

Α.Π.Θ ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΜ. ΦΥΣΙΚΗΣ

Επίλυση Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων 1ης τάξης με εφαρμογή της θεωρίας ομάδων Lie

Σκορδά Ελένη

Εργασία για το μάθημα Μη Γραμμική Δυναμική
Διδάσκουσα : Ευθυμία Μελετιδίου Επίκουρος καθηγήτρια



Περίληψη

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την εφαρμογή της θεωρίας ομάδων Lie στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στα βασικά στοιχεία της θεωρίας ομάδων. Συγκεκριμένα δίνονται ορισμοί εννοιών όπως οι πολλαπλότητες, υποπολλαπλότητες, ομάδα, άλγεβρα ομάδας, κοκ, αλλά και κάποια σημαντικά θεωρήματα. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας παρουσιάζεται μία μέθοδος με την οποία θα είναι δυνατό να καθοριστεί η ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ., 2 Οκτωβρίου 2015

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
2	Πολλαπλότητες-Manifold	2
3	Ομάδες Lie	2
4	Αλγεβρα Lie	2

1 Εισαγωγή

2 Πολλαπλότητες-Manifold

Πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος που είναι τοπικά Ευκλείδειος και μπορεί να είναι συμπαγής ή μη συμπαγής, συνεκτικός ή μη συνεκτικός. Βασικό παράδειγμα μιας πολλαπλότητας είναι ο Ευκλείδειος χώρος και η τρισδιάστατη σφαίρα. Παρακάτω δίνεται ο ορισμός της πολλαπλότητας.

Ορισμός. Μία n -διάστατη πραγματική ομαλή πολλαπλότητα M είναι ένας τοπολογικός χώρος που είναι εφοδιασμένος με ένα σύνολο από ανοιχτά σύνολα U^a τέτοια ώστε:

- για κάθε $p \in M$ υπάρχει κάποιο U^a με $p \in U^a$.
- για κάθε U^a υπάρχει ένας αντιστρέψιμος ομοιομορφισμός $\phi_a : U^a \rightarrow \mathbb{R}^n$ πάνω σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε αν $U^a \cap U^b \neq \emptyset$ τότε η απεικόνιση

$$\phi_b \circ \phi_a^{-1} : \phi_a(U^a \cap U^b) \rightarrow \phi_b(U^a \cap U^b)$$

είναι ομαλή (απείρως διαφορίσιμη) ως συνάρτηση στον \mathbb{R}^n

Από τον ορισμό της πολλαπλότητας γίνεται κατανοητό ότι κάποιες πολλαπλότητες είναι δύσκολο να διαχωριστούν καθώς ο τοπολογικός χώρος μπορεί να αντιμετωπισθεί ως γεωμετρικό αντικείμενο και ο ομοιομορφισμός ουσιαστικά είναι ένα “συνεχές τέντωμα και λύγισμα” του αντικειμένου σε νέο σχήμα. Κατά συνέπεια ένας κύκλος είναι τοπολογικά ίδιος με ένα οποιοδήποτε κλειστό βρόγχο, όσο και αν αυτές οι πολλαπλότητες φαίνονται διαφορετικές. Παρόμοια, η επιφάνεια μιας κούπας του καφέ (με χερούλι) είναι τοπολογικά ίδια με την επιφάνεια ενός τόρου. Ένας σημαντικός στόχος για την τοπολογία είναι να ανακαλύψει ένα τρόπο να διαχωρίζει τις πολλαπλότητες.

Μια υποπολλαπλότητα είναι ένα υποσύνολο μιας πολλαπλότητας η οποία είναι και αυτή πολλαπλότητα αλλά έχει μικρότερη διάσταση. Για παράδειγμα, ο ισημερινός μιας σφαίρας είναι μια υποπολλαπλότητα.

3 Ομάδες Lie

4 Αλγεβρα Lie

¹Ομοιομορφισμός ονομάζεται μια απεικόνιση ανάμεσα σε τοπολογικούς χώρους η οποία είναι ένα προς ένα και επί, συνεχής και η αντίστροφη απεικόνιση είναι επίσης συνεχής.

References

- [1] Uploaded by LucasVB. "mug and torus morph". licensed under public domain via commons.
- [2] Todd. Rowland. Coordinate chart. from mathworld—a wolfram web resource, created by eric w. weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/CoordinateChart.html>.
- [3] Todd. Rowland. "manifold." from mathworld—a wolfram web resource, created by eric w. weisstein. <http://mathworld.wolfram.com/Manifold.html>.
- [4] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.