Espacio de matrices que conmutan con una dada

Sea V un K-espacio vectorial de dimension finita. Sea f un endomorfismo en V. Es sabido que el conjunto de los endomorfismos g tales que $fg = gf$ forman un subespacio del espacio de endomorfismos de V, que llamaremos E_f. Vamos a caracterizarlo, suponiendo que m_f, el minimal de f, se factoriza linealmente en K. En particular, vamos a dar una expresion para su dimension en base a los bloques de la forma de jordan de f.

Si $m_f = PQ$, con P, Q coprimos, entonces $V = Nu(P(f)) \oplus Nu(Q(f))$, ambos f-invariantes. Si $g \in E_f$, es inmediato comprobar que $Nu(P(f))$ y $Nu(Q(f))$ son g-invariantes. Luego podemos considerar la restriccion de g a estos subespacios, y g conmutara cuando cada una de estas restricciones lo haga con las correspondientes restricciones de f.

Luego tenemos que estudiar ahora el caso en que $m_f = (X - \lambda)^t$. Si llamamos a partir de ahora f a lo que seria $f - \lambda id$, es trivial que no cambia el espacio E_f, porque todo conmuta con la identidad. Luego falta ver solamente quienes conmutan con una f nilpotente, es decir, tal que $m_f = X^t$.

Consideremos una base de jordan de esta f, dada por:

$$v_1, f(v_1), \cdots, f^{r_1-1}(v_1)$$

$$\cdots$$

$$v_k, f(v_k), \cdots, f^{r_k-1}(v_k)$$

Y tal que $f^{r_i}(v_i) = 0$.

Supongamos que $w_i = g(v_i)$. Notemos que para que g conmute con f, debe ser para cualquier t:

$$g(f^t(v_i)) = f^t(w_i)$$

En particular, $0 = g(0) = g(f^{r_i}(v_i)) = f^{r_i}(w_i)$.

Luego, vemos que todos los $g \in E_f$ se pueden obtener fijando un w_i tal que $w_i \in Nu(f^{r_i})$, y definiendo la g sobre el resto de la base de Jordan segun $g(f^t(v_i)) = f^t(w_i)$. La pregunta que falta es si todos los g que se obtienen por este mecanismo son un $g \in E_f$, pero esto se comprueba mecanicamente ya que por la definicion dada, g y f conmutan en los vectores de la base de Jordan, luego conmutan en general.

Juntando todo esto hemos dado una caracterizacion de los elementos de E_f. De la misma se observa que su dimension ha de ser:

$$\sum_{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(f, \lambda, i) \dim \left(Nu((f - \lambda I)^i) \right)$$

Donde notamos $\gamma(f, \lambda, i)$ a la cantidad de bloques de Jordan de f de autovalor λ de tamaño i.

Un caso especial de interes se da cuando $m_f = \chi_f$. En este caso, el espacio de los endomorfismos que son un polinomio de f tiene dimension n (su dimension en general es el grado de m_f) y como puede observarse, en este caso el espacio de las g que conmutan con f tambien tiene dimension n. Como los $P(f)$ conmutan con f, resulta que en este caso el espacio de las $g = P(f)$ coincide con E_f.