

# Primalidad y Factorización

Agustín Santiago Gutiérrez

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Problemas, Algoritmos y Programación 2018

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

If numbers aren't beautiful, I don't know what is.

*Paul Erdős*

Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reason to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate.

*Leonhard Euler*

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Definición

## Aritmética módulo $M$ ( $\mathbb{Z}_M$ )

La aritmética módulo  $M$  consiste en una modificación de la aritmética usual de números enteros, en la cual trabajamos únicamente con el *resto* de los números al ser divididos por un cierto entero fijo  $M > 0$ , ignorando “todo lo demás” de los números involucrados.

# Definición

## Aritmética módulo $M$ ( $\mathbb{Z}_M$ )

La aritmética módulo  $M$  consiste en una modificación de la aritmética usual de números enteros, en la cual trabajamos únicamente con el *resto* de los números al ser divididos por un cierto entero fijo  $M > 0$ , ignorando “todo lo demás” de los números involucrados.

- Así,  $11 = 18$  si estamos trabajando módulo 7, pues ambos dejan un resto de 4 en la división por 7. Esto se suele notar  $11 \equiv 18 \pmod{7}$

# Definición

## Aritmética módulo $M$ ( $\mathbb{Z}_M$ )

La aritmética módulo  $M$  consiste en una modificación de la aritmética usual de números enteros, en la cual trabajamos únicamente con el *resto* de los números al ser divididos por un cierto entero fijo  $M > 0$ , ignorando “todo lo demás” de los números involucrados.

- Así,  $11 = 18$  si estamos trabajando módulo 7, pues ambos dejan un resto de 4 en la división por 7. Esto se suele notar  $11 \equiv 18 \pmod{7}$
- Una forma operacional de ver esta aritmética es suponer que todo el tiempo tenemos los números reducidos al rango de enteros en  $[0, M)$ , y tomamos el resto de la división por  $M$  para devolverlos a ese rango luego de cada operación.

# Propiedades

A los efectos de realizar sumas, restas y productos, la aritmética modular es análoga a la aritmética usual, manteniendo sus propiedades importantes.

- $a + b \equiv b + a \pmod{M}$
- $(a + b) + c \equiv a + (b + c) \pmod{M}$
- 0 es el neutro de la suma.
- Para todo  $a$  existe un único inverso aditivo modular  $-a$ ,  
 $a + (-a) \equiv 0 \pmod{M}$ .  $a - b \equiv a + (-b) \pmod{M}$
- $a \cdot b \equiv b \cdot a \pmod{M}$
- $(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \pmod{M}$
- 1 es el neutro del producto.
- $(a + b) \cdot c \equiv a \cdot c + b \cdot c \pmod{M}$



# Forma operacional en el código

Supongamos que se tiene que computar una suma de los números enteros  $a[0]$  hasta  $a[N-1]$ , pero solamente nos importan los últimos 4 dígitos (equivale a trabajar módulo 10000).

```
1 | int result = 0;  
2 | for (int i = 0; i < N; i++)  
3 |     result = (result + a[i]) %10000;
```

Como decíamos antes, a nivel de operaciones trabajar con aritmética modular equivale a simplemente tomar módulo luego de cada operación aritmética básica.

# Problema ante números negativos

Sin embargo, la implementación anterior puede resultar problemática al trabajar con números **negativos**.

- Si por ejemplo fuera  $N = 2$ ,  $a[0] = 123$  y  $a[1] = -200$ , el código anterior produce  $-77$ , que puede no ser lo deseado.
- Incluso si no hay números negativos en el problema, es muy común que **restemos** números en nuestra solución.
- Estos resultados con valores negativos ocurren porque el resultado de la división entera se redondea hacia cero en los lenguajes y plataformas más populares.

# Problema ante números negativos

Sin embargo, la implementación anterior puede resultar problemática al trabajar con números **negativos**.

- Si por ejemplo fuera  $N = 2$ ,  $a[0] = 123$  y  $a[1] = -200$ , el código anterior produce  $-77$ , que puede no ser lo deseado.
- Incluso si no hay números negativos en el problema, es muy común que **restemos** números en nuestra solución.
- Estos resultados con valores negativos ocurren porque el resultado de la división entera se redondea hacia cero en los lenguajes y plataformas más populares.
- Solución:

```
int MOD(int x, int M){return ((x%M)+M)%M; }
```

# Cuidado con el overflow

- Otro problema al que es especialmente común enfrentarse al trabajar con aritmética modular es el peligro de tener overflow en las operaciones.
- Por esto es que tomamos módulo luego de cada operación, y no solamente al final de todo el programa.
- Truquito en C++: Tener en cuenta el tipo `__int128`, entero de 128 bits. No está presente en todo judge, pero puede ser muy útil cuando está disponible.

# ¿Qué pasa con la división?

- ¿Podemos operar modularmente con la división tal cual lo hacemos con sumas, restas y productos?

# ¿Qué pasa con la división?

- ¿Podemos operar modularmente con la división tal cual lo hacemos con sumas, restas y productos?
- **NO**. Por ejemplo:  
 $\frac{10}{2} \equiv 5 \pmod{8}$ , pero  $10 \equiv 2 \pmod{8}$  y  $\frac{2}{2} \equiv 1 \not\equiv 5 \pmod{8}$
- Podemos garantizar que este “truco” funciona cuando el módulo es un número **primo**.  
 $\frac{27}{3} \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $27 \equiv 6 \pmod{7}$  y  $\frac{6}{3} \equiv 2 \pmod{7}$   
Pero solo si el divisor **no es cero** (módulo  $p$ )  
 $\frac{140}{14} \equiv 3 \pmod{7}$ , pero  $140 \equiv 14 \equiv 0 \pmod{7}$  y  $\frac{0}{0} \equiv ? \pmod{7}$

# ¿Qué pasa con la división?

- ¿Podemos operar modularmente con la división tal cual lo hacemos con sumas, restas y productos?
- **NO.** Por ejemplo:  
 $\frac{10}{2} \equiv 5 \pmod{8}$ , pero  $10 \equiv 2 \pmod{8}$  y  $\frac{2}{2} \equiv 1 \not\equiv 5 \pmod{8}$
- Podemos garantizar que este “truco” funciona cuando el módulo es un número **primo**.  
 $\frac{27}{3} \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $27 \equiv 6 \pmod{7}$  y  $\frac{6}{3} \equiv 2 \pmod{7}$   
Pero solo si el divisor **no es cero** (módulo  $p$ )  
 $\frac{140}{14} \equiv 3 \pmod{7}$ , pero  $140 \equiv 14 \equiv 0 \pmod{7}$  y  $\frac{0}{0} \equiv ? \pmod{7}$
- ¿Pero y si aún con un módulo primo, la división modular no resulta una división entera?  
 $\frac{12}{3} \equiv 4 \pmod{7}$ , pero  $12 \equiv 5 \pmod{7}$  y  $\frac{5}{3} \equiv ? \pmod{7}$

# Inversos modulares

## Definición

Decimos que  $b$  es inverso de  $a$  módulo  $M$  si  $a \cdot b \equiv 1 \pmod{M}$ .

Notar que solo un  $a \not\equiv 0 \pmod{M}$  podría tener un inverso, y de existir el inverso es único, y a su vez  $a$  resulta ser el inverso de  $b$ .



# Inversos modulares

## Definición

Decimos que  $b$  es inverso de  $a$  módulo  $M$  si  $a \cdot b \equiv 1 \pmod{M}$ .

Notar que solo un  $a \not\equiv 0 \pmod{M}$  podría tener un inverso, y de existir el inverso es único, y a su vez  $a$  resulta ser el inverso de  $b$ .

## Teorema

Si  $p$  es un número primo, entonces todo número  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  tiene un inverso módulo  $p$ .

# Inversos modulares: utilidad

- Recordemos que para realizar  $3/2 = 1,5$ , en realidad podríamos multiplicar directamente por el inverso de 2, es decir  $3 \cdot 0,5 = 1,5$
- Lo mismo podemos hacer modularmente. Por ejemplo,  $5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{7}$ , así que  $\text{inv}(3) = 5$ . Y entonces recordando el ejemplo anterior:  
 $\frac{12}{3} \equiv 4 \pmod{7}$ ,  
 $12 \equiv 5 \pmod{7}$  y  
“ $\frac{5}{3}$ ”  $\equiv 5 \cdot \text{inv}(3) \equiv 5 \cdot 5 \equiv 4 \pmod{7}$
- De esta forma, ya podemos dividir modularmente al trabajar con un número primo (excepto cuando el divisor se hace 0 módulo  $p$ ).
- ¿Pero cómo calculamos los inversos?

# Contenidos

- 1 **Aritmética modular**
  - Operaciones, estructura
  - **Fermat e inversos modulares**
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Pequeño teorema de Fermat

## Teorema

Si  $p$  es primo y  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , entonces  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

- Por ejemplo  $6^{30} = 7131416765184947029025 \cdot 31 + 1$
- ¿Para qué puede servir este teorema?

# Aplicación 1: Cálculo de inversos

- Recordemos que dado  $a \neq 0$ , si encontramos algún número  $x$  tal que  $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $x$  será automáticamente el inverso de  $a$ .
- Si tomamos  $x = a^{p-2}$ , ¿Cuánto vale  $a \cdot x$ ?

# Aplicación 1: Cálculo de inversos

- Recordemos que dado  $a \neq 0$ , si encontramos algún número  $x$  tal que  $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $x$  será automáticamente el inverso de  $a$ .
- Si tomamos  $x = a^{p-2}$ , ¿Cuánto vale  $a \cdot x$ ?
- Tenemos  $a \cdot x = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  por el Pequeño Teorema de Fermat.
- Luego para cada  $a$  su inverso será simplemente  $a^{p-2}$ .

# Aplicación 1: Cálculo de inversos

- Recordemos que dado  $a \neq 0$ , si encontramos algún número  $x$  tal que  $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $x$  será automáticamente el inverso de  $a$ .
- Si tomamos  $x = a^{p-2}$ , ¿Cuánto vale  $a \cdot x$ ?
- Tenemos  $a \cdot x = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  por el Pequeño Teorema de Fermat.
- Luego para cada  $a$  su inverso será simplemente  $a^{p-2}$ .
- En general el inverso de  $a$  módulo  $m$  existe siempre que  $\gcd(a, m) = 1$ , y es  $a^{\phi(m)-1}$

## Aplicación 2: Verificación de residuo cuadrático

### Definición

Un resto  $r$  se dice un *residuo cuadrático* módulo  $p$  si existe  $x$  tal que  $x^2 \equiv r \pmod{p}$

Por ejemplo los residuos cuadráticos módulo 5 son 0, 1, 4. Notar que 0 siempre es residuo cuadrático módulo  $p$ .

- Si  $r \not\equiv 0$  es residuo cuadrático, ¿Cuánto vale  $r^{\frac{p-1}{2}}$ ?



## Aplicación 2: Verificación de residuo cuadrático

### Definición

Un resto  $r$  se dice un *residuo cuadrático* módulo  $p$  si existe  $x$  tal que  $x^2 \equiv r \pmod{p}$

Por ejemplo los residuos cuadráticos módulo 5 son 0, 1, 4. Notar que 0 siempre es residuo cuadrático módulo  $p$ .

- Si  $r \not\equiv 0$  es residuo cuadrático, ¿Cuánto vale  $r^{\frac{p-1}{2}}$ ?
- $r \equiv x^2$  para algún  $x \not\equiv 0$ , y entonces  $r^{\frac{p-1}{2}} \equiv (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$
- Se puede verificar que además si para algún  $r$  vale  $r^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $r$  es residuo cuadrático módulo  $p$ .

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - **Potenciación logarítmica**

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Potenciación logarítmica

- En los ejemplos anteriores hemos reducido algunos problemas a calcular  $a^b$  módulo  $M$ , para enteros no negativos  $a, b, M$ .
- ¿Cómo hacemos esto más eficientemente que realizando  $b - 1$  multiplicaciones?

# Potenciación logarítmica (idea)

- Una buena idea es pensar en ir elevando al cuadrado sucesivamente, lo cual permite que el exponente crezca rápidamente.
- Pensado de manera recursiva, si llamamos  $f(a, n) = a^n$ :

$$f(a, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ f(a^2, \frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ es par} \\ a \cdot f(a^2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

# Potenciación logarítmica (código)

```
1 typedef long long tint;  
2 tint potlog(tint a, tint b, const tint M)  
3 {  
4     tint res = 1;  
5     while (b > 0)  
6     {  
7         if (b % 2 != 0)  
8             res = MOD(res*a, M);  
9         a = MOD(a*a, M);  
10        b /= 2;  
11    }  
12    return res;  
13 }
```

Invariante de ciclo:

La respuesta que deseamos es  $res \cdot (a^b \text{ módulo } M)$

Este método realiza solamente  $O(\lg b)$  multiplicaciones.

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Problema

- Una necesidad muy usual al trabajar con números primos es la de calcular *todos* los primos desde 1 hasta  $N$  para un cierto  $N$ .
- La idea es realizarlo de manera más eficiente que verificando la primalidad de cada número por separado.

# Idea 1

- Si verificásemos cada número por separado, lo que haríamos sería recorrer sus posibles **divisores** para ver si es primo.
- ¿Que pasaría si en lugar de probar los divisores de cada número, descartásemos sus **múltiplos**?



# Idea 1

- Si verificásemos cada número por separado, lo que haríamos sería recorrer sus posibles **divisores** para ver si es primo.
- ¿Que pasaría si en lugar de probar los divisores de cada número, descartásemos sus **múltiplos**?
- Hay  $\frac{N}{1}$  múltiplos de 1,  $\frac{N}{2}$  múltiplos de 2,  $\dots$   $\frac{N}{N}$  múltiplos de  $N$ .  
Luego si recorremos todo el costo total es

$$\sum_{i=1}^N \frac{N}{i} = N \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} = \Theta(N \lg N)$$

# Idea 1 (cont.)

- Esta idea es verdaderamente muy sencilla, y como vimos ya alcanza una eficiencia aceptable.
- Además, al recorrer los múltiplos de todos los números, se encuentran todos los divisores propios de todos los números.
- De esta forma es extremadamente fácil modificar esta versión para computar fácilmente sumas de divisores, cantidades, y otras funciones similares.

```
1  for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;  
2  p[0] = p[1] = false;  
3  for (int i = 2; i < MAX; i++)  
4      for (int j = 2*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

# Idea 2

- Todo número compuesto tiene un divisor **primo**.
- Por lo tanto, alcanza con descartar los múltiplos de los números primos que vamos encontrando.
- La cantidad de operaciones a realizar en este caso se reduce a  $\Theta(N \lg \lg N)$ , que es “casi lineal”.

```
1  for (int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;
2  p[0] = p[1] = false;
3  for (int i = 2; i < MAX; i++)
4  if (p[i])
5      for (int j = 2*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

# Idea 3

- Todo número compuesto tiene un divisor primo  $p$ , con  $p \leq \sqrt{N}$ .
- Podemos parar el proceso de descarte de múltiplos en  $\sqrt{N}$ .
- La cantidad de operaciones sigue siendo  $\Theta(N \lg \lg N)$ .

```
1  for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;
2  p[0] = p[1] = false;
3  for (int i = 2; i*i < MAX; i++)
4  if (p[i])
5      for (int j = 2*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

# Idea 4

- De manera similar al caso anterior, si  $N < p^2$  es compuesto, tiene un divisor primo menor que  $p$ , y ya habrá sido descartado.
- Podemos comenzar el descarte de los múltiplos de  $i$  por  $i^2$ .
- Aún con esta optimización, la cantidad de operaciones sigue siendo  $\Theta(N \lg \lg N)$ .

```
1  for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;
2  p[0] = p[1] = false;
3  for (int i = 2; i*i < MAX; i++)
4  if (p[i])
5      for (int j = i*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

# Idea 5

- “A linear sieve algorithm for finding prime numbers”, 1978 by Gries and Misra
- Hasta ahora, cada número compuesto es tachado **varias veces**.
- Si logramos tachar cada uno una sola vez, la criba será lineal.
- Plan: tacharlo únicamente multiplicando por **su menor primo**.
- Si vamos guardando los primos encontrados durante la misma criba, es posible hacer esto.
- Cantidad de operaciones:  $\Theta(N)$ .

```
1  int nextPrime = 0;
2  for ( int i = 0; i < MAX; i ++ ) p[ i ] = true ;
3  p[0] = p[1] = false ;
4  for ( int i = 2; i < MAX; i ++ ) {
5      if ( p[ i ] ) primeList[nextPrime++] = i ;
6      for ( int index = 0 ; i*primeList[index] < MAX; index++ ) {
7          p[ i * primeList[index] ] = false ;
8          if ( i %primeList[index] == 0 ) break ;
9      }
10 }
```

# Tiempos

Para MAX=500M:

	Nombre	Tiempo	Tiempo / "Comp."
	RecorrerMultiplos	68 s	6.8 ns
	CribaBasica	10 s	6.7 ns
	CribaHastaRaiz	5.5 s	3.7 ns
	CribaHastaRaizDesdeICuadrado	5.2 s	3.5 ns
	CribaLineal	3.0 s	6.0 ns

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - **Verificación directa**
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida



# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - **Verificación directa**
    - **Algoritmo ingenuo**
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Algoritmo ingenuo

- Como ya hemos mencionado, un número compuesto  $N$  tendrá un divisor primo menor o igual a  $\sqrt{N}$
- Un algoritmo simple  $O(\sqrt{N})$  consistirá entonces de un chequeo de todos los números enteros en el rango  $[2, \sqrt{N}]$ , en busca de divisores de  $N$ .

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - **Verificación directa**
    - Algoritmo ingenuo
    - **Test de Rabin - Miller**

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Test de Rabin - Miller (Introducción)

- El test de Rabin-Miller es un algoritmo **probabilístico**, muy eficiente para verificar si un número es primo.
- Se basa en su antecesor, el *test de Fermat*.
- Recordemos:  $a \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

# Test de Fermat

- El test de Fermat es un test probabilístico para verificar si un número candidato  $N$  es primo.
- Se selecciona para ello un entero al azar  $a \in [1, N)$ .
- Si  $N$  es primo necesariamente será  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ , así que si esto no ocurre descartamos al número como primo.
- Si esto ocurre, el número pasó el test de Fermat con  $a$  como testigo. El test puede repetirse con varios valores de  $a$  para aumentar la confianza.

# Test de Fermat: problema

- El test de Fermat es eficiente, pero tiene un problema: existen ejemplos de números que pasan el test de Fermat para todo valor de  $a$  coprimo con  $N$ , pero que son compuestos.
- Estos números extremos son raros y se denominan de *Carmichael*. Los primeros son 561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911.
- Con estos números, el test solamente los detecta como compuestos si  $a$  es múltiplo de uno de los primos que dividen a  $N$ , y por lo tanto el test es prácticamente una búsqueda de divisores aleatoria.

# Test de Rabin - Miller (idea)

- El test de Rabin-Miller elimina este problema verificando una condición más fuerte.
- Observemos que si  $p > 2$  es primo y  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $x$  solo puede ser 1 o  $-1$  módulo  $p$ .
- Luego si  $p - 1 = 2^\alpha k$ , con  $k$  impar y  $\alpha \geq 1$ , tenemos que para cualquier  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  debe ser  $a^{2^\alpha k} \equiv 1 \pmod{p}$ .
- Pero entonces  $a^{2^{\alpha-1}k} \equiv 1$  o  $-1 \pmod{p}$
- Y si fuera 1, entonces nuevamente  $a^{2^{\alpha-2}k} \equiv 1$  o  $-1 \pmod{p}$
- Y así podemos repetir el razonamiento hasta que  $a^k \equiv 1$  o bien  $a^{2^j k} \equiv -1$  para algún  $0 \leq j < \alpha$

# Test de Rabin - Miller (idea cont.)

Tenemos entonces las siguientes posibilidades para el valor de  $a^{2^j k}$  (una por columna):

j							
$\alpha$	1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 1$	-1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 2$	?	-1	...	1	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...
2	?	?	...	-1	1	1	1
1	?	?	...	?	-1	1	1
0	?	?	...	?	?	-1	1



# Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
$\alpha$	1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 1$	-1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 2$	?	-1	...	1	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...
2	?	?	...	-1	1	1	1
1	?	?	...	?	-1	1	1
0	?	?	...	?	?	-1	1

$a^k \equiv 1 \text{ o } -1$

# Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j								
$\alpha$	1	1	...	1	1	1	1	
$\alpha - 1$	-1	1	...	1	1	1	1	
$\alpha - 2$	?	-1	...	1	1	1	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	
2	?	?	...	-1	1	1	1	
1	?	?	...	?	-1	1	1	
0	?	?	...	?	?	-1	1	

$$a^{2k} = (a^k)^2 \equiv -1$$

# Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
$\alpha$	1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 1$	-1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 2$	?	-1	...	1	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...
2	?	?	...	-1	1	1	1
1	?	?	...	?	-1	1	1
0	?	?	...	?	?	-1	1

$$a^{2^{2k}} = (a^{2^k})^2 \equiv -1$$

# Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
$\alpha$	1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 1$	-1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 2$	?	-1	...	1	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...
2	?	?	...	-1	1	1	1
1	?	?	...	?	-1	1	1
0	?	?	...	?	?	-1	1

$$a^{2^{\alpha-2}k} \equiv -1$$

# Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
$\alpha$	1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 1$	-1	1	...	1	1	1	1
$\alpha - 2$	?	-1	...	1	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...
2	?	?	...	-1	1	1	1
1	?	?	...	?	-1	1	1
0	?	?	...	?	?	-1	1

$$a^{2^{\alpha-1}k} \equiv -1$$

# Test de Rabin - Miller (conclusión)

- Si ninguno de los casos anteriores se da, concluimos que definitivamente el número no es primo.
- Si alguno funciona, ese valor de  $a$  funciona y el número parece ser primo.
- Al igual que en el test de Fermat, conviene utilizar varios valores de  $a$  para aumentar la confianza.
- En el caso del test de Rabin-Miller, tenemos la garantía de que si  $N > 2$  es compuesto impar, al menos el 75 % de los posibles restos  $a$  no nulos módulo  $N$  lo demostrarán usando el test.
- Por lo tanto si repetimos el test  $k$  veces sobre un número compuesto, eligiendo números de manera aleatoria, uniforme e independiente, la probabilidad de error es como máximo  $\frac{1}{4^k}$ .
- Los números primos siempre pasan el test, y son reportados como tales.

# Test de Rabin - Miller (bonus)

- Si los números a verificar no son demasiado grandes, se conocen versiones deterministas del test probando con un conjunto específico de valores de  $a$ .
- Por ejemplo wikipedia menciona:
  - if  $n < 4,759,123,141 > 2^{32}$ , it is enough to test:  
 $a = 2, 7$ , and  $61$ ;
  - if  $n < 18,446,744,073,709,551,616 = 2^{64}$ , it is enough to test:  
 $a = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ , and  $37$ .
- Los artículos citados son:
  - Jaeschke, Gerhard (1993), "On strong pseudoprimes to several bases", Mathematics of Computation 61 (204): 915-926
  - Jiang, Yupeng; Deng, Yingpu (2014). "Strong pseudoprimes to the first eight prime bases". Mathematics of Computation 83 (290): 2915-2924. doi:10.1090/S0025-5718-2014-02830-5

# Contenidos

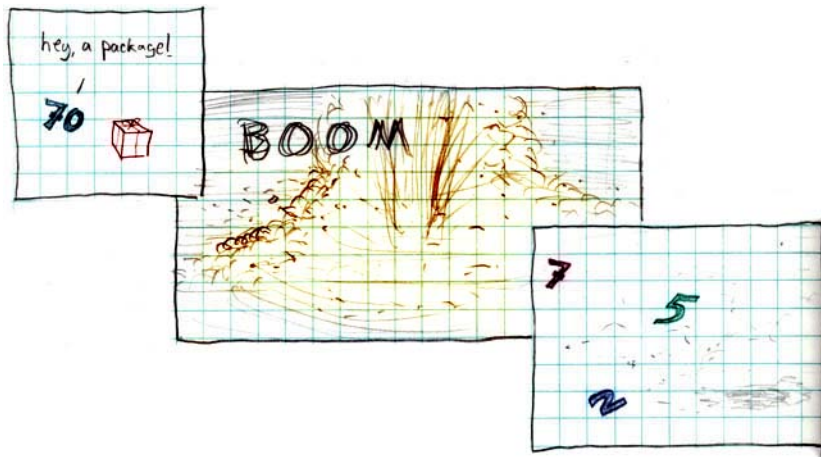
- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida



# Blown Apart (<https://xkcd.com/5/>)



# Factorización logarítmica

- Buena alternativa si nos interesa poder factorizar rápidamente cualquier número hasta  $N$ , y aceptamos el costo de una criba hasta  $N$ .
- Si en lugar de solamente guardar si un número es primo o no, guardamos un primo que lo divida mientras hacemos la criba, luego podemos saber un divisor primo de cualquier número en  $O(1)$ . Esto permite factorizar cualquier número en  $O(\lg N)$ .

```
1 | for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = i;  
2 | for (int i = 2; i*i < MAX; i++)  
3 |   if (p[i] == i)  
4 |     for (int j = i*i; j < MAX; j += i) p[j] = i;
```

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Algoritmo ingenuo

- Sabemos que si no hay ningún factor primo hasta  $\sqrt{N}$ ,  $N$  debe ser primo.
- En virtud de esto, es natural dar un algoritmo de factorización que pruebe todos los posibles factores hasta ese valor.
- Notar que podemos cortar en la raíz de la parte de  $N$  que falta factorizar, acelerando el proceso cuando hay bastantes factores chicos y uno grande.
- El peor caso sigue siendo  $\Theta(\sqrt{N})$

```
1  for(int i = 2; i*i <= N; i++)
2  while (N %i == 0)
3  {
4      N /= i;
5      reportarFactorPrimo(i);
6  }
7  if (N > 1)
8      reportarFactorPrimo(N);
```

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Introducción

## Problema

Supongamos que tenemos una sucesión  $x_1, x_2, x_3, \dots$

Queremos ir leyéndola hasta encontrar la primera repetición (es decir, los menores  $i, j$  tales que  $x_i = x_j$  con  $i < j$ ).

- ¿Cómo podemos resolver esta tarea?

# Introducción

## Problema

Supongamos que tenemos una sucesión  $x_1, x_2, x_3, \dots$

Queremos ir leyéndola hasta encontrar la primera repetición (es decir, los menores  $i, j$  tales que  $x_i = x_j$  con  $i < j$ ).

- ¿Cómo podemos resolver esta tarea?
- Árbol binario de búsqueda
- Tabla hash.
- Lista de valores



# Introducción (cont.)

- Un árbol binario de búsqueda (`set` de C++, `TreeSet` de Java) es una estructura eficiente que lo resuelve en  $O(j \lg j)$ .
- Requiere  $O(j)$  memoria.
- Requiere un operador  $<$  para los valores.

# Introducción (cont.)

- Una tabla hash (`unordered_set` de C++, `HashSet` de Java) es una estructura eficiente que lo resuelve en  $O(j)$  (**asumiendo una buena función de Hash**).
- Requiere  $O(j)$  memoria.
- Requiere que se pueda computar una función de hash sobre cada valor.

# Introducción (cont.)

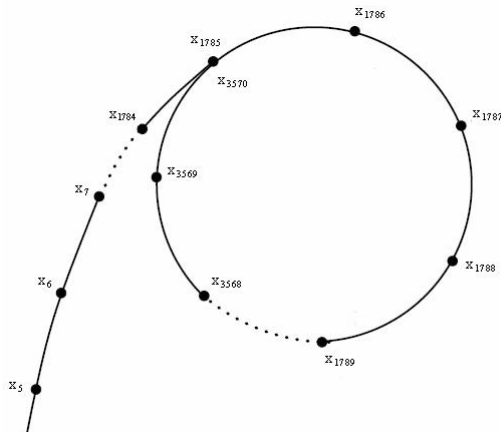
- Una simple lista de valores (`vector` de C++, `ArrayList` de Java) es una estructura que lo resuelve en  $O(j^2)$ .
- Requiere  $O(j)$  memoria.
- Únicamente requiere un operador de igualdad (`=`) sobre los elementos.

# Introducción (cont.)

- En el caso general (si leemos los  $x_i$  de la entrada) es difícil mejorar estas estructuras.
- Sin embargo, un caso muy común se da cuando la sucesión se obtiene por aplicación reiterada de alguna función  $f$ :  
 $x_1, f(x_1), f(f(x_1)), f(f(f(x_1))), \dots$
- Veremos un algoritmo para dicho caso particular, que logrará lo mejor entre todos ellos y más:
  - $O(1)$  memoria
  - $O(j)$  tiempo (u  $O(j)$  aplicaciones de  $f$  si el costo de  $f$  no es  $O(1)$ )
  - **Únicamente requiere un operador de igualdad (=) sobre los elementos**

# Estructura de $\rho$

- En este caso, cuando aparezca la primera repetición  $x_i = x_j$ , necesariamente será  $x_{i+1} = f(x_i) = f(x_j) = x_{j+1}$  y la secuencia entra en un ciclo de período  $j - i$  que comienza en  $i$ .
- Gráficamente ( $i = 1785$ ,  $j = 3570$ ):



# Caso aún más particular

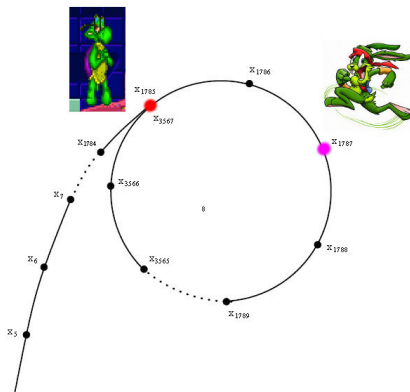
- Cuando la  $f$  es inversible, no es difícil ver que la primera repetición será de la forma  $i = 1, x_1 = x_j$ .
- En efecto, si  $f$  es inversible, la  $\rho$  debe degenerar a un ciclo simple, pues de lo contrario  $x_j$  tendría dos antecesores por  $f$ , y eso no puede ocurrir.
- El algoritmo para este caso sencillo es entonces aplicar  $f$  sucesivas veces hasta encontrar un elemento tal que  $x_j = x_1$ .

# Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd

- La idea en este caso es tener dos punteros,  $a = x_2$  que será la tortuga y  $b = x_3$  que será la liebre.
- $a$  avanzará de  $a$  un elemento, recorriendo toda la secuencia.
- $b$  en cambio avanzará de  $a$  **dos** elementos.
- En cada paso verificamos si  $x_a = x_b$  y continuamos hasta que así sea.
- Notar que luego de  $i$  pasos (no conocemos  $i$ ), la tortuga y la liebre estarán ambos en el ciclo (digamos en  $a_0 = i$  y  $b_0$ ).
- Luego de eso, en a lo más  $j - i = T$  pasos más coincidirán (su diferencia se incrementa en 1 cada paso).
- Notar que si solamente nos interesa encontrar **alguna** coincidencia, podemos terminar aquí.

# Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

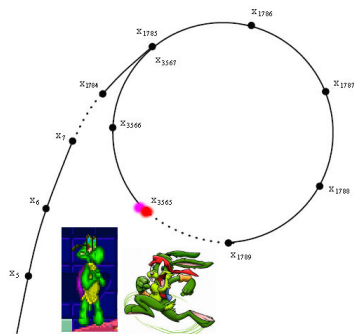
- Luego de  $i = 1784$  pasos.  $a_0 = 1785$  y  $b_0 = 1787$ . Llamemos  $d = b_0 - a_0 = 2$ .





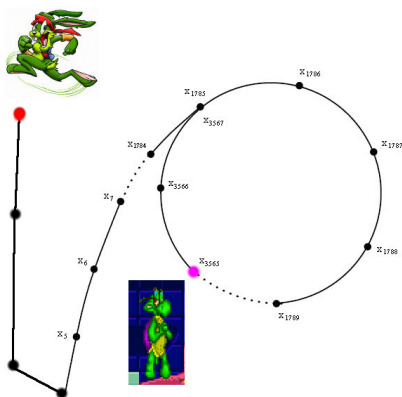
# Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

- Como en cada paso adicional la liebre se acerca en 1 a la tortuga, la alcanza luego de  $T - d = 1780$  pasos más. Notar que se encuentran a  $d$  del comienzo del ciclo.



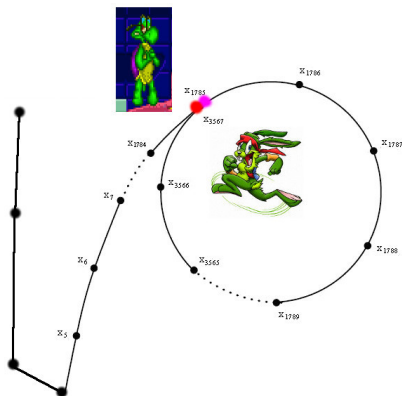
# Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

- Para completar el algoritmo, una vez que se encuentran ambos, reinicializamos la liebre (o la tortuga, da igual) al origen, y además, ahora hacemos moverse a la liebre de a un solo paso por vez, igual que la tortuga.



# Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

- $i$  pasos más tarde, ambos estarán en  $x_i$ , que será el nuevo punto de encuentro. Una vez allí, es fácil dejar uno fijo y dar una vuelta al ciclo con el otro para determinar su longitud. La cantidad total de pasos es como mucho  $2j$ .



# Alternativa

- Una alternativa menos mencionada en la literatura, pero con mejores factores constantes (aunque idénticas complejidades asintóticas) es el algoritmo de Brent.
- Este se basa en ir duplicando la longitud de ciclo candidata en cada paso. Se puede leer sobre él en wikipedia (*Brent's Cycle Detection*).

# Contenidos

- 1 Aritmética modular
  - Operaciones, estructura
  - Fermat e inversos modulares
  - Potenciación logarítmica

- 2 Primalidad
  - Criba
  - Verificación directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Test de Rabin - Miller

- 3 Factorización
  - Criba
  - Factorización directa
    - Algoritmo ingenuo
    - Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd
    - Factorización rápida

# Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?

# Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?
- 50.7 %

# Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?
- 50.7 %
- En general, dado un universo de  $n$  objetos, la cantidad de elementos que hay que sacar al azar hasta que la probabilidad de que dos sean iguales sea al menos 50 % es  $\left\lceil \sqrt{2n \ln 2} \right\rceil + \epsilon$ , donde  $\epsilon \in \{0, 1\}$
- Similarmente, la cantidad esperada de elementos que hay que sacar al azar hasta que aparezca una primera repetición es  $\sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \epsilon$ , donde  $|\epsilon| \leq 1$  (Ramanujan, Watson y Knuth).



# Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?
- 50.7 %
- En general, dado un universo de  $n$  objetos, la cantidad de elementos que hay que sacar al azar hasta que la probabilidad de que dos sean iguales sea al menos 50 % es  $\left\lceil \sqrt{2n \ln 2} \right\rceil + \epsilon$ , donde  $\epsilon \in \{0, 1\}$
- Similarmente, la cantidad esperada de elementos que hay que sacar al azar hasta que aparezca una primera repetición es  $\sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \epsilon$ , donde  $|\epsilon| \leq 1$  (Ramanujan, Watson y Knuth).
- **En resumen**, son  $O(\sqrt{n})$  pasos hasta la primera repetición.

# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard

- Asumimos que  $N$  es compuesto (podemos comenzar verificando su primalidad con algún test rápido como Rabin-Miller).
- La idea es aprovechar la paradoja de los cumpleaños para encontrar un factor propio de  $N$  rápidamente.
- Una vez que encontramos un factor de  $N$ , basta repetir el procedimiento recursivamente hasta descomponer a  $N$  en primos.

# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard (cont.)

- Supongamos que  $p \leq \sqrt{N}$  es un primo que divide a  $N$ .
- Si vamos generando números entre 0 y  $N - 1$  al azar, sus restos módulo  $p$  también serán aleatorios.
- La cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo  $N$  es  $\Theta(\sqrt{N})$ .
- Pero la cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo  $p$  es  $\Theta(\sqrt{p}) = O(\sqrt[4]{N})$
- Luego esperamos que exista una repetición módulo  $p$  rápidamente, mucho antes de que haya una repetición módulo  $N$ .

# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard (cont.)

- Supongamos que  $p \leq \sqrt{N}$  es un primo que divide a  $N$ .
- Si vamos generando números entre 0 y  $N - 1$  al azar, sus restos módulo  $p$  también serán aleatorios.
- La cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo  $N$  es  $\Theta(\sqrt{N})$ .
- Pero la cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo  $p$  es  $\Theta(\sqrt{p}) = O(\sqrt[4]{N})$
- Luego esperamos que exista una repetición módulo  $p$  rápidamente, mucho antes de que haya una repetición módulo  $N$ .
- ¿Pero cómo detectamos esta repetición, **si no conocemos  $p$  a priori**?

# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard (cont.)

- Si  $x$  e  $y$  son dos valores de nuestra secuencia que coinciden módulo  $p$ ,  $x - y \equiv 0 \pmod{p}$
- Entonces  $p \mid \text{MCD}(|x - y|, N)$
- Este MCD puede calcularse con el algoritmo de Euclides sin conocer  $p$ .
  - Si da  $1 < \text{MCD} < N$ , hemos encontrado un factor de  $N$ .
  - Si da  $\text{MCD} = N$ , hemos tenido una repetición en la secuencia módulo  $N$ .
  - Si da  $\text{MCD} = 1$ , no hemos detectado ninguna repetición módulo  $p$ .

```
int mcd(int a, int b)
{ return (a == 0) ? b : mcd(b % a, a) ; }
```

# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard (cont.)

- Notar que con este truco podemos verificar si  $x$  e  $y$  dados son coincidentes módulo algún  $p$ .
- Es decir, a la hora de buscar repeticiones en nuestra secuencia, **solamente tenemos un operador de igualdad**.
- La mejor estructura para buscar repeticiones en general con solamente ese operador tomaba  $O(j^2)$ , lo cual nos devolvería a la complejidad  $O(\sqrt{N})$

# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard (cont.)

- Notar que con este truco podemos verificar si  $x$  e  $y$  dados son coincidentes módulo algún  $p$ .
- Es decir, a la hora de buscar repeticiones en nuestra secuencia, **solamente tenemos un operador de igualdad**.
- La mejor estructura para buscar repeticiones en general con solamente ese operador tomaba  $O(j^2)$ , lo cual nos devolvería a la complejidad  $O(\sqrt{N})$
- Solución: Utilizar una secuencia **pseudoaleatoria**, “en lugar de” generar números verdaderamente al azar.
- Con esto la secuencia será  $x_1, f(x_1), f(f(x_1))$  y podemos utilizar el algoritmo de la liebre y la tortuga.

# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard (implementación)

- Una función pseudoaleatoria módulo  $N$  que funciona bien es  $f(X) = X^2 + AX + B$ , con  $1 \leq A, B < N$  elegidos al azar.

```
int factor(int N) {
    A = elegir al azar;
    B = elegir al azar;
    // f es X*(X+A) + B modulo N
    int x = 2, y = 2, d;
    do {
        x = f(x);
        y = f(f(y));
        d = mcd(abs(x-y), N);
    } while (d == 1);
    return d;
}
```



# Algoritmo de la $\rho$ de Pollard (conclusiones)

- Si tenemos mala suerte y factor retorna  $N$ , repetimos la llamada hasta que los valores de  $A$  y  $B$  funcionen.
- El evento anterior normalmente no ocurre, ya que la secuencia se repite módulo  $p$  antes que módulo  $N$ .
- Como dijimos, la complejidad esperada es  $O(\sqrt{p})$  hasta extraer un factor, siendo  $p$  un primo que divida a  $N$ .
- La complejidad total esperada del algoritmo resulta ser entonces  $O\left(\sqrt[4]{N}\right)$  operaciones aritméticas y cálculos de MCD.
- Más precisamente,  $O\left(\sum_{p|N} \sqrt{p}\right)$ , considerados con multiplicidad según el exponente en la factorización de  $\frac{N}{p_{\max}}$ .
- Notar que aunque  $N$  sea muy grande, si los primos que dividen a  $N$  son pequeños, salvo a lo sumo un único primo grande con exponente 1, el algoritmo es extremadamente rápido.

# Problemas para practicar

- [https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=onlinejudge&page=show\\_problem&problem=1994](https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=onlinejudge&page=show_problem&problem=1994)
- <http://coj.uci.cu/24h/problem.xhtml?pid=3321>
- <http://coj.uci.cu/24h/problem.xhtml?pid=1124>
- <http://codeforces.com/problemset/problem/300/C>
- [https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com\\_onlinejudge&Itemid=8&category=24&page=show\\_problem&problem=4664](https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&category=24&page=show_problem&problem=4664)
- <http://coj.uci.cu/24h/problem.xhtml?pid=2019>
- <https://www.spoj.com/problems/HOMEW/>
- <https://www.spoj.com/problems/FACT0>
- <https://www.spoj.com/problems/PON/>
- <https://www.spoj.com/problems/SPIRALGR/>

# Referencias

- <https://codeforces.com/blog/entry/54090>
- *Introduction to Algorithms, 2nd Edition*. MIT Press.

## **31 Number-Theoretic Algorithms**

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest,  
Clifford Stein