Α.Π.Θ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΜ. ΦΥΣΙΚΗΣ

Εργασία για το μάθημα Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Σκορδά Ελένη

Διδάσκων καθηγητής: Πασχάλης Ιωάννης

Περίληψη

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μερος αποδεικνύεται ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Psi^*(\partial^\mu\Psi) - \Psi(\partial^\mu)\Psi^*\right) - \frac{e}{m}A^\mu\Psi^*\Psi$. Στο δευτερο μέλος της εργασίας μελετάται το μη σχετικιστικό όριο της εξίσωσης Dirac και Klein Gordon

Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ., 7 Σεπτεμβρίου 2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η εξίσωση Schröndiger που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των κβαντομηχανικών σωματιδίων προκύπτει με αντικατάσταση των τελεστών (1) στην μη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής $E^2 = \frac{p^2}{2m}$

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} \to -i\hbar\nabla \tag{1}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Schröndiger, είναι στην περίπτωση του ελεύθερου σωματιδίου, επίπεδα κύματα.

$$\Psi(\vec{(r)}, t) = Ce^{i(\vec{(p)}\vec{(r)}-Et)/\hbar}$$

Όπως, είναι γνωστό, όμως, η σχέση αυτή δεν μπορεί να περιγράψει σωματίδια με μεγάλες ταχύτητες πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Τα σωματίδια που μελετά η κβαντομηχανική στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούν να φτάσουν αυτές τις ταχύτητες, οπότε δημιουργείται η ανάγκη να ληφθεί υπόψη η σχέση ενέργειας-ορμής, της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \tag{2}$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση Klein-Gordon ή οποία περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου το οποίο δεν έχει σπιν. Πέρα από το ότι αδυνατεί να περιγράψει σωματίδια με σπιν, η εξίσωση Klein-Gordon παρουσιάζει προβλήματα στην ερμηνεία της , όπως θα εξηγηθεί παρακάτω. Για τους παραπάνω λόγους ο Dirac ακολούθησε διαφορετική μεθοδολογία και κατέληξε στην ομώνυμη εξίσωση, ή οποία περιλαμβάνει και το σπιν.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα δοθούν, αρχικά, οι ορισμοί βασικών εννοιών απαραίτητων για την επίλυση των ζητούμενων προβλημάτων. Κατόπιν, αφού παρουσιαστεί η μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο και σε περίπτωση παρουσίας διανυσματικού δυναμικού θα δειχτεί ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Psi^*(\partial^\mu\Psi) - \Psi(\partial^\mu)\Psi^*\right) - \frac{e}{m}A^\mu\Psi^*\Psi$. Κατόπιν θα γίνει περιγραφή της εξίσωσης Dirac και θα μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο αυτής αλλά και της Klein Gordon

2 Ειδική Σχετικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν, συνοπτικά, κάποιοι ορισμοί της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας που χρησιμοποιούνται σε επόμενα κεφάλαια με έμφαση, όμως, στο πως μετασχηματίζονται θεμελιώδεις έννοιες του Ηλεκτρομαγνητισμού στα πλαίσια της θεωρίας αυτής. Επίσης θα εξηγηθούν και ορισμένοι συμβολισμοί.

2.1 Τανυστές

Βασικό μαθηματικό εργαλείο αποτελούν οι τανυστές, που είναι μία γενίκευση των βαθμωτών και διανυσματικών μεγεθών. Υπάρχουν τρία είδη τανυστών :

- οι συναλλοίωτοι: $A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x'_j}{\partial x_l}A^{kl}$
- οι ανταλλοίωτοι :$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}C_{kl}$
- οι μεικτοί τανυστές: $B'^{i}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}B^l_k$

Κάποιες βασικές και χρήσιμες ιδιότητες , που προκύπτουν σαν άμεση συνέπεια από τα παραπάνω είναι ότι :

- Αν ένα τανυστής μηδενίζεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων , μηδενίζεται σε όλα
- Αν δύο τανυστές είναι ίσοι σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων τότε θα ισούνται σε όλα
- Από τις δυο προηγούμενες ιδιότητες, προκύπτει ότι η μορφή μιας τανυστικής εξίσωσης δεν αλλάζει με την αλλαγή συστήματος

Οι πράξεις ανάμεσα σε τανυστές είναι:

- Άθροισμα : $C^{ab}_c = \alpha A^{ab}_c + \beta B^{ab}_c$
- Εξωτερικό γινόμενο : ${C^a_{bcd}}^e = \alpha A^a_b + \beta {B_{ab}}^e$
- Συστολή :${T_{aq}}^{cq} = \sum\limits_{q=1}^{n} {T_{aq}}^{cq}$, κατα συνεπεια ο τανυστής $T^a_a = T$ είναι βαθμωτό μέγεθος.
- Εσωτερικό γινόμενο

2.2 Χωρόχρονος Minkowski

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χώρος δεν είναι ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος αλλά ο τετραδιάστατος χωρόχρονος Minkowski. Ο μετρικός τανυστής για το χώρο αυτό ορίζεται ως

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{3,0} & \cdots & g_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω δίνονται τα τετραδιανύσματα θέσης, ορμής, δυναμικού καθώς και η κλίση σε τέσσερις διαστάσεις:

$$
\begin{aligned}
x &= \{x, y, z, ict\} \\
p &= \{p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c}\} \\
A &= \{A_x, A_y, A_z, iA_0\} \\
\nabla &= \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, iA_0\}
\end{aligned}
$$

Το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει την θέση ενός σωματιδίου γράφεται,με την βοήθεια του μετρικού τανυστή, για τις συναλλοίωτες και ανταλλοίωτες συντεταγμένες αντοίστιχα:

$$
\begin{aligned}
&x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \{ct, -x, -y, -z\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \\
&x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Επομένως το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων θέσης θα είναι:

$$
x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2
$$

Για την τετραορμή εχουμε: $p^\mu = \{E/c, p_x, p_y, p_z\}$ οπότε για το γινόμενο των ορμών δύο σωματιδίων :

$$
p_1 \cdot p_2 = {p_1}^\mu p_{2\mu} = \frac{E_1}{c}\frac{E_2}{c} - \vec{p_1} \cdot \vec{p_2} \tag{4}
$$

Ενώ για το εσωτερικό γινόμενο θέσης-ορμής :

$$
x \cdot p = x^\mu p_\mu = x_\mu p^\mu = Et - \vec{x}\vec{p}
$$

Ο πίνακας που δίνει το μετασχηματισμό ενός οποιουδήποτε τετραδιανύσματος ανάμεσα σε δύο αδρανειακά συστήματα, (μετασχηματισμοί Lorentz) είναι :

$$
\Lambda^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \cdots & \Lambda^0_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^3_0 & \cdots & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}
$$

2.3 Ειδική θεωρία της σχετικότητας και ηλεκτρομαγνητισμός

Παρακάτω δίνοται οι σχέσεις μετασχηματισμού για το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο:

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\
E'_y &= \gamma(E_y - uB_z) & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{u}{c^2}E_z\right) \\
E'_z &= \gamma(E_z + uB_y) & B'_z &= \gamma\left(B_z + \frac{u}{c^2}B_z\right)
\end{aligned}
$$

Για να βρεθεί η σχέση μετασχηματισμού κάποιου μεγέθους (πχ. ταχύτητα, θέση) αρκεί να υπολογιστεί η δράση του παραπάνω πίνακα στο μέγεθος. Ο μετασχηματισμός ενός τανυστικού μεγέθους δευτέρας τάξης θα είναι επομένως:

$$k'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}k^{\lambda\sigma}$$

Εκτελώντας τις πράξεις το αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με τους μετασχηματισμούς για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Το γεγονός αυτό οδηγεί στον ορισμό ενός τανυστικού μεγέθους του τανυστή πεδίου.

$$F_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} F_0^0 & \cdots & F_3^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_0^3 & \cdots & F_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τανυστής αυτός,ουσιαστικά ενοποιεί το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο και δίνει την δυνατότητα να γραφτούν οι εξισώσεις του Maxwell σε συμπαγή μορφή τανυστικής εξίσωσης ως εξής:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \mu_0 J^{\nu} \tag{6}$$

Για το δυναμικό ισχύει:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}$$

Η πυκνότητα φορτίου $\rho = \left(\frac{Q}{u}\right)$και ρεύματος $(\vec{J} = \rho\vec{u})$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις που δίνονται παρακάτω.

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \vec{J} = \rho_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{7}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις σχέσεις μετασηματισμού των συσνιστωσών ενός τετραδιανύσματος του χωρόχρονου Minkowski, το οποίο είναι : $J^{\mu} = (c\rho, J_x, J_y, Jz)$. Η εξισωση συνέχειας γίνεται:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial J^0}{\partial x^0} \Rightarrow \frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{8}$$

3 Εξίσωση Klein-Gordon

3.1 Εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο

Για τον υπολογισμό της εξίσωσης Klein-Gordon αρκεί να αντικατασταθούν οι τελεστές ενέργειας και ορμής (1) στην (2):

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2 = (-i\hbar\nabla)^2c^2 + m_0^2c^4$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2\nabla^2c^2 + m_0^2c^4 \tag{9}$$

Για $\hbar = c = 1$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Psi + m_0^2\Psi = 0$$

Ο πρώτος όρος του αριστερού μέρους είναι η γνωστη ντάλαμπερσιανή $\Box = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)$. Επομένως η εξίσωση παίρνει την τελική μορφή:

$$\Box\Psi + m_0^2\Psi = 0$$

Η εξίσωση (9) μπορεί να γραφτεί και με τανυστική μορφή, αν στην(4) αντικατασταθεί το τετραδιάνυσμα της ορμής. Ισχύει ότι :

$$p^\mu p_\mu = -\hbar^2\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla$$

Επομένως η εξίσωση Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο και για $\hbar = c = 1$ γράφεται:

$$p^\mu p_\mu\Psi + m_0^2\Psi = 0 \tag{10}$$

3.1.1 Λύσεις εξίσωσης Klein Gordon

Οι λύσεις της εξίσωσης (10), είναι επίπεδα κύματα που περιγράφονται από τη μορφή:

$$\Psi = e^{\left(-\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}\right)} = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x}-Et)} \tag{11}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (10), προκύπτει το φάσμα ενεργειών για την ελεύθερη εξίσωση:

$$p^\mu p_\mu e^{\left(-\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}\right)} + m_0^2 e^{\left(-\frac{ip_\mu x^\mu}{\hbar}\right)} = 0 \Rightarrow p^\mu p_\mu = m_0^2c^2 \Rightarrow$$

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\vec{p} = m_0^2c^2 \Rightarrow E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2c^2}$$

Παρατηρείται ότι το φάσμα των επιτρεπτών ενεργειών περιλαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές ενέργειες. Οι αρνητικές ενέργειες συνδέονται με την ύπαρξη αντισωματιδίων. Ένα ακόμα πρόβλημα της εξίσωσης, είναι ότι για τον ακριβή προσδιορισμό της λύσης,είναι απαραίτητο να δινεται και η πρώτη παράγωγος της κυματοσυνάτησης ως αρχική συνθήκη.Παρατηρείται ότι πουθενά στην εξίσωση δεν υπεισέρχεται η έννοια του σπίν. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί μόνο για σωματίδια με σπιν μηδέν.Ένα ακόμη πρόβλημα προκύπτει με την έκφραση της πυκνότητας πιθανότητας, στην επόμενη παράγραφο.

3.2 Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος για ελεύθερο σωματίδιο

Για να υπολογιστεί η μορφή του τετραδιάνυσμα του ρεύματος, υπολογίζεται αρχικά το συζυγές της (9) :

$$\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\hbar^2c^2\nabla^2\right)\Psi^*+m_0^2c^4\Psi^*=0$$

Κατόπιν η παραπάνω σχέση πολλαπλασιάζεται από τα αριστερά με Ψ και η (9) από τα αριστερά, πάλι, με Ψ^*. Η διαφορά των σχέσεων σχέσεων αυτών δίνει:

$$\Psi^*\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\hbar^2c^2\nabla^2\right)\Psi+\Psi^*m_0^2\Psi-\Psi\left(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\hbar^2c^2\nabla^2\right)\Psi^*-\Psi m_0^2c^4\Psi^*=0\Rightarrow$$

$$\hbar^2\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi-\hbar^2c^2\Psi^*\nabla^2\Psi+\Psi^*c^4m_0^2\Psi-\Psi\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^*+\hbar^2c^2\Psi\nabla^2\Psi^*+\Psi c^4m_0^2\Psi^*=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi-\Psi^*\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\Psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^*+\Psi\nabla^2\Psi^*=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi-\Psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^*\right)=\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*\Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi+\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi^*\right)=\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*\Rightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right]=\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right]=\Psi^*\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Psi^*+\nabla\Psi^*\nabla\Psi-\nabla\Psi^*\nabla\Psi$$

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right]=\nabla\left(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*\right)\tag{12}$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση συνέχειας (8) με την προηγούμενη προκύπτει:

$$\rho=\frac{1}{c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\qquad\qquad\vec{J}=\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*\Rightarrow$$

$$\rho=\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\qquad\qquad\vec{J}=\frac{i\hbar}{2m}\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*\tag{13}$$

Και τα τα δύο μέλη της (12) πολλαπλασιάστηκαν με $\frac{i\hbar}{2m}$ ώστε το ρ της (13) να έχει διαστάσεις πυκνότητας πιθανότητας. Παρατηρείται ότι η ερμηνεία του ρ της (13) ως πυκνότητας πιθανότητας, δημιουργεί προβήματα,καθως μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό, κατι που θα σήμαινε ότι το σωματίδιο κάποιες στιγμές θα έπαυε να υπάρχει. Ο λόγος γιάυτο είναι όπως αναφέρθηκε προηγουμένος ο δευτεροτάξιος χαρακτήρας της εξίσωσης ως προς το χρόνο.

3.3 Εξίσωση Klein-Gordon παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Στην περίπτωση που υπάρχει παρουσία διανυσματικού πεδίου, στους τελεστές ενέργειας και ορμής (1) εισάγονται τα δυναμικά $\vec{A}$ και ϕ έτσι ώστε ο τρόπος εκλογής τους να μην έχει φυσική σημασία. Η διαδικασία αυτή γνωστή και ως ελάσσονα αντικατάσταση:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi \qquad\qquad \vec{p} \to -i\hbar\nabla - q\vec{A} \tag{14}$$

Με τανυστική μορφή μπορεί ο παραπάνω μετασχηματισμός γράφεται :

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu, \qquad\qquad p_\mu \to p_\mu - qA_\mu \tag{15}$$

Η εξίσωση για το ελεύθερο σωματίδιο, σύμφωνα με τα παραπάνω , μετασχηματίζεται παρουσία πεδιου(για $\hbar = c = 1$, και γράφεται ως εξής :

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)^2 \Psi = \left(-i\nabla - q\vec{A}\right)^2 + m_0^2$$

Η τανυστική μορφή της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτει αν στην (10) αντικατασταθεί η (15):

$$\begin{gathered}\left(p^\mu - \frac{q}{c}A^\mu\right)\left(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu\right)\Psi + m_0^2c^2\Psi = 0 \Rightarrow \\ \left[g^{\mu\nu}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{q}{c}A_\nu\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{c}A_\mu\right)\right]\Psi + m_0^2c^2\Psi = 0\end{gathered} \tag{16}$$

3.4 Εξίσωση συνέχειας και τετραδιάνυσμα ρεύματος παρουσία διανυσματικου δυναμικού A^μ

Για να αποδειχτεί το ζητούμενο του πρώτου μέρους της εργασίας, θα χρησιμοποιηθεί η τανυστική μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon παρουσία μαγνητικού πεδίου. Η μελέτη των πυκνοτήτων ρεύματος και φορτίου, θα γίνει με παρόμοια διαδικασία με της παραγράφου 3.2. Συγκεκριμένα, η 16 θα πολλαπλασιαστεί από τα αριστερά με Ψ^* (17)

$$\begin{gathered}\Psi^*\left[g^{\mu\nu}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{q}{c}A_\nu\right)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{c}A_\mu\right)\right]\Psi + \Psi^* m_0^2c^2\Psi = 0 \\ \Psi^*\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi + \Psi^* m_0^2c^2\Psi = 0\end{gathered} \tag{17}$$

Κατόπιν υπολογίζεται το συζυγές της προηγούμενης εξίσωσης (18)

$$\left\{\Psi^* \left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}+\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi+\Psi^* m_0^2c^2\Psi=0\right\}^*=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Psi\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi^*+\Psi m_0^2c^2\Psi^*=0 \tag{18}$$

Τέλος λαμβάνεται η διαφορά των εξισώσεων(17) και (18) που θα οδηγήσει όπως και στην προηγούμενη παράγραφο σε μια εξίσωση, που η σύγκριση της με την εξίσωση συνέχειας, θα δωσει το ζητούμενο του πρώτου μέρους, την μορφή του τετραδιανύσματος του ρεύματος.

$$\begin{aligned}
&\Psi^*\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}+\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi- \\
&-\Psi\left[-\hbar^2 g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi^* \qquad =0\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi\left[g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi^*- \\
&-\Psi^*\left[g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}+\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{iq}{\hbar c}A_\mu\right)\right]\Psi \qquad =0\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g^{\mu\nu}\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^*-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi^*)-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^*-g^{\mu\nu}\Psi\frac{q^2}{c^2}A_\nu A_\mu\Psi^*- \\
&-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi)-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi+g^{\mu\nu}\Psi\frac{q^2}{c^2}A_\nu A_\mu\Psi^*=0 \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g^{\mu\nu}\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^*-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi^*)-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^*-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi- \\
&-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi)-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi=0 \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(g^{\mu\nu}\Psi\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^*-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi+\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\mu}\right)-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi^*)- \\
&-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi^*-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(A_\mu\Psi)-g^{\mu\nu}\Psi^*\frac{iq}{\hbar c}A_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi=0 \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi^{*}-\Psi^{*}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi\right)-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(A_{\mu}\Psi^{*})-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Psi^{*}-$$
$$-g^{\mu\nu}\Psi^{*}\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(A_{\mu}\Psi)-g^{\mu\nu}\Psi^{*}\frac{iq}{\hbar c}A_{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Psi=0 \qquad \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi^{*}-\Psi^{*}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi\right)-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_{\mu}\frac{\partial\Psi^{*}}{\partial x^{\nu}}-g^{\mu\nu}\Psi\Psi^{*}\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-$$
$$-g^{\mu\nu}\Psi\frac{iq}{\hbar c}A_{\nu}\frac{\partial\Psi^{*}}{\partial x^{\mu}}-g^{\mu\nu}\Psi^{*}\Psi\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-g^{\mu\nu}\Psi^{*}\frac{iq}{\hbar c}A_{\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\nu}}-$$
$$-g^{\mu\nu}\Psi^{*}\frac{iq}{\hbar c}A_{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Psi=0 \qquad \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi^{*}-\Psi^{*}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi\right)-g^{\mu\nu}\frac{iq}{\hbar c}\left(2\Psi A_{\mu}\frac{\partial\Psi^{*}}{\partial x^{\mu}}+2\Psi\Psi^{*}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\mu}}+2A_{\mu}\Psi^{*}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\mu}}\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi^{*}-\Psi^{*}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi\right)-g^{\mu\nu}\frac{iq}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(2\Psi A_{\mu}\Psi^{*}\right)=0 \qquad \Rightarrow \tag{19}$$

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[\left(\Psi\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi^{*}-\Psi^{*}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Psi\right)-\frac{2iq}{\hbar c}\left(\Psi A_{\mu}\Psi^{*}\right)\right]=0 \tag{20}$$

Λόγω των εξισώσεων (3) και της (6) η (20) γίνεται :

$$\boxed{J^{\mu}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^{*}(\partial^{\mu}\Psi)-\Psi(\partial^{\mu}\Psi^{*})\right)-\frac{iq}{mc}A_{\mu}\Psi^{*}\Psi \qquad (21)}$$

Και τα τα δύο μέλη της (21) πολλαπλασιάστηκαν με $\frac{i\hbar}{2m}$. Δείχτηκε επομένως ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A_{μ}, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα της σχέσης (21).

4 Μη σχετικιστικό όριο εξίσωσης Klein-Gordon

Στο μη σχετικιστικό όριο η ταχύτητα του σωματιδίου είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό ($\upsilon << C$) οπότε θα ισχύει και $p << mc$.Η σχέση (2) γίνεται:

$$E = \left(c^2p^2 + m_0^2c^4\right)^{1/2} = mc^2\left(1 + \frac{p^2}{m_0^2c^2}\right)^{1/2} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0^2c^2}\right) \Rightarrow$$

$$E \approx m_0c^2 + \frac{p^2}{2m} \Rightarrow E' = E - m_0c^2 \tag{22}$$

Από την σχέση (22) παρατηρείται ότι στην οριακή περίπτωση η συνολική ενέργεια του σωματιδίου διαφέρει ελάχιστα από την ενέργεια ηρεμίας. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο για την περίπτωση ελεύθερου σωματιδίου όσο και για την περίπτωση που υπάρχει παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

4.1 Μη σχετικιστικό όριο ελεύθερης εξίσωσης Klein-Gordon

Για να μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο, η λύση της εξίσωσης γράφεται με την παρακάτω χωριζόμενη μορφή,με αντικατάσταση της(22) στην(11)

$$\Psi(\vec{r},t) = e^{\frac{i}{\hbar}\left(\vec{p}\vec{x} - \left(m_0c^2 + \frac{p^2}{2m}\right)t/\hbar\right)} = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x} - E't)}e^{-im_0c^2t/\hbar} = \phi(\vec{r},t)e^{-im_0c^2t/\hbar} \tag{23}$$

Στην ουσία η εξάρτηση από τον χρόνο χωρίστηκε σε δύο όρους: ο ένας από τους οποίους περιέχει την μάζα ηρεμίας του σωματιδίου και ο άλλος είναι ακριβώς η λύση της ελεύθερης εξίσωσης Schröndiger με χαμιλτονιανή την $H = p^2/2m_0$.Επομένως θα ισχύει:

$$\left|i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}\right| \approx E'\phi << m_0c^2\phi \tag{24}$$

Αρχικά θα υπολογιστουν η πρώτη και δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο της Ψ και θα γινει αντικατάσταση στη (10).

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi e^{-im_0c^2t/\hbar}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial t}e^{-im_0c^2t/\hbar} - im_oc^2/\hbar\phi e^{-im_0c^2t/\hbar} = \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - im_oc^2/\hbar\phi\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} \overset{(24)}{\approx} -im_oc^2/\hbar\phi e^{-im_0c^2t/\hbar}\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - im_oc^2/\hbar\phi\right)e^{-im_0c^2t/\hbar}\right] = \\ &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - im_0c^2\frac{\partial\phi}{\partial t}/\hbar - im_0c^2\frac{\partial\phi}{\partial t}/\hbar - m_0^2c^4\phi/\hbar\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} = \\ &\approx -\left(2im_0c^2\frac{\partial\phi}{\partial t}/\hbar + m_0^2c^4\phi/\hbar\right)e^{-im_0c^2t/\hbar}\end{aligned} \tag{26}$$

Στην εξίσωση (26), η δευτερη παράγωγος της φ ως προς το χρονο θεωρείται αμελητέα. Τέλος η (26) εισάγεται στην εξίσωση Klein-Gordon οπότε :

$$-\frac{1}{c^2}\left(2im_0c^2\frac{\partial\phi}{\partial t}/\hbar + m_0^2c^4\phi/\hbar\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{m_0^2c^2}{\hbar}\right)\phi e^{-im_0c^2t/\hbar}$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\phi}$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι άλλη απο την ελεύθερη εξίσωση του Schröndiger για σωματίδια χωρίς σπιν.

4.2 Μη σχετικιστικό όριο εξίσωσης Klein-Gordon παρουσία μαγνητικού πεδίου

Και σε αυτή τη περίπτωση ακολουθείται η ίδια διαδικασία με της προηγούμενης παραγράφου.Η λύση γράφεται με την μορφή της εξίσωσης (23). Η φ και σε αυτή την περίπτωση αποτελεί το μη σχετικιστικό κομμάτι της λύσης για το οποίο θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\left|i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}\right| << m_0c^2\phi, \qquad |eA_0\phi| << m_0c^2|\phi| \tag{27}$$

Στην (27) A_0 είναι το βαθμωτο δυναμικο φ. Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός αυτος για να μην υπάρχει σύγχυση με την κυματοσυνάρτηση. Η πρώτη σχέση εκφράζει το πόσο μικρή είναι η μη σχετικιστική ενέργεια σε σχέση με την ενέργεια ηρεμίας (όπως και στη προηγούμενη παράγραφο), ενώ η δευτερη ότι το δυναμικό πρεπει να είναι επίπεδο σε σύγκριση με την ενέργεια ηρεμίας, αλλιώς είναι αδύνατη η μελέτη του μη σχετικιστικού ορίου.

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-qA_0\right)\Psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-qA_0\right)\phi e^{-im_0c^2t/\hbar} = \left(i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}+m_0c^2\phi-qA_0\phi\right)e^{-im_0c^2t/\hbar}$$

$$\begin{aligned}
&\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-qA_0\right)^2\Psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-qA_0\right)\left(i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}+m_0c^2\phi-qA_0\phi\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} = \\
&= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}+m_0c^2t/phi-qA_0\phi\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} - qA_0\left(i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}+m_0c^2\phi-qA_0\phi\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} = \\
&= \left(-\hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - i\hbar\frac{\partial A_0}{\partial t}\phi - i\hbar qA_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + i\hbar m_0c^2\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} + \\
&+ \left(-i\hbar q\frac{\partial\phi}{\partial t}A_0 + qA_0^2\phi - qA_0\phi m_0c^2\phi + i\hbar m_0c^2\frac{\partial\phi}{\partial t} - qA_0\phi m_0c^2m_0^2c^4\right)e^{-im_0c^2t/\hbar} \\
&\approx e^{-im_0c^2t/\hbar}\left(m_0^2c^2 - 2m_0qA_0 + 2m_0c^2i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar q\frac{\partial A_0}{\partial t}\right)\phi
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό αντικαθιστάται στην εξίσωση (3.3) οπότε:

$$\left(m_0^2c^2 - 2m_0qA_0 + 2m_0c^2 i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar q\frac{\partial A_0}{\partial t}\right)e^{-im_0c^2t/\hbar}\phi = e^{-im_0c^2t/\hbar}\left[\left(+i\hbar\nabla + \frac{q}{c}A\right)^2 + m_0^2c^2\right]\phi$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2m_0}\left(+i\hbar\nabla + \frac{q}{c}A\right)^2 + qA_0 + \frac{i\hbar q}{2m_0c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t}}$$

Η παραπάνω εξίσωση ειναι η εξίσωση του Schröndiger για ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό. Παρατηρείται,επομένως ότι στο μη σχετικιστικό όριο η εξίσωση Klein-Gordon ταυτίζεται με την εξίσωση του Schröndiger και στις δύο περιπτώσεις που μελετήθηκαν, για σωματίδια χωρίς σπίν.

5 Εξίσωση Dirac

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αναφέρθηκαν τα προβλήματα που δημιουργεί ο δευτεροτάξιος χαρακτήρας της εξίσωσης Klein-Gordon. O Dirac το 1928 αναζήτησε μια διαφορική εξίσωση η οποία θα ήταν 1ης τάξης ως προς το χρόνο.

5.1 Η τρισδιάστατη εξίσωση Dirac

Για να προκύψει μία εξίσωση 1ης τάξης αντί για την (2), χρησιμοποιείται η:

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \overset{(c=1)}{=} \sqrt{p^2 + m^2} \tag{28}$$

Ακολούθως, στην (28) αντικαθιστώνται οι τελεστές ενέργειας και ορμής από τη (1). Αυτό δίνει :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2\nabla^2\Psi + m^2\Psi} \tag{29}$$

Η τετραγωνική ρίζα της 29 γράφεται με γραμμική μορφή $\alpha p + \beta m$, όπου τα α και β είναι στοιχεία μιας άλγεβρας.Έτσι η (29) δίνει μία εξίσωση πρώτης τάξης ως προς το χρόνο, η οποία είναι :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x^3}\right) + \beta mc^2\right] \tag{30}$$

Η (30) δεν είναι άλλη από την εξίσωση Dirac. Η εξίσωση αυτή πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω φυσικές ιδιότητες:

- Να ικανοποιει την σωστή εξίσωση ενέργειας-ορμής για ένα σχετικιστικό σωματίδιο
- Να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorentz
- Από την εξίσωση συνέχειας να προκύπτει μια συνάρτηση για την πυκνότητα πιθανότητας, $\rho(x) = \Psi^*\Psi$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
p^2 + m^2 &= (\alpha \cdot p + \beta \cdot m)(\alpha \cdot p + \beta \cdot m) && \Rightarrow \\
p^2 + m^2 &= (\alpha \cdot p)^2 + (\beta\alpha + \alpha\beta) + \beta^2 m^2 && \Rightarrow \\
p^2 + m^2 &= (\alpha \cdot p)^2 + \{\alpha, \beta\} + \beta^2 m^2
\end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν ο εξής ιδιότητες για τα α, β :

$$(\alpha \cdot p)^2 = p^2 \qquad \{\alpha, \beta\} = 0 \qquad \beta^2 = 1$$

Από την πρώτη ιδιότητα προκύπτει ότι :

$$(\alpha \cdot p)^2 = p^2 \Rightarrow \sum \alpha_i p_i \sum \alpha_j p_j = \sum p_i p_i \overset{(p_ip_j = p_jp_i)}{\Rightarrow} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}$$

Επειδή η χαμιλτονιανή της εξίσωσης Dirac πρέπει να είναι ερμιτιανός τελεστής , τα α, β πρέπει και αυτά να είναι ερμιτιανοί. Από τα παραπάνω, επειδή $\alpha_i^2 = 1, \beta^2 = 1$, συνεπάγεται ότι οι ιδιοτιμές τους μπορεί να είναι μόνο ± 1.

Ως μοναδιαίος ορίζεται εκείνος ο μετασχηματισμός που διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο των πινάκων στους οποίους δρα.Κάθε σύνολο $\alpha'_i = U\alpha_i U^{-1}, \beta' = U\beta U^{-1}$, το οποίο προκύπτει από τα αρχικά α, β και με U μοναδιαίο μετασχηματισμό είναι ισοδύναμες αναπαραστάσεις της άλγεβρας Dirac.Αυτό δίνει την δυνατότητα να γράψουμε τους πίνακες α και β σε διαγώνια μορφή.

Επειδή $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$ και $\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta$(η τελευταία σχέση είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων των α και β που παρουσιάστηκαν παραπάνω), για το ίχνος των δύο πινάκων θα ισχύει:

$$tr\alpha_i = tr\beta^2\alpha_i = tr\beta\alpha_i\beta = -tr\alpha_i = 0$$

Από την παραπάνω σχέση και το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές των α_i, β είναι ± 1, προκύπτει ότι οι πίνακες αυτοί έχουν τόσα αρνητικά όσα και θετικά στοιχεία , συνεπώς είναι ζυγής διάστασης. Η ελάχιστη ζυγή διάσταση, το 2, απορρίπτεται, καθώς θα είναι οι γνωστοί πίνακες του Pauli, οι οποίοι δεν ικανοποιούν τις ιδιότητες για τα α και β. Συνεπώς η αμέσως επόμενη διάσταση είναι η 4. Μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω επιλογή για την αναπαράσταση:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω αναπαράσταση μπορεί να γραφεί συνοπτικά :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2 Λύσεις εξίσωσης Dirac-Ελεύθερη κίνηση

Στην παράγραφο αυτή μελετάται η κίνηση ενός σωματιδίου που υπακούει στην εξίσωση Dirac, σε χώρο που δεν υπάρχουν δυναμικά, για το λόγο αυτό θα αναζητηθούν οι λύσεις της εξίσωσης, οι οποίες θα πρέπει να είναι της ακόλουθης μορφής(E η ενέργεια):

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi e^{-iEt/\hbar}$$

Γίνεται η αντικατάσταση στην εξίσωση (30) και Ψ, η οποία έχει 4 συνιστώσες, χωρίζεται επιπλέον σε δύο σπίνορες ϕ και χ, που έχουν δυο συντισώσες ο καθένας.Έτσι, η (30) γράφεται με την μορφή πινάκων ως εξής:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{-iEt/\hbar}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}\cdot p\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}e^{-iEt/\hbar} + m_0c^2\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}e^{-iEt/\hbar}$$
$$\Rightarrow E\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}\cdot p\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0c^2\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} E\phi &= c\sigma\cdot p\chi + m_0c^2\phi \\ E\chi &= c\sigma\cdot p\phi - m_0c^2\chi \end{aligned}$$

Οι καταστάσεις δεδομένης ορμής γράφονται :

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}e^{-ipr/\hbar}$$

Στην παραπάνω εξίσωση ο τελεστής της ορμής αντικαταστάθηκε από τις ιδιοτιμές του. Έτσι οι εξισώσεις παίρνουν τελικά την μορφή :

$$\begin{aligned} E\phi_0 &= c\sigma\cdot p\chi_0 + m_0c^2\phi_0 \\ E\chi_0 &= c\sigma\cdot p\phi_0 - m_0c^2\chi_0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E - m_0c^2)I\phi_0 - c\sigma\cdot p\chi_0 &= 0 \\ (E + m_0c^2)I\chi_0 - c\sigma\cdot p\phi_0 &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών του μηδενίζεται. Με αυτή την απαίτηση και χρησιμοποιόντας την σχέση (32)[1], βρίσκονται οι ιδιοτιμές της ενέργειας(33).

$$(\sigma\cdot A)(\sigma\cdot B) = A\cdot BI + i\sigma\cdot(A\times B) \tag{32}$$

$$E = \pm c\sqrt{p^2 + m_0c^2} \tag{33}$$

[1]Τα A και B σάυτη τη περίπτωση είναι πίνακες και I είναι ο μοναδιαίος πινακας. Ο συμβολισμός του μοναδιαίου πινακα με I συνεχίζεται και στο υπόλοιπο κείμενο.

Παρατηρείται ότι και στην περίπτωση της εξίσωσης Dirac υπάρχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές λύσεις για την ενέργεια,οι οποίες ερμηνεύονται απο την υπαρξη αντισωματιδίου. Λύνοντας την δεύτερη από τις εξισώσεις (31) ως προς χ_0 (34) και παίρνοντας $\phi_0 = u$ όπου $u^\dagger u = 1$, προκύπτουν οι λύσεις($\lambda = \pm 1$) :

$$\chi_0 = \frac{c\sigma \cdot p}{m_0 c^2 + E}\phi_0 \tag{34}$$

$$\Psi_{p,\lambda} = N \begin{pmatrix} u \\ \frac{c(\sigma \cdot p)}{m_0 c^2 + \lambda E_p} u \end{pmatrix} e^{i(pr - \lambda E_p t)/\hbar} \tag{35}$$

N είναι ο συντελεστης κανονικοποίησης και βρίσκεται εφαρμόζοντας τη συνθήκη :

$$\int \Psi^\dagger_{p\lambda} \Psi_{p'\lambda'} d\tau = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(p - p')$$

Οπότε προκύπτει:

$$N = \sqrt{\frac{m_0 c^2 + \lambda E_p}{2\lambda E_p}}$$

Απο τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε ιδιοτιμή της ορμής θα υπάρχουν δύο λύσεις μια με θετική και μια με αρνητική ενέργεια. Επιπλέον οι λύσεις της εξίσωσης, μπορούν να εξεταστούν με την χρήση του τελεστή της ελικότητας(36)[2], που δίνει την προβολή του σπίν στον άξονα της ορμής.

$$\Lambda = \frac{\hbar}{2} \Sigma \frac{p}{|p|} \tag{36}$$

Όπου Σ είναι η γενίκευση του τελεστή του σπίν σε τέσσερις διαστάσεις. Οι ιδιοτιμές της ελικότητας (στην περίπτωση που η διεύθυνση διάδοσης του κύματος του σωματιδίου είναι στον άξονα z) είναι:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u_{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ u_{-1} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι λύσεις (35)τελικά παίρνουν την μορφή:

$$\Psi_{p,\lambda,+1/2} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{c(\sigma \cdot p)}{m_0 c^2 + \lambda E_p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i(pr - \lambda E_p t)/\hbar}$$

[2]Εδώ με p συμβολίζεται και πάλι ο τελεστής της ορμής

$$\Psi_{p,\lambda,-1/2} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{c(\sigma\cdot p)}{m_0c^2+\lambda E_p}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i(pr-\lambda E_p t)/\hbar}$$

N είναι ο συντελεστης κανονικοποίησης και βρίσκεται εφαρμόζοντας τη συνθήκη :

$$\int \Psi^{\dagger}_{p,\lambda,s'_z}\Psi_{p',\lambda',s'_z}d\tau = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(p-p')\delta(p_z-p'_z)$$

5.3 Εξίσωση Dirac παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Θεωρείται διανυσματικό δυναμικό, $A^{\mu} = \{A_0(x), A(x)\}$. Η ελάσσονα αντικατάσταση που δίνεται από την σχέση (15) η οποία σε πολλά σημεία παρακάτω θα συμβολίζεται με $\hat{\Pi}$ χάριν συντομίας.Η αντικατάσταση αυτή εξασφαλίζει το αναλλοίωτο της εξίσωσης κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Πραγματοποιώντας την, η εξίσωση περιλαμβάνει τις αλληλεπιδράσεις με τα πεδία και παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} c\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial ct} - \frac{e}{c}A_0\right)\Psi &= \left[c\alpha\cdot\left(p-\frac{e}{c}A\right)+\beta m_0c^2\right]\Psi \qquad \Rightarrow \\ i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \left[c\alpha\cdot\left(p-\frac{e}{c}A\right)+eA_0+\beta m_0c^2\right]\Psi \end{aligned} \tag{37}$$

Είναι δυνατό σε αυτή την περίπτωση οι λύσεις να είναι της παρακάτω μορφής. Η ενέργεια αντικαθιστάτε απο την ενέργεια ηρεμίας που είναι και η υψηλότερη ενέργεια.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i\epsilon t/\hbar} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-im_0c^2t/\hbar}$$

Η εξίσωση (37) παίρνει τη μορφή :

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}\cdot e^{-im_0c^2t/\hbar} = \begin{pmatrix} c\sigma\cdot\hat{\Pi} & \chi \\ c\sigma\cdot\hat{\Pi} & \phi \end{pmatrix}\cdot e^{-im_0c^2t/\hbar} + eA_0\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}\cdot e^{-im_0c^2t/\hbar} \\ + m_0c^2\begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix}\cdot e^{-im_0c^2t/\hbar} \end{aligned} \tag{38}$$

Υπολογίζεται στη συνέχεια ο πρώτος όρος της εξίσωσης (38):

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-im_0c^2t/\hbar} &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-im_0c^2t/\hbar} + \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} i\hbar\frac{\partial e^{-im_0c^2t/\hbar}}{\partial t} = \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-im_0c^2t/\hbar} + m_0c^2\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-im_0c^2t/\hbar} \end{aligned}$$

Τέλος γίνεται αντικαταστάστη του τελευταίου αποτελέσματος στην εξίσωση (38):

$$
\begin{aligned}
&i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0c^2\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\sigma\cdot\hat{\Pi} & \chi \\ c\sigma\cdot\hat{\Pi} & \phi \end{pmatrix}\cdot + eA_0\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} + m_0c^2\begin{pmatrix} \phi \\ -\chi \end{pmatrix} \Rightarrow \\
&i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\sigma\cdot\hat{\Pi} & \chi \\ c\sigma\cdot\hat{\Pi} & \phi \end{pmatrix}\cdot + eA_0\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} - 2m_0c^2\begin{pmatrix} 0 \\ -\chi \end{pmatrix} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Στην επόμενη παράγραφο, η εξίσωση (39) θα χρησιμοποιηθεί για να να υπολογιστεί το μη σχετικιστικό όριο της εξίσωσης Dirac, παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

6 Μη σχετικιστικό όριο εξίσωσης Dirac

Είναι σημαντικό να εξεταστεί όπως έγινε στην περίπτωση της εξίσωσης Klein-Gordon, η συμπεριφορά της εξίσωσης, στο όριο των χαμηλών ταχυτήτων. Θα εξετασθούν οι περιπτώσεις της μονοδιάστατης εξίσωσης και της εξίσωσης παρουσίας ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Στην πρώτη περίπτωση αναμένεται η εξίσωση να προσεγγίζει την εξίσωση Schröndiger ενώ στη δεύτερη την εξίσωση του Pauli.

6.1 Ελεύθερη κίνηση - περίπτωση μονοδιάστατης εξίσωσης Dirac-μη σχετικιστικό όριο

6.1.1 Ελεύθερη κίνηση

Η μελέτη θα ξεκινησει από την εξίσωση(34). Στο μη σχετικιστικό όριο και για την περίπτωση των θετικών ενεργειών θα ισχύει:

$$E_p \approx m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}$$

Από την (34) θα ισχύει ότι:

$$\chi_0 = \frac{c\sigma \cdot p}{2m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}}\phi_0 \tag{40}$$

Επειδή $2m_0c^2 >> \frac{p^2}{2m_0}$ θα ισχύει ότι $\phi_0 >> \chi_0$. Επομένως η συνιστώσα chi_0 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Οι λύσεις στο όριο αυτό θα έχουν τη μορφή:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipr/\hbar}, \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipr/\hbar}$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις σάυτη τη περίπτωση, που η χ συνιστώστα δεν λαμβάνεται υπόψη, αντιστοιχούν στο σπίν του σωματιδίου και έχουν ιδιοτιμές $+1/2, -1/2$ αντίστοιχα

6.1.2 Μονοδιάστατη κίνηση

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί η περίπτωση της μονοδιάστατης εξίσωσης Dirac, που αποτελεί ειδικότερη περίπτωση της τρισδιάστατης εξίσωσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο.
Η μονοδιάστατη εξίσωση είναι :

$$\begin{pmatrix} m & p \\ p & -m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

Από την οποία προκύπτουν οι εξισώσεις :

$$m\phi + p\chi = E\phi$$
$$p\phi - m\chi = E\chi$$

Από αυτές λύνοντας ως προς χ ισχύει $\chi = \frac{p\phi}{E+m}$. Στο μη σχετικιστικό όριο η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ενέργεια ηρεμίας, οπότε ισχύει $E \approx m$ άρα $\chi = \frac{p\phi}{2m}$. Η αντικατάσταση του αποτελέσματος αυτού στην πρώτη από τις προηγούμενες εξισώσεις δίνει :

$$m\phi + \frac{p^2}{2m}\phi = E\phi$$

Η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από την εξίσωση του Schröndiger για ελεύθερο σωματίδιο.

6.2 Μη σχετικιστικό όριο παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Η μελέτη του ορίου θα ξεκινήσει, απο την εξίσωση (39). Αρχικά θα μελετηθεί η :

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = c\sigma\cdot\hat{\Pi}\phi + eA_0\chi - 2m_0c^2\chi \tag{41}$$

Στο συγκεκριμένο όριο η κινητική ενέργεια του σωματιδίου, όπως και η δυναμική ενεργεια, είναι μικρές σε σύγκριση με την ενέργεια ηρεμίας.Αυτό επιτρέπει να γίνουν οι προσσεγγισεις

$$\left|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right| << \left|m_0c^2\chi\right|, \qquad\qquad |eA_0\chi| << \left|m_0c^2\chi\right|$$

Από την (41) προκύπτει:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} + 2m_0c^2\chi - eA_0\chi = c\sigma\cdot\hat{\Pi}\phi \Rightarrow$$

$$\chi = \frac{\sigma\cdot\hat{\Pi}}{2m_0c}\phi \tag{42}$$

Η εισαγωγή της (42) στην (41) θα οδηγήσει στην μη σχετικιστικη έκφραση της κυματοσυνάρτησης ϕ :

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = c\sigma\cdot\hat{\Pi}\chi + eA_0\phi - 2m_0c^2\phi$$

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\left(\sigma\cdot\hat{\Pi}\right)\left(\sigma\cdot\hat{\Pi}\right)}{2m_0c}\phi + eA_0\phi \tag{43}$$

Ο υπολογισμός του πρώτου όρου του δεύτερου μέλους θα γίνει με τη βοήθεια της σχέσης (32).

$$\begin{aligned}
\left(\sigma\cdot\hat{\Pi}\right)\left(\sigma\cdot\hat{\Pi}\right) &= \hat{\Pi}^2 + i\sigma\cdot\left(\hat{\Pi}\times\hat{\Pi}\right)\\
&= \left(p-\frac{e}{c}A\right)^2 + i\sigma\cdot\left[\left(p-\frac{e}{c}A\right)\times\left(p-\frac{e}{c}A\right)\right]\\
&= \left(p-\frac{e}{c}A\right)^2 + i\sigma\cdot\left[\left(i\hbar\nabla-\frac{e}{c}A\right)\times\left(i\hbar\nabla-\frac{e}{c}A\right)\right]\\
&= \left(p-\frac{e}{c}A\right)^2 + i\sigma\cdot\left[\left(-\hbar^2\nabla\times\nabla+\frac{e^2}{c^2}A\times A - i\hbar\frac{e}{c}\nabla\times A - i\hbar\frac{e}{c}A\times\nabla\right)\right]\\
&= \left(p-\frac{e}{c}A\right)^2 - \frac{e}{c}\hbar\sigma\cdot(\nabla\times A)\\
&= \left(p-\frac{e}{c}A\right)^2 - \frac{e}{c}\hbar\sigma\cdot B
\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (43) γίνεται:

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left(\left(p-\frac{e}{c}A\right)^2/2m_0c - \frac{e}{2m_0c}\hbar\sigma\cdot B + eA_0\right)\phi \tag{44}$$

Η (44) δεν είναι άλλη από την εξίσωση Pauli. Ο χ σπίνορας όπως φάνηκε από την (42) είναι πολύ μικρός σε σύγκριση με την συνιστώσα φ και γιάυτο στην προσέγγιση εξετάστηκε το φ. Από το παραπάνω αποτέλεσμα γινεται φανερό ότι η φ θα περιγράφει τις καταστάσεις σπίν, οπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο.

Αναφορές

[1] Στέφανος Λ.Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.

[2] w. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanichs Wave equations*, Springer-Verlag,1994.

[3] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Mass., 1967.

[4] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics 3rd ed.*, Prentice Hall, 1999.