Introduction aux Équations Différentielles Partielles

Projet : Modélisation du Stockage du Dioxyde de Carbone dans les Forêts

Elsa Catteau, Yseult Canac-Pons, Katell Nio

Polytech Nice-Sophia, MAM3

Sommaire

Sommaire

Introduction

- Contexte des équations différentielles partielles (EDP).
- Importance dans les phénomènes physiques (diffusion, convection, etc.).

Objectif

- Étude de l'équation de convection-diffusion.
- Validation des résultats numériques par comparaison avec la solution exacte.
- Analyse des erreurs pour évaluer la précision.

Sommaire

Équation de diffusion et convection

Formulation générale

$$f(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial u}{\partial x}$$

- D : coefficient de diffusion.
- C : coefficient de convection.
- $f(x,t)$: terme source calculé à partir de la solution exacte.

POLYTECH NICE-SOPHIA

Sommaire

Analyse numérique : Termes γ et ν

Rappels des définitions

- $\gamma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$: terme de diffusion.
- $\nu = \frac{C\Delta t}{\Delta x}$: terme de convection.

- **Termes diffusifs** (γ) : modélisent la dissipation.
- **Termes convectifs** (ν) : modélisent le transport.
- Conditions de stabilité : $\gamma \leq \frac{1}{2}$, $\nu \leq 1$.

POLYTECH NICE-SOPHIA

Schéma aux différences finies

Équation discrétisée

Pour u_i^n, valeur discrète de $u(x,t)$ au point i et instant n, l'équation discrétisée est :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \gamma(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \nu(u_i^n - u_{i-1}^n) + f(x_i, t_n)\Delta t$$

Sommaire

Fiche 1 : Solution analytique $u(x,t) = \cos(\pi x)(1+t)$

- $C = 1,\ D = 1,\ L = 1$
- $Nx = 10000,\ Nt = 50$
- $\partial\Omega = \{0, 1\}$
- Condition initiale (t=0) : $u_i^0 = \cos(\pi x)$
- Conditions aux limites : $u_L^n = 1 + t$; $u_R^n = -(1+t)$

Terme source

$$f(x,t) = \cos(\pi x) + D(\pi^2 \cos(\pi x)(1+t)) - C(\pi \sin(\pi x)(1+t))$$

Comparaison solution exacte vs calculée

- Comparaison $u(x, T)$ exacte et $u(x, T)$ calculée.
- Résultats numériques avec schéma explicite.
- Bonne concordance pour des valeurs de Δt adaptées.

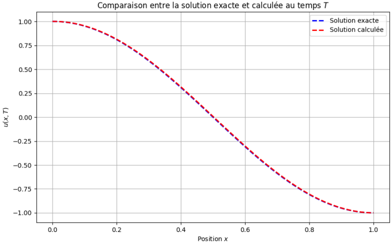

Figure: Comparaison solution exacte vs solution calculée en fonction de x

Analyse des erreurs

Δx	E_∞	**Commentaires**
$1/10$	0.0275	
$1/20$	0.0140	$\approx /2$
$1/40$	0.0071	$\approx /2$

Table: Erreur en fonction de Δx, avec Δt fixé.

Etude de $E(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$

- q : Ordre de précision en espace.
- Méthode : On fixe Δt et on varie Δx.

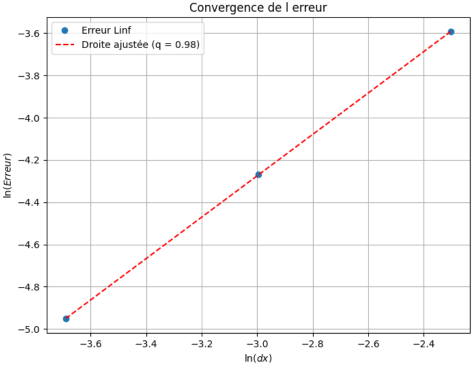

Figure: $\ln(E)$ en fonction $\ln(\Delta x)$

Analyse des erreurs

Δt	E_∞	**Commentaires**
$1/100000$	9.07e-05	
$1/200000$	4.57e-05	$\approx /2$
$1/400000$	2.30e-05	$\approx /2$

Table: Erreur en fonction de Δt, avec Δx fixé.

POLYTECH NICE-SOPHIA

Etude de $E(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$

- p : Ordre de précision en temps.
- Méthode : On fixe Δx et on varie Δt.

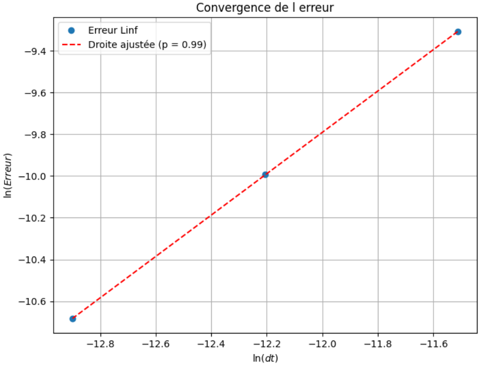

Figure: $\ln(E)$ en fonction $\ln(\Delta t)$

Fiche 2 : Solution analytique $u(x,t) = \sin(\pi x)\exp(-t)$

- $C = 1,\ D = 1,\ L = 1$
- $Nx = 10000,\ Nt = 50$
- $\partial\Omega = \{0, 1\}$
- Condition initiale (t=0) : $u_i^0 = \sin(\pi x)$
- Conditions aux limites : $u_L^n = 0$; $u_R^n = 0$

Terme source

$$f(x,t) = -\cos(\pi x)\exp(-t) + D\pi^2\sin(\pi x)\exp(-t) + C\pi\cos(\pi x)\exp(-t)$$

Comparaison solution exacte vs calculée

- Comparaison $u(x, T)$ exacte et $u(x, T)$ calculée.
- Résultats numériques avec schéma explicite.
- Bonne concordance pour des valeurs de Δt adaptées.

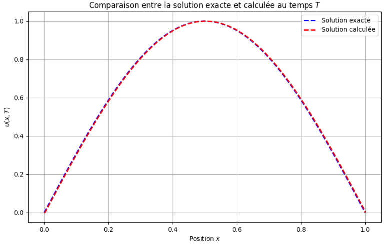

Figure: Comparaison solution exacte vs solution calculée en fonction de x

Analyse des erreurs

Δx	E_∞	**Commentaires**
$1/10$	0.03835	
$1/20$	0.01821	$\approx /2$
$1/40$	0.00873	$\approx /2$

Table: Erreur en fonction de Δx, avec Δt fixé.

Etude de $E(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$

- q : Ordre de précision en espace
- Méthode : On fixe Δt et on varie Δx

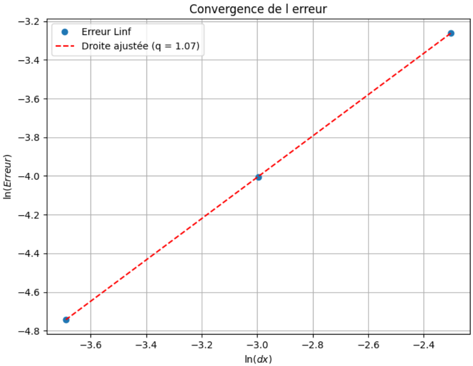

Figure: $\ln(E)$ en fonction $\ln(\Delta x)$

POLYTECH NICE-SOPHIA

Analyse des erreurs

Δt	E_∞	**Commentaires**
$1/100000$	7.18e-05	
$1/200000$	3.59e-05	$\approx /2$
$1/400000$	1.79e-05	$\approx /2$

Table: Erreur en fonction de Δt, avec Δx fixé.

Etude de $E(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$

- p : Ordre de précision en temps.
- Méthode : On fixe Δx et on varie Δt.

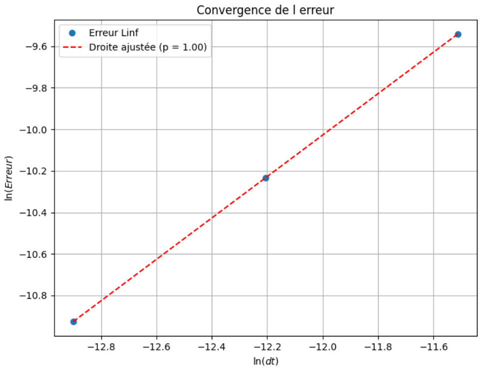

Figure: $\ln(E)$ en fonction $\ln(\Delta t)$

Fiche 3 : Solution analytique $u(x,t) = (\sin(\pi x) + \cos(2\pi x)) \exp(-\pi^2 t)$

- $C = 1,\ D = 1,\ L = 1$
- $Nx = 10000,\ Nt = 50$
- $\partial\Omega = \{0, 1\}$
- Condition initiale (t=0) : $u_i^0 = \sin(\pi x) + cos(2\pi x)$
- Conditions aux limites : $u_L^n = exp(-\pi^2 t)$; $u_R^n = exp(-\pi^2 t)$

Terme source

$$f(x,t) = -\pi^2(\sin(\pi x) + \cos(2\pi x)) \exp(-\pi^2 t) + D\pi^2(\sin(\pi x)$$
$$+ 4\cos(2\pi x)) \exp(-\pi^2 t) + C(\pi\cos(\pi x) - 2\pi\sin(2\pi x)) \exp(-\pi^2 t)$$

Comparaison solution exacte vs calculée

- Comparaison $u(x, T)$ exacte et $u(x, T)$ calculée.
- Résultats numériques avec schéma explicite.
- Bonne concordance pour des valeurs de Δt adaptées.

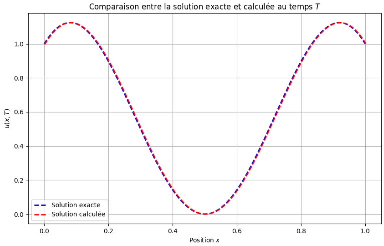

Figure: Comparaison solution exacte vs solution calculée en fonction de x

Analyse des erreurs

Δx	E_∞	**Commentaires**
$1/10$	0.0577	
$1/20$	0.0340	$\approx /2$
$1/40$	0.0180	$\approx /2$

Table: Erreur en fonction de Δx, avec Δt fixé.

Etude de $E(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$

- q : Ordre de précision en espace.
- Méthode : On fixe Δt et on varie Δx.

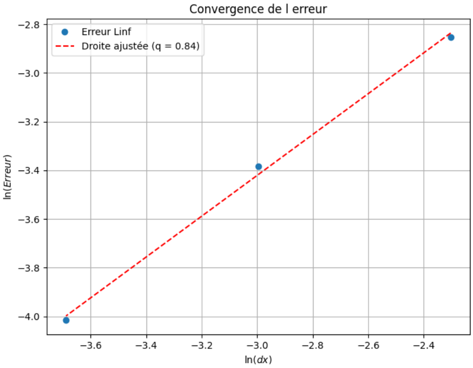

Figure: $\ln(E)$ en fonction $\ln(\Delta x)$

Analyse des erreurs

Δt	E_∞	**Commentaires**
$1/100000$	2.40e-04	
$1/200000$	1.21e-04	$\approx /2$
$1/400000$	6.06e-05	$\approx /2$

Table: Erreur en fonction de Δt, avec Δx fixé.

Etude de $E(\Delta t, \Delta x) = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$

- p : Ordre de précision en temps.
- Méthode : On fixe Δx et on varie Δt .

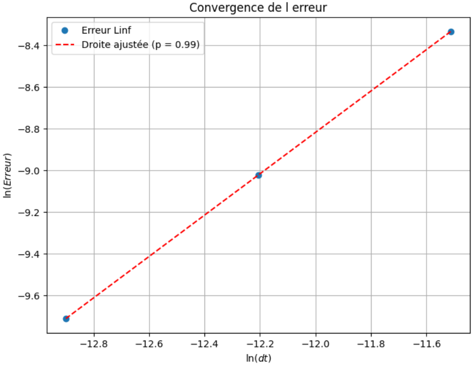

Figure: $\ln(E)$ en fonction $\ln(\Delta t)$

Sommaire

Conclusion

- Ce qui a été confirmé : la méthode est valide sous certaines conditions.
- Limites : conditions de stabilité, précision dépendante des pas.
- Perspectives :
  - Étude de cas 2D/3D.