Travaux pratiques de traitement d'images par ondelettes

Nicolas Boutry

Décembre 2021

1 Les failles de Fourier

1. Générez un signal fait d'une sinusoïde de fréquence $freq1 = 0.1$ de t = 0 à t = 99 puis d'une sinusoïde de fréquence $freq2 = 0.3$ de t = 100 à t = 199.

2. Faites ensuite leur transformée de Fourier, pour en déduire les modules et les phases.

3. Qu'observez vous au niveau du module des deux signaux ? et de leurs phases ?

4. Comment peut-on différencier ces deux signaux si l'on ne dispose que de leur transformée de Fourier ?

5. Que se passe-t-il si on (re)construit le signal temporel dont le module est celui du premier signal et dont la phase est celle du deuxième signal ? (utilisez ifft) Expliquez.

2 Séparation temporelle des fréquences

1. Partant du premier signal de la section 1, cherchez une fenêtre de Hamming qui soit suffisamment étroite pour ne pas couvrir trop de signal en même temps, et suffisamment large pour couvrir plusieurs oscillations du morceau de sinusoïde à $freq1$ et du morceau a $freq2$.

2. Créez une fonction qui génère une fenêtre de Hamming de largeur voulue sur un segment de taille voulu et centré en un x donné: `https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function`

3. Calculez ensuite le produit "point à point" entre le signal et Hamming centrée en t = 50 et en t = 150.

4. Calculez la transformée de Fourier de ces deux nouveaux signaux.

5. Que peut-on lire sur les modules de ces deux transformées de Fourier ?
6. Autrement dit, a-t-on bien séparé les deux fréquences temporellement ?

3 Short-Time Fourier Transform

On rappelle sa formule:

$$Sf(\mu, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ g^*_{\mu,\xi}(t)dt$$

avec $g_{\mu,\xi}$ une fenêtre de Hamming de la largeur de votre choix, modulée en fréquence et translatée en temps comme vu en cours.

1. Ré-implémentez là en vous aidant de la section 2
2. Calculez-la pour un des signaux vus à la section 1 pour des intervalles bien choisis de μ et de ξ.
3. Affichez son spectrogramme (2D):

   $$|Sf(\mu, \xi)|^2$$

4. Comment repérez-vous les deux fréquences sur cette image ?
5. Comparez les spectrogrammes pour les deux signaux de la section 1.
6. Arrivez-vous maintenant à les différencier aisément (spectralement parlant) ?

4 Scalogramme (Partie 1)

1. Commencez par reprendre le code que vous avez fait juste avant et adaptez le pour synthétiser une ondelette de Haar centrée en un temps donné et une *échelle* donnée.
2. Vérifiez bien que l'ondelette de Haar soit normalisée (cf. cours) et de moyenne nulle (donc la moyenne doit être largement plus petite que 10^{-5}).
3. Calculez ensuite le scalogramme, c'est-à-dire le module au carré de la FWT définie par:

   $$Tf(j, n) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \psi^*_{j,n}(t)dt$$

   de nos deux signaux habituels.
4. Observez (1) si on peut les différencier par leur scalogramme, et (2) la différence avec le spectrogramme.
5. Quelle approche vous parait la plus pratique et pourquoi ? Expliquez.

5 Scalogramme (Partie 2)

Comme le scalogramme est difficile à lire pour des fréquences trop proches, on se propose de générer le signal fait d'une sinusoïde à une fréquence de 0.05 sur 256 échantillons puis d'une sinusoïde à une fréquence de 0.01 sur la même longueur. Après avoir choisi les puissances de 2 de la manière suivante:

$$echelle = 2^{0.1*k}, k \in [10, 80]$$

qu'observez-vous sur le scalogramme ? Faites le lien entre les maxima des fonctions et les valeurs maximales dans le scalogramme (maxima locaux).

6 Pyramide Gaussienne (1D)

1. Reprenez le premier signal de la section 1 que l'on va nommer $g_0(t)$ et calculez les signaux:

$$g_i(t) = g_0(t) * \left(\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_i^2}\right)\right)_{N_1}$$

   avec $\sigma_i = 2^i$ pour $i \in [1, 3]$ (note : $*$ représente l'opérateur de convolution, et $(.)_N$ représente ici l'opérateur normalisation par la norme $\|\|_1$).

2. Comment appelle-t-on le signal $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$?
3. Que représente chaque g_i fréquentiellement parlant ?
4. Combien a-t-on d'échelles ? Détaillez.
5. Concaténez ces 4 signaux et les afficher.

7 Pyramide Laplacienne (1D)

1. Reprenez l'énoncé de la section précédente mais cette fois-ci générez en plus de $g_0(t)$ les signaux:

$$h_i(t) = g_0(t) * (g_i''(t))_{N_2}$$

   pour $i \in [1, 3]$ et le signal $g_3(t)$ (attention, on normalise ce coup-ci par la norme 2, cf. le N_2).

2. Comment appelle-t-on le signal $\{h_1, h_2, h_3, g_3\}$?
3. Que représente chaque h_i fréquentiellement parlant ?
4. Que représente $g_3(t)$?
5. Combien a-t-on d'échelles au total ? Détaillez.
6. Comment peut-on calculer ces 4 signaux pour minimiser les temps de calculs ?
7. Concaténez ces 4 signaux et les afficher.

8 Pyramide Laplacienne (2D)

1. Trouvez une image de votre choix de taille maximale 512 par 512.
2. Calculez sa pyramide Laplacienne de la manière voulue, merci de détailler votre approche (3 échelles suffisent).
3. Rappelez ce que veulent dire les sous-images HH, HL, LH, LL.
4. De quelle image peut on se servir pour calculer plus vite les HH, HL, LH de la résolution suivante quand on augmente d'un niveau la pyramide Laplacienne ?
5. Bonus : affichez la pyramide Laplacienne telle que vue en cours.