Α.Π.Θ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΜ. ΦΥΣΙΚΗΣ

Εργασία για το μάθημα Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Σκορδά Ελένη

Διδάσκων καθηγητής: Πασχάλης Ιωάννης

Περίληψη

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μερος αποδεικνύεται ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m}(\Psi * (\partial^\mu \Psi) - \Psi(\partial^\mu) *) - \frac{e}{m} A^\mu \Psi * \Psi$. Στο δευτερο μέλος της εργασίας μελετάται το μη σχετικιστικό όριο της εξίσωσης Dirac και Klein Gordon

Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ., 3 Απριλίου 2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η εξίσωση Schrondiger που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των κβαντομηχανικών σωματιδίων προκύπτει από την μη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής $E^2 = \frac{p^2}{2m}$. Όπως, είναι γνωστό, όμως, η σχέση αυτή δεν μπορεί να περιγράψει σωματίδια με μεγάλες ταχύτητες πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Τα σωματίδια που μελετά η κβαντομηχανική στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούν να φτάσουν αυτές της ταχύτητες, οπότε δημιουργείται η ανάγκη να ληφθεί υπόψη η σχέση ενέργειας-ορμής, της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας $E^2 = c^2p^2 + m^2c^4$. Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση Klein-Gordon ή οποία περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου το οποίο δεν έχει σπιν. Πέρα από το ότι αδυνατεί να περιγράψει σωματίδια με σπιν, η εξίσωση Klein-Gordon παρουσιάζει προβλήματα στην ερμηνεία της , όπως θα εξηγηθεί παρακάτω. Για τους παραπάνω λόγους ο Dirac ακολούθησε διαφορετική μεθοδολογία και κατέληξε στην ομώνυμη εξίσωση, ή οποία περιλαμβάνει και το σπιν. Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα δοθούν, αρχικά, οι ορισμοί βασικών εννοιών απαραίτητων για την επίλυση των ζητούμενων προβλημάτων. Κατόπιν, αφού παρουσιαστεί η μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon για ελεύθερο σωματίδιο και σε περίπτωση παρουσίας διανυσματικού δυναμικού θα δειχτεί ότι για μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon παρουσία διανυσματικού δυναμικού A^μ, μ = 0,1,2,3, η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται από το τετραδιάνυσμα $J^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Psi * (\partial^\mu \Psi) - \Psi(\partial^\mu) *\right) - \frac{e}{m} A^\mu \Psi * \Psi$. Κατόπιν θα γίνει περιγραφή της εξίσωσης Dirac και θα μελετηθεί το μη σχετικιστικό όριο αυτής αλλά και της Klein Gordon

2 Ειδική Σχετικότητα

Στο παρόν κεφάλαιο θα δοθούν, συνοπτικά, κάποιοι ορισμοί της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας που χρησιμοποιούνται σε επόμενα κεφάλαια με έμφαση, όμως, στο πως μετασχηματίζονται θεμελιώδεις έννοιες του Ηλεκτρομαγνητισμού στα πλαίσια της θεωρίας αυτής. Επίσης θα εξηγηθούν και ορισμένοι συμβολισμοί.

2.1 Τανυστές

Βασικό μαθηματικό εργαλείο αποτελούν οι τανυστές, που είναι μία γενίκευση των βαθμωτών και διανυσματικών μεγεθών. Υπάρχουν τρία είδη τανυστών :

- οι συναλλοίωτοι: $A'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x'_j}{\partial x_l}A^{kl}$
- οι ανταλλοίωτοι :$C'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}C_{kl}$
- οι μεικτοί τανυστές: $B'^{i}_{j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_l}{\partial x'_j}B^l_k$

Κάποιες βασικές και χρήσιμες ιδιότητες , που προκύπτουν σαν άμεση συνέπεια από τα παραπάνω είναι ότι :

- Αν ένα τανυστής μηδενίζεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων , μηδενίζεται σε όλα
- Αν δύο τανυστές είναι ίσοι σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων τότε θα ισούνται σε όλα
- Από τις δυο προηγούμενες ιδιότητες, προκύπτει ότι η μορφή μιας τανυστικής εξίσωσης δεν αλλάζει με την αλλαγή συστήματος

Οι πράξεις ανάμεσα σε τανυστές είναι:

- Άθροισμα : $C^{ab}_c = \alpha A^{ab}_c + \beta B^{ab}_c$
- Εξωτερικό γινόμενο : ${C^a_{bcd}}^e = \alpha A^a_b + \beta {B_{ab}}^e$
- Συστολή :${T_{aq}}^{cq} = \sum\limits_{q=1}^{n} {T_{aq}}^{cq}$, κατα συνεπεια ο τανυστής $T^a_a = T$ είναι βαθμωτό μέγεθος.
- Εσωτερικό γινόμενο

2.2 Χωρόχρονος Minkowski

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας ο χώρος δεν είναι ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος αλλά ο τετραδιάστατος χωρόχρονος Minkowski. Ο μετρικός τανυστής για το χώρο αυτό ορίζεται ως

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{3,0} & \cdots & g_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ο πίνακας που δίνει το μετασχηματισμό ενός οποιουδήποτε τετραδιανύσματος ανάμεσα σε δύο αδρανειακά συστήματα, (μετασχηματισμοί Lorentz) είναι :

$$\Lambda^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \cdots & \Lambda^0_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^3_0 & \cdots & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Αναφορές

[1] Στέφανος Λ.Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999.

[2] w. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanichs Wave equations*, Springer-Verlag,1994.

[3] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Mass., 1967.