

Solutions numériques des modèles SIR et SEIR par Séries de Dirichlet

Elson Jeyatees, Niokhobaye Abdel NIANG

2025

Contents

1	Introduction	1
2	Modèle SIR	1
2.1	Solutions semi-analytiques:	2
2.2	Approximation par Séries de Dirichlet	3
2.2.1	Théoreme 1	4
2.2.2	preuve du théorème 1	4
2.2.3	Lemme 2	5
2.2.4	preuve lemme 2	5
2.2.5	théorème 3	6
2.2.6	preuve du théorème 3	6
2.2.7	Solutions	7
3	Modèle SEIR	7
4	SIMULATION NUMERIQUE	8
4.1	Modèle SIR	8
4.2	Modèle SEIR	9
4.3	avantages de l'approximations par séries de dirichlet	11

1 Introduction

En 1927 , un biologiste et un épidémiologiste écossais du nom de Kermack et McKendrick se sont penchés sur la question de la propagation épidémique d'un virus et ont proposé le modèle SIR afin d'expliquer le processus de propagation d'un virus par une approche mathématiques . La modélisation mathématique des épidémies permet de mieux comprendre la propagation des maladies infectieuses et de définir des politiques de santé publique efficace . Parmi les modèles utilisé , on a les modèles compartimentaux où on divise la population en plusieurs catégories selon leur état par rapport à la maladie . Nous étudierons ici 2 modèles le modèle SIR et le modèle SEIR d après l'article : "Direct numerical solutions of the SIR and SEIR

2 Modèle SIR

Dans ce modèle, on divise la population en 3 classes : S , I et R .Les individus de la classe S représentent la classe d'individus suceptible d'être infectées par la maladie , ceux de la classe I , la population infecté ou présumé contagieux capable de propager la maladie , et enfin , la classe R , qui correspond aux individus qui ont été infecté puis remis de leurs maladie et qui sont désormais immunisés contre une nouvelle infection.On peut appartenir à la catégorie remis lorsqu'on décède de la maladie ou qu'on se retrouve isolé de la population infectée .En suivant ce modèle on ne peut que appartenir à l'une de ses classes , et on a seulement 2 possibilités de changer de classes, passer de la classe S à I et ,passer de la classe I à R. On désignera ces 3 classes comme des fonctions à valeurs réels dépendant du temps tel que :

$$\forall t \in \mathbb{N}, S(t)+I(t)+R(t)=1.$$

On en déduit donc que les fonctions S, I et R représentent la proportion d'individus de chaque classe dans une population donnée .Donc S, I et R sont des fonctions de \mathbb{R}_+^* dans $[0,1]$.

On suppose que ce modèle est déterministe , c'est à dire que le comportement de la population est entièrement décrit par ses conditions initiales et par les règles qui les décrivent .

Le modèle proposé par Kermack et McKendrick suivent les équations différentiels suivantes :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta IS \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (3)$$

avec :

$\beta > 0$ le taux de transmission du virus (probabilité de contagion par contact)

$\gamma > 0$ le taux de récupération (l'inverse de la durée d'infection) . et les conditions initiales suivantes :

$$S(0)=S_0 > 0 , I(0)=I_0 > 0 , \text{ et } R(0)=0$$

le modèle SIR est non linéaire et n'admet pas de solutions analytique exacte . On va donc avoir 2 méthodes : chercher des solutions semi analytiques puis ensuite utiliser une méthode d'approximation par les séries de dirichlet .

2.1 Solutions semi-analytiques:

On peut réécrire l'équation (1):

$$I = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{S'}{S} \right) \quad (4)$$

on réinjecte (2) dans cette équation et on la dérive :

$$I' = -(\beta S - \gamma) \left(\frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{S'}{S} \right) \quad (5)$$

on dérive l'équation (4) et on réinjecte dans l'équation (5) pour obtenir :

$$SS'' - S'^2 - (\beta S - \gamma)SS' = 0 \quad (6)$$

Déterminons la solution de cette équation différentiel , on pose ϕ tel que :

$$\frac{1}{\phi} = \frac{S'}{S} = (\ln(S))' \quad (7)$$

on a donc :

$$SS' = \phi S^2 \quad (8)$$

En remplaçant dans (6), on obtient :

$$\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dS} = -\beta + \frac{\gamma}{S} \quad (9)$$

par xéparation des variables , on obtient :

$$\int \frac{1}{\phi^2} d\phi = \int \left(-\beta + \frac{\gamma}{S} \right) dS \quad (10)$$

on intègre pour obtenir :

$$\frac{-1}{\phi} = -\beta S + \gamma \ln(s) + C \quad (11)$$

avec la condition initiale $S(0)=S_0$:

$$C = \beta S_0 - \gamma \ln(S_0) + \beta I_0 \quad (12)$$

On obtient finalement :

$$\frac{d}{dt}(\ln S) = \beta(S - S_0 - I_0) - \gamma \ln\left(\frac{S}{S_0}\right) \quad (13)$$

et en l'intégrant , on obtient l'égalité ;

$$\int \frac{d \ln(S)}{\beta(S - S_0 - I_0) - \gamma \ln\left(\frac{S}{S_0}\right)} = dt \quad (14)$$

La solution exacte de (14) est appelé solution analytique . On a par hypothèse $S_0 + I_0 = 1$ et en utilisant le développement de Taylor on approxime $\ln\left(\frac{S}{S_0}\right)$ par $\frac{S}{S_0} - 1$ et on en déduit :

$$\frac{1}{e^{\ln S}(\beta - \frac{\gamma}{S_0}) + \gamma - \beta} d \ln S = dt \quad (15)$$

cette équation est bien défini car on a comme hypothèse $I_0 > 0$ implique alors que $S_0 < 1$. On ne peut donc pas avoir en même temps $\gamma - \beta = 0$ et $\beta S_0 - \gamma$ car sinon on aurait $\beta(S_0 - 1) = 0$ et $\beta \neq 0$. On considère alors 2 cas :

1 er cas : $\gamma = \beta$ (le taux de transmission et de récupération sont les mêmes), alors en intégrant l'équation (15) , on obtient :

$$S(t) = \frac{S_0}{1 + \beta(1 - S_0)t} \quad (16)$$

2 ème cas : $\beta \neq \gamma$:

$$S(t) = \frac{(\beta - \gamma)S_0}{\beta(1 - S_0)e^{(\beta - \gamma)t} + \beta S_0 - \gamma} \quad (17)$$

Ensuite en utilisant les équations (4) et (13) et $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$:

$$I(t) = -S(t) + 1 + \frac{\gamma}{\beta} \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \quad (18)$$

$$R(t) = \frac{\gamma}{\beta} \ln\left(\frac{S_0}{S(t)}\right) \quad (19)$$

Cependant , nous verrons plus tard que cette modélisation n'est pas très précise , et effective sur le long terme . On privilégiera donc une approche par une approximation avec les séries de Dirichlet .

2.2 Approximation par Séries de Dirichlet

En partant de l'hypothèse que la fonction

$$u(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$$

est une série de Dirichlet de la forme

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t},$$

avec $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ et $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

alors :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dt} = -\beta I.$$

De plus, en manipulant les équations, On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{du}{dt} + \gamma u(t) + \beta = \beta S_0 e^{u(t)}.$$

On a le théorème suivant ;

2.2.1 Théorème 1

Théorème 1 : On pose $u(t) = \ln(S(t)/S_0) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i e^{-\lambda_i t}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, $a_i \in \mathbb{C}$ $a_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une série de Dirichlet qui satisfait l'équation :

$$u' + \gamma u + \beta = \beta S_0 e^u \quad (20)$$

alors on a :

- $1 - S_\infty + (\gamma/\beta) \ln(S_\infty/S_0) = 0$
- $\lambda_1 = \gamma - \beta S_\infty$
- $a_0 = \ln(S_\infty/S_0)$ et $a_1 = -a_0 - \sum_{i=2}^{\infty} a_i$
- pour $n \geq 2$ si :

$$0 \neq I_n = \sum_{j=2}^n \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_j=n \\ i_1, i_2, \dots, i_j > 0}} \frac{a_{i_1} \dots a_{i_j}}{j!}$$

$$\text{alors } \lambda_n = n\lambda_1 \text{ et } a_n = \frac{-\beta S_\infty I_n}{(n-1)\lambda_1}$$

2.2.2 preuve du théorème 1

On suppose que :

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}, \quad \text{avec } \lambda_0 = 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}. \\ \gamma u(t) &= \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}. \end{aligned}$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, tous les termes exponentiels avec $\lambda_i > 0$ tendent vers 0, donc :

$$u(t) \rightarrow a_0 = \ln\left(\frac{S_\infty}{S_0}\right) \Rightarrow S_\infty = S_0 e^{a_0}.$$

À $t = 0$: $u(0) = \ln(S_0/S_0) = 0$ donc :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0 \Rightarrow a_1 = -a_0 - \sum_{i=2}^{\infty} a_i.$$

Développons le terme exponentiel :

$$e^{u(t)} = e^{a_0} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}\right) \approx S_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t} + \frac{1}{2!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}\right)^2 + \dots\right).$$

Terme constant $t \rightarrow \infty$:

$$\gamma a_0 + \beta = \beta S_\infty = \beta S_0 e^{a_0} \Rightarrow 1 - \frac{S_\infty}{S_0} + \frac{\gamma}{\beta} \ln\left(\frac{S_\infty}{S_0}\right) = 0.$$

Terme en $e^{-\lambda_1 t}$:

$$-a_1 \lambda_1 + \gamma a_1 = \beta S_\infty a_1 \Rightarrow \lambda_1 = \gamma - \beta S_\infty.$$

Par récurrence sur les puissances de $e^{-\lambda_n t}$:

$$\lambda_n = n\lambda_1, \quad a_n = -\frac{\beta S_\infty}{(n-1)\lambda_1} \ell_n,$$

où ℓ_n est une combinaison linéaire de produits de a_j pour $j < n$ issue du développement de $e^{u(t)}$.

2.2.3 Lemme 2

Lemme 2 : si $f(t) = e^{\sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}}$ et $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0$ alors la n -ième dérivée selon t , en $t=0$ est :

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n e^{-a_0} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} c_{n-k} b_k \quad (21)$$

avec pour $k \geq 1$, $c_k = \binom{k-1}{0} c_{k-1} b_1 + \binom{k-1}{1} c_{k-2} b_2 + \dots + \binom{k-1}{k-1} c_0 b_k$, $c_0 = 1$ et $b_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i^k$

2.2.4 preuve lemme 2

La condition $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0$ implique :

$$u(0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = -a_0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = e^{u(0)} = e^{-a_0}.$$

On a, pour tout $k \geq 1$:

$$u^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i^k e^{-\lambda_i t},$$

et donc en particulier :

$$u^{(k)}(0) = (-1)^k \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i^k = (-1)^k b_k.$$

La n -ième dérivée de $f(t) = e^{u(t)}$ est donnée par la formule de Faà di Bruno :

$$f^{(n)}(t) = e^{u(t)} \sum_{k=1}^n B_{n,k}(u'(t), u''(t), \dots, u^{(n-k+1)}(t)),$$

où $B_{n,k}$ désigne les polynômes de Bell partiels.

En $t = 0$, on obtient :

$$f^{(n)}(0) = e^{u(0)} \sum_{k=1}^n B_{n,k}(u'(0), u''(0), \dots, u^{(n-k+1)}(0)) = e^{-a_0} \sum_{k=1}^n B_{n,k}(u'(0), u''(0), \dots).$$

Sachant que $u^{(j)}(0) = (-1)^j b_j$, chaque $B_{n,k}$ devient :

$$B_{n,k} = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = n \\ m_i \geq 1}} \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} \prod_{i=1}^k \frac{u^{(m_i)}(0)}{m_i!} = (-1)^n \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_k = n \\ m_i \geq 1}} \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} \prod_{i=1}^k \frac{b_{m_i}}{m_i!}.$$

Soit c_k défini par la récurrence :

$$c_0 = 1, \quad c_k = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} c_{k-1-m} b_{m+1}.$$

On reconnaît que cette relation permet de générer la structure des polynômes de Bell appliqués à b_j .

Alors, on peut écrire :

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n e^{-a_0} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} c_{n-k} b_k.$$

Cas de base $n = 1$:

$$f'(t) = e^{u(t)} u'(t) \Rightarrow f'(0) = e^{-a_0} u'(0) = e^{-a_0} (-b_1) = (-1)^1 e^{-a_0} \cdot \binom{0}{0} c_0 b_1.$$

Hypothèse de récurrence : On suppose que la formule est vraie pour un certain $n - 1$.

Hérédité : En utilisant la récurrence sur les c_k et les propriétés classiques :

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1},$$

on montre que la relation reste valable pour n , ce qui complète la preuve par récurrence.

2.2.5 théorème 3

Théorème 3 on pose $\ln(S(t)/S_0) = u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots, a_i \in \mathbb{R}$ tel que $u(t)$ soit une série de Dirichlet qui satisfait (20). On pose $b_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i^n$ pour $n \geq 0$, alors :

$$b_0 = -a_0, b_1 = \beta I_0, b_n = \gamma b_{n-1} - \beta S_0 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1} c_{n-1-i} b_i \quad (22)$$

2.2.6 preuve du théorème 3

Par définition :

$$b_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Mais comme $u(0) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0$, on en déduit :

$$a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 0 \Rightarrow b_0 = -a_0.$$

On dérive $u(t)$:

$$u'(t) = - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \Rightarrow u'(0) = - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i = -b_1.$$

On évalue l'équation (15) en $t = 0$. Comme $u(0) = 0$, on a :

$$u'(0) + \gamma \cdot 0 + \beta = \beta S_0 e^0 = \beta S_0 \Rightarrow u'(0) = \beta(S_0 - 1).$$

Donc :

$$-b_1 = \beta(S_0 - 1) = -\beta I_0 \Rightarrow b_1 = \beta I_0.$$

Récurrence pour b_n avec $n \geq 2$

Substituons $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}$ dans (1) :

$$- \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} + \gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t} + \beta = \beta S_0 e^{\sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}}.$$

Côté gauche (LHS) :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i (\gamma - \lambda_i) e^{-\lambda_i t} + \gamma a_0 + \beta.$$

Côté droit (RHS) : Développement en série de l'exponentielle :

$$\beta S_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t} \right)^k \right).$$

L'expansion donne des coefficients de $e^{-\lambda_n t}$ obtenus par combinaisons de produits de a_i , formalisés via les coefficients c_k définis par :

$$c_0 = 1, \quad c_k = \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} c_{k-1-m} b_{m+1}.$$

En identifiant les coefficients de $e^{-\lambda_n t}$ des deux côtés :

$$a_n(\gamma - \lambda_n) = \beta S_0 \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} c_{n-i} b_i.$$

Multipliant chaque côté par λ_n^n et en sommant sur i , on obtient :

$$b_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i^n = \gamma b_{n-1} - \beta S_0 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1} c_{n-1-i} b_i.$$

Les c_k permettent de reconstituer le développement en série de $e^{u(t)}$:

$$e^{u(t)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t} \right)^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t},$$

où chaque d_n dépend de combinaisons de a_i , représentées par les c_k .

2.2.7 Solutions

Par le théorème 1, on peut considérer que $\lambda_i = i\lambda_1$. On en déduit qu'en utilisant le théorème 3 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} a_i &= -a_0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} i a_i &= b_1 / \lambda_1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{\infty} i^n a_i &= -b_n / \lambda_1^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Qu'on peut aussi écrire sous forme matriciel :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 1^n & 2^n & \cdots & n^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ b_1 / \lambda_1 \\ b_2 / \lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_n / \lambda_1^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Dans le cas finie, la transposée de la matrice de vandermonde est inversible si et seulement si ses coefficients sont distincts, ce qui est le cas ici. On résouds l'équation pour déterminer les a_i qu'on utilisera pour déterminer les $U(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i t}$. on calcule ensuite les $S(t) = S_0 e^{U(t)}$. Et on en déduit $I(t)$ et $R(t)$.

3 Modèle SEIR

On va donc améliorer le modèle SIR en rajoutant une nouvelle classe d'individu, la classe E qui regroupera les individus "exposée" à la maladie sans être eux même infectée mais qui toutefois peuvent propager la maladie.

On obtient ainsi les équations suivantes :

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \tag{23}$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \sigma E \tag{24}$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I \quad (25)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (26)$$

avec : σ le taux progression de l'exposition à l'infection ($1/\sigma$ est la durée d'incubation)

Avec , $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $S(t)+E(t)+I(t)+R(t)=1$

On veut que la solution approchée de $R(t)$ suivent un modèle de dirichlet de la forme :

$$R(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i e^{-i\lambda_1}$$

on peut déterminer les h_i en résolvant cette équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 1^n & 2^n & \cdots & n^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_0 \\ -\gamma I_0/\lambda_1 \\ D_0/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ (-1)^{N-1} D_{N-3}/\lambda_1^{N-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Avec :

$$D_n = \gamma(\sigma E^{(n)}(0) - \gamma I^{(n)}(0)) \quad (27)$$

$$I^{(n)}(0) = \sigma E^{(n-1)}(0) - \gamma I^{(n-1)}(0) \quad (28)$$

$$E^{(n)}(0) = \beta(IS)^{(n-1)}(0) - \sigma E^{(n-1)}(0) \quad (29)$$

$$S^{(n)}(0) = -\beta(IS)^{(n-1)}(0) \quad (30)$$

$$(IS)^{(n-1)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} I^{(n-1-k)}(0) S^{(k)}(0) \quad (31)$$

Nous permet d'obtenir les solutions suivantes :

$$R_N(t, \lambda_1) = \sum_{i=0}^N h_i e^{-i\lambda_1} \quad (32)$$

$$I_N(t, \lambda_1) = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} R_N(t, \lambda_1) \quad (33)$$

$$E_N(t, \lambda_1) = \frac{1}{\sigma} (\gamma I_N(t, \lambda_1) + \frac{d}{dt} I_N(t, \lambda_1)) \quad (34)$$

$$S_N(t, \lambda_1) = 1 - E_N(t, \lambda_1) - I_N(t, \lambda_1) - R_N(t, \lambda_1) \quad (35)$$

4 SIMULATION NUMERIQUE

4.1 Modèle SIR

Nous allons d'abord modéliser le modèle SIR grâce aux séries de Dirichlet . Nous avons des conditions initiales : $S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) = 0$ on définit : $S_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} S(t)$

or d'après le théorème 1 , $a_0 = \log(S_{\infty}/S_0)$ et $:1-S_{\infty} + \frac{\gamma}{\beta} \ln(\frac{S_{\infty}}{S_0}) = 0$ On peut résoudre cette dernière équation pour déterminer S_{∞} avec un algorithme utilisant la méthode newton .

par théorème 1 , $\lambda_i = i\lambda_1$ avec $\lambda_1 = \gamma - \beta S_{\infty}$, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^n & 2^n & \cdots & n^n \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -a_0 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_2/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_N/\lambda_1^{N-1} \end{pmatrix}$$

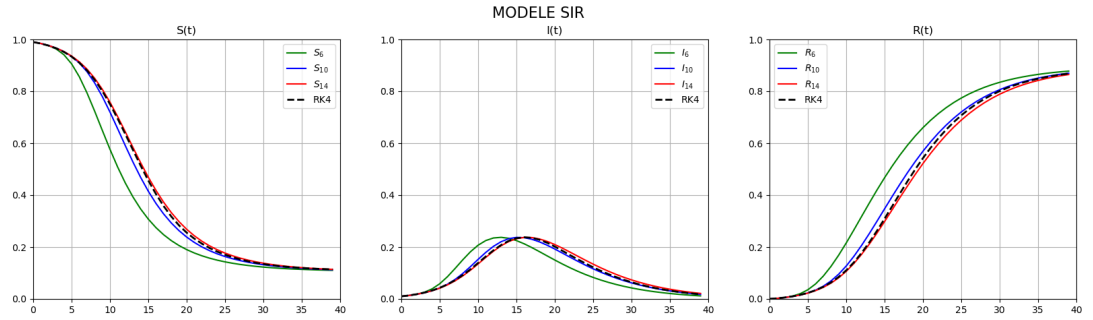
tel que :

$M.a=r$

On détermine les b_i en utilisant des c_i intermédiaires tel que :

$$b_k = \gamma b_{k-1} - \beta S_0 \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} c_{k-1-i} b_i \text{ et, } c_i = \sum_{j=0}^{k-1} c_{k-1-i} b_j$$

M est une matrice de vandermonde donc inversible , on peut donc déduire que $a=M^{-1}.r$.
on obtient donc les a_i on peut donc en déduire la valeurs des $U_N(t) = \sum_{i=0}^N a_i e^{-\lambda_1 i t}$. on calcule ensuite les $S_N(t) = S_0 e^{U_N(t)}$

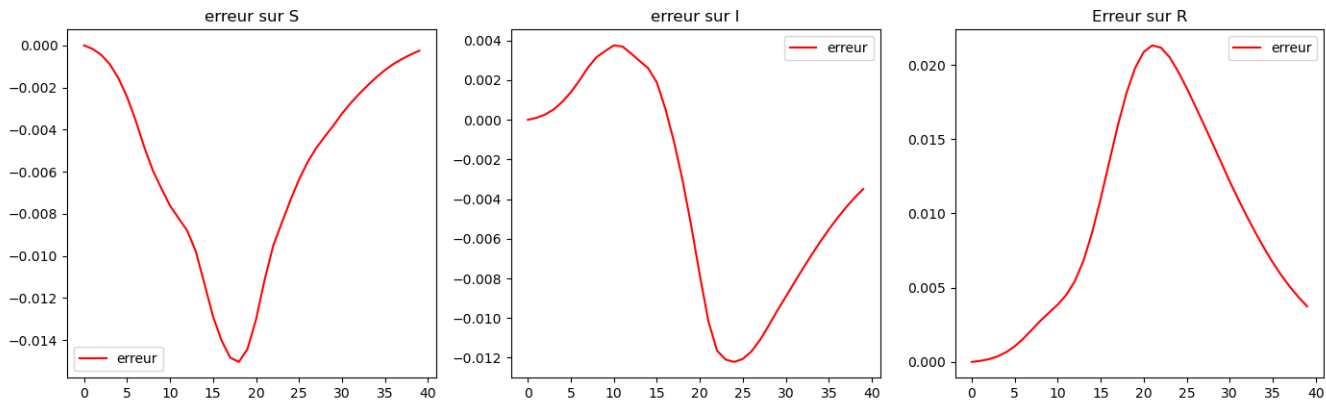


observations : à l'ordre 14 , la solution avec les séries de dirichlet coincide assez bien avec le schéma numérique de runge kutta 4 .Et on observe que plus l'ordre augmente , plus l'erreur est faible . En effet la solution exacte $u(t)$ est une série infini : $u(t)=\sum_{i=0}^{\infty} a_n e^{-n\lambda t}$
on définit l'erreur à l'ordre N :

$$\epsilon_N(t) = u(t) - u_N(t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_n e^{-n\lambda t}$$

Alors, par inégalité triangulaire : $|\epsilon_N(t)| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |a_n| e^{-n\lambda t}$ Donc ϵ_N décroît par rapport au reste d une série convergente, therefore l'erreur diminue quand l'ordre augmente.

Erreurs entre la solution numérique et modèles approchés



4.2 Modèle SEIR

De manière analogue au modèle SIR , on devra résoudre une équation matriciel pour déterminer les termes de la série de dirichlet . En utilisant (32) et (26) ,on peut réécrire $I(t)$ et $E(t)$ de la même forme que la séries de dirichlet $R(t)$.Et les termes constants de la forme de dirichlet pour I et E sont 0 donc :

$I_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ et $E_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$
Or $S_\infty + R_\infty + I_\infty + E_\infty = 1$ donc:

$$S_\infty + R_\infty = 1 \quad (36)$$

on utilise (23) et (26) et on a :

$$dS = -\beta S dR$$

on résout facilement cette équation différentiel pour obtenir :

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = -\frac{\beta}{\gamma} R(t) \quad (37)$$

avec (36) et (37) on obtient :

$$h_0 = R_\infty = -\frac{\gamma}{\beta} \ln\left(\frac{1 - R_\infty}{S_0}\right) \quad (38)$$

on a : $R(0)=0$ donc :

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i = -h_0 \quad (39)$$

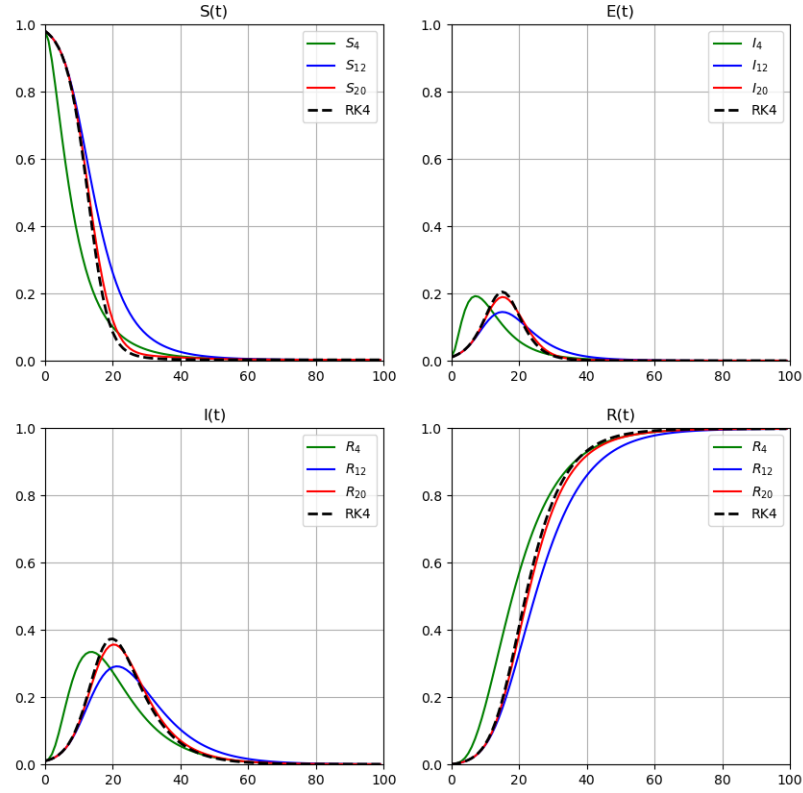
par dérivées successives , on a :

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^n h_i = (-1)^n \frac{D_{n-2}}{\lambda_1^n} \quad (40)$$

on détermine ensuite les h_i en résolvant l'équation matriciel :

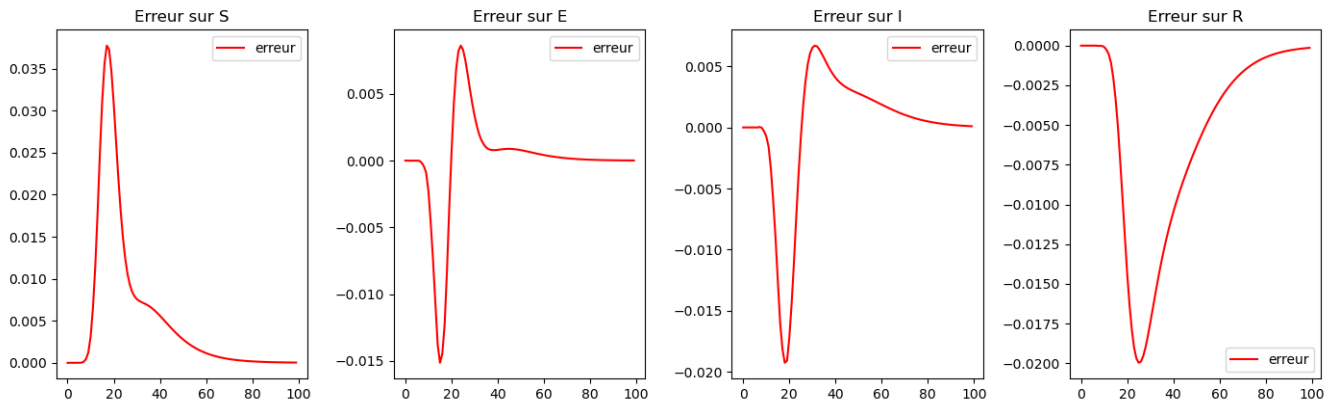
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & N \\ 1^2 & 2^2 & \dots & N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1^n & 2^n & \dots & N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_0 \\ -\gamma I_0 / \lambda_1 \\ D_0 / \lambda_1^2 \\ \vdots \\ (-1)^{N-1} D_{N-3} / \lambda_1^{N-1} \end{bmatrix}$$

MODELE SEIR



On a un modèle SEIR d'ordre 4,12 et 20, qu'on compare à la méthode RK-4 , avec les conditions initiales $S_0 = 0.98, E_0 = 0.01, I_0 = 0.01, R_0 = 0$ et les paramètres : $\sigma = 1/3, \gamma = 1/8, \beta = 0.75$

Erreurs entre la solution numérique et modèles approchés



on compare l'erreur entre la solution par méthode RK-4 et les séries de dirichlet d'ordre 20

4.3 avantages de l'approximations par séries de dirichlet

1. Avec la méthode du schéma de Runge Kutta ,qui est une méthode itérative , on doit calculer les termes l'un après l'autre ,Alors qu'avec la méthode des séries de dirichlet , on

peut déterminer le comportement à long terme facilement , sans avoir une interpolation par pas de temps . Connaître la proportion d infectées à long terme permet d'adapter les décisions qu on pourrait prendre vis à vis de l'épidémie , par exemple si on doit confiner la population ou pas .

2. Le développement en séries de Dirichlet fournit une forme approchée de solution analytique ce qui permet d'éviter les méthodes itératives tel que RK-4. On a alors des calculs beaucoup plus simple , et le temps de calcul par ordinateur est moins long qu avec une méthode itérative .
3. Puisque les séries de dirichlet sont des exponentielles décroissantes , leurs convergence est bcp plus rapides , comparé a une méthode RK-4 qui est de l ordre de h^4
4. On arrive qu'avec un faible nombre de termes (ordre 14 pour SIR , et 20 pour SEIR) l'approximation des solutions est comparable a celle d'un modèle RK-4 avec une erreur quadratique faible 10^{-4}
5. Comme on la vu , on a appliqué une méthode similaire au modele SIR et SEIR . On peut donc généraliser cette méthode a un plus grand nombre de compartiments .