Primalidad y Factorización

Agustín Santiago Gutiérrez

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Campamento Caribeño ACM-ICPC 2016

Contenidos

If numbers aren't beautiful, I don't know what is.

Paul Erdős

Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reason to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate.

Leonhard Euler

Contenidos

Definición

Aritmética módulo M ($\mathbb{Z}_M$)

La aritmética módulo M consiste en una modificación de la aritmética usual de números enteros, en la cual trabajamos únicamente con el *resto* de los números al ser divididos por un cierto entero fijo $M > 0$, ignorando "todo lo demás" de los números involucrados.

Definición

Aritmética módulo M ($\mathbb{Z}_M$)

La aritmética módulo M consiste en una modificación de la aritmética usual de números enteros, en la cual trabajamos únicamente con el *resto* de los números al ser divididos por un cierto entero fijo $M > 0$, ignorando "todo lo demás" de los números involucrados.

- Así, $11 = 18$ si estamos trabajando módulo 7, pues ambos dejan un resto de 4 en la división por 7. Esto se suele notar $11 \equiv 18 \pmod 7$

Definición

Aritmética módulo M ($\mathbb{Z}_M$)

La aritmética módulo M consiste en una modificación de la aritmética usual de números enteros, en la cual trabajamos únicamente con el *resto* de los números al ser divididos por un cierto entero fijo $M > 0$, ignorando "todo lo demás" de los números involucrados.

- Así, $11 = 18$ si estamos trabajando módulo 7, pues ambos dejan un resto de 4 en la división por 7. Esto se suele notar $11 \equiv 18 \pmod 7$
- Una forma operacional de ver esta aritmética es suponer que todo el tiempo tenemos los números reducidos al rango de enteros en $[0, M)$, y tomamos el resto de la división por M para devolverlos a ese rango luego de cada operación.

Propiedades

A los efectos de realizar sumas, restas y productos, la aritmética módular es análoga a la aritmética usual, manteniendo sus propiedades importantes.

- $a + b \equiv b + a \pmod{M}$
- $(a + b) + c \equiv a + (b + c) \pmod{M}$
- 0 es el neutro de la suma.
- Para todo a existe un único inverso aditivo modular $-a$, $a + (-a) \equiv 0 \pmod{M}$. $a - b \equiv a + (-b) \pmod{M}$
- $a \cdot b \equiv b \cdot a \pmod{M}$
- $(a \cdot b) \cdot c \equiv a \cdot (b \cdot c) \pmod{M}$
- 1 es el neutro del producto.
- $(a + b) \cdot c \equiv a \cdot c + b \cdot c \pmod{M}$

Forma operacional en el código

Supongamos que se tiene que computar una suma de los números enteros `a[0]` hasta `a[N-1]`, pero solamente nos importan los últimos 4 dígitos (equivale a trabajar módulo 10000).

```
1 | int result = 0;
2 | for (int i = 0; i < N; i++)
3 |     result = (result + a[i]) %10000;
```

Como decíamos antes, a nivel de operaciones trabajar con aritmética modular equivale a simplemente tomar módulo luego de cada operación aritmética básica.

Problema ante números negativos

Sin embargo, la implementación anterior puede resultar problemática al trabajar con números **negativos**.

- Si por ejemplo fuera $N = 2$, `a[0]=123` y `a[1]=-200`, el código anterior produce -77, que puede no ser lo deseado.
- Incluso si no hay números negativos en el problema, es muy común que **restemos** números en nuestra solución.
- Estos resultados con valores negativos ocurren porque el resultado de la división entera se redondea hacia cero en los lenguajes y plataformas más populares.

Problema ante números negativos

Sin embargo, la implementación anterior puede resultar problemática al trabajar con números **negativos**.

- Si por ejemplo fuera $N = 2$, `a[0]=123` y `a[1]=-200`, el código anterior produce -77, que puede no ser lo deseado.
- Incluso si no hay números negativos en el problema, es muy común que **restemos** números en nuestra solución.
- Estos resultados con valores negativos ocurren porque el resultado de la división entera se redondea hacia cero en los lenguajes y plataformas más populares.
- Solución:

```
int MOD(int x, int M){return ((x%M)+M)%M;}
```

Cuidado con el overflow

- Otro problema al que es especialmente común enfrentarse al trabajar con aritmética modular es el peligro de tener overflow en las operaciones.
- Por esto es que tomamos módulo luego de cada operación, y no solamente al final de todo el programa.
- Truquito en C++: Tener en cuenta el tipo `__int128`, entero de 128 bits. No está presente en todo judge, pero puede ser muy útil cuando está disponible.

¿Qué pasa con la división?

- ¿Podemos operar modularmente con la división tal cual lo hacemos con sumas, restas y productos?

¿Qué pasa con la división?

- ¿Podemos operar modularmente con la división tal cual lo hacemos con sumas, restas y productos?
- **NO**. Por ejemplo:
  $\frac{10}{2} \equiv 5 \pmod 8$, pero $10 \equiv 2 \pmod 8$ y $\frac{2}{2} \equiv 1 \not\equiv 5 \pmod 8$
- Podemos garantizar que este "truco" funciona cuando el módulo es un número **primo**.
  $\frac{27}{3} \equiv 2 \pmod 7$, $27 \equiv 6 \pmod 7$ y $\frac{6}{3} \equiv 2 \pmod 7$
  Pero solo si el divisor **no es cero** (módulo p)
  $\frac{140}{14} \equiv 3 \pmod 7$, pero $140 \equiv 14 \equiv 0 \pmod 7$ y $\frac{0}{0} \equiv ? \pmod 7$

¿Qué pasa con la división?

- ¿Podemos operar modularmente con la división tal cual lo hacemos con sumas, restas y productos?
- **NO**. Por ejemplo:
  $\frac{10}{2} \equiv 5 \pmod 8$, pero $10 \equiv 2 \pmod 8$ y $\frac{2}{2} \equiv 1 \not\equiv 5 \pmod 8$
- Podemos garantizar que este "truco" funciona cuando el módulo es un número **primo**.
  $\frac{27}{3} \equiv 2 \pmod 7$, $27 \equiv 6 \pmod 7$ y $\frac{6}{3} \equiv 2 \pmod 7$
  Pero solo si el divisor **no es cero** (módulo p)
  $\frac{140}{14} \equiv 3 \pmod 7$, pero $140 \equiv 14 \equiv 0 \pmod 7$ y $\frac{0}{0} \equiv ? \pmod 7$
- ¿Pero y si aún con un módulo primo, la división modular no resulta una división entera?
  $\frac{12}{3} \equiv 4 \pmod 7$, pero $12 \equiv 5 \pmod 7$ y $\frac{5}{3} \equiv ? \pmod 7$

Inversos modulares

Definición

Decimos que b es inverso de a módulo M si $a \cdot b \equiv 1 \pmod{M}$.

Notar que solo un $a \not\equiv 0 \pmod{M}$ podría tener un inverso, y de existir el inverso es único, y a su vez a resulta ser el inverso de b.

Inversos modulares

Definición

Decimos que b es inverso de a módulo M si $a \cdot b \equiv 1 \pmod{M}$.

Notar que solo un $a \not\equiv 0 \pmod{M}$ podría tener un inverso, y de existir el inverso es único, y a su vez a resulta ser el inverso de b.

Teorema

Si p es un número primo, entonces todo número $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ tiene un inverso módulo p.

Inversos modulares: utilidad

- Recordemos que para realizar $3/2 = 1{,}5$, en realidad podríamos multiplicar directamente por el inverso de 2, es decir $3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$
- Lo mismo podemos hacer modularmente. Por ejemplo, $5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 7$, así que $inv(3) = 5$. Y entonces recordando el ejemplo anterior:
  $\frac{12}{3} \equiv 4 \pmod 7$,
  $12 \equiv 5 \pmod 7$ y
  "$\frac{5}{3}$" $\equiv 5 \cdot inv(3) \equiv 5 \cdot 5 \equiv 4 \pmod 7$
- De esta forma, ya podemos dividir modularmente al trabajar con un número primo (excepto cuando el divisor se hace 0 módulo p).
- ¿Pero cómo calculamos los inversos?

Contenidos

Pequeño teorema de Fermat

Teorema

Si p es primo y $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

- Por ejemplo $6^{30} = 7131416765184947029025 \cdot 31 + 1$
- ¿Para qué puede servir este teorema?

Aplicación 1: Cálculo de inversos

- Recordemos que dado $a \not\equiv 0$, si encontramos algún número x tal que $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$, x será automáticamente el inverso de a.
- Si tomamos $x = a^{p-2}$, ¿Cuánto vale $a \cdot x$?

Aplicación 1: Cálculo de inversos

- Recordemos que dado $a \not\equiv 0$, si encontramos algún número x tal que $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$, x será automáticamente el inverso de a.
- Si tomamos $x = a^{p-2}$, ¿Cuánto vale $a \cdot x$?
- Tenemos $a \cdot x = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ por el Pequeño Teorema de Fermat.
- Luego para cada a su inverso será simplemente a^{p-2}.

Aplicación 2: Testeo de residuo cuadrático

Definición

Un resto r se dice un *residuo cuadrático* módulo p si existe x tal que $x^2 \equiv r \pmod{p}$

Por ejemplo los residuos cuadráticos módulo 5 son $0, 1, 4$. Notar que 0 siempre es residuo cuadrático módulo p.

- Si $r \not\equiv 0$ es residuo cuadrático, ¿Cuánto vale $r^{\frac{p-1}{2}}$?

Aplicación 2: Testeo de residuo cuadrático

Definición

Un resto r se dice un *residuo cuadrático* módulo p si existe x tal que $x^2 \equiv r \pmod{p}$

Por ejemplo los residuos cuadráticos módulo 5 son $0, 1, 4$. Notar que 0 siempre es residuo cuadrático módulo p.

- Si $r \not\equiv 0$ es residuo cuadrático, ¿Cuánto vale $r^{\frac{p-1}{2}}$?
- $r \equiv x^2$ para algún $x \not\equiv 0$, y entonces $r^{\frac{p-1}{2}} \equiv (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$
- Se puede verificar que además si para algún r vale $r^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, r es residuo cuadrático módulo p.

Contenidos

Potenciación logarítmica

- En los ejemplos anteriores hemos reducido algunos problemas a calcular a^b módulo M, para enteros no negativos a, b, M.
- ¿Cómo hacemos esto más eficientemente que realizando $b - 1$ multiplicaciones?

Potenciación logarítmica (idea)

- Una buena idea es pensar en ir elevando al cuadrado sucesivamente, lo cual permite que el exponente crezca rápidamente.
- Pensado de manera recursiva, si llamamos $f(a,n) = a^n$:

$$f(a,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ f\left(a^2, \frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par} \\ a \cdot f\left(a^2, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Potenciación logarítmica (código)

```
1  typedef long long tint;
2  tint potlog(tint a,tint b, const tint M)
3  {
4      tint res = 1;
5      while (b > 0)
6      {
7          if (b%2 != 0)
8              res = MOD(res*a, M);
9          a = MOD(a*a, M);
10         b /= 2;
11     }
12     return res;
13 }
```

Invariante de ciclo:
La respuesta que deseamos es $res \cdot (a^b \text{ módulo } M)$
Este método realiza solamente $O(\lg b)$ multiplicaciones.

Contenidos

Problema

- Una necesidad muy usual al trabajar con números primos es la de calcular *todos* los primos desde 1 hasta N para un cierto N.
- La idea es realizarlo de manera más eficiente que verificando la primalidad de cada número por separado.

Idea 1

- Si verificásemos cada número por separado, lo que haríamos sería recorrer sus posibles **divisores** para ver si es primo.
- ¿Que pasaría si en lugar de probar los divisores de cada número, descartásemos sus **múltiplos**?

Idea 1

- Si verificásemos cada número por separado, lo que haríamos sería recorrer sus posibles **divisores** para ver si es primo.
- ¿Que pasaría si en lugar de probar los divisores de cada número, descartásemos sus **múltiplos**?
- Hay $\frac{N}{1}$ múltiplos de 1, $\frac{N}{2}$ múltiplos de 2, $\cdots$ $\frac{N}{N}$ múltiplos de N. Luego si recorremos todo el costo total es

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{N}{i} = N \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} = \Theta(N \lg N)$$

Idea 1 (cont.)

- Esta idea es verdaderamente muy sencilla, y como vimos ya alcanza una eficiencia aceptable.
- Además, al recorrer los múltiplos de todos los números, se encuentran todos los divisores propios de todos los números.
- De esta forma es extremadamente fácil modificar esta versión para computar fácilmente sumas de divisores, cantidades, y otras funciones similares.

```
1    for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;
2    p[0] = p[1] = false;
3    for (int i = 2; i < MAX; i++)
4        for (int j = 2*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

Idea 2

- Todo número compuesto tiene un divisor **primo**.
- Por lo tanto, alcanza con descartar los múltiplos de los números primos que vamos encontrando.
- La cantidad de operaciones a realizar en este caso se reduce a $\Theta(N \lg \lg N)$, que es “casi lineal”.

```
1    for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;
2    p[0] = p[1] = false;
3    for (int i = 2; i < MAX; i++)
4    if (p[i])
5        for (int j = 2*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

Idea 3

- Todo número compuesto tiene un divisor primo p, con $p \leq \sqrt{N}$.
- Podemos parar el proceso de descarte de múltiplos en $\sqrt{N}$.
- La cantidad de operaciones sigue siendo $\Theta(N \lg \lg N)$.

```
1    for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;
2    p[0] = p[1] = false;
3    for (int i = 2; i*i < MAX; i++)
4    if (p[i])
5        for (int j = 2*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

Idea 4

- De manera similar al caso anterior, si $N < p^2$ es compuesto, tiene un divisor primo menor que p, y ya habrá sido descartado.
- Podemos comenzar el descarte de los múltiplos de i por i^2.
- Aún con esta optimización, la cantidad de operaciones sigue siendo $\Theta(N \lg \lg N)$.

```
1    for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = true;
2    p[0] = p[1] = false;
3    for (int i = 2; i*i < MAX; i++)
4    if (p[i])
5        for (int j = i*i; j < MAX; j += i) p[j] = false;
```

Tiempos

Para `MAX=300M`:

`RecorrerMultiplos`	39.1 s
`CribaBasica`	5.6 s
`CribaHastaRaiz`	3.2 s
`CribaHastaRaizDesdeICuadrado`	3.0 s

Contenidos

Contenidos

Algoritmo ingenuo

- Como ya hemos mencionado, un número compuesto N tendrá un divisor primo menor o igual a $\sqrt{N}$
- Un algoritmo simple $O(\sqrt{N})$ consistirá entonces de un chequeo de todos los números enteros en el rango $[2, \sqrt{N}]$, en busca de divisores de N.

Contenidos

Test de Rabin - Miller (Introducción)

- El test de Rabin-Miller es un algoritmo **probabilístico**, muy eficiente para verificar si un número es primo.
- Se basa en su antecesor, el *test de Fermat*.
- Recordemos: $a \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Test de Fermat

- El test de Fermat es un test probabilístico para verificar si un número candidato N es primo.
- Se selecciona para ello un entero al azar $a \in [1, N)$.
- Si N es primo necesariamente será $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$, así que si esto no ocurre descartamos al número como primo.
- Si esto ocurre, el número pasó el test de Fermat con a como testigo. El test puede repetirse con varios valores de a para aumentar la confianza.

Test de Fermat: problema

- El test de Fermat es eficiente, pero tiene un problema: existen ejemplos de números que pasan el test de Fermat para todo valor de a coprimo con N, pero que son compuestos.
- Estos números extremos son raros y se denominan de *Carmichael*. Los primeros son 561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911.
- Con estos números, el test solamente los detecta como compuestos si a es múltiplo de uno de los primos que dividen a N, y por lo tanto el test es prácticamente una búsqueda de divisores aleatoria.

Test de Rabin - Miller (idea)

- El test de Rabin-Miller elimina este problema verificando una condición más fuerte.
- Observemos que si $p > 2$ es primo y $x^2 = 1 \pmod p$, x solo puede ser 1 o -1 módulo p.
- Luego si $p - 1 = 2^\alpha k$, con k impar y $\alpha \geq 1$, tenemos que para cualquier $a \not\equiv 0 \pmod p$ debe ser $a^{2^\alpha k} \equiv 1 \pmod p$.
- Pero entonces $a^{2^{\alpha-1} k} \equiv 1$ o $-1 \pmod p$
- Y si fuera 1, entonces nuevamente $a^{2^{\alpha-2} k} \equiv 1$ o $-1 \pmod p$
- Y así podemos repetir el razonamiento hasta que $a^k \equiv 1$ o bien $a^{2^j k} \equiv -1$ para algún $0 \leq j < \alpha$

Test de Rabin - Miller (idea cont.)

Tenemos entonces las siguientes posibilidades para el valor de $a^{2^j k}$ (una por columna):

j							
α	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha - 1$	-1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha - 2$	?	-1	$\cdots$	1	1	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	?	?	$\cdots$	-1	1	1	1
1	?	?	$\cdots$	?	-1	1	1
0	?	?	$\cdots$	?	?	-1	1

Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
α	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha - 1$	-1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha - 2$	?	-1	$\cdots$	1	1	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	?	?	$\cdots$	-1	1	1	1
1	?	?	$\cdots$	?	-1	1	1
0	?	?	$\cdots$	?	?	-1	1

$a^k \equiv 1$ o -1

Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
α	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-1$	-1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-2$	?	-1	$\cdots$	1	1	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	?	?	$\cdots$	-1	1	1	1
1	?	?	$\cdots$	?	-1	1	1
0	?	?	$\cdots$	?	?	-1	1

$a^{2k} = (a^k)^2 \equiv -1$

Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
α	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-1$	-1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-2$	?	-1	$\cdots$	1	1	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	?	?	$\cdots$	-1	1	1	1
1	?	?	$\cdots$	?	-1	1	1
0	?	?	$\cdots$	?	?	-1	1

$a^{2^2 k} = (a^{2k})^2 \equiv -1$

Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
α	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-1$	-1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-2$	?	-1	$\cdots$	1	1	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	?	?	$\cdots$	-1	1	1	1
1	?	?	$\cdots$	?	-1	1	1
0	?	?	$\cdots$	?	?	-1	1

$a^{2^{\alpha-2}k} \equiv -1$

Test de Rabin - Miller (implementación)

En general estas son chequeadas desde abajo hacia arriba, de forma que cada valor necesario es el cuadrado del que se necesitó en el paso anterior:

j							
α	1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-1$	-1	1	$\cdots$	1	1	1	1
$\alpha-2$	?	-1	$\cdots$	1	1	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	?	?	$\cdots$	-1	1	1	1
1	?	?	$\cdots$	?	-1	1	1
0	?	?	$\cdots$	?	?	-1	1

$a^{2^{\alpha-1}k} \equiv -1$

Test de Rabin - Miller (conclusión)

- Si ninguno de los casos anteriores se da, concluímos que definitivamente el número no es primo.
- Si alguno funciona, ese valor de a funciona y el número parece ser primo.
- Al igual que en el test de Fermat, conviene utilizar varios valores de a para aumentar la confianza.
- En el caso del test de Rabin-Miller, tenemos la garantía de que si $N > 2$ es compuesto impar, al menos el 75 % de los posibles restos a no nulos módulo N lo demostrarán usando el test.
- Por lo tanto si repetimos el test k veces sobre un número compuesto, eligiendo números de manera aleatoria, uniforme e independiente, la probabilidad de error es como máximo $\frac{1}{4^k}$.
- Los números primos siempre pasan el test, y son reportados como tales.

Test de Rabin - Miller (bonus)

- Si los números a verificar no son demasiado grandes, se conocen versiones deterministas del test probando con un conjunto específico de valores de *a*.
- Por ejemplo wikipedia menciona:
  - if n < 4,759,123,141 $> 2^{32}$, it is enough to test: a = 2, 7, and 61;
  - if n < 18,446,744,073,709,551,616 = 2^{64}, it is enough to test: a = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, and 37.
- Los artículos citados son:
  - Jaeschke, Gerhard (1993), “On strong pseudoprimes to several bases”, Mathematics of Computation 61 (204): 915-926
  - Jiang, Yupeng; Deng, Yingpu (2014). “Strong pseudoprimes to the first eight prime bases”. Mathematics of Computation 83 (290): 2915-2924. doi:10.1090/S0025-5718-2014-02830-5

Contenidos

Factorización logarítmica

- Buena alternativa si nos interesa poder factorizar rápidamente cualquier número hasta N, y aceptamos el costo de una criba hasta N.
- Si en lugar de solamente guardar si un número es primo o no, guardamos un primo que lo divida mientras hacemos la criba, luego podemos saber un divisor primo de cualquier número en $O(1)$. Esto permite factorizar cualquier número en $O(\lg N)$.

```
1  for(int i = 0; i < MAX; i++) p[i] = i;
2  p[0] = p[1] = 1;
3  for (int i = 2; i*i < MAX; i++)
4  if (p[i] == i)
5      for (int j = i*i; j < MAX; j += i) p[j] = i;
```

Contenidos

Contenidos

Algoritmo ingenuo

- Sabemos que si no hay ningún factor primo hasta $\sqrt{N}$, N debe ser primo.
- En virtud de esto, es natural dar un algoritmo de factorización que pruebe todos los posibles factores hasta ese valor.
- Notar que podemos cortar en la raíz de la parte de N que falta factorizar, acelerando el proceso cuando hay bastantes factores chicos y uno grande.
- El peor caso sigue siendo $\Theta(\sqrt{N})$

```
1  for(int i = 2; i*i <= N; i++)
2  while (N %i == 0)
3  {
4      N /= i;
5      reportarFactorPrimo(i);
6  }
7  if (N > 1)
8      reportarFactorPrimo(N);
```

Contenidos

Introducción

Problema

Supongamos que tenemos una sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots$
Queremos ir leyéndola hasta encontrar la primera repetición (es decir, los menores i, j tales que $x_i = x_j$ con $i < j$).

- ¿Cómo podemos resolver esta tarea?

Introducción

Problema

Supongamos que tenemos una sucesión $x_1, x_2, x_3, \cdots$
Queremos ir leyéndola hasta encontrar la primera repetición (es decir, los menores i, j tales que $x_i = x_j$ con $i < j$).

- ¿Cómo podemos resolver esta tarea?
- Árbol binario de búsqueda
- Tabla hash.
- Lista de valores

Introducción (cont.)

- Un árbol binario de búsqueda (`set` de C++, `TreeSet` de Java) es una estructura eficiente que lo resuelve en $O(j \lg j)$.
- Requiere $O(j)$ memoria.
- Requiere un operador $<$ para los valores.

Introducción (cont.)

- Una tabla hash (`unordered_set` de C++, `HashSet` de Java) es una estructura eficiente que lo resuelve en $O(j)$ (**asumiendo una buena función de Hash**).
- Requiere $O(j)$ memoria.
- Requiere que se pueda computar una función de hash sobre cada valor.

Introducción (cont.)

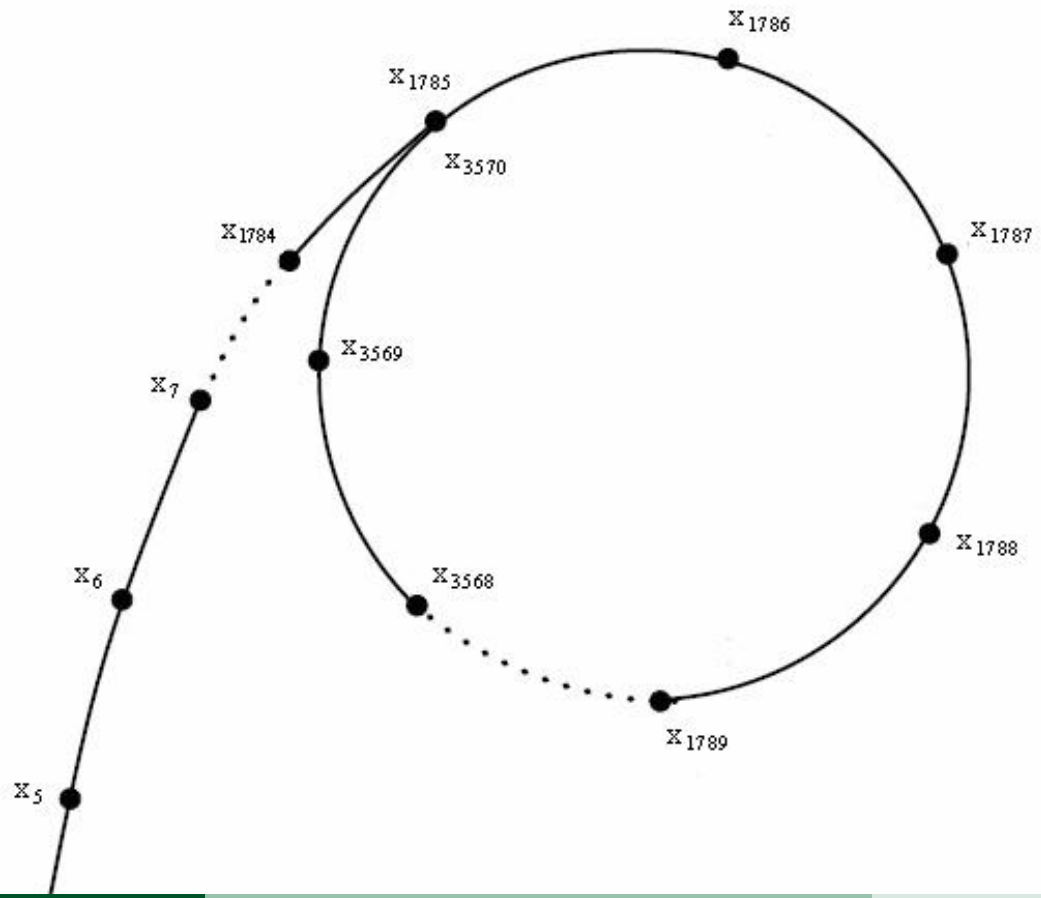
- Una simple lista de valores (`vector` de C++, `ArrayList` de Java) es una estructura que lo resuelve en $O(j^2)$.
- Requiere $O(j)$ memoria.
- Únicamente requiere un operador de igualdad ($=$) sobre los elementos.

Introducción (cont.)

- En el caso general (si leemos los x_i de la entrada) es difícil mejorar estas estructuras.
- Sin embargo, un caso muy común se da cuando la sucesión se obtiene por aplicación reiterada de alguna función f: $x_1, f(x_1), f(f(x_1)), f(f(f(x_1))), \cdots$
- Veremos un algoritmo para dicho caso particular, que logrará lo mejor entre todos ellos y más:
  - O(1) memoria
  - O(j) tiempo (u $O(j)$ aplicaciones de f si el costo de f no es $O(1)$)
  - **Únicamente requiere un operador de igualdad ($=$) sobre los elementos**

Estructura de ρ

- En este caso, cuando aparezca la primera repetición $x_i = x_j$, necesariamente será $x_{i+1} = f(x_i) = f(x_j) = x_{j+1}$ y la secuencia entra en un ciclo de período $j - i$ que comienza en i.
- Gráficamente ($i = 1785$, $j = 3570$):



Caso aún más particular

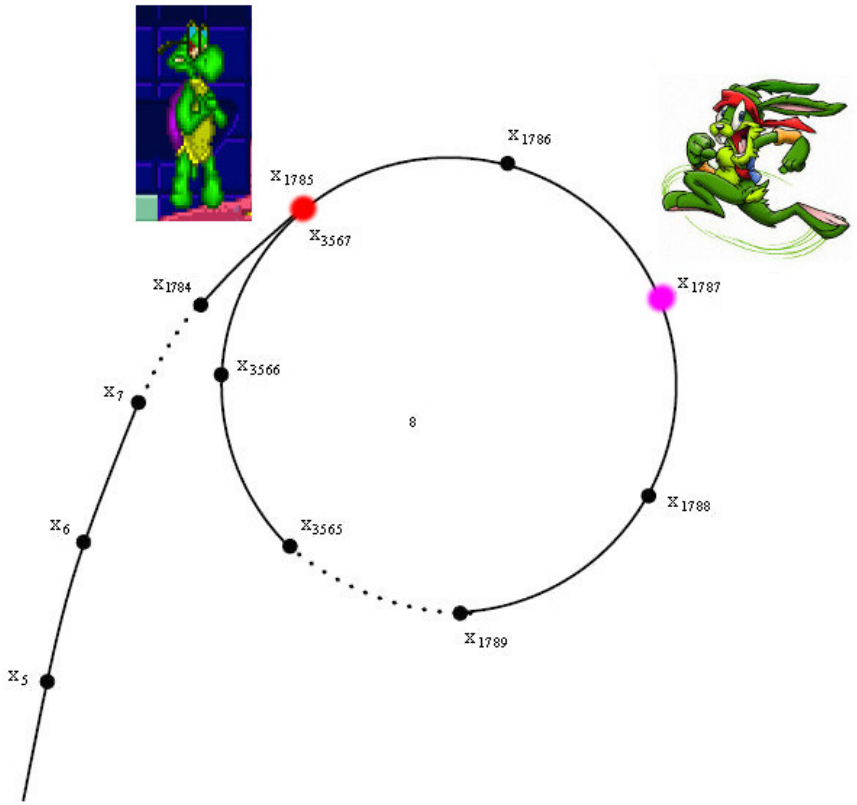
- Cuando la f es inversible, no es difícil ver que la primera repetición será de la forma $i = 1$, $x_1 = x_j$.
- En efecto, si f es inversible, la ρ debe degenerar a un ciclo simple, pues de lo contrario x_i tendría dos antecesores por f, y eso no puede ocurrir.
- El algoritmo para este caso sencillo es entonces aplicar f sucesivas veces hasta encontrar un elemento tal que $x_j = x_1$.

Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd

- La idea en este caso es tener dos punteros, $a = x_2$ que será la tortuga y $b = x_3$ que será la liebre.
- a avanzará de a un elemento, recorriendo toda la secuencia.
- b en cambio avanzará de a **dos** elementos.
- En cada paso verificamos si $x_a = x_b$ y continuamos hasta que así sea.
- Notar que luego de i pasos (no conocemos i), la tortuga y la liebre estarán ambos en el ciclo (digamos en $a_0 = i$ y b_0).
- Luego de eso, en a lo más $j - i = T$ pasos más coincidirán (su diferencia se incrementa en 1 cada paso).
- Notar que si solamente nos interesa encontrar **alguna** coincidencia, podemos terminar aquí.

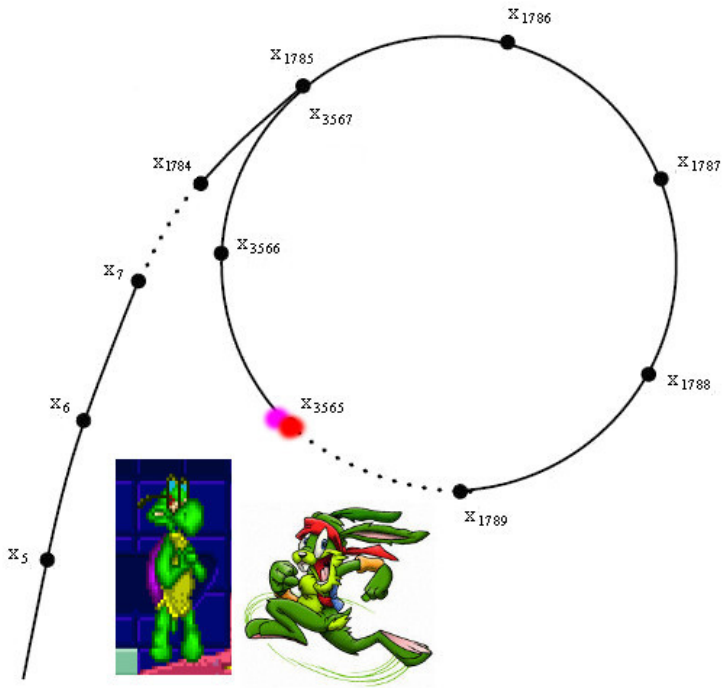
Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

- Luego de $i = 1784$ pasos. $a_0 = 1785$ y $b_0 = 1787$. Llamemos $d = b_0 - a_0 = 2$.



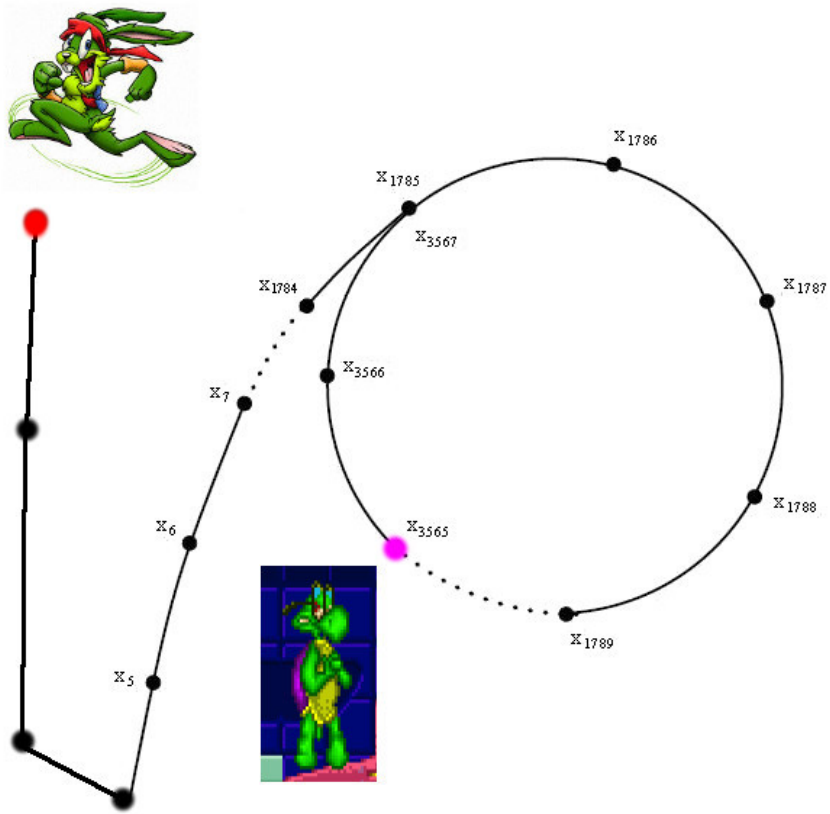
Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

- Como en cada paso adicional la liebre se acerca en 1 a la tortuga, la alcanza luego de $T - d = 1780$ pasos más. Notar que se encuentran a d del comienzo del ciclo.



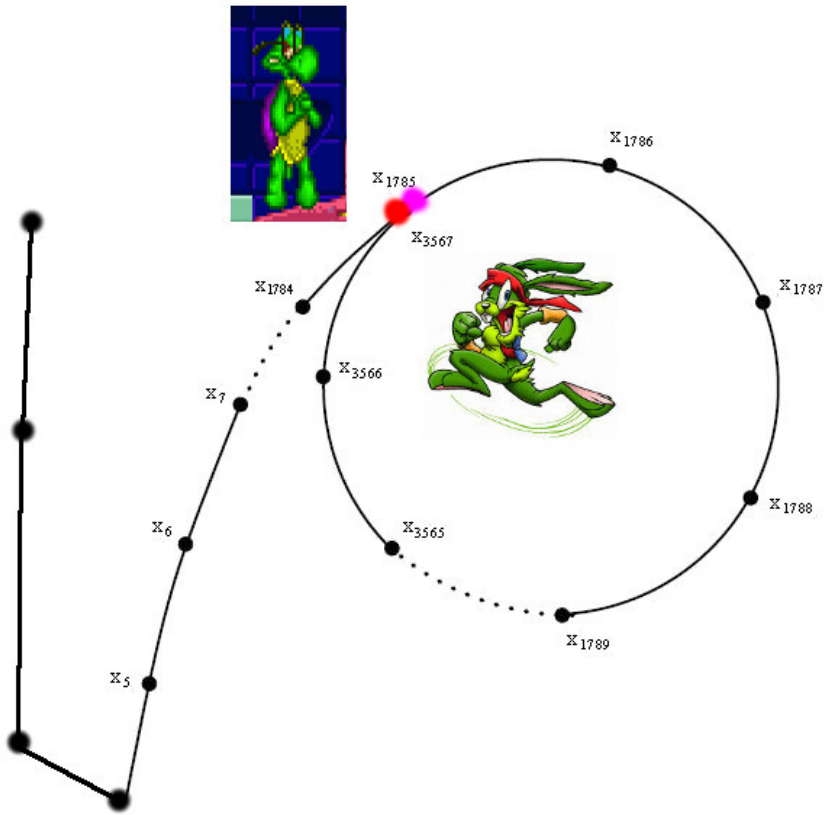
Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

- Para completar el algoritmo, una vez que se encuentran ambos, reinicializamos la liebre (o la tortuga, da igual) al origen, y además, ahora hacemos moverse a la liebre de a un solo paso por vez, igual que la tortuga.



Algoritmo de la liebre y la tortuga de Floyd (cont)

- *i* pasos más tarde, ambos estarán en x_i, que será el nuevo punto de encuentro. Una vez allí, es fácil dejar uno fijo y dar una vuelta al ciclo con el otro para determinar su longitud. La cantidad total de pasos es como mucho $2j$.



Alternativa

- Una alternativa menos mencionada en la literatura, pero con mejores factores constantes (aunque idénticas complejidades asintóticas) es el algoritmo de Brent.
- Este se basa en ir duplicando la longitud de ciclo candidata en cada paso. Se puede leer sobre él en wikipedia (*Brent's Cycle Detection*).

Contenidos

Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?

Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?
- 50.7 %

Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?
- 50.7 %
- En general, dado un universo de n objetos, la cantidad de elementos que hay que sacar al azar hasta que la probabilidad de que dos sean iguales sea al menos 50 % es $\left\lceil \sqrt{2n \ln 2} \right\rceil + \epsilon$, donde $\epsilon \in \{0, 1\}$
- Similarmente, la cantidad esperada de elementos que hay que sacar al azar hasta que aparezca una primera repetición es $\sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \epsilon$, donde $|\epsilon| \leq 1$ (Ramanujan, Watson y Knuth).

Paradoja de los cumpleaños

- ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, en una sala con 23 personas?
- 50.7 %
- En general, dado un universo de n objetos, la cantidad de elementos que hay que sacar al azar hasta que la probabilidad de que dos sean iguales sea al menos 50 % es $\left\lceil \sqrt{2n \ln 2} \right\rceil + \epsilon$, donde $\epsilon \in \{0, 1\}$
- Similarmente, la cantidad esperada de elementos que hay que sacar al azar hasta que aparezca una primera repetición es $\sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \epsilon$, donde $|\epsilon| \leq 1$ (Ramanujan, Watson y Knuth).
- **En resumen**, son $O(\sqrt{n})$ pasos hasta la primera repetición.

Algoritmo de la ρ de Pollard

- Asumimos que N es compuesto (podemos comenzar verificando su primalidad con algún test rápido como Rabin-Miller).
- La idea es aprovechar la paradoja de los cumpleaños para encontrar un factor propio de N rápidamente.
- Una vez que encontramos un factor de N, basta repetir el procedimiento recursivamente hasta descomponer a N en primos.

Algoritmo de la ρ de Pollard (cont.)

- Supongamos que $p \leq \sqrt{N}$ es un primo que divide a N.
- Si vamos generando números entre 0 y $N-1$ al azar, sus restos módulo p también serán aleatorios.
- La cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo N es $\Theta(\sqrt{N})$.
- Pero la cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo p es $\Theta(\sqrt{p}) = O(\sqrt[4]{N})$
- Luego esperamos que exista una repetición módulo p rápidamente, mucho antes de que haya una repetición módulo N.

Algoritmo de la ρ de Pollard (cont.)

- Supongamos que $p \leq \sqrt{N}$ es un primo que divide a N.
- Si vamos generando números entre 0 y $N-1$ al azar, sus restos módulo p también serán aleatorios.
- La cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo N es $\Theta(\sqrt{N})$.
- Pero la cantidad de pasos esperados hasta que se repita un valor módulo p es $\Theta(\sqrt{p}) = O(\sqrt[4]{N})$
- Luego esperamos que exista una repetición módulo p rápidamente, mucho antes de que haya una repetición módulo N.
- ¿Pero cómo detectamos esta repetición, **si no conocemos** p **a priori**?

Algoritmo de la ρ de Pollard (cont.)

- Si x e y son dos valores de nuestra secuencia que coinciden módulo p, $x - y \equiv 0 \pmod{p}$
- Entonces $p|MCD(|x - y|, N)$
- Este MCD puede calcularse con el algoritmo de Euclides sin conocer p.
  - Si da $1 < MCD < N$, hemos encontrado un factor de N.
  - Si da $MCD = N$, hemos tenido una repetición en la secuencia módulo N.
  - Si da $MCD = 1$, no hemos detectado ninguna repetición módulo p.

```
int mcd(int a,int b)
{return (a == 0) ? b : mcd(b%a, a) ;}
```

Algoritmo de la ρ de Pollard (cont.)

- Notar que con este truco podemos verificar si x e y dados son coincidentes módulo algún p.
- Es decir, a la hora de buscar repeticiones en nuestra secuencia, **solamente tenemos un operador de igualdad**.
- La mejor estructura para buscar repeticiones en general con solamente ese operador tomaba $O(j^2)$, lo cual nos devolvería a la complejidad $O(\sqrt{N})$

Algoritmo de la ρ de Pollard (cont.)

- Notar que con este truco podemos verificar si x e y dados son coincidentes módulo algún p.
- Es decir, a la hora de buscar repeticiones en nuestra secuencia, **solamente tenemos un operador de igualdad**.
- La mejor estructura para buscar repeticiones en general con solamente ese operador tomaba $O(j^2)$, lo cual nos devolvería a la complejidad $O(\sqrt{N})$
- Solución: Utilizar una secuencia **pseudoaleatoria**, "en lugar de" generar números verdaderamente al azar.
- Con esto la secuencia será x_1, $f(x_1)$, $f(f(x_1))$ y podemos utilizar el algoritmo de la liebre y la tortuga.

Algoritmo de la ρ de Pollard (implementación)

- Una función pseudoaleatoria módulo N que funciona bien es $f(X) = X^2 + AX + B$, con $1 \leq A, B < N$ elegidos al azar.

```
int factor(int N) {
    A = elegir al azar;
    B = elegir al azar;
    // f es X*(X+A) + B modulo N
    int x = 2, y = 2, d;
    do {
        x = f(x);
        y = f(f(y));
        d = mcd(abs(x-y), N);
    } while (d == 1);
    return d;
}
```

Algoritmo de la ρ de Pollard (conclusiones)

- Si tenemos mala suerte y factor retorna N, repetimos la llamada hasta que los valores de A y B funcionen.
- El evento anterior normalmente no ocurre, ya que la secuencia se repite módulo p antes que módulo N.
- Como dijimos, la complejidad esperada es $O(\sqrt{p})$ hasta extraer un factor, siendo p un primo que divida a N.
- La complejidad total esperada del algoritmo resulta ser entonces $O\left(\sqrt[4]{N}\right)$ operaciones aritméticas y cálculos de MCD.
- Más precisamente, $O\left(\sum_{p\left|\frac{N}{p_{max}}\right.} \sqrt{p}\right)$, considerados con multiplicidad según el exponente en la factorización de $\frac{N}{p_{max}}$.
- Notar que aunque N sea muy grande, si los primos que dividen a N son pequeños, salvo a lo sumo un único primo grande con exponente 1, el algoritmo es extremadamente rápido.

Referencias

- *Introduction to Algorithms, 2nd Edition*. MIT Press.
  31 Number-Theoretic Algorithms
  Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein