Libre análisis

1. Problema 1

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}\,dt}{x^9 \sin x}$$

1.1. Solucion 1

Por teorema de taylor, como las funciones correspondientes son C^2, sabemos que tendiendo a 0:

$$e^{t^2} = e^{0^2} + O(t) = 1 + O(t)$$
$$\sin x = \sin(0) + \cos(0)x + O(x^2) = x + O(x^2)$$

Reemplazando en la expresión original:

$$\frac{\int_0^{x^2} t^4 e^{t^2}dt}{x^9 \sin x} = \frac{\int_0^{x^2} t^4(1+O(t))dt}{x^9(x+O(x^2))} = \frac{\int_0^{x^2} t^4 + O(t^5)dt}{x^{10}+O(x^{11})} = \frac{\frac{x^{10}}{5}+O(x^{12})}{x^{10}+O(x^{11})} = \frac{\frac{1}{5}+O(x^2)}{1+O(x)}$$

El ultimo termino trivialmente tiende a $\frac{1}{5}$ cuando x tiende a 0, luego hemos terminado y esta es la respuesta.

1.2. Solucion 2

Llamemos $f(x) = \int_0^x t^4 e^{t^2}dt$. Sabemos por teorema fundamental del calculo que $f'(x) = x^4 e^{x^2}$. El numerador del limite es $f(x^2)$. Notemos ademas que el limite es una clara indeterminacion del tipo $\frac{0}{0}$. Luego podemos aplicar regla de L'Hopital:

$$\frac{(f(x^2))'}{(x^9\sin x)'} = \frac{2xx^8e^{x^4}}{9x^8\sin x + x^9\cos x} = \frac{x}{9\sin x + x\cos x}2e^{x^4}$$

Es claro que $2e^{x^4}$ tiende a 2 cuando x tiende a 0. Por otra parte, la fraccion que queda es nuevamente $\frac{0}{0}$ asi que podemos hacer L'Hopital de nuevo:

$$\frac{(x)'}{(9\sin x + x\cos x)'} = \frac{1}{9\cos x - x\sin x + \cos x} = \frac{1}{10\cos x - x\sin x}$$

Que claramente tiende a $\frac{1}{10}$ cuando x tiende a 0. Luego la respuesta es $2\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$

2. Problema 2

Sea $f_a(x) = x^a e^{2a-x}$. Hallar $a \in \mathbb{R}^+$ para que el maximo de $f_a(x)$ en $[0, +\infty)$ tenga el menor valor posible.

2.1. Solucion

La derivada con respecto a x de $f_a(x)$ es $x^{a-1}e^{2a-x}(a-x)$. Claramente es positiva en $(0, a)$, nula en a, y negativa en $(a, +\infty)$. Esto implica claramente que el maximo de f_a se alcanza en $x = a$, y es $f_a(a) = a^a e^a$.

La derivada con respecto a a de $a^a e^a$ es $(2 + \ln a)a^a e^a$. Claramente esta es negativa cuando $a < e^{-2}$, nula si $a = e^{-2}$, y positiva si $a > e^{-2}$. Esto implica claramente que el minimo valor posible de $f_a(a)$ se alcanza cuando $a = e^{-2}$.

Luego $a = e^{-2}$ es el valor buscado.

3. Problema 3

Aproximar el valor de $\int_0^{0,1} e^{t^2} dt$ con un error menor que 10^{-5}

3.1. Solucion

Llamamos $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Queremos aproximar $f(\frac{1}{10})$. Tomamos la expansion de taylor de f alrededor de $x = 0$:

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = (12x + 8x^3)e^{x^2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

Luego por el teorema de taylor:

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{(12 + 48c^2 + 16c^4)e^{c^2}x^5}{120}$$

Para cierto $c \in [0, x]$. Como $f^{(5)}(x)$ es claramente creciente con x positivo, el modulo del termino de error es como mucho:

$$\frac{(12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}x^5}{120}$$

En nuestro caso resulta:

$$\left| f\left(10^{-1}\right) - \left(10^{-1} + \frac{10^{-3}}{3}\right) \right| \leq \frac{(12 + 48 \cdot 10^{-2} + 16 \cdot 10^{-4})e^{10^{-2}}10^{-5}}{120} \leq \frac{(12 + 1 + 1) \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{120} < 10^{-5}$$

Luego tomando como aproximacion $10^{-1} + \frac{10^{-3}}{3} = \frac{301}{3000}$, el error esta dentro del margen requerido.

4. Problema 4

Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f(0) = \sqrt[3]{e}$ y que sea solucion de la ecuacion:

$$\frac{f'(x)}{\ln(\sin(x^2) + e)} - \frac{2x\cos(x^2)}{3f(x)^2} = 0$$

4.1. Solucion

Reescribimos la condicion:

$$3f(t)^2 f'(t) = 2t\cos(t^2)\ln(\sin(t^2) + e)$$

Integramos ambos entre 0 y x:

$$\int_0^x 3f(t)^2 f'(t)dt = \int_0^x 2t\cos(t^2)\ln(\sin(t^2) + e)dt$$

Aplicando las sustituciones evidentes $u = f(t)$ y $u = \sin(t^2) + e$, las integrales quedan:

$$\int_{f(0)}^{f(x)} 3u^2 du = \int_e^{\sin(x^2)+e} \ln(u)du$$

Recordando que una primitiva de $\ln u$ es $u(\ln u - 1)$ (sale con integracion por partes, mirandolo como $1 \cdot \ln u$), queda:

$$f(x)^3 - f(0)^3 = (\sin(x^2) + e)(\ln(\sin(x^2) + e) - 1)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{e + (\sin(x^2) + e)(\ln(\sin(x^2) + e) - 1)}$$

Que satisface lo pedido.

5. Problema 5

Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n^n}{2^n n!}$

5.1. Solucion

Llamando $a_n = \frac{x^n n^n}{2^n n!}$, tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{x^n n^n}{2^n n!}} = \frac{x\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)}{2(n+1)} = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Que tiende a $\frac{e}{2}x$ cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, la serie converge cuando $|x| < \frac{2}{e}$, y diverge si $|x| > \frac{2}{e}$, por el criterio de D'Alembert. Luego el radio de convergencia es $\frac{2}{e}$