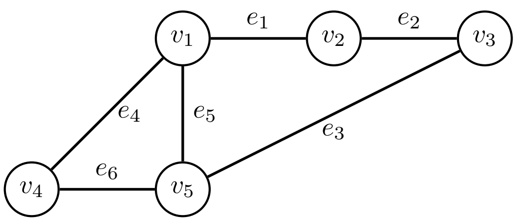
سوالات احتمالی میان‌ترم ۱ درس الگوریتم‌های گراف (با پاسخ)

استاد مربوطه:	به نوشته:
سرکار خانم دکتر معصومه دامرودی	محمد خورشیدی روزبهانی

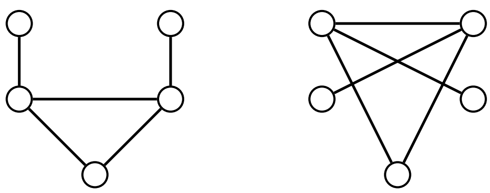
سوال: تعاریف، قضایا، نتایج و کاربردهای درون اسلایدها را شرح دهید.

پاسخ: ابتدا به تعاریف موجود در اسلایدها پرداخته شده و موارد به تفکیک توضیح داده می‌شود.

- راس[۱]: راس در گراف نقطه‌ای است که به عنوان یک نقطه یا یک گره شناخته می‌شود و می‌تواند با مقادیر مختلفی مانند عدد صحیح یا رشته مشخص شود.
- یال[۲]: یال در یک گراف، اتصال بین دو راس یا گره است و نشان‌دهنده رابطه بین آن دو راس می‌باشد.
- در تماس[۳]: در مفهوم گراف، هنگامی که یال به یک راس متصل است، می‌گوییم که یال با آن راس «در تماس» است.
- گراف ساده[۴]: گراف ساده یک گراف است که هیچ یال تکراری یا حلقه‌ای (یالی که شروع و پایانش به یک راس یکسان است) ندارد. به عبارت دیگر، در گراف ساده، هیچ دو راس متصل نیز دوبار در یک یال قرار نمی‌گیرند.



- درجه[۵]: درجه یک راس در گراف، تعداد یال‌های متصل به آن راس است. به عبارت دیگر، درجه یک راس نشان‌دهنده تعداد یال‌هایی است که به آن راس متصل هستند.
- راس منفرد[۶]: راس منفرد یک راس در گراف است که هیچ یالی به آن متصل نیست، به عبارت دیگر درجه این راس صفر است.
- متمم[۷]: در مفهوم گراف، متمم یک گراف، گرافی است که همه یال‌های موجود در گراف اصلی حذف شده و همه یال‌هایی که بین رئوس موجود نیستند اضافه شده‌اند. به عبارت دیگر، این گراف حاصل از دو گراف اصلی که هیچ یال مشترکی ندارند می‌باشد.

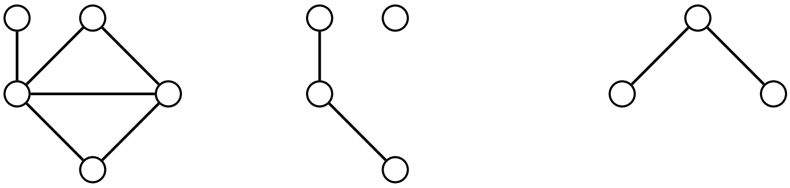


- گراف خالی[۸]: گراف خالی یک گراف است که هیچ راس و هیچ یالی ندارد. به عبارت دیگر، یک گراف با تعداد رئوس و یال‌های صفر است.

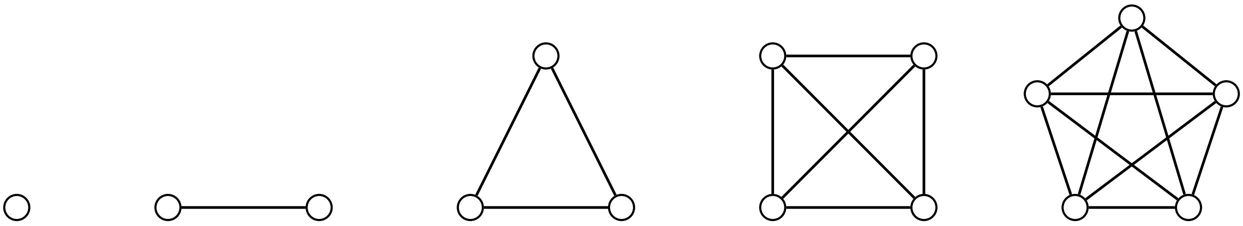
---

۱ Vertex - Node
۲ Edge
۳ Incident
۴ Simple Graph
۵ Degree
۶ Isolated Vertex
۷ Complement
۸ Empty Graph

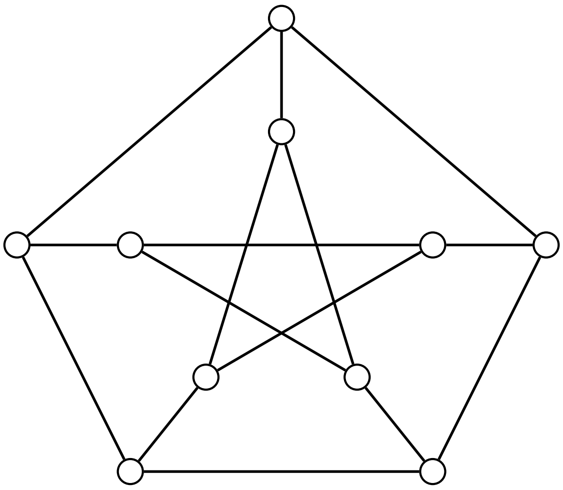
- زیرگراف[۹]: زیرگراف یک گراف است که تمام رئوس و یال‌های آن در گراف اصلی وجود داشته باشند. به عبارت دیگر، اگر یک گراف با رئوس و یال‌های خاصی را در نظر بگیرید، هر گرافی که شامل زیرمجموعه‌ای ار آن رئوس و یال‌ها باشد، زیرگرافی از آن گراف است.



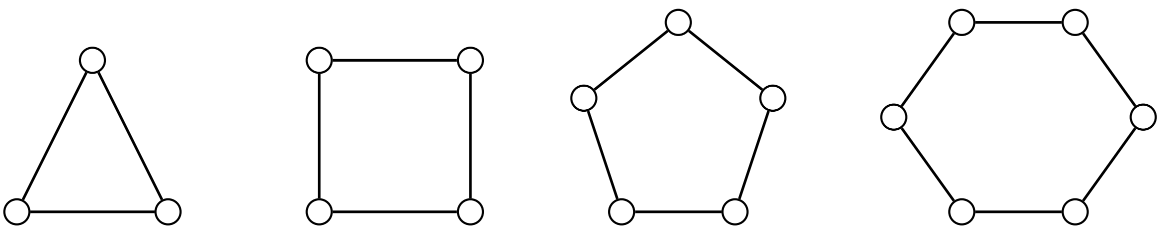
- گراف صفر[۱۰]: گراف صفر یک گراف است که تنها یک راس دارد و هیچ یالی ندارد.
- گراف کامل[۱۱]: یک گراف است که همه رئوس آن به همه رئوس دیگر با یک یال متصل هستند. به عبارت دیگر، در یک گراف کامل هیچ دو راسی وجود ندارد که بهم هم متصصل نباشند.



- گراف منتظم-k:[۱۲] گراف منتظم-k یک گراف است که درجه همه رئوس آن برابر با k باشد. به عبارت دیگر، هر راس در این گراف، با k یال به راس‌های دیگر متصل است.

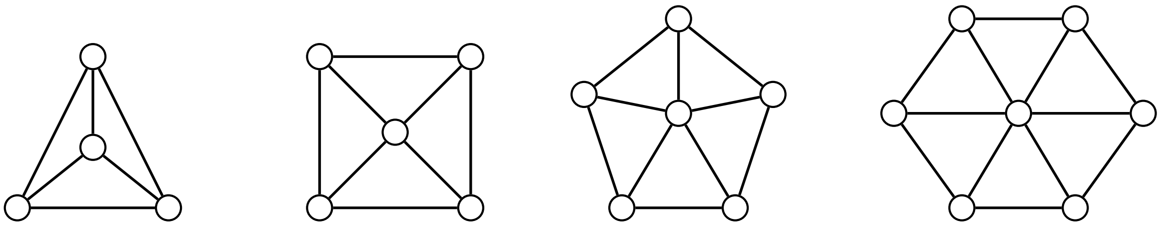


- چرخه[۱۳]: در مفهوم گراف، چرخه یک مسیر بسته است که از یک راس شروع شده، از یال‌های مختلف گذر کرده و در نهایت به همان راس اول باز می‌گردد. به عبارت دیگر، یک چرخه گرافی که شامل حداقل یک راس و حداقل یک یال است و اولین و آخرین راس‌ها یکسان هستند.

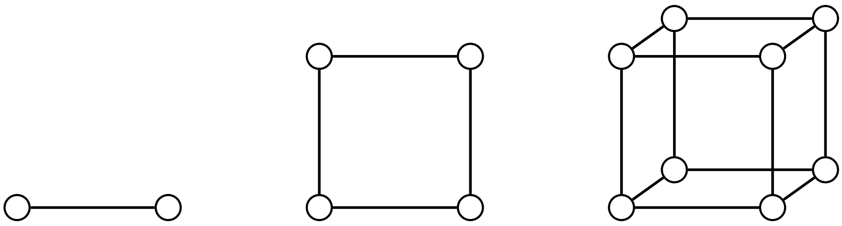


[۹] Subgraph
[۱۰] Null Graph
[۱۱] Complete Graph
[۱۲] k-Regular Graph
[۱۳] Cycle Graph - Circuit Graph

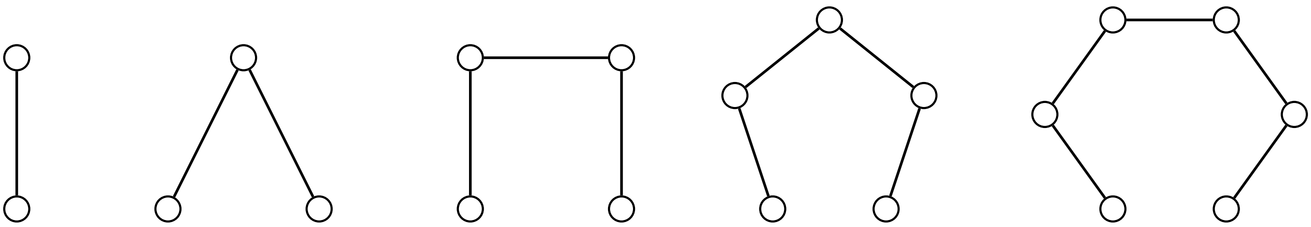
• گراف چرخ[۱۴]: در مفهوم گراف یک گراف چرخ یک نوع خاص از گراف است که از راس مرکزی و چندین راس دیگر تشکیل شده است که همگی به راس مرکزی متصل هستند و هیچ یالی بین رئوس غیرمرکزیِ غیرمجاور وجود ندارد. به عبارت دیگر، یک گراف چرخ همانند گراف چرخه است با این تفاوت که یک راس به عنوان مرکز در نظر گرفته می‌شود و همه رئوس دیگر به آن متصل می‌شوند.



• گراف مکعب n بُعدی[۱۵]: در مفهوم گراف، مکعب n بُعدی یک گراف با ساختار مکعبی است که دارای n^2 راس و $n \times (n-1)^2$ یال است. این گراف معمولاً با استفاده از ارقام دودویی به عنوان برچسب رئوس تعریف می‌شود، به طوری که هر راس با یک دنباله n بیتی نمایش داده می‌شود و هر یال به دو راس متصل است که دنباله‌های باینری متفاوت در یک بیت داشته باشند.



• گراف مسیر[۱۶]: گراف مسیر یک گراف است که رئوس آن به صورت متوالی به هم متصل هستند و هیچ یال تکراری یا حلقه‌ای وجود ندارد. به عبارت دیگر، این گراف مانند زنجیره است که رئوس آن به ترتیب به یکدیگر متصل شده‌اند.

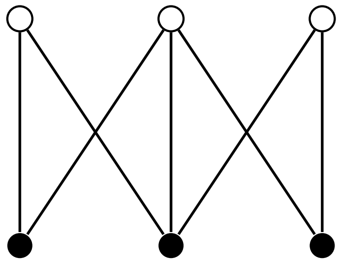


• گراف بازه[۱۷]: گراف بازه یک نوع خاص از گراف است که رئوس آن بازه‌های اعداد حقیقی را نمایش می‌دهند و دو راس متصل هستند اگر و تنها اگر بازه‌های متناظر با آن دو راس تلاقی داشته باشند. به عبارت دیگر، گراف بازه می‌تواند به عنوان نمایشی از یک مجموعهٔ بازه‌های اعداد حقیقی دیده شود، که هر گره نمایانگر یک بازه است و یال بین دو گره وجود دارد اگر و تنها اگر بازه‌های متناظر با آن دو گره تلاقی داشته باشند.

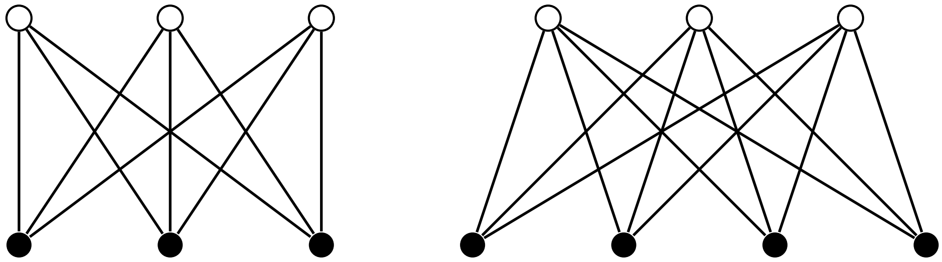
• گراف قوس دایره‌ای[۱۸]: گراف قوس دایره‌ای، یک نوع خاص از گراف است که رئوس آن بازه‌های یک دایره را نمایش می‌دهند و دو راس متصل هستند اگر و تنها اگر بازه‌های متناظر با آن دو راس اشتراک غیرخالی داشته باشند. به عبارت دیگر، گراف قوس دایره‌ای می‌تواند به عنوان نمایشی از بازه‌های یک دایره دیده شود، که هر راس نمایانگر یک بازه است و دو راس متصل هستند اگر و تنها اگر بازه‌های متناظر با آن دو راس اشتراک غیرخالی داشته باشند.

• گراف دوبخشی[۱۹]: گراف دوبخشی یک گراف است که مجموعه رئوس آن را می‌توان به دو زیرمجموعه جدا از هم تقسیم کرد، به طوری که هیچ راس درون هر زیرمجموعه با راسی در همان زیرمجموعه دیگر متصل نباشد. به عبارت دیگر، این گراف متشکل از دو مجموعه راس است که هر یال تنها بین یک راس از یک مجموعه و یک راس از مجموعه دیگر وجود دارد، نه دو راس از همان مجموعه.

[۱۴] Wheel Graph
[۱۵] n-Cube Graph
[۱۶] Path Graph
[۱۷] Interval Graph
[۱۸] Circular-arc Graph
[۱۹] Bipartite Graph



- گراف دوبخشی کامل[20]: گراف دوبخشی کامل یک گراف دوبخشی است که همه رئوس یک زیرمجموعه با همه رئوس زیرمجموعه دیگر به صورت کامل متصل هستند. به عبارت دیگر، هر راس در یک زیرمجموعه با همه راس‌های زیرمجموعه دیگر متصل است.



- پیاده‌روی[21]: در مفهوم گراف، پیاده‌روی یک دنباله از رئوس و یال‌ها است که از یک راس شروع شده و در آن رئوس و یال‌ها به ترتیب دنبال می‌شوند، به طوری که هر راس در مسیر با یک یال به راس بعدی متصل باشد. به عبارت دیگر، پیاده‌روی می‌تواند شامل تکرار یال‌ها و رئوس باشد.
- مسیر[22]: در مفهوم گراف، مسیر یک دنباله از یال‌ها و رئوس است که هر یال در آن فقط یک بار ظاهر شده ولی رئوس ممکن است چندین بار ظاهر شوند. به عبارت دیگر، یک مسیر یک پیاده‌روی است که هیچ یال تکراری ندارد.
- مسیر[23]: در مفهوم گراف، مسیر یک دنباله از رئوس است که هر راس در آن با ییکک یال به راس بعدی متصل است. به عبارت دیگر، این یک زنجیره از رئوس است که هیچ راس تکراری ندارد.
- چرخه[24]: در مفهوم گراف، چرخه یک مسیر بسته است که از یک راس شروع شده و در آن رئوس و یال‌ها به ترتیب دنبال می‌شوند، به طوری که آخرین راس به راس اولیه باز می‌گردد. به عبارت دیگر، این یک مسیر است که همچنین به عنوان یک چرخه شناخته می‌شود.
- بسته[25]: در مفهوم گراف، اصطلاح «بسته» ممکن است به مسیرها یا چرخه‌هایی اشاره کند که یک نقطه شروع و پایان مشترک دارند و بنابراین «بسته» نامیده می‌شوند. به طوری که برای مسیرها، می‌توان آن‌ها را مسیرهای بسته[26] نامید و برای چرخه‌ها، آن‌ها را چرخه‌های بسته[27] نامید.
- گراف جهت‌دار[28]: گراف جهت‌دار یک گراف است که هر یال آن یک جهت خاص دارد. به عبارت دیگر، یال‌ها دارای جهتی هستند و معمولاً به عنوان یک جفت از رئوس نمایش داده می‌شوند، به عنوان مثال، اگر یالی از راس A به راس B وجود داشته باشد، این به معنای این است که می‌توان از راس A به راس B حرکت کرد ولی ممکن نیست بتوان از راس B به راس A حرکت کرد.
- منبع[29]: در یک گراف جهت‌دار، راسی که هیچ یالی وارد آن نیست، منبع نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، منبع راسی است که فقط یال‌هایی از آن خارج می‌شود.
- ترمینال[30]: در یک گراف جهت‌دار، راسی که هیچ یالی از آن خارج نمی‌شود، ترمینال نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، ترمینال راسی است که فقط یال‌هایی به آن وارد می‌شود.

[20] Complete Bipartite Graph
[21] Walk
[22] Trail
[23] Path
[24] Cycle
[25] Closed
[26] Closed Paths
[27] Closed Cycles
[28] Directed Graph - Digraph
[29] Source
[30] Terminal

- درجه ورودی[۳۱]: در یک گراف جهت‌دار، درجه‌ی ورودی یک راس، تعداد یال‌هایی است که به آن راس وارد می‌شوند.

- درجه خروجی[۳۲]: در یک گراف جهت‌دار، درجه‌ی خروجی یک راس، تعداد یال‌هایی است که از آن راس خارج می‌شوند.

- متعادل بودن[۳۳]: در مفهوم گراف جهت‌دار، یک مفهوم مرتبط با مسیرهای آن، مفهوم متعادل بودن است. یک مسیر متعادل، مسیری است که برای هر راس، تعداد یال‌هایی که وارد آن می‌شوند، با تعداد یال‌هایی که از آن خارج می‌شوند، برابر است. به عبارت دیگر، درجه ورودی هر راس با درجه خروجی آن برابر است.

- پیش‌ران[۳۴]: در مفهوم گراف جهت‌دار، پیش‌ران یک راس، راس‌هایی هستند که یال‌هایی به این راس می‌رسند، به عبارت دیگر، رئوسی که به این راس متصل هستند و در جهتی عکس جهت یال‌ها به آن می‌روند.

- ماتریس مجاورت[۳۵]: ماتریس مجاورت یک نمایش گراف است که در آن رئوس به عنوان ردیف‌ها و ستون‌ها نمایش داده می‌شوند و وجود یا عدم وجود یال بین هر دو راس با استفاده از مقادیر درون ماتریس نشان داده می‌شود. اگر گراف جهت‌دار باشد، معمولاً ماتریس مجاورت برای نمایش جهات یال‌ها از مقادیر ۰ و ۱ استفاده می‌کند؛ به این معنی که یک مقدار ۱ در موقعیت (i, j) نشان دهنده وجود یال از راس i به راس j است، در حالی که مقدار ۰ نشان‌دهنده عدم وجود یال است. در صورتی که گراف جهت‌دار نباشد، این مقادیر ممکن است به صورت متقارن باشند.

- تلاقی[۳۶]: در مفهوم گراف، تلاقی به ارتباط بین رئوس و یال‌ها اشاره دارد. به عبارت دیگر، ارتباط میان رئوس و یال‌هایی که این رئوس را به هم متصل می‌کنند. در یک گراف جهت‌دار، تلاقی ممکن است به جهت یال‌ها نیز اشاره داشته باشد، به این معنی که مشخص می‌کند که کدام رأس به عنوان منبع و کدام رأس به عنوان ترمینال یک یال در نظر گرفته می‌شود.

- ماتریس پراکنده[۳۷]: ماتریس پراکنده یک نوع ماتریس است که در آن اکثریت عناصر آن صفر هستند. این نوع ماتریس برای نمایش داده‌هایی که اکثر مقادیر آن‌ها صفر هستند، مفید است، زیرا ذخیره‌سازی بهینه‌تری نسبت به ماتریس معمولی دارد.

- گراف‌های ایزومرفیک[۳۸]: گراف‌های ایزومرفیک دو گراف هستند که در یکدیگر قابل تبدیل باشند. به عبارت دیگر، اگر بتوان هر یک از آن‌ها را با تغییر نام رئوس به یکدیگر تبدیل کرد به طوری که ساختار یال‌ها و اتصالات میان رئوس حفظ شود، آنگاه این دو گراف ایزومرفیک هستند. به عبارت دیگر، این دو گراف در واقع «همان» گراف هستند و تنها نامگذاری رئوس آن‌ها متفاوت است.

- زیرگراف ایزومرفیک[۳۹]: در مفهوم گراف، زیرگراف ایزومرفیک زمانی رخ می‌دهد که یک گراف (زیرگراف) دیگری را به صورت زیرگراف در خود جای دهد. به عبارت دیگر، اگر یک گراف (زیرگراف کوچک‌تر) وجود داشته باشد که در گراف دیگر (زیرگراف بزرگ‌تر) به صورت زیرگراف جای بگیرد، آنگاه این دو گراف زیرگراف ایزومرفیک هستند.

اکنون به قضایا و نتایج درون اسلایدها پرداخته می‌شود و موارد به تفکیک توضیح داده می‌شود.

- مجموع درجات یک گراف $G = (V, E)$ برابر است با $2|E| = 2m$.

- تعداد رئوسی که درجه آن‌ها فرد است، زوج می‌باشد.

- گراف کامل K_n با گراف منتظم-$n-1$ برابر است.

- یک پیاده‌روی از u به یک v (به صورتی که $u \neq v$) حاوی مسیری از u به v است. (نکته: حذف چرخه‌های فرعی)

- یک پیاده‌روی بسته با طول فرد شامل چرخه‌ای از طول فرد است.

- در گراف جهت‌دار، هر گراف بدون دور[۴۰] حداقل یک راس دارد که درجه ورودی آن برابر صفر باشد.

[۳۱] in-Degree
[۳۲] out-Degree
[۳۳] Balanced
[۳۴] Predecessor
[۳۵] Adjacency Matrix
[۳۶] Incidence
[۳۷] Sparse Matrix
[۳۸] Isomorphic Graphs
[۳۹] Subgraph Isomorphism
[۴۰] Acyclic Graph

- تعداد پیاده‌روی‌های به طول k از راس i تا راس j برابر است با A_{ij}^k
- اگر تابع اثر یک ماتریس نشان‌دهنده مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس باشد، آنگاه در گراف‌های بدون جهت داریم که:
  - مجموع درایه‌های قطر اصلیِ ماتریس مجاورت برابر صفر می‌باشد. به عبارت دیگر $tr(A) = 0$ برقرار است.
  - مجموع درایه‌های قطر اصلیِ توان دوم ماتریس مجاورت، دو برابر تعداد یال‌ها می‌باشد. به عبارت دیگر $tr(A^2) = 2|E|$ برقرار است.
  - مجموع درایه‌های قطر اصلیِ توان سوم ماتریس مجاورت، شش برابر تعداد مثلث‌های موجود در گراف می‌باشد. به عبارت دیگر $tr(A^3) = the\ number\ of\ triangles\ in\ graph$ برقرار است.

اکنون به کاربردهای دورن اسلایدها پرداخته می‌شود و موراد به تفکیک توضیح داده می‌شود.

- کاربردهای گراف بازه‌ای:
  - مدل کردن مسائل دنیای واقعی با ساختار ریاضی
  - زمان‌بندی رویدادهای مختلف و مدیریت تداخل‌های زمانی
  - نقشه برداری DNA
  - نحوه تنظیم دمای یخچال‌های آزمایشگاه و تعیین تعداد یخچال‌های مورد نیاز به طوری که هر ترکیب شیمیایی در دمای متناسب با خود قرار بگیرد.
- کاربردهای گراف قوس دایره‌ای:
  - ژنتیک
  - کنترل ترافیک
- کاربردهای گراف ایزومرفیک:
  - شناسایی مولکول‌ای مشابه
  - تشخیص الگو و مباحث مرتبط با بینایی ماشین[۴۱]
  - به منظور تشخیص یکسان بودن ساختار دو ترکیب در علم شیمی
- کاربردهای زیرگراف ایزومرفیک:
  - علوم مهندسی
  - شیمی آلی
  - زیست‌شناسی
  - تطبیق الگو
  - تشخیص الگو در بیوانفورماتیک و محاسبات زیستی
  - پردازش تصویر[۴۲] و بینایی ماشین
  - شناسایی زیرمولکول‌های یک مولکول معین
  - تشخیص شکل‌های غیرطبیعی[۴۳]

---

[۴۱] Computer Vision
[۴۲] Image Processing
[۴۳] Recognition of distroted shapes

سوال: با استفاده از ماتریس مجاورت تعداد مسیرهای به طول‌های مختلف را در گراف محاسبه کنید.

پاسخ: سلام

سوال: تعداد گراف‌های تشکیل شده با n راس و تعداد گراف‌های نشکیل شده با یال‌های متفاوت با n راس را محاسبه کنید.

پاسخ: سلام

سوال: ماتریس تلاقی رو بنویسید.

پاسخ: سلام

سوال: گراف بازه‌ای را رسم کنید.

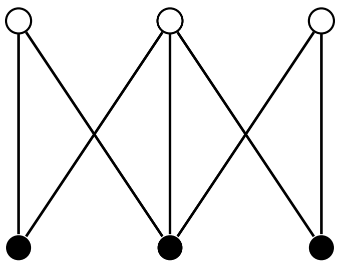
پاسخ: سلام

سوال: گراف قوس دایره‌ای را رسم کنید.

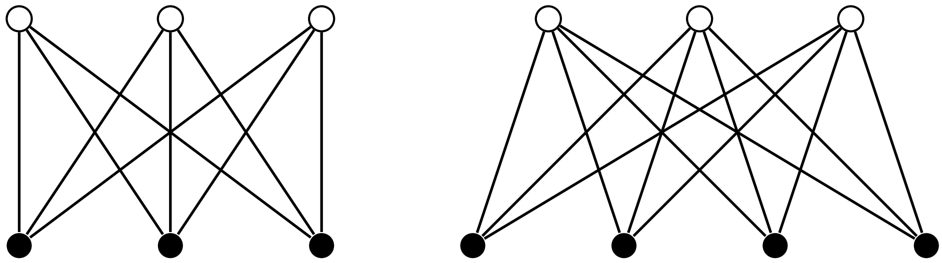
پاسخ: سلام

سوال: گراف‌های دوبخشی و دوبخشی کامل را شرح دهید.

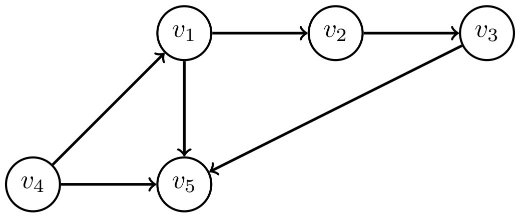
پاسخ: در گراف دوبخشی مجموعه رئوس آن را می‌توان به دو زیرمجموعه جدا از هم تقسیم کرد، به طوری که هیچ راس درون هر زیرمجموعه با راسی در همان زیرمجموعه دیگر متصل نباشد. به عبارت دیگر، این گراف متشکل از دو مجموعه راس است که هر یال تنها بین یک راس از یک مجموعه و یک راس از مجموعه دیگر وجود دارد، نه دو راس از همان مجموعه. به طور مثال گراف زیر یک گراف دوبخشی است.



همینطور در گراف دوبخشی کامل همه رئوس یک زیرمجموعه با همه رئوس زیرمجموعه دیگر به صورت کامل متصل هستند. به عبارت دیگر، هر راس در یک زیرمجموعه با همه راس‌های زیرمجموعه دیگر متصل است. به طور مثال هر دو گرافِ زیر یک گرافِ دوبخشی کامل هستند.



سوال: ترتیب توپولوژیک[۴۴] گراف زیر را به دست آورید.

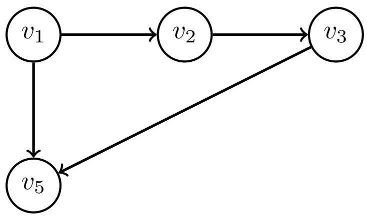


پاسخ: ترتیب توپولوژیک یک ترکیب خطی از رئوس یک گراف جهت‌دار است که شرایط خاصی را ارضا می‌کند. به این صورت که اگر در گراف، یالی از راس u به راس v وجود داشته باشد، راس u قبل از راس v در ترتیب توپولوژیک قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، هیچ دور موجود در گراف نیست و همه رئوس به ترتیبی قرار می‌گیرند که هر راس قبل از راس‌هایی که به آن وابسته‌اند، قرار بگیرد.

به طور مثال در گراف جهت‌داری که صورت سوال مطرح کرده است باید به این صورت عمل کنیم که بتوانیم راسی را پیدا کنیم که درجه ورودی آن برابر صفر باشد. در گراف بالا راس v_4 دارای این خصوصیت می‌باشد و درجه ورودی آن برابر مقدار صفر است. بنابراین مجموعه مورد نظر برای ترتیب توپولوژیک از این راس آغاز می‌شود.

$$Topological\ Order = \{v_4\}$$

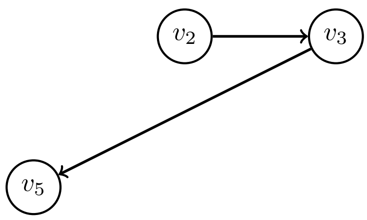
سپس در ادامه باید راس v_4 با تمام یال‌های مرتبط به آن حذف شوند تا بتوان همین مراحل را مجدد طی کرد و راس بعد را شناسایی و در مجموعه قرار داد. بنابراین در صورت حذف راس v_4 گراف مربوطه به شکل زیر خواهد در آمد.



اکنون مجدداً همان شیوه را تکرار خواهیم کرد به این صورت که به دنبال راسی می‌گردیم که درجه ورودی آن برابر با مقدار صفر باشد که در گراف جدید راس v_1 دارای این ویژگی می‌باشد. بنابراین مجموعه ترتیب توپولوژیک را به‌روز کرده و مجدداً مراحل را انجام می‌دهیم.

$$Topological\ Order = \{v_4, v_1\}$$

همواره باید با اضافه شدن راس مورد نظر به مجموعه ترتیب توپولوژیک، آن راس و یال‌های متصل به آن راس حذف گردند بنابراین در این قسمت راس v_1 حذف می‌شود. پس گراف جدید به شکل زیر خواهد بود.



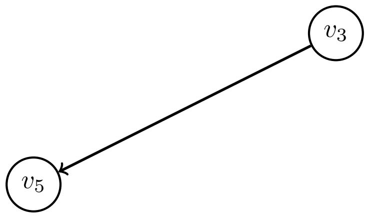
---

[۴۴] Topological Order

مراحل فوق مجدد تکرار شده و به دنبال راسی که درجه ورودی آن برابر صفر می‌باشد می‌گردیم. در گراف نهایی راس v_2 دارای این ویژگی می‌باشد. بنابراین این راس را همانند مراحل قبلی به مجموعه ترتیب توپولوژیک اضافه می‌کنیم.

$$Topological\ Order = \{v_4, v_1, v_2\}$$

اکنون با اضافه کردن راس مورد نظر به مجموعه ترتیب توپولوژیک، راس را از گراف حذف می‌کنیم. بنابراین اکنون باید راس v_2 را با تمام یال‌های متصل به آن حذف کنیم.



مجدد باید همان مراحل قبلی تکرار شود و راسی که درجه ورودی آن برابر صفر است را شناسایی کرد، بنابراین راس v_3 در گراف فعلی که درجه ورودی آن برابر صفر را انتخاب و به مجموعه ترتیب توپولوژیک اضافه می‌کنیم.

$$Topological\ Order = \{v_4, v_1, v_2, v_3\}$$

اکنون با اضافه شدن راس مورد نظر یعنی راس v_3 به مجموعه ترتیب توپولوژیک باید در این گام آن راس را از گراف فعلی حذف کرد و به واسته آن تمام یال‌های مرتبط با آن را نیز از گراف فعلی حذف کرد.

حال بر طبق روال قبلی راسی که درجه ورودی آن برابر صفر است را شناسایی کرده و به مجموعه ترتیب توپولوژیک اضافه می‌کنیم. در اینجا راسی که دارای درجه ورودی صفر می‌باشد راس v_5 است.

$$Topological\ Order = \{v_4, v_1, v_2, v_3, v_5\}$$

از آنجایی که گراف ما با حذف راس شناسایی شده به گراف خالی می‌رسد، بنابراین مراحل به اتمام رسیده و مجموعه ترتیب توپولوژیک ما به صورت زیر می‌باشد:

$$Topological\ Order = \{v_4, v_1, v_2, v_3, v_5\}$$

سوال: با استفاده از الگوریتم هاول حکیمی[۴۵] نشان دهید که آیا دنباله زیر می‌تواند گراف تشکیل دهد؟

$$Sequence = (5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1)$$

پاسخ: نظریه هاول حکیمی بر مبنای الگوریتم‌های پردازشی است که در طبیعت، به خصوص در رفتار اجتماعی موجودات، مشاهده می‌شوند. بر اساس این نظریه، مسائل گرافی، مانند رنگ‌آمیزی گراف و پیدا کردن زیرگراف‌های خاص، با استفاده از الگوریتم‌هایی الهام‌گرفته از رفتار موجودات گروهی، مانند مورچگان، پرندگان، و موجودات اجتماعی دیگر، حل می‌شوند. این نظریه به طور گسترده‌ای در مسائل بهینه‌سازی، تجزیه و تحلیل شبکه‌ها، تحقیقات عملیاتی و حتی رباتیک و هوش مصنوعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

عملکرد این نظریه ساده است و به این منظور استفاده می‌شود که بتوانیم وقتی یک توالی را به ما می‌دهند که شامل درجه راس‌های یک گراف است، میزان امکان پذیری یک گراف با استفاده از بررسی توالی داده شده را تشخیص دهیم. بنابراین در توالی داده شده بالا که نشان‌دهنده این

[۴۵] Havel Hakimi

است که به علت داشتن ۸ عنصر یعنی ۸ راس دارد و هر راس را مشخص کرده است که درجه آن چه قدر می‌باشد، برای امکان سنجی تشکیل گراف با این توالی به این صورت عمل می‌کنیم که اول توالی داده شده را از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم. سپس اولین عدد این توالی را حذف کرده و به میزان بزرگی عدد، از اعداد در ادامه آن شمارش کرده و از هر کدام یک واحد کم می‌کنیم. این عمل به این منظور است که با حذف یک راس از یک گراف باید تمام یال‌های در تماس با آن راس نیز حذف گردند. بنابراین با توجه به این توالی داده شده که اولین عدد این توالی برابر عدد 5 است، این عدد را حذف کرده و از ۵ عدد بعدیِ بعد از این عدد، از هر کدام یک واحد کم می‌کنیم که ۵ عدد بعدیِ این عدد هم اعداد 5 و 5 و 4 و 2 و 1 می‌باشند. بنابراین توالی به دست آمده به شکل زیر می‌باشد:

$$Sequence = (4, 4, 3, 1, 0, 1, 1)$$

سپس در اولین اقدام، توالی به دست آمده را بر اساس بزرگ به کوچک مرتب‌سازی می‌کنیم.

$$Sequence = (4, 4, 3, 1, 1, 1, 0)$$

مجدد همین مراحل را دوباره طی می‌کنیم به این صورت که در این قسمت اولین عدد در توالی عدد 4 است و باید این عدد حذف شده و از ۴ عدد بعدی آن از هر کدام یک واحد کم شود. یعنی باید از اعداد 4 و 3 و 1 و 1 یک واحد کم شود. در صورت انجام این عمل به توالی زیر می‌رسیم.

$$Sequence = (3, 2, 0, 0, 1, 0)$$

سپس مجدداً در اولین اقدام، توالی به دست آمده را بر اساس بزرگ به کوچک مرتب‌سازی می‌کنیم.

$$Sequence = (3, 2, 1, 0, 0, 0)$$

اکنون همانند قبل عمل کرده و مجدداً اولین عدد توالی را حذف و به میزان بزرگی عدد توالی از اعداد بعدی آن کم می‌کنیم. به این صورت که در این توالی اولین عدد برابر 3 است و باید از ۳ عدد بعدی آن از هر کدام یک واحد کم کنیم. یعنی از اعداد 2 و 1 و 0 از هر کدام یک واحد کم می‌کنیم. در صورت انجام این عمل به توالی زیر می‌رسیم.

$$Sequence = (1, 0, -1, 0, 0)$$

در این حالت اکنون به یک عدد ۱- در توالی رسیده‌ایم که این به معنای این است که گرافی با توالی $(5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1)$ قابل ایجاد شدن نمی‌باشد. پس یعنی نمی‌توان گرافی که ۸ راس داشته باشد و درجه هر کدام از راس‌های آن همانند توالی داده شده باشد را رسم کرد.

تنها در صورتی رسم گراف امکان‌پذیر است که تمامی اعداد توالی بعد از مراحل انجام شده به 0 منتهی شوند.

سوال: آیا دو گراف زیر گراف‌های ایزومرفیک هستند؟

پاسخ: سلام

سوال: زیرگرافِ گراف زیر را رسم کنید.

پاسخ: سلام

سوال: آیا یک گراف، زیرگرافِ گراف دیگر است؟

پاسخ: سلام