Ejercicio de suma: repaso de inducción

1. Enunciado

$$\text{Demostrar que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ vale que } \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

2. Demostración por inducción

Sea $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$. Se nos pide demostrar $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$. Lo haremos por inducción en n.

2.1. Caso base

Debemos probar $P(1)$.

Por definición, $P(1) \equiv \sum_{i=1}^{1} i \cdot 2^i = (1-1)2^{1+1} + 2 \Leftrightarrow 1 \cdot 2^1 = 2$, que es trivialmente cierto. Luego queda probado $P(1)$, completando el caso base.

2.2. Paso inductivo

Debemos probar $(\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n+1))$.

Supongamos entonces que $n \in \mathbb{N}$ es un natural cualquiera tal que se cumple $P(n)$. Con esta hipótesis inductiva, tenemos que demostrar $P(n+1)$, que por definición es:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i &= ((n+1)-1)2^{(n+1)+1} + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (n+1)2^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Pero recordemos que estamos suponiendo que vale la hipótesis inductiva, es decir, $P(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$. Reemplazando de esta forma la sumatoria en el lado izquierdo de 1, lo que tenemos que demostrar queda:

$$\begin{aligned} (n+1)2^{n+1} + (n-1)2^{n+1} + 2 &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((n+1) + (n-1))\, 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2n \cdot 2^{n+1} &= n \cdot 2^{n+2} \end{aligned}$$

Lo cual es válido ya que $2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$. Con esto hemos probado lo que queríamos, es decir, $P(n+1)$, partiendo de la suposición de que vale $P(n)$. Esto completa el paso inductivo, y con eso la demostración. $\square$

3. Bonus: Demostración alternativa

Una demostración alternativa "directa", sin inducción sería por ejemplo la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^i$$

Usando la fórmula de la suma de la serie geométrica[1] queda:

$$\sum_{j=1}^{n} 2^j(2^{n-j+1}-1) = \sum_{j=1}^{n}\left(2^{n+1}-2^j\right) = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j = n \cdot 2^{n+1} - (2^{n+1}-2) = (n-1)2^{n+1}+2$$

Donde hemos usado nuevamente la fórmula de la suma de la serie geométrica para eliminar la sumatoria.

$\square$

[1] $\sum_{i=0}^{n-1} a_0 \cdot r^i = a_0 \cdot \frac{r^n-1}{r-1}$. En nuestro caso será $r=2$, a_0 es el primer término de la suma, y n la cantidad total de términos.