ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

« 1η εργασία»

Εξαμηνιαία Εργασία στο μάθημα

«Μοντελοποίηση και Προσομοίωση Δυναμικών Συστημάτων»

της φοιτήτριας

Κελέση Ελπίδας, ΑΕΜ : 9410

Email : elpidakelesi@ece.auth.gr

Διδάσκοντες : Καθ. Γ. Ροβιθάκης, Γ. Κανάκης

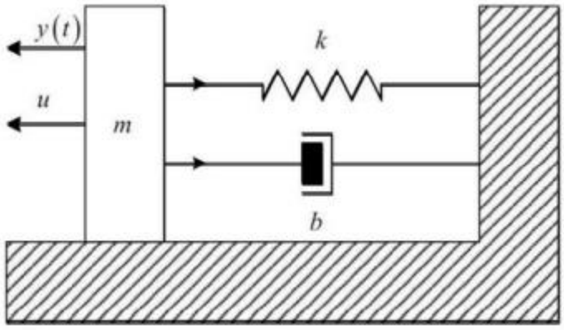
Υπεύθυνος εργασίας : Καθ. Γ. Ροβιθάκης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2020-2021

Πίνακας περιεχομένων

$1^η$ Άσκηση

Το σχήμα της πρώτης άσκησης είναι το εξής :



Όπου b είναι η σταθερά απόσβεσης, k είναι η σταθερά του ελατηρίου, u μία εξωτερική δύναμη και y(t) είναι η μετατόπιση της μάζας m εξαιτίας της δύναμης που εφαρμόζεται πάνω της.

Ερώτημα 1.1

Για να βρούμε μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά και τη γραμμική παραμετροποίησή του θα κάνουμε τα εξής :

Αρχικά σύμφωνα με το $2^ο$ Νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα του παραπάνω σχήματος ισχύει :

$$\Sigma F = m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + u$$

$$=> \ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{1}{m}u => \ddot{y} + \frac{k}{m}y + \frac{b}{m}\dot{y} = \frac{1}{m}u \quad \text{σχέση (1)}$$

Όσον αφορά την γραμμική παραμετροποίηση του συστήματος στην μορφή : y = $\theta *^T$ ζ

Αν συγκεντρώσουμε όλες τις παραμέτρους από τη σχέση (1) σε ένα διάνυσμα θ* τότε

$$\theta^* = [\, b/m \quad k/m \quad 1/m \,]^T$$

και όλα τα σήματα εισόδου εξόδου σε ένα άλλο

$$\Delta = [\, -y^{(1)} \quad -y \quad u \,]^T = [\, -\Delta_1^T(s)y \quad \Delta_1^T(s)u \,]^T = [\, -sy \quad -y \quad u \,]^T$$

Επομένως καταλήξαμε σε μία σχέση της μορφής :

$$y^{(2)} = \theta *^T \Delta \quad \text{σχέση (2)}$$

Έτσι εφαρμόζουμε ένα ευσταθές φίλτρο Λ(s), ίσης τάξης με την τάξη του συστήματος για να αποφύγουμε τις μετρήσεις των παραγώγων του y. Οπότε διαιρούμε με Λ(s) και τα δύο μέρη της σχέσης (2).

Έστω το φίλτρο $\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$

Οπότε η εξίσωση (2) θα έρθει στη μορφή :

$$z = \theta *^T \ \zeta \quad \text{σχέση(3)}$$

όπου:

$$z = \frac{1}{\Lambda(s)} y^{(2)} = \frac{s^2}{\Lambda(s)} y \quad \text{σχέση (4)}$$

$$\zeta = \left[-\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} u \right] \text{\^{}T σχέση (5)}$$

Ισχύει όμως ότι

$$\Lambda(s) = s^2 + \lambda^T \Delta_1(s) \Rightarrow s^2 = \Lambda(s) - \lambda^T \Delta_1(s) \quad \text{σχέση (6)}$$

$$\text{και} \quad \lambda = [\lambda_1 \ \ \lambda_2]^T$$

Συνεπώς αν αντικαταστήσουμε την σχέση (6) στην σχέση (4) τότε :

$$y = z + \frac{\lambda^T \Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \text{σχέση (7)}$$

Επίσης αν θεωρήσουμε από στη σχέση (3) ότι :

$$z = \theta *^T \ \zeta = \theta_1 *^T \ \zeta_1 + \theta_2 *^T \ \zeta_2$$

όπου από τη σχέση (5):

$$\zeta_1 = -\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y$$

$$\zeta_2 = \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} u$$

$$\theta_1 * = [b/m \quad k/m]^T$$

$$\theta_2 * = [1/m]^T$$

Επομένως αν αντικαταστήσουμε στη σχέση (7) τα παραπάνω θα έχουμε :

$$y = \theta_1 *^T \ \zeta_1 + \theta_2 *^T \ \zeta_2 - \lambda^T \zeta_1 =>$$

$$y = \theta_\lambda^T \ \zeta$$

όπου :

$$\theta_\lambda = [\theta_1 *^T - \lambda^T \ \theta_2 *^T \ ] \ \Rightarrow$$

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - \lambda_1 & \frac{k}{m} - \lambda_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$$

και

$$\zeta = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)} y & \frac{-1}{\Lambda(s)} y & \frac{u}{\Lambda(s)} \end{bmatrix}^T$$

Ερώτημα 1.2

Για το σχεδιασμό του αλγορίθμου ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων m,k,b μετρώντας μόνο την μετατόπιση και την εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στη μάζα κάνουμε το εξής :

Δεδομένου ότι έχει γίνει η παραμετροποίηση του συστήματός μας οπότε έχει έρθει στη μορφή

$$y = \theta *^T \ \zeta$$

Μπορούμε να ορίσουμε το σφάλμα μεταξύ του μοντέλου και του συστήματος ως

$$e(t,\theta) = y(t) - \hat{y}(t,\theta)$$

Η συνάρτηση που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι της μορφής :

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} l(e(t,\theta))$$

$$\text{Με } l(e) = \frac{1}{2} e^2$$

Οπότε είναι της μορφής :

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{2} e^2(t,\theta)$$

Στόχος είναι να βρεθεί μία καλή εκτίμηση θ του θ*, δηλαδή να βρούμε το θ(t) που ελαχιστοποιεί το συνολικό σφάλμα πρόβλεψης :

$$\theta_o = \theta_o(Z_N) = \arg\min_\theta V_N(\theta)$$

$$=> \theta_o = \arg\min_\theta \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{1}{2}e^2 = \arg\min_\theta \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{(y(t)-\theta^T\zeta(t))^2}{2}$$

Επειδή η συνάρτηση

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{(y(t)-\theta^T\zeta(t))^2}{2}$$

Είναι κυρτή ως προς θ, έχει ένα και μόνο ελάχιστο το θ_o, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση :

$$\frac{\partial VN(\theta)}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_o} = 0$$

$$=> \theta_o = \left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\zeta(t)\zeta(t)^T\right)^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\zeta(t)y(t)\right) \text{ σχέση (8)}$$

Επομένως, εφαρμόσαμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιώντας το παραμετροποιημένο μοντέλο που βρήκαμε στο ερώτημα 1.1, δεδομένου φυσικά ότι γνωρίζουμε τα διανύσματα ζ(t) και y(t). Συγκεκριμένα το y(t) το έχουμε μετρήσει όπως λέει και η εκφώνηση του ερωτήματος, αφού είναι η μετατόπιση της μάζας και όσον αφορά το ζ(t), το βρίσκουμε μέσω της εφαρμογής φίλτρου και με τη βοήθεια των μετρήσεων y(t) και u(t). Έτσι βρίσκουμε το θ_o, το οποίο είναι μια εκτίμηση του θ* και έτσι έχουμε βρει-εκτιμήσει πρακτικά τις άγνωστες παραμέτρους μας m, b και k.

Βήματα του αλγόριθμου :

1. Αρχικά θα επιλύσουμε την εξίσωση της σχέσης (1) στο matlab μέσω της συνάρτησης ode45 και των παραμέτρων που αναφέρονται στην εκφώνηση, ώστε να βρούμε τις τιμές της πραγματικής εξόδου y.
2. Μετά διαλέγουμε ένα ευσταθές φίλτρο $L(s)$ και μέσω της εντολής lsim και των τιμών y που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα και της u που μας δίνεται από την εκφώνηση, δημιουργούμε το διάνυσμα ζ.
3. Στη συνέχεια από τη σχέση (8) θα βρούμε τους δύο απαιτούμενους πίνακες { $\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\zeta(t)\zeta(t)^T\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\zeta(t)y(t)\right)$} ώστε να υπολογίσουμε το θ_o.

4. Έχοντας υπολογίσει το θ_o, μέσω πράξεων, βρίσκουμε τις εκτιμώμενες μεταβλητές m, k, b και κάνουμε σύγκριση με τις μεταβλητές που δόθηκαν στην εκφώνηση.

Ερώτημα 1.3

Μετά από υλοποίηση σε matlab του αλγόριθμου που περιγράψαμε στο προηγούμενο ερώτημα, έγιναν δοκιμές με διάφορα φίλτρα L(s), ώστε να εκτιμήσουμε μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων τιμές των παραμέτρων m, k, b , που να είναι αρκετά παραπλήσιες με αυτές που δόθηκαν στην εκφώνηση.

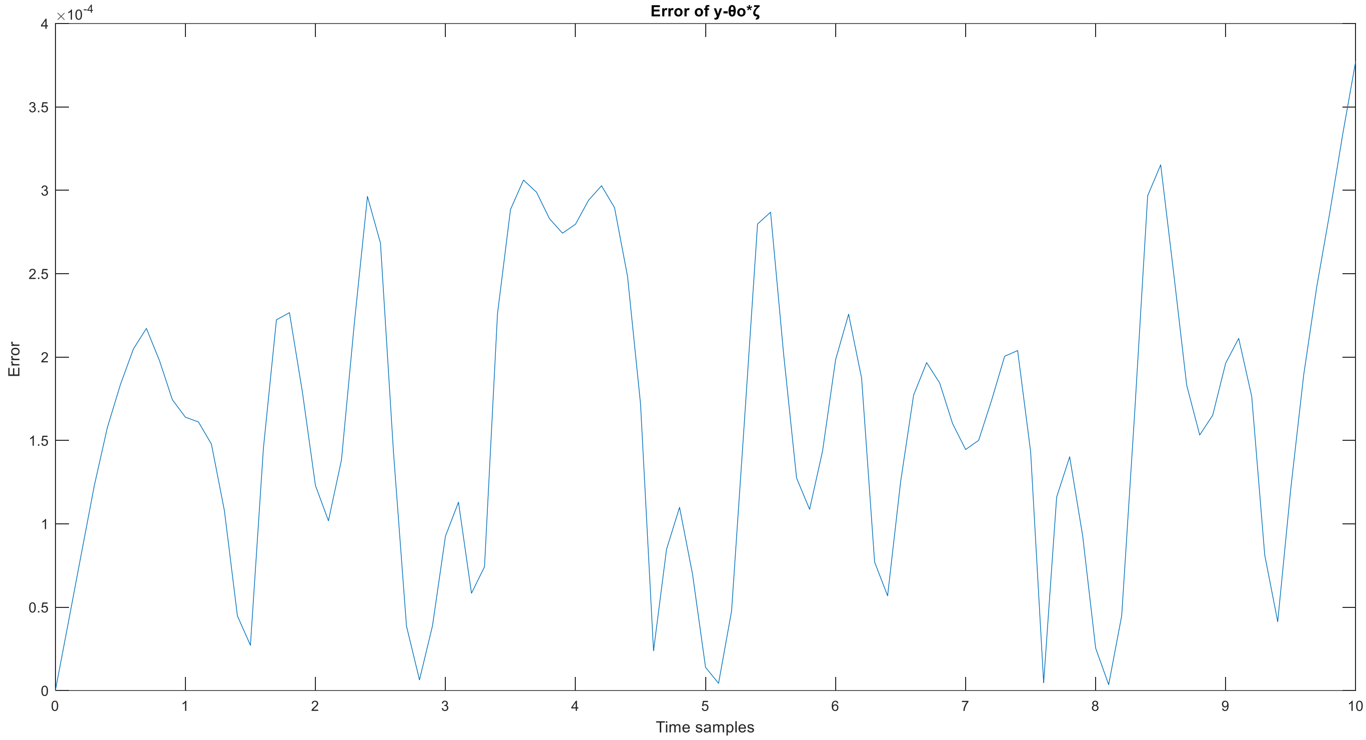
Έστω το ευσταθές φίλτρο L(s) = s^2 + 50s + 6 τότε οι εκτιμώμενες παράμετροι είναι : m = 15.3299631, b = 0.0661135 και k = 2.0224811. Το συνολικό αθροιστικό σφάλμα βγαίνει e = 0.4863308 και τα ποσοστιαία σφάλματα είναι e_m = 2.1524063 % , e_b = 202.5101355 % και e_k = 1.1115626 %

Δεδομένου ότι το σφάλμα για τη μεταβλητή b είναι τεράστιο, αλλάζουμε το φίλτρο (πηγαίνοντας τον αριστερότερο πόλο πιο κοντά στο 0) στο επίσης ευσταθές φίλτρο L(s) = s^2+10s +5 και έχουμε m = 15.1106131, b = 0.1693425, k = 2.0043128 και όσον αφορά τα σφάλματα έχουμε e = 0.1455833, e_k = 0.2151745%, e_b = 18.1038456% και e_m = 0.7320224%.

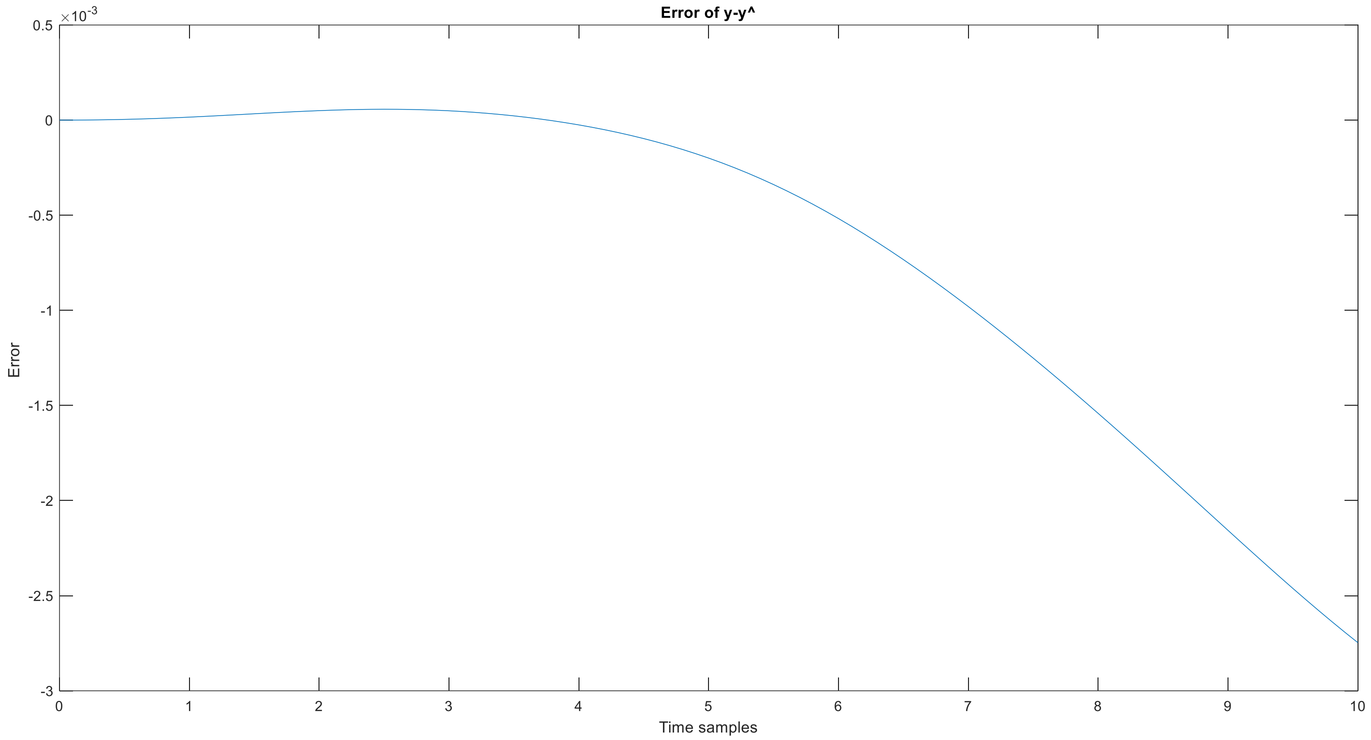
Παρατηρούμε ότι ενώ μειώθηκε αισθητά το ποσοστιαίο σφάλμα για τη σταθερά απόσβεσης b, είναι αρκετά υψηλό ακόμη οπότε παίρνουμε πόλους ακόμη πιο κοντά στο 0 επιλέγοντας το ευσταθές φίλτρο L(s) = s^2 + 1s + 0.5 έχουμε m = 15.0023714, b = 0.1990026, k = 1.9998085 που είναι αρκετά καλές εκτιμήσεις και σφάλματα : e = 0.0035602, e_k = 0.0095752%, e_b = 0.5011752% και e_m = 0.0158067%.

Ενώ οι εκτιμήσεις μας είναι κοντά στις τιμές που δόθηκαν από την εκφώνηση, προσπαθήσαμε να έχουμε ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια, η οποία επετεύχθη με το ευσταθές φίλτρο L(s) = s^2 + 0.7s + 0.5, το οποίο οδήγησε σε m = 15.0005726, b = 0.2000212, k = 1.9996447 και στα εξής σφάλματα e = 0.0009491, e_k = 0.0177695%, e_b = 0.0106134% και e_m = 0.0038171%.

Επομένως μέσω του φίλτρου L(s) = s^2 + 0.7s + 0.5 καταλήξαμε σε εκτιμώμενες μεταβλητές πολύ κοντινές σε σχέση με τις δοσμένες και σε σφάλματα μικρότερα της τάξης του 10^(-2). Επίσης σύμφωνα και με τα παρακάτω διαγράμματα σφάλματος βλέπουμε ότι το σφάλμα της πραγματικής τιμής της εξόδου y με το παραμετροποιημένο μοντέλο $\theta_o *^T \zeta$ είναι μικρότερο της τάξης 10^(-4) και το σφάλμα της πραγματικής εξόδου y σε σχέση με την έξοδο y με τις εκτιμώμενες μεταβλητές είναι υπερβολικά μικρό, της τάξης του 10^(-3), παρατηρώντας μάλιστα και ότι για τιμές κοντά στο 0 έχουμε και μηδενικό σφάλμα, οπότε έχουμε μία πολύ καλή προσέγγιση.



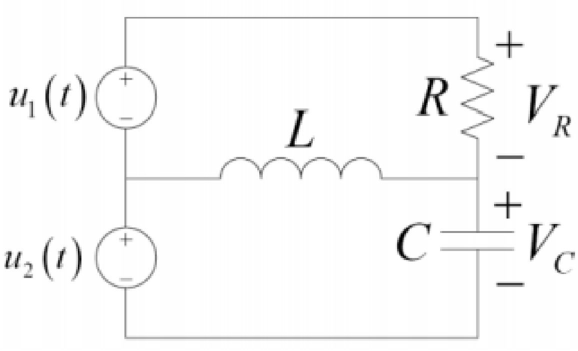
Error of y-θo*ζ
×10^-4
Error
Time samples



Error of y-y^
×10^-3
Error
Time samples

$2^η$ Άσκηση

Το σχήμα της δεύτερης άσκησης είναι το εξής κύκλωμα :



Όπου $u_1(t) = 2\sin(t)$ V $u_2(t) = 1$ V. Γνωρίζουμε ότι μπορούν να μετρηθούν μόνο οι τάσεις V_R στα άκρα της αντίστασης, V_C στα άκρα του πυκνωτή.

Ερώτημα (a)

Αρχικά γνωρίζουμε ότι οι τάσεις V_R και V_C παράγονται μέσω του αρχείου v.p.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων τον πίνακα μεταφοράς του παραπάνω κυκλώματος οπότε θα εργαστούμε ως εξής :

Αρχικά ισχύει ότι (δεδομένου ότι V_L = τάση στα άκρα του πυκνωτή, το ρεύμα που διαρρέει το πάνω κύκλωμα είναι i_1 και το ρεύμα που διαρρέει το κάτω είναι i_2) :

$$u_1 = V_L + V_R \text{ σχέση(1)}$$

$$\text{όμως } V_R = R\, i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{V_R}{R} \text{ σχέση (2)}$$

$$u_2 = V_C - V_L \text{ σχέση (3)}$$

$$\text{όμως } V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_2 dt \Rightarrow i_2 = C\,\dot{V}_c \text{ σχέση (4)}$$

$$\text{και } V_L = L\,(di_1/dt - di_2/dt\,) \text{ (5)}$$

Επομένως αντικαθιστούμε στη σχέση (1) τις σχέσεις (2),(4) και (5) και έχουμε :

$$u_1 = \frac{L}{R}\,\dot{V}_R - LC\ddot{V}_C + V_R \text{ σχέση (6)}$$

Επίσης από πρόσθεση των σχέσεων (1) και (3) καταλήγουμε ότι :

$$u_1 + u_2 = V_R + V_C \text{ σχέση (7)}$$

και αν παραγωγήσουμε τη σχέση (7) θα έχουμε

$$\dot{u}_1 + \dot{u}_2 = \dot{V}_R + \dot{V}_C \text{ σχέση (8)}$$

Αντικαθιστώ σχέση (6) στη σχέση (7) :

$$\frac{L}{R}\dot{V}_R - LC\ddot{V}_C + V_R + u_2 = V_R + V_C \Rightarrow \frac{L}{R}\dot{V}_R + u_2 = LC\ddot{V}_C + V_C$$

Μέσω τη σχέσης (8) θα αντικαταστήσω το V_C και θα έχω

$$-\frac{L}{R}\dot{V}_C + \frac{L}{R}\dot{u}_1 + \frac{L}{R}\dot{u}_2 + u_2 = LC\ddot{V}_C + V_C \Rightarrow$$

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_1 + \frac{1}{RC}\dot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_2 \text{ σχέση (9)}$$

Μέσω τη σχέσης (8) θα αντικαταστήσω το V_R και θα έχω

$$\frac{L}{R}\dot{V}_R = LC(\ddot{u}_2 + \ddot{u}_1 - \ddot{V}_R) + u_1 - V_R \Rightarrow$$

$$\ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_C = \ddot{u}_2 + \ddot{u}_1 + \frac{1}{LC}u_1 \text{ σχέση (10)}$$

Κάνοντας μετασχηματισμό Laplace στις σχέσεις (9) και (10) έχουμε :

$$V_C\left(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right) = \frac{1}{RC}s\, u_1 + \left(\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right)u_2 \text{ σχέση (11)}$$

και

$$V_R\left(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}\right) = s^2 u_2 + \left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)u_1 \text{ σχέση (12)}$$

Ο πίνακας μεταφοράς προκύπτει από τις σχέσεις (10) και (11) :

$$\begin{pmatrix} V_C \\ V_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} & \dfrac{\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \\ \dfrac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} & \dfrac{s^2}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Όσον αφορά την γραμμική παραμετροποίηση του συστήματος στην μορφή : $y = \theta *^T \zeta$

Από τις παραπάνω σχέσεις διαπιστώνουμε ότι πρακτικά καταλήξαμε σε σχέσεις της μορφής :

$$y^{(2)} = \theta *^T \Delta \text{ σχέση (13)}$$

Έτσι εφαρμόζουμε ένα ευσταθές φίλτρο Λ(s), ίσης τάξης με την τάξη του συστήματος για να αποφύγουμε τις μετρήσεις των παραγώγων του y. Οπότε πρέπει να διαιρέσουμε με Λ(s) και τα δύο μέρη της σχέσης (10)

$$\text{Έστω το φίλτρο} \quad \Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$$

Και κάνουμε τις ανάλογες πράξεις η εξίσωση (13) θα έρθει στη μορφή :

$$y = \theta_\lambda^T\ \zeta \quad \text{σχέση}(14)$$

όπου:

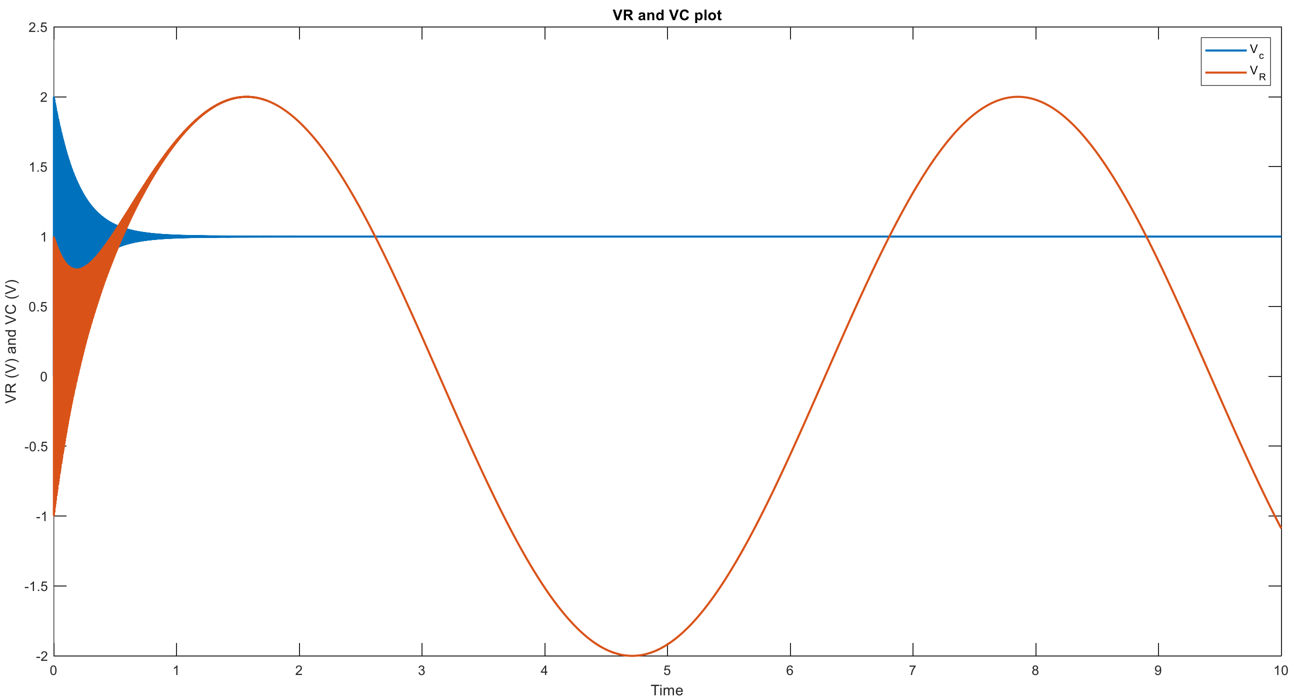
$$y = V_C$$

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \lambda_1 & \frac{1}{LC} - \lambda_2 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T \quad \text{σχέση (16)}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{s}{\Lambda(s)}y & -\frac{1}{\Lambda(s)}y & -\frac{s}{\Lambda(s)}\mathrm{u1} & -\frac{s}{\Lambda(s)}\mathrm{u2} & -\frac{1}{\Lambda(s)}u1 & -\frac{1}{\Lambda(s)}\mathrm{u2} \end{bmatrix} \text{\^{}T σχέση (17)}$$

Για να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των ελαχίστων τετραγώνων για να εκτιμήσουμε τον πίνακα μεταφοράς δηλαδή να βρω το LC και το RC, θα ακολουθήσω τα βήματα του αλγόριθμου 1- 4 που ανέλυσα στην άσκηση 1 στο ερώτημα 1.2

Αρχικά από το αρχείο v.p για να βρούμε τις μετρήσεις, δεδομένου των μικρών περιόδων των ταλαντώσεων όπως διαπιστώθηκε από δοκιμές, επιλέξαμε χρόνο από 0 έως 10s με βήμα 0.00001. Οπότε οι τελικές μετρήσεις του V_C και V_R ήταν οι εξής :



Στη συνέχεια για να την υλοποίηση του αλγορίθμου των ελαχίστων τετραγώνων, δεδομένου ότι τα V_C και V_R είχαν υψίσυχνες ταλαντώσεις , θέλαμε πόλους αρκετά αριστερά από το 0, οπότε μετά από δοκιμές επιλέξαμε το ευσταθές φίλτρο :

$$\Lambda(s) = s^2 + 400s + 40000$$

Οπότε μέσω του αλγορίθμου βρήκαμε

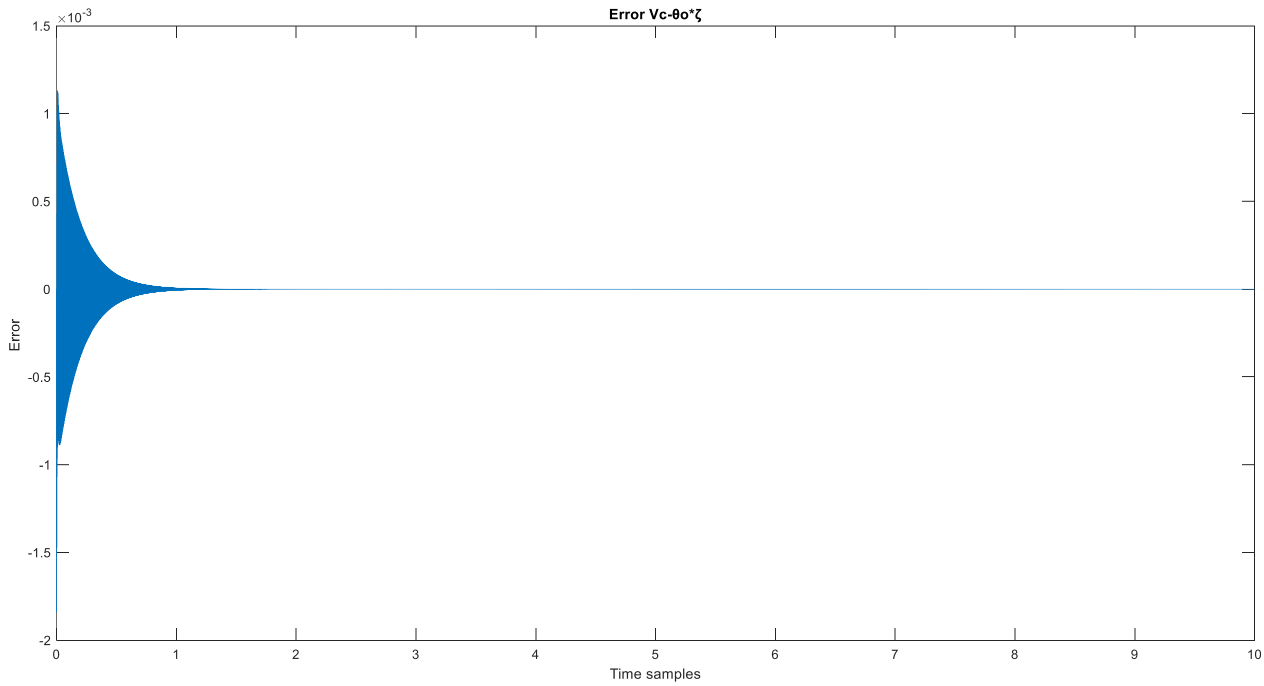
θο = [-390,079208583791, 24991197,8067495, -10,0178942959229, -9,91785360958826, 0,00140346466213300, -25031197,8134507]

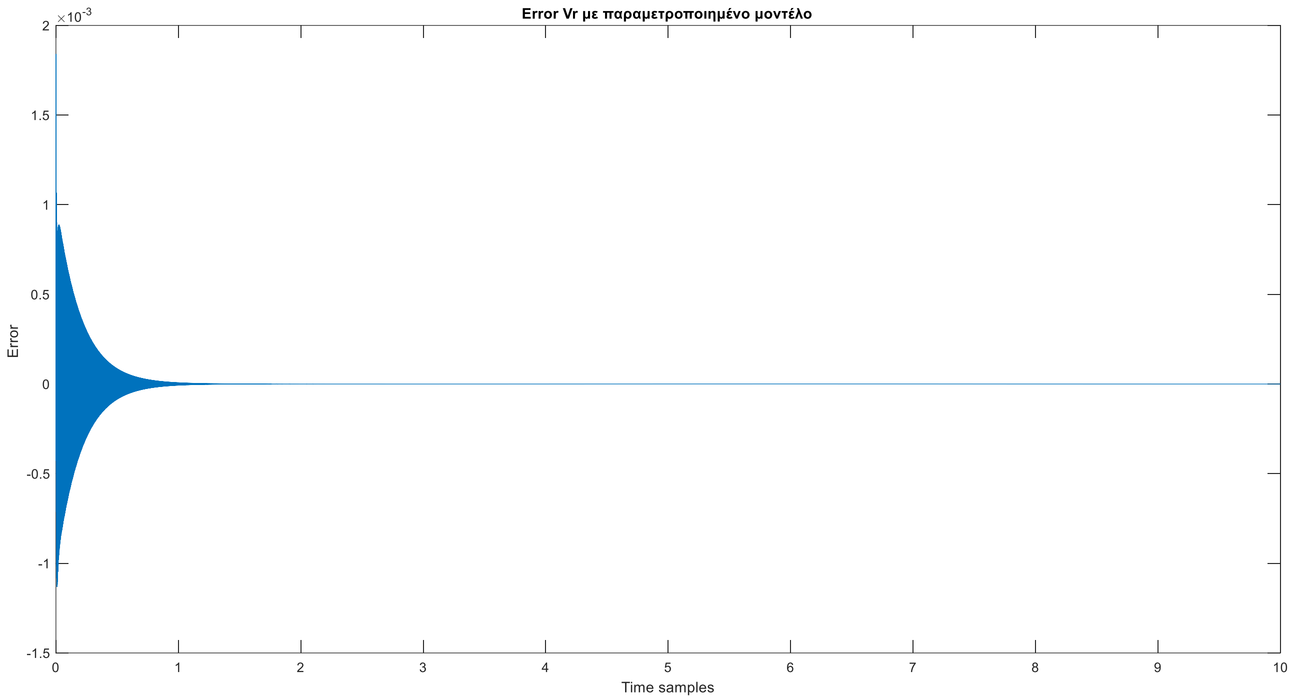
Για να έχουμε πιο ακριβή εκτίμηση των παραμέτρων υπολογίσαμε τη μέση τιμή των 1/RC και 1/LC που προκύπτουν από το θο και βρήκαμε :

1/RC = 9.952179773906815

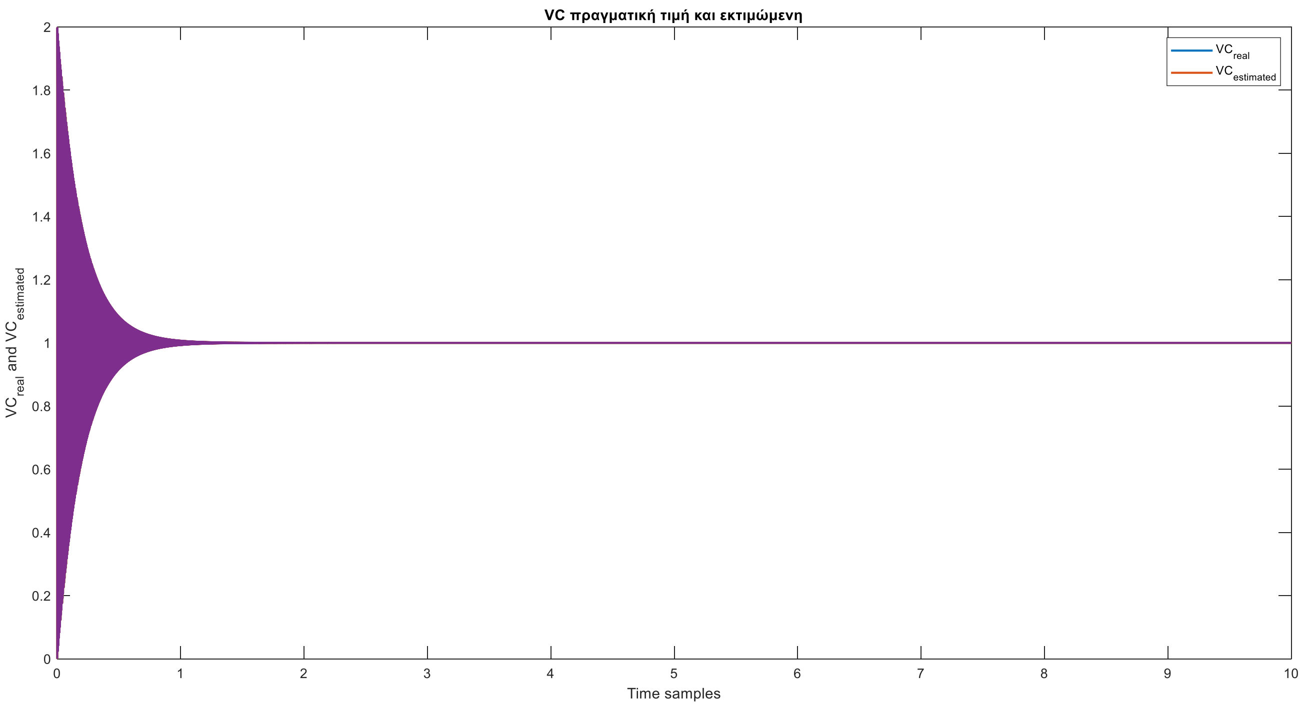
1/LC = 25031197.810100063681602

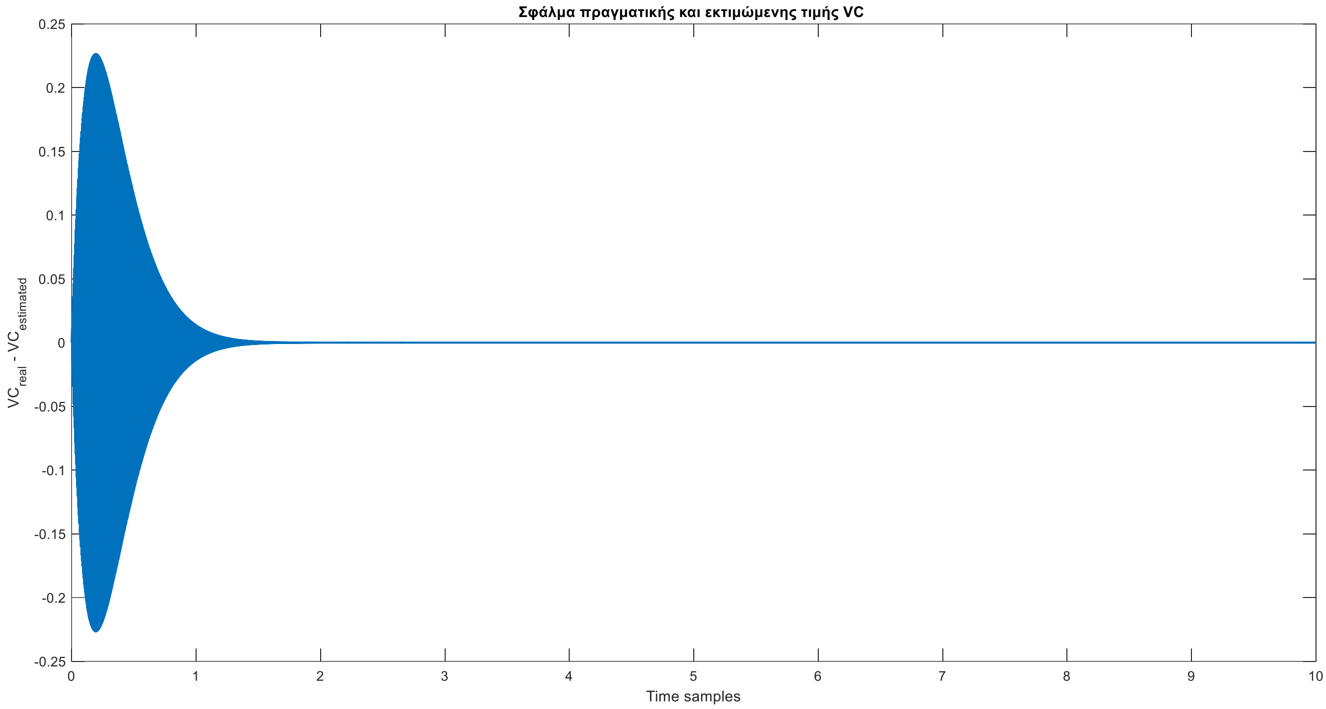
Έτσι υπολογίσαμε το σφάλμα της Vc και της Vr με το παραμετροποιημένο μοντέλο, καθώς και το σφάλμα μεταξύ των πραγματικών τιμών των Vc και Vr με τις τιμές των Vc και Vr, που υπολογίστηκαν από τον πίνακα μεταφοράς, μέσω των εκτιμώμενων παραμέτρων 1/RC και 1/LC, που βλέπουμε παρακάτω.

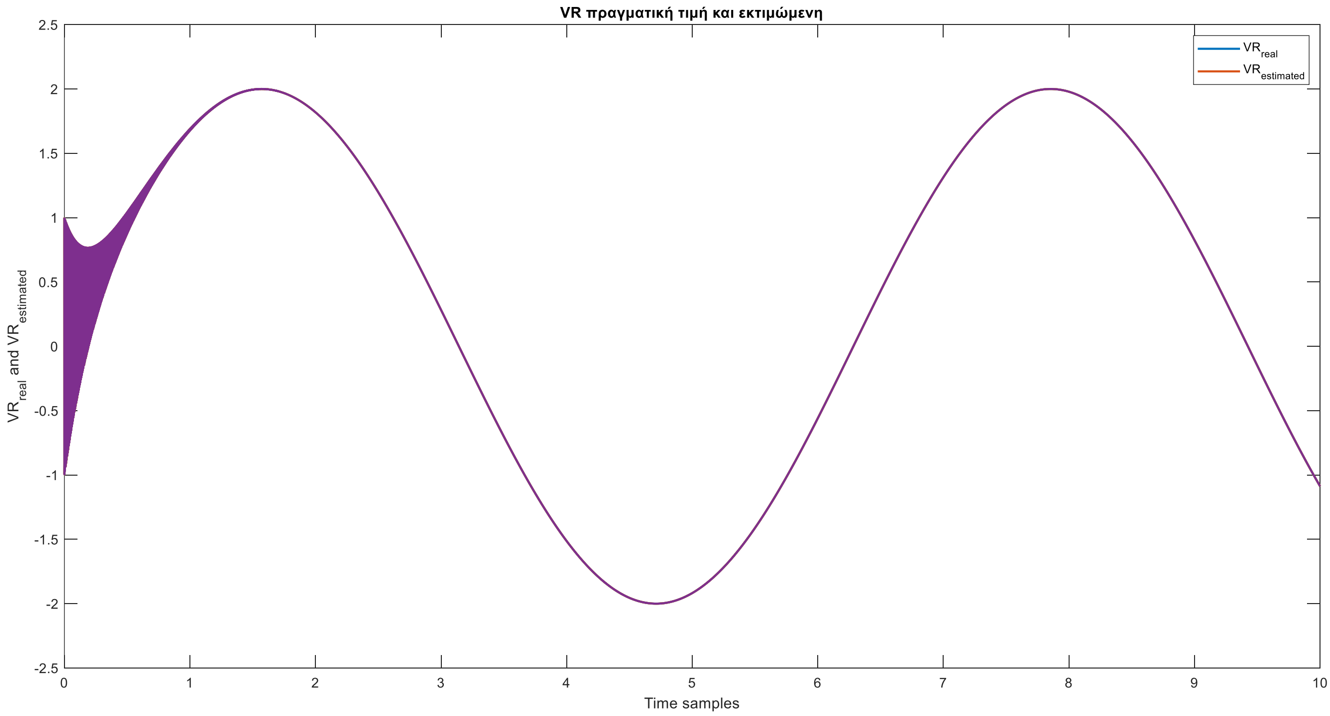


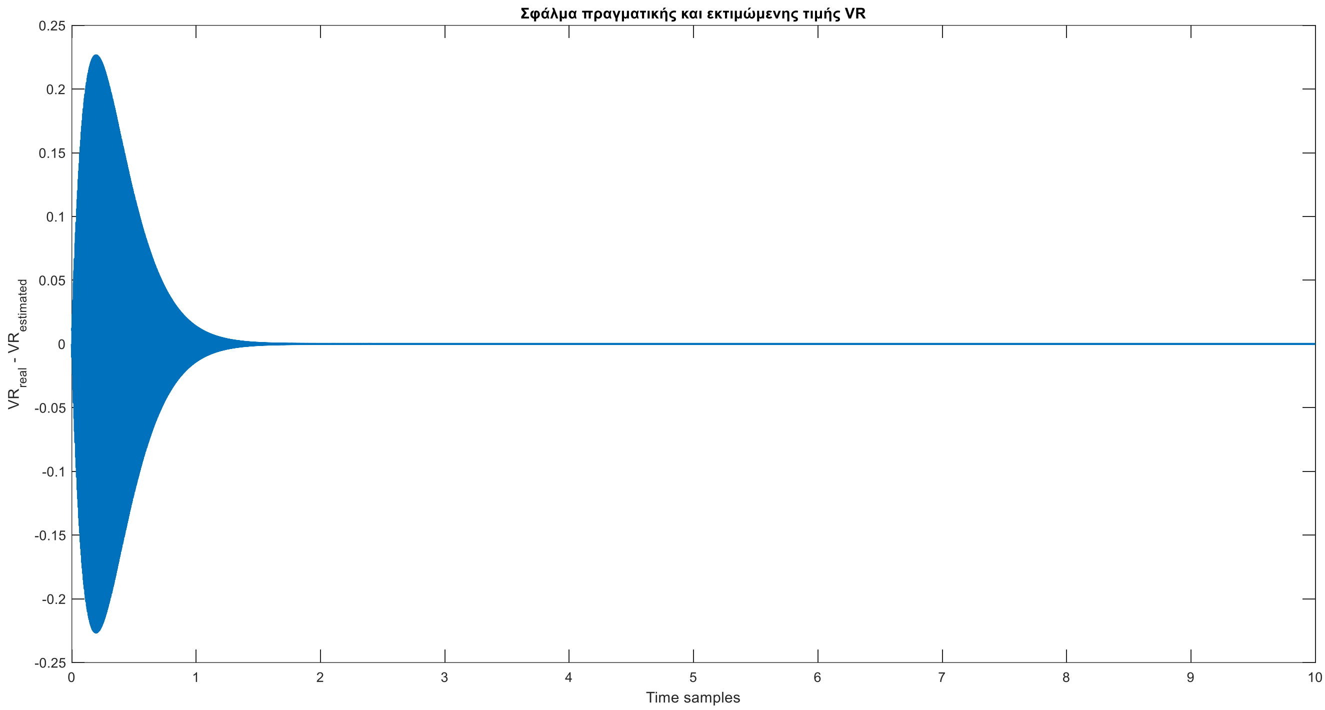


Όπου βλέπουμε ότι και τα δύο σφάλματα είναι της τάξης του 10^(-3) επομένως έχουμε αρκετά καλή ακρίβεια και ότι με το πέρας του χρόνου τείνει στο 0, άρα έγινε σωστή επιλογή φίλτρου .




Σφάλμα πραγματικής και εκτιμώμενης τιμής VC
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
-0.25
VC_{real} - $VC_{estimated}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Time samples


VR πραγματική τιμή και εκτιμώμενη
VR_{real}
$VR_{estimated}$
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
VR_{real} and $VR_{estimated}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Time samples



Επίσης βλέπουμε και πάλι ότι τα σφάλματα είναι αρκετά μικρά, κάτω από 0.25 και τείνουν στο 0, με το πέρας του χρόνου.

Ερώτημα (β)

Μετά από πρόσθεση τριών τυχαίων τιμών - μεγαλύτερης τάξης μεγέθους(*10) - στις τιμές Vr και Vc, εντός του χρόνου που έχουμε επιλέξει (10s) εφαρμόσαμε και πάλι τον ίδιο αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων και βρήκαμε τα εξής :

Μετά τον υπολογισμό του νέου θο βρήκαμε ότι :

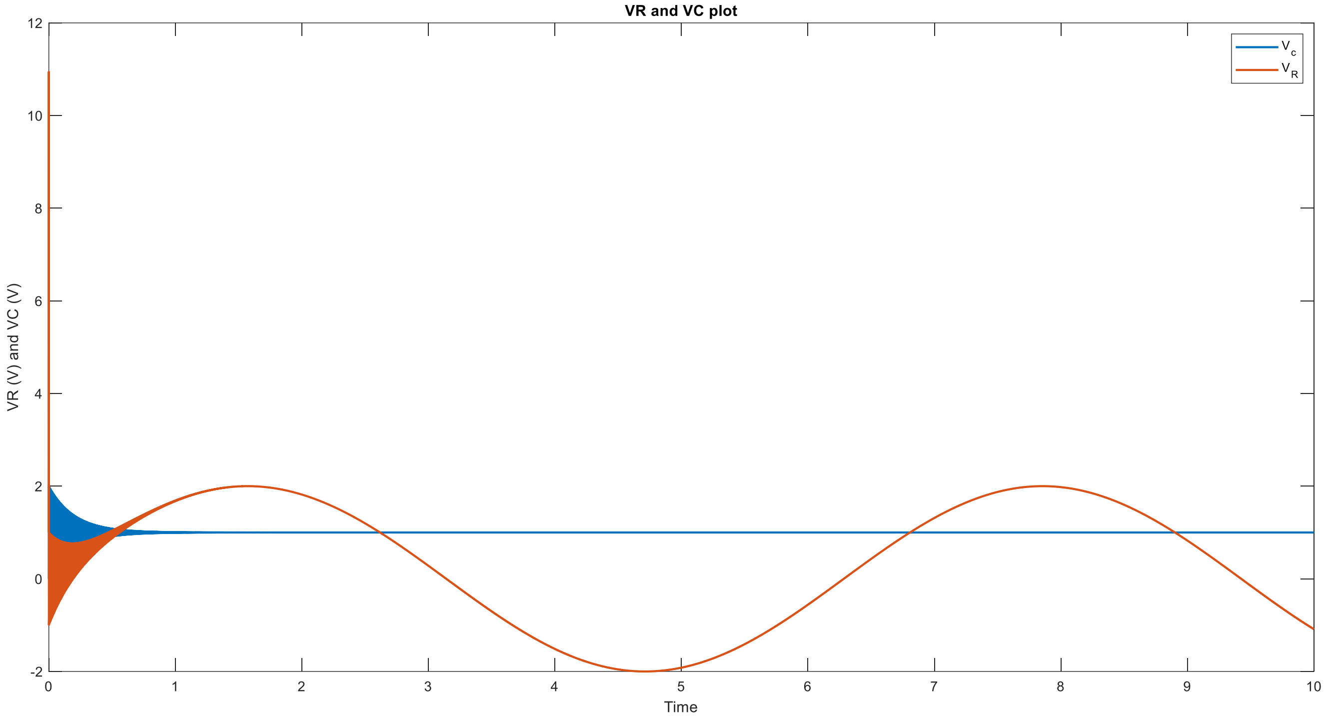
$$1/RC = 54.359831859440156$$

$$1/LC = 25028729.989572051912546$$

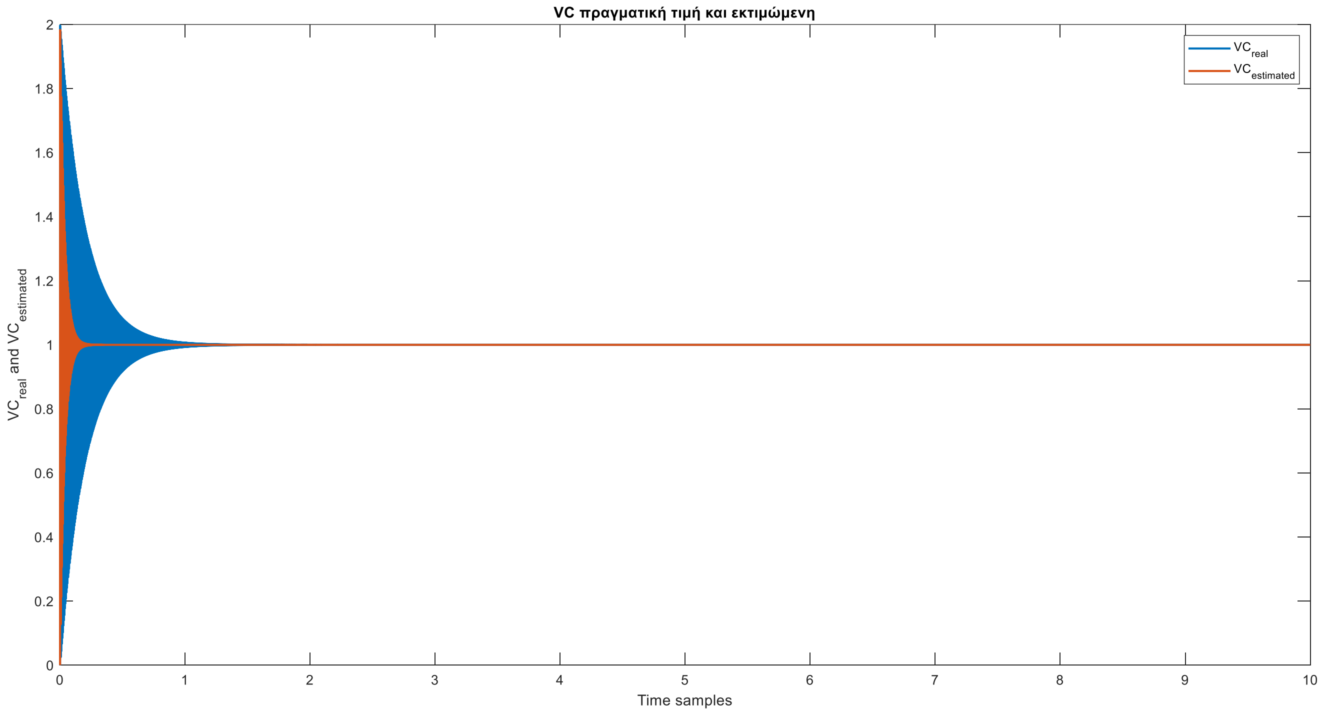
Όπως βλέπουμε έχουμε μια απόκλιση συγκριτικά με τις παραμέτρους που εκτιμήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

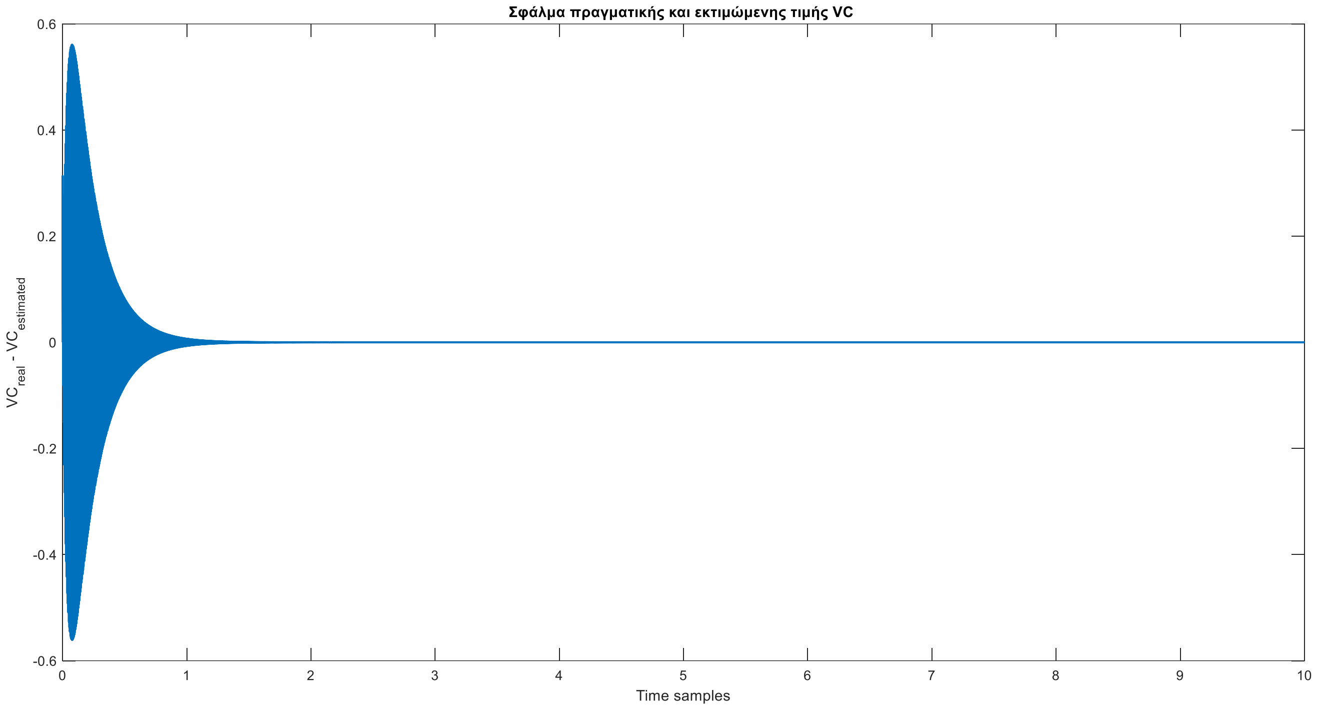
Τα παρακάτω διάγραμματα μας επιβεβαιώνουν αυτήν την απόκλιση :

Αρχικά βλέπουμε αλλαγές στις τιμές Vr και Vc

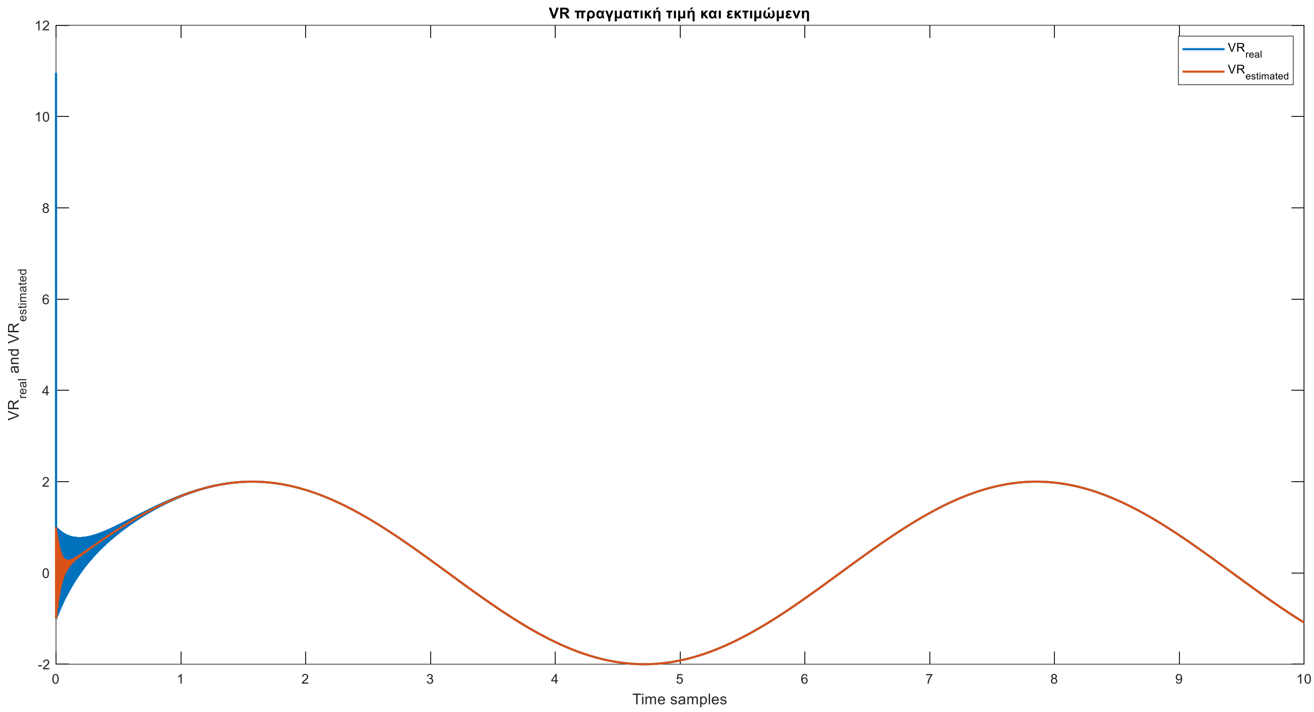


Όσον αφορά τις εκτιμήσεις :

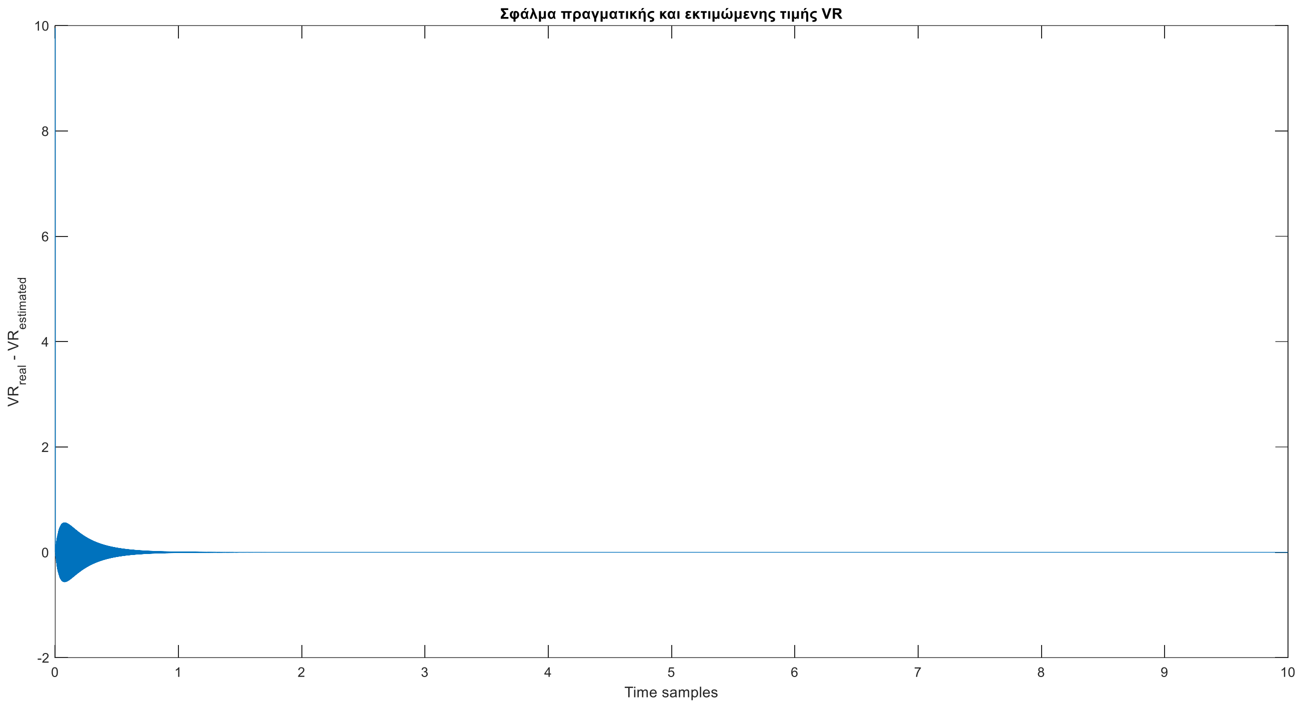




Σφάλμα πραγματικής και εκτιμώμενης τιμής VC
VC_{real} - $VC_{estimated}$
Time samples

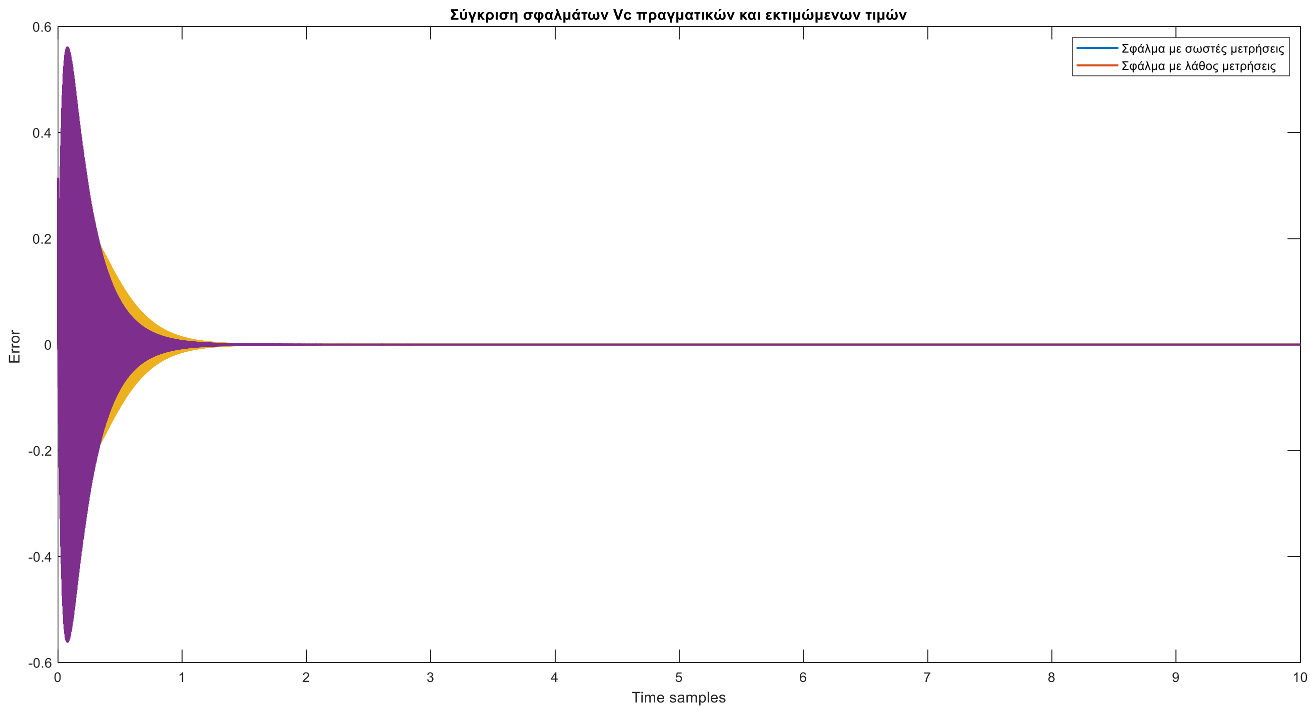


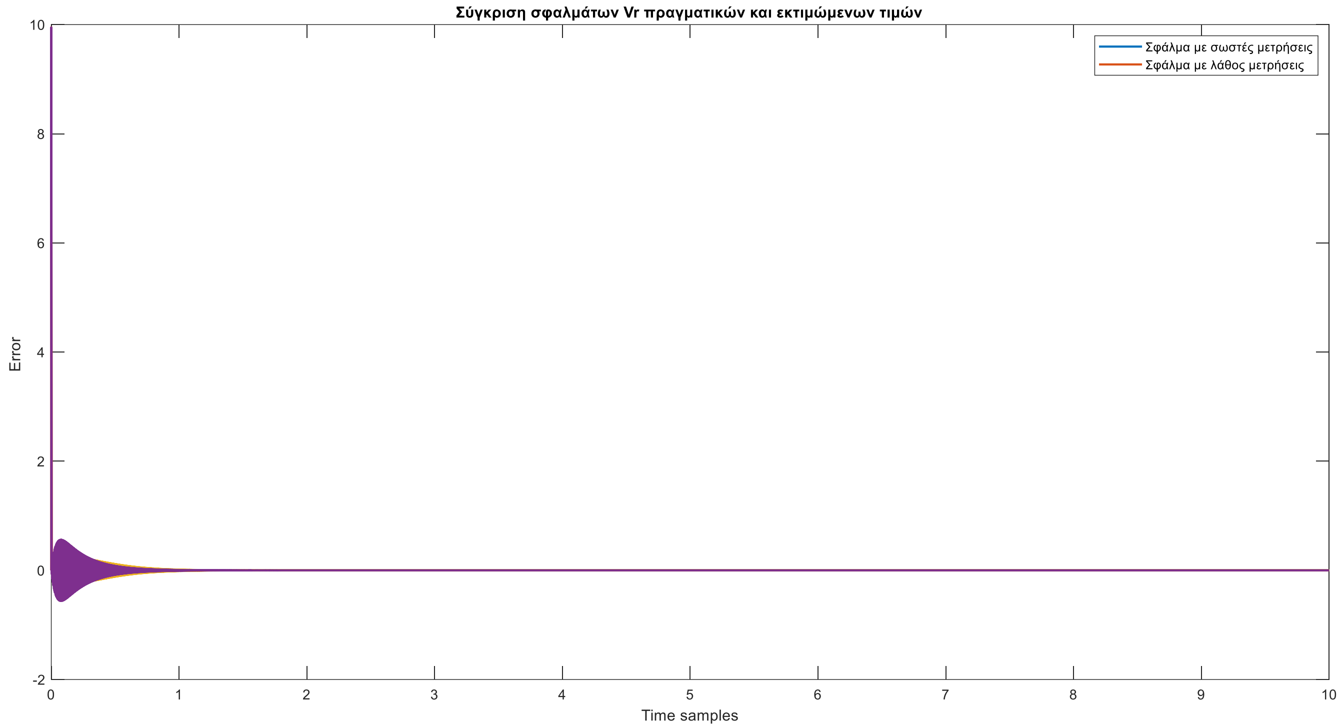
VR πραγματική τιμή και εκτιμώμενη
VR_{real}
$VR_{estimated}$
VR_{real} and $VR_{estimated}$
Time samples



Βλέπουμε από τα παραπάνω διαγράμματα, ότι οι εκτιμώμενες τιμές καθώς και οι vc και vr, επηρεάζονται σημαντικά από λανθασμένες μετρήσεις με αποτέλεσμα να δίνουν πολύ λανθασμένα αποτελέσματα συγκριτικά με τις πραγματικές τιμές που πήραμε.

Ακολουθούν τα διαγράμματα σύγκρισης των σφαλμάτων των εκτιμήσεων





Όπως παρατηρούμε και από αυτά τα διαγράμματα το σφάλμα των εσφαλμένων μετρήσεων είναι τόσο μεγάλο, που δεν μπορεί να απεικονιστεί σε σύγκριση με αυτό το σφάλμα των σωστών μετρήσεων.

Επομένως ο αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων δεν μπορεί να φιλτράρει αυτές τις εσφαλμένες μετρήσεις και είναι μάλιστα τόσο ευαίσθητος σε μικρές αλλαγές που δίνει ακραία αποτελέσματα.