Α.Π.Θ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΜ. ΦΥΣΙΚΗΣ

Εργασία για το μάθημα Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Σκορδά Ελένη

Διδάσκων καθηγητής: Πασχάλης Ιωάννης

Περίληψη

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μερος αποδεικνύεται ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Psi^*(\partial^\mu\Psi) - \Psi(\partial^\mu)\Psi^*\right) - \frac{e}{m}A^\mu\Psi^*\Psi$. Στο δευτερο μέλος της εργασίας μελετάται το μη σχετικιστικό όριο της εξίσωσης Dirac και Klein Gordon

Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ., 13 Μαΐου 2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η εξίσωση Schröndiger που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των κβαντομηχανικών σωματιδίων προκύπτει με αντικατάσταση των τελεστών (1) στην μη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής $E^2 = \frac{p^2}{2m}$

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} \to -i\hbar\nabla \tag{1}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Schröndiger, είναι στην περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου, επίπεδα κύματα.

$$\Psi(\vec{(r)}, t) = Ce^{i(\vec{(p)}\vec{(r)}-Et)/\hbar}$$

Όπως, είναι γνωστό, όμως, η σχέση αυτή δεν μπορεί να περιγράψει σωματίδια με μεγάλες ταχύτητες πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Τα σωματίδια που μελετά η κβαντομηχανική στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούν να φτάσουν αυτές τις ταχύτητες, οπότε δημιουργείται η ανάγκη να ληφθεί υπόψη η σχέση ενέργειας-ορμής, της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \tag{2}$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση Klein-Gordon ή οποία περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου το οποίο δεν έχει σπιν. Πέρα από το ότι αδυνατεί να περιγράψει σωματίδια με σπιν, η εξίσωση Klein-Gordon παρουσιάζει προβλήματα στην ερμηνεία της , όπως θα εξηγηθεί παρακάτω. Για τους παραπάνω λόγους ο Dirac ακολούθησε διαφορετική μεθοδολογία και κατέληξε στην ομώνυμη εξίσωση, ή οποία περιλαμβάνει και το σπιν.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα δοθούν, αρχικά, οι ορισμοί βασικών εννοιών απαραίτητων για την επίλυση των ζητούμενων προβλημάτων. Κατόπιν, αφού παρουσιαστεί η μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο και σε περίπτωση παρουσίας διανυσματικού δυναμικού θα δειχτεί ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Psi * (\partial^\mu\Psi) - \Psi(\partial^\mu) *\right) - \frac{e}{m}A^\mu\Psi * \Psi$. Κατόπιν θα γίνει περιγραφή της εξίσωσης Dirac και θα μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο αυτής αλλά και της Klein Gordon

2 Ειδική Σχετικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν, συνοπτικά, κάποιοι ορισμοί της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας που χρησιμοποιούνται σε επόμενα κεφάλαια με έμφαση, όμως, στο πως μετασχηματίζονται θεμελιώδεις έννοιες του Ηλεκτρομαγνητισμού στα πλαίσια της θεωρίας αυτής. Επίσης θα εξηγηθούν και ορισμένοι συμβολισμοί.

2.1 Τανυστές

Βασικό μαθηματικό εργαλείο αποτελούν οι τανυστές, που είναι μία γενίκευση των βαθμωτών και διανυσματικών μεγεθών. Υπάρχουν τρία είδη τανυστών :

- οι συναλλοίωτοι: $A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x'_j}{\partial x_l}A^{kl}$
- οι ανταλλοίωτοι :$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}C_{kl}$
- οι μεικτοί τανυστές: $B'^{i}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}B^l_k$

Κάποιες βασικές και χρήσιμες ιδιότητες , που προκύπτουν σαν άμεση συνέπεια από τα παραπάνω είναι ότι :

- Αν ένα τανυστής μηδενίζεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων , μηδενίζεται σε όλα
- Αν δύο τανυστές είναι ίσοι σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων τότε θα ισούνται σε όλα
- Από τις δυο προηγούμενες ιδιότητες, προκύπτει ότι η μορφή μιας τανυστικής εξίσωσης δεν αλλάζει με την αλλαγή συστήματος

Οι πράξεις ανάμεσα σε τανυστές είναι:

- Άθροισμα : $C^{ab}_c = \alpha A^{ab}_c + \beta B^{ab}_c$
- Εξωτερικό γινόμενο : $C^{a}_{bcd}{}^{e} = \alpha A^a_b + \beta B_{ab}{}^{e}$
- Συστολή :$T_{aq}{}^{cq} = \sum_{q=1}^{n} T_{aq}{}^{cq}$, κατα συνεπεια ο τανυστής $T^a_a = T$ είναι βαθμωτό μέγεθος.
- Εσωτερικό γινόμενο

2.2 Χωρόχρονος Minkowski

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χώρος δεν είναι ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος αλλά ο τετραδιάστατος χωρόχρονος Minkowski. Ο μετρικός τανυστής για το χώρο αυτό ορίζεται ως

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{3,0} & \cdots & g_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω δίνονται τα τετραδιανύσματα θέσης, ορμής, δυναμικού καθώς και η κλίση σε τέσσερις διαστάσεις:

$$x = \{x, y, z, ict\}$$
$$p = \{p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c}\}$$
$$A = \{A_x, A_y, A_z, iA_0\}$$
$$\nabla = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, iA_0\}$$

Το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει την θέση ενός σωματιδίου γράφεται,με την βοήθεια του μετρικού τανυστή, για τις συναλλοίωτες και ανταλλοίωτες συντεταγμένες αντοίστιχα:

$$\begin{aligned} x_\mu &= g_{\mu\nu}x^\nu = \{ct, -x, -y, -z\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \\ x^\mu &= g^{\mu\nu}x_\nu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \end{aligned} \tag{3}$$

Επομένως το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων θέσης θα είναι:

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Για την τετραορμή εχουμε: $p^\mu = \{E/c, p_x, p_y, p_z\}$ οπότε για το γινόμενο των ορμών δύο σωματιδίων :

$$p_1 \cdot p_2 = {p_1}^\mu p_{2\mu} = \frac{E_1}{c}\frac{E_2}{c} - \vec{p_1} \cdot \vec{p_2} \tag{4}$$

Ενώ για το εσωτερικό γινόμενο θέσης-ορμής :

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \vec{x}\vec{p}$$

Ο πίνακας που δίνει το μετασχηματισμό ενός οποιουδήποτε τετραδιανύσματος ανάμεσα σε δύο αδρανειακά συστήματα, (μετασχηματισμοί Lorentz) είναι :

$$\Lambda^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \cdots & \Lambda^0_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^3_0 & \cdots & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.3 Ειδική θεωρία της σχετικότητας και ηλεκτρομαγνητισμός

Παρακάτω δίνοται οι σχέσεις μετασχηματισμού για το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - uB_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{u}{c^2}E_z\right) \\ E'_z &= \gamma(E_z + uB_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z + \frac{u}{c^2}B_z\right) \end{aligned}$$

Για να βρεθεί η σχέση μετασχηματισμού κάποιου μεγέθους (πχ. ταχύτητα, θέση) αρκεί να υπολογιστεί η δράση του παραπάνω πίνακα στο μέγεθος. Ο μετασχηματισμός ενός τανυστικού μεγέθους δευτέρας τάξης θα είναι επομένως:

$$k'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}k^{\lambda\sigma}$$

Εκτελώντας τις πράξεις το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με τους μετασχηματισμούς για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το γεγονός αυτό οδηγεί στον ορισμό ενός τανυστικού μεγέθους του τανυστή πεδίου. Ο τανυστής αυτός,ουσιαστικά ενοποιεί το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο και δίνει την δυνατότητα(όπως θα δειχθεί παρακάτω) να γραφτούν οι εξισώσεις του Maxwell σε συμπαγή μορφή.

$$F_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} F_0^0 & \cdots & F_3^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_0^3 & \cdots & F_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Η πυκνότητα φορτίου $\rho = \left(\frac{Q}{u}\right)$και ρεύματος ($\vec{J} = \rho\vec{u}$) μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις που δίνονται παρακάτω.

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \vec{J} = \rho_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{6}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις σχέσεις μετασηματισμού των συσνιστωσών ενός τετραδιανύσματος του χωρόχρονου Μινκοωσκι, το οποίο είναι : $J^{\mu} = (c\rho, J_x, J_y, Jz)$. Η εξισωση συνέχειας γίνεται:

$$\nabla J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial J^0}{\partial x^0} \Rightarrow \frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{7}$$

Τέλος οι σχέσεις του Maxwell γράφονται με την βοήθεια των παραπάνω με μορφή τανυστικής εξίσωσης ως εξής:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \mu_0 J^{\nu} \tag{8}$$

Για το δυναμικό ισχύει:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}$$

3 Εξίσωση Klein-Gordon

3.1 Εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο

Για τον υπολογισμό της εξίσωσης Klein-Gordon αρκεί να αντικατασταθούν οι τελεστές ενέργειας και ορμής (1) στην (2):

$$
\begin{aligned}
(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2 &= (-i\hbar\nabla)^2c^2 + m_0^2c^4 \\
-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= -\hbar^2\nabla^2c^2 + m_0^2c^4
\end{aligned} \tag{9}
$$

Για $\hbar = c = 1$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Psi + m_0^2\Psi = 0$$

Ο πρώτος όρος του αριστερού μέρους είναι η γνωστη ντάλαμπερσιανή $\Box = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)$. Επομένως η εξίσωση παίρνει την τελική μορφή:

$$\Box\Psi + m_0^2\Psi = 0$$

Η εξίσωση (9) μπορεί να γραφτεί και με τανυστική μορφή, αν στην(4) αντικατασταθεί το τετραδιάνυσμα της ορμής. Ισχύει ότι :

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla$$

Επομένως η εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο και για $\hbar = c = 1$ γράφεται:

$$p^\mu p_\mu\Psi + m_0^2\Psi = 0 \tag{10}$$

3.2 Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος για ελεύθερο σωματίδιο

Για να υπολογιστεί η μορφή του τετραδιάνυσμα του ρεύματος, υπολογίζεται αρχικά το συζυγές της (9) :

$$\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\nabla^2\right)\Psi^* + m_0^2c^4\Psi^* = 0$$

Κατόπιν η παραπάνω σχέση πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά με Ψ και η (9) από τα αριστερά, πάλι, με Ψ^*. Η διαφορά των σχέσεων σχέσεων αυτών δίνει:

$$
\begin{gathered}
\Psi^*\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\nabla^2\right)\Psi + \Psi^*m_0^2\Psi - \Psi\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2c^2\nabla^2\right)\Psi^* - \Psi m_0^2c^4\Psi^* = 0 \Rightarrow \\
\hbar^2\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - \hbar^2c^2\Psi^*\nabla^2\Psi + \Psi^*c^4m_0^2\Psi - \Psi\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^* + \hbar^2c^2\Psi\nabla^2\Psi^* + \Psi c^4m_0^2\Psi^* = 0 \Rightarrow
\end{gathered}
$$

$$\frac{1}{c^2}\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - \Psi^*\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\Psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^* + \Psi\nabla^2\Psi^* = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi - \Psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^*\right) = \Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^* \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi + \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^*\right) = \Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^* \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right] = \Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^*$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right] = \Psi^*\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\Psi^* + \nabla\Psi^*\nabla\Psi - \nabla\Psi^*\nabla\Psi$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right] = \nabla\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) \tag{11}$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση συνέχειας (7) με την προηγούμενη προκύπτει:

$$\rho = \frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) \qquad \vec{J} = \Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^* \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) \qquad \vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^* \tag{12}$$

Και τα τα δύο μέλη της (11) πολλαπλασιάστηκαν με $\frac{i\hbar}{2m}$ ώστε το ρ της (12) να έχει διαστάσεις πυκνότητας πιθανότητας.

3.3 Εξίσωση Klein-Gordon παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Στην περίπτωση που υπάρχει παρουσία διανυσματικού πεδίου, στους τελεστές ενέργειας και ορμής (1) εισάγονται τα δυναμικά $\vec{A}$ και ϕ έτσι ώστε ο τρόπος εκλογής τους να μην έχει φυσική σημασία. Η διαδικασία αυτή γνωστή και ως ελάσσονα αντικατάσταση:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi \qquad \vec{p} \to -i\hbar\nabla - q\vec{A} \tag{13}$$

Με τανυστική μορφή μπορεί ο παραπάνω μετασχηματισμός γράφεται :

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu, \qquad p_\mu \to p_\mu - qA_\mu \tag{14}$$

Η εξίσωση για το ελεύθερο σωματίδιο, σύμφωνα με τα παραπάνω , μετασχηματίζεται παρουσία πεδιου(για $\hbar = c = 1$, και γράφεται ως εξής :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)^2\Psi = \left(-i\nabla - q\vec{A}\right)^2 + m_0^2$$

Η τανυστική μορφή της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτει αν στην (10) αντικατασταθεί η (14):

$$\begin{aligned}
&\left(p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu\right)\left(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right)\Psi + m_0^2c^2\Psi = 0 \Rightarrow \\
&\left[g^{\mu\nu}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{q}{c}A_\nu\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{c}A_\mu\right)\right]\Psi + m_0^2c^2\Psi = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

3.4 Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος παρουσία διανυσματικου δυναμικού A^μ

Για να αποδειχτεί το ζητούμενο του πρώτου μέρους της εργασίας, θα χρησιμοποιηθεί η τανυστική μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon παρουσία μαγνητικού πεδίου. Η μελέτη των πυκνοτήτων ρεύματος και φορτίου, θα γίνει με παρόμοια διαδικασία με της παραγράφου 3.2. Συγκεκριμένα, η 15 θα πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με Ψ^* (16)

$$\begin{aligned}
&\Psi^*\left[g^{\mu\nu}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{q}{c}A_\nu\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{c}A_\mu\right)\right]\Psi + \Psi^* m_0^2c^2\Psi = 0 \\
&\Psi^*\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi + \Psi^* m_0^2c^2\Psi = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Κατόπιν υπολογίζεται το συζυγές της προηγούμενης εξίσωσης (17)

$$\begin{aligned}
&\left\{\Psi^*\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi + \Psi^* m_0^2c^2\Psi = 0\right\}^* = 0 \qquad \Rightarrow \\
&\Psi\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi^* + \Psi m_0^2c^2\Psi^* = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Τέλος λαμβάνεται η διαφορά των εξισώσεων(16) και (17) που θα οδηγήσει όπως και στην προηγούμενη παράγραφο σε μια εξίσωση, που η σύγκριση της με την εξίσωση συνέχειας, θα δωσει το ζητούμενο του πρώτου μέρους, την μορφή του τετραδιανύσματος του ρεύματος.

$$\begin{aligned}
&\Psi^*\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi - \\
&- \Psi\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi^* \qquad = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi\left[g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi^* - \\
&- \Psi^*\left[g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi \qquad = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&g^{\mu\nu}\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^* - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi^*) - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^* - g^{\mu\nu}\Psi\frac{q^2}{c^2}A_\nu A_\mu\Psi^* - \\
&- g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi) - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi + g^{\mu\nu}\Psi\frac{q^2}{c^2}A_\nu A_\mu\Psi^* = 0 \qquad \Rightarrow \\
&g^{\mu\nu}\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^* - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi^*) - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^* - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi - \\
&- g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi) - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \\
&\left(g^{\mu\nu}\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^* - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi + \frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\mu}\right) - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi^*) - \\
&- g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^* - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi) - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \\
&g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi^* - \Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi\right) - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi^*) - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^* - \\
&- g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi) - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \\
&g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi^* - \Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi\right) - g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu}\Psi\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \\
&- g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\mu} - g^{\mu\nu}\Psi^*\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} - \\
&- g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \\
&g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi^* - \Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi\right) - g^{\mu\nu}\frac{iq}{\hbar c}\left(2\Psi A_\mu\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\mu} + 2\Psi\Psi^*\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} + 2A_\mu\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}\right) = 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi^* - \Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi\right) - g^{\mu\nu}\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(2\Psi A_\mu\Psi^*\right) = 0 \qquad \Rightarrow \tag{18}
$$

$$
g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi^* - \Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi\right) - \frac{2iq}{\hbar c}\left(\Psi A_\mu\Psi^*\right)\right] = 0 \tag{19}
$$

Λόγω των εξισώσεων (3) και της (8) η (19) γίνεται :

$$
\boxed{J^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*(\partial^\mu\Psi) - \Psi(\partial^\mu\Psi^*)\right) - \frac{iq}{mc}A_\mu\Psi^*\Psi \qquad (20)}
$$

Και τα τα δύο μέλη της (20) πολλαπλασιάστηκαν με $\frac{i\hbar}{2m}$. Δείχτηκε επομένως ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A_μ, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα της σχέσης (20).

Αναφορές

[1] Στέφανος Λ.Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.

[2] w. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanichs Wave equations*, Springer-Verlag,1994.

[3] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Mass., 1967.

[4] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics 3rd ed.*, Prentice Hall, 1999.