

Α.Π.Θ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΜ. ΦΥΣΙΚΗΣ

# Επίλυση Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων 1ης τάξης με εφαρμογή της θεωρίας ομάδων Lie

Σκορδά Ελένη

Εργασία για το μάθημα Μη Γραμμική Δυναμική  
Διδάσκουσα : Ευθυμία Μελετιδίου Επίκουρος καθηγήτρια



## Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την εφαρμογή της θεωρίας ομάδων Lie στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στα βασικά στοιχεία της θεωρίας ομάδων. Συγκεκριμένα δίνονται ορισμοί εννοιών όπως οι πολλαπλότητες, υποπολλαπλότητες, ομάδα, άλγεβρα ομάδας, κοκ, αλλά και κάποια σημαντικά θεωρήματα. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας παρουσιάζεται μία μέθοδος με την οποία θα είναι δυνατό να καθοριστεί η ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ., 2 Οκτωβρίου 2015

## Περιεχόμενα

1	Πολλαπλότητες-Manifold	2
2	Ομάδες Lie	5
3	Αλγεβρα Lie	5

# 1 Πολλαπλότητες-Manifold

Πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος που είναι τοπικά Ευκλείδειος και μπορεί να είναι συμπαγής ή μη συμπαγής, συνεκτικός ή μη συνεκτικός. Ένας τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός όταν μπορεί να γραφεί σαν ένωση δύο ξένων συνόλων. Βασικό παράδειγμα μιας πολλαπλότητας είναι ο Ευκλείδειος χώρος και η τρισδιάστατη σφαίρα. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός της πολλαπλότητας.

**Ορισμός.** Μία  $n$ -διάστατη πραγματική ομαλή πολλαπλότητα  $M$  είναι ένας τοπολογικός χώρος που είναι εφοδιασμένος με ένα σύνολο από ανοιχτά σύνολα  $U^a$  τέτοια ώστε:

- για κάθε  $p \in M$  υπάρχει κάποιο  $U^a$  με  $p \in U^a$ .
- για κάθε  $U^a$  υπάρχει ένας αντιστρέψιμος ομοιομορφισμός<sup>1</sup>  $\phi_a : U^a \rightarrow \mathbb{R}^n$  πάνω σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  τέτοιο ώστε αν  $U^a \cap U^b \neq \emptyset$  τότε η απεικόνιση

$$\phi_b \circ \phi_a^{-1} : \phi_a(U^a \cap U^b) \rightarrow \phi_b(U^a \cap U^b)$$

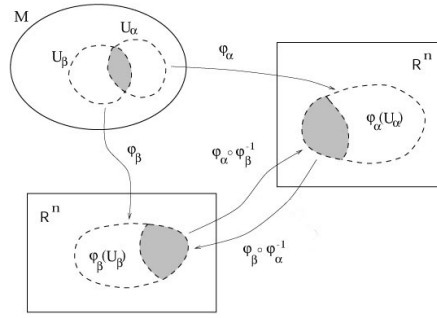
είναι ομαλή (απείρως διαφορίσιμη) ως συνάρτηση στον  $\mathbb{R}^n$

Αντίστοιχα θα μπορούσε να ορισθεί και η μιγαδική πολλαπλότητα με την μόνη διαφορά ότι ο πραγματικός χώρος αντικαθίσταται από τον μιγαδικό. Από τον ορισμό της πολλαπλότητας γίνεται κατανοητό ότι κάποιες πολλαπλότητες είναι δύσκολο να διαχωριστούν καθώς ο τοπολογικός χώρος μπορεί να αντιμετωπισθεί ως γεωμετρικό αντικείμενο και ο ομοιομορφισμός ουσιαστικά είναι ένα “συνεχές τέντωμα και λύγισμα” του αντικειμένου σε νέο σχήμα. Κατά συνέπεια ένας κύκλος είναι τοπολογικά ίδιος με ένα οποιοδήποτε κλειστό βρόγχο, όσο και αν αυτές οι πολλαπλότητες φαίνονται διαφορετικές. Παρόμοια, η επιφάνεια μιας κούπας του καφέ (με χερούλι) είναι τοπολογικά ίδια με την επιφάνεια ενός τόρου. Ένας σημαντικός στόχος για την τοπολογία είναι να ανακαλύψει ένα τρόπο να διαχωρίζει τις πολλαπλότητες.

Οι ομοιομορφισμοί  $\phi_a : U^a \rightarrow \mathbb{R}^n$  ονομάζονται χάρτες συντεταγμένων και παρέχουν στη πολλαπλότητα δομή τοπολογικού χώρου και επιτρέπουν να εκφράζονται τα σημεία μιας μικρής περιοχής σε μια πολλαπλότητα  $M$  ως συντεταγμένες στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$  (1).

---

<sup>1</sup>Ομοιομορφισμός ονομάζεται μια απεικόνιση ανάμεσα σε τοπολογικούς χώρους η οποία είναι ένα προς ένα και επί, συνεχής και η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης συνεχής.



Σχήμα 1: Χάρτες συντεταγμένων σε μια πολλαπλότητα.

## Αλλαγή συντεταγμένων

Είναι δυνατό εκτός από τους χάρτες που χρησιμοποιούνται στον ορισμό της πολλαπλότητας να συνδεθούν και άλλοι χάρτες για τους οποίους θα πρέπει να ισχύει ότι  $\phi \circ \phi_a^{-1}$  είναι ομαλή στην τομή  $\phi_a(U \cap U^a)$ . Επίσης είναι δυνατό να γίνει σύνθεση ενός τοπικού χάρτη συντεταγμένων με ένα διαφορομορφισμό<sup>2</sup> που αναφέρεται ως αλλαγή συντεταγμένων. Επειδή η σύνθεση επίσης τοπικός χάρτης συντεταγμένων κάθε αντικείμενο πάνω στην  $M$  ή ιδιότητα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από την αλλαγή συντεταγμένων. Είναι απαραίτητη η προσοχή κατά τον ορισμό αντικειμένων στην περίπτωση που γίνεται με την χρήση κάποιου τύπου σε συγκεκριμένο χάρτη συντεταγμένων γιατί είναι δυνατό οι τύποι να αλλάζουν με την αλλαγή των συντεταγμένων. Σ' αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητο να ελέγχεται ο ορισμός αν παραμένει αμετάβλητος κατά την αλλαγή.

## Συνθήκη μέγιστου βαθμού

Παρακάτω δίνεται ο ορισμός μιας ομαλής απεικόνισης ανάμεσα σε δύο πολλαπλότητες και ακολούθως ο ορισμός του βαθμού και του μέγιστου βαθμού μιας ομαλής απεικόνισης.

**Ορισμός.** Έστω  $M$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $m$  και μία πολλαπλότητα διάστασης  $n$  με χάρτες  $(U^a, x_a)$  και  $(W^A, y_A)$  αντίστοιχα. Η απεικόνιση  $f : M \rightarrow N$  θα λέγεται ομαλή αν για κάθε  $U^a$  και  $W^A$  τέτοια ώστε  $f(U^a) \cap W^A \neq \emptyset$  η απεικόνιση

$$y_A \circ f \circ x_a^{-1} : x_a(U^a) \rightarrow y_A(W^A)$$

είναι ομαλή σαν συνάρτηση  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

<sup>2</sup>διαφορομορφισμός ονομάζεται μια διαφορίσιμη απεικόνιση αν είναι αμφιμονοσήμαντη και η αντίστροφή της είναι επίσης διαφορίσιμη

**Ορισμός.** Έστω μια ομαλή απεικόνιση  $f : M \rightarrow N$  ανάμεσα σε  $M$  μία πολλαπλότητα διάστασης  $m$  και μία πολλαπλότητα διάστασης  $n$ . Βαθμός της απεικόνισης σε κάποιο σημείο  $x \in M$  είναι ο βαθμός του Ιακωβιανού πίνακα  $\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)$  στο  $x$  όπου  $y = f(x)$  εκφράζεται σε οποιεσδήποτε τοπικές συντεταγμένες κοντά στο  $x$ . Η απεικόνιση θα είναι μέγιστου βαθμού σε ένα υποσύνολο  $S \subset M$  αν για κάθε  $x \in S$  ο βαθμός της απεικόνισης είναι όσο μεγαλύτερος γίνεται.

**Θεώρημα.** Έστω ότι απεικόνιση  $f : M \rightarrow N$  είναι μέγιστου βαθμού στο  $x_0 \in M$ , τότε υπάρχουν τοπικές συντεταγμένες  $x = (x^1, \dots, x^m)$  κοντά στο  $x_0$  και  $y = (y^1, \dots, y^m)$  κοντά στο  $y_0 = f(x_0)$ . Για τις τοπικές αυτές συντεταγμένες η απεικόνιση παίρνει την απλή μορφή:

$$y = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \text{ αν } n > m$$

ή

$$y = (x^1, \dots, x^m) \text{ αν } n \leq m$$

## Υποπολλαπλότητες

Μια υποπολλαπλότητα είναι ένα υποσύνολο μιας πολλαπλότητας η οποία είναι και αυτή πολλαπλότητα αλλά έχει μικρότερη διάσταση. Για παράδειγμα, ο ισημερινός μιας σφαίρας είναι μια υποπολλαπλότητα. Ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός της υποπολλαπλότητας δίνεται στη συνέχεια.

2 Ομάδες Lie

3 Άλγεβρα Lie

## References

- [1] Uploaded by LucasVB. "mug and torus morph". licensed under public domain via commons.
- [2] Todd. Rowland. Coordinate chart. from mathworld—a wolfram web resource, created by eric w. weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/CoordinateChart.html>.
- [3] Todd. Rowland. "manifold." from mathworld—a wolfram web resource, created by eric w. weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/Manifold.html>.
- [4] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.