20.5 +7.5

Příjmení a jméno: [redacted] Datum: 20. května 2025
Login studenta: [redacted]

Zkoušková písemka z předmětu „Úvod do teoretické informatiky“

Doba trvání: **100 minut** Max. zisk: **70 bodů**

Část 1: Jazyky a automaty

Příklad [1] (9 bodů): Ke každé z následujících bezkontextových gramatik a každému z následujících regulárních výrazů přiřaďte jazyky (z níže uvedeného seznamu jazyků), které jsou generovány danou bezkontextovou gramatikou nebo popsány daným regulárním výrazem. Řešení pište do připravené tabulky, kde ke každé gramatice a každému výrazu napište písmena všech odpovídajících jazyků, popřípadě buňku tabulky proškrtněte, pokud gramatice nebo výrazu neodpovídá žádný jazyk.

(1) $aaa(a+b)^*$

(2) $aaa(a+b)(a+b)(a+b)$

(3) $S \longrightarrow aSb \mid \varepsilon$

(4) $S \longrightarrow aSa \mid aSb \mid \varepsilon$

(5) $S \longrightarrow aB$
$B \longrightarrow Ba \mid Bb \mid aa$

(6) $S \longrightarrow aB \mid \varepsilon$
$B \longrightarrow Sb \mid b$

9

aaa

	1	2	3	4	5	6
(A) $\{a^n v \mid v \in \{a,b\}^*,\ n = 3\}$	✓	✗	✗	✗	✓	✗
(B) $\{a^n v \mid v \in \{a,b\}^*,\ n = \lvert v \rvert\}$	✗	✗	✗	✓	✗	✗
(C) $\{uv \mid u \in \{a\}^*, v \in \{b\}^*, \lvert u \rvert = \lvert v \rvert\}$	✗	✗	✓	✗	✗	✓
(D) $\{a^n b^n \mid 0 \leq n\}$	✗	✗	✓	✗	✗	✓
(E) $\{aaaaaa, aaabbb\}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗
(F) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ začíná prefixem $aaa\}$	✓	✗	✗	✗	✓	✗

Řešení:

Gramatika / Reg. výraz	Jazyky
(1)	A, F
(2)	—
(3)	C, D
(4)	B
(5)	A, F
(6)	C, D

b
Bb

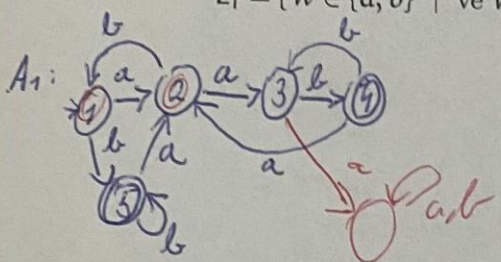
Příklad [2] (9 bodů):

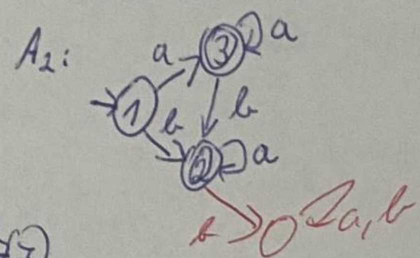
Uvažujme níže uvedené jazyky L_1 a L_2. Zkonstruujte deterministické konečné automaty A_1, A_2 a A_3 tak, že $\mathcal{L}(A_1) = L_1$, $\mathcal{L}(A_2) = L_2$ a $\mathcal{L}(A_3) = L_1 \cup \overline{L_2}$. Při tvorbě automatu A_3 je výhodné využít standardní konstrukci pro zadanou jazykovou operaci na konečných automatech. Je jedno, jestli budou automaty zadány tabulkou nebo grafem, ale u každého automatu musí být uveden jeho název (tedy A_1, A_2 nebo A_3).

$$L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \text{ ve } w \text{ po každém výskytu podslova } aa \text{ ihned následuje symbol } b \}$$

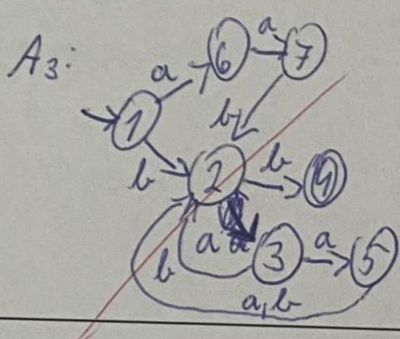
$$L_2 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b = 1 \}$$

$\overline{L_2} = |w|_b >< 1$





2.5



Příklad [3] (5 bodů):

Vytvořte bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ generující jazyk

$$\mathcal{L}(G_2)^* \cup (\mathcal{L}(G_2) \cdot \mathcal{L}(G_1))$$

(Vypište všechna její pravidla, i když jsou třeba stejná, jako některá ze zadaných.)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 : S &\longrightarrow aSS \mid aaBA \\ A &\longrightarrow aBa \mid bAA \\ B &\longrightarrow aba \mid aB \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathcal{G}_2 : S &\longrightarrow AaB \mid ABA \\ A &\longrightarrow Aa \mid \varepsilon \\ B &\longrightarrow bB \mid abb \end{aligned}$$

5

$\mathcal{G}$: $S \to X \mid G_2 G_1$

$X \to X G_2 \mid \varepsilon$

$G_1 \to a G_1 G_1 \mid aaYX$

$X \to aYa \mid bXX$

$Y \to aba \mid aY$

$G_2 \to PaQ \mid PQP$

$P \to Pa \mid \varepsilon$

$Q \to bQ \mid abb$

Příklad [4] (6 bodů): Uvažujme následující jazyky ($|w|$ označuje délku slova w, $|w|_a$ označuje počet výskytů symbolu a ve w; w^R značí zrcadlový obraz slova w):

$L_1 = \{ w \in \{a\}^* \mid \text{délka } w \text{ je mocninou čísla } 3 \}$

$L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i = j \text{ nebo } i = k \}$

$L_3 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ začíná stejnou dvojicí znaků jako končí} \}$

$L_4 = \{ w \in \{a\}^* \mid \text{délka } w \text{ je prvočíslo menší než } 5 \}$

$L_5 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje právě jeden výskyt řetězce } baab \}$

$L_6 = \{ a^i b^j a^m b^n \mid i = m \text{ a } j = n \}$

Do následující tabulky napište, jaké jsou odpovědi na otázky v řádcích pro jednotlivé jazyky určené sloupcem (místo „ano“ a „ne“ pište „A“ a „N“).

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
Je regulární?	N	N	N	A	A	N
Je bezkontextový?	A	A	A	A	A	N

4

Příklad [5] (6 bodů): Přesně popište, jak lze obecně k libovolným dvěma deterministickým konečným automatům $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ a $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ sestrojit deterministický automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)\,.$$

Pro každý z následujících čtyř prvků z pětice určující automat $\mathcal{A}$ tedy uveďte, jak jej získáme ze dvou pětic určujících konečné automaty $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$.
(Vstupní abeceda Σ bude pro všechny tři automaty $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}$ stejná.)

0

- Množina stavů Q:

- Počáteční stav q_0:

- Množina přijímajících stavů F:

- Přechodová funkce δ:

0 1 2 3 4 5 6 7 8
6. 1 1 7 5 - 5 0 7
7. 6 7
8. 1
9. 6
10. 1 6 6 - 5 0 1
11. 5
0
1 6 6 0 5 0 1
7 01
0 6
1
1 8 01
0 7
1
1

Část 2: Vyčíslitelnost a složitost

Příklad [6] (8 bodů):

$$
\left.\begin{array}{l}
R_4 := 5 \\
R_1 := \text{READ}() \\
R_2 := R_4 \\
R_0 := 0 \\
[R_2] := R_0 \\
R_0 := 1
\end{array}\right\} 6
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
L_1: & R_2 := R_2 + 1 \\
& [R_2] := R_0 \\
& \textbf{if } (R_1 \leq 0) \textbf{ goto } L_2 \\
& R_1 := R_1 - 1 \\
& R_3 := R_2 - 1 \\
& R_3 := [R_3] \\
& R_0 := R_0 + R_3 \\
& \textbf{goto } L_1
\end{array}\right\} 8n
$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
L_2: & \textbf{if } (R_2 < R_4) \textbf{ goto } L_3 \\
& R_0 := [R_2] \\
& \text{WRITE}(R_0) \\
& R_2 := R_2 - 1
\end{array}\right\} 5n
$$

$$
\begin{array}{ll}
& \textbf{goto } L_2 \\
L_3: & \textbf{halt} \quad -1
\end{array}
$$

a) Do tabulky uveďte, kolik kroků (tj. provedení instrukcí) vykoná uvedený RAM, je-li vstupem číslo 7, a jaký výstup RAM vydá pro tento vstup:

počet kroků	výstup
98	

+14

7 + 13n

0.5

b) Do následující tabulky vypište obsah paměti uvedeného RAMu po provedení 10 kroků a obsah paměti po skončení výpočtu (bylo-li vstupem číslo 7).

Poznámka: Vypište obsah všech buněk, které jsou během výpočtu použity (včetně těch, které se případně do níže uvedené předtištěné tabulky nevešly).

adresa paměti	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	...
obsah po 10 krocích	1	6	6	–	5	0	1	–	–	–	–	✓
obsah po skončení	0	0	12	7								

c) Uveďte kolik kroků maximálně provede výše uvedený stroj RAM, pokud dostane jako vstup číslo n (určete tento počet kroků co nejpřesněji, ne jen asymptotický odhad):

13n + 7 + 14

1.5

d) Uveďte, co bude výstupem, pokud na vstupu bude číslo n:

~~n + 1, n + 2, n + 3 ...~~

2

Příklad [7] (8 bodů): Pro následující algoritmus určete co nejpřesněji jeho časovou složitost v nejhorším případě a vyjádřete ji pomocí asymptotické notace (nejlépe jako jeden odhad vyjádřený pomocí Θ, případně jako dva odhady vyjádřené pomocí O a Ω). Jako velikost vstupu uvažujte hodnotu uloženou v proměnné n.

Odvozené výsledky **zdůvodněte**.

Předpokládejte, že $n \geq 0$, a že pole A i B mají n prvků a jsou indexována od nuly, přičemž jejich prvky jsou celá čísla.

3

8

```
COMPUTE(n, A, B):
    c := 0
    s := 1
    j := 0
    while s < n do
        x := 0
        i := 0
        while i < n do
            x := x + A[i]
            i := i + s
        s := 2 * s
        B[j] := x
        j := j + 1
        c := c + x
    return c
```

log?

2 3 4 5 6 7 8

Jsou zde dva cykly, ovšak ani jeden z nich neprojde n krát jelikož hlavní proměnná S se násobí dvojkou a následně se použije i ve vnitřním cyklu, odhaduji dva cykly na složitost $\sqrt{n}$ každý

$\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$

$\sqrt{n}^2$ ✗

$2^{\log_2 n}$ ✓

4

$\Theta(n)$ ✓

$$\underbrace{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} \cdots}_{\log n} = \Theta(n)$$

Příklad [8] (5 bodů): V následující tabulce vyznačte, které ze vztahů typu $f \in O(g)$, $f \in \Omega(g)$, $f \in \Theta(g)$, $f \in o(g)$ a $f \in \omega(g)$ platí, a které ne.

Vztahy, které platí, **zakroužkujte**, a vztahy, které neplatí, **přeškrtněte**.

$f_1(n) = (\log_2 n)^2$ $\qquad$ $f_2(n) = \log_2(n^2)$ $\qquad$ $f_3(n) = n \log_2 n$

f_3 kz f_1

<=	$\cancel{f_1 \in O(f_2)}$	$f_2 \in O(f_1)$	$\cancel{f_1 \in O(f_3)}$	$f_3 \in O(f_1)$	$\cancel{f_2 \in O(f_3)}$	$f_3 \in O(f_2)$
>=	$f_1 \in \Omega(f_2)$	$\cancel{f_2 \in \Omega(f_1)}$	$f_1 \in \Omega(f_3)$	$\cancel{f_3 \in \Omega(f_1)}$	$f_2 \in \Omega(f_3)$	$\cancel{f_3 \in \Omega(f_2)}$
=	$\cancel{f_1 \in \Theta(f_2)}$	$\cancel{f_2 \in \Theta(f_1)}$	$\cancel{f_1 \in \Theta(f_3)}$	$\cancel{f_3 \in \Theta(f_1)}$	$\cancel{f_2 \in \Theta(f_3)}$	$\cancel{f_3 \in \Theta(f_2)}$
<	$\cancel{f_1 \in o(f_2)}$	$f_2 \in o(f_1)$	$\cancel{f_1 \in o(f_3)}$	$f_3 \in o(f_1)$	$\cancel{f_2 \in o(f_3)}$	$f_3 \in o(f_2)$
>	$f_1 \in \omega(f_2)$	$\cancel{f_2 \in \omega(f_1)}$	$f_1 \in \omega(f_3)$	$\cancel{f_3 \in \omega(f_1)}$	$f_2 \in \omega(f_3)$	$\cancel{f_3 \in \omega(f_2)}$

1,5

X X X X

Příklad [9] (8 bodů): Navrhněte a podrobně popište (nejlépe pomocí pseudokódu) algoritmus řešící následující problém. V případech, kdy není očividné, že vámi navržený algoritmus skutečně řeší daný problém, uveďte nějaké alespoň neformální zdůvodnění korektnosti tohoto algoritmu.

Uveďte, jakou má tento algoritmus časovou a prostorovou složitost. Vaše odhady složitosti **zdůvodněte**.

VSTUP: Orientovaný graf $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E množina hran.

OTÁZKA: Je graf G silně souvislý?

Poznámka: Graf $G = (V, E)$ je silně souvislý, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$ platí, že existuje (orientovaná) cesta z u do v.

~~[illegible]~~ $O(n!)$ – je třeba projít vrcholy

∅

Příklad [10] (6 bodů):

a) Definujte přesně, co to znamená, že daný problém P je *algoritmicky nerozhodnutelný*.

tzn. nelze jednoznačně rozhodnout na základě algoritmu ?

b) Uveďte konkrétní příklad nějakého algoritmicky nerozhodnutelného problému. Uveďte, co je vstupem a jaká je otázka:

∅

VSTUP:

OTÁZKA:

c) Pro problém uvedený v předchozím bodě uveďte konkrétní příklad instance tohoto problému, pro kterou je odpoveď ANO a příklad instance, pro kterou je odpověď NE.