



Α.Π.Θ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΜ. ΦΥΣΙΚΗΣ

Εργασία για το μάθημα Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Σκορδά Ελένη

Διδάσκων καθηγητής: Πασχάλης Ιωάννης

Περίληψη

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος αποδεικνύεται ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ , $\mu = 0,1,2,3$, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m} (\Psi^* (\partial^\mu \Psi) - \Psi (\partial^\mu \Psi^*)) - \frac{e}{m} A^\mu \Psi^* \Psi$. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μελετάται το μη σχετικιστικό όριο της εξίσωσης Dirac και Klein Gordon

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
2	Ειδική Σχετικότητα	3
2.1	Τανυστές	3
2.2	Χωρόχρονος Minkowski	3
2.3	Ειδική θεωρία της σχετικότητας και ηλεκτρομαγνητισμός	4
3	Εξίσωση Klein-Gordon	6
3.1	Εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο	6
3.1.1	Λύσεις εξίσωσης Klein Gordon	6
3.2	Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος για ελεύθερο σωματίδιο . .	7
3.3	Εξίσωση Klein-Gordon παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	8
3.4	Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ	8
4	Μη σχετικιστικό όριο εξίσωσης Klein-Gordon	11
4.1	Μη σχετικιστικό όριο ελεύθερης εξίσωσης Klein-Gordon	11
4.2	Μη σχετικιστικό όριο εξίσωσης Klein-Gordon παρουσία μαγνητικού πεδίου	12
5	Εξίσωση Dirac- Μη σχετικιστικό όριο	14

1 Εισαγωγή

Η εξίσωση Schrödinger που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των κβαντομηχανικών σωματιδίων προκύπτει με αντικατάσταση των τελεστών (1) στην μη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής $E^2 = \frac{p^2}{2m}$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (1)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger, είναι στην περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου, επίπεδα κύματα.

$$\Psi(\vec{r}, t) = C e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar}$$

Όπως, είναι γνωστό, όμως, η σχέση αυτή δεν μπορεί να περιγράψει σωματίδια με μεγάλες ταχύτητες πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Τα σωματίδια που μελετά η κβαντομηχανική στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούν να φτάσουν αυτές τις ταχύτητες, οπότε δημιουργείται η ανάγκη να ληφθεί υπόψη η σχέση ενέργειας-ορμής, της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad (2)$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση Klein-Gordon ή οποία περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου το οποίο δεν έχει σπιν. Πέρα από το ότι αδυνατεί να περιγράψει σωματίδια με σπιν, η εξίσωση Klein-Gordon παρουσιάζει προβλήματα στην ερμηνεία της, όπως θα εξηγηθεί παρακάτω. Για τους παραπάνω λόγους ο Dirac ακολούθησε διαφορετική μεθοδολογία και κατέληξε στην ομώνυμη εξίσωση, ή οποία περιλαμβάνει και το σπιν.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα δοθούν, αρχικά, οι ορισμοί βασικών εννοιών απαραίτητων για την επίλυση των ζητούμενων προβλημάτων. Κατόπιν, αφού παρουσιαστεί η μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο και σε περίπτωση παρουσίας διανυσματικού δυναμικού θαδειχτεί ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m} (\Psi^* (\partial^\mu \Psi) - \Psi (\partial^\mu \Psi^*)) - \frac{e}{m} A^\mu \Psi^* \Psi$. Κατόπιν θα γίνει περιγραφή της εξίσωσης Dirac και θα μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο αυτής αλλά και της Klein Gordon

2 Ειδική Σχετικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν, συνοπτικά, κάποιοι ορισμοί της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας που χρησιμοποιούνται σε επόμενα κεφάλαια με έμφαση, όμως, στο πως μετασχηματίζονται θεμελιώδεις έννοιες του Ηλεκτρομαγνητισμού στα πλαίσια της θεωρίας αυτής. Επίσης θα εξηγηθούν και ορισμένοι συμβολισμοί.

2.1 Τανυστές

Βασικό μαθηματικό εργαλείο αποτελούν οι τανυστές, που είναι μία γενίκευση των βαθμωτών και διανυσματικών μεγεθών. Υπάρχουν τρία είδη τανυστών :

- οι συναλλοίωτοι: $A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} A^{kl}$
- οι ανταλλοίωτοι: $C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} C_{kl}$
- οι μεικτοί τανυστές: $B'^i_j = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} B^l_k$

Κάποιες βασικές και χρήσιμες ιδιότητες , που προκύπτουν σαν άμεση συνέπεια από τα παραπάνω είναι ότι :

- Αν ένα τανυστής μηδενίζεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων , μηδενίζεται σε όλα
- Αν δύο τανυστές είναι ίσοι σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων τότε θα ισούνται σε όλα
- Από τις δυο προηγούμενες ιδιότητες, προκύπτει ότι η μορφή μιας τανυστικής εξίσωσης δεν αλλάζει με την αλλαγή συστήματος

Οι πράξεις ανάμεσα σε τανυστές είναι:

- Άθροισμα : $C_c^{ab} = \alpha A_c^{ab} + \beta B_c^{ab}$
- Εξωτερικό γινόμενο : $C_{bcd}^a = \alpha A_b^a + \beta B_{ab}^c$
- Συστολή : $T_{aq}^{ca} = \sum_{q=1}^n T_{aq}^{ca}$, κατα συνεπεια ο τανυστής $T_a^a = T$ είναι βαθμωτό μέγεθος.
- Εσωτερικό γινόμενο

2.2 Χωρόχρονος Minkowski

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χώρος δεν είναι ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος αλλά ο τετραδιάστατος χωρόχρονος Minkowski. Ο μετρικός τανυστής για το χώρο αυτό ορίζεται ως

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{3,0} & \cdots & g_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω δίνονται τα τετραδιανύσματα θέσης, ορμής, δυναμικού καθώς και η κλίση σε τέσσερις διαστάσεις:

$$\begin{aligned}x &= \{x, y, z, ict\} \\p &= \{p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c}\} \\A &= \{A_x, A_y, A_z, iA_0\} \\\nabla &= \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, iA_0\}\end{aligned}$$

Το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει την θέση ενός σωματιδίου γράφεται, με την βοήθεια του μετρικού τανυστή, για τις συναλλοίωτες και ανταλλοίωτες συντεταγμένες αντιστιχα:

$$\begin{aligned}x_\mu &= g_{\mu\nu}x^\nu = \{ct, -x, -y, -z\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \\x^\mu &= g^{\mu\nu}x_\nu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}\end{aligned}\quad (3)$$

Επομένως το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων θέσης θα είναι:

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Για την τετραορμή έχουμε: $p^\mu = \{E/c, p_x, p_y, p_z\}$ οπότε για το γινόμενο των ορμών δύο σωματιδίων :

$$p_1 \cdot p_2 = p_1^\mu p_{2\mu} = \frac{E_1}{c} \frac{E_2}{c} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \quad (4)$$

Ενώ για το εσωτερικό γινόμενο θέσης-ορμής :

$$x \cdot p = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \vec{x} \cdot \vec{p}$$

Ο πίνακας που δίνει το μετασχηματισμό ενός οποιουδήποτε τετραδιανύσματος ανάμεσα σε δύο αδρανειακά συστήματα, (μετασχηματισμοί Lorentz) είναι :

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \cdots & \Lambda_3^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_0^3 & \cdots & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

2.3 Ειδική θεωρία της σχετικότητας και ηλεκτρομαγνητισμός

Παρακάτω δίνονται οι σχέσεις μετασχηματισμού για το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο:

$$\begin{aligned}E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\E'_y &= \gamma(E_y - uB_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{u}{c^2}E_z\right) \\E'_z &= \gamma(E_z + uB_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z + \frac{u}{c^2}E_y\right)\end{aligned}$$

Για να βρεθεί η σχέση μετασχηματισμού κάποιου μεγέθους (πχ. ταχύτητα, θέση) αρ-
κεί να υπολογιστεί η δράση του παραπάνω πίνακα στο μέγεθος. Ο μετασχηματισμός ενός
τανυστικού μεγέθους δευτέρας τάξης θα είναι επομένως:

$$k'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\sigma k^{\lambda\sigma}$$

Εκτελώντας τις πράξεις το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με τους μετασχηματισμούς για το
ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το γεγονός αυτό οδηγεί στον ορισμό ενός τανυστικού μεγέθους
του τανυστή πεδίου.

$$F^\nu_\mu = \begin{pmatrix} F^0_0 & \cdots & F^0_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^3_0 & \cdots & F^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τανυστής αυτός, ουσιαστικά ενοποιεί το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο και δίνει την
δυνατότητα να γραφτούν οι εξισώσεις του Maxwell σε συμπαγή μορφή τανυστικής εξίσωσης
ως εξής:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (6)$$

Για το δυναμικό ισχύει:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$$

Η πυκνότητα φορτίου $\rho = (\frac{Q}{u})$ και ρεύματος ($\vec{J} = \rho \vec{u}$) μετασχηματίζονται σύμφωνα με
τις σχέσεις που δίνονται παρακάτω.

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \vec{J} = \rho_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (7)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις σχέσεις μετασχηματισμού των συσυστησών ενός
τετραδιανύσματος του χωρόχρονου Minkowski, το οποίο είναι : $J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$. Η
εξίσωση συνέχειας γίνεται:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial J^0}{\partial x^0} \Rightarrow \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (8)$$

3 Εξίσωση Klein-Gordon

3.1 Εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο

Για τον υπολογισμό της εξίσωσης Klein-Gordon αρκεί να αντικατασταθούν οι τελεστές ενέργειας και ορμής (1) στην (2):

$$\begin{aligned}(i\hbar \frac{\partial}{\partial t})^2 &= (-i\hbar \nabla)^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= -\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m_0^2 c^4\end{aligned}\quad (9)$$

Για $\hbar = c = 1$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \Psi + m_0^2 \Psi = 0$$

Ο πρώτος όρος του αριστερού μέρους είναι η γνωστή ντάλαμπερσιανή $\square = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)$. Επομένως η εξίσωση παίρνει την τελική μορφή:

$$\square \Psi + m_0^2 \Psi = 0$$

Η εξίσωση (9) μπορεί να γραφτεί και με τανυστική μορφή, αν στην (4) αντικατασταθεί το τετραδιάνυσμα της ορμής. Ισχύει ότι :

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Επομένως η εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο και για $\hbar = c = 1$ γράφεται:

$$p^\mu p_\mu \Psi + m_0^2 \Psi = 0 \quad (10)$$

3.1.1 Λύσεις εξίσωσης Klein Gordon

Οι λύσεις της εξίσωσης (10), είναι επίπεδα κύματα που περιγράφονται από τη μορφή:

$$\Psi = e\left(-\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}\right) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x} - Et)} \quad (11)$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (10), προκύπτει το φάσμα ενεργειών για την ελεύθερη εξίσωση:

$$p^\mu p_\mu e\left(-\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}\right) + m_0^2 e\left(-\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}\right) = 0 \Rightarrow p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \Rightarrow$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\vec{p} = m_0^2 c^2 \Rightarrow E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2 c^2}$$

Παρατηρείται ότι το φάσμα των επιτρεπτών ενεργειών περιλαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές ενέργειες. Οι αρνητικές ενέργειες συνδέονται με την ύπαρξη αντισωματιδίων. Ένα ακόμα πρόβλημα της εξίσωσης, είναι ότι για τον ακριβή προσδιορισμό της λύσης, είναι απαραίτητο να δίνεται και η πρώτη παράγωγος της κυματοσυνάρτησης ως αρχική συνθήκη. Ένα ακόμη πρόβλημα προκύπτει με την έκφραση της πυκνότητας πιθανότητας, στην επόμενη παράγραφο.

3.2 Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος για ελεύθερο σωματίδιο

Για να υπολογιστεί η μορφή του τετραδιάνυσμα του ρεύματος, υπολογίζεται αρχικά το συζυγές της (9) :

$$\left(\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \right) \Psi^* + m_0^2 c^4 \Psi^* = 0$$

Κατόπιν η παραπάνω σχέση πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά με Ψ και η (9) από τα αριστερά, πάλι, με Ψ^* . Η διαφορά των σχέσεων σχέσεων αυτών δίνει:

$$\begin{aligned} & \Psi^* \left(\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \right) \Psi + \Psi^* m_0^2 \Psi - \Psi \left(\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \right) \Psi^* - \Psi m_0^2 c^4 \Psi^* = 0 \Rightarrow \\ & \hbar^2 \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi - \hbar^2 c^2 \Psi^* \nabla^2 \Psi + \Psi^* c^4 m_0^2 \Psi - \Psi \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^* + \hbar^2 c^2 \Psi \nabla^2 \Psi^* + \Psi c^4 m_0^2 \Psi^* = 0 \Rightarrow \\ & \frac{1}{c^2} \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi - \Psi^* \nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \Psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^* + \Psi \nabla^2 \Psi^* = 0 \Rightarrow \\ & \frac{1}{c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi - \Psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^* \right) = \Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* \Rightarrow \\ & \frac{1}{c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^* \right) = \Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* \Rightarrow \\ & \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \right] = \Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* \\ & \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \right] = \Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^* + \nabla \Psi^* \nabla \Psi - \nabla \Psi^* \nabla \Psi \\ & \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \right] = \nabla (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \end{aligned} \quad (12)$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση συνέχειας (8) με την προηγούμενη προκύπτει:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) & \vec{J} &= \Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* \Rightarrow \\ \rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) & \vec{J} &= \frac{i\hbar}{2m} \Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* \end{aligned} \quad (13)$$

Και τα δύο μέλη της (12) πολλαπλασιάστηκαν με $\frac{i\hbar}{2m}$ ώστε το ρ της (13) να έχει διαστάσεις πυκνότητας πιθανότητας. Παρατηρείται ότι η ερμηνεία του ρ της (13) ως πυκνότητας πιθανότητας, δημιουργεί προβλήματα, καθώς μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό, κάτι που θα σήμαινε ότι το σωματίδιο κάποιες στιγμές θα έπαυε να υπάρχει. Ο λόγος γι' αυτό είναι όπως αναφέρθηκε προηγουμένως ο δευτεροτάξιος χαρακτήρας της εξίσωσης ως προς το χρόνο.

3.3 Εξίσωση Klein-Gordon παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Στην περίπτωση που υπάρχει παρουσία διανυσματικού πεδίου, στους τελεστές ενέργειας και ορμής (1) εισάγονται τα δυναμικά \vec{A} και ϕ έτσι ώστε ο τρόπος εκλογής τους να μην έχει φυσική σημασία. Η διαδικασία αυτή γνωστή και ως ελάσσονα αντικατάσταση:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla - q\vec{A} \quad (14)$$

Με τανυστική μορφή μπορεί ο παραπάνω μετασχηματισμός γράφεται :

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu, \quad p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu \quad (15)$$

Η εξίσωση για το ελεύθερο σωματίδιο, σύμφωνα με τα παραπάνω, μετασχηματίζεται παρουσία πεδίου (για $\hbar = c = 1$, και γράφεται ως εξής :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)^2 \Psi = \left(-i\nabla - q\vec{A}\right)^2 + m_0^2$$

Η τανυστική μορφή της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτει αν στην (10) αντικατασταθεί η (15):

$$\begin{aligned} \left(p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu\right) \left(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right) \Psi + m_0^2 c^2 \Psi &= 0 \Rightarrow \\ \left[g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{q}{c}A_\nu\right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{c}A_\mu\right)\right] \Psi + m_0^2 c^2 \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

3.4 Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ

Για να αποδειχτεί το ζητούμενο του πρώτου μέρους της εργασίας, θα χρησιμοποιηθεί η τανυστική μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon παρουσία μαγνητικού πεδίου. Η μελέτη των πυκνοτήτων ρεύματος και φορτίου, θα γίνει με παρόμοια διαδικασία με της παραγράφου 3.2. Συγκεκριμένα, η 16 θα πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με Ψ^* (17)

$$\begin{aligned} \Psi^* \left[g^{\mu\nu} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{q}{c}A_\nu\right) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{c}A_\mu\right) \right] \Psi + \Psi^* m_0^2 c^2 \Psi &= 0 \\ \Psi^* \left[-\hbar^2 g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right) \right] \Psi + \Psi^* m_0^2 c^2 \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Κατόπιν υπολογίζεται το συζυγές της προηγούμενης εξίσωσης (18)

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi^* \left[-\hbar^2 g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right) \right] \Psi + \Psi^* m_0^2 c^2 \Psi = 0 \right\}^* &= 0 \Rightarrow \\ \Psi \left[-\hbar^2 g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right) \right] \Psi^* + \Psi m_0^2 c^2 \Psi^* &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Τέλος λαμβάνεται η διαφορά των εξισώσεων(17) και (18) που θα οδηγήσει όπως και στην προηγούμενη παράγραφο σε μια εξίσωση, που η σύγκριση της με την εξίσωση συνέχειας, θα δώσει το ζητούμενο του πρώτου μέρους, την μορφή του τετραδιανύσματος του ρεύματος.

$$\Psi^* \left[-\hbar^2 g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \Psi - \\ - \Psi \left[-\hbar^2 g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \Psi^* = 0 \Rightarrow$$

$$\Psi \left[g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \Psi^* - \\ - \Psi^* \left[g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \right) \right] \Psi = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu} \Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi^*) - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* - g^{\mu\nu} \Psi \frac{q^2}{c^2} A_\nu A_\mu \Psi^* - \\ - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi) - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi + g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{q^2}{c^2} A_\nu A_\mu \Psi = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu} \Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi^*) - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi - \\ - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi) - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi = 0 \Rightarrow$$

$$\left(g^{\mu\nu} \Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu} \right) - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi^*) - \\ - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi) - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi^* - \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi^*) - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* - \\ - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_\mu \Psi) - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi^* - \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \Psi \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \\ - g^{\mu\nu} \Psi \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu} - g^{\mu\nu} \Psi^* \Psi \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - \\ - g^{\mu\nu} \Psi^* \frac{iq}{\hbar c} A_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi^* - \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) - g^{\mu\nu} \frac{iq}{\hbar c} \left(2\Psi A_\mu \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu} + 2\Psi \Psi^* \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} + 2A_\mu \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi^* - \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) - g^{\mu\nu} \frac{iq}{\hbar c} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (2\Psi A_\mu \Psi^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad (19)$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\left(\Psi \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi^* - \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) - \frac{2iq}{\hbar c} (\Psi A_\mu \Psi^*) \right] = 0 \quad (20)$$

Λόγω των εξισώσεων (3) και της (6) η (20) γίνεται :

$J^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* (\partial^\mu \Psi) - \Psi (\partial^\mu \Psi^*)) - \frac{iq}{mc} A_\mu \Psi^* \Psi \quad (21)$
--

Και τα τα δύο μέλη της (21) πολλαπλασιάστηκαν με $\frac{i\hbar}{2m}$. Δείχτηκε επομένως ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A_μ , $\mu = 0,1,2,3$, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα της σχέσης (21).

4 Μη σχετικιστικό όριο εξίσωσης Klein-Gordon

Στο μη σχετικιστικό όριο η ταχύτητα του σωματιδίου είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό ($v \ll C$) οπότε θα ισχύει και $p \ll mc$. Η σχέση (2) γίνεται:

$$E = (c^2 p^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} = mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right)^{1/2} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right) \Rightarrow$$

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m} \Rightarrow E' = E - m_0 c^2 \quad (22)$$

Από την σχέση (22) παρατηρείται ότι στην οριακή περίπτωση η συνολική ενέργεια του σωματιδίου διαφέρει ελάχιστα από την ενέργεια ηρεμίας. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο για την περίπτωση ελεύθερου σωματιδίου όσο και για την περίπτωση που υπάρχει παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

4.1 Μη σχετικιστικό όριο ελεύθερης εξίσωσης Klein-Gordon

Για να μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο, η λύση της εξίσωσης γράφεται με την παρακάτω χωριζόμενη μορφή, με αντικατάσταση της (22) στην (11)

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \left(\vec{p}\vec{x} - \left(m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m} \right) t \right)} = e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{x} - E' t)} e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} = \phi(\vec{r}, t) e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} \quad (23)$$

Στην ουσία η εξάρτηση από τον χρόνο χωρίστηκε σε δύο όρους: ο ένας από τους οποίους περιέχει την μάζα ηρεμίας του σωματιδίου και ο άλλος είναι ακριβώς η λύση της ελεύθερης εξίσωσης Schrödinger με χαμιλτονιανή την $H = p^2 / 2m_0$. Επομένως θα ισχύει:

$$\left| i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \approx E' \phi \ll m_0 c^2 \phi \quad (24)$$

Αρχικά θα υπολογιστούν η πρώτη και δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο της Ψ και θα γίνει αντικατάσταση στη (10).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} - i m_0 c^2 / \hbar \phi e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} =$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - i m_0 c^2 / \hbar \phi \right) e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} \stackrel{(24)}{\approx} -i m_0 c^2 / \hbar \phi e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - i m_0 c^2 / \hbar \phi \right) e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - i m_0 c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} / \hbar - i m_0 c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} / \hbar - m_0^2 c^4 \phi / \hbar \right) e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} =$$

$$\approx - \left(2 i m_0 c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} / \hbar + m_0^2 c^4 \phi / \hbar \right) e^{-i m_0 c^2 t / \hbar} \quad (26)$$

Στην εξίσωση (26), η δεύτερη παράγωγος της ϕ ως προς το χρόνο θεωρείται αμελητέα. Τέλος η (26) εισάγεται στην εξίσωση Klein-Gordon οπότε :

$$-\frac{1}{c^2} \left(2im_0c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} / \hbar + m_0^2 c^4 \phi / \hbar \right) e^{-im_0c^2t/\hbar} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar} \right) \phi e^{-im_0c^2t/\hbar}$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \phi$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι άλλη απο την ελεύθερη εξίσωση του Schrödinger για σωματίδια χωρίς σπιν.

4.2 Μη σχετικιστικό όριο εξίσωσης Klein-Gordon παρουσία μαγνητικού πεδίου

Και σε αυτή τη περίπτωση ακολουθείται η ίδια διαδικασία με της προηγούμενης παραγράφου. Η λύση γράφεται με την μορφή της εξίσωσης (23). Η ϕ και σε αυτή την περίπτωση αποτελεί το μη σχετικιστικό κομμάτι της λύσης για το οποίο θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\left| i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \ll m_0 c^2 \phi, \quad |eA_0 \phi| \ll m_0 c^2 |\phi| \quad (27)$$

Στην (27) A_0 είναι το βαθμωτο δυναμικο ϕ . Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός αυτός για να μην υπάρχει σύγχυση με την κυματοσυνάρτηση. Η πρώτη σχέση εκφράζει το πόσο μικρή είναι η μη σχετικιστική ενέργεια σε σχέση με την ενέργεια ηρεμίας (όπως και στη προηγούμενη παράγραφο), ενώ η δευτερη ότι το δυναμικό πρέπει να είναι επίπεδο σε σύγκριση με την ενέργεια ηρεμίας, αλλιώς είναι αδύνατη η μελέτη του μη σχετικιστικού ορίου.

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - qA_0 \right) \Psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - qA_0 \right) \phi e^{-im_0c^2t/\hbar} = \left(i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + m_0c^2\phi - qA_0\phi \right) e^{-im_0c^2t/\hbar}$$

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - qA_0 \right)^2 \Psi &= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - qA_0 \right) \left(i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + m_0c^2\phi - qA_0\phi \right) e^{-im_0c^2t/\hbar} = \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + m_0c^2\phi - qA_0\phi \right) e^{-im_0c^2t/\hbar} - qA_0 \left(i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + m_0c^2\phi - qA_0\phi \right) e^{-im_0c^2t/\hbar} = \\ &= \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - i\hbar \frac{\partial A_0}{\partial t} \phi - i\hbar q A_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + i\hbar m_0c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) e^{-im_0c^2t/\hbar} + \\ &+ \left(-i\hbar q \frac{\partial \phi}{\partial t} A_0 + qA_0^2\phi - qA_0\phi m_0c^2 + i\hbar m_0c^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} - qA_0\phi m_0c^2 m_0^2 c^4 \right) e^{-im_0c^2t/\hbar} \\ &\approx e^{-im_0c^2t/\hbar} \left(m_0^2 c^2 - 2m_0 q A_0 + 2m_0 c^2 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar q \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \phi \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό αντικαθιστάται στην εξίσωση (3.3) οπότε:

$$\left(m_0^2 c^2 - 2m_0 q A_0 + 2m_0 c^2 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar q \frac{\partial A_0}{\partial t}\right) e^{-im_0 c^2 t/\hbar} \phi = e^{-im_0 c^2 t/\hbar} \left[\left(+i\hbar \nabla + \frac{q}{c} A\right)^2 + m_0^2 c^2\right] \phi$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2m_0} \left(+i\hbar \nabla + \frac{q}{c} A\right)^2 \phi + q A_0 \phi + \frac{i\hbar q}{2m_0 c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t} \phi$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση του Schrödinger για ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό. Παρατηρείται, επομένως, ότι στο μη σχετικιστικό όριο η εξίσωση Klein-Gordon ταυτίζεται με την εξίσωση του Schrödinger και στις δύο περιπτώσεις που μελετήθηκαν, για σωματίδια χωρίς σπίν.

5 Εξίσωση Dirac- Μη σχετικιστικό όριο

Αναφορές

- [1] Στέφανος Λ.Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.
- [2] w. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics Wave equations*, Springer-Verlag, 1994.
- [3] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Mass., 1967.
- [4] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics 3rd ed.*, Prentice Hall, 1999.