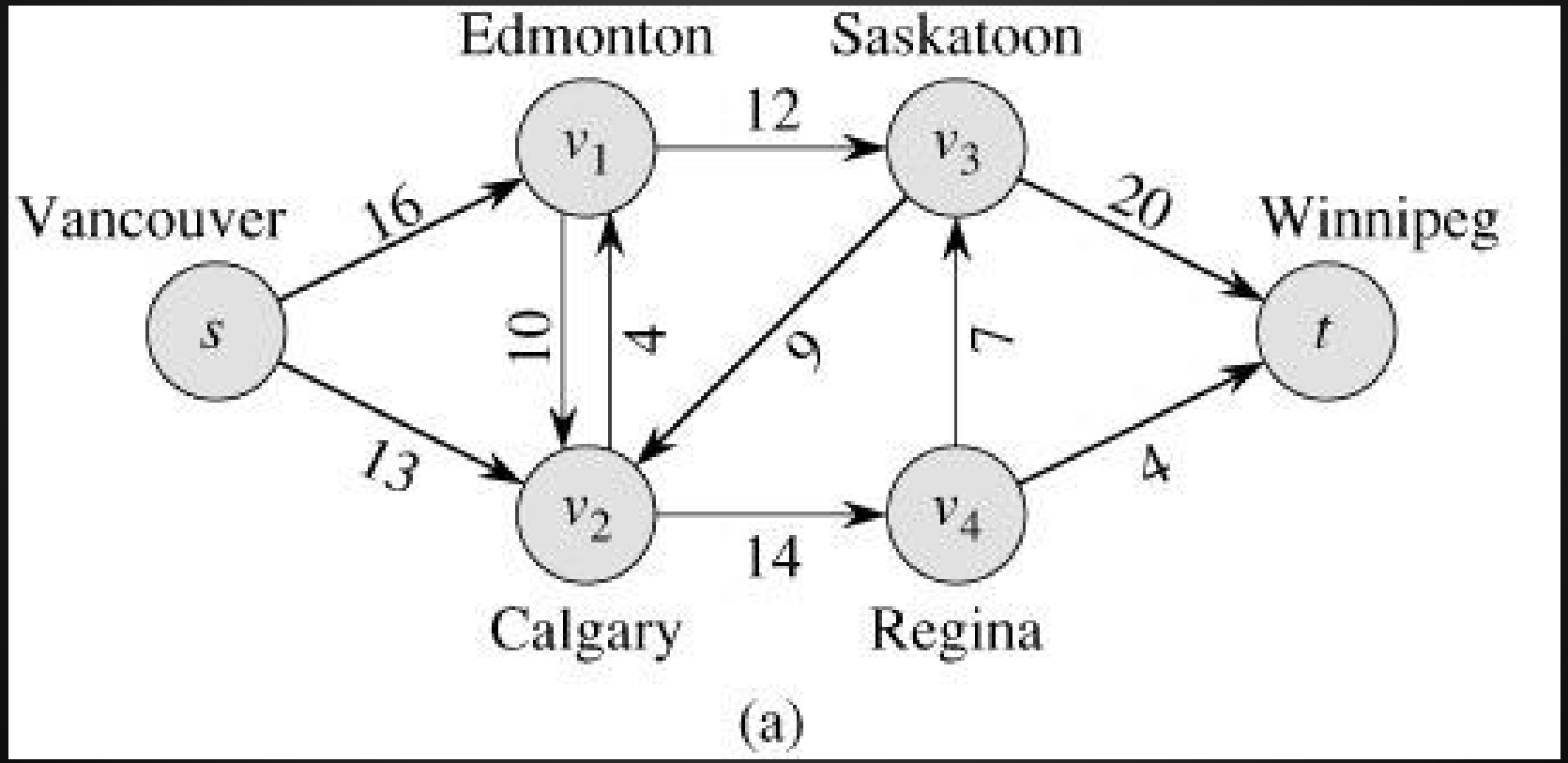
Flujo Máximo

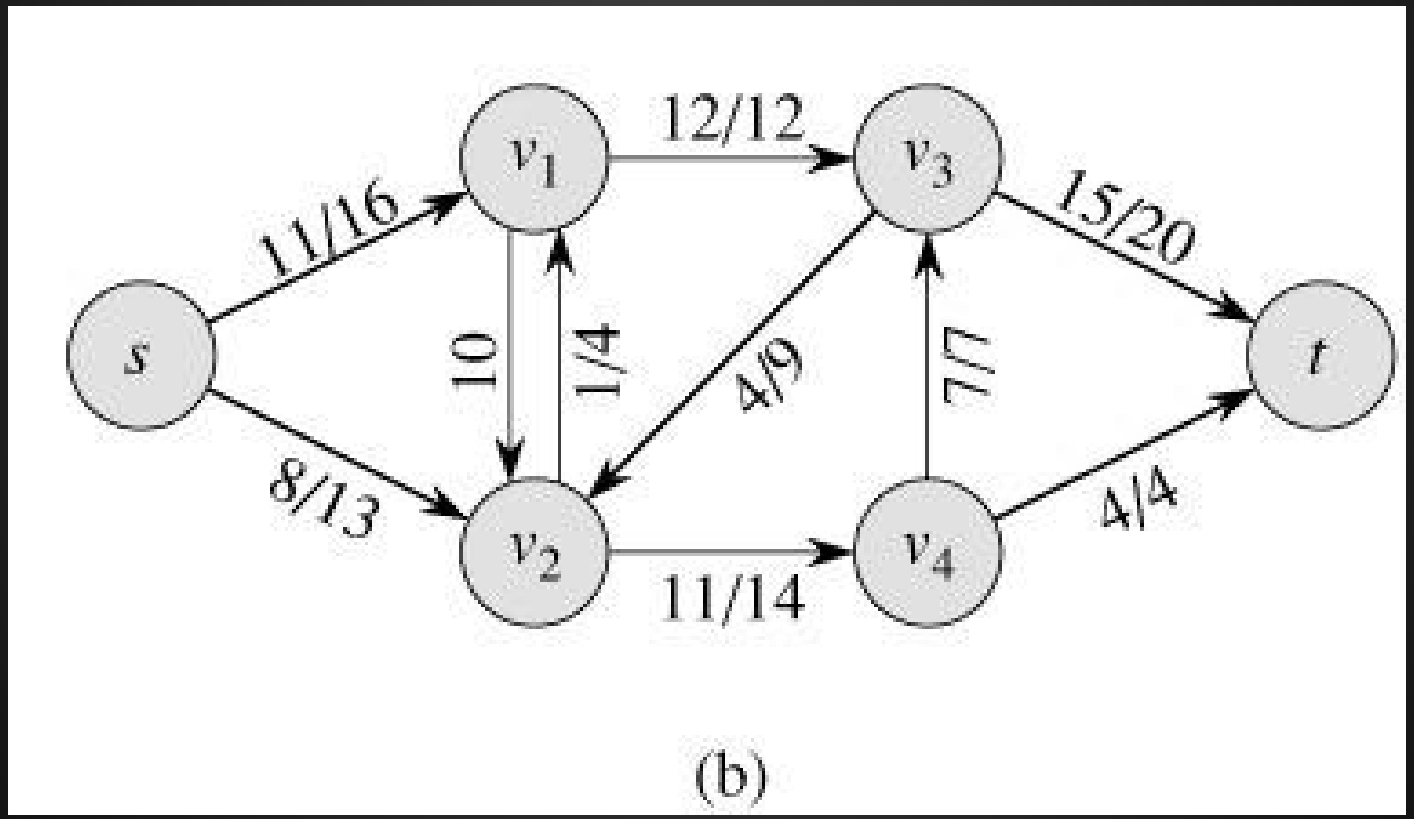
Training Camp Argentina 2014

Nicolás Álvarez
naa [at] cs uns edu ar

Idea


Edmonton
Saskatoon
Vancouver
Winnipeg
Calgary
Regina
s
t
v_1
v_2
v_3
v_4
16
13
12
14
10
4
9
7
20
4
(a)

Idea



Idea

- Un *source* s
- Un *sink* t
- Nodos intermedios
- Arcos dirigidos con una capacidad dada
- Objetivo: Enviar el máximo flujo posible de s a t, cumpliendo las restricciones de capacidad.

Definición: Red de Flujo

- Una red de flujo es un grafo dirigido G = <N,A> donde cada arco (u,v) $\in$ A tiene asociado una capacidad c(u,v) >= 0.

- Se distinguen dos nodos s y t llamados fuente y destino

Definición: Flujo

Un flujo en G es una función f : A -> R que satisface:

- *restricción de capacidad*:
  - 0 <= f(e) <= c(e) para todo e $\in$ A
- simetría oblicua:
  - f(u,v) = -f(v,u) para todo u,v $\in$ N
- conservación de flujo:
  - Para todo u $\in$ N - {s,t}

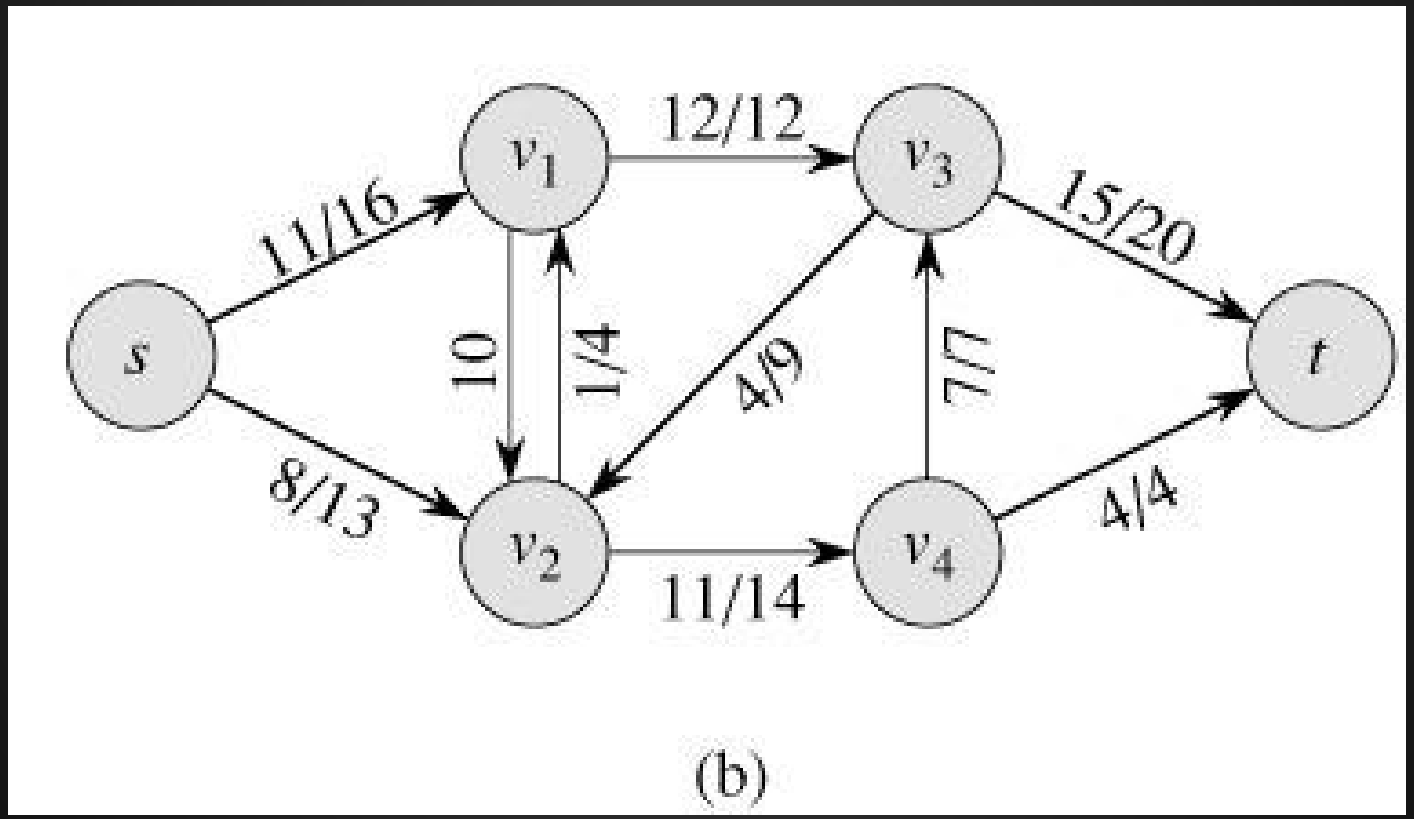
$$\sum_{\substack{e \in A \\ e \text{ sale de } u}} f(e) = \sum_{\substack{e \in A \\ e \text{ entra a } u}} f(e)$$

Definición: Problema Flujo Máximo

- El valor de un flujo $|f|$ se define como
  $|f| = \Sigma_{v \in N} f(s,v) = \Sigma_{v \in N} f(v,t)$

- Dada una red de flujo G, el Problema de Flujo Máximo consiste en encontrar el flujo de máximo valor que admite G

Repaso



Método de Ford-Fulkerson

Es un método general, no un algoritmo específico.

Se basa en 3 conceptos claves:

- redes residuales
- caminos de aumento
- cortes

Método de Ford-Fulkerson

El método comienza con una red de flujo vacía.

En cada iteración se busca un camino de aumento en la red residual para incrementar el valor del flujo.

Se puede demostrar mediante el teorema de max-flow min-cut que, cuando termina, el flujo obtenido es máximo

Redes residuales

Intuitivamente, la red residual es una nueva red de flujo que representa cómo podemos cambiar el flujo.

Formalmente, la red residual de $G = \langle N,A \rangle$ es $G_f = \langle N,A_f \rangle$, donde las capacidades de los arcos están dadas por:

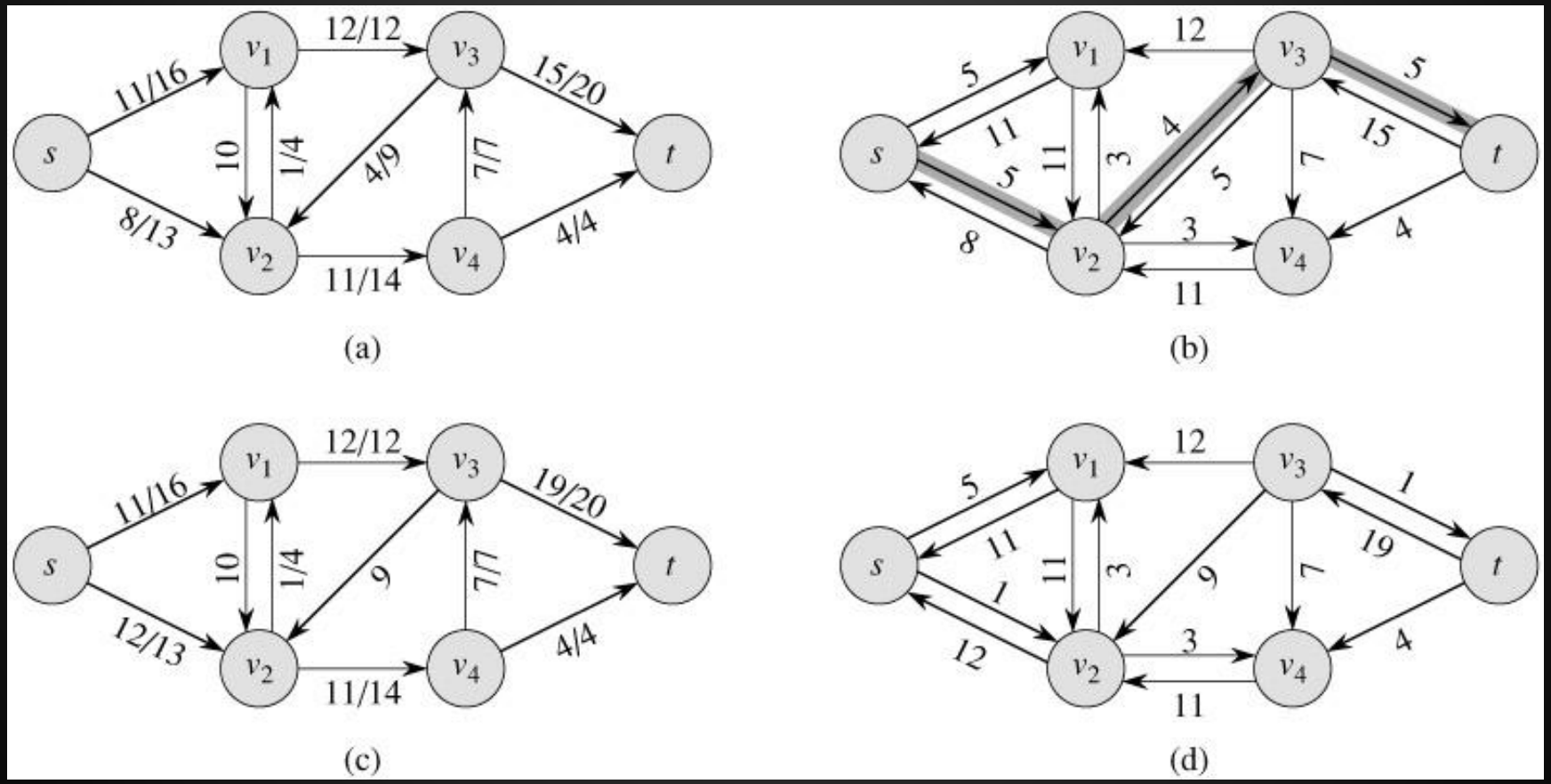
$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Caminos de aumento

Como vimos, dada una red de flujo G = <N,A> y un flujo f, podemos obtener una red residual G_f
Un camino de aumento es, sencillamente, un camino simple de s a t en la red residual.

Si existe un camino de aumento en la red residual, el flujo puede aumentarse a lo largo de dicho camino con un valor igual a la menor capacidad de los arcos del camino.

Aumento de flujo



Cortes

Dada una red de flujo G = <N,A>. Un corte es una partición de N en S y T = N-S tal que $s \in S$ y $t \in T$.

Dado un corte (S,T).

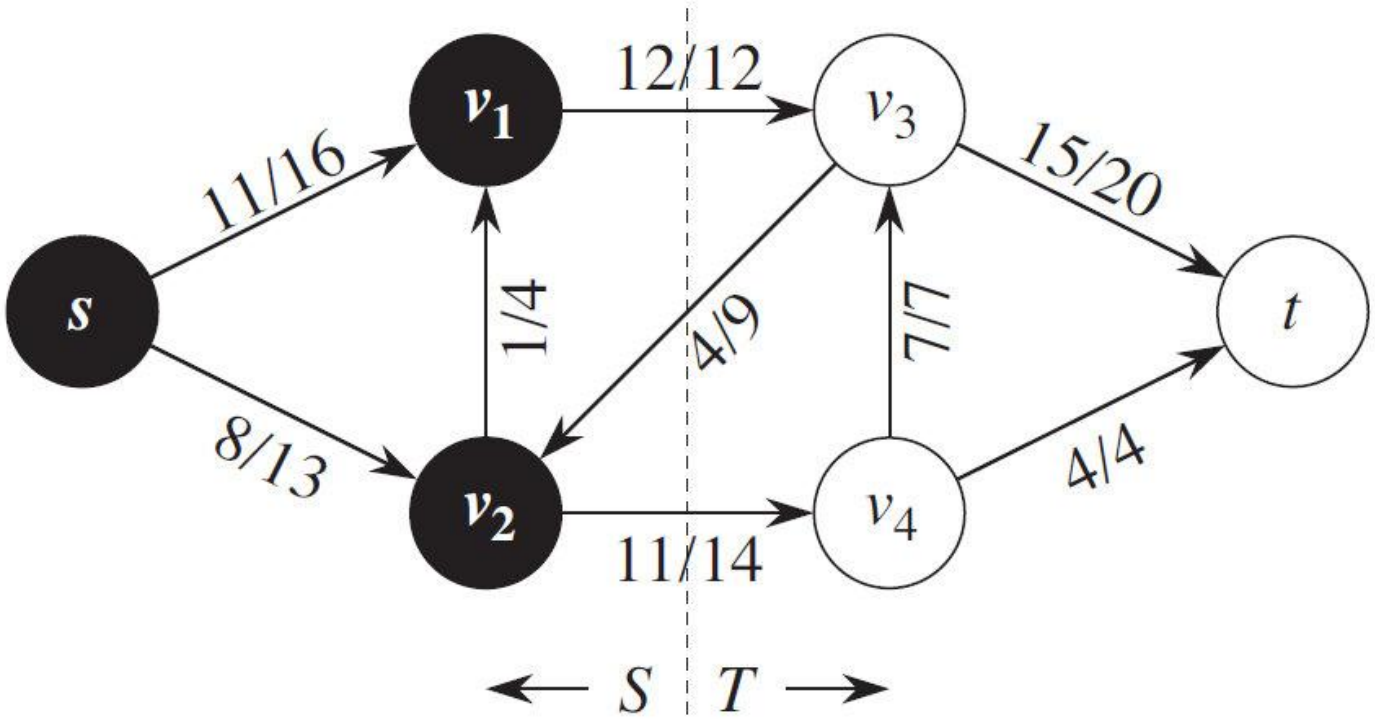
El flujo neto a través del corte es:

$$f(S,T) = \Sigma_{u \in S} \Sigma_{v \in T} f(u,v) - \Sigma_{u \in S} \Sigma_{v \in T} f(v,u)$$

Y la capacidad del corte es:

$$c(S,T) = \Sigma_{u \in S} \Sigma_{v \in T} c(u,v)$$

Cortes



Teorema max-flow min-cut

Los 3 siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es un flujo máximo
2. La red residual G_f no contiene caminos de aumentos
3. $|f| = c(S,T)$ para algún corte (S,T) de G

Este teorema prueba que el método de Ford-Fulkerson es correcto.

Max-flow min-cut: Demostración

1 => 2

Si el flujo es máximo entonces no pueden existir caminos de aumento. De otro modo, sería posible aumentar el valor del flujo

2 => 3

Si no existen caminos de aumento en la red residual, s y t están desconectados. Por lo tanto si S es el conjunto de los nodos alcanzables desde s y T = N - S. El corte (S,T) está saturado

Max-flow min-cut: Demostración

3 => 1

Se puede observar que todo flujo tiene un valor menor o igual que la capacidad de cualquier corte. Es decir, todo corte implica una cota superior al valor de un flujo válido.

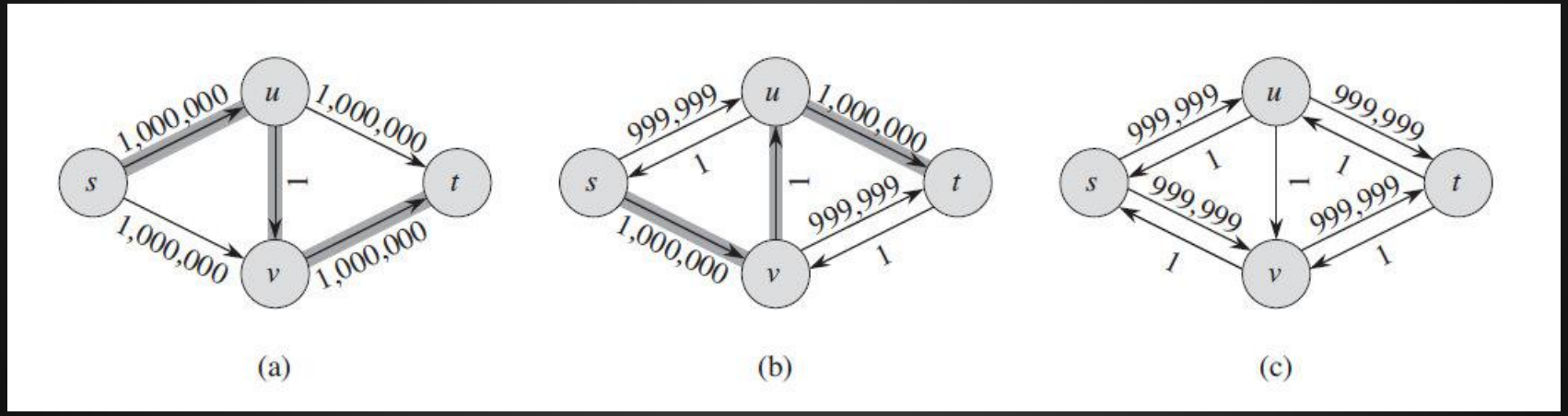
Si el flujo satura algún corte (S,T), esto quiere decir que el flujo tiene el máximo valor posible. Además, el corte (S,T) es el corte de capacidad mínima (o *min-cut*) de la red de flujo.

Ford-Fulkerson: Pseudo-código

```
FORD-FULKERSON(G, s, t):
   para cada arco (u,v) ∈ G.E:
      (u,v).f = 0

   mientras exista camino de aumento p en G_f:
      c_f(p) = min {c_f(u,v) : (u,v) ∈ P}
      para cada arco (u,v) ∈ p:
         (u,v).f += c_f(p)
         (v,u).f -= c_f(p)
```

Algoritmo de Edmonds-Karp



Algoritmo de Edmonds-Karp

Como se vió en la figura anterior, si no elegimos los caminos de aumento de manera inteligente el tiempo de ejecución puede no estar acotado polinomialmente sobre el tamaño de la entrada.

Afortunadamente, si buscamos el camino de aumento más corto con un BFS, se puede demostrar una cota polinomial: $O(m^2n)$

Esta implementación de Ford-Fulkerson recibe el nombre de algoritmo de Edmonds-Karp

Problemas

Necklace - Regional China 2008 (Hefei)
http://goo.gl/xIFUBV

Dado un grafo no dirigido ($n <= 10^4$, $m <= 10^5$) y dos nodos S y T. Determinar si existe un collar (necklace) entre S y T.

Generalización de Conectividad

- Vimos el concepto de conectividad. Componentes conexas y fuertemente conexas
- También vimos el concepto de componentes biconexas
- Se puede generalizar a k-conectividad

Generalización de Conectividad

- Un grafo es k-vertex connected si no existe ningún conjunto de k-1 vértices tal que al eliminarlos nos deja el grafo desconectado
- A partir de lo anterior, podemos definir componentes k-vertex connected de un grafo como los subconjuntos maximales que cumplen la propiedad
- Existe una definición similar para k-edge connectivity

Como calcular k-connectivity?

- A alguien se le ocurre una idea?
- Con el teorema de Max Flow - Min Cut podemos obtener la k-edge connectivity
- Y cuando queremos calcular k-vertex. QUE HACEMOS???

Problemas

Optimal Marks - SPOJ

goo.gl/X4fX5Q

Dado un grafo no dirigido donde algunos nodos tienen asignado un número de 31 bits. La tarea es asignar números al resto de los nodos de manera que la suma de los xor de nodos adyacentes sea mínima. O sea, para todo $(u,v) \in G$, minimizar $\sum_{(u,v)}$ marca(u) ^ marca(v)

Bipartite Matching

Existen problemas combinatorios que, en principio, parecen no guardar relación con el problema de Flujo Máximo pero que pueden ser reducidos a éste.

Uno de los ejemplos más conocidos es el problema del matching bipartito.

Bipartite Matching

Dado un grafo G = <N,A>, un *matching* es un subconjunto $M \subseteq A$ tal que para todo vértice $v \in M$ existe a lo sumo un arco de M incidente a v.

Se puede pensar como un "apareamiento" de los nodos, en los que cada nodo se aparea con a lo sumo un nodo, y la relación es simétrica.

Bipartite Matching

El problema de *Maximum Matching* consiste en encontrar un *matching* válido de máxima cardinalidad en un grafo.

Este problema resulta más sencillo para una clase restringida de grafos llamados grafos bipartitos.

Grafo bipartito

Un grafo bipartito es un grafo G = <N,A> donde el conjunto de nodos N puede ser particionado en 2 conjuntos N = L $\cup$ R donde L y R son disjuntos y los arcos unen nodos entre L y R.

El problema de hallar un matching máximo en un grafo bipartito se conoce como *maximum bipartite matching*.

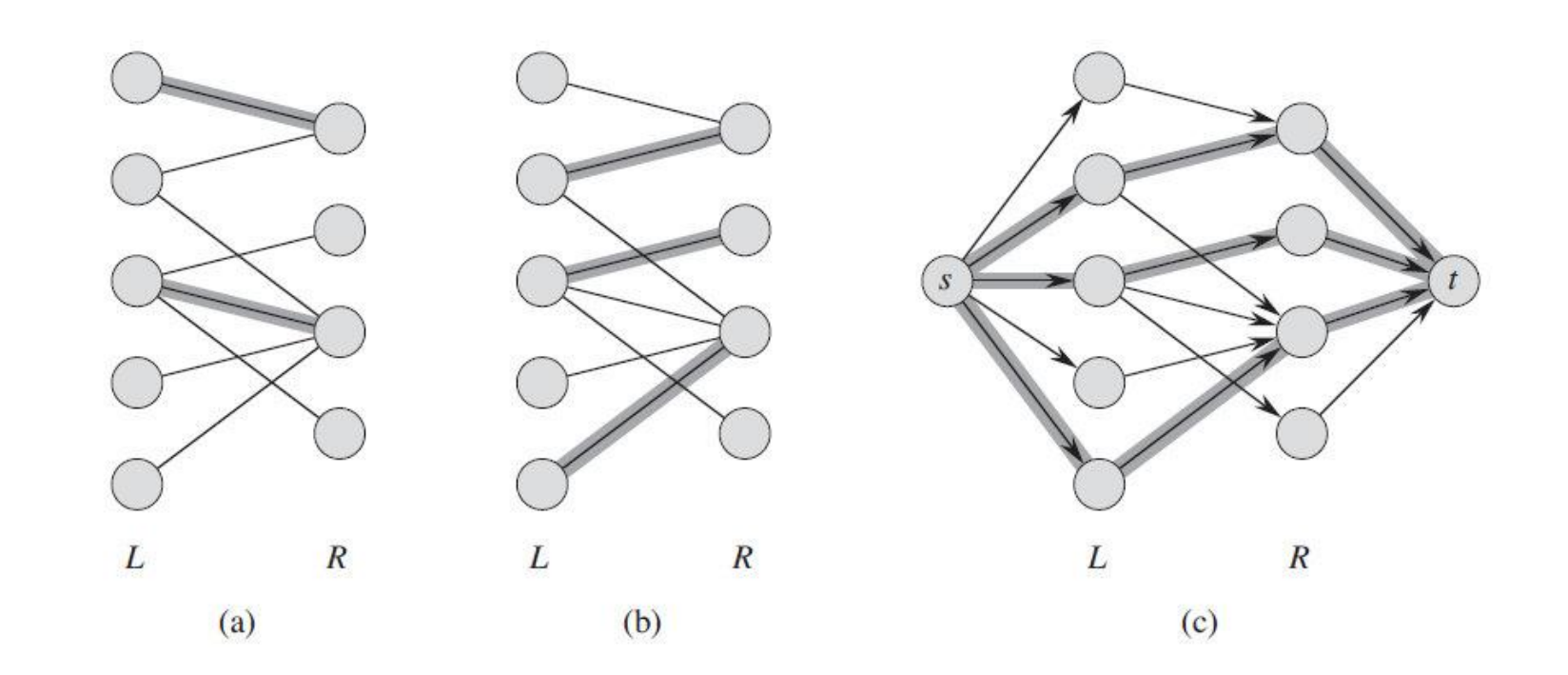
Maximum bipartite matching

Este problema puede reducirse a un problema de flujo máximo.

Para ello, construimos una red de flujo donde se agregan 2 nodos: un source s y un sink t.

Se agrega un arco de capacidad 1 entre el *source* y cada nodo de L y se agrega un arco de capacidad 1 entre cada nodo de R y el *sink*.

Maximum bipartite matching



Problemas

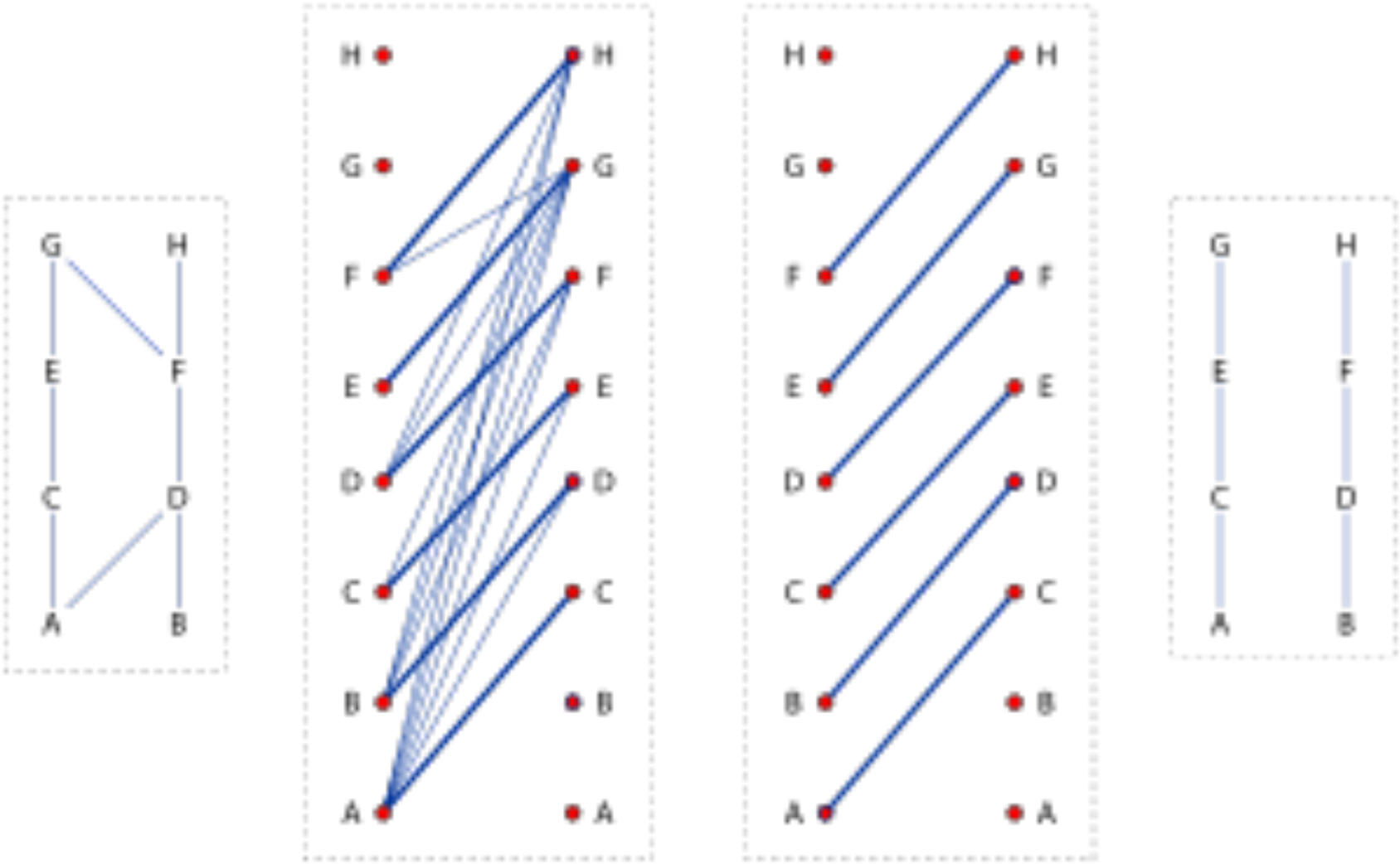
Attacking Rooks - Regional Latam 2013
http://goo.gl/oph4Q8

Dado un tablero de ajedrez de m x n (1 <= m,n <= 100) donde algunas casillas fueron bloqueadas. Determinar cuál es la máxima cantidad de torres que se pueden colocar de manera que no existan 2 que se amenacen.

Teorema de Dilworth

- Caracteriza el ancho de un POS (Partially Ordered Set) u Orden Parcial.
- El tamaño de la mayor anticadena es igual al de la partición del *POS* en la mínima cantidad de cadenas posibles
- Se puede ver relativamente fácil construyendo un bipartite matching

Teorema de Dilworth



Problemas

Stock Charts - Google Code Jam R2 (2009)
goo.gl/lpVuZN

Dados varios charts, representados como polilíneas. Dos charts se pueden combinar en una sola hoja si no se intersectan. Determinar la mínima cantidad de hojas necesarias para dibujar todos los charts.

Más problemas!

- Inspection: goo.gl/iYho0F
- Super Watch: goo.gl/Y1h5zY
- Oil Company: goo.gl/XW3jSp
- Shogui Tournament: goo.gl/KRz3Yi
- Graduation: goo.gl/hnCwOU
- Parking: goo.gl/21ZJqC
- "Shortest" pair of paths: goo.gl/ardYaY
- Angels and Devils: goo.gl/sCkd30

Código fuente

Para los problemas dados pueden utilizar el código fuente en el siguiente repositorio: https://github.com/nicalvarez/flujo

Hay implementaciones de:

- Bipartite Matching (DFS)
- Edmonds-Karp
- Dinic
- Preflow-push

Bibliografía

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest. *Introduction to Algorithms 3ed. Capítulo 26*

- Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*

- Topcoder Tutorials:
  - Max flow: goo.gl/luDODH
  - Min-cost max-flow: goo.gl/XfRWjS

Preguntas?