ALG1 Domácí úkol 2 – Rychlost růstu funkcí

Richard Ficek

March 15, 2024

Zadání

Za domácí úkol máte dokázat, že:

1. Každý polynom $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0$, kde $a_k > 0$, roste stejně rychle jako polynom n^k
2. Funkce $\log_2 n$ roste pomaleji než n
3. Funkce n roste pomaleji než $n \log_2 n$ a konečně
4. Funkce n^2 roste pomaleji než 2^n

Výsledek není nutné tajit – všechna čtyři tvrzení platí. Jako řešení se očekává formální matematický důkaz, například pomocí limity, která ve všech případech vyjde 0. Výpočty můžete buď napsat na papír a odevzdat scan. Nebo je můžete zkusit vysázet pomocí LaTeXu a odevzdat vysázený PDF soubor.

Příklad 1

Každý polynom $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0$, kde $a_k > 0$, roste stejně rychle jako polynom n^k.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{n^k} = a_k$

Jelikož $a_k > 0$, to znamená že každý polynom roste stejně rychle jako polynom n^k

Příklad 2

Funkce, $log_2 n$ roste pomaleji než n.

$\lim_{n\to\infty} \frac{log_2(n)}{n} = \frac{\infty}{\infty}$ tohle řešení není definováné, dále dle L'Hôpitalovo pravidlo

$\lim_{n\to\infty} \frac{log_2(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\ ln(2)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ ln(2)} = 0$

Výsledkem je, že limita $\lim_{n\to\infty} \frac{log_2(n)}{n}$ je rovna 0, což znamená, že funkce $log_2\ n$ roste pomaleji než funkce n.

Příklad 3

Funcke n roste pomaleji než $n\ log_2 n$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\ log_2(n)} = \frac{\infty}{\infty}$ tohle řešení není definováné, dále dle L'Hôpitalovo pravidlo

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\ log_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{log_2(n)+\frac{1}{ln(2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{ln(2)\ log_2(n)+1}{ln(2)}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{ln(2)\ \frac{ln(n)}{ln(2)}+1}{ln(2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{ln(n)+1}{ln(2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{ln(2)}{ln(n)+1} = \frac{2}{\infty} = 0$

Výsledkem je, že limita $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\ log_2(n)}$ je rovna 0, což znamená, že funkce n roste pomaleji než funkce $n\ log_2 n$.

Příklad 4

Funkce n^2 roste pomaleji než 2^n.

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{\infty}{\infty}$ tohle řešení není definováné, dále dle L'Hôpitalovo pravidlo

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n \cdot ln(2)} = \frac{2}{ln(2)} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n} = \frac{2}{ln(2)} * 0 = 0$

Výsledkem je, že limita $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$ je rovna 0, což znamená, že funkce n^2 roste pomaleji než funkce 2^n.