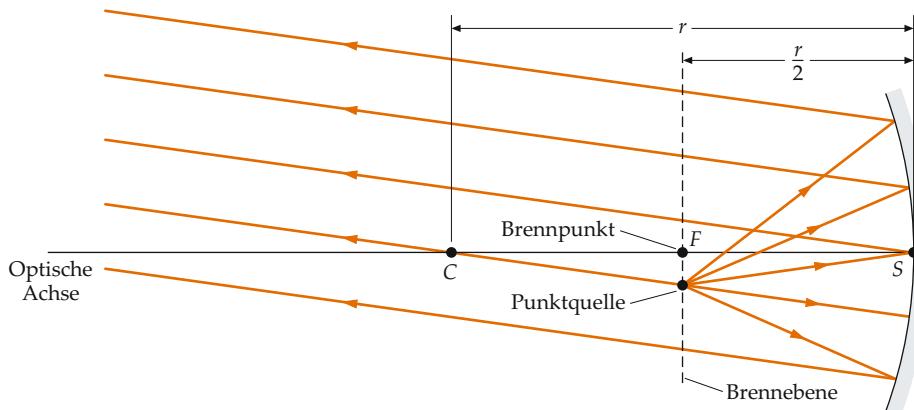


Abbildung 29.15 Zur Umkehrbarkeit des Lichtwegs. Achsennahe Strahlen, die von einer Punktquelle auf der Brennebene eines Konkavspiegels ausgehen, werden vom Spiegel als parallele Strahlen reflektiert. Alle Strahlen folgen hier den gleichen Wegen wie in Abbildung 29.12a, jedoch jeweils in Gegenrichtung.

Übung 29.2: Zeigen Sie, dass aus Gleichung 29.1 folgt:

$$b = \frac{r}{2 - r/g}.$$

Zeigen Sie dann, dass für $g \rightarrow \infty$ gilt: $b \rightarrow r/2$. ◀

Übung 29.3: Ein Konkavspiegel hat eine Brennweite von 4,0 cm. a) Wie groß ist sein Krümmungsradius? b) Wie groß ist die Bildweite eines Gegenstands, der sich 2,0 cm vor dem Spiegel befindet? ◀

Frage 29.3

Wie groß ist der Krümmungsradius eines ebenen Spiegels?

Wenn ein Gegenstandspunkt sehr weit vom Spiegel entfernt ist, sind die ihn erreichenden Strahlen nahezu parallel, und die Wellenfronten sind näherungsweise eben. In Abbildung 29.12b ist zu erkennen, dass der oberste Teil jeder Wellenfront zuerst auf

den Spiegel trifft und der unterste Teil zuletzt, und zwar unterhalb des Scheitelpunkts. Daher entsteht durch die Reflexion letztlich eine kugelförmige Wellenfront. Abbildung 29.14 zeigt im Vergleich dazu die Wellenfronten und auch die Strahlen ebener Wellen, die auf einen Konvexspiegel treffen. In diesem Fall gelangt der mittlere Teil jeder Wellenfront zuerst auf den Spiegel, und die reflektierten Wellenfronten scheinen vom Brennpunkt F hinter dem Spiegel auszugehen.

Abbildung 29.15 illustriert die **Umkehrbarkeit des Lichtwegs**. Wenn wir die Richtung eines reflektierten Strahls umkehren, muss der *nun* reflektierte Strahl gemäß dem Reflexionsgesetz entlang des ursprünglich ankommenden Strahls verlaufen, jedoch in Gegenrichtung. (Die Umkehrbarkeit des Lichtwegs gilt ebenso bei der Brechung, die in späteren Abschnitten besprochen wird.) Nehmen wir an, wir hatten ein reelles Bild eines Gegenstands durch Reflexion (oder Brechung) an einer Oberfläche erzeugt. Jetzt platzierten wir aber am Ort dieses Bilds einen Gegenstand; nun entsteht ein neues, reelles Bild am Ort des ursprünglichen Gegenstands.

Bildkonstruktion bei sphärischen Spiegeln

Wie die Bildkonstruktion am Hohlspiegel recht einfach durchzuführen ist, illustriert Abbildung 29.16. Der Gegenstand ist hier eine Figur, die senkrecht auf der Achse steht. Es bietet sich bei der Konstruktion an, vom Kopf der Figur ausgehende Strahlen heranzuziehen. Man verwendet dabei die sogenannten **Hauptstrahlen**:

- Der **achsenparallele Strahl** wird in den Brennpunkt reflektiert.
- Der **Brennpunktsstrahl** verläuft durch den Brennpunkt und wird achsenparallel reflektiert.
- Der **Mittelpunktsstrahl** verläuft durch den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, trifft diesen senkrecht zur Oberfläche und wird daher in sich selbst reflektiert.

HAUPTSTRAHLEN AN SPHÄRISCHEN SPIEGELN

Diese drei Hauptstrahlen sind mit ihren Reflexionen viel einfacher und sicherer zu konstruieren als alle anderen Strahlen. Wie aus Abbildung 29.16 hervorgeht, definiert bereits der Schnittpunkt zweier achsennaher Hauptstrahlen nach der Reflexion den Bildpunkt beispielsweise des Kopfs der Figur. Am besten zeichnet man zwei Hauptstrahlen, um den jeweiligen Bildpunkt zu ermitteln, und fügt dann den dritten zur Überprüfung hinzu. Noch einfacher ist die angenäherte Konstruktion, die in Abbildung 29.17 gezeigt ist. Dabei wird der gebogene Querschnitt des Spiegels durch eine Gerade ersetzt, die so lang gezeichnet wird, dass alle für die Zeichnung erforderlichen Hauptstrahlen sie treffen. (Beachten Sie, dass das Bild im vorliegenden Fall umgekehrt und kleiner als der Gegenstand ist.)

Wenn sich der Gegenstand zwischen dem Hohlspiegel und dessen Brennpunkt befindet, wie in Abbildung 29.18 gezeigt ist, laufen die von einem Gegenstandspunkt ausgehenden und dann reflektierten Strahlen nicht zusammen, sondern scheinen von einem Punkt hinter dem Spiegel auszugehen und von ihm auseinanderzulaufen. In diesem Fall ist das Bild virtuell und aufrecht (dabei ist mit *aufrecht* gemeint, dass das Bild dieselbe Ausrichtung wie der Gegenstand hat). Da sich der Gegenstand

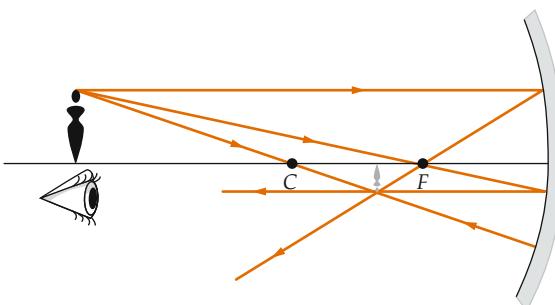


Abbildung 29.16 Konstruktion eines Bilds am Hohlspiegel mithilfe von drei Hauptstrahlen.

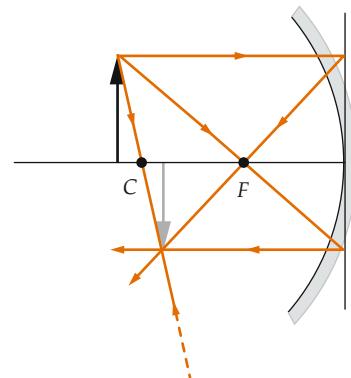


Abbildung 29.17 Die näherungsweise Konstruktion eines Bilds beim Hohlspiegel: Die kugelförmige Oberfläche wird durch eine Ebene ersetzt, die im Scheitelpunkt des Spiegels senkrecht auf dessen Achse steht.

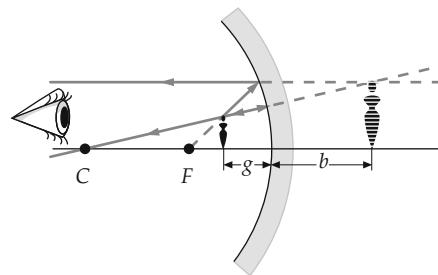


Abbildung 29.18 Beim Konkavspiegel entsteht ein virtuelles, aufrechtes und vergrößertes Bild, wenn sich der Gegenstand zwischen dem Brennpunkt und dem Hohlspiegel befindet, also innerhalb der Brennweite liegt. Der Mittelpunktsstrahl wird in sich selbst und der Brennpunktsstrahl achsenparallel reflektiert. Beide Strahlen werden hinter den Spiegel verlängert und schneiden sich im Bildpunkt. Die reflektierten Strahlen scheinen dann von ihm auszugehen. Anwendungsbeispiele für diese Art der Abbildung am Konkavspiegel sind Kosmetik- und Rasierspiegel.

zwischen Spiegel und Brennpunkt befindet, ist die Gegenstandsweite g kleiner als $r/2$. Daher ergibt sich mit Gleichung 29.1 eine negative Bildweite b . Wir können die Gleichungen 29.1, 29.2, 29.3 und 29.4 auf diesen Fall (und auch auf Konvexspiegel; s. u.) anwenden, wenn wir die Vorzeichen zweckmäßig wählen. Gleichgültig, ob der Spiegel konkav oder konvex ist: Ein reelles Bild kann nur vor dem Spiegel entstehen, also auf derselben Seite wie das reflektierte Licht (und der Gegenstand). Virtuelle Bilder entstehen nur hinter dem Spiegel, wo sich kein Lichtstrahl vom Gegenstand ausbreiten kann. Die Vorzeichenkonvention ist dabei folgende:

- Die Gegenstandsweite g ist positiv, wenn sich der Gegenstand auf der Seite des Spiegels befindet, von der aus das Licht auf den Spiegel fällt.
- Die Bildweite b ist positiv, wenn sich das Bild auf der Seite des Spiegels befindet, in die das Licht vom Spiegel reflektiert wird.

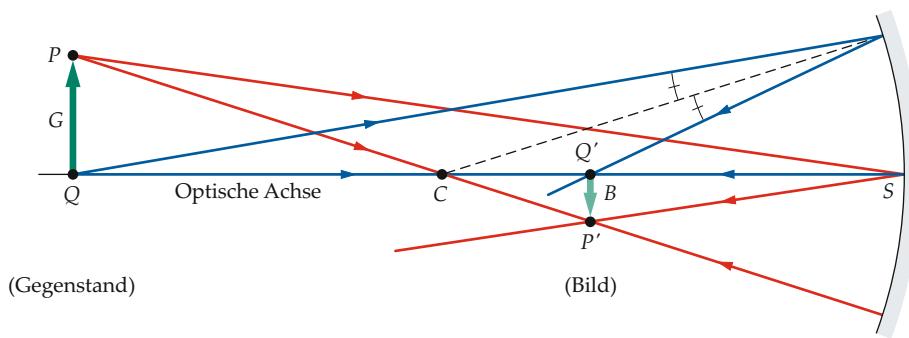


Abbildung 29.19 Zur Berechnung der Vergrößerung beim Hohlspiegel. Strahlen vom Punkt P an der Spitze des Gegenstands schneiden sich nach der Reflexion im Bildpunkt P' , und Strahlen vom Fußpunkt Q des Gegenstands schneiden sich nach der Reflexion im Bildpunkt Q' . Die Punkte P und P' haben von der Achse den Abstand G (Gegenstandshöhe) bzw. B (Bildhöhe). Die Vergrößerung V ist definiert als das Verhältnis B/G . Nach Gleichung 29.2 ist $B/G = -b/g$. Das negative Vorzeichen röhrt daher, dass B/G negativ ist, wenn sowohl g als auch b positiv sind. Eine negative Vergrößerung V bedeutet, dass das Bild umgekehrt ist.

3. Der Krümmungsradius r ist (wie daher auch die Brennweite f) positiv, wenn der Spiegel konkav ist. Dann liegt der Brennpunkt auf der Seite des Spiegels, auf der das Licht einfällt und in die es reflektiert wird.

VORZEICHENKONVENTION FÜR DIE REFLEXION AN EINEM KONKAV- ODER EINEM KONVEXPPIEGEL

Die Größen g , b , r und f sind sämtlich positiv, wenn sich ein reeller Gegenstandspunkt vor einem Konkavspiegel befindet und ein reelles Bild erzeugt wird. (Ein Gegenstandspunkt ist reell, wenn er sich auf der gleichen Seite des Spiegels wie das einfallende Licht befindet.) Eine dieser Größen ist dann negativ, wenn die für sie angegebene Bedingung für einen positiven Wert nicht erfüllt ist.

Das Verhältnis der Bildhöhe zur Gegenstandshöhe nennt man **Vergrößerung** oder **Abbildungsmaßstab**, zuweilen auch *Lateralvergrößerung*, im Unterschied zur Flächen- oder zur Winkelvergrößerung. Ihr Formelzeichen ist V . Der Abbildung 29.19 und der Gleichung 29.2 entnehmen wir, dass für die Vergrößerung gilt:

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}. \quad (29.5)$$

VERGRÖSSERUNG BEIM KONKAV- ODER BEIM KONVEXPPIEGEL

Eine negative Vergrößerung ergibt sich, wenn sowohl g als auch b positiv sind; ihr negativer Wert zeigt an, dass das Bild umgekehrt ist.

Bei einem ebenen Spiegel ist der Krümmungsradius unendlich groß. Die Brennweite, gegeben durch Gleichung 29.3, ist dann ebenfalls unendlich groß. Gemäß Gleichung 29.4 ist in diesem Fall $b = -g$. Das Bild liegt demnach hinter dem Spiegel, und sein Abstand von ihm ist ebenso groß wie der des Gegenstands. Gemäß Gleichung 29.5 ergibt sich die Vergrößerung zu $+1$. Das Bild ist somit aufrecht und ebenso hoch wie der Gegenstand.

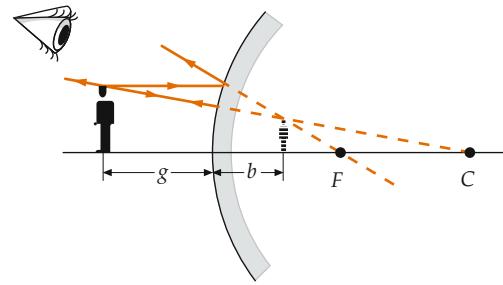


Abbildung 29.20 Bildkonstruktion beim Konvexspiegel.

Mit dieser Vorzeichenkonvention lassen sich die Gleichungen 29.1 bis 29.4 auf die verschiedenen möglichen Anordnungen recht einfach anwenden. Oft interessieren uns nur die Näherungswerte der Bildweite und der Vergrößerung, und wir wollen häufig auch nur wissen, ob das Bild reell oder virtuell und ob es aufrecht oder umgekehrt ist. Diese Informationen erhalten wir normalerweise am einfachsten, wenn wir den Strahlengang ähnlich wie in den vorigen Abbildungen zeichnen. Es empfiehlt sich stets, beim Ermitteln des Bilds die grafische mit der rechnerischen Methode zu kombinieren; dann können beide Ergebnisse zur Überprüfung miteinander verglichen werden.

Konvexspiegel

Abbildung 29.20 zeigt die Bildkonstruktion bei einem Konvexspiegel. Der Mittelpunktsstrahl, der durch den Krümmungsmittelpunkt C verläuft, steht senkrecht auf der Spiegeloberfläche und wird in sich selbst reflektiert. Der achsenparallele Strahl wird so reflektiert, als käme er vom Brennpunkt F hinter dem Spiegel. Der (nicht gezeigte) Brennpunktsstrahl verläuft in seiner Verlängerung durch den Brennpunkt und wird achsenparallel reflektiert. Der Abbildung entnehmen wir, dass das Bild hinter dem Spiegel liegt, also virtuell ist. Es ist aufrecht

und kleiner als der Gegenstand. Der Zusammenhang zwischen Vergrößerung, Bildweite und Gegenstandsweite wird in den Beispielen 29.2 und 29.3 behandelt.

Beispiel 29.2: Abbildung durch einen Konvexspiegel

Ein 2,0 cm hoher Gegenstand steht 10 cm vor einem Konvexspiegel, der einen Krümmungsradius von 10 cm hat. Berechnen Sie a) die Bildweite und b) die Bildhöhe.

Problembeschreibung: Die Bildkonstruktion ist dieselbe wie in Abbildung 29.20. Das Bild ist daher aufrecht, virtuell und verkleinert. Die Bildweite und die Bildhöhe berechnen wir mit der Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel, wobei $g = 10 \text{ cm}$ und $r = -10 \text{ cm}$ ist.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Für den Zusammenhang zwischen Bildweite b , Gegenstandsweite g und Brennweite f gilt die Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

2. Berechnen Sie die Brennweite des Spiegels:

$$f = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} \cdot (-10 \text{ cm}) = -5,0 \text{ cm}$$

3. Setzen Sie $g = 10 \text{ cm}$ und $f = -5,0 \text{ cm}$ in die Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel ein:

$$\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{-5,0 \text{ cm}}$$

4. Errechnen Sie daraus die Bildweite b :

$$b = [-3,3 \text{ cm}]$$

Teilaufgabe b

1. Die Bildhöhe ist gleich dem Produkt aus Vergrößerung und Gegenstandshöhe:

$$B = VG$$

2. Berechnen Sie zunächst die Vergrößerung V :

$$V = -\frac{b}{g} = -\frac{-3,3 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = +0,33$$

3. Mit der Vergrößerung V berechnen Sie nun die Bildhöhe:

$$B = VG = (0,33) \cdot (2,0 \text{ cm}) = [0,67 \text{ cm}]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Bildweite ist negativ; das Bild ist virtuell und liegt hinter dem Spiegel. Die Vergrößerung ist positiv und kleiner als eins; das Bild ist somit aufrecht und kleiner als der Gegenstand. Diese Ergebnisse stehen im Einklang mit den Gegebenheiten in Abbildung 29.21.

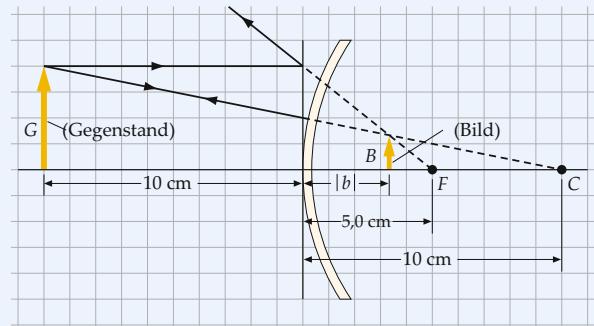


Abbildung 29.21 Skizze zum Konvexspiegel.

Übung 29.4: Berechnen Sie die Bildweite und die Lateralvergrößerung, wenn der Gegenstand 5,0 cm weit vor demselben Spiegel wie in diesem Beispiel steht. ◀ ■

Beispiel 29.3: Ermitteln der Bildweite

Nehmen Sie an, Ihr Onkel ist Geschäftsführer eines Golfclubs, dessen Anlage gerade umfassend umgestaltet wird. Die Spielbahn zwischen Abschlag und Grün beim 16. Loch soll nun auf den ersten 50,0 Metern waagerecht verlaufen und dann einem nicht sehr steilen Abhang folgen (Abbildung 29.22). Eine Gruppe von Spielern kann an diesem Abschlag nicht sehen, ob die vor ihr spielende Gruppe schon weit genug entfernt, also durch den Abschlag nicht mehr gefährdet ist. Daher soll hier auf einem Pfosten ein Konvexspiegel angebracht werden. Ihr Onkel weiß, dass Sie sich in Physik auskennen, und bittet Sie um Hilfe. Den Spielern soll an diesem Abschlag ein kleiner Entfernungsmesser zur Verfügung gestellt werden, mit dem sie feststellen können, wie weit sich das Bild hinter dem Spiegel befindet. Sie dürfen erst abschlagen, wenn die vorausgehende Gruppe mindestens 250 m weit entfernt ist. Wie groß ist bei dieser Gegenstandsweite die Bildweite, wenn der Spiegel einen Krümmungsradius mit einem Betrag von 20,0 m hat?

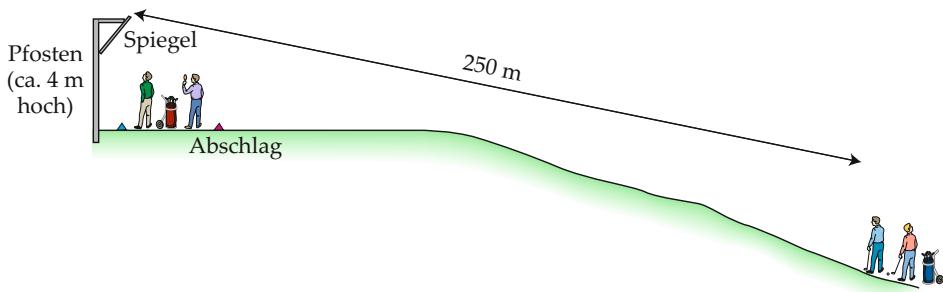


Abbildung 29.22 Darstellung des Konvexspiegels auf dem Golfplatz.

Problembeschreibung: Für den Zusammenhang zwischen Bildweite und Gegenstandsweite gilt die Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel. Die Brennweite eines Konvexspiegels ist halb so groß wie sein Krümmungsradius.

Lösung: 1. Verwenden Sie die Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel. Bei einem Konvexspiegel ist der Krümmungsradius negativ:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

und

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{250 \text{ m}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{-20,0 \text{ m}}$$

2. Das Bild befindet sich hinter dem Spiegel, denn die Bildweite ist negativ:

$$b = [-9,62 \text{ m}]$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Schritt 2 ist negativ, wie erwartet, denn das Bild liegt hinter dem Spiegel.

Übung 29.5: Wie weit ist die vorangehende Gruppe entfernt, wenn das Bild 9,75 m hinter dem Spiegel liegt? ▶ ■



a) Ein Konvexspiegel steht senkrecht auf einem Teppich mit einem Muster aus parallelen Streifen. Beachten Sie, dass im Spiegel wesentlich mehr Streifen als direkt zu sehen sind und dass das Bild der Streifen bei größerer Entfernung vom Spiegel stärker verzerrt ist. b) Ein Konvexspiegel zur Überwachung in einem Ländengeschäft. (© Richard Megna/Fundamental Photographs.)

29.2 Linsen

Durch Brechung erzeugte Bilder

Ein Ende eines langen Zylinders aus durchsichtigem Material wurde so bearbeitet und poliert, dass seine konvexe Oberfläche sphärisch ist. Abbildung 29.23 zeigt, wie durch Brechung an dieser Oberfläche das Bild P' des Punkts P entsteht. Der Zylinder befindet sich hier vollständig in einer durchsichtigen Flüssigkeit mit der Brechzahl n_1 und besteht aus einem Material mit der Brechzahl $n_2 > n_1$. Auch hier laufen nur achsennahe Strahlen in einem einzigen Punkt zusammen.

Wir wollen nun eine Gleichung aufstellen, die die Abhängigkeit der Bildweite b von der Gegenstandsweite g sowie vom Krümmungsradius r der Oberfläche und von den Brechzahlen n_1 und n_2 beschreibt (Abbildung 29.24). Bei der Herleitung müssen wir das Snellius'sche Brechungsgesetz heranziehen und für die einzelnen Strahlen die Näherung für kleine Winkel ansetzen.

Die Winkel θ_1 und θ_2 erfüllen das Snellius'sche Brechungsgesetz, sodass gilt: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. Mit der Näherung für kleine Winkel ($\sin \theta \approx \theta$) folgt daraus $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$. Beim Dreieck ACP' gilt für den Außenwinkel $\beta = \theta_2 + \gamma = (n_1/n_2) \theta_1 + \gamma$. Eine weitere Beziehung für θ_1 ergibt sich beim Dreieck PCA ; hier ist $\theta_1 = \alpha + \beta$. Eliminieren von θ_1 aus diesen beiden Beziehungen ergibt $n_1 \alpha + n_1 \beta + n_2 \gamma = n_2 \beta$. Das

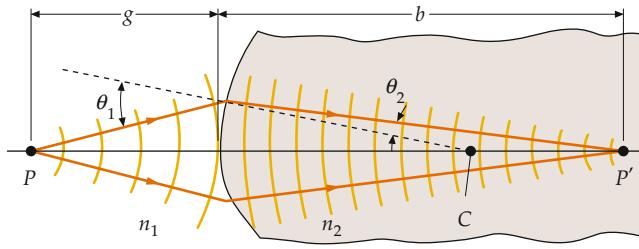


Abbildung 29.23 Hier wird ein Bild durch Brechung an einer sphärischen (kugelförmigen) Oberfläche erzeugt. Die Oberfläche trennt in diesem Fall zwei Medien, wobei sich die Lichtwellen im Medium 2 langsamer ausbreiten, da dessen Brechzahl höher ist.

kann vereinfacht werden zu $n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta$. Schließlich setzen wir die Näherungen für kleine Winkel an: $\alpha \approx l/g$ und $\beta \approx l/r$ sowie $\gamma \approx l/b$. Bei Gleichsetzung dieser jeweils näherungsweise gleichen Größen ergibt sich damit:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \quad (29.6)$$

BRECHUNG AN EINER EINZELNEN OBERFLÄCHE

Bei der Brechung entstehen reelle Bilder, und zwar (vom Gegenstand aus gesehen) hinter der brechenden Fläche; diese Seite wird *Transmissionsseite* („Durchlassseite“) genannt. Virtuelle Bilder dagegen entstehen auf der *Einfallsseite*, vor der brechenden Fläche. Die Vorzeichenkonvention für die Brechung ähnelt derjenigen für die Reflexion:

1. Die Gegenstandsweite g ist positiv für Gegenstände auf der Einfallsseite der brechenden Fläche.
2. Die Bildweite b ist positiv für Bilder auf der Transmissionsseite der brechenden Fläche.
3. Der Krümmungsradius r ist positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Transmissionsseite der brechenden Fläche liegt.

VORZEICHENKONVENTION FÜR DIE BRECHUNG

Die Größen g , b und r sind sämtlich positiv, wenn sich ein reeller Gegenstandspunkt vor einer konvexen brechenden Oberfläche befindet, die ein reelles Bild von diesem Punkt erzeugt. Eine dieser Größen ist dann negativ, wenn die für sie angegebene Bedingung für einen positiven Wert nicht erfüllt ist.

Mithilfe der Vorzeichenkonvention lässt sich, wie Beispiel 29.4 zeigt, eine Formel für die Vergrößerung durch eine sphärische brechende Fläche herleiten. Sie lautet:

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{n_1 b}{n_2 g}. \quad (29.7)$$

VERGRÖSSERUNG DURCH EINE BRECHENDE FLÄCHE

In den Beispielen 29.5 und 29.6 wird dieser Zusammenhang in Verbindung mit Gleichung 29.6 angewendet.

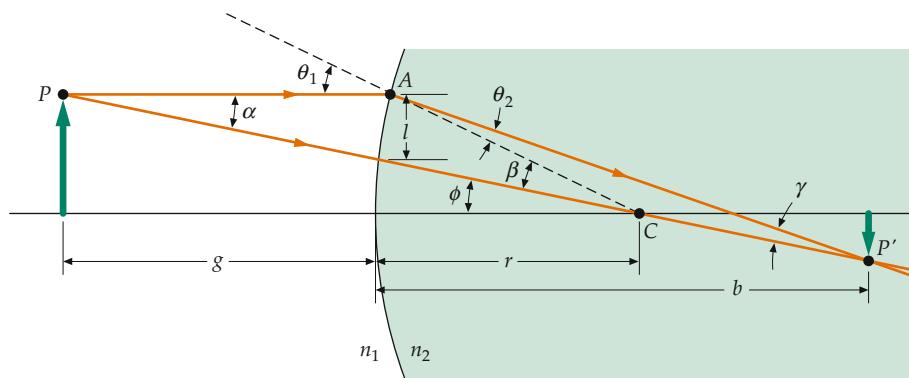


Abbildung 29.24 Zur Berechnung der Bildweite b aus der Gegenstandsweite g bei der Brechung an einer einzelnen sphärischen Oberfläche.

Beispiel 29.4: Vergrößerung durch eine brechende Oberfläche**ZUR ÜBUNG**

Leiten Sie einen Ausdruck für die Vergrößerung $V = B/G$ bei einem Bild her, das durch eine sphärische brechende Oberfläche erzeugt wird.

Problembeschreibung: Die Vergrößerung ist der Quotient aus B und G . Verwenden Sie die Abbildungen 29.19 und 29.24 als Leitfaden und zeichnen Sie die Bildkonstruktion für die Herleitung. Die Bildhöhe und die Gegenstandshöhe hängen, wie in Abbildung 29.25 gezeigt ist, mit den Größen $\tan \theta_1$ und $\tan \theta_2$ zusammen. Für diese Winkel gilt das Snellius'sche Brechungsgesetz. Bei achsennahen Strahlen können Sie folgende Näherungen ansetzen: $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ und $\cos \theta \approx 1$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Zeichnen Sie, wie in der Problembeschreibung erläutert, die Bildkonstruktion. Sie muss mindestens einen Gegenstand, ein reelles Bild, eine brechende Fläche und eine Achse enthalten. Zeichnen Sie nun einen einfallenden Strahl von der Oberkante des Gegenstands zum Schnittpunkt der Achse mit der brechenden Fläche und dann den gebrochenen Strahl zum zugehörigen Bildpunkt.

2. Stellen Sie Ausdrücke auf, die die Größen $\tan \theta_1$ und $\tan \theta_2$ in Abhängigkeit von der Gegenstandshöhe G und der Bildhöhe $-B$ sowie von der Gegenstandsweite g und der Bildweite b beschreiben (Da B negativ ist, müssen Sie $-B$ einsetzen, damit $\tan \theta_2$ positiv wird.).

3. Wenden Sie auf Ihre Ausdrücke die Näherung für kleine Winkel ($\tan \theta \approx \theta$) an.

4. Stellen Sie das Snellius'sche Brechungsgesetz für die Winkel θ_1 und θ_2 auf und wenden Sie auch hierauf die Näherung für kleine Winkel ($\sin \theta \approx \theta$) an.

5. Setzen Sie die in Schritt 3 erhaltenen Ausdrücke für θ_1 und θ_2 in das Ergebnis von Schritt 4 ein.

6. Lösen Sie nach der Vergrößerung $V = B/G$ auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

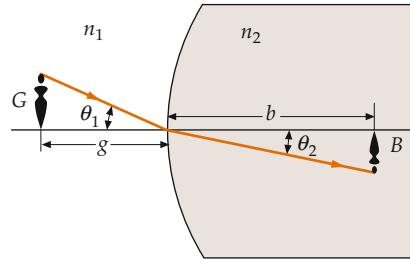


Abbildung 29.25 Darstellung der Gegenstands- und der Bildhöhe für eine sphärische brechende Oberfläche.

2.

$$\tan \theta_1 = \frac{G}{g}; \quad \tan \theta_2 = \frac{-B}{b}$$

3.

$$\theta_1 = \frac{G}{g}; \quad \theta_2 = \frac{-B}{b}$$

4.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$$

5.

$$n_1 \frac{G}{g} = n_2 \frac{-B}{b}$$

6.

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{n_1 b}{n_2 g}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Schritt 6 für die Vergrößerung ist dimensionslos, wie erwartet.

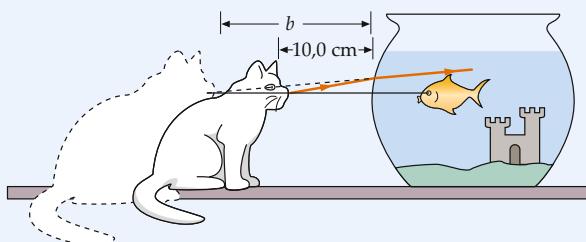
Beispiel 29.5: Kater und Goldfisch

Abbildung 29.26 Jonas sieht das Bild von Tommy weiter von der Glaswand entfernt, als dieser tatsächlich ist.

Ihr Goldfisch Jonas schwimmt in einem kugelförmigen Gefäß, das einen Radius von 15,0 cm hat und Wasser (mit der Brechzahl 1,33) enthält. Tommy, Ihr Kater, sitzt dicht davor auf dem Tisch, wobei seine Nase 10,0 cm von der Glaswand des Gefäßes entfernt ist (Abbildung 29.26). Das Licht von Tommys Nase wird an der Luft-Wasser-Grenzfläche gebrochen, und Jonas sieht ein entsprechendes Bild des Katers. Berechnen Sie a) die Bildweite und b) die Vergrößerung bei dem Bild, das Jonas von Tommys Nase sieht. Vernachlässigen Sie alle Effekte, die von der dünnen Glaswand des Gefäßes herrühren.

Problembeschreibung: Ermitteln Sie die Bildweite b mit Gleichung 29.6 und die Vergrößerung mit Gleichung 29.7. Da Sie sich für das Licht interessieren, das von Tommys Nase ausgehend in das Gefäß eintritt, ist die brechende Luft-Wasser-Grenzfläche konvex. Die Luft befindet sich daher auf der Einfallssseite und das Wasser auf der Transmissionsseite. Damit ist $n_1 = 1,00$ und $n_2 = 1,33$ sowie $g = +10,0 \text{ cm}$ und $r = +15,0 \text{ cm}$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Den Zusammenhang zwischen der Gegenstandsweite g und der Bildweite b gibt Gleichung 29.6:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

2. Notieren Sie die Werte und überprüfen Sie die Vorzeichen:

$$n_1 = 1,00; n_2 = 1,33;$$

$$g = +10,0 \text{ cm}; r = +15,0 \text{ cm}$$

3. Setzen Sie die Zahlenwerte ein und berechnen Sie b :

$$\frac{1,00}{10,0 \text{ cm}} + \frac{1,33}{b} = \frac{1,33 - 1,00}{15,0 \text{ cm}}$$

Damit ist

$$b = \boxed{-17,1 \text{ cm}}$$

Teilaufgabe b

1. Setzen Sie die Zahlenwerte in Gleichung 29.7 ein, um die Vergrößerung V zu ermitteln:

$$V = -\frac{n_1 b}{n_2 g} = -\frac{(1,00) \cdot (-17,1 \text{ cm})}{(1,33) \cdot (10,0 \text{ cm})} = \boxed{1,29}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Bildweite b ist negativ; das Bild ist somit virtuell und liegt auf derselben Seite der brechenden Fläche wie der Gegenstand (abgewandt vom gebrochenen Licht), wie in Abbildung 29.26 gezeigt. Jonas sieht Tommy weiter entfernt ($|b| > g$) und größer ($|V| > 1$), als er tatsächlich ist. Die Vergrößerung V ist positiv; das Bild ist also aufrecht.

Übung 29.6: Nehmen Sie an, Jonas' Maul ist 7,5 cm vom Gefäßrand entfernt und dabei Tommy zugewandt. Berechnen Sie a) die Bildweite und b) die Vergrößerung von Jonas' Bild, wie es Tommy sieht. ◀

Übung 29.7: Das kugelförmige Glas wurde durch ein Aquarium mit ebenen Wänden ersetzt, und Jonas befindet sich 7,5 cm von der Wand entfernt, vor der Tommy sitzt. Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 29.6 den Ort, an dem sich das Bild von Tommy befindet, das Jonas sieht. ◀

Beispiel 29.6: Scheinbare Tiefe im Wasser

Im Sommer lassen Sie Ihren Goldfisch Jonas die meiste Zeit im Gartenteich schwimmen. Während er in 1,00 m Tiefe seine Bahnen zieht, lauert Ihr Kater Tommy auf einem Baum, 3,00 m über der Wasseroberfläche. Wie weit unter der Wasseroberfläche liegt das Bild des Fisches, das Tommy sieht? (Die Brechzahl von Wasser ist 1,33.)

Problembeschreibung: Die brechende Fläche ist die Oberfläche des Teichs und damit eine sphärische Oberfläche; deren Krümmungsradius ist derjenige der Erdoberfläche. (Da wir ihre Krümmung vernachlässigen können, ist $r \approx \infty$.) Daher ist Gleichung 29.6 anwendbar. Das Licht, das Tommy erreicht, geht von Punkten innerhalb des Wassers aus. Also setzen wir $n_1 = 1,33$ und $n_2 = 1,00$.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die Situation und zeichnen Sie die Gegenstandsweiten sowie die Brechzahlen der beiden Medien ein. Der Gegenstand ist der Goldfisch Jonas (Abbildung 29.27):

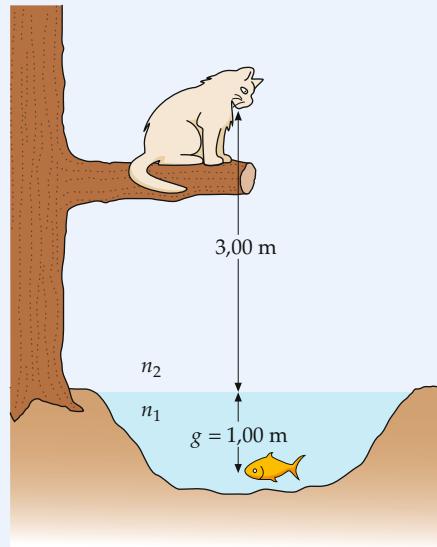


Abbildung 29.27 Skizze des Problems.

2. Verwenden Sie Gleichung 29.6, die die Abhängigkeit der Bildweite b von den anderen relevanten Größen beschreibt:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

3. Die brechende Fläche ist praktisch eben. Setzen Sie daher $r = \infty$ und lösen Sie nach b auf:

$$b = -\frac{n_2}{n_1} g$$

4. Die gegebenen Werte sind $n_1 = 1,33$ und $n_2 = 1,00$ sowie $g = 1,00 \text{ m}$. Einsetzen ergibt:

$$b = -\frac{1,00}{1,33} \cdot (1,00 \text{ m}) = \boxed{-0,752 \text{ m}}$$

Die Bildweite ist negativ; das Bild liegt somit auf derselben Seite der brechenden Fläche wie der Gegenstand. Tommy sieht Jonas nur 0,752 m unter der Wasserfläche.

Plausibilitätsprüfung: Das Bild befindet sich zwischen dem Goldfisch und der Wasseroberfläche. Sicher haben Sie schon beobachtet, dass ein schräg in Wasser eingetauchter Stab – von schräg oben betrachtet – an der Eintauchstelle nach oben abgeknickt erscheint.

Weitergedacht: 1) Diese Berechnung der Bildweite setzt voraus, dass der Gegenstand ungefähr senkrecht von oben betrachtet wird. In diesem Fall sind die Strahlen achsennah, was eine Bedingung für die Anwendung von Gleichung 29.6 ist. Säße Tommy am Rand des Teichs, ergäbe diese Gleichung nicht den richtigen Ort des Bilds. 2) Den Abstand $(n_2/n_1) g$ nennt man *scheinbare Tiefe* des Gegenstands. Im vorliegenden Fall ist $n_2 = 1$ (denn das Medium 2 ist die Luft), und die scheinbare Tiefe ist g/n_1 .

Frage 29.4

Skizzieren Sie die Bildkonstruktion für die Gegebenheiten von Beispiel 29.6. Dabei sind mehrere Strahlen einzuziehen, die von einem Gegenstandspunkt P an Jonas ausgehen. Zeigen Sie, dass die Strahlen nach der Brechung von einem Bildpunkt P' auszugehen scheinen, der ein wenig oberhalb des Gegenstandspunkts liegt.

Dünne Linsen

Eine sehr wichtige Anwendung von Gleichung 29.6 für die Brechung an einer Oberfläche ist das Berechnen der Bildweite von Bildern, die durch eine Linse erzeugt werden. Dazu wird die Brechung an jeder Oberfläche der Linse zunächst für sich betrachtet und damit eine Gleichung hergeleitet, die die Bildweite in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite sowie von den Krümmungsradien der Linsenflächen und von der Brechzahl des Linsenmaterials angibt.

Wir betrachten eine dünne Linse, deren Material die Brechzahl n hat und die beiderseits von Luft umgeben ist. Die Krümmungsradien der beiden Linsenoberflächen sind r_1 und r_2 . Der Gegenstand hat von der ersten Oberfläche (und damit praktisch auch von der Linse, weil sie dünn ist) den Abstand g . Wir können dann die Bildweite b_1 des durch Brechung an der ersten Oberfläche entstehenden Bilds mithilfe von Gleichung 29.6 berechnen:

$$\frac{n_{\text{Luft}}}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n - n_{\text{Luft}}}{r_1}. \quad (29.8)$$

Das an der ersten Oberfläche gebrochene Licht wird an der zweiten Oberfläche erneut gebrochen. Abbildung 29.28 zeigt das für den Fall, dass die Bildweite b_1 für die Brechung an der

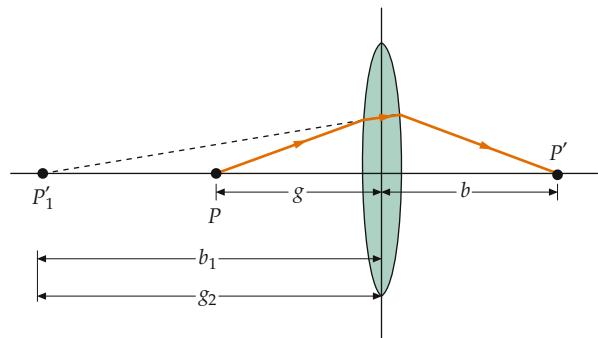


Abbildung 29.28 An beiden Oberflächen einer Linse tritt Brechung auf. Hier führt sie an der ersten Oberfläche zu einem virtuellen Bild bei P'_1 . Die Strahlen treffen so auf die zweite Oberfläche, als gingen sie vom Punkt P'_1 aus. Die Bildweite ist negativ, wenn sich das Bild auf der Einfallsseite der brechenden Oberfläche befindet, während die Gegenstandsweite auf derselben Seite positiv ist. Daher ist $g_2 = -b_1$ die Gegenstandsweite bei der zweiten Oberfläche der Linse.

ersten Oberfläche negativ ist; es ergibt sich ein virtuelles Bild links von der ersten Oberfläche. Die an ihr gebrochenen Strahlen verlaufen daher innerhalb der Linse so, als gingen sie vom Bildpunkt P'_1 aus. Sie treffen dann in solchen Winkeln auf die zweite Oberfläche, als befände sich beim Bildpunkt P'_1 ein Gegenstand. Anders ausgedrückt: Das von der ersten Oberfläche entworfene Bild dient als virtueller Gegenstand für die Abbildung durch die zweite Oberfläche. Wir setzen voraus, dass die Linse sehr dünn ist; dann hat die Gegenstandsweite g_2 für die Brechung an der zweiten Oberfläche den gleichen Betrag wie die Bildweite b_1 . Gegenstandsweiten für Gegenstände auf der Einfallsseite einer Oberfläche sind positiv, während Bildweiten für Bilder auf derselben Seite negativ sind. Daher ist die Gegenstandsweite für die zweite Oberfläche $g_2 = -b_1$. (Wäre b_1 positiv, würden die Strahlen auf dem Weg zur zweiten Oberfläche zusammenlaufen. Der Gegenstand für die Abbildung durch die zweite Oberfläche wäre dann ein virtueller Gegenstand rechts von ihr. Auch hier wäre $g_2 = -b_1$.) Wir wenden Gleichung 29.6 nun auf die Brechung an der zweiten Oberfläche an, wobei $n_1 = n$ und $n_2 = n_{\text{Luft}}$ sowie $g = -b_1$ ist. Die Bildweite bei der zweiten Oberfläche ist die Bildweite b des von der Linse erzeugten *Endbilds*:

$$\frac{n}{-b_1} + \frac{n_{\text{Luft}}}{b} = \frac{n_{\text{Luft}} - n}{r_2}. \quad (29.9)$$

Wir können die Bildweite $-b_1$ bei der ersten Oberfläche aus dieser Gleichung eliminieren, indem wir die Gleichungen 29.8 und 29.9 addieren:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \left(\frac{n}{n_{\text{Luft}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (29.10)$$

Diese Gleichung verknüpft die Bildweite b mit der Gegenstandsweite g und mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 der dünnen Linse sowie mit der Brechzahl n des Linsenmaterials.

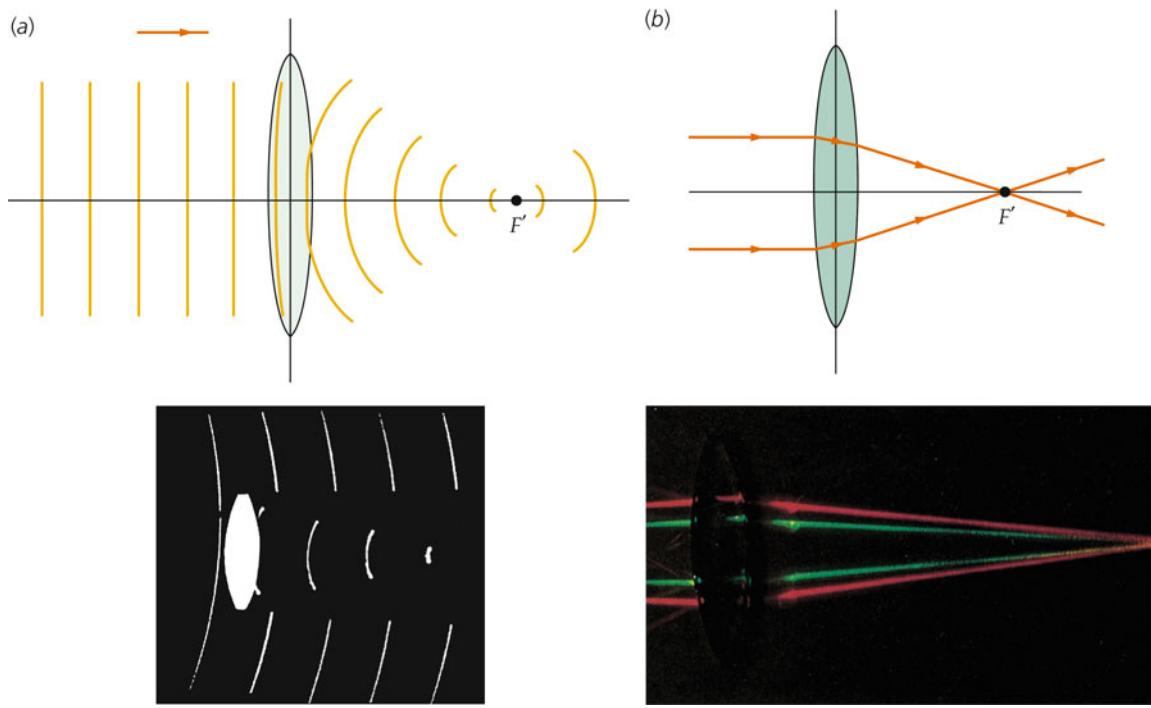


Abbildung 29.29 a) Wellenfronten einer ebenen Welle, die auf eine Sammellinse trifft. Der achsennahe, mittlere Teil bleibt gegenüber den äußeren Teilen zurück. Die Strahlen der resultierenden sphärischen Welle laufen im Brennpunkt F' zusammen. Das Foto der entsprechenden Wellenfronten wurde mithilfe eines gepulsten Lasers holografisch aufgenommen. b) Die Strahlen einer ebenen Welle, die auf eine Sammellinse trifft. Sie werden an jeder der zwei Oberflächen gebrochen und laufen schließlich im Brennpunkt zusammen. (a) © Nils Abramson, b) © Fundamental Photographs.)

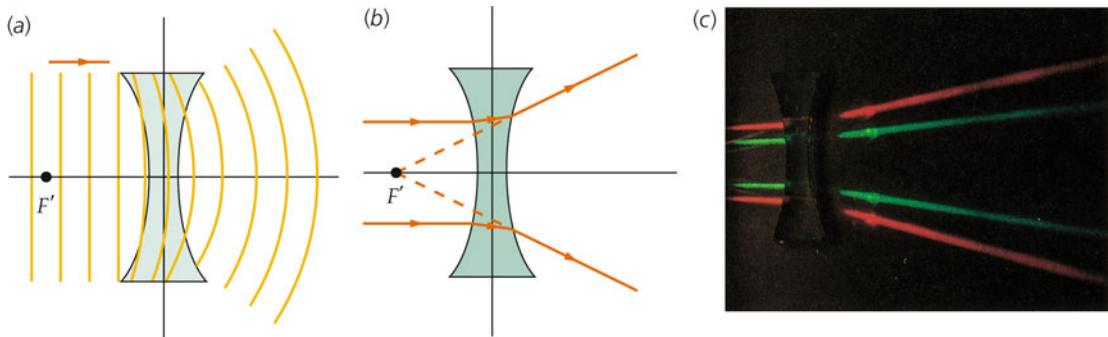


Abbildung 29.30 a) Wellenfronten einer ebenen Welle, die auf eine Zerstreuungslinse trifft. Hier bleiben die äußeren, achsenfernen Teile der Wellenfront gegenüber dem mittleren Teil zurück, und die resultierenden kugelförmigen Wellenfronten laufen auseinander, als kämen sie vom Brennpunkt F' links von der Linse. b) Die Strahlen dieser ebenen Welle, die auf die gleiche Zerstreuungslinse trifft. Sie werden nach außen gebrochen und laufen auseinander, als gingen sie vom Brennpunkt F' aus. c) Ein Foto von Strahlen, die auf diese Art nach außen gebrochen werden, sodass sie divergieren (auseinanderlaufen). (© Fundamental Photographs.)

Wie bei sphärischen Spiegeln ist die Brennweite f einer dünnen Linse als die Bildweite bei einem unendlich weit entfernten Gegenstand definiert. Wir setzen also $g = \infty$ und ersetzen die Bildweite b durch die Brennweite f . Das ergibt

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\text{Luft}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (29.11)$$

REZIPROKE BRENNWEITE DÜNNER LINSEN

Diese Beziehung gibt an, wie die Brennweite einer dünnen Linse von ihren Eigenschaften abhängt. Die rechten Seiten der Gleichungen 29.10 und 29.11 sind identisch. Daher sind ihre linken Seiten ebenfalls gleich:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (29.12)$$

ABBLUDUNGSGEICHUNG FÜR DÜNNNE LINSEN

Diese Beziehung heißt **Abbildungsgleichung für dünne Linsen** oder kurz **Linsengleichung**. Sie entspricht der Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel (Gleichung 29.4). Beachten Sie jedoch, dass sich die Vorzeichenkonvention für die Brechung von derjenigen für die Reflexion unterscheidet. Bei Linsen (d. h. bei der Brechung) ist die Bildweite b positiv, wenn das Bild auf der Transmissionsseite liegt, d. h. auf der dem Gegenstand abgewandten Seite. Für die Brennweite von Linsen gemäß Gleichung 29.11 gilt die Vorzeichenkonvention für eine einzelne brechende Oberfläche. Dementsprechend ist r positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der gleichen Seite der Oberfläche liegt wie das gebrochene Licht. Bei einer Linse wie derjenigen in Abbildung 29.28 ist r_1 positiv und r_2 negativ, sodass f positiv ist.

Abbildung 29.29a zeigt die Wellenfronten einer ebenen Welle, die auf eine *bikonvexe Linse* trifft, also auf eine Linse, deren brechende Oberflächen beide konvex sind. Der mittlere, achsennahe Teil der Welle trifft zuerst auf die Linse. Da bei $n > n_{\text{Luft}} \approx 1,0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle innerhalb der Linse kleiner ist als in Luft, bleibt der mittlere Teil der Wellenfronten nach dem Austritt aus der Linse, die in der Mitte dicker ist, hinter den äußeren, achsenfernen Teilen zurück. Dadurch entstehen kugelförmige Wellenfronten, die im Brennpunkt F' zusammenlaufen. Der Strahlengang ist in Abbildung 29.29b gezeigt und wird in Beispiel 29.7 näher betrachtet. Wegen des Zusammenlaufens der Strahlen nennt man eine solche Linse **Sammellinse**. Da ihre Brennweite gemäß Gleichung 29.11 positiv ist, wird sie auch *positive Linse* genannt. Jede Linse, die in der Mitte dicker ist als außen, wirkt als Sammellinse, sofern die Brechzahl des Linsenmaterials größer ist als die des umgebenden Mediums.

Beispiel 29.7: Die Brennweite einer Linse

Eine **bikonvexe dünne Linse** besteht aus Glas mit der Brechzahl $n = 1,50$. Ihre Krümmungsradien sind **10 cm** und **15 cm**, wie in Abbildung 29.31 gezeigt. Berechnen Sie ihre Brennweite.

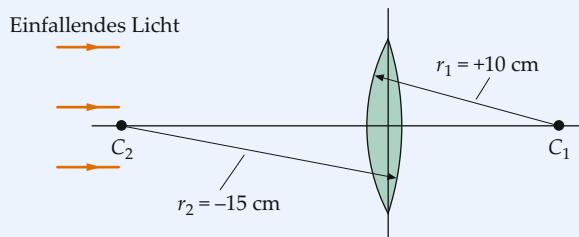


Abbildung 29.31 Bikonvexe dünne Linse.

Problembeschreibung: Sie können die Brennweite mithilfe von Gleichung 29.11 berechnen. Im vorliegenden Fall trifft das Licht auf die Oberfläche mit dem kleineren Krümmungsradius. Ihr Krümmungsmittelpunkt C_1 liegt auf der Transmissionsseite der Linse; daher ist

$r_1 = +10 \text{ cm}$. Der Krümmungsmittelpunkt C_2 der zweiten Oberfläche befindet sich auf der Einfallsseite, sodass $r_2 = -15 \text{ cm}$ ist.

Lösung: 1. Einsetzen der Zahlenwerte in Gleichung 29.11 ergibt die Brennweite f :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \left(\frac{n}{n_{\text{Luft}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \left(\frac{1,50}{1,00} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{-15 \text{ cm}} \right) \\ &= 0,50 \cdot \left(\frac{5,0}{30 \text{ cm}} \right) \end{aligned}$$

$$f = 12 \text{ cm}$$

Plausibilitätsprüfung: Die berechnete Brennweite ist positiv, wie erwartet; denn die Linse ist in der Mitte dicker als am Rand.

Übung 29.8: Das Glas einer dünnen Bikonvexlinse hat die Brechzahl $n = 1,6$. Ihre beiden Oberflächen haben Krümmungsradien mit gleichem Betrag, und ihre Brennweite beträgt 15 cm. Welchen Betrag hat der Krümmungsradius jeder Oberfläche? ▶

Übung 29.9: Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn man in diesem Beispiel 29.7 die Richtung des auf die Linse treffenden Lichts umkehrt, sodass es auf die Oberfläche mit dem größeren Krümmungsradius fällt, ergibt sich für die Brennweite derselbe Wert. ▶ ■

Abbildung 29.30 zeigt die Wellenfronten und die Strahlen einer ebenen Welle, die auf eine *bikonkav Linse* trifft. Hier bleiben die äußeren Teile der Wellenfronten gegenüber dem mittleren Teil zurück, und es bilden sich sphärische Wellenfronten, die vom Brennpunkt auf der Einfallsseite der Linse auszugehen scheinen. Jede Linse, die in der Mitte dünner ist als am Rand, wirkt als **Zerstreuungslinse**, wenn die Brechzahl des Linsenmaterials kleiner ist als die des umgebenden Mediums. Dann ist ihre Brennweite negativ, und man nennt sie auch *negative Linse*.

Wenn paralleles Licht, von links kommend, auf die Sammellinse von Beispiel 29.7 trifft, dann wird es in einem Punkt fokussiert, der 12 cm rechts von der Linse liegt. Fällt paralleles Licht von rechts auf die Linse, so wird es in einem Punkt 12 cm links von ihr fokussiert. Diese beiden Punkte sind die Brennpunkte der Linse. Wegen der Umkehrbarkeit des Lichtwegs verlassen also Lichtstrahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen und auf eine Sammellinse treffen, diese als achsenparallele Strahlen (Abbildung 29.32). Wenn Lichtstrahlen von einem Gegenstandspunkt ausgehen und danach die Linse achsenparallel verlassen, so ist dieser Punkt der **erste Brennpunkt F** der Linse. Entsprechend ist der **zweite Brennpunkt F'** derjenige Punkt,

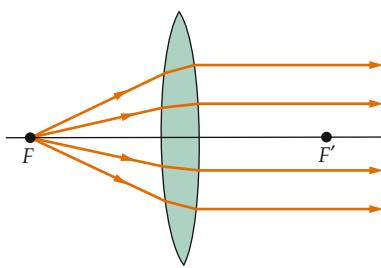


Abbildung 29.32 Lichtstrahlen, die vom Brennpunkt einer Sammellinse ausgehen, treten achsenparallel aus.

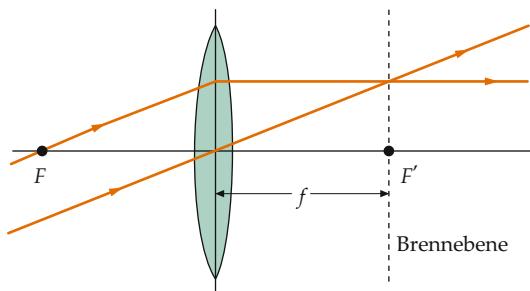


Abbildung 29.33 Hier fallen parallele Lichtstrahlen unter einem kleinen Winkel zur Achse auf die Linse. Sie werden in einem Punkt in der Brennebene fokussiert.

in dem achsenparallel einfallende Strahlen fokussiert werden. Bei einer Sammellinse liegt der erste Brennpunkt auf der Einfallsseite und der zweite Brennpunkt auf der Transmissionsseite. (Bei einer Zerstreuungslinse ist dies umgekehrt.) Wenn parallele Lichtstrahlen unter einem kleinen Winkel zur Achse auf eine Sammellinse einfallen, wie in Abbildung 29.33 gezeigt, werden sie in einem Punkt in der **Brennebene** fokussiert. Diese hat von der Linsenmitte den Abstand f , der gleich der Brennweite ist.

Den Kehrwert der Brennweite einer Linse nennt man **Brechkraft**:

$$D = \frac{1}{f}. \quad (29.13)$$

Die Brechkraft wird meist in reziproken Metern angegeben. Diese Einheit heißt **Dioptrie** und hat das Einheitenzeichen dpt. Die Brechkraft einer Linse ist sozusagen ein Maß für ihre Fähigkeit, paralleles Licht zu bündeln: Je kürzer die Brennweite ist, desto höher ist die Brechkraft. Beispielsweise hat eine Linse mit der Brennweite 25 cm = 0,25 m eine Brechkraft von 4,0 dpt. Bei einer Zerstreuungslinse ist die Brennweite negativ, und daher auch ihre Brechkraft.

In der Praxis ist es gewöhnlich viel einfacher, die Brennweite zu messen, als sie aus den Krümmungsradien der Oberflächen zu berechnen, wie es Beispiel 29.8 zeigt.

Beispiel 29.8: Die Brechkraft einer Linse

Die in Abbildung 29.34 dargestellte Linse hat Krümmungsradien mit den Beträgen 10,0 cm und 13,0 cm. Ihr Glas hat die Brechzahl 1,50. Berechnen Sie a) die Brennweite und b) die Brechkraft.

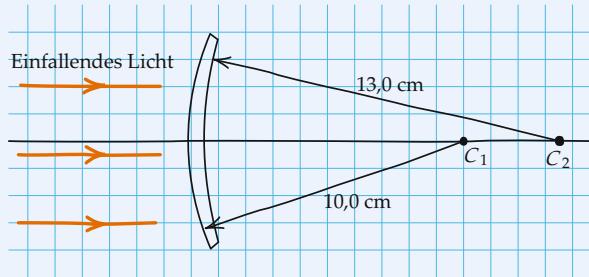


Abbildung 29.34 Skizze der Linse mit zwei unterschiedlichen Krümmungsradien.

Problembeschreibung: In Abbildung 29.34 ist die Orientierung der Linse relativ zum einfallenden Licht gezeigt. Der Krümmungsradius der ersten Oberfläche ist $r_1 = +10,0 \text{ cm}$, derjenige der zweiten Oberfläche $r_2 = +13,0 \text{ cm}$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Berechnen Sie die Brennweite f mit Gleichung 29.11 und setzen Sie dabei die gegebenen Werte von n sowie von r_1 und r_2 ein:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \left(\frac{n}{n_{\text{Luft}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \left(\frac{1,50}{1,00} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{10,0 \text{ cm}} - \frac{1}{13,0 \text{ cm}} \right) \end{aligned}$$

$$f = 0,867 \text{ m} = \boxed{87 \text{ cm}}$$

Teilaufgabe b

1. Die Brechkraft ist der Kehrwert der in Metern angegebenen Brennweite:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,867 \text{ m}} = \boxed{1,2 \text{ dpt}}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Werte für die Brennweite und für die Brechkraft sind positiv. Das muss so sein, weil die Linse in der Mitte dicker als am Rand ist.

Weitergedacht: Sie erhalten die gleichen Werte, wenn das Licht zuerst auf die andere Oberfläche trifft. ■

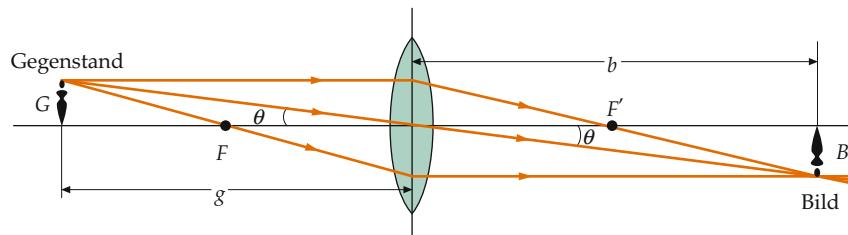


Abbildung 29.35 Bildkonstruktion bei einer dünnen Sammellinse. Der durch die Linsenmitte verlaufende Mittelpunktsstrahl wird so gezeichnet, als würde er gar nicht abgelenkt, denn er passiert zwei parallel, dicht beieinander liegende Oberflächenstücke.

Die Bildkonstruktion bei Linsen

Wie bei den Abbildungen durch sphärische Spiegel lassen sich auch die durch Linsen erzeugten Bilder auf einfache Weise grafisch ermitteln. Abbildung 29.35 illustriert die Methode an einer dünnen Sammellinse. Man nimmt dabei zur Vereinfachung an, dass die Strahlen nur einmal gebrochen werden, und zwar in der Mittelebene der Linse, die senkrecht auf der optischen Achse steht und in der Schnittpunkt von Mittelpunktsstrahl und optischer Achse liegt. (Die Gegebenheiten bei dicken Linsen werden im folgenden Abschnitt gezeigt.) Mithilfe von mindestens zwei der drei sogenannten **Hauptstrahlen** wird die Bildkonstruktion folgendermaßen durchgeführt:

- Der **achsenparallele Strahl** wird so gebrochen, dass er durch den zweiten Brennpunkt der Linse verläuft.
- Der **Mittelpunktsstrahl** verläuft durch den Mittelpunkt der Linse und wird nicht aus seiner Richtung abgelenkt. (Er wird allerdings seitlich etwas versetzt, wie bei einer planparallelen Platte. Diese Verschiebung kann bei dünnen Linsen vernachlässigt werden.)
- Der **Brennpunktsstrahl** verläuft durch den ersten Brennpunkt und tritt achsenparallel aus. (Bei einer Zerstreuungslinse wird der Brennpunktsstrahl auf den ersten Brennpunkt, hinter der Linse, gerichtet.)

HAUPTSTRAHLEN BEI DÜNNEN LINSEN

Bei der Sammellinse in Abbildung 29.35 laufen die drei Hauptstrahlen im Bildpunkt zusammen. Das Bild ist reell und umgekehrt. Aus der Abbildung geht der Zusammenhang $\tan \theta = G/g = -B/b$ hervor. Daher gilt für die Vergrößerung der Sammellinse:

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}. \quad (29.14)$$

Diese Beziehung entspricht derjenigen für sphärische Spiegel (Gleichung 29.2). Auch hier bedeutet eine negative Vergrößerung, dass das Bild umgekehrt ist. Beispiel 29.9 zeigt das von einer Sammellinse erzeugte virtuelle Bild eines Gegenstands, der sich innerhalb der Brennweite befindet. Die Bildkonstruktion bei einer Zerstreuungslinse ist in Abbildung 29.36 gezeigt.

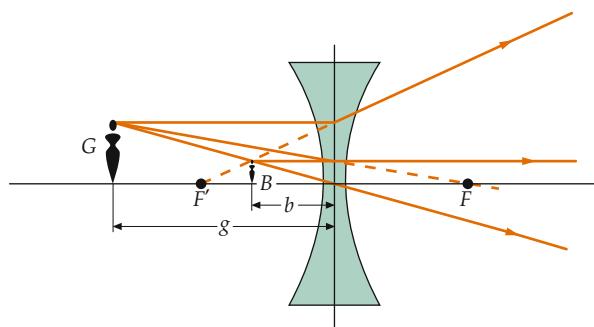


Abbildung 29.36 Bildkonstruktion bei einer Zerstreuungslinse. Der achsenparallele Strahl wird von der Achse weg gebrochen, als ginge er vom zweiten Brennpunkt F' (vor der Linse) aus. Der auf den ersten Brennpunkt F (hinter der Linse) gerichtete Strahl tritt achsenparallel aus. Bei einer Zerstreuungslinse befindet sich der erste Brennpunkt F auf der Transmissionsseite der Linse.

Beispiel 29.9: Durch eine Linse erzeugtes Bild

Ein 1,2 cm hoher Gegenstand steht 4,0 cm vor einer bikonvexen Linse mit der Brennweite 12 cm. Ermitteln Sie sowohl rechnerisch als auch grafisch die Bildweite. Stellen Sie außerdem fest, ob das Bild reell oder virtuell ist, und berechnen Sie die Bildhöhe.

Problembeschreibung: Die Strahlengänge sind nach den oben angegebenen Vorschriften mithilfe der Haupstrahlen zu zeichnen.

Lösung: 1. Zeichnen Sie den vom Gegenstand achsenparallel ausgehenden Strahl. Er wird von der Linse so gebrochen, dass er durch den zweiten Brennpunkt F' verläuft (Abbildung 29.37).

2. Zeichnen Sie den Mittelpunktsstrahl, der durch die Linsenmitte verläuft und nicht abgelenkt wird. Die zwei bisher gezeichneten Strahlen laufen auf der Transmissionsseite der Linse auseinander. Verlängern Sie sie daher rückwärts auf der Einfallsseite, um das Bild zu lokalisieren (Abbildung 29.38).

3. Zeichnen Sie zur Überprüfung auch den Brennpunktsstrahl. Er verläuft vom Gegenstand aus auf einer Geraden

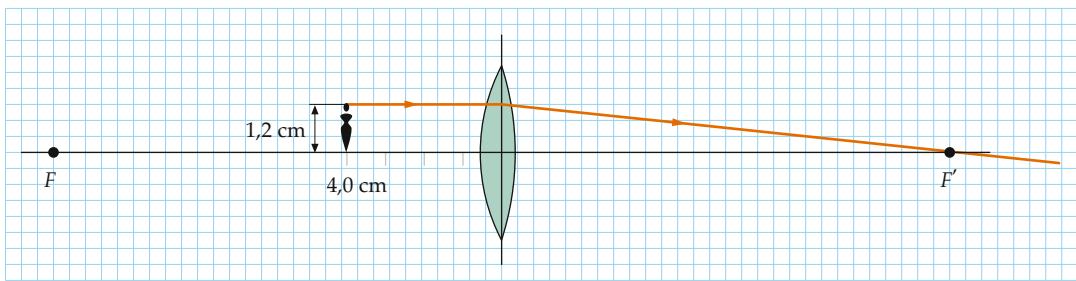


Abbildung 29.37 Skizze des vom Gegenstand achsenparallel ausgehenden Strahls.

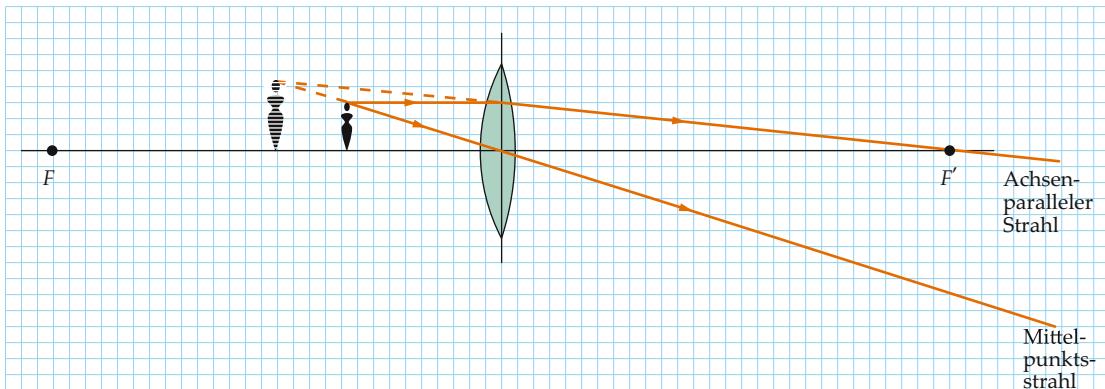


Abbildung 29.38 Skizze erweitert um den Mittelpunktsstrahl inklusive virtuellem Bild.

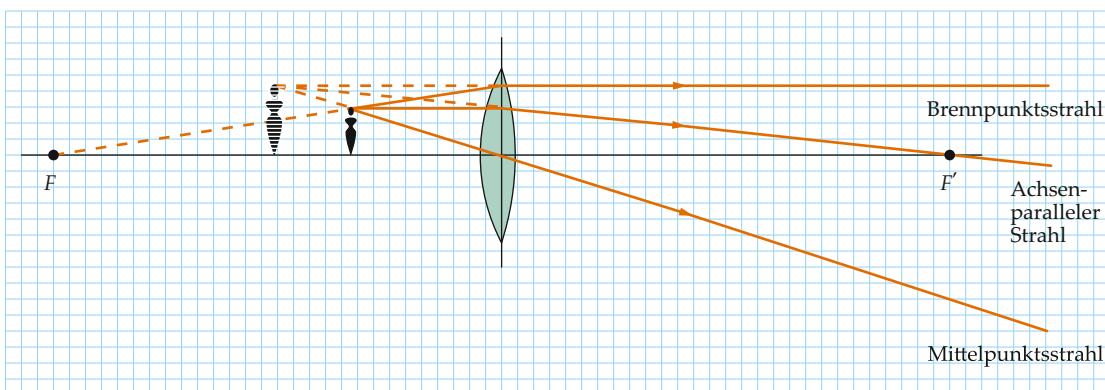


Abbildung 29.39 Skizze erweitert um die Brennpunkte F und F', sowie um den Brennpunktsstrahl.

durch den ersten Brennpunkt und tritt dann aus der Linse achsenparallel aus. Beachten Sie, dass das Bild virtuell, aufrecht und vergrößert ist (Abbildung 29.39).

4. Überprüfen Sie rechnerisch die Ergebnisse der Bildkonstruktion. Berechnen Sie zuerst mit Gleichung 29.12 die Bildweite:

$$\frac{1}{4,0 \text{ cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{12 \text{ cm}}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{4,0 \text{ cm}} = -\frac{1}{6,0 \text{ cm}}$$

$$b = -6,0 \text{ cm}$$

5. Die Bildhöhe ist das Produkt aus der Vergrößerung V und der Gegenstandshöhe G:

$$B = VG$$

6. Zunächst müssen Sie mit Gleichung 29.14 die Vergrößerung V berechnen:

$$V = -\frac{b}{g} = -\frac{-6,0 \text{ cm}}{4,0 \text{ cm}} = \boxed{+1,5}$$

7. Mit diesem Wert errechnen Sie schließlich die Bildhöhe B :

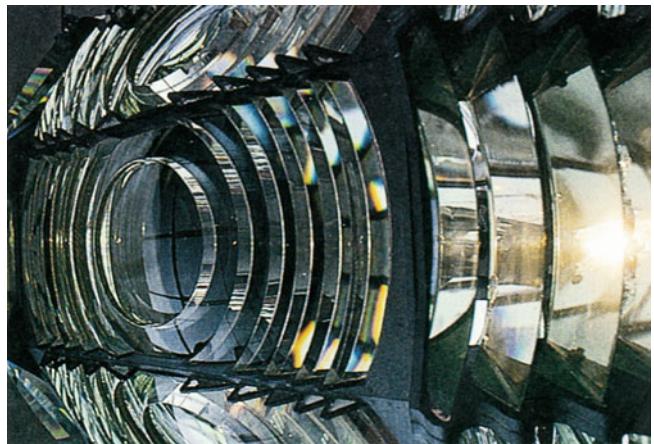
$$B = VG = (1,5) \cdot (1,2 \text{ cm}) = \boxed{1,8 \text{ cm}}$$

Plausibilitätsprüfung: Beachten Sie die Übereinstimmung der rechnerischen und der grafischen Ergebnisse. Die Berechnung ergab, dass das Bild 6,0 cm von der Linse entfernt ist, und zwar auf der Einfallsseite (weil $b < 0$ ist). Das Bild befindet sich also 2,0 cm links vom Gegenstand. Wegen $V > 0$ ist das Bild aufrecht, und wegen $|V| > 1$ ist es vergrößert. Es empfiehlt sich stets, solche Aufgaben grafisch und auch rechnerisch zu lösen und die Ergebnisse zu vergleichen.

Weitergedacht: Bei diesem Beispiel müsste das Auge des Beobachters im rechten Brennpunkt eingezeichnet werden. Da die Mittelachse der Linse durch den Brennpunkt verläuft, bestimmen der Mittelpunktsstrahl und die Verlängerung des gebrochenen Strahls die gesehene Bildhöhe.

Übung 29.10: Ein Gegenstand steht 15 cm vor einer bikonvexen Linse mit einer Brennweite von 10 cm. Berechnen Sie die Bildweite und die Vergrößerung. Ist das Bild reell oder virtuell? Ist es aufrecht oder umgekehrt? ◀

Übung 29.11: Wiederholen Sie die vorige Übung, wobei sich der Gegenstand 5,0 cm vor der Linse befindet. ◀



Eine große Linse kann man bei gleichen optischen Eigenschaften mit wesentlich weniger Material konstruieren, wenn man sie aus ringförmigen, konzentrischen Teilen mit denselben Winkeln ihrer Oberflächen zusammensetzt, wie sie eine gewöhnliche Linse mit derselben Brechkraft bei den entsprechenden Radien aufweisen müsste. Eine solche Anordnung nennt man *Fresnel'sche Linse*. Das Foto zeigt die Fresnel'sche Linse eines Leuchtturms, die die von einer Lichtquelle ausgehenden Lichtstrahlen parallelisiert. Auch die Oberseite von Overheadprojektoren ist als Fresnel'sche Linse ausgeführt. (© Bohdan Hrynewych/Stock Boston.)

Krümmungsradien dieser Flächen verschiedene Beträge haben. Man kann die Hauptebenen einer dicken Linse experimentell bestimmen, indem man paralleles Licht nacheinander auf beide Seiten auftreffen lässt und den jeweiligen Brennpunkt ermittelt. Der Schnittpunkt der rückwärtigen Verlängerung des austretenden Strahls mit der Verlängerung des ankommenden parallelen Strahls liegt auf der betreffenden Hauptebene.

Die Lagen der Hauptebenen relativ zu den Scheitelpunkten der Linse kann man aus den Brechzahlen von Linsenmaterial und Umgebung sowie den Krümmungsradien der Linse berechnen; dies soll hier allerdings nicht gezeigt werden. Bei einer symmetrischen Bikonvexlinse (deren Krümmungsradien also denselben Betrag haben), die beiderseits von Luft mit der Brechzahl 1 umgeben ist, hat jede Hauptebene vom nächstgelegenen Scheitel der Linse den Abstand $d/(2n)$. Darin ist d die Dicke der Linse in der Mitte, und n ist die Brechzahl des Linsenmaterials. Die Hauptebenen einer Glaslinse mit $n = 1,5$ teilen daher die Linsenachse in drei gleich lange Abschnitte. Dieser Wert ist für viele näherungsweise Konstruktionen ausreichend genau.

Für eine symmetrische, dicke Bikonvexlinse wie in Abbildung 29.40 gilt die Linsengleichung 29.12 unverändert, wobei aber – wie schon angedeutet – Brennweite, Gegenstandsweite und Bildweite jeweils bis zur nächstgelegenen Hauptebene zu messen sind. Auch bei einem System aus mehreren Linsen, die sich dicht beieinander auf derselben optischen Achse befinden, können die Hauptebenen zur Bildkonstruktion herangezogen werden. Stehen die Linsen jedoch weiter auseinander, so kann man das endgültige Bild schrittweise nach der Methode konstruieren, die im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

Dicke Linsen

Für die Bildkonstruktion bei dünnen Linsen können die Brechungen an beiden Oberflächen durch eine einzelne Brechung an der Mittelebene der Linse ersetzt werden, wie z. B. in Abbildung 29.35. Ist die Linse jedoch so dick, dass diese Näherung nicht zulässig ist, muss man anstelle der Mittelebene mit zwei sogenannten **Hauptebenen** arbeiten, auf die sich Brennweite, Gegenstandsweite und Bildweite beziehen. Abbildung 29.40 zeigt die entsprechenden Größen sowie die Konstruktion eines Bildpunkts mithilfe der Hauptebenen.

Die Brennpunkte auf beiden Seiten einer dicken Linse haben unterschiedliche Abstände von der Linsenoberfläche, wenn die

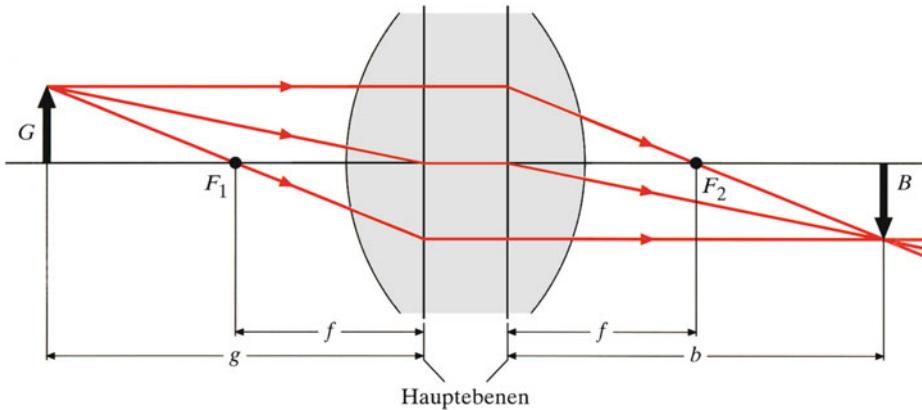


Abbildung 29.40 Die Bildkonstruktion bei einer dicken Sammellinse. Der *achsenparallele Strahl* wird bis zur zweiten Hauptebene durchgezogen und verläuft von dort zum Brennpunkt F_2 . Der *Mittelpunktsstrahl* wird bis zur ersten Hauptebene durchgezogen und ab der zweiten Hauptebene im gleichen Winkel von der Achse weg geführt. (Dies entspricht der seitlichen Parallelverschiebung eines Lichtstrahls an einer planparallelen Platte, auf die er schräg auftrifft.) Der *Brennpunktsstrahl* verläuft ab der ersten Hauptebene achsenparallel. – Bei dieser symmetrischen Bikonvexlinse sind die Brennweiten auf beiden Seiten gleich: $f_1 = f_2 = f$. Das hier beschriebene Verfahren zur Bildkonstruktion lässt sich entsprechend auf unsymmetrische dicke Linsen anwenden.

Mehrere Linsen

Befinden sich zwei oder mehrere dünne Linsen hintereinander auf derselben optischen Achse, lässt sich das von ihnen erzeugte Endbild folgendermaßen konstruieren: Man ermittelt zunächst – ohne Beachtung der anderen Linsen – das von der ersten Linse entworfene Bild. Dieses fasst man nun als Gegenstand für die Abbildung durch die zweite Linse auf und bestimmt zunächst die hier vorliegende Gegenstandsweite. Dabei spielt es keine Rolle, ob das von der ersten Linse entworfene Bild reell oder virtuell ist, und auch nicht, ob es überhaupt erzeugt wird. Das wird in den Beispielen 29.10 und 29.11 illustriert.

Beispiel 29.10: Durch eine zweite Sammellinse erzeugtes Bild

Eine zweite Sammellinse mit einer Brennweite von +6 cm wird 12 cm rechts von der Linse in Beispiel 29.9 platziert. Berechnen Sie die Bildweite des Endbilds und überprüfen Sie das Ergebnis grafisch.

Problembeschreibung: Die Hauptstrahlen bei der ersten Linse sind nicht zwangsläufig auch Hauptstrahlen bei der zweiten Linse. In diesem Beispiel ist jedoch die Position der zweiten Linse so gewählt (Abbildung 29.41), dass der achsenparallele Strahl bei der ersten Linse der Mittelpunktsstrahl bei der zweiten Linse ist. Außerdem tritt der Brennpunktsstrahl bei der ersten Linse achsenparallel aus und ist daher der achsenparallele Strahl bei der zweiten Linse. Wenn bei der zweiten Linse zusätzliche Hauptstrahlen benötigt werden, zeichnen Sie sie einfach

von dem Bild ausgehend, das von der ersten Linse entworfen wird bzw. würde; es dient bei der Abbildung durch die zweite Linse als Gegenstand. Ein solcher Strahl ist in Abbildung 29.42 hinzugefügt, nämlich vom ersten Bild (ganz links) durch den ersten Brennpunkt F_2 der zweiten Linse.

Verwenden Sie zur Berechnung den Wert $g_2 = 18$ cm als Gegenstandsweite bei der zweiten Linse, weil sich das erste Bild 6 cm links von der ersten Linse und daher 18 cm links von der zweiten Linse befindet.

Lösung: 1. Setzen Sie $g_2 = 18$ cm und $f_2 = 6$ cm ein, um b_2 zu berechnen:

$$\frac{1}{g_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{18 \text{ cm}} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{6 \text{ cm}}$$

$$b_2 = 9 \text{ cm}$$

Das Endbild liegt auf der Transmissionsseite der zweiten Linse und ist 9 cm von ihr entfernt.

2. Vgl. Abbildung 29.41.

Plausibilitätsprüfung: Mit der Bildkonstruktion von Schritt 2 wurde die Berechnung von Schritt 1 überprüft. Zur weiteren Bestätigung zeichnen wir noch den Brennpunktsstrahl bei der zweiten Linse ein (vgl. Abbildung 29.42). ■

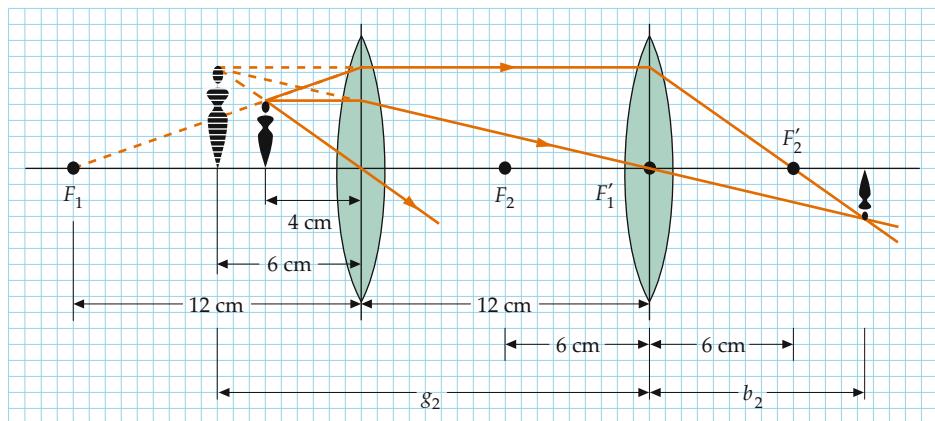


Abbildung 29.41 Skizze des Sammellinsensystems.

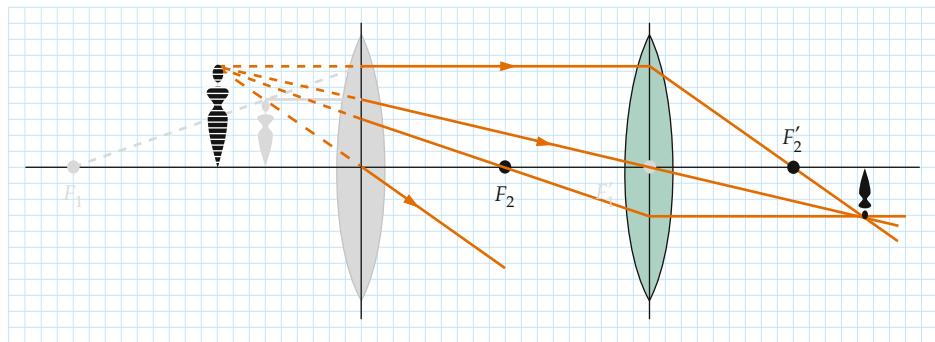


Abbildung 29.42 Vorige Bildkonstruktion mit Brennpunktsstrahl durch F_2 .

Beispiel 29.11: Eine Kombination von zwei Linsen

ZUR ÜBUNG

Zwei Sammellinsen mit derselben Brennweite 10 cm sind 15 cm voneinander entfernt. Berechnen Sie die Bildweite des Endbildes eines Gegenstands, der 15 cm vor einer der beiden Linsen steht.

Lösung: 1. Zeichnen Sie a) den parallelen Strahl, b) den Mittelpunktsstrahl und c) den Brennpunktsstrahl bei der Linse 1 (Abbildung 29.43). Würden diese Strahlen nicht von der Linse 2 beeinflusst, ergäbe sich das Bild B_1 .

Problembeschreibung: Skizzieren Sie die Bildkonstruktion, um die Position des von der Linse 1 erzeugten Bilds zu ermitteln. Wenn diese Strahlen auf die Linse 2 treffen, werden sie noch einmal gebrochen und ergeben das Endbild. Ein genaueres Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie die Abbildungsgleichung für dünne Linsen auf die Linse 1 und dann auf die Linse 2 anwenden.

2. Um das Endbild zu ermitteln, fügen Sie die drei Hauptstrahlen d , e und f bei der Linse 2 hinzu. Ihr Schnittpunkt liefert die Position des Endbilds B_2 (Abbildung 29.44).

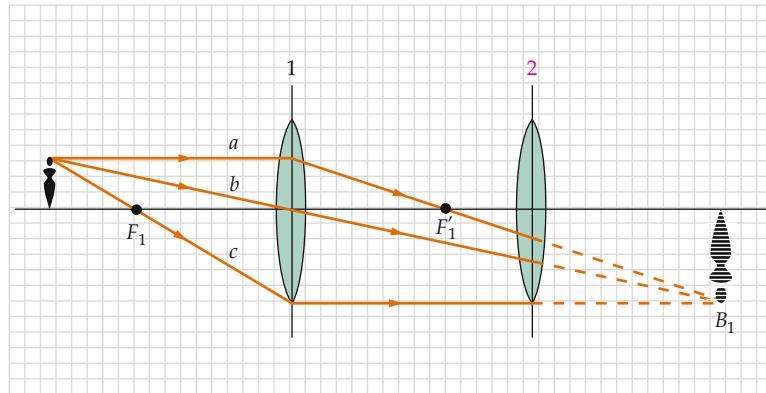
Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

3. Verwenden Sie zur Berechnung der Bildweite b_1 bei der Linse 1 die Abbildungsgleichung für dünne Linsen.

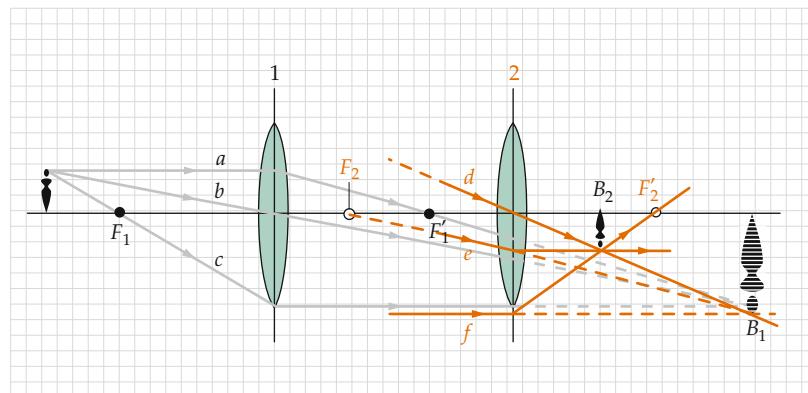
4. Der von der Linse 2 abgebildete Gegenstand ist das Bild B_1 , liegt also 15 cm von ihr entfernt auf der Transmissionsseite. Daher ist $g_2 = -15 \text{ cm}$. Berechnen Sie mit diesem Wert die Endbildweite b_2 .

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

**Abbildung 29.43** Skizze der Strahlen von Linse 1.

2.

**Abbildung 29.44** Konstruktion des Endbildes B2.

3.

$$b_1 = 30 \text{ cm}$$

4.

$$b_2 = [6 \text{ cm}]$$

Plausibilitätsprüfung: Aus der Bildkonstruktion von Schritt 2 geht hervor, dass sich das Endbild bei etwa 60 % der Brennweite der Linse 2 befindet. Damit übereinstimmend wurde diese Bildweite in Schritt 4 zu 6 cm berechnet.

Weitergedacht: Das Endbild ist reell, umgekehrt und etwas verkleinert.

Linsenkombinationen

Wenn zwei dünne Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2 auf derselben Achse kombiniert sind, dann ist – wie in Beispiel 29.12 gezeigt – die Brennweite der Kombination gegeben durch

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (29.15)$$

Für die Brechkraft von zwei auf derselben Achse dicht beieinander stehende Linsen gilt daher

$$D = D_1 + D_2. \quad (29.16)$$

Beispiel 29.12: Zwei dicht beieinander stehende Linsen**ZUR ÜBUNG**

Zwei Linsen mit derselben optischen Achse stehen dicht beieinander. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Problembeschreibung: Wenden Sie die Abbildungsgleichung für dünne Linsen an und berücksichtigen Sie dabei die Tatsache, dass der Abstand zwischen den Linsen hier vernachlässigbar ist. Dann ist die Gegenstandsweite bei der zweiten Linse gleich der negativen Bildweite bei der ersten Linse.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Stellen Sie für die Linse 1 die Abbildungsgleichung für dünne Linsen auf.

2. Stellen Sie mithilfe der Beziehung $g_2 = -b_1$ für die Linse 2 die Abbildungsgleichung für dünne Linsen auf.

3. Addieren Sie die beiden erhaltenen Gleichungen, um b_1 zu eliminieren.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

2.

$$\frac{1}{-b_1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_2}$$

3.

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \boxed{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}}$$

29.3 Abbildungsfehler

Werden nicht alle von einem punktförmigen Gegenstand ausgehenden Strahlen in einem einzigen Bildpunkt fokussiert, spricht man von Abbildungsfehlern. Sie können verschiedene Ursachen haben. Abbildung 29.45 zeigt Strahlen, die von einer Punktquelle auf der Achse ausgehen und auf eine dünne Linse mit sphärischen Oberflächen treffen. Strahlen, die in größeren Winkeln zur Achse verlaufen, werden unverhältnismäßig stärker gebrochen als achsenennahe Strahlen. Die Folge ist, dass sie nicht im Brennpunkt fokussiert werden. Das Bild des Gegenstandspunkts ist dann nicht punktförmig, sondern erscheint als kreisförmige Scheibe. Der Durchmesser dieses sogenannten **Unschärfekreises** oder **Abweichungskreises** ist im dargestellten Beispiel beim Punkt C am geringsten. Dieser Abbildungsfehler heißt **sphärische Aberration**; er tritt auch bei den sphärischen Spiegeln auf, die in Abschnitt 29.1 besprochen wurden.

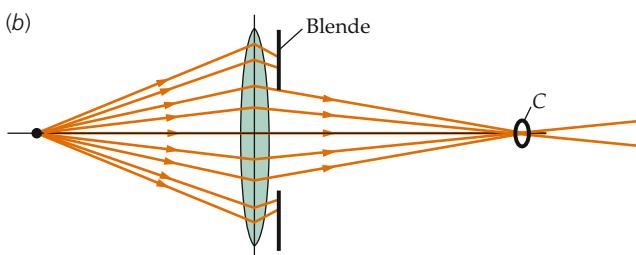
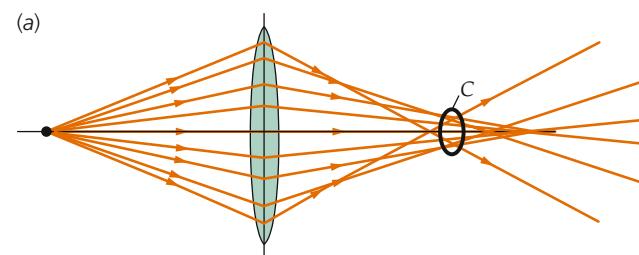


Abbildung 29.45 Sphärische Aberration bei einer Linse. a) Achsenfernere Strahlen, die von einem punktförmigen Gegenstand auf der Achse ausgehen, werden nicht in einem Punkt fokussiert. b) Der Einfluss der sphärischen Aberration kann verringert werden, indem man die achsenferneren Strahlen ausblendet. Dadurch wird das Bild jedoch weniger lichtstark, weil weniger Strahlen zu seiner Erzeugung beitragen.

Die sphärische Aberration kann dadurch vermieden oder abgemildert werden, dass man den Linsen oder den Spiegeln keine sphärischen Oberflächen verleiht (wodurch die Produktion allerdings schwieriger und teurer werden kann). Ein Beispiel

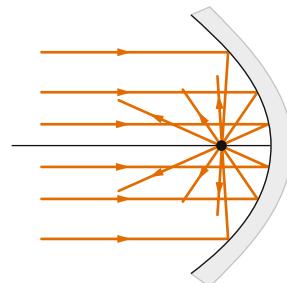


Abbildung 29.46 Ein Parabolspiegel fokussiert alle parallelen Strahlen in einem Punkt. Bei ihm tritt keine sphärische Aberration auf.

dafür ist der **Parabolspiegel** in Abbildung 29.46. Seine Oberfläche ist nicht kugelförmig, sondern ihr Querschnitt gleicht einer Parabel. Bei ihm werden auch achsenfernere Strahlen in der Brennebene fokussiert, solange sie parallel einfallen. Parabolspiegel setzt man unter anderem in großen astronomischen Teleskopen ein, bei denen man für eine ausreichend hohe Lichtstärke eine große Spiegeloberfläche benötigt. Auch die „Schüsseln“ zum Empfang der Mikrowellensignale von Telekommunikationssatelliten sind parabolisch geformt. Ein weiteres Anwendungsbeispiel sind Suchscheinwerfer, bei denen die Lichtquelle im Brennpunkt eines Parabolspiegels angebracht ist, sodass sie parallele Lichtstrahlen abgeben.

Ein anderer Abbildungsfehler tritt auf, wenn die Strahlen schräg (also mit einem Winkel zur Achse) einfallen und nicht in der Brennebene fokussiert werden. Diesen Effekt nennt man **Astigmatismus schiefen Bündel**. Ein ausgedehnter Gegenstand wird dabei zu den Bildrändern hin zunehmend unscharf abgebildet, und man spricht auch von *Verzeichnung*. Dieser Abbildungsfehler soll hier nicht näher besprochen werden. Wichtig ist aber, dass er – wie auch die sphärische Aberration – weder bei den Linsen noch bei den Spiegeln von Fertigungs- oder Materialfehlern herrührt. Vielmehr beruht er darauf, dass das Brechungs- und das Reflexionsgesetz, die nur für ebene Flächen gelten, bei unseren Betrachtungen auf sphärische Oberflächen angewandt wurden. Die Abbildungsgleichungen in diesem Kapitel setzen sämtlich achsennahe Strahlen voraus, denn bei ihrer Herleitung wurden die Näherungen für kleine Winkel angesetzt.

Ein weiterer Abbildungsfehler ist die **chromatische Aberration**, die nicht bei Spiegeln, sondern nur bei Linsen auftritt. Sie röhrt von der *Dispersion* (siehe Kapitel 28) her, also von der Variation der Brechzahl mit der Wellenlänge. Aus Gleichung 29.11 geht hervor, dass die reziproke Brennweite einer Linse mit zunehmender Brechzahl n des Linsenmaterials ansteigt. Für blaues, kurzwelliges Licht ist die Brechzahl beispielsweise von Glas etwas größer als für rotes, langwelliges Licht. Daher ist die Brennweite einer Glaslinse für blaues Licht ein wenig geringer als die für rotes Licht. Da die chromatische Aberration nur bei der Brechung und nicht bei der Reflexion auftritt, wird das Objektiv großer Teleskope oft mit einem Spiegel anstatt einer Linse ausgeführt.

Die Auswirkung der chromatischen Aberration kann verringert werden, indem man statt einer einzigen Linse eine Kombination von Linsen aus unterschiedlichen Materialien verwendet. Beispielsweise kann man eine Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse, die eine Brennweite mit einem größeren Betrag hat, zu einem Linsensystem mit positiver Brennweite kombinieren. Dieses System wirkt dann wie eine Sammellinse, weist jedoch eine deutlich geringere chromatische Aberration auf als eine einzige Linse mit der gleichen resultierenden Brennweite. Hochwertige Kameraobjektive bestehen meist aus sechs Linsen, deren Kombination die verschiedenen Abbildungsfehler weitgehend vermeidet.

29.4 Optische Instrumente

Das Auge

Das wichtigste optische System, mit dem wir ständig zu tun haben, ist unser Auge (Abbildung 29.47). Das Licht fällt durch die Pupille ein, deren Durchmesser variabel ist, und wird vom System Hornhaut–Linse auf die Netzhaut (Retina) fokussiert, sodass ein Bild entsteht. Die Netzhaut ist eine dünne Schicht aus lichtempfindlichen Nervenzellen, den *Stäbchen* und den *Zäpfchen*. Sie nehmen die vom Licht hervorgerufenen Sinnesreize auf und leiten sie über den *Sehnerv* an das Gehirn weiter. Die Form der Linse kann durch den *Ziliarmuskel* leicht verändert werden. Wird das Auge auf einen weit entfernten Gegenstand fokussiert, ist der Ziliarmuskel entspannt, und das System Hornhaut–Linse hat seine maximale Brennweite von rund 2,5 cm; sie entspricht dem Abstand zwischen Hornhaut und Netzhaut. Je näher der betrachtete Gegenstand ist, desto stärker krümmt der Ziliarmuskel die Augenlinse, sodass deren Brennweite verringert wird und die Abbildung auf der Netzhaut wieder scharf ist. Diesen Vorgang der Brennweitenveränderung nennt man **Akkommodation**. Wenn der Gegenstand dem Auge jedoch zu nahe ist, kann die Linse die von ihm ausgehenden Lichtstrahlen nicht mehr auf die Netzhaut bündeln, und das Bild erscheint unscharf. Ein dem Auge immer näher gebrachter Gegenstand ist beim sogenannten **Nahpunkt** gerade noch scharf wahrzunehmen. Dessen Abstand vom Auge wird *deutliche Sehweite* genannt. Sie ist individuell unterschiedlich und vergrößert sich mit dem Lebensalter, wenn die Elastizität der Augenlinse abnimmt. Bei einem Zehnjährigen kann der Nahpunkt beispielsweise nur 7 cm vor dem Auge liegen, während er bei einem 65-Jährigen etwa 200 cm betragen kann. Als Standardwert der deutlichen Sehweite setzt man meist 25 cm an.

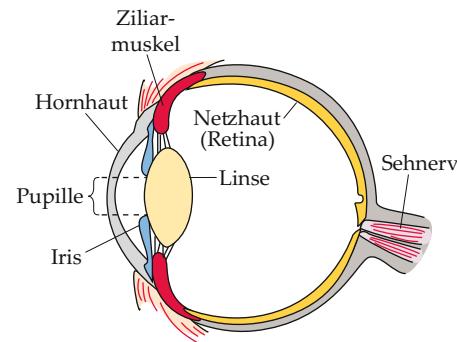
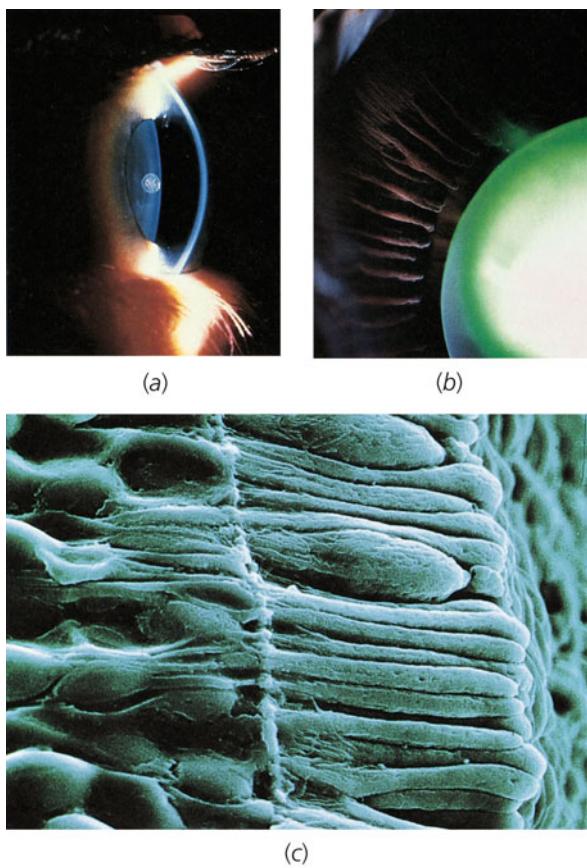


Abbildung 29.47 Schnittbild des menschlichen Auges. Die in das Auge einfallende Lichtmenge wird durch die Iris gesteuert, die den Durchmesser der Pupille einstellt. Die Dicke bzw. die Krümmung der Augenlinse und damit ihre Brennweite wird vom Ziliarmuskel je nach dem Abstand des zu betrachtenden Gegenstands verändert. Hornhaut und Linse fokussieren das Bild auf die Netzhaut. Diese weist etwa 125 Millionen Rezeptoren (Stäbchen und Zäpfchen) auf, die mit rund einer Million Nervenfasern des Sehnervs verbunden sind.



a) Das menschliche Auge, von der Seite gesehen. b) Ausschnitt der Vorderansicht. Die Augenlinse wird vom Ziliarmuskel (links und oben im Bild) gehalten, der sie ringförmig umgibt. Der Ziliarmuskel kann die Linse stärker wölben, wodurch ihre Brennweite kleiner wird. Auf diese Weise akkommodiert das Auge auf näher gelegene Gegenstände. c) Einige der 120 Millionen Stäbchen und 7 Millionen Zäpfchen im Auge, ungefähr 5000-fach vergrößert. Die (dünneren) Stäbchen sind lichtempfindlicher und erlauben es, auch in der Dämmerung zu sehen, während die Zäpfchen das Farbsehen ermöglichen. Stäbchen und Zäpfchen bilden die unterste Schicht der Netzhaut und sind von Nervenzellen, Blutgefäßen und Stützzellen bedeckt. Der größte Teil des in das Auge einfallenden Lichts wird reflektiert oder absorbiert, bevor es die Stäbchen und die Zäpfchen erreicht. Das Licht, das schließlich auf sie gelangt, löst in ihnen elektrische Impulse aus, die über Nervenfasern in das Gehirn geleitet werden. (© Lennart Nilsson)

Wenn das System Hornhaut-Linse des Auges zu schwach fokussiert, liegt das Bild eines Gegenstands hinter der Netzhaut. In diesem Fall ist das Auge **weitsichtig**. Eine weitsichtige Person kann entfernte Gegenstände gut erkennen, sieht aber nahe Gegenstände unscharf. Die Weitsichtigkeit kann mit einer Sammellinse (einer positiven Linse) korrigiert werden (Abbildung 29.48). Beispiel 29.13 illustriert die Wirkung der Lesebrille.

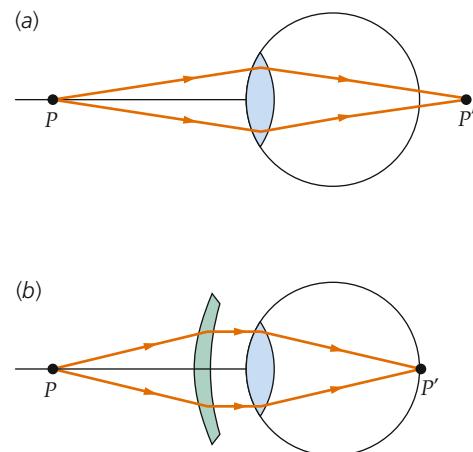


Abbildung 29.48 a) Ein weitsichtiges Auge fokussiert die von einem nahe gelegenen Gegenstand ausgehenden Lichtstrahlen in einem Punkt hinter der Netzhaut. b) Eine Sammellinse korrigiert diese Fehlsichtigkeit, und die Lichtstrahlen werden auf die Netzhaut fokussiert. In dieser Abbildung (wie auch in den folgenden) sind die Strahlen so dargestellt, als würden sie im Auge nur von der Linse gebündelt. In Wirklichkeit erfolgt ihre Fokussierung durch das System Hornhaut-Linse. Dieses entspricht eher einer kugelförmigen brechenden Oberfläche als einer dünnen Linse.

Beispiel 29.13: Die Lesebrille

Nehmen Sie an, der Nahpunkt einer Person ist 75 cm vom Auge entfernt. Das bedeutet, sie sieht Gegenstände unscharf, die weniger als 75 cm entfernt sind. Daher setzt sie eine Lesebrille auf, für deren Gläser wir einen vernachlässigbar geringen Abstand vom Auge annehmen. Mit der Brille liegt der Nahpunkt 25 cm vor dem Auge. Welche Brechkraft haben die Brillengläser? Wie hoch ist die Vergrößerung? Auf welche der beiden nachfolgend genannten Arten entsteht das größere Bild auf der Netzhaut? 1) Der Gegenstand steht im Nahpunkt des bloßen Auges und wird ohne Brille betrachtet; 2) der Gegenstand steht im Nahpunkt des Systems Brillenglas-Auge und wird durch das Brillenglas betrachtet, das sich unmittelbar vor dem Auge befindet.

Problembeschreibung: Ein Nahpunktabstand von 25 cm des Systems Brillenglas-Auge bedeutet, dass die Linse 75 cm vor dem Brillenglas ein virtuelles, aufrechtes Bild des Gegenstands entwirft, der sich 25 cm vor der Linse befindet. Abbildung 29.49a zeigt die Bildkonstruktion; die Bildweite ist $b = -75$ cm. Abbildung 29.49b zeigt, wie mithilfe der Brechkraft des Brillenglases das Bild auf der Netzhaut zustande kommt.

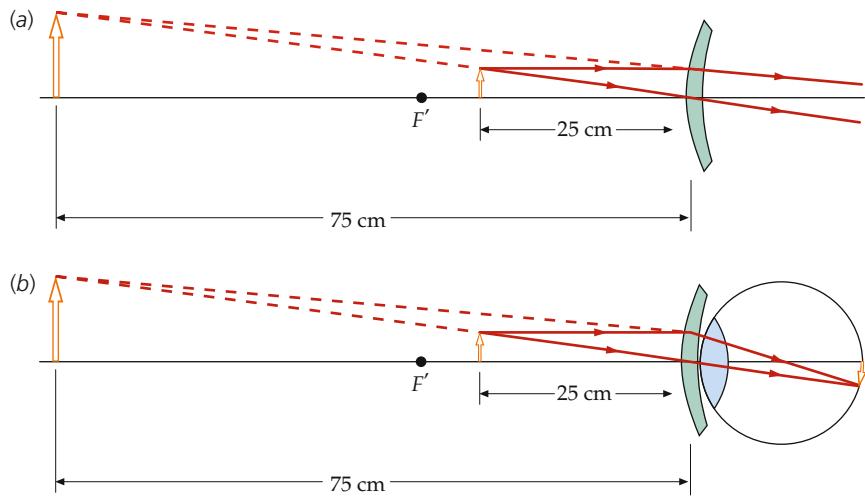


Abbildung 29.49 Bildkonstruktion von System Brillenglas-Auge.

Lösung: 1. Berechnen Sie die Brechkraft $1/f$ mit der Abbildungsgleichung für dünne Linsen; dabei ist $g = 25 \text{ cm}$ und $b = -75 \text{ cm}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{25 \text{ cm}} + \frac{1}{-75 \text{ cm}} \\ &= \frac{2}{75 \text{ cm}} = \frac{2}{0,75 \text{ m}} = [2,7 \text{ dpt}] \end{aligned}$$

2. Mit $V = -b/g$ berechnen Sie die Vergrößerung:

$$V = -\frac{b}{g} = -\frac{-75 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = [3,0]$$

3. In beiden Fällen scheinen die Strahlen, die in das Auge gelangen, von einem Bild auszugehen, das 75 cm vor dem Auge liegt. Mit dem Brillenglas vor dem Auge ist das Bild dreimal so groß: 2) *Mit dem Brillenglas vor dem Auge.*

Weitergedacht: 1) Wenn Ihr Nahpunkt 75 cm vor dem Auge liegt, sind Sie weitsichtig. Zum Lesen müssten Sie ein Buch mindestens 75 cm weit vom Auge entfernt halten. Bei diesem Abstand erscheint auf der Netzhaut ein zu kleines Bild der Schrift. Eine Lesebrille, wie sie in diesem Beispiel beschrieben wurde, erzeugt ein Bild, das ebenfalls 75 cm vor Ihrem Auge liegt, jedoch dreimal größer ist als der Gegenstand (die Buchseite). Daher erscheint Ihnen die Schrift auf der Netzhaut ebenfalls dreimal so groß. 2) In diesem Beispiel wurde der Abstand zwischen Brillenglas und Auge vernachlässigt. Setzt man den tatsächlichen Abstand ein, ergeben sich etwas abweichende Werte.

Übung 29.12: Wie hoch ist die Brechkraft eines Auges, dessen Nahpunkt 75 cm entfernt ist und in dem der Abstand zwischen Hornhaut und Netzhaut 2,5 cm beträgt? Berechnen Sie auch die Brechkraft der Kombination dieses Auges mit dem direkt davor befindlichen Brillenglas in diesem Beispiel. Vergleichen Sie diese Brechkraft mit derjenigen einer Linse, für die sich bei der Gegenstandsweite $g = 25 \text{ cm}$ die Bildweite $b = 2,5 \text{ cm}$ ergibt. ◀

Das Auge einer **kurzsichtigen** Person fokussiert die Lichtstrahlen zu stark, sodass das Bild eines weit entfernten Gegenstands vor der Netzhaut liegt. Dann sind nahe gelegene Gegenstände scharf zu sehen, weiter entfernte aber nur verschwommen. Die Kurzsichtigkeit kann mit einer Zerstreuungslinse (einer negativen Linse) korrigiert werden (Abbildung 29.50).

Eine andere recht häufige Fehlsichtigkeit ist der **Astigmatismus**. Er liegt vor, wenn das System Hornhaut-Linse nicht exakt kugelförmig ist, sondern in unterschiedlichen Ebenen verschiedenen starke Krümmungen aufweist. Dadurch erscheint das Bild eines punktförmigen Gegenstands als kurze Linie. Der Astigmatismus kann mit Brillengläsern korrigiert werden, deren Form eher zylindrisch als sphärisch ist.

Die Größe, in der uns ein Gegenstand *erscheint*, entspricht der Bildhöhe auf der Netzhaut. Je größer diese Bildhöhe ist, desto mehr Stäbchen und Zäpfchen in der Netzhaut werden durch das einstrahlende Licht aktiviert. Aus Abbildung 29.51 geht hervor, dass das Bild eines Gegenstands auf der Netzhaut größer ist, wenn er näher vor dem Auge steht. Die Bildhöhe hängt vom Sehwinkel ε ab, unter dem der Gegenstand dem Auge erscheint. Für die Gegebenheiten in Abbildung 29.51 gilt, sofern die Win-

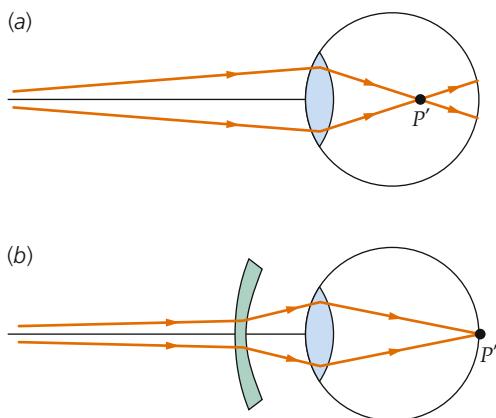


Abbildung 29.50 a) Ein kurzsichtiges Auge fokussiert die von einem entfernten Gegenstand ausgehenden Strahlen vor der Netzhaut. b) Eine Zerstreuungslinse korrigiert diese Fehlsichtigkeit.

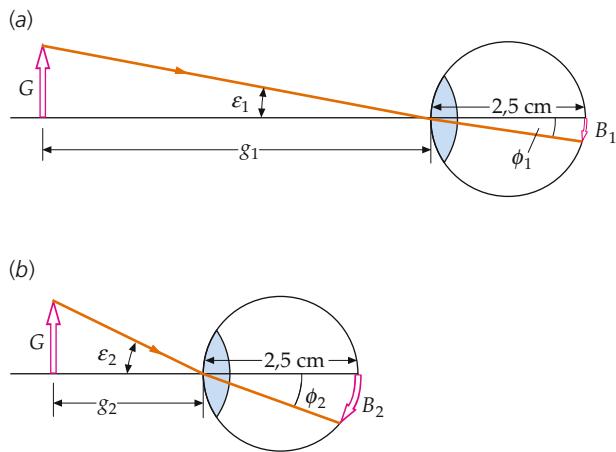


Abbildung 29.51 a) Ein entfernter Gegenstand der Höhe G erscheint klein, weil sein Bild auf der Netzhaut klein ist. b) Wenn sich der gleiche Gegenstand näher vor dem Auge befindet, erscheint er größer, weil sein Bild auf der Netzhaut größer ist.

kel klein sind:

$$\phi \approx \frac{B}{2,5 \text{ cm}} \quad \text{und} \quad \varepsilon \approx \frac{G}{g}. \quad (29.17)$$

Das Brechungsgesetz ergibt $n_{\text{Luft}} \sin \varepsilon = n \sin \phi$, wobei $n_{\text{Luft}} = 1,00$ und n die Brechzahl im Auge ist. Bei kleinen Winkeln wird dies zu

$$\varepsilon \approx n \phi. \quad (29.18)$$

Kombinieren der Gleichungen 29.17 und 29.18 ergibt

$$\frac{G}{g} \approx n \frac{B}{2,5 \text{ cm}} \quad \text{und damit} \quad B \approx \frac{2,5 \text{ cm}}{n} \frac{G}{g}. \quad (29.19)$$

Die Bildhöhe auf der Netzhaut ist somit proportional zur Gegenstandshöhe und umgekehrt proportional zur Gegenstandsweite, d. h. zur Entfernung des Gegenstands vom Auge. Der Nahpunkt ist der dem Auge nächstgelegene Punkt, bei dem auf der Netzhaut ein scharfes Bild entsteht. Da hierbei das Bild des Gegenstands auf der Netzhaut am größten ist, nennt man den Abstand Nahpunkt-Auge auch *deutliche Sehweite*.

Die Lupe

In Beispiel 29.13 wurde deutlich, dass die scheinbare Größe eines Gegenstands mithilfe einer Sammellinse vor dem Auge gesteigert werden kann. Eine **Lupe** ist eine Sammellinse, die man vor das Auge hält, wobei der Gegenstand „näher gerückt“ wird, sodass er sich innerhalb der Brennweite der Linse befindet (wie auch in Beispiel 29.13). Dann erzeugt die Linse ein virtuelles Bild beim Nahpunkt des Auges – also dort, wo der Gegenstand platziert werden müsste, wenn er mit bloßem Auge scharf gesehen werden soll. Mit der Linse ist der Betrag $|b|$ der Bildweite größer als die Gegenstandsweite g . Dadurch erscheint das Bild um den Faktor $V = |b|/g$ vergrößert. Bei der Gegenstandshöhe G ergibt sich die Bildhöhe $B = VG$. Für den Winkel ε , unter dem das Bild dem Auge erscheint (Abbildung 29.52), gilt näherungsweise:

$$\varepsilon = \frac{VG}{|b|} = V \frac{G}{|b|} = \frac{|b|}{g} \frac{G}{|b|} = \frac{G}{g}.$$

Dies ist *genau der gleiche Winkel*, unter dem der Gegenstand erschien, wenn die Linse entfernt würde, während Gegenstand und Auge in ihren Positionen blieben. Das sich mit der Sammellinse ergebende Bild auf der Netzhaut ist daher ebenso groß, wie wenn der Gegenstand ohne Sammellinse betrachtet würde. Der wesentliche Unterschied ist, dass das Auge mit der Lupe davor nicht auf den geringen Abstand g akkommodieren muss (was es vielleicht auch nicht kann). Die scheinbare Gegenstandshöhe mit Anwendung der Lupe ist daher proportional zum Verhältnis von $|b|$ (dem Betrag der Bildweite) zu g (der Gegenstandsweite). Je kleiner g ist, desto größer ist der Schwinkel ε , unter dem der Gegenstand erscheint.

In Abbildung 29.53a befindet sich ein kleiner Gegenstand der Größe G am Nahpunkt, also im Abstand s_0 vom Auge. Für den Schwinkel ε_0 , unter dem er im Nahpunkt gesehen wird, gilt näherungsweise

$$\varepsilon_0 = \frac{G}{s_0}.$$

In Abbildung 29.53b befindet sich eine Sammellinse mit der Brennweite f , die kleiner als s_0 ist, dicht vor dem Auge, und ein Gegenstand steht in der Brennebene der Linse. Die Lichtstrahlen treten aus der Linse parallel aus; das vom Auge betrachtete Bild liegt daher im Unendlichen. Die parallelen Strahlen werden von der entspannten Augenlinse auf die Netzhaut fokussiert. Der Winkel, unter dem dieses Bild erscheint, ist derselbe, unter dem der Gegenstand ohne Linse erschien (unter

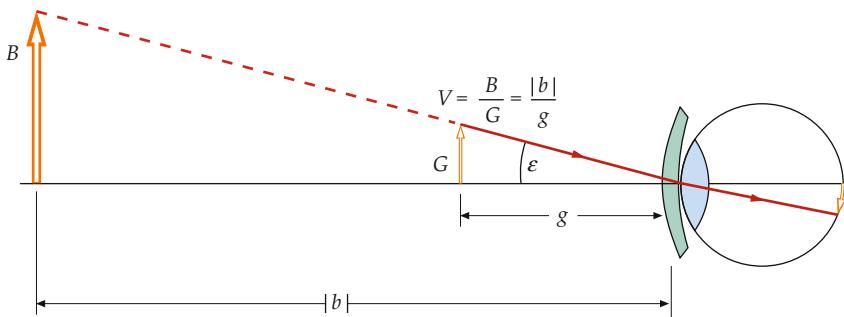


Abbildung 29.52 Die Vergrößerung V der Lupe.

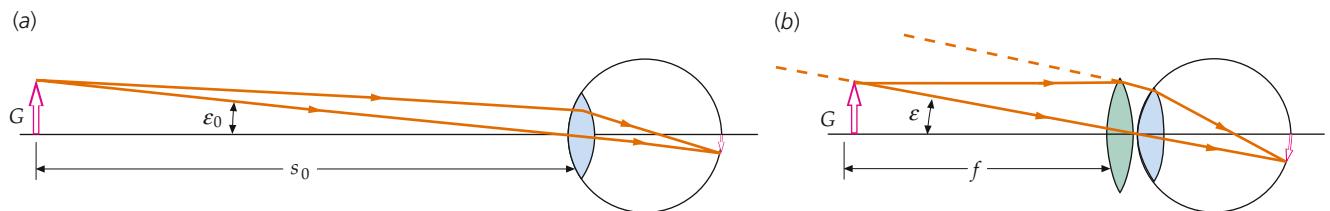


Abbildung 29.53 a) Ein Gegenstand im Nahpunkt erscheint dem bloßen Auge unter dem Sehwinkel ε_0 . b) Der Gegenstand befindet sich hier am Brennpunkt der Sammellinse, und die Lichtstrahlen treffen parallel auf das Auge, als kämen sie aus sehr großer Entfernung. Das Bild kann also mit entspanntem Auge betrachtet werden, wie ein Gegenstand im Unendlichen. Wenn die Brennweite f kleiner als der Abstand zum Nahpunkt ist, erlaubt es die Sammellinse, den Gegenstand näher an das Auge heranzuführen. Dadurch vergrößert sich der Sehwinkel ε und damit auch die Bildhöhe auf der Netzhaut.

der Voraussetzung, dass der Abstand zwischen Linse und Auge vernachlässigbar ist). Für den Sehwinkel, unter dem der Gegenstand erscheint, gilt näherungsweise

$$\varepsilon = \frac{G}{f}.$$

Das Verhältnis $\varepsilon/\varepsilon_0$ nennt man **Winkelvergrößerung** oder **Vergrößerung** der Lupe. Sie ist gegeben durch

$$V_L = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f}. \quad (29.20)$$

Diese Gleichung wird im Übungsbeispiel 29.14 angewendet.

Beispiel 29.14: Winkelvergrößerung einer Lupe

ZUR ÜBUNG

Eine Person, deren Nahpunkt 25 cm vor dem Auge liegt, verwendet eine Linse mit der Brechkraft 40 dpt als Lupe. Welche Winkelvergrößerung erreicht sie damit?

Problembeschreibung: Die Winkelvergrößerung ist mit Gleichung 29.20 aus der Brennweite f zu errechnen; diese ist der Kehrwert der Brechkraft.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Berechnen Sie die Brennweite der Linse.

2. Setzen Sie Ihr Ergebnis von Schritt 1 in Gleichung 29.20 ein, um die Winkelvergrößerung zu berechnen.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$f = \frac{1}{D} = 2,5 \text{ cm}$$

2.

$$V = \boxed{10}$$

Weitergedacht: Durch die Lupe erscheint der Gegenstand zehnmal größer, weil er nur 2,5 cm anstatt 25 cm weit vor das Auge gesetzt werden kann. Somit ist auch die Bildhöhe auf der Netzhaut zehnmal so groß.

Übung 29.13: Welcher Wert ergibt sich für die Winkelvergrößerung in diesem Beispiel, wenn der Nahpunkt 30 cm anstatt 25 cm vor dem Auge liegt? ◀

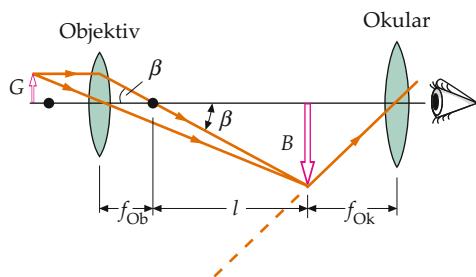


Abbildung 29.54 Schema eines aus zwei Sammellinsen bestehenden Mikroskops. Das Objektiv hat die Brennweite f_{Ob} und das Okular die Brennweite f_{Ok} . Das vom Objektiv erzeugte reelle Zwischenbild des Gegenstands wird mit dem Okular betrachtet, das hier wie eine Lupe wirkt. Das von beiden Linsen entworfene Endbild liegt im Unendlichen.

Im Mikroskop und im Teleskop dient im Prinzip eine Lupe als Okular; mit ihr wird das Bild betrachtet, das vom Objektiv erzeugt wird. Um Abbildungsfehler zu korrigieren, setzt man als Okular meist keine einzelne Linse ein, sondern eine Linsenkombination mit einer kleinen positiven Brennweite, die im Prinzip wie eine Lupe wirkt.

Das Mikroskop

Mit einem Mikroskop (Abbildung 29.54) betrachtet man sehr kleine Gegenstände, die sich dicht vor dem Objektiv befinden. In seiner einfachsten Form besteht es aus zwei Sammellinsen. Die dem Gegenstand zugewandte Linse nennt man **Objektiv**. Es erzeugt ein reelles, vergrößertes und umgekehrtes Zwischenbild des Gegenstands. Die dem Auge zugewandte Linse, **Okular** genannt, dient als Lupe, mit der das vom Objektiv erzeugte Zwischenbild betrachtet wird. Dieses befindet sich am ersten Brennpunkt des Okulars, sodass die Lichtstrahlen aus dem Okular parallel austreten, als kämen sie aus großer Entfernung. (Man sagt auch, das Bild wird „im Unendlichen“ betrachtet.) Der Abstand zwischen dem zweiten Brennpunkt des Objektivs und dem ersten Brennpunkt des Okulars heißt **Tubuslänge** l . Sie ist normalerweise auf rund 16 cm fixiert. Der Gegenstand wird etwas außerhalb des ersten Brennpunkts des Objektivs mit der Brennweite f_{Ob} platziert. Im Abstand $l + f_{\text{Ob}}$ vom Objektiv entsteht ein vergrößertes Bild. Aus Abbildung 29.54 geht hervor, dass $\tan \beta = G/f_{\text{Ob}} = -B/l$ ist. Der Abbildungsmaßstab bzw. die Vergrößerung des Objektivs ist daher gegeben durch

$$V_{\text{Ob}} = \frac{B}{G} = -\frac{l}{f_{\text{Ob}}}. \quad (29.21)$$

Gemäß Gleichung 29.20 ist die Winkelvergrößerung des Okulars

$$V_{\text{Ok}} = \frac{s_0}{f_{\text{Ok}}}.$$

Darin ist s_0 der Abstand des Nahpunkts vom Auge des Betrachters und f_{Ok} die Brennweite des Okulars. Die Vergrößerung des Mikroskops ist das Produkt aus den Vergrößerungen von Objektiv und Okular:

$$V_M = V_{\text{Ob}} V_{\text{Ok}} = -\frac{l}{f_{\text{Ob}}} \frac{s_0}{f_{\text{Ok}}}. \quad (29.22)$$

VERGRÖSSERUNG DES MIKROSKOPS

Beispiel 29.15 illustriert diesen Zusammenhang.

Beispiel 29.15: Das Mikroskop

Ein Mikroskop hat eine Objektivlinse mit der Brennweite 1,2 cm und eine Okularlinse mit der Brennweite 2,0 cm. Die beiden Linsen sind 20,0 cm voneinander entfernt. a) Berechnen Sie die Vergrößerung, wenn der Nahpunkt des Betrachters 25,0 cm vor dem Auge liegt. b) Wo muss sich der Gegenstand befinden, damit das Endbild im Unendlichen entsteht?

Problembeschreibung: Die Gegebenheiten sind in Abbildung 29.54 dargestellt. Die Vergrößerung wird mit Gleichung 29.22 berechnet, und die Gegenstandsweite beim Objektiv ergibt sich mithilfe der Linsengleichung.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Für die Vergrößerung gilt Gleichung 29.22:

$$V = -\frac{l}{f_{\text{Ob}}} \frac{s_0}{f_{\text{Ok}}}$$

2. Die Tubuslänge l ist der Abstand zwischen den Linsen, abzüglich der beiden Brennweiten:

$$l = 20,0 \text{ cm} - 2,0 \text{ cm} - 1,2 \text{ cm} = 16,8 \text{ cm}$$

3. Setzen Sie diesen Wert für l ein, außerdem die gegebenen Werte von s_0 und f_{Ob} sowie f_{Ok} , um V zu berechnen:

$$V = -\frac{l}{f_{\text{Ob}}} \cdot \frac{s_0}{f_{\text{Ok}}} = -\frac{16,8 \text{ cm}}{1,2 \text{ cm}} \cdot \frac{25,0 \text{ cm}}{2,0 \text{ cm}} \\ = \boxed{-180}$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie die Gegenstandsweite g aus der Bildweite b beim Objektiv und dessen Brennweite f_{Ob} :

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_{\text{Ob}}}$$

2. Der Abbildung 29.54 entnehmen Sie, dass die Bildweite beim Objektiv gleich $f_{\text{Ob}} + l$ ist:

$$b = f_{\text{Ob}} + l = 1,2 \text{ cm} + 16,8 \text{ cm} = 18,0 \text{ cm}$$

3. Setzen Sie diesen Wert ein, um g zu berechnen:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{18,0 \text{ cm}} = \frac{1}{1,2 \text{ cm}}$$

$$g = \boxed{1,3 \text{ cm}}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Gegenstand ist 1,3 cm vor dem Objektiv anzubringen, d. h. 0,1 cm vor dessen erstem Brennpunkt. Die Vergrößerung ist erwartungsgemäß sehr hoch, dem Zweck eines Mikroskops entsprechend. ■

Das Teleskop

Mit einem Teleskop werden Gegenstände betrachtet, die weit entfernt und meist groß sind. Die Wirkung des Teleskops besteht darin, dass es ein reelles Bild des Gegenstands erzeugt, das dem Betrachter viel näher ist als der Gegenstand. Das astronomische Teleskop, dessen Aufbau in Abbildung 29.55 skizziert ist, besteht im Prinzip aus zwei Sammellinsen. Die eine dient als Objektiv und erzeugt ein reelles, umgekehrtes Bild des Gegenstands. Dieses wird mit der zweiten Linse (dem Okular) betrachtet.

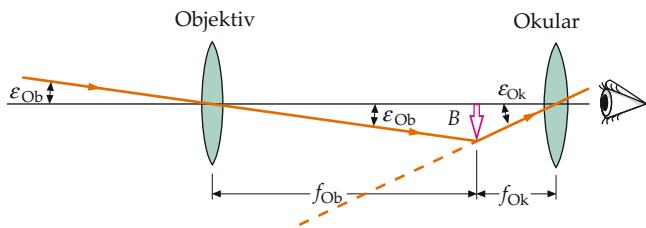


Abbildung 29.55 Schematische Darstellung des astronomischen Teleskops. Das Objektiv erzeugt an seinem zweiten Brennpunkt ein reelles, umgekehrtes Bild des entfernten Gegenstands. Dieses Bild liegt am ersten Brennpunkt des Okulars, das als Lupe dient, mit der das Bild betrachtet wird.

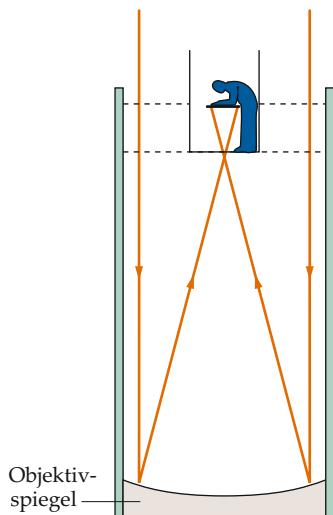


Abbildung 29.56 Beim Spiegelteleskop dient ein Konkavspiegel als Objektiv. Damit die Beobachtungskammer keinen zu großen Anteil des einfallenden Lichts abdeckt, ist die hier gezeigte Anordnung nur bei sehr großen Spiegeldurchmessern anwendbar.

lar) betrachtet, das dabei wie eine Lupe verwendet wird. Da der Gegenstand sehr weit entfernt ist, liegt das vom Objektiv entworfene Bild in dessen Brennebene, und die Bildweite entspricht der Brennweite f_{Ob} . Das vom Objektiv erzeugte Bild ist viel kleiner als der Gegenstand, denn die Gegenstandsweite ist viel größer als die Brennweite des Objektivs. (Wenn wir durch ein Teleskop beispielsweise auf den Mond blicken, so ist das vom Objektiv erzeugte Bild viel kleiner als der Mond.) Das Objektiv hat somit nicht die Aufgabe, ein vergrößertes Bild zu erzeugen, sondern ein Bild, das dem Betrachter viel näher als der Gegenstand ist und mit dem als Lupe fungierenden Okular betrachtet werden kann. Dieses Okular wird so platziert, dass das vom Objektiv entworfene Bild in seiner Brennebene liegt, also von ihm den Abstand f_{Ok} hat. Daher erscheint das Endbild im Unendlichen. Es liegt in der zweiten Brennebene des Objektivs und gleichzeitig in der ersten Brennebene des Okulars. Somit müssen Objektiv und Okular voneinander den Abstand $f_{\text{Ob}} + f_{\text{Ok}}$ haben. Die Vergrößerung des Teleskops ist gleich der erzielten Winkelvergrößerung $\varepsilon_{\text{Ok}}/\varepsilon_{\text{Ob}}$. Dabei ist ε_{Ok} der Winkel, unter dem das Endbild im Okular zu betrachten ist, und ε_{Ob} ist der Winkel, unter dem der Gegenstand dem bloßen Auge erscheint. Der Sehwinkel ε_{Ob} ist derselbe, unter dem der Gegenstand im Objektiv erscheint, wie in Abbildung 29.55 gezeigt. (Bei einem sehr weit entfernten Gegenstand wie beispielsweise dem Mond ist seine Entfernung vom Objektiv praktisch die gleiche wie die vom Auge.) Der Abbildung 29.55 können wir Folgendes entnehmen:

$$\tan \varepsilon_{\text{Ob}} = \frac{G}{g} = -\frac{B}{f_{\text{Ob}}} \approx \varepsilon_{\text{Ob}} .$$

Dabei haben wir die Näherung $\tan \varepsilon \approx \varepsilon$ für kleine Winkel verwendet. Unter dem Winkel ε_{Ok} erscheint das Endbild durch das Okular im Unendlichen:

$$\tan \varepsilon_{\text{Ok}} = \frac{B}{f_{\text{Ok}}} \approx \varepsilon_{\text{Ok}} .$$

Da B negativ ist, ist auch ε_{Ok} negativ; das bedeutet, das Bild ist umgekehrt. Die Vergrößerung des Teleskops ist daher gegeben durch

$$V_T = \frac{\varepsilon_{\text{Ok}}}{\varepsilon_{\text{Ob}}} = -\frac{f_{\text{Ob}}}{f_{\text{Ok}}} . \quad (29.23)$$

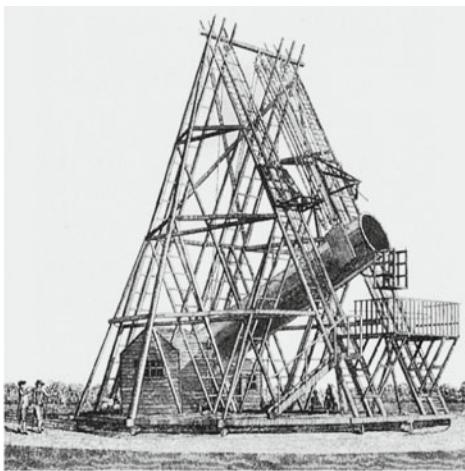
VERGRÖSSERUNG DES TELESKOPS

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass man eine hohe Vergrößerung des Teleskops erzielt, wenn das Objektiv eine große und das Okular eine kleine Brennweite hat.

Übung 29.14: Das weltweit größte Linsenteleskop (auch Refraktor genannt) gehört zum Yerkes-Observatorium der University of Chicago bei Williams Bay in Wisconsin, USA. Sein Objektiv hat einen Durchmesser von 1,02 m und eine Brennweite von 19,5 m. Die Brennweite des Okulars beträgt 10,0 cm. Wie hoch ist die Vergrößerung dieses Teleskops? ◀



(a)



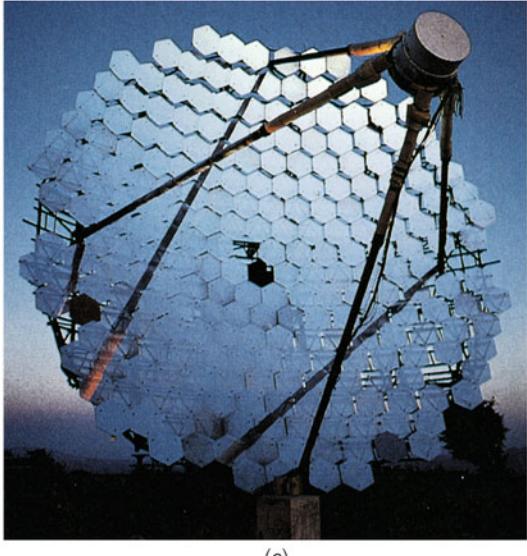
(b)



(c)



(d)



(e)

Das Aufkommen der wissenschaftlichen Astronomie mit sichtbarem Licht kann man auf den Beginn des 17. Jahrhunderts datieren. Einer ihrer Wegbereiter war der Italiener Galileo Galilei. Seit rund 70 Jahren erforschen die Astronomen das Universum auch in den anderen Bereichen des elektromagnetischen Spektrums. Dies begann in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts mit der Radioastronomie, gefolgt von der satellitengestützten Röntgenastronomie in den frühen sechziger Jahren sowie der Ultravioletten-, Infrarot- und Gammastrahlenastronomie in jüngster Zeit. a) Galileis Teleskop aus dem 17. Jahrhundert. Mit ihm entdeckte er Berge auf dem Mond und Sonnenflecken, außerdem die Saturnringe sowie Streifen und Monde beim Jupiter. b) Dieser Kupferstich zeigt ein um 1780 errichtetes Spiegelteleskop, das der berühmte Astronom Friedrich Wilhelm Herschel verwendete. Er beobachtete als Erster auch Galaxien außerhalb unserer Milchstraße. c) Das Keck-Observatorium auf dem erloschenen Vulkan Mauna Kea auf der Insel Hawaii verfügt über das größte optische Teleskop der Welt. Aufgrund der klaren, trockenen Luft und des geringen Störlichts ist dieser Standort ideal für astronomische Beobachtungen. d) Das Weltraumteleskop Hubble kreist in einer Umlaufbahn etwa 615 km oberhalb der Atmosphäre, wird also durch deren Turbulenzen nicht beeinflusst. Daher haben seine Aufnahmen eine höhere Auflösung, als sie auf der Erde möglich ist. e) Dieser 10 m große Reflektor gehört zum Whipple-Observatorium im südlichen Arizona, USA, und ist das größte Instrument, das ausschließlich für die Gammastrahlenastronomie verwendet werden soll. Hochenergetische Gammastrahlen unbekannter Ursprungs treffen auf die obere Atmosphäre und lösen Teilchenschauer aus. Dazu gehören energiereiche Elektronen, deren Čerenkov-Strahlung mit dem Reflektor am Erdboden nachweisbar ist. Nach einer Hypothese wird intensive Gammastrahlung emittiert, wenn Materie zu bestimmten ultradichten rotierenden Sternen hin beschleunigt wird, den sogenannten Pulsaren. (a) © Scala/Art Resource, b) © Royal Astronomical Society SPL / Agentur Focus, c) © Keck Observatory, Hawaii, USA, d) © NASA, e) © Gary Ladd 1972.)

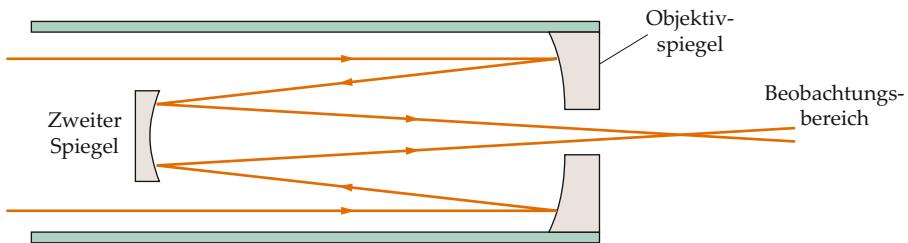


Abbildung 29.57 Dieses Spiegelteleskop weist einen zweiten, kleinen Spiegel auf. Er reflektiert das Licht durch ein kleines Loch in der Mitte des Objektivspiegels. Bei dieser Anordnung befindet sich der Beobachtungsbereich hinter dem Objektivspiegel. Daher ist der Beobachtungsbereich räumlich nicht eingeschränkt und kann zahlreiche Hilfsinstrumente enthalten.

Bei astronomischen Teleskopen ist nicht die (problemlos zu erzielende) hohe Vergrößerung entscheidend, sondern die Lichtstärke, die vom Objektivdurchmesser abhängt. Je größer dieser ist, desto heller ist das Bild. Es ist schwierig, sehr große Linsen ohne Abbildungsfehler herzustellen. Außerdem ergeben sich mechanische Probleme, weil sich eine große Linse leicht verformt, wenn sie nur am Rand unterstützt werden kann. Daher sind die großen Teleskope fast immer Spiegelteleskope (Abbildungen 29.56 und 29.57), deren Objektiv als Konkavspiegel ausgeführt ist. Dessen mechanische Lagerung ist relativ problemlos, denn ein Spiegel ist leichter als eine Linse mit gleicher

Brechkraft, und er kann auf seiner gesamten rückwärtigen Fläche unterstützt werden. Ein weiterer großer Vorteil besteht darin, dass es bei Spiegeln keine chromatische Aberration gibt. Bei den modernen auf der Erde stationierten Spiegelteleskopen besteht das Objektiv meist aus einigen Dutzend Spiegelsegmenten. Diese können individuell ausgerichtet werden, um winzige Verzerrungen bei der Neigung des Objektivs sowie thermische Ausdehnungen aufgrund von Temperaturunterschieden auszugleichen. Durch die separate Verstellung können auch Verzerrungen verringert werden, die von Turbulenzen in der Atmosphäre herrühren.

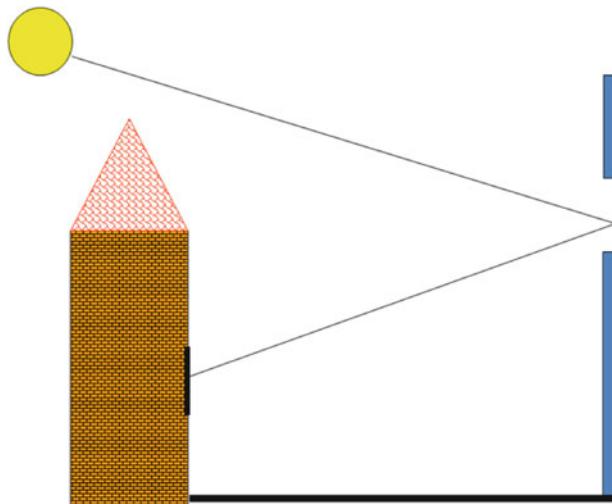
🔍 Im Kontext: Hieroglyphen aus Licht

Wer an einem sonnigen Tag mit offenen Augen durch die Stadt geht, kann in den Genuss eines Lichtphänomens kommen, dessen Ursprung sich vermutlich nicht sofort erschließen lässt: *Lichtkreuze in Lichtkreisen*.



Lichtkreuze in Lichtkreisen – mittlerweile ein alltäglicher Anblick. (© H. Joachim Schlichting)

Der Ursprung der Lichtkreuze ist in den spiegelnden Reflexionen der Sonne in den Fensterscheiben von Gebäuden zu sehen. Das Licht wird je nach der Höhe der Sonne auf die gegenüberliegende Häuserfront oder die Straße projiziert. Man muss nur 2 min warten, um festzustellen, dass sich der Reflex um seinen eigenen Durchmesser verschoben hat.



Konstellation von Fenster, Häuserfront und Sonne bei der Entstehung eines Reflexes. (© H. Joachim Schlichting)

Doch wie kann eine rechteckige ebene Scheibe Reflexe hervorrufen, deren Form nichts Rechteckiges an sich hat? Die Ursache dafür ist in der hohl- und wölbspiegelartigen Verformung der rechteckigen Scheiben zu finden. Eine solche Verformung, die beim direkten Anblick eines Fensters kaum zu erkennen ist, kann nur bei Doppelglasscheiben auftreten. Das erklärt im Übrigen auch, warum das Phänomen erst in den letzten Jahrzehnten, seit immer mehr Isolierglasscheiben verbaut wurden, in Erscheinung getreten ist.

Isolierglasscheiben werden so konstruiert, dass zwei Glasscheiben durch einen Abstandhalter getrennt luftdicht miteinander verklebt werden. Der Zwischenraum enthält entweder trockene Luft oder ein anderes Gas. Entscheidend ist aber, dass der Luftdruck zwischen den Scheiben dem jeweiligen Außendruck entspricht, bei dem die Scheiben verklebt werden. Steht die Fensterscheibenfabrik in München (518 m ü. NN) und wird das Fenster in Münster (60 m ü. NN) in ein Gebäude eingebaut, so werden sich die beiden Scheiben aufgrund des höheren Außendrucks am tiefer liegenden Ort nach innen wölben. Das Sonnenlicht trifft daher zunächst auf eine konkav und anschließend auf eine konvex gewölbte Scheibe. Der jeweils gespiegelte Teil des Lichts wird folglich von der äußeren Scheibe fokussiert und von der inneren Scheibe defokussiert.

Da rechteckig eingespannte Scheiben längs der Diagonalen am stärksten gekrümmmt werden, entwirft die konkav gekrümmte Scheibe auf der Projektionsfläche eine kreuzförmige Lichtfigur. Sie wird von einer Art Lichtkreis überlagert, der durch die Defokussierung an der konvex gekrümmten Scheibe entsteht. Wie man sich leicht überlegen kann, entstehen bei umgekehrten Druckverhältnissen die gleichen Lichtfiguren. Die Scheiben sind dann nach außen gewölbt und vertauschen ihre Rollen.

Da von jeder Scheibe nur wenige Prozent des einfallenden Lichts reflektiert werden, mag es erstaunen, dass die Lichtfiguren so deutlich zu erkennen sind. Dies ist vor allem der Tatsache zu verdanken, dass die Projektionswände naturgemäß meist im Schatten liegen.

Wer die Lichtkreuze einmal gesehen hat, sieht sie immer wieder und wird dabei erkennen, dass sich nicht immer ein Kreuz in einem Kreis ergibt, sondern oft große Abweichungen zu beobachten sind, die von bloßer Unschärfe bis zu Figuren reichen, die nichts mehr mit einem Kreuz gemein haben. Das liegt daran, dass ein scharfes Kreuz nur dann entsteht, wenn die Krümmung gerade so groß ist, dass der Abstand der Projektionswand der dazu passenden Brennweite entspricht und die Scheiben keine anderweitigen Deformationen aufweisen.



H. Joachim Schlichting promovierte in theoretischer Physik und habilitierte sich in Didaktik der Physik. Zuletzt war er langjähriger Direktor des Instituts für Didaktik der Physik an der Universität Münster. Für seine Bemühungen, Probleme der modernen Physik für den Physikunterricht aufzuarbeiten und seine Arbeiten über Natur- und Alltagsphänomene wurde er 2008 mit dem Robert-Wichard-Pohl-Preis der DPG und 2013 mit dem Archimedes-Preis der MNU ausgezeichnet.

1. Schlichting, H. J., „Lichtkreuze in Lichtkreisen“, *MNU* 57/8, 2004, 467–474

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Virtuelle und reelle Bilder und Gegenstände	
Bilder	Ein Bild ist <i>reell</i> , wenn sich in jedem Bildpunkt tatsächlich Lichtstrahlen treffen. Dies kann vor einem Spiegel der Fall sein, aber auch auf der Transmissionsseite einer Linse oder einer brechenden Oberfläche. Ein Bild ist <i>virtuell</i> , wenn sich in jedem Bildpunkt nur Verlängerungen tatsächlicher Lichtstrahlen treffen. Dies kann hinter einem Spiegel der Fall sein, aber auch auf der Einfallsseite einer Linse oder einer brechenden Oberfläche.
Gegenstände	Ein reeller Gegenstand kann entweder ein tatsächlich dort platzierteter Gegenstand oder ein reelles Bild sein. Ein Gegenstand ist <i>reell</i> , wenn von jedem Gegenstandspunkt tatsächlich Lichtstrahlen ausgehen. Dies kann nur auf der Einfallsseite eines Spiegels, einer Linse oder einer brechenden Oberfläche der Fall sein. Ein Gegenstand ist <i>virtuell</i> , wenn von jedem Gegenstandspunkt nur Verlängerungen tatsächlicher Lichtstrahlen ausgehen. Dies kann hinter einem Spiegel oder auf der Transmissionsseite einer Linse oder einer brechenden Oberfläche der Fall sein.
2. Sphärische Spiegel	
Brennweite	Die Brennweite ist die Bildweite bei einem unendlich weit entfernten Gegenstand. Dann fällt das Licht parallel zur optischen Achse ein und wird auf den Brennpunkt fokussiert.
Abbildungsgleichung für sphärische Spiegel	$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ (29.4) Darin ist g die Gegenstandsweite, b die Bildweite und f die Brennweite, die dem halben Radius r des Spiegels entspricht: $f = \frac{r}{2}$. (29.3)
Vergrößerung	$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$ (29.5) Darin ist B die Bildhöhe und G die Gegenstandshöhe.
Bildkonstruktion	Das von einem sphärischen Spiegel entworfene Bild kann mithilfe von mindestens zwei der drei Hauptstrahlen konstruiert werden, die achsennah sein müssen: <ol style="list-style-type: none"> 1. Der achsenparallele Strahl wird in den Brennpunkt reflektiert. 2. Der Brennpunktsstrahl verläuft durch den Brennpunkt und wird achsenparallel reflektiert. 3. Der radiale Strahl verläuft durch den Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, trifft diesen senkrecht zur Oberfläche und wird in sich selbst reflektiert.
Vorzeichenkonvention für die Reflexion an einem Konkav- oder Konvexspiegel	<ol style="list-style-type: none"> 1. Die Gegenstandsweite g ist positiv, wenn sich der Gegenstand auf der Seite des Spiegels befindet, von der aus das Licht auf den Spiegel fällt. 2. Die Bildweite b ist positiv, wenn sich das Bild auf der Seite des Spiegels befindet, in die das Licht vom Spiegel reflektiert wird. 3. Der Krümmungsradius r ist (wie auch die Brennweite f) positiv, wenn der Spiegel konkav ist. Dann liegt der Brennpunkt auf der Seite des Spiegels, auf der das Licht einfällt und in die es reflektiert wird.
3. Durch Brechung erzeugte Bilder	
Brechung an einer einzelnen Oberfläche	$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$ (29.6) Darin ist n_1 die Brechzahl des Mediums auf der Einfallsseite der brechenden Oberfläche, und n_2 ist die Brechzahl des brechenden Mediums.
Vergrößerung	$V = \frac{B}{G} = -\frac{n_1 b}{n_2 g}$ (29.7)

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
Vorzeichenkonvention für die Brechung	<ol style="list-style-type: none"> Die Gegenstandsweite g ist positiv für Gegenstände auf der Einfallsseite der brechenden Fläche. Die Bildweite b ist positiv für Bilder auf der Transmissionssseite der brechenden Fläche. Der Krümmungsradius r ist positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Transmissionssseite der brechenden Fläche liegt.
4. Dünne Linsen	
Reziproke Brennweite einer dünnen Linse	$\frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_{\text{Luft}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ (29.11)
	Eine positive Linse ($f > 0$) oder Sammellinse ist beispielsweise bikonvex. Eine negative Linse ($f < 0$) oder Zerstreuungslinse ist beispielsweise bikonkav.
Erster und zweiter Brennpunkt	Achsenparallel einfallende Strahlen treten so aus der Linse aus, dass sie entweder auf den <i>ersten Brennpunkt F'</i> gerichtet sind oder von ihm ausgehen. Einfallende Strahlen, die entweder auf den <i>zweiten Brennpunkt F</i> gerichtet sind oder von ihm ausgehen, treten achsenparallel aus der Linse aus.
Brechkraft	$D = \frac{1}{f}$
Abbildungsgleichung für dünne Linsen	$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ (29.12)
Vergrößerung	$V = \frac{b}{g} = -\frac{b}{g}$ (29.14)
Bildkonstruktion	Das von einer dünnen Linse entworfene Bild kann mithilfe von mindestens zwei der drei Hauptstrahlen konstruiert werden, die achsennah sein müssen: <ol style="list-style-type: none"> Der achsenparallele Strahl wird so gebrochen, dass er durch den zweiten Brennpunkt der Linse verläuft. Der Mittelpunktsstrahl verläuft durch den Mittelpunkt der Linse und wird nicht aus seiner Richtung abgelenkt. (Er wird allerdings seitlich etwas versetzt, wie bei einer planparallelen Platte. Diese Verschiebung kann bei dünnen Linsen vernachlässigt werden.) Der Brennpunktsstrahl verläuft durch den ersten Brennpunkt und tritt achsenparallel aus. (Bei einer Zerstreuungslinse wird der Brennpunktsstrahl auf den ersten Brennpunkt, hinter der Linse, gerichtet.)
Vorzeichenkonvention für die Abbildung durch Linsen	Die Vorzeichenkonvention ist dieselbe wie die für die Brechung an einer sphärischen Oberfläche.
5. Abbildungsfehler	Bei der Abbildung durch Linsen und Spiegel gibt es prinzipielle Verzerrungen und Unschärfen, die nicht auf Material- oder Fertigungsfehler zurückzuführen sind.
Sphärische Aberration	Die sphärische Aberration führt von Strahlen her, die nicht achsennah sind und daher nicht in einem einzigen Punkt fokussiert werden. Die Auswirkung der sphärischen Aberration kann durch Ausblenden achsenferner Strahlen verringert werden. Dadurch wird die einfallende Lichtmenge und damit die Helligkeit des Bilds geringer.
Chromatische Aberration	Die chromatische Aberration tritt nicht bei Spiegeln auf, sondern nur bei Linsen. Sie führt daher, dass die Brechzahl von der Wellenlänge abhängt. Ihre Auswirkung kann verringert werden, indem man keine einzelne Linse einsetzt, sondern eine Kombination mehrerer Linsen aus Materialien mit unterschiedlichen Brechzahlen.
6. Auge	Das System Hornhaut-Linse des Auges fokussiert das einfallende Licht auf die Netzhaut. Hier nehmen es die Stäbchen und die Zapfen auf und leiten die Sinnesreize über den Sehnerv an das Gehirn weiter. Bei entspannter Augenlinse beträgt die Brennweite des Systems Hornhaut-Linse rund 2,5 cm; dies ist der Abstand zwischen Augenlinse und Netzhaut. Wenn Gegenstände nahe vor das Auge gebracht werden, krümmt bei der Akkommodation der Ziliarmuskel die Augenlinse stärker, sodass die Brennweite verringert wird und die Strahlen auch dabei auf die Netzhaut fokussiert werden. Der Nahpunkt ist der Gegenstandspunkt mit dem geringsten Abstand vom Auge, der noch scharf gesehen wird; dieser Abstand liegt normalerweise bei ungefähr 25 cm, wird aber mit zunehmendem Alter meist deutlich größer. Die Größe, in der ein Gegenstand erscheint, hängt von der Bildhöhe auf der Netzhaut ab. Je näher ein Gegenstand dem Auge ist, desto größer ist sein Bild auf der Netzhaut und damit auch die scheinbare Gegenstandshöhe.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Lupe	Eine Lupe ist eine Linse mit positiver Brennweite, die kleiner ist als der Abstand des Nahpunkts vom Auge. Sie erzeugt ein virtuelles, vergrößertes Bild des Gegenstands beim Nahpunkt des Auges.
Vergrößerung der Lupe	$V_L = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f}$ (29.20)
	Darin ist ε der Sehwinkel und ε_0 der Sehwinkel am Nahpunkt im Abstand s_0 vom Auge.
8. Mikroskop	Das Mikroskop dient zum Betrachten sehr kleiner Gegenstände in geringem Abstand vom Objektiv. Es besteht aus zwei Sammellinsen (oder Linsensystemen), und zwar dem Objektiv und dem Okular. Der zu betrachtende Gegenstand wird etwas außerhalb der Brennweite des Objektivs platziert. Das Objektiv entwirft ein vergrößertes Bild des Gegenstands, das am Brennpunkt des Okulars liegt. Dieses wirkt als Lupe, mit der das Endbild betrachtet wird.
Vergrößerung des Mikroskops	$V_M = V_{\text{Ob}} V_{\text{Ok}} = -\frac{l}{f_{\text{ob}}} \frac{s_0}{f_{\text{ok}}}$ (29.22)
	Darin ist l die Tubuslänge, also der Abstand zwischen dem zweiten Brennpunkt des Objektivs und dem ersten Brennpunkt des Okulars.
9. Teleskop	Das Teleskop dient zum Betrachten weit entfernter Gegenstände. Sein Objektiv erzeugt ein reelles Bild des Gegenstands, das viel kleiner ist als der Gegenstand, jedoch wesentlich näher beim Betrachter liegt. Das Okular dient als Lupe, mit der dieses Bild betrachtet wird. Beim Spiegelteleskop ist das Objektiv als Hohlspiegel ausgeführt.
Vergrößerung des Teleskops	$V_T = \frac{\varepsilon_{\text{Ok}}}{\varepsilon_{\text{Ob}}} = -\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{ok}}}$ (29.23)

Antworten auf die Verständnisfragen

1. Ben kann nur das Bild bei P' sehen.
2. Unendlich groß.
3. Siehe Abbildung 29.58.

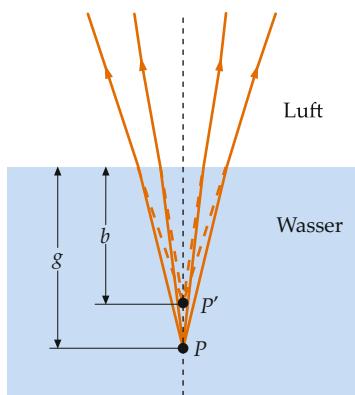


Abbildung 29.58 Bildkonstruktion für die scheinbare Tiefe b eines Gegenstands im Wasser, der direkt von oben betrachtet wird. Das Bild P'_1 erscheint weniger tief, als sich der Gegenstand P befindet.

Lösungen der Übungen

1. a) 8,0 cm, b) $b = -4,0$ cm
2. $b = -2,5$ cm und $V = +0,50$. Das Bild ist aufrecht, virtuell und verkleinert.
3. 390 m
4. Mit $n_1 = 1,33$ und $n_2 = 1,00$ sowie $g = 7,5$ cm und $r = -15,0$ cm ergibt sich: a) $b = -6,44$ cm und b) $V = 1,14$. Tommy sieht Jonas um 1,1 cm näher und um 14 % größer als er tatsächlich ist.
5. Das Bild befindet sich 5,6 cm vor der Vorderseite des Aquariums.
6. 18 cm
7. $b = 30$ cm, $V = -2,0$; reell und umgekehrt
8. $b = -10$ cm, $V = 2,0$; virtuell und aufrecht
9. $D_{\text{Auge}} = 41,33$ dpt;
 $D_{\text{Kombin.}} = 41,33$ dpt + 2,67 dpt = 44 dpt.
Die Brechkraft ist gleich derjenigen der Linse.
10. $V = 12$
11. $V = -195$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

29.1 • Nehmen Sie an, jede der drei Achsen eines kartesischen Koordinatensystems wie in Abbildung 29.4 wird in einer anderen Farbe gezeichnet. Dann wird dieses Koordinatensystem fotografiert, außerdem sein von einem ebenen Spiegel erzeugtes Spiegelbild. Kann man den Aufnahmen entnehmen, dass eine von ihnen ein Spiegelbild zeigt, d. h. dass nicht beide Fotos das reale Koordinatensystem – mit unterschiedlichen Betrachtungswinkeln – zeigen?

29.2 • Richtig oder falsch? a) Das von einem Konkavspiegel entworfene virtuelle Bild ist stets kleiner als der Gegenstand. b) Ein Konkavspiegel erzeugt stets ein virtuelles Bild. c) Ein Konvexspiegel erzeugt niemals ein reelles Bild eines realen Gegenstands. d) Ein Konkavspiegel erzeugt niemals ein vergrößertes reelles Bild eines Gegenstands.

29.3 • Ein Gegenstand steht 40 cm weit auf der optischen Achse vor einer Zerstreuungslinse mit der Brennweite –10 cm. Wie sieht das Bild aus? a) Reell, umgekehrt und verkleinert, b) reell, umgekehrt und vergrößert, c) virtuell, umgekehrt und verkleinert, d) virtuell, aufrecht und verkleinert, e) virtuell, aufrecht und vergrößert.

29.4 • Ein Gegenstand steht zwischen dem Brennpunkt und der Mitte einer Sammellinse. Wie sieht das Bild aus? a) Reell, umgekehrt und vergrößert, b) virtuell, aufrecht und verkleinert, c) virtuell, aufrecht und vergrößert, d) reell, umgekehrt und verkleinert.

29.5 • Richtig oder falsch? a) Ein virtuelles Bild kann nicht auf einem Schirm betrachtet werden. b) Eine negative Bildweite bedeutet, dass das Bild virtuell ist. c) Alle Strahlen, die parallel zur optischen Achse eines sphärischen Spiegels verlaufen, werden in einen einzigen Punkt reflektiert. d) Eine Zerstreuungslinse kann kein reelles Bild eines realen Gegenstands erzeugen. e) Bei einer Sammellinse (positiven Linse) ist die Bildweite stets positiv.

29.6 •• Rückspiegel bei Fahrzeugen sind oft als Konvexspiegel ausgeführt, damit der Blickwinkel möglichst groß ist. Nehmen Sie an, unter einem solchen Spiegel ist folgender Warnhinweis angebracht: „Achtung! Fahrzeuge sind näher, als sie in diesem Spiegel erscheinen.“ Aus der Bildkonstruktion, beispielsweise in Abbildung 29.20, geht jedoch hervor, dass bei einem entfernten Gegenstand die Bildweite viel kleiner ist als die Gegenstandsweite. Warum scheint er dennoch weiter entfernt zu sein?

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

29.7 • Schätzen Sie die Bildweite und die Bildhöhe ab, wenn Sie einen blanken Löffel etwa 30 cm weit vor Ihr Gesicht halten, wobei die konvexe Seite des Löffels Ihnen zugewandt ist.

29.8 •• Schätzen Sie mithilfe von Gleichung 29.20 den Maximalwert der Vergrößerung ab, die man mit einer Lupe in der Praxis erreichen kann. (*Hinweis:* Überlegen Sie sich, wie groß die kleinste Brennweite einer Sammellinse aus Glas sein kann, die noch als Linse brauchbar ist.)

Ebene Spiegel

29.9 • Eine 1,62 m große Person möchte ihr gesamtes Bild in einem senkrecht stehenden ebenen Spiegel sehen. a) Wie hoch muss der Spiegel mindestens sein? b) Wie hoch muss er über dem Boden stehen, wenn sich der Scheitel der Person 14 cm oberhalb der Augenhöhe befindet? Zeichnen Sie die Bildkonstruktion und erläutern Sie daran Ihre Antwort.

Sphärische Spiegel

29.10 •• Ein sphärischer Konkavspiegel hat einen Krümmungsradius von 24 cm. Konstruieren Sie jeweils das Bild (sofern eines entworfen wird) eines Gegenstands, der a) 55 cm, b) 24 cm, c) 12 cm bzw. d) 8,0 cm vom Spiegel entfernt ist. Geben Sie jeweils an, ob das Bild reell oder virtuell ist, ob es aufrecht steht oder umgekehrt ist und ob es vergrößert, verkleinert oder ebenso groß wie der Gegenstand ist.

29.11 •• Konvexspiegel dienen beispielsweise in Kaufhäusern dazu, bei vernünftiger Spiegelgröße einen guten Überblick (bzw. ein großes Blickfeld) zu bieten. Der Spiegel in Abbildung 29.59 erlaubt es der 5,0 m von ihm entfernten Verkäuferin, den gesamten Verkaufsraum zu überwachen. Der Krümmungsradius beträgt 1,2 m. a) Wenn der Kunde 10 m vom Spiegel entfernt ist, wie weit ist dann sein Bild von der Spiegeloberfläche entfernt? b) Liegt das Bild vor oder hinter dem Spiegel? c) Wenn der Kunde 2,0 m groß ist, wie groß ist dann sein Bild?

29.12 •• Der sphärische Konkavspiegel eines Teleskops hat einen Krümmungsradius von 8,0 m. Wo befindet sich das von ihm entworfene Bild des Mondes, und welchen Durchmesser hat es? Der Mond hat einen Durchmesser von ca. $3,5 \cdot 10^6$ m und ist von der Erde rund $3,8 \cdot 10^8$ m entfernt.

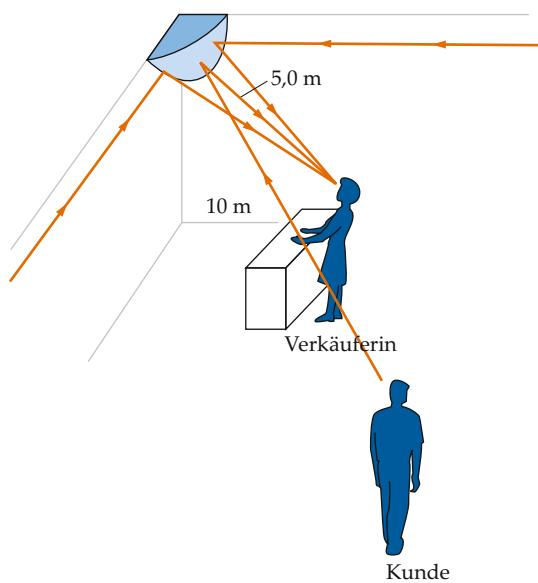


Abbildung 29.59 Zu Aufgabe 29.11.

Durch Brechung erzeugte Bilder

29.13 • Ein Fisch befindet sich 10 cm weit hinter der Vorderseite eines kugelförmigen Gefäßes, dessen Radius 20 cm beträgt. a) Wie weit hinter dem Glas erscheint der Fisch einem Betrachter, der direkt von vorn auf das Gefäß blickt? b) Um wie viel ändert sich der scheinbare Abstand des Fisches von der vorderen Glaswand, wenn er 30 cm weit von ihr weg schwimmt?

29.14 •• Bei einem sehr langen Glasstab mit einem Durchmesser von 1,75 cm wurde ein Ende zu einer konkaven Halbkugel mit einem Radius von 7,20 cm geschliffen und blank poliert. Die Brechzahl des Glases beträgt 1,68. Auf der Achse des Stabs, 15,0 cm vor der sphärischen Oberfläche, wird ein Gegenstand platziert. Bestimmen Sie den Ort des Bilds und geben Sie an, ob es reell oder virtuell ist. Zeichnen Sie die Bildkonstruktion.

Dünne Linsen und die Linsengleichung

29.15 • Eine bikonkav Linse aus Glas mit der Brechzahl 1,45 hat Krümmungsradien mit dem Betrag 30,0 cm bzw. 25,0 cm. Ein Gegenstand befindet sich links von ihr, 80,0 cm weit entfernt. Berechnen Sie a) die Brennweite der Linse, b) die Bildweite, c) die Vergrößerung. d) Ist das Bild reell oder virtuell? Steht es aufrecht oder ist es umgekehrt?

29.16 • Die nachfolgend spezifizierten Linsen bestehen aus Glas mit der Brechzahl 1,5. Bei den Radien sind nachstehend jeweils die *Beträge* angegeben. Skizzieren Sie jede Linse und berechnen Sie ihre Brennweite in Luft: a) bikonvex mit den Krümmungsradien 15 cm und 26 cm, b) plankonvex mit dem Krümmungsradius 15 cm, c) bikonkav mit Krümmungsradien von 15 cm, d) plankonkav mit dem Krümmungsradius 26 cm.

29.17 •• a) Was bedeutet eine negative Gegenstandsweite, und wie kann sie zustande kommen? Nennen Sie ein konkretes Beispiel dafür. b) Bestimmen Sie für eine Sammellinse mit einer Brennweite von 20 cm die Bildweite und die Vergrößerung, wenn die Gegenstandsweite -20 cm beträgt. Beschreiben Sie das Bild: Ist es virtuell oder reell? Steht es aufrecht oder ist es umgekehrt? c) Wiederholen Sie Teilaufgabe b für eine Zerstreuungslinse mit einer Brennweite von beträgsmäßig 30 cm sowie für eine Gegenstandsweite von -10 cm .

29.18 •• Zwei Sammellinsen, beide mit der Brennweite 10 cm, sind 35 cm voneinander entfernt. Links vor der ersten Linse, 20 cm entfernt, befindet sich ein Gegenstand. a) Zeichnen Sie die Bildkonstruktion und geben Sie an, wo das Endbild liegt. Lösen Sie diese Aufgabe auch mithilfe der Linsengleichung. b) Ist das Endbild reell oder virtuell? Steht es aufrecht oder ist es umgekehrt? c) Wie hoch ist die durch beide Linsen insgesamt erzielte Lateralvergrößerung?

29.19 •• a) Damit man mit einer dünnen Sammellinse der Brennweite f die Vergrößerung $|V|$ erzielt, muss für die Gegenstandsweite gelten: $g = (1 + |V|^{-1})f$. Leiten Sie diese Beziehung her. b) Mit einer Kamera, deren Objektivbrennweite 50,0 mm beträgt, soll eine 1,75 m große Person aufgenommen werden. Wie weit muss sie von der Kamera entfernt sein, damit ihr Bild auf dem Film 24,0 mm hoch ist?

29.20 ••• Newton verwendete eine Form der Abbildungsgleichung für dünne Linsen, bei der die Bildweite b' und die Gegenstandsweite g' relativ zu den Brennpunkten angegeben sind, also nicht relativ zur Mitte der Linse. a) Fertigen Sie eine Skizze einer Linse an und tragen Sie die Größen b' und g' ein. Zeigen Sie, dass mit $b' = b - f$ und $g' = g - f$ die Linsengleichung lautet: $g' b' = f^2$. b) Zeigen Sie, dass die Vergrößerung damit gegeben ist durch: $V = -b'/f = -f/g'$.

Abbildungsfehler

29.21 • Eine symmetrische bikonvexe Linse hat Krümmungsradien mit dem Betrag 10,0 cm. Sie besteht aus Glas mit den Brechzahlen 1,530 für blaues und 1,470 für rotes Licht. Wie groß ist ihre Brennweite a) für rotes Licht und b) für blaues Licht?

Das Auge

29.22 • Damit zwei sehr nahe beieinander liegende punktförmige Gegenstände getrennt erkennbar sind, müssen ihre Bilder auf der Netzhaut des Auges auf zwei nicht benachbarte Zäpfchen fallen. Zwischen ihren Bildern muss mindestens ein nicht aktiviertes Zäpfchen liegen. Die Zäpfchen haben einen Abstand von etwa 1,00 μm . Stellen Sie sich den Augapfel als homogene Kugel mit dem Durchmesser 2,50 cm und der Brechzahl 1,34 vor. a) Wie groß ist der kleinste Winkel ε in Abbildung 29.60, unter dem die beiden Punkte noch getrennt zu erkennen sind? b) Welchen Abstand dürfen die Punkte dabei voneinander haben, wenn sie 20,0 m vom Auge entfernt sind?

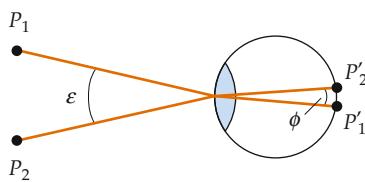


Abbildung 29.60 Zu Aufgabe 29.22.

29.23 • Nehmen Sie an, als Modell des Auges dient eine Kamera, deren Objektivlinse die feste Brennweite 2,50 cm hat. Die Linse kann zur „Netzhaut“ (der Kamerarückwand) hin und von ihr weg verschoben werden. Wie weit muss die Linse ungefähr verschoben werden, damit ein von der Linse 25,0 cm weit entfernter Gegenstand scharf auf die „Netzhaut“ abgebildet wird? (Hinweis: Ermitteln Sie, wie weit hinter der „Netzhaut“ das Bild des 25,0 cm weit entfernten Gegenstands entworfen wird.)

29.24 •• Ein einfaches Modell des Auges kann man realisieren, indem man eine Linse mit veränderlicher Brechkraft D im festen Abstand x vor einem Schirm anbringt (Abbildung 29.61). Zwischen Linse und Schirm befindet sich Luft. Dieses „Auge“ kann unter Akkommodation scharf abbilden, wenn die Gegenstandsweite g zwischen s_0 (der deutlichen Sehweite) und s_1 liegt. Es wird als „normalsichtig“ angesehen, wenn es auf sehr weit entfernte Gegenstände fokussiert werden kann.

a) Zeigen Sie, dass die minimale Brechkraft dieses „normalsichtigen Auges“ gegeben ist durch

$$D_{\min} = \frac{1}{x}.$$

b) Zeigen Sie, dass seine maximale Brechkraft gegeben ist durch

$$D_{\max} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{x}.$$

c) Die Differenz $\Delta D = D_{\max} - D_{\min}$ nennt man Akkommodation. Wie groß sind die minimale Brechkraft und die Akkommodation des Augenmodells, wenn $x = 2,50$ cm und $s_0 = 25,0$ cm ist?

29.25 •• Die Brechzahl der Augenlinse unterscheidet sich nur wenig von der des sie umgebenden Materials. Dagegen ändert sich die Brechkraft beim Übergang von Luft ($n = 1,00$) zur Hornhaut ($n \approx 1,38$) sehr stark. Die Brechung im Auge geschieht daher vor allem in der Hornhaut. a) Nehmen Sie an, die Gesamtheit aus Hornhaut, Augenlinse und Glaskörper sei eine homogene Kugel mit der Brechzahl 1,38, und berechnen Sie ihren Radius, wenn sie parallele Lichtstrahlen auf die Netzhaut fokussiert, die 2,50 cm hinter der Vorderseite liegt. b) Erwarten Sie, dass das Ergebnis größer oder dass es kleiner ist als der tatsächliche Krümmungsradius der Hornhaut?

Die Lupe

29.26 • Eine Linse mit der Brennweite 6,0 cm soll als Lupe dienen. Bei einem Benutzer liegt der Nahpunkt bei 25 cm und bei einem anderen bei 40 cm. a) Wie hoch ist jeweils die effektive Vergrößerung? b) Vergleichen Sie die Größen der beiden Bilder auf der Netzhaut, wenn die beiden Benutzer mit dieser Lupe denselben Gegenstand betrachten.

29.27 •• Ein Botaniker verwendet eine Konvexlinse der Brechkraft 12 dpt als Lupe und betrachtet mit ihr ein Blatt. Wie hoch ist die Winkelvergrößerung, wenn das Endbild a) im Unendlichen bzw. b) in 25 cm Abstand liegt?

Das Mikroskop

29.28 •• Das Objektiv eines Mikroskops hat die Brennweite 17,0 mm. Es erzeugt 16,0 cm von seinem zweiten Brennpunkt entfernt ein Bild. a) Wie weit vor dem Objektiv befindet sich der Gegenstand? b) Welche Vergrößerung ergibt sich für einen Betrachter, dessen Nahpunkt bei 25,0 cm liegt, wenn das Okular die Brennweite 51,0 mm hat?

29.29 ••• Ein Mikroskop hat die Vergrößerung 600, und sein Okular hat die Winkelvergrößerung 15,0. Die Objektivlinse ist 22,0 cm vom Okular entfernt. Berechnen Sie a) die Brennweite des Okulars, b) den Abstand des Gegenstands vom Objektiv, wenn das Bild mit normalsichtigem, entspanntem Auge betrachtet werden kann, c) die Brennweite des Objektivs.

Das Teleskop

29.30 • Ein einfaches Teleskop hat ein Objektiv mit der Brennweite 100 cm und ein Okular mit der Brennweite 5,00 cm. Mit ihm wird der Mond betrachtet, der unter einem Winkel von etwa 9,00 mrad erscheint. a) Welchen Durchmesser hat das vom Objektiv entworfene Bild? b) Unter welchem Winkel erscheint das Endbild im Unendlichen? c) Welche Vergrößerung hat das Teleskop?

29.31 •• Der 5,10-m-Spiegel des Teleskops auf dem Mount Palomar hat eine Brennweite von 1,68 m. a) Um welchen Faktor ist seine Lichtstärke, die proportional zu seiner Detektorfläche ist, größer als die des 1,02-m-Refraktors (Linsenteleskops) im Yerkes-Observatorium? b) Wie hoch ist seine Vergrößerung, wenn die Brennweite des Okulars 1,25 cm beträgt?

29.32 •• Ein Teleskop hat für Beobachtungen von Objekten auf der Erde den Nachteil, dass es ein umgekehrtes Endbild erzeugt. Beim sogenannten Galilei-Teleskop ist die Objektivlinse eine Sammellinse (wie gewöhnlich), die Okularlinse jedoch eine Zerstreuungslinse. Das vom Objektiv entworfene Bild liegt hinter dem Okular an dessen Brennpunkt. Daher ist das Endbild virtuell sowie aufrecht und liegt im Unendlichen. a) Zeigen Sie, dass die Vergrößerung des Galilei-Teleskops $V = -f_{\text{obj}}/f_{\text{ok}}$

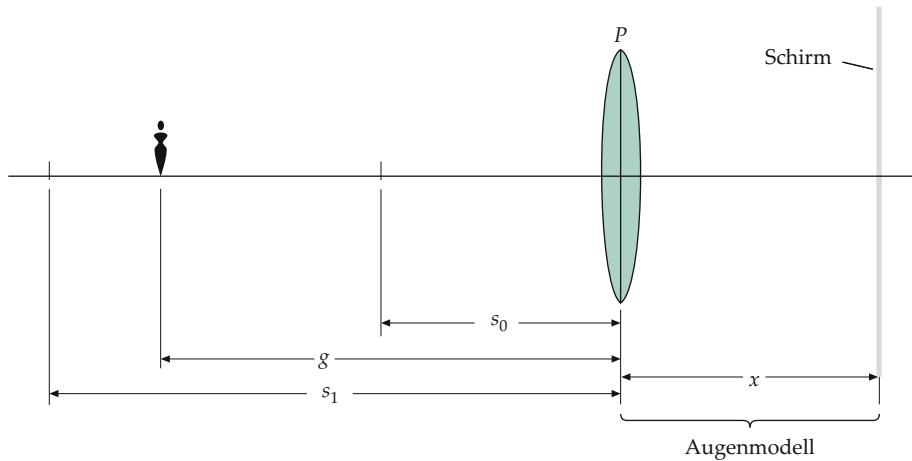


Abbildung 29.61 Zu Aufgabe 29.24.

ist. Darin ist f_{Ob} die Brennweite des Objektivs und V_{OK} die (hier negative) Brennweite des Okulars. b) Skizzieren Sie den Strahlengang in diesem Teleskop und zeigen Sie daran, dass das Endbild tatsächlich virtuell ist, aufrecht steht und im Unendlichen liegt.

Allgemeine Aufgaben

29.33 • Mit einer (dünnen) Sammellinse der Brennweite 10 cm wird ein Bild erzeugt, das doppelt so groß ist wie der (kleine) Gegenstand. Wie groß sind jeweils die Gegenstands- und die Bildweite, wenn das Bild a) aufrecht steht bzw. wenn es b) umgekehrt ist? Zeichnen Sie jeweils den Strahlengang.

29.34 •• Sie haben zwei Sammellinsen mit den Brennweiten 75 mm bzw. 25 mm. a) Wie müssen diese Linsen angeordnet werden, damit sie ein einfaches astronomisches Teleskop ergeben? Geben Sie an, welche Linse als Objektiv und welche als Okular dienen muss, welchen Abstand sie voneinander haben müssen und welche Winkelvergrößerung das Teleskop haben wird. b) Skizzieren Sie den Strahlengang und zeigen Sie an ihm, wie mithilfe dieses Teleskops weit entfernte Gegenstände vergrößert abgebildet werden können.

29.35 •• a) Eine dünne Linse hat in Luft die Brennweite f_L . Zeigen Sie, dass für ihre Brennweite f_W in Wasser gilt:

$$f_W = -\frac{(n_W/n_L)(n - n_L)}{(n - n_W)} f_L.$$

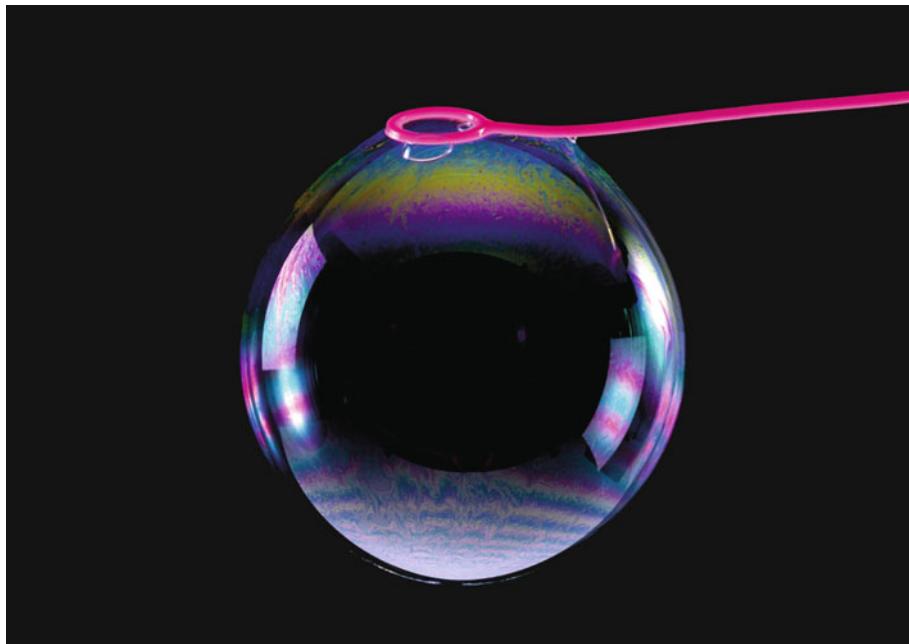
Darin ist n_W die Brechzahl des Wassers, n die des Linsenmaterials und n_L die der Luft. b) Berechnen Sie die Brennweite in Luft sowie in Wasser einer bikonkaven Linse, deren Material die Brechzahl 1,50 hat und deren Krümmungsradien 30 cm und 35 cm betragen.

29.36 ••• a) Zeigen Sie, dass eine geringe Änderung dn der Brechzahl des Linsenmaterials eine geringe Änderung df der Brennweite zur Folge hat, für die gilt: $df/f \approx -dn/(n - n_{\text{Luft}})$. b) Berechnen Sie mit dieser Beziehung die Brennweite einer dünnen Linse für blaues Licht (mit $n = 1,530$), wenn für rotes Licht (mit $n = 1,470$) ihre Brennweite 20,0 cm beträgt.

29.37 ••• Der Abbildungsmaßstab eines sphärischen Spiegels oder einer dünnen Linse ist $V = -b/g$. Zeigen Sie, dass sich für Gegenstände mit geringer horizontaler Ausdehnung die longitudinale Vergrößerung näherungsweise zu $-V^2$ ergibt. (Hinweis: Zeigen Sie, dass gilt: $db/dg = -b^2/g^2$.)

Interferenz und Beugung

30



Hier wird weißes Licht an einer Seifenblase reflektiert. Die Reflexion erfolgt jeweils an der Vorder- und an der Rückseite des Flüssigkeitsfilms, und die reflektierten Wellen interferieren. Da die Dicke des Flüssigkeitsfilms in der gleichen Größenordnung wie die Lichtwellenlänge liegt, interferieren die beiden reflektierten Wellen je nach ihrer Phasendifferenz und ihrer Wellenlänge konstruktiv oder destruktiv. (© Aaron Haupt/Photo Researchers.)



Haben Sie sich schon einmal gefragt, ob die Phänomene, die die farbigen Muster an Seifenblasen hervorbringen, auch technisch genutzt werden können? (Siehe Beispiel 30.2.)

30.1	Phasendifferenz und Kohärenz	1086
30.2	Interferenz an dünnen Schichten	1087
30.3	Interferenzmuster beim Doppelspalt	1089
30.4	Beugungsgitter	1093
30.5	Fraunhofer'sche und Fresnel'sche Beugung	1096
30.6	Beugungsmuster beim Einzelpunkt	1097
30.7	*Vektoraddition harmonischer Wellen	1100
30.8	Beugung und Auflösung	1106
	Zusammenfassung	1112
	Aufgaben	1114

Interferenz und Beugung sind die wichtigen Phänomene, durch die sich Wellen von Teilchen unterscheiden. (Die Grundlagen der Interferenz und der Beugung von Wellen wurden in Kapitel 12 schon besprochen.) Die Interferenz ist die Bildung eines sichtbaren Intensitätsmusters infolge der Überlagerung von zwei oder mehreren kohärenten Wellen, die in einem Raumpunkt zusammentreffen. Unter Beugung versteht man die Abweichung der Wellenausbreitung von der geometrischen Strahlrichtung an einer Öffnung oder einem Hindernis im Lichtweg.

In diesem Kapitel untersuchen wir, wie die verschiedenen Interferenzmuster berechnet werden können, die beim Auftreten von Beugung und Interferenz zustande kommen. Dabei wenden wir das Huygens'sche Prinzip an, betrachten also die Elementarwellen, die von jedem Punkt der ursprünglichen Wellenfront ausgehen.

30.1 Phasendifferenz und Kohärenz

Treffen zwei harmonische Wellen mit gleicher Frequenz, Wellenlänge und Polarisation, aber unterschiedlichen Phasen aufeinander, resultiert eine ebenfalls harmonische Welle, deren Amplitude von der Phasendifferenz abhängt. Wenn die Phasendifferenz null oder ein ganzzahliges Vielfaches von 360° bzw. 2π ist, so sind die eintreffenden Wellen *in Phase* und interferieren *konstruktiv*. Die resultierende Amplitude entspricht dann der Summe der beiden Amplituden, und die Intensität ist maximal, weil sie proportional zum Quadrat der Amplitude ist. (Bei gleichen Amplituden der beiden Wellen ergibt sich somit die vierfache Intensität.) Beträgt die Phasendifferenz 180° bzw. π oder ein ungeradzahliges Vielfaches davon, sind die eintreffenden Wellen *Gegenphase* und interferieren *destruktiv*. Die resultierende Amplitude ist dabei gleich der Differenz der beiden Amplituden, und die Intensität ist minimal. (Sie ist gleich null, wenn beide eintreffenden Wellen gleiche Amplituden und eine Phasendifferenz von genau 180° bzw. π haben.)

Eine Phasendifferenz zwischen zwei Wellen ergibt sich oft dadurch, dass die beiden Einzelwellen unterschiedlich lange Wege zurücklegen, bis sie aufeinandertreffen. Man spricht dabei von einem **Wegunterschied** oder **Gangunterschied**. Wenn eine Lichtwelle an einer durchsichtigen Schicht, etwa einer Seifenblase, reflektiert wird, besteht das reflektierte Licht aus der Überlagerung des an der vorderen Grenzfläche reflektierten und des an der hinteren Grenzfläche reflektierten Lichts. Der zusätzliche Weg, den das hinten reflektierte Licht zurücklegt, ist der erwähnte Gangunterschied. Beträgt er exakt eine Wellenlänge, resultiert eine Phasendifferenz von 360° bzw. 2π , die der Phasendifferenz null entspricht. Dagegen führt ein Gangunterschied von einer halben Wellenlänge zu einer Phasendifferenz von 180° bzw. π . Der Zusammenhang zwischen dem Gangunterschied Δr und der Phasendifferenz δ ist allgemein gegeben durch

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda} \cdot 360^\circ. \quad (30.1)$$

PHASENDIFFERENZ AUFGRUND EINES GANGUNTERSCHIEDS

Diese Beziehung wird in Beispiel 30.1 angewendet.

Beispiel 30.1: Eine Phasendifferenz

a) Wie groß ist der minimale Gangunterschied, der bei Licht mit der Wellenlänge 800 nm eine Phasendifferenz von 180° hervorruft? b) Welche Phasendifferenz ergibt dieser Gangunterschied bei Licht der Wellenlänge 700 nm?

Problembeschreibung: Die Zusammenhänge gehen aus Gleichung 30.1 hervor: Die Phasendifferenz verhält sich zu 360° bzw. 2π wie der Gangunterschied zur Wellenlänge.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Phasendifferenz δ verhält sich zu 360° wie der Gangunterschied Δr zur Wellenlänge λ . Gegeben sind $\lambda = 800 \text{ nm}$ und $\delta = 180^\circ$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{360^\circ} &= \frac{\Delta r}{\lambda} \\ \Delta r &= \frac{\delta}{360^\circ} \lambda = \frac{180^\circ}{360^\circ} \cdot (800 \text{ nm}) = \boxed{400 \text{ nm}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Setzen Sie $\lambda = 700 \text{ nm}$ sowie $\Delta r = 400 \text{ nm}$ ein und lösen Sie nach δ auf:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Delta r}{\lambda} \cdot 360^\circ = \frac{400 \text{ nm}}{700 \text{ nm}} \cdot 360^\circ \\ &= \boxed{206^\circ = 3,59 \text{ rad}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Teilaufgabe b ist größer als 180° . Das war zu erwarten, weil die Wellenlänge 400 nm größer als die Hälfte der Wellenlänge 700 nm ist. ■

Eine Phasendifferenz von 180° bzw. π kann auch durch Reflexion an nur einer Grenzfläche auftreten. Beispielsweise wird ein Puls auf einer Saite, die an einem Ende fest eingespannt oder an einer schwereren Saite befestigt ist, bei der Reflexion umgekehrt. Das entspricht bei einer Sinuswelle, die als gleichmäßige Folge von Pulsen anzusehen ist, einem **Phasensprung** von 180° bzw. π . Wenn Licht, das sich in Luft ausbreitet, auf die Oberfläche eines Mediums wie Glas oder Wasser trifft, in dem die Lichtgeschwindigkeit geringer (bzw. die Brechzahl höher) ist, erfolgt bei der Reflexion an der Grenzfläche ebenfalls ein solcher Phasensprung von 180° bzw. π . Trifft das Licht aber aus dem Glas oder dem Wasser auf die Grenzfläche zur Luft, so

tritt bei der Reflexion kein Phasensprung auf, weil die Lichtgeschwindigkeit im zweiten Medium, der Luft, größer ist. Dies entspricht der Reflexion eines Pulses ohne Inversion an einem Punkt, an dem eine schwere Saite mit einer leichteren verbunden ist.

Wenn Licht von einem Medium auf die Grenzfläche zu einem Medium mit geringerer Lichtgeschwindigkeit trifft, so erfolgt bei der Reflexion ein Phasensprung von 180° bzw. π .

PHASENSPRUNG BEI DER REFLEXION

Wie in Kapitel 12 gezeigt wurde, lässt sich die Interferenz zweier oder mehrerer Wellen nur beobachten, wenn sie kohärent sind, d. h. wenn ihre Phasendifferenz zeitlich konstant ist. Stammen die Wellen aus verschiedenen Quellen, so wird Interferenz nur dann beobachtet, wenn diese Quellen kohärent sind. Das Licht einer gewöhnlichen Lampe röhrt von den Emissionen von Abermillionen voneinander unabhängiger Atome her. Daher ändern sich die Phasendifferenzen der von der Lampe ausgehenden Wellen ständig und vollkommen zufällig. Aus diesem Grund sind zwei unabhängige Lichtquellen normalerweise nicht kohärent. In der Praxis erzielt man die Kohärenz meist dadurch, dass man den Lichtstrahl einer einzigen Quelle in zwei oder mehrere Strahlen aufteilt, die man dann wieder zusammenführt und dabei interferieren lässt. Die Aufteilung kann durch Reflexion an den Grenzflächen einer dünnen Schicht erfolgen (Abschnitt 30.2), aber auch durch Beugung an zwei engen Öffnungen oder Spalten in einem undurchsichtigen Hindernis (Abschnitt 30.3). Eine dritte Möglichkeit besteht darin, das Licht einer einzelnen Punktquelle und deren Spiegelbild in einem ebenen Spiegel als Quellen zu nutzen (Lloyd'scher Spiegel; Abschnitt 30.3). Heutzutage sind Laser die wichtigsten Quellen kohärenter Lichtwellen.

Das Licht aus einer monochromatischen (einfarbigen) Quelle kann man als eine unendlich lange Sinuswelle ansehen. Das von bestimmten Lasern abgestrahlte Licht kommt diesem Ideal am nächsten. Dagegen besteht das Licht herkömmlicher monochromatischer Quellen, wie etwa Gasentladungsrohren, aus Wellenpaketen, die nur einige Millionen Wellenlängen umfassen und die alle ungefähr gleich lang sind. Die Pakete haben im Wesentlichen die gleiche Wellenlänge, aber ihre Phasen unterscheiden sich auf regellose Weise. Die Länge eines solchen Wellenpaketes nennt man **Kohärenzlänge**, und die Zeitspanne, in der es einen bestimmten Raumknoten passiert, heißt **Kohärenzzeit**. Das von einer Gasentladungsrohre ausgestrahlte monochromatische Licht hat eine Kohärenzlänge von nur einigen Millimetern. Dagegen hat das von bestimmten, sehr stabilen Lasern abgestrahlte Licht eine Kohärenzlänge von vielen Kilometern.

30.2 Interferenz an dünnen Schichten

Wohl jeder hat schon die schillernden farbigen Streifen an einer Seifenblase oder auf öligebedecktem Wasser beobachtet. Diese Streifen röhren von der Interferenz der Lichtwellen her, die an der Vorderseite und an der Rückseite der Schicht reflektiert werden. Die verschiedenen Farben entstehen dadurch, dass sich bei unterschiedlicher Dicke der Schicht die Lichtwellen mit bestimmten Wellenlängen auslöschen oder verstärken. Das soll nun näher erläutert werden.

Wenn Licht, das sich in einem Medium ausbreitet, auf eine Grenzfläche trifft, an der sich die Wellengeschwindigkeit ändert, wird ein Teil reflektiert und ein Teil transmittiert. Zusätzlich erfährt das Licht bei der Reflexion einen Phasensprung um 180° bzw. π , wenn sich die eintretende Welle langsamer ausbreitet als die auftreffende und reflektierte Welle. (Siehe hierzu die Beobachtungen der Wellen auf einer Saite in Kapitel 12.) Dagegen tritt bei der Reflexion kein Phasensprung auf, wenn sich die eintretende Welle schneller ausbreitet als die auftreffende und reflektierte Welle.

Nun betrachten wir einen dünnen Wasserfilm (beispielsweise einen kleinen Teil einer Seifenblase) mit überall gleicher Dicke. Auf ihn trifft, wie in Abbildung 30.1 gezeigt, ein Lichtstrahl unter einem kleinen Winkel zum Einfallslot. Ein Teil des Lichts wird an der oberen Luft-Wasser-Grenzfläche reflektiert, wo es einen Phasensprung von 180° erfährt. Der größte Teil des Lichts tritt (unter Brechung) in das Wasser ein und wird wiederum teilweise an der unteren Wasser-Luft-Grenzfläche reflektiert. Dabei tritt kein Phasensprung auf. Da das Licht auf beide Grenzflächen beinahe senkrecht auftrifft, wird es jeweils auch nahezu

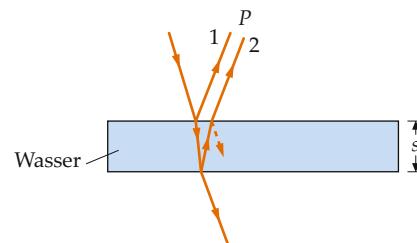


Abbildung 30.1 Ein Lichtstrahl, der nahezu senkrecht auf eine dünne Wasserschicht auftrifft, wird – jeweils teilweise – an der oberen und an der unteren Oberfläche einer dünnen Wasserschicht nahezu senkrecht reflektiert und gebrochen. Die austretenden Lichtstrahlen (1) und (2) sind kohärent, denn sie gehen aus der gleichen Quelle (demselben Strahl) hervor. Wegen des praktisch senkrechten Einfalls liegen sie hier sehr nahe beieinander und verlaufen nahezu parallel; daher können sie am Ort der Beobachtung interferieren.

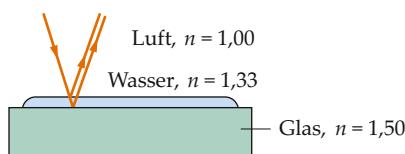


Abbildung 30.2 Licht wird an einer dünnen Wasserschicht reflektiert und gebrochen, die sich auf einer Glasfläche befindet. Da das Glas eine höhere Brechzahl als Wasser hat, erfolgt bei beiden Reflexionen ein Phasensprung von 180° .

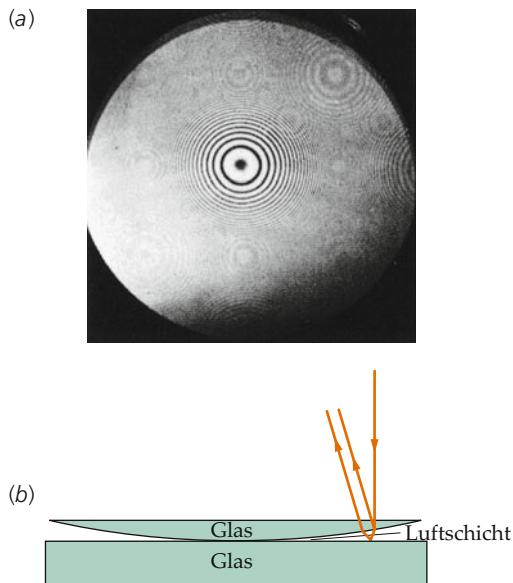


Abbildung 30.3 a) Newton'sche Ringe treten auf, wenn monochromatisches Licht an einer ebenen und an einer kugelförmigen Glasfläche reflektiert wird, die eine nach außen dicker werdende Luftschicht einschließen. In der Mitte hat die Luftschicht eine vernachlässigbare Dicke. Hier erfolgt destruktive Interferenz, weil der unten reflektierte Strahl einen Phasensprung von 180° erfährt. b) Das Schnittbild der Anordnung zum Beobachten der Newton'schen Ringe in Teilbild a. Die dünne Schicht ist hier die Luftschicht zwischen den Glasflächen. (Mit freundlicher Genehmigung von Bausch & Lomb.)

senkrecht reflektiert und gebrochen. Daher gelangen der an der oberen Fläche reflektierte Strahl (1) und der an der unteren Fläche reflektierte Strahl (2) praktisch am selben Punkt P in das Auge des Betrachters. Wie aus der Abbildung hervorgeht, legt der an der unteren Fläche reflektierte Strahl einen um ungefähr $2 s$ längeren Weg zurück, wobei s die Schichtdicke ist. Das ergibt eine Phasendifferenz zwischen beiden Strahlen von annähernd $(2 s / \lambda') \cdot 360^\circ$. Dabei ist $\lambda' = \lambda/n$ die Wellenlänge des Lichts im Wasser, das die Brechzahl n hat. Zu dieser Phasendifferenz durch den geometrischen Gangunterschied kommt noch der Phasensprung von 180° durch die Reflexion an der oberen Grenzfläche hinzu. Destruktive Interferenz zwischen beiden reflektierten Strahlen tritt daher auf, wenn der Gangunterschied innerhalb der Schicht null ist oder einer ganzen Anzahl von Wellenlängen λ' (in der Schicht) entspricht. Konstruktive Interferenz ergibt sich dagegen, wenn der Gangunterschied in der Schicht einer ungeraden Anzahl von halben Wellenlängen entspricht.

Nehmen wir jetzt an, der dünne Wasserfilm befindet sich auf einer Glasfläche, wobei das Glas mit $n = 1,5$ eine höhere Brechzahl als Wasser mit $n = 1,33$ hat (Abbildung 30.2). Hier erfährt auch der an der unteren Wasser-Glas-Grenzfläche reflektierte Strahl einen Phasensprung um 180° . Da nun beide Strahlen diesen Phasensprung durchmachen, geht ihre Phasendifferenz einzig und allein auf den Gangunterschied zurück, für den (wie zuvor) näherungsweise gilt: $\delta = (2 s / \lambda') \cdot 360^\circ$.

Hat eine solche dünne Luftsicht eine veränderliche Dicke und wird sie unter einfarbigem Licht – beispielsweise dem gelben Licht einer Natriumdampflampe – betrachtet, erscheinen abwechselnd helle und dunkle Streifen oder Zonen, die man **Interferenzstreifen** nennt. Da bei einem dunklen Streifen destruktive, bei einem hellen Streifen dagegen konstruktive Interferenz vorliegt, muss ihr Abstand einer Differenz der Gangunterschiede entsprechen, die gleich $\lambda'/2$ ist.

Abbildung 30.3a zeigt das Interferenzmuster bei einer Luftsicht unter einer plankonvexen Glaslinse, die auf einer ebenen Glasplatte liegt. Diese kreisförmigen Interferenzstreifen werden **Newton'sche Ringe** genannt. In Abbildung 30.3b ist mit übertrieben groß gezeichneten Winkeln schematisch dargestellt, wie ein Lichtstrahl an der oberen und an der unteren Grenzfläche der Luftsicht reflektiert und gebrochen wird. Ganz nahe beim Auflagepunkt in der Mitte ist der geometrische Gangunterschied zwischen dem oben und dem unten reflektierten Strahl nahezu null (d. h. klein gegen die Lichtwellenlänge). Daher führt die Phasendifferenz fast ausschließlich vom 180° -Phasensprung des unten reflektierten Strahls her. Die Interferenz ist hier nahezu vollständig destruktiv, sodass die mittlere Zone dunkel ist (Abbildung 30.3a). Der erste helle Ring tritt bei einem Radius auf, für den der Gangunterschied $\lambda/2$ beträgt; dieser bewirkt eine Phasendifferenz von 180° . Zusammen mit dem Phasensprung von 180° durch die untere Reflexion ergibt das eine gesamte Phasendifferenz von 360° , die gleichwertig mit einer Phasendifferenz von 0° ist. Der zweite dunkle Ring tritt bei einem Radius auf, bei dem der Gangunterschied λ beträgt, usw.

Interferenzstreifen, wie sie bei einer keilförmigen Luftsicht zwischen zwei Glasplatten entstehen können, werden in Beispiel 30.2 (Abbildung 30.4) erläutert und sind in Abbildung 30.5a illustriert. Wenn die Streifen geradlinig sind, dann sind beide Glasplatten, wie man sagt, **planparallel**. Dazu dürfen die Abweichungen ihrer Dicke höchstens einen kleinen Bruchteil der Lichtwellenlänge ausmachen. Solche Interferenzstreifen dienen oft zum Überprüfen der Qualität von Glasplatten. Abbildung 30.5b zeigt sie bei einem keilförmigen Luftsitz zwischen zwei gewöhnlichen Glasplatten. Die Unregelmäßigkeiten lassen erkennen, dass die Platten nicht planparallel sind.

Beispiel 30.2: Eine keilförmige Luftsicht

Eine sehr dünne keilförmige Luftsicht erhält man beispielsweise, wenn man zwei Glasplatten aufeinanderlegt und an einer Kante einen dünnen Papierstreifen dazwischenschiebt, wie in Abbildung 30.4 gezeigt. Wird Licht der Wellenlänge 500 nm senkrecht

30.3 Interferenzmuster beim Doppelspalt

von oben eingestrahlt, sind im reflektierten Licht Interferenzstreifen zu beobachten. Der Winkel θ zwischen den Glasplatten beträgt hier $3,0 \cdot 10^{-4}$ rad (bzw. $0,017^\circ$). Wie viele dunkle Interferenzstreifen pro Zentimeter treten auf?

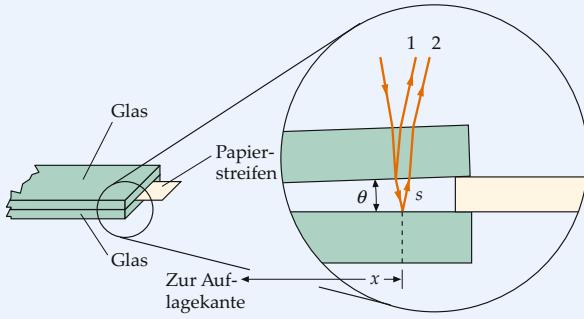


Abbildung 30.4 Ein keilförmiger Luftspalt zwischen zwei Glasplatten. Der Winkel θ zwischen ihnen ist kleiner als $0,02^\circ$ und in der rechten Zeichnung übertrieben groß dargestellt. Der einfallende Strahl und die reflektierten bzw. gebrochenen Strahlen verlaufen praktisch senkrecht zu allen Grenzflächen zwischen Luft und Glas.

Problembeschreibung: Die Anzahl der dunklen Streifen pro Zentimeter können Sie erhalten, indem Sie den waagerechten Abstand x des m -ten dunklen Streifens von der Auflagekante der Glasplatten ermitteln und daraus die Größe m/x berechnen. Da der von der unteren Glasplatte reflektierte Strahl einen Phasensprung von 180° erfährt, erscheint die Auflagekante (bei der der geometrische Gangunterschied null ist) dunkel. Der erste darauffolgende dunkle Streifen tritt auf, wenn $2s = \lambda$ ist. Dabei ist λ die Wellenlänge in der Luftsicht und s der Abstand der Glasplatten in der Entfernung x von der Auflagekante, wie in Abbildung 30.4 dargestellt. Da der Winkel θ klein ist, können Sie die Näherung für kleine Winkel ansetzen: $\theta \approx \tan \theta = s/x$.

Lösung: 1. Der m -te dunkle Streifen tritt auf, wenn der Gangunterschied $2s$ gleich m Wellenlängen ist:

$$2s = m\lambda$$

$$m = \frac{2s}{\lambda}$$

2. Wenn der Winkel θ klein ist, hängt er folgendermaßen mit der Dicke s der Luftsicht zusammen:

$$\theta = \frac{s}{x}$$

3. Setzen Sie $s = x\theta$ in die Gleichung für m ein:

$$m = \frac{2x\theta}{\lambda}$$

4. Berechnen Sie m/x :

$$\frac{m}{x} = \frac{2\theta}{\lambda} = \frac{2 \cdot (3,0 \cdot 10^{-4})}{5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = [12 \text{ cm}^{-1}]$$

Plausibilitätsprüfung: Der Ausdruck $2\theta/\lambda$ in Schritt 4 für die Anzahl der dunklen Streifen pro Längeneinheit zeigt, dass die Streifen weniger dicht liegen, wenn Licht mit größerer Wellenlänge verwendet wird. Das entspricht unseren Erwartungen.

Weitergedacht: Im vorliegenden Fall treten 12 dunkle Streifen pro Zentimeter auf. In der Praxis misst man sehr kleine Winkel häufig auf diese Art, weil die Anzahl der Streifen pro Zentimeter leicht zu ermitteln ist. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Streifen enger zusammenrücken, wenn der Winkel zwischen den Glasplatten vergrößert wird.

Übung 30.1: Wie viele dunkle Streifen pro Zentimeter treten auf, wenn in diesem Beispiel Licht der Wellenlänge 650 nm eingestrahlt wird? □

Die Interferenz von Lichtwellen an dünnen Schichten nutzt man zur *Entspiegelung* oder Reflexverminderung bei Linsen für Brillengläser oder optische Instrumente. Dazu wird auf die Linse eine dünne Schicht eines Materials aufgebracht, dessen Brechzahl zwischen denen von Glas und von Luft liegt; ein typischer Wert beträgt 1,38. In diesem Fall sind die Intensitäten der Lichtstrahlen, die an der oberen und an der unteren Grenzfläche der Schicht reflektiert werden, ungefähr gleich, und beide Strahlen erfahren bei der Reflexion einen Phasensprung von 180° . Daher tritt keine Phasendifferenz auf, die von einer Reflexion herrührt. Die Schichtdicke wird zu $\frac{1}{4}\lambda' = \frac{1}{4}\lambda n$ gewählt, wobei λ , die Wellenlänge im Vakuum, etwa in der Mitte des sichtbaren Spektrums liegt. Unter diesen Bedingungen haben die beiden Strahlen bei senkrechtem Einfall aufgrund des gesamten Gangunterschieds $\lambda'/2$ eine Phasendifferenz von näherungsweise 180° . Die Reflexion an der beschichteten Oberfläche wird minimiert, weil zwei reflektierte Strahlen destruktiv interferieren. Dagegen wird die Transmission, also der Durchlass von Licht in die Linse hinein, maximiert.

30.3 Interferenzmuster beim Doppelspalt

Bei Licht, das von zwei oder mehreren Quellen ausgeht, kann ein Interferenzmuster nur dann beobachtet werden, wenn die Quellen kohärent sind. Die im vorhergehenden Abschnitt besprochene Interferenz an dünnen Schichten tritt auf, weil die beiden austretenden Strahlen aus einem einzigen Strahl hervorgehen, also aus der gleichen Lichtquelle stammen, und nur

durch die Reflexionen getrennt wurden. Thomas Young konnte zu Beginn des 19. Jahrhunderts mit seinem berühmt gewordenen Experiment die Wellennatur des Lichts demonstrieren. Er realisierte zwei kohärente Lichtquellen dadurch, dass er mit einer einzigen Lichtquelle zwei sehr enge parallele Spalte beleuchtete. In Abschnitt 12.5 haben wir gesehen, dass eine sehr kleine Öffnung in einem Hindernis im Weg einer Wasserwelle als Punktquelle von Wellen anzusehen ist (Abbildung 30.6).

Beim Young'schen Experiment wirkt jeder der beiden Spalte als linienförmige Quelle, was einer Aneinanderreihung von Punktquellen längs jedes Spalts entspricht. Das Interferenzmuster kann auf einem von den Spalten weit entfernten Schirm beobachtet werden (Abbildung 30.7a). Wegen des großen Abstands von den Spalten kommen die von ihnen ausgehenden Strahlen praktisch parallel am Schirm an. An einem Punkt P auf dem Schirm beträgt ihr Gangunterschied ungefähr $d \sin \theta$, wobei d der Spaltabstand ist, wie in Abbildung 30.7b gezeigt. Wenn der Gangunterschied einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge entspricht, ergibt sich konstruktive Interferenz. So-

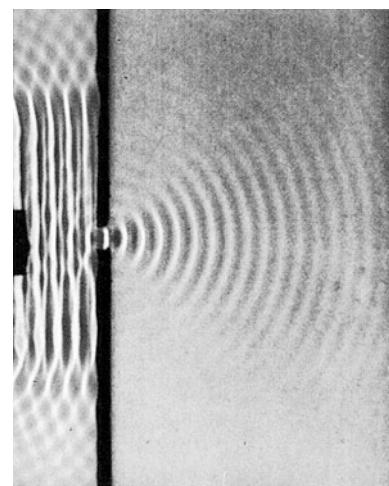
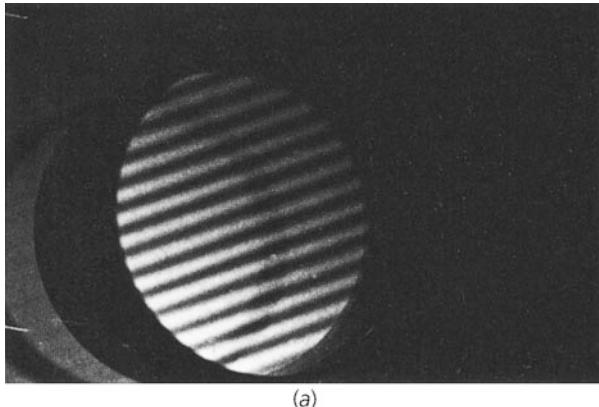
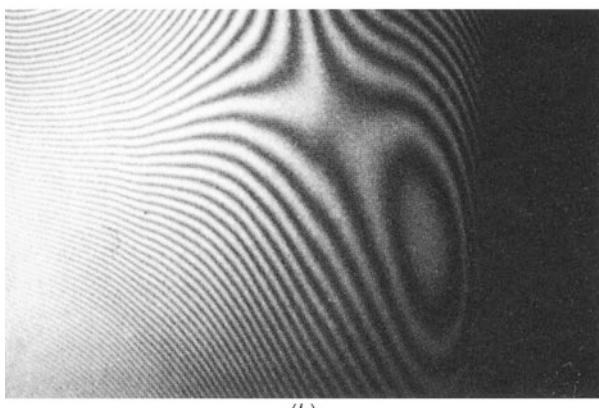


Abbildung 30.6 Eine ebene Wasserwelle in einer Wanne trifft auf ein Hindernis mit einer kleinen Öffnung. Dahinter (rechts im Bild) entstehen konzentrische Wellenfronten, als befände sich in der Öffnung eine Punktquelle. (© PSSC Physics, 2. Aufl. 1965, D. C. Heath & Co., und Education Development Center, Newton, MA.)



(a)



(b)

Abbildung 30.5 a) Die Interferenzstreifen bei einem keilförmigen Luftspalt zwischen zwei Glasplatten (vgl. Abbildung 30.4) sind geradlinig, wenn die Platten planparallel sind. b) Interferenzstreifen beim keilförmigen Luftspalt zwischen zwei nicht planparallelen Glasplatten. (Mit freundlicher Genehmigung von T. A. Wiggins.)

mit entstehen Interferenzmaxima bei den Winkeln θ_m , für die gilt:

$$d \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (30.2)$$

INTERFERENZMAXIMA BEIM DOPPELSPALT

Darin ist m die sogenannte **Ordnung**.

Interferenzminima treten auf bei

$$d \sin \theta_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (30.3)$$

INTERFERENZMINIMA BEIM DOPPELSPALT

Die Phasendifferenz δ an einem Punkt P auf dem Schirm hängt mit dem Gangunterschied $d \sin \theta$ folgendermaßen zusammen:

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi. \quad (30.4)$$

Der Abstand y_m des m -ten hellen Streifens von der Achse ist mit dem Abstand l zwischen Spalten und Schirm verknüpft:

$$\tan \theta_m = \frac{y_m}{l}.$$

Für kleine Winkel ist $\tan \theta_m \approx \sin \theta_m$. Wir ersetzen in Gleichung 30.2 den Ausdruck $\sin \theta_m$ durch y_m/l und lösen nach y_m auf. Das ergibt

$$y_m = m \frac{\lambda l}{d}. \quad (30.5)$$

Hieraus geht hervor, dass die Streifen auf dem Schirm bei kleinen Winkel äquidistant sind (d. h. gleiche Abstände haben).

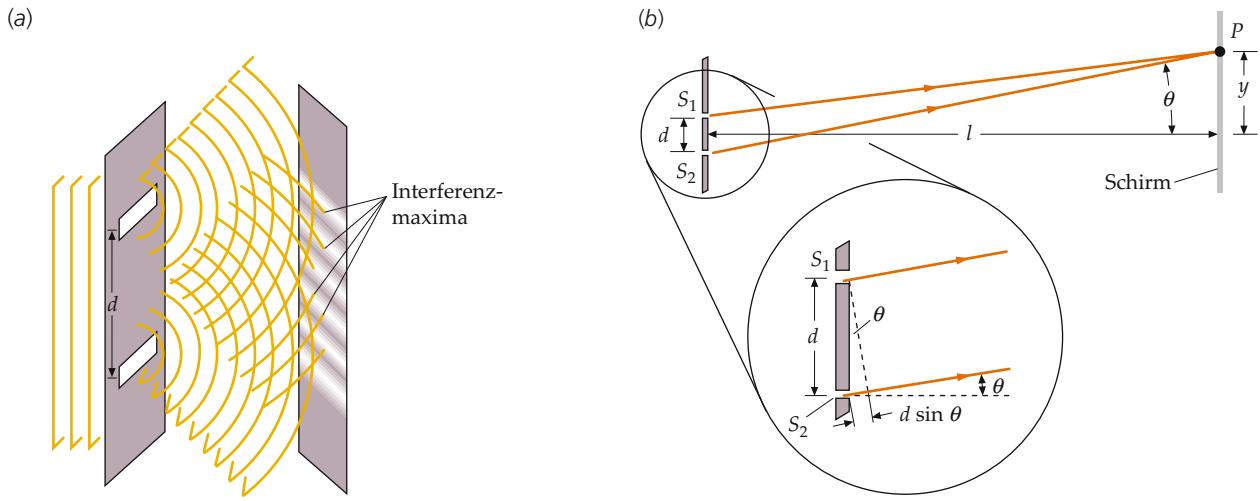


Abbildung 30.7 a) Zwei Spalte wirken als kohärente Lichtquellen für die Beobachtung der Interferenz beim Young'schen Experiment. Die von den Spalten ausgehenden zylindrischen Wellen überlagern sich und erzeugen auf dem Schirm ein Interferenzmuster. b) Wenn der Abstand l zwischen Schirm und Spalten groß gegen den Spaltabstand d ist, treffen die Strahlen nahezu parallel auf den Schirm. Beim Winkel θ beträgt der Gangunterschied zwischen ihnen $d \sin \theta$.

Berechnung der Intensität

Um die Lichtintensität an einem allgemeinen Punkt P auf dem Schirm zu berechnen, müssen wir zwei harmonische Wellenfunktionen addieren, deren Phasen sich unterscheiden. Die Wellenfunktionen elektromagnetischer Wellen sind die elektrischen Feldvektoren. Im vorliegenden Fall ist E_1 das elektrische Feld, dessen Wellen vom Spalt 1 aus auf irgendeinen Punkt P auf den Schirm treffen. Entsprechend ist E_2 das elektrische Feld, dessen Wellen diesen Punkt vom Spalt 2 aus erreichen. Da die Winkel zwischen den Ausbreitungsrichtungen und der Achse klein sind, können wir annehmen, dass beide Felder parallel ausgerichtet sind. Außerdem schwingen sie mit derselben Frequenz, denn sie stammen aus einer einzigen Lichtquelle, die beide Spalte beleuchtet. Schließlich haben sie dieselbe Amplitude, und ihr Gangunterschied liegt höchstens in der Größenordnung weniger Lichtwellenlängen. Für ihre Phasendifferenz δ gilt Gleichung 30.4. Wir können für die beiden Wellenfunktionen schreiben:

$$E_1 = A_0 \sin \alpha$$

und

$$E_2 = A_0 \sin (\alpha + \delta),$$

mit $\alpha = kx - \omega t$.

Dann ist die resultierende Wellenfunktion

$$E = E_1 + E_2 = A_0 \sin \alpha + A_0 \sin (\alpha + \delta). \quad (30.6)$$

Mithilfe der allgemeinen Beziehung

$$\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 = 2 \cos \left(\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) \right) \sin \left(\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \right)$$

erhalten wir die resultierende Wellenfunktion

$$E = (2A_0 \cos \left(\frac{1}{2}\delta \right)) \sin \left(\alpha + \frac{1}{2}\delta \right). \quad (30.7)$$

Die Amplitude der resultierenden Welle ist $2A_0 \cos \left(\frac{1}{2}\delta \right)$. Sie hat ihren Maximalwert $2A_0$, wenn die Wellen in Phase sind, und sie ist null, wenn die Wellen in Gegenphase schwingen, d. h. ihre Phasendifferenz 180° beträgt. Da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, gilt für die Intensität an einem Punkt P auf dem Schirm

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2}\delta \right). \quad (30.8)$$

INTENSITÄT IN ABHÄNGIGKEIT DER PHASENDIFFERENZ

Darin ist I_0 die Lichtintensität auf dem Schirm, die von der Welle aus einem der Spalte herrührt. Die Phasendifferenz δ hängt mit der Position auf dem Schirm über $\delta = (d \sin \theta / \lambda) 2\pi$ (Gleichung 30.4) zusammen. Die Beispiele 30.3 und 30.4 veranschaulichen die Zusammenhänge noch einmal mit konkreten Zahlenwerten.

Abbildung 30.9a zeigt das Interferenzmuster auf dem Schirm, und in Abbildung 30.9b ist dargestellt, wie die Intensität von $\sin \theta$ abhängt. Für kleine Winkel θ entspricht diese Kurve der Auftragung der Intensität gegen y (wegen $y = l \tan \theta \approx l \sin \theta$). Auch hier ist I_0 die von einem einzelnen Spalt herührende Intensität. Die gestrichelte Linie in Abbildung 30.9b entspricht dem Mittelwert $\langle I \rangle = 2I_0$ der Intensität über einen größeren Abstand auf dem Schirm, also über viele Interferenzmaxima und -minima hinweg. Diese Intensität trüte auf, wenn die beiden Quellen voneinander unabhängig (inkohärent) wären und sich kein Interferenzmuster bildete. Dann variierte die Phasendifferenz ihrer Wellen auf zufällige Weise, und es würde überall die mittlere Intensität beobachtet.

In Abbildung 30.10 ist eine weitere Methode illustriert, mit der zwei kohärente Punktquellen realisiert werden können, sodass sich ebenfalls ein Doppelspalt-Interferenzmuster ergibt. Diese Anordnung heißt **Lloyd'scher Spiegel**. Im Abstand $\frac{1}{2}d$ über

Beispiel 30.3: Abstand der Interferenzstreifen und Spaltabstand beim Doppelspalt**ZUR ÜBUNG**

Zwei enge Spalte haben voneinander den Abstand $1,50 \text{ mm}$ und werden mit gelbem Licht der Wellenlänge 589 nm aus einer Natriumdampflampe beleuchtet. Berechnen Sie den Abstand der hellen Streifen auf einem $3,00 \text{ m}$ entfernten Schirm.

Problembeschreibung: Für den Abstand y_m des m -ten hellen Streifens von der Mitte des Schirms gilt Gleichung 30.5. Dabei ist hier $l = 3,00 \text{ m}$ und $d = 1,50 \text{ mm}$ sowie $\lambda = 589 \text{ nm}$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Skizzieren Sie die Anordnung (Abbildung 30.8).

2. Leiten Sie mithilfe der Skizze einen Ausdruck für den Abstand zwischen den Streifen her. Er entspricht dem Abstand zwischen dem m -ten und dem $(m + 1)$ -ten Streifen. Abstand benachbarter heller Streifen.

3. Wenden Sie Gleichung 30.5 auf den m -ten und den $(m + 1)$ -ten Streifen an.

4. Subtrahieren Sie die erste von der zweiten Gleichung in Schritt 3 und vereinfachen Sie.

5. Setzen Sie die gegebenen Längen ein.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

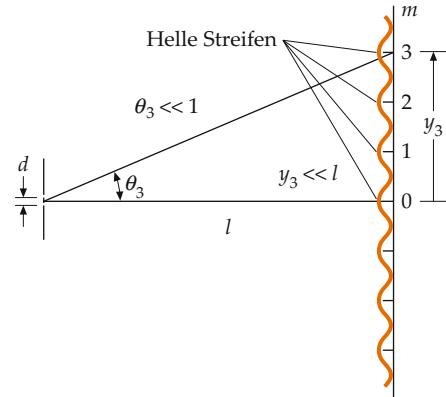


Abbildung 30.8 Der vertikale Maßstab der Darstellung ist hier übertrieben hoch gezeichnet.

2. Abstand benachbarter heller Streifen:

$$y_{m+1} - y_m$$

3.

$$y_m = m \frac{\lambda l}{d}$$

und

$$y_{m+1} = (m + 1) \frac{\lambda l}{d}$$

4.

$$y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda l}{d}$$

5. Abstand benachbarter heller Streifen:

$$y_{m+1} - y_m = \boxed{1,18 \text{ mm}}$$

Weitergedacht: Die Streifen sind äquidistant, solange die Näherung für kleine Winkel zulässig ist, d.h. solange $\lambda/d \ll 1$ ist. Im vorliegenden Beispiel ist $\lambda/d = (589 \text{ nm})/(1,50 \text{ mm}) \approx 0,0004$.

der Spiegelebene ist eine monochromatische horizontale Lichtquelle platziert (die einem Einzelspalt entspricht). Licht, das direkt von der Quelle auf den Schirm trifft, interferiert mit Licht, das vom Spiegel reflektiert wird und dann ebenfalls auf den Schirm trifft. Das reflektierte Licht verhält sich so, als käme es vom virtuellen Bild der Lichtquelle, das vom Spiegel entworfen wird. Wegen des Phasensprungs um 180° bei der Reflexion am Glas entsteht ein Interferenzmuster zweier kohärenter lini-

enförmiger Quellen, deren Phasen sich um 180° unterscheiden. Das Muster ist das Negativ des Musters in Abbildung 30.9 für den Doppelspalt; Maxima und Minima sind also vertauscht. Konstruktive Interferenz tritt hier auf, wenn der geometrische Wegunterschied einem ungeradzahligen Vielfachen einer halben Wellenlänge entspricht, weil zu diesem Unterschied noch die Phasendifferenz von 180° aufgrund der Reflexion hinzukommt.

Beispiel 30.4: Anzahl der Interferenzstreifen

Zwei enge Spalte werden von monochromatischem Licht beleuchtet. Ihr Abstand beträgt 2,75 Wellenlängen. Wie viele helle Streifen sind auf dem Schirm höchstens zu beobachten? a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6 oder mehr.

Problembeschreibung: Ein heller Streifen (konstruktive Interferenz) liegt an einem Punkt auf dem Schirm vor, bei dem sich die Abstände von den zwei Spalten um ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge unterscheiden. Jedoch ist die maximal mögliche Abstandsdifferenz gleich dem Abstand zwischen den Spalten.

Lösung: 1. Ermitteln Sie den maximalen Abstand zwischen Punkten auf dem Schirm und den beiden Spalten: Bei allen Punkten auf dem Schirm ist die Differenz der Abstände von den zwei Spalten gleich 2,75 Wellenlängen oder geringer.

ZUM VERSTÄNDNIS

2. Ein heller Streifen (konstruktive Interferenz) liegt an solchen Punkten auf dem Schirm vor, bei denen sich die Abstände von den zwei Spalten um ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge unterscheiden: Helle Streifen treten also auf, wenn die Differenz der Abstände von den zwei Spalten gleich 2 Wellenlängen oder 1 Wellenlänge oder 0 ist.

3. Zählen Sie die hellen Streifen: ein zentrales Maximum sowie beiderseits je zwei helle Streifen. Lösung e) ist richtig: 5 helle Streifen.

Frage 30.1

Wie viele *dunkle* Streifen sind auf dem Schirm höchstens zu beobachten?

Übung 30.2: Eine punktförmige Lichtquelle mit $\lambda = 589 \text{ nm}$ wird 0,40 mm über einem Glasspiegel angebracht. Auf einem 6,0 m entfernten Schirm werden Interferenzstreifen beobachtet. Dabei erfolgt Interferenz zwischen den an der Glasoberfläche reflektierten Strahlen und den Strahlen, die direkt von der Quelle zum Schirm gelangen. Berechnen Sie den Abstand der Streifen auf dem Schirm. ▶

Die physikalischen Gegebenheiten beim Lloyd'schen Spiegel wurden in der Anfangszeit der Radioastronomie ausgenutzt, um die Positionen von Quellen von Radiowellen an der Himmelskugel zu bestimmen. Dazu diente ein Radiowellenempfänger auf einer Klippe an der Küste, wobei die Meeresoberfläche als Spiegel wirkte.

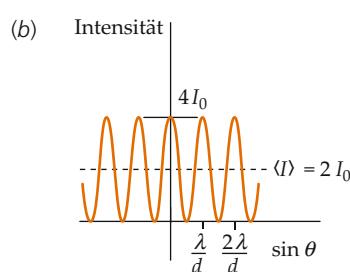


Abbildung 30.9 a) Das bei der Interferenz am Doppelspalt (Abbildung 30.7) auf einem weit entfernten Schirm auftretende Interferenzmuster. b) Die Intensität am Schirm als Funktion von $\sin \theta$. Die maximale Intensität ist $4 I_0$, wobei I_0 die Intensität ist, die von einem einzelnen Spalt herrührt. Die gestrichelte Linie gibt die mittlere Intensität $2 I_0$ an. (Mit freundlicher Genehmigung von Michael Cagnet.)

30.4 Beugungsgitter

Eine gebräuchliche Vorrichtung zum Messen von Wellenlängen ist das **Beugungsgitter**. Es besteht aus äquidistanten, dicht beieinander liegenden, parallelen Linien. Sie werden maschinell in eine ebene Oberfläche aus Glas oder Metall geritzt. Bei einem Reflexionsgitter wird das Licht an den Stegen zwischen den Linien oder Furchen reflektiert. Gewöhnliche Schallplatten, aber auch CDs, wirken ebenfalls als Reflexionsgitter. Bei einem Transmissionsgitter mit äquidistanten Spalten passiert das Licht die Stege zwischen den eingravierten Linien. Preisgünstige, mit optischen Verfahren hergestellte Kunststoffgitter haben häufig 10 000 Linien pro Zentimeter. Dabei haben die Spalte voneinander den Abstand $g = (1 \text{ cm})/10\,000 = 10^{-4} \text{ cm}$. Die Größe g nennt man **Gitterkonstante**.

Betrachten wir nun eine ebene, monochromatische Lichtwelle mit der Wellenlänge λ , die senkrecht auf ein Transmissionsgitter trifft (Abbildung 30.11). Die Breite jedes Spalts wird dabei wie beim Doppelspalt in Abschnitt 30.3 gewählt. Dann entsteht

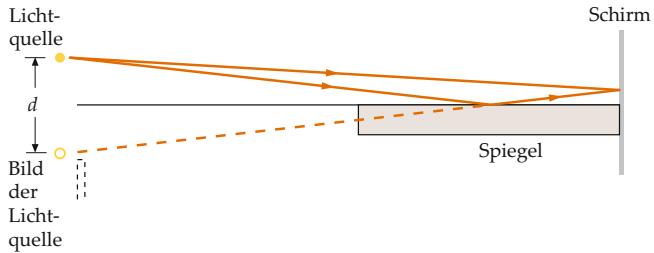
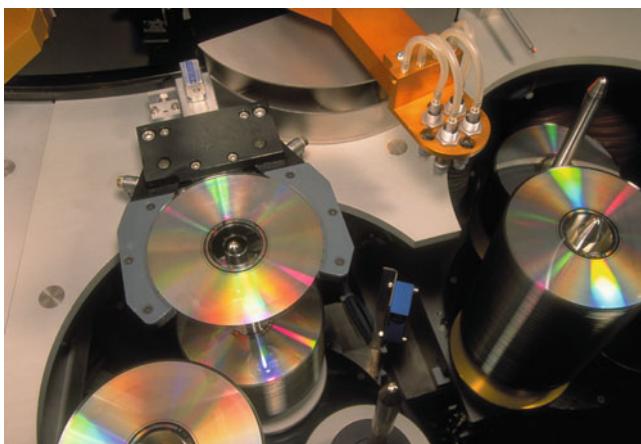


Abbildung 30.10 Der Lloyd'sche Spiegel zum Erzeugen eines Doppelspalt-Interferenzmusters. Die beiden Quellen (der Spalt und sein virtuelles Bild) sind kohärent; ihre Wellen schwingen wegen der Reflexion am Spiegel in Gegenphase (die Phasendifferenz beträgt 180°).



Die Datenspuren auf CDs wirken wie ein Reflexionsgitter. (© Kevin R. Morris/Corbis.)

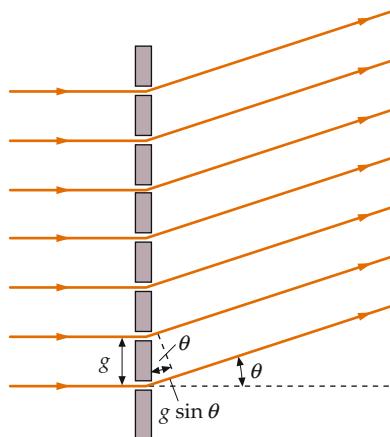


Abbildung 30.11 Licht fällt senkrecht auf ein Beugungsgitter. Beim Winkel θ beträgt der Gangunterschied zwischen Strahlen von benachbarten Spalten $g \sin \theta$.

in großem Abstand auf einem Schirm ein Interferenzmuster wie von einer großen Anzahl kohärenter, äquidistanter Lichtquellen. Das Gitter, das wir betrachten, weist insgesamt N beleuchtete Spalte auf, die voneinander den Abstand g haben. Bei $\theta = 0$ ist das Licht von jedem Spalt mit dem von allen anderen Spalten in Phase, und die Welle hat am Schirm die Amplitude NA_0 . Dabei ist A_0 die Amplitude der Welle aus einem einzelnen Spalt. Die Intensität der Welle am Schirm ist $N^2 I_0$, wobei I_0 die von einem einzigen Spalt herrührende Intensität ist. Beim Winkel θ_1 , für den $g \sin \theta_1 = \lambda$ gilt, ist der Gangunterschied zwischen den Strahlen aus benachbarten Spalten gleich der Wellenlänge λ . Daher ist das Licht aus jedem Spalt mit dem aus allen anderen Spalten in Phase, und die Intensität ist $N^2 I_0$. Die Interferenzmaxima treten deshalb bei Winkeln θ_m auf, für die gilt:

$$g \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (30.9)$$

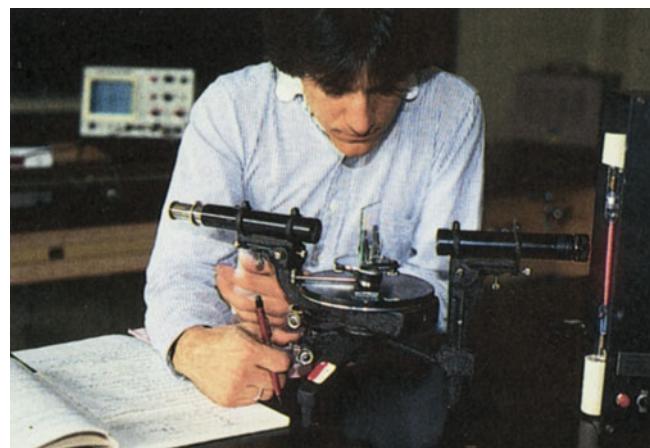


Abbildung 30.12 Ein Spektroskop, wie es in der Ausbildung verwendet wird. Das von einem Kollimatorspalt nahe der Lichtquelle durchgelassene Lichtbündel wird mithilfe einer Linse zu parallelen Lichtstrahlen gebündelt, die auf das Gitter fallen. Das von diesem gebeugte Licht wird mit einem Teleskop betrachtet, dessen Drehwinkel an der Halterung genau abgelesen werden kann. (© Clarence Bennett/Oakland University, Rochester, Michigan.)

Die Lagen der Interferenzmaxima am Schirm hängen nicht von der Anzahl der Quellen bzw. Spalte ab, doch je zahlreicher diese sind, desto intensiver und schärfer werden die Maxima. Um dies zu zeigen, betrachten wir eine sehr hohe Anzahl N beleuchteter Spalte, sodass $N \gg 1$ gilt. Der Abstand zwischen dem ersten und dem N -ten Spalt ist dann $(N - 1)g \approx Ng$. Wenn der Gangunterschied für das Licht aus diesen beiden Spalten (also dem 1. und dem N -ten Spalt) gleich λ ist, dann ist die resultierende Intensität null, da das Licht aus zwei Spalten mit dem Abstand $\frac{1}{2}Ng$ destruktiv interferiert. Setzt man den Abstand Ng zwischen dem ersten und dem N -ten Spalt in Gleichung 30.9 ein, erhält man den Winkel θ_{\min} , für den die Intensität null wird:

$$Ng \sin \theta_{\min} = \lambda.$$

Daher ist

$$\theta_{\min} \approx \sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{Ng}.$$

Die Winkelbreite $2\theta_{\min}$ des Interferenzmaximums ist umgekehrt proportional zur Anzahl N der beleuchteten Spalte. Das bedeutet, das Maximum ist schärfer, wenn mehr Spalte beleuchtet sind. Außerdem ist die Intensität im Maximum proportional zu $N^2 I_0$, und ihr Produkt mit der Breite des Maximums ist proportional zu $N I_0$. Dieses Produkt ist ein Maß für die Strahlungsleistung pro Längeneinheit im Maximum.

Abbildung 30.12a zeigt ein Spektroskop, wie es heute noch häufig für Ausbildungszwecke verwendet wird. Die Lichtquelle ist meist eine Gasentladungslampe, in der sich Helium oder Natrium dampf befindet. Die Gasatome werden durch Stöße mit Elektronen angeregt, die durch eine hohe elektrische Spannung beschleunigt werden. Das Licht solcher Lampen weist

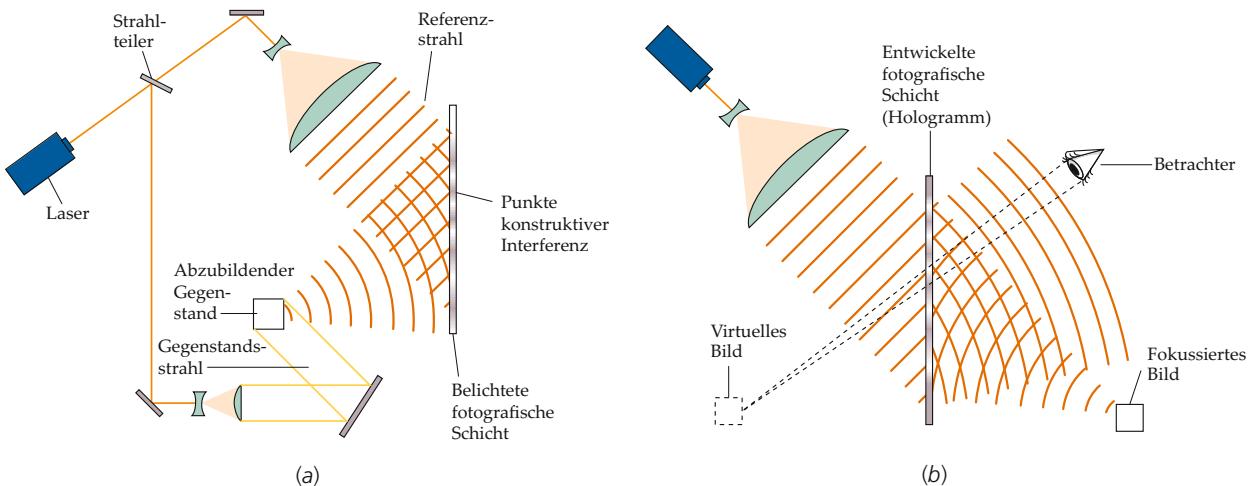


Abbildung 30.13 a) Die Erzeugung eines Hologramms. Durch die Interferenz von Referenz- und Gegenstandsstrahl entsteht ein Interferenzmuster, das auf dem Film aufgezeichnet wird. b) Nach der Entwicklung ergibt sich ein dreidimensionales Bild des Gegenstands, wenn der Film mit einem kohärenten Laserstrahl beleuchtet wird.

nur bestimmte Wellenlängen auf, die für das betreffende Gas charakteristisch sind. Es wird durch einen schmalen Kollimatorspalt sowie eine Linse geführt, aus der es parallel austritt. Danach gelangt es auf das Beugungsgitter.

Das gebeugte Licht wird nicht auf einem entfernten Schirm betrachtet, sondern durch ein kleines Teleskop. Dieses ist auf einer drehbaren Halterung montiert, an der der jeweilige Winkel abgelesen werden kann. In Vorwärtsrichtung ($\theta = 0$) ist bei allen Wellenlängen das zentrale Maximum zu sehen. Bei der Wellenlänge λ tritt das erste Interferenzmaximum beim Winkel θ auf, der durch Gleichung 30.9 gegeben ist, wobei $m = 1$ ist. Dabei spricht man von einer **Spektrallinie**. Jede von der Quelle emittierte Wellenlänge erzeugt eine solche Spektrallinie, und der Satz von Spektrallinien, die zu $m = 1$ gehören, bildet das **Spektrum 1. Ordnung**. Entsprechend ist das **Spektrum 2. Ordnung** für jede Wellenlänge dem Wert $m = 2$ zugeordnet. Spektren höherer Ordnungen können beobachtet werden, solange der durch Gleichung 30.9 gegebene Winkel θ kleiner als 90° ist. Je nach den Wellenlängen können die Spektrallinien der verschiedenen Ordnungen vermischt erscheinen. Beispielsweise kann eine Spektrallinie 3. Ordnung mit einer bestimmten Wellenlänge bei einem kleineren Winkel θ auftreten als eine Linie 2. Ordnung mit einer anderen Wellenlänge. Wenn die Gitterkonstante – der Abstand der Spalte im Gitter – bekannt ist, kann die Wellenlänge der jeweiligen Linie aus dem gemessenen Winkel θ berechnet werden.

*Hologramme

Eine interessante Anwendung von Beugungsgittern ist die Erzeugung dreidimensionaler virtueller Bilder, sogenannter **Holo-**

gramme (Abbildung 30.13), mithilfe von Fotonegativen. Bei der gewöhnlichen Fotografie wird das vom Gegenstand reflektierte Licht auf eine lichtempfindliche Schicht fokussiert, sodass beim Fotoabzug ein zweidimensionales Bild des Gegenstands entsteht. Dagegen setzt man zum Erzeugen eines Hologramms Laserlicht ein. Dabei wird ein Laserstrahl in zwei Teilstrahlen – den Referenzstrahl und den Gegenstandsstrahl – aufgespalten, und nur der Gegenstandsstrahl wird vom aufzunehmenden Gegenstand reflektiert. Aufgenommen wird das Interferenzmuster, das beide Strahlen z. B. auf einem lichtempfindlichen Film hervorrufen. Dabei ist entscheidend, dass der Laserstrahl kohärent ist, sodass die Phasendifferenz zwischen Referenz- und Gegenstandsstrahl während der Aufnahmedauer zeitlich konstant ist. Dadurch entsteht ein holografisches Bild, bei dem die Interferenzstreifen wie ein Beugungsgitter wirken. Wenn dieses Bild mit einem Laser beleuchtet wird, entsteht ein dreidimensionales virtuelles Bild des Gegenstands, das für den Betrachter im Raum zu schweben scheint. Bestimmte Hologramme sind auch bei gewöhnlichem Licht zu betrachten. So sehen wir beispielsweise das Hologramm auf einer Scheckkarte oder einem Euroschein räumlich und zudem aus jeder Richtung anders. Die sogenannten Regenbogenhologramme, wie sie auf Kreditkarten oder Geldscheinen angebracht sind, sind komplizierter aufgebaut. Mit einem waagerechten Streifen des ursprünglichen Hologramms wird ein zweites Hologramm erzeugt. Bei diesem sieht man, wenn man den horizontalen Betrachtungswinkel variiert, stets das dreidimensionale Bild des ursprünglichen Gegenstands. Doch wenn das Hologramm mit monochromatischem Licht, beispielsweise aus einem Laser, beleuchtet wird, verschwindet das Bild, wenn man den vertikalen Betrachtungswinkel variiert. Bei Betrachtung unter weißem Licht wechselt das Bild seine Farbe, wenn man den vertikalen Betrachtungswinkel variiert.

30.5 Fraunhofer'sche und Fresnel'sche Beugung

Ist die Spaltbreite in derselben Größenordnung wie der Abstand der Spalte, gilt die bisher angenommene Näherung, dass an jedem Spalt nur eine neue Kugelwelle entsteht, nicht mehr. In diesem Fall geht man davon aus, dass jeder Spalt der Ausgangspunkt mehrerer Kugelwellen ist, die sich im Bereich hinter dem Spalt überlagern. Man sagt dazu auch, die einfallende Welle wird an einem Spalt gebeugt. Je nachdem, an welchem Punkt hinter einem Spalt man die Überlagerung der vom Spalt ausgehenden Kugelwellen betrachtet, beobachtet man verschiedene Beugungsmuster (siehe Abbildung 30.14). Diese Beobachtung lässt sich auch auf andersartige Öffnungen (z. B. Kreisblenden) oder Hindernisse übertragen.

Wenn die an einer Öffnung oder einem Hindernis gebeugten Strahlen am Beobachtungsort (z. B. am Schirm) nahezu parallel eintreffen, spricht man von einem **Fraunhofer'schen Beugungsmuster**. Fraunhofer'sche Beugungsmuster entstehen entweder in großem Abstand vom beugenden Objekt (Öffnung oder Hindernis) oder wenn man die parallelen Strahlen mit ei-

ner Linse auf einen Schirm fokussiert, der sich im Brennpunkt der Linse befindet.

Wenn man das Beugungsmuster dagegen in der Nähe der Öffnung oder des Hindernisses beobachtet, verlaufen die Strahlen nicht parallel, und es liegt ein **Fresnel'sches Beugungsmuster** vor. Es ist wesentlich schwieriger zu beschreiben als das Fraunhofer'sche Beugungsmuster. Abbildung 30.14 illustriert beim Einzelspalt den Unterschied zwischen den beiden Beugungsmustern.

Abbildung 30.15a zeigt das Fresnel'sche Beugungsmuster, das an einer undurchsichtigen Scheibe entsteht. Bemerkenswert ist dabei, dass im Zentrum ein kleiner heller Fleck auftritt. Hier interferieren die am Rand der Scheibe gebeugten Lichtwellen konstruktiv. Dieses Beugungsmuster ist historisch interessant. Im ersten Viertel des 19. Jahrhunderts versuchte der Franzose Denis Poisson, die von seinem Landsmann Augustin Fresnel vertretene Wellentheorie des Lichts zu widerlegen. Nach ihr sollte ein heller Fleck im Zentrum des Beugungsmusters auftreten, was Poisson für einen lächerlichen Widerspruch zu den Tatsachen hielt. Aber Fresnel konnte bald den experimentellen Gegenbeweis antreten, den hellen Fleck also vorführen. Diese Demonstration überzeugte viele Skeptiker davon, dass die Wellentheorie des Lichts stichhaltig ist. Das Fresnel'sche Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung ist in Abbildung 30.15b dargestellt. Der genaue Vergleich mit dem Beugungsmuster bei einer unendlich dicken Scheibe ist in Abbildung 30.15c dargestellt.

Nähern des Schirms:

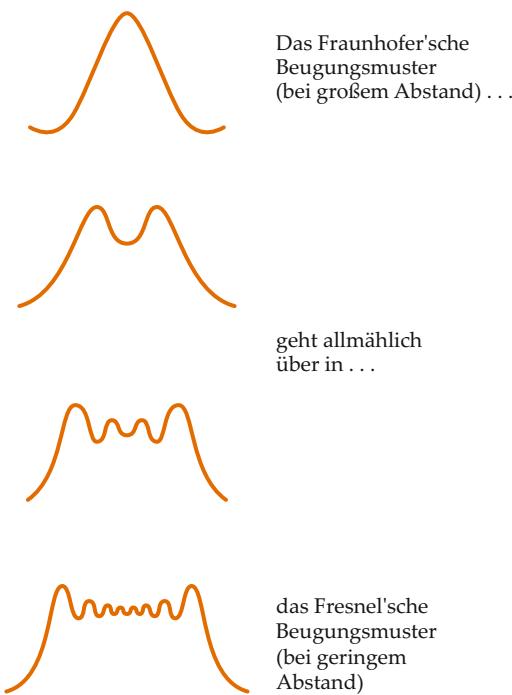


Abbildung 30.14 Das Beugungsmuster beim Einzelspalt in verschiedenen Abständen vom Schirm. Wird dieser näher an den Spalt gerückt, so geht das Fraunhofer'sche in das Fresnel'sche Beugungsmuster über (siehe Richard E. Haskell, „A Simple Experiment on Fresnel Diffraction“, *American Journal of Physics* 38 (1970) 1039).

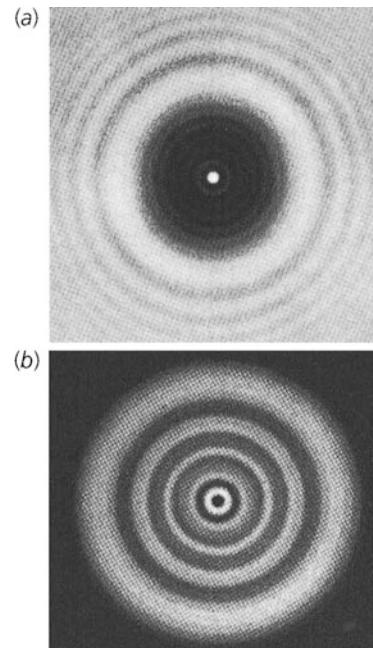


Abbildung 30.15 a) Das Fresnel'sche Beugungsmuster bei einer undurchsichtigen Scheibe. Im Mittelpunkt des Schattens auf dem Schirm interferieren die am Rand der Scheibe gebeugten Lichtwellen konstruktiv, sind also in Phase. Dieses helle Zentrum heißt *Poisson'scher Fleck*. b) Das Fresnel'sche Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung. Die Muster in a und b sind komplementär. (© M. Cagnet, M. Fraçon, J. C. Thirièr, *Atlas of Optical Phenomena*.)

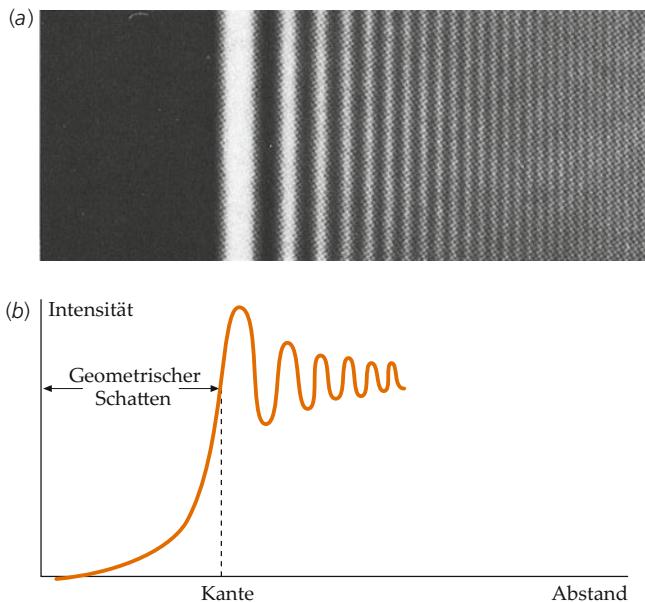


Abbildung 30.16 a) Das Fresnel'sche Beugungsmuster bei einer scharfen Kante. b) Die Intensität als Funktion des Abstands entlang einer Geraden senkrecht zur Kante. (Mit freundlicher Genehmigung der Battelle-Northwest Laboratories.)

gungsmuster der undurchsichtigen Scheibe in Abbildung 30.15a ergibt, dass die beiden Muster komplementär sind.

Abbildung 30.16a zeigt das Fresnel'sche Beugungsmuster bei einer scharfen, geraden Kante, die von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet wird. In Abbildung 30.16b ist aufgetragen, wie sich die Intensität am Schirm senkrecht zur Richtung der Kante ändert. Die Lichtintensität fällt im geometrischen Schatten nicht plötzlich auf null. Sie nimmt jedoch schnell ab und wird im Abstand einiger Lichtwellenlängen vernachlässigbar klein.

30.6 Beugungsmuster beim Einzelspalt

Bei der Erklärung des Interferenzmusters beim Doppelspalt und Gitter nahmen wir an, dass die Spalte sehr eng sind. Daher konnten wir sie als linienförmige Quellen zylindrischer Wellen ansehen und sie in unseren zweidimensionalen Abbildungen als Punktquellen kreisförmiger Wellen darstellen. Außerdem durften wir annehmen, dass der Wert der Intensität I_0 der von einem der Spalte ausgehenden Welle an jedem Punkt P auf dem Schirm gleich hoch ist, unabhängig vom Winkel θ zwischen dem Strahl und dem Einfallslot im Punkt P . Wenn der Spalt aber nicht eng ist, dann ist die Intensität auf einem weit entfernten Schirm nicht unabhängig von θ , sondern nimmt ab, wenn dieser Winkel größer wird. Betrachten wir nun einen einzelnen Spalt mit

der Breite a . Abbildung 30.17 zeigt, wie das Intensitätsmuster auf einem weit entfernten Schirm von $\sin \theta$ abhängt. Die Intensität ist in Vorfahrtsrichtung ($\sin \theta = 0$) maximal. Sie nimmt mit steigendem Winkel θ ab und erreicht den Wert null bei einem Winkel, der von der Spaltbreite a und der Wellenlänge λ abhängt.

Der größte Teil der Lichtintensität ist im breiten **zentralen Beugungsmaximum** konzentriert. Beiderseits von ihm treten Nebenmaxima auf, die jedoch wesentlich schwächer sind. Die erste Nullstelle der Intensität (auf einer Seite des Hauptmaximums) tritt bei einem Winkel θ_1 auf, für den gilt:

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}. \quad (30.10)$$

Diese Gleichung beschreibt für eine bestimmte Wellenlänge λ , wie die Winkelbreite des zentralen Maximums von der Spaltbreite a abhängt. Wird diese *größer*, wird der Winkel θ_1 kleiner, bei dem die Intensität erstmals null wird. Mit zunehmender Spaltbreite a wird das zentrale Beugungsmaximum daher schmäler und umgekehrt. Wenn die Spaltbreite a *kleiner* als die Wellenlänge λ ist, müsste $\sin \theta_1$ größer als 1 sein, um Gleichung 30.10 zu erfüllen. Da das nicht möglich ist, kann die Intensitätsverteilung für $a < \lambda$ keine Nullstellen haben. Der Spalt wirkt in diesem Fall wie eine linienförmige Quelle (eine Punktquelle in zwei Dimensionen), die das Licht in alle Richtungen gleich stark abstrahlt, ähnlich wie einer der Spalte in Abbildung 30.7a.

Wir multiplizieren beide Seiten von Gleichung 30.10 mit $\frac{1}{2}a$ und erhalten

$$\frac{1}{2}a \sin \theta_1 = \frac{1}{2}\lambda. \quad (30.11)$$

Die Größe $\frac{1}{2}a \sin \theta_1$ ist der Gangunterschied zwischen zwei Lichtstrahlen, die von zwei Punkten im Spalt ausgehen, deren Abstand $\frac{1}{2}a$ beträgt. Die beiden Quellen liegen beispielsweise in der Mitte der oberen und in der Mitte der unteren Spalthälfte. Das erste Beugungsminimum tritt also auf, wenn diese beiden Strahlen eine Phasendifferenz von 180° haben bzw. wenn ihr Gangunterschied einer halben Wellenlänge entspricht. Um das zu verstehen, betrachten wir gemäß dem Huygens'schen Prinzip jeden Punkt einer Wellenfront, d.h. jeden Punkt in der Spaltebene, als Punktquelle einer neuen Elementarwelle. Die Punktquellen sind durch die Punkte in Abbildung 30.18 symbolisiert. Wir nehmen 100 solcher Punkte an und betrachten den Winkel θ_1 , bei dem $a \sin \theta_1 = \lambda$ ist, wie in Gleichung 30.11. Nun teilen wir den Spalt in zwei Hälften, wobei die Punktquellen 1 bis 50 in der oberen Hälfte und die Punktquellen 51 bis 100 in der unteren Hälfte liegen. Wir betrachten jetzt zwei Wellen: Eine geht von einer oberen Quelle, beispielsweise von Nr. 4, aus und die andere von der entsprechenden unteren Quelle, also von Nr. 54. Ihr Gangunterschied ist, wie aus Abbildung 30.18 hervorgeht, gleich $\frac{1}{2}\lambda$. Diese Wellen weisen eine Phasendifferenz von 180° auf und werden bei der Interferenz am Schirm einander auslöschen. Dasselbe gilt für alle 50 Wellen-, „Paare“ aus der oberen und der unteren Hälfte des Spalts. Somit ist bei diesem Winkel θ_1 die Intensität am Schirm null. Für das zweite und

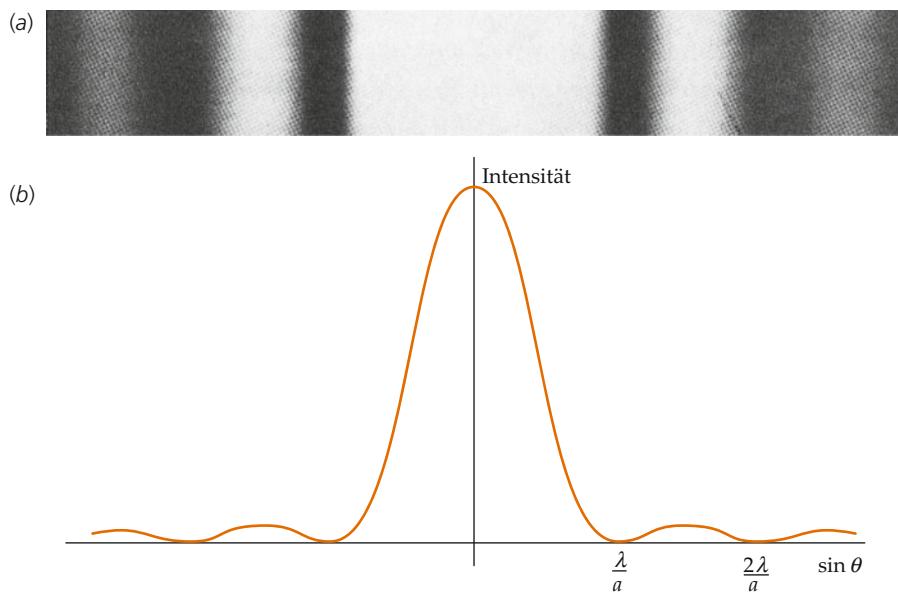


Abbildung 30.17 a) Das Beugungsmuster bei einem Einzelspalt, wie es auf einem weit entfernten Schirm beobachtet wird. b) Die Abhängigkeit der Intensität von $\sin \theta$ für das in a) gezeigte Beugungsmuster. Dabei ist θ der Winkel am Schirm zwischen der Strahlrichtung und dem Einfallslot. (Mit freundlicher Genehmigung von Michael Cagnet.)

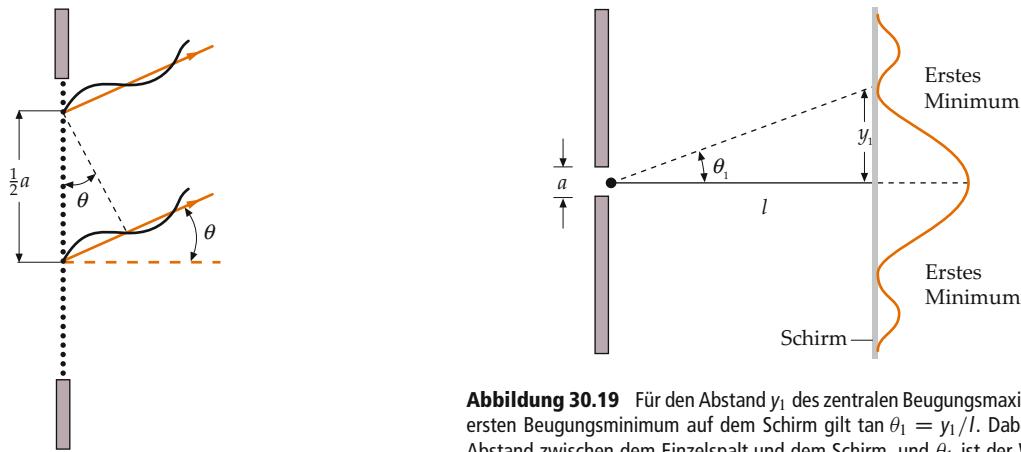


Abbildung 30.18 Der Einzelspalt wird durch eine große Anzahl von Punktquellen repräsentiert, die Wellen gleicher Amplitude abstrahlen. Beim ersten Beugungsminimum löschen sich die Wellen derjenigen Quellenpaare aus, die voneinander den Abstand $\frac{1}{2}a$ haben, denn bei diesem Winkel θ beträgt ihre Phasendifferenz 180° .

Abbildung 30.19 Für den Abstand y_1 des zentralen Beugungsmaximums vom ersten Beugungsminimum auf dem Schirm gilt $\tan \theta_1 = y_1/l$. Dabei ist l der Abstand zwischen dem Einzelspalt und dem Schirm, und θ_1 ist der Winkel, bei dem das erste Beugungsminimum auftritt.

$$a \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (30.12)$$

NULLSTELLEN DER INTENSITÄT IM BEUGUNGSMUSTER BEIM
EINZELSPALT

das dritte Minimum im Beugungsmuster von Abbildung 30.17 stellen wir entsprechende Überlegungen an: Beim Winkel θ_2 ist $a \sin \theta_2 = 2\lambda$, und wir teilen den Spalt in vier gleiche Teile (also in je zwei Hälften der oberen und der unteren Spalthälften). Dann ist die von der oberen Spalthälfte herrührende Intensität null, und Gleiches gilt für die untere Spalthälfte. Damit erhalten wir den allgemeinen Ausdruck für die Winkel, bei denen die Intensität im Beugungsmuster beim Einzelspalt gleich null ist:

Normalerweise interessieren wir uns vor allem für das erste Beugungsminimum auf dem Schirm, weil nahezu die gesamte Lichtenergie im zentralen Beugungsmaximum enthalten ist, das von den beiden ersten Nullstellen (rechts und links) begrenzt wird.

Mithilfe von Abbildung 30.19 können wir ableiten, wie der Abstand y_1 zwischen dem zentralen Beugungsmaximum und dem

ersten Beugungsminimum vom Winkel θ_1 und vom Abstand l zwischen Spalt und Schirm abhängt:

$$\tan \theta_1 = \frac{y_1}{l}.$$

Diese Beziehung wird in Beispiel 30.5 angewendet.

Beispiel 30.5: Die Breite des zentralen Beugungsmaximums beim Einzelspalt

Bei einer Demonstration zur Beugung wird ein Laserstrahl der Wellenlänge 700 nm auf einen vertikalen Spalt der Breite 0,20 mm gerichtet. Das Beugungsmuster wird auf einem 6,0 m dahinter angebrachten Schirm beobachtet. Wie breit ist auf ihm das zentrale Beugungsmaximum? Dessen Breite entspricht dem Abstand zwischen dem ersten Minimum links vom zentralen Maximum und dem ersten Minimum rechts von ihm.

Problembeschreibung: Die Gegebenheiten sind in Abbildung 30.19 dargestellt. Die Breite des zentralen Beugungsmaximums ist $2y_1$.

Lösung: 1. Die halbe Breite y_1 des zentralen Maximums hängt mit dem Winkel θ_1 zusammen über:

$$\tan \theta_1 = \frac{y_1}{l}$$

2. Für den Zusammenhang zwischen dem Winkel θ_1 und der Spaltbreite a gilt Gleichung 30.12, wobei $m = 1$ ist:

$$\sin \theta_1 = \lambda/a$$

3. Lösen Sie das Ergebnis von Schritt 2 nach θ_1 auf und setzen Sie das Ergebnis von Schritt 1 ein. Auflösen nach $2y_1$ ergibt:

$$\begin{aligned} 2y_1 &= 2l \tan \theta_1 = 2l \tan\left(\arcsin \frac{\lambda}{a}\right) \\ &= 2 \cdot (6,0 \text{ m}) \cdot \tan\left(\arcsin \frac{700 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{0,00020 \text{ m}}\right) \\ &= 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 4,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wegen $\sin \theta_1 = \lambda/a = (700 \text{ nm})/(0,20 \text{ mm}) = 0,0035$ können wir die Näherung für kleine Winkel anwenden, um $2y_1$ abzuschätzen. Damit ist $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1$ und daher $\lambda/a = y_1/l$ sowie $2y_1 = 2l\lambda/a = 2 \cdot (6,0 \text{ m}) \cdot (700 \text{ nm})/(0,20 \text{ mm}) = 4,2 \text{ cm}$. (Der so ermittelte Näherungswert weicht nur um 0,0006 % vom in Schritt 3 berechneten Wert ab.) ■

Interferenz- und Beugungsmuster bei zwei Spalten

Liegen zwei oder mehrere Spalte vor, ergibt sich auf einem weit entfernten Schirm ein Beugungsmuster, das als Kombination der Einzelspalt-Beugungsmuster der einzelnen Spalte und des Mehrfachspalt-Interferenzmusters beschrieben werden kann, das wir in Abschnitt 30.4 untersucht haben. Abbildung 30.20 zeigt die Intensitätsverteilung bei zwei Spalten, deren Abstand d voneinander 10-mal so groß ist wie die Breite a eines jeden Spalts. Das Muster ähnelt dem Interferenzmuster beim Doppelspalt mit sehr engen Spalten (siehe Abbildung 30.9), aber es ist mit dem Einzelspalt-Beugungsmuster moduliert. Das bedeutet, die von jedem einzelnen Spalt herrührende Intensität nimmt mit steigendem Winkel ab, wie in Abbildung 30.20b gezeigt.

Bemerkenswert ist, dass das in Abbildung 30.20 gezeigte zentrale Beugungsmaximum 19 Interferenzmaxima enthält, nämlich das zentrale Interferenzmaximum und beiderseits je 9 Interferenzmaxima. Das 10. Interferenzmaximum auf jeder Seite liegt beim Winkel θ_{10} , für den gilt: $\sin \theta_{10} = 10\lambda/d = \lambda/a$, denn es ist $d = 10a$. Dieses Interferenzmaximum fällt hier gerade mit dem ersten Beugungsminimum zusammen, sodass es nicht beobachtet werden kann. An diesen beiden Punkten auf dem Schirm wären zwar die von den Spalten ausgehenden Wellen in Phase und würden daher konstruktiv interferieren, aber hierbei geht von keinem der Spalte Licht aus, da bei jedem einzelnen Spalt für $\sin \theta = \lambda/a$ ein Beugungsminimum vorliegt. Allgemein fällt bei $m = d/a$ das m -te Interferenzmaximum auf das erste Beugungsminimum. Da auf beiden Seiten der m -te Streifen nicht auftritt, beobachtet man auf jeder Seite $m-1$ Streifen, also insgesamt N Streifen im zentralen Maximum; dabei ist

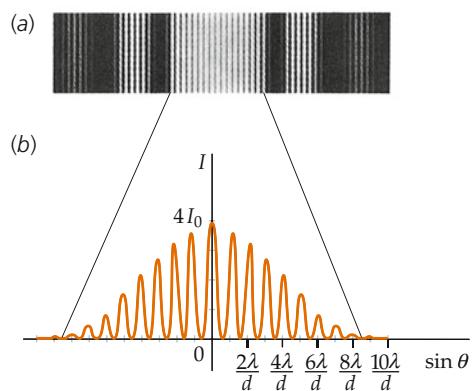


Abbildung 30.20 a) Interferenz- und Beugungsmuster bei zwei Spalten, deren Abstand d voneinander 10-mal so groß ist wie die Breite a jedes einzelnen Spalts. Auf beiden Seiten des zentralen Interferenzmaximums fehlt das zehnte Interferenzmaximum, weil es gerade mit dem ersten Beugungsminimum zusammenfällt. b) Die Auftragung der Intensität I am Schirm gegen $\sin \theta$ für das in a dargestellte zentrale Beugungsmaximum. (Mit freundlicher Genehmigung von Michael Cagnet.)

N gegeben durch

$$N = 2(m - 1) + 1 = 2m - 1. \quad (30.13)$$

Eine Anwendung dieser Beziehung ist in Beispiel 30.6 gezeigt. Analog zur Überlagerung von Interferenz- und Beugungsmustern beim Doppelspalt wird auch bei einem Gitter mit mehreren Spalten das Interferenzmuster der Spalte mit dem Beugungsmuster des einzelnen Spalts moduliert.

Beispiel 30.6: Interferenz und Beugung

Zwei Spalte der Breite $a = 0,015\text{ mm}$ haben voneinander den Abstand $d = 0,060\text{ mm}$. Sie werden mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 650\text{ nm}$ beleuchtet. Wie viele helle Streifen lassen sich im zentralen Beugungsmaximum beobachten?

Problembeschreibung: Sie müssen den Wert von m ermitteln, bei dem das m -te Interferenzmaximum mit dem ersten Beugungsminimum zusammenfällt. Dann treten im zentralen Maximum $N = 2m - 1$ Streifen auf.

Lösung: 1. Formulieren Sie die Abhängigkeit des Winkels θ_1 des ersten Beugungsminimums von der Spaltbreite a :

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \quad (\text{1. Beugungsminimum})$$

2. Formulieren Sie die Abhängigkeit des Winkels θ_m der m -ten Interferenzmaxima vom Spaltabstand d :

$$\sin \theta_m = \frac{m \lambda}{d} \quad (m\text{-te Interferenzmaxima})$$

3. Setzen Sie beide Winkel gleich und lösen Sie nach m auf:

$$\begin{aligned} \frac{m \lambda}{d} &= \frac{\lambda}{a} \\ m = \frac{d}{a} &= \frac{0,060\text{ mm}}{0,015\text{ mm}} = 4,0 \end{aligned}$$

4. Das 1. Beugungsminimum fällt mit dem 4. hellen Interferenzstreifen zusammen. Also sind beiderseits des zentralen Beugungsmaximums jeweils 3 helle Streifen sichtbar. Hinzu kommt das zentrale Interferenzmaximum, sodass im zentralen Beugungsmaximum insgesamt 7 helle Streifen beobachtet werden:

$$N = \boxed{7 \text{ helle Streifen}}$$

30.7 *Vektoraddition harmonischer Wellen

Wie in den Abschnitten 30.3 und 30.4 gezeigt, entstehen Interferenzmuster beim Durchgang von kohärenten Lichtwellen an zwei oder mehr sehr engen Spalten. Ist die Spaltbreite von derselben Größenordnung wie der Abstand der Spalte, so werden die Interferenzmuster mit einem Beugungsmuster moduliert, das durch die Überlagerung der Lichtwellen an jedem einzelnen Spalt ergibt (siehe Abschnitt 30.6). Um die jeweiligen Intensitätsverteilungen zu berechnen, müssen wir mehrere harmonische Wellen mit gleicher Frequenz, aber unterschiedlichen Phasen addieren. Hierfür gibt es eine recht einfache Methode, der die geometrische Interpretation harmonischer Wellenfunktionen gleicher Frequenz zugrunde liegt.

Wir betrachten die Wellenfunktionen zweier Wellen an einem beliebigen Punkt: $E_1 = A_1 \sin \alpha$ und $E_2 = A_2 \sin(\alpha + \delta)$. Dabei ist $\alpha = kx - \omega t$. Dann müssen wir folgende Summe ermitteln:

$$E_1 + E_2 = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin(\alpha + \delta).$$

Wir können jede Wellenfunktion durch die y -Komponente eines zweidimensionalen Vektors darstellen, wie in Abbildung 30.21 gezeigt. Die geometrische Methode der Addition beruht auf der Tatsache, dass die y -Komponente der Resultierenden von zwei oder mehreren Vektoren gleich der Summe der y -Komponenten der Vektoren ist. Die Wellenfunktion E_1 wird durch die y -Komponente des Vektors A_1 repräsentiert. Mit fortschreitender Zeit t rotiert er in der x - y -Ebene. Damit ist er eine Funktion der Zeit t und des Orts x . Ein solcher Vektor wird **Zeiger** genannt. (Wir haben Zeiger schon in Abschnitt 26.5 im Zusammenhang mit den Wechselstromkreisen kennengelernt.) Die Wellenfunktion E_2 ist die y -Komponente eines Zeigers, der den Betrag A_2 hat und mit der x -Achse den Winkel $\alpha + \delta$ bildet. Nach den Regeln der Vektoraddition ist die Summe der y -Komponenten der einzelnen Zeiger gleich der y -Komponente des resultierenden Zeigers A , wie in Abbildung 30.21 gezeigt ist. Die y -Komponente des resultierenden

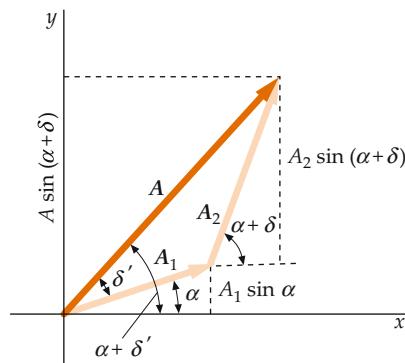


Abbildung 30.21 Das Zeigerdiagramm zu Gleichung 30.14.

Zeigers, also $A \sin(\alpha + \delta')$, ist eine harmonische Wellenfunktion, die die Summe der beiden ursprünglichen Wellenfunktionen ist:

$$A_1 \sin \alpha + A_2 \sin(\alpha + \delta) = A \sin(\alpha + \delta'). \quad (30.14)$$

Darin ist A die Amplitude der resultierenden Welle, und δ' ist die Phase der resultierenden Welle relativ zur ersten Welle. Diese beiden Größen sind durch Addieren der Zeiger zu ermitteln, die die Wellen repräsentieren. Die Größe $\alpha = kx - \omega t$ ändert sich räumlich und zeitlich. Die Zeiger, die die beiden ursprünglichen Wellenfunktionen repräsentieren, und der resultierende Zeiger, der die resultierende Wellenfunktion repräsentiert, rotieren in der x - y -Ebene. Ihre relativen Positionen verändern sich dabei aber nicht, weil sie sämtlich die gleiche Wellenzahl k und

die gleiche Kreisfrequenz ω haben. Beispiel 30.7 zeigt eine Anwendung bei Wellen gleicher Amplitude.

*Interferenzmuster bei drei oder mehr äquidistanten Quellen

Wir können Zeigerdiagramme zur Addition auch anwenden, wenn wir das Interferenzmuster von drei oder mehreren äquidistanten sowie kohärenten und phasengleichen Quellen ermitteln wollen. Wir interessieren uns dabei insbesondere für die Interferenzmaxima und -minima. Abbildung 30.23 illustriert die Gegebenheiten bei drei Quellen. Die Anordnung entspricht denjenigen mit zwei Quellen, die wir schon betrachtet hatten. Sind die Quellen von einem Punkt P auf dem Schirm weit entfernt, so verlaufen die Strahlen zu ihm nahezu parallel. Der Gangunter-

Beispiel 30.7: Wellenüberlagerung mithilfe von Zeigern

ZUR ÜBUNG

Verwenden Sie ein Zeigerdiagramm, um die Beziehung $E = (2A_0 \cos(\frac{1}{2}\delta)) \sin(\alpha + \frac{1}{2}\delta)$ (siehe Gleichung 30.7) für die Überlagerung zweier Wellen gleicher Amplitude herzuleiten.

Problembeschreibung: Die Wellen $y_1 = A_0 \sin \alpha$ und $y_2 = A_0 \sin(\alpha + \delta)$ können Sie als Vektoren (Zeiger) darstellen, die die Länge A_0 haben und den Winkel δ bilden. Die resultierende Welle $y_r = A \sin(\alpha + \delta')$ wird dann durch ihre Summe repräsentiert. Die Vektoren ergeben ein gleichschenkliges Dreieck, wie in Abbildung 30.22 gezeigt.

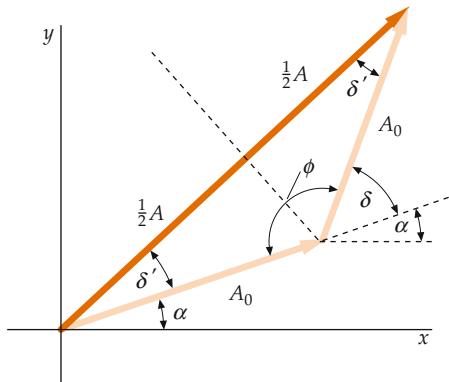


Abbildung 30.22 Zeigerdiagramm der Wellen y_1 und y_2 , die sich zu einer resultierenden Welle y_r addieren.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Formulieren Sie den Zusammenhang zwischen δ und δ' . Nutzen Sie dabei die Tatsache aus, dass ein Außenwinkel an einem Dreieck gleich der Summe der beiden nicht benachbarten Innenwinkel ist.

2. Lösen Sie nach δ' auf.

3. Drücken Sie $\cos \delta'$ in Abhängigkeit von A und A_0 aus.

4. Drücken Sie A in Abhängigkeit von δ aus.

5. Stellen Sie mit Ihren Ergebnissen für A und δ' den Ausdruck für die resultierende Wellenfunktion auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\delta' + \delta' = \delta$$

2.

$$\delta' = \frac{1}{2} \delta$$

3.

$$\cos \delta' = \frac{\frac{1}{2}A}{A_0}$$

4.

$$A = 2A_0 \cos \delta' = 2A_0 \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right)$$

5.

$$y_r = A \sin(\alpha + \delta')$$

$$= \boxed{(2A_0 \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right)) \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\delta\right)}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Schritt 5 ist identisch mit Gleichung 30.7 (siehe Problembeschreibung).

Übung 30.3: Berechnen Sie die Amplitude A und den Phasenwinkel δ der Wellenfunktion, die aus der Addition der zwei Wellenfunktionen $E_1 = (4,0 \text{ V/m}) \sin \alpha$ und $E_2 = (3,0 \text{ V/m}) \sin(\alpha + 90^\circ)$ hervorgeht. ◀

schied zwischen der ersten und der zweiten Welle ist dann, wie zuvor, $d \sin \theta$, und der Gangunterschied zwischen der ersten und der dritten Welle ist $2d \sin \theta$. Die im Punkt P eintreffende Welle ist die Summe dreier Wellen. Wir setzen für die Phase der ersten Welle beim Punkt P wieder $\alpha = kx - \omega t$. Wir müssen also folgende drei Wellen addieren:

$$\begin{aligned} E_1 &= A_0 \sin \alpha \\ E_2 &= A_0 \sin (\alpha + \delta) \\ E_3 &= A_0 \sin (\alpha + 2\delta). \end{aligned} \quad (30.15)$$

Darin ist, wie bei zwei Quellen (beispielsweise beim Doppelspalt):

$$\delta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi \approx \frac{y d}{\lambda l} 2\pi. \quad (30.16)$$

Bei $\theta = 0$ ist $\delta = 0$, d. h., alle Wellen sind in Phase. Die Amplitude der hier eintreffenden resultierenden Welle ist 3-mal so groß wie die jeder einzelnen Welle, und ihre Intensität ist 9-mal so groß wie die der Welle aus einer einzelnen Quelle. Wenn der Winkel, mit $\theta = 0$ beginnend, ansteigt, nimmt auch die Phasendifferenz bzw. der Phasenwinkel δ zu, und die Intensität nimmt ab. Daher hat die Intensität bei $\theta = 0$ einen Maximalwert.

In Abbildung 30.24 ist das Zeigerdiagramm dargestellt, mit dem drei Wellen gleicher Amplitude mit dem Phasenwinkel $\delta = 30^\circ = (\pi/6)$ rad addiert werden können. Dies entspricht einem Punkt P auf dem Schirm beim Winkel θ , für den gilt: $\sin \theta = \lambda \delta / (2\pi d) = \lambda / (12d)$. Die resultierende Amplitude A ist hier deutlich kleiner als die dreifache Amplitude jeder einzelnen Quelle. Wenn der Phasenwinkel δ zunimmt, sinkt die resultierende Amplitude, bis sie bei $\delta = 120^\circ$ null ist. Bei dieser Phasendifferenz bilden die drei Zeiger ein gleichseitiges Dreieck (Abbildung 30.25). Dieses erste Interferenzminimum für drei Quellen tritt bei einem kleineren Phasenwinkel δ (und daher bei einem kleineren Raumwinkel θ) auf als bei nur zwei Quellen (mit $\delta = 180^\circ$, wo das erste Interferenzminimum auftritt). Nimmt δ über 120° hinaus zu, steigt die resultierende Amplitude an und erreicht bei $\delta = 180^\circ$ ein *Nebenmaximum*. Bei diesem Phasenwinkel $\delta = 180^\circ$ ist die Amplitude ebenso groß wie die von einer einzelnen Quelle, weil die Wellen aus den Quellen 1 und 2 einander auslöschen und nur die dritte Welle übrig bleibt. Die Intensität des Nebenmaximums beträgt $\frac{1}{9}$ derjenigen des Maximums bei $\theta = 0$. Steigt δ über 180° hinaus an, so nimmt die Amplitude wieder ab und wird null bei $\delta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$. Bei weiter zunehmendem Phasenwinkel steigt die Amplitude erneut an und erreicht bei $\delta = 360^\circ$ wieder den dreifachen Wert einer einzelnen Quelle. Dieser Phasenwinkel entspricht einem Gangunterschied von einer ganzen Wellenlänge bei den Wellen aus den Quellen 1 und 2 sowie von zwei Wellenlängen bei den Wellen aus den Quellen 1 und 3. Daher sind die drei Wellen an diesem Punkt wieder in Phase. Die höchsten Maxima, *Hauptmaxima* genannt, haben auf dem Schirm die gleichen Positionen wie bei zwei Quellen, und für die Winkel θ_m , bei denen sie auftreten, gilt

$$d \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (30.17)$$

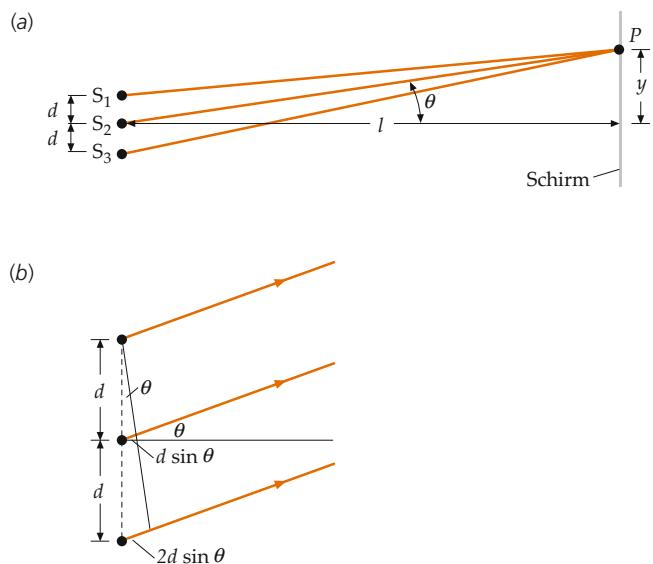


Abbildung 30.23 Zur Berechnung des Intensitätsmusters bei drei äquidistanten und kohärenten Quellen, die in Phase schwingen.

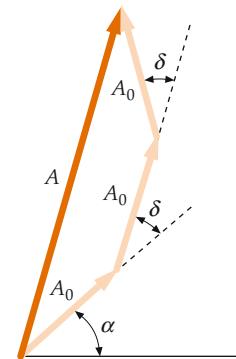


Abbildung 30.24 Zeigerdiagramm für die Bestimmung der resultierenden Amplitude A bei drei Wellen mit der gleichen Amplitude A_0 sowie den Phasendifferenzen δ bzw. 2δ aufgrund der Gangunterschiede $d \sin \theta$ bzw. $2d \sin \theta$. Der Winkel $\alpha = \omega t$ ändert sich zeitlich, was aber die Berechnung von A nicht beeinflusst.

Diese Maxima sind intensiver und schmäler als bei nur zwei Quellen. Sie sind am Schirm dort zu beobachten, wo der Gangunterschied der Wellen benachbarter Quellen null oder ein geradzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist.

Diese Ergebnisse können auf mehr als drei Quellen verallgemeinert werden. Bei vier kohärenten sowie äquidistanten und phasengleichen Quellen sind die Positionen der Hauptmaxima der Interferenz wiederum durch Gleichung 30.17 gegeben. Jedoch sind diese Maxima noch intensiver und schärfer als bei zwei oder drei Quellen, und zwischen jedem Paar von Hauptmaxima treten zwei kleine Nebenmaxima auf. Bei $\theta = 0$ ist die Intensität 16-mal so groß wie die aus einer einzelnen Quelle. Das erste Interferenzminimum tritt bei $\delta = 90^\circ$ auf, wie

30.7 *Vektoraddition harmonischer Wellen

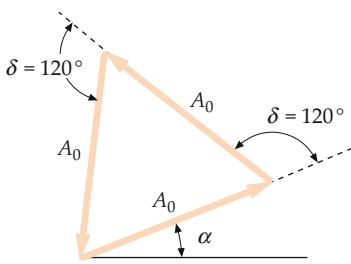


Abbildung 30.25 Die resultierende Amplitude für die Wellen aus drei Quellen wird null, wenn $\delta = 120^\circ$ ist. Dieses Interferenzminimum entsteht bei einem kleineren Winkel θ als das erste Minimum bei zwei Quellen, das bei $\delta = 180^\circ$ auftritt.

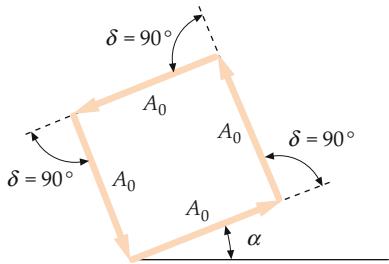


Abbildung 30.26 Zeigerdiagramm für das erste Minimum bei vier kohärenten sowie äquidistanten und phasengleichen Quellen. Die Amplitude ist null, wenn die Phasendifferenz der Wellen aus benachbarten Quellen 90° beträgt.

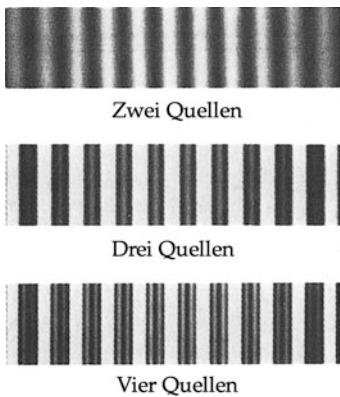


Abbildung 30.27 Die Intensitätsmuster bei zwei, drei bzw. vier Wellen aus kohärenten sowie äquidistanten und phasengleichen Quellen. Zwischen jedem Paar von Hauptmaxima beobachtet man bei drei Quellen ein schwaches Nebenmaximum, bei vier Quellen zwei Nebenmaxima. (Mit freundlicher Genehmigung von Michael Cagnet.)

aus dem Zeigerdiagramm in Abbildung 30.26 hervorgeht. Das erste Nebenmaximum liegt nahe bei $\delta \approx 132^\circ$. Die Intensität des Nebenmaximums beträgt rund $\frac{1}{14}$ der Intensität des zentralen Maximums bei $\theta = 0$. Weiterhin existieren ein Minimum bei $\delta = 180^\circ$, ein Nebenmaximum bei $\delta \approx 240^\circ$ sowie ein Minimum bei $\delta = 270^\circ$. Danach erscheint das nächste Hauptmaximum bei $\delta = 360^\circ$.

Abbildung 30.27 zeigt die Intensitätsmuster bei der Interferenz der Wellen aus zwei, drei bzw. vier äquidistanten kohärenten Quellen. In Abbildung 30.28 ist die Intensität am Schirm gegen $\sin \theta$ aufgetragen, und zwar in Vielfachen der Intensität I_0 aus jeder einzelnen Quelle. Bei drei Quellen tritt zwischen jedem Paar von Hauptmaxima ein sehr schwaches Nebenmaximum auf, wobei die Hauptmaxima intensiver und schärfer sind als bei nur zwei Quellen. Bei vier Quellen erscheinen zwischen jedem Paar von Hauptmaxima zwei sehr schwache Nebenmaxima, und die Hauptmaxima sind noch intensiver und schärfer als bei drei Quellen.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass mit steigender Anzahl der Quellen die Intensität im Interferenzmuster immer stärker in den Hauptmaxima konzentriert wird, für die Gleichung 30.17 gilt. Gleichzeitig werden diese Maxima immer schärfer. Bei N Quellen ist die Intensität der Hauptmaxima N^2 -mal so groß wie die aus einer einzelnen Quelle. Das erste Minimum tritt bei einem Phasenwinkel von $\delta = 360^\circ/N$ auf, wobei die N Zeiger ein geschlossenes Vieleck mit N Seiten bilden. Zwischen jedem Paar von Hauptmaxima erscheinen $N - 2$ Nebenmaxima. Ihre Intensität ist wesentlich geringer als die der Hauptmaxima. Mit zunehmender Anzahl von Quellen werden die Hauptmaxima immer intensiver und schärfer, während die Intensitäten der Nebenmaxima im Vergleich dazu immer geringer werden.

*Berechnung des Beugungsmusters beim Einzelspalt

Wir wollen nun mithilfe von Zeigerdiagrammen für die Addition harmonischer Wellen das in Abbildung 30.17 dargestellte Intensitätsmuster ermitteln, das bei der Beugung am Einzelspalt entsteht. Wir teilen den Spalt, der die Breite a hat, in N gleiche Intervalle ein. In der Mitte eines jeden Intervalls nehmen wir eine Punktquelle an, die eine Welle abstrahlt (Abbildung 30.29). Wenn benachbarte Punktquellen voneinander den Abstand d haben, ist $d = a/N$ (weil die Spaltbreite a ist). Der Schirm, auf dem sich die zu berechnende Intensitätsverteilung ergibt, ist von den Quellen weit entfernt. Daher verlaufen die Strahlen nahezu parallel von den Quellen zum Schirm. Der Gangunterschied der Wellen aus zwei benachbarten Quellen ist dann am Schirm $d \sin \theta$, und ihre Phasendifferenz δ hängt mit ihm zusammen über

$$\delta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi.$$

Wenn A_0 die Amplitude der Welle aus einer einzelnen Quelle ist und wenn alle Wellen in Phase sind, ergibt sich die Amplitude im zentralen Maximum (bei $\theta = 0$) zu $A_{\max} = NA_0$ (Abbildung 30.30).

Mit einem Zeigerdiagramm lässt sich nun die jeweilige Amplitude an einem beliebigen Winkel θ auf dem Schirm ermitteln. Wie wir bei der Addition der Wellen aus zwei, drei bzw. vier Wellen gesehen haben, wird die Intensität an einem Punkt auf dem Schirm dann null, wenn die Zeiger, die die Wellen repräsentieren, ein geschlossenes Vieleck bilden. Im vorliegenden

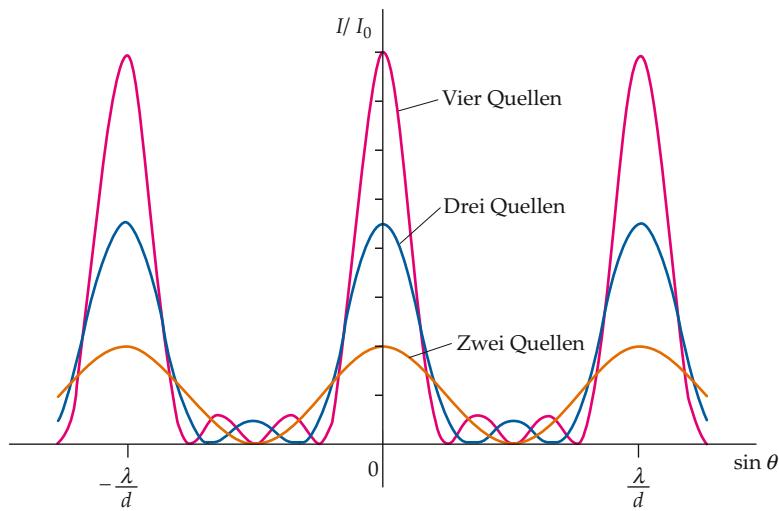


Abbildung 30.28 Die relative Intensität I/I_0 in Abhängigkeit von $\sin \theta$ bei der Interferenz der Wellen aus zwei, drei bzw. vier kohärenten sowie äquidistanten und phasengleichen Quellen.

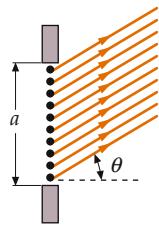


Abbildung 30.29 Zur Berechnung des Beugungsmusters am Schirm, der von einem engen Spalt weit entfernt ist. Der Spalt mit der Breite a wird als eine Reihe vieler Punktquellen angesehen, die in Phase schwingen und voneinander jeweils den Abstand d haben. Die von diesen Quellen ausgehenden Strahlen treffen nahezu parallel auf den Schirm. Der Gangunterschied der Wellen aus benachbarten Quellen ist $d \sin \theta$.

Fall mit N Quellen hat das Vieleck N Seiten (Abbildung 30.31). Beim ersten Minimum sind die Welle aus der ersten Quelle (unmittelbar unter dem oberen Rand des Spalts) und die Welle aus der Quelle unmittelbar unter der Spaltmitte in Gegenphase, d. h., ihre Phasendifferenz beträgt 180° . Dann beträgt die Phasendifferenz zwischen der Welle aus der obersten und der Welle aus der untersten Quelle annähernd 360° . (Genau genommen beträgt sie $360^\circ - 360^\circ/N$.) Da die Anzahl der Quellen sehr hoch ist, kann der Term $360^\circ/N$ vernachlässigt werden, und vollständige Auslösung tritt auf, wenn die Wellen aus der ersten und aus der letzten Quelle um 360° phasenverschoben sind. Ihr Gangunterschied entspricht dann einer Wellenlänge, in Übereinstimmung mit Gleichung 30.12.

Nun wollen wir die Amplitude an einem beliebigen Punkt am Schirm berechnen, wobei die Wellen aus benachbarten Quellen die Phasendifferenz δ haben. In Abbildung 30.32 ist das Zeigerdiagramm für die Addition von N Wellen dargestellt, wobei sich die Phasen aufeinanderfolgender Wellen von derjenigen

der ersten Welle um $\delta, 2\delta, \dots, (N-1)\delta$ unterscheiden. Da N sehr groß und δ sehr klein ist, ergibt das Zeigerdiagramm annähernd einen Kreisbogen. Die resultierende Amplitude A ist die Länge der Sehne über diesem Kreisbogen. Uns interessiert nun, wie diese resultierende Amplitude von der Phasendifferenz ϕ zwischen der ersten und der letzten Welle abhängt. Der Abbildung 30.32 entnehmen wir:

$$\sin(\frac{1}{2}\phi) = \frac{A/2}{r}$$

oder

$$A = 2r \sin(\frac{1}{2}\phi). \quad (30.18)$$

Darin ist r der Radius des Kreisbogens. Da dieser Bogen die Länge $A_{\max} = NA_0$ hat und den Winkel ϕ überspannt, gilt:

$$\phi = \frac{A_{\max}}{r}$$

bzw.

$$r = \frac{A_{\max}}{\phi}. \quad (30.19)$$

Einsetzen in Gleichung 30.18 ergibt

$$A = \frac{2A_{\max}}{\phi} \sin(\frac{1}{2}\phi) = A_{\max} \frac{\sin(\frac{1}{2}\phi)}{\frac{1}{2}\phi}.$$

Die Amplitude in der Mitte des zentralen Maximums (bei $\theta = 0$) ist A_{\max} . Daher ist das Verhältnis der Intensität an einem beliebigen Punkt zu der Intensität in der Mitte des zentralen Maximums gegeben durch

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_{\max}^2} = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\phi)}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2$$

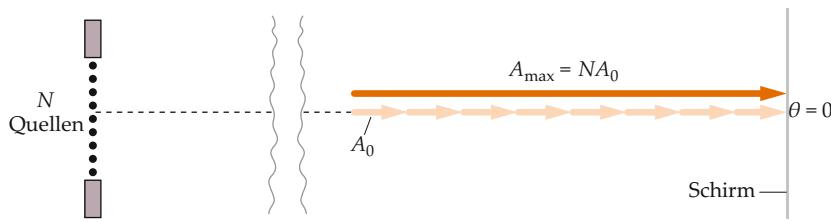


Abbildung 30.30 Ein Einzelspalt wird durch eine Reihe von N Quellen repräsentiert, deren Wellen senkrecht zur Spaltebene jeweils die Amplitude A_0 haben. In der Mitte des Schirms (bei $\theta = 0$) sind alle interferierenden Wellen phasengleich, und die resultierende Amplitude ist $A_{\max} = NA_0$. (Die Pfeile kennzeichnen die Richtung des Strahls, also nicht die Auslenkungsrichtung.)

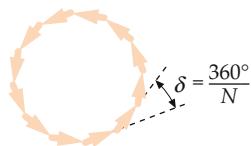


Abbildung 30.31 Zeigerdiagramm zur Berechnung des ersten Minimums im Beugungsmuster beim Einzelspalt. Wenn sich die Wellen aus den N Quellen vollständig auslöschen, bilden die N Zeiger ein geschlossenes Vieleck. Die Phasendifferenz zwischen Wellen aus benachbarten Quellen ist dann $\delta = 360^\circ/N$. Wenn die Anzahl N der Quellen sehr groß ist, sind die Wellen aus der ersten und aus der letzten Quelle annähernd in Phase.

$$\begin{aligned}\text{Umfang } C &= \frac{2}{3} NA_0 \\ &= \frac{2}{3} A_{\max} = \pi A \\ A &= \frac{2}{3\pi} A_{\max} \\ A^2 &= \frac{4}{9\pi^2} A_{\max}^2\end{aligned}$$

Abbildung 30.33 Zeigerdiagramm zum Abschätzen der Amplitude des ersten Nebenmaximums im Beugungsmuster beim Einzelspalt. Dieses Nebenmaximum liegt ungefähr in der Mitte zwischen dem ersten und dem zweiten Minimum, wobei die N Zeiger eineinhalb Kreise bilden.

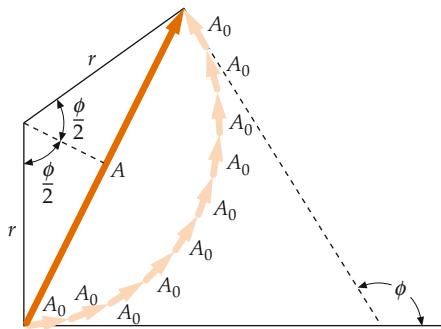


Abbildung 30.32 Zeigerdiagramm zur Berechnung der resultierenden Amplitude bei der Interferenz der Wellen aus N Quellen in Abhängigkeit von der Phasendifferenz ϕ zwischen der ersten Welle aus der obersten Quelle und der letzten Welle aus der untersten Quelle im Spalt. Wenn N sehr groß ist, entspricht die resultierende Amplitude A der Sehne über dem Kreisbogen mit der Länge $NA_0 = A_{\max}$.

oder

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\phi)}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2. \quad (30.20)$$

INTENSITÄTSVERTEILUNG IM BEUGUNGSMUSTER BEIM EINZELSPALT

Die Phasendifferenz ϕ zwischen der ersten und der letzten Welle hängt mit dem Gangunterschied $a \sin \theta$ zwischen den entsprechenden Wellen zusammen über

$$\phi = \frac{a \sin \theta}{\lambda} 2\pi. \quad (30.21)$$

Die Gleichungen 30.20 und 30.21 beschreiben das in Abbildung 30.17 gezeigte Intensitätsmuster. Das erste Minimum liegt bei $a \sin \theta = \lambda$. Hier haben die Welle aus der Mitte der oberen und die Welle aus der Mitte der unteren Spalthälfte den Gangunterschied $\lambda/2$, sind also um 180° phasenverschoben. Das zweite Minimum liegt bei $a \sin \theta = 2\lambda$. Hier haben die Wellen aus der oberen Hälfte und die aus der unteren Hälfte der oberen Spalthälfte ebenfalls den Gangunterschied $\lambda/2$, sind also auch um 180° phasenverschoben.

Ungefähr in der Mitte zwischen dem ersten und dem zweiten Minimum tritt ein Nebenmaximum auf, und zwar bei $a \sin \theta \approx \frac{3}{2}\lambda$. In Abbildung 30.33 ist das Zeigerdiagramm dargestellt, mit dem die Intensität dieses Nebenmaximums abgeschätzt werden kann. Die Phasendifferenz zwischen der ersten und der letzten Welle beträgt etwa $360^\circ + 180^\circ$ bzw. $2\pi + \pi$. Die Zeiger bilden also $1\frac{1}{2}$ Kreise. Die resultierende Amplitude entspricht dem Durchmesser eines Kreises mit einem Umfang, der zwei Drittel der Gesamtlänge A_{\max} beträgt. Mit dem Umfang $C = \frac{2}{3}A_{\max}$ ist der Durchmesser A gegeben durch

$$A = \frac{C}{\pi} = \frac{\frac{2}{3}A_{\max}}{\pi} = \frac{2}{3\pi} A_{\max}.$$

Daher ist

$$A^2 = \frac{4}{9\pi^2} A_{\max}^2.$$

Die Intensität an diesem Punkt auf dem Schirm ist

$$I = \frac{4}{9\pi^2} I_0 \approx \frac{1}{22,2} I_0. \quad (30.22)$$

*Berechnung des Interferenz- und Beugungsmaximums bei mehreren Spalten

Zur Berechnung der Intensitätsverteilung im Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt können wir von Gleichung 30.8 ausgehen. Dabei ist die von jedem einzelnen Spalt herrührende Intensität I_0 in dieser Gleichung durch die Intensität I gemäß Gleichung 30.20 zu ersetzen, die das Beugungsmuster durch jeden einzelnen Spalt beschreibt. Damit ergibt sich für die Intensitätsverteilung im Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt

$$I = 4 I_0 \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}\phi)}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\delta\right). \quad (30.23)$$

INTENSÄTSVERTEILUNG IM INTERFERENZ- UND BEUGUNGSMUSTER BEIM DOPPELSPALT

Darin ist ϕ die Phasendifferenz zwischen den Wellen vom oberen und vom unteren Ende des Spalts. Sie hängt von der Breite a eines einzelnen Spalts ab:

$$\phi = \frac{a \sin \theta}{\lambda} 2\pi.$$

In Gleichung 30.23 ist δ die Phasendifferenz zwischen Wellen aus der Mitte zweier benachbarter Spalte. Sie hängt vom Abstand d der Spalte ab:

$$\delta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi.$$

Die Intensität I_0 in Gleichung 30.23 ist die bei $\theta = 0$ von einem Spalt allein herrührende Intensität.

30.8 Beugung und Auflösung

Abbildung 30.34 zeigt das Fraunhofer'sche Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung. Es hat große Bedeutung für das Auflösungsvermögen optischer Instrumente. Der Winkel θ , bei dem das erste Beugungsminimum auftritt, hängt von der Wellenlänge λ und vom Öffnungsdurchmesser D ab:

$$\sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (30.24)$$

Gleichung 30.24 ähnelt der Gleichung 30.10 für die Beugung beim Einzelspalt. Der zusätzliche Faktor 1,22 röhrt – wie hier nicht gezeigt werden kann – von der Kreisform der Öffnung her. In vielen praktischen Fällen ist der Winkel θ klein, sodass $\sin \theta \approx \theta$ gesetzt werden kann. Das erste Beugungsminimum tritt dann bei einem Winkel θ auf, für den gilt:

$$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (30.25)$$

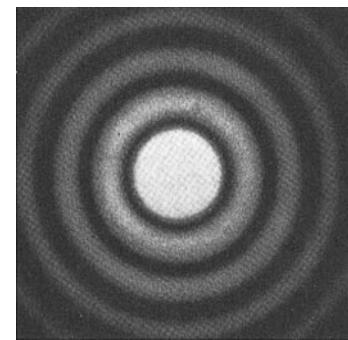


Abbildung 30.34 Das Fraunhofer'sche Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung. (Mit freundlicher Genehmigung von Michael Cagnet.)

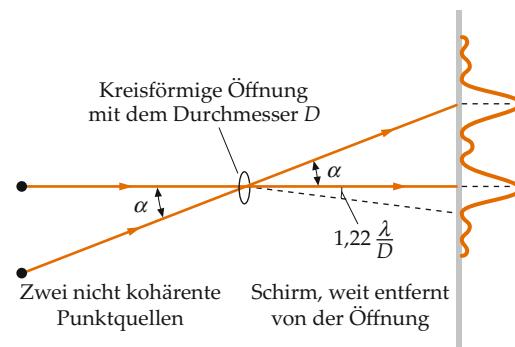


Abbildung 30.35 Zwei weit entfernte Quellen, die am Beobachtungsort (dem Schirm) unter dem Winkel α erscheinen. Sie sind getrennt erkennbar, wenn sich ihre Beugungsmuster kaum überlappen. Das ist der Fall, wenn α deutlich größer als $1,22 \lambda/D$ ist. Darin ist λ die Lichtwellenlänge und D der Durchmesser der Öffnung. Wenn α nicht merklich größer als $1,22 \lambda/D$ ist, so sind die beiden Quellen schwierig oder gar nicht voneinander zu unterscheiden, weil sich ihre Beugungsmuster zu stark überlappen.

In Abbildung 30.35 strahlen zwei nicht kohärente Punktquellen auf eine von ihnen weit entfernte kreisförmige Öffnung. Von dieser aus erscheinen sie unter dem Winkel α . Das sich ergebende Fraunhofer'sche Beugungsmuster ist in der Abbildung rechts eingezeichnet. Wenn der Winkel α deutlich größer als $1,22 \lambda/D$ ist, lassen sich die beiden Quellen im Beugungsmuster unterscheiden. Doch wenn der Winkel α kleiner wird, überlappen sich die Beugungsmuster beider Quellen immer stärker, und es wird zunehmend schwierig, die beiden Quellen getrennt zu erkennen. Beim sogenannten kritischen Winkel α_k fällt das erste Beugungsminimum der einen Quelle mit dem zentralen Beugungsmaximum der anderen Quelle zusammen. Dieser Winkel ist gegeben durch

$$\alpha_k = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (30.26)$$

Diese Beziehung nennt man **Rayleigh'sches Kriterium der Auflösung**. Abbildung 30.36 zeigt die Beugungsmuster zweier Quellen: Einmal ist der Winkel α , unter dem sie erscheinen,

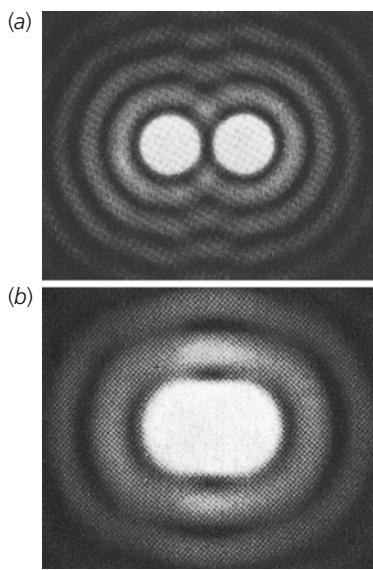


Abbildung 30.36 Die Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung, die von zwei weit entfernten inkohärenten Punktquellen bestrahlt wird. a) Der Winkel α ist um etwa einen Faktor 2 größer als $\alpha_k = 1,22 \lambda/D$, und die Quellen sind getrennt zu erkennen. b) Hier ist $\alpha = \alpha_k = 1,22 \lambda/D$, und die Grenze der Auflösung ist erreicht. (Mit freundlicher Genehmigung von Michael Cagnet.)



Abbildung 30.37 Das aus 27 Radioantennen bestehende VLA (Very Large Array) steht nahe Socorro, New Mexico. Jede Antenne hat einen Durchmesser von 25 m und kann auf Schienen verschoben werden. Das ermöglicht unterschiedliche Konfigurationen des Systems. Der effektive Durchmesser der gesamten Anordnung kann bis zu 36 km betragen. Die von den einzelnen Antennen empfangenen Radiowellensignale werden elektronisch miteinander kombiniert und entsprechen dann dem Signal einer entsprechend großen Einzelantenne. (© NRAO/AUI/Science Photo Library/Photo Researchers.)

merklich größer als der kritische Winkel der Auflösung, und einmal ist α gerade gleich diesem kritischen Winkel.

Gleichung 30.26 hat große praktische Bedeutung. Unter dem **Auflösungsvermögen** eines optischen Instruments – beispiels-

weise eines Mikroskops oder eines Teleskops – versteht man dessen Fähigkeit, zwei Gegenstände oder Lichtquellen getrennt abzubilden oder erkennbar zu machen, die unter einem kleinen Winkel erscheinen. Aufgrund der Beugung wird ein Punkt niemals als Punkt abgebildet, sondern es ergibt sich durch die Beugung an der Öffnung des Instruments stets eine Beugungsscheibe.

Wie gerade gezeigt, überlappen sich die Beugungsscheiben, wenn die betrachteten Punktquellen unter einem zu geringen Winkel erscheinen. Gemäß Gleichung 30.26 kann man das Auflösungsvermögen dadurch erhöhen, dass man den Durchmesser D des abbildenden Elements (Linse oder Spiegel) vergrößert und/oder die Beobachtung bei geringerer Wellenlänge λ vornimmt. Bei astronomischen Teleskopen setzt man möglichst große Objektivlinsen oder meist -spiegel ein, um eine hohe Auflösung und auch eine hohe Lichtstärke zu erzielen. Das sogenannte VLA (Very Large Array, wörtlich: „sehr große Anordnung“) besteht aus 27 Radioantennen, die auf Schienen verschoben werden können (Abbildung 30.37). Sie wirken insgesamt wie eine riesige Einzelantenne mit einem Durchmesser von bis zu 36 km.

Betrachten wir nun die Auflösung eines Spektroskops, das die Fähigkeit hat, Spektrallinien aufzulösen, deren Wellenlängen sich kaum unterscheiden. Das ist etwa bei den Natrium-D-Linien mit den Wellenlängen 589,00 nm und 589,59 nm der Fall (Beispiel 30.8). Sie sind noch einzeln zu erkennen, wenn sich ihre Interferenzmaxima nicht überlappen. Gemäß dem Rayleigh'schen Kriterium für die Auflösung muss dazu die Winkeldifferenz ihrer Interferenzmaxima größer sein als die Winkeldifferenz zwischen einem Interferenzmaximum und dem ersten Interferenzminimum auf einer Seite von ihm. Das **Auflösungsvermögen** eines Beugungsgitters ist definiert als der Quotient $\lambda / |\Delta\lambda|$, wobei $|\Delta\lambda|$ die kleinste noch trennbare Wellenlängendifferenz zweier Linien mit nahezu der gleichen Wellenlänge λ ist. Das Auflösungsvermögen ist proportional zur Anzahl der beleuchteten Spalte, denn je höher diese Anzahl ist, desto schärfer sind die Interferenzmaxima. Man kann zeigen (siehe Aufgabe 30.17), dass das Auflösungsvermögen A eines Gitters gegeben ist durch

$$A = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN. \quad (30.27)$$

Darin ist N die Anzahl der beleuchteten Spalte und m die Ordnung. Mit dieser Gleichung können wir berechnen, wie hoch das Auflösungsvermögen mindestens sein muss, damit die beiden gelben Linien im Natriumspektrum erster Ordnung ($m = 1$) getrennt werden können:

$$A = 1 \cdot \frac{589,00 \text{ nm}}{589,59 \text{ nm} - 589,00 \text{ nm}} = 998.$$

Im beleuchteten Bereich muss das Gitter also mindestens 998 Spalte aufweisen, damit die gelben Natriumlinien im Spektrum der 1. Ordnung aufgelöst werden.

Beispiel 30.8: Auflösen der Natrium-D-Linien

Das Licht einer Natriumdampflampe wird auf ein Beugungsgitter mit 12 000 Linien pro Zentimeter gelenkt. Bei welchen Winkeln treten die beiden gelben Spektrallinien (die sogenannten Natrium-D-Linien) mit den Wellenlängen 589,00 nm und 589,59 nm in der 1. Ordnung auf?

Problembeschreibung: Wenden Sie die Beziehung $g \sin \theta_m = m \lambda$ auf jede der Wellenlängen an, wobei $m = 1$ und $g = (1/12\,000) \text{ cm}$ ist.

Lösung: 1. Für den Winkel θ_m gilt $g \sin \theta_m = m \lambda$, wobei $m = 1$ ist:

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{g}$$

2. Berechnen Sie θ_1 für $\lambda = 589,00 \text{ nm}$:

$$\theta_1 = \arcsin \left[\frac{589,00 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{(1/12\,000) \text{ cm}} \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} \right) \right] \\ = 44,98^\circ$$

3. Wiederholen Sie die Berechnung für die zweite Linie mit $\lambda = 589,59 \text{ nm}$:

$$\theta_1 = \arcsin \left[\frac{589,59 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{(1/12\,000) \text{ cm}} \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} \right) \right] \\ = 45,03^\circ$$

Plausibilitätsprüfung: Das Intensitätsmaximum erster Ordnung erscheint für die größere Wellenlänge bei einem größeren Winkel, wie erwartet.

Übung 30.4: Berechnen Sie für die beiden gelben Natriumlinien jeweils den Winkel des Intensitätsmaximums erster Ordnung, wenn das Gitter 15 000 Linien pro Zentimeter aufweist. ■

Beim Immersionsmikroskop füllt man zum Steigern des Auflösungsvermögens den Raum zwischen Objekt und Objektiv mit einem transparenten Öl, dessen Brechzahl möglichst hoch ist (meist ist $n \approx 1,55$). Dadurch wird die effektive Wellenlänge kleiner, denn es ist $\lambda' = \lambda/n$. Die Wellenlänge kann außerdem reduziert werden, wenn man das Bild nicht direkt betrachtet, sondern es unter ultraviolettem Licht fotografiert. Da gewöhnliches Glas für UV-Licht undurchlässig ist, müssen die Mikroskopplinsen dann jedoch aus Quarz oder Flusspat bestehen. Ein besonders hohes Auflösungsvermögen haben Elektronenmikroskope, bei denen keine Lichtstrahlen, sondern Elektronenstrahlen für die Abbildung herangezogen werden. Deren Wellenlänge ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der kinetischen Energie, sodass man sehr geringe Wellenlängen

erreichen kann. (Die Wellennatur der Elektronen wird in Kapitel 32 besprochen.)

Beispiel 30.9: Physik an der Saaldecke

Sie sitzen im Lesesaal einer Bibliothek, lehnen sich auf Ihrem Stuhl zurück und bemerken dabei das feine Punktmuster an der weißen Saaldecke. Die Punkte haben voneinander 5,0 mm Abstand, und Sie können sie direkt über Ihnen, also in 5,0 m Höhe, gut unterscheiden. Deutlich weiter entfernte Punkte können Sie jedoch nicht mehr erkennen. Sie fragen sich, ob das am Auflösungsvermögen des Auges liegt. Bietet also das Rayleigh'sche Kriterium der Auflösung eine vernünftige Erklärung für das Verschwimmen der Punkte? Sie schätzen, dass diese in rund 20 m Abstand von Ihnen völlig verschwimmen.

Problembeschreibung: Sie müssen hier noch bestimmte Annahmen treffen. Wenn Sie Gleichung 30.26 anwenden wollen, müssen Sie nämlich die Lichtwellenlänge und den Öffnungs durchmesser der Augenpupille kennen. Für diesen setzen Sie in einer ersten Näherung 5,0 mm an, und die mittlere Wellenlänge des Lichts liegt bei etwa 500 nm.

Lösung: 1. Der kritische Winkel für die Auflösung durch das Auge ist proportional zum Quotienten aus der Wellenlänge λ und dem Pupillendurchmesser D :

$$\alpha_k \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

2. Der Winkel, unter dem zwei weit entfernte, einander benachbarte Punkte erscheinen, hängt von deren Abstand x und von der Entfernung l vom Auge ab:

$$\theta \approx \frac{x}{l}$$

3. Setzen Sie beide Winkel gleich und setzen Sie die gegebenen Werte ein:

$$\frac{x}{l} \approx 1,22 \frac{\lambda}{D} \\ \frac{5,0 \text{ mm}}{l} \approx 1,22 \cdot \frac{500 \text{ nm}}{5,0 \text{ mm}}$$

4. Auflösen nach l ergibt:

$$l \approx 41 \text{ m}$$

5. Dieser Wert 41 m ist rund doppelt so groß wie der Abstand 20 m, den Sie bei Ihrer Beobachtung abgeschätzt hatten. Sie vermuten, dass die Diskrepanz vor allem am Pupillendurchmesser liegt. Bei hellem Licht ist er bekanntlich kleiner. Der Lesesaal ist hell erleuchtet, und seine Decke ist praktisch weiß. Eine kurze Recherche im Internet oder in Optikbüchern ergibt, dass der Durchmesser der Pupille zwischen 2 mm bis 3 mm und 7 mm schwankt: Mit einem Pupillendurchmesser von 2,5 mm ergibt sich $l \approx 20 \text{ m}$.

Es ist interessant, einmal zwei Größen beim Auge miteinander zu vergleichen. Die eine Größe ist das in Beispiel 30.9 abgeschätzte, durch die Beugung an der Pupillenöffnung bestimmte Auflösungsvermögen des Auges, und die andere Größe ist die Begrenzung, die die Dichte der Rezeptoren (Stäbchen und Zäpfchen) auf der Netzhaut mit sich bringt. Damit zwei Punkte getrennt zu erkennen sind, müssen ihre Bilder auf der Netzhaut mindestens zwei nicht benachbarte Rezeptoren treffen (vgl. Aufgabe 29.22). Die Netzhautmitte ist etwa 2,5 cm von der Augenlinse entfernt. Daher ergibt sich bei einer Winkelauflösung von $1,5 \cdot 10^{-4}$ rad der Abstand y der beiden Rezeptoren auf der Netzhaut aus der Beziehung

$$\alpha_k = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \frac{y}{2,5 \text{ cm}}.$$

Damit ist

$$y = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3,8 \mu\text{m}.$$

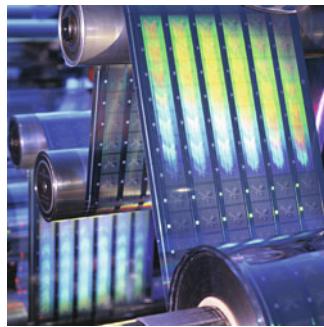
Frage 30.2

Ist folgende Aussage richtig? „Die Fraunhofer'sche Beugung ist ein Grenzfall der Fresnel'schen Beugung.“

In der Fovea centralis, dem Bereich des schärfsten Sehens auf der Netzhaut, sitzen die Zäpfchen mit ca. 1 μm Abstand am dichtesten beieinander. Außerhalb dieses Bereichs beträgt ihr Abstand rund 3 μm bis 5 μm . Die Unterteilung der Netzhaut im Auge ist gerade so fein, dass das durch die Pupillenöffnung bestimmte Auflösungsvermögen bei sichtbarem Licht voll ausgenutzt wird.

🔍 Im Kontext: Hologramme: Geführte Interferenz

Die Holografie wurde 1948 von Dennis Gabor erfunden, als er versuchte, das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops zu steigern.¹ Er rekonstruierte Wellenfronten mithilfe der Interferenz auf der fotografischen Platte, um ein Bild zu erzeugen, das Phaseninformationen wie auch Intensitätsinformationen enthielt. Diese Art der Fotografie nannte er „Holografie“, abgeleitet von den beiden griechischen Wörtern für „gesamt“ und für „Schreiben“ oder „Zeichnen“, denn er war überzeugt davon, dass das Aufzeichnen der Phaseninformationen ein vollständiges Abbild ergeben muss.²



Mit dieser Maschine werden Hologramme auf Kunststoffkarten, beispielsweise auf Kreditkarten, aufgebracht. Hier dienen die Hologramme nicht nur zur Verzierung, sondern vor allem als Sicherheitsmerkmal, um Fälschungen zu erschweren. (© Pascal Goetgheluck/Photo Researchers.)

Das Erzeugen der ersten Hologramme war extrem schwierig, und sie boten auch nicht die gewünschte Auflösung. Gabor verwendete zum Betrachten Quecksilberdampflampen, deren Licht zwar weitgehend monochromatisch, aber nicht kohärent war (da seine Phase regellos schwankte). Erst rund zehn Jahre später, nach der Erfundung des Lasers, wurde die Holografie für mancherlei Zwecke praktisch anwendbar, denn nun stand wirklich kohärentes Licht zur Verfügung.

Hologramme sind inzwischen weit verbreitet, da sie kostengünstig herzustellen sind. Zum Aufprägen auf eine metallisierte Kunststoffschicht³ wird eine Form verwendet, die eine Negativkopie der extrem flachen (nur 0,3–0,5 Mikrometer tiefen) Interferenzlinien des Hologramms ist.⁴ Dann stellt die Kunststoffschicht ein Duplikat der sehr dünnen Interferenzlinien des ursprünglichen Hologramms dar. Wenn Licht den Film durchstrahlt und von der metallischen Rückseite reflektiert wird, so wird

das holografische Bild rekonstruiert. Praktisch alle aufgeprägten Hologramme sind Regenbogenhologramme und können daher auch ohne Laserlicht betrachtet werden. Um den Master eines Regenbogenhologramms zu erzeugen, muss ein komplexer Prozess durchlaufen werden, der mehrere Belichtungen mit sehr exakten Winkeln umfasst.⁵

Aufgeprägte Hologramme sind gut sichtbar, leicht zu erkennen und schwierig zu fälschen.⁶ Da sie Papieretiketten ersetzen oder zusätzlich auf Papier oder auf Kunststoff angebracht werden können, trifft man sie inzwischen nicht nur auf Kreditkarten und Geldscheinen, sondern auch auf Arzneimittelpackungen, Reiseschecks und auf den verschiedensten Dokumenten zur schnellen Identifizierung an.^{7,8}

Im Januar 1999 stellte die Ford Motor Company ein neuartiges Fahrzeug mithilfe einer Reihe von 3 m mal 1,2 m großen Hologrammen vor. Diese waren im Computer direkt aus den Konstruktionsdaten erzeugt worden.⁹ Inzwischen wird die digitale Holografie auch in der Medizin genutzt, um die Ergebnisse von Computertomografien oder Magnetresonanzscans darzustellen.¹⁰ Dazu wird die Ausgabe dieser CT- bzw. der MRT-Bilder erfasst, digital verarbeitet und dann auf ein einzelnes Hologramm gedruckt, das auf einem tragbaren Gerät betrachtet werden kann. Mithilfe solcher Hologramme können komplizierte chirurgische Eingriffe,¹¹ aber auch biomedizinische und industrielle Anwendungen¹² präziser geplant werden. In neuerer Zeit bedient man sich auch in der Videotechnik der digitalen Holografie.¹³

Sogar herkömmliche optische Linsen können durch Hologramme ersetzt werden. Holografische optische Elemente ermöglichen dabei den Bau kleinerer, kompakterer Anzeigen. Beispiele dafür sind sogenannte Head-up-Displays (auf die Cockpit- oder die Windschutzscheibe gespiegelte Anzeigen).¹⁴ Ein besonders kompaktes System, bei dem digital berechnete Holografien als optische Elemente verwendet werden, wurde jüngst als Projektor auf der Basis der Zellentelefonie (d. h. des Mobilfunks) getestet.¹⁵ Die Anwendung von Hologrammen als optische Elemente und bei der optischen Datenspeicherung hängt von weiteren Fortschritten bei der Entwicklung von Werkstoffen ab, die leicht und fest sind sowie die geeigneten optischen Eigenschaften aufweisen.¹⁶

In letzter Zeit wurden Hologramme auch zum Messen elektrischer Potenziale¹⁷ und magnetischer Felder¹⁸ bei sehr kleinen Objekten genutzt, aber auch zur Herstellung von hochauflösenden elektrooptischen Linsen für die Anwendung im Ultraviolettbereich bis zum Röntgenbereich.¹⁹ Über 50 Jahre nach ihrer Erfindung dient die Holografie schließlich auch dazu, die Auflösung mikroskopischer Aufnahmen zu steigern.

Im Kontext: Hologramme: Geführte Interferenz

1. Gabor, D., „Nobel Lecture“, *Nobel Prize Lectures*, 1971, 11. Dez. 1971. http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1971/gabor-lecture.pdf (Stand: Mai 2009).
2. Scanlon, L., „The Whole Picture“, *Technology Review*, Dez. 2002/Jan. 2003, 105, Nr. 10, S. 88.
3. Ruschmann, H. W., „Apparatus for Embossing Holograms on Metallized Thermoplastic Films“, US-Patent 4.547.141, 15. Okt. 1985.
4. Abraham, N. C., „Optical Data Storage Disc“, US-Patent 5.452.282, 19. Sept. 1995.
5. Benton, S., Houde-Walter, W. und Mingace, Jr., H., „Methods of Making Holographic Images“, US-Patent 4.415.225., 15. Nov. 1983.
6. Cross, L., „Brand Security“, *Graphic Arts Monthly*, Jan. 2006, 78, Nr. 1, S. 32–33.
7. „MasterCard Renews Hologram Contract“, *American Banker*, 3. März 2003, 168, Nr. 44, S. 18.
8. Miller, H. L., „Fear and Pharmaceutical Failure“, *The Washington Times*, 5. Okt. 2006, A16.
9. Mahoney, D. P., „Ford Drives Holography Development“, *Computer Graphics World*, Febr. 1999, 22, Nr. 2, S. 12–13.
10. Samudhram, A., „Digital Holography Opens New Frontiers“, *New Straits Times (Malaysia)*, 23. Nov. 2000, 2W.
11. Penrod, S., „3D Imaging Assisting Surgeons in Separation Surgery“, *Local News*, KSL, Salt Lake City, 7. Aug. 2006. <http://www.ksl.com/?nid=148&sid=408002> (Stand: Mai 2009).
12. Liu, C., Yan, C. und Gao, S., „Digital Holographic Method for Tomography Reconstruction“, *Applied Physics Letters*, 9. Febr. 2004, 84, Nr. 6, S. 1010–1012.
13. Freedman, D. H., „Holograms in Motion“, *Technology Review*, Nov. 2002, 105, Nr. 9, S. 48–55.
14. Stevens, T., „Holograms: More than Pretty Pictures“, *Industry Week*, 4. Okt. 1993, 242, Nr. 19, S. 34–46.
15. Buckley, E., „Miniature Projectors Based on LBO Technology“, *SID Mobile Displays Conference*, San Diego: 3.–5. Okt. 2006. http://www.lightblueoptics.com/images/news/SID_Mobile_Displays_2006.pdf (Stand: Mai 2009).
16. Huang, G. T., „Holographic Memory“, *Technology Review*, Sept. 2005, 108, Nr. 9, S. 64–67.
17. Chou, L.-J., Chang, M.-T. und Chueh, Y.-L., „Electron Holography for Improved Measurement of Microfields in Nanoelectrode Assemblies“, *Applied Physics Letters*, 10. Juli 2006, 89, Nr. 2, Letter 023112, S. 3.
18. Nepijko, S. und Wiesendanger, R., „Studies of Magnetic Properties of Small Particles by Electron Holography“, *Applied Physics A, Materials Science and Processing*, 1997, 65, Nr. 4/5, S. 361–366.
19. Solak, H. H., David, C. und Gobrecht, J., „Fabrication of High-Resolution Zone Plates with Wideband Extreme-Ultraviolet Holography“, *Applied Physics Letters*, 4. Okt. 2004, 85, Nr. 14, S. 2700–2702.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Interferenz	
Phasendifferenz aufgrund eines Gangunterschieds	Zwei einander überlagernde Lichtwellen ergeben ein Interferenzmuster, wenn ihre Phasendifferenz während der für die Beobachtung notwendigen Zeitspanne konstant ist. Die Wellen interferieren konstruktiv, wenn ihre Phasendifferenz null ist oder ein ganzzahliges Vielfaches von 360° bzw. 2π beträgt. Sie interferieren destruktiv, wenn ihre Phasendifferenz 180° oder ein ungeradzahliges Vielfaches von 180° bzw. π beträgt.
	$\delta = \frac{\Delta x}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta x}{\lambda} 360^\circ$ (30.1)
Phasensprung bei Reflexion	Eine Phasendifferenz von 180° tritt auf, wenn eine Lichtwelle an einer Grenzfläche zu einem Medium reflektiert wird, in dem ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit geringer ist.
Dünne Schichten	Die Interferenz von Lichtwellen, die an der Vorderseite und an der Rückseite einer dünnen Schicht reflektiert werden, ergibt Interferenzstreifen, wie man sie beispielsweise bei Seifenblasen oder bei Ölfilmen auf Wasser beobachtet. Zu der Phasendifferenz, die vom Gangunterschied (ca. zwei Schichtdicken) herröhrt, addieren sich ggf. die Phasendifferenzen aufgrund der Reflexionen an den Grenzflächen.
Doppelspalt	Der Gangunterschied bei einem Winkel θ auf einem von zwei engen Spalten weit entfernten Schirm beträgt $d \sin \theta$, wobei d der Spaltabstand ist. Bei der von einem einzelnen Spalt ausgehenden Intensität I_0 ist die Intensität an einem Punkt mit konstruktiver Interferenz gleich $4 I_0$, und die Intensität an einem Punkt mit destruktiver Interferenz ist null.
Interferenzmaxima (Quellen in Phase)	$d \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$ (30.2)
Interferenzminima (Quellen um 180° phasenverschoben)	$d \sin \theta_m = (m - \frac{1}{2}) \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$ (30.3)
Beugungsgitter	Ein Beugungsgitter besteht aus einer großen Anzahl von äquidistanten Linien oder Spalten. Mit ihm kann die Wellenlänge des Lichts bestimmt werden, das von einer Lichtquelle ausgestrahlt wird. Die Interferenzmaxima m -ter Ordnung bei einem Gitter treten bei Winkeln auf, für die gilt: $g \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$ (30.9)
	Darin ist g die Gitterkonstante, d. h. der Abstand von benachbarten Linien oder Spalten. Das Auflösungsvermögen eines Beugungsgitters ist $A = \frac{\lambda}{ \Delta x } = m N$. (30.27)
	Darin ist N die Anzahl der beleuchteten Spalte und m die Ordnung.
2. Beugung	Beugung tritt auf, wenn ein Teil einer Wellenfront durch ein Hindernis oder eine Öffnung begrenzt wird. Die Lichtintensität an einem beliebigen Punkt im Raum lässt sich mithilfe des Huygens'schen Prinzips (jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle) bestimmen, indem man das daraus resultierende Interferenzmuster berechnet.
Fraunhofer'sche Beugungsmuster	Fraunhofer'sche Beugungsmuster sind in großem Abstand vom beugenden Objekt (Hindernis oder Öffnung) zu beobachten. Hierbei treffen die gebeugten Strahlen nahezu parallel auf den Beobachtungsschirm. Sie können auch durch eine Linse geführt werden, in deren Brennebene sich der Schirm befindet.
Fresnel'sche Beugungsmuster	Fresnel'sche Beugungsmuster werden in geringem Abstand vom beugenden Objekt (Hindernis oder Öffnung) beobachtet.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
Einzelpalt	<p>Wenn Licht auf einen Einzelpalt der Breite a fällt, weist das auf einem weit entfernten Schirm entstehende Intensitätsmuster ein breites zentrales Beugungsmaximum auf. Die Intensität fällt bei einem Winkel θ_1 auf null ab, für den gilt:</p> $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a}. \quad (30.10)$ <p>Die Breite des zentralen Maximums ist also umgekehrt proportional zur Spaltbreite. Die Nullstellen im Beugungsmuster beim Einzelpalt treten bei Winkeln auf, für die gilt:</p> $a \sin \theta_m = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (30.12)$ <p>Auf beiden Seiten des zentralen Maximums erscheinen Nebenmaxima, deren Intensität wesentlich geringer ist als die des zentralen Maximums.</p>
Doppelspalt	Das Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt entspricht dem Interferenzmuster zweier einzelner enger Spalte, das aber mit dem Beugungsmuster beim Einzelpalt moduliert ist.
3. Auflösung zweier Quellen	Wenn Licht aus zwei nahe beieinander liegenden Punktquellen eine Öffnung passiert, dann können sich ihre Beugungsmuster überlappen. Wenn die Überlappung zu stark ist, sind die beiden Quellen nicht mehr getrennt zu erkennen. Sie werden gerade noch aufgelöst, wenn das zentrale Beugungsmaximum der einen Quelle in das erste Beugungsminimum der anderen fällt (Rayleigh'sches Kriterium für die Auflösung).
Rayleigh'sches Kriterium bei kreisförmigen Öffnungen	Bei einer kreisförmigen Öffnung mit dem Durchmesser D ist die kritische Winkeldifferenz α_k , bei der zwei Quellen noch getrennt wahrzunehmen sind, gegeben durch
4. *Zeiger	$\alpha_k = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (30.26)$ <p>Die Addition von zwei oder mehreren harmonischen Wellen kann man mithilfe von Zeigerdiagrammen durchführen. Dabei wird jede Welle als y-Komponente eines zweidimensionalen Vektors dargestellt der als „Zeiger“ bezeichnet wird. Die Phasendifferenz zwischen den Wellen entspricht dabei dem Winkel zwischen ihren Zeigern.</p>

Antworten auf die Verständnisfragen

1. 6 dunkle Streifen
2. Ja, die Aussage ist richtig. Die Fresnel'sche Beugung ist auf einem Schirm zu beobachten, der sich in geringem Abstand von der Quelle der Beugung befindet. Dagegen ist die Fraunhofer'sche Beugung ein Grenzfall der Fresnel'schen Beugung, wobei der Beobachtungsschirm von der Quelle der Beugung weit entfernt ist.

Lösungen der Übungen

1. 9,2 dunkle Streifen pro Zentimeter
2. 4,4 mm
3. $A = 5,0 \text{ V/m}$, $\delta = 37^\circ$
4. $62,07^\circ$ und $62,18^\circ$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

30.1 • Welche der nachfolgend genannten Paare von Lichtquellen sind kohärent? a) Zwei Kerzen, b) eine Punktquelle und ihr von einem ebenen Spiegel erzeugtes Spiegelbild, c) zwei von derselben Punktquelle beleuchtete kleine Öffnungen, d) zwei Scheinwerfer eines Autos, e) zwei Bilder einer Punktquelle, die durch Reflexion an der Vorder- bzw. an der Rückseite des Flüssigkeitsfilms einer Seifenblase entstehen.

30.2 • Warum muss eine Schicht (z. B. ein Flüssigkeitsfilm) dünn sein, damit man an ihm Interferenzfarben beobachten kann?

30.3 • Gleichung 30.2 lautet $d \sin \theta_m = m\lambda$, und Gleichung 30.12 lautet $a \sin \theta_m = m\lambda$. Sie werden zuweilen verwechselt. Geben Sie jeweils die Bedeutungen der Größen an und erklären Sie die Anwendung der Gleichungen.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

30.4 • Oft liest man, die Große Chinesische Mauer sei das einzige von Menschen errichtete Objekt auf der Erde, das vom Weltraum aus mit bloßem Auge zu erkennen ist. Können Sie diese Aussage anhand des Auflösungsvermögens des menschlichen Auges bestätigen? Trifft sie für einen Astronauten in einer nur 250 km hohen Umlaufbahn zu?

30.5 •• Nehmen Sie an, die beiden Sterne eines bestimmten Doppelsterns sind 50-mal weiter voneinander entfernt als die Erde von der Sonne. Schätzen Sie die Entfernung ab, in der sich dieser Doppelstern befinden kann, damit er noch mit bloßem Auge als solcher zu erkennen (d. h. von einem einzelnen Stern zu unterscheiden) ist. Vernachlässigen Sie jegliche störenden Einflüsse der Erdatmosphäre.

Phasendifferenz und Kohärenz

30.6 • Licht der Wellenlänge 500 nm fällt senkrecht auf eine $y = 1,00 \mu\text{m}$ dicke Wasserschicht. Die Brechzahl des Wassers ist 1,33. a) Welche Wellenlänge hat das Licht im Wasser? b) Wie viele Wellenlängen entfallen auf die im Wasser zurückgelegte Gesamtstrecke $2y$? c) Angenommen, die Wasserschicht ist beiderseits von Luft umgeben. Betrachten Sie die an der oberen Luft-Wasser-Grenzfläche reflektierte Welle und die Welle, die an der unteren Wasser-Luft-Grenzfläche reflektiert wurde und sich dann zunächst im Wasser ausbreitete. Wie groß ist dort, wo beide Wellen einander überlagern, ihre Phasendifferenz?

Interferenz an dünnen Schichten

30.7 •• Der Durchmesser feiner Drähte (oder auch Fasern) lässt sich mithilfe von Interferenzmustern sehr genau bestimmen. Abbildung 30.38 zeigt das Schema der Anordnung. Zwischen zwei planparallele Glasplatten wird an einem Ende der Draht gelegt, und senkrecht von oben wird monochromatisches Licht eingestrahlt. Nehmen Sie an, das gelbe Licht kommt aus einer Natriumdampflampe ($\lambda = 590 \text{ nm}$), und auf der Länge $l = 20,0 \text{ cm}$ werden 19 helle Streifen beobachtet. Zwischen welchen Werten muss der Durchmesser d des Drahts liegen? (Hinweis: Der 19. Streifen liegt evtl. nicht genau am Rand der Glasplatten, jedoch erscheint kein 20. Streifen.)

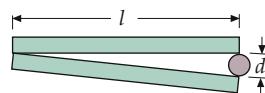


Abbildung 30.38 Zu Aufgabe 30.7.

30.8 •• Auf Wasser schwimmt ein dünner Ölfilm (Brechzahl 1,45). Es fällt weißes Licht senkrecht ein, und im reflektierten Licht herrschen die Wellenlängen 700 nm und 500 nm vor. Wie dick ist der Ölfilm?

Newton'sche Ringe

30.9 •• Eine Anordnung zur Ausmessung Newton'scher Ringe besteht aus einer plankonvexen Glascrinse mit einem großen Krümmungsradius R , die auf einer ebenen Glasplatte liegt (Abbildung 30.39). Die dünne Schicht ist hier die Luftsicht; ihre Dicke s nimmt mit steigendem Radius r (dem Abstand vom Auflagepunkt in der Mitte) zu. Die Anordnung wird von oben mit gelbem Licht aus einer Natriumdampflampe ($\lambda = 590 \text{ nm}$) beleuchtet, und die Ringe werden im reflektierten Licht beobachtet.

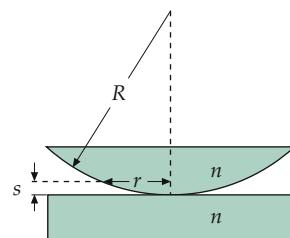


Abbildung 30.39 Zu Aufgabe 30.9.

a) Zeigen Sie, dass bei der Dicke s der Luftsicht die Bedingung für das Auftreten eines hellen Rings (also für konstruktive

Interferenz) lautet:

$$2s = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- b) Zeigen Sie, dass für $s \ll R$ der Radius r eines Rings gegeben ist durch $r = \sqrt{2sR}$. (Hinweis: Wenden Sie den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten r und $R-s$ sowie mit der Hypotenuse R an.) c) Wenn der Krümmungsradius der Linse 10,0 m und ihr Durchmesser 4,00 cm beträgt, wie viele helle Ringe sind im dann reflektierten Licht zu beobachten? d) Welchen Durchmesser hat dabei der sechste helle Ring? e) Nehmen Sie an, das Glas hat die Brechzahl $n = 1,50$, und der Raum zwischen den Glasflächen wird nun mit Wasser gefüllt. Beschreiben Sie qualitativ, wie sich dadurch das Muster der hellen Ringe ändert.

Interferenzmuster beim Doppelspalt

- 30.10 •** Zwei enge Spalte werden mit Licht der Wellenlänge 589 nm beleuchtet, und auf einem 3,00 m weit entfernten Schirm werden 28 helle Streifen pro Zentimeter beobachtet. Welchen Abstand haben die Spalte?

- 30.11 ••** Zwei enge Spalte haben voneinander den Abstand d . Das Interferenzmuster wird auf einem Schirm beobachtet, der den großen Abstand l von den Spalten hat. a) Berechnen Sie den Abstand Δy aufeinanderfolgender Maxima nahe dem mittleren Streifen auf dem Schirm, wenn das Licht die Wellenlänge $\lambda = 500$ nm hat und $l = 1,00$ m sowie $d = 1,00$ cm ist. b) Erwarten Sie unter diesen Bedingungen überhaupt ein Interferenzmuster auf dem Schirm? c) Wie dicht müssen sich die Spalte beieinander befinden, damit unter sonst gleichen Bedingungen die Interferenzmaxima auf dem Schirm den Abstand 1,00 mm haben?

- 30.12 ••** Licht fällt unter dem Winkel ϕ zum Einfallslot auf eine vertikale Ebene, die zwei enge Spalte mit dem Abstand d aufweist (Abbildung 30.40). Zeigen Sie, dass die Interferenzmaxima bei Winkeln θ_m liegen, für die gilt: $\sin \theta_m + \sin \phi = m \lambda / d$.

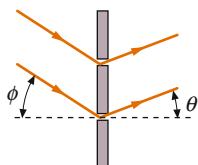


Abbildung 30.40 Zu Aufgabe 30.12.

Beugungsgitter

- 30.13 •** Mit einem Beugungsgitter, das 2000 Linien pro Zentimeter aufweist, sollen die Wellenlängen der Strahlung von angeregtem Wasserstoffgas gemessen werden. a) Bei welchen Winkeln θ erwarten Sie im Spektrum 1. Ordnung die beiden

violetten Linien mit den Wellenlängen 434 nm und 410 nm?
b) Wie groß sind die Winkel, wenn das Gitter 15 000 Linien pro Zentimeter hat?

- 30.14 ••** Mit einem Beugungsgitter, das 2000 Linien pro Zentimeter aufweist, soll die Strahlung von angeregtem Quecksilberdampf untersucht werden. a) Berechnen Sie die Winkeldifferenz im Spektrum 1. Ordnung der beiden Linien mit den Wellenlängen 579 nm und 577 nm. b) Wie breit muss der auf das Gitter treffende Lichtstrahl sein, damit die beiden Linien noch aufgelöst werden können?

- 30.15 ••** Das Spektrum von Neon weist im sichtbaren Bereich außergewöhnlich viele Linien auf. Zwei dieser zahlreichen Linien haben die Wellenlängen 519,313 nm und 519,322 nm. Das Licht einer Neon-Entladungslampe fällt senkrecht auf ein Transmissionsgitter mit 4800 Linien pro Zentimeter, und es wird das Spektrum 2. Ordnung betrachtet. Wie breit muss die beleuchtete Fläche des Gitters sein, damit die beiden erwähnten Linien noch aufzulösen sind?

- 30.16 •••** Ein Beugungsgitter hat n Linien pro Längeneinheit. Zeigen Sie, dass die Winkeldifferenz $\Delta\theta$ zweier Linien mit den Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$ näherungsweise durch

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{\frac{1}{n^2 m^2} - \lambda^2}}$$

gegeben ist, wobei m die Ordnung ist.

- 30.17 •••** In dieser Aufgabe soll die Beziehung $A = \lambda / |\Delta\lambda| = mN$ (Gleichung 30.27) für das Auflösungsvermögen eines Gitters hergeleitet werden, das N Linien mit dem Abstand g voneinander hat. Dazu ist zunächst der Ausdruck für die Winkeldifferenz zwischen Maximum und Minimum der Intensität bei einer bestimmten Wellenlänge λ aufzustellen. Er ist dann gleichzusetzen mit dem Ausdruck für die Winkeldifferenz der Maxima m -ter Ordnung für zwei nahe beieinander liegende Wellenlängen. a) Zeigen Sie, dass die Phasendifferenz ϕ zwischen Strahlen von zwei benachbarten Linien des Gitters gegeben ist durch

$$\phi = \frac{2\pi g}{\lambda} \sin \theta.$$

- b) Differenzieren Sie diesen Ausdruck, um zu zeigen, dass durch eine kleine Winkeländerung $d\theta$ folgende Phasenänderung bewirkt wird:

$$d\phi = \frac{2\pi g}{\lambda} \cos \theta \, d\theta.$$

- c) Bei N Spalten entspricht die Winkeldifferenz zwischen einem Interferenzmaximum und einem Interferenzminimum der Phasendifferenz $d\phi = 2\pi/N$. Zeigen Sie damit, dass bei der gleichen Wellenlänge λ für die Winkeldifferenz $d\theta$ zwischen dem Maximum und dem Minimum der Intensität gilt:

$$d\theta = \frac{\lambda}{Ng \cos \theta}.$$

d) Für den Winkel des Interferenzmaximums m -ter Ordnung bei der Wellenlänge λ gilt $g \sin \theta_m = m \lambda$ (Gleichung 30.9). Stellen Sie das Differenzial jeder Seite dieser Gleichung auf und zeigen Sie damit, dass für die Maxima m -ter Ordnung bei zwei Wellenlängen, die sich nur um $d\lambda$ unterscheiden, die Winkeldifferenz gegeben ist durch

$$d\theta_m \approx \frac{m d\lambda}{g \cos \theta_m}.$$

e) Gemäß dem Rayleigh'schen Kriterium der Auflösung werden zwei Linien mit sehr ähnlicher Wellenlänge λ in der m -ten Ordnung aufgelöst, wenn ihre Winkeldifferenz gemäß dem in Teilaufgabe d hergeleiteten Ausdruck der Winkeldifferenz zwischen Interferenzmaximum und -minimum gemäß dem in Teilaufgabe c hergeleiteten Ausdruck entspricht. Leiten Sie daraus nun die obige Beziehung $A = \lambda / |\Delta\lambda| = mN$ (Gleichung 30.27) für das Auflösungsvermögen eines Gitters her.

Beugungsmuster beim Einzelspalt

30.18 • Licht der Wellenlänge 600 nm fällt auf einen langen, engen Spalt. Berechnen Sie den Winkel des ersten Beugungsminimums für folgende Spaltbreiten: a) 1,0 mm, b) 0,10 mm, c) 0,010 mm.

Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt

30.19 •• Bei zwei Spalten wird mit Licht der Wellenlänge 700 nm ein Fraunhofer'sches Interferenz- und Beugungsmuster beobachtet. Die Spalte haben die Breite 0,010 mm und den Abstand 0,20 mm. Wie viele helle Streifen treten im zentralen Beugungsmaximum auf?

30.20 •• Licht der Wellenlänge 550 nm trifft auf zwei Spalte mit der Breite 0,030 mm und dem Abstand 0,15 mm. a) Wie viele Interferenzmaxima treten in der gesamten Breite des zentralen Beugungsmaximums auf? b) Wie verhält sich die Intensität des dritten Interferenzmaximums auf einer Seite von der (nicht mitgezählten) Mitte zur Intensität des zentralen Interferenzmaximums?

Vektoraddition harmonischer Wellen

30.21 •• Monochromatisches Licht fällt auf eine Platte mit drei engen, parallelen Spalten, die jeweils den Abstand d voneinander haben. a) Zeigen Sie, dass für die Lagen der Interferenzminima auf einem Schirm in großem Abstand l von den drei äquidistanten Spalten (mit dem jeweiligen Abstand $d \gg \lambda$) gilt:

$$y \approx \frac{n \lambda l}{3d}.$$

Dabei ist $n = 1,2, 4,5, 7,8, 10, \dots$, also kein Vielfaches von 3. b) Berechnen Sie für diese drei Spalte für den Schirmabstand

$l = 1,00 \text{ m}$, die Wellenlänge $\lambda = 500 \text{ nm}$ und den Spaltabstand $d = 0,100 \text{ mm}$ die Breite der Hauptmaxima der Interferenz (den Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Minima).

30.22 •• Licht mit der Wellenlänge 480 nm fällt senkrecht auf vier Spalte der Breite $2,00 \mu\text{m}$, deren Mittenabstand jeweils $6,00 \mu\text{m}$ beträgt. a) Berechnen Sie die Winkelbreite des zentralen Beugungsmaximums für einen Einzelspalt auf einem entfernten Schirm. b) Berechnen Sie die Winkelpositionen aller Interferenzmaxima innerhalb des zentralen Beugungsmaximums. c) Berechnen Sie die Winkelbreite des zentralen Interferenzmaximums bzw. den Winkel zwischen den ersten Interferenzminima auf beiden Seiten des zentralen Interferenzmaximums. c) Skizzieren Sie die relative Intensität in Abhängigkeit vom Sinus des Winkels.

Beugung und Auflösung

30.23 • Licht mit der Wellenlänge 700 nm trifft auf eine runde Öffnung mit dem Durchmesser 0,100 mm. a) Wie groß ist beim Fraunhofer'schen Beugungsmuster der Winkel zwischen dem zentralen Maximum und dem ersten Beugungsminimum? b) Wie groß ist auf einem 8,00 m weit entfernten Schirm der Abstand zwischen dem zentralen Maximum und dem ersten Beugungsminimum?

30.24 • Zwei punktförmige Lichtquellen, aus denen Licht mit der Wellenlänge 700 nm austritt, sind 10,0 m weit von einer runden Öffnung mit dem Durchmesser 0,100 mm entfernt. Welchen Abstand müssen die Lichtquellen voneinander haben, damit ihre Beugungsmuster gemäß dem Rayleigh'schen Kriterium voneinander unterscheidbar sind?

30.25 •• Die Decke eines Saals ist mit schalldämmenden Platten versehen, in denen sich kleine Löcher befinden. Deren Abstand beträgt 6,0 mm. a) Aus welcher Entfernung kann man bei einer Lichtwellenlänge von 500 nm die Löcher gerade noch einzeln erkennen? Setzen Sie den Pupillendurchmesser zu 5,0 mm an. b) Kann man die Löcher bei rotem oder bei violettem Licht aus größerer Entfernung einzeln erkennen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Allgemeine Aufgaben

30.26 • Licht mit der Wellenlänge 632,8 nm aus einem Helium-Neon-Laser trifft auf ein menschliches Haar, dessen Durchmesser mithilfe des Beugungsmusters bestimmt werden soll. Das Haar ist in einen Rahmen eingespannt, der 7,5 m von einem Schirm entfernt ist. Auf diesem wird die Breite des zentralen Beugungsmaximums zu 14,6 cm gemessen. Welcher Durchmesser d des Hairs ergibt sich daraus? (Das von dem Haar erzeugte Beugungsmuster ist dasselbe wie dasjenige eines Einzelspalts mit der Breite $d = a$.)

30.27 • Das Radioteleskop bei Arecibo, Puerto Rico, hat einen effektiven Durchmesser (eine Apertur) von 300 m. Wie groß ist der kleinste Winkelabstand zweier Objekte, die mit diesem Teleskop noch zu erkennen sind, wenn mit ihm Mikrowellen mit der Wellenlänge 3,2 cm empfangen werden?

30.28 • Ein *Fabry-Perot-Interferometer* (Abbildung 30.41) besteht aus zwei parallelen, teilversilberten Spiegeln, die den kleinen Abstand a voneinander haben. Diese lassen 50 % der auftreffenden Lichtintensität durch und reflektieren die anderen 50 %. Zeigen Sie Folgendes: Wenn Licht unter dem Einfallswinkel θ auf das Interferometer trifft, dann ist die Intensität des transmittierten Lichts maximal, wenn gilt: $2a = m\lambda \cos \theta$.

30.29 • Die Bilder des impressionistischen Malers Georges Seurat (1859–1891) sind Beispiele für den *Pointillismus*. Das Gemälde besteht dabei aus vielen kleinen, nahe beieinander liegenden Punkten, die jeweils mit einer reinen Farbe gemalt sind und einen Durchmesser von rund 2,0 mm haben. Die Vermischung der Farben geschieht im Auge des Betrachters durch Beugungseffekte. Berechnen Sie den minimalen Betrachtungsabstand, bei dem diese Vermischung gerade eintritt. Setzen Sie diejenige Wellenlänge des sichtbaren Lichts an, die dabei den größten Mindestabstand erfordert. Dann tritt der gewünschte Effekt im gesamten sichtbaren Spektralbereich ein. Setzen Sie den Pupillendurchmesser zu 3,0 mm an.

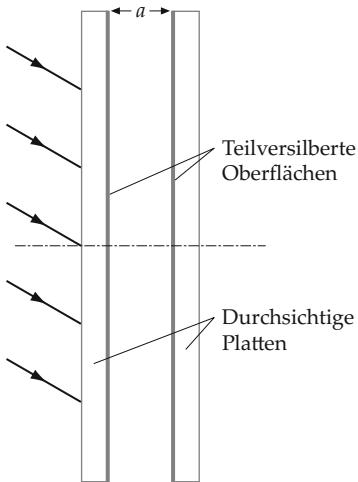
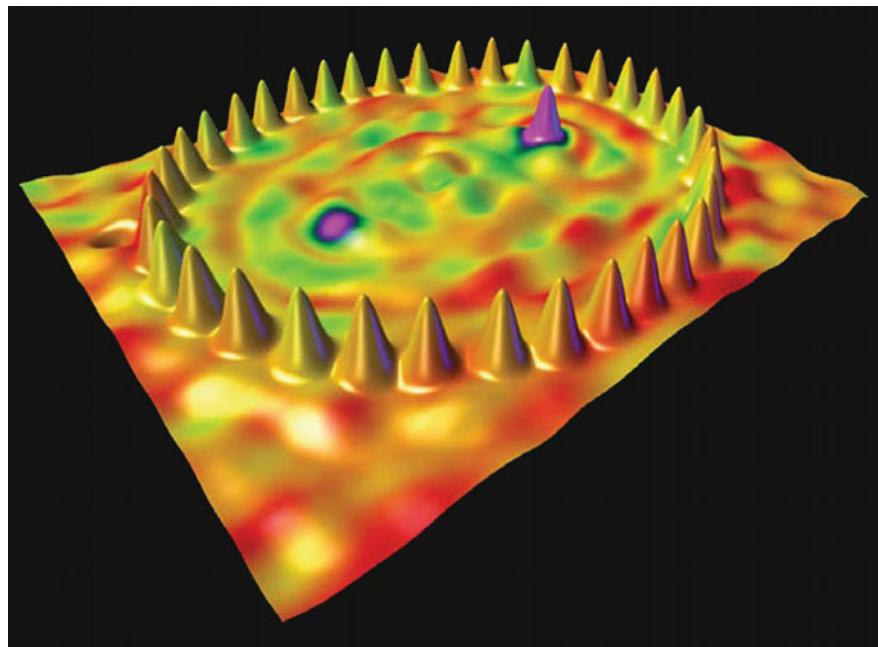


Abbildung 30.41 Zu Aufgabe 30.28.

Einstiens Relativitäts- theorien

Teil VII



31 Die Relativitätstheorien 1121

Die Relativitätstheorien

31



Die Andromeda-Galaxie ist gleichsam ein Nachbar unserer Milchstraßengalaxie und das fernste mit bloßem Auge erkennbare Objekt am Nachthimmel. Anhand des Lichtspektrums und insbesondere der Frequenzen bestimmter Spektrallinien können wir herausfinden, wie schnell sich diese Objekte nähern bzw. wie schnell sie sich von uns entfernen. (© NASA.)

? Wundert es Sie, dass man aus der Frequenz des Lichts Rückschlüsse auf die Geschwindigkeit ziehen kann, mit der sich eine ferne Galaxie von uns weg bewegt? (Siehe Beispiel 31.5.)

31.1 Das Newton'sche Relativitätsprinzip	1122
31.2 Die Einstein'schen Postulate	1123
31.3 Die Lorentz-Transformation	1124
31.4 Uhrensynchronisation und Gleichzeitigkeit	1131
31.5 Die Geschwindigkeitstransformation	1137
31.6 *Der relativistische Impuls	1140
31.7 *Die relativistische Energie	1142
31.8 *Minkowski-Diagramme	1147
31.9 *Die allgemeine Relativitätstheorie	1149
Zusammenfassung	1154
Aufgaben	1156

In der speziellen Relativitätstheorie, die im Jahre 1905 von Albert Einstein und anderen entwickelt wurde, geht es um Messungen in Inertialsystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, während die allgemeine Relativitätstheorie beschleunigte Bezugssysteme und damit auch die Gravitation beschreibt.

In diesem Kapitel werden wir uns auf die spezielle Relativitätstheorie konzentrieren und die Begriffe der Gleichzeitigkeit und der Distanz für Bezugssysteme betrachten, deren Geschwindigkeit einen nicht mehr vernachlässigbaren Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit beträgt. Wir führen zur vereinfachten Beschreibung den relativistischen Impuls und die relativistische Energie ein – zwei Größen, die in den folgenden Kapiteln noch oft gebraucht werden. Am Ende gehen wir im letzten Abschnitt kurz auf die allgemeine Relativitätstheorie ein und stellen die grundsätzlichen Ideen dazu vor.

31.1 Das Newton'sche Relativitätsprinzip

Das erste Newton'sche Axiom unterscheidet nicht zwischen einem Teilchen in Ruhe und einem Teilchen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Es besagt, dass ein Teilchen seinen anfänglichen Bewegungszustand – Ruhe oder Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit – beibehält, wenn keine äußeren Kräfte auf das Teilchen einwirken. Ein Teilchen, das relativ zu Ihnen ruht, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu einem anderen Beobachter, der sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu Ihnen bewegt. Wer könnte mit Sicherheit sagen, ob Sie und das Teilchen sich in Ruhe befinden und der andere Beobachter sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder ob umgekehrt der zweite Beobachter ruht und Sie und das Teilchen sich bewegen?

Betrachten wir einige einfache Experimente. Nehmen Sie an, ein Güterwaggon bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

v auf langen, gerade verlaufenden Schienen. (Die Geschwindigkeit v ist eine vorzeichenbehaftete Größe, und das Vorzeichen kennzeichnet die Bewegungsrichtung des Waggons entlang den Schienen.) Wir stellen fest, dass ein Ball, der in dem Waggon ruht, relativ zum Waggon in Ruhe bleibt. Lassen wir den Ball fallen, fällt er – relativ zum Güterwaggon – senkrecht nach unten; dabei erfährt er die Beschleunigung g aufgrund der Gravitationskraft. Vom Gleis aus betrachtet bewegt sich der Ball jedoch auf einer parabolischen Bahn, weil er eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit v besitzt. Wir können kein mechanisches Experiment finden – z. B. die Messung der Periode eines Pendels oder die Beobachtung des Zusammenstoßes zwischen zwei Objekten oder irgendetwas anderem –, das uns Aufschluss darüber gäbe, ob sich der Güterwaggon bewegt und das Gleis ruht oder ob sich umgekehrt die Schienen in Bewegung befinden und der Waggon ruht. Versehen wir die Schienen und den Güterwaggon jeweils mit einem eigenen Koordinatensystem, so sind die Newton'schen Gesetze in beiden gleichermaßen gültig.

Ein Satz von Koordinatensystemen, die sich relativ zueinander in Ruhe befinden, wird als *Bezugssystem* bezeichnet. Ein Bezugssystem, in dem die Newton'schen Axiome gelten, heißt *Inertialsystem*. (Bezugssysteme wurden in Abschnitt 3.1 erstmals behandelt und auch in Abschnitt 4.3 zur Beschreibung von Scheinkräften benutzt.) Alle Bezugssysteme, die sich relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, sind ebenfalls Inertialsysteme. Bewegen sich zwei Inertialsysteme mit konstanter Geschwindigkeit zueinander, kann uns kein mechanisches Experiment Aufschluss darüber geben, welches der Inertialsysteme ruht und welches in Bewegung ist oder ob sie sich beide bewegen. Dieses Ergebnis ist im sogenannten **Newton'schen Relativitätsprinzip** folgendermaßen formuliert:

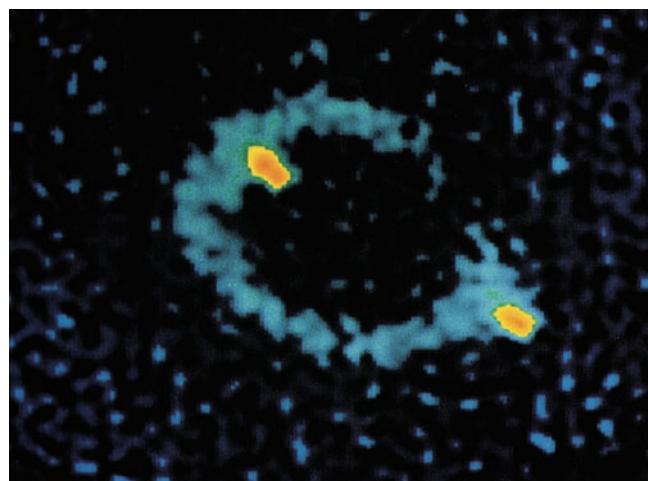
Absolute Bewegung kann man nicht messen.

NEWTON'SCHES RELATIVITÄTSPRINZIP

Dieses Prinzip war Galileo, Newton und anderen Wissenschaftlern im 17. Jahrhundert wohl bekannt und wurde lange Zeit nicht infrage gestellt. Im späten 19. Jahrhundert jedoch änderte sich dies, und man war allgemein der Ansicht, das Newton'sche Relativitätsprinzip sei nicht gültig und absolute Bewegung könne im Prinzip durch Messung der Lichtgeschwindigkeit ermittelt werden.

Der Äther und die Lichtgeschwindigkeit

In Kapitel 12 haben wir gesehen, dass die Geschwindigkeit einer Welle von den Eigenschaften des Mediums abhängt, in dem sie sich ausbreitet, und nicht von der Geschwindigkeit der Quelle, die die Wellen aussendet. So hängt beispielsweise die Geschwindigkeit von Schallwellen relativ zur unbewegten Luft von der Temperatur der Luft ab. Licht und andere elektromagnetische Wellen (wie z. B. Radiowellen und Röntgenstrahlen) breiten sich nach den Vorhersagen der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus im Vakuum mit der Geschwindigkeit



Die ringartige Struktur der Radioquelle MG1131+0456 wird auf eine *Gravitationslinse* zurückgeführt, ein massives Objekt zwischen Beobachter und Quelle, das letztere auf einen Ring abbildet. Einstein sagte diesen Effekt zuerst im Jahre 1936 voraus. (© NRAO/AUI.)

$c \approx 3,00 \cdot 10^8$ m/s aus. Aber relativ zu was soll man sich diese Geschwindigkeit vorstellen? Worin besteht das Pendant zur unbewegten Luft im Vakuum? Ein Vorschlag für ein solches Medium, in dem sich Licht ausbreiten sollte, war der sogenannte Äther, von dem man sich vorstellte, dass er den ganzen Welt Raum erfüllt. Die Geschwindigkeit von Licht relativ zum Äther, so nahm man an, sei c , wie es die Maxwell-Gleichungen vorher sagten. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Objekts relativ zu diesem Äther sah man als absolute Geschwindigkeit des Objekts an.

Albert Michelson machte sich zunächst 1881 und später im Jahre 1887 gemeinsam mit Edward Morley daran, die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Äther zu messen. Er ersann ein kunstvolles Experiment, bei dem die Geschwindigkeit des Lichts relativ zur Erde für zwei verschiedene Lichtstrahlen gemessen wurde, von denen einer parallel zur Erdbewegung verlief und der andere genau senkrecht dazu. Trotz sorgfältigster Messungen konnte man keinen Laufzeitunterschied ausmachen. Das Experiment wurde seitdem viele Male unter den unterschiedlichsten Bedingungen wiederholt, das Ergebnis blieb immer das gleiche: Es konnte keine absolute Bewegung der Erde relativ zum Äther festgestellt werden.

31.2 Die Einstein'schen Postulate

Im Alter von 26 Jahren veröffentlichte Albert Einstein 1905 in den *Annalen der Physik* (Bd. 17, S. 841) seine bahnbrechende Arbeit „Über die Elektrodynamik bewegter Körper“, in der er postulierte, dass die Messung einer absoluten Geschwindigkeit, egal mit welchem Experiment, generell unmöglich ist. Das heißt, es gibt keinen Äther. Die Erde kann als ruhend angesehen werden, und die Geschwindigkeit des Lichts wird in jeder Richtung gleich sein. Einstein hatte nicht das Ziel, die Ergebnisse des Michelson-Morley-Experiments zu erklären. Seine Theorie entstand ganz aus Überlegungen heraus, die er zur Elektrodynamik anstelle und insbesondere zu der ungewöhnlichen Eigenschaft elektromagnetischer Wellen, sich im Vakuum auszubreiten. In seiner ersten Veröffentlichung, in der bereits die gesamte spezielle Relativitätstheorie enthalten ist, wird das Michelson-Morley-Experiment nur in einer Nebenbemerkung erwähnt. Jahre später konnte Einstein sich nicht einmal daran erinnern, ob er die Details des Experiments überhaupt kannte, als er seine Theorie veröffentlichte. Die spezielle Relativitätstheorie basiert auf zwei Postulaten. Vereinfacht lauten sie:

Erstes Postulat: Absolute, gleichförmige Bewegung kann man nicht messen.

Zweites Postulat: Die Geschwindigkeit des Lichts ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

EINSTEIN'SCHE POSTULATE

Das erste Postulat stellt lediglich eine Erweiterung des Newton'schen Relativitätsprinzips auf alle Arten physikalischer Messungen (statt nur mechanischer) dar. Das zweite Postulat

31.2 Die Einstein'schen Postulate

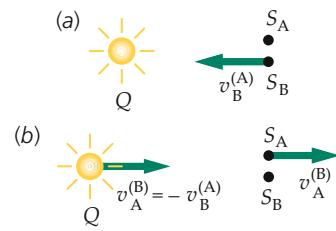


Abbildung 31.1 a) Eine ruhende Lichtquelle Q , ein ruhender Beobachter S_A und ein zweiter Beobachter S_B , der sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ auf Q zu bewegt. b) In dem Bezugssystem, in dem der Beobachter S_B in Ruhe ist, bewegen sich die Lichtquelle Q und der Beobachter S_A mit der Geschwindigkeit $v_A^{(B)} = -v_B^{(A)}$ nach rechts. Da man absolute Bewegung nicht messen kann, sind beide Sichtweisen äquivalent. Da die Lichtgeschwindigkeit nicht vom Bewegungszustand der Quelle abhängt, misst der Beobachter S_B denselben Wert für die Lichtgeschwindigkeit wie der Beobachter S_A .

beschreibt eine Eigenschaft, die vielen Wellen gemeinsam ist. So hängt z. B. die Schallgeschwindigkeit nicht von der Bewegung der Schallquelle ab. Die Schallwellen, die von einer Autohupe ausgehen, breiten sich relativ zur Luft immer mit der gleichen Geschwindigkeit aus, egal ob sich das Auto relativ zur Luft bewegt oder nicht. Die Geschwindigkeit der Schallwellen hängt einzig und allein von den Eigenschaften der Luft, wie z. B. ihrer Temperatur, ab.

Obwohl jedes der beiden Postulate für sich genommen recht einleuchtend wirkt, sind viele Schlussfolgerungen aus beiden Postulaten zusammen überraschend und widersprechen der Anschauung. Eine wesentliche Schlussfolgerung etwa ist, dass jeder Beobachter denselben Wert für die Lichtgeschwindigkeit misst, unabhängig von der relativen Geschwindigkeit zwischen Lichtquelle und Beobachter. Betrachten wir eine Lichtquelle Q und zwei Beobachter S_A und S_B . S_A befindet sich relativ zu Q in Ruhe, S_B bewege sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ in Richtung Q (Abbildung 31.1a). Die von S_A gemessene Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Wie groß ist nun die von S_B gemessene Lichtgeschwindigkeit? Die Antwort lautet entgegen unserer Anschauung *nicht* $c + v_B^{(A)}$. Laut dem ersten Postulat ist die in Abbildung 31.1a gezeigte Situation äquivalent zu der in Abbildung 31.1b gezeigten, in der S_B ruht, während die Quelle Q und der Beobachter S_A sich mit der Geschwindigkeit $v_A^{(B)} = -v_B^{(A)}$ bewegen. Oder anders ausgedrückt, da man absolute Bewegung nicht messen kann, ist es nicht möglich zu sagen, wer sich bewegt und wer in Ruhe ist. Nach dem zweiten Postulat ist die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle. Somit wird, wie man aus Abbildung 31.1b er sieht, auch S_B die Lichtgeschwindigkeit zu $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s messen. Dies führt uns auf eine häufig verwendete, alternative Formulierung des zweiten Einstein'schen Postulats:

Zweites Postulat (alternativ): Jeder Beobachter misst für die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum denselben Wert.

ALTERNATIVE FORMULIERUNG DES ZWEITEN POSTULATS

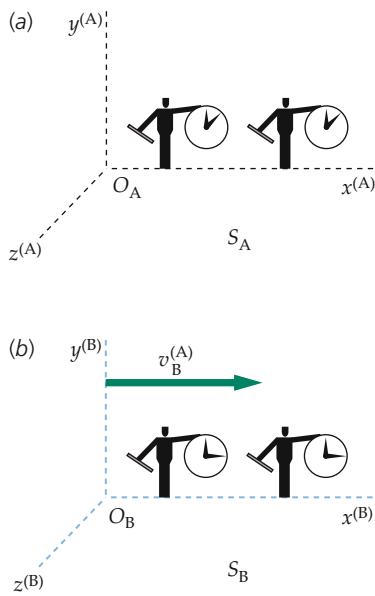


Abbildung 31.2 Die Bezugssysteme S_A und S_B , die sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ relativ zueinander bewegen. In jedem Bezugssystem gibt es ein dichtes Netz von Beobachtern, die mit Uhren und Maßstäben ausgestattet sind, die im Ruhezustand vollkommen identisch sind.

Dieses Ergebnis widerspricht unserer alltäglichen Vorstellung von Relativgeschwindigkeiten. Wenn sich ein Auto mit 50 km/h von einem Beobachter entfernt und ein zweites mit 80 km/h in dieselbe Richtung fährt, dann beträgt die Geschwindigkeit des zweiten Autos relativ zum ersten Auto 30 km/h. Dieses Ergebnis folgt aus einer einfachen Messung und deckt sich mit unserer Intuition. Trotzdem messen Beobachter in den beiden Autos für einen Lichtstrahl, der sich in ihrer Fahrtrichtung ausbreitet, nach den Einstein'schen Postulaten dieselbe Geschwindigkeit. Unsere Vorstellung, dass wir Geschwindigkeiten einfach addieren können, gilt nur näherungsweise und nur so lange, wie die betrachteten Geschwindigkeiten sehr klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit c . Selbst in einem Flugzeug, das mit Schallgeschwindigkeit v fliegt, müsste man eine auf sechs Stellen genaue Messung durchführen, um den Unterschied zwischen c und $c + v$ auflösen zu können, falls dieser existierte. Nach dem zweiten Einstein'schen Postulat existiert dieser Unterschied für die Lichtgeschwindigkeit jedoch nicht.

31.3 Die Lorentz-Transformation

Die Einstein'schen Postulate haben wichtige Konsequenzen für die Messung von Längen- und Zeitintervallen sowie von Relativgeschwindigkeiten. In diesem Abschnitt vergleichen wir Zeit- und Ortsmessungen von Ereignissen wie z. B. Lichtblitzen, die von verschiedenen, sich relativ zueinander bewegenden Beobachtern vorgenommen werden. Dazu verwenden wir zwei

Bezugssysteme S_A und S_B , eines mit den kartesischen Koordinaten $x^{(A)}, y^{(A)}, z^{(A)}$ und Ursprung O_A , das andere mit den kartesischen Koordinaten $x^{(B)}, y^{(B)}, z^{(B)}$ und Ursprung O_B . Das Bezugssystem S_B soll sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ relativ zum Bezugssystem S_A bewegen. S_A bewegt sich demgemäß mit der Geschwindigkeit $v_A^{(B)} = -v_B^{(A)}$ relativ zu S_B . Der Einfachheit halber wollen wir den Fall betrachten, dass sich S_B in Richtung der positiven x -Achse des Bezugssystems S_A bewegt und die positiven x -Achsen beider Bezugssysteme in dieselbe Richtung zeigen. Wir denken uns in jedem Bezugssystem ein dichtes Netz von Beobachtern; diese sind mit Messgeräten wie Uhren und Maßstäben ausgestattet, die, wenn man sie im Ruhezustand vergleicht, vollkommen identisch sind (Abbildung 31.2).

Wir benutzen nun die Einstein'schen Postulate, um eine allgemeine Beziehung zwischen den Koordinaten $x^{(A)}, y^{(A)}, z^{(A)}$ und dem Zeitpunkt $t^{(A)}$ eines Ereignisses, gemessen im Bezugssystem S_A , und den entsprechenden Koordinaten $x^{(B)}, y^{(B)}, z^{(B)}$ und dem Zeitpunkt $t^{(B)}$, gemessen im Bezugssystem S_B , herzuleiten. Wir betrachten nur den vereinfachten Fall, dass die Ursprünge O_A und O_B zur Zeit $t^{(A)} = t^{(B)} = 0$ zusammenfallen. Die klassische Beziehung zwischen den Koordinaten ist durch die sogenannte **Galilei-Transformation** gegeben:

$$\begin{aligned} x^{(A)} &= x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}, & y^{(A)} &= y^{(B)}, \\ z^{(A)} &= z^{(B)}, & t^{(A)} &= t^{(B)}. \end{aligned} \quad (31.1a)$$

GALILEI-TRANSFORMATION

Die inverse Transformation lautet

$$\begin{aligned} x^{(B)} &= x^{(A)} - v_B^{(A)} t^{(A)}, & y^{(B)} &= y^{(A)}, \\ z^{(B)} &= z^{(A)}, & t^{(B)} &= t^{(A)}. \end{aligned} \quad (31.1b)$$

Diese Gleichungen geben die experimentellen Beobachtungen richtig wieder, solange $v_B^{(A)}$ viel kleiner als c ist, und führen auf die gewöhnliche klassische Additionsvorschrift für Geschwindigkeiten. Besitzt ein Teilchen im Bezugssystem S_A die Geschwindigkeit $v_x^{(A)} = dx^{(A)} / dt^{(A)}$, dann ist seine Geschwindigkeit im Bezugssystem S_B

$$\begin{aligned} v_x^{(B)} &= \frac{dx^{(B)}}{dt^{(B)}} = \frac{dx^{(B)}}{dt^{(A)}} = \frac{d}{dt^{(A)}}(x^{(A)} - v_B^{(A)} t^{(A)}) \\ &= v_x^{(A)} - v_B^{(A)}. \end{aligned} \quad (31.2)$$

Durch nochmaliges Differenzieren dieser Gleichung sehen wir, dass die Beschleunigung des Teilchens in beiden Bezugssystemen gleich ist:

$$a_x^{(A)} = \frac{dv_x^{(A)}}{dt^{(A)}} = \frac{dv_x^{(B)}}{dt^{(B)}} = a_x^{(B)}.$$

Die Galilei-Transformation steht offensichtlich im Widerspruch zu den Einstein'schen Postulaten der speziellen Relativitätstheorie. Bewegt sich nämlich im Bezugssystem S_B ein Lichtstrahl mit der Geschwindigkeit $v_x^{(B)} = c$ entlang der x -Achse, so folgt aus der Galilei-Transformation, dass sich der Lichtstrahl im Bezugssystem S_A mit der Geschwindigkeit $v_x^{(A)} = c + v_B^{(A)}$ bewegen sollte und nicht mit der Geschwindigkeit $v_x^{(A)} = c$, die den Einstein'schen Postulaten und den experimentellen Befunden entsprechen würde. Die klassischen Transformationsgesetze müssen daher modifiziert werden. Wir geben nun einen kurzen Abriss über eine mögliche Herleitung der relativistischen Transformationsgesetze.

Nehmen wir an, dass die relativistische Transformationsgleichung für x bis auf einen Faktor γ der klassischen Gleichung 31.1a entspricht, also von folgender Form ist:

$$x^{(A)} = \gamma (x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}). \quad (31.3)$$

Dabei sei γ eine Konstante, die von $v_B^{(A)}$ und c abhängen kann, nicht jedoch von den Koordinaten. Die inverse Transformation muss bis auf das Vorzeichen der Geschwindigkeit genauso aussehen:

$$x^{(B)} = \gamma (x^{(A)} - v_B^{(A)} t^{(A)}). \quad (31.4)$$

Betrachten wir nun einen Lichtblitz, der zum Zeitpunkt $t^{(A)} = 0$ im Ursprung von S_A startet. Da wir angenommen haben, dass die Ursprünge von S_A und S_B zur Zeit $t^{(A)} = t^{(B)} = 0$ zusammenfallen, startet der Lichtblitz auch in S_B zur Zeit $t^{(B)} = 0$. Nach den Einstein'schen Postulaten muss die Gleichung für die x -Komponente der Wellenfront des Lichtblitzes $x^{(A)} = c t^{(A)}$ im Bezugssystem S_A und $x^{(B)} = c t^{(B)}$ im Bezugssystem S_B lauten. Ersetzen wir in den Gleichungen 31.3 und 31.4 $x^{(A)}$ durch $c t^{(A)}$ und $x^{(B)}$ durch $c t^{(B)}$, so erhalten wir

$$c t^{(A)} = \gamma (c + v_B^{(A)}) t^{(B)} \quad (31.5)$$

und

$$c t^{(B)} = \gamma (c - v_B^{(A)}) t^{(A)}. \quad (31.6)$$

Dividieren wir nun beide Seiten der Gleichungen 31.5 und 31.6 durch $t^{(A)}$, so können wir den Quotienten $t^{(B)}/t^{(A)}$ aus den beiden Gleichungen eliminieren und nach γ auflösen. Es ergibt sich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v_B^{(A)}}{c} = -\frac{v_A^{(B)}}{c}. \quad (31.7)$$

Beachten Sie, dass γ immer größer als 1 ist und dass für $\beta \ll 1$ gilt: $\gamma \approx 1$. Das relativistische Transformationsgesetz ist also durch die Gleichungen 31.3 und 31.4 mit γ aus 31.7 gegeben. Die Transformationsgesetze für $t^{(A)}$ und $t^{(B)}$ lassen sich durch Kombination der Gleichungen 31.3 und 31.4 gewinnen. Ersetzen wir in Gleichung 31.4 $x^{(A)}$ durch $x^{(A)} = \gamma (x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)})$, so ergibt sich

$$x^{(B)} = \gamma \left(\gamma (x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}) - v_B^{(A)} t^{(A)} \right). \quad (31.8)$$

31.3 Die Lorentz-Transformation

Diese Gleichung kann man nun nach $t^{(A)}$ auflösen und erhält eine Formel für $t^{(A)}$ in Abhängigkeit von $x^{(B)}$ und $t^{(B)}$. Die vollständige relativistische Transformationsvorschrift lautet

$$x^{(A)} = \gamma (x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}), \quad y^{(A)} = y^{(B)}, \quad z^{(A)} = z^{(B)}, \quad (31.9)$$

$$t^{(A)} = \gamma \left(t^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x^{(B)}}{c^2} \right). \quad (31.10)$$

LORENTZ-TRANSFORMATION

Die inverse Transformation lautet

$$x^{(B)} = \gamma (x^{(A)} - v_B^{(A)} t^{(A)}), \quad y^{(B)} = y^{(A)}, \quad z^{(B)} = z^{(A)}, \quad (31.11)$$

$$t^{(B)} = \gamma \left(t^{(A)} - \frac{v_B^{(A)} x^{(A)}}{c^2} \right). \quad (31.12)$$

Die durch die Gleichungen 31.9 bis 31.12 beschriebene Transformation heißt **Lorentz-Transformation**. Sie stellt eine Beziehung her zwischen den Orts- und Zeitkoordinaten $x^{(A)}, y^{(A)}, z^{(A)}$ und $t^{(A)}$ eines Ereignisses in einem Bezugssystem S_A und den Orts- und Zeitkoordinaten $x^{(B)}, y^{(B)}, z^{(B)}$ und $t^{(B)}$ desselben Ereignisses in einem anderen Bezugssystem S_B , das sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ relativ zu S_A bewegt. Wir wollen nun einige Anwendungen der Lorentz-Transformation betrachten.

Zeitdilatation

Betrachten wir zwei Ereignisse, die im Bezugssystem S_B zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_1^{(B)}$ und $t_2^{(B)}$ am selben Ort $x_0^{(B)}$ stattfinden. Mithilfe von Gleichung 31.10 können wir die Zeiten $t_1^{(A)}$ und $t_2^{(A)}$ dieser Ereignisse im Bezugssystem S_A bestimmen:

$$t_1^{(A)} = \gamma \left(t_1^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x_0^{(B)}}{c^2} \right)$$

und

$$t_2^{(A)} = \gamma \left(t_2^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x_0^{(B)}}{c^2} \right).$$

Für das Zeitintervall gilt somit

$$t_2^{(A)} - t_1^{(A)} = \gamma (t_2^{(B)} - t_1^{(B)}).$$

Die Zeit zwischen Ereignissen, die in einem Bezugssystem am *selben Ort* stattfinden, heißt **Eigenzeit** Δt_{eigen} . Das Zeitintervall $\Delta t_{\text{eigen}} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$, gemessen im Bezugssystem S_B , ist eine solche Eigenzeit. Das entsprechende Zeitintervall Δt in einem beliebigen anderen Bezugssystem ist stets größer als die Eigenzeit. Diese Dehnung des Zeitintervalls bezeichnet man als **Zeitdilatation**:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_{\text{eigen}}. \quad (31.13)$$

ZEITDILATATION

Beispiel 31.1 illustriert die Verknüpfung der Eigenzeit mit den Orts- und Zeitbedingungen für zwei verschiedene Bezugssysteme. In Beispiel 31.2 wird die Zeitdilatation noch einmal aufgegriffen.

Beispiel 31.1: Räumliche und zeitliche Distanz zwischen zwei Ereignissen

Zwei Ereignisse finden in einem Bezugssystem S_B zu den Zeitpunkten $t_1^{(B)}$ und $t_2^{(B)}$ am selben Ort $x_0^{(B)}$ statt. Das Bezugssystem S_B bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ längs der positiven x -Achse relativ zum Bezugssystem S_A . a) Wie groß ist die räumliche Distanz zwischen den Ereignissen im Bezugssystem S_A ? b) Wie groß ist die zeitliche Distanz zwischen den Ereignissen im Bezugssystem S_A ?

Problembeschreibung: Die räumliche Distanz im Bezugssystem S_A ist gegeben durch $x_2^{(A)} - x_1^{(A)}$, wobei $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ die Koordinaten der beiden Ereignisse im Bezugssystem S_A sind und mithilfe von Gleichung 31.9 berechnet werden können.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Ortskoordinate $x_1^{(A)}$ in S_A ergibt sich aus Gleichung 31.9:

$$x_1^{(A)} = \gamma (x_0^{(B)} + v_B^{(A)} t_1^{(B)})$$

2. Analog ergibt sich die Ortskoordinate $x_2^{(A)}$ in S_A zu:

$$x_2^{(A)} = \gamma (x_0^{(B)} + v_B^{(A)} t_2^{(B)})$$

3. Durch Subtraktion erhält man den räumlichen Abstand:

$$\Delta x^{(A)} = x_2^{(A)} - x_1^{(A)} = \gamma v_B^{(A)} (t_2^{(B)} - t_1^{(B)})$$

$$= \frac{v_B^{(A)} (t_2^{(B)} - t_1^{(B)})}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Teilaufgabe b

Die Formel für die Zeitdilatation gibt uns die Beziehung zwischen den beiden Zeitintervallen an. Die beiden Ereignisse finden im Bezugssystem S_B am selben Ort statt, die Eigenzeit Δt_{eigen} zwischen den beiden Ereignissen ist also $\Delta t_{\text{eigen}} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$:

$$\Delta t^{(A)} = t_2^{(A)} - t_1^{(A)} = \gamma (t_2^{(B)} - t_1^{(B)})$$

$$= \frac{(t_2^{(B)} - t_1^{(B)})}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Plausibilitätsprüfung: Betrachtet man die Ergebnisse aus den Teilaufgaben a und b für den Grenzfall, dass $\beta = v_B^{(A)} / c$ gegen null geht, so erhält man $\Delta x^{(A)} = v_B^{(A)} (t_2^{(B)} - t_1^{(B)})$ bzw. $\Delta t^{(A)} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$. Kombiniert man diese Ausdrücke, so ergibt sich $\Delta x^{(A)} = v_B^{(A)} \Delta t^{(A)}$. Dies entspricht exakt der klassischen (nichtrelativistischen) Gleichung, wie sie in Kapitel 2 für den eindimensionalen Fall hergeleitet wurde und die besagt, dass die räumliche Verschiebung sich als Geschwindigkeit multipliziert mit der Zeit ergibt. Die Gleichung $\Delta t^{(A)} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$ entspricht zudem dem klassischen Ergebnis, dass die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Ereignissen in beiden Bezugssystemen gleich ist.

Weitergedacht: Dividiert man das Ergebnis aus Teilaufgabe a durch das Ergebnis aus Teilaufgabe b, so erhält man $\Delta x^{(A)} / \Delta t^{(A)} = v_B^{(A)}$. Die räumliche Distanz $\Delta x^{(A)}$ zwischen den beiden Ereignissen im Bezugssystem S_A entspricht also der Entfernung, die ein in S_B ortsfester Punkt (hier $x_0^{(B)}$) im Bezugssystem S_A in dem zu diesem Bezugssystem gehörenden Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen zurücklegt. ■

Wir können die Zeitdilatation auch ohne die Lorentz-Transformation direkt aus den Einstein'schen Postulaten heraus verstehen. Abbildung 31.3a zeigt einen Beobachter B im Abstand d zu einem Spiegel. Beobachter und Spiegel befinden sich in einem Raumschiff, das im Bezugssystem S_B in Ruhe ist. Der Beobachter löst einen Lichtblitz aus und misst das Zeitintervall $\Delta t^{(B)}$ zwischen dem Aussenden des Lichtblitzes (Ereignis 1) und dem Wiedereintreffen des am Spiegel reflektierten Blitzen bei seinem Auge (Ereignis 2). Da sich Licht mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, ist diese Zeit

$$\Delta t^{(B)} = \frac{2d}{c}.$$

Betrachten wir nun dieselben Ereignisse, das Aussenden des ursprünglichen Lichtblitzes und das Wiedereintreffen des reflektierten Lichtblitzes, in einem anderen Bezugssystem S_A , in dem sich der Beobachter B und der Spiegel mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ nach rechts bewegen (Abbildung 31.3b). Im Bezugssystem S_A finden die Ereignisse 1 und 2 an verschiedenen Orten $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ statt. Im Zeitintervall $\Delta t^{(A)}$ (gemessen im Bezugssystem S_A) zwischen Aussenden und Wiedereintreffen des Lichtblitzes bewegt sich der Beobachter B mitsamt seinem Raumschiff um die horizontale Strecke $v_B^{(A)} \Delta t^{(A)}$ nach rechts. Abbildung 31.3 macht deutlich, dass der vom Licht zurückgelegte Weg im Bezugssystem S_A länger ist als im Bezugssystem S_B . Nach den Einstein'schen Postulaten jedoch breitet sich das Licht in beiden Bezugssystemen mit derselben Geschwindigkeit c aus. Da das Licht mit dieser festen Geschwindigkeit in S_A eine längere Strecke zurücklegt, braucht es für den Weg zum Spiegel und zurück auch mehr Zeit. Das Zeitintervall ist in S_A also

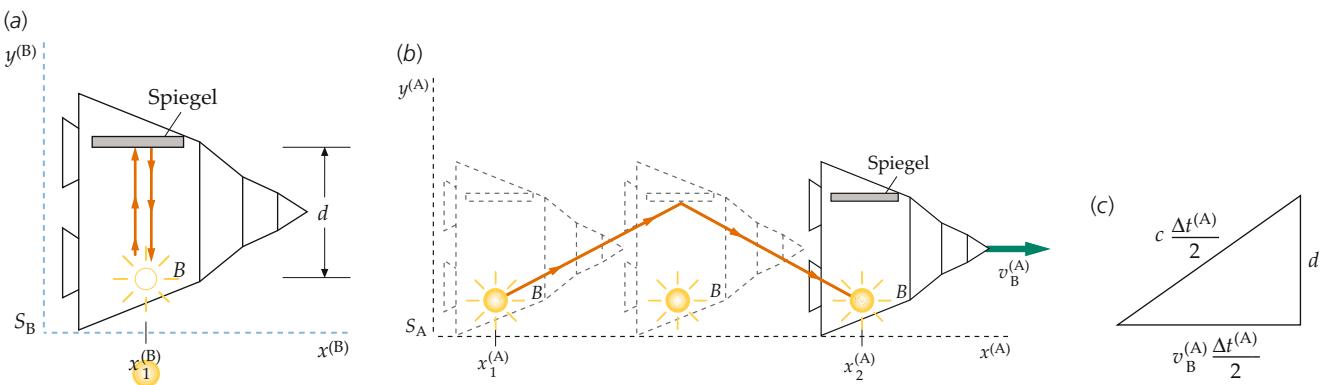


Abbildung 31.3 a) Der Beobachter B und der Spiegel befinden sich in einem Raumschiff, das im Bezugssystem S_B in Ruhe ist. Die Zeit, die der Lichtblitz für den Weg zum Spiegel und wieder zurück braucht, wird vom Beobachter B zu $2d/c$ gemessen. b) Im Bezugssystem S_A bewegt sich das Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ nach rechts. Ist die Lichtgeschwindigkeit in beiden Bezugssystemen gleich, so ist die Laufzeit des Lichts in S_A länger als $2d/c$, da die zurückgelegte Entfernung länger als $2d$ ist. c) Rechtwinkliges Dreieck zur Berechnung der Zeit $\Delta t^{(A)}$ im Bezugssystem S_A .

Beispiel 31.2: Wie lange dauert ein einstündiges Schläfchen?

ZUR ÜBUNG

Ein Raumschiff bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\beta = 0,600$ relativ zur Erde. Die in dem Raumschiff befindlichen Astronauten melden sich für 1,00 Stunden bei ihrer Bodenstation ab, um ein Schläfchen zu halten, versprechen aber, sich gleich danach zurückzumelden. Wie lange dauert das einstündige Schläfchen im Bezugssystem der Erde?

Problembeschreibung: Da die Astronauten im Bezugssystem des Raumschiffs am selben Ort einschlafen (Ereignis 1), an dem sie auch aufwachen (Ereignis 2), ist das Zeitintervall von 1,0 Stunden, das sie mit einer Uhr an Bord des Raumschiffs messen, die Eigenzeit zwischen den beiden Ereignissen. Im Bezugssystem der Erde dagegen legen die Astronauten während der Zeit zwischen den beiden Ereignissen eine beträchtliche Entfernung zurück. Das Zeitintervall, das im Bezugssystem der Erde gemessen wird (und zwar mit zwei an den Orten der Ereignisse installierten, stationären Uhren), ist um den Faktor γ länger als die Eigenzeit zwischen den Ereignissen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Schreiben Sie die Formel für die Beziehung zwischen dem Zeitintervall Δt , wie es auf der Erde ge-

messen wird, und dem Eigenzeitintervall Δt_{eigen} auf (Gleichung 31.13).

2. Berechnen Sie γ für $\beta = 0,6$.
3. Setzen Sie diesen Wert ein und Sie erhalten die Dauer des einstündigen Schläfchens im Bezugssystem der Erde.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.
$$\Delta t = \gamma \Delta t_{\text{eigen}}$$
2.
$$\gamma = 1,25$$
3.
$$\Delta t = \gamma \Delta t_{\text{eigen}} = \boxed{1,25 \text{ h}}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß ist das Zeitintervall in dem Bezugssystem größer, in dem die beiden Ereignisse an verschiedenen Orten stattfinden.

Übung 31.1: Wie lange würde das einstündige Schläfchen im Bezugssystem der Erde dauern, wenn sich das Raumschiff mit der Geschwindigkeit $\beta = 0,800$ bewegte? ◀

länger als in S_B . Dem Dreieck in Abbildung 31.3c entnehmen wir:

$$\left(\frac{c \Delta t^{(A)}}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v_B^{(A)} \Delta t^{(A)}}{2}\right)^2$$

$$\Delta t^{(A)} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - (v_B^{(A)})^2}} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

oder

31 Die Relativitätstheorien

Benutzen wir noch $\Delta t^{(B)} = 2d/c$, so erhalten wir

$$\Delta t^{(A)} = \frac{\Delta t^{(B)}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t^{(B)}.$$

Längenkontraktion

Ein eng mit der Zeitdilatation verknüpftes Phänomen ist die **Längenkontraktion**. Die Länge eines Objekts in dem Bezugssystem, in dem sich das Objekt in Ruhe befindet, heißt **Eigenlänge** l_{eigen} . In jedem Bezugssystem, in dem sich das Objekt parallel zu seiner Länge bewegt, ist die dort gemessene Länge kürzer als die Eigenlänge. Betrachten wir einen im Bezugssystem S_B ruhenden Stab, dessen Enden sich an den Orten $x_1^{(B)}$ bzw. $x_2^{(B)}$ befinden. Die Länge des Stabs in diesem Bezugssystem ist die Eigenlänge $l_{\text{eigen}} = x_2^{(B)} - x_1^{(B)}$. Um die Länge des Stabs in einem anderen Bezugssystem S_A zu bestimmen, in dem sich der Stab mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$, der Geschwindigkeit des Bezugssystems S_B , nach rechts bewegt, muss man mit großer Sorgfalt vorgehen. Die Länge des Stabs im Bezugssystem S_A ist definiert als $l^{(A)} = x_2^{(A)} - x_1^{(A)}$, wobei $x_2^{(A)}$ die Position des einen Endes zu einer Zeit $t_2^{(A)}$ und $x_1^{(A)}$ die Position des anderen Endes zu derselben Zeit $t_2^{(A)} = t_1^{(A)}$, gemessen im Bezugssystem S_A , ist. Um die Länge $x_2^{(A)} - x_1^{(A)}$ zu einer Zeit $t^{(A)}$ zu bestimmen, verwenden wir Gleichung 31.11. Es gilt

$$x_2^{(B)} = \gamma (x_2^{(A)} - v_B^{(A)} t_2^{(A)})$$

und

$$x_1^{(B)} = \gamma (x_1^{(A)} - v_B^{(A)} t_1^{(A)}).$$

Da $t_1^{(A)} = t_2^{(A)}$ ist, erhalten wir durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten Gleichung

$$x_2^{(B)} - x_1^{(B)} = \gamma (x_2^{(A)} - x_1^{(A)}).$$

Auflösen nach $x_2^{(A)} - x_1^{(A)}$ liefert

$$x_2^{(A)} - x_1^{(A)} = \frac{1}{\gamma} (x_2^{(B)} - x_1^{(B)}) = (x_2^{(B)} - x_1^{(B)}) \sqrt{1 - \beta^2}$$

oder

$$l = \frac{1}{\gamma} l_{\text{eigen}} = l_{\text{eigen}} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (31.14)$$

LÄNGENKONTRAKTION

Da $\frac{1}{\gamma}$ kleiner als 1 ist, ist die Länge des Stabs also kleiner, wenn sie in einem Bezugssystem gemessen wird, in dem sich der Stab parallel zu seiner Länge bewegt – wie in Beispiel 31.3 verdeutlicht. Schon bevor Einstein seine Ergebnisse veröffentlichte, hatten Hendrik Lorentz und George FitzGerald das Null-Resultat des Michelson-Morley-Experiments zu erklären versucht, indem sie annahmen, dass sich Entfernung in

der Bewegungsrichtung um den durch Gleichung 31.14 gegebenen Faktor kontrahierten. Die Längenkontraktion heißt deshalb auch **Lorentz-FitzGerald-Kontraktion**.

Beispiel 31.3: Die Länge eines sich bewegenden Meterstabs

Ein Stab mit einer Eigenlänge von 1,00 m bewegt sich parallel zu seiner Länge mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ relativ zu einem Beobachter. Entsprechend den Messungen des Beobachters beträgt die Länge des Stabs 0,914 m. Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$?

Problembeschreibung: $v_B^{(A)}$ ergibt sich direkt aus Gleichung 31.14.

Lösung: 1. Gleichung 31.14 gibt den Zusammenhang zwischen den Längen l und l_{eigen} und der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ an:

$$l = l_{\text{eigen}} \sqrt{1 - \left(\frac{v_B^{(A)}}{c}\right)^2}$$

2. Auflösen nach $v_B^{(A)}$ ergibt:

$$\begin{aligned} v_B^{(A)} &= c \sqrt{1 - \frac{l^2}{l_{\text{eigen}}^2}} = c \sqrt{1 - \frac{(0,914 \text{ m})^2}{(1,00 \text{ m})^2}} \\ &= [0,406 c] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet handelt es sich bei der Geschwindigkeit des Stabs um einen beträchtlichen Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit. ■

Ein interessantes Beispiel für die Zeitdilatation bzw. für die Längenkontraktion stellt das Auftreten von Myonen als sekundäre kosmische Strahlung dar. Myonen zerfallen nach dem folgenden Gesetz:

$$n(t) = n_0 e^{-t/\tau}, \quad (31.15)$$

wobei n_0 die Zahl von Myonen zum Zeitpunkt $t = 0$ ist, $n(t)$ die Zahl der Myonen zum Zeitpunkt t und τ die mittlere Lebensdauer, die für ein ruhendes Myon etwa $2,2 \mu\text{s}$ beträgt. Da Myonen beim Zerfall von Pionen hoch oben in der Atmosphäre, gewöhnlich in einer Höhe von mehreren Tausend Metern über dem Meeresspiegel, erzeugt werden, sollten nur einige wenige Myonen den Meeresspiegel erreichen. Ein typisches Myon, das sich mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,9978$ bewegt, würde in $2,2 \mu\text{s}$ nur etwa 660 m zurücklegen. Im Bezugssystem der Erde gemessen, ist die Lebensdauer des Myons jedoch um den Faktor $1/\sqrt{1 - \beta^2}$ größer; dies entspricht für die oben angegebene Geschwindigkeit einem Faktor von ungefähr 15. Die mittlere Lebensdauer des Myons, wie sie im Bezugssystem

der Erde gemessen wird, beträgt also $33\text{ }\mu\text{s}$, und in dieser Zeit legt das Myon bei einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,9978$ etwa $10\,000\text{ m}$ zurück. Aus Sicht des Myons währt das Leben weiterhin nur $2,2\text{ }\mu\text{s}$, aber die Atmosphäre rast in dieser Zeit mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,9978$ an ihm vorbei. Die im Bezugssystem der Erde gemessene Entfernung von $10\,000\text{ m}$ wird im Bezugssystem des Myons auf nur 660 m kontrahiert (Abbildung 31.4).

Eine experimentelle Überprüfung der klassischen und der relativistischen Vorhersagen für das Auftreten der Myonen in Höhe des Meeresspiegels ist sehr einfach. Angenommen, wir stellen mit einem Myonendetektor fest, dass in einem bestimmten Zeitintervall in $10\,000\text{ m}$ Höhe 10^8 Myonen auftreten. Wie viele Myonen werden wir dann in demselben Zeitintervall voraussichtlich auf Meereshöhe messen? Nach der nichtrelativistischen Vorhersage brauchen die Myonen für $10\,000\text{ m}$ eine Zeit von $(10\,000\text{ m})/(0,998\text{ c}) \approx 33\text{ }\mu\text{s}$, also das 15fache der Lebensdauer. Setzt man in Gleichung 31.15 $n_0 = 1,0 \cdot 10^8$ und $t = 15\tau$ ein, so erhält man

$$n = n_0 e^{-t/\tau} = 1,0 \cdot 10^8 \cdot e^{-15} = 31.$$

Wir würden also erwarten, dass von den ursprünglichen 100 Millionen Myonen alle bis auf ungefähr 31 zerfallen, bevor sie den Meeresspiegel erreichen.

Nach der relativistischen Vorhersage muss die Erde im Ruhe- system des Myons nur die kontrahierte Entfernung von 660 m zurücklegen. Da dies nur $2,2\text{ }\mu\text{s} = 1\tau$ dauert, ist die Anzahl der auf Meereshöhe zu erwartenden Myonen

$$n = n_0 e^{-t/\tau} = 1,0 \cdot 10^8 \cdot e^{-1} = 37 \cdot 10^6.$$

Die Relativitätstheorie sagt also voraus, dass wir 37 Millionen Myonen in dem gegebenen Zeitintervall messen sollten. Die relativistische Vorhersage von 37 Millionen Myonen wurde experimentell bestätigt.

Der relativistische Doppler-Effekt

Für Licht und andere elektromagnetische Wellen im Vakuum macht es keinen Unterschied, ob sich die Quelle und der Beobachter relativ zueinander bewegen oder nicht. Die Formeln, die wir in Abschnitt 12.4 für den Doppler-Effekt hergeleitet haben, können daher für Licht nicht gültig sein. Der Grund dafür ist, dass wir bei der Herleitung der Formeln angenommen haben, die Zeitintervalle im Bezugssystem der Quelle und im Bezugssystem des Beobachters seien identisch.

Betrachten wir eine Quelle, die sich mit der Relativgeschwindigkeit $v_B^{(A)}$ in Richtung eines Beobachters bewegt. Die Quelle emittiert im Zeitintervall $\Delta t^{(A)}$, gemessen im Bezugssystem des Beobachters, n Wellenberge einer elektromagnetischen Welle. Während der erste Wellenberg in diesem Zeitintervall die Strecke $c \Delta t^{(A)}$ zurücklegt, bewegt sich die Quelle um die Strecke $v_B^{(A)} \Delta t^{(A)}$ auf den Beobachter zu, wiederum gemessen

31.3 Die Lorentz-Transformation

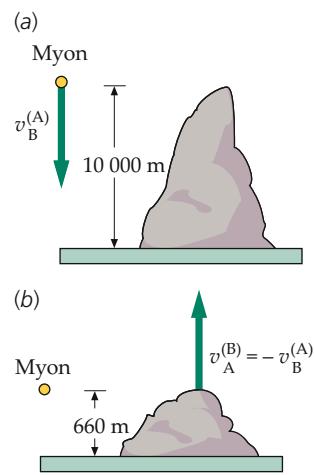


Abbildung 31.4 Obwohl Myonen hoch über der Erdoberfläche erzeugt werden und ihre mittlere Lebensdauer in ihrem eigenen Ruhesystem nur $2,2\text{ }\mu\text{s}$ beträgt, erreichen viele von ihnen die Erdoberfläche. a) Im Bezugssystem der Erde hat ein typisches Myon, das sich mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,9978$ bewegt, eine mittlere Lebensdauer von $33\text{ }\mu\text{s}$ und kann in dieser Zeit $10\,000\text{ m}$ zurücklegen. b) Im Bezugssystem des Myons beträgt die Entfernung, die die Erde während der Lebensdauer des Myons von $2,2\text{ }\mu\text{s}$ zurücklegt, nur 660 m .

im Bezugssystem des Beobachters. Die Wellenlänge der vom Beobachter empfangenen Wellen ist daher in diesem Bezugssystem gegeben durch

$$\lambda^{(A)} = \frac{c \Delta t^{(A)} - v_B^{(A)} \Delta t^{(A)}}{n}.$$

Die vom Beobachter gemessene Frequenz $v^{(A)}$ der Welle ist somit

$$v^{(A)} = \frac{c}{\lambda^{(A)}} = \frac{c}{c - v_B^{(A)} \Delta t^{(A)}} \frac{n}{\Delta t^{(A)}} = \frac{1}{1 - \beta} \frac{n}{\Delta t^{(A)}}.$$

Ist die Frequenz der Welle im Ruhesystem der Quelle gleich $v^{(B)}$, so emittiert die Quelle im Zeitintervall $\Delta t^{(B)}$, gemessen im Bezugssystem der Quelle, $n = v^{(B)} \Delta t^{(B)}$ Wellenberge. Daher gilt

$$v^{(A)} = \frac{1}{1 - \beta} \frac{n}{\Delta t^{(A)}} = \frac{1}{1 - \beta} \frac{v^{(B)} \Delta t^{(B)}}{\Delta t^{(A)}} = \frac{v^{(B)}}{1 - \beta} \frac{\Delta t^{(B)}}{\Delta t^{(A)}}.$$

Dabei ist $\Delta t^{(B)}$ das Eigenzeitintervall, denn alle Wellenberge vom ersten bis zum n -ten werden im Bezugssystem der Quelle am selben Ort emittiert. Die Zeitintervalle $\Delta t^{(B)}$ und $\Delta t^{(A)}$ sind durch Gleichung 31.13 für die Zeitedilatation miteinander verbunden:

$$\Delta t^{(A)} = \gamma \Delta t^{(B)} = \frac{\Delta t^{(B)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Somit ist die Frequenz der Welle für den Fall, dass sich Quelle und Beobachter aufeinander zu bewegen, gegeben durch

$$\begin{aligned} v^{(A)} &= \frac{v^{(B)}}{1 - \beta} \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} v^{(B)} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} v^{(B)} \end{aligned} \quad (31.16a)$$

für kleiner werdenden Abstand.

Diese Formel unterscheidet sich von der klassischen Gleichung nur durch den Faktor für die Zeitdilatation. Wenn die Quelle und der Beobachter sich voneinander entfernen, führt die entsprechende Herleitung auf die folgende Frequenz:

$$\begin{aligned} v^{(A)} &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} v^{(B)} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} v^{(B)} \end{aligned} \quad (31.16b)$$

für größer werdenden Abstand.

Führt man die Rechnung im Bezugssystem der Quelle durch, so erhält man genau dieselben Ergebnisse. Der Beweis ist dem Leser als Aufgabe (Aufgabe 31.12) überlassen.

Ein Beispiel für den relativistischen Doppler-Effekt ist die **Rotverschiebung** im Licht, das uns von fernen Galaxien erreicht. Da die Galaxien sich von uns fort bewegen, ist das Licht, das sie emittieren, in Richtung des langwelligeren Bereichs verschoben. (Da das langwelligste Licht im sichtbaren Spektrum rot erscheint, spricht man von Rotverschiebung.) Durch Messung der Rotverschiebung kann die Geschwindigkeit der Galaxien relativ zur Erde bestimmt werden. Ein fiktiver Anwendungsfall wird in Beispiel 31.4 betrachtet; danach bietet Beispiel 31.5 eine Anwendung für die Geschwindigkeit einer Galaxie.

Beispiel 31.4: War die Ampel rot oder grün?

Sie verbringen einen Tag damit, zwei Streifenpolizisten auf ihrem Rundgang zu begleiten, und werden Zeuge, wie ein Autofahrer herausgewunken wird, der bei Rot über eine Ampel gefahren ist. Der Fahrer behauptet nun, das rote Licht habe grün ausgesehen, weil es dadurch, dass sich das Auto auf die Ampel zu bewegte, zu einer Verschiebung der Wellenlänge des beobachteten Signals kam. Sie führen schnell einige Rechnungen durch, um zu sehen, ob der Fahrer womöglich im Recht sein könnte oder ob es sich nur um eine faule Ausrede handelt.

Problembeschreibung: Wir können die Formel aus Gleichung 31.16a für die Doppler-Verschiebung bei kleiner werdendem Abstand anwenden. Diese wird uns Auf-

schluss darüber geben, mit welcher Geschwindigkeit das Auto gefahren sein müsste, wenn der Fahrer recht hätte. Alles, was wir dafür benötigen, sind die zu den beiden Farben gehörenden Frequenzen. Diese erhalten wir, indem wir für die Wellenlängen von rotem und grünem Licht geeignete Schätzwerte ansetzen und die Frequenzen dann mithilfe der Formel $c = v \lambda$ berechnen.

Lösung: 1. Da sich der Beobachter der Lichtquelle nähert, können Sie die Formel für den Doppler-Effekt bei kleiner werdendem Abstand (Gleichung 31.16a) anwenden:

$$v^{(A)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} v^{(B)}$$

2. Setzen Sie c/λ für v ein und formen Sie die Gleichung ein wenig um:

$$\frac{c}{\lambda^{(A)}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \frac{c}{\lambda^{(B)}}$$

$$\left(\frac{\lambda^{(B)}}{\lambda^{(A)}}\right)^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

3. Multiplizieren Sie über Kreuz und lösen Sie die Gleichung nach β auf:

$$\begin{aligned} (\lambda^{(B)})^2 (1 - \beta) &= (\lambda^{(A)})^2 (1 + \beta) \\ (\lambda^{(B)})^2 - (\lambda^{(A)})^2 &= ((\lambda^{(B)})^2 + (\lambda^{(A)})^2) \beta \\ \beta &= \frac{(\lambda^{(B)})^2 - (\lambda^{(A)})^2}{(\lambda^{(B)})^2 + (\lambda^{(A)})^2} = \frac{1 - (\lambda^{(A)}/\lambda^{(B)})^2}{1 + (\lambda^{(A)}/\lambda^{(B)})^2} \end{aligned}$$

4. Die Wellenlängen für die verschiedenen Farben des sichtbaren Lichts finden Sie in Tabelle 27.1. Die Wellenlängen von rotem Licht liegen bei 625 nm und darüber, die von grünem Licht bei 530 nm und darunter. Setzen Sie diese Wellenlängen ein und berechnen Sie die Geschwindigkeit, die nötig ist, um eine Verschiebung der Wellenlänge von 625 nm auf 530 nm zu bewirken:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{(A)}}{\lambda^{(B)}} &= \frac{530 \text{ nm}}{625 \text{ nm}} = 0,848 \\ \beta &= \frac{1 - 0,848^2}{1 + 0,848^2} = 0,163 \\ v_B^{(A)} &= 0,163 c = 4,90 \cdot 10^7 \text{ m/s} \\ &= 1,76 \cdot 10^8 \text{ km/h} \end{aligned}$$

5. Die Geschwindigkeit ist viel zu hoch, als dass das Auto damit gefahren sein könnte. *Der Fahrer hat nur versucht, sich herauszureden.*

Beispiel 31.5: Berechnung der Geschwindigkeit einer fernen Galaxie aus der Rotverschiebung

ZUR ÜBUNG

Das langwelligste Licht der Balmer-Serie von Wasserstoff hat die Wellenlänge $\lambda^{(B)} = 656 \text{ nm}$. Im Licht einer fernen Galaxie wird die Wellenlänge dieser Linie zu $\lambda^{(A)} = 1458 \text{ nm}$ gemessen. Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Galaxie von der Erde weg bewegt?

Problembeschreibung: Zwischen der Frequenz und der Wellenlänge besteht die Beziehung $c = v \lambda$, die empfangene Frequenz wiederum ist mit der ausgesandten, nicht verschobenen Frequenz über die Formel 31.16b für die Doppler-Verschiebung für größer werdenden Abstand verbunden.

Lösung: 1. Gleichung 31.16b gibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ und der ausgesandten Frequenz $v^{(B)}$ und der empfangenen Frequenz $v^{(A)}$ an.

2. Setzen Sie $v^{(A)} = c/\lambda^{(A)}$ und $v^{(B)} = c/\lambda^{(B)}$ ein und lösen Sie nach β auf.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$v^{(A)} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} v^{(B)}$$

2.

$$\beta = \frac{1 - (\lambda^{(B)}/\lambda^{(A)})^2}{1 + (\lambda^{(B)}/\lambda^{(A)})^2} = 0,664$$

$$v_B^{(A)} = [0,664 c]$$

Plausibilitätsprüfung: Dass als Ergebnis ein hoher Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit herauskommt, war zu erwarten, weil die Wellenlänge der verschobenen Wasserstofflinie groß im Verhältnis zur Wellenlänge der unverschobenen Linie ist.

31.4 Uhrensynchronisation und Gleichzeitigkeit

In Abschnitt 31.3 haben wir gesehen, dass die Eigenzeit das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen ist, die in einem Bezugssystem am selben Ort stattfinden. Die Eigenzeit kann daher mit einer einzigen Uhr gemessen werden. (Rufen Sie sich in Erinnerung, dass es in jedem Bezugssystem im Prinzip an jedem Ort eine Uhr gibt und der zu einem Ereignis gehörende Zeitpunkt in einem gegebenen Bezugssystem mit der am Ort des Ereignisses stehenden Uhr gemessen wird.) In einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum ersten bewegt, finden diese Ereignisse jedoch an zwei verschiedenen Orten statt. Man braucht daher zwei Uhren, um die Zeitpunkte der beiden Ereignisse zu messen. Das Zeitintervall ergibt sich dann durch Subtraktion der mit den verschiedenen Uhren gemessenen Zeitpunkte. Diese Vorgehensweise setzt jedoch voraus, dass die Uhren **synchronisiert** sind. In diesem Abschnitt werden wir Folgendes zeigen:

Zwei Uhren, die in einem Bezugssystem synchronisiert sind, gehen in einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum ersten bewegt, typischerweise nicht synchron.

SYNCHRONISATION VON UHREN

Als Folgerung ergibt sich:

Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, finden in einem anderen Bezugssystem, das sich

relativ zum ersten bewegt, typischerweise nicht gleichzeitig statt.

GLEICHZEITIGKEIT VON EREIGNISSEN

Eine Ausnahme bildet der Fall, dass die x -Koordinaten der beiden Ereignisse gleich sind und die x -Achse parallel zur Richtung der Relativbewegung der beiden Bezugssysteme verläuft. Ein gründliches Verständnis der Begriffe „Synchronisation“ und „Gleichzeitigkeit“ löst im Allgemeinen alle Paradoxa der speziellen Relativitätstheorie. Unglücklicherweise ist es oft schwierig, die intuitive (wenngleich falsche) Vorstellung von einer absoluten Gleichzeitigkeit aufzugeben.

Betrachten wir nun zwei Uhren, die in einem Bezugssystem S_A im Abstand $l^{(A)}$ voneinander an den Punkten $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ ruhen. Wie können wir diese Uhren synchronisieren? Wenn der Beobachter im Punkt $x_1^{(A)}$ einfach die Zeit auf der Uhr bei $x_2^{(A)}$ abliest und seine Uhr danach stellt, so sind die beiden Uhren damit nicht synchronisiert, da das Licht die Zeit $l^{(A)}/c$ benötigt, um den Weg von $x_2^{(A)}$ nach $x_1^{(A)}$ zurückzulegen. Um die Uhren zu synchronisieren, muss der Beobachter bei $x_1^{(A)}$ seine Uhr relativ zur Uhr im Punkt $x_2^{(A)}$ um die Zeit $l^{(A)}/c$ vorstellen. Er sieht die Uhr im Punkt $x_2^{(A)}$ dann zwar nachgehen, kann aber schnell ausrechnen, dass die Uhren synchronisiert sind, wenn er die Zeit um die Laufzeit des Lichts korrigiert. Auch für alle anderen Beobachter im Bezugssystem S_A – ausgenommen diejenigen, die von beiden Uhren gleich weit entfernt sind – zeigen die beiden Uhren unterschiedliche Zeiten an. Nach einer Korrektur um die verschiedenen Laufzeiten des Lichts jedoch stellen auch sie fest, dass die Uhren synchronisiert sind. Eine andere, äquivalente Methode, die beiden Uhren zu synchronisieren, besteht darin, einen Beobachter in einem Punkt $x_3^{(A)}$ in der Mitte zwischen $x_1^{(A)}$

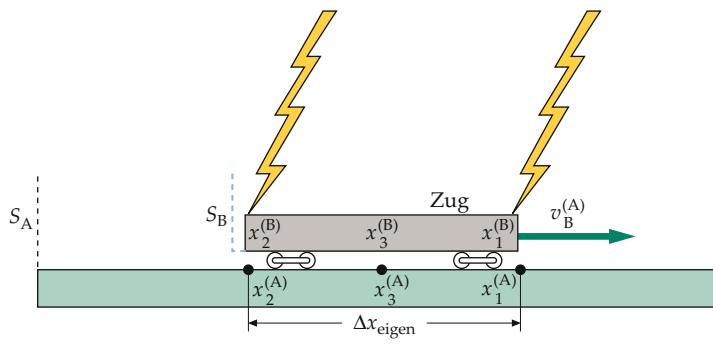


Abbildung 31.5 Zwei Blitze schlagen, im Ruhesystem S_A des Bahnsteigs betrachtet, gleichzeitig an den Enden eines Zugs ein, der sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ relativ zum Bahnsteig bewegt. Das Licht von diesen gleichzeitig stattfindenden Ereignissen erreicht den Beobachter im Punkt $x_3^{(A)}$ in der Mitte zur selben Zeit. Die Entfernung zwischen den Einschlagstellen ist Δx_{eigen} .

und $x_2^{(A)}$ ein Lichtsignal aussenden zu lassen, das die beiden Beobachter in $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ veranlasst, ihre Uhren auf einen vorher vereinbarten Zeitpunkt einzustellen, sobald das Signal sie erreicht.

Wir untersuchen nun den Begriff der **Gleichzeitigkeit**. Dazu nehmen wir an, die Uhren in $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ sind synchronisiert. Die Beobachter in $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ vereinbaren, zum Zeitpunkt $t_0^{(A)}$ ein Lichtsignal loszuschicken. Der Beobachter im Punkt $x_3^{(A)}$ sieht die beiden Lichtsignale zur selben Zeit. Da er von $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ gleich weit entfernt ist, beschließt er, dass die Signale gleichzeitig ausgesendet wurden. Andere Beobachter im Bezugssystem S_A werden – je nach ihrem Standort – das Signal vom Punkt $x_1^{(A)}$ oder das Signal vom Punkt $x_2^{(A)}$ zuerst sehen, aber nach Berücksichtigung der unterschiedlich langen Laufzeiten des Lichts werden auch sie zu dem Schluss kommen, dass die Lichtsignale gleichzeitig ausgesendet wurden. Wir können Gleichzeitigkeit daher folgendermaßen definieren:

Zwei Ereignisse finden in einem Bezugssystem gleichzeitig statt, wenn die von den Ereignissen ausgesandten Lichtsignale einen Beobachter, der sich in der Mitte zwischen den Ereignissen befindet, zur selben Zeit erreichen.

DEFINITION DER GLEICHZEITIGKEIT

Um zu zeigen, dass zwei Ereignisse, die im Bezugssystem S_A gleichzeitig stattfinden, in einem anderen Bezugssystem S_B , das sich relativ zu S_A bewegt, nicht gleichzeitig sind, wollen wir das folgende, von Einstein selbst stammende Beispiel betrachten. Ein Zug fährt mit konstanter Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ an einem Bahnsteig vorbei. Der Zug befindet sich im Bezugssystem S_B in Ruhe, der Bahnsteig im Bezugssystem S_A . Wir setzen drei Beobachter $x_1^{(B)}$, $x_2^{(B)}$ und $x_3^{(B)}$ an die Spitze, an das Ende und in die Mitte des Zugs (Abbildung 31.5). Nehmen wir nun an, Zug und Bahnsteig werden an der Spitze und am Ende des Zugs von zwei Blitzen getroffen und die Einschläge finden im Bezugssystem S_A des Bahnsteigs gleichzeitig statt. Dann sieht ein Beobachter $x_3^{(A)}$, der auf dem Bahnsteig in der Mitte zwischen

den Punkten $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ steht, an denen die Blitze einschlagen, das Licht von diesen Einschlägen zur selben Zeit. Wir wollen nun der Einfachheit halber annehmen, dass Zug und Bahnsteig durch die Blitze angesengt wurden, sodass die Ereignisse leicht zu lokalisieren sind. Da $x_3^{(B)}$ sich in der Mitte des Zugs befindet und gleich weit von den beiden angesengten Stellen des Zugs entfernt ist, finden die beiden Ereignisse in S_B nur dann gleichzeitig statt, wenn $x_3^{(B)}$ die beiden Blitze zur selben Zeit sieht. $x_3^{(B)}$ sieht den Blitz an der Spitze des Zugs jedoch vor dem Blitz am Ende des Zugs. Betrachten wir, um dies zu verstehen, die Bewegung von $x_3^{(B)}$ im Bezugssystem S_A (Abbildung 31.6). In der Zeit, die das Licht vom vorderen Blitz braucht, um zu $x_3^{(B)}$ zu gelangen, hat sich $x_3^{(B)}$ um eine bestimmte Entfernung auf den vorderen Blitz zu und vom hinteren Blitz weg bewegt. Das vom hinteren Blitz ausgehende Licht hat $x_3^{(B)}$ in dieser Zeit also noch nicht erreicht. Der Beobachter in $x_3^{(B)}$ muss daher zu dem Schluss kommen, dass die Ereignisse nicht gleichzeitig stattfanden, sondern die Zugspitze vor dem Zugende von einem Blitz getroffen wurde. Darüber hinaus werden alle Beobachter im Bezugssystem S_B mit $x_3^{(B)}$ übereinstimmen, nachdem sie die unterschiedlich langen Laufzeiten des Lichts von den Zugenden zu ihnen hin berücksichtigt haben.

Abbildung 31.7 zeigt die Ereignisse, wie sie sich im Ruhesystem S_B des Zugs darstellen. In diesem Bezugssystem bewegt sich der Bahnsteig. Die Distanz zwischen den Einschlagstellen ist daher kontrahiert, der Bahnsteig ist kürzer als im Bezugssystem S_A . Umgekehrt ist der Zug im Bezugssystem S_B , in dem er in Ruhe ist, länger als im Bezugssystem S_A , in dem seine Länge kontrahiert ist. In dem Moment, da der Blitz in die Spitze $x_1^{(B)}$ des Zugs einschlägt, befindet sich die Spitze des Zugs im Bezugssystem S_A am Punkt $x_1^{(A)}$, das Ende $x_2^{(B)}$ des Zugs hat den Punkt $x_2^{(A)}$ noch nicht erreicht. $x_2^{(B)}$ kommt erst später, wenn der Blitz am Ende des Zugs einschlägt, am Punkt $x_2^{(A)}$ auf dem Bahnsteig an.

Der sich im Bezugssystem S_B ergebende Zeitunterschied zweier im Bezugssystem S_A synchronisierter Uhren lässt sich mit den Gleichungen für die Lorentz-Transformation berechnen. Dazu

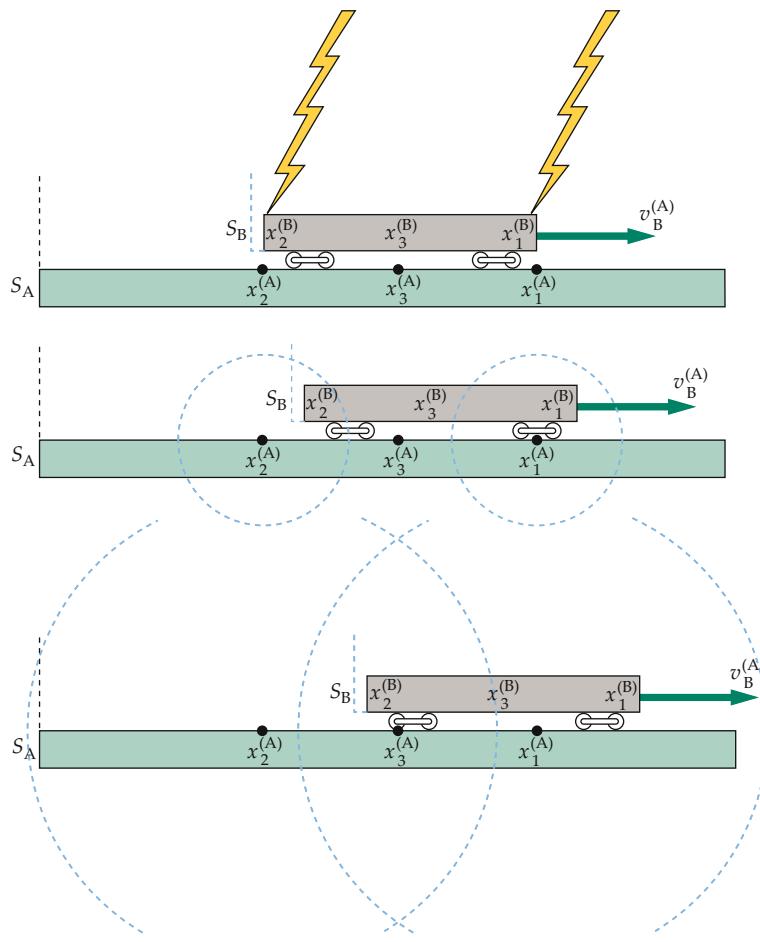


Abbildung 31.6 Im Bezugssystem S_A des Bahnsteigs betrachtet, erreicht das vom Blitz an der Zugspitze ausgehende Licht den Beobachter $x_3^{(B)}$ in der Mitte des Zugs eher als das vom Blitz am Zugende ausgehende Licht. Da $x_3^{(B)}$ sich räumlich genau in der Mitte zwischen den beiden Ereignissen (an der Spitze und am Ende des Zugs) befindet, finden die Ereignisse für ihn nicht gleichzeitig statt.

betrachten wir zwei in S_A synchronisierte Uhren, die sich an den Orten $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ befinden, und berechnen die Zeitpunkte $t_1^{(A)}$ und $t_2^{(A)}$, die diese Uhren für einen Zeitpunkt $t_0^{(B)}$ in S_B anzeigen. Aus Gleichung 31.12 folgt mit $t_0^{(B)} = t_1^{(B)} = t_2^{(B)}$

$$t_0^{(B)} = \gamma \left(t_1^{(A)} - \frac{v_B^{(A)} x_1^{(A)}}{c^2} \right)$$

und

$$t_0^{(B)} = \gamma \left(t_2^{(A)} - \frac{v_B^{(A)} x_2^{(A)}}{c^2} \right).$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten Gleichung, erhält man nach einigen Umformungen

$$t_2^{(A)} - t_1^{(A)} = \frac{v_B^{(A)}}{c^2} (x_2^{(A)} - x_1^{(A)}).$$

Die führende Uhr am Punkt $x_2^{(A)}$ geht gegenüber der Uhr am Punkt $x_1^{(A)}$ um einen Betrag, der proportional zum Eigenabstand $\Delta x_{\text{eigen}} = x_2^{(A)} - x_1^{(A)}$ der Uhren ist, vor.

Werden zwei Uhren in ihrem Ruhesystem synchronisiert, so sind sie in einem anderen Bezugssystem typischerweise nicht synchron. In dem Bezugssystem, in dem sich die Uhren entlang der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Uhren bewegen, geht die führende Uhr um den Betrag

$$\Delta t = \Delta x_{\text{eigen}} \frac{v_B^{(A)}}{c^2} \quad (31.17)$$

vor (zeigt eine spätere Zeit an), wobei Δx_{eigen} der Eigenabstand der Uhren ist.

VORSPRUNG DER FÜHRENDE UHR

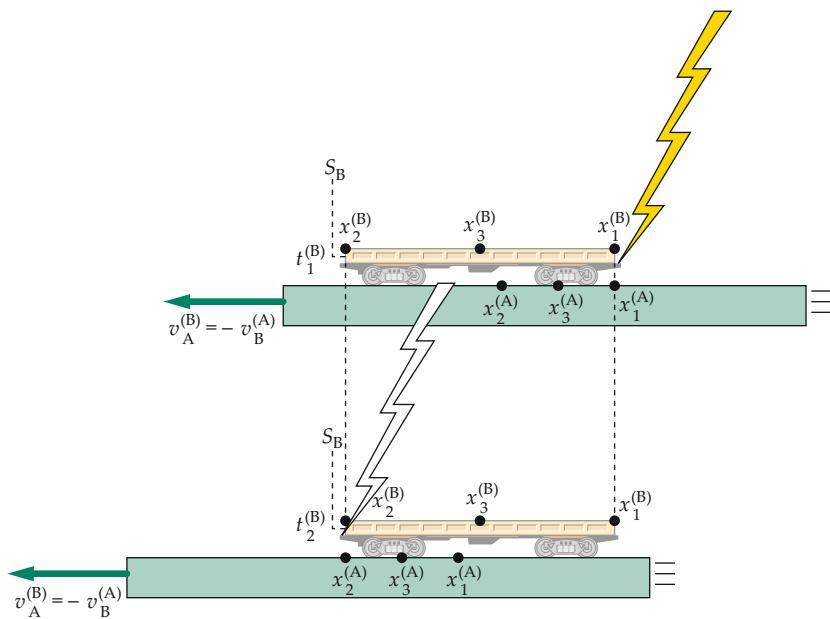


Abbildung 31.7 Die Blitzereignisse aus Abbildung 31.5, wie sie sich im Bezugssystem S_B des Zugs darstellen. In diesem Bezugssystem ist der Abstand zwischen $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ auf dem Bahnsteig kleiner als die Eigenlänge Δx_{eigen} des Zugs. Der erste Blitz schlägt in die Spitze des Zugs ein, wenn $x_1^{(A)}$ und $x_1^{(B)}$ zusammenfallen. Der zweite Blitzschlag am Ende des Zugs findet statt, wenn $x_2^{(A)}$ und $x_2^{(B)}$ zusammenfallen.

Beispiel 31.6 soll uns dabei helfen, die Begriffe Zeidilatation und Uhrensynchronisation zu konkretisieren und die Konsistenz der dargestellten Ergebnisse nachzuvollziehen.

Beispiel 31.6: Synchronisation von Uhren

In einem Raumschiff befinden sich ein Beobachter mit einer Signallampe und ein Spiegel in der Anordnung, wie sie in Abbildung 31.3 gezeigt ist. Die Entfernung zwischen der Lampe und dem Spiegel beträgt $d = 15$ Lichtminuten ($15c \cdot \text{min}$). Das Raumschiff, das im Bezugssystem S_B in Ruhe ist, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\beta = 0,80$ relativ zu einem sehr langen Weltraumbahnsteig, der im Bezugssystem S_A in Ruhe ist. Zu dem Zeitpunkt, da der Beobachter im Raumschiff seinen Lichtblitz aussendet, passiert das Raumschiff gerade den Ort $x_1^{(A)}$ auf dem Bahnsteig; zu dem Zeitpunkt, da das vom Spiegel reflektierte Signal den Beobachter wieder erreicht, befindet sich das Raumschiff am Ort $x_2^{(A)}$. Die Orte $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ auf dem Bahnsteig sind mit synchronisierten Uhren ausgestattet. Wie groß ist das Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen (Aussenden und Wiedereintreffen des Lichtblitzes) a) im Bezugssystem des Raumschiffs und b) im Bezugssystem des Bahnsteigs? c) Welche Entfernung legt das Raumschiff zwischen den beiden Ereignissen zurück? d) Aus Sicht des Beobachters im Raumschiff sind die beiden Uhren auf dem Bahnsteig

nicht synchron. Um wie viel geht die führende Uhr vor?

Problembeschreibung: Die Ereignisse finden im Raumschiff am selben Ort statt. Daher entspricht die Zeit zwischen den beiden Ereignissen im Bezugssystem S_B der Eigenzeit zwischen den beiden Ereignissen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Im Bezugssystem des Raumschiffs läuft der Lichtblitz von der Lampe zum Spiegel und wieder zurück. Die gesamte vom Lichtblitz zurückgelegte Strecke hat also die Länge $2d = 30c \cdot \text{min}$. Dafür benötigt das Licht die Zeit $2d/c$:

$$\Delta t^{(B)} = \frac{2d}{c} = \frac{30c \cdot \text{min}}{c} = [30 \text{ min}]$$

2. Da die beiden Ereignisse am selben Ort im Raumschiff stattfinden, handelt es sich bei diesem Zeitintervall um die Eigenzeit:

$$\Delta t_{\text{eigen}} = [30 \text{ min}]$$

Teilaufgabe b

1. Im Bezugssystem S_A ist die Zeit zwischen den beiden Ereignissen um den Faktor γ länger:

$$\Delta t^{(A)} = \gamma \Delta t_{\text{eigen}} = \gamma \cdot (30 \text{ min})$$

2. Der Wert für γ beträgt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,80)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,36}} = \frac{5}{3}$$

3. Mit diesem Wert für γ ergibt sich das Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen im Bezugssystem S_A zu:

$$\Delta t^{(A)} = \gamma \Delta t_{\text{eigen}} = \frac{5}{3} \cdot (30 \text{ min}) = [50 \text{ min}]$$

Teilaufgabe c

Im Bezugssystem S_A legt das Raumschiff zwischen den beiden Ereignissen die Strecke $\beta c \Delta t^{(A)}$ zurück:

$$\begin{aligned} x_2^{(A)} - x_1^{(A)} &= \beta c \Delta t^{(A)} = (0,80 c) \cdot (50 \text{ min}) \\ &= [40c \cdot \text{min}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe d

1. Der Betrag, um den die führende Uhr vorgeht, bestimmt sich aus dem Eigenabstand Δx_{eigen} zwischen den Uhren:

$$\Delta t = \Delta x_{\text{eigen}} \frac{\beta}{c}$$

2. Die in Teilaufgabe c berechnete Entfernung entspricht dem Eigenabstand der beiden Uhren auf dem Bahnsteig:

$$\Delta x_{\text{eigen}} = x_2^{(A)} - x_1^{(A)} = 40c \cdot \text{min}$$

und somit

$$\Delta t = \Delta x_{\text{eigen}} \frac{\beta}{c} = (40c \cdot \text{min}) \frac{0,80}{c} = [32 \text{ min}]$$

Weitergedacht: Aus Sicht eines Beobachters auf dem Bahnsteig gehen die Uhren im Raumschiff langsamer, da sie nur 30 min als Zeit zwischen den beiden Ereignissen verzeichnen, wohingegen die Zeit, die der Beobachter auf dem Bahnsteig misst, 50 min beträgt. ■

Abbildung 31.8 zeigt die Situation aus Beispiel 31.6, wie sie von dem Beobachter im Bezugssystem S_B des Raumschiffs wahrgenommen wird. Der Bahnsteig saust mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,8$ an dem Raumschiff vorbei. Als der Beobachter den Lichtblitz aussendet, passiert er gerade den Punkt $x_1^{(A)}$ auf dem Bahnsteig und sieht dort eine Uhr stehen. Als der reflektierte Blitz wieder bei ihm eintrifft, befindet sich das Raumschiff auf Höhe des Punkts $x_2^{(A)}$, wo eine andere Uhr steht. Nehmen wir an, dass es zu dem Zeitpunkt, da der Lichtblitz ausgesandt wird, auf der Uhr bei $x_1^{(A)}$ gerade 12.00 Uhr mittags ist. Die Uhren bei $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ sind im Bezugssystem S_A synchron, nicht jedoch

31.4 Uhrensynchronisation und Gleichzeitigkeit

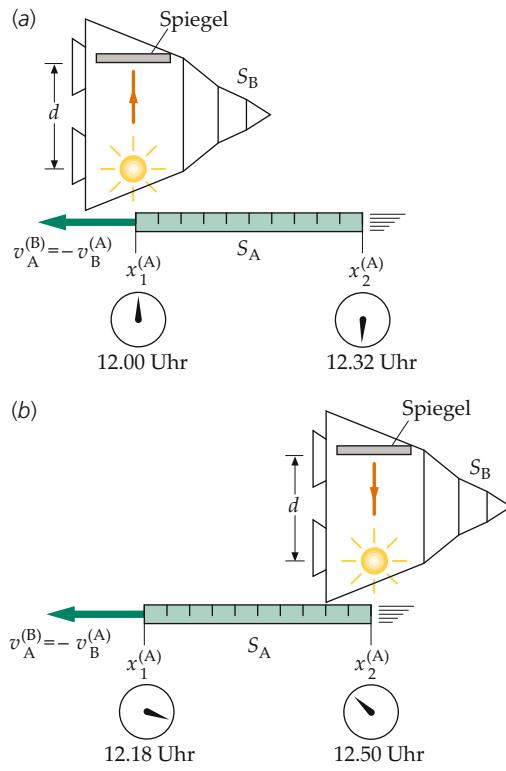


Abbildung 31.8 Die Uhren auf dem Bahnsteig aus Sicht des Beobachters im Bezugssystem S_B des Raumschiffs. Während des Zeitintervalls von $\Delta t^{(B)} = 30 \text{ min}$, in dem der Bahnsteig am Raumschiff vorüberzieht, vergehen auf den Uhren auf dem Bahnsteig nur $(30 \text{ min})/\gamma = 18 \text{ min}$; sie gehen also langsamer. Aber da die Uhren nicht synchron sind – die führende Uhr geht um den Betrag $\Delta x_{\text{eigen}} \beta/c$ vor, was in diesem Fall 32 min entspricht –, beträgt die im Bezugssystem des Bahnsteigs gemessene Zeit, die das Raumschiff braucht, um vom Punkt $x_1^{(A)}$ zum Punkt $x_2^{(A)}$ zu gelangen, 32 min + 18 min = 50 min.

im Bezugssystem S_B . Im Bezugssystem S_B hat die Uhr bei $x_2^{(A)}$, die die führende Uhr ist, einen Vorsprung von 32 min. Sie würde für den Beobachter im Bezugssystem S_B also 12.32 Uhr anzeigen. Als das Raumschiff am Punkt $x_2^{(A)}$ ankommt, zeigt die dort befindliche Uhr 12.50 Uhr an. Das Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen beträgt im Bezugssystem S_A also 50 min. Beachten Sie, dass für den Beobachter im Bezugssystem S_B auf dieser zweiten Uhr bei $x_2^{(A)}$ während seiner 30-minütigen Reise nur $50 \text{ min} - 32 \text{ min} = 18 \text{ min}$ vergehen. Für den Beobachter im Bezugssystem S_B stellt es sich also so dar, dass die Uhr um den Faktor $30/18 = 5/3$ langsamer geht.

Jeder Beobachter sieht von seinem Bezugssystem aus die Uhren im jeweils anderen Bezugssystem langsamer gehen. Aus Sicht eines Beobachters im Bezugssystem S_A , der für das Zeitintervall 50 min misst, ist die im Bezugssystem S_B gemessene Eigenzeit von 30 min zu kurz; für ihn geht die Uhr im Bezugssystem S_B um den Faktor $5/3$ zu langsam. Aus Sicht des Beobachters im Bezugssystem S_B messen die Beobachter in S_A trotz der Tatsache, dass ihre Uhren zu langsam gehen, eine zu *lange* Zeit, was

31 Die Relativitätstheorien

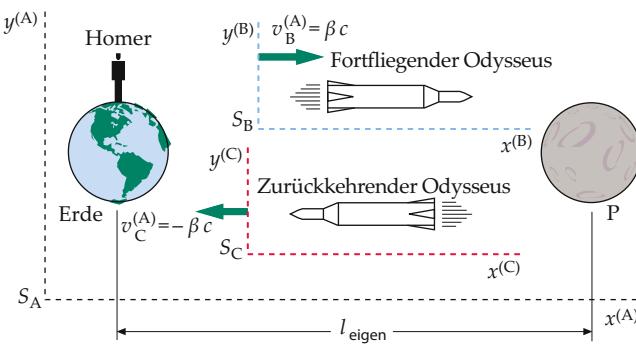


Abbildung 31.9 Das Zwillingsparadoxon. Die Erde und der Planet P ruhen im Bezugssystem S_A . Odysseus ruht auf dem Weg zum Planeten im Bezugssystem S_B und auf dem Rückweg im Bezugssystem S_C . Sein Zwillingsbruder Homer bleibt auf der Erde. Bei seiner Rückkehr ist Odysseus jünger als sein Bruder. Die Rollen, die die beiden Zwillinge spielen, sind nicht symmetrisch: Homer bleibt in Ruhe in seinem anfänglichen Inertialsystem, während Odysseus von einem Inertialsystem, in dem er sich in Ruhe befand, in ein anderes Inertialsystem umsteigen, also beschleunigen muss, um nach Hause zurückkehren zu können.

daran liegt, dass die Uhren in S_A für den Beobachter in S_B nicht synchronisiert sind. Auf der Uhr bei $x_2^{(A)}$ vergehen zwar nur 18 min, aber da sie im Vergleich zur Uhr bei $x_1^{(A)}$ um 32 min vor geht, kommt ein Zeitintervall von 50 min zustande.

Das Zwillingsparadoxon

Homer und Odysseus seien eineiige Zwillinge. Während Homer auf der Erde bleibt, reist Odysseus mit hoher Geschwindigkeit zu einem Planeten weit jenseits des Sonnensystems und kehrt anschließend zur Erde zurück. Welcher Zwilling ist nach Odysseus' Reise älter, oder sind sie beide gleich alt? Dieses Problem ist in vielen Varianten über Jahrzehnte hinweg Gegenstand heftiger Auseinandersetzungen gewesen, obwohl die richtige Antwort, dass der zu Hause gebliebene Zwilling älter ist, nur selten bezweifelt wurde. Das Problem stellt scheinbar ein Paradoxon dar, weil die Zwillinge allem Anschein nach symmetrische Rollen spielen, der Alterungsprozess jedoch asymmetrisch verläuft. Das Paradoxon lässt sich lösen, wenn man sich vor Augen führt, dass die Rollen der Zwillinge in Wirklichkeit ebenfalls asymmetrisch sind. Das relativistische Ergebnis widerspricht allerdings unserer Anschauung, die auf der festen, wenngleich falschen Vorstellung einer absoluten Gleichzeitigkeit beruht. Wir wollen nun einen konkreten Fall mit Zahlenbeispielen betrachten, die zwar unrealistisch sind, die Rechnung jedoch einfach gestalten.

Der Planet P , die Erde und Homer sollen im Bezugssystem S_A in einem Abstand l_{eigen} voneinander ruhen, wie es in Abbildung 31.9 dargestellt ist. Die Bezugssysteme S_B und S_C bewegen sich mit der Geschwindigkeit β auf den Planeten P zu bzw. vom Planeten P fort. Odysseus beschleunigt rasch auf die Geschwindigkeit β , gleitet dann im Bezugssystem S_B relativ zu S_B ruhend dahin, bis er den Planeten erreicht, wo er schnell abbremst und für einen kurzen Moment in S_A ruht.

Anschließend beschleunigt er rasch bis zur Geschwindigkeit β in Richtung Erde, gleitet in S_C relativ zu S_C ruhend dahin, bis er die Erde erreicht und wieder anhält. Wir können annehmen, dass die Zeiten, in denen Odysseus beschleunigt (bzw. abbremst), verglichen mit den Zeiten, in denen er einfach dahingleitet, vernachlässigbar klein sind. Wir verwenden nun das folgende konkrete Zahlenbeispiel zur Veranschaulichung: $l_{\text{eigen}} = 8$ Lichtjahre und $\beta = 0,8$. Dann gilt: $\sqrt{1 - \beta^2} = 3/5$ und $\gamma = 5/3$.

Das Problem aus Homers Sicht von der Erde aus zu analysieren, ist einfach. Nach Homers Uhr beträgt der Zeitraum, in dem Odysseus auf dem Hinweg im Bezugssystem S_B bzw. auf dem Rückweg im Bezugssystem S_C dahingleitet, jeweils $l_{\text{eigen}}/(\beta c) = 10$ Jahre. Homer wird daher bis zu Odysseus' Rückkehr 20 Jahre älter. Das Zeitintervall, das für Odysseus im Bezugssystem S_B zwischen dem Verlassen der Erde und der Ankunft auf dem Planeten vergeht, ist kürzer, denn es ist ein Eigenzeitintervall. Odysseus braucht nach seiner Uhr für die Strecke von der Erde zum Planeten

$$\Delta t_{\text{eigen}} = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{10 \text{ Jahre}}{5/3} = 6 \text{ Jahre.}$$

Da der Rückweg genauso lange dauert, vergehen für Odysseus insgesamt zwölf Jahre, und er ist bei seiner Rückkehr acht Jahre jünger als Homer.

Aus Odysseus' Sicht ist die Distanz zwischen Erde und Planet kontrahiert und beträgt nur

$$l^{(B)} = l^{(C)} = \frac{l_{\text{eigen}}}{\gamma} = \frac{8 \text{ Lichtjahre}}{5/3} = 4,8 \text{ Lichtjahre.}$$

Bei der Geschwindigkeit $\beta = 0,8$ braucht er, wie bereits festgestellt, nur $l^{(B)}/(\beta c) = 4,8 \text{ Lichtjahre}/(0,8 c) = 6$ Jahre für jede Richtung.

Das eigentliche Problem besteht nun darin, aus Odysseus' Sicht zu verstehen, warum sein Zwillingsbruder während seiner Abwesenheit 20 Jahre älter geworden ist. Wenn wir die Sache so betrachten, dass Odysseus die ganze Zeit ruht und Homer sich entfernt, sollte Homers Uhr langsamer gehen und das Zeitintervall für eine Richtung zu $(3/5) \cdot (6 \text{ Jahre}) = 3,6$ Jahre messen. Warum altert Homer während der Reise dann nicht nur um 7,2 Jahre? Das genau ist das Paradoxon. Die Unstimmigkeiten bei der Analyse aus Odysseus' Sicht resultieren daraus, dass Odysseus nicht in ein und demselben Inertialsystem bleibt. Was passt, während Odysseus abbremst und beschleunigt? Um diese Frage im Detail zu untersuchen, müssten wir beschleunigte Bezugssysteme betrachten. Das aber ist nur mit den Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie möglich und geht über den Rahmen dieses Buchs hinaus. Wir können aber trotzdem zu einem gewissen Verständnis der Vorgänge gelangen, wenn wir uns vorstellen, die Zwillinge würden einander regelmäßig Signale senden, um stets über das Alter des jeweils anderen informiert zu sein. Sie könnten beispielsweise vereinbaren, pro Jahr genau ein Signal zu senden. Dann könnte jeder das Alter des jeweils

anderen feststellen, indem er einfach die eingegangenen Signale zählt. Aufgrund der Doppler-Verschiebung wird die Frequenz der eingehenden Signale natürlich nicht 1 Signal/Jahr betragen. Die beobachteten Frequenzen ergeben sich vielmehr aus den Gleichungen 31.16a und 31.16b. Mit $\beta = 0,8$, also $\beta^2 = 0,64$, erhalten wir für den Fall, dass sich die Zwillinge voneinander entfernen:

$$v^{(B)} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} v^{(A)} = \frac{\sqrt{1 - 0,64}}{1 + 0,8} v^{(A)} = \frac{1}{3} v^{(A)}.$$

Für den Fall, dass sie sich einander nähern, ergibt sich $v^{(C)} = 3 v^{(A)}$.

Betrachten wir die Situation zuerst aus Odysseus' Sicht. Während der sechs Jahre, die er von der Erde zum Planeten braucht (die Distanz ist in seinem Bezugssystem kontrahiert), empfängt er die Signale von seinem Bruder mit einer Frequenz von $\frac{1}{3}$ Signalen pro Jahr – das macht zwei Signale auf dem Hinweg. Nach dem Umkehren erhält er drei Signale pro Jahr, auf dem gesamten Rückweg also 18 Signale und damit insgesamt 20 Signale. Odysseus erwartet also, dass sein Bruder 20 Jahre älter geworden ist.

Betrachten wir die Situation nun aus Homers Sicht. Er empfängt die Signale mit einer Frequenz von $\frac{1}{3}$ Signalen pro Jahr nicht nur während der zehn Jahre, die Odysseus braucht, um den Planeten zu erreichen, sondern noch darüber hinaus, bis auch das letzte Signal, das Odysseus auf dem Hinweg aussandte, die Erde erreicht hat. (Homer weiß überhaupt erst dann, wenn die Signale mit erhöhter Frequenz eintreffen, dass Odysseus den Heimweg angetreten hat.) Da der Planet acht Lichtjahre entfernt ist, erhält er also weitere acht Jahre lang Signale mit einer Frequenz von $\frac{1}{3}$ Signalen pro Jahr, während der ersten 18 Jahre somit insgesamt sechs Signale. In den verbleibenden zwei Jahren bis zu Odysseus' Rückkehr empfängt Homer drei Signale pro Jahr, zusammen also sechs Signale. (Das erste Signal, das Odysseus auf seinem Heimweg aussendet, braucht acht Jahre, um die Erde zu erreichen, während Odysseus, der mit einer Geschwindigkeit von $0,8c$ reist, für denselben Weg zehn Jahre benötigt. Er trifft also zwei Jahre, nachdem die Frequenz der Signale sich erhöht hat, zu Hause ein.) Homer erwartet demnach, dass Odysseus zwölf Jahre älter geworden ist. In dieser Betrachtung kommt die Asymmetrie in den Rollen der beiden Zwillinge zum Tragen, und beide Zwillinge gelangen übereinstimmend zu dem Ergebnis, dass der Zwilling, der beschleunigt wurde, nach seiner Rückkehr jünger ist als der daheim gebliebene.

Die mit dem Zwillingsparadoxon verknüpften Vorhersagen der speziellen Relativitätstheorie wurden an instabilen geladenen Teilchen überprüft, die so hoch beschleunigt werden können, dass γ sehr viel größer als 1 ist. Die Teilchen lassen sich durch ein Magnetfeld in einer Kreisbahn einfangen, und ihre Lebensdauer kann mit denen identischer Teilchen in Ruhe verglichen werden. In allen solchen Experimenten leben die beschleunigten Teilchen, wie von der Relativitätstheorie vorhergesagt, im Mittel länger als die ruhenden Teilchen. Darüber hinaus konnte man die Vorhersagen durch ein Experiment bestätigen, in dem

31.5 Die Geschwindigkeitstransformation

sehr präzise Atomuhren in Verkehrsflugzeugen um die Erde geflogen wurden. Die Auswertung des Experiments ist jedoch kompliziert, da Gravitationseffekte berücksichtigt werden müssen, wofür man die allgemeine Relativitätstheorie benötigt.

31.5 Die Geschwindigkeitstransformation

Differenzieren wir die Gleichungen der Lorentz-Transformation, so können wir berechnen, wie sich Geschwindigkeiten beim Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen transformieren. Ein Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit $v_x^{(B)} = dx^{(B)}/dt^{(B)}$ im Bezugssystem S_B , welches sich wiederum mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ relativ zum Bezugssystem S_A bewegt. Die Geschwindigkeit des Teilchens im Bezugssystem S_A beträgt

$$v_x^{(A)} = \frac{dx^{(A)}}{dt^{(A)}}.$$

Aus den Gleichungen 31.9 und 31.10 für die Lorentz-Transformation folgt

$$dx^{(A)} = \gamma (dx^{(B)} + v_B^{(A)} dt^{(B)})$$

und

$$dt^{(A)} = \gamma \left(dt^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} dx^{(B)}}{c^2} \right).$$

Die Geschwindigkeit im Bezugssystem S_A ist somit

$$\begin{aligned} v_x^{(A)} &= \frac{dx^{(A)}}{dt^{(A)}} = \frac{\gamma (dx^{(B)} + v_B^{(A)} dt^{(B)})}{\gamma (dt^{(B)} + v_B^{(A)} dx^{(B)}/c^2)} \\ &= \frac{dx^{(B)}/dt^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + (v_B^{(A)}/c^2)(dx^{(B)}/dt^{(B)})} = \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2}. \end{aligned}$$

Für den Fall, dass das Teilchen Geschwindigkeitskomponenten in y - oder z -Richtung besitzt, benutzen wir erneut die schon aufgeführte Beziehung zwischen $dt^{(A)}$ und $dt^{(B)}$ und zusätzlich die Beziehungen $dy^{(A)} = dy^{(B)}$ und $dz^{(A)} = dz^{(B)}$ und erhalten

$$\begin{aligned} v_y^{(A)} &= \frac{dy^{(A)}}{dt^{(A)}} = \frac{dy^{(B)}}{\gamma (dt^{(B)} + v_B^{(A)} dx^{(B)}/c^2)} \\ &= \frac{dy^{(B)}/dt^{(B)}}{\gamma (1 + (v_B^{(A)}/c^2)(dx^{(B)}/dt^{(B)}))} \\ &= \frac{v_y^{(B)}}{\gamma (1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2)} \end{aligned}$$

und

$$v_z^{(A)} = \frac{v_z^{(B)}}{\gamma (1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2)}.$$

31 Die Relativitätstheorien

Der vollständige Satz an Gleichungen für die relativistische Geschwindigkeitstransformation lautet somit:

$$v_x^{(A)} = \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2}, \quad (31.18a)$$

$$v_y^{(A)} = \frac{v_y^{(B)}}{\gamma (1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2)}, \quad (31.18b)$$

$$v_z^{(A)} = \frac{v_z^{(B)}}{\gamma (1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2)}. \quad (31.18c)$$

RELATIVISTISCHE GE SCHWINDIGKEITSTRANSFORMATION

Die inversen Transformationsgleichungen sind

$$v_x^{(B)} = \frac{v_x^{(A)} - v_B^{(A)}}{1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)} / c^2}, \quad (31.19a)$$

$$v_y^{(B)} = \frac{v_y^{(A)}}{\gamma (1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)} / c^2)}, \quad (31.19b)$$

$$v_z^{(B)} = \frac{v_z^{(A)}}{\gamma (1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)} / c^2)}. \quad (31.19c)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von dem klassischen und anschaulichen Ergebnis $v_x^{(A)} = v_x^{(B)} + v_B^{(A)}$, $v_y^{(A)} = v_y^{(B)}$ und $v_z^{(A)} = v_z^{(B)}$ insofern, als die Nenner in den Gleichungen 31.18 und 31.19 von 1 verschieden sind. Für den Grenzfall $\beta \ll 1$ und $v_x^{(B)} \ll c$, d.h. $\gamma \approx 1$ und $\beta v_x^{(B)} / c \ll 1$, gehen die relativistischen Gleichungen für die Geschwindigkeitstransformation in die klassischen über. Eine Anwendung der relativistischen Geschwindigkeitstransformation zeigen die Beispiele 31.7 und 31.8.

Beispiel 31.7: Relativgeschwindigkeit bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten

Ein Überschallflugzeug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 1000 m/s (etwa dreifacher Schallgeschwindigkeit) entlang der positiven x -Achse eines Bezugssystems, in dem sich ein Beobachter in Ruhe befindet. Ein zweites Flugzeug, das aus Sicht des Beobachters vor dem ersten Flugzeug her fliegt, bewegt sich ebenfalls entlang der positiven x -Achse und relativ zum ersten mit der Geschwindigkeit 500 m/s. Wie groß ist die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeugs relativ zum Beobachter?

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so klein, dass wir erwarten dürfen, dass die klassische Formel für die Geschwindigkeitsaddition auf das korrekte Ergebnis führt. Um dies zu zeigen, berechnen wir

den Korrekturterm im Nenner von Gleichung 31.18a. Bezeichne S_A das Ruhesystem des Beobachters und S_B das Ruhesystem des ersten Flugzeugs. Dann beträgt die Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$, mit der sich S_B relativ zu S_A bewegt, 1000 m/s. Das zweite Flugzeug hat relativ zu S_B die Geschwindigkeit $v_x^{(B)} = 500$ m/s.

Lösung: 1. Seien S_A und S_B die Ruhesysteme des Beobachters und des ersten Flugzeugs und $v_x^{(A)}$ und $v_x^{(B)}$ die Geschwindigkeiten des zweiten Flugzeugs relativ zu S_A bzw. S_B . Die Geschwindigkeit des ersten Flugzeugs relativ zum Beobachter ist $v_B^{(A)}$. Dann kann die Geschwindigkeit $v_x^{(A)}$ mithilfe von Gleichung 31.18a berechnet werden:

$$v_x^{(A)} = \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2}$$

2. Ist der Korrekturterm im Nenner vernachlässigbar (verglichen mit 1), so geht Gleichung 31.18a in die klassische Formel für die Geschwindigkeitsaddition über. Die Größe des Korrekturterms beträgt:

$$\frac{v_B^{(A)} v_x^{(B)}}{c^2} = \frac{1000 \cdot 500}{(3,00 \cdot 10^8)^2} \approx 5,56 \cdot 10^{-12}$$

3. Diese Korrektur ist so klein, dass das klassische und das relativistische Ergebnis praktisch übereinstimmen:

$$\begin{aligned} v_x^{(A)} &\approx v_x^{(B)} + v_B^{(A)} = 500 \text{ m/s} + 1000 \text{ m/s} \\ &= [1500 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

Beispiel 31.8: Relativgeschwindigkeit bei relativistischen Geschwindigkeiten

Was ändert sich in Beispiel 31.7, wenn das erste Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,80$ relativ zum Beobachter fliegt und die Relativgeschwindigkeit zwischen dem zweiten und dem ersten Flugzeug ebenfalls $\beta = 0,80$ beträgt?

Problembeschreibung: Diese Geschwindigkeiten sind nicht klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $\beta = 1$, daher müssen wir die relativistische Formel (Gleichung 31.18a) verwenden. Wir nehmen wieder an, dass der Beobachter im Bezugssystem S_A ruht und das erste Flugzeug im Bezugssystem S_B , das sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)} = 0,80 c$ relativ zum Beobachter bewegt, in Ruhe ist. Die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeugs in S_B ist $v_x^{(B)} = 0,80 c$.

Lösung: Die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeugs relativ zum Beobachter ergibt sich aus Gleichung 31.18a:

$$\begin{aligned} v_x^{(A)} &= \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2} = \frac{0,80c + 0,80c}{1 + (0,80)^2} \\ &= \frac{1,60c}{1,64} = [0,98c] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet ist die berechnete Geschwindigkeit kleiner als c . ■

Das Ergebnis in Beispiel 31.8 unterscheidet sich deutlich von dem auf klassische Weise erzielten Resultat $0,80c + 0,80c = 1,60c$. Allgemein lässt sich zeigen, dass ein Massenpunkt, der sich in einem Bezugssystem mit einer Geschwindigkeit kleiner c bewegt, auch in jedem anderen Bezugssystem eine Geschwindigkeit kleiner c besitzt, wenn die Geschwindigkeit des zweiten Bezugssystems relativ zum ersten kleiner als c ist (siehe Aufgabe 31.23). In Abschnitt 31.7 werden wir sehen, dass eine unendlich große Energie aufgebracht werden muss, um ein Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen. Die Lichtgeschwindigkeit c stellt also eine nicht erreichbare obere Grenzgeschwindigkeit für alle massebehafteten Teilchen dar. Hingegen gibt es masselose Teilchen, beispielsweise Photonen, die sich immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegen – wie aus Beispiel 31.9 deutlich wird. In Beispiel 31.10 werden die relativistischen Beziehungen für zwei Raketen betrachtet.

Beispiel 31.9: Relativgeschwindigkeit eines Photons

Ein Photon bewegt sich im Bezugssystem S_B mit der Geschwindigkeit $v_x^{(B)} = c$ entlang der x -Achse. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Photons im Bezugssystem S_A ?

Problembeschreibung: Wir verwenden Gleichung 31.18a, um die Geschwindigkeit des Photons im Bezugssystem S_A zu berechnen.

Lösung: Die Geschwindigkeit ergibt sich aus Gleichung 31.18a:

$$\begin{aligned} v_x^{(A)} &= \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2} = \frac{c + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)}/c} \\ &= \frac{c + v_B^{(A)}}{c + v_B^{(A)}} c = [c] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Geschwindigkeit in beiden Bezugssystemen beträgt, unabhängig vom Wert von $v_B^{(A)}$, c . Dies steht in Übereinstimmung mit den Einstein'schen Postulaten. ■

Beispiel 31.10: Zwei in entgegengesetzter Richtung aneinander vorbei fliegende Raketen

Zwei Raumschiffe, die im Ruhezustand jeweils 100 m lang sind, bewegen sich aufeinander zu, wobei jedes Raumschiff relativ zur Erde mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,85$ fliegt. a) Welche Länge haben die beiden Raumschiffe aus Sicht eines Beobachters auf der Erde? b) Wie schnell fliegen die beiden Raumschiffe aus Sicht eines Beobachters im jeweils anderen Raumschiff? c) Wie lang ist für einen Beobachter in dem einen Raumschiff das andere Raumschiff? d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ (im Bezugssystem der Erde) treffen sich die beiden Raumschiffe und beginnen, aneinander vorbeizufliegen. Zu welchem Zeitpunkt (im Bezugssystem der Erde) sind die beiden Raumschiffe vollständig aneinander vorbeiflogen?

Problembeschreibung: a) Beide Raumschiffe haben im Bezugssystem der Erde die kontrahierte Länge $\sqrt{1 - \beta^2} l_{\text{eigen}}$ (Gleichung 31.14). b) Das Ruhesystem der Erde sei S_A . Das Ruhesystem des linken Raumschiffs (Raumschiff 1) sei S_B , d.h., S_B bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)} = \beta c$ relativ zu S_A . Das Ruhesystem des rechten Raumschiffs (Raumschiff 2) sei S_C . Dann bewegt sich das rechte Raumschiff in S_A mit der Geschwindigkeit $v_C^{(A)} = -\beta c$ (Abbildung 31.10). c) Die Länge des einen Raumschiffs aus Sicht eines Beobachters im anderen Raumschiff ergibt sich dann für $\beta^2 = (v_C^{(B)}/c)^2$, wobei $v_C^{(B)}$ die Relativgeschwindigkeit der beiden Raumschiffe zueinander ist.

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Länge beider Raumschiffe im Bezugssystem S_A der Erde ist gleich der Eigenlänge dividiert durch γ :

$$l^{(A)} = \sqrt{1 - \beta^2} l_{\text{eigen}} = \sqrt{1 - (0,85)^2} \cdot (100 \text{ m}) = [53 \text{ m}]$$

Teilaufgabe b

Die Geschwindigkeit $v_C^{(B)}$ des Raumschiffs 2 im Bezugssystem S_B ergibt sich mithilfe der Formel für die Geschwindigkeitstransformation (Gleichung 31.19a):

$$\begin{aligned} v_C^{(B)} &= \frac{v_C^{(A)} - v_B^{(A)}}{1 - v_C^{(A)} v_B^{(A)}/c^2} = \frac{-0,85c - 0,85c}{1 + (0,85)^2} \\ &= \frac{-1,70c}{1,7225} = -0,987c \end{aligned}$$

also:

$$|v_C^{(B)}| = [0,99c]$$

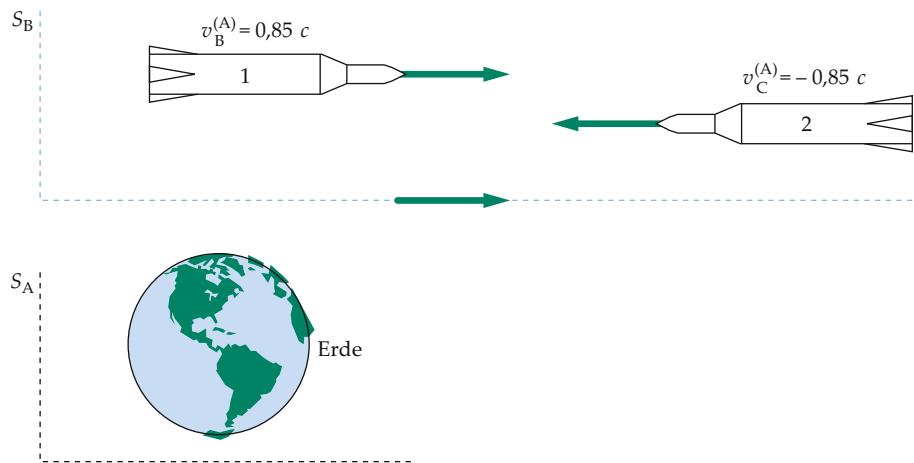


Abbildung 31.10 Ruhesystem der Erde S_A und des Raumschiffs 1 S_B . Angegeben sind die Geschwindigkeiten der beiden Raumschiffe aus Sicht des Bezugssystems S_A .

Teilaufgabe c

Im Bezugssystem des Raumschiffs 1 bewegt sich das Raumschiff 2 mit der Geschwindigkeit $|v_C^{(B)}| = 0,987 c$. Damit folgt für die kontrahierte Länge, die das Raumschiff 2 im Bezugssystem S_B hat:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{1 - (|v_C^{(B)}|/c)^2} l_{\text{eigen}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{(0,987 c)^2}{c^2}} \cdot (100 \text{ m}) \\ &= [16 \text{ m}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe d

Wenn die Spitzen der beiden Raumschiffe sich zum Zeitpunkt $t = 0$ treffen, wird es genauso lange dauern, bis die beiden Enden auf gleicher Höhe sind, wie jedes Raumschiff braucht, um eine Strecke von der Länge des anderen Raumschiffs im Bezugssystem der Erde zurückzulegen.

$$\begin{aligned} t &= \frac{l^{(A)}}{\beta c} = \frac{53 \text{ m}}{0,85 c} = \frac{53 \text{ m}}{(0,85) \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})} \\ &= [2,1 \cdot 10^{-7} \text{ s}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß ist die in Teilaufgabe c berechnete Länge kleiner als die in Teilaufgabe a berechnete Länge, und beide sind kleiner als die Eigenlänge von 100 m. ■

31.6 *Der relativistische Impuls

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten gesehen, dass die Einstein'schen Postulate ein völliges Umdenken erfordern, was die Auffassung von Gleichzeitigkeit und die Messung von Zeiten und Längen angeht. In ähnlicher Weise müssen wir auch unsere Konzepte für Masse, Impuls und Energie modifizieren. In der klassischen Mechanik ist der Impuls eines Teilchens als das Produkt $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ aus der Masse m und der Geschwindigkeit \mathbf{v} des Teilchens definiert. In einem abgeschlossenen System von Massenpunkten ist der Gesamtimpuls des Systems konstant.

Der Gesamtimpuls eines Systems hat in der klassischen Mechanik deswegen eine große Bedeutung, weil er in allen Prozessen eine Erhaltungsgröße ist, in denen keine äußeren Kräfte auf das System einwirken. Das ist beispielsweise beim Stoß der Fall. Man kann nun zeigen, dass die Größe $\sum m_i v_i$ nur in der Näherung $v \ll c$ erhalten bleibt. Wir wollen daher den relativistischen Impuls \mathbf{p} eines Teilchens so definieren, dass die folgenden Forderungen erfüllt sind:

1. Bei Stößen bleibt der Impuls \mathbf{p} erhalten.
2. Geht v/c gegen null, so strebt \mathbf{p} gegen $m \mathbf{v}$.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Größe

$$\mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m \mathbf{v} \quad (31.20)$$

RELATIVISTISCHER IMPULS

31.6 *Der relativistische Impuls

bei dem elastischen Stoß aus Abbildung 31.11 erhalten bleibt. Da die Größe zudem gegen $m v$ strebt, wenn v/c gegen null geht, wollen wir den **relativistischen Impuls** eines Teilchens auf diese Weise definieren. Diese Definition gilt ganz allgemein für einen im System S_A ruhenden Beobachter, der eine im System S_B ruhende Masse m beobachtet, die sich mit $v = v_B^{(A)}$ relativ zu S_A bewegt.

Gleichung 31.20 lässt sich u. a. so interpretieren, dass die Masse eines Objekts anwächst, wenn sich die Geschwindigkeit erhöht. Die Größe $m_{\text{rel}} = \gamma m$ wird dann als *relativistische Masse* bezeichnet. Die *Ruhemasse* m eines Teilchens ist seine relativistische Masse in einem Bezugssystem, in dem das Teilchen ruht. Wir werden die Begriffe Masse und Ruhemasse in diesem Kapitel synonym verwenden und beide mit m bezeichnen.

Veranschaulichung der relativistischen Impulserhaltung

Betrachten wir in einem einfachen Gedankenexperiment zwei Beobachter: Beobachter A in einem Bezugssystem S_A und Beobachter B in einem Bezugssystem S_B , das sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ in Richtung der positiven x -Achse relativ zu S_A bewegt. Die beiden Beobachter haben Pucks der Masse m , die im Ruhezustand identisch sind und frei auf einer ebenen horizontalen Fläche gleiten können. Beobachter B schleudert seinen Puck mit der Geschwindigkeit $-v = v_{2,y}^{(B)}$ in Richtung der negativen y -Achse, Beobachter A schleudert seinen Puck mit der Geschwindigkeit $v = v_{1,y}^{(A)}$ in Richtung der positiven y -Achse, sodass die beiden Pucks einen elastischen Stoß ausführen und anschließend jeweils zu dem Beobachter zurückkehren, der den Puck wegschleuderte. Abbildung 31.11 zeigt, wie der Stoß in den beiden Bezugssystemen aussieht.

Wenn wir für den Stoß aus Abbildung 31.11 die y -Komponenten der relativistischen Impulse der beiden Pucks im Bezugssystem S_A berechnen, werden wir sehen, dass die y -Komponente des relativistischen Gesamtimpulses gleich null ist. Die Geschwindigkeit des Pucks 1 im Bezugssystem S_A ist v , die y -Komponente seines relativistischen Impulses ist daher

$$p_{1,y}^{(A)} = \frac{m v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma m v.$$

Die Geschwindigkeit des Pucks 2 im Bezugssystem S_A zu berechnen, ist etwas schwieriger. Die x -Komponente der Geschwindigkeit ist $v_{2,x}^{(A)} = v_B^{(A)}$, die y -Komponente $v_{2,y}^{(A)} = -v/\gamma_B$

mit $\gamma_B = 1/\sqrt{1 - (v_B^{(A)}/c)^2}$ (Gleichung 31.18b). Es folgt

$$\begin{aligned} (v_2^{(A)})^2 &= (v_{2,x}^{(A)})^2 + (v_{2,y}^{(A)})^2 \\ &= (v_B^{(A)})^2 + \left(-v \sqrt{1 - (v_B^{(A)}/c)^2}\right)^2 \\ &= (v_B^{(A)})^2 + v^2 - \left(\frac{v v_B^{(A)}}{c}\right)^2. \end{aligned}$$

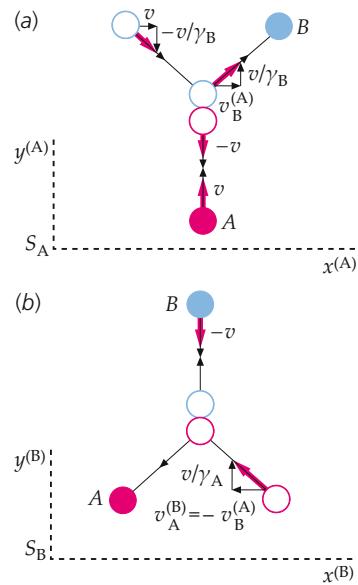


Abbildung 31.11 a) Der elastische Stoß von zwei identischen Pucks aus Sicht eines Beobachters im Bezugssystem S_A . Ist die vertikale Geschwindigkeitskomponente des Pucks 2 im Bezugssystem S_B gleich v , so ist sie im Bezugssystem S_A gleich v/γ_B . b) Derselbe Stoß aus Sicht eines Beobachters im Bezugssystem S_B . In diesem Bezugssystem hat der Puck 1 die vertikale Geschwindigkeitskomponente v/γ_A mit $\gamma_A = \gamma_B = 1/\sqrt{1 - (v_B^{(A)}/c)^2}$.

Mit dieser Formel berechnen wir nun den Ausdruck $\sqrt{1 - (v_2^{(A)})^2/c^2}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(v_2^{(A)})^2}{c^2} &= 1 - \frac{(v_B^{(A)})^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(v v_B^{(A)})^2}{c^4} \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{(v_B^{(A)})^2}{c^2}\right) = \left(\frac{1}{\gamma} \frac{1}{\gamma_B}\right)^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\sqrt{1 - (v_2^{(A)})^2/c^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\gamma_B}.$$

Der Puck 2 hat somit im Bezugssystem S_A den folgenden relativistischen Impuls:

$$\begin{aligned} p_{2,y}^{(A)} &= (\gamma \gamma_B) m v_{2,y}^{(A)} = -(\gamma \gamma_B) m v / \gamma_B \\ &= -\gamma m v = -p_{1,y}^{(A)}. \end{aligned}$$

Da $p_{2,y}^{(A)} = -p_{1,y}^{(A)}$ ist, ist die y -Komponente des relativistischen Gesamtimpulses der beiden Pucks gleich null. Kehrt sich die Geschwindigkeit jedes Pucks beim Stoß um, ist der Gesamtimpuls weiterhin null und bleibt demnach erhalten.

31.7 *Die relativistische Energie

In der klassischen Mechanik ist die Arbeit, die durch die resultierende Kraft an einem Teilchen verrichtet wird, gleich der Änderung der kinetischen Energie des Teilchens. In der relativistischen Mechanik identifizieren wir zunächst die resultierende Kraft mit der zeitlichen Änderung des relativistischen Impulses. Damit können wir die durch die Kraft verrichtete Arbeit berechnen, die wir mit der Änderung der kinetischen Energie gleichsetzen.

Wie in der klassischen Mechanik wollen wir als kinetische Energie die Arbeit definieren, die von der resultierenden Kraft verrichtet werden muss, um ein Teilchen aus dem Ruhezustand auf eine gewisse Endgeschwindigkeit v_E zu beschleunigen. Betrachten wir der Einfachheit halber nur den eindimensionalen Fall, so gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \int_{v=0}^{v=v_E} F \, ds = \int_0^{v_E} \frac{dp}{dt} \, ds = \int_0^{v_E} v \, dp \\ &= \int_0^{v_E} v \, d\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right), \end{aligned} \quad (31.21)$$

wobei wir $v = ds/dt$ benutzt haben. Weiterhin gilt, wie Sie in Aufgabe 31.15 zeigen werden:

$$d\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in Gleichung 31.21 einsetzen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \int_0^{v_E} v \, d\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \int_0^{v_E} m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} v \, dv \\ &= mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v_E/c)^2}} - 1\right) \end{aligned}$$

oder

$$E_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \quad (31.22)$$

RELATIVISTISCHE KINETISCHE ENERGIE

(Da die Endgeschwindigkeit v_E jeden beliebigen Wert annehmen kann, können wir in Gleichung 31.22 auf den Index E verzichten.)

Der Ausdruck für die kinetische Energie besteht aus zwei Termen. Der erste Term hängt von der Geschwindigkeit v des Teilchens ab, während der zweite Term, mc^2 , von der Geschwindigkeit unabhängig ist und als **Ruheenergie** E_0 des Teilchens bezeichnet wird. Die Ruheenergie ist das Produkt aus Ruhemasse und c^2 :

$$E_0 = mc^2. \quad (31.23)$$

RUHEENERGIE

Die **relativistische (Gesamt-)Energie** wird nun als Summe aus kinetischer Energie und Ruheenergie definiert:

$$E = E_{\text{kin}} + E_0 = \gamma mc^2. \quad (31.24)$$

RELATIVISTISCHE ENERGIE

Beispiel 31.11 veranschaulicht diese Formeln für die Energie des Elektrons.

Beispiel 31.11: Gesamtenergie, kinetische Energie und Impuls

Betrachten wir ein Elektron (Ruheenergie 0,511 MeV), das sich mit der Geschwindigkeit $\beta = 0,800$ bewegt. Wie groß sind a) seine Gesamtenergie, b) seine kinetische Energie und c) sein Impuls?

Problembeschreibung: Zur Lösung dieses Beispiels benötigt man die Gleichungen 31.20 bis 31.25.

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Gesamtenergie berechnet sich nach Gleichung 31.24 zu:

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{0,511 \text{ MeV}}{\sqrt{1-0,64}} \\ &= \frac{0,511 \text{ MeV}}{0,6} = \boxed{0,852 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Die kinetische Energie ergibt sich als Differenz aus Gesamtenergie und Ruheenergie:

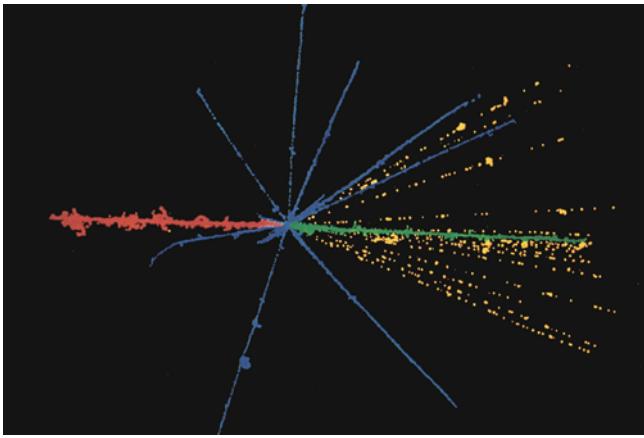
$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E - E_0 \\ &= 0,852 \text{ MeV} - 0,511 \text{ MeV} \\ &= \boxed{0,341 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die Größe des Impulses kann mit Gleichung 31.20 berechnet werden. Wir können die Rechnung vereinfachen, indem wir im Ausdruck für den Impuls Zähler und Nenner mit c^2 multiplizieren und das Ergebnis aus Teilaufgabe a verwenden:

$$\begin{aligned} p &= \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\beta}{c} \\ &= (0,852 \text{ MeV}) \cdot \frac{0,80}{c} = \boxed{0,682 \text{ MeV}/c} \end{aligned}$$

31.7 *Die relativistische Energie



Die Erzeugung von Elementarteilchen ist ein Beispiel für die Umwandlung von kinetischer Energie in Ruheenergie. Diese Aufnahme aus dem Jahre 1950 zeigt einen kosmischen Schauer. Ein hochenergetischer Schwefelkern (rot) kollidiert mit einem Kern in einer Photoemulsion und erzeugt einen Nebel aus Teilchen, der einen Fluorkern (grün), allerlei andere Kernfragmente (blau) und ca. 16 Pionen (gelb) enthält. (© C. Powell, P. Fowler und D. Perkins. Science Photo Library/Photo Researchers.)

Plausibilitätsprüfung: Die kinetische Energie ist erwartungsgemäß kleiner als die Gesamtenergie.

Weitergedacht: Statt in Teilaufgabe c Zähler und Nenner mit c^2 zu multiplizieren, hätten wir auch direkt Gleichung 31.25 verwenden können. ■

Die von einer unkompenzierten Kraft verrichtete Arbeit bewirkt also eine Erhöhung der Energie von der Ruheenergie mc^2 auf die Endenergie $\gamma mc^2 = m_{\text{rel}}c^2$; dabei bezeichnet $m_{\text{rel}} = \gamma m$ die relativistische Masse. Einen nützlichen Ausdruck für die Geschwindigkeit eines Teilchens erhalten wir, wenn wir Gleichung 31.20 für den relativistischen Impuls mit c^2 multiplizieren und dann mit Gleichung 31.24 für die relativistische Energie vergleichen. Es ergibt sich

$$pc^2 = \gamma mc^2 v = Ev$$

oder

$$\frac{v}{c} = \beta = \frac{pc}{E}. \quad (31.25)$$

In der Atom- und Kernphysik werden Energien normalerweise in Elektronenvolt (eV) oder Megaelektronenvolt (MeV) angegeben:

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Eine übliche Einheit für die Massen atomarer Teilchen ist eV/c^2 oder MeV/c^2 , also Ruheenergie dividiert durch c^2 . In Tabelle 31.1 sind die Ruheenergien für einige Elementarteilchen und

Tabelle 31.1 Ruheenergien einiger Elementarteilchen und leichter Kerne

Teilchen	Symbol	Ruheenergie in MeV
Photon	γ	0
Elektron (Positron)	e oder e^- (e^+)	0,511
Myon	μ^\pm	105,7
Pion	π^0	135
	π^\pm	139,6
Proton	${}^1\text{H}$ bzw. p	938,272
Neutron	n	939,565
Deuteriumkern	${}^2\text{H}$ bzw. D	1875,613
Tritiumkern	${}^3\text{H}$ bzw. T	2808,920
Helium-3-Kern	${}^3\text{He}$	2808,391
α -Teilchen	${}^4\text{He}$ bzw. α	3727,379

leichte Kerne zusammengestellt. In Beispiel 31.11 werden Energie und Impuls eines relativistischen Elektrons betrachtet.

Der Ausdruck 31.22 für die kinetische Energie sieht dem klassischen Ausdruck $\frac{1}{2}mv^2$ nicht sehr ähnlich, lässt sich jedoch für den Grenzfall $v \ll c$ in diesen überführen, indem man $1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ mithilfe der folgenden Binomialentwicklung abschätzt:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots \approx 1 + nx \quad \text{für } x \ll 1. \quad (31.26)$$

Es ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad \text{für } v \ll c.$$

Für $v \ll c$ können wir die relativistische kinetische Energie somit folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1 \right) \\ &\approx mc^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} mv^2. \end{aligned}$$

Für kleine Geschwindigkeiten geht der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie also in den klassischen über.

Aus Gleichung 31.24 geht hervor, dass, wenn v sich der Lichtgeschwindigkeit nähert, die Energie des Teilchens sehr groß wird, weil der Ausdruck $1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ sehr groß wird. Für $v = c$ wird die kinetische Energie unendlich groß. Eine einfache Interpretation dieses Ergebnisses ist, dass man unendlich viel Energie aufbringen muss, um ein Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen.

Aus praktischen Anwendungen sind meist eher der Impuls oder die Energie eines Teilchens bekannt als seine Geschwindigkeit. Wenn man Gleichung 31.20 für den relativistischen Impuls und Gleichung 31.24 für die relativistische Energie kombiniert, kann man die Geschwindigkeit v eliminieren. Das Ergebnis lautet

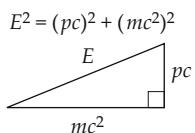


Abbildung 31.12 Rechtwinkliges Dreieck als Merkhilfe für Gleichung 31.27

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2. \quad (31.27)$$

BEZIEHUNG ZWISCHEN GESAMTENERGIE, IMPULS UND RUHEENERGIE

Diese nützliche Beziehung kann man sich anhand des rechtwinkligen Dreiecks in Abbildung 31.12 leicht einprägen. Falls die Energie eines Teilchens viel größer ist als seine Ruheenergie, ist der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung 31.27 vernachlässigbar, und es ergibt sich die folgende nützliche Näherungsformel

$$E \approx pc \quad \text{für } E \gg mc^2. \quad (31.28)$$

Für masselose Teilchen, wie z. B. Photonen, ist Gleichung 31.28 exakt gültig.

Übung 31.2: Betrachten Sie ein Proton (Ruhemasse $938 \text{ MeV}/c^2$), das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt und eine Gesamtenergie von 1400 MeV hat. Berechnen Sie a) γ , b) den Impuls p des Protons und c) die Geschwindigkeit v des Protons. ◀

Masse und Energie

Einstein hielt die Beziehung $E_0 = mc^2$ (Gleichung 31.23), die eine Verbindung zwischen der Energie eines Teilchens und seiner Masse herstellt, für das weitaus wichtigste Resultat der Relativitätstheorie. Energie und Trägheit, zuvor zwei getrennte Konzepte, werden durch diese Gleichung miteinander verbunden. Die Umwandlung von Ruheenergie in kinetische Energie mit entsprechendem Ruhemassendefizit ist ein häufig auftretendes Ereignis bei radioaktiven Zerfällen und Kernreaktionen wie der Kerspaltung oder -fusion. Man kann dies anhand eines Deuteriumkerns sehen, dessen Masse um $2,22 \text{ MeV}/c^2$ niedriger ist als die Summe der Massen seiner Bestandteile, eines Protons und eines Neutrons. Wenn ein Proton und ein Neutron sich zu einem Deuteriumkern verbinden, werden $2,22 \text{ MeV}$ an Energie frei. Umgekehrt ist zur Spaltung eines Deuteriumkerns in ein Neutron und ein Proton eine Energiezufuhr von $2,22 \text{ MeV}$ nötig. Das Proton und das Neutron sind im Deuteriumkern also durch eine Bindungsenergie von $2,22 \text{ MeV}$ miteinander verbunden. Jedes stabile Teilchen, das aus anderen Teilchen zusammengesetzt ist, wie z. B. ein Deuteriumkern oder ein Alphateilchen (bestehend aus zwei Neutronen und zwei Protonen), zeichnet sich dadurch aus, dass seine Masse bzw. Ruheenergie kleiner ist als die Summe der Massen bzw. Ruheenergien seiner Bestandteile. Die Differenz zwischen den Ruheenergien entspricht der Bindungsenergie des zusammengesetzten Teilchens.

Die Bindungsenergien von Atomen und Molekülen liegen in der Größenordnung von einigen Elektronenvolt; dies erklärt, warum die Differenz zwischen der Masse des Moleküls und der Summe der Einzelatommassen vernachlässigbar klein ist. Die Bindungsenergien von Kernen liegen in der Größenordnung mehrerer Megaelektronenvolt; dies erklärt den beträchtlichen Massenunterschied zwischen dem zusammengesetzten Teilchen und der Summe seiner Bestandteile. Bei einigen sehr schweren Kernen, wie z. B. Radium, die radioaktiv sind und in einen leichteren Kern und ein Alphateilchen zerfallen, beobachtet man, dass die Ruheenergie des ursprünglichen Kerns größer ist als die Summe der Ruheenergien der Zerfallsteilchen. Die überschüssige Energie tritt als kinetische Energie der Zerfallsprodukte in Erscheinung.

Betrachten wir, um die Beziehung zwischen Masse und Energie noch weiter zu veranschaulichen, den vollständig inelastischen Stoß zwischen zwei Teilchen. Im klassischen Bild geht bei einem solchen Stoß kinetische Energie verloren. Relativistisch betrachtet, geht dieser Verlust an kinetischer Energie mit einer Erhöhung der Ruheenergie des Systems einher, d. h., die Gesamtenergie des Systems bleibt erhalten. Der Stoßprozess findet statt zwischen einem Teilchen der Masse m_1 , das sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_1 bewegt, und einem Teilchen mit der Masse m_2 , das sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v_2 bewegt. Die beiden Teilchen kollidieren und bewegen sich anschließend gemeinsam weiter, d. h., sie bilden ein Teilchen mit der Masse m_E und der Geschwindigkeit v_E , wie es in Abbildung 31.13 gezeigt ist. Die ursprüngliche Gesamtenergie des ersten Teilchens beträgt

$$E_1 = E_{\text{kin},1} + m_1 c^2,$$

wobei $E_{\text{kin},1}$ die kinetische Energie des ersten Teilchens vor dem Stoß ist. Entsprechend ist die Gesamtenergie des zweiten Teilchens vor dem Stoß gegeben als

$$E_2 = E_{\text{kin},2} + m_2 c^2.$$

Die gesamte Anfangsenergie des Systems beträgt daher

$$\begin{aligned} E_A &= E_1 + E_2 = E_{\text{kin},1} + m_1 c^2 + E_{\text{kin},2} + m_2 c^2 \\ &= E_{\text{kin},A} + m_A c^2. \end{aligned}$$

Dabei ist $E_{\text{kin},A}$ die ursprüngliche kinetische Energie und $m_A = m_1 + m_2$ die ursprüngliche Masse des Systems. Die Gesamtenergie des Systems nach dem Stoß ist

$$E_E = E_{\text{kin},E} + m_E c^2.$$

Setzen wir die Gesamtenergien vor und nach dem Stoß gleich, so ergibt sich

$$E_{\text{kin},E} + m_E c^2 = E_{\text{kin},A} + m_A c^2.$$

Durch Umformen erhalten wir $E_{\text{kin},E} - E_{\text{kin},A} = -(m_E - m_A) c^2$ oder

$$\Delta E_{\text{kin}} + (\Delta m) c^2 = 0. \quad (31.29)$$

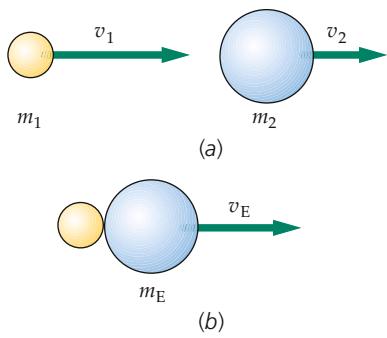


Abbildung 31.13 Ein vollständig inelastischer Stoß zwischen zwei Teilchen. Ein Teilchen der Masse m_1 stößt mit einem anderen der Masse m_2 zusammen. Nach dem Stoß bleiben die Teilchen verbunden und bilden ein zusammengesetztes Teilchen der Masse m_E , das sich mit der Geschwindigkeit v_E bewegt, wobei der relativistische Impuls erhalten bleibt. Bei diesem Prozess geht kinetische Energie verloren. Soll die Gesamtenergie erhalten bleiben, muss der Verlust an kinetischer Energie gleich dem Produkt aus c^2 und dem Zuwachs an Ruhemasse des Systems sein.

Dabei ist $\Delta m = m_E - m_A$ der Zuwachs an Ruhemasse des Systems. In Beispiel 31.12 wird ein inelastischer Stoß durchgerechnet. In Beispiel 31.13 wird für eine Rakete aus der Massenänderung des Rakete-Treibstoff-Systems die Geschwindigkeit der Rakete ermittelt.

Beispiel 31.12: Ein vollständig inelastischer Stoß

Ein Teilchen mit der Masse $2,00 \text{ MeV}/c^2$ und der kinetischen Energie $3,00 \text{ MeV}$ kollidiert mit einem ruhenden Teilchen der Masse $4,00 \text{ MeV}/c^2$. Nach dem Stoß bleiben die beiden Teilchen miteinander verbunden. Berechnen Sie a) den Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoß, b) die Geschwindigkeit des Zweiteilchensystems nach dem Stoß und c) die Masse des Zweiteilchensystems.

Problembeschreibung: a) Der Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoß entspricht dem Anfangsimpuls des stoßenden Teilchens, der aus der Gesamtenergie des Teilchens berechnet werden kann. b) Die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stoß lässt sich aus der Gesamtenergie und dem Impuls berechnen, indem man die Beziehung $\beta = p/c/E$ verwendet (Gleichung 31.25). Die Gesamtenergie ergibt sich dabei aufgrund der Energieerhaltung, der Impuls aufgrund der Impulserhaltung. c) Wenn die Gesamtenergie und der Impuls nach dem Stoß bekannt sind, kann die Masse des Systems nach dem Stoß über $E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2$ berechnet werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Der Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoß entspricht dem Anfangsimpuls des stoßenden Teilchens. Der Impuls

eines Teilchens ist mit der Energie und der Masse des Teilchens verknüpft (Gleichung 31.27):

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + (m_1 c^2)^2$$

$$p_1 c = \sqrt{E_1^2 - (m_1 c^2)^2}$$

2. Die Gesamtenergie des stoßenden Teilchens ist gleich der Summe aus kinetischer Energie und Ruheenergie:

$$E_1 = 3,00 \text{ MeV} + 2,00 \text{ MeV} = 5,00 \text{ MeV}$$

3. Damit ergibt sich für den Impuls:

$$\begin{aligned} p_1 c &= \sqrt{E_1^2 - (m_1 c^2)^2} \\ &= \sqrt{(5,00 \text{ MeV})^2 - (2,00 \text{ MeV})^2} \\ &= \sqrt{21,0 (\text{MeV})^2} \end{aligned}$$

$$p_1 = [4,58 \text{ MeV}/c]$$

Teilaufgabe b

1. Die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stoß kann aus der Gesamtenergie E_E und dem Impuls p_E nach dem Stoß berechnet werden, indem man Gleichung 31.25 anwendet:

$$\beta_E = \frac{p_E c}{E_E}$$

2. Aufgrund der Energieerhaltung ist die Gesamtenergie des Systems nach dem Stoß gleich der Gesamtenergie der beiden Teilchen vor dem Stoß:

$$\begin{aligned} E_E &= E_A = E_1 + E_2 \\ &= 5,00 \text{ MeV} + 4,00 \text{ MeV} = 9,00 \text{ MeV} \end{aligned}$$

3. Aufgrund der Impulserhaltung ist der Impuls des Zweiteilchensystems nach dem Stoß gleich dem Anfangsimpuls:

$$p_E = 4,58 \text{ MeV}/c$$

4. Nun kann man die Geschwindigkeit des Zweiteilchensystems mit der Formel $\beta = p/c/E$ berechnen:

$$\beta_E = \frac{p_E c}{E_E} = \frac{4,58 \text{ MeV}}{9,00 \text{ MeV}} = 0,509$$

$$v_E = [0,509 c]$$

Teilaufgabe c

Die Masse m_E des Zweiteilchensystems nach dem Stoß ergibt sich aus Gleichung 31.27 mit $p_E c = 4,58 \text{ MeV}$ und $E_E = 9,00 \text{ MeV}$:

$$E_E^2 = (p_E c)^2 + (m_E c^2)^2$$

$$(9,00 \text{ MeV})^2 = (4,58 \text{ MeV})^2 + (m_E c^2)^2$$

$$m_E = [7,75 \text{ MeV}/c^2]$$

Weitergedacht: Beachten Sie, dass sich die Gesamtmasse des Systems von $6,00 \text{ MeV}/c^2$ auf $7,75 \text{ MeV}/c^2$ erhöht. Das Produkt aus dem Massenzuwachs und c^2 entspricht, wie Übung 31.3 zeigt, gerade dem Verlust des Systems an kinetischer Energie.

Übung 31.3: a) Berechnen Sie für das Zweiteilchensystem aus Beispiel 31.12 die kinetische Energie nach dem Stoß. b) Berechnen Sie, wie viel kinetische Energie ΔE_{kin} bei dem Stoß verloren geht. c) Zeigen Sie, dass $\Delta E_{\text{kin}} = (\Delta m) c^2$ ist, wobei Δm der Massenänderung des Systems entspricht. ■

Beispiel 31.13: Impuls- und Energieerhaltung

Eine $1,00 \cdot 10^6 \text{ kg}$ schwere Rakete hat $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}$ Treibstoff an Bord. Die Rakete parkt im Weltraum. Plötzlich jedoch wird sie dringend benötigt und muss schnell beschleunigen. Die Motoren der Rakete zünden und verbrauchen mit einem Schlag die gesamten $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}$ Treibstoff. Die Abgase (von dem verbrauchten Treibstoff) werden in einem sehr kurzen Zeitintervall mit der Geschwindigkeit $0,5c$ relativ zum ursprünglichen Ruhesystem S der Rakete ausgestoßen. a) Berechnen Sie die Massenänderung des Rakete-Treibstoff-Systems. b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_R , mit der sich die Rakete nach Abschluss der Beschleunigungsphase relativ zum Bezugssystem S bewegt. c) Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit der Rakete relativ zum Bezugssystem S erneut, diesmal jedoch entsprechend der klassischen (Newton'schen) Mechanik.

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit der Rakete und die Massenänderung des Systems können über die Erhaltung von Impuls und Energie berechnet werden. Im Bezugssystem S bleibt der Gesamtimpuls von Rakete und Treibstoff, der anfangs null ist, erhalten: Nach dem Verbrennen des Treibstoffs ist der Impuls der Rakete vom Betrag her genauso groß wie der des ausgestoßenen Treibstoffs. $m_R = 1,00 \cdot 10^6 \text{ kg}$ sei die Masse der Rakete (ohne den Treibstoff), $m_{T,A} = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}$ die Masse des Treibstoffs vor dem Verbrennen. $m_{T,E}$ bezeichne die Masse des Treibstoffs nach dem Verbrennen. Die Masse der Rakete, m_R , bleibt unverändert, die Masse des Treibstoffs dagegen verringert sich beim Verbrennen. (Der Treibstoff hat nach dem Verbrennen eine geringere chemische Energie und damit auch eine kleinere Masse.)

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Der Impuls der Rakete und der Impuls des ausgestoßenen Treibstoffs sind betragsmäßig gleich. Wie oben

bereits dargelegt, bleibt die Masse der Rakete (ohne die $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}$ Treibstoff) beim Verbrennen des Treibstoffs unverändert:

$$p_R = p_T = p$$

$$\frac{m_R v_R}{\sqrt{1 - (v_R^2/c^2)}} = \frac{m_{T,E} v_T}{\sqrt{1 - (v_T^2/c^2)}} = p$$

mit $m_R = 1,00 \cdot 10^6 \text{ kg}$ und $v_T = 0,500 c$. v_R bezeichnet die Endgeschwindigkeit der Rakete.

2. Die Gesamtenergie des Systems bleibt erhalten:

$$E_E = E_A$$

3. Die Anfangsenergie entspricht der Ruheenergie von Rakete und Treibstoff vor dem Verbrennen des Treibstoffs. Die Endenergie setzt sich aus der Energie der Rakete und der Energie des Treibstoffs zusammen. Beide sind über Gleichung 31.27 mit dem jeweils dazugehörigen Impuls verknüpft:

$$E_A = m_R c^2 + m_{T,A} c^2 = (m_R + m_{T,A}) c^2$$

$$E_{R,E}^2 = p^2 c^2 + (m_R c^2)^2$$

$$E_{T,E}^2 = p^2 c^2 + (m_{T,E} c^2)^2$$

also

$$E_E = E_{R,E} + E_{T,E} = \sqrt{p^2 c^2 + (m_R c^2)^2} + \sqrt{p^2 c^2 + (m_{T,E} c^2)^2}$$

4. Setzt man Anfangsenergie und Endenergie gleich, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 c^2 + (m_R c^2)^2} + \sqrt{p^2 c^2 + (m_{T,E} c^2)^2} \\ = (m_R + m_{T,A}) c^2 \end{aligned}$$

5. Das Ergebnis aus Schritt 4 und die Gleichung $p = \frac{m_{T,E} v_T}{\sqrt{1 - (v_T^2/c^2)}}$ aus Schritt 1 bilden zusammen ein System aus zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten p und $m_{T,E}$. Durch Auflösen nach $m_{T,E}$ erhält man:

$$m_{T,E} = 866 \text{ kg}$$

also

$$\Delta m = m_{T,A} - m_{T,E}$$

$$= 1000 \text{ kg} - 866 \text{ kg} = \boxed{134 \text{ kg}}$$

Frage 31.1

Angenommen, bei der ausgestoßenen Materie würde es sich um einen starren Klotz der Masse $1,00 \cdot 10^3$ kg handeln, der von einer Feder aus der Rakete katapultiert würde – das eine Ende der Feder soll dabei fest mit der Rakete verbunden sein. Würde sich die Ruhemasse des Klotzes ändern oder die Ruhemasse der Feder?

Teilaufgabe b

1. Verwenden Sie Gleichung 31.25, um v_R zu berechnen:

$$\frac{v_R}{c} = \frac{p c}{E_{R,E}}$$

2. Setzen Sie den Wert für $m_{T,E}$ in das Ergebnis aus Schritt 1 von Teilaufgabe a ein und berechnen Sie p :

$$\begin{aligned} p &= \frac{m_{T,E} v_T}{\sqrt{1 - (v_T^2/c^2)}} = \frac{(866 \text{ kg}) \cdot (0,500 c)}{\sqrt{1 - 0,250}} \\ &= (5,00 \cdot 10^2 \text{ kg}) c \end{aligned}$$

3. Nun, da Sie den Wert für p kennen, können Sie $E_{R,E}$ berechnen:

$$\begin{aligned} E_{R,E}^2 &= p^2 c^2 + (m_R c^2)^2 \\ &= (5,00 \cdot 10^2 \text{ kg})^2 c^4 + (1,00 \cdot 10^6 \text{ kg})^2 c^4 \\ &= (1,00 \cdot 10^{12} \text{ kg}^2) c^4 \end{aligned}$$

und somit

$$E_{R,E} = (1,00 \cdot 10^6 \text{ kg}) c^2$$

4. Nach Schritt 1 von Teilaufgabe b folgt dann für v_R :

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{p c^2}{E_{R,E}} = \frac{(5,00 \cdot 10^2 \text{ kg}) c^3}{(1,00 \cdot 10^6 \text{ kg}) c^2} \\ &= [5,00 \cdot 10^{-4} c = 1,50 \cdot 10^5 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Verwenden Sie den klassischen Ausdruck für den Impuls, setzen Sie den Impuls der Rakete und den Impuls des verbrannten Treibstoffes gleich und lösen Sie nach v_R auf:

$$\begin{aligned} m_R v_R &= m_T v_T \\ v_R &= \frac{m_T}{m_R} v_T = \frac{1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}}{1,00 \cdot 10^6 \text{ kg}} \cdot (0,500 c) \\ &= [1,50 \cdot 10^5 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

Weitergedacht: Es zeigt sich, dass der relativistische Wert für die Endgeschwindigkeit der Rakete sich vom klassischen Wert unterscheidet. Rechnet man auf bis zu fünf Stellen genau, so liefert die relativistische Rechnung als Endgeschwindigkeit für die Rakete $v_R = 4,9994 \cdot 10^{-4} c$. Das klassische Ergebnis dagegen lautet $v_R = 5,0000 \cdot 10^{-4} c$. Die beiden Werte unterscheiden sich um weniger als 1/8000.

31.8 *Minkowski-Diagramme

Um eine bessere Vorstellung von der Lorentz-Transformation zu bekommen, entwickelte Hermann Minkowski 1908 das nach ihm benannte **Minkowski-Diagramm**. Mit seiner Hilfe kann man zeichnerisch alle in diesem Kapitel behandelten Phänomene von einem Bezugssystem in ein anderes transformieren, um eine intuitive Vorstellung der Ereignisse zu erhalten. Betrachten wir dazu wieder einen Beobachter A, der im Bezugssystem S_A ruht, und ein sich relativ zu S_A mit der Geschwindigkeit v entlang der x -Achse bewegendes Bezugssystem S_B mit einem Beobachter B, der relativ zu diesem Inertialsystem ruht. Beschränken wir uns nun auf die eindimensionalen Bewegungen entlang der x -Achse, können wir das Minkowski-Diagramm für die beiden Systeme, wie in Abbildung 31.14 gezeigt, zeichnen. Wir gehen dabei davon aus, dass die Koordinatenursprünge der beiden Bezugssysteme zusammenfallen. Beobachter A misst alle Ereignisse im Koordinatensystem S_A (schwarze Linien), Beobachter B im Koordinatensystem S_B (blaue Linien). Auf der y -Achse beider Systeme ist $ct^{(A)}$ bzw. $ct^{(B)}$ statt der Zeit $t^{(A)}$ ($t^{(B)}$) aufgetragen, damit sich für den Winkel, um den S_B gegen S_A geneigt ist, ergibt

$$\tan \theta = \frac{ct^{(A)}(S_B)}{ct^{(A)}(S_B)} = \frac{v}{c} = \beta. \quad (31.30)$$

Aus Gleichung 31.30 kann man schließen, dass die Koordinatenachsen von S_B sich mit steigender Geschwindigkeit v der Winkelhalbierenden nähern. Für den Fall $\beta = 1$, also für Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, liegen beide

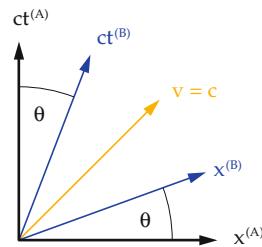


Abbildung 31.14 Minkowski-Diagramm mit den Koordinatensystemen für einen ruhenden Beobachter A (schwarze Linien), einen relativ dazu mit einer Geschwindigkeit $v < c$ in die positive x -Richtung bewegten Beobachter B (blaue Linien) und für ein Teilchen mit $v = c$ (gelbe Linie). Bei $v = c$ fallen beide blauen Koordinatenachsen auf die erste Winkelhalbierende.

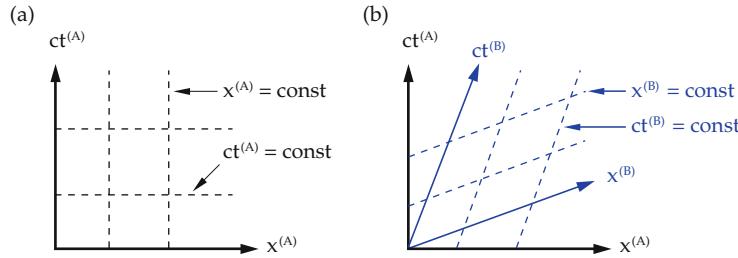


Abbildung 31.15 a) Zeitentwicklung (vertikale Linien) für feste Ortskoordinaten und Ereignisse an verschiedenen Orten zu gleichen Zeitpunkten (horizontale Linien) für einen ruhenden Beobachter. b) Zeitentwicklung (Parallelen zur $ct^{(B)}$ -Achse) für feste Ortskoordinaten und Ereignisse an verschiedenen Orten zu gleichen Zeitpunkten (Parallelen zur $x^{(B)}$ -Achse) für einen mit $v < c$ bewegten Beobachter

Achsen des Bezugssystems B exakt auf der Winkelhalbierenden (gelbe Linie).

Um diese Anordnung der Koordinatenachsen zu verstehen, betrachten wir zunächst S_A . Die $ct^{(A)}$ -Achse beschreibt, was bei $x = 0$ über die Zeit aus Sicht des Beobachters A passiert, die $x^{(A)}$ -Achse enthält die Information, was an allen Orten x zum Zeitpunkt $t = 0$ aus seiner Sicht geschieht. Dementsprechend stellen die Parallelens (gestrichelte Linien in Abbildung 31.15a) zu den Koordinatenachsen die Ereignisse an einem Ort über die Zeit (vertikale Linien) bzw. die Ereignisse an allen Orten zu einem festen Zeitpunkt (horizontale Linien) für Beobachter A dar. Analoges gilt für die in Abbildung 31.15b eingezeichneten Linien im Bezugssystem S_B . Die vertikalen Linien für die Zeitentwicklung an einem festen Ort bezeichnet man auch als **Weltlinien** dieser Orte.

Betrachten wir nun die $ct^{(B)}$ -Achse von S_A aus gesehen. S_B bewegt sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x -Achse von S_A , die wir zur Verdeutlichung im Folgenden $x^{(A)}$ -Achse nennen, d.h., S_B bewegt sich in positiver $x^{(A)}$ -Richtung vom Koordinatenursprung über die Zeit weg. Ruht Beobachter B in S_B bei $x^{(B)} = 0$, sieht Beobachter A, dass B sich von ihm entlang der $ct^{(B)}$ -Achse entfernt. Um zwischen beiden Systemen Längen und Zeitintervalle transformieren zu können, fehlen noch die Einteilungen der Achsen in beiden Bezugssystemen, denn gemäß der Lorentz-Transformationen ist eine Zeit- oder Längeneinheit auf den Achsen im Bezugssystem S_A nicht gleich einer Zeit- oder Längeneinheit in S_B . Um die Einheiten zu erhalten, verwenden wir die Lorentz-Transformationen (Gleichungen 31.9 und 31.10). Demnach sind die Koordinaten eines Punkts auf der $ct^{(B)}$ -Achse ($x^{(B)} = 0$) vom Beobachter A aus gesehen gegeben durch

$$\begin{aligned} ct^{(A)} &= \gamma(ct^{(B)} + \beta x^{(B)}) = \gamma ct^{(B)}, \\ x^{(A)} &= \gamma(x^{(B)} + \beta ct^{(B)}) = \gamma \beta ct^{(B)}. \end{aligned}$$

Die Distanz vom Koordinatenursprung zu diesem Punkt in S_A ergibt sich dann aus dem Satz des Pythagoras

$$(ct^{(A)})^2 + (x^{(A)})^2 = \gamma \sqrt{1 + \beta^2} ct^{(B)} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} ct^{(B)},$$

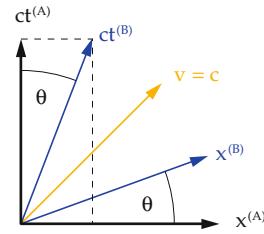


Abbildung 31.16 Zur Herleitung des Umrechnungsfaktors für die ct -Achsen zwischen den beiden Bezugssystemen

wie in Abbildung 31.16 gezeigt. Daher finden wir für den Umrechnungsfaktor zwischen den Einheiten der beiden ct -Achsen

$$\frac{1 \text{ } ct^{(B)}\text{-Einheit}}{1 \text{ } ct^{(A)}\text{-Einheit}} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}. \quad (31.31)$$

Eine analoge Rechnung, die Sie in Aufgabe 31.17 durchführen werden, liefert

$$\frac{1 \text{ } x^{(B)}\text{-Einheit}}{1 \text{ } x^{(A)}\text{-Einheit}} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}} \quad (31.32)$$

für den Umrechnungsfaktor zwischen den Einheiten der beiden x -Achsen. Mit diesen Voraussetzungen können wir in Beispiel 31.14 die Zeitdilatation mithilfe eines Minkowski-Diagramms veranschaulichen.

Beispiel 31.14: Die Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm

In Beispiel 31.2 haben wir berechnet, dass ein einstündigiges Schlafchen in einem Raumschiff mit $\beta = 0,6$ aus der Sicht der Bodenstation auf der Erde 1,25 Stunden dauert. Veranschaulichen Sie sich diese Zeitdilatation in einem Minkowski-Diagramm.

Problembeschreibung: Zur Darstellung der Situation definieren wir S_B als das Bezugssystem, in dem das Raumschiff ruht, und S_A als das Bezugssystem, in dem ein Beobachter auf der Erde ruht. Man bestimmt nun die Lage der Koordinatenachsen von S_B im Koordinatensystem S_A durch Gleichung 31.30. Anschließend benutzt man den Umrechnungsfaktor aus Gleichung 31.31, um die Länge des Abschnitts auf der $ct^{(B)}$ -Achse in den Koordinaten von S_A zu bestimmen, die in S_B dem einstündigen Schläfchen entspricht. Das dieser Strecke entsprechende Zeitintervall in S_A bestimmt man schließlich durch Projektion dieser Strecke auf die $ct^{(A)}$ -Achse. Gleichung 31.32 wird nicht benötigt, da das Ereignis sich am selben Ort $x^{(B)}$ in S_B abspielt. Zur Vereinfachung und ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $x^{(B)} = 0$ setzen.

Lösung: 1. Berechnen Sie die Lage der Koordinatenachsen von S_B im Koordinatensystem von S_A mit Gleichung 31.30: $\tan \theta = 0,6 \Rightarrow \theta = 31^\circ$

2. Zeichnen Sie die Achsen mit dem Ergebnis aus Schritt 1 in ein Minkowski-Diagramm ein:

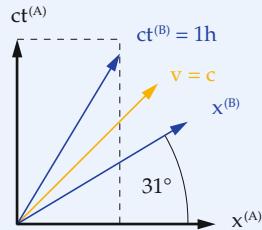


Abbildung 31.17 Minkowski-Diagramm mit den Werten aus Schritt 1.

3. Legen Sie das Zeitintervall von einer Stunde auf der $ct^{(B)}$ -Achse fest (Abbildung 31.17):
4. Berechnen Sie die entsprechende Länge des Zeitintervalls in S_A ; nutzen Sie dazu den Umrechnungsfaktor aus Gleichung 31.31: $ct^{(B)} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \cdot 1 \text{ h} = 1,46 \text{ h}$
5. Projizieren Sie dieses Zeitintervall nun auf die $ct^{(A)}$ -Achse, um das Endergebnis in S_A zu erhalten: $ct^{(A)} = ct^{(B)} \cos \theta = 1,46 \text{ h} \cos 31^\circ = \boxed{1,25 \text{ h}}$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis aus Schritt 5 stimmt mit dem Ergebnis aus Beispiel 31.2 überein, d.h., die Lorentz-Transformation liefert das gleiche Ergebnis wie die geometrische Konstruktion im Minkowski-Diagramm. ■

31.9 *Die allgemeine Relativitätstheorie

Einstins Verallgemeinerung der Relativitätstheorie auf Nicht-inertialsysteme, die er im Jahre 1916 veröffentlichte, ist als allgemeine Relativitätstheorie bekannt. Sie ist in der mathematischen Formulierung viel komplizierter als die spezielle Relativitätstheorie, und es gibt deutlich weniger Möglichkeiten, sie zu überprüfen. Sie hat jedoch immense Bedeutung für unser physikalisches Weltbild. Dieser Bedeutung wegen wollen wir hier zumindest eine kurze, qualitative Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie geben.

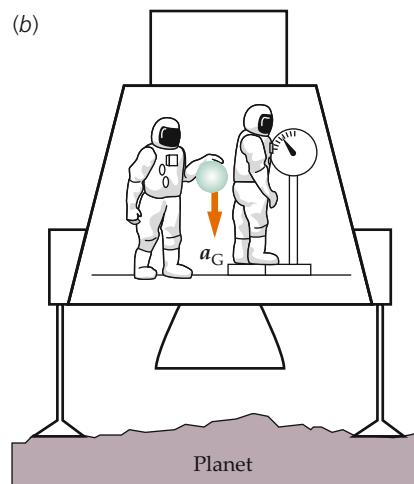
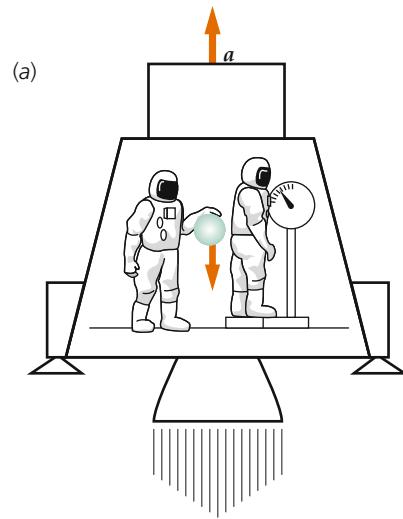


Abbildung 31.18 Die Ergebnisse von Experimenten in einem gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem (a) lassen sich nicht von denen in einem gleichförmigen Gravitationsfeld (b) unterscheiden, falls die Beschleunigung a und das Gravitationsfeld a_G denselben Betrag haben.

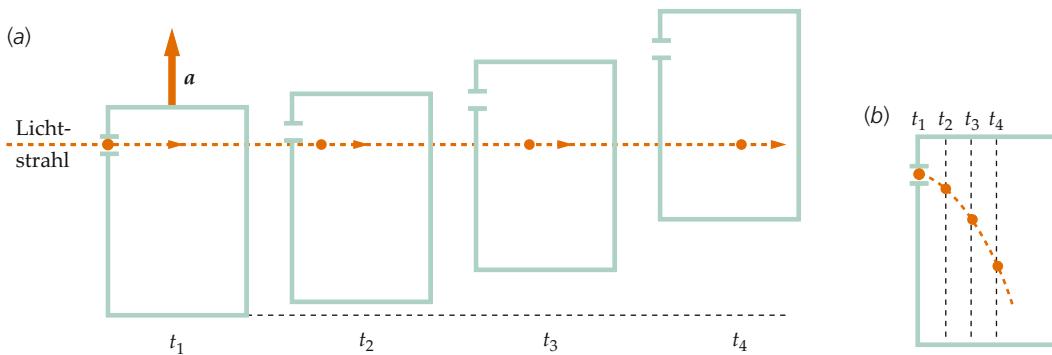


Abbildung 31.19 a) Lichtstrahl, der sich geradlinig durch eine Kapsel bewegt, die relativ zu einem in der Nähe befindlichen Bezugssystem im freien Fall gleichmäßig beschleunigt wird. Eingezeichnet sind die Positionen des Lichtstrahls zu gleich weit auseinander liegenden Zeitpunkten t_1 , t_2 , t_3 und t_4 . b) Im Bezugssystem der Kapsel bewegt sich der Lichtstrahl entlang einer parabolischen Bahn, wie es ein horizontal geworfener Ball tun würde. Die Vertikalbewegung ist zur Verdeutlichung stark übertrieben dargestellt.

Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ist das **Äquivalenzprinzip**:

Ein homogenes Gravitationsfeld ist zu einem gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem völlig äquivalent.

ÄQUIVALENZPRINZIP

Diesem Prinzip begegnet man wegen der augenscheinlichen Äquivalenz von schwerer und träger Masse bereits in der Newton'schen Mechanik. In einem Gravitationsfeld erfahren alle Körper unabhängig von ihrer Masse dieselbe Beschleunigung a_G , da die Gravitationskraft proportional zur (schweren) Masse ist, wohingegen die Beschleunigung umgekehrt proportional zur (trägen) Masse ist. Betrachten wir dazu eine Raumkapsel, die sich weit weg von jeglicher Materie befindet und einer gleichförmigen Beschleunigung a unterliegt, wie es in Abbildung 31.19a gezeigt ist. Im Inneren der Kapsel kann kein mechanisches Experiment durchgeführt werden, das einen Hinweis darauf liefern würde, ob die Kapsel im leeren Raum beschleunigt wird oder in einem gleichförmigen Gravitationsfeld $a_G = -a$ ruht, wie in Abbildung 31.19b gezeigt (oder sich in diesem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt). In beiden Fällen werden Gegenstände, die in der Kapsel fallen gelassen werden, mit der Beschleunigung $a_G = -a$ zu Boden fallen. Messen Personen im Inneren der Kapseln ihr Gewicht mit einer Federwaage, so ist das Ergebnis ebenfalls in beiden Fällen identisch, nämlich $ma = ma_G$.

Einstein ging davon aus, dass das Äquivalenzprinzip in der gesamten Physik, nicht nur in der Mechanik, gilt. Er sah es als gegeben an, dass kein wie auch immer geartetes Experiment zwischen gleichmäßig beschleunigter Bewegung und der Anwesenheit eines Gravitationsfelds unterscheiden kann.

Eine der ersten Schlussfolgerungen aus dem Äquivalenzprinzip, die experimentell überprüft wurde, war die Ablenkung von Licht in einem Gravitationsfeld. In einem Raumgebiet ohne Gravitationsfeld bewegt sich ein Lichtstrahl geradlinig mit der Geschwindigkeit c . Das Äquivalenzprinzip sagt uns, dass

es ein solches Raumgebiet ohne Gravitationsfeld nur in einer Kapsel gibt, die sich im freien Fall befindet. Betrachten wir also eine Kapsel, die relativ zu einem in der Nähe befindlichen Bezugssystem im freien Fall beschleunigt wird, und einen Lichtstrahl, der in diese Kapsel eintritt (Abbildung 31.19). Abbildung 31.19a zeigt aufeinanderfolgende Positionen der Kapsel nach jeweils gleichen Zeitintervallen. Da die Kapsel beschleunigt wird, vergrößert sich die zurückgelegte Distanz in jedem Zeitintervall. Aus Sicht eines Beobachters im Inneren der Kapsel beschreibt das Licht daher eine Parabel, wie in Abbildung 31.19b gezeigt. Nach dem Äquivalenzprinzip gibt es jedoch keine Möglichkeit, zwischen einem beschleunigten Volumen und einem in einem gleichförmigen Gravitationsfeld ruhenden bzw. sich gleichförmig bewegenden Volumen zu unterscheiden. Wir schließen daraus, dass das Licht genau wie ein massebehafteter Körper in einem Gravitationsfeld beschleunigt wird. In der Nähe der Erdoberfläche beispielsweise wird das Licht eine Beschleunigung von $9,81 \text{ m/s}^2$ erfahren. Wegen der enormen Geschwindigkeit des Lichts ist dieser Effekt allerdings nur schwer zu messen. So fällt ein Lichtstrahl über eine Distanz von 3000 km, für die er rund 0,01 s braucht, nur um etwa 0,5 mm. Einstein wies darauf hin, dass die Ablenkung von Licht in einem Gravitationsfeld zu beobachten sein müsste, wenn sich Licht von einem weit entfernten Stern nahe an der Sonne vorbeibewegt, wie es in Abbildung 31.20 gezeigt ist. Wegen der Helligkeit der Sonne kann diese Ablenkung normalerweise nicht beobachtet werden, und eine Messung dieses Effekts erfolgte erstmalig im Jahre 1919 während einer Sonnenfinsternis. Durch diesen Beweis seiner allgemeinen Relativitätstheorie wurde Einstein weltberühmt.

Eine weitere Folgerung aus dem Äquivalenzprinzip, die wir hier nicht im Detail diskutieren wollen, ist die Drehung des Merkurperihels um etwa $0,01^\circ$ pro Jahrhundert – ein Effekt, der bereits lange bekannt war, für den es jedoch vor der allgemeinen Relativitätstheorie keine Erklärung gab.

Eine dritte Folgerung aus der allgemeinen Relativitätstheorie betrifft die Änderung von Zeitintervallen und Lichtfrequenzen

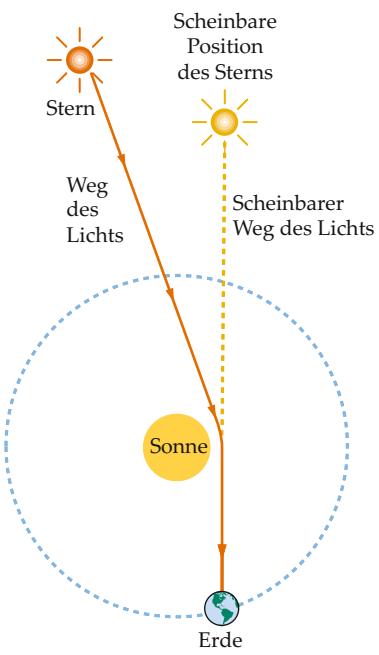


Abbildung 31.20 Die (stark übertrieben dargestellte) Ablenkung eines Lichtstrahls durch das Gravitationsfeld der Sonne.

in einem Gravitationsfeld. In Kapitel 5 haben wir gesehen, dass zwei Massen m und m_1 im Abstand r die folgende potenzielle Energie haben:

$$E_{\text{pot}} = -\Gamma \frac{m m_1}{r},$$

wobei Γ die Gravitationskonstante ist und der Nullpunkt der Energieskala so gewählt wurde, dass die Energie für zwei unendlich weit voneinander entfernte Massen gleich null ist. Die potenzielle Energie pro Masse im Gravitationsfeld einer Masse m heißt *Gravitationspotenzial* ϕ :

$$\phi = -\Gamma \frac{m}{r}. \quad (31.33)$$

Entsprechend der allgemeinen Relativitätstheorie gehen Uhren in Gebieten mit niedrigem Gravitationspotenzial langsamer. (Aufgrund des negativen Vorzeichens in Gleichung 31.33 wird das Gravitationspotenzial umso stärker negativ und damit umso niedriger, je geringer der Abstand der Masse ist.) Das Zeitintervall Δt_1 zwischen zwei Ereignissen sei mit einer Uhr gemessen worden, die sich an einem Punkt mit dem Gravitationspotenzial ϕ_1 befindet. Δt_2 sei das Zeitintervall zwischen denselben zwei Ereignissen, aber mit einer anderen Uhr an einem Punkt mit Gravitationspotenzial ϕ_2 gemessen. Dann sagt die allgemeine Relativitätstheorie für die relative Differenz der Zeitintervalle die folgende Beziehung voraus:

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{1}{c^2} (\phi_2 - \phi_1). \quad (31.34)$$

Da der Unterschied zwischen den Zeitintervallen gewöhnlich sehr klein ist, spielt es keine Rolle, durch welches der Zeitintervalle wir auf der linken Seite der Gleichung dividieren.

Eine Uhr in einem Gebiet mit niedrigerem Gravitationspotenzial geht nach Gleichung 31.34 langsamer als eine Uhr in einem Gebiet mit höherem (also betragsmäßig kleinerem) Gravitationspotenzial. Ein angeregtes Atom, das aufgrund von Elektronenübergängen Licht einer bestimmten Wellenlänge aussendet, kann als Uhr angesehen werden. Die Frequenz des Lichts ist in einem Gebiet mit niedrigem Potenzial, wie z. B. in der Nähe der Sonne, kleiner als in einem Gebiet mit höherem Potenzial, wie z. B. in der Nähe der Erde. Diese Verschiebung zu einer kleineren Frequenz und damit größeren Wellenlänge heißt **Gravitationsrotverschiebung**.

Als letztes Beispiel für die Vorhersagen der allgemeinen Relativitätstheorie wollen wir die **Schwarzen Löcher** erwähnen, deren Existenz zuerst von J. Robert Oppenheimer und Hartland Snyder im Jahre 1939 vorhergesagt wurde. Entsprechend der allgemeinen Relativitätstheorie kann die Gravitationskraft bei Körpern extrem hoher Dichte, beispielsweise Sternen großer Masse am Ende ihrer Entwicklung, so groß sein, dass innerhalb eines kritischen Radius nichts, was einmal dorthin gelangt ist, je wieder entweichen kann, nicht einmal Licht oder andere elektromagnetische Strahlung. (Die Wirkung eines Schwarzen Lochs auf Objekte außerhalb dieses kritischen Radius ist die einer ganz normalen Masse.) Die bemerkenswerteste Eigenschaft Schwarzer Löcher besteht darin, dass keinerlei Information aus dem Inneren nach außen gelangen kann. Wie auch an manchen anderen Stellen in der Physik liefert eine einfache, streng genommen nicht ganz korrekte Rechnung das richtige Ergebnis für die Beziehung zwischen der Masse und dem kritischen Radius eines Schwarzen Lochs. Entsprechend der Newton'schen Mechanik ist die Fluchtgeschwindigkeit eines Teilchens von der Oberfläche eines Planeten oder Sterns mit der Masse m und dem Radius r durch Gleichung 4.27 gegeben:

$$v_F = \sqrt{2 \Gamma \frac{m}{r}}.$$

Setzen wir die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit und lösen nach dem Radius auf, so erhalten wir den kritischen Radius r_S , der auch **Schwarzschild-Radius** genannt wird:

$$r_S = 2 \Gamma \frac{m}{c^2}. \quad (31.35)$$

Wenn es sich bei einem Körper mit der fünffachen Masse der Sonne (theoretisch die kleinstmögliche Masse für ein Schwarzes Loch) um ein Schwarzes Loch handeln soll, muss er einen Radius von etwa 15 km haben. Da von Schwarzen Löchern keine Strahlung ausgeht und ihr Radius wohl sehr klein ist, lassen sie sich nur schwer beobachten. Die besten Chancen für eine Beobachtung hat man bei Doppelsternsystemen, in denen das Schwarze Loch Begleiter eines normalen Sterns ist. Die beiden Sterne kreisen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, und durch das Gravitationsfeld des Schwarzen Lochs wird Gas

von dem normalen Stern in das Schwarze Loch hineingezogen. Aus Gründen der Drehimpulserhaltung verschwindet das Gas jedoch nicht geradewegs in dem Schwarzen Loch. Es umkreist das Loch vielmehr auf einer Scheibe, der sogenannten Akkretionsscheibe, während es langsam immer näher an das Schwarze Loch herangezogen wird. Dabei emittiert es Röntgenstrahlen, weil seine Temperatur, während es immer weiter nach innen gezogen wird, auf mehrere Millionen Kelvin ansteigt. Oft kann man auch die Masse des vermuteten Schwarzen Lochs abschätzen. Eine geschätzte Masse von mindestens der fünfachen Sonnenmasse in Verbindung mit der Abstrahlung von Röntgenstrahlen lässt stark darauf schließen, dass es sich bei dem unsichtbaren Begleiter um ein Schwarzes Loch handelt. Auch in den Zentren von Galaxien gibt es Schwarze Löcher mit extrem großen Massen. Im Zentrum der Milchstraße beispielsweise befindet sich ein Schwarzes Loch mit der enormen Masse von ca. zwei Millionen Sonnenmassen.



Diese extrem genaue Wasserstoffmaseruhr wurde 1976 in einem Satelliten auf eine Erdumlaufbahn gebracht. Die von dieser Uhr angezeigte Zeit wurde mit der einer identischen Uhr auf der Erde verglichen. In Übereinstimmung mit den Vorhersagen der allgemeinen Relativitätstheorie verlor die Uhr auf der Erde, wo das Gravitationspotenzial niedriger war, verglichen mit der Uhr, die die Erde in einer Höhe von ca. 10 000 m umkreiste, in jeder Sekunde etwa $4,3 \cdot 10^{-10}$ s.
(© NASA.)

⌚ Im Kontext: Gravitationslinsen – ein Fenster zum Universum

Im Jahr 1919 machte der britische Astronom und Physiker Arthur Eddington (1882–1944) während einer totalen Sonnenfinsternis fotografische Aufnahmen von sonnennahen Sternen, die auf den Fotoplatten an Positionen zu sehen waren, an denen sie sich nach der klassischen Theorie nicht befinden sollten. Offenbar war das von den Sternen ausgehende Licht durch die Sonne „umgelenkt“ worden. Damit wurde eine der wichtigsten Vorhersagen von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie bestätigt, nämlich dass der Raum durch schwere Körper gekrümmt wird. Die Krümmung hängt von der Masse des Körpers ab.

Diese Lichtablenkung galt noch viele Jahre danach eher als eine Kuriosität. Erst Jahrzehnte später änderte sich das, als die Astronomen sogenannte Quasare (quasistellare Objekte) entdeckten und genauer untersuchten: Objekte von der Größe eines Sterns, die aber mehr Licht abstrahlen als eine ganze Galaxie. Im Jahr 1979 wurden „Quasarzwillinge“ beobachtet, die sich als Doppelbilder eines entfernten Quasars erklären ließen. Da das Licht des Quasars auf seinem Weg zur Erde durch einen Galaxienhaufen¹ abgelenkt worden war, kam es zum Doppelbild.



Gravitationslinsen. Der rötlich-weiße Fleck in der Mitte der Bilder ist jeweils eine elliptische Riesengalaxie. Das Licht, das sie als dünner blauer Ring umgibt, stammt von Galaxien, die doppelt so weit entfernt sind und von der Erde aus gesehen direkt hinter diesen Riesengalaxien liegen. Das Licht der entfernteren Galaxien wird durch das Gravitationsfeld der Riesengalaxien zu kreisförmigen Ringen fokussiert. (© NASA, ESA, A. (Bolton Harvard-Smithsonian CfA) & the SLACS Team)

Galaxienhaufen sind sehr massereiche Objekte und krümmen den Raum in ihrer Umgebung. Dadurch krümmt sich auch das Licht von entfernten Objekten, das auf seinem Weg zur Erde an ihnen vorbeistreicht oder durch sie hindurchtritt. Diese Raumkrümmung lässt solche massereichen Objekte wie eine *Gravitationslinse* wirken, die Licht bündeln oder in mehrere Bilder fokussieren kann. Gravitationslinsen können das Licht von weit entfernten Objekten aufhellen, so wie auch das durch einen Wassertropfen fallende Licht aufgehellt erscheinen kann. Dieser Effekt von Gravitationslinsen wird heute ausgenutzt, um sehr weit entfernte Quasare und Galaxien zu untersuchen. Da die Linsen schwaches Licht von den fernsten und ältesten Objekten im Universum bündeln, bieten sie eine Möglichkeit, das Alter und die Ausdehnung des Universums genauer zu bestimmen².

Die Wirkung der Gravitationslinsen lässt sich anhand der Bilder des entfernten Objekts berechnen. Um eine genaue Beschreibung eines Objekts zu erhalten, müssen die Entfernung, die Masse und die Form der dazwischenliegenden Gravitationslinse bestimmt werden. Eine gleichförmige kugelsymmetrische Massenverteilung zwischen dem entfernten Objekt und der Erde führt zu einem gleichförmigen kugelsymmetrischen Bild – einem Einstein-Ring. Dessen Werte lassen sich leicht berechnen.^{3,4} Allerdings treten weit häufiger Mehrfachbilder⁵ oder unregelmäßige

Bilder auf als vollkommene Ringe. Die stärksten Gravitationslinsen gehen auf Galaxienhaufen zurück.⁶ Sie sind nur schwer in einem Modell zu beschreiben, und ihre beobachtbare Leuchtkraft lässt auf unsichtbare Materie in ihrer Umgebung schließen, die durch Streuung einen „Lichthof“ oder Halo erzeugt. Gravitationslinsen bestätigen damit, dass der größte Teil des Universums aus *dunkler Materie* besteht, d. h. Materie, die keine nachweisbare Energie abstrahlt.^{7,8}

Eine schwache Linse, eine sogenannte *Mikrolinse*, erzeugt keine Mehrfachbilder von entfernten Objekten, sondern hellt das Bild eines bekannten Objekts zeitweise auf. Dieser Typ von Gravitationslinsen wird durch einen sogenannten Macho verursacht (*massive compact halo object*), ein kompaktes massereiches Halo-Objekt, das sich zwischen das bekannte Objekt und die Erde schiebt.⁹ Aus solchen Helligkeitsänderungen kann man etliche Rückschlüsse auf die Form und die Masse des Machos ableiten. Eine Mikrolinse entpuppte sich beispielsweise als Roter Zwerg, der von dem bislang kleinsten bekannten Planeten außerhalb unseres Sonnensystems umkreist wurde.¹⁰

Gravitationslinsen haben die Entdeckung interessanter Objekte ermöglicht – von Galaxien, die nur eine Milliarde Jahre jünger sind als das Universum¹¹ bis hin zu den kleinsten bekannten Objekten außerhalb unseres Sonnensystems – und so neue Fragen über die Masse und Energie in unserem Universum aufgeworfen. Damit hat sich der Kreis geschlossen – die Krümmung des Lichts dient heute zur Messung von Objekten, die bislang unsichtbar waren.

- Walsh, D., Carswell, R. F. und Weymann, R. J., „0957 + 561 A, B – Twin Quasistellar Objects or Gravitational Lens“, *Nature*, 31. Mai 1979, Bd. 279, S. 381–384.
- Irion, R., „Through a Lens, Deeply“, *Science*, 24. Jan. 2003, Bd. 299, S. 500+.
- Greene, K., „Ring Around the Galaxis“, *Science News*, 25. Nov. 2005, S. 342.
- Liu, C., „The Quest for the Golden Lens“, *Natural History*, Sep. 2003, S. 64–66.
- Rusin, D., Kochanek, C. S., Norbury, M., Falco, E. E., Impey, C. D., Lehár, J., McLeod, B. A., Rix, H.-W., Keeton, C. R., Muñoz, J. A. und Peng, C. Y., „B1359+154A: A Six-Image Lens Produced by a $z \approx 1$ Compact Group of Galaxies“, *Astrophysical Journal*, 20. Aug. 2003, Bd. 557, S. 594–604.
- Abell, G. O., Corwin, H. G. und Olowin, R. P., „A Catalog of Rich Clusters of Galaxies“, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 1989, Bd. 70, S. 1–138.
- Koopmans, L. V. E. und Blandford, R. D., „Gravitational Lenses“, *Physics Today*, Jun. 2004, S. 45–51.
- Seife, Charles, „The Intelligent Noncosmologist’s Guide to Space-time“, *Science*, Mai 2002, Bd. 296, S. 1418–1421.
- Mancini, L., Jetzer, Ph. und Scarpetta, G., „Compact Dark Objects as Gravitational Microlensing towards the Large Magellanic Cloud“, in *Highlights in Condensed Matter Physics*, A. Avella et al. (Hrsg.), New York: American Institute of Physics, 2003, S. 339–347.
- Cowan, R., „Tiny Planet Orbits Faraway Star“, *Science News*, 25. Feb. 2006, S. 126.
- Cowan, Ron, „A Galaxy that Goes the Distance“, *Science News*, 24. Apr. 2004, S. 270.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Die Einstein'schen Postulate	Die spezielle Relativitätstheorie basiert auf den beiden Einstein'schen Postulaten. Alle Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie lassen sich aus diesen Postulaten herleiten.
Erstes Postulat	Absolute gleichförmige Bewegung kann man nicht messen.
Zweites Postulat	Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.
Zweites Postulat (alternative Formulierung):	Jeder Beobachter misst für die Lichtgeschwindigkeit c denselben Wert.
2. Die Lorentz-Transformation	$x^{(A)} = \gamma (x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}), \quad y^{(A)} = y^{(B)}, \quad z^{(A)} = z^{(B)} \quad (31.9)$ $t^{(A)} = \gamma \left(t^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x^{(B)}}{c^2} \right) \quad (31.10)$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v_B^{(A)}}{c} \quad (31.7)$
Inverse Transformation	$x^{(B)} = \gamma (x^{(A)} - v_B^{(A)} t^{(A)}), \quad y^{(B)} = y^{(A)}, \quad z^{(B)} = z^{(A)} \quad (31.11)$ $t^{(B)} = \gamma \left(t^{(A)} - \frac{v_B^{(A)} x^{(A)}}{c^2} \right) \quad (31.12)$
3. Zeitdilatation	Das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen, die in einem Bezugssystem am selben Ort stattfinden, heißt Eigenzeitintervall Δt_{eigen} zwischen den beiden Ereignissen. In einem anderen Bezugssystem, in dem dieselben Ereignisse an unterschiedlichen Orten stattfinden, ist das Zeintervall Δt zwischen den Ereignissen um den Faktor γ gedehnt:
	$\Delta t = \gamma \Delta t_{\text{eigen}}. \quad (31.13)$
4. Längenkontraktion	Die Länge eines Körpers, gemessen in dem Bezugssystem, in dem der Körper ruht, heißt Eigenlänge l_{eigen} . In einem anderen Bezugssystem hat der Körper parallel zur Bewegungsrichtung des Körpers gemessen die Länge
	$l = \frac{1}{\gamma} l_{\text{eigen}}. \quad (31.14)$
5. Der relativistische Doppler-Effekt	$v^{(A)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} v^{(B)} \quad \text{für kleiner werdenden Abstand} \quad (31.16a)$ $v^{(A)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} v^{(B)} \quad \text{für größer werdenden Abstand} \quad (31.16b)$
6. Uhrensynchronisation und Gleichzeitigkeit	Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, sind in einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum ersten bewegt, typischerweise nicht gleichzeitig. Zwei in ihrem Ruhesystem synchronisierte Uhren sind in einem anderen Bezugssystem, in dem sie sich bewegen, nicht synchron. Die führende Uhr geht in diesem Fall um die Zeit $\Delta t = \Delta x_{\text{eigen}} \frac{v_B^{(A)}}{c^2}$ vor. Hierbei ist Δx_{eigen} die Eigenlänge des Abstands zwischen den beiden Uhren.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Geschwindigkeitstransformation	$v_x^{(A)} = \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2}$ (31.18a) $v_y^{(A)} = \frac{v_y^{(B)}}{\gamma (1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2)}$ (31.18b) $v_z^{(A)} = \frac{v_z^{(B)}}{\gamma (1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)} / c^2)}$ (31.18c)
Inverse Geschwindigkeitstransformation	$v_x^{(B)} = \frac{v_x^{(A)} - v_B^{(A)}}{1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)} / c^2}$ (31.19a) $v_y^{(B)} = \frac{v_y^{(A)}}{\gamma (1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)} / c^2)}$ (31.19b) $v_z^{(B)} = \frac{v_z^{(A)}}{\gamma (1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)} / c^2)}$ (31.19c)
8. Relativistischer Impuls	$p = \frac{m v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m v$ (31.20) Dabei ist m die Ruhemasse des Teilchens.
9. Relativistische Energie	Kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - mc^2 = \gamma mc^2 - E_0$ (31.22) Ruheenergie $E_0 = mc^2$ (31.23) Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + mc^2 = \gamma mc^2$ (31.24)
10. Nützliche Formeln für Geschwindigkeit, Energie und Impuls	$\frac{v}{c} = \beta = \frac{pc}{E}$ (31.25) $E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2$ (31.26) $E \approx pc \quad \text{für } E \gg mc^2$ (31.27)
11. *Minkowski-Diagramm	Minkowski-Diagramme nutzen geometrische Konstruktionen, um die Transformationen zwischen Inertialsystemen zu beschreiben. Sie liefern die selben Ergebnisse wie die Lorentz-Transformation. Der Winkel θ zwischen den Koordinatenachsen der beiden Bezugssysteme lässt sich bestimmen durch $\tan \theta = \beta$, (31.32) und der Umrechnungsfaktor für die Länge einer Strecke (oder eines Zeitintervalls) im bewegten Bezugssystem gemessen im ruhenden System beträgt $\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$.

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Es würde sich nur die Ruhemasse der Feder ändern.

Lösungen der Übungen

1. 1,67 h
2. a) $\gamma = 1,49$, b) $p = 1,04 \cdot 10^3 \text{ MeV}/c$, c) $v = 0,74 c$
3. a) $E_{\text{kin},E} = E_E - m_E c^2 = 9,00 \text{ MeV} - 7,75 \text{ MeV} = 1,25 \text{ MeV}$,
 b) $\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},E} - E_{\text{kin},A} = 1,25 \text{ MeV} - 3,00 \text{ MeV} = -1,75 \text{ MeV}$, c) $(\Delta m) c^2 = (m_E - m_A) c^2 = 7,75 \text{ MeV} - (2,00 \text{ MeV} + 4,00 \text{ MeV}) = 1,75 \text{ MeV} = -\Delta E_{\text{kin}}$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

31.1 • Die Gesamtenergie eines Teilchens der Masse m , das sich mit der Geschwindigkeit $v \ll c$ bewegt, ist näherungsweise
 a) $mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$, b) $\frac{1}{2}mv^2$, c) cmv , d) mc^2 , e) $\frac{1}{2}cmv$?

31.2 • Richtig oder falsch? a) Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen gleich. b) Kein Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen ist kürzer als das Eigenzeitintervall zwischen den beiden Ereignissen. c) Absolute Bewegung kann anhand der Längenkontraktion festgestellt werden. d) Das Lichtjahr ist eine Längeneinheit. e) Gleichzeitige Ereignisse müssen am selben Ort stattfinden. f) Finden zwei Ereignisse in einem Bezugssystem nicht gleichzeitig statt, so können sie auch in keinem anderen Bezugssystem gleichzeitig stattfinden. g) Sind zwei Teilchen durch starke Anziehungskräfte fest miteinander verbunden, so ist die Masse dieses Systems kleiner als die Summe aus den Massen der voneinander getrennten Einzelteilchen.

31.3 • Die Lorentz-Transformation liefert für die Koordinaten y und z dasselbe Ergebnis wie die klassische Physik: $y^{(A)} = y^{(B)}$ und $z^{(A)} = z^{(B)}$. Die relativistische Geschwindigkeitstransformation hingegen führt nicht auf das klassische Ergebnis $v_y^{(A)} = v_y^{(B)}$ und $v_z^{(A)} = v_z^{(B)}$. Erklären Sie, warum das so ist.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

31.4 •• Die Sonne strahlt mit einer Leistung von etwa $4 \cdot 10^{26}$ W. Nehmen Sie an, dass die Energie in einer Reaktion erzeugt wird, deren Nettoeffekt die Verschmelzung von vier Protonen zu einem ${}^4\text{He}$ -Kern ist, wobei pro erzeugtem Heliumkern 25 MeV an Energie frei werden, die in den Weltraum abgestrahlt werden. Berechnen Sie den Massenverlust der Sonne pro Tag.

Zeitdilatation und Längenkontraktion

31.5 • Ein Raumschiff fliegt mit einer Geschwindigkeit von $2,7 \cdot 10^8$ m/s zu einem 35 Lichtjahre entfernten Stern. Wie lange braucht das Raumschiff a) aus Sicht eines Beobachters auf der Erde, b) aus Sicht eines Beobachters im Raumschiff, um zu dem Stern zu gelangen?

31.6 • Verwenden Sie die Binomialentwicklung

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$

$$\approx 1 + nx \quad \text{für} \quad x \ll 1,$$

um folgende Formeln für den Fall $v \ll c$ herzuleiten: a) $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, b) $\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$, c) $\gamma - 1 \approx 1 - \frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$.

31.7 •• Im Linearbeschleuniger an der Stanford University werden kleine Pakete aus Elektronen und Positronen aufeinander geschossen. Im Laborsystem hat jedes Paket eine Länge von etwa 1,0 cm und einen Durchmesser von etwa 10 μm. Im Kollisionsgebiet besitzt jedes Teilchen eine Energie von 50 GeV, und die Elektronen und Positronen bewegen sich in entgegengesetzter Richtung. a) Wie lang und wie breit ist jedes Paket in seinem Ruhesystem? b) Wie groß muss die Ruhelänge des Beschleunigers mindestens sein, damit beide Enden eines Pakets in seinem eigenen Ruhesystem noch gleichzeitig in den Beschleuniger passen? (Die derzeitige Eigenlänge des Beschleunigers beträgt weniger als 1000 m.) c) Welche Länge hat ein Positronenpaket im Ruhesystem des Elektronenpakets?

Die Lorentz-Transformation, Uhrensynchronisation und Gleichzeitigkeit

31.8 •• Zeigen Sie, dass die relativistischen Transformationsgleichungen für x , t und v_x in die Gleichungen der Galilei-Transformation übergehen, wenn $v_B^{(A)} \ll c$ ist.

31.9 •• Im Bezugssystem S findet das Ereignis B 2,0 μs nach dem Ereignis A statt. Ereignis A findet am Ursprung statt, Ereignis B auf der x -Achse bei $x = 1,5$ km. Wie schnell und in welche Richtung muss sich ein Beobachter bewegen, damit die Ereignisse A und B für ihn gleichzeitig stattfinden? Kann es einen Beobachter geben, für den das Ereignis B vor dem Ereignis A stattfindet?

31.10 ••• Die Ereignisse 1 und 2 sind im Bezugssystem S_A durch die räumliche Distanz $\Delta x = x_2^{(A)} - x_1^{(A)}$ und das Zeitintervall $\Delta t = t_2^{(A)} - t_1^{(A)}$ voneinander getrennt. a) Zeigen Sie mithilfe der Lorentz-Transformation, dass der zeitliche Abstand in einem Bezugssystem S_B , das sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ längs der x -Achse relativ zu S_A bewegt, $t_2^{(B)} - t_1^{(B)} = \gamma(\Delta t - v_B^{(A)}\Delta x/c^2)$ beträgt. b) Zeigen Sie, dass die Ereignisse im Bezugssystem S_B nur dann gleichzeitig stattfinden können, wenn Δx größer als $c\Delta t$ ist. c) Wenn eines der Ereignisse die Ursache für das andere ist, muss die Distanz Δx kleiner als $c\Delta t$ sein, da ein Signal mindestens die Zeit $\Delta x/c$ braucht, um in S_A von $x_1^{(A)}$ nach $x_2^{(A)}$ zu gelangen. Zeigen Sie, dass für den Fall $\Delta x < c\Delta t$ in allen Bezugssystemen $t_2^{(B)} > t_1^{(B)}$ gilt. Das bedeutet: Wenn die Ursache der Wirkung in einem Bezugssystem vorausgeht, so ist dies auch in allen anderen Bezugssystemen der Fall. d) Nehmen Sie an, ein Signal kann sich mit der Geschwindigkeit $c' > c$ ausbreiten, sodass im Bezugssystem S_A die Ursache der Wirkung um $\delta t = \Delta x/c'$ vorausgeht. Zeigen Sie, dass in diesem Fall ein Bezugssystem existiert, dessen Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist und in dem die Wirkung der Ursache vorausgeht.

Die Geschwindigkeitstransformation und der relativistische Doppler-Effekt

31.11 • Zeigen Sie, dass die Doppler-Verschiebung für den Fall $v \ll c$ durch

$$\Delta\nu/\nu \approx \pm v/c$$

angenähert werden kann.

31.12 •• Leiten Sie die Gleichung $\nu^{(A)} = \nu^{(B)} \sqrt{1 - \beta^2}/(1 - \beta)$ (Gleichung 31.16a) für die Frequenz ab, die ein Beobachter misst, wenn er sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ auf die ruhende Quelle der elektromagnetischen Strahlung zu bewegt.

31.13 •• Für Licht, dessen Frequenz in Bezug auf einen gegebenen Beobachter einer Doppler-Verschiebung unterliegt, definieren wir den Rotverschiebungsparameter z als

$$z = \frac{\nu - \nu'}{\nu'}.$$

Dabei ist ν die Frequenz des Lichts, wie sie im Ruhesystem der Quelle gemessen wird, und ν' die Frequenz, wie sie im Ruhesystem des Beobachters gemessen wird. Zeigen Sie, dass die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter für den Fall, dass die Quelle sich geradewegs vom Beobachter entfernt, durch

$$\nu = c \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right)$$

gegeben ist. Dabei ist $u = z + 1$.

Relativistischer Impuls und relativistische Energie

31.14 •• Ein Teilchen mit einem Impuls von $6,00 \text{ MeV}/c$ habe eine Gesamtenergie von $8,00 \text{ MeV}$. a) Welche Masse hat das Teilchen? b) Wie groß ist die Gesamtenergie des Teilchens in einem Bezugssystem, in dem sein Impuls $4,00 \text{ MeV}/c$ beträgt? c) Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Bezugssystemen?

31.15 •• Zeigen Sie, dass gilt:

$$d \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right) = m \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} dv.$$

31.16 •• Ein Antiproton p^- besitzt dieselbe Ruhemasse wie ein Proton und lässt sich in der Reaktion $p + p \rightarrow p + p + p + p^-$ erzeugen. Im Experiment werden im Labor ruhende Protonen mit Protonen der kinetischen Energie $E_{\text{kin}}^{(L)}$ beschossen. $E_{\text{kin}}^{(L)}$ muss dabei so groß sein, dass mindestens ein Betrag von $2mc^2$ an kinetischer Energie in Ruheenergie der beiden Teilchen umgewandelt werden kann. Im Laborsystem kann aufgrund der Impulserhaltung nicht die gesamte kinetische Energie in Ruheenergie umgewandelt werden. Im Schwerpunktsystem der zwei

ursprünglichen Protonen dagegen, in dem sich diese mit gleicher Geschwindigkeit $v^{(S)}$ aufeinander zu bewegen, steht der Umwandlung der gesamten kinetischen Energie in Ruheenergie nichts entgegen. a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v^{(S)}$ der Protonen für den Fall, dass im Schwerpunktsystem die gesamte kinetische Energie gleich $2mc^2$ ist. b) Gehen Sie auf das Laborsystem über, in dem eines der Protonen in Ruhe ist, und berechnen Sie die Geschwindigkeit $v^{(L)}$ des anderen Protons. c) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie des nicht ruhenden Protons im Laborsystem gleich $6mc^2$ ist.

*Minkowski-Diagramme

31.17 • Leiten Sie den Umrechnungsfaktor zwischen den Einheiten der beiden x -Achsen

$$\frac{1 \text{ } x^{(B)} \text{ Einheit}}{1 \text{ } x^{(A)} \text{ Einheit}} = \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}}$$

(Gleichung 31.32) her.

31.18 •• Stellen Sie die Lorentz-Kontraktion eines Stabs der Eigenlänge l in einem Minkowski-Diagramm dar und erläutern Sie anhand des Diagramms, wie ein Beobachter, der relativ zum Stab ruht, und ein Beobachter in einem dazu bewegten Bezugssystem diesen wahrnehmen. Leiten Sie mithilfe geometrischer Konstruktionen im Minkowski-Diagramm die Formel für die Längenkontraktion (Gleichung 31.14) her.

Die allgemeine Relativitätstheorie

31.19 •• Licht, das sich in Richtung eines ansteigenden Gravitationspotenzials ausbreitet, unterliegt einer Rotverschiebung seiner Frequenz. Wie groß ist die Wellenlängenänderung, wenn ein Lichtstrahl der Wellenlänge $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ einen vertikalen Schacht mit einer Höhe von $l = 100 \text{ m}$ hinaufgeschickt wird?

31.20 •• Eine horizontale Drehscheibe rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Auf der Scheibe befinden sich zwei identische Uhren, eine im Mittelpunkt der Scheibe, die andere in einer radialen Entfernung r vom Mittelpunkt. In einem Inertialsystem, in dem die Uhr im Mittelpunkt in Ruhe ist, bewegt sich die zweite Uhr mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$. a) Leiten Sie aus der Formel für die Zeitdilatation ab, dass ein Zeitintervall $\Delta t^{(0)}$ auf der ruhenden Uhr und das dazugehörige Zeitintervall $\Delta t^{(R)}$ auf der bewegten Uhr durch die folgende Beziehung miteinander verknüpft sind, sofern $r\omega \ll c$ ist:

$$\frac{\Delta t^{(R)} - \Delta t^{(0)}}{\Delta t^{(0)}} = - \frac{r^2 \omega^2}{2c^2} \quad \text{für } r\omega \ll c.$$

b) In einem mit der Scheibe mitrotierenden Bezugssystem sind beide Uhren in Ruhe. Zeigen Sie, dass die Uhr im radialen Abstand r vom Mittelpunkt der Scheibe in diesem rotierenden (beschleunigten) Bezugssystem einer Pseudokraft $F^{(R)} =$

$m r \omega^2$ ausgesetzt und dies äquivalent dazu ist, dass zwischen dem Ursprung und einem Punkt im Abstand r eine Differenz im Gravitationspotenzial von $\phi^{(R)} - \phi^{(0)} = -\frac{1}{2} r^2 \omega^2$ besteht. c) Zeigen Sie ausgehend von dieser Potenzialdifferenz, dass die Differenz der Zeitintervalle in diesem Bezugssystem genauso groß ist wie in dem Inertialsystem.

Allgemeine Aufgaben

31.21 • Die mittlere Lebensdauer eines ruhenden Myons beträgt $2,2 \mu\text{s}$. Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Myon bewegen, damit seine mittlere Lebensdauer $46 \mu\text{s}$ beträgt?

31.22 •• Das neutrale Pion π^0 hat eine Masse von $135,0 \text{ MeV}/c^2$ und lässt sich durch einen Proton-Proton-Stoß erzeugen:

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0.$$

Wie groß muss die kinetische Energie mindestens sein, damit beim Stoß zwischen einem bewegten und einem ruhenden Proton ein neutrales Pion (π^0) entstehen kann? (Siehe Aufgabe 31.16.)

31.23 •• Zeigen Sie, dass, wenn $v_x^{(B)}$ und $v_B^{(A)}$ in Gleichung 31.18a beide positiv und kleiner als c sind, auch $v_x^{(A)}$ positiv und kleiner als c ist. (Hinweis: Setzen Sie $v_x^{(B)} = (1 - \varepsilon_1)c$ und $v_B^{(A)} = (1 - \varepsilon_2)c$, wobei ε_1 und ε_2 positive Zahlen kleiner 1 sind.)

31.24 ••• Verwenden Sie die relativistische Impuls- und Energieerhaltung sowie die Beziehung zwischen Energie und Impuls eines Photons, $E = p c$, um zu zeigen, dass ein freies Elektron (ein Elektron, das nicht an einen Atomkern gebunden ist) kein Photon absorbieren oder emittieren kann.

31.25 ••• Ein Teilchen bewege sich mit der Geschwindigkeit v entlang der y -Achse des Bezugssystems S_A . Zeigen Sie, dass für diesen Spezialfall der Impuls und die Energie des Teilchens im Bezugssystem S_B , das sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ entlang der x -Achse bewegt, mit dem Impuls und der Energie in

S_A durch die folgenden Transformationsgleichungen verknüpft sind:

$$\begin{aligned} p_x^{(B)} &= \gamma \left(p_x^{(A)} - \frac{v_B^{(A)} E^{(A)}}{c^2} \right), \\ p_y^{(B)} &= p_y^{(A)}, \\ p_z^{(B)} &= p_z^{(A)}, \\ \frac{E^{(B)}}{c} &= \gamma \left(\frac{E^{(A)}}{c} - \frac{v_B^{(A)} p_x^{(A)}}{c} \right). \end{aligned}$$

Vergleichen Sie diese Gleichungen mit der Lorentz-Transformation für $x^{(B)}$, $y^{(B)}$, $z^{(B)}$ und $t^{(B)}$. Es zeigt sich, dass sich die Größen $p_x^{(A)}$, $p_y^{(A)}$, $p_z^{(A)}$ und $E^{(A)}/c$ in derselben Weise transformieren wie $x^{(A)}$, $y^{(A)}$, $z^{(A)}$ und $c t^{(A)}$.

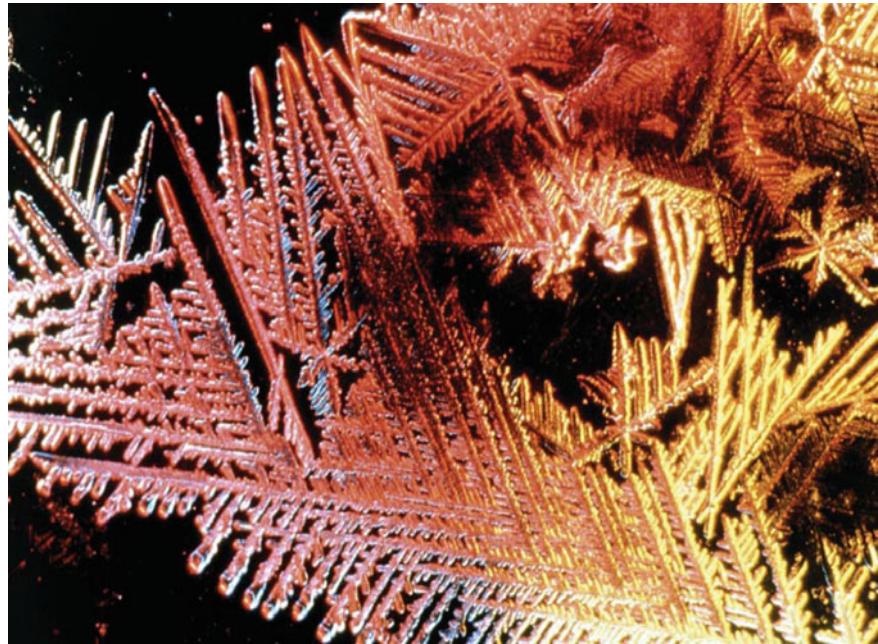
31.26 ••• Die Gleichung für die sphärische Wellenfront eines Lichtpulses, der zum Zeitpunkt $t^{(A)} = 0$ vom Ursprung eines Bezugssystems S_A ausgeht, lautet: $(x^{(A)})^2 + (y^{(A)})^2 + (z^{(A)})^2 - (c t^{(A)})^2 = 0$. Zeigen Sie mithilfe der Lorentz-Transformation, dass ein solcher Lichtpuls auch im Bezugssystem S_B , das sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ längs der x -Achse bewegt, eine sphärische Wellenfront hat, dass in S_B also gilt: $(x^{(B)})^2 + (y^{(B)})^2 + (z^{(B)})^2 - (c t^{(B)})^2 = 0$.

31.27 ••• In Aufgabe 31.26 wurde gezeigt, dass die Größe $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$ in den Bezugssystemen S_A und S_B denselben Wert, nämlich null, annimmt. Eine solche Größe heißt *Lorentz-Invariante*. Nach den Ergebnissen von Aufgabe 31.25 muss auch die Größe $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - E^2/c^2$ eine Lorentz-Invariante sein. Zeigen Sie, dass diese Größe sowohl im Bezugssystem S_A als auch im Bezugssystem S_B den Wert $-m^2 c^2$ annimmt.

31.28 ••• Im Bezugssystem S_A beträgt die Beschleunigung eines Teilchens $\mathbf{a}^{(A)} = a_x^{(A)} \hat{x} + a_y^{(A)} \hat{y} + a_z^{(A)} \hat{z}$. Leiten Sie Ausdrücke für die Beschleunigungskomponenten $a_x^{(B)}$, $a_y^{(B)}$ und $a_z^{(B)}$ des Teilchens in einem Bezugssystem S_B her, das sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ in Richtung der x -Achse relativ zu S_A bewegt.

Quantenmechanik

Teil VIII

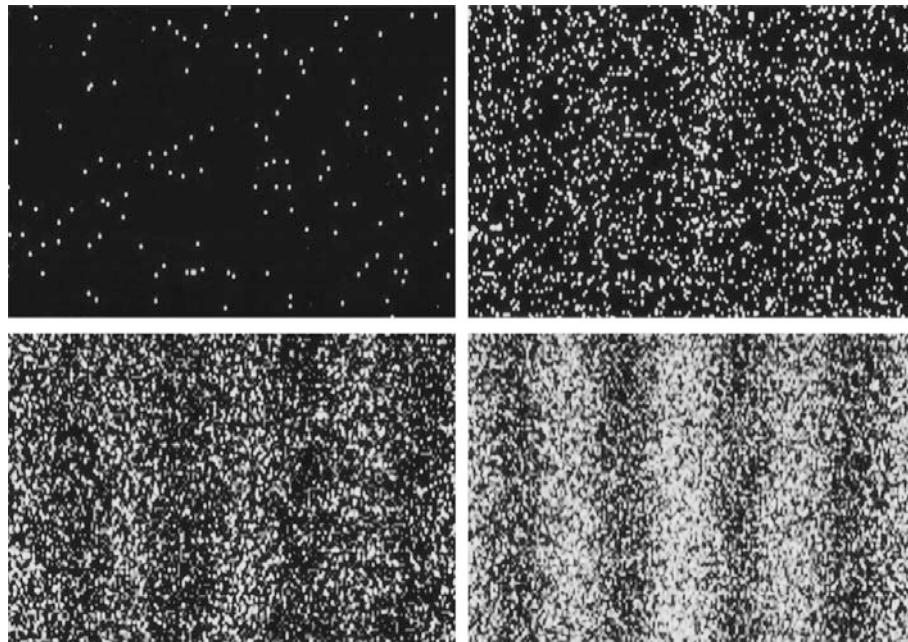


Quantenmechanik

32 Einführung in die Quantenphysik	1161
33 Anwendungen der Schrödinger-Gleichung	1183

Einführung in die Quantenphysik

32



Interferenzmuster, die durch Elektronen hinter einem Doppelspalt erzeugt werden, zeigen umso deutlichere Interferenzstreifen, je höher die Anzahl der durch die Spalte tretenden Elektronen ist – hier sind es 10, 100, 3000 bzw. 70 000 Elektronen. Die Maxima und Minima im Interferenzmuster demonstrieren die Wellennatur des Elektrons. Dagegen demonstriert jeder Punkt am Schirm die Teilchennatur des Elektrons, das mit dem Detektor Energie austauscht. (*Mit freundlicher Genehmigung von Akira Tononmura, Advanced Research Laboratory, Hitachi, Ltd.*)

Einführung in die
Quantenphysik

32.1	Wellen und Teilchen	1162
32.2	Licht als Teilchen: Photonen	1162
32.3	Teilchen als Materiewellen	1167
32.4	Die Schrödinger-Gleichung	1170
32.5	Der Welle-Teilchen-Dualismus	1172
32.6	*Erwartungswerte und klassischer Grenzfall	1173
	Zusammenfassung	1179
	Aufgaben	1181

?

Wie ist die Wellenlänge eines Teilchens zu berechnen?
(Siehe Beispiel 32.4.)

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts nahm man an, dass Licht und andere elektromagnetische Strahlung (z. B. Radiowellen) Wellennatur hat, ähnlich wie der Schall oder andere mechanische Wellen. Dagegen hielt man Elektronen, Protonen, Atome und andere Bausteine der Materie eindeutig für Teilchen. Doch in den ersten 30 Jahren des 20. Jahrhunderts stellte sich durch die überraschenden Entwicklungen in der theoretischen und der experimentellen Physik heraus, dass Licht Energie „portionsweise“, in Quanten, abgibt oder aufnimmt und sich ähnlich verhält wie Teilchen. Umgekehrt beobachtete man bei Elektronenstrahlen, die man sich als Teilchenstrahlen vorstellte, Beugung und Interferenz wie bei Wellen.

In diesem Kapitel untersuchen wir die Wellen- und Teilcheneigenschaften von Licht und Materie anhand des Photoeffekts, der Comptonstreuung und der Beugung am Doppelspalt. Diese experimentell beobachteten Phänomene führten in den 1920er Jahren zur Entwicklung der Quantenphysik, deren Formalismus wir am Ende dieses Kapitels ebenfalls vorstellen. Die Quantenphysik ist die Grundlage für unser Verständnis atomarer und subatomarer Systeme sowie der Eigenschaften der Materie bei sehr tiefen Temperaturen, wie wir in den folgenden Kapiteln noch sehen werden.

32.1 Wellen und Teilchen

In Kapitel 12 haben wir die Ausbreitung von mechanischen Wellen, z. B. von Wasser- oder Schallwellen, kennengelernt. Die Funktion, die die Ausbreitung der Welle in Raum und Zeit beschreibt, wird – wie in Abschnitt 12.1 erläutert – durch eine Wellengleichung und die Randbedingungen festgelegt, die an den Grenzen des Ausbreitungsgebiets gelten. Treffen Wellen auf Hindernisse in ihrem Ausbreitungsgebiet, so können sie reflektiert oder transmittiert werden und sich kohärent überlagern, um Interferenzen zu bilden. Dringen Wellen durch Öffnungen, deren Größe ungefähr der Wellenlänge entspricht, entsteht hinter der Öffnung ein Beugungsmuster. In diesem Fall entstehen nach dem Huygens'schen Prinzip Kugelwellen an der Öffnung, die sich auch in den Schattenbereich hinter der Öffnung ausdehnen und so das breite Beugungsmuster bilden. (Sichtbares) Licht ist, wie wir in Kapitel 27 gelernt haben, eine elektromagnetische Welle und zeigt daher ebenfalls die typischen Wellenphänomene wie Beugung und Interferenz, die wir in Kapitel 30 eingehend untersuchten.

Elektronen, Protonen oder ganze Atome sehen wir als Teilchen an. Sie bewegen sich nach den Newton'schen Gesetzen geradlinig und gleichförmig, wenn keine äußeren Kräfte auf sie einwirken. Interferenz- oder Beugungerscheinungen zeigen sie keine, sondern ändern bei Stößen ggf. nur ihre Richtungen und Geschwindigkeiten. Auch der Austausch von Energie vollzieht sich bei Teilchen und bei Wellen unterschiedlich. Teilchen tauschen Energie bei Zusammenstößen aus, die an bestimmten Punkten in Raum und Zeit geschehen. Dagegen breitet sich die Energie von Wellen im Raum aus und wird kontinuierlich übertragen, wenn die Wellenfronten mit Materie wechselwirken.

Oft kann man die Fortbewegung einer Welle jedoch nicht von der eines Teilchenstrahls unterscheiden: Wenn die Wellenlänge λ sehr klein gegenüber den Öffnungen oder den Abständen von den Kanten von Gegenständen ist, dann sind die Beugungseffekte vernachlässigbar, und die Wellenausbreitung gleicht der eines geradlinigen Strahls. Diesen Grenzfall haben wir in Kapitel 29 als *geometrische Optik* kennengelernt. Dabei sind die Interferenzmaxima und -minima räumlich so nahe beieinander, dass sie nicht erkennbar sind. Die Wechselwirkung einer Welle mit einem Detektor gleicht dabei derjenigen eines Strahls aus unzähligen kleinen Teilchen, von denen jedes eine geringe Energiemenge mit dem Detektor austauscht.

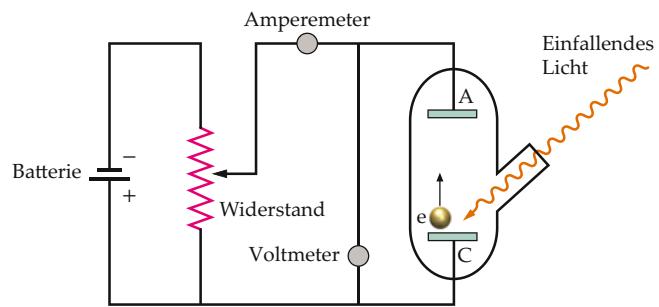


Abbildung 32.1 Schema der Apparatur zur Untersuchung des photoelektrischen Effekts. Licht einer bestimmten Frequenz ν trifft in einer Vakuumkammer auf die Kathode C, die dadurch Elektronen e emittiert (hier ist ein Elektron unmaßstäblich groß eingezeichnet). Der im Amperemeter gemessene Strom ist proportional zur Anzahl der Elektronen, die pro Zeiteinheit auf die Anode A treffen. An die Anode kann eine relativ zur Kathode negative, veränderliche Spannung angelegt werden, um die an kommenden Elektronen mehr oder weniger stark abzustoßen. Dann können nur solche Elektronen die Anode erreichen, die von der Kathode mit einer ausreichend hohen kinetischen Anfangsgenergie emittiert werden. Die Spannung zwischen Anode und Kathode wird allmählich erhöht, bis der Strom null wird. Dies ist dann der Fall, wenn auch die schnellsten, energiereichsten Elektronen die Anode A nicht mehr erreichen.

Die Beugung des Lichts und die Existenz eines Interferenzmusters beim Doppelspaltexperiment beweisen unwiderlegbar, dass das Licht Welleneigenschaften hat. Im frühen 20. Jahrhundert ergaben jedoch bestimmte Versuche, die wir hier nun vorstellen, dass die Lichtenergie nur in bestimmten Portionen („Quanten“) auftritt. Da diese Experimente nicht in den Bereich der geometrischen Optik fielen, ließen sie sich nicht mehr mit dem Wellenbild des Lichts vereinbaren, und es musste eine neue theoretische Grundlage geschaffen werden, diese Phänomene zu erklären. Man bezeichnet diese neue theoretische Basis als **Quantenmechanik**. Sobald wir die Experimente, die zur Einführung der Quantenmechanik entscheidend beitrugen, vorgestellt haben, vergleichen wir in Abschnitt 32.6 die klassische Mechanik mit der Quantenmechanik und zeigen, wie die beiden Theorien miteinander zusammenhängen.

32.2 Licht als Teilchen: Photonen

Der photoelektrische Effekt

Abbildung 32.1 zeigt das Schema einer Apparatur zur Untersuchung des photoelektrischen Effekts. Das Licht, das auf die Kathode C trifft, schlägt Elektronen aus ihr heraus, die zur Anode A gelangen. Dadurch fließt ein elektrischer Strom, der mit dem Amperemeter gemessen wird. Durch Erhöhen einer an die Anode A angelegten negativen Gegenspannung werden Elektronen mit immer höherer kinetischer Energie abgestoßen. Sobald der Strom null ist, kennt man die maximale Bewegungsenergie der von der Kathode emittierten Elektronen.

Der Versuch hat das überraschende Ergebnis, dass diese maximale Elektronenenergie *unabhängig von der Intensität* des

auf die Kathode auftreffenden Lichts ist. Nach den Gesetzen der klassischen Physik wäre zu erwarten, dass die einzelnen Elektronen bei höherer Lichtintensität mehr Energie aufnehmen und daher mit höherer Geschwindigkeit aus dem Metall austreten. Dies ist jedoch nicht der Fall. Vielmehr ist – entgegen den klassischen Gesetzen – die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen bei derselben Wellenlänge des einfallenden Lichts stets gleich, unabhängig von dessen Intensität.

Einstein, der 1921 für die Erklärung dieses Effekts den Nobelpreis für Physik erhielt, postulierte, dass die Lichtenergie quantisiert ist, also in kleinen Paketen, den sogenannten **Photonen**, auftritt. Ein Lichtstrahl besteht somit aus einer Menge von Teilchen, den Photonen, und die Intensität, also die Leistung pro Flächeneinheit, eines monochromatischen Lichtstrahls ist gleich der Anzahl der Photonen pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit, multipliziert mit der Energie pro Photon. Für die Energie E eines Photons gilt die **Einstein'sche Gleichung**

$$E = h \nu = \frac{hc}{\lambda} . \quad (32.1)$$

EINSTEIN'SCHE GLEICHUNG FÜR DIE PHOTONENENERGIE

Diese Photonenenergie wird in Beispiel 32.1 für sichtbares Licht unterschiedlicher Wellenlängen berechnet und im Übungsbeispiel 32.2 mit der Lichtleistung verknüpft. In Gleichung 32.1 ist ν die Frequenz des Lichts und h das **Planck'sche Wirkungsquantum** mit dem heute gültigen, experimentell ermittelten Wert

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} . \quad (32.2)$$

PLANCK'SCHES WIRKUNGSQUANTUM

(Im Jahre 1900 hatte der deutsche Physiker Max Planck diese Konstante eingeführt, um Diskrepanzen zwischen dem nach den klassischen Gesetzen und dem experimentell ermittelten Strahlungsspektrum eines schwarzen Körpers, wie er in Kapitel 17 eingeführt wurde, zu erklären. Planck hatte dazu postuliert, dass die Strahlung eines schwarzen Körpers in Quanten bzw. Portionen mit der Energie $h\nu$ absorbiert und emittiert wird. Jedoch war diese Größe für Planck eher ein mathematischer Ansatz, um die experimentellen Befunde zu erklären, als eine grundlegende Eigenschaft der elektromagnetischen Strahlung.)

Beispiel 32.1: Photonenenergien beim sichtbaren Licht

Berechnen Sie jeweils die Photonenenergie für Licht der Wellenlänge 400 nm (violett) bzw. 700 nm (rot). (Diese beiden Wellenlängen bilden ungefähr die Ränder des sichtbaren Spektrums.)

Problembeschreibung: Den Zusammenhang zwischen der Energie E eines Photons und seiner Frequenz ν bzw. seiner Wellenlänge λ beschreibt Gleichung 32.1: $E = h\nu = hc/\lambda$.

Lösung: 1. Mit der angegebenen Gleichung sowie mit Gleichung 32.5 für den Ausdruck hc gilt für die Energie eines Photons:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

2. Für $\lambda = 400 \text{ nm}$ ist die Energie:

$$E_{400} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{400 \text{ nm}} = [3,10 \text{ eV}]$$

3. Für $\lambda = 700 \text{ nm}$ ist die Energie:

$$E_{700} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{700 \text{ nm}} = [1,77 \text{ eV}]$$

Plausibilitätsprüfung: Je kleiner die Wellenlänge des Lichts ist, desto größer ist die Energie seiner Photonen. Unsere Ergebnisse stimmen damit überein.

Weitergedacht: Ein Photon sichtbaren Lichts hat, wie wir berechnet haben, eine Energie zwischen rund 1,8 eV und 3,1 eV. Bei Röntgenstrahlen mit ihren wesentlich kleineren Wellenlängen liegt die Photonenenergie in der Größenordnung von keV und bei den noch deutlich kürzerwelligen Gammastrahlen, die von Atomkernen emittiert werden, in der Größenordnung von MeV.

Übung 32.1: Berechnen Sie die Energie eines Photons der elektromagnetischen Strahlung im FM-Bereich der Radiowellen mit einer Wellenlänge von 3,00 m. ◀

Übung 32.2: Berechnen Sie die Wellenlänge eines Photons mit einer Energie von a) 0,100 eV, b) 1,00 keV bzw. c) 1,00 MeV. ◀

Die Wechselwirkung des Lichtstrahls mit der Metalloberfläche besteht beim photoelektrischen Effekt in Zusammenstößen von Photonen und Elektronen. Dabei können Photonen absorbiert werden, wobei jedes Photon seine gesamte Energie an ein Elektron abgibt. Somit wird ein Elektron aus der Oberfläche emittiert, nachdem es seine kinetische Energie von einem der Photonen erhielt, das danach nicht mehr besteht. Bei zunehmender Lichtintensität treffen pro Zeiteinheit mehr Photonen auf die Oberfläche, und es werden mehr Elektronen abgelöst. Da jedes Photon des monochromatischen Lichtstrahls dieselbe Energie $h\nu$ hat, ist auch die maximal mögliche kinetische Energie, die ein emittiertes Elektron besitzen kann, gleich groß.

Diese maximale kinetische Energie der Elektronen, die durch das Licht aus der Kathode herausgeschlagen werden, ist bei der Frequenz ν der Photonen gegeben durch

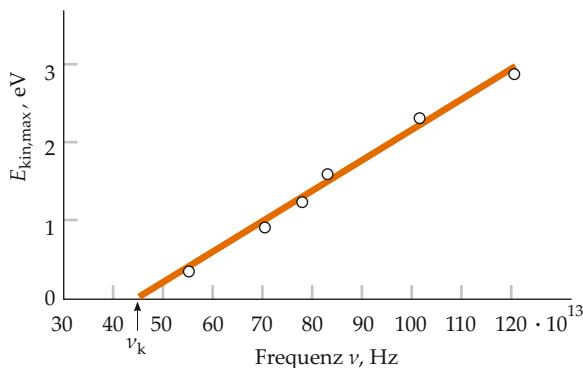


Abbildung 32.2 Die von R. A. Millikan ermittelten Messwerte für die maximale kinetische Energie $E_{\text{kin},\text{max}}$ der Elektronen in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz ν beim photoelektrischen Effekt. Die Messpunkte liegen recht gut auf einer Geraden mit der Steigung h , wie es Einstein in seiner photoelektrischen Gleichung postuliert hatte.

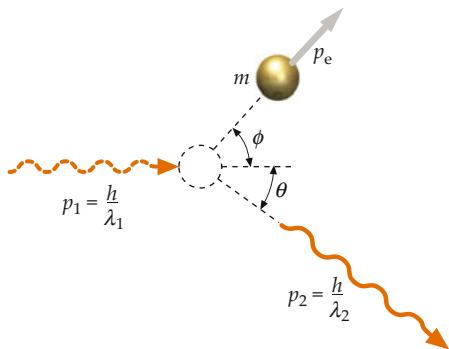


Abbildung 32.3 Die Streuung elektromagnetischer Strahlung, z. B. von Licht, durch ein Elektron kann als Stoß eines Photons mit dem Impuls h/λ_1 auf ein ruhendes Elektron angesehen werden. Das gestreute Photon hat wegen des Rückstoßes des Elektrons eine geringere Energie und damit eine größere Wellenlänge als das einfallende Photon.

$$E_{\text{kin},\text{max}} = \left(\frac{1}{2} m v^2\right)_{\text{max}} = h \nu - W_{\text{Abl}}. \quad (32.3)$$

EINSTEIN'SCHE PHOTOELEKTRISCHE GLEICHUNG

In dieser **Einstein'schen photoelektrischen Gleichung** ist W_{Abl} die sogenannte **Ablösearbeit**. Sie ist die Energie, die mindestens aufzubringen ist, um ein Elektron aus der Metalloberfläche herauszuschlagen. Ihr Betrag ist charakteristisch für das jeweilige Metall. (Einige der emittierten Elektronen haben eine kinetische Energie, die kleiner ist als $h \nu - W_{\text{Abl}}$; das liegt daran, dass sie innerhalb des Metalls vor dem Austritt aufgrund von Stößen Energie verlieren.)

Wenn man die maximale kinetische Energie $E_{\text{kin},\text{max}}$ der herausgeschlagenen Elektronen gegen die Lichtfrequenz ν aufträgt, sollte sich gemäß Einsteins photoelektrischer Gleichung eine Gerade mit der Steigung h ergeben. Der experimentelle Nachweis dieser Abhängigkeit war schwierig, doch Robert Andrews

Millikan konnte ihn rund zehn Jahre später erbringen. Abbildung 32.2 zeigt seine Messwerte zum photoelektrischen Effekt.

Ist die Frequenz der Photonen geringer als eine bestimmte kritische Frequenz oder **Grenzfrequenz** ν_k , haben sie nicht genügend Energie, um Elektronen aus dem betreffenden Metall herauszuschlagen. Die entsprechende **Grenzwellenlänge** ist $\lambda_k = c/\nu_k$. Mit Gleichung 32.3 lässt sich die Beziehung zwischen der Grenzfrequenz bzw. der Grenzwellenlänge und der Ablösearbeit W_{Abl} aufstellen; dazu ist die maximale kinetische Energie der herausgeschlagenen Elektronen gleich null zu setzen. Dies ergibt

$$W_{\text{Abl}} = h \nu_k = \frac{h c}{\lambda_k}. \quad (32.4)$$

Die Ablösearbeiten der Metalle liegen gewöhnlich bei einigen Elektronenvolt. Die Wellenlänge des Lichts gibt man dabei normalerweise in Nanometern und die Elektronenenergie in Elektronenvolt an. Daher ist es nützlich, den Wert von $h c$ in Elektronenvolt-Nanometer anzugeben:

$$\begin{aligned} h c &= (4,1357 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}) \cdot (2,9979 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \\ &= 1,240 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{nm} \end{aligned}$$

oder

$$h c = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}. \quad (32.5)$$

Compton-Streuung

Die Teilchennatur des Lichts spielte erstmals bei der Erklärung des photoelektrischen Effekts eine Rolle. Bei diesem wird die gesamte Energie eines Photons auf ein Elektron übertragen. Dies ist aber, wie wir nun betrachten wollen, nicht immer der Fall. Im Jahre 1923 zog Arthur H. Compton die Teilchenvorstellung vom Licht heran, um die Ergebnisse seiner Experimente zu erklären, bei denen Röntgenstrahlen durch freie Elektronen gestreut wurden, wodurch sich die Frequenz der gestreuten Röntgenstrahlen verminderte. Wenn eine elektromagnetische Welle der Frequenz ν_1 auf eine Substanzprobe mit freien Ladungen trifft, müssten gemäß den Gesetzen der klassischen Physik diese Ladungen mit derselben Frequenz schwingen und daher Strahlung mit wiederum derselben Frequenz emittieren. Compton fasste diese wieder abgestrahlten Wellen als gestreute Photonen auf. Weiterhin nahm er an, dass bei jedem Streuprozess ein Photon mit einem Elektron wechselwirkt (Abbildung 32.3). Dabei sollte das Elektron zurückgestoßen werden und Energie aufnehmen können, sodass das gestreute Photon eine geringere Energie als vor dem Stoß hat, also eine geringere Frequenz und eine größere Wellenlänge.

Die Energie E und der Impuls p einer klassischen elektromagnetischen Welle hängen gemäß Abschnitt 27.4 folgendermaßen zusammen:

$$E = p c. \quad (32.6)$$

Für den Zusammenhang zwischen dem Impuls eines Photons und seiner Wellenlänge λ gilt: $p = E/c = h \nu/c = h/\lambda$. Also gilt für den Impuls eines Photons

Beispiel 32.2: Die Anzahl der Photonen pro Sekunde im Sonnenlicht**ZUR ÜBUNG**

Die Intensität des zur Erde gelangenden Sonnenlichts beträgt etwa 1400 W/m^2 . Nehmen Sie eine mittlere Photonenenergie von $2,00 \text{ eV}$ an (sie entspricht einer Wellenlänge von rund 600 nm) und berechnen Sie damit die Anzahl der Photonen, die pro Sekunde auf eine Fläche von $1,00 \text{ cm}^2$ auftreffen.

Problembeschreibung: Die Intensität (hier die Leistung pro Flächeneinheit) ist ebenso gegeben wie die Fläche. Damit lässt sich die Anzahl der Photonen pro Zeiteinheit berechnen.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Die Energie ΔE hängt mit der Anzahl n der Photonen und mit der Energie $h\nu = 2,00 \text{ eV}$ pro Photon zusammen.

2. Die Intensität I (Leistung pro Flächeneinheit) und die Fläche A sind gegeben, sodass wir die Leistung berechnen können.

3. Aus der Leistung (Energie pro Zeiteinheit) und der Zeit können wir die Energie berechnen.

4. Wir setzen die Ergebnisse der Schritte 1 bis 3 ein und lösen nach der Anzahl n der Photonen auf. Dabei ist auf konsistente Einheiten zu achten.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\Delta E = n h \nu$$

Also ist

$$n = \frac{\Delta E}{h \nu}$$

2.

$$I = \frac{P}{A}$$

3.

$$\Delta E = P \Delta t$$

4.

$$n = \frac{IA \Delta t}{h \nu} = \boxed{4,38 \cdot 10^{17}}$$

Plausibilitätsprüfung: Dies ist eine enorm hohe Anzahl. Bei den meisten Situationen im Alltag ist die Anzahl der Photonen in einem Lichtstrahl jedoch so groß, dass sich die Quantisierung der Lichtenergie nicht bemerkbar macht. Deswegen war eine sehr hohe Anzahl zu erwarten.

Übung 32.3: Berechnen Sie die Photonendichte (in Photonen pro Kubikzentimeter) des Sonnenlichts in diesem Beispiel. Die Anzahl der Photonen, die in einer Sekunde auf eine Fläche von $1,00 \text{ cm}^2$ auftreffen, ist gleich der Anzahl der Photonen in einer Säule mit dem Querschnitt $1,00 \text{ cm}^2$ und einer Höhe gleich der Strecke, die das Licht in einer Sekunde zurücklegt. ◀

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (32.7)$$

DER IMPULS EINES PHOTONS

Compton wandte nun die Prinzipien der Impulserhaltung und der Energieerhaltung auf den Stoß zwischen Photon und Elektron an. Nach dem Stoß hat das gestreute Photon den Impuls p_2 und die Wellenlänge $\lambda_2 = h/p_2$ (Abbildung 32.4). Wegen der Impulserhaltung ist

$$p_1 = p_2 + p_e. \quad (32.8)$$

Darin ist p_1 der Impuls des einfallenden Photons und p_e der Impuls des Elektrons nach dem Zusammenstoß. Der Anfangsimpuls des Elektrons ist null, weil es als ruhend angenommen wird. Umstellen der Gleichung 32.8 ergibt $p_e = p_1 - p_2$. Wenn wir das Skalarprodukt jeder Seite mit sich selbst ansetzen, erhalten wir

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 \cos \theta. \quad (32.9)$$

Hier ist θ der Winkel zwischen den Bewegungsrichtungen von gestreutem und einfallendem Photon (Abbildung 32.3). Da die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß einen merklichen Anteil seiner Ruheenergie ausmachen kann, ist der relativistische Ausdruck für den Zusammenhang zwischen der gesamten Energie E des Elektrons und seinem Impuls p_e anzusetzen. Dieser Ausdruck (siehe Gleichung 31.27) lautet:

$$E = \sqrt{p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2}.$$

Darin ist m_e die Ruhemasse des Elektrons. Da gemäß Gleichung 32.6 die Energie des Photons gleich $p c$ ist, erhalten wir (unter Berücksichtigung der Energieerhaltung beim Stoß):

$$p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2}. \quad (32.10)$$

Eliminieren von p_e^2 aus den Gleichungen 32.9 und 32.10 ergibt

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta).$$

Schließlich ersetzen wir p_1 und p_2 gemäß Gleichung 32.7 und erhalten

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (32.11)$$

COMPTON-GLEICHUNG

Die Zunahme der Wellenlänge hängt somit nicht von der Wellenlänge λ_1 des einfallenden Photons ab. Die Größe $h/(m_e c)$ hat die Dimension einer Länge und wird **Compton-Wellenlänge** geannt. Ihr Wert ist

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{Compton}} &= \frac{h}{m_e c} = \frac{h c}{m_e c^2} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{5,110 \cdot 10^5 \text{ eV}} \\ &= 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,426 \text{ pm}. \end{aligned} \quad (32.12)$$

Da $\lambda_2 - \lambda_1$ klein ist, kann man die Wellenlängenzunahme nur beobachten, wenn die Wellenlänge λ_1 so klein ist, dass die relative Änderung $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ merklich ist.

Compton verwendete Röntgenstrahlen der Wellenlänge 71,1 pm. Die Energie eines Photons mit dieser Wellenlänge ist $E = h c / \lambda = (1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}) / (0,0711 \text{ nm}) = 17,4 \text{ keV}$. Die Energie von 17,4 keV ist viel größer als die Bindungsenergien der Valenzelektronen in den Atomen (die in der Größenordnung einiger eV liegt). Daher können die Elektronen bei diesem Experiment als im Wesentlichen frei angesehen werden. Comptons Messungen der Größe $\lambda_2 - \lambda_1$ in Abhängigkeit vom Streuwinkel θ stimmten mit dem Zusammenhang gemäß Gleichung 32.11 überein; damit war die Photonenvorstellung bzw. die Teilchen-natur des Lichts bestätigt. Beispiel 32.3 berechnet noch einmal die Wellenlängenänderung bei Röntgenstrahlen, allerdings mit höherer Energie.

Beispiel 32.3: Wellenlängenzunahme bei der Compton-Streuung

Ein Röntgenphoton der Wellenlänge 6,00 pm stößt frontal auf ein Elektron, sodass das gestreute Photon entgegen der Einfallsrichtung austritt. Das Elektron ist anfangs in Ruhe. a) Um wie viel ist die Wellenlänge des gestreuten Photons größer als die des einfallenden Photons? b) Wie hoch ist die kinetische Energie des zurückgestoßenen Elektrons?

Problembeschreibung: Die Zunahme der Wellenlänge und damit auch die Wellenlänge des Photons nach dem Stoß ist mithilfe von Gleichung 32.11 zu berechnen. Aus der Wellenlänge kann die Energie des gestreuten Photons berechnet werden, und anhand der Energieerhaltung ist schließlich die kinetische Energie des zurückgestoßenen Elektrons zu ermitteln (Abbildung 32.4).

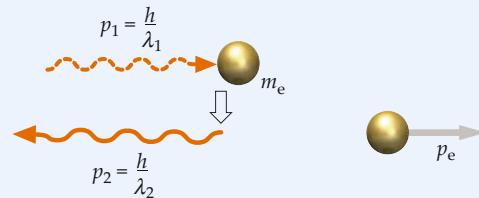


Abbildung 32.4 Darstellung der Compton-Streuung mit einfallendem Photon mit Impuls p_1 auf das ruhende Elektron und anschließender Photonenstreuung mit Impuls p_2 und zurückgestoßenem Elektron mit Impuls p_e .

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie mit Gleichung 32.11 die Zunahme der Wellenlänge:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \\ &= (2,43 \text{ pm}) \cdot (1 - \cos 180^\circ) = 4,86 \text{ pm} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Die kinetische Energie des zurückgestoßenen Elektrons ist gleich der Energie E_1 des einfallenden Photons, abzüglich der Energie E_2 des gestreuten Photons:

$$E_{\text{kin},e} = E_1 - E_2 = h v_1 - h v_2 = \frac{h c}{\lambda_1} - \frac{h c}{\lambda_2}$$

2. Berechnen Sie λ_2 aus der gegebenen Wellenlänge des einfallenden Photons und der Änderung $\Delta \lambda$, die in Teilaufgabe a ermittelt wurde:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 + \Delta \lambda = 6,00 \text{ pm} + 4,86 \text{ pm} \\ &= 10,86 \text{ pm} \end{aligned}$$

3. Setzen Sie die errechneten Werte von λ_1 und λ_2 in die Gleichung von Schritt 1 ein, um die Energie des zurückgestoßenen Elektrons zu ermitteln:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin},e} &= \frac{h c}{\lambda_1} - \frac{h c}{\lambda_2} \\ &= \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{6,00 \text{ pm}} - \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10,86 \text{ pm}} \\ &= \frac{1,240 \text{ keV} \cdot \text{nm}}{6,00 \cdot 10^{-3} \text{ nm}} - \frac{1,240 \text{ keV} \cdot \text{nm}}{10,86 \cdot 10^{-3} \text{ nm}} \\ &= 207 \text{ keV} - 114 \text{ keV} = 93 \text{ keV} \end{aligned}$$

Weitergedacht: Das zurückgestoßene Elektron hat eine kinetische Energie von 93 keV, und die Ruheenergie des Elektrons beträgt 511 keV. Somit macht die kinetische Energie rund 18 % der Ruheenergie aus. Deswegen ist die nichtrelativistische Formel $\frac{1}{2} m_e v^2$ für die kinetische Energie nicht anwendbar.

Übung 32.4: Wie hoch wäre die Geschwindigkeit des zurückgestoßenen Elektrons gemäß dem nichtrelativistischen Ausdruck $\frac{1}{2} m_e v^2$ für die kinetische Energie? ▶ ■

32.3 Teilchen als Materiewellen

Da Licht offenbar Wellen- und auch Teilcheneigenschaften hat, liegt die Vermutung nahe, dass auch Materie (z. B. Elektronen oder Protonen) sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter aufweist. Das postulierte im Jahre 1924 der französische Physiker Louis de Broglie in seiner Doktorarbeit. Sein Ansatz war zu der Zeit spekulativ, denn es gab keinen Beweis dafür, dass Materie irgendwelche Welleneigenschaften haben könnte.

Die De-Broglie-Hypothese

Für die Wellenlänge von Elektronenwellen setzte de Broglie folgenden Ausdruck an:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (32.13)$$

DE BROGLIE'SCHE GLEICHUNG FÜR DIE WELLENLÄNGE VON ELEKTRONENWELLEN

Darin ist p der Impuls des Elektrons. Beachten Sie, dass diese Beziehung der Gleichung 32.7 für das Photon entspricht. Für die Frequenz der Elektronenwellen wählte de Broglie die Einstein'sche Gleichung, die auch Frequenz und Energie eines Photons miteinander verknüpft:

$$\nu = \frac{E}{h}. \quad (32.14)$$

DE BROGLIE'SCHE GLEICHUNG FÜR DIE FREQUENZ VON ELEKTRONENWELLEN

Die beiden Gleichungen 32.13 und 32.14 sollten, wie de Broglie annahm, nicht nur für Elektronen, sondern für jegliche Materie gelten. Bei makroskopischen Gegenständen sind die Wellenlängen gemäß Gleichung 32.13 jedoch so klein, dass es unter gewöhnlichen Bedingungen unmöglich ist, an ihnen Welleneigenschaften wie Interferenz oder Beugung zu beobachten. Sogar ein Staubteilchen mit einer Masse von nur $1\text{ }\mu\text{g}$ ist zu schwer, als dass es messbare Wellenmerkmale aufweisen könnte. Das wird in Beispiel 32.4 deutlich.

Die in Beispiel 32.4 berechnete Wellenlänge ist weitaus kleiner als jegliche Öffnungen oder Hindernisse, sodass bei solchen Wellen weder Beugung noch Interferenz beobachtet werden können. Die Ausbreitung von Wellen mit dermaßen kleinen Wellenlängen ist daher nicht unterscheidbar von der Bewegung

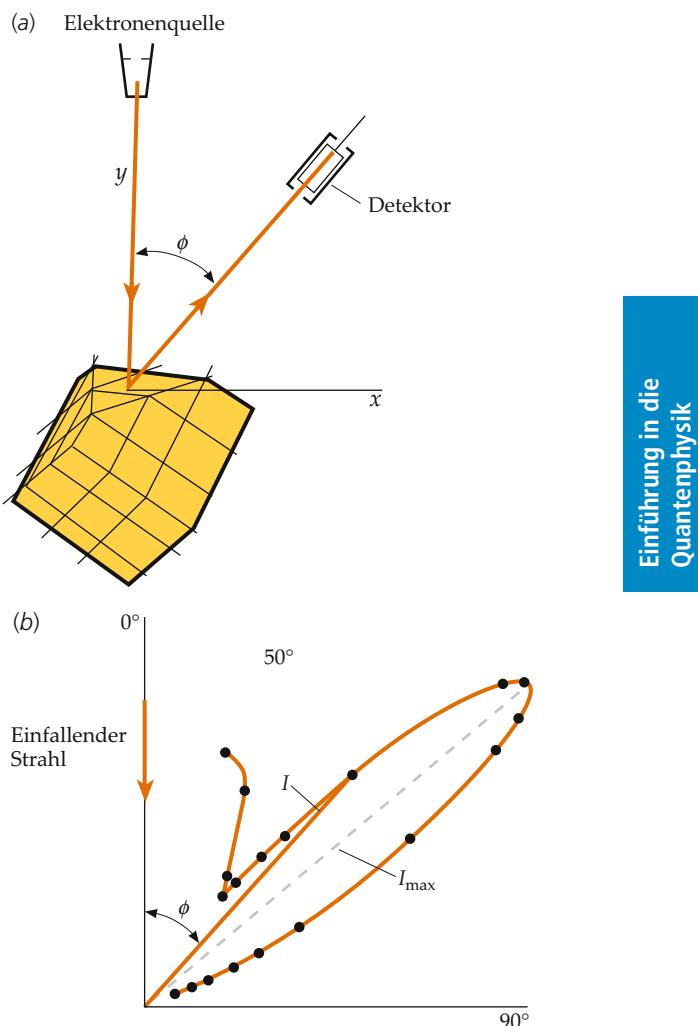


Abbildung 32.5 Das Davisson-Germer-Experiment. a) Die schematische Anordnung. Elektronen treffen auf einen Nickelkristall und werden in Richtung eines Detektors gestreut. b) Die in Polarkoordinaten aufgetragene Winkelabhängigkeit der Intensität I der gestreuten Elektronen. Das Maximum I_{\max} liegt bei demjenigen Winkel, der bei der Beugung von Wellen mit der Wellenlänge λ nach der De-Broglie-Gleichung zu erwarten ist.

von Teilchen. Der Impuls des Teilchens in Beispiel 32.4 beträgt nur etwa $10^{-15}\text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Bei makroskopischen Teilchen (mit einem weitaus höheren Impuls) ist die de Broglie'sche Wellenlänge noch viel geringer. Wir können daher niemals die Welleneigenschaften von Gegenständen wie Tennisbällen oder Billardkugeln beobachten.

Übung 32.5: Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge eines Tennisballs mit der Masse 58 g, der mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h den Schläger verlässt. ▶

Bei Elektronen mit ihrer sehr geringen Energie und bei anderen mikroskopischen Teilchen sieht die Situation jedoch anders aus. Für die kinetische Energie E_{kin} eines Teilchens mit dem Impuls

Beispiel 32.4: Die de Broglie'sche Wellenlänge**ZUR ÜBUNG**

Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge eines Teilchens mit der Masse $1,00 \cdot 10^{-6}$ g, das sich mit einer Geschwindigkeit von $1,00 \cdot 10^{-6}$ m · s⁻¹ bewegt.

Problembeschreibung: Es ist Gleichung 32.13 anzuwenden, die den Zusammenhang $\lambda = h/p$ zwischen der Wellenlänge λ und dem Impuls p des Teilchens beschreibt.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: Setzen Sie die gegebenen Werte in die Definitionsgleichung der De-Broglie-Wellenlänge ein.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(1,00 \cdot 10^{-9} \text{ kg}) \cdot (1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})} \\ &= \boxed{6,63 \cdot 10^{-19} \text{ m}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet, ergibt sich eine so kleine Wellenlänge, dass sie keinesfalls beobachtet werden kann; sie ist sogar um rund fünf Größenordnungen kleiner als der Durchmesser eines Atomkerns mit ungefähr 10^{-15} m.

p gilt

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}.$$

Daher ist der Impuls des Teilchens

$$p = \sqrt{2mE_{\text{kin}}},$$

und seine Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}}.$$

Wenn wir den Bruch mit c erweitern, erhalten wir

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E_{\text{kin}}}} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2mc^2E_{\text{kin}}}}. \quad (32.15)$$

WELLENLÄNGE EINES TEILCHENS DER MASSE m

Darin haben wir wiederum den Wert $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ verwendet. Mit $mc^2 = 0,5110 \text{ MeV}$ für Elektronen ergibt sich die Wellenlänge zu

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2(0,5110 \cdot 10^6 \text{ eV})E_{\text{kin}}}} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2(0,5110 \cdot 10^6 \text{ eV})E_{\text{kin}}}}$$

oder

$$\lambda = \frac{1,226}{\sqrt{E_{\text{kin}}}} \text{ nm}, \quad \text{mit } E_{\text{kin}} \text{ in eV}. \quad (32.16)$$

WELLENLÄNGE EINES ELEKTRONS

Die Gleichungen 32.15 und 32.16 gelten nicht für relativistische Teilchen, deren kinetische Energie einen merklichen Anteil ihrer Ruheenergie mc^2 ausmacht. (Ruheenergien wurden in Kapitel 31 besprochen.)

Übung 32.6: Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge eines Elektrons, das eine Bewegungsenergie von 10,0 eV hat. ◀

Interferenz und Beugung von Elektronen

Der experimentelle Nachweis der Beugung und der Interferenz von Elektronen sollte deren Welleneigenschaften bestätigen. Im Jahre 1927 experimentierten Clinton Joseph Davisson und Lester Halbert Germer mit Elektronenstrahlen, die sie auf Nickel-Einkristalle schossen. Abbildung 32.5a zeigt die Anordnung. Elektronen aus einer Elektronenkanone werden auf den Kristall gerichtet, und die gestreuten Elektronen werden auf einen Detektor geführt, der unter einem veränderlichen Winkel ϕ angebracht ist. In Abbildung 32.5b ist eine typische Intensitätsverteilung dargestellt, die sich bei diesem Experiment ergibt. Bei einem Winkel von 50° tritt hier ein deutliches Streumaximum auf. Dieser Winkel hängt von der Wellenlänge der Elektronenwelle sowie vom Atomabstand im Kristall ab. Da dieser Abstand bekannt war, konnten Davisson und Germer die Wellenlänge berechnen, bei der das Streumaximum zu erwarten war. Es zeigte sich, dass sie der de Broglie'schen Beziehung (Gleichung 32.16) zwischen der Wellenlänge und der Energie von Elektronen genügte. Durch Variation der Energie der einfallenden Elektronen konnten sie die Elektronenwellenlängen und damit die Winkel verändern, bei denen die Streumaxima und -minima auftraten. In allen Fällen stimmten die gemessenen Wellenlängen mit der Hypothese von de Broglie überein.

Ebenfalls im Jahr 1927 gelang eine andere Demonstration der Wellennatur der Elektronen. George Paget Thomson beobachtete, dass Elektronen beim Durchgang durch dünne Metallfolien gebeugt werden. Eine Metallfolie besteht aus winzigen, regellos angeordneten Kristalliten. Das Beugungsmuster, das bei einer solchen Folie entsteht, bildet einen Satz konzentrischer Kreise. Die Abbildungen 32.6a und 32.6b zeigen die Beugungsmuster von Röntgen- bzw. Elektronenstrahlen, die eine Aluminiumfolie

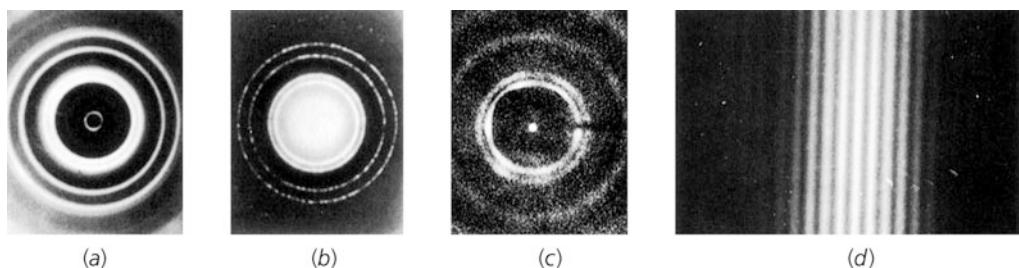


Abbildung 32.6 a) Das Beugungsmuster, das mit Röntgenstrahlen der Wellenlänge 0,071 nm entsteht, die eine Aluminiumfolie passierten. b) Das Beugungsmuster von Elektronen mit einer Energie von 600 eV (bzw. mit $\lambda = 0,050 \text{ nm}$), die ebenfalls eine Aluminiumfolie passierten. c) Das Beugungsmuster von Neutronen mit einer Energie von 0,0568 eV (bzw. mit $\lambda = 0,12 \text{ nm}$), die eine Kupferfolie passierten. d) Ein Beugungs- und Interferenzmuster, wie es Elektronen beim Doppelspalt erzeugen. (a) und (b) © PSSC Physics, 2. Aufl. 1965, D. C. Heath & Co. und Education Development Center, Inc., Newton, MA; c) © C. G. Shull; d) © Museum der Universität Tübingen MUT.)

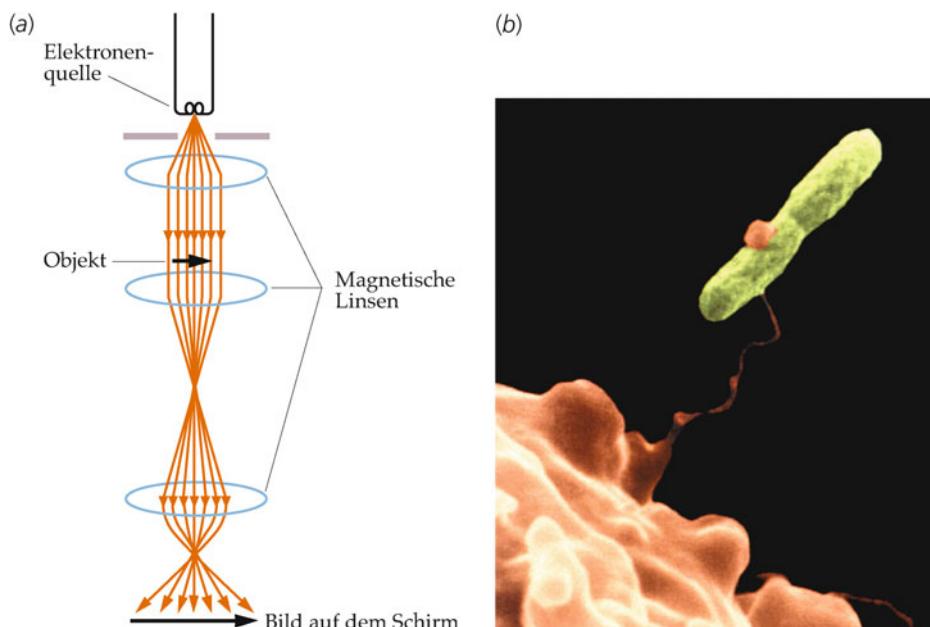


Abbildung 32.7 a) Der schematische Aufbau des Elektronenmikroskops. Elektronen aus einer Elektronenquelle oder „Elektronenkanone“ (einem beheizten Metallfaden) werden durch eine große Potenzialdifferenz beschleunigt. Der Elektronenstrahl wird durch eine magnetische Linse parallel ausgerichtet. Er passiert dann das zu beobachtende Objekt und wird dahinter durch eine zweite magnetische Linse fokussiert. Eine dritte magnetische Linse projiziert den Elektronenstrahl auf einen fluoreszierenden Schirm, auf dem das Bild zu beobachten ist. b) Elektronenmikroskopische Aufnahme einer Amöbe (*Hartmannella vermiciformis*), die ein ausgestrecktes Pseudopodium (Scheinfüßchen) dazu nutzt, ein Bakterium (*Legionella pneumophila*) einzufangen. (b) © CDC/Dr. Barry S. Fields.)

passierten. In Abbildung 32.6c ist das Beugungsmuster dargestellt, das sich mit Neutronen bei einer Kupferfolie ergibt. Auffallend ist die Ähnlichkeit dieser Muster. Im Jahr 1930 konnte auch die Beugung von Wasserstoff- und von Heliumatomen beobachtet werden. In allen Fällen stimmten die gemessenen Wellenlängen mit den nach der de Broglie'schen Gleichung berechneten überein. Zum Vergleich ist in Abbildung 32.6d ein Beugungsmuster gezeigt, wie es Elektronen beim Doppelspalteperiment hervorbringen. Das entspricht dem Doppelspalteperiment, das Thomas Young mit Licht durchgeführt hatte. Das Muster in Abbildung 32.6d entspricht daher dem, das mit Photonen der gleichen Wellenlänge erzielt wird (vgl. Abbildung 30.9).

Bald nachdem die Welleneigenschaften des Elektrons demonstriert worden waren, vermutete man, dass man Elektronenstrahlen anstelle von Lichtstrahlen dazu nutzen kann, kleine Objekte abzubilden. Wie in Kapitel 30 besprochen, kann man mit reflektierten oder transmittierten Wellen nur solche Details von Gegenständen auflösen, die größer als die Wellenlänge sind. Mit Elektronenstrahlen, die man durch elektrische oder magnetische Felder bündeln kann, lassen sich viel kleinere Wellenlängen als die des sichtbaren Lichts realisieren. Das Elektronenmikroskop (Abbildung 32.7) ist schon lange ein wichtiges Hilfsmittel zum Abbilden von Gegenständen oder Strukturen, die kleiner als die Lichtwellenlängen sichtbaren Lichts sind.

32.4 Die Schrödinger-Gleichung

Die Wellenfunktion für Wellen auf einer Saite ist die Saitenauslenkung y in Abhängigkeit von Ort und Zeit. Die Wellenfunktion für Schallwellen kann entsprechend die Auslenkung s eines Luftmoleküls oder der Druck p sein, und die Wellenfunktion für elektromagnetische Wellen sind der elektrische Feldvektor \mathbf{E} und der magnetische Feldvektor \mathbf{B} , jeweils auch in Abhängigkeit von Ort und Zeit. Wie sieht nun die Wellenfunktion für Elektronenwellen aus? Sie wird mit Ψ (dem griechischen Buchstaben *psi*) symbolisiert und wird genau wie die mechanischen Wellen im Kapitel 12 durch eine Wellengleichung bestimmt. Diese nach Erwin Schrödinger benannte Gleichung ist wie die klassische Wellengleichung (Gleichung 12.10b) eine partielle Differentialgleichung in Raum und Zeit. Ebenso wie die Newton'schen Bewegungsgesetze kann die Schrödinger-Gleichung nicht aus fundamentaleren Annahmen hergeleitet werden. Ihre Gültigkeit geht aus der Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen hervor. In einer Dimension lautet die **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + E_{\text{pot}} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (32.17)$$

ZEITABHÄNGIGE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG

Darin ist E_{pot} die potentielle Energie, und $\Psi(x, t)$ ist die Wellenfunktion eines einzelnen Teilchens. Im Gegensatz zur klassischen Wellengleichung setzt diese Gleichung die *zweite* räumliche Ableitung der Wellenfunktion mit deren *erster* zeitlicher Ableitung in Beziehung; ferner enthält sie die imaginäre Zahl $i = \sqrt{-1}$. Die Wellenfunktionen, die Lösungen dieser Gleichung sind, müssen nicht unbedingt reell sein. Daher ist die Funktion $\Psi(x, t)$ – im Gegensatz zu den klassischen Wellenfunktionen für Schallwellen oder elektromagnetische Wellen – nicht direkt messbar. Zudem wussten zunächst weder Schrödinger noch andere, wie diese nicht messbare Wellenfunktion für Teilchen zu interpretieren ist.

Einen Hinweis darauf gibt die Quantisierung der Lichtwellen. Bei klassischen Wellen, wie denen von Schall oder Licht, ist die Energie pro Volumeneinheit in der Welle proportional zum Quadrat der Wellenfunktion. Da die Energie einer Lichtwelle quantisiert ist – wie der Photoeffekt zeigt –, muss die Energie pro Volumeneinheit proportional zur Anzahl der Photonen pro Volumeneinheit sein. Daher muss das Quadrat der Wellenfunktion des Photons proportional zur Anzahl der Photonen pro Volumeneinheit in einer Lichtwelle sein. Nehmen wir nun an, dass die Lichtquelle eine sehr geringe Leistung hat und nur einzelne, aufeinanderfolgende Photonen emittiert. Dann befindet sich in jeder Volumeneinheit entweder ein Photon oder kein Photon. Also muss das Quadrat der Wellenfunktion die **Wahrscheinlichkeit** angeben, in irgendeiner Volumeneinheit ein Photon zu finden. Etwas genauer muss das Quadrat der Wellenfunktion für ein Teilchen die **Wahrscheinlichkeitsdichte** angeben, d.h. die Wahrscheinlichkeit pro Volumeneinheit,

das Teilchen an einer bestimmten Position zu finden. Außerdem muss die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im betreffenden Volumenelement anzutreffen, proportional zur Größe dV des Volumenelements sein.

Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einer Dimension zur Zeit t im Bereich dx an der Position x zu finden, mit $P(x, t) dx$, dann ist diese Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$P(x, t) dx = |\Psi(x, t)|^2 dx = \Psi^* \Psi dx. \quad (32.18)$$

Dabei ist Ψ^* die zu Ψ komplex konjugierte Funktion, und das Produkt $\Psi \Psi^*$ ist – wie bei allen komplexen Zahlen oder Ausdrücken – reell.

Somit ist die **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder **Aufenthalts-wahrscheinlichkeitsdichte** $P(x, t)$ gegeben durch

$$P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t). \quad (32.19)$$

AUFENTHALTSWAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zum Zeitpunkt t entweder im Bereich zwischen x_1 und $x_1 + dx$ oder im Bereich zwischen x_2 und $x_2 + dx$ zu finden, entspricht der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten und ist daher gegeben durch $P(x_1, t) dx + P(x_2, t) dx$.

In der klassischen Mechanik spielen die Lösungen der Wellengleichung für stehende Wellen eine große Rolle. Daher untersuchen wir nun die Bedeutung der Schrödinger-Gleichung für stehende Materiewellen. Die Wellenfunktion für stehende Wellen auf einer gleichförmigen, straff gespannten Saite lautet $A \sin(kx) \cos(\omega t + \delta)$; sie ist repräsentativ für alle stehenden Wellen. Eine Wellenfunktion für stehende Wellen kann immer als Produkt zweier Funktionen ausgedrückt werden, nämlich einer ortsabhängigen und einer zeitabhängigen Funktion, wobei die zeitabhängige Funktion einen sinusförmigen Verlauf hat. Lösungen der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung für stehende Wellen können daher folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}. \quad (32.20)$$

Darin ist $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$. Die rechte Seite von Gleichung 32.17 lautet damit:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= i\hbar (-i\omega) \psi(x) e^{-i\omega t} = \hbar \omega \psi(x) e^{-i\omega t} \\ &= E \psi(x) e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Darin ist $E = \hbar \omega$ die Energie des Teilchens.

Die Schrödinger-Gleichung hat nur dann Lösungen für stehende Wellen, wenn die potentielle Energie allein vom Ort abhängt. Wenn wir $\psi(x) e^{-i\omega t}$ in Gleichung 32.17 einsetzen und den gemeinsamen Faktor $e^{-i\omega t}$ eliminieren, erhalten wir eine Gleichung für $\psi(x)$, die man **zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung** nennt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + E_{\text{pot}}(x) \psi(x) = E \psi(x). \quad (32.21)$$

ZEITUNABHÄNGIGE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG

Hier haben wir die potenzielle Energie als $E_{\text{pot}}(x)$ geschrieben; damit soll deutlich gemacht werden, dass E_{pot} zwar vom Ort abhängen kann, jedoch nicht von der Zeit. Die Funktion $E_{\text{pot}}(x)$ repräsentiert die Wechselwirkung zwischen der Umgebung und dem beobachteten Teilchen. Unterschiedliche Umgebungen erfordern in der Schrödinger-Gleichung unterschiedliche Ausdrücke für die potenzielle Energie, wie wir in Kapitel 33 noch sehen werden.

Zur Berechnung der erlaubten Energieniveaus in einem System muss nur die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung gelöst werden. Dagegen muss man die Lösung der zeitabhängigen Gleichung ermitteln, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge zwischen diesen Niveaus berechnen will. In diesem Buch beschränken wir uns jedoch nur auf die Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung 32.21.

Die Wellenfunktion $\psi(x)$ wird nicht allein von der Schrödinger-Gleichung (Gleichung 32.21) bestimmt, sondern zusätzlich noch von einer Normierungsbedingung, die sich aus der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion ergibt. Wenn das Teilchen überhaupt vorhanden ist, muss die Wahrscheinlichkeit, es irgendwo zu finden, gleich eins sein. Somit ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte von x gleich eins. Damit ergibt sich die **Normierungsbedingung**

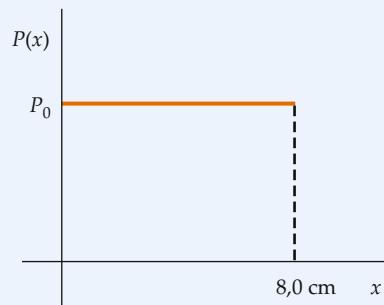
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx = 1. \quad (32.22)$$

NORMIERUNGSBEDINGUNG

Wenn die Wellenfunktion ψ diese Normierungsbedingung erfüllen soll, muss sie gegen null gehen, wenn $|x|$ gegen ∞ geht. Diese Bedingung führt zu einer Beschränkung für die möglichen Lösungen der Schrödinger-Gleichung. Beispiel 32.5 zeigt die Anwendung der Normierungsbedingung für ein klassisches Teilchen.

Beispiel 32.5: Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines klassischen Teilchens

Nehmen Sie an, ein klassisches, punktförmiges Teilchen bewegt sich zwischen zwei Wänden bei $x = 0$ und $x = 8,0 \text{ cm}$ mit konstanter Geschwindigkeit hin und her (Abbildung 32.8). Weitere Informationen über die Position des Teilchens sind nicht bekannt. a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$? b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen exakt bei $x = 2 \text{ cm}$ zu finden? c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zwischen $x = 3,0 \text{ cm}$ und $x = 3,4 \text{ cm}$ zu finden?

**Abbildung 32.8** Die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$.

Problembeschreibung: Die Anfangsposition des Teilchens ist nicht bekannt. Da es sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen anzutreffen, überall im Bereich $0 < x < 8,0 \text{ cm}$ gleich groß. Somit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$ für $0 < x < 8,0 \text{ cm}$ von x unabhängig, und sie ist außerhalb dieses Bereichs gleich null. $P(x)$ kann für $0 < x < 8,0 \text{ cm}$ aus der Normierungsbedingung berechnet werden, denn die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen irgendwo zwischen $x = 0$ und $x = 8,0 \text{ cm}$ zu finden, ist gleich eins.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$ ist zwischen den Wänden überall gleich groß, und sie ist außerhalb dieses Bereichs gleich null:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ P_0 & \text{für } 0 < x < 8,0 \text{ cm} \\ 0 & \text{für } x > 8,0 \text{ cm} \end{cases}$$

2. Wenden Sie die Normierungsbedingung an:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx &= \int_{-\infty}^0 P(x) dx + \int_0^{8,0 \text{ cm}} P(x) dx \\ &\quad + \int_{8,0 \text{ cm}}^{\infty} P(x) dx \\ &= 0 + \int_0^{8,0 \text{ cm}} P_0 dx + 0 \\ &= P_0 \cdot (8,0 \text{ cm}) = 1 \end{aligned}$$

3. Lösen Sie nach P_0 auf:

$$P_0 = \boxed{\frac{1}{8,0 \text{ cm}}}$$

Teilaufgabe b

Wir haben eben gesehen: Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem Intervall Δx (und dabei innerhalb des Bereichs $0 < x < 8,0 \text{ cm}$) zu finden, ist proportional zu $P_0 \Delta x = \Delta x / (8,0 \text{ cm})$. Bei der Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Teilchen exakt beim Punkt $x = 2 \text{ cm}$ anzutreffen ist, ist $\Delta x = 0$. Daher ist auch die Wahrscheinlichkeit gleich null, das Teilchen genau an dieser Stelle anzutreffen. Diesen Sachverhalt kann man auch anders begründen: Da zwischen $x = 0$ und $x = 8,0 \text{ cm}$ unendlich viele Punkte liegen und das Teilchen sich bei jedem Punkt mit gleicher Wahrscheinlichkeit befindet, ergibt sich:

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen exakt beim Punkt $x = 2 \text{ cm}$ anzutreffen, ist *null*.

Teilaufgabe c

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist im gesamten Bereich gleich groß. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen in irgendeinem Intervall Δx innerhalb des Bereichs $0 < x < 8,0 \text{ cm}$ befindet, gegeben durch $P_0 \Delta x$. Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen im Intervall $3,0 \text{ cm} < x < 3,4 \text{ cm}$ anzutreffen ist:

$$P_0 \Delta x = \left(\frac{1}{8,0 \text{ cm}} \right) \cdot (0,4 \text{ cm}) = [0,05]$$

Plausibilitätsprüfung: Die Länge des Intervalls $3,0 \text{ cm} < x < 3,4 \text{ cm}$ beträgt $0,4 \text{ cm}$ und damit 5 % der gesamten Länge von $8,0 \text{ cm}$. Da sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, erwarten wir es während 5 % der Zeit im genannten Intervall $3,0 \text{ cm} < x < 3,4 \text{ cm}$, so lange die gesamte Zeitspanne länger als $8,0 \text{ cm}/v$ ist, also als die Zeitspanne, in der das Teilchen die gesamte verfügbare Strecke von $8,0 \text{ cm}$ zurücklegt. Das Ergebnis der Teilaufgabe c entspricht dieser Erwartung. ■

Für die Lösung von Gleichung 32.21 ist die Form der Ortsabhängigkeit der potentiellen Energie entscheidend. Wenn $E_{\text{pot}}(x)$ so beschaffen ist, dass das Teilchen in einem bestimmten Raumintervall eingeschlossen ist, ergeben nur bestimmte Energien E_n Lösungen ψ_n , die die Normierungsbedingung in Gleichung 32.22 erfüllen können. Gemäß Gleichung 32.20 sind die vollständigen zeitabhängigen Wellenfunktionen dann gegeben durch

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i\omega_n t} = \psi_n(x) e^{-i(E_n/\hbar)t}. \quad (32.23)$$

32.5 Der Welle-Teilchen-Dualismus

Wir haben gesehen, dass Licht – das wir gewöhnlich als Welle auffassen – Teilcheneigenschaften zeigt, wenn es mit Materie wechselwirkt. Das ist beispielsweise beim photoelektrischen Effekt oder bei der Compton-Streuung der Fall. Umgekehrt zeigen Elektronen, die wir gewöhnlich als Teilchen ansehen, Welleneigenschaften wie Interferenz und Beugung, wenn sie Kanten oder enge Öffnungen passieren.

In der klassischen Physik schließen die Vorstellungen von Wellen und Teilchen einander aus. Ein **klassisches Teilchen** verhält sich wie eine winzige massive Kugel: Es lässt sich stets lokalisieren, es kann gestreut werden, und es trägt Energie mit sich, die es bei einem Stoß in einem Punkt im Raum zu einer bestimmten Zeit austauschen kann. Es zeigt jedoch *keine* Interferenz- oder Beugungseffekte. Eine **klassische Welle** dagegen verhält sich wie eine Schall- oder Lichtwelle: Sie zeigt Beugung und Interferenz, und ihre Energie ist in Raum und Zeit kontinuierlich verteilt. Somit wäre es – im Bild der klassischen Physik – nicht möglich, dass Licht gleichzeitig eine Welle sein und aus Teilchen bestehen kann. Da jedoch sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften experimentell beobachtet werden, muss eine neue Interpretation gefunden werden, die diesen (scheinbaren) Widerspruch auflöst. Die Grundlage dazu haben wir bereits in Abschnitt 32.4 mit der Schrödinger-Gleichung gelegt, die sowohl Photonen als auch Elektronen oder andere Teilchen als Wellenfunktion beschreiben kann.

Das Doppelspaltexperiment

Der Welle-Teilchen-Dualismus der Natur lässt sich sehr gut an dem Experiment verdeutlichen, bei dem ein einzelnes Elektron auf ein Hindernis mit zwei engen, parallelen Spalten trifft. Die folgenden Betrachtungen gelten gleichermaßen für ein Elektron oder für ein Photon, also für Licht. Die Fortbewegung eines Elektrons beschreiben wir mithilfe der Wellentheorie. Wir nehmen dabei an, dass die Quelle punktförmig ist und eine kugelförmige Welle emittiert. Nach dem Passieren der beiden Spalte breitet sich hinter jedem Spalt eine (zylindrische) Wellenfront aus, wobei jeder Spalt als Reihe von punktförmigen Quellen anzusehen ist. Wir betrachten nun die Wellenfunktion ψ auf einem von den Spalten weit entfernten Schirm oder fotografischen Film. An jedem Punkt auf dem Schirm hängt die Wellenfunktion vom Gangunterschied der beiden hier eintreffenden Wellen ab; die eine dieser Wellen verläuft durch den einen Spalt und die andere durch den anderen Spalt. Beträgt der Gangunterschied am betreffenden Punkt auf dem Schirm null oder ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge, dann hat die Amplitude der Wellenfunktion ein Maximum. Da die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron anzutreffen, proportional zu ψ^2 ist, wird das Elektron mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe diesen Maxima auf den Schirm treffen. An den Punkten, bei denen der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ausmacht, ist die Wellenfunktion ψ gleich

32.6 *Erwartungswerte und klassischer Grenzfall

null, und das Elektron wird mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit nahe den Minima auf den Schirm treffen. Die Abbildungen zur Einleitung dieses Kapitels zeigen die Interferenzmuster, die sich bei 10, 100, 3000 bzw. 70 000 Elektronen ergeben. Beachten Sie, dass sich ein Elektron durch die Spalte zwar wie eine Welle ausbreitet, jedoch mit dem Schirm am betreffenden Punkt wie ein Teilchen wechselwirkt.

Anhand der Beschreibung des Doppelspalteperiments wird deutlich, dass es möglich ist, den Widerspruch dadurch aufzulösen, das Wellen- und das Teilchenmodell nicht gleichzeitig anzuwenden, sondern zwischen diesen beiden Vorstellungen hin- und herzuwechseln. Dabei hat es sich bewährt, die Bewegung als Ausbreitung einer Welle anzusehen und mithilfe der Schrödinger-Gleichung zu modellieren, während Wechselwirkungen wie z. B. der Energieaustausch im Teilchenmodell zu beschreiben sind, wie wir am Beispiel des Photoeffekts gesehen haben.

Die Heisenberg'sche Unschärferelation

Im Zusammenhang mit dem Welle-Teilchen-Dualismus spielt die **Heisenberg'sche Unschärferelation**, auch **Heisenberg'sches Unbestimmtheitsprinzip** genannt, eine große Rolle. Sie besagt, dass es prinzipiell unmöglich ist, sowohl die Position als auch den Impuls eines Teilchens gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit zu messen. Normalerweise ermittelt man die Position eines Objekts mithilfe von Licht. Dabei wird das Licht am Objekt gestreut, und man bestimmt die Position des Objekts anhand der Richtung des gestreuten Lichts. Wenn das Licht die Wellenlänge λ hat, ist aufgrund von Beugungseffekten die Position nur mit einer Unsicherheit Δx zu messen, die in der Größenordnung von λ liegt:

$$\Delta x \approx \lambda.$$

Um die Unsicherheit in der Position zu verringern, kann man daher zu Licht kleinerer Wellenlängen oder sogar zu Röntgenstrahlen übergehen. Da jeder Messprozess jedoch aus einer Wechselwirkung besteht (z. B. zwischen einem Elektron, dessen Position zu bestimmen ist, und dem Photon, dass durch Streuung diese Position zeigen soll), ist es prinzipiell nicht möglich, diese Unsicherheit auf null zu reduzieren.

Wir können den Impuls p_x eines Objekts bestimmen, wenn wir seine Masse kennen und seine Geschwindigkeit ermitteln. Der Impuls ist beispielsweise dadurch zu bestimmen, dass man zweimal in kurzen Zeitabstand die Position des Objekts misst, woraus seine Geschwindigkeit abzuleiten ist. Verwendet man Licht mit der Wellenlänge λ , so haben seine Photonen den Impuls $p_x = h/\lambda$. Werden sie am beobachteten Objekt gestreut, ändert sich dabei dessen Impuls durch die Wechselwirkung mit den Photonen, da das Objekt Impuls und Energie mit ihnen austauschen kann. Jedes Photon trägt den Impuls h/λ , sodass die durch die Beobachtung hervorgerufene Unsicherheit Δp_x des Impulses des Objekts in der Größenordnung von h/λ liegt:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda}.$$

Bei kleiner Wellenlänge der Strahlung ist der Impuls jedes Photons groß, und die Impulsmessung wird mit einer großen Unsicherheit behaftet sein. Die Intensität des Lichts zu verringern, nützt nichts, denn sie setzt nur die Anzahl der Photonen im Lichtstrahl herab, nicht aber deren Impuls. Damit das Objekt beobachtet werden kann, muss mindestens ein Photon an ihm gestreut werden. Um sowohl die Orts- als auch die Impulsunschärfe bei einer Messung zu berücksichtigen, muss λ so gewählt werden, dass beide Unschärfen gegenüber der Position bzw. dem Impuls des zu detektierenden Objekts klein sind.

Auch bei der Streuung von Elektronen statt Photonen an einem Objekt bleibt diese Schwierigkeit bestehen, da der Impuls einer Elektronenwelle nach de Broglie (Gleichung 32.13) der gleichen Formel genügt wie der Impuls eines Photons. Das bedeutet, dass bei Elektronen mit geringem Impuls die Unschärfe der Impulsmessung vermindert wird, gleichzeitig jedoch die Positionsmessung wegen der Beugung der Elektronen ungenauer wird.

Das Produkt der Unschärfen von Position x und Impuls p ist wellenlängenunabhängig:

$$\Delta x \Delta p_x \approx \lambda \frac{h}{\lambda} = h.$$

Wenn wir genau definieren, was wir unter den Unschärfen oder Unsicherheiten bei einer Messung verstehen, können wir eine präzise Formulierung der Heisenberg'schen Unschärferelation aufstellen. Angenommen, Δx und Δp sind die Standardabweichungen bei der Messung der Position bzw. des Impulses, dann kann man zeigen, dass ihr Produkt mindestens gleich $\hbar/2$ sein muss:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (32.24)$$

HEISENBERG'SCHE UNSCHÄRFERELATION

Darin ist $\hbar = h/(2\pi)$. (Diese Größe kommt so häufig vor, dass sie ihr besonderes Symbol \hbar erhielt, ähnlich wie die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ bei Schwingungen und Wellen.)

Gleichung 32.24 ist die Formulierung für die Unschärferelation, wie sie Werner Heisenberg im Jahre 1927 aufstellte. In der Praxis sind die Ungenauigkeiten der Messergebnisse wesentlich höher als diese Untergrenze, die vom Welle-Teilchen-Dualismus herrührt und daher prinzipiell gilt.

32.6 *Erwartungswerte und klassischer Grenzfall

In der klassischen Mechanik wird die Position eines Teilchens durch eine Funktion beschrieben, die die Positionsabhängigkeit von der Zeit angibt. Die Wellennatur der Materie verbietet diese Vorgehensweise jedoch bei mikroskopischen Systemen. Wir können lediglich die Wahrscheinlichkeit angeben, mit der ein

Vorgehensweise: Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte

Die Basis für die Berechnung dieser beiden Größen ist die jeweilige Wellenfunktion.

- Zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit P , das Teilchen in dem infinitesimal schmalen Intervall zwischen x und $x + dx$ anzutreffen, ist die Breite dx des Intervalls mit der Wahrscheinlichkeit pro Längeneinheit bei x zu multiplizieren, wobei die Wahrscheinlichkeit pro Längeneinheit durch $|\psi(x)|^2$ gegeben ist.
- Zum Berechnen der Wahrscheinlichkeit P , das Teilchen im Bereich $x_1 < x < x_2$ anzutreffen, muss dieser Bereich im Prinzip in eine unendlich hohe Anzahl von Intervallen mit der infinitesimal kleinen Breite dx unterteilt werden. Dann wird jeweils die Wahrscheinlichkeit P berechnet, das Teilchen in jedem infinitesimal schmalen Intervall anzutreffen, und schließlich werden diese Wahrscheinlichkeiten aufsummiert bzw. integriert:

$$\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

- Der Erwartungswert einer Funktion $F(x)$ ergibt sich aus dem Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) |\psi(x)|^2 dx$.

bestimmter Wert der Position x zu messen ist. Wenn wir bei sehr vielen identischen Teilchen die Position messen, sind die ermittelten Werte gemäß dem Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte über die zur Verfügung stehende Länge verteilt. Der Mittelwert von x , der aus solchen Messungen hervorgeht, heißt **Erwartungswert** und wird mit $\langle x \rangle$ bezeichnet. Der Erwartungswert von x ist gleich dem Mittelwert von x , der bei der Positionsmeßung an sehr vielen Teilchen mit der gleichen Wellenfunktion $\psi(x)$ zu erwarten ist.

Da $|\psi(x)|^2 dx$ die Wahrscheinlichkeit angibt, ein Teilchen im Intervall dx zu finden, ist der Erwartungswert von x definiert als

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx. \quad (32.25)$$

DEFINITION DES ERWARTUNGSWERTS VON x

Der Erwartungswert einer beliebigen Funktion $F(x)$ ist entsprechend

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) |\psi(x)|^2 dx. \quad (32.26)$$

DEFINITION DES ERWARTUNGSWERTS DER FUNKTION $F(x)$

Am Teilchen im Kasten lässt sich die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten gut zeigen, das Teilchen in bestimmten Teilen des Kastens zu finden, wie wir in Beispiel 32.5 schon für ein

klassisches Teilchen gesehen haben. Die Beispiele 32.6 und 32.7 zeigen, wie man Erwartungswerte und Aufenthaltswahrscheinlichkeiten bei quantenmechanischen Teilchen berechnet, die mithilfe der Wellenfunktion beschrieben werden und deren Wahrscheinlichkeitsdichte nicht gleichverteilt ist.

Beispiel 32.6: Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei sinusförmiger Wellenfunktion

Ein Teilchen mit geringer Energie in einem Kasten der Breite d kann, wie wir in Kapitel 33 noch sehen werden, durch die Wellenfunktion $\psi = \sqrt{2/d} \sin(\pi x/d)$ beschrieben werden. Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens a) im Intervall der Länge $\Delta x = 0,01 d$, das bei $x = \frac{1}{2} d$ zentriert ist, und b) im Intervall $0 < x < \frac{1}{4} d$.

Problembeschreibung: Die Wahrscheinlichkeit P , das Teilchen in einem infinitesimalen Intervall dx zu finden, ist $|\psi|^2 dx$. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem bestimmten Intervall zu finden, ist gleich der Fläche unter der Kurve in diesem Intervall. Dieses hat bei Teilaufgabe a die Breite $\Delta x = 0,01 d$ und ist bei $x = d/2$ zentriert. Die entsprechende Fläche unter der $|\psi|^2$ -Kurve ist in Abbildung 32.9a eingezeichnet. Sie hat (wegen der Krümmung der Kurve ungefähr) die Größe $|\psi(x)|^2 \Delta x$. Das Intervall bei Teilaufgabe b ist $0 < x < d/4$, und die Fläche unter der Kurve ist in Abbildung 32.9b eingezeichnet. Zum Berechnen dieser Fläche ist $|\psi|^2$ von $x = 0$ bis $x = d/4$ zu integrieren.

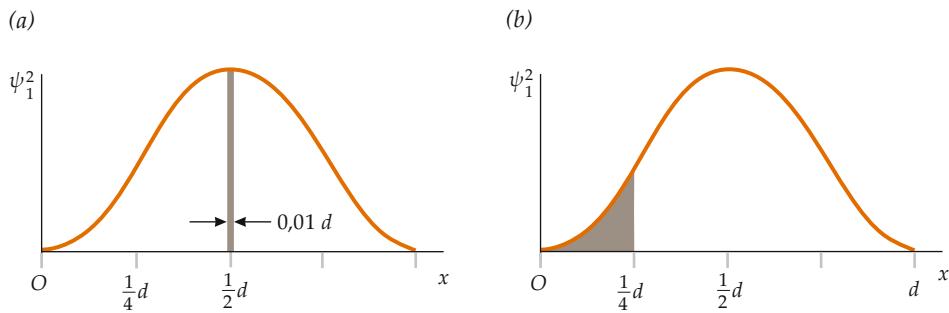


Abbildung 32.9 Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die Intervalle Δx aus den Teilaufgaben a und b.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im angegebenen Intervall anzutreffen, entspricht der getönten Fläche unter der Kurve in Abbildung 32.9a. Um sie näherungsweise zu berechnen, müssen Sie zunächst die Höhe der Kurve bei $x = d/2$ ermitteln:

$$|\psi(d/2)|^2 = \frac{2}{d} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{d}$$

2. Die Fläche, also die Wahrscheinlichkeit, ist etwa gleich dem Produkt aus der Höhe und der Breite $\Delta x = 0,01 d$ des Intervalls:

$$P \approx |\psi(d/2)|^2 \Delta x = \frac{2}{d} (0,01 d) = \boxed{0,02}$$

Teilaufgabe b

1. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im linken Viertel des Kastens zu finden, entspricht der in Abbildung 32.9b eingezeichneten Fläche. Um diese zu berechnen, müssen Sie von $x = 0$ bis $x = d/4$ integrieren:

$$P = \int_0^{d/4} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{d/4} \frac{2}{d} \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) dx$$

2. Das Integral kann auf unterschiedliche Arten ausgewertet werden. Wenn es in Tabellen nachgeschlagen wird, muss die Integrationsvariable geändert werden. Mit der Integrationsvariablen $\theta = \pi x/d$ ergibt sich:

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta$$

3. Dieses Integral hat – wie in Tabellen nachzuschlagen ist – folgende Lösung:

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta d\theta = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

4. Berechnen Sie mit dem Ergebnis von Schritt 3 die Aufenthaltswahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \boxed{0,091}$$

Plausibilitätsprüfung: Wenn $|\psi|^2$ im Intervall $0 < x < d$ gleichförmig verteilt wäre, so ergäbe sich in Schritt 4 die Wahrscheinlichkeit 0,25. Jedoch hat $|\psi|^2$ im Intervall $0 < x < d/4$ relativ kleine Werte, sodass eine deutlich geringere Wahrscheinlichkeit als 0,25 zu erwarten war. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Bereich $\Delta x = 0,01 d$ bei $x = \frac{1}{2}d$ zu finden, liegt also bei rund 2 %, und mit einer Wahrscheinlichkeit von gut 9 % befindet sich das Teilchen im Intervall $0 < x < \frac{1}{4}d$.

Weitergedacht: In Teilaufgabe a war keine Integration nötig, weil das betrachtete Intervall sehr schmal ist und näherungsweise einem Rechteck mit der Höhe $|\psi(d/2)|^2$ und der Breite Δx entspricht. Außerdem ist ψ reell, so dass $\psi^* = \psi$ ist und uns Rechnungen mit imaginären Einheiten erspart bleiben. ■

Beispiel 32.7: Berechnung von Erwartungswerten

Berechnen Sie a) $\langle x \rangle$ und b) $\langle x^2 \rangle$ für ein Teilchen, das sich in einem Kasten der Länge d befindet und durch die Wellenfunktion $\psi = \sqrt{2/d} \sin(\pi x/d)$ beschrieben wird.

Problembeschreibung: Es ist die Beziehung $\langle F(x) \rangle = \int F(x) |\psi(x)|^2 dx$ (Gleichung 32.26) zu verwenden.

Lösung:

Teilaufgabe a

Hier ist $F(x) = x$.

1. Setzen Sie in den Ausdruck für $\langle x \rangle$ die gegebene Wellenfunktion ein:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x)|^2 dx = \frac{2}{d} \int_0^d x \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) dx$$

2. Um die Lösung des Integrals in Tabellen nachzuschlagen zu können, ändern Sie zunächst die Integrationsvariable in $\theta = \pi x/d$:

$$\langle x \rangle = \frac{2}{d} \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \int_0^\pi \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{2d}{\pi^2} \int_0^\pi \theta \sin^2 \theta d\theta$$

3. Das Integral hat – wie in Tabellen nachzuschlagen ist – folgende Lösung:

$$\int_0^\pi \theta \sin^2 \theta d\theta = \left(\frac{\theta^2}{4} - \frac{\theta \sin(2\theta)}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{8} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

4. Setzen Sie diesen Wert in die Gleichung von Schritt 2 ein:

$$\langle x \rangle = \frac{2d}{\pi^2} \int_0^\pi \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{2d}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \boxed{\frac{d}{2}}$$

Teilaufgabe b

Hier ist $F(x) = x^2$.

1. Wiederholen Sie Schritt 1 und 2 von Teilaufgabe a für $\langle x^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx = \frac{2}{d} \int_0^d x^2 \sin^2(\pi x/d) dx \\ &= \frac{2}{d} \left(\frac{d}{\pi}\right)^3 \int_0^\pi \theta^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{2d^2}{\pi^3} \int_0^\pi \theta^2 \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

2. Das Integral hat – wie in Tabellen nachzuschlagen ist – folgende Lösung:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \theta^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \left[\frac{\theta^3}{6} - \left(\frac{\theta^2}{4} - \frac{1}{8} \right) \sin(2\theta) - \frac{\theta \cos(2\theta)}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. Setzen Sie diesen Wert in die Gleichung von Schritt 1 ein:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2d^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right) d^2 = \boxed{0,283 d^2}$$

Plausibilitätsprüfung: Der Erwartungswert von x ist $d/2$; das war zu erwarten, weil die Wahrscheinlichkeitsverteilung symmetrisch zur Kastenmitte ist.

Weitergedacht: Beachten Sie, dass $\langle x^2 \rangle$ größer ist als $\langle x \rangle^2$. ■

Frage 32.1

Bei einem völlig gleichmäßigen („fairen“) Würfel tragen vier Seiten die Ziffer 1 und die restlichen zwei Seiten die Ziffer 6. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Ziffer 1 gewürfelt? *Hinweis:* Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einmaligem Würfeln eine bestimmte Ziffer erscheint, ist gleich dem Anteil, in dem sie bei sehr häufigem Würfeln erscheinen würde.

Frage 32.2

Bei einem völlig gleichmäßigen („fairen“) Würfel tragen vier Seiten die Ziffer 1 und die restlichen zwei Seiten die Ziffer 6. Wir bezeichnen die Ziffer, die bei einmaligem Würfeln oben zu liegen kommt, mit N . Wie groß sind die Erwartungswerte für N bzw. N^2 ? *Hinweis:* Der Erwartungswert einer Größe ist deren Mittelwert aus einer großen Anzahl von Beobachtungen, in diesem Fall von Würfelforgängen.

Klassischer Grenzfall

Bei der Erklärung des photoelektrischen Effekts oder der Compton-Streuung haben wir gesehen, dass Licht Teilchen-eigenschaften haben muss und in gequantelten Energieportionen auftritt. Umgekehrt verhalten sich Elektronen am Doppelspalt wie Wellen, da sie Beugungsmuster formen. Betrachten wir jedoch Licht, das mit makroskopischen Körpern wechselwirkt, treten diese Erscheinungen nicht auf. Licht erscheint uns als elektromagnetische Welle (z. B. bei der Beugung am Doppelspalt) oder bei kurzen Wellenlängen sogar als Lichtstrahl wie in der geometrischen Optik in Kapitel 29 und Teilchen sind an einer bestimmten Position im Raum lokalisierbar statt als Materiewelle verteilt. In Kapitel 29 haben wir bereits festgestellt, dass man Licht auch als Lichtstrahlen modellieren kann, was uns zur geometrischen Optik führte. Analog zur geometrischen Optik, die sich als Näherung der Wellenoptik für kurze Wellenlängen ergibt, stellte Paul Ehrenfest fest, dass die klassische Mechanik sich als Näherung der Quantenmechanik ableiten lässt. Dazu verglich er die Bewegungsgleichungen für

32.6 *Erwartungswerte und klassischer Grenzfall

Mittelwerte von quantenmechanischen Größen mit den Bewegungsgleichungen des klassischen Äquivalents und fand das nach ihm benannte **Korrespondenzprinzip**:

Die Erwartungswerte von quantenmechanischen Größen erfüllen näherungsweise die gleichen Bewegungsgleichungen wie die äquivalenten klassischen Größen.

EHRENFEST-THEOREM

Dies ist verständlich, wenn man sich die Analogie zur geometrischen Optik wieder vor Augen hält. Bei Wellen mit sehr kleiner Wellenlänge wird keine Interferenz beobachtet, weil die Interferenzstreifen zu dicht beieinander liegen, um einzeln wahrgenommen zu werden. Stattdessen beobachten wir einen mittleren Wert der Intensität auf dem Schirm. Genauso ging Ehrenfest davon aus, dass mit steigender Energie und damit kürzer werdender Wellenlänge der Materiewellen (siehe Gleichung 32.16 und Beispiel 32.4) diese nicht mehr als Wellen, sondern als Teilchen zu beobachten sind. Zum gleichen Resultat gelangte Niels Bohr 1920, als er entdeckte, dass die quanten-

mechanischen Energiezustände im Wasserstoffatom für größer werdende Energieniveaus mit den klassischen Lösungen übereinstimmten. Er formulierte das nach ihm benannte **Bohr'sche Korrespondenzprinzip** folgendermaßen:

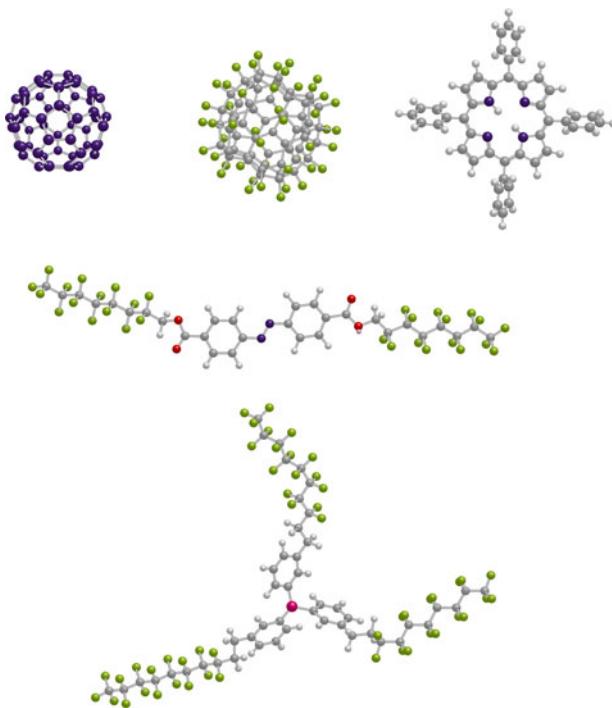
Im Grenzfall sehr hoher Quantenzahlen müssen die klassische und die quantenmechanische Berechnung das gleiche Resultat ergeben.

BOHR'SCHES KORRESPONDENZPRINZIP

Die sogenannte **Quantenzahl** werden wir in Kapitel 33 noch näher kennenlernen. Sie charakterisiert die Wellenfunktion für einen bestimmten Zustand und damit die Energie dieses Zustands. Sehr große Quantenzahlen entsprechen sehr hohen Energien. Dabei ist die relative Differenz der Energien benachbarter Quantenzustände sehr gering, sodass die Quantisierung der Energie nur eine geringe Rolle spielt, d.h. in den klassischen Fall übergeht, in dem man diese Quantelung nicht mehr wahrnehmen kann.

🔍 Im Kontext: Zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik

Nach dem Bohr'schen Korrespondenzprinzip ist die klassische Mechanik ein Grenzfall der Quantenmechanik, wobei die Abstände zwischen den einzelnen Energieniveaus so klein sind, dass sie nicht mehr beobachtbar sind. Daher beschreiben wir makroskopische Prozesse wie etwa die Flugbahn eines in die Luft geworfenen Balls mit den Gleichungen der Newton'schen Mechanik, während wir für die Erklärung des Photoeffekts die Quantenmechanik verwenden müssen. Doch bei welchen Energien und Wellenlängen geht die Quantenmechanik in die klassische Mechanik über? Diese Frage ist immer noch Gegenstand aktueller Forschungen, und mit zunehmender Präzision der experimentellen Apparaturen gelingt es, bei immer größeren Molekülen erfolgreich Welleneigenschaften nachzuweisen.



Komplexe Moleküle, deren Welleneigenschaften bereits nachgewiesen werden konnten¹: a) C₆₀, b) C₆₀F₄₈, c) C₄₄H₃₀N₄, d) C₃₀H₁₂F₃₀N₂O₄, e) C₄₈H₂₄F₅₁P. (M. Hornberger)

1999 fand die Gruppe um Markus Arndt, dass C₆₀-Moleküle, sogenannte *Fullerene*, Beugung und Interferenz zeigen, wenn sie ein SiN-Gitter mit einem Gitterabstand von 100 nm passieren.² Mit einer de-Broglie-Wellenlänge von ungefähr 2,5 pm ist die Wellenlänge des fußballförmigen Fullerens wesentlich kürzer als sein Durchmesser, der ca. 1 nm beträgt. Die Stöße der Moleküle mit den Kanten des Gitters führen jedoch zu einer verminderten Sichtbarkeit des Interferenzmusters, da die Kohärenz zwischen den Teilen der Materiewelle an den einzelnen Spalten des Gitters dadurch verloren geht. Um dieses Problem zu umgehen, wurde das SiN-Gitter durch eine stehende Lichtwelle eines Laserstrahls ersetzt. In diesem sogenannten Kapitza-Dirac-Talbot-Lau-Interferometer kann man sogar Beugung und Interferenz komplexerer Moleküle wie C₆₀F₄₈³, C₄₄H₃₀N₄³, C₃₀H₁₂F₃₀N₂O₄⁴ oder C₄₈H₂₄F₅₁P⁵ beobachten.

Perfluoroalkyl-funktionalisiertes Azobenzen (mit der Formel C₃₀H₁₂F₃₀N₂O₄) bildet eine mehratomige Moleküllkette mit 3,2 nm Länge, die in ausgestrecktem Zustand viermal so lang ist wie der Durchmesser des C₆₀-Moleküls. Besonders interessant dabei ist, dass diese Kette ihre Konfiguration auf einer Zeitskala verändert, die wesentlich kürzer als die Flugzeit im Interferometer ist, und man trotz dieser inneren Zustandsdynamik des Moleküls seine Welleneigenschaft in diesem Interferometer nachweisen kann.

1. M. Arndt und K. Hornberger, „Quantum interferometry with complex molecules“, *Quantum Coherence in Solid State Systems, International School of Physics „Enrico Fermi“*, Course CLXXI, Vol. 171, p. 103-130, IOS press, Amsterdam (2009)
2. M. Arndt , O. Nairz, J. Voss-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw und A. Zeilinger, „Wave-particle duality of C₆₀“, *Nature* 401, 680-682 (1999)
3. L. Hackermüller, S. Uttenthaler, K. Hornberger, E. Reiger, B. Brezger, A. Zeilinger und M. Arndt, „The wave nature of biomolecules and fluorofullerenes“, *Phys. Rev. Lett.* 91, 90408 (2003)
4. S. Gerlich, L. Hackermüller, K. Hornberger, A. Stibor, H. Ulbricht, F. Goldfarb, T. Savas, M. Müri, M. Mayor und M. Arndt, „A Kapitza-Dirac-Talbot-Lau interferometer for highly polarizable molecules“, *Nature Physics* 3, 711 (2007)
5. S. Gerlich, M. Gring, H. Ulbricht, K. Hornberger, J. Tüxen, M. Mayor und M. Arndt, „Matter-Wave Metrology as a Complementary Tool for Mass Spectrometry“, *Angew. Chem. Int. Ed.* 47, 6195–6198 (2008)

Zusammenfassung

- Alle Objekte bewegen sich wie Wellen und tauschen Energie wie Teilchen aus.
- Die Heisenberg'sche Unschärferelation ist ein fundamentales Naturgesetz. Es setzt der Genauigkeit prinzipielle Grenzen, wenn man an einem mikroskopischen Teilchen bestimmte Größen gleichzeitig messen will, beispielsweise die Position und den Impuls. Dieses Prinzip folgt aus den allgemeinen Eigenschaften von Wellen.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen	
1. Teilchennatur des Lichts: Photonen	Die Energie von Licht ist quantisiert. Die Lichtquanten nennt man Photonen.	
Photonenenergie und -impuls	$E = h\nu$ und $E = pc$	(32.1, 32.6)
Planck'sches Wirkungsquantum	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4,136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$	(32.2)
Die Größe hc	$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$	(32.5)
Photoelektrischer Effekt	$E_{\text{kin,max}} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{max}} = h\nu - W_{\text{Abl}}$	(32.3)
Darin ist W_{Abl} die Ablösearbeit der Kathode.		
Compton-Streuung	$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda_{\text{Compton}} (1 - \cos \theta)$	(32.11)
mit $\lambda_{\text{Compton}} = \frac{\hbar}{m_e c} = 2,426 \text{ pm}$		(32.12)
2. De Broglie'sche Beziehungen	Den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge und dem Impuls von Elektronen, Photonen und anderen Teilchen beschreiben die de Broglie'schen Beziehungen:	
	$E = h\nu$ und $p = \frac{\hbar}{\lambda}$	(32.14, 32.13)
Nichtrelativistische Teilchen	$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$ und daher $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 E_{\text{kin}}}}$	(32.15)
3. Quantenmechanik	Der Zustand eines Teilchens, beispielsweise eines Elektrons oder Photons, wird durch seine (i. A. komplexe) Wellenfunktion ψ beschrieben, die eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist. Für stehende Wellen kann man den Ansatz	
Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung	$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$ verwenden, wobei $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$ ist.	
Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung	Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung ist eine Differenzialgleichung, die die zweite räumliche Ableitung einer Wellenfunktion mit ihrer ersten zeitlichen Ableitung verknüpft. Wellenfunktionen, die physikalische Situationen beschreiben, sind Lösungen dieser Differenzialgleichung: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + E_{\text{pot}} \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$	
Aufenthaltswahrscheinlichkeit	Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t in einem Intervall dx zu finden, ist $P(x, t) dx = \psi(x, t) ^2 dx = \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx$. Darin ist $P(x, t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte.	
Normierungsbedingung	$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) ^2 dx = 1$	
Erwartungswert	Der Erwartungswert $\langle x \rangle$ entspricht dem Mittelwert von x , der sich ergibt, wenn die Positionen sehr vieler Teilchen gemessen werden, für die dieselbe Wellenfunktion $\psi(x)$ gilt: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi(x) ^2 dx$.	
Der Erwartungswert einer Funktion $F(x)$ ist entsprechend		
	$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \psi(x) ^2 dx$.	

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
4. Heisenberg'sche Unschärferelation	Sie besagt, dass es prinzipiell nicht möglich ist, Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig beliebig genau zu messen. Das Produkt der Unsicherheiten bei einer Messung der Position und des Impulses ist mindestens so groß wie $\frac{1}{2} \hbar$: $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (32.24)$
5. Welle-Teilchen-Dualismus	Licht, Elektronen, Neutronen und auch alle anderen Träger von Impuls und Energie weisen sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften auf. Jedes Objekt bewegt sich wie eine klassische Welle, die Beugung und Interferenz zeigt, tauscht aber Energie in diskreten Portionen aus wie ein klassisches Teilchen.
6. Korrespondenzprinzip	Es beschreibt, wie die Quantenmechanik mit der klassischen Mechanik zusammenhängt. Da die Wellenlänge makroskopischer Objekte äußerst klein ist, sind Beugung und Interferenz bei ihnen nicht zu beobachten. Wenn eine makroskopische Energiemenge ausgetauscht wird, entspricht sie so vielen Quanten, dass die Quantisierung der Energie nicht bemerkbar ist.
Ehrenfest-Theorem	Die Erwartungswerte von quantenmechanischen Größen erfüllen näherungsweise die gleichen Bewegungsgleichungen wie die äquivalenten klassischen Größen.
Bohr'sches Korrespondenzprinzip	Im Grenzfall sehr hoher Quantenzahlen (d. h. hoher Energien) müssen die klassische und die quantenmechanische Berechnung das gleiche Resultat ergeben.

Antworten auf die Verständnisfragen

1. 2/3
2. $\langle N \rangle = 8/3$, $\langle N^2 \rangle = 38/3$

Lösungen der Übungen

1. $4,13 \cdot 10^{-7}$ eV
2. a) 12,4 μm, b) 1,24 nm, c) 1,24 pm
3. $1,46 \cdot 10^7$ cm $^{-3}$
4. 0,6 c
5. $1,4 \cdot 10^{-34}$ m
6. 0,388 nm. Die Wellenlänge eines Elektrons mit der kinetischen Energie 10 eV liegt in derselben Größenordnung wie der Durchmesser eines Atoms bzw. wie der Atomabstand in Kristallen.

Aufgaben

Verständnisaufgaben

32.1 • Bei welcher Beobachtung wird die Energiequantisierung der elektromagnetischen Strahlung deutlich? a) Beim Young'schen Doppelspaltversuch, b) bei der Beugung des Lichts an einer engen Öffnung, c) beim photoelektrischen Effekt.

32.2 • Angenommen, die Wellenlänge eines Elektrons und eines Protons sind gleich. Welche der folgenden Aussagen trifft dann zu? a) Die Geschwindigkeit des Protons ist höher als die des Elektrons. b) Proton und Elektron haben die gleiche Geschwindigkeit. c) Die Geschwindigkeit des Protons ist geringer als die des Elektrons. d) Die Energie des Protons ist höher als die des Elektrons. e) Die Aussagen a und d sind richtig.

32.3 • Der Parameter x stellt die Position eines Teilchens dar. Kann der Erwartungswert von x jemals gleich einem Wert sein, für den die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$ null ist? Nennen Sie ein konkretes Beispiel.

32.4 •• Früher nahm man an, dass bei der Durchführung zweier identischer Experimente an identischen Systemen unter denselben Bedingungen identische Ergebnisse erhalten werden müssen. Erklären Sie, warum diese Annahme nicht richtig ist und wie die Aussage geändert werden kann, um mit den Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik vereinbar zu sein.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

32.5 •• Eine Gruppe von Physikstudenten misst im Praktikum die Compton-Wellenlänge λ_{Compton} . Für verschiedene Streuwinkel θ ergeben sich dabei folgende Wellenlängenverschiebungen $\lambda_2 - \lambda_1$:

$\theta/^\circ$	45	75	90	135	180
$(\lambda_2 - \lambda_1)/\text{pm}$	0,647	1,67	2,45	3,98	4,95

Leiten Sie aus diesen Werten die Compton-Wellenlänge ab und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem zu erwartenden Wert.

Die Teilchennatur des Lichts: Photonen

32.6 • Wie hoch ist die Photonenergie in Joule und in Elektronenvolt einer Radiowelle mit der Frequenz a) 100 MHz im FM-Bereich bzw. b) 900 kHz im AM-Bereich?

32.7 •• Das von einem Helium-Neon-Laser mit einer Leistung von 3,00 mW emittierte Licht hat die Wellenlänge 633 nm. Angenommen, der Laserstrahl hat einen Durchmesser von 1,00 mm, wie hoch ist dann die Dichte an Photonen im Strahl? Nehmen Sie dabei an, dass die Intensität im Strahl gleichförmig verteilt ist.

Der photoelektrische Effekt

32.8 • Monochromatisches UV-Licht der Wellenlänge 300 nm fällt auf ein Metallstück aus Kalium, und die emittierten Elektronen haben eine maximale kinetische Energie von 2,03 eV. a) Wie hoch ist die Energie eines auftreffenden Photons? b) Wie groß ist die Ablösearbeit von Kalium? c) Wie hoch ist die maximale kinetische Energie der Elektronen, wenn das einfallende Licht eine Wellenlänge von 430 nm hat? d) Wie groß ist beim photoelektrischen Effekt von Kalium die Grenzwellenlänge der auftreffenden elektromagnetischen Strahlung?

Compton-Streuung

32.9 • Arthur H. Compton verwendete bei seinen Versuchen u. a. Photonen der Wellenlänge 0,0711 nm. a) Wie hoch ist die Energie eines dieser Photonen? b) Wie groß ist die Wellenlänge der Photonen, die in einem Winkel von $\theta = 180^\circ$, also entgegen der Einfallrichtung, gestreut werden? c) Wie hoch ist die Energie eines unter diesem Winkel gestreuten Photons?

32.10 • Berechnen Sie für die Gegebenheiten in Aufgabe 9 den Impuls eines einfallenden und eines unter 180° , also entgegen der Einfallrichtung, gestreuten Photons. Berechnen Sie anhand der Impulserhaltung den Rückstoßimpuls, den das Elektron dabei aufnimmt.

Elektronen und Materiewellen

32.11 •• Ein Elektron, ein Proton und ein Alphateilchen haben jeweils eine kinetische Energie von 150 keV. Berechnen Sie jeweils a) den Betrag ihres Impulses und b) ihre De-Broglie-Wellenlänge.

32.12 • Im LiCl-Kristall haben die Ionen Li^+ und Cl^- voneinander den Abstand 0,257 nm. Berechnen Sie die kinetische Energie von Elektronen, deren Wellenlänge diesem Abstand entspricht.

Berechnung von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten

32.13 • Ein Teilchen befindet sich in einem eindimensionalen Kasten der Länge d im Zustand mit der Wellenfunktion $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right)$. (Ein Ende des Kastens liegt im Ursprung des Koordinatensystems und das andere auf der positiven x -Achse.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall der Länge $\Delta x = 0,002 d$ anzutreffen, wobei das Intervall zentriert ist bei: a) $x = 4d$, b) $x = \frac{1}{2}d$ bzw. c) $x = \frac{3}{4}d$.

(Da Δx sehr klein ist, müssen Sie nicht integrieren, denn dabei ändert sich die Wellenfunktion im jeweiligen Intervall nur geringfügig.)

32.14 • Die klassische Funktion für die Wahrscheinlichkeitsdichte-Verteilung eines Teilchens im Bereich $0 < x < d$ in einem eindimensionalen Kasten ist gegeben durch $P(x) = 1/d$. Zeigen Sie, dass damit die Erwartungswerte $\langle x \rangle = \frac{1}{2}d$ und $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3}d^2$ sind.

32.15 •• a) Ein eindimensionaler Kasten befindet sich auf der x -Achse im Bereich $0 \leq x \leq d$. Für ein Teilchen in diesem Kasten sind die Wellenfunktionen gegeben durch

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Zeigen Sie, dass sich für den Zustand mit der Quantenzahl n die Erwartungswerte $\langle x \rangle = \frac{1}{2}d$ und $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3}d^2 - d^2/(2n^2\pi^2)$ ergeben. b) Vergleichen Sie diese beiden Ausdrücke $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ für den Fall $n \gg 1$ mit den entsprechenden Ausdrücken für die Erwartungswerte beim klassischen Teilchen in Aufgabe 14.

Allgemeine Aufgaben

32.16 • Photonen in einem gleichförmigen Lichtstrahl mit dem Durchmesser 4,00 cm und der Intensität 100 W/m² haben die Wellenlänge 400 nm. a) Wie hoch ist die Energie eines Photons in diesem Strahl? b) Wie viel Energie trifft in der Zeitspanne 1,00 s auf eine 1,00 cm² große Fläche auf, die senkrecht auf der Strahlrichtung steht? c) Wie viele Photonen treffen in der gleichen Zeit auf diese Fläche auf?

32.17 •• Bei normaler Zimmerbeleuchtung hat die Pupille des menschlichen Auges einen Durchmesser von rund 5 mm. Wie hoch muss die Intensität von Licht der Wellenlänge 600 nm sein, damit pro Sekunde ein Photon in die Pupille gelangt?

32.18 •• Ein Photon mit der Energie E erfährt Compton-Streuung unter dem Winkel θ . Zeigen Sie, dass die Energie E' des gestreuten Photons gegeben ist durch

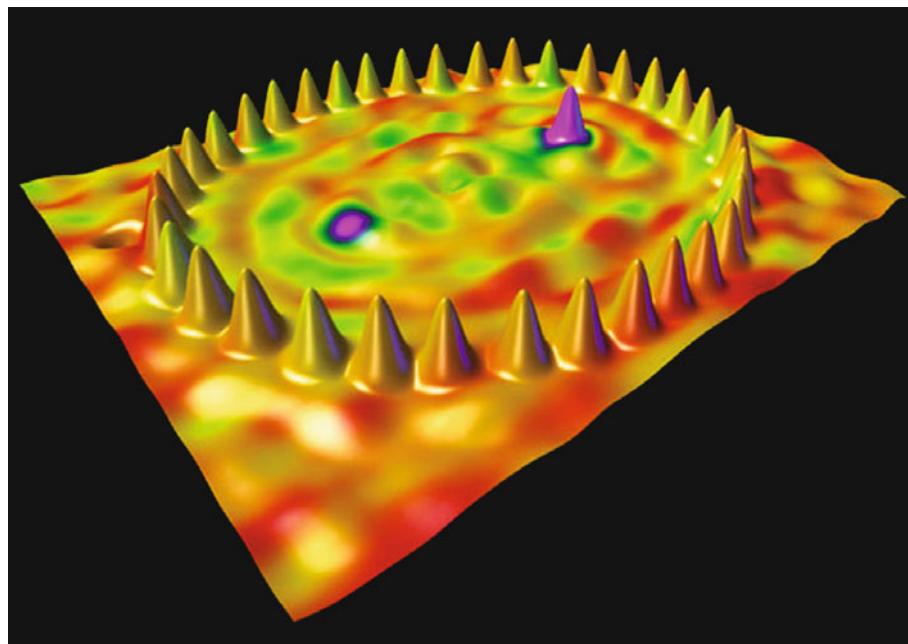
$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}.$$

32.19 •• Ein mit Modenkopplung betriebener Titan-Saphir-Laser gibt Strahlung der Wellenlänge 850 nm ab und erzeugt dabei pro Sekunde 100 Millionen Lichtpulse. Jeder Puls dauert 125 Femtosekunden (es ist 1 fs = 10^{-15} s) und besteht aus $5 \cdot 10^9$ Photonen. Wie hoch ist die mittlere Leistung dieses Lasers?

32.20 •• Hier soll die Zeitverzögerung abgeschätzt werden, die beim photoelektrischen Effekt nach den klassischen physikalischen Gesetzen zwar zu erwarten ist, jedoch nicht beobachtet wird. Der einfallende Strahl soll die Intensität 0,010 W/m² haben. a) Wenn das Atom des betreffenden Metalls eine Querschnittsfläche von 0,010 nm² hat, wie viel Energie trifft dann pro Sekunde auf ein Atom auf? b) Setzen Sie die Ablösearbeit des Metalls zu 2,0 eV an. Wie lange dauert es dabei nach den Gesetzen der klassischen Physik, bis der Lichtstrahl diese Energiemenge auf ein Atom eingestrahlt hat? Und wie lange dauert es, wenn die Energie in einzelnen Paketen (Photonen) eingestrahlt wird?

Anwendungen der Schrödinger-Gleichung

33



Mit dem Rastertunnel elektronenmikroskop können einzelne Atome auf einer Oberfläche bewegt und abgebildet werden. Besonders faszinierend sind Bilder von Quantenkäfigen, also kreisförmigen oder elliptischen Anordnungen an der Oberfläche. In ihnen können die Wellen sichtbar gemacht werden, die den Elektronen nahe der Substratoberfläche entsprechen. Dieses Bild, entstanden in den Forschungslabors der IBM, zeigt 36 Kobaltatome, die auf einer Kupferoberfläche elliptisch angeordnet sind. Ein weiteres Kobaltatom wurde an einem Brennpunkt der Ellipse platziert und verursacht Wechselwirkungen mit den Elektronenwellen an der Oberfläche. Die Wellen scheinen auch mit einem „virtuellen“ Kobaltatom am anderen Brennpunkt wechselzuwirken, das sich dort jedoch gar nicht befindet. (© IBM Corporation.)

Anwendungen der Schrödinger-Gleichung

33.1 Ein Teilchen im Kasten mit unendlich hohem Potenzial	1184
33.2 Ein Teilchen im Kasten mit endlich hohem Potenzial	1187
33.3 Der harmonische Oszillator	1189
33.4 Reflexion und Transmission von Elektronenwellen an Potenzialbarrieren	1192
33.5 *Die Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen	1197
33.6 Die Schrödinger-Gleichung für zwei identische Teilchen	1200
Zusammenfassung	1205
Aufgaben	1207



Könnte das nicht vorhandene Kobaltatom durch Reflexionen von Wellen an der Käfigwand der Kobaltatome vorgetäuscht werden? (Siehe Abschnitt 33.4.)

In Kapitel 32 haben wir festgestellt, dass Elektronen und andere Teilchen Welleneigenschaften haben und daher durch eine Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ beschrieben werden können. Wir haben die Schrödinger-Gleichung als die Gleichung kennengelernt, die diese Wellenfunktionen erfüllen. Nun wollen wir uns mit einigen Anwendungsbeispielen dieser Gleichung und den sich daraus ergebenden Lösungen beschäftigen. Dabei werden wir feststellen, dass die in Kapitel 12 behandelten Wellen eine große Rolle spielen.

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 32 eingeführten Inhalte vertieft und erweitert. Wir wenden die Schrödinger-Gleichung auf ein Teilchen in einem eindimensionalen Kasten an, aber auch auf einige andere Fälle, in denen ein Teilchen in einem bestimmten Bereich des Raums eingeschlossen ist. Wir betrachten dabei die jeweiligen Randbedingungen und die ihnen entsprechende Energiequantisierung. Schließlich zeigen wir, wie die Schrödinger-Gleichung mit der Barrierendurchdringung zusammenhängt, und behandeln auch ihre Erweiterung auf mehr als eine Dimension und mehrere Teilchen.

33.1 Ein Teilchen im Kasten mit unendlich hohem Potenzial

Wir wollen dieses Kapitel mit der einfachsten Anwendung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung beginnen. Betrachten wir dazu ein Teilchen in einem eindimensionalen Kasten, der sich von $x = 0$ bis $x = d$ erstreckt. Damit das Teilchen nicht aus dem Kasten entweichen kann, ist die potentielle Energie außerhalb des Kastens unendlich hoch. Man spricht daher von einem **Kasten mit unendlich hohem Potenzial**; dieses ist folgendermaßen zu beschreiben:

$$E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x < d \\ \infty & \text{für } x > d. \end{cases} \quad (33.1)$$

Innerhalb des Kastens ist die potentielle Energie null, während sie außerhalb des Kastens unendlich hoch ist. Da sich das Teilchen im Kasten befinden muss, ist überall außerhalb des Kastens $\psi(x) = 0$. Wir müssen daher die Schrödinger-Gleichung innerhalb des Kastens für Wellenfunktionen $\psi(x)$ lösen, die bei $x = 0$ und bei $x = d$ gleich null sein müssen. (Dies ist die gleiche Bedingung wie diejenige für stehende Wellen auf einer Saite, die bei $x = 0$ und $x = d$ eingespannt ist.)

Da innerhalb des Kastens $E_{\text{pot}}(x) = 0$ ist, lautet die Schrödinger-Gleichung (Gleichung 32.21) hierfür:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E \psi(x)$$

oder

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2 \psi(x) = 0 \quad (33.2)$$

mit

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (33.3)$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung 33.2 kann geschrieben werden als

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (33.4)$$

wobei A und B Konstanten sind. Bei $x = 0$ ist

$$\psi(0) = A \sin(k \cdot 0) + B \cos(k \cdot 0) = 0 + B.$$

Die Randbedingung $\psi(x) = 0$ bei $x = 0$ ergibt $B = 0$, sodass aus Gleichung 33.4 folgt:

$$\psi(x) = A \sin(kx). \quad (33.5)$$

Die Wellenfunktion ist somit eine Sinuswelle mit der Wellenlänge λ , die – wie gewöhnlich – mit der Wellenzahl k über $\lambda = 2\pi/k$ zusammenhängt. Die Randbedingung $\psi(x) = 0$ bei $x = d$ beschränkt die möglichen Werte von k und daher die Werte der Wellenlänge λ und (gemäß Gleichung 33.3) der Energie $E = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2/m$. Es gilt

$$\psi(d) = A \sin(kd) = 0. \quad (33.6)$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn kd gleich π oder gleich einem ganzzahligen Vielfachen von π ist. Demnach ist k auf die Werte k_n beschränkt, für die gilt:

$$k_n = n \frac{\pi}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33.7)$$

BEDINGUNG FÜR STEHENDE WELLEN BEI EINEM TEILCHEN IM KASTEN DER LÄNGE d

Die Bedingung nach Gleichung 33.6 ist auch für $n = 0$ erfüllt. Die Funktion $\psi(x) = A \sin 0 = 0$ ist daher für sämtliche Werte von x (im Bereich $0 < x < d$) ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung. Jedoch hat diese Lösung, d. h. diese Wellenfunktion, im gesamten Bereich den Wert null, womit der Kasten leer ist, da die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens im Kasten proportional zum Quadrat der Wellenfunktion ist. Außerdem kann sie nicht normiert werden und daher keine Wellenfunktion für ein Teilchen darstellen. Einsetzen von $n\pi/d$ für k_n in Gleichung 33.3 und Auflösen nach E ergibt die erlaubten Energiewerte:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(n \frac{\pi}{d}\right)^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{8md^2} = n^2 E_1 \quad (33.8)$$

ERLAUBTE ENERGIEN FÜR EIN TEILCHEN IM KASTEN

mit

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{8md^2}. \quad (33.9)$$

Dies ist die Energie des niedrigsten Zustands, der der Grundzustand ist.

Die Bedingung $\psi = 0$ bei $x = 0$ und bei $x = d$ ist eine so genannte **Randbedingung**. Die Randbedingungen führen in der Quantenmechanik zur Quantisierung der Energie. Abbildung 33.1 zeigt die Energieniveaus eines Teilchens im Kasten. Beachten Sie, dass die niedrigste Energie von null verschieden ist. Das ist in der Quantenmechanik allgemein der Fall. Ist ein Teilchen räumlich auf einen bestimmten Bereich beschränkt, dann besitzt es eine minimale kinetische Energie, die man **Nullpunktenergie** nennt. Sie ist stets größer als null und umso höher, je kleiner der Bereich ist, in dem das Teilchen eingeschlossen ist. In Gleichung 33.9 ist dies daran erkennbar, dass E_1 proportional zu $1/d^2$ ist.

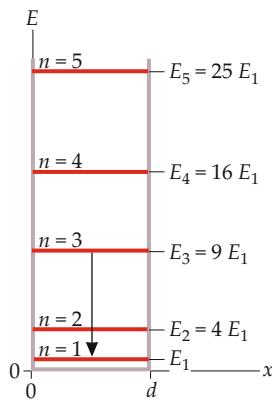


Abbildung 33.1 Die Energieniveaus eines Teilchens in einem eindimensionalen Kasten mit unendlich hohen Wänden. Ein klassisches Teilchen kann beliebige Energien haben. Quantenmechanisch erlaubt sind aber nur die Energiewerte gemäß Gleichung 33.8. Der senkrechte Pfeil symbolisiert den Übergang zwischen dem Zustand $n = 3$ und dem Grundzustand $n = 1$.

Ist ein Elektron eingeschlossen (z. B. in einem Atom gebunden) und hat es die Anfangsenergie E_A , so kann es in einen Zustand mit der Endenergie E_E übergehen, wobei ein Photon absorbiert oder emittiert wird (bei $E_E < E_A$ wird ein Photon emittiert, bei $E_E > E_A$ dagegen absorbiert). Der Übergang vom Zustand $n = 3$ in den Grundzustand $n = 1$ ist in Abbildung 33.1 durch den senkrechten Pfeil angedeutet. Die Frequenz des ausgestrahlten Photons kann man anhand des Prinzips der Energieerhaltung berechnen:

$$h\nu = |E_E - E_A|. \quad (33.10)$$

Beispiel 33.1 wird diese Energiedifferenzen für die Energien eines Teilchens im Kasten veranschaulichen.

Beispiel 33.1: Photonenemission durch ein Elektron im Kasten

Ein Elektron befindet sich in einem eindimensionalen Kasten der Länge 0,100 nm. a) Berechnen Sie die Energie (in Elektronenvolt) des Grundzustands. b) Berechnen Sie die Energien der nächsthöheren vier Zustände und skizzieren Sie das Energieniveaudiagramm. c) Berechnen Sie für jeden Übergang, der vom Zustand $n = 3$ zu einem Zustand mit geringerer Energie führt, die Wellenlänge des dabei emittierten Photons.

Problembeschreibung: In der Teilaufgabe a ist für den Grundzustand mit $n = 1$ die Energie mithilfe der Beziehung $E_1 = h^2/(8md^2)$ (Gleichung 33.9) zu berechnen. In der Teilaufgabe b ist die Beziehung $E_n = n^2 E_1$ (Gleichung 33.8) mit $n = 2, 3, 4, 5$ anzuwenden. Schließlich sind in der Teilaufgabe c die Photonenwellenlängen gemäß Gleichung 33.10 gegeben durch $\lambda = hc/|E_E - E_A|$.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Verwenden Sie die Werte $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ und $mc^2 = 0,5110 \text{ MeV}$, um E_1 zu berechnen:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{h^2}{8md^2} = \frac{(hc)^2}{8(mc^2)d^2} \\ &= \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{8 \cdot (0,5110 \cdot 10^6 \text{ eV}) \cdot (0,100 \text{ nm})^2} \\ &= [37,6 \text{ eV}] \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Berechnen Sie $E_n = n^2 E_1$ für $n = 2, 3, 4$ und 5 :

$$E_2 = (2)^2 \cdot (37,6 \text{ eV}) = [150 \text{ eV}]$$

$$E_3 = (3)^2 \cdot (37,6 \text{ eV}) = [338 \text{ eV}]$$

$$E_4 = (4)^2 \cdot (37,6 \text{ eV}) = [602 \text{ eV}]$$

$$E_5 = (5)^2 \cdot (37,6 \text{ eV}) = [940 \text{ eV}]$$

2. Zeichnen Sie mit den erhaltenen Energiewerten das Energieniveaudiagramm (Abbildung 33.2).

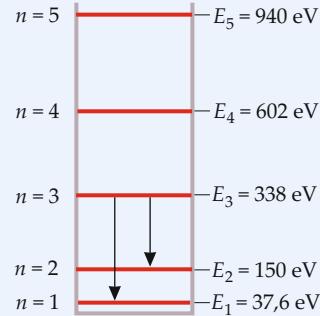


Abbildung 33.2 Energieniveaudiagramm des Elektrons.

Teilaufgabe c

1. Verwenden Sie die in Teilaufgabe b berechneten Energiewerte, um die Wellenlänge für den Übergang vom Zustand $n = 3$ zum Zustand $n = 2$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{|E_2 - E_3|} \\ &= \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{|150 - 338| \text{ eV}} = [6,60 \text{ nm}] \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie auf die gleiche Weise die Wellenlänge für den Übergang vom Zustand $n = 3$ zum Zustand $n = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{hc}{|E_1 - E_3|} \\ &= \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{|37,6 - 338| \text{ eV}} = [4,13 \text{ nm}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Wellenlänge des beim Übergang vom Zustand mit $n = 3$ zu dem mit $n = 1$ emittierten Photons ist kleiner als die beim Übergang vom Zustand mit $n = 3$ zu dem mit $n = 2$. Das war zu erwarten, weil Energie und Wellenlänge von Photonen umgekehrt proportional zueinander sind.

Weitergedacht: Der Übergang von $n = 3$ zu $n = 2$ und der von $n = 3$ zu $n = 1$ sind in Abbildung 33.2 durch senkrechte Pfeile angedeutet. Die Energie des Grundzustands liegt mit 37,6 eV in der gleichen Größenordnung wie die kinetische Energie von 13,6 eV des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms. Die Differenz röhrt daher, dass das Elektron im Wasserstoffatom außer kinetischer auch potenzielle Energie aufweist; diese beträgt im Grundzustand -27,2 eV, sodass sich die Gesamtenergie (potenzielle plus kinetische Energie) im Grundzustand zu -13,6 eV ergibt.

Übung 33.1: Berechnen Sie für das Elektron in diesem Kasten die Wellenlänge des Photons, das beim Übergang von $n = 4$ zu $n = 3$ emittiert wird. ▶ ■

Für jeden Wert von n gibt es eine Wellenfunktion $\psi_n(x)$, die durch

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) & \text{für } 0 < x < d \\ 0 & \text{für } x > d \end{cases} \quad (33.11)$$

gegeben ist; die Konstanten $A_n = \sqrt{2/d}$ ergeben sich aus der Normierungsbedingung (siehe Gleichung 32.22) und sind unabhängig von n . Die Wellenfunktionen für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ sind in Abbildung 33.3 dargestellt.

Frage 33.1

Warum ist die folgende Wellenfunktion nicht akzeptabel?

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Die Zahl n heißt, wie in Kapitel 32 schon kurz erwähnt wurde, **Quantenzahl**. Sie charakterisiert die Wellenfunktion für einen bestimmten Zustand und damit die Energie dieses Zustands. Bei diesem eindimensionalen Beispiel röhrt die Quantenzahl von der Randbedingung her, gemäß der die Wellenfunktion bei $x = 0$ und bei $x = d$ gleich null sein muss. Bei drei Dimensionen treten drei Quantenzahlen auf, wobei jede Quantenzahl der Randbedingung in der zugehörigen Dimension entspricht.

In Abbildung 33.4 ist ψ^2 , also das Quadrat der Wellenfunktion, für vier Zustände aufgetragen: für den Grundzustand $n = 1$, den ersten angeregten Zustand $n = 2$, den zweiten angeregten Zustand $n = 3$ und den Zustand $n = 10$. Im Grundzustand ist das Teilchen mit der höchsten Wahrscheinlichkeit nahe bei der Mitte zu finden, was aus dem Maximum von ψ^2 bei $x = d/2$ hervorgeht. Im ersten angeregten Zustand ist das Teilchen nahe der Mitte (wie auch an den Rändern) mit geringster Wahrscheinlichkeit anzutreffen, weil ψ^2 nahe bei $x = d/2$ sehr klein ist. Mit steigenden Werten von n rücken die Maxima und Minima von ψ^2 näher zusammen, wie es schon in Abbildung 33.4c deutlich wird. In Abbildung 33.4d ist für $n = 10$ auch der Mittelwert von ψ^2 eingezeichnet. Bei sehr großen Werten von n liegen die Maxima und die Minima schließlich so eng beisammen, dass ψ^2 von seinem Mittelwert kaum noch zu unterscheiden ist. Da dann ψ^2 im gesamten Kasten praktisch konstant ist, ist das Teilchen überall im Kasten mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu finden. Dies war nach dem Bohr'schen Korrespondenzprinzip zu erwarten, da für steigende Quantenzahlen die Quantenmechanik in den Grenzfall der klassischen Mechanik übergeht.

Wir sind so sehr daran gewöhnt, das Elektron als klassisches Teilchen anzusehen, dass wir es uns als Teilchen vorstellen, das im Kasten zwischen den Wänden hin und her fliegt. Aber die in Abbildung 33.4 gezeigten Verteilungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit sind stationär, hängen also nicht von der Zeit ab. Eine geeigneter Darstellung des Elektrons in einem gebundenen Zustand ist eine Ladungswolke mit einer Ladungsdichte, die proportional zu ψ^2 ist. Dann können wir die Kurven in Abbildung 33.4 als Abhängigkeit der Ladungsdichte von x interpretieren. Im Grundzustand $n = 1$ ist die Elektronenwolke im Kasten zentriert, hat in der Mitte ein Maximum und erstreckt sich fast über den gesamten Kasten (Abbildung 33.4a). Im ersten angeregten Zustand $n = 2$ hat die Ladungsdichte der Elektronenwolke zwei Maxima, wie in Abbildung 33.4b gezeigt. Für sehr große Werte von n hat sie zahlreiche eng

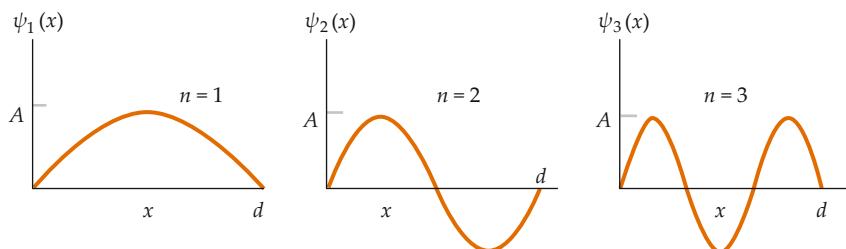


Abbildung 33.3 Wellenfunktionen stehender Wellen für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$.

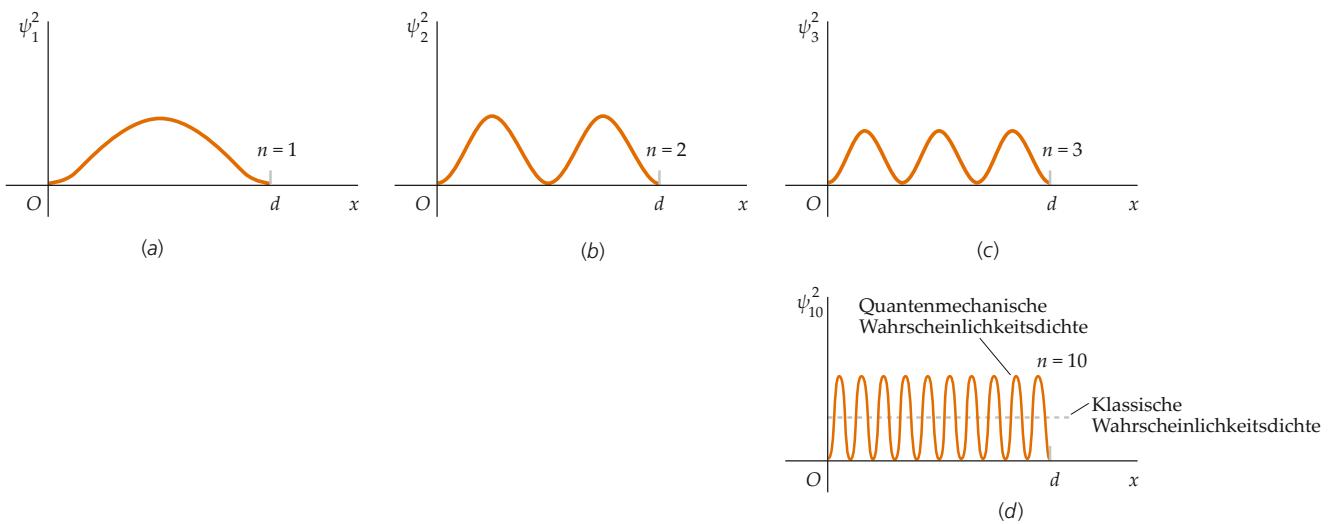


Abbildung 33.4 Das Quadrat der Wellenfunktion, d. h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ψ^2 , in Abhängigkeit von x für ein Teilchen im Kasten der Länge d für a) den Grundzustand $n = 1$, b) den ersten angeregten Zustand $n = 2$, c) den zweiten angeregten Zustand $n = 3$, d) den hoch angeregten Zustand $n = 10$. Für $n = 10$ sind die Maxima und die Minima von ψ^2 einander sehr nah. Die gestrichelte Linie gibt den Mittelwert von ψ^2 an. Dieser ist bei hohen Quantenzahlen zu beobachten und entspricht dem klassischen Wert; das Teilchen ist dann nahe jedem Punkt im Kasten mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu finden.

beieinanderliegende Maxima und Minima; dies entspricht einer mittleren Ladungsdichte, die im gesamten Kasten praktisch gleich hoch ist. Diese Darstellung des Elektrons als Ladungswolke erleichtert das Verständnis der Struktur von Atomen und Molekülen sehr. Dabei ist aber zu bedenken: Wenn ein Elektron bei der Wechselwirkung mit Materie oder mit Strahlung beobachtet wird, so muss es stets als ganze Einheitsladung aufgefasst werden.

33.2 Ein Teilchen im Kasten mit endlich hohem Potenzial

Nachdem wir das Verhalten eines Teilchens in einem Kasten mit unendlich hohem Potenzial beschrieben haben, betrachten wir nun den realistischeren Fall eines Kastens mit endlich hohem Potenzial, wie er in Abbildung 33.5 gezeigt ist.

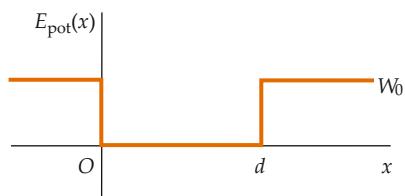


Abbildung 33.5 Ein Kasten mit endlich hohem Potenzial.

Hier ist die Ortsabhängigkeit der potenziellen Energie folgendermaßen zu beschreiben:

$$E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} W_0 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x < d \\ W_0 & \text{für } x > d. \end{cases} \quad (33.12)$$

Diese Funktion ist bei $x = 0$ und bei $x = d$ unstetig, aber sie ist überall endlich. Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für eine solche Ortsabhängigkeit der potenziellen Energie hängen davon ab, ob die Gesamtenergie E größer oder kleiner als W_0 ist. Den Fall $E > W_0$ wollen wir nicht besprechen; hierzu sei nur angemerkt, dass das Teilchen dabei nicht eingeschlossen ist und jeder Energiewert erlaubt ist, also keine Energiequantisierung vorliegt. Wir wollen im Folgenden annehmen, dass $0 \leq E < W_0$ ist.

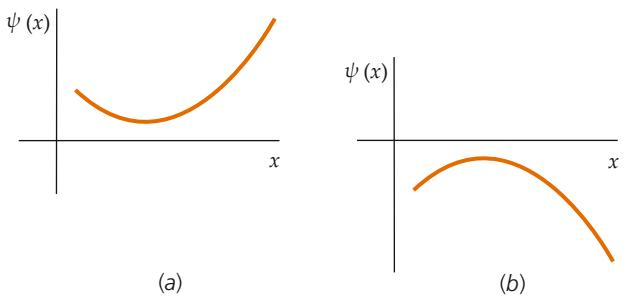


Abbildung 33.6 a) Hier hat die Funktion ψ im dargestellten Bereich sowohl positive Werte als auch eine positive Krümmung (deren Vorzeichen ist dabei dasselbe wie das Vorzeichen von $d^2\psi/dx^2$). b) Hier hat die Funktion ψ im dargestellten Bereich sowohl negative Werte als auch eine negative Krümmung.

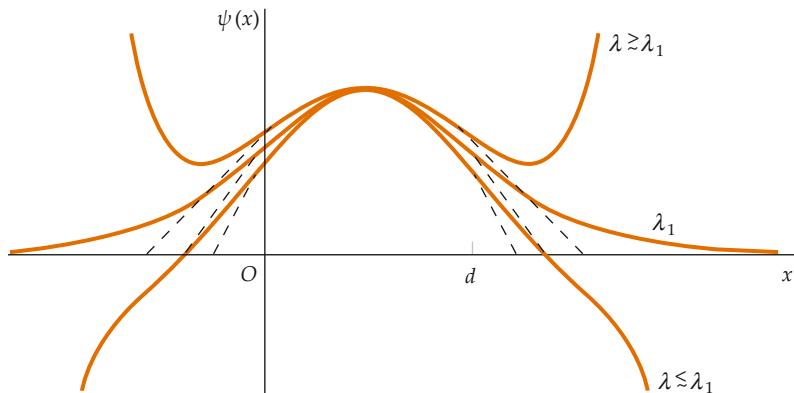


Abbildung 33.7 Drei Lösungen der Schrödinger-Gleichung beim Kasten mit endlich hohem Potenzial. Die Wellenlängen liegen nahe bei der Wellenlänge λ_1 , die hier der Energie $E_1 = \hbar^2/(2 m \lambda_1^2)$ des Grundzustands entspricht. Wenn λ ein wenig größer als λ_1 ist, divergiert die Funktion für $|x| \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$, wie die Funktion in Abbildung 33.6a. Bei der kritischen Wellenlänge λ_1 gehen die Funktion und ihre Steigung für $|x| \rightarrow \infty$ gegen null. Ist aber λ ein wenig kleiner als λ_1 , so schneidet die Funktion die x -Achse, während ihre Steigung negativ bleibt. Danach steigt der Betrag der Steigung mit zunehmendem x an, weil die zweite Ableitung $d^2\psi/dx^2$ nun negativ ist. Diese Funktion strebt für $|x| \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$.

Innerhalb des Kastens ist $E_{\text{pot}}(x) = 0$, und die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ist dieselbe wie beim Kasten mit unendlich hohem Potenzial (siehe Gleichung 33.2):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad 0 \leq x \leq d$$

oder

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0.$$

Darin ist $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Die allgemeine Lösung hat die Form

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

In diesem Fall muss $\psi(x)$ bei $x = 0$ nicht gleich null sein (d. h., das Teilchen muss nicht unbedingt im Kasten sein), sodass B nicht null ist. Außerhalb des Kastens lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + W_0\psi(x) = E\psi(x), \quad x < 0, x > d$$

oder

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \alpha^2\psi(x) = 0, \quad (33.13)$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (W_0 - E), \quad W_0 > E. \quad (33.14)$$

Zum Ermitteln der Wellenfunktionen und der erlaubten Energien des Teilchens ist Gleichung 33.13 für $\psi(x)$ außerhalb des Kastens zu lösen. Weiterhin ist zu fordern, dass $\psi(x)$ und $d\psi(x)/dx$ an den Kastengrenzen, also bei $x = 0$ und bei $x = d$, stetig sind. Die Lösung der Gleichung 33.13 ist nicht kompliziert (im Bereich $x > d$ hat sie die Form $\psi(x) = C e^{-\alpha x}$ und

im Bereich $x < d$ die Form $\psi(x) = C e^{+\alpha x}$; jedoch erfordert das Anwenden der Randbedingungen eine aufwendige Rechnung, auf die wir hier verzichten können). Entscheidend bei Gleichung 33.13 ist, dass die zweite Ableitung $d^2\psi(x)/dx^2$ (die die Krümmung der Wellenfunktion beschreibt) das gleiche Vorzeichen hat wie die Wellenfunktion ψ selbst. Wenn ψ positiv ist, dann ist also auch $d^2\psi/dx^2$ positiv, und der Graph der Wellenfunktion ist für $|x| \rightarrow \infty$ nach unten gewölbt, wie in Abbildung 33.6a gezeigt ist. Wenn ψ aber negativ ist, so ist es auch $d^2\psi/dx^2$, und der Graph von ψ ist nach oben gewölbt, wie in Abbildung 33.6b gezeigt. Dieses Verhalten unterscheidet sich deutlich von dem innerhalb des Kastens, wo ψ und $d^2\psi/dx^2$ beide positives Vorzeichen haben und ψ nach oben gewölbt ist, ähnlich wie eine Sinusfunktion zwischen 0 und π . Außerhalb des Kastens wird $\psi(x)$ für die meisten Energiewerte E in Gleichung 33.13 für $x \rightarrow \pm\infty$ unendlich groß. Das bedeutet, die meisten Wellenfunktionen $\psi(x)$ divergieren außerhalb des Kastens. Obwohl sie die Schrödinger-Gleichung erfüllen, sind solche Funktionen keine akzeptablen Wellenfunktionen, weil sie nicht normierbar sind. Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind nur für bestimmte Energiewerte quadratintegrabel (d. h., streben gegen null, wenn $|x|$ sehr groß wird). Daher sind diese Energiewerte die erlaubten Energien innerhalb des Kastens mit endlich hohem Potenzial.

Abbildung 33.7 zeigt eine quadratintegrable Wellenfunktion mit einer Wellenlänge λ_1 innerhalb des Kastens, die der Energie des Grundzustands entspricht. Außerdem sind zwei Wellenfunktionen für ähnlich große Wellenlängen und Energien dargestellt. In Abbildung 33.8 sind die Wellenfunktionen und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für den Grundzustand und die beiden ersten angeregten Zustände dargestellt. Hier ist zu erkennen, dass die Wellenlängen innerhalb des Kastens etwas größer sind als beim Kasten mit unendlich hohem Potenzial (siehe Abbildung 33.3). Deshalb sind hier die entsprechenden Energien etwas geringer als dort. Weiterhin ist anzumerken, dass beim

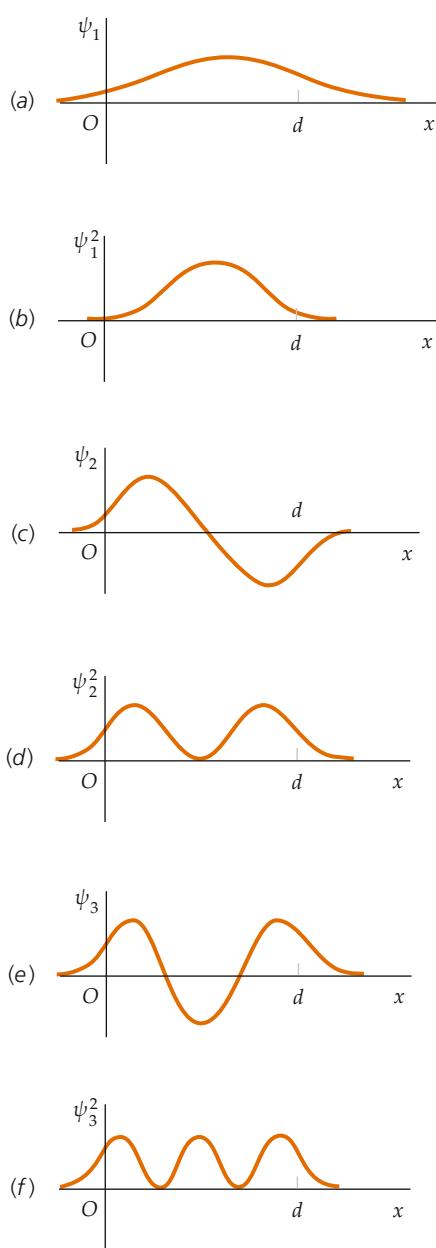


Abbildung 33.8 Die Graphen der Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ und der Wahrscheinlichkeitsdichten $\psi_n^2(x)$ für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ beim Kasten mit endlich hohem Potenzial.

Kasten mit endlich hohem Potenzial nur endlich viele Energiewerte erlaubt sind. Für sehr kleine Werte von W_0 gibt es nur einen einzigen erlaubten Energiewert.

Beachten Sie, dass sich die Wellenfunktion über die Ränder des Kastens bei $x = d$ und bei $x = 0$ hinaus erstreckt. Es besteht also eine geringe Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in diesem Bereich zu finden, in dem seine Gesamtenergie E kleiner als seine potenzielle Energie W_0 ist. Diesen Bereich nennt man

klassisch verbotenen Bereich, weil sich für $W_0 > E$ eine negative kinetische Energie $E - W_0$ ergibt, was in der klassischen Physik nicht möglich ist. Es lohnt daher, kurz zu überlegen, was sich bei einem Versuch ergäbe, das Teilchen im klassisch verbotenen Bereich zu lokalisieren. Gemäß der Heisenberg'schen Unschärferelation führt eine solche Ortsmessung zu einer Unbestimmtheit des Teilchenimpulses, die einer minimalen kinetischen Energie entspricht, die größer als $W_0 - E$ ist. Diese Energiemenge ist gerade so groß, dass keine negative kinetische Energie gemessen wird. Die Ausdehnung der Wellenfunktion in einen klassisch verbotenen Bereich führt zu der Möglichkeit, Potenzialbarrieren zu durchdringen; dieses sogenannte Tunneln werden wir in Abschnitt 33.4 besprechen.

Unsere Überlegungen zum Teilchen im Kasten mit endlich hohem Potenzial lassen sich auf alle Probleme übertragen, bei denen in einem bestimmten Bereich $E > E_{\text{pot}}(x)$ und außerhalb dieses Bereichs $E < E_{\text{pot}}(x)$ ist. Das erste Beispiel behandeln wir im nun folgenden Abschnitt.

33.3 Der harmonische Oszillator

Ein Teilchen der Masse m , das an einer Feder mit der Federkonstante k_F befestigt ist, hat die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_F x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2. \quad (33.15)$$

Darin ist $\omega_0 = \sqrt{k_F/m}$ die Eigenfrequenz des Oszillators. Gemäß den Gesetzen der klassischen Physik schwingt das Teilchen zwischen $x = +A$ und $x = -A$, wobei seine Gesamtenergie $E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$ ist. Sie kann einen beliebigen positiven Wert haben oder gleich null sein.

Diese in Abbildung 33.9 gezeigte Abstandsabhängigkeit der potenziellen Energie liegt praktisch bei allen Systemen vor, in denen ein Objekt mit geringen Auslenkungen um eine Position stabilen Gleichgewichts oszilliert. Beispiele dafür sind die Schwingungen der Atome eines zweiatomigen Moleküls wie H_2 oder HCl um den Gleichgewichtsabstand. Zwischen den klassischen Umkehrpunkten (also bei $-A < x < +A$) ist

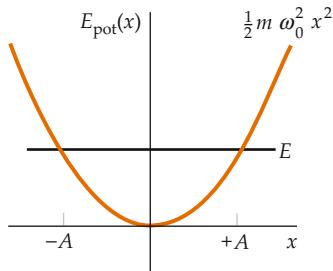


Abbildung 33.9 Das Potenzial des harmonischen Oszillators in Abhängigkeit von der Auslenkung x . Klassisch ist das Teilchen im Bereich zwischen den Umkehrpunkten $-A$ und $+A$ eingeschlossen.

die Gesamtenergie größer als die potenzielle Energie, und die Schrödinger-Gleichung kann folgendermaßen formuliert werden:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2 \psi(x), \quad -A < x < A. \quad (33.16)$$

Die Größe $k^2 = (2m/\hbar^2)(E - E_{\text{pot}}(x))$ hängt jetzt von x ab. Die Lösungen dieser Gleichung sind also keine einfachen Sinus- oder Kosinusfunktionen, denn die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ ist hier nicht unabhängig von x . Jedoch haben $d^2\psi/dx^2$ und ψ entgegengesetzte Vorzeichen, sodass ψ im Bereich $-A < x < A$ immer nach unten gewölbt ist und die Lösungen oszillieren.

Jenseits der klassischen Umkehrpunkte, d.h. für $|x| > A$, ist die potenzielle Energie größer als die Gesamtenergie, und die Schrödinger-Gleichung ähnelt Gleichung 33.13:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = +\alpha^2 \psi(x) = 0, \quad |x| > +A. \quad (33.17)$$

Allerdings ist hier $\alpha^2 = (2m/\hbar^2)(E_{\text{pot}}(x) - E) > 0$, wobei $E_{\text{pot}}(x) > E$ ist, und hängt von x ab. Für $|x| > A$ haben $d^2\psi/dx^2$ und ψ das gleiche Vorzeichen, sodass ψ nach oben gewölbt ist. Somit existieren nur für bestimmte Werte von E Lösungen, die für $|x| \rightarrow \infty$ gegen null gehen.

Für die Abstandsabhängigkeit der potenziellen Energie des harmonischen Oszillators lautet die Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x). \quad (33.18)$$

Wellenfunktionen und Energieniveaus

Wir wollen hier keine allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator erarbeiten. Vielmehr

sollen nur die Lösungen für den Grundzustand und die ersten angeregten Zustände vorgestellt werden.

Die Wellenfunktion $\psi_0(x)$ des Grundzustands ist eine Funktion mit Gauß'scher Kurvenform, die zum Ursprung symmetrisch ist:

$$\psi(x) = A_0 e^{-ax^2}. \quad (33.19)$$

Darin sind A_0 und a Konstanten. Diese Funktion ist – wie auch die Wellenfunktion für den ersten angeregten Zustand – in Abbildung 33.10 dargestellt.

Wie in Beispiel 33.2 gezeigt wird, ist die Energie des Grundzustands des harmonischen Oszillators gegeben durch

$$E_0 = \frac{\hbar^2 a}{m} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0. \quad (33.20)$$

Beim ersten angeregten Zustand liegt in der Mitte des Potenzialkastens ein Knoten in der Wellenfunktion vor, wie auch beim Teilchen im Kasten. (Bei jedem höheren Zustand, also bei steigender Energie, kommt jeweils ein weiterer Knoten hinzu.) Die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ lautet dafür:

$$\psi_1(x) = A_1 x e^{-ax^2}. \quad (33.21)$$

Darin ist $a = \frac{1}{2} m \omega_0 / \hbar$, wie in Beispiel 33.2. Auch diese Funktion $\psi_1(x)$ ist in Abbildung 33.10 dargestellt. Einsetzen von $\psi_1(x)$ in die Schrödinger-Gleichung, wie es in Beispiel 33.2 für $\psi_0(x)$ gezeigt wird, ergibt die Energie des ersten angeregten Zustands:

$$E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega_0.$$

Beim harmonischen Oszillator hat der n -te angeregte Zustand allgemein die Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33.22)$$

ENERGIELEVEL EINES HARMONISCHEN OSZILLATORS

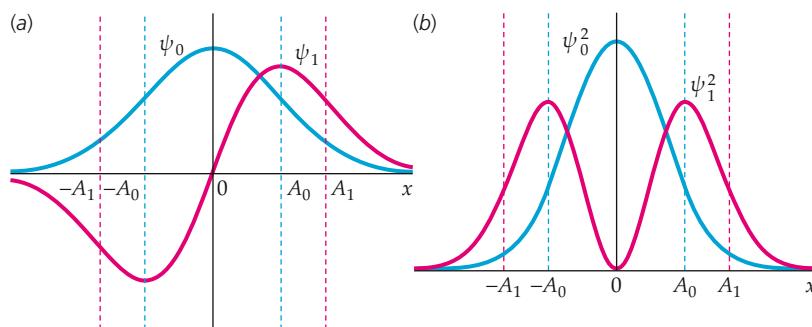


Abbildung 33.10 Wellenfunktionen für den harmonischen Oszillator mit einem Potenzialverlauf gemäß Abbildung 33.9: a) Die Wellenfunktionen ψ_0 für den Grundzustand und ψ_1 für den ersten angeregten Zustand. Nach den Gesetzen der klassischen Physik ist die Schwingung eines harmonischen Oszillators im Grundzustand mit der Energie E_0 auf den Bereich $-A_0 \leq x \leq +A_0$ und im ersten angeregten Zustand mit der Energie E_1 auf den Bereich $-A_1 \leq x \leq +A_1$ beschränkt. b) Die Wahrscheinlichkeitsdichten für die potenzielle Energie des harmonischen Oszillators: ψ_0^2 für den Grundzustand und ψ_1^2 für den ersten angeregten Zustand.

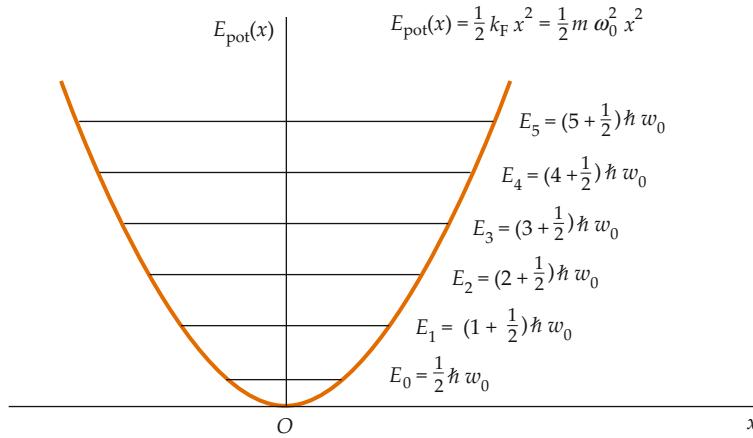


Abbildung 33.11 Die Energieniveaus, wie sie sich aus der Abstandsabhängigkeit des Potenzials beim harmonischen Oszillatator ergeben.

Diese Energieniveaus sind in Abbildung 33.11 eingezeichnet. Die Tatsache, dass sie voneinander jeweils den gleichen Abstand $\hbar \omega_0$ haben, röhrt von der besonderen Form des Potenzials des harmonischen Oszillators her. Wie wir in den Abschnitten 33.1 und 33.2 gesehen haben, sind die Energieniveaus beim Teilchen im Kasten nicht äquidistant. Der Abstand der Energieniveaus hängt also davon ab, wie die Abhängigkeit der potenziellen Energie vom Abstand beschaffen ist.

Beispiel 33.2: Die Wellenfunktion für den Grundzustand des harmonischen Oszillators

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\psi_0(x) = A_0 e^{-ax^2}$, in der A_0 und a positive Konstanten sind, eine Lösung der Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillatator darstellt.

Problembeschreibung: Es ist die zweite Ableitung von ψ_0 nach x zu bilden und – wie auch ψ_0 selbst – in Gleichung 33.18 einzusetzen. Da dies die Wellenfunktion für den Grundzustand ist, schreiben wir für die Energie nicht E , sondern E_0 .

Lösung: 1. Bilden Sie die Ableitung $d\psi_0/dx$:

$$\frac{d\psi_0(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (A_0 e^{-ax^2}) = -2axA_0 e^{-ax^2}$$

2. Bilden Sie die Ableitung $d^2\psi_0/dx^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} &= -2aA_0 e^{-ax^2} + 4a^2x^2A_0 e^{-ax^2} \\ &= (4a^2x^2 - 2a)A_0 e^{-ax^2} \end{aligned}$$

3. Setzen Sie diese Ableitung und $\psi_0(x)$ in die Schrödinger-Gleichung 33.18 ein:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\psi_0(x) = E_0\psi(x)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} (4a^2x^2 - 2a)A_0 e^{-ax^2} \\ + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2A_0 e^{-ax^2} = E_0A_0 e^{-ax^2} \end{aligned}$$

4. Eliminieren Sie den gemeinsamen Faktor $A_0 e^{-ax^2}$ und formen Sie das Ergebnis in die übliche Polynomschreibweise um:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (4a^2x^2 - 2a) + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 = E_0$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{2}m\omega_0^2 - \frac{2\hbar^2 a^2}{m} \right) x^2 + \left(\frac{\hbar^2 a}{m} - E_0 \right) = 0$$

5. Die Gleichung von Schritt 4 muss für alle x gelten. Setzen Sie $x = 0$ und lösen Sie nach E_0 auf:

$$0 + \left(\frac{\hbar^2 a}{m} - E_0 \right) = 0$$

und daher

$$E_0 = \frac{\hbar^2 a}{m}$$

6. Setzen Sie diesen Ausdruck für E_0 in die Gleichung von Schritt 4 ein und vereinfachen Sie:

$$\left(-\frac{2\hbar^2 a^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \right) x^2 + 0 = 0$$

7. Der Koeffizient von x^2 muss gleich null sein:

$$-\frac{2\hbar^2 a^2}{m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 = 0$$

8. Lösen Sie nach a auf:

$$a = \frac{1}{2} \frac{m \omega_0}{\hbar}$$

9. Setzen Sie dieses Ergebnis in die Gleichung für E_0 in Schritt 5 ein:

$$E_0 = \frac{\hbar^2 a}{m} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

Wir haben gezeigt, dass die gegebene Funktion $\psi_0(x) = A_0 e^{-ax^2}$ die Schrödinger-Gleichung für jeden Wert von A_0 erfüllt, wenn die Energie durch

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

gegeben ist.

Plausibilitätsprüfung: Das Planck'sche Wirkungsquantum hat die Einheit $J \cdot s$ und die Kreisfrequenz die Einheit s^{-1} . Dementsprechend hat das Ergebnis von Schritt 9, also die Größe $\frac{1}{2} \hbar \omega_0$, die Dimension Energie.

Weitergedacht: Die zweite Gleichung in Schritt 4 ist ein Polynom, das gleich null ist. In diesem Fall gibt es auch eine einfachere Möglichkeit der Lösung, denn es gilt: „Wenn ein Polynom über einen kontinuierlichen Wertebereich von x gleich null ist, dann ist jeder der Koeffizienten des Polynoms gleich null zu setzen.“ Ein Beispiel: Wenn im Intervall $1 < x < 2$ das Polynom $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ lautet, dann ist $A = B = C = D = 0$ zu setzen. ■

33.4 Reflexion und Transmission von Elektronenwellen an Potenzialbarrieren

In den Abschnitten 33.1 bis 33.3 haben wir Systeme mit gebundenen Zuständen behandelt, bei denen die potenzielle Energie bei großen Werten von $|x|$ höher als die Gesamtenergie E ist. Nun betrachten wir einige einfache Beispiele für nichtgebundene Zustände, bei denen E größer als $E_{\text{pot}}(x)$ ist. Hierbei haben $d^2\psi/dx^2$ und ψ entgegengesetzte Vorzeichen, sodass $\psi(x)$ nach oben gewölbt ist und bei $|x| \rightarrow \infty$ nicht unendlich wird.

Das Stufenpotenzial

Wir betrachten ein Teilchen mit der Energie E , das sich in einem Bereich bewegt, in dem die potenzielle Energie einer Stufenfunktion entspricht:

$$E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ W_0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

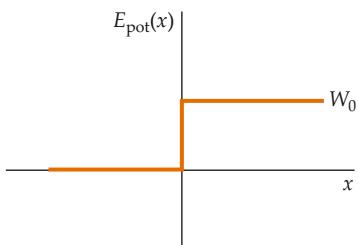


Abbildung 33.12 Das Stufenpotenzial. Ein klassisches Teilchen, das mit der Gesamtenergie $E > W_0$ von links kommt, durchdringt die Barriere immer, wird also stets transmittiert. Die Änderung der potenziellen Energie bei $x = 0$ bewirkt lediglich eine stoßartig wirkende Kraft, die die Geschwindigkeit des Teilchens herabsetzt. Dagegen wird eine Welle, die von links ankommt, teilweise reflektiert und teilweise transmittiert, weil sich bei $x = 0$ die Wellenlänge abrupt ändert.

Dieses Potenzial ist in Abbildung 33.12 gezeigt. Wir nehmen nun an, dass sich das Teilchen von links nach rechts bewegt. Was geschieht, wenn es dabei auf die Stufe trifft?

Wenn man von den Gesetzen der klassischen Physik ausgeht, kann man das Verhalten des Teilchens einfach vorhersagen. Links von der Stufe bewegt es sich mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2E/m}$. Bei $x = 0$ wirkt eine stoßartige Kraft auf das Teilchen. Wenn die Anfangsenergie E kleiner als W_0 ist, wird es zurückgestoßen und bewegt sich anschließend (mit der ursprünglichen Geschwindigkeit) nach links; das Teilchen wird also an der Stufe reflektiert. Wenn aber E größer als W_0 ist, dann bewegt sich das Teilchen weiterhin nach rechts, jedoch mit reduzierter Geschwindigkeit, die durch $v = \sqrt{2(E - W_0)/m}$ gegeben ist. Wir können uns diesen klassischen Vorgang folgendermaßen vorstellen: Ein Ball mit der Masse m rollt auf einer ebenen Fläche und trifft auf einen steilen Hügel der Höhe h , für die gilt: $mg h = W_0$. Wenn die anfängliche kinetische Energie des Balls kleiner als $mg h$ ist, so rollt der Ball den Hügel ein Stück weit hinauf, kehrt dann um und erreicht in der Ebene wieder seine Anfangsgeschwindigkeit, hat jetzt jedoch die entgegengesetzte Richtung. Wenn aber E größer als $mg h$ ist, so rollt der Ball den Hügel ganz hinauf und dahinter mit geringerer Geschwindigkeit nach rechts weiter.

Für den Fall $E < W_0$ ähnelt das quantenmechanische Ergebnis dem klassischen. Abbildung 33.13 zeigt die entsprechende Wellenfunktion. Sie wird bei $x = 0$ nicht null, sondern nimmt exponentiell ab, wie auch die Wellenfunktion für den gebundenen Zustand im Kasten mit endlich hohem Potenzial. Die Welle dringt ein wenig in den klassisch verbotenen Bereich $x > 0$ ein, wird aber schließlich vollständig reflektiert. Dieses Verhalten erinnert an die Totalreflexion des Lichts.

Für $E > W_0$ unterscheidet sich das quantenmechanische Ergebnis deutlich vom klassischen. Bei $x = 0$ ändert sich die Wellenlänge plötzlich von $\lambda_1 = h/p_1 = h/\sqrt{2mE}$ auf $\lambda_2 = h/p_2 = h/\sqrt{2m(E - W_0)}$. Aus der Wellentheorie wissen wir, dass eine Welle, deren Wellenlänge sich plötzlich ändert, teilweise reflektiert und teilweise transmittiert wird. Da die Bewegung eines

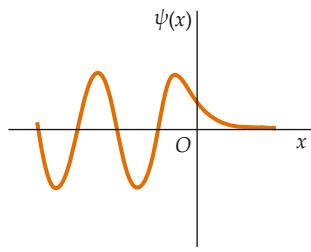


Abbildung 33.13 Wenn die Gesamtenergie E kleiner als W_0 ist, dann dringt die Wellenfunktion etwas in den Bereich $x > 0$ ein. Aber die Wahrscheinlichkeit der Reflexion ist in diesem Fall gleich eins, sodass an der Potenzialstufe keine Energie transmittiert wird.

Elektrons (oder eines anderen Teilchens) durch eine Wellengleichung beschrieben werden kann, wird das Elektron hier also manchmal transmittiert und manchmal reflektiert. Die Wahrscheinlichkeiten der Reflexion und der Transmission kann man berechnen. Hierzu ist die Schrödinger-Gleichung in jedem Bereich des Raums zu lösen, und es sind die Amplituden der transmittierten und der reflektierten Welle mit der Amplitude der einfallenden Welle zu vergleichen. Diese Berechnung ähnelt derjenigen des Anteils des Lichts, der an einer Luft-Glas-Grenzfläche reflektiert wird. Für die Reflexionswahrscheinlichkeit R , auch Reflexionskoeffizient genannt, ergibt sich

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (33.23)$$

Darin ist k_1 die Wellenzahl der einfallenden Welle und k_2 die der transmittierten Welle. Eine Anwendung dieser Beziehung ist in Beispiel 33.3 verdeutlicht. Gleichung 33.23 entspricht der Formel, die den Anteil der Lichtintensität angibt, der bei senkrechtem Einfall auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen reflektiert wird (siehe Gleichung 28.7). Die Transmissionswahrscheinlichkeit T , auch **Transmissionskoeffizient** genannt, kann aus dem Reflexionskoeffizienten berechnet werden, weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Transmission und der Reflexion gleich eins sein muss:

$$T + R = 1. \quad (33.24)$$

Beispiel 33.3: Reflexion und Transmission an einem Stufenpotenzial

Ein Teilchen mit der kinetischen Energie E_0 bewegt sich in einem Bereich, in dem die potentielle Energie null ist. Es trifft dabei auf eine Potenzialbarriere der Höhe $W_0 = 0,20 E_0$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der das Teilchen an der Barriere reflektiert wird.

Problembeschreibung: Es sind die Wellenzahlen k_1 und k_2 zu berechnen; diese sind in die Gleichung 33.23 für den Reflexionskoeffizienten R einzusetzen. Für den Zusammenhang der Wellenzahlen k mit dem Impuls gilt die de Broglie'sche Beziehung $p = h/\lambda$, mit $k = 2\pi/\lambda$. Kombinieren dieser beiden Gleichungen ergibt $p = \hbar k$. Somit hängt die kinetische Energie E_{kin} mit der Wellenzahl k zusammen über: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} p^2/m = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2/m$.

Lösung: 1. Die Wahrscheinlichkeit der Reflexion ist der Reflexionskoeffizient:

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

2. Berechnen Sie k_1 aus der kinetischen Anfangsenergie E_0 :

$$E_0 = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}$$

$$k_1 = \sqrt{2m E_0 / \hbar^2}$$

3. Formulieren Sie die Beziehung zwischen der kinetischen Anfangsenergie E_0 und der kinetischen Endenergie $E_{\text{kin},2}$ sowie W_0 im Bereich $x > 0$:

$$E_{\text{kin},2} = E_0 - W_0 = E_0 - 0,20 E_0 = 0,80 E_0$$

4. Formulieren Sie die Beziehung zwischen k_2 und der kinetischen Endenergie $E_{\text{kin},2}$ und lösen Sie nach k_2 auf:

$$E_{\text{kin},2} = \frac{\hbar k_2^2}{2m}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} k_2 &= \sqrt{2m E_{\text{kin},2} / \hbar^2} = \sqrt{2m (0,80 E_0) / \hbar^2} \\ &= \sqrt{0,80} \cdot \sqrt{2m E_0 / \hbar^2} \end{aligned}$$

5. Setzen Sie die Werte der Wellenzahlen in Gleichung 33.23 ein, um R zu berechnen:

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(1 - \sqrt{0,80})^2}{(1 + \sqrt{0,80})^2} = \boxed{0,0031}$$

Plausibilitätsprüfung: Nach den Gesetzen der klassischen Physik wird das Teilchen an einer solchen Barriere nicht reflektiert. Das Ergebnis von Schritt 5 liefert eine Wahrscheinlichkeit von 0,31 % für die Reflexion des Teilchens. Sie ist also dermaßen gering, dass das Ergebnis mit unseren Erwartungen aus der klassischen Physik übereinstimmt.

Weitergedacht: Die Reflexionswahrscheinlichkeit beträgt nur gut 0,3 %. Sie ist deshalb so gering, weil die Barrierenhöhe die kinetische Energie um lediglich 20 % reduziert. Da k proportional zur Quadratwurzel aus der kinetischen Energie ist, ändert sich die Wellenzahl und daher die Wellenlänge um nur 10 %.

Übung 33.2: Drücken Sie die Brechzahl n von Licht in Abhängigkeit von der Wellenzahl k und der Kreisfrequenz ω aus und zeigen Sie damit, dass der Ausdruck $(n_1 - n_2)^2 / (n_1 + n_2)^2$ (Gleichung 28.7) für den Reflexionskoeffizienten des Lichts bei senkrechtem Einfall der Gleichung 33.23 entspricht. ▀

In der Quantenmechanik wird ein lokalisiertes Teilchen durch ein Wellenpaket dargestellt, das bei der wahrscheinlichsten Position des Teilchens ein Maximum aufweist. Abbildung 33.14 zeigt ein Wellenpaket, das ein Teilchen mit der Energie E repräsentiert; das Teilchen trifft auf ein Stufenpotenzial mit der Höhe W_0 , die kleiner als die Teilchenenergie E ist. Nach dem Auftreffen liegen zwei Wellenpakte vor. Das Intensitätsverhältnis von transmittiertem und reflektiertem Paket entspricht dem Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten der Transmission und der Reflexion.

Transmission durch Potenzialbarrieren

Abbildung 33.15a zeigt eine rechteckige Potenzialbarriere der Höhe W_0 und der Breite a . Die Höhe des Potenzials ist gegeben

durch

$$E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ W_0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Wir betrachten ein Teilchen mit der Energie E , die etwas kleiner als die potenzielle Energie W_0 der Barriere ist. Das Teilchen trifft von links kommend auf die Barriere. Nach den klassischen Gesetzen würde das Teilchen stets reflektiert werden. Aber bei einer Welle, die von links auf die Barriere trifft, nimmt die Amplitude der Wellenfunktion an der Barriere nicht sofort auf null ab, sondern sinkt im klassisch verbotenen Bereich $0 < x < a$ exponentiell ab.

!

Ein Teilchen ist im klassisch verbotenen Bereich auch nicht mit geringerer Wahrscheinlichkeit nachzuweisen. Dies ist eine Konsequenz aus der Heisenberg'schen Unschärferelation.

Beim Erreichen der hinteren Kante der Barriere (bei $x = a$) muss die Wellenfunktion stetig in eine sinusförmige Wellenfunktion rechts von der Barriere übergehen, wie in Abbildung 33.15b gezeigt. Demnach besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass das (durch eine Wellenfunktion repräsentierte) Teilchen auch hinter der Barriere anzutreffen ist, obwohl das nach den klassischen Gesetzen niemals der Fall sein kann. Für $\alpha a \gg 1$ (mit $\alpha = \sqrt{2m(W_0 - E)/\hbar^2}$) ist der Transmissionskoeffizient proportional zu $e^{-2\alpha a}$:

$$T \propto e^{-2\alpha a}, \quad \alpha a \gg 1. \quad (33.25)$$

TRANSMISSIONSKOEFFIZIENT BEI EINER POTENZIALBARRIERE

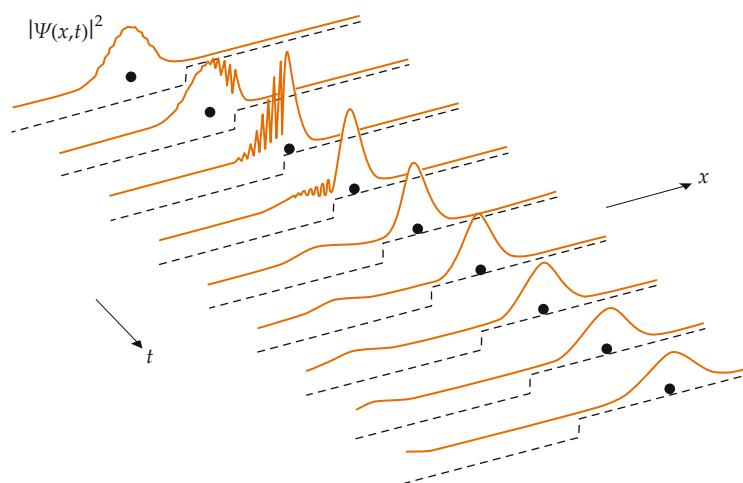


Abbildung 33.14 Die zeitliche Entwicklung eines eindimensionalen Wellenpaketes, das ein auf eine Potenzialbarriere treffendes Teilchen mit der Energie E repräsentiert. Die rechteckige Potenzialbarriere hat die Höhe $W_0 < E$. Die Position des Teilchens in der klassischen Darstellung wird jeweils durch einen Punkt angedeutet. Beachten Sie, dass das Wellenpaket teilweise transmittiert und teilweise reflektiert wird. Im vorliegenden Fall ist E viel größer als W_0 , und die Wahrscheinlichkeit der Transmission ist viel größer als die der Reflexion.

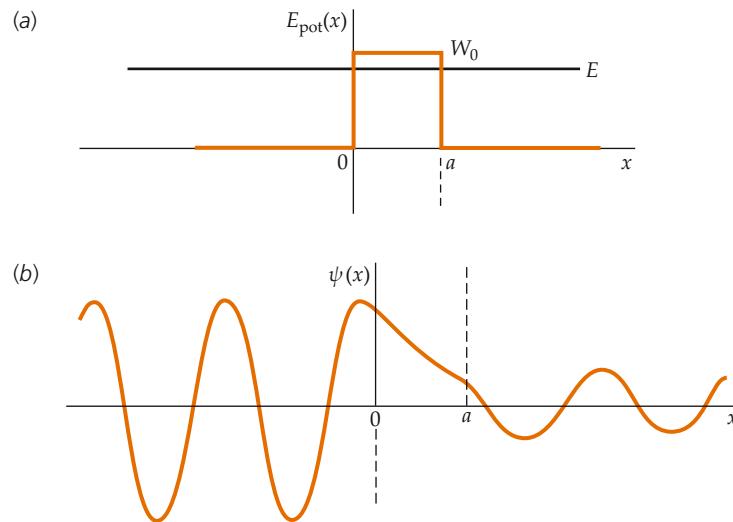


Abbildung 33.15 a) Eine rechteckige Potenzialbarriere. b) Die Durchdringung der Barriere durch eine Welle mit einer Gesamtenergie E , die kleiner als die Barrierenhöhe W_0 ist. Ein Teil der Welle wird durch die Barriere transmittiert, obwohl das klassische Teilchen nicht in den Bereich $0 < x < a$ gelangen kann, weil die potentielle Energie W_0 größer als die Gesamtenergie E des Teilchens ist. Links von der Barriere liegen sowohl eine einfallende als auch eine reflektierte Welle vor. Diese beiden Wellen bilden eine resultierende Welle, sodass ψ eine Überlagerung einer stehenden Welle und einer sich (zur Barriere hin) ausbreitenden Welle ist. Rechts von der Barriere (bei $x > a$) liegt nur die transmittierte Welle vor, die sich hier von der Barriere weg ausbreitet.

Die Wahrscheinlichkeit der Barrierendurchdringung sinkt also exponentiell mit der Barrierenbreite a und der Quadratwurzel aus der relativen Barrierenhöhe ($W_0 - E$). Dieses Phänomen des Eindringens in den klassisch verbotenen Bereich nennt man **Quantentunneln**.

In Abbildung 33.16a trifft ein Wellenpaket auf eine schmale Potenzialbarriere mit der Höhe W_0 , die wesentlich größer als die Energie E des Teilchens ist. Die Wahrscheinlichkeit der Durchdringung ist sehr gering, wie aus den relativen Intensitäten des reflektierten und des transmittierten Pakets hervorgeht. Dagegen ist in Abbildung 33.16b die Barrierenhöhe nur wenig größer als die Energie des Teilchens.

die Teilchenenergie. In diesem Fall sind die Wahrscheinlichkeiten der Transmission und der Reflexion vergleichbar groß.

In Abbildung 33.17 schließlich trifft ein Teilchen auf zwei Potenzialbarrieren, deren Höhe ein wenig größer als die Energie des Teilchens ist.

Wie schon erwähnt, ist das Durchdringen einer Potenzialbarriere kein auf die Quantenmechanik beschränkter Effekt. Wenn Licht an einer Glas-Luft-Grenzfläche total reflektiert wird, kann die Lichtwelle die „Luftbarriere“ durchdringen, wenn sich im Abstand von wenigen Wellenlängen ein zweites Glasstück hinter dem ersten befindet. Dieser Effekt kann mit einem La-

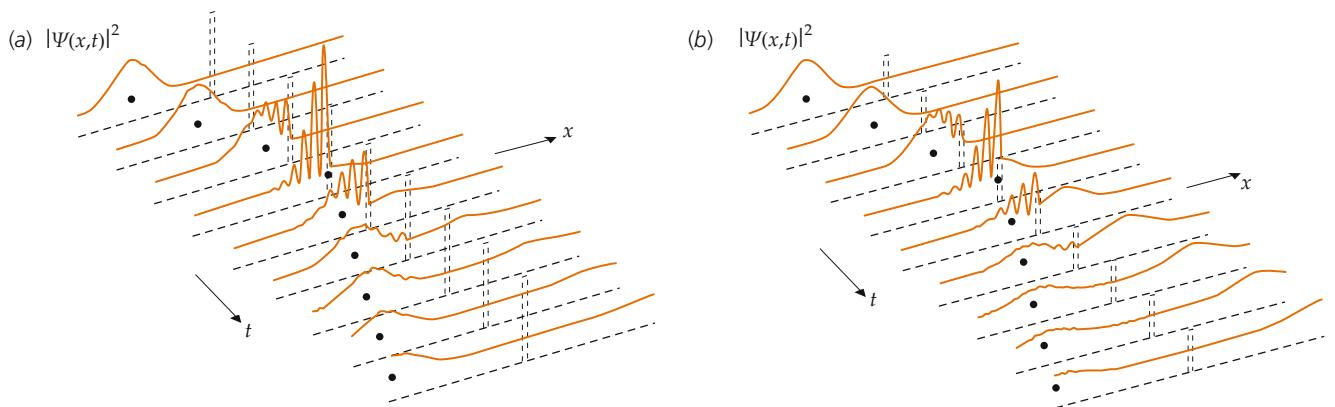


Abbildung 33.16 Transmission durch eine Barriere. In beiden Teilabbildungen wird die jeweilige Position des klassischen Teilchens durch einen Punkt angedeutet, und das Wellenpaket repräsentiert das Teilchen. a) Das Wellenpaket trifft auf eine Potenzialbarriere, deren Höhe viel größer als die Teilchenenergie ist. Nur ein sehr kleiner Teil des Wellenpakets durchdringt die Barriere. b) Das Wellenpaket trifft auf eine Potenzialbarriere, deren Höhe nur wenig größer als die Teilchenenergie ist. Hierbei sind die Wahrscheinlichkeiten der Transmission und der Reflexion ungefähr gleich, wie aus den relativen Intensitäten der Wellenpakete hervorgeht.

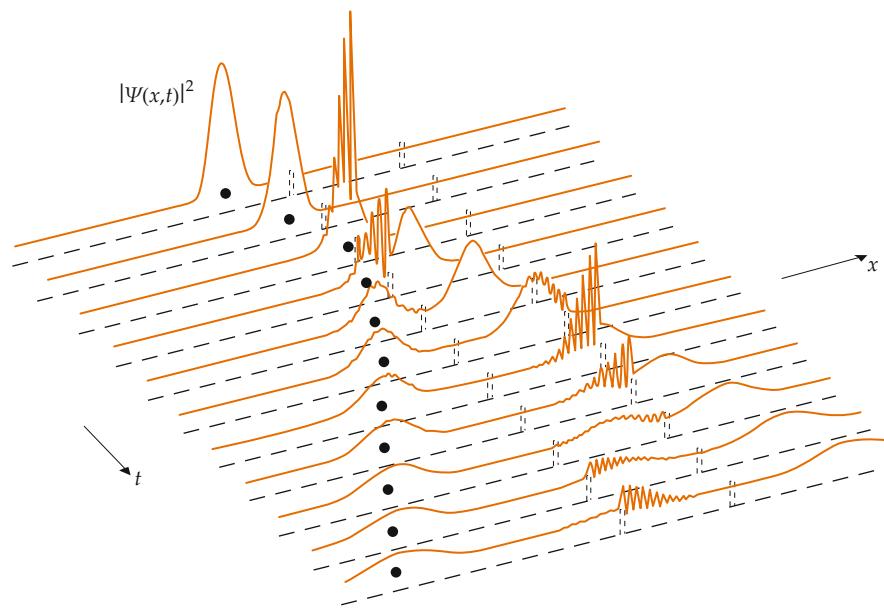


Abbildung 33.17 Ein Wellenpaket, das ein Teilchen repräsentiert, trifft auf zwei Potenzialbarrieren. Bei jedem Auftreffen wird ein Teil des jeweiligen Wellenpakets transmittiert und ein Teil reflektiert. Das führt dazu, dass ein kleiner Teil des Wellenpakets für eine gewisse Zeit zwischen den Barrieren eingeschlossen bleibt.

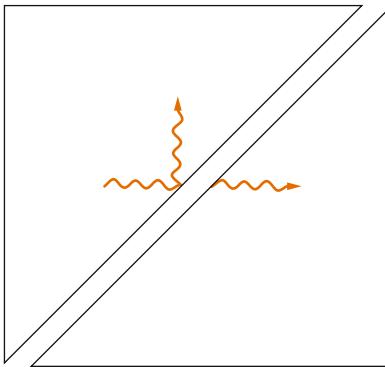


Abbildung 33.18 Die Durchdringung einer optischen Barriere. Wenn sich das zweite Glasprisma dicht am ersten befindet, so durchdringt ein Teil der Lichtwelle auch dann den Luftspalt, wenn der Einfallswinkel im ersten Prisma größer als der kritische Winkel der Totalreflexion ist.

serstrahl und zwei 45° -Prismen demonstriert werden (Abbildung 33.18). Ähnlich können Wasserwellen in einer Wellenwanne einen Graben mit tieferem Wasser passieren (Abbildung 33.19).

Mit der Theorie der Barrierendurchdringung bzw. des *Tunnelns* konnte George Gamow im Jahre 1928 die enormen Unterschiede der Halbwertszeiten beim Alphazerfall radioaktiver Atomkerne erklären. (Bei diesem Zerfall werden von größeren Atomkernen Alphateilchen emittiert, die aus je zwei fest aneinander gebundenen Protonen und Neutronen bestehen.) Je geringer die Energie eines emittierten Alphateilchens ist, desto

größer ist im Allgemeinen seine Halbwertszeit. Die Energien der Alphateilchen aus natürlichen radioaktiven Quellen variieren dabei von rund 4 MeV bis 7 MeV und die Halbwertszeiten von ungefähr 10^{-5} Sekunden bis 10^{10} Jahre. Ohne viel über die Kraft zu wissen, die der Atomkern auf das Teilchen ausübt, nahm Gamow für das Innere des radioaktiven Kerns einen Kasten mit rechteckigem Potenzialverlauf endlicher Tiefe an, der ein Alphateilchen enthält, wie in Abbildung 33.20 gezeigt ist. Unmittelbar außerhalb des Kastens wird das Alphateilchen mit seiner Ladung $+2e$ vom Kern mit dessen Restladung $+Ze$ abgestoßen. Die Abstoßungskraft röhrt vom Coulomb-Potenzial her, für das hier gilt:

$$E_{\text{pot}} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2e \frac{Ze}{r}.$$

Die Energie E in Abbildung 33.20 ist die gemessene kinetische Energie des emittierten Alphateilchens, weil in großem Abstand vom Kern die potentielle Energie null ist. Wenn sich im radioaktiven Kern ein Alphateilchen gebildet hat, bewegt es sich hin und her und stößt dabei immer wieder gegen die Barriere beim Kernradius r_K . Bei jedem Auf treffen des Alphateilchens besteht eine geringe Wahrscheinlichkeit, dass es die Barriere durchdringt und außerhalb des Kerns erscheint. Der Abbildung 33.20 können wir entnehmen, dass eine kleine Zunahme der Energie E die relative Höhe ($E_{\text{pot}} - E$) der Barriere und auch deren Breite verringert. Da die Wahrscheinlichkeit der Transmission stark von der Breite und der relativen Barrierenhöhe abhängt, führt eine geringe Zunahme von E zu einem starken Anstieg der Transmissionswahrscheinlichkeit und damit zu einer kürzeren Lebensdauer. Gamow konnte mit seinem Modell eine Bezie-

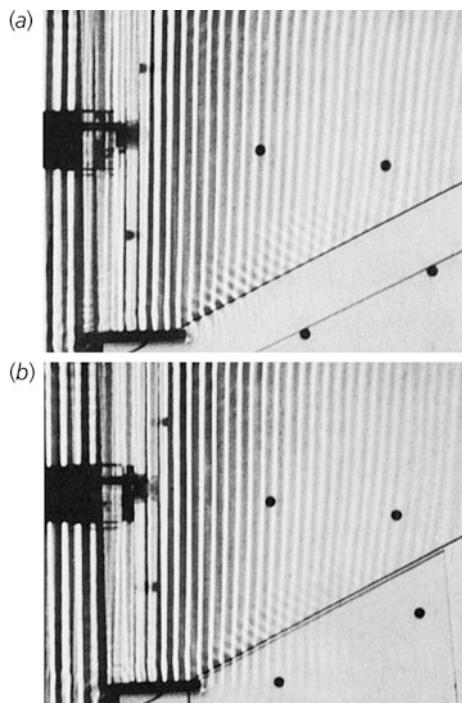


Abbildung 33.19 Wasserwellen in einer Wellenwanne durchdringen eine Barriere. a) Die Wellen werden an einem Graben mit tieferem Wasser total reflektiert. b) Der Graben ist hier sehr schmal, und es erscheint eine transmittierte Welle. Die dunklen Punkte sind Abstandshalter, mit denen die Prismen von unten fixiert sind. (© Education Development Center.)

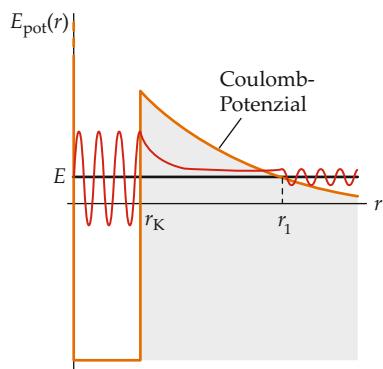


Abbildung 33.20 Modell der potentiellen Energie, der ein Alphateilchen in einem radioaktiven Kern ausgesetzt ist. Innerhalb des Kerns, also bei Abständen r , die kleiner als der Kernradius r_K sind, wirkt eine hohe Anziehungskraft; diese wird durch einen kastenförmigen Potenzialverlauf dargestellt. Außerhalb des Kerns ist diese Anziehungskraft vernachlässigbar, und das Potenzial folgt dem Coulomb'schen Gesetz: $E_{\text{pot}}(r) = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(2e)(Ze)/r$, wobei $2e$ die Ladung des Alphateilchens und Ze die restliche Kernladung ist. Die Wellenfunktion des Alphateilchens ist rot eingezeichnet.

hing für die Halbwertszeit in Abhängigkeit von der Energie E aufzustellen, die mit experimentellen Ergebnissen ausgezeichnet übereinstimmt.

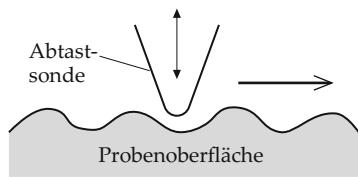


Abbildung 33.21 Das Prinzip des Rastertunneln elektronenmikroskops. Eine als sehr spitze Nadel ausgeführte Sonde fährt über der Oberfläche der Probe entlang. Zwischen Oberfläche und Sondenspitze wird ein stets gleicher Abstand aufrechterhalten, während Elektronen durch die Potenzialbarriere tunneln. Dabei hält ein Rückkopplungsmechanismus den Tunnelstrom konstant, indem er die Sonde entsprechend auf und ab bewegt. Dadurch wird letztlich eine Abbildung der Oberfläche erzielt.

Im **Rastertunneln elektronenmikroskop**, das in den 1980er Jahren entwickelt wurde, wirkt, wie in Abbildung 33.21 gezeigt ist, ein dünner Spalt zwischen der Oberfläche der Substanzprobe und einer als spitze Nadel ausgeführten Sonde als Potenzialbarriere für die in der Probe gebundenen Elektronen. (Die Höhe der Potenzialbarriere ist gleich der Austrittsarbeit an der Oberfläche der Substanzprobe.) Zwischen Sonde und Probe wird eine geringe elektrische Spannung angelegt. Wenn der Abstand der Oberflächen klein genug ist, *tunneln* die Elektronen durch das Vakuum, das die Sondenspitze und die Probenoberfläche voneinander trennt. Der Tunnelstrom hängt sehr stark vom Abstand ab, der sehr gering sein muss. Während die Sonde die Substanzprobe abtastet, wird der Strom mithilfe eines Rückkopplungsmechanismus konstant gehalten, indem dieser die Sonde auf und ab bewegt. Dadurch wird nach und nach die gesamte Oberfläche abgetastet und kann dabei sozusagen kartiert werden. Man erreicht hierbei Auflösungen bis zur Größe eines Atoms.

33.5 *Die Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen

Die eindimensionale zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung kann in einfacher Weise auf drei Dimensionen erweitert werden. In kartesischen Koordinaten lautet sie dann:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_{\text{pot}} \psi = E \psi. \quad (33.26)$$

SCHRÖDINGER-GLEICHUNG IN DREI DIMENSIONEN

Darin sind die Wellenfunktion ψ und die potentielle Energie E_{pot} im Allgemeinen Funktionen aller drei Koordinaten x , y und z . Als Beispiel betrachten wir nun ein Teilchen in einem dreidimensionalen Kasten mit unendlich hohem Potenzial. Dabei ist $E_{\text{pot}}(x, y, z) = 0$ für $0 < x < d$ und $0 < y < d$ sowie $0 < z < d$. Außerhalb dieses würfelförmigen Bereichs ist $E_{\text{pot}}(x, y, z) = \infty$. Bei den vorliegenden Randbedingungen

muss die Wellenfunktion an den Rändern des Kastens gleich null sein.

Zum Lösen partieller Differenzialgleichungen wie Gleichung 33.26 gibt es Standardmethoden. Die Form der Lösung können wir aus unserem Wissen über die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ableiten. Beim eindimensionalen Kasten entlang der x -Achse ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Intervall zwischen x und $x + dx$ befindet, nach Gleichung 33.5 gegeben durch $A_1^2 \sin^2(k_1 x) dx$. Darin ist A_1 eine Normierungskonstante und $k_1 = n\pi/d$ die Wellenzahl. Analog dazu ist beim eindimensionalen Kasten entlang der y -Achse die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Intervall zwischen y und $y + dy$ befindet, gegeben durch $A_2^2 \sin^2(k_2 y) dy$. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei unabhängige Ereignisse eintreten, ist gleich dem Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten beider Einzelereignisse. (Wenn man mit zwei Würfeln würfelt, dann beträgt beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für eine 6 beim ersten Würfel $\frac{1}{6}$, und beim zweiten Würfel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine ungerade Zahl erscheint, $\frac{1}{2}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Würfel eine 6 und mit dem zweiten eine ungerade Zahl zu würfeln, $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.) Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Intervall zwischen x und $x + dx$ und auch im Intervall zwischen y und $y + dy$ befindet, gegeben durch:

$$\begin{aligned} A_1^2 \sin^2(k_1 x) dx A_2^2 \sin^2(k_2 y) dy \\ = A_1^2 \sin^2(k_1 x) A_2^2 \sin^2(k_2 y) dx dy. \end{aligned}$$

Nun fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Intervall zwischen x und $x + dx$ und im Intervall zwischen y und $y + dy$ sowie im Intervall zwischen z und $z + dz$ befindet. Gemäß dem eben Dargelegten ist sie gegeben durch $\psi^2(x, y, z) dx dy dz$. Darin ist $\psi(x, y, z)$ die Lösung der Gleichung 33.26 und hat folgende Form:

$$\psi(x, y, z) = A \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z). \quad (33.27)$$

Die Konstante A wird durch die Normierung bestimmt. Wenn wir diese Lösung in Gleichung 33.26 einsetzen, erhalten wir für die Energie

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2).$$

Das ist gleichbedeutend mit $E = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/m$, wobei $p_x = \hbar k_1$, $p_y = \hbar k_2$ und $p_z = \hbar k_3$ ist. Die Wellenfunktion (Gleichung 33.27) ist null bei $x = d$, wenn $k_1 = n_1 \pi/d$ ist, wobei n_1 eine ganze Zahl ist. Analog dazu ist die Wellenfunktion null bei $y = d$, wenn $k_2 = n_2 \pi/d$ ist, und sie ist null bei $z = d$, wenn $k_3 = n_3 \pi/d$ ist. (Sie ist außerdem null bei $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$.) Die Energie ist daher quantisiert und kann nur folgende Werte annehmen:

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m d^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = E_1 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (33.28)$$

ENERGIENIVEAUS DES DREIDIMENSIONALEN KASTENPOTENZIALS

Darin sind n_1 , n_2 und n_3 positive ganze Zahlen, und $E_1 = \hbar^2 \pi^2 / (2m d^2)$ ist die Energie des Grundzustands im eindimensionalen Kasten. Beachten Sie, dass die Energie und die Wellenfunktion hier durch drei Quantenzahlen charakterisiert sind, die aus den Randbedingungen für jeweils eine der Koordinaten x , y und z hervorgehen.

Die niedrigste Energie (beim Grundzustand) tritt beim würfelförmigen Kasten auf, wenn $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ ist, und hat den Wert

$$E_{1,1,1} = \frac{3 \hbar^2 \pi^2}{2m d^2} = 3 E_1.$$

Das erste angeregte Energieniveau kann auf drei unterschiedliche Weisen erreicht werden: mit $n_1 = 2$ und $n_2 = n_3 = 1$ oder mit $n_2 = 2$ und $n_1 = n_3 = 1$ oder mit $n_3 = 2$ und $n_1 = n_2 = 1$. Die Wellenfunktion sieht jeweils anders aus. Für $n_1 = 2$ und $n_2 = n_3 = 1$ lautet sie beispielsweise:

$$\psi_{2,1,1} = A \sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{d}\right). \quad (33.29)$$

(Hier hat die Normierungskonstante A einen anderen Wert als in Gleichung 33.27.)

Die eben erwähnten drei Kombinationen von Quantenzahlen beschreiben drei unterschiedliche Quantenzustände, die dem gleichen Energieniveau entsprechen, jedoch durch drei verschiedene Wellenfunktionen repräsentiert werden. Ein Energieniveau, das mit mehr als einer Wellenfunktion verknüpft ist, nennt man **entartet**. Im vorliegenden Beispiel handelt es sich also um eine dreifache Entartung.

Die Entartung hängt mit der räumlichen Symmetrie des Systems zusammen. Nehmen wir an, in einem dreidimensionalen nicht würfelförmigen Kasten ist $E_{\text{pot}} = 0$ für $0 < x < d_1$ und $0 < y < d_2$ sowie $0 < z < d_3$. Die Randbedingungen an den Wänden des Kastens führen hierbei zu den Quantenbedingungen $k_1 d_1 = n_1 \pi$ und $k_2 d_2 = n_2 \pi$ sowie $k_3 d_3 = n_3 \pi$. Die Gesamtenergie ist dann gegeben durch

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{d_1^2} + \frac{n_2^2}{d_2^2} + \frac{n_3^2}{d_3^2} \right). \quad (33.30)$$

Diese Energieniveaus sind nicht entartet, wenn alle drei Kantenlängen d_1 , d_2 und d_3 unterschiedlich groß sind. Abbildung 33.22a zeigt zum Vergleich die Energieniveaus für den Grundzustand und die ersten beiden angeregten Zustände bei einem würfelförmigen Kasten mit unendlich hohem Potenzial; hier sind die angeregten Zustände entartet. In Abbildung 33.22b ist dagegen zu erkennen, dass beim quaderförmigen Kasten mit verschiedenen Kantenlängen d_1 , d_2 und d_3 die angeregten Energieniveaus etwas unterschiedlich sind; es liegt also keine Entartung vor. Beispiel 33.4 verdeutlicht, wie Symmetriebeziehungen zwischen den Kantenlängen mit Entartungen der Energiezustände einhergehen, und im Übungsbeispiel 33.5 geht es um Wellenfunktionen der angeregten Energiezustände von Beispiel 33.4.

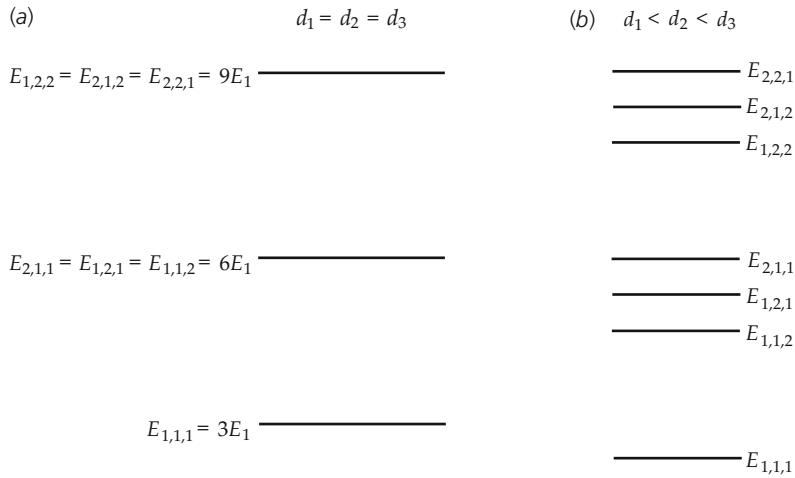


Abbildung 33.22 Energieniveaudiagramm für a) einen würfelförmigen und b) einen quaderförmigen Kasten mit unendlich hohem Potenzial. In Teilabbildung a sind die Energieniveaus entartet, d. h., es gibt zwei oder mehr Wellenfunktionen, die denselben Energie entsprechen. Liegt, wie in Teilabbildung b, keine Symmetrie vor, dann besteht auch keine Entartung.

Beispiel 33.4: Energieniveaus eines Teilchens in einem dreidimensionalen Kasten

Ein Teilchen befindet sich in einem dreidimensionalen Kasten mit unterschiedlichen Kantenlängen, für die gilt: $d_3 = d_2 = 2d_1$. Geben Sie jeweils die drei Quantenzahlen n_1 , n_2 und n_3 an, die dem Zustand bzw. den Zuständen in jedem der sieben niedrigsten Energieniveaus in diesem Kasten entsprechen.

Problembeschreibung: Mithilfe von Gleichung 33.30 kann jeweils die Energie in Abhängigkeit von d_1 und von den Quantenzahlen n_1 , n_2 und n_3 ausgedrückt werden. Dann sind für die niedrigsten Energien die zugehörigen Kombinationen der Quantenzahlen herauszusuchen.

Lösung: 1. Die Energie eines Niveaus ist in Abhängigkeit von den Quantenzahlen durch Gleichung 33.30 gegeben:

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{d_1^2} + \frac{n_2^2}{d_2^2} + \frac{n_3^2}{d_3^2} \right)$$

2. Setzen Sie die Verhältnisse der Kantenlängen ein und klammern Sie $1/d_1^2$ aus. Setzen Sie zudem $\hbar^2 \pi^2 / (8m d_1^2) = E_0$; diese Energie ist 4-mal kleiner als die Energie E_1 des Grundzustands im eindimensionalen Kasten der Länge d (siehe Gleichung 33.28):

$$\begin{aligned} E_{n_1, n_2, n_3} &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{d_1^2} + \frac{n_2^2}{4d_1^2} + \frac{n_3^2}{4d_1^2} \right) \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m d_1^2} (4n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \\ &= E_0 (4n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \end{aligned}$$

3. Die niedrigste Energie ist $E_{1,1,1}$:

$$E_{1,1,1} = E_0 \cdot (4 \cdot 1^2 + 1^2 + 1^2) = \boxed{6E_0} \quad (1.)$$

4. Der Energieanstieg ist jeweils am geringsten, wenn n_2 oder n_3 größer wird. Probieren Sie verschiedene Werte der Quantenzahlen aus:

$$E_{1,2,1} = E_{1,1,2} = E_0 \cdot (4 \cdot 1^2 + 2^2 + 1^2) = \boxed{9E_0} \quad (2.)$$

$$E_{1,2,2} = E_0 \cdot (4 \cdot 1^2 + 2^2 + 2^2) = \boxed{12E_0} \quad (3.)$$

$$E_{1,3,1} = E_{1,1,3} = E_0 \cdot (4 \cdot 1^2 + 3^2 + 1^2) = \boxed{14E_0} \quad (4.)$$

$$E_{1,3,2} = E_{1,2,3} = E_0 \cdot (4 \cdot 1^2 + 3^2 + 2^2) = \boxed{17E_0} \quad (5.)$$

$$E_{2,1,1} = E_0 \cdot (4 \cdot 2^2 + 1^2 + 1^2) = \boxed{18E_0} \quad (6.)$$

$$E_{2,2,1} = E_{2,1,2} = E_0 \cdot (4 \cdot 2^2 + 2^2 + 1^2) = \boxed{21E_0} \quad (7.)$$

$$E_{1,4,1} = E_{1,1,4} = E_0 \cdot (4 \cdot 1^2 + 4^2 + 1^2) = \boxed{21E_0} \quad (7.)$$

Plausibilitätsprüfung: Da zwei der Kantenlängen gleich sind, waren entartete Energieniveaus zu erwarten.

Weitergedacht: Die Energien $E_{2,2,1}$ und $E_{2,1,2}$ sind exakt gleich, weil die Kantenlängen d_2 und d_3 genau gleich sind. Dagegen sind die Energien $E_{2,2,1}$ und $E_{1,4,1}$ exakt gleich, weil die Kantenlänge d_1 genau gleich der Hälfte der Kantenlänge d_2 ist.

Übung 33.3: Ermitteln Sie die Quantenzahlen und die Energien der beiden nächsthöheren Energieniveaus in Schritt 4. ◀

Beispiel 33.5: Wellenfunktionen für ein Teilchen in einem dreidimensionalen Kasten**ZUR ÜBUNG**

Formulieren Sie die Wellenfunktionen für das entartete vierte Energieniveau in Schritt 4 von Beispiel 33.4.

Problembeschreibung: Es ist die Beziehung $\psi(x, y, z) = A \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z)$ anzuwenden (Gleichung 33.27), eine verallgemeinerte Version der Gleichung 33.29), wobei $k_i = n_i \pi / d_i$ ist.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: Stellen Sie die Wellenfunktionen auf, die den Energien $E_{1,3,1}$ und $E_{1,1,3}$ entsprechen, indem Sie die entsprechenden Quantenzahlen n_i und Kastenlängen d_i in Gleichung 33.27 einsetzen:

Ergebnisse der Lösungsschritte:

$$\psi_{1,3,1} = A \sin\left(\frac{\pi x}{d_1}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{2d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2d_1}\right)$$

$$\psi_{1,1,3} = A \sin\left(\frac{\pi x}{d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2d_1}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{2d_1}\right)$$

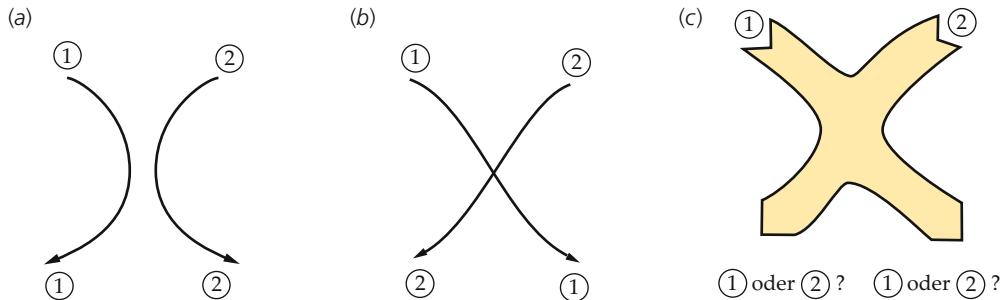


Abbildung 33.23 a) und b) Bei klassischen Teilchen können ihre Bahnen verfolgt und die Teilchen jederzeit identifiziert werden. c) Aufgrund der quantenmechanischen Welleneigenschaften der Elektronen sind deren Bahnen verschmiert, was hier durch den schattierten Bereich angedeutet ist. Außerdem ist es unmöglich zu entscheiden, welches Elektron welches ist, nachdem sie sich voneinander getrennt haben.

Der Grundzustand ist derjenige Quantenzustand, bei dem alle drei Quantenzahlen n_1 , n_2 und n_3 den Wert eins haben; keine von ihnen kann also null sein. Nähme eine der Quantenzahlen n_1 , n_2 und n_3 den Wert null an, dann wäre die entsprechende Wellenzahl k ebenfalls null. Die zugehörige Wellenfunktion (Gleichung 33.27) wäre in diesem Fall für alle Werte von x , y und z gleich null.

der Ausdruck für die Energie des Atoms nur geringfügig modifiziert werden, um die Bewegung des weitaus schwereren Protons zu berücksichtigen. Betrachtet man aber kompliziertere Systeme, beispielsweise das Heliumatom, so muss man die quantenmechanischen Ansätze auf mindestens zwei Elektronen anwenden, die sich in einem Potenzial bewegen. Die Lösung solcher Probleme wird dadurch erschwert, dass auch die Elektronen miteinander wechselwirken, und außerdem durch die Tatsache, dass die Elektronen identisch sind.

33.6 Die Schrödinger-Gleichung für zwei identische Teilchen

Unsere bisherige Betrachtung der Quantenmechanik beschränkte sich auf Fälle, bei denen sich ein einzelnes Teilchen unter dem Einfluss einer potenziellen Energie E_{pot} bewegt. Das wichtigste physikalische Beispiel dafür ist das Wasserstoffatom. In diesem befindet sich ein Elektron im Coulomb-Potenzial des Atomkerns (des Protons). Hierbei handelt es sich eigentlich um ein Zwei-Körper-Problem, weil das Proton seinerseits dem Potenzial des Elektrons ausgesetzt ist. Jedoch muss sowohl im klassischen als auch im quantenmechanischen Ansatz

Die Wechselwirkung zweier Elektronen miteinander ist elektromagnetischer Natur und entspricht im Grunde der klassischen Wechselwirkung zweier geladener Teilchen. Die Schrödinger-Gleichung für ein Atom mit zwei oder mehr Elektronen ist nicht exakt zu lösen; daher müssen Näherungsverfahren angewandt werden. Das ist übrigens auch in der klassischen Physik bei drei oder mehr Teilchen der Fall. Aber die mit der Identität der Elektronen zusammenhängenden Komplikationen sind rein quantenmechanischer Natur und haben keine klassische Entsprechung. Sie röhren daher, dass es unmöglich ist, die Elektronen zu verfolgen, weil sie nicht unterscheidbar sind. In der klassischen Physik können identische Teilchen jederzeit geortet werden, zumindest gedanklich sogar mit beliebiger

33.6 Die Schrödinger-Gleichung für zwei identische Teilchen

Genauigkeit. Dies ist in der Quantenmechanik wegen der Heisenberg'schen Unschärferelation grundsätzlich unmöglich. In Abbildung 33.23 sind die Unterschiede veranschaulicht.

Die Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen hat wichtige Konsequenzen. Betrachten wir zunächst den sehr einfachen Fall zweier gleicher, nicht wechselwirkender Teilchen, die sich in einem eindimensionalen Kasten mit unendlich hohem Potenzial bewegen. Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für zwei gleiche Teilchen der Masse m lautet:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + E_{\text{pot}} \psi(x_1, x_2) \\ = E \psi(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (33.31)$$

Darin sind x_1 und x_2 die Koordinaten der beiden Teilchen. Wenn die Teilchen jedoch miteinander wechselwirken, dann enthält der Ausdruck für die potentielle Energie E_{pot} Terme, die sowohl x_1 als auch x_2 enthalten und nicht in Terme separierbar sind, die nur x_1 bzw. nur x_2 enthalten. Beispielsweise ist bei der elektrostatischen Abstoßung zweier Elektronen in einer Dimension die potentielle Energie gegeben durch $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 / |x_2 - x_1|$.

Wenn die Teilchen nicht miteinander wechselwirken (wie wir hier annehmen), dann können wir schreiben: $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},1}(x_1) + E_{\text{pot},2}(x_2)$. Beim Kasten mit unendlich hohem Potenzial brauchen wir nur die Schrödinger-Gleichung innerhalb des Kastens zu lösen, wo $E_{\text{pot}} = 0$ ist, und dabei zu fordern, dass die Wellenfunktion an den Rändern des Kastens null ist. Mit $E_{\text{pot}} = 0$ ähnelt Gleichung 33.31 der Gleichung 33.26 für ein Teilchen im zweidimensionalen Kasten, allerdings ohne z und mit Ersatz von y durch x_2 .

Lösungen der Gleichung 33.31 können in folgender Form geschrieben werden:

$$\psi_{n,m} = \psi_n(x_1) \psi_m(x_2). \quad (33.32)$$

Darin sind ψ_n und ψ_m die Ein-Teilchen-Wellenfunktionen für jeweils ein Teilchen in einem Kasten mit unendlich hohem Potenzial, und n und m sind die Quantenzahlen des Teilchens 1 bzw. des Teilchens 2. (Auch diese Lösung kann anhand der Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich Elektron 1 im Intervall zwischen $x = x_1$ und $x = x_1 + dx_1$ und Elektron 2 im Intervall zwischen $x = x_2$ und $x = x_2 + dx_2$ befindet, ist gleich dem Produkt der beiden einzelnen Wahrscheinlichkeiten.) Für $n = 1$ und $m = 2$ lautet die Wellenfunktion beispielsweise:

$$\psi_{1,2} = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{d}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{d}\right). \quad (33.33)$$

Die Wahrscheinlichkeit, Teilchen 1 im Intervall zwischen $x = x_1$ und $x = x_1 + dx_1$ und Teilchen 2 im Intervall zwischen $x = x_2$ und $x = x_2 + dx_2$ anzutreffen, ist $\psi_{n,m}^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$. Das ist nun das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $\psi_n^2(x_1) dx_1$ und $\psi_m^2(x_2) dx_2$. Obwohl wir die Teilchen mit 1 und 2 bezeichnet haben, können wir sie – da sie identisch sind –

nicht unterscheiden und daher nicht angeben, welches von beiden sich zwischen $x = x_1$ und $x = x_1 + dx_1$ und welches sich zwischen $x = x_2$ und $x = x_2 + dx_2$ befindet. Die mathematischen Beschreibungen identischer Teilchen müssen dieselben sein, wenn wir ihre Bezeichnungen austauschen. Daher muss die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^2(x_1, x_2)$ die gleiche sein wie $\psi^2(x_2, x_1)$:

$$\psi^2(x_2, x_1) = \psi^2(x_1, x_2). \quad (33.34)$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn $\psi(x_2, x_1)$ entweder **symmetrisch** oder **antisymmetrisch** bezüglich der Vertauschung der Teilchen ist, d. h. wenn entweder gilt:

$$\psi(x_2, x_1) = \psi(x_1, x_2) \quad (\text{symmetrisch}) \quad (33.35)$$

oder

$$\psi(x_2, x_1) = -\psi(x_1, x_2) \quad (\text{antisymmetrisch}). \quad (33.36)$$

Beachten Sie, dass die durch die Gleichungen 33.32 und 33.33 gegebenen Wellenfunktionen weder symmetrisch noch antisymmetrisch sind. Wenn wir in diesen Wellenfunktionen x_1 und x_2 vertauschen, erhalten wir jeweils eine andere Wellenfunktion; das bedeutet, die Teilchen sind unterscheidbar.

Wir können symmetrische und antisymmetrische Wellenfunktionen gewinnen, die Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind, indem wir $\psi_{n,m}$ und $\psi_{m,n}$ addieren bzw. voneinander subtrahieren. Beim Addieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi_S &= A' [\psi_n(x_1) \psi_m(x_2) + \psi_n(x_2) \psi_m(x_1)] \\ &\quad (\text{symmetrisch}), \end{aligned} \quad (33.37)$$

und beim Subtrahieren ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi_A &= A' [\psi_n(x_1) \psi_m(x_2) - \psi_n(x_2) \psi_m(x_1)] \\ &\quad (\text{antisymmetrisch}). \end{aligned} \quad (33.38)$$

Betrachten wir als Beispiel zwei identische Teilchen in einem Kasten mit unendlich hohem Potenzial. Für den ersten angeregten Zustand lauten die symmetrische und die antisymmetrische Wellenfunktion:

$$\psi_S = A' \left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{d}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{d}\right) + \sin\left(\frac{\pi x_2}{d}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_1}{d}\right) \right) \quad (33.39)$$

bzw.

$$\psi_A = A' \left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{d}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{d}\right) - \sin\left(\frac{\pi x_2}{d}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_1}{d}\right) \right). \quad (33.40)$$

Zwischen antisymmetrischen und symmetrischen Wellenfunktionen besteht ein wichtiger Unterschied. Bei $n = m$ ist die antisymmetrische Wellenfunktion für alle Werte von x_1 und x_2 gleich null, die symmetrische Wellenfunktion jedoch nicht. Ist also die Wellenfunktion, die zwei identische Teilchen beschreibt, antisymmetrisch, dann können die Quantenzahlen n und m der beiden Teilchen nicht gleich sein.

Das Prinzip, dass zwei derartige Teilchen, beispielsweise Elektronen, nicht denselben Quantenzustand (bei dem sämtliche Quantenzahlen gleich wären) besetzen können, wurde von Wolfgang Pauli im Jahre 1925 aufgestellt. Man bezeichnet es daher als *Pauli'sches Ausschließungsprinzip*. Bald wurde es auch auf andere Systeme als Atome und Teilchen erweitert, beispielsweise auf Protonen im Atomkern oder Neutronen im Atomkern. Elektronen, Protonen, Neutronen, Neutrinos und Quarks haben jeweils eine Spinquantenzahl s von $\frac{1}{2}$ und gehören daher zu den **Fermionen**. Ihre zwei erlaubten Werte für die Spinquantenzahl m_s sind daher $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$. In seiner allgemeinen Formulierung lautet das **Pauli'sche Ausschließungsprinzip**:

Zwei identische Fermionen können nicht gleichzeitig denselben Quantenzustand besetzen.

PAULI'SCHES AUSSCHLIESSUNGSPRINZIP

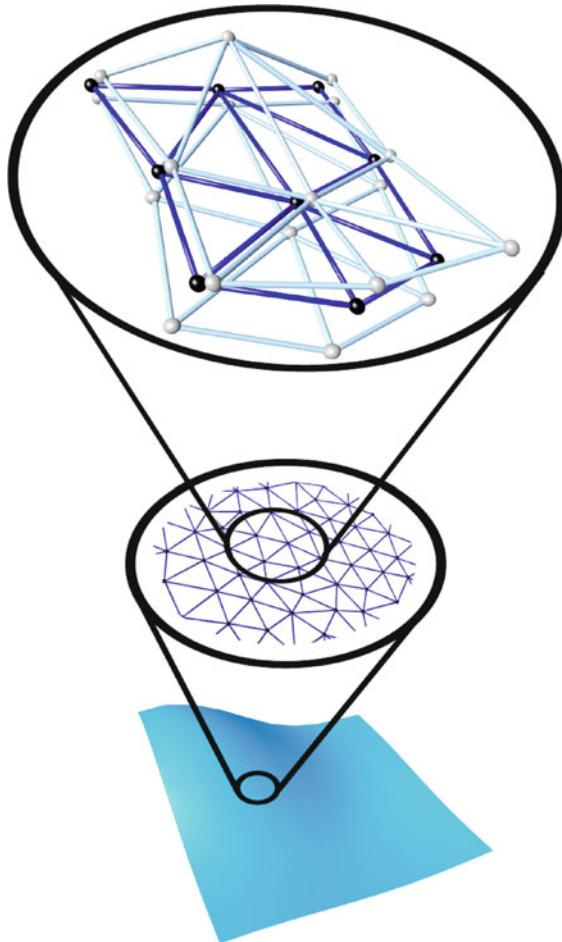
Die Wellenfunktionen für zwei identische Fermionen müssen antisymmetrisch sein. Dagegen haben die sogenannten **Bosonen**, zu denen Alphateilchen, Deuteronen, Photonen und Mesonen gehören, einen ganzzahligen Spin und symmetrische Wellenfunktionen. Für solche Teilchen gilt das Pauli'sche Ausschließungsprinzip nicht.

Eine Wellenfunktion, die eine Lösung der zeitunabhängigen Wellengleichung 33.31 ist, nennt man einen räumlichen Zustand. In einem gebundenen System, das identische Fermionen enthält, befinden sich in jedem besetzten räumlichen Zustand nur ein oder zwei Fermionen (bei zweien unterscheiden sich ihre Spinquantenzahlen, damit sie nicht im exakt selben Quantenzustand sind). Enthält das System jedoch identische Bosonen, dann ist deren Anzahl in jedem räumlichen Zustand nicht begrenzt.

⌚ Im Kontext: Spinnnetzwerke und -schäume: Auf der Suche nach einer Quantisierung der Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) beschreibt die gravitative Wechselwirkung durch die Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit: Massen krümmen Zeit und Raum, und diese Krümmung beeinflusst wiederum die Bahn von Teilchen bzw. die Ausbreitung von Feldern.

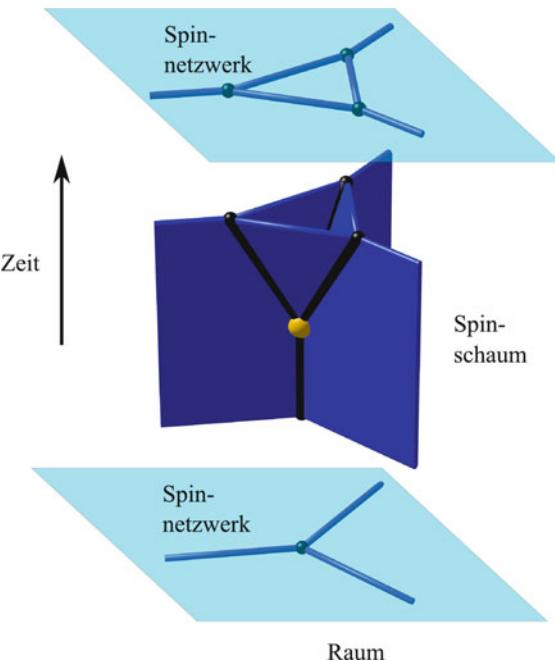
Dabei ist die ART immer noch eine „klassische“ Theorie, d. h., sie berücksichtigt keinerlei Quanteneffekte. Genau wie die anderen drei Grundkräfte müsste die Gravitation allerdings – allein schon aus Gründen der Konsistenz – auch den Regeln der Quantenphysik gehorchen. Seit vielen Jahren sind Physiker daher auf der Suche nach einer Quantentheorie der gravitativen Wechselwirkung, die die ART als klassischen Grenzfall enthält.



© Benjamin Bahr, Wikimedia Commons, Creative Commons CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication.

Die Gravitation unterscheidet sich dabei in einem Punkt radikal von den anderen drei Wechselwirkungen: Anders als diese wird sie nicht

durch ein Feld beschrieben, das auf einer Raumzeit mit festgelegter Geometrie propagiert, sondern durch die Geometrie der Raumzeit selbst, repräsentiert durch die Lorentz'sche Metrik $g_{\mu\nu}$. Die ART ist daher „hintergrundunabhängig“, was sich auch im Prinzip der allgemeinen Kovarianz widerspiegelt.



© Benjamin Bahr, Wikimedia Commons, Creative Commons CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication.

Seit dem Ende des 20. Jahrhunderts wird fieberhaft daran geforscht, das Konzept der Hintergrundunabhängigkeit mit den fundamentalen Prinzipien der Quantentheorie zu vereinen. Eine vielversprechende Kandidatin hierfür ist die Schleifenquantengravitation (*loop quantum gravity*, LQG). Der dreidimensionale Raum ist der LQG zufolge kein Kontinuum aus Punkten, sondern ein sogenanntes Spinnnetzwerk. Die Knoten dieses Netzwerks sind demzufolge „gequantelter Raum“, und die Verbindungen geben an, welche Raumbereiche benachbart sind und welche nicht. Ein Spinnnetzwerk enthält zusätzliche Quantenzahlen (ähnlich wie die Wellenfunktion des Elektrons im Wasserstoffatom), aus der man geometrische Größen wie Volumina und Flächen ablesen kann. Interessanterweise ist diese Geometrie notwendigerweise gequantelt, d. h., es gibt z. B. einen kleinsten nichtverschwindenden Flächeninhalt (von ungefähr einer Planckfläche, also $l_p^2 = 2,6 \cdot 10^{-70} \text{ m}^2$).

Die zeitliche Entwicklung – und damit die Dynamik – eines Spinnnetzwerks beschreibt einen sogenannten Spinschaum (*spin foam*), der seinen Namen aus der Ähnlichkeit mit einer Ansammlung unzähliger kleiner Seifenhäute bezieht.

Eines der drängenden Probleme, mit denen sich unsere Arbeitsgruppe am II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg beschäftigt, ist die Renormierung der LQG. Dabei geht es um die Frage, wie man die Dynamik eines Spinnetworks beschreiben kann, das über extrem viele Knoten verfügt. Damit verbunden ist die folgende Frage: Verhält sich die LQG im klassischen Grenzfall wie die ART? Aus zahlreichen Beispielen weiß man, dass sich Systeme mit extrem vielen einfachen Freiheitsgraden oft sehr komplex verhalten: So ordnen sich 10^{23} Atome – in Abhängigkeit von äußeren Parametern wie Druck und Temperatur – entweder als Flüssigkeit oder als Festkörper an. Genauso können sich Spinnetworks auf großen Skalen entweder wie vierdimensionale, glatte Raumzeiten verhalten oder aber völlig ungeometrisch. Es ist daher wichtig sicherzustellen, dass sie sich aufgrund der Dynamik bevorzugt in „geometrischen Phasen“ anordnen. Nur so ist die Verbindung zur ART gewährleistet.

Es gibt verschiedene Hinweise, auch aus verwandten Ansätzen zur Quantengravitation, dass das Verhalten der Spinschäume deutlich komplizierter ist als ursprünglich angenommen. So konnte man mithilfe von kausalen dynamischen Triangulierungen zeigen, dass die Dimension der vom Spinschaum beschriebenen Raumzeit von der Skala abhängt: Auf kleinen Abständen (in der Größenordnung einiger Plancklängen) faltet sich der Spinschaum so, dass es effektiv nur eine Raum- und eine Zeitdimension gibt. Erst über größere Abstände gemittelt sieht ein Spinschaum überhaupt vierdimensional aus. Was die Ursache dieses Phänomens der dimensionalen Reduktion ist, ist – wie auch viele andere Aspekte der LQG – noch nicht verstanden.



© Benjamin Bahr, Wikimedia Commons, Creative Commons CC0 1.0 Universal Public Domain Dedication.

Dr. Benjamin Bahr wurde 1980 in Eckernförde geboren und hat sich schon früh für die Grundlagen der Physik interessiert. Er studierte Physik in Kaiserslautern, Göttingen sowie Cambridge und schloss seine Doktorarbeit am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik in der Schleifenquantengravitation ab. Er war Research Fellow am Peterhouse College der Universität Cambridge und leitet zur Zeit eine Emmy-Noether-Nachwuchsgruppe am II. Institut für Theoretische Physik an der Universität Hamburg.

Perez, A., „Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams“, <http://arxiv.org/abs/grqc/0409061> (Stand: Juni 2013).

Rovelli, C., *Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

Thiemann, T., *Modern Canonical Quantum General Relativity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Erlaubte Lösungen der Schrödinger-Gleichung	<p>Eine erlaubte Wellenfunktion $\psi(x)$ muss die Schrödinger-Gleichung erfüllen, außerdem stetig sein und eine stetige erste Ableitung $d\psi/dx$ haben. (Eine Ausnahme liegt bei unendlich hohen Potenzialwänden vor, wobei E_{pot} innerhalb des Kastens null und außerhalb unendlich hoch ist). Bei dieser Potenzialfunktion ist $d\psi/dt$ am Rand des Kastens nicht stetig. Da die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen (beispielsweise ein Elektron) irgendwo zu finden, gleich eins ist, muss die Wellenfunktion der Normierungsbedingung</p> $\int_{-\infty}^{\infty} \psi ^2 dx = 1$ <p>gehören. Diese Bedingung impliziert die Randbedingung, dass ψ gegen null gehen muss, wenn x gegen ∞ geht. Solche Randbedingungen führen zur Quantisierung der Energie.</p>
2. Eingeschlossene Teilchen	<p>Wenn die Gesamtenergie E eines Teilchens in einem bestimmten Bereich (dem klassisch erlaubten Bereich) größer als die potentielle Energie $E_{\text{pot}}(x)$ ist, jedoch außerhalb dieses Bereichs kleiner, dann oszilliert die Wellenfunktion ψ innerhalb des klassisch erlaubten Bereichs, während ψ außerhalb von ihm exponentiell abnimmt. Nur bei bestimmten Werten der Gesamtenergie E geht die Wellenfunktion gegen null, wenn x gegen ∞ geht. Daher ist die Energie quantisiert. Die quadratintegrbaren Wellenfunktionen gebundener Systeme beschreiben stehende Wellen.</p>
Kasten mit unendlich hohem Potenzial	<p>Die diskreten Energieniveaus eines Teilchens der Masse m in einem Kasten der Länge d mit unendlich hoher Energie an den Rändern sind gegeben durch</p> $E_n = \frac{h^2}{8md^2} \cdot n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (33.8)$ <p>und die dazugehörigen Wellenfunktionen innerhalb des Kastens lauten</p> $\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \quad (33.11)$
Kasten mit endlich hohem Potenzial	<p>In einem Kasten mit endlich hoher potenzieller Energie gibt es nur eine endliche Anzahl erlaubter Energien; diese sind etwas geringer als die entsprechenden Energien in einem Kasten mit unendlich hoher potenzieller Energie.</p>
Harmonischer Oszillator	<p>Beim harmonischen Oszillator mit der potentiellen Energie $E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ sind die erlaubten Energien äquidistant und gegeben durch</p> $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (33.22)$ <p>Die Wellenfunktion des Grundzustands $n = 0$ ist gegeben durch</p> $\psi_0(x) = A_0 e^{-ax^2}. \quad (33.19)$ <p>Darin ist A_0 die Normierungskonstante, und es ist</p> $a = \frac{1}{2} \frac{m\omega_0}{\hbar}.$
3. Reflexion und Transmission bei einer Potenzialbarriere	<p>Wenn sich die potentielle Energie entlang einer kleinen Strecke stark ändert, kann das Teilchen reflektiert werden, selbst wenn $E > E_{\text{pot}}(x)$ ist. Es kann auch in einen Bereich mit $E < E_{\text{pot}}(x)$ eindringen. Reflexion und Transmission von Elektronenwellen ähneln denen anderer Wellenarten.</p>
4. Die Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen	<p>Die Wellenfunktion für ein Teilchen in einem dreidimensionalen Kasten kann folgendermaßen formuliert werden:</p> $\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z).$ <p>Darin sind ψ_1, ψ_2 und ψ_3 Wellenfunktionen beim eindimensionalen Kasten.</p>
Entartung	<p>Wenn mehr als eine Wellenfunktion dem gleichen Energieniveau entspricht, nennt man dieses Niveau entartet. Die Entartung röhrt von der räumlichen Symmetrie her.</p>
5. Die Schrödinger-Gleichung für zwei identische Teilchen	<p>Eine Wellenfunktion, die zwei identische Teilchen beschreibt, muss bezüglich des Austauschs der Teilchenkoordinaten entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sein. Fermionen (darunter Elektronen, Protonen und Neutronen) werden durch antisymmetrische Wellenfunktionen beschrieben und unterliegen dem Pauli'schen Ausschlussprinzip. Nach diesem können zwei identische Teilchen nicht gleichzeitig die gleichen Werte aller Quantenzahl haben. Bosonen (darunter Alphateilchen, Deuteronen, Photonen und Mesonen) werden durch symmetrische Wellenfunktionen beschrieben und unterliegen nicht dem Pauli'schen Ausschlussprinzip.</p>

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Die Wellenfunktion kann nicht normiert werden.

Lösung der Übungen

1. $4,70 \text{ nm}$
2. Durch Einsetzen von $n_i = c/c_i = (c \cdot k_i)/\omega$ ergibt sich die gesuchte Beziehung.
3. $E_{1,3,3} = 22 E_0$, $E_{1,4,2} = E_{1,2,4} = E_{2,2,2} = 24 E_0$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

33.1 • Skizzieren Sie für den Zustand $n = 4$ eines Teilchens in einem Kasten mit endlich hohem Potenzial a) die Wellenfunktion und b) die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Die Schrödinger-Gleichung

33.2 •• Angenommen, $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ sind Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung. Zeigen Sie, dass dann auch $\psi_3(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ eine Lösung ist. Diese Beziehung beschreibt das sogenannte Superpositionsprinzip, das für die Lösungen aller linearen Differenzialgleichungen gilt.

Der harmonische Oszillator

33.3 •• Mit dem Modell des harmonischen Oszillators kann man auch Schwingungen in Molekülen annähernd beschreiben. Beispielsweise weist das Wasserstoffmolekül H_2 äquidistante Energieniveaus der Schwingung auf, deren Abstand $8,7 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ beträgt. Wie hoch wäre dabei die Federkonstante, wenn man sich das halbe Molekül als einzelnes Wasserstoffatom vorstellt, das über eine Feder mit einer festen Wand verbunden ist? *Hinweis:* Der Abstand der Energieniveaus dieses halben Moleküls ist halb so groß wie der Abstand der Energieniveaus des vollständigen Moleküls. Außerdem ist die Kraftkonstante einer Feder umgekehrt proportional zu ihrer Länge im entspannten Zustand; wenn also die Hälfte der Feder die Kraftkonstante k_F hat, dann hat die gesamte Feder die Kraftkonstante $\frac{1}{2} k_F$.

33.4 •• Zeigen Sie, dass für den Grundzustand des harmonischen Oszillators mit der Wellenfunktion $\psi_0(x) = A_0 e^{-ax^2}$ und der Normierungskonstante $A_0 = (2 m \omega_0 / \hbar)^{1/4}$ gilt:

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 |\psi|^2 dx = \frac{\hbar}{2 m \omega_0} = \frac{1}{4 a}.$$

Zeigen Sie damit, dass die mittlere potenzielle Energie gleich der halben Gesamtenergie ist.

33.5 ••• Nach den Gesetzen der klassischen Physik ist die mittlere kinetische Energie des harmonischen Oszillators gleich seiner mittleren potenziellen Energie. Nehmen Sie an, dass dies auch für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator gilt. Bestimmen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 33.4 den Erwartungswert von p_x^2 (wobei $p_x = m v_x$ ist) für den Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

Reflexion und Transmission von Elektronenwellen: Barrierendurchdringung

33.6 •• Ein Teilchen mit der Energie E trifft auf eine Potenzialbarriere der Höhe W_0 . Wie hoch muss der Quotient E/W_0 sein, damit der Reflexionskoeffizient gleich $\frac{1}{2}$ ist?

33.7 •• Ein Elektron mit der kinetischen Energie 10 eV trifft auf eine Potenzialbarriere der Höhe 25 eV und der Breite 1,0 nm. a) Berechnen Sie mit Gleichung 33.25 die Größenordnung der Wahrscheinlichkeit, mit der das Elektron durch die Barriere tunnelt. b) Wiederholen Sie die Berechnung für eine Barrierenbreite von 0,10 nm.

Die Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen

33.8 •• Ein Teilchen ist in einem dreidimensionalen Kasten mit den Kantenlängen d_1 und $d_2 = 2 d_1$ sowie $d_3 = 3 d_1$ eingeschlossen. a) Ermitteln Sie die Quantenzahlen n_1, n_2 und n_3 des Teilchens für die zehn energetisch niedrigsten Quantenzustände. (Hierfür kann ein Tabellenkalkulationsprogramm hilfreich sein.) b) Gibt es Quantenzahlen, die entarteten Energieniveaus entsprechen, und welche sind dies gegebenenfalls? c) Geben Sie eine Wellenfunktion für den fünften angeregten Zustand an. (Es gibt nur fünf Zustände, die Energien unterhalb des Energieniveaus des fünften angeregten Zustands haben.)

33.9 •• Ein Teilchen ist darauf beschränkt, sich innerhalb eines zweidimensionalen Gebiets frei zu bewegen, das definiert ist durch $0 \leq x \leq d$ und $0 \leq y \leq d$. Ermitteln Sie a) die Wellenfunktionen, die diese Bedingungen erfüllen und Lösungen der Schrödinger-Gleichung sind, b) die diesen Wellenfunktionen entsprechenden Energien, c) die Quantenzahlen der zwei energetisch niedrigsten entarteten Zustände, d) die Quantenzahlen der drei energetisch niedrigsten Zustände mit gleichen Energien.

Die Schrödinger-Gleichung für zwei identische Teilchen

33.10 • Wie hoch ist die Energie des Grundzustands von sieben identischen, nicht wechselwirkenden Fermionen in einem eindimensionalen Kasten der Länge d ? (Da die mit dem Spin korrelierte Quantenzahl zwei Werte haben kann, kann jeder räumliche Zustand zwei Fermionen enthalten.)

Orthogonalität von Wellenfunktionen

Das Integral zweier Funktionen über dasselbe Raumintervall weist Analogien zum Skalarprodukt zweier Vektoren auf. Wenn

dieses Integral null ist, dann bezeichnet man die Funktionen als orthogonal (was zwei aufeinander senkrecht stehenden Vektoren entspricht). Die folgende Aufgabe illustriert das Prinzip, nach dem zwei Wellenfunktionen orthogonal sind, die verschiedenen Energiezuständen im selben Potenzial entsprechen. Hinweis: Das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ ist gleich null, wenn x_1 gleich $-x_2$ ist und wenn $f(x)$ gleich $-f(-x)$ ist.

33.11 •• Die Wellenfunktionen $\psi_n(x) = A \sin(n\pi x/d)$, mit $n = 1, 2, 3, \dots$, entsprechen einem Teilchen in einem Kasten, der sich von 0 bis d erstreckt und ein unendlich hohes Potenzial hat. Zeigen Sie, dass hierfür gilt: $\int_0^d \psi_m(x) \psi_n(x) dx = 0$, wenn m und n ganze positive Zahlen sind und $m \neq n$ ist. Mit anderen Worten: Zeigen sie, dass die Wellenfunktionen orthogonal sind.

Allgemeine Aufgaben

33.12 •• Ein Teilchen ist in einem zweidimensionalen Kasten eingeschlossen, wobei folgende Randbedingungen gelten: $E_{\text{pot}}(x, y) = 0$ für $-d/2 \leq x \leq d/2$ und $-3d/2 \leq y \leq 3d/2$ sowie $E_{\text{pot}} = \infty$ außerhalb dieser Bereiche. a) Bestimmen Sie die Energien der drei energetisch niedrigsten Zustände. Sind unter ihnen entartete Zustände? b) Ermitteln Sie die Quantenzahlen der zwei energetisch niedrigsten entarteten Zustände und berechnen Sie deren Energie.

33.13 ••• In dieser Aufgabe soll der Ausdruck für die Energie des Grundzustands des harmonischen Oszillators hergeleitet werden, und zwar mit der exakten Formulierung der Heisenberg'schen Unschärferelation: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. Darin sind Δx und Δp_x als die Standardabweichungen definiert:

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

und

$$(\Delta p_x)^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle.$$

Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Stellen Sie den klassischen Ausdruck für die Gesamtenergie in Abhängigkeit von der Position x und vom Impuls p_x auf. Verwenden Sie dabei die Beziehungen $E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$ und $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} p_x^2/m$.

2. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

und

$$(\Delta p_x)^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle = \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2.$$

Hinweis: Siehe Gleichungen 1.12a und 1.12b.

3. Zeigen Sie anhand der Symmetrie der Funktion der potentiellen Energie, dass $\langle x \rangle$ und $\langle p_x \rangle$ null sein müssen, sodass gilt: $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle$ und $(\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2 \rangle$.
4. Setzen Sie $\Delta p_x \Delta x = \hbar/2$ und eliminieren Sie damit $\langle p_x^2 \rangle$ aus dem Ausdruck

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{1}{2} p_x^2/m + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle p_x^2 \rangle / m + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle$$

für die mittlere Energie. Schreiben Sie für die mittlere Energie: $\langle E \rangle = \hbar^2/(8mZ) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 Z$, wobei $Z = \langle x^2 \rangle$ ist.

5. Setzen Sie $dE/dZ = 0$, um den Wert von Z zu ermitteln, für den E ein Minimum hat.
6. Zeigen Sie, dass die minimale mittlere Energie gegeben ist durch $\langle E \rangle_{\min} = +\frac{1}{2} \hbar \omega_0$.

33.14 ••• Ein Teilchen mit der Masse m , das sich nahe der Erdoberfläche bei $z = 0$ befindet, hat folgende potenzielle Energie:

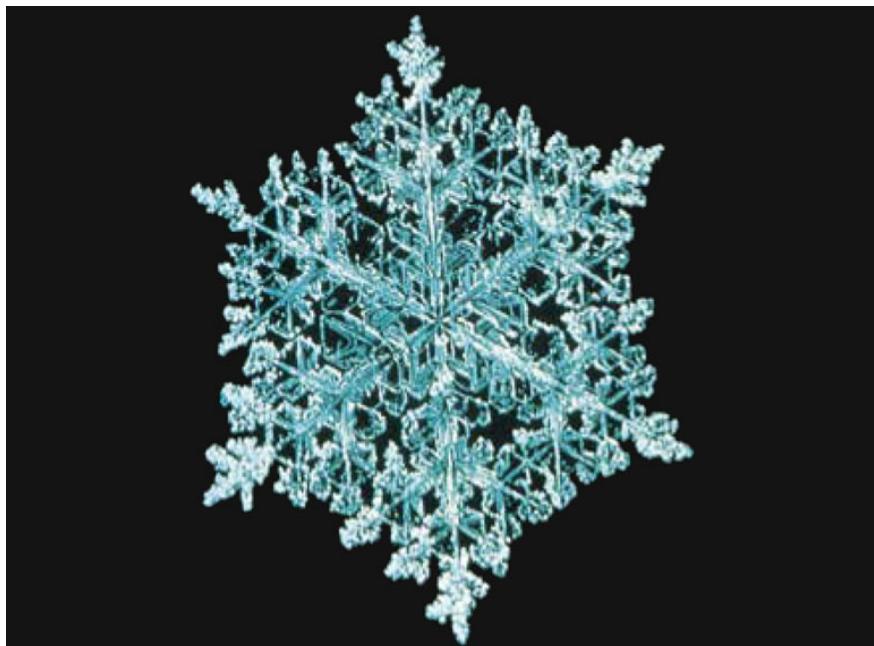
$$E_{\text{pot}} = mgz \quad \text{für } z > 0$$

$$E_{\text{pot}} = \infty \quad \text{für } z < 0.$$

Skizzieren Sie die Abhängigkeit der potenziellen Energie E_{pot} von der Höhe z und zeichnen Sie für irgendeinen positiven Wert der Gesamtenergie E das nach den klassischen Gesetzen erlaubte Gebiet ein. Skizzieren Sie auch die Abhängigkeit der klassischen kinetischen Energie von z . Die Schrödinger-Gleichung ist in diesem Fall schwierig zu lösen. Bewerten Sie ähnlich wie in Abschnitt 33.2 die Krümmung der Wellenfunktion, wie sie durch die Schrödinger-Gleichung gegeben ist. Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenfunktion für den Grundzustand und für die beiden ersten angeregten Zustände.

Atome und Moleküle

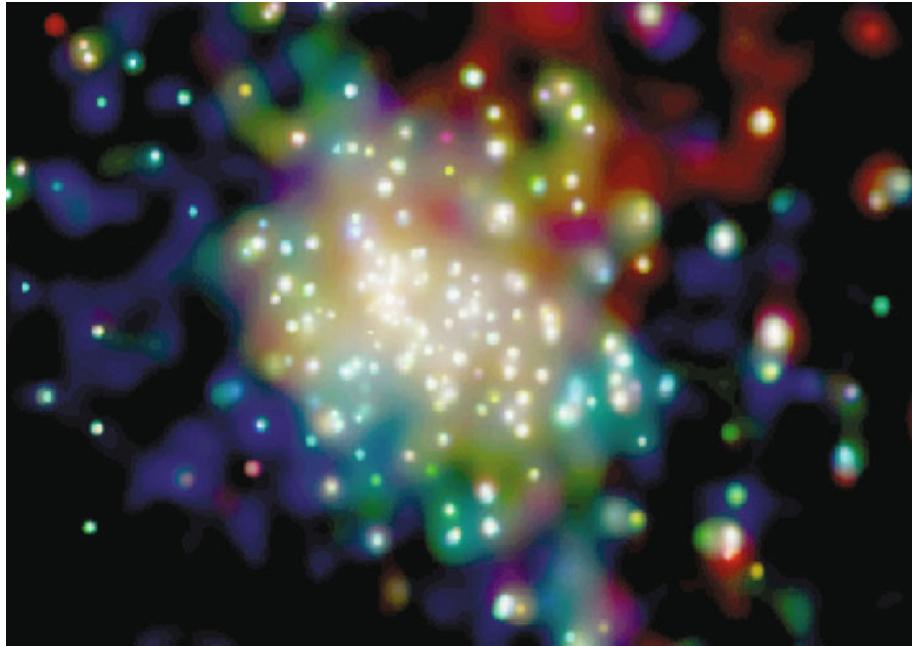
Teil IX



Atome und
Moleküle

34 Atome	1211
35 Moleküle	1251

1209



Der Sternhaufen RCW 38 ist mit 6000 Lichtjahren Entfernung von der Erde ein recht nahe Sternentstehungsgebiet. Diese Aufnahme zeigt einen rund fünf Lichtjahre großen Bereich mit Tausenden heißer, sehr junger Sterne, die vor weniger als einer Million Jahren gebildet wurden. Röntgenstrahlung aus den heißen äußeren Schichten von 190 dieser Sterne wurde vom Röntgenteleskop Chandra, das die Erde umkreist, aufgenommen. Die Quelle dieser Röntgenstrahlung ist noch nicht bekannt. Sie kann durch stark abgebremste Elektronen entstehen, aber auch durch Anregung von Elektronenübergängen in den Atomen – Prozesse, die man auf der Erde durch Beschuss einer Metallelektrode mit Elektronen erzeugt. Das Röntgenspektrum kann Aufschluss über das Material geben, aus dem die Elektrode – oder die Strahlungsquelle – besteht. (© NASA/CXC/CFA/S. Wolk u. a.)

34.1	Das Atom und die Atomspektren	1212
34.2	Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms	1213
34.3	Quantentheorie der Atome	1217
34.4	Quantentheorie des Wasserstoffatoms	1219
34.5	*Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur	1224
34.6	Das Periodensystem der Elemente	1226
34.7	Spektren im sichtbaren und im Röntgenbereich	1233
34.8	Laser	1237
	Zusammenfassung	1244
	Aufgaben	1247



Wie kann die Ordnungszahl eines chemischen Elements aus seinem Spektrum ermittelt werden? (Siehe Beispiel 34.8.)

Bisher wurden 118 chemische Elemente entdeckt, von denen 92 in der Natur vorkommen. Jedes Element ist dadurch charakterisiert, dass seine Atome Z Protonen und ebenso viele Elektronen sowie N Neutronen enthalten. Die Anzahl der Protonen nennt man *Ordnungszahl* oder auch *Kernladungszahl* Z . Die chemischen und physikalischen Eigenschaften eines Elements werden durch die Anzahl und die Anordnung der Elektronen bestimmt. Da Elektronen und Protonen gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen haben, sind die Atome elektrisch neutral. Atome, die eines oder mehrere Elektronen abgegeben oder aufgenommen haben, sind elektrisch geladen und werden *Ionen* genannt.

Wir beginnen unsere Betrachtung der Atome mit einem kurzen Überblick über Atomspektren und mit dem Bohr'schen Atommodell. Mit diesem halbklassischen Ansatz versuchte Niels Bohr im Jahre 1913 das vom Wasserstoffatom emittierte elektromagnetische Spektrum zu erklären. Obwohl sein vor der Quantenmechanik aufgestelltes Modell etliche Schwächen aufweist, erleichterte es die Deutung einiger atomarer Phänomene. Nach der Begründung des Bohr'schen Atommodells wenden wir die Methoden der Quantenmechanik an, um das Wasserstoffatom genauer zu beschreiben. Danach betrachten wir den Aufbau anderer Atome und das Periodensystem der Elemente. Schließlich untersuchen wir die Spektren der Atome und ihre Entstehungsmöglichkeiten sowie den Laser als ein konkretes Anwendungsbeispiel.

34.1 Das Atom und die Atomspektren

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts kannte man schon eine Fülle von Emissionsspektren von Gasen. Die Atome eines Gases emittieren Strahlung, wenn sie durch eine elektrische Entladung angeregt werden. Zerlegt man das von den Atomen eines bestimmten Elements ausgestrahlte Licht in einem Spektroskop mit kleiner Apertur, so erscheinen diskrete Linien mit unterschiedlichen Farben bzw. Wellenlängen. Die jeweiligen Linien und auch ihre Abstände sind charakteristisch für das jeweilige Element. Man betrieb großen Aufwand, um die Wellenlängen dieser Spektrallinien möglichst genau zu messen und um Regelmäßigkeiten in den Spektren herauszufinden. Abbildung 34.1 zeigt die Linienspektren von Wasserstoff und von Quecksilber.

Im Jahre 1885 erkannte der Schweizer Lehrer Johann Balmer, dass die Wellenlängen der Wasserstofflinien im sichtbaren Spektralbereich folgenden Zusammenhang aufweisen:

$$\lambda = (364,6 \text{ nm}) \cdot \frac{n_1^2}{n_1^2 - 4}, \quad n_1 = 3, 4, 5, \dots \quad (34.1)$$

Balmer vermutete, dass dieser Ausdruck ein Spezialfall eines allgemeineren Gesetzes ist, das auch auf die Spektren anderer

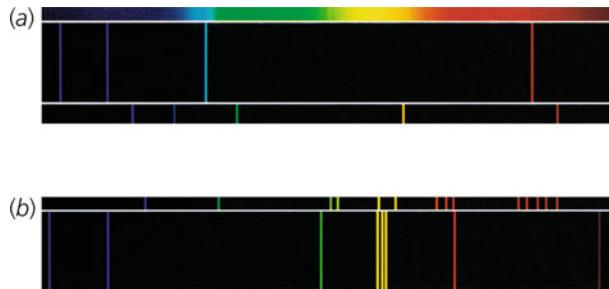


Abbildung 34.1 Zwei Linienspektren: a) des Wasserstoffs, b) des Quecksilbers. (a) und b) © Eastern Kodak and Wabash Instrument Corporation.)

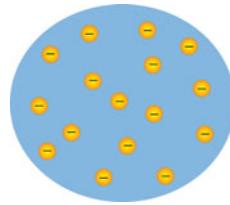


Abbildung 34.2 Joseph John Thomsons Plumpudding- oder Rosinenkuchen-Modell des Atoms: Die negativ geladenen Elektronen sind in einer Art Flüssigkeit oder Brei mit positiver Ladung eingebettet, ähnlich wie Rosinen im Kuchenteig. Für eine derartige Konfiguration kann man die Resonanzfrequenzen der Elektronenschwingungen berechnen. Gemäß den Gesetzen der klassischen Physik sollte ein solches Atom Licht mit der Schwingungsfrequenz der Elektronen emittieren. Thomson konnte jedoch keine Konfigurationen finden, bei denen die berechneten Frequenzen denen der gemessenen Spektrallinien entsprachen.

Elemente anwendbar sein sollte. Dieses Gesetz wurde von Johannes R. Rydberg und Walter Ritz formuliert. In der nach ihnen benannten **Rydberg-Ritz-Gleichung** ist die reziproke Wellenlänge gegeben durch

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (34.2)$$

Darin sind n_1 und n_2 ganze Zahlen, wobei $n_1 > n_2$ ist, und R ist die **Rydberg-Konstante**. Sie hat für sämtliche Spektralserien ein und desselben chemischen Elements denselben Wert. Von Element zu Element ändert sie sich nur geringfügig und in systematischer Weise. Für Wasserstoff hat R den Wert

$$R_H = 1,097\,776 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

RYDBERG-KONSTANTE DES WASSERSTOFFATOMS

Die Rydberg-Ritz-Gleichung ergibt die reziproken Wellenlängen für die Spektrallinien des Wasserstoffs sowie der Alkalimetalle wie Lithium und Natrium. Die Balmer-Serie des Wasserstoffs gemäß Gleichung 34.1 wird auch durch Gleichung 34.2 beschrieben, wobei $R = R_H$ und $n_2 = 2$ ist.

Im Lauf der Zeit wurden mehrere Atommodelle aufgestellt, die diesen Formeln für die Strahlungsspektren von Atomen entsprechen sollten. Eines der bekanntesten war das von Joseph John Thomson entwickelte Atommodell. Danach sollten die Elektronen in einer Art Flüssigkeit oder Brei eingebettet sein, die den größten Teil der Atommasse enthalten und außerdem eine so hohe positive Ladung aufweisen sollten, dass das Atom elektrisch neutral ist. Thomsons Modell, meist als *Plumpudding- oder Rosinenkuchen-Modell* bezeichnet, ist in Abbildung 34.2 gezeigt. Gemäß der klassischen Theorie des Elektromagnetismus muss eine Ladung, die mit der Frequenz ν schwingt, elektromagnetische Strahlung mit derselben Frequenz emittieren. Daher suchte Thomson nach Elektronenkonfigurationen, die stabil sind und Normalschwingungen haben, deren Frequenzen denen der beobachteten Spektrallinien entsprechen. Eine Schwierigkeit bei diesem und auch bei allen anderen damaligen Modellen bestand

34.2 Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms

darin, dass gemäß der klassischen Physik mit elektromagnetischen Wechselwirkungen allein kein stabiles Gleichgewicht zu erzielen ist. Thomson konnte daher kein Modell konzipieren, das die beobachteten Spektral frequenzen bei irgendeinem Atom erklären.

Das Thomson'sche Modell wurde durch eine Reihe von Experimenten widerlegt, die Hans Geiger und Ernest Marsden um das Jahr 1911 in der Arbeitsgruppe von Ernest Rutherford anstellten. Sie schossen Alphateilchen aus radioaktivem Radium auf eine Goldfolie. Die Alphateilchen wurden von den Goldatomen in der Folie gestreut. Rutherford zeigte, dass die hohe Anzahl der mit großen Winkeln gestreuten Alphateilchen nicht durch Atome hervorgerufen werden konnte, in denen die positive Ladung im gesamten Atom mit einem Durchmesser von rund 0,1 nm gleichmäßig verteilt ist. Vielmehr mussten die positive Ladung des Atoms und der größte Teil seiner Masse des Atoms in einem sehr kleinen Bereich konzentriert sein; diesen nannte man nun Atomkern. Sein Durchmesser beträgt einige Femtometer ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ nm}$).

34.2 Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms

Niels Bohr postulierte 1912 ein Modell, das die beobachteten Spektren erklären konnte. In seinem Modell des Wasserstoffatoms, das auch die Erkenntnisse von Max Planck, Albert Einstein und Ernest Rutherford einbezog, umrundet das Elektron den positiv geladenen Atomkern (wie ein Planet die Sonne) in einer kreisförmigen oder elliptischen Bahn, wobei für die Kräfte zwischen Kern und Elektron das Coulomb'sche Gesetz und die Gesetze der klassischen Mechanik gelten. Der Einfachheit halber wählte Bohr eine kreisförmige Umlaufbahn, wie in Abbildung 34.3 dargestellt.

Die Energie in einer kreisförmigen Umlaufbahn

Wir betrachten ein Elektron mit der Ladung $-e$, das auf einer Kreisbahn mit dem Radius r eine positive Ladung $+Ze$ umrundet. Der Kern kann der eines Wasserstoffatoms ($Z = 1$) oder eines einfach ionisierten Heliumatoms ($Z = 2$) sein. Die Gesamtenergie des Elektrons hängt mit dem Radius seiner Umlaufbahn zusammen. Im Abstand r von einer positiven Ladung $+Ze$ hat das Elektron mit der Ladung $-e$ die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze(-e)}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \quad (34.3)$$

Darin ist $4\pi\epsilon_0$ die Coulomb-Konstante. Die kinetische Energie E_{kin} des Elektrons beim jeweiligen Abstand ergibt sich aus dem zweiten Newton'schen Axiom $F = ma$. Dazu setzen wir die Coulomb'sche Anziehungskraft gleich der Zentripetalkraft, also

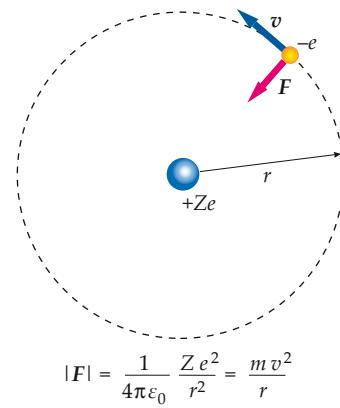


Abbildung 34.3 Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms. Ein Elektron mit der Ladung $-e$ bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um den Kern mit der Ladung $+e$. Die elektrische Anziehungs kraft $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2/r^2$ ist die Zentripetalkraft, die das Elektron in seiner Umlaufbahn hält.

gleich dem Produkt aus der Masse und der Zentripetalbeschleunigung:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = -m \frac{v^2}{r}. \quad (34.4a)$$

Multiplizieren beider Seiten mit $r/2$ ergibt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}.$$

Die kinetische Energie und die potenzielle Energie sind also umgekehrt proportional zum Bahnradius r . Beachten Sie, dass der Betrag der potenziellen Energie doppelt so groß ist wie der der kinetischen Energie:

$$E_{\text{pot}} = -2 E_{\text{kin}}. \quad (34.5)$$

Das gilt allgemein für Teilchen, die sich auf einer Kreisbahn unter dem Einfluss einer Kraft bewegen, die proportional zu $1/r^2$, also umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands r von dem Punkt ist, den sie umrunden. (Das gilt ebenso für Umlaufbahnen in einem Gravitationsfeld.) Die Gesamtenergie ist die Summe aus kinetischer Energie und potenzieller Energie:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

oder

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \quad (34.6)$$

ENERGIE AUF EINER KREISFÖRMIGEN UMLAUFBAHN BEI EINER ELEKTOSTATISCHEM $1/r^2$ -KRAFT

Zwar liegt mechanische Stabilität vor, weil die Coulomb'sche Anziehungskraft die Zentripetalkraft liefert, die das Elektron

in der Umlaufbahn hält. Aber gemäß der klassischen Elektrodynamik wäre ein solches Atom elektrisch instabil, denn das Elektron erfährt auf der Kreisbahn eine ständige Beschleunigung und müsste daher elektromagnetische Strahlung emittieren, deren Frequenz der seiner Rotationsbewegung entspricht. Nach den klassischen Gesetzen müsste das Atom daher augenblicklich kollabieren, wobei das Elektron auf einer Spiralbahn in den Kern stürzte, während es seine Energie abstrahlte.

Die Bohr'schen Postulate

Bohr umging die Schwierigkeit, dass das Atom kollabieren müsste, indem er *postulierte*, dass nur bestimmte Umlaufbahnen erlaubt sind und dass das Atom mit einem den Kern umrundenden Elektron nicht strahlt. Er nahm die Umlaufbahnen also als stationäre Zustände an, in denen das Elektron beim Umlauf nicht strahlen kann. Nach Bohrs Annahme sollte Strahlung nur dann emittiert oder absorbiert werden, wenn das Elektron von einer erlaubten Umlaufbahn (einem stationären Zustand) in eine andere Umlaufbahn (einen anderen stationären Zustand) übergeht.

Das Elektron im Wasserstoffatom kann sich strahlungslos nur auf bestimmten, kreisförmigen Umlaufbahnen (bzw. in stationären Zuständen) bewegen.

ERSTES BOHR'SCHES POSTULAT: STRAHLUNGSLOSE UMLAUFBAHNEN

Das zweite Bohr'sche Postulat verknüpft die Frequenz der Spektralstrahlung mit den Energien der beteiligten stationären Zustände. Ist E_A die Anfangs- und E_E die Endenergie des Atoms, dann ist die Frequenz der bei einem Übergang emittierten Strahlung gegeben durch

$$\nu = \frac{E_A - E_E}{h}. \quad (34.7)$$

ZWEITES BOHR'SCHES POSTULAT: PHOTONENFREQUENZ UND ENERGIEERHALTUNG

Darin ist h das Planck'sche Wirkungsquantum. Dieses Postulat entspricht der Annahme, dass bei der Emission eines Photons der Energie $h\nu$ die Gesamtenergie erhalten bleibt. Kombinieren der Gleichungen 34.6 und 34.7 ergibt die Strahlungsfrequenz

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{h} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (34.8)$$

Hierin sind r_1 und r_2 die Radien der Umlaufbahnen vor bzw. nach dem Übergang.

Damit die hiermit berechneten Frequenzen dieselben wie in der Rydberg-Ritz-Gleichung $\nu = c/\lambda = cR(1/n_2^2 - 1/n_1^2)$ sind, müssen die Radien der stabilen Umlaufbahnen offensichtlich proportional zu den Quadraten ganzer Zahlen sein. Bohr suchte nun nach einer Quantenbedingung für die Radien der stabilen

Umlaufbahnen, die diesem Sachverhalt entsprechen. Er postulierte, dass der Betrag des Drehimpulses des Elektrons in einer stabilen Umlaufbahn gleich einem ganzzahligen Vielfachen von \hbar ist. Der Drehimpuls eines Teilchens in einer kreisförmigen Umlaufbahn ist mvr . Daher folgt aus diesem Postulat:

$$mv_n r_n = \frac{n\hbar}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34.9)$$

DRITTES BOHR'SCHES POSTULAT: QUANTISIERTER DREHIMPULS

Hierin ist

$$\hbar = h/(2\pi) = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6,582 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}.$$

Diese Gleichung verknüpft die Geschwindigkeit v_n des Elektrons mit dem Radius r_n seiner Umlaufbahn, in der der Drehimpulsbetrag gleich $n\hbar$ ist. In Gleichung 34.4a hatten wir die Coulomb'sche Anziehungskraft und die Kraft gemäß dem zweiten Newton'schen Axiom gleichgesetzt:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n}.$$

Das lässt sich umformen zu

$$v_n^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{mr_n}. \quad (34.10)$$

Wir können r_n bestimmen, indem wir aus den Gleichungen 34.9 und 34.10 die Geschwindigkeit v_n eliminieren. Dazu lösen wir zunächst Gleichung 34.9 nach v_n auf und quadrieren:

$$v_n^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r_n^2}.$$

Gleichsetzen dieses Ausdrucks für v_n^2 mit dem von Gleichung 34.10 liefert

$$n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r_n^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{mr_n}.$$

Auflösen dieser Gleichung nach r_n ergibt

$$r_n = n^2 (4\pi\varepsilon_0) \frac{\hbar^2}{mZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z}. \quad (34.11)$$

RADIEN DER BOHR'SCHEN ELEKTRONENBAHNEN

Darin ist a_0 der sogenannte **erste Bohr'sche Radius**. Gemäß dem Bohr'schen Atommodell ist dies im Wasserstoffatom der Radius für $n = 1$:

$$a_0 = (4\pi\varepsilon_0) \frac{\hbar^2}{m e^2} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0.0529 \text{ nm}. \quad (34.12)$$

ERSTER BOHR'SCHER RADIUS

Wir können den Ausdruck für r_n gemäß Gleichung 34.11 für die jeweilige Zahl n in Gleichung 34.8 einsetzen. Dann ergibt sich für die Frequenz der Strahlung

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z e^2}{h} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\ &= Z^2 \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{m e^4}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \end{aligned} \quad (34.13)$$

Vergleichen wir das nun für $Z = 1$ mit der empirischen Rydberg-Ritz-Formel (Gleichung 34.2). Mit der Beziehung $v = c/\lambda$ erhalten wir dabei für die Rydberg-Konstante

$$R = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{m e^4}{4\pi c \hbar^3} = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 c \hbar^3}. \quad (34.14)$$

Bohr verwendete zur Berechnung der Rydberg-Konstante R die im Jahre 1913 noch recht ungenauen Werte von m , e , c , ε_0 und \hbar . Sein Ergebnis stimmte aber innerhalb der Fehlergrenzen mit dem spektroskopisch ermittelten Wert überein. In Beispiel 34.1 wird die Quantisierung des Drehimpulses mit der Bedingung für stehende Wellen in Beziehung gesetzt.

Beispiel 34.1: Bedingung für stehende Wellen und die Quantisierung des Drehimpulses

Für Wellen, die sich auf einem Kreis fortbewegen, besagt die Bedingung für stehende Wellen, dass eine ganze Anzahl von Wellenlängen gleich dem Kreisumfang sein muss. Also muss gelten: $n \lambda_n = 2\pi r_n$, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Zeigen Sie, dass diese Bedingung bei Elektronenwellen der Quantisierung des Drehimpulses entspricht.

Problembeschreibung: Wellenlänge und Impuls hängen über die De-Broglie-Beziehung (Gleichung 32.13) miteinander zusammen: $p = h/\lambda$. Weiterhin liefert die Bedingung für stehende Wellen ($n \lambda_n = 2\pi r_n$) den Zusammenhang mit dem Radius.

Lösung: 1. Stellen Sie die Bedingung für stehende Wellen auf:

$$n \lambda_n = 2\pi r_n$$

2. Verknüpfen Sie mithilfe der De-Broglie-Beziehung (Gleichung 32.13) den Impuls p mit der Wellenlänge λ_n :

$$p = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{n h}{2\pi r_n} = n \frac{\hbar}{r_n}$$

34.2 Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms

3. Lösen Sie nach $p r_n$ auf. Der Drehimpuls eines Elektrons in einer Kreisbahn ist $m v r_n = p r_n$, wobei $p = m v$ ist:

$$p r_n = \boxed{m v r_n = n \hbar}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Schritt 3 entspricht der laut Aufgabenstellung zu beweisenden Aussage. ■

Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms

Die gesamte mechanische Energie des Elektrons im Wasserstoffatom hängt gemäß Gleichung 34.6 vom Radius seiner kreisförmigen Umlaufbahn ab. Wenn wir darin die durch Gleichung 34.11 gegebenen quantisierten Werte von r_n einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{n^2 a_0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{m Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2} \end{aligned}$$

oder

$$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}. \quad (34.15)$$

ENERGIENIVEAUS DES WASSERSTOFFATOMS

Darin ist

$$E_0 = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{m e^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a_0} = 13,6 \text{ eV}. \quad (34.16)$$

Die Energien E_n , die $Z = 1$ entsprechen, sind gemäß Gleichung 34.15 die quantisierten erlaubten Energien des Wasserstoffatoms.

Übergänge zwischen diesen erlaubten Energieniveaus sind mit der Emission oder der Absorption eines Photons verknüpft, dessen Frequenz durch $v = |E_A - E_E|/h$ gegeben ist; entsprechend ist seine Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c}{v} = \frac{hc}{|E_A - E_E|}. \quad (34.17)$$

Wie schon in Kapitel 32 gezeigt, ist es zweckmäßig, den Wert von hc in Elektronenvolt-Nanometer anzugeben:

$$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}. \quad (34.18)$$

Da die Energien quantisiert sind, können die Frequenzen und die Wellenlängen der Strahlung, die das Wasserstoffatom emittieren oder absorbieren kann, nur bestimmte Werte haben. Dies

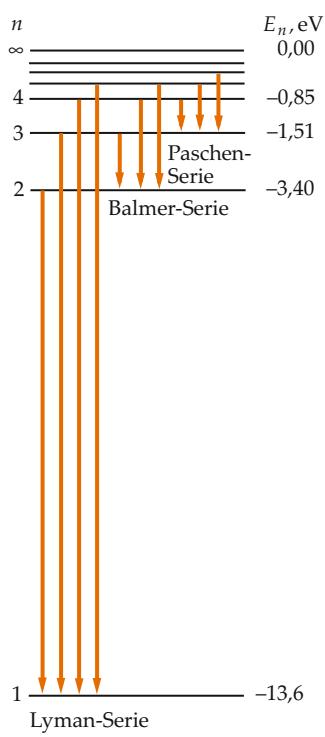


Abbildung 34.4 Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms. Die senkrechten Pfeile deuten einige Übergänge der Lyman-, der Balmer- und der Paschen-Serie an. Die Energien der Niveaus gehorchen Gleichung 34.15.

entspricht der Tatsache, dass keine kontinuierlichen Spektren, sondern Linienspektren beobachtet werden.

! Die Größe λ in Gleichung 34.17 ist nicht die Wellenlänge des Elektrons, sondern die des absorbierten oder emittierten Photons.

Abbildung 34.4 zeigt die Energieniveaus des Wasserstoffatoms. Ein solches Diagramm wird auch *Termeschema* genannt. Die Energie des Wasserstoffatoms im Grundzustand ist $E_1 = -13,6 \text{ eV}$. Für $n \rightarrow \infty$ geht die Energie gegen null. Wird ein Elektron aus dem Atom entfernt, dann spricht man von *Ionisierung*, und die dazu aufzubringende Energie heißt **Ionisierungsenergie**. Vom Grundzustand aus gerechnet, hat das Wasserstoffatom eine Ionisierungsenergie von $13,6 \text{ eV}$. Dies ist sozusagen die *Bindungsenergie* des Elektrons im Wasserstoffatom. In Abbildung 34.4 sind einige Übergänge eingezeichnet, die jeweils von einem Zustand mit höherer Energie in einen mit geringerer Energie führen. Als Bohr sein Modell des Wasserstoffatoms publizierte, waren zwei Spektralserien bekannt: die Balmer-Serie, die Übergängen von $n_1 = 3, 4, 5, \dots$ zu $n_2 = 2$ entspricht, und die Paschen-Serie (benannt nach Friedrich Paschen), die Übergängen von $n_1 = 4, 5, 6, \dots$ zu $n_2 = 3$ entspricht. Im Jahre 1916 fand Theodore Lyman die Lyman-Serie, die $n_2 = 1$ entspricht, und in den Jahren 1922 bzw. 1924 fan-

den Frederick Brackett und August Hermann Pfund die nach ihnen benannten Serien, für die $n_2 = 4$ bzw. $n_2 = 5$ ist. Nur die Linien der Balmer-Serie liegen im sichtbaren Teil des Spektrums. In Beispiel 34.2 wird die Wellenlänge einer Linie in der Lyman-Serie berechnet.

Beispiel 34.2: Die größte Wellenlänge in der Lyman-Serie

Berechnen Sie a) die Energie und b) die Wellenlänge eines Photons der Linie mit der größten Wellenlänge in der Lyman-Serie.

Problembeschreibung: Der Abbildung 34.4 ist zu entnehmen, dass die Übergänge der Lyman-Serie bei der Energie des Grundzustands enden; also ist $n_2 = 1$ und $E_E = E_1 = -13,6 \text{ eV}$. Da λ umgekehrt proportional zur Energie ist, entspricht der Übergang mit der größten Wellenlänge λ dem mit der geringsten Energiedifferenz. Dieser Übergang führt, wie der Abbildung zu entnehmen ist, demnach vom ersten angeregten Zustand $n_1 = 2$ zum Grundzustand $n_2 = 1$.

Lösung: 1. Die Energie eines emittierten Photons ist gleich der Differenz der Energien von Anfangs- und Endzustand des Atoms:

$$\begin{aligned} E_{\text{Photon}} &= \Delta E_{\text{Atom}} = E_A - E_E \\ &= E_2 - E_1 = \frac{-13,6 \text{ eV}}{2^2} - \frac{-13,6 \text{ eV}}{1^2} \\ &= -3,4 \text{ eV} + 13,6 \text{ eV} = 10,2 \text{ eV} \end{aligned}$$

2. Die Wellenlänge des Photons ist:

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10,2 \text{ eV}} = \boxed{122 \text{ nm}}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis $10,2 \text{ eV}$ von Schritt 1 ist erwartungsgemäß (vgl. Abbildung 34.4) kleiner als $13,6 \text{ eV}$, die Bindungsenergie des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms.

Weitergedacht: Die errechnete Wellenlänge liegt außerhalb des sichtbaren Lichtspektrums, nämlich im ultravioletten Bereich. Da alle anderen Linien in der Lyman-Serie noch größere Energien bzw. noch kleinere Wellenlängen haben, liegt die Lyman-Serie vollständig im Ultravioletten.

Übung 34.1: Berechnen Sie die kleinste Wellenlänge für eine Linie der Lyman-Serie. ◀ ■

Trotz seiner spektakulären Erfolge hatte das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms viele Schwächen, auch prinzipielle. So begründete es weder die Existenz stationärer Zustände noch

die Quantisierung des Drehimpulses, sondern brachte lediglich die spektroskopisch beobachteten Übergänge mit diesen Annahmen in Übereinstimmung. Außerdem blieben Versuche weitgehend erfolglos, das Modell auf komplexere Atome anzuwenden. Die Anwendung der Quantenmechanik beseitigte diese Schwierigkeiten. Die stationären Zustände des Bohr'schen Modells entsprechen darin den Lösungen der Schrödinger-Gleichung für stehende Wellen, analog zu den Elektronenwellen im Kasten, die wir in Kapitel 33 kennengelernten. Die Energiequantisierung ist eine direkte Konsequenz der Lösungen der Schrödinger-Gleichung für stehende Wellen. Beim Wasserstoffatom stimmen diese quantisierten Energien mit denen nach dem Bohr'schen Modell sowie mit den experimentell ermittelten Energien überein. Die Quantisierung des Drehimpulses, die im Bohr'schen Modell noch postuliert werden musste, ergibt sich bei der quantentheoretischen Behandlung zwangsläufig.

34.3 Quantentheorie der Atome

Die Schrödinger-Gleichung in Polarkoordinaten

In der Quantenmechanik wird ein Elektron in einem Atom durch seine Wellenfunktion ψ beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in irgendeinem Volumenelement dV des Raums anzutreffen, ist das Produkt aus dem Betragsquadrat $|\psi|^2$ der Wellenfunktion des Elektrons und dem Volumenelement dV . Die Randbedingungen für die Wellenfunktion führen zur Quantisierung der Wellenlängen und der Frequenzen und damit auch der Elektronenenergie.

Wir betrachten ein einzelnes Elektron der Masse m , das sich in drei Dimensionen in einem Bereich bewegt, in dem es die potenzielle Energie E_{pot} hat. Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für ein solches Teilchen ist durch Gleichung 33.26 gegeben:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_{\text{pot}}(x, y, z) \psi = E \psi. \quad (34.19)$$

Bei einem einzelnen isolierten Atom hängt die potenzielle Energie E_{pot} nur vom radialen Abstand $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ des Elektrons von der Mitte des Atomkerns ab. Bei der weiteren Berechnung verwendet man am besten die Polarkoordinaten r , θ und ϕ . Sie hängen mit den kartesischen Koordinaten x , y und z folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (34.20)$$

Diese Beziehungen sind in Abbildung 34.5 dargestellt. Die Umrechnung der in Gleichung 34.19 eingeklammerten Summe in Polarkoordinaten ist nicht schwierig, aber aufwendig; sie soll daher hier nicht vorgeführt werden, ist jedoch Gegenstand der Aufgabe 34.14. Wir wollen an dieser Stelle qualitativ einige

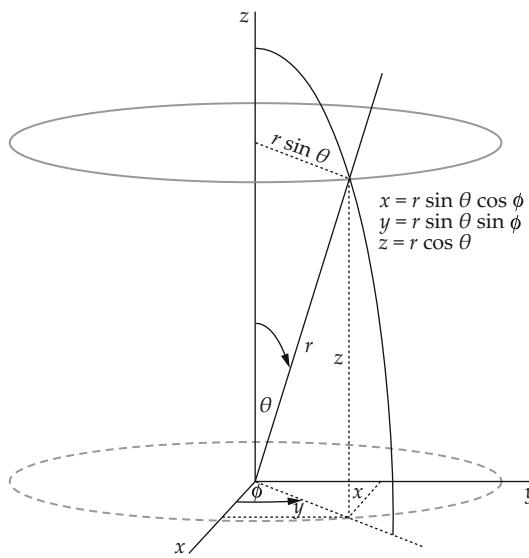


Abbildung 34.5 Der Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten.

interessante Merkmale der Wellenfunktionen besprechen, die Gleichung 34.19 erfüllen.

Nach der Transformation in Polarkoordinaten besteht der erste Schritt beim Lösen einer partiellen Differentialgleichung wie Gleichung 34.19 in der Trennung der Variablen. Dazu ist die Wellenfunktion $\psi(r, \theta, \phi)$ als Produkt von Funktionen auszudrücken, die jeweils nur von einer der drei Polarkoordinaten abhängen:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) f(\theta) g(\phi). \quad (34.21)$$

Darin ist R nur von der radialen Koordinate r abhängig, f nur von der Polarkoordinate θ und g nur von der Azimutkoordinate ϕ . Wenn diese Form von $\psi(r, \theta, \phi)$ in die Schrödinger-Gleichung eingesetzt wird, kann diese partielle Differentialgleichung in drei gewöhnliche Differentialgleichungen umgeformt werden: in eine für $R(r)$, eine für $f(\theta)$ und eine für $g(\phi)$. Die potenzielle Energie $E_{\text{pot}}(r)$ tritt dann nur in der Gleichung für $R(r)$ auf, der sogenannten **Radialgleichung**. Da die potenzielle Energie $E_{\text{pot}}(r)$ nur von der Koordinate r abhängt, hat sie keinen Einfluss auf die Lösungen der Gleichungen für $f(\theta)$ und für $g(\phi)$; d.h., sie wirkt sich nicht auf die Winkelabhängigkeit der Wellenfunktion $\psi(r, \theta, \phi)$ aus. Dieser Lösungsansatz ist immer dann anwendbar, wenn die potenzielle Energie nur von r abhängt.

Quantenzahlen in Polarkoordinaten

Bei drei Raumdimensionen führt die Forderung, dass die Wellenfunktion stetig und normierbar sein muss, zu drei Quantenzahlen, die mit je einer Raumdimension verknüpft sind. Verwendet man Polarkoordinaten, dann wird die mit r assoziierte

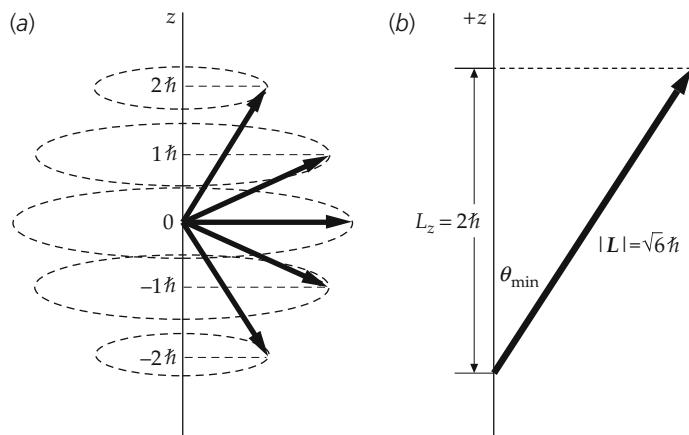


Abbildung 34.6 a) Vektordiagramm mit den möglichen Werten der z -Komponente des Drehimpulsvektors L für den Fall $\ell = 2$. Der Betrag des Drehimpulses ist dabei $L = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)} = \hbar \sqrt{2(2+1)} = \hbar \sqrt{6}$. b) Die z -Komponente des Drehimpulsvektors in positiver z -Richtung für den Fall $\ell = 2$ und $m_\ell = 2$. Der Betrag dieser Komponente ist $L_z = 2\hbar$.

Quantenzahl mit n bezeichnet, die mit ℓ assoziierte Quantenzahl mit ℓ und die mit ϕ assoziierte Quantenzahl mit m_ℓ . (Der Einfachheit halber wird m_ℓ zuweilen als m geschrieben, wenn keine Verwechslung mit anderen Größen möglich ist.) Die Quantenzahlen n_1 , n_2 und n_3 , die wir in Kapitel 33 für die Wellenfunktionen eines Teilchens im dreidimensionalen Kasten mit den kartesischen Koordinaten x , y und z berechnet haben, sind voneinander unabhängig. Dagegen hängen die mit Wellenfunktionen in Polarkoordinaten assoziierten Quantenzahlen voneinander ab. Die möglichen Werte dieser Quantenzahlen sind:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots, \\ \ell &= 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, \\ m_\ell &= -\ell, (-\ell+1), \dots, 0, \dots, (\ell-1), \ell. \end{aligned} \quad (34.22)$$

QUANTENZAHLEN IN POLARKOORDINATEN

Das bedeutet: n ist eine positive ganze Zahl, ℓ ist eine ganze Zahl zwischen 0 und $n-1$, und m_ℓ (ebenfalls ganzzahlig) kann $2\ell+1$ mögliche Werte haben, nämlich von $-\ell$ bis $+\ell$.

Die Zahl n heißt **Hauptquantenzahl**. Sie hängt mit dem Radialanteil der Wellenfunktion zusammen und daher mit der Wahrscheinlichkeit, das Elektron in verschiedenen Abständen vom Kern anzutreffen. Die Quantenzahlen ℓ und m_ℓ hängen mit dem Drehimpuls bzw. mit der Winkelabhängigkeit der Wellenfunktion des Elektrons zusammen. Die Quantenzahl ℓ nennt man **Drehimpulsquantenzahl** oder (etwas genauer) **Bahndrehimpulsquantenzahl**. Der Betrag L des Bahndrehimpulses L hängt folgendermaßen von ℓ ab:

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar. \quad (34.23)$$

Die Quantenzahl m_ℓ wird als **magnetische Quantenzahl** bezeichnet. Sie gibt die Komponente des Drehimpulses entlang einer bestimmten Richtung im Raum an. In einem isolierten

Atom sind sämtliche Raumrichtungen gleichwertig, aber durch Anlegen eines Magnetfelds kann *eine* Richtung ausgewählt, sozusagen bevorzugt werden. Im Allgemeinen wählt man hierfür die $+z$ -Richtung. Dann ist die z -Komponente des Drehimpulses des Elektrons gegeben durch

$$L_z = m_\ell \hbar. \quad (34.24)$$

Diese Quantenbedingung ergibt sich aus der Randbedingung für die Azimutkoordinate ϕ . Danach muss die Wahrscheinlichkeit, das Elektron bei irgendeinem Winkel ϕ_1 zu finden, ebenso groß sein wie die Wahrscheinlichkeit, es beim Winkel $\phi_2 = \phi_1 + 2\pi$ anzutreffen; denn dies sind die gleichen Punkte im Raum.

Wenn wir den Drehimpuls des Elektrons in Vielfachen von \hbar angeben, dann sehen wir zweierlei: Erstens ist sein Betrag quantisiert und kann dabei nur die Werte $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ annehmen; zweitens kann seine Komponente in einer bestimmten Richtung nur $2\ell+1$ verschiedene Werte haben, die von $-\ell$ bis $+\ell$ reichen. Abbildung 34.6 zeigt ein Vektordiagramm, das für $\ell = 2$ die möglichen Orientierungen des Drehimpulsvektors L zeigt. Beachten Sie, dass nur bestimmte Werte von θ erlaubt sind; die Raumrichtungen des Bahndrehimpulses sind also quantisiert. In Beispiel 34.3 wird θ für $\ell = 2$ berechnet.

Beispiel 34.3: Die Richtungen des Drehimpulses des Elektrons

Nehmen Sie an, der Drehimpuls des Elektrons im Wasserstoffatom ist durch die Quantenzahl $\ell = 2$ charakterisiert. Welche Werte kann L_z dabei haben, und wie groß ist der minimale Winkel zwischen L und der positiven z -Achse?

Problembeschreibung: Die möglichen Orientierungen von L relativ zur positiven z -Achse gehen aus Abbil-

dung 34.6 hervor. Die $+z$ -Richtung ist diejenige des nahe beim Atom angelegten Magnetfelds.

Lösung: 1. Geben Sie die möglichen Werte von L_z an:

$$L_z = m_\ell \hbar, \quad \text{mit } m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2$$

2. Drücken Sie den Winkel θ zwischen L und der $+z$ -Richtung in Abhängigkeit von L und L_z aus:

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m_\ell \hbar}{\sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

3. Der kleinste Winkel tritt bei $\ell = 2$ und $m_\ell = 2$ auf:

$$\cos \theta_{\min} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot (2+1)}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0,816$$

$$\theta_{\min} = 35,3^\circ$$

Plausibilitätsprüfung: Der kleinste Winkel in Abbildung 34.6b liegt offenbar zwischen 30° und 40° . Daher ist das Ergebnis von Schritt 3 plausibel.

Weitergedacht: Es fällt auf, dass der Drehimpulsvektor nicht in z -Richtung liegen kann.

Übung 34.2: In einem Atom, das einem Magnetfeld ausgesetzt ist, lässt sich der Drehimpuls eines Elektrons durch die Quantenzahl $\ell = 4$ charakterisieren. Welche Werte kann m_ℓ annehmen? ▶

34.4 Quantentheorie des Wasserstoffatoms

Wir können das einfachste Atom – das Wasserstoffatom – als stationären Kern auffassen, der aus einem Proton besteht und von einem einzelnen beweglichen Teilchen, einem Elektron, umrundet wird. Dieses hat den Impuls p und die kinetische Energie $p^2/(2m)$. Seine potenzielle Energie $E_{\text{pot}}(r)$ röhrt von der elektrostatischen Anziehung zwischen dem Elektron und dem Proton her und ist wie in Gleichung 34.3 gegeben durch

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \quad (34.25)$$

(Hier berücksichtigen wir schon den Faktor Z , der der Kernladungszahl entspricht. Zwar beträgt er beim Wasserstoff eins, aber diese Gleichung erlaubt es uns später, die Ergebnisse auf andere Ein-Elektronen-Atome, sogenannte *wasserstoffähnliche Atome*, anzuwenden. Ein Beispiel dafür ist das einfach ionisierte Heliumatom mit $Z = 2$.) Für die Abstandsabhängigkeit der

34.4 Quantentheorie des Wasserstoffatoms

potenziellen Energie gemäß Gleichung 34.25 ist die Schrödinger-Gleichung exakt zu lösen. Im Zustand mit der geringsten Energie, also im Grundzustand, ist die Hauptquantenzahl $n = 1$; außerdem ist hierbei $\ell = 0$ und $m_\ell = 0$.

Energieniveaus

Die erlaubten Energien des Wasserstoffatoms und der ihm ähnlichen Ein-Elektronen-Atome gehen aus der Lösung der Schrödinger-Gleichung hervor und sind gegeben durch

$$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34.26)$$

ENERGIELEVEL WASSERSTOFFÄHNLICHER ATOME

Darin ist

$$E_0 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV}. \quad (34.27)$$

Die Energien gemäß Gleichung 34.26 entsprechen denen im Bohr'schen Atommodell. Beachten Sie, dass die Energiewerte E_n negativ sind; das bedeutet, das Elektron ist an den Kern gebunden, und man spricht daher von *gebundenen Zuständen*. Außerdem hängen die Energien hier nur von der Hauptquantenzahl n ab, nicht aber von der Drehimpulsquantenzahl ℓ . Dies gilt, wenn die Kraft umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat r^2 und die potenzielle Energie umgekehrt proportional zum Abstand r ist (siehe Gleichung 34.25). Bei Atomen mit mehreren Elektronen führt die Wechselwirkung der Elektronen dazu, dass die Energie von ℓ abhängt. Je niedriger der Wert von ℓ ist, desto geringer ist die Energie solcher Atome. Solange es keine bevorzugte Raumrichtung gibt, hängt die Energie eines Atoms nicht von der magnetischen Quantenzahl m_ℓ ab; diese gibt die z -Komponente des Drehimpulses an. Die Energie hängt jedoch von m_ℓ ab, wenn das Atom einem äußeren Magnetfeld ausgesetzt ist.

In Abbildung 34.7 sind die Energieniveaus des Wasserstoffatoms dargestellt. Diese Darstellung nennt man auch **Termenschema** oder **Grotian-Diagramm**. In diesem Fall ähnelt es dem in Abbildung 34.4, abgesehen davon, dass die Zustände mit gleichem Wert von n , jedoch unterschiedlichen Werten von ℓ , separat dargestellt sind. Diese Zustände werden auch Terme genannt, und es wird folgende **Termsymbolik** verwendet: An den Wert von n wird ein Buchstabe angefügt, und zwar s für $\ell = 0$, p für $\ell = 1$, d für $\ell = 2$ und f für $\ell = 3$. Diese Buchstaben röhren von den englischen Bezeichnungen verschiedener Spektrallinien her: s für *sharp*, p für *principal*, d für *diffuse* und f für *fundamental*. Für $\ell > 3$ werden die im Alphabet folgenden Buchstaben verwendet: g für $\ell = 4$ usw. Ein Kleinbuchstabe, s, p, d, f, ..., gibt hierbei den Bahndrehimpuls eines einzelnen Elektrons an, ein Großbuchstabe, S, P, D, F, ..., dagegen den Bahndrehimpuls des gesamten Mehr-Elektronen-Atoms. Bei einem Ein-Elektronen-Atom wie dem Wasserstoffatom spielt die Groß- oder Kleinschreibung daher keine Rolle, und meist werden (wie hier) die Kleinbuchstaben verwendet.

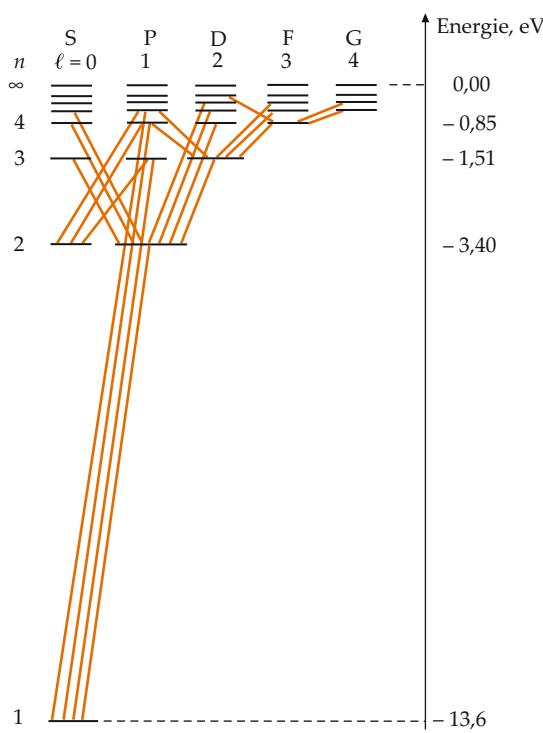


Abbildung 34.7 Das Termschema oder Grotian-Diagramm des Wasserstoffatoms. Schräge Linien entsprechen Übergängen, die bei Emission oder Absorption von Strahlung auftreten können, wobei die Auswahlregel $\Delta\ell = \pm 1$ gilt. Zustände mit gleichem n , aber unterschiedlichem ℓ , haben die gleiche Energie $-E_0/n^2$, wobei im Bohr'schen Atommodell, $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ ist.

Wenn ein Elektron im Atom von einem erlaubten Energiezustand in einen anderen übergeht, wird elektromagnetische Strahlung in Form eines Photons emittiert oder absorbiert. Solche Übergänge führen zu Spektrallinien, die für das betreffende Atom charakteristisch sind. Dabei gehorchen die Übergänge den folgenden **Auswahlregeln**:

$$\begin{aligned}\Delta m_\ell &= -1, 0, +1, \\ \Delta\ell &= -1, +1.\end{aligned}\quad (34.28)$$

Diese Auswahlregeln beruhen darauf, dass der Bahndrehimpuls beim Übergang erhalten bleibt. Auch das Photon weist einen Eigendrehimpuls auf, der dabei zu berücksichtigen ist. Seine Projektion auf eine beliebig vorgegebene Achse beträgt $\pm 1 \hbar$. Die Wellenlänge des Lichts, das von einem Wasserstoffatom (oder einem anderen Atom) emittiert werden kann, hängt mit den Energieniveaus folgendermaßen zusammen:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_A - E_E. \quad (34.29)$$

Darin sind E_A und E_E die Energien des Anfangs- bzw. des Endzustands.

Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsdichten

Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung in Polarkoordinaten werden durch die Quantenzahlen n , ℓ und m_ℓ charakterisiert, und man notiert sie als ψ_{n,ℓ,m_ℓ} . Die Hauptquantenzahl n kann einen der Werte $1, 2, 3, \dots$ haben. Für jeden Wert von n gibt es n mögliche Werte von ℓ (nämlich $\ell = 0, 1, \dots, n-1$), und für jeden Wert von ℓ gibt es $2\ell + 1$ mögliche Werte von m_ℓ (nämlich $-\ell, (-\ell + 1), (-\ell + 2), \dots, +\ell$). Beim Wasserstoffatom hängt die Energie nur von n ab, wobei es allgemein mehrere unterschiedliche Wellenfunktionen gibt, die der gleichen Energie entsprechen (außer beim niedrigsten Energieniveau, für das $n = 1$ ist, sodass ℓ und m_ℓ beide gleich null sein müssen). Diese Energieniveaus sind also entartet (siehe Abschnitt 33.5). Diese Entartung röhrt von der $1/r$ -Abhängigkeit der potentiellen Energie her, aber auch von der Tatsache, dass es bei Abwesenheit äußerer elektrischer oder magnetischer Felder keine bevorzugte Raumrichtung gibt. (Die Entartung ist aufgehoben, wenn sich Spin, relativistische Effekte, Kernspin oder quantenelektrodynamische Effekte auswirken.)

Der Grundzustand

Im Zustand des Wasserstoffatoms mit der niedrigsten Energie, also im Grundzustand, ist die Hauptquantenzahl $n = 1$, und es ist $\ell = 0$ sowie $m_\ell = 0$. Die Energie beträgt $-13,6 \text{ eV}$, und der Bahndrehimpuls ist null. (Im Bohr'schen Atommodell ist der Bahndrehimpuls im Grundzustand gleich \hbar , während er in der quantenmechanischen Beschreibung gleich null ist.) Die Wellenfunktion für den Grundzustand ist

$$\psi_{1,0,0} = C_{1,0,0} e^{-Zr/a_0}. \quad (34.30)$$

Darin ist

$$a_0 = (4\pi\epsilon_0)^{-1/2} \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,0529 \text{ nm}$$

der erste Bohr'sche Radius, und $C_{1,0,0}$ ist eine Konstante, die durch die Normierung bestimmt wird. In drei Dimensionen lautet die Normierungsbedingung

$$\int |\psi|^2 dV = 1.$$

Die Integration muss über den gesamten Raum erfolgen, und das Volumenelement dV ist – wie aus Abbildung 34.8 hervorgeht – in Polarkoordinaten gegeben durch

$$dV = (r \sin \theta \, d\phi) (r \, d\theta) \, dr = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr.$$

Wir integrieren über den gesamten Raum, indem wir über ϕ von $\phi = 0$ bis $\phi = 2\pi$ integrieren, außerdem über θ von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$ und über r von $r = 0$ bis $r = \infty$. Die Normierungsbe-

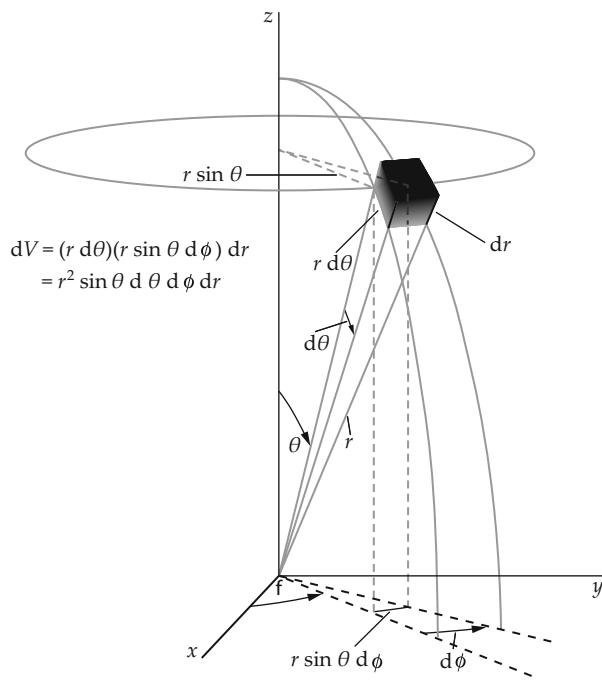


Abbildung 34.8 Das Volumenelement dV in Polarkoordinaten.

dingung lautet dann

$$\begin{aligned} \int |\psi|^2 \, dV &= \int_0^\infty \left[\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} |\psi|^2 r^2 \sin \theta \, d\phi \right) d\theta \right] dr \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} C_{1,0,0}^2 e^{-2Zr/a_0} r^2 \sin \theta \, d\phi \right) d\theta \right] dr \\ &= 1. \end{aligned}$$

Da $\psi_{1,0,0}$ weder von θ noch von ϕ abhängt, kann das Dreifachintegral in das Produkt dreier Integrale zerlegt werden. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \int |\psi|^2 \, dV &= \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^\infty C_{1,0,0}^2 e^{-2Zr/a_0} r^2 \, dr \right) \\ &= 4\pi C_{1,0,0}^2 \left(\int_0^\infty r^2 e^{-2Zr/a_0} \, dr \right) = 1. \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral ist von der Form $\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx$, wo bei n eine positive ganze Zahl und $a > 0$ ist. Durch sukzessive

partielle Integration ergibt sich

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

(Dieses Integral kann auch in Integraltabellen nachgeschlagen werden.) Damit folgt

$$\int_0^\infty r^2 e^{-2Zr/a_0} \, dr = \frac{a_0^3}{4Z^3}$$

und daraus

$$4\pi C_{1,0,0}^2 \left(\frac{a_0^3}{4Z^3} \right) = 1$$

sowie

$$C_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2}. \quad (34.31)$$

Damit lautet die normierte Wellenfunktion des Grundzustands

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}. \quad (34.32)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Volumenelement dV zu finden, ist gegeben durch $|\psi|^2 dV$. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$ ist in Abbildung 34.9 dargestellt. Beachten Sie, dass sie kugelsymmetrisch ist. Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeitsdichte hängt nur von r ab, nicht aber von θ oder ϕ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist am Ursprung maximal.

Wir interessieren uns meist nicht für die Wahrscheinlichkeitsdichte, sondern für die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Abstand r vom Kern anzutreffen, also zwischen r und $r + dr$. Diese Wahrscheinlichkeit $P(r) dr$ ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$ und dem Volumen der Kugelschale mit der Dicke dr ; dieses Volumen ist $dV = 4\pi r^2 dr$. Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Bereich zwischen r und $r + dr$ zu finden, ist daher $P(r) dr = |\psi|^2 4\pi r^2 dr$. Somit ist die **radiale Wahrscheinlichkeitsdichte**

$$P(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2. \quad (34.33)$$

RADIALE WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE

Beim Wasserstoffatom im Grundzustand ist die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben durch

$$\begin{aligned} P(r) &= 4\pi r^2 |\psi|^2 = 4\pi C_{1,0,0}^2 r^2 e^{-2Zr/a_0} \\ &= 4 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3 r^2 e^{-2Zr/a_0}. \end{aligned} \quad (34.34)$$

Abbildung 34.10 zeigt die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r)$ des Elektrons im Wasserstoffatom in Abhängigkeit von r .

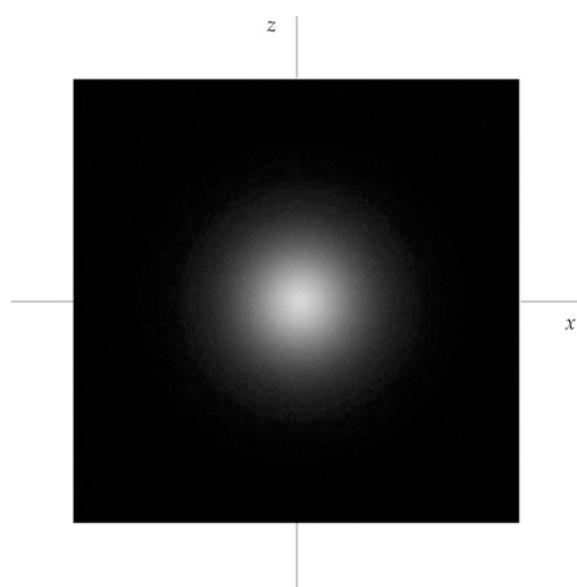


Abbildung 34.9 Computergrafik der radialen Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$ für den Grundzustand des Wasserstoffatoms. Die Größe $-e|\psi|^2$ kann als Elektronenladungsdichte im Atom aufgefasst werden. Sie ist kugelsymmetrisch, wobei sie am Ursprung am höchsten ist und mit r exponentiell abnimmt.

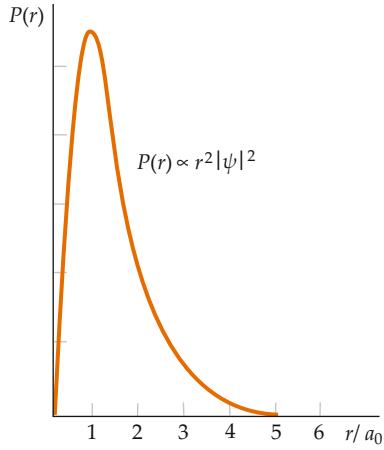


Abbildung 34.10 Für den Grundzustand des Wasserstoffatoms ist hier die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r)$ aufgetragen, und zwar in Abhängigkeit vom Radius in Vielfachen von a_0 . Die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r)$ ist proportional zu $r^2 |\psi|^2$. Das Maximum von $P(r)$ liegt beim wahrscheinlichsten Abstand, der hier $r = a_0$ ist.

Sie hat ein Maximum beim Radius $r = a_0/Z$, der für $Z = 1$ dem ersten Bohr'schen Radius entspricht. Beim Bohr'schen Atommodell befindet sich das Elektron auf einer wohldefinierten Umlaufbahn bei $r = a_0$. Im Gegensatz dazu ergibt sich hier, dass das Elektron praktisch in jedem Abstand vom Kern angetroffen werden kann. Beispiel 34.4 illustriert dies bei zwei verschiedenen Radien jeweils für ein kleines Radiusintervall.

Aber für $Z = 1$ ist der wahrscheinlichste Abstand a_0 , und die Chance ist klein, das Elektron bei deutlich anderen Radien zu finden. Oft ist es nützlich, sich das Elektron in einem Atom als Ladungswolke mit der Ladungsdichte $\varrho = -e|\psi|^2$ vorzustellen, aber man darf nie vergessen, dass das Elektron mit Materie stets als einzelne Ladung wechselwirkt.

Beispiel 34.4: Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einer dünnen Kugelschale anzutreffen

Betrachten Sie den Grundzustand des Wasserstoffatoms. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einer dünnen Kugelschale mit dem inneren Radius r und dem äußeren Radius $r + \Delta r$ anzutreffen, wobei $\Delta r = 0,06 a_0$ ist. Führen Sie die Berechnung aus für: a) $r = a_0$ und b) $r = 2 a_0$.

Problembeschreibung: Da das Intervall Δr gegenüber r sehr klein ist, kann die Änderung der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r)$ innerhalb der Kugelschale mit der Dicke Δr vernachlässigt werden. Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in dieser dünnen Kugelschale anzutreffen, ist daher gegeben durch $P(r) \Delta r$.

Lösung: 1. Verwenden Sie Gleichung 34.34 und setzen Sie dabei $Z = 1$ und $r = a_0$:

$$P(r) \cdot \Delta r = \left[4 \left(\frac{1}{a_0} \right)^3 (a_0)^2 e^{-2a_0/a_0} \right] \Delta r$$

$$\begin{aligned} P(a_0) \cdot (0,06 a_0) &= \left[4 \left(\frac{1}{a_0} \right)^3 a_0^2 e^{-2} \right] \cdot (0,06 a_0) \\ &= \boxed{0,0325} \end{aligned}$$

2. Wiederholen Sie die Berechnung für $r = 2 a_0$:

$$\begin{aligned} P(2a_0) \cdot (0,06 a_0) &= \left[4 \left(\frac{1}{a_0} \right)^3 4 a_0^2 e^{-4} \right] \cdot (0,06 a_0) \\ &= \boxed{0,0176} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in der $0,06 a_0$ dicken Kugelschale bei $r = a_0$ anzutreffen, liegt bei nur gut 3 %. Beim doppelten Radius $r = 2 a_0$ ist sie nur halb so groß.

Weitergedacht: Das Volumen der Kugelschale ist beim größeren Radius $2 a_0$ nahezu 4-mal so groß wie beim kleineren Radius a_0 . Trotzdem ist hier, doppelt so weit vom Atomkern entfernt, die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons fast um die Hälfte geringer. ■

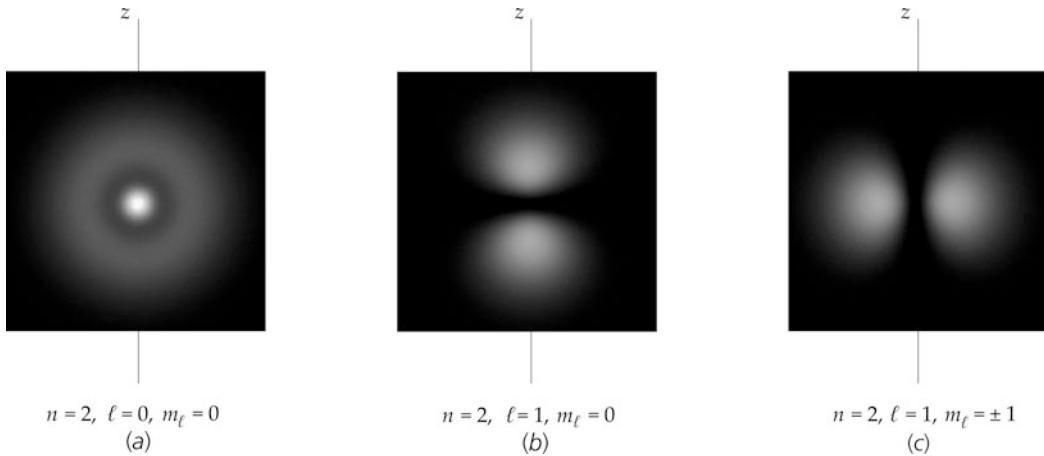


Abbildung 34.11 Computergrafiken der radialen Wahrscheinlichkeitsdichten $|\psi|^2$ für die Zustände mit $n = 2$ des Elektrons im Wasserstoffatom. Alle drei Abbildungen sind aus einer Drehung um die z -Achse hervorgegangen. a) Für $\ell = 0$ ist $|\psi|^2$ kugelsymmetrisch. b) Für $\ell = 1$ und $m_\ell = 0$ ist $|\psi|^2$ proportional zu $\cos^2 \theta$. c) Für $\ell = 1$ und $m_\ell = +1$ oder $m_\ell = -1$ ist $|\psi|^2$ proportional zu $\sin^2 \theta$.

Der erste angeregte Zustand

Im ersten angeregten Zustand des Wasserstoffatoms ist $n = 2$, und ℓ kann entweder gleich 0 oder gleich 1 sein. Für $\ell = 0$ und $m_\ell = 0$ liegt wiederum eine kugelsymmetrische Wellenfunktion vor, die gegeben ist durch

$$\psi_{2,0,0} = C_{2,0,0} \left(2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-Zr/(2a_0)}. \quad (34.35)$$

Für $\ell = 1$ kann m_ℓ die Werte $+1, 0$ oder -1 annehmen. Die entsprechenden Wellenfunktionen sind

$$\psi_{2,1,0} = C_{2,1,0} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/(2a_0)} \cos \theta, \quad (34.36)$$

$$\psi_{2,1,\pm 1} = C_{2,1,\pm 1} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/(2a_0)} \sin \theta e^{\pm i\phi}. \quad (34.37)$$

Darin sind $C_{2,0,0}$, $C_{2,1,0}$ und $C_{2,1,\pm 1}$ Normierungskonstanten.

Die Wahrscheinlichkeitsdichten sind gegeben durch

$$\psi_{2,0,0}^2 = C_{2,0,0}^2 \left(2 - \frac{Zr}{a_0} \right)^2 e^{-Zr/a_0}, \quad (34.38)$$

$$\psi_{2,1,0}^2 = C_{2,1,0}^2 \left(\frac{Zr}{a_0} \right)^2 e^{-Zr/a_0} \cos^2 \theta, \quad (34.39)$$

$$|\psi_{2,1,\pm 1}|^2 = C_{2,1,\pm 1}^2 \left(\frac{Zr}{a_0} \right)^2 e^{-Zr/a_0} \sin^2 \theta. \quad (34.40)$$

Die Wellenfunktionen und die Wahrscheinlichkeitsdichten sind für $\ell \neq 0$ nicht kugelsymmetrisch, sondern hängen vom Winkel θ ab. Jedoch hängen die Wahrscheinlichkeitsdichten nicht von ϕ ab. In Abbildung 34.11 sind die Wahrscheinlichkeitsdichten $|\psi|^2$ für $n = 2$ dargestellt, und zwar für die dabei möglichen Werte von ℓ und von m_ℓ . Es sind deutlich die entscheidenden

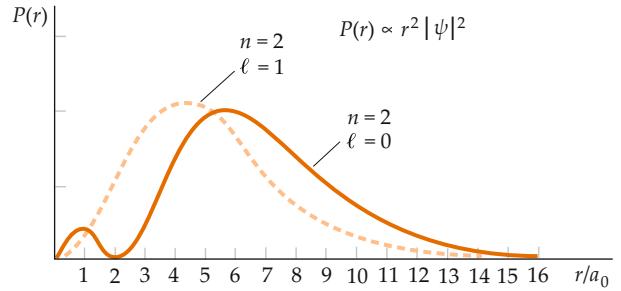


Abbildung 34.12 Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r)$ des Elektrons im Wasserstoffatom in den Zuständen mit $n = 2$ in Abhängigkeit von r/a_0 . Für $\ell = 1$ ist $P(r)$ beim Bohr'schen Wert $r_2 = 2^2 a_0$ maximal. Für $\ell = 0$ liegt das Maximum etwas weiter außen, und es tritt ein wesentlich niedrigeres Maximum näher beim Ursprung auf.

Merkmale zu erkennen: Die Ladungsverteilung der „Elektronenwolke“ ist nur bei $\ell = 0$ kugelsymmetrisch. Bei $\ell \neq 0$ hängt die Winkelverteilung der Ladungsdichte nur von ℓ und m_ℓ ab, nicht aber vom Radialanteil der Wellenfunktion. Diese winkel-abhängigen Ladungsverteilungen der **Valenzelektronen** (d.h. der äußeren Elektronen von Mehr-Elektronen-Atomen) sind entscheidend für die Struktur der Moleküle; darauf kommen wir im nächsten Kapitel zu sprechen.

In Abbildung 34.12 ist die Wahrscheinlichkeit dargestellt, das Elektron im Abstand r vom Kern zu finden, und zwar für $n = 2$ und die dabei möglichen beiden Werte von ℓ . Es ist zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von ℓ abhängt.

Der wahrscheinlichste Abstand zwischen Elektron und Kern ergab sich für $n = 1$ zu a_0 ; dies ist der erste Bohr'sche Radius. Für $n = 2$ und $\ell = 1$ liegt er bei $4a_0$, dem zweiten Bohr'schen Radius, was auch Gleichung 34.11 entspricht. Für $n = 3$ (und $\ell = 2$) ist der wahrscheinlichste Abstand zwischen Elektron

und Kern $9a_0$, also gleich dem dritten Bohr'schen Radius. (Die Übereinstimmung mit dem Bohr'schen Atommodell ist beim Maximalwert von ℓ , also bei $\ell = n - 1$, am besten.)

34.5 *Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur

Das von der Bahnbewegung herrührende magnetische Moment eines Elektrons im Atom kann halbklassisch hergeleitet werden, obwohl es eigentlich quantenmechanischen Ursprungs ist (siehe Abschnitt 24.5.) Wir betrachten ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q , das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, und zwar auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Der Bahndrehimpuls ist $L = mv r$, und sein magnetisches Moment ist gleich dem Produkt aus der Stromstärke und der Kreisfläche: $\mu = IA = I\pi r^2$. Mit der Zeitspanne t_U für einen Umlauf der Ladung ist die Stromstärke (die Ladung, die einen bestimmten Punkt pro Zeiteinheit passiert) gleich q/t_U . Die Periodendauer t_U ist gleich dem Quotienten aus dem Bahnumfang $2\pi r$ und der Geschwindigkeit v . Daher ergibt sich für die Stromstärke: $I = q/t_U = qv/(2\pi r)$. Damit erhalten wir für das magnetische Moment:

$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr = \frac{q}{2m} L.$$

Darin haben wir vr durch L/m ersetzt. Bei positiver Ladung q haben Bahndrehimpuls und magnetisches Moment dieselbe Richtung. Wir können daher schreiben:

$$\mu = \frac{q}{2m} L. \quad (34.41)$$

Dies ist die allgemeine klassische Beziehung zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls. Sie gilt ebenso in der Quantentheorie für den Bahndrehimpuls, nicht aber für den Spindrehimpuls des Elektrons. Für den Elektronenspin ist das magnetische Moment zweimal so groß, wie es sich aus Gleichung 34.41 ergibt. Der zusätzliche Faktor 2 röhrt von quantentheoretischen Gegebenheiten her, die in der klassischen Mechanik keine Entsprechung haben. (Dieser Sachverhalt und das Phänomen des Elektronenspins selbst wurden 1927 von Paul Dirac vorhergesagt. Er kombinierte Gesetzmäßigkeiten der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik in einer relativistischen Wellengleichung, die man heute Dirac'sche Gleichung nennt. Genaue Messungen ergaben, dass das von seinem Spin herrührende magnetische Moment des Elektrons nicht 2-mal, sondern 2,00232-mal so groß ist, wie nach Gleichung 34.41 zu erwarten ist. Die Tatsache, dass das innere magnetische Moment des Elektrons etwa zweimal so groß ist wie erwartet, macht deutlich, dass man sich den Spin nicht einfach wie die Eigenrotation eines Balls vorstellen darf.)

Das Quantum des Drehimpulses ist \hbar . Daher können wir das magnetische Moment in Abhängigkeit von L/\hbar folgendermaßen ausdrücken:

$$\mu = \frac{q\hbar}{2m} L.$$

Beim Elektron ist $m = m_e$ und $q = -e$. Somit ist sein von der Bahnbewegung herrührendes magnetisches Moment

$$\mu_\ell = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{L}{\hbar} = -\mu_{\text{Bohr}} \frac{L}{\hbar}.$$

Darin ist $\mu_{\text{Bohr}} = e\hbar/(2m_e) = 5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1}$. Diese Quanteneinheit des magnetischen Moments wird *Bohr'sches Magneton* genannt. Das von seinem Spindrehimpuls S herrührende magnetische Moment eines Elektrons ist

$$\mu_S = -2 \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{S}{\hbar} = -2\mu_{\text{Bohr}} \frac{S}{\hbar}.$$

Ein Elektron in einem Atom hat sowohl einen Bahndrehimpuls (charakterisiert durch die Quantenzahl ℓ) als auch einen Spindrehimpuls (charakterisiert durch die Quantenzahl s). Entsprechungen in klassischen Systemen mit zwei Arten von Drehimpulsen sind beispielsweise die Erde, die während der Umrundung der Sonne um ihre Achse rotiert, und ein präzidernder Kreisel mit einem Drehimpuls der Präzession zusätzlich zum Drehimpuls der Eigenrotation. Der gesamte Drehimpulsvektor J ist die Summe aus Bahndrehimpulsvektor L und Spindrehimpulsvektor S :

$$J = L + S. \quad (34.42)$$

In der klassischen Physik ist J eine wichtige Größe. Die zeitliche Änderung des gesamten Drehimpulses entspricht dem auf ein System einwirkenden resultierenden Drehmoment. Wirken ausschließlich zentrale Kräfte, dann bleibt der gesamte Drehimpuls erhalten. Bei einem klassischen System unterliegt die Richtung des Gesamtdrehimpulsvektors J keinerlei Beschränkungen, und die Gesamtdrehimpuls-Komponente für die jeweils betrachtete Richtung kann beliebige Werte zwischen $J_{\max} = L + S$ und $J_{\min} = |L - S|$ annehmen. Dagegen sind in der Quantenmechanik die Richtungen von L und auch von S beschränkt, und L und S sind quantisiert. Außerdem sind – wie bei L und bei S – die Richtungen des gesamten Drehimpulses J beschränkt, und J ist quantisiert.

Bei einem Elektron mit einem Bahndrehimpuls, der durch die Quantenzahl ℓ bestimmt ist, und mit dem Spin $s = \frac{1}{2}$ ist der gesamte Drehimpuls $J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$. Dabei gilt für die Quantenzahl j :

$$j = +\frac{1}{2} \quad \text{für } \ell = 0$$

und

$$j = \ell + \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad j = \ell - \frac{1}{2} \quad \text{für } \ell > 0. \quad (34.43)$$

Die Vektor- oder Zeigerdiagramme in Abbildung 34.13 illustrieren die beiden möglichen Kombinationen $j = \frac{3}{2}$ und $j = \frac{1}{2}$ für den Fall $\ell = 1$. Die Längen der Vektoren sind proportional zu $\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$ bzw. $\sqrt{s(s+1)}\hbar$ bzw. $\sqrt{j(j+1)}\hbar$. Der Spindrehimpuls und der Bahndrehimpuls sind *parallel* bei $j = \ell + s$ und *antiparallel* bei $j = \ell - s$.

Atomzustände mit gleichen Werten von n und ℓ , jedoch verschiedenen j -Werten, haben geringfügig unterschiedliche Energien; dies röhrt von der Wechselwirkung zwischen dem Spin

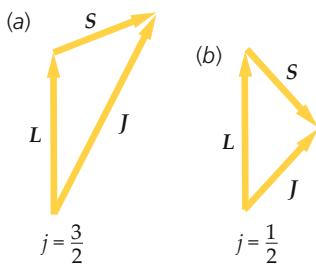


Abbildung 34.13 Vektordiagramme zur Addition von Bahndrehimpuls und Spindrehimpuls für $\ell = 1$ und $s = \frac{1}{2}$. Die Quantenzahl j für den gesamten Drehimpuls J kann zwei Werte haben: $j = \ell + s = \frac{3}{2}$ oder $j = \ell - s = \frac{1}{2}$.

des Elektrons und seiner Bahnbewegung her. Dieser Effekt heißt **Spin-Bahn-Kopplung**. Die durch sie hervorgerufene Aufspaltung der Spektrallinien nennt man **Feinstrukturaufspaltung**.

Für die Bezeichnung $n\ell$ des Grundzustands des Wasserstoffatoms kann man auch $1s_{1/2}$ schreiben. Dabei steht die Ziffer 1 für $n = 1$, der Buchstabe s für $\ell = 0$ und der Bruch $1/2$ für $j = \frac{1}{2}$. Die Zustände mit $n = 2$ können entweder $\ell = 0$ oder $\ell = 1$ haben, wobei in den Zuständen mit $\ell = 1$ entweder $j = \frac{3}{2}$ oder $j = \frac{1}{2}$ ist. Diese Zustände werden also als $2s_{1/2}$, $2p_{3/2}$ bzw. $2p_{1/2}$ bezeichnet. Wegen der Spin-Bahn-Kopplung weisen die Zustände $2p_{3/2}$ und $2p_{1/2}$ etwas unterschiedliche Energien auf; das führt zur Feinstrukturaufspaltung der Übergänge $2p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ und $2p_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}$.

Wir können die Spin-Bahn-Kopplung qualitativ an einem einfachen Bohr'schen Modell wie in Abbildung 34.14 erklären. Hier bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn um ein als ruhend angenommenes Proton. In Abbildung 34.14a ist der Bahndrehimpuls L aufwärts gerichtet. Vom Elektron aus gesehen, also in einem Bezugssystem, in dem das Elektron momentan ruht (Abbildung 34.14b), bewegt sich das Proton rechtwinklig zur Verbindungslinie zwischen Proton und Elektron. Das sich bewegende Proton erzeugt also am Ort des Elektrons ein Magnetfeld B . Dieses ist aufwärts gerichtet, parallel zu L . Die Energie des Elektrons hängt von seinem Spin ab, weil mit diesem ein magnetisches Moment μ_s verknüpft ist. Die Energie ist am geringsten, wenn μ_s parallel zu B ist, und sie ist am höchsten, wenn diese beiden Vektoren antiparallel ausgerichtet sind. Gemäß Gleichung 23.16 gilt dann für die potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = -\mu_s \cdot B = -\mu_{s_z} B \approx -\mu_{\text{Bohr}} B. \quad (34.44)$$

Hierbei ist bereits ein Faktor 2 berücksichtigt, der sich aus der Übertragung der Energie des Dipols auf das Bezugssystem des Protons ergibt. Der Vektor μ_s ist dem Spin entgegen gerichtet, weil das Elektron negativ geladen ist. Daher ist die Energie am niedrigsten, wenn der Spin S antiparallel zu B und somit auch zu L ist. Im Wasserstoffatom ist deswegen die Energie des Zustands $2p_{1/2}$, bei dem L und S antiparallel sind (Abbildung 34.15), etwas niedriger als die des Zustands $2p_{3/2}$, in dem L und S parallel sind. In Beispiel 34.5 wird aus dieser Ener-

34.5 *Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur

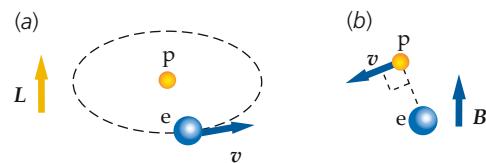


Abbildung 34.14 Die Spin-Bahn-Kopplung, hier am Bohr'schen Atommodell gezeigt. Ein Elektron umkreist mit der Geschwindigkeit v ein Proton, wobei sein Bahndrehimpuls L ist. a) Der Bahndrehimpuls L ist aufwärts gerichtet. b) Vom Elektron aus gesehen erzeugt die Bewegung des Protons das Magnetfeld B , das ebenfalls aufwärts gerichtet ist. Wenn der Elektronenspin S parallel zu L ausgerichtet ist, verläuft sein magnetisches Moment μ_s antiparallel zu L und zu B . In diesem Fall ist die Energie der Spin-Bahn-Kopplung am größten.

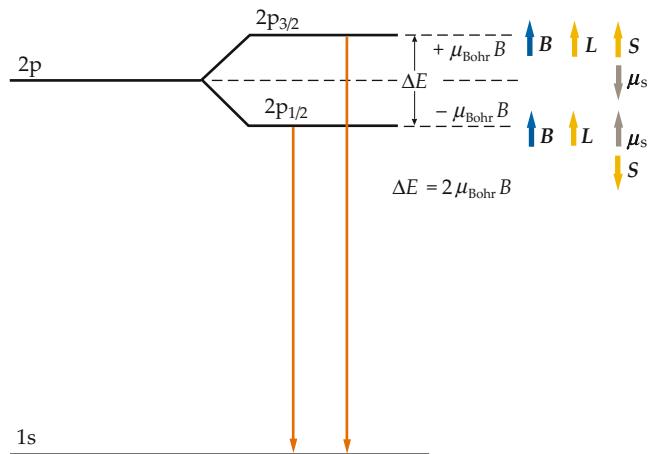


Abbildung 34.15 Das Energieniveaudiagramm des Wasserstoffatoms ohne und mit Feinstrukturaufspaltung. Die links dargestellten Energieniveaus sind die ohne Berücksichtigung des Magnetfelds durch die Bahnbewegung. Rechts ist gezeigt, wie sich das Magnetfeld auswirkt. Aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung spaltet das Magnetfeld das $2p$ -Niveau in zwei Energieniveaus auf, wobei das Niveau mit $j = \frac{3}{2}$ eine etwas höhere Energie hat als das Niveau mit $j = \frac{1}{2}$. Die vom Übergang $2p \rightarrow 1s$ herrührende Spektrallinie wird dadurch in zwei Linien mit geringfügig unterschiedlichen Wellenlängen aufgespalten.

giedifferenz das Magnetfeld berechnet, dem das $2p$ -Elektron im Wasserstoffatom ausgesetzt ist.

Beispiel 34.5: Bestimmung von B aus der Feinstrukturaufspaltung

Durch die Feinstrukturaufspaltung unterscheiden sich die Energien der Niveaus $2p_{3/2}$ und $2p_{1/2}$ im Wasserstoffatom um $4,5 \cdot 10^{-5}$ eV. Wenn auf ein $2p$ -Elektron ein inneres Magnetfeld mit dem Betrag B wirkt, dann beträgt die Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Kopplung großenteilsmäßig $\Delta E = 2 \mu_{\text{Bohr}} B$, wobei μ_{Bohr} das Bohr'sche Magneton ist. Schätzen Sie das Magnetfeld ab, dem das $2p$ -Elektron im Wasserstoffatom ausgesetzt ist.

Problembeschreibung: Es ist die Beziehung $\Delta E = 2 \mu_{\text{Bohr}} B$ zu verwenden, wobei die gegebene Energiedifferenz und der bekannte Wert von μ_{Bohr} einzusetzen sind.

Lösung: 1. Drücken Sie die durch die Spin-Bahn-Kopplung hervorgerufene Energiedifferenz in Abhängigkeit vom magnetischen Moment aus:

$$\Delta E = 2 \mu_{\text{Bohr}} B$$

mit

$$\Delta E = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

2. Lösen Sie nach dem Magnetfeld B auf:

$$B = \frac{\Delta E}{2 \mu_{\text{Bohr}}} = \frac{4,5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}}{2 \cdot (5,79 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{T}^{-1})} = 0,389 \text{ T}$$

Die Hauptquantenzahl n wird gewöhnlich durch einen Großbuchstaben repräsentiert, der die betreffende **Elektronenschale** angibt: $n = 1$ entspricht der K-Schale, $n = 2$ der L-Schale usw. (Diese Bezeichnungen finden sich gewöhnlich auch bei den Röntgenlinien, wobei der Buchstabe die weiter innen gelegene Schale angibt, die das Elektron beim jeweiligen Übergang erreicht.)

Frage 34.1

In der folgenden Tabelle sind Kandidaten für die Quantenzahlen eines Elektrons in einem Atom aufgeführt. Welche dieser Kombinationen kommen in der Natur nicht vor?

	n	ℓ	m_ℓ	m_s
a)	2	2	-1	$+\frac{1}{2}$
b)	3	2	-1	$+\frac{1}{2}$
c)	2	-1	-1	$-\frac{1}{2}$
d)	3	0	1	$+\frac{1}{2}$
e)	3	1	1	$+\frac{1}{2}$

34.6 Das Periodensystem der Elemente

Für Atome mit mehr als einem Elektron kann die Schrödinger-Gleichung nicht exakt gelöst werden. Aber mit leistungsfähigen Näherungsverfahren kann man die Energieniveaus und die Wellenfunktionen der Elektronen recht genau bestimmen. In einer ersten Näherung nimmt man dabei an, dass die Z Elektronen im betreffenden Atom nicht miteinander wechselwirken. Dann kann die Schrödinger-Gleichung gelöst werden, und mit den resultierenden Wellenfunktionen berechnet man die Wechselwirkung der Elektronen, um die Wellenfunktionen entsprechend zu modifizieren. Da der Spin eines Elektrons bezüglich einer Achse zwei mögliche Komponenten haben kann, liegt eine weitere Quantenzahl m_s vor, die einen der Werte $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ haben kann. Der Zustand jedes Elektrons wird somit durch die vier Quantenzahlen n , ℓ , m_ℓ und m_s gekennzeichnet. Der jeweilige Zustand wird als *stationärer Zustand* bezeichnet. Die Energie des Elektrons wird vor allem durch die Hauptquantenzahl n (die mit dem Radialanteil der Wellenfunktion zusammenhängt) und die Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ bestimmt. Allgemein gilt: Je niedriger n ist, desto geringer ist die Energie, und bei gegebenem n ist die Energie umso geringer, je niedriger ℓ ist. Die Abhängigkeit der Energie von ℓ röhrt von der Wechselwirkung der Elektronen im Atom her. Das Wasserstoffatom enthält nur ein Elektron, sodass die Energie nicht von ℓ abhängt. Die Angabe der Quantenzahlen n , ℓ , m_ℓ und m_s für jedes Elektron in einem Atom nennt man auch dessen **Elektronenkonfiguration**. Normalerweise schreibt man für ℓ den schon erwähnten Kleinbuchstaben s, p, d oder f, und zwar nach folgendem Schema:

Bezeichnung	s	p	d	f	g	h
Wert von ℓ	0	1	2	3	4	5

Die Elektronenkonfigurationen der Atome unterliegen dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip; nach diesem können sich zwei Elektronen in einem Atom niemals gleichzeitig im gleichen Quantenzustand befinden. Das bedeutet, zwei Elektronen können nicht denselben Satz der vier Quantenzahlen n , ℓ , m_ℓ und m_s haben. Wir können den Aufbau des Periodensystems der Elemente erklären, wenn wir das Pauli'sche Ausschließungsprinzip und die weiter oben erläuterten Beschränkungen für die Quantenzahlen berücksichtigen: n ist eine positive ganze Zahl, ℓ ist eine positive ganze Zahl, die von 0 bis $n - 1$ variiert, m_ℓ kann $2\ell + 1$ Werte annehmen, nämlich in ganzzahligen Schritten von $-\ell$ bis $+\ell$ variieren, und m_s kann entweder $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ sein.

Das Atom des leichtesten Elements (Wasserstoff) mit nur einem Elektron haben wir schon besprochen. Im Grundzustand (mit der niedrigsten Energie) hat das Elektron $n = 1$ und $\ell = 0$, mit $m_\ell = 0$ und $m_s = +\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$. Das nennt man ein 1s-Elektron. Die Ziffer 1 gibt an, dass $n = 1$ ist, und der Buchstabe s steht für $\ell = 0$.

Für den formalen Aufbau der Atome mit höheren Ordnungszahlen sind nun sukzessive weitere Elektronen hinzuzufügen. Jedes Elektron besetzt dabei den Zustand mit geringstmöglicher Energie, der nach dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip erlaubt ist.

Helium ($Z = 2$)

Das auf den Wasserstoff folgende Element Helium hat die Ordnungszahl $Z = 2$ und demnach auch zwei Elektronen. Diese befinden sich im Grundzustand in der K-Schale mit $n = 1$, $\ell = 0$ und $m_\ell = 0$; das eine Elektron hat $m_s = +\frac{1}{2}$ und das andere $m_s = -\frac{1}{2}$. Diese Konfiguration hat eine geringere Energie als jede andere Konfiguration zweier Elektronen unter dem Einfluss eines positiv geladenen Kerns. Der resultierende Spin

der beiden Elektronen ist null. Da auch der Bahndrehimpuls null ist, ist der gesamte Drehimpuls null. Die Elektronenkonfiguration des Heliumatoms wird als $1s^2$ notiert. Wieder steht die Ziffer 1 für $n = 1$ und der Buchstabe s für $\ell = 0$; der Exponent 2 bedeutet, dass dieser Zustand mit zwei Elektronen besetzt ist. Da bei $n = 1$ die Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ nur 0 sein kann, ist die K-Schale ($n = 1$) mit diesen beiden Elektronen vollständig gefüllt. Die Energie, die aufzubringen ist, um aus dem Grundzustand ein gebundenes Elektron zu entfernen, heißt **erste Ionisierungsenergie**. Sie ist ggf. die Bindungsenergie des zuletzt hinzugefügten (energiereichsten) Elektrons. Das Heliumatom hat mit 24,6 eV eine relativ hohe erste Ionisierungsenergie. Deshalb ist Helium chemisch inert (wie alle Edelgase), d. h., es geht praktisch keine chemischen Reaktionen ein. Aus der Ionisierungsenergie lassen sich, wie Beispiel 34.6 zeigt, die Wechselwirkungsenergie und der Abstand der Elektronen im Grundzustand ermitteln.

Beispiel 34.6: Die Wechselwirkungsenergie der Elektronen im Heliumatom

a) Berechnen Sie mit dem im Text angegebenen Messwert der ersten Ionisierungsenergie von Helium die Wechselwirkungsenergie der beiden Elektronen im Grundzustand des Heliumatoms. b) Berechnen Sie daraus den mittleren Abstand der beiden Elektronen.

Problembeschreibung: Mit Gleichung 34.26 ist die (negative) Energie $E_n = -Z^2 E_0/n^2$ eines Elektrons im Grundzustand des Heliumatoms zu berechnen, wobei $n = 1$ und $Z = 2$ einzusetzen ist. Bei nicht wechselwirkenden Elektronen hätte das zweite Elektron dieselbe Energie E_1 wie das erste. In diesem Fall wäre die Ionisierungsenergie gleich E_1 , und die Energie des Grundzustands mit nicht wechselwirkenden Elektronen wäre $E_{\text{nw}} = 2E_1$. Dies ist in Abbildung 34.16 das niedrigste Energieniveau. Wegen der Wechselwirkungsenergie ist die Energie des Grundzustands jedoch höher als $2E_1$. Dieses Niveau ist in der Abbildung mit E_g bezeichnet. Wenn wir nun die Energie $E_{\text{ion}} = 24,6 \text{ eV}$ (also die gemessene erste Ionisierungsenergie) zuführen, erhalten wir ein einfach ionisiertes Heliumatom He^+ , das nur ein Elektron besitzt und daher die Energie E_1 hat.

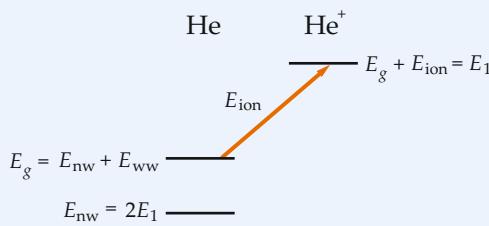


Abbildung 34.16 Darstellung der Energieniveaus der Elektronen im Heliumatom unter Berücksichtigung der Wechselwirkungsenergie.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Wechselwirkungsenergie E_{ww} zuzüglich der Energie E_{nw} zweier nicht wechselwirkender Elektronen ist die Energie E_g des Grundzustands des Heliumatoms:

$$E_{\text{ww}} + E_{\text{nw}} = E_g$$

2. Lösen Sie nach E_{ww} auf und setzen Sie $E_{\text{nw}} = 2E_1$ ein:

$$E_{\text{ww}} = E_g - E_{\text{nw}} = E_g - 2E_1$$

3. Berechnen Sie mit Gleichung 34.26 die Energie E_1 eines Elektrons im Grundzustand:

$$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}$$

Daher ist

$$E_1 = -(2)^2 \cdot \frac{-13,6 \text{ eV}}{1^2} = -54,4 \text{ eV}$$

4. Setzen Sie den Wert von E_1 in die Gleichung von Schritt 2 ein:

$$\begin{aligned} E_{\text{ww}} &= E_g - 2E_1 = E_g - 2 \cdot (-54,4 \text{ eV}) \\ &= E_g + 108,8 \text{ eV} \end{aligned}$$

5. Die Summe aus der Grundzustandsenergie E_g des Heliumatoms und der ersten Ionisierungsenergie E_{ion} ist die Grundzustandsenergie E_1 des Ions He^+ :

$$E_g + E_{\text{ion}} = E_1 = -54,4 \text{ eV}$$

6. Setzen Sie $E_{\text{ion}} = 24,6 \text{ eV}$ ein, um E_g zu berechnen:

$$\begin{aligned} E_g &= E_1 - E_{\text{ion}} = -54,4 \text{ eV} - 24,6 \text{ eV} \\ &= -79,0 \text{ eV} \end{aligned}$$

7. Setzen Sie dieses Ergebnis für E_g in die Gleichung von Schritt 4 ein, um E_{ww} zu erhalten:

$$\begin{aligned} E_{\text{ww}} &= E_g + 108,8 \text{ eV} = -79,0 \text{ eV} + 108,8 \text{ eV} \\ &= \boxed{29,8 \text{ eV}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe b

1. Die Wechselwirkungsenergie zweier Elektronen, die voneinander den Abstand r haben, ist die potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

2. Lösen Sie nach r auf und setzen Sie E_{pot} gleich E_{ww} aus Teilaufgabe a ein. Es ist zweckmäßig, r in Abhängigkeit

von a_0 (dem ersten Bohr'schen Radius im Wasserstoffatom) auszudrücken und den Energiewert von E_0 gemäß Gleichung 34.16 einzusetzen:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{E_{\text{pot}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{a_0} \frac{a_0}{E_{\text{pot}}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{2a_0} \frac{a_0}{E_{\text{pot}}} = 2 \cdot \frac{E_0}{E_{\text{pot}}} a_0 \\ &= 2 \cdot \frac{13,6 \text{ eV}}{29,8 \text{ eV}} a_0 = [0,913 a_0] \end{aligned}$$

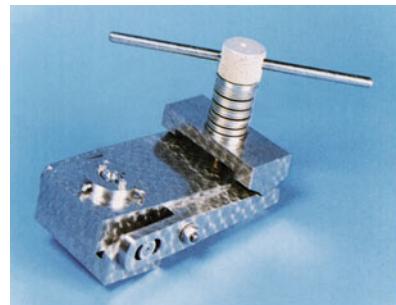
Plausibilitätsprüfung: Dieser Abstand entspricht ungefähr dem Durchmesser d_1 der Umlaufbahn mit dem ersten Bohr'schen Radius im Heliumatom; dieser Durchmesser ist gegeben durch $d_1 = 2r_1 = 2a_0/Z = a_0$. ■

Lithium ($Z = 3$)

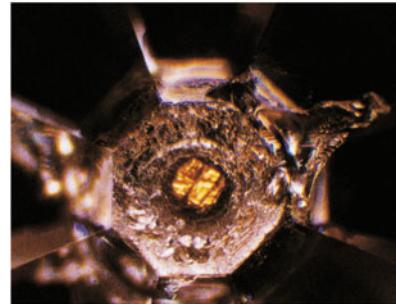
Das Atom des nächsten Elements, Lithium, hat drei Elektronen. Da im Grundzustand die K-Schale ($n = 1$) schon beim Helium mit zwei Elektronen vollständig gefüllt wurde, muss sich das dritte Elektron in einer Schale mit höherer Energie befinden. Die Schale mit den nächsthöheren Energie ist die L-Schale ($n = 2$). Das einzelne äußere Elektron, also das mit $n = 2$, ist am wahrscheinlichsten viel weiter vom Kern entfernt als die beiden inneren Elektronen mit $n = 1$. Die größte Wahrscheinlichkeit, das dritte Elektron im Lithiumatom anzutreffen, besteht nahe beim zweiten Bohr'schen Radius, der viermal so groß ist wie der erste.

Die Kernladung wird durch die beiden inneren Elektronen mit $n = 1$ teilweise abgeschirmt, sodass das äußere Elektron mit $n = 2$ nur einem Teil der Kernladung ausgesetzt ist. Das elektrische Feld außerhalb einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung ist ebenso beschaffen, als wäre die gesamte Ladung im Mittelpunkt der Kugel konzentriert. Befände sich im Lithiumatom das äußere Elektron mit $n = 2$ vollständig außerhalb der Ladungswolke der beiden inneren Elektronen mit $n = 1$, dann entspräche das elektrische Feld, dem dieses äußere Elektron ausgesetzt ist, dem einer einzigen Ladung $+1e$ im Zentrum, weil die Kernladung $+3e$ und die Ladung der inneren Elektronenwolke $-2e$ betragen.

Jedoch durchdringt die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte gemäß Gleichung 34.33 des Elektrons mit $n = 2$ diejenige der Elektronen mit $n = 1$, sodass das äußere Elektron mit einer geringen, aber endlichen Wahrscheinlichkeit sogar dichter am Kern anzutreffen ist als eines der beiden Elektronen mit $n = 1$. Daher ist die *effektive Kernladung* $Z'e$, der das Elektron mit $n = 2$ ausgesetzt ist, etwas größer als $+1e$. Folglich ist die Energie dieses äußeren Elektrons im Abstand r von einer Punkt-



(a)



(b)

- a) Eine Vorrichtung zum Ausüben hoher Drücke auf kleine Substanzproben. Weil der überaus großen Härte von Diamant verwendet man zur Übertragung der Kräfte auf die Probe zwei Diamanten mit einer Fläche von ungefähr 1 mm^2 . b) Samariummonosulfid ist normalerweise ein schwarzer, nicht glänzender Halbleiter. Bei einem Druck oberhalb von etwa 7000 bar wird jedoch ein Elektron aus der 4f-Unterschale in die 5d-Unterschale angehoben. Nun glänzt die Substanz metallisch und zeigt auch eine entsprechende elektrische Leitfähigkeit. (a) und b) © A. Jayaraman/AT&T Bell Labs.)

ladung $+Z'e$ mit Gleichung 34.6 zu berechnen, wobei statt der Kernladung $+Z$ die effektive Kernladung $+Z'$ einzusetzen ist:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z'e^2}{r}. \quad (34.45)$$

Je stärker die Durchdringung der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten von Elektronen geringerer Energie und von Elektronen mit höherer Energie ist, desto höher ist die effektive Kernladung $Z'e$ für die Elektronen mit höherer Energie, sodass ihre Energie geringer ist, als es ohne Durchdringung der Fall wäre. Die Durchdringung ist für ℓ -Werte nahe bei null stärker (siehe Abbildung 34.12). Daher ist die Energie des Elektrons mit $n = 2$ im Lithiumatom im s-Zustand (mit $\ell = 0$) niedriger, als sie im p-Zustand (mit $\ell = 1$) wäre. Somit hat das Lithiumatom im Grundzustand die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s$. Seine erste Ionisierungsenergie beträgt nur 5,39 eV. Wegen dieser recht lockeren Bindung des Elektrons mit $n = 2$ ist Lithium chemisch sehr reaktiv. Das Lithiumatom verhält sich beinahe wie ein Ein-Elektronen-Atom, ähnlich dem des Wasserstoffs. Das Ausmaß der Abschirmung wird in Beispiel 34.7 verdeutlicht.

Beispiel 34.7: Die effektive Kernladung für ein äußeres Elektron

Nehmen Sie an, im Grundzustand des Lithiumatoms würde die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons mit $n = 2$ diejenige der beiden Elektronen mit $n = 1$ nicht durchdringen. Dann würden letztere das Elektron mit $n = 2$ von der Kernladung abschirmen, und die effektive Kernladung wäre gegeben durch $Z'e = +1e$. Ferner läge die Energie des Elektrons mit $n = 2$ bei $-(13,6 \text{ eV})/2^2 = -3,4 \text{ eV}$. In Wahrheit beträgt die erste Ionisierungsenergie von Lithium nicht $3,4 \text{ eV}$, sondern $5,39 \text{ eV}$. Schätzen Sie anhand dieses Werts die effektive Kernladungszahl Z' ab, der das Elektron mit $n = 2$ im Lithiumatom ausgesetzt ist.

Problembeschreibung: Da sich das zu betrachtende Elektron in der Schale mit $n = 2$ befindet, kann für seinen mittleren Abstand vom Kern $r = 4a_0$ angenommen werden. Dann ist Z' mit Gleichung 34.45 zu berechnen. Da r in Abhängigkeit von a_0 gegeben ist, wird am besten der Wert von E_0 für den Abstand a_0 nach Gleichung 34.16 herangezogen: $E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} e^2/(2a_0) = 13,6 \text{ eV}$.

Lösung: 1. Gleichung 34.45 verknüpft die Energie des Elektrons mit $n = 2$ mit seinem mittleren Abstand r vom Kern sowie mit der effektiven Kernladungszahl Z' :

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z' e^2}{r}$$

2. Setzen Sie die gegebenen Werte $r = 4a_0$ und $E = -5,39 \text{ eV}$ ein:

$$-5,39 \text{ eV} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z' e^2}{4a_0}$$

3. Verwenden Sie die Beziehung $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} e^2/(2a_0) = E_0 = 13,6 \text{ eV}$ und lösen Sie nach Z' auf:

$$-5,39 \text{ eV} = -\frac{Z'}{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{2a_0} = -\frac{Z'}{4} \cdot (13,6 \text{ eV})$$

Damit ergibt sich

$$Z' = 4 \cdot \frac{5,39 \text{ eV}}{13,6 \text{ eV}} = \boxed{1,59}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis von Schritt 3 bestätigt unsere Erwartung, dass Z' größer als 1 und kleiner als 3 ist.

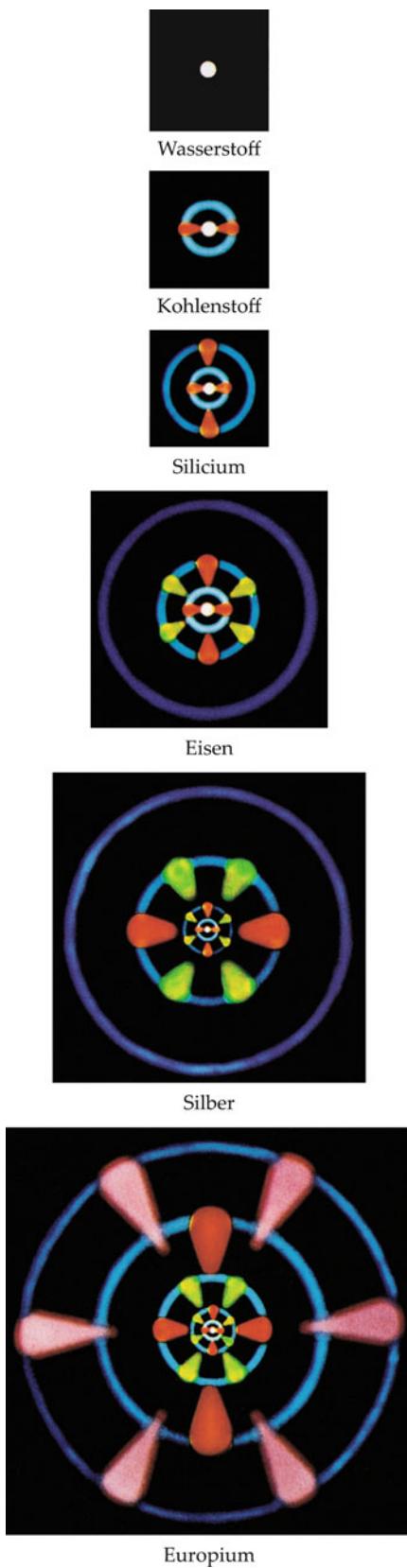
Weitergedacht: Wie angedeutet, wurde hier nur eine Abschätzung vorgenommen, die jedoch recht aufschlussreich ist. Wir haben den Radius $r = 4a_0$ der Kreisbahn gemäß dem halbklassischen Bohr'schen Modell und die gemessene Ionisierungsenergie verwendet, um die effektive Kernladung zu berechnen, der das Elektron mit $n = 2$ ausgesetzt ist. Wir wissen natürlich, dass sich dieses Elektron nicht auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius bewegt, sondern dass seine zu $|\psi|^2$ proportionale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte maßgebend ist. Diese durchdringt teilweise die der Elektronen mit $n = 1$. ■

Beryllium ($Z = 4$)

Die Energie des Berylliumatoms ist im Grundzustand minimal, wenn sich die beiden Elektronen mit $n = 2$ in 2s-Zuständen befinden. Sie haben die Quantenzahlen $n = 2$, $\ell = 0$ und $m_\ell = 0$, wobei für ihre Spinquantenzahlen m_s zwei Werte möglich sind: $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$. Die Elektronenkonfiguration des Berylliumatoms ist daher $1s^2 2s^2$.

Bor bis Neon ($Z = 5$ bis $Z = 10$)

Da im Berylliumatom im Grundzustand die 2s-Unterschale vollständig besetzt ist, muss sich das fünfte Elektron in der nächsten Unterschale mit der niedrigsten verfügbaren Energie befinden. Dies ist die 2p-Unterschale mit $n = 2$ und $\ell = 1$. Die magnetische Quantenzahl m_ℓ kann drei Werte annehmen: $+1$, 0 und -1 , und die Spinquantenzahl m_s für jeden Wert von m_ℓ zwei Werte. Daher kann die 2p-Unterschale sechs Elektronen aufnehmen. Die Elektronenkonfiguration des Boratoms lautet somit $1s^2 2s^2 2p$. Die Elektronenkonfigurationen der Atome der Elemente Kohlenstoff ($Z = 6$) bis Neon ($Z = 10$) unterscheiden sich davon nur durch die Anzahlen der Elektronen in der 2p-Unterschale. Für diese Elemente steigt die erste Ionisierungsenergie mit Z an und erreicht für das letzte Element in der Reihe, Neon, den hohen Wert $21,6 \text{ eV}$. Das Neonatom enthält die maximale Anzahl von Elektronen in der Schale mit $n = 2$, und seine Elektronenkonfiguration ist $1s^2 2s^2 2p^6$. Wegen seiner hohen Ionisierungsenergie ist Neon, wie auch Helium, praktisch nicht reaktionsfähig und gehört ebenfalls zu den Edelgasen. Bei dem Element Fluor, dessen Ordnungszahl um 1 kleiner als die des Neons ist, fehlt im Atom nur ein Elektron zum vollständigen Füllen der 2p-Unterschale. Daher reagiert Fluor heftig mit Elementen, deren Atom in der Schale mit der höchsten Energie nur ein Valenzelektron hat, also beispielsweise mit Lithium. Dessen Atom gibt dabei sein Außenelektron an das Fluoratom ab, und es entstehen ein Li^+ -Ion und ein F^- -Ion. Diese beiden Ionen bilden die chemische Verbindung Lithiumfluorid.



◀ Schematische Darstellung der Elektronenkonfiguration einiger Atome. Die kugelsymmetrischen s-Zustände können zwei Elektronen enthalten und sind hier weiß oder blau dargestellt. Die orangefarben eingezeichneten hantelförmigen p-Zustände können bis zu sechs Elektronen enthalten. Die d-Zustände können bis zu zehn Elektronen aufnehmen und sind gelbgrün dargestellt. Die purpurfarben eingezeichneten f-Zustände schließlich bieten bis zu 14 Elektronen Platz. (© David Parker/Photo Researchers.)

Natrium bis Argon ($Z = 11$ bis $Z = 18$)

Das elfte Elektron muss sich im Grundzustand des Natriumatoms ($Z = 11$) in der Schale mit $n = 3$ befinden. Dabei wird es durch die Elektronen mit $n = 1$ und $n = 2$ von der Kernladung teilweise abgeschirmt, sodass es recht schwach gebunden ist. Entsprechend gering ist die erste Ionisierungsenergie des Natriums mit nur 5,14 eV. Natrium reagiert daher sehr leicht mit Elementen wie Fluor. Bei $n = 3$ kann ℓ die Werte 0, 1 oder 2 haben. Ein 3s-Elektron hat eine geringere Energie als ein 3p- oder ein 3d-Elektron, da die Durchdringung seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte mit denen der Elektronen mit $n = 1$ und $n = 2$ am stärksten ist. Dieser Energieunterschied zwischen den Unterschalen mit gleichem n -Wert steigt mit der Anzahl der Elektronen an. Das Natriumatom hat die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Beim Übergang zu Elementen mit höheren Werten von Z (also über 11) wird also zuerst die 3s-Unterschale und dann die 3p-Unterschale gefüllt. Diese beiden Unterschalen können insgesamt $2 + 6 = 8$ Elektronen aufnehmen. Die Konfiguration des Argonatoms mit $Z = 18$ ist $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. Argon ist mit seiner vollständig gefüllten 3p-Unterschale chemisch sehr reaktionsträge. Wie Helium und Neon gehört es zu den Edelgasen.

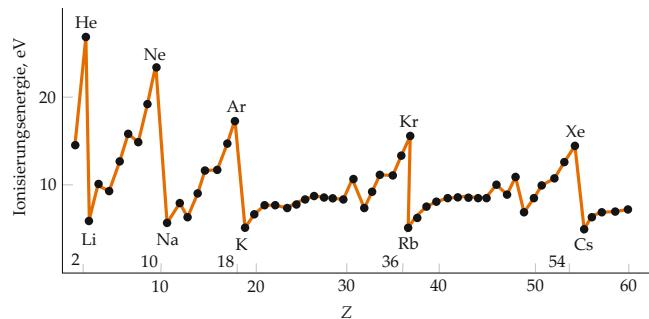


Abbildung 34.17 Die Abhängigkeit der ersten Ionisierungsenergie von der Ordnungszahl Z für $Z = 1$ bis $Z = 60$. Dies ist die Bindungsenergie des äußersten Elektrons bzw. eines der äußersten Elektronen im Atom. Sie steigt jeweils mit Z an, bis eine Schale oder Unterschale gefüllt ist. Das ist bei den Edelgasen mit $Z = 2, 10, 18, 36$ bzw. 54 der Fall. Die Elemente mit nur einem Außenelektron in einer Schale, also die Alkalimetalle wie beispielsweise Natrium mit $Z = 11$, haben eine besonders geringe Ionisierungsenergie, weil das äußere Elektron vom Kern relativ weit entfernt ist und durch die inneren Elektronen gegen die Kernladung stark abgeschirmt wird.

Tabelle 34.1 Die Elektronenkonfigurationen der Atome im Grundzustand; bei einigen der Seltenerdelemente ($Z = 57$ bis $Z = 71$) und bei den schweren Elementen ($Z > 89$) ist die Konfiguration nicht vollständig erklärt

Z	Element	Unterschale:		K		L		M		N		O		P		Q			
		n:		1	2	3		4		5		6		7					
		Unterschale:		s	s	p	s	p	d	s	p	d	f	s	p	d	f	s	p
1	H	Wasserstoff		1															
2	He	Helium		2															
3	Li	Lithium		2	1														
4	Be	Beryllium		2	2														
5	B	Bor		2	2	1													
6	C	Kohlenstoff		2	2	2													
7	N	Stickstoff		2	2	3													
8	O	Sauerstoff		2	2	4													
9	F	Fluor		2	2	5													
10	Ne	Neon		2	2	6													
11	Na	Natrium		2	2	6	1												
12	Mg	Magnesium		2	2	6	2												
13	Al	Aluminum		2	2	6	2	1											
14	Si	Silicium		2	2	6	2	2											
15	P	Phosphor		2	2	6	2	3											
16	S	Schwefel		2	2	6	2	4											
17	Cl	Chlor		2	2	6	2	5											
18	Ar	Argon		2	2	6	2	6											
19	K	Kalium		2	2	6	2	6	.	1									
20	Ca	Calcium		2	2	6	2	6	.	2									
21	Sc	Scandium		2	2	6	2	6	1	2									
22	Ti	Titan		2	2	6	2	6	2	2									
23	V	Vanadium		2	2	6	2	6	3	2									
24	Cr	Chrom		2	2	6	2	6	5	1									
25	Mn	Mangan		2	2	6	2	6	5	2									
26	Fe	Eisen		2	2	6	2	6	6	2									
27	Co	Cobalt		2	2	6	2	6	7	2									
28	Ni	Nickel		2	2	6	2	6	8	2									
29	Cu	Kupfer		2	2	6	2	6	10	1									
30	Zn	Zink		2	2	6	2	6	10	2									
31	Ga	Gallium		2	2	6	2	6	10	2	1								
32	Ge	Germanium		2	2	6	2	6	10	2	2								
33	As	Arsen		2	2	6	2	6	10	2	3								
34	Se	Selen		2	2	6	2	6	10	2	4								
35	Br	Brom		2	2	6	2	6	10	2	5								
36	Kr	Krypton		2	2	6	2	6	10	2	6								
37	Rb	Rubidium		2	2	6	2	6	10	2	6	.	.	1					
38	Sr	Strontium		2	2	6	2	6	10	2	6	.	.	2					
39	Y	Yttrium		2	2	6	2	6	10	2	6	1	.	2					
40	Zr	Zirkon		2	2	6	2	6	10	2	6	2	.	2					
41	Nb	Niob		2	2	6	2	6	10	2	6	4	.	1					
42	Mo	Molybdän		2	2	6	2	6	10	2	6	5	.	1					
43	Tc	Technetium		2	2	6	2	6	10	2	6	6	.	1					
44	Ru	Ruthenium		2	2	6	2	6	10	2	6	7	.	1					
45	Rh	Rhodium		2	2	6	2	6	10	2	6	8	.	1					
46	Pd	Palladium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	.					
47	Ag	Silber		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	1					
48	Cd	Cadmium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2					

Tabelle 34.1 Fortsetzung

Z	Element	Unterschale:		K		L		M		N		O		P		Q				
		n:		1	2	3		4		5		6		7						
		Unterschale:		s	s	p	s	p	d	s	p	d	f	s	p	d	f	s	p	
ℓ:	0	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	1
49	In	Indium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	1					
50	Sn	Zinn		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	2					
51	Sb	Antimon		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	3					
52	Tl	Tellur		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	4					
53	I	Iod		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	5					
54	Xe	Xenon		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6					
55	Cs	Cäsium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6	.	.	1		
56	Ba	Barium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6	.	.	2		
57	La	Lanthan		2	2	6	2	6	10	2	6	10	.	2	6	1	.	2		
58	Ce	Cer		2	2	6	2	6	10	2	6	10	1	2	6	1	.	2		
59	Pr	Praseodym		2	2	6	2	6	10	2	6	10	3	2	6	.	.	2		
60	Nd	Neodym		2	2	6	2	6	10	2	6	10	4	2	6	.	.	2		
61	Pm	Promethium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	5	2	6	.	.	2		
62	Sm	Samarium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	6	2	6	.	.	2		
63	Eu	Europium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6	.	.	2		
64	Gd	Gadolinium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	7	2	6	1	.	2		
65	Tb	Terbium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	9	2	6	.	.	2		
66	Dy	Dysprosium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	10	2	6	.	.	2		
67	Ho	Holmium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	11	2	6	.	.	2		
68	Er	Erbium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	12	2	6	.	.	2		
69	Tm	Thulium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	13	2	6	.	.	2		
70	Yb	Ytterbium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	.	.	2		
71	Lu	Lutetium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	1	.	2		
72	Hf	Hafnium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	2	.	2		
73	Ta	Tantal		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	3	.	2		
74	W	Wolfram		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	4	.	2		
75	Re	Rhenium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	5	.	2		
76	Os	Osmium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	6	.	2		
77	Ir	Iridium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	7	.	2		
78	Pt	Platin		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	9	.	1		
79	Au	Gold		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	1		
80	Hg	Quecksilber		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2		
81	Tl	Thallium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	1	
82	Pb	Blei		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	2	
83	Bi	Bismut		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	3	
84	Po	Polonium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	4	
85	At	Astat		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	5	
86	Rn	Radon		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	
87	Fr	Francium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	.
88	Ra	Radium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	.
89	Ac	Actinium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	1
90	Th	Thorium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	.	2	6	2
91	Pa	Protactinium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	1	2	6	2
92	U	Uran		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	3	2	6	1
93	Np	Neptunium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	4	2	6	1
94	Pu	Plutonium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	6	2	6	.
95	Am	Americium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	.
96	Cm	Curium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	7	2	6	1
97	Bk	Berkelium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	8	2	6	1
98	Cf	Californium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	10	2	6	.

Tabelle 34.1 Fortsetzung

		Unterschale:		K	L	M	N	O	P	Q											
		n:		1	2	3	4	5	6	7											
Z	Element	Unterschale:		s	s	p	s	p	d	f	s	p	d	f	s	p	d	s			
ℓ:	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	1			
99	Es	Einsteinium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	11	2	.	2	
100	Fm	Fermium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	12	2	6	.	2
101	Md	Mendelevium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	13	2	6	.	2
102	No	Nobelium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	.	2
103	Lr	Lawrencium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	1	2
104	Rf	Rutherfordium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	2	2
105	Db	Dubnium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	3	2
106	Sg	Seaborgium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	4	2
107	Bh	Bohrium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	5	2
108	Hs	Hassium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	6	2
109	Mt	Meitnerium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	7	2
110	Ds	Darmstadtium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	9	1
111	Rg	Röntgenium		2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	2	6	10	1

Elemente mit Z > 18

Man könnte nun erwarten, dass das 19. Elektron in die dritte Unterschale gelangt, nämlich in die 3d-Unterschale mit $\ell = 2$. Jedoch ist die Durchdringung der inneren Schalen inzwischen so stark, dass das nächste Elektron in der 4s-Unterschale eine geringere Energie hat als in der 3d-Unterschale. Deswegen besetzen das 19. Elektron im Kaliumatom ($Z = 19$) und das 20. Elektron im Calciumatom ($Z = 20$) die 4s-Unterschale und nicht die 3d-Unterschale. Die Elektronenkonfigurationen der nächsten zehn Elemente, Scandium ($Z = 21$) bis Zink ($Z = 30$), unterscheiden sich davon nur in der Anzahl der Elektronen in der 3d-Unterschale. Jedoch haben Chrom ($Z = 24$) und Kupfer ($Z = 29$) nur ein einziges 4s-Elektron. Die zehn Elemente mit den Ordnungszahlen 21 bis 30 in der vierten Periode des Periodensystems gehören zu den sogenannten **Nebengruppen-elementen** oder **Übergangsmetallen**.

Abbildung 34.17 zeigt für $Z = 1$ bis $Z = 60$ die Abhängigkeit der ersten Ionisierungsenergie von der Ordnungszahl Z . Die hohen Werte bei den Edelgasen mit $Z = 2, 10, 18, 36$ und 54 röhren daher, dass jeweils eine Schale oder Unterschale vollständig gefüllt bzw. abgeschlossen ist. In Tabelle 34.1 sind für die derzeit bekannten Elemente bis zur Ordnungszahl 111 die Elektronenkonfigurationen der Atome im Grundzustand zusammengestellt.



Eine Leuchtreklame an einem Billard-Café. In den Röhren werden Neonatome durch Elektronen angeregt, die durch eine elektrische Entladung entstehen. Die angeregten Neonatome strahlen Licht im sichtbaren Bereich aus, wenn sie in den Grundzustand zurückkehren. Die Farben röhren teils von den charakteristischen Wellenlängen des Neonspektrums her, teils von einer fluoreszierenden Beschichtung der Röhren. (© Gabi Schoenemann/pixelio.)

(Wir können hierbei auch ein Molekül betrachten, denn in diesem Zusammenhang sind die Begriffe Atom und Molekül austauschbar.) Wird Strahlung absorbiert, geht ein Atom von einem energetisch tieferen Zustand in einen Zustand mit höherer Energie über. Werden beispielsweise die Atome eines Gases einer Strahlung ausgesetzt, deren Spektrum kontinuierlich ist, so zeigt die transmittierte (durchgelassene) Strahlung dunkle Linien. Diese röhren von der Absorption der Strahlung bei bestimmten, „diskreten“ Wellenlängen her. Die Absorptionspektren von Atomen und Molekülen in Gasen waren die ersten Linienspektren, die man beobachten konnte. Die Atome und Moleküle befinden sich bei gewöhnlichen Temperaturen entweder in ihrem Grundzustand oder in einem energetisch recht tief liegenden angeregten Zustand; daher treten nur Übergänge von einem Grundzustand (oder einem ihm energetisch

34.7 Spektren im sichtbaren und im Röntgenbereich

Absorption, Streuung, spontane Emission und stimulierte Emission

Wenn Strahlung emittiert wird, geht ein Atom von einem angeregten Zustand in einen Zustand mit geringerer Energie über.

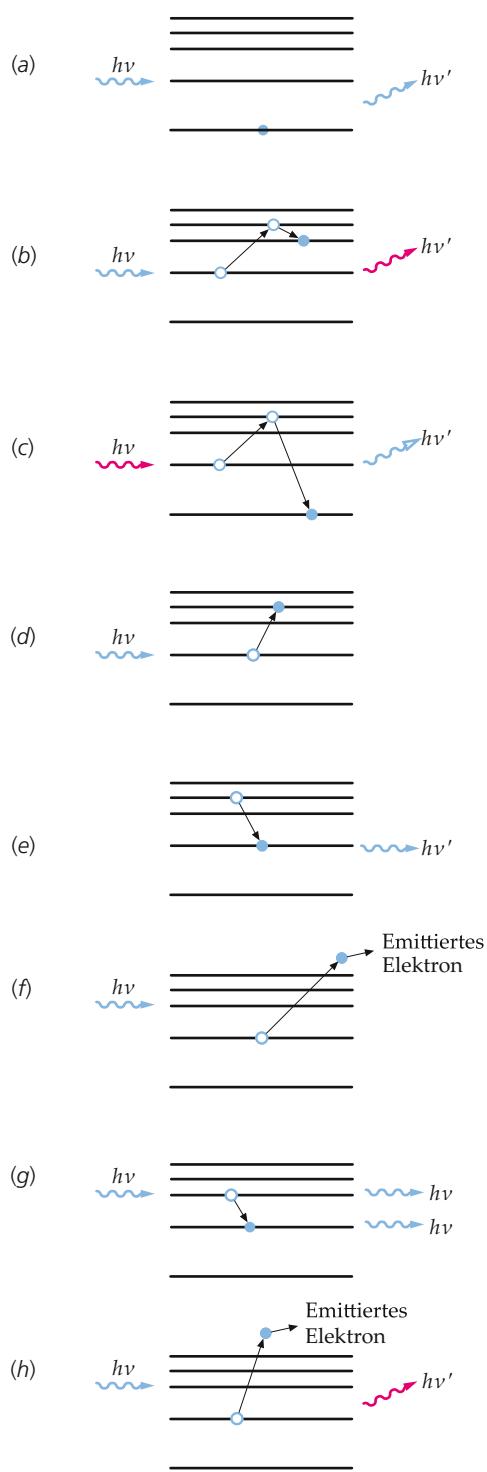


Abbildung 34.18 Photon-Atom- und Photon-Molekül-Wechselwirkungen.
a) Elastische Streuung, b) Stokes-Raman-Streuung, c) Anti-Stokes-Raman-Streuung, d) Resonanzabsorption, e) spontane Emission, f) photoelektrischer Effekt, g) stimulierte Emission, h) Compton-Streuung.

nahen Zustand) in einen höheren angeregten Zustand auf. Aus diesem Grund haben Absorptionsspektren normalerweise wesentlich weniger Linien als Emissionsspektren.

Abbildung 34.18 illustriert einige interessante Phänomene, die auftreten können, wenn ein Photon auf ein Atom trifft. Im Fall a ist die Energie $h\nu$ des ankommenden Photons zu gering, um das Atom in einen angeregten Zustand zu versetzen. Das Atom bleibt dabei in seinem Grundzustand, und das Photon wird nur gestreut. Da es dabei die gleiche Energie behält, spricht man von **elastischer Streuung**. Wenn die Wellenlänge des einfallenden Lichts viel größer als das Atom ist, kann die Streuung mit der klassischen elektromagnetischen Theorie beschrieben werden. In diesem Fall spricht man von **Rayleigh-Streuung**, benannt nach Lord Rayleigh, der die entsprechende Theorie im Jahre 1871 aufstellte. Die Wahrscheinlichkeit der Rayleigh-Streuung steigt proportional mit $1/\lambda^4$ an. Deswegen wird z. B. blaues Licht viel stärker gestreut als rotes Licht. Dieser Effekt ist verantwortlich für die blaue Farbe des Himmels. Aus demselben Grund erscheint der Himmel bei Sonnenuntergang oft rötlich, denn durch die Streuung wird der blaue Anteil des Lichts größtenteils aus der Richtung der Sonneneinstrahlung abgelenkt.

Von **inelastischer Streuung** oder **Raman-Streuung** spricht man, wenn ein einfallendes Photon mit einer solchen Energie $h\nu$ aufgenommen wird, dass das Atom dadurch in einen angeregten Zustand übergeht. Dann strahlt das Atom ein Photon ab, wobei es in einen energetisch tieferen Zustand übergeht, dessen Energie sich aber von der des Anfangszustands unterscheidet. Wenn die Energie $h\nu'$ des gestreuten Photons geringer als die Energie $h\nu$ des einfallenden Photons ist (Abbildung 34.18b), spricht man von **Stokes-Raman-Streuung**. Ist die Energie des gestreuten Photons aber größer als die des einfallenden Photons (Abbildung 34.18c), so handelt es sich um die **Anti-Stokes-Raman-Streuung**.

In Abbildung 34.18d entspricht die Energie des einfallenden Photons gerade der Energiedifferenz zwischen dem Anfangszustand und einem angeregten Zustand. Das Atom nimmt das Photon auf und geht in einen angeregten Zustand über; dies ist die **Resonanzabsorption**.

In Abbildung 34.18e geht ein Atom, das sich in einem angeregten Zustand befindet, spontan in einen energetisch tieferen Zustand über. Diesen Vorgang nennt man **spontane Emission**. Dieser Prozess verläuft nicht geordnet. Die Photonen, die von zwei Atomen emittiert werden, hängen also in keiner Weise miteinander zusammen, und das emittierte Licht ist inkohärent. Oft kehrt ein Atom von einem angeregten Zustand über einen oder mehrere dazwischenliegende Zustände in den Grundzustand zurück. Das geschieht beispielsweise, wenn es durch ultraviolettes Licht angeregt wurde und sichtbares Licht ausstrahlt, während es über mehrere Übergangszustände den Grundzustand wieder erreicht. Diese sogenannte **Fluoreszenz** wird beispielsweise in der dünnen Innenbeschichtung von fluoreszierenden Leuchtröhren ausgenutzt. Da die Lebensdauer eines angeregten Zustands normalerweise in der Größenordnung von 10^{-8} s

liegt, scheint dieser Vorgang augenblicklich abzulaufen. Aber einige angeregte Zustände haben deutlich höhere Lebensdauern in der Größenordnung von Millisekunden, zuweilen auch von Sekunden oder sogar Minuten. Man nennt sie dann **metastabile Zustände**. Die **phosphoreszierenden Materialien** haben sehr langlebige metastabile Zustände und strahlen noch lange nach der ursprünglichen Anregung Licht aus.

Abbildung 34.18f illustriert den **photoelektrischen Effekt**. Bei ihm bewirkt die Absorption eines Photons durch das Atom oder Molekül dessen Ionisierung, d.h., es wird ein Elektron emittiert. Abbildung 34.18g zeigt die **stimulierte Emission**. Sie tritt auf, wenn das Atom sich anfangs in einem angeregten Zustand mit der Energie E_2 befindet und die Energie des einfallenden Photons gleich der Energiedifferenz $E_2 - E_1$ ist, wobei E_1 die Energie des niedrigeren Zustands ist. In diesem Fall kann das einfallende Photon infolge der Schwingung seines elektromagnetischen Felds das angeregte Atom stimulieren, sodass dieses ein Photon ausstrahlt, das die gleiche Richtung wie das einfallende Photon hat und mit ihm in Phase ist. Die Photonen von angeregten Atomen können die Emission weiterer Photonen stimulieren, die sich ebenfalls in derselben Richtung und mit gleicher Phase ausbreiten. Dieser Prozess verstärkt das anfangs emittierte Photon und erzeugt einen Lichtstrahl, der von verschiedenen Atomen ausgeht, aber kohärent ist. Daher kann an solchem Licht, das von sehr vielen Atomen emittiert wird, besonders leicht Interferenz beobachtet werden.

In Abbildung 34.18h schließlich ist die **Compton-Streuung** dargestellt. Sie tritt auf, wenn die Energie des einfallenden Photons viel höher als die Ionisierungsenergie des Atoms ist. Beachten Sie, dass bei der Compton-Streuung ein Photon aufgenommen und ein Photon emittiert wird. Dagegen wird beim photoelektrischen Effekt ein Photon aufgenommen, aber kein Photon, sondern ein Elektron emittiert.

Atome können auch durch Beschuss mit Elektronen in einen Zustand mit höherer Energie angeregt werden; die Elektronen werden durch eine elektrische Entladung erzeugt und in einem starken elektrischen Feld beschleunigt. Die so angeregten Zustände der Atome können keine beliebigen Energien haben, sondern nur bestimmte, diskrete Werte annehmen. Daher wird beim Übergang zu geringeren Energien nur Strahlung mit bestimmten Wellenlängen emittiert. Die Gesamtheit aller möglichen emittierten Wellenlängen bildet das Emissionsspektrum des betreffenden Elements.

Spektren im sichtbaren Bereich

Um das Spektrum eines Atoms zu erklären, muss man dessen angeregte Zustände kennen. Dabei ist die Situation bei Mehr-Elektronen-Atomen im Allgemeinen viel komplizierter als beim Wasserstoffatom mit nur einem Elektron, denn es können auch mehrere Elektronen aus ganz verschiedenen Zuständen angeregt werden. Meist wird aber nur ein Elektron angeregt. Die Anregungsenergien der äußeren Elektronen, der sogenannten Valenzelektronen, liegen in der Größenordnung von einigen

34.7 Spektren im sichtbaren und im Röntgenbereich

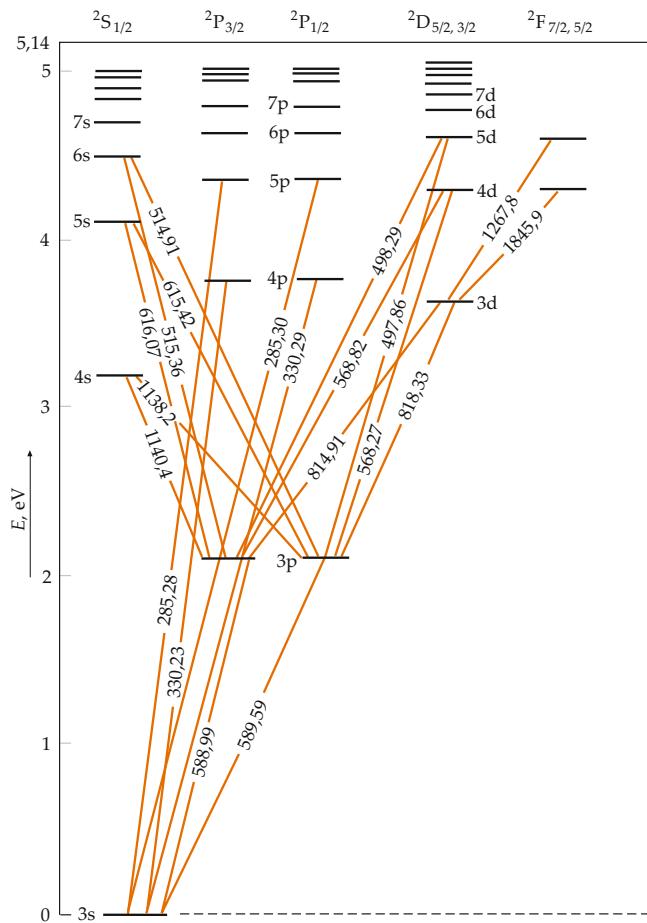


Abbildung 34.19 Die Energieniveaus (das Termschema) des Natriumatoms. Die schrägen Linien entsprechen den Übergängen mit Wellenlängen im sichtbaren Spektralbereich. Die Wellenlängen sind in Nanometern angegeben. Als Nullpunkt ist in diesem Diagramm die Energie des Grundzustands gewählt.

Elektronenvolt. Übergänge, die diese Elektronen erfahren, führen zur Emission oder Absorption von Photonen im sichtbaren Spektralbereich oder nahe diesem, und man spricht von einem **optischen Spektrum**. (Die Photonenenergie beim sichtbaren Licht liegt zwischen ungefähr 1,5 eV und 3 eV.) Die Anregungsenergien können oft mit einem einfachen Modell berechnet werden, in dem man das Atom als einzelnes Elektron im Feld eines „Kerns“ darstellt, der aus dem Atomkern und den übrigen, inneren Elektronen besteht. Dieses Modell liefert bei den Alkalimetallen Li, Na, K, Rb und Cs mit nur einem äußeren Elektron die besten Ergebnisse. Diese Elemente, die die erste Hauptgruppe des Periodensystems bilden, haben daher optische Spektren, die denen des Wasserstoffs ähneln.

Abbildung 34.19 zeigt das sogenannte Termschema des Natriumatoms, also die Energieniveaus, die für dessen Übergänge mit Spektrallinien im optischen Bereich maßgebend sind. Das Natriumatom gleicht im Grunde einem

Proton im Kern). Der gesamte Spindrehimpuls der vollständig gefüllten inneren Elektronenschalen ist null; daher hat jeder Zustand im Natriumatom den resultierenden Spin $\frac{1}{2}$ (der vom Valenzelektron herührt). Wegen der Spin-Bahn-Kopplung haben die Zustände mit $J = L - \frac{1}{2}$ eine etwas andere Energie als die mit $J = L + \frac{1}{2}$ (abgesehen von den Zuständen mit $L = 0$). Deshalb ist jeder Zustand (wiederum nicht bei $L = 0$) in zwei Zustände aufgespalten, und man spricht von einem Dublett. Die Energiedifferenz aufgrund der Dublettaufspaltung ist so gering, dass sie aus der Abbildung nicht hervorgeht. Üblicherweise notiert man diese Zustände in der Spektroskopie mit der hochgestellten Bezeichnung für den gesamten Spindrehimpuls, der sich aus $2S + 1$ ergibt, gefolgt von dem Buchstaben, der den Bahndrehimpuls J angibt, wiederum gefolgt von einem Index, der den gesamten Drehimpuls J angibt. Bei Zuständen mit dem gesamten Spindrehimpuls $S = \frac{1}{2}$ lautet die hochgestellte Bezeichnung 2 (für ein Dublett). Beispielsweise wird $^2P_{3/2}$ folgendermaßen gelesen: „Dublett P, drei Halbe“; dies ist also ein Zustand mit $L = 1$ und $J = \frac{3}{2}$. Im ersten angeregten Zustand des Natriumatoms ist sein Valenzelektron vom 3s-Niveau in das 3p-Niveau angeregt, das ungefähr 2,1 eV über dem Grundzustand liegt. Der von der Spin-Bahn-Kopplung herrührende Energieunterschied zwischen den Zuständen $P_{3/2}$ und $P_{1/2}$ beträgt etwa 0,002 eV. Die Übergänge von diesen Zuständen in den Grundzustand ergeben das bekannte gelbe Linienspektrum des Natriumspektrums:

$$\begin{aligned} 3p(^2P_{1/2}) &\rightarrow 3s(^2S_{1/2}), \quad \lambda = 589,6 \text{ nm}, \\ 3p(^2P_{3/2}) &\rightarrow 3s(^2S_{1/2}), \quad \lambda = 589,0 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Die Energieniveaus und die Spektren der Atome der anderen Alkalimetalle ähneln denen des Natriumatoms. Die Atomspektren der Elemente mit zwei Außenelektronen (dazu zählen Helium und beispielsweise die Erdalkalimetalle Beryllium und Magnesium) sind wegen der Wechselwirkung der beiden Außenelektronen wesentlich komplizierter.

Röntgenspektren

Röntgenstrahlen erzeugt man durch Beschuss einer Metallanode mit energiereichen Elektronen. Dabei emittiert die Anode der Röntgenröhre ein kontinuierliches Spektrum, das nur von der Energie der auftreffenden Elektronen abhängt. Ihm überlagert sind Linien, die für das Anodenmetall charakteristisch sind. In Abbildung 34.20 ist das Röntgenspektrum des Molybdäns dargestellt. Die Linien röhren von der Anregung innerer Elektronen her.

Die Energie, die nötig ist, um ein inneres Elektron (beispielsweise ein Elektron in der K-Schale mit $n = 1$) anzuregen, ist wesentlich höher als die Energie, die zum Anregen eines äußeren Elektrons (eines Valenzelektrons) aufzubringen ist. Ein inneres Elektron kann wegen des Pauli'schen Ausschließungsprinzips bei der Anregung keine bereits gefüllte Schale oder Unterschale erreichen (z. B. in einem Atom mit $Z \geq 10$ nicht die Zustände mit $n = 2$). Die Energie, die zum Anregen eines inneren Elektrons in einen energetisch höheren *freien* Zustand nötig

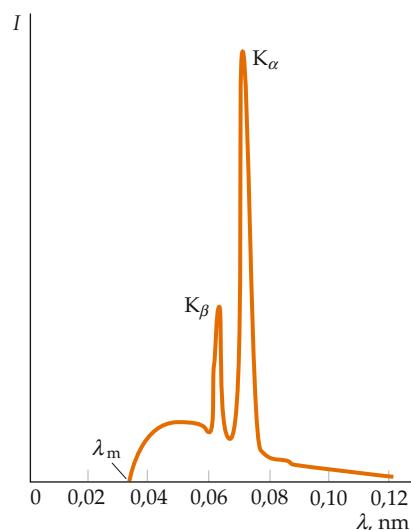


Abbildung 34.20 Das Röntgenspektrum des Molybdäns. Aufgetragen ist die Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Die scharfen Linien, hier die K_α - und die K_β -Linie, sind bei Röntgenspektren charakteristisch für das Element, aus dem die Anode der Röntgenröhre besteht. Die Grenzwellenlänge λ_m hängt nicht vom Material ab, sondern von der Beschleunigungsspannung U , der die Elektronen in der Röntgenröhre ausgesetzt sind. Dabei gilt $\lambda_m = h c / (e U)$.

ist, liegt normalerweise in der Größenordnung einiger Kiloelektronenvolt (keV). Wird ein Elektron aus der K-Schale mit $n = 1$ angeregt, dann hinterlässt es hier eine Lücke bzw. einen freien Zustand. Dieser kann gefüllt werden, indem ein Elektron aus der L-Schale (oder einer Schale mit noch höherer Energie) in die K-Schale übergeht. Das dabei emittierte Photon hat eine Energie in der Größenordnung von keV. Diese Strahlung erzeugt die in Abbildung 34.20 gezeigten scharfen Linien. Die K_α -Linie entsteht durch Übergänge von $n = 2$ (L-Schale) zu $n = 1$ (K-Schale) und die K_β -Linie durch Übergänge von $n = 3$ zu $n = 1$ (also von der M- in die K-Schale). Diese (und ggf. andere) Linien, die von Übergängen in die K-Schale mit $n = 1$ herrühren, bilden die K-Serie im Röntgenspektrum des betreffenden Metalls. Analog dazu entsteht die sogenannte L-Serie durch Übergänge von Zuständen mit höherer Energie in einen freien Zustand in der L-Schale mit $n = 2$. Die Bezeichnungen K, L, M, ... der Serien kennzeichnen also die Schale, die die Elektronen bei den Übergängen unter Emission eines Photons erreichen. Dabei gibt der Index an, aus welcher Schale die Elektronen übergehen: α steht für die nächsthöhere Schale, β für die übernächste usw.

Im Jahre 1913 bestimmte der englische Physiker Henry Moseley die charakteristischen Wellenlängen der K_α -Linie in den Röntgenspektren von über 40 Elementen. Aus seinen Werten ging hervor, dass die Größe $1/\sqrt{\lambda}$, also der Reziprokerwert der Wurzel aus der Wellenlänge, eine Gerade ergibt, wenn man sie gegen die Ordnungszahl der Elemente aufträgt. Dabei gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{K_\alpha}}} = a(Z - 1).$$

Allerdings wies Moseleys Kurve – neben einigen „Ausreißern“ – manche Lücken auf. Dadurch konnte er die Existenz einiger erst später entdeckter Elemente vorhersagen.

Kombiniert man die von Niels Bohr und Henry Moseley erarbeiteten Ergebnisse, so kann man eine Gleichung aufstellen, die die Wellenlänge der emittierten Photonen und die Ordnungszahl miteinander verknüpft. Geht ein Elektron von $n = 2$ zu $n = 1$ über, dann ist gemäß dem Bohr'schen Modell eines Ein-Elektronen-Atoms (siehe Gleichung 34.13) die reziproke Wellenlänge des dabei emittierten Photons gegeben durch

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = Z^2 \frac{E_0}{hc} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right).$$

Darin ist $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ die Bindungsenergie des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms. zieht man auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{K_\alpha}}} = \left[\frac{E_0}{hc} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \right]^{1/2} Z.$$

Dies entspricht der Moseley'schen Gleichung, wenn man Z durch $Z - 1$ ersetzt und wenn $a^2 = 3E_0/(4hc)$ ist. Dabei stellt sich allerdings die Frage, warum in der Moseley'schen Gleichung der Faktor nicht Z lautet, sondern $Z - 1$. Das liegt teilweise daran, dass die der Bohr'schen Theorie entsprechende Gleichung die Abschirmung der Kernladung durch innere Elektronen ignoriert. In einem Mehr-Elektronen-Atom werden die Elektronen der L-Schale (mit $n = 2$) durch die beiden Elektronen der K-Schale (mit $n = 1$) gegen die Kernladung abgeschirmt. Daher unterliegen die Elektronen der L-Schale nur einer effektiven Kernladung von etwa $(Z - 2)e$. Wenn sich aber in der K-Schale nur ein Elektron befindet, dann spüren die Elektronen der L-Schale eine effektive Kernladung von rund $(Z - 1)e$. Geht also ein Elektron von der Schale mit der Hauptquantenzahl n in die K-Schale mit $n = 1$ über, dann wird ein Photon mit der Energie $E_n - E_1$ emittiert. Für $n = 2$ ist seine Wellenlänge dabei gegeben durch

$$\lambda_K = \frac{hc}{(Z-1)^2 E_0 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)}. \quad (34.46)$$

Das geht auch aus der vorigen Gleichung hervor, wenn Z durch $Z - 1$ ersetzt wird. In Beispiel 34.8 wird mithilfe von Gleichung 34.46 ein Element anhand einer Linie in seinem Röntgenspektrum identifiziert.

Beispiel 34.8: Identifizieren eines Elements anhand seiner K_α -Röntgenlinie

Die Wellenlänge der K_α -Röntgenlinie eines bestimmten Elements wurde zu $\lambda = 0,0721 \text{ nm}$ gemessen. Um welches Element handelt es sich?

Problembeschreibung: Die K_α -Linie entspricht einem Übergang von $n = 2$ zu $n = 1$. Den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge und der Ordnungszahl Z beschreibt Gleichung 34.46.

Lösung: 1. Lösen Sie Gleichung 34.46 nach $(Z - 1)^2$ auf:

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{hc}{(Z-1)^2 E_0 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)}$$

Daraus folgt

$$(Z-1)^2 = \frac{4hc}{3\lambda_{K_\alpha} E_0}$$

2. Setzen Sie die gegebenen Werte ein und lösen Sie nach Z auf:

$$(Z-1)^2 = \frac{4 \cdot (1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})}{3 \cdot (0,0721 \text{ nm}) \cdot (13,6 \text{ eV})} = 1686$$

Damit ergibt sich

$$Z = 1 + \sqrt{1686} = 42,06$$

3. Da Z eine ganze Zahl ist, müssen Sie auf die nächste ganze Zahl abrunden:

$$Z = 42$$

Es handelt sich um *Molybdän*.

Plausibilitätsprüfung: Das in der Natur vorkommende Element mit der höchsten Ordnungszahl ist das Uran mit $Z = 92$. Daher muss das Ergebnis zwischen 1 und 92 liegen, was auch der Fall ist. ■

34.8 Laser

Das Wort **Laser** besteht aus den Anfangsbuchstaben des englischen Begriffs *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* („Lichtverstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung“). Ein Laser ist ein Gerät, das durch stimulierte Emission in einem aktiven Medium einen sehr intensiven Strahl kohärenter Photonen erzeugt; die „Lichtverstärkung“ besteht darin, dass die induzierte Emission die Absorption bei der Wellenlänge des Laserlichts übersteigt.

Betrachten wir ein System aus Atomen, deren Grundzustand die Energie E_0 hat und die einen metastabilen angeregten Zustand mit der Energie E_1 besetzen können. Wenn Photonen mit der Energie $E_1 - E_0$ eingestrahlt werden, dann können Atome im Grundzustand je ein Photon absorbieren und in den Zustand

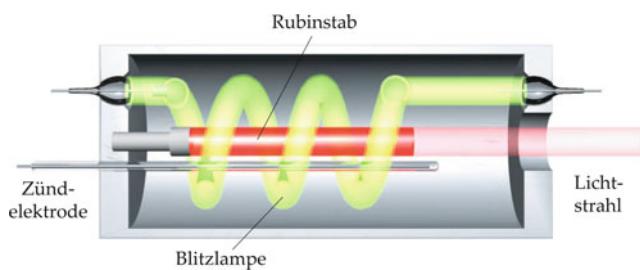


Abbildung 34.21 Der Aufbau des ersten Rubinlasers.

E_1 übergehen, während Atome, die sich bereits in diesem angeregten Zustand befinden, dazu stimuliert werden, wieder in den Grundzustand zurückzukehren. Die relativen Wahrscheinlichkeiten der Absorption und der stimulierten Emission sind gleich, wie Albert Einstein nachweisen konnte. Normalerweise befinden sich bei gewöhnlicher Temperatur fast alle Atome des Systems zu Beginn im Grundzustand. Dann ist die Absorption der vorherrschende Vorgang. Um mehr Übergänge mit stimulierter Emission als Übergänge mit Absorption zu erzeugen, muss man dafür sorgen, dass sich mehr Atome im angeregten Zustand befinden als im Grundzustand. Diese Bedingung, **Besetzungsinversion** (Besetzungsumkehr) genannt, kann man durch **optisches Pumpen** erreichen. Dabei werden Atome durch Absorption einer intensiven Hilfsstrahlung auf Energieniveaus *oberhalb* von E_1 „gepumpt“. Danach gehen sie wieder in das Energieniveau E_1 über, entweder durch spontane Emission oder durch strahlungslose Übergänge, beispielsweise durch Stöße.

Abbildung 34.21 zeigt schematisch den Aufbau des ersten Lasers, der im Jahre 1960 von Theodore Maiman gebaut wurde. Dieser **Rubinlaser** besteht aus einem einige Zentimeter langen Stab aus Rubin, der von einer spiralförmigen Gasentladungslampe umgeben ist. Diese strahlt während ihrer kurzen Lichtblitze ein breites Spektrum aus. Die ebenen Stirnflächen des Rubinstabs stehen exakt senkrecht auf seiner Achse. Rubin ist eine Abart des durchsichtigen Minerals Korund (Al_2O_3) und enthält einen geringen Anteil (rund 0,05 %) Chrom. Die Chromionen (Cr^{3+}) absorbieren im blauen und im grünen Spektralbereich recht stark, was die rote Farbe des Rubins bewirkt (Abbildung 34.22).

Die für die Funktion des Rubinlasers entscheidenden Energieniveaus sind in Abbildung 34.23 gezeigt. Nach dem Zünden der Blitzlampe gelangt ein intensiver, mehrere Millisekunden dauernder Lichtblitz in den Rubinkristall. Die Absorption von Photonen regt einen großen Teil der Chromionen in Energiebänder an, die in Abbildung 34.23 farbig dargestellt sind. Die angeregten Chromionen gelangen dann rasch in ein Paar energetisch tieferer, metastabiler Zustände. Deren Energieniveaus liegen sehr dicht beieinander, haben also ungefähr dieselbe Energie E_1 . Diese liegt rund 1,79 eV über dem Grundzustand. Ein Chromion bleibt etwa 5 ms lang in einem dieser metastabilen Zustände und emittiert dann spontan ein Photon, wobei es in den Grundzustand zurückkehrt.

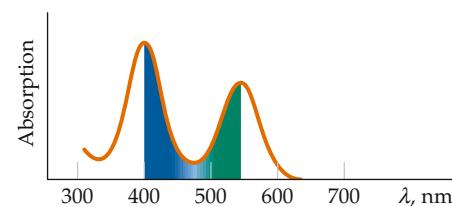


Abbildung 34.22 Die Absorption der Cr^{3+} -Ionen im Rubin, hier gegen die Wellenlänge aufgetragen. Die rote Färbung des Rubins ist darauf zurückzuführen, dass die Chromionen im grünen und im blauen Spektralbereich stark absorbieren.

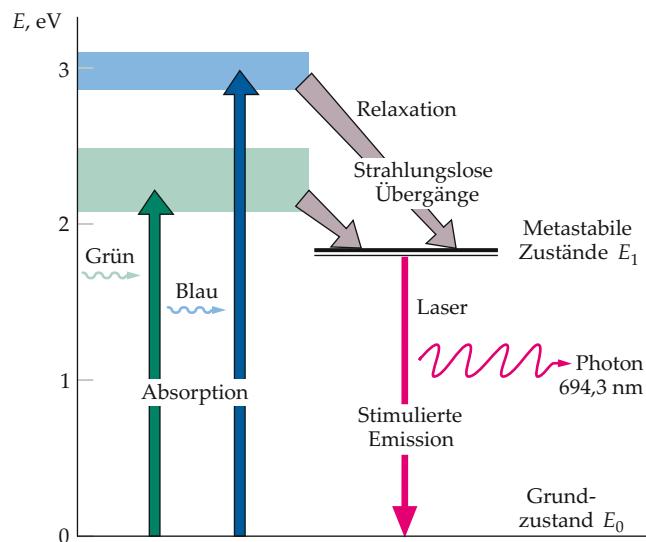


Abbildung 34.23 Die für die Funktion des Rubinlasers entscheidenden Energieniveaus der Chromionen. Damit die Besetzung der metastabilen Zustände höher als die des Grundzustands ist, wird der Rubinkristall einer im grünen und im blauen Spektralbereich intensiven Strahlung ausgesetzt. Sie regt Chromionen an, sodass sie vom Grundzustand in noch höhere Energiebänder gelangen, die hier in der jeweiligen Farbe schattiert dargestellt sind. Von ihnen gelangen die Chromionen durch strahlungslose Übergänge in ein Paar energetisch tiefer gelegener metastabiler Zustände. Danach kehren sie durch stimuliertes Emission aus den metastabilen Zuständen in den Grundzustand zurück.

Für einen atomaren Prozess ist eine Millisekunde eine lange Zeitspanne. Wenn also der Lichtblitz intensiv genug ist, dann gelangen mehr Chromionen in die beiden metastabilen Zustände, als im Grundzustand verbleiben. Das ist die oben erwähnte Besetzungsinversion. Während die Chromionen danach aus dem Zustand E_1 durch spontane Emission in den Grundzustand zurückkehren, emittieren sie Photonen mit der Energie 1,79 eV bzw. mit der Wellenlänge 694,3 nm. Sie haben damit gerade die richtige Energie, um weitere Chromionen in den metastabilen Zuständen dazu anzuregen, Photonen der gleichen Energie (und Wellenlänge) zu emittieren, wobei sie in den Grundzustand übergehen. Die Photonen haben außerdem gerade die richtige Energie, um Chromionen aus dem Grundzustand anzuregen, also ein Photon aufzunehmen und dabei

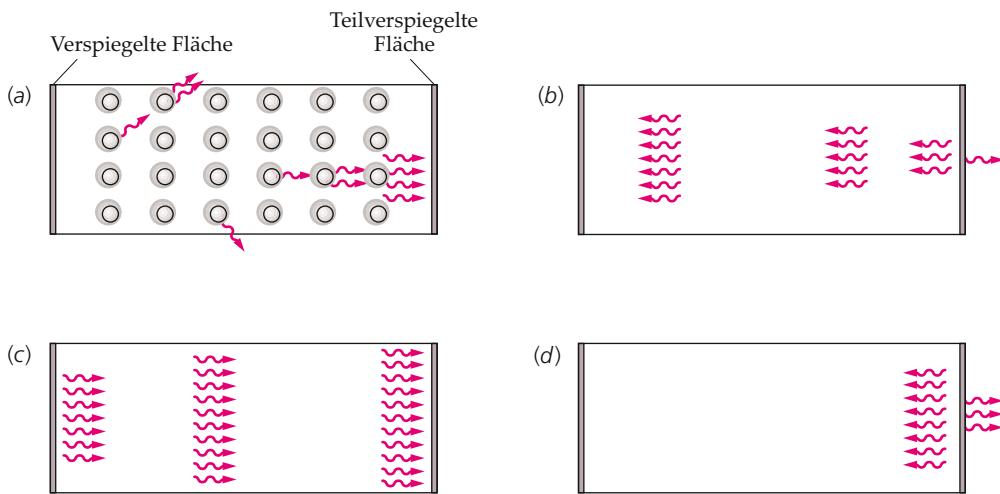


Abbildung 34.24 Die Entstehung eines Photonenstrahls in einem Rubinlaser. a) Einige Chromionen, auf die Licht einstrahlt, emittieren spontan Photonen. Ein Teil von ihnen bewegt sich nach rechts und stimuliert weitere Ionen, ihrerseits Photonen zu emittieren, die sich parallel zur Achse des Kristallstabs bewegen. b) Von vier Photonen, die die rechte Stirnfläche treffen, wird hier eines durchgelassen, und drei werden reflektiert. Wenn die reflektierten Photonen den Kristall durchqueren, stimulieren sie weitere Ionen zur Emission von Photonen, sodass der Strahl intensiver wird. Wenn er die rechte Stirnfläche wieder erreicht (c), besteht er bereits aus vielen Photonen. d) Einige der Photonen werden durchgelassen, und der Rest wird in den Stab zurückreflektiert.

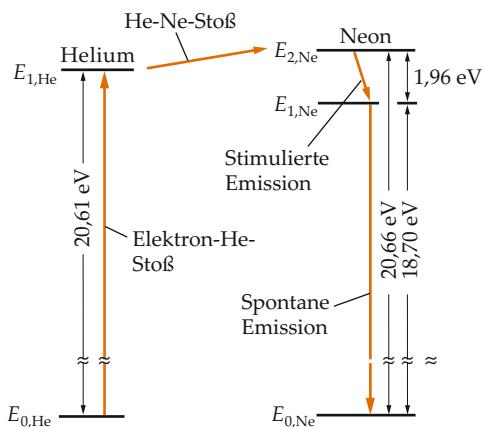


Abbildung 34.25 Die Energieniveaus des Helium- und des Neonatoms, die für die Funktion des Helium-Neon-Lasers entscheidend sind. Die Heliumatome werden durch elektrische Entladung in einen metastabilen Zustand angeregt, der 20,61 eV über dem Grundzustand liegt. Sie stoßen mit Neonatomen zusammen und regen dabei einige von ihnen in einen Zustand 20,66 eV über deren Grundzustand an. Die Besetzungsinversion wird daher zwischen diesem Niveau und einem Niveau erreicht, das 1,96 eV darunter liegt. Die spontane Emission von Photonen mit der Energie 1,96 eV stimuliert weitere Atome im obersten Zustand zur Emission von Photonen mit der Energie 1,96 eV.

in einen der metastabilen Zustände überzugehen. Hier liegen miteinander konkurrierende Prozesse vor, und der Prozess der stimulierten Emission herrscht nur vor, solange die Besetzung der metastabilen Zustände der Chromionen höher ist als die des Grundzustands.

Im Rubinlaser ist eine Stirnfläche des stabförmig zugeschliffenen Kristalls vollständig versilbert und hat daher ein Re-

flexionsvermögen von praktisch 100 %. Die andere Stirnfläche, auch Auskoppler genannt, ist teilweise versilbert (Abbildung 34.24a); ihr Reflexionsvermögen liegt bei ungefähr 85 %. Photonen, die sich parallel zur Achse des Stabs bewegen und auf die versilberten Stirnflächen treffen, werden also von der einen (hinteren) Fläche sämtlich reflektiert, aber von der anderen (vorderen) nur zu 85 %. Hier, an der teilweise versilberten Stirnfläche, treten also 15 % der Photonen aus. Während jedes Durchlaufs durch den Stab stimulieren die Photonen immer mehr Atome, sodass ein intensiver Lichtstrahl austritt (Abbildung 34.24). Jeder Lichtblitz der Gasentladungslampe dauert zwischen zwei und drei Millisekunden. Daher entstehen die Laserstrahlen in Pulsen, die ebenfalls nur einige Millisekunden andauern. Bei modernen Rubinlasern haben die intensiven Lichtpulse jeweils eine Energie von 50 J bis 100 J. Der Laserstrahl kann einen Durchmesser von nur rund 1 mm haben und um nur 0,25 mrad bis etwa 7 mrad divergieren.

Im kontinuierlich arbeitenden Helium-Neon-Laser wird die Besetzungsinversion auf eine etwas andere Weise erzielt. Die für seine Funktion entscheidenden Energieniveaus der Atome sind in Abbildung 34.25 gezeigt. Das Heliumatom hat einen angeregten metastabilen Zustand mit der Energie $E_{1,He}$, der durch eine elektrische Entladung erreicht wird und 20,61 eV über seinem Grundzustand liegt. Das Neonatom hat einen angeregten Zustand mit der Energie $E_{2,Ne}$, die 20,66 eV über seinem Grundzustand liegt, also nur 0,05 eV über dem ersten angeregten Zustand des Heliumatoms. Die Neonatome erreichen den Zustand $E_{2,Ne}$ durch Stöße mit angeregten Heliumatomen. Die für diese Anregung zusätzlich benötigte Energie von 0,05 eV wird also durch die kinetische Energie von Heliumatomen aufgebracht. Das Neonatom weist noch einen weiteren angeregten Zustand $E_{1,Ne}$ auf, 18,70 eV über seinem Grundzustand und

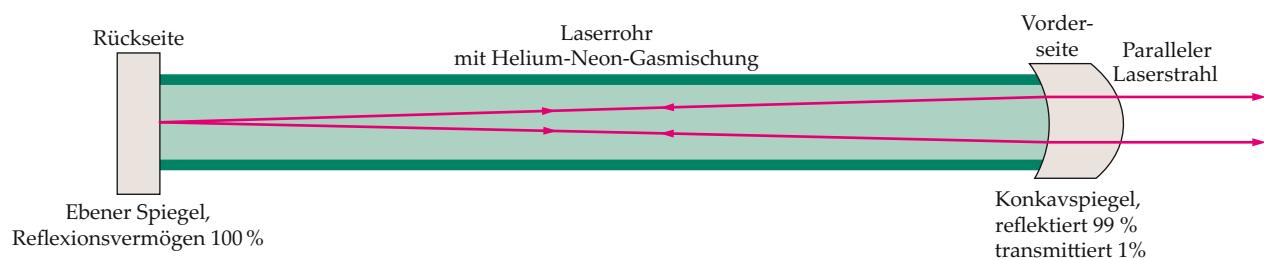


Abbildung 34.26 Schematischer Aufbau eines Helium-Neon-Lasers. Statt eines teilweise durchlässigen ebenen Spiegels weist er einen Konkavspiegel (rechts) auf. Daher muss die Ausrichtung der beiden Spiegelflächen nicht absolut exakt sein, wie es beim Rubinlaser notwendig ist. Außerdem ist der Konkavspiegel als Linse ausgeführt, die das austretende Licht zu einem parallelen Strahl bündelt.

1,96 eV unter dem Zustand $E_{2,\text{Ne}}$. Da der Zustand $E_{1,\text{Ne}}$ normalerweise nicht besetzt ist, wird zwischen den Zuständen $E_{2,\text{Ne}}$ und $E_{1,\text{Ne}}$ unmittelbar eine Besetzungsinversion erreicht. Die stimulierten Emission, die beim Übergang zwischen diesen Zuständen auftritt, ergibt Photonen mit der Energie 1,96 eV bzw. der Wellenlänge 632,8 nm. Der Laserstrahl ist daher hellrot. Nach der stimulierten Emission kehren die Atome durch spontane Emission vom Zustand $E_{1,\text{Ne}}$ in den Grundzustand $E_{0,\text{Ne}}$ zurück.

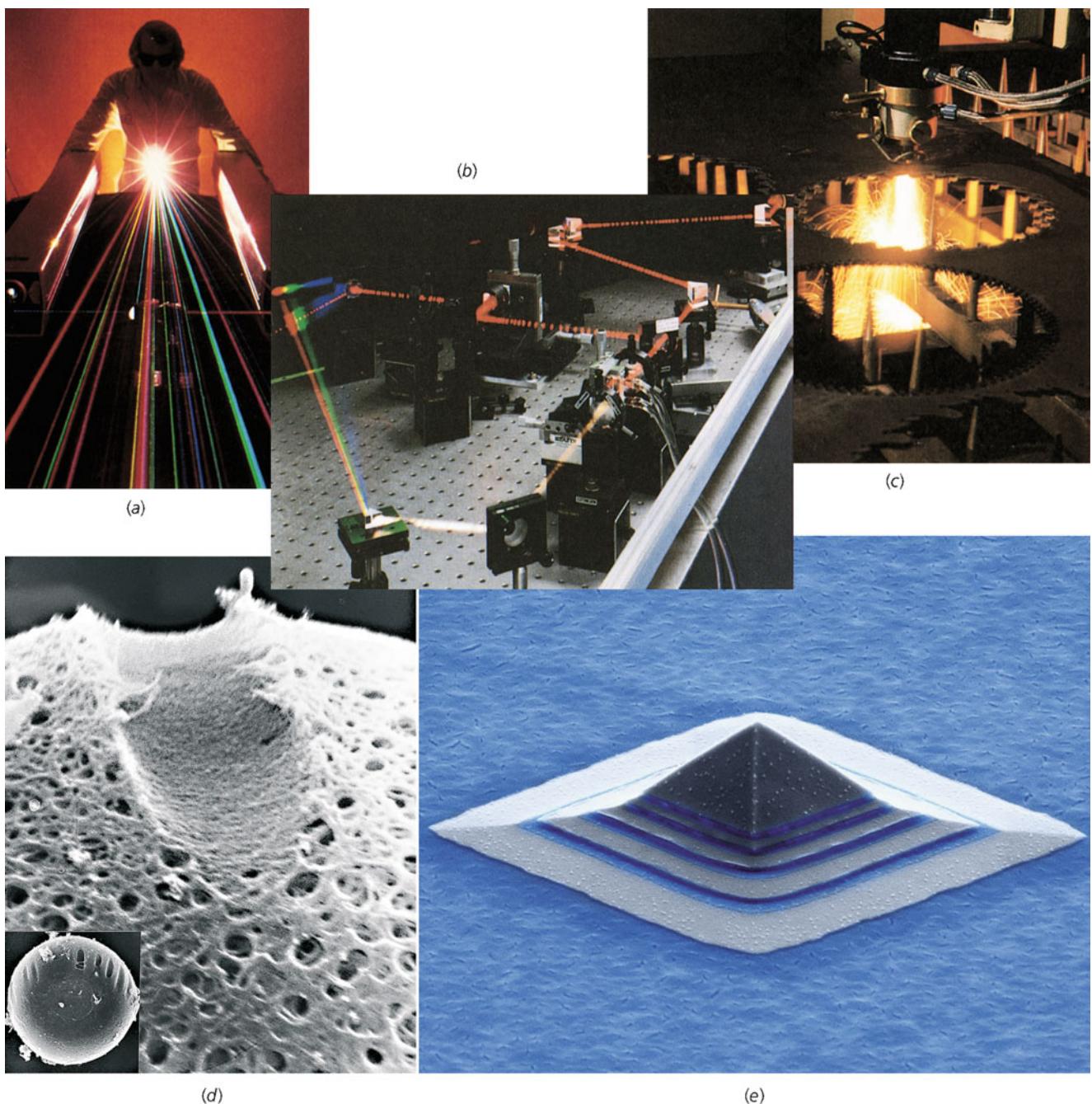
Beachten Sie, dass die stimulierte Emission im Helium-Neon-Laser Übergänge zwischen zwei angeregten Zuständen des Neonatoms beinhaltet, während die stimulierte Emission im Rubinlaser Übergänge zwischen einem angeregten Zustand und dem Grundzustand des Chromions beinhaltet. Die für die stimulierte Emission zwischen einem angeregten Zustand und dem Grundzustand erforderliche Besetzungsinversion ist schwerer zu erzielen, weil über 50 % der Atome aus dem Grundzustand angeregt werden müssen. Dagegen ist für die stimulierte Emission zwischen zwei angeregten Zuständen die Besetzungsinversion leichter zu erzielen, da der Zustand nach der stimulierten Emission nicht der Grundzustand, sondern ein angeregter Zustand erreicht wird, der normalerweise unbesetzt ist.

Abbildung 34.26 zeigt schematisch den Aufbau eines Helium-Neon-Lasers, wie er meist für Demonstrationszwecke verwendet wird. Er besteht aus einem Rohr, das 15 % Heliumgas und 85 % Neongas enthält. An einem Ende des Rohrs befindet sich ein vollständig reflektierender ebener Spiegel, der senkrecht auf der Achse des Rohrs steht, und am anderen Ende ist ein Konkavspiegel angebracht, dessen Reflexionsvermögen 99 % beträgt. Der Konkavspiegel fokussiert paralleles Licht auf den ebenen Spiegel und wirkt außerdem als Linse, die das austretende Licht zu einem parallelen Strahl bündelt.

Ein Laserstrahl ist kohärent, schmal und sehr intensiv. Seine Kohärenz wird u. a. beim Erstellen von Hologrammen ausgenutzt. Wegen seines geringen Durchmessers und seiner geringen Aufweitung wird er häufig als chirurgisches Werkzeug verwendet, beispielsweise zum Zerstören von Krebszellen oder

zum Befestigen einer sich ablösenden Netzhaut. Auch im Vermessungswesen ist der Laser schon seit einiger Zeit nützlich, denn der intensive, sich kaum aufweitende Lichtstrahl ermöglicht eine präzise Ausrichtung auch über relativ große Abstände hinweg. Laser nutzt man zudem bei der Entfernungsmessung. Dabei wird ein Laserpuls auf eine Spiegelanordnung gerichtet, und es wird die Zeit gemessen, nach der der reflektierte Strahl wieder bei der Quelle eintrifft. So konnte man die Entfernung zwischen Mond und Erde auf einige Zentimeter genau bestimmen. Schließlich verwendet man Laser auch bei der Erforschung der Kernfusion. Hier wird in einer sogenannten Brennkammer ein intensiver Laserpuls auf winzige Pellets aus Deuterium und Tritium gerichtet. Der Strahl heizt die Pellets innerhalb kürzester Zeit auf eine Temperatur in der Größenordnung von 10^8 K auf, wobei Deuterium- und Tritiumkerne miteinander verschmelzen und Energie freisetzen.

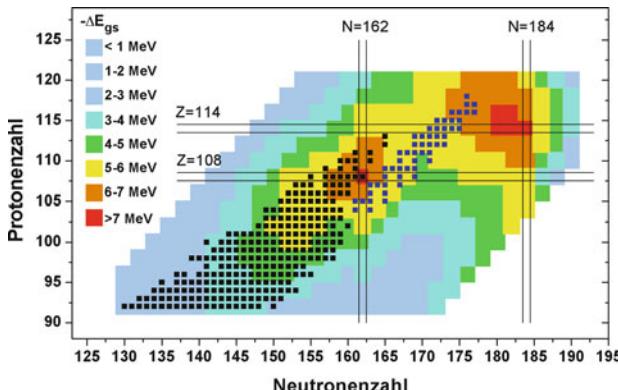
Die Lasertechnik schreitet dermaßen schnell voran, dass hier nur einige der neueren Entwicklungen erwähnt werden können. Neben dem Rubinlaser gibt es bereits viele andere Festkörperlaser, die Strahlung mit Wellenlängen zwischen rund 170 nm und 3900 nm emittieren. Auch kontinuierlich arbeitende Laser wurden entwickelt, deren Strahlungsleistung über 1 kW beträgt. Mit gepulsten Lasern kann man nanosekundenlange Strahlungspulse mit einer Leistung von ca. 10^{14} W erzeugen. Verschiedene Gaslaser geben Licht ab, das den Bereich vom fernen Infrarot bis zum Ultraviolet überstreicht. Die Größe der Halbleiterlaser (auch Diodenlaser genannt) schrumpfte in nur zehn Jahren von der Größe eines Stecknadelkopfs bis zu einigen Nanometern. Die Strahlung von Flüssigkeitslasern mit speziellen Farbstoffen kann über einen bestimmten Wellenlängenbereich abgestimmt werden. Bei kontinuierlich arbeitenden Lasern umfasst er beispielsweise 70 nm und bei gepulsten Lasern rund 170 nm. Relativ neu ist der Freie-Elektronen-Laser. Er entnimmt seine Energie einem Strahl freier Elektronen, der sich durch ein räumlich varierendes Magnetfeld bewegt. Dieser Laser, der sich durch sehr hohe Leistung und Effizienz auszeichnet, kann über einen recht großen Wellenlängenbereich abgestimmt werden.



a) Strahlen eines Krypton- und eines Argonlasers, aufgetrennt in ihre Komponenten mit verschiedenen Wellenlängen. In diesen Gaslasern werden die Atome der Edelgase Krypton und Argon ionisiert, wobei sie mehrere Elektronen abgeben, also mehrfach positiv geladene Ionen bilden. Licht wird emittiert, wenn Elektronen in den Ionen von einem höheren Energieniveau in ein tieferes übergehen. Dabei treten verschiedene Übergänge auf, die unterschiedlichen Wellenlängen des emittierten Lichts entsprechen. b) Ein Pulslaser mit einer Pulsdauer von Femtosekunden ($1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$). Durch die sogenannte *Modenkopplung* lässt man verschiedene angeregte Moden im Hohlraum eines Lasers miteinander wechselwirken, sodass eine Folge von ultrakurzen, einige Pikosekunden ($1 \text{ ps} = 10^{-12} \text{ s}$) langen Pulsen entsteht. Diese Zeitspanne entspricht derjenigen, in der das Licht im Hohlraum einmal hin- und zurückläuft. Mithilfe solcher ultrakurzer Pulse untersucht man beispielsweise das Verhalten von Molekülen während chemischer Reaktionen. c) Mit dem Strahl eines Kohlendioxidlasers kann man in nur zwei Minuten ein Sägeblatt aus Stahl zuschneiden. d) Hier wurde mit einer sogenannten Laserschere in die Zona pellucida (äußere Zellmembran) der Eizelle einer Maus eine Vertiefung hineingeschnitten, um eine Implantation vorzubereiten. Diese Methode wurde auch schon bei der Befruchtung menschlicher Eizellen angewandt. Dass der schmale Laserstrahl derart feine Schnitte ermöglicht, beruht u. a. darauf, dass durch die Absorption von Photonen das Material sehr gezielt aufgeheizt wird und dabei molekulare Bindungen aufgebrochen oder chemische Reaktionen gestartet werden. e) Nanolaser sind Halbleiterstrukturen, deren Abmessungen im Nanometer- bis Mikrometerbereich liegen. Die hier abgebildete Nanopyramide aus dem Halbleitermaterial Galliumarsenid ist nur hundert Nanometer hoch und steht auf einem Spezialspiegel. Sie wirkt als Laserresonator. (a und c) © Chuck O'Rear/West Light. b) Mit freundlicher Genehmigung von Ahmed H. Zewail. d) © Michael W. Berns/Scientific American. e) © Universität Karlsruhe.)

🔍 Im Kontext: Superschwere Elemente

Auf der Basis des erstmalig 1935 von C. F. von Weizsäcker vorgeschlagenen Tröpfchenmodells wurde bei $Z \approx 106$ die Instabilität des Atomkerns gegen prompte Spaltung und damit das Ende des Periodensystems erwartet. Dann ergaben aber um 1966 vorgestellte Extrapolationen des 1948 von M. Goeppert-Mayer entwickelten Schalenmodells des Atomkerns abgeschlossene, sphärische Protonen- und Neutronenschalen bei $Z = 114$ und $N = 184$. Diese sollten den Atomkernen eine erhöhte Stabilität verleihen, die quantitativ in Form von „Schaleneffekten“ ausgedrückt wurde. Diese ergeben sich als Differenz des Grundzustands-Massendefekts und des für ein „Tröpfchen“ erwarteten Werts. In der folgenden Abbildung sind sie für die schwersten Elemente in Abhängigkeit von Z und N dargestellt.



Darstellung der Schaleneffekte (ΔE_{gs}), berechnet auf der Basis der oft verwendeten „makroskopisch-mikroskopischen“ Beschreibung (nach R. Smolancuk und A. Sobczewski). Bei ihr wird der Atomkern im Wesentlichen als Tröpfchen beschrieben, der Einfluss der Schalenstruktur als kleine Korrektur berücksichtigt. Neben den sphärischen Schalen bei $Z = 114$ und $N = 184$ werden auch Schalen bei $Z = 108$ und $N = 162$ vorausgesagt, die allerdings deformierte Kernformen entsprechen. Die derzeit bekannten Atomkerne sind als Quadrate gekennzeichnet; die blauen Quadrate bezeichnen jene Atomkerne, die in Reaktionen von ^{48}Ca -Projektilen mit Aktinidentargets erzeugt wurden. (©Fritz-Peter Heßberger)

Aufgrund dieser Schalenstabilisierung lieferten theoretische Studien sehr lange Halbwertszeiten bis hin zu vielen Millionen Jahren. Das war insofern sensationell, da alle Isotope des damals schwersten bekannten Elements, Lawrencium ($Z = 103$), Halbwertszeiten kleiner als 1 min aufwiesen und ein weiteres Abfallen der Lebensdauern zu höherem Z hin erwartet wurde. Dies führte zu dem allegorischen Bild einer „Insel der Stabilität“ bei $Z = 114$ und $N = 184$ inmitten eines Meers der Instabilität.

Schon bald setzten intensive Bemühungen ein, diese „superschweren Elemente“ zu finden. In zahlreichen Experimenten wurde versucht, sie mittels Reaktionen zweier Atomkerne im Labor zu erzeugen. Wegen der vorausgesagten langen Halbwertszeiten schien es sogar aussichtsreich, sie in der Natur zu finden. Beide Wege führten nicht zum Erfolg.

Mitte der 1970er Jahre traten nach Inbetriebnahme des Schwerionenbeschleunigers UNILAC bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung mbH (GSI) in Darmstadt auch Forschergruppen in Deutschland in das Rennen um die superschweren Elemente ein, das bisher vornehmlich von Forschern am amerikanischen Lawrence Berkeley Laboratory

(LBL) und am sowjetischen Joint Institute of Nuclear Reactions in Dubna ausgetragen worden war.

Unter Federführung der GSI und des LBL wurde schließlich in den Jahren 1982/83 in mehreren in Berkeley und in Darmstadt durchgeföhrten Experimenten noch einmal ein groß angelegter Versuch unternommen, mit der als am aussichtsreichsten geltenden Reaktion $^{48}\text{Ca} + ^{248}\text{Cm}$ das superschwere Element 116 zu erzeugen. Auch diese Anstrengung lieferte kein positives Ergebnis.

Erfolgreich dagegen erwies sich das Konzept der schrittweisen Annäherung an den Bereich der superschweren Elemente mittels „kalter“ Fusion, unter Verwendung von Blei- oder Wismutisotopen als Targetmaterial und mittelschweren Projektilen, z. B. ^{54}Cr , ^{58}Fe . Am Geschwindigkeitsfilter SHIP bei der GSI gelang die Entdeckung der Elemente Bohrium ($Z = 107$; 1981), Meitnerium ($Z = 109$; 1982), Hassium ($Z = 108$; 1984) und nach Aufrüstung der Anlage die der Elemente Darmstadtium ($Z = 110$; 1994), Roentgenium ($Z = 111$; 1994) und Copernicium ($Z = 112$; 1996). Die Bildungsraten sanken allerdings von etwa einem Atom pro Tag für Bohrium auf etwa ein Atom pro sechs Wochen für Copernicium. Versuche, Element 113 mittels der Reaktion $^{70}\text{Zn} + ^{209}\text{Bi}$ zu synthetisieren, blieben erfolglos. Dies gelang schließlich einem Team am japanischen Forschungszentrum RIKEN in Wako nahe Tokio. In einer sich über einen Zeitraum von neun Jahren erstreckenden Serie von Experimenten mit einer Bestrahlungszeit von insgesamt 553 Tagen wurden drei von dem Nuklid $^{278}\text{113}$ ausgehende radioaktive Zerfallsketten beobachtet.

Ende der 1990er Jahre wurden in Dubna die Syntheseexperimente unter Verwendung des besonders neutronenreichen Projektilkerns ^{48}Ca und Aktinidenttargets wie z. B. ^{248}Cm wieder aufgenommen. Dank verbesserter Experimenttechnik und höherer zur Verfügung stehender Projektilstrahlintensitäten konnten die Messungen nun wesentlich empfindlicher durchgeführt werden als in den 1970er und 1980er Jahren, und so wurde nach und nach die Entdeckung der Elemente $Z = 113$ bis $Z = 118$ gemeldet. Die Halbwertszeiten der Isotope betragen bis zu einige Sekunden. Ein Teil der Ergebnisse wurde mittlerweile am SHIP und dem gasgefüllten Separator TASCA bei der GSI sowie in Berkeley reproduziert. Die Entdeckung zweier Elemente wurde 2011 von der IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) offiziell anerkannt. Sie wurden auf die Namen Flerovium ($Z = 114$) und Livermorium ($Z = 116$) getauft.

Bei der GSI konzentrierten sich in den letzten Jahren die Arbeiten auf Versuche zur Synthese der Elemente $Z = 119$ und $Z = 120$ in Bestrahlungen von ^{249}Bk und ^{249}Cf mit ^{50}Ti -Ionen für die Elemente $Z = 119$ und $Z = 120$ an TASCA sowie von ^{248}Cm mit ^{54}Cr und von ^{238}U mit ^{64}Ni für Element 120 an SHIP. Trotz monatelanger Bestrahlungen brachten sie bisher kein positives Ergebnis.

Mittlerweile wurden auch neuere theoretische Arbeiten auf der Basis selbstkonsistenter Hartree-Fock-Bogoliubov-Rechnungen und relativistischer Mean-Field-Modelle publiziert. Sie liefern, abweichend von den früheren Rechnungen, nun überwiegend $Z = 120$ oder gar $Z = 126$ und neben $N = 184$ auch $N = 172$ als Schalenabschlüsse.

Somit gilt heute zwar als sicher, dass der Rand der Insel der Stabilität erreicht ist, wie man auch aus der Abbildung erkennt. Wo nun genau das Zentrum liegt und wie stabil die Atomkerne dort sind, ist jedoch noch offen.



Dr. Fritz-Peter Heßberger (Jahrgang 1952) studierte Physik an der (damals noch) Technischen Hochschule Darmstadt. Nach einem Jahr Tätigkeit bei der Firma Kraftwerk Union AG wechselte er 1979 zur GSI. Seit 2009 leitet er dort kommissarisch die Abteilung SHE-Physik und in Personalunion die Sektion SHE-Physik am Helmholtz-Institut Mainz.

1. Hofmann, S., Münzenberg, G., „The discovery of heaviest elements“ *Rev. Mod. Phys.* **72**, 2000, 733.

2. Oganessian, Y. T., „Synthesis of the heaviest elements in Ca-induced reactions“ *Radiochim. Acta* **99**, 2011, 429.

3. Heßberger, F. P., „Discovery of the heaviest elements“ *Chem. Phys. Chem* **14**, 2013, 483.

Zusammenfassung

- Die Quantentheorie der Atome ergibt sich aus der Anwendung der Schrödinger-Gleichung auf ein gebundenes System. Dieses besteht aus dem Atomkern mit der Ladung $+Ze$ und der Elektronenhülle mit Z Elektronen, die jeweils die Ladung $-e$ aufweisen.
- Für das einfachste Atom (das Wasserstoffatom), das aus einem Proton und einem Elektron besteht, kann die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung exakt gelöst werden. Die sich dabei ergebenden Wellenfunktionen ψ hängen von den Quantenzahlen n, ℓ, m_ℓ und m_s ab.
- Die Elektronenkonfigurationen der Atome unterliegen dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip. Nach diesem können zwei Elektronen in einem Atom niemals in allen vier Quantenzahlen n, ℓ, m_ℓ und m_s übereinstimmen. Unter Berücksichtigung dieses Prinzips, das auch Pauli-Verbot genannt wird, sowie der Beschränkungen für die Quantenzahlen lässt sich der Aufbau des Periodensystems der Elemente weitgehend erklären.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffsatoms	
Strahlungslose Umlaufbahnen	Das Elektron umrundet das Proton strahlungslos.
Photonenfrequenz und Energieerhaltung	Beim Übergang eines Elektrons vom Anfangszustand (A) in den Endzustand (E) wird ein Photon emittiert oder absorbiert, dessen Frequenz gegeben ist durch
	$\nu = \frac{ E_A - E_E }{h} \quad (34.7)$
Quantisierter Drehimpuls	$L_n = m v_n r_n = n \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34.9)$
Erster Bohr'scher Radius	$a_0 = (4\pi\epsilon_0) \frac{\hbar^2}{m e^2} = 0,0529 \text{ nm} \quad (34.12)$
Bohr'sche Radien	$r_n = n^2 \frac{a_0}{Z} \quad (34.11)$
Energieniveaus im Wasserstoffatom	$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2} \quad (34.15)$ mit $E_0 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0} = 13,6 \text{ eV} \quad (34.16)$
Wellenlängen der Strahlung, die das Wasserstoffatom emittieren kann	$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_A - E_E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{E_A - E_E} \quad (34.17, 34.18)$
2. Quantentheorie der Atome	Das Elektron wird durch eine Wellenfunktion ψ beschrieben, die eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist. Die Energiequantisierung führt von den Bedingungen für stehende Wellen her. Die Wellenfunktion ψ wird durch die Hauptquantenzahl n , die Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ , die magnetische Quantenzahl m_ℓ und die Spinquantenzahl $m_s = \pm \frac{1}{2}$ beschrieben.
Zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung	$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + E_{\text{pot}} \psi = E \psi \quad (34.19)$
Die Lösungen können bei einem isolierten Atom als Produkt separater Funktionen von r , von θ und von ϕ ausgedrückt werden	$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)f(\theta)g(\phi) \quad (34.21)$
Quantenzahlen in Polarkoordinaten	
Hauptquantenzahl	$n = 1, 2, 3, \dots \quad (34.22)$
Bahndrehimpulsquantenzahl	$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (34.22)$
Magnetische Quantenzahl	$m_\ell = -\ell, (-\ell+1), (-\ell+2), \dots, 0, \dots, (\ell-2), (\ell-1), \ell \quad (34.22)$
Bahndrehimpuls	$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar \quad (34.23)$
z -Komponente des Drehimpulses	$L_z = m_\ell \hbar \quad (34.24)$

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen														
3. Quantentheorie des Wasserstoffatoms															
Energieniveaus des Wasserstoffatoms (wie im Bohr'schen Atommodell)	$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (34.26)$ mit $E_0 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ eV} \quad (34.27)$														
Wellenfunktionen															
Grundzustand	$\psi_{1,0,0} = C_{1,0,0} e^{-Zr/a_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \quad (34.30, 34.32)$														
Erster angeregter Zustand	$\psi_{2,0,0} = C_{2,0,0} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) e^{-Zr/(2a_0)} \quad (34.35)$														
	$\psi_{2,1,0} = C_{2,1,0} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/(2a_0)} \cos \theta \quad (34.36)$														
	$\psi_{2,1,\pm 1} = C_{2,1,1} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/(2a_0)} \sin \theta e^{\pm i\phi} \quad (34.37)$														
Wahrscheinlichkeitsdichten	Bei $\ell = 0$ ist $ \psi ^2$ kugelsymmetrisch, und bei $\ell > 0$ hängt $ \psi ^2$ vom Winkel θ ab.														
Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte	$P(r) = 4\pi r^2 \psi ^2 \quad (34.33)$														
	Die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte ist maximal bei den Abständen, die etwa den Bohr'schen Radien entsprechen.														
4. Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur	Der gesamte Drehimpuls eines Elektrons in einem Atom setzt sich aus dem Bahndrehimpuls und dem Spindrehimpuls zusammen. Er wird durch die Quantenzahl j charakterisiert, die entweder $ \ell - \frac{1}{2} $ oder $\ell + \frac{1}{2}$ sein kann. Wegen der Wechselwirkung der magnetischen Momente von Bahnbewegung und Spin hat bei $\ell > 0$ der Zustand $j = \ell - \frac{1}{2} $ eine geringere Energie als der Zustand $j = \ell + \frac{1}{2}$. Diese geringe Aufspaltung der Energieniveaus, die zu einer Aufspaltung der Spektrallinien in Linienpaare führt, nennt man Feinstruktur.														
5. Das Periodensystem der Elemente	Die Anzahl Z der Protonen im Atomkern eines Elements bezeichnet man als Ordnungszahl. Jedes neutrale Atom enthält ebenso viele Elektronen. Ausgehend vom Wasserstoffatom ergibt sich bei steigender Elektronenanzahl die Besetzung unter Berücksichtigung des Pauli'schen Ausschließungsprinzips. Der Zustand eines Atoms wird durch seine Elektronenkonfiguration beschrieben, wobei für jedes Elektron die Werte von n und ℓ anzugeben sind. Dabei wird der ℓ -Wert durch einen Kleinbuchstaben repräsentiert:														
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>Bezeichnung</td><td>s</td><td>p</td><td>d</td><td>f</td><td>g</td><td>h</td></tr> <tr> <td>Wert von ℓ</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table>	Bezeichnung	s	p	d	f	g	h	Wert von ℓ	0	1	2	3	4	5
Bezeichnung	s	p	d	f	g	h									
Wert von ℓ	0	1	2	3	4	5									
Pauli'sches Ausschließungsprinzip	In einem Atom können zwei Elektronen niemals den gleichen Satz von Werten aller vier Quantenzahlen n, ℓ, m_ℓ und m_s haben.														
6. Atomspektren	Die Linien der Atomspektren können im optischen (sichtbaren) Spektralbereich liegen, aber auch im Röntgenbereich. Optische Spektren resultieren aus Übergängen zwischen Energieniveaus von Valenzelektronen, die dem elektrischen Feld des Atomkerns und der inneren Elektronen des Atoms ausgesetzt sind. Röntgenspektren entstehen durch Übergänge innerer Elektronen und anschließende Auffüllung der freien Zustände durch Elektronen, die aus höheren Schalen in die jeweilige innere Schale übergehen.														
Spontane Emission	Ein Atom in einem angeregten Zustand kann spontan in einen Zustand mit geringerer Energie übergehen, wobei es ein Photon emittiert. Solche Prozesse verlaufen ungeordnet, und die Lebensdauer der angeregten Zustände liegt in der Größenordnung von 10^{-8} s . Die von den einzelnen Atomen emittierten Photonen stehen in keinem Zusammenhang miteinander, sodass das emittierte Licht inkohärent ist.														
Stimulierte Emission	Stimulierte Emission tritt auf, wenn sich ein Atom in einem angeregten Zustand befindet und ein Photon auftrifft, dessen Energie der Energiedifferenz zwischen diesem Zustand und einem energetisch tiefer liegenden Zustand entspricht. Das schwingende elektromagnetische Feld des einfallenden Photons stimuliert das angeregte Atom dann zur Emission eines Photons, das dieselbe Richtung wie das einfallende Photon hat und mit diesem in Phase ist. Das emittierte Licht ist in diesem Fall kohärent.														
Auswahlregeln	Übergänge zwischen Energiezuständen in Atomen, die mit der Emission eines Photons einhergehen, unterliegen folgenden Auswahlregeln: $\Delta m_\ell = -1, 0, +1,$ $\Delta \ell = -1, +1. \quad (34.28)$														

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
7. Laser	Ein Laser erzeugt einen intensiven, kohärenten und schmalen Photonenstrahl, der durch gestimulierte Emission zustande kommt. Die Funktion des Lasers beruht auf der Besetzungsinversion; bei ihr befinden sich mehr Atome oder Ionen in einem angeregten Zustand als in einem anderen, energetisch tiefer liegenden Zustand.

Antwort auf die Verständnisfrage

1. a), c) und d)

Lösungen der Übungen

1. 91,2 nm
2. -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

Aufgaben

Verständnisaufgaben

34.1 • Steigt oder sinkt im Wasserstoffatom bei zunehmender Hauptquantenzahl n der Abstand aufeinanderfolgender Energieniveaus?

34.2 • Wie groß ist die Energie des Grundzustands des doppelt ionisierten Lithiumatoms (mit $Z = 3$), wobei $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ ist? a) $-9E_0$, b) $-3E_0$, c) $-E_0/3$, d) $-E_0/9$.

34.3 • Ist gemäß dem Bohr'schen Atommodell die Gesamtenergie eines Elektrons höher oder geringer, wenn es sich auf einer Bahn mit größerem Radius befindet? Ist seine kinetische Energie dann größer oder kleiner?

34.4 • Der Radius der Bahn mit $n = 1$ ist im Bohr'schen Atommodell $a_0 = 0,053 \text{ nm}$. Wie groß ist der Radius der Bahn mit $n = 5$? a) $25a_0$, b) $5a_0$, c) a_0 , d) $a_0/5$, e) $a_0/25$.

34.5 • Welche Werte sind bei der Hauptquantenzahl $n = 3$ für die Quantenzahlen ℓ und m_ℓ jeweils möglich?

34.6 •• Warum ist im Natriumatom die Energie des 3s-Zustands deutlich geringer als die des 3p-Zustands, während im Wasserstoffatom beide Energien ähnlich hoch sind?

34.7 •• Mit dem Bohr'schen Atommodell und mit dem quantenmechanischen Modell (unter Verwendung der Schrödinger-Gleichung) ergeben sich beim Wasserstoffatom dieselben Energiewerte. Diskutieren Sie die Vorteile und die Nachteile beider Ansätze.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

34.8 •• a) Für ein Atom in einem Gas mit der Temperatur T kann man eine thermische De-Broglie-Wellenlänge λ_T definieren. Dabei entspricht die Geschwindigkeit des Atoms der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit bei der jeweiligen Temperatur. (Die mittlere kinetische Energie eines Atoms ist $\frac{3}{2}k_B T$, wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. Berechnen Sie damit die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} der Atome.) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{h^2}{3m k_B T}},$$

wobei m die Masse des Atoms ist. b) Neutrale Atome bilden bei tiefer Temperatur ein sogenanntes *Bose-Kondensat* (einen besonderen Materiezustand), wenn ihre thermische De-Broglie-Wellenlänge größer wird als ihr mittlerer Abstand. Schätzen Sie anhand dieses Kriteriums die Temperatur ab, auf die abgekühlt werden muss, damit in einem Gas aus ^{85}Rb -Atomen ein Bose-Kondensat entsteht, wenn die Anzahldichte der Atome 10^{12} cm^{-3} beträgt.

Das Bohr'sche Modell des Wasserstoffatoms

34.9 • Wie hoch ist jeweils die Energie eines Photons bei den drei größten Wellenlängen der Balmer-Serie des Wasserstoffatoms? Wie groß sind diese Wellenlängen?

34.10 •• Die Pickering-Serie im Spektrum des einfach ionisierten Heliumatoms (He^+) besteht aus Linien, die von Übergängen in die Elektronenschale mit $n_2 = 4$ herrühren. Experimentell zeigt sich, dass jede zweite Linie der Pickering-Serie sehr nahe bei einer Linie der Balmer-Serie (also bei einem Übergang zu $n_2 = 2$) des Wasserstoffatoms liegt. a) Zeigen Sie, warum dies der Fall ist. b) Berechnen Sie die Wellenlänge beim Übergang von $n_1 = 6$ zu $n_2 = 4$ bei He^+ und zeigen Sie, dass sie einer Wellenlänge der Balmer-Serie entspricht.

Quantenzahlen in Polarkoordinaten

34.11 • Ermitteln Sie für die Bahndrehimpulsquantenzahl $\ell = 1$ eines Elektrons in einem Atom a) den Betrag L des Drehimpulses und b) die möglichen Werte der magnetischen Quantenzahl m_ℓ . c) Zeichnen Sie ein maßstabsgerechtes Vektordiagramm, aus dem die möglichen Orientierungen von L relativ zur $+z$ -Richtung hervorgehen.

34.12 •• Ermitteln Sie für einen Zustand eines Elektrons in einem Atom mit $\ell = 2$: a) das Betragsquadrat L^2 des Drehimpulses, b) den Maximalwert von L_z^2 und c) den kleinstmöglichen Wert von $L_x^2 + L_y^2$.

Quantentheorie des Wasserstoffatoms

34.13 •• Berechnen Sie für den Grundzustand des Wasserstoffatoms die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Bereich zwischen r und $r + \Delta r$ (mit $\Delta r = 0,03 a_0$) anzutreffen, und zwar a) bei $r = a_0$ bzw. b) bei $r = 2a_0$.

34.14 •• Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

für den Grundzustand des Wasserstoffatoms (Gleichung 34.32) eine Lösung der folgenden Schrödinger-Gleichung ist:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ & -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \\ & + E_{\text{pot}}(r) \psi = E \psi . \end{aligned}$$

Dabei ist die Abstandsabhängigkeit der potenziellen Energie durch Gleichung 34.25 gegeben:

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z e^2}{r}.$$

34.15 •• Die radiale Wahrscheinlichkeitsverteilung bei einem Ein-Elektronen-Atom im Grundzustand kann als $P(r) = C r^2 e^{-2Zr/a_0}$ ausgedrückt werden, wobei C eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass $P(r)$ bei $r = a_0/Z$ maximal ist.

34.16 ••• Zeigen Sie, dass für die Hauptquantenzahl n im Wasserstoffatom die Anzahl der möglichen Zustände gleich $2n^2$ ist.

Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur

34.17 • Die potenzielle Energie eines magnetischen Moments μ in einem äußeren Magnetfeld B ist $E_{\text{pot}} = -\mu \cdot B$. a) Berechnen Sie die Energiedifferenz zwischen den beiden möglichen Orientierungen eines Elektrons im Magnetfeld $B = (1,50 \text{ T})\hat{z}$. b) Wenn dieses Elektronen mit Photonen beschossen wird, deren Energie gleich dieser Energiedifferenz ist, dann kann ihr Spin „umklappen“. Ermitteln Sie die Wellenlänge der Photonen, die solche Übergänge bewirken können. Dieses Phänomen nennt man *Elektronenspinresonanz*.

34.18 • Skizzieren Sie ein maßstabsgerechtes Vektordiagramm und zeigen Sie daran, wie die Kombination des Bahndrehimpulses L und des Spindrehimpulses S beim Zustand mit $\ell = 3$ des Wasserstoffatoms zwei mögliche Werte für den gesamten Dreihimpuls J ergibt.

Das Periodensystem der Elemente

34.19 • Geben Sie die Elektronenkonfiguration im Grundzustand a) des Kohlenstoffatoms und b) des Sauerstoffatoms an.

Optische Spektren und Röntgenspektren

34.20 • Die optischen Spektren von Atomen mit zwei Elektronen in der Elektronenschale mit der höchsten Energie ähneln sich sehr. Sie unterscheiden sich jedoch wegen der Wechselwirkung dieser beiden Elektronen stark von den Spektren von Atomen mit nur einem Außenelektron in jeweils derselben Schale. Teilen Sie die nachfolgend genannten Elemente in zwei Gruppen mit jeweils ähnlichen Atomspektren ein: Lithium, Beryllium, Natrium, Magnesium, Kalium, Calcium, Chrom, Nickel, Cäsium und Barium.

34.21 • a) Berechnen Sie die beiden nächstgrößeren Wellenlängen nach derjenigen der K_α -Linie in der K-Serie des Molybdäns. b) Wie groß ist die kleinste Wellenlänge in dieser Serie?

34.22 •• Das einfach ionisierte Heliumatom ist ein wasserstoffähnliches Atom, hat jedoch die Kernladung $2e$. Seine Energieniveaus sind gegeben durch $E_n = -4E_0/n^2$, wobei $n = 1,2,\dots$ und $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ ist. Nehmen Sie an, sichtbares weißes Licht tritt durch Heliumgas hindurch, dessen Atome sämtlich einfach ionisiert sind. Bei welchen Wellenlängen treten im Spektrum des durchgelassenen Lichts dunkle Linien auf? (Sämtliche Ionen sollen sich vor der Einstrahlung im Zustand E_1 befinden.)

Laser

34.23 • Ein Puls von einem Rubinlaser hat eine mittlere Leistung von 10 MW und eine Dauer von $1,5 \text{ ns}$. a) Wie hoch ist seine Gesamtenergie? b) Wie viele Photonen werden bei diesem Puls emittiert?

Allgemeine Aufgaben

34.24 • Die Wellenlänge einer Spektrallinie des Wasserstoffatoms beträgt $97,254 \text{ nm}$. Welchem Übergang, der zum Grundzustand führt, entspricht sie?

34.24 • Im Jahre 1947 zeigten Lamb und Rutherford, dass zwischen den Zuständen $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ eine geringe Energiedifferenz besteht. Lamb ermittelte die inzwischen nach ihm benannte *Lamb-Verschiebung* experimentell, wobei er mithilfe elektromagnetischer Strahlung sehr großer Wellenlänge Übergänge zwischen diesen Zuständen auslöste. Die Lamb-Verschiebung beträgt $4,372 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$ und wird in der Quantenelektrodynamik mit Fluktuationen im Energieniveau des Vakuums erklärt. a) Welche Frequenz hat ein Photon, dessen Energie derjenigen der Lamb-Verschiebung entspricht? b) Wie groß ist seine Wellenlänge, und zu welchem Spektralbereich gehört es?

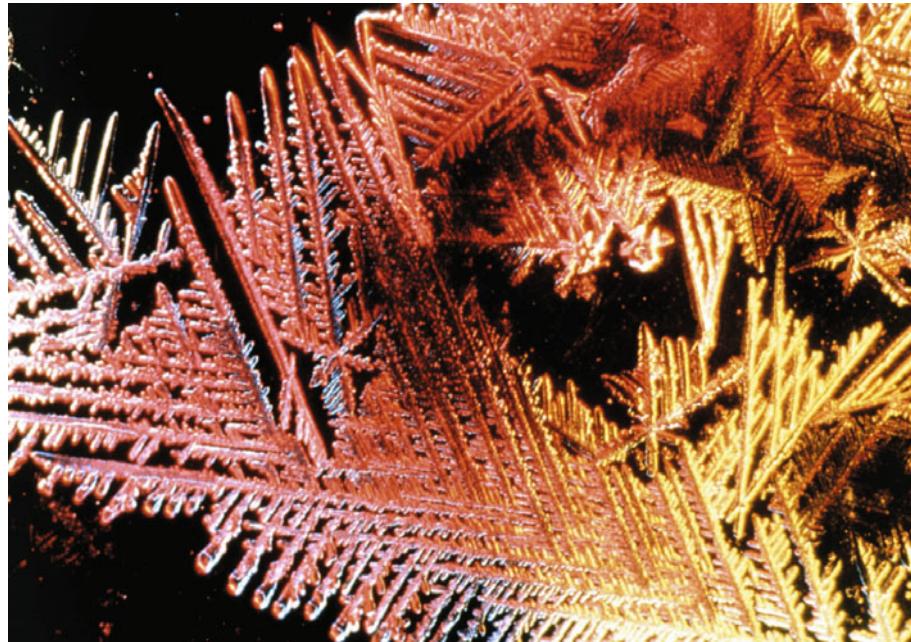
34.26 • Unter einem Rydberg-Atom versteht man ein Atom, in dem ein äußeres Elektron in einen *sehr* hoch angeregten Zustand ($n \approx 40$ oder höher) versetzt ist. Solche Atome sind nützlich, wenn man den Übergang vom quantenmechanischen zum klassischen Verhalten experimentell untersuchen will. Derartige angeregte Zustände haben eine extrem lange Lebensdauer (d. h., die Elektronen befinden sich sehr lange in ihnen). Nehmen Sie an, bei einem Wasserstoffatom ist $n = 45$. a) Wie hoch ist die Ionisierungsenergie des Atoms in diesem Zustand? b) Wie groß ist der Energieunterschied (in eV) zwischen diesem Zustand und dem mit $n = 44$? c) Wie groß ist die Wellenlänge eines Photons, das Resonanz mit dem Übergang zwischen diesen beiden Zuständen zeigt? d) Wie groß ist der Radius des Atoms im Zustand mit $n = 45$?

34.27 •• Der Ausdruck $\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} e^2/(\hbar c)$ mit der Coulomb-Konstante $1/(4\pi\varepsilon_0)$ wird in der Atomphysik als *Feinstrukturkonstante* bezeichnet. a) Zeigen Sie, dass α dimensionslos ist. b) Zeigen Sie, dass im Bohr'schen Modell des Wasserstoffatoms gilt: $v_n = c\alpha/n$, wobei v_n die Geschwindigkeit des Elektrons im Zustand mit der Quantenzahl n ist.

34.28 •• Damit im Röntgenspektrum eines Elements eine K-Linie beobachtet werden kann, muss zunächst eines der Elektronen der K-Schale (mit $n = 1$) aus dem Atom entfernt werden. Dazu beschießt man das Metall gewöhnlich mit Elektronen, deren Energie so hoch ist, dass ein solches stark gebundenes Elektron herausgeschlagen wird. Welche Elektronenenergie ist mindestens nötig, damit die K-Linien bei a) Wolfram, b) Molybdän bzw. c) Kupfer beobachtet werden können?

Moleküle

35



Mikroskopaufnahme von Natriumfluoridkristallen. Häufig wird dem Trinkwasser Natriumfluorid zugesetzt, weil das Spurenelement Fluor der Zahngesundheit zuträglich ist.
(© National Institutes of Health/Photo Researchers.)

? Wie viel Energie wird bei der Bildung von Natriumfluorid aus den Elementen umgesetzt?
(Siehe Beispiel 35.1.)

Moleküle

35.1	Die chemische Bindung	1252
35.2	*Mehratomige Moleküle	1258
35.3	*Energieniveaus und Spektren zweiatomiger Moleküle	1260
35.4	*Freiheitsgrade und der Gleichverteilungssatz	1266
	Zusammenfassung	1270
	Aufgaben	1272

In den meisten Fällen kommen Atome nicht isoliert vor, sondern treten zu Molekülen oder zu Festkörperkristallen zusammen. Moleküle dagegen können einzeln existieren, beispielsweise in gasförmigem O₂ oder N₂, aber sie können sich auch zu Flüssigkeiten oder Festkörpern vereinigen. Ein Atom bzw. ein Molekül ist der kleinste Baustein einer Substanz, der ihre chemischen Eigenschaften beibehält.

In diesem Kapitel wenden wir die in den vorigen Kapiteln behandelten Grundsätze der Quantenmechanik an, um die Molekülbindung sowie die Energieniveaus und die Spektren zweiatomiger Moleküle zu erklären. Dabei beschränken wir uns weitgehend auf die qualitative Beschreibung, weil die quantenmechanischen Berechnungen sehr schwierig sind.

35.1 Die chemische Bindung

Wir können die Moleküle von zwei extremen Standpunkten aus betrachten. Nehmen wir als Beispiel das Molekül H₂ des gasförmigen Wasserstoffs. Wir können es entweder als Einheit aus zwei H-Atomen ansehen, die miteinander verbunden sind, oder als ein quantenmechanisch zu behandelndes System aus zwei Protonen und zwei Elektronen. Die letztgenannte Methode wird erfolgreicher sein, denn im H₂-Molekül ist keines der Elektronen auf den Bereich um eines der beiden Protonen beschränkt. Vielmehr gehören beide Elektronen gleichermaßen zu beiden Protonen. Bei komplizierteren Molekülen ist jedoch eine Betrachtungsweise geeigneter, die zwischen den beiden erwähnten Extremen liegt. Beispielsweise enthält das Fluormolekül (F₂) 18 Protonen und 18 Elektronen, wobei aber nur zwei Elektronen am Zustandekommen der Bindung zwischen den Atomen beteiligt sind. Wir können uns dieses Molekül deshalb so vorstellen, als würden zwei positiv geladene Ionen F⁺ durch (in diesem Falle zwei) Elektronen zusammengehalten; diese Elektronen gehören dabei zum gesamten Molekül. Die molekularen Wellenfunktionen der bindenden Elektronen nennt man **Molekülorbitale**. In vielen Fällen kann man sie mithilfe von Kombinationen von atomaren Wellenfunktionen (also von Atomorbitalen) beschreiben.

Die zwei wichtigsten Typen der chemischen Bindung bei Festkörpern und bei Molekülen sind die Ionenbindung und die kovalente Bindung, auch Atombindung genannt. Hinzu kommen – vor allem beim Zusammenhalt von Molekülen in Flüssigkeiten und in Festkörpern – die Van-der-Waals- und die Wasserstoffbrückenbindung sowie die metallische Bindung. Meist entspricht der Bindungscharakter nicht genau einem der genannten Typen, sondern es liegt eine Mischform vor.

Die ionische Bindung

Die am einfachsten zu beschreibende Art der Bindung ist die **ionische Bindung**, die man in Salzen wie beispielsweise Natriumchlorid (NaCl) antrifft. Im Natriumatom befindet sich ein 3s-Elektron weitgehend außerhalb der beiden mit 10 Elektronen vollständig gefüllten inneren Elektronenschalen. Die erste Ionisierungsenergie von Natrium ist die Energie, die zum Entfernen dieses 3s-Valenzelektrons aus einem isolierten Natriumatom aufzubringen ist. Sie beträgt nur 5,14 eV (siehe Abbildung 34.19). Die Entfernung dieses Elektrons hinterlässt ein isoliertes positives Ion, das nur die vollständig gefüllten Elektronenschalen mit $n = 1$ und $n = 2$ aufweist. Beim Chloratom mit seinen 17 Elektronen fehlt gerade ein Elektron, damit

seine äußerste Unterschale vollständig gefüllt ist. Die Energie, die frei wird, wenn ein isoliertes Atom ein Elektron aufnimmt, heißt **Elektronenaffinität**. Beim Chlor beträgt sie -3,62 eV (sie ist negativ, da Energie abgegeben wird). Durch Aufnahme eines Elektrons entsteht also ein negativ geladenes Chlorion Cl⁻ mit einer ebenfalls abgeschlossenen äußeren Unterschale. Somit erfordert die Bildung eines Na⁺-Ions sowie eines Cl⁻-Ions durch Übergang eines Elektrons vom Natrium- zum Chloratom nur $5,14 \text{ eV} + (-3,62 \text{ eV}) = 1,52 \text{ eV}$, wenn beide Ionen sehr weit (mathematisch streng: unendlich weit) von einander entfernt sind. Die elektrostatische potenzielle Energie E_{pot} der beiden Ionen im Abstand r voneinander ist gegeben durch $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$. Sinkt der Abstand unter ungefähr 0,95 nm, dann ist die negative potenzielle Anziehungsenergie betragsmäßig größer als die Energie von 1,52 eV, die zur Bildung der Ionen aufzubringen ist. Also ist es bei geringem Abstand (unterhalb von rund 0,95 nm) energetisch günstiger, d.h., die Gesamtenergie des Systems ist geringer, wenn das Natriumatom ein Elektron an das Chloratom abgibt, wobei das Ionenpaar Na⁺Cl⁻ entsteht.

Da die elektrostatische Anziehungskraft ansteigt, wenn die Ionen näher zusammenrücken, könnte man annehmen, dass es keinen Gleichgewichtsabstand gibt. Doch bei sehr geringem Abstand der Ionen wirkt eine starke Abstoßungskraft, deren Natur quantenmechanisch zu erklären ist und mit dem *Pauli'schen Ausschließungsprinzip* oder *Pauli-Verbot* zusammenhängt. Diese Abstoßungskraft wirkt zwischen den Atomen aller Moleküle (außer beim Molekül H₂, bei dem sie einfach von den beiden positiv geladenen Protonen herrührt). Wir können den Abstoßungseffekt hier qualitativ erklären. Bei sehr großem Abstand der Ionen überlappt sich die Verteilung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines inneren Elektrons des einen Ions nicht mit derjenigen irgendeines Elektrons des anderen Ions. Also können wir die inneren Elektronen aufgrund ihrer Zuordnung zu jeweils einem der beiden Ionen unterscheiden. Folglich können Elektronen in den beiden Ionen dieselben vier Quantenzahlen haben, weil sie sich in verschiedenen Bereichen des Raums befinden und daher nicht dem Pauli-Verbot unterliegen. Doch bei weiter abnehmendem Abstand zwischen den Ionen beginnen sich die Verteilungen der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der inneren Elektronen zu überlappen. Nun besetzen Elektronen beider Ionen gleiche Bereiche im Raum. Wegen des Pauli-Verbots müssen daher einige Elektronen in Quantenzustände mit höherer Energie ausweichen. (Das Pauli-Verbot hängt – wie in Kapitel 33 besprochen – damit zusammen, dass die Wellenfunktion für zwei identische Elektronen antisymmetrisch bezüglich des Austauschs der Elektronen ist und dass eine antisymmetrische Wellenfunktion für zwei Elektronen mit den gleichen Quantenzahlen null ist, wenn die Raumkoordinaten der Elektronen dieselben sind.) Zum Ausweichen in Zustände höherer Energie ist Energie nötig. Diese Energiezunahme bei sinkendem Abstand ist gleichbedeutend mit einer Abstoßung der Ionen. Dabei läuft aber kein sprunghafter Vorgang ab. Die Energiezustände der Elektronen ändern sich vielmehr allmählich, wenn sich die Ionen einander nähern. In Abbildung 35.1 ist dargestellt, wie die potenzielle Energie E_{pot} der Ionen Na⁺ und Cl⁻

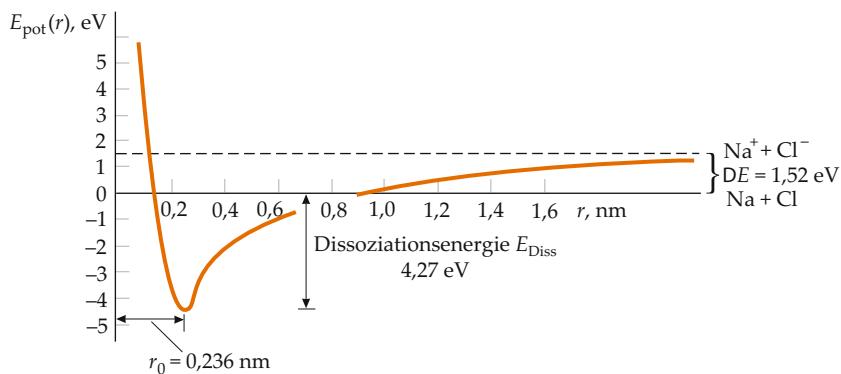


Abbildung 35.1 Die potenzielle Energie der Ionen Na^+ und Cl^- in Abhängigkeit von ihrem Abstand r . Die Energie der beiden separaten Ionen in unendlich großem Abstand beträgt 1,52 eV. Dies entspricht der Energie, die nötig ist, um aus den unendlich weit voneinander entfernten Ionen die neutralen Atome zu bilden. Die Energie des Ionenpaares ist minimal beim Gleichgewichtsabstand $r_0 = 0,236 \text{ nm}$.

von ihrem Abstand r abhängt. Sie entspricht der Summe aus der elektrostatischen Anziehungs- und der Abstoßungsenergie aufgrund des Pauli-Verbots. Beim Gleichgewichtsabstand r_0 von $0,236 \text{ nm}$ ist sie am geringsten, und bei kleineren Abständen steigt sie stark an. Die Energie, die aufzubringen ist, um die im Gleichgewichtsabstand vorliegenden Ionen voneinander zu trennen und die neutralen Atome zu bilden, nennt man **Dissoziationsenergie** E_{Diss} . Beim NaCl beträgt sie etwa 4,27 eV.

Der Gleichgewichtsabstand von $0,236 \text{ nm}$ liegt beim Ionenpaar Na^+Cl^- in der Gasphase vor. Die Ionenpaare kann man durch Verdampfen von festem NaCl erhalten. Normalerweise kristallisiert NaCl in einer kubischen Struktur, bei der die beiden Ionensorten die Ecken und die Flächenmitten von gegeneinander versetzten Würfeln besetzen. Der Abstand der Ionen Na^+ und Cl^- im Kristall beträgt ungefähr $0,28 \text{ nm}$ und ist damit etwas größer als der eben erwähnte Gleichgewichtsabstand von $0,236 \text{ nm}$ beim Ionenpaar in der Gasphase. Das liegt daran, dass wegen der Nachbarschaft weiterer Ionen mit entgegengesetzter Ladung die elektrostatische Anziehungsenergie pro Ionenpaar im Kristall etwas geringer ist als beim isolierten Ionenpaar. Der Zusammenhang zwischen Elektronenaffinität, Abstoßungs- und Dissoziationsenergie sowie Gleichgewichtsabstand wird in Beispiel 35.1 für Natriumfluorid betrachtet.

Beispiel 35.1: Die Energie eines Natriumfluorid-Ionenpaares

Fluor hat die Elektronenaffinität $-3,40 \text{ eV}$, und der Gleichgewichtsabstand beim Ionenpaar Na^+F^- beträgt $0,193 \text{ nm}$. a) Wie viel Energie ist nötig, um aus den neutralen Atomen Na und F die Ionen Na^+ und F^- zu bilden? b) Wie hoch ist die elektrostatische potenzielle Energie der beiden Ionen bei ihrem Gleichgewichtsabstand? c) Die Dissoziationsenergie von NaF beträgt $5,38 \text{ eV}$. Wie groß ist die Abstoßungsenergie E_{rep} der Ionen beim Gleichgewichtsabstand?

Problembeschreibung: a) Die Energie ΔE , die zum Erzeugen der Ionen Na^+ und F^- aus dem jeweiligen Atom nötig ist, entspricht der Summe aus der ersten Ionisierungsenergie von Natrium ($5,14 \text{ eV}$) und der Elektronenaffinität von Fluor ($-3,40 \text{ eV}$). b) Die elektrostatische potenzielle Energie ist bei unendlich großem Abstand null, und im Gleichgewichtsabstand r_0 ist sie $E_{\text{pot},0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_0}$. c) Wenn wir die potenzielle Energie in unendlich großem Abstand auf ΔE umnormieren, dann ist die negative Dissoziationsenergie $-E_{\text{Diss}} = (E_{\text{pot},0} + \Delta E) + E_{\text{rep}}$. Dabei ist E_{rep} die Abstoßungsenergie bei der Gleichgewichtslage; diese Energie ist zu ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

Berechnen Sie die Energie, die nötig ist, um die Ionen Na^+ und F^- aus den neutralen Atomen Na und F zu bilden:

$$\Delta E = 5,14 \text{ eV} + (-3,40 \text{ eV}) = \boxed{1,74 \text{ eV}}$$

Teilaufgabe b

Berechnen Sie die elektrostatische potenzielle Energie beim Gleichgewichtsabstand $r_0 = 0,193 \text{ nm}$:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot},0} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_0} \\ &= -\frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{1,93 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \\ &= -1,19 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \boxed{-7,45 \text{ eV}} \end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Die Dissoziationsenergie E_{Diss} ist gleich der negativen Summe aller Energien beim Gleichgewichtsabstand. Dar-

aus lässt sich die Abstoßungsenergie E_{rep} berechnen:

$$E_{\text{Diss}} = -(E_{\text{pot},0} + \Delta E + E_{\text{rep}})$$

Also ist

$$\begin{aligned} E_{\text{rep}} &= -(E_{\text{Diss}} + \Delta E + E_{\text{pot},0}) \\ &= -(5,38 \text{ eV} + 1,74 \text{ eV} - 7,45 \text{ eV}) \\ &= [0,33 \text{ eV}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet ist das Ergebnis der Teilaufgabe c größer als null. ■

Die kovalente Bindung

Ein vollkommen anderer Mechanismus, die **kovalente Bindung**, kommt bei gleichen oder ähnlichen Atomen zum Tragen, wenn Moleküle wie beispielsweise die der Gase Wasserstoff (H_2), Stickstoff (N_2) oder Kohlenmonoxid (CO) gebildet werden. Wir können die Energie berechnen, die nötig wäre, um durch Übertragung eines Elektrons die Ionen H^+ und H^- zu erzeugen. Addieren wir diese Energie zu der elektrostatischen potenziellen Energie zwischen den Ionen, dann stellen wir fest, dass es keinen Abstand gibt, bei dem die Gesamtenergie negativ ist. Die Bindung kann daher nicht ionisch sein. Sie lässt sich nicht klassisch, sondern nur quantenmechanisch deuten. Die Abnahme der Energie bei der Annäherung zweier Wasserstoffatome beruht darauf, dass beide Elektronen dann zu beiden Atomen gleichzeitig gehören. Dies kann anhand der Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktionen der Elektronen erklärt werden.

Das Prinzip der kovalenten Bindung können wir uns mithilfe eines einfachen eindimensionalen Beispiels klarmachen. Dazu betrachten wir zwei Kästen mit endlich hohen Potenzialwänden und nehmen zunächst an, dass sich ein einzelnes Elektron mit gleichen Wahrscheinlichkeiten in einem der beiden Kästen befindet (Abbildung 35.2). Da die Kästen identisch sind, muss die Wahrscheinlichkeitsverteilung (die proportional zu $|\psi|^2$ ist) symmetrisch zur Mitte zwischen den Kästen sein. Dann muss ψ bezüglich des Austauschs der Kästen entweder symmetrisch (ψ_S) oder antisymmetrisch (ψ_A) sein. Die beiden Möglichkeiten für den Grundzustand sind in Abbildung 35.2a für den Fall dargestellt, dass die Kästen weit auseinander liegen, und in Abbildung 35.2b für den Fall, dass sie einander nahe sind. Wichtig ist, dass im Bereich zwischen den Kästen die symmetrische Wellenfunktion groß und die antisymmetrische Wellenfunktion klein ist; letztere hat hier sogar eine Nullstelle.

Nun bringen wir ein zweites Elektron in die beiden Kästen ein. In Abschnitt 33.6 haben wir gesehen, dass die Wellenfunktionen für Teilchen, die dem Pauli'schen Ausschlussprinzip gehorchen, bezüglich des Austauschs der Teilchen antisymmetrisch sind. Dann muss die gesamte Wellenfunktion für die

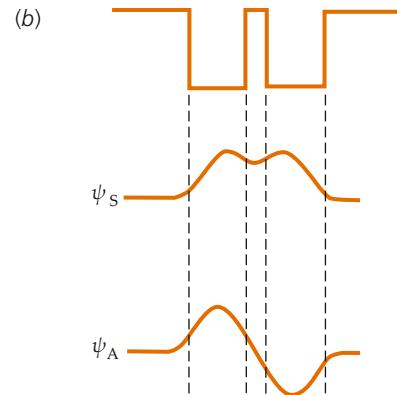
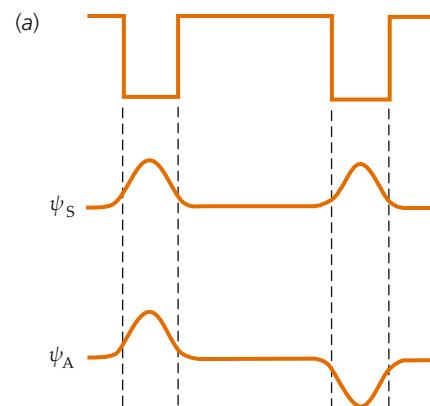


Abbildung 35.2 a) Zwei weit auseinander liegende Kästen mit endlich hohen Potenzialwänden. Die Wellenfunktion des Elektrons kann räumlich entweder symmetrisch (ψ_S) oder antisymmetrisch (ψ_A) sein. b) Die beiden Kästen sind nahe beisammen. Zwischen ihnen ist die räumlich antisymmetrische Wellenfunktion ungefähr null, während die symmetrische hier groß ist.

beiden Elektronen antisymmetrisch bezüglich des Austauschs der Elektronen sein. Beachten Sie, dass der Austausch der Elektronen in den an ihrem Platz verbleibenden Kästen hier dem Austausch der Kästen selbst entspricht, wobei die Elektronen an ihrem Platz verbleiben. Die gesamte Wellenfunktion für zwei Elektronen kann daher als Produkt eines räumlichen Anteils und eines Spinanteils ausgedrückt werden. Eine antisymmetrische Wellenfunktion kann dabei entweder das Produkt eines symmetrischen räumlichen Anteils und eines antisymmetrischen Spinanteils sein oder das Produkt eines symmetrischen Spinanteils und eines antisymmetrischen räumlichen Anteils.

Um die Symmetrie der gesamten Wellenfunktion zu klären, müssen wir zunächst die Symmetrie ihres Spinanteils untersuchen. Die Spinzahl eines einzelnen Elektrons kann zwei Werte haben: $m_S = +\frac{1}{2}$ oder $m_S = -\frac{1}{2}$. Den positiven Wert der Spinzahl symbolisiert man meist durch \uparrow_1 beim Elektron 1 und durch \uparrow_2 beim Elektron 2. Für den negativen Wert schreibt man entsprechend \downarrow_1 bzw. \downarrow_2 . Der Gesamtspin zweier

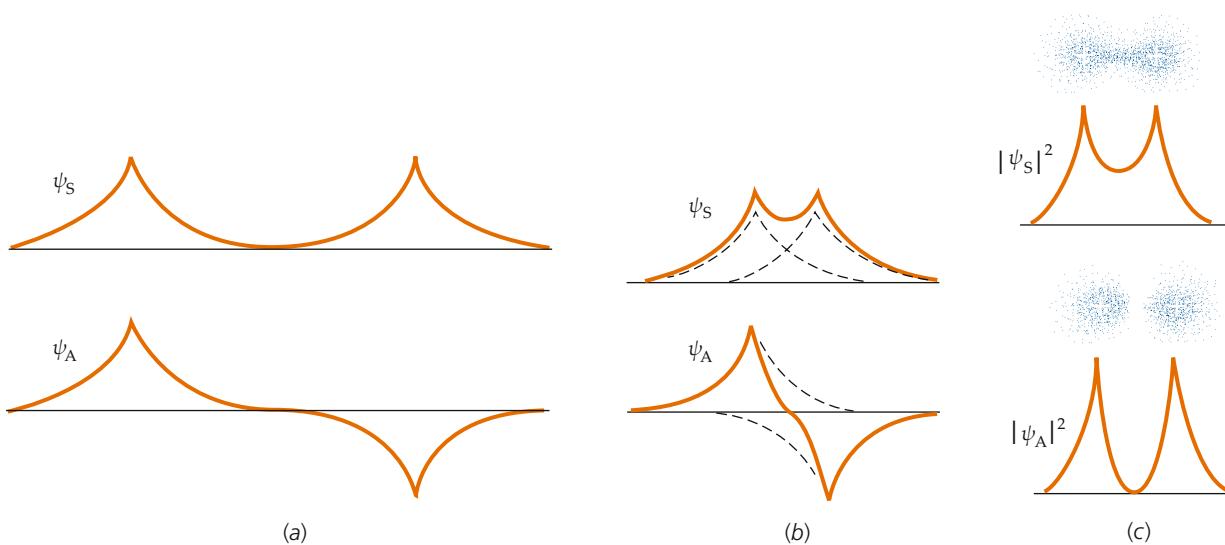


Abbildung 35.3 Die räumlichen Ausdrücke der (hier eindimensional dargestellten) symmetrischen und der antisymmetrischen Wellenfunktion für zwei Wasserstoffatome a) bei großem Abstand und b) bei kleinem Abstand der Protonen. c) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Elektronen für die Wellenfunktionen von Teilabbildung b. Bei der symmetrischen Wellenfunktion ψ_S ist die Ladungsdichte der Elektronen zwischen den Protonen hoch, sodass die Protonen im Wasserstoffmolekül H_2 zusammengehalten werden. Dagegen ist bei der antisymmetrischen Wellenfunktion ψ_A die Ladungsdichte zwischen den Protonen gering.

Elektronen kann $S = 1$ sein, wobei $m_S = +1, 0$ oder -1 ist; er kann aber auch $S = 0$ sein, wobei $m_S = 0$ ist. Wir bezeichnen nun mit φ_{S,m_S} die Spinwellenfunktion für zwei Elektronen. Der Spinzustand $\varphi_{1,+1}$, der $S = 1$ und $m_S = +1$ entspricht, kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\varphi_{1,+1} = \uparrow_1 \uparrow_2 \quad \text{mit } S = 1, m_S = +1. \quad (35.1)$$

Analog dazu ist der Spinzustand mit $S = 1$ und $m_S = -1$ gegeben durch

$$\varphi_{1,-1} = \downarrow_1 \downarrow_2 \quad \text{mit } S = 1, m_S = -1. \quad (35.2)$$

Beachten Sie, dass diese beiden Zustände symmetrisch bezüglich des Austauschs der Elektronen sind. Für den Spinzustand mit $S = 1$ und $m_S = 0$ gilt (wie hier nicht gezeigt werden kann):

$$\varphi_{1,0} = \uparrow_1 \downarrow_2 + \uparrow_2 \downarrow_1 \quad \text{mit } S = 1, m_S = 0. \quad (35.3)$$

Auch dieser Spinzustand ist symmetrisch bezüglich des Austauschs der Elektronen. Der Spinzustand für zwei Elektronen mit antiparallelen Spins ($S = 0$) ist

$$\varphi_{0,0} = \uparrow_1 \downarrow_2 - \uparrow_2 \downarrow_1 \quad \text{mit } S = 0, m_S = 0. \quad (35.4)$$

Dieser Spinzustand ist antisymmetrisch bezüglich des Austauschs der Elektronen.

Diesen vier Gleichungen entnehmen wir folgenden wichtigen Sachverhalt: Der *Spinanteil* der Wellenfunktion ist bei parallelen Spins ($S = 1$) symmetrisch und bei antiparallelen Spins ($S = 0$) antisymmetrisch. Da die gesamte Wellenfunktion das Produkt aus räumlichem Anteil und Spinanteil ist, gilt:

Damit die gesamte Wellenfunktion zweier Elektronen bezüglich des Austauschs der Elektronen antisymmetrisch ist, muss ihr räumlicher Anteil antisymmetrisch sein, wenn die Spins parallel sind (Gesamtspin $S = 1$); entsprechend muss er bei antiparallelen Spins (Gesamtspin $S = 0$) symmetrisch sein.

SPINAUSRICHTUNGEN UND SYMMETRIE DER WELLENFUNKTION

Kehren wir nun zu den beiden Wasserstoffatomen zurück. Abbildung 35.3a zeigt zwei Wellenfunktionen der Elektronen zweier Wasserstoffatome, die weit voneinander entfernt sind. Dabei ist ψ_S die räumlich symmetrische und ψ_A die räumlich antisymmetrische Wellenfunktion. In Abbildung 35.3b sind die Atome einander nahe. Die Betragsquadrate beider Wellenfunktionen sind für diesen Fall in Abbildung 35.3c dargestellt. Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi|^2$ im Bereich zwischen den Protonen bei der symmetrischen Wellenfunktion hoch, bei der antisymmetrischen Wellenfunktion dagegen klein ist. Wenn also der räumliche Anteil der Wellenfunktion symmetrisch ist (ψ_S), dann halten sich die Elektronen mit hoher Wahrscheinlichkeit zwischen den Protonen auf. Über den Kurven ist in Abbildung 35.3c die jeweilige Ladungswolke der Elektronen angedeutet. Bei der symmetrischen Wellenfunktion (oben) ist sie zwischen den Protonen konzentriert. Dagegen halten sich die Elektronen bei der antisymmetrischen Wellenfunktion (unten) mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit zwischen den Protonen auf (Abbildung 35.3c), und die Atome werden nicht zu einem Molekül aneinander gebunden.

Die gesamte elektrostatische potenzielle Energie des H_2 -Moleküls setzt sich zusammen aus einem positiven Anteil aufgrund der Abstoßung der Elektronen bzw. der Protonen

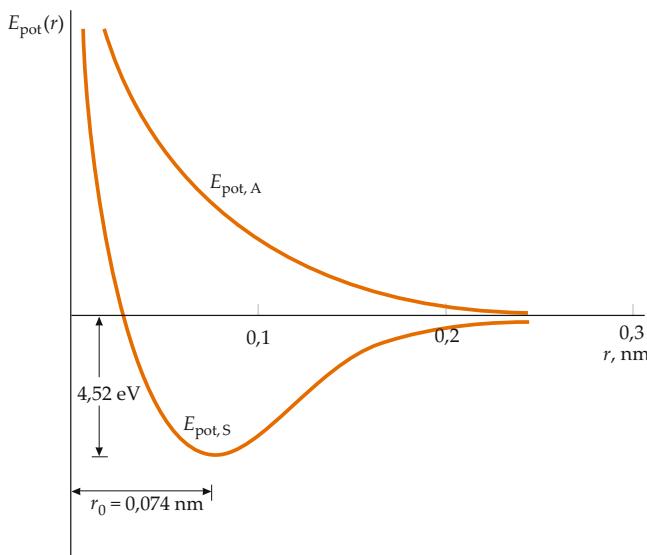


Abbildung 35.4 Die potenzielle Energie zweier Wasserstoffatome als Funktion ihres Abstands. Die Kurve $E_{\text{pot},S}$ entspricht einer Wellenfunktion mit symmetrischem räumlichen Anteil und die Kurve $E_{\text{pot},A}$ einer Wellenfunktion mit antisymmetrischem räumlichen Anteil.

und einem negativen Anteil aufgrund der Anziehung zwischen Elektronen und Protonen. Abbildung 35.4 zeigt, wie die elektrostatische potenzielle Energie zweier Wasserstoffatome von ihrem Abstand abhängt: $E_{\text{pot},S}$ bei symmetrischem räumlichen Anteil der Elektronenwellenfunktion und $E_{\text{pot},A}$ bei antisymmetrischem räumlichen Anteil. Die potenzielle Energie ist bei der symmetrischen Wellenfunktion geringer als bei der antisymmetrischen; ferner durchläuft sie ein Minimum, wobei die Kurve derjenigen bei der Ionenbindung (siehe Abbildung 35.1) ähnelt. Der Gleichgewichtsabstand der Protonen im H_2 -Molekül ist $r_0 = 0,074 \text{ nm}$, und die Bindungsenergie liegt bei $-4,52 \text{ eV}$. Bei der antisymmetrischen Wellenfunktion ist die potenzielle Energie niemals negativ, und es entsteht keine Bindung.

Wir können nun erklären, warum es kein Molekül H_3 (mit drei Wasserstoffatomen) geben kann. Kommt ein drittes Wasserstoffatom einem H_2 -Molekül sehr nahe, dann kann sich sein Elektron (das insgesamt dritte) nicht ebenfalls in einem $1s$ -Zustand befinden und gleichzeitig seinen Spin antiparallel zu den Spins der beiden anderen Elektronen ausrichten. Hat das dritte Elektron eine Wellenfunktion mit antisymmetrischem räumlichen Anteil bezüglich des Austauschs mit einem der übrigen beiden Elektronen, dann ist die Abstoßung dieses Atoms stärker als die Anziehung des anderen. Gemäß dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip muss das dritte Elektron in einen höheren Quantenzustand gelangen, wenn die drei Atome einander genähert werden. Die Bindung zwischen zwei Wasserstoffatomen gehört zu den **gesättigten Bindungen**, weil kein weiteres Elektron hinzutreten kann. Im Wasserstoffmolekül befinden sich die zu den zwei Protonen gleichzeitig gehörenden Elektronen im Wesentlichen in den $1s$ -Zuständen beider Atome.

Jetzt wird auch klar, warum es normalerweise kein He_2 -Molekül gibt. Zwar liegen hier zwei Valenzelektronen vor, die eine Bindung wie im Wasserstoffmolekül erzeugen können. Das dritte und das vierte Elektron jedoch müssen Zustände besetzen, deren Wellenfunktionen einen antisymmetrischen räumlichen Anteil haben, was zur Abstoßung führt. Bei sehr tiefen Temperaturen oder hohen Drücken können Heliumatome aber aufgrund von Van-der-Waals-Kräften aneinander gebunden werden; auf diese kommen wir später noch zu sprechen. Diese Bindung ist so schwach, dass Helium unter Atmosphärendruck schon bei 4 K siedet, jedoch bei keiner Temperatur einen Festkörper bildet, solange der Druck geringer als etwa 20 bar ist.

Wenn zwei gleiche Atome, beispielsweise in den Molekülen in O_2 oder N_2 , aneinander gebunden sind, dann ist die Bindung rein kovalent. Dagegen wird die Bindung zweier unterschiedlicher Atome meist eine Mischung aus kovalenter und ionischer Bindung darstellen. Sogar beim Ionenpaar Na^+Cl^- besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron, das vom Natriumatom auf das Chloratom überging, beim Natriumatom befindet; denn das Betragsquadrat seiner Wellenfunktion ist nahe beim Natriumatom zwar klein, aber nicht null. Daher gehört dieses Elektron (wie bei der kovalenten Bindung) teilweise zu beiden Atomen, wobei das aber nur einen geringen Beitrag zur Bindung liefert; diese ist zum allergrößten Teil ionisch.

In welchem Ausmaß eine Bindung ionisch bzw. kovalent ist, kann aus dem gemessenen elektrischen Dipolmoment des Moleküls oder Ionenpaares abgeschätzt werden. Wäre beispielsweise beim NaCl die Bindung rein ionisch, dann befände sich das Zentrum der positiven Ladungswolke beim Na^+ -Ion und das Zentrum der negativen Ladung beim Cl^- -Ion. Der Betrag des elektrischen Dipolmoments wäre dann

$$\varrho_{\text{ion}} = e r_0 . \quad (35.5)$$

Darin ist $r_0 = 2,36 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ der Gleichgewichtsabstand der beiden Ionen (siehe Abbildung 35.1) und e die Elementarladung. Damit ergäbe sich das Dipolmoment von NaCl zu

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{ion}} &= e r_0 \\ &= (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (2,36 \cdot 10^{-10} \text{ m}) \\ &= 3,78 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m} . \end{aligned}$$

Der gemessene Wert ist

$$\varrho_{\text{exp}} = 3,00 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m} .$$

Das Verhältnis $\varrho_{\text{exp}}/\varrho_{\text{ion}}$ kann man als den Anteil definieren, zu dem die Bindung ionisch ist. Beim NaCl beträgt es $3,00/3,78 = 0,79$. Also ist die Bindung im NaCl zu ungefähr 79 % ionisch.

Nicht alle kovalenten Bindungen haben einen ionischen Anteil. So sind Bindungen zwischen gleichen Atomen stets rein kovalent.

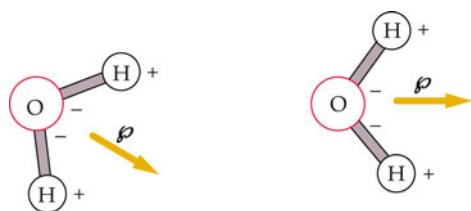


Abbildung 35.5 Das Zustandekommen der Van-der-Waals-Kräfte, hier am Beispiel zweier H₂O-Moleküle gezeigt. Das elektrische Feld des einen permanenten elektrischen Dipolmoments ρ richtet den anderen Dipol so aus, dass beide möglichst parallel sind. Dann befindet sich das Zentrum der negativen Ladung des einen Moleküls recht nahe beim Zentrum der positiven Ladung des anderen Moleküls, sodass beide Moleküle einander anziehen.

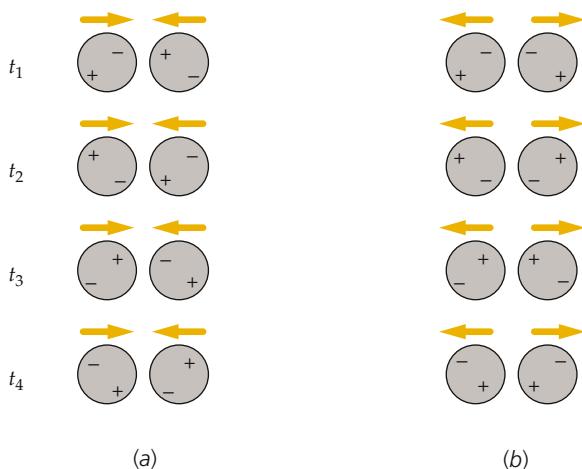
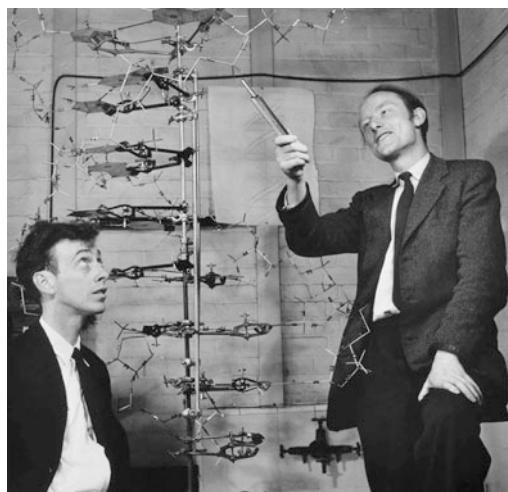


Abbildung 35.6 Das Zustandekommen von Van-der-Waals-Kräften zwischen unpolaren Atomen oder Molekülen (deren zeitliches Mittel des Dipolmoments also gleich null ist). Die gelben Pfeile repräsentieren die Kräfte, die auf die Atome bzw. die Moleküle ausgeübt werden. a) Mögliche relative Orientierungen von momentanen Dipolmomenten, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten zur Anziehung führen. b) Mögliche relative Orientierungen, die zur Abstoßung führen. Das elektrische Feld eines momentanen Dipols wirkt jedoch induzierend, sodass das andere Teilchen entsprechend polarisiert wird. Daher sind die zur Abstoßung führenden Orientierungen (b) viel unwahrscheinlicher als die zur Anziehung führenden (a).

Übung 35.1: Der Gleichgewichtsabstand der Atome im Molekül HCl beträgt 0,128 nm. Sein elektrisches Dipolmoment wurde zu $3,60 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ gemessen. Wie hoch ist der ionische Anteil der Bindung im HCl-Molekül? ▶

Die Van-der-Waals-Bindung

Auch zwischen Atomen oder Molekülen, die keine ionische oder kovalente Bindung eingehen können, wirken elektrostatische Anziehungskräfte, die sogenannten *Van-der-Waals-Kräfte*. Die von ihnen hervorgerufene Bindung ist wesentlich schwächer als die ionische oder die kovalente Bindung. Bei höherer

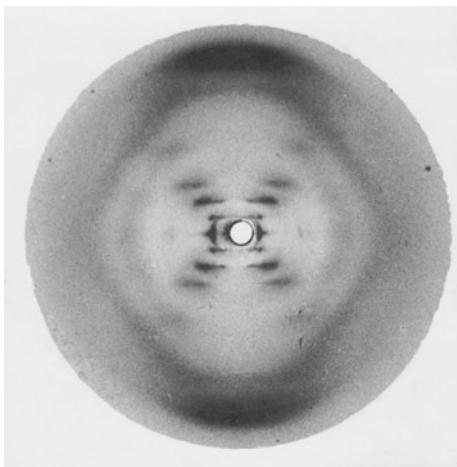


Die Entdecker der DNA-Struktur. Das Foto zeigt James Watson (links) und Francis Crick im Jahre 1953 mit ihrem Teilmodell eines DNA-Moleküls. Beide hatten sich 1951 im Cavendish Laboratory in Cambridge kennengelernt. Ihrer Arbeit zur Struktur der DNA lagen die Chargaff'schen Regeln über die Mengenverhältnisse der Basen in der DNA sowie röntgenkristallographische Daten von Maurice Wilkins und Rosalind Franklin vom King's College in London zugrunde. Watson und Crick erkannten, dass die DNA-Moleküle eine Doppelhelix (Doppelspirale) bilden. Crick, Watson und Wilkins erhielten 1962 den Nobelpreis für Physiologie oder Medizin; Franklin starb 1958 an Krebs. (© Photo Researchers.)

Temperatur sind diese Kräfte nicht mehr stark genug, um die thermische Bewegung zu verhindern, die die Atome oder Moleküle voneinander trennen kann. Doch bei geringeren Temperaturen gewinnen die Van-der-Waals-Kräfte die Oberhand und halten die Teilchen zusammen. Daher bilden fast alle Substanzen bei tiefer Temperatur Flüssigkeiten bzw. Festkörper. (Helium ist die einzige Substanz, die unter Atmosphärendruck bei keiner Temperatur zu einem Festkörper erstarrt.) Die Van-der-Waals-Kräfte beruhen auf der Wechselwirkung von momentan induzierten oder von permanenten elektrischen Dipolmomenten der Moleküle oder Atome.

Abbildung 35.5 zeigt, wie die Van-der-Waals-Kräfte zwischen zwei polaren Molekülen zustande kommen. Unter einem polaren Molekül versteht man ein Molekül mit einem *permanenten* elektrischen Dipolmoment. Als Beispiel ist hier das H₂O-Molekül gewählt. Das vom Dipolmoment des einen Moleküls hervorgerufene elektrische Feld richtet das andere Molekül so aus, dass die beiden Dipolmomente einander anziehen.

Auch zwischen unpolaren Molekülen, also solchen ohne permanentes Dipolmoment, können Van-der-Waals-Kräfte wirken. Zwar ist ihr mittleres Dipolmoment gleich null, aber aufgrund der zeitlichen Schwankung der Elektronendichte werden momentane (transiente, d. h. vorübergehende) Dipolmomente induziert. Wenn zwei unpolare Moleküle einander nahe sind, treten diese momentanen Dipolmomente miteinander in Wechselwirkung, sodass die Moleküle oder Atome einander anziehen. Das ist in Abbildung 35.6 dargestellt.



Röntgenbeugungsmuster der B-Form der DNA. Maurice Wilkins machte – ohne nach ihrem Einverständnis zu fragen – Rosalind Franklins noch nicht publizierte Röntgenbeugungsmuster der B-Form der DNA den Kollegen Watson und Crick zugänglich. Diese Informationen trugen entscheidend zur Aufklärung der Doppelhelixstruktur bei. Später schrieb Watson dazu: „Als ich die Aufnahme sah, stand mir der Mund offen, und mein Puls raste. ... Das schwarze Kreuz, das die Reflexionen beherrschte, konnte nur von einer Helixstruktur herrühren. ... Schon eine erste Auswertung dieser Aufnahme lieferte mehrere Parameter der Helix.“ (© A. Barrington Brown/Photo Researchers, NY.)

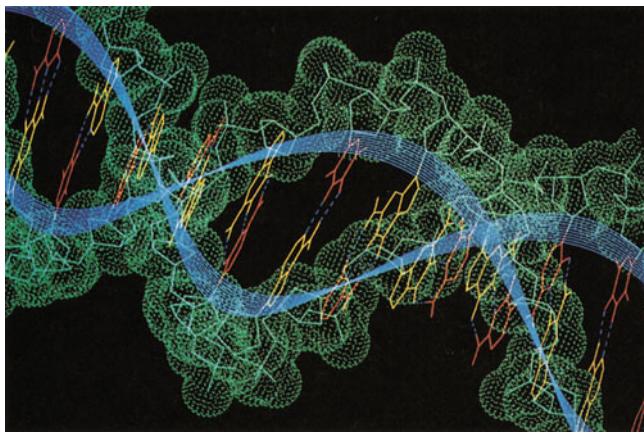


Abbildung 35.7 Ausschnitt aus dem Modell eines DNA-Moleküls. (© Will und Demi McIntyre/Photo Researchers.)

Die Wasserstoffbrückenbindung

Ein weiterer wichtiger Bindungsmechanismus ist die Wasserstoffbrückenbindung, die schwächer ist als die ionische oder die kovalente Bindung, aber stärker als die Van-der-Waals-Bindung. Die Wasserstoffbrückenbindung tritt auf, wenn ein Proton (Wasserstoffkern) eines Moleküls an ein Sauerstoff-, Stickstoff- oder Fluoratom gebunden ist und gleichzeitig als Verbindungsglied zu einem anderen solchen Atom (im selben oder in einem anderen Molekül) wirkt. Diese „Aufteilung“ des Protons auf zwei Atome ähnelt der vorhin besprochenen Aufteilung eines

Elektrons zwischen verschiedenen Atomen bei der kovalenten Bindung. Sie wird erleichtert durch die geringe Masse und Größe des Protons sowie durch die Abwesenheit innerer Elektronen im Wasserstoffatom. Die Wasserstoffbrückenbindung ist verantwortlich für den relativ hohen Siedepunkt des Wassers und für die Sekundärstruktur bzw. Vernetzung bei Peptiden und anderen Makromolekülen natürlichen oder technischen Ursprungs. Die seit gut 50 Jahren bekannte Doppelhelixstruktur der DNA beruht auf Wasserstoffbrückenbindungen zwischen den beiden Strängen des Moleküls (Abbildung 35.7).

Die metallische Bindung

In einem Metall sind die Atome nicht dadurch aneinander gebunden, dass sie paarweise Elektronen austauschen oder miteinander teilen, wobei ein entsprechendes Molekül entstünde. Stattdessen gehört in einem Metall jedes Valenzelektron zu sehr vielen Atomen, und die Bindung verteilt sich damit über das gesamte Volumen. Die Struktur eines Metalls kann man sich als Raumgitter aus positiven Ionen vorstellen, zwischen denen sich ein Elektronen-„Gas“ befindet, dessen Teilchen sich im Wesentlichen frei bewegen können. Diese freien Elektronen bilden eine Wolke negativer Ladungsdichte zwischen den positiv geladenen Gitterionen und halten das Gitter dadurch zusammen. Insofern ist die metallische Bindung der kovalenten Bindung nicht unähnlich. Jedoch sind an der metallischen Bindung stets sehr viel mehr Atome beteiligt als an der kovalenten Bindung, und die negative Ladung der Valenzelektronen ist gleichmäßig im Volumen des Metalls verteilt. Die Anzahl der freien Elektronen variiert von Metall zu Metall, ist aber stets ähnlich hoch wie die der Atome.

35.2 *Mehratomige Moleküle

Zu den Molekülen mit mehr als zwei Atomen gehören so kleine und einfache Moleküle wie die des Wassers (mit einer Molmasse von 18 g/mol), aber auch riesige Makromoleküle wie von Proteinen oder der DNA, mit Molmassen von Hunderttausenden oder gar Millionen g/mol. Die Struktur solcher Moleküle kann man im Prinzip mit denselben quantenmechanischen Methoden beschreiben, wie wir sie auf zweiatomige Moleküle angewandt haben. Bei mehramtigen Molekülen liegen kovalente Bindungen und teilweise auch Wasserstoffbrückenbindungen vor. Wir wollen hier nur einige der einfachsten mehramtigen Moleküle (nämlich H_2O , NH_3 und CH_4) besprechen, um sowohl die Einfachheit als auch die Leistungsfähigkeit der quantenmechanischen Beschreibung zu illustrieren.

Für das Zustandekommen einer kovalenten Bindung ist entscheidend, dass sich die Wellenfunktionen der Valenzelektronen der einzelnen Atome möglichst stark überlappen. Als erstes Beispiel betrachten wir das Wassermolekül. Das Sauerstoffatom hat im Grundzustand die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^4$. Die $1s$ - und die $2s$ -Elektronen besetzen vollständig gefüllte Schalen bzw. Unterschalen und tragen nicht zur Bindung bei. Die

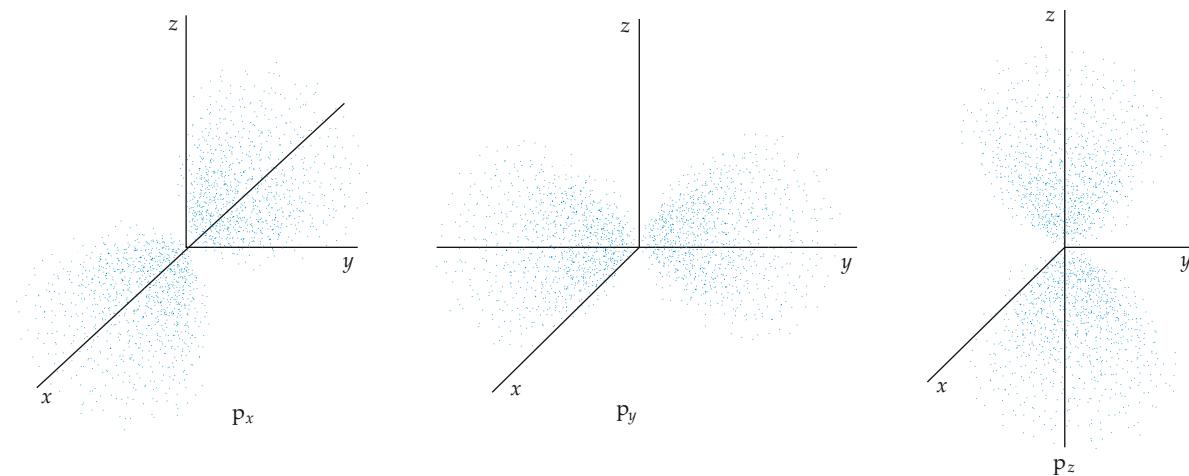


Abbildung 35.8 Computergrafiken der räumlichen Verteilung der Elektronenladung in den drei Atomorbitalen p_x , p_y und p_z .

2p-Unterschale kann sechs Elektronen aufnehmen, und zwar je zwei in jedem der drei räumlichen Zustände (Orbitale) mit der Drehimpulsquantenzahl $\ell = 1$. In einem isolierten Atom können wir diese räumlichen Zustände durch wasserstoffähnliche Wellenfunktionen beschreiben, wobei $\ell = 1$ und $m_\ell = +1, 0$ oder -1 ist. Da diese räumlichen Zustände die gleiche Energie haben, können wir auch irgendwelche linearen Kombinationen ihrer Wellenfunktionen verwenden. Wenn ein Atom an einer kovalenten Bindung beteiligt ist, sind nur bestimmte Kombinationen dieser atomaren Wellenfunktionen wichtig. Diese Linearkombinationen nennt man p_x -, p_y - und p_z -Atomorbitale. Ihre Winkelabhängigkeiten sind gegeben durch

$$p_x \propto \sin \theta \cos \phi, \quad (35.6)$$

$$p_y \propto \cos \theta \cos \phi, \quad (35.7)$$

$$p_z \propto \cos \phi. \quad (35.8)$$

Die Ladungsverteilung der Elektronen ist bei diesen Orbitalen entlang der x -, y - bzw. z -Achse maximal, wie in Abbildung 35.8 gezeigt ist.

Beim Sauerstoffatom können im H_2O -Molekül die Elektronenwellenfunktionen maximal überlappen, wenn zwei der vier 2p-Elektronen mit antiparallelen Spins in einem der Atomorbitale gepaart sind (wir nehmen hier an, im p_z -Orbital) und sich das dritte 2p-Elektron in einem zweiten Orbital (dem p_x -Orbital) und das vierte 2p-Elektron im dritten Orbital (dem p_y -Orbital) befinden. Jedes der ungepaarten Elektronen (hier im p_x - und im p_y -Orbital) geht dann eine Bindung mit dem Elektron jeweils eines Wasserstoffatoms ein, wie in Abbildung 35.9 dargestellt ist. Wegen der gegenseitigen Abstoßung der Wasserstoffatome ist der Winkel zwischen den beiden O–H-Bindungen größer als 90° . Das Ausmaß dieser Abstoßung kann man berechnen, und das Ergebnis stimmt mit dem gemessenen Winkel von $104,5^\circ$ überein.

Mithilfe ähnlicher Überlegungen kann man die Bindung im NH_3 -Molekül (das hier nicht gezeigt ist) erklären. Im Grundzu-

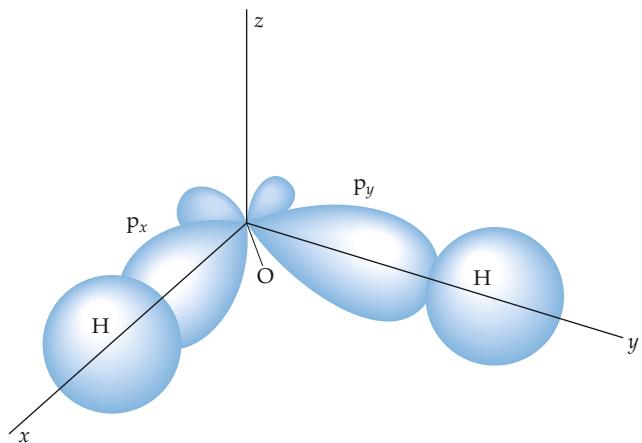


Abbildung 35.9 Die Verteilung der Elektronenladung (schematisch) im H_2O -Molekül.

stand hat das Stickstoffatom drei 2p-Elektronen. Da sich diese in den Atomorbitalen p_x , p_y und p_z befinden, können sie mit je einem Elektron eines Wasserstoffatoms eine Bindung eingehen. Auch hier ist der Winkel zwischen den Bindungen wegen der Abstoßung der Wasserstoffatome etwas größer als 90° .

Bei der Bindung von Kohlenstoffatomen ist die Situation etwas komplizierter. Kohlenstoff bildet sehr unterschiedliche Bindungen aus, was zur großen Vielfalt der organischen Substanzen führt. Das Kohlenstoffatom hat im Grundzustand die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^2$. Nach unseren bisherigen Überlegungen könnten wir erwarten, dass Kohlenstoff zweibündig (zweiwertig) ist, wobei seine beiden 2p-Elektronen je eine Bindung eingehen, die einen Winkel von ungefähr 90° einschließen. Aber eines der Hauptmerkmale der Chemie des Kohlenstoffs ist dessen fast durchgehend anzutreffende Vierbindigkeit, wie beispielsweise im CH_4 -Molekül.

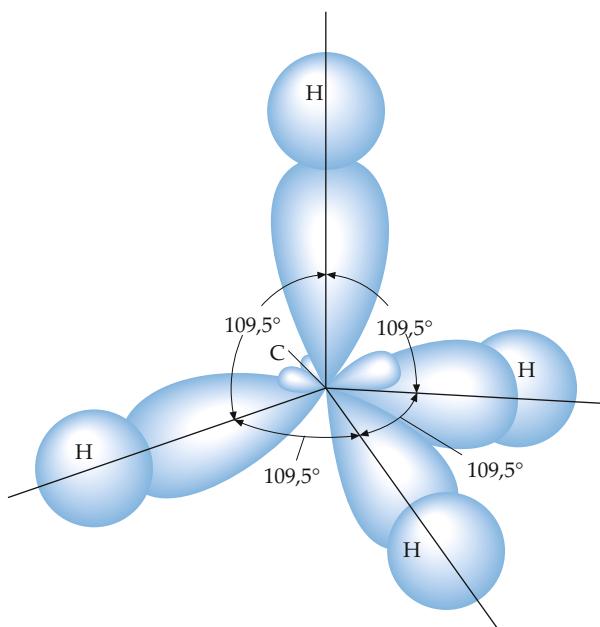


Abbildung 35.10 Die Verteilung der Elektronenladung (schematisch) im Methanmolekül (CH_4).

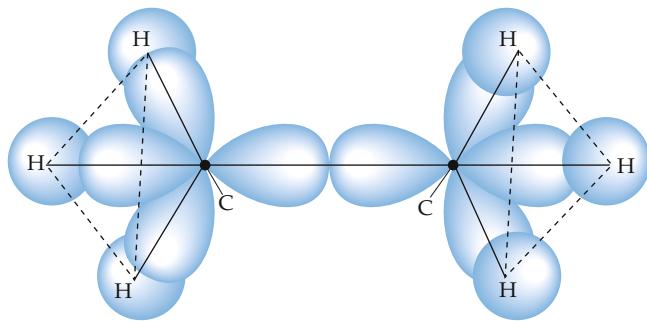


Abbildung 35.11 Die Verteilung der Elektronenladung (schematisch) im Ethanmolekül ($\text{CH}_3\text{-CH}_3$).

Die Vierbindigkeit des Kohlenstoffs kommt auf interessante Weise zustande. Im ersten angeregten Zustand des Kohlenstoffatoms ist ein $2s$ -Elektron in einen $2p$ -Zustand angeregt (dies nennt man **Promotion**), sodass die Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^1 2p^3$ lautet. In diesem angeregten Zustand liegen vier ungepaarte Elektronen vor, und zwar je eines in den $2s$ -, $2p_x$ -, $2p_y$ - und $2p_z$ -Atomorbitalen. Nun könnte man erwarten, dass drei einander ähnliche Bindungen entstehen, nämlich die mit den drei p -Orbitalen, und eine etwas andere Bindung mit dem s -Orbital. Doch die vier Bindungen, die das Kohlenstoffatom eingeht, sind gleichwertig. Das beruht darauf, dass die erwähnten vier Atomorbitale „gemischt“ werden. Bei dieser **Hybridisierung** entstehen vier neue, *gleichwertige* Orbitale, die sogenannten **Hybridorbitale**. In Abbildung 35.10 ist die daraus hervorgehende Tetraederstruktur des Methanmoleküls

(CH_4) dargestellt, und Abbildung 35.11 zeigt die Struktur des Ethanmoleküls ($\text{CH}_3\text{-CH}_3$). Dieses kann man sich formal so vorstellen, dass zwei Methanmoleküle miteinander verbunden sind, wobei aber zwei C–H-Bindungen (je eine von jedem Methanmolekül) durch eine einzige C–C-Bindung ersetzt sind.

Die Atomorbitale des Kohlenstoffatoms können auch auf andere Weise hybridisieren. Dabei entstehen aus den Orbitalen s , p_x und p_y (also ohne Beteiligung des p_z -Orbitals) drei Hybridorbitale in der x - y -Ebene. Diese können Bindungen eingehen, die jeweils einen Winkel von 120° einschließen. Ein Beispiel dafür ist im Graphit anzutreffen, in dem die Bindungen in der x - y -Ebene für die Schichtstruktur verantwortlich sind.

35.3 *Energieniveaus und Spektren zweiatomiger Moleküle

Wie ein Atom kann auch ein Molekül elektromagnetische Strahlung emittieren, wenn es von einem angeregten Zustand in einen Zustand mit niedrigerer Energie übergeht. Umgekehrt kann ein Molekül Strahlung absorbieren und dabei einen energetisch höheren Zustand erreichen. Die Emissions- und die Absorptionsspektren von Molekülen geben Aufschluss über deren Energiezustände. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur zweiatomige Moleküle.

Bei der inneren Energie, die ein Molekül abgibt oder aufnimmt, kann man drei Formen unterscheiden: die Anregung der Elektronen, die Schwingung der Atome und die Rotation des Moleküls um seinen Massenmittelpunkt. Die jeweiligen Energiebeträge sind in der Regel sehr unterschiedlich, sodass man sie getrennt betrachten kann. Die mit den elektronischen Anregungen eines Moleküls zusammenhängenden Energien liegen in der Größenordnung von 1 eV , wie auch bei den Atomen. Dagegen sind die Änderungen der Schwingungs- und der Rotationsenergie deutlich kleiner.

Rotationsenergieniveaus

Abbildung 35.12 zeigt ein einfaches Modell eines zweiatomigen Moleküls. Es besteht aus zwei Atomen im Abstand r , die die Massen m_1 und m_2 haben. Das Molekül kann um eine Achse rotieren, die senkrecht zur Verbindungslinie der Atome durch seinen Massenmittelpunkt verläuft. Nach den Gesetzen der klassischen Physik ist die kinetische Energie der Rotation (siehe Gleichung 8.14) gegeben durch

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (35.9)$$

Darin ist I das Trägheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit bzw. Kreisfrequenz der Rotation. Mit dem Drehimpuls $L = I \omega$ ergibt sich

$$E = \frac{(I \omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}. \quad (35.10)$$

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung für die Rotation führt zur Quantisierung des Drehimpulses, wobei für das Quadrat von L folgende Werte möglich sind:

$$L^2 = J(J+1)\hbar^2, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (35.11)$$

Hierin ist J die **Rotationsquantenzahl**. Diese Quantenbedingung entspricht derjenigen beim Bahndrehimpuls eines Elektrons im Atom. Beachten Sie aber, dass die Größe L in Gleichung 35.10 den Drehimpuls des ganzen Moleküls bezüglich einer Achse durch seinen Massenmittelpunkt angibt. Die Energieniveaus eines rotierenden Moleküls ergeben sich daher zu

$$E_{\text{rot}} = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I} = J(J+1)B, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (35.12)$$

ROTATIONSENERGIELEVELS

Darin ist B die **Rotationskonstante** oder *charakteristische Rotationsenergie* des betreffenden Moleküls. Sie ist umgekehrt proportional zu seinem Trägheitsmoment:

$$B = \frac{\hbar^2}{2I}. \quad (35.13)$$

ROTATIONSKONSTANTE (CHARAKTERISTISCHE ROTATIONSENERGIE)

Aus dem Spektrum eines Moleküls kann man seine Rotationsenergieniveaus und damit auch sein Trägheitsmoment ermitteln. Daraus ist der Abstand der Atome im Molekül zu berechnen. Das Trägheitsmoment eines zweiatomigen Moleküls um eine durch seinen Massenmittelpunkt verlaufende Achse (siehe Abbildung 35.12) ist

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

Mit den Abständen r_1 und r_2 der beiden Atomkerne vom Massenmittelpunkt des Moleküls gilt: $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Der Gleichgewichtsabstand der Atome ist dabei definiert als $r_0 = r_1 + r_2$. Damit ergibt sich (wie in Aufgabe 35.12 gezeigt wird) für das Trägheitsmoment:

$$I = m_{\text{red}} r_0^2. \quad (35.14)$$

Darin ist m_{red} die **reduzierte Masse**:

$$m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (35.15)$$

DEFINITION DER REDUZIERTEN MASSE

Wenn beide Massen gleich sind ($m_1 = m_2 = m$), beispielsweise bei Molekülen wie H_2 und O_2 , dann ist die reduzierte Masse gleich der halben Atommasse: $m_{\text{red}} = \frac{1}{2}m$, und das Trägheitsmoment ist

$$I = \frac{1}{2} m r_0^2. \quad (35.16)$$

In Beispiel 35.2 wird die reduzierte Masse des Moleküls HCl (Chlorwasserstoff) und in Beispiel 35.3 die Rotationskonstante des Moleküls O_2 (Sauerstoff) berechnet.

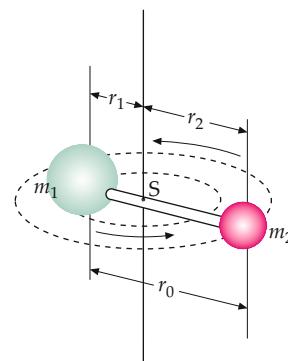


Abbildung 35.12 Hantelmodell eines zweiatomigen Moleküls, das um eine Achse rotieren kann, die durch seinen Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) S verläuft und senkrecht auf der Bindungsachse steht.

Beispiel 35.2: Die reduzierte Masse eines zweiatomigen Moleküls

Berechnen Sie die reduzierte Masse des HCl-Moleküls.

Problembeschreibung: Die Atommassen von Wasserstoff und Chlor sind dem Periodensystem der Elemente in Anhang 40.3 zu entnehmen. Zudem wird die Definition der reduzierten Masse gemäß Gleichung 35.15 benötigt. (In den Tabellen werden meist die Atommassen der Elemente mit der natürlichen Isotopenverteilung angegeben. Dann beträgt die Masse eines Kohlenstoffatoms nicht 12,000 u, sondern 12,011 u, weil der natürliche Kohlenstoff aus ungefähr 98,9 % ^{12}C und 1,1 % ^{13}C besteht. Natürliches Chlor besteht aus rund 76 % ^{35}Cl und 24 % ^{37}Cl .)

Lösung: 1. Die reduzierte Masse m_{red} des HCl-Moleküls hängt von den Massen m_{H} und m_{Cl} der Atome gemäß Gleichung 35.15 ab:

$$m_{\text{red}} = \frac{m_{\text{H}} m_{\text{Cl}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{Cl}}}$$

2. Schlagen Sie die Atommassen der Elemente nach:

$$m_{\text{H}} = 1,01 \text{ u}, \quad m_{\text{Cl}} = 35,5 \text{ u}$$

3. Setzen Sie die Werte in die obige Gleichung ein, um die reduzierte Masse zu berechnen:

$$\begin{aligned} m_{\text{red}} &= \frac{m_{\text{H}} m_{\text{Cl}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{Cl}}} = \frac{(1,01 \text{ u}) \cdot (35,5 \text{ u})}{1,01 \text{ u} + 35,5 \text{ u}} \\ &= [0,982 \text{ u}] \end{aligned}$$

Weitergedacht: Beachten Sie, dass die reduzierte Masse kleiner ist als die geringere der beiden Atommassen; hier

liegt sie also nahe bei der des Wasserstoffatoms. Wenn in einem zweiatomigen Molekül ein Atom *viel* schwerer als das andere ist, dann liegt der Massenmittelpunkt des Moleküls nahe beim Zentrum des schwereren Atoms, und die reduzierte Masse ist etwa gleich der des leichteren Atoms.

se eines neutralen Atoms des Kohlenstoff-12-Isotops (^{12}C). Die Masse eines ^{12}C -Atoms beträgt also 12 u, und die Masse eines Atoms in der atomaren Masseneinheit u ist daher numerisch gleich der Molmasse des Atoms in Gramm. Mit der Avogadro-Zahl n_A gilt für die atomare Masseneinheit:

$$1 \text{ u} = \frac{1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{n_A} = \frac{10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}{6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (35.17)$$

Beispiel 35.3: Die Rotationskonstante eines zweiatomigen Moleküls

Schätzen Sie die Rotationskonstante des O_2 -Moleküls ab. Nehmen Sie dabei einen Atomabstand von 0,100 nm an.

Problembeschreibung: Die Rotationskonstante ist gegeben durch Gleichung 35.13: $B = \hbar^2 / (2I)$, wobei I das Trägheitsmoment des Moleküls ist. Für dieses gilt $I = m_{\text{red}} r_0^2$ (Gleichung 35.14), wobei m_{red} die reduzierte Masse des Moleküls und r_0 der mittlere Abstand der Mittelpunkte der Atome ist.

Lösung: 1. Die Rotationskonstante B ist umgekehrt proportional zum Trägheitsmoment I :

$$B = \frac{\hbar^2}{2I}$$

2. Berechnen Sie das Trägheitsmoment:

$$I = m_{\text{red}} r_0^2 = \frac{1}{2} m r_0^2$$

3. Setzen Sie diesen Ausdruck für I in den Ausdruck für B ein:

$$B = \frac{\hbar^2}{m r_0^2}$$

4. Berechnen Sie mit $m = 16 \text{ u}$ für die Masse des Sauerstoffatoms und mit den bekannten Werten der Konstanten die Rotationskonstante B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{\hbar^2}{m r_0^2} \\ &= \frac{(1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{(16 \text{ u}) \cdot (0,100 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2} \frac{1 \text{ u}}{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \\ &= 4,19 \cdot 10^{-23} \text{ J} = [2,62 \cdot 10^{-4} \text{ eV}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet ist die Rotationskonstante klein gegenüber 1 eV, also klein gegenüber der typischen Energie der Anregung eines Elektrons.

Für die Angabe von Atom- und Molekülmassen bietet sich die **atomare Masseneinheit u** an. Sie ist definiert als $\frac{1}{12}$ der Mas-

In Beispiel 35.3 wird deutlich, dass die Energieniveaus der Rotation um einige Größenordnungen kleiner sind als die der Elektronenanregung; bei dieser liegen sie in der Größenordnung von 1 eV oder sind noch höher. Jeder Übergang zwischen zwei Rotationsenergieniveaus ist mit der Emission oder Absorption eines Photons im Mikrowellenbereich des elektromagnetischen Spektrums verknüpft. Die Energiedifferenzen zwischen den Rotationsniveaus sind bei gewöhnlichen Temperaturen auch klein gegenüber der thermischen Energie $k_B T$. Diese ist beispielsweise bei $T = 300 \text{ K}$ (Raumtemperatur) mit rund $2,6 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ ungefähr 100-mal so groß wie die Rotationskonstante (vgl. Beispiel 35.3) und macht andererseits nur etwa 1 % der typischen elektronischen Anregungsenergie aus. Bei gewöhnlichen Temperaturen kann ein Molekül also durch Stöße mit anderen Molekülen leicht in ein anderes, etwas höheres Rotationsenergieniveau übergehen, jedoch nicht in ein elektronisches Energieniveau gelangen, das oberhalb des Grundzustands liegt.

Frage 35.1

Bei Raumtemperatur kann ein zweiatomiges Gasmolekül Übergänge zwischen Rotationsniveaus erfahren. Warum ist das bei einem einzelnen Atom, beispielsweise eines Edelgases, nicht möglich?

Schwingungsenergieniveaus

Die Quantisierung der Energie bei einem einfachen harmonischen Oszillator war eines der ersten Probleme, deren Lösungen Schrödinger im Zusammenhang mit seiner Wellengleichung publizierte. Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für einen einfachen harmonischen Oszillator ergeben folgende Energieniveaus:

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \frac{1}{2}\right) h\nu, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (35.18)$$

SCHWINGUNGSENERGIE NIVEAUS

Darin ist v die Frequenz des Oszillators und v die **Schwingungsquantenzahl**. (Wir schreiben hier nicht n , sondern v , um eine Verwechslung mit der Hauptquantenzahl n der Energieniveaus der Elektronen zu vermeiden.) Interessant an den Schwingungsenergieniveaus ist, dass sie äquidistant sind, also stets denselben Abstand $h\nu$ haben. Die Eigenfrequenz eines

zweiatomigen Moleküls hängt mit der Kraft zusammen, die seine Atome in der Bindung aufeinander ausüben. Wir betrachten dazu wieder zwei Objekte mit den Massen m_1 und m_2 , die über eine Feder mit der Federkonstante k_F miteinander verbunden sind. Die Eigenfrequenz dieses Systems ist gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m_{\text{red}}}}. \quad (35.19)$$

Darin ist m_{red} die reduzierte Masse gemäß Gleichung 35.15. Die effektive Kraftkonstante k_F eines zweiatomigen Moleküls kann man daher ermitteln, wenn man spektroskopisch die Eigenfrequenz des Moleküls misst. In Beispiel 35.4 wird die Kraftkonstante des CO-Moleküls (Kohlenmonoxid) berechnet.

Beispiel 35.4: Bestimmung der Kraftkonstante eines Moleküls

Die Schwingungsfrequenz des CO-Moleküls beträgt $6,42 \cdot 10^{13}$ Hz. Wie groß ist seine effektive Kraftkonstante?

Problembeschreibung: Es ist Gleichung 35.19 anzuwenden, die die Kraftkonstante k_F mit der Frequenz ν und der reduzierten Masse m_{red} verknüpft: $2\pi\nu = \sqrt{k_F/m_{\text{red}}}$. Die reduzierte Masse m_{red} ist mithilfe von Gleichung 35.15 zu berechnen.

Lösung: 1. Die effektive Kraftkonstante hängt gemäß Gleichung 35.19 von der Frequenz und der reduzierten Masse ab:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m_{\text{red}}}}$$

Also ist

$$k_F = (2\pi\nu)^2 m_{\text{red}}$$

2. Berechnen Sie die reduzierte Masse, wobei Sie 12 u für die Masse des Kohlenstoffatoms und 16 u für die des Sauerstoffatoms einsetzen:

$$m_{\text{red}} = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O} = \frac{(12 \text{ u}) \cdot (16 \text{ u})}{12 \text{ u} + 16 \text{ u}} = 6,86 \text{ u}$$

3. Setzen Sie diesen Wert von m_{red} in die Gleichung für k_F in Schritt 1 ein und rechnen Sie in SI-Einheiten um:

$$\begin{aligned} k_F &= (2\pi\nu)^2 m_{\text{red}} \\ &= 4\pi^2 \cdot (6,42 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1})^2 \cdot (6,86 \text{ u}) \\ &= (1,12 \cdot 10^{30} \text{ u} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1 \text{ u}} \\ &= 1,85 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir überprüfen die Einheiten bei der letzten Umformung: In der vorletzten Zeile hat die Kraftkonstante die Einheit $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$, da sich die Einheit u herauskürzt. Der Vergleich mit der Definition der Krafteinheit $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ergibt, dass $1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$ dasselbe wie $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ist, und dies ist die korrekte Einheit für die Kraftkonstante. ■

Auch für die Übergänge zwischen den Schwingungszuständen gilt (bei unverändertem elektronischen Zustand) eine Auswahlregel; nach ihr kann sich die Schwingungsquantenzahl ν nur um ± 1 ändern. Daher ist die Energie eines Photons, das bei einem solchen Übergang emittiert oder absorbiert wird, gleich $h\nu$, und seine Frequenz ist ν , also ebenso groß wie die Frequenz der Schwingung im angeregten Zustand. Eine ähnliche Auswahlregel gilt für die Rotationsquantenzahl J , die sich ebenfalls nur um ± 1 ändern kann, wenn das Molekül in einen anderen Rotationszustand übergeht.

Ein typischer Messwert der Schwingungsfrequenz bei einem Übergang zwischen zwei Schwingungszuständen ist $5 \cdot 10^{13}$ Hz. Damit ergibt sich die Größenordnung der Änderungen der Schwingungsenergie zu

$$E = h\nu \approx (4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}) \cdot (5 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}) = 0,2 \text{ eV}.$$

Diese Schwingungsenergie ist ungefähr 1000-mal größer als die Rotationskonstante B (die charakteristische Rotationsenergie) des O₂-Moleküls, die wir in Beispiel 35.3 berechnet haben, und ungefähr 8-mal größer als die thermische Energie $k_B T = 0,026 \text{ eV}$ bei $T = 300 \text{ K}$. Daher werden bei gewöhnlichen Temperaturen auch die Übergänge zwischen Schwingungsenergieniveaus fast nie durch Molekülstöße ausgelöst.

Emissionsspektren

Abbildung 35.13 zeigt für ein zweiatomiges Molekül schematisch einige Übergänge zwischen verschiedenen elektronischen Energieniveaus sowie Schwingungs- und Rotationsenergieniveaus. Die Schwingungs- und die Rotationsniveaus sind mit den zugehörigen Quantenzahlen (ν bzw. J) beschriftet. Die niedrigeren Schwingungsniveaus sind äquidistant, wobei $\Delta E = h\nu$ ist. Bei höheren Schwingungsenergieniveaus ist das nicht mehr der Fall. Der Oszillator kann dann nicht mehr durch die Näherung des harmonischen Oszillators beschrieben werden. Beachten Sie in der Abbildung außerdem, dass die Kurven für die potenzielle Energie zwischen den Atomen in den beiden elektronischen Zuständen (Grundzustand und angeregter Zustand) unterschiedlich geformt sind und ihre Minima nicht beim gleichen Atomabstand haben. Die Grundfrequenzen der Schwingung sind in den beiden elektronischen Zuständen also etwas unterschiedlich. Für Übergänge zwischen Schwingungszuständen in verschiedenen elektronischen Zuständen gilt die Auswahlregel $\Delta\nu = \pm 1$ nicht. Solche Übergänge sind mit der Emission oder Absorption eines Photons mit Wellenlängen im

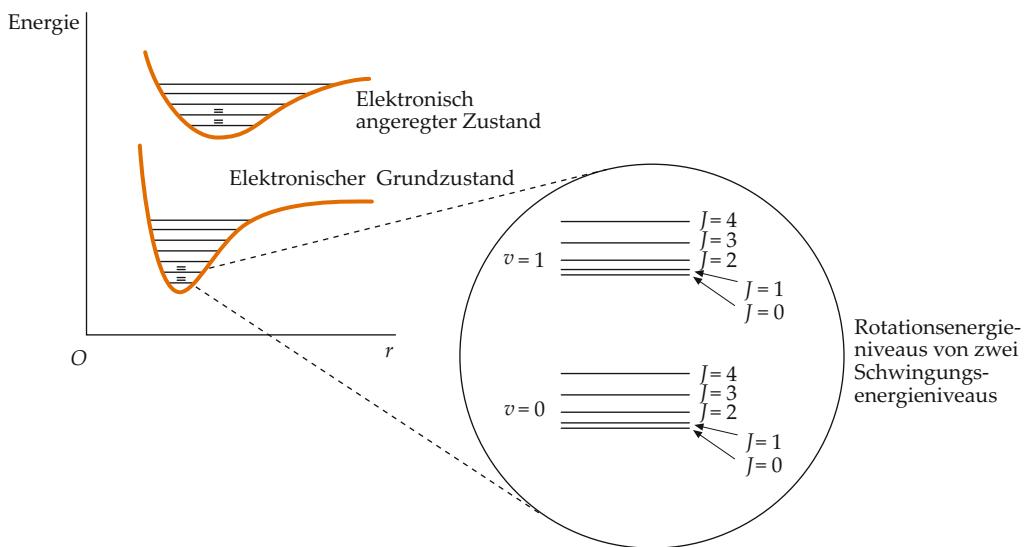


Abbildung 35.13 Energieniveaus der Schwingung und der Rotation eines zweiatomigen Moleküls, jeweils im Grundzustand und im ersten angeregten Zustand der Elektronen. In der Vergrößerung sind für den elektronischen Grundzustand die Rotationsenergieniveaus des Grundzustands der Schwingung ($v = 0$) und diejenigen des ersten angeregten Zustands ($v = 1$) herausgezeichnet, jeweils mit den Energieniveaus der Rotation für $J = 0$ bis $J = 4$.

sichtbaren Spektralbereich oder nahe diesem verknüpft; daher spricht man hierbei auch vom *optischen Spektrum* des betreffenden Moleküls.

Der Abstand der Rotationsenergieniveaus steigt mit zunehmenden Werten der Rotationsquantenzahl J an. Da die Quanten der Rotationsenergie eines Moleküls viel kleiner sind als die der Schwingung oder der elektronischen Anregung, führen die Rotationsübergänge in den optischen Molekülspektren zu einer Feinstruktur der Spektrallinien. Wenn diese nicht aufgelöst wird, erscheinen im Spektrum sogenannte Banden, wie sie in Abbildung 35.14a gezeigt sind. Bei höherer Auflösung werden die Linien der Rotationsenergieniveaus jedoch erkennbar, wie aus der vergrößerten Teilabbildung c hervorgeht.

Absorptionsspektren

In der Molekülspektroskopie wird häufig die Infrarotabsorption ausgenutzt. Durch Infrarotstrahlung werden nur Schwingungs- und Rotationsübergänge des elektronischen Grundzustands angeregt. Bei Raumtemperatur (um 300 K) ist die zum Anregen von Schwingungen erforderliche Energie größer als die thermische Energie $k_B T$. Daher befinden sich die meisten Moleküle im Schwingungsgrundzustand $v = 0$, dessen Energie $E_0 = \frac{1}{2} h \nu$ ist. Durch die Absorption von Infrarotstrahlung wird vor allem der Übergang von $v = 0$ zu $v = 1$ hervorgerufen. Die Differenzen zwischen den Energieniveaus der Rotation sind jedoch bei rund 300 K viel kleiner als die thermische Energie $k_B T$, sodass sich die Moleküle in verschiedenen Rotationszuständen befinden. Nehmen wir an, ein Molekül hat zu Beginn die Rotationsquantenzahl J und befindet sich im Grundzustand der

Schwingung ($v = 0$). Dann ist seine Anfangsenergie

$$E_J = \frac{1}{2} h \nu + J(J+1)B. \quad (35.20)$$

Darin ist B die Rotationskonstante gemäß Gleichung 35.13. Aus diesem Zustand sind gemäß den Auswahlregeln zwei Übergänge erlaubt. Beim Übergang in den nächsthöheren Schwingungszustand mit $v = 1$ und in den Rotationszustand mit $J + 1$ wird folgende Endenergie erreicht:

$$E_{J+1} = \frac{3}{2} h \nu + (J+1)(J+2)B. \quad (35.21)$$

Die zweite Möglichkeit des Übergangs ist die, dass das Molekül ebenfalls den nächsthöheren Schwingungszustand $v = 1$ erreicht, jedoch den Rotationszustand mit $J - 1$. Dann ist seine Endenergie

$$E_{J-1} = \frac{3}{2} h \nu + (J-1)JB. \quad (35.22)$$

Die Energiedifferenzen beim Übergang in den höheren Schwingungs- und den höheren Rotationszustand sind daher

$$\Delta E_{J \rightarrow J+1} = E_{J+1} - E_J = h \nu + 2(J+1)B, \\ \text{mit } J = 0, 1, 2, \dots \quad (35.23)$$

Die Energiedifferenzen beim Übergang in den höheren Schwingungs- und den niedrigeren Rotationszustand sind

$$\Delta E_{J \rightarrow J-1} = E_{J-1} - E_J = h \nu - 2JB, \\ \text{mit } J = 1, 2, 3, \dots \quad (35.24)$$

Hier kann J nicht 0 sein, weil von $J = 0$ nur ein Übergang zu $J = 1$ möglich ist.

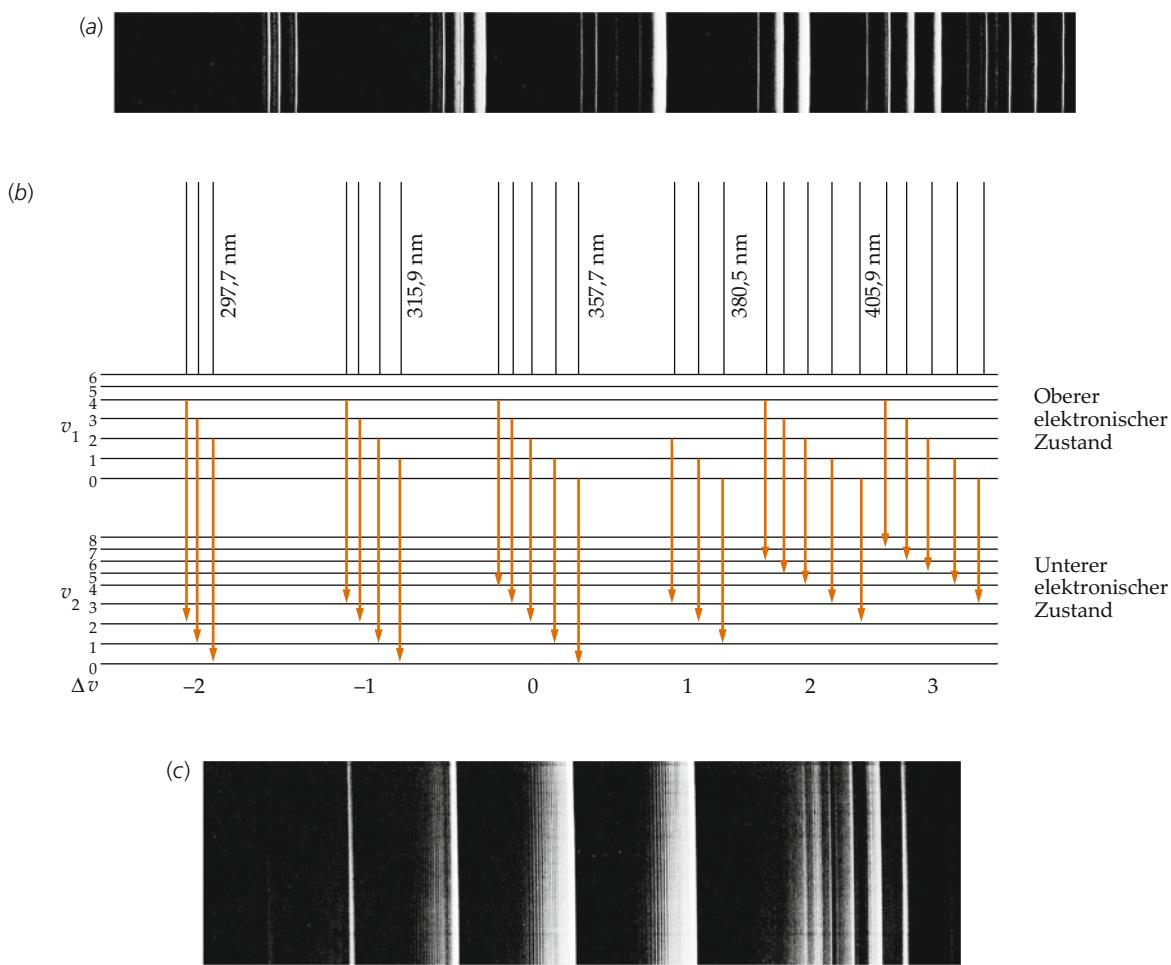


Abbildung 35.14 a) Ein Teil des Emissionsspektrums von H_2 . Diese Spektrallinien röhren von Übergängen zwischen den Schwingungsniveaus zweier elektronischer Zustände her, die in Teilabbildung b angegeben sind. b) Die Übergänge mit ihrer Zuordnung zu den jeweiligen Spektrallinien. c) Diese Ausschnittvergrößerung der Teilabbildung a zeigt, dass im Spektrum Banden eng benachbarter Linien vorliegen, die von den Rotationsübergängen herrühren. (Mit freundlicher Genehmigung von Dr. J. A. Marqusee.)

Abbildung 35.15 zeigt diese Übergänge. Die entsprechenden Frequenzen sind gegeben durch

$$\nu_{J \rightarrow J+1} = \frac{\Delta E_{J \rightarrow J+1}}{h} = \nu + \frac{2(J+1)B}{h}, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (35.25)$$

und

$$\nu_{J \rightarrow J-1} = \frac{\Delta E_{J \rightarrow J-1}}{h} = \nu - \frac{2JB}{h}, \quad J = 1, 2, 3, \dots \quad (35.26)$$

Die Frequenzen bei den Übergängen $J \rightarrow J+1$ sind also $(\nu + 2B/h)$, $(\nu + 4B/h)$, $(\nu + 6B/h)$ usw., und bei den Übergängen $J \rightarrow J-1$ sind sie $(\nu - 2B/h)$, $(\nu - 4B/h)$, $(\nu - 6B/h)$ usw. Wir erwarten im Absorptionsspektrum daher äquidistante Frequenzen, deren Abstand jeweils $2B/h$ beträgt, jedoch mit einer Lücke von $4B/h$ bei der Schwingungsfrequenz ν des angeregten Moleküls (Abbildung 35.16). Aus der Frequenz, bei der die Lücke auftritt, kann man also die Schwingungsfrequenz ν

ableiten. Die Lücke beruht darauf, dass der reine Schwingungsübergang (mit $\Delta v = \pm 1$ und $\Delta J = 0$) nicht erlaubt ist. Aus dem Abstand der Absorptionsmaxima ergibt sich die Rotationskonstante B , die umgekehrt proportional zum Trägheitsmoment des Moleküls ist.

Abbildung 35.17 zeigt das Absorptionsspektrum von HCl . Jede Linie ist in zwei Linien mit unterschiedlichen Intensitäten aufgespalten; dies röhrt daher, dass das natürliche Element Chlor zwei Isotope (^{35}Cl und ^{37}Cl) enthält. Im Grunde liegen also zwei verschiedene HCl -Molekülsorten mit unterschiedlichen Trägheitsmomenten vor. Die Linien mit der geringeren Intensität gehören zum selteneren Isotop ^{37}Cl .

In der Abbildung fällt auf, dass die Intensitäten der Linienspaare in jedem Zweig mit steigender Frequenz zunächst zu- und dann abnehmen. Dies liegt an den unterschiedlichen Besetzungszahlen der Zustände. Wären zu Beginn sämtliche Rotationsenergieniveaus gleich stark besetzt, dann hätten alle

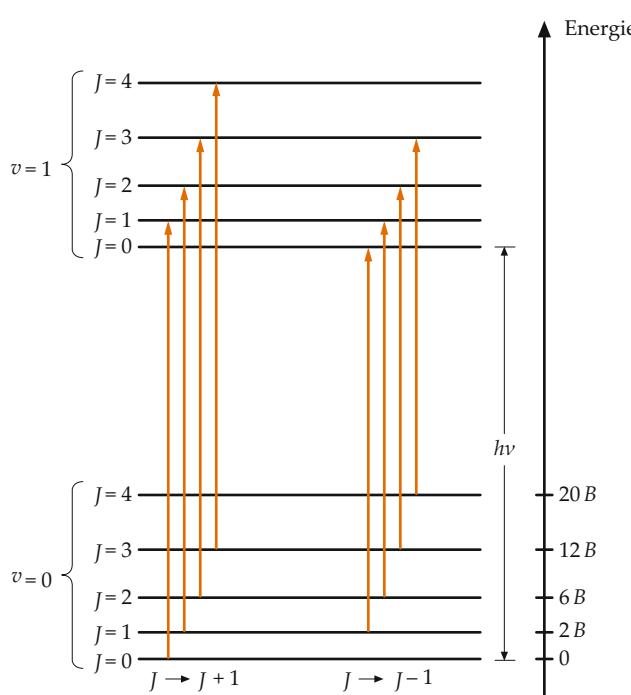


Abbildung 35.15 Bei der Absorption von Infrarotstrahlung kann ein zweiatomiges Molekül aus dem Schwingungsgrundzustand ($v = 0$) in den ersten angeregten Schwingungszustand ($v = 1$) übergehen. Dabei gilt für die Rotation die Auswahlregel $\Delta J = \pm 1$. Daher ergeben sich zwei Banden. Die Energiedifferenzen bei der Bande für die Übergänge $J \rightarrow J + 1$ sind $(h\nu + 2B)$, $(h\nu + 4B)$, $(h\nu + 6B)$ usw., und bei der Bande für die Übergänge $J \rightarrow J - 1$ sind die Energiedifferenzen $(h\nu - 2B)$, $(h\nu - 4B)$, $(h\nu - 6B)$ usw.

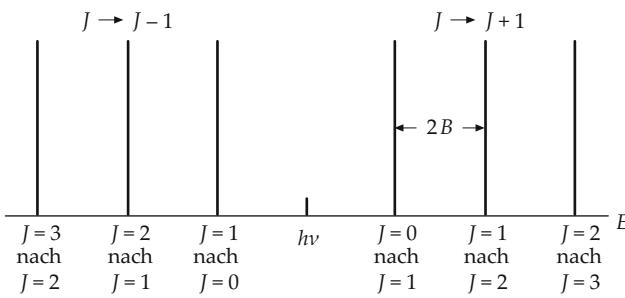


Abbildung 35.16 Die Struktur des Absorptionsspektrums eines zweiatomigen Moleküls. Die rechte Bande, der sogenannte **R-Zweig**, entspricht den Übergängen $J \rightarrow J + 1$ und der linke Zweig, der **P-Zweig**, den Übergängen $J \rightarrow J - 1$. Die Linien sind äquidistant, wobei ihr Abstand $2B$ beträgt. In der Mitte zwischen beiden Banden bzw. Zweigen beträgt die Energie $h\nu$, wobei ν die Schwingungsfrequenz des angeregten Moleküls ist.

Absorptionslinienpaare gleiche Intensitäten. Aber die Besetzung eines Rotationsniveaus ist proportional zu seiner Entartung (d. h. zur Anzahl von Zuständen mit dem gleichen Wert von J , also proportional zu $2J + 1$) und auch proportional zum Boltzmann-Faktor $e^{-E/(k_B T)}$, wobei E die Energie des betreffenden Zustands ist (zum Boltzmann-Faktor siehe Kapitel 14). Die

Besetzung nimmt bei niedrigen Werten von J wegen des Entartungsfaktors leicht zu, sinkt jedoch für steigende Werte von J wegen des Boltzmann-Faktors wieder etwas ab. Dies ist in der Abbildung gut zu erkennen.

35.4 *Freiheitsgrade und der Gleichverteilungssatz

Der Gleichverteilungssatz erlaubte, wie wir in Kapitel 15 sahen, auf spektakuläre Weise die Deutung der gemessenen Wärmekapazitäten vieler fester und gasförmiger Substanzen. Die Dulong-Petit'sche Regel

$$C \approx 3R \quad (35.27)$$

(Gleichung 15.16) besagt, dass die molare Wärmekapazität C vieler Substanzen in guter Näherung konstant ist und dreimal die Gaskonstante R beträgt. Für Gase wurde diese Regel unter der Annahme aufgestellt, dass nach dem Gleichverteilungssatz die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen das $(R/2)$ -Fache der Anzahl der Freiheitsgrade eines Moleküls ist. In Abschnitt 15.8 haben wir bereits erwähnt, dass es zweiatomige Moleküle gibt, die statt der erwarteten $3R$ nur $C_V = 5/2R$ haben und damit auch nur 5 (statt 6) Freiheitsgrade aufweisen. In diesem Abschnitt wollen wir dieses Phänomen erklären und auch zeigen, dass die molare Wärmekapazität von bestimmten Festkörpern nur näherungsweise dem Dulong-Petit'schen Gesetz folgt.

Wenn ein zweiatomiges Gasmolekül wie das in Abbildung 35.18 dargestellte um die Kernverbindungsleitung rotiert, muss ein dritter Freiheitsgrad der Rotation vorliegen. Außerdem ist ein solches Molekül nicht völlig starr, denn seine Bindungslänge ändert sich, wenn die Atome entlang der Kernverbindungsleitung um den Gleichgewichtsabstand schwingen. Daher müssten zwei weitere Freiheitsgrade (nämlich der kinetischen und der potenziellen Schwingungsenergie) vorliegen. Aus den Werten der molaren Wärmekapazitäten in Tabelle 15.4 können wir aber folgern, dass zweiatomige Moleküle weder um die Kernverbindungsleitung rotieren noch bei Raumtemperatur in Richtung dieser Linie schwingen. Diese Diskrepanz ist mithilfe des Gleichverteilungssatzes nicht zu klären, ebenso wenig wie die Tatsache, dass Atome offenbar um keine der drei möglichen, aufeinander senkrecht stehenden Achsen im Raum rotieren. Weiterhin hängen die Wärmekapazitäten der Gase von der Temperatur ab, entgegen den Folgerungen aus dem Gleichverteilungssatz.

Am deutlichsten zeigt sich dies bei der Temperaturabhängigkeit der molaren Wärmekapazität des Wasserstoffs H_2 (Abbildung 35.19). Bei Temperaturen unterhalb von rund 70 K hat H_2 die molare Wärmekapazität $C_V = \frac{3}{2}R$. Dies ist der Wert für ein Gas, dessen Moleküle nur Translationen ausführen, aber weder rotieren noch schwingen können. Bei Temperaturen zwischen 250 K und 700 K ist $C_V = \frac{5}{2}R$, wie bei Gasen aus Molekülen,

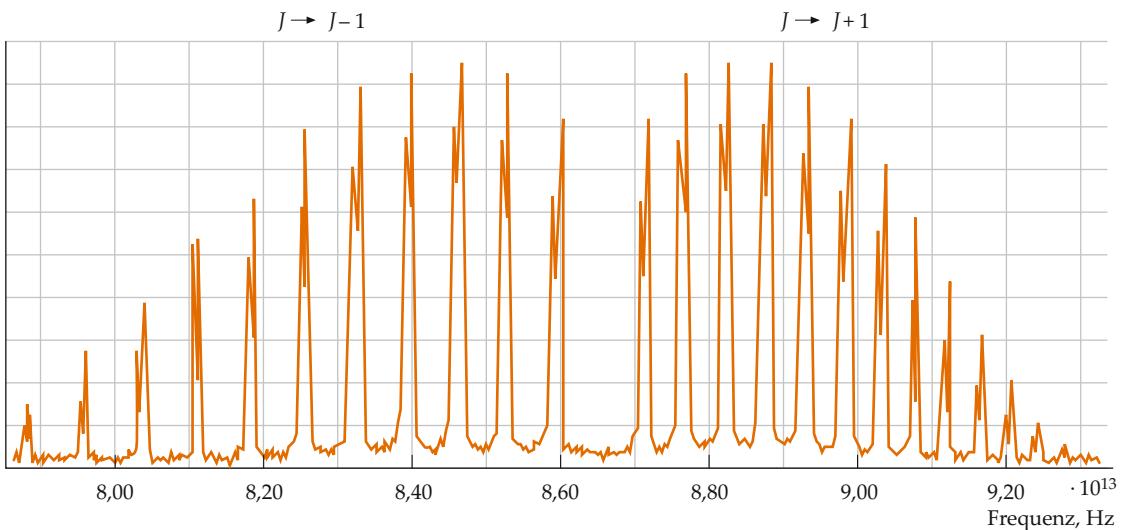


Abbildung 35.17 Das Infrarotspektrum des zweiatomigen Moleküls HCl. Jede Linie ist in zwei Anteile aufgespalten, weil Chlor in zwei Isotopen auftritt: ^{35}Cl (Häufigkeit 75,5 %) und ^{37}Cl (Häufigkeit 24,5 %). Die Änderung der Intensitäten mit der Frequenz wird im Text erklärt. Dass die Linienpaare mit zunehmender Frequenz enger zusammenrücken, liegt daran, dass das Molekül bei höheren Rotationsquantenzahlen etwas gestreckt wird, sodass das Trägheitsmoment leicht zunimmt.

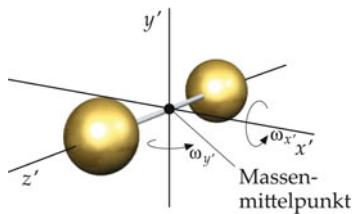


Abbildung 35.18 Handelmodell eines zweiatomigen Moleküls.

die Translationen und Rotationen ausführen können. Oberhalb von 700 K beginnen die H_2 -Moleküle auch zu schwingen. Doch sie dissoziieren, bevor der Wert $C_V = \frac{7}{2} R$ erreicht ist.

Außerdem sollte nach dem Gleichverteilungssatz die molare Wärmekapazität von Festkörpern konstant $3R$ betragen. Das gilt zwar bei hohen Temperaturen für viele (wenn auch nicht für alle) Festkörper, aber bei tiefen Temperaturen gilt es nicht.

Der Grund für das Versagen des Gleichverteilungssatzes liegt darin, dass die Energie gequantelt ist und man eine quantenmechanische Beschreibung statt einer klassischen benötigt. Das Teilchen kann also Energie nur dann aufnehmen oder abgeben, wenn es dadurch auf ein anderes erlaubtes Energieniveau gelangt. Beispielsweise liegt die bei einem Stoß zwischen Gasmolekülen übertragbare Energie in der Größenordnung $k_B T$. Die Gültigkeit des Gleichverteilungssatzes hängt somit davon ab, wie sich die Größe $k_B T$ zum Abstand der erlaubten Energieniveaus verhält.

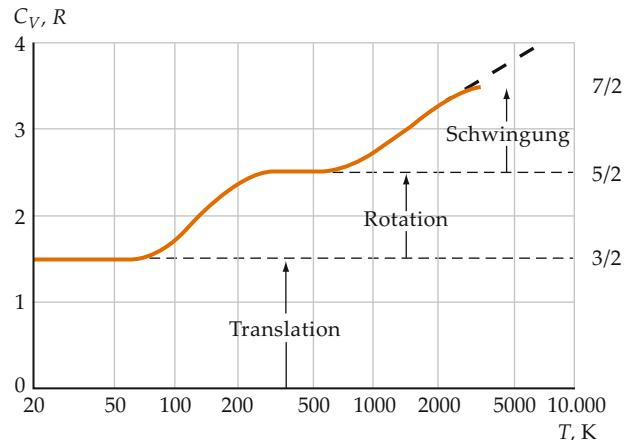


Abbildung 35.19 Die Temperaturabhängigkeit der molaren Wärmekapazität C_V von Wasserstoff, H_2 . (Die Darstellung ist in den Bereichen, in denen sich C_V ändert, nur qualitativ.) Bei 5000 K sind 95 % der H_2 -Moleküle zu atomarem Wasserstoff dissoziiert.

Wenn der Abstand der erlaubten Energieniveaus groß gegenüber $k_B T$ ist, dann kann bei Stößen keine Energie übertragen werden, und der Gleichverteilungssatz gilt nicht. Wenn dagegen der Abstand der erlaubten Energieniveaus klein gegenüber $k_B T$ ist, so macht sich die Quantisierung nicht bemerkbar, und der Gleichverteilungssatz ist anwendbar.

BEDINGUNGEN FÜR DIE GÜLTIGKEIT DES
GLEICHVERTEILUNGSSATZES

Betrachten wir die Rotation eines Moleküls. Die Rotationsenergie ist gegeben durch Gleichung 35.12:

$$E = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I} = J(J+1)B.$$

Dabei ist B , die charakteristische Rotationsenergie, der Mindestabstand der Energieniveaus der Rotation. Wenn diese Energie klein gegen $k_B T$ ist, dann gelten die aus der klassischen Physik bekannten Gesetze und damit auch der Gleichverteilungssatz. Für die sogenannte Rotationstemperatur Θ_R gilt

$$k_B \Theta_R = B = \frac{\hbar^2}{2I}. \quad (35.28)$$

Wenn T viel höher als diese Rotationstemperatur Θ_R ist, so ist $k_B T$ viel größer als der Abstand der Energieniveaus, der in der Größenordnung von $k_B \Theta_R$ liegt. In diesem Fall erwarten wir die Gültigkeit der klassischen Physik und des Gleichverteilungssatzes. Wenn aber T kleiner als Θ_R oder vergleichbar groß ist, dann ist $k_B T$ nicht viel größer als der Abstand der Energieniveaus. In diesem Fall sind die Gesetze der klassischen Physik und auch der Gleichverteilungssatz nicht anwendbar. Schätzen wir nun die Rotationstemperatur Θ_R für einige Fälle ab.

1. Rotation des H₂-Moleküls: Hierbei rotiert das Molekül um eine Achse, die senkrecht zur Kernverbindungsgeraden durch den Massenmittelpunkt verläuft (Abbildung 35.18). Das Trägheitsmoment des H₂-Moleküls um diese Achse ist

$$I_H = 2m_H \left(\frac{r_s}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m_H r_s^2.$$

Darin ist $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg die Masse eines Wasserstoffatoms und $r_s \approx 8 \cdot 10^{-11}$ m der Abstand der Atomkerne im Wasserstoffmolekül. Damit ist die Rotationstemperatur des Wasserstoffmoleküls

$$\begin{aligned} \Theta_R &= \frac{\hbar^2}{2k_B I} = \frac{\hbar^2}{k_B m_H r_s^2} \\ &\approx \frac{(1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{(1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}) m_H (8 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} \approx 75 \text{ K}. \end{aligned}$$

Der Abbildung 35.19 entnehmen wir, dass das ungefähr die Temperatur ist, unterhalb der die Rotationsenergie nichts zur Wärmekapazität des molekularen Wasserstoffgases beiträgt. Eine Berechnung für das Wasserstoffatom wird in Beispiel 35.5 angestellt.

Beispiel 35.5: Die Rotationsenergie des Wasserstoffatoms

Bei Raumtemperatur (rund 300 K) ist Wasserstoff ein zweiatomiges Gas. Aber bei hohen Temperaturen dissoziieren die Wasserstoffmoleküle. Bei etwa 8000 K ist Wasserstoffgas zu 99,99 % einatomig. a) Schätzen Sie

für das Wasserstoffatom die geringste Rotationsenergie ab, die größer als null ist, und vergleichen Sie sie mit dem Wert von $k_B T$ für das Wasserstoffatom bei Raumtemperatur. b) Berechnen Sie die Rotationstemperatur des Wasserstoffatoms.

Problembeschreibung: Nach Gleichung 35.12 ist die geringste von null verschiedene Rotationsenergie diejenige für $J = 1$. Damit berechnen wir die Energie in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment. Das Trägheitsmoment des Atomkerns können wir vernachlässigen, weil sein Radius rund 2000-mal kleiner als der des Atoms ist. Dann ist das Trägheitsmoment des Atoms im Wesentlichen das des Elektrons. Es ist also $I = m_e r^2$, wobei $r = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m der Abstand zwischen Kern und Elektron ist.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die geringste über null liegende erlaubte Rotationsenergie ist die für $J = 1$:

$$E_J = \frac{J(J+1)\hbar^2}{2I} \quad \text{mit } J = 0,1,2, \dots$$

Also ist

$$E_1 = \frac{1(1+1)\hbar^2}{2m_e r^2} = \frac{\hbar^2}{m_e r^2}$$

2. Die Zahlenwerte sind:

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

3. Setzen Sie die Werte ein:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\hbar^2}{m_e r^2} = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} \\ &= 4,32 \cdot 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

4. Die Größe $k_B T$ hat bei $T = 300$ K folgenden Wert:

$$k_B T = (1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}) \cdot (300 \text{ K}) = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

5. Vergleichen Sie E_1 und $k_B T$:

$$\frac{E_1}{k_B T} = \frac{4,32 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{4,14 \cdot 10^{-21} \text{ J}} \approx 10^3$$

E_1 liegt um drei Größenordnungen höher als $k_B T$.

35.4 *Freiheitsgrade und der Gleichverteilungssatz

Teilaufgabe b

1. Setzen Sie $k_B \Theta_R = E_1$ und lösen Sie nach Θ_R auf:

$$k_B \Theta_R = E_1$$

$$\Theta_R = \frac{E_1}{k_B} = \frac{4,32 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}} = 3,13 \cdot 10^5 \text{ K}$$

Kommentar: Die Rotationstemperatur des Wasserstoffatoms ist so hoch, dass dieses vor dem Erreichen dieser Temperatur längst ionisiert würde. Das erklärt, warum keine Freiheitsgrade der Rotation zur Wärmekapazität des Wasserstoffatoms beitragen. ■

2. Rotation des O₂-Moleküls: Die Masse eines Sauerstoffatoms ist etwa 16-mal größer als die eines Wasserstoffatoms, und der Abstand der Atome ist etwa derselbe wie im H₂-Molekül. Also liegt die Rotationstemperatur ungefähr bei $(75/16) \text{ K} \approx 4,6 \text{ K}$. Für alle Temperaturen, bei denen O₂-Moleküle in der Gasphase vorliegen, gilt $T \gg \Theta_R$, sodass $k_B T$ viel größer als der Abstand der Energieniveaus ist. Demnach ist für gasförmigen Sauerstoff der Gleichverteilungssatz der klassischen Physik erfüllt.

3. Rotation eines Atoms in der Gashypothese: Helium bildet keine Moleküle. Heliumgas besteht vielmehr aus einzelnen Atomen mit je einem Atomkern (aus zwei Protonen und zwei Neutronen) und zwei Elektronen. Ein Elektron ist 8000-mal leichter als der Atomkern des Heliums, aber dessen Radius ist etwa 100 000-mal kleiner als sein Abstand von den Elektronen. Daher tragen zum Trägheitsmoment des Heliumatoms praktisch nur seine zwei Elektronen bei. Ihr Abstand vom Atomkern ist rund halb so groß wie der Kern-Kern-Abstand im H₂-Molekül, und die Masse eines Elektrons ist etwa 2000-mal kleiner als die

eines Wasserstoffatomkerns. Mit $m_e \approx m_H/2000$ und $r \approx r_s/2$ ergibt sich das Trägheitsmoment der beiden Elektronen im Heliumatom zu ungefähr

$$I_{\text{He}} = 2 m_e r^2 \approx 2 \cdot \frac{m_H}{2000} \cdot \left(\frac{r_s}{2}\right)^2 = \frac{I_H}{2000}.$$

Die Rotationstemperatur des Heliumatoms ist daher 2000-mal so hoch wie die des Wasserstoffmoleküls, liegt also bei rund 150 000 K. Diese Temperatur ist wesentlich höher als die Ionisierungstemperatur, bei der das Heliumatom seine Elektronen verliert. Daher ist der Abstand zwischen den erlaubten Energieniveaus bei allen Temperaturen weitaus größer als $k_B T$, und die Heliumatome können durch Stöße im Gas nicht zur Rotation angeregt werden. Die Atome anderer einatomiger Gase haben etwas größere Trägheitsmomente, weil sie mehr Elektronen als das Heliumatom aufweisen, aber auch die Rotationstemperaturen dieser Atome liegen bei einigen zehntausend Kelvin. Somit können auch diese Atome nicht durch Stöße im Gas zur Rotation angeregt werden.

4. Rotation eines zweiatomigen Moleküls um die Kernverbindungslinie: Aus den Werten für einatomige Gase können wir ableiten, dass das Trägheitsmoment eines Moleküls um die Kernverbindungslinie ebenfalls weitgehend von den Elektronen herrührt, also in derselben Größenordnung liegt wie für ein einatomiges Gas. Daher ist die Rotationstemperatur, bei der die zweiatomigen Moleküle zu dieser Rotation angeregt werden können, weitaus höher als die DissoziationsTemperatur. Unter den gegebenen Umständen können zweiatomige Gasmoleküle also nicht um die Kernverbindungslinie rotieren.

Interessant sind dabei zwei Aspekte: Der Erfolg des Gleichverteilungssatzes beim Deuten der gemessenen Wärmekapazitäten von Gasen und Festkörpern ermöglichte im 19. Jahrhundert erstmals einen Einblick in die molekulare Struktur. Sein Versagen spielte eine große Rolle bei der Entwicklung der Quantenmechanik im 20. Jahrhundert.

Zusammenfassung

- Isolierte Atome kommen in der Natur selten vor; meist treten sie zu Molekülen oder zu Festkörperkristallen zusammen.
- Die ionische und die kovalente Bindung sind die wichtigsten Bindungsmechanismen in Molekülen. Hinzu kommen in Flüssigkeiten und Festkörpern die Van-der-Waals-Bindung und die metallische Bindung. Wasserstoffbrückenbindungen sind für den relativ hohen Siedepunkt des Wassers verantwortlich, aber auch für die Sekundärstruktur großer biologischer Moleküle, beispielsweise der DNA und der Proteine.
- Wie Atome können auch Moleküle elektromagnetische Strahlung absorbieren oder emittieren, wenn sie in einen Zustand mit höherer bzw. geringerer Energie übergehen. Die innere Energie eines Moleküls kann in drei Formen vorliegen, die man meist separat betrachten kann: elektronische Energie sowie Schwingungs- und Rotationsenergie.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Chemische Bindung	
Ionische Bindung	Die ionische Bindung kommt zustande, wenn Elektronen eines Atoms auf ein anderes Atom übergehen. Dabei entstehen ein positives und ein negatives Ion, die einander elektrostatisch anziehen.
Kovalente Bindung	Die kovalente Bindung ist auf quantenmechanische Weise zu beschreiben. Bei ihr gehören zwei oder mehrere Elektronen zu verschiedenen Atomen.
Van-der-Waals-Bindung	Die von den Van-der-Waals-Kräften hervorgerufene Bindung ist relativ schwach. Sie beruht auf der Wechselwirkung von permanenten oder von transitorischen elektrischen Dipolen der Atome oder Moleküle.
Wasserstoffbrückenbindung	Bei der Wasserstoffbrückenbindung wirkt ein Proton, das an ein Sauerstoff-, Stickstoff- oder Fluoratom gebunden ist, als Bindeglied zu einem weiteren solchen Atom.
Metallische Bindung	Bei der metallischen Bindung werden die positiven Ionen im Metallgitter durch das Elektronengas zusammengehalten; dieses besteht aus freien Elektronen, die sich im Gitter der Atomrumpfe bewegen können.
Mischformen der Bindung	Bei einem zweiatomigen Molekül aus gleichen Atomen, beispielsweise O ₂ , ist die Bindung vollständig kovalent. Bei ungleichen Atomen liegt oft eine Art Mischung von kovalenter und ionischer Bindung vor. Der Anteil, zu dem die Bindung ionisch ist, kann aus dem Verhältnis des gemessenen elektrischen Dipolmoments zu dem elektrischen Dipolmoment des (ggf. hypothetischen) Ionenpaares ermittelt werden. Dieses Dipolmoment ist definiert durch $\delta_{\text{ion}} = e r_0 . \quad (35.5)$ Darin ist r_0 der Gleichgewichtsabstand der Ionen.
2. *Mehratomige Moleküle	Die Formen mehratomiger Moleküle wie H ₂ O oder NH ₃ sind aus der räumlichen Anordnung der Wellenfunktionen der Atom- bzw. der Molekülorbitale abzuleiten. Die Vierbindigkeit (Vierwertigkeit) des Kohlenstoffatoms beruht auf der Hybridisierung der 2s- und der 2p-Atomorbitale.
3. Zweiatomige Moleküle	
Trägheitsmoment	$I = m_{\text{red}} r_0^2 \quad (35.14)$ Hierin ist r_0 der Gleichgewichtsabstand der Atomkerne, und m_{red} ist die reduzierte Masse: $m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} . \quad (35.15)$
Rotationsenergieniveaus	$E_{\text{rot}} = J(J+1)B , \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (35.12)$ mit $B = \frac{\hbar^2}{2I} \quad (35.13)$
Schwingungenergieniveaus	$E_{\text{vib}} = (v + \frac{1}{2})h\nu , \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (35.18)$
Effektive Kraftkonstante k_F	$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m_{\text{red}}}} \quad (35.19)$

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
4. Molekülspektren	Die optischen Spektren von Molekülen haben eine Bandenstruktur, weil bei einem Schwingungsübergang auch Rotationsübergänge auftreten. Aus den in Absorption aufgenommenen Rotations- und Schwingungsspektren erhält man Informationen über die Struktur und die Bindung im betreffenden Molekül. Für die Schwingungs- und die Rotationsübergänge zweiatomiger Moleküle gelten folgende Auswahlregeln: $\Delta v = \pm 1, \quad \Delta J = \pm 1.$

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Das Trägheitsmoment eines Atoms ist weitaus kleiner als das eines zweiatomigen Moleküls, denn im Ausdruck für die Rotationskonstante (Gleichung 35.13) steht das Trägheitsmoment im Nenner. Daher ist gemäß Gleichung 35.12 die Energiemenge, die erforderlich ist, um den Rotationszustand eines einzelnen Atoms zu ändern, weitaus größer als bei einem zweiatomigen Molekül. Bei Raumtemperatur (ca. 300 K) kann das Rotationsniveau also nicht durch Stöße der Teilchen erhöht werden.

Lösung der Übung

1. 17,6 %

Aufgaben

Verständnisaufgaben

35.1 • Die Atome welcher Elemente haben in den beiden äußersten (energetisch höchsten) Unterschalen dieselbe Elektronenkonfiguration wie Kohlenstoff? Erwarten Sie für diese Elemente dieselbe Art der Hybridisierung wie beim Kohlenstoff?

35.2 • Erklären Sie, warum das Trägheitsmoment eines zweiatomigen Moleküls mit zunehmendem Drehimpuls leicht ansteigt.

35.3 • Warum absorbiert ein Atom elektromagnetische Strahlung bei Raumtemperatur normalerweise nur im Grundzustand, während zweiatomige Moleküle gewöhnlich Strahlung absorbieren, wenn sie sich in verschiedenen Rotationszuständen befinden?

35.4 •• Die (gasförmigen) Elemente der Gruppe VIII, also in der rechten Spalte des Periodensystems, nennt man Edelgase, weil sie in einem weiten Temperatur- und Druckbereich gasförmig sind und praktisch keine chemischen Reaktionen zu Molekülen oder ionischen Verbindungen eingehen. Jedoch können Moleküle, wie beispielsweise das ArF, gebildet werden, wenn sie in einem elektronisch angeregten Zustand vorliegen. In diesem Fall schreibt man das Molekül als ArF* und spricht von einem Excimer (abgleitet vom englischen Ausdruck *excited dimer*, angeregtes Dimer). Wie sieht für das Molekül ArF ein Energieniveaudiagramm wie in Abbildung 35.13 aus, wenn sein Grundzustand instabil, jedoch sein angeregter Zustand ArF* stabil ist? (Excimere werden übrigens in bestimmten Lasertypen angewandt.)

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

35.5 •• Trägt man die potentielle Energie der Atome eines zweiatomigen Moleküls gegen den Abstand auf, so zeigt die Kurve ein Minimum (siehe Abbildung 35.13). In der Nähe dieses Minimums kann die Abstandsabhängigkeit durch eine Parabel angenähert werden; sie entspricht der eines harmonischen Oszillators, der hier also als Näherung für das zweiatomige Molekül betrachtet werden kann. Bei einer besseren Näherung, die man anharmonischen Oszillator nennt, ist die Beziehung

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \frac{1}{2}\right) h \nu, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

(Gleichung 35.18) modifiziert. Sie lautet dann

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \frac{1}{2}\right) h \nu - \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 h \nu \alpha, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

Beim Molekül O₂ haben die Parameter die folgenden Werte: $v = 4,74 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ und $\alpha = 7,6 \cdot 10^{-3}$. Schätzen Sie den

kleinsten Wert der Quantenzahl v ab, bei der das Ergebnis der modifizierten Gleichung um 10 % von dem der nicht modifizierten Gleichung 35.18 abweicht.

35.6 •• Hier soll illustriert werden, dass es bei vielen makroskopischen Systemen nicht nötig ist, quantenmechanische Ansätze zu verwenden. Nehmen Sie an, eine massive Kugel mit der Masse $m = 300 \text{ g}$ und dem Radius $r = 3 \text{ cm}$ rotiert mit 20 Umdrehungen pro Sekunde um ihre Achse. Schätzen Sie die Rotationsquantenzahl J und den Abstand benachbarter Rotationsenergieniveaus ab. (Hinweis: Ermitteln Sie die Quantenzahl J , mit der die Beziehung $E_{\text{rot}} = J(J+1)\hbar^2/(2I)$, mit $J = 0, 1, 2, \dots$ (Gleichung 35.12), die richtige Rotationsenergie des Systems ergibt, und berechnen Sie dann die Differenz zum nächsthöheren Energieniveau der Rotation.)

Chemische Bindung

35.7 • Im HF-Molekül beträgt der Gleichgewichtsabstand der Atome $0,0917 \text{ nm}$, und sein Dipolmoment wurde zu $6,40 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ gemessen. Zu welchem prozentualen Anteil ist die Bindung ionisch?

35.8 •• Im KCl-Kristall beträgt der Gleichgewichtsabstand der Ionen K⁺ und Cl⁻ rund $0,267 \text{ nm}$. a) Berechnen Sie die potentielle Energie der Anziehung zwischen den Ionen, wobei Sie sie als Punktladungen im gegebenen Abstand ansehen. b) Die Ionisierungsenergie von Kalium beträgt $4,34 \text{ eV}$, und Chlor hat eine Elektronenaffinität von $-3,62 \text{ eV}$. Ermitteln Sie – unter Vernachlässigung jeglicher Abstoßungsenergie – die Dissoziationsenergie von KCl (siehe Abbildung 35.1). c) Die gemessene Dissoziationsenergie beträgt $4,49 \text{ eV}$. Wie hoch ist die Abstoßungsenergie der Ionen bei ihrem Gleichgewichtsabstand?

35.9 •• a) Berechnen Sie die potentielle Energie der Anziehung zwischen den Ionen Na⁺ und Cl⁻ bei ihrem Gleichgewichtsabstand $r_0 = 0,236 \text{ nm}$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der in Abbildung 35.1 angegebenen Dissoziationsenergie. b) Wie groß ist die Abstoßungsenergie der Ionen bei ihrem Gleichgewichtsabstand?

Energieniveaus und Spektren zweiatomiger Moleküle

35.10 • Die Rotationskonstante (die charakteristische Rotationsenergie) B des N₂-Moleküls beträgt $2,48 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$. Berechnen Sie damit den Abstand der Stickstoffatome (genauer gesagt: der Atomkerne) im Molekül.

35.11 •• Das CO-Molekül hat eine Bindungsenergie von rund 11 eV. Ermitteln Sie die Schwingungsquantenzahl v , bei der die Schwingungsenergie diesen Wert erreichen und das Molekül somit „zerrissen“ würde.

35.12 •• Leiten Sie die Beziehung $I = m_{\text{red}} r_0^2$ (Gleichung 35.14) her, die in Verbindung mit Gleichung 35.15 gilt und den Zusammenhang zwischen Trägheitsmoment und reduzierter Masse eines zweiatomigen Moleküls beschreibt.

35.13 ••• Berechnen Sie die reduzierten Massen der Moleküle H^{35}Cl und H^{37}Cl sowie ihre relative Differenz $\Delta m_{\text{red}}/m_{\text{red}}$. Zeigen Sie, dass in einer Mischung beider Molekülsorten beim Übergang von einem Rotationszustand in einen anderen Spektrallinien mit der relativen Frequenzdifferenz $\Delta\nu/\nu = -\Delta m_{\text{red}}/m_{\text{red}}$ auftreten. Berechnen Sie $\Delta\nu/\nu$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Abbildung 35.17.

Allgemeine Aufgaben

35.14 • Zeigen Sie, dass die reduzierte Masse eines zweiatomigen Moleküls ungefähr gleich der Masse des leichteren Atoms ist, wenn das schwerere Atom eine wesentlich größere Masse hat.

35.15 •• Die effektive Kraftkonstante der Bindung im H_2 -Molekül liegt bei 580 N/m. Ermitteln Sie die Energien der vier niedrigsten Schwingungszustände der Moleküle H_2 , HD und D_2 (wobei D für Deuterium steht) sowie die Wellenlängen der Photonen, die bei Übergängen zwischen benachbarten Schwingungsenergieniveaus dieser Moleküle jeweils absorbiert oder emittiert werden.

35.16 •• Die Abhängigkeit der potenziellen Energie der Atome von deren Abstand r in einem Molekül kann durch das sogenannte Lennard-Jones-Potenzial (oder 6-12-Potenzial)

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},0} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r}\right)^6 \right]$$

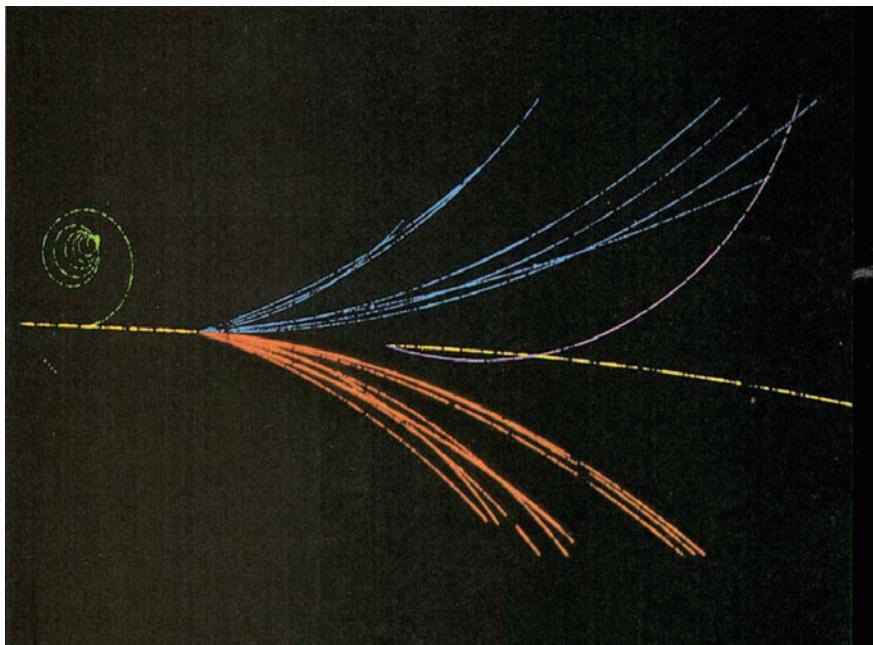
beschrieben werden. Darin sind a und $E_{\text{pot},0}$ Konstanten. Ermitteln Sie die Abhängigkeit des Gleichgewichtsabstands r_0 der Atome vom Parameter a . (Hinweis: Bei diesem Abstand hat die potenzielle Energie ein Minimum.) Stellen Sie einen Ausdruck für den Minimalwert $E_{\text{pot},\min}$ bei $r = r_0$ auf. Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 35.4 Zahlenwerte von r_0 und $E_{\text{pot},0}$ für das H_2 -Molekül. Geben Sie Ihre Ergebnisse in Nanometer bzw. in Elektronenvolt an.

35.17 •• In dieser Aufgabe soll die Abstandsabhängigkeit der Van-der-Waals-Kräfte zwischen einem polaren und einem unpolaren Molekül berechnet werden. Das polare Molekül befindet sich im Ursprung, sein Dipolmoment weist in $+x$ -Richtung, und es hat vom unpolaren Molekül den Abstand x . a) Wie hängt die von einem Dipol hervorgerufene elektrische Feldstärke in der angegebenen Richtung vom Abstand x ab? b) Die potenzielle Energie eines elektrischen Dipols mit dem Dipolmoment ρ in einem elektrischen Feld \mathbf{E} ist $E_{\text{pot}} = -\rho \cdot \mathbf{E}$, und der Betrag des im unpolaren Molekül induzierten Dipolmoments ρ' ist in Richtung von \mathbf{E} proportional zu dessen Betrag. Berechnen Sie mithilfe dieser Angaben die potenzielle Wechselwirkungsenergie der beiden Moleküle in Abhängigkeit von ihrem Abstand x . c) Berechnen Sie mithilfe der Beziehung $F_x = -dE_{\text{pot}}/dx$, wie die Kraft zwischen den zwei Molekülen von deren Abstand x abhängt.

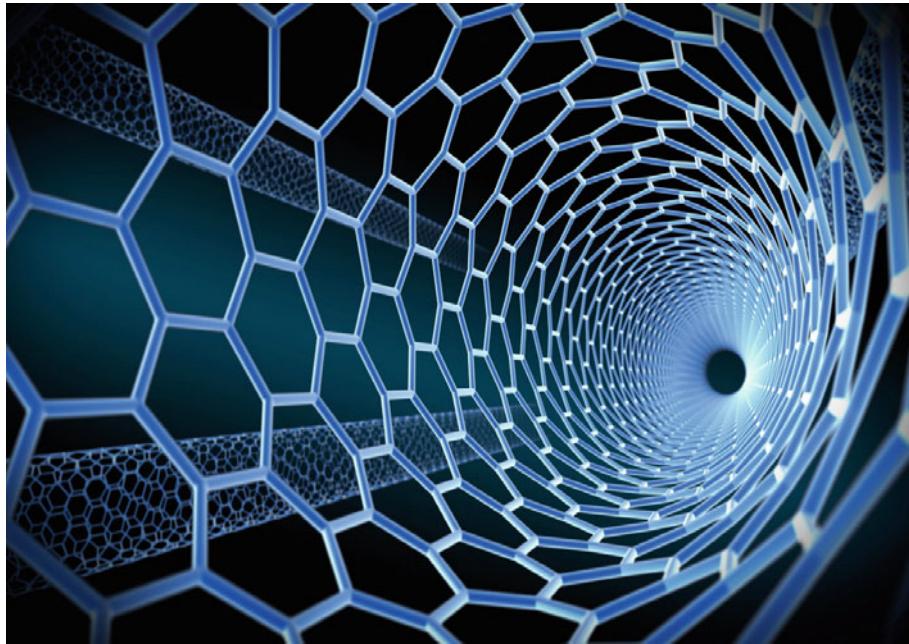
Festkörperphysik

Teil

X



36	Festkörper	1277
37	Elektrische Eigenschaften von Festkörpern	1287



Kohlenstoffnanoröhrchen haben sehr interessante elektrische Eigenschaften. Eine einzelne Graphitschicht ist ein Semimetall, das von seinen elektrischen Eigenschaften her zwischen einem Halbleiter und einem Metall liegt. Wird eine Graphitschicht zu einem Nanoröhrchen aufgerollt, müssen sich nicht nur die Kohlenstoffatome auf dem Umfang des Röhrchens richtig aneinanderreihen, auch die Wellenfunktionen der Elektronen müssen genau zusammenpassen. (© daniel700 – Fotolia.com.)

?

Wie kann man den Abstand zwischen den einzelnen Atomen in einem Kristallgitter bestimmen? (Siehe Beispiel 36.1.)

36.1 Die Struktur von Festkörpern	1278
36.2 Kristallgitter	1278
36.3 Streuung an periodischen Strukturen	1282
Zusammenfassung	1285
Aufgaben	1286

Die moderne Festkörperphysik beschäftigt sich mit dem Aufbau von Materialien und deren gezielter Veränderung. Kristalle lassen sich dabei als regelmäßige Gitterstrukturen beschreiben. Welche Typen von Gittern es gibt, werden wir im vorliegenden Kapitel betrachten. Um schließlich bei einem vorliegenden Stoff das Gitter experimentell zu analysieren, verwendet man Beugungsexperimente ähnlich denen, die wir in der Optik kennen gelernt haben.

In diesem Kapitel lernen wir, wie Kristalle aufgebaut sind, was man unter einem Gitter und einem reziproken Gitter versteht und welche Typen von Gittern es gibt. Zuletzt lernen wir noch die Bragg-Bedingung für die Reflexion an Gitterebenen kennen.

36.1 Die Struktur von Festkörpern

Die drei uns bekannten Zustandsformen der Materie, nämlich gasförmig, flüssig und fest, beruhen auf unterschiedlichen Verhältnissen von zwei Größen zueinander: den Anziehungskräften zwischen den Atomen und Molekülen und den thermischen Energien der Teilchen. Im gasförmigen Zustand haben die Atome und Moleküle eine hohe thermische Energie; solche Teilchen beeinflussen sich gegenseitig nur wenig, ausgenommen während der kurzen, wenn auch häufigen Zusammenstöße. (Mit der thermischen Energie ist die kinetische Energie der Atome und Moleküle im Massenmittelpunktsystem des Gases gemeint.) Bei hinreichend tiefen Temperaturen sorgen Van-der-Waals-Kräfte dafür, dass nahezu jeder Stoff in eine Flüssigkeit und anschließend in einen Festkörper kondensiert. In Flüssigkeiten sind die Moleküle nahe genug beieinander – und ihre kinetische Energie ist niedrig genug –, um eine zeitweilige **Nahordnung** auszubilden zu können. Wird die kinetische Energie noch weiter abgesenkt, bilden die Moleküle bzw. Atome Festkörper, die sich durch eine dauernde Ordnung auszeichnen.

Kühlt eine Flüssigkeit so langsam ab, dass die kinetische Energie ihrer Moleküle langsam sinkt, können sich die Moleküle (oder Atome oder Ionen) in einem regulären **Kristallgitter** anordnen und die maximale Zahl von chemischen Bindungen mit minimaler potenzieller Energie erzeugen. Wird die Flüssigkeit dagegen schnell abgekühlt, sodass den Molekülen ihre innere Energie entzogen wird, bevor sie Gelegenheit haben, sich auszurichten, so ist der entstehende Festkörper oftmals nicht kristallin, die Anordnung der Teilchen ist nicht regelmäßig. Einen solchen Festkörper bezeichnet man als **amorphe Festkörper**. Er weist eine Nahordnung auf, aber keine Fernordnung (über mehrere Molekül-, Atom- oder Ionendurchmesser hinweg), wie sie für Kristalle charakteristisch ist. Ein typisches Beispiel für einen amorphen Festkörper ist Glas. Eine wesentliche Folge der Fernordnung besteht darin, dass Kristalle einen wohl definierten Schmelzpunkt haben, während amorphe Festkörper erweichen, wenn ihre Temperatur steigt. Viele Stoffe können beim Übergang in die feste Phase je nach Art der Präparation entweder einen amorphen oder einen kristallinen Zustand annehmen. Andere Stoffe kommen nur in dem einen oder dem anderen Zustand vor.

Die meisten herkömmlichen Festkörper sind polykristallin, d.h., sie bestehen aus vielen Einkristallen, die an sogenannten *Korngrenzen* aufeinanderstoßen. Die Größe eines Einkristalls liegt typischerweise unter 1 mm. Es gibt jedoch auch große Einkristalle, natürlich vorkommende wie auch künstlich hergestellte. Die bedeutsamsten Eigenschaften eines Einkristalls sind die Symmetrie und Regelmäßigkeit seiner Struktur. Man kann

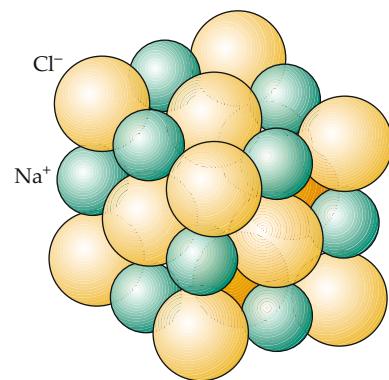


Abbildung 36.1 Kubisch flächenzentrierte Struktur des NaCl-Ionenkristalls.

sich dies wie eine Elementarstruktur vorstellen, die sich über den gesamten Kristall hinweg ständig wiederholt. Diese kleinste Einheit eines Kristalls wird als **Elementarzelle** bezeichnet; ihre Struktur hängt von der Art der Bindung zwischen den Atomen, Ionen oder Molekülen ab – diese Bindung kann ionisch oder kovalent oder metallisch sein, oder es kann sich um eine Wasserstoffbrückenbindung oder eine Van-der-Waals-Bindung handeln. Kommen unterschiedliche Atomsorten im Kristall vor, hängt die Struktur auch von den Größenverhältnissen der Atome ab.

Abbildung 36.1 zeigt als Beispiel die Struktur von kristallinem Natriumchlorid (NaCl). Die Na^+ - und Cl^- -Ionen sind kugelsymmetrisch, das Cl^- -Ion ist etwa doppelt so groß wie das Na^+ -Ion. Für diesen Kristall ist die potenzielle Energie am kleinsten, wenn jedes Atom der einen Sorte als nächste Nachbarn sechs Atome der anderen Sorte hat. Diese Struktur wird als *kubisch flächenzentriert* (*fcc, face-centered-cubic*) bezeichnet. Beachten Sie, dass die Na^+ - und Cl^- -Ionen im NaCl-Kristall nicht paarweise angeordnet sind; es liegen *keine* NaCl-Moleküle vor.

36.2 Kristallgitter

Eine Kristallstruktur wird durch eine Basis und ein Gitter beschrieben. Die Basis kennzeichnet die Lage der Atome zueinander. Das Gitter ist die Menge aller Translationsvektoren, die einen Kristall in sich selbst überführen. Das sogenannte **Bravais-Gitter** stellt eine Möglichkeit dar, Kristalle nach ihrer Basiszelle einzuteilen und zu systematisieren. Im folgenden Abschnitt wollen wir uns mit Bravais-Gittern genauer beschäftigen.

Bravais-Gitter

Verschiedene Typen von Bravais-Gittern beschreibt man durch den resultierenden Vektor \mathbf{R} , der sich aus der Summe von denjenigen Vektoren ergibt, die das Kristallgitter aufspannen:

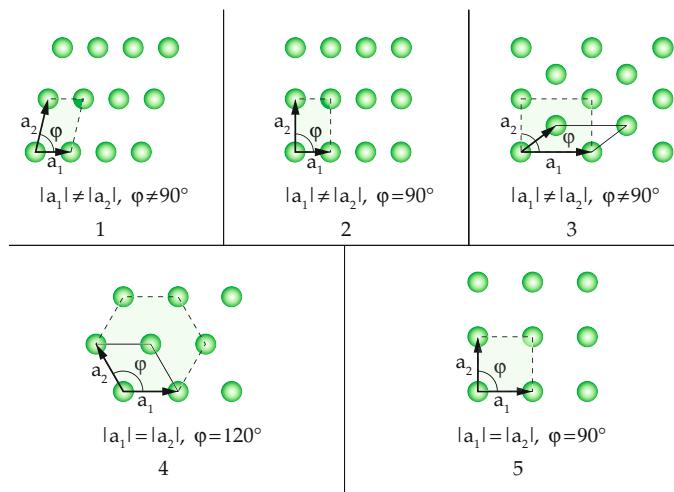


Abbildung 36.2 Die fünf Bravais-Gitter im zweidimensionalen Raum mit ihren Basenvektoren für jede Gitterzelle.

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{x}_1 + n_2 \mathbf{x}_2 + n_3 \mathbf{x}_3, \quad (36.1)$$

BRAVAIS-GITTER

wobei \mathbf{x}_i die linear unabhängigen Vektoren sind, die die Kristallgitter aufspannen und die n_i als ganze Zahlen angeben, in welcher Elementarzelle des Kristallgitters vom gewählten Startpunkt aus gesehen, sich der resultierende Vektor befindet. Falls keine Addition von zusätzlichen Gitterpunkten nötig ist, nennt man das Bravais-Gitter primitiv (P). In einem Bravais-Gitter ist nicht notwendigerweise jeder Gitterpunkt durch ein Atom repräsentiert. Eine Kristallstruktur besteht aber stets aus dem Gitter und der Basis, die sich an jedem Gitterpunkt wiederholt. In der Ebene (also im zweidimensionalen Raum) gibt es fünf verschiedene Bravais-Gitter, die in Abbildung 36.2 gezeigt sind: das schiefwinklige (primitiv), das quadratische (primitiv), das rechteckige (primitiv), das zentriert-rechteckige (nichtprimitiv) und das hexagonale Gitter (primitiv). Die Oberflächen aller dreidimensionalen Gitter sind aus diesen fundamentalen Bravais-Gittern aufgebaut.

Im dreidimensionalen Raum gibt es 14 Bravais-Gitter (im vierdimensionalen 52), wie Abbildung 36.3 zeigt. Das System mit der höchsten Symmetrie ist dabei das **kubische Gitter**. Dort treffen drei gleich lange Achsen aufeinander, die stets den Winkel von 90° einschließen. Man unterscheidet das kubisch-primitive Gitter, das kubisch-raumzentrierte Gitter und das kubisch-flächenzentrierte Gitter. Man nennt ein Kristallsystem **orthorhombisch**, wenn alle Achsen im Winkel von 90° zueinander stehen, aber nicht alle Achsen gleich lang sind. Ein Kristallsystem heißt **tetragonal**, wenn alle Achsen im Winkel von 90° zueinander stehen und zwei der drei Achsen die gleiche Länge haben, während eine Achse länger ist. Treffen zwei gleich lange Vektoren im Winkel von 120° aufeinander, während der dritte Vektor senkrecht auf der dadurch aufgespannten Ebene steht, spricht man von einem **hexagonalen Kristallsystem**.

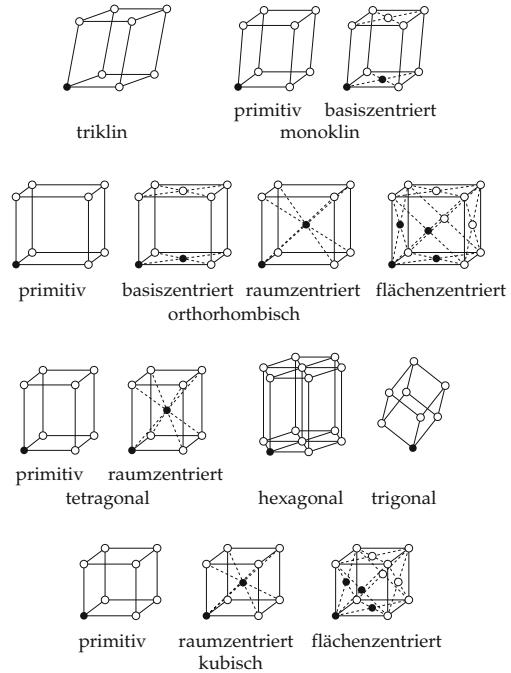


Abbildung 36.3 Die 14 Bravais-Gitter im dreidimensionalen Raum.

tem. Eine **rhomboedrische Zentrierung** liegt vor, wenn alle Vektoren gleich lang sind und alle Winkel gleich groß, aber nicht 90° betragen. Schließlich gibt es noch das **monokline** und das **trikline** Kristallsystem. Beim monoklinen System befinden sich zwei 90° -Winkel zwischen den Vektoren, und keine gleich langen Achsen. Beim triklinen Kristallsystem finden sich schließlich nur noch ausschließende Bedingungen, nämlich keine gleichen Winkel und auch keine gleich langen Vektoren.

Jedem Gitter ist ein **reziprokes Gitter** eindeutig zugeordnet. Seine Gitterpunkte werden durch die Zahlen h, k, l bezeichnet. Die Basisvektoren des reziproken Gitters werden meist mit \mathbf{g}_i bezeichnet und stehen senkrecht auf den Gittervektoren. So steht der Vektor \mathbf{g}_1 beispielsweise senkrecht auf der von \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 aufgespannten Ebene. Der Betrag eines reziproken Vektors ist

$$|\mathbf{g}_1| = \frac{2\pi}{|\mathbf{x}_1|} \cos(\angle(\mathbf{g}_1, \mathbf{x}_1)). \quad (36.2)$$

BETRAG DES REZIPROKEN VEKTORS

Die Basis des reziproken Gitters lässt sich berechnen durch

$$\mathbf{g}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3)}. \quad (36.3)$$

BERECHNUNG DER REZIPROKEN BASIS

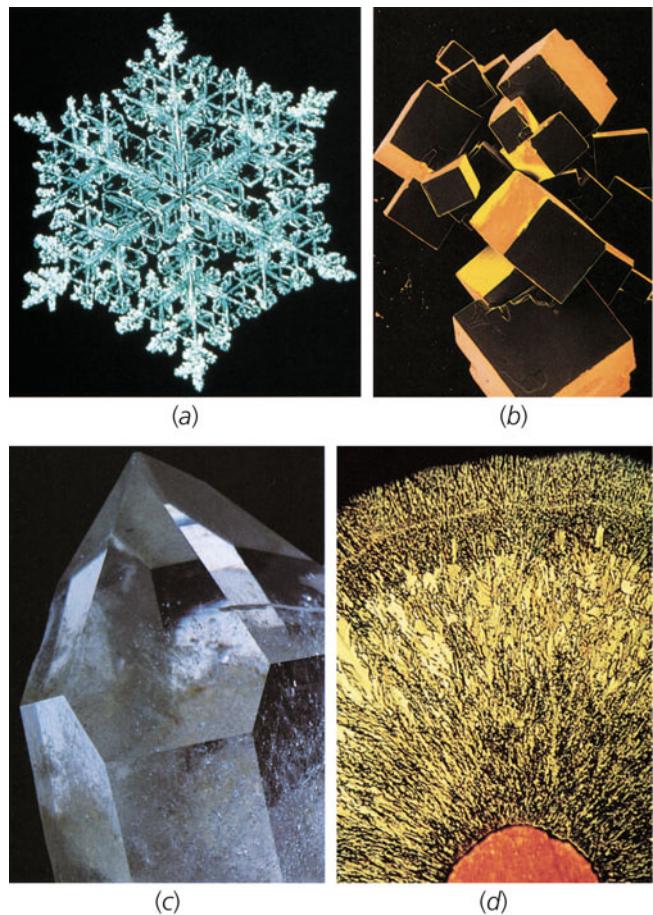
Die Strukturen mit der höchsten Packungsdichte an Atomen in einem Kristallgitter erhält man in **hexagonal dichtesten Kugelpackungen** und **kubisch dichtesten Kugelpackungen**. Die hexagonal dichteste Packung entsteht, wenn man gleich große Kugeln wie Bowlingkugeln aufeinanderstapelt. In der ersten Schicht berührt jede Kugel sechs andere, daher die Bezeichnung *hexagonal*. In der nächsten Schicht sitzt jede Kugel genau in einer dreieckigen Vertiefung der ersten Schicht. In der dritten Schicht sitzt jede Kugel in einer dreieckigen Vertiefung der zweiten Schicht, also genau über einer Kugel aus der ersten Schicht. Elemente, die in dieser hexagonal dichten Struktur kristallisieren, sind Beryllium, Cadmium, Cer, Magnesium, Osmium und Zink. Es gibt aber auch viele Strukturen, die aus einem kubisch flächenzentrierten Gitter bestehen, das als Grundlage für die kubisch dichteste Kugelpackung dient, z. B. die Kristalle vieler Edelgase oder Metalle wie Kupfer, Silber, Gold oder Nickel.

Die Madelung-Konstante

Ein Ion in einem Kristall hat eine alles in allem anziehende potentielle Energie, wenn man nur die elektrostatische Wechselwirkung in Betracht zieht. Dieser Teil der potenziellen Energie lässt sich schreiben als

$$W_{\text{pot,att}} = -\alpha \frac{k e^2}{r} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}. \quad (36.4)$$

Hierbei bezeichnet r den Abstand zweier benachbarter Ionen, von Mittelpunkt zu Mittelpunkt gerechnet (im Fall von Na^+ - und Cl^- -Ionen im NaCl-Kristall 0,281 nm, wie in Beispiel 36.1 errechnet). Die Größe α ist die **Madelung-Konstante**; ihr Wert hängt von der Kristallstruktur ab. Hätte jedes Ion in einem kubisch flächenzentrierten Kristall nur die sechs entgegengesetzt geladenen nächsten Nachbarn im Abstand r , so wäre $\alpha = 6$. Jedes Ion spürt aber auch die zwölf gleichnamig geladenen Ionen im Abstand $\sqrt{2} r$, acht Ionen entgegengesetzter Ladung im



Kristallstrukturen. a) Die hexagonale Symmetrie der Schneeflocke entspringt einer hexagonalen Symmetrie in ihrem Gitter aus Wasserstoff- und Sauerstoffatomen. b) NaCl-Kristall (Kochsalz) in ca. 30facher Vergrößerung. Die Kristalle basieren auf einem kubischen Gitter aus Natrium- und Chloridionen. Diese Falschfarbendarstellung einer Rasterelektronenmikroskopaufnahme zeigt, dass die kubische Grundstruktur an vielen Stellen durch Versetzungen aufgebrochen ist, wodurch eine große Formenvielfalt der Kristalle hervorgerufen wird. Die zugrunde liegende kubische Symmetrie bleibt jedoch klar erkennbar. c) Ein Kristall aus Quarz (SiO_2 , Siliciumdioxid), dem am häufigsten vorkommenden und am weitesten verbreiteten Mineral auf der Erde. Wenn geschmolzenes Quarz fest wird, ohne zu kristallisieren, entsteht Glas. d) Eisenkristall. (a) © Richard Walters 2/89, p. 52, Discover; b) © Dr. Jeremy Burgess/Science Photo Library/Photo Researchers; c) © Thomas R. Taylor/Photo Researchers; d) mit freundlicher Genehmigung der AT&T Archives.)

Abstand $\sqrt{3} r$ usw. Insgesamt ergibt sich so eine unendliche Summe für die Madelung-Konstante:

$$\alpha = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \dots \quad (36.5)$$

Der Wert der Madelung-Konstante für kubisch flächenzentrierte Strukturen beträgt $\alpha = 1,7476$. Da die Summe nur sehr langsam konvergiert, benötigt man viele Terme, um die Madelung-Konstante genau zu berechnen.

Ist der Abstand zwischen Na^+ - und Cl^- -Ionen sehr klein, so gewinnt die Abstoßung der Elektronenhüllen aufgrund des Pauli-Verbots an Bedeutung. Folgender empirisch gefundener Ansatz beschreibt den repulsiven Anteil an der potenziellen Energie recht gut:

$$W_{\text{pot,rep}} = \frac{C}{r^n}, \quad (36.6)$$

wobei C und n Konstanten sind. Somit ist die gesamte potenzielle Energie eines Ions

$$E_{\text{pot}} = -\alpha \frac{k e^2}{r} + \frac{C}{r^n}. \quad (36.7)$$

Der Gleichgewichtsabstand $r = r_0$ ist dadurch gegeben, dass die Kraft $F = -dE_{\text{pot}}/dr = 0$ ist. Differenziert man E_{pot} nach r , setzt $dE_{\text{pot}}/dr = 0$ für $r = r_0$ und löst nach C auf, so erhält man

$$C = \frac{\alpha k e^2 r_0^{n-1}}{n}. \quad (36.8)$$

Setzt man diesen Ausdruck für C in Gleichung 36.7 ein, so ergibt sich

$$E_{\text{pot}} = -\alpha \frac{k e^2}{r_0} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right). \quad (36.9)$$

Beim Gleichgewichtsabstand ($r = r_0$) gilt

$$E_{\text{pot}}(r_0) = -\alpha \frac{k e^2}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (36.10)$$

Kennt man den Gleichgewichtsabstand r_0 , so lässt sich der Wert von n näherungsweise aus der *Dissoziationsenergie* des Kristalls bestimmen; das ist die Energie, die nötig ist, um den Kristall in Atome aufzuspalten. Beispiel 36.1 illustriert die Bezeichnung des Gleichgewichtsabstands r_0 für NaCl.

Beispiel 36.1: Der Abstand zwischen Na^+ - und Cl^- -Ionen in NaCl

Die gemessene Massendichte von NaCl beträgt $\rho = 2,16 \text{ g/cm}^3$. Berechnen Sie daraus den Gleichgewichtsabstand r_0 für NaCl.

Problembeschreibung: Wir wollen das Volumen jedes Ions näherungsweise als einen Würfel der Kantenlänge r_0 auffassen. Die Masse eines Mols NaCl beträgt 58,4 g; dies ist die Summe der molaren Massen von Natrium und Chlor. 1 Mol NaCl besteht aus $2 n_A$ Ionen, wobei $n_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ die Avogadro-Zahl ist.

Lösung: 1. Das Volumen jedes Ions soll einem Würfel der Kantenlänge r_0 entsprechen. Das Volumen V_{mol} eines Mols NaCl ergibt sich, indem man die Zahl der Ionen mit dem Volumen für ein Ion multipliziert:

$$V_{\text{mol}} = 2 n_A r_0^3$$

2. Die Beziehung zwischen r_0 , der Massendichte ρ und der molaren Masse m_{Mol} von NaCl lautet:

$$\rho = \frac{m_{\text{Mol}}}{V_{\text{mol}}} = \frac{m_{\text{Mol}}}{2 n_A r_0^3}$$

3. Auflösen nach r_0^3 und Einsetzen der bekannten Werte liefert:

$$\begin{aligned} r_0^3 &= \frac{m_{\text{Mol}}}{2 n_A \rho} \\ &= \frac{58,4 \text{ g}}{2 \cdot (6,02 \cdot 10^{23}) \cdot (2,16 \text{ g/cm}^3)} \\ &= 2,25 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

also

$$r_0 = 2,82 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = [0,282 \text{ nm}]$$

Plausibilitätsprüfung: In Kapitel 34 haben wir festgestellt, dass das Wasserstoffatom im Grundzustand einen Durchmesser von 0,11 nm hat. Bei dem berechneten Wert $r_0 = 0,282 \text{ nm}$ handelt es sich also um ein plausibles Ergebnis. ■

Die gemessene Dissoziationsenergie von NaCl beträgt 770 kJ/mol. Unter Ausnutzung der Beziehung $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ und der Tatsache, dass 1 Mol NaCl n_A Ionenpaare enthält, kann man die Dissoziationsenergie in der Einheit eV/Ionenpaar ausdrücken. Die Umwandlung zwischen eV/Ionenpaar und kJ/mol geschieht folgendermaßen:

$$\begin{aligned} 1 \frac{\text{eV}}{\text{Ionenpaar}} &= \left(\frac{6,022 \cdot 10^{23} \text{ Ionenpaare}}{1 \text{ mol}} \right) \\ &\cdot \left(\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) \cdot \left(\frac{1 \text{ eV}}{\text{Ionenpaare}} \right). \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet

$$1 \frac{\text{eV}}{\text{Ionenpaar}} = 96,47 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}. \quad (36.11)$$

Eine Dissoziationsenergie von 770 kJ/mol entspricht also 7,98 eV/Ionenpaar. Setzt man nun in Gleichung 36.7 $E_{\text{pot}}(r_0) = -7,98 \text{ eV}$, $r_0 = 0,282 \text{ nm}$ und $\alpha = 1,75$ ein, so kann man nach n auflösen. Das Ergebnis lautet: $n = 9,35 \approx 9$.

Die meisten Ionenkristalle, wie z. B. LiF, KF, KCl, KI und AgCl, haben eine kubisch flächenzentrierte Struktur. Die Elemente Silber, Aluminium, Gold, Calcium, Kupfer, Nickel und Blei sind Beispiele dafür, dass auch Elemente in einer kubisch flächenzentrierten Struktur kristallisieren können.

Im kubisch raumzentrierten Gitter hat jedes Ion acht entgegesetzte geladene nächste Nachbarn. Die Madelung-Konstante

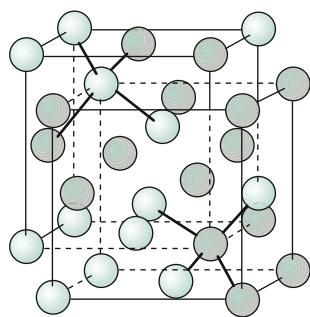


Abbildung 36.4 Diamantstruktur. Diese Struktur kann als Kombination zweier sich wechselseitig durchdringender kubisch flächenzentrierter Strukturen aufgefasst werden.

für diese Kristallstrukturen ist 1,7627. Beispiele für feste Elemente, die in einer kubisch raumzentrierten Struktur kristallisieren, sind Barium, Cäsium, Eisen, Kalium, Lithium, Molybdän und Natrium.

In einigen Festkörpern mit kovalenten Bindungen wird die Kristallstruktur durch die besondere Beschaffenheit der Bindungen bestimmt: Kovalente Bindungen sind gerichtet. Abbildung 36.4 zeigt die Diamantstruktur des Kohlenstoffs. In ihr ist jedes Atom infolge der Wasserstoffbrückenbindung mit vier anderen Atomen verknüpft. Auch Germanium und Silicium kristallisieren in dieser Struktur.

36.3 Streuung an periodischen Strukturen

Um das Gitter eines vorliegenden Stoffes zu ermitteln, gibt es verschiedene technische Möglichkeiten, wie beispielsweise die Untersuchung mit einem Tunnelmikroskop, mit einem Elektronenmikroskop oder einem Feldionenmikroskop. Basis dieser Untersuchungen sind stets Streuexperimente, bei der die Periodizität des Festkörpers ausgenutzt wird. Eine direkte Abbildung einer Oberfläche oder eines Kristalls wird dagegen nur für die Untersuchung von Punktdefekten, Versetzungen, Stufen, Oberflächen oder Störungen der Periodizität angewendet.

Streuexperimente werden mit Röntgenstrahlen, Elektronen, Neutronen oder Atomen durchgeführt. Neutronen werden dabei an Kernen gestreut, Röntgenstrahlen und Elektronen an der 10⁴-mal größeren Elektronenhülle. Nach der sogenannten **Born'schen Näherung** nimmt man an, das einfallende Strahlen streuende Materie zur Emission von Kugelwellen anregen, wobei letztere dann jedoch nicht mehr gestreut werden. Bei diesen Experimenten beobachtet man nicht Amplituden, sondern die Intensität der Streustrahlung (die Intensität ist das Quadrat der Fourier-Transformation der Streudichte). Je kleiner die untersuchten Strukturen, umso größer muss der Wellenvektor k der Welle werden. Der Wellenvektor muss dabei in etwa der Wellenlänge der Gitterkonstanten entsprechen.

Die Bragg'sche Reflexion

Zur Beschreibung der Streuung von Strahlung am Kristallgitter verwendet man das Konzept sogenannter **Netzebenen**. Zwei linear unabhängige Gittervektoren spannen eine solche Netzebene auf. Ein Kristall ist folglich von solchen Netzebenen durchzogen. Nehmen wir an, die Achsenabschnitte der Netzebenen in Basisvektorlängen sind $i = m, n, o$ (ganzzahlig). Dann bildet man die reziproken Werte $\frac{1}{i}$ und multipliziert diese Brüche mit einer ganzen Zahl p , sodass ein Tripel ganzer, teilerfremder Zahlen (h, k, l) entsteht. Diese Zahlen nennt man **Miller'sche Indizes** der Netzebenenschar $\{hkl\}$.

Parallel zu den Netzebenen, die auf jeder der drei Achsen durch einen Gitterpunkt gehen, lassen sich weitere Netzebenen zeichnen, und zwar gerade so viele, dass auf jeder der drei Achsen alle Gitterpunkte der Achse auch auf einer Netzebene liegen. Dies ist eine Folge der Translationssymmetrie des Kristalls.

Die Zahl der so gezeichneten Netzebenen ist dann gerade p mal so groß wie die Zahl der ursprünglichen Netzebenen: Die reziproken Achsenabschnitte dieser Netzebenen bilden nämlich direkt das geforderte teilerfremde Indextripel ganzer Zahlen (hkl) .

Der Abstand zwischen zwei Netzebenen beträgt in dieser Notation

$$d_{hkl} = 2\pi \frac{1}{G_{hkl}}, \quad (36.12)$$

ABSTAND ZWISCHEN ZWEI NETZEBENEN

wobei G_{hkl} der Betrag desjenigen Vektors ist, der Komponenten h, k, l hat und senkrecht auf den mit (hkl) bezeichneten Netzebenen steht. Fällt eine Welle mit Wellenvektor k_0 ein und wird gestreut, so habe die neue Welle den Wellenvektor k . Dann können wir den **Streuvektor** $K = k - k_0$ definieren, der in Richtung der Ablenkung zeigt. Setzen wir $K = G$ und nehmen den Betrag der Gleichung, so erhalten wir

$$G_{hkl} = \frac{2\pi}{d_{hkl}} = 2k_0 \sin \theta = K \quad (36.13)$$

HERLEITUNG DER BRAGG-GLEICHUNG

und finden so die **Bragg'sche Gleichung**

$$\lambda = 2d_{hkl} \sin \theta = 2d \sin \theta, \quad (36.14)$$

BRAGG'SCHE GLEICHUNG

wobei θ der Winkel zwischen einfallendem und abgelenktem Strahl ist. Dies zeigt uns, dass Wellen sich so verhalten, als würden sie an den Netzebenen reflektiert. Diese Form der Reflexion nennt man **Bragg-Reflexion**. Die Streubedingung besagt nun, dass für konstruktive Interferenz zwischen den an der Netzebenenschar reflektierten Wellen gerade eine Wellenlänge λ oder ein Vielfaches einer Wellenlänge liegen muss. Die Bedingung für das Auftreten eines Bragg-Reflexes lautet also

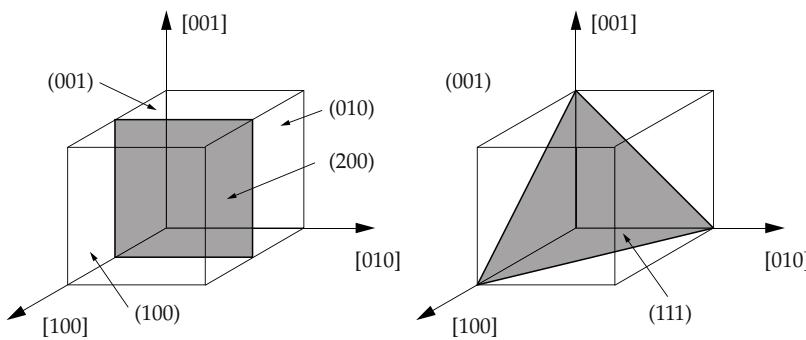


Abbildung 36.5 Miller'sche Indizes am Beispiel eines kubischen Gitters: Links sind die Ebenen (100), (010) und (001) bezeichnet, die alle zur Gruppe der {100}-Ebenen gehören, Die markierten Ebenen sind die (200)-Ebene links und die (111)-Ebene rechts

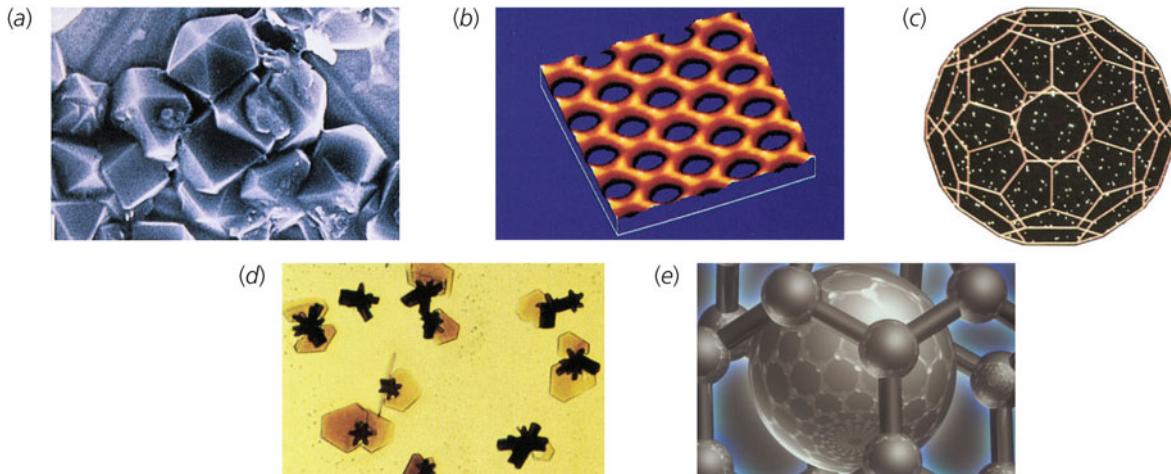
$$G_{hkl} = k_0 - k. \quad (36.15)$$

BEDINGUNG FÜR BRAGG-REFLEX

Die Endpunkte aller Vektorenpaare (k, k_0) , die der Streubedingung genügen, liegen auf der Mittelsenkrechten von G_{hkl} . Der kleinste Bereich, der von diesen Ebenen um den Ursprung herum aufgespannt wird, heißt **Brillouin'sche Zone**. Ein Punkt auf der Zonengrenze ist dadurch ausgezeichnet, dass für jede Welle

mit einem k -Vektor, der vom Zentrum der Zone ausgeht und die Zonengrenze erreicht, eine Bragg-reflektierte Welle entsteht.

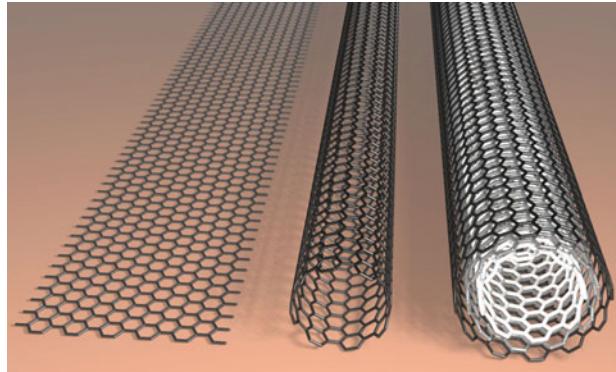
Für große Einkristalle beobachtet man tatsächlich nicht nur Primär-, sondern auch Bragg-Reflexionen, die durchaus von derselben Intensität sein können. Beide überlagern sich und bilden ein Feld stehender Wellen. Man beobachtet dann beispielsweise dieses Feld aus Knoten und Bäuchen, z. B. um Gitterfehler sichtbar zu machen.



Kohlenstoff kommt in drei wohl definierten Formen vor: als Diamant, als Graphit und in Form von Fullerenen (Kurzform von „Buckminster-Fulleren“). Letztere wurden im Jahre 1985 entdeckt. Die drei Kristallformen unterscheiden sich in der Art, wie die Kohlenstoffatome im Gitter angeordnet sind. Eine vierte Form des Kohlenstoffs, in der jedoch keine wohldefinierten Kristalle existieren, ist gewöhnliche Kohle. a) Künstlich hergestellte Diamanten in etwa 75 000facher Vergrößerung. Im Diamanten befindet sich jedes Kohlenstoffatom im Zentrum eines Tetraeders aus vier weiteren Kohlenstoffatomen. Die Härte von Diamant resultiert aus der Stärke dieser Bindungen. b) Elektronenmikroskopische Aufnahme von Graphit. In Graphit sind die Kohlenstoffatome in Schichten angeordnet, die Kohlenstoffatome innerhalb der Schichten bilden hexagonale Ringe. Die Schichten sind leicht gegeneinander verschiebbar, eine Eigenschaft, die die Eignung von Graphit als Schmiermittel erklärt. c) Eine einzelne Schicht aus Kohlenstoffringen lässt sich unter gewissen Voraussetzungen zu einem geschlossenen Gebilde zusammenbiegen, wenn einige der hexagonalen Ringe durch pentagonale ersetzt werden. Die Abbildung zeigt eine Computeranimation der kleinsten derartigen Struktur, dem C₆₀-Molekül. Jeder der 60 Eckpunkte entspricht einem Kohlenstoffatom; 20 der Oberflächen sind Hexagone, zwölf Pentagonen. Das geometrische Muster ist dasselbe wie bei einem Fußball. d) Fullerenkristalle aus dicht gepackten C₆₀-Molekülen. Kleinere Kristalle formieren sich gewöhnlich zu dünnen bräunlichen Plättchen, größere Kristalle zu Stäben. Es gibt auch Fulleren mit mehr als 60 Kohlenstoffatomen. Die hier gezeigten Kristalle bestehen zu etwa einem Sechstel aus C₇₀-Molekülen. e) Kohlenstoffnanoröhrchen haben sehr interessante elektrische Eigenschaften. Eine einzelne Graphitschicht ist ein Semimetall, das von seinen elektrischen Eigenschaften her zwischen einem Halbleiter und einem Metall liegt. Wird eine Graphitschicht zu einem Nanoröhrchen aufgerollt, müssen sich nicht nur die Kohlenstoffatome auf dem Umfang des Röhrchens richtig aneinanderreihen, auch die Wellenfunktionen der Elektronen müssen genau zusammenpassen. Diese Randbedingung erlegt den Wellenfunktionen starke Einschränkungen auf und beeinflusst damit auch die Bewegung der Elektronen. Je nachdem, wie das Röhrchen genau aufgerollt wird, handelt es sich bei dem Nanoröhrchen entweder um einen Halbleiter oder um ein Metall. (a) © Chris Kovach 3/91, p. 69, Discover; b) © Srinivas Manne, University of California, Santa Barbara; c) © Dr. F. A. Quijano und J. S. Spurlino/Howard Hughes Medical Institute, Baylor College of Medicine; d) © W. Krätschmer/Max-Planck-Institut für Kernphysik; e) © Kenneth Weard/BioGrafx/Science Source/Photo Researchers.)

🔍 Im Kontext: Die Wunderwelt des Kohlenstoffs

Das Wundermaterial des 21. Jahrhunderts besteht aus atomaren Lagen von Kohlenstoff. Im Fall von Graphen (einer einzelnen monoatomaren Grafschicht) sind diese planar angeordnet und bei Kohlenstoffnanoröhrchen (CNTs) zu geschlossenen konzentrischen Zylindern geformt. Die mechanischen, optischen und elektronischen Eigenschaften der hauchdünnen Kohlenstoffanordnung versprechen wahre Wunder in einer Vielzahl von möglichen Anwendungen. Die große mechanische Belastbarkeit basiert auf der starken sp^2 -Bindung der Kohlenstoffatome und führt zu neuartigen Membranen und Kompositmaterialien. Solarzellen und optische Sensoren machen von der hohen optischen Transparenz in Verbindung mit der hohen Leitfähigkeit Gebrauch. Graphen und CNTs können 1.000-mal mehr Strom führen als Materialien wie Kupfer und Aluminium und haben dabei auch noch eine bessere Wärmeleitfähigkeit. Die Anwendungen reichen in diesem Fall vom Nanometerbereich bis in den Kilometermaßstab. So kann das Kohlenstoffmaterial sowohl als innovative Fortentwicklung der Chipverdrahtung anstelle der herkömmlichen, metallischen Verbindungsleitungen in einem Mikrochip dienen als auch, zu Bündeln geformt und in meterlanger Ausführung, das Gewicht von Stromkabeln bei gleicher Leitfähigkeit extrem reduzieren. In Kombination mit anderen metallischen wie halbleitenden Materialien ergeben sich leistungsfähige optische Komponenten und Diodenbauelemente mit äußerst niedriger Durchlassspannung und besserer Robustheit. Resistive Datenspeicherelemente lassen sich realisieren, indem man den Kohlenstoff mit kurzen Strompulsen zwischen amorphem (hoher Widerstand) und kristallinem Zustand (niedriger Widerstand) hin und her schaltet. CNTs sind bis jetzt das einzige Transistormaterial, das den Anforderungen einer weiteren Skalierung der Elektronik in den Nanometerbereich gerecht wird. So wurde erst kürzlich im Experiment nachgewiesen, dass ein nur 9 nm langer CNT-Kanal bei kleiner Spannung auch noch die Transistoreigenschaften zeigt, die ein viel größeres Bauteil besitzt. Das konnte bis jetzt bei keinem anderen Material (Graphen, Si, Ge, GaAs) gezeigt werden und unterstreicht noch einmal mehr die Bedeutung dieses Materials für die zukünftige Elektronik.



Links: Struktur einer monoatomaren Grafschicht (auch Graphen genannt). Mitte: Struktur einer einwandigen Kohlenstoffnanoröhre Rechts: Struktur einer mehrwandigen Kohlenstoffnanoröhre. (© Franz Kreupl)

Doch wie erzeugt man diese Kohlenstoffstrukturen und wie bekommt man sie dorthin, wo sie gebraucht werden? Genau mit diesen Fragestellungen beschäftigen wir uns an der TU München und entwickeln Prozesse und Integrationstechniken für diese innovativen Materialien. Denn nur wenn man die Herstellung und Integrationstechniken beherrscht, kann man die Eigenschaften dieses Materials nutzen. Ursprünglich wurden Nanoröhrchen in einem Lichtbogen zwischen Kohlenstoffelektroden synthetisiert. Heute bevorzugt man die In-situ-Herstellung durch katalytische Abscheidung aus der Dampfphase (CCVD) mithilfe eines kohlenstoffhaltigen Gases. Dazu müssen an der gewünschten Stelle Katalysatorpartikel (Fe, Co, Ni) auf einem Substrat aufgebracht werden. In einem CVD-Reaktor wird das Substrat dann auf bis zu 900 °C erhitzt und es wird kohlenstoffhaltiges Gas hinzugefügt. Am Katalysator wachsen dann die Nanoröhrchen. Durch geeignete Gasführung und Substratstruktur kann man die Wachstumsrichtung einstellen. Auch Graphen lässt sich mit dieser Methode herstellen. Nur muss man Sorge tragen, dass das Katalysatormaterial (Ni, Cu) auf keinen Fall Partikel bildet, sondern eine durchgehende metallische Schicht bleibt. Wir haben uns auch darauf spezialisiert, Vielfachlagen von Graphen ohne Katalysatormaterial direkt auf einem Wafer für Leiterbahnen und Membranen abzuscheiden. Nach erfolgreicher Integration des Materials kann man dann ein funktionelles Bauelement erstellen und dies auf seine Eigenschaften untersuchen.



Prof. Dr. Franz Kreupl forscht an der TU München an Applikationen von nano- und kohlenstoffbasierten Materialien. Im Fokus stehen Kohlenstoffnanoröhrchen, Nanodrähte und Graphen, die in der Anwendung als Bauelemente, Sensoren, Interconnects, Informations- und Energiespeicher das Potenzial haben, den Status quo erheblich zu verbessern. Mehr Informationen auf <http://www.hes.ei.tum.de>.

1. De Volder, M. V. L. et al., „Carbon Nanotubes: Present and Future Commercial Applications“, *Science* **339**, 2013, 535 <http://www.sciencemag.org/content/339/6119/535.full> (Stand: Mai 2013).
2. Kreupl, F., „Electronics: Carbon nanotubes finally deliver“, *Nature* **484**, 2012, 321 <http://www.nature.com/nature/journal/v484/n7394/full/484321a.html> (Stand: Mai 2013).
3. Hönlein, W., Kreupl, F., „Kohlenstoff-Nanoröhrchen für die Mikroelektronik?“, *Physik Journal* **10**, 2004, 39 <http://www.pro-physik.de/details/articlePdf/1107025/issue.html> (Stand: Mai 2013).

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Die Struktur von Festkörpern	Festkörper liegen oft in kristalliner Form vor. Kristalle zeichnen sich dadurch aus, dass sich eine kleine Grundstruktur, die sogenannte Einheitszelle, ein um das andere Mal wiederholt.
Kristallgitter	Es gibt insgesamt 14 verschiedene Kristallstrukturen im dreidimensionalen Raum, die sogenannten Bravais-Gitter, u. a. die kubisch flächenzentrierte, die kubisch raumzentrierte und die hexagonal dicht gepackte Struktur. In welcher Struktur ein Stoff kristallisiert, hängt von der Art der Bindung zwischen den Atomen, Ionen oder Molekülen in dem Kristall und dem Größenverhältnis der Atome ab.
Potenzielle Energie	$E_{\text{pot}} = -\alpha \frac{ke^2}{r} + \frac{C}{r^n} \quad (36.7)$ <p>Dabei ist r der Abstand zwischen benachbarten Ionen und α die Madelung-Konstante, die von der Geometrie des Kristalls abhängt und in der Größenordnung von 1,8 liegt. Der Wert von n ist ungefähr 9.</p>
Strukturanalyse	Um die Struktur von Kristallen zu untersuchen, führt man Streuexperimente mit Elektronen, Neutronen oder Atomen durch, abhängig von der gewünschten Analyseart, da eine Streuung von geladenen Teilchen (Elektronen oder Ionen) an den Elektronenhüllen der Gitteratome durchgeführt wird, während die Streuung neutraler Teilchen (z. B. Neutronen) am Kern der Gitteratome stattfindet.
Bragg-Bedingung	Zur Strukturanalyse von Kristallen führt man Streuexperimente mit Strahlung der Wellenlänge λ an den Netzebenen des Kristallgitters durch, wobei man mithilfe der Bragg-Bedingung $\lambda = 2d \sin \theta \quad (36.14)$ den Abstand d zwischen den Gitternetzebenen bestimmen kann, wenn man die Winkel θ misst, für die Maxima im Beugungsmuster auftreten.

Aufgaben

Verständnisaufgaben

36.1 • Ordnen Sie die folgenden Gitter nach steigender Symmetrie: a) triklin, b) kubisch raumzentriert, c) orthorhombisch flächenzentriert, d) hexagonal.

36.2 • In einem kubisch raumzentrierten Gitter haben die beiden Atome innerhalb einer Gitterzelle die Koordinaten (0,0,0) und (1/2,1/2,1/2). Wie weit sind dann die acht nächsten Nachbarn vom Atom bei (1/2,1/2,1/2) entfernt, wenn die Gitterzelle eine Kantenlänge von a hat?

36.3 • Wie hoch ist die Packungsdichte (Atome/Volumen) für eine Gitterzelle in einem kubisch primitiven Gitter und in einem kubisch flächenzentrierten Gitter?

Die Struktur von Festkörpern

36.4 • Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand r_0 (von Mittelpunkt zu Mittelpunkt) zwischen den K^+ - und Cl^- -Ionen in KCl . Nehmen Sie an, das Volumen eines jeden Ions sei ein Würfel der Kantenlänge r_0 . Die molare Masse von KCl beträgt 74,55 g/mol, die Massendichte 1,984 g/cm³.

36.5 •• a) Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 36.7 $E_{\text{pot}}(r_0)$ für Calciumoxid (CaO). Der Gleichgewichtsabstand beträgt $r_0 = 0,208 \text{ nm}$. Verwenden Sie den Wert $n = 8$. b) In der wievielten Stelle ändert sich $E_{\text{pot}}(r_0)$, wenn man n von 8 auf 10 erhöht?

Elektrische Eigenschaften von Festkörpern

37



Metallisches Arsen ist ein Halbmetall, das für seine giftige Wirkung in löslichen Verbindungen oder im Oxid an der Oberfläche bekannt ist. Weniger bekannt ist die Tatsache, dass eine geringe Konzentration von Arsenatomen in Siliziumkristallen den spezifischen Widerstand verringert (im Vergleich zu reinem Silizium). Dem Halbleiter Galliumarsenid verleiht Arsen Festkörpereigenschaften, die für ein Lasermedium geeignet sind. (© The Natural History Museum, Alamy.)



Wissen Sie, wie viele Arsenatome nötig sind, um die Ladungsträgerdichte in reinem Silizium auf das Fünfmillionenfache zu erhöhen? (Siehe Beispiel 37.6.)

37.1 Eine mikroskopische Betrachtung der elektrischen Leitfähigkeit	1288
37.2 Freie Elektronen im Festkörper	1290
37.3 Die Quantentheorie der elektrischen Leitfähigkeit	1295
37.4 Das Bändermodell der Festkörper	1297
37.5 Halbleiter	1299
37.6 *Halbleiterübergangsschichten und Bauelemente	1301
37.7 *Supraleitung	1305
37.8 *Die Fermi-Dirac-Verteilung	1308
Zusammenfassung	1312
Aufgaben	1315

Bei klassischer Beschreibung des spezifischen Widerstands und der elektrischen Leitfähigkeit verschiedener Materialien ergibt sich eine Diskrepanz zwischen gemessenen und theoretisch berechneten Werten. Erst die quantenmechanische Beschreibung erlaubt korrekte Vorhersagen zu treffen und die Materialien in Leiter, Nichtleiter und Halbleiter einzuteilen.

Wir wenden in diesem Kapitel unser Verständnis der Quantenmechanik an, um die elektrischen Eigenschaften von Festkörpern und Halbleiterbauelementen zu behandeln. Ein großer Teil unserer Betrachtungen wird qualitativ sein, weil – ähnlich wie in der Atomphysik – die quantenmechanischen Berechnungen mathematisch sehr anspruchsvoll sind.

37.1 Eine mikroskopische Betrachtung der elektrischen Leitfähigkeit

Wir betrachten nun ein Metall als ein reguläres dreidimensionales Ionengitter, das ein gewisses Volumen V ausfüllt und eine große Zahl n_e von Elektronen enthält, die sich frei durch das gesamte Metall bewegen können. Die Zahl der freien Elektronen im Metall beträgt etwa ein bis vier Elektronen pro Atom. Herrscht kein elektrisches Feld, so bewegen sich die freien Elektronen im Metall zufällig hin und her, genau wie Gasmoleküle in einem Behälter.

Die Stromstärke in einem Leitersegment ist proportional zum Spannungsabfall über diesem Segment:

$$I = \frac{U}{R_\Omega} \quad (\text{oder} \quad U = R_\Omega I).$$

Der Ohm'sche Widerstand R_Ω ist proportional zur Länge l des Leitersegments und umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche A :

$$R_\Omega = r_\Omega \frac{l}{A}.$$

Dabei ist r_Ω der spezifische Widerstand. Setzen wir $r_\Omega l/A$ für R_Ω und $E l$ für U ein, können wir die Stromstärke in Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke E und dem spezifischen Widerstand r_Ω angeben:

$$I = \frac{U}{R_\Omega} = \frac{E l}{r_\Omega l/A} = \frac{EA}{r_\Omega}.$$

Dividieren wir beide Seiten durch A , so ergibt sich $I/A = (1/r_\Omega) E$ oder $j = (1/r_\Omega) E$, wobei $j = I/A$ die Komponente des Stromdichtevektors \mathbf{j} in Richtung $\hat{\mathbf{E}}$ ist. Die Stromdichte ist definiert als

$$\mathbf{j} = q \frac{n_q}{V} \mathbf{v}_d, \quad (37.1)$$

DEFINITION DER STROMDICHTE

wobei q , n_q/V und v_d die Ladung, die Teilchenzahldichte und die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger bezeichnen (dies folgt aus Gleichung 22.3). In vektorieller Form besteht folgender Zusammenhang zwischen der Stromdichte und dem elektrischen Feld:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{r_\Omega} \mathbf{E}. \quad (37.2)$$

Dies ist die lokale, auf einen Raumpunkt bezogene Form des Ohm'schen Gesetzes. Der reziproke Wert des spezifischen Widerstands wird als **Leitfähigkeit** bezeichnet.

Entsprechend dem Ohm'schen Gesetz ist der spezifische Widerstand unabhängig von der Stromdichte und dem elektrischen Feld \mathbf{E} . Kombiniert man die Gleichungen 37.1 und 37.2 und setzt $-e$ für die Ladung q und n_e/V für die Teilchenzahldichte n_q/V ein, so ergibt sich

$$\mathbf{v}_d = -\frac{1}{e(n_e/V)r_\Omega} \mathbf{E}. \quad (37.3)$$

Gleichung 37.3 besagt, dass die Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}_d proportional zur elektrischen Feldstärke \mathbf{E} ist.

Ein elektrisches Feld übt auf ein freies Elektron die Kraft $-e\mathbf{E}$ aus. Wäre dies die einzige wirkende Kraft, würde das Elektron die konstante Beschleunigung $-e\mathbf{E}/m_e$ erfahren. Gleichung 37.3 aber impliziert, dass sich stattdessen ein stationärer Zustand einstellt, bei dem die Driftgeschwindigkeit des Elektrons konstant und proportional zur elektrischen Feldstärke \mathbf{E} ist. Im mikroskopischen Modell erklärt man dies dadurch, dass das freie Elektron nur für kurze Zeit beschleunigt wird und dann mit einem Gitterion zusammenstößt. Die Geschwindigkeit des Elektrons unmittelbar nach dem Stoß steht in keiner Beziehung zur Driftgeschwindigkeit. Diese Annahme wird dadurch gerechtfertigt, dass der Betrag der Driftgeschwindigkeit verglichen mit der zufälligen, thermischen Geschwindigkeit der Elektronen äußerst klein ist.

Ein Elektron hat zum Zeitpunkt t nach der letzten Kollision die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0 - (e\mathbf{E}/m_e)t$, wobei \mathbf{v}_0 die Geschwindigkeit des Elektrons direkt nach dem Stoß sein soll. Da die Richtung von \mathbf{v}_0 zufällig ist, trägt diese Geschwindigkeit nicht zur mittleren Geschwindigkeit der Elektronen bei. Die mittlere oder Driftgeschwindigkeit der Elektronen ist daher

$$\mathbf{v}_d = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e} \tau. \quad (37.4)$$

Dabei ist τ die mittlere Zeit, die seit dem letzten Stoß vergangen ist. Einsetzen in Gleichung 37.3 liefert

$$\left(\frac{e\mathbf{E}}{m_e} \tau \right) = \frac{1}{e(n_e/V)r_\Omega} \mathbf{E}$$

und somit

$$r_\Omega = \frac{m_e}{(n_e/V)e^2 \tau}. \quad (37.5)$$

Die Zeit τ , auch **Stoßzeit** genannt, ist gleichzeitig die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen. (Man ist leicht verleitet, fälschlicherweise anzunehmen, dass τ die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen sei. Dann wäre die mittlere Zeit seit dem letzten Stoß jedoch $\tau/2$ und nicht τ in obiger Formel.) Die mittlere Wegstrecke, die ein Elektron zwischen zwei Stößen zurücklegt, ist $\langle v \rangle \tau$ und wird als **mittlere freie Weglänge** λ bezeichnet:

$$\lambda = \langle v \rangle \tau. \quad (37.6)$$

Dabei ist $\langle v \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen, die um viele Größenordnungen höher ist als die Driftgeschwindigkeit. Mit der mittleren freien Weglänge und der mittleren Geschwindigkeit erhalten wir für den spezifischen Widerstand

$$r_\Omega = \frac{m_e \langle v \rangle}{(n_e/V) e^2 \lambda}. \quad (37.7)$$

SPEZIFISCHER WIDERSTAND IN ABHÄNGIGKEIT VON $\langle v \rangle$ UND λ

Das Ohm'sche Gesetz besagt, dass der spezifische Widerstand r_Ω von der elektrischen Feldstärke E unabhängig ist. Da m_e , (n_e/V) und e Konstanten sind, könnten höchstens die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ und die freie Weglänge λ von E abhängen. Lassen Sie uns diese Größen näher betrachten, um zu sehen, ob sie möglicherweise vom elektrischen Feld E abhängen.

Klassische Interpretation von $\langle v \rangle$ und λ

Gemäß der klassischen Theorie sollten alle freien Elektronen in einem Leiter bei der Temperatur $T = 0$ K eine kinetische Energie von null haben. Wird der Leiter erhitzt, erlangen die Gitterionen eine mittlere kinetische Energie von $\frac{3}{2} k_B T$; diese wird durch Stöße zwischen Elektronen und Ionen auf die freien Elektronen übertragen. (Dies folgt aus dem Gleichverteilungsprinzip, das in Abschnitt 14.3 behandelt wurde.) Die freien Elektronen im Leiter unterliegen dann einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung, genau wie ein Molekülgas. Die Elektronen sollten in diesem Fall eine mittlere kinetische Energie von $\frac{3}{2} k_B T$ haben, bei Raumtemperatur ($T \approx 300$ K) also ungefähr 0,04 eV. Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit (siehe Gleichung 14.16) der Elektronen, die etwas größer ist als die mittlere Geschwindigkeit, beträgt bei $T = 300$ K:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &\approx v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_e}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot (1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}) \cdot (300 \text{ K})}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \\ &= 1,17 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Beachten Sie, dass diese Geschwindigkeit um etwa neun Größenordnungen höher ist als die typische Driftgeschwindigkeit von $3,5 \cdot 10^{-5}$ m/s, wie sie in Beispiel 22.1 berechnet wurde. Die durch das elektrische Feld hervorgerufene Driftgeschwindigkeit ist mithin so klein, dass sie auf die sehr große mittlere Geschwindigkeit der Elektronen praktisch keinen Einfluss hat. Daher wird $\langle v \rangle$ in Gleichung 37.7 nicht vom elektrischen Feld E abhängen.

In der klassischen Theorie besteht ein Zusammenhang zwischen der mittleren freien Weglänge einerseits und der Größe der Gitterionen und der Zahl der Ionen pro Volumeneinheit andererseits. Lassen Sie uns ein Elektron betrachten, das sich mit der Geschwindigkeit v durch einen Bereich mit still stehenden

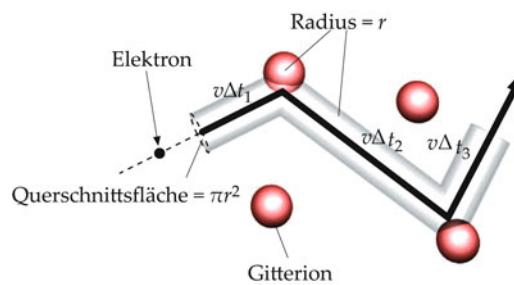


Abbildung 37.1 Modell für die Bewegung eines Elektrons im Ionengitter eines Leiters. Das Elektron wird als Punktteilchen angesehen, das mit einem Gitterion zusammenstößt, wenn es ihm bis auf den Ionenradius r nahekommt. Hat das Elektron die Geschwindigkeit v , so stößt es im Zeitraum Δt mit allen Ionen im Volumen $\pi r^2 v \Delta t$ zusammen. Dieses Bild steht in Einklang mit dem klassischen Drude-Modell, nicht jedoch mit dem allgemein anerkannten quantenmechanischen Modell, das später in diesem Kapitel vorgestellt wird.

Ionen bewegt, die wir als harte Kugeln auffassen wollen (Abbildung 37.1). Die Größe des Elektrons sei vernachlässigbar. Das Elektron wird mit einem Ion kollidieren, wenn es ihm bis auf einen Abstand r , der genau der Radius des Ions ist, nahekommt. In einem Zeitintervall Δt_1 legt das Elektron die Wegstrecke $v \Delta t_1$ zurück. Befindet sich das Zentrum eines Ions in dem zylindrischen Volumen $\pi r^2 v \Delta t_1$, so kollidiert das Elektron mit diesem Ion. Anschließend ändert es seine Richtung und kollidiert nach dem Zeitintervall Δt_2 mit einem anderen Ion, wenn sich dessen Zentrum im Volumen $\pi r^2 v \Delta t_2$ befindet. Insgesamt wird das Elektron im Zeitintervall $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots$ mit allen Ionen kollidieren, deren Zentren sich in dem Volumen $\pi r^2 v \Delta t$ befinden. Die Zahl der Ionen in diesem Volumen beträgt $(n_{\text{ion}}/V) \pi r^2 v \Delta t$, wobei (n_{ion}/V) die Zahl der Ionen pro Volumeneinheit ist. Die gesamte Weglänge dividiert durch die Zahl der Stöße ergibt die mittlere freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{v \Delta t}{(n_{\text{ion}}/V) \pi r^2 v \Delta t} = \frac{1}{(n_{\text{ion}}/V) \pi r^2} = \frac{1}{(n_{\text{ion}}/V) A}. \quad (37.9)$$

Dabei ist $A = \pi r^2$ die Querschnittsfläche eines Gitterions.

Stärken und Schwächen des klassischen Modells

Weder (n_{ion}/V) noch r hängen von der elektrischen Feldstärke E ab, also ist auch λ von E unabhängig. Somit hängt gemäß der klassischen Interpretation von $\langle v \rangle$ und λ keine dieser beiden Größen von E ab. Daraus folgt, dass auch der spezifische Widerstand r_Ω von E unabhängig ist; dies steht in Übereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetz. An anderer Stelle jedoch versagt die klassische Theorie: Die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands wird nicht richtig wiedergegeben. Da λ nur vom Radius und der Teilchenzahl dichte der Gitterionen abhängt, ist die einzige temperaturabhängige Größe in Gleichung 37.7 die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$, die proportional zu \sqrt{T} ist. Experimentell stellt man jedoch einen linearen Zusammenhang zwischen dem spezifischen Widerstand und der

Temperatur fest. Das Modell versagt noch in einem weiteren Punkt: Berechnet man mit der Boltzmann-Verteilung für $\langle v \rangle$ und λ aus Gleichung 37.9 den Wert für r_Ω bei $T = 300$ K, so liegt dieser um das Sechsfache über dem gemessenen Wert.

Die klassische Theorie der elektrischen Leitfähigkeit versagt, weil Elektronen keine klassischen Teilchen sind. Man darf die Wellennatur der Elektronen nicht außer Acht lassen. Aufgrund der Welleneigenschaften von Elektronen und des Pauli-Verbots (das im folgenden Abschnitt behandelt wird) ist die Energieverteilung der freien Elektronen im Metall nicht einmal annähernd durch eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung gegeben wie beim klassischen idealen Gas. Darüber hinaus ist die Kollision zwischen einem Elektron und einem Gitterion in keiner Weise mit dem Aufprall eines Fußballs auf einen Baum zu vergleichen. Vielmehr muss man die Kollision als Streuung der Elektronenwellen am Gitter auffassen. Um die Quantentheorie der elektrischen Leitfähigkeit richtig erfassen zu können, benötigen wir ein qualitatives Verständnis der Energieverteilung von freien Elektronen in einem Metall. Dies wird uns auch in die Lage versetzen, den Ursprung des Kontaktpotenzials zwischen zwei verschiedenartigen Metallen und den Beitrag freier Elektronen zur Wärmekapazität von Metallen zu verstehen.

37.2 Freie Elektronen im Festkörper

Es liegt nahe, die freien Elektronen im Metall als *Elektronengas* aufzufassen. Während jedoch in einem gewöhnlichen Gas, wie z. B. Luft, die Energie der Moleküle der klassischen Maxwell-Boltzmann-Verteilung folgt, ist dies bei den freien Elektronen im Metall nicht der Fall. Ihre Energie unterliegt vielmehr einer quantenmechanischen Verteilung, der sogenannten *Fermi-Dirac-Verteilung*. Die wesentlichen Eigenschaften freier Elektronen im Festkörper werden bereits verständlich, wenn man die Elektronen im Metall als Teilchen in einem Potenzialtopf auffasst. Der eindimensionale Fall dieses Problems wurde ausführlich in Kapitel 33 diskutiert. Darauf aufbauend wollen wir in diesem Abschnitt eine semiquantitative Behandlung der wesentlichen Eigenschaften freier Elektronen im Festkörper vornehmen; eine detailliertere Analyse der Fermi-Dirac-Verteilung erfolgt dann in Abschnitt 37.8.

Energiequantisierung im Kastenpotential

In Kapitel 32 haben wir gesehen, dass die Wellenlänge, die zu einem Elektron mit dem Impuls p gehört, durch die De-Broglie-Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (37.10)$$

gegeben ist, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist. Wird ein Teilchen in einem begrenzten Raumgebiet, z. B. einem Kasten, eingeschlossen, sind nur bestimmte Wellenlängen

$\lambda_n, n = 1, 2, \dots$, die die Bedingungen für eine stehende Welle erfüllen, erlaubt. Für einen eindimensionalen Kasten der Länge l müssen die Wellenlängen der folgenden Bedingung genügen:

$$n \frac{\lambda_n}{2} = l, n = 1, 2, \dots \quad (37.11)$$

Dies führt zu einer Quantisierung der Energie:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{(h/\lambda_n)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{(2l/n)^2}$$

oder

$$E_n = n^2 E_1, \quad (37.12)$$

wobei $E_1 = h^2/(8ml^2)$ ist. Die räumliche Wellenfunktion für den n -ten Zustand lautet

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (37.13)$$

Die Quantenzahl n kennzeichnet die Wellenfunktion eines bestimmten Zustands und die dazugehörige Energie. Im dreidimensionalen Fall gibt es drei Quantenzahlen, für jede Dimension eine.

Das Pauli-Prinzip

Die Verteilung der Elektronen auf die möglichen Energiezustände unterliegt dem Pauli-Prinzip, das besagt, dass keine zwei Elektronen in einem Atom denselben Quantenzustand einnehmen können, d. h., die Quantenzahlen, die ihre Zustände beschreiben, dürfen nicht alle übereinstimmen. Das Pauli-Prinzip gilt für alle „Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen“ (Fermionen); dazu gehören Elektronen, Protonen und Neutronen. Diese Teilchen besitzen eine Spinquantenzahl m_s , die zwei mögliche Werte annehmen kann: $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$. Für die vollständige Charakterisierung des Quantenzustands eines Teilchens benötigt man die Spinquantenzahl m_s und die Quantenzahlen, die sich auf den räumlichen Teil der Wellenfunktion beziehen. Da die Spinquantenzahl nur zwei mögliche Werte annehmen kann, lässt sich das Pauli-Prinzip in Bezug auf die räumlichen Zustände folgendermaßen formulieren:

Es kann höchstens zwei Elektronen geben, die in allen *räumlichen* Quantenzahlen übereinstimmen.

PAULI-PRINZIP IN BEZUG AUF DIE RÄUMLICHEN ZUSTÄNDE

Enthält ein System, wie z. B. ein Atom, mehr als zwei Elektronen, können sich nur zwei davon im niedrigsten Energiezustand befinden. Das dritte und vierte Elektron müssen den zweitniedrigsten Zustand einnehmen, usw. Welche Auswirkung das für die Energie eines Systems aus Fermionen hat, illustriert Beispiel 37.1.

Beispiel 37.1: Die Energie eines Bosonensystems gegenüber der Energie eines Fermionensystems

Vergleichen Sie die Gesamtenergie für den Grundzustand von fünf identischen Bosonen der Masse m in einem eindimensionalen Kasten mit der Gesamtenergie für den Grundzustand von fünf identischen Fermionen der Masse m im selben Kasten.

Problembeschreibung: Der Grundzustand entspricht dem Zustand der niedrigstmöglichen Energie. Die Energieniveaus in einem eindimensionalen Kasten sind gegeben durch $E_n = n^2 E_1$, wobei $E_1 = \frac{\hbar^2}{8m l^2}$ ist (Gleichung 37.12). Im Fall der fünf Bosonen wird der Zustand niedrigster Energie dadurch realisiert, dass alle Bosonen den Zustand $n = 1$ einnehmen (Abbildung 37.2a). Im Fall der Fermionen entspricht der Zustand niedrigster Energie der Situation, dass sich zwei Fermionen im Zustand $n = 1$, zwei Fermionen im Zustand $n = 2$ und ein Fermion im Zustand $n = 3$ befinden (Abbildung 37.2b).

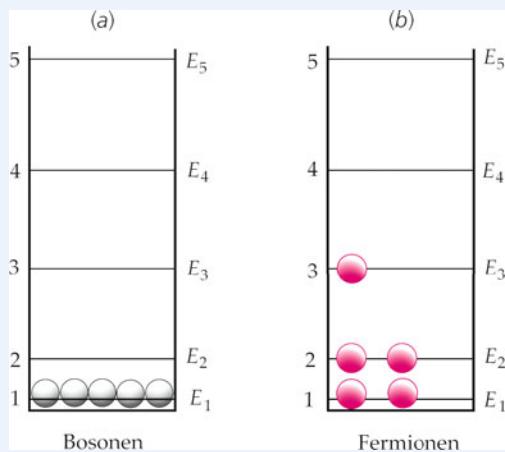


Abbildung 37.2 Zustände niedrigster Energie für Bosonen- und Fermionensysteme.

Lösung: 1. Fünf Bosonen im Zustand $n = 1$ haben die Energie:

$$E = 5 E_1$$

2. Befinden sich zwei Fermionen im Zustand $n = 1$, zwei Fermionen im Zustand $n = 2$ und ein Fermion im Zustand $n = 3$, so beträgt ihre Energie:

$$\begin{aligned} E &= 2 E_1 + 2 E_2 + 1 E_3 \\ &= 2 E_1 + 2 \cdot (2^2) \cdot E_1 + 1 \cdot (3^2) \cdot E_1 \\ &= 2 E_1 + 8 E_1 + 9 E_1 \\ &= 19 E_1 \end{aligned}$$

3. Vergleich der Energien: *Die Gesamtenergie der fünf identischen Fermionen ist 3,8-mal so groß wie die Gesamtenergie der fünf identischen Bosonen.*

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß hat die Tatsache, dass Fermionen unterschiedliche Quantenzustände einnehmen müssen, große Auswirkungen auf die Gesamtenergie eines Vielteilchensystems. ■

Die Fermi-Energie

Befinden sich in einem Kasten viele Elektronen, so werden diese bei $T = 0$ K die niedrigsten Energieniveaus einnehmen, die mit dem Pauli-Prinzip vereinbar sind. Im Fall von n_e Elektronen können sich zwei Elektronen auf dem niedrigsten Energieniveau niederlassen, zwei Elektronen auf dem zweitniedrigsten Energieniveau, usw. Die n_e Elektronen füllen also die untersten $n_e/2$ Energieniveaus (Abbildung 37.3). Die Energie des letzten gefüllten (oder halb gefüllten) Niveaus bei $T = 0$ K wird als Fermi-Energie E_F bezeichnet. Wären die Elektronen in einem eindimensionalen Kasten, wäre die Fermi-Energie durch Gleichung 37.12 mit $n = n_e/2$ gegeben:

$$E_F = \left(\frac{n_e}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{8 m_e l^2} = \frac{\hbar^2}{32 m_e} \left(\frac{n_e}{l}\right)^2. \quad (37.14)$$

FERMI-ENERGIE BEI $T = 0$ K IM EINDIMENSIONALEN FALL

Für den Fall eines eindimensionalen Kastens hängt die Fermi-Energie also von der Zahl der freien Elektronen pro Längeneinheit des Kastens ab.

Übung 37.1: Nehmen Sie an, in einem eindimensionalen Kasten befindet sich alle 0,1 nm ein Ion mit dazugehörigem freiem Elektron. Berechnen Sie die Fermi-Energie. Hinweis: Schreiben Sie Gleichung 37.14 als

$$E_F = \frac{(hc)^2}{32 m_e c^2} \left(\frac{n_e}{l}\right)^2 = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{32 \cdot (0,511 \text{ MeV})} \left(\frac{n_e}{l}\right)^2.$$

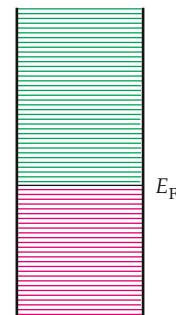


Abbildung 37.3 Bei $T = 0$ K füllen die Elektronen die erlaubten Energieniveaus bis zur Fermi-Energie E_F auf. Die Energieniveaus liegen so dicht beieinander, dass sie näherungsweise als kontinuierlich angesehen werden können.

In unserem Modell der elektrischen Leitfähigkeit bewegen sich die Elektronen jedoch in einem *dreidimensionalen* Kasten mit dem Volumen V . Die Herleitung der Fermi-Energie für den dreidimensionalen Fall ist etwas schwierig, daher wollen wir uns hier darauf beschränken, das Ergebnis anzugeben. Die Fermi-Energie bei $T = 0$ K ist im dreidimensionalen Fall eine Funktion der Elektronendichte (n_e/V) und gegeben durch

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{3n_e}{\pi V} \right)^{2/3} = (0,3646 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2) \left(\frac{n_e}{V} \right)^{2/3}. \quad (37.15)$$

FERMI-ENERGIE BEI $T = 0$ K IM DREIDIMENSIONALEN FALL

In Beispiel 37.2 wird diese Gleichung angewendet, um die Fermi-Energie für Kupfer zu berechnen.

Tabelle 37.1 Teilchenzahldichten freier Elektronen und Fermi-Energien für verschiedene Elemente bei $T = 0$ K (die Dichten werden mithilfe des Hall-Effekts gemessen; Abschnitt 23.4)

	Element	$(n_e/\text{V})/\text{cm}^3$	E_F/eV
Al	Aluminium	$18,10 \cdot 10^{22}$	11,70
Ag	Silber	$5,86 \cdot 10^{22}$	5,50
Au	Gold	$5,90 \cdot 10^{22}$	5,53
Cu	Kupfer	$8,47 \cdot 10^{22}$	7,03
Fe	Eisen	$17,00 \cdot 10^{22}$	11,20
K	Kalium	$1,40 \cdot 10^{22}$	2,11
Li	Lithium	$4,70 \cdot 10^{22}$	4,75
Mg	Magnesium	$8,60 \cdot 10^{22}$	7,11
Mn	Mangan	$16,50 \cdot 10^{22}$	11,00
Na	Natrium	$2,65 \cdot 10^{22}$	3,24
Sn	Zinn	$14,80 \cdot 10^{22}$	10,20
Zn	Zink	$13,20 \cdot 10^{22}$	9,46

Beispiel 37.2: Die Fermi-Energie für Kupfer

In Beispiel 22.1 wurde die Elektronendichte für Kupfer berechnet; sie beträgt $84,7/\text{nm}^3$. Berechnen Sie die Fermi-Energie für Kupfer bei $T = 0$ K.

Problembeschreibung: Die Fermi-Energie ist durch Gleichung 37.15 gegeben.

Lösung: 1. Die Fermi-Energie ist nach Gleichung 37.15 gegeben durch:

$$E_F = (0,3646 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2) \left(\frac{n_e}{V} \right)^{2/3}$$

2. Setzen Sie den angegebenen Wert für die Elektronendichte von Kupfer ein:

$$\begin{aligned} E_F &= (0,3646 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2) \cdot (84,7/\text{nm}^3)^{2/3} \\ &= 7,03 \text{ eV} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß ist die Fermi-Energie viel höher als die Energie $k_B T$ bei Zimmertemperatur. Für $T = 300$ K beispielsweise beträgt $k_B T$ nur 0,026 eV.

Übung 37.2: Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 37.15 die Fermi-Energie für Gold bei $T = 0$ K. Die Elektronendichte für Gold beträgt $59,0/\text{nm}^3$. □

In Tabelle 37.1 sind die Teilchenzahldichten freier Elektronen und die Fermi-Energien für einige Metalle bei $T = 0$ K aufgeführt.

Die freien Elektronen in einem Metall werden manchmal auch als Fermi-Gas bezeichnet. (Sie bilden ein Gas aus Fermionen.) Die mittlere Energie der freien Elektronen kann aus

der vollständigen Energieverteilung der Elektronen, die in Abschnitt 37.8 behandelt wird, berechnet werden. Sie beträgt bei $T = 0$ K

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F. \quad (37.16)$$

MITTLERE ENERGIE DER ELEKTRONEN IM FERMI-GAS BEI $T = 0$ K

Für Kupfer gilt: $\langle E \rangle \approx 4$ eV. Dieser Wert ist sehr groß verglichen mit der thermischen Energie bei Zimmertemperatur ($T = 300$ K), die ungefähr $k_B T \approx 0,026$ eV beträgt. Es besteht also ein großer Unterschied zur klassischen Maxwell-Boltzmann-Verteilung, für die die Energie E bei $T = 0$ K null beträgt und bei Temperaturen $T > 0$ K in der Größenordnung von $k_B T$ liegt.

Der Fermi-Faktor für $T = 0$ K

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Energiezustand besetzt ist, wird als **Fermi-Faktor** oder **Besetzungswahrscheinlichkeit** $f(E)$ bezeichnet. Bei $T = 0$ K sind alle Zustände unterhalb von E_F besetzt, während alle Zustände oberhalb von E_F unbesetzt sind (Abbildung 37.4). Der Fermi-Faktor für $T = 0$ K folgt somit der einfachen Beziehung

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{für } E < E_F, \\ 0 & \text{für } E > E_F. \end{cases} \quad (37.17)$$

Der Fermi-Faktor für $T > 0$ K

Bei Temperaturen $T > 0$ K können einige Elektronen aufgrund der thermischen Energie, die sie aus Stößen mit dem Gitter gewinnen, höhere Energiezustände einnehmen. Ein Elektron kann jedoch nur dann in einen energetisch höheren oder niedrigeren Zustand überwechseln, wenn dieser unbesetzt ist. Die kinetische Energie der Gitterionen liegt in der Größenordnung von $k_B T$, so dass die Elektronen ungefähr diese Energie $k_B T$ aus den Stößen

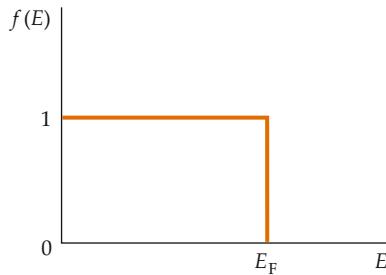


Abbildung 37.4 Fermi-Faktor für $T = 0 \text{ K}$ als Funktion der Energie.

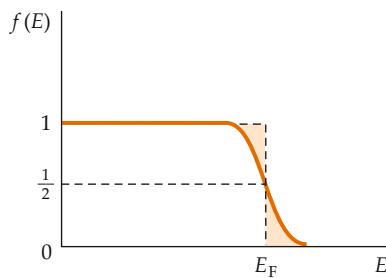


Abbildung 37.5 Der Fermi-Faktor für $T > 0 \text{ K}$. Einige Elektronen, deren Energie in der Nähe der Fermi-Energie liegt, werden angeregt; dies wird durch die getönten Bereiche angedeutet. Die Fermi-Energie E_F ist diejenige Energie, bei der $f(E_F) = \frac{1}{2}$ ist.

mit den Gitterionen gewinnen können. Bei steigender Temperatur können daher nur solche Elektronen Energie aufnehmen, deren Energie um weniger als $k_B T$ von der Fermi-Energie abweicht. Für $T = 300 \text{ K}$ beträgt $k_B T$ nur $0,026 \text{ eV}$, sodass es infolge des Pauli-Prinzips nur einigen wenigen Elektronen am oberen Rand der Energieverteilung überhaupt möglich ist, aus zufälligen Stößen mit Gitterionen Energie zu gewinnen. Abbildung 37.5 zeigt den Fermi-Faktor für $T > 0 \text{ K}$. Da es für $T > 0 \text{ K}$ keine scharfe Grenze zwischen besetzten und unbesetzten Energieniveaus gibt, müssen wir die Definition der Fermi-Energie für diesen Fall etwas modifizieren: Für Temperaturen $T > 0 \text{ K}$ ist die Fermi-Energie diejenige Energie, für die die Besetzungswahrscheinlichkeit gerade $f(E_F) = \frac{1}{2}$ ist. Außer bei wirklich extrem hohen Temperaturen ist der Unterschied zwischen der Fermi-Energie bei $T = 0 \text{ K}$ und bei Temperaturen $T > 0 \text{ K}$ sehr klein.

Die **Fermi-Temperatur** T_F ist definiert als diejenige Temperatur, für die gilt:

$$k_B T_F = E_F. \quad (37.18)$$

Für Temperaturen weit unterhalb der Fermi-Temperatur ist die mittlere Energie der Gitterionen viel niedriger als die Fermi-Energie, und die Energieverteilung der Elektronen unterscheidet sich nicht sehr stark von der bei $T = 0 \text{ K}$. Wie Beispiel 37.3 zeigt, liegt bei Kupfer die Fermi-Temperatur weit über den normalen Raumtemperaturen.

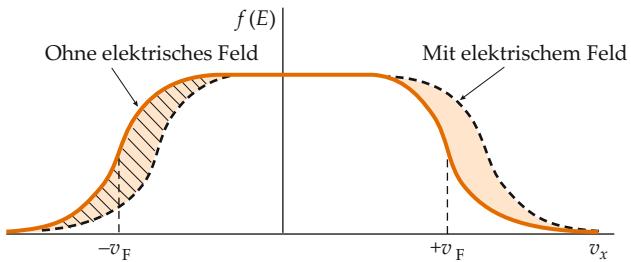


Abbildung 37.6 Fermi-Faktor in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit für den eindimensionalen Fall: ohne elektrisches Feld (durchgehende Linie) und mit elektrischem Feld (gestrichelte Linie). Das elektrische Feld zeigt in Richtung der negativen x -Achse. Die Verschiebung ist hier stark übertrieben dargestellt.

Beispiel 37.3: Die Fermi-Temperatur für Kupfer

Berechnen Sie die Fermi-Temperatur für Kupfer.

Problembeschreibung: Wir verwenden Gleichung 37.18, um die Fermi-Temperatur zu berechnen. Die Fermi-Energie für Kupfer bei $T = 0 \text{ K}$ wurde in Beispiel 37.2 berechnet; sie beträgt $7,03 \text{ eV}$.

Lösung: Setzen Sie $E_F = 7,03 \text{ eV}$ und $k_B = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$ in Gleichung 37.18 ein:

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{7,03 \text{ eV}}{8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}} = [81\,600 \text{ K}]$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß ist die Fermi-Temperatur sehr hoch.

Weitergedacht: Das Beispiel zeigt, dass die Fermi-Temperatur für Kupfer weit oberhalb jenes Temperaturbereichs liegt, in dem Kupfer noch als Festkörper vorliegt.

Da ein elektrisches Feld in einem Leiter alle Leitungselektronen gemeinsam beschleunigt, widerspricht es dem Pauli-Prinzip nicht, dass auch die freien Elektronen in den gefüllten Zuständen unterhalb der Fermi-Energie an der elektrischen Leitung teilnehmen. Abbildung 37.6 zeigt den Fermi-Faktor für $T > 0 \text{ K}$ im eindimensionalen Fall als Funktion der *Geschwindigkeit*. Der Fermi-Faktor ist ungefähr 1 für Geschwindigkeiten v_x , die im Bereich $-v_F < v_x < v_F$ liegen, wobei v_F die Fermi-Geschwindigkeit und mit der Fermi-Energie über die Beziehung $E_F = \frac{1}{2} m_e v_F^2$ verknüpft ist:

$$v_F = \sqrt{\frac{2 E_F}{m_e}}. \quad (37.19)$$

Beispiel 37.4 illustriert die Fermi-Geschwindigkeit für Kupfer.

Beispiel 37.4: Die Fermi-Geschwindigkeit für Kupfer

Berechnen Sie die Fermi-Geschwindigkeit für Kupfer.

Problembeschreibung: Wir verwenden Gleichung 37.19, um die Fermi-Geschwindigkeit zu berechnen. Die Fermi-Energie für Kupfer bei $T = 0$ K wurde in Beispiel 37.2 berechnet; sie beträgt 7,03 eV.

Lösung: Setzen Sie $E_F = 7,03$ eV in Gleichung 37.19 ein:

$$\begin{aligned} v_F &= \sqrt{\left(\frac{2 \cdot (7,03 \text{ eV})}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}\right) \cdot \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{\text{eV}}\right)} \\ &= \boxed{1,57 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis (die Fermi-Geschwindigkeit für Kupfer) ist erwartungsgemäß sehr hoch und niedriger als die Lichtgeschwindigkeit. ■

Die gestrichelte Linie in Abbildung 37.6 repräsentiert den Fermi-Faktor, nachdem das elektrische Feld in Richtung der negativen x -Achse eine gewisse Zeit t wirkte. Obwohl die Geschwindigkeiten aller freien Elektronen zu höheren Werten, also entgegengesetzt zum elektrischen Feld, verschoben werden, ist der Nettoeffekt so, als wären nur die Elektronen in der Nähe der Fermi-Energie verschoben worden.

Kontaktpotenzial

Bringt man zwei verschiedene Metalle miteinander in Kontakt, so bildet sich zwischen ihnen eine Potenzialdifferenz aus, die sogenannte **Kontaktpotenzial** U_{Kontakt} . Die Größe der Kontaktpotenzial hängt von den Fermi-Energien der beiden Metalle sowie von den Austrittsarbeiten $W_{\text{Abl},1}$ und $W_{\text{Abl},2}$ ab. (Wir haben den Begriff der Austrittsarbeits in Zusammenhang mit dem photoelektrischen Effekt in Kapitel 32 kennen gelernt.) Beim Kontakt der beiden Metalle verringert sich die Gesamtenergie des Systems, indem Elektronen nahe der Kontaktfläche von dem Metall mit der höheren Fermi-Energie in das Metall mit der niedrigeren Fermi-Energie fließen. Dies geschieht so lange, bis die Fermi-Energien beider Metalle gleich sind (Abbildung 37.7). Wenn sich der Gleichgewichtszustand eingestellt hat, ist das Metall mit der ursprünglich niedrigeren Fermi-Energie negativ aufgeladen, das andere positiv. Damit ist zwischen den beiden Metallen eine Potenzialdifferenz entstanden, die Kontaktpotenzial U_{Kontakt} , die gegeben ist als

$$U_{\text{Kontakt}} = \frac{W_{\text{Abl},1} - W_{\text{Abl},2}}{e}. \quad (37.20)$$

Tabelle 37.2 Austrittsarbeiten für einige Metalle

	Metall	W_{Abl}/eV
Ag	Silber	4,7
Au	Gold	4,8
Ca	Calcium	3,2
Cu	Kupfer	4,1
K	Kalium	2,1
Mn	Mangan	3,8
Na	Natrium	2,3
Ni	Nickel	5,2

Sie wird in Beispiel 37.5 bei Silber und Wolfram berechnet. In Tabelle 37.2 sind die Austrittsarbeiten einiger Metalle aufgeführt.

Beispiel 37.5: Kontaktspannung zwischen Silber und Wolfram

Problembeschreibung: Die Grenzwellenlänge beim photoelektrischen Effekt beträgt für Wolfram 271 nm, für Silber 262 nm. Wie groß ist die Kontaktspannung, die entsteht, wenn sich die beiden Metalle berühren?

Problembeschreibung: Die Kontaktspannung ist proportional zur Differenz der beiden Austrittsarbeiten der Metalle (Gleichung 37.20). Die Austrittsarbeiten W_{Abl} können mithilfe der Beziehung $W_{\text{Abl}} = hc/\lambda_k$ (siehe Gleichung 32.4) aus den Grenzwellenlängen berechnet werden.

Lösung: 1. Die Kontaktspannung ist nach Gleichung 37.20:

$$U_{\text{Kontakt}} = \frac{W_{\text{Abl},1} - W_{\text{Abl},2}}{e}$$

2. Die Beziehung zwischen der Austrittsarbeits und der Grenzwellenlänge lautet nach Gleichung 32.4:

$$W_{\text{Abl}} = \frac{hc}{\lambda_k}$$

3. Einsetzen von $\lambda_k = 271$ nm liefert die Austrittsarbeits $W_{\text{Abl},W}$ für Wolfram:

$$W_{\text{Abl},W} = \frac{hc}{\lambda_k} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{271 \text{ nm}} = 4,58 \text{ eV}$$

4. Einsetzen von $\lambda_k = 262$ nm liefert die Austrittsarbeits $W_{\text{Abl},Ag}$ für Silber:

$$W_{\text{Abl},Ag} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{262 \text{ nm}} = 4,73 \text{ eV}$$

5. Damit ergibt sich als Kontaktspannung:

$$\begin{aligned} U_{\text{Kontakt}} &= \frac{W_{\text{Abl},Ag} - W_{\text{Abl},W}}{e} \\ &= 4,73 \text{ V} - 4,58 \text{ V} = \boxed{0,15 \text{ V}} \end{aligned}$$

37.3 Die Quantentheorie der elektrischen Leitfähigkeit

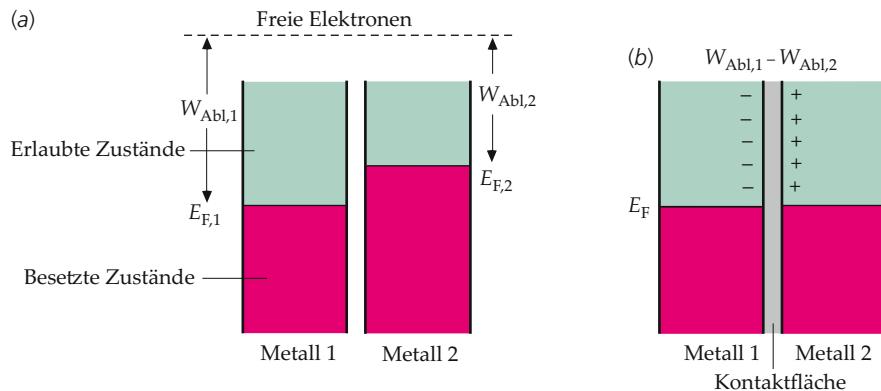


Abbildung 37.7 a) Energieniveaus zweier verschiedener Metalle mit verschiedenen Fermi-Energien E_F und Austrittsarbeiten W_{Abl} . Die Austrittsarbeit ist die Differenz zwischen der Energie eines freien Elektrons außerhalb des Metalls und der Fermi-Energie im Innern des Metalls. b) Werden die Metalle in Kontakt gebracht, fließen Elektronen vom Metall mit der ursprünglich höheren Fermi-Energie zum Metall mit der ursprünglich niedrigeren Fermi-Energie, bis die Fermi-Energien der beiden Metalle gleich sind.

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet ist das Kontaktpotenzial sehr klein (unter 1 V). Allein dadurch, dass man zwei Metalle in Kontakt bringt, kann man keine großen Potenzialdifferenzen erzeugen. ■

Beitrag der Elektronen zur Wärmekapazität von Metallen

Die quantenmechanische Betrachtung der Energieverteilung der Elektronen im Metall lässt uns nun auch verstehen, warum der Beitrag der freien Elektronen zur Wärmekapazität eines Metalls viel geringer ist als der der Ionen. Entsprechend dem Gleichverteilungssatz beträgt die Energie der Gitterionen in \tilde{n} Mol eines Festkörpers $3\tilde{n}RT$, und die molare Wärmekapazität ist somit $C = 3R$, wobei R die universelle Gaskonstante ist (Abschnitt 15.7). Das freie Elektronengas in einem Metall enthält ungefähr genauso viele Elektronen, wie es Gitterionen gibt. Wenn diese Elektronen den klassischen Gleichverteilungssatz erfüllten, müssten sie eine Energie von $\frac{3}{2}\tilde{n}RT$ haben und weitere $\frac{3}{2}R$ zur molaren Wärmekapazität beitragen. Die Wärmekapazität von Metallen ist Messungen zufolge aber nur unwesentlich höher als die von Nichtleitern. Dies können wir nun dadurch erklären, dass bei einer Temperatur T nur solche Elektronen durch zufällige Stöße mit den Gitterionen angeregt werden können, deren Energie schon vor dem Stoß in der Nähe der Fermi-Energie lag. Die Zahl dieser Elektronen liegt in der Größenordnung von $(k_B T/E_F) n_e$, wobei n_e die Zahl aller Elektronen ist. Jedes Elektron, das an einem Stoß beteiligt ist, erfährt einen Energiezuwachs von etwa $k_B T$ gegenüber seiner normalen Energie bei $T = 0$ K. Der gesamte Zuwachs an thermischer Energie beträgt also ungefähr $(k_B T/E_F) n_e k_B T$. Damit ergibt sich die Gesamtenergie von n_e Elektronen bei der Tempe-

ratur T zu

$$E = n_e \langle E \rangle (0) + \alpha n_e \frac{k_B T}{E_F} k_B T. \quad (37.21)$$

Dabei ist $\langle E \rangle (0)$ die mittlere Energie bei $T = 0$ K und α eine Konstante in der Größenordnung von 1, deren Berechnung recht schwierig ist. An dieser Stelle sei daher nur das Resultat angegeben: $\alpha = \pi^2/4$. Setzt man diesen Wert für α ein und schreibt E_F als Funktion der Fermi-Temperatur, $E_F = k_B T_F$, so ergibt sich der folgende Beitrag der freien Elektronen zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen:

$$\tilde{n} C_V = \frac{dE}{dT} = 2\alpha n_e k_B \frac{k_B T}{E_F} = \frac{\pi^2}{2} \tilde{n} R \frac{T}{T_F}.$$

Dabei wurde die Beziehung $n_e k_B = \tilde{n} R$ zwischen $n_e k_B$ und der universellen Gaskonstante R verwendet. Für die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen folgt dann:

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} R \frac{T}{T_F}. \quad (37.22)$$

Da T_F sehr groß ist, ist der Beitrag der freien Elektronen zur molaren Wärmekapazität bei Zimmertemperatur ein sehr geringer Bruchteil von R . Für Kupfer mit einer Fermi-Temperatur von $T_F = 81\,600$ K beträgt die molare Wärmekapazität bei $T = 300$ K beispielsweise

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} R \frac{300\text{ K}}{81\,600\text{ K}} \approx 0,02 R.$$

Dies stimmt gut mit dem gemessenen Wert überein.

37.3 Die Quantentheorie der elektrischen Leitfähigkeit

Der spezifische Widerstand im quantentheoretischen Bild ergibt sich, wenn wir in Gleichung 37.7 die Fermi-Geschwindigkeit v_F

(Gleichung 37.19) anstelle von $\langle v \rangle$ verwenden:

$$r_\Omega = \frac{m_e v_F}{(n_e/V) e^2 \lambda}. \quad (37.23)$$

Nun treten aber zwei Probleme auf. Erstens ist die Fermi-Geschwindigkeit v_F näherungsweise unabhängig von der Temperatur und damit nach Gleichung 37.23 auch der spezifische Widerstand, es sei denn, die mittlere freie Weglänge wäre temperaturabhängig. Zweitens wird die Größe des spezifischen Widerstands nicht richtig vorhergesagt. Wie bereits erwähnt liefert schon der klassische, auf der Maxwell-Boltzmann-Verteilung und der mittleren Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ basierende Ausdruck für den spezifischen Widerstand bei $T = 300$ K einen um das Sechsfache zu hohen Wert. Da die Fermi-Geschwindigkeit v_F noch etwa 16-mal höher ist als die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$, wird der aus Gleichung 37.23 resultierende Wert ungefähr um das 100fache über dem gemessenen Wert liegen. Die Lösung für beide Probleme besteht in einer modifizierten, quantenmechanischen Bestimmung der mittleren freien Weglänge λ .

Streuung der Elektronenwellen

In der klassischen Gleichung 37.9 für die mittlere freie Weglänge, $\lambda = ((n_{\text{ion}}/V) A)^{-1}$, lässt sich $A = \pi r^2$ als Querschnittsfläche des Gitterions verstehen, wie sie von einem Elektron wahrgenommen wird. Nach der quantenmechanischen Vorstellung hängt die freie Weglänge dagegen mit der Streuung der Elektronenwellen am Kristallgitter zusammen. Genaue Rechnungen zeigen allerdings, dass die Elektronenwellen an einer perfekten Kristallstruktur gerade *nicht* gestreut werden; in diesem Fall wäre $\lambda = \infty$. Es sind vielmehr *Unregelmäßigkeiten* im Kristallgitter, die zur Streuung der Elektronenwellen führen. Mit der tatsächlichen Querschnittsfläche der Gitterionen haben diese aber nichts zu tun. Gemäß der quantenmechanischen Theorie der Elektronenstreuung ist A ein Maß für die *Abweichungen* der Gitterionen von der perfekten Gitterordnung und vollkommen unabhängig von der Größe der Ionen. Solche Abweichungen haben ihren Ursprung meist in Verunreinigungen oder thermischen Schwingungen der Gitterionen.

Die Formel $\lambda = ((n_{\text{ion}}/V) A)^{-1}$ behält auch weiterhin ihre Gültigkeit, wir müssen nur die Fläche A uminterpretieren. Abbildung 37.8 zeigt die Fläche A vergleichend im klassischen und im quantenmechanischen Bild. Im quantenmechanischen Bild sind die Gitterionen Punkte, die zwar keine Ausdehnung haben, aber thermische Schwingungen ausführen und den Elektronen auf diese Weise eine Fläche $A = \pi r_0^2$ präsentieren, wobei r_0 nun die Schwingungsamplitude der Ionen ist. In Kapitel 11 haben wir gelernt, dass die Energie einer Schwingung, sofern es sich um eine harmonische Schwingung handelt, proportional zum Quadrat der Amplitude ist, also proportional zu r_0^2 . Die effektive Fläche A ist also proportional zur Schwingungsenergie der Gitterionen. Nach dem Gleichverteilungssatz, der für Gitterionen gilt, weil ihre Energie der Maxwell-Boltzmann-Verteilung folgt, ist die mittlere Schwingungsenergie proportional zu $k_B T$. Also ist A proportional zu T und folglich λ proportional zu $1/T$.

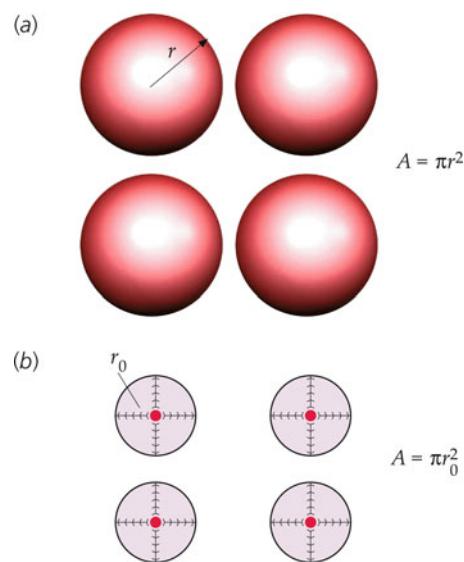


Abbildung 37.8 a) Im klassischen Bild sind die Gitterionen Kugeln vom Radius r , die den Elektronen jeweils die Querschnittsfläche πr^2 als Stoßfläche präsentieren. b) Im quantenmechanischen Bild sind die Gitterionen Punkte, die in drei Dimensionen schwingen. Die Stoßfläche, die sich den Elektronen bietet, ist πr_0^2 , wobei r_0 die Schwingungsamplitude der Ionen ist.

Damit ist der spezifische Widerstand nach Gleichung 37.7 proportional zur Temperatur T , in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.

Wenn man die aus den thermischen Schwingungen resultierende effektive Fläche A berechnet, stellt sich heraus, dass sie bei $T = 300$ K etwa 100-mal kleiner ist als die tatsächliche Querschnittsfläche eines Gitterions. Wir sehen also, dass sich das Bild des freien Elektronengases als Modell für die elektrische Leitfähigkeit in Metallen bewährt, wenn man nur die klassische mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ durch die Fermi-Geschwindigkeit v_F ersetzt und die Welleneigenschaften der Ionen berücksichtigt, d. h. deren Stöße mit den Gitterionen als Streuung der Elektronenwellen beschreibt, für die nur Abweichungen von der idealen Gitterstruktur relevant sind.

Unter anderem führen auch Verunreinigungen in einem Metall zu Abweichungen vom idealen Kristallgitter. Der Einfluss von Verunreinigungen auf den spezifischen Widerstand ist annähernd temperaturunabhängig. Der spezifische Widerstand eines Metalls lässt sich als Summe zweier Komponenten schreiben: $r_\Omega = r_{\Omega,t} + r_{\Omega,i}$. Hier röhrt $r_{\Omega,t}$ von der thermischen Bewegung der Gitterionen her und $r_{\Omega,i}$ von den Verunreinigungen (engl. *impurities*). Abbildung 37.9 zeigt typische Kurven für den spezifischen Widerstand verunreinigter Metalle in Abhängigkeit von der Temperatur. Wenn die absolute Temperatur gegen null geht, so geht auch der von der thermischen Bewegung herführende Bestandteil des spezifischen Widerstands, $r_{\Omega,t}$, gegen null, und der gesamte spezifische Widerstand geht gegen den von den Verunreinigungen herrührenden Bestandteil des spezifischen Widerstands, $r_{\Omega,i}$, der konstant ist.

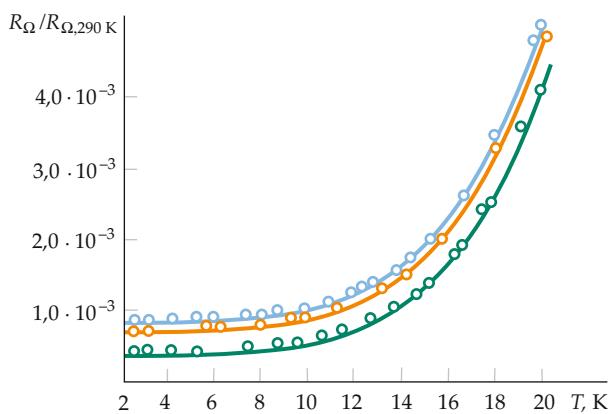


Abbildung 37.9 Die relativen Widerstände dreier verschiedener Natriumproben als Funktion der Temperatur. Die drei Kurven zeigen dieselbe Temperaturabhängigkeit; sie unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlich starken Verunreinigungen der Proben.

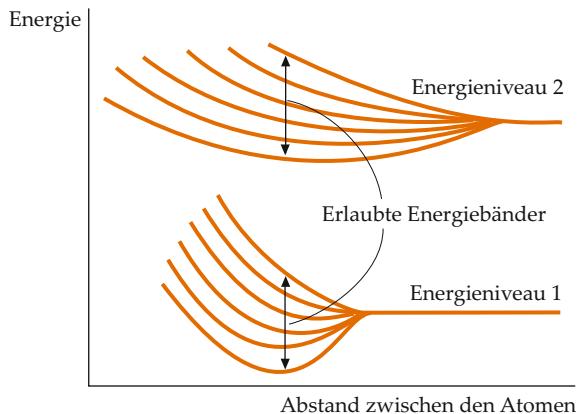


Abbildung 37.10 Aufspaltung der Energiezustände für zwei Energieniveaus und sechs Atome als Funktion des Abstands zwischen den Atomen. Ist die Zahl der Atome sehr groß, liegen die Energieniveaus, in die ein Energiezustand aufspaltet, so dicht beieinander, dass sie fast als Kontinuum angesehen werden können; man bezeichnet sie als Band.

37.4 Das Bändermodell der Festkörper

Die spezifischen Widerstände von Isolatoren und Leitern unterscheiden sich um viele Größenordnungen. So liegt der spezifische Widerstand eines typischen Isolators, wie z.B. Quarz, bei $r_\Omega = 10^{16} \Omega \cdot \text{m}$, der eines typischen Leiters dagegen bei $r_\Omega = 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Die Ursache für diesen gewaltigen Unterschied liegt in der Dichte der freien Elektronen, (n_e/V). Um zu verstehen, wie dieser große Unterschied zustande kommt, müssen wir unser Modell der freien Elektronen erweitern und den Einfluss der Gitterionen auf die Energiezustände der Elektronen berücksichtigen.

Betrachten wir zunächst, was mit den elektronischen Energieniveaus zweier einzelner Atome geschieht, wenn sich diese einander nähern. Die erlaubten Energieniveaus eines einzelnen Atoms liegen oft weit auseinander. So befindet sich im Wasserstoffatom das niedrigste erlaubte Niveau $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ um $10,2 \text{ eV}$ unter dem zweitniedrigsten erlaubten Energieniveau $E_2 = (-13,6 \text{ eV})/4 = -3,4 \text{ eV}$ (Kapitel 34). Wir wollen nun zwei identische Atome betrachten und uns auf ein bestimmtes Energieniveau konzentrieren. Solange die Atome weit voneinander entfernt sind, ist dieses Energieniveau für beide Atome gleich. Verringert sich jedoch der Abstand zwischen den beiden Atomen, so wird das Energieniveau in jedem der beiden Atome unter dem Einfluss des jeweils anderen Atoms ein wenig verschoben. In dem resultierenden Zwei-Atome-System erscheint das ursprüngliche Energieniveau in zwei Niveaus leicht unterschiedlicher Energie aufgespalten. Nähern sich drei Atome einander stark an, so spaltet ein gegebenes Energieniveau in drei getrennte Niveaus leicht unterschiedlicher Energie auf usw. Abbildung 37.10 zeigt die Aufspaltung für zwei Energieniveaus und sechs Atome als Funktion des Abstands zwischen den Atomen.

Nähern sich n_{Atom} gleiche Atome einander stark an, so spaltet ein gegebener Energiezustand der einzelnen Atome in n_{Atom} Energiezustände mit etwas unterschiedlichen Energien auf. In einem makroskopischen Festkörper ist n_{Atom} sehr groß – in der Größenordnung von 10^{23} –, sodass jedes Energieniveau in eine sehr große Zahl von Energieniveaus aufgespalten, die man als **Band** bezeichnet. Die Energieniveaus in einem Band liegen so dicht beieinander, dass man sie beinahe als Kontinuum ansehen kann. Für jeden Energiezustand des einzelnen Atoms ergibt sich im Verbund der Atome ein eigenes Band. Die verschiedenen Bänder können energetisch dicht oder weniger dicht beieinanderliegen, sie können sich sogar überlappen. Was jeweils geschieht, hängt von der Art der Atome und von der Bindungsart im Festkörper ab.

Die niedrigsten Energieniveaus, die zu den niedrigsten erlaubten elektronischen Energieniveaus der Atome in dem jeweiligen Gitter gehören, sind mit Elektronen gefüllt, die an die einzelnen Atome gebunden sind. Die Elektronen, die an der Leitung teilnehmen können, befinden sich dagegen in energetisch höheren Bändern. Das oberste Band, das Elektronen enthält, wird als **Valenzband** bezeichnet. Das Valenzband kann ganz oder teilweise mit Elektronen gefüllt sein; auch dies hängt von der Art der Atome und von der Bindungsart im Festkörper ab.

Wir können nun erklären, warum einige Festkörper Leiter, andere hingegen Isolatoren sind. Ist das Valenzband nur teilweise gefüllt, gibt es in dem Band viele unbesetzte Energieniveaus, und die Elektronen in dem Band können durch elektrische Felder leicht in einen energetisch höheren Zustand angehoben werden. Ein solches Material ist folglich ein guter Leiter. Ist das Valenzband hingegen gefüllt und das nächsthöhere erlaubte Band durch eine große Energiedifferenz vom Valenzband getrennt, wird ein angelegtes elektrisches Feld typischerweise nicht stark genug sein, um ein Elektron aus den oberen Energieniveaus des besetzten Bands in ein Energieniveau des leeren Bands anzuregen. Bei einem solchen Material handelt es sich

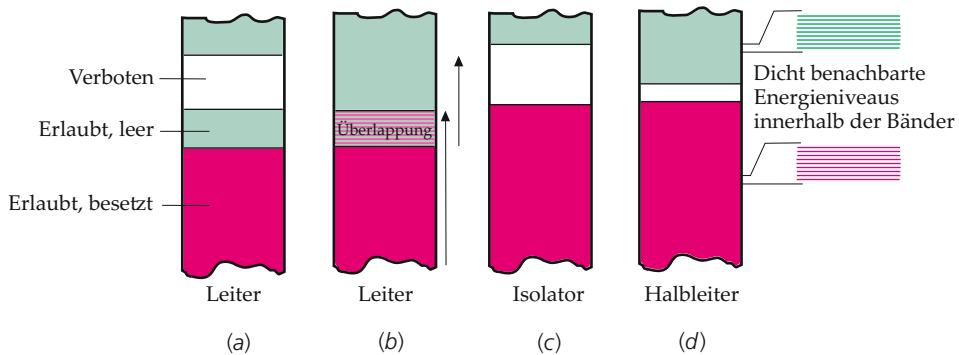


Abbildung 37.11 Vier mögliche Bandstrukturen von Festkörpern. a) Ein typischer Leiter: Das Valenzband ist gleichzeitig das Leitungsband. Es ist nur teilweise gefüllt, sodass die Elektronen leicht in direkt darüberliegende Energieniveaus angeregt werden können. b) Ein Leiter, bei dem das Valenzband das darüberliegende Leitungsband überlappt. c) Ein typischer Isolator: Das gefüllte Valenzband ist durch eine breite Bandlücke vom Leitungsband getrennt. d) Ein Halbleiter: Die Energielücke zwischen dem gefüllten Valenzband und dem Leitungsband ist sehr klein; daher können einige Elektronen bei Zimmertemperatur in das Leitungsband angeregt werden. Im Valenzband bleiben dann positiv geladene Löcher zurück.

um einen Isolator. Das energetisch niedrigste Band, in dem noch unbesetzte Zustände vorhanden sind, wird als **Leitungsband** bezeichnet. In einem Leiter ist das Valenzband nur teilweise gefüllt, sodass das Valenzband gleichzeitig auch das Leitungsband ist. Eine Energielücke zwischen erlaubten Bändern wird manchmal auch als **Bandlücke** bezeichnet.

Abbildung 37.11a zeigt die Bandstruktur eines Leiters, wie z. B. Kupfer. Die energetisch niedriger liegenden (nicht gezeigten) Bänder sind mit Elektronen der inneren Schalen der Atome besetzt. Das Valenzband ist nur etwa zur Hälfte gefüllt. Wird ein elektrisches Feld angelegt, werden die Elektronen im Leitungsband beschleunigt, d. h., ihre Energie nimmt zu. Dies steht nicht in Widerspruch zum Pauli-Verbot, weil es gleich oberhalb der besetzten Zustände in diesem Band eine Vielzahl unbesetzter Zustände gibt. Diese Elektronen stellen also die *Leitungselektronen* dar.

Abbildung 37.11b zeigt die Bandstruktur für Magnesium, das ebenfalls ein Leiter ist. In diesem Fall ist das oberste Band vollständig gefüllt, überlappt aber mit dem nächsthöheren, leeren Band. Beide Bänder zusammen stellen also ein kombiniertes Valenz-Leitungs-Band dar, das nur teilweise gefüllt ist.

Abbildung 37.11c zeigt die Bandstruktur eines typischen Isolators. Bei $T = 0\text{ K}$ ist das Valenzband vollständig gefüllt. Das nächsthöhere Energieband mit unbesetzten Zuständen, das Leitungsband, ist vom Valenzband durch eine große Energielücke getrennt. Bei $T = 0\text{ K}$ ist das Leitungsband leer. Bei Zimmertemperatur können einige wenige Elektronen aus dem Valenzband in Zustände des Leitungsbands angeregt werden. Für die meisten Elektronen ist die Energielücke jedoch zu groß; die Energie, die sie durch thermische Anregung erhalten, reicht nicht aus, um ins Leitungsband überzuwechseln. Selbst bei ziemlich hohen Temperaturen gelangen nur sehr wenige Elektronen durch thermische Anregung in das nahezu leere Leitungsband. Wird an einen solchen Festkörper ein elektrisches Feld angelegt, können die Elektronen nicht beschleunigt werden, da es keine unbesetzten Energieniveaus in erreichbarer

Nähe gibt. Dies wird manchmal auch so formuliert, dass keine freien Elektronen zur Verfügung stehen. Die geringe elektrische Leitfähigkeit, die trotzdem auftritt, röhrt von den wenigen Elektronen her, die durch thermische Anregung in das nahezu leere Leitungsband gelangen. Wird ein so hohes elektrisches Feld angelegt, dass dadurch Elektronen die Energielücke überwinden und ins leere Leitungsband überwechseln können, kommt es zum elektrischen Durchschlag.

In einigen Materialien ist die Energielücke zwischen dem gefüllten Valenzband und dem leeren Leitungsband sehr klein (Abbildung 37.11d). Bei $T = 0\text{ K}$ ist das Leitungsband leer, und das Material ist ein Isolator. Bei Zimmertemperatur dagegen befindet sich aufgrund der thermischen Anregung eine beträchtliche Zahl von Elektronen im Leitungsband. Ein solches Material wird **Eigenhalbleiter** genannt. Typische Eigenhalbleiter, wie z. B. Silicium und Germanium, haben eine Energielücke von nur ungefähr 1 eV. Die Elektronen im Leitungsband können durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden, weil viele unbesetzte Zustände unmittelbar oberhalb der besetzten Zustände zur Verfügung stehen. Des Weiteren gibt es zu jedem Elektron im Leitungsband eine Leerstelle, oder ein **Loch**, im fast vollen Valenzband. Daher können auch Elektronen aus diesem Band durch ein elektrisches Feld angeregt werden und auf ein unbesetztes Energieniveau überwechseln. Dies trägt ebenfalls zum elektrischen Stromfluss bei; am einfachsten kann man sich dies so vorstellen, dass sich die Löcher in Richtung des elektrischen Felds, also entgegengesetzt zur Bewegung der Elektronen, bewegen. Die Löcher verhalten sich somit wie positiv geladene Teilchen. Man kann sich die Löcherleitung sehr schön veranschaulichen, indem man sich eine zweispurige Einbahnstraße vorstellt, deren eine Spur mit Autos vollgeparkt ist, während die andere Spur leer ist. Wechselt ein Auto aus der vollgeparkten Spur in die leere Spur über, kann es sich dort frei bewegen. Indem nun die anderen Autos eines nach dem anderen nachrücken, um die entstandene Lücke zu schließen, bewegt sich die Lücke rückwärts, also der Bewegungsrichtung der Autos entgegen. Sowohl die Vorwärtsbewegung des ausgesuchten Autos

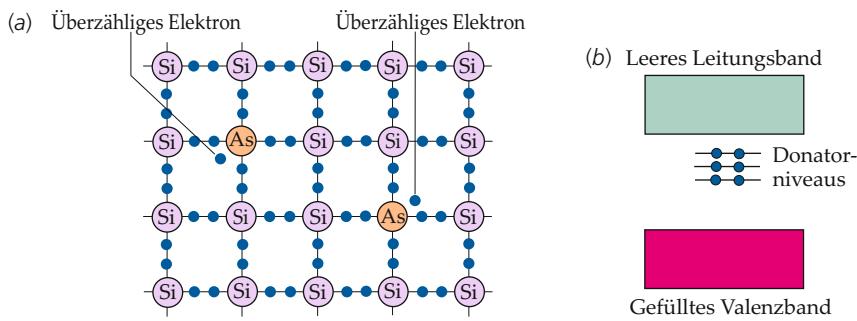


Abbildung 37.12 a) Schematische Darstellung eines mit Arsen dotierten Siliciumkristalls. Da Arsen fünf Valenzelektronen hat, gibt es ein überzähliges, nur locker gebundenes Elektron, das leicht in das Leitungsband angeregt werden kann, wo es zur elektrischen Leitung beiträgt. b) Bandstruktur eines n-Halbleiters, wie er beispielsweise beim Dotieren von Silicium mit Arsen entsteht. Die Fremdatome bewirken gefüllte Energieniveaus dicht unterhalb des Leitungsbands. Diese Energieniveaus können sehr leicht Elektronen an das Leitungsband abgeben.

auf der nahzu leeren Fahrspur als auch die Rückwärtsbewegung der Lücke tragen in der Gesamtbilanz zur Vorwärtsbewegung der Menge aller Autos bei.

Halbleiter haben die interessante Eigenschaft, dass ihr spezifischer Widerstand – anders als bei metallischen Leitern – mit steigender Temperatur sinkt. Bei höherer Temperatur werden nämlich mehr Elektronen thermisch in das Leitungsband angeregt, und somit stehen mehr freie Elektronen zur Verfügung. Gleichzeitig steigt natürlich auch die Zahl der Löcher im Valenzband. In Halbleitern übertrifft dieser Effekt, dass die Zahl der Ladungsträger (Löcher und Elektronen) mit wachsender Temperatur zunimmt, einen anderen Effekt, nämlich dass der spezifische Widerstand aufgrund stärkerer thermischer Schwingungen der Ionen und damit verstärkter Streuung der Elektronenwellen am Gitter ansteigt. Daher weisen Halbleiter einen negativen Temperaturkoeffizienten des spezifischen Widerstands auf.

37.5 Halbleiter

Eigenhalbleiter eignen sich sehr gut zur Herstellung von elektronischen Schaltungskomponenten, deren spezifischen Widerstand man über eine externe Spannungs- oder Stromquelle kontrollieren kann. Die meisten *Halbleiterbauelemente*, wie z. B. Dioden und Transistoren, basieren jedoch nicht auf Eigenhalbleitern, sondern auf *Störstellenhalbleitern*, die man aus Eigenhalbleitern durch gezieltes Hinzufügen bestimmter Fremdatome gewinnt. Diesen Prozess nennt man **Dotierung**. Abbildung 37.12a zeigt die schematische Darstellung eines mit Arsen dotierten Siliciumgitters. Man erkennt, dass einige der Siliciumatome in dem Kristallgitter durch Arsenatome ersetzt sind. Das Leitungsband in reinem Silicium ist bei Zimmertemperatur praktisch leer, daher ist reines Silicium ein schlechter elektrischer Leiter. Arsen jedoch hat fünf Valenzelektronen, eines mehr als Silicium. Während vier der fünf Arsenelektronen an der kovalenten Bindung zu den vier benachbarten Silicium-

atomen teilnehmen, ist das fünfte Elektron nur sehr locker an das Arsenatom gebunden. Dieses zusätzliche Elektron nimmt einen Energiezustand direkt unterhalb des Leitungsbands ein und kann leicht ins Leitungsband angeregt werden und so zur elektrischen Leitung beitragen.

Abbildung 37.12b zeigt die Bandstruktur eines mit Arsen dotierten Siliciumkristalls. Die Energieniveaus direkt unterhalb des Leitungsbands röhren von den überzähligen Elektronen der Arsenatome her. Diese Zustände nennt man **Donator- oder Donorniveaus**, weil sie leicht Elektronen an das Leitungsband abgeben (vom lateinischen *donare* für „abgeben“). Hierbei entstehen keine Löcher im Valenzband. Diesen Halbleitertyp nennt man *negativen Halbleiter* oder **n-Halbleiter**, weil der größte Teil der Ladungsträger aus negativ geladenen Elektronen besteht. Die Leitfähigkeit eines dotierten Halbleiters hängt vom Gehalt an Fremdatomen ab. Schon ein Anteil an Fremdatomen von 10^{-6} kann die Leitfähigkeit um mehrere Größenordnungen erhöhen – wie Beispiel 37.6 deutlich macht.

Ein anderer Halbleitertyp entsteht, wenn man einige Siliciumatome durch Galliumatome ersetzt, die nur drei Valenzelektronen haben (Abbildung 37.13a). Die Galliumatome nehmen je ein Elektron aus dem Valenzband auf, um ihre vier kovalenten Bindungen ausbilden zu können, und hinterlassen dabei Löcher im Valenzband. Abbildung 37.13b zeigt die Bandstruktur eines mit Gallium dotierten Siliciumkristalls. Die leeren Energieniveaus direkt oberhalb des Valenzbands gehen auf die ionisierten Galliumatome zurück. Diese Niveaus nennt man **Akzeptorniveaus**, da sie leicht Elektronen aus dem gefüllten Valenzband aufnehmen, wenn diese thermisch in einen höheren Energiezustand angeregt werden (vom lateinischen *accipere* für „aufnehmen“). Dadurch entstehen im Valenzband Löcher, die sich frei in Richtung eines elektrischen Felds bewegen können. Da es sich bei den Ladungsträgern um positive Löcher handelt, bezeichnet man diesen Halbleitertyp als *positiven Halbleiter* oder **p-Halbleiter**. Dass die Stromleitung tatsächlich auf der Bewegung positiver Ladungsträger beruht, kann mithilfe des Hall-Effekts nachgewiesen werden (Kapitel 23).

Beispiel 37.6: Dichte freier Elektronen in mit Arsen dotiertem Silicium**ZUR ÜBUNG**

Die Teilchenzahldichte freier Elektronen in reinem Silicium beträgt bei Raumtemperatur ungefähr 10^{10} Elektronen/cm³. Wie ändert sich die Teilchenzahldichte der freien Elektronen, wenn man jeweils eines von 10^6 Siliciumatomen durch ein Arsenatom ersetzt? (Die Massendichte von Silicium beträgt 2,33 g/cm³, die molare Masse 28,1 g/mol.)

Problembeschreibung: Die Anzahl n_{Si}/V der Siliciumatome pro cm³ erhält man aus der Formel $n_{\text{Si}}/V = \rho n_A/m_{\text{Mol}}$. Da jedes Arsenatom ein zusätzliches freies Elektron liefert, ist die Zahl der Elektronen, die durch die Arsenatome beigeleitet werden, $10^{-6} \cdot (n_{\text{Si}}/V)$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Berechnen Sie die Zahl der Siliciumatome pro cm³.

2. Durch Multiplikation mit 10^{-6} erhalten Sie die Zahl der Arsenatome pro cm³, die der Zahl der zusätzlichen freien Elektronen pro cm³ entspricht.

3. Insgesamt ergibt sich die Zahl der freien Elektronen pro cm³ aus der Zahl der Arsenatome (bzw. zusätzlichen freien Elektronen) plus 10^{10} , der Zahl der freien Elektronen pro cm³ in reinem Silicium.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\frac{n_{\text{Si}}}{V} = \frac{\rho n_A}{m_{\text{Mol}}} \\ = \frac{(2,33 \text{ g/cm}^3) \cdot (6,02 \cdot 10^{23} \text{ Atome/mol})}{(28,1 \text{ g/mol})} \\ = 4,99 \cdot 10^{22} \text{ Atome/cm}^3$$

2.

$$\frac{n_{\text{As}}}{V} = 10^{-6} \cdot \frac{n_{\text{Si}}}{V} = 4,99 \cdot 10^{16} \text{ Atome/cm}^3$$

3.

$$\frac{n_e}{V} = n_{\text{As}} + 10^{10} \text{ cm}^{-3} \\ = 4,99 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} + 10^{10} \text{ cm}^{-3} \\ \approx 5 \cdot 10^{16} \text{ Elektronen/cm}^3$$

Plausibilitätsprüfung: Das Ergebnis ist wie erwartet, dass die Dichte der freien Elektronen im dotierten Silicium kleiner als die Teilchenzahldichte der Siliciumatome ist, aber größer als die Dichte der Leitungselektronen in reinem Silicium.

Weitergedacht: Die Zahl der freien Elektronen pro Atom ist in Silicium so klein, dass sich die Dichte der Leitungselektronen bereits auf das Fünfmillionenfache erhöht, wenn man Silicium mit nur einem Arsenatom auf eine Million Siliciumatome dotiert.

Übung 37.3: Wie viele freie Elektronen pro Siliciumatom gibt es in reinem Silicium? ◀

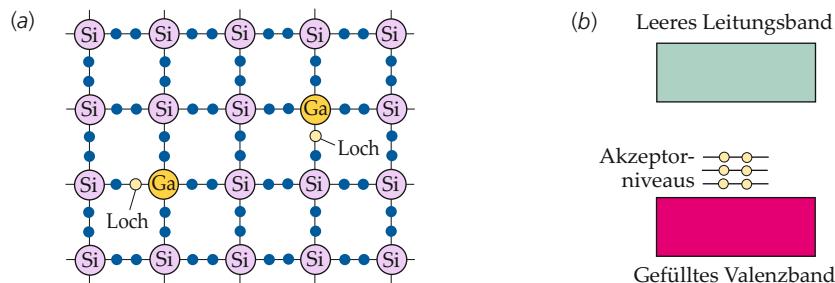


Abbildung 37.13 a) Schematische Darstellung eines mit Gallium dotierten Siliciumkristalls. Da Gallium nur drei Valenzelektronen hat, weist eine der kovalenten Bindungen ein Loch auf. Füllt eines der anderen Elektronen dieses Loch auf, so hinterlässt es an anderer Stelle ein neues Loch, das wieder aufgefüllt wird, usw. Auf diese Weise wandert das Loch und trägt so zur elektrischen Leitung bei. b) Bandstruktur eines p-Halbleiters, wie er beispielsweise beim Dotieren von Silicium mit Gallium entsteht. Die Fremdatome bewirken leere Energieniveaus dicht oberhalb des gefüllten Valenzbands. Diese Zustände können sehr leicht Elektronen aus dem Valenzband aufnehmen.

37.6 *Halbleiterübergangsschichten und Bauelemente

In den technisch gebräuchlichen Halbleiterbauelementen, etwa Dioden oder Transistoren, sind n- und p-Halbleiter miteinander kombiniert (Abbildung 37.14). Meist wird hierfür ein Siliziumkristall auf einer Seite mit einem Donator dotiert und auf der anderen Seite mit einem Akzeptor. Dazwischen befindet sich der sogenannte **pn-Halbleiterübergang**.

Wenn ein n- und ein p-Halbleiter miteinander in Kontakt gebracht werden, so gleichen sich die Konzentrationen von Elektronen und Löchern in den beiden Gebieten aus, indem Elektronen vom n- in das p-Gebiet und Löcher in umgekehrter Richtung vom p- in das n-Gebiet diffundieren, bis sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat. Insgesamt wird also positive Ladung vom p- zum n-Gebiet transportiert. Anders als bei zwei Metallen, die Kontakt miteinander haben, können sich die Elektronen hier nicht weit von der Übergangszone entfernen, da das Halbleitermaterial kein sonderlich guter Leiter ist. Also bildet sich am Übergang zwischen n- und p-Gebiet eine Ladungsdoppelschicht, vergleichbar der auf einem Plattenkondensator. Durch die Ladungstrennung entsteht eine Potenzialdifferenz,

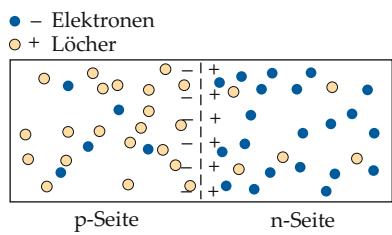


Abbildung 37.14 Ein pn-Halbleiterübergang. Um Konzentrationsunterschiede auszugleichen, diffundieren Löcher von der p-Seite zur n-Seite und Elektronen von der n-Seite zur p-Seite. Im Übergangsbereich entsteht dadurch eine Ladungsdoppelschicht, wobei sich negative Ladungen auf der p-Seite und positive Ladungen auf der n-Seite befinden.

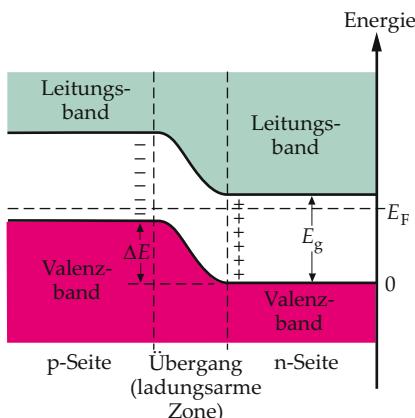


Abbildung 37.15 Elektronische Energieniveaus bei einem pn-Übergang.

37.6 *Halbleiterübergangsschichten und Bauelemente

die den weiteren Ladungsfluss verhindert. Im Gleichgewicht hat die n-Seite mit ihrer positiven Nettoladung ein höheres Potenzial als die p-Seite mit ihrer negativen Nettoladung. Im Übergangsbereich befinden sich jetzt nur wenige freie Ladungsträger, sodass er einen hohen Widerstand hat. Abbildung 37.15 zeigt das Energiediagramm für einen pn-Übergang. Den Übergangsbereich nennt man auch **Verarmungszone**.

*Dioden

In der Anordnung in Abbildung 37.16 wurde mithilfe einer Batterie und eines Widerstands eine äußere Spannung an den pn-Übergang angelegt. Ist, wie in Abbildung 37.16a, der positive Pol der Batterie mit der p-Seite des Übergangs verbunden, sagt man, der pn-Übergang sei in **Durchlassrichtung** geschaltet. Diese Art der Schaltung verringert die Potenzialdifferenz im Übergangsbereich. Die Diffusion der Elektronen und Löcher, die bestrebt sind, den Gleichgewichtszustand wiederherzustellen, wird größer, was einen Strom in dem Schaltkreis zur Folge hat.

Ist der positive Pol der Batterie, wie in Abbildung 37.16b, mit der n-Seite des Übergangs verbunden, sagt man, der pn-Übergang sei in **Sperrrichtung** geschaltet. Diese Art der Schaltung vergrößert die Potenzialdifferenz im Übergangsbereich, und die Diffusion der Ladungsträger wird noch weiter unterdrückt. In Abbildung 37.17 ist die Strom-Spannungs-Kennlinie für einen typischen Halbleiterübergang gezeigt. Der pn-Übergang leitet den Strom im Wesentlichen nur in einer Richtung, solange die Spannung über der Diode die Durchbruchspannung nicht übersteigt. Ein Halbleiterbauelement mit nur einem Übergang wird als **Diode** bezeichnet. Der Name *Diode* ist von einer Vakuumröhre mit nur zwei Elektroden entlehnt, die den elektrischen Strom ebenfalls nur in einer Richtung leitet. Dioden können für viele verschiedene Zwecke eingesetzt werden, etwa als *Gleichrichter*, um Wechselstrom in Gleichstrom umzuwandeln.

Beachten Sie, dass in der Kurve in Abbildung 37.17 der Strom stark zunimmt, wenn eine hohe Spannung in Sperrrichtung angelegt wird. Der Grund dafür ist, dass bei sehr großen elektrischen Feldern Elektronen aus den atomaren Bindungen herausgerissen und durch den Übergang hindurch beschleunigt werden. Dabei können sie ihrerseits andere Elektronen durch Stoßionisation losschlagen. Dieser Vorgang wird als **Lawinenendurchbruch** bezeichnet. Obwohl ein solcher Durchbruch in einem Stromkreis schreckliche Auswirkungen haben kann, wenn er unbeabsichtigt geschieht, kann die Tatsache, dass er bei einem scharf definierten Spannungswert auftritt, technisch nutzbar gemacht werden in Form eines Spannungsnormals, einer Referenzdiode, die auch als **Zener-Diode** bezeichnet wird. Zener-Dioden werden zudem benutzt, um Geräte vor Überspannungen zu schützen.

Ein interessanter Effekt, den wir hier nur qualitativ beschreiben wollen, tritt auf, wenn die beiden Seiten eines pn-Übergangs so stark dotiert sind, dass die Donatoren auf der n-Seite so viele Elektronen liefern, dass der untere Teil des Leitungsbands

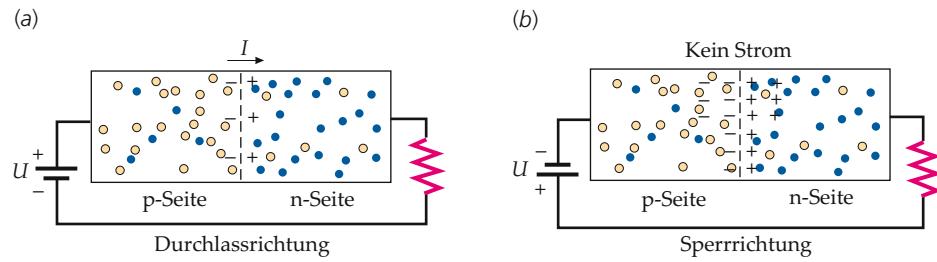


Abbildung 37.16 Die pn-Halbleiterdiode. a) Der pn-Übergang ist in Durchlassrichtung geschaltet. Die angelegte Spannung fördert die Diffusion der Löcher von der p-Seite zur n-Seite und der Elektronen von der n-Seite zur p-Seite und führt so zu einem Strom I . b) Der pn-Übergang ist in Sperrrichtung geschaltet. Die angelegte Spannung verhindert die Diffusion der Ladungsträger durch den Übergangsbereich, und es fließt kein Strom.

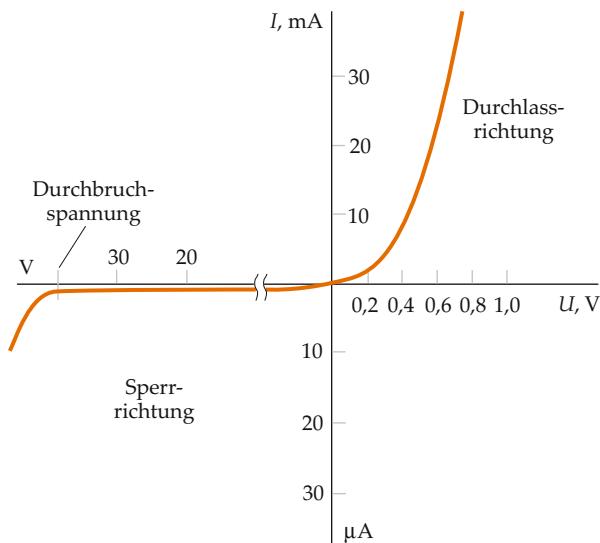


Abbildung 37.17 Strom-Spannungs-Charakteristik eines pn-Übergangs. Beachten Sie die unterschiedlichen Skalen an den Achsen für Durchlass- und Sperrrichtung.

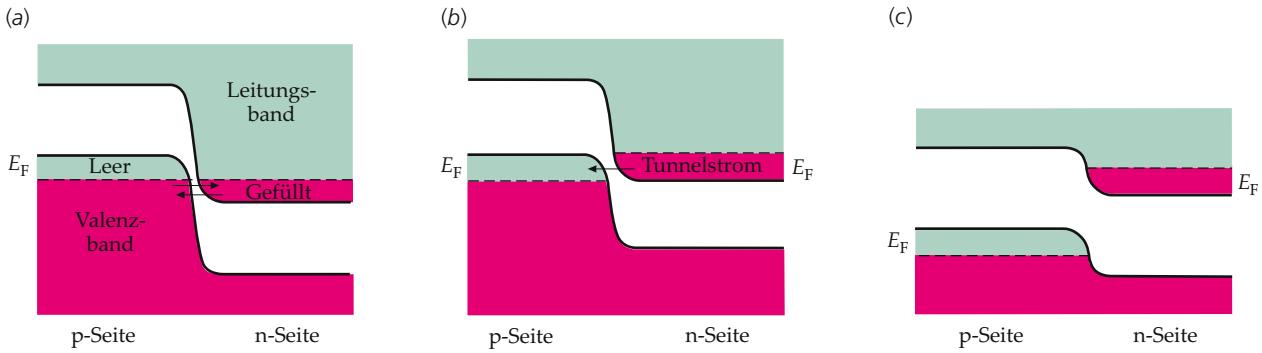


Abbildung 37.18 Die elektronischen Energieniveaus bei dem stark dotierten pn-Übergang einer Tunneldiode. a) Ohne Vorspannung tunnen Elektronen in beiden Richtungen durch den Übergangsbereich. b) Bei einer kleinen Vorspannung steigt der Tunnelstrom in einer Richtung an und liefert einen merklichen Beitrag zum Gesamtstrom. c) Bei zunehmender Vorspannung nimmt der Tunnelstrom stark ab.

praktisch gefüllt ist, und die Akzeptoren auf der p-Seite so viele Elektronen aufnehmen, dass der obere Teil des Valenzbands nahezu leer ist. Abbildung 37.18a zeigt die dazugehörigen Energieniveaus. Da der Übergangsbereich nun sehr schmal ist, können die Elektronen die Potenzialbarriere über dem Übergang leicht durchbrechen und auf die andere Seite tunneln. Dieser Elektronenfluss wird **Tunnelstrom** genannt, eine solche stark dotierte Diode nennt man **Tunneldiode**.

Im Gleichgewicht, also ohne angelegte Spannung, fließt in beide Richtungen ein gleich großer Tunnelstrom. Wird eine kleine Vorspannung an den Übergang angelegt, verschieben sich die Energieniveaus wie in Abbildung 37.18b dargestellt, und der Tunnelstrom der Elektronen von der n-Seite zur p-Seite wird größer, während er in der Gegenrichtung abnimmt. Dieser Tunnelstrom ergibt, gemeinsam mit dem normalen Diffusionsstrom, einen beträchtlichen Gesamtstrom. Wird die Vorspannung noch ein wenig mehr erhöht, verschieben sich die Energieniveaus weiter, wie es in Abbildung 37.18c gezeigt ist, und der Tunnelstrom wird wieder kleiner. Obwohl der Diffusionsstrom ansteigt, nimmt der Gesamtstrom nun ab. Bei sehr hoher Vorspannung ist der Tunnelstrom vernachlässigbar, und der Ge-

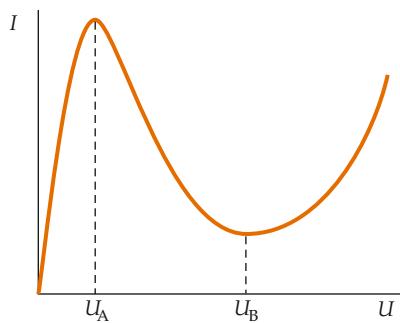


Abbildung 37.19 Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunneldiode. Bis zum Punkt A steigt der Tunnelstrom mit zunehmender Vorspannung an. Zwischen A und B wird er mit zunehmender Vorspannung kleiner. Ab dem Punkt B ist der Tunnelstrom vernachlässigbar, und die Diode verhält sich wie eine gewöhnliche pn-Halbleiterdiode.

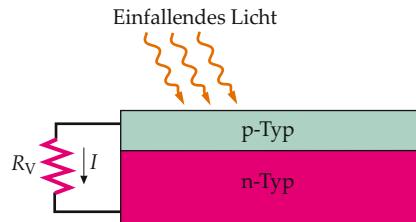


Abbildung 37.20 Ein pn-Halbleiterübergang als Solarzelle. Wenn Licht auf den p-Bereich des Übergangs fällt, werden Elektron-Loch-Paare erzeugt, die zu einem Strom durch den Lastwiderstand R_V führen.

samtstrom nimmt mit steigender Vorspannung zu, und zwar allein aufgrund der Diffusion, wie bei einem gewöhnlichen pn-Übergang. In Abbildung 37.19 ist die Strom-Spannungs-Kennlinie einer Tunneldiode aufgetragen. Tunneldioden werden aufgrund ihrer sehr kurzen Reaktionszeiten in schnellen Schaltungen verwendet. Wenn man an der steilsten Stelle der Kennlinie arbeitet, bewirkt eine kleine Änderung der Vorspannung eine große Änderung des Stroms.

Eine andere Anwendung von pn-Halbleitern ist die **Solarzelle**, die in Abbildung 37.20 schematisch dargestellt ist. Trifft auf die p-Seite ein Photon, dessen Energie größer ist als die Bandlücke (1,1 eV in Silicium), kann es ein Elektron aus dem Valenzband in das Leitungsband anregen. Zurück bleibt ein Loch im Valenzband, in dem es aber bereits viele Löcher gibt. Einige der Elektronen, die durch die Photonen angeregt werden, rekombinieren mit den Löchern, andere wandern durch das Übergangsgebiet. Von dort werden sie durch das von der Ladungsdoppelschicht herrührende Feld zur n-Seite hin beschleunigt. Dadurch entsteht ein Überschuss an negativer Ladung auf der n-Seite und ein Überschuss an positiver Ladung auf der p-Seite. Das Ergebnis ist eine Potenzialdifferenz zwischen den beiden Bereichen, die normalerweise etwa 0,6 V beträgt. Werden die beiden Bereiche über einen Widerstand R_V verbunden, fließt durch diesen ein Strom. Auf diese Weise wird ein Teil der Lichtenergie in elektrische Energie umgewandelt. Die Stromstärke im Widerstand ist

proportional zur Zahl der pro Zeiteinheit einfallenden Photonen, d. h. proportional zur Intensität des einfallenden Lichts.

Es gibt noch viele andere Anwendungen von Halbleitern mit pn-Übergängen. Teilchendetektoren, die sogenannten **Oberflächensperrschicht-Detektoren**, bestehen aus einem pn-Halbleiterübergang mit einer hohen Sperrspannung, so dass normalerweise kein Strom fließt. Durchquert aber ein hochenergetisches Teilchen, etwa ein Elektron, den Halbleiter, dann erzeugt es viele Elektron-Loch-Paare, wobei es selbst Energie verliert. Die daraus resultierenden Strompulse zeigen an, dass der Halbleiter von dem Teilchen durchquert wurde. **Leuchtdioden** (LEDs, Lumineszenzdioden) sind pn-Halbleiterübergänge, an die eine hohe Spannung in Durchlassrichtung angelegt wird. Daraus resultieren große Überschüsse von Elektronen auf der p-Seite und von Löchern auf der n-Seite des Übergangs. Wenn die Elektronen und Löcher miteinander rekombinieren, wird Licht emittiert. Es handelt sich sozusagen um die Umkehrung des Vorgangs, der in einer Solarzelle abläuft, wo durch die Absorption von Licht Elektron-Loch-Paare erzeugt werden. LEDs werden in der Regel für Warnanzeichen und als Infrarotlichtquellen verwendet.

*Transistoren

Der Transistor wurde 1948 von William Shockley, John Bardeen und Walter Brattain erfunden. Es handelt sich dabei um ein Halbleiterbauelement, das auf ein Eingangssignal hin ein wohl definiertes Ausgangssignal erzeugt. Die Erfindung des Transistors ermöglichte umwälzende technische Neuerungen. Es gibt verschiedene Arten von Transistoren, von denen besonders der Feldeffekttransistor erwähnenswert ist. Ein *einfacher bipolarer Transistor* besteht aus drei verschiedenen dotierten Halbleiter-schichten, die man **Emitter**, **Basis** und **Kollektor** nennt. Die

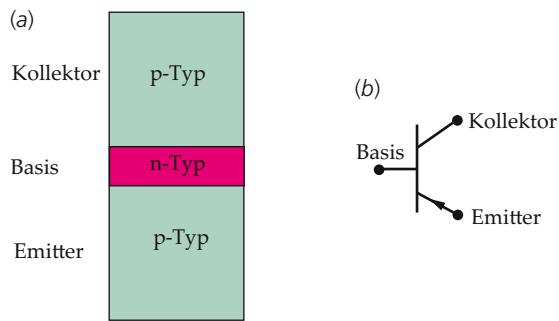


Abbildung 37.21 Der pnp-Transistor. a) Der stark dotierte Emitter emittiert Löcher, die die dünne Basis durchqueren und zum Kollektor gelangen. b) Das Schaltsymbol für den pnp-Transistor. Der Pfeil gibt die konventionelle Stromrichtung an, die der Bewegungsrichtung der emittierten Löcher entspricht.

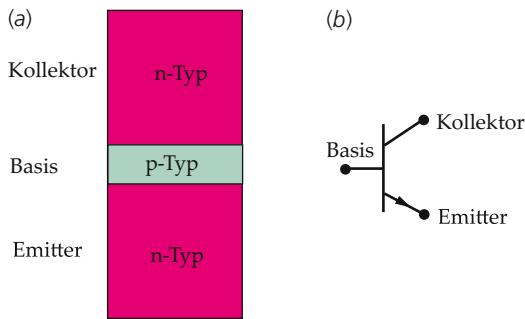


Abbildung 37.22 Der npn-Transistor. a) Der stark dotierte Emitter emittiert Elektronen, die die dünne Basis durchqueren und zum Kollektor gelangen. b) Das Schaltsymbol des npn-Transistors. Der Pfeil gibt die konventionelle Stromrichtung an, die zur Bewegungsrichtung der Elektronen entgegengesetzt ist.

Basis ist sehr dünn und liegt zwischen zwei Halbleiterschichten des anderen Typs. Der Emitter ist sehr viel stärker dotiert als Basis und Kollektor. In einem npn-Transistor sind Emitter und Kollektor als n-Halbleiter ausgeführt, und die Basis ist ein p-Halbleiter; in einem pnp-Transistor ist die Basis ein n-Halbleiter, und Emitter und Kollektor sind p-Halbleiter.

Die Abbildungen 37.21 und 37.22 zeigen die beiden Transistortypen mit dem jeweiligen Schaltkreissymbol. Aus den Abbildungen geht hervor, dass ein Transistor aus zwei pn-Übergängen besteht. Wir erläutern hier nur die Arbeitsweise des pnp-Transistors. Der npn-Transistor funktioniert entsprechend.

Beim normalen Betrieb eines pnp-Transistors ist der Emitter-Basis-Übergang in Durchlassrichtung, der Basis-Kollektor-Übergang in Sperrrichtung geschaltet (Abbildung 37.23). Der stark dotierte Emitter vom p-Typ emittiert Löcher, die in Richtung des Emitter-Basis-Übergangs fließen. Dies bewirkt im Emitter den Strom I_E . Da die Basis sehr dünn ist, gelangen die meisten Löcher durch die Basis hindurch in den Kollektor und bewirken dort einen Strom I_C . Einige der Löcher jedoch rekombinieren in der Basis und erzeugen so einen positiven Ladungsschub, der den weiteren Ladungstransport verhindert. Um dies zu vermeiden, ist die Basis so in einen Stromkreis

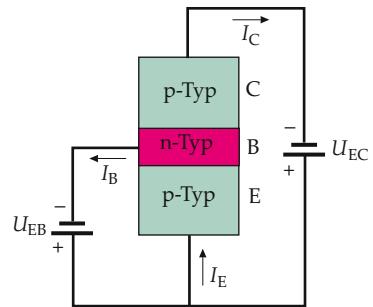


Abbildung 37.23 Die Beschaltung des pnp-Transistors bei normalem Betrieb. Löcher vom Emitter können leicht durch die Basis diffundieren, die nur einige zehn Nanometer dick ist. Die meisten Löcher fließen zum Kollektor und erzeugen den Kollektorstrom I_C .

eingebunden, dass einige der überschüssigen Ladungsträger aus der Basis abgezogen werden; dies bewirkt den Basisstrom I_B . In der Schaltung aus Abbildung 37.23 ist der Strom I_C daher fast ebenso groß wie der Strom I_E , während I_B sehr viel kleiner ist als I_C und I_E . Für den Kollektorstrom I_C schreibt man üblicherweise

$$I_C = \beta I_B. \quad (37.24)$$

Darin ist β der **Stromverstärkfaktor** des Transistors. In der Praxis verwendet man Transistoren mit β -Werten zwischen etwa 10 und mehreren hundert.

Abbildung 37.24 zeigt eine einfache pnp-Transistorverstärkerschaltung. Eine kleine, zeitlich veränderliche Spannung, die Signaleingangsspannung ΔU_{EB} , ist der konstanten Emitter-Basis-Vorspannung U_{EB} überlagert. Der Basisstrom ergibt sich als Summe des stationären Stroms I_B aufgrund der angelegten Emitter-Basis-Spannung U_{EB} und des veränderlichen Signalstroms ΔI_B aufgrund der Signaleingangsspannung ΔU_{EB} . Da ΔU_{EB} sowohl positive als auch negative Werte annimmt, muss die Vorspannung U_{EB} entsprechend groß sein, damit der Emitter-Basis-Übergang immer in Durchlassrichtung geschaltet ist. Der Kollektorstrom besteht ebenfalls aus zwei Teilen: dem konstanten Gleichstrom $I_C = \beta I_B$ und dem veränderlichen Strom $\Delta I_C = \beta \Delta I_B$. Insgesamt liegt eine Stromverstärkung vor, und zwar ist das zeitlich veränderliche Ausgangssignal der Stromstärke ΔI_C um den Faktor β größer als das Eingangssignal der Stromstärke ΔI_B . Bei dieser Anwendung sind die stationären Ströme I_C und I_B , obwohl nötig für den Betrieb des Transistors, normalerweise nicht von Interesse. Die Signaleingangsspannung ΔU_{EB} ist mit dem Basisstrom über das Ohm'sche Gesetz verknüpft:

$$\Delta I_B = \frac{\Delta U_{EB}}{R_B + R_{B,i}}. \quad (37.25)$$

Dabei ist R_B der Eingangswiderstand und $R_{B,i}$ der Innenwiderstand des Transistors zwischen Basis und Emitter. Der Kollektorstrom ΔI_C erzeugt ganz analog eine zeitlich veränderliche Spannung ΔU_{EC} über dem Ausgangs- oder Lastwiderstand R_V :

$$\Delta U_{EC} = \Delta I_C R_V. \quad (37.26)$$

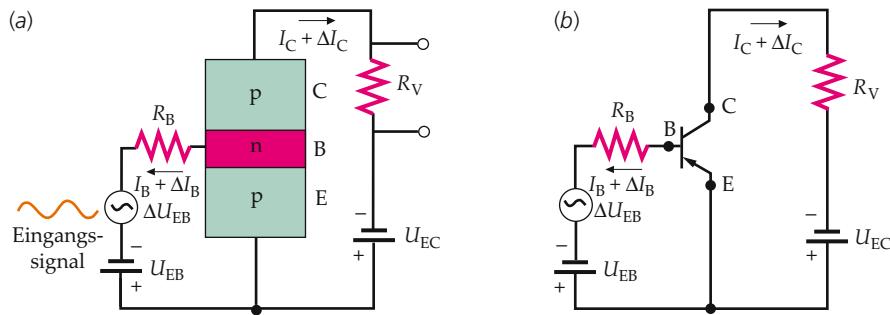


Abbildung 37.24 a) Eine npn-Transistorverstärkerschaltung. Eine kleine Änderung ΔI_B im Basisstrom I_B bewirkt eine große Änderung ΔI_C im Kollektorstrom I_C . Damit hat ein kleines Signal im Basisstromkreis ein großes Signal über dem Lastwiderstand R_V im Kollektorstromkreis zur Folge. b) Dieselbe Schaltung wie in a, nur dass für den Transistor das übliche Schaltersymbol eingesetzt wurde.

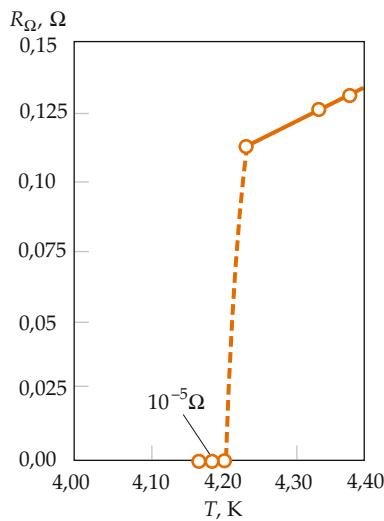


Abbildung 37.25 Diagramm von Kamerlingh Onnes, in dem der spezifische Widerstand von Quecksilber als Funktion der Temperatur aufgetragen ist. Bei der kritischen Temperatur von 4,2 K nimmt der spezifische Widerstand plötzlich stark ab.

Kombiniert man die beiden Gleichungen 37.24 und 37.25, so ergibt sich für den Kollektorstrom

$$\Delta I_C = \beta \Delta I_B = \beta \frac{\Delta U_{EB}}{R_B + R_{B,i}}. \quad (37.27)$$

Es besteht somit der folgende Zusammenhang zwischen der Ausgangsspannung ΔU_{EC} und der Eingangsspannung ΔU_{EB} :

$$\Delta U_{EC} = \beta \frac{\Delta U_{EB}}{R_B + R_{B,i}} R_V = \beta \frac{R_V}{R_B + R_{B,i}} \Delta U_{EB}. \quad (37.28)$$

Das Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsspannung bezeichnet man als **Spannungsverstärkung**. Sie ergibt sich zu

$$\frac{\Delta U_{EC}}{\Delta U_{EB}} = \beta \frac{R_V}{R_B + R_{B,i}}. \quad (37.29)$$

Ein typischer Verstärker, etwa in einem Walkman, besteht aus mehreren Transistoren, die in Reihe geschaltet sind, sodass der Ausgang des einen Transistors als Eingang für den nächsten dient. Damit lässt sich das sehr kleine Spannungssignal, das vom Tonkopf abgegeben wird, so weit verstärken, dass der Kopfhörer angesteuert werden kann.

Die heutige Halbleitertechnologie geht weit über den Einsatz einzelner Dioden und Transistoren hinaus. Moderne elektronische Geräte, wie z. B. Laptops und die Prozessoren in Steuerungen von Autos und Haushaltsgeräten, beruhen vielfach auf Bauelementen, in denen viele Transistoren und andere Schaltelemente auf einem einzigen Chip integriert sind. Immer stärkere Integration in Verbindung mit immer höher entwickelten Konzepten der Halbleitertheorie hat im Laufe der Zeit zu bemerkenswerten neuen Instrumenten für die wissenschaftliche Forschung geführt.

37.7 *Supraleitung

Bei einigen Materialien sinkt der spezifische Widerstand plötzlich auf null ab, wenn die Temperatur einen kritischen Wert T_c , die sogenannte **kritische Temperatur**, unterschreitet. Dieses verblüffende Phänomen wird als **Supraleitung** bezeichnet und wurde im Jahre 1911 von dem holländischen Physiker Heike Kamerlingh Onnes entdeckt, als er eine Technik zur Verflüssigung von Helium (Siedepunkt bei 4,2 K) entwickelte und diese Technik auch einsetzte, um die Eigenschaften anderer Materialien in diesem Temperaturbereich zu untersuchen. Abbildung 37.25 zeigt ein von Kamerlingh Onnes aufgenommenes Diagramm, in dem der spezifische Widerstand von Quecksilber als Funktion der Temperatur aufgetragen ist. Die kritische Temperatur für Quecksilber liegt bei 4,2 K, fällt also ungefähr mit dem Siedepunkt von Helium zusammen. Die kritischen Temperaturen anderer supraleitender Elemente reichen von knapp 0,1 K für Hafnium und Iridium bis zu 9,2 K für Niob. Für metallische supraleitende Verbindungen liegt der Bereich der kritischen Temperaturen um einiges höher. Die supraleitende Metalllegierung Nb₃Ge beispielsweise, die im Jahre 1973

entdeckt wurde, hat eine kritische Temperatur von 25 K und war bis 1986 das Material mit der höchsten kritischen Temperatur. Dann jedoch läuteten die Physiker J. Georg Bednorz und K. Alexander Müller mit ihren Entdeckungen die Epoche der Hochtemperatursupraleitung ein, bei der es um Materialien geht, die bei Temperaturen von über 77 K (dem Siedepunkt von Stickstoff) supraleitend sind. Für Keramiken liegt die höchste kritische Temperatur T_c , bei der unter Normaldruck noch Supraleitung nachgewiesen wurde, inzwischen über 180 K. Bei extrem hohen Drücken zeigen auch einige andere Materialien noch bei Temperaturen von über 160 K Supraleitung.

Der spezifische Widerstand eines Supraleiters ist null. In einem Supraleiter kann ein Strom fließen, auch wenn es kein elektromagnetisches Feld in dem supraleitenden Stromkreis gibt. Tatsächlich halten sich stationäre Ströme in supraleitenden Ringen auch ohne elektrisches Feld über Jahre, ohne dass sichtbare Verluste auftreten. Obwohl sie der Kühlung mit teurem, flüssigem Helium bedürfen, was Kosten und Ungelegenheiten bereitet, werden Magnete aus supraleitendem Material häufig eingesetzt, weil keine Leistungszufuhr nötig ist, um die großen Ströme aufrechtzuerhalten, die für starke Magnetfelder benötigt werden.

Durch die Entdeckung der Hochtemperatursupraleitung erfuhr das Forschungsgebiet der Supraleitung einen neuen Aufschwung, weil der vergleichsweise preiswerte flüssige Stickstoff als Kühlmittel verwendet werden kann. Jedoch erschweren viele Probleme, wie z. B. die Sprödigkeit und Toxizität der Materialien, die Anwendung dieser Hochtemperatursupraleiter. Die Suche nach neuen Materialien, die bei noch höheren Temperaturen supraleitend werden, hält an.

Die BCS-Theorie

Schon vor einiger Zeit erkannte man, dass es sich bei der Tieftemperatursupraleitung um ein kollektives Phänomen der Leitungselektronen handelt. Im Jahre 1957 veröffentlichten John Bardeen, Leon Cooper und Robert Schrieffer ihre Theorie der Tieftemperatursupraleitung, die nach den Initialen ihrer Erfinder **BCS-Theorie** genannt wird. Nach dieser Theorie sind die Elektronen bei tiefer Temperatur gepaart. Die Kopplung beruht auf einer Wechselwirkung zwischen den Elektronen und dem Kristallgitter. Ein Elektron wechselwirkt mit dem Gitter und deformiert es. Das gestörte Gitter wechselwirkt seinerseits mit einem anderen Elektron in der Weise, dass zwischen den beiden Elektronen eine Anziehung besteht, die bei niedrigen Temperaturen stärker ist als die Coulomb-Abstoßung. Die beiden Elektronen gehen in einen gebundenen Zustand über und bilden ein sogenanntes **Cooper-Paar**. Die beiden Elektronen in einem Cooper-Paar haben entgegengesetzte Spins, sodass das Cooper-Paar als Ganzes den Spin null hat. Jedes Cooper-Paar verhält sich wie *ein Teilchen* mit Gesamtspin null, d. h. wie ein Boson. Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Verbot, sodass sich beliebig viele Cooper-Paare im gleichen Quantenzustand befinden und die gleiche Energie besitzen können. Im Grundzustand des Supraleiters bei $T = 0$ K sind alle Elektronen in

Cooper-Paaren gebunden, und alle Cooper-Paare haben dieselbe Energie. Im supraleitenden Zustand sind die Cooper-Paare stark korreliert; sie bilden ein Kollektiv und verhalten sich immer alle gleich. Der Stromfluss im Supraleiter wird dabei so realisiert, dass sich alle Elektronen in diesem Kollektiv gemeinsam bewegen. Dagegen kann Energiedissipation, die auf Stößen einzelner Elektronen mit den Gitterionen beruht, nicht stattfinden, es sei denn, die Temperatur ist so hoch, dass die Bindung der Cooper-Paare aufgebrochen wird. Die Energie, die dazu nötig ist, bezeichnet man als **Supraleiterenergielücke** E_g . Gemäß der BCS-Theorie gilt am absoluten Temperaturnullpunkt

$$E_g = \frac{7}{2} k_B T_c. \quad (37.30)$$

Die Supraleitungsenergielücke für Quecksilber wird in Beispiel 37.7 berechnet.

Beispiel 37.7: Die Supraleiterenergielücke für Quecksilber

Berechnen Sie die Supraleiterenergielücke für Quecksilber ($T_c = 4,2$ K) nach der BCS-Theorie.

Problembeschreibung: Die Beziehung zwischen der Supraleiterenergielücke E_g und der kritischen Temperatur T_c ist gegeben durch $E_g = \frac{7}{2} k_B T_c$ (Gleichung 37.30).

Lösung: 1. Nach der BCS-Theorie ist die Energielücke:

$$E_g = 3,5 k_B T_c$$

2. Einsetzen von $T_c = 4,2$ K liefert:

$$\begin{aligned} E_g &= 3,5 k_B T_c \\ &= 3,5 \cdot (1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}) \cdot (4,2 \text{ K}) \cdot \left(\frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \right) \\ &= 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \end{aligned}$$

Die Energielücke kann experimentell bestimmt werden, indem man den Strom durch die Übergangsschicht zwischen einem normalen Metall und einem Supraleiter als Funktion der Spannung misst. Betrachten wir zunächst zwei Metalle, die durch eine dünne, nur wenige Nanometer starke Schicht eines isolierenden Materials, etwa Aluminiumoxid, voneinander getrennt sind. Die isolierende Schicht bildet eine Potenzialbarriere und hindert die meisten Elektronen daran, die Übergangsschicht zu durchqueren. Einige Elektronen jedoch können die Barriere durchtunneln, wenn diese nicht zu dick ist, selbst wenn die Energie dieser Elektronen kleiner ist als die der Potenzialbarriere.

Wenn beide Metalle keine Supraleiter sind, folgt der durch die Isolationsschicht fließende Tunnelstrom bei niedriger angelegter Spannung dem Ohm'schen Gesetz (Abbildung 37.26a). Ist

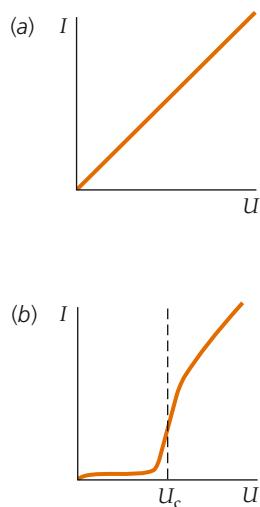


Abbildung 37.26 Der Tunnelstrom (als Funktion der angelegten Spannung) durch eine dünne Isolationsschicht zwischen zwei Metallen. a) Wenn beide Metalle keine Supraleiter sind, gehorcht der Strom dem Ohm'schen Gesetz, ist also proportional zur angelegten Spannung. b) Wenn ein Metall ein Supraleiter und das andere ein normales Metall ist, ist der Strom annähernd null, bis die angelegte Spannung den kritischen Wert $U_c = E_g/(2e)$ erreicht.

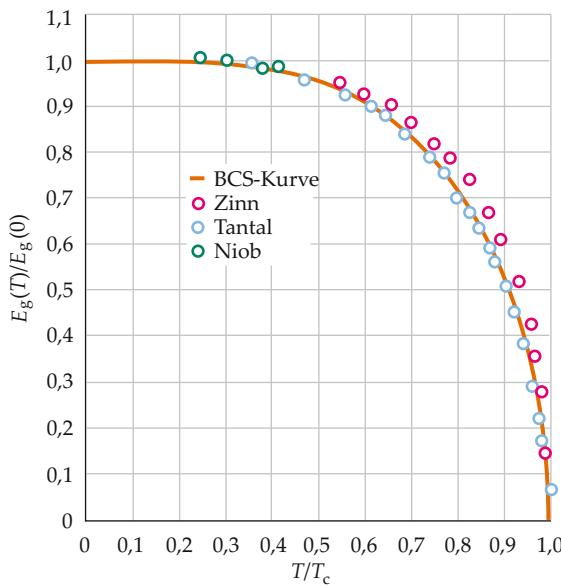


Abbildung 37.27 Relative Energielücke $E_g(T)/E_g(0)$ als Funktion der relativen Temperatur T/T_c . Die durchgezogene Linie entspricht den Vorhersagen der BCS-Theorie.

aber eines der Metalle ein Supraleiter und das andere ein normales Metall, so fließt (bei $T = 0$ K) erst dann ein Strom, wenn die angelegte Spannung U größer als die kritische Spannung $U_c = E_g/(2e)$ ist (Abbildung 37.26b). Darin ist E_g die Supraleiterenergielücke. Der Strom steigt sprunghaft an, wenn die Energie $2eU$, die ein die Barriere durchtunnelndes Cooper-

Paar aufnimmt, sich dem Wert $E_g = 2eU_c$ nähert und somit ausreicht, um die Bindung aufzubrechen. (Bei Temperaturen oberhalb von $T = 0$ K fließt, wie in Abbildung 37.26b zu sehen, schon vor Erreichen der kritischen Spannung ein kleiner Strom, weil einige Elektronen im Supraleiter thermisch angeregt sind. Diese befinden sich oberhalb der Energielücke und bilden keine Cooper-Paare.) Oberhalb von U_c geht die Strom-Spannungs-Kurve in die eines normalen Metalls über. Die Energielücke E_g eines Supraleiters kann also durch Messung der kritischen Spannung U_c bestimmt werden.

Beachten Sie, dass die Energielücke eines typischen Supraleiters wesentlich kleiner ist als die zwischen Valenz- und Leitungsband bei einem typischen Halbleiter auftretende Bandlücke, die in der Größenordnung von 1 eV liegt. Bei einer Temperatur etwas oberhalb von 0 K werden einige Cooper-Paare aufgebrochen. Jedem verbleibenden Cooper-Paar stehen damit weniger andere Cooper-Paare für die Wechselwirkung zur Verfügung, und die Energielücke verringert sich, bis sie bei der Temperatur $T = T_c$ schließlich null wird (Abbildung 37.27).

Der Josephson-Effekt

Im Jahre 1962 sagte Brian Josephson in einer theoretischen Arbeit voraus, dass Cooper-Paare widerstandslos zwischen zwei Supraleitern tunneln, die durch eine dünne nicht supraleitende Schicht (etwa eine wenige Nanometer starke Aluminium-oxidschicht) miteinander verbunden sind. Diese Anordnung nennt man **Josephson-Kontakt**. Der Tunnelstrom tritt auf, ohne dass eine Spannung über dem Kontakt angelegt wird. Der Strom hängt von der Phasendifferenz der Wellenfunktionen der Cooper-Paare in den beiden Supraleitern ab. Sei ϕ_1 die Phase der Wellenfunktion eines Cooper-Paares in dem einen Supraleiter. Dann haben auch alle anderen Cooper-Paare in diesem Supraleiter die Phase ϕ_1 , da sich alle Cooper-Paare in einem Supraleiter kohärent verhalten. Ist ϕ_2 die Phase der Wellenfunktion aller Cooper-Paare in dem zweiten Supraleiter, so beträgt der Strom durch die Übergangsschicht

$$I = I_{\max} \sin(\phi_2 - \phi_1). \quad (37.31)$$

Darin ist I_{\max} der maximale Strom und von der Dicke der Kontaktsschicht abhängig. Die durch Gleichung 37.31 beschriebene Abhängigkeit wurde experimentell beobachtet und wird als **Gleichstrom-Josephson-Effekt** bezeichnet.

Weiterhin sagte Josephson voraus, dass beim Anlegen einer Gleichspannung U über einen Josephson-Kontakt ein Wechselstrom der Frequenz

$$\nu = \frac{2eU}{h} \quad (37.32)$$

entsteht. Auch dieser Zusammenhang wurde experimentell bestätigt. Er wird **Wechselstrom-Josephson-Effekt** genannt. Durch Messung der Frequenz ν kann man die Größe e/h exakt bestimmen. Da Frequenzen sehr genau gemessen werden können, kann der Wechselstrom-Josephson-Effekt ausgenutzt

werden, um präzise Spannungsstandards festzusetzen. Der umgekehrte Effekt wurde ebenfalls beobachtet; bei diesem wird eine Wechselspannung über einem Josephson-Kontakt angelegt, und das Resultat ist ein Gleichstrom durch die Kontaktsschicht. In Beispiel 37.8 wird die Frequenz des Wechselstroms durch einen Josephson-Kontakt berechnet.

Beispiel 37.8: Frequenz des Wechselstroms durch einen Josephson-Kontakt

Berechnen Sie die Frequenz des Wechselstroms, der durch einen Josephson-Kontakt fließt, wenn die angelegte Spannung $1 \mu\text{V}$ beträgt. Verwenden Sie dabei die Konstanten $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ und $\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

Problembeschreibung: Die Frequenz ν des Wechselstroms ist mit der angelegten Spannung U über die Formel $\hbar \nu = 2eU$ verknüpft (Gleichung 37.32).

Lösung: Setzt man die gegebenen Werte in Gleichung 37.32 ein, so ergibt sich die Frequenz ν :

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{2eU}{\hbar} \\ &= \frac{2 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1 \cdot 10^{-6} \text{ V})}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} \\ &= 4,835 \cdot 10^8 \text{ Hz} \\ &= \boxed{483,5 \text{ MHz}}\end{aligned}$$



37.8 *Die Fermi-Dirac-Verteilung

Die klassische Maxwell-Boltzmann-Verteilung (Gleichung 14.20) gibt die Zahl der Moleküle mit Energien im Bereich von E bis $E + dE$ an. Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist gegeben als Produkt aus $g(E) dE$ und dem Boltzmann-Faktor $e^{-E/(k_B T)}$. Dabei ist $g(E)$ die **Zustandsdichte** (d.h. die Zahl der Energiezustände im Bereich dE), während der Boltzmann-Faktor die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass ein Zustand besetzt ist. Die freien Elektronen im Metall folgen dagegen einer anderen Verteilungsfunktion, die als **Fermi-Dirac-Verteilung** bezeichnet wird. Die Formel für die Fermi-Dirac-Verteilung hat dieselbe Form wie diejenige für die Maxwell-Boltzmann-Verteilung, nur dass die Zustandsdichte durch das quantenmechanische Pendant und der Boltzmann-Faktor durch den Fermi-Faktor ersetzt werden muss. Sei $n(E) dE$ die Zahl der Elektronen mit einer Energie zwischen E und $E + dE$. Sie lässt sich schreiben als

$$n(E) dE = f(E) g(E) dE. \quad (37.33)$$

ENERGIEVERTEILUNGSFUNKTION

Dabei steht $g(E) dE$ für die Zahl der Zustände mit einer Energie zwischen E und $E + dE$, und $f(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zustand besetzt ist, also der Fermi-Faktor. Die Zustandsdichte in drei Dimensionen zu berechnen, ist ein recht schwieriges Unterfangen, daher wollen wir uns hier darauf beschränken, das Ergebnis anzugeben. Die Zustandsdichte für Elektronen in einem Metall mit dem Volumen V ist gegeben durch

$$g(E) = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{h^3} E^{1/2}. \quad (37.34)$$

ZUSTANDSDICHTE

Wie in der klassischen Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist die Zustandsdichte proportional zu $E^{1/2}$.

Der Fermi-Faktor für $T = 0 \text{ K}$ ist nach Gleichung 37.17

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{für } E < E_F, \\ 0 & \text{für } E > E_F. \end{cases}$$

Das Integral von $n(E) dE$ über alle Energien von $E = 0$ bis $E = \infty$ ergibt die Gesamtzahl n_e aller Elektronen und führt auf Gleichung 37.15 für die Fermi-Energie bei $T = 0 \text{ K}$:

$$\begin{aligned}n_e &= \int_0^\infty n(E) dE = \int_0^{E_F} n(E) dE + \int_{E_F}^\infty n(E) dE \\ &= \int_0^{E_F} \frac{8 \cdot \sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{h^3} E^{1/2} dE + 0 \\ &= \frac{16 \cdot \sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{3 h^3} E_F^{3/2}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass bei $T = 0 \text{ K}$ gilt: $n(E) = 0$ für $E > E_F$. Löst man die Gleichung nach E_F auf, so erhält man die Fermi-Energie bei $T = 0 \text{ K}$:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8 m_e} \left(\frac{3 n_e}{\pi V} \right)^{2/3}. \quad (37.35)$$

Dies entspricht genau Gleichung 37.15. Mit dieser Formel für die Fermi-Energie kann man die Zustandsdichte aus Gleichung 37.34 folgendermaßen ausdrücken:

$$g(E) = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{h^3} E^{1/2} = \frac{3}{2} n_e E_F^{-3/2} E^{1/2}. \quad (37.36)$$

ZUSTANDSDICHTE IN ABHÄNGIGKEIT VON E_F

Dazu wurde Gleichung 37.35 nach m_e aufgelöst und das Ergebnis in Gleichung 37.34 eingesetzt. Die mittlere Energie bei $T = 0 \text{ K}$ berechnet sich folgendermaßen:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E g(E) dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE} = \frac{1}{n_e} \int_0^{E_F} E g(E) dE, \quad (37.37)$$

wobei $n_e = \int_0^{E_F} g(E) dE$ die Gesamtzahl aller Elektronen ist. Setzt man $g(E)$ aus Gleichung 37.36 ein und führt das Integral in Gleichung 37.37 aus, ergibt sich Gleichung 37.16:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F. \quad (37.38)$$

MITTLERE ENERGIE BEI $T = 0$ K

Für Temperaturen $T > 0$ K ist die Formel für den Fermi-Faktor komplizierter. Sie lautet:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1}. \quad (37.39)$$

FERMI-FAKTOREN BEI DER TEMPERATUR T

Hieraus ersehen wir: Wenn T gegen 0 geht, wächst $e^{(E-E_F)/(k_B T)}$ über alle Grenzen, sofern $E > E_F$ ist, d.h., der Fermi-Faktor ist 0 für $E > E_F$. Für $E < E_F$ dagegen geht $e^{(E-E_F)/(k_B T)}$ gegen 0, wenn T gegen 0 geht, sodass für $E < E_F$ bei $T = 0$ K gilt: $f(E) = 1$. Der Fermi-Faktor aus Gleichung 37.39 deckt also den gesamten Temperaturbereich einschließlich des Grenzfalls $T = 0$ K ab. Beachten Sie, dass für jeden beliebigen Wert $T > 0$ K gilt: $f(E) = \frac{1}{2}$ für $E = E_F$. In Beispiel 37.9 wird der Fermi-Faktor für Kupfer bei 300 K berechnet.

Die gesamte Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion ist somit gegeben als

$$\begin{aligned} n(E) dE &= g(E) f(E) dE \\ &= \frac{8 \cdot \sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{h^3} \cdot E^{1/2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1} dE. \end{aligned} \quad (37.40)$$

FERMI-DIRAC-VERTEILUNG

Beispiel 37.9: Der Fermi-Faktor für Kupfer bei $T = 300$ K

Bei welcher Energie hat der Fermi-Faktor für Kupfer bei $T = 300$ K den Wert 0,1?

Problembeschreibung: Wir setzen in Gleichung 37.39 $f(E) = 0,1$, $T = 300$ K und $E_F = 7,03$ eV (siehe Tabelle 37.1) ein und lösen nach E auf.

Lösung: 1. Lösen Sie Gleichung 37.39 nach $e^{(E-E_F)/(k_B T)}$ auf:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1}$$

also

$$e^{(E-E_F)/(k_B T)} = \frac{1}{f(E)} - 1$$

2. Nehmen Sie von beiden Seiten den Logarithmus:

$$\frac{E - E_F}{k_B T} = \ln \left(\frac{1}{f(E)} - 1 \right)$$

3. Lösen Sie nach E auf und setzen Sie für E_F den Wert aus Tabelle 37.1 (für $T = 0$ K) ein:

$$\begin{aligned} E &= E_F + \left(\ln \left(\frac{1}{f(E)} - 1 \right) \right) k_B T \\ &= 7,03 \text{ eV} + \left(\ln \left(\frac{1}{0,1} - 1 \right) \right) \\ &\quad \cdot (8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}) \cdot (300 \text{ K}) \\ &= [7,09 \text{ eV}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet liegt die Energie, für die der Fermi-Faktor 0,1 ist, nur wenig über der Fermi-Energie. ■

Man erkennt, dass sich der Fermi-Faktor für die wenigen Elektronen, deren Energie deutlich größer als die Fermi-Energie ist, dem Ausdruck $1/(e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1) \approx e^{E_F/(k_B T)} e^{-E/(k_B T)}$ nähert, also proportional zu $e^{-E/(k_B T)}$ ist. Somit nimmt der hochenergetische Schwanz der Fermi-Dirac-Verteilung für wachsende Energie E mit $e^{-E/(k_B T)}$ ab, genau wie bei der klassischen Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Der Grund dafür ist, dass es in diesem Energiebereich viele unbesetzte Energiezustände, aber nur wenige Elektronen gibt, sodass das Pauli-Verbot keine Rolle spielt. Die Fermi-Dirac-Verteilung geht also im Grenzfall hoher Energien in die klassische Maxwell-Boltzmann-Verteilung über. Dieser Sachverhalt ist von praktischer Bedeutung, da er auf die Leitungselektronen in Halbleitern zutrifft. In den Beispielen 37.10 und 37.11 werden Besetzungswahrscheinlichkeiten für Zustände in der Nähe der Fermi-Energie bei Kupfer berechnet.

Beispiel 37.10: Besetzungswahrscheinlichkeit für einen Zustand mit relativ hoher Energie

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in Kupfer bei Raumtemperatur ein Energiezustand 0,1 eV oberhalb der Fermi-Energie besetzt?

Problembeschreibung: Die Besetzungswahrscheinlichkeit ist durch den Fermi-Faktor aus Gleichung 37.39 mit $E_F = 7,03$ eV und $E = 7,13$ eV gegeben.

Lösung: 1. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Energiezustand besetzt ist, ist durch den Fermi-Faktor gegeben:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1}$$

2. Berechnen Sie den im Fermi-Faktor enthaltenen Exponenten (der dimensionslos sein muss):

$$\frac{E - E_F}{k_B T} = \frac{7,13 \text{ eV} - 7,03 \text{ eV}}{(8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}) \cdot (300 \text{ K})} = 3,87$$

3. Setzen Sie dieses Ergebnis in die Formel für den Fermi-Faktor ein:

$$\begin{aligned} f(E) &= \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1} = \frac{1}{e^{3,87} + 1} \\ &= \frac{1}{48 + 1} = [0,02] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Energiezustand oberhalb der Fermi-Energie besetzt ist, sollte kleiner als 1/2 sein. In der Tat ist das Ergebnis kleiner als 1/2.

Weitergedacht: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Elektron bei $T = 300 \text{ K}$ eine Energie hat, die 0,1 eV über der Fermi-Energie liegt, beträgt nur ca. 2 %. ■

Beispiel 37.11: Besetzungswahrscheinlichkeit für einen Zustand mit relativ niedriger Energie

ZUR ÜBUNG

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in Kupfer bei Raumtemperatur ein Energiezustand 0,1 eV unterhalb der Fermi-Energie besetzt?

Problembeschreibung: Die Besetzungswahrscheinlichkeit ist durch den Fermi-Faktor aus Gleichung 37.39 mit $E_F = 7,03 \text{ eV}$ und $E = 6,93 \text{ eV}$ gegeben.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Schreiben Sie die Formel für den Fermi-Faktor auf.

2. Berechnen Sie den im Fermi-Faktor enthaltenen Exponenten.

3. Setzen Sie das Ergebnis in die Formel für den Fermi-Faktor ein:

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1}$$

2.

$$\frac{E - E_F}{k_B T} = \frac{6,93 \text{ eV} - 7,03 \text{ eV}}{(8,62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}) \cdot (300 \text{ K})} = -3,87$$

3.

$$\begin{aligned} f(E) &= \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1} = \frac{1}{e^{-3,87} + 1} \\ &= \frac{1}{0,021 + 1} = [0,98] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet ist das Ergebnis größer als 1/2.

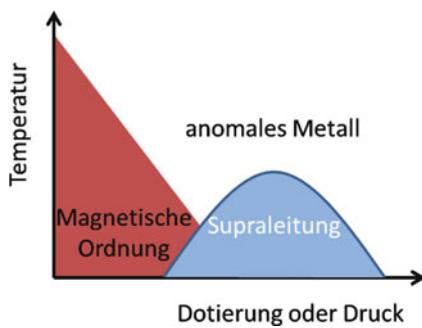
Weitergedacht: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Elektron bei $T = 300 \text{ K}$ eine Energie hat, die 0,1 eV unterhalb der Fermi-Energie liegt, beträgt ungefähr 98 %.

Übung 37.4: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Energiezustand 0,1 eV unterhalb der Fermi-Energie bei $T = 300 \text{ K}$ unbesetzt ist? ◀

🔗 Im Kontext: Supraleitung und Magnetismus

Neben der Fähigkeit des widerstandslosen Stromtransports zeichnen sich Supraleiter durch diamagnetisches Verhalten aus. So wird ein angelegtes Magnetfeld aus dem Inneren eines Supraleiters verdrängt. Die Entdeckung dieses Effekts durch Meißner und Ochsenfeld vor mehr als 80 Jahren ebnete den Weg zu einer ersten phänomenologischen Beschreibung der Supraleitung¹. Erhöht man das angelegte Magnetfeld, so bricht die Supraleitung zusammen, sobald die benötigte Feldverdrängungsenergie den Energiegewinn bei der Bildung der Cooper-Paare, die Kondensationsenergie, übersteigt. In ähnlicher Weise bewirkt eine Zuglegierung magnetischer Fremdatome, z. B. einiger Atom-% Gadolinium in Lanthan, eine Unterdrückung der Supraleitung². Spätestens nach Entdeckung dieser paramagnetischen Paarbrechung in den späten 1950er Jahren beschränkte sich die Suche nach neuen Supraleitern auf Verbindungen aus nichtmagnetischen Bestandteilen, da Magnetismus und Supraleitung als antagonistische Phänomene angesehen wurden.

Umso überraschender war Ende der 1970er Jahre die Entdeckung von Supraleitung in einer Verbindung mit konzentrierten magnetischen Bestandteilen³. In CeCu₂Si₂ sind die CeAtome sowohl für magnetische als auch supraleitende Eigenschaften verantwortlich. Die Bildung supraleitender Cooper-Paare wird in elementaren Supraleitern durch Gitterschwingungen ermöglicht. Für „unkonventionelle“ Supraleiter wie CeCu₂Si₂ kann dieser Mechanismus ausgeschlossen werden. Stattdessen spielen interne fluktuierende magnetische Felder eine wichtige Rolle. Diese entstehen aus der Unterdrückung langreichweiterer magnetischer Ordnung durch Dotierung oder äußeren Druck und bewirken ein anomales metallisches Verhalten, aus dem sich die Supraleitung entwickelt.



Konkurrenz von Supraleitung und Magnetismus im schematischen Phasendiagramm für unkonventionelle Supraleiter (©Philipp Gegenwart)

Mittlerweile wurde eine Reihe von unterschiedlichen Substanzklassen (z. B. Kuprat-Hochtemperatursupraleiter, Eisenpniktidsupraleiter, Schwere-Fermionen und organische Supraleiter) entdeckt⁴, in denen Supraleitung in unmittelbarer Nähe zu Magnetismus auftritt, entgegen der etablierten Vorstellung, dass Magnetismus für Supraleitung schädlich ist!

Die Suche nach neuen Supraleitern schlägt seither völlig neue Wege ein und erfordert neue Methoden. Oft konzentriert man sich zunächst auf den „normalleitenden“ Zustand oberhalb der kritischen Temperatur, der alles andere als normal und dessen theoretische Beschreibung bislang völlig unklar ist. Die Elektronen können hier nicht als voneinander unabhängige Ladungsträger angesehen werden, sondern zeigen stark korreliertes Verhalten. Die Energieskalen dieser Elektronenkorrelationen können sehr groß sein, sodass es keinen prinzipiellen Grund gibt Supraleitung bei noch höheren Temperaturen, selbst Zimmertemperatur, auszuschließen. Deren Entdeckung ist ein sehr spekulatives Fernziel. Mittelfristig steht vor allem ein besseres Verständnis des komplexen Verhaltens korrelierter Elektronen im Vordergrund, das die Entwicklung und den Ausbau vielfältiger neuer experimenteller und theoretischer Techniken antreibt. Da bislang zuverlässige quantitative Vorhersagen zur Supraleitung unmöglich sind, ist es ein nicht zuletzt für Experimentatoren besonders interessantes und spannendes Gebiet, in dem in den letzten Jahren immer wieder überraschende Entdeckungen gemacht wurden.



Prof. Dr. Philipp Gegenwart studierte Physik an der TU Darmstadt, wo er 1998 bei Frank Steglich über unkonventionelle Supraleiter promovierte. Danach wechselte er an das Max-Planck-Institut für Chemische Physik fester Stoffe in Dresden und war als Gastwissenschaftler in St. Andrews, Schottland. Von 2006 bis 2013 war er Professor für Experimentalphysik (Tief temperaturphysik) in Göttingen. Seit März 2014 leitet er einen Lehrstuhl am Zentrum für Elektronische Korrelationen und Magnetismus der Universität Augsburg.

1 Joas, C., Waysand, G. „Von Leitungsketten zur Paarhypothese“ *Physik Journal* **10**, 2011 23.

2 Matthias, B. T., Suhl, H., Corenzvit, E., „Spin Exchange in Superconductors“ *Phys. Rev. Lett.* **1**, 1958 92.

3 Steglich, F. et al., „Superconductivity in the Presence of Strong Pauli Paramagnetism: CeCu₂Si₂“ *Phys. Rev. Lett.* **43** 1979 1892.

4 Schmalian, J., „Unkonventionell und komplex“ *Physik Journal* **10** 2011 37.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Eine mikroskopische Betrachtung der elektrischen Leitfähigkeit	
Spezifischer Widerstand	$r_\Omega = \frac{m_e \langle v \rangle}{(n_e/V) e^2 \lambda} \quad (37.7)$ Dabei ist $\langle v \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen und λ ihre mittlere freie Weglänge zwischen zwei Stößen mit den Gitterionen.
Mittlere freie Weglänge	$\lambda = \frac{1}{(n_{\text{ion}}/V) \pi r^2} = \frac{1}{(n_{\text{ion}}/V) A} \quad (37.9)$ Dabei ist n_{ion}/V die Zahl der Ionen pro Volumeneinheit, r der effektive Radius und A die effektive Querschnittsfläche eines Gitterions.
2. Klassische Interpretation von $\langle v \rangle$ und λ	$\langle v \rangle$ bestimmt sich aus der Maxwell-Boltzmann-Verteilung, r ist der tatsächliche Radius eines Gitterions. (Diese Interpretation kann nicht alle experimentellen Befunde erklären.)
3. Quantenmechanische Interpretation von $\langle v \rangle$ und λ	$\langle v \rangle$ bestimmt sich aus der Fermi-Dirac-Verteilung und ist im Wesentlichen unabhängig von der Temperatur. Die mittlere freie Weglänge hängt mit der Streuung der Elektronenwellen am Gitter zusammen; diese beruht grundlegend darauf, dass es Abweichungen von der perfekten Gitterordnung gibt. Der Radius r entspricht der Amplitude der thermischen Schwingungen der Gitterionen; diese ist proportional zu \sqrt{T} , sodass A proportional zu T ist.
4. Freie Elektronen im Festkörper	
Fermi-Energie E_F bei $T = 0 \text{ K}$	E_F ist die Energie des letzten gefüllten (oder halbgefüllten) Energieniveaus.
E_F bei $T > 0 \text{ K}$	E_F ist diejenige Energie, für die die Besetzungswahrscheinlichkeit gerade $1/2$ ist.
Größenordnung von E_F	E_F liegt für die meisten Metalle zwischen 5 und 10 eV .
Zusammenhang zwischen E_F und der Teilchenzahldichte (n_e/V) freier Elektronen	$E_F = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{3n_e}{\pi V} \right)^{2/3} \quad (37.15)$
Mittlere Energie bei $T = 0 \text{ K}$	$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \quad (37.16)$
Fermi-Faktor für $T = 0 \text{ K}$	Der Fermi-Faktor $f(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Energiezustand besetzt ist: $f(E) = \begin{cases} 1 & \text{für } E < E_F, \\ 0 & \text{für } E > E_F. \end{cases} \quad (37.17)$
Fermi-Temperatur	$T_F = \frac{E_F}{k_B} \quad (37.18)$
Fermi-Geschwindigkeit	$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}} \quad (37.19)$
Kontaktpotenzial	Bringt man zwei verschiedene Metalle miteinander in Kontakt, so fließen Elektronen von dem Metall mit der höheren Fermi-Energie zu dem Metall mit der niedrigeren Fermi-Energie, bis die Fermi-Energien beider Metalle gleich sind. Im Gleichgewicht besteht dann eine Potenzialdifferenz zwischen den Metallen, die sich aus der Differenz der Austrittsarbeiten der Metalle, dividiert durch die Elektronenladung e , bestimmt: $U_{\text{Kontakt}} = \frac{W_{\text{Abl},1} - W_{\text{Abl},2}}{e}. \quad (37.20)$
Beitrag der Leitungselektronen zur molaren Wärme	$C_V = \frac{k^2}{2} R \frac{T}{T_F} \quad (37.22)$

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
5. Das Bändermodell der Festkörper	Befinden sich viele Atome nahe beieinander, wie es bei einem Festkörper der Fall ist, spalten die diskreten Energieniveaus der Atome in Bänder von erlaubten Energiezuständen auf. Die Aufspaltung ist abhängig von der Art der Bindung und vom Abstand der Atome im Gitter. Das oberste Band, das Elektronen enthält, heißt Valenzband. Das unterste Band, das noch nicht vollständig mit Elektronen gefüllt ist, heißt Leitungsband. In einem Leiter ist das Valenzband nur teilweise gefüllt, sodass viele leere Energiezustände für angeregte Elektronen zur Verfügung stehen. In einem Isolator ist das Valenzband vollständig gefüllt und durch eine große Energiedicke vom nächsthöheren erlaubten Band, dem Leitungsband, getrennt. In einem Halbleiter ist die Energiedicke zwischen dem gefüllten Valenzband und dem leeren Leitungsband klein. Daher kann bei Raumtemperatur eine beträchtliche Anzahl von Elektronen thermisch in das Leitungsband angeregt werden.
6. Halbleiter	Die Leitfähigkeit eines Halbleiters lässt sich durch Dotierung stark erhöhen. Bei einem n-Halbleiter werden durch die Dotierung zusätzliche Elektronen eingebracht, die Energiezustände unmittelbar unterhalb des Leitungsbands besetzen. Bei einem p-Halbleiter entstehen durch die Dotierung Löcher, die Energiezustände unmittelbar oberhalb des Valenzbands besetzen.
7. *Halbleiterübergangsschichten und Bauelemente	<p>*pn-Übergang Halbleiterbauelemente, wie z. B. Dioden und Transistoren, beruhen auf einer Kombination von n- und p-Halbleitern. Meist wird hierfür ein Siliciumeinkristall auf einer Seite mit Donatoratomen, auf der anderen Seite mit Akzeptoratomen dotiert. Den Bereich, in dem der Halbleiter vom p-Typ zum n-Typ wechselt, nennt man Halbleiterübergang oder pn-Übergang. Halbleiterübergänge kommen in Dioden, Solarzellen, Oberflächensperrschicht-Detektoren, LEDs und Transistoren zur Anwendung.</p> <p>*Dioden Eine Diode ist ein Bauelement mit nur einem Übergang, das den Strom im Wesentlichen nur in einer Richtung leitet.</p> <p>*Zener-Dioden Eine Zener-Diode ist eine Diode mit sehr hoher Sperrspannung. Bei einem scharf definierten Spannungswert kommt es plötzlich zum Durchbruch. Daher kann die Zener-Diode gut als Spannungsnormal verwendet werden.</p> <p>*Tunneldioden Eine Tunneldiode ist eine Diode, die so stark dotiert ist, dass Elektronen die ladungsarme Zone durchtunnen können. Die Tunneldiode wird meist so betrieben, dass eine kleine Änderung der Vorspannung eine große Änderung des Stroms bewirkt.</p> <p>*Transistoren Ein Transistor besteht aus einer sehr dünnen Halbleiterschicht eines Typs, die sich als Basis zwischen zwei Halbleitern des anderen Typs befindet. Transistoren finden in Verstärkern Anwendung, weil eine kleine Änderung im Basisstrom eine große Veränderung im Kollektorstrom bewirkt.</p>
8. Supraleitung	In einem Supraleiter fällt der spezifische Widerstand unterhalb der (materialspezifischen) kritischen Temperatur T_c plötzlich auf null ab. Man kennt inzwischen Supraleiter mit sehr hohen kritischen Temperaturen von bis zu 138 K. Die BCS-Theorie Die Supraleitung wird durch die quantenmechanische BCS-Theorie beschrieben, nach der freie Elektronen Cooper-Paare bilden. Die Energie, die nötig ist, um die Bindung eines Cooper-Paares aufzubrechen, bezeichnet man als Supraleiterenergiedicke E_g . Wenn alle Elektronen gepaart sind, gibt es keine Streuung einzelner Elektronen an den Gitterionen, und der spezifische Widerstand ist null. Tunneleffekte Wenn ein normaler Leiter und ein Supraleiter durch eine dünne Oxidschicht voneinander getrennt sind, können Elektronen durch die Energiebarriere tunneln, wenn eine Vorspannung von $E_g/(2e)$ an der Schicht anliegt. Dabei ist E_g die Energie, die nötig ist, um die Bindung eines Cooper-Paares aufzubrechen. Sie lässt sich experimentell bestimmen, indem man den Tunnelstrom als Funktion der angelegten Spannung misst. Josephson-Kontakt Ein System aus zwei Supraleitern, die durch eine dünne Schicht eines nicht leitenden Materials getrennt sind, wird als Josephson-Kontakt bezeichnet. Gleichstrom-Josephson-Effekt Durch den Josephson-Kontakt fließt ein Tunnelstrom, selbst wenn keine Spannung angelegt wird; es handelt sich dabei um Gleichstrom. Wechselstrom-Josephson-Effekt Legt man eine Gleichspannung U an den Josephson-Kontakt an, bewirkt dies einen Wechselstrom mit der folgenden Frequenz: $\nu = \frac{2e}{h} U. \quad (37.32)$ <p>Durch Messung der Frequenz ν kann man die Größe e/h exakt bestimmen.</p>

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
9. Die Fermi-Dirac-Verteilung	Die Zahl der Elektronen mit einer Energie im Bereich von E bis $E + dE$ ist gegeben als $n(E) dE = f(E) g(E) dE.$ (37.33) Dabei ist $g(E)$ die Zustandsdichte und $f(E)$ der Fermi-Faktor.
Zustandsdichte	$g(E) = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{h^3} E^{1/2}$ (37.34)
Fermi-Faktor bei beliebiger Temperatur T	$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(k_B T)} + 1}$ (37.39)

Lösungen der Übungen

1. $E_F = 9,4 \text{ eV}$
2. $E_F = 5,53 \text{ eV}$
3. $2 \cdot 10^{-13} \text{ Elektronen/Atom}$
4. 1 minus die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zustand besetzt ist, also $1 - 0,98 = 0,02$ oder 2 %

Aufgaben

Verständnisaufgaben

37.1 • Im klassischen Modell der elektrischen Leitfähigkeit verliert ein Elektron im Schnitt bei jedem Stoß Energie, indem es die seit dem letzten Stoß aufgenommene Driftgeschwindigkeit verliert. Wo tritt diese Energie in Erscheinung?

37.2 • Senkt man die Temperatur einer Probe aus reinem Kupfer von 300 K auf 4 K, so nimmt der spezifische Widerstand um ein Vielfaches mehr ab, als es bei einer Probe aus Messing der Fall wäre. Wie kommt das?

37.3 • Aus welchem Grund ist ein Metall ein guter elektrischer Leiter? a) Weil das Valenzband leer ist. b) Weil das Valenzband nur teilweise gefüllt ist. c) Weil das Valenzband zwar gefüllt ist, die Energielücke zum nächsthöheren leeren Band aber klein ist. d) Weil das Valenzband vollständig gefüllt ist. e) Keiner dieser Gründe trifft zu.

37.4 • Wie ändert sich der spezifische Widerstand von Kupfer verglichen mit dem von Silicium, wenn die Temperatur erhöht wird?

37.5 • Welche der folgenden Elemente eignen sich als Akzeptoratome in Germanium? a) Brom, b) Gallium, c) Silicium, d) Phosphor, e) Magnesium.

37.6 • Welche der folgenden Elemente können als Donatoratome in Germanium dienen? a) Brom, b) Gallium, c) Silicium, d) Phosphor, e) Magnesium.

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

37.7 • Ein Bauelement wird als „ohmsch“ bezeichnet, wenn die Strom-Spannungs-Kennlinie eine Gerade durch den Ursprung ist; der Widerstand R_Ω des Bauelements entspricht dann der reziproken Steigung dieser Gerade. Ein pn-Übergang ist ein Beispiel für ein nichtohmsches Bauelement, wie man Abbildung 37.17 entnehmen kann. Für nichtohmsche Bauelemente definiert man gelegentlich den *differenziellen Widerstand* als reziproke Steigung der Kurve, die entsteht, wenn man I gegen U auträgt. Betrachten Sie die Kurve in Abbildung 37.17 und schätzen Sie den differenziellen Widerstand des pn-Übergangs für Vorspannungen von -20 V , $+0,2\text{ V}$, $+0,4\text{ V}$, $+0,6\text{ V}$ und $+0,8\text{ V}$ ab.

Mikroskopische Betrachtung der elektrischen Leitfähigkeit

37.8 • Ein Maß für die Dichte der freien Elektronen in einem Metall ist der Abstand r_k , der definiert ist als Radius derjenigen

Kugel, deren Volumen dem Volumen pro Leitungselektron entspricht. a) Zeigen Sie, dass gilt: $r_k = (3/(4\pi(n_e/V)))^{1/3}$, wobei n_e/V die Teilchenzahldichte der freien Elektronen ist. b) Wie groß ist r_k (in nm) für Kupfer?

Freie Elektronen im Festkörper

37.9 • Berechnen Sie die Teilchenzahldichte freier Elektronen in a) Silber ($\rho = 10,5\text{ g/cm}^3$) und b) Gold ($\rho = 19,3\text{ g/cm}^3$) unter der Annahme eines freien Elektrons pro Atom. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den in Tabelle 37.1 aufgeführten Werten.

37.10 • Berechnen Sie die Fermi-Temperatur für a) Magnesium, b) Mangan und c) Zink.

37.11 • Welche Geschwindigkeit hat ein Leitungselektron in a) Natrium, b) Gold bzw. c) Zinn, wenn seine Energie jeweils gleich der Fermi-Energie E_F für dieses Material ist?

37.12 •• Silicium hat die molare Masse $28,09\text{ g/mol}$ und die Dichte $2,41 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$. Jedes Siliciumatom hat vier Valenzelektronen, die Fermi-Energie für Silicium beträgt $4,88\text{ eV}$. a) Berechnen Sie den spezifischen Widerstand bei Raumtemperatur. Die mittlere freie Weglänge bei dieser Temperatur ist $\lambda = 27,0\text{ nm}$. b) Silicium hat bei Raumtemperatur den Widerstand $640\text{ }\Omega \cdot \text{m}$. Vergleichen Sie diesen allgemein anerkannten Wert mit dem von Ihnen berechneten Wert.

37.15 •• Zwischen dem Druck p eines monoatomaren idealen Gases und der mittleren Energie $\langle E \rangle$ der Gasteilchen besteht die Beziehung $pV = \frac{2}{3}n\langle E \rangle$. Dabei ist n die Zahl der Teilchen. Berechnen Sie mithilfe dieser Beziehung den Druck der freien Elektronen in einer Probe aus Kupfer (in der Einheit N/m^2) und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem atmosphärischen Druck, der ungefähr 10^5 N/m^2 beträgt. (Hinweis: Um die Einheiten möglichst leicht in den Griff zu bekommen, empfiehlt es sich, die folgenden Umwandlungsfaktoren zu benutzen: $1\text{ N/m}^2 = 1\text{ J/m}^3$ und $1\text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ J}$.)

37.16 •• Der Kompressionsmodul K eines Materials kann folgendermaßen definiert werden:

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V}.$$

a) Zeigen Sie mithilfe der Formel $pV = \frac{2}{3}n\langle E \rangle$ für monoatomare ideale Gase und der Gleichungen 37.15 und 37.16, dass gilt:

$$p = \frac{2nE_F}{5V} = C V^{-5/3}.$$

Dabei ist C eine von V unabhängige Konstante. b) Zeigen Sie, dass für den Kompressionsmodul der freien Elektronen in einem Metall somit gilt:

$$K = \frac{5}{3} p = \frac{2 n E_F}{3 V}.$$

c) Berechnen Sie den Kompressionsmodul (in N/m²) für die freien Elektronen in einer Probe aus Kupfer und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem gemessenen Wert von $140 \cdot 10^9$ N/m².

Die Quantentheorie der elektrischen Leitfähigkeit

37.17 • Die spezifischen Widerstände von Natrium, Gold und Zinn betragen bei $T = 273\text{ K}$: $4,2\text{ }\mu\Omega \cdot \text{cm}$, $2,04\text{ }\mu\Omega \cdot \text{cm}$ und $10,6\text{ }\mu\Omega \cdot \text{cm}$, ihre Fermi-Geschwindigkeiten $1,07 \cdot 10^6\text{ m/s}$, $1,39 \cdot 10^6\text{ m/s}$ und $1,89 \cdot 10^6\text{ m/s}$. Berechnen Sie daraus die mittlere freie Weglänge λ der Leitungselektronen in den drei Metallen.

Das Bändermodell der Festkörper

37.18 •• Ein Photon der Wellenlänge $3,35\text{ }\mu\text{m}$ hat gerade genügend Energie, um ein Elektron vom Valenzband in das Leitungsband einer Probe aus Bleisulfid anzuregen. a) Berechnen Sie die Energiedifferenz zwischen den beiden Bändern. b) Berechnen Sie die Temperatur T , für die der Wert von $k_B T$ gerade der Energiedifferenz entspricht.

Halbleiter

37.19 •• Eine dünne Schicht eines halbleitenden Materials wird monochromatischer Strahlung ausgesetzt. Bei Wellenlängen oberhalb von $1,85\text{ }\mu\text{m}$ wird die Strahlung größtenteils transmittiert, bei kleineren Wellenlängen jedoch größtenteils absorbiert. Wie groß ist die Bandlücke bzw. die Energiedifferenz in diesem Halbleiter?

37.20 •• Im Leitungsband einer Probe aus dotiertem n-Silicium befinden sich $1,00 \cdot 10^{16}\text{ Elektronen/cm}^3$. Die Temperatur beträgt 300 K , der spezifische Widerstand $5,00 \cdot 10^{-3}\text{ }\Omega \cdot \text{m}$. Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge der Elektronen. Verwenden Sie als Masse des Elektrons die effektive Masse von $0,2 m_e$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der mittleren freien Weglänge von Leitungselektronen in Kupfer bei 300 K .

37.21 ••• Der Hall-Koeffizient A_H ist definiert gemäß $A_H = E_y / (j_x B_z)$ mit j_x als Strom pro Flächeneinheit in $+x$ -Richtung, B_z als Stärke des Magnetfelds in $+z$ -Richtung und E_y als resultierendem Hall-Feld in $-y$ -Richtung (Kapitel 23). Der gemessene Hall-Koeffizient einer dotierten Siliciumprobe beträgt bei Raumtemperatur $0,0400\text{ V} \cdot \text{m}/(\text{A} \cdot \text{T})$. Nehmen Sie an, dass alle Fremdatome ihren Anteil an der Gesamtzahl der Ladungsträger in der Probe beigetragen haben. a) Wurde die Probe mit Donator- oder Akzeptoratomen dotiert? b) Berechnen Sie die Konzentration der Fremdatome.

Halbleiterübergänge und Bauelemente

37.22 •• Ein einfaches Modell beschreibt den Strom I an einem pn-Übergang als Funktion der Vorspannung U folgendermaßen:

$$I = I_0 (e^{eU/(k_B T)} - 1).$$

Skizzieren Sie I als Funktion von U für positive und negative U -Werte.

37.23 •• Nehmen Sie an, dass für den pnp-Transistorverstärker in Abbildung 37.24 gilt: $R_B = 2,00\text{ k}\Omega$ und $R_V = 10,0\text{ k}\Omega$. Weiterhin soll gelten, dass ein $10,0\text{-}\mu\text{A}$ -Wechselstrom ΔI_B an der Basis einen $0,500\text{-mA}$ -Wechselstrom ΔI_C am Kollektor erzeugt. Wie groß ist die Spannungsverstärkung, wenn der innere Widerstand zwischen Basis und Emitter vernachlässigt werden kann?

37.24 •• Skizzieren Sie die Valenz- und Leitungsbandkanten sowie die Lage des Fermi-Energieniveaus einer a) in Durchlassrichtung bzw. b) in Sperrrichtung geschalteten pn-Diode.

Die BCS-Theorie

37.25 • a) Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 37.30 die Supraleiterenergiedifferenz E_g für Zinn und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem gemessenen Wert von $6,00 \cdot 10^{-4}\text{ eV}$. b) Berechnen Sie aus dem gemessenen Wert, welche Wellenlänge ein Photon hat, das gerade genug Energie besitzt, um die Bindung eines Cooper-Paares in Zinn bei $T = 0\text{ K}$ aufzubrechen. Zinn hat die kritische Temperatur $T_c = 3,72\text{ K}$.

Die Fermi-Dirac-Verteilung

37.26 •• Wie viele Energiezustände stehen den Elektronen in einem Silberwürfel mit einer Kantenlänge von $1,00\text{ mm}$ im Energiebereich zwischen $2,00\text{ eV}$ und $2,20\text{ eV}$ ungefähr zur Verfügung?

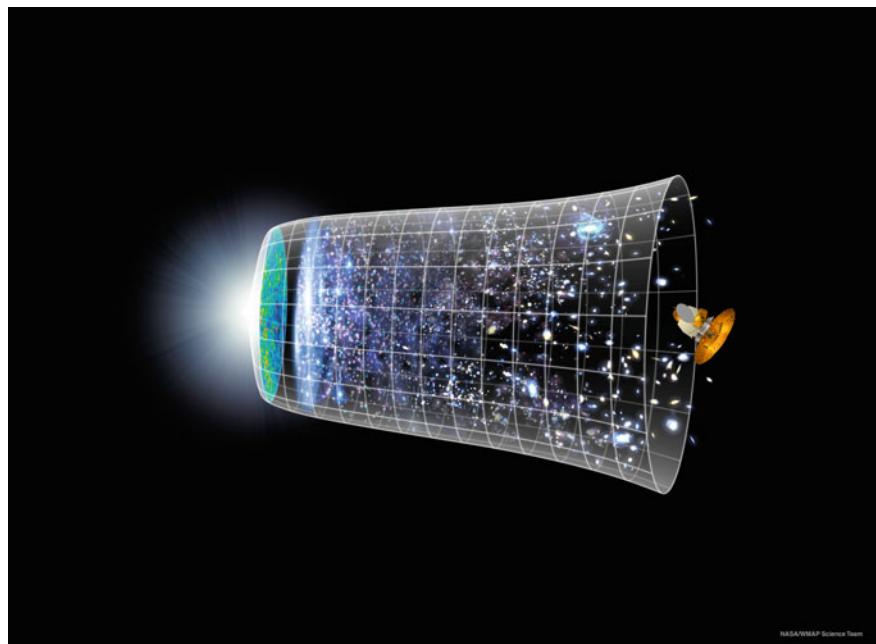
37.27 •• Um wie viel unterscheiden sich die Energien, für die der Fermi-Faktor bei 300 K gerade $0,9$ bzw. $0,1$ ist, im Fall von a) Kupfer, b) Kalium und c) Aluminium?

37.28 •• Führen Sie in der Formel für die mittlere Energie $\langle E \rangle = \frac{1}{n_e} \int_0^{E_F} E g(E) \text{d}E$ das Integral aus und zeigen Sie, dass die mittlere Energie bei $T = 0\text{ K}$ gerade $\frac{3}{5} E_F$ beträgt.

37.29 •• In einem Eigenhalbleiter liegt das Fermi-Energieniveau ungefähr in der Mitte des verbotenen Bands zwischen der Oberkante des Valenzbands und der Unterkante des Leitungsbands. In Germanium hat das verbotene Band eine Breite von $0,70\text{ eV}$. Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion der Elektronen im Leitungsband bei Raumtemperatur durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gegeben ist.

Kern- und Teilchenphysik

Teil XI



38	Kernphysik	1319
39	*Teilchenphysik	1349



Das Atomkraftwerk Diablo Canyon in der Nähe von San Luis Obispo in Kalifornien.
(© Tony Hertz/Alamy.)

Wie viel Energie wird bei der Spaltung von 1g ^{235}U frei?
(Siehe Beispiel 38.6.)

38.1	Eigenschaften der Kerne	1320
38.2	Radioaktivität	1323
38.3	Kernreaktionen	1329
38.4	Kernspaltung und Kernfusion	1331
38.5	Dosimetrie	1339
	Zusammenfassung	1343
	Aufgaben	1345

Aus Sicht des Chemikers reicht es vielfach aus, den Atomkern als Punktladung zu modellieren, die den größten Teil der Masse des Atoms enthält. Wir betrachten den Atomkern nun aus der Perspektive des Physikers und werden sehen, dass die Protonen und Neutronen, aus denen der Kern besteht, sowohl in unserem täglichen Leben eine wichtige Rolle spielen als auch für die Geschichte und Struktur des Universums von großer Bedeutung waren.

Wir werden uns in diesem Kapitel mit den Eigenschaften von Atomkernen befassen und Radioaktivität und Kernreaktionen untersuchen. Die Spaltung sehr schwerer Kerne, wie z. B. des Urans, ist eine der wichtigsten Quellen für die heutige Energieversorgung, während die Fusion sehr leichter Kerne, aus der die Sterne – und so auch unsere Sonne – ihre Energie beziehen, der Schlüssel für unsere künftige Energieversorgung sein könnte.

38.1 Eigenschaften der Kerne

Atomkerne bestehen aus zwei Arten von Teilchen annähernd gleicher Masse: dem Proton, das die Ladung $+e$ trägt, und dem nur 0,2 % schwereren, ungeladenen Neutron. Der verbreitetste Wasserstoffkern enthält nur ein einzelnes Proton. Die Anzahl Z der Protonen in einem Atomkern heißt **Ordnungszahl** oder **Kernladungszahl** und ist gleich der Zahl der Elektronen in dem Atom. Die Anzahl N der Neutronen im Kern ist für leichte Kerne ungefähr gleich Z , für schwerere Kerne zunehmend größer als Z . Protonen und Neutronen als Bestandteile eines Kerns werden unter dem Begriff **Nukleonen** zusammengefasst. Die Gesamtzahl der Nukleonen in einem Kern, $A = Z + N$, bezeichnet man als **Massenzahl** des Kerns. Der Fachausdruck für den Atomkern an sich ist **Nuklid**. Haben zwei oder mehr Nuklide dieselbe Ordnungszahl Z , aber unterschiedliche Neutronenzahl N und Atommasse A , spricht man von **Isotopen**. Ein bestimmtes Nuklid ist gekennzeichnet durch das Elementsymbol (etwa H für Wasserstoff oder He für Helium) und die Massenzahl A , die links oben neben das Elementsymbol gesetzt wird. Das leichteste Element, der Wasserstoff, kommt in drei Isotopen vor: dem normalen, leichten Wasserstoff ^1H , dessen Kern nur aus einem einzelnen Proton besteht (und der bisweilen auch als Protium bezeichnet wird), dem Deuterium ^2H , dessen Kern ein Proton und ein Neutron enthält, und dem Tritium ^3H , dessen Kern ein Proton und zwei Neutronen enthält. Obwohl Deuterium und Tritium eine doppelt bzw. dreimal so große Masse haben wie das normale Wasserstoffatom, sind die chemischen Eigenschaften der drei Isotope nahezu identisch, da sie alle ein Elektron besitzen. Manche Atome haben nur ein Isotop, andere fünf oder sechs, im Mittel sind es drei Isotope pro Element. Das am häufigsten auftretende Isotop des zweitleichtesten Elements, Helium, ist das ^4He . Der Kern des ^4He -Atoms wird auch α -Teilchen genannt. Ein weiteres Heliumisotop ist das ^3He .

Nukleonen üben eine stark anziehende Kraft auf ihre nächsten Nachbarn aus. Diese Kraft heißt **starke Kernkraft** oder **hadronische Kraft** und ist um ein Vielfaches stärker als die elektrostatische Abstoßung zwischen den Protonen und die Gravitationskraft zwischen den Nukleonen. Letztere ist vergleichsweise so schwach, dass sie in der Kernphysik stets vernachlässigt werden kann. Die starke Kernkraft zwischen zwei Neutronen, zwei Protonen oder einem Proton und einem Neutron ist ungefähr gleich groß. Zwei Protonen unterliegen jedoch zusätzlich der elektrostatischen Abstoßung, sodass die Anziehung etwas vermindert wird. Die starke Kernkraft fällt mit dem

Abstand der Nukleonen rasch ab und ist bei einem Abstand von einigen Femtometern bereits vernachlässigbar.

Größe und Form der Kerne

Größe und Form eines Atomkerns kann man durch Streuexperimente mit hochenergetischen Teilchen untersuchen. Je nach Art des Experiments erhält man unterschiedliche Informationen über den Kern. Verwendet man beispielsweise Elektronen als Streuteilchen, so erhält man Aufschluss über die Ladungsverteilung im Kern, während sich durch Streuexperimente mit Neutronen der Wirkungsbereich der starken Kernkraft bestimmen lässt. Eine große Zahl verschiedener Streuexperimente hat ergeben, dass die meisten Kerne annähernd kugelförmig sind und ihre Radien näherungsweise durch

$$r_K = r_0 A^{1/3} \quad (38.1)$$

KERNRADIUS

gegeben sind, wobei r_0 etwa 1,2 fm beträgt und A die Massenzahl ist. Daraus, dass der Radius des kugelförmigen Kerns proportional zu $A^{1/3}$ ist, folgt, dass das Volumen des Kerns proportional zu A ist. Da aber auch die Masse des Kerns annähernd proportional zu A ist, ist die Dichte aller Kerne ungefähr gleich. In dieser Hinsicht ähnelt der Atomkern einem Flüssigkeitströpfchen, dessen Massendichte ebenfalls unabhängig von seiner Größe ist. Auf dieser Analogie basiert das **Tröpfchenmodell** des Kerns, das einige Kerneigenschaften, insbesondere die Spaltung schwerer Kerne treffend, recht gut zu erklären vermag.

Neutronenzahl N und Kernladungszahl Z

Für leichte Kerne ist die Stabilität am größten, wenn die Zahl der Protonen und Neutronen ungefähr gleich ist, wenn also $N \approx Z$ ist. Bei schwereren Kernen scheint es dagegen aufgrund der elektrostatischen Abstoßung der Protonen für die Stabilität der Kerne günstiger zu sein, wenn die Zahl der Neutronen größer ist als die Zahl der Protonen. Dies zeigt sich, wenn man die am häufigsten vorkommenden Isotope einiger repräsentativer Elemente betrachtet: Für ${}_{\text{O}}^{16}$ ist $N = 8$ und $Z = 8$; für ${}_{\text{Ca}}^{40}$ ist $N = 20$ und $Z = 20$; für ${}_{\text{Fe}}^{56}$ ist $N = 30$ und $Z = 26$; für ${}_{\text{Pb}}^{207}$ ist $N = 125$ und $Z = 82$; und für ${}_{\text{U}}^{238}$ schließlich ist $N = 146$ und $Z = 92$. (Hier wurde zur Verdeutlichung zusätzlich die Kernladungszahl Z links unten an das jeweilige Element gesetzt, obwohl dies nicht wirklich nötig ist, weil die Kernladungszahl sich aus dem Elementsymbol ergibt.)

In Abbildung 38.1 ist für die bekannten stabilen Kerne die Neutronenzahl N gegen die Kernladungszahl Z aufgetragen. Für kleine Werte von N und Z liegen die Funktionswerte auf der Geraden $N = Z$. Wir können diese Tendenz zu gleich vielen Protonen und Neutronen verstehen, wenn wir die Gesamtenergie von A Nukleonen in einem eindimensionalen Kastenpotential betrachten. Abbildung 38.2 zeigt am Beispiel $A = 8$

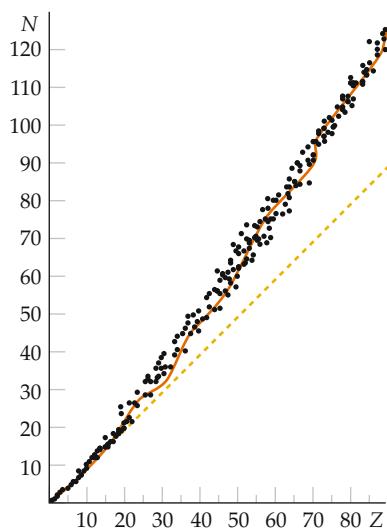


Abbildung 38.1 Auftragung der Neutronenzahl N gegen die Kernladungszahl Z für die stabilen Nuklide. Die gestrichelte Linie entspricht der Geraden $N = Z$.

die von acht Neutronen besetzten Energieniveaus und im Vergleich dazu die von vier Protonen und vier Neutronen besetzten Energieniveaus in einem solchen Kastenpotenzial. Wegen des Pauli-Prinzips können nur jeweils zwei identische Teilchen (mit entgegengesetztem Spin) dasselbe Energieniveau besetzen. Da Protonen und Neutronen keine identischen Teilchen sind, können sich jeweils zwei Protonen und zwei Neutronen in einem bestimmten Energieniveau befinden, wie es in Abbildung 38.2b gezeigt ist. Die Gesamtenergie für vier Protonen und vier Neutronen (Abbildung 38.2b) ist damit deutlich geringer als die für acht Neutronen oder acht Protonen (Abbildung 38.2a). Die Berücksichtigung der elektrostatischen Abstoßung zwischen den Protonen bzw. des entsprechenden Coulomb-Potenzials ändert dieses Ergebnis ein wenig. Da das Coulomb-Potenzial proportional zu Z^2 ist, wird für große Werte von A und Z die Gesamtenergie durch das Hinzufügen von zwei Neutronen nicht

so stark anwachsen wie durch das Hinzufügen eines Neutrons und eines Protons, weil es im letzteren Fall zur elektrostatischen Abstoßung kommt. Dies erklärt, warum für große Werte von A , also für schwerere Kerne, Konstellationen mit $N > Z$ stabiler sind als solche mit $N = Z$.

Übung 38.1: a) Berechnen Sie die Gesamtenergie der acht Neutronen im eindimensionalen Kastenpotenzial aus Abbildung 38.2a. b) Berechnen Sie die Gesamtenergie der vier Protonen und vier Neutronen im eindimensionalen Kastenpotenzial aus Abbildung 38.2b. ▶

Masse und Bindungsenergie

Die Masse m_K eines Kerns ist um E_b/c^2 kleiner als die Summe der Massen seiner Bestandteile. Dabei ist E_b die Bindungsenergie und c die Lichtgeschwindigkeit. Wenn sich zwei oder mehr Nukleonen zu einem Kern zusammenschließen, nimmt die Gesamtmasse ab, und es wird Energie frei. Umgekehrt muss Energie aufgewendet werden, um einen Kern in seine Bestandteile zu zerlegen. Die Energie wird dabei von dem System aufgenommen, die Gesamtmasse des Systems vergrößert sich.

Atom- und Kernmassen werden oft in der atomaren Masseneinheit u angegeben, die als ein Zwölftel der Masse des neutralen ^{12}C -Atoms definiert ist. Die einer atomaren Masseneinheit entsprechende Ruheenergie ist

$$(1 \text{ u}) c^2 = 931,5 \text{ MeV}. \quad (38.2)$$

Betrachten wir beispielsweise einen ^4He -Kern, der aus zwei Protonen und zwei Neutronen besteht. Die Masse m_A eines jeden Atoms lässt sich mit einem Massenspektrometer sehr genau bestimmen. Für das ^4He -Atom ergibt sich eine Masse von 4,002 603 u, die Masse des ^1H -Atoms beträgt 1,007 825 u.

Diese Massen umfassen auch die in den Atomen enthaltenen Elektronen. Die Masse eines Neutrons beträgt 1,008 665 u. Die Gesamtmasse von zwei ^1H -Atomen und zwei Neutronen ergibt sich somit zu $2 \cdot 1,007 825 \text{ u} + 2 \cdot 1,008 665 \text{ u} =$

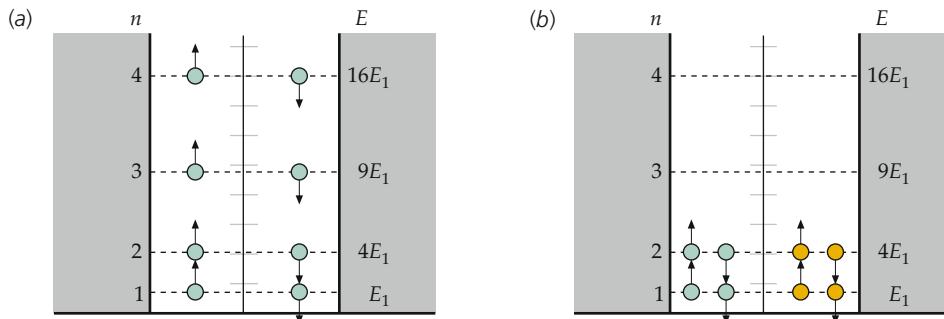


Abbildung 38.2 a) Acht Neutronen in einem eindimensionalen Kastenpotenzial. Aufgrund des Pauli-Prinzips können nur je zwei Neutronen (mit entgegengesetztem Spin) ein gegebenes Energieniveau besetzen. b) Vier Protonen und vier Neutronen in demselben Kastenpotenzial. Da Protonen und Neutronen keine identischen Teilchen sind, können sich je zwei Protonen und zwei Neutronen in demselben Energieniveau befinden. Die Gesamtenergie ist deutlich niedriger als in a.

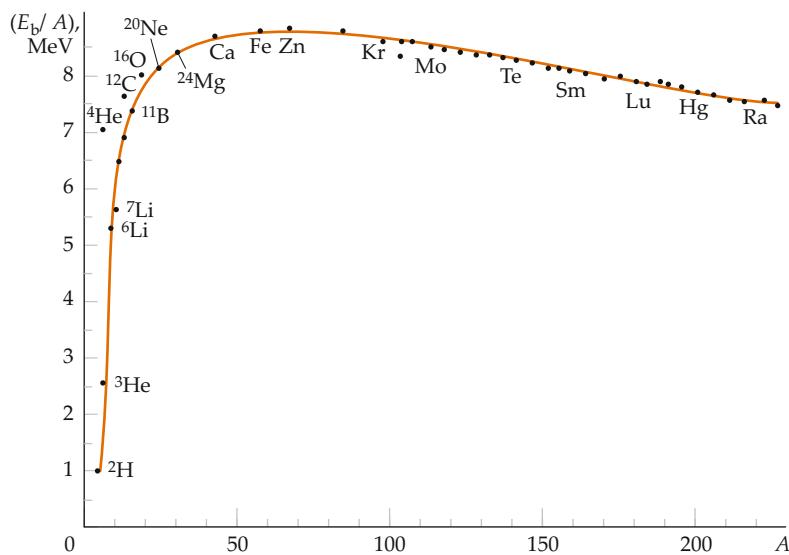


Abbildung 38.3 Die Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl A . Im Bereich $A > 50$ verläuft die Kurve relativ flach, die Bindungsenergie ist also etwa proportional zu A .

Tabelle 38.1 Atommassen des Neutrons und einiger ausgewählter Isotope (entnommen aus: <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Compositions/index.html>)

Element	Symbol	Ordnungszahl Z	Atomare Masse/u
Neutron	n	10	1,008 665
Wasserstoff	^1H	11	1,007 825
Deuterium	^2H oder D	11	2,014 102
Tritium	^3H oder T	11	3,016 050
Helium	^3He	12	3,016 030
	^4He	12	4,002 603
Lithium	^6Li	13	6,015 125
	^7Li	13	7,016 004
Bor	^{10}B	15	10,012 939
Kohlenstoff	^{12}C	16	12,000 000
	^{13}C	16	13,003 354
	^{14}C	16	14,003 242
Stickstoff	^{13}N	17	13,005 738
	^{14}N	17	14,003 074
Sauerstoff	^{16}O	18	15,994 915
Natrium	^{23}Na	11	22,989 771
Kalium	^{39}K	19	38,963 710
Eisen	^{56}Fe	26	55,939 395
Kupfer	^{63}Cu	29	62,929 592
Silber	^{107}Ag	47	106,905 094
Gold	^{197}Au	79	196,966 541
Blei	^{208}Pb	82	207,976 650
Polonium	^{212}Po	84	211,989 629
Radon	^{222}Rn	86	222,017 531
Radium	^{226}Ra	88	226,025 360
Uran	^{238}U	92	238,048 608
Plutonium	^{242}Pu	94	242,058 725

4,032 980 u. Dieser Wert übertrifft die Masse des ^4He -Atoms um 0,030 377 u. (Indem wir zwei ^1H -Atome anstelle von zwei Protonen verwenden haben, sind die Massen der beiden Elektronen des ^4He -Atoms bereits berücksichtigt. Dieses Verfahren ist zweckmäßig, da meist die atomaren Massen m_A tabelliert sind und nicht die Kernmassen m_K . Wir werden aber weiterhin von Kernmasse sprechen, selbst wenn wir in den Rechnungen die gemessenen Werte der Atommassen benutzen.) Aus dieser Massendifferenz von 0,030 377 u können wir mithilfe des Umrechnungsfaktors (1 u) $c^2 = 931,5 \text{ MeV}$ aus Gleichung 38.2 die Bindungsenergie des ^4He -Kerns berechnen:

$$(0,030\,377 \text{ u}) c^2 = (0,030\,377 \text{ u}) c^2 \frac{931,5 \text{ MeV}/c^2}{1 \text{ u}} = 28,30 \text{ MeV}.$$

Die gesamte Bindungsenergie des ^4He -Kerns beträgt also 28,30 MeV. Ganz allgemein kann man die Bindungsenergie des Kerns eines Atoms mit der atomaren Masse m_A , der Z Protonen und N Neutronen enthält, berechnen, indem man die Differenz aus der Masse der enthaltenen Nukleonen und der Masse des Kerns bildet und diese mit c^2 multipliziert:

$$E_b = (Z m_H + N m_n - m_A) c^2. \quad (38.3)$$

GESAMTE KERNBINDUNGSENERGIE

Dabei ist m_H die Masse des ^1H -Atoms und m_n die Masse eines Neutrons. (Beachten Sie, dass die Masse der im Term $Z m_H$ enthaltenen Elektronen durch die Masse der im Term m_A enthaltenen Z Elektronen kompensiert wird. Hingegen ist die mit den Bindungsenergien der Elektronen verbundene Masse in dieser Formel nicht berücksichtigt.) In Tabelle 38.1 sind die Atommassen des Neutrons und einiger ausgewählter Isotope aufgelistet.

In Beispiel 38.1 wird die Kernbindungsenergie für ein Neutron im ${}^4\text{He}$ -Kern betrachtet.

Beispiel 38.1: Bindungsenergie des zweiten Neutrons im ${}^4\text{He}$ -Kern

Berechnen Sie die Bindungsenergie des zweiten Neutrons in einem ${}^4\text{He}$ -Kern.

Problembeschreibung: Die Bindungsenergie ist das Energieäquivalent der Massendifferenz zwischen einem ${}^3\text{He}$ -Kern und einem Neutron einerseits und einem ${}^4\text{He}$ -Kern andererseits. Wir entnehmen die Atommassen aus Tabelle 38.1 und multiplizieren sie mit c^2 , um die Energieäquivalente zu erhalten.

Lösung: 1. Addieren Sie die Masse des Neutrons zur Masse des ${}^3\text{He}$ -Kerns:

$$\begin{aligned} m_{{}^3\text{He}} + m_n &= 3,016\,030 \text{ u} + 1,008\,665 \text{ u} \\ &= 4,024\,695 \text{ u} \end{aligned}$$

2. Subtrahieren Sie davon die Masse des ${}^4\text{He}$ -Kerns:

$$\begin{aligned} \Delta m &= (m_{{}^3\text{He}} + m_n) - m_{{}^4\text{He}} \\ &= 4,024\,695 \text{ u} - 4,002\,603 \text{ u} \\ &= 0,022\,092 \text{ u} \end{aligned}$$

3. Multiplizieren Sie diese Massendifferenz mit c^2 und rechnen Sie das Ergebnis in MeV um:

$$\begin{aligned} E_b &= (\Delta m) c^2 \\ &= (0,022\,092 \text{ u}) c^2 \frac{931,5 \text{ MeV}/c^2}{1 \text{ u}} \\ &= \boxed{20,58 \text{ MeV}} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß ist die Bindungsenergie des zweiten Neutrons mit 20,58 MeV kleiner als die gesamte Bindungsenergie des ${}^4\text{He}$ -Kerns, die im Absatz vor Gleichung 38.3 zu 28,30 MeV berechnet wurde. ■

In Abbildung 38.3 ist die Bindungsenergie pro Nukleon, E_b/A , gegen die Massenzahl A aufgetragen. Der Mittelwert von E_b/A liegt ungefähr bei 8,3 MeV. Der relativ flache Verlauf der Kurve im Bereich $A > 50$ bedeutet, dass die Bindungsenergie E_b in diesem Bereich annähernd proportional zu A ist. Dies deutet darauf hin, dass die Kernkräfte einer Art Sättigungseffekt unterliegen, wie er typischerweise auftritt, wenn jedes Nukleon nur von seinen nächsten Nachbarn angezogen wird. Ein solcher Sachverhalt führt auch zu einer konstanten Nukleondichte im Kern in Übereinstimmung mit den schon erwähnten Streuexperimenten zur Messung des Radius. Wenn es keine solche Sättigung gäbe und jedes Nukleon mit jedem anderen

eine Bindung eingehen würde, gäbe es für jedes Nukleon $A - 1$ Bindungen, insgesamt also $A(A - 1)$ Bindungen. Die gesamte Bindungsenergie, die ein Maß für die Energie ist, die benötigt wird, um all diese Bindungen aufzubrechen, wäre daher proportional zu $A(A - 1)$, und E_b/A wäre nicht annähernd konstant. Der steile Anstieg der Kurve für kleine A ist darauf zurückzuführen, dass die Zahl der nächsten Nachbarn und somit die Zahl der Bindungen pro Nukleon in diesem Bereich noch stark zunimmt. Der allmähliche Abfall der Kurve für große A röhrt von der Coulomb-Abstoßung der Protonen her, die mit Z^2 anwächst und die Bindungsenergie mindert. Ungefähr für $A > 300$ ist die Coulomb-Abstoßung schließlich so groß, dass die Kerne instabil werden und spontan auseinanderbrechen.

38.2 Radioaktivität

Viele Kerne sind radioaktiv, d. h., sie zerfallen unter Emission von Teilchen wie z. B. Photonen, Elektronen, Neutronen oder α -Teilchen in andere Kerne. Die Begriffe α -Zerfall, β -Zerfall und γ -Zerfall wurden verwendet, bevor man entdeckte, dass es sich bei α -Teilchen um ${}^4\text{He}$ -Kerne, bei β -Teilchen um Elektronen (e^-) oder Positronen (e^+) und bei γ -Strahlung um Photonen handelt. (Positronen haben dieselbe Masse wie Elektronen, aber positive Ladung $+e$.) Die Zerfallsrate einer radioaktiven Probe nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Diese exponentielle Abnahme mit der Zeit ist ein Charakteristikum für jegliche Art von Radioaktivität und bedeutet, dass der radioaktive Zerfall ein statistischer Prozess ist. Da die Kerne durch die Atomhüllen sehr gut gegeneinander abgeschirmt sind, haben Druck- oder Temperaturänderungen kaum einen Einfluss auf die Zerfallsrate oder andere Kerneigenschaften.

Sei n die Anzahl radioaktiver Kerne zur Zeit t . Wenn der Zerfall eines einzelnen Kerns ein zufälliges Ereignis ist, sollte die Zahl der Kerne, die in einem bestimmten Zeitintervall dt zerfallen, proportional zu n und zu dt sein. Zudem bewirken die Zerfälle, dass die Zahl n der radioaktiven Kerne abnimmt. Die Änderung von n im Zeitintervall dt kann daher beschrieben werden durch

$$dn = -\lambda n dt, \quad (38.4)$$

wobei λ eine Proportionalitätskonstante, die sogenannte **Zerfallskonstante**, ist. Die Rate dn/dt , mit der sich n ändert, ist proportional zu n . Dies ist charakteristisch für den exponentiellen Zerfall. Um Gleichung 38.4 nach n aufzulösen, dividieren wir zunächst beide Seiten durch n , um die Variablen n und t zu separieren:

$$\frac{dn}{n} = -\lambda dt.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\int_{n_0}^{n'} \frac{dn}{n} = -\lambda \int_0^{t'} dt$$

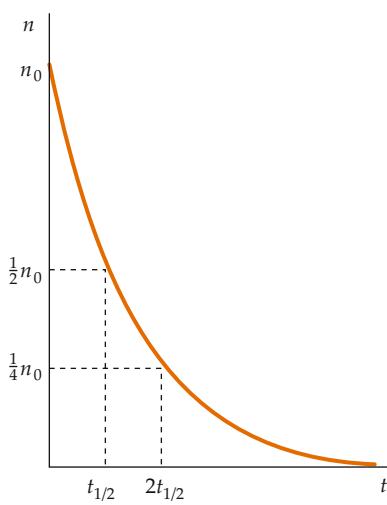


Abbildung 38.4 Der radioaktive Zerfall erfüllt ein Exponentialgesetz. Nach jeweils einer Halbwertszeit $t_{1/2}$ ist von den noch vorhandenen Kernen die Hälfte zerfallen. Die Zerfallsrate $R = \lambda n$ zeigt dieselbe Zeitabhängigkeit.

oder

$$\ln \frac{n'}{n_0} = -\lambda t'. \quad (38.5)$$

Dabei ist n' die Zahl der Kerne, die zum Zeitpunkt t' noch existieren. Aus Gründen der Bequemlichkeit wollen wir im Folgenden den Strich bei den Variablen n' und t' weglassen. Da die alten Größen n und t bereits aus der Gleichung herausintegriert wurden, kommt es dadurch nicht zu Zweideutigkeiten. Wenden wir auf beiden Seiten der Gleichung die Exponentialfunktion an, so erhalten wir

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\lambda t}$$

oder

$$n = n_0 e^{-\lambda t}. \quad (38.6)$$

Die Anzahl der radioaktiven Zerfälle pro Zeiteinheit heißt **Zerfallsrate** oder **Aktivität** R :

$$R = -\frac{dn}{dt} = \lambda n = \lambda n_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t}. \quad (38.7)$$

ZERFALLSRATE

Darin ist

$$R_0 = \lambda n_0 \quad (38.8)$$

die Aktivität zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Aktivität R ist die Größe, die experimentell bestimmt wird.

Die **mittlere Lebensdauer** τ ist definiert als der Kehrwert der Zerfallskonstante λ :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (38.9)$$

Die mittlere Lebensdauer ist mathematisch gesehen analog zu der Zeitkonstanten, mit der die elektrische Ladung auf einem Kondensator in einem RC-Schaltkreis abnimmt; auch dabei handelt es sich um einen exponentiellen Abfall (Abschnitt 22.6). Nach Ablauf der mittleren Lebensdauer haben sich sowohl die Zahl der radioaktiven Kerne als auch die Zerfallsrate auf $e^{-1} = 37\%$ ihres ursprünglichen Werts verringert. Von der mittleren Lebensdauer zu unterscheiden ist die **Halbwertszeit** $t_{1/2}$. Sie ist definiert als die Zeitspanne, innerhalb derer die Zahl der Kerne und die Zerfallsrate auf die Hälfte des ursprünglichen Werts absinken. Setzen wir in Gleichung 38.6 $t = t_{1/2}$ und $n = n_0/2$ ein, so erhalten wir

$$\frac{n_0}{2} = n_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \quad (38.10)$$

oder

$$e^{+\lambda t_{1/2}} = 2,$$

woraus sich die Halbwertszeit $t_{1/2}$ zu

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = (\ln 2) \tau = 0,693 \tau \quad (38.11)$$

ergibt.

In Abbildung 38.4 ist n gegen t aufgetragen. Multipliziert man die Zahlen auf der n -Achse mit λ , so stellt dieser Graph auch den Verlauf der Zerfallsrate R in Abhängigkeit von der Zeit t dar. Nach jeweils einer Halbwertszeit $t_{1/2}$ ist sowohl die Zahl der noch nicht zerfallenen Kerne als auch die Zerfallsrate auf die Hälfte des vorherigen Werts abgesunken. Ist die anfängliche Zerfallsrate beispielsweise R_0 , so wird sie nach einer Halbwertszeit $\frac{1}{2} R_0$ betragen, nach zwei Halbwertszeiten $(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) R_0$ usw. Nach i Halbwertszeiten hat die Zerfallsrate den Wert

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)^i R_0. \quad (38.12)$$

Die Halbwertszeiten radioaktiver Kerne erstrecken sich über einen weiten Bereich von weniger als $1 \mu\text{s}$ bis zu mehr als 10^{10} Jahren. In Beispiel 38.2 werden die Zählraten, die ein Detektor misst, mithilfe der Zerfallsrate für verschiedene Messzeitpunkte bestimmt und in Beispiel 38.3 mit den tatsächlichen Anzahlen n der noch vorhandenen radioaktiven Kerne in Beziehung gesetzt.

Beispiel 38.2: Die Zählrate für einen radioaktiven Zerfall

Eine radioaktive Quelle habe eine Halbwertszeit von 1,0 min. Ein in der Nähe der Quelle befindlicher Detektor registriert die radioaktiven Zerfälle in Form von Zählimpulsen. Zur Zeit $t = 0$ beträgt die Zählrate 2000 Impulse/s. Wie groß ist die Zählrate nach 1,0 min, nach 2,0 min, nach 3,0 min und nach 10,0 min?

Problembeschreibung: Die Zählrate \tilde{R} ist proportional zur Zerfallsrate R , die durch $R = (\frac{1}{2})^i R_0$ gegeben ist (Gleichung 38.12). Dabei ist i die Zahl der vergangenen Halbwertszeiten von 1,0 min.

Lösung: 1. Da die Halbwertszeit 1 min beträgt, wird die Zählrate nach 1 min nur noch halb so groß sein wie zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 &= \frac{1}{2} \tilde{R}_0 = \frac{1}{2} \cdot 2000 \text{ Impulse/s} \\ &= \boxed{1,0 \cdot 10^3 \text{ Impulse/s nach 1,0 min}}\end{aligned}$$

2. Nach 2 min ist die Zählrate nur noch halb so groß wie nach 1 min. Sie sinkt in jeder weiteren Minute um den Faktor 2:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tilde{R}_0 = \frac{1}{4} \cdot 2000 \text{ Impulse/s} \\ &= \boxed{5 \cdot 10^2 \text{ Impulse/s nach 2,0 min}} \\ \tilde{R}_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \tilde{R}_0 = \frac{1}{8} \cdot 2000 \text{ Impulse/s} \\ &= \boxed{2,5 \cdot 10^2 \text{ Impulse/s nach 3,0 min}}\end{aligned}$$

3. Nach 10 min ist die Zählrate auf $(\frac{1}{2})^{10}$ mal die ursprüngliche Rate gesunken:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{10} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \tilde{R}_0 = \left(\frac{1}{1024}\right) \cdot 2000 \text{ Impulse/s} \\ &= 1,95 \text{ Impulse/s} \\ &\approx \boxed{2,0 \text{ Impulse/s nach 10 min}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Erwartungsgemäß nimmt die Zählrate mit jeder Minute ab. ■

Beispiel 38.3: Berücksichtigung der Zählausbeute

Angenommen, die Zählausbeute in Beispiel 38.2 beträgt 20 %. Wie viele radioaktive Kerne gab es dann a) zur Zeit $t = 0$ und b) nach 1,0 min? c) Wie viele Kerne zerfielen in der ersten Minute?

Problembeschreibung: Die Zählausbeute ergibt sich daran, dass nur ein Teil der radioaktiven Zerfälle auch tatsächlich im Detektor registriert wird, denn die Zerfallsprodukte müssen zunächst einmal in den Detektor gelangen und dort dann auch einen Zählimpuls auslösen. Beides geschieht nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Eine Zählausbeute von 20 % bedeutet, dass die tatsächliche Aktivität fünfmal so hoch ist wie die Zählrate.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Zahl der radioaktiven Kerne ist mit der Aktivität R und der Zerfallskonstante λ verknüpft:

$$R = \lambda n$$

2. Zwischen der Zerfallskonstante und der Halbwertszeit besteht der folgende Zusammenhang:

$$\lambda = \frac{\ln 2,0}{t_{1/2}} = \frac{0,693}{1,0 \text{ min}} = 0,693 \text{ min}^{-1}$$

3. Da die Zählausbeute 20 % beträgt, ist die Aktivität fünfmal so hoch wie die im Detektor registrierte Zählrate. Berechnen Sie die Aktivität zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{aligned}R_0 &= 5 (\text{Zerfälle/Impuls}) \cdot 2000 \text{ Impulse/s} \\ &= 1 \cdot 10^4 \text{ Zerfälle/s}\end{aligned}$$

4. Setzen Sie diesen Wert ein und berechnen Sie die ursprüngliche Anzahl radioaktiver Kerne, n_0 , zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\begin{aligned}n_0 &= \frac{R_0}{\lambda} = \frac{1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}}{0,693 \text{ min}^{-1}} \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 8,66 \cdot 10^5 \\ &= \boxed{8,7 \cdot 10^5}\end{aligned}$$

Teilaufgabe b

Zur Zeit $t = 1 \text{ min} = t_{1/2}$ gibt es nur noch halb so viele radioaktive Kerne wie zur Zeit $t = 0$:

$$n_1 = \frac{1}{2} \cdot (8,66 \cdot 10^5) = 4,33 \cdot 10^5 = \boxed{4,3 \cdot 10^5}$$

Teilaufgabe c

Die Zahl der Kerne, die in der ersten Minute zerfallen, beträgt $n_0 - n_1$:

$$\begin{aligned}\Delta n &= n_0 - n_1 = 8,66 \cdot 10^5 - 4,33 \cdot 10^5 \\ &= \boxed{4,3 \cdot 10^5}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wie erwartet sind die Ergebnisse der Teilaufgaben b und c gleich. Nach einer Halbwertszeit ist die Hälfte der Kerne zerfallen, die andere Hälfte noch übrig. ■

Frage 38.1

Ein radioaktives Isotop habe eine Halbwertszeit von 10 s. Sie untersuchen eine Probe dieses Isotops. Nach etwa 1 min enthält die Probe nur noch ein Atom des Isotops. Wie viele Atome enthält die Probe nach weiteren 15 s?

Die SI-Einheit für den radioaktiven Zerfall ist das **Becquerel** (Bq), das als ein Zerfall pro Sekunde definiert ist:

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ Zerfall/s}. \quad (38.13)$$

Eine historische Einheit der Aktivität ist das **Curie** (Ci), das definiert ist als die Anzahl von Zerfällen pro Sekunde in 1 g Radium. Es gilt

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Zerfälle/s} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}. \quad (38.14)$$

Da es sich um einen sehr großen Wert handelt, werden auch oft die Einheiten Millicurie (mCi) oder Mikrocurie (μCi) verwendet.

Der β -Zerfall

Der β -Zerfall tritt bei Kernen auf, die zu viele oder zu wenige Neutronen besitzen, um stabil zu sein. Beim β -Zerfall bleibt die Massenzahl A des Kerns erhalten, während sich die Kernladungszahl Z um 1 erhöht (β^- -Zerfall) oder um 1 erniedrigt (β^+ -Zerfall).

Ein Beispiel für einen β -Zerfall ist der Zerfall eines freien Neutrons in ein Proton und ein Elektron. (Die Halbwertszeit eines freien Neutrons beträgt etwa 10,8 min.) Die freiwerdende Energie lässt sich aus der Differenz der Ruhemassen des Neutrons einerseits und des Protons und des Elektrons andererseits berechnen und beträgt 0,782 MeV. Ganz allgemein geht beim β^- -Zerfall ein Kern mit Massenzahl A und Kernladungszahl Z in einen sogenannten **Tochterkern** mit Massenzahl A und Kernladungszahl $Z' = Z + 1$ über, wobei ein Elektron emittiert

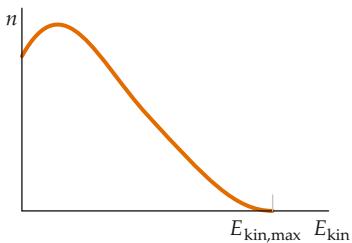


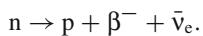
Abbildung 38.5 Die Anzahl der beim β^- -Zerfall emittierten Elektronen als Funktion ihrer kinetischen Energie. Die Tatsache, dass nicht alle Elektronen dieselbe Energie $E_{\text{kin},\text{max}}$ haben, deutet darauf hin, dass ein weiteres Teilchen emittiert wird, das einen Teil der beim Zerfall freiwerdenden Energie übernimmt.

wird. (Der Ausgangskern wird auch als **Mutterkern** bezeichnet.) Würde die beim Zerfall freiwerdende Energie lediglich auf den Tochterkern und das Elektron verteilt, so wäre die Energie des Elektrons aufgrund der Energie- und Impulserhaltung eindeutig bestimmt. Experimentell beobachtet man jedoch eine Verteilung der Elektronenenergie, die von null bis zum maximal möglichen Energiewert reicht. Abbildung 38.5 zeigt ein typisches Energiespektrum für die beim β^- -Zerfall emittierten Elektronen.

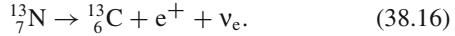
Um die scheinbare Verletzung der Energieerhaltung beim β -Zerfall zu erklären, postulierte Wolfgang Pauli im Jahre 1930 die Existenz eines neuen Teilchens, des sogenannten **Neutrinos**. Dieses Teilchen sollte beim β -Zerfall zusammen mit dem Elektron erzeugt werden und die Überschussenergie tragen. Da der maximal mögliche Energiewert für die emittierten Elektronen experimentell tatsächlich beobachtet wird, wurde die Ruhenergie und damit auch die Ruhemasse des Neutrinos als null angenommen. (Heute wissen wir, dass die Masse des Neutrinos zwar sehr klein, aber nicht gleich null ist.) Im Jahre 1948 zeigten Impulsmessungen des Elektrons und des zurückgestoßenen Kerns, dass das Neutrino beim β -Zerfall auch für die Impulserhaltung benötigt wird. Im Jahre 1957 gelang schließlich der experimentelle Nachweis des Neutrinos. Wie wir heute wissen, existieren mindestens drei Arten von Neutrinos: das mit dem Elektron assoziierte Elektron-Neutrino ν_e , das mit dem Myon assoziierte Myon-Neutrino ν_μ und das mit dem Tau-Lepton assoziierte Tauon-Neutrino ν_τ . Darüber hinaus besitzt jedes der Neutrinos ein eigenes Antiteilchen; diese werden mit $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ und $\bar{\nu}_\tau$ bezeichnet. Das beim β^- -Zerfall emittierte Neutrino ist das Elektron-Antineutrino $\bar{\nu}_e$. Die vollständige Reaktionsgleichung für diesen Zerfall lautet daher:



Äquivalent dazu ist die folgende Schreibweise:



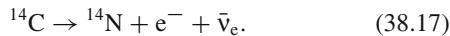
Beim β^+ -Zerfall geht ein Proton unter Emission eines Positrons und eines Elektron-Neutrinos in ein Neutron über. Für ein freies Proton kann dieser Zerfall aus Gründen der Energieerhaltung nicht stattfinden, denn die Summe der Ruhemassen von Neutron und Positron ist größer als die Ruhemasse des Protons. Für ein im Kern gebundenes Proton dagegen ist ein solcher Prozess möglich – die nötige Energie wird hierbei von der Bindungsenergie des Protons zur Verfügung gestellt. Ein typischer β^+ -Zerfall ist



Die beim β -Zerfall emittierten Elektronen bzw. Positronen sind nicht als Teilchen im Kern vorhanden, sondern werden erst beim Zerfall gebildet – ähnlich wie Photonen entstehen, wenn ein Atom aus einem höherenergetischen in einen niedrigerenergetischen Zustand übergeht.

Geben Sie acht, dass Sie die Symbole e^- , e^+ und e nicht verwechseln. e^- und e^+ bezeichnen Teilchen (das Elektron und das Positron), e hingegen eine Ladungsmenge.

Ein äußerst wichtiges Beispiel für einen β -Zerfall ist der von ^{14}C . Dieser Zerfall ist die Grundlage für die C-14- oder Radio-kohlenstoffmethode, die man zur archäometrischen Datierung von organischen Stoffen heranzieht. Die Reaktionsgleichung für diesen Zerfall lautet:



Die Halbwertszeit für diesen Zerfall beträgt 5730 Jahre. Das radioaktive ^{14}C -Isotop wird in höheren Atmosphärenschichten durch den Beschuss von ^{12}C mit kosmischer Strahlung erzeugt. Das chemische Reaktionsverhalten von Kohlenstoffatomen mit einem ^{14}C -Kern unterscheidet sich nicht von denen mit einem gewöhnlichen ^{12}C -Kern; beide bilden etwa mit Sauerstoff CO_2 -Moleküle. Da lebende Organismen kontinuierlich CO_2 mit der sie umgebenden Atmosphäre austauschen, entspricht das Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C in einem lebenden Organismus genau dem Gleichgewichtsverhältnis in der Atmosphäre, das etwa $1,3 \cdot 10^{-12}$ beträgt. Stirbt der Organismus, so wird kein weiteres ^{14}C mehr aus der Atmosphäre aufgenommen, und das Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C nimmt aufgrund des radioaktiven Zerfalls der ^{14}C -Kerne kontinuierlich ab. Die Anzahl der pro Minute in einem Gramm Kohlenstoff eines lebendigen Organismus auftretenden Zerfälle lässt sich aus der Halbwertszeit des ^{14}C und der Anzahl der im Gleichgewicht in einem Gramm Kohlenstoff enthaltenen ^{14}C -Atome zu ca. 15 Zerfällen pro Minute berechnen. Aus diesem Wert und der gemessenen Anzahl an Zerfällen pro Minute in einem Gramm Kohlenstoff eines abgestorbenen Organismus, der Kohlenstoff enthält, etwa einer Knochen- oder Holzprobe, lässt sich dessen Alter bestimmen. Beträgt die Zerfallsrate beispielsweise 7,5 Zerfälle pro Minute und Gramm, so ist die Probe genau eine Halbwertszeit, also 5730 Jahre alt. Beispiel 38.4 illustriert die Berechnung zur Altersbestimmung mit der C-14-Methode.

Beispiel 38.4: Wie alt ist das Artefakt?

Sie haben einen Ferienjob in einem archäologischen Forschungslabor angenommen. Ihr Betreuer überreicht Ihnen einen Knochen, der bei den jüngsten Ausgrabungen gefunden wurde, und bittet Sie, das Alter des Knochens zu bestimmen. Sie entnehmen eine Probe, die 200 g Kohlenstoff enthält, und messen eine β -Zerfallsrate von 400 Zerfällen/min.

Problembeschreibung: In einem lebenden Organismus finden etwa 15 Zerfälle/min pro Gramm Kohlenstoff statt, die Halbwertszeit von ^{14}C beträgt 5730 Jahre. Unsere Aufgabe besteht darin, die Zahl der Halbwertszeiten zu

bestimmen, die seit dem Tod des Organismus vergangen sind. Dazu verwenden wir die Formel $R_n = (1/2)^n R_0$ (Gleichung 38.12), in der R_n die gegenwärtige Zerfallsrate und R_0 die ursprüngliche Zerfallsrate bezeichnet und n die Zahl der Halbwertszeiten ist. Die ursprüngliche Zerfallsrate ergibt sich, indem man die Zerfallsrate pro Gramm mit der Masse des in der Probe enthaltenen Kohlenstoffs multipliziert.

Lösung: 1. Notieren Sie die Zerfallsrate nach n Halbwertszeiten in Abhängigkeit von der ursprünglichen Zerfallsrate:

$$R_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n R_0$$

2. Berechnen Sie die ursprüngliche Zerfallsrate (für 200 g Kohlenstoff zu dem Zeitpunkt, da der Organismus zu leben aufhörte):

$$\begin{aligned} R_0 &= (15 \text{ Zerfälle}/(\text{min} \cdot \text{g})) \cdot 200 \text{ g} \\ &= 3000 \text{ Zerfälle}/\text{min} \end{aligned}$$

3. Setzen Sie R_0 und R_n in die Gleichung aus Schritt 1 ein und lösen Sie nach 2^n auf:

$$R_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n R_0$$

$$\begin{aligned} 400 \frac{\text{Zerfälle}}{\text{min}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 3000 \frac{\text{Zerfälle}}{\text{min}} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{400}{3000} \\ 2^n &= \frac{3000}{400} = 7,5 \end{aligned}$$

4. Logarithmieren Sie beide Seiten und lösen Sie nach n auf:

$$n \ln 2 = \ln 7,5 \Rightarrow n = \frac{\ln 7,5}{\ln 2} = 2,91$$

5. Das Alter des Knochens beträgt $n t_{1/2}$:

$$\begin{aligned} t &= n t_{1/2} = 2,91 \cdot 5730 \text{ Jahre} \\ &= 1,67 \cdot 10^4 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Würde der Knochen von einem erst kürzlich verstorbenen Organismus stammen, würden wir eine feste Zerfallsrate von $(15 \text{ Zerfällen}/(\text{min} \cdot \text{g})) \cdot 200 \text{ g} = 3000 \text{ Zerfällen}/\text{min}$ erwarten. Die tatsächliche Zerfallsrate dagegen beträgt 400 Zerfälle/min. Da $400/3000$ grob $\frac{1}{8}$ (exakt $\frac{1}{7,5}$) ist, muss die Probe etwa drei Halbwertszeiten, also etwa $3 \cdot 5730$ Jahre, alt sein. Das steht in guter Übereinstimmung mit dem in Schritt 5 angegebenen Ergebnis von $2,91 \cdot 5730$ Jahren.

Übung 38.2: In der Plausibilitätsprüfung zu Beispiel 38.4 heißt es: „Da $400/3000$ grob $\frac{1}{8}$ (exakt $\frac{1}{7.5}$) ist, muss die Probe etwa drei Halbwertszeiten ... alt sein.“ Erklären Sie, warum der Quotient von $\frac{1}{8}$ ein Alter von drei Halbwertszeiten impliziert. ◀

232,033 667 u und ist damit um 0,004 382 u niedriger als die Masse des ^{232}Th -Atoms. Multiplizieren wir den Massenunterschied mit $931,5 \text{ MeV}/c^2$, so erhalten wir eine Ruhemassendifferenz von $4,08 \text{ MeV}/c^2$, um die die Masse des ^{232}Th -Atoms größer ist als die der Zerfallsprodukte. Das ^{232}Th -Isotop ist daher potenziell instabil gegenüber dem α -Zerfall. Der Zerfall tritt in der Natur auch tatsächlich auf. Die kinetische Energie der α -Teilchen ist dabei allerdings etwas kleiner als $4,08 \text{ MeV}$, da ein Teil der Zerfallsenergie auf den zurückgestoßenen ^{228}Ra -Kern übergeht.

Wenn ein Kern ein α -Teilchen emittiert, verringern sich seine Kernladungszahl Z und seine Neutronenzahl N jeweils um 2 und seine Massenzahl um 4. Der Tochterkern eines radioaktiven Kerns ist oft selbst radioaktiv und zerfällt entweder durch α - oder durch β -Zerfall weiter, oft sind auch beide Zerfälle möglich. Ist die Massenzahl A des ursprünglichen Kerns ein ganzzahliges Vielfaches von 4, so gilt dies auch für den Tochterkern und alle in der weiteren Zerfallsreihe folgenden Kerne. Ist die Massenzahl des ursprünglichen Kerns von der Form $4n + 1$, wobei n eine natürliche Zahl ist, so haben auch die Massenzahlen aller Kerne in der Zerfallsreihe diese Form, wobei sich n bei jedem α -Zerfall um 1 verringert. Daraus folgt, dass es vier verschiedene α -Zerfallsreihen gibt, je nachdem, ob die Massenzahl A der Kerne in der jeweiligen Kette von der Form $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ oder $4n + 3$ ist. Bis auf eine wurden diese Zerfallsreihen auf der Erde tatsächlich gefunden. Die $(4n + 1)$ -Zerfallsreihe mit dem stabilen Endprodukt ^{209}Bi können wir nicht beobachten, da ihr langlebigstes Zwischenprodukt, das Neptunium-Isotop ^{237}Np , eine Halbwertszeit von $2 \cdot 10^6$ Jahren hat. Verglichen mit dem Erdalter ist dies eine sehr kurze Zeitspanne, und die Elemente dieser Zerfallsreihe sind längst in ihr stabiles Endprodukt zerfallen.

Abbildung 38.6 zeigt die Thorium-Zerfallsreihe, für die $A = 4n$ gilt. Sie beginnt mit dem α -Zerfall des ^{232}Th in ^{228}Ra . Das bei einem α -Zerfall entstehende Tochterisotop liegt gewöhnlich auf der linken, neutronenreichen Seite der Stabilitätskurve (die gestrichelte Linie in Abbildung 38.6) und zerfällt oft per β^- -Zerfall. So geht in der Thorium-Zerfallsreihe das ^{228}Ra durch zweimaligen β^- -Zerfall zunächst in ^{228}Ac und dann in ^{228}Th über. Dann folgen vier α -Zerfälle zum ^{212}Pb , das durch β^- -Zerfall in ^{212}Bi übergeht. An dieser Stelle verzweigt sich die Zerfallsreihe, da das ^{212}Bi entweder unter α -Emission zu ^{208}Tl oder unter β^- -Emission zu ^{212}Po zerfällt. Die beiden Zweige treffen bei dem stabilen Isotop ^{208}Pb wieder zusammen.

Die Energien der α -Teilchen aus natürlichen radioaktiven Quellen variieren von $4 - 7 \text{ MeV}$, die Halbwertszeiten der Quellen erstrecken sich von 10^{-5} s bis zu 10^{10} Jahren . Je kleiner die Energie des emittierten α -Teilchens, desto länger ist im Allgemeinen die Halbwertszeit der radioaktiven Quelle. Wie schon in Abschnitt 33.4 erwähnt, schlug George Gamow im Jahre 1928 eine Erklärung für die enorme Variation in den Halbwertszeiten vor. In seinem Modell des α -Zerfalls wird das α -Teilchen zunächst im Inneren eines Kerns gebildet und tunnelt dann durch die Coulomb-Barriere (Abbildung 38.7). Eine leichte Erhöhung der Energie E des α -Teilchens bedeutet eine Verringerung der relativen Höhe $E_{\text{pot},\text{max}} - E$ der Potenzialbarriere und auch ihrer

Der γ -Zerfall

Beim γ -Zerfall geht ein Kern aus einem angeregten Zustand unter Emission eines Photons in einen Zustand niedrigerer Energie über. Es handelt sich bei diesem Prozess also um das nukleare Gegenstück zur spontanen Emission eines Photons durch ein Atom oder Molekül. Anders als beim β - oder α -Zerfall ändert sich beim γ -Zerfall weder die Massenzahl A noch die Kernladungszahl Z . Da die Abstände der Energieniveaus im Kern in der Größenordnung von 1 MeV liegen (der entsprechende Abstand in Atomen ist im Vergleich dazu typischerweise 1 eV), liegen die Wellenlängen der emittierten Photonen in der Größenordnung von 1 pm ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$):

$$\lambda = \frac{hc}{E} \approx \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1 \text{ MeV}} = 0,00124 \text{ nm} = 1,24 \text{ pm}.$$

Der γ -Zerfall ist ein im Allgemeinen sehr schnell ablaufender Prozess und lässt sich nur deshalb beobachten, weil er normalerweise einem α - oder β -Zerfall folgt. So kann z. B. ein radioaktiver Mutterkern zunächst durch einen β -Zerfall in einen angeregten Zustand eines Tochterkerns zerfallen und dieser anschließend durch γ -Zerfall in seinen Grundzustand übergehen. Die mittlere Lebensdauer beim γ -Zerfall ist meist sehr kurz. Direkte Messungen der Lebensdauer sind nur bis zu 10^{-11} s möglich. Messungen kürzerer Zeiten sind schwierig, können jedoch in einigen Fällen indirekt durchgeführt werden.

Einige γ -Strahler besitzen eine sehr lange mittlere Lebensdauer in der Größenordnung von Stunden. Solche nuklearen Energiezustände nennt man **metastabile Zustände**.

Der α -Zerfall

Alle sehr schweren Kerne ($Z > 83$) sind potenziell instabil gegenüber dem α -Zerfall, da die Masse des ursprünglichen, radioaktiven Kerns jeweils größer ist als die Summe der Massen der Zerfallsprodukte, des Tochterkerns und eines α -Teilchens. Betrachten wir beispielsweise den Zerfall von ^{232}Th ($Z = 90$) in ^{228}Ra ($Z = 88$) und ein α -Teilchen, der folgendermaßen geschrieben werden kann:



Die Masse des ^{232}Th -Atoms beträgt 232,038 050 u, die des Tochteratoms ^{228}Ra 228,031 064 u und die des ^4He 4,002 603 u. Die Gesamtmasse der Zerfallsprodukte ergibt sich also zu

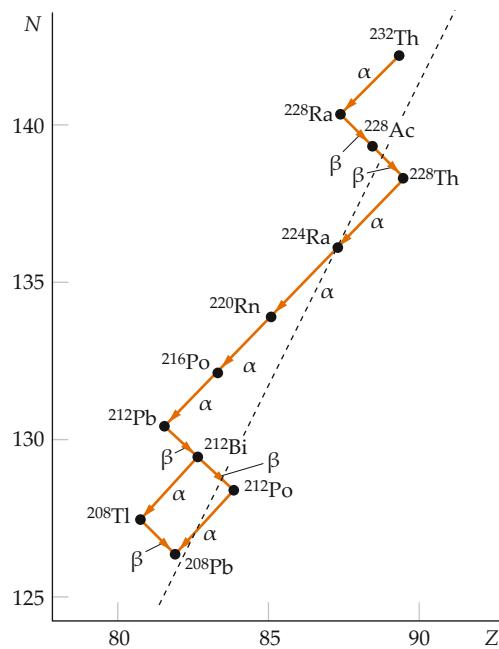


Abbildung 38.6 Die Thorium-Zerfallsreihe, für die $A = 4n$ gilt. Die gestrichelte Linie entspricht der Stabilitätskurve.

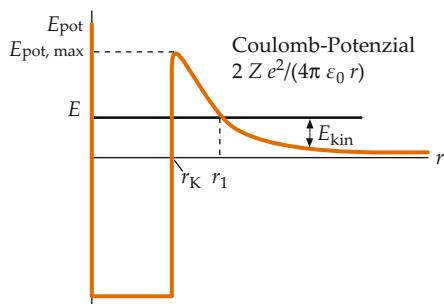


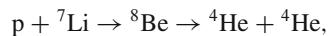
Abbildung 38.7 Modell für das Potenzial eines α -Teilchens in einem Kern. Der Kern habe den Radius r_K . Die starke Kernkraft im Bereich $r < r_K$ wird durch ein Kastenpotenzial beschrieben. Außerhalb des Kerns ist die Kernkraft vernachlässigbar, und das Potenzial ist durch das Coulomb'sche Gesetz $E_{\text{pot}} = +2Z e^2 / (4\pi \epsilon_0 r)$ gegeben, wobei $Z e$ die Ladung des Kerns und $2 e$ die Ladung des α -Teilchens ist. Die Energie E des α -Teilchens im Kern entspricht der kinetischen Energie E_{kin} des α -Teilchens weit ab vom Kern. Eine leichte Erhöhung der Energie E verringert die relative Höhe $E_{\text{pot},\text{max}} - E$ und auch die Breite $r_1 - r_K$ der Potenzialbarriere und führt zu einer starken Erhöhung der Tunnelwahrscheinlichkeit. Bei einer Erhöhung der Energie des emittierten α -Teilchens um den Faktor 2 verringert sich die Halbwertszeit um mehr als das 10^{20} fache.

Breite $r_1 - r_K$. Da die Tunnelwahrscheinlichkeit sehr empfindlich von diesen beiden Größen abhängt, führt schon eine leichte Erhöhung der Energie E zu einem starken Anwachsen der Tunnelwahrscheinlichkeit und damit zu einer signifikant kürzeren Halbwertszeit der Quelle. Gamow konnte einen Ausdruck für die Halbwertszeit in Abhängigkeit von der Energie E des α -

Teilchens herleiten, der in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden steht.

38.3 Kernreaktionen

Für gewöhnlich erhält man Informationen über den Aufbau der Kerne durch Streuexperimente, d. h., man beschießt die Kerne mit verschiedenen Teilchen und analysiert die gemessenen Daten. Obwohl in den ersten Experimenten dieser Art nur natürliche Strahler als Teilchenquellen verwendet werden konnten, lieferten diese Versuche schon eine Vielzahl wichtiger Resultate. Im Jahre 1932 gelang John Douglas Cockcroft und Ernest Thomas Sinton Walton dann die folgende Reaktion:



bei der sie künstlich beschleunigte Protonen verwendeten. Etwa zur selben Zeit entwickelten Robert Van de Graaff den nach ihm benannten elektrostatischen Generator (1931) und Ernest Orlando Lawrence und Milton Stanley Livingston das erste Zyklotron (1932). Seitdem gab es enorme technologische Fortschritte bei der Beschleunigung und dem Nachweis von Teilchen. In der Folge konnte eine Vielzahl von Kernreaktionen im Detail untersucht werden.

Trifft ein Teilchen auf einen Kern, so kann das einfallende Teilchen entweder elastisch oder inelastisch gestreut werden, wobei im letzteren Fall der Kern in einem angeregten Zustand verbleibt, von dem aus er unter Emission von Photonen oder anderen Teilchen wieder zerfällt. Das einfallende Teilchen kann aber auch von dem Kern absorbiert werden, wobei ein anderes Teilchen oder auch mehrere Teilchen emittiert werden können.

Die Energiemenge, die bei einer solchen Reaktion (im Schwerpunktssystem) freigesetzt oder absorbiert wird, heißt **Q -Wert** der Reaktion. Der Q -Wert ist gleich der Ruhemassendifferenz multipliziert mit c^2 . Wird bei einer Reaktion Energie freigesetzt, so spricht man von einer **exothermen Reaktion**. Bei einer exothermen Reaktion ist die Summe der Ruhemassen der in die Reaktion eingehenden Teilchen (auch Edukte genannt) größer als die Gesamtmasse der aus der Reaktion hervorgehenden Teilchen (auch Produkte genannt); der Q -Wert ist in diesem Fall positiv – wie Beispiel 38.5 für die Umwandlung von Lithium bei Aufnahme eines Protons illustriert. Ist die Gesamtmasse der aus einer Reaktion hervorgehenden Teilchen größer als die Gesamtmasse der in die Reaktion eingehenden Teilchen, so wird für das Zustandekommen der Reaktion Energie benötigt, und man spricht von einer **endothemen Reaktion**. Der Q -Wert einer endothermen Reaktion ist negativ. Bezeichnet allgemein Δm die bei der Reaktion auftretende Massenänderung, so ist der Q -Wert gegeben durch

$$Q = -(\Delta m) c^2 = -(m_{\text{Produkte}} - m_{\text{Edukte}}) c^2. \quad (38.19)$$

Q -WERT

Eine endotherme Reaktion kann nur stattfinden, wenn die Energie einen gewissen Schwellenwert überschreitet. Diese Energieschwelle ist im Laborsystem, in dem ruhende Teilchen mit einfallenden Teilchen beschossen werden, etwas größer als $|Q|$, weil die bei der Reaktion erzeugten Teilchen eine bestimmte kinetische Energie haben müssen, um die Impulserhaltung sicherzustellen.

Plausibilitätsprüfung: Da die Gesamtmasse vor der Reaktion größer ist als nach der Reaktion, ist die Anfangsenergie größer als die Endenergie, und es handelt sich um eine exotherme Reaktion; es werden 17,35 MeV freigesetzt. ■

Beispiel 38.5: Exotherm oder endotherm?

Berechnen Sie den Q -Wert der Reaktion $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$ und stellen Sie fest, ob es sich dabei um eine exotherme oder um eine endotherme Reaktion handelt.

Problembeschreibung: Wir entnehmen die Massen der beteiligten Atome Tabelle 38.1 und berechnen die Differenz der in die Reaktion eingehenden und aus der Reaktion hervorgehenden Gesamtmassen. Aus der Massenänderung Δm ergibt sich der Q -Wert gemäß $Q = -(\Delta m) c^2$. Wenn wir statt der Masse des Protons die Masse des Wasserstoffatoms verwenden, ist die Zahl der Elektronen auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung gleich, sodass sich die Elektronenmassen wegheben.

Lösung: 1. Entnehmen Sie die Massen der beteiligten Atome Tabelle 38.1:

${}^1\text{H}$	1,007 825 u
${}^7\text{Li}$	7,016 004 u
${}^4\text{He}$	4,002 603 u

2. Berechnen Sie die Gesamtmasse m_A der in die Reaktion eingehenden Teilchen:

$$\begin{aligned} m_A &= 1,007 825 \text{ u} + 7,016 004 \text{ u} \\ &= 8,023 829 \text{ u} \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie die Gesamtmasse m_E der aus der Reaktion hervorgehenden Teilchen:

$$m_E = 2 \cdot 4,002 603 \text{ u} = 8,005 206 \text{ u}$$

4. Berechnen Sie die Massenänderung:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_E - m_A \\ &= 8,005 206 \text{ u} - 8,023 829 \text{ u} \\ &= -0,018 623 \text{ u} \end{aligned}$$

5. Berechnen Sie den Q -Wert:

$$\begin{aligned} Q &= -(\Delta m) c^2 \\ &= (+0,018 623 \text{ u}) c^2 \frac{931,5 \text{ MeV}/c^2}{1 \text{ u}} \\ &= [17,35 \text{ MeV}] \end{aligned}$$

Q ist positiv, die Reaktion somit exotherm.

Ein Maß für die effektive Größe des Kerns in einer Reaktion zwischen Kern und einfallendem Teilchen ist der **Wirkungsquerschnitt** σ . Sei I die Intensität der einfallenden Teilchen, d.h. die Anzahl einfallender Teilchen pro Zeit und Fläche, und R die Anzahl der stattfindenden Reaktionen pro Zeiteinheit und Kern, dann ist der Wirkungsquerschnitt definiert als

$$\sigma = \frac{R}{I}. \quad (38.20)$$

Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche. Da er in der Größenordnung des Quadrats eines Kernradius liegt, also eine sehr kleine Fläche darstellt, verwendet man als Einheit häufig das **Barn**, das folgendermaßen definiert ist:

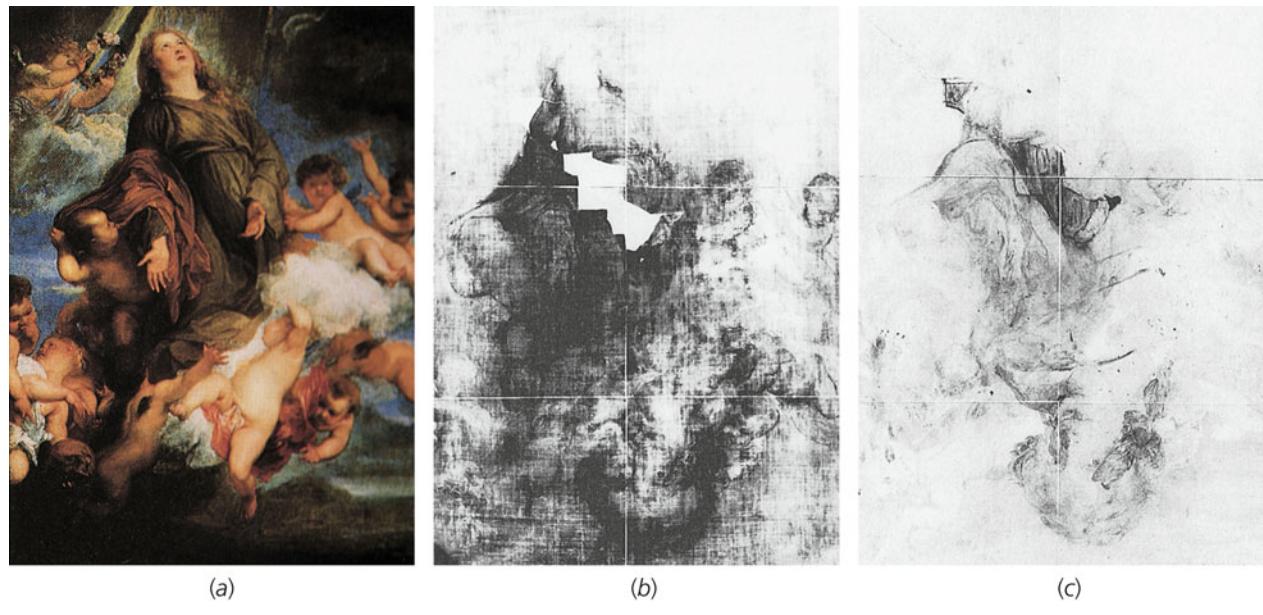
$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2. \quad (38.21)$$

Der Wirkungsquerschnitt für eine gegebene Reaktion ist eine Funktion der Energie. Für endotherme Reaktionen ist er unterhalb der Energieschwelle null.

Kernreaktionen mit Neutronen

Kernreaktionen mit Neutronen sind wichtig für das Verständnis von Kernreaktoren. Trifft ein Neutron mit einer Energie von mehr als 1 MeV auf einen Kern, so wird es mit hoher Wahrscheinlichkeit an diesem gestreut. Auch bei elastischer Streuung gibt das Neutron einen Teil seiner Energie an den Kern ab, weil dieser einen Rückstoß erfährt. Wird das Neutron in einem Material sehr oft gestreut, dann erreicht seine Energie schließlich die Größenordnung der thermischen Energie, $k_B T$. Dabei ist k_B die Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur. (Für Raumtemperatur beträgt $k_B T$ etwa 0,025 eV.) Bei dieser Energie kann das Neutron bei einem elastischen Stoß an einem Kern mit gleicher Wahrscheinlichkeit Energie aufnehmen wie abgeben. Ein Neutron mit einer kinetischen Energie in der Größenordnung von $k_B T$ heißt **thermisches Neutron**.

Bei niedrigen Energien ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass das Neutron von einem Kern eingefangen wird, wobei der Kern zunächst in einen angeregten Zustand übergeht und dann ein γ -Quant emittiert. In Abbildung 38.8 ist der Wirkungsquerschnitt für den Einfang von Neutronen durch Silberkerne gegen die kinetische Energie der Neutronen aufgetragen. Das ausgeprägte Maximum im Wirkungsquerschnitt wird als **Resonanz** bezeichnet. Mit Ausnahme dieser Resonanz zeigt die Kurve einen relativ glatten Verlauf. Mit steigender Energie der Neutronen nimmt der Wirkungsquerschnitt grob mit $1/v$ ab, wobei v die Geschwindigkeit der Neutronen ist. Wir können diese



Verborgene Schichten in einem Gemälde können untersucht werden, indem man das Gemälde mit Neutronen beschießt und die Strahlung misst, die von den Kernen emittiert wird, bei denen ein Neutroneneinfang stattfand. Die Methode basiert darauf, dass verschiedene Elemente in den verwendeten Materialien unterschiedliche Halbwertszeiten haben. a) Van Dycks Gemälde *Die Heilige Rosalie als Fürsprecherin gegen die Pest von Palermo*. b) und c) Diese Schwarzweißbilder wurden mithilfe eines Spezialfilms erzeugt, der empfindlich auf Elektronen reagiert, wie sie von radioaktiv zerfallenden Elementen emittiert werden. b) Das Bild wurde einige Stunden nach der Bestrahlung mit Neutronen aufgenommen und weist auf das Vorhandensein von Mangan hin, das in Umbra enthalten ist, einem Farbstoff mit Pigmenten aus dunkler Erde, der für die Grundierung des Bilds verwendet wurde. (Die weißen Flächen markieren Bereiche, in denen Restaurierungen erfolgten; die heute verwendeten Farben sind frei von Mangan.) c) Das Bild wurde vier Tage später aufgenommen; die vom Umbra herrührenden Emissionen waren inzwischen schon abgeklungen, und das hauptsächlich strahlende Element war zu diesem Zeitpunkt Phosphor, das in Holz- und Knochenkohle enthalten ist. Diese Aufnahme enthüllte eine auf dem Kopf stehende Skizze, die Van Dyck selbst zeigt. Dieses in Kohle ausgeführte Selbstporträt hat der Künstler später offenbar übermalt. (a) © Metropolitan Museum of Art. b) und c) mit freundlicher Genehmigung des Paintings Conservation Department, Metropolitan Museum of Art.)

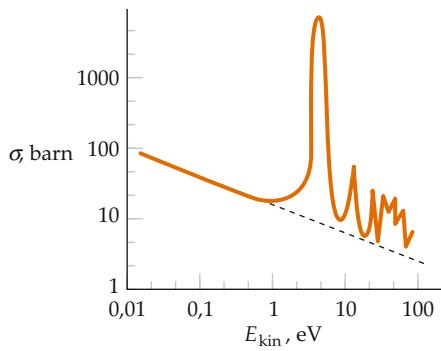


Abbildung 38.8 Wirkungsquerschnitt für den Neutroneneinfang durch Silberkerne als Funktion der Energie der Neutronen. Die gestrichelte Linie entspricht dem $1/v$ -Abfall des Wirkungsquerschnitts, der proportional ist zu der Zeit, die die Neutronen in der Nähe der Silberkerne verbringen. Diesem sind eine große und mehrere kleine Resonanzen überlagert.

Abhängigkeit erklären, indem wir ein Neutron betrachten, das sich mit der Geschwindigkeit v an einem Kern vom Durchmesser $2 r_K$ vorbeibewegt. Die Zeit, die das Neutron benötigt, um an dem Kern vorbeizufliegen, beträgt $2 r_K/v$. Der $1/v$ -Abfall der Kurve lässt sich also so interpretieren, dass der Wirkungs-

querschnitt für den Einfang des Neutrons proportional zu der Zeit ist, die das Neutron in der Nähe des Silberkerns verbringt. Die gestrichelte Linie in Abbildung 38.8 entspricht der $1/v$ -Kurve. Im Resonanzmaximum erreicht der Wirkungsquerschnitt σ Werte von 5000 barn und fällt rechts und links davon stark ab auf Werte in der Größenordnung von etwa 10 barn. Viele andere Elemente zeigen ähnliche Resonanzstrukturen im Wirkungsquerschnitt für den Neutroneneinfang. Der maximale Wert des Wirkungsquerschnitts für ^{113}Cd liegt beispielsweise bei 57 000 barn. Dieses Material eignet sich daher sehr gut zur Abschirmung niederenergetischer Neutronen.

Ein wichtiger Prozess, an dem Neutronen beteiligt sind, ist die Kernspaltung, die wir im folgenden Abschnitt betrachten werden.

38.4 Kernspaltung und Kernfusion

In Abbildung 38.9 ist der sogenannte Kernmassendefekt pro Nukleon, $(m_K - Z m_p - N m_n)/A$, in Einheiten von MeV/c^2 gegen die Massenzahl A aufgetragen. Der Kernmassendefekt entspricht genau dem Negativen der Bindungsenergie, die in Abbildung 38.3 aufgetragen ist. Der Kurve in Abbildung 38.9

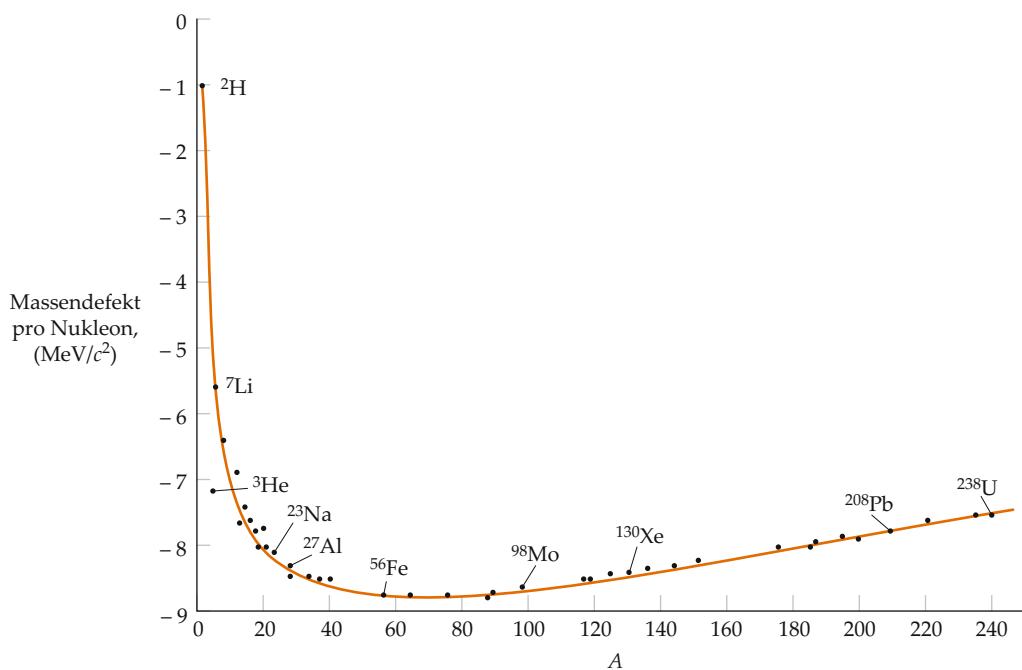


Abbildung 38.9 Der Massendefekt pro Nukleon, $(m_K - Z m_p - N m_n)/A$, in Einheiten von MeV/c^2 in Abhängigkeit von der Massenzahl A . Die Ruhemasse pro Nukleon ist für mittelschwere Kerne geringer als für sehr leichte und sehr schwere Kerne.

entnehmen wir, dass der Massendefekt pro Nukleon für sehr schwere ($A > 200$) und sehr leichte ($A \leq 20$) Nuklide größer ist als für mittelschwere Nuklide. Daher wird Energie frei, wenn ein sehr schwerer Kern, wie z. B. ²³⁵U, in zwei leichtere Kerne zerfällt – ein Prozess, den man als **Kernspaltung** bezeichnet –, genauso aber auch, wenn zwei sehr leichte Kerne, wie z. B. ²H und ³H, zu einem schwereren Kern verschmelzen; diesen Prozess bezeichnet man als **Kernfusion**.

Die Ausnutzung sowohl der Kernspaltung als auch der Kernfusion zur Energiegewinnung und zur Entwicklung von Nuklearwaffen hat unser Leben seit dem frühen 20. Jahrhundert entscheidend beeinflusst. Die Nutzung dieser Prozesse für die Entwicklung von Verfahren zur Energiegewinnung könnte in der Zukunft sogar noch größere Auswirkungen haben. Wir wollen nun einige Eigenschaften der Kernspaltung und Kernfusion untersuchen, die für ihre Verwendung in Reaktoren zur Stromerzeugung von Bedeutung sind.

Kernspaltung

Bei sehr schweren Kernen mit einer Kernladungszahl $Z > 92$ tritt spontane Kernspaltung auf, d. h., die Kerne zerfallen auch ohne äußere Einwirkung. Dies kann man sehr schön durch die Analogie zu einem geladenen Tröpfchen erklären. Solange das

Tröpfchen nicht zu groß ist, ist die Oberflächenspannung den Abstoßungskräften der Ladungen überlegen und hält das Tröpfchen zusammen. Überschreitet die Größe jedoch einen gewissen Schwellenwert, wird das Tröpfchen instabil und zerplatzt spontan. Die spontane Kernspaltung setzt der Größe der Kerne und damit auch der Anzahl der möglichen natürlich vorkommenden Elemente eine Obergrenze.

Einige schwere Kerne – insbesondere Uran und Plutonium – können durch Neutroneneinfang zur Kernspaltung angeregt werden. Bei der Spaltung von ²³⁵U beispielsweise wird der Urankern zunächst durch Neutroneneinfang in einen angeregten Zustand versetzt und zerfällt dann in der Folge in zwei Kerne, wobei mehrere Neutronen emittiert werden. Die abstoßende Coulomb-Kraft treibt die Kerne auseinander, die freigesetzte Energie tritt schließlich als thermische Energie in Erscheinung. Betrachten wir z. B. die Spaltung eines Kerns mit der Massenzahl $A = 200$ in zwei Kerne der Massenzahl $A = 100$. Da die Ruheenergie pro Nukleon für Kerne mit $A = 200$ um etwa 1 MeV größer ist als die für Kerne mit $A = 100$, werden bei dieser Spaltung ungefähr 200 MeV pro gespaltenem Atomkern freigesetzt. Vergleicht man dies mit der Energie von 4 eV, die bei einer typischen Verbrennungsreaktion pro verbrauchtem Sauerstoffmolekül frei wird, kann man die Größe der bei der Kernspaltung freigesetzten Energiemenge ermessen. Beispiel 38.6 illustriert das anhand der Kernspaltung des Urans.

Beispiel 38.6: Energie, die bei der Spaltung von ^{235}U freigesetzt wird

Berechnen Sie die Energie in kWh, die bei der Spaltung von 1,00 g ^{235}U freigesetzt wird, wenn pro gepaltenem Kern 200 MeV freiwerden.

Problembeschreibung: Wir benötigen die Zahl der Urankerne in 1 g ^{235}U . Diese ergibt sich aus der Tatsache, dass sich in 235 g Uran gerade n_A Kerne befinden, wobei $n_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ die Avogadro-Zahl ist.

Lösung: 1. Die Gesamtenergie ergibt sich als Zahl n der Kerne multipliziert mit der Energie pro Kern:

$$E = n \cdot 200 \text{ MeV/Kern}$$

2. Berechnen Sie n :

$$\begin{aligned} n &= \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ Kerne/mol}}{235 \text{ g/mol}} \cdot 1 \text{ g} \\ &= 2,56 \cdot 10^{21} \text{ Kerne} \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie die Energie pro Gramm in eV und wandeln Sie das Ergebnis dann in kWh um:

$$\begin{aligned} E &= \frac{200 \cdot 10^6 \text{ eV}}{\text{Kern}} \cdot 2,56 \cdot 10^{21} \text{ Kerne} \\ &= 5,12 \cdot 10^{29} \text{ eV} \\ &= 8,19 \cdot 10^{10} \text{ J} = 8,19 \cdot 10^7 \text{ kWs} \\ &= 2,28 \cdot 10^4 \text{ kWh} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Kernspaltung des Urans wurde 1938 von Otto Hahn und Fritz Strassmann entdeckt. Sie stellten fest, dass beim Beschuss von Uran mit Neutronen mittelschwere Elemente wie z. B. Barium oder Lanthan entstehen. Die Entdeckung, dass dabei mehrere Neutronen emittiert werden, gab Anlass zu der Frage, ob diese Neutronen für weitere Kernspaltungsprozesse genutzt werden könnten und ob sich so eine Kettenreaktion in Gang setzen ließe. Wenn ein ^{235}U -Kern ein Neutron einfängt, geht er zunächst in den angeregten Zustand ^{236}U über. In 15 % aller Fälle fällt der Kern unter Emission von γ -Strahlung in den Grundzustand zurück. In den restlichen 85 % tritt der in Abbildung 38.10 dargestellte Kernspaltungsprozess auf, der in gewisser Weise analog zur Oszillation eines Flüssigkeitströpfchens gesehen werden kann. Wenn die Oszillationen heftig genug sind, teilt sich das Tröpfchen, und es entstehen zwei kleinere Tröpfchen. Mithilfe des Tröpfchenmodells berechneten Niels Bohr und John Wheeler die Schwellenenergie E_k , die für den Kernspaltungsprozess eines ^{236}U -Kerns benötigt wird. ^{236}U ist der Kern, der beim Einfang eines Neutrons durch einen ^{235}U -Kern als Zwischenprodukt entsteht. Die Schwellenenergie

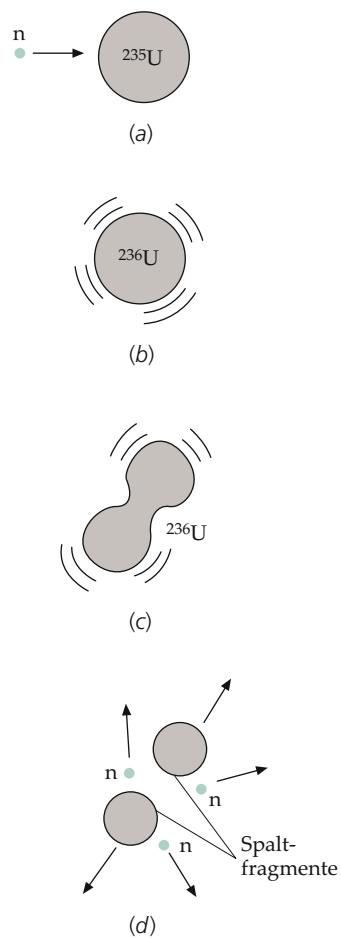


Abbildung 38.10 Schematische Darstellung der Spaltung eines ^{235}U -Kerns. Die Absorption eines Neutrons (a) führt zum angeregten Zustand ^{236}U (b). Der ^{236}U -Kern beginnt zu oszillieren und wird instabil. (d) Der Kern zerfällt in zwei leichtere Tochterkerne; dabei werden mehrere Neutronen emittiert, die weitere Spaltungsprozesse induzieren können.

für die Spaltung dieses Kerns beträgt 5,3 MeV und ist damit niedriger als die beim Einfang eines Neutrons durch einen ^{235}U -Kern freiwerdende Energie von 6,4 MeV. Wenn der ^{235}U -Kern durch den Einfang eines Neutrons in den angeregten Zustand ^{236}U übergeht, besitzt dieser also mehr als genug Energie, um spontan zu zerfallen. Die kinetische Energie für die Spaltung des ^{239}U -Kerns dagegen beträgt 5,9 MeV, während beim Einfang eines Neutrons durch einen ^{238}U -Kern nur 5,2 MeV freigesetzt werden. Geht der ^{238}U -Kern durch Neutroneneinfang in den angeregten Zustand ^{239}U über, so reicht die Anregungsenergie nicht aus, um den Spaltungsprozess in Gang zu setzen. Stattdessen fällt der ^{239}U -Kern unter Emission von γ -Strahlung wieder in den Grundzustand zurück und geht dann durch zweimaligen β -Zerfall zunächst in ^{239}Np und anschließend in ^{239}Pu über.

Wie in Abbildung 38.11 am Beispiel des ^{235}U gezeigt, kann ein Kern auf viele verschiedene Weisen in zwei mittelschwe-

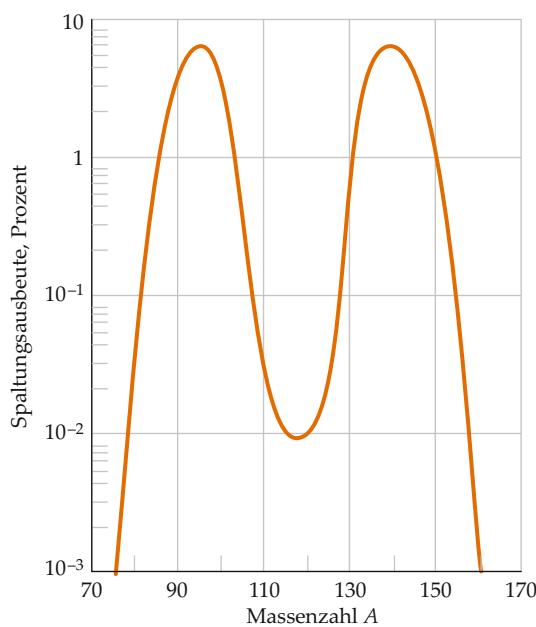


Abbildung 38.11 Die Verteilung möglicher Spaltungsprodukte des ^{235}U . Die Kernspaltung in zwei Kerne unterschiedlicher Masse ist wahrscheinlicher als die in zwei Kerne gleicher Masse.

re Kerne zerfallen. Im Fall des ^{235}U -Kerns können dabei je nach Reaktion ein, zwei oder drei Neutronen emittiert werden. Die mittlere Zahl der beim Zerfall eines ^{235}U -Kerns emittierten Neutronen beträgt 2,5. Eine typische Spaltungsreaktion ist



Kernreaktoren

Um in einem Kernreaktor eine Kettenreaktion aufrechtzuerhalten, muss im Mittel eines der bei oder kurz nach der Kernspaltung eines ^{235}U -Kerns emittierten Neutronen wieder durch einen anderen ^{235}U -Kern eingefangen werden und dessen Spaltung auslösen. (Manchmal emittieren auch die Spaltungsprodukte Neutronen; dies geschieht typischerweise einige Sekunden nach der eigentlichen Spaltung.) Wir definieren den sogenannten **Vermehrungsfaktor** k als mittlere Anzahl der Neutronen, die pro Kernspaltung entstehen und weitere Kernspaltungen bewirken. Der maximal mögliche Wert für k beträgt im Fall des ^{235}U 2,5. Im Allgemeinen ist der Vermehrungsfaktor aber wesentlich kleiner als der Maximalwert. Dafür sind hauptsächlich die beiden folgenden Gründe verantwortlich: 1) Einige Neutronen können aus dem Gebiet des spaltbaren Materials entkommen. 2) Einige Neutronen werden innerhalb des Spaltmaterials durch nichtspaltbare Kerne eingefangen. Gilt $k = 1$, so ist die Reaktion selbsterhaltend. Ist $k < 1$, so kommt die Reaktion zum Erliegen. Ist k wesentlich größer als 1, wächst



Blick in ein Kernkraftwerk in Kent in England. Der Techniker steht auf der Plattform, in die die Uranbrennstäbe eingelassen sind. (© Jerry Mason/Photo Researchers.)

die Reaktionsrate drastisch an, und die Reaktion verselbstständigt sich. In Kernwaffen ist dieses Durchgehen der Reaktion erwünscht, in Kernreaktoren dagegen muss der Wert von k möglichst nahe bei 1 gehalten werden.

Bei der Kettenreaktion in Kernkraftwerken tritt noch ein weiteres Problem auf: Die bei oder kurz nach der Kernspaltung emittierten Neutronen besitzen eine Energie in der Größenordnung von 1 MeV. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neutron eingefangen wird und der entsprechende ^{235}U -Kern dann auch zerfällt, ist dagegen am größten, wenn die Neutronen eine geringe Energie haben. Die Kettenreaktion kann daher nur aufrechterhalten werden, wenn die Neutronen abgebremst werden, bevor sie den Reaktor verlassen. Besitzen die Neutronen eine hohe kinetische Energie (1–2 MeV), so verlieren sie sehr rasch Energie durch inelastische Streuprozesse mit ^{238}U -Kernen. Diese bilden den wesentlichen Bestandteil des natürlich vorkommenden Urans. (Natürliches Uran besteht zu 99,3 % aus ^{238}U und zu nur 0,7 % aus dem spaltbaren ^{235}U .) Ist die Energie der Neutronen einmal unter die Anregungsenergie der Kerne im Reaktor (etwa 1 MeV) gefallen, so ist der hauptsächlich auftretende Bremsprozess die elastische Streuung der Neutronen. Dabei stößt ein schnelles Neutron mit einem ruhenden Kern zusammen und überträgt einen Teil seiner Energie auf diesen Kern. Ein nennenswerter Energieübertrag tritt bei einem solchen Prozess jedoch nur dann auf, wenn die Massen beider Stoßpartner in derselben Größenordnung liegen. Bei einem elastischen Stoß zwischen einem Neutron und einem schweren Urankern kann nicht viel Energie übertragen werden. Ein solcher Stoß ist vergleichbar dem zwischen einer Murmel und einer Billardkugel. Die Murmel wird durch die sehr viel schwere Billardkugel abgelenkt und überträgt nur sehr wenig ihrer Energie auf die Billardkugel. Daher umgibt man das spaltbare Material im Reaktorkern mit einem sogenannten **Moderator**, der aus einem Material besteht, das leichte Kerne enthält, etwa Wasser oder Kohlenstoff, und die Aufgabe hat, die Neutronen abzubremsen. Die Neutronen verlieren durch elastische Stöße mit den Kernen des Moderatormaterials so lange Energie,

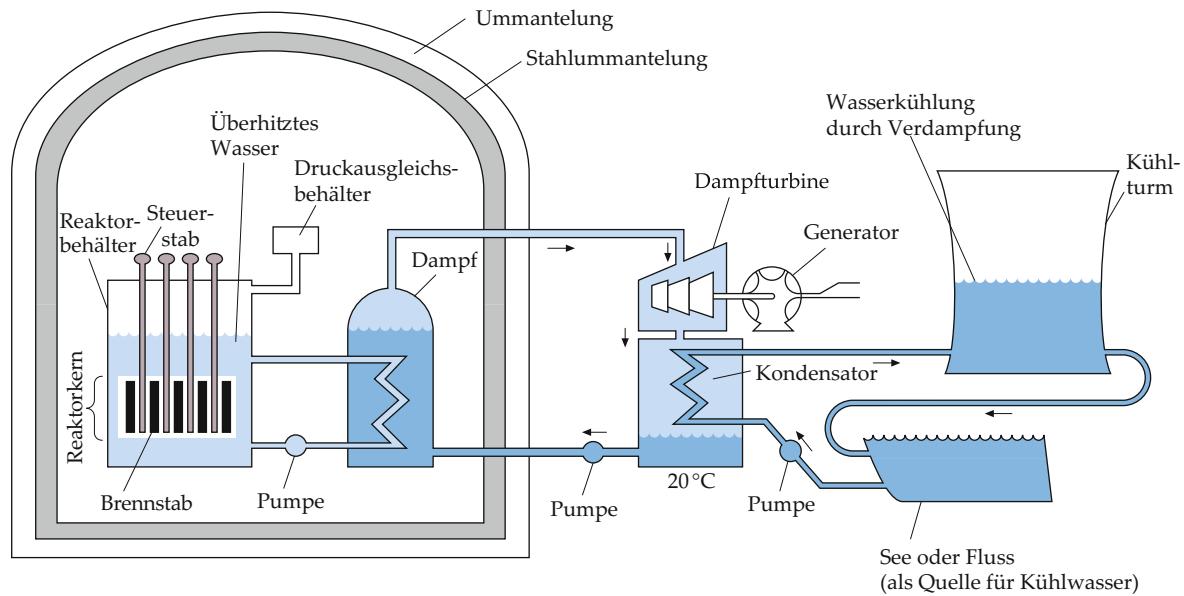


Abbildung 38.12 Vereinfachte Darstellung eines Druckwasserreaktors. Das Wasser im Primärkreislauf dient sowohl als Moderator als auch als Wärmeüberträger. Es ist vom Wasser des Sekundärkreislaufs, dessen Dampf die Turbinen antreibt, streng getrennt.

bis sie sich im thermischen Gleichgewicht mit dem Moderator befinden. Da der Wasserstoff im gewöhnlichen Wasser einen relativ großen Wirkungsquerschnitt für den Neutroneneinfang besitzt, können Reaktoren, in denen gewöhnliches Wasser als Moderator verwendet wird, kaum einen Vermehrungsfaktor von $k \approx 1$ erreichen. Man verwendet daher angereichertes Uran, in dem der Anteil an ^{235}U von 0,7 % auf 1–4 % erhöht wurde. Natürliches Uran lässt sich als Brennmaterial einsetzen, wenn anstatt des gewöhnlichen Wassers (H_2O) als Moderator schweres Wasser (D_2O) verwendet wird. Obwohl schweres Wasser teuer ist, wird es in den meisten kanadischen Kernreaktoren als Moderator eingesetzt, um die Kosten zum Bau von Urananreicherungsanlagen zu sparen.

Abbildung 38.12 zeigt den Aufbau eines Druckwasserreaktors, wie er in den USA üblicherweise zur Stromerzeugung verwendet wird. In einem Primärkreislauf wird Wasser, das gleichzeitig als Moderator dient, durch Kernspaltung im Reaktorkern auf hohe Temperaturen erhitzt. Das Wasser steht dabei unter so hohem Druck, dass es nicht sieden kann. Das heiße Wasser wird in einen Wärmetauscher gepumpt und gibt seine Energie an das Wasser im Sekundärkreislauf ab. Der entstehende Wasserdampf treibt schließlich die im Sekundärkreislauf befindlichen Turbinen an, die dann den Strom erzeugen. Beachten Sie, dass das Wasser im Sekundärkreislauf streng von dem des Primärkreislaufs getrennt ist und daher mit dem radioaktiven Material aus dem Reaktorkern nicht in direkte Berührung kommt, wodurch eine Kontamination verhindert wird.

Um einen Reaktor möglichst sicher betreiben zu können, muss man den Vermehrungsfaktor k möglichst genau kontrollieren

und regeln können. Bei Verwendung von Wasser als Moderator lässt sich der Vermehrungsfaktor z. B. mit einem negativen Rückkopplungsverfahren steuern. Steigt k über 1 an, so nimmt die Reaktionsrate und damit die Temperatur im Reaktor zu. Die steigende Temperatur bewirkt aber, dass die Dichte des Wassers und damit seine Moderationsfähigkeit sinkt. Das hat zur Folge, dass der Vermehrungsfaktor wieder abnimmt. Eine zweite Regelungsmöglichkeit ist die direkte mechanische Regelung durch Steuerstäbe aus einem Material mit großem Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang, beispielsweise Cadmium. Um die Reaktionsrate zu verringern, werden die Steuerstäbe in den Reaktor hineingeschoben, sodass mehr Neutronen eingefangen werden und k kleiner als 1 wird. Um die Reaktionsrate zu erhöhen, werden die Steuerstäbe langsam aus dem Reaktor herausgezogen; sie fangen weniger Neutronen ein und k wird größer als 1.

Eine solche mechanische Regelung ist jedoch nur möglich, weil einige der beim Kernspaltungsprozess erzeugten Neutronen als **verzögerte Neutronen** auftreten. Die Zeit, die ein Neutron braucht, um von 1–2 MeV auf thermische Energien abgebremst und eingefangen zu werden, beträgt nur einige Millisekunden. Würden alle Neutronen sofort bei der Kernspaltung emittiert – man bezeichnet diese als prompte Neutronen –, wäre eine mechanische Kontrolle gar nicht möglich. Der Reaktor wäre längst durchgegangen, ehe man reagieren und die Steuerstäbe absenken könnte. Etwa 0,65 % der Neutronen werden jedoch erst mit einer Zeitverzögerung von ungefähr 14 s emittiert, und zwar nicht bei der Spaltung selbst, sondern beim weiteren Zerfall der Spaltungsprodukte. Wir untersuchen den Effekt dieser verzögerten Neutronen in den Beispielen 38.7 und 38.8.

Beispiel 38.7: Verdopplungszeit

In einem Kernreaktor betrage die durchschnittliche Zeit zwischen zwei Spaltungsgenerationen $t_1 = 1 \text{ ms} = 0,001 \text{ s}$. Darunter versteht man die Zeit, die ein emittiertes Neutron benötigt, um eine weitere Spaltung zu bewirken. Die mittlere Zahl der Neutronen pro Spaltung, die weitere Spaltungen auslösen, sei 1,001. Wie lange dauert es, bis sich die Reaktionsrate verdoppelt hat?

Problembeschreibung: Die Reaktionsrate ist die Zahl der Kerne, die pro Zeiteinheit zerfallen. Die gesuchte Verdopplungszeit erhält man, indem man die Zahl n der Generationen, die für eine Verdopplung der Reaktionsrate nötig sind, mit der Generationsdauer multipliziert. Ist $k = 1,001$, so beträgt die Reaktionsrate nach n Generationen $1,001^n$. Wenn wir dies gleich 2 setzen und nach n auflösen, erhalten wir die Zahl der benötigten Generationen.

Lösung: 1. Setzen Sie $1,001^n$ gleich 2 und lösen Sie nach n auf:

$$\begin{aligned} 1,001^n &= 2 \\ n \ln 1,001 &= \ln 2 \\ n &= \frac{\ln 2}{\ln 1,001} = 693 \end{aligned}$$

2. Multiplizieren Sie die Zahl der Generationen mit der Generationsdauer der Neutronen:

$$t = n t_1 = 693 \cdot 0,001 \text{ s} = \boxed{0,7 \text{ s}}$$

Plausibilitätsprüfung: Bei der berechneten Zeit von 0,7 s handelt es sich ungefähr um das 700fache der durchschnittlichen Zeit zwischen zwei Spaltungsgenerationen. Dass so viele Generationen nötig sind, bis sich die Reaktionsrate verdoppelt hat, erscheint plausibel, da k so nahe bei 1 liegt.

Weitergedacht: Die Verdopplungszeit von ca. 0,7 s ist für eine mechanische Regelung mit Steuerstäben zu kurz. ■

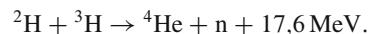
Da die Vorkommen an natürlichem Uran begrenzt sind und dieses Uran nur einen geringen Anteil an spaltbarem ^{235}U enthält, werden wir mit Reaktoren auf der Basis von ^{235}U unseren Energiebedarf in absehbarer Zukunft nicht decken können. Ein weiteres Hindernis sind die beschränkten Kapazitäten zur Anreicherung von ^{235}U . Eine vielversprechende Alternative ist der sogenannte **schnelle Brüter**. Fängt ein ^{238}U -Kern – ein relativ häufig vorkommender, aber nicht spaltbarer Kern – ein Neutron ein, so geht er durch β -Zerfall mit einer Halbwertszeit von

20 min in ^{239}Np über, das wiederum durch β -Zerfall mit einer Halbwertszeit von 2,35 Tagen in das spaltbare ^{239}Pu übergeht. Da sich die Kernspaltung von ^{239}Pu mit schnellen Neutronen vollzieht, ist kein Moderator nötig. Ein Reaktor, der zu Anfang eine Mischung aus ^{238}U und ^{239}Pu enthält, wird mehr Brennstoff erbrüten, als er verbraucht, wenn im Mittel mindestens eins der Neutronen, die bei der Spaltung eines ^{239}Pu -Kerns entstehen, von einem ^{238}U -Kern eingefangen wird. Experimentelle Untersuchungen deuten darauf hin, dass ein schneller Brüter seinen Brennstoff typischerweise in sieben bis zehn Jahren verdoppeln dürfte.

Der schnelle Brüter birgt jedoch zwei schwerwiegende Sicherheitsprobleme in sich. Der Anteil an verzögerten Neutronen liegt für die Kernspaltung von ^{239}Pu bei nur 0,3 %, die Zeitspanne zwischen zwei Spaltungsgenerationen liegt damit deutlich unter der gewöhnlicher Reaktoren. Eine mechanische Regelung des Vermehrungsfaktors k ist somit wesentlich schwieriger. Des Weiteren verwendet man, da die Betriebstemperatur eines schnellen Brüters recht hoch und ein Moderator nicht erwünscht ist, zur Energieabfuhr flüssige Metalle wie Natrium oder Kalium statt des Wassers, das in gewöhnlichen Reaktoren sowohl Moderator als auch Kühlmittel ist. Steigt die Temperatur im Reaktor an, so nimmt die Dichte des Kühlmittels ab, und es kommt, da weniger Neutronen absorbiert werden und mehr schnelle Neutronen für den Brutprozess zur Verfügung stehen, zu einem positiven Rückkopplungseffekt. Aufgrund dieser Sicherheitsaspekte werden schnelle Brüter in den USA noch nicht kommerziell genutzt. In Frankreich, Großbritannien und der früheren Sowjetunion dagegen sind mehrere schnelle Brüter im Einsatz.

Kernfusion

Bei der Kernfusion verschmelzen zwei leichte Kerne, wie z. B. Deuterium (^2H) und Tritium (^3H), und bilden einen schwereren Kern. Eine typische Fusionsreaktion ist



Die bei der Fusion freiwerdende Energie hängt von der jeweiligen Reaktion ab, im Falle der Fusion von ^2H und ^3H beträgt sie 17,6 MeV. Obwohl absolut gesehen weniger Energie freigesetzt wird als bei einer Kernspaltung, ist der Energiebeitrag pro Masseneinheit bei der Fusion größer. Bei der obigen Fusionsreaktion etwa werden $(17,6 \text{ MeV})/(5 \text{ Nukleonen}) = 3,52 \text{ MeV/Nukleon}$ freigesetzt, also etwa 3,5-mal so viel wie bei einer Kernspaltung, wo pro Nukleon eine Energie von etwa 1 MeV erzeugt wird.

Die Nutzung von Fusionsprozessen zur Energieerzeugung stellt eine vielversprechende Alternative zur Kernspaltung dar, zumal der Brennstoff in unbegrenzter Menge vorhanden ist und sich im Vergleich zur Kernspaltung weitaus geringere Gefahren ergeben. Einen zur Energieerzeugung tauglichen Reaktor gibt es aber noch nicht. Um die prinzipiellen Schwierigkeiten zu verstehen, wollen wir die Fusionsreaktion von ^2H und ^3H näher betrachten.

Beispiel 38.8: Verzögerte Neutronen und die mechanische Regelung mit Steuerstäben

ZUR ÜBUNG

Angenommen, 0,65 % der Neutronen werden mit einer Verzögerung von 14 s emittiert, wie groß sind dann die mittlere Zeit zwischen zwei Spaltungsgenerationen und die Verdopplungszeit, wenn $k = 1,001$ ist?

Problembeschreibung: Die Verdopplungszeit berechnet sich als $n(t)$, wobei $\langle t \rangle$ die durchschnittliche Zeit zwischen zwei Generationen ist. In 99,35 % aller Fälle beträgt diese Zeit 0,001 s, in den restlichen 0,65 % sind es 14 s. Die mittlere Zeit $\langle t \rangle$ beträgt demnach $0,9935 \cdot 0,001 \text{ s} + 0,0065 \cdot 14 \text{ s}$.

Decken Sie zunächst die nachfolgenden Ergebnisse ab und versuchen Sie, sie selbst zu ermitteln.

Lösung: 1. Berechnen Sie die mittlere Zeit zwischen zwei Generationen.

2. Berechnen Sie daraus die Zeit für 693 Generationen.

Ergebnisse der Lösungsschritte:

1.

$$\begin{aligned}\langle t \rangle &= 0,9935 \cdot 0,001 \text{ s} + 0,0065 \cdot 14 \text{ s} \\ &= 0,092 \text{ s}\end{aligned}$$

2.

$$t = 63,8 \text{ s} \approx \boxed{60 \text{ s}}$$

Weitergedacht: Eine Verdopplungszeit von etwa 60 s ist für eine mechanische Regelung durch Absenken der Steuerstäbe völlig ausreichend.

Aufgrund der Coulomb-Abstoßung zwischen den ${}^2\text{H}$ - und ${}^3\text{H}$ -Kernen muss man zunächst einmal Energie aufwenden, um die Kerne so nahe zusammenzubringen, dass die anziehenden Kernkräfte wirksam werden und eine Fusion ermöglichen. Die kinetische Energie der Kerne muss dafür in der Größenordnung von 1 MeV liegen. In Beschleunigern lassen sich solche Energien zwar problemlos erreichen, allerdings erfordern die Kern-Kern-Zusammenstöße – beispielsweise im Kreuzungspunkt zweier gegenläufiger Teilchenstrahlen – mehr Energie, als sie erzeugen. Denn die Wahrscheinlichkeit für einen Streuprozess ist wesentlich größer als die für einen Fusionsprozess. Geeignete Fusionsbedingungen erreicht man vielmehr dadurch, dass man die Teilchen auf so hohe Temperaturen erhitzt, dass eine Fusion allein durch zufällige thermische Kollisionen zwischen den Teilchen möglich wird. Da immer eine beträchtliche Zahl von Teilchen eine höhere Energie als die mittlere Energie $\frac{3}{2} k_B T$ besitzen und zusätzlich auch Tunnelprozesse durch die Coulomb-Barriere möglich sind, reicht eine mittlere Energie von $k_B T \approx 10 \text{ keV}$ aus, um bei hinreichend hoher Teilchendichte eine brauchbare Fusionsrate zu erzeugen. Die 10 keV entsprechende Temperatur liegt in der Größenordnung von 100 Millionen Kelvin. Ähnliche Temperaturen herrschen auch im Inneren von Sternen, wo solche Fusionsreaktionen gang und gäbe sind. Bei derartig hohen Temperaturen besteht ein Gas aus weitgehend frei beweglichen positiven Ionen und Elektronen – man bezeichnet diesen Zustand als **Plasma**. Eines der Probleme bei der Erzeugung einer kontrollierten Kernfusion besteht darin, dieses Plasma über einen hinreichend langen Zeitraum einzuschließen, sodass die Fusion stattfinden kann. Im Inneren der Sonne wird der Einschluss des Plasmas durch die enormen Gravitationskräfte der Sonne bewirkt. Im Labor stellt der Plasmaeinschluss dagegen ein schwerwiegendes Problem dar.

Die zur Aufheizung des Plasmas benötigte Energie ist proportional zur Dichte n/V der in ihm enthaltenen Ionen, die Kollisionsrate dagegen ist proportional zu $(n/V)^2$, dem Quadrat der Dichte. Ist τ die Einschlusszeit des Plasmas, so ist die produzierte Energie proportional zu $(n/V)^2 \tau$. Soll diese größer sein als die zur Heizung nötige Energie, so muss die Ungleichung

$$C_1 (n/V)^2 \tau > C_2 (n/V)$$

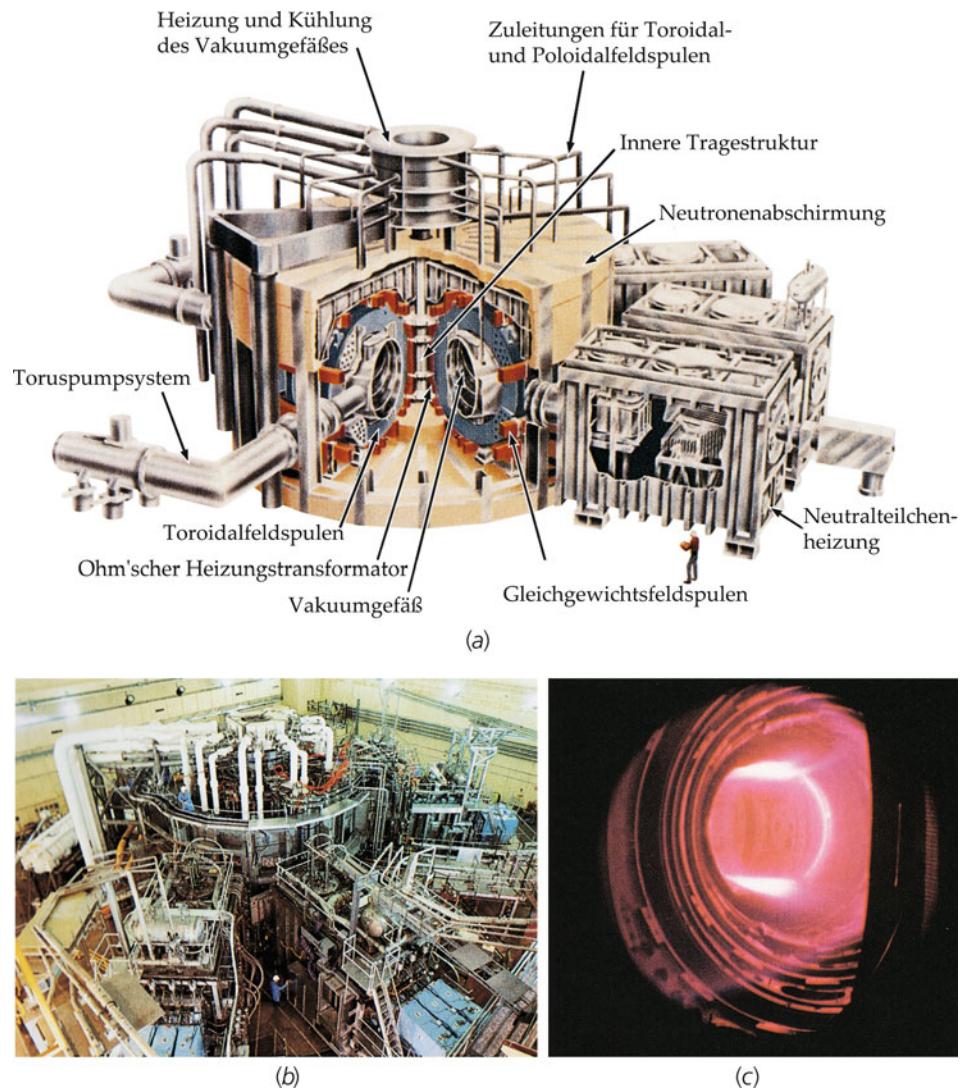
erfüllt sein, wobei C_1 und C_2 Konstanten sind. Im Jahre 1957 bestimmte der britische Physiker John David Lawson diese Konstanten durch Abschätzungen des Wirkungsgrads für verschiedene hypothetische Fusionsreaktoren und leitete daraus die folgende Relation zwischen der Dichte und der Einschlusszeit her, die als **Lawson-Kriterium** bezeichnet wird:

$$(n/V) \tau > 10^{20} \text{ s} \cdot \text{Teilchen/m}^3. \quad (38.22)$$

LAWSON-KRITERIUM

Ist die kinetische Energie der Ionen hinreichend groß ($k_B T \approx 10 \text{ keV}$) und das Lawson-Kriterium gerade erfüllt, so ist die vom Fusionsreaktor erzeugte Energie gerade genauso groß wie die hineingesteckte Energie, d.h., die Energiebilanz ist ausgeglichen. Damit der Reaktor rentabel arbeitet, muss die erzeugte Energie aber sehr viel höher sein.

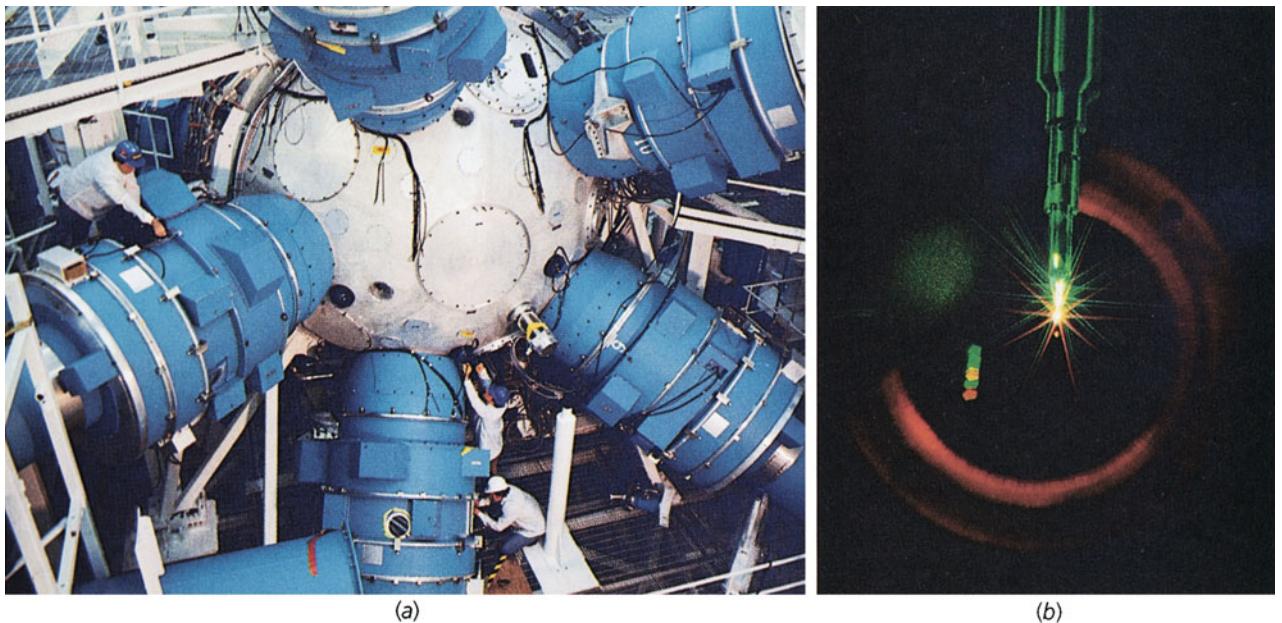
Derzeit werden zwei verschiedene Methoden in Betracht gezogen, um das Lawson-Kriterium zu erfüllen. Bei der einen Methode, dem **magnetischen Einschluss**, wird ein Magnetfeld benutzt, um das Plasma einzuschließen (Abschnitt 23.2). In einem sogenannten *Tokamak*, dem gebräuchlichsten Fusionsreaktortyp, der erstmals in der ehemaligen Sowjetunion entwickelt wurde, ist das Plasma in einem großen Torus eingeschlossen.



a) Schematische Darstellung des Fusionsreaktors TFTR (Tokamak Fusion Test Reactor) vom Typ Tokamak. Die Toroidalfeldspulen, die den torusförmigen Vakuumbehälter umgeben, werden so betrieben, dass sie jeweils für 3 s Strom führen, unterbrochen von Ruheintervallen von 5 s Dauer. Die Strompulse haben Spitzen von 73 000 A und erzeugen Magnetfelder von 5,2 T. Das Deuterium-Tritium-Plasma, das im Inneren des Vakuumbehälters zirkuliert, wird hauptsächlich von diesen Magnetfeldern eingeschlossen. Der Strom für die Pulse wird von zwei 600 t schweren Schwingrädern geliefert. Ein Satz von Poloidalfieldspulen, die senkrecht zu den Toroidalfeldspulen ausgerichtet und von Wechselstrom durchflossen sind, erzeugt einen Strom in dem Plasma und heizt es dadurch ohmsch auf. Zusätzliche Poloidalfelder tragen dazu bei, das eingeschlossene Plasma zu stabilisieren. Damit das Plasma die für eine Fusion nötige Temperatur erreicht, muss es zusätzlich zur ohmschen Heizung durch die Injektion von hochenergetischen Deuteriumatomen in das Deuterium-Tritium-Plasma geheizt werden. Dazu werden vier bis sechs Neutralteilchen-Injektionssysteme verwendet, von denen hier nur zwei gezeigt sind. b) Ansicht des TFTR-Reaktors. Der Vakuumbehälter hat einen Durchmesser von 7,7 m. c) Ein 800-kA-Plasma, das sich im Vakuumbehälter des TFTR entlädt. Die Entladung konnte 1,6 s aufrechterhalten werden. (Mit freundlicher Genehmigung des Princeton Plasma Physics Laboratory.)

Das Magnetfeld ist dabei eine Überlagerung aus einem torusförmigen äußeren Feld, das den Krümmungen des Torus folgt, und einem Feld, das durch den Plasmastrom im Inneren des Torus selbst erzeugt wird. Mit dieser Methode konnte schon beinahe eine ausgeglichene Energiebilanz realisiert werden. Bis zum Bau eines rentablen Fusionsreaktors ist es jedoch noch ein weiter Weg.

Bei der zweiten Methode, dem sogenannten **Trägheits-einschluss**, wird ein Pellet aus festem Deuterium und Tritium von allen Seiten mit starken, gepulsten Laserstrahlen beschossen. Die Energie eines solchen Laserpulses beträgt etwa 10^4 J für eine Dauer von 10^{-8} s. (Gelegentlich werden auch starke Ionenstrahlen benutzt.) Computersimulationen zeigen, dass das Pellet, wenn es auf etwa das 10^4 fache seiner normalen Dichte



a) Die Nova-Target-Kammer, eine Aluminiumkugel mit einem Durchmesser von etwa 5 m, in der zehn hochenergetische Strahlen dieses zurzeit größten Lasers der Welt ein wasserstoffhaltiges Pellet von 0,5 mm Durchmesser bestrahlen. b) Die Fusionsreaktion ist als kleiner, leuchtender Stern sichtbar. Sie dauert 10^{-10} s, in deren Verlauf 10^{13} Neutronen freigesetzt werden. (Mit freundlicher Genehmigung des Lawrence Livermore National Laboratory und des U. S. Department of Energy, unter dessen Aufsicht die Arbeit durchgeführt wurde.)

komprimiert und auf über 10^8 K erhitzt wird, eine Fusionsenergie von 10^6 J in 10^{-11} s liefern sollte. Dieser Zeitraum ist so kurz, dass der Einschluss allein durch die Trägheit bewerkstelligt wird.

38.5 Dosimetrie

Ein weiteres wichtiges Thema sind die Auswirkungen ionisierender Strahlung auf Materie und Lebewesen, insbesondere auf den menschlichen Körper. Je nach Art der Strahlung und ihrer Energie, Abstand zur Strahlungsquelle, Dauer der Strahlungsexposition und der Beschaffenheit und Masse des bestrahlten Objekts treten unterschiedliche Effekte auf. Gemeinsam ist jedoch allen, dass die ionisierenden Teilchen im bestrahlten Material durch Zusammenstöße mit dessen Atomen Energie auf das Material übertragen. Als Folge davon erhöht sich die Temperatur des Materials. Auf mikroskopischer Ebene kann die Energieerhöhung im Material zur Verschiebung von Atomen, dem Herausschlagen von Elektronen aus Atomen und zum Aufbrechen chemischer Bindungen führen. In Festkörpern treten bei der Verschiebung von Atomen sogenannte **Versetzungsschäden** auf, die zu einer veränderten Festigkeit des Materials führen. Bei Lebewesen kommt es zu Mutationen der DNS im Zellkern, die dadurch entstehen, dass die Strahlung die Doppelhelixstruktur der DNS verändert und zusammen mit den Wassermolekülen sogenannte **Radikale** bildet, die ihrerseits die Struktur der DNS angreifen können.

Während die Strahlentherapie diese Mechanismen gezielt ausnutzt, um z. B. Tumorzellen an ihrem Wachstum zu hindern oder sie in den Zelltod zu treiben, beschäftigt sich der Strahlenschutz mit der Thematik, sich optimal vor Strahlungsquellen abzuschirmen, um solche Schäden zu vermeiden.

Um die Auswirkungen ionisierender Strahlung quantifizieren, wurden die folgenden Definitionen der **Strahlendosis** eingeführt. Die **Ionendosis** D_{ion} ist die Zahl an Ladungsträgern gleichen Vorzeichens dq , die beim Durchgang von ionisierender Strahlung im bestrahlten Material entstehen, geteilt durch die Masse dm des betrachteten Objekts. Mit der Beziehung zwischen Dichte ρ , Volumen V und Masse m erhält man so

$$D_{\text{ion}} = \frac{dq}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{dq}{dV}. \quad (38.23)$$

IONENDOSIS

Die SI-Einheit der Ionendosis ist gegeben durch

$$[D_{\text{ion}}] = 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}} \approx 3,876 \cdot 10^3 \text{ R}, \quad (38.24)$$

wobei man früher auch das Röntgen R als Maßeinheit für die Ionendosis benutzte. Die Ionendosis spielt beim Bau von Messgeräten eine große Rolle, die auf dem Prinzip beruhen, die Anzahl der sekundären Ionen, d. h. der im bestrahlten Material erzeugten Ionen, durch ein elektrisches Feld auf einen Detektor zu leiten und dort zu zählen. Physikalisch ist jedoch die

Tabelle 38.2 Gewichtungsfaktor ω_{eq}

Strahlungsart	ω_{eq}
Photonen	1
Elektronen und Myonen	1
Protonen	1
α -Teilchen, Spaltfragmente und Schwerionen	20
Neutronen	energieabhängig

Energiedosis D_E interessant. Sie gibt an, wie viel Energie dE während der gesamten Strahlenexposition durch die ionisierende Strahlung im bestrahlten Material der Masse dm deponiert wurde

$$D_E = \frac{dE}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dV}. \quad (38.25)$$

ENERGIEDOSIS

Ihre SI-Einheit ist das **Gray (Gy)**

$$[D_E] = 1 \text{ Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}}. \quad (38.26)$$

Die Energiedosis wird nicht direkt gemessen, sondern über die Ionendosis bestimmt durch den proportionalen Zusammenhang

$$D_E = k \cdot D_{\text{ion}}, \quad (38.27)$$

wobei k den materialspezifischen Korrekturfaktor beschreibt, der angibt, wie gut das betrachtete Material die Energie ionisierender Strahlung aufnimmt. Für Wasser ist $k = 35 \text{ Gy/C/kg}$, für biologisches Gewebe gilt $k = 37 \text{ Gy/C/kg}$.

Um nun die Energiedosen verschiedener Strahlungsarten miteinander vergleichen zu können, wurde die **Äquivalentdosis** D_{eq} eingeführt. Sie ist definiert als

$$D_{\text{eq}} = \omega_{\text{eq}} \cdot D_E, \quad (38.28)$$

ÄQUIVALENTDOSIS

wobei ω_{eq} ein Gewichtungsfaktor ist, der der relativen biologischen Wirksamkeit der jeweiligen Strahlung Rechnung trägt und für einige Teilchen in Tabelle 38.2 aufgelistet ist. Damit man die Energiedosis und die Äquivalentdosis deutlich unterscheiden kann, wurde als Maßeinheit für die Äquivalentdosis das **Sievert (Sv)** eingeführt, dabei entspricht ein Sievert in SI-Einheiten einem Joule pro Kilogramm.

Übung 38.3: Berechnen Sie das Verhältnis der Äquivalentdosen eines Strahls aus α -Teilchen mit $\omega_{\text{eq}}(\alpha) = 20$ und eines Strahls aus β -Teilchen mit $\omega_{\text{eq}}(\beta) = 1$, wenn beide Strahlen eine Energiedosis von $D_E = 10 \text{ MeV/kg}$ im bestrahlten Material deponieren. ◀

In der Strahlentherapie wird oft die **effektive Dosis** D_{eff} bestimmt, wenn verschiedene Organe eine unterschiedliche Energiedosis erhalten. Sie berücksichtigt neben der Strahlungsart

Tabelle 38.3 Gewichtungsfaktor ω_{gew}

Gewebeart	ω_{gew}
Blase	0,04
Brust	0,12
Dickdarm	0,12
Gehirn	0,01
Haut	0,01
Keimdrüsen	0,08
Knochenmark (rot)	0,12
Knochenoberfläche	0,01
Leber	0,04
Lunge	0,12
Magen	0,12
Schilddrüse	0,04
Speicheldrüsen	0,01
Speiseröhre	0,04
Übrige Organe und Gewebe	0,12

auch die Empfindlichkeit verschiedener Gewebearten in den Organen auf die ionisierende Strahlung. Um die effektive Dosis für den gesamten Körper zu berechnen, summiert man über die **Organdosen** D_{org} multipliziert mit den Gewichtungsfaktoren ω_{gew} , die die Empfindlichkeit des Gewebes des jeweiligen Organs repräsentieren

$$D_{\text{eff}} = \sum \omega_{\text{gew}} \cdot D_{\text{org}} = \sum \omega_{\text{gew}} \cdot \omega_{\text{eq}} \cdot D_E. \quad (38.29)$$

EFFEKTIVE DOSIS

Die Organdosis D_{org} entspricht dabei der Äquivalentdosis des Organs, d. h. der in dem Organ deponierten Energiedosis multipliziert mit dem Gewichtungsfaktor ω_{eq} für die jeweilige Strahlungsart. Tabelle 38.3 fasst Gewichtungsfaktoren ω_{gew} der wichtigsten Gewebearten zusammen.

Laut der europäischen Richtlinie 96/29/EURATOM zum Strahlenschutz ist festgelegt, dass ein Mensch im Jahr höchstens 1 mSv effektiver Dosis ausgesetzt sein sollte. Volljährige Personen, die in Bereichen mit Strahlenexposition arbeiten, dürfen maximal 20 mSv an effektiver Dosis pro Jahr ausgesetzt sein. Beispiel 38.9 veranschaulicht diese Grenzwerte anhand eines Langstreckenflugs.

Beispiel 38.9: Strahlenbelastung bei einem Langstreckenflug

- a) Wie hoch ist die Äquivalentdosis bei einem Langstreckenflug von 12 Stunden, bei dem Sie pro Stunde einer Äquivalentdosis von $5 \mu\text{Sv}$ ausgesetzt sind? b) Wie viele Stunden darf ein Steward pro Jahr fliegen, um die Strahlenschutzzgrenze von 1 mSv nicht zu überschreiten?

Problembeschreibung: Die Äquivalenzdosis für Teilaufgabe a ergibt sich aus dem Produkt aus der Dosisleistung P_{eq} von $5 \mu\text{Sv}/\text{h}$ und der Zeitspanne. Mit der gleichen Formel erhält man durch Umformen in Teilaufgabe b die Zeitspanne aus dem Verhältnis von Äquivalentdosis und Dosisleistung.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Stellen Sie die Formel für die Äquivalentdosis auf:

$$D_{\text{eq}} = P_{\text{eq}} \cdot \Delta t$$

2. Setzen Sie die Zahlen ein und berechnen Sie die Lösung:

$$D_{\text{eq}} = 5 \frac{\mu\text{Sv}}{\text{h}} \cdot 12 \text{ h} = \boxed{60 \mu\text{Sv}}$$

Teilaufgabe b

1. Stellen Sie die Formel aus Schritt 1 von Teilaufgabe a nach Δt um:

$$\Delta t = \frac{D_{\text{eq}}}{P_{\text{eq}}}$$

2. Setzen Sie die Zahlen ein und berechnen Sie die Lösung:

$$\Delta t = \frac{D_{\text{eq}}}{P_{\text{eq}}} = \frac{1 \text{ mSv}}{5 \mu\text{Sv}/\text{h}} = \frac{1000 \mu\text{Sv}}{5 \mu\text{Sv}} \cdot 1 \text{ h} = \boxed{200 \text{ h}}$$

Weitergedacht: Nach ungefähr 17 Flügen hat der Steward bereits die Grenze an maximaler Strahlenbelastung erreicht. Daher gehört das Flugpersonal zur Gruppe der Personen mit erhöhter beruflicher Strahlenexposition. ■

🔍 Im Kontext: Energie aus der Fusion schwerer Wasserstoffkerne – das Großexperiment Wendelstein 7-X

Es ist schon seit Jahrzehnten ein Menschheitstraum, die Bindungsenergie der Atomkerne nutzbar zu machen. Die Spaltung von U²³⁸ ist ein Weg, der physikalisch und technologisch gut verstanden ist, sich allerdings mit Akzeptanzproblemen und Herausforderungen bezüglich der Endlagerung radioaktiver Spaltprodukte auseinandersetzen muss. Ein anderer Weg ist die Fusion leichter Kerne, bei der ein Massendefekt auftritt, der dem Zuwachs an kinetischer Energie der Fusionsprodukte entspricht (in Klammern angegeben):



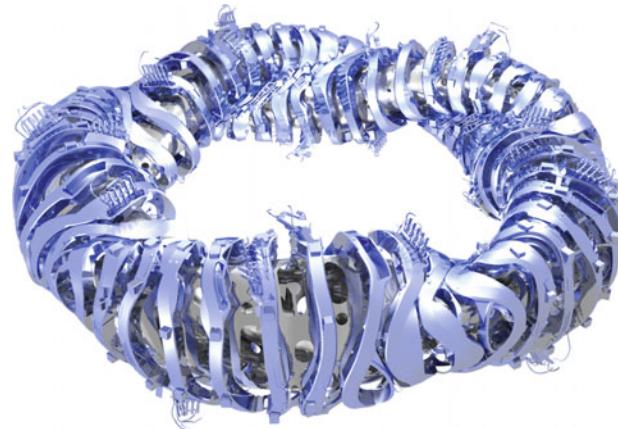
Das natürliche Vorbild für diese Kernreaktion ist die Sonne. Hier ist die Fusion von Protonen zu Helium der wesentliche Kernprozess, der letztlich zur Abstrahlung von Photonen und damit zu Energietransfer führt. Fusion kann damit als die Primärenergiequelle des Weltalls angesehen werden. Auf der Erde ist dieser Vorgang jedoch nicht einfach nachzuholen: Im Sonneninneren, wo die Fusionsprozesse ablaufen, herrscht ein kinetischer Druck von etwa $2 \cdot 10^{16}$ Pa bei einer Temperatur von $15 \cdot 10^6$ K. Unter diesen Bedingungen befindet sich das Gas im sogenannten Plasmazustand. Der kinetische Druck wird durch den Gravitationsdruck balanciert, was in der Gesamtmasse von $1,989 \cdot 10^{30}$ kg (entspricht etwa 333 000 Erdmassen) resultiert. Viel günstigere Bedingungen findet man, wenn man – wie oben angegeben – die Kerne der Wasserstoffisotope Deuterium (D) und Tritium (T) fusioniert und den kinetischen Druck $p_{\text{kin}} = n k_B T$ durch den magnetischen Druck $p_{\text{mag}} = B^2 / 2\mu_0$ balanciert.

Im Rahmen einer mühevollen, jahrzehntelangen Suche haben sich Magnetfelder in Torusform als am besten dafür geeignet erwiesen. Zwei Grundkonzepte haben sich weitgehend durchgesetzt: der Tokamak und der Stellarator. Beide wurden Anfang der 1950er Jahre vorgeschlagen. Der Tokamak basiert auf der Idee, ein rein torusförmiges Magnetfeld, das durch einen Satz planarer Spulen erzeugt wird, mit dem Magnetfeld eines Stroms zu überlagern, der entlang des Torus im Plasma fließt. So erhält das Magnetfeld die notwendige Verdrillung, die zum Aufbau des magnetischen Drucks notwendig ist. Der Stellarator hingegen erreicht die Verdrillung des Magnetfelds durch die Formgebung der Spulen.

Hier kommt das Experiment Wendelstein 7-X ins Spiel: Während der Tokamak mit seinen relativ einfachen, planar geformten Spulen in den 1970er und 1980er Jahren gewaltige Erfolge feiern konnte, hinkte der Stellarator in den Kenndaten Temperatur, Plasmadichte und Wärmeisolierung hinterher. Erst die Verfügbarkeit von Supercomputern erlaubte die Bestimmung der „richtigen“ Magnetfeldgeometrie. Die umfangreichen Computercodes lösen dabei die Grundgleichungen des magnetisierten, torusförmigen Plasmas und suchen dabei systematisch nach einer Geometrie, die einen ganzen Satz von Gütekriterien gleichzeitig erfüllt. Das Ergebnis ist eine auf Anhieb willkürlich anmutende Spulenform, die in der Abbildung gezeigt ist.

Das Großexperiment Wendelstein 7-X (Durchmesser 16 m, Gewicht 700 t, Plasmavolumen 30 m³) befindet sich am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Greifswald im Bau und wird im Jahr 2014 technisch in Betrieb gesetzt. Die hohen Anforderungen an Flexibilität, Zugänglichkeit für wissenschaftliche Instrumente und Dauerbetriebsfähigkeit machen die Maschine äußerst komplex, und der Aufbau dauerte über 15 Jahre – eine halbe Forschergeneration! Wendelstein 7-X ist als Experiment zu klein, um als Kraftwerk arbeiten zu können, aber es soll damit bewiesen werden, dass die berechnete Magnetfeldgeometrie zu einem künftigen Kraftwerk führt. Dazu müssen allerdings noch einige Hürden

bewältigt werden: Die notwendigen Plasmaparameter, um in einem D-T-Gemisch hinreichend hohe Fusionsraten zu erzielen, müssen erreicht werden, und das stabil und dauerhaft. Verunreinigungen mit Atomen hoher Kernladungszahl, die zu Abstrahlung im weichen Röntgenbereich und damit zu Verlusten der kinetischen Plasmaenergie führen, gilt es zu vermeiden. Nicht zuletzt müssen Materialien weiter entwickelt werden, um dauerhaft und zuverlässig mit den belastenden Bedingungen – vor allem Wärme- und Neutronenflüssen – umgehen zu können. Insgesamt handelt es sich bei der Plasmaphysik und Fusionsforschung um ein herausforderndes Forschungsgebiet mit ausgeprägt interdisziplinärem Charakter. Am Max-Planck-Institut in Greifswald werden ab 2015 etwa 500 Personen am Betrieb und an der wissenschaftlichen Nutzung des Wendelstein 7-X arbeiten.



© Max-Planck-Institut für Plasmaphysik



Prof. Dr. Thomas Klinger, geboren 1965 in Eutin, studierte an der Universität Kiel Physik und promovierte 1994 mit einer Arbeit zur nichtlinearen Plasmodynamik. 1999 wurde er zum Professor für Experimentelle Physik an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität zu Greifswald ernannt. Im April 2001 wurde er zum wissenschaftlichen Mitglied der Max-Planck-Gesellschaft und zum Direktor am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik berufen. Seit 2005 ist er Mitglied des Direktoriums und wissenschaftlicher Leiter der Unternehmung Wendelstein 7-X.

1. <http://www.ipp.mpg.de> (Stand: Juli 2013).

2. Bräuer, T., Klinger, T., Bosch, H. S., „Progress, Challenges, and Lessons Learned in the Construction of Wendelstein 7-X“, IEEE Transactions on Plasma Science Vol. 40 No. 3, 2012, 577–583.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Eigenschaften der Kerne	<p>Kerne bestehen aus N Neutronen und Z Protonen, die Summe $A = N + Z$ heißt Massenzahl des Kerns. Für leichte Kerne sind N und Z etwa gleich groß, für schwere Kerne dagegen ist N größer als Z.</p> <p>Isotope</p> <p>Als Isotope bezeichnet man zwei oder mehr Kerne, die die gleiche Kernladungszahl Z, aber unterschiedliche Neutronenzahl N und Atommasse A haben.</p> <p>Größe und Form</p> <p>Die meisten Kerne sind annähernd kugelförmig und besitzen ein zu ihrer Massenzahl A proportionales Volumen. Da auch die Masse der Kerne proportional zu A ist, ist die Nukleonendichte unabhängig von A.</p>
Radius	$r_K = r_0 A^{1/3} \approx (1,2 \text{ fm}) A^{1/3}$ (38.1)
Massen und Bindungsenergie	Die Masse eines stabilen Kerns ist geringer als die Summe der Massen seiner Bestandteile, der Nukleonen. Die Massendifferenz Δm multipliziert mit c^2 entspricht der Bindungsenergie E_b des Kerns. Die Bindungsenergie ist näherungsweise proportional zur Massenzahl A .
2. Radioaktivität	<p>Instabile Kerne sind radioaktiv und zerfallen unter Emission von α-Teilchen (${}^4\text{He}$-Kerne), β-Teilchen (Elektronen oder Positronen) oder γ-Strahlung (Photonen). Radioaktive Zerfälle sind ihrer Natur nach statistische Prozesse und folgen einem exponentiellen Zerfallsgesetz:</p> $n = n_0 e^{-\lambda t}.$ (38.6)
Zerfallsrate	$R = \lambda n = R_0 e^{-\lambda t}$ (38.7)
Mittlere Lebensdauer	$\tau = \frac{1}{\lambda}$ (38.9)
Halbwertszeit	$t_{1/2} = (\ln 2) \tau = 0,693 \tau$ (38.11)
Einheiten der Zerfallsrate	<p>Die Halbwertszeiten für α-Zerfälle variieren von Bruchteilen einer Sekunde bis zu Millionen von Jahren. Für β-Zerfälle reichen sie bis zu Stunden oder Tagen. Die Halbwertszeiten für γ-Zerfälle liegen meist unter einer Mikrosekunde.</p> <p>Das Curie (Ci) ist definiert als die Anzahl der in einer Sekunde in 1 g Radium vorkommenden Zerfälle:</p> $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Zerfälle/s} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$ <p>Das Bequerel ist die Einheit der Zerfallsrate: $1 \text{ Bq} = 1 \text{ Zerfall/s}$.</p>
3. Kernreaktionen	<p>Der Q-Wert ergibt sich, wenn man die Massendifferenz der in die Reaktion eingehenden und aus der Reaktion hervorgehenden Teilchen bildet und diese mit c^2 multipliziert. Bezeichnet Δm die Massenänderung, so ist der Q-Wert gegeben als</p> $Q = -(\Delta m) c^2.$ (38.19)
Exotherme Reaktion	Die Gesamtmasse verringert sich, Q ist positiv und ein Maß für die freigesetzte Energie.
Endotherme Reaktion	Die Gesamtmasse vergrößert sich, Q ist negativ. $ Q $ ist die Schwellenenergie für das Zustandekommen der Reaktion im Schwerpunktssystem.
4. Kernspaltung	Kernspaltung tritt auf, wenn schwere Kerne, wie ${}^{235}\text{U}$ oder ${}^{239}\text{Pu}$, ein Neutron einfangen und anschließend in zwei Kerne zerfallen, die aufgrund ihrer elektrostatischen Abstoßung auseinanderfliegen. Da bei der Kernspaltung außerdem ein oder mehrere Neutronen emittiert werden, ist eine Kettenreaktion möglich. Die Kettenreaktion kann in einem Reaktor aufrechterhalten werden, wenn im Mittel eines der emittierten Neutronen durch Streuprozesse abgebremst und von einem weiteren spaltbaren Kern eingefangen werden kann. Sehr schwere Kerne (mit Kernladungszahl $Z > 92$) unterliegen der spontanen Kernspaltung ohne äußere Einwirkung.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
5. Kernfusion	Bei der Fusion zweier leichten Kerne, wie ${}^2\text{H}$ und ${}^3\text{H}$, wird eine große Menge an Energie frei. Spontane Kernfusion findet im Inneren der Sonne und anderer Sterne statt, wo die Temperatur groß genug ist ($\approx 10^8 \text{ K}$), um die Wasserstoffionen durch thermische Bewegung nahe genug aneinanderzubringen, dass eine Fusion stattfinden kann. Eine Nutzung von Fusionsprozessen zur Energieerzeugung in Kraftwerken scheint zwar durchaus aussichtsreich, ist aber wegen der dabei auftretenden technischen Schwierigkeiten noch nicht in greifbare Nähe gerückt.
Lawson-Kriterium	Damit in einem Fusionsreaktor mehr Energie erzeugt wird, als hineingesteckt wurde, muss das Produkt aus der Teilchenzahldichte n/V und der Einschlusszeit τ der folgenden Bedingung genügen: $(n/V) \tau > 10^{20} \text{ s} \cdot \text{Teilchen}/\text{m}^3.$
6. Dosimetrie	Dosimetrie beschäftigt sich mit der Quantisierung der Auswirkungen ionisierender Strahlung auf Materie und Lebewesen.
Ionendosis	Die Ionendosis D_{ion} misst die Zahl an Ladungsträgern gleichen Vorzeichens dq , die beim Durchgang von ionisierender Strahlung in einem Material der Masse dm mit Dichte ρ entsteht:
	$D_{\text{ion}} = \frac{dq}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{dq}{dV}. \quad (38.23)$
	Die Einheit der Energiedosis ist C/kg .
Energiedosis	Die Energiedosis D_E misst die in einem Material der Masse dm deponierte Energie dE :
	$D_E = \frac{dE}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dV}. \quad (38.25)$
	Die Einheit der Energiedosis ist das Gray (Gy): $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$.
Äquivalentdosis	Die Äquivalentdosis erlaubt den Vergleich verschiedener Energiedosen durch Berücksichtigung der Art der ionisierenden Strahlung durch einen Gewichtungsfaktor ω_{eq} :
	$D_{\text{eq}} = \omega_{\text{eq}} \cdot D_E. \quad (38.28)$
	Ihre Einheit ist das Sievert (Sv): $1 \text{ Sv} = 1 \text{ J/kg}$.
Effektive Dosis	Die effektive Dosis berücksichtigt die Affinität des Materials zur Energieaufnahme durch ionisierende Strahlung und erlaubt so die Berechnung einer Gesamtdosis, wenn verschiedene Organe unterschiedlich starker Strahlung ausgesetzt sind:
	$D_{\text{eff}} = \sum \omega_{\text{gew}} \cdot \omega_{\text{eq}} \cdot D_E. \quad (38.29)$

Antwort auf die Verständnisfrage

1. Die Zahl der noch vorhandenen Atome kann 0 oder 1 sein, wobei 0 wahrscheinlicher ist als 1.

Lösungen der Übungen

1. a) $60 E_1$, b) $20 E_1$
2. Da $\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$, also $n = 3$ ist.
3.
$$\frac{D_{\text{eq}}(\alpha)}{D_{\text{eq}}(\beta)} = \frac{\omega_{\text{eq}}(\alpha) D_E}{\omega_{\text{eq}}(\beta) D_E} = \frac{20}{1} = 20.$$

Aufgaben

Verständnisaufgaben

38.1 • Stickstoff, Eisen und Zinn haben die stabilen Isotope ^{14}N , ^{56}Fe bzw. ^{118}Sn . Geben Sie je zwei weitere Isotope zu a) Stickstoff, b) Eisen und c) Zinn an.

38.2 • Einem α -Zerfall folgt oft ein β -Zerfall. Dabei handelt es sich dann stets um einen β^- - und nicht um einen β^+ -Zerfall. Warum ist das so?

38.3 • Wie würde sich eine lang anhaltende Variation der kosmischen Strahlungsaktivität auf die Genauigkeit der C-14-Methode zur Altersbestimmung auswirken?

38.4 • Erklären Sie, warum Wasser wirksamer als Blei ist, um schnelle Neutronen abzubremsen.

38.5 • Das einzige stabile Isotop des Natriums ist das ^{23}Na . Welche Art von β -Zerfall würden Sie für a) ^{22}Na und b) ^{24}Na erwarten?

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

38.6 •• Der Energiebehörde der USA zufolge liegt der Energiebedarf der amerikanischen Bevölkerung bei etwa 10^{20} J pro Jahr. Schätzen Sie ab, a) wie viel Uran (in kg) nötig ist, um diese Energiemenge durch Kernspaltung zu erzeugen, b) wie viel Deuterium und Tritium (in kg) nötig wären, um diese Energiemenge durch Kernfusion zu erzeugen.

Eigenschaften der Kerne

38.7 • Berechnen Sie die Bindungsenergie und die Bindungsenergie pro Nukleon für a) ^{12}C , b) ^{56}Fe und c) ^{238}U . Benutzen Sie dazu die in Tabelle 38.1 angegebenen Massen.

38.8 • Berechnen Sie mithilfe der Formel $r_K = r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1,2 \text{ fm}$ (Gleichung 38.1) die Radien der folgenden Kerne: a) ^{16}O , b) ^{56}Fe und c) ^{197}Au .

38.9 •• Wird ein Neutron von einem Atomkern getrennt, so zerfällt es gemäß der folgenden Reaktionsgleichung in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino: $\text{n} \rightarrow ^1\text{H} + e^- + \bar{\nu}$. Die thermische Energie eines Neutrons ist von der Größenordnung $k_B T$, wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. a) Berechnen Sie die Energie eines thermischen Neutrons bei 25°C in J und eV. b) Welche Geschwindigkeit hat das thermische Neutron? c) Ein Strahl monoenergetischer thermischer Neutronen werde bei einer Temperatur von 25°C erzeugt und habe eine Intensität I . Nachdem er eine Strecke von 1350 km zurückgelegt hat, ist die Intensität des Strahls auf $I/2$ gesunken. Schätzen Sie die Halbwertszeit der Neutronen ab und geben Sie das Ergebnis in Minuten an.

38.10 •• Im Jahre 1920, zwölf Jahre vor der Entdeckung des Neutrons, schlug Rutherford die Existenz von Elektron-Proton-Paaren im Kernbereich als Erklärung dafür vor, dass die Massenzahl A größer als die Kernladungszahl Z sein kann. Weiterhin, so argumentierte er, könnten diese Elektron-Proton-Paare die Quelle für die beim radioaktiven Zerfall auftretenden β -Teilchen sein. Die Streuexperimente, die Rutherford 1910 durchführte, ergaben, dass der Kern einen Durchmesser von etwa 10 fm hat. Verwenden Sie diesen Kerndurchmesser, die Unschärferelation und die Tatsache, dass β -Teilchen eine Energie zwischen $0,02 \text{ MeV}$ und $3,40 \text{ MeV}$ haben, um zu zeigen, dass die hypothetischen Elektronen nicht auf einen Bereich von der Größe des Kerns beschränkt sein können.

Radioaktivität

38.11 • An einer radioaktiven Quelle wird zur Zeit $t = 0$ eine Zählrate von $8000 \text{ Zählimpulsen/s}$ gemessen, 10 min später sind es 1000 Impulse/s . a) Wie groß ist die Halbwertszeit? b) Wie groß ist die Zerfallskonstante? c) Welche Zählrate misst man nach 20 min ?

38.12 • Verwenden Sie Tabelle 38.1, um die Energie in MeV zu berechnen, die beim α -Zerfall von a) ^{226}Ra bzw. b) ^{242}Pu freigesetzt wird.

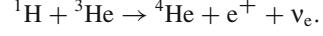
38.13 • Eine Probe eines in einer archäologischen Forschungsstätte ausgegrabenen Knochens enthalte 175 g Kohlenstoff. Die ^{14}C -Zerfallsrate betrage $8,1 \text{ Bq}$. Wie alt ist der Knochen?

38.14 •• Plutonium ist ein hochgiftiges und für den Menschen lebensgefährliches Material. Einmal in den Körper gelangt, sammelt es sich hauptsächlich in den Knochen, obwohl es auch in anderen Organen zu finden ist. Im Knochenmark werden die roten Blutkörperchen gebildet. Das ^{239}Pu -Isotop ist ein α -Strahler mit einer Halbwertszeit von $24\,360$ Jahren. Da es sich bei α -Teilchen um eine ionisierende Strahlung handelt, wird die blutbildende Eigenschaft des Knochenmarks durch das ^{239}Pu mit der Zeit immer mehr zerstört. Darüber hinaus löst die ionisierende Wirkung der α -Teilchen in dem Gewebe, das die ^{239}Pu -Isotope umgibt, verschiedene krebsartige Veränderungen aus. a) Wenn eine Person aus Versehen $2,0 \mu\text{g}$ ^{239}Pu zu sich genommen und dieses sich vollständig in den Knochen gesammelt hat, wie viele α -Teilchen werden dann pro Sekunde im Skelett des Opfers erzeugt? b) Nach wie vielen Jahren wird eine Aktivität von $1000 \text{ } \alpha$ -Teilchen pro Sekunde erreicht?

38.15 •• Das Rubidiumisotop ^{87}Rb ist ein β^- -Strahler mit einer Halbwertszeit von $4,9 \cdot 10^{10}$ Jahren und zerfällt zu ^{87}Sr . Dieser Zerfallsprozess wird zur Bestimmung des Alters von Steinen und Fossilien genutzt. Berechnen Sie das Alter von Fossilien in Steinen, die ein Verhältnis von ^{87}Sr zu ^{87}Rb von $0,0100$

aufweisen, unter der Annahme, dass die Steine bei ihrer Entstehung kein ^{87}Sr enthielten.

gefolgt von



Kernreaktionen

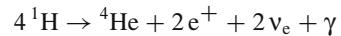
38.16 • Benutzen Sie Tabelle 38.1, um die Q -Werte für die folgenden Reaktionen zu berechnen: a) $^2\text{H} + ^2\text{H} \rightarrow ^3\text{H} + ^1\text{H} + Q$, b) $^2\text{H} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + ^1\text{H} + Q$ und c) $^6\text{Li} + \text{n} \rightarrow ^3\text{H} + ^4\text{He} + Q$.

38.17 •• a) Berechnen Sie aus den Atommassen $m = 14,003\,242$ u für ^{14}C und $m = 14,003\,074$ u für ^{14}N den Q -Wert (in MeV) für den folgenden β -Zerfall:



b) Erläutern Sie, warum in dieser Rechnung die Masse des Elektrons nicht zur Atommasse des ^{14}N addiert werden muss.

a) Zeigen Sie, dass der Nettoeffekt dieser Reaktionen



ist. b) Zeigen Sie, dass dabei eine Energie von 24,7 MeV freigesetzt wird. (Lassen Sie dabei mögliche Annihilationsprozesse der Positronen mit Elektronen, bei denen 1,02 MeV freigesetzt würden, außer Acht.) c) Die Sonne strahlt mit einer Leistung von etwa $4,0 \cdot 10^{26}$ W. Nehmen Sie an, die abgestrahlte Energie wird nur durch die in Teilaufgabe a dargestellte Nettoreaktion erzeugt. Bestimmen Sie die Rate des Protonenverbrauchs in der Sonne. Wie lange ist ein solcher Prozess prinzipiell möglich, wenn die abgestrahlte Leistung konstant bleibt und die Protonen etwa die Hälfte der Sonnenmasse von $2,0 \cdot 10^{30}$ kg ausmachen?

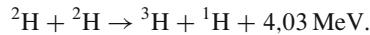
Kernspaltung und Kernfusion

38.18 • Angenommen, der Vermehrungsfaktor eines Kernreaktors beträgt 1,1. Nach wie vielen Generationen hat sich die Leistung des Reaktors a) auf das Doppelte, b) auf das Zehnfache und c) auf das Hundertfache erhöht? Berechnen Sie für alle drei Fälle die dazu benötigte Zeit, d) wenn keine verzögerten Neutronen vorhanden sind, sodass die Generationsdauer 1,0 ms beträgt, und e) wenn sich die Generationsdauer aufgrund verzögter Neutronen auf 100 ms erhöht.

38.19 •• Im Jahre 1989 stellten einige Wissenschaftler die heute allgemein bezweifelte Behauptung auf, eine Kernfusion bei Zimmertemperatur in einer elektrochemischen Zelle erreicht zu haben. Durch eine Deuteriumfusion an der Palladiumelektrode ihrer Apparatur wollten sie eine Leistungsabgabe von 4 W erzielt haben. Die beiden wahrscheinlichsten Reaktionen für eine solche Fusion sind



und



Nehmen Sie an, dass beide mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von 50 % ablaufen. Wie viele Neutronen müssten pro Sekunde emittiert werden, wenn die Leistungsabgabe 4,00 W betragen soll?

38.20 ••• In der Sonne und anderen Sternen wird Energie durch Kernfusion erzeugt. Einer der dabei auftretenden Fusionszyklen, der Proton-Proton-Zyklus, besteht aus den folgenden Reaktionen:



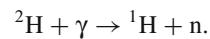
Allgemeine Aufgaben

38.21 • Welche Energie muss aufgewendet werden, um ein Neutron a) aus einem ^4He -Kern und b) aus einem ^7Li -Kern zu entfernen?

38.22 • Ein Neutronenstern hat in etwa die gleiche Dichte wie Kernmaterie. Wenn unsere Sonne zu einem Neutronenstern kollabieren würde, welchen Radius hätte das entstehende Objekt?

38.23 • Die relative Isotopenhäufigkeit von ^{40}K beträgt $1,2 \cdot 10^{-4}$. Das ^{40}K -Isotop ist radioaktiv, hat eine molare Masse von 40,0 g/mol und eine Halbwertszeit von $1,3 \cdot 10^9$ Jahren. Kalium ist ein wesentliches Element jeder lebenden Zelle. Im menschlichen Körper macht Kalium etwa 0,36 % der Gesamtmasse aus. Bestimmen Sie die von dieser radioaktiven Quelle ausgehende Aktivität in einem Studenten mit einer Masse von 60 kg.

38.24 •• Durch γ -Strahlen kann in Kernen Photospaltung hervorgerufen werden. Darunter versteht man eine Kernspaltung, die durch die Absorption eines Photons ausgelöst wird. Berechnen Sie die Grenzwellenlänge des Photons für das Zustandekommen der folgenden Kernreaktion:



Entnehmen Sie die Massen der beteiligten Teilchen Tabelle 38.1.

38.25 •• a) Bestimmen Sie den Abstand größtmöglicher Annäherung bei dem zentralen Stoß zwischen einem α -Teilchen mit einer Energie von 8 MeV und einem ruhenden ^{197}Au -Kern bzw. einem ruhenden ^{10}B -Kern. Vernachlässigen Sie dabei den Rückstoß der getroffenen Kerne. b) Wiederholen Sie die Rechnung unter Berücksichtigung des Rückstoßes der getroffenen Kerne.

38.26 •• In einem Beschleuniger werden mit einer konstanten Rate R_P Kerne eines radioaktiven Isotops mit einer Zerfallskonstante λ erzeugt. Dann erfüllt die Anzahl n der radioaktiven Kerne die Gleichung $dn/dt = R_P - \lambda n$. a) Skizzieren Sie den Verlauf von n in Abhängigkeit von t für den Fall, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt: $n = 0$. b) Das ^{62}Cu -Isotop wird mit einer Rate von 100 Kernen pro Sekunde erzeugt, wenn man gewöhnliches Kupfer (^{63}Cu) in einen Strahl von hochenergetischen Photonen bringt. Die entsprechende Reaktionsgleichung lautet:



Die ${}^{62}\text{Cu}$ -Kerne zerfallen unter β -Emission mit einer Halbwertszeit von 10 min. Nach einer hinreichend langen Zeitspanne gilt: $dn/dt \approx 0$. Wie viele ${}^{62}\text{Cu}$ -Kerne liegen dann vor?

38.27 ••• Der Tochterkern eines radioaktiven Ausgangskerns ist oft selbst wieder radioaktiv. Nehmen Sie an, das Ausgangsmaterial A habe die Zerfallskonstante λ_A , das Tochtermaterial B die Zerfallskonstante λ_B . Die Zahl der Kerne der Substanz B, n_B , ergibt sich dann als Lösung der Differenzialgleichung

$$dn_B/dt = \lambda_A n_A - \lambda_B n_B,$$

wobei n_A die Zahl der Kerne des Ausgangsmaterials bezeichnet. a) Erklären Sie, wie diese Differenzialgleichung zustande kommt. b) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differenzialgleichung

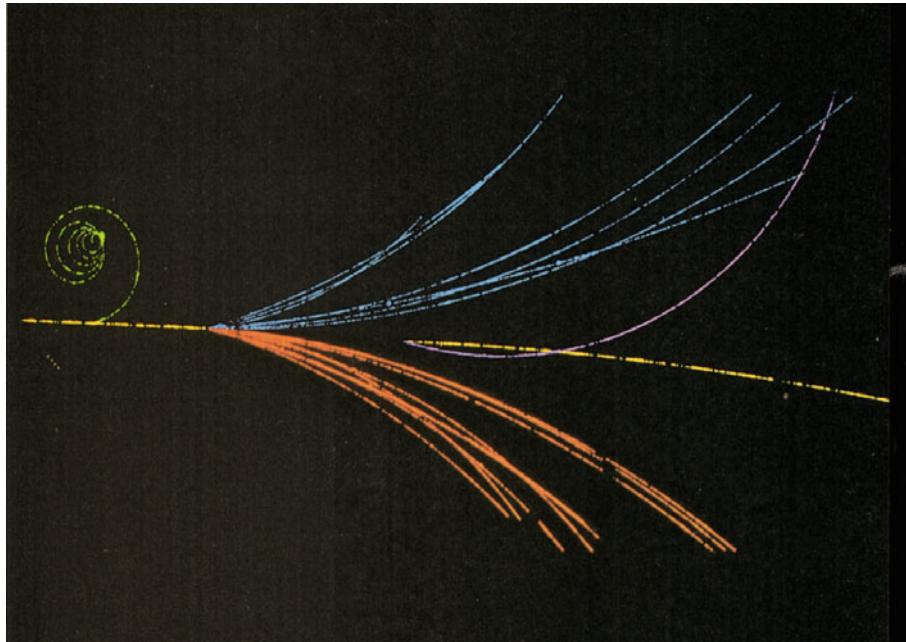
$$n_B(t) = \frac{n_{A,0} \lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t})$$

lautet, wobei $n_{A,0}$ die Zahl der Kerne der Sorte A zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet; die Zahl der Kerne von der Sorte B ist zu diesem Zeitpunkt null. c) Zeigen Sie, dass für $n_B(t)$ aus Teil-aufgabe b stets $n_B(t) > 0$ gilt, unabhängig davon, ob $\lambda_A > \lambda_B$ oder $\lambda_B > \lambda_A$ ist. d) Tragen Sie $n_A(t)$ und $n_B(t)$ für den Fall $\tau_B = 3 \tau_A$ als Funktion der Zeit auf.

38.28 ••• Ein Beispiel für die in Aufgabe 38.27 diskutierte Situation ist das radioaktive ^{229}Th -Isotop, ein α -Strahler mit einer Halbwertszeit von 7300 Jahren. Das Tochtermaterial, ^{225}Ra , ist ein β -Strahler und hat eine Halbwertszeit von 14,8 Tagen. In diesem wie auch in vielen anderen Fällen dieser Art ist die Halbwertszeit des Ausgangsmaterials wesentlich länger als die des Tochtermaterials. Verwenden Sie den Ausdruck aus Aufgabe 38.27, Teil b, und gehen Sie davon aus, dass ursprünglich reines ^{229}Th mit $n_{A,0}$ Kernen vorliegt. Zeigen Sie, dass die Zahl n_B der ^{225}Ra -Kerne nach einigen Jahren konstant ist und der folgenden Beziehung folgt:

$$n_B = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} n_A.$$

Dabei ist n_A die Zahl der ^{229}Th -Kerne. Man sagt in diesem Fall, die Zahl der Tochterkerne befindet sich im *Dauergleichgewicht*.



Teilchenspuren in einer Blasenkammeraufnahme, die bei einem Stoß zweier Protonen erzeugt wurden. (Blasenkammern sind mit einer Flüssigkeit gefüllt, die so nahe am Siedepunkt liegt, dass eintreffende geladene Teilchen Blasenspuren hinterlassen.) Ein einfallendes, hochenergetisches Proton (gelb) kollidierte mit einem ruhenden Proton. Die kleine grüne Spirale röhrt von einem Elektron her, das aus einem Atom herausgeschlagen wurde und durch das angelegte äußere Magnetfeld in der Kammer nach links abgelenkt wird. Aus dem Stoß gehen sieben negativ geladene π^- -Teilchen (blau) hervor, ferner ein neutrales Λ^0 -Teilchen, das keine Spur hinterlässt, und neun positiv geladene Teilchen (rot), und zwar sieben π^+ -Teilchen, ein K^+ -Teilchen und ein Proton. Das Λ^0 -Teilchen fliegt in die ursprüngliche Richtung des einfallenden Protons, bevor es in ein Proton (gelb) und ein π^- -Teilchen (violett) zerfällt. (© Lawrence Livermore Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers.)

39.1	*Hadronen und Leptonen	1350
39.2	*Spin und Antiteilchen	1351
39.3	*Erhaltungssätze	1355
39.4	*Quarks	1359
39.5	*Feldquanten	1361
39.6	*Die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung	1361
39.7	*Das Standardmodell	1362
39.8	*Moderne Teilchenbeschleuniger und Detektoren	1363
	Zusammenfassung	1374
	Aufgaben	1376



Welche Schlussfolgerungen lassen sich aus der Energiebilanz bei Teilchenwechselwirkungen ziehen? (Siehe Beispiel 39.1.)

Auf der Suche nach immer neuen elementaren Teilchen, die von verschiedenen Theorien vorhergesagt wurden, wurden in den 1950er Jahren enorme Summen für den Bau von Teilchenbeschleunigern mit immer höheren Energien aufgewendet. Gegenwärtig kennen wir mehrere Hundert Teilchen, von denen viele einmal als elementar angesehen wurden; Forschungsgruppen an den großen Beschleunigerzentren rund um die Welt suchen und finden ständig weitere, wie das 2012 entdeckte Higgs-Boson.

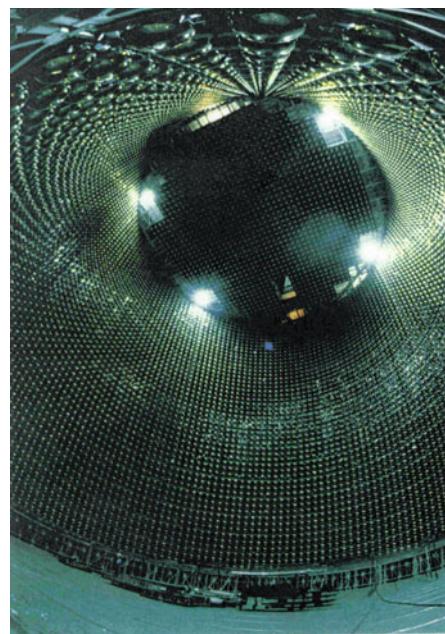
In diesem Kapitel betrachten wir zunächst die verschiedenen Möglichkeiten zur Klassifizierung der vielen Teilchen, die bisher entdeckt wurden. Anschließend skizzieren wir die aktuelle Theorie der Elementarteilchen, das sogenannte *Standardmodell*, nach dem die gesamte bekannte Materie – von den exotischen, in den Beschleunigern produzierten Teilchen bis zum gewöhnlichen Sandkorn – aus nur zwei Arten von Elementarteilchen aufgebaut ist: den Leptonen und den Quarks. Im letzten Abschnitt gehen wir näher auf die Teilchenbeschleuniger ein und zeigen, wie man diese Teilchen nachweisen kann.

39.1 *Hadronen und Leptonen

Alle in der Natur beobachteten Kräfte – von der gewöhnlichen Reibung bis hin zu den enormen Kräften, die bei Supernovaexplosionen auftreten – können auf vier fundamentale Wechselwirkungen zurückgeführt werden. In der Reihenfolge abnehmender Stärke sind dies: 1) die starke (oder hadronische) Wechselwirkung, 2) die elektromagnetische Wechselwirkung, 3) die schwache Wechselwirkung und 4) die Gravitation. Diese vier fundamentalen Wechselwirkungen stellen eine geeignete Grundlage zur Klassifizierung der Teilchen dar. Einige Teilchen unterliegen allen vier Wechselwirkungen, andere dagegen nur einigen von ihnen. So unterliegen beispielsweise alle Teilchen der Gravitation, der elektromagnetischen Wechselwirkung hingegen nur all diejenigen Teilchen, die elektrische Ladung tragen.

Teilchen, die stark wechselwirken, heißen **Hadronen**. Es gibt zwei Arten von Hadronen: die **Baryonen** mit halbzahligem Spin ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ usw.) und die **Mesonen** mit ganzzahligem Spin (0, 1, 2 usw.). Die Baryonen, zu denen auch die Nukleonen gehören, sind die schwersten Elementarteilchen. Die Mesonen sind mittelschwer, ihre Massen liegen typischerweise zwischen der Masse des Elektrons und der Masse des Protons. Teilchen, die über die starke Wechselwirkung zerfallen, haben sehr kurze Lebensdauern in der Größenordnung von 10^{-23} s. Das entspricht ungefähr der Zeit, die Licht benötigt, um eine Distanz von der Größe des Kerndurchmessers zu durchlaufen. Teilchen, die über die schwache Wechselwirkung zerfallen, haben dagegen viel längere Lebensdauern in der Größenordnung von 10^{-10} s. In Tabelle 39.1 sind einige Eigenschaften derjenigen Hadronen aufgeführt, die gegenüber Zerfällen aufgrund der starken Wechselwirkung stabil sind.

Hadronen sind Teilchen mit einer komplexen inneren Struktur. Wenn wir unter *Elementarteilchen* nur solche Teilchen verstehen wollen, die keine innere Struktur besitzen, also nicht aus anderen, elementarereren Teilchen aufgebaut sind, dann zählen die Hadronen nicht dazu. Man geht heute davon aus, dass alle Hadronen aus den eingangs bereits erwähnten *Quarks* aufgebaut sind, die ihrerseits – soweit wir wissen – wirklich Elementarteilchen sind.



Der 1996 in Japan errichtete Super-Kamiokande-Detektor ist ein japanisch-amerikanisches Gemeinschaftsexperiment. Wesentlicher Bestandteil des Detektors ist ein Wassertank, der die Größe einer Kathedrale hat und in 1000 m Tiefe in einem ehemaligen Bergwerk steht. Durchqueren Neutrinos den Tank, so trifft dann und wann eines der Neutrinos auf einen Atomkern; dabei entsteht ein charakteristischer, blauer Lichtblitz (Photonen), der sich durch das Wasser ausbreitet und auf ein Feld von Detektoren trifft. Die Abbildung zeigt die Wand und den Deckel des Detektors, die mit ungefähr 9000 Photomultipliern ausgestattet sind, mit denen die Photonen nachgewiesen werden. Die im Juni 1998 veröffentlichten, experimentellen Ergebnisse haben gezeigt, dass die Neutrinos nicht masselos sein können. (© Kamioka Observatory, ICRR (Institute for Cosmic Ray Research), The University of Tokyo.)

Teilchen, die der schwachen, nicht aber der starken Kernwechselwirkung unterliegen, heißen **Leptonen**. Zu den Leptonen gehören die Elektronen, die Myonen und die Neutrinos. Sie alle besitzen eine kleinere Masse als die leichtesten Hadronen – daher auch die Bezeichnung Lepton („leichtes Teilchen“). Das als vorläufig letztes Lepton im Jahre 1975 von Martin Lewis Perl entdeckte *Tauon* hat allerdings eine Masse von $1784 \text{ MeV}/c^2$. Es ist also annähernd doppelt so schwer wie das Proton mit einer Masse von $938 \text{ MeV}/c^2$, sodass wir von einem „schweren Lepton“ sprechen müssen. Soweit wir wissen, sind Leptonen strukturlose Punktteilchen und können als wirklich elementar aufgefasst werden in dem Sinne, dass sie nicht aus anderen Teilchen zusammengesetzt sind.

Es gibt sechs Leptonen: das Elektron und das Elektron-Neutrino, das Myon und das Myon-Neutrino sowie das Tauon und das Tauon-Neutrino. (Zu jedem dieser Leptonen gibt es ein Antiteilchen.) Die Massen dieser Teilchen sind recht unterschiedlich. Die Masse des Elektrons beträgt $0,511 \text{ MeV}/c^2$, die des Myons $106 \text{ MeV}/c^2$ und die des Tauons $1784 \text{ MeV}/c^2$.

Tabelle 39.1 Hadronen, die gegenüber einem Zerfall aufgrund der starken Wechselwirkung stabil sind.

Name	Symbol	Masse, (MeV/c ²)	Spin, \hbar	Ladung, e	Antiteilchen	Mittlere Lebensdauer, s	Typische Zerfallsprodukte*
Baryonen							
Nukleon	p (Proton)	938,3	1/2	+1	p ⁻	∞	
	n (Neutron)	939,6	1/2	0	ñ	930	p + e ⁻ + $\bar{\nu}_e$
Lambda	Λ^0	1116	1/2	0	$\bar{\Lambda}^0$	$2,5 \cdot 10^{-10}$	p + π^-
Sigma**	Σ^+	1189	1/2	+1	Σ^-	$0,8 \cdot 10^{-10}$	n + π^+
	Σ^0	1193	1/2	0	$\bar{\Sigma}^0$	10^{-20}	$\Lambda^0 + \gamma$
	Σ^-	1197	1/2	-1	Σ^+	$1,7 \cdot 10^{-10}$	n + π^-
Xi	Ξ^0	1315	1/2	0	$\bar{\Xi}^0$	$3,0 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^0$
	Ξ^-	1321	1/2	-1	Ξ^+	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^-$
Omega	Ω^-	1672	3/2	-1	Ω^+	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0 + \pi^-$
Mesonen							
Pion	π^+	139,6	0	+1	π^-	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
	π^0	135	0	0	π^0	$0,8 \cdot 10^{-16}$	$\gamma + \gamma$
	π^-	139,6	0	-1	π^+	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu$
Kaon***	K^+	493,7	0	+1	K^-	$1,24 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^0$
	K^0	497,7	0	0	\bar{K}^0	$0,88 \cdot 10^{-10}$	$\pi^+ + \pi^-$
						und	
						$5,2 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$
Eta	η^0	549	0	0	$\bar{\eta}^0$	$2 \cdot 10^{-19}$	$\gamma + \gamma$

* Für die meisten Teilchen existieren verschiedene Zerfallskanäle.

** Σ^0 wurde der Vollständigkeit halber ebenfalls in diese Tabelle aufgenommen, obwohl es über die starke Wechselwirkung zerfällt.

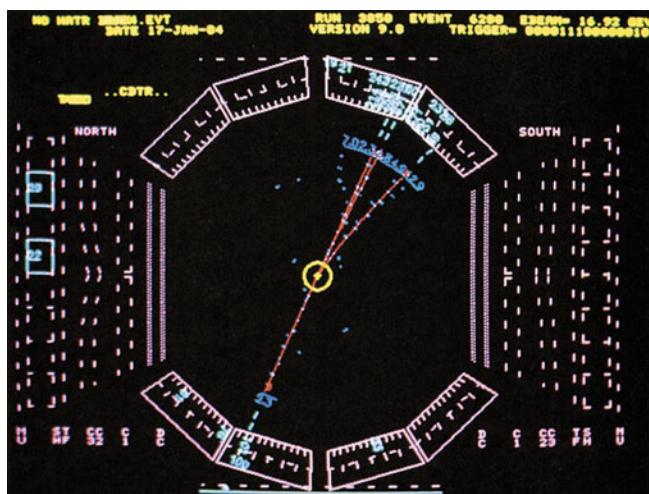
*** Das K⁰ kommt in zwei Varianten mit unterschiedlichen Lebensdauern vor; man nennt sie K_{short}⁰ und K_{long}⁰.

Die Neutrinos wurden ursprünglich, wie vom Standardmodell vorhergesagt, als masselos angesehen. Inzwischen gibt es jedoch deutliche Hinweise darauf, dass die Masse der Neutrinos zwar sehr klein, aber doch von null verschieden ist. Untersuchungen der von der Sonne ausgesandten Neutrinos mit dem Super-Kamiokande- oder kurz Super-K-Detektor in Japan in den 1990er Jahren ergaben, dass auf der Erde viel weniger Neutrinos ankommen, als theoretisch aufgrund der in der Sonne stattfindenden Fusionsprozesse zu erwarten wäre. Dies ließe sich erklären, wenn die Masse der Neutrinos von null verschieden wäre. (Der Zusammenhang zwischen der unerwartet geringen Anzahl an Sonnenneutrinos und der Masse des Neutrinos wird von Eugene Hecht in dem Artikel „On Morphing Neutrinos and Why They Must Have Mass“, *The Physics Teacher* 41 (2003), S. 164–168 dargelegt.) Selbst eine noch so kleine Neutrinomasse von einigen wenigen eV/c² wäre im Übrigen von großer kosmologischer Tragweite. Die Frage, ob das Universum für alle Zeiten expandiert oder eines Tages eine maximale Ausdehnung erreicht und dann wieder kontrahiert, hängt von der Gesamtmasse des Universums ab. Dabei könnte die Masse der Neutrinos eine entscheidende Rolle spielen, denn die kosmische Dichte beträgt für jede Neutrinoart ungefähr 100/cm³. Die Beobachtung von Elektron-Neutrinos aus der Supernovaexplosion 1987A erlaubt eine Abschätzung für die Obergrenze der Masse dieser Teilchen. Da die Geschwindigkeit eines massebehafteten Teilchens von seiner Energie abhängt, würden Neutrinos aus einem Supernovaausbruch, wenn sie eine Masse haben, über eine gewisse Zeit verteilt auf der Erde ankommen. Aus der Tatsache, dass alle bei dem

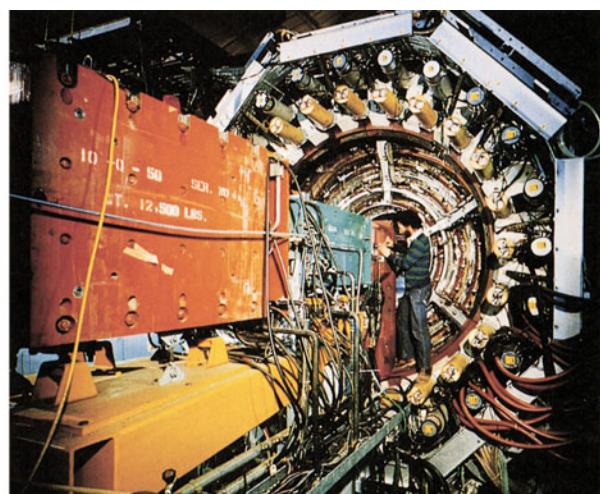
Supernovaereignis 1987A beobachteten Elektron-Neutrinos innerhalb von 13 s auf der Erde eintrafen, erhält man als obere Schranke für ihre Masse einen Wert von 16 eV/c². Die Existenz einer oberen Schranke bedeutet aber keineswegs, dass die Masse nicht doch null sein könnte. Messungen der relativen Zahl von Myon-Neutrinos und Elektron-Neutrinos in dem großen, unterirdischen Super-K-Detektor lassen darauf schließen, dass mindestens eine Neutrinosorte zwischen zwei Neutrinoarten hin und her oszilliert (beispielsweise zwischen einem Myon-Neutrino und einem Tauon-Neutrino). Ferner weisen Untersuchungen der Antineutrinos aus Kernreaktoren stark darauf hin, dass alle drei Neutrinosorten zwischen verschiedenen Neutrinotypen hin und her oszillieren und somit eine Masse haben. Messungen mit dem Kamioka Liquid Scintillator Anti-Neutrino Detector (KamLAND) zeigen, dass die Oszillationen von einer Neutrinosorte zur anderen auf Distanzen von nur 180 km Länge beobachtet werden können (Abbildung 39.1).

39.2 *Spin und Antiteilchen

Eine wichtige Eigenschaft eines Teilchens ist sein innerer Drehimpuls, der Spin. Wir haben bereits gesehen, dass das Elektron eine Quantenzahl m_s besitzt, die mit der z-Komponente seines durch die Quantenzahl $s = \frac{1}{2}$ charakterisierten Spins zusammenhängt. Elektronen, Protonen, Neutronen, Neutrinos und alle anderen Teilchen mit der Spinquantenzahl $s = \frac{1}{2}$ nennt man **Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen**. Sie gehören wie die übrigen Teilchen mit



(a)



(b)

- a) Computer-Rekonstruktion, die die Entstehung und den Zerfall eines $\tau^+ - \tau^-$ -Paars zeigt. An der mit einem gelben Kreuz gekennzeichneten Stelle in der Mitte des Bilds findet ein Annihilationsprozess zwischen einem Elektron und einem Positron statt. Dabei entstehen ein τ^+ - und ein τ^- -Teilchen, die in entgegengesetzte Richtungen davonfliegen, aber nach kurzer Zeit noch im Inneren des Strahlenkanals (gelber Kreis) zerfallen. Das τ^+ -Teilchen zerfällt in zwei nicht sichtbare Neutrinos und ein μ^+ -Teilchen, das nach links unten fliegt. Seine Spur in der Driftkammer wurde mit dem Computer berechnet und ist in Rot dargestellt. Es durchquert die violettblau gezeichneten Blei-Argon-Zähler und trifft auf den Myonendetektor, der am unteren Ende des Bildschirms als blaue Linie dargestellt ist; die entsprechende Stelle ist mit einem blauen Punkt markiert. Das τ^- -Teilchen zerfällt in drei geladene Pionen (rote, nach oben verlaufende Spuren) und ein in dieser Darstellung nicht sichtbares Neutrino. b) Mit dem berühmten Mark-I-Detektor, der vom Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) und dem Lawrence Berkeley Laboratory gemeinsam errichtet wurde, wurden viele neue Teilchen entdeckt, u. a. das J/ψ -Meson und das Tau-Lepton. Die Bahnen der Teilchen werden mithilfe von Drahtelektroden-Funkenkammern aufgenommen, die in Form von konzentrischen Zylindern um das Strahlrohr herum angeordnet sind. Das Strahlrohr selbst erstreckt sich bis zu dem Ring, auf dem der rechte Fuß des Physikers Carl Friedberg steht. Daran schließen sich zwei Ringe an, aus denen Röhren herausragen; in diesen sind Photomultiplier untergebracht, die auf verschiedene Szintillationszähler ausgerichtet sind. Die rechtwinkligen Magnete auf der linken Seite führen die gegenläufig zirkulierenden Strahlen, die im Zentrum des Detektors aufeinanderprallen. (a) © Science Photo Library/Photo Researchers. b) © Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers.)

halbzahligem Spin ($s = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ usw.) zu den sogenannten Fermionen und unterliegen dem Pauli-Prinzip. Teilchen wie die Pionen und andere Mesonen besitzen ganzzahligen Spin ($s = 0, 1, 2$ usw.). Sie werden Bosonen genannt und unterliegen nicht dem Pauli-Prinzip, dürfen also in beliebiger Anzahl dieselben Quantenzustände besetzen.

Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen werden durch die Dirac-Gleichung beschrieben, eine relativistische Erweiterung der Schrödinger-Gleichung. Nach der von Paul Dirac im Jahre 1927 vorgeschlagenen Theorie gibt es zu jedem Teilchen ein Antiteilchen. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie hängt die Energie eines Teilchens mit seiner Masse und seinem Impuls über die Gleichung $E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ (siehe Gleichung 31.27) zusammen. Normalerweise wählen wir aus physikalischen Gründen die positive Lösung und vernachlässigen die mit einer negativen Energie verbundene Lösung. Als Lösungen der Dirac-Gleichung treten jedoch unvermeidbar Wellenfunktionen auf, die zu den negativen Energiezuständen gehören. Dirac löste dieses Problem, indem er forderte, dass alle Zustände negativer Energie besetzt und damit nicht beobachtbar seien. Nur Löcher in diesem „unendlichen See“ negativer Energiezustände sollten sich bemerkbar machen. Ein solches Loch könnte z. B. in Form eines Teilchens in Erscheinung treten, das

vollkommen identisch mit dem Elektron wäre, außer dass es positive Ladung trüge. Gelangte ein solches Teilchen in die Nähe eines Elektrons, so käme es zur Auslöschung der beiden Teilchen unter Bildung zweier Photonen mit einer Gesamtenergie von mindestens $2 m_e c^2$, wobei m_e die Elektronenmasse bezeichnet. Diese Interpretation erfuhr nur geringe Aufmerksamkeit, bis Carl Anderson 1932 ein Teilchen mit genau diesen Eigenschaften entdeckte, das sogenannte Positron.

Antiteilchen können nie allein, sondern nur in Form von Teilchen-Antiteilchen-Paaren erzeugt werden. Zur Erzeugung eines Elektron-Positron-Paars aus einem Photon muss dessen Energie mindestens so groß sein wie die Summe der Ruheenergien des Elektrons und des Positrons, die $2 m_e c^2 \approx 1,02$ MeV beträgt. Obwohl das Positron stabil ist, ist seine Existenz im Universum wegen der Vielzahl der Elektronen nur von kurzer Dauer, da es sehr schnell in der folgenden Reaktion vernichtet wird:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (39.1)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Stattfinden dieser Reaktion ist allerdings nur dann groß, wenn die Relativgeschwindigkeit zwischen Positron und Elektron klein ist. Im Schwerpunktssystem ist der Gesamtimpuls der beiden Teilchen vor dem Annihilationsprozess null; damit der Impuls erhalten bleibt, müssen die



Luftbild vom CERN (Centre Européen pour la Recherche Nucléaire), dem Zentrum der europäischen Hochenergiephysik in der Nähe von Genf. Der große Kreis zeigt, wo der Tunnel des LHC (Large Hadron Collider, „Großer Hadronenbeschleuniger“) unterirdisch verläuft. Der Ring hat einen Umfang von 27 km. Die gepunktete Linie im Bild ist die Grenze zwischen der Schweiz und Frankreich. (© Richard Ehrlich.)

beiden entstehenden Photonen in diesem Bezugssystem in entgegengesetzte Richtungen davonfliegen.

Dass wir Elektronen als *Teilchen* und Positronen als *Antiteilchen* bezeichnen, bedeutet nicht, dass Positronen weniger fundamental sind als Elektronen. Die Begriffsbildung orientiert sich lediglich an den Gegebenheiten in unserem Teil des Universums. Bestünde die uns umgebende Materie aus negativen Protonen und positiven Elektronen, würden die positiven Protonen und negativen Elektronen sehr schnell das Schicksal der Auslöschung erleiden – in diesem Fall würden wir *sie* als Antiteilchen bezeichnen.

Das Antiproton (p^-) wurde 1955 von Emilio Segré und Owen Chamberlain im Bevatron in Berkeley entdeckt. (Das Antiproton wird machmal auch mit \bar{p} statt mit p^- bezeichnet. Die Antiteilchen neutraler Teilchen müssen auf jeden Fall mit einem Querbalken geschrieben werden, also z. B. \bar{n} für das Antineutron. Das Elektron und das Proton werden häufig mit e und p bezeichnet, also ohne Angabe der Ladung.) Mit einem Proto-

nenstrahl erzeugten Segré und Chamberlain die Reaktion

$$p^+ + p^- \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + p^- . \quad (39.2)$$

Zur Bildung eines Proton-Antiproton-Paars (Abbildung 39.2) wird eine kinetische Energie von mindestens $2 m_p c^2 = 1877 \text{ MeV} = 1,877 \text{ GeV}$ im Schwerpunktssystem der beiden Protonen benötigt, in dem diese sich einander mit gleich großem, aber entgegengesetztem Impuls nähern. Im Laborsystem, in dem sich eines der Protonen zu Anfang in Ruhe befindet, muss die kinetische Energie des einlaufenden Protons mindestens $6 m_p c^2 = 5,63 \text{ GeV}$ betragen (siehe Aufgabe 31.16). Derartig hohe Energien wurden erst mit der Entwicklung von Hochenergiebeschleunigern in den 1950er Jahren verfügbar. Protonen und Antiprotonen können sich bei einem Zusammenstoß vernichten, wobei zwei γ -Quanten in einem ähnlichen Prozess wie bei einem Zusammenstoß zwischen einem Elektron und einem Positron entstehen (Gleichung 39.1) – Näheres dazu findet man in Beispiel 39.1.

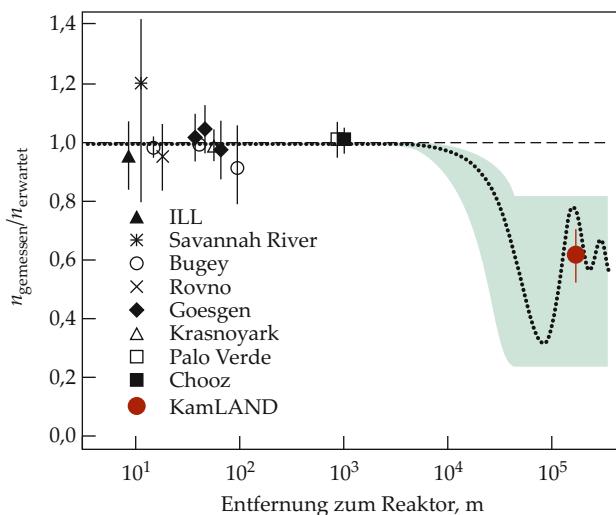


Abbildung 39.1 Erster Nachweis für das Verschwinden von Antineutrinos. In dem Diagramm ist das Verhältnis $n_{\text{gemessen}}/n_{\text{erwartet}}$ zwischen der Zahl der beobachteten und der Zahl der erwarteten Antineutrinos (wenn es keine Neutrinooszillationen gäbe) gegen die Entfernung zur nächsten Antineutrinoquelle aufgetragen. Der KamLAND-Detektor ist 180 km von den nächstgelegenen Antineutrinoquellen (Kernreaktoren) entfernt, während die übrigen acht Detektoren eine Entfernung von weniger als 1 km zu den nächstgelegenen Kernreaktoren aufweisen. Für diese acht Detektoren ist $n_{\text{gemessen}}/n_{\text{erwartet}} = 1,0$, was man erwarten würde, wenn es keine Neutrinooszillationen gäbe. Mit dem KamLAND-Detektor dagegen misst man $n_{\text{gemessen}}/n_{\text{erwartet}} = 0,6$. Dieses Ergebnis zeigt deutlich, dass die Zahl oszillierender Neutrinos auf einer Weglänge von weniger als 1 km sehr gering ist, sich aber beträchtlich erhöht, wenn die Weglänge nur um wenige Größenordnungen zunimmt. (© Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers.)

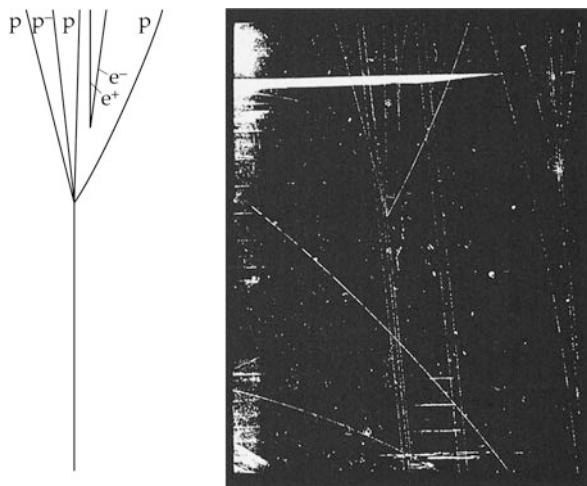


Abbildung 39.2 Blasenkameraufnahme einer Proton-Antiproton-Paarverzeugung. Ein einlaufendes Proton mit einer Energie von 25 GeV trifft auf ein ruhendes Proton in der mit flüssigem Wasserstoff gefüllten Blasenkammer. (© CERN.)

Beispiel 39.1: Proton-Antiproton-Paarvernichtung

Sie haben nun einiges über Kernphysik und die Wechselwirkung von Teilchen erfahren. Eine der Reaktionen, die Sie dabei kennen gelernt haben, ist die Proton-Antiproton-Paarvernichtung, die der Reaktionsgleichung $p^+ + p^- \rightarrow \gamma + \gamma$ gehorcht. Sie haben sich vielleicht schon gefragt, ob die dabei erzeugten Photonen für das menschliche Auge sichtbar sind. Untersuchen Sie diese Fragestellung unter der Annahme, dass sich die beiden Protonen zu Anfang in Ruhe befinden.

Problembeschreibung: Damit die Photonen sichtbar wären, müssten ihre Wellenlängen im Bereich von 400–800 nm liegen. Da sich Proton und Antiproton in Ruhe befinden, folgt aus dem Impulserhaltungssatz, dass die erzeugten Photonen entgegengesetzt gleichen Impuls und damit die gleiche Energie, Frequenz und Wellenlänge besitzen. Der Energieerhaltungssatz erfordert, dass die Gesamtenergie der beiden Photonen gleich der Summe der Ruheenergien des Protons und des Antiprotons ist (jeweils ca. 938 MeV).

Lösung: 1. Setzen Sie die Gesamtenergie der beiden Photonen, $2 E_\gamma$, mit der Summe der Ruheenergien des Protons und des Antiprotons gleich, und lösen Sie nach E_γ auf:

$$2 E_\gamma = 2 m_p c^2 \\ \Rightarrow E_\gamma = m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$$

2. Setzen Sie für die Energie des Photons $h\nu = hc/\lambda$ ein und lösen Sie nach der Wellenlänge λ auf:

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \\ \lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{938 \text{ MeV}} \\ = 1,32 \cdot 10^{-6} \text{ nm} = 1,32 \text{ fm}$$

3. Vergleichen Sie diese Wellenlänge mit dem Wellenlängenbereich des sichtbaren Lichts:

Die erzeugten Photonen liegen nicht im sichtbaren Bereich.

Plausibilitätsprüfung: In Kapitel 34 haben wir festgestellt, dass Photonen aus dem sichtbaren Bereich des Spektrums Energien von einigen Elektronenvolt haben. Es ist daher nicht verwunderlich, dass die bei der Proton-Antiproton-Paarvernichtung entstehenden Photonen mit Energien in der Größenordnung von 10^9 eV nicht im sichtbaren Bereich liegen.

Weitergedacht: Die Wellenlänge der Photonen, die bei einer Proton-Antiproton-Paarvernichtung erzeugt werden, ist um mehr als acht Größenordnungen kleiner als die kürzeste Wellenlänge des sichtbaren Bereichs, die ca. 400 nm beträgt.

39.3 *Erhaltungssätze

Ein Sprichwort besagt: „Alles, was passieren kann, passiert auch.“ Wenn ein denkbare Zerfall oder eine Reaktion nicht stattfindet, muss es dafür einen Grund geben. Dieser Grund kann meist in Form eines Erhaltungssatzes formuliert werden. Beispielsweise schließt der Energieerhaltungssatz den Zerfall eines Teilchens in zwei schwerere Zerfallsprodukte aus. Der Impulserhaltungssatz fordert, dass bei einem Auslösungsprozess zwischen einem ruhenden Elektron und einem ruhenden Positron zwei Photonen emittiert werden. Bei jeder Reaktion und jedem Zerfall muss außerdem der Drehimpuls erhalten bleiben. Ein vierter Erhaltungssatz, der die Zahl der möglichen Zerfälle und Reaktionen von Teilchen einschränkt, betrifft die elektrische Ladung: Die Summen der elektrischen Ladungen vor und nach der Reaktion müssen stets übereinstimmen.

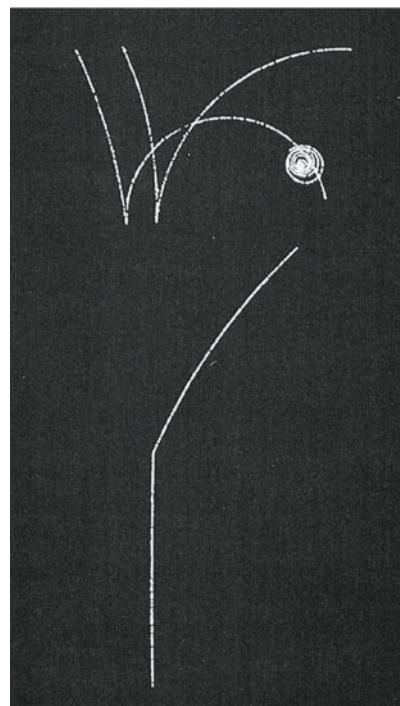
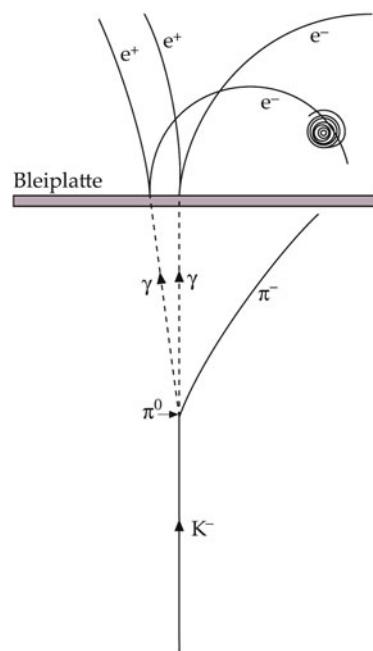
In der Elementarteilchenphysik sind zwei weitere Erhaltungssätze von Bedeutung: die Erhaltung der Baryonenzahl und die Erhaltung der Leptonenzahl. So würden z. B. bei dem Zerfall

$$p \rightarrow \pi^0 + e^+,$$

bei dem π das Pion (oder π -Meson) bezeichnet, Ladung, Energie, Impuls und Drehimpuls erhalten bleiben. Der Zerfall wird aber trotzdem nicht beobachtet, weil bei ihm weder die Baryonenzahl noch die Leptonenzahl erhalten bleiben. (Das Proton p ist ein Baryon, das Positron e^+ ein Lepton, das Pion π^0 ein Meson.) Nach den Erhaltungssätzen für die Baryonen- und Leptonenzahl muss bei jeder Erzeugung eines Baryons oder



Blick in den Tunnel des Proton-Antiproton-Beschleunigerrings des CERN. Protonen und Antiprotonen bewegen sich in entgegengesetzter Richtung durch den Ring; zur Führung der Teilchen können ein und dieselben Ablenk- und Fokussiermagnete verwendet werden. Die Magnete befinden sich in den großen, rechteckigen Kästen, die im Bild zu sehen sind. (© CERN.)



Ein negativ geladenes Kaon (K^-) tritt von unten in die Blasenkammer ein und zerfällt in ein π^- -Meson, das nach rechts davonfliegt, und ein π^0 -Meson, das sofort in zwei Photonen zerfällt, deren Bahnen mit gestrichelten Linien ange deutet sind. Jedes Photon erzeugt in der Bleiplatte ein Elektron-Positron-Paar. Die Spirale rechts ist die Bahn eines weiteren Elektrons, das aus einem Atom in der Kammer herausgeschlagen wurde. (Weitere, in diesem Zusammenhang nicht interessierende Bahnen wurden aus der Aufnahme entfernt.) (Abb. 4 aus dem von der KamLAND Collaboration veröffentlichten Artikel „First Results from KamLAND: Evidence for Reactor Antineutrino Disappearance“, Physical Review Letters, Vol. 90, No. 2, December 17, 2003. © 2003 The American Physical Society. Genehmigter Nachdruck.)

Leptons auch ein Antiteilchen von demselben Typ erzeugt werden. Geben wir allen Leptonen die **Leptonenzahl** $L = +1$, allen Antileptonen $L = -1$ und allen übrigen Teilchen $L = 0$ und entsprechend allen Baryonen die **Baryonenzahl** $B = +1$, Antibaryonen $B = -1$ und den übrigen Teilchen $B = 0$, so sagen die entsprechenden Erhaltungssätze, dass sich die Summe der Baryonenzahlen B und die Summe der Leptonenzahlen L in keiner Reaktion ändern dürfen. Aus der Erhaltung von Energie und Baryonenzahl folgt z. B., dass das leichteste Baryon, das Proton, stabil sein muss. Beispiel 39.2 illustriert, wie die Verletzung von Erhaltungssätzen als Ausschlusskriterium von Kernreaktionen angewendet wird.

Beispiel 39.2: Welche Erhaltungssätze sind verletzt?

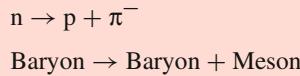
Werden bei den folgenden Zerfällen Erhaltungssätze verletzt? Wenn ja, welche? a) $n \rightarrow p + \pi^-$, b) $\Lambda^0 \rightarrow p^- + \pi^+$ und c) $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$.

Problembeschreibung: Bei jeder einzelnen Reaktion müssen die Erhaltungssätze für Energie, elektrische Ladung, Baryonenzahl und die Leptonenzahlen (Elektron-, Myon- oder Tau-Leptonenzahl) gelten.

Lösung:

Teilaufgabe a

Bei diesem Zerfall treten keine Leptonen auf, die Leptonenzahl bleibt somit erhalten. Die Gesamtladung ist vor und nach dem Zerfall null, bleibt also ebenfalls erhalten. Auch die Baryonenzahl ist vor und nach dem Zerfall gleich, nämlich $+1$. Die Summe der Ruheenergien des Protons ($938,3\text{ MeV}$) und des Pions ($139,6\text{ MeV}$) ist jedoch größer als die Ruheenergie des Neutrons ($939,6\text{ MeV}$). Im Ruhebezugssystem des Neutrons ist die Energie vor dem Zerfall (die Ruheenergie des Neutrons) kleiner als die Gesamtenergie nach dem Zerfall. Der Zerfall verletzt also den Energieerhaltungssatz.

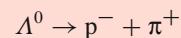


Energie: $939 < 938 + 139$ (verboten)
Leptonenzahl: $0 = 0 + 0$
Baryonenzahl: $1 = 1 + 0$

Teilaufgabe b

Auch an dieser Reaktion sind keine Leptonen beteiligt, und die Gesamtladung vor und nach dem Zerfall ist null. Die Ruheenergie des Λ^0 -Teilchens (1116 MeV) ist größer als die von Antiproton ($983,3\text{ MeV}$) plus Pion ($139,6\text{ MeV}$). Im Ruhebezugssystem des Λ^0 -Teilchens ist die Energie vor dem Zerfall (die Ruheenergie des Λ^0 -Teilchens) also größer als die Gesamtenergie nach dem Zerfall. Die Energie kann also erhalten bleiben, indem die Energiedifferenz in zusätzliche kinetische Energie der

Zerfallsprodukte übergeht. Allerdings bleibt die Baryonenzahl nicht erhalten, denn für das Λ^0 ist sie gleich $+1$, für das Antiproton und das π -Meson aber -1 bzw. 0 .



Baryon \rightarrow Antibaryon + Meson

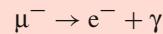
Energie: $1116 > 938 + 139$

Leptonenzahl: $0 = 0 + 0$

Baryonenzahl: $1 \neq -1 + 0$ (verboten)

Teilaufgabe c

Diese Reaktion verletzt die Erhaltung der Myon- und Elektron-Leptonenzahl. Das μ^- -Teilchen hat die Myon-Leptonenzahl $L_\mu = +1$ und die Elektron-Leptonenzahl $L_e = 0$, das Elektron e^- die Leptonenzahlen $L_\mu = 0$ und $L_e = +1$ und γ die Leptonenzahlen $L_\mu = L_e = 0$.



Lepton \rightarrow Lepton + Photon

Energie: $105,6 > 0,5 + 0$

Leptonenzahl: $1_\mu \neq 1_e + 0$ (verboten)

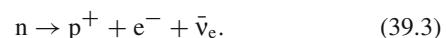
Baryonenzahl: $0 = 0 + 0$

Weitergedacht: Das Myon zerfällt aber dennoch, und zwar nach der Reaktion $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$, bei der sowohl die Myon- als auch die Elektron-Leptonenzahl erhalten bleibt ($1_\mu = 1_e - 1_{\bar{\nu}} + 1_{\nu_\mu}$). ■

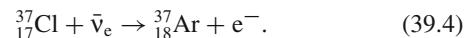
Frage 39.1

Weshalb folgt aus der Erhaltung von Baryonenzahl und Energie, dass das Proton als leichtestes Baryon stabil sein muss?

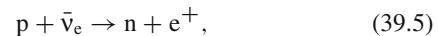
Wegen der Erhaltung der Leptonenzahl muss das beim β -Zerfall eines freien Neutrons emittierte Neutrino ein Antineutrino sein:



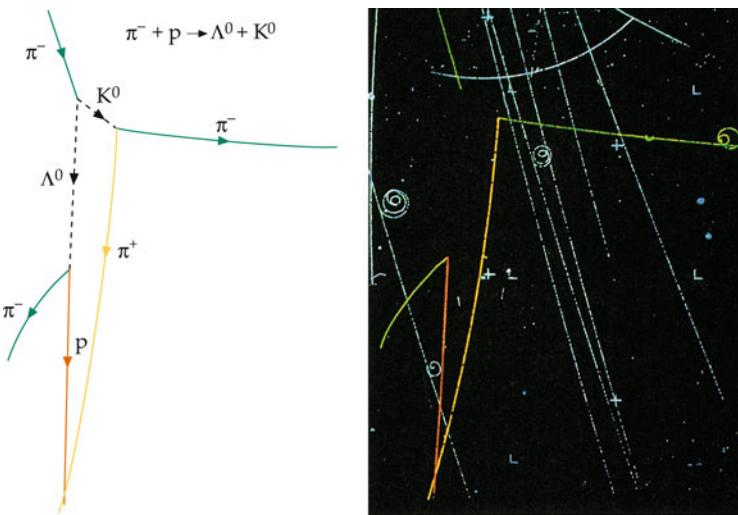
Dass das Neutrino und das Antineutrino unterschiedliche Teilchen sind, zeigt ein Experiment, bei dem ^{37}Cl mit einem intensiven Strahl von Antineutrinos beschossen wird, die beim Zerfall von Reaktorneutronen entstehen. (Reaktorneutronen entstehen als Spaltungsprodukte in Kernkraftwerken.) Wenn Neutrinos und Antineutrinos identisch wären, würde man die folgende Reaktion erwarten:



Diese Reaktion wird jedoch nicht beobachtet. Dagegen findet die Reaktion



die man beim Beschuss von Protonen mit Antineutrinos erwarten würde, sehr wohl statt. Der Grund ist, dass bei der



Zeichnung und Aufnahme eines frühen Blasenkammerexperiments am Lawrence Berkeley Laboratory, das Entstehung und Zerfall zweier seltsamer Teilchen, des K^0 - und des Λ^0 -Teilchens, zeigt. Diese neutralen Teilchen lassen sich aus den Spuren ihrer elektrisch geladenen Zerfallsprodukte identifizieren. Der Name des Λ -Teilchens röhrt daher, dass die Spuren seiner Zerfallsprodukte dem griechischen Buchstaben Λ ähneln. (Die blauen Spuren stammen von Teilchen, die an der Reaktion aus Gleichung 39.6 nicht beteiligt sind.) (© Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers.)

Tabelle 39.2 Leptonenzahlen.

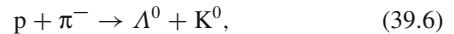
	L_e	L_μ	L_τ
e^-	+1	0	0
ν_e	+1	0	0
e^+	-1	0	0
$\bar{\nu}_e$	-1	0	0
μ^-	0	+1	0
ν_μ	0	+1	0
μ^+	0	-1	0
$\bar{\nu}_\mu$	0	-1	0
τ^-	0	0	+1
ν_τ	0	0	+1
τ^+	0	0	-1
$\bar{\nu}_\tau$	0	0	-1

Reaktionsgleichung in Gleichung 39.4 die Summe der Leptonenzahlen auf der linken Seite -1, auf der rechten Seite dagegen +1 ist, während die Summe der Leptonenzahlen bei der Reaktionsgleichung in Gleichung 39.5 auf beiden Seiten -1 ist.

Nicht nur Neutrino und Antineutrino sind unterschiedliche Teilchen, auch die mit dem Elektron, dem Myon und dem Tauon assoziierten Neutrinos sind jeweils voneinander verschieden. Die Zahlen elektronartiger Leptonen (e und ν_e), myonartiger Leptonen (μ und ν_μ) sowie tauonartiger Leptonen (τ und ν_τ) bleiben separat erhalten. Wir führen daher eigene Leptonenzahlen L_e , L_μ und L_τ für die jeweiligen Teilchen ein. In Tabelle 39.2 sind die Leptonen und zugehörigen Leptonenzahlen aufgelistet.

Es gibt einige Erhaltungssätze, die keine universelle Gültigkeit haben, sondern nur für bestimmte Arten von Wechselwirkungen gelten. Insbesondere gibt es einige Größen, die bei Zerfällen und Reaktionen über die starke Wechselwirkung erhalten bleiben, nicht jedoch bei Zerfällen und Reaktionen, die über die

schwache Wechselwirkung stattfinden. Die bedeutendste dieser Größen ist die **Seltsamkeit** (engl. *strangeness*), die 1952 von M. Gell-Mann und Katsuhiro Nishijima eingeführt wurde, um das „seltsame“ Verhalten einiger schwerer Baryonen und Mesonen zu erklären. Betrachten wir die Reaktion



in der K das Kaon (oder K -Meson) bezeichnet. Das Proton und das Pion reagieren über die starke Wechselwirkung. Λ^0 und K^0 zerfallen beide in Hadronen:



und



Jedoch liegen die Zerfallszeiten sowohl des Λ^0 als auch des K^0 in der Größenordnung von 10^{-10} s, der charakteristischen Zeit für schwache Wechselwirkungsprozesse, und nicht in der Größenordnung von 10^{-23} s, der typischen Zeitskala für Prozesse der starken Wechselwirkung. Auch andere Teilchen zeigten ein ähnliches Verhalten und wurden daher als **seltsame Teilchen** bezeichnet. Sie werden stets in Paaren erzeugt, auch wenn alle anderen Erhaltungssätze erfüllt sind. Um dies erklären zu können, schrieb man diesen Teilchen eine neue Eigenschaft zu, die Seltsamkeit. In Prozessen der starken Wechselwirkung bleibt die Seltsamkeit erhalten, in solchen, die über die schwache Wechselwirkung verlaufen, kann sich die Seltsamkeit dagegen um ± 1 ändern. Die Seltsamkeit der gewöhnlichen Hadronen – also der Nukleonen und Pionen – wurde willkürlich als null definiert. Die Seltsamkeit des K^0 -Teilchens wurde ebenso willkürlich als +1 gewählt. Die Seltsamkeit des Λ^0 muss dann -1 sein, damit die Seltsamkeit in der Reaktion aus Gleichung 39.6 erhalten bleibt. In ähnlicher Weise konnte die Seltsamkeit anderer Teilchen aus verschiedenen Reaktionen und Zerfällen

bestimmt werden oder auch als Ausschlusskriterium dienen, wie Beispiel 39.3 verdeutlicht.

Beispiel 39.3: Starke Wechselwirkung, schwache Wechselwirkung oder gar keine Wechselwirkung

Stellen Sie fest, ob die folgenden Zerfälle über die starke oder die schwache Wechselwirkung verlaufen oder gar nicht stattfinden: a) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$, b) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, c) $\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$.

Problembeschreibung: Wir stellen zunächst fest, dass die Masse des zerfallenden Teilchens jeweils größer ist als die Summe der Massen der Zerfallsprodukte, sodass alle Prozesse energetisch erlaubt sind. Ferner sind keine Leptonen beteiligt, und Ladung und Baryonenzahl bleiben bei allen Zerfällen erhalten. Ein Zerfall verläuft über die starke Wechselwirkung, wenn die Seltsamkeit erhalten bleibt, wenn also $\Delta S = 0$ gilt. Ist $\Delta S = \pm 1$, so verläuft der entsprechende Zerfall über die schwache Wechselwirkung. Ist $|\Delta S| > 1$, so kann der Prozess gar nicht stattfinden.

Lösung:

Teilaufgabe a

Aus Abbildung 39.3 können wir entnehmen, dass die Seltsamkeit des Σ^+ -Teilchens -1 ist, während Proton und Pion beide die Seltsamkeit 0 haben. Der Zerfall ist somit nur über die schwache Wechselwirkung, nicht aber über die starke Wechselwirkung möglich. Dieser Prozess ist tatsächlich eine der Zerfallsmöglichkeiten des Σ^+ -Teilchens, das eine Lebensdauer in der Größenordnung von 10^{-10} s hat.

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$$

Baryon → Baryon + Meson

Baryonenzahl: $1 = 1 + 0$

Strangeness: $-1 \neq 0 + 0$ (schwacher Zerfall)
elektrische Ladung: $e = e + 0$

Teilaufgabe b

Da sowohl das Σ^0 -Teilchen als auch das Λ^0 -Teilchen eine Seltsamkeit von -1 hat, die Seltsamkeit des Photons aber 0 ist, kann dieser Zerfall über die starke Wechselwirkung erfolgen. In der Tat handelt es sich um den dominanten Zerfallskanal des Σ^0 -Teilchens, wobei die Lebensdauer dieses Teilchens etwa 10^{-20} s beträgt. (Der Begriff *Zerfallskanal* bezeichnet einen möglichen Zerfallsprozess eines Teilchens, wenn mehrere Möglichkeiten für einen Zerfall bestehen.)

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$$

Baryon → Baryon + Photon

Baryonenzahl: $1 = 1 + 0$

Strangeness: $-1 = -1 + 0$ (starker Zerfall)
elektrische Ladung: $0 = 0 + 0$

Teilaufgabe c

Die Seltsamkeit des Ξ^0 -Teilchens beträgt -2 , die von Neutron und Pion hingegen ist 0 . Da sich die Seltsamkeit in einem Prozess nicht um 2 ändern kann, kann dieser Zerfall nicht stattfinden.

$$\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$$

Baryon → Baryon + Meson

Baryonenzahl: $1 = 1 + 0$

Strangeness: $-2 \neq 0 + 0$ (verboten)

elektrische Ladung: $0 = 0 + 0$

In Abbildung 39.3 sind die Masse und die Seltsamkeit der Baryonen und Mesonen, die gegenüber einem Zerfall aufgrund der starken Wechselwirkung stabil sind, gegen ihre Ladung aufgetragen. Wir können daraus ersehen, dass sich diese Teilchen in Seltsamkeitsmultipletts gruppieren, die aus je ein, zwei oder

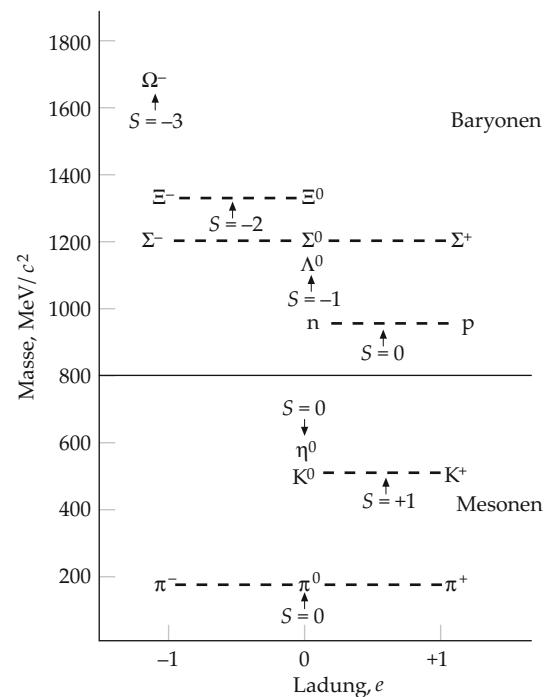


Abbildung 39.3 Die Seltsamkeit einiger Hadronen, aufgetragen gegen ihre Masse und Ladung. Die Seltsamkeit eines Baryonen-Ladungsmultipletts hängt damit zusammen, wie weit sein Schwerpunkt gegen den des Nukleonendubletts verschoben ist. Bei jeder Verschiebung um $\frac{1}{2} e$ ändert sich die Seltsamkeit um ± 1 . Für die Seltsamkeit von Mesonen gilt Entsprechendes, in diesem Fall ist die Verschiebung gegenüber dem Pionentriplett ausschlaggebend. Aufgrund der historisch bedingten, etwas unglücklichen Zuordnung der Seltsamkeit $+1$ zum Kaonendublett haben alle Baryonen, die gegenüber dem Zerfall aufgrund der starken Wechselwirkung stabil sind, negative Seltsamkeit oder die Seltsamkeit $S = 0$.

drei Teilchen annähernd gleicher Masse bestehen, und dass die Seltsamkeit eines Multipletts mit seinem *Ladungsmittelpunkt* zusammenhängt.

39.4 *Quarks

Leptonen scheinen wirklich elementare Teilchen zu sein in dem Sinne, dass sie nicht in leichtere Teilchen zerfallen und offenbar keine innere Struktur oder messbare Größe aufweisen. Hadronen dagegen sind komplexe, ausgedehnte und strukturiertere Gebilde, und sie zerfallen in andere Hadronen. Während man derzeit nur sechs Leptonen kennt, ist die Zahl der Hadronen erheblich größer. Abgesehen von dem Σ^0 -Teilchen sind in Tabelle 39.1 nur diejenigen Hadronen aufgeführt, die gegen einen Zerfall aufgrund der starken Wechselwirkung stabil sind. Man hat aber Hunderte weiterer Hadronen entdeckt und ihre Eigenschaften, wie Ladung, Spin, Masse und Seltsamkeit, gemessen und ihre Zerfallsschemata untersucht.

Der größte Fortschritt in unserem Verständnis der Elementarteilchen gelang mit der Entwicklung des Quark-Modells, das 1963 von Murray Gell-Mann und George Zweig vorgeschlagen wurde. Nach diesem Modell bestehen alle Hadronen aus Kombinationen von zwei oder drei wirklich elementaren Teilchen, den sogenannten **Quarks**. (Der Name *Quark* stammt von Gell-Mann und ist dem Werk *Finnegan's Wake* von James Joyce entnommen.) Im ursprünglichen Modell gab es drei Sorten bzw. **Flavours** von Quarks: u, d und s (für *up*, *down* und *strange*). Eine ungewöhnliche Eigenschaft der Quarks ist ihre gebrochenzahlige Ladung: Die Ladung des u-Quarks beträgt $\frac{2}{3} e$, die des d- und des s-Quarks $-\frac{1}{3} e$. Jedes Quark besitzt den Spin $\frac{1}{2}$ und die Baryonenzahl $\frac{1}{3}$. Die Seltsamkeit des u- und des d-Quarks ist 0, die des s-Quarks -1. Zu jedem Quark existiert ein Antiquark mit entgegengesetzter Ladung, Baryonenzahl und Seltsamkeit. Baryonen bestehen aus drei Quarks (bzw. drei Antiquarks im Falle der Antiteilchen), Mesonen dagegen aus einem Quark und einem Antiquark; ihre Baryonenzahl ist damit wie gefordert gleich null. Das Proton besteht aus der Kombination uud, das Neutron aus der Kombination udd. Baryonen mit Seltsamkeit $S = -1$ enthalten ein s-Quark. Alle in Tabelle 39.1 aufgeführten Teilchen können aus diesen drei Quarks und ihren Antiquarks konstruiert werden. (Wegen der Symmetrieeigenschaften der Gesamtwellenfunktion ist die Quark-Zusammensetzung eines Hadrons allerdings nicht immer offensichtlich. So muss z. B. das π^0 -Teilchen als Linearkombination von $u\bar{u}$ und $d\bar{d}$ dargestellt werden.) Die große Stärke des Quark-Modells besteht darin, dass alle erlaubten Kombinationen von drei Quarks und alle möglichen Quark-Antiquark-Paare in bekannten Hadronen resultieren. Einige finden sich in Beispiel 39.4. Deutliche Hinweise auf die Existenz von Quarks in Nukleonen geben hochenergetische Experimente zur sogenannten *tiefinelastischen Streuung*. In diesen Experimenten wird ein Nukleon mit Elektronen, Myonen oder Neutrinos mit Energien von 15–200 GeV beschossen. Analysen der um große Winkel abgelenkten Teilchen zeigen, dass sich im Inneren des Nukleons

Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen befinden, die sehr viel kleiner als das Nukleon sind. Diese Experimente sind in Analogie zu Rutherford's Streuexperimenten mit α -Teilchen an Atomen zu sehen, bei denen die Existenz eines winzigen Kerns in dem Atom aus den um große Winkel abgelenkten α -Teilchen gefolgert wurde.

Beispiel 39.4: Bestimmung des Teilchens aus der Quark-Kombination

Welche Eigenschaften haben die aus den folgenden Quarks aufgebauten Teilchen: a) $u\bar{d}$, b) $\bar{u}d$, c) $dd\bar{s}$, d) uss ?

Problembeschreibung: Baryonen bestehen aus drei Quarks, Mesonen dagegen aus einem Quark und einem Antiquark. Wenn wir die elektrischen Ladungen der Quarks addieren, erhalten wir die Gesamtladung des entsprechenden Hadrons. Desgleichen können wir die Seltsamkeit eines Hadrons durch Addition der Seltsamkeiten der darin enthaltenen Quarks ermitteln.

Lösung:

Teilaufgabe a

Da $u\bar{d}$ eine Kombination aus einem Quark und einem Antiquark ist, ist die Baryonenzahl 0, und es handelt sich um ein Meson. Es enthält kein Strange-Quark (d. h. $S = 0$), die Seltsamkeit des Mesons ist daher 0. Die Ladung des Up-Quarks beträgt $+\frac{2}{3} e$, die des Anti-Down-Quarks $+\frac{1}{3} e$, sodass die Ladung des Mesons sich zu $+1e$ ergibt. $u\bar{d}$ ist die Quark-Kombination des π^+ -Mesons.

$$(u + \bar{d}) \rightarrow \pi^+$$

(Quark + Antiquark) \rightarrow Meson

$$\text{Baryonenzahl: } \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{Strangeness: } 0 + 0 = 0$$

$$\text{elektrische Ladung: } \frac{2}{3} e + \frac{1}{3} e = e$$

Teilaufgabe b

Das Teilchen $\bar{u}d$ ist ebenfalls ein Meson mit Seltsamkeit 0. Seine elektrische Ladung ist $-\frac{2}{3} e + (-\frac{1}{3} e) = -1e$. Es handelt sich um die Quark-Kombination des π^- -Mesons.

$$(\bar{u} + d) \rightarrow \pi^-$$

(Antiquark + Quark) \rightarrow Meson

$$\text{Baryonenzahl: } -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{Strangeness: } 0 + 0 = 0$$

$$\text{elektrische Ladung: } -\frac{2}{3} e - \frac{1}{3} e = -e$$

Teilaufgabe c

Das Teilchen $dd\bar{s}$ ist ein Baryon mit Seltsamkeit -1, da es ein Strange-Quark enthält. Die Ladung ist $-\frac{1}{3} e - \frac{1}{3} e - \frac{1}{3} e = -1e$. Es handelt sich um die Quark-Kombination

Tabelle 39.3 Eigenschaften von Quarks und Antiquarks.

Flavour	Spin, \hbar	Ladung, e	Baryonenzahl	Seltsamkeit	Charm	Topness	Bottomness
Quarks							
u (up)	1/2	+2/3	+1/3	0	0	0	0
d (down)	1/2	-1/3	+1/3	0	0	0	0
s (strange)	1/2	-1/3	+1/3	-1	0	0	0
c (charm)	1/2	+2/3	+1/3	0	+1	0	0
t (top)	1/2	+2/3	+1/3	0	0	+1	0
b (bottom)	1/2	-1/3	+1/3	0	0	0	+1
Antiquarks							
\bar{u}	1/2	-2/3	-1/3	0	0	0	0
\bar{d}	1/2	+1/3	-1/3	0	0	0	0
\bar{s}	1/2	+1/3	-1/3	+1	0	0	0
\bar{c}	1/2	-2/3	-1/3	0	-1	0	0
\bar{t}	1/2	-2/3	-1/3	0	0	-1	0
\bar{b}	1/2	+1/3	-1/3	0	0	0	-1

des Σ^- -Teilchens.

$$(d + d + s) \rightarrow \Sigma^-$$

$$(\text{Quark} + \text{Quark} + \text{Quark}) \rightarrow \text{Baryon}$$

$$\text{Baryonenzahl: } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{Strangeness: } 0 + 0 - 1 = -1$$

$$\text{elektrische Ladung: } -\frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = -e$$

Teilaufgabe d

Das Teilchen uss ist ein Baryon mit Seltsamkeit -2 . Die Ladung ist $+\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$. Es handelt sich um das Ξ^0 -Teilchen.

$$(u + s + s) \rightarrow \Xi^0$$

$$(\text{Quark} + \text{Quark} + \text{Quark}) \rightarrow \text{Baryon}$$

$$\text{Baryonenzahl: } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{Strangeness: } 0 - 1 - 1 = -2$$

$$\text{elektrische Ladung: } \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0$$

Tabelle 39.4 Fundamentale Teilchen und ihre Massen. Quelle: Particle Data Group (2014).

Teilchen	Masse
Quarks	
u (up)	$2,3 \text{ MeV}/c^2$
d (down)	$4,8 \text{ MeV}/c^2$
s (strange)	$95 \text{ MeV}/c^2$
c (charm)	$275 \text{ MeV}/c^2$
t (top)	$173\,000 \text{ MeV}/c^2$
b (bottom)	$4500 \text{ MeV}/c^2$
Leptonen	
e^- (Elektron)	$0,511 \text{ MeV}/c^2$
ν_e (Elektron-Neutrino)	$< 2 \text{ eV}/c^2$
μ^- (Myon)	$105,659 \text{ MeV}/c^2$
ν_μ (Myon-Neutrino)	$< 0,19 \text{ MeV}/c^2$
τ^- (Tauon)	$1777 \text{ MeV}/c^2$
ν_τ (Tauon-Neutrino)	$< 18,2 \text{ MeV}/c^2$

gefunden, wie z. B. $\bar{c}\bar{d}$ oder $\bar{c}\bar{d}$; ebenso Baryonen, die das Charm-Quark enthalten. Zwei weitere Quarks, b und t (für bottom und top, manche Physiker bevorzugen beauty und truth), wurden 1974 vorgeschlagen. 1977 wurde ein neues, schweres Meson entdeckt, das als Y-Meson oder **Bottomium** bezeichnet wird und das man als Quark-Kombination $\bar{b}\bar{b}$ interpretiert. Das Top-Quark wurde 1995 entdeckt. Die Eigenschaften der sechs Quarks sind in Tabelle 39.3 aufgelistet.

Die sechs Quarks und die sechs Leptonen (sowie ihre Antiteilchen) werden als fundamentale, elementare Teilchen angesehen, aus denen die gesamte Materie zusammengesetzt ist. In Tabelle 39.4 sind die Massen der Quarks und Leptonen zusammengestellt. Die Massen der Neutrinos sind dabei obere Grenzen, bei den Massen der Quarks handelt es sich um begründete Schätzungen. Für die Existenz all dieser Teilchen gibt es experimentelle Hinweise.

Um Diskrepanzen zwischen den experimentellen Daten für einige Zerfallsraten und den auf dem Quark-Modell beruhenden Rechnungen zu erklären, wurde im Jahre 1967 ein vierter Quark vorgeschlagen. Es trägt die Bezeichnung c, entsprechend einer neuen Quantenzahl, dem sogenannten **Charm**. Wie die Seltsamkeit bleibt der Charm in der starken Wechselwirkung erhalten, während er sich bei schwach wechselwirkenden Prozessen um ± 1 ändert. 1975 wurde ein neues, schweres Meson, das J/ψ - oder kurz ψ -Meson, entdeckt, das genau die Eigenschaften hatte, die man für eine $c\bar{c}$ -Kombination erwartete. Seitdem wurden auch andere Mesonen mit einem Charm-Quark

39.6 *Die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung

Tabelle 39.5 Bosonen, die die fundamentalen Wechselwirkungen vermitteln. Quelle: Particle Data Group (2014).

Wechselwirkung	Boson	Spin, \hbar	Masse	Elektrische Ladung
Starke	Gluon	1	0	0
Schwache	W^\pm	1	80,39 GeV/ c^2	$\pm 1e$
	Z^0	1	91,19 GeV/ c^2	0
Elektromagnetische	γ (Photon)	1	0	0
Gravitation	Graviton*	2	$< 6 \cdot 10^{-32}$ eV/ c^2	0
Higgs-Mechanismus	Higgs-Boson H^0	0	125,7 GeV/ c^2	0

* Noch nicht beobachtet.

Quark-Confinement

Trotz erheblichen experimentellen Aufwands ist es bisher nicht gelungen, einzelne Quarks zu beobachten. Man geht heute davon aus, dass es grundsätzlich unmöglich ist, Quarks zu isolieren. Obwohl man die zwischen den Quarks wirkende Kraft nicht genau kennt, nimmt man an, dass die potenzielle Energie zwischen zwei Quarks mit wachsendem Abstand zunimmt, sodass ein unendlicher Energiebetrag nötig wäre, um Quarks endgültig zu trennen. Dies wäre beispielsweise dann der Fall, wenn die Anziehungskraft zwischen zwei Quarks mit wachsendem Abstand konstant bleiben oder zunehmen würde, statt abzunehmen, wie dies bei anderen fundamentalen Kräften wie der elektromagnetischen Kraft zwischen zwei Ladungen oder der Gravitationskraft zwischen zwei Massen der Fall ist.

Führt man einem aus Quarks bestehenden System, etwa einem Nukleon, einen großen Energiebetrag zu, so wird ein Quark-Antiquark-Paar erzeugt; die ursprünglichen Quarks bleiben dabei im Anfangssystem eingeschlossen (*confinement*). Da Quarks nicht voneinander getrennt werden können, sondern immer in einem Baryon oder einem Meson gebunden sind, lassen sich die Quark-Massen nicht exakt messen. Die in Tabelle 39.4 aufgeführten Massen sind daher lediglich begründete Schätzungen.

39.5 *Feldquanten

Neben den Leptonen und den Quarks gibt es eine weitere Elementarteilchengruppe: die *Feldquanten*, die mit den Kräften zusammenhängen, die ein Elementarteilchen auf ein anderes ausübt. In der **Quantenelektrodynamik** wird das elektrische Feld eines geladenen Teilchens durch **virtuelle Photonen** beschrieben, die ständig von diesem emittiert und wieder absorbiert werden. Führen wir dem System Energie zu, indem wir das geladene Teilchen beschleunigen, so werden einige dieser virtuellen Photonen abgeschüttelt und treten als reale, beobachtbare Photonen in Erscheinung. Man sagt, das Photon vermittelte die elektromagnetische Wechselwirkung. Alle vier fundamentalen Wechselwirkungen lassen sich so verstehen, dass sie durch Feldquanten vermittelt werden.

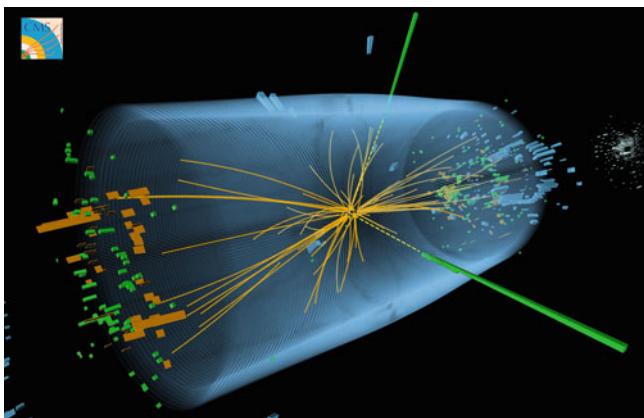
Das Feldquant der Gravitation, das **Graviton**, wurde noch nicht gefunden. Die der elektrischen Ladung analoge „Gravitationsladung“ ist die Masse.

Die schwache Wechselwirkung wird durch drei Feldquanten, die sogenannten **Vektorbosonen**, vermittelt. Es sind dies das W^+ -, das W^- - und das Z^0 -Boson. Diese Teilchen wurden von Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg in ihrer *Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung* vorhergesagt, die wir im nächsten Abschnitt behandeln werden. Die W -Bosonen und das Z -Boson wurden erstmals im Jahre 1983 von einer Gruppe von über hundert Wissenschaftlern unter der Leitung von Carlo Rubbia am CERN bei Genf nachgewiesen. Die Massen der beiden W -Bosonen (etwa 80 GeV/ c^2) und des Z -Bosons (etwa 91 GeV/ c^2), die in diesem Experiment bestimmt wurden, befinden sich in exzellenter Übereinstimmung mit den theoretisch vorhergesagten Werten. (Das W^- -Boson ist das Antiteilchen des W^+ -Bosons, ihre Massen sind deshalb gleich.) 2012 wurde ein weiteres Boson, das Higgs-Boson, am CERN in den beiden Detektoren ATLAS und CMS nachgewiesen, das bereits 1964 theoretisch vorhergesagt worden war.

Die Feldquanten, die die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks vermitteln, nennt man **Gluonen** (vom englischen *glue* für „Leim“). Isolierte Gluonen wurden noch nie experimentell beobachtet. Die zur starken Wechselwirkung gehörende „Ladung“ kann drei Werte annehmen, die man als *rot*, *grün* und *blau* bezeichnet (in Analogie zu den drei Grundfarben). Die Ladung der starken Wechselwirkung bezeichnet man als **Farbladung**. Die Feldtheorie der starken Wechselwirkung nennt man **Quantenchromodynamik (QCD)**, in Analogie zur Quantenelektrodynamik für die elektromagnetische Wechselwirkung. Tabelle 39.5 gibt einen Überblick über die Bosonen, die die fundamentalen Wechselwirkungen vermitteln.

39.6 *Die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung

In der *Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung* werden die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung als zwei Manifestationen einer fundamentalen Wechselwirkung angesehen: der elektroschwachen Wechselwirkung. Bei sehr hohen Energien ($\gg 100$ GeV) soll diese durch vier Bosonen vermittelt werden. Aus Symmetriegründen müssen dies ein Triplet aus W^+ , W^- und W^0 , alle mit gleicher Masse, und



Kollisionseignis zwischen Protonen mit einer Schwerpunktsenergie von 8 TeV im CMS-Detektor am CERN, bei dem ein Teilchen erzeugt wurde, das die Eigenschaften eines Higgs-Bosons des Standardmodells zeigt und in zwei Photonen (gelbe Linien und grüne Balken) zerfällt. (© CERN für die CMS Kollaboration)

ein Singlett B^0 mit einer bestimmten anderen Masse sein. Weder das W^0 noch das B^0 sind direkt beobachtbar, wohl aber zwei Linearkombinationen von ihnen: das Z^0 und das Photon. Bei niedrigen Energien existiert die Symmetrie nicht mehr, und die elektroschwache Wechselwirkung zerfällt in die elektromagnetische Wechselwirkung, die durch das masselose Photon vermittelt wird, und die schwache Wechselwirkung, die durch W^+ , W^- und Z^0 vermittelt wird. Die Tatsache, dass das Photon masselos ist, die Massen der W - und Z -Teilchen aber in der Größenordnung von $100 \text{ GeV}/c^2$ liegen, zeigt, dass die in der elektroschwachen Theorie angenommene Symmetrie bei niedrigen Energien nicht mehr existiert.

Die Symmetriebrechung wird durch das sogenannte **Higgs-Feld** erzeugt, das zugehörige Teilchen ist das **Higgs-Boson**, dessen Ruhemasse zu $125,7 \pm 0,4 \text{ GeV}/c^2$ liegt, wie im März 2013 vom CERN bestätigt wurde. Bereits Simulationen zeigten, dass es bei zentralen Stößen zwischen Protonen bei Energien von einigen TeV erzeugt werden kann. Beschleuniger, mit denen sich derartig hohe Energien erzeugen lassen, waren bis dahin jedoch nicht verfügbar. Erst der am CERN in der Nähe von Genf gebaute und 2009 in Betrieb genommene Teilchenbeschleuniger LHC (Large Hadron Collider) erreichte diese Kollisionsenergie von etwas über 8 TeV. Allerdings dauerte es drei Jahre, bis die Entdeckung eines Higgs-artigen Bosons publikationsreif wurde, da nur in einer von zehn Milliarden Kollisionen ein solches Boson entsteht.

39.7 *Das Standardmodell

Das Quark-Modell, die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung und die Quantenchromodynamik bilden zusammen das **Standardmodell der Elementarteilchen**. Die fundamentalen Teilchen in diesem Modell sind die in Tabelle 39.4 aufgeführten Leptonen und Quarks, die in jeweils sechs Flavours auftre-

ten, und die Feldquanten der Wechselwirkungen: das Photon, die W - und Z -Teilchen sowie die in acht Formen auftretenden Gluonen. Alle Leptonen und Quarks sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, also Fermionen, und unterliegen daher dem Pauli-Prinzip, während die Feldquanten Teilchen mit ganzzahligem Spin, also Bosonen, sind und dem Pauli-Prinzip nicht unterliegen. Alle Wechselwirkungen in der Natur lassen sich auf vier fundamentale Wechselwirkungen zurückführen: die starke, die elektromagnetische, die schwache und die Gravitationswechselwirkung. Ein Teilchen nimmt an einer dieser fundamentalen Wechselwirkungen teil, wenn es die dazugehörige „Ladung“ trägt, wobei der Begriff der Ladung hier in einer sehr verallgemeinerten Bedeutung verwendet wird. Die Ladung der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die gewöhnliche elektrische Ladung. Leptonen und Quarks tragen die schwache Ladung, die auch Flavour-Ladung genannt wird. Die Ladung der starken Wechselwirkung ist die Farbladung. Sie wird von den Quarks und den Gluonen, nicht aber von Leptonen getragen. Die Ladung der Gravitation ist die Masse. Beachten Sie, dass das Photon als Vermittler der elektromagnetischen Wechselwirkung selbst keine elektrische Ladung trägt. Desgleichen tragen auch die W^\pm - und Z -Teilchen, die die schwache Wechselwirkung vermitteln, selbst keine Flavour-Ladung. Die Gluonen jedoch, die die starke Kraft zwischen Farbladungen vermitteln, tragen selbst Farbe. Das in Abschnitt 39.4 angesprochene Quark-Confinement hängt gerade mit dieser Tatsache zusammen.

Die gesamte Materie besteht aus Leptonen und Quarks. Während aber Leptonen stets isolierte Teilchen sind und man keine aus Leptonen zusammengesetzten Teilchen kennt, in denen die Leptonen durch die schwache Kraft aneinandergebunden sind, bestehen Hadronen (Baryonen und Mesonen) aus Quarks, die durch die Farbkraft zusammengehalten werden. Ein Ergebnis der QCD ist, dass nur farbneutrale Quark-Kombinationen erlaubt sind, die aus der Kombination aller drei Farben, einer Farbe und ihrer Antifarbe oder der Kombination aller drei Antifarben gebildet werden können. Drei Quarks unterschiedlicher Farbe, also je ein rotes, ein grünes und ein blaues, können sich zu einem „weißen“ Baryon, etwa einem Neutron oder Proton, zusammenschließen. Ein Meson besteht aus einem Quark einer bestimmten Farbe und einem Antiquark, das die entsprechende Antifarbe trägt, sodass das Meson ebenfalls farbneutral ist. Angeregte Zustände von Hadronen werden als neue Teilchen angesehen. So ist etwa das Δ^+ -Teilchen ein angeregter Zustand des Protons. Beide bestehen aus der Quark-Kombination uud, das Proton befindet sich aber im Grundzustand mit Spin $\frac{1}{2}$ und einer Ruheenergie von 938 MeV , während Δ^+ der erste angeregte Zustand mit Spin $\frac{3}{2}$ und einer Ruheenergie von 1232 MeV ist. Die beiden u-Quarks dürfen im Δ^+ denselben Spinzustand $+\frac{1}{2}$ besetzen, ohne das Pauli-Prinzip zu verletzen, da sie unterschiedliche Farbe tragen. Alle Baryonen zerfallen letztlich in das leichteste Baryon, das Proton. Dass das Proton nicht zerfällt, folgt aus der Energie- und Baryonzahlernahaltung.

Die starke Wechselwirkung besteht aus zwei Teilen, der fundamentalen oder Farbwechselwirkung und der sogenannten **starken Restwechselwirkung**. Die Farbwechselwirkung ist verantwortlich für die Kraft, die zwischen Quarks wirkt, und wird

Tabelle 39.6 Eigenschaften der fundamentalen Wechselwirkungen.

	Gravitation	Schwache	Elektro-magnetische	Starke	
Wirkt auf	Masse	Flavour	Elektrische Ladung	Fundamentale	Restliche
Teilnehmende Teilchen	Alle	Quarks, Leptonen	Elektrisch geladene Teilchen	Quarks, Gluonen	Hadronen
Vermittlerteilchen	Graviton	W^\pm, Z	γ	Gluonen	Mesonen
Kraft auf zwei Quarks im Abstand von 10^{-18} m^*	10^{-41}	0,8	1	25	–
Kraft auf zwei Protonen im Kern*	10^{-36}	10^{-7}	1	–	20

* Stärke relativ zur elektromagnetischen Kraft.

durch die Gluonen vermittelt, während die starke Restwechselwirkung für die Kraft zwischen farbneutralen Nukleonen, wie z. B. Neutronen und Protonen, verantwortlich ist. Diese Kraft führt daher, dass die Kräfte zwischen den farbigen Quarks im Inneren der Nukleonen nicht vollständig abgesättigt sind, sodass eine Restwechselwirkung nach außen reicht, die durch den Austausch von Mesonen vermittelt wird. Die starke Restwechselwirkung von farbneutralen Nukleonen kann man sich analog zu der elektromagnetischen Restwechselwirkung zwischen neutralen Atomen vorstellen, die zum Entstehen von Bindungen und der Bildung von Molekülen führt. In Tabelle 39.6 sind einige Eigenschaften der fundamentalen Wechselwirkungen zusammengefasst.

Jedes Teilchen besitzt ein Antiteilchen mit gleicher Masse und gleichem Spin, aber entgegengesetzter elektrischer Ladung. Für Leptonen gilt, dass die Leptonenzahlen L_e , L_μ und L_τ für Teilchen und Antiteilchen jeweils entgegengesetztes Vorzeichen haben. Beispielsweise ist die Leptonenzahl des Elektrons $L_e = +1$, die des Positrons $L_e = -1$. Bei Hadronen ergeben sich Baryonenzahl, Seltsamkeit, Charm, Bottomness und Topness jeweils als Summe der entsprechenden Quantenzahlen der Quarks, aus denen die Hadronen aufgebaut sind. Die Quantenzahlen für Teilchen und Antiteilchen tragen dabei jeweils entgegengesetztes Vorzeichen. Das Λ^0 -Teilchen beispielsweise besteht aus der Quark-Kombination uds und hat die Baryonenzahl $B = 1$ und die Seltsamkeit $S = -1$; sein Antiteilchen $\bar{\Lambda}^0$ dagegen, das aus den Quarks $\bar{u}\bar{d}\bar{s}$ besteht, hat die Baryonenzahl $B = -1$ und die Seltsamkeit $S = +1$. Für das Photon γ und das Z^0 -Teilchen ist die elektrische Ladung 0, $B = 0$, $L = 0$ und $S = 0$; Charm, Bottomness und Topness sind ebenfalls 0 – diese Teilchen sind ihre eigenen Antiteilchen. Man beachte, dass beim K^0 -Meson ($d\bar{s}$) bis auf die Seltsamkeit, die $S = +1$ beträgt, ebenfalls alle Quantenzahlen null sind. Sein Antiteilchen, das \bar{K}^0 -Meson ($\bar{d}s$), hat die Seltsamkeit $S = -1$ und unterscheidet sich somit vom K^0 -Meson. Eine Besonderheit tritt bei den Mesonen π^+ ($u\bar{d}$) und π^- ($\bar{u}d$) auf: Sie tragen entgegengesetzte elektrische Ladung, während die Quantenzahlen L , B und S alle gleich 0 sind, und verhalten sich auch im Quark-Aufbau wie Teilchen und Antiteilchen. Um zu entscheiden, welches das Teilchen bzw. Antiteilchen ist, könnte man positive und negati-

ve Mesonenzahlen heranziehen – wenn denn die Mesonenzahl erhalten bliebe. Beim Zerfall von Mesonen (in Elektronen, Neutrinos und/oder Photonen) ändert sich jedoch die Mesonenzahl. Da Mesonen erzeugt werden oder verschwinden können, ist es bei ihnen lediglich eine Frage der Konvention, ob man ein einzelnes Meson als Teilchen oder Antiteilchen betrachtet. Ähnliches gilt für die Bosonen W^+ und W^- .

Große Vereinheitlichthe Theorien

Nach dem großen Erfolg der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung wurden Versuche unternommen, diese in so genannten **Großen Vereinheitlichten Theorien** (Grand Unified Theories, kurz GUTs) auch noch mit der starken Wechselwirkung zu vereinigen. In einer dieser Theorien werden Leptonen und Quarks als zwei Manifestationen einer einzigen Teilchenklasse angesehen. Unter bestimmten Bedingungen sollten Leptonen und Quarks ineinander umgewandelt werden können, obwohl dadurch die Baryonen- und Leptonenzahlerhaltung verletzt würde. Eine interessante Vorhersage dieser Theorie ist, dass das Proton kein stabiles Teilchen ist, sondern lediglich eine sehr lange Lebensdauer von etwa 10^{32} Jahren hat. Wegen der großen Lebensdauer ist es sehr schwierig, einen Protonenzerfall zu beobachten. Dennoch wird mit großem Aufwand danach gesucht. Mit speziellen Detektoren werden große Mengen von Protonen beobachtet in der Hoffnung, auf ein Ereignis zu stoßen, das auf den Zerfall eines Protons hinweist.

39.8 *Moderne Teilchenbeschleuniger und Detektoren

Um Teilchen auf hohe Energien zu bringen, müssen sie beschleunigt werden. Die verschiedenen bekannten Beschleuniger bieten Vor- und Nachteile für unterschiedliche Teilchen. Im Folgenden werden wir einen Überblick über die aktuellen Beschleuniger geben und auch lernen, mit welchen Methoden Teilchen nachgewiesen werden.

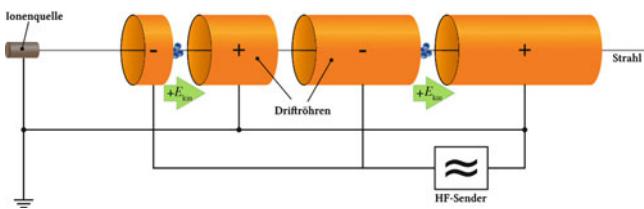


Abbildung 39.4 Linearbeschleuniger für Elementarteilchen.

Statische Beschleuniger

In statischen Beschleunigern wird ein Teilchen mit Ladung q von einem elektrischen Feld E_{el} auf eine Energie E beschleunigt:

$$E = q \int_{s_1}^{s_2} E_{\text{el}} \, ds = q U. \quad (39.9)$$

ENERGIE AUS BESCHLEUNIGUNG

Die Spannung U liegt dabei zwischen den Punkten s_1 und s_2 an und das Feld weist stets in dieselbe Richtung. Ein Beispiel für einen statischen Beschleuniger ist der sogenannte Kathodenoszillograf, wie der **Van-de-Graaf-Beschleuniger**, wie wir ihn bereits in Kapitel 20 kennen gelernt haben. Bei letzterem können Elektronen bis zu einer maximalen kinetischen Energie von 20 MeV beschleunigt werden.

Linearbeschleuniger

Ein **Linearbeschleuniger** ist ein Rohr, das mit sogenannten Irisblenden in bestimmten Abständen ausgestattet ist. Dies sind Platten, die an einer Stelle die Teilchen hindurchtreten lassen. Gibt man auf diese Blenden abwechselnd positive und negative Spannungen, wirken sie wie Kondensatoren, zwischen denen sich elektrische Felder ausbilden. Da sich positiv und negativ geladene Blenden abwechseln, wechselt das Feld von einer Zelle zur nächsten die Richtung. Damit Elektronen nur beschleunigt und nicht gebremst werden, muss die Richtung des Felds immer rechtzeitig umgepolzt werden, bevor ein Teilchen in den Raum zwischen zwei Blenden eintritt, sodass es auf seinem Weg stets das Feld als in dieselbe Richtung weisend erfährt. Ein solcher Linearbeschleuniger ist in Abbildung 39.4 dargestellt.

Innerhalb einer solchen Zelle wechselt das Feld also mit einer bestimmten Frequenz die Richtung. Während einer halben Feldschwingung müssen die Elektronen dabei gerade eine Blendenabstand zurücklegen.

Typische Energiegewinne für solche Hochfrequenz-Linearbeschleuniger sind Energien von 8 MeV/m. Ein wichtiger Linearbeschleuniger in Stanford, SLAC, erreicht für die beschleunigten Teilchen eine kinetische Energie von 20 GeV auf 3 km Beschleunigungsstrecke. Ein Projekt des DESY in

Hamburg, TESLA, ein sogenannter Elektron-Positron-Collider, sollte pro Teilchen eine kinetische Energie von 250 GeV erreichen können. Dieses Projekt wurde 2003 allerdings zugunsten des im Bau befindlichen ILC zurückgestellt; die TESLA-Technologie wird jedoch in das ILC integriert werden. Das ILC soll bis etwa 2019 fertig gestellt werden und Elektronen und Positronen bei einer geplanten Schwerpunktsenergie von 500 – 1000 GeV kollidieren sowie eine Beschleunigungsstrecke von 31 km besitzen. Eine weitere Sorte von Linearbeschleunigern sind die Driftröhren-Linearbeschleuniger. Bei diesen liegt für das elektrische Feld eine typische Frequenz von etwa 100 MHz an. Aus einer Ionenquelle treten hierbei Teilchen aus, die anschließend durch verschiedene lange Röhren fliegen. Da die Frequenz des elektrischen Felds gleich bleibt, das Teilchen aber immer schneller wird, können diese Röhren nicht gleich lang bleiben, sondern müssen immer länger werden. Die Länge eines Linearbeschleunigers nimmt dabei linear mit der gewünschten Endenergie zu. Dies ist ein deutlicher Nachteil der Linearbeschleuniger.

Kreisbeschleuniger

Hochfrequenzbeschleuniger lassen sich – statt linear – auch kompakt als Kreisbeschleuniger bauen. Teilchen werden dabei durch Magnetfelder auf Kreisbahnen gehalten. Sie durchlaufen auf ihrem Weg Hochfrequenzkavitäten, die auf dem Kreisumfang angeordnet sind und das Teilchen beschleunigen. Ein wichtiges Beispiel für einen Kreisbeschleuniger ist das **Zyklotron**, das in Abschnitt 23.2 vorgestellt wurde. Ein Nachteil ist jedoch die Größe des benötigten Radius und Durchmessers des Zyklotrons. Der Durchmesser beträgt bei Protonen mit einer kinetischen Energie von 430 MeV bereits 6,6 m. Ferner spielen bei hohen Geschwindigkeiten relativistische Effekte eine Rolle, die die Masse der Teilchen verändern, wodurch die Zyklotronfrequenz nicht mehr konstant sein kann. Tatsächlich muss die Frequenz mit wachsender Strahlenergie kleiner werden. Dies zu realisieren, ist technisch aufwendig und teuer. Es bedeutet auch, dass ein Zyklotron Protonen effektiv nur bis auf eine Energie von etwa 500 MeV beschleunigen kann. Da Elektronen bereits im Bereich von 100 keV relativistisch werden, ist das Zyklotronprinzip für sie nicht nutzbar.

Aufgrund der gerade diskutierten Probleme des Zyklotrons verwendet man in der modernen Elementarteilchenforschung oft andere Kreisbeschleuniger. Ein Beispiel dafür ist das sogenannte **Synchrotron**. In diesem werden Teilchen durch ein variables Magnetfeld und durch eine geschickte Anordnung von Magneten und Beschleunigungsstrecken auf einer konstanten Bahn gehalten. Abbildung 39.5 zeigt den Aufbau eines Synchrotrons.

An mehreren Stellen entlang des Kreisumfangs sind zur Beschleunigung Hochfrequenz-Hohlraum-Resonatoren eingebaut. Dazwischen befinden sich abwechselnd Ablenk- und Fokussierungsmagnete, die den Strahl auf die Kreisbahn zwingen und seine Verbreiterung möglichst verhindern sollen. Sind die Teilchen schließlich final beschleunigt, werden sie zuletzt auf ein externes Target abgelenkt.

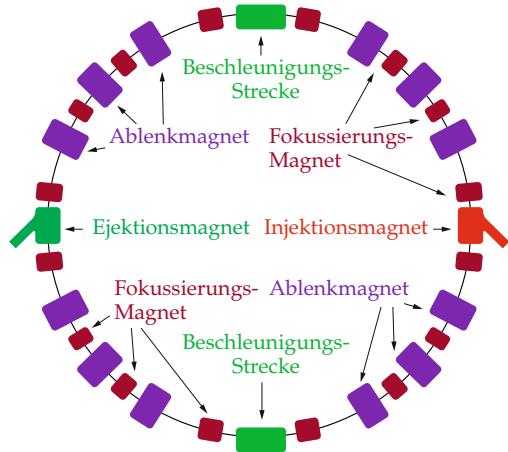


Abbildung 39.5 Aufbau eines Synchrotrons.

Das Magnetfeld ist in einem Synchrotron nicht konstant, sondern wächst mit der Energie der umlaufenden Teilchen. Um auszugleichen, dass bei einem Strahl mit mehreren Teilchen unterschiedliche Energien vorkommen, findet im Resonator mithilfe von Quadrupolmagneten eine sogenannte Phasenfokussierung statt. Wenn ein Teilchen beispielsweise auf einer kleineren Bahn läuft und früher im beschleunigenden Resonator ankommt, erfährt es eine höhere Beschleunigung – ein Teilchen auf einer größeren Bahn eine geringere.

Mit einem Protonen-Synchrotron können heute Energien im Tera-Elektronenvolt-Bereich erzielt werden. Der LHC beispielsweise wird voraussichtlich bis 2015 eine Energie von 7 TeV pro Strahl (also 14 TeV im Kollisionsschwerpunkt) erreichen.

Für Elektronen wäre eine solche Energie mithilfe eines Synchrotrons nicht erreichbar. Dies liegt an der **Synchrotronstrahlung**, die diese bei Beschleunigung in einem Magnetfeld abgibt. Der Energieverlust ΔE der Elektronen ist dabei umgekehrt proportional zur vierten Potenz ihrer Ruheenergie

$$\Delta E \propto \frac{1}{(m_0 c^2)^4}, \quad (39.10)$$

weswegen die Abstrahlung für Elektronen aufgrund ihrer kleinen Ruhemasse wesentlich höher ist als die von Protonen abgegebene Synchrotronstrahlung. Die abgestrahlte Leistung wächst mit höheren Energien E bei gleichbleibendem Radius R schnell an:

$$p \propto \frac{E^4}{R^2}. \quad (39.11)$$

Da die Leistung gemäß Gleichung 39.11 umgekehrt proportional zum Quadrat des Radius ist, müsste man immer größere Ringe bauen. Der LEP in Genf beispielsweise hatte einen Umfang von 27 km und konnte Elektronen auf eine Energie von etwa 200 GeV beschleunigen. Für Elektronen werden für das Erreichen noch höherer Energien heute meist Linearbeschleuniger verwendet. Das Elektron-Positron-Synchrotron HERA am

39.8 *Moderne Teilchenbeschleuniger und Detektoren

DESY besitzt beispielsweise einen Ring von 6 km Umfang und kann Protonen auf etwa 1 TeV beschleunigen (Elektronen hingegen erreichen nur eine Energie von 30 GeV). Die Grenzen eines Synchrotrons sind also durch die Baukosten des Rings und ebenso durch die Höhe der Magnetfeldstärke gegeben. Anders als in **Collidern**, bei denen zwei Strahlen in entgegengesetzter Richtung beschleunigt werden und man so im Schwerpunkt die doppelte kinetische Energie der einzelnen Strahlen erreichen kann, wird bei einem **Speicherring** nach mehreren Umläufen der Teilchen durch den Ring ein festes Ziel, ein *fixed target*, beschossen. Dies kann z. B. flüssiger Wasserstoff sein, wenn man Streuung an Protonen untersuchen möchte. Der Nachteil dieses Typs von Beschleuniger ist, dass viel Energie in den Rückstoß des Targets geht und die Schwerpunktsenergie dadurch gesenkt wird.

Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

Um Teilchen in Messapparaturen zu detektieren und zu identifizieren, müssen sie zu einem Zeitpunkt eine Wechselwirkung mit Materie eingehen. Dazu werden wir im Folgenden sehen, wie man beispielsweise unter Ausnutzung von Ionisation, Bremsstrahlung oder Compton-Streuung Informationen über Teilchen gewinnt.

Energieverlust aufgrund von Ionisation Geladene Teilchen verlieren beim Durchgang durch Materie Energie und geben diese an die Elektronen der Atome des absorbierenden Materials ab. Je nachdem, wie der Energieverlust pro Wegstrecke aussieht, kann auf das eingehende Teilchen rückgeschlossen werden.

Der mittlere Energieverlust pro Weglänge wird durch die sogenannte **Bethe-Bloch-Formel** angegeben:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n Z^2}{m_e c^2 \beta^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \Delta T_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 \right]. \quad (39.12)$$

BETHE-BLOCH-FORMEL

Dabei hängt der mittlere Energieverlust pro Weglänge $\frac{dE}{dx}$ vom Medium und dem eindringenden Teilchen ab. (Es gehen ein: die Ladungszahl Z des eingehenden Teilchens, die Elektronendichte n des Materials und das mittlere Anregungspotenzial I des Materials, das mit der Ordnungszahl der Atome des Materials steigt.) Ferner relevant für die Energieabgabe pro Weglänge sind die relativistische Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c}$ des eindringenden Teilchens, der Lorenzfaktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ und der maximale Energieübertrag beim zentralen Stoß auf ein Hüllenelektron, $\Delta T_{\max} \propto 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$.

Trägt man den Energieverlust pro Wegstrecke logarithmisch auf, so sieht man, dass bei kleinen Energien der Term $\frac{1}{\beta^2}$ dominiert, während bei großen Energien der Term $\ln \gamma^2$ relevant wird, wie Abbildung 39.6 veranschaulicht.

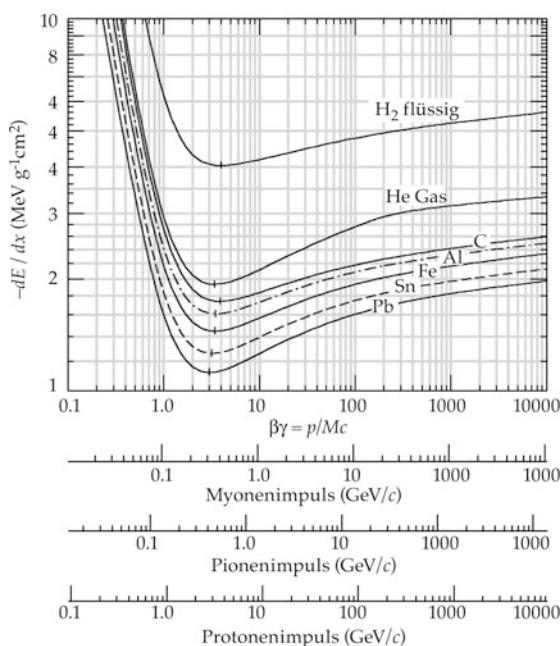


Abbildung 39.6 Energieverlust gemäß der Bethe-Bloch-Formel für verschiedene Teilchen und absorbierende Materialien.

Der Anstieg bei hohen Energien ist ein relativistischer Effekt. Diese β - und γ -Abhängigkeiten werden zur Identifikation von Teilchen genutzt. Verschiedene Massen zeigen bei gleichem Impuls (also bei gleichem Radius bei Ablenkung in einem Magnetfeld) dennoch unterschiedliche γ und β -Werte, sodass sich die Massen von Teilchen mithilfe von Ionisation eindeutig bestimmen lassen. Betrachtet man nur die Abhängigkeit von Kernladungszahl und Energie des einfliegenden Teilchens, so beträgt der Energieverlust aufgrund von Ionisation

$$-\frac{dE}{dx} \propto Z \ln E \quad (39.13)$$

ENERGIEVERLUST DURCH IONISATION

und ist somit proportional zum Logarithmus der Energie E .

Reichweite von Teilchen in Materialien In genügend dichtem Material kommen Teilchen zur Ruhe, wenn sie alle kinetische Energie an das Material in ihrer Umgebung abgegeben haben. Die Reichweite eines geladenen Teilchens aufgrund von Energieverlust durch Ionisation hat für eine bestimmte Energie einen festen Wert mit geringer statistischer Streuung. Daher kann man von der Eindringtiefe oder Reichweite eines Teilchens in Materie relativ genau auf dessen kinetische Energie schließen.

Bei Teilchen, die über die starke Wechselwirkung reagieren, wie Protonen oder allgemein Hadronen, kann es am Ende des Wegs zu einem starken Peak, einem Maximum, in der Abgabe der Energie kommen. Diesen Peak nennt man **Bragg-Peak**. Dieses Phänomen wird in der Tumorbehandlung in der Medi-

zin verwendet, wobei man ausnutzt, dass tieferliegende Materie mithilfe von Protonen gezielt beschossen werden kann und die Teilchen am Zielort den Großteil ihrer Energie abgeben, ohne bereits davor liegende Materie gleichermaßen durch Energieabgabe zu schädigen.

Wie aber kommen Teilchen in Materie zum Halt? Dies geschieht über verschiedene Bremsprozesse.

Elektronenbremsstrahlung Beschleunigte Ladung in Materie (zu der natürlich auch gebremste Ladung gehört) gibt Strahlung in Form von Photonen ab. Der Energieverlust pro Weglänge ist dabei proportional zur Energie und Masse des beschleunigten Teilchens:

$$-\frac{dE}{dx} \propto \frac{E}{m^2}. \quad (39.14)$$

Bremsstrahlung ist also insbesondere für Elektronen und Positronen eine wichtige Form der Energieabgabe; für schwere Teilchen, z. B. im Bereich von 100 GeV, spielt dieses Phänomen bei der Energieabgabe nur eine untergeordnete Rolle. Betrachtet man die Abhängigkeit des Energieverlusts von Kernladungszahl und Energie des einfliegenden Teilchens, so beträgt der Energieverlust aufgrund von Bremsstrahlung

$$-\frac{dE}{dx} \propto Z^2 E \quad (39.15)$$

ENERGIEVERLUST DURCH BREMSSTRÄHLUNG

und ist somit linear in der Energie E . Man sieht hiermit, dass bei niedrigen Energien die Ionisation bei der Abbremsung eines Teilchens dominiert (da hier die Energieabgabe proportional zum Logarithmus der Energie ist), während bei höheren Energien die Abstrahlung als Mechanismus dominiert. Die sogenannte kritische Energie, bei der sich die beiden Abhängigkeitskurven kreuzen, liegt für alle Medien bei

$$E_{\text{krit}} \approx \frac{610 \text{ MeV}}{Z}. \quad (39.16)$$

Durch Bremsstrahlung entstandene Photonen werden mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zur Wegstrecke absorbiert. Man definiert daher einen Absorptionskoeffizienten μ , der die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Weglänge angibt:

$$\mu = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dx}, \quad (39.17)$$

wobei N für die Anzahl der Teilchen steht. Man definiert den sogenannten **Wirkungsquerschnitt** σ als ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen einem einfallenden Teilchen und einem anderen Teilchen eine bestimmte Reaktion stattfindet. Dieser Wirkungsquerschnitt σ wird in Einheiten einer inversen Fläche angegeben (als $\frac{1}{A}$, wobei A für eine Fläche steht), und wir können schreiben:

$$\mu = \frac{\sigma}{A} \frac{dN}{dx}. \quad (39.18)$$

39.8 *Moderne Teilchenbeschleuniger und Detektoren

Tabelle 39.7 Kreisbeschleuniger und ihre Strahl- und Schwerpunktenergien.

	E_{Strahl} [GeV]	$E_{\text{Schwerpunkt}}$ [GeV]
LEP (CERN)	100 + 100	200
SLC (Stanford)	50 + 50	100
HERA (DESY)	30 + 920	330
LHC (CERN)	7000 + 7000	14 000
FNAL (Chicago, geplant)	1000 + 1000	2000

Wir können daraus folgern, dass die Anzahl der Photonen $N(x)$ in einem Strahl bei Eindringen in Materie einem Exponentialgesetz folgt:

$$N(x) = N_0 e^{-\mu x}. \quad (39.19)$$

Wir werden uns im Folgenden die Wirkungsquerschnitte für verschiedene Reaktionen von Photonen mit Materie ansehen und dabei erkennen, dass unterschiedliche Reaktionen stattfinden können und diese für verschiedene Kernladungszahlen des Materials unterschiedlich wahrscheinlich sind.

Photoeffekt Der Wirkungsquerschnitt σ , das Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photoeffekt, wie in Abschnitt 32.2 erklärt, stattfindet, besitzt für eine Photonenergie E_γ und eine Materieart mit Kernladungszahl Z folgende Abhängigkeit:

$$\sigma_{\text{Photo}} \propto \frac{Z^n}{E_\gamma^3} \quad (39.20)$$

WIRKUNGSQUERSCHNITT FÜR DEN PHOTOEFFEKT

mit $n \approx 4 \dots 5$.

Compton-Effekt Ein in Materie durch Bremsstrahlung freigesetztes Photon kann auch elastisch an einem Hüllenelektron des Materials streuen. Beim Compton-Effekt passiert genau dies (Abschnitt 32.2). Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zu Z und damit auch zur Anzahl der Hüllenelektronen des Materials

$$\sigma_{\text{Compton}} \propto Z. \quad (39.21)$$

WIRKUNGSQUERSCHNITT FÜR DEN COMPTON-EFFEKT

Elektron-Positron-Paarbildung Schließlich kann ein Photon im Material auch noch auf eine weitere Weise wechselwirken: nämlich über Elektron-Positron-Paarbildung. Dabei wandelt sich die Energie des Photons um in ein Elektron-Positron-Paar. Die Wahrscheinlichkeit für diese Reaktion beträgt

$$\sigma_{\text{Paar}} \propto Z^2. \quad (39.22)$$

WIRKUNGSQUERSCHNITT FÜR DIE PAARBILDUNG

Allerdings muss für eine solche Reaktion eine bestimmte Schwellenenergie überschritten sein, unterhalb derer ein Photon eine solche Reaktion nicht durchführen kann. Diese Schwelle liegt, wie man auch intuitiv annehmen würde, bei $E_{\text{Photon}} \geq 2 m_e c^2$.

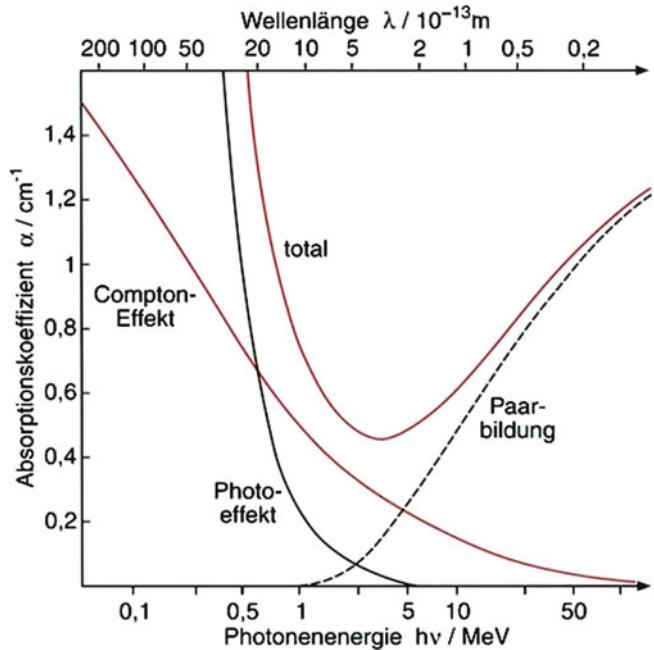


Abbildung 39.7 Energieabhängigkeit der verschiedenen Wechselwirkungen von Photonenstrahlung mit Materie.

Stellt man alle Möglichkeiten der Wechselwirkung zwischen Photonen und Materie in Abhängigkeit von der Energie der Photonen dar, zeigt sich, dass außer im Bereich um 1 MeV bei niedrigen Energien der Photoeffekt und bei hohen Energien Paarbildung dominiert. Für leichte Medien wird wegen der Z -Abhängigkeit der Compton-Effekt relevant, wie Abbildung 39.7 anhand der Absorptionskoeffizienten verschiedener Photonenergien veranschaulicht.

Detektoren

Auf der Basis der eben vorgestellten Formen der Wechselwirkung zwischen Photonen und Materie können wir nun verschiedene Formen von Detektoren betrachten, die in der modernen Teilchenphysik Anwendung finden. Es gibt dabei im Wesentlichen drei Ziele jeder Messung von Teilchen mit Detektoren: den Nachweis von Teilchen, die Messung kinematischer Eigenschaften von Teilchen (z. B. Impuls oder Energie) und die Identifikation von Teilchen.

Impulsmessung von Teilchen mit Magnetfeldern Der Impuls von Teilchen wird in den meisten Fällen über eine Ablenkung in Magnetfeldern bestimmt. Dazu misst man den Bahnradius, der bei konstantem Magnetfeld B und eindeutiger Elementarladung q proportional zum Impuls ist:

$$mv = qRB. \quad (39.23)$$

Teilchen mit einem Impuls von $300 \text{ MeV}/c$ haben demnach in einem Feld von 1 Tesla einen Radius von 1 m.

Nachweis und Ortsmessung Um den Ort eines Teilchens aufzulösen, werden oft sogenannte **Nebel- oder Blasenkammern** verwendet. Hierbei macht man sich das Phänomen zunutze, dass Ionen in überkritischen Gasen und Flüssigkeiten Kondensationskeime bilden. Nach adiabatischer Expansion bilden diese Tröpfchen kleine Blasen entlang der Spur des Teilchens.

Ein solcher Detektor bietet einen gleichmäßigen Nachweis, ist aber schlecht zu triggern; er kann also für die meisten Experimente heutzutage nicht genau angesteuert werden.

Eine weitere Form des Nachweises geschieht mithilfe von **Photoemulsionen**. Ionisierende Spuren hinterlassen dabei in photosensitiven Schichten eine Schwärzung. Diese Form des Nachweises ist gut geeignet zur Rekonstruktion von Zerfallsvertices kurzlebiger Teilchen.

Auch mithilfe von **Ionisationskammern** lassen sich Teilchenspuren räumlich auflösen. Teilchen ionisieren dabei beim Durchgang das Gasvolumen innerhalb eines Kondensators. Elektronen und Ionen werden unmittelbar anschließend durch das elektrische Feld separiert und als Strom zwischen den Elektroden vermessen. Ionisationskammern können jedoch nicht sensitiv auf einzelne Teilchen reagieren, sondern registrieren mit gerade einmal 1 nA etwa 10^{10} Teilchen.

Eine weitere Form des räumlichen Nachweises geschieht über **Drahtkammern**. Dies ist auch das Prinzip des **Geiger-Müller-Zählrohrs**. In einem mit Gas gefüllten Zylinder, dem ein dünner Anodendraht als Achse dient, wird eine hohe Spannung zwischen Draht und Außenwand erzeugt.

Im Zylinderkondensator baut sich ein Feld auf mit einer $\frac{1}{r}$ -Abhängigkeit. Die Elektronen, die bei Ionisation des Gases entstehen, werden in diesem Feld so stark beschleunigt, dass es zur Sekundärionisation kommt – eine Lawine entsteht (Abbildung 39.8). Dadurch wird die ursprüngliche Ionisationsladung um einen Faktor 10^4 bis 10^6 verstärkt. Höhere Verstärkungen führen schließlich zu einem Sättigungsbereich, dem sogenannten Geiger-Bereich.

Auch erwähnt sei die **Vieldrahtproportionalkammer**. Hierbei finden wir eine flächige Anordnung von Zählrohren. Eine solche Kammer ist so aufgebaut, dass 20 µm dicke Anodendrähte im Abstand von etwa 2 mm zwischen zwei Kathodenflächen nebeneinander aufgereiht sind.

Fliegt ein Teilchen durch diese Anordnung, so kann man es je nach Rastermaß gut räumlich auflösen. Eine Variante der Vieldrahtproportionalkammer ist die **Driftkammer**. Hierbei wird

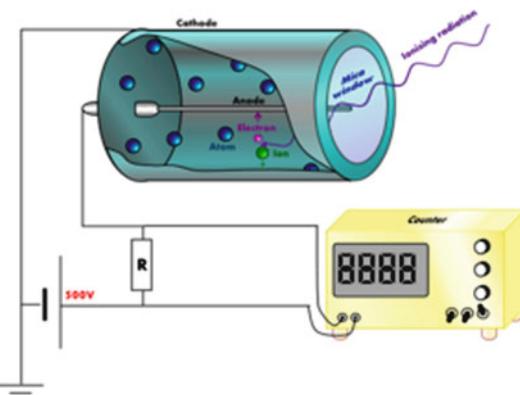


Abbildung 39.8 Prinzipielles Funktionsprinzip eines Geiger-Müller-Zählrohrs.

die Driftzeit der Elektronen bis zum Anodendraht zusätzlich bestimmt, wodurch der Ort noch genauer gemessen werden kann. Auflösungen von etwa $100 \mu\text{m}$ können so erreicht werden.

Eine wichtige Form der Ortsbestimmung ist auch der **Halbleiterzähler**. Dabei wird eine pn-Diode (Abschnitt 37.6) in Sperrrichtung geschaltet. Ionisierende Strahlung erzeugt beim Durchgang durch die Diode Teilchen-Loch-Paare. In der pn-Schicht werden durch das starke Raumladungsfeld das Elektron und das Loch getrennt. Dadurch wiederum wird ein Strompuls erzeugt. Halbleiter werden vor allem für Energiemessungen verwendet und reagieren sehr sensibel.

Wir beenden diese Zusammenstellung mit dem **Szintillationszähler**. Das Grundprinzip auch dieses Detektors ist Ionisation. Durch Ionisation erzeugte Strahlung wird hierbei in Licht umgewandelt.

Energiemessung bei Elektronen, Photonen und Hadronen
Will man ein Teilchen nicht nur räumlich auflösen, sondern auch seine Energie messen, so können verschiedene Detektoren zum Einsatz kommen. Energien von Elektronen und Photonen werden meist durch Schauer in Absorbermaterialien mit hoher Kernladungszahl Z gemessen, wie z. B. Wolfram oder Blei. Kalorimeter nennt man dabei jene Detektoren, die zur Energiemessung die Teilchen ganz absorbieren.

Betrachten wir einen typischen Prozess: Ein auf einen Absorber treffendes Elektron strahlt ein Photon ab (Bremsstrahlung). Dieses bildet aufgrund der hohen Energie ein Elektron-Positronen-Paar. Dieses wiederum strahlt ebenfalls ein Photon ab und so fort. Der Prozess setzt sich so lange weiter fort, bis alle Elektronen des Schauers die kritische Energie E_{krit} erreicht haben, nach der Ionisation die dominantere Form der Energieabgabe darstellt. Diese Ionisation der Schauerteilchen wird schließlich gemessen. Die Anzahl der Schauerteilchen eines Prozesses lässt sich abschätzen durch

$$N_{\max} \propto \frac{E_0}{E_{\text{krit}}}, \quad (39.24)$$

wobei E_0 die Anfangsenergie des eintretenden Elektrons darstellt. Die Schauertiefe T wächst logarithmisch mit der Energie:

39.8 *Moderne Teilchenbeschleuniger und Detektoren

$$T \propto \ln \frac{E_0}{E_{\text{krit}}}. \quad (39.25)$$

SCHAUERTIEFE

Diese Form der Energiemessung findet in der Elektronen- und Photonendetektion Anwendung.

Die Energie von Hadronen wird ebenfalls in Schauerdetektoren, in sogenannten Kalorimetern, gemessen. Die zugrunde liegende Reaktion ist hier eine Kernwechselwirkung, weswegen Schauermaterialien mit kleiner Dichte bevorzugt sind. Man benutzt solche Kalorimeter heutzutage meist zur genauen Messung von Quark- und Gluonenjets.

Identifikation von Teilchen Um herauszufinden, um welches Teilchen es sich handelt, muss seine Masse und Ladung bestimmt werden. Hierzu bestimmt man zunächst den Impuls über eine Ablenkung im Magnetfeld und weist anschließend das Teilchen mithilfe ortsauflösender Detektoren nach. Ferner muss die Geschwindigkeit bestimmt werden, um aus dem Impuls auf die Masse zu schließen. Dazu gibt es drei bekannte Methoden.

1. Bei der **Ionisationsmessung** wird der Energieverlust pro Wegstrecke beispielsweise in Szintillatoren oder

Driftkammern gemessen. Für festen Impuls gibt es dabei charakteristische Unterschiede in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, so dass man hierbei auf die Geschwindigkeit des Teilchens und somit auf die Masse schließen kann.

2. Bei **Laufzeitmessungen** wird die Laufzeit zwischen Detektoren bestimmt, beispielsweise zwischen zwei Szintillatoren im Abstand von 2 m. Fliegt ein Pion mit 500 MeV Impuls ein, so braucht es für den Abstand von 2 m 6,2 ns. Plastiksintillatoren erreichen hier eine Zeitauflösung von 100 ps.

3. Auch der **Cherenkov-Effekt** ermöglicht eine Geschwindigkeitsmessung. Hierbei wird verwendet, dass ein geladenes Teilchen mit Geschwindigkeit $\beta = v/c$ in einem Medium mit Brechungsindex n schneller als Licht in diesem Medium ist und daher Strahlung abgibt. Es strahlt diese Strahlung unter einem Öffnungswinkel θ ab, von dem man auf β schließen kann:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta}. \quad (39.26)$$

Mit Schwellen-Cherenkov-Detektoren unterscheidet man zwei Teilchen, indem man die Schwelle für den interessanten Impusbereich zwischen die beiden Teilchen legt.

🔍 Im Kontext: Die Suche nach dem Higgs

Neugierde hat die Menschen weit gebracht. Sie treibt uns an, immer wieder Neues zu entdecken, uns weiterzuentwickeln oder unglaubliche Phänomene zu erklären. Die grundlegende Frage, woraus das Universum besteht und wie dessen Bestandteile miteinander reagieren, verfolgt uns schon lange. Das Standardmodell der Teilchenphysik bietet dafür einen Baukasten mit entsprechender Anleitung, der sehr präzise getestet und bestätigt wurde¹: Fermionen bilden die elementare Materie und Bosonen vermitteln die Kräfte. Einziger Schönheitsfehler: Die Bosonen der schwachen Wechselwirkung, das W- und das Z-Boson, sollten keine Masse besitzen, was sie jedoch tun. Die Physiker Englert, Brout, Higgs, Guralnik, Hagen und Kibble entwickelten in den 1960er Jahren einen Erklärungsversuch, den wir heute als Higgs-Mechanismus kennen.^{2,3} Über eine Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld erhalten sowohl die W- und Z-Bosonen als auch die Fermionen ihre Massen.

So nett die Theorie des Higgs-Mechanismus auch ist: ohne experimentellen Beweis ist sie wenig wert. Daher suchte man seither nach einem zum Higgs-Feld gehörigen Teilchen. Ein Boson sollte es sein, mit Spin 0, positiver Parität, ganz bestimmten Zerfallssignaturen und einer Vorliebe für Wechselwirkungen mit massiven Teilchen. Über seine Masse machte die Theorie keine Vorhersage, daher blieb sie ein freier Parameter.

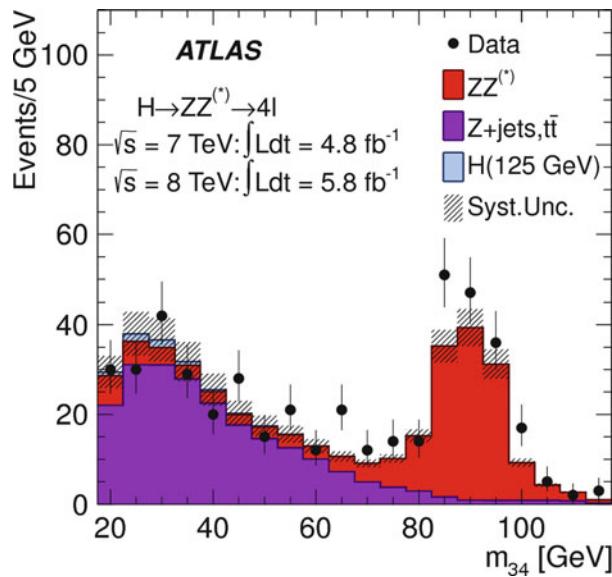
Seine Entdeckung sollte nicht leicht werden: Seine Produktions- und Zerfallsraten hingen von der noch unbekannten Masse ab. Außerdem gab es viele Prozesse, die von einem zerfallenen Higgs-Teilchen nicht zu unterscheiden wären. Schwierig ist das vor allem dann, wenn die Grundprozesse um ein Vielfaches wahrscheinlicher sind. Besonders stark zu spüren bekommt man das bei einem der stärksten Zerfallskanäle des Higgs, nämlich dem in ein b-Quark und ein Anti-b-Quark.

Man benötigt bei der Suche nach dem Higgs-Teilchen einen Teilchenbeschleuniger mit mindestens so viel Schwerpunktsenergie wie der Masse des Higgs-Bosons und eine hohe Luminosität und damit hohe Produktionsraten. Denn nur so kann sich das Signal mit großer Signifikanz vom Untergrund abheben.

Die Limitierungen an Schwerpunktsenergie und Luminosität hinderten den Elektron-Positron-Beschleuniger LEP und den Proton-Antiproton-Beschleuniger Tevatron an der Entdeckung. Dennoch lieferten die Experimente an diesen Beschleunigern wichtige Erkenntnisse, denn sie konnten gewisse Bereiche der Higgs-Masse ausschließen. Dies geschah zum einen durch direkte Suche (bei der schlicht nichts gesehen wurde) als auch durch indirekte Suche. Denn die präzise Messung der Massen von W-Bosonen und Top-Quarks erlaubte ebenfalls die Masse des Higgs-Teilchens einzuzgrenzen.

Spannend war die Situation, als alle Higgs-Massen unter $600 \text{ GeV}/c^2$ bis auf ein kleines Fenster zwischen 116 und 127 GeV ausgeschlossen waren. Am 4. Juli 2012 meldeten die beiden großen LHC-Experimente ATLAS und CMS schließlich gemeinsam die Entdeckung eines neuen Teilchens mit der Masse von ca. $125 \text{ GeV}/c^2$.^{4,5} Mehr als 6000 Wissenschaftler planten und bauten über 15 Jahre zwei riesige Experimente, nahmen in zwei Jahren Daten von $6 \cdot 10^{15}$ Kollisionen und suchten in ihnen nach Signaturen eines möglichen Higgs-Teilchens. Kompliziert wird das Ganze, da nur etwa jede zehnmillionste Protonenkollision ein Higgs-Teilchen erzeugt. Da die Experimente von den 40 Millionen

Kollisionen pro Sekunde nur etwa 100 aufzeichnen können, müssen sogenannte Trigger blitzschnell nach wichtigen Kennzeichen suchen, die eine Kollision interessant erscheinen lassen, um sie abzuspeichern.



Eine Messung von ATLAS, die zur Higgs-Entdeckung beigetragen hat: Die gemessene invariante Masse von vier Leptonen (schwarz) zeigt ein Signal bei ca. 125 GeV, das alleine durch die Untergründe (rot und lila) nicht erklärbare wäre und gut zu einem simulierten Higgs-Teilchen passen würde (hellblau). (© Phys. Lett. B 716, 2012, 1–29)

Da viele Prozesse einem Higgs-Zerfall ähneln, muss man diese durch Simulationen beschreiben und dann prüfen, was es in den Daten zusätzlich noch zu entdecken gibt. Bei der Suche im Zerfallskanal des Higgs in vier Leptonen z. B. beobachtete man bei ATLAS 13 Kandidaten für ein Higgs-Teilchen. Simulationsrechnungen ergaben eine Vorhersage von fünf Untergrundereignissen. Kombiniert mit weiteren Zerfallskanälen ergab sich eine Wahrscheinlichkeit von weniger als eins zu einer Million, dass die Entdeckung eine zufällige Fluktuation des Untergrunds war, und das Signal bestätigte sich.

Um nun sicherzustellen, dass es sich wirklich um das vorhergesagte Higgs-Teilchen handelt, müssen einige Punkte abgeklärt werden: Zerfällt es in alle Kanäle, in die es sollte? Sind seine Produktionsraten so groß wie vorhergesagt? Koppelt es sowohl an Fermionen als auch Bosonen? Hat es Spin 0 und positive Parität?

Die letzte Frage konnte mittlerweile bereits positiv beantwortet werden.^{6,7} Zur präzisen Beantwortung der anderen Fragen sind Daten von weiteren Kollisionen nötig, am besten mit noch höheren Luminositäten und Energien. Um diese zu erreichen, ging der LHC im Februar 2013 in eine zweijährige Upgrade-Phase.

Im Kontext: Die Suche nach dem Higgs

Dann wird sich klären: Verhält sich das Higgs-Teilchen wirklich genau wie vorhergesagt? Gibt es vielleicht sogar mehrere Higgs-Teilchen? Gibt es dadurch Anzeichen für Supersymmetrie, mit der noch eine ganze Reihe anderer offener Fragen beantwortet werden könnten?

Man darf also gespannt darauf warten, welche Geheimnisse und Überraschungen der LHC mit seinen Rekordenergien ans Tageslicht bringt.



Boris Lemmer studierte Physik an der Justus-Liebig-Universität Gießen und untersuchte in seiner Diplomarbeit am CrystalBall/TAPS-Experiment in Mainz das Omega-Meson in hadronischen Medien. Er hat an der Georg-August-Universität Göttingen über die Eigenschaften des Top-Quarks promoviert und forscht dafür am ATLAS-Experiment. Lemmer ist leidenschaftlicher Science Slammer und Deutscher Meister 2011.

1. Beringer, J. et al. (Particle Data Group), „Review of Particle Physics“, *Phys. Rev. D* **86**, 2012, 010001.
2. F. Englert and R. Brout, „Broken Symmetry and the Mass of the Gauge Vector Mesons“, *Phys. Rev. Lett.* 13, 321 (1964).
3. P.W. Higgs, „Broken Symmetries and the Mass of the Gauge Bosons“, *Phys. Rev. Lett.* 13, 508 (1964).
4. The ATLAS Collaboration, „Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC“, *Phys. Lett. B* **716**, 2012, 1–29.
5. The CMS Collaboration, „Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC“, *Phys. Lett. B* **716**, 2012, 30.
6. The ATLAS Collaboration, „Evidence for the spin-0 nature of the Higgs boson using ATLAS data“, *Phys. Lett. B* **726**, 2013, 120–144.
7. The CMS Collaboration, „Study of the mass and spin-parity of the Higgs boson candidate via its decays to Z boson pairs“, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 2013, 081803.

🔍 Im Kontext: Auf Neutrinosuche mit dem weltgrößten Eiswürfel

In den 1920er Jahren schlitterte die Physik ungebremst in eine Energiekrise: bei dem kurz zuvor entdeckten radioaktiven β -Zerfall ging im Prozessablauf Energie verloren. Ein Beispiel hierfür ist der Zerfall:



Zum Problem wurde nun, dass die Energie in Messungen nicht erhalten war. Der erzeugte Natriumkern und das Positron zusammen besaßen weniger Energie als der ursprüngliche Magnesiumkern. Das Entsetzen unter den Physikern war groß: Das fundamentale Prinzip der Energieerhaltung war verletzt!

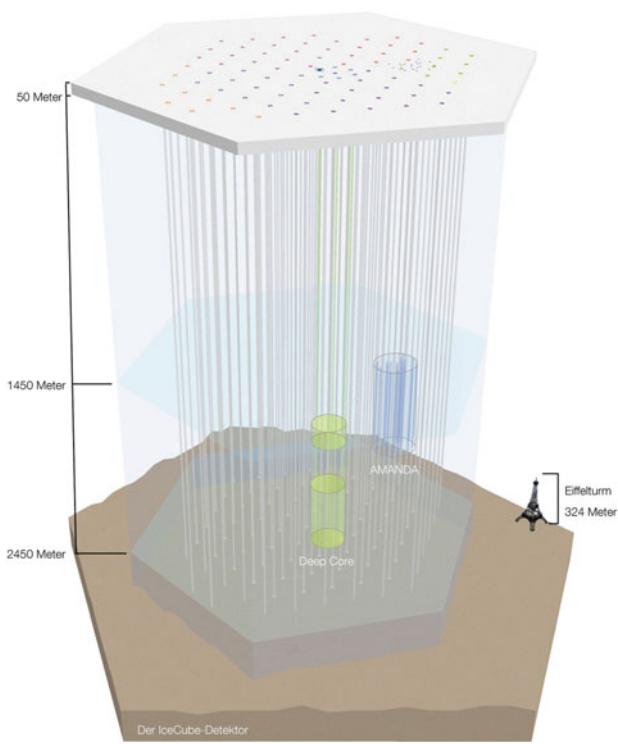
Wolfgang Pauli präsentierte damals eine selbst ihm als unorthodox erscheinende Lösung: die Erfindung eines Teilchens, das man nicht aufspüren kann – das Neutrino. Damit war das Neutrino postuliert und die Energieerhaltung zumindest potenziell gerettet: Das unsichtbare Neutrino ν_e trägt die zusätzliche Energie.

Nun stellte sich aber die Frage: Wie kann man ein Teilchen nachweisen, das nicht detektierbar ist? Es sollte noch 26 Jahre dauern, bis das Neutrino beobachtet werden konnte¹, dessen Eigenschaften man heute bereits besser kennt. So wurde z. B. nachgewiesen, dass das Neutrino tatsächlich eine Masse besitzt, wenn auch eine extrem kleine.² Inzwischen gibt es zwei bekannte astrophysikalische Neutrinoquellen: die Sonne und eine Supernova aus dem Jahr 1987.³

Anfang der 1990er Jahre machte sich eine Gruppe von Physikern auf, im antarktischen Eis nach Neutrinos aus Wechselwirkungen der kosmischen Strahlung, bestehend aus geladenen Kernen, zu suchen. Neutrinoquellen entstehen, wenn diese Kerne mit Materie (oder Lichtteilchen) an ihrem Produktionsort wechselwirken.³

Da aber Neutrinos nur extrem selten wechselwirken, braucht man überdimensionale Detektoren für ihren Nachweis – je größer das Detektionsvolumen, umso höher die Wahrscheinlichkeit für eine Wechselwirkung in ihm. Mit dem Antarctic Muon and Neutrino Detector Array (AMANDA) wurde in den 1990er Jahren ca. 1/10 eines Kubikkilometers antarktisches Eis mit Photomultipliern, also Lichtverstärkern, instrumentiert. Diese detektieren Lichtspuren, die durch geladene Teilchen wie Elektronen und Myonen erzeugt werden, die wiederum entstehen, wenn ein Neutrino mit einem Nukleon im Eis wechselwirkt. Da AMANDA zu klein war, um ein Signal zu sehen, wurde im Jahr 2005 mit dem Bau des Detektors IceCube begonnen – im Dezember 2010 wurde er fertiggestellt. Er umfasst nun einen Kubikkilometer antarktisches Eis in einer Tiefe zwischen ca. 1500 und 2500 m.

Mit IceCube werden ca. 100 bis 200 Neutrinos pro Tag gemessen – ein Großteil wird allerdings in der Erdatmosphäre erzeugt. Nach der Analyse von drei Jahren Datennahme kann nun erstmals der Nachweis der Existenz kosmischer Neutrinos vermeldet werden.⁴ Mit mehr als 99,99997 % Wahrscheinlichkeit stammt ein Großteil von 37 Neutrinos, die in einer auf die Suche nach astrophysikalischen Neutrinos zugeschnittenen Analyse gefunden wurden, aus dem Kosmos und nicht aus der Atmosphäre.



Schematische Darstellung des IceCube-Detektors. An jedem Kabel sind 60 Photomultiplier angebracht, im Zentrum des Detektors befindet sich das dichter instrumentierte Deep Core Array zur Messung von verhältnismäßig niedrigerenergetischen Neutrinos. Der Vorgängerdetektor AMANDA ist rechts im Bild schematisch dargestellt. Auf der Eisoberfläche befindet sich zusätzlich das IceTop Array zur Messung der geladenen kosmischen Strahlung. Zentral oberhalb des IceCube-Detektors befindet sich das IceCube-Laboratorium, in dem die Daten gesammelt und an die am Experiment beteiligten Forscher weitergeleitet werden. (www.icecube.wisc.edu) (© Die IceCube Kollaboration)

In Zukunft sollte es möglich sein, die Punktquellen auszumachen, die für das Signal verantwortlich sind und es würde sich nach mehr als 20 Jahren Suche ein ganz neues Fenster in das Universum öffnen: Man könnte dann Astronomie mit Neutrinos betreiben. Nach langer Suche hätte damit die NeutrinoPhysik erneut einen großen Schritt gemacht, und Pauli wäre in seiner Aussage bestätigt⁵: „Alle Dinge erreichen denjenigen, der es versteht zu warten“.

Im Kontext: Auf Neutrinosuche mit dem weltgrößten Eiswürfel



(© AWK/NRW)

Julia Becker Tjus promovierte an der TU Dortmund und ist nun Lehrstuhlinhaberin für Theoretische Physik an der Ruhr-Universität Bochum. Ihr Forschungsschwerpunkt liegt auf Plasma-Astroteilchenphysik, und neben IceCube arbeitet sie innerhalb der H.E.S.S. Collaboration und der CTA Collaboration.

1. Cowan, C. L. et al., „Detection of the Free Neutrino: a Confirmation“, *Science* **124**, 1956, 103.

2. Kamiokande Kollaboration, „Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos“, *PRL* **81**, 1998, 1562. SNO Collaboration, „Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints on neutrino mixing parameters“, *PRL* **89**, 2002, 1302.

3. Becker, J. K., „High-energy neutrinos in the context of multimessenger astrophysics“ *Phys. Rep.* **458**, 2008, 173.

4. IceCube Collaboration, „Evidence for High-Energy Extraterrestrial Neutrinos at the IceCube Detector“, *Science* **342**, 2013, 1242856, <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PhRvL.113j1101A>

5. („Everything comes to him who knows how to wait.“) – aus Paulis Antwort-Telegramm über die Nachricht des Neutronenachweises (siehe [2]); zitiert von Enz, C.P., *Der Pauli-Jung-Dialog*, Hrsg. Atmanspacher et al., Springer, Berlin, 1995, S. 25.

Zusammenfassung

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen										
1. Fundamentale Wechselwirkungen	Es gibt vier fundamentale Wechselwirkungen: die starke, die elektromagnetische, die schwache und die Gravitationswechselwirkung.										
Die starke Wechselwirkung	Die „Ladung“ der starken Wechselwirkung heißt Farbladung. Quarks und Gluonen tragen Farbladung und unterliegen der starken Wechselwirkung. Hadronen (Baryonen und Mesonen) unterliegen einer starken Restwechselwirkung, die von der nicht vollständig abgesättigten fundamentalen starken Wechselwirkung zwischen den Quarks stammt, aus denen die Hadronen aufgebaut sind. Die Zerfallszeit für Prozesse der starken Wechselwirkung beträgt typischerweise 10^{-23} s.										
Die elektromagnetische Wechselwirkung	Alle elektrisch geladenen Teilchen unterliegen der elektromagnetischen Wechselwirkung.										
Die schwache Wechselwirkung	Die „Ladung“ der schwachen Wechselwirkung heißt Flavour. Quarks und Leptonen besitzen Flavour und spüren die schwache Wechselwirkung. Die Zerfallszeit für Prozesse der schwachen Wechselwirkung beträgt typischerweise 10^{-10} s.										
Die Gravitationswechselwirkung	Die „Ladung“ der Gravitationswechselwirkung ist die Masse.										
2. Fundamentale Teilchen	Es gibt zwei Gruppen von fundamentalen Teilchen: die Leptonen und die Quarks. Jede dieser Gruppen enthält sechs Teilchen. Man nimmt an, dass diese Elementarteilchen weder Ausdehnung noch innere Struktur besitzen.										
Leptonen	Es gibt sechs Leptonen: das Elektron e und das Elektron-Neutrino ν_e , das Myon μ und das Myon-Neutrino ν_μ sowie das Tauon τ und das Tauon-Neutrino ν_τ . Alle Leptonen sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Elektron, Myon und Tauon besitzen Masse, elektrische Ladung und Flavour, jedoch keine Farbe; sie unterliegen daher der Gravitations-, der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung, nicht jedoch der starken Wechselwirkung. Die Neutrinos tragen Flavour, jedoch weder elektrische Ladung noch Farbe. Sie haben eine sehr kleine Masse.										
Quarks	Es gibt sechs Quarks: das Up-Quark u, das Down-Quark d, das Strange-Quark s, das Charm-Quark c, das Top-Quark t und das Bottom-Quark b. Alle Quarks sind Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und somit Fermionen. Die Quarks nehmen an allen vier fundamentalen Wechselwirkungen teil. Da sie stets in Mesonen oder Baryonen eingeschlossen sind, besitzt man für ihre Massen nur Abschätzungen.										
3. Hadronen	Hadronen sind aus Quarks zusammengesetzte Teilchen. Es gibt zwei Arten von Hadronen: die Baryonen und die Mesonen. Die Baryonen, zu denen auch das Proton und das Neutron gehören, bestehen aus drei Quarks und sind Fermionen mit halbzahligem Spin. Die Mesonen, zu denen u. a. die Pionen und die Kaonen gehören, haben ganzzahligen Spin oder den Spin 0. Hadronen wechselwirken über die starke Restwechselwirkung miteinander.										
4. Feldquanten	Neben den sechs fundamentalen Leptonen und den sechs fundamentalen Quarks gibt es die Feldquanten, die mit den vier fundamentalen Wechselwirkungen assoziiert sind:										
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Wechselwirkung</th> <th>Feldquant</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Gravitationswechselwirkung</td> <td>Graviton (noch nicht beobachtet)</td> </tr> <tr> <td>Elektromagnetische Wechselwirkung</td> <td>Photon</td> </tr> <tr> <td>Schwache Wechselwirkung</td> <td>W^+, W^-, Z^0</td> </tr> <tr> <td>Starke Wechselwirkung</td> <td>Gluonen</td> </tr> </tbody> </table>	Wechselwirkung	Feldquant	Gravitationswechselwirkung	Graviton (noch nicht beobachtet)	Elektromagnetische Wechselwirkung	Photon	Schwache Wechselwirkung	W^+ , W^- , Z^0	Starke Wechselwirkung	Gluonen
Wechselwirkung	Feldquant										
Gravitationswechselwirkung	Graviton (noch nicht beobachtet)										
Elektromagnetische Wechselwirkung	Photon										
Schwache Wechselwirkung	W^+ , W^- , Z^0										
Starke Wechselwirkung	Gluonen										
5. Erhaltungssätze	Einige Größen, wie Energie, Impuls, Drehimpuls, elektrische Ladung, Baryonenzahl und jede der drei Leptonenzahlen, bleiben in allen Reaktionen und Zerfällen streng erhalten. Andere Größen, wie Seltsamkeit und Charm, bleiben in Prozessen der starken Wechselwirkung erhalten, in Prozessen der schwachen Wechselwirkung dagegen nicht.										
6. Teilchen und Antiteilchen	Teilchen und die dazugehörigen Antiteilchen besitzen gleiche Masse, aber entgegengesetzte Werte in ihren übrigen Eigenschaften, wie z. B. Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl oder Seltsamkeit. Teilchen-Antiteilchen-Paare können in verschiedenen Kernreaktionen erzeugt werden, wenn die zur Verfügung stehende Energie größer als $2mc^2$ ist, wobei m die Masse des Teilchens ist.										

Antwort auf die Verständnisfrage

- Das Proton ist ein Baryon und hat die Baryonenzahl $B = 1$. Alle Teilchen, die keine Baryonen sind, haben die Baryonenzahl $B = 0$. Der Baryonenzahlerhaltungssatz erfordert, dass beim Zerfall eines Protons mindestens eines der Zerfallsprodukte wieder ein Baryon sein muss. Andererseits erfordert der Energieerhaltungssatz, dass die Ruhemasse der Zerfallsprodukte nicht größer sein darf als die Ruhemasse des Protons. Da es jedoch keine Baryonen gibt, deren Ruhemasse kleiner ist als die des Protons, kann das Proton nicht zerfallen, ohne den Baryonenzahlerhaltungssatz oder den Energieerhaltungssatz zu verletzen.

Aufgaben

Verständnisaufgaben

39.1 • In welcher Hinsicht ähneln sich Baryonen und Mesonen? Worin unterscheiden sie sich?

39.2 • Das Myon und das Pion haben annähernd die gleiche Masse. Worin unterscheiden sich diese Teilchen?

39.3 • Ein Teilchen, das aus genau zwei Quarks besteht, ist a) ein Meson, b) ein Baryon, c) ein Lepton, d) entweder ein Meson oder ein Baryon, aber sicher kein Lepton?

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

39.4 •• Die Großen Vereinheitlichten Theorien führen zu der Vorhersage, dass das Proton eine zwar lange, aber dennoch endliche Lebensdauer hat. Experimente, in denen der Zerfall von Protonen in Wasser gemessen wird, lassen darauf schließen, dass die Lebensdauer mindestens 10^{32} Jahre beträgt. Nehmen Sie an, die mittlere Lebensdauer des Protons betrüge 10^{32} Jahre, und schätzen Sie die Zeit zwischen zwei Protonenzerfällen in einem vollständig mit Wasser gefüllten Olympiaschwimmbecken ab. Ein solches Schwimmbecken hat die Abmessungen $100\text{ m} \times 25\text{ m} \times 2,0\text{ m}$. Geben Sie das Ergebnis in Tagen an.

Spin und Antiteilchen

39.5 • Zwei ruhende Pionen löschen sich entsprechend der Reaktionsgleichung $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \gamma + \gamma$ aus. a) Warum müssen die Energien der beiden γ -Strahlen gleich groß sein? b) Wie groß ist die Energie der γ -Strahlen? c) Bestimmen Sie die Wellenlänge der γ -Strahlen.

Die Erhaltungssätze

39.6 • Stellen Sie fest, ob bei den folgenden Zerfällen bzw. Reaktionen Erhaltungssätze verletzt sind. Wenn ja, welche? a) $p^+ \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}_e$, b) $n \rightarrow p^+ + \pi^-$, c) $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$, d) $p^+ + p^- \rightarrow \gamma + \gamma$, e) $\bar{\nu}_e + p^+ \rightarrow n + e^+$.

39.7 • Bestimmen Sie für jeden der folgenden Zerfälle die Änderung der Seltsamkeit und geben Sie an, ob der jeweilige Prozess über die starke oder über die schwache Wechselwirkung oder überhaupt nicht abläuft: a) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \bar{\nu}_e + e^-$, b) $\Sigma^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$.

39.8 •• Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 39.3 und den Erhaltungssätzen für Ladung, Baryonenzahl, Seltsamkeit und Spin die unbekannten Teilchen in den folgenden Prozessen: a) $p + \pi^- \rightarrow \Sigma^0 + ?$, b) $p + p \rightarrow \pi^+ + n + K^+ + ?$, c) $p + K^- \rightarrow \Xi^- + ?$.

Quarks

39.9 • Bestimmen Sie Baryonenzahl, Ladung und Seltsamkeit für die folgenden Quark-Kombinationen und geben Sie an, um welches Hadron es sich handelt: a) uud, b) udd, c) uus, d) dds, e) uss, f) dss.

39.10 • Das D^+ -Meson besitzt keine Seltsamkeit, aber Charm $C = +1$. a) Geben Sie eine mögliche Quark-Kombination für dieses Teilchen an. b) Wiederholen Sie Teilaufgabe a für das D^- -Meson, das Antiteilchen des D^+ -Mesons.

39.11 •• Geben Sie eine mögliche Quark-Kombination für die folgenden Teilchen an: a) \tilde{n} , b) Ξ^0 , c) Σ^+ .

Allgemeine Aufgaben

39.12 •• Betrachten Sie die folgende Reaktion, bei der ruhende Protonen mit einem Strahl hochenergetischer Protonen beschossen werden: $p + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + p + ?$. a) Bestimmen Sie mithilfe der Erhaltungssätze für Ladung, Baryonenzahl, Seltsamkeit (siehe Abbildung 39.3) und Spin das unbekannte Teilchen. b) Berechnen Sie den Q -Wert für diese Reaktion. c) Die Schwellenenergie $E_{\text{kin},k}$ für diese Reaktion ist gegeben durch $E_{\text{kin},k} = -\frac{Q}{2m_p}(m_p + m_p + m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$. Dabei sind m_1, m_2, m_3 und m_4 die Massen der Reaktionsprodukte. Bestimmen Sie $E_{\text{kin},k}$.

39.13 ••• In dieser Aufgabe soll die Differenz der Ankunftszeiten zweier Neutrinos unterschiedlicher Energie berechnet werden, die aus einer 170 000 Lichtjahre entfernten Supernova stammen. Die Energien der Neutrinos seien $E_1 = 20\text{ MeV}$ und $E_2 = 5\text{ MeV}$, die Ruhemasse jedes Neutrinos wollen wir als $2,0\text{ eV}/c^2$ annehmen. Da die Gesamtenergie der Neutrinos jeweils sehr groß verglichen mit der Ruheenergie ist, liegt ihre Geschwindigkeit sehr nahe an der Lichtgeschwindigkeit, und ihre Energie ist in guter Näherung $E \approx pc$. a) Zeigen Sie, dass die Differenz der Ankunftszeiten

$$\Delta t = t_2 - t_1 = x \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \approx \frac{x \Delta v}{c^2}$$

beträgt, wobei t_1 bzw. t_2 die Zeiten sind, die die Neutrinos der Geschwindigkeit v_1 bzw. v_2 benötigen, um die Strecke x zurückzulegen. b) Die Geschwindigkeit eines Teilchens mit Ruhemasse m und Energie E kann aus der Gleichung

$$E = mc^2 \gamma = \frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

(siehe Gleichung 31.24) bestimmt werden. Zeigen Sie, dass für $E \gg mc^2$ die Geschwindigkeit näherungsweise durch

$$\frac{v}{c} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2$$

gegeben ist. c) Mit den Ergebnissen aus den Teilaufgaben a und b können Sie nun Δt für die Entfernung $x = 170\,000$ Lichtjahre berechnen. d) Wie ändern sich die Resultate, wenn die Ruheenergie der Neutrinos $20\text{ eV}/c^2$ beträgt?

39.16 ••• Ein in Ruhe befindliches Σ^0 -Teilchen zerfällt in ein Λ^0 -Teilchen und ein Photon: $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$. a) Wie groß ist die gesamte Energie der Zerfallsprodukte? (Diese schließt auch die Ruheenergie ein.) b) Berechnen Sie näherungsweise den Impuls des Photons. Nehmen Sie dabei zunächst an, dass die kinetische Energie des Λ^0 -Teilchens gegenüber der Energie des Photons vernachlässigt werden kann. c) Berechnen Sie nun mit diesem Resultat die ungefähre kinetische Energie des Λ^0 -Teilchens und damit wiederum d) eine bessere Näherung für den Impuls und die Energie des Photons.

Anhänge

Teil XII



40	Tabellen	1381
41	Mathematische Grundlagen	1391

Tabellen

40

40.1 Einheiten, Symbole und Umrechnungsfaktoren	1382
40.2 Wichtige physikalische Größen und Konstanten	1385
40.3 Die chemischen Elemente	1388

40.1 Einheiten, Symbole und Umrechnungsfaktoren

Tabelle 40.1 Die Grundgrößen und ihre SI-Einheiten

Länge	Ein <i>Meter</i> (m) ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in (1/299792458) s zurücklegt.
Zeit	Eine <i>Sekunde</i> (s) ist die Dauer von 1/9192631770 Schwingungsperioden beim Hyperfeinstruktur-Übergang des Grundzustands des ^{133}Cs -Atoms.
Masse	Ein <i>Kilogramm</i> (kg) ist die Masse des Urkatalogs in Sèvres bzw. von dessen Kopie in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt.
Elektrische Stromstärke	Ein <i>Ampere</i> (A) ist die Stromstärke in zwei sehr langen, 1 m voneinander entfernten, parallelen Leiterdrähten, die zwischen diesen Drähten pro Meter Länge eine magnetische Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.
Temperatur	Ein <i>Kelvin</i> (K) ist der (1/273,16)-te Teil der absoluten Temperatur am Tripelpunkt des Wassers.
Lichtstrom (Lichtstärke)	Eine <i>Candela</i> (cd) ist der Lichtstrom bei einer Leistung von (1/683) W pro Steradian in der jeweiligen Richtung bei monochromatischem Licht der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz.
Stoffmenge	Ein <i>Mol</i> (Einheitenzeichen mol) ist die Stoffmenge einer Substanz, in der sich ebenso viele Teilchen befinden wie in 0,012 kg des Kohlenstoffisotops ^{12}C .

Tabelle 40.2 Abgeleitete Größen

Kraft	Newton (N)	$1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
Druck	Pascal (Pa)	$1\text{ Pa} = 1\text{ N/m}^2$
Arbeit, Energie	Joule (J)	$1\text{ J} = 1\text{ N} \cdot \text{m}$
Leistung	Watt (W)	$1\text{ W} = 1\text{ J/s}$
Frequenz	Hertz (Hz)	$1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$
Ladung	Coulomb (C)	$1\text{ C} = 1\text{ A} \cdot \text{s}$
Potenzial, Spannung	Volt (V)	$1\text{ V} = 1\text{ J/C}$
Widerstand	Ohm (Ω)	$1\text{ } \Omega = 1\text{ V/A}$
Kapazität	Farad (F)	$1\text{ F} = 1\text{ C/V}$
Magnetfeld	Tesla (T)	$1\text{ T} = 1\text{ N/(A} \cdot \text{m)}$
Magnetischer Fluss	Weber (Wb)	$1\text{ Wb} = 1\text{ T} \cdot \text{m}^2$
Magnetische Induktion	Henry (H)	$1\text{ H} = 1\text{ J/A}^2$

Tabelle 40.3 Verzeichnis der Einheitensymbole in diesem Buch

A	Ampere
Å	Angström
a	Jahr
AE	Astronomische Einheit
atm	Atmosphäre
bar	Bar
Bq	Becquerel
C	Coulomb
°C	Grad Celsius
cal	Kalorie
Ci	Curie
cm	Zentimeter
d	Tag
eV	Elektronenvolt
fm	Femtometer
G	Gauß
Gm	Gigameter
GN	Giganewton
Gy	Gray
g	Gramm
H	Henry
Hz	Hertz
h	Stunde
J	Joule
K	Kelvin
keV	Kiloelektronenvolt
kg	Kilogramm
km	Kilometer
kJ	Kilojoule
l	Liter
Lj	Lichtjahr
m	Meter
mbar	Millibar
µC	Mikrocoulomb
MeV	Megaelektronenvolt
min	Minute
mm	Millimeter
µm	Mikrometer
MN	Meganewton
mN	Millineutron
ms	Millisekunde
µs	Mikrosekunde
N	Newton
nm	Nanometer
Ω	Ohm
Pa	Pascal
pc	Parsec
R	Roentgen
Sv	Sievert
s	Sekunde
T	Tesla
V	Volt
W	Watt
Wb	Weber

40.1 Einheiten, Symbole und Umrechnungsfaktoren

Tabelle 40.4 Das griechische Alphabet

A, α	Alpha
B, β	Beta
Γ, γ	Gamma
Δ, δ	Delta
E, ϵ	Epsilon
Z, ζ	Zeta
H, η	Eta
Θ, θ	Theta
I, ι	Jota
K, κ	Kappa
Λ, λ	Lambda
M, μ	Mü
N, ν	Nü
Ξ, ξ	Xi
O, o	Omikron
Π, π	Pi
P, ρ	Rho
Σ, σ	Sigma
T, τ	Tau
Y, υ	Ypsilon
Φ, φ oder ϕ	Phi
X, χ	Chi
Ψ, ψ	Psi
Ω, ω	Omega

Tabelle 40.5 Verzeichnis der in diesem Buch verwendeten Symbole

Symbol	physikalische Größen
a	Beschleunigung, Bohrscher Radius (a_{Bohr})
A	Fläche, Massenzahl
α	Winkelbeschleunigung, Feinstrukturkonstante
b	Bildweite
B	magnetisches Feld, Bildhöhe, Rotationskonstante
β	relative Geschwindigkeit v/c
c	Lichtgeschwindigkeit, spezifische Wärmekapazität
C	molare Wärmekapazität, elektrische Kapazität
γ	Lorentz-Faktor, Quotient der molaren Wärmekapazitäten
d	Durchmesser
D	dielektrische Verschiebung
e	Elementarladung
E	Energie, elektrisches Feld
ε	elektrische Feldkonstante, Dielektrizitätskonstante, Wirkungsgrad, Schwenkel
f	Brennweite, allg. Funktionssymbol
F	Kraft
ϕ	Potenzial
Φ	Fluss
g	Erdbeschleunigungskonstante, Gegenstandsweite
G	Gravitationsfeld, Gegenstandshöhe
Γ	Gravitationskonstante
h	Planck'sche Konstante, Höhe
i	Laufindex
I	Trägheitsmoment, Intensität, Strom

Symbol	physikalische Größen
j	Laufindex, Stromdichte, Gesamtdrehimpulsquantenzahl
J	Gesamtdrehimpuls, Rotationsquantenzahl
k	Laufindex, Wellenzahl, Boltzmann-Konstante (k_B)
K	Kompressionsmodul
ℓ	Bahndrehimpulsquantenzahl
L	(Bahn-)Drehimpuls, Induktivität
l	Länge
λ	Wellenlänge, mittlere freie Weglänge, Liniendichte (Masse, Ladung), latente Wärme
m	Masse, magnetische Quantenzahl, Interferenzordnung
M	Drehmoment, Magnetisierung
μ	magnetisches Dipolmoment, magnetische Feldkonstante, Permeabilität, Bohr'sches Magneton (μ_{Bohr})
n	Anzahl, Brechzahl, Hauptquantenzahl
\tilde{n}	Anzahl der Mole
N	Neutronenzahl
ν	Frequenz
p	Impuls
P	Druck, Leistung, Polarisation
\wp	elektrisches Dipolmoment
q	elektrische Ladung
Q	Wärme
r	Radius, Ortsvektor, spezifischer Widerstand
R	Gaskonstante, elektrischer Widerstand
r_{\perp}	Abstand von einer Achse
ρ	Volumendichte (Masse, Ladung)
s	Wegstrecke, Spinquantenzahl
S	Poynting-Vektor, Spin
σ	Wirkungsquerschnitt, Flächendichte
t	Zeit
T	Periodendauer, Temperatur
Θ	spezielle Temperaturen
u	Beweglichkeit
U	elektrische Spannung, innere Energie
v	Geschwindigkeit, Schwingungsquantenzahl
V	Volumen, optische Vergrößerung
w	Energiedichte
W	Arbeit
ω	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz
x	kartesische Koordinate
X	Wechselstromwiderstand (induktiv, kapazitiv)
χ	Suszeptibilität
y	kartesische Koordinate
z	kartesische Koordinate
Z	Impedanz, Ordnungszahl

Tabelle 40.6 Umrechnungsfaktoren

Länge *1 km = 10^3 m 1 Lichtjahr = $1 c \cdot a = 9,461 \cdot 10^{15}$ m *1 Å = 10^{-10} m	Winkel und Winkelgeschwindigkeit *π rad = 180° 1 rad = $57,30^\circ$ $1^\circ = 1,745 \cdot 10^{-2}$ rad 1 u/min = 0,1047 rad/s 1 rad/s = 9,549 u/min	Energie *1 kW · h = 3,6 MJ *1 cal = 4,1840 J *1 l · atm = 101,325 J 1 l · atm = 24,217 cal 1 l · bar = 100 J 1 Btu = 778 ft · lb = 252 cal = 1054,35 J 1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19}$ J 1 u · c^2 = 931,50 MeV *1 erg = 10^{-7} J
Fläche *1 m ² = 10^4 cm ² *1 km ² = 10^6 m ²	Masse *1 kg = 1000 g *1 Tonne = 1000 kg = 1 Mg 1 kg = $6,022 \cdot 10^{26}$ u 1 u = $1,6606 \cdot 10^{-27}$ kg 1 u = 931,50 MeV/c ²	Leistung 1 PS = 745,7 W 1 W = $1,341 \cdot 10^{-3}$ PS
Volumen *1 m ³ = 10^6 cm ³ *1 l = 1000 cm ³ = 10^{-3} m ³	Dichte *1 g/cm ³ = 1000 kg/m ³ = 1 kg/l	Magnetfeld *1 T = 10^4 G
Zeit *1 h = 60 min = 3,6 ks *1 d = 24 h = 1440 min = 86,4 ks 1 a = 365,24 d = $3,156 \cdot 10^7$ s	Druck *1 Pa = 1 N/m ² *1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bar 1 atm = 760 torr *1 bar = 100 kPa	Geschwindigkeit *1 m/s = 3,6 km/h 1 km/h = 0,2778 m/s 1 torr = 1 mmHg = 133,32 Pa

Die Umrechnungsfaktoren sind gerundet, mit Ausnahme der durch * gekennzeichneten Gleichungen.

40.2 Wichtige physikalische Größen und Konstanten

Tabelle 40.7 Physikalische Größen auf der Erde

Erdbeschleunigungskonstante g^*	$9,80665 \text{ m/s}^2 \approx 9,81 \text{ m/s}^2$
Erdbeschleunigung	
auf Meereshöhe am Äquator	$9,7804 \text{ m/s}^2$
auf Meereshöhe an den Polen	$9,8322 \text{ m/s}^2$
Erdmasse m_E	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Erdradius r_E	$6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
Fluchtgeschwindigkeit	$1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s}$
Solarkonstante**	$1,37 \text{ kW/m}^2$
Standardbedingungen	
Temperatur	$298,15 \text{ K (25 }^\circ\text{C)}$
Druck	$100 \text{ kPa (1,00 bar)}$
Molare Masse der Luft	29 g/mol
Dichte der Luft auf Meereshöhe bei $0 \text{ }^\circ\text{C}$	$1,3 \text{ kg/m}^3$
Schallgeschwindigkeit bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$	340 m/s
Reaktionswärme bei der Bildung von H_2O (bei $25 \text{ }^\circ\text{C}$ und 1,00 bar)	$-241,83 \text{ kJ/mol}$

* auf Meereshöhe bei 45° geografischer Breite

** beim mittleren Erdbahnradius und senkrechtem Einfall der Strahlung auf die Erdatmosphäre

40.2 Wichtige physikalische Größen und Konstanten

Tabelle 40.8 Astronomische Größen*

Erde	
Mittlerer Abstand vom Mond**	$3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
Mittlerer Abstand von der Sonne**	$1,496 \cdot 10^{11} \text{ m};$ $1,00 \text{ AE}$
Mittlere Bahngeschwindigkeit	$2,98 \cdot 10^4 \text{ m/s}$
Mond	
Masse	$7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Radius	$1,738 \cdot 10^6 \text{ m}$
Periode (Mondmonat)	$27,32 \text{ d}$
Mittelwert (a_G) der Gravitationsbeschleunigung an der Mondoberfläche	$1,62 \text{ m/s}^2$
Sonne	
Masse m_S	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Radius r_S	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$

* NASA-Daten, siehe auch <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html>.

** Mittelpunktsabstand

Tabelle 40.9 Physikalische Konstanten*

Gravitationskonstante	G	$6,6742(10) \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Elementarladung	e	$1,602\,176\,453(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Avogadro-Zahl	n_A	$6,022\,141\,5(10) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Gaskonstante	R	$8,314\,472(15) \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ $1,987\,2065(36) \text{ cal/(mol} \cdot \text{K)}$ $8,205\,746(15) \cdot 10^{-2} \text{ 1-bar/(mol} \cdot \text{K)}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = R/n_A$	$1,380\,650\,5(24) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ $8,617\,343(15) \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = (\pi^2/60)k^4/(\hbar^3 c^2)$	$5,670\,373(21) \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Atomare Masseneinheit	$m_u = (1/12)m(^{12}\text{C})$	$1,660\,538\,86(28) \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1 \text{ u}$
Coulomb-Konstante	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8,987\,551\,788\dots \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$
Elektrische Feldkonstante (Dielektrizitätskonstante des Vakuums)	ϵ_0	$8,854\,187\,817\dots \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$
Magnetische Feldkonstante (Permeabilität des Vakuums)	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ $1,256\,637 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2$
Planck'sches Wirkungsquantum	h	$6,626\,0693(11) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $4,135\,667\,43(35) \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1,054\,571\,68(18) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $6,582\,119\,15(56) \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Elektronenmasse	m_e	$9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $0,510\,998\,918(44) \text{ MeV}/c^2$
Protonenmasse	m_p	$1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $938,272\,029(80) \cdot \text{MeV}/c^2$
Neutronenmasse	m_n	$1,674\,927\,28(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $939,565\,360(81) \text{ MeV}/c^2$
Bohr'sches Magnetон	$m_B = eh/2m_e$	$9,274\,009\,49(80) \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$ $5,788\,381\,804(39) \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$
Kernmagnetон	$m_n = eh/2m_p$	$5,050\,783\,43(43) \cdot 10^{-27} \text{ J/T}$ $3,152\,451\,259(21) \cdot 10^{-8} \text{ eV/T}$
Quantum des magnetischen Flusses	$\phi_0 = h/2e$	$2,067\,833\,72(18) \cdot 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2$
Klitzing-Widerstand (beim Quanten-Hall-Effekt)	$R_K = h/e^2$	$2,581\,280\,7449(86) \cdot 10^4 \Omega$
Rydberg-Konstante	R_H	$1,097\,373\,156\,8525(73) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$
Josephson-Konstante	$K_J = 2e/h$	$4,835\,978\,79(41) \cdot 10^{14} \text{ Hz/V}$
Compton-Wellenlänge	$\lambda_C = h/(m_e c)$	$2,426\,310\,238(16) \cdot 10^{-12} \text{ m}$

* Eine ausführliche Tabelle findet sich unter <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>. Die in Klammern angegebenen Ziffern sind mit Unsicherheiten behaftet. Soweit keine Klammern auftreten, sind die angegebenen Stellen exakt.

Tabelle 40.10 Verzeichnis der Datentabellen in diesem Buch

1.1	Vorsätze für Zehnerpotenzen
1.2	Dimensionen physikalischer Größen
1.3	Größenordnungen im Universum
1.4	Eigenschaften von Vektoren
5.1	Ungefährte Werte von Reibungskoeffizienten
6.1	Eigenschaften des Skalarprodukts
7.1	Ruheenergie einiger Elementarteilchen und leichter Kerne
9.1	Trägheitsmomente homogener Körper bezüglich verschiedener Drehachsen
9.2	Vergleich von Drehbewegung und linearer Bewegung
11.1	Mittlere Bahnradien und Umlaufzeiten der Planeten des Sonnensystems
12.1	Elastizitätsmodul und Festigkeit verschiedener Materialien
12.2	Näherungswerte des Schubmoduls verschiedener Materialien
13.1	Dichte ausgewählter Substanzen
13.2	Näherungswerte des Kompressionsmoduls verschiedener Materialien
13.3	Viskosität verschiedener Fluide
15.1	Relative Intensitäten und Schallintensitätspegel einiger Schallquellen
17.1	Einige charakteristische Temperaturen
18.1	Spezifische Wärmekapazität und molare Wärmekapazität einiger Flüssigkeiten und Festkörper
18.2	Normaler Schmelzpunkt und Siedepunkt sowie spezifische Schmelzwärme und spezifische Verdampfungswärme einiger Substanzen bei Atmosphärendruck
18.3	Molare Wärmekapazitäten einiger Gase
20.1	Gerundete Werte des Längen- und des Volumenausdehnungskoeffizienten einiger Substanzen
20.2	Van-der-Waals-Koeffizienten einiger Gase
20.3	Kritische Temperatur einiger Substanzen
20.4	Wärmeleitfähigkeit einiger Materialien
20.5	Wärmewiderstandsfaktor einiger Baumaterialien
21.1	Die triboelektrische Reihe
21.2	Einige elektrische Felder in der Natur
24.1	Dielektrizitätskonstante und Durchschlagfestigkeit verschiedener Materialien
25.1	Spezifischer Widerstand und Temperaturkoeffizient verschiedener Materialien
25.2	Farbcode für Widerstände und andere Bauelemente
27.1	Magnetische Suszeptibilität verschiedener Materialien
27.2	Maximale Werte von μ_0 , M_s und μ_{rel} einiger ferromagnetischer Materialien
30.1	Das elektromagnetische Spektrum
36.1	Die Elektronenkonfigurationen der Atome im Grundzustand
38.1	Teilchenzahldichten freier Elektronen und Fermi-Energien verschiedener Elemente
38.2	Austrittsarbeit einiger Metalle
39.1	Ruheenergien einiger Elementarteilchen und leichter Kerne
40.1	Atommasse des Neutrons und einiger ausgewählter Isotope
41.1	Hadronen, die gegenüber einem Zerfall aufgrund der starken Wechselwirkung stabil sind
41.2	Leptonenzahlen
41.3	Eigenschaften von Quarks und Antiquarks
41.4	Fundamentale Teilchen und ihre Massen
41.5	Bosonen, die die fundamentalen Wechselwirkungen vermitteln
41.6	Eigenschaften der fundamentalen Wechselwirkungen

40.3 Die chemischen Elemente

Tabelle 40.11 Das Periodensystem der Elemente

Seltene Erden (Lanthanoiden)	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
	138,91	140,12	140,91	144,24	(147)	150,36	152,0	157,25	158,92	162,50	164,93	167,26	168,93	173,04	174,97
Actinoiden	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr
	227,03	232,04	231,04	238,03	237,05	(244)	(243)	(247)	(247)	(251)	(252)	(257)	(258)	(259)	(260)

Die Gruppenbezeichnungen 1–18 entsprechen den Empfehlungen der Internationalen Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC).

14	Gruppenbezeichnung
6	Kernladungszahl (Ordnungszahl) Z
C	Elementsymbol
12,011	Masse, u

Tabelle 40.12 Elemente des Periodensystems und ihre Eigenschaften

Name	Symbol	Ordnungszahl	Relative Atommasse*	Name	Symbol	Ordnungszahl	Relative Atommasse*
Actinium	Ac	89	(227)	Lawrencium	Lr	103	(262)
Aluminium	Al	13	26,9815	Lithium	Li	3	6,941
Americium	Am	95	(243)	Lutetium	Lu	71	174,967
Antimon	Sb	51	121,760	Magnesium	Mg	12	24,3050
Argon	Ar	18	39,948	Mangan	Mn	25	54,9380
Arsen	As	33	74,9216	Meitnerium	Mt	109	(268)
Astat	At	85	(210)	Mendelevium	Md	101	(258)
Barium	Ba	56	137,327	Molybdän	Mo	42	95,94
Berkelium	Bk	97	(247)	Natrium	Na	11	22,9898
Beryllium	Be	4	9,0121	Neodym	Nd	60	144,242
Bismut	Bi	83	208,9804	Neon	Ne	10	20,1797
Blei	Pb	82	207,2	Neptunium	Np	93	(237)
Bohrium	Bh	107	(264)	Nickel	Ni	28	58,6934
Bor	B	5	10,81	Niob	Nb	41	92,9064
Brom	Br	35	79,904	Nobelium	No	102	(259)
Cadmium	Cd	48	112,411	Osmium	Os	76	190,23
Calcium	Ca	20	40,078	Palladium	Pd	46	106,42
Californium	Cf	98	(251)	Phosphor	P	15	30,9738
Cäsium	Cs	55	132,9054	Platin	Pt	78	195,084
Cer	Ce	58	140,116	Plutonium	Pu	94	(244)
Chlor	Cl	17	35,453	Polonium	Po	84	(209)
Chrom	Cr	24	51,996	Praseodym	Pr	59	140,91076
Cobalt	Co	27	58,9331	Promethium	Pm	61	(145)
Curium	Cm	96	(247)	Protactinium	Pa	91	231,0359
Darmstadtium	Ds	110	(271)	Quecksilber	Hg	80	200,59
Dubnium	Db	105	(262)	Radium	Ra	88	(226)
Dysprosium	Dy	66	162,500	Radon	Rn	86	(222)
Einsteinium	Es	99	(252)	Rhenium	Re	75	186,207
Eisen	Fe	26	55,845	Rhodium	Rh	45	102,9055
Erbium	Er	68	167,259	Roentgenium	Rg	111	(272)
Europium	Eu	63	151,964	Rubidium	Rb	37	85,4678
Fermium	Fm	100	(257)	Ruthenium	Ru	44	101,07
Fluor	F	9	19,00	Rutherfordium	Rf	104	(261)
Francium	Fr	87	(223)	Samarium	Sm	62	150,36
Gadolinium	Gd	64	157,25	Sauerstoff	O	8	15,9994
Gallium	Ga	31	69,723	Scandium	Sc	21	44,9559
Germanium	Ge	32	72,64	Schwefel	S	16	32,065
Gold	Au	79	196,9666	Seaborgium	Sg	106	(266)
Hafnium	Hf	72	178,49	Selen	Se	34	78,96
Hahnium	Ha	105	(260)	Silber	Ag	47	107,8682
Hassium	Hs	108	(277)	Silicium	Si	14	28,0855
Helium	He	2	4,003	Stickstoff	N	7	14,007
Holmium	Ho	67	164,9303	Strontium	Sr	38	87,62
Indium	In	49	114,818	Tantal	Ta	73	180,9479
Iod	I	53	126,9044	Technetium	Tc	43	(98)
Iridium	Ir	77	192,217	Tellur	Te	52	127,60
Kalium	K	19	39,093	Terbium	Tb	65	158,9254
Kohlenstoff	C	6	12,011	Thallium	Tl	81	204,3833
Krypton	Kr	36	83,798	Thorium	Th	90	232,0380
Kupfer	Cu	29	63,546	Thulium	Tm	69	168,9342
Lanthan	La	57	138,9054	Titan	Ti	22	47,87

Name	Symbol	Ordnungszahl	Relative Atommasse*	Name	Symbol	Ordnungszahl	Relative Atommasse*
Uran	U	92	238,0289	Ytterbium	Yb	70	173,04
Vanadium	V	23	50,9415	Yttrium	Y	39	88,9059
Wasserstoff	H	1	1,0079	Zink	Zn	30	65,409
Wolfram	W	74	183,84	Zinn	Sn	50	118,710
Xenon	Xe	54	131,293	Zirkonium	Zr	40	91,224

Präzisere Angaben zur Masse und zu den Fehlervarianzen finden sich unter <http://physics.nist.gov/PhysRefData/>. Die Masse ist in atomaren Masseneinheiten für natürliche Isotopengemische angegeben. Inzwischen wurde im Juni 2009 das Element 112 von der International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) bestätigt.

Mathematische Grundlagen

41

41.1	Signifikante Stellen	1392
41.2	Gleichungen	1393
41.3	Direkte und umgekehrte Proportionalität	1394
41.4	Lineare Gleichungen	1395
41.5	Quadratische Gleichungen und Zerlegung in Linearfaktoren .	1397
41.6	Potenzen und Logarithmen	1398
41.7	Geometrie	1400
41.8	Trigonometrie und Vektoren	1402
41.9	Die Binomialentwicklung	1408
41.10	Komplexe Zahlen	1409
41.11	Differenzialrechnung	1411
41.12	Integralrechnung	1417

In diesem Kapitel fassen wir zum Auffrischen des mathematischen Schulstoffs die wichtigsten Ergebnisse der Algebra, Geometrie, Trigonometrie und Analysis zusammen, ohne die man im Physikstudium nicht zurechtkommt. In vielen Fällen bringen wir nur die Aussagen selbst, ohne sie zu beweisen.

41.1 Signifikante Stellen

Viele Zahlen, mit denen wir in Technik und Naturwissenschaft arbeiten, ergeben sich aus Messungen und sind daher nur mit einer gewissen Unsicherheit bekannt. Diese Unsicherheit sollte sich in der Anzahl der verwendeten Stellen widerspiegeln. Wenn Sie beispielsweise einen Maßstab von 1 m Länge haben, auf dem Markierungen im Zentimeterabstand angebracht sind, können Sie damit die Höhe einer Kiste nur bis etwa einem Fünftel eines Zentimeters genau messen. Mit einem solchen Maßstab könnten Sie die Höhe der Kiste beispielsweise zu 27,0 cm bestimmen. Mit einem anderen Maßstab, der eine Millimetereinteilung hat, bestimmen Sie dagegen die Höhe der Kiste vielleicht zu 27,03 cm. Allerdings dürften Sie auch mit einer Millimeterskala die Höhe kaum genauer als 27,03 cm messen können, denn die Höhe könnte um etwa 0,01 cm variieren, je nachdem, an welcher Stelle Sie messen. Wenn Sie also aufschreiben, die Höhe betrage 27,03 cm, dann heißt das nichts anderes, als dass Ihre beste Schätzung der Höhe eben diese 27,03 cm sind; Sie behaupten damit aber nicht, die Höhe betrage 27,030000... cm. Die vier Stellen von 27,03 cm heißen **signifikante Stellen** oder gültige Stellen. Auch eine gemessene Länge von 2,703 m hat vier signifikante Stellen.

Die Anzahl der signifikanten Stellen im Ergebnis einer Rechnung hängt von der Anzahl der signifikanten Stellen in den Ausgangsdaten ab. Wenn Sie mit Zahlen arbeiten, die mit einer Unsicherheit behaftet sind, müssen Sie stets aufpassen, nicht mehr Stellen anzugeben, als die Messunsicherheit zulässt. Bei *Näherungsrechnungen* oder Überschlagsrechnungen zur Grö-

ßenordnung hat das Ergebnis stets nur eine oder sogar gar keine signifikante Stelle. Beim Multiplizieren, Teilen, Addieren oder Subtrahieren von Zahlen müssen Sie die Genauigkeit des Ergebnisses genau untersuchen. Die folgenden Regeln sollen Ihnen helfen, die Anzahl der signifikanten Stellen in einem Rechenergebnis zu bestimmen.

1. Beim Multiplizieren oder Dividieren von Größen ist die Anzahl der signifikanten Stellen im Endergebnis nicht größer als in der Größe mit der geringsten Anzahl an signifikanten Stellen.
2. Beim Addieren oder Subtrahieren von Größen sollte die Anzahl der angegebenen Stellen nach dem Komma die gleiche sein wie bei der Größe mit der geringsten Anzahl an signifikanten Stellen.
3. Exakte Werte haben eine unbegrenzte Anzahl von signifikanten Stellen. Beispielsweise hat ein durch Zählen bestimmter Wert (etwa 2 Tische) keine Unsicherheit und ist ein exakter Wert. Auch der Umrechnungsfaktor 0,0254000... von Meter in Zoll ist ein exakter Wert, weil 1,000... Zoll genau gleich 0,0254000... m ist. (Das Yard ist nach Definition drei Fuß zu je zwölf Zoll lang. Ein Yard ist damit exakt 0,9144 m lang, und 0,9144 geteilt durch 36 ist in der Tat genau gleich 0,0254.)
4. Manchmal sind auch Nullen signifikant, manchmal hingen nicht. Eine Null vor einer führenden Zahl ungleich null ist nicht signifikant. Beispielsweise hat 0,00890 drei signifikante Stellen: Die ersten drei Nullen sind nicht signifikant, sie geben nur Auskunft über die Lage des Dezimalkommas; die letzte Null (hinter der Neun) hingegen ist signifikant.
5. Nullen, die zwischen Zahlen ungleich null stehen, sind signifikant. Beispielsweise hat 5603 vier signifikante Stellen.
6. Die Anzahl von signifikanten Stellen in Zahlenangaben, die auf eine oder mehrere Nullen enden, ist allgemein nicht eindeutig zu bestimmen. Beispielsweise könnte 31 000 fünf signifikante Stellen haben, möglicherweise aber auch nur zwei. Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, sollten Sie Zahlen in der wissenschaftlichen Schreibweise (Potenzschreibweise) oder mithilfe eines Dezimalkommas angeben.

Beispiel 41.1 zeigt, wie man die Anzahl der signifikanten Stellen für das Endergebnis einer Rechnung bestimmt.

Beispiel 41.1: Der Mittelwert von drei Zahlen

Berechnen Sie den (arithmetischen) Mittelwert der drei Werte 19,90, -7,524 und -11,8179.

Problembeschreibung: Für die Rechnung müssen Sie die drei Zahlen addieren und dann durch 3 teilen. Die erste Zahl hat drei signifikante Stellen, die zweite Zahl vier und die dritte Zahl fünf.

Lösung: 1. Addieren Sie die drei Zahlen:

$$19,90 + (-7,254) + (-11,8179) = 0,5581$$

2. Wenn in der Aufgabe nur nach der Summe der drei Zahlen gefragt wäre, könnte man die Antwort auf die geringste Anzahl an Nachkommastellen der einzelnen Summanden runden. Für die Mittelwertbildung müssen wir aber die Summe noch durch 3 teilen; dazu benötigen wir das Zwischenergebnis einschließlich der zwei weiteren Nachkommastellen (fett gedruckte Ziffern):

$$\frac{0,5581}{3} = 0,18\mathbf{6}0333\dots$$

3. Nur zwei der Stellen im Zwischenergebnis 0,1860333... sind signifikante Stellen. Wir müssen diese Zahl also runden, um das Endergebnis zu erhalten. Die Zahl 3 im Nenner ist eine ganze Zahl und hat eine unbegrenzte Anzahl an signifikanten Stellen. Daher hat die Endantwort dieselbe Anzahl an signifikanten Stellen wie das Zwischenergebnis, also zwei:

Das Endergebnis ist **[0,19]**.

Plausibilitätsprüfung: Die Summe in Schritt 1 hat zwei signifikante Stellen nach dem Komma, genauso viele wie der Summand mit der geringsten Anzahl an signifikanten Nachkommastellen.

Übung 41.1: Berechnen Sie $\frac{5,3 \text{ mol}}{22,4 \text{ mol/l}}$. ▶

Übung 41.2: Berechnen Sie $57,8 \text{ m/s} - 26,24 \text{ m/s}$. ▶

41.2 Gleichungen

Eine Gleichung ist eine Aussage, die mithilfe von Zahlen und mathematischen Symbolen geschrieben wird und die besagt, dass die beiden Größen auf der linken und der rechten Seite des Gleichheitszeichens (=) gleich sind. Die Größe auf einer der Gleichungsseiten kann aus einem einzelnen Term oder einer Summe bzw. einer Differenz von mehreren **Termen** – d. h. einer sinnvollen mathematischen Zeichenfolge – bestehen. Beispielsweise enthält die Gleichung $x = 1 - (ay + b)/(cx - d)$ drei Terme, nämlich x auf der linken sowie 1 und $-(ay + b)/(cx - d)$ auf der rechten Seite.

An Gleichungen kann man folgende algebraische Operationen vornehmen:

1. Auf beiden Seiten der Gleichung kann dieselbe Größe addiert oder subtrahiert werden.
2. Beide Seiten der Gleichung können mit derselben Größe multipliziert oder durch sie dividiert werden.
3. Beide Seiten der Gleichung können in dieselbe Potenz erhoben werden.

Diese Operationen sind jeweils auf beide Seiten der Gleichung anzuwenden, nicht auf die Einzelterme. (Da jedoch die Multiplikation bezüglich der Addition distributiv ist, gilt die Multiplikation (2.) – und nur sie! – auch termweise.)

Achtung: Die Division durch null ist in jedem Rechenschritt bei Lösung einer Gleichung verboten. Ergebnisse (sofern überhaupt etwas herauskommt) sind undefiniert und nicht gültig.

Addition bzw. Subtraktion gleicher Größen

Wenn Sie eine Gleichung wie $x - 3 = 7$ nach x auflösen wollen, müssen Sie auf beiden Seiten der Gleichung 3 addieren: $(x - 3) + 3 = 7 + 3$. Damit ergibt sich $x = 10$.

Multiplikation bzw. Division mit gleichen Größen

Eine Gleichung wie $3x = 17$ löst man nach x auf, indem man beide Seiten der Gleichung durch 3 teilt. Damit ergibt sich $x = 17/3$ bzw. $x = 5,7$.

Beispiel 41.2 zeigt eine Anwendung dieser Operationen auf eine einfache Gleichung.

Beispiel 41.2: Vereinfachung von Kehrwerten

Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

Gleichungen, bei denen die Kehrwerte von Unbekannten vorkommen, tauchen beispielsweise in der geometrischen Optik und bei der Untersuchung von elektrischen Schaltkreisen auf, etwa um den Gesamtwiderstand von mehreren parallel geschalteten Widerständen zu berechnen.

Problembeschreibung: In dieser Gleichung steht auf der Seite der Gleichung neben dem Term, der x enthält, noch ein Term ohne x . Ferner steht x im Nenner eines Bruchs.

Lösung: 1. Ziehen Sie $\frac{1}{4}$ von beiden Seiten der Gleichung ab:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

2. Vereinfachen Sie die rechte Seite, indem Sie beide Terme auf den Hauptnenner bringen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} \quad \text{also} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

3. Sie erhalten den Wert von x , indem Sie beide Seiten der Gleichung mit $12x$ multiplizieren:

$$12 \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = \cancel{12x} \frac{1}{\cancel{12}} \\ \boxed{12 = x}$$

Plausibilitätsprüfung: Setzen Sie für x auf der linken Seite der Ausgangsgleichung 12 ein:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Übung 41.3: Lösen Sie nach x auf: $(7,0 \text{ cm}^3)x = 18 \text{ kg} + (4,0 \text{ cm}^3)x$. \blacktriangleleft

Übung 41.4: Lösen Sie nach x auf: $\frac{4}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{x}$. $\blacktriangleleft \blacksquare$

den Zusammenhang zwischen Ihrem Verdienst und der Arbeitszeit t in Stunden herstellt:

$$\frac{V}{t} = L \quad \text{oder} \quad V = Lt.$$

Wenn Sie in 5 Stunden 80 Euro verdienen, bekommen Sie einen Lohn $L = (80 \text{ Euro})/(5 \text{ Stunden}) = (16 \text{ Euro})/\text{Stunde}$. Um den Betrag zu bestimmen, den Sie in 8 Stunden verdienen, berechnen Sie

$$V = (16 \text{ Euro/Stunde}) (8 \text{ Stunden}) = 128 \text{ Euro}.$$

Manchmal kann man solche Verhältnisaufgaben auch lösen, ohne die Proportionalitätskonstante explizit zu berechnen. Da Sie in 8 Stunden $\frac{8}{5}$ -mal so viel verdienen wie in 5 Stunden, können Sie Ihren Verdienst auch über folgende Rechnung bestimmen:

$$V = \frac{8}{5} (80 \text{ Euro}) = 128 \text{ Euro}.$$

Beispiel 41.3 illustriert den Umgang mit solchen Verhältnisgleichungen.

41.3 Direkte und umgekehrte Proportionalität

Wenn zwei veränderliche Größen x und y einander **direkt proportional** sind, dann bleibt ihr Verhältnis x/y gleich, auch wenn x und y sich ändern; zwei direkt proportionale Größen bezeichnet man kurz auch einfach nur als *proportional*. Zwei veränderliche Größen x und y heißen **umgekehrt proportional**, wenn bei einer Änderung von x und y ihr Produkt xy gleich bleibt (d. h. wenn x proportional zu $1/y$, dem Kehrwert von y , ist bzw. $1/x$ proportional zu y ist.)

Direkt und umgekehrt proportionale Zusammenhänge tauchen in der Physik häufig auf. Körper, die sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen, haben einen Impuls, der direkt proportional zu ihrer Masse ist. Nach dem idealen Gasgesetz ($pV = nRT$) ist der Druck p bei konstantem Volumen V direkt proportional zur (absoluten) Temperatur T oder umgekehrt proportional zum Volumen, solange die Temperatur gleich bleibt. Nach dem Ohm'schen Gesetz ($U = RI$) ist die über einem elektrischen Widerstand abfallende Spannung U direkt proportional zum elektrischen Strom I , wenn der Widerstand R konstant bleibt.

Proportionalitätskonstante

Wenn zwei Größen direkt proportional sind, sind sie durch eine *Proportionalitätskonstante* miteinander verbunden. Wenn Sie beispielsweise für Ihre Arbeit mit einem festen Stundenlohn L bezahlt werden, dann ist Ihr Verdienst V direkt proportional zur Arbeitszeit t . Der Lohn L ist die Proportionalitätskonstante, die

Beispiel 41.3: Der Anstreicher

Sie benötigen 15,4 ml Farbe, um eine Seite eines Würfels zu streichen. Die Flächeninhalt dieser Seite beträgt 426 cm². Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem benötigten Volumen an Farbe und der zu streichenden Farbe? Wie viel Farbe benötigen Sie, um eine Seite eines Würfels zu streichen, wenn der Flächeninhalt einer Seitenfläche 503 cm² beträgt?

Problembeschreibung: Um die benötigte Menge an Farbe zum Streichen einer Würfelseite von 503 cm² zu bestimmen, müssen Sie eine Verhältnisgleichung aufstellen.

Lösung: 1. Das benötigte Volumen V an Farbe steigt proportional mit dem Flächeninhalt A der zu streichenden Fläche:

V und A sind direkt proportional.

Es gilt also $\frac{V}{A} = k$ bzw. $V = kA$ mit der Proportionalitätskonstante k .

2. Bestimmen Sie den Wert der Proportionalitätskonstante aus den gegebenen Werten $V_1 = 15,4 \text{ ml}$ und $A_1 = 426 \text{ cm}^2$:

$$k = \frac{V_1}{A_1} = \frac{15,4 \text{ ml}}{426 \text{ cm}^2} = 0,0361 \text{ ml/cm}^2$$

3. Bestimmen Sie das benötigte Volumen an Farbe zum Streichen einer Würfelseite mit einem Flächeninhalt von 503 cm². Benutzen Sie dazu die in Schritt 1 berechnete

Proportionalitätskonstante:

$$V_2 = k A_2 = (0,0361 \text{ ml/cm}^2) (503 \text{ cm}^2)$$

$$= 18,2 \text{ ml}$$

Plausibilitätsprüfung: Der berechnete Wert für V_2 ist größer als der Wert für V_1 , wie zu erwarten war: Für das Streichen einer Fläche von 503 cm^2 sollte man eine größere Menge an Farbe verbrauchen als für das Streichen von 428 cm^2 , da 503 cm^2 eine größere Fläche ist als 428 cm^2 .

Übung 41.5: Ein zylindrischer Behälter fasst $0,3841$ Wasser. Wie viel Wasser würde in den Behälter passen, wenn man dessen Radius verdoppelt und seine Höhe unverändert lässt?

Hinweis: Das Volumen eines senkrechten Kreiszylinders mit dem Radius r und der Höhe h beträgt $V = \pi r^2 h$. Das Volumen V ist bei gleich bleibender Höhe also direkt proportional zu r^2 . ▲

Übung 41.6: Betrachten Sie nochmals den Behälter aus Übung 41.5. Wie viel Wasser würde er fassen, wenn man sowohl seine Höhe als auch seinen Radius verdoppelt? Wie viel Wasser würde in den Behälter passen, wenn man dessen Höhe verdoppelt und den Radius unverändert lässt? ▲

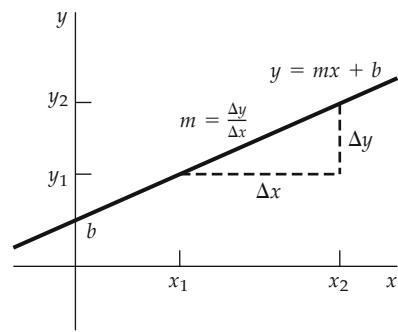


Abbildung 41.1 Graph der linearen Gleichung $y = mx + b$; darin ist b der y -Achsenabschnitt (zwischen dem Koordinatenursprung und dem Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse) und $m = \Delta y / \Delta x$ die Steigung der Geraden.

die auch als **y -Achsenabschnitt** bezeichnet wird, ist der Wert von y bei $x = 0$. Die Konstante m ist die **Steigung** der Linie und gibt das Verhältnis der Änderung von y zur entsprechenden Änderung von x an. In der Abbildung sind zwei Punkte der Linie, nämlich (x_1, y_1) und (x_2, y_2) , hervorgehoben, ferner sind die Änderungen $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ eingezeichnet. Die Steigung m ergibt sich dann gemäß

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Wenn in der Gleichung $y = mx + b$ die Variablen x und y beide unbekannt sind, gibt es keine eindeutigen Lösungspaire (x, y) als Lösung der Gleichung. Jedes Paar (x_1, y_1) auf der Geraden in Abbildung 41.1 erfüllt die Gleichung. Um den Schnittpunkt mit der y -Achse zu bestimmen, müssen wir den Funktionswert zu $x = 0$ berechnen.

Wir können die Gleichungen $x = 0$ und $y = mx + b$ als zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten auffassen. Allgemein gilt: Erst wenn wir zwei unabhängige Gleichungen haben, jeweils mit denselben Unbekannten x und y , lassen sich die beiden Gleichungen simultan nach den beiden Unbekannten auflösen. Beispiel 41.4 illustriert dies anhand eines Systems von (zwei) linearen Gleichungen. Entsprechende Lösungsansätze gibt es auch für lineare Gleichungssysteme aus n Gleichungen für n Unbekannte.

41.4 Lineare Gleichungen

Eine **lineare Gleichung** ist ganz allgemein eine Gleichung, bei der jeder Term die Variablen in nullter oder erster Potenz enthält; d. h. jeder Term ist entweder eine Konstante oder ergibt sich als ein Produkt aus einer Konstanten und einer Variablen in der Potenz 1. Eine typische Form ist beispielsweise $x+2y-4z = 3$ (mit Variablen x , y und z). Solche Gleichungen heißen linear, weil ihre Graphen (Funktionskurven) Geraden (für zwei Variablen) bzw. Ebenen (für drei Variablen) sind. Die Gleichungen, mit denen man eine direkte Proportionalität zwischen zwei Variablen beschreibt, sind lineare Gleichungen.

Graph einer linearen Gleichung

Eine lineare Gleichung für den Zusammenhang zwischen den Variablen y und x kann auf die Normalform

$$y = mx + b \quad (41.1)$$

gebracht werden, die auch als *Geradengleichung* bezeichnet wird; m und b sind darin Konstanten, die positiv oder negativ sein können. Abbildung 41.1 zeigt den Graphen der Werte von x und y , die der Gleichung 41.1 genügen. Die Konstante b ,

Beispiel 41.4: Zwei Gleichungen für zwei Unbekannte

Geben Sie die Werte für x und y an, die gleichzeitig die Gleichungen

$$3x - 2y = 8 \quad (41.2)$$

und

$$y - x = 2 \quad (41.3)$$

erfüllen.

Problembeschreibung: Abbildung 41.2 zeigt die zu den Gleichungen gehörenden Graphen. Im Schnittpunkt erfüllen die Werte von x und y beide Gleichungen gleichzeitig. Oft genügt eine solche *grafische Lösung*. Analytisch können wir solche simultanen Gleichungen in zwei Schritten lösen: indem wir zunächst eine der beiden Gleichungen nach einer Unbekannten auflösen und diese Unbekannte dann in der anderen Gleichung ersetzen.

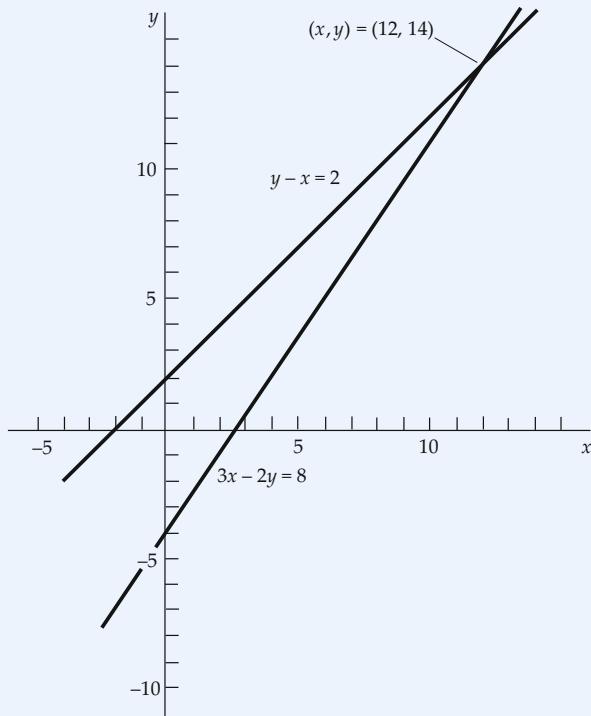


Abbildung 41.2 Graphen der Gleichungen 41.2 und 41.3. Am Schnittpunkt der beiden Linien erfüllen die Werte für x und y beide Gleichungen gleichzeitig.

Lösung: 1. Lösen Sie Gleichung 41.3 nach y auf:

$$y = x + 2$$

2. Setzen Sie diesen Wert für y in Gleichung 41.2 ein:

$$3x - 2(x + 2) = 8$$

3. Vereinfachen Sie die Gleichung und lösen Sie nach x auf:

$$\begin{aligned} 3x - 2x - 4 &= 8 \\ x - 4 &= 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 12}$$

4. Bestimmen Sie nun mit dieser Lösung für x und einer der beiden gegebenen Gleichungen auch den Wert von y :

$$y - x = 2 \quad \text{mit } x = 12$$

$$y - 12 = 2$$

$$y = 2 + 12 = 14$$

$$\boxed{y = 14}$$

Plausibilitätsprüfung: Eine Alternative zu diesem *Einsetzungsverfahren* besteht darin, eine der Gleichungen mit einer entsprechenden Konstante zu multiplizieren, sodass einer der unbekannten Terme sich hinweghebt, wenn man die Gleichungen addiert oder subtrahiert (sog. *Additions- oder auch Subtraktionsverfahren*). Wenn wir beispielsweise Gleichung 41.3 mit 2 multiplizieren, kommen wir auf

$$2(y - x) = 2(2)$$

$$2y - 2x = 4.$$

Dieses Ergebnis addieren wir zu Gleichung 41.2 und lösen nach x auf:

$$\begin{array}{r} 2y - 2x = 4 \\ 3x - 2y = 8 \\ \hline 3x - 2x = 12 \end{array} \Rightarrow x = 12.$$

Wenn man dies in Gleichung 41.3 einsetzt und nach y auflöst, erhält man:

$$y - 12 = 2 \Rightarrow y = 14.$$

Übung 41.7: Richtig oder falsch? $xy = 4$ ist eine lineare Gleichung. ◀

Übung 41.8: Zur Zeit $t = 0,0\text{ s}$ befindet sich ein Teilchen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang der x -Achse bewegt, bei $x = 3,0\text{ m}$. Zur Zeit $t = 2,0\text{ s}$ befindet es sich bei $x = 12,0\text{ m}$. Stellen Sie eine lineare Gleichung für den Zusammenhang zwischen x und t auf. ◀

Übung 41.9: Lösen Sie folgendes Paar von simultanen Gleichungen für x und y :

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}x + \frac{1}{3}y &= 30 \\ y - 5x &= 20. \end{aligned}$$



41.5 Quadratische Gleichungen und Zerlegung in Linearfaktoren

Eine **quadratische Gleichung** ist eine Gleichung der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$; dabei sind x und y Variable, a, b, c, d, e, f und k sind Konstanten. In jedem Term der Gleichung sind die Potenzen, in die die Variablen erhoben werden, natürliche Zahlen mit der Summe 2, 1 oder 0. Eine einfache quadratische Gleichung in der Normalform

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (41.4)$$

(a, b und c sind Konstanten) hat zwei Lösungen oder **Wurzeln**, d. h. Werte von x , für die die Gleichung erfüllt ist.

Zerlegung in Linearfaktoren

Viele – leider nicht alle – quadratische Gleichungen kann man in Linearfaktoren zerlegen oder **faktorisieren**. Sehr oft lassen sich die Terme einer Gleichung umordnen oder zu anderen Termen zusammenfassen. Bei einer Faktorisierung suchen wir Multiplikatoren und Multiplikanden (sogenannte Linearfaktoren oder kurz **Faktoren**), mit deren Hilfe sich zwei oder mehr Terme als ein Produkt schreiben lassen. Beispielsweise finden wir die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$, indem wir die linke Seite so umschreiben, dass wir Faktoren ausklammern können: $x^2 - 2x - x + 2 = x(x-2) - 1(x-2)$; damit erhalten wir $(x-2)(x-1) = 0$. Die Wurzeln der Gleichung sind dann $x = 2$ und $x = 1$.

Die Faktorisierung ist sehr nützlich, wenn man Gleichungen vereinfachen oder den Zusammenhang zwischen Größen erkennen möchte. Sie sollten sich mit der Multiplikation der Faktoren $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$ vertraut machen.

Ferner sollten Sie rasch einige typische faktorisierbare Kombinationen erkennen können:

1. Gemeinsamer Faktor: $2ax + 3ay = a(2x + 3y)$.
2. Vollständiges Quadrat (binomische Formeln): $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ und $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$. (Wenn sich der Ausdruck auf der linken Seite einer quadratischen Gleichung in Normalform als Quadrat eines Ausdrucks schreiben lässt, dann sind die beiden Wurzeln gleich.)
3. Differenz von Quadraten: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

Haben Sie auch ein Auge auf Primteiler (z. B. 2, 5, 7 usw.), denn damit kann man Terme manchmal sehr rasch faktorisieren und vereinfachen. Beispielsweise lässt sich die Gleichung $98x^2 - 140 = 0$ vereinfachen, denn 98 und 140 haben den gemeinsamen Teiler 2. Man erhält $2(49x^2 - 70) = 0$ und damit $49x^2 - 70 = 0$. Doch auch dieses Ergebnis lässt sich noch vereinfachen, weil 49 und 70 den gemeinsamen Teiler 7 haben. Durch Herausziehen der 7 erhält man $7(7x^2 - 10) = 0$ und damit letztlich $7x^2 - 10 = 0$.

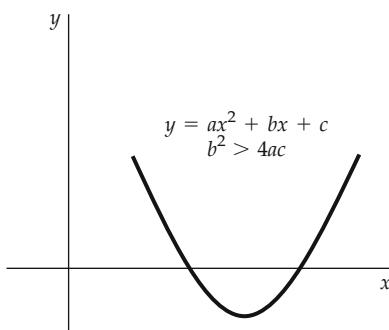


Abbildung 41.3 Graph von $y = ax^2 + bx + c$ für den Fall $b^2 > 4ac$. Die beiden x -Werte, für die $y = 0$ gilt, erfüllen die quadratische Gleichung 41.4.

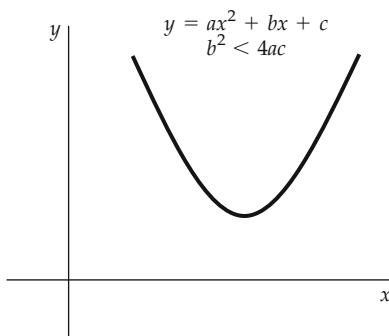


Abbildung 41.4 Graph von $y = ax^2 + bx + c$ für den Fall $b^2 < 4ac$. In diesem Fall gibt es keine reellen Werte für x , bei denen $y = 0$ ist.

Die quadratische Formel

Zwar lassen sich nicht alle quadratischen Gleichungen durch Faktorisieren lösen. Man kann aber eine quadratische Gleichung in der Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ mit *beliebigen* Konstanten a und b immer mit der **quadratischen Formel** lösen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (41.5)$$

Wenn b^2 größer ist als $4ac$ (d. h. wenn die Wurzel positiv ist), gibt es zwei Lösungen, die zu dem Plus- bzw. dem Minuszeichen bei \pm gehören. Abbildung 41.3 zeigt eine Funktionskurve zu $y = ax^2 + bx + c$. Der Graph ist eine **Parabel**, die die x -Achse zweimal schneidet. (Die einfachste Darstellung einer Parabel in x, y -Koordinaten ist eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$.) Die beiden Lösungen der Gleichung sind die Werte, für die $y = 0$ gilt; sie sind also die x -Achsenabschnitte.

Ist b^2 kleiner als $4ac$ (d. h. wenn die Wurzel in Gleichung 41.5 negativ ist), so schneidet der Graph von y die x -Achse nicht (Abbildung 41.4); es gibt zwar immer noch zwei Lösungen, allerdings sind sie nicht reell (vgl. dazu die Diskussion zu den komplexen Zahlen in Abschnitt 41.10). Für $b^2 = 4ac$ berührt der Graph von y die x -Achse im Punkt $x = -b/2a$; die beiden Lösungen fallen also zusammen und sind gleich $-b/2a$.

Beispiel 41.5 illustriert die Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren.

Beispiel 41.5: Faktorisierung eines Polynoms zweiten Grades

Zerlegen Sie den Ausdruck $6x^2 + 19xy + 10y^2$ in Linearfaktoren.

Problembeschreibung: Wir untersuchen die Koeffizienten der Terme, um zu sehen, ob sich der Ausdruck auch ohne die Anwendung raffinierterer Methoden in Linearfaktoren zerlegen lässt. Beachten Sie die Zerlegung $(ax + by)(cx + dy) = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$.

Lösung: 1. Der Koeffizient vor x^2 ist 6 und lässt sich auf zwei Weisen faktorisieren:

$$\begin{aligned}ac &= 6 \\3 \cdot 2 &= 6 \quad \text{oder} \quad 6 \cdot 1 = 6\end{aligned}$$

2. Der Koeffizient vor y^2 ist 10 und lässt sich ebenfalls auf zwei Weisen faktorisieren:

$$\begin{aligned}bd &= 10 \\5 \cdot 2 &= 10 \quad \text{oder} \quad 10 \cdot 1 = 10\end{aligned}$$

3. Tragen Sie die Möglichkeiten für a, b, c und d in einer Tabelle auf. Fügen Sie eine Spalte für $ad + bc$ hinzu (das ist der Faktor, der laut der obigen Formel vor dem Produkt xy steht).

Für $a = 3$ ist $c = 2$ und umgekehrt. Außerdem gilt: Für $a = 6$ ist $c = 1$ und umgekehrt. Für jeden Wert von a gibt es vier mögliche Werte für b .

a	b	c	d	$ad + bc$
3	5	2	2	16
3	2	2	5	19
3	10	2	1	23
3	1	2	10	32
2	5	3	2	19
2	2	3	5	16
2	10	3	1	32
2	1	3	10	23
6	5	1	2	17
6	2	1	5	32
6	10	1	1	16
6	1	1	10	61
1	5	6	2	32
1	2	6	5	17
1	10	6	1	61
1	1	6	10	16

4. Bestimmen Sie eine Kombination, für die gilt $ad + bc = 19$. In der Tabelle gibt es zwei dieser Kombinationen.

nen. Beide führen zum selben Ergebnis:

$$\begin{aligned}ad + bc &= 19 \\3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 &= 19\end{aligned}$$

5. Verwenden Sie die Kombination in der zweiten Zeile der Tabelle, um den Ausdruck aus der Aufgabenstellung zu faktorisieren:

$$6x^2 + 19xy + 10y^2 = (3x + 2y)(2x + 5y)$$

Plausibilitätsprüfung: Zum Überprüfen multiplizieren Sie die Klammern $(3x + 2y)(2x + 5y)$ aus:

$$\begin{aligned}(3x + 2y)(2x + 5y) &= 6x^2 + 15x + 4xy + 10y^2 \\&= 6x^2 + 19xy + 10y^2.\end{aligned}$$

Auch die Kombination aus der fünften Zeile der Tabelle führt zu dem in Schritt 4 genannten Ergebnis.

Übung 41.10: Führen Sie die Rechnung aus und zeigen Sie, dass auch die Kombination in der fünften Zeile der Tabelle zu dem in Schritt 4 genannten Ergebnis führt. ▶

Übung 41.11: Faktorisieren Sie $2x^2 + 4xy + 2y^2$. ▶

Übung 41.12: Faktorisieren Sie $2x^4 + 10x^3 + 12x^2$. ▶

41.6 Potenzen und Logarithmen

Exponenten

Der Ausdruck x^n steht für die Größe, die sich bei der n -maligen Multiplikation von x mit sich selbst ergibt. Beispielsweise gilt $x^2 = x \cdot x$ oder $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Die Zahl n heißt die **Potenz** oder der **Exponent** zur **Basis** x . Es folgen einige Regeln zum Vereinfachen von Termen mit Exponenten:

1. Wenn zwei Potenzen von x miteinander multipliziert werden, addieren sich die Exponenten:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n}. \quad (41.6)$$

Beispiel: $x^2 x^3 = x^{2+3} = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$.

2. Eine beliebige Zahl (außer null), die zur Potenz 0 erhoben wird, hat definitionsgemäß den Wert 1:

$$x^0 = 1. \quad (41.7)$$

3. Aus Regel 2 folgt für negative Exponenten ($-n$):

$$\begin{aligned}x^n x^{-n} &= x^0 = 1 \\x^{-n} &= \frac{1}{x^n}.\end{aligned} \quad (41.8)$$

4. Wenn zwei Potenzen durcheinander geteilt werden, subtrahiert man die Exponenten:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n-m}. \quad (41.9)$$

5. Wenn man eine Potenz zu einer anderen Potenz erhebt, multiplizieren sich die Exponenten:

$$(x^n)^m = x^{nm}. \quad (41.10)$$

6. Wenn Exponenten als Brüche geschrieben werden, deutet man sie als die Wurzeln aus der Basis. Beispielsweise gilt

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$$

und damit

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \quad (x > 0).$$

Die Anwendung einiger dieser Regeln zeigt Beispiel 41.6.

Beispiel 41.6: Vereinfachung eines Ausdrucks mit Exponenten

Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{x^4 x^7}{x^8}$.

Problembeschreibung: Nach Regel 1 addieren sich die Exponenten, wenn zwei Potenzen multipliziert werden. Nach Regel 4 subtrahiert man die Exponenten, wenn man zwei Potenzen durcheinander teilt.

Lösung: 1. Vereinfachen Sie den Zähler mithilfe von Regel 1:

$$x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$$

2. Vereinfachen Sie den Bruch $\frac{x^{11}}{x^8}$ mithilfe von Regel 4:

$$\frac{x^{11}}{x^8} = x^{11} \cdot x^{-8} = x^{11-8} = x^3$$

Plausibilitätsprüfung: Setzen Sie zum Überprüfen der Rechnung $x = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{2^4 2^7}{2^8} &= 2^3 = 8 \\ \frac{2^4 2^7}{2^8} &= \frac{16 \cdot 128}{256} = \frac{2048}{256} = 8. \end{aligned}$$

Übung 41.13: Vereinfachen Sie $(x^{1/18})^9$. ◀

Übung 41.14: Vereinfachen Sie $x^6 x^0$. ◀ ■

Logarithmen

Jede positive Zahl lässt sich als eine Potenz einer anderen positiven Zahl (außer 1) darstellen. Wenn zwischen y und x die Beziehung $y = a^x$ herrscht, dann nennt man die Zahl a den **Logarithmus** von y zur Basis a . Man schreibt diese Beziehung von x und y dann in der Form

$$x = \log_a y.$$

Folglich sind die Logarithmen *Exponenten*, und für sie gelten ganz entsprechende Rechenregeln wie die bereits eingeführten Potenzregeln:

1. Für zwei Zahlen y_1 und y_2 mit $y_1 = a^n$ und $y_2 = a^m$ gilt

$$y_1 y_2 = a^n a^m = a^{n+m}.$$

Entsprechend ergibt sich durch Logarithmieren auf allen Seiten der Potenzgleichung:

$$\begin{aligned} \log_a y_1 y_2 &= \log_a a^{n+m} = n + m \\ &= \log_a a^n + \log_a a^m = \log_a y_1 + \log_a y_2. \end{aligned} \quad (41.11)$$

Daraus folgt

$$\log_a y^n = n \log_a y. \quad (41.12)$$

2. Wegen $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ gilt

$$\log_a a = 1 \quad (41.13)$$

und

$$\log_a 1 = 0. \quad (41.14)$$

Logarithmus und Potenz verhalten sich wie Umkehrfunktionen zueinander, denn

$$y = a^x = a^{\log_a y},$$

also

$$a^{\log_a y} = y.$$

Meist verwendet man nicht Logarithmen zu einer beliebigen Basis, sondern wählt bestimmte Zahlen als Basis aus. Ein Logarithmus zur Basis 10 heißt Briggs'scher, dekadischer, gewöhnlicher oder **Zehnerlogarithmus**, die Logarithmen zur Basis e (e ist die Euler'sche Zahl mit $e = 2,718\dots$) werden **natürliche Logarithmen** genannt. Sie sind die Exponenten der Exponential- oder e-Funktion.

In diesem Buch werden wir der Konvention folgen, die natürlichen Logarithmen mit dem Symbol \ln und die Zehnerlogarithmen mit dem Symbol \log (ohne Angabe der Basis) zu bezeichnen. Wir schreiben also

$$\log_e x = \ln x \quad \text{und} \quad \log_{10} x = \log x. \quad (41.15)$$

Aus $y = \ln x$ folgt dann sofort

$$x = e^y. \quad (41.16)$$

Logarithmen lassen sich von einer Basis auf eine andere Basis umrechnen. Ausgehend von

$$z = \log x \quad (41.17)$$

kommt man sofort auf

$$10^z = 10^{\log x} = x. \quad (41.18)$$

Bildet man nun den natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten von Gleichung 41.18, so führt das zu

$$z \ln 10 = \ln x.$$

Setzt man nun $z = \log x$ ein (Gleichung 41.17), so ergibt sich

$$\ln x = (\ln 10) \log x. \quad (41.19)$$

In Beispiel 41.7 wird der mathematische Zusammenhang zwischen den Konstanten beim Wechsel der Basis von Logarithmen hergeleitet.

Beispiel 41.7: Umrechnung zwischen dekadischen und natürlichen Logarithmen

Die zu Gleichung 41.19 führenden Schritte zeigen, dass im Allgemeinen $\log_b x = (\log_b a) \log_a x$ gilt; für den Wechsel von einer Basis des Logarithmus zu einer anderen ist also nur eine Multiplikation mit einer Konstante erforderlich. Beschreiben Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen der Konstante, die beim Wechsel von dekadischen zu natürlichen Logarithmen auftritt, und der Konstante für den Wechsel von natürlichen zu dekadischen Logarithmen.

Problembeschreibung: Wir haben eine allgemeine Formel für den Wechsel der Logarithmen von einer Basis zu einer anderen. Wir bestimmen den mathematischen Zusammenhang, indem wir in dieser Formel a und b austauschen.

Lösung: 1. Wir gehen von der allgemeinen Formel aus, mit der man Logarithmen von der Basis a auf die Basis b umrechnen kann:

$$\log_b x = (\log_b a) \log_a x$$

2. Um von Basis b auf die Basis a umzurechnen, tauscht man alle a und b gegeneinander aus:

$$\log_a x = (\log_a b) \log_b x$$

3. Teilen Sie beide Seiten der Gleichung in Schritt 1 durch $\log_a x$:

$$\frac{\log_b x}{\log_a x} = \log_b a$$

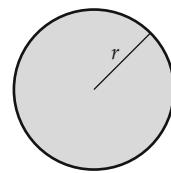


Abbildung 41.5 Der Flächeninhalt eines Kreises ist $A = \pi r^2$.

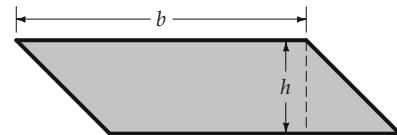


Abbildung 41.6 Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms ist $A = b \cdot h$.

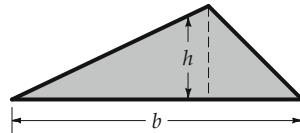


Abbildung 41.7 Der Flächeninhalt A eines Dreiecks ist $A = \frac{1}{2} b \cdot h$.

4. Teilen Sie beide Seiten der Gleichung in Schritt 2 durch $(\log_a b)/\log_a x$:

$$\frac{1}{\log_a b} = \frac{\log_b x}{\log_a x}$$

5. Die Ergebnisse zeigen, dass die Umrechnungsfaktoren $\log_b a$ und $\log_a b$ Kehrwerte voneinander sind:

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

Plausibilitätsprüfung: Für $\log_{10} e$ erhalten Sie mit dem Taschenrechner den Wert 0,43429. Für $\ln 10$ berechnen Sie mit dem Taschenrechner 2,3026. Multiplizieren Sie diese beiden Werte miteinander, das Produkt ist 1,0000.

Übung 41.15: Berechnen Sie $\log_{10} 1000$. ◀

Übung 41.16: Berechnen Sie $\log_2 5$. ◀

41.7 Geometrie

Geometrische Figuren sind in zwei oder drei Dimensionen begrenzte Formen, deren Längen, Flächeninhalte oder Rauminhalte durch bestimmte Verhältnisse verbunden sind. Die Eigen-

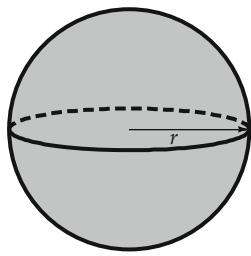


Abbildung 41.8 Bei einer Kugel beträgt der Flächeninhalt A der Oberfläche $A = 4\pi r^2$, ihr Volumen V ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

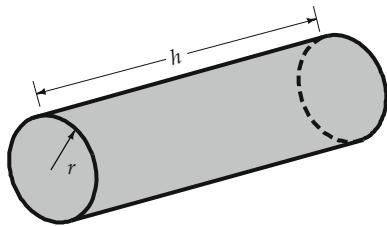


Abbildung 41.9 Die Mantelfläche eines Zylinders hat den Flächeninhalt $A = 2\pi r h$, das Volumen V des Zylinders beträgt $V = \pi r^2 h$.

schaften einiger dieser Figuren zu erkennen und anzuwenden ist eine grundlegende Untersuchungstechnik in der Physik. Beispielsweise erhalten wir aus den charakteristischen Verhältnissen von Längen in bestimmten Dreiecken die Gesetze der *Trigonometrie* (vgl. dazu Abschnitt 41.8), aus denen wir wiederum die Vektorrechnung ableiten können, die für die Untersuchung von Bewegungen in zwei oder drei Dimensionen unentbehrlich ist. Kreise und Kugeln sind eine Grundlage für die Behandlung u. a. von Drehimpuls und den Wahrscheinlichkeitsdichten in der Quantenmechanik.

Grundlegende Formeln der Geometrie

Kreis

Das Verhältnis von der Umfangslänge eines Kreises zu dessen Durchmesser ist die Zahl π , die deswegen auch als Kreiszahl bezeichnet wird. Sie hat näherungsweise den Wert

$$\pi = 3,141\,592.$$

Der Umfang U eines Kreises hängt demnach mit dessen Durchmesser d und dessen Radius r über die Ausdrücke

$$U = \pi d = 2\pi r \quad \text{Umfang eines Kreises} \quad (41.20)$$

zusammen. Der Flächeninhalt A eines Kreises ist (Abbildung 41.5)

$$A = \pi r^2 \quad \text{Flächeninhalt eines Kreises.} \quad (41.21)$$

Parallelogramm

Ein Parallelogramm ist ein ebenes Viereck, dessen Seiten paarweise parallel sind. Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms mit der Basis b und der Höhe h ist (Abbildung 41.6)

$$A = b h.$$

Da sich jedes Parallelogramm in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegen lässt, beträgt der Flächeninhalt A eines Dreiecks die Hälfte von dem Produkt aus Basis b und Höhe h (Abbildung 41.7)

$$A = \frac{1}{2} b h.$$

Kugel

Bei einer Kugel (Abbildung 41.8) mit dem Radius r beträgt der Flächeninhalt A der Oberfläche

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{Flächeninhalt der Kugeloberfläche,} \quad (41.22)$$

der Rauminhalt V der Kugel ist

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{Volumen der Kugel.} \quad (41.23)$$

Zylinder

Bei einem Zylinder (genauer: einem senkrechten Kreiszylinder, Abbildung 41.9) vom Radius r und der Höhe h hat die Mantelfläche (d. h. die Oberfläche ohne die runden Endflächen) den Flächeninhalt A :

$$A = 2\pi r h \quad \text{Flächeninhalt der Zylindermantelfläche,} \quad (41.24)$$

das Volumen V beträgt

$$V = \pi r^2 h \quad \text{Volumen des Zylinders.} \quad (41.25)$$

Beispiel 41.8 zeigt, wie man diese geometrischen Formeln auf bestimmte physikalische Aufgaben anwenden kann.

Beispiel 41.8: Die Masse einer Kugelschale

Eine Kugelschale aus Aluminium hat einen Außen-durchmesser von 40,0 cm und einen Innendurchmes-ser von 39,0 cm. Berechnen Sie die Masse der Kugel-schale.

Problembeschreibung: Berechnen Sie die Masse der Kugelschale als Produkt aus dem Volumen des Aluminums und dessen Dichte. Das Volumen des Aluminums in der Kugelschale ergibt sich als Differenz zwischen dem Vo-lumen der Innenkugel mit dem Innendurchmesser $d_I = 2r_I = 39,0$ cm und dem Volumen der Außenkugel mit $d_A = 2r_A = 40,0$ cm. Die Dichte von Aluminium beträgt $\rho = 2,70 \cdot 10^3$ kg/m³.

Lösung: 1. Subtrahieren Sie das Volumen der Kugel mit dem Radius r_1 vom Volumen der Kugel mit dem Radius r_A :

$$V = \frac{4}{3} \pi r_A^3 - \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \frac{4}{3} \pi (r_A^3 - r_1^3)$$

2. Setzen Sie die Werte $r_A = 20,0 \text{ cm}$ und $r_1 = 19,5 \text{ cm}$ ein:

$$V = \frac{4}{3} \pi ((20,0 \text{ cm})^3 - (19,5 \text{ cm})^3) = 2,45 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$

3. Die Masse der Kugelschale ergibt sich nun als Produkt aus dem in Schritt 2 berechneten Volumen und der Dichte:

$$\begin{aligned} m &= V \rho = 2,45 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \cdot (2,70 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \\ &= 2,45 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \cdot 2,70 \text{ g/cm}^3 = [6,62 \text{ kg}] \end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten, dass das Volumen (und damit auch die Masse) der Kugelschale in derselben Größenordnung liegt wie das Volumen (bzw. die Masse) eines hohlen Würfels mit einer Außenlänge von 40,0 cm und einer Innenlänge von 39,0 cm. Das Volumen eines solchen Hohlwürfels beträgt $(40,0 \text{ cm})^3 - (39,0 \text{ cm})^3 = 4,68 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$. Das ist etwa doppelt so viel wie das Ergebnis aus Schritt 2, liegt also wie erwartet in derselben Größenordnung.

Übung 41.17: Bestimmen Sie das Verhältnis von dem Volumen V und dem Flächeninhalt A der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r . ◀

Übung 41.18: Welchen Flächeninhalt hat die Mantelfläche A eines Zylinders, dessen Radius r ein Drittel seiner Höhe h beträgt? ◀

41.8 Trigonometrie und Vektoren

Die **Trigonometrie** – das Wort stammt aus dem Griechischen und bedeutet „Dreiecksvermessung“ – ist die Untersuchung von einigen wichtigen mathematischen Funktionen, den sogenannten Winkelfunktionen im Dreieck oder **trigonometrischen Funktionen**. Die Winkelfunktionen lassen sich einfach als Verhältnisse der Seitenlängen von rechtwinkligen Dreiecken definieren; diese Definitionen sind zwar genau genommen auf Winkel zwischen 0 und 90° beschränkt, lassen sich jedoch erweitern, indem man den *Einheitskreis* um den Koordinatenursprung betrachtet und die x - und y -Koordinaten als Funktion des Winkels betrachtet, den der Radius mit der x -Achse bildet.

In der Physik treten trigonometrische Funktionen auf, sobald wir Vektoren zur Untersuchung von Bewegungen in zwei Dimensionen verwenden. Als **Vektoren** bezeichnet man gerich-

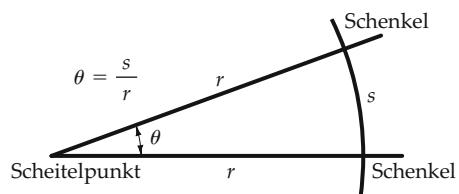


Abbildung 41.10 Das Bogenmaß für den Winkel θ in der Einheit Radian ist definiert als das Verhältnis s/r ; dabei ist s die Länge des Kreisbogens, der durch den Winkel aus einem Kreis vom Radius r ausgeschnitten wird.

tete Größen, die einen Betrag und eine Richtung haben (vgl. Abschnitt 2.1). Insbesondere kann man den Radius des Einheitskreises als Radiusvektor betrachten und als Pfeil vom Kreismittelpunkt zu einem Punkt auf dem Kreis darstellen. Die trigonometrischen Funktionen spielen auch bei der Behandlung von im umfassenden Sinne periodischen Vorgängen eine Rolle, z. B. bei der Kreisbewegung, bei Schwingungen oder bei der Wellenmechanik.

Winkel und Winkelmaße

Jeder Winkel, den zwei sich schneidende Geraden bilden, hat eine wohldefinierte Größe. Um sie zu bestimmen, verschiebt man den Winkel so, dass sein Scheitel – also der Schnittpunkt der beiden Geraden – den Mittelpunkt eines Kreises bildet. Die Größe des Winkels zwischen den Geraden – also den Schenkeln des Winkels – kann man an der Länge des Kreisbogens zwischen den Schenkeln ablesen. Man kann den Kreisbogen auch so interpretieren, als wäre er durch Drehung des Kreisradius gegen den Uhrzeigersinn erzeugt worden, und den Winkel als Teil einer vollen Umdrehung auffassen.

Das vertrauteste Winkelmaß ist das **Gradmaß** mit der Einheit **Grad** (Zeichen $^\circ$), das als $1/360$ der vollen Drehung (um 360°) festgelegt ist. Wird eine höhere Genauigkeit verlangt oder sind kleinere Winkel zu bestimmen, teilt man das Grad in Minuten (Zeichen $'$) und Sekunden (Zeichen $''$), mit $1' = 1^\circ/60$ und $1'' = 1'/60 = 1^\circ/3600$, oder man gibt das Gradmaß als gewöhnliche Dezimalzahl an.

Ein für wissenschaftliche Zwecke geeignetes Winkelmaß ist das **Bogenmaß** mit der Einheit **Radian** (Zeichen rad). Das Bogenmaß in rad ist die Länge des Kreisbogens von einem Schenkel des Winkels zum anderen, geteilt durch den Radius des Kreises (Abbildung 41.10). Wenn wir die Bogenlänge mit s und den Kreisradius mit r bezeichnen, dann haben wir für den Winkel θ das in rad angegebene Bogenmaß

$$\theta = \frac{s}{r}. \quad (41.26)$$

Da das Bogenmaß sich als Quotient zweier Längen ergibt, ist es dimensionslos. Die Einheit Radian wird daher in den meisten Gebieten der Physik als 1 gesetzt und weggelassen. Nur in der Licht- und Beleuchtungstechnik, die in diesem Buch

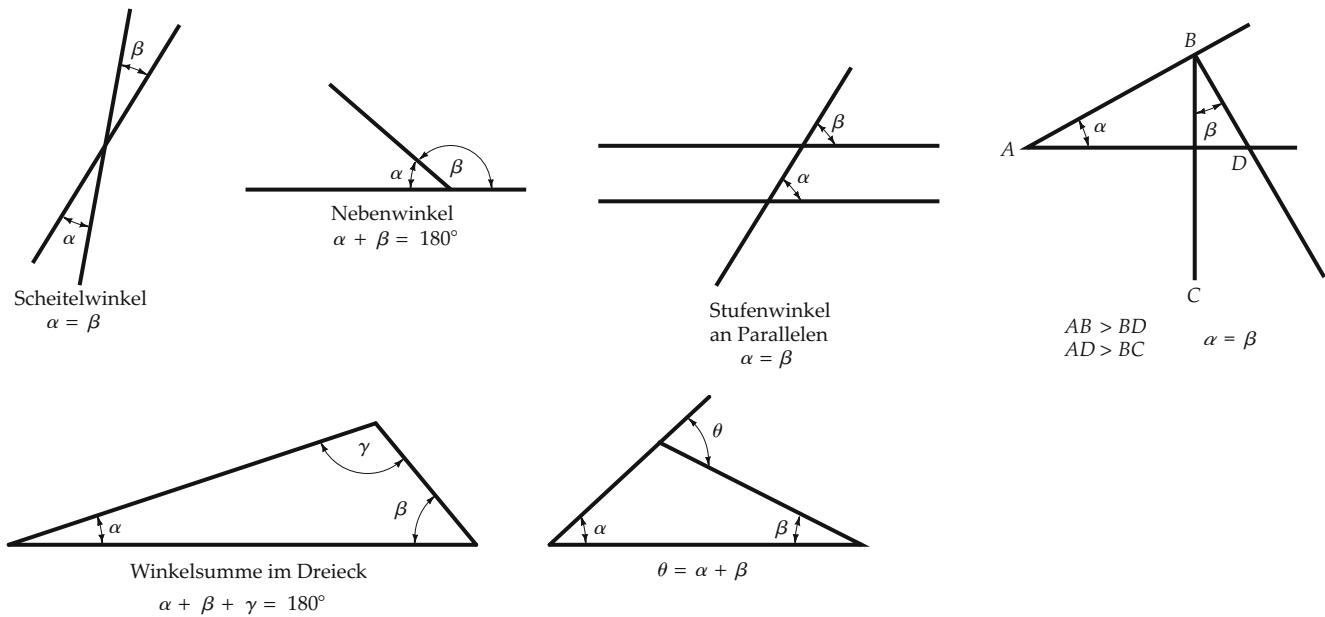


Abbildung 41.11 Einige nützliche Beziehungen zwischen Winkeln.

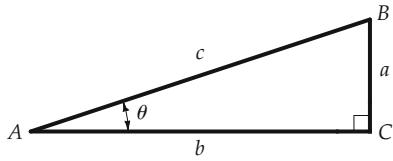


Abbildung 41.12 Rechtwinkliges Dreieck. Die Gegenkathete zum Winkel θ hat die Länge a , die Ankathete die Länge b , die Hypotenuse die Länge c .

nicht behandelt wird, würde dieses Vorgehen zu Schwierigkeiten führen; dort wird die Einheit Radian wie eine Basiseinheit behandelt (das Internationale Einheitensystem SI lässt dies ausdrücklich zu) und in Dimensionsbetrachtungen gesondert geführt.

Zwischen den Winkelmaßen Grad und Radian besteht die folgende Beziehung:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

oder

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ.$$

Abbildung 41.11 (unten) zeigt einige nützliche Beziehungen zwischen Winkeln auf.

Winkelfunktionen

Abbildung 41.12 zeigt ein rechtwinkliges Dreieck. Die Strecken BC und AC stehen senkrecht aufeinander; sie werden

als *Katheten* bezeichnet, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite ist die *Hypotenuse*. Die dem spitzen Winkel θ gegenüberliegende Kathete heißt *Gegenkathete*, die den Winkel berührende Kathete ist die *Ankathete*. Die Seitenlängen des Dreiecks werden mit a , b und c bezeichnet. Dann kann man die Winkelfunktionen (bzw. trigonometrischen Funktionen) $\sin \theta$ (den **Sinus**), $\cos \theta$ (den **Kosinus**) und $\tan \theta$ (den **Tangens**) definieren:

$$\sin \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad (41.27)$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad (41.28)$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}. \quad (41.29)$$

(**Spitze Winkel** sind Winkel, deren Winkelmaß bei einer Drehung im positiven Drehsinn – also entgegen dem Uhrzeigersinn – unter 90° oder $\pi/2$ liegt.) Die drei weiteren Winkelfunktionen Sekans (sec), Kosekans (cosec) und Kotangens (cot) sind als Kehrwerte der Ausgangsfunktionen definiert, also

$$\sec \theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad (41.30)$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad (41.31)$$

$$\cot \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (41.32)$$

Der Winkel θ , dessen Sinus x ist, heißt der Arkussinus von x ; man schreibt dafür $\sin^{-1} x$. Wenn also gilt

$$\sin \theta = x,$$

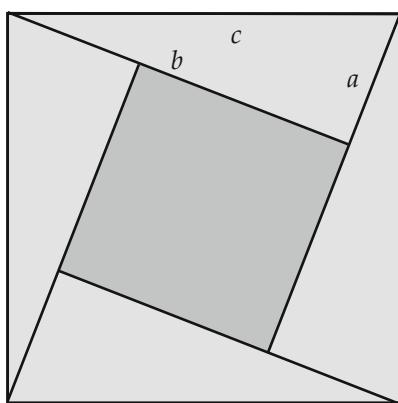


Abbildung 41.13 Als diese Abbildung zum ersten Mal erschien, fehlten die Buchstaben; sie wurde nur von der Aufforderung „Sieh hin!“ begleitet. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras mithilfe dieser Zeichnung.

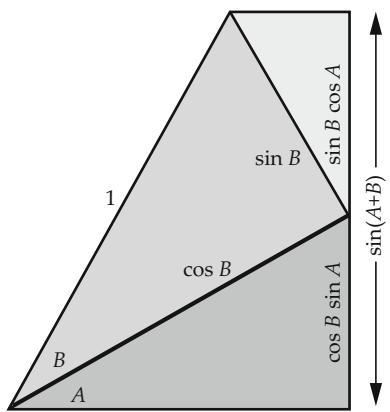


Abbildung 41.14 Leiten Sie anhand dieser Zeichnung die Identität $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ her. Sie können mit der Zeichnung auch die Identität $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ herleiten. Versuchen Sie es!

dann gilt

$$\theta = \arcsin x = \sin^{-1} x. \quad (41.33)$$

Der Arkussinus ist die Umkehrfunktion des Sinus. Die Umkehrfunktionen von Kosinus und Tangens sind ganz entsprechend definiert: Der Winkel, dessen Kosinus y ist, ist der Arkuskosinus von y . Wenn also gilt

$$\cos \theta = y,$$

dann gilt

$$\theta = \arccos y = \cos^{-1} y. \quad (41.34)$$

Der Winkel, dessen Tangens z ist, ist der Arkustangens von z . Wenn also gilt

$$\tan \theta = z,$$

dann gilt

$$\theta = \arctan z = \tan^{-1} z. \quad (41.35)$$

Man fasst diese Umkehrfunktionen unter der Bezeichnung **Arkusfunktionen** zusammen.

Trigonometrische Identitäten

Durch die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen kann man verschiedene nützliche Formeln ableiten, die man **trigonometrische Identitäten** nennt. In den Gleichungen 41.30 bis 41.32 sind die augenfälligsten dieser Identitäten angegeben – nämlich Winkelfunktionen als Kehrwerte anderer Winkelfunktionen. Fast genauso leicht auszumachen sind die Identitäten, die man aus dem **Satz des Pythagoras**

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (41.36)$$

ableiten kann. (Abbildung 41.13 zeigt einen grafischen Beweis für diesen Satz.) Einfache algebraische Umformungen von Gleichung 41.36 führen uns zu drei weiteren Identitäten. Zunächst teilen wir alle Terme in Gleichung 41.36 durch c^2 . Dann erhalten wir

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

oder – unter Zuhilfenahme der Definitionen von Sinus ($\sin \theta = a/c$) und Kosinus ($\cos \theta = b/c$) –

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (41.37)$$

Entsprechend können wir alle Terme in Gleichung 41.36 durch a^2 oder b^2 teilen und erhalten

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (41.38)$$

bzw.

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta. \quad (41.39)$$

In Tabelle 41.2 sind diese drei und zahlreiche weitere trigonometrische Identitäten aufgeführt (A und B stehen für beliebige Zahlen). Die Gleichungen fallen in vier verschiedene Kategorien: Funktionen von Summen oder Differenzen von Winkeln, Summen oder Differenzen von quadrierten Funktionen, Funktionen von verdoppelten Winkeln (2θ) und Funktionen von halbierten Winkeln ($\frac{1}{2}\theta$). Beachten Sie, dass in einigen der Gleichungen paarweise Alternativen auftauchen, die mit den Zeichen \pm bzw. \mp bezeichnet werden; in diesen Gleichungen gehören immer die „oberen“ bzw. die „unteren“ Vorzeichen zusammen. Abbildung 41.14 zeigt einen grafischen Beweis für die ersten Gleichungen zu Winkelsummen. Eine Anwendung von einigen der Identitäten zeigt Beispiel 41.9.

Beispiel 41.9: Der Kosinus einer Summe

Suchen Sie die passende trigonometrische Identität aus Tabelle 41.2 und bestimmen Sie den Wert von $\cos(135^\circ + 22^\circ)$. Geben Sie Ihr Ergebnis mit vier signifikanten Stellen an.

Problembeschreibung: Da alle Winkel im Gradmaß angegeben sind, muss man die Winkel nicht in das Bogenmaß (Radian) umrechnen, denn wir rechnen nur mit den Funktionswerten, nicht mit den Winkeln selbst. Stellen Sie sicher, dass Ihr Taschenrechner im Gradmaß arbeitet („deg“-Mode). Die passende trigonometrische Identität ist $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$; in unserem Fall werden die jeweils „oberen“ Rechenzeichen verwendet.

Lösung: 1. Schreiben Sie die trigonometrische Identität für den Kosinus einer Summe mit den Werten $A = 135^\circ$ und $B = 22^\circ$ nieder:

$$\begin{aligned}\cos(135^\circ + 22^\circ) \\ = (\cos 135^\circ)(\cos 22^\circ) - (\sin 135^\circ)(\sin 22^\circ)\end{aligned}$$

2. Berechnen Sie mithilfe eines Taschenrechners die Werte für $\cos 135^\circ$, $\sin 135^\circ$, $\cos 22^\circ$ und $\sin 22^\circ$:

$$\begin{array}{ll}\cos 135^\circ = -0,7071 & \sin 135^\circ = 0,7071 \\ \cos 22^\circ = 0,9272 & \sin 22^\circ = 0,3746\end{array}$$

3. Übertragen Sie diese Werte in die Gleichung und berechnen Sie das Ergebnis:

$$\begin{aligned}\cos(135^\circ + 22^\circ) \\ = (-0,7071)(0,9272) - (0,7071)(0,3746) \\ = \boxed{-0,9205}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Mit dem Taschenrechner erhalten Sie $\cos(135^\circ + 22^\circ) = \cos(157^\circ) = -0,9205$.

Übung 41.19: Berechnen Sie $\sin \theta$ und $\cos \theta$ für das rechtwinklige Dreieck aus Abbildung 41.12. Die Seitenlängen des Dreiecks sind $a = 4\text{ cm}$ und $b = 7\text{ cm}$. Wie groß ist θ ? ◀

Übung 41.20: Berechnen Sie $\sin \theta$ für $\theta = 8,2^\circ$. Können Sie bei diesem Winkel die Kleinwinkelnäherung ($\sin \theta \approx \theta$) anwenden? ◀

Einige wichtige Funktionswerte

Abbildung 41.15 zeigt ein *gleichschenkliges* rechtwinkliges Dreieck, mit dem wir den Sinus, Kosinus und Tangens von 45° bestimmen können. In diesem Dreieck sind die beiden Katheten gleich lang. Außerdem sind die beiden spitzen Winkel gleich; da die Winkelsumme in einem ebenen Dreieck stets 180° beträgt, wovon schon 90° auf den rechten Winkel entfallen, misst jeder der spitzen Winkel 45° . Um leichter rechnen zu können, wollen wir annehmen, dass jede der beiden gleich langen Seiten

Tabelle 41.2 Trigonometrische Identitäten

$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A \mp B) \right]$
$\cos A + \cos B = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A - B) \right]$
$\cos A - \cos B = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \sin \left[\frac{1}{2}(A - B) \right]$
$\tan A \pm B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1; \quad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1;$
$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$
$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$
$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$
$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$
$\sin(\frac{1}{2}\theta) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}; \quad \cos(\frac{1}{2}\theta) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}};$
$\tan(\frac{1}{2}\theta) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

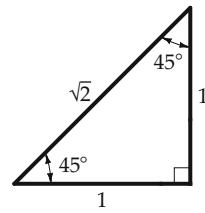


Abbildung 41.15 Gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck.

die Länge 1 Einheit hat. Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir einen Wert für die Länge der Hypotenuse von

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Wir berechnen dann den Wert der Winkelfunktionen folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &= \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707, \\ \cos 45^\circ &= \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707, \\ \tan 45^\circ &= \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Ein weiteres wichtiges Dreieck ist das rechtwinklige Dreieck mit einem 30° - und einem 60° -Winkel (Abbildung 41.16). Ein solches Dreieck ergibt sich durch die Halbierung eines *gleichseitigen Dreiecks* (d.h. eines Dreiecks mit drei gleichen Winkeln von je 60° bzw. ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten). Daran erkennen wir, dass der Sinus von 30° genau

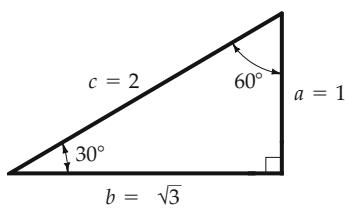


Abbildung 41.16 Rechtwinkliges Dreieck mit einem 30° - und einem 60° -Winkel.

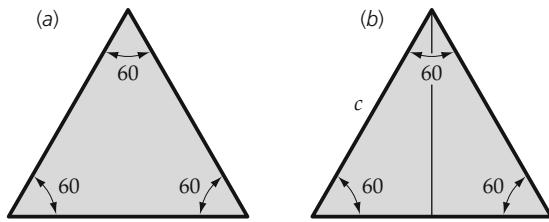


Abbildung 41.17 a) Gleichseitiges Dreieck. b) Ein gleichseitiges Dreieck lässt sich in zwei rechtwinklige Dreiecke mit einem 30° - und einem 60° -Winkel zerlegen.

0,5 sein muss (Abbildung 41.17). Im gleichschenkligen Dreieck sind alle Seiten gleich c , der Hypotenuse des 30° - 60° -Dreiecks. Folglich ist die Seite a halb so lang wie die Hypotenuse, und damit gilt

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Um die weiteren Verhältnisse innerhalb des 30° - 60° -Dreiecks zu bestimmen, wollen wir der dem 30° -Winkel gegenüberliegenden Seite die Länge 1 zuweisen. Dann gilt

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{0,5}, & b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}, \\ \cos 30^\circ &= \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866, \\ \tan 30^\circ &= \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577, \\ \sin 60^\circ &= \frac{b}{c} = \cos 30^\circ = 0,866, \\ \cos 60^\circ &= \frac{a}{c} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \\ \tan 60^\circ &= \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1,732. \end{aligned}$$

Trigonometrie und Vektoren

Man kann die trigonometrischen Beziehungen direkt für die Vektorrechnung (Tabelle 41.3) heranziehen, indem man die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks als Komponenten eines

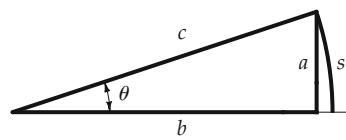


Abbildung 41.18 Für kleine Winkel θ sind das Bogenmaß $\theta = s/c$ und die Winkelfunktionen $\sin \theta = a/c$ bzw. $\tan \theta = a/b$ näherungsweise gleich.

Vektors auffasst, der entlang der Hypotenuse orientiert ist, und den Satz des Pythagoras anwendet:

$$a = A_x = A \cos \theta$$

$$b = A_y = A \sin \theta$$

$$c = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = A \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

Vektoren sind ausführlich in Kapitel 2 behandelt.

Die Kleinwinkelnäherung

Für kleine Winkel ist die Länge a näherungsweise gleich der Bogenlänge s (Abbildung 41.18). Der Winkel $\theta = s/c$ ist also näherungsweise gleich $\sin \theta = a/c$:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{für kleine Werte von } \theta. \quad (41.40)$$

Entsprechend sind auch die Längen c und b näherungsweise gleich; damit ist (für kleine Winkel) $\tan \theta = a/b$ näherungsweise sowohl gleich θ als auch gleich $\sin \theta$;

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \quad \text{für kleine Werte von } \theta. \quad (41.41)$$

Die Gleichungen 41.40 und 41.41 gelten nur, wenn θ im Bogenmaß (in der Einheit Radian) angegeben wird. Da $\cos \theta = b/c$ gilt und da diese Längen für kleine Werte von θ näherungsweise gleich sind, haben wir auch

$$\cos \theta \approx 1 \quad \text{für kleine Werte von } \theta. \quad (41.42)$$

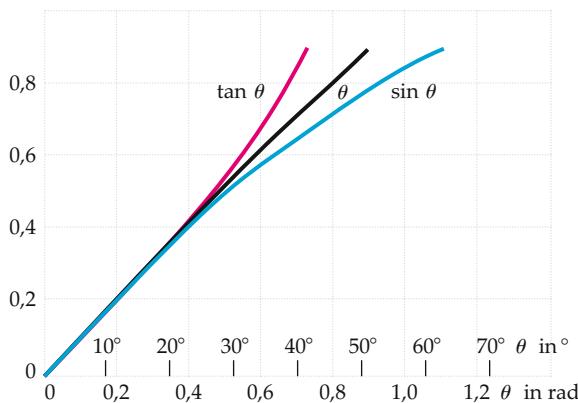
Abbildung 41.19 zeigt Graphen von θ , $\sin \theta$ und $\tan \theta$ in Abhängigkeit von θ für kleine Werte von θ . Wenn die Genauigkeit unter einem Prozent betragen soll, lässt sich die Kleinwinkelnäherung nur für Winkel bis etwa einem Viertel Radian (entsprechend rund 15°) oder kleiner anwenden. Für kleinere Winkel ist die Näherung $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$ noch genauer.

Trigonometrische Funktionen oder: Winkelfunktionen als reelle Funktionen

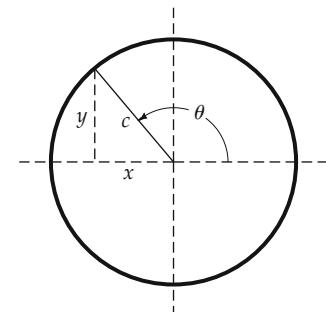
Bislang haben wir anhand der Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck die Winkelfunktionen definiert. Wir erweitern nun diese Definitionen und kommen so zu den **trigonometrischen Funktionen**. Abbildung 41.20 zeigt einen *stumpfen* Winkel, dessen

Tabelle 41.3 Eigenschaften von Vektoren

Eigenschaft	Erläuterung	Abbildung	Komponentendarstellung
Komponente	A_x, A_y, A_z : Projektion von A auf die x -, y - bzw. z -Richtung		A_x, A_y, A_z
Betrag	$ A $		$ A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$
Gleichheit	$A = B$, falls $ A = B $ und die Richtungen von A und B übereinstimmen		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Addition	$C = A + B$		$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Das Negative eines Vektors	$A = -B$, falls $ B = A $ und die Richtungen von A und B entgegengesetzt sind		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Subtraktion	$C = A - B$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplikation mit einem Skalar	$B = sA$ hat den Betrag $ B = s A $ und die Richtung von A , falls s positiv ist, oder die Richtung von $-A$, falls s negativ ist		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

**Abbildung 41.19** Auftragung von $\tan \theta$, θ und $\sin \theta$ gegen θ für kleine Werte von θ .

Scheitel sich im Ursprung befindet und dessen einer Schenkel auf der x -Achse liegt. Die trigonometrischen Funktionen für einen solchen „allgemeinen“ Winkel sind folgendermaßen definiert:

**Abbildung 41.20** Diagramm zur Definition der trigonometrischen Funktionen für einen stumpfen Winkel.

$$\sin \theta = \frac{y}{c}, \quad (41.43)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{c}, \quad (41.44)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (41.45)$$

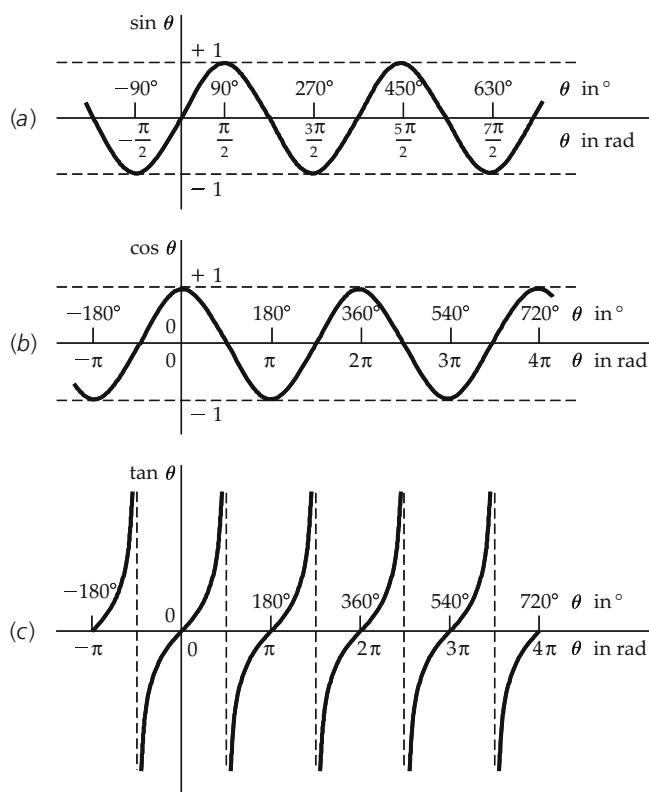


Abbildung 41.21 Graphen der trigonometrischen Funktionen $\sin \theta$, $\cos \theta$ und $\tan \theta$.

Abbildung 41.21 zeigt die Graphen für die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion in Abhängigkeit von θ . Dabei nehmen x und y für θ -Werte zwischen null und 2π (360°) positive und negative Werte an. Die Sinusfunktion hat eine Periode von 2π rad, d. h. für einen beliebigen Wert von θ gilt $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ usw. Dasselbe gilt für die Kosinusfunktion. Wenn sich also ein Winkel um 2π rad ändert, nimmt die Funktion wieder ihren Ausgangswert an. Die Tangensfunktion hat eine Periode von π rad, d. h., es gilt $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ usw. Einige weitere nützliche Zusammenhänge sind

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \quad (41.46)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \quad (41.47)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right) = \cos \theta, \quad (41.48)$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right) = \sin \theta. \quad (41.49)$$

Da der Radiant eine dimensionslose Zahl ist, liegt es nahe, die trigonometrischen Funktionen in Abbildung 41.21 nicht ausschließlich auf Winkel zu beziehen, sondern sie als Funktionen von reellen Zahlen zu betrachten.

Die Funktionen lassen sich auch in Potenzreihen in θ ausdrücken:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (41.50)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (41.51)$$

Bei kleinem θ erhält man gute Näherungen schon, wenn man nur die ersten Terme oder sogar nur den ersten Term der Reihe verwendet.

Eine Anwendung der in Tabelle 41.2 angeführten trigonometrischen Identitäten zeigt Beispiel 41.9.

41.9 Die Binomialentwicklung

Ein **Binom** ist ein Ausdruck aus zwei Termen, die durch ein Plus- oder Minuszeichen miteinander verbunden sind. Nach dem **binomischen Satz** (Binomialsatz) lässt sich ein Binom, das in die n -te Potenz erhoben worden ist, in eine Reihe von Termen ausmultiplizieren oder *entwickeln*. In der einfachsten Form, bei den binomischen Formeln, ergibt sich folgende Entwicklung: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$. Im allgemeinen Fall führt die Binomialentwicklung des Ausdrucks $(1+x)^n$ auf

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (41.52)$$

Das Zeichen „!“ steht für Fakultät mit $n! = n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1)$, die einzelnen Koeffizienten der Terme heißen Binomialkoeffizienten. Ist n eine natürliche Zahl, gilt diese Reihe für beliebige x ; sie gilt bei beliebigem n , wenn $|x|$ kleiner als 1 ist. Die Binomialentwicklung ist sehr nützlich, um algebraische Ausdrücke näherungsweise zu berechnen, denn wegen $|x| < 1$ sind die höheren Ordnungen in der Summe nur klein. (Die Ordnung eines Terms in x ist die höchste in dem Term auftretende Potenz von x . Die in Gleichung 41.52 explizit ausgeschriebenen Terme sind also von den Ordnungen 0, 1, 2 und 3.) Die Binomialentwicklung ist besonders in den Fällen günstig, wo $|x|$ klein im Vergleich zu 1 ist; dann ist jeder Term der Entwicklung viel kleiner als der vorhergehende, und man kann alle außer den ersten zwei oder drei Termen der Entwicklung vernachlässigen. Gilt sogar $|x| \ll 1$, dann vereinfacht sich die Entwicklung zu

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \quad \text{für } |x| \ll 1. \quad (41.53)$$

Die Binomialentwicklung wird bei der Herleitung vieler Formeln der Differenzial- und Integralrechnung verwendet und spielt eine große Rolle in der Physik. Ein bekanntes Beispiel für die Anwendung der Näherung in Gleichung 41.53 in der Physik ist der Nachweis, dass sich die relativistische Bewegungsenergie auf den klassischen Ausdruck für die kinetische Energie

vereinfacht, wenn die Geschwindigkeit eines Teilchens im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c sehr klein ist. Eine einfache mathematische Anwendung zeigt Beispiel 41.10.

Beispiel 41.10: Bestimmung einer Potenz mithilfe der Binomialentwicklung

Berechnen Sie mithilfe von Gleichung 41.53 einen Näherungswert für die Wurzel aus 101.

Problembeschreibung: Die Zahl 101 legt die Zerlegung in das Binom $(100 + 1)$ nahe. Um einen Näherungswert mithilfe der Binomialentwicklung bestimmen zu können, muss man diesen Ausdruck so umformen, dass wir ein Binom bestehend aus 1 und einem Term kleiner als 1 erhalten.

Lösung: 1. Schreiben Sie die Wurzel als $(101)^{1/2}$; nun können Sie einen Ausdruck der Form $(1 + x)^n$ herleiten, in dem x viel kleiner als 1 ist:

$$\begin{aligned}(101)^{1/2} &= (100 + 1)^{1/2} = 100^{1/2}(1 + 0,01)^{1/2} \\ &= 10(1 + 0,01)^{1/2}\end{aligned}$$

2. Verwenden Sie nun Gleichung 41.53 mit $n = \frac{1}{2}$ und $x = 0,01$ und berechnen Sie die Entwicklung von $(1 + 0,01)^{1/2}$:

$$(1 + 0,01)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(0,01) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(0,01)^2 + \dots$$

3. Wegen $|x| \ll 1$ ist zu erwarten, dass der Betrag der Terme von zweiter und noch höherer Ordnung erheblich kleiner ist als der Betrag des Terms erster Ordnung. Bestimmen Sie einen Näherungsausdruck für das Binom a) nur mit den Termen nullter und erster Ordnung und b) mit den ersten drei Termen:

a) Bei Berücksichtigung nur der Terme nullter und erster Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned}(1 + 0,01)^{1/2} &\approx 1 + \frac{1}{2}(0,01) = 1 + 0,005\,000\,00 \\ &= 1,005\,000\,00\end{aligned}$$

b) Berücksichtigen wir zusätzlich noch den Term zweiter Ordnung, so haben wir

$$\begin{aligned}(1 + 0,01)^{1/2} &\approx 1 + \frac{1}{2}(0,01) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(0,01)^2 \\ &\approx 1 + 0,005\,000\,00 - 0,000\,012\,5 \\ &= 1,004\,987\,5\end{aligned}$$

4. Setzen Sie diese Ergebnisse in die Gleichung von Schritt 1 ein:

Bei Berücksichtigung nur der Terme nullter und erster Ordnung ergibt sich

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0,01)^{1/2} \approx [10,050\,000]$$

Bei zusätzlicher Berücksichtigung der Terme zweiter Ordnung ergibt sich

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0,01)^{1/2} \approx [10,049\,875]$$

Plausibilitätsprüfung: Es ist zu erwarten, dass unsere Antwort auf 0,001% genau ist. Der Wert von $(101)^{1/2}$ beträgt, auf acht gültige Stellen angegeben, 10,049 876. Der Unterschied zu 10,050 000 beträgt nur 0,000 124, der Näherungswert weicht also erst in der vierten signifikanten Stelle ab (1:10 000). Zu 10,049 875 tritt erst in der siebten signifikanten Stelle eine Differenz auf (1:10 000 000).

Übung 41.21: Entwickeln Sie $(1 + 0,001)^{-4}$. Verwenden Sie die nullte und in einer zweiten Rechnung zusätzlich die erste Ordnung der Binomialentwicklung nach Gleichung 41.53. Berechnen Sie die Werte mit einem Taschenrechner und geben Sie die prozentuale Abweichung zwischen den beiden Werten an. ◀

Übung 41.22: Entwickeln Sie $(1 - 0,001)^{40}$. Gehen Sie wie in der letzten Übung vor. ◀ ■

41.10 Komplexe Zahlen

Reelle Zahlen sind alle Zahlen, von $-\infty$ bis $+\infty$, die sich der Größe nach *ordnen* lassen. Von zwei beliebigen reellen Zahlen ist stets eine größer oder kleiner als die andere (oder beide Zahlen sind gleich). Beispielsweise gilt $3 > 2$, $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ oder $3,14 < \pi < 3,15$. Eine Zahl, die sich *nicht* anordnen lässt, ist $\sqrt{-1}$; es ist nicht möglich, die Größe dieser Zahl zu messen, und damit sind auch Aussagen wie $3 \times \sqrt{-1}$ ist größer oder kleiner als $2 \times \sqrt{-1}$ unsinnig. Die ersten Mathematiker, die sich mit Zahlen wie $\sqrt{-1}$ beschäftigten, nannten diese Zahlen *imaginär*, weil man sie nicht zum Messen oder zum Zählen benutzen kann. In der Mathematik verwendet man für $\sqrt{-1}$ das Symbol i .

Gleichung 41.5, die quadratische Formel, ist auf Gleichungen des Typs

$$ax^2 + bx + c = 0$$

anwendbar. Nach dieser Formel gibt es keine reellen Lösungen für den Fall $b^2 < 4ac$. Es gibt aber auch in diesem Fall noch immer zwei Lösungen. Jeder der beiden Lösungen enthält zwei Terme, eine reelle Zahl und ein Vielfaches von $i = \sqrt{-1}$. Das Vielfache von i heißt eine **imaginäre Zahl**, und i heißt die **imaginäre Einheit**.

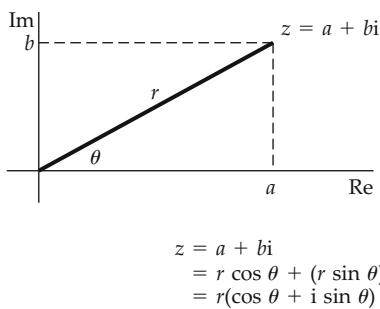


Abbildung 41.22 Darstellung einer komplexen Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene. Der Realteil der komplexen Zahl wird entlang der horizontalen, der Imaginärteil entlang der vertikalen Achse aufgetragen.

Eine allgemeine **komplexe Zahl** z lässt sich in der Form

$$z = a + ib \quad (41.54)$$

schreiben; dabei sind a und b reelle Zahlen. Die Größe a heißt der **Realteil** von z , geschrieben $\operatorname{Re}(z)$, die Größe b ist der **Imaginärteil** von z , geschrieben $\operatorname{Im}(z)$. Wir können eine komplexe Zahl z als Punkt in einer Ebene darstellen, der sogenannten *komplexen* oder *Gauß'schen Zahlenebene*, wie in Abbildung 41.22 gezeigt. Dort ist die x -Achse die **reelle Achse**, die y -Achse die **imaginäre Achse**. Wir können der Abbildung 41.22 auch die Beziehungen $a = r \cos \theta$ und $b = r \sin \theta$ entnehmen und dann die komplexe Zahl z in **Polarkoordinaten** schreiben. Bei dieser Art der Darstellung wird ein Punkt in der Ebene durch den gegen den Uhrzeigersinn gemessenen Winkel θ und die Entfernung r vom Scheitel des Winkels in Richtung von θ geschrieben; nur der Scheitel selbst lässt sich in Polarkoordinaten nicht darstellen:

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta. \quad (41.55)$$

Dabei gibt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ den **Betrag** und θ das **Argument** der komplexen Zahl z an.

Beim Addieren oder Subtrahieren von komplexen Zahlen addiert oder substrahiert man den Real- und den Imaginärteil jeweils separat:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \quad (41.56)$$

Wenn hingegen zwei komplexe Zahlen multipliziert werden, nimmt man jeden Teil der einen mit jedem Teil der anderen Zahl mal:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\&= a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\&= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).\end{aligned} \quad (41.57)$$

Bei dieser Rechnung haben wir $i^2 = -1$ benutzt.

Die Multiplikation von komplexen Zahlen lässt sich jedoch wesentlich leichter leichter in der Polarkoordinatendarstellung

durchführen. Mithilfe der trigonometrischen Identitäten kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= ((r_1 \cos \theta_1) + i(r_1 \sin \theta_1)) \\&\quad \cdot ((r_2 \cos \theta_2) + i(r_2 \sin \theta_2)) \\&= (r_1 \cdot r_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)) + i(r_1 \cdot r_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)).\end{aligned}$$

Es werden also einfach die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Die zur komplexen Zahl z **konjugiert komplexe Zahl** z^* ist die Zahl, die man durch den Austausch von i durch $-i$ erhält. Die zu $z = a + ib$ konjugiert komplexe Zahl ist also

$$z^* = (a + ib)^* = a - ib. \quad (41.58)$$

(Wenn eine quadratische Gleichung komplexe Lösungen hat, sind diese Lösungen konjugiert komplexe zueinander.) Das Produkt einer komplexen Zahl und der konjugiert komplexe Zahl ist gleich dem Quadrat des Betrags der Zahlen, ist also eine reelle Zahl ohne Imaginärteil:

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2. \quad (41.59)$$

Da konjugiert komplexe Zahlen denselben Betrag, aber entgegengesetzte Argumente haben, kommt man bei der Multiplikation in der Polarkoordinatendarstellung leicht auf dasselbe Ergebnis:

$$\begin{aligned}zz^* &= ((r \cos \theta) + i(r \sin \theta)) \\&\quad \cdot ((r \cos (-\theta)) + i(r \sin (-\theta))) \\&= (r \cdot r \cos (\theta - \theta)) + i(r \cdot r \sin (\theta - \theta)) \\&= (r^2 \cos 0) + i(r^2 \sin 0) = r^2 \cdot 1 + i(r^2 \cdot 0) = r^2.\end{aligned}$$

Eine besonders nützliche Funktion einer komplexen Zahl ist die Exponentialfunktion $e^{i\theta}$, die sich folgendermaßen als Potenzreihe ausdrücken lässt:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta = \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

Wir setzen nun $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ usw. und trennen die Real- von den Imaginärteilen. Dann lässt sich diese Entwicklung auf folgende Form bringen:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right).$$

Durch Vergleich mit den Gleichungen 41.50 und 41.51 erkennen wir:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (41.60)$$

Mithilfe dieses Ergebnisses können wir eine beliebige komplexe Zahl allgemein als Exponentialfunktion darstellen:

$$z = a + ib = r \cos \theta + ir \sin \theta = r e^{i\theta}. \quad (41.61)$$

Wenn x und y reelle Variable sind, dann ist $z = x + iy$ eine **komplexe Variable**.

Komplexe Variable in der Physik

Komplexe Variable werden in der Physik häufig verwendet, beispielsweise in den Formeln für Wechselstromkreise: Die Impedanz (der Wechselstromwiderstand) eines Kondensators enthält einen Realteil (den Widerstand) und einen Imaginärteil (die Reaktanz oder Blindwiderstand). (Es gibt allerdings auch alternative Möglichkeiten, Wechselstromkreise zu beschreiben – etwa mithilfe von rotierenden Vektoren, sogenannten Phasenvektoren –, die ohne Imaginärwerte auskommen.) Komplexe Variable spielen auch bei der Untersuchung harmonischer Wellen mithilfe der Fourier-Analyse und -Synthese eine wichtige Rolle. Schließlich enthält auch die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung eine komplexwertige Funktion von Position und Zeit.

Beispiel 41.11 illustriert, wie man höhere Potenzen einer komplexen Zahl mithilfe einer Binomialentwicklung bestimmen kann.

Beispiel 41.11: Bestimmung einer Potenz bei komplexen Zahlen

Berechnen Sie $(1 + 3i)^4$ mithilfe einer Binomialentwicklung.

Problembeschreibung: Der Ausdruck ist von der Form $(1 + x)^n$. Da n eine positive ganze Zahl ist, gilt die Entwicklung für beliebige Werte von x ; alle Terme mit einer höheren Ordnung als n sind null.

Lösung: 1. Schreiben Sie die Entwicklung $(1 + 3i)^4$ explizit auf, um die Terme bis zur vierten Ordnung zu sehen:

$$1 + 4 \cdot 3i + \frac{4(3)}{2!}(3i)^2 + \frac{4(3)(2)}{3!}(3i)^3 + \frac{4(3)(2)(1)}{4!}(3i)^4$$

2. Berechnen Sie jeden Term. Verwenden Sie die Vereinfachungen $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$.

$$1 + 12i - 54 - 108i + 81$$

3. Schreiben Sie das Ergebnis in der Form $a + bi$:

$$(1 + 3i)^4 = [28 - 96i]$$

Plausibilitätsprüfung: Wir können die Aufgabe auch algebraisch lösen, um zu zeigen, dass das Ergebnis richtig ist. Dazu quadrieren wir zunächst $(1 + 3i)$ und quadrieren dann das Ergebnis; so erhalten wir $(1 + 3i)^4$.

$$\begin{aligned} (1 + 3i)^2 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3i + (3i)^2 \\ &= 1 + 6i - 9 = -8 + 6i \\ (-8 + 6i)^2 &= (-8)(-8) + 2(-8)(6i) + (6i)^2 \\ &= 64 - 96i - 36 = 28 - 96i \end{aligned}$$

Übung 41.23: Bringen Sie den Ausdruck $e^{i\pi}$ auf die Form $a + bi$. ◀

Übung 41.24: Bringen Sie den Ausdruck $e^{i\pi/2}$ auf die Form $a + bi$. ◀

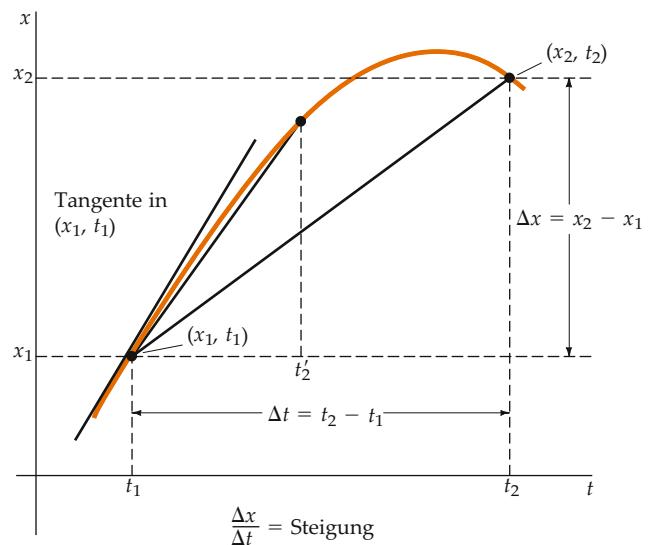


Abbildung 41.23 Graph einer typischen Funktion $x(t)$. Die Punkte (x_1, t_1) und (x_2, t_2) sind durch eine gerade Linie verbunden. Die Steigung dieses Geradenstücks ist $\Delta x / \Delta t$. Wenn man das bei t_1 beginnende Zeitintervall immer mehr verkleinert, nimmt die Steigung über diesem Intervall endlich denselben Wert an wie die Steigung der Tangente, die diese Kurve zum Zeitpunkt t_1 berührt. Diese Steigung nennt man die Ableitung von x nach t .

41.11 Differenzialrechnung

Die **Analysis** (in der englischsprachigen Literatur spricht man von *calculus*) erlaubt uns, die momentane Änderung einer Funktion oder einer Variablen zu berechnen. Aus der Funktionsgleichung – beispielsweise x als Funktion von t – können wir stets zu einem bestimmten t das passende x berechnen; mit den Werkzeugen der Analysis sind aber viel weiter gehende Untersuchungen möglich. Man kann beispielsweise feststellen, an welchen Stellen x bestimmte Eigenschaften hat (etwa einen Minimal- oder Maximalwert), ohne dass man endlose Wertereihen für verschiedene t berechnen muss. Mithilfe der Analysis kann man, passende Daten vorausgesetzt, beispielsweise berechnen, an welcher Stelle in einem Balken die Spannung maximal ist; welche Geschwindigkeit oder welchen Ort ein fallender Körper zum Zeitpunkt t hat; oder welche Energie ein fallender Körper zum Zeitpunkt des Aufpralls gewonnen hat. Die Grundlagen der Analysis gewinnt man aus der Untersuchung der infinitesimalen Änderungen von Funktionen, also beispielsweise, wie sich x ändert, wenn die Änderung in t verschwindend gering wird. Wir beginnen hier mit der **Differenzialrechnung**; in ihr bestimmen wir den *Grenzwert* der Änderungsrate von x bezüglich t und lassen dabei die Änderung von t immer mehr gegen null gehen.

Abbildung 41.23 zeigt den Graphen von x gegen t für eine typische Funktion $x(t)$. Bei einem bestimmten Wert $t = t_1$ hat x wie gezeigt den Wert x_1 . Bei einem anderen Wert t_2 nimmt x den Wert x_2 an. Die Änderung in t , also $t_2 - t_1$, schreiben wir als $\Delta t = t_2 - t_1$; die zugehörige Änderung in x schreiben wir als

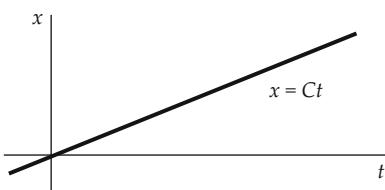


Abbildung 41.24 Graph der linearen Funktion $x = C t$. Diese Funktion hat eine konstante Steigung C .

$\Delta x = x_2 - x_1$. Der Differenzenquotient $\Delta x / \Delta t$ ist die Steigung des Geradenstücks, das die Punkte (x_1, t_1) und (x_2, t_2) verbindet. Wir bilden nun den Grenzwert dieses Quotienten, wenn t_2 gegen t_1 geht (d. h. wenn Δt gegen null geht); dann nimmt die Steigung der Verbindung zwischen (x_1, t_1) und (x_2, t_2) denselben Wert an wie die Steigung der Geraden, die die Kurve im Punkt (x_1, t_1) berührt. Die Steigung dieser Tangente ist gleich der **Ableitung** von x nach t . Man schreibt sie als dx/dt :

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (41.62)$$

(Wenn wir die Ableitung einer Funktion bestimmen, sprechen wir davon, dass wir die Funktion **ableiten** oder differenzieren; die sehr kleinen Elemente „ dx “ und „ dt “ heißen die **Differenziale** von x bzw. t .) Die Ableitung einer Funktion in t ist ebenfalls eine Funktion in t . Ist x eine Konstante, die sich mit t nicht ändert, so ist der Graph $x(t)$ eine horizontale Linie mit der Steigung null. Die Ableitung einer konstanten Funktion ist also null. In Abbildung 41.24 ist x keine Konstante, sondern proportional zu t :

$$x = C t.$$

Man spricht von einer linearen Funktion. Diese Funktion hat eine konstante Steigung, nämlich C . Die Ableitung von $C t$ ist also C . Tabelle 41.4 stellt einige Eigenschaften sowie die Ableitungen von einigen ausgewählten Funktionen zusammen, die in der Physik häufig auftauchen. Es folgen Anmerkungen, die die Eigenschaften und Regeln erläutern sollen. Eine detailliertere Diskussion findet man in praktisch allen Analysislehrbüchern.

Anmerkungen zu den Regeln 1 bis 5

Die Regeln 1 und 2 folgen aus der Tatsache, dass die Bildung des Grenzwerts ein linearer Prozess ist. Die Kettenregel (Regel 3) lässt sich verstehen, wenn wir den Ausdruck $\Delta f / \Delta t$ formal mit $\Delta x / \Delta x$ multiplizieren; wenn Δt gegen null geht, geht auch Δx gegen null. Es gilt also

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta t} \frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

Tabelle 41.4 Eigenschaften von Ableitungen sowie Ableitungen ausgewählter Funktionen

Linearität	
1.	Die Ableitung einer Konstante C mal einer Funktion $f(t)$ ist gleich dieser Konstante mal der Ableitung der Funktion: $\frac{d}{dt}[Cf(t)] = C \frac{df(t)}{dt}.$
2.	Die Ableitung einer Summe von Funktionen ist die Summe der Ableitungen dieser Funktionen: $\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}.$
Kettenregel	
3.	Wenn f eine Funktion von x und x eine Funktion von t ist, dann ist die Ableitung von f nach t gleich dem Produkt aus der Ableitung von f nach x und der Ableitung von x nach t : $\frac{d}{dt}f(x(t)) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}.$
Ableitung eines Produkts	
4.	Die Ableitung eines Produkts $f(t)g(t)$ von Funktionen ist gleich der ersten Funktion mal der Ableitung der zweiten plus der zweiten Funktion mal der Ableitung der ersten: $\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = f(t) \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \frac{df(t)}{dt}.$
Kehrwert einer Ableitung	
5.	Sofern keine der Ableitungen null ist, ist die Ableitung von t nach x gleich dem Kehrwert der Ableitung von x nach t : $\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^{-1} \quad \text{für } \frac{dt}{dx} \neq 0 \quad \text{und } \frac{dx}{dt} \neq 0.$
Ableitungen ausgewählter Funktionen	
6.	$\frac{dC}{dt} = 0$ für eine Konstante C .
7.	$\frac{d(t^n)}{dt} = n t^{n-1}$ für eine Konstante n .
8.	$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$ für ein konstantes ω .
9.	$\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$ für ein konstantes ω .
10.	$\frac{d}{dt} \tan(\omega t) = \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)}$ für ein konstantes ω .
11.	$\frac{d}{dt} e^{bt} = b e^{bt}$ für eine Konstante b .
12.	$\frac{d}{dt} \ln(bt) = \frac{1}{t}$ für eine Konstante b .

wobei wir verwendet haben, dass der Grenzwert von zwei Produkten gleich dem Produkt der Grenzwerte ist.

Regel 4 leuchtet nicht unmittelbar ein. Die Ableitung eines Produkts von Funktionen ist gleich dem Grenzwert des Quotienten

$$\frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t}.$$

Wenn wir im Zähler die Größe $f(t + \Delta t)g(t)$ subtrahieren und gleich wieder addieren, können wir den Bruch in folgender

Form schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{f(t + \Delta t)g(t + \Delta t) - f(t + \Delta t)g(t)}{\Delta t} \\ & + \frac{f(t + \Delta t)g(t) - f(t)g(t)}{\Delta t} \\ & = f(t + \Delta t) \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{(\Delta t)} \right] \\ & + g(t) \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{(\Delta t)} \right]. \end{aligned}$$

Wenn Δt gegen null geht, werden die Terme in den eckigen Klammern zu $dg(t)/dt$ bzw. $df(t)/dt$, und der Grenzwert des Ausdrucks ist

$$f(t) \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \frac{df(t)}{dt}.$$

Regel 5 folgt direkt aus der Definition:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1} = \left(\frac{dt}{dx} \right)^{-1}.$$

Anmerkungen zu Regel 7

Wir erhalten dieses wichtige Ergebnis mithilfe der Binomialentwicklung. Wir haben

$$\begin{aligned} f(t) &= t^n \\ f(t + \Delta t) &= (t + \Delta t)^n = t^n \left(1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^n \\ &= t^n \left[1 + n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f(t + \Delta t) - f(t) = t^n \left[n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 \dots \right]$$

und

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = n t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} t^{n-2} \Delta t + \dots$$

Der nächste, in der Summe nicht mehr aufgeschriebene Term ist proportional zu $(\Delta t)^2$, der darauffolgende zu $(\Delta t)^3$ usw. Alle Terme außer dem ersten gehen gegen null, wenn Δt gegen null geht. Damit folgt

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = n t^{n-1}.$$

Anmerkungen zu den Regeln 8 bis 10

Wir schreiben zunächst $\sin(\omega t) = \sin \theta$ mit $\theta = \omega t$ und wenden die Kettenregel an:

$$\frac{d \sin \theta}{dt} = \frac{d \sin \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d \sin \theta}{d\theta}.$$

Nun wenden wir die trigonometrische Identität für den Sinus der Summe zweier Winkel an (vgl. Tabelle 41.2); die beiden Winkel sind θ und $\Delta\theta$:

$$\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin \Delta\theta \cos \theta + \cos \Delta\theta \sin \theta.$$

Da $\Delta\theta$ gegen null geht, können wir die Kleinwinkelnäherung anwenden:

$$\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta \quad \text{und} \quad \cos \Delta\theta \approx 1.$$

Dann gilt

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \Delta\theta \cos \theta + \sin \theta$$

und

$$\frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta}{\Delta\theta} \approx \cos \theta.$$

Ein ähnlicher Gedankengang führt auf die Aussage zur Kosinusfunktion in Regel 9.

Regel 10 ergibt sich, wenn man $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ explizit aufschreibt und dann Regel 4 zusammen mit den Regeln 8 und 9 anwendet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (\tan \theta) &= \frac{d}{d\theta} (\sin \theta)(\cos \theta)^{-1} \\ &= \sin \theta \frac{d}{d\theta} (\cos \theta)^{-1} + \frac{d(\sin \theta)}{d\theta} (\cos \theta)^{-1} \\ &= \sin \theta (-1) (\cos \theta)^{-2} (-\sin \theta) \\ &\quad + (\cos \theta) (\cos \theta)^{-1} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta. \end{aligned}$$

Um von hier auf Regel 10 zu kommen, setzt man $\theta = \omega t$ und wendet die Kettenregel an.

Anmerkungen zu Regel 11

Wir gehen wieder von der Kettenregel

$$\frac{de^\theta}{dt} = \frac{b de^\theta}{b dt} = b \frac{de^\theta}{d(b t)} = b \frac{de^\theta}{d\theta} \quad \text{mit} \quad \theta = bt$$

und der Binomialentwicklung für die Exponentialfunktion aus:

$$e^{\theta + \Delta\theta} = e^\theta e^{\Delta\theta} = e^\theta \left[1 + \Delta\theta + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} + \dots \right].$$

Dann gilt

$$\frac{e^{\theta+\Delta\theta} - e^\theta}{\Delta\theta} = e^\theta + e^\theta \frac{\Delta\theta}{2!} + e^\theta \frac{(\Delta\theta)^2}{3!} + \dots$$

Wenn $\Delta\theta$ gegen null geht, geht die rechte Seite dieser Gleichung gegen e^θ .

Anmerkungen zu Regel 12

Wir setzen

$$y = \ln(b t).$$

Dann gilt

$$e^y = b t \Rightarrow t = \frac{1}{b} e^y.$$

Mit Regel 11 erhalten wir

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{b} e^y \quad \text{und daher} \quad \frac{dt}{dy} = t.$$

Mit Regel 5 erhalten wir daraus

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dt}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{t}.$$

Ableitungen zweiter und höherer Ordnung, Dimensionsanalyse

Sobald wir eine Funktion abgeleitet haben, können wir auch die Ableitung ableiten, solange noch Terme zum Ableiten vorhanden sind. Eine Funktion wie $x = e^{bt}$ lässt sich beliebig oft differenzieren: $dx/dt = b e^{bt}$ (die Ableitung dieser Ableitung ergibt $b^2 e^{bt}$ usw.).

Ein physikalisches Beispiel für höhere Ableitungen sind Geschwindigkeit und Beschleunigung. Wir können die Geschwindigkeit eines Teilchens als die Änderung seines Orts, also dx/dt , und die Beschleunigung als Änderung seiner Geschwindigkeit bzw. als die zweite Ableitung von x nach t auffassen, geschrieben d^2x/dt^2 . Wenn sich ein Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, dann ist dx/dt eine Konstante. Die Beschleunigung ist dann jedoch null, denn die Ableitung einer Konstanten ist null. Das hat eine physikalisch sinnvolle Interpretation, denn eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ist gleichbedeutend damit, keine Beschleunigung zu erfahren. Betrachten wir nun einen fallenden Körper, der der konstanten Gravitationsbeschleunigung ausgesetzt ist. Dann ist die Geschwindigkeit zeitabhängig, und erst die zweite Ableitung (d^2x/dt^2) ist konstant.

Eine Ableitung nach einer bestimmten Variable hat die *physikalische Dimension*, die sich ergeben würde, wenn man die Ausgangsfunktion der Variablen durch die Variable teilt. Wir betrachten als Beispiel eine Gleichung, in der ein Term x (für den Ort eines Teilchens) die Dimension einer Länge (L) hat. Die

Ableitung von x nach der Zeit t hat dann die Dimension einer Geschwindigkeit (L/T), die zweite Ableitung dx^2/dt^2 hat die Dimension einer Beschleunigung (L/T²). Vergleichen Sie dazu auch Beispiel 41.12.

Beispiel 41.12: Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Geben Sie die erste und die zweite Ableitung von $x = \frac{1}{2} a t^2 + b t + c$ an (a , b und c sind Konstanten). Die Funktion soll die Entfernung eines Teilchen (in m) von einem Ursprung in einer Raumdimension angeben; dabei ist t die Zeit (in s), a ist die Beschleunigung (in m/s²), b ist die Geschwindigkeit (in m/s) zum Zeitpunkt $t = 0$, und c ist der Ort des Teilchen (in m) zum Zeitpunkt $t = 0$.

Problembeschreibung: Sowohl die erste als auch die zweite Ableitung sind Summen von Termen. Für jede Differenzierung bilden wir die Ableitung von jedem Term einzeln und addieren die Ergebnisse.

Lösung: 1. Um die erste Ableitung zu bestimmen, berechnen Sie die Ableitung des ersten Terms:

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} a t^2\right)}{dt} = \left(\frac{1}{2} a\right) 2 t^1 = a t$$

2. Berechnen Sie die erste Ableitung des zweiten und dritten Terms:

$$\frac{d(b t)}{dt} = b, \quad \frac{d(c)}{dt} = 0$$

3. Addieren Sie die Ergebnisse:

$$\frac{dx}{dt} = a t + b$$

4. Um die zweite Ableitung zu bestimmen, wenden Sie den beschriebenen Prozess auf das Ergebnis von Schritt 3 an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a + 0 = a$$

Plausibilitätsprüfung: Die physikalischen Dimensionen zeigen, dass die Antwort plausibel ist. Die Ausgangsfunktion beschreibt den Ort des Teilchens; alle Terme sind in Metern angegeben, die Einheiten von t^2 und t kürzen sich gegen die Einheiten s^2 und s in den Konstanten a bzw. b . In der Funktion dx/dt sind alle Terme in m/s angegeben; die Konstante c hat die Ableitung null, und die Einheit für t kürzt sich gegen eine der Einheiten für s in der Konstante a . In der Funktion d^2x/dt^2 bleibt bei der Ableitung nur die Konstante für die Beschleunigung. Wie zu erwarten, hat sie die Dimension L/T².

Übung 41.25: Bestimmen Sie dy/dx für die Funktion $y = \frac{5}{8} x^3 - 24 x - \frac{5}{8}$. ◀

Übung 41.26: Bestimmen Sie dy/dt für die Funktion $y = at e^{bt}$ mit zwei Konstanten a und b . ▶ ■

Die Lösung von Differentialgleichungen mithilfe komplexer Zahlen

Eine **Differentialgleichung** ist eine Gleichung, in der die Ableitungen einer Funktion als Variable auftreten. In Differentialgleichungen sind also die Variablen miteinander durch ihre Ableitungen verbunden. Betrachten Sie eine Gleichung der Form

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = A \cos(\omega t), \quad (41.63)$$

die einen physikalischen Vorgang beschreibt, beispielsweise einen gedämpften harmonischen Oszillator, der durch eine Federkraft getrieben wird, oder eine mit Sinusspannung betriebene RCL-Serienschaltung. Obwohl alle Parameter in Gleichung 41.63 reelle Zahlen sind, legt der zeitabhängige Kosinusterm nahe, dass wir eine stationäre Lösung mithilfe von komplexen Zahlen finden könnten. Dazu konstruieren wir zunächst die „parallele“ Gleichung

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = A \sin(\omega t). \quad (41.64)$$

Gleichung 41.64 hat keine spezielle physikalische Bedeutung, und wir wollen die Gleichung auch nicht lösen. Aber sie nutzt uns bei der Lösung von Gleichung 41.63. Wenn wir beide Seiten von Gleichung 41.64 mit der imaginären Einheit i erweitern und dann die Gleichungen 41.63 und 41.64 addieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left(a \frac{d^2x}{dt^2} + a i \frac{d^2y}{dt^2} \right) + \left(b \frac{dx}{dt} + b i \frac{dy}{dt} \right) + (cx + ciy) \\ &= A \cos(\omega t) + i \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Wir fassen nun die passenden Terme zusammen:

$$\begin{aligned} & a \frac{d^2(x + iy)}{dt^2} + b \frac{d(x + iy)}{dt} + c(x + iy) \\ &= A (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)). \end{aligned} \quad (41.65)$$

Dieser Schritt ist möglich, weil die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Ableitungen ist. Wir können dieses Ergebnis nun durch die Gleichsetzung $z = x + iy$ und mithilfe der Identität $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ vereinfachen. Setzen wir beides in Gleichung 41.65 ein, erhalten wir

$$a \frac{d^2z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + cz = a e^{i\omega t}. \quad (41.66)$$

Diese Gleichung lösen wir nun nach z auf. Sobald wir z haben, können wir mithilfe von $x = \operatorname{Re}(z)$ nach x auflösen.

Da wir nach einer stationären Lösung von Gleichung 41.65 suchen, können wir eine Lösung der Form $x = x_0 \cos(\omega t - \phi)$ mit einer Konstanten ϕ ansetzen. Dieser Ansatz ist äquivalent zu der Annahme, dass die Lösung von Gleichung 41.66 die Form $z = \eta e^{i\omega t}$ hat; dabei ist η (griechischer Buchstabe eta) eine konstante komplexe Zahl. Dann gilt $dz/dt = i\omega z$, $d^2z/dt^2 = -\omega^2 z$ und $e^{i\omega t} z / \eta$. Setzen wir dies jeweils in Gleichung 41.65 ein, so ergibt sich

$$-a\omega^2 z + i\omega b z + cz = A \frac{z}{\eta}.$$

Teilen wir beide Seiten dieser Gleichung durch z und lösen nach η auf, so erhalten wir

$$\eta = \frac{A}{-a\omega^2 + i\omega b + c}.$$

Wir drücken nun den Nenner in Polarform aus:

$$(-a\omega^2 + c) + i\omega b = \sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2} e^{i\phi}.$$

Dabei gilt $\tan \phi = \omega b / (-a\omega^2 + c)$. Es folgt

$$\eta = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{-i\phi}$$

und somit

$$\begin{aligned} z = \eta e^{i\omega t} &= \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} e^{i(\omega t - \phi)} \\ &= \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} \\ &\quad \cdot (\cos(\omega t - \phi) + i \sin(\omega t - \phi)). \end{aligned} \quad (41.67)$$

Damit folgt

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{A}{\sqrt{(-a\omega^2 + c)^2 + \omega^2 b^2}} \cos(\omega t - \phi). \quad (41.68)$$

Die Exponentialfunktion

Eine **Exponentialfunktion** ist eine Funktion der Form a^{bx} mit zwei Konstanten $a > 0$ und b . Üblicherweise schreibt man die Funktion als e^{cx} mit einer Konstante c und der Euler'schen Zahl e .

Wenn die Änderungsgeschwindigkeit einer Größe proportional zu dieser Größe ist, dann nimmt die Größe exponentiell ab oder zu (das hängt vom Vorzeichen der Proportionalitätskonstante ab). Ein Beispiel für eine *exponentiell abnehmende* Funktion ist der *radioaktive Zerfall*. Bezeichnet man mit N die Anzahl der radioaktiven Kerne zu einem bestimmten Zeitpunkt, dann

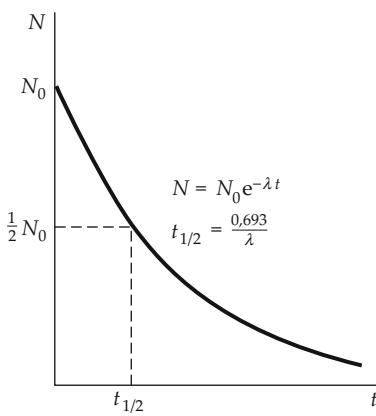


Abbildung 41.25 Graph einer exponentiell abfallenden Zerfallsfunktion $N(t)$. Die Halbwertszeit $t_{1/2}$ ist der Zeitraum, innerhalb dessen N auf die Hälfte abnimmt.

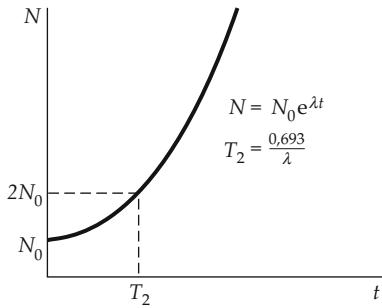


Abbildung 41.26 Graph einer exponentiell zunehmenden Wachstumsfunktion $N(t)$. Innerhalb der Verdopplungszeit T_2 nimmt der Wert von N auf das Doppelte zu.

ist die Änderung dN in einem sehr kleinen Zeitintervall dt proportional zu N und zu dt :

$$dN = -\lambda N dt.$$

λ ist darin die Zerfallskonstante (nicht zu verwechseln mit der Zerfallsrate dN/dt , die exponentiell abfällt). Die Funktion N , die dieser Gleichung genügt, ist

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (41.69)$$

Darin ist N_0 der Wert von N zum Zeitpunkt $t = 0$. Abbildung 41.25 zeigt eine Auftragung von N gegen t . Ein charakteristisches Merkmal des exponentiellen Zerfalls ist, dass N innerhalb eines gegebenen Zeitraums um einen konstanten Faktor abnimmt. Der Zeitraum, innerhalb dessen N auf die Hälfte seines Ausgangswerts abnimmt, heißt die *Halbwertszeit* $t_{1/2}$. Man berechnet sie aus Gleichung 41.69, indem man $N = \frac{1}{2} N_0$ setzt und nach der Zeit auflöst. Dann erhält man

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \quad (41.70)$$

Tabelle 41.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

$e = 2,718\,28$
$e^0 = 1$
Gilt $y = e^x$, dann gilt auch $x = \ln y$
$e^{\ln x} = x$
$e^x e^y = e^{x+y} = (e^y)^x$
$\ln e = 1; \ln 1 = 0$
$\ln xy = \ln x + \ln y$
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\ln e^x = x; \ln a^x = x \ln a$
$\ln x = (\ln 10) \log x = 2,3026 \log x$
$\log x = (\log e) \ln x = 0,434\,29 \ln x$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

Ein Beispiel für einen *exponentiellen Zuwachs* ist die Wachstumsfunktion einer Population. Wenn man die Zahl der Organismen mit N bezeichnet, dann ist die Änderung von N innerhalb eines sehr kleinen Zeitintervalls dt gegeben durch

$$dN = +\lambda N dt$$

mit einer *Wachstumskonstante* λ . Die Funktion N , die dieser Gleichung genügt, ist

$$N = N_0 e^{\lambda t}. \quad (41.71)$$

(Achten Sie auf das im Vergleich zu Gleichung 41.69 geänderte Vorzeichen des Exponenten.) Ein Graph dieser Funktion ist in Abbildung 41.26 zu sehen. Ein exponentieller Zuwachs lässt sich durch eine *Verdopplungszeit* T_2 charakterisieren, die mit λ über

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \quad (41.72)$$

zusammenhängt. In sehr vielen Fällen kennt man nur den Zuwachs der Population in Prozent pro Jahr und möchte die Verdopplungszeit berechnen. In diesem Fall findet man T_2 (in Jahren) aus der Gleichung

$$T_2 = \frac{69,3}{r}, \quad (41.73)$$

in der r den jährlichen prozentualen Zuwachs angibt. Wenn beispielsweise die Population um 2 % pro Jahr zunimmt, verdoppelt sie sich alle $69,3/2 \approx 35$ Jahre. Tabelle 41.5 führt einige nützliche Zusammenhänge zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen an. Beispiel 41.13 zeigt eine Rechnung zur Zerfallsfunktion.

Beispiel 41.13: Radioaktiver Zerfall von Cobalt-60

Die Halbwertszeit von Cobalt-60 (^{60}Co) beträgt 5,27 a. Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben Sie eine Probe von ^{60}Co mit einer Masse von 12,00 mg. Nach welcher Zeit (in Jahren) sind 4,00 mg des ^{60}Co zerfallen?

Problembeschreibung: Wenn wir die Halbwertszeit bei der exponentiellen Zerfallsfunktion berechnen müssten, würden wir den Ansatz $N/N_0 = 1/2$ machen. In diesem Beispiel müssen wir aber die Zeit finden, nach der noch zwei Drittel der Ausgangsmenge vorhanden sind; unser Ansatz ist also $N/N_0 = 0,667$.

Lösung: 1. Drücken Sie das Verhältnis N/N_0 als eine Exponentialfunktion aus:

$$\frac{N}{N_0} = 0,667 = e^{-\lambda t}$$

2. Bilden Sie den Kehrwert von beiden Seiten:

$$\frac{N_0}{N} = 1,50 = e^{\lambda t}$$

3. Lösen Sie nach t auf:

$$t = \frac{\ln 1,50}{\lambda} = \frac{0,405}{\lambda}$$

4. Die Zerfallskonstante λ hängt mit der Halbwertszeit gemäß $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ zusammen (Gleichung 41.70). Ersetzen Sie λ durch $(\ln 2)/t_{1/2}$ und berechnen Sie die Zeit:

$$t = \frac{\ln 1,50}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1,50}{\ln 2} \cdot 5,27 \text{ a} = 3,08 \text{ a}$$

Plausibilitätsprüfung: Es dauert 5,27 a, bis eine bestimmte Menge von ^{60}Co auf 50 % ihrer Ausgangsmasse zerfallen ist. Wir können also erwarten, dass es weniger als 5,27 a Jahre dauert, bis 33,3 % einer Ausgangsmasse zerfallen sind. Unser Ergebnis in Schritt 4 von 3,08 a ist wie erwartet kleiner als 5,27 a.

Übung 41.27: Die Entladezeitkonstante τ eines Kondensators in einem RC-Kreis ist die Zeit, in der sich der Kondensator auf e^{-1} (entsprechend 0,368) seiner Ausgangsladung bei $t = 0$ entlädt. Für einen Kondensator ist $\tau = 1$ s. In welcher Zeit t (in Sekunden) hat sich der Kondensator auf 50,0 % seiner Anfangsladung entladen? ▶

Übung 41.28: Die Population an Rehen im Naturschutzgebiet ist um 8,0 % pro Jahrzehnt gestiegen und nimmt auch weiterhin mit derselben Geschwindigkeit zu. In wie vielen Jahren wird die Population 1,5-mal so groß sein wie heute? ◀ ■

41.12 Integralrechnung

Man kann die **Integration** als die Umkehrung der Differenziation ansehen: Wenn man eine Funktion $f(t)$ integriert, dann sucht man eine Funktion $F(t)$, deren Ableitung nach t gerade $f(t)$ ist.

Deutung des Integrals als Fläche unter einer Kurve, Dimensionsanalyse

Die Bestimmung des Inhalts einer Fläche unter dem Graphen einer Kurve illustriert das Vorgehen bei der Integration. Wir betrachten eine beliebige Funktion $f(t)$ (Abbildung 41.27). Der Flächeninhalt des schattierten Elements ist näherungsweise $f_i \Delta t_i$; dabei wird f_i an einer beliebigen Stelle des Intervalls Δt_i berechnet. Diese Näherung ist sehr genau, wenn Δt_i hinreichend klein ist. Den Inhalt der Gesamtfläche unter einem bestimmten Abschnitt der Kurve berechnet man, indem man die Flächeninhalte aller entsprechenden Flächenelemente addiert und den Grenzwert bildet, wenn Δt_i gegen null geht. Dieser Grenzwert heißt das **Integral** von f über t . Man schreibt es in folgender Form:

$$\int f \, dt = \text{Fläche}_i = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i f_i \Delta t_i. \quad (41.74)$$

Die *physikalische Dimension* des Integrals einer Funktion $f(t)$ erhält man durch Multiplikation des *Integranden* (d.h. der zu integrierenden Funktion) mit den Dimensionen der Integrationsvariablen t . Wenn beispielsweise der Integrand eine Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ (Dimension L/T) und die Integrationsvariable die Zeit t ist, dann hat das Integral die Dimension $L = (L/T) \cdot T$. Mit anderen Worten: Die Dimension des Integrals ist Geschwindigkeit mal Zeit.

Wir setzen

$$y = \int_n^t f \, dt. \quad (41.75)$$

Die Funktion y ist der Inhalt der Fläche unter der $f(t)$ -Kurve von t_1 bis zu einem allgemeinen Wert t . Für ein kleines Intervall Δt ist die Flächenänderung Δy näherungsweise gleich $f \Delta t$:

$$\Delta y \approx f \Delta t, \\ f \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Nach Bildung des Grenzwerts für $\Delta t \rightarrow 0$ ist zu erkennen, dass f die Ableitung von y ist:

$$f = \frac{dy}{dt}. \quad (41.76)$$

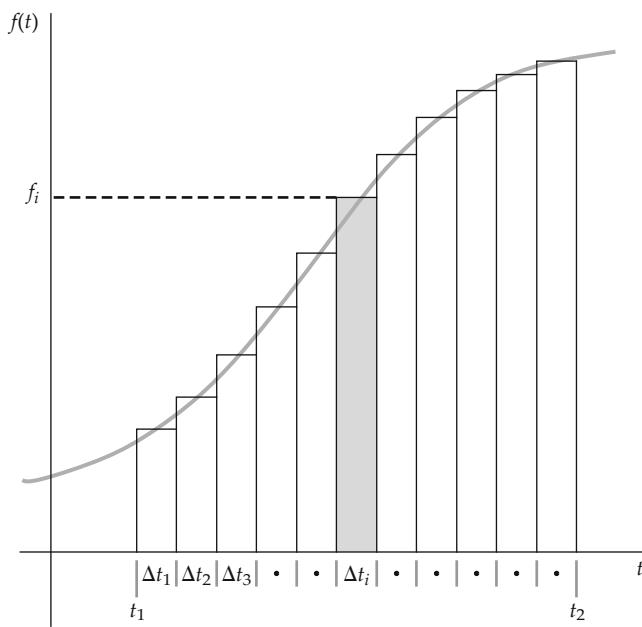


Abbildung 41.27 Graph einer allgemeinen Funktion $f(t)$. Der Flächeninhalt des schattierten Elements ist näherungsweise $f_i \Delta t_i$; dabei wird f_i an einer beliebigen Stelle des Intervalls Δt_i ausgewertet.

Unbestimmte und bestimmte Integrale

In dem Ausdruck

$$y = \int f \, dt \quad (41.77)$$

sieht man y als das **unbestimmte Integral** von f über t an. y wird auch die **Stammfunktion** von f genannt. Um ein unbestimmtes Integral anzugeben, müssen wir die Funktion y finden, deren Ableitung die Funktion f ist. Da die Stammfunktion einen konstanten Term enthalten kann, der zur Ableitung nicht beiträgt, enthält der Ausdruck für die Stammfunktion eine **Integrationskonstante** C . Wenn wir hingegen die Funktion über ein bestimmtes Intervall integrieren – beispielsweise von t_1 nach t_2 (vgl. Abbildung 41.27) –, so erhalten wir das **bestimmte Integral**, in dem die unbekannte Integrationskonstante nicht mehr vorkommt:

$$\int_{t_1}^{t_2} f \, dt = y(t_2) - y(t_1). \quad (41.78)$$

In Tabelle 41.6 sind einige wichtige unbestimmte Integrale zusammengestellt. Ausführlichere Listen von Stammfunktionen findet man in Analysislehrbüchern, in Formelsammlungen bzw. Nachschlagewerken (z. B. Bronstein: *Taschenbuch der Mathematik*) oder im Internet (beispielsweise über Wikipedia bzw. Wikibooks). Die Integration einer Bewegungsgleichung wird in Beispiel 41.14 illustriert.

Tabelle 41.6 Unbestimmte Integrale

1.	$\int A \, dt = A t$
2.	$\int A t \, dt = \frac{1}{2} A t^2$
3.	$\int A t^n \, dt = A \frac{t^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq 1$
4.	$\int A t^{-1} \, dt = A \ln t $
5.	$\int e^{bt} \, dt = \frac{1}{b} e^{bt}$
6.	$\int \cos(\omega t) \, dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$
7.	$\int \sin(\omega t) \, dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t)$
8.	$\int_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$
9.	$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
10.	$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2a}$
11.	$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$
12.	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2a^2}$
13.	$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} \, dx = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$

In diesen Formeln sind A , b und ω jeweils Konstanten.

In den Formeln 1 bis 7 kann man zur rechten Seite jeweils eine beliebige Konstante C hinzuzählen.
Die Konstante a ist größer als null.

Beispiel 41.14: Die Integration von Bewegungsgleichungen

Ein Teilchen bewegt sich mit konstanter Beschleunigung a . Geben Sie eine Formel für den Ort x des Teilchens zum Zeitpunkt t an. Gegeben sind die Anfangsposition x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt $t = 0$.

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeit v ist die Ableitung von x nach der Zeit t ; die Beschleunigung a ist die Ableitung von v nach t . Wir sollten also die gesuchte Funktion $x(t)$ durch zwei Integrationen erhalten.

Lösung: 1. Um v als Funktion von t anzugeben, integrieren Sie a bezüglich t . Die Funktion a kann aus dem

Integranden ausgeklammert werden, weil die Beschleunigung nach Aufgabenstellung konstant sein soll.

$$\begin{aligned} v &= \int a \, dt = a \int dt \\ v &= at + C_1 \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich C_1 als Produkt aus a und der Integrationskonstante.

2. Für die Geschwindigkeit gilt: $v = v_0$ für $t = 0$:

$$v_0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0$$

Also gilt $v = v_0 + at$.

3. Um x als Funktion von t anzugeben, integrieren Sie nun v bezüglich t :

$$\begin{aligned} x &= \int v \, dt = \int (v_0 + at) \, dt = \int v_0 \, dt + \int at \, dt \\ x &= v_0 \int dt + a \int t \, dt = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + C_2 \end{aligned}$$

Dabei ist C_2 eine Kombination der beiden Integrationskonstanten.

4. Für den Ort des Teilchens gilt: $x = x_0$ für $t = 0$:

$$x_0 = 0 + 0 + C_2$$

Also gilt $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Plausibilitätsprüfung: Leiten Sie das Ergebnis aus Schritt 4 zweimal ab. Sie erhalten dann die Beschleunigung:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2) = 0 + v_0 + at, \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (v_0 + at) = a. \end{aligned}$$

Übung 41.29: Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_3^6 3 \, dx. \quad \blacktriangleleft$$

Übung 41.30: Berechnen Sie das bestimmte Integral $V =$

$$\int_5^8 \pi r^2 \, dL. \quad \blacksquare$$

Lösungen der Übungen

41.1

0,21

41.2

31,6 m/s

41.3

6,0 kg/cm³

41.4

-3

41.5

1,5361

41.6

3,0721

41.7

falsch

41.8

$x = (4,5 \text{ m/s})t + 3,0 \text{ m}$

41.9

$x = 8, y = 60$

41.11

$2(x+y)^2$

41.12

$x^2(2x+4)(x+3)$

41.13

$x^{1/2}$

41.14

x^6

41.15

3

41.16 $\approx 2,322$ **41.17**

$$V/A = \frac{1}{3} r$$

41.18

$$A = \frac{2}{3} \pi h^2$$

41.19

$$\sin \theta = 0,496, \cos \theta = 0,868, \theta = 29,7^\circ$$

41.20

$$\sin 8,2^\circ = 0,1426, 8,2^\circ = 0,1431 \text{ rad}$$

41.21

0,996, 0,996 00, nahe bei 0 %

41.220,96, 0,996 77, $\ll 1\%$ **41.23**

$$-1 + 0i = -1$$

41.24

$$0 + i = i$$

41.25

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15}{8} x^2 - 24$$

41.26

$$\frac{dy}{dt} = a e^{bt} (b t + 1)$$

41.27

0,693 s

41.28

51 a

41.29

9

41.30

$$3 \pi r^2$$

Sachverzeichnis

- 42-Volt-Bordnetz von Autos, 835
- A**
- A (Ampere), 888
 - Abbildungen
 - optische, 1041
 - Abbildungfehler, 1066, 1079
 - Astigmatismus, 1067
 - chromatische Aberration, 1067, 1079
 - sphärische Aberration, 1044, 1066, 1079
 - Verzeichnung, 1067
 - Abbildungsgleichung
 - dünne Linsen, 1057, 1058, 1079
 - sphärische Spiegel, 1047, 1078
 - Abbildungsmaßstab, *siehe* Vergrößerung
 - Abbremsung
 - von Neutronen, 1334
 - Abendrot, 1234
 - Aberration
 - chromatische, 1067, 1079
 - sphärische, 1044, 1066, 1079
 - abgeschlossenes System, 262
 - Abkühlung
 - Entropieänderung, 617
 - Newton'sches Abkühlungsgesetz, 632, 634, 640, 641, 644
 - Ableitung, 34, 40, 1412
 - Dimension, 1414
 - Eigenschaften und Rechenregeln, 1412
 - Exponentialfunktion, 1412, 1414
 - höhere, 1414
 - Kettenregel, 1412
 - konstante Funktion, 1412
 - partielle, 18, 394, 462
 - Potenzfunktion, 1412
 - Regel für Polynome, 34
 - Regeln, 34
 - Schreibweise, 34
 - trigonometrische Funktionen, 1412
 - Vektor, 34
 - Ablenkwinkel
 - Regenbogen, 1021
 - Ablesefehler, 14
 - Ablösarbeit
 - photoelektrischer Effekt, 1164, 1179
 - ABS, 119, 122
 - Abschirmung, 712
 - absolute Temperatur, 535, 542
 - Nullpunkt, 623, 626
 - Absorption
 - Polarisation durch −, 1025, 1026
 - Resonanz-, 1234
 - Strahlung, 1233
 - Absorptionsgrad, 639
 - Absorptionsspektren, 1233, 1234
 - zweiatomige Moleküle, 1260, 1263–1266, 1271
 - Abstimmkreis, 964, 967
 - Abstimmmschaltung, 769
 - Abwärtstransformator, 955
 - Abweichungskreis, 1066
 - Achse
 - optische, 1029, 1044, 1060
 - Achsenabschnitt
 - Gerade, 1395
 - Parabel, 1397
 - achsennahe Strahlen
 - sphärische Spiegel, 1044, 1045
 - achsenparallele Strahlen
 - dünne Linsen, 1060, 1079
 - sphärische Spiegel, 1049, 1078
 - Achsensymmetrie, 704
 - Achterbahn, 65, 102, 189, 200
 - Katapultstart, 102
 - Adams, John Couch, 156
 - Adhäsionskraft, 387, 402
 - adiabatische Prozesse, 588, 589, 590, 595
 - adiabatische Volumenarbeit, 589, 590, 595
 - adiabatische Zustandsgleichung, 595
 - adiabatischer Kompressionsmodul, 591
 - AE, 23
 - Aerodynamik, 401
 - Affe
 - schwingender, 97
 - Airbag
 - Wirkung, 223
 - Akkommodation
 - Auge, 1067, 1079, 1083
 - Akkretionsscheibe, 1152
 - Akkumulator, 823
 - Aktionskraft, 93
 - Aktionsprinzip, 82
 - Aktions-Reaktions-Paar, 93, 255
 - Aktivität, 1324
 - akustische Linse, 485
 - Akzeptor, 1301
 - niveau, 1299
 - algebraische Operationen an Gleichungen, 1393
 - allgemeine Relativitätstheorie, 1149–1152
 - Äquivalenzprinzip, 1150
 - Gravitationspotenzial, 1151
 - Schwarzes Loch, 1151
 - Alphateilchen
 - Streuung durch Goldfolie, 1213
 - α-Teilchen
 - Energie, 1328
 - Halbwertszeit, 1328
 - α-Zerfall, 1328, 1329
 - Modell, 1328
 - Tunneln, 1196
 - Altersbestimmung
 - C-14-Methode, 1327
 - mit Rubidium, 1345
 - Aluminium
 - Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, 1292
 - Fermi-Energie, 1292
 - AM, *siehe* Amplitudenmodulation
 - Aminosäure
 - Masse, 12
 - Ammoniak
 - Molekülstruktur, 1259
 - amorpher Festkörper, 1278
 - Ampere (Einheit), 5, 20, 800, 888
 - Ampère, André-Maria, 873
 - Amperemeter, 827, 837
 - Aufbau, 828
 - Eichung, 888
 - Innenwiderstand, 827
 - Schaltung, 827
 - Ampère'scher Strom, 895, 906
 - Ampère'sches Gesetz, 889, 905
 - Anwendung, 891
 - Gültigkeit, 893, 905
 - modifiziertes, 999
 - und Faraday'sches Gesetz, 981
 - und Maxwell'sche Gleichungen, 983
 - und Symmetrie, 890
 - und Wellengleichung, 985
 - veralgemeinerte Form, 980, 981, 999
 - Verallgemeinerung, 894
 - Versagen, 894, 980
 - Amplitude, 415
 - Amplitudenmodulation, 468, 492
 - Analysator, 1026
 - Analysis, 1411
 - Anderson, Carl, 1352
 - Andromeda-Galaxie, 12
 - Anfangsbedingungen, 415
 - Anfangsgeschwindigkeit, 45
 - Anfangsgeschwindigkeitsbetrag
 - und Reichweite, 58
 - Anfangswertproblem, 45
 - Anfangswinkel
 - beim schrägen Wurf, 60
 - Angriffspunkt, 160

- anisotrop, 1028
 Anlasserspule, 883
 Annäherungsgeschwindigkeit, 231, 234
 Anode, 770
 Anomalie, Wasser, 539, 574
 Anreicherung
 von Uran, 1335
 anspielen, 328, 329, 333
 Anstieg, 34
 und Beschleunigung, 45
 und Momentangeschwindigkeit, 34
 Antenne, *siehe* Dipolantenne, Ringantenne
 Antiblockiersystem, 119, 122, 123
 Antineutrino, 1354
 Antiproton, 1353, 1355
 Erzeugung, 1157
 Antiquarks
 Eigenschaften, 1360
 Anti-Stokes-Raman-Streuung, 1234
 antisymmetrische Wellenfunktion, 1201, 1205
 Antiteilchen, 1351, 1352, 1374
 Standardmodell, 1363
 Anzahldichte der Ladungsträger, 801
 Berechnung, 802
 ao-Strahl, *siehe* außerordentlicher Strahl
 aperiodischer Grenzfall, 960
 Aphel, 131
 Apogäum, 154
 Äquipotenzialflächen, 742, 748
 Ladung in einer Kugelschale, 743
 und Feldlinien, 742, 743
 Äquipotenzialgebiet, 742
 Äquivalentdosis, 1340, 1344
 Äquivalenzprinzip
 allgemeine Relativitätstheorie, 1150
 Arbeit, 160, 165, 201
 am System verrichtete, 576, 577, 594
 an Probelaadung, 729
 bei konstanter Kraft, 201
 bei krummliniger Bewegung, 164
 beim Skilauf, 172
 Differenzial, 164
 durch ein Drehmoment, 306
 einer konstanten Kraft, 160
 Entropieänderung, 619
 entwertete (nicht nutzbare), 612, 614, 620,
 621, 626
 Feder, 163, 180
 Laden eines Kondensators, 767
 ortsabhängige Kraft, 162
 SI-Einheit, 161
 Umwandlung in Wärme, 600, 608
 und Energie, 192, 202
 und Energie, mit Reibung, 194
 und Wärme, 568, 575
 Arbeitssubstanz
 Wärmekraftmaschine, 600
 Archimedes, 381
 archimedisches Prinzip, 380, 402
 Herleitung, 381
 Argon
 Elektronenkonfiguration, 1230
 Argument, 1410
 Aristoteles, 4
 Arkusfunktionen, 1404
 Armstrong, Edwin, 997
 artesischer Brunnen, 391
 Astigmatismus, 1067
 Auge, 1069
 Aston, F.W., 856
 Astronomische Einheit, 23, 131
 α-Teilchen
 Ruheenergie, 1143
 Äther, 479, 1122
 Atmosphäre (Druckeinheit), 374
 Atmung, 592
 Atom
 Aufbau, 653
 Bohr'scher Radius, 722
 Größe, 12
 typische Größe, 677
 atomare Masseneinheit, 82, 251, 1262
 Atombindung, *siehe* kovalente Bindung
 Atome
 Auswahlregeln für Elektronenübergänge,
 1220, 1245
 Beugung, 1169
 Bohr'sche Radien, 1214, 1215, 1220, 1224,
 1244
 Bohr'sches Modell, 1213, 1214, 1216, 1217,
 1244
 effektive Kernladung, 1228, 1229
 Ein-Elektronen-, *siehe* wasserstoffähnliche
 Atome
 Elektronenenergie, 1213, 1227
 Elektronenkonfigurationen, 1226,
 1228–1230, 1231, 1233, 1244, 1245
 Elektronenübergänge, 1214, 1215, 1220,
 1244, 1245
 Grundzustand, 1220
 Kernladung, 1228
 Kernradius, 1213
 Mehr-Elektronen-, 1223, 1235
 Quantentheorie, 1217, 1219, 1244
 Rotationstemperatur, 1269
 Spektren, *siehe* Atomspektren
 Termsymbolik, 1219
 wasserstoffähnliche, *siehe*
 wasserstoffähnliche Atome
 Welle-Teilchen-Dualismus, 1161
 Atomfalle, 1001
 Atommasse
 des Neutrons, 1322
 verschiedener Isotope, 1322
 Atommodell, 785
 Bohr'sches, 1213, 1214, 1216, 1217, 1244
 Plum pudding-Modell, 1212
 Atomorbitale, 1252, 1258, 1259, 1270
 Hybridisierung, 1260, 1270
 Atomspektren, 1212
 Feinstrukturaufspaltung, 1225
 optische, 1235, 1245
 Spektrallinien, 1220
 Spektralserien, 1212, 1216
 Atto-, 7
 Atwood'sche Fallmaschine, 277, 315
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 1174, 1179
 drei Dimensionen, 1198
 klassisch verbotener Bereich, 1189, 1192,
 1194
 Teilchen, 1170, 1171, 1186, 1187, 1189,
 1201
 Wellenfunktion, 1220, 1223
 Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte
 radiale, 1221, 1222, 1223, 1245
 Teilchen, 1170
 Winkelabhängigkeit, 1223
 Auflösung
 Rayleigh'sches Kriterium, 1106, 1107, 1108,
 1113
 und Beugung, 1106, 1107, 1113
 Auflösungsvermögen
 Auge, 1109
 Beugungsgitter, 1107, 1112
 kritischer Winkel, 1106–1108
 Mikroskop, 1107, 1108
 optische Instrumente, 1106, 1107
 Teleskop, 1107
 Aufpunkt, 663
 eines Felds, 140
 aufrechter Gang, 311
 Aufspaltung von Energieniveaus, 1297
 Auftrieb, 380
 dynamischer, 393, 401
 in Flüssigkeit, 381
 Aufwärtstransformator, 955
 Auge, 1007, 1035, 1067, 1079
 Akkommodation, 1067, 1079, 1083
 Auflösungsvermögen, 1109
 Brennweite, 1067
 Farbenssehen, 1068
 Fehlsichtigkeiten, 1067–1069
 Fovea centralis, 1109
 Hornhaut, 1067, 1079
 Linse, 1067, 1068, 1079
 Nahpunkt, 1070
 Netzhaut, 1067, 1068, 1079
 Stäbchen, 1067, 1068, 1079
 Zäpfchen, 1067, 1068, 1079
 Ausbreitungsgeschwindigkeit, 501
 Ausdehnung
 thermische, 535, 536, 538–540, 542
 Ausdehnungskoeffizienten, 535, 539
 Ausflussformel, 390
 Auskoppler, Laser, 1239
 Auslenkung, 414
 Auslenkungswelle, 467
 Ausschließungsprinzip, Pauli'sches, 1031, 1202,
 1205, 1226, 1244, 1245
 ionische Bindung, 1252
 kovalente Bindung, 1254, 1256
 Außenelektronen
 effektive Kernladung, 1228, 1229
 äußere Kraft, 174
 äußere Kräfte, 255
 außerordentlicher Strahl
 Doppelbrechung, 1028, 1029
 Austauschwechselwirkung, 899
 Austrittsarbeit, 1294, *siehe* Ablösearbeit
 verschiedener Metalle, 1294
 Auswahlregeln
 Elektronenübergänge in Atomen, 1220, 1245
 Rotationsübergänge in Molekülen, 1263,
 1264, 1271

- Schwingungsübergänge in Molekülen, 1263, 1271
Auswuchten, 437
Auto
in der Kurve, 43
Autobatterie, 727
Innenwiderstand, 811
Potenzial, 727
Autoelektrik, Bordnetz, 835
Autoreifen
Reibung auf dem Straßenbelag, 119
Avogadro-Konstante, 11
Avogadro-Zahl, 546, 551, 562
Axon, 795, 797
- B**
- Bahndrehimpuls, 314, 1224, 1225, 1245
Betrag, 1218, 1244
Erhaltung, 1220
Komponenten, 1218, 1219, 1244
magnetisches Moment, 1224
Quantisierung, 1214, 1215, 1217, 1218, 1224, 1244
Richtungen, 1218
und magnetisches Moment, 897
Bahndrehimpulskonzentanz, 1218, 1219, 1226, 1227, 1244
Bahnkurve, 29
Bahnmoment, magnetisches, 896
Bakelit
Durschlagfestigkeit, 778
Balken, 359
ballistisches Pendel, 227
Drehimpulserhaltung, 324
Balmer, Johann, 1212
Balmer-Serie, 1212, 1216
Band, 1297
Leitungs-, 1298
Valenz-, 1297
Bandbreite, 508, 517
Bandbreite eines Schwingkreises, 964
Banden
optische Molekülspektren, 1264, 1271
Bändermodell, 1297–1299, 1313
Bandgenerator, 745
Bandlücke, 1298
Bandstruktur, 1298
eines Eigenhalbleiters, 1298
eines Isolators, 1298
eines Leiters, 1298
Bar, 374
Bardeen, John, 1303, 1306
Bariumkern, 730
Barn, Einheit, 1330
Barometer, 378
barometrische Höhenformel, 379, 380, 402
Barrierendurchdringung, *siehe* Tunneln und Transmission
Baryonen, 1350
Baryonenzahl, 1356
Erhaltung, 1355
Baseball
Geschwindigkeit und Beschleunigung, 42
Basis
Logarithmenrechnung, 1399
- Potenzrechnung, 1398
Basis, Transistor, 1303
Basketballspieler, 263
Batterie, 767, 770, 779, 809, 836
als Ladungspumpe, 770
Aufladung, 810, 821, 823
elektrische Leistung, 812
gespeicherte Energie, 811, 836
gespeicherte Ladung, 811
ideale, 823, 836
Innenwiderstand, 810, 836
Klemmenspannung, 836
Laden eines Kondensators, 770
reale, 836
Schaltzeichen, 770
Bauch, *siehe* Schwingungsbauch
Baumaterialien
Wärmewiderstands faktor, 637
BCS-Theorie, 1306, 1307, 1313
Becquerel, Antoine, 4
Becquerel, Einheit, 1326, 1343
Bednorz, J. Georg, 1306
Beilkespiel, 115
Benzin
Durschlagfestigkeit, 778
Energiegehalt, 199
Benzolmolekül, 12
Beobachter, 1124
Bergsteiger, 71, 247
Bernoulli, Daniel, 389
Bernoulli-Gleichung, 389, 402
allgemeine Form, 390, 408
Berührebene, 218
Beryllium
Elektronenkonfiguration, 1229
Beschleuniger, 1363
beschleunigte Kugel, 329
Beschleunigung, 39, 67, 68, 82, 84
beim freien Fall, 85
Dimension, 39
eines Schnellkäfers, 73
gleichförmige, 39
Messung mittels Yo-Yo, 91
mittlere, 39, 43, 45, 67
Momentan-, 40, 42, 67
Normal-, 64, 68
Tangential-, 64, 68
und Geschwindigkeitsbetrag, 43
von Teilchen im Zyklotron, 857
Vorzeichen, 40
Zentripetal-, 68
Beschleunigungsspannung
Röntgenröhre, 1236
Beschleunigungsvektor, 42
Ableitung des Geschwindigkeitsvektors, 42
Komponenten, 42
Pendelschwingung, 61
tangentielle Komponente, 62
zentripetale Komponente, 62
Beschleunigung-Zeit-Diagramm, 40
Besetzungs inversion, 1238–1240
Besetzungs wahrscheinlichkeit,
Fermi-Elektronengas, 1292
 β -Zerfall, 1326
eines freien Neutrons, 1326
- Energiespektrum der Elektronen, 1326
Bethe-Bloch-Formel, 1365, 1366
Betrag, 1410
Beugung, 486, 515, 1085, 1112
Atome, 1169
Doppelspalt, 1172, 1173
Elektronen, 1167–1169, 1172, 1173
Neutronen, 1169
und Auflösung, 1106, 1107, 1113
von Wellen, 486
Beugungsgitter, 1093, 1094, 1112
Auflösungsvermögen, 1107, 1112
Gitterkonstante, 1093, 1095, 1112
Interferenzmaxima, 1094, 1112
kubisches, 1279
Reflexionsgitter, 1093
reziprokes, 1280
Transmissionsgitter, 1093
Beugungsmaximum, 1097, 1099
Beugungsminimum, 1097, 1099
Einzelpunkt, 1098
Beugungsmuster
Einzelpunkt, 1097, 1098, 1099, 1103, 1104, 1105, 1113
Fraunhofer'sches, 1096, 1106, 1112
Fresnel'sches, 1096, 1097, 1112
Nebenmaximum, 1105
und Interferenzmuster bei mehreren Spalten, 1106
und Interferenzmuster bei zwei Spalten, 1099, 1100
Bewegung, 27
absolute, 1122, 1123
eindimensional, gleichförmig beschleunigte, 45
eindimensionale, 28
gleichförmig beschleunigte, 47, 54
gleichförmige, 30
Kreis-, 95
krummlinige, 68, 104
Bewegungsdiagramm, 44, 62
Bungee-Springer, 44
Bewegungsgleichung, 68
Integration, 1418
Bezugshöhe, 263
Bezugspunkt, 729, 762
Potenzial, 728, 731, 732, 744
Bezugssystem, 36, 37, 78, 1122
beschleunigtes, 1150
Inertial-, 1122
Biegesteifigkeit, 359, 362
Definition, 362
Biegung, 367, *siehe*
Euler-Bernoulli-Balkentheorie
bikonkave Linsen, 1058
bikonvexe Linsen, 1058
Bild
reelles, 1044, 1049, 1053, 1078
virtuelles, 1042, 1044, 1049, 1050, 1053, 1078
Bilderzeugung
durch Brechung, 1052, 1053, 1078
durch Reflexion, 1042, 1043, 1044
Bildkonstruktion
dicke Linsen, 1062

- dünne Linsen, **1058, 1060, 1079**
 ebene Spiegel, **1042**
 Konkavspiegel, **1049**
 Konvexspiegel, **1051**
 sphärische Spiegel, **1045, 1049, 1078**
 Zerstreuungslinse, **1060**
- Bildpunkt, **1042, 1043, 1045, 1078**
 Spiegelreflexion, **1014**
- Bildröhre, **170**
 Kraft auf ein Elektron, **170**
- Bildschärfe
 Konkavspiegel, **1044**
- Bildweite
 Brechung, **1053**
 dünne Linsen, **1056**
 sphärische Spiegel, **1045, 1049, 1050, 1078**
- Billard, **236, 328, 333**
- Bimetallthermometer, **531, 532**
- Bindung
 chemische, *siehe* chemische Bindung
 ionische, **1278**
 kovalente, **1278**
 metallische, **1278**
 Van-der-Waals-, **1278**
 Wasserstoffbrücken-, **1278**
- Bindungsenergie
 Elektronen im Atom, **1216**
 konkretes Beispiel, **1323**
 pro Nukleon, **1322**
 von Kernen, **1321–1323**
 von Teilchen, **1144**
- Binom, **1408**
- Binomialentwicklung, **696, 1408**
 Ableitung einer Potenzfunktion, **1413**
 komplexe Zahl, **1411**
- Binomialformel, **737**
- Binomialkoeffizienten, **1408**
- binomische Formeln, **1397**
- binomischer Satz, **1408**
- Biot, J.-B., **873**
- Biot-Savart'sches Gesetz, **875, 905**
- Bizeps, **309, 353**
- Blasenkammer, **1349, 1354, 1355, 1357, 1368**
- Blasinstrumente, **504**
- Blauverschiebung, **479**
- Blindwiderstand, **971**, *siehe* induktiver
 Blindwiderstand, kapazitiver
 Blindwiderstand
 eines Schwingkreises, **962**
- Blitz, **80**
- Blockieren
 Räder, **122, 123**
- Blutdruck, **378**
- Blutfluss, **388, 395–397, 399**
- Bodeneffekt, **391**
- Bodengeschwindigkeit, **38, 39**
- Bogenentladung, **747**
- Bogenmaß, **282, 1402**
- Bohr, Niels, **1177, 1212, 1333**
- Bohr'sche Postulate, **1214, 1244**
- Bohr'sche Radien, **722, 1214, 1215, 1220, 1224, 1244**
- Bohr'scher Elektronenradius, **787**
- Bohr'sches Atommodell, **1213, 1214, 1216, 1217, 1244**
- Bohr'sches Korrespondenzprinzip, **1177, 1180**
- Bohr'sches Magneton, **905, 906, 1224**
- Boltzmann, Ludwig, **638**
- Boltzmann-Faktor, **555**
- Boltzmann-Konstante, **546, 562**
- Bor
 Elektronenkonfiguration, **1229**
- Born'sche Näherung, **1282**
- Bose-Kondensat, **1247**
- Boson, **1202, 1205**
 Elementarteilchentheorie, **1352**
 Vektor-, **1361**
 W-, **1361**
 Z-, **1361**
- Bosonsystem, **1291**
- Bottomium, **1360**
- Bottom-Quark, **1360**
- Bowlingkugel
 kinetische Energie, **327**
 Rollen mit Gleiten, **332**
- Boyle, Robert, **546**
- Boyle-Mariotte'sches Gesetz, **546**
- Bq (Becquerel), **1326**
- Brackett, Frederick, **1216**
- Brackett-Serie, **1216**
- Bradley, James, **1008**
- Bragg-Peak, **1366**
- Bragg-Reflexion, **1282**
- Bragg'sche Gleichung, **1282**
- Brahe, Tycho, **131**
- Brattain, Walter, **1303**
- Bravais-Gitter, **1278**
- Brechkraft
 dünne Linsen, **1059, 1079**
 Einheit Dioptrie, **1059**
 Zerstreuungslinse, **1059**
- Brechung, **482, 485, 1011, 1012, 1013, 1035**
 Bilderzeugung, **1052, 1053, 1078**
 physikalische Mechanismen, **1013**
 von Wellen, **485**
 Vorzeichenkonvention, **1053, 1079**
- Brechungsgesetz, **1012, 1013, 1035**
 Herleitung, **1022–1024**
- Brechungsindex, *siehe* Brechzahl
- Brechungswinkel, **1012, 1013**
- Brechzahl, **1011, 1035**
 Dispersion, **1019**
 Totalreflexion, **1015, 1016**
 Werte, **1011, 1019**
- Bremsstrahlung, **990, 1366**
- Bremsvorgang, **40**
- Bremsweg, **49–51, 123, 260**
 mit und ohne ABS, **122**
- Bremszeit, **51**
- Brennebene
 dünne Linsen, **1058, 1059**
 sphärische Spiegel, **1047**
- Brennpunkt
 dünne Linsen, **1058, 1079**
 einer Ellipse, **131**
 sphärische Spiegel, **1045, 1047, 1048**
- Brennpunktsstrahl
 dünne Linsen, **1060, 1079**
 sphärische Spiegel, **1049, 1078**
- Brennweite
 Auge, **1067**
 dünne Linsen, **1057, 1058, 1079**
 sphärische Spiegel, **1047, 1078**
- Brewster, David, **1027**
- Brewster'scher Winkel (Polarisationswinkel), **1027**
- Brewster'sches Fenster, **1039**
- Brewster'sches Gesetz, **1027**
- Briggs'scher Logarithmus, *siehe* Logarithmus (dekadischer)
- Brille
 Entspiegelung, **1089**
 Lese-, **1068**
- Brillouin-Zone, **1283**
- Buckminster-Fulleren, Struktur, **1283**
- Bündel
 schiefe, **1067**
- Bundesnetzagentur, **997**
- Bungee-Springen, **188**
- Bungee-Springer, **44**
 Beschleunigungsrichtung, **44**
 Bewegungsdiagramm, **44**
- C
- C-14-Isotop
 Entstehung, **1327**
- C-14-Methode, **1327**
 Altersbestimmung, **1327**
 konkretes Beispiel, **1327**
- C₆₀-Molekül, **1283**
- cal (Energieeinheit), **568, 569, 594**
- Calcit
 Doppelbrechung, **1028, 1029**
- Calcium
 Austrittsarbeit, **1294**
 Elektronenkonfiguration, **1233**
- calculus, *siehe* Analysis
- Candela, **5, 20**
- Capsaicin, **716**
- Carnot, Sadi, **4, 608, 624**
- Carnot-Kreisprozess, **608, 609**
 Entropieänderung, **619**
 Schritte, **609, 610, 620, 625**
 Temperatur-Entropie-Diagramm, **620**
 Wärmekraftmaschine, **625**
 Wirkungsgrad, **608, 609, 610, 625**
- Carnot-Prinzip, **608**
- Cäsiumuh, **5**
- Cavendish, Henry, **137**
- CD, **22**
- CD im Player
 Bewegungsgleichung, **284**
- Cellophan
 Doppelbrechung, **1028**
- Celsius, Anders, **532**
- Celsius-Skala, **531, 532, 533, 535, 542**
- Čerenkov-Strahlung, **480, 521**
- CERN
 LHC (Large Hadron Collider), **1362**
 Luftbild, **1353**
 Proton-Antiproton-Beschleuniger, **1355**
- CFD-Programme, **401**
- cgs-System, **657**
- Chamberlain, Owen, **1353**
- Chandra (Röntgenteleskop), **1211**

- charakteristische Länge, 399
 charakteristische Rotationsenergie, *siehe*
 Rotationskonstante
 Charles, Jaques, 546
 Charm-Quark, 1360
 Chekets, Stan, 102
 chemische Bindung, 1252, 1257, 1270
 ionische, *siehe* ionische Bindung
 kovalente, *siehe* kovalente Bindung
 metallische, *siehe* metallische Bindung
 Van-der-Waals-, *siehe*
 Van-der-Waals-Bindung
 Wasserstoffbrücken-, *siehe*
 Wasserstoffbrückebindung
 chemische Elemente, 1211
 Elektronenkonfigurationen, 1226,
 1228–1230, 1231, 1233
 Ionisierungsgesnergie, 1230, 1233
 Nebengruppen-, 1233
 Ordnungszahlen, 1211, 1236
 Periodensystem, 1226, 1231, 1233, 1244,
 1245
 chemische Energie, 191, 197
 chemische Reaktion, 191
 chemische Verbindungen
 Entropie, 623
 Cherenkov-Effekt, 1369
 Chlorwasserstoff
 Infrarotabsorptionsspektrum, 1265, 1266
 chromatische Aberration, 1067, 1079
 Ci (Curie), 1326
 Clausius, Rudolf, 586, 600
 CNT, *siehe* Kohlenstoff-Nanoröhrchen
 Cockcroft, John Douglas, 1329
 Coefficient of Performance (COP), *siehe*
 Leistungszahl
 Compton, Arthur H., 1164
 Compton-Effekt, 1367
 Compton-Gleichung, 1166, 1179
 Compton-Streuung, 1164–1166, 1179, 1235
 Compton-Wellenlänge, 1166, 1179
 Computertastatur
 kapazitiver Schalter, 768
 Concorde, 71
 Coney Island, 189, 190
 Cooper, Leon, 1306
 Cooper-Paar, 1306
 COP (Coefficient of Performance), *siehe*
 Leistungszahl
 Coriolis-Kraft, 128, 129, 130, 149
 und Wetter, 128
 Corvette, 41
 Coulomb, Charles Augustin de, 656, 800
 Coulomb (Einheit), 654
 Definition, 654
 Coulomb-Kraft
 im Wasserstoffatom, 657
 Vergleich mit Gravitationskraft, 658, 674
 Coulomb-Potenzial, 729, 754
 Coulomb'sche Konstante, 680
 Coulomb'sches Gesetz, 656, 680, 717
 Berechnung von E kontinuierlicher
 Ladungsverteilungen, 688
 Berechnung von Feldern, 663
 und Biot-Savart'sches Gesetz, 875
 Crashtest, 51
 Crick, Francis, 1257
 Curie, Einheit, 1326, 1343
 Curie, P., 898
 Curie, Marie und Pierre, 4
 Curie'sches Gesetz, 898, 906
 Curie-Temperatur, 899
- D**
- D (Teil des Zyklotrons), 857
 Dampfdruck, 559, 560, 574, 594
 Dampfdruckkurve, 574
 Dampfmaschine, 600, 601, 604, 611
 Volumenarbeit, 578
 Dämpfungskonstante, 436
 Davisson, Clinton Joseph, 1167, 1168
 Davisson-Germer-Experiment, 1167, 1168
 Daytona International Speedway, 101
 de Broglie, Louis, 1167
 de Broglie'sche Gleichung, 1167, 1168, 1179
 Deflagration, 273
 Dehnung, 352, 366
 Dehnungsfugen, 539, 540
 Deka-, 7
 Δ , 28
 Descartes, René, 1008, 1013, 1019, 1020
 destruktive Interferenz, 491, 1086
 Detektor, 1365, 1367
 KamLAND-, 1351
 Super-Kamiokande-, 1351
 Detonation, 273
 Deuterium, 1320
 Deuteriumkern
 Ruheenergie, 1143
 Deuteron, 857
 deutliche Sehweite, 1067, 1070
 Dezi-, 7
 Dezibel, 472
 Diamagnet, idealer, 903
 Diamagnetismus, 895, 902, 903, 906
 Diamant
 Brechzahl, 1011, 1017
 Phasenübergänge, 571
 Struktur, 1282, 1283
 Dichte, 372, 402
 Berechnung, 373
 relative, 373, 402
 Standardbedingungen, 373
 von Wasser, 372
 Dichtezahl, 373
 dicke Linsen, 1062
 Dielektrikum, 766, 778, 781, 786, 788, 791
 Anwendungen, 791
 Einführen, 782, 784
 elektrisches Feld, 778
 elektrisches Feld im Innern, 791
 gespeicherte Energie, 781
 makroskopisches Verhalten, 791
 mikroskopische Betrachtung, 791
 molekulare Betrachtung, 785
 polares, 785
 Wirkung auf die Kapazität, 779, 791
 Wirkung im Kondensator, 779
 dielektrischer Durchschlag, 722, 745, 749, 755
 Dielektrizitätskonstante, 657, 717, 762, 779,
 781, 789, 791
 relative, 779, 788
 Tabelle, 778
 Diesel-Kreisprozess, 628
 Differenzial, 1412
 Schreibweise, 34
 Differenzialgetriebe, 317
 Differenzialgleichung, 1415
 erster Ordnung, 440
 erzwungene Schwingung, 442
 gedämpfter Oszillator, 436
 harmonische Schwingung, 414, 415, 427
 Lösung im komplexen, 1415
 Schwingungsgleichung, 427
 zweiter Ordnung, 436
 Differenzialrechnung, 1411–1417
 Ableitung, 1412
 Grenzwert, 1411
 Differenziationsschaltung, 974
 differenzieren, *siehe* Ableitung
 diffuse Reflexion, 1014
 Digitalkamera, 761
 Dimension (physikalische), 20
 Ableitung, 1414
 einer physikalischen Größe, 7, 8
 Integral, 1417
 Tabelle, 8
 Dimensionsanalyse, 8
 Diode, 975
 Halbleiter-, 1299, 1301, 1302, 1303, 1313
 Zener-, 1301
 Diodenlaser, 1240
 Dioptrie (Einheit der Brechraft), 1059
 Dipol
 elektrischer, 668, 675, 681, 733
 elektrischer, Potenzial, 733
 Feldlinien, 670
 Fernfeld, 668
 magnetischer, 889
 induzierter, 895
 Magnetfeld, 877
 potenzielle Energie, 861, 868
 potenzielle Energie, 676
 Dipolantenne, 990, 991, 999
 Intensitätsmuster, 993
 Dipolmoment, 733, 785
 Dielektrikum, 785
 Einheit, 677
 elektrisches, 668, 733
 induziertes, 677, 681, 786
 induziertes eines Wasserstoffatoms, 786
 magnetisches, *siehe* magnetisches Moment
 Moleküle, 1256, 1257, 1270
 permanentes, 675, 786
 Dipolstrahlung, 990, 992, 999
 Feldkomponenten, 990
 Winkelabhängigkeit, 992
 Dirac, Paul, 1224, 1352
 Dirac-Gleichung, 1224, 1352
 Diskontinuität, 711
 des elektrischen Felds an Ladungsflächen,
 711
 Dispersion, 509, 517, 1019, 1035
 chromatische Aberration, 1067
 Regenbogen, 1019
 Display

- Flüssigkristall-, 1026
Head-up-, 1110
Dissipation, 439
dissipative Effekte, 608
Dissoziationsenergie, 1252, 1253
Divergenz
eines Vektorfelds, 724
DNA
Struktur, 1257, 1258
Wasserstoffbrückenbindung, 1258
Donator, 1301
-niveau, 1299
Doppelbrechung
außerordentlicher Strahl, 1028, 1029
Glas, 1029
optische Achse, 1029
ordentlicher Strahl, 1028, 1029
- E**
e (Euler'sche Zahl), 1399, 1415
Ebene
geneigte, 107
ebene Spiegel, 1042
Bildkonstruktion, 1042
mehrere, 1043, 1044
ebene Welle, 457, 984
Echolot, 487
Eddington, Arthur, 1153
EDLC, 789, 790
Effekt

- piezoelektrischer, 788, 792
 pyroelektrischer, 788, 792
 effektive Dosis, 1340, 1344
 Definition, 1340
 effektive Kernladung, 1228, 1229, 1237
 effektive Stromstärke, 949, 971
 Effektivwert, 949
 Effet, 328
 Ehrenfest, Paul, 1176
 Ehrenfest-Theorem, 1177, 1180
 Eigendrehimpuls, 314
 Eigenfrequenz, 437, 440, 496, 498, 516
 Schwingkreis, 959, 963
 zweiatomige Moleküle, 1263
 Eigenhalbleiter, 1298
 Bandstruktur, 1298
 Eigenkapazität, 762
 kugelförmiger Leiter, 769
 Eigenlänge, 1128, 1154
 Eigenzeit, 1125, 1154
 Ein-Elektronen-Atome, *siehe*
 wasserstoffähnliche Atome
 Einfalls Ebene
 Reflexion, 1012
 Einfallsseite
 brechende Fläche, 1053
 Einfallswinkel
 Brechung, 1012, 1013
 Reflexion, 1012
 Einheit der Ionendosis, 1339
 Einheitenystem
 internationales, 5
 Einheitskreis, 1402
 Einkristall, 1278
 Einschwingen, 962
 Einschwingvorgang, 442
 einseitig aufgehängter Stab, 293, 301
 Schlagzentrum, 345
 $1/r^2$ -Gesetz, 657
 Einstein
 Postulate, 1123, 1124, 1154
 Einstein, Albert, 4, 1121, 1213, 1238
 Einstein-Ring, 1153
 Einstein'sche Gleichung
 photoelektrischer Effekt, 1163, 1164
 Photonenergie, 1163
 Einstein-Temperatur, 598
 Einzelpunkt
 Beugungsmuster, 1097, 1098, 1099, 1103,
 1104, 1105, 1113
 Eis
 Sublimation, 574
 Eisberg, 386
 Eisen
 Elektronendichte am absoluten
 Temperaturnullpunkt, 1292
 Fermi-Energie, 1292
 Eisenbahnwaggon, 37
 Scheinkräfte, 126, 127
 Eiskernuntersuchungen, 1031
 Eiskunstlauf, 318
 Eispunkt, 531, 532, 535
 elastische Grenze, 352
 elastische potentielle Energie, 175
 elastische Streuung, 1234
 elastischer Körper, 352
 elastischer Stoß, *siehe* Stoß
 relativistische Betrachtung, 1141
 Elastizitätskoeffizient, *siehe* Elastizitätszahl
 Elastizitätsmodul, 352, 366
 atomares Modell, 368
 Elastizitätszahl, 235, 237
 Elektrolyt, 790
 elektrische Dipolstrahlung, *siehe* Dipolstrahlung
 elektrische Energie, 726, 749, 755, 766
 Bezugspunkt, 729
 endlicher Leiter, 755
 Kernspaltungsprodukte, 730
 Leitersystem, 750, 755
 Punktladungen, 755
 Punktladungssystem, 749
 Speicherung, 766
 und Potenzial, 726
 Wasserstoffatom, 730
 zweier Ladungen, 729
 elektrische Feldkonstante, 657
 Zahlenwert, 980
 elektrische Feldlinien, 668, 680
 Dipol, 670
 Regeln für die Konstruktion, 670
 elektrische Feldstärke, 669, 727
 Änderungsrate des Potenzials, 727
 Kraft pro Ladungseinheit, 727
 elektrische Ladung, *siehe* Ladung
 auf Leiteroberflächen, 711
 elektrische Leistung, 836
 Batterie, 812
 einem Bauelement zugeführt, 836
 Spannungsquelle, 810, 836
 umgesetzt im Ohm'schen Widerstand, 809,
 836
 elektrische Leitfähigkeit, 805, 1288
 klassische Theorie, 807
 quantenmechanische Theorie, 807
 elektrische Leitung
 Analogie zur Wärmeleitung, 805
 Bändermodell, 1297–1299
 im Supraleiter, 1306
 klassisch, 1288–1290, 1296, 1312
 mikroskopisches Modell, 1288–1290, 1312
 quantentheoretisch, 1290, 1295, 1296, 1312
 elektrische Spannung, 727, 762, 791, 804
 Messung, 827
 elektrische Stromdichte, 1288
 elektrischer Dipol, 668, 675, 681, 733
 Feldlinien, 670
 in elektrischen Feldern, 675
 Potenzial, 733
 potenzielle Energie, 675, 676
 elektrischer Fluss, 700, 701, 717
 elektrischer Leiter
 Kupfer, 654
 elektrischer Strom, 800, 836
 als Bewegung positiver Ladungsträger, 804
 als Ladungsfluss, 799
 Definition anhand der Stromdichte, 803
 durch eine Fläche, 803
 Messung, 827, 828, 886
 Richtung, 800, 824, 825
 und Driftgeschwindigkeit, 801
 und elektrisches Feld, 804
 Vorzeichen, 803
 elektrischer Stromkreis, 770
 elektrischer Widerstand, 804, 836, *siehe auch*
 Ohm'scher Widerstand
 Einheit, 804
 Ersatzwiderstand, 813
 Messung, 827
 Messung mit Wheatstone-Brücke, 842
 Parallelschaltung, 813
 pro Längeneinheit eines Drahts, 805
 Reihenschaltung, 813
 umgesetzte Leistung, 809
 elektrisches Dipolmoment, 668, 716
 Definition, 668
 Moleküle, 1256, 1257, 1270
 elektrisches Feld, 79, 662, 680
 auf Leiteroberflächen, 711
 Berechnung aus dem Potenzial, 733, 754
 Bewegung von Punktladungen, 672
 Dielektrikum, 778
 Diskontinuität, 711
 endliche Linienladung, 688, 691, 693
 Energie, 768
 Energiedichte, 769
 Feldstärke, 669
 homogen geladene Kreisscheibe, 698
 homogen geladene Kugel, 709
 homogen geladene Kugelschale, 705
 homogene Ladungsverteilung, 717
 im Leiterinnern, 742
 in Strom führendem Draht, 805
 kartesische Komponenten, 734
 Kreisscheibe, 698
 linear ansteigendes Potenzial, 734
 Linienladung, 692
 Linienladung (Näherung), 692
 Maßeinheit, 727, 754
 nicht konservatives, 917
 Potenzialgradient, 734, 754
 Punktladung, 693, 698
 Richtung, 727
 Ringladung, 694, 695, 697
 Sprungstelle, 697
 und Potenzial, allgemeiner Zusammenhang,
 734
 unendliche Linienladung, 691, 693, 697, 710
 unendliche Platte, 698, 704
 Unstetigkeit von E_n , 711, 717
 Vergleich mit Gravitationsfeld, 672
 Vergleich mit Magnetfeld, 850, 860, 875, 889
 von einem Magnetfeld erzeugt, 919
 elektrisches Organ, 809
 elektrisches Potenzial, 726, 754
 Berechnung, 731
 Stetigkeit, 754
 Elektrode, 770
 Elektroenergie
 Erzeugung, 927, 947
 Transport, 956
 Transportverlust, 957
 Elektrolyt, 770
 Elektrolytkondensator
 Schnittansicht, 766
 Elektrolytseparatör, 789

- elektromagnetische Energie, 191
 elektromagnetische Strahlung
 des schwarzen Körpers, 990
 Quellen, 990
 Wechselwirkung mit Materie, 990
 Wellenlänge, 989
 Welle-Teilchen-Dualismus, 1161
 elektromagnetische Wechselwirkung, 79, 103, 1350, 1362
 Standardmodell der Elementarteilchen, 1374
 elektromagnetische Welle, 191, 468, 767, 980, 999
 Ausbreitungsgeschwindigkeit, 980, 984, 999
 Ausbreitungsrichtung, 986, 999
 Energie und Impuls, 993, 995, 1000
 Energiedichte, 993, 1000
 Erzeugung, 468
 Feldstärken, 999
 Feldvektoren, 988
 Impuls, 993
 Intensität, 993, 1000
 Phasenbeziehung der Feldkomponenten, 986
 Quellen, 990
 Vergleich mit Schallwellen, 468
 Wellengleichung, 999
 zirkular polarisierte, 988
 elektromagnetisches Feld
 Energiedichte, 932
 elektromagnetisches Spektrum, 989, 999
 Elektronen, 80, 652, 1350
 Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, 1221, 1222, 1223, 1245
 Auswahlregeln bei Übergängen, 1220, 1245
 Bahnradien im Atom, 1213, 1214, 1215
 Beugung, 1167–1169, 1172, 1173
 Bewegung im elektrischen Feld, 672
 Bewegung im Leiter, 800, 803
 Bewegung im Magnetfeld, 853
 Bindungsenergie im Atom, 1216
 Bohr'sche Radien, 1214, 1215, 1220, 1224, 1244
 Bremsstrahlung, 1368
 Compton-Streuung, 1164, 1165
 Cooper-Paar, 1306
 De-Broglie-Gleichung, 1167
 Drehimpuls, *siehe* Bahndrehimpuls
 Driftgeschwindigkeit, 1288
 Energieniveaus im Kastenpotenzial, 1185, 1186
 Energieniveaus in Molekülen, 1262, 1263
 Energieverteilung in Metall, 1290
 Entdeckung, 854
 freie, 654
 geriebener Glasstab, 652
 Impuls, 1179
 Interferenz, 1161, 1168, 1173
 kinetische Energie im Atom, 1213
 Kraft, 170
 Ladung-Masse-Verhältnis, 854
 Ladungsverteilung, *siehe* Atomorbitale
 magnetisches Bahnmoment, 896
 magnetisches Moment, 1224
 Masse, 12
 Pauli-Verbot, 1202
 photoelektrischer Effekt, 1162–1164
 potenzielle Energie im Atom, 1213
 Promotion, 1260
 Ruheenergie, 1143
 Spindrehimpuls, 1224, 1225
 stationäre Zustände im Atom, 1214, 1217, 1226
 strahlungloser Umlauf im Atom, 1214, 1244
 Tunneln, 1197
 Übergänge im Atom, 1214, 1215, 1220, 1244
 Valenz-, 1223
 Wechselwirkung mit Gitter, 1289, 1295, 1296, 1306, 1307
 Wechselwirkungsenergie im Atom, 1227
 Wellenfunktion im Atom, 1244
 Wellenlänge, 1167, 1168, 1179
 Wellennatur, 1168, 1169, 1183
 Welle-Teilchen-Dualismus, 1161, 1172
 Elektronenaffinität, 1252
 Elektronendichte
 für verschiedene Elemente, 1292
 in dotiertem Silicium, 1300
 in reinem Silicium, 1300
 Elektronengas, 654
 Fermi-, 1290
 klassisches Konzept, 1288–1290
 metallische Bindung, 1258, 1270
 Elektronenkanone, 170
 Elektronenkonfigurationen
 Atome, 1226, 1228–1230, 1231, 1233, 1244, 1245
 Pauli-Verbot, 1226
 Elektronenmikroskop, 1108, 1169
 Rastertunnel-, 1197
 Elektronenradius
 Bohr'scher, 787
 klassischer, 759
 Elektronenschalen, 1226, 1230
 Elektronenspinresonanz, 1248
 Elektronenstrahl
 Ablenkung durch Felder, 855
 Elektronenübergänge
 Spektren, 1031, 1233
 Elektronenvolt, 161, 169, 727, 754, 1143
 Umrechnung in J, 1143
 Elektronenwellen
 Reflexion, 1192
 Transmission, 1192
 Elektronenwolke, 1223
 Durchdringung, 1228
 Elektronenzustände im Festkörper, 1297
 Elektron-Leptonenzahl, 1357
 Elektron-Loch-Paar, 1303
 Elektron-Neutrino, 1326, 1350
 Elektron-Positron-Paarbildung, 1367
 elektroschwache Wechselwirkung, 79, 103
 Standardmodell der Elementarteilchen, 1361
 Elektroskop, 655
 elektrostatische Induktion, *siehe* Influenz
 elektrostatische Kraft, 726
 Feld, 662
 im Wasserstoffatom, 657
 resultierende, 659
 Vergleich mit Gravitationskraft, 658, 673, 674
 elektrostatische Pulverbeschichtung, 678
 elektrostatischer Druck, 722
 elektrostatisches Gleichgewicht, 773
 Elementarladung, 653, 654, 727
 Elementarteilchen, 80, 1350–1377
 Antiteilchen, 1351, 1352, 1374
 Begriff, 1350
 Bosonen, 1352
 elektroschwache Wechselwirkung, 1361
 Erhaltungssätze, 1355–1358
 Feldquanten, 1361
 Fermionen, 1352
 Große Vereinheitlichte Theorien, 1363
 Hadronen, 1350, 1351
 Leptonen, 1350, 1351
 Pauli-Prinzip, 1352, 1362
 Quarks, 1359–1361
 seltsame, 1357
 Spin, 1351, 1352
 Standardmodell, 653, 1362, 1363
 Elementarwelle, 481, 482
 Elementarzelle, 1278
 Elemente (chemische), *siehe* chemische Elemente
 Elementsymbol, 1320
 Ellbogen, 309
 Ellipse, 132
 Brennpunkt, 131
 Definition, 131
 Gärtnerkonstruktion, 132
 Hauptachse, 132
 Nebenachse, 132
 Emission
 spontane, 1233, 1234
 stimulierte, 1233, 1235, 1238–1240
 Emissionsgrad, 639, 644
 Emissionspektren
 zweiatomige Moleküle, 1260, 1263
 Emitter, Transistor, 1303
 EMK, 810
 E-Modul, *siehe* Elastizitätsmodul
 Endbild
 dünne Linsen, 1056
 Linsenkombinationen, 1063
 Mikroskop, 1072
 Teleskop, 1073
 Endgeschwindigkeit, 45, 125, 149
 Fallschirmspringer, 125
 endotherm, 1329, 1343
 Energie, 160, 168
 chemische, 191, 197
 des elektrischen Felds, 768
 Dielektrikum, 781
 Einheit Joule, 568, 569, 579
 Einheit Kalorie, 568, 569, 594
 elastische, 358
 elastische potenzielle, 175
 elektrische, 726, 749, 755, 766
 elektrische, eines Punktladungssystems, 749
 elektrische, und Potenzial, 726
 elektrische, zweier Ladungen, 729
 elektromagnetische, 191
 entwertete, *siehe* Arbeit, entwertete Erhaltung, *siehe* Erster Hauptsatz
 erlaubte Werte, *siehe* Energieniveaus
 Gasteilchen, 552, 553, 555, 556, 562

- Gleichverteilungssatz, 1267
 harmonischer Oszillator, 421
 in einem Kondensator gespeicherte, 766
 innere, *siehe* innere Energie
 ionische Bindung, 1252, 1253
 Kern-, 191
 kinetische, 168, 169, 175, 177, 191, 192, 201
 kinetische, der Translation, 259, 274
 Kondensator, 791
 kovalente Bindung, 1255, 1256
 Maßeinheit, 169
 mechanische, 191, 202
 mechanische, Erhaltung, 183
 potenzielle, 168, 174, 177, 181, 184, 201, 276
 potenzielle der Gravitation, 177
 potenzielle und Gleichgewicht, 181
 potenzielle, Bezugspunkt, 178
 potenzielle, der Gravitation, 175, 201, 263
 potenzielle, der Gravitationskraft in der Nähe der Erdoberfläche, 177
 potenzielle, eines Dipols, 675
 potenzielle, elastische, 180
 potenzielle, elastische Verformung, 201
 potenzielle, Feder, 180
 Quantisierung, 640, 1267
 relativistische, 1142, 1143–1147, 1155
 relativistische kinetische, 1142
 Schallwellen, 470
 und Masse, 1144
 Verfügbarkeit, 620
 Verteilung, 555, 562
 Wärme-, 191
 Energieaustausch
 Welle-Teilchen-Dualismus, 1162, 1172, 1173, 1179, 1180
 Energiebänder, Festkörper, 1297
 Überlappung, 1298
 Energiebedarf
 USA, 1345
 Energiedichte, 769, 791
 des elektromagnetischen Felds, 932
 des Magnetfelds, 932
 eines gedehnten Stabs, 358
 eines gedrehten Stabs, 358
 elastische, 358
 elektrisches Feld, 769
 Energiedosis, 1340, 1344
 Definition, 1340
 Energieerhaltung, 202
 Energieerhaltungssatz, 202
 Erhaltung der mechanischen Energie, 183
 Vorgehensweise, 184
 Energieerhaltung, relativistische
 konkretes Beispiel, 1146
 Energieerhaltungssatz, 191, 202
 Energiegehalt
 Benzin, 199
 Energielücke
 Halbleiter, 1298
 Supraleiter, 1306
 Energieniveaus
 dreidimensionales Kastenpotenzial, 1198, 1199
 Elektronen in Molekülen, 1262, 1263
 Entartung, 1198, 1205, 1220
 harmonischer Oszillator, 1190, 1191, 1205
 Kastenpotenzial, 1184–1189
 Rotations-, 1260, 1261, 1262–1264, 1270
 Schwingungs-, 1262, 1263, 1270
 wasserstoffähnliche Atome, 1219, 1245
 Wasserstoffatom, 1215, 1216, 1219, 1220, 1244, 1245
 Energiequantisierung
 im Kastenpotenzial, 1290
 Randbedingungen, 1184, 1205
 Energiesatz, *siehe* Erster Hauptsatz
 Energietransport
 von Wellen, 468
 Energieübertragung
 durch Seilwelle, 469
 Energieumsatz
 Organismen, 592
 Energieumwandlung, 197, 202
 Energieverbrauch
 Deutschlands, 204
 Energieverlust in Elektroleitungen, 809
 Energieverteilungsfunktion,
 Fermi-Elektronengas, 1308
 Entartung
 Energieniveaus, 1198, 1205, 1220
 Entfernung Erde-Mond, 7
 Entfernung Erde-Sonne, 10
 Entladerampe, 88
 Entladzeitzkonstante, 1417
 Entladung
 durch Erdung, 656
 Gasentladung, 721
 Glimmentladung, 678
 Entropie, 614, 626
 absolute, 623
 Energie-Entwertung, 626
 Energie-Verfügbarkeit, 620
 Nernst'sches Wärmethereom, 623, 626
 Temperatur-Entropie-Diagramm, 620
 und Wahrscheinlichkeit, 621, 622, 626
 Zweiter Hauptsatz, 617, 625
 Entropieänderung, 614
 Abkühlung, 617
 Arbeit, 619
 Carnot-Kreisprozess, 619
 Erwärmung, 617
 Expansion, 615, 616, 621
 ideales Gas, 614, 615, 616
 inelastischer Stoß, 618
 irreversible Prozesse, 616, 618
 isobare Prozesse, 617
 reversible Prozesse, 615, 619
 Universum, 616, 617, 618, 619, 621
 Wärmeübertragung, 617, 618, 621
 Entspiegelung, 1089
 entwertete Arbeit, *siehe* Arbeit, entwertete
 Entwicklung, *siehe* trigonometrische Funktionen
 (Reihenentwicklung); *siehe*
 Binomialentwicklung
 Erdbahn, 131
 Erdbeschleunigung, 54, 60, 67, 134, 277
 Erdbeschleunigungskonstante, 85
 Erde
 Alter, 12
 Atmosphäre, 555
 Bezugspunkt des elektrischen Potenzials, 821
 Größe, 12
 Magnetfeld, 846, 847, 866
 Masse, 12
 Umdrehungsgeschwindigkeit, 5
 Erde (elektrisch), 656
 Erdumfang, 6
 Erdung, 656
 Ergebnis
 quadratisch gemitteltes, 15, 16
 Ergebnisquadrat
 mittleres, 15
 Erhaltung der mechanischen Energie, 183, 202
 Anwendungen, 183
 Erhaltung mechanischer Energie
 Vorgehensweise, 184
 Erhaltungssätze
 Elementarteilchen, 1355–1358, 1374
 erlaubte Energiewerte, *siehe* Energieniveaus
 Ersatzkapazität, 772, 774, 791
 Parallelschaltung, 772
 Reihenschaltung, 774
 Ersatzkondensator, 772
 Ersatzwiderstand, 813, 825, 837
 Parallelschaltung, 814, 837
 Reihenschaltung, 813, 837
 Erstarren, 571
 erste Harmonische, *siehe* Grundschwingung
 erste kosmische Geschwindigkeit, 138
 Definition, 138
 Ørsted, H. C., 873, 876
 erster Brennpunkt
 dünne Linsen, 1058
 Erster Hauptsatz, 568, 576, 594
 Vorzeichenkonvention, 576
 erstes Newton'sches Axiom, 78, 103
 Erwärmung
 Entropieänderung, 617
 Erwartungswert
 Funktion, 1174, 1179
 Position, 1173, 1174, 1175
 erzwungene Schwingung, 440, 448
 stationärer Zustand, 440
 erzwungener Oszillator
 Amplitude, 442
 Differenzialgleichung, 442
 Einschwingsvorgang, 442
 Ortsfunktion, 442
 Phasenkonstante, 443
 stationäre Lösung, 442
 Esaki-Diode, 843
 Etch-A-Sketch, 678
 Ethan
 Molekülstruktur, 1259
 Euler-Bernoulli-Balkentheorie, 359
 Euler'sche Zahl, 1399, 1415
 Eurostecker, 656
 eV (Elektronenvolt), 161, 169, 727, 1143
 Exa-, 7
 Excimer, 1272
 exotherm, 1329, 1343
 Expansion
 adiabatische, 588, 589
 Entropieänderung, 615, 616, 621

- freie, 578
 Gase, 579
 reversible adiabatische, 589, 590
 Explosion, 273
 Exponent, 10, 20, 1398
 Exponentialfunktion, 1415
 Ableitung, 1412, 1414
 komplexe, 1410
 Exponentialschreibweise, 10, 20
 Vorgehensweise bei Berechnungen, 11
 exponentieller Abfall, 830
- F**
- F-15, 102
 Fabry-Perot-Interferometer, 1117
 Fadenpendel, 451
 Fahrenheit, Daniel, 532
 Fahrenheit-Skala, 532, 542
 Fahrstrahl, 131
 Fahrstuhl, 53, 55, 107
 Körpergewicht, 92
 Fahrstuhlsicherheit, 353
 Faktorisierung, 1397, 1398
 Faustregeln, 1397
 Fall
 freier, 54, 85, 86
 Fallbeschleunigung, 67, 74, 85, 134
 außerhalb der Erde, 135
 Fallmaschine
 Atwood'sche, 277
 Fallschirm, 125
 Fallschirmspringer
 Endgeschwindigkeit, 125
 Farad, 762
 Faraday
 Definition, 683
 Faraday, Michael, 778, 902, 913
 Faraday'scher Käfig, 678, 712
 Faraday'sches Gesetz, 914, 915, 939, 999
 und Maxwell'sche Gleichungen, 983
 und verallgemeinertes Ampère'sches Gesetz, 981
 und Wellengleichung, 984
 Vorzeichenregel, 919
 Farbcode für Widerstände, 808
 Farben
 Licht, 1007, 1029
 Farbensehen
 Zäpfchen, 1068
 Farbladung, 1361
 Faseroptik, 1017, 1018
 Fata Morgana, 1018
 fcc, 1278
 Feder, 81, 160, 162, 175, 180, 201
 Arbeit, 163, 180
 Federkonstante, 81, 180, 414
 Federkraft
 konservative Kraft, 175, 180
 Federschwinger, 414, 419
 Frequenz, 416, 447
 Resonanz, 443
 Schwingungsdauer, 416
 vertikale Bewegung, 424
 Federung, 180
 Fehler
- statistischer, 14, 20
 systematischer, 14
 Fehlerfortpflanzung, 17
 Fehlsichtigkeiten, 1067–1069
 Feinstruktur
 optische Molekülspektren, 1264
 Feinstrukturaufspaltung, 1224, 1225, 1245
 Feinstrukturkonstante, 1248
 Feld, 79
 Berechnung, 664
 elektrisches, 79, 662
 elektrisches, Maßeinheit, 727
 elektrisches, Richtung, 727
 Gravitationsfeld, 140
 homogenes, 763
 konservatives, 915
 magnetisches, 79
 nichtkonservatives, 916
 Unstetigkeitsstelle, 697
 Vergleich Gravitationsfeld und elektrisches
 Feld, 672
 Feld und Potenzial
 allgemeiner Zusammenhang, 754
 Feldeffekttransistor, 1303
 Felder
 gekreuzte, 854
 Feldkonstante
 elektrische, 762
 magnetische, 874, 905
 Zusammenhang mit Lichtgeschwindigkeit, 1010
 Feldlinien, 748
 des elektrischen Felds, 983
 des Magnetfelds, 983
 Dipol, 670
 elektrische, 668, 670, 680
 entartete, 670
 magnetische, 905, siehe auch
 Magnetfeldlinien
 Regeln für die Konstruktion, 670
 und Äquipotenzialflächen, 742
 Feldpunkt
 des elektrischen Feldes, 663
 Feldquanten, 1361, 1374
 Eigenschaften, 1361
 Feldstärke
 elektrische, 669, 727
 Feldstecher, 1016
 Femto-, 7
 Fenster
 Wärmedämmung, 638
 Fermat, Pierre de, 481
 Fermat'sches Prinzip, 482, 515
 Brechung, 1023, 1024
 Reflexion, 1023
 Fermi-Dirac-Verteilung, 1290, 1308, 1309, 1314
 Fermi-Elektronengas, 1290–1295, 1308, 1309
 Besetzungswahrscheinlichkeit, 1292
 Elektronendichte für verschiedene Elemente, 1292
 Energieverteilung, 1290–1295, 1308
 mittlere Energie der Elektronen, 1292, 1309
 Pauli-Prinzip, 1290
 Zustandsdichte, 1308, 1309
 Fermi-Energie, 1291, 1292, 1295, 1312
 bei $T = 0$ K, 1291, 1292, 1308
 bei $T > 0$ K, 1293
 für verschiedene Elemente, 1292
 Fermi-Faktor, 1308
 für $T = 0$ K, 1292, 1293, 1312
 für $T > 0$ K, 1292–1294, 1309
 Fermi-Geschwindigkeit, Elektronengas, 1293, 1295, 1312
 Fermionen, 1202, 1352
 Pauli-Verbot, 1202, 1205
 Fermionensystem, 1291
 Fermi-Temperatur, 1293, 1312
 Fernfeld
 Dipol, 668
 einer Ladungsverteilung, 664
 endliche Linienladung, 691
 Fernordnung in Festkörpern, 1278
 Fernsehantenne, 991
 Fernsehbildröhre, 71
 Fernseher, 170, 672
 Fernwirkung, 662
 Fernwirkungskraft, 79, 662
 Ferromagnetismus, 895, 899–902, 906
 Festkörper, 1278–1286, 1288–1316
 amorpher, 1278
 Bändermodell, 1297–1299, 1313
 Bindung, 1278
 dotierte Halbleiter, 1299
 Einstein-Temperatur, 598
 Elementarzelle, 1278
 Energieverteilungen, 1290–1295
 Fernordnung, 1278
 Freiheitsgrade, 583
 Gitter, 1278–1283
 Gleichverteilungssatz, 582, 583
 Halbleiter, 1298, 1299
 Halbleiterübergangsschichten, 1301–1305
 innere Energie, 583
 Ionenkristalle, 1278–1282
 Isolator, 1297
 Leiter, 1297
 molare Wärmekapazität, 569, 595, 598
 Nahordnung, 1278
 Phasenübergänge, 571
 polykristallin, 1278
 spezifische Wärmekapazität, 569
 Struktur, 1278–1283, 1285
 Transistoren, 1299, 1303–1305
 Wärmekapazität, 583, 1267, 1269
 Festkörperlaser, 1240
 Festplatte, 901
 Fitnesstraining mit Fahrrad, 300
 FitzGerald, George, 1128
 Fizeau, Armand, 1008
 Flächenausdehnungskoeffizient, 539
 Flächeninhalt
 Dimension, 8
 Kreis, 8
 Flächenladungsdichte, 688
 Flächennormale, 859
 Flächensatz, 149, siehe Kepler'sches Gesetz, zweites
 Flächenträgheitsmoment, 360
 Definition, 361
 Flachwasserwelle, 459

- Flasche
Leidener, 789, 793
- Flavour, 1359
- Flip-Flap-Railway, 189, 190
- Flipspule, 923
- Fluchtgeschwindigkeit, 72, 180, 268, *siehe*
zweite kosmische Geschwindigkeit
- Erde, 555
- Zusammenhang mit Atmosphäre, 139
- Flugdauer
beim schrägen Wurf, 58
- Flughörnchen, 156
- Flugzeit, 68
- Flugzeug, 393
Bezugssystem, 78
Bodengeschwindigkeit, 38
im Seitenwind, 38
Relativgeschwindigkeit, 36
- Fluid, 124, 149
inkompressibles, 388
Unterschied Gas–Flüssigkeit, 372
viskoses, 395
- Fluoreszenz, 1234
- Fluss
elektrischer, 700, 701
- Flüssigkeiten
Fluid, 372
molare Wärmekapazität, 569
spezifische Wärmekapazität, 569
- Flüssigkeitsdämpfer, 436, 445
- Flüssigkeitsthermometer, 530–532
- Flüssigkristall-Display
Polarisation, 1026
- FM, *siehe* Frequenzmodulation
- Folienkondensator, 766
Schnittansicht, 766
- Fortbewegung
Welle-Teilchen-Dualismus, 1162, 1173, 1179, 1180
- Fotoblitzlicht, 761
- Foucault, Jean, 1010
- Foucault'sches Pendel, 130
- Fourier, Jean-Baptiste, 507
- Fourier-Analyse, *siehe* harmonische Analyse von Wechselströmen, 948
- Fourier-Spektrum, *siehe* Spektrum
- Fourier-Synthese, *siehe* harmonische Synthese
- Fovea centralis, Netzhaut, 1109
- Franklin, Benjamin, 652, 789
- Franklin, Rosalind, 1257
- Franklin'sche Tafel, 789
- Fraunhofer'sches Beugungsmuster, 1096, 1106, 1112
- freie Elektronen
metallische Bindung, 1258
- Freie Elektronen im Festkörper, 1290–1295, 1312
- freie Expansion, 578
Entropieänderung, 615, 616, 621
- Freie Ladungen, 786, 788
- freie Weglänge, *siehe* mittlere freie Weglänge
- Freie-Elektronen-Laser, 1240
- freier Fall, 48, 54, 85, 86
- freies Elektronengas, 654
- Freiheitsgrade, 595
Festkörper, 583
Gasmoleküle, 586
Gasteilchen, 556, 562
Wärmekapazität, 586
zweiatomige Moleküle, 586, 1266
- Fremdatom, 1299
- Fremdstart eines Autos, 823
- Frequenz, 414, 416
De-Broglie-Gleichung, 1167
- Frequenzbereich
eines Wellenpakets, 509
- Frequenzmodulation, 468
- Frequenznutzungsplan, 997
- Fresnel, Augustin, 482, 1096
- Fresnel'sche Formeln, 483
- Fresnel'sche Linse, 1062
- Fresnel'sches Beugungsmuster, 1096, 1097, 1112
- Fullerene, 1178
Struktur, 1283
- Fundamentale, *siehe* Grundschwingung
- fundamentale Teilchen, 1374
- fundamentale Wechselwirkung, 103, 1350, 1362, 1363, 1374
- Funkenentladung, 747
- Funkeninduktor, 997
- Funkentstörung, 997
- Funkenüberschlag, 921
- Funktion
Ableitung, 1412
Erwartungswert, 1174, 1179
Exponentialfunktion, 1415
konstante, 1412
lineare, 1412
Potenzfunktion, 1412
trigonometrische Funktionen, 1402, 1407
Wachstumsfunktion, 1416
Zerfallsfunktion, 1415
- Funktionskurve, *siehe* Graph
- Fusionsexperiment
Nova-Target-Kammer, 1339
TFTR, 1338
- G**
- G (Gauß), 847
- Gabor, Dennis, 1110
- Galaxienhaufen, 1153
- Galaxis
Größe, 12
Masse, 12
- Galilei, Galileo, 4, 74, 77, 78, 1008, 1074
- Galilei-Transformation, 1124
- Galle, Johann Gottfried, 156
- Galvanometer, 827
- Gammastrahlung, 468
- γ-Zerfall, 1328
metastabile Zustände, 1328
Zeitskala, 1328
- Gamow, George, 1196, 1328
- Gangunterschied, 490, 493, 1086, 1088, 1112
Zusammenhang mit Phasendifferenz, 492
- Gase
adiabatische Expansion, 588, 589
adiabatische Kompression, 588, 589
- Druck, 546, 551, 552
- Fluid, 372
- freie Expansion, 578
- ideales, *siehe* ideales Gas
- innere Energie, 583, 584, 586
- Kompressionsmodul, 591
- molare Wärmekapazität, 583, 584, 585, 594
- p-V-Diagramme, 579, 580, 588
- reale, 547, 558, 562
- Schallgeschwindigkeit, 553, 591
- Verflüssigung, 560
- Volumenarbeit, 579–581
- Wärmekapazität, 587, 1266–1269
- Wärmeleitfähigkeit, 638
- Gasentladung, 721
- Gaskonstante, 460, 546, 547
- Gaslaser, 1240, 1241
- Gasmoleküle
Freiheitsgrade, 586
- Gasteilchen
Anziehung, *siehe* Van-der-Waals'sche Gleichung
- Freiheitsgrade, 556, 562
- Geschwindigkeit, 552
- Geschwindigkeitsverteilung, 553–555, 562
- kinetische Energie, 552, 553, 555, 556, 562
- mittlere freie Weglänge, 556, 557, 562
- Stoßhäufigkeit, 557
- Gastheorie
kinetische, 551, 552, 553, 562
- Gasthermometer, 533, 534, 535, 542, 546
- Gauß, 17
- Gauß (Einheit), 847
- Gauß'sche Oberfläche, 703
- Gauß'sche Zahlenebene, 1410
- Gauß'scher Satz
eindimensional, 724
für das elektrische Feld, 981, 999
und Maxwell'sche Gleichungen, 983
für das Magnetfeld, 999
und Maxwell'sche Gleichungen, 983
- Gauß'sches Gesetz, 699, 701, 702, 717, 738, 740, 743
Ableitung aus dem Coulomb'schen Gesetz, 714
Berechnung von E , 704
- Herleitung, 715
- Ladungsverteilungen ebener Symmetrie, 704
quantitative Darstellung, 701
- Gauß-Verteilung, 16
- Gay-Lussac, Joseph Louis, 546
- Gay-Lussac'sches Gesetz, 546
- gebrochener Strahl, 1012
- Gebundene Ladungen, 786, 788
- gebundene Zustände, 1219
- GebundeneLadungen, 786
- gedämpfte Schwingung, 435, 448
Zeitkonstante, 436
- gedämpfter Oszillatator, 435
Differentialgleichung, 436
- geerdet, 656
- Gefrieren, 571
- Gefrierschrank, 606
- Gegeninduktion, 930, 939

- Gegeninduktivität, 930
 Gegenspannung, 939, 951
 Gegenstand
 virtueller, 1056, 1078
 Gegenstandspunkt, 1042, 1043
 Gegenstandsstrahl
 Hologramm, 1095
 Gegenstandsweite
 Brechung, 1053
 dünne Linsen, 1056
 sphärische Spiegel, 1045, 1049, 1050, 1078
 Geiger, Hans, 1213
 Geiger-Müller-Zählrohr, 721, 1368
 Geigerzählerrohr, 758, 794, 795
 gekreuzte Felder, 854
 gekreuzte Polarisatoren, 1026, 1029, 1031
 Geldscheine
 Hologramme, 1095, 1110
 Gell-Mann, Murray, 1357, 1359
 geneigte Ebene, 107
 Generator, 809, 927, 928
 elektrostatischer, 1329
 Funktionsprinzip, 927
 Leistung, 950
 Schaltbild, 927
 geometrische Optik, 1041
 Gepäcktransportwagen, 200
 Gepard, 41
 gequantelt, 653
 Gerade
 Achsenabschnitt, 1395
 Normalform, 1395
 Steigung, 1395
 Geradengleichung, 1395
 gerader Stoß, *siehe* Stoß
 Geräusch, 507
 Germer, Lester Halbert, 1167, 1168
 Gesamtarbeit, 161, 165, 169, 174, 175
 und kinetische Energie, 169, 172, 174, 180, 183, 201
 und kinetische Energie, Vorgehensweise, 169
 und mechanische Energie, 184
 Gesamtblindwiderstand, 962
 Gesamtenergie, 191
 eines Systems, 191, 202
 mechanische, 183
 relativistische, 1155
 Gesamtkraft, 81, 161
 Gesamtmassemittelpunktsarbeit
 und kinetische Energie der Translation, 259
 Gesamtstrecke, 29, 30
 Gesamtverschiebung, 29, 30
 gesättigte Bindung, 1256
 Geschoss, 256
 Geschwindigkeit im Gravitationsfeld, 141
 maximale Höhe im Gravitationsfeld, 139
 Geschwindigkeit, 27, 30, 67
 absolute, 1123
 ausgedrückt durch Beschleunigung und Verschiebung, 68
 des Photons, 1139
 Dimension, 8
 durchschnittliche, 31
 Gasteilchen, 552
 gleichförmig beschleunigte Bewegung, 68
 mittlere, 31, 33, 52, 67, 68
 Momentan-, 33, 34, 67
 quadratisch gemittelte, 552, 553, 554, 562
 Relativ-, 37, 67, 1124
 Unschärferelation, 1173
 wahrscheinlichste, 554
 Zeitabhängigkeit beim schrägen Wurf, 68
 Geschwindigkeitsadditionsdiagramm, 38
 Geschwindigkeitsbetrag, 30, 34, 67
 mittlerer, 33, 67
 Momentan-, 34
 Geschwindigkeitsfilter, 854, 868
 Geschwindigkeitssensor, 122
 Geschwindigkeitstransformation
 konkretes Beispiel, 1138, 1139
 relativistische, 1137–1140, 1155
 Geschwindigkeitsvektor
 beim GPS, 66
 Betrag, 34
 Richtung, 34
 Geschwindigkeitsverteilung
 Gasteilchen, 553–555, 562
 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, 39
 Gesetz
 Gauß'sches, 738, 740, 743
 Hooke'sches, 81, 163
 Gesetz von Hagen-Poiseuille, 396, 403
 Analogie zum Ohm'schen Gesetz, 397
 Gesetz von Torricelli, 390
 Gewicht, 85, 103, 174, 246
 scheinbares, 86, 383
 und Masse, 85
 Gewichtheber, 174
 Gewichtungsfaktor ω_{eq} , 1340
 Gewichtungsfaktor ω_{gew} , 1340
 Gezeiten, 80
 Giga-, 7
 Gilbert, William, 845
 Gitter, 655
 Beugungs-, *siehe* Beugungsgitter
 kubisches, 1279
 reziprokes, 1280
 Gitterion
 effektive Fläche, 1296
 Gitterkonstante
 Beugungsgitter, 1093, 1095, 1112
 Glas
 Brechzahlwerte, 1019
 Doppelbrechung, 1029
 Durschlagfestigkeit, 778
 Glasfasern, 1017, 1018
 Glasfenster
 Wärmedämmung, 638
 Glashow, Sheldon, 1361
 Glasplatten
 planparallele, 1088, 1090
 Glatteis, 100
 gleichförmig beschleunigte Bewegung, 47
 Vorgehensweise, 47
 gleichförmig beschleunigte Bewegung in einer Dimension, 45
 gleichförmige Bewegung, 30
 gleichförmige Kreisbewegung, 62
 Gleichgewicht, 181, 307
 Bewegung in der Nähe des, 423
 elektrostatisches, 711, 773
 Erhöhung der Stabilität, 310
 indifferentes, 182, 310
 instabiles, 310
 labiles, 182, 201, 310
 neutrales, 310
 stabiles, 181, 201, 310
 statisches, 308
 Gleichgewichtsabstand
 für Natriumchlorid, 1281
 Gitterionen, 1281
 ionische Bindung, 1252, 1253
 kovalente Bindung, 1255, 1256
 Gleichgewichtsbedingung, 309
 indifferentes Gleichgewicht, 182
 labiles Gleichgewicht, 182
 stabiles Gleichgewicht, 181
 Gleichgewichtszustände, 578, 595
 Reversibilität, 608
 Gleichrichter, 975, *siehe* Halbleiterdiode
 Gleichstromkreis, 800, *siehe auch*
 RC-Stromkreis
 Analyse, 813, 815, 820, 824
 mit einer Masche, 821
 mit mehreren Maschen, 824
 Potenzialdifferenzen, 822
 Gleichungen, 1393
 algebraische Operationen, 1393
 kinematische, 45, 47, 54
 lineare, 1395
 Gleichverteilungssatz, 555, 556, 562, 578, 595
 Festkörper, 582, 583
 Gültigkeit, 1267, 1268
 Rotationstemperatur, 1268
 Versagen, 1266, 1267, 1269
 Wärmekapazität, 586
 Gleichzeitigkeit, 1131–1137, 1132, 1154
 Gleitbedingung, 331
 Gleiten, *siehe* Schlupf
 Gleitreibung, 113, 114, 149, 192
 beim Bremsen, 122
 Gleitreibungskoeffizient, 113, 149
 Gleitreibungskraft, 113, 114, 191
 Glimmentladung, 678
 Glimmer
 Durschlagfestigkeit, 778
 Glühlampe, Stromstärke, 807
 Gluonen, 1361
 Goddard, Robert H., 239
 Gold
 Austrittsarbeit, 1294
 Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, 1292
 Fermi-Energie, 1292
 Goldatome, 112
 Golfschlag, 224
 Goniometer, 794
 kapazitives, 794
 GPS, 66
 GPS-Empfänger, 66
 GPS-Satelliten, 66
 GRACE, 143
 Grad (Winkelmaß), 1402
 Gradient, 734
 Graph

- lineare Funktion, 1412
 lineare Gleichung, 1395
 quadratische Gleichung, 1397
 trigonometrische Funktionen, 1408
 Wachstumsfunktion, 1416
 Zerfallsfunktion, 1416
- Graphit**
 Phasenübergänge, 571
 Schichtstruktur, 1260
 Struktur, 1283
- Gravitation**
 potenzielle Energie, 263
 Gravitationsbeschleunigung, 85
 Gravitationsfeld, 79, 85, 140, 150
 Ablenkung von Licht, 1150
 allgemeine Berechnung, 141
 dicke Kugelschale, 145
 Erde, 140, 143, 150
 gleichförmiger Stab, 142
 homogenes, 1150
 homogenes, potenzielle Energie, 262
 Kugelschale, 144, 147, 150
 Ring, 146
 Vergleich mit elektrischem Feld, 672
 Vollkugel (außen), 144
 Vollkugel (innen), 145
 zwei Punktmassen, 142
- Gravitationsfeldstärke der Erde, 140, 143
- Gravitationsgesetz**, *siehe* Newton'sches Gravitationsgesetz
 Newton'sches, 22
- Gravitationskonstante, 133, 150
 direkte Messung, 137
- Gravitationskraft, 80, 85, 86, 91, 93, 95, 103, 119, 124, 127, 174, 175, 246, 662, 726
 konservative Kraft, 175
 und Masse, 85
 Vergleich mit elektrostatischer Kraft, 658, 673, 674
- Gravitationslinse, 1122, 1153
- Gravitationspotenzial**
 allgemeine Relativitätstheorie, 1151
- Gravitationsrotverschiebung, 1151
- Gravitationswechselwirkung, 1350, 1362
 Standardmodell der Elementarteilchen, 1374
- Gravitationszentrum, *siehe* Schwerpunkt
 gravitative Wechselwirkung, 79, 103
- Graviton, 79, 1361
- Gray, 1340
- Grenzfrequenz
 photoelektrischer Effekt, 1164
- Grenzwellenlänge
 photoelektrischer Effekt, 1164
 Röntgenspektren, 1236
- Grenzwert, 1411
- Grenzwertbildung, 34
- Grippevirus
 Masse, 12
- Größe
 physikalische, 5
- Große Vereinheitlichte Theorien (GUT), 1363
- Größenordnung, 12
- Größenordnungen, 12
 Beispiele, 12
 Tabelle, 12
- Großstädte
 Wärmeinseln, 642
- Grotian-Diagramm, *siehe* Termschema
- Grundeinheit, 5, 20
- Grundgrößen
 SI-System, 5
- Grundkräfte, 79, 103
- Grundschwingung, 496
- Grundzustand
 Atome, 1220
 Teilchen im Kasten, 1184, 1185
- Gruppengeschwindigkeit, 510, 517
- Guericke, Otto von, 530
- gültige Stellen, *siehe* signifikante Stellen
- Gütekoeffizient, 438, 448
 eines Schwingkreises, 964, 972
 gedämpfte Schwingung, 438
 Klaviersaita, 438
 Resonanz, 441
- H**
- H (Henry), 929
- Hadronen, 80, 1350, 1351, 1374
 Eigenschaften, 1351
 Ruhemasse-Ladungs-Diagramm, 1358
 Seltsamkeit, 1358
 stabile, 1351
- hadronische Kraft, 1320
- hadronische Wechselwirkung, 103, 1350
- Haftriebung, 113, 114, 149
 beim Bremsen, 122
- Haftriebungskoeffizient, 113, 114, 149
- Haftriebungskraft, 113, 114, 197
 in der Kurve, 100
 maximale, 114
- Hagen, Gotthilf H. L., 396
- Hagen-Poiseuille'sches Gesetz, 396
- Hahn, Otto, 1333
- Halbachse einer Ellipse, 132
- Halbleiter, 1299, 1313
 Bändermodell, 1297–1299, 1313
 Bauelemente, 1299, 1301
 Diode, *siehe* Halbleiterdiode
 dotierte, 1299
 Eigen-, 1298
 Hall-Effekt, 865
 Ladungstransport, 863
 n-, 1299
 p-, 1299
 pn-Übergang, 1301, 1302, 1303, 1313
 spezifischer Widerstand, 1299
 Störstellen-, 1299
- Halbleiterdiode, 1301–1303
 Beschaltung, 1301
 Gleichrichter, 1301
 pn-, 1301, 1313
 Strom-Spannungs-Kennlinie, 1302
 Tunnel-, 1302
 Zener-, 1301, 1313
- Halbleiterlaser, 1240
- Halbleiterübergangsschichten, 1301–1305
 Transistoren, 1303–1305
- Halbleiterzähler, 1368
- Halbring
 Massenmittelpunkt, 254
- Halbwertsbreite, 441
- Halbwertszeit, 1324, 1343, 1416
 Alphazerfall, 1196
- Hale, G.E., 866
- Hall-Effekt, 803, 863, 869
 in Halbleitern, 865
- Hall-Generator, 886
- Hall-Koeffizient, 872
- Hall-Spannung, 864, 869
- Hall-Widerstand, 865, 869
- Halo, 1020, 1153
- Hammer
 Massenmittelpunktsbewegung, 255
- Hammerwerfen, 255
- Hämoglobin
 Masse, 12
- Hantelmodell
 zweiatomige Moleküle, 1261
- Harmonische, 496
 harmonische Analyse, 505, 507, 517
 harmonische Schallwelle, 467
 harmonische Schwingung, 414, 447
 Bedingungen, 414
 Beschleunigungsgesetz, 415, 447
 Differenzialgleichung, 414, 415
 Frequenz, 416
 Geschwindigkeit-Zeit-Funktion, 415, 447
 kinetische Energie, 421
 Kreisbewegung, 420, 447
 Kreisfrequenz, 416, 447
 Kurve, 414
 mechanische Gesamtenergie, 422, 447
 mittlere Energie, 447
 Orts-Zeit-Funktion, 414, 421, 447
 potenzielle Energie, 421
 harmonische Synthese, 508, 517, 524
 harmonische Welle, 464, 514
 harmonische Wellen
 Vektoraddition, *siehe* Zeigerdiagramm
- harmonische Wellenfunktion, 464, 514
- harmonischer Oszillatator, 414
 Bewegungsgleichung, 420
 Differenzialgleichung, 427
 Energie, 421, 422
 Energieniveaus, 1190, 1191, 1205
 Geschwindigkeit, 422
 potenzielle Energie, 1189, 1190, 1205
 Schrödinger-Gleichung, 1190
 Wellenfunktion, 1190, 1191, 1205
- Hauptachse einer Ellipse, 132
- Hauptebenen
 dicke Linsen, 1062
- Hauptmaximum
 Interferenzmuster, 1102
- Hauptquantenzahl, 1218, 1219, 1226, 1244
- Hauptstrahlen
 dünne Linsen, 1060, 1079
 sphärische Spiegel, 1049, 1078
- hcp, 1280
- Head-up-Display, 1110
- Heathrow International Airport, 200
- Hebebühne, 178, 376
- Hebelarm, 298
- Heben eines Gewichts, 309
- Heisenberg, Werner, 1173

- Heisenberg'sche Unschärferelation, *siehe*
Uunschärferelation
- Heizkörper, 632
- Heizstrahler, 632
- Hekto-, 7
- Helium, 1320
- Elektronenkonfiguration, 1226
 - Gasthermometer, 534
 - Isotope, 1320
 - Van-der-Waals-Bindung, 1256, 1257
- Heliumkern
- Ruheenergie, 1143
- Helium-Neon-Laser, 1239, 1240
- Helix
- DNA, 1257, 1258
- Helmholtz-Spulen, 873, 908
- Henry(Einheit), 929
- Henry, Joseph, 913, 921
- Herschel, William, 156
- Herschel, Friedrich Wilhelm, 1074
- Hertz, 414
- Hertz, Heinrich, 980
- Heureka, 381
- hexagonal dichte Kugelpackung, 1280
- Higgs-Boson, 1362
- Higgs-Feld, 1362
- Himmel
- Abendrot, 1234
 - blaue Färbung, 1028, 1234
- Hochpassfilter, 972, 974
- Hochspannungskondensator, 793
- Hochtemperatursupraleitung, 1306
- Hohlkugel
- Potenzial, 743
- Hohlplanet, 145
- Hohlraumstrahlung, 639
- Hohlspiegel (Konkavspiegel), 1044, 1047, 1050
- Bildkonstruktion, 1049
 - Bildschärfe, 1044
 - Brennpunkt, 1045
 - Vergrößerung, 1049
- Holografie, 1095, 1110
- homogen geladene Kugel
- Potenzial, 741
- homogen geladene Scheibe
- Potenzial, 736, 737, 755
- homogen geladener Ring
- Potenzial, 735, 755
- homogenes Gravitationsfeld
- potentielle Energie, 262
- Hooke'sches Gesetz, 81, 163, 352
- für Torsionsspannung, 356
- Hörbereich, 467, 471
- Hornhaut, 1067, 1079
- Hörschwelle, 472
- Hubble (Weltraumteleskop), 1074
- Hubble, Edwin, 72, 1074
- Hubble-Gesetz, 72
- Hubble-Konstante, 72
- Hubble-Teleskop, 64
- Hubble-Weltraumteleskop
- Ausrichtung, 336
- Huygens, Christiaan, 481, 1008
- Huygens'sches Prinzip, 481, 482, 515, 1086, 1097, 1112
- Brechung, 1022, 1023
- Reflexion, 1022
- Hybridisierung
- Orbitale, 1260, 1270
- hydraulische Hebebühne, 376
- hydrostatisches Paradoxon, 377
- Hyperschall, 487
- Hypersonic XLC, 102
- Hypothese, 4
- Hysterese, 900
- im Transformator, 954
- I**
- i, 1409
- idealer Strahler, *siehe* schwarzer Körper
- ideales Gas, 534, 546, 548
- adiabatische Zustandsgleichung, 595
 - Definition, 546
 - Entropieänderung, 614, 615, 616
 - Freiheitsgrade, 556, 562
 - innere Energie, 577, 578, 586, 594
 - Kompressionsmodul, 591
 - molare Wärmekapazität, 584, 585
 - Zustandsgleichung, 546, 547, 548, 562
- imaginäre Zahlen, *siehe* Zahlen (imaginäre)
- Immersionsmikroskop, 1108
- Impedanz, 962, 971, 972
- Impedanzanpassung, 812
- Impressionismus, 1117
- Impuls, 22, 237
- elektromagnetischer Wellen, 993
 - Gesamtimpuls eines Teilchensystems, 259
 - Photonen, 1164–1166
 - relativistischer, 1140, 1141, 1155
 - Teilchen, 212
 - Teilchensystem, 237, 274
 - Uunschärferelation, 1173
 - Zusammenhang mit äußerer Kraft, 212, 259
- Impulserhaltung, relativistische
- konkretes Beispiel, 1146
- Impulserhaltungssatz, 212, 237, 259, 274
- Impulslaser, 796
- indifferentes Gleichgewicht, 182, 310
- Indoor-Biking, 300
- Induktanz, 952
- Induktion, *siehe* magnetische Induktion
- elektrostatische, *siehe* Influenz
- Induktionsspannung, 913
- durch Bewegung, 923
 - in bewegtem Stab, 925
 - in einer Spule, 916, 917
 - in ruhender Leiterschleife, 916
 - Richtung, 915, 919
 - Transformator, 954
 - und Faraday'sches Gesetz, 915
 - Ursache, 916
- Induktionsstrom, 913
- Richtung, 920, 924
- induktiv gekoppelte Stromkreise, 921
- induktiver Blindwiderstand, 952, 971
- induktiver Widerstand, *siehe* induktiver Blindwiderstand
- Induktivität, 930
- inelastische Streuung, 1234
- inelastischer Stoß, *siehe* Stoß
- Entropieänderung, 618
- konkretes Beispiel, 1145
- relativistische Betrachtung, 1144–1146
- Inertialsystem, 78, 79, 82, 103, 126, 1122
- Influenz
- Aufladen durch, 655, 669
 - durch Erdung, 656
- Infrarotabsorptionsspektren
- Moleküle, 1263–1266, 1271
- Infrarotstrahlung, 468, 989
- Infraschall, 503
- inkohärente Quelle, 496
- inkompressibel, 389
- Innenwiderstand
- Ampermeter, 827
 - Batterie, 810, 836
 - Voltmeter, 827
- innere Energie, 568, 576, 577, 594
- Festkörper, 583
 - Gase, 583, 584, 586
 - ideales Gas, 577, 578, 586, 594
- innere Kräfte, 255
- innere Reibung, *siehe* Viskosität
- instabiles Gleichgewicht, 310
- Integral
- bestimmtes, 1418
 - Dimension, 1417
 - Fläche unter einer Kurve, 1417
 - geschlossener Weg, 176
 - Stammfunktion, 1418
 - unbestimmtes, 1418
- Integralrechnung, 1417–1419
- Integrand, 1417
- Integration, 1417
- Massenmittelpunkt, 253
- Integrationskonstante, 1418
- Energie, 177
- Intensität
- einer Welle, 468, 470, 514
 - elektromagnetischer Wellen, 993
- Interferenz, 495
- Polarisation, 1025, 1026, 1035
 - Reflexion, 1014, 1035
 - Schallwelle, 471, 514
 - Welle, 495
- Interferenz, 490, 491, 513, 516, 1085, 1087, 1112
- destruktive, 491, 1086
 - Doppelspalt, 1089, 1090, 1092, 1112
 - dünne Schichten, 1087, 1088, 1089, 1112
 - Elektronen, 1161, 1168, 1173
 - Intensität, 495
 - konstruktive, 491, 1086
 - Maxima beim Beugungsgitter, 1094, 1112
 - Maxima beim Doppelspalt, 1090, 1091, 1112
 - Minima beim Doppelspalt, 1090, 1112
 - Ordnung, 1090
 - von Kreiswellen, 494
 - von Schallwellen, 494
- Interferenzmuster
- Doppelspalt, 1089, 1091, 1092, 1093, 1113
 - Hauptmaximum, 1102
 - mehrere Quellen, 1101–1103
 - Nebenmaximum, 1102
 - Newton'sche Ringe, 1088

- und Beugungsmuster bei mehreren Spalten, [1106](#)
 und Beugungsmuster bei zwei Spalten, [1099](#), [1100](#)
 und Beugungsmuster beim Doppelspalt, [1106](#)
- Interferenzstreifen, [1088](#), [1089](#), [1090](#)
 Interferometer, [979](#)
 Fabry-Perot-, [1117](#)
 Internationale Raumstation ISS, [64](#)
 Internationales Büro für Gewichte und Maße, [6](#)
 internationales Einheitensystem, [5](#)
 Io, [268](#)
 Ion, [655](#)
 Ablenkung im Massenspektrometer, [856](#)
 Ablenkung im Zyklotron, [857](#)
 Ion im Kristallgitter
 potenzielle Energie, [1280](#), [1281](#)
 Ionen, [1211](#)
 Ionenbindung, *siehe* ionische Bindung
 Ionendosis, [1339](#), [1344](#)
 Definition, [1339](#)
 Einheit, [1339](#)
 Ionenkristalle, [1278](#)–[1282](#)
 Ionisation, [1365](#)
 Ionisationskammer, [1368](#)
 Ionisationsmessung, [1369](#)
 ionische Bindung, [1252](#), [1270](#), [1278](#)
 Dissoziationsenergie, [1252](#), [1253](#)
 Gleichgewichtsabstand, [1252](#), [1253](#)
 kovalenter Anteil, [1256](#), [1257](#), [1270](#)
 Pauli-Verbot, [1252](#)
 potenzielle Energie, [1252](#), [1253](#)
 Ionisierungsgesnergie, [730](#), [1227](#), [1252](#)
 Abhängigkeit von der Ordnungszahl, [1230](#), [1233](#)
 Wasserstoffatom, [1216](#)
 Irreversibilität
 Unordnung, [614](#)
 irreversible Prozesse, [600](#), [608](#), [609](#)
 Entropieänderung, [616](#), [618](#)
 entwertete Arbeit, [620](#), [621](#), [626](#)
 Wärmeübertragung, [600](#)
 ISM-Band, [997](#)
 isobare Kompression, [579](#)
 isobare Prozesse
 Entropieänderung, [617](#)
 isochor, [580](#), [595](#)
 Isolation
 Wärme-, *siehe* Wärmedämmung
 Isolator, [654](#), [1297](#)
 Bandstruktur, [1298](#)
 Isolierverglasung, [638](#)
 isometrisch, [580](#), [595](#)
 isotherme Expansion, [615](#)
 isotherme Kompression, [580](#)
 isotherme Prozesse, [595](#)
 Isothermen, [548](#), [549](#)
 Isotope, [1320](#), [1343](#)
 des Heliums, [1320](#)
 des Wasserstoffs, [1320](#)
 Nachweis, [856](#)
 Isotopen trennung, [856](#)
 Isotopenverhältnis, natürliches
 Messung, [856](#)
- isotrop, [456](#), [1028](#)
- J
 J, [161](#), [169](#)
 J (Energieeinheit), [568](#), [569](#), [579](#)
 Jefferts, Steve, [5](#)
 Jet-Stream, [36](#)
 Jogging, [209](#)
 Josephson, Brian, [1307](#)
 Josephson-Effekt, [1307](#), [1308](#)
 Gleichstrom-, [1307](#), [1313](#)
 Wechselstrom-, [1307](#), [1313](#)
 Josephson-Kontakt, [1307](#), [1313](#)
 Joule, [161](#), [169](#)
 Joule (Energieeinheit), [568](#), [569](#), [579](#)
 Joule, James, [4](#), [568](#), [575](#)
 Joule'sche Wärme, [808](#)
 durch Wirbelströme, [929](#)
 Erzeugung am Kondensator, [834](#)
 J/ψ-Meson, [1360](#)
 Jupitermond, [268](#)
- K
 K (Temperatureinheit), [535](#)
 Kabelfernsehen, [764](#)
 Kalibrierung, [14](#)
 Kalium
 Austrittsarbeit, [1294](#)
 Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, [1292](#)
 Elektronenkonfiguration, [1233](#)
 Fermi-Energie, [1292](#)
 Kaliumchlorid, [756](#)
 Kalorie (Energieeinheit), [568](#), [569](#), [594](#)
 Kalorimeter, [1368](#)
 Kalorimetrie, [570](#), [592](#)
 Kältemaschinen, [606](#)
 Leistungszahl, [606](#), [613](#), [625](#)
 reversible Prozesse, [608](#)
 Wärmereservoir, [606](#)
 Wirkungsgrad, *siehe* Kältemaschinen, Leistungszahl
 Zweiter Hauptsatz, [605](#), [606](#), [607](#), [625](#)
 Kamerlingh Onnes, Heike, [1305](#)
 Kamiokande, [1351](#)
 KamLAND-Detektor, [1351](#)
 Kanonenkugel, [44](#)
 Bewegungsdiagramm, [44](#)
 Kaon, [1357](#)
 Blasenkammeraufnahme, [1355](#), [1357](#)
 Kapazität, [762](#), [763](#), [791](#)
 einzelner Leiter, [791](#)
 isolierter kugelförmiger Leiter, [791](#)
 Kondensator, [791](#)
 mit Dielektrikum, [779](#)
 Plattenkondensator, [763](#), [791](#)
 SI-Einheit, [762](#)
 Zylinderkondensator, [766](#), [791](#)
 Kapazitätsberechnung
 Vorgehensweise, [764](#), [781](#)
 Kapazitive Waage, [796](#)
 kapazitiver Blindwiderstand, [953](#), [954](#), [971](#)
 Kapazitiver Schalter, [768](#)
 kapazitiver Widerstand, *siehe* kapazitiver Blindwiderstand
- Kapazitives Goniometer, [794](#)
 Kapillarasension, [387](#)
 Kapillardepression, [387](#)
 Kapillare, [387](#)
 Karateschlag, [220](#)
 kartesischer Taucher, [405](#)
 kartesisches Koordinatensystem
 Spiegelung, [1042](#)
 Karussell
 Beschleunigung durch Aufspringen, [322](#)
 Trägheitsmoment, [320](#)
 Kastenpotenzial
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit, [1171](#), [1174](#), [1186](#), [1187](#)
 dreidimensionales, [1198](#), [1199](#)
 endlich hohe Wände, [1187](#)–[1189](#), [1205](#)
 Energieniveaus, [1184](#)–[1186](#)
 Nullpunktsenergie, [1184](#)
 Quantenzahlen, [1177](#), [1186](#)
 Stufenpotenzial, *siehe* dort
 unendlich hohe Wände, [1184](#)
 Wellenfunktion, [1184](#)
 Kathode, [770](#)
 Kathodenstrahlen, [854](#)
 Ablenkung durch Felder, [855](#)
 Kathodenstrahlröhre, [170](#), [672](#)
 Thomsons Experiment, [854](#)
 Katzenaugen, [1044](#)
 kcal, [204](#)
 Kegelpendel, [99](#)
 Kehrwert
 Rechenregeln, [1393](#)
 Kelvin, [5](#), [20](#)
 Kelvin (Temperatureinheit), [535](#)
 Kelvin, Lord Kelvin of Largs, *siehe* Thomson, William
 Kelvin-Skala, [535](#), [542](#)
 Kepler, Johannes, [131](#)
 Kepler'sche Gesetze, [131](#), [149](#)
 drittes Kepler'sches Gesetz, [132](#)
 erstes Kepler'sches Gesetz, [131](#)
 zweites Kepler'sches Gesetz, [131](#)
 Keramikdielektrikum, [778](#)
 Keramikkondensator, [769](#)
 Kerne
 Bindungsenergie, [1321](#)–[1323](#), [1322](#), [1343](#)
 Eigenschaften, [1320](#)–[1323](#), [1343](#)
 Form, [1320](#), [1343](#)
 Größe, [1320](#), [1343](#)
 Kennzeichnung, [1320](#)
 Kernladungszahl, [1320](#)
 Masse, [1321](#)–[1323](#), [1343](#)
 Massenzahl, [1320](#), [1343](#)
 Neutronenzahl, [1320](#)
 Nukleonendichte, [1323](#)
 Ordnungszahl, [1320](#)
 Radius, [1320](#), [1343](#)
 Stabilität, [1320](#), [1323](#)
 Tröpfchenmodell, [1320](#)
 Tröpfchenmodell, [1333](#)
 Kernenergie, [191](#)
 Kernfusion, [853](#), [1331](#), [1336](#)–[1339](#), [1344](#)
 freigesetzte Energie, [1336](#)
 in der Sonne, [1346](#)
 Kollisionsrate, [1337](#)

- kontrollierte, 1337
 Lawson-Kriterium, 1337
 magnetischer Einschluss, 1337
 Plasma, 1337
 Reaktor, 1338
 Tokamak-Reaktor, 893
 Trägheitseinschluss, 1338
 typische Reaktion, 1336
Kernkräfte
 Sättigungseffekt, 1323
Kernladung
 Abschirmung, 1228
 effektive, 1228, 1229, 1237
Kernladungszahl, 653, 1211, 1236, 1320, 1321
Kermassendefekt
 pro Nukleon, 1331
Kernphysik, 1320–1347
Kernradius
 Atome, 1213
Kernreaktionen, 1329–1331, 1343
 endotherme, 1329, 1343
 exotherme, 1329, 1343
 mit Neutronen, 1330
 Wirkungsquerschnitt, 1330
Kernreaktoren, 1334–1336
 Druckwasser-, 1335
 Moderator, 1334
 Regelung, 1335, 1336
 schneller Brüter, 1336
 Sicherheit, 1336
 Steuerstäbe, 1335, 1336
 Verdopplungszeit, 1336
Kernspaltung, 1331, 1332–1334, 1343
 freigesetzte Energie, 1332
 Plutonium, 1332, 1336
 spontane, 1332
 typische Reaktion, 1334
 Uran, 1332, 1333
 Verteilung der Spaltungsprodukte, 1334
Kernspaltungsprodukt
 elektrische Energie, 730
Kernumwandlung
 Energie, 731
Kettenreaktion, 731, 1333–1336
Kettenregel, 1412
 keV, 161
 Kilo-, 7
 Kilogramm, 5, 6, 20, 82
 Kilometer, 5
 Kilowattstunde, 167
Kinematik, 27
 kinematische Gleichungen, 45, 47, 68
 Anwendungen, 48
kinetische Energie, 169, 175, 177, 191, 192, 201
 bezüglich Massenmittelpunkt, 274
 der Translation, 259
 Drehbewegung, 341
 einzelnes Teilchen, 237
 Gasteilchen, 552, 553, 555, 556, 562
 rollender Körper, 327
 rotierender Körper, 286
 rotierendes Teilchensystem, 286
 Schwungrad, 292
Teilchensystem, 262
 Verteilung, *siehe* Energieverteilung
 kinetische Gastheorie, 551, 552, 553, 562
 King's Dominion, 102
 Kirchhoff, Gustav Robert, 482, 1031
 Kirchhoff'sche Regeln, 820, 837, *siehe auch*
 Maschenregel, Knotenregel
 Anwendung, 821, 824
Klang, 507
Klangfarbe, 506, 517
Klangfigur, 442
Klassifizierung
 von Teilchen, 1350
klassische Energie
 Zusammenhang mit relativistischer Energie, 1143
klassische Physik, 4
klassischer Elektronenradius, 759
klassisches Modell
 der elektrischen Leitung, 1288–1290
 der Wärmekapazität, 1295
Kleinwinkelnäherung, 1406
Klemmenspannung, 770, 810, 836
Klimaanlage, 606
Klingel, elektrische, 883
Klingeltransformator, 956
Klitzing, K. von, 865
Klitzing-Konstante, 865, 869
K-Modul, *siehe* Kompressionsmodul
Knallfunkensender, 997
Knautschzone, 51
Knoten, 772, *siehe* Schwingungsknoten
Knotenregel, 820, 821, 837
 Anwendung, 825
Koaxialkabel, 721, 764
 Abbildung, 765
kohärente Quelle, 496
Kohärenz, 495, 1086, 1087
 Lloyd'scher Spiegel, 1087, 1091, 1093
Kohärenzlänge, 1087
Kohärenzzeit, 1087
Kohäsion, 386
Kohäsionskraft, 402
Kohle, 1283
Kohlendioxid
 Sublimation, 571, 572, 574
 Tripelpunkt, 574
Kohlenstoff
 C₆₀-Molekül, 1283
 Diamant, 1282
 Fullerene, 1283
 Graphit, 1283
 Kohle, 1283
 Nanoröhrchen, 1277, 1283
 verschiedene Formen, 1283
Kohlenstoffatom
 Hybridisierung, 1260, 1270
 Vierbindigkeit, 1260, 1270
Kohlenstoff-Nanoröhrchen, 364
Kohleschichtwiderstand, 808
kollektives Phänomen, 1306
Kollektor, Transistor, 1303
kommunizierende Röhren, 377
Kompass, 846
komplexe Variable, 1410
komplexe Zahlen, 1409–1411
 Binomialentwicklung, 1411
Exponentialdarstellung, 1410
Imaginärteil, 1410
konjugiert komplex, 1410
Polarkoordinatendarstellung, 1410
Realteil, 1410
Rechenregeln, 1410
Zusammenhang mit e-Funktion, 1410
komplexe Zahlenebene, 1410
Komponenten
 Unabhängigkeit der, 68
Kompressibilität, 355, 366
Kompression, 366
 adiabatische, 588, 589
 Gase, 579
 isobare, 579
 isotherme, 580
 reversible adiabatische, 589, 590
Kompressionsmodul, 355, 366
 adiabatischer, 460
 Fermi-Elektronengas und, 1315
 ideales Gas, 591
 isothermer, 460
Kondensanz, 953
Kondensation, 571
Kondensationsgeschwindigkeit, 560
Kondensator, 763, 766, 770, 789, 791
 Arbeit beim Laden, 767
 Aufladung, 831, 837
 Energiebilanz bei Aufladung, 834
 Entladung, 829, 837
 Entladung, Analogiebetrachtung, 830
 gespeicherte Energie, 766, 791
 idealer, 953
 Laden, 768
 Laden mit Batterie, 770
 Ladung, 763
 mit Wechselspannung, 951, 952, 971
 Parallelschaltung, 770–772, 791
 Phasenbeziehung von Strom und Spannung, 953
 Plattenkondensator, 698
 Reihenschaltung, 770, 772, 774, 791
 Schaltzeichen, 770
 Stromstärke bei Aufladung, 831
 Stromstärke bei Entladung, 831
Kondensatorpaar, 771
konisches Pendel, 99, 349
Konkavspiegel (Hohlspiegel), 1044, 1047, 1050
 Bildkonstruktion, 1049
 Bildschärfe, 1044
 Brennpunkt, 1045
 Vergrößerung, 1049
konervative Kraft, 175, 180, 181, 183, 201
 Wegunabhängigkeit, 177
konervatives elektrisches Feld, 821
Konstanten
 Madelung-, 1280
konstruktive Interferenz, 491, 1086
Kontaktfäche, 81, 113, 121
 makroskopische, 112
 mikroskopische, 112
 und Reibungsentstehung, 112
Kontaktkraft, 79, 174, 248
 Ursprung, 79
Kontaktpotenzial, 1294, 1312

- Kontaktspannung, 1294
 zwischen Silber und Wolfram, 1294
- kontinuierliche Ladungsverteilung
 elektrisches Feld, 688
 Potenzial, 735, 754
- kontinuierliche Spektren, 1030, 1031, 1032, 1035
- kontinuierliche Verteilung, 15
- Kontinuitätsgleichung, 387, 388, 402
- Konvektion, 632, 638, 644
 Wärmedämmung, 638
- Konvexspiegel (Wölbspiegel), 1050–1052
 Bildkonstruktion, 1051
 Brennpunkt, 1048
- Koordinaten
 kartesische, 29, 42
- Koordinatenachsen, 47
 und Bezugssystem, 36
- Koordinatensystem, 28
 Spiegelung, 1042
- Koppelnavigation, 66
- Korngrenzen, 1278
- Körper, 28
 schwarzer, 639, 640, 644, 1163
- Körperperfektmessung, 384
- Korrespondenzprinzip der Quantenmechanik, 1177
- Korrespondenzprinzip, Bohr'sches, 1177
- Kosekans, 1403
- Kosinus, 1403, 1407
 einer Summe, 1404
- Kosmetikspiegel, 1050
- kosmische Geschwindigkeit
 erste, 138
 zweite, 138
- Kosmische Gewindigkeiten, 138
- kosmische Strahlung, 80
- Kotangens, 1403
- kovalente Bindung, 1252, 1254, 1258, 1259, 1270, 1278
 Gleichgewichtsabstand, 1255, 1256
 ionischer Anteil, 1256, 1257, 1270
 Pauli-Verbot, 1254, 1256
 potenzielle Energie, 1255, 1256
 Wellenfunktion, 1254, 1255, 1256, 1259
- Kraft, 79, 103
 Adhäsionskraft, 387
 Aktions-, 93
 äußere, 174, 184, 255
 dissipative, 191
 elektrostatische, 726
 hadronische, 1320
 innere, 183, 255
 Kohäsionskraft, 386
 konservative, 175, 180, 181, 183, 201, 426
 Wegabhängigkeit, 177
 konservative innere, 183, 184
 konstante, 162
 nichtkonservative, 175, 191, 202
 nichtkonservative innere, 183, 184
 nichtkonservative, Wegabhängigkeit, 176
- Normal-, 80, 81
- ortsabhängige, 162
- paarweises Auftreten, 93
- Reaktions-, 93
- Rückstell-, 81
- SI-Einheit, 82
- stoßartige, 219
- Vektor, 79
- zeitliches Mittel, 219, 237
- Zug-, 81
- Zusammenhang mit Impuls, 212
- Kraftart, 79
- Kräfteaddition, 81
- Kräftediagramm, 86, 246
 Anwendung, 87
 bei Reibung, 114
 Übungsaufgaben, 106, 107
- kräftefreier Kreisel, *siehe* Kreisel
- Kräftepaar, 299
 Dipol, 675
- Kraftkonstante, 414
 zweiatomige Moleküle, 1263, 1270
- Kraftlinien, 668
- Kraftmoment, 298
- Kraftstoß, 237
 Crashtest, 222
 Definition, 219
 durch einen Wurf, 225
 Golfschlag, 224
 Karateschlag, 220
 mittlere Kraft, 220
 Zusammenhang mit Impuls, 219, 237
- Kraft-Weg-Kurve, 162
- Krebspulsar, 286
- Kreditkarten
 Hologramme, 1095, 1110
- Kreis, 132
 Flächeninhalt, 1401
- Kreisbahn, 61
 Teilchen im Magnetfeld, 851, 868, 902
- Kreisbeschleuniger, 1363, 1364, 1367
- Kreisbewegung, 61, 68, 95
 Aufgaben, 74
 gleichförmige, 62
 harmonische Schwingung, 420
 Periode, 63
 und Beschleunigung, 63
- Kreisel, 333
 Drehimpulsübertragung, 335
 kräftefreier, 333
 Nutation, 334
 schwerer, 333
 symmetrischer, 333
 Veränderung der Drehachse, 336
- Kreisfrequenz, 416, 514
- Kreisprozesse, 604, 606, 608, 625
 Carnot-, *siehe* Carnot-Kreisprozess
 Diesel-, 628
 Otto-, 603
- Kreisscheibe
 elektrisches Feld auf der Achse, 698
- Kreisstrom, atomarer, 895
- Kreiswelle, 456
- Kreiszahl π , 1401
- Kreupl, Franz, 1284
- Kriechfall, 435
- Kristalle
 Doppelbrechung, 1028
- Kristallgitter, 1278, 1285
- Kristallmodifikationen
 Phasenübergänge, 571
- Kristallstruktur
 Beispiele, 1280
 hexagonal, 1279
 hexagonal dichte, 1280
 kubisch flächenzentrierte, 1278
 kubisch raumzentrierte, 1281
 monoklin, 1279
 Natriumchlorid, 1253
 orthorhombisch, 1279
 tetragonal, 1279
 triklin, 1279
- kritische Temperatur, 559, 560, 574
 Supraleitung, 1305
- kritischer Punkt, 560, 574
- kritischer Winkel
 Auflösungsvermögen, 1106–1108
 der Totalreflexion, 485
 Totalreflexion, 1015, 1016, 1035
- krummlinige Bewegung, 68, 104
 Aufgabenstellungen, 96
- Krümmungsradius
 brechende Fläche, 1053
 dünne Linsen, 1056, 1058
 sphärische Spiegel, 1045, 1047, 1049, 1050, 1078
- Kryptonkern, 730
- kubisch dichteste Kugelpackungen, 1280
- kubischer Ausdehnungskoeffizient, 535, 537, 539, 542
- kubisches Gitter, 1279
- Kugel
 Flächeninhalt der Oberfläche, 1401
 Volumen, 1401
- Kugelfall-Viskosimeter, 397
- Kugelkoordinaten, 146
- Kugelpackung, 1280
 hexagonal dichteste, 1280
 kubisch dichteste, 1280
- Kugelschale, 1401
 Potenzial, 739, 740, 743, 755
- Kugelstoßen
 maximale Reichweite, 60
- Kugelsymmetrie, 704
- kugelsymmetrische Ladungsverteilung, 740
- kugelsymmetrische Massenverteilung, 145
- Kugelwelle, 456
- Kühlschrank, 606
- Kupfer
 Austrittsarbeit, 1294
 Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, 1292
 Fermi-Energie, 1292
- Kupplungsscheibe, 319
- Kurve
 überhöhte, 100
- Kurvenüberhöhung, 100
- Kurzsichtigkeit, 1069
- Kurzwelle, 468
- L**
- Labialpfeife, 502
- labiles Gleichgewicht, 182, 201, 310
- Laborsystem, 266

- Ladung, **652**
 Bewegung im elektrischen Feld, **672**
 der Erde, **713**
 des Elektrons, **653**
 des Protons, **653**
 durch Influenz, **680**
 Einheit, **800**
 elektrische, **652**, **680**
 freie, **786**, **788**
 gebundene, **786**, **788**
 nicht kugelförmiger Leiter, **755**
 SI-Einheit, **654**
 System von, **659**
 verallgemeinerte Bedeutung, **1362**
- Ladung-Masse-Verhältnis von Teilchen, **854**, **868**
- Ladungsdichte, **688**
 bezogen auf das Volumen, **688**
 bezogen auf die Fläche, **688**
 bezogen auf die Linie, **688**
- Ladungsebene, **735**
 Potenzial, **738**, **739**, **755**
- Ladungselement, **735**
- Ladungserhaltung, **653**
 bei Elementarteilchen, **653**
 Gesetz, **653**
- Ladungsfassungsvermögen, **762**
- Ladungssinkrement, **754**
- Ladungskonfiguration, **731**
- Ladungsmenge, Messung, **923**
- Ladungspumpe, **770**
- Ladungsquantisierung, **653**
- Ladungsring
 Potenzial, **735**
- Ladungssystem, **659**
- Ladungsträger
 Geschwindigkeit, **804**
 Messung von Vorzeichen und Dichte, **863**, **864**
- Ladungstrennung, **770**
- Ladungsverteilung, **754**
 Atom, **785**
 ebene Symmetrie, **704**
 elektrisches Feld, **717**
 Elektronen, *siehe* Atomorbitale
 fiktive, **735**
 homogene, **717**
 kontinuierliche, **735**
 kugelsymmetrische, **704**, **706**, **740**
 kugelsymmetrische, Potenzial, **734**
 nicht polares Molekül, **785**
 Valenzelektronen, **1223**
 Wasserstoffatom, **787**
 zylindersymmetrische, **710**
- Ladungswolke, **787**
- Lageänderung, **177**
 $\frac{1}{4}$ -Plättchen, **1029**
- A-Teilchen, **1357**
 Blasenkammeraufnahme, **1357**
- Lambert'scher Strahler, **639**, **644**
- Lamb-Verschiebung, **1248**
- laminare Strömung, **396**, **403**
- Land, Edwin H., **1025**
- Länge, **6**
 Dimension, **8**
- Längenausdehnungskoeffizient, **535**, **537**, **539**, **542**
- Längenkontraktion, **1128**, **1154**
- Längenmessung, **5**
- Langwelle, **468**
- Large Hadron Collider (LHC), **1353**, **1362**
- Laser, **1237**, **1238**, **1239–1241**, **1246**
 abstimmbare, **1240**
 Anwendungen, **1240**, **1241**
 Dioden-, **1240**
 Festkörper-, **1240**
 Flüssigkeits-, **1240**
 Freie-Elektronen-, **1240**
 Gas-, **1240**, **1241**
 Halbleiter-, **1240**
 Helium-Neon-, **1239**
 Hologramme, **1095**
 Kohärenzlänge, **1087**
 kontinuierliche, **1240**
 stimulierte Emission, **1238–1240**
- Laserantrieb, **996**
- Laserkühlung, **1001**
- Laserpinzette, **994**
- Lastwiderstand, **812**, **955**
- latente Wärme, **571**, **594**
- Lateralvergrößerung, *siehe* Vergrößerung
- Lauffläche, **114**
- Lautsprecher, **471**
- Lautstärke, **472**, *siehe* Schallintensitätspegel
 Kurven gleicher Lautstärke, **472**
 Schwebung, **492**
- Lawinendurchbruch, **1301**
- Lawrence Berkeley Laboratory, **1352**
- Lawrence, Ernest Orlando, **857**, **1329**
- Lawson, John David, **1337**
- Lawson-Kriterium, Kernfusion, **1337**, **1344**
- LC-Schwingkreis, **957**, **959**, **971**
 Energieumwandlung, **958**
 und mechanischer Schwinger, **958**
- Lebensdauer
 mittlere, **1324**, **1343**
- LED, **1303**
- Leerlaufspannung, **770**, **772**, **774**
- Leidener Flasche, **789**, **793**
- Leistung, **167**, **201**
 durch ein Drehmoment, **306**
 einer Welle, **468**, **514**
 elektrische, *siehe* elektrische Leistung
 Generator, **950**
 Kondensator im Wechselstromkreis, **953**, **971**
 mittlere, **949**, **952**, **972**
 momentane, **948**
 Ohm'scher Widerstand im
 Wechselstromkreis, **948**, **971**
 Rate der Energieübertragung, **167**
 SI-Einheit, **167**
 Spule im Wechselstromkreis, **952**, **971**
 und kinetische Energie, **172**
- Leistungsdichte, **470**
- Leistungsfaktor eines Schwingkreises, **963**, **972**
- Leistungsverlust
 Hochspannungsleitung, **947**, **956**
 Transformator, **954**
- Leistungszahl
 Kältemaschinen, **606**, **613**, **625**
- Wärmepumpen, **613**, **625**
- Leiter, **654**, **1297**
 Bandstruktur, **1297**, **1298**
 tropfenförmiger, **748**
- Leiteroberfläche
 elektrisches Feld an, **712**
- Leiterschleife
 als Dipol, **877**
 Drehmoment im Magnetfeld, **858**
 erzeugtes Magnetfeld, **876**, **877**
- Leitersystem
 elektrische Energie, **750**
- Leitfähigkeit
 elektrische, **805**, **1288**
- Leitstrahl, **131**
- Leitungsband, **1298**
- Leitungsdraht, Querschnitt, **807**
- Leitungselektronen, **655**, **1298**
- Lennard-Jones-Potenzial, **1273**
- Lenz'sche Regel, **919**, **924**, **939**
 alternative Formulierung, **920**, **939**
 und bewegte Spule, **921**
 und Energieerhaltung, **920**
- Leonardo da Vinci, **624**
- Leptonen, **80**, **1350**, **1351**, **1357**, **1362**, **1374**
 Massen, **1360**
- Leptonenzahl, **1356**, **1357**
 Erhaltung, **1355**
- Lesebrille, **1068**
- Leuchtdiode, **1303**
- Leuchtröhren, **1234**
- Le Verrier, Urbain, **156**
- LHC (Large Hadron Collider), **1362**
- Librationspunkt, **151**
- Licht, **1007**, **1035**
 Ausbreitung, **481**, **482**, **1011**
 elektromagnetische Welle, **468**
 Farben, **1007**, **1029**
 photoelektrischer Effekt, **1163**, **1164**
 Photonen, *siehe* Photon
- Polarisation, **1011**
- Spektren, *siehe* Spektren
- Teilchentheorie, **1162**, **1166**, **1179**
- Wellenlängen, **1007**
- Wellentheorie, **1090**
- Welle-Teilchen-Dualismus, **1161**, **1172**
- Lichtbogenschweißen, **747**
- Lichtgeschwindigkeit, **6**, **468**, **513**, **662**, **980**, **986**, **1008**, **1010**, **1035**, **1122**
 Bewegung der Lichtquelle, **1123**
- Einstein'sche Postulate, **1123**
- Feldkonstanten, **1010**
- Messung, **1008–1010**
- unterschiedliche Medien, **1011**, **1012**, **1035**
- Zahlenwert, **980**
- Lichtjahr, **23**, **1010**
- Lichtleiter, **1017**, **1018**
- Lichtquanten, *siehe* Photonen
- Lichtschranke, **74**
- Lichtstärke
 Teleskop, **1075**
- Lichtstrahlen, **1011**, **1041**
- Lichtweg
 Umkehrbarkeit, **1048**
- LIM, **200**

- Linearbeschleuniger, 1156, 1363, 1364
 lineare Gleichung, 1395
 lineare Massendichte, 458
 lineare Polarisation, 1024–1026
 lineare Rückstellkraft, 414
 linearer Ausdehnungskoeffizient, 535, 537, 539, 542
 linearer Impuls, *siehe* Impuls
 lineares Gleichungssystem, 1395
 Additionsverfahren, 1396
 Einsetzungsverfahren, 1396
 grafische Lösung, 1396
 Linearfaktoren, 1397, 1398
 Linearinduktionsmotor, 200
 Linearkombination, 489
 Wellenfunktion, 1259
 Linienladung, 726, 735, 741, 742
 elektrisches Feld einer endlichen, 688
 Feld, 692, 710
 Feld (Näherungsausdruck), 692
 Feld einer unendlichen, 691, 697
 Fernfeld einer endlichen, 691
 Potenzial, 741, 755
 Linienladungsdichte, 688, 741
 Linienspektren, 1030, 1031, 1032, 1035, 1095, 1233, *siehe* Spektrallinien
 Linienwelle, 457
 Linse
 akustische, 485
 Linsen, 1053
 Auge, *siehe* Auge, Linse
 bikonkav, 1058
 bikonvex, 1058
 Bildkonstruktion, 1058, 1060, 1062
 Brennpunkt, 1058
 dicke, 1062
 dünne, *siehe* dünne Linsen
 Fresnel'sche, 1062
 Kombinationen, 1063–1066
 negative, *siehe* Zerstreuungslinse
 optische Achse, 1060
 positive, *siehe* Sammellinse
 Vergrößerung, 1060
 Vorzeichenkonvention, 1053, 1079
 Linsengleichung, 1057, 1058, 1079
 Linsenteleskop (Refraktor), 1073, 1074
 Liter, 373
 Lithium
 Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, 1292
 Elektronenkonfiguration, 1228
 Fermi-Energie, 1292
 Livingston, Milton Stanley, 1329
 Livingston, M.S., 857
 Lloyd'scher Spiegel, 1087, 1091, 1093
 Loch, Halbleiter, 1298
 Löcherleitung, 1298
 Logarithmus, 1399
 Ableitung, 1412
 Basiswechsel, 1400
 dekadischer, 1399
 natürlicher, 1399
 Logarithmusregeln, 1399
 Longitudinalwelle, 467, 513
 Looping, 65, 108, 189, 190, 200, 206
 Lorentz, Hendrik, 1128
 Lorentz-FitzGerald-Kontraktion, 1128
 Lorentz-Transformation, 1124–1130, 1125, 1137, 1154
 loses Ende, 500
 Löslichkeit in Wasser, 716
 Luft
 Dielektrizitätskonstante, 778
 Durschlagfestigkeit, 778
 Luftdruck, 379
 Luftsicht
 Wärmedämmung, 638
 Luftspiegelung, 1018
 Luftwiderstand, 45, 54, 68, 85, 125, 152, 401
 Lumineszenzdiode, 1303
 Lupe, 1070, 1080
 Schwenkinkel, 1070
 Vergrößerung, 1070, 1071, 1080
 Lyman, Theodore, 1216
 Lyman-Serie, 1216
- M**
- Mach, Ernst, 22
 Macho, 1153
 Mach-Winkel, 515
 Mach-Zahl, 480, 515
 Machzahl, 22
 Madelung-Konstante, 1280
 für kubisch flächenzentrierte Strukturen, 1280
 für kubisch raumzentrierte Strukturen, 1282
 Magnesium
 Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, 1292
 Fermi-Energie, 1292
 Magnetfeld, 846
 Ablenkung geladener Teilchen, 851, 852
 auf der Achse einer Leiterschleife, 877, 905
 auf der Achse einer Spule, 882
 Berechnung, 889
 bewegte Punktladung, 874, 905
 der Erde, 866
 der Sonne, 866
 einer Leiterschleife mit mehreren Windungen, 878
 einer quadratischen Leiterschleife, 885
 einer Zylinderspule, 879, 881, 905
 eines Dipols, 877
 eines geraden Leiterabschnitts, 884, 905
 eines Hohlzyinders, 890
 eines Leiters, 884, 891, 905
 eines Stromelements, 875, 905
 eines Stromkreises, 875
 Einheit, 846, 868
 Energie, 932, 939
 Energiedichte, 932, 939
 Entstehung, 905
 im Inneren einer Ringspule, 893, 905
 im Inneren einer Zylinderspule, 882
 im Mittelpunkt einer Leiterschleife, 876
 in der Mitte einer Spule, 883
 interplanetares, 866
 Messung, 863, 864, 924
 Nachweis, 846
 und Arbeit, 851
 Vergleich mit elektrischem Feld, 850, 860, 875, 889
 zweier paralleler Leiter, 886
 Magnetfeldlinien, 850, 889
 einer Leiterschleife, 879
 einer Zylinderspule, 879
 eines Dipols, 889
 Erde, 846
 Stabmagnet, 851
 magnetisch hart, 902
 magnetisch weich, 902
 magnetische Deklination, 866
 magnetische Domäne, *siehe* Weiß'scher Bezirk
 magnetische Energie
 in einer Spule, 958
 magnetische Feldkonstante, 874
 Zahlenwert, 980
 magnetische Flasche, 853
 magnetische Induktion, 913, 939
 durch Bewegung, 923
 magnetische Kraft
 auf bewegte Ladung, 846, 851, 868
 auf gebogenen Leiter, 850
 auf geraden Leiter, 849
 auf Leiterabschnitt, 848
 auf Leiterschleife, 868
 auf Stromelement, 849, 868
 zwischen Leitern, 887
 magnetische Quantenzahl, 1218, 1219, 1244
 magnetische Reibung, 926
 magnetische Suszeptibilität, 896, 906
 bei Diamagnetismus, 902
 bei Ferromagnetismus, 899
 bei Paramagnetismus, 898
 Messung, 977
 Tabelle, 896
 magnetischer Dipol, *siehe* Dipol, magnetischer magnetischer Fluss, 914, 939
 Änderung, 915
 durch eine Fläche, 914
 durch eine Spule, 914, 939
 durch einen Stromkreis, 914, 939
 Einheit, 914, 939
 Vorzeichen, 914
 magnetisches Feld, 79
 magnetisches Moment, 859
 einer Leiterschleife, 859, 868
 einer rotierenden Scheibe, 862
 Elektronenbahndrehimpuls, 1224
 Elektronenspindrehimpuls, 1224
 permanentes, 896, 906
 und Bahndrehimpuls, 897
 von Atomen, 894, 906
 Magnetisierung, 895, 905, 906
 Einheit, 896
 paramagnetische Stoffe, 898
 Magnetisierungsstrom, 954, 955
 Magnetit, 845
 Magneton
 Bohr'sches, 1224
 Maiman, Theodore, 1238
 Makromoleküle
 Wasserstoffbrückenbindung, 1258
 makroskopische Zustandsgröße, 551
 Malus, Étienne Louis, 1026

- Malus'sches Gesetz, [1025](#), [1026](#), [1035](#)
 Mangan
 Austrittsarbeit, [1294](#)
 Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, [1292](#)
 Fermi-Energie, [1292](#)
 Manometer, [377](#)
 Marconi, Guglielmo, [997](#)
 Mariotte, Edme, [546](#)
 Mark-I-Detektor, [1352](#)
 Marsden, Ernest, [1213](#)
 Maschenregel, [820](#), [821](#), [837](#)
 Anwendung, [821](#), [825](#)
 Maschensatz, Kirchhoff'scher, [774](#)
 Masse, [6](#), [79](#), [82](#), [103](#)
 Bezugspunkt für elektrisches Potenzial, [822](#)
 Dimension, [8](#)
 Ortsabhängigkeit, [84](#)
 quantitative Beschreibung, [83](#)
 reduzierte, [453](#)
 reduzierte, Moleküle, [1261](#), [1262](#), [1270](#)
 relativistische, [1141](#)
 Ruhe-, [1141](#)
 schwere Masse, [137](#)
 Systeme mit veränderlicher Masse, [268](#), [275](#)
 träg Masse, [137](#)
 und Energie, [1144](#)
 und Gewicht, [85](#)
 von Kernen, [1321](#)–[1323](#)
 Masse und Gewicht
 Übungsaufgaben, [106](#)
 Maßeinheit, [5](#), [7](#), [20](#)
 Maßeinheitsvorsätze, [6](#)
 Massendifferenz, relative, [857](#)
 Masseneinheit
 atomare, [82](#), [251](#), [1321](#)
 Masseneinheit (atomare), [1262](#)
 Massenelement, [250](#), [253](#)
 Massenmittelpunkt, [249](#), [250](#), [256](#), [274](#)
 ausgedehnter Körper, [250](#), [274](#)
 Berechnung, [251](#)
 Bestimmung durch Integration, [253](#)
 Bewegung, [255](#), [256](#)
 experimentelle Bestimmung, [264](#)
 Halbring, [254](#)
 Integration, [253](#)
 kompliziertere Systeme, [253](#)
 n-Teilchensystem, [250](#)
 scheinbare Bewegung in verschiedenen Bezugssystemen, [257](#)
 Stab, [253](#)
 sukzessive Berechnung für komplizierte Systeme, [253](#)
 Teilchensystem, [249](#)
 Unterschied zum Schwerpunkt, [308](#)
 Wassermolekül, [251](#)
 Massenmittelpunktsarbeit, [259](#), [274](#)
 und kinetische Energie der Translation, [274](#)
 Massenmittelpunktsystem, *siehe* Schwerpunktsystem
 Massenpunkt, [28](#)
 Massenspektrometer, [856](#), [868](#)
 Funktion, [856](#)
 Massenstrom, [388](#)
 Massenzahl, [1320](#), [1343](#)
 Massestandard, [82](#)
 Maßzahl, [5](#), [7](#), [20](#)
 Materiewellen (*siehe auch* Welle-Teilchen-Dualismus), [1162](#)
 mathematisches Pendel, [205](#), [427](#)
 Bewegungsgleichung, [427](#)
 Frequenz, [447](#)
 Schwingungsdauer, [428](#)
 Mattscheibe, [1044](#)
 Maxwell, James Clerk, [4](#), [979](#)
 Maxwell-Boltzmann-Verteilung
 Energie, [555](#), [562](#)
 freie Elektronen im Metall, [1289](#)
 Geschwindigkeit, [553](#)–[555](#), [562](#)
 Maxwell'sche Gleichungen, [983](#), [999](#)
 und Wellengleichung, [988](#)
 Maxwell'scher Verschiebungsstrom, [980](#), [999](#)
 Berechnung, [981](#)
 Mechanik, [27](#)
 von Massenpunkten, [28](#)
 mechanische Energie, [191](#), [202](#)
 Erhaltung, [183](#), [202](#)
 mechanische Gesamtenergie, [183](#)
 mechanisches Wärmeäquivalent, [575](#)
 Meekhof, Dawn, [5](#)
 Meerewelle, [459](#)
 Mega-, [7](#)
 Megaelektronenvolt, [1143](#)
 mehratomige Moleküle, [1258](#), [1259](#), [1270](#)
 mehrdimensionale gleichzeitig beschleunigte Bewegung, [54](#)
 Mehr-Elektronen-Atome, [1223](#), [1235](#)
 Mehrfachabbildungen, [1043](#), [1044](#)
 Mehrkörperprobleme, [246](#)
 Mehrschichtkondensator
 Schnittansicht, [778](#)
 Mensch
 Größe, [12](#)
 Masse, [12](#)
 menschlicher Körper
 Wärmestrahlung, [641](#)
 Merkurperihel, [1150](#)
 Meson, [1350](#)
 π-, [1355](#), [1360](#)
 J/ψ-, [1360](#)
 K-, [1357](#)
 Y-, [1360](#)
 Messfehler, [9](#), [14](#), [20](#)
 Messgenauigkeit, [9](#), [14](#)
 Messung, [5](#)
 Messwert, [9](#)
 Messwertverteilung, [16](#)
 Metalle
 Ablösearbeit, [1164](#)
 elektrische Leitung, [1290](#)
 freie Elektronen, [1288](#)
 molare Wärmekapazität, [569](#), [582](#), [583](#), [595](#)
 photoelektrischer Effekt, [1162](#)
 Wärmekapazität, [1295](#)
 Wärmeleitung, [632](#)
 metallische Bindung, [1252](#), [1258](#), [1270](#), [1278](#)
 metastabile Zustände, [1328](#)
 Fluoreszenz, [1235](#)
 Laser, [1237](#)–[1239](#)
 Phosphoreszenz, [1235](#)
- Meteoriten
 Doppelbrechung, [1031](#)
 Meter, [5](#), [6](#), [20](#)
 SI-Einheit, [1010](#)
 Methan
 Molekülstruktur, [1259](#), [1260](#)
 Methanmolekül
 Tetraedermodell, [345](#)
 MeV (Megaelektronenvolt), [161](#), [1143](#)
 Michelson, Albert Abraham, [1010](#), [1123](#)
 Michelson-Morley-Experiment, [1123](#)
 Micky-Maus-Effekt, [504](#)
 Mikro-, [7](#)
 Mikrofadar, [762](#)
 Mikrolinse, [1153](#)
 Mikroskop, [1072](#), [1080](#)
 Auflösungsvermögen, [1107](#), [1108](#)
 Elektronen-, [1108](#), [1169](#)
 Immersions-, [1108](#)
 Rasterturneelektronen-, [1197](#)
 Tubuslänge, [1072](#)
 Vergrößerung, [1072](#), [1080](#)
 Zwischenbild, [1072](#)
 Mikrowelle, [468](#)
 Mikrowellen
 Polarisation, [1025](#)
 Mikrowellenofen, [990](#)
 Milch
 Lichtstreuung, [1028](#)
 Milchstraße, [1152](#)
 Millennium Bridge, [445](#)
 Miller'sche Indizes, [1282](#)
 Milli-, [7](#)
 Millikan, Robert Andrews, [1164](#)
 Millikan-Experiment, [685](#)
 Mindestbremsweg, [122](#)
 Mineralöl, [789](#)
 Dielektrikum, [789](#)
 minimaler Ablenkinkel
 Regenbogen, [1021](#)
 Minkowski, Hermann, [1147](#)
 Minkowski-Diagramm, [1147](#)
 relativistische, [1155](#)
 Minute, *siehe* Winkelmaß
 Mittelpunkt
 geometrischer, [250](#)
 Mittelpunktsstrahl
 dünne Linsen, [1060](#), [1079](#)
 sphärische Spiegel, [1049](#), [1078](#)
 Mittelwelle, [468](#)
 Mittelwert, [15](#), [16](#), [17](#), [20](#)
 quadratischer (rms), [949](#)
 signifikante Stellen, [1392](#)
 mittlere Beschleunigung, [39](#), [45](#), [67](#)
 Vektor, [42](#)
 mittlere freie Weglänge, [1288](#), [1296](#), [1312](#)
 Gasteilchen, [556](#), [557](#), [562](#)
 klassisch, [1288](#), [1289](#)
 quantentheoretisch, [1296](#)
 mittlere Geschwindigkeit, [31](#), [33](#), [52](#), [67](#)
 Betrag, [36](#)
 Vektor der, [67](#)
 mittlere Kraft, *siehe* Kraft
 mittlere Lebensdauer, [1324](#)
 mittlere Leistung, [952](#)

- mittlerer Geschwindigkeitsbetrag, 67
 mittleres Ergebnisquadrat, 15
 Mobiltelefon, 761, 790
 Mode, 496, 516
 Modenkopplung, 1241
 Moderator, 1334, 1336
 moderne Physik, 4
 Modulation, 492
 Moiré-Muster, 518
 Mol, 5, 20, 546
 molare Masse, 548, 550
 molare Wärmekapazität, 569, 589, 594, 595
 Festkörper, 569, 595, 598
 Flüssigkeiten, 569
 Gase, 583, 584, 585, 594
 ideales Gas, 584, 585
 Metalle, 569, 582, 583, 595
 Moleküle
 Absorptionsspektren, 1260, 1263–1266, 1271
 chemische Bindung, 1252
 Drehimpuls, 1260
 Durchmesser, 559
 elektrisches Dipolmoment, 1256, 1257, 1270
 elektronische Energieniveaus, 1262, 1263
 Emissionsspektren, 1260, 1263
 kovalente Bindung, 1254
 Kraftkonstante, 1263, 1270
 mehratomige, 1258, 1259, 1270
 nichtpolare, 681
 polare, 681
 reduzierte Masse, 1261, 1262, 1270
 Rotation, 1268, 1269
 Rotationsenergieniveaus, 1260, 1261, 1262–1264, 1270
 Rotationsquantenzahl, 1261
 Rotationsübergänge, 1263, 1264, 1271
 Schwingungsenergieniveaus, 1262, 1263, 1270
 Schwingungsquantenzahl, 1262
 Schwingungsübergänge, 1263, 1271
 Spektren, 1260, 1263, 1264, 1271
 Trägheitsmoment, 1260, 1261
 zweiatomige, *siehe* zweiatomige Moleküle
 Molekülmödell
 Tetraedermodell, 345
 Molekülorbitale, 1252, 1270
 Molekülspektren, 1260, 1263, 1264, 1271
 Moleküstruktur
 Ammoniak, 1259
 Ethan, 1259
 Methan, 1259, 1260
 Wasser, 1259
 Molmasse, 548, 550
 Molybdän
 Röntgenspektrum, 1236
 Momentanbeschleunigung, 40, 42, 45, 67
 grafische Interpretation, 67
 Vektor der, 42, 67
 momentane Leistung, 952
 Momentangeschwindigkeit, 33, 34, 35, 67
 Vektor der, 34, 67
 Momentangeschwindigkeitsbetrag, 34, 67
 Monopol, magnetischer, 846, 889, 905, 981
 Morley, Edward, 1123
 Morse-Potenzial, 454
 Moseley, Henry, 1236, 1237
 Motor, *siehe* Verbrennungsmotor
 Leistung, 167
 Wechselstrommotor, 927, 928
 Müller, K. Alexander, 1306
 Multimeter, 827
 Muskel, 191
 Mutterkern, 1326
 Myon, 80, 1350
 Halbwertszeit, 12
 Längenkontraktion, 1128
 Ruheenergie, 1143
 Zeitdilatation, 1128
 Myon-Leptonenzahl, 1357
 Myon-Neutrino, 1326, 1350
 N
 Nablaoperator, 724
 Näherungsrechnungen
 signifikante Stellen, 1392
 Nahordnung in Festkörpern, 1278
 Nahpunkt, 1067, 1068, 1070, 1079
 Sehwinkel, 1070
 Nano-, 7
 Nanolaser, 1241
 Nanoröhrchen, 1277, 1283
 NASCAR-Café, 200
 Natrium
 Austrittsarbeit, 1294
 Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, 1292
 Elektronenkonfiguration, 1230
 Fermi-Energie, 1292
 gelbe Spektrallinien, 1236
 Natriumatom
 Termschema, 1235
 Natriumchlorid
 Gleichgewichtsabstand, 1281
 Kristallstruktur, 1253
 Struktur, 1278
 Naturphilosophie, 4
 Navier-Stokes-Gleichung, 400, 403
 Definition, 400
 Nebelkammer, 80, 852, 1368
 Nebenachse einer Ellipse, 132
 Nebengruppenelemente, 1233
 Nebenmaximum
 Beugungsmuster, 1105
 Interferenzmuster, 1102
 Nebenschlusswiderstand, 828, 974
 Nebensonnen, 1020
 negative Linse, *siehe* Zerstreuungslinse
 Neon
 Elektronenkonfiguration, 1229
 Neopren
 Durschlagfestigkeit, 778
 Neptun
 Entdeckung, 156
 Nernst'sches Wärmetheorem (Dritter Hauptsatz), 623, 626
 Nervenzelle, 795
 Netzebene, 1282
 Netzfrequenz, 950
 Netzhaut
 Auflösungsvermögen, 1109
 Fovea centralis, 1109
 Netzhaut (Retina), 1067, 1068, 1079
 Netzspannung, 950
 Netzteil, 955
 Neukurve, 901
 neutral, 652
 neutrale Faser, 360
 neutrales Gleichgewicht, 310
 Neutrino
 Elektron-, 1326, 1350
 experimenteller Nachweis, 1326
 Masse, 1351
 Myon-, 1326, 1350
 Oszillationen, 1351
 Pauli-Verbot, 1202
 Ruheenergie, 1326
 Ruhemasse, 1326
 Tauon-, 1326, 1350
 β-Zerfall, 1326
 Neutron, 80, 653, 1320
 Beugung, 1169
 Halbwertszeit, 12
 Kernreaktionen mit, 1330
 Pauli-Verbot, 1202
 promptes, 1335
 Ruheenergie, 1143
 thermisches, 1330
 verzögertes, 1335
 Neutroneneinfang
 Kernspaltung, 1332
 Untersuchung von Gemälden, 1331
 Wirkungsquerschnitt, 1331
 Neutronenstern, 156, 286
 Neutronenstreuung, 232
 Neutronenzahl, 1320, 1321
 Newton, 82
 Relativitätsprinzip, 1122, 1122, 1123
 Newton, Isaac, 4, 77–79, 82, 152, 1029
 Newton'sche Reibungskraft, 395
 Newton'sche Ringe, 1088
 Newton'sches Abkühlungsgesetz, 632, 634, 640, 641, 644
 Newton'sches Axiom, 103
 Anwendung, 87
 Drehbewegungen, 297, 315, 340, 341
 drittes, 93, 94, 103, 255
 erstes, 78, 103
 Mehrkörperprobleme, 247
 zweites, 82, 85, 87, 91, 95, 103, 114, 124, 168, 172, 246
 Ausdruck mithilfe des Impulses, 212
 System mit veränderlicher Masse, 269
 Teilchensystem, 237
 zweites, Anwendung, 87
 zweites, für Systeme, 255, 274
 Newton'sches Gravitationsgesetz, 131, 133, 150
 n-Halbleiter, 1299
 nicht dispersives Medium, 509
 nicht nutzbare Arbeit, *siehe* Arbeit, entwertete
 Nicht polare Atome und Moleküle, 785
 Nichtgleichgewichtszustände
 Irreversibilität, 608
 nichtkonservative Kraft, 175, 202
 Wegabhängigkeit, 176

- Nichtleiter, 654
 nichtpolare Moleküle, 676, 681
 Dipolmoment, 676
 Nichtunterscheidbarkeit
 Teilchen, 1200, 1201
 nichtviskos, 389
 nichtzentraler Stoß, *siehe* Stoß
 Nickel
 Austrittsarbeit, 1294
 Nishijima, Katsuhiko, 1357
 Normalbeschleunigung, 64, 68, 285, 340
 Normale
 Spannungs-, Josephson-Kontakt, 1308
 Normalenvektor, 859, 914
 Normalkraft, 80, 81, 107, 112, 114
 Normalverteilung, 16
 Normierung
 Wellenfunktion, 1171, 1179, 1188, 1205, 1220, 1221
 Normierungsbedingung
 Verteilung, 16
 Normierungsbedingung für Verteilungen, 14
 Nova-Target-Kammer, 1339
 npn-Transistor, 1304
 Nukleon, 1320
 Nukleonendichte, 1323
 Nuklid, 1320
 Nulldetektor, 842
 Nullen
 nachstehende, 10
 Null-Impuls-Bezugssystem, *siehe*
 Schwerpunktsystem
 Nullpunktsenergie
 Teilchen im Kasten, 1184
 Nullter Hauptsatz, 530, 542
 Nutation, 334
 Nutzlast, 271
- O**
 Oberflächen, 112
 Oberflächenenergie, *siehe* Oberflächenspannung
 Oberflächenladungen, 786, 788
 Oberflächenladungsdichte, 726, 736, 748, 755
 Oberflächenspannung, 386
 Oberflächensperrschicht-Detektor, 1303
 Oberflächenunebenheiten, 112
 und Reibungsentstehung, 112
 Oberflächenwelle, 456
 Oberschwingung, 496
 Oberton, 496
 Objektiv
 Mikroskop, 1072
 Teleskop, 1073
 Ohm (Einheit), 804, 865, 869
 Ohm, Georg Simon, 805
 Ohmmeter, 827, 837
 Aufbau, 828
 Ohm'scher Widerstand, 804, *siehe auch*
 elektrischer Widerstand
 Leistung im Wechselstromkreis, 971
 mit Wechselspannung, 948, 971
 Schaltsymbol, 810
 Unterschied zu induktivem Widerstand, 952
 Vorzeichen der Potenzialänderung, 824
 Zeigerdiagramm, 961
- Ohm'sches Gesetz, 804, 805, 836, 1288
 Analogie zum Gesetz von Hagen-Poiseuille, 397
 Gültigkeit, 805
 Ohm'sches Verhalten, 804
 Okular
 Mikroskop, 1072
 Teleskop, 1073
 Oppenheimer, J. Robert, 1151
 Optik
 geometrische, 1041
 optische Abbildungen, 1041
 optische Achse
 Doppelbrechung, 1029
 dünne Linsen, 1060
 sphärische Spiegel, 1044
 optische Instrumente, 1067
 Auflösungsvermögen, 1106, 1107
 optische Molekülspektren, 1264, 1271
 optische Spektren, 1235, 1245
 optisches Pumpen, 1238
 Orbitale
 Atom-, 1252, 1259, 1270
 Hybridisierung, 1260, 1270
 Molekül-, 1252, 1270
 ordentlicher Strahl
 Doppelbrechung, 1028, 1029
 Ordnung
 Interferenz, 1090
 Spektren, 1095
 Ordnung eines Terms, 1408
 Ordnungszahl, 653, 1211, 1236, 1245, 1320
 Organdosis, 1340
 Definition, 1340
 Organismen
 Energieumsatz, 592
 Orgelpfeife, 502
 effektive Länge, 502
 gedackt, 502
 offen, 502
 Ort, 28
 Erwartungswert, 1173, 1174, 1175, 1179
 Unschärferelation, 1173
 Zeitabhängigkeit beim schrägen Wurf, 68
 Ortsänderung, 28
 Ortsmessung, 36
 Ortsvektor, 28, 29, 34, 67
 Komponenten, 29
 Ortsverschiebung, 28
 o-Strahl, *siehe* ordentlicher Strahl
 Oszillator
 harmonischer, 414, *siehe* harmonischer
 Oszillator
 schwach gedämpfter, 437
 Otto-Kreisprozess, 603
 Ottomotor, *siehe* Verbrennungsmotor
 Overhead-Projektor, 1062
- P**
 Papier
 Durschlagfestigkeit, 778
 Papierfeder, 425
 Parabel, 1397
 Achsenabschnitt, 1397
 Parabelbahn, 56
- Parabelgleichung
 schräger Wurf, 56
 Parabolspiegel, 1067
 Paradoxon, 1131
 Zwilling-, 1136, 1137
 Paraffin
 Durschlagfestigkeit, 778
 Parallel Axis Theorem, *siehe* Steiner'scher Satz
 Parallelogramm
 Flächeninhalt, 1401
 Parallelschaltung
 Ersatzwiderstand, 814
 Kondensatoren, 770–772, 791
 von Widerständen, 813
 Parallelschwingkreis, 968
 Resonanz, 968
 Zeigerdiagramm, 968
 Paramagnetismus, 895, 898, 906
 Parsec, 23
 Partialdruckgesetz, 547
 partielle Ableitung, 394
 Pascal, Blaise, 376
 Pascal (Druckeinheit), 374
 Pascal'sches Prinzip, 376, 402
 Paschen, Friedrich, 1216
 Paschen-Serie, 1216
 Pauli, Wolfgang, 1031, 1202, 1326
 Pauli-Prinzip
 Cooper-Paare, 1306
 Fermi-Elektronengas, 1290
 Pauli'sches Ausschließungsprinzip, 1031, 1202, 1205, 1226, 1244, 1245
 ionische Bindung, 1252
 kovalente Bindung, 1254, 1256
 Pauli-Verbot, Bändermodell, 1298
 Pc, 23
 PCB, 789
 PDE, 273
 Pendel, 61, 63, 71, 185, *siehe auch*
 Federschwinger
 ballistisches, 227, 324
 beschleunigtes Bezugssystem, 429
 große Auslenkung, 430
 konisches, 349
 konisches oder Kegel-, 99
 mathematisches, 23, 205, 427
 Pendelschwingungen, *siehe auch*
 Federschwinger
 physikalisches, 430
 Schwingungsfrequenzen, 447
 Pendelkörper, 185, 186
 Pendelschwingungen, 62
 Pendeluhr, 431
 Genauigkeit, 431
 Peptide
 Wasserstoffbrückenbindung, 1258
 Perigäum, 154
 Perihel, 131
 Periode, 63, 68
 Kreisbewegung, 851
 Periodensystem (chemische Elemente), 1226, 1231, 1233, 1244, 1245
 periodische Welle, 464
 Permeabilität, 901

- des Vakuums, *siehe* magnetische Feldkonstante relative, 896, 906
- Perpetuum mobile, 624
- Personenwaage, 86
- Peta-, 7
- Pferdestärke, 167
- Pferdewagen, 93
- Pfund, August Hermann, 1216
- Pfund-Serie, 1216
- p-Halbleiter, 1299
- Phase, 415, 420, 491 der Welle, 464
- Phasenbeziehung im Parallelschwingkreis, 968 im Wechselstromkreis, 951, 953, 960, 972 Zeigerdiagramm, 971
- Phasendiagramme, 574
- Phasendifferenz, 415, 490, 493, 516, 1086, 1087, 1112 Doppelbrechung, 1029 Zeigerdiagramm, 1101 Zusammenhang mit Gangunterschied, 492
- Phasengeschwindigkeit, 510
- Phasenkonstante, 415, 972
- Phasenraumvolumen, 622
- Phasensprung Reflexion, 1086, 1087, 1088, 1112
- Phasenübergänge, 571
- Phosphoreszenz, 1235
- Photoeffekt, 1367
- photoelektrischer Effekt, 1162–1164, 1179, 1235, 1367 Ablösearbeit, 1164, 1179 Einstein'sche Gleichung, 1163, 1164 Elektronenenergie, 1164 Grenzfrequenz, 1164 Grenzwellenlänge, 1164
- Photoemulsionen, 1368
- Photon, 79, 1162, 1166, 1179 Anzahl pro Sekunde, 1165 Compton-Streuung, 1164, 1165 Energie, 1163, 1179 Frequenz bei Übergängen im Atom, 1214, 1215, 1220, 1244 Geschwindigkeit, 1139 Grenzfrequenz beim photoelektrischen Effekt, 1164 Impuls, 1164–1166, 1179 Ruheenergie, 1143 virtuelles, 1361 Wechselwirkung mit Materie, 1234, 1235 Wellenlänge, 1179 Welle-Teilchen-Dualismus, 1161
- Photospaltung, 1346
- Physik Aristotelische, 4 Gebiete, 4 klassische, 4 moderne, 4 Wesen, 4 physikalische Größe, 20 physikalisches Pendel, 430 Frequenz, 447 Schwingungsdauer, 432
- Physikalisch-Technische Bundesanstalt, 6 π , 1401
- Pickering-Serie, 1247
- Picofarad, 762
- Piezoelektrischer Effekt, 788, 792
- Piko-, 7
- pi-Mesony-Meson, 1360
- Pion, 1355 Ruheenergie, 1143
- Pirouette, 318
- Pitot-Rohr, 407
- Planck, Max, 623, 640, 1163, 1213
- Planck'sches Wirkungsquantum, 1163, 1179
- Planeten Umlaufdaten, 131 planparallele Glasplatten, 1088, 1090
- Plasma, 678, 853, 1337
- Plasmaeinschluss, 1337 magnetischer, 1337
- Plattenkondensator, 698, 763 Feldlinien, 763 gespeicherte Energie, 768 Kapazität, 763 mit Dielektrikum, 788
- Plexiglas Durschlagfestigkeit, 778
- Plumpudding-Modell, Atom, 1212
- Plutonium Halbwertszeit, 12 Kernspaltung, 1332 spaltbares, 1336 Wirkung im menschlichen Körper, 1345
- pn-Halbleiterdiode, *siehe* Halbleiterdiode
- pn-Halbleiterübergang, 1301, 1302, 1303, 1313 Strom-Spannungs-Kennlinie, 1302
- pnp-Transistor, 1304
- Pointillismus, 1117
- Poise, 396
- Poiseuille, Jean-Louis Marie, 396
- Poiseuille'sches Gesetz, *siehe* Gesetz von Hagen-Poiseuille
- Poisson, Denis, 1096
- Poisson'sche Zahl, 353
- Poisson'scher Fleck, 1096
- Polare Atome und Moleküle, 786
- polare Moleküle, 675, 681, 716
- Polarisation, 786, 1024, 1025, 1035 durch Absorption, 1025, 1026 durch Doppelbrechung, 1028, 1029 durch Reflexion, 1027, 1028 durch Streuung, 1028 Intensität, 1026 lineare, 1024–1026 Mikrowellen, 1025 Sonnenbrille, 1027, 1028 zirkulare, 1029
- Polarisationsfilter (Polarisationsfolie), 1025, 1026, 1035
- Polarisationswinkel (Brewster'scher Winkel), 1027
- Polarisator, 1026, 1029, 1031
- Polarisierbarkeit, 787
- polarisiert, 655, 677
- Polarkoordinaten, 1217, 1220, 1410 Quantenzahlen, 1218, 1244
- Polarlicht, 845
- Pole eines Magneten, 905
- Polizeiwagen, 51, 53
- Polkkappen, 344
- Polsprung, 866
- Polychlorierte Biphenyle, 789
- polykristalline Festkörper, 1278
- Polystyrol Durschlagfestigkeit, 778
- Porzellan Durschlagfestigkeit, 778
- Position Erwartungswert, 1173, 1174, 1175, 1179 Unschräferelation, 1173
- positive Linse, *siehe* Sammellinse
- Positron, 1352 Ruheenergie, 1143
- Potenz, 1398
- Potenzial, 726 Berechnung des elektrischen Felds, 733 Berechnung für kontinuierliche Ladungsverteilungen, 735 Bezugspunkt, 728 Coulomb-, 729 Dimension, 727 elektrischer Dipol, 733 elektrisches, 726, 754 Hohlkugel, 743 homogen geladene Kugel, 741 homogen geladene Scheibe, 736, 737, 755 homogen geladener Ring, 735, 755 homogenes elektrisches Feld, 728 kontinuierliche Ladungsverteilung, 735, 754 kugelförmiger Leiter, 762 Kugelschale, 739, 740, 743, 755 kugelsymmetrische Ladungsverteilung, 734 Ladungsebene, 755 Ladungsebene und Punktladung, 739 Ladungsring, 735 Linienladung, 755 Maßeinheit, 727, 754 Punktladung, 729, 754 Punktladungssystem, 728, 731, 754 Stetigkeit, 726 α -Teilchen, 1329 und Arbeit, 732 und elektrische Energie, 726 und elektrisches Feld, 727 und elektrisches Feld, allgemeiner Zusammenhang, 734 unendlich ausgedehnte Ladungsebene, 738, 739 unendlich ausgedehnte Linienladung, 741 zweier Punktladungen, 731 Potenzialänderung, 754 endliche Verschiebung, 726
- Potenzialbarriere Reflexion, 1192, 1193, 1195, 1196, 1205 Transmission, 1189, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1205 Wellenfunktion, 1194
- Potenzialdifferenz, 726, 754, 762 infinitesimale Verschiebung, 754
- SI-Einheit, 727 und Arbeit, 726

- zwischen zwei Punkten, 726
 Potenzialdifferenz und Spannung, 804
 Potenzialzuwachs, 738
 potentielle Energie, 174, 177, 181, 201, 726
 Bezugspunkt, 178
 der Gravitation, 175, 177, 201, 263
 der Gravitationskraft in der Nähe der Erdoberfläche, 177
 eines Dipols, 675
 eines magnetischen Dipols, 861, 868
 elastische, 180
 elastische Verformung, 201
 Feder, 180
 Funktionsverlauf, 201
 Ion im Kristallgitter, 1280, 1281, 1285
 ionische Bindung, 1252, 1253
 kovalente Bindung, 1255, 1256
 Punktladungen, 749
 und Gleichgewicht, 181
 zweckmäßige Nullpunktswahl, 179
 Potenzregeln, 1398
 Poynting, Sir John, 993
 Poynting-Vektor, 993, 1000
 Einheit, 1002
 Präzession, 334
 Präzessionswinkelgeschwindigkeit, 334
 Primärspule, 954
 Prismenfeldstecher, 1016
 Probelauf, 662, 726, 727, 732, 740, 742, 754
 Projektion
 Vektor, 312
 Promenades Aeriennes, 102
 Promotion
 Elektronen, 1260
 Proportionalität, 1394
 Proportionalitätsgrenze, 352
 Proportionalitätskonstante, 1394
 Protium, 1320
 Proton, 80, 653, 730, 741, 1320
 Beschleunigung im Zyklotron, 858
 Größe, 12
 Masse, 12
 Pauli-Verbot, 1202
 Ruheenergie, 1143
 Welle-Teilchen-Dualismus, 1161
 Proton-Antiproton-Paarerzeugung, 1353
 Blasenkammeraufnahme, 1354
 Proton-Antiproton-Paervernichtung, 1354
 Protonenzerfall, 1363, 1376
 Proton-Proton-Stoß, 234
 Blasenkammeraufnahme, 1349
 Proton-Proton-Zyklus, Sonne, 1346
 Proxima Centauri, 72
 Prozesse, irreversible, *siehe* irreversible Prozesse
 Prozesse, reversible, *siehe* reversible Prozesse
 Prozesse, zyklische, *siehe* Kreisprozesse
 PS, 167
 pulsierende Gleichspannung, 975
 Pulslaser, 1241
 Pulstrahltriebwerk, 273
 Pulverbeschichtung
 elektrostatische, 678
 Pumpen
 Bremse, 122
 optisches, 1238
 Punktladung, 662, 726
 Bewegung im Magnetfeld, 851, 868
 Potenzial, 729, 754
 potentielle Energie, 749
 Punktladungssystem
 Potenzial, 728, 731, 754
 Punktsymmetrie, 704
 Pupille, 1067
 p-V-Diagramme
 Gase, 579, 580, 588
 p-V-Isothermen
 Gas und Flüssigkeit, 559, 560
 Pyroelektrischer Effekt, 788, 792
 Pythagoras
 Satz, 1404
 P-Zweig
 Molekülspektren, 1263
- Q**
- Quantentunneln, 1195
 QCD (Quantenchromodynamik), 1361
 Q-Faktor, *siehe* Gütefaktor
 quadratintegrale Wellenfunktion, 1188
 quadratisch gemittelte Geschwindigkeit, 552, 553, 554, 562
 quadratisch gemitteltes Ergebnis, 15, 16
 quadratische Formel, 1397
 quadratische Gleichung, 1397
 Lösung, 1397
 Normalform, 1397
 Zerlegung in Linearfaktoren, 1397
 quadratisches Abstandsgesetz, 983
 Quantenchromodynamik (QCD), 1361
 Quantenelektrodynamik (QED), 1361
 Quanten-Hall-Effekt, 869
 fraktionaler, 865
 ganzzahliger, 865
 Quantenmechanik, 4, 1162, 1179
 quantenmechanisches Modell
 der elektrischen Leitung, 1295, 1296
 der Wärmekapazität, 1295
 Quantentheorie, 787
 Atome, 1217, 1219, 1244
 photoelektrischer Effekt, 1163
 Wasserstoffatom, 1219
 Quantenzahlen
 Bahndrehimpuls-, *siehe*
 Bahndrehimpulsquantenzahl
 Drehimpuls-, *siehe* Drehimpulsquantenzahl
 Haupt-, *siehe* Hauptquantenzahl
 in Polarkoordinaten, 1217, 1218, 1244
 Korrespondenzprinzip, 1177
 Pauli-Verbot, 1202
 Rotations-, 1261
 Schwingungs-, 1262
 Spin-, 1229, 1244
 Teilchen im Kasten, 1177, 1186
 quantisiert, 653
 Quantisierung, *siehe* Energiequantisierung
 Energie, 640, 1267
 Quark, 80
 Quark-Modell, 1359
 Quarks, 653, 1350, 1359, 1360–1362, 1374
 Bottom-, 1360
 Charm-, 1360
- Confinement, 1361, 1362
 Down-, 1359
 Eigenschaften, 1360
 Flavour, 1359
 Kombinationen, 1359
 Ladung, 1359
 Massen, 1360
 Pauli-Verbot, 1202
 Strange-, 1359
 Top-, 1360
 Up-, 1359
 Quarz, 788
 Doppelbrechung, 1031
 Quasar, 1153
 quasistatisch, *siehe* reversibel
 Quecksilber
 Linienpektrum, 1212
 Supraleiterenergielücke, 1306
 Quellenspannung, 810, 836
 Quellpunkt
 des elektrischen Felds, 663
 eines Felds, 140
 Querkontraktion, 353, 366
 Querwiderstand, 828
 Q-Wert
 einer Reaktion, 1329, 1343
- R**
- Radar
 Geschwindigkeitsüberwachung, 478
 radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, 1221, 1222, 1223, 1245
 Radialgleichung
 Wasserstoffatom, 1217
 Radian, *siehe* Winkelmaß
 Radiant (Einheit), 282
 Radikal, 1339
 Radioaktiver Zerfall, 22
 radioaktiver Zerfall
 Impuls der Kernbestandteile, 217
 Radioaktivität, 4, 1323–1329, 1343
 Aktivität, 1324
 Halbwertszeit, 1324, 1343
 β-Zerfall, 1326, 1328
 Zerfallskonstante, 1323
 Zerfallskurve, 1324
 Zerfallsrate, 1324, 1343
 Radiokohlenstoffmethode, 1327
 Radioquelle, 1122
 Radioteleskop, 521
 Radiowellen, 468
 Erzeugung, 468
 Radius
 kritischer, 1151
 Radiusvektor, 131
 Ragone, Carlos, 71
 Rakete
 Beschleunigung, 271
 Brennrate, 270, 275
 Brennschluss, 271
 mehrstufige, 272
 Nutzlast, 271
 Saturn V, 272
 Schubkraft, 271, 275
 Raketenantrieb, *siehe* Strahlantrieb

- Raketengleichung, 270, 275
 Raketenprinzip, 217
 Raman-Streuung, 1234
 Randbedingungen
 Energiequantisierung, 1184, 1205
 Wellenfunktion, 1184
 Raser, 51
 Rasierspiegel, 1050
 Rasterelektronenmikroskop, 12
 Rastertunnel elektronenmikroskop, 1197
 Raumladungsdichte, 688
 Raumstation, 248
 Raumtemperatur, 461
 Raumwinkel, 714
 Rayleigh, Lord Rayleigh (John William Strutt), 1234
 Rayleigh'sches Kriterium der Auflösung, 1106, 1107, 1108, 1113
 Rayleigh-Streuung, 1234
 RC-Stromkreis, 829
 Zeitkonstante, 829
 Reaktion
 chemische, 191
 Reaktionskraft, 93
 Reaktorkern, 1335
 reale Gase, 547, 558, 562
 Rechteckspannung, 977
 Rechteckwelle, 525
 Rechte-Hand-Regel, 283
 Rechtssystem, 285
 reduzierte Masse, 453
 zweiatomige Moleküle, 1261, 1262, 1270
 reelle Zahlen, *siehe* Zahlen (reelle)
 reelles Bild, 1044, 1049, 1053, 1078
 Referenzstrahl
 Hologramm, 1095
 Reflexion, 482, 1011, 1035
 Bilderzeugung, 1042, 1043, 1044
 diffuse, 1014
 Elektronenwellen, 1192
 Intensität, 1014, 1035
 Phasensprung, 1086, 1087, 1088, 1112
 physikalische Mechanismen, 1013
 Polarisation durch \rightarrow , 1027, 1028
 Potenzialbarriere, 1192, 1193, 1195, 1196, 1205
 Spiegel-, 1014
 stehende Wellen, 496
 Stufenpotenzial, 1194
 Umkehrbarkeit des Lichtwegs, 1048
 Vorzeichenkonvention, 1049, 1050, 1078
 Reflexionsgesetz, 1012, 1035
 Herleitung, 1022, 1023
 Reflexionsgitter (Beugungsgitter), 1093
 Reflexionskoeffizient, 482, 515
 Stufenpotenzial, 1193, 1194
 Reflexverminderung (Entspiegelung), 1089
 Refraktor (Linsenteleskop), 1073, 1074
 Regenbogen, 1019–1021, 1035
 Ablenkwinkel, 1021
 Regenbogenhologramme, 1095, 1110
 Regentropfen
 Masse, 12
 reguläre Reflexion (Spiegelreflexion), 1014
 Reibung, 78, 79, 112, 149, 191
 Durchdrehen, 119
 Energieumwandlung, 194, 202
 Gleit-, 113
 Haft-, 113
 innere, *siehe* Viskosität
 magnetische, 926
 Masseeabhängigkeit, 115
 Reibungskoeffizienten, 113, 114
 Roll-, 114
 und Relativbewegung, 119, 121
 Vorgehensweise bei Aufgaben, 115
 Reibungselektrizität, 652, 678
 Reibungskoeffizienten
 Tabelle üblicher Werte, 114
 Reibungskraft, 78, 79, 112–114, 176
 Richtung, 114
 Reibungswärme
 Arbeit, 600, 608
 Reibungswinkel, 116
 Reichweite, 56, 68
 beim schrägen Wurf, 58
 maximale, 59
 und Anfangsgeschwindigkeit, 58
 und Anfangsgeschwindigkeitsbetrag, 58
 und Wurfwinkel, 58
 von Teilchen in Materialien, 1366
 Wurf, 58
 Reifenabrieb, 13
 Reifentest, 123, 124
 Reihe
 triboelektrische, 652
 Reihenschaltung
 Ersatzwiderstand, 813
 Kondensatoren, 770, 772, 774, 791
 von Widerständen, 813
 Reihenschwingkreis, 961
 Bandbreite, 964
 Blindwiderstand, 962
 Einschwingen, 962
 erzwungene Schwingung, 964
 Gütefaktor, 964
 Impedanz, 962
 Leistungsfaktor, 963
 Phasenkonstante, 962
 Resonanz, 963, 966
 Stromstärke, 962
 umgesetzte Leistung, 963
 und erzwungene mechanische Schwingung,
 961
 Zeigerdiagramm, 962
 relative Dichte, 373, 402
 Relative Dielektrizitätskonstante, 779, 788
 Relative Dielektrizitätskonstanten
 Tabelle, 778
 Relativgeschwindigkeit, 36, 37, 67, 231, 234, 237, 1124
 Elastizitätszahl, 235
 konkretes Beispiel, 1139
 Vorgehensweise bei Aufgaben, 37
 relativistische Energie, 1142–1147, 1155
 Zusammenhang mit klassischer Energie,
 1143
 relativistischer Impuls, 1140, 1141, 1155
 Erhaltung, 1141
 Relativitätstheorie, 1122–1158
 allgemeine, 1149–1152
 spezielle, 4
 Remanenzfeld, 900
 Reservoir
 Kältemaschinen, 606
 Wärmekraftmaschinen, 601, 603, 604
 Wärme pumpen, 613
 Resonanz, 440, 441, 442, 448, 1330
 Bedingung, 441
 elektrischer Schwingkreis, 963, 971, 972
 mathematische Behandlung, 442
 stehende Wellen, 498
 Resonanzabsorption, 1234
 Resonanz breite, 972
 Resonanzfrequenz, 441, 496
 Parallelschwingkreis, 968
 Reihenschwingkreis, 963
 Resonanzkurve, 441
 eines Schwingkreises, 963
 Halbwertsbreite, 441
 Resonanzspektrum, 496
 Resonator, 442
 Respirometrie, 592
 resultierende Kraft
 Ladungssystem, 659
 Retina (Netzhaut), 1067, 1068, 1079
 Reversibilität
 Bedingungen, 608, 609, 625
 reversible Prozesse, 578, 595, 608
 adiabatische, 589, 590
 Carnot-Prinzip, 608
 Entropieänderung, 615, 619
 Reynolds, Osborne, 399
 Reynolds-Zahl, 399, 403
 reziprokes Gitter, 1280
 Riesenamöbe
 Größe, 12
 Masse, 12
 Ringantenne, 991, 992
 Ringe
 Newton'sche, 1088
 Ringladung, 736
 elektrisches Feld auf der Achse, 694, 695, 697
 Ringspule
 Magnetfeld, 892
 Ritz, Walter, 1212
 RLC-Schwingkreis, 959, 971, 972, *siehe auch*
 Reihenschwingkreis,
 Parallelschwingkreis
 Energieumwandlung, 960
 und gedämpfte mechanische Schwingung,
 959
 RL-Stromkreis, 933, 940
 Zeitkonstante, 940
 zeitliche Entwicklung, 933
 rms, *siehe* quadratisch gemittelt
 rms-Wert, 949
 Rollbedingung, 341
 Beschleunigung, 326
 Entfernung, 327
 Geschwindigkeit, 326
 Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts,
 326
 Seil auf Rolle, 300, 341

- Rollen, 326
 Rollen mit Gleiten, 331, 341
 Billardkugel mit Rückwärtsspin, 328
 Billardkugel mit Topspin, 333
 Bowlingkugel, 332
 Rollen, ohne zu gleiten, 326
 Abhängigkeit vom Winkel einer geneigten Ebene, 331
 beschleunigter Körper, 329, 330
 Geschwindigkeit eines beschleunigten Körpers, 331
 Zusammenhang mit Haftreibungskoeffizient, 330, 331
 rollende Körper, 326
 Rollreibung, 114, 119, 149
 Rollreibungskoeffizient, 114, 115, 149
 Rollreibungskraft, 114
 Entstehung, 114
 Römer, Ole, 1008
 Röntgen
 Maßeinheit, 1339
 Röntgen, Wilhelm, 4
 Röntgenröhre
 Beschleunigungsspannung, 1236
 Röntgenspektren, 1235, 1236, 1245
 Grenzwellenlänge, 1236
 Serien, 1236, 1237
 Röntgenstrahlen, 4
 Röntgenstrahlung, 468
 Sterne, 1211
 Röntgenteleskop Chandra, 1211
 root mean square, *siehe* quadratisch gemittelt
 Rosinenkuchen-Modell, Atom, 1212
 Rotation, 68
 Moleküle, 586, 587, 1268, 1269
 Periode, 63
 Rotationsebene, 285
 Rotationsenergie, 341
 charakteristische, *siehe* Rotationskonstante
 Rotationsenergieneaus
 zweiatomige Moleküle, 1260, 1261, 1262–1264, 1270
 Rotationskonstante
 zweiatomige Moleküle, 1261, 1262, 1263
 Rotationsquantenzahl
 zweiatomige Moleküle, 1261
 Rotationstemperatur, 1268, 1269
 Rotationsübergänge
 Moleküle, 1263, 1264, 1271
 rotierende Scheibe, 319
 Rotverschiebung, 479, 1130
 Gravitations-, 1151
 konkretes Beispiel, 1131
 Rotverschiebungsparameter, 1157
 Rowland-Ring, 910
 Rubbia, Carlo, 1361
 Rubinlaser, 1238, 1239
 Rückgewinnungsbremseung, 207
 Ruck-Gleiten, 151
 Rückkopplungseffekt, Kettenreaktion, 1336
 Rückkopplungsschaltung, 997
 Rückkopplungsverfahren
 Kettenreaktion, 1335
 Rückstellkraft, 81
 lineare, 414
 Rückstoß, 84, 218
 Rückstoßdüse, 84
 Rückstrahler, 1044
 Ruheenergie, 1142
 einiger Elementarteilchen, 1143
 einiger leichter Kerne, 1143
 Proton, 756
 Ruhemasse, 1141
 Ruhemassendefizit, 1144
 Rundfunkantenne, 991
 Rundfunkempfänger, 964, 967
 Russell, Bertrand, 629
 Rutherford, 1345
 Stresexperimente, 1345
 Rutherford, Ernest, 1213
 Rutsche, 196
 Rydberg, Johannes R., 1212
 Rydberg-Atom, 1248
 Rydberg-Konstante, 1212, 1215
 Rydberg-Ritz-Gleichung, 1212, 1214, 1215
 R-Zweig
 Molekülspektren, 1263
- S**
 Sägezahnfunktion, 949
 Saite
 beidseitig eingespannt, 496, 516
 einseitig eingespannt, 500, 516
 Salam, Abdus, 1361
 Salzsäure
 Ladungsschwerpunkte, 786
 Sammellinse, 1056, 1058, 1079
 Bildkonstruktion, 1058
 Vergrößerung, 1060
 Weitsichtigkeit, 1067, 1068
 Sandia National Laboratories, 100
 Sandkörper
 Anzahl am Strand, 13
 Satellit, 95, 127
 Satellitenumlaufbahn, 64
 Sättigungsdampfdruck, 560, 574, 594
 Sättigungsmagnetisierung, 897
 Eisen, 897
 Saturnringe, 157
 Satz des Pythagoras, 1404
 Anwendung auf Vektorkomponenten, 1406
 Sauerstoff
 Paramagnetismus, 899
 Sauerstoffatom, 251
 Saugheber, 407
 Savart, F., 873
 Schalldämpfer, 473
 Schallgeschwindigkeit, 22, 513
 Berechnung, 503
 Herleitung, 463
 in Gasen, 460, 513, 553, 591
 in Helium, 503
 in Luft, 461
 Temperaturabhängigkeit, 461, 519
 Schallintensität, 471
 Schallintensitätspegel, 472, 514
 Schallmauer, 480
 Schallpegel, *siehe* Schallintensitätspegel
 Schallstärke, 471
 schalltotter Raum, 495
 Schallwelle, 191, 464, 514
 Amplitude, 514
 Energie, 470
 Energiedichte, 514
 Erzeugung, 464
 harmonische, 467
 Schalter
 kapazitiver, 768
 Schaltzeichen
 Batterie, 770
 Kondensator, 770
 Schätzwert, 17
 scheinbares Gewicht, 383
 im Fahrstuhl, 92
 Scheinkraft, 126–128, 149, 151
 Scheinwiderstand, *siehe* Impedanz
 Scherkraft, 356
 Scherspannung, 356, 366
 Scherung, 356, 366
 Scherwinkel, 356
 Schichten
 dünne, *siehe* Interferenz an dünnen Schichten
 schiefe Bündel
 Astigmatismus, 1067
 schiefer Stoß, *siehe* Stoß
 Schiffshebewerk, 371, 385
 Schlag
 elektrischer, 747
 Schlagzentrum, 345
 Schlitten, 86, 87, 195
 Kräfte, 116, 120
 Schlupf, 300
 schlupffreie Drehung, 300, 341
 schlupffreies Rollen, 326, 329
 Schmelzdruckkurve, 574
 Schmelzen, 571, 594
 Schmelzpunkt, 571, 572, 1278
 Schmelzwärme
 spezifische, 571, 572, 594
 Schmerzschwelle, 472
 schneller Brüter, 1336
 Schnellläufer, 73
 Schockwelle, *siehe* Stoßwelle
 Schräger Wurf, 54, 55, 68
 Anfangswinkel, 60
 Flugdauer, 58
 Parabelgleichung, 56
 Reichweite, 58, 68
 Trajektorie, 56
 Übungsaufgaben, 73
 Vektorformulierung, 60
 schräger Wurf, 54
 Schraubenbahn eines Teilchens, 852
 Schraubenregel, 283
 Schrieffer, Robert, 1306
 Schrittgeschwindigkeit, 432
 Schrödinger, Erwin, 1170
 Schrödinger-Gleichung, 1170, 1179
 drei Dimensionen, 1197, 1198, 1205
 Elektronen im Atom, 1217
 Energieniveaus, 1171, 1172
 erlaubte Lösungen, 1171, 1205
 harmonischer Oszillator, 1190
 identische Teilchen, 1200, 1201, 1205
 potenzielle Energie, 1171, 1172

- Wellenfunktion, 1170, 1172
zeitabhängige, 1170, 1179
zeitunabhängige, 1170, 1171, 1179, 1184, 1188, 1197, 1201, 1244
- Schubkraft
nichtkonservative Kraft, 176
- Schubkraft einer Rakete, 271, 275
- Schubmodul, 356, 366
- Schutzkontaktstecker, 656
- Schutzschalter, 950
- Schutzziffer, 41
- schwach gedämpfter Oszillator, 437
- schwache Wechselwirkung, 80, 103, 1350, 1358, 1362
Standardmodell der Elementarteilchen, 1374
- Schwartzkopf, Anton, 102
- schwarzer Körper, 639, 644, 990
Strahlungsspektrum, 640, 1163
- Schwarzes Loch, 1151
Akkretionsscheibe, 1152
kleinstmögliche Masse, 1151
kritischer Radius, 1151
Schwarzschild-Radius, 1151
- Schwarzschild-Radius, 1151
- schweben, 383
- Schwebung, 491, 516
- Schwingungsfrequenz, 491, 492
- Schwefel
Siedepunkt, 533
- Schwefelhexafluorid, 745
- Schwellwertbremsung, 122
- schwere Masse, 137
- Schwerelosigkeit, 86
- schwerer Kreisel, *siehe* Kreisel
- Schwerewelle, 456, 459
- Schwerkraft, 85
- Schwerpunkt, 307
Definition, 308
experimentelle Bestimmung, 308
Unterschied zum Massenmittelpunkt, 308
Zusammenhang mit Drehmomenten, 307
- Schwerpunktsystem, 266
- Schwimmblaue, 409
- schwimmen, 383
- Schwingfall, 435
- Schwingkreis, 957, 968, 971, *siehe auch*
Reihenschwingkreis,
Parallelenschwingkreis, RLC-Schwingkreis,
LC-Schwingkreis
Leistung, 972
- Schwingquarz, 788
- Schwingung
aperiodischer Grenzfall, 435
erzwungene, 440, 448
gedämpfte, 435, 448
harmonische, 414, 447
schwach gedämpfte, 435
stark gedämpfte, 435
- Schwingungsbauch, 496, 497, 516
Druckbauch, 502
- Schwingungsdauer, 414
mathematisches Pendel, 428
Pendel, 23
physikalisches Pendel, 432
- schwingender Stab, 432, 433, 435
- Schwingungsenergieniveaus
zweiatomige Moleküle, 1262, 1263, 1270
- Schwingungsknoten, 496, 516
Abstand voneinander, 501
Druckknoten, 502
- Schwingungsmodus, 496, 516
Überlagerung verschiedener, 505
- Schwingungsperiode, 414
- Schwingungsquantenzahl
zweiatomige Moleküle, 1262
- Schwingungsübergänge
Moleküle, 1263, 1271
- Schwunggrad, 102, 292
- Seenotfunk, 997
- Segelboot
Geschwindigkeit, 35
- Segré, Emilio, 1353
- Sehnerv, 1067
- Sehweite
deutliche, 1067, 1070
- Sehwinkel, 1069
Lupe, 1070
Nahpunkt, 1070
- Seifenblase, 1085, 1112
- Seil, 81
fallendes, 269
- Seilwinde, 295
- Seitenwind, 38
- Sekans, 1403
- Sekundärspule, 954
- Sekundärstruktur
Wasserstoffbrückenbindung, 1258
- Sekunde, 5, 20, *siehe* Winkelmaß
Definition, 6
- Selbstinduktion, 921, 929, 939
- Selbstinduktionsspannung, 930
- Selbstinduktivität, 929, 939
Berechnung, 929
- Selektive Verfügbarkeit, 66
- seltsame Teilchen, 1357
- Seltsamkeit, 1357
verschiedener Hadronen, 1358
- Seltsamkeitsmultipletts, 1358
- Seurat, Georges, 1117
- Sèvres, 6
- Shockley, William, 1303
- Shuttle Loop, 102
- Sicherung, elektrische, 820, 950
- sichtbares Licht, 989, 990
- Sieden, 574, 594
- Siedepunkt, 531, 571, 572, 574
Druckabhängigkeit, 560
normaler, 560
Wasserstoffbrückenbindung, 1258
- SI-Einheiten, 5, 20
- Siemens (Einheit), 805
- signifikante Stellen, 9, 20, 1392
Addition, 9, 20
Division, 9, 20
Multiplikation, 9, 20
- Näherungsrechnungen, 1392
Rechenregeln, 1392
Subtraktion, 9, 20
- Signumfunktion, 697
- Silber
- Austrittsarbeit, 1294
- Elektronendichte am absoluten Temperaturnullpunkt, 1292
Fermi-Energie, 1292
- Silicium
Bandstruktur, 1300
Dotierung mit Arsen, 1299
Dotierung mit Gallium, 1299
sinken, 383
- Sinus, 1403, 1407
- Siphon, 407
- SI-Standardeinheiten, 6
- SI-System
Grundgrößen, 5
- Skalarprodukt, 164
- Skilauf, 172, 183
- Skiläufer, 175, 177, 178, 183
- Skilift, 175
- SLAC (Stanford Linear Accelerator Center), 1352
- Snellius, Willebrod, 1013
- Snellius'sches Gesetz, *siehe* Brechungsgesetz
- Snyder, Hartland, 1151
- Solarzelle, 204, 1303
- Sonar, 487
- Sonne
Größe, 12
Leistung, 1156
Masse, 12
Strahlung, 640
- Sonnenbrille
Polarisation durch Reflexion, 1027, 1028
- Sonnenflecken, 866
- Sonnenlicht
Dispersion, *siehe* Regenbogen
Photonen pro Sekunde, 1165
- Sonnenstrahlung, 1032
- Sonnensystem
Größe, 12
- Sonnentag, 5
- Sonnenwind, 845, 866
- Spaceshuttle, 204
- Spaceshuttles, 204
- Spalte
Interferenz, *siehe* Interferenz und Interferenzmuster
- Spannung, 81, 727, *siehe* Zugkraft
Änderung mit Transformatoren, 954
elektrische, 727, 762, 791, *siehe* elektrische Spannung
induzierte, *siehe* Induktionsspannung
mechanische, 81, 352, 366
- Spannungsabfall, 809
Kondensator, 953
Ohm'scher Widerstand, 948
Spule, 930, 951
Zeigerdiagramm, 960
- Spannungs-Dehnungs-Diagramm, 352
- Spannungsmessgerät, *siehe* Voltmeter
- Spannungsnormal
Josephson-Kontakt, 1308
- Spannungsquelle, 809, 836, *siehe auch*
Generator, Batterie
für Wechselspannung, 927
- ideale, 810

- Innenwiderstand, 810
 Leistung, 836
 mechanisches Analogon, 810
 reale, 810
 Spannungsspitze, 969
 Spannungssteiler, 841
 Spannungsverstärkung, Transistoren, 1305
 Speed – The Ride, 200
 Spektralfarben
 Dispersion, 1019
 Spektrallinie, 1095
 Spektrallinien
 Feinstrukturaufspaltung, 1225
 Frequenzen bei Übergängen im Atom, 1220
 Termsymbolik, 1219
 Wasserstoffatom, 1212
 Spektralserien
 Atomspektren, 1212, 1216
 Röntgenspektren, 1236, 1237
 Spektren, 1029, 1031
 Elektronenübergänge, 1031, 1233
 kontinuierliche, 1030, 1031, 1032, 1035
 Linien-, 1030, 1031, 1032, 1035, 1095, 1233
 Molekül-, 1260, 1264, 1271
 optische, 1235, 1245
 Ordnung, 1095
 Spektroskop, 1030, 1031, 1094, 1095
 Spektrum
 einer Wellenform, 507
 Sperrrichtung, Halbleiterdiode, 1301
 Spezialkeramik, 789
 spezielle Relativitätstheorie, 1122–1158
 Doppler-Effekt, 1129, 1130
 Einstein'sche Postulate, 1123, 1124
 experimentelle Bestätigung, 1129
 Gleichzeitigkeit, 1131–1137
 Längenkontraktion, 1128
 Lorentz-Transformation, 1124–1130
 Myonenexperiment, 1129
 Newton'sches Relativitätsprinzip, 1122, 1123
 Paradoxa, 1131
 relativistische Energie, 1142–1147
 relativistische
 Geschwindigkeitstransformation, 1137–1140
 relativistischer Impuls, 1140, 1141
 Uhrensynchronisation, 1131–1137
 Zeitdilatation, 1125, 1126
 Zwillingssparadoxon, 1136, 1137
 spezifische Dichte, *siehe* relative Dichte
 spezifische Wärmekapazität, 568, 569, 594
 Festkörper, 569
 Flüssigkeiten, 569
 Messung, 570
 Wasser, 569
 spezifischer Widerstand, 805, 836, 1312
 Halbleiter, 1299
 klassisch, 1289
 Kupfer, 806
 quantentheoretisch, 1296
 Supraleiter, 1305
 Tabelle, 807
 Temperaturabhängigkeit, 1289, 1296
 Temperaturkoeffizient, 806, 836
 sphärische Aberration, 1044, 1066, 1079
 sphärische Spiegel
 Abbildungsgleichung, 1047, 1078
 achsennahe Strahlen, 1044, 1045
 Bildkonstruktion, 1045, 1049, 1078
 Bildschärfe, 1044
 Bildweite, 1078
 Brennebene, 1047
 Brennpunkt, 1045, 1047, 1048
 Brennweite, 1047, 1078
 Gegenstandsweite, 1078
 Hauptstrahlen, 1049, 1078
 Konkav-, *siehe* Konkavspiegel
 Konvex-, *siehe* Konvexspiegel
 Krümmungsradius, 1045, 1047, 1049, 1050,
 1078
 Vergrößerung, 1049, 1050, 1078
 Vorzeichenkonvention, 1049, 1050, 1078
 sphärische Symmetrie, 704
 Spiegel
 ebene, *siehe* ebene Spiegel
 Konkav-, *siehe* Konkavspiegel
 Konvex-, *siehe* Konvexspiegel
 Lloyd'scher, 1087, 1091, 1093
 Parabol-, 1067
 sphärische, *siehe* sphärische Spiegel
 Umkehrbarkeit des Lichtwegs, 1048
 Spiegelreflexion, 1014
 Spiegelsymmetrie, 1042, 1043
 Spiegelteleskop, 1073–1075
 Spin
 Ausrichtung im Magnetfeld, 895
 Elementarteilchen, 1351, 1352
 mechanischer Eigendrehimpuls, 314
 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, 1351
 Spinanteil
 Wellenfunktion, 1254, 1255
 Spin-Bahn-Kopplung, 1224, 1225, 1236, 1245
 Spindrehimpuls, 1224
 Elektronen, 1224, 1225
 Spinquantenzahl, 1229, 1244
 Spiralfbewegungen, 322
 Spoiler, 401
 spontane Emission, 1233, 1234, 1245
 Sprühentladung, 746
 Spule, *siehe* Zylinderspule, Ringspule
 als Energiespeicher, 931
 bewegte, Lenz'sche Regel, 921
 eines Transformators, 954
 Feldabbau über Widerstand, 940
 Flipspule, 923
 gespeicherte Energie, 932, 939
 ideale, 930
 Induktionsspannung, 916, 917
 Leistung im Wechselstromkreis, 952
 mit Wechselspannung, 951, 971
 Phasenbeziehung von Strom und Spannung,
 951
 Selbstinduktivität, 929
 Spannungsabfall, 940
 Stab
 mit gleichmäßiger Massenverteilung, 253
 Stäbchen
 Auge, 1067, 1068, 1079
 stabiles Gleichgewicht, 181, 201, 310
 Stabmagnet
- Drehmoment auf, 879
 Feldlinien, 851
 im Magnetfeld, 862
 Induktion, 919
 Städte
 Wärmeinseln, 642
 Stammfunktion, 1418
 Standardabweichung, 16, 17
 des Mittelwerts, 17
 Standardbedingungen, 373, 548
 Standardmodell der Elementarteilchen, 1362,
 1363
 Ladung, 1362
 Leptonen und Quarks, 1362
 Teilchen und Antiteilchen, 1363
 Stanford
 Linearbeschleuniger, 1156
 starke Kernkraft, 1320
 starke Restwechselwirkung, 1362
 starke Wechselwirkung, 79, 80, 103, 1350, 1358,
 1362
 Standardmodell der Elementarteilchen, 1374
 Startschuss, 519
 stationäre Strömung, 388
 stationäre Zustände
 Elektronen im Atom, 1214, 1217
 statisches Gleichgewicht, 308
 statistischer Fehler, 14, 20
 Staudamm, 375
 Staurohr, 407
 Stefan, Josef, 638
 Stefan-Boltzmann'sche Konstante, 639, 644
 Stefan-Boltzmann'sches Gesetz, 638, 639, 1032
 stehende Welle, 496, 516
 Bedingung für, 497, 513
 Entstehung durch Überlagerung, 501
 Schallwellen, 502, 503
 Wellenfunktion, 502, 516
 stehende Wellen
 Wellenfunktion, 1170, 1186, 1205
 stehende Welle
 Schallwellen, 503
 Steigung, 1395
 Steigung einer Kurve, 462
 Steiner'scher Satz, 291, 340
 Beweis, 291
 Stellen
 signifikante, 9, 10
 Stengel, 200
 Steradian, 714
 Sterne
 Röntgenstrahlung, 1211
 Sterne, Oberflächentemperatur, 639
 Sternhaufen, 155
 Steuerstäbe, 1335
 Stichprobe, 16
 Stickstoffimpulslaser, 793
 Stimmen einer Saite, 492
 stimulierte Emission, 1233, 1235, 1245
 Laser, 1238–1240
 Stoffwechselsummsatz, 204
 Stokes-Raman-Streuung, 1234
 Stokes'sche Reibungskraft, 394
 Stokes'sches Gesetz, 154
 Stokes'sches Reibungsgesetz, 452

- Stoß
 elastisch, 219, 231, 237
 im Schwerpunktssystem, 267
 Elastizitätszahl, 235
 Entropieänderung, 618
 gerader, 218
 in zwei Dimensionen, 234
 inelastisch, 219, 227
 Neutron auf Atomkern, 232
 nicht vollständig inelastisch, 228
 nichtzentral, 230, 234
 nichtzentral mit gleichen Massen, 234
 nichtzenträler, 218
 ohne Berührung der Stoßpartner, 218
 Proton-Proton, 234
 Relativgeschwindigkeit der Stoßpartner, 231
 Relativgeschwindigkeiten der Stoßpartner,
 237
 schiefer, 218
 Schuss auf Kiste, 227
 vollständig inelastisch, 219, 227, 237
 vollständig inelastischer, 225
 zentral, 234
 zentraler, 218
 Zusammenstoß PKW–LKW, 228
- stoßartige Kraft, 219
- Stoßhäufigkeit
 Gasteilchen, 557
- Stoßionisation, 1301
- Stoßlinie, 218
- Stoßparameter, 218
- Stoßwelle, 273, 479, 515
- Stoßzeit
 Gasteilchen, 557
 von Elektronen in Metallen, 1288
- Strahlantrieb, 268, 270
 Beschleunigung, 271
- Strahlen
 achsennahe, 1044, 1045
 achsenparallele, 1049, 1060, 1078, 1079
 der Wellenausbreitung, 456
 Haupt-, *siehe* Hauptstrahlen
- Strahlendosis
 Definition, 1339
- Strahlennäherung
 der Wellenausbreitung, 486, 515
- Strahlenoptik, 486
- Strahlenschäden, 1339
- Strahlenschutz, 1339
- Strahlentherapie, 1339
- Strahltriebwerk, 102
- Strahlung, 644
 Absorption, 1233
 Hohlraum-, 639
 schwarzer Körper, 1163
 Sonnen-, 640
 Streuung, *siehe* Streuung
 Wärme-, *siehe* Wärmestrahlung
 Welle-Teilchen-Dualismus, 1161
- Strahlungsdruck, 993, 995, 1000
 bei Reflexion, 995
 einer Glühlampe, 995
- Strahlungsenergie, 191
- Strahlungsexposition, 1339
- Strahlungsleistung
- absorbierte, 639
 emittierte, 639, 641, 644
 Wärmestrahlung, 638, 639, 644
 Wellenlängenabhängigkeit, 639
- strahlungslose Übergänge, 1238
- strahlungloser Umlauf
 Elektronen im Atom, 1214, 1244
- Strahlungsspektrum
 schwarzer Körper, 640
- strain, *siehe* Dehnung
- Strange-Quark, 1359
- Strassmann, Fritz, 1333
- Streifen
 Interferenz, *siehe* Interferenzstreifen
- stress, *siehe* Spannung
- Streuexperimente, 1320, 1329
 mit Elektronen, 1320
 mit Neutronen, 1320
 Rutherford, 1345
- Streufeld, magnetisches, 909
- Streuung, 1233, *siehe* Stoß
 Anti-Stokes-Raman-, 1234
 Compton-, 1164–1166, 1179, 1235
 elastische, 1234
 inelastische, 1234
 Polarisation durch –, 1028
 Raman-, 1234
 Rayleigh-, 1234
 Stokes-Raman-, 1234
 tiefinelastische, 1359
 von Elektronenwellen, 1290, 1296
 von Wellen an kleinen Objekten, 487
- Streuvektor, 1282
- Strom
 elektrischer, *siehe* elektrischer Strom
 induzierter, *siehe* Induktionsstrom
 realer, 981
 verallgemeinerter, 981, 999
- Stromausfall, 969
- Stromdichte, 803, 836
 als Vektorfeld, 803
 elektrische, 1288
- Stromelement, 849, 875
- Stromintegrator, 923, 942
- Stromkreis
 Gleichstrom, *siehe* Gleichstromkreis
 Wechselstrom, *siehe* Wechselstromkreis
- Stromlinie, 389, 393
- Strommessgerät, *siehe* Amperemeter, Galvanometer
- Stromquelle, *siehe* Spannungsquelle
- Strom-Spannungs-Kennlinie
 pn-Halbleiterdiode, 1302
 Tunneldiode, 1303
- Stromstärke
 effektive, 949
 effektive und maximale, 949, 971
 Einheit, 800
- Strömung
 laminare, 387, 396
 Reynolds-Zahl, 403
 stationäre, 388
 turbulente, 387
- Strömungswiderstand, 394, 395, 396, 403
- Stromverstärkungsfaktor, Transistoren, 1304
- Stromwaage, 887, 888
- Strontiumtitanat
 Durchschlagfestigkeit, 778
- Struktur
 Diamant, 1282
 Fulleren, 1283
 Graphit, 1283
 Natriumchlorid, 1278
 von Kristallen, 1278
- Strutt, John William, *siehe* Rayleigh, Lord R.
- Stufenpotential, 1192
 Reflexionskoeffizient, 1193, 1194
 Transmissionskoeffizient, 1193, 1194
 Wellenfunktion, 1192
- SU, 5
- Sublimation, 571, 572, 574
 Kohlendioxid, 574
- Sublimationsdruckkurve, 574
- Suchscheinwerfer, 1067
- Super-Kamiokande-Detektor, 521, 1351
- Superpositionsprinzip, 81, 488, 513, 731, 735,
 739, 1207
 elektrisches Feld, 731
 Felder, 663
 Kräfte, 659
 stehende Wellen, 496
 Wellengleichung, 489
- Supraleiter
 im Magnetfeld, 903
- Supraleitung, 1305–1308, 1313
 BCS-Theorie, 1306, 1307, 1313
 Cooper-Paar, 1306
 Energiedücke, 1306
 Hochtemperatur-, 1306
 Josephson-Effekt, 1307
 kritische Temperatur, 1305
 Tieftemperatur-, 1306
 Tunneleffekt, 1306, 1307
- Suszeptibilität, magnetische, *siehe* magnetische Suszeptibilität
- Swann, 789
- Swing-by-Technik, 242
- Symmetrie, 704
 Entartung der Energieniveaus, 1198
 Spiegel-, 1042
- Symmetriearchse, 251, 312
 Zusammenhang mit Drehimpuls, 313
- Symmetriemittelpunkt, 250
- symmetrische Wellenfunktion, 1201, 1205
- Synchronisation
 von Uhren, 1131
- Synchrotron, 1363–1365
- Synchrotronstrahlung, 990, 1365
- System
 abgeschlossenes, 262
 thermodynamisches, 576
 zweier Teilchen, 174
- systematischer Fehler, 14
- Système International, 5, 20
- Systeme mit veränderlicher Masse, 275
- Szintillationszähler, 1368
- T
- T (Tesla), 846
- Tafel

- Franklin'sche, 789
Taktstock, 249
Tangens, 1403, 1407
Tangente, 33–35
Tangentialbeschleunigung, 64, 68, 246, 285, 340
Tangentialgeschwindigkeit, 285, 340
Tangentialrichtung, 61
Tank mit Loch, 390
Tau, 81, 246
Tauon, 1350
Tauon-Leptonenzahl, 1357
Tauon-Neutrino, 1326, 1350
 $\tau^+ \tau^-$ -Paarerzeugung
Driftkammeraufnahme, 1352
Teilchen, 28, 33, 161
Aufenthaltswahrscheinlichkeit, *siehe* dort
De-Broglie-Gleichung, 1167
fundamentale, 1374
Gas-, *siehe* Gasteilchen
Gesamtkraft, 169
Grenzen des Modells, 60
identische, 1200, 1201, 1205
im Stufenpotenzial, 1192
Klassifizierung, 1350
nichtrelativistische, 1179
Nichtunterscheidbarkeit, 1200, 1201
Pauli-Verbot, 1205
seitliche, 1357
Wellenlänge, 1167, 1168, 1179
Teilchenbeschleuniger, 802, 857, 1329
LHC (Large Hadron Collider), 1362
Teilchendetektor, 1303
Teilchensystem
Energiebilanz, 265
kinetische Energie, 262
potentielle Energie, 262, 274
Teilchenzahldichte
von Elektronen in Metall, 1292
Teilstrom, 813
Teleskop, 979, 1073, 1080
Auflösungsvermögen, 1107
Lichtstärke, 1075
Refraktor, 1073, 1074
Spiegelteleskop, 1073–1075
Vergrößerung, 1073, 1080
Weltraumteleskop Hubble, 1074
Temperatur, 168, 530
absolute, 535, 542
absoluter Nullpunkt, 623, 626
Einheit K, 535
kritische, 559, 560, 574, 1305
molekulare Deutung, 552, 562
Temperaturdifferenz, 192
Temperatur-Entropie-Diagramm
Carnot-Kreisprozess, 620
Temperaturgradient, 632, 633, 644
Temperaturkoeffizient
des spezifischen Widerstands, 806
Temperaturskala, 531
Celsius-, 531, 532, 535, 542
Fahrenheit-, 532
Kelvin-, 535, 542
Tera-, 7
Term (Mathematik), 1393
Ordnung, 1408
- Termschema (Grotrian-Diagramm)
Natriumatom, 1235
Wasserstoffatom, 1216, 1219, 1220
Termsymbolik
Atome, 1219
Tesla (Einheit), 846
Tesla-Spule, 931
Tetherball, 99
TFTR, 1338
Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung, 1361
thermische Ausdehnung, 535, 536, 538–540, 542
thermisches Gleichgewicht, 530, 531
thermisches Neutron, 1330
thermodynamisches System, 576
Thermografie, 634, 639, 641
Thermogramme, *siehe* Thermografie
Thermometer, 530–533
Gas-, 533, 534, 535, 542, 546
Kalibrieren, 534, 574
Kalibrierung, 538
thermométrische Eigenschaft, 530
Thermoskop, 530
Thermostat, 532
Thomson, George Paget, 1168
Thomson, Joseph John, 854, 1212
Thomson, William (Lord Kelvin of Largs), 600
Thomsons Experiment zur Bestimmung von q/m , 854, 868
Thomson'sches Plumpudding-Modell, 1212
Thorium
Zerfallsreihe, 1328
Thrust Air 2000, 102
Tiefdruckgebiet, 128, 129
tiefinelastische Streuung, 1359
Tiefpassfilter, 966, 975
Tieftemperatursupraleitung, 1306
Tiefwasserwellen, 460
Tilgungspendel, 415, 445
Tintenstrahldrucker, 674
Tochterkern, 1326
Tokamak, 1337
Tokamak-Reaktor, 893
Ton, 506
Tonbandgerät, 900
Tonhöhe, 506
Top Thrill Dragster, 102
Topas, 788
Top-Quark, 1360
Toroidspule, *siehe* Ringspule
Torricelli, Evangelista, 378, 390
Torricelli'sche Ausflussformel, 390
Torsionskonstante, 430
Torsionsmodul, 356
Torsionspendel, *siehe* Drehpendel
Torsionswaage, *siehe* Drehwaage
Totalreflexion, 485, 1014, 1015, 1016, 1035
des Lichts, 485
Glasfasern, 1017
kritischer Winkel, 485, 1015, 1016, 1035
träg Massen, 137
Trägheit, 78, 82
Trägheitseinschluss, 1338
Trägheitsgesetz, 78
- Trägheitskraft, 126, 127
Trägheitsmoment
Abschätzung durch Zerlegung in Teilmassen, 288
Analogie zur tragen Masse, 287
Definition, 286
Hohlzylinder, 293
kontinuierliche Massenverteilung, 288, 340
Ring, 289
Scheibe, 290
Stab, 288, 292
Steiner'scher Satz, 291, 340
Tabelle, 290
Teilchensystem, 288, 340
zweiatomige Moleküle, 1260, 1261
Zylinder, 290
Trajektorie, 29
schräger Wurf, 56
Transformation
Galilei-, 1124
Lorentz-, 1125, 1137, 1154
Transformator, 931, 954, 971
Funktionsprinzip, 954
idealer, 971
Leistungsverlust, 954
Verluste, 928
Transformatoröl
Durchschlagfestigkeit, 778
Transistor, 1299, 1301, 1303–1305, 1313
Beschaltung, 1304
bipolarer, 1303
Feldeffekt-, 1303
npn-, 1304
pnp-, 1304
Spannungsverstärkung, 1305
Stromverstärkung, 1304
Verstärkerschaltung, 1304
Translation
Freiheitsgrade, 556
Transmission, 482
Elektronenwellen, 1192
Potenzialbarriere, 1189, 1192–1196, 1205
Stufenspotenzial, 1194
Transmissionsachse
Polarisationsfolie, 1025, 1026, 1035
Transmissionsgitter (Beugungsgitter), 1093
Transmissionskoeffizient, 482, 515, 1193
Potenzialbarriere, 1194, 1195
Stufenspotenzial, 1193, 1194
Transversalwelle, 467, 468, 513, 988
Treibstoffanzeigegerät, 783
triboelektrische Reihe, 653, 678
Triboelektrizität, *siehe* Reibungselektrizität
Trigonometrie, 1402–1408
trigonometrische Funktionen, 1406–1408
Ableitung, 1412
Graph, 1408
Kleinwinkelnäherung, 1406
Kosinus, 1403, 1407
Reihenentwicklung, 1408
Sinus, 1403, 1407
Tangens, 1403, 1407
trigonometrische Identitäten, 1404, 1404, 1405, 1408
Tripelpunkt, 574, 594

- Kohlendioxid, 574
Wasser, 534, 535, 542, 574
- Tritium, 1320
Tritiumkern
Ruheenergie, 1143
Trockeneis, 571, 574
Tröpfchenmodell, 1320, 1332
tropfenförmiger Leiter, 748
Tscherenkov-Strahlung, *siehe*
Čerenkov-Strahlung
- T-S*-Diagramm
Carnot-Kreisprozess, 620
- Tsunami, 460, 477
- Tubuslänge
Mikroskop, 1072
- Tunneldiode, 1302, 1313
Energieniveaus, 1302
Strom-Spannungs-Charakteristik, 1303
- Tunneleffekt
Supraleitung, 1306, 1307, 1313
- Tunneln, 1189, 1196
Alphazerfall, 1196
Quanten-, 1195
Rastertunnelelektronenmikroskop, 1197
- Tunnelstrom, 1302
- turbulente Strömung, 387, 403
- Turmalin, 788
- Turmspringer, 318
- U**
u (atomare Masseneinheit), 1262
Überdämpfung, 960
Überdruck, 377, 402
Übergänge
strahlungslose, 1238
Übergangsmetalle, 1233
Überhöhte Kurven, 100
Überhöhungswinkel, 100, 101
Überlagerung, 488, *siehe* Superpositionsprinzip
Bildung von stehenden Wellen, 501
Schallwellen, 493
von stehenden Wellen, 505
- Überlandleitung, 956, 969
Überlappung
von Energiebändern, 1298
Überschallknall, 479, 480
Uhrensynchronisation, 1131, 1132–1137, 1154
konkretes Beispiel, 1134
Vorsprung der führenden Uhr, 1133
- UKW, 468
- Ultrakurzwelle, 468
- Ultraschall, 487
- Ultraviolettrstrahlung, 468, 989
- Umgebung
eines thermodynamischen Systems, 576
- Umkehrbarkeit des Lichtwegs, 1048
- Umkehrpunkt
harmonische Schwingung, 422
- Umlaufbahn, 64
erdnahe, 64
- Umlaufbahnen
kinetische Energie, 1213
potenzielle Energie, 1213
- Umlaufdaten der Planeten, 131
- Umlaufintegral, 890
- Umlaufzeit, 68
Erde-Sonne, 12
Jupiter, 132
- Umlenkrolle, 302, 304
- Umpolung des Erdmagnetfelds, 866
- Umrechnungsfaktor, 7, 20
- Umschalter, 935
unterbrechungsloser, 934
- Umspannwerk, 955
- UMTS-Frequenz, 997
- Unbestimmtheitsprinzip, *siehe*
Unschärferelation
- Universum, 191
Alter, 12
Dichte, 23
Entropieänderung, 615–617, 618, 619, 621
Expansion, 1351
Größe, 12
Masse, 12
- Unordnung
Irreversibilität, 614
- Unschärfekreis, 1066
- Unschärferelation, 1173, 1179, 1180
- Unstetigkeitspunkt, 738
- Unterscheidbarkeit
Teilchen, 1200, 1201
- Up-Quark, 1359
- Uran
angereichertes, 1335
Kernspaltung, 1332, 1333
- ²³⁵Uran, 730
- ²³⁶Uran, 730
- Uranus
Unregelmäßigkeiten der Bahn, 156
- Urkilogramm, 6
- U-Rohr-Manometer, 377
- V**
V, 727
Vakuumlichtgeschwindigkeit, *siehe*
Lichtgeschwindigkeit
- Valenzband, 1297
- Valenzelektronen, 654
Ladungsverteilung, 1223
- Van de Graaff, Robert, 1329
- Van-Allen-Gürtel, 853
- Van-de-Graaff-Beschleuniger, 745
- Van-de-Graaff-Generator, 725, 745, 749, 758
Abbildung, 746
- Van-der-Waals-Bindung, 1252, 1257, 1270, 1278
Helium, 1256, 1257
- Van-der-Waals-Kräfte, 1257
- Van-der-Waals'sche Gleichung, 558, 559, 560, 562
- Van-der-Waals'sche Koeffizienten, 559
- Varianz, 16
- Vektor
Ableitung, 34
Bedingung für Konstanz, 43
Beschleunigungs-, 42
der mittleren Beschleunigung, 42
der mittleren Geschwindigkeit, 67
der Momentanbeschleunigung, 42, 67
der Momentangeschwindigkeit, 34, 67
- Komponente, 68
Orts-, 67
- Projektion, 312
- Verschiebungs-, 29, 67
- Vektor der Momentanbeschleunigung, 42
- Vektor der Momentangeschwindigkeit, 34
- Vektoraddition
harmonische Wellen, *siehe* Zeigerdiagramm
- Vektoradditionsdiagramm, 37, 45, 62
- Vektorbosonen, 1361
- Vektordiagramm, 44
- Vektoren, 1402
Eigenschaften, 1407
- Vektorkomponente, 298
- Vektorsumme
von Geschwindigkeiten, 37
- Venturi, Giovanni Battista, 391
- Venturi-Effekt, 391, 402
dynamischer Auftrieb, 393
- Venturi-Rohr, 392
- Verarmungszone, 1301
- Verbindungen
Entropie, 623
- Verbrennungsmotor, 601–605
Volumenarbeit, 578
- Verdampfung, 571, 574, 575, 594
- Verdampfungsgeschwindigkeit, 560
- Verdampfungswärme
spezifische, 571, 572, 594
- Verdopplungszeit, 1416
Kettenreaktion, 1336
- Verflüssigung
Gase, 560
- Vergrößerung
brechende Fläche, 1053, 1078
Lupe, 1070, 1071, 1080
Mikroskop, 1072, 1080
Sammellinse, 1060
sphärische Spiegel, 1049, 1050, 1078
Teleskop, 1073, 1080
- verlorene Arbeit, *siehe* Arbeit, entwertete
- Vermehrungsfaktor, Kettenreaktion, 1334, 1335
- Verpuffung, 273
- Verschiebung, 27, 28, 67, 160
ausgedrückt durch die Beschleunigung, 68
gleichförmig beschleunigte Bewegung, 68
grafische Interpretation, 67
inkrementelle, 169, 259
und Strecke, 28
- Verschiebungsbetrag, 160
- Verschiebungsgesetz
Wien'sches, 639, 644, 1032
- Verschiebungsvektor, 29, 67
Betrag des \sim s und Weg, 34
- Versetzungsschaden, 1339
- Versorgungspaket, 58
Abwurf, 56
- Verteilung
Fermi-Dirac-, 1308
kontinuierliche, 15
Normierungsbedingung, 14
- Verteilungsfunktion, 14, 20
Energie, 555
Geschwindigkeit, 553–555, 562
- Verwürfelung, 6

- Very Large Array (VLA), 979, 1107
 Verzeichnung, 1067
 verzögerte Neutronen, 1335
 Verzögerung, 44
 Vieldrahtproportionalkammer, 1368
 vierte kosmische Geschwindigkeit, 139
 Definition, 139
 virtuelle Photonen, 1361
 virtueller Gegenstand, 1056, 1078
 virtuelles Bild, 1042, 1044, 1049, 1050, 1053, 1078
 sphärische Spiegel, 1049
 Virus
 Größe, 12
 Viskosität, 395, 396, 403
 Änderung mit Strömungsgeschwindigkeit, 397
 Messung, 452
 nichtviskos, 389
 Tabelle, 396
 VLA (Very Large Array), 1107
 vollständig inelastischer Stoß, *siehe* Stoß
 Volt, 727, 810
 Voltmeter, 827, 837
 Aufbau, 828
 Innenwiderstand, 827
 Schaltung, 827
 Volumen
 Einheit, 373
 Volumenänderung
 unter Zug oder Druck, 354
 Volumenarbeit, 595
 adiabatische, 589, 590, 595
 bei konstantem Volumen, 595
 Einheiten, 579
 Gase, 578–581
 isobare, 595
 isotherme, 595
 Volumenausdehnungskoeffizient, 535, 537, 539, 542
 Volumenstrom, 402
 Vorsätze, 6, 7
 Tabelle, 7
 Vorzeichenfunktion, 697
 Vorzeichenkonvention
 Brechung, 1053, 1079
 Linsen, 1053, 1079
 sphärische Spiegel, 1049, 1050, 1078
- W**
- Waage
 im Fahrstuhl, 92
 kapazitive, 796
 Wachstumsfunktion, 1416
 Wachstumskontante, 1416
 Wahrscheinlichkeit
 Teilchen, *siehe*
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit und Entropie, 621, 622, 626
 Wahrscheinlichkeitsdichte, *siehe*
 Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte
 Walton, Ernest Thomas Sinton, 1329
 Wandler, 788
 Wärme, 192, 568, 569, 594, 600
 dem System zugeführte, 576, 577, 579, 594
 latente, 571, 594
 Umwandlung in Arbeit, 600, 608 und Arbeit, 568, 575
 Wärmeäquivalent
 mechanisches, 575
 Wärmeausdehnung, 535, 536, 538–540, 542
 Wärmeaustausch, 192
 Wärmebilder, *siehe* Thermografie
 Wärmedämmung, 633, 636–638
 Wärmedurchlasswiderstand, *siehe*
 Wärmewiderstandsfaktor
 Wärmeenergie, 168, 191, 260, *siehe* Wärme
 Wärmeinseln
 Städte, 642
 Wärmekapazität von Metallen
 klassisch, 1295
 quantentheoretisch, 1295
 Wärmekapazität, 568, 570, 594
 Festkörper, 583, 1269
 Freiheitsgrade, 586
 Gase, 1269
 Gleichverteilungssatz, 586
 molare, *siehe* molare Wärmekapazität
 spezifische, *siehe* spezifische Wärmekapazität
 Temperaturabhängigkeit, 1266–1268
 zweiatomige Gase, 587
 Wärmeleistungsmaschinen, 600, 601
 Carnot-Kreisprozess, 625
 Carnot-Prinzip, 608
 Dampfmaschine, 600, 601
 maximale Arbeit, 612
 reversible Prozesse, 608
 Verbrennungsmotor, 600, 601
 Wärmereservoir, 601, 603, 604
 Wirkungsgrad, 601, 604, 608, 610, 625
 Zweiter Hauptsatz, 604, 607, 625
 Wärmeleitfähigkeit, 632, 633, 644
 Gase, 638
 Wärmeleitung, 632, 633, 634, 644
 Analogie zur elektrischen Leitung, 805
 Metalle, 632
 Wärmepumpe, 613
 Wärmepumpen, 613
 Leistungszahl, 613, 625
 Wärmereservoir, 613
 Wärmereservoir
 Kältemaschinen, 606
 Wärmekraftmaschinen, 601, 603, 604
 Wärmepumpen, 613
 Wärmespeicher, 569
 „Wärmestoff“, 568
 Wärmestrahlung, 632, 638, 639, 640, 989, 990, 1032
 menschlicher Körper, 641
 Strahlungsleistung, 638, 639, 644
 Wärmestrom, 632, 633, 634, 636, 644
 Wärmetheorem
 Nernst'sches (Dritter Hauptsatz), 623, 626
 Wärmeübertragung, 632, 644
 Arten, 632, 638
 Entropieänderung, 617, 618, 621
 Irreversibilität, 600
 Wärmewiderstand, 633, 644
 Parallelanordnung, 634, 636, 644
 Reihenanordnung, 634, 637, 644
 Wärmewiderstandsfaktor, 636, 637, 644
 Wasser
 Anomalie, 539, 574
 kritische Temperatur, 560
 Ladungsschwerpunkte, 786
 Molekülstruktur, 1259
 Phasendiagramm, 574
 Siedepunkt, 531, 560
 spezifische Wärmekapazität, 569
 Tripelpunkt, 534, 535, 542, 574
 Wasserstoffbrückenbindung, 1258
 Wassermolekül
 Massenmittelpunkt, 251
 Wasserstoff, 1320
 Isotope, 1320
 wasserstoffähnliche Atome
 Energieniveaus, 1219, 1245
 Wasserstoffatom, 251, 253, 759
 Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons, 1221, 1222, 1223
 Balmer-Serie, 1212
 elektrische Energie, 730
 Energieniveaus, 1215, 1216, 1219, 1220, 1244, 1245
 Grundzustand, 1220
 induziertes Dipolmoment, 786
 Ionisierungsenergie, 1216
 Linienpektrum, 1212
 Quantentheorie, 1219
 Radialgleichung, 1217
 Rydberg-Konstante, 1212
 Termschema, 1216, 1219, 1220
 Wellenfunktion, 1217, 1218, 1221, 1244
 Wasserstoffbombe, 80
 Wasserstoffbrückenbindung, 1252, 1258, 1270, 1278
 Wasserstoffmolekül
 chemische Bindung, 1252
 Wassertank mit Loch, 390
 Wassertropfen
 Regenbogen, 1019
 Watson, James, 1257
 Watt, 167
 Wb (Weber), 914
 W-Boson, 79, 1361
 Weber (Einheit), 914
 Wechselspannung
 Amplitude, 927
 Erzeugung, 927
 sinusförmige, 927
 Wechselstrom, 971
 am Kondensator, 953
 Wechselstromgenerator, 948, 971, *siehe auch*
 Generator
 Spannung, 971
 Wechselstromkreis
 Kondensator, 951, 952, 971
 Ohm'scher Widerstand, 948, 971
 Spule, 951, 971
 Vergleich mit Gleichstromkreis, 950
 Wechselwirkung, 1365
 elektromagnetische, 79, 80, 103, 1350, 1362, 1374
 Elektronen-Gitter-, 1295, 1296

- elektroschwache, 79, 103, 1361
fundamentale, 79, 103, 1350, 1362, 1363, 1374
Gravitations-, 1350, 1362, 1374
gravitative, 79, 80, 103
hadronische, 103, 1350
schwache, 79, 80, 103, 1350, 1358, 1362, 1374
starke, 79, 80, 103, 1350, 1358, 1362, 1374
starke Rest-, 1362
Wechselwirkungsenergie
 Elektronen im Atom, 1227
Weglänge, *siehe* mittlere freie Weglänge
 mittlere freie, 1288, 1296
Wegunterschied (Gangunterschied), 1086, 1088, 1112
Weg-Zeit-Diagramm, 30, 31
Weg-Zeit-Kurve, 34
 konstante Geschwindigkeit, 34
Weinberg, Steven, 1361
Weiß'scher Bezirk, 899, 906
Weitsichtigkeit, 1067, 1068
Welle, 456
 Ausbreitungsgeschwindigkeit, 456
 Beugung, 515
 dreidimensionale, 456
 ebene, 457, 984
 Energie, 469, 470, 514
 Energietransport, 468
 harmonische, 464, 514
 in Phase, 491
 Intensität, 495, 514
 Leistung, 514
 longitudinale, 467, 513
 mechanische, 456
 mehrdimensionale, 456
 Oberflächenwelle, 456
 periodische, 464
 Reflexion und Brechung, 515
 stehende, 496, 513, 516
 transversale, 456, 467, 513
 Überlagerung, *siehe* Superpositionsprinzip
 zirkular polarisierte, 988
Wellen
 elektromagnetische, 191, 468, *siehe*
 elektromagnetische Wellen
 Gangunterschied, 1086, 1088, 1112
 Phasendifferenz, *siehe* Phasendifferenz
 Phasensprung, *siehe* Phasensprung
 Vektoraddition, *siehe* Zeigerdiagramm
Wellenausbreitung
 Hindernisse, 481
 Strahlnäherung, 515
Wellenberg, 457
Wellendispersion, 465
Wellenform, 507
Wellenfront, 456, 481, 482
 Oberflächenwellen, 456
 Schallwellen, 456
Wellenfunktion, 458, 462, 1179
 angeregter Zustand, 1223
 antisymmetrische, 1201, 1205
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit, 1170, 1220, 1223
 drei Dimensionen, 1198, 1200, 1205
Elektronen im Atom, 1244
Grundzustand, 1221
harmonische, 464, 465, 514
harmonischer Oszillator, 1190, 1191, 1205
identische Teilchen, 1201
in Polarkoordinaten, 1217
Interpretation, 1170
Kastenpotenzial, 1184, 1188, 1189
klassisch verbotener Bereich, 1189, 1192
kovalente Bindung, 1254–1256, 1258, 1259
Krümmung, 1187, 1188
Linearkombination, 1259
Normierung, 1171, 1179, 1188, 1205, 1220, 1221
Potenzialbarriere, 1194
quadratintegrable, 1188
Radialanteil, 1217, 1218
Randbedingungen, 1184
räumlicher Anteil, 1254, 1255
Schrödinger-Gleichung, 1170, 1172, 1205
Spinanteil, 1254, 1255
stehende Wellen, 502, 516, 1170, 1186, 1205
Stufenpotenzial, 1192
symmetrische, 1201, 1205, 1255
wasserstoffähnliche Atome, 1245
Wasserstoffatom, 1217, 1218, 1221, 1244
Winkelabhängigkeit, 1218
Wellengeschwindigkeit, 458, 513, 514
 auf einer Saite, 458, 460, 513
 elektromagnetische Wellen, 513
 Schall, 463, 513
Wellengleichung, 461, 513
 für elektrischen Feldvektor, 984
 für elektromagnetische Wellen, 984
 für magnetischen Feldvektor, 984
 für Seilwellen, 984
 gespannte Saite, 462
 Herleitung, 984
 Superposition, 489
Wellenlänge, 464, 516
 Compton-, 1166
 Elektron, 1167, 1168, 1179
 Photon, 1179
 Teilchen, 1167, 1168
 Umschärferelation, 1173
Wellenpaket, 505, 508, 517
 Auseinanderfließen, 509, 517
 Potenzialbarriere, 1195, 1196
 Reflexion, 1194
 Transmission, 1194
Wellenpuls, 509
 auf Saite, 458, 460
Wellentheorie
 Licht, 1090
Wellenzahl, 464, 493, 514
 Abschätzung für Wellenpaket, 509
Welle-Teilchen-Dualismus, 1161, 1162, 1172, 1180
 Energieaustausch, 1162, 1172, 1173, 1179, 1180
 Fortbewegung, 1162, 1173, 1179, 1180
 Korrespondenzprinzip, 1177
 Strahlung, 1161
Weltlinie, 1148
Weltraumteleskop Hubble, 1074
Wheatstone-Brücke, 842
Wheeler, John, 1333
Widerstand
 elektrischer, *siehe* elektrischer Widerstand
 induktiver, 952
 kapazitiver, 953
 Ohm'scher, *siehe* Ohm'scher Widerstand
 spezifischer, *siehe* spezifischer Widerstand
Widerstand (Bauelement), 807
Widerstandsbeiwert, 398
Widerstandskraft, 124, 125, 149
 Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, 124
 Fallschirmspringer, 125
Widerstandsmessgerät, *siehe* Ohmmeter
Wien'sches Geschwindigkeitsfilter, *siehe*
 Geschwindigkeitsfilter
Wien'sches Verschiebungsgesetz, 1032
Wien'sches Verschiebungsgesetz, 639, 644
Wilkins, Maurice, 1257
Winkel, 1402
 Auflösungsvermögen, 1106–1108
 Regenbogen, 1021
 Scheitel, 1402
 spitzer, 1403
 stumpfer, 1406
 Totalreflexion, 1015, 1016, 1035
Winkelbeschleunigung
 Definition, 283, 340
 mittlere, 283
Winkelfunktionen, 1403, 1404, *siehe*
 trigonometrische Funktionen
Winkelgeschwindigkeit, 416
 Definition, 282, 340
 Einheit, 282
Winkelmaß
 Bogenmaß, 1402
 Grad, 1402
 Radian, 1402
Winkelspiegel, 1043, 1044
Winkelvergrößerung, 1070, 1071
Wirbelstrom, 928
 am Transformator, 954
 Nachweis, 928
 Unterbbindung, 929
Wirbelstrombremse, 929, 938
Wirbelstromdämpfung, 929
Wirkungsgrad, 198
 Carnot-Kreisprozess, 609, 610, 625
 Dampfmaschine, 604, 611
 Kältemaschinen, *siehe* Kältemaschinen,
 Leistungszahl
 maximaler, 608, 610
 Transformator, 954
 Verbrennungsmotor, 604, 605
 Wärmekraftmaschinen, 601, 604, 625
Wirkungslinie einer Kraft, 298, 299
Wirkungsquantum, Planck'sches, 1163, 1179
Wirkungsquerschnitt, 1366
 Einheit, 1330
 für den Neutroneneinfang, 1330
 von Kernreaktionen, 1330
Wölbspiegel (Konvexspiegel), 1050–1052
 Bildkonstruktion, 1051
 Brennpunkt, 1048
Wurf

- Reichweite, 58
 schiefer, 54
 schräger, 54, 55, 68
 schräger, Flugdauer, 58
 schräger, Übungsaufgaben, 73
W
 Wurfbewegung, 56
 Unabhängigkeit der Komponenten, 55
 Wurfwinkel, 58, 68
 Wurzel, *siehe* quadratische Gleichung (Lösung)
- Y**
 Y-Meson, 1360
 Young, Thomas, 1090
 Young's modulus, *siehe* Elastizitätsmodul
 Young'sches Experiment, 1090, 1091
 Yo-Yo, 91
- Z**
 Zähigkeit, *siehe* Viskosität
 Zählausbeute, 1325
 Zahlen
 imaginäre, 1409
 komplexe, 1409–1411
 reelle, 1409
 Zahnebene, 1410
 Zählrate, Radioaktivität, 1324
 Zahnradmethode
 Messung der Lichtgeschwindigkeit, 1008,
 1009
 Zäpfchen
 Auge, 1067, 1068, 1079
 Z-Boson, 79, 1361
 Zehnerlogarithmus, *siehe* Logarithmus
 (dekadischer)
 Zehnerpotenz, 6, 10
 Zehnerpotenzen
 Tabelle der Vorsätze, 7
 Zeiger, 960, 971, 972
 Addition, 960
 Zeigerdiagramm, 1100, 1101, 1113
 Beugungsmuster, 1103–1105
 Interferenzmuster, 1101–1103
 Lichtwellen, 1100
 Parallelschwingkreis, 968
 Phasendifferenz, 1101
 Reihenschwingkreis, 962
 Zeit, 5
 Dimension, 8
 zeitabhängige Schrödinger-Gleichung, 1170,
 1179
 Zeittilatation, 1125, 1126, 1154
 Zeitkonstante, 436
 Definition, 436
 eines *RL*-Stromkreises, 934
 Entladung eines Kondensators, 829
 gedämpfte Schwingung, 436, 448
 induktive, 933, 940
 RC-Stromkreis, 830, 837
 zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung, 1170,
 1171, 1179, 1184, 1188, 1197, 1201,
 1244
 Zener-Diode, 1301, 1313
 Zenti-, 7
 zentraler Stoß, *siehe* Stoß
 zentrales Beugungsmaximum, 1097, 1099
 Zentralkraft, 325
 Zentrifugalbeschleunigung, 126
- Zentrifugalkraft, 126, 128
 Zentrifuge, 100
 Zentripetalbeschleunigung, 18, 63, 68, 95, 126,
 127, 285, 340
 Übungsaufgaben, 74
 Vektorgleichung, 63
 Zentripetalkraft, 95, 96, 97, 101, 104
 und Kräfediagramm, 96
 Zentripetalrichtung, 61
 Zerfall, 1415
 Halbwertszeit, 1416
 von Cobalt-60, 1417
 Zerfallskanal, Begriff, 1358
 Zerfallskonstante, 22, 1416
 Zerfallskonstante, Radioaktivität, 1323
 Zerfallskurve, 1324
 Zerfallsrate, 1324, 1343
 Einheiten, 1343
 Zerfallsreihe, 1328
 Thorium-, 1328
 Zerfallszeit
 gedämpfte Schwingung, 436, 448
 Zerstäuber, 393
 Zerstreuungslinse, 1056, 1058, 1079
 Bildkonstruktion, 1060
 Brechkraft, 1059
 Brennweite, 1058
 Kurzsichtigkeit, 1069
 Ziliarmuskel, 1067, 1068, 1079
 Zink
 Elektronendichte am absoluten
 Temperaturnullpunkt, 1292
 Fermi-Energie, 1292
 Zinn
 Elektronendichte am absoluten
 Temperaturnullpunkt, 1292
 Fermi-Energie, 1292
 Zirkelintegral, 176
 zirkular polarisierte Welle, 988
 zirkulare Polarisation, 1029
 Zitterrochen, 809
 Zugfestigkeit, 355
 Zugkraft, 81, 186, 246, 302, 304
 Zugkraft in einer Saite
 Zusammenhang mit Eigenfrequenz, 499
 Zugspannung, 352
 thermische Ausdehnung, 538
 Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie,
 202
 Zustände
 gebundene, 1219
 stationäre, Elektronen im Atom, 1214, 1217
 Zustandsänderungen, reversibel, *siehe* reversible
 Prozesse
 Zustandsdichte, 555, 1308, 1314
 für Elektronen im Metall, 1308
 Zustandsfunktion, 577, 594, 614, 620
 Zustandsgleichung, 577
 adiabatische, 595
 ideales Gas, 546, 547, 548, 562
 Van-der-Waals'sche, 558, 559, 560, 562
 Zustandsgröße, 547, 577, 594
 makroskopische, 551
 zweiatomige Moleküle
 Absorptionsspektren, 1260, 1263–1266,
 1271
- Drehimpuls, 1260
 Eigenfrequenz, 1263
 Emissionsspektren, 1260, 1263
 Energieniveaus, 1260, 1262, 1263
 Freiheitsgrade, 586, 1266
 Handelmodell, 1261
 Kraftkonstante, 1263, 1270
 reduzierte Masse, 1261, 1262, 1270
 Rotation, 586, 587, 1268
 Rotationsenergieniveaus, 1260, 1261,
 1262–1264, 1270
 Rotationskonstante, 1261, 1262, 1263
 Rotationsquantenzahl, 1261
 Rotationsübergänge, 1263, 1264
 Schwingungsenergieniveaus, 1262, 1263,
 1270
 Schwingungsquantenzahl, 1262
 Schwingungsübergänge, 1263
 Spektren, 1260
 Trägheitsmoment, 1260, 1261
 Zweig, George, 1359
 zweite kosmische Geschwindigkeit, 138, 139
 Definition, 139
 Zweiteilchensystem, 177
 zweiter Brennpunkt
 dünnen Linsen, 1058
 Zweiter Hauptsatz, 607
 Clausius'sche Formulierung, 600, 605, 625
 Entropie-Formulierung, 617, 625
 Kältemaschinen-Formulierung, 605, 606,
 607, 625
 Thomson'sche Formulierung, 600, 604, 625
 Wärmekraftmaschinen-Formulierung, 604,
 607, 625
 zweites Newton'sches Axiom, 82, 85, 87, 91,
 103, 246
 Anwendung, 87
 Drehbewegungen, 297, 315, 340
 für Systeme, 255
 Zwillingsparadoxon, 1136, 1137
 experimentelle Bestätigung, 1137
 Zwischenbild
 Mikroskop, 1072
 Zwischenergebnisse, 10
 zyklische Prozesse, *siehe* Kreisprozesse
 Zyklode, 334
 Zyklotron, 857, 1329, 1363, 1364
 Funktion, 857
 kinetische Energie eines Teilchens, 858
 Zyklotronfrequenz, 852, 868
 Zyklotronperiode, 852, 868
 Zylinder
 Mantelfläche, 1401
 Volumen, 1401
 Zylinderkondensator, 764, 783
 Kapazität, 764–766
 Zylinderspule, 879
 Fläche einer Windung, 914
 Gegeninduktivität, 931
 Magnetfeld, 882, 883
 magnetischer Fluss, 914
 Selbstinduktivität, 929, 930, 939
 Spannungsabfall, 930
 Stromstärke, 934
 Zylindersymmetrie, 704