

جزوه الگوریتم‌های گراف

استاد مربوطه:

سرکار خانم دکتر معصومه دامرودی

نویسنده:

محمد خورشیدی روزبهانی

فهرست مطالب

۵	۱	مقدمات
۶	۱.۱	گراف چیست؟
۸	۱.۱.۱	گرافهای خاص

فصل ۱

مقدمات

در دنیای امروزی پر از فناوری و ارتباطات، مفاهیمی مانند گراف‌ها به عنوان ابزارهای بسیار قدرتمندی در حل مسائل گوناگون مورد استفاده قرار می‌گیرند. گراف‌ها، نه تنها در علوم کامپیوتر بلکه در زمینه‌های مختلفی از جمله شبکه‌های اجتماعی، حمل و نقل، مهندسی، و بیولوژی نیز کاربرد دارند.

مسئله اوایلر^۱ و پل کونیگزبرگ^۲ به عنوان یکی از مسائل کلاسیک و جذاب در تئوری گراف مطرح است که تاریخچه طولانی‌اش به اوایل قرن هجدهم بازمی‌گردد. این مسئله ابتدا توسط ریاضی‌دان معروف لئونارد اوایلر^۳ مطرح شد و بعدها توسط رابرت لویس کونیگزبرگ^۴ مورد تحقیق و توسعه قرار گرفت.

پل کونیگزبرگ، یکی از شهرهای کوچک در استان پروسیا^۵ (اکنون بخشی از شهر کالینینگراد، روسیه^۶)، دارای هفت جزیره‌ی متصل با پل‌هایی به نام‌های «کونیگزبرگ» بود. مسئله مطرح شده توسط مردم محلی این بود که آیا می‌توان از همه‌ی این پل‌ها گذر کرد و به ازای هر پل فقط یک بار وارد شد؟

با بررسی دقیق ساختار شبکه از نقاط (جزیره‌ها) و یال‌ها (پل‌ها)، اوایلر و کونیگزبرگ به این نتیجه رسیدند که می‌توان این مسئله را به یک مسئله گرافی تبدیل کرد. آن‌ها نشان دادند که اگر یک گراف دارای یک مسیر اولیه باشد که همه‌ی یال‌ها را فرا بگیرد (مسیر اوایلر)، آنگاه می‌توان یک دور یال‌ها را طی کرد که هر یال را فقط یک بار گذر کرده باشیم (دور اوایلر). این مسئله نه تنها اهمیت تاریخی دارد بلکه به عنوان یک مسئله مبنایی در تئوری گراف و همچنین در الگوریتم‌های کاربردی مانند جستجوی در عمق و جستجوی در عرض مورد استفاده قرار می‌گیرد. توانایی حل این مسئله با استفاده از الگوریتم‌های مناسب از جمله نشان دهنده‌ی فهم عمیق و قدرت الگوریتم‌های گرافی است.

سِر ویلیام همیلتون^۷ بودای (۸ مارس ۱۷۸۸ - ۶ سپتامبر ۱۸۵۶) دیپلمات، زبان‌شناس، و دانشمند بریتانیایی بود. او بیشتر به خاطر کشف‌هایش در زمینه حساب مجرد و هندسه معروف است. همیلتون مفهوم ویژه‌ای را به نام کواترنیو^۸ در جبر خطی ارائه داد و مفاهیم جدیدی را در هندسه معمولی و معادلات دیفرانسیل معرفی کرد. همیلتون همچنین به خاطر کارهای خود در زمینه فلسفه و مطالعات یونان باستان نیز شناخته می‌شود. او به زبان یونانی مسلط بود و در ترجمه اثرهای بزرگی از جمله سوکراتیکا^۹ و الهینه^{۱۰} و همچنین تالیف نظریه‌های خود درباره این آثار مشهور شد.

گراف‌ها به عنوان ابزارهای قدرتمندی در بسیاری از زمینه‌ها و صنایع مورد استفاده قرار می‌گیرند. برخی از مزایا و کاربردهای کلیدی گراف‌ها در موارد امروزی عبارتند از:

۱. شبکه‌های اجتماعی: گراف‌ها به طور گسترده در شبکه‌های اجتماعی مانند فیسبوک، توییتر، و لینکدین استفاده می‌شوند تا روابط بین افراد و شبکه‌های اجتماعی را مدل‌سازی کنند و الگوهای اجتماعی را بررسی کنند.

۲. جستجوی اطلاعات و موتورهای جستجو: موتورهای جستجو از گراف‌ها برای مدل‌سازی وابستگی بین صفحات و اطلاعات در وب استفاده می‌کنند تا جستجوی بهتری برای کاربران فراهم کنند.

^۶ Kaliningrad, Russia
^۷ Sir William Hamilton
^۸ Quaternion
^۹ Socratic
^{۱۰} Elenchus

^۱ Euler
^۲ Koningsberg bridges
^۳ Leonhard Euler
^۴ Robert Louis Konigsberg
^۵ Province of Prussia

۳. بهینه‌سازی مسائل: گراف‌ها به عنوان ابزاری برای بهینه‌سازی مسائل مانند مسائل مسیریابی، زمان‌بندی و تخصیص منابع استفاده می‌شوند.
 ۴. حوزه‌های حمل و نقل و مسائل شهری: در حوزه حمل و نقل، گراف‌ها برای مدل‌سازی شبکه‌های جاده، مسیرهای حمل و نقل عمومی و ترافیک شهری استفاده می‌شوند.
 ۵. زیست‌شناسی محاسباتی و زیست‌انفورماتیک: در زیست‌شناسی محاسباتی، گراف‌ها برای مدل‌سازی شبکه‌های تعاملات ژنتیکی، مسیرهای متابولیک و شبکه‌های پروتئینی استفاده می‌شوند.
 ۶. تجزیه و تحلیل شبکه‌های مخابراتی: در مخابرات، گراف‌ها برای مدل‌سازی و تحلیل شبکه‌های ارتباطی و ترافیک شبکه استفاده می‌شوند.
- به طور کلی، گراف‌ها به عنوان یک ابزار قدرتمند برای مدل‌سازی، تحلیل، و بهینه‌سازی سیستم‌ها و روابط پیچیده در موارد مختلف از جمله علوم کامپیوتر، مهندسی، علوم زندگی، و اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ گراف چیست؟

گراف به صورت علمی به عنوان یک مجموعه از رئوس یا نقاط که توسط یال‌ها یا توصیل‌ها به هم متصل شده‌اند، تعریف می‌شود. در یک گراف، رئوس نمایانگر موجودیت‌ها یا نقاط مختلف است که به هر نحوی با یکدیگر وصل شده‌اند، و یال‌ها نمایانگر روابط یا ارتباطات بین این رئوس هستند. این روابط می‌توانند دوطرفه و یا یک‌طرفه باشند و در صورت داشتن وزن، می‌توانند مقادیر عددی داشته باشند که نشان‌دهنده ویژگی‌های مختلفی مثل فاصله، هزینه، یا قدرت ارتباط باشند.

با این تعریف، گراف‌ها به عنوان یک ابزار اساسی در مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌ها و ارتباطات پیچیده در علوم مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند، از جمله علوم کامپیوتر، ریاضیات، فیزیک، زیست‌شناسی، مهندسی، و اقتصاد.

مفاهیم اساسی گراف‌ها شامل عناصری هستند که در تعریف و توصیف یک گراف نقش دارند. در ادامه به توضیح این مفاهیم پرداخته می‌شود:

- رأس یا نقطه^{۱۱}: رأس‌ها یا نقاط، موجودیت‌هایی هستند که در یک گراف وجود دارند و می‌توانند با یال‌ها به هم متصل شوند. هر رأس معمولاً با یک شناسه یا برچسب شناخته می‌شود.
- یال یا توصیل^{۱۲}: یال‌ها یا توصیل‌ها، ارتباطات بین رئوس یا نقاط در یک گراف هستند. هر یال معمولاً دو رأس را به هم وصل می‌کند و می‌تواند ویژگی‌هایی مانند وزن داشته باشد.
- درجه رأس^{۱۳}: درجه یک رأس تعداد یال‌های متصل به آن رأس است. برای یک گراف جهت‌دار، درجه رأس به تعداد یال‌هایی که به آن رأس وارد می‌شوند یا از آن خارج می‌شوند بستگی دارد.
- گراف جهت‌دار^{۱۴}: در یک گراف جهت‌دار، هر یال دارای جهت یا راه انتقالی است که از یک رأس مبدأ به یک رأس مقصد اشاره دارد.
- گراف بدون جهت^{۱۵}: در یک گراف بدون جهت، یال‌ها دوطرفه هستند و هیچ جهت مشخصی ندارند، به عبارت دیگر، ارتباط بین دو رأس دوطرفه است.
- زیرگراف^{۱۶}: یک زیرگراف از یک گراف، یک گراف است که رئوس و یال‌های آن به تعدادی از رئوس و یال‌های گراف اصلی محدود شده‌اند.
- مسیر^{۱۷}: یک مسیر در یک گراف، دنباله‌ای از رئوس است که هر رأس به رأس بعدی از طریق یک یال متصل است.
- دور^{۱۸}: یک دور در یک گراف، یک مسیر بسته است که شامل حداقل یک رأس است و اولین و آخرین رأس آن یکسان است.
- درخت^{۱۹}: یک درخت گراف بدون دور است که همه رأس‌ها به جز یک رأس به عنوان رأس ریشه، درجه ۲ یا بیشتر ندارند.

Subgraph ^{۱۶}

Path ^{۱۷}

Cycle ^{۱۸}

Tree ^{۱۹}

Vertex - Node ^{۱۱}

Edge - Link ^{۱۲}

Degree of a Vertex ^{۱۳}

Directed Graph ^{۱۴}

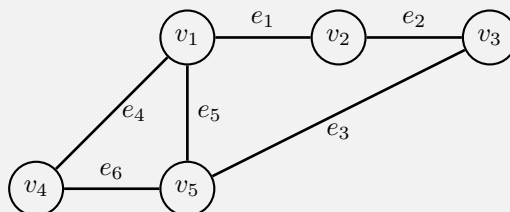
Undirected Graph ^{۱۵}

تعریف علمی

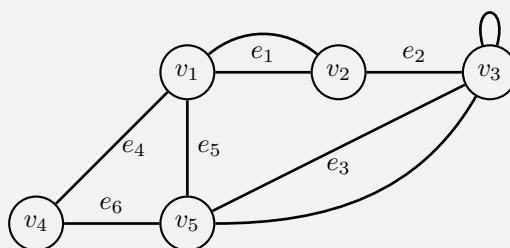
یک گراف G به صورت $G = (V, E)$ نمایش داده می‌شود که در آن V ، رئوس را نشان می‌دهد و E ، یال‌ها را نشان می‌دهد و مجموعه‌ای متناهی می‌باشند؛ یعنی $|V| = n$ و $|E| = m$ می‌باشد. در گراف زیر داریم که:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$



لازم به ذکر است که گراف ساده دارای طوقه ^a و یا چندین یال متصل بین دو گره یکسان ^b نمی‌باشد. به طور مثال گراف ساده نمی‌تواند همانند شکل زیر باشد:



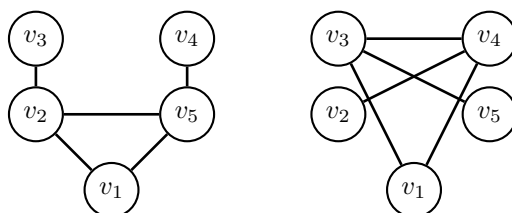
self-loop ^a
multiple edges ^b

در ادامه به بررسی برخی از خواص گراف‌ها می‌پردازیم که به شرح زیر است:

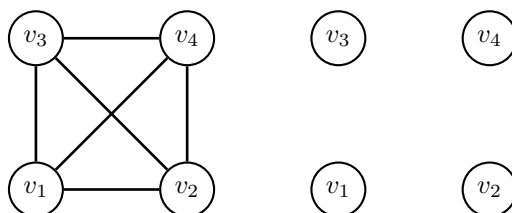
- راس جدا شده ^{۲۰}: یک راس جدا شده دارای درجه ۰ می‌باشد.
- مجموع درجات یک گراف $G = (V, E)$ برابر است با $2|E| = 2m$
- نکته حائز اهمیت این است که تعداد رئوس درجه فرد زوج است.

بررسی برخی از مفاهیم گراف:

- متمم ^{۲۱}: گرافی متمم گراف دیگر است که تمام یال‌هایی که گراف G دارد در گراف G' نباشد. در واقع راه تشخیص منطقی آن به این شکل است که اگر دو گراف G و G' را بر روی یکدیگر قرار دهیم، آنگاه یک گراف کامل تشکیل می‌شود که تمام یال‌های آن گراف با یکدیگر رسم شده‌اند.



نکته‌ای که در اینجا حائز اهمیت است این است که متمم گراف کامل در واقع گراف خالی است و به این صورت می‌باشد که گراف کامل تمام یال‌های آن رسم شده است بنابراین متمم گراف کامل، یک گراف خالی با همان گره‌ها بدون هیچ یالی می‌باشد.

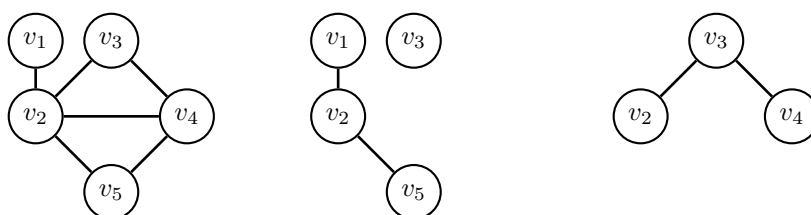


• زیرگراف: یک گراف H ، زیرگرافِ گراف G می‌باشد به صورتی که دو شرط زیر برای آن برقرار باشد:

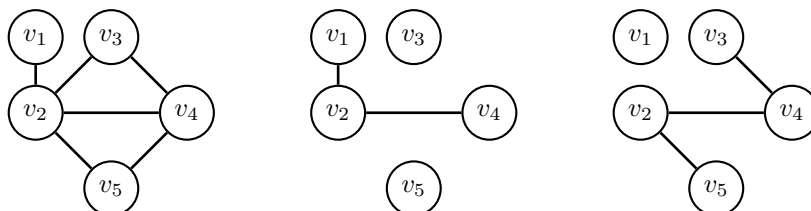
– تمام گره‌های گراف H دارای شرط $G(V(H) \subseteq V(G))$ باشد

– تمام یال‌های گراف H دارای شرط $G(E(H) \subseteq E(G))$ باشد.

به طور مثال می‌توان به دو زیرگراف زیر که مشتق شده از گراف اصلی هستند توجه کرد:



• زیرگراف فراگیر^{۲۲}: زیرگرافِ فراگیر یک گراف G ، زیرگرافی است که فقط با حذف یال‌ها به دست آید. به عبارت دیگر می‌توان گفت که در دو زیرگراف تمامی گره‌ها به صورت یکسان و مشابه وجود دارند اما یال‌های آن‌ها متفاوت است. به طور مثال می‌توان به دو زیرگراف فراگیر زیر که مشتق شده از گراف اصلی هستند توجه کرد:



۱.۱.۱ گراف‌های خاص

گراف تهی

گرافی که بدون گره باشد (و به طبع آن بدون یال هم باشد) گراف تهی^{۲۳} نامیده می‌شود.

گراف بدیهی

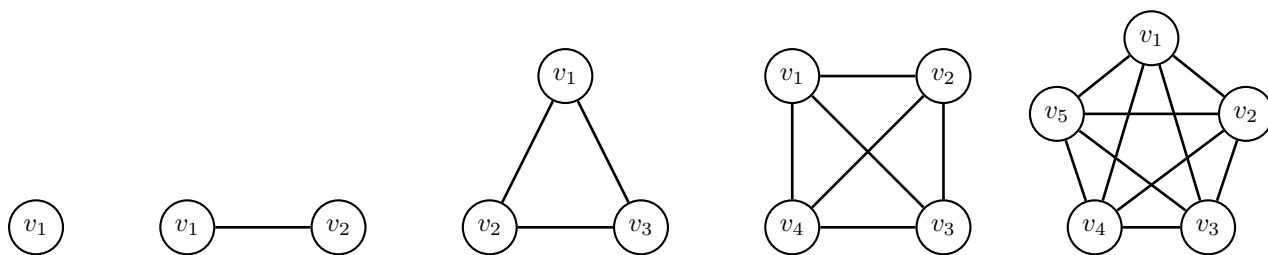
هر گرافی که فقط یک راس داشته باشد، گراف بدیهی^{۲۴} نامیده می‌شود و تمام گراف‌های دیگر غیربدیهی^{۲۵} می‌باشند.

گراف کامل

یک گراف K_n ، گراف ساده‌ای است که تمام یال‌های ممکن آن به مقدار $\frac{n \times (n-1)}{2}$ رسم شده باشد. همین‌طور لازم به ذکر است که n می‌تواند مقادیر مختلفی از مجموعه اعداد طبیعی داشته باشد. در زیر چند نمونه برای گراف K_n با n های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ رسم شده است.

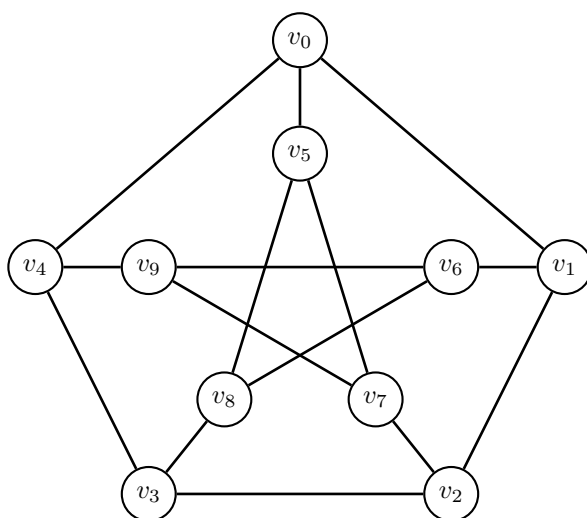
Trivial Graph^{۲۴}
Nontrivial^{۲۵}

Spanning Subgraph^{۲۲}
Null Graph^{۲۳}



گراف منظم-k

یک گراف منظم-k^{۲۶}، گراف ساده‌ای است با راس‌های دارای درجه یکسان با یکدیگر. به طور مثال یک گراف منظم-۳ گرافی هست که درجه تمام راس‌های آن ۳ باشد ولی این که این گراف دارای چند راس می‌باشد حائز اهمیت نمی‌باشد.



یک مورد که در این قسمت شایان به توجه است این است که گراف کامل k_n برابر با گراف منظم-($n-1$) می‌باشد.